



Universidad Nacional Autónoma de
México y Universidad Michoacana
de San Nicolás de Hidalgo



Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UMSNH-UNAM

La aplicación de Wahl para la normalización de curvas nodales en superficies de Hirzebruch

T E S I S

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias Matemáticas

presenta

Miguel Ángel Guerrero Castillo

Asesor:

Dr. Luis Abel Castorena Martínez

Morelia, Michoacán de Ocampo, México
Marzo, 2026

A Leticia y Humberto, mis padres.

La investigación de este trabajo se realizó gracias al apoyo económico de las siguientes entidades:

- UNAM
- CCM-UNAM
- UMSNH
- SECIHTI, antes CONAHCYT

Contents

Resumen/Abstract	iii
Agradecimientos	v
Introducción	vi
1 Generalidades de la aplicación de Wahl	1
1.1 Aplicaciones Gaussianas	1
1.2 La aplicación de Wahl	6
1.2.1 La aplicación de Wahl para curvas canónicas	9
1.2.2 La aplicación de Wahl para curvas en superficies	11
2 Generalidades sobre superficies de Hirzebruch	16
2.1 Conceptos básicos	16
2.2 Explosiones	20
3 El rol de los diferenciales con polos logarítmicos	24
3.1 Gavilla logarítmica con polos a lo largo de un divisor	24
4 La aplicación de Wahl de la normalización de una curva nodal en una superficie de Hirzebruch	28
4.1 Corank($H^0(\rho)$)	30
4.2 Sobreyectividad de $\Phi_{\mathcal{O}_X(K_X+\tilde{C})}$	42
4.3 Corank $\Phi_{\tilde{C}}$	55
5 Morfismo al moduli	58
5.1 Sobre la estratificación de $\mathcal{M}_g$ por el corango de la aplicación de Wahl	66
Bibliografía	68

La aplicación de Wahl para la normalización de curvas nodales en superficies de Hirzebruch

Miguel Ángel Guerrero Castillo

Resumen

En este trabajo se estudia la aplicación de Wahl para la normalización de curvas nodales en superficies de Hirzebruch. Se calcula en distintas situaciones el corango de la aplicación de Wahl mediante diagramas conmutativos, ampliando la comprensión de su estructura geométrica y algebraica. Con estos resultados, bajo ciertas condiciones, se demuestra que una curva δ -nodal en una superficie de Hirzebruch $\mathbb{F}_n$ no puede estar en otra superficie de Hirzebruch $\mathbb{F}_m$, como curva δ -nodal, para $n \neq m$.

Palabras Clave: Aplicación de Wahl, curvas nodales, superficies de Hirzebruch, aplicaciones Gaussianas, derivación de secciones globales.

Abstract

This work studies the Wahl map for the normalization of nodal curves on Hirzebruch surfaces. We compute the corank of the Wahl map in different situations by using commutative diagrams, enhancing the understanding of their geometric and algebraic structure. Using these results, under certain conditions, it is shown that a δ -nodal curve on one Hirzebruch surface $\mathbb{F}_n$ cannot exist inside a Hirzebruch surface $\mathbb{F}_m$, as δ -nodal curve, for $n \neq m$.

Keywords: Wahl map, nodal curves, Hirzebruch surfaces, Gaussian map, differential of global sections.

Agradecimientos

Es un verdadero gusto expresar mi agradecimiento a todas las personas que me han acompañado y apoyado a lo largo de estos años de estudio.

Agradezco sinceramente al profesorado y a mis compañeros del posgrado en conjunto UNAM-UMSNH, por su disposición, colaboración y por contribuir a un ambiente académico enriquecedor; y mi gratitud al Centro de Ciencias Matemáticas por todo el apoyo brindado.

Mi gratitud más profunda es para mis padres y hermanos, quienes han sido una fuente inagotable de amor, apoyo y ánimo constante en cada paso del camino.

A los revisores de esta tesis, por el tiempo dedicado a la evaluación de este trabajo, así como por sus valiosas observaciones y sugerencias, que contribuyeron significativamente a mejorar su calidad y rigor académico.

Finalmente, deseo expresar mi más sincero agradecimiento a mi asesor, Dr. Abel, cuya guía, paciencia y sabiduría han sido fundamentales para la realización de este trabajo.

Introducción

El estudio de las aplicaciones Gaussianas en el contexto de curvas algebraicas constituye una herramienta fundamental para comprender la geometría de dichas curvas. Estas aplicaciones permiten analizar la forma en que una curva se inserta en un espacio proyectivo y proporcionan información relevante sobre sus deformaciones dentro del espacio ambiente.

Sea C una curva proyectiva suave definida sobre $\mathbb{C}$, y sean L y M haces lineales sobre C . Las secciones globales de estos haces forman espacios vectoriales $H^0(C, L)$ y $H^0(C, M)$, cuya multiplicación induce el morfismo

$$H^0(C, L) \otimes H^0(C, M) \longrightarrow H^0(C, L \otimes M),$$

cuyo núcleo se denota por $\mathcal{R}(L, M)$. A partir de este núcleo se define la aplicación Gaussiana

$$\Phi_{L,M} : \mathcal{R}(L, M) \longrightarrow H^0(C, \Omega_C^1 \otimes L \otimes M),$$

mediante la regla $\Phi_{L,M}(\sigma \otimes \tau) = d\sigma \otimes \tau - \sigma \otimes d\tau$, donde d es la diferencial de una sección y de forma local se calcula mediante un parámetro local sobre la curva. En el caso particular $L = M$, la aplicación Gaussiana puede interpretarse como un morfismo

$$\Phi_L : \Lambda^2 H^0(C, L) \longrightarrow H^0(C, \Omega_C^1 \otimes L^2).$$

Cuando $L = \Omega_C^1$, el morfismo resultante $\Phi_{\Omega_C^1}$ recibe el nombre de aplicación de Wahl asociada a la curva C .

Geométricamente, esta construcción posee una interpretación natural. La aplicación Gaussiana corresponde al morfismo inducido en secciones globales por la *aplicación de Gauss* asociado al morfismo

$$\phi_L : C \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(C, L)^*),$$

determinado por el sistema lineal completo $|L|$. Cuando dicho sistema es libre de puntos base, el morfismo ϕ_L define un morfismo bien definido de la curva en el espacio proyectivo. De este modo, el estudio de las aplicaciones Gaussianas no solo reviste interés algebraico, sino que también ofrece una interpretación geométrica, al proporcionar información sobre las deformaciones de la curva en su espacio ambiente y sobre la estructura del haz cotangente Ω_C^1 .

La aplicación de Wahl ha sido objeto de estudio por diversos autores, debido a su estrecha relación con las propiedades de deformación y extensión de la curva en su inmersión canónica. Entre los resultados más notables se encuentra un teorema de Jonathan Wahl, quien demostró que si C es una sección hiperplana de una superficie K3, entonces la aplicación $\Phi_{\Omega_C^1}$ no es sobreyectiva. En reconocimiento a estas contribuciones, la aplicación Gaussiana $\Phi_{\Omega_C^1}$ es llamada la aplicación de Wahl, y es denotada solamente por $\Phi_{\tilde{C}}$.

El objetivo de esta tesis es estudiar la aplicación de Wahl para ciertas familias de curvas que yacen en ciertas superficies, en particular en familias de curvas que vienen de normalizaciones de curvas nodales en superficies regladas racionales conocidas como superficies de Hirzebruch.

Este escrito está organizado de la siguiente forma:

En el Capítulo 1 abordamos la construcción de las aplicaciones Gaussianas y de la aplicación de Wahl, así como las generalidades y primeras propiedades de estos morfismos. También presentamos los trabajos de Wahl, Ciliberto, López, Miranda, Arbarello, Bruno, Sernesi, entre otros autores, quienes han estudiado la aplicación de Wahl en distintos contextos, así como algunos trabajos recientes dedicados al estudio de la contraparte al teorema de Wahl.

A lo largo del Capítulo 2 se desarrollan las definiciones y propiedades fundamentales de las superficies de Hirzebruch, con el objetivo de comprender los espacios ambiente en los que se encuentran las familias de curvas que serán objeto de estudio.

El Capítulo 3 está dedicado al análisis del papel que desempeñan las diferenciales con polos logarítmicos en el estudio de las aplicaciones Gaussianas y, en particular, en el análisis de la aplicación de Wahl.

La parte central de esta tesis corresponde al Capítulo 4, en el cual se calcula el corango de la aplicación de Wahl para la normalización de curvas nodales en superficies de Hirzebruch. Para ello, se utiliza un diagrama conmutativo en el que interviene la aplicación de Wahl, además de las gavillas de ideales, las gavillas de imágenes directas superiores. En este contexto, el corango de dicha aplicación se obtiene como el corango de una composición de dos morfismos que aparecen en el diagrama; demostramos la sobreyectividad de uno de ellos y calculamos el corango del segundo.

Sea $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Consideremos la n -ésima superficie de Hirzebruch $\mathbb{F}_n$ y sean C_0 y F los generadores de $\text{Pic}(\mathbb{F}_n)$. Los principales resultados de este trabajo son los siguientes:

Teorema A. *Sean $p_1, \dots, p_\delta$ puntos distintos en $\mathbb{F}_n$ tales que para cada j , $p_j \notin C_0$, y para todos $i, j \in \{1, \dots, \delta\}$, p_i y p_j no están en la misma fibra de la fibración que admite $\mathbb{F}_n$, $\pi_1 : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{P}^1$. Supongamos que C es una curva nodal en $\mathbb{F}_n$ en el sistema lineal $|D|$, con D linealmente equivalente a $aC_0 + bF$ con a, b enteros positivos. Sea $X = \text{Bl}_Z \mathbb{F}_n$, donde $Z = \{p_1, \dots, p_\delta\}$ son los nodos de C , como sus únicas sin-*

gularidades. Sea $\tilde{C}$ la normalización de C . Supongamos que $a \geq \max\{6, \delta + 2\}$ y $b \geq \max\{(a + 7)n, (a - 1)n + \delta + 2, 6\delta - 3n + 3\}$. Entonces el corango de la aplicación de Wahl para $\tilde{C}$ es

$$\text{corank } \Phi_{\tilde{C}} = \dim H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-K_{\mathbb{F}_n})) = \begin{cases} 9, & \text{si } n \leq 2, \\ n + 6, & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Teorema B. Sea p un punto en $\mathbb{F}_n$. Supongamos que C es una curva nodal en $\mathbb{F}_n$, con un nodo en p y no otras singularidades, y linealmente equivalente a $aC_0 + bF$ con a, b enteros positivos. Sea $X = \text{Bl}_p \mathbb{F}_n$, y sea $\tilde{C}$ la normalización de C . Si $p \notin C_0$, $a \geq 6$ y $b \geq \max\{an + 3, (a - 2)n + 6\}$, entonces:

$$\text{corank } \Phi_{\tilde{C}} = \begin{cases} 9, & \text{si } n \leq 2, \\ n + 6, & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Como aplicación de estos resultados enunciamos lo siguiente.

Teorema C. Supóngase que $a \geq 6$ y $b \geq \max\{(a - 2)n + 6, an + 3\}$. Sea $C \subset \mathbb{F}_n$ una curva δ -nodal cuyo punto singular no se encuentra en la sección negativa, y tal que C es linealmente equivalente a $aC_0 + bF$. Entonces C no puede estar en otra superficie de Hirzebruch $\mathbb{F}_m$, como curva δ -nodal, para $m \neq n$ y $m \geq 4$.

El último capítulo está dirigido a estudiar el espacio moduli de curvas suaves de género g $\mathcal{M}_g$ a partir de la aplicación de Wahl, como motivación para futuras preguntas. En particular, sobre la estratificación de $\mathcal{M}_g$ por el corango de la aplicación de Wahl. En este capítulo abordamos el morfismo al moduli con el fin de establecer cotas inferiores para las dimensiones de los distintos estratos del locus de Wahl $\mathcal{W}_g \subset \mathcal{M}_g$ definido como el locus de curvas en $\mathcal{M}_g$ cuya aplicación de Wahl no es sobreyectiva.

Capítulo 1

Generalidades de la aplicación de Wahl

Existen varias maneras de llegar a la aplicación de Wahl, una de ellas es considerar las aplicaciones Gaussianas como lo hace Wahl en [28] y otra a partir de definir la diferencial de una sección global como lo hace Miranda en [21]. En este capítulo estudiaremos ambas construcciones, además de ciertas interpretaciones de la aplicación de Wahl.

1.1 Aplicaciones Gaussianas

Sean L y M dos haces lineales en una variedad proyectiva suave X sobre un campo algebraicamente cerrado k (trabajaremos sobre $k = \mathbb{C}$). Consideremos

$$\mu_{L,M} : H^0(X, L) \otimes H^0(X, M) \rightarrow H^0(X, L \otimes M) \quad (1.1.1)$$

la aplicación multiplicación de secciones globales. Si denotamos por $\mathcal{R}(L, M) := \ker(\mu_{L,M})$, entonces la aplicación Gaussiana

$$\Phi_{L,M} : \mathcal{R}(L, M) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L \otimes M), \quad (1.1.2)$$

se define de manera local: sean $\alpha \in \mathcal{R}(L, M)$ y $U \subset X$ un abierto tal que se tiene una trivialización local para L y M , entonces consideremos s el generador de las secciones de L restringidas en U y t el generador de las secciones de M restringidas en U . Puesto que α puede expresarse como $\sum_i l_i \otimes m_i$, se tiene que, localmente en U , existen funciones holomorfas f_i y g_i tales que $l_i = f_i s$ y $m_i = g_i t$ y por lo tanto definimos localmente

$$\Phi_{L,M}(\alpha) = \sum_i (f_i dg_i - g_i df_i) s \otimes t \in H^0(U, \Omega_X^1 \otimes L \otimes M), \quad (1.1.3)$$

donde Ω_X^1 es el haz cotangente de X .

Proposición 1.1.4. *El morfismo $\Phi_{L,M}$ está bien definido.*

Demostración. Probaremos que la definición en (1.1.3) es independiente de la elección de la trivialización local. Sean $\tilde{s}$ y $\tilde{t}$ otros generadores de las secciones de L y M

restringidas a U respectivamente, entonces $\tilde{s} = u^{-1}s$ y $\tilde{t} = v^{-1}t$ con u y v unidades en el anillo de funciones holomorfas en U . Por lo que $l_i = \tilde{f}_i\tilde{s}$ y $m_i = \tilde{g}_i\tilde{t}$, donde $\tilde{f}_i = uf_i$ y $\tilde{g}_i = vg_i$, entonces

$$\sum_i (\tilde{f}_i d\tilde{g}_i - \tilde{g}_i d\tilde{f}_i) \tilde{s} \otimes \tilde{t} = \sum uv(f_i dg_i - g_i df_i) u^{-1}v^{-1}s \otimes t + \sum (uf_i g_i dv - vg_i f_i du) s \otimes t. \quad (1.1.5)$$

Puesto que $\sum_i f_i g_i = 0$, entonces la expresión anterior es igual a $\Phi_{L,M}(\alpha)$. Se sigue que $\Phi_{L,M}(\alpha)$ es independiente de la elección de la trivialización para cada U abierto de X , y por lo tanto da un elemento global en $H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L \otimes M)$ bien definido.

Falta verificar que $\Phi_{L,M}$ es una aplicación k -lineal. Las propiedades de aditividad y multiplicación por escalar se siguen directamente de la linealidad de la derivada y el producto tensorial. Por lo tanto, solo resta comprobar que, si $\alpha = \sum_i l_i \otimes m_i = 0$, entonces $\Phi_{L,M}(\alpha) = 0$: consideremos una base $\{n_j\}_{j \in J}$ de $H^0(X, M)$. Existen escalares $\beta_{i,j}$ tales que $m_i = \sum_j \beta_{i,j} n_j$, y además la hipótesis nos implica que $\sum_i \beta_{i,j} l_i = 0$ para cada j .

Podemos expresar cada n_j localmente, en un abierto $U \subset X$, como $n_j = c_j t$, donde t es el generador y c_j es una función holomorfa en U . Dado que $l_i = f_i s$ y $m_i = g_i t$, entonces $g_i = \sum_j \beta_{i,j} c_j$ y $\sum_i \beta_{i,j} f_i = 0$ para todo j . Por consiguiente,

$$\sum_i f_i dg_i - g_i df_i = \sum_{i,j} f_i \beta_{i,j} dc_j - \sum_{i,j} \beta_{i,j} c_j df_i. \quad (1.1.6)$$

Como para cada j se cumple que $\sum_i \beta_{i,j} f_i = 0$, también se sigue que $\sum_i \beta_{i,j} df_i = 0$. De aquí resulta que la expresión anterior se anula y, por tanto $\Phi_{L,M}(\alpha) = 0$. ■

Una de las propiedades importantes de estas aplicaciones Gaussianas es la siguiente. Si $h : Y \rightarrow X$ es un morfismo regular entre variedades proyectivas suaves y tenemos haces lineales L y M sobre X , entonces existe un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(L, M) & \longrightarrow & H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L \otimes M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{R}(h^*L, h^*M) & \longrightarrow & H^0(Y, \Omega_Y^1 \otimes h^*L \otimes h^*M). \end{array} \quad (1.1.7)$$

Si N es un haz lineal invertible, entonces existe un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(L, M) \otimes H^0(X, N) & \longrightarrow & H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L \otimes M) \otimes H^0(X, N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{R}(L, M \otimes N) & \longrightarrow & H^0(Y, \Omega_X^1 \otimes L \otimes M \otimes N). \end{array} \quad (1.1.8)$$

Si $L = M$ entonces $\mathcal{R}(L, L) = \ker(S^2 H^0(X, L) \rightarrow H^0(X, L \otimes L)) \oplus \wedge^2 H^0(X, L)$, y podemos identificar a $\wedge^2 H^0(X, L)$ como un subespacio de $\mathcal{R}(L, L)$ vía $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \mapsto \frac{1}{2}(\sigma_1 \otimes \sigma_2 - \sigma_2 \otimes \sigma_1)$. Puesto que $\Phi_{L,L}$ se anula en el producto simétrico, entonces $\Phi_{L,L}$ queda definido por el siguiente morfismo

$$\begin{array}{ccc} \Phi_L : \wedge^2 H^0(X, L) & \longrightarrow & H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L \otimes L) \\ \sigma \wedge \tau & \longmapsto & \sigma d\tau - \tau d\sigma \end{array} \quad (1.1.9)$$

este morfismo es llamado la aplicación Gaussiana¹ para L en X .

Notemos que, en una trivialización local para L en un abierto $U \subset X$ y generador s , obtenemos que $\sigma = fs$ y $\tau = gs$ con f y g funciones holomorfas en U . Por la identificación $\sigma \wedge \tau \mapsto \frac{1}{2}(\sigma \otimes \tau - \tau \otimes \sigma)$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \Phi_{L,L} \left(\frac{1}{2}(\sigma \otimes \tau - \tau \otimes \sigma) \right) &= \frac{1}{2}(fdg - gdf)s \otimes s - \frac{1}{2}(gdf - fdg)s \otimes s \\ &= (fdg - gdf)s \otimes s = \Phi_L(\sigma \wedge \tau). \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

Para otra descripción, denotemos por

$$p_i : X \times X \longrightarrow X, \quad i = 1, 2, \quad (1.1.11)$$

las proyecciones naturales, y por $\Delta \subset X \times X$ la diagonal. Sea $I = I_\Delta$, la gavilla de ideales de Δ en $X \times X$ y sean L y M haces lineales sobre X . Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathcal{O}_{X \times X} \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta \longrightarrow 0. \quad (1.1.12)$$

Tensorizamos esta sucesión con $p_1^*L \otimes p_2^*M$ y obtenemos

$$0 \longrightarrow I \otimes p_1^*L \otimes p_2^*M \longrightarrow p_1^*L \otimes p_2^*M \longrightarrow p_1^*L \otimes p_2^*M \otimes \mathcal{O}_\Delta \longrightarrow 0. \quad (1.1.13)$$

Dado que $p_1|_\Delta = p_2|_\Delta = \text{id}_X$, se tiene la identificación natural

$$p_1^*L \otimes p_2^*M \otimes \mathcal{O}_\Delta \simeq L \otimes M, \quad (1.1.14)$$

y la sucesión (1.1.13) queda como

$$0 \longrightarrow I \otimes p_1^*L \otimes p_2^*M \longrightarrow p_1^*L \otimes p_2^*M \longrightarrow L \otimes M \longrightarrow 0. \quad (1.1.15)$$

Si aplicamos el funtor de secciones globales $H^0(X \times X, -)$ a esta sucesión, obtenemos el morfismo

$$H^0(X \times X, p_1^*L \otimes p_2^*M) \longrightarrow H^0(X, L \otimes M), \quad (1.1.16)$$

que, bajo el isomorfismo

$$H^0(X \times X, p_1^*L \otimes p_2^*M) \simeq H^0(X, L) \otimes H^0(X, M), \quad (1.1.17)$$

se convierte en el morfismo multiplicación de secciones $\mu_{L,M}$,

$$H^0(X, L) \otimes H^0(X, M) \longrightarrow H^0(X, L \otimes M). \quad (1.1.18)$$

Por consiguiente, el kernel de este morfismo es

$$\mathcal{R}(L, M) \simeq H^0(X \times X, I \otimes p_1^*L \otimes p_2^*M). \quad (1.1.19)$$

¹El nombre Gaussiano se deriva del caso donde X es una curva y L es un haz muy amplio, en este caso Φ_L es el pull-back de las secciones hiperplanas del clásico mapeo de Gauss, después de componer con el encaje de Plücker

El morfismo restricción $I \rightarrow I/I^2 \simeq \Omega_X^1$ nos da el morfismo

$$\begin{array}{ccc} H^0(X \times X, I \otimes p_1^* L \otimes p_2^* M) & \longrightarrow & H^0(X \times X, I/I^2 \otimes p_1^* L \otimes p_2^* M) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{R}(L, M) & & H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L \otimes M) \end{array} \quad (1.1.20)$$

y este morfismo es $\Phi_{L,M}$. Por lo tanto, tenemos la siguiente observación.

Observación 1.1.21. Si $H^1(X \times X, I^2 \otimes p_1^* L \otimes p_2^* M) = 0$ entonces $\Phi_{L,M}$ es sobreyectivo.

Para el caso cuando X es una variedad proyectiva suave de dimensión uno, existe otra forma de llegar a la definición de las aplicaciones Gaussianas, esta construcción corresponde a Rick Miranda en [21]. Para esto, consideremos una curva suave C , un punto p de C y σ una sección holomorfa en p de un haz lineal L sobre C . Sea z una carta coordenada local en un punto $p \in C$ y e una sección local de trivialización de L en un entorno de p . Entonces, toda sección local σ de L puede escribirse como

$$\sigma = f(z) \cdot e,$$

donde f es una función holomorfa en un entorno de p . Si definimos formalmente

$$d\sigma := f'(z) e \cdot dz,$$

obtenemos una sección de $L \otimes \Omega_C^1$. Sin embargo, esta definición no está bien definida globalmente, pues depende de la elección de la trivialización local. En efecto, si tomamos otra sección trivializadora $\tilde{e}$, se cumple que

$$e = g(z) \tilde{e},$$

donde $g(z)$ es una función holomorfa no nula. Entonces,

$$\begin{aligned} d\sigma &= [f(z)g'(z) + f'(z)g(z)] \tilde{e} \cdot dz \\ &= f'(z) e \cdot dz + \frac{g'(z)}{g(z)} f(z) e \cdot dz. \end{aligned}$$

Por tanto, $d\sigma$ varía con la trivialización elegida y no define de manera intrínseca una sección global de $L \otimes \Omega_C^1$. Mediante una diferencia adecuada podemos cancelar estos términos de error, para esto debemos considerar dos secciones globales: esto es, si σ_1 y σ_2 son dos secciones de L tales que $\sigma_1 = f_1(z) \cdot e$ y $\sigma_2 = f_2(z) \cdot e$ entonces la expresión $\sigma_1 \otimes d\sigma_2 - d\sigma_1 \otimes \sigma_2$ localmente es

$$[f_1(z)f_2'(z) - f_2(z)f_1'(z)] \cdot e \cdot e \cdot dz. \quad (1.1.22)$$

Se tiene que esta diferencia está bien definida y no depende de la elección de la sección de trivialización local que se tome. En efecto, consideremos otra sección de trivialización

local $\tilde{e}$ tal que $e = g(z)\tilde{e}$ entonces

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 \otimes d\sigma_2 - d\sigma_1 \otimes \sigma_2 &= \sigma_1 \otimes (f'_2(z)g(z) + f_2(z)g'(z)) \cdot \tilde{e} \cdot dz \\
 &\quad - (f'_1(z)g(z) + f_1(z)g'(z)) \cdot \tilde{e} \cdot dz \otimes \sigma_2 \\
 &= \sigma_1 \otimes (f'_2(z) \cdot e \cdot dz + \sigma_2 \frac{g'(z)}{g(z)} dz) \\
 &\quad - (f'_1(z) \cdot e \cdot dz + \sigma_1 \frac{g'(z)}{g(z)} dz) \otimes \sigma_2 \\
 &= \sigma_1 \otimes (f'_2(z) \cdot e \cdot dz) - (f'_1(z) \cdot e \cdot dz) \otimes \sigma_2 \\
 &= (f_1(z)f'_2(z) - f'_1(z)f_2(z)) \cdot e \cdot e \cdot dz.
 \end{aligned} \tag{1.1.23}$$

Así, se obtiene una aplicación $H^0(C, L) \times H^0(C, L) \rightarrow H^0(C, \Omega_C^1 \otimes L \otimes L)$ definida por $(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \sigma_1 \otimes d\sigma_2 - d\sigma_1 \otimes \sigma_2$ y, por la antisimetría, se consigue la aplicación Gaussiana para L en C .

$$\begin{aligned}
 \Phi_L : \bigwedge^2 H^0(C, L) &\longrightarrow H^0(C, \Omega_C^1 \otimes L \otimes L) \\
 \sigma \wedge \tau &\longmapsto \sigma d\tau - \tau d\sigma.
 \end{aligned} \tag{1.1.24}$$

Proposición 1.1.25. *Sea C una curva suave y proyectiva, y sea L un haz lineal sobre C . Entonces la aplicación Gaussiana para L en C*

$$\Phi_L : \bigwedge^2 H^0(C, L) \longrightarrow H^0(C, \Omega_C^1 \otimes L^{\otimes 2}), \quad \Phi_L(s_1 \wedge s_2) = s_1 ds_2 - s_2 ds_1,$$

es inyectiva sobre vectores descomponibles. En consecuencia,

$$\text{rank } \Phi_L \geq 2h^0(C, L) - 3. \tag{1.1.26}$$

Demostración. Sea $r = h^0(C, L)$ y $V = H^0(C, L)$. Supongamos que $\Phi_L(s_1 \wedge s_2) = 0$ para dos secciones $s_1, s_2 \in V$. Localmente, si e es una trivialización de L en un abierto $U \subset C$, podemos escribir $s_i = f_i e$, donde las f_i son funciones holomorfas. Entonces,

$$\Phi_L(s_1 \wedge s_2) = (f_1 f'_2 - f_2 f'_1) e^2 \cdot dz. \tag{1.1.27}$$

Si esta expresión se anula, se tiene $f_1 f'_2 - f_2 f'_1 = 0$, es decir, $\frac{f'_1}{f_1} = \frac{f'_2}{f_2}$, lo que implica que $f_2 = c f_1$ para alguna constante $c \in k$. Por tanto, $s_2 = c s_1$ y $s_1 \wedge s_2 = 0$. Esto prueba que Φ_L es inyectivo sobre los vectores descomponibles $s_1 \wedge s_2$.

Ahora, sea $\Lambda^2 V$ el espacio de dimensión $\frac{r(r-1)}{2}$ de todas las combinaciones alternadas de pares de secciones. Los vectores descomponibles de $\Lambda^2 V$ forman el *cono* sobre el Grassmanniano $G(2, V)$, que es una variedad de dimensión $2r - 4$. La inyectividad de Φ_L sobre vectores descomponibles implica que,

$$\dim \ker \Phi_L \leq \frac{(r-2)(r-3)}{2}. \tag{1.1.28}$$

Por lo tanto,

$$\text{rank } \Phi_L = \dim \Lambda^2 V - \dim \ker \Phi_L \geq \frac{r(r-1)}{2} - \frac{(r-2)(r-3)}{2} = 2r - 3.$$

Como $r = h^0(C, L)$, se obtiene

$$\text{rank } \Phi_L \geq 2h^0(C, L) - 3.$$

lo que concluye la demostración. ■

El interés original por estos morfismos surgió a partir del estudio de Wahl sobre las deformaciones de conos sobre curvas. El cokernel de $\Phi_{\Omega_C^1}$ asociado a una curva suave C es dual a $T^1(-1)$, donde T^1 denota el espacio de deformaciones infinitesimales de primer orden del cono sobre C . Mediante técnicas de teoría de la deformación, Wahl demostró un teorema notable acerca de las aplicaciones Gaussianas:

Teorema 1.1.29 (Wahl [28, Teorema 5.9]). *Sea C una curva suave que es una sección hiperplana de una superficie K3. Entonces, la aplicación Gaussiana*

$$\Phi_{\Omega_C^1}$$

no es sobreyectiva.

Dado que este resultado proporciona información intrínseca sobre las curvas que se encuentran sobre superficies K3, el teorema despertó un gran interés tanto por las aplicaciones Gaussianas como por $\Phi_{\Omega_C^1}$, al que algunos autores se refieren como la aplicación de Wahl.

1.2 La aplicación de Wahl

Definición 1.2.1. Sea C una curva suave. La *aplicación de Wahl para C* es la aplicación Gaussiana para el haz canónico de C y lo denotamos por

$$\begin{aligned} \Phi_C := \Phi_{\Omega_C^1} : \bigwedge^2 H^0(C, \Omega_C^1) &\longrightarrow H^0(C, (\Omega_C^1)^{\otimes 3}) \\ \sigma \wedge \tau &\longmapsto \sigma d\tau - \tau d\sigma. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Recordemos que, para el caso de variedades suaves de dimensión 1, la gavilla de 1-formas holomorfas corresponde con el haz canónico. Es por ello que utilizaremos la notación de Ω_C^1 para referirnos al haz canónico de la curva C .

Proposición 1.2.3. *Sea C una curva suave proyectiva de género $g \geq 2$. Entonces el rango de la aplicación de Wahl para C está acotado por*

$$\text{rank } \Phi_C \geq 2g - 3,$$

esto es,

$$0 \leq \text{corank } \Phi_C \leq 3g - 2.$$

Demostración. Notemos que $\dim H^0(C, \Omega_C^1) = g$, por lo tanto

$$\dim \bigwedge^2 H^0(C, \Omega_C^1) = \frac{g(g-1)}{2}.$$

Por el teorema de Riemann-Roch para curvas tenemos que,

$$\dim H^0(C, (\Omega_C^1)^{\otimes 3}) = \deg((\Omega_C^1)^{\otimes 3}) - g + 1 = 3 \deg(\Omega_C^1) - g + 1 = 5g - 5.$$

Por la proposición 1.1.25, tenemos que $2g - 3 \leq \text{rank } \Phi_C \leq 5g - 5$ ■

Sea C una curva proyectiva suave de género $g \geq 2$. Notemos que las dimensiones del dominio y codominio de Φ_C no cambian para cualquier curva suave C (de género $g \geq 2$ si se fija el género), por el teorema de Riemann-Roch se tiene que $h^0(C, \Omega_C^1) = g$, y entonces

$$\dim \left(\bigwedge^2 H^0(C, \Omega_C^1) \right) = \frac{g(g-1)}{2} \quad (1.2.4)$$

$$\dim \left(H^0(C, (\Omega_C^1)^{\otimes 3}) \right) = 5(g-1) \quad (1.2.5)$$

Por cuestiones de dimensión se tienen 3 casos:

1. Si $\frac{g(g-1)}{2} < 5(g-1)$, esto es $g < 10$, entonces Φ_C no es sobreyectiva.
2. Si $\frac{g(g-1)}{2} = 5(g-1)$, es decir $g = 10$, entonces Φ_C puede ser un isomorfismo.
3. Si $\frac{g(g-1)}{2} > 5(g-1)$, esto es $g > 10$, entonces, Φ_C no es inyectiva.

Ciliberto y Miranda en [9] han estudiado el rango de Φ_C para curvas de género menor que 12, mostrando que para curvas de género g distinto de 9 y 11, la aplicación de Wahl es inyectiva para la curva general en el sentido moduli, esto es, para un abierto de Zariski en $\mathcal{M}_g$, el espacio moduli de curvas suaves de género g , se cumple que la aplicación de Wahl es inyectiva para tales valores de g . Además Ciliberto, Harris y Miranda en [6] también probaron que para género igual a 10 o mayor que 12, se cumple que Φ_C es sobreyectiva para la curva general en el sentido moduli, tal como se resume en la siguiente tabla.

g	Comportamiento de Φ_C
$3 \leq g \leq 8$	inyectiva
9	kernel 1-dim
10	isomorfismo
11	corank 1-dim
$g \geq 12$	sobreyectiva

Cuadro 1.1: Ciliberto-Harris-Miranda para la curva general.

Cabe mencionar que para $g = 10$, Cukierman y Ulmer en [10] demostraron que el locus en $\mathcal{M}_g$ donde la aplicación de Wahl no es sobreyectiva es un divisor en $\mathcal{M}_{10}$, y años más tarde G. Farkas y M. Popa en [13] interpretaron este divisor de maneras distintas y con ello dieron un contraejemplo a una conjetura famosa de Harris-Morrison sobre la inclinación (slope) de $\mathcal{M}_g$.

El resultado de Wahl (Teorema 1.1.29), nos dice que si una curva suave yace como una sección hiperplana de alguna superficie K3 entonces su aplicación de Wahl no es sobreyectiva, contrasta con lo expuesto en [6], donde Ciliberto Harris Miranda demuestran que, para la curva general de género $g \geq 10$ y $g \neq 11$ (la curva general de género 11 se encuentra en una superficie K3), la aplicación de Wahl es sobreyectiva, esto nos dice que la curva general de género $g \geq 10$ y $g \neq 11$ no puede pertenecer a una superficie

K3 como sección hiperplana.

Por otro lado, un resultado reciente de Arbarello, Bruno y Sernesi [1] caracteriza las curvas Brill–Noether–Petri general que aparecen como secciones hiperplanas de una superficie K3, o de un límite de una superficie K3, como aquellas curvas para las cuales la aplicación de Wahl no es sobreyectiva.

Ejemplo 1.2.6 (La aplicación de Wahl para una curva plana). Consideremos C como la curva cuártica de Fermat. Sea $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 \in k[x, y, z]$. Entonces

$$C := Z(f) = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_k^2 \mid x^4 + y^4 + z^4 = 0\}$$

es una curva plana proyectiva suave de género $g(C) = \frac{(4-1)(4-2)}{2} = 3$. Esta curva es llamada *la cuártica de Fermat*. Por fórmula de adjunción, tenemos que el divisor canónico $K_C \cong (K_{\mathbb{P}^2} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4))|_C \cong (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4))|_C \cong (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|_C$.

En la carta afín de $\mathbb{P}^2$, $x = 1$, la curva es $f(y, z) = y^4 + z^4 + 1 = 0$, y una descripción local estándar de diferenciales holomorfas en una curva plana de grado d es $\sigma_P = \frac{P(y, z)dz}{\partial f / \partial y}$ con $\deg P(y, z) \leq d - 3$. Por lo que, en este caso, se tienen tres secciones linealmente independientes en $H^0(C, \Omega_C^1)$:

- $\sigma_1 = \frac{dz}{4y^3},$
- $\sigma_2 = \frac{zdz}{4y^3}$
- $\sigma_3 = \frac{ydz}{4y^3} = \frac{dz}{4y^2}.$

La aplicación de Wahl para C es

$$\begin{aligned} \Phi_C: \wedge^2 H^0(C, \Omega_C^1) &\longrightarrow H^0(C, (\Omega_C^1)^{\otimes 3}) \\ \frac{dz}{4y^3} \wedge \frac{zdz}{4y^3} &\mapsto \left(-\frac{(z)'}{16y^6}\right) (dz)^3 \\ \frac{dz}{4y^3} \wedge \frac{dz}{4y^2} &\mapsto \left(-\frac{(y)'}{16y^6}\right) (dz)^3 \\ \frac{zdz}{4y^3} \wedge \frac{dz}{4y^2} &\mapsto \left(\frac{(z)'}{16y^5} - \frac{z(y)'}{16y^6}\right) (dz)^3. \end{aligned}$$

Por consiguiente, el corank $\Phi_C = 7$ pues la dimensión del codominio es 10 y los tres elementos en la imagen son linealmente independientes.

De hecho, Wahl también probó en [25] que en la desigualdad de la Proposición 1.2.3 la igualdad se alcanza si y solo si la curva es hiperelíptica o tiene género $g = 3$.

Ejemplo 1.2.7 (La aplicación de Wahl para intersecciones completas). Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva suave, no degenerada, que es una intersección completa, esto significa que C se define como la intersección de $n - 1$ hipersuperficies en $\mathbb{P}^n$

$$C = V(F_1, F_2, \dots, F_{n-1}).$$

donde cada F_i es una ecuación homogénea de grado d_i , con $2 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_{n-1}$. Por el teorema de adjunción, el divisor canónico de C viene dado por

$$K_C = \mathcal{O}_C \left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i - n - 1 \right).$$

En [28], Wahl demostró el siguiente resultado para este tipo de curvas.

Teorema 1.2.8 (Wahl [28, Teorema 6.2]). *Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una curva de intersección completa. Entonces la aplicación*

$$\Phi_X : \Lambda^2 H^0(X, \Omega_X^1) \longrightarrow H^0(X, (\Omega_X^1)^{\otimes 3})$$

es sobreyectiva a menos que

$$d_1 + d_2 + \dots + d_{n-2} \leq n + 1,$$

es decir, excepto en los siguientes casos:

- (i) $n = 5, \quad d_1 = d_2 = 3.$
- (ii) $n = 4, \quad d_1 = 2, \quad d_2 = 2 \text{ o } 3.$
- (iii) $n = 3, \quad d_1 \leq 4.$
- (iv) $n = 2.$

Dado que $K_X = \mathcal{O}_X \left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i - n - 1 \right)$ podemos considerar Φ_X como el morfismo inferior en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^2 H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\sum_{i=1}^{n-1} d_i - n - 1)) & \longrightarrow & H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^1(2(\sum_{i=1}^{n-1} d_i - n - 1))) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda^2 H^0(X, \mathcal{O}_X(\sum_{i=1}^{n-1} d_i - n - 1)) & \longrightarrow & H^0(C, \Omega_X^1(2(\sum_{i=1}^{n-1} d_i - n - 1))). \end{array}$$

Wahl prueba que el morfismo superior es siempre sobreyectivo, mientras que el morfismo vertical derecho (lo que corresponde a la restricción de formas diferenciales de $\mathbb{P}^n$ a X) es sobreyectivo salvo cuando $d_1 + \dots + d_{n-2} \leq n + 1$. De aquí se deduce la afirmación del teorema.

1.2.1 La aplicación de Wahl para curvas canónicas

Sea $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ una curva canónica de género $g \geq 3$. Wahl encuentra una conexión precisa entre el dual del cokernel de Φ_C y la teoría de deformación del cono afín sobre C . Consideremos los siguientes anillos

$$B = \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^0(C, (\Omega_C^1)^{\otimes i}) \tag{1.2.9}$$

y

$$A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^0(C, (\Omega_C^1)^{\otimes i}) Z^i \subset B[Z] \quad (1.2.10)$$

el cono afín de C corresponde a $\text{Spec}(A)$. Wahl considera el módulo cotangente graduado T_A^1 y demuestra en [28] que

$$(T_A^1)_{-1} \cong (\text{Coker } \Phi_C)^\vee. \quad (1.2.11)$$

Una curva canónica $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ se dice que es *extendible* si es una sección hiperplana de una superficie $S \subset \mathbb{P}^g$ que no es un cono. El teorema principal de [26] es el siguiente.

Teorema 1.2.12 (Wahl [26, Teorema 7.1]). *Sea $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ una curva canónica de género $g \geq 8$, con $\text{Cliff}(C) \geq 3$. Sea $\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}$ la gavilla de ideales de C . Supongamos que*

$$H^1(\mathbb{P}^{g-1}, \mathcal{I}_{C/\mathbb{P}}^2(k)) = 0, \quad k \geq 3.$$

Entonces C es extendible si y sólo si Φ_C no es sobreyectiva.

Posteriormente, Arbarello, Bruno y Sernesi en [1] demostraron el siguiente resultado.

Teorema 1.2.13 (ABS [1, Teorema 1.3]). *Sea $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ una curva canónica de género $g \geq 11$. Supongamos que $\text{Cliff}(C) \geq 3$. Sea $\mathcal{I}_{C/\mathbb{P}} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}$ la gavilla de ideales de C . Entonces*

$$H^1(\mathbb{P}^{g-1}, \mathcal{I}_{C/\mathbb{P}}^2(k)) = 0$$

para todo $k \geq 3$.

A partir de esto, probaron que

Teorema 1.2.14 (ABS [1, Corolario 1.4]). *Sea $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ una curva canónica de género $g \geq 11$ con $\text{Cliff}(C) \geq 3$. Entonces C es extendible si y sólo si Φ_C no es sobreyectiva.*

Decir que C es extendible significa que existe una superficie proyectiva $S \subset \mathbb{P}^g$, que no es un cono, y que tiene a C como sección hiperplana. En general, la superficie S tiene singularidades aisladas, y sólo cuando existe un *suavizamiento* de S en $\mathbb{P}^g$ podemos decir que S es *el límite de una superficie K3*. En el mismo artículo, Arbarello, Bruno y Sernesi también demostraron otro resultado importante mencionado anteriormente. Primero recordemos la siguiente definición.

Definición 1.2.15 (Brill–Noether–Petri). Una curva suave e irreducible C se llama una *curva de Brill–Noether–Petri* si el morfismo multiplicación

$$H^0(L) \otimes H^0(K_C - L) \longrightarrow H^0(K_C) \quad (1.2.16)$$

es inyectivo para todo haz lineal L sobre C .

Teorema 1.2.17 (ABS [1, Teorema 1.1]). *Sea C una curva de Brill–Noether–Petri de género $g \geq 12$. Entonces C es una sección hiperplana en una superficie K3 polarizada, o en un límite de una superficie K3, si y sólo si su aplicación de Wahl no es sobreyectiva.*

Esto motivó el estudio de la aplicación de Wahl y su relación con el problema de extensibilidad: Dada una variedad proyectiva irreducible $X \subset \mathbb{P}^n$, bajo qué condiciones existe una variedad proyectiva $Y \subset \mathbb{P}^{n+1}$, que no sea un cono, de la cual X es una sección hiperplana.

Definición 1.2.18. Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad irreducible no degenerada de codimensión al menos 1. Sea $r \geq 1$ un número entero. Decimos que X es *r-extensible* si existe una variedad $Y \subset \mathbb{P}^{n+r}$, diferente de un cono sobre X , tal que $\dim Y = \dim X + r$ y X aparece como una sección de Y por un subespacio lineal de dimensión n . Decimos que X es *precisamente r-extensible* si es *r-extensible* pero no $(r+1)$ -extensible. La variedad Y se llama una *r-extensión* de X . Decimos que X es *extensible* si es 1-extensible.

En trabajos más recientes Ciliberto, Dedieu y Sernesi encontraron una relación entre el corango de la aplicación de Wahl y la extensibilidad de una curva.

Teorema 1.2.19 (CDS [5, Teorema 2.1]). *Sea C una curva suave de género g con $\text{Cliff}(C) \geq 3$. Consideremos las siguientes dos afirmaciones:*

1. $\text{corank } \Phi_C \geq k + 1$;
2. *Existe una variedad normal aritméticamente Gorenstein $Y \subset \mathbb{P}^{g+k}$, que no es un cono, con $\dim(Y) = k + 2$, $\omega_Y = \mathcal{O}_Y(-k)$, la cual contiene una imagen canónica de C como una sección con un subespacio lineal de dimensión $(g - 1)$ de $\mathbb{P}^{g+k}$ (en particular, $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ es $(k + 1)$ -extensible).*

Si $g \geq 11$, entonces (i) implica (ii). Recíprocamente, si $g \geq 22$ y la imagen canónica de C es una sección hiperplana de una superficie K3 suave en $\mathbb{P}^g$, entonces (ii) implica (i).

1.2.2 La aplicación de Wahl para curvas en superficies

Sean C una curva y L un haz lineal. Recordemos que la aplicación Gaussiana asociada a L en C es

$$\Phi_L : \bigwedge^2 H^0(C, L) \longrightarrow H^0(C, \Omega_C^1 \otimes L^2),$$

donde, en coordenadas locales z sobre C y tras fijar una trivialización de L , se tiene

$$f(z) \wedge g(z) \longmapsto [fg' - gf'] dz.$$

Esta construcción se extiende al caso de una superficie S y un haz lineal M sobre ella, obteniendo el morfismo

$$\Phi_M : \bigwedge^2 H^0(S, M) \longrightarrow H^0(S, M^2 \otimes \Omega_S^1),$$

definido de manera análoga: si (z, w) son coordenadas locales en S , entonces

$$f(z, w) \wedge g(z, w) \longmapsto f dg - g df.$$

Consideremos una curva suave C en S . La restricción del haz M a C se denota por

$$M|_C = M \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_C.$$

Si se toma $M = \Omega_S^2 \otimes \mathcal{O}_S(C) = \mathcal{O}_S(K_S + C)$, entonces

$$M|_C = (\Omega_S^2 \otimes \mathcal{O}_S(C))|_C = \mathcal{O}_C(K_S + C) \cong \Omega_C^1,$$

donde K_S es el divisor canónico de S y el isomorfismo se obtiene por la fórmula de adjunción. Con esta notación, vamos a definir morfismos que dan lugar al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^2 H^0(S, \mathcal{O}_S(K_S + C)) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{O}_S(K_S + C)}} & H^0(S, \Omega_S^1(2K_S + 2C)) \\ \text{Res} \downarrow & & \downarrow \alpha \\ & & H^0(C, \Omega_S^1(2K_S + 2C)|_C) \\ & & \downarrow \beta \\ \Lambda^2 H^0(C, \Omega_C^1) & \xrightarrow{\Phi_C} & H^0(C, (\Omega_C^1)^{\otimes 3}) \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ H^0(\rho) \end{array} \quad (1.2.20)$$

donde $\Phi_{\mathcal{O}_S(K_S + C)}$ es la aplicación Gaussiana para $\mathcal{O}_S(K_S + C)$ en S y Φ_C es la aplicación de Wahl para C .

Consideremos el morfismo

$$\text{res} : H^0(S, \mathcal{O}_S(K_S + C)) \rightarrow H^0(C, \Omega_C^1) \quad (1.2.21)$$

la restricción de secciones globales a C , entonces el morfismo Res se define mediante $\Lambda^2 \text{res}$. Los morfismos verticales α y β de la derecha del diagrama se definen como sigue y, por conveniencia, denotaremos por $H^0(\rho)$ la composición $\beta \circ \alpha$.

Consideremos la sucesión exacta corta sobre S

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-C) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0, \quad (1.2.22)$$

y al tensorizar la sucesión (1.2.22) con $\mathcal{O}_S(2K_S + 2C) \otimes \Omega_S^1$ obtenemos la sucesión

$$0 \rightarrow \Omega_S^1(2K_S + C) \rightarrow \Omega_S^1(2K_S + 2C) \rightarrow \Omega_S^1(2K_S + 2C)|_C \rightarrow 0, \quad (1.2.23)$$

y la aplicación α aparece en la sucesión exacta larga en cohomología:

$$0 \rightarrow H^0(S, \Omega_S^1(2K_S + C)) \rightarrow H^0(S, \Omega_S^1(2K_S + 2C)) \xrightarrow{\alpha} H^0(C, \Omega_S^1(2K_S + 2C)|_C) \rightarrow \dots \quad (1.2.24)$$

Finalmente, para el morfismo β , usamos el dual de la sucesión normal de C en S :

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{C/S}^\vee \rightarrow \Omega_S^1|_C \rightarrow \Omega_C^1 \rightarrow 0. \quad (1.2.25)$$

donde $\mathcal{N}_{C/S}$ es el haz normal de C en S , el cual es $\mathcal{N}_{C/S} = \mathcal{O}_S(-C)|_C$ y por lo tanto el dual es $\mathcal{N}_{C/S}^\vee = \mathcal{O}_S(C)|_C$. Al tensorizar la sucesión (1.2.25) con $\mathcal{O}_S(2K_S + 2C)|_C = (\Omega_C^1)^{\otimes 2}$ obtenemos la sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(2K_S + C)|_C \rightarrow \Omega_S^1(2K_S + 2C)|_C \rightarrow (\Omega_C^1)^{\otimes 3} \rightarrow 0, \quad (1.2.26)$$

lo que da el morfismo β en la sucesión exacta larga en cohomología

$$0 \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_S(2K_S + C)|_C) \rightarrow H^0(C, \Omega_S^1(2K_S + 2C)|_C) \xrightarrow{\beta} H^0(C, (\Omega_C^1)^{\otimes 3}) \rightarrow \dots \quad (1.2.27)$$

Observación 1.2.28. Notemos que $\text{corank}(\Phi_C \circ \text{Res}) = \text{corank}(H^0(\rho) \circ \Phi_{\mathcal{O}_S(K_S+C)})$.

Adicionalmente, para la aplicación $H^0(\rho)$, a partir de la sucesión de [12, Lema 2.3c], en nuestro caso se tiene

$$0 \rightarrow \Omega_S^1(\log C)(-C) \rightarrow \Omega_S^1(\log C) \rightarrow \Omega_C^1 \rightarrow 0, \quad (1.2.29)$$

donde $\Omega_S^1(\log C)$ es el haz de 1-formas con polos logarítmicos a lo largo de C en S : si z_1, z_2 son coordenadas analíticas locales en S , con $C = \{z_2 = 0\}$, entonces $\Omega_S^1(\log C)$ está localmente generado por $dz_1, \frac{dz_2}{z_2}$. Así, el kernel de $\Omega_S^1 \rightarrow \Omega_C^1$ está localmente generado por $z_2 dz_1, dz_2$. Notemos que estos son exactamente los generadores locales del subhaz $\Omega_S^1(\log C)(-C) \subset \Omega_S^1(\log C)$; para más detalles, véase [12, 19].

Al tensorizar la sucesión exacta (1.2.29) con $\mathcal{O}_S(2K_S + 2C)$, obtenemos:

$$0 \rightarrow \Omega_S^1(\log C)(2K_S + C) \rightarrow \Omega_S^1(\log C)(2K_S + 2C) \xrightarrow{\rho} (\Omega_C^1)^{\otimes 3} \rightarrow 0 \quad (1.2.30)$$

lo que da lugar al morfismo $H^0(\rho)$:

$$0 \rightarrow H^0(S, \Omega_S^1(\log C)(2K_S + C)) \rightarrow H^0(S, \Omega_S^1(\log C)(2K_S + 2C)) \xrightarrow{H^0(\rho)} H^0(C, (\Omega_C^1)^{\otimes 3}) \rightarrow \dots \quad (1.2.31)$$

y este $H^0(\rho)$ es exactamente la composición de α con β . También tenemos otra sucesión exacta, proveniente de [12, Lema 2.3a], que en nuestro contexto, al tensorizar con $\mathcal{O}_S(2K_S + C)$ obtenemos

$$0 \rightarrow \Omega_S^1(2K_S + C) \rightarrow \Omega_S^1(\log C)(2K_S + C) \rightarrow \mathcal{O}_S(2K_S + C)|_C \rightarrow 0. \quad (1.2.32)$$

Un primer ejemplo es considerar $S = \mathbb{P}^2$ y cualquier curva suave plana de grado $d \geq 5$.

Ejemplo 1.2.33. Sea $C \subset \mathbb{P}^2$ una curva suave definida por un polinomio homogéneo F de grado d . Por adjunción, se tiene que el haz canónico de C es $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(K_{\mathbb{P}^2} + C)|_C \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3 + d)|_C$. Tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-C)|_C \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^2}^1|_C \rightarrow \Omega_C^1 \rightarrow 0, \quad (1.2.34)$$

al tensorizar con $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2K_{\mathbb{P}^2} + 2C) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-6 + 2d)$ obtenemos,

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d - 6)|_C \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(2d - 6)|_C \rightarrow (\Omega_C^1)^{\otimes 3} \rightarrow 0, \quad (1.2.35)$$

con sucesión exacta larga en cohomología

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-6)|_C) \rightarrow H^0(\Omega_{\mathbb{P}^2}^1(2d-6)|_C) \rightarrow H^0((\Omega_C^1)^{\otimes 3}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-6)|_C) \rightarrow 0, \quad (1.2.36)$$

debido a que $H^1(\Omega_{\mathbb{P}^2}^1(2d - 6)|_C) = 0$. Entonces, en este caso, el morfismo β tiene dimensión del cokernel igual a $h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-6)|_C) \cong h^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-6))$ pues $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-6)) \cong H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-6)) \cong 0$.

Por otro lado, de la sucesión

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(d - 6) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(2d - 6) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^2}^1(2d - 6)|_C \rightarrow 0, \quad (1.2.37)$$

obtenemos la sucesión exacta en cohomología

$$0 \rightarrow H^0(\Omega_{\mathbb{P}^2}^1(d-6)) \rightarrow H^0(\Omega_{\mathbb{P}^2}^1(2d-6)) \rightarrow H^0(\Omega_{\mathbb{P}^2}^1(2d-6)|_C) \rightarrow 0 \quad (1.2.38)$$

debido a que $H^1(\Omega_{\mathbb{P}^2}^1(d-6)) = 0$ para todo $d \geq 5$. Por lo tanto, en este caso, el α es sobreyectivo. Por lo tanto

$$\text{corank}(\beta \circ \alpha) = \text{corank}(\beta) = h^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-6)) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)) = 10.$$

Además, dado que $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) = 0$ entonces el morfismo Res es sobreyectivo. Por lo tanto

$$\text{corank} \Phi_C \geq h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-K_{\mathbb{P}^2})) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)) = 10. \quad (1.2.39)$$

En general, por [25, Teorema 4.9] siempre se tiene que $\text{corank} \Phi_C = 10$.

Notemos que para el caso donde S es una superficie K3 (es decir, $K_S \cong \mathcal{O}_S$ y $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$) se tiene que $h^0(\mathcal{O}_S(-K_S)) = h^0(\mathcal{O}_S) = 1$. Además, por el Teorema 1.1.29, tenemos que la aplicación de Wahl para curvas que viven en una superficie K3 no es sobreyectivo. Por lo que se cumple que

$$\text{corank} \Phi_C \geq h^0(\mathcal{O}_S(-K_S)) = 1 > 0.$$

En esta dirección, Wahl en [25] propone una conjetura (y menciona que quizá requiera un ajuste más fino), la cual es válida cuando X es una superficie K3 (Teorema 1.1.29), una superficie racional reglada ([25, Teorema 4.8]) o $\mathbb{P}^2$ (Ejemplo 1.2.33):

Conjetura 1.2.40 (Wahl [25]). Sea X una superficie regular (es decir, $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$). Entonces existe un g_0 tal que, para toda curva suave C en X de género $g \geq g_0$, se cumple

$$\text{corank} \Phi_C \geq h^0(X, \mathcal{O}_X(-K_X)).$$

En el 2002, el mismo Wahl trabajó con curvas en superficies de Gorenstein normales que bajo las siguientes hipótesis se cumple que $\text{corank} \Phi_C = h^0(-K_X)$.

Proposición 1.2.41 (Wahl [27, Proposición 4.3], DM [11, Teorema 5.5]). Sea $C \subset X$ un divisor de Cartier suave sobre una superficie de Gorenstein normal con $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$. Supongamos que:

- (a) $H^1(\Omega_X^1(2K_X + 2C) \otimes \mathcal{O}_C) = 0$.
- (b) $K_X + C$ es amplio.
- (c) La aplicación Gaussiana Φ_{K_X+C} en X es sobreyectiva.
- (d) $H^1(\Omega_X^1(2K_X + C)) = 0$.

Entonces

$$\text{corank} \Phi_C = h^0(\mathcal{O}_X(-K_X)).$$

Una observación importante es que existen curvas que no pertenecen a una superficie K3 con aplicación de Wahl no sobreyectiva.

Teorema 1.2.42 (Wahl [27, 25], Martens[20, Teorema 3.1]). *Las siguientes curvas suaves no yacen en una superficie K3, aunque Φ_K no sea sobreyectiva:*

1. *curvas planas de grado $d \geq 7$;*
2. *curvas bi-elípticas de género $g \geq 11$;*
3. *curvas en $\mathbb{F}_n$ linealmente equivalentes a $pC_0 + qF$ con $p \geq 5$ y $q \geq an$.*

Como hemos visto en estos últimos resultados, una de las estrategias para estudiar el rango de la aplicación de Wahl de una curva consiste en considerar curvas que se encuentren contenidas en superficies. Por ejemplo, a lo largo del tiempo se ha estudiado el caso de curvas suaves en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$, en superficies K3 y en superficies de Hirzebruch [11]. Además, un tema de gran interés es el caso de las curvas nodales en dichas superficies: en [8] se estudia la aplicación de Wahl para la normalización de curvas nodales planas, mientras que en [24] se aborda el caso de la normalización de curvas con un solo nodo en superficies K3. Es por ello que una de las líneas de este trabajo consiste en analizar lo que sucede en el caso de la normalización de una curva nodal sobre una superficie de Hirzebruch.

Capítulo 2

Generalidades sobre superficies de Hirzebruch

2.1 Conceptos básicos

Definición 2.1.1. Una superficie S es *reglada* si es birracionalmente equivalente a $C \times \mathbb{P}^1$, donde C es una curva suave. Si $C = \mathbb{P}^1$, decimos que S es racional.

Ejemplo 2.1.2. $C \times \mathbb{P}^1$ es una superficie reglada.

Ejemplo 2.1.3. Sea E un fibrado vectorial de rango 2 sobre la curva C . Considere el fibrado proyectivo $\mathbb{P}_C(E)$ asociado a E ; es una superficie fibrada sobre C , tal que la fibra sobre un punto $x \in C$ es el espacio proyectivo asociado al espacio vectorial E_x . Como E es localmente trivial, $\mathbb{P}_C(E)$ es isomorfo localmente a $C \times \mathbb{P}^1$, por lo que $\mathbb{P}_C(E)$ es una superficie reglada.

Definición 2.1.4. Sea C una curva suave. Una *superficie geoméricamente reglada* sobre C es una superficie S , junto con un morfismo suave

$$\rho : S \rightarrow C$$

cuyas fibras son isomorfas a $\mathbb{P}^1$.

Los ejemplos 2.1.2 y 2.1.3 son ejemplos de superficies geoméricamente regladas. No es obvio a priori que una superficie geoméricamente reglada sea reglada. Esto se deduce del siguiente teorema:

Teorema 2.1.5 (Teorema de Noether-Enriques, [2, Teorema III.4]). *Sea S una superficie, p un morfismo de S a una curva suave C . Suponga que existe $x \in C$ tal que p es suave sobre x y la fibra $p^{-1}(x)$ es isomorfa a $\mathbb{P}^1$. Entonces existe un subconjunto de Zariski abierto $U \subseteq C$ que contiene a x y un isomorfismo*

$$\rho^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{P}^1$$

tal que el siguiente diagrama conmutativo se cumple:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\cong} & U \times \mathbb{P}^1 \\ \downarrow \rho & \swarrow pr_1 & \\ U & & \end{array}$$

En particular, S es reglada.

Definición 2.1.6. Decimos que S es una *superficie de Hirzebruch* si es una superficie geoméricamente reglada sobre $\mathbb{P}^1$.

Proposición 2.1.7 ([2, Proposición III.15 (i)]). *Todo haz vectorial de rango 2 sobre $\mathbb{P}^1$ es descomponible, es decir, la suma de dos haces lineales. En particular, toda superficie geoméricamente reglada sobre $\mathbb{P}^1$ es isomorfa a una de las superficies*

$$\mathbb{F}_n := \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)) \quad \text{para } n \geq 0.$$

Definición 2.1.8. Sea $n \geq 0$ un número entero. La superficie $\mathbb{F}_n$ es llamada la *n -ésima superficie de Hirzebruch*.

Proposición 2.1.9. *La proyección natural*

$$\pi : \mathbb{F}_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)) \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

es un $\mathbb{P}^1$ -fibrado; por tanto $\mathbb{F}_n$ es una superficie reglada sobre $\mathbb{P}^1$.

Demostración. Sea $E := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)$ el haz vectorial de rango 2 sobre $\mathbb{P}^1$. La construcción de la proyectivización $\mathbb{P}(E)$ produce una variedad junto con una aplicación canónica $\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}^1$ tal que la fibra sobre un punto $p \in \mathbb{P}^1$ es

$$\pi^{-1}(p) = \mathbb{P}(E_p),$$

donde E_p es el espacio vectorial fibra de dimensión 2; por tanto cada fibra es isomorfa a $\mathbb{P}^1$. Así $\mathbb{F}_n$ es un $\mathbb{P}^1$ -fibrado sobre $\mathbb{P}^1$, es decir una superficie reglada. ■

Proposición 2.1.10. *Existe una sección $C_0 \subset \mathbb{F}_n$ definida por la subvariedad proyectivizada del subhaz lineal $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)$. Además*

$$(C_0)^2 = -n.$$

Demostración. La proyección canónica

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n) \xrightarrow{\text{pr}_2} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n).$$

Induce una inmersión natural

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)) = \mathbb{F}_n.$$

Dado que $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)) \cong \mathbb{P}^1$, entonces se produce una sección $C_0 \cong \mathbb{P}^1$ de la proyección π . Esta sección se llama la *sección negativa* puesto que su autointersección es negativa.

Recordemos un hecho general: si $S = \mathbb{P}(E)$ con E un haz vectorial de rango 2 sobre una curva base B , y si $s : B \rightarrow S$ es la sección asociada a un cociente $E \twoheadrightarrow L$ (un haz lineal), entonces $N_{s(B)/S} \cong L^\vee \otimes \det(E)|_B$, o, en la versión más fácil que usaremos, cuando $E = L_1 \oplus L_2$ se descompone como suma de haces lineales y tomamos la sección asociada al cociente $E \twoheadrightarrow L_2$, entonces el normal de la sección es isomorfo a

$$N \cong (L_2) \otimes (L_1)^{-1}.$$

Apliquemos esto en nuestro caso: tenemos

$$E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n) =: L_1 \oplus L_2,$$

y la sección C_0 corresponde al cociente $E \twoheadrightarrow L_2 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)$. Por lo tanto se obtiene

$$N_{C_0/\mathbb{F}_n} \cong \mathcal{O}(-n) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{-1} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n).$$

Entonces

$$C_0^2 = \deg(N_{C_0/\mathbb{F}_n}) = \deg(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)) = -n.$$

Pues recordemos que el grado de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ sobre $\mathbb{P}^1$ es m . ■

Para una curva suave C incluida en una superficie suave S , la autointersección C^2 coincide con el grado del haz normal $N_{C/S}$. En nuestro caso C_0 es una sección dada a partir del $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)$ y el grado de $\mathcal{O}(-n)$ sobre $\mathbb{P}^1$ es $-n$.

Observación 2.1.11. Una prueba alternativa (más directa) calcula la clase de la sección en $\text{Pic}(\mathbb{F}_n)$ en términos de la clase tautológica $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ y de la proyección; a partir de esto se obtiene la misma autointersección por la fórmula de intersección en fibrados proyectivos.

Sea $f = \pi^{-1}(p)$ la fibra sobre un punto $p \in \mathbb{P}^1$. Entonces:

- $f \cong \mathbb{P}^1$ como curva y $f^2 = 0$, pues las fibras distintas son disjuntas.
- $C_0 \cdot f = 1$, porque C_0 es una sección de π , es decir corta cada fibra exactamente en un punto.

De estas igualdades sigue que

$$\text{Pic}(\mathbb{F}_n) \simeq \mathbb{Z}\langle C_0 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle f \rangle,$$

y el producto de intersección en esta base viene dado por la matriz

$$\begin{pmatrix} C_0^2 & C_0 \cdot f \\ C_0 \cdot f & f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observación 2.1.12. Cuando $n = 0$ se obtiene $\mathbb{F}_0 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ y la sección C_0 tiene autointersección cero.

Observación 2.1.13. Para $n = 1$ la superficie $\mathbb{F}_1$ es isomorfa a la transformada por explosión (blow-up) de $\mathbb{P}^2$ en un punto; la sección C_0 corresponde al divisor excepcional y tiene autointersección -1 .

Observación 2.1.14. Para $n \geq 2$ la superficie $\mathbb{F}_n$ es minimal.

Proposición 2.1.15 ([2, Proposicion III.18]). *Sea $S = \mathbb{P}_C(E)$ una superficie reglada (geométricamente) sobre una curva suave C , y sea $p: S \rightarrow C$ la aplicación estructural. Si $\xi = [\mathcal{O}_S(1)]$ en $\text{Pic } S$ (o en $H^2(S, \mathbb{Z})$). Entonces se cumplen:*

1. $\text{Pic } S = p^* \text{Pic } C \oplus \mathbb{Z}\xi$.
2. $H^2(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\xi] \oplus \mathbb{Z}[f]$, donde f es la clase de una fibra.
3. $\xi^2 = \deg(E)$.
4. El divisor canónico viene dado por

$$K_S = -2\xi + (\deg E + 2g(C) - 2)f$$

en $H^2(S, \mathbb{Z})$.

Demostración. Ver en [2, Proposicion III.18]. ■

Por lo tanto, para las superficies de Hirzebruch $\mathbb{F}_n$:

$$\text{Pic}(\mathbb{F}_n) = \mathbb{Z}[C_0] \oplus \mathbb{Z}[F] \quad (2.1.16)$$

$$(C_0)^2 = -n, \quad C_0 \cdot F = 1, \quad F^2 = 0 \quad (2.1.17)$$

$$K_{\mathbb{F}_n} = -2C_0 - (2+n)f, \quad (2.1.18)$$

donde C_0 corresponde a ξ la sección negativa y F corresponde a la fibra f de la proposición 2.1.15. Esto caracteriza la geometría de estas superficies.

A toda superficie S podemos asociarle varios números enteros; por ejemplo, los invariantes algebraico-geométricos:

$$q(S) = h^1(S, \mathcal{O}_S)$$

$$p_g(S) = h^2(S, \mathcal{O}_S) = h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S)) \quad (\text{por dualidad de Serre})$$

$$P_n(S) = h^0(S, \mathcal{O}_S(nK_S)) \quad \text{para } n \geq 1.$$

Los P_n se llaman los *plurigéneros* de S , $p_g = P_1$ es el *género geométrico*, y q es la *irregularidad* de S . Tenemos que la característica de Euler

$$\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q(S) + p_g(S).$$

Observación 2.1.19 ([2, Hecho III.19]).

$$q(S) = h^0(S, \Omega_S^1).$$

Proposición 2.1.20. *Los enteros q , p_g , P_n son invariantes birracionales.*

Demostración. Ver en [2, Proposición III.20]. ■

Proposición 2.1.21. *Sea S una superficie reglada sobre C ; entonces*

$$q(S) = g(C), \quad p_g(S) = 0, \quad P_n(S) = 0 \quad \text{para todo } n \geq 2.$$

Si S es geométricamente reglada, entonces

$$K_S^2 = 8(1 - g(C)).$$

Demostración. Ver en [2, Proposición III.21]. ■

Por lo tanto, para las superficies de Hirzebruch $\mathbb{F}_n$:

$$q(\mathbb{F}_n) = 0, \quad p_g = 0 \quad y \quad K_{\mathbb{F}_n}^2 = 8, \quad (2.1.22)$$

además por la fórmula de Noether, $\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}) = \frac{1}{12}(\chi_{\text{top}}(\mathbb{F}_n) + K_{\mathbb{F}_n}^2)$, se sigue que

$$\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}) = 1, \quad \chi_{\text{top}}(\mathbb{F}_n) = 4.$$

2.2 Explosiones

En esta sección introducimos la importante noción de *blow-up* (explosión). Este proceso es esencial en el estudio de las singularidades y, por tanto, en la geometría birracional en general.

Primero introducimos la versión local. Sea $\mathbb{A}^n$ el espacio afín con coordenadas $z_0, \dots, z_{n-1}$ y sea $0 \in \mathbb{A}^n$ el origen. Construimos una variedad $Y \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ dada por $\{z_i X_j = z_j X_i\}_{i \neq j}$, donde $X_0, \dots, X_n$ son las coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}^{n-1}$. Existe un morfismo natural $\pi : Y \rightarrow \mathbb{A}^n$ dado por la proyección. Se puede ver que $\pi^{-1}(0) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ y que $\pi : Y - \pi^{-1}(0) \cong \mathbb{A}^n - \{0\}$. Decimos que Y es el *blow-up* de $\mathbb{A}^n$ en 0 y lo denotamos $\text{Bl}_0(\mathbb{A}^n)$.

De manera más general, sea $x \in X$ un punto en una variedad suave X , tomemos un entorno afín U de x . Identificamos (U, x) con un abierto $(U', 0) \subset \mathbb{A}^n$.

Entonces se tiene $\tilde{U} := \pi^{-1}(U') \rightarrow U'$ que es el *blow-up* de U' en 0 . Al pegar $X - U$ y $\tilde{U}$, obtenemos $\pi_X : \tilde{X} \rightarrow X$, lo que se llama el *blow-up* de X en x . Obsérvese que de manera similar se tiene $\pi_X^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ y $\pi_X : \tilde{X} - \pi_X^{-1}(x) \cong X - \{x\}$. El divisor $\pi_X^{-1}(x)$ se llama el *divisor excepcional*, y normalmente se denota por E .

Ejemplo 2.2.1. Sea $\pi : Y = \text{Bl}_x(\mathbb{P}^2) \rightarrow \mathbb{P}^2$ el *blowing-up* de $\mathbb{P}^2$ en un punto $x \in \mathbb{P}^2$. Notemos que el morfismo π es un isomorfismo fuera del punto x , por lo que la diferencia $K_Y - \pi^* K_{\mathbb{P}^2}$ está soportada en el divisor excepcional E . Por tanto, debe existir un entero a tal que

$$K_Y = \pi^* K_{\mathbb{P}^2} + aE.$$

Tomemos coordenadas afines (z_1, z_2) alrededor de $x = (0, 0)$ en $\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$. El *blow-up* de $\mathbb{A}^2$ en el origen está definido por

$$\text{Bl}_0(\mathbb{A}^2) = \left\{ \left((z_1, z_2), [X_1 : X_2] \right) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid z_1 X_2 = z_2 X_1 \right\}.$$

Este espacio se cubre con dos cartas afines:

- **Carta 1:** $X_1 \neq 0$, ponemos $u = X_2/X_1$. Entonces $z_2 = uz_1$. Las coordenadas locales son (z_1, u) .
- **Carta 2:** $X_2 \neq 0$, ponemos $v = X_1/X_2$. Entonces $z_1 = vz_2$. Las coordenadas locales son (z_2, v) .

Consideremos la forma diferencial canónica sobre $\mathbb{A}^2$

$$\omega = dz_1 \wedge dz_2.$$

En la carta 1, donde $z_2 = uz_1$, tenemos

$$dz_2 = u dz_1 + z_1 du,$$

y por tanto,

$$dz_1 \wedge dz_2 = dz_1 \wedge (u dz_1 + z_1 du) = z_1 dz_1 \wedge du.$$

De esta expresión se deduce que

$$\pi^*(dz_1 \wedge dz_2) = z_1 (dz_1 \wedge du).$$

Esto muestra que la forma canónica sobre el blow-up se anula a lo largo de $E = \{z_1 = 0\}$ con multiplicidad 1. Sabemos que en $\mathbb{P}^2$ el divisor canónico es

$$K_{\mathbb{P}^2} = -3H,$$

donde H denota una recta en $\mathbb{P}^2$. La aplicación de blow-up $\pi : Y \rightarrow \mathbb{P}^2$ induce

$$\text{Pic}(Y) = \mathbb{Z}[\pi^*H] \oplus \mathbb{Z}[E].$$

Por tanto,

$$K_Y = a \pi^*H + b E.$$

Fuera de E , π es un isomorfismo, lo que implica que $a = -3$. Del cálculo local anterior se obtiene $b = 1$. Así

$$K_Y = \pi^*K_{\mathbb{P}^2} + E.$$

De hecho, si $\dim X = 2$ y $\pi : \widetilde{X} \rightarrow X$ es el *blow-up* de un punto $x \in X$, entonces $K_{\widetilde{X}} = \pi^* K_X + E$. Más generalmente, si $\dim X = n$ y $\pi : \widetilde{X} = \text{Bl}_x(X) \rightarrow X$ es el *blowing-up* de X en x , entonces $K_{\widetilde{X}} = \pi^* K_X + (n-1)E$.

Nos centraremos en el caso de X una superficie y $C \subset X$ una curva. Sea f la ecuación local de C alrededor de x . Al fijar coordenadas locales z_1, z_2 , podemos escribir

$$f = f_m(z_1, z_2) = f_m + f_{m+1} + \dots,$$

con $f_m \neq 0$. Definimos la multiplicidad de C en x como

$$m_x(C) := m.$$

Se puede demostrar que este valor $m_x(C)$ está bien definido.

Consideremos ahora $\pi : \widetilde{X} = \text{Bl}_x(X) \rightarrow X$. Sea C una curva que pasa por $x \in X$. Entonces $\pi^{-1}(C)$ consta de componentes irreducibles, una de ellas es E y la otra se proyecta sobre C . La parte que se proyecta sobre C se define como

$$\tilde{C} := \overline{\pi^{-1}(C - \{x\})},$$

la cual se llama la *transformada propia* de C . Así, tenemos $\pi^{-1}(C) = \tilde{C} \cup E$. De manera más precisa, al calcular las ecuaciones se obtiene

$$\pi^* C = \tilde{C} + m_x(C)E,$$

la cual es llamada la *transformada total* de C .

Proposición 2.2.2. *Sea*

$$\pi : \widetilde{X} = \text{Bl}_x(X) \longrightarrow X$$

el blow-up de una superficie suave X en un punto $x \in X$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. *Existe un isomorfismo natural*

$$\text{Div}(X) \oplus \mathbb{Z}E \cong \text{Div}(\widetilde{X}),$$

dado por

$$(D, nE) \longmapsto \pi^* D + nE.$$

Además, este isomorfismo induce un isomorfismo correspondiente a nivel de grupos de Picard:

$$\text{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}E \cong \text{Pic}(\widetilde{X}).$$

2. *Para todo $D, D' \in \text{Div}(X)$, se cumple*

$$(\pi^* D) \cdot (\pi^* D') = D \cdot D'.$$

3. *Si $D \in \text{Div}(X)$, entonces*

$$(\pi^* D) \cdot E = 0.$$

4. Finalmente, se tiene

$$E \cdot E = -1.$$

Demostración. **(1):** Todo divisor en $\widetilde{X}$ puede escribirse de forma única como la suma del divisor total transformado π^*D y un múltiplo entero del divisor excepcional E :

$$\text{Div}(\widetilde{X}) = \pi^*\text{Div}(X) \oplus \mathbb{Z}E.$$

A nivel de grupos de Picard, el mismo argumento muestra que $\text{Pic}(\widetilde{X}) \cong \text{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}E$. **(2) y (3):** Para demostrar estas igualdades, consideremos divisores Δ, Δ' linealmente equivalentes a D, D' respectivamente, que no pasen por el punto x . Entonces sus imágenes recíprocas $\pi^{-1}(\Delta)$ y $\pi^{-1}(\Delta')$ no intersectan el divisor excepcional E , y en la región donde π es un isomorfismo se tiene:

$$(\pi^*D) \cdot (\pi^*D') = D \cdot D', \quad \text{y} \quad (\pi^*D) \cdot E = 0.$$

(4): Para el último punto, usamos la *fórmula de adjunción*. Como $E \simeq \mathbb{P}^1$, sabemos que $K_E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$, lo que implica $\deg(K_E) = -2$. Por la fórmula de adjunción para $E \subset \widetilde{X}$

$$K_E = (K_{\widetilde{X}} + E)|_E,$$

y obtenemos que

$$-2 = \deg(K_E) = (K_{\widetilde{X}} + E) \cdot E.$$

Por la igualdad $K_{\widetilde{X}} = \pi^*K_X + E$, se sigue

$$(K_{\widetilde{X}} + E) \cdot E = (\pi^*K_X + 2E) \cdot E = 2(E \cdot E).$$

Por tanto,

$$-2 = 2(E \cdot E) \quad \text{esto es,} \quad E \cdot E = -1.$$

■

Capítulo 3

El rol de los diferenciales con polos logarítmicos

3.1 Gavilla logarítmica con polos a lo largo de un divisor

Sea X una variedad suave de dimensión n , y sea $D \subset X$ un divisor no singular. Recordemos que la gavilla de 1-formas diferenciales en X , denotada por Ω_X^1 , está localmente generada por

$$dz_1, dz_2, \dots, dz_n.$$

Denotamos por

$$\Omega_X^1(\log D),$$

la *gavilla de 1-formas diferenciales en X con polos logarítmicos a lo largo de D* . Esto es, consideremos $z_1, \dots, z_n$ coordenadas analíticas locales en un abierto $U \subset X$, tales que el divisor D está dado localmente por la ecuación

$$D \cap U = \{z_n = 0\}.$$

Esto quiere decir que z_n es una ecuación local para D , y dz_n se anula exactamente a lo largo de D . Entonces, en este sistema de coordenadas, el haz $\Omega_X^1(\log D)$ está generado localmente por las formas,

$$dz_1, dz_2, \dots, dz_{n-1}, \frac{dz_n}{z_n}.$$

Notemos que las formas $dz_1, \dots, dz_{n-1}$ son holomorfas, mientras que la forma

$$\frac{dz_n}{z_n},$$

tiene un *polo logarítmico* en $z_n = 0$, es decir, a lo largo de $D \cap U$. Nótese que

$$d(\log z_n) = \frac{dz_n}{z_n},$$

de ahí la denominación de *polo logarítmico*. Una 1-forma ω pertenece a $\Omega_X^1(\log D)$ si y sólo si localmente puede escribirse como

$$\omega = \sum_{i=1}^{n-1} a_i dz_i + b \frac{dz_n}{z_n},$$

donde $a_1, \dots, a_{n-1}, b$ son funciones holomorfas en U .

$\Omega_X^1(\log D)$ es un haz localmente libre de rango n , que coincide con Ω_X^1 fuera del divisor D . A el dual de $\Omega_X^1(\log D)$ se le denota por $T_X(-\log D)$ y es llamado *la gavilla de gérmenes de vectores tangentes a X que también son tangentes a D* , localmente se genera por

$$z_n \frac{\partial}{\partial z_n}, \quad \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{n-1}}.$$

Notemos que la gavilla $\Omega_X^1(\log D)$ encaja en la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_X^1(\log D) \xrightarrow{\text{res}} \mathcal{O}_D \longrightarrow 0, \quad (3.1.1)$$

donde el morfismo residuo asigna a la componente $\frac{dz_n}{z_n}$ a 1 y anula las demás componentes. Además, también se tiene otra sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Omega_X^1(\log D)(-D) \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_D^1 \longrightarrow 0, \quad (3.1.2)$$

pues el kernel de $\Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_D^1$ es localmente generado por $z_n dz_1, \dots, z_n dz_{n-1}, dz_n$. Estos generadores son precisamente los generadores locales de la subgavilla $\Omega_X^1(\log D)(-D) \subset \Omega_X^1(\log D)$.

Ahora, centrémonos en el caso de que X es una superficie suave y D una curva suave en X . Sean z_1, z_2 coordenadas locales tales que D está definida por $z_2 = 0$. Entonces $\{\omega_1 = dz_1, \omega_2 = \frac{dz_2}{z_2}\}$ son generadores de $\Omega_X^1(\log D)$. Notemos que los generadores $\{dz_1, dz_2\}$ de Ω_X^1 se pueden obtener por combinaciones lineales de los generadores de $\Omega_X^1(\log D)$, esto nos dice que, $\Omega_X^1 \subset \Omega_X^1(\log D)$. Además, los siguientes morfismos

$$\begin{array}{ccccc} \Omega_X^1 & \longrightarrow & \Omega_X^1(\log D) & \longrightarrow & \mathcal{O}_D \\ f_1 dz_1 + f_2 dz_2 & \mapsto & f_1 dz_1 + f_2 dz_2 = f_1 dz_1 + f_2 z_2 \frac{dz_2}{z_2} & & \\ & & g_1 \omega_1 + g_2 \omega_2 & \mapsto & g_2|_D \end{array} \quad (3.1.3)$$

nos dan la sucesión exacta corta que aparece en (3.1.1). Asimismo, por

$$\begin{array}{ccccc} \Omega_X^1(\log D)(-D) & \longrightarrow & \Omega_X^1 & \longrightarrow & \Omega_D^1 \\ h_1 \omega_1 + h_2 \omega_2 & \mapsto & h_1 \omega_1 + h_2 \omega_2 = h_1 dz_1 + \frac{h_2}{z_2} dz_2 & & \\ & & f_1 dz_1 + f_2 dz_2 & \mapsto & (f_1 dz_1)|_D \end{array} \quad (3.1.4)$$

se obtiene la sucesión exacta corta que aparece en (3.1.2).

La siguiente proposición muestra la importancia de la gavilla de diferenciales con polos logarítmicos en el estudio de la composición del diagrama 1.2.20 en el caso de $L = \mathcal{O}_S(K_S + C)$.

Proposición 3.1.5. *Sea S una superficie suave, $C \subset S$ una curva suave e irreducible, y L un haz lineal sobre S . Consideremos los morfismos:*

$$\phi : H^0(S, \Omega_S^1 \otimes L^2) \longrightarrow H^0(C, \Omega_S^1 \otimes L_{|C}^2),$$

$$\psi : H^0(C, \Omega_S^1 \otimes L_{|C}^2) \longrightarrow H^0(C, \omega_C \otimes L_{|C}^2).$$

Entonces se cumple la desigualdad

$$\text{corank}(\psi \circ \phi) \leq \text{corank}(\psi) + h^1(S, \Omega_S^1(\log C) \otimes L^2(-C)).$$

Demostración. Se tienen las siguientes cuatro sucesiones exactas:

1.

$$0 \longrightarrow \Omega_S^1 \longrightarrow \Omega_S^1(\log C) \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0.$$

2.

$$0 \longrightarrow \Omega_S^1(\log C)(-C) \longrightarrow \Omega_S^1 \longrightarrow \Omega_C^1 \longrightarrow 0.$$

3.

$$0 \longrightarrow \Omega_S^1(-C) \longrightarrow \Omega_S^1 \longrightarrow \Omega_S^1|_C \longrightarrow 0.$$

4.

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-C) \longrightarrow \Omega_S^1|_C \longrightarrow \Omega_C^1 \longrightarrow 0.$$

El diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \Omega_S^1 \otimes L^2(-C) & \rightarrow & \Omega_S^1(\log C) \otimes L^2(-C) & \rightarrow & \mathcal{O}_C \otimes L^2(-C) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \Omega_S^1 \otimes L^2(-C) & \rightarrow & \Omega_S^1 \otimes L^2 & \rightarrow & \Omega_S^1 \otimes L_{|C}^2 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & \rightarrow & \Omega_C^1 \otimes L_{|C}^2 & \xrightarrow{\text{id}} & \Omega_C^1 \otimes L_{|C}^2 \rightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

induce en cohomología el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H^0(\mathcal{O}_C \otimes L^2(-C)) & \rightarrow & H^1(\Omega_S^1 \otimes L^2(-C)) \rightarrow H^1((\Omega_S^1 \otimes L^2(-C))) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ H^0(\Omega_S^1 \otimes L^2) & \xrightarrow{\phi} & H^0(\Omega_S^1 \otimes L_{|C}^2) & \rightarrow & \text{coker}(\phi) \subseteq H^1(\Omega_S^1 \otimes L^2) \\ & & \downarrow \psi & & \\ & & H^0(\Omega_C^1 \otimes L_{|C}^2) & & \end{array}$$

sean $f : H^0(\mathcal{O}_C \otimes L^2(-C)) \rightarrow \text{coker}(\phi)$ la composición en el diagrama y $g : H^0(\Omega_S^1 \otimes L^2) \rightarrow H^0(\Omega_S^1 \otimes L_{|C}^2)$, entonces

$$\text{corank}(\psi \circ \phi) - \text{corank}(\psi) = \text{corank}(f) \leq \text{corank}(g) \leq h^1(S, \Omega_S^1(\log C) \otimes L^2(-C)).$$

así

$$\text{corank}(\psi \circ \phi) \leq \text{corank}(\psi) + h^1(S, \Omega_S^1(\log C) \otimes L^2(-C)).$$

■

La proposición anterior nos dice que la sobreyectividad de ψ y el anulamiento de $H^1(S, \Omega_S^1(\log C) \otimes L^2(-C))$ son condiciones suficientes para mostrar la sobreyectividad del morfismo $\psi \circ \phi$.

Capítulo 4

La aplicación de Wahl de la normalización de una curva nodal en una superficie de Hirzebruch

Consideremos $n \geq 0$ un entero. Sea $\mathbb{F}_n$ la n -ésima superficie de Hirzebruch

$$\mathbb{F}_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)),$$

y sea $\pi_1 : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{P}^1$ el morfismo estructural. Recordemos que el grupo de Picard de $\mathbb{F}_n$ es generado por dos clases: F , que representa a la fibra de π_1 , y C_0 , es la clase de la sección especial de la fibración π_1 sobre $\mathbb{P}^1$. Esto es,

$$\text{Pic}(\mathbb{F}_n) = \mathbb{Z}[C_0] \oplus \mathbb{Z}[F],$$

donde los productos intersección satisfacen las relaciones $(C_0)^2 = -n$, $C_0 \cdot F = 1$ y $F^2 = 0$. Dado que las superficies de Hirzebruch son regladas, entonces todas las fibras son isomorfas y numericamente equivalentes. El divisor canónico de $\mathbb{F}_n$ es dado por

$$K_{\mathbb{F}_n} = -2C_0 - (2+n)F. \quad (4.0.1)$$

Consideremos una curva nodal irreducible $C \subset \mathbb{F}_n$, esto es $C \in |aC_0 + bF|$ para $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$, con nodos en puntos $p_1, \dots, p_\delta$ y no otras singularidades. Sea $\sigma : X = \text{Bl}_Z \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{F}_n$ el blow-up de $\mathbb{F}_n$ en $Z = \{p_1, \dots, p_\delta\}$ con divisor excepcional $E = \sum_{j=1}^\delta E_j$ donde $E_j = \sigma^{-1}(p_j)$. Los números de intersección satisfacen que $(E_j)^2 = -1$ y $E_i \cdot E_j = 0$ para $i \neq j$, entonces $E^2 = -\delta$.

Sea $\tilde{C}$ la normalización de C , con C linealmente equivalente a $aC_0 + bF$. Entonces

$$\tilde{C} = \sigma^*C - 2E \quad (4.0.2)$$

y el divisor canónico en X es

$$K_X = \sigma^*K_{\mathbb{F}_n} + E. \quad (4.0.3)$$

Por lo tanto tenemos los siguientes números de intersección

$$(\tilde{C})^2 = (C)^2 + 4E^2 = (C)^2 - 4\delta = 2ab - a^2n - 4\delta, \quad (4.0.4)$$

$$(K_X)^2 = (K_{\mathbb{F}_n})^2 + E^2 = 8 - \delta, \quad (4.0.5)$$

$$K_X \cdot \tilde{C} = K_{\mathbb{F}_n} \cdot C - 2E^2 = K_{\mathbb{F}_n} \cdot C + 2\delta = an - 2a - 2b + 2\delta. \quad (4.0.6)$$

Recordemos que el género aritmético de C es

$$g = 1 + \frac{C^2 + K_{\mathbb{F}_n} \cdot C}{2} = 1 + ab - a - b + \frac{an(1-a)}{2}$$

y el género geométrico de $\tilde{C}$ es $\tilde{g} = g - \delta$.

Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^2 H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + \tilde{C})) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{O}_X(K_X + \tilde{C})}} & H^0(X, \Omega_X^1(2K_X + 2\tilde{C})) \\ \downarrow \text{Res} & & \downarrow \alpha \\ & & H^0(C, \Omega_X^1(2K_X + 2\tilde{C})|_{\tilde{C}}) \\ & & \downarrow \beta \\ \Lambda^2 H^0(\tilde{C}, \Omega_{\tilde{C}}^1) & \xrightarrow{\Phi_{\tilde{C}}} & H^0(\tilde{C}, (\Omega_{\tilde{C}}^1)^{\otimes 3}) \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ H^0(\rho) \end{array} \quad (4.0.7)$$

Proposición 4.0.8. *El morfismo Res es un isomorfismo.*

Demostración. Notemos que Res está definido por $\wedge^2 \text{res}$, donde res aparece en la siguiente sucesión exacta larga de cohomología,

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + \tilde{C})) \xrightarrow{\text{res}} H^0(\tilde{C}, \Omega_{\tilde{C}}^1) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(K_X)) \quad (4.0.9)$$

debido a que la irregularidad de X , $q(X) = h^1(X, \mathcal{O}_X)$, es un invariante birracional entonces $q(X) = q(\mathbb{F}_n) = h^1(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}) = 0$ y por la dualidad de Serre, $h^1(X, \mathcal{O}_X) = h^1(X, \mathcal{O}_X(K_X))$ así $H^1(X, \mathcal{O}_X(K_X)) = 0$. Entonces res es sobreyectiva. Más aún, se cumple que

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X)) \cong H^i(\mathbb{F}_n, \sigma_* \mathcal{O}_X(K_X)), \quad i \geq 0, \quad (4.0.10)$$

pues las gavillas imágenes directas superiores satisfacen

$$R^i \sigma_*(\mathcal{O}_X(K_X)) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(K_{\mathbb{F}_n}) \otimes R^i \sigma_*(\mathcal{O}_X(E)) = 0, \quad i > 0,$$

ya que $R^i \sigma_*(\mathcal{O}_X(mE)) = 0$ para todo entero $m \leq 1$.

Notemos que

$$\sigma_* \mathcal{O}_X(K_X) \cong \sigma_*(\sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(K_{\mathbb{F}_n}) \otimes \mathcal{O}_X(E)) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(K_{\mathbb{F}_n}) \otimes \sigma_* \mathcal{O}_X(E) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(K_{\mathbb{F}_n})$$

debido a que $\sigma_* \mathcal{O}_X(E) = \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}$.

Finalmente obtenemos que

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X)) \cong H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(K_{\mathbb{F}_n})) = 0.$$

así res es un isomorfismo y por lo tanto Res es un isomorfismo. ■

Observación 4.0.11. Por lo anterior, tenemos que

$$\text{corank}(\Phi_{\tilde{C}}) = \text{corank}(H^0(\rho) \circ \Phi_{K_X + \tilde{C}}).$$

Entonces estudiaremos estos dos morfismos, primero calcularemos el corank de $\beta \circ \alpha$, y luego demostraremos la sobreyectividad de $\Phi_{K_X + \tilde{C}}$ bajo ciertas condiciones sobre los coeficientes que definen a la curva C en $\mathbb{F}_n$.

4.1 Corank($H^0(\rho)$)

Por las sucesiones exactas (1.2.23), (1.2.26), (1.2.30) y (1.2.32), tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & \Omega^1(2K_X + \tilde{C}) & \xlongequal{\quad} & \Omega^1(2K_X + \tilde{C}) & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 \longrightarrow & \Omega_X^1(\log \tilde{C})(2K_X + \tilde{C}) & \longrightarrow & \Omega^1(2K_X + 2\tilde{C}) & \longrightarrow & (\Omega_{\tilde{C}}^1)^{\otimes 3} & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & \\
 0 \longrightarrow & \mathcal{O}_{\tilde{C}}(2K_X + \tilde{C}) & \longrightarrow & \Omega^1(2K_X + 2\tilde{C})|_{\tilde{C}} & \longrightarrow & (\Omega_{\tilde{C}}^1)^{\otimes 3} & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & 0 & & 0 & & &
 \end{array} \tag{4.1.1}$$

Este diagrama es el dual del diagrama en ([23], Section 3.56) en términos de *la gavilla de gérmenes de vectores tangentes a X los cuales son tangentes a $\tilde{C}$* .

Primeramente, calcularemos los respectivos grupos de cohomología que aparecen en el diagrama (4.0.7) y estableceremos las condiciones para que desaparezcan ciertos grupos de cohomología que aparecen en el diagrama anterior.

Consideremos el diagrama blow-up

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{C} & \longrightarrow & X \\
 \downarrow \varphi & & \downarrow \sigma \\
 C & \longrightarrow & \mathbb{F}_n
 \end{array}$$

Nótese que

$$d\sigma : T_X \rightarrow \sigma^*T_{\mathbb{F}_n} \tag{4.1.2}$$

es un isomorfismo fuera de E . Por [16, Lema 15.4], existe una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow T_X \rightarrow \sigma^*T_{\mathbb{F}_n} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0, \tag{4.1.3}$$

y, la gavilla $\mathcal{Q}$ soportada en E , aparece en la siguiente sucesión:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_E(-1) \rightarrow \mathcal{O}_E^{\oplus 2} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0, \tag{4.1.4}$$

donde $E = E_1 + \dots + E_\delta$. Entonces, tenemos que $\mathcal{Q} \cong \mathcal{O}_E(1)$. Al dualizar la sucesión (4.1.3), obtenemos la sucesión exacta corta de gavillas sobre X

$$0 \rightarrow \sigma^*\Omega_{\mathbb{F}_n}^1 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_{X|\mathbb{F}_n}^1 \rightarrow 0, \tag{4.1.5}$$

donde $\Omega_{X|\mathbb{F}_n}^1 \cong \mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{Q}, \mathcal{O}_X)$. Por [17, III Proposición 6.5], tenemos que

$$\mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{Q}, \mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_E(-2),$$

es decir, $\Omega_{X|\mathbb{F}_n}^1 \cong \bigoplus_{j=1}^{\delta} \mathcal{O}_{E_j}(2E_j)$. Para la sucesión (4.1.5), existe una sucesión exacta larga de gavillas de grupos abelianos sobre $\mathbb{F}_n$:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \sigma_*(\sigma^*\Omega_{\mathbb{F}_n}^1) &\rightarrow \sigma_*\Omega_X^1 \rightarrow \sigma_*\Omega_{X|\mathbb{F}_n}^1 \rightarrow \\ &\rightarrow R^1\sigma_*(\sigma^*\Omega_{\mathbb{F}_n}^1) \rightarrow R^1\sigma_*\Omega_X^1 \rightarrow R^1\sigma_*\Omega_{X|\mathbb{F}_n}^1 \rightarrow \\ &\rightarrow R^2\sigma_*(\sigma^*\Omega_{\mathbb{F}_n}^1) \rightarrow R^2\sigma_*\Omega_X^1 \rightarrow R^2\sigma_*\Omega_{X|\mathbb{F}_n}^1 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Por fórmula de proyección, se cumple

$$R^i\sigma_*(\sigma^*\Omega_{\mathbb{F}_n}^1) \cong \Omega_{\mathbb{F}_n}^1 \otimes R^i\sigma_*\mathcal{O}_X.$$

Dado que $R^i\sigma_*\mathcal{O}_X = 0$ para todo $i > 0$, se sigue que

$$R^i\sigma_*(\sigma^*\Omega_{\mathbb{F}_n}^1) = R^i\sigma_*(\sigma^*\Omega_{\mathbb{F}_n}^1 \otimes \mathcal{O}_X) \cong \Omega_{\mathbb{F}_n}^1 \otimes R^i\sigma_*(\mathcal{O}_X) = 0$$

para todo $i > 0$. Además, por la sucesión exacta larga y la definición de la imagen directa superior, tenemos

$$\sigma_*\Omega_{X|\mathbb{F}_n}^1 \cong \bigoplus_{j=1}^{\delta} H^0(E_j, \mathcal{O}_{E_j}(2E_j)) \otimes \mathcal{O}_{p_j} \cong \bigoplus_{j=1}^{\delta} H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) \otimes \mathcal{O}_{p_j} = 0, \quad (4.1.6)$$

$$\begin{aligned} R^1\sigma_*\Omega_X^1 &\cong R^1\sigma_*\Omega_{X|\mathbb{F}_n}^1 \cong \bigoplus_{j=1}^{\delta} H^1(E_j, \mathcal{O}_{E_j}(2E_j)) \otimes \mathcal{O}_{p_j} \\ &\cong \bigoplus_{j=1}^{\delta} H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) \otimes \mathcal{O}_{p_j} \cong \bigoplus_{j=1}^{\delta} \mathcal{O}_{p_j}, \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

$$\begin{aligned} R^2\sigma_*\Omega_X^1 &\cong R^1\sigma_*\Omega_{X|\mathbb{F}_n}^1 \cong \bigoplus_{j=1}^{\delta} H^2(E_j, \mathcal{O}_{E_j}(2E_j)) \otimes \mathcal{O}_{p_j} \\ &\cong \bigoplus_{j=1}^{\delta} H^2(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) \otimes \mathcal{O}_{p_j} = 0. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Por lo tanto, a partir de la sucesión (4.1.5) tenemos la sucesión exacta de gavillas sobre X

$$0 \rightarrow \sigma^*\Omega_{\mathbb{F}_n}^1 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{\delta} \mathcal{O}_{E_j}(2E_j) \rightarrow 0. \quad (4.1.9)$$

Al tensorizar la sucesión (4.1.9) con $\mathcal{O}_X(2K_X + \tilde{C})$, obtenemos

$$0 \rightarrow \sigma^*\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_X + \tilde{C}) \rightarrow \Omega_X^1(2K_X + \tilde{C}) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{\delta} \mathcal{O}_{E_j}(2E_j + 2K_X + \tilde{C}) \rightarrow 0, \quad (4.1.10)$$

pues $2K_X + \tilde{C} = 2(\sigma^*K_{\mathbb{F}_n} + E) + (\sigma^*C - 2E) = \sigma^*(2K_{\mathbb{F}_n} + C)$. Nótese que

$$\deg(\mathcal{O}_{E_j}(2E_j + 2K_X + \tilde{C})) = 2E_j^2 + 2K_X \cdot E_j + \tilde{C} \cdot E_j = -2. \quad (4.1.11)$$

Entonces $H^0(E_j, \mathcal{O}_{E_j}(2E_j + 2K_X + \tilde{C})) = 0$ y $H^1(E_j, \mathcal{O}_{E_j}(2E_j + 2K_X + \tilde{C})) \cong \mathbb{C}$, y la sucesión exacta inducida en cohomología de la sucesión (4.1.10) es

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, \sigma^* \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + C)) &\rightarrow H^0(X, \Omega_X^1(2K_X + C)) \rightarrow 0 \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(X, \sigma^* \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + C)) \rightarrow H^1(X, \Omega_X^1(2K_X + C)) \rightarrow \mathbb{C}^\delta \rightarrow \\ &\rightarrow H^2(X, \sigma^* \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + C)) \rightarrow H^2(X, \Omega_X^1(2K_X + C)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Por la fórmula de proyección, tenemos que

$$R^i \sigma_*(\sigma^* \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + C)) \cong \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + C) \otimes R^i \sigma_* \mathcal{O}_X = 0,$$

para todo $i > 0$.

Entonces, por [17, III.8.1], existen isomorfismos naturales, para cada $i \geq 0$,

$$\begin{aligned} H^i(X, \sigma^* \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + C)) &\cong H^i(\mathbb{F}_n, \sigma_*(\sigma^* \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + C))) \\ &\cong H^i(\mathbb{F}_n, \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + C)), \end{aligned} \quad (28)$$

ya que $\sigma_*(\sigma^* \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + C)) \cong \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + C) \otimes \sigma_* \mathcal{O}_X$ por la fórmula de proyección, y $\sigma_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}$.

Lema 4.1.12 ([11, Lema 3.6]). *Si $a \geq 5$ y $b \geq (a-2)n+6$, o si $n=0$, $a \geq 5$, $b \geq 5$, entonces*

$$H^i(\mathbb{F}_n, \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + C)) = 0$$

para $i = 1, 2$.

Lema 4.1.13. *Supongamos que $a \geq 5$ y $b \geq (a-2)n+6$, o que $a \geq 5$ y $b \geq 5$ para $n=0$. Entonces, se tiene que*

- $H^0(X, \Omega_X^1(2K_X + \tilde{C})) \cong H^0(\mathbb{F}_n, \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + C)),$
- $H^1(X, \Omega_X^1(2K_X + \tilde{C})) = \mathbb{C}^\delta,$
- $H^2(X, \Omega_X^1(2K_X + \tilde{C})) = 0.$

Demostración. Se sigue de la sucesión exacta inducida en cohomología de la sucesión (4.1.10) y del Lema 4.1.12. ■

Ahora, al tensorizar la sucesión (4.1.9) con $\mathcal{O}_X(2K_X + 2\tilde{C})$, obtenemos

$$0 \rightarrow \sigma^* \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + 2C) \otimes \mathcal{O}_X(-2E) \rightarrow \Omega_X^1(2K_X + 2\tilde{C}) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{\delta} \mathcal{O}_{E_j}(2E_j + 2K_X + 2\tilde{C}) \rightarrow 0, \quad (4.1.14)$$

pues $2K_X + 2\tilde{C} = 2(\sigma^* K_{\mathbb{F}_n} + E) + 2(\sigma^* C - 2E) = \sigma^*(2K_{\mathbb{F}_n} + 2C) - 2E$. Note que

$$\deg(\mathcal{O}_{E_j}(2E_j + 2K_X + 2\tilde{C})) = 2E_j^2 + 2K_X \cdot E_j + 2\tilde{C} \cdot E_j = 0, \quad (4.1.15)$$

por lo tanto $H^0(E_j, \mathcal{O}_{E_j}(2E_j + 2K_X + 2\tilde{C})) \cong \mathbb{C}$ y $H^1(E_j, \mathcal{O}_{E_j}(2E_j + 2K_X + 2\tilde{C})) = 0$, y la sucesión exacta inducida en cohomología de (4.1.14) es

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, \sigma^* \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + 2C) \otimes \mathcal{O}_X(-2E)) &\rightarrow H^0(X, \Omega_X^1(2K_X + 2\tilde{C})) \rightarrow \mathbb{C}^\delta \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(X, \sigma^* \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + 2C) \otimes \mathcal{O}_X(-2E)) \rightarrow H^1(X, \Omega_X^1(2K_X + 2\tilde{C})) \rightarrow 0 \rightarrow \\ &\rightarrow H^2(X, \sigma^* \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + 2C) \otimes \mathcal{O}_X(-2E)) \rightarrow H^2(X, \Omega_X^1(2K_X + 2\tilde{C})) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Nuevamente, por la fórmula de proyección

$$R^i \sigma_*(\sigma^* \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + 2C) \otimes \mathcal{O}_X(-2E)) \cong \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + 2C) \otimes R^i \sigma_* \mathcal{O}_X(-2E) = 0,$$

ya que $R^i \sigma_* \mathcal{O}_X(-2E) = 0$ para todo $i > 0$. Por lo tanto, existen isomorfismos naturales, para cada $i \geq 0$,

$$\begin{aligned} H^i(X, \sigma^* \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + 2C) \otimes \mathcal{O}_X(-2E)) &\cong H^i(\mathbb{F}_n, \sigma_*(\sigma^* \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + 2C) \otimes \mathcal{O}_X(-2E))) \\ &\cong H^i(\mathbb{F}_n, \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + 2C) \otimes \mathcal{I}_Z^2), \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

pues

$$\sigma_*(\sigma^* \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + 2C) \otimes \mathcal{O}_X(-2E)) \cong \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + 2C) \otimes \sigma_* \mathcal{O}_X(-2E)$$

y

$$\sigma_* \mathcal{O}_X(-2E) = \mathcal{I}_Z^2,$$

donde $\mathcal{I}_Z$ es la gavilla de ideales de Z en $\mathbb{F}_n$ y $\mathcal{I}_Z^2$ es el producto $\mathcal{I}_Z \cdot \mathcal{I}_Z$.

Lema 4.1.18. *Supongamos que $Z = \{p_1, \dots, p_\delta\}$ es un subesquema de dimensión cero de $\mathbb{F}_n$, formado por δ puntos cerrados distintos reducidos. Sea $\mathfrak{m}_{p_j}$ la gavilla ideal maximal de p_j en $\mathbb{F}_n$, es decir, la fibra de $\mathfrak{m}_{p_j}$ en un punto $y \neq p_j$ es $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n, y}$ y en p_j es el ideal maximal $\mathfrak{m}_{p_j} \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n, p_j} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n, p_j}$. Entonces*

$$\mathcal{I}_Z \cong \bigotimes_{j=1}^{\delta} \mathfrak{m}_{p_j},$$

de manera similar, $\mathcal{I}_Z^2 \cong \bigotimes_{j=1}^{\delta} \mathfrak{m}_{p_j}^2$.

Demostración. Esta demostración es de manera general, consideremos Y una variedad algebraica suave de dimensión 2. Para cada punto $x \in Y$ sea $\mathfrak{m}_x$ la gavilla de ideales maximal de x en Y , es decir, la fibra de $\mathfrak{m}_x$ en un punto $y \neq x$ es $\mathcal{O}_{Y, y}$ y en x es el ideal maximal $\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{Y, x} \subset \mathcal{O}_{Y, x}$.

Sea $Z = \{p_1, \dots, p_s\}$ un conjunto de puntos cerrados distintos reducidos, y considere la inclusión $i : Z \hookrightarrow Y$ y el morfismo

$$i^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow i_* \mathcal{O}_Z.$$

Nótese que $\mathcal{I}_Z = \ker i^\#$.

Observa que, para cada $x \in Y$, se tiene

$$i_x^\# = \begin{cases} i_x^\# : \mathcal{O}_{Y,x} \rightarrow 0 & \text{si } x \notin Z, \\ i_x^\# : \mathcal{O}_{Y,x} \rightarrow (i_* \mathcal{O}_Z)_x & \text{si } x \in Z. \end{cases}$$

En el caso de que $x \in Z$, tenemos que $\mathcal{O}_{Y,x}$ es un anillo local de dimensión de Krull igual a dos, mientras que $\mathcal{O}_{Z,x}$ es un anillo local de dimensión de Krull cero. Puesto que Z es un subesquema reducido, $\mathcal{O}_{Z,x}$ no tiene elementos nilpotentes. Además, todo elemento del ideal maximal de $\mathcal{O}_{Z,x}$ es nilpotente, lo que implica que el ideal maximal es cero. Por lo tanto, como $\ker i_x^\#$ es precisamente el ideal maximal de $\mathcal{O}_{Y,x}$, se concluye que las fibras de $\mathcal{I}_Z$ coinciden con las fibras de $\mathfrak{m}_{p_1} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{m}_{p_s}$, es decir, en un punto $y \neq p_j$ es $\mathcal{O}_{Y,y}$ y en p_j es el ideal maximal $\mathfrak{m}_{p_j} \subset \mathcal{O}_{Y,p_j}$. ■

Sea $\mathcal{F} = \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + 2C)$, usamos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_Z^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}/\mathcal{I}_Z^2 \rightarrow 0.$$

Al tensorizar esta sucesión con $\mathcal{F}$, y calcular la sucesión larga exacta en cohomología, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{F} \otimes \mathcal{I}_Z^2) &\rightarrow H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{F}) \xrightarrow{h} H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{F} \otimes (\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}/\mathcal{I}_Z^2)) \\ &\rightarrow H^1(\mathbb{F}_n, \mathcal{F} \otimes \mathcal{I}_Z^2) \rightarrow H^1(\mathbb{F}_n, \mathcal{F}) \rightarrow 0 \\ &\rightarrow H^2(\mathbb{F}_n, \mathcal{F} \otimes \mathcal{I}_Z^2) \rightarrow H^2(\mathbb{F}_n, \mathcal{F}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Lema 4.1.19 ([11, Lema 3.6]). *Supongamos que $a \geq 3$ y $b \geq (a-1)n + 3$, entonces $H^1(\mathbb{F}_n, \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + 2C)) = 0$ para $i = 1, 2$.*

Observación 4.1.20. Si se cumplen las condiciones del Lema 4.1.19 y h es sobreyectiva, entonces, por la sucesión exacta (4.1.16) y las identificaciones en (4.1.17)

$$H^1(\mathbb{F}_n, \mathcal{F} \otimes \mathcal{I}_Z^2) \cong H^1(X, \sigma^* \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + 2C) \otimes \mathcal{O}_X(-2E)) = 0.$$

Definición 4.1.21. Sea $\mathcal{E}$ un haz vectorial en $\mathbb{F}_n$. Decimos que $\mathcal{E}$ es k -jet generado (k -jet spanned) en p si la aplicación evaluación

$$X \times H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{E}) \rightarrow H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}/\mathfrak{m}_p^{k+1})$$

es sobreyectiva.

Definición 4.1.22. Sea $\mathcal{E}$ un haz vectorial en $\mathbb{F}_n$. Decimos que $\mathcal{E}$ es k -jet amplio (k -jet ample) en Z si para toda δ -tupla $(k_1, \dots, k_\delta)$ de enteros positivos tales que $\sum_{i=1}^\delta k_i = k + 1$, la aplicación evaluación

$$X \times H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{E}) \rightarrow H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}/\otimes_{i=1}^\delta \mathfrak{m}_{p_i}^{k_i})$$

es sobreyectiva.

Estas definiciones son generales para haces vectoriales en una variedad suave; para más detalles, véase [3]. En particular, el que $\mathcal{E}$ sea k -jet amplio implica que es k -jet generado. Nótese que $\mathcal{E}$ es 0-jet amplio si y solo si $\mathcal{E}$ es 0-jet generado, si y solo si $\mathcal{E}$ es generado por sus secciones globales. Además, para haces lineales L , se satisface que L es 1-jet generado si y solo si L es un haz lineal libre de puntos base, y L es 1-jet amplio si y solo si L es muy amplio.

Para el caso $\delta = 1$, por la identificación en el Lema 4.1.18, el morfismo h corresponde a

$$H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{F} \otimes (\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}/\mathfrak{m}_p^2)).$$

El siguiente lema nos garantiza la sobreyectividad de h en el caso $\delta = 1$.

Lema 4.1.23. *Sea $p \in \mathbb{F}_n$. Supongamos que $a \geq 3$ y $b \geq (a-1)n + 2$. Entonces $\mathcal{F} = \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + 2C)$ es 1-jet generado en p .*

Demostración. Sea $L = \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(C_0 + nF)$ haz lineal en $\mathbb{F}_n$. Dado que $\mathcal{L}$ es libre de puntos base entonces $\mathcal{L}$ es 1-jet generado en el punto p . Note que

$$\mathcal{F} \otimes L^\vee \cong \Omega_{\mathbb{F}_n}^1((2a-5)C_0 + (2b-4-3n)F)$$

es globalmente generado si $2a-5 \geq 0$ y $2b-4-3n \geq (2a-5)n$ (pues recordemos que $\Omega_{\mathbb{F}_n}^1$ es globalmente generado y un divisor $r_1C_0 + r_2F$ es libre de puntos base si $r_2 \geq r_1 \cdot n$). Así, con estas condiciones, vemos que $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^\vee$ es 0-jet generado y $\mathcal{L}$ es 1-jet generado. Por tanto, por [3, Proposición 2.3], $\mathcal{F} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{L}$ es 1-jet generado. ■

En general, para δ puntos, tenemos lo siguiente.

Lema 4.1.24. *Supongamos que $a \geq \delta + 2$ y $b \geq (a-1)n + \delta + 2$. Entonces $\mathcal{F}$ es $(2\delta-1)$ -jet generado en Z . En particular, h es sobreyectiva.*

Demostración. Sea $L = \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}((2\delta-1)C_0 + (2\delta n + 2\delta - n - 1)F)$. Como $C_0 + (n+1)F$ es 1-jet amplio (pues recordemos que un divisor $r_1C_0 + r_2F$ en $\mathbb{F}_n$ es muy amplio si $r_2 > r_1 \cdot n$), entonces L es $(2\delta-1)$ -jet amplio. Note que $\mathcal{F} \otimes L^\vee = \Omega_{\mathbb{F}_n}^1((2a-3-2\delta)C_0 + (2b-3-n-2\delta n-2\delta)F)$ es globalmente generado si $2a-3-2\delta \geq 0$ y $2b-3-n-2\delta n-2\delta \geq (2a-3-2\delta)n$. Así, bajo estas condiciones, vemos que $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{-1}$ es 0-jet ample y $\mathcal{L}$ es $(2\delta-1)$ -jet amplio. Por tanto, $\mathcal{F} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{L}$ es $(2\delta-1)$ -jet amplio.

En particular, para la δ -tupla $\{2, \dots, 2\}$, la aplicación evaluación

$$H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{F} \otimes (\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}/\bigotimes_{i=1}^{\delta} \mathfrak{m}_{p_i}^2))$$

es sobreyectiva, y este morfismo es h . ■

Corolario 4.1.25. *Si $a \geq \delta + 2$ y $b \geq (a-1)n + 6 + \delta + 2$, entonces $H^1(\mathbb{F}_n, \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + 2C)) = 0$.*

Demostración. Por los Lemas 4.1.19 y 4.1.24. ■

Por lo tanto, obtenemos el siguiente resultado

Proposición 4.1.26. *Supongamos que $a \geq \max\{5, \delta + 2\}$ y $b \geq \max\{(a-2)n+6, (a-1)n + \delta + 2\}$, o $n = 0$, $a \geq \max\{5, \delta + 2\}$ y $b \geq \max\{5, \delta + 2\}$. Entonces:*

$$\begin{aligned} H^0(X, \Omega_X^1(2K_X + \tilde{C})) &\cong \mathbb{C}^{8g+22-3C^2}, \\ H^1(X, \Omega_X^1(2K_X + \tilde{C})) &\cong \mathbb{C}^\delta, \\ H^2(X, \Omega_X^1(2K_X + \tilde{C})) &\cong 0, \\ H^0(X, \Omega_X^1(2K_X + 2\tilde{C})) &\cong \mathbb{C}^{16g-4C^2-5\delta+14}, \\ H^1(X, \Omega_X^1(2K_X + 2\tilde{C})) &\cong H^2(X, \Omega_X^1(2K_X + 2\tilde{C})) = 0, \\ H^0(\tilde{C}, \Omega_X^1(2K_X + 2\tilde{C})|_{\tilde{C}}) &\cong \mathbb{C}^{8g-C^2-4\delta-8}, \\ H^1(\tilde{C}, \Omega_X^1(2K_X + 2\tilde{C})|_{\tilde{C}}) &= 0. \end{aligned}$$

Demostración. Demostraremos que, para cada divisor $\tilde{D}$ en X , la característica de Euler holomorfa $\chi(\Omega_X^1(\tilde{D}))$ para el haz vectorial $\mathcal{E} = \Omega_X^1(\tilde{D})$ es igual a $\tilde{D}^2 - (2 + \delta)$; y bajo las hipótesis podemos aplicar el Lema 4.1.13 y el Corolario 4.1.25. Por el teorema de Noether para superficies tenemos:

$$\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}) = \frac{1}{12}(K_X^2 + \chi_{\text{top}}(\mathbb{F}_n)) = \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2),$$

con las clases de Chern $c_1 = c_1(T_{\mathbb{F}_n}) = -c_1(\Omega_{\mathbb{F}_n}^1)$ y $c_2 = c_2(T_{\mathbb{F}_n}) = c_2(\Omega_{\mathbb{F}_n}^1)$. Dado que $\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}) = 1$, entonces $\chi_{\text{top}}(\mathbb{F}_n) = 4$, y por la invariancia biracional tenemos $\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n})$ y $\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{12}(K_X^2 + \chi_{\text{top}}(X)) = \frac{1}{12}(K_{\mathbb{F}_n}^2 - \delta + \chi_{\text{top}}(X))$ pues recordemos que $\sigma : X \rightarrow \mathbb{F}_n$ es el blow-up de $\mathbb{F}_n$ en $Z = \{p_1, \dots, p_\delta\}$. Esto nos dice que $\chi_{\text{top}}(X) = \chi_{\text{top}}(\mathbb{F}_n) + \delta = 4 + \delta$. El teorema de Riemann–Roch para un haz vectorial de rango 2 en una superficie nos dice que

$$\chi(\mathcal{E}) = 2\chi(\mathcal{O}_X) - \frac{1}{2}(K_X \cdot c_1(\mathcal{E})) + \frac{1}{2}(c_1^2(\mathcal{E}) - 2c_2(\mathcal{E})),$$

donde $c_i(\mathcal{E})$ son las clases de Chern de $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{E} = \Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}_X(\tilde{D})$ para un divisor $\tilde{D}$ en X , entonces $c_1(\mathcal{E}) = c_1(\Omega_X^1) + 2c_1(\mathcal{O}_X(\tilde{D})) = K_X + 2\tilde{D}$ y $c_2(\mathcal{E}) = c_2(\Omega_X^1) + c_1(\Omega_X^1)c_1(\mathcal{O}_X(\tilde{D})) + (c_1(\mathcal{O}_X(\tilde{D})))^2 = 4 + \delta + K_X \cdot \tilde{D} + \tilde{D}^2$. Así,

$$\chi(\Omega_X^1(\tilde{D})) = 2 - \frac{1}{2}(K_X^2 + 2K_X \cdot \tilde{D}) - \frac{(K_X + \tilde{D})^2 - 2(4 + \delta + K_X \cdot \tilde{D} + \tilde{D}^2)}{2} = \tilde{D}^2 - (2 + \delta).$$

■

Por lo tanto, el diagrama (4.1.1) es el siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & & & & 0 & & \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 H^0(\Omega_X^1(2K_X + \tilde{C})) & \xlongequal{\quad} & H^0(\Omega_X^1(2K_X + \tilde{C})) & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 H^0(\Omega_X^1(\log \tilde{C})(2K_X + \tilde{C})) & \hookrightarrow & H^0(\Omega_X^1(2K_X + 2\tilde{C})) & \xrightarrow{H^0(\rho)} & H^0((\Omega_{\tilde{C}}^1)^{\otimes 3}) & \rightarrow & H^1(\Omega_X^1(\log \tilde{C})(2K_X + \tilde{C})) \\
 \downarrow & & \downarrow \alpha & & \parallel & & \downarrow \\
 H^0(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(2K_X + \tilde{C})) & \hookrightarrow & H^0(\Omega_X^1(2K_X + 2\tilde{C})|_{\tilde{C}}) & \xrightarrow{\beta} & H^0((\Omega_{\tilde{C}}^1)^{\otimes 3}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(2K_X + \tilde{C})) \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 H^1(\Omega_X^1(2K_X + \tilde{C})) & \xlongequal{\quad} & H^1(\Omega_X^1(2K_X + \tilde{C})) & & & & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 H^1(\Omega_X^1(\log \tilde{C})(2K_X + \tilde{C})) & & 0 & & & & \\
 \downarrow & & & & & & \\
 H^1(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(2K_X + \tilde{C})) & & & & & & \\
 \downarrow & & & & & & \\
 0. & & & & & &
 \end{array}$$

Observación 4.1.27. El diagrama anterior nos dice que el corango de $H^0(\rho)$ es igual a la dimensión de $H^1(X, \Omega_X^1(\log \tilde{C})(2K_X + \tilde{C}))$.

La siguiente proposición nos da condiciones para calcular la dimensión del primer grupo de cohomología de gavilla logarítmica, $H^1(X, \Omega_X^1(\log \tilde{C})(2K_X + \tilde{C}))$.

Proposición 4.1.28. *Supongamos que $a \geq 5$ y $b \geq (a-2)n+6$, o que $a \geq 5$ y $b \geq 5$ si $n=0$. Entonces*

$$H^1(X, \Omega_X^1(\log \tilde{C})(2K_X + \tilde{C})) \cong H^1(C, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(2K_{\mathbb{F}_n} + C)|_C).$$

Demostración. Tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_X^1(\log \tilde{C}) \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{C}} \rightarrow 0,$$

y existe una sucesión exacta larga de gavillas sobre $\mathbb{F}_n$:

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow \sigma_* \Omega_X^1 &\rightarrow \sigma_* \Omega_X^1(\log \tilde{C}) \rightarrow \sigma_* \mathcal{O}_{\tilde{C}} \rightarrow \\
 &\rightarrow R^1 \sigma_* \Omega_X^1 \rightarrow R^1 \sigma_* \Omega_X^1(\log \tilde{C}) \rightarrow R^1 \sigma_* \mathcal{O}_{\tilde{C}} \rightarrow \\
 &\rightarrow R^2 \sigma_* \Omega_X^1 \rightarrow R^2 \sigma_* \Omega_X^1(\log \tilde{C}) \rightarrow 0.
 \end{aligned} \tag{4.1.29}$$

Del isomorfismo en (4.1.6) deducimos que $\sigma_* \Omega_X^1 \cong \Omega_{\mathbb{F}_n}^1$, y por los isomorfismos en (4.1.7) y (4.1.8) tenemos $R^1 \sigma_* \Omega_X^1 \cong \mathcal{O}_Z$ y $R^2 \sigma_* \Omega_X^1 \cong 0$. Por el lema en la siguiente página, también se tiene que $R^1 \sigma_* \Omega_X^1(\log \tilde{C}) = 0$, así $R^1 \sigma_* \mathcal{O}_{\tilde{C}} = 0$.

Por lo que, la sucesión exacta (4.1.29) es,

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{F}_n} \rightarrow \sigma_* \Omega_X^1(\log \tilde{C}) \rightarrow \sigma_* \mathcal{O}_{\tilde{C}} \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0. \tag{4.1.30}$$

Sea $\mathcal{G} := \text{Im}(\sigma_*\Omega_X^1(\log \tilde{C}) \rightarrow \sigma_*\mathcal{O}_{\tilde{C}})$ y obtenemos dos sucesiones exactas

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{F}_n} \rightarrow \sigma_*\Omega_X^1(\log \tilde{C}) \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0, \quad (4.1.31)$$

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \sigma_*\mathcal{O}_{\tilde{C}} \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0. \quad (4.1.32)$$

Por otro lado, consideremos la sucesión exacta de la normalización de C ,

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \varphi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}} \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0, \quad (4.1.33)$$

donde $\varphi : \tilde{C} \rightarrow C$ es el morfismo normalización de C . Note que, si $j : C \hookrightarrow \mathbb{F}_n$ es la inclusión, entonces $\sigma|_{\tilde{C}} = j \circ \varphi$, y por tanto $\sigma_*\mathcal{O}_{\tilde{C}} = (j \circ \varphi)_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}$. Como el morfismo j es una inmersión cerrada entonces el funtor j_* es exacto y tenemos que al aplicarlo en la sucesión 4.1.33 obtenemos una sucesión exacta sobre $\mathbb{F}_n$,

$$0 \rightarrow j_*\mathcal{O}_C \rightarrow j_*(\varphi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}) \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0. \quad (4.1.34)$$

Ahora, usamos la identidad $\sigma_*\mathcal{O}_{\tilde{C}} = (j \circ \varphi)_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}$ y tenemos la sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \sigma_*\mathcal{O}_{\tilde{C}} \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0. \quad (4.1.35)$$

Al comparar las sucesiones exactas 4.1.32 y 4.1.35, obtenemos el siguiente isomorfismo de gavillas en $\mathbb{F}_n$

$$\mathcal{G} \cong \mathcal{O}_C.$$

Por tanto, al tensorizar la sucesión exacta 4.1.31 con $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(2K_{\mathbb{F}_n} + C)$ obtenemos,

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + C) \rightarrow \sigma_*\Omega_X^1(\log \tilde{C})(2K_X + \tilde{C}) \rightarrow \mathcal{O}_C \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(2K_{\mathbb{F}_n} + C) \rightarrow 0,$$

pues $2K_X + \tilde{C} = \sigma^*(2K_{\mathbb{F}_n} + C)$ y $\sigma_*\mathcal{O}_X(2K_X + \tilde{C}) = \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(2K_{\mathbb{F}_n} + C)$. Así, esta sucesión induce una sucesión exacta larga en cohomología,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + C)) &\rightarrow H^0(\sigma_*\Omega_X^1(\log \tilde{C})(2K_X + \tilde{C})) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_C(2K_{\mathbb{F}_n} + C)) \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + C)) \rightarrow H^1(\sigma_*\Omega_X^1(\log \tilde{C})(2K_X + \tilde{C})) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_C(2K_{\mathbb{F}_n} + C)) \rightarrow, \\ &\rightarrow H^2(\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + C)) \rightarrow H^2(\sigma_*\Omega_X^1(\log \tilde{C})(2K_X + \tilde{C})) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Con las condiciones del Lema 4.1.13, obtenemos la anulación de $H^1(\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + C))$ y de $H^2(\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(2K_{\mathbb{F}_n} + C))$, por tanto, tenemos el isomorfismo

$$H^1(\sigma_*\Omega_X^1(\log \tilde{C})(2K_X + \tilde{C})) \cong H^1(\mathcal{O}_C(2K_{\mathbb{F}_n} + C)).$$

Ahora, por la fórmula de proyección, $R^1\sigma_*\Omega_X^1(\log \tilde{C})(2K_X + \tilde{C}) = R^1\sigma_*\Omega_X^1(\log \tilde{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(2K_{\mathbb{F}_n} + C)$ y como $R^1\sigma_*\Omega_X^1(\log \tilde{C}) = 0$, entonces existe un isomorfismo

$$H^1(\Omega_X^1(\log \tilde{C})(2K_X + \tilde{C})) \cong H^1(\sigma_*\Omega_X^1(\log \tilde{C})(2K_X + \tilde{C})).$$

Lo cual concluye con la demostración. ■

Demostraremos una propiedad que utilizamos en la proposición anterior.

Lema 4.1.36. $R^1\sigma_*\Omega_X^1(\log \tilde{C}) = 0$.

Demostración. Sea $\hat{E} := E_j$ y $p := p_j$ para algún $j \in \{1, \dots, \delta\}$.

Para cada $t \geq 1$, definimos $X_{(t)} := X \times_{\mathbb{F}_n} \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n, p}/\mathfrak{m}_p^t)$. Notemos que para $t = 1$, obtenemos la fibra en p , esto es, $X_{(1)} \cong \hat{E}$, y para $t > 1$ obtenemos un esquema con elementos nilpotentes teniendo el mismo espacio base $X_{(1)}$, esto es, $X_{(t)} \cong t\hat{E}$. Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_{(t)} & \xrightarrow{\nu} & X \\ \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \text{Spec } \mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p^t & \longrightarrow & \mathbb{F}_n. \end{array}$$

Sea $\mathcal{F}_t := \nu^*\Omega_X^1(\log \tilde{C})$, donde $\nu : X_{(t)} \rightarrow X$ el morfismo natural. El teorema de funciones formales ([17], III 11.1) enuncia que

$$R^1\sigma_*\Omega_X^1(\log \tilde{C})_p^\wedge = \varprojlim H^1(X_{(t)}, \mathcal{F}_t). \quad (4.1.37)$$

Notemos que, $\nu^*\Omega_X^1(\log \tilde{C}) = \nu^{-1}\Omega_X^1(\log \tilde{C}) \otimes_{\nu^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_{(t)}} \cong \Omega_X^1(\log \tilde{C})|_{X_{(t)}}$. Tenemos la sucesión exacta en X

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\hat{E}}(-t\hat{E}) \rightarrow \mathcal{O}_{t\hat{E}+\hat{E}} \rightarrow \mathcal{O}_{t\hat{E}} \rightarrow 0, \quad (4.1.38)$$

asi, al tensorizar esta sucesión con $\Omega_X^1(\log \tilde{C})$,

$$0 \rightarrow \Omega_X^1(\log \tilde{C}) \otimes \mathcal{O}_{\hat{E}}(-t\hat{E}) \rightarrow \Omega_X^1(\log \tilde{C}) \otimes \mathcal{O}_{X_{(t+1)}} \rightarrow \Omega_X^1(\log \tilde{C}) \otimes \mathcal{O}_{X_{(t)}} \rightarrow 0 \quad (4.1.39)$$

esto es,

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{O}_{\hat{E}}(-t\hat{E}) \rightarrow \mathcal{F}_{t+1} \rightarrow \mathcal{F}_t \rightarrow 0. \quad (4.1.40)$$

Ahora, demostraremos que $H^1(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{O}_{\hat{E}}(-t\hat{E})) = 0$, lo cual implica que

$$H^1(X_{(t+1)}, \mathcal{F}_{t+1}) \cong H^1(X_{(t)}, \mathcal{F}_t),$$

esto es $R^1\sigma_*\Omega_X^1(\log \tilde{C})_p^\wedge = 0$. Como $R^1\sigma_*\Omega_X^1(\log \tilde{C})$ es una gavilla coherente con soporte en Z , y $R^1\sigma_*\Omega_X^1(\log \tilde{C})_{p_j}^\wedge = 0$ para todo $p_j \in Z$, entonces $R^1\sigma_*\Omega_X^1(\log \tilde{C}) = 0$. Al tensorizar la sucesión (4.1.9) por $\mathcal{O}_{\hat{E}}$, se obtiene

$$0 \rightarrow \text{Tor}_X^1(\mathcal{O}_{\hat{E}}(2\hat{E}), \mathcal{O}_{\hat{E}}) \rightarrow (\sigma^*\Omega_{\mathbb{F}_n}^1)|_{\hat{E}} \rightarrow (\Omega_X^1)|_{\hat{E}} \rightarrow \mathcal{O}_{\hat{E}}(2\hat{E}) \rightarrow 0. \quad (4.1.41)$$

Observemos que $\text{Tor}_X^1(\mathcal{O}_{\hat{E}}(2\hat{E}), \mathcal{O}_{\hat{E}}) \cong \mathcal{O}_{\hat{E}}(\hat{E})$ y $(\sigma^*\Omega_{\mathbb{F}_n}^1)|_{\hat{E}} \cong \mathcal{O}_{\hat{E}} \oplus \mathcal{O}_{\hat{E}}$, esto implica $(\Omega_X^1)|_{\hat{E}} \cong \mathcal{O}_{\hat{E}}(2\hat{E}) \oplus \mathcal{O}_{\hat{E}}(-\hat{E})$.

Sea $B := \tilde{C} \cap \hat{E} = \{q_1, q_2\}$ los puntos de intersección pues $\tilde{C} \cdot \hat{E} = 2$. Consideremos la inclusión $i : \hat{E} \hookrightarrow X$, el diagrama de ([18], Lema 2.2) en nuestro contexto, tiene la

forma

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & T_{\hat{E}}(-\log B) & \longrightarrow & i^*T_X(-\log \tilde{C}) & \longrightarrow & N_{\log \tilde{C}/B} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & T_{\hat{E}} & \longrightarrow & i^*T_X & \longrightarrow & N_{\hat{E}|X} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_B & \longrightarrow & i^*\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{C}) & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0,
 \end{array}$$

donde $T_X(-\log \tilde{C})$ es la gavilla tangente logarítmica asociada a $\tilde{C}$, y es el dual de la gavilla $\Omega_X^1(\log \tilde{C})$. De manera similar, para la gavilla $T_{\hat{E}}(-\log B)$ en $\hat{E}$. Dado que $T_{\hat{E}} \cong T_{\mathbb{P}^1} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ y $\mathcal{O}_B = \mathcal{O}_{q_1} \oplus \mathcal{O}_{q_2}$ concluimos que $T_{\hat{E}}(-\log B) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$. Como $N_{\hat{E}|X} \cong \mathcal{O}_{\hat{E}}(\hat{E}) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ entonces $i^*T_X = T_X|_{\hat{E}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$. Por lo tanto $i^*T_X(-\log \tilde{C}) = T_X(-\log \tilde{C})|_{\hat{E}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ pues $N_{\log \tilde{C}/B} \cong N_{\hat{E}|X} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$.

Así, obtenemos

$$\mathcal{F}_1 = \Omega_X^1(\log \tilde{C})|_{\hat{E}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, \quad (4.1.42)$$

y por lo tanto $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{O}_{\hat{E}}(-t\hat{E}) \cong (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(t) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(t+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(t)$. En particular, tenemos que $H^1(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{O}_{\hat{E}}(-t\hat{E})) \cong 0$. ■

Ahora calculemos la dimensión de $H^1(\mathcal{O}_C(2K_{\mathbb{F}_n} + C))$.

Lema 4.1.43. *Si $a \geq 3$ y $b \geq (a-1)n + 3$, entonces*

$$H^1(\mathcal{O}_C(2K_{\mathbb{F}_n} + C)) \cong H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-K_{\mathbb{F}_n})).$$

Demostración. De la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-C) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0,$$

al tensorizar con $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(2K_{\mathbb{F}_n} + C)$ obtenemos

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(2K_{\mathbb{F}_n}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(2K_{\mathbb{F}_n} + C) \rightarrow \mathcal{O}_C(2K_{\mathbb{F}_n} + C) \rightarrow 0,$$

lo cual induce la sucesión larga en cohomología:

$$\begin{aligned}
 0 &\rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(2K_{\mathbb{F}_n})) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(2K_{\mathbb{F}_n} + C)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_C(2K_{\mathbb{F}_n} + C)) \rightarrow \\
 &\rightarrow H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(2K_{\mathbb{F}_n})) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(2K_{\mathbb{F}_n} + C)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_C(2K_{\mathbb{F}_n} + C)) \rightarrow \\
 &\rightarrow H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(2K_{\mathbb{F}_n})) \rightarrow H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(2K_{\mathbb{F}_n} + C)) \rightarrow 0.
 \end{aligned} \quad (4.1.44)$$

Si $a \geq 3$ y $b \geq (a-1)n + 3$ entonces $K_{\mathbb{F}_n} + C$ es un divisor amplio sobre $\mathbb{F}_n$, y por el teorema de anulamiento de Kawamata–Viehweg, finalmente

$$H^1(\mathcal{O}_C(2K_{\mathbb{F}_n} + C)) \cong H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(2K_{\mathbb{F}_n})) \cong H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-K_{\mathbb{F}_n}))^\vee,$$

y sabemos que

$$\dim H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-K_{\mathbb{F}_n})) = \begin{cases} 9, & \text{si } n \leq 2, \\ n+6, & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

■

En resumen, obtenemos el teorema que nos calcula el corango de $H^0(\rho)$.

Teorema 4.1.45. *Sea $Z = \{p_1, \dots, p_\delta\}$ un conjunto de δ puntos cerrados reducidos en $\mathbb{F}_n$. Sea C una curva nodal en $\mathbb{F}_n$, con nodos en Z y no otras singularidades, y linealmente equivalente a $aC_0 + bF$ con a, b números enteros positivos. Sea $X = \text{Bl}_Z \mathbb{F}_n$ y $\tilde{C}$ la normalización de C . Supongamos $a \geq \max\{5, \delta + 2\}$ y $b \geq \max\{(a-2)n + 6, (a-1)n + \delta + 2\}$ o $a \geq \max\{5, \delta + 2\}$ y $\max\{5, \delta + 2\}$ para $n = 0$. Entonces*

$$\text{corank } H^0(\rho) = \dim H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-K_{\mathbb{F}_n})) = \begin{cases} 9, & \text{si } n \leq 2, \\ n+6, & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Demostración. Por la Observación 4.1.27, se tiene

$$\text{corank } H^0(\rho) = \dim H^1(X, \Omega_X^1(\log \tilde{C})(2K_X + \tilde{C})).$$

Además, por la Proposición 4.1.28

$$\dim H^1(X, \Omega_X^1(\log \tilde{C})(2K_X + \tilde{C})) = \dim H^1(\tilde{C}, \mathcal{O}_X(2K_X + \tilde{C})|_{\tilde{C}}).$$

Finalmente, por la Proposición 4.1.43, obtenemos

$$\dim H^1(\mathcal{O}_C(2K_{\mathbb{F}_n} + C)) = \dim H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-K_{\mathbb{F}_n})).$$

lo cual prueba el teorema. ■

Por otro lado, también podemos estudiar la sobreyectividad del morfismo $H^0(\rho)$ pues el diagrama (4.1) nos dice que si

$$H^1(\Omega_X^1(\log \tilde{C})(2K_X + \tilde{C})) = 0,$$

entonces $H^0(\rho)$ es sobreyectiva. Podemos encontrar condiciones en los coeficientes para que esto ocurra.

Teorema 4.1.46. *Supongamos que $a \geq 5$ y $b \geq (a-2)n + 6$, o que $a \geq 5$ y $b \geq 5$ si $n = 0$. Si $\delta \geq a + b + \frac{1-an}{2}$ tal que $g - \delta \geq 2$, entonces $H^0(\rho)$ es sobreyectiva.*

Demostración. Por la Proposición 4.1.28, tenemos que

$$H^1(\Omega_X^1(\log \tilde{C})(2K_X + \tilde{C})) \cong H^1(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(2K_X + \tilde{C})) \cong H^0(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(-K_X))^\vee.$$

Entonces, $H^0(\rho)$ es sobreyectiva si

$$-K_X \cdot \tilde{C} = 2b + 2a - an - 2\delta < 0.$$

■

4.2 Sobreyectividad de $\Phi_{\mathcal{O}_X(K_X + \tilde{C})}$

En esta sección asumiremos que $p_j \notin C_0$ para todo $p_j \in Z$, Z como en el Teorema 4.1.45 y además que, para $i \neq j$, p_i y p_j no pertenecen a la misma fibra.

La demostración requiere descomponer un cierto divisor en X como la suma de tres divisores muy amplios; tal descomposición necesariamente implica un aumento en el género de la curva.

Consideremos el producto $X \times X$ y el blow-up

$$\pi : Y := Bl_{\Delta}(X \times X) \rightarrow X \times X$$

a lo largo de la diagonal $\Delta \subset X \times X$. Sea $\Lambda \subset Y$ el divisor excepcional. Para cualquier gavilla coherente $\mathcal{G}$ en X , denotemos por

$$(\mathcal{G})_i = (pr_i \circ \pi)^* \mathcal{G}, \quad \text{donde } Y \xrightarrow{\pi} X \times X \xrightarrow{pr_i} X,$$

y pr_i es la proyección i -ésima, $i = 1, 2$. Además, para todo divisor D en X , usaremos esta notación para definir un divisor en Y , es decir,

$$(D)_i = (pr_i \circ \pi)^* D.$$

Observación 4.2.1. Por la Observación 1.1.21, una condición suficiente para la sobreyectividad de $\Phi_{\mathcal{O}_X(K_X + \tilde{C})}$ es la anulación de

$$H^1(X \times X, pr_1^*(K_X + \tilde{C}) \otimes pr_2^*(K_X + \tilde{C}) \otimes \mathcal{I}_{\Delta}^2) \cong H^1(Y, (K_X + \tilde{C})_1 + (K_X + \tilde{C})_2 - 2\Lambda).$$

Dado que $K_Y \cong \pi^* K_{X \times X} + \Lambda$ y $\pi^* K_{X \times X} = \pi^*(pr_1^* K_X + pr_2^* K_X)$, se sigue que

$$K_Y \cong (K_X)_1 + (K_X)_2 + \Lambda,$$

y por tanto

$$(K_X + \tilde{C})_1 + (K_X + \tilde{C})_2 - 2\Lambda = K_Y + (\tilde{C})_1 + (\tilde{C})_2 - 3\Lambda.$$

Sea

$$\mathcal{L} = \mathcal{O}_Y(K_Y + (\tilde{C})_1 + (\tilde{C})_2 - 3\Lambda),$$

por lo tanto, queremos probar que:

$$H^1(Y, \mathcal{L}) = 0. \tag{4.2.2}$$

Ahora, definimos $M := \tilde{C} - E$,

$$A := \left[\frac{a}{3} \right] C_0 + \left[\frac{b}{3} \right] F,$$

y

$$B := (a - 2\left[\frac{a}{3} \right])C_0 + (b - 2\left[\frac{b}{3} \right])F,$$

donde $[r]$ denotará el mayor entero que es menor o igual al número real r . Como $\tilde{C} = \sigma^*C - 2E$, podemos expresar M como $\sigma^*C - 3E$, y

$$\begin{aligned} M &= \sigma^*C - 3E = \sigma^*(2A + B) - 3E \\ &= 2(\sigma^*A - E) + (\sigma^*B - E). \end{aligned}$$

El siguiente lema da condiciones numéricas que aseguran que el divisor $\sigma^*A - E$ en X es un divisor muy amplio, mediante el criterio de Reider. Para $\delta = 1$, estas condiciones pueden debilitarse, ya que X es una superficie tórica que surge por la transformación birracional de $\mathbb{F}_n$; en este caso, para probar que es un divisor muy amplio basta verificar que es un divisor amplio, lo cual sigue del criterio de Nakai–Moishezon.

Lema 4.2.3. *Si $a \geq 6$ y $b \geq \max\{(a+3)n, 6\delta - 3n + 3\}$, entonces $\sigma^*A - E$ es un divisor muy amplio sobre X .*

Demostración. Definamos

$$N := \sigma^*A - E - K_X.$$

Como $K_X = \sigma^*K_{\mathbb{F}_n} + E$, se sigue que

$$N = \sigma^*(A - K_{\mathbb{F}_n}) - 2E.$$

Escribimos

$$N = \left(\left[\frac{a}{3}\right] + 2\right) \sigma^*C_0 + \left(\left[\frac{b}{3}\right] + n + 2\right) \sigma^*F - 2E.$$

Queremos probar que $N + K_X$ es un divisor muy amplio. Usaremos el criterio de Reider del siguiente modo: Primero mostraremos que $N^2 \geq 10$. Luego verificaremos que no existe un divisor efectivo D tal que se cumpla alguna de las siguientes condiciones:

- (i) $N \cdot D = 0$ y $D^2 = -1$ o -2 ,
- (ii) $N \cdot D = 1$ y $D^2 = 0$ o -1 ,
- (iii) $N \cdot D = 2$ y $D^2 = 0$.

La inexistencia de tales divisores D , junto con $N^2 \geq 10$, implica por el criterio de Reider que $N + K_X$ es muy amplio. Dado que

$$N + K_X = \sigma^*A - E,$$

se concluye que $\sigma^*A - E$ es un divisor muy amplio en X .

Nótese que

$$\begin{aligned}
 N^2 &= \left(\left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor + 2 \right)^2 (\sigma^* C_0)^2 + \left(\left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor + n + 2 \right)^2 (\sigma^* F)^2 + 4E^2 + \\
 &\quad + 2 \left(\left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor + 2 \right) \left(\left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor + n + 2 \right) (\sigma^* C_0) \cdot (\sigma^* F) - 4 \left(\left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor + 2 \right) (\sigma^* C_0) \cdot E \\
 &\quad - 4 \left(\left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor + n + 2 \right) (\sigma^* F) \cdot E \\
 &= \left(\left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor + 2 \right)^2 (-n) + (-4\delta) + 2 \left(\left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor + 2 \right) \left(\left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor + n + 2 \right) \\
 &= \left(\left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor + 2 \right) \left(2 \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor + 2n + 4 - \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor n - 2n \right) - 4\delta \\
 &\geq 4 \left(2 \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor + 2n + 4 - \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor n - 2n \right) - 4\delta = 8 \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor - 4 \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor n - 4\delta + 16 \geq 10.
 \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

La última desigualdad se cumple debido a que $\left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor \geq 2$ y $4 \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor \geq 2 \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor n + 2\delta - 3$ por hipótesis.

Ahora, como $\text{Pic}(X) \cong \sigma^* \text{Pic}(\mathbb{F}_n) \oplus \mathbb{Z}[E_1] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[E_\delta]$, consideremos Γ cualquier curva reducida irreducible en X de la forma

$$\Gamma = \alpha \sigma^* C_0 + \beta \sigma^* F - \sum_{j=1}^{\delta} n_j E_j,$$

donde $\alpha, n_j, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces tenemos los siguientes casos:

- Si $\alpha = 0$ entonces $\Gamma \in \{\sigma^* F, \sigma^* F - E_j, E_j\}$. Así

$$N.\Gamma = \begin{cases} N.\sigma^* F = \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor + 2 \\ N.E_j = 2 \\ N.(\sigma^* F - E_j) = \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor \end{cases} \tag{4.2.5}$$

y $N.\Gamma \geq 2$ para toda $\Gamma \in \{\sigma^* F, \sigma^* F - E_j, E_j\}$.

- Recordemos que $p_j \notin C_0$ entonces, si $\beta = 0$ entonces $\Gamma \in \{\sigma^* C_0, E_j\}$. Por tanto

$$N.\Gamma = \begin{cases} N.\sigma^* C_0 = \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor n - n + 2 \\ N.E_j = 2 \end{cases} \tag{4.2.6}$$

y $N.\Gamma \geq 2$ pues $\left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor n + n$ por hipótesis.

- Si $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$, por [17] se tiene que $\beta \geq \alpha n$. Además, como Γ y $\sigma^* F - E_j$ son curvas irreducibles distintas, entonces $\Gamma \cdot (\sigma^* F - E_j) \geq 0$, esto es, $\alpha \geq n_j$ para todo $j = 1, \dots, \delta$. Por tanto,

$$N.\Gamma = \left(\left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor + 2 \right) (\beta - \alpha n) + \alpha \left(\left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor + n + 2 \right) - \sum_{j=1}^{\delta} 2n_j. \tag{4.2.7}$$

Por hipótesis, $\left[\frac{b}{3}\right] \geq 2\delta - n + 1$ esto implica que $\alpha \left(\left[\frac{b}{3}\right] + n + 2\right) \geq \left(\sum_{j=1}^{\delta} 2\alpha\right) + 3\alpha \geq \left(\sum_{j=1}^{\delta} 2\alpha\right) + 3$, y $\left(\sum_{j=1}^{\delta} 2\alpha\right) \geq \left(\sum_{j=1}^{\delta} 2n_j\right)$ entonces $\alpha \left(\left[\frac{b}{3}\right] + n + 2\right) - \sum_{j=1}^{\delta} 2n_j \geq 3$ y, en particular, obtenemos que $N.\Gamma \geq 2$.

Por lo tanto, $N.\Gamma \geq 2$ para cualquier curva irreducible reducida Γ en X , esto nos dice que para todo divisor D en X (suma de curvas irreducibles reducidas), tenemos que $N.D \geq 2$. Ahora, nos enfocaremos solo en el caso (iii) $N.D = 2$ y $D^2 = 0$.

Supongamos que existe un divisor efectivo D en X tal que $N.D = 2$. Consideremos a D como una curva irreducible reducida de la forma

$$D = \alpha\sigma^*C_0 + \beta\sigma^*F - \sum_{j=1}^{\delta} n_j E_j.$$

Nótese que, si $\alpha \neq 0$ entonces $\alpha \geq n_j$ para todos $j = 1, \dots, \delta$. Consideremos los siguientes casos:

- Caso $\alpha \geq 1$ y $\beta \geq \alpha n$:

Por hipótesis, $\left[\frac{b}{3}\right] \geq 2\delta - n + 1$ esto implica $\alpha \left(\left[\frac{b}{3}\right] + n + 2\right) \geq \left(\sum_{j=1}^{\delta} 2\alpha\right) + 3\alpha \geq \left(\sum_{j=1}^{\delta} 2n_j\right) + 3$. Entonces

$$\begin{aligned} N.D &= \left(\left[\frac{a}{3}\right] + 2\right) (\beta - \alpha n) + \alpha \left(\left[\frac{b}{3}\right] + n + 2\right) - \sum_{j=1}^{\delta} 2n_j \\ &\geq \alpha \left(\left[\frac{b}{3}\right] + n + 2\right) - \sum_{j=1}^{\delta} 2n_j \geq 3 > 2. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

- Caso $\alpha = 1$ y $\beta = 0$:

En este caso, D tiene la forma $\sigma^*C_0 - \sum_{j=1}^{\delta} n_j E_j$, donde $n_j \leq 1$ para todo $j = 1, \dots, \delta$. Como $D^2 = 0$ entonces $D^2 = -n - \sum_{j=1}^{\delta} (n_j^2) = 0$, lo que implica que $n = 0$ y $n_j = 0$ para todo j . En consecuencia, $N.D = \left[\frac{b}{3}\right] + 2 > 2$.

- Caso $\alpha = 0$ y $\beta = 1$:

Aquí $D = \sigma^*F$ o $D = \sigma^*F - E_{j_1}$ para algún $j_1 \in \{1, \dots, \delta\}$.

- Si $D = \sigma^*F$, entonces $N.\sigma^*F = \left[\frac{a}{3}\right] + 2 \geq 4 > 2$.
- Si $D = \sigma^*F - E_i$, entonces $N.(\sigma^*F - E_i) = \left[\frac{a}{3}\right] \geq 2$, sin embargo $(\sigma^*F - E_i)^2 = E_i^2 = -1 \neq 0$.

- Caso $\alpha = 0$ y $\beta = 0$:

Así $D = E_{j_1}$ para algún $j_1 \in \{1, \dots, \delta\}$ y $N.E_i = 2$, sin embargo, $E_i^2 = -1 \neq 0$.

Por tanto, no existe divisor efectivo D en X tal que $N.D = 2$ y $D^2 = 0$. Finalmente, $\sigma^*A - E$ es un divisor muy amplio en X por el criterio de Reider. ■

De manera similar a la demostración del Lema 4.2.3, podemos obtener lo siguiente.

Lema 4.2.9. *Si $a \geq 6$ y $b \geq \max\{(a+7)n, 6\delta - 3n + 3\}$, entonces $\sigma^*B - E$ es un divisor muy amplio sobre X .*

El siguiente lema muestra cómo construir un divisor *big* y *nef* en Y a partir de un divisor muy amplio en X , y su demostración es una adaptación de [4, Sección 3.3].

Lema 4.2.10. *Si D es un divisor muy amplio sobre X , entonces $(D)_1 + (D)_2 - \Lambda$ es un divisor *big* y *nef* en Y .*

Demostración. Consideremos la inmersión $\phi_D : X \rightarrow \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(D))^*) = \mathbb{P}^r$ definida por D . Tenemos un morfismo racional $\psi : X \times X \dashrightarrow G := \text{Grass}(1, \mathbb{P}^r)$, definido en el complemento de la diagonal Δ en $X \times X$, mediante: asignamos al par (x, y) el subespacio lineal $\overline{\phi_D(x)\phi_D(y)} \subset \mathbb{P}^r$; este morfismo se llama el morfismo de la línea secante.

Nótese que ψ se extiende a un morfismo

$$\bar{\varphi} : Y = \text{Bl}_\Delta(X \times X) \rightarrow G$$

definido como sigue: si $(x, y) \notin \Delta$, entonces $\bar{\varphi}(x, y) = \varphi(x, y) = \overline{\phi_D(x)\phi_D(y)}$. En cambio, para $(x, y) \in \Delta$, $\bar{\varphi}$ manda (x, y) a la línea tangente $\phi_D(x)$ en la dirección definida por el divisor excepcional. Se cumple que

$$(D)_1 + (D)_2 - \Lambda = \bar{\varphi}^*\mathcal{O}_G(1),$$

donde $\mathcal{O}_G(1)$ es el generador de $\text{Pic}(G) \cong \mathbb{Z}$.

Ahora, a menos que X sea un subespacio lineal de $\mathbb{P}^r$, el morfismo $\bar{\varphi}$ es genéricamente finito; la fibra sobre un punto general $l = \overline{xy}$ en la imagen será de dimensión positiva si y solo si $l \subset X$ y la única variedad que contiene todas las rectas que unen dos de sus puntos es un subespacio lineal de $\mathbb{P}^r$.

Por lo tanto, $(D)_1 + (D)_2 - \Lambda$ es un divisor *big* y *nef* porque es el pullback de un divisor *big* y *nef* bajo un morfismo genéricamente finito. ■

Nótese que las condiciones del Lema 4.2.9 satisfacen las condiciones del Lema 4.2.3. Podemos aplicar el Lema 4.2.10 y obtener el siguiente teorema.

Teorema 4.2.11. *Si $a \geq 6$ y $b \geq \max\{(a+7)n, 6\delta - 3n + 3\}$, entonces $(M)_1 + (M)_2 - 3\Lambda$ es un divisor *big* y *nef* sobre Y .*

Demostración. Por los Lemas 4.2.3 y 4.2.10 tenemos que

$$(\sigma^*A - E)_1 + (\sigma^*A - E)_2 - \Lambda \quad \text{y} \quad (\sigma^*B - E)_1 + (\sigma^*B - E)_2 - \Lambda$$

son divisores *big* y *nef* sobre Y . Entonces,

$$\begin{aligned} (M)_1 + (M)_2 - 3\Lambda &= (\sigma^*(2A - B) - 3E)_1 + (\sigma^*(2A - B) - 3E)_2 - 3\Lambda \\ &= 2((\sigma^*A - E)_1 + (\sigma^*A - E)_2 - \Lambda) + (\sigma^*B - E)_1 + (\sigma^*B - E)_2 - \Lambda \end{aligned}$$

es un divisor *big* y *nef* sobre Y , ya que es la suma de tres divisores *big* y *nef* sobre Y . ■

Corolario 4.2.12. Si $a \geq 6$ y $b \geq \max\{(a+7)n, 6\delta - 3n + 3\}$, entonces

$$H^1(Y, K_Y + (M)_1 + (M)_2 - 3\Lambda) = 0.$$

Demostración. Por el Teorema 4.2.11, $(M)_1 + (M)_2 - 3\Lambda$ es un divisor big y nef. Entonces, el resultado se sigue del teorema de anulación de Kawamata–Viehweg. ■

Ahora, consideremos $Y_j \subset Y$ la transformada propia de $E_j \times X$, y los divisores

$$R_j = \tilde{C} - \sum_{i=1}^j E_i$$

para cada $j = 1, \dots, \delta$. Nótese que

$$\begin{aligned} R_j &= \sigma^*C - 2E - \sum_{i=1}^j E_i = \sigma^*(2A + B) - 2E - \sum_{i=1}^j E_i \\ &= 2(\sigma^*A - E) + (\sigma^*B - \sum_{i=1}^j E_i) \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

De manera análoga a la demostración del Lema 4.2.3, obtenemos lo siguiente.

Lema 4.2.14. Si $a \geq 6$ y $b \geq \max\{(a+7)n, 6j - 3n + 3\}$, entonces los divisores $\sigma^*B - \sum_{i=1}^j E_i$ son divisores muy amplios sobre X , para todo $j = 1, \dots, \delta$.

Observación 4.2.15. Por lo tanto, si $a \geq 6$ y $b \geq \max\{(a+7)n, 6\delta - 3n + 3\}$, entonces $(\sigma^*A - E)$ y $(\sigma^*B - \sum_{i=1}^j E_i)$ son divisores muy amplios sobre X para todo $j = 1, \dots, \delta$. Por el Lema 4.2.10, obtenemos que, para cada $j = 1, \dots, \delta$, los divisores

$$(\sigma^*B - \sum_{i=1}^j E_i)_1 + (\sigma^*B - \sum_{i=1}^j E_i)_2 - \Lambda \quad \text{y} \quad (\sigma^*A - E)_1 + (\sigma^*A - E)_2 - \Lambda$$

son divisores big y nef sobre Y .

Por lo tanto, para cada $j = 1, \dots, \delta$, las restricciones de $(\sigma^*B - \sum_{i=1}^j E_i)_1 + (\sigma^*B - \sum_{i=1}^j E_i)_2 - \Lambda$ y de $(\sigma^*A - E)_1 + (\sigma^*A - E)_2 - \Lambda$ a Y_j son también divisores nef. Ahora veremos que estas restricciones también son divisores big.

Recordemos (véase [8]) que si D es muy amplio en X , entonces el sistema lineal $|(D)_1 + (D)_2 - \Lambda|$ en Y tiene un subespacio lineal que induce un morfismo

$$Y \rightarrow \text{Grass}(1, \mathbb{P}H^0(X, \mathcal{O}_X(D))^*),$$

que asocia el par $(x, y) \in Y$ con el subespacio lineal generado por $\phi_D(x)$ y $\phi_D(y)$, donde ϕ_D es la inmersión de X en $\mathbb{P}H^0(X, \mathcal{O}_X(D))^*$.

Como $\sigma^*A - E$ encaja a X de tal manera que E_j es una recta, y si asumimos que $(\sigma^*A - E)_1 + (\sigma^*A - E)_2 - \Lambda$ no fuera big en Y_j , entonces la restricción a Y_j del morfismo $Y \rightarrow \text{Grass}(1, \mathbb{P}H^0(X, \mathcal{O}_X(D))^*)$ no tendría fibra finita, entonces todo segmento de línea que une un punto de la línea $\phi_{\sigma^*A-E}(E_j)$ y un punto de la imagen $\phi_{\sigma^*A-E}(X)$ estaría contenido en $\phi_{\sigma^*A-E}(X)$, esto es, $\phi_{\sigma^*A-E}(X)$ es un plano, lo cual llevaría a una

contradicción. Por tanto, estas restricciones también son divisores big en Y_j , donde Y_j es la transformada propia de $E_j \times X$.

De modo análogo, para cada $j = 1, \dots, \delta$, los divisores

$$[(\sigma^* B - \sum_{i=1}^j E_i)_1 + (\sigma^* B - \sum_{i=1}^j E_i)_2 - \Lambda]|_{Y_j}$$

son divisores big y nef sobre Y_j .

Por el Lema 4.2.14 y la Observación 4.2.15, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.2.16. *Si $a \geq 6$ y $b \geq \max\{(a+7)n, 6\delta - 3n + 3\}$, entonces*

$$(\tilde{C} - \sum_{i=1}^j E_i)_1 + (\tilde{C} - \sum_{i=1}^j E_i)_2 - 3\Lambda$$

es un divisor big y nef sobre Y , para todo $j = 1, \dots, \delta$. Además, la restricción a Y_j

$$[(\tilde{C} - \sum_{i=1}^j E_i)_1 + (\tilde{C} - \sum_{i=1}^j E_i)_2 - 3\Lambda]|_{Y_j}$$

también es divisor big y nef en Y_j , para todo $j = 1, \dots, \delta$.

Demostración. Note que, para todo $j = 1, \dots, \delta$, el divisor

$$(R_j)_1 + (R_j)_2 - 3\Lambda = (\tilde{C} - \sum_{i=1}^j E_i)_1 + (\tilde{C} - \sum_{i=1}^j E_i)_2 - 3\Lambda$$

en Y , es suma de tres divisores (4.2.13) y, por la Observación 4.2.15, cada uno de estos tres divisores son big y nef en Y . Por tanto, la suma también es un divisor big y nef en Y . ■

Ahora demostraremos que estas condiciones numéricas son suficientes para tener la sobreyectividad de $\Phi_{\mathcal{O}_X(K_X + \tilde{C})}$.

Teorema 4.2.17. *Con la notación anterior, sea $\mathcal{L} = \mathcal{O}_Y(K_Y + (\tilde{C})_1 + (\tilde{C})_2 - 3\Lambda)$. Si $a \geq 6$ y $b \geq \max\{(a+7)n, 6\delta - 3n + 3\}$, entonces*

$$H^1(Y, \mathcal{L}) = 0.$$

Demostración. Consideremos los siguientes divisores:

- $Z_j \subset Y$, definidos por las transformadas propias de $X \times E_j$.
- $F_j := (E_j)_1 + (E_j)_2 = Z_j + Y_j$, con Y_j como antes.
- $F := \sum_{j=1}^{\delta} F_j$.

Dado que $\mathcal{L} = K_Y + (\tilde{C})_1 + (\tilde{C})_2 - 3\Lambda$, tenemos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} - F &= K_Y + (\tilde{C})_1 + (\tilde{C})_2 - 3\Lambda - F \\ &= K_Y + (\tilde{C})_1 + (\tilde{C})_2 - 3\Lambda - \left(\sum_{j=1}^{\delta} (E_j)_1 + (E_j)_2 \right) \\ &= K_Y + (\tilde{C} - \sum_{j=1}^{\delta} E_j)_1 + (\tilde{C} - \sum_{j=1}^{\delta} E_j)_2 - 3\Lambda \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

$$= K_Y + (M)_1 + (M)_2 - 3\Lambda. \quad (4.2.19)$$

Por lo tanto, por el Corolario 4.2.12, tenemos que $H^1(Y, \mathcal{L} - F) = 0$. Por convención, tomamos $F_0 = 0$. Nótese que tenemos una sucesión exacta para cada $i = 1, \dots, \delta$:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(-F_i) \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_{F_i} \rightarrow 0. \quad (4.2.20)$$

Al tensorizar con $\mathcal{O}_Y(\mathcal{L} - \sum_{j=0}^{i-1} F_j)$ obtenemos,

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(\mathcal{L} - \sum_{j=0}^i F_j) \rightarrow \mathcal{O}_Y(\mathcal{L} - \sum_{j=0}^{i-1} F_j) \rightarrow \mathcal{O}_{F_i}(\mathcal{L} - \sum_{j=0}^{i-1} F_j) \rightarrow 0, \quad (4.2.21)$$

Como $F_0 = 0$, para $i = 1$, tenemos la sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(\mathcal{L} - F_1) \rightarrow \mathcal{O}_Y(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{O}_{F_1}(\mathcal{L}) \rightarrow 0, \quad (4.2.22)$$

por lo tanto, si $H^1(Y, \mathcal{O}_Y(\mathcal{L} - F_1)) = 0$ y $H^1(F_1, \mathcal{O}_{F_1}(\mathcal{L})) = 0$, el resultado se sigue. A partir de la sucesión exacta (4.2.21) para $i = 2$, tenemos la anulaci3n de $H^1(Y, \mathcal{O}_Y(\mathcal{L} - F_1))$ si $H^1(Y, \mathcal{O}_Y(\mathcal{L} - F_1 - F_2)) = 0$ y $H^1(Y, \mathcal{O}_Y(\mathcal{L} - F_2)) = 0$, y an3logamente hasta $i = \delta$, tenemos la anulaci3n de $H^1(Y, \mathcal{O}_Y(\mathcal{L} - \sum_{j=0}^{\delta-1} F_j))$ si $H^1(Y, \mathcal{O}_Y(\mathcal{L} - F)) = 0$ y $H^1(F_{\delta}, \mathcal{O}_{F_{\delta}}(\mathcal{L} - \sum_{j=0}^{\delta-1} F_j)) = 0$. Por lo tanto, s3lo necesitamos demostrar que

$$H^1(F_i, \mathcal{O}_{F_i}(\mathcal{L} - \sum_{j=0}^{i-1} F_j)) = 0, \quad \text{para cada } i = 1, \dots, \delta. \quad (4.2.23)$$

Sea U_{ij} la transformada estricta en Y de $E_i \times E_j$. Nótese que si $i \neq j$, entonces $E_i \cap E_j = \emptyset$, por lo tanto,

$$U_{ij} \cong E_i \times E_j.$$

Por definici3n, la transformada estricta de los divisores $E_i \times X$ y $X \times E_i$ bajo la explosi3n

$$\pi : Y \rightarrow X \times X$$

son

$$Y_i = \pi^*(E_i \times X) - \Lambda|_{Y_i} \quad Z_i = \pi^*(X \times E_i) - \Lambda|_{Z_i},$$

donde Λ es el divisor excepcional.

El subesquema

$$E_i \times E_i = (E_i \times X) \cap (X \times E_i) \subset X \times X$$

intersecta a la diagonal en

$$\Delta_{E_i} \cong E_i.$$

La transformada estricta U_{ii} de $E_i \times E_i$ es, por definición,

$$U_{ii} = \pi^*(E_i \times E_i) - \Lambda|_{Y_i}.$$

Por otro lado, la intersección de las transformadas estrictas

$$W_i := Y_i \cap Z_i,$$

contiene a la transformada estricta U_{ii} y la contribución del divisor excepcional restringido a Y_i . Por lo tanto, como divisores en Y_i , obtenemos que

$$W_i = U_{ii} + \Lambda|_{Y_i}.$$

Por la notación introducida arriba, tenemos $F_i = Y_i \cup Z_i$, y si denotamos $W_i = Y_i \cap Z_i$. Entonces, como divisores en Y_i , W_i y $U_{ii} + \Lambda|_{Y_i}$ son linealmente equivalentes. En consecuencia, tenemos la sucesión exacta,

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{Y_i}(-W_i) \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_{Z_i} \rightarrow 0. \quad (4.2.24)$$

Al tensorizar con $\mathcal{O}_{F_i}(\mathcal{L} - \sum_{j=0}^{i-1} F_j)$ obtenemos,

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{Y_i}(\mathcal{L} - W_i - \sum_{j=0}^{i-1} F_j) \rightarrow \mathcal{O}_{F_i}(\mathcal{L} - \sum_{j=0}^{i-1} F_j) \rightarrow \mathcal{O}_{Z_i}(\mathcal{L} - \sum_{j=0}^{i-1} F_j) \rightarrow 0. \quad (4.2.25)$$

En Y_i también tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{Y_i}(\mathcal{L} - W_i - \sum_{j=0}^{i-1} F_j) \rightarrow \mathcal{O}_{Y_i}(\mathcal{L} - \sum_{j=0}^{i-1} F_j) \rightarrow \mathcal{O}_{W_i}(\mathcal{L} - \sum_{j=0}^{i-1} F_j) \rightarrow 0.$$

Como $W_i \cap F_j = \emptyset$ para $j \leq i-1$, esta sucesión se reduce a

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{Y_i}(\mathcal{L} - W_i - \sum_{j=0}^{i-1} F_j) \rightarrow \mathcal{O}_{Y_i}(\mathcal{L} - \sum_{j=0}^{i-1} F_j) \rightarrow \mathcal{O}_{W_i}(\mathcal{L}) \rightarrow 0. \quad (4.2.26)$$

De la sucesión (4.2.25), si para cada $i = 1, \dots, \delta$

$$H^1(\mathcal{O}_{Y_i}(\mathcal{L} - W_i - \sum_{j=0}^{i-1} F_j)) = 0,$$

y

$$H^1(\mathcal{O}_{Z_i}(\mathcal{L} - \sum_{j=0}^{i-1} F_j)) = 0,$$

entonces (4.2.23) se satisface. Sin embargo, por la definición de Z_i y la simetría con Y_i , por la sucesión exacta en (4.2.26), basta probar que, para cada $i = 1, \dots, \delta$:

$$H^1(\mathcal{O}_{Y_i}(\mathcal{L} - W_i - \sum_{j=0}^{i-1} F_j)) = 0, \quad (4.2.27)$$

y

$$H^1(\mathcal{O}_{W_i}(\mathcal{L})) = 0. \quad (4.2.28)$$

Para demostrar la igualdad (4.2.27), observemos que, $Y_i = (E_i)_1$ y $Z_i = (E_i)_2$. Por lo tanto, como divisores en Y_i , $W_i = Z_i|_{Y_i} = [(E_i)_2]|_{Y_i}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}|_{Y_i} &= [K_Y + (\tilde{C})_1 + (\tilde{C})_2 - 3\Lambda]|_{Y_i} = [K_Y + (E_i)_1 + (E_i)_2 + (\tilde{C} - E_i)_1 + (\tilde{C} - E_i)_2 - 3\Lambda]|_{Y_i} \\ &\cong [K_Y + (E_i)_1]|_{E_i} + [(E_i)_2]|_{E_i} + [(\tilde{C} - E_i)_1 + (\tilde{C} - E_i)_2 - 3\Lambda]|_{Y_i} \\ &\cong K_{Y_i} + W_i + [(\tilde{C} - E_i)_1 + (\tilde{C} - E_i)_2 - 3\Lambda]|_{Y_i}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\mathcal{O}_{Y_i}(\mathcal{L} - W_i - \sum_{j=0}^{i-1} F_j) \cong \mathcal{O}_{Y_i}(K_{Y_i} + (\tilde{C} - E_i)_1 + (\tilde{C} - E_i)_2 - 3\Lambda - \sum_{j=0}^{i-1} F_j).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} (\tilde{C} - E_i)_1 + (\tilde{C} - E_i)_2 - \sum_{j=0}^{i-1} F_j &= (\tilde{C})_1 + (\tilde{C})_2 - F_i - \sum_{j=0}^{i-1} F_j \\ &= (\tilde{C})_1 + (\tilde{C})_2 - \sum_{j=0}^i F_j = (\tilde{C})_1 + (\tilde{C})_2 - \sum_{j=1}^i (E_j)_1 + (E_j)_2 \\ &= (\tilde{C} - \sum_{j=1}^i E_j)_1 + (\tilde{C} - \sum_{j=1}^i E_j)_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{O}_{Y_i}(\mathcal{L} - W_i - \sum_{j=0}^{i-1} F_j) \cong \mathcal{O}_{Y_i}(K_{Y_i} + (\tilde{C} - \sum_{j=1}^i E_j)_1 + (\tilde{C} - \sum_{j=1}^i E_j)_2 - 3\Lambda).$$

Por el Corolario 4.2.16, el divisor

$$[(\tilde{C} - \sum_{j=1}^i E_j)_1 + (\tilde{C} - \sum_{j=1}^i E_j)_2 - 3\Lambda]|_{Y_i},$$

es big y nef en Y_i , y por el teorema anulamiento de Kawamata–Viehweg obtenemos que se satisface la expresión (4.2.27).

Para demostrar la igualdad (4.2.28), procedemos como en [8], la prueba del Lema 3.1: Sea $\tilde{\Lambda}_i = \Lambda|_{Y_i}$, entonces $\tilde{\Lambda}_i \cong \mathbb{P}\mathcal{E}$ con $\mathcal{E} \cong N_{\Delta_{E_i}/E_i \times X}^\vee$. De la sucesión exacta del haz normal

$$0 \rightarrow N_{\Delta_{E_i}/E_i \times E_i} \rightarrow N_{\Delta_{E_i}/E_i \times X} \rightarrow N_{E_i \times E_i/E_i \times X}|_{\Delta_{E_i}} \rightarrow 0$$

y de los isomorfismos

$$N_{\Delta_{E_i}/E_i \times E_i} \cong T_{E_i} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \quad \text{y} \quad N_{E_i \times E_i/E_i \times X}|_{\Delta_{E_i}} \cong N_{E_i/X} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1),$$

se sigue que

$$N_{\Delta_{E_i}/E_i \times X} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1).$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1), \quad \text{y} \quad \mathbb{P}\mathcal{E} \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \cong \mathbb{F}_3.$$

Como

$$\mathcal{L} = \mathcal{O}_Y((K_X + \tilde{C})_1 + (K_X + \tilde{C})_2 - 2\Lambda),$$

entonces la restricción de $\mathcal{L}$ a $\tilde{\Lambda}_i$ es

$$\mathcal{L}|_{\tilde{\Lambda}_i} = -2\Lambda|_{\tilde{\Lambda}_i}.$$

Bajo la identificación $\tilde{\Lambda}_i \cong \mathbb{P}\mathcal{E}$, la clase tautológica $\mathcal{O}_{\tilde{\Lambda}_i}(1)$ corresponde al divisor $C_0 + F$, donde $C_0 \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}(1)|$ y F es la fibra de la proyección $\mathbb{P}\mathcal{E} \rightarrow E_i \cong \mathbb{P}^1$. Entonces, tenemos que $\Lambda|_{\tilde{\Lambda}_i} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}(-C_0 - F)$. De aquí, obtenemos finalmente,

$$\mathcal{L}|_{\tilde{\Lambda}_i} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}(2C_0 + 2F).$$

Además, la intersección $Q_i = U_{ii} \cap \tilde{\Lambda}_i$ es isomorfa a Δ_{E_i} , y es un divisor del tipo $C_0 + \alpha f$ en $\mathbb{P}\mathcal{E}$ para algún α .

Por lo tanto,

$$\dim H^1(\mathcal{O}_{\tilde{\Lambda}_i}(\mathcal{L})) = \dim H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_3}(2C_0 + 2F)) = 1,$$

$$\dim H^2(\mathcal{O}_{\tilde{\Lambda}_i}(\mathcal{L} - Q_i)) = \dim H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_3}(C_0 + (2 - \alpha)F)) = 0.$$

De la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{\Lambda}_i}(-\tilde{\Lambda}_i \cap U_{ii}) \rightarrow \mathcal{O}_{W_i} \rightarrow \mathcal{O}_{U_{ii}} \rightarrow 0,$$

al tensorizar con $\mathcal{O}_Y(\mathcal{L})$ obtenemos

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{\Lambda}_i}(\mathcal{L} - Q_i) \rightarrow \mathcal{O}_{W_i}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{O}_{U_{ii}}(\mathcal{L}) \rightarrow 0.$$

Como $\mathcal{O}_{U_{ii}}(\mathcal{L}) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-1, -1)$, se sigue que $H^2(\mathcal{O}_{U_{ii}}(\mathcal{L})) = 0$ y por tanto

$$H^2(\mathcal{O}_{W_i}(\mathcal{L})) = 0.$$

Ahora, de la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{U_{ii}} \rightarrow \mathcal{O}_{W_i} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{\Lambda}_i} \rightarrow 0,$$

al tensorizar con $\mathcal{O}_Y(\mathcal{L})$ se obtiene

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{U_{ii}}(\mathcal{L} - Q_i) \rightarrow \mathcal{O}_{W_i}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{\Lambda}_i}(\mathcal{L}) \rightarrow 0.$$

Como

$$\mathcal{O}_{U_{ii}}(\mathcal{L} - Q_i) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-2, -2),$$

tenemos $H^1(\mathcal{O}_{U_{ii}}(\mathcal{L} - Q_i)) = 0$ y

$$\dim H^2(\mathcal{O}_{U_{ii}}(\mathcal{L} - Q_i)) = 1.$$

Finalmente, obtenemos que

$$H^1(\mathcal{O}_{W_i}(\mathcal{L})) = 0.$$

■

Por lo tanto, $\Phi_{\mathcal{O}_X(K_X + \tilde{C})}$ es sobreyectivo. Lo anterior lo resumimos en el siguiente resultado.

Teorema 4.2.29. *Sean $p_1, \dots, p_\delta$ puntos distintos en $\mathbb{F}_n$ tales que para cada j , $p_j \notin C_0$, y para todos $i, j \in \{1, \dots, \delta\}$, p_i y p_j no están en la misma fibra de la fibración que admite $\mathbb{F}_n$, $\pi_1 : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{P}^1$. Supongamos que C es una curva nodal en $\mathbb{F}_n$ en el sistema lineal $|D|$, con D linealmente equivalente a $aC_0 + bF$ con a, b números enteros positivos. Sea $X = \text{Bl}_Z \mathbb{F}_n$, donde $Z = \{p_1, \dots, p_\delta\}$ son los nodos de C , y sea $\tilde{C}$ la normalización de C . Supongamos que $a \geq 6$ y $b \geq \max\{(a+7)n, 6\delta - 3n + 3\}$. Entonces, la aplicación Gaussiana*

$$\Phi_{\mathcal{O}_X(K_X + \tilde{C})} : \bigwedge^2 H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + \tilde{C})) \longrightarrow H^0(X, \Omega_X^1(2K_X + 2\tilde{C}))$$

es sobreyectiva.

Demostración. Se sigue de la Observación 4.2.1 y el Teorema 4.2.17. ■

Como se mencionó anteriormente, para el caso $\delta = 1$ podemos debilitar las condiciones numéricas. Llamemos p al nodo para el caso $\delta = 1$. En lugar de usar el Lema 4.2.3 y 4.2.9, usaremos el siguiente lema, y el argumento para demostrar la sobreyectividad de la aplicación Gaussiana se sigue con en el Teorema 4.2.17.

Lema 4.2.30. *Los divisores $\sigma^*A - E$ y $\sigma^*B - E$ son divisores muy amplios en X si*

$$\left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor n + 1, \quad (4.2.31)$$

$$\left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor \geq 2. \quad (4.2.32)$$

Demostración. Notamos que $\mathbb{F}_n$ es una superficie tórica, y en éstas todo divisor amplio es muy amplio. En particular, X es una superficie tórica ya que es una transformación monoidal de $\mathbb{F}_n$. Por lo tanto, basta probar que $\sigma^*A - E$ y $\sigma^*B - E$ son divisores amplios en X , y utilizaremos el criterio de Nakai–Moishezon. Primero, podemos ver que

$$(\sigma^*A - E)^2 = A^2 - 1 = -\left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor^2 n + 2 \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor \left(2 \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor n \right) - 1 > 0, \quad (4.2.33)$$

con las condiciones

$$\left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor n + 1, \quad (4.2.34)$$

$$\left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor \geq 2. \quad (4.2.35)$$

Sea Γ cualquier curva irreducible en X demostraremos que $(\sigma^*A - E) \cdot \Gamma > 0$. Tal Γ tiene la forma $\sigma^*G - \gamma E$, donde $G = \alpha_1 C_0 + \alpha_2 F$ y $\gamma \in \mathbb{Z}$.

Si $\gamma < 0$, entonces $(\sigma^*A - E) \cdot \Gamma = A \cdot G - \gamma > 0$ porque A es muy amplio bajo las

condiciones anteriores. Consideremos el caso $\gamma \geq 0$.

Si $\alpha_1 = 0$, entonces $G = F$ y

$$\Gamma = \begin{cases} \sigma^*F - E, & p \in F, \\ \sigma^*F, & p \notin F, \end{cases}$$

por lo tanto,

$$(\sigma^*A - E) \cdot \Gamma = \begin{cases} \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor, & p \in F, \\ \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor - 1, & p \notin F, \end{cases}$$

es positivo en cualquier caso, si se satisface la condición (4.2.35).

Si $\alpha_2 = 0$, entonces $G = C_0$ y

$$\Gamma = \sigma^*C_0.$$

Como el punto p no pertenece a C_0 , el divisor E no aparece en Γ . De esto, se deduce que

$$(\sigma^*A - E) \cdot \Gamma = - \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor n + \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor > 0.$$

Supongamos que $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$. Entonces Γ y $\sigma^*F - E$ son curvas distintas, y $\Gamma \cdot (\sigma^*F - E) \geq 0$, es decir, $\alpha_1 - \gamma \geq 0$.

Si $n = 0$, entonces $\alpha_1 \geq 0$ y $\alpha_2 > 0$, así

$$(\sigma^*A - E) \cdot \Gamma = \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor \alpha_2 + \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor \alpha_1 - \gamma > \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor \alpha_1 - \gamma \geq 0.$$

Así (4.2.34) y (4.2.35) se satisfacen para $n = 0$.

En el caso en que $n > 0$, entonces $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 \geq \alpha_1 n$. En este caso

$$(\sigma^*A - E) \cdot \Gamma = \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor (\alpha_2 - \alpha_1 n) + \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor \alpha_1 - \gamma \geq \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor \alpha_1 - \gamma > 0,$$

si $\left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor \geq 2$ y esto se satisface mediante (4.2.34).

Bajo las condiciones (4.2.34) y (4.2.35), tenemos que

$$(\sigma^*B - E)^2 = B^2 - 1 = \left(a - 2 \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor \right) \left(2 \left(b - 2 \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor \right) - \left(a - 2 \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor \right) n \right) - 1 > 0.$$

Ahora, para cualquier curva irreducible $\Gamma \subset X$ debemos mostrar que $(\sigma^*B - E) \cdot \Gamma > 0$. Dado que Γ tiene la forma $\sigma^*G - \gamma E$, donde $G = \beta_1 C_0 + \beta_2 F$ y $\gamma \in \mathbb{Z}$. Si $\gamma < 0$ entonces $(\sigma^*B - E) \cdot \Gamma = A \cdot G - \gamma > 0$ porque B es muy amplio bajo las condiciones anteriores. Consideremos el caso $\gamma \geq 0$.

Si $\beta_1 = 0$ entonces $G = F$ y

$$\Gamma = \begin{cases} \sigma^*F - E & \text{si } p \in F, \\ \sigma^*F & \text{si } p \notin F. \end{cases}$$

Así,

$$(\sigma^*B - E) \cdot \Gamma = \begin{cases} a - 2 \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor & \text{si } p \in F, \\ a - 2 \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor - 1 & \text{si } p \notin F, \end{cases}$$

es positivo en cualquier caso, con la condición (4.2.35).

Si $\beta_2 = 0$ entonces $G = C_0$ y

$$\Gamma = \sigma^*C_0,$$

dado que el punto p no pertenece a C_0 , entonces el divisor E no aparece en Γ . Se sigue que

$$(\sigma^*B - E) \cdot \Gamma = - \left(a - 2 \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor \right) n + \left(b - 2 \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor \right) > 0.$$

Supongamos que $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$. Entonces Γ y $\sigma^*F - E$ son curvas distintas, y $\Gamma \cdot (\sigma^*F - E) \geq 0$, esto es, $\beta_1 - \gamma \geq 0$. Si $n = 0$ entonces $\beta_1 > 0$ y $\beta_2 > 0$, así

$$(\sigma^*B - E) \cdot \Gamma = \left(a - 2 \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor \right) \beta_2 + \left(b - 2 \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor \right) \beta_1 - \gamma > \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor \alpha_1 - \gamma \geq 0,$$

así (4.2.34) y (4.2.35) se satisfacen para $n = 0$.

En el caso en que $n > 0$, entonces $\beta_1 > 0$, $\beta_2 \geq \beta_1 n$. En este caso

$$(\sigma^*B - E) \cdot \Gamma = \left(a - 2 \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor \right) (\beta_2 - \beta_1 n) + \left(b - 2 \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor \right) \beta_1 - \gamma \geq \left(b - 2 \left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor \right) \beta_1 - \gamma > 0, \quad (103)$$

ya que $\left\lfloor \frac{b}{3} \right\rfloor \geq 2$ por (4.2.34). ■

Por lo que, se tiene el siguiente resultado para el caso de curvas 1-nodales:

Teorema 4.2.36. *Supóngase que C es una curva con un nodo en $\mathbb{F}_n$, linealmente equivalente a $aC_0 + bF$. Sea $X = \text{Bl}_p(\mathbb{F}_n)$ donde $p \in C$ es el nodo tal que $p \notin C_0$, y sea $\tilde{C}$ la normalización de C . Si $b \geq an + 3$ y $a \geq 6$, entonces la aplicación Gaussiana*

$$\Phi_{\mathcal{O}_X(K_X + \tilde{C})} : \bigwedge^2 H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + \tilde{C})) \longrightarrow H^0(X, \Omega_X^1(2K_X + 2\tilde{C}))$$

es sobreyectiva.

4.3 Corank $\Phi_{\tilde{C}}$

A partir de las secciones anteriores, podemos unir el Teorema 4.1.45 y el Teorema 4.2.29 para obtener el siguiente resultado que nos dice información sobre el corango de la aplicación de Wahl para la normalización de una curva nodal con δ nodos en una superficie de Hirzebruch.

Teorema A. Sean $p_1, \dots, p_\delta$ puntos distintos en $\mathbb{F}_n$ tales que para cada j , $p_j \notin C_0$, y para todos $i, j \in \{1, \dots, \delta\}$, p_i y p_j no están en la misma fibra de la fibración que admite $\mathbb{F}_n$, $\pi_1 : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{P}^1$. Supongamos que C es una curva nodal en $\mathbb{F}_n$ en el sistema lineal $|D|$, con D linealmente equivalente a $aC_0 + bF$, donde $a > 0$ y $b > 0$.

Sea $X = \text{Bl}_Z \mathbb{F}_n$, donde $Z = \{p_1, \dots, p_\delta\}$ son los nodos de C , como sus únicas singularidades. Sea $\tilde{C}$ la normalización de C . Supongamos que $a \geq \max\{6, \delta + 2\}$ y $b \geq \max\{(a + 7)n, (a - 1)n + \delta + 2, 6\delta - 3n + 3\}$. Entonces el corango de la aplicación de Wahl para $\tilde{C}$ es

$$\text{corank } \Phi_{\tilde{C}} = \dim H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-K_{\mathbb{F}_n})) = \begin{cases} 9, & \text{si } n \leq 2, \\ n + 6, & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Demostración. Por la Observación 4.0.11 se tiene

$$\text{corank}(\Phi_{\tilde{C}}) = \text{corank}(H^0(\rho) \circ \Phi_{K_X + \tilde{C}}).$$

Por las hipótesis y las condiciones en los coeficientes a, b , la sobreyectividad de $\Phi_{K_X + \tilde{C}}$ se sigue del Teorema 4.2.29 y $\text{corank } H^0(\rho) = \dim H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-K_{\mathbb{F}_n}))$ se sigue del Teorema 4.1.45. Lo cual prueba el teorema. $\blacksquare$

Este teorema nos dice que corango de la aplicación de Wahl de la normalización de una curva nodal en $\mathbb{F}_n$ depende solamente, en cierto sentido, del valor n ; esto es, el corango de la aplicación de Wahl está definido a partir de la superficie en la que se encuentra la curva nodal.

Es relevante mencionar que este teorema nos hace ver que el corango de la aplicación de Wahl para el caso de normalizaciones curvas nodales en $\mathbb{F}_n$ satisface lo que se menciona en la conjetura de Wahl, enunciada en la Conjetura 1.2.40, esto es $\text{corank}(\Phi_{\tilde{C}}) \geq \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(-K_X))$. Para ver esto, recordemos que $-K_X = \sigma^*(-K_{\mathbb{F}_n}) - E$ y

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(-K_X)) \cong H^0(X, \sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-K_{\mathbb{F}_n}) \otimes \mathcal{O}_X(-E)) \cong H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-K_{\mathbb{F}_n}) \otimes \mathcal{I}_Z),$$

debido a que, para todo $i > 0$, $R^i \mathcal{O}_X(-E) = 0$, y $\sigma_* \mathcal{O}_X(-E) = \mathcal{I}_Z$, donde $\mathcal{I}_Z$ es la gavilla de ideales en $Z = \{p_1, \dots, p_\delta\}$ en $\mathbb{F}_n$. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{\delta} \mathcal{O}_{p_i} \rightarrow 0. \quad (4.3.1)$$

Si tensorizamos esta sucesión con $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-K_{\mathbb{F}_n})$ obtenemos,

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-K_{\mathbb{F}_n}) \otimes \mathcal{I}_Z \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-K_{\mathbb{F}_n}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-K_{\mathbb{F}_n}) \otimes \left(\bigoplus_{i=1}^{\delta} \mathcal{O}_{p_i} \right) \rightarrow 0, \quad (4.3.2)$$

con sucesión exacta larga en cohomología,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-K_{\mathbb{F}_n}) \otimes \mathcal{I}_Z) &\rightarrow H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-K_{\mathbb{F}_n})) \rightarrow \mathbb{C}^\delta \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-K_{\mathbb{F}_n}) \otimes \mathcal{I}_Z) \rightarrow H^1(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-K_{\mathbb{F}_n})) \rightarrow 0 \rightarrow \\ &\rightarrow H^2(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-K_{\mathbb{F}_n}) \otimes \mathcal{I}_Z) \rightarrow H^2(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-K_{\mathbb{F}_n})) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Por lo tanto,

$$\text{corank}(\Phi_{\tilde{C}}) = \dim H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-K_{\mathbb{F}_n})) \geq \dim H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-K_{\mathbb{F}_n}) \otimes \mathcal{I}_Z) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(-K_X)).$$

Para el caso de $\delta = 1$, podemos ligerar un poco las condiciones numéricas sobre los coeficientes, pues el Teorema 4.2.36 trata la sobreyectividad del morfismo $\Phi_{\mathcal{O}_X(K_X + \tilde{C})}$ para el caso de curvas 1-nodales. Esto nos permite enunciar el siguiente resultado.

Teorema B. *Sea p un punto en $\mathbb{F}_n$. Supongamos que C es una curva nodal en $\mathbb{F}_n$, con un nodo en p y no otras singularidades, y linealmente equivalente a $aC_0 + bF$ con a y b enteros positivos. Sea $X = \text{Bl}_p \mathbb{F}_n$, y sea $\tilde{C}$ la normalización de C . Si $p \notin C_0$, $a \geq 6$ y $b \geq \max\{an + 3, (a - 2)n + 6\}$, entonces:*

$$\text{corank } \Phi_{\tilde{C}} = \begin{cases} 9, & \text{si } n \leq 2, \\ n + 6, & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Demostración. Se sigue del Teorema 4.1.45 y del Teorema 4.2.36. ■

El Teorema A tiene implicaciones geométricas para las curvas nodales dentro de superficies de Hirzebruch. Como aplicación de dicho teorema podemos demostrar lo siguiente.

Teorema C. *Supóngase que $a \geq 6$ y $b \geq \max\{(a - 2)n + 6, an + 3\}$. Sea $C \subset \mathbb{F}_n$ una curva δ -nodal cuyo punto singular no se encuentra en la sección negativa, y tal que C es linealmente equivalente a $aC_0 + bF$. Entonces C no puede estar en otra superficie de Hirzebruch $\mathbb{F}_m$, como una curva δ -nodal, para $m \neq n$ y $m \geq 4$.*

Demostración. Consideremos $\tilde{C}$ la normalización de C , como en la notación del Teorema A. Para el caso $n \leq 2$ tenemos que el corango de $\Phi_{\tilde{C}}$ es 9 y si suponemos que $C \subset \mathbb{F}_m$ (como una curva 1-nodal) con $m \geq 4$, también tendríamos que el corango de $\Phi_{\tilde{C}}$ es $5 + m$. Sin embargo $9 \neq 5 + m$ para $m \geq 4$.

Ahora, si $n \geq 3$, entonces el corango de $\Phi_{\tilde{C}}$ es $6 + n$, pero $6 + n \neq 6 + m$ si $n \neq m$. ■

Esto contribuye al estudio de la variedad de Severi en superficies de Hirzebruch, que estudiaremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Morfismo al moduli

Sea $D \in \text{Div}(S)$ un divisor efectivo sobre una superficie proyectiva suave S . Denotemos por $|D|$ el sistema lineal completo asociado a D . Supongamos que el elemento general de $|D|$ es una curva irreducible y suave. Denotaremos por $p_a(D)$ al género aritmético de D , esto es,

$$p_a(D) = 1 + \frac{D(D + K_S)}{2}.$$

Por la hipótesis sobre su elemento general, tiene sentido considerar el subesquema de $|D|$ que parametriza todas las curvas C equivalentes linealmente a D que son irreducibles y tienen únicamente δ nodos como singularidades.

Definición 5.0.1. Denotamos por

$$V_{|D|,\delta}$$

el subesquema localmente cerrado de $|D|$ que parametriza curvas irreducibles y reducidas pertenecientes a $|D|$ y que tienen exactamente δ nodos como puntos singulares y ninguna otra singularidad. El esquema $V_{|D|,\delta}$ se llama la “Variedad de Severi” de curvas irreducibles, δ -nodales en el sistema lineal. Si $V_{|D|,\delta} \neq \emptyset$ y $C \in V_{|D|,\delta}$, entonces Z denotará el subesquema de nodos de C ; es un subesquema cerrado de S de longitud δ . Ver [15], para más detalles de la construcción.

En este capítulo estamos interesados en estudiar el morfismo al moduli dado por

$$\begin{aligned} V_{|D|,\delta} &\longrightarrow \mathcal{M}_{\tilde{g}} \\ C &\longmapsto [\tilde{C}] := \text{la normalización de } C. \end{aligned} \tag{5.0.2}$$

Notemos que información de la imagen de este morfismo, nos brinda información sobre el locus de curvas en el espacio moduli de curvas suaves de género $\tilde{g}$ que provienen de la normalización de curvas nodales en la superficie dada.

Tenemos un morfismo $\varphi : \tilde{C} \rightarrow C \subset S$ que es el morfismo normalización de una curva irreducible δ -nodal $C \subset S$. Así, φ tiene diferencial inyectivo en cada punto de $\tilde{C}$, de modo que N_φ es el haz lineal sobre $\tilde{C}$ que aparece en la sucesión exacta

$$0 \rightarrow T_{\tilde{C}} \rightarrow \varphi^* T_S \rightarrow N_\varphi \rightarrow 0, \tag{5.0.3}$$

donde $T_{\tilde{C}}$ es el haz tangente de $\tilde{C}$, y T_S es el haz tangente de S . El morfismo de cofrontera

$$\cdots \rightarrow H^0(\tilde{C}, N_\varphi) \xrightarrow{\partial} H^1(\tilde{C}, T_{\tilde{C}}) \rightarrow \cdots \quad (5.0.4)$$

de la sucesión de cohomología (5.0.3) aplica la clase de Hirokawa en la clase de Kodaira–Spencer de una familia particular. Para más detalles, ver [23, Sección 3.4]. Más adelante, este morfismo de cofrontera será relevante. A partir de la sucesión exacta (5.0.3), se sigue que

$$T_{\tilde{C}} \otimes N_\varphi \cong \bigwedge^2(\varphi^*T_S). \quad (5.0.5)$$

Sean K_S y $K_{\tilde{C}}$ los divisores canónicos de S y $\tilde{C}$, respectivamente. Por lo tanto,

$$\mathcal{O}_{\tilde{C}}(-K_{\tilde{C}}) \otimes N_\varphi \cong \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\varphi^*(-K_S))$$

lo cual implica

$$N_\varphi \cong \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\varphi^*(-K_S)) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{C}}(K_{\tilde{C}}).$$

Sea $\sigma : X \rightarrow S$ la explosión (blow-up) de S en el conjunto de nodos Z de una curva irreducible δ -nodal $C \subset S$, y $E = \sum_{j=1}^{\delta} E_j$ es el divisor excepcional. Consideremos el diagrama de blow-up

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C} & \longrightarrow & X \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \sigma \\ C & \longrightarrow & S. \end{array}$$

Tenemos que $\sigma^*(K_S) = K_X - E$ y $\sigma^*(C) = \tilde{C} + 2E$; por adjunción y por el hecho de que $\sigma|_{\tilde{C}} = \varphi$, se sigue que

$$\mathcal{O}_{\tilde{C}}(K_{\tilde{C}}) \cong \mathcal{O}_{\tilde{C}}(K_X + \tilde{C}) \cong \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\varphi^*(K_S) + E + \varphi^*(C) - 2E) \cong \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\varphi^*(K_S + C) - E).$$

Por lo tanto,

$$N_\varphi \cong \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\varphi^*(C) - E) \cong \mathcal{O}_X(\sigma^*(C) - E)|_{\tilde{C}} \cong \mathcal{O}_X(\tilde{C} + E)|_{\tilde{C}}.$$

Además, tenemos

$$H^i(\tilde{C}, N_\varphi) \cong H^i(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\varphi^*(C) - E)),$$

para todo $i \geq 0$. Dado que $|D|$ es un espacio proyectivo, tenemos

$$T_{[C]}(|D|) \cong H^0(\mathcal{O}_S(D))/\langle C \rangle, \quad (5.0.6)$$

donde $\langle C \rangle$ denota el subespacio unidimensional generado por C . Este espacio coincide con el espacio vectorial de deformaciones de primer orden de C en $|D|$. Las deformaciones equisingulares de primer orden en $|D|$ están parametrizadas por su subespacio

$$T_{[C]}(V_{|D|, \delta}). \quad (5.0.7)$$

Ahora, las inclusiones $Z \subset C \subset S$ determinan la siguiente sucesión exacta de haces

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{C/S} = \mathcal{O}_S(-C) \rightarrow \mathcal{I}_{Z/S} \rightarrow \mathcal{I}_{Z/C} \rightarrow 0. \quad (5.0.8)$$

Al tensorizar con $\mathcal{O}_S(D)$, obtenemos

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{I}_{Z/S}(D) \rightarrow \mathcal{I}_{Z/C}(D) \rightarrow 0, \quad (5.0.9)$$

puesto que $C \sim D$ en S .

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_S & \xrightarrow{\langle C \rangle} & \mathcal{I}_{Z/S}(D) & \longrightarrow & \mathcal{I}_{Z/C}(D) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_S & \longrightarrow & \mathcal{O}_S(D) & \longrightarrow & \mathcal{O}_C(D) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_Z(D) & \longrightarrow & \mathcal{O}_Z(D) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

De la primera fila, obtenemos que

$$T_{[C]}(V_{|D|,\delta}) \cong H^0(\mathcal{I}_{Z/S}(D))/\langle C \rangle \quad (5.0.10)$$

el cual es el subespacio de

$$H^0(N_\varphi) \cong H^0(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\varphi^*(C) - E)) \cong H^0(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{C} + E)) \quad (5.0.11)$$

contenido en

$$T_{[C]}(|D|),$$

puesto que $H^0(\mathcal{I}_{Z/S}(D)) \cong H^0(\mathcal{O}_X(\sigma^*(D) - E)) = H^0(\mathcal{O}_X(\tilde{C} + E))$, y por la sucesión de cohomología de

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(E) \rightarrow \mathcal{O}_X(\tilde{C} + E) \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{C} + E) \rightarrow 0.$$

Observación 5.0.12. Si S es una superficie regular, entonces

$$H^0(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{C} + E)) \cong H^0(\mathcal{O}_X(\tilde{C} + E))/H^0(\mathcal{O}_X(E)) \cong H^0(\mathcal{I}_{Z/S}(D))/H^0(\mathcal{O}_S), \quad (5.0.13)$$

es decir,

$$H^0(N_\varphi) \cong T_{[C]}(V_{|D|,\delta}). \quad (5.0.14)$$

Notemos que $\dim T_{[C]}(V_{|D|,\delta}) = \dim H^0(\mathcal{I}_{Z/S}(D)) - 1$. Observemos que, a partir de la segunda sucesión exacta vertical, obtenemos

$$\begin{aligned} \dim H^0(\mathcal{I}_{Z/S}(D)) &= \dim H^0(\mathcal{O}_S(D)) - \delta + [\dim H^1(\mathcal{I}_{Z/S}(D)) - \dim H^1(\mathcal{O}_S(D))] \\ &\geq \dim H^0(\mathcal{O}_S(D)) - \delta, \end{aligned}$$

puesto que $H^1(\mathcal{I}_{Z/S}(D)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_S(D))$ es sobreyectiva. Por lo tanto,

$$\dim T_{[C]}(V_{|D|,\delta}) \geq H^0(\mathcal{O}_S(D)) - \delta - 1 = \dim T_{[C]}(|D|) - \delta = \dim |D| - \delta, \quad (5.0.15)$$

donde la última igualdad se mantiene porque $|D|$ es suave en cada punto, como variedad proyectiva.

Si $H^1(\mathcal{I}_{Z/S}(D)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_S(D))$ es un isomorfismo (en particular ocurre cuando $H^1(\mathcal{I}_{Z/S}(D)) = 0$), entonces $\dim T_{[C]}(V_{|D|,\delta}) = \dim |D| - \delta$ y, en general, $\dim T_{[C]}(V_{|D|,\delta}) \geq \dim_{[C]} V_{|D|,\delta} \geq \dim |D| - \delta$, es decir, $\dim T_{[C]}(V_{|D|,\delta}) = \dim_{[C]}(V_{|D|,\delta})$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 5.0.16. La variedad de Severi $V_{|D|,\delta}$ se dice *regular* en el punto $[C]$ si es suave en $[C]$ de dimensión $\dim |D| - \delta$, siendo δ el número de nodos de C . En caso contrario, la componente de $V_{|D|,\delta}$ que contiene a $[C]$ es llamada una *componente superabundante*.

Observación 5.0.17. Si $H^1(\mathcal{I}_{Z/S}(D)) = 0$, entonces cada punto $[C] \in V_{|D|,\delta}$ es un punto regular.

Ahora, sea S una superficie regular. Dado un sistema lineal completo $|D|$ o dada la familia de curvas nodales $V_{|D|,\delta}$ sobre S , es interesante estudiar sus propiedades desde el punto de vista moduli. Esto se reduce a entender el comportamiento del morfismo natural

$$\pi_{|D|,\delta} : V_{|D|,\delta} \longrightarrow \mathcal{M}_{\tilde{g}}, \quad (5.0.18)$$

donde $\tilde{g} = p_a(D) - \delta$, para cada $\delta \geq 1$; el problema consiste en determinar la dimensión de su imagen en el espacio moduli.

Para $S = \mathbb{P}^2$, Sernesi resuelve este problema [22], y Flamini hace un estudio extenso de este problema para superficies de tipo general en [14]. Usaremos sus herramientas para estudiarlos en nuestro caso.

Entonces, si consideramos $[C] \in V_{|D|,\delta}$, $\delta \geq 1$, un punto regular y $\varphi : \tilde{C} \rightarrow C \subset S$ su normalización, obtenemos

$$0 \rightarrow H^0(\tilde{C}, \varphi^* T_S) \rightarrow H^0(\tilde{C}, N_\varphi) \xrightarrow{\partial} H^1(\tilde{C}, T_{\tilde{C}}) \rightarrow H^1(\tilde{C}, \varphi^* T_S) \rightarrow H^1(\tilde{C}, N_\varphi) \rightarrow 0, \quad (5.0.19)$$

donde $\dim H^0(\tilde{C}, N_\varphi) = \dim T_{[C]}(V_{|D|,\delta})$ y $\dim H^1(\tilde{C}, T_{\tilde{C}}) = \dim T_{[\tilde{C}]} \mathcal{M}_{\tilde{g}} = 3\tilde{g} - 3 = 3p_a(D) - 3\delta - 3$.

Por [14], el morfismo cofrontera ∂ puede identificarse con el diferencial del morfismo $\pi_{|D|,\delta} : Y$

$$\dim(\pi_{|D|,\delta}) = \dim H^0(\tilde{C}, N_\varphi) - H^0(\tilde{C}, \varphi^* T_S). \quad (5.0.20)$$

Definición 5.0.21. Sea S una superficie proyectiva suave y regular, y sea $|D|$ el sistema lineal completo cuyo elemento general es una curva suave en S . Sea $\delta \geq 1$ tal que $V_{|D|,\delta} \neq \emptyset$. El *número moduli* de la familia $V_{|D|,\delta}$ es

$$\dim(\pi_{|D|,\delta}).$$

El *número moduli esperado* de $V_{|D|,\delta}$ es

$$\text{expmod}(V_{|D|,\delta}) := \dim(V_{|D|,\delta}),$$

para cada $\delta \geq 1$.

A partir de este momento, consideraremos $S = \mathbb{F}_n$, y D un divisor efectivo en $\mathbb{F}_n$, linealmente equivalente a $aC_0 + bF$, donde C_0 y F son los generadores de $\text{Pic}(\mathbb{F}_n)$ con a y b números enteros positivos. Sea $|D|$ el sistema lineal completo asociado a D . Si $b \geq an$, entonces D es un divisor sin puntos base, y por el teorema de Bertini, [17, III.10.9], el elemento general de $|D|$ es no singular.

Consideramos $C \in |D|$ una curva δ -nodal con nodos en Z . Sea $\sigma : X = \text{Bl}_Z \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{F}_n$ y $\tilde{C}$ la normalización de C .

Lema 5.0.22. $[C]$ es un punto regular en $V_{|D|,\delta}$.

Demostración. Recordemos que

$$H^1(I_Z(D)) \cong H^1(\mathcal{O}_X(\sigma^*D - E)) \cong H^1(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{C} + E)) \cong H^1(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{C} + E))$$

y, por dualidad de Serre, obtenemos

$$H^1(I_Z(D)) \cong H^0(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(K_X - E)),$$

y, si $a \geq 1$ y $b \geq \frac{a}{2}n - a + 1$, entonces el grado de $\mathcal{O}_{\tilde{C}}(K_X - E)$ es negativo. Por lo tanto, por la observación anterior, $[C]$ es un punto regular en $V_{|D|,\delta}$. ■

Consideremos la siguiente sucesión exacta en X

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-\tilde{C}) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{C}} \rightarrow 0,$$

al tensorizar con $\sigma^*T_{\mathbb{F}_n}$ obtenemos

$$0 \rightarrow \sigma^*T_{\mathbb{F}_n} \otimes \mathcal{O}_X(-\tilde{C}) \rightarrow \sigma^*T_{\mathbb{F}_n} \rightarrow \sigma^*T_{\mathbb{F}_n}|_{\tilde{C}} \rightarrow 0$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\sigma^*T_{\mathbb{F}_n} \otimes \mathcal{O}_X(-\tilde{C})) &\rightarrow H^0(\sigma^*T_{\mathbb{F}_n}) \rightarrow H^0(\sigma^*T_{\mathbb{F}_n}|_{\tilde{C}}) \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(\sigma^*T_{\mathbb{F}_n} \otimes \mathcal{O}_X(-\tilde{C})) \rightarrow H^1(\sigma^*T_{\mathbb{F}_n}) \rightarrow H^1(\sigma^*T_{\mathbb{F}_n}|_{\tilde{C}}) \rightarrow \\ &\rightarrow H^2(\sigma^*T_{\mathbb{F}_n} \otimes \mathcal{O}_X(-\tilde{C})) \rightarrow H^2(\sigma^*T_{\mathbb{F}_n}) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.0.23)$$

Dado que, Sernesi en [23] calcula

$$\dim H^0(\sigma^*T_{\mathbb{F}_n}) \cong \dim H^0(T_{\mathbb{F}_n}) = \begin{cases} 6, & \text{si } n = 0, \\ n + 5, & \text{si } n \geq 1, \end{cases} \quad (5.0.24)$$

y

$$\dim H^1(\sigma^*T_{\mathbb{F}_n}) \cong \dim H^1(T_{\mathbb{F}_n}) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0, \\ n - 1, & \text{si } n \geq 1. \end{cases} \quad (5.0.25)$$

y $H^2(\sigma^*T_{\mathbb{F}_n}) \cong H^2(T_{\mathbb{F}_n}) = 0$ para todo $n \geq 0$. Por dualidad de Serre,

$$H^i(\sigma^*T_{\mathbb{F}_n} \otimes \mathcal{O}_X(-\tilde{C})) \cong H^{2-i}(\sigma^*\Omega_{\mathbb{F}_n}^1 \otimes \mathcal{O}_X(K_X + \tilde{C})).$$

Así, podemos usar la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \sigma^*\Omega_{\mathbb{F}_n}^1 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{\delta} \mathcal{O}_{E_j}(2E_j) \rightarrow 0$$

al tensorizar con $\mathcal{O}_X(K_X + \tilde{C})$:

$$0 \rightarrow \sigma^*\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K_{\mathbb{F}_n} + C) \otimes \mathcal{O}_X(-E) \rightarrow \Omega_X^1(K_X + \tilde{C}) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{\delta} \mathcal{O}_{E_j}(2E_j + K_X + \tilde{C}) \rightarrow 0.$$

La sucesión exacta en cohomología es,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\sigma^*\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K_{\mathbb{F}_n} + C) \otimes \mathcal{O}_X(-E)) &\rightarrow H^0(\Omega_X^1(K_X + \tilde{C})) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{\delta} H^0(\mathcal{O}_{E_j}(2E_j + K_X + \tilde{C})) \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(\sigma^*\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K_{\mathbb{F}_n} + C) \otimes \mathcal{O}_X(-E)) \rightarrow H^1(\Omega_X^1(K_X + \tilde{C})) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{\delta} H^1(\mathcal{O}_{E_j}(2E_j + K_X + \tilde{C})) \rightarrow \\ &\rightarrow H^2(\sigma^*\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K_{\mathbb{F}_n} + C) \otimes \mathcal{O}_X(-E)) \rightarrow H^2(\Omega_X^1(K_X + \tilde{C})) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.0.26)$$

Como

$$\deg \mathcal{O}_{E_j}(2E_j + K_X + \tilde{C}) = 2E_j^2 + E_j \cdot K_X + E_j \cdot \tilde{C} = -2 - 1 + 2 = -1,$$

entonces

$$H^0(\mathcal{O}_{E_j}(2E_j + K_X + \tilde{C})) = H^1(\mathcal{O}_{E_j}(2E_j + K_X + \tilde{C})) = 0.$$

Por tanto,

$$H^i(\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K_{\mathbb{F}_n} + C) \otimes I_Z) \cong H^i(\sigma^*\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K_{\mathbb{F}_n} + C) \otimes \mathcal{O}_X(-E)) \cong H^i(\Omega_X^1(K_X + \tilde{C})), \quad (134)$$

donde el primer isomorfismo es válido ya que $R^i\sigma_*(\mathcal{O}_X(-E)) = 0$, para todo $i > 0$. Ahora, por la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K + C) \otimes I_Z \rightarrow \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K + C) \rightarrow \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K + C) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}/I_Z \rightarrow 0,$$

obtenemos la sucesión exacta en cohomología,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K + C) \otimes I_Z) &\rightarrow H^0(\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K + C)) \xrightarrow{h} H^0(\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K + C) \otimes (\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}/I_Z)) \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K + C) \otimes I_Z) \rightarrow H^1(\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K + C)) \rightarrow 0 \rightarrow \\ &\rightarrow H^2(\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K + C) \otimes I_Z) \rightarrow H^2(\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K + C)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Sin embargo, los siguientes lemas nos permiten anular ciertos grupos que aparecen en la sucesión exacta larga anterior.

Lema 5.0.27 ([11, Lema 3.6]). *Supongamos que $a \geq 3$ y $b \geq (a-1)n+4$ si $n \neq 0$, y $a \geq 3$, $b \geq 3$ para $n = 0$. Entonces $H^1(\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K_{\mathbb{F}_n} + C)) \cong H^2(\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K_{\mathbb{F}_n} + C)) = 0$.*

Lema 5.0.28. *Si $a \geq \delta+2$ y $b \geq (a-1)n+\delta+1$ entonces $\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K+C)$ es un $(\delta-1)$ -jet amplio. En particular, h es sobreyectiva.*

Demostración. Sea $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}((\delta-1)C_0 + (\delta n + \delta - n - 1)F)$. Dado que $C_0 + (n+1)F$ es 1-jet amplio (pues es un divisor muy amplio en $\mathbb{F}_n$) entonces $\mathcal{L}$ es $(\delta-1)$ -jet amplio. Notemos que $\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K_{\mathbb{F}_n} + C) \otimes \mathcal{L}^{-1} = \Omega_{\mathbb{F}_n}^1((a-1-\delta)C_0 + (b-1-\delta n - \delta)F)$ globalmente generado si $a-1-\delta \geq 1$ y $b-1-\delta n - \delta \geq (a-1-\delta)n$. Entonces, con las condiciones, vemos que $\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K_{\mathbb{F}_n} + C) \otimes \mathcal{L}^{-1}$ es 0-jet amplio y $\mathcal{L}$ es $(\delta-1)$ -jet amplio. Por lo tanto $\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K_{\mathbb{F}_n} + C) = \Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K_{\mathbb{F}_n} + C) \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{L}$ es $(\delta-1)$ -jet amplio. ■

Por lo tanto, se sigue que $H^1(\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K+C) \otimes \mathcal{I}_Z) = 0$. Más aún, lo podemos compilar en la siguiente proposición.

Proposición 5.0.29. *Si $a \geq \delta+2$ y $b \geq \max\{(a-1)n+4, (a-1)n+\delta+1\}$ entonces:*

1. $H^0(\sigma^*T_{\mathbb{F}_n} \otimes \mathcal{O}_X(-\tilde{C})) = 0$.

2. $H^1(\sigma^*T_{\mathbb{F}_n} \otimes \mathcal{O}_X(-\tilde{C})) = 0$.

- 3.

$$\begin{aligned} \dim H^0(\sigma^*T_{\mathbb{F}_n} \otimes \mathcal{O}_X(-\tilde{C})) &= \dim H^0(\sigma^*\Omega_{\mathbb{F}_n}^1(K+C) \otimes \mathcal{O}_X(-E)) \\ &= \dim H^0(\Omega_X^1(K_X + \tilde{C})) = (K_X + \tilde{C})^2 - (2+\delta) \\ &= 4g - C^2 - 2\delta + 2 \\ &= (2b - an - 4)(a-2) - 2 - 2\delta. \end{aligned}$$

Teorema 5.0.30. *Con las hipótesis de la Proposición 5.0.29*

$$\dim H^0(\varphi^*T_{\mathbb{F}_n}) = \begin{cases} 6 & \text{if } n = 0 \\ n+5 & \text{if } n \geq 1 \end{cases} \quad (5.0.31)$$

$$\dim H^1(\varphi^*T_{\mathbb{F}_n}) = \begin{cases} (2b - an - 4)(a-2) - 2 - 2\delta & \text{if } n = 0 \\ (2b - an - 4)(a-2) - 2\delta + n - 3 & \text{if } n \geq 1 \end{cases} \quad (5.0.32)$$

Demostración. Primero, nótese que $\sigma^*T_{\mathbb{F}_n}|_{\tilde{C}} = \varphi^*T_{\mathbb{F}_n}$. Aplicamos la proposición anterior junto con (5.0.24) y (5.0.25). ■

Recordemos que $N_\varphi \cong \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{C} + E)$ así, de la sucesión exacta,

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(E) \rightarrow \mathcal{O}_X(\tilde{C} + E) \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{C} + E) \rightarrow 0 \quad (5.0.33)$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
0 &\rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(E)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(\tilde{C} + E)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{C} + E)) \rightarrow \\
&\rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(E)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(\tilde{C} + E)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{C} + E)) \rightarrow \\
&\rightarrow H^2(\mathcal{O}_X(E)) \rightarrow H^2(\mathcal{O}_X(\tilde{C} + E)) \rightarrow 0,
\end{aligned} \tag{5.0.34}$$

y, dado que $H^i(\mathcal{O}_X(E)) \cong H^{2-i}(\mathcal{O}_X(K_X - E)) \cong H^{2-i}(\sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(K)) \cong H^{2-i}(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(K)) \cong H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n})$ entonces

$$H^1(N_\varphi) \cong H^1(\mathcal{O}_X(\tilde{C} + E)) \tag{5.0.35}$$

$$\dim H^0(N_\varphi) = \dim H^0(\mathcal{O}_X(\tilde{C} + E)) - 1. \tag{5.0.36}$$

Lema 5.0.37. Si $a \geq 1$ y $b \geq \frac{a}{2}n - a + 1$ entonces $H^1(N_\varphi) = 0$ y $\dim H^0(N_\varphi) = C^2 - g - \delta + 1$.

Demostración. Como $H^1(N_\varphi) \cong H^1(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{C} + E)) \cong H^0(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(K_X - E))^*$, notemos que $(K_X - E) \cdot \tilde{C} = (\sigma^*K_{\mathbb{F}_n}) \cdot (\sigma^*C - 2E) = K_{\mathbb{F}_n} \cdot C = an - 2 - 2b < 0$, por lo tanto $H^0(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(K_X - E)) = 0$. Además, ya que $H^1(N_\varphi) \cong H^1(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{C} + E)) \cong H^0(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(K_X - E))^*$, entonces $H^1(N_\varphi) = 0$ y $\dim H^0(N_\varphi) = \deg \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{C} + E) - \tilde{g} + 1 = C^2 - g - \delta + 1$ y esto es $\frac{(2b-an+2)(a+1)}{2} - 1 - \delta$. ■

En resumen, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 5.0.38. Supongamos que $a \geq \delta + 2$ y $b \geq \max\{(a-1)n + \delta + 1, (a-1)n + 4\}$. Entonces

1. $\dim H^0(\varphi^*T_{\mathbb{F}_n}) = \begin{cases} 6 & \text{si } n = 0 \\ n + 5 & \text{si } n \geq 1 \end{cases},$
2. $\dim H^1(\varphi^*T_{\mathbb{F}_n}) = \begin{cases} (2b - an - 4)(a - 2) - 2 - 2\delta & \text{si } n = 0 \\ (2b - an - 4)(a - 2) - 3 - 2\delta + n & \text{si } n \geq 1 \end{cases},$
3. $\dim H^0(N_\varphi) = \frac{(2b-an+2)(a+1)}{2} - 1 - \delta,$
4. $\dim H^1(N_\varphi) = 0.$

Dado que $\dim(\pi_{|D|,\delta}) = \dim H^0(\tilde{C}, N_\varphi) - H^0(\tilde{C}, \varphi^*T_{\mathbb{F}_n})$, entonces enunciamos el siguiente teorema.

Teorema 5.0.39. Supongamos que $a \geq \delta + 2$ y $b \geq \max\{(a-1)n + \delta + 1, (a-1)n + 4\}$. Entonces

$$\dim(\pi_{|D|,\delta}) = \begin{cases} (b+1)(a+1) - \delta - 7 & \text{si } n = 0 \\ \frac{(2b-an+2)(a+1)}{2} - \delta - n - 6 & \text{si } n \geq 1. \end{cases} \tag{5.0.40}$$

Observación 5.0.41. Bajo las condiciones del teorema, la dimensión de la imagen de la familia $V_{|D|,\delta}$ no tiene la dimensión esperada $\dim |D| - \delta = \frac{(2b-an+2)(a+1)}{2} - \delta$.

5.1 Sobre la estratificación de $\mathcal{M}_g$ por el corango de la aplicación de Wahl

Recordemos que, para toda curva suave $[C] \in \mathcal{M}_g$, se tiene que

$$0 \leq \text{corank}(\Phi_C) \leq 3g - 2,$$

donde el límite superior es alcanzado por las curvas hiperelípticas. Además, para la curva general de género $g = 10$ y $g \geq 12$, la aplicación de Wahl es sobreyectiva; esto implica que el límite inferior es alcanzado por las curvas generales para estos géneros.

Sea $\mathcal{W}_g \subset \mathcal{M}_g$ el *locus de Wahl*, definido como el locus de curvas cuya aplicación de Wahl no es sobreyectiva, es decir,

$$\mathcal{W}_g := \{[C] \in \mathcal{M}_g \mid \text{corank}(\Phi_C) \geq 1\}.$$

Observación 5.1.1. ■ Si $2 \leq g \leq 9$ entonces la dimensión del dominio de la aplicación de Wahl es menor que dimensión del codominio. Lo cual nos dice que la aplicación de Wahl no puede ser sobreyectiva para toda curva suave, esto es, $\mathcal{W}_g = \mathcal{M}_g$.

- Si $g = 10$ entonces $\mathcal{W}_{10}$ es un divisor $\mathcal{M}_{10}$, demostrado por Culkierman-Ulmer.
- Si $g = 11$ entonces $\mathcal{W}_{11} = \mathcal{M}_{11}$ (Mukai).
- Para $g \geq 12$ entonces $\mathcal{W}_g \subsetneq \mathcal{M}_g$, pues Ciliberto-Harris-Miranda mostraron que la curva general tiene aplicación de Wahl sobreyectiva.

Nótese que, tal como mencionan Ciliberto, López y Miranda en [7], el corango de la aplicación de Wahl es semicontinuo superiormente en $\mathcal{M}_g$, el espacio moduli de curvas de género g . La cuestión es local en el espacio moduli compactificado (Deligne-Mumford) $\overline{\mathcal{M}}_g$, y por lo tanto se puede trabajar sobre la familia de Kuranishi asociada a la curva estable. En este caso, gracias a la constancia de las dimensiones y a los teoremas estándar de cambio de base, se tienen dos haces vectoriales sobre $\mathcal{M}_g$, y el morfismo es un morfismo entre haces. De este modo, se sigue la semicontinuidad. Lo cual implica que $\mathcal{W}_g$ es un cerrado de Zariski en $\mathcal{M}_g$.

Por lo tanto, tiene sentido estudiar la estratificación del espacio moduli por el corango de la aplicación de Wahl, mediante estratos de la forma

$$\text{Wahl}_{g,r} = \{[C] \in \mathcal{M}_g \mid \text{corank}(\Phi_C) \geq r\},$$

donde el locus de Wahl $\mathcal{W}_g$ corresponde a $\text{Wahl}_{g,1}$.

Analicemos por género:

- Si $g = 2$, entonces las aplicaciones de Wahl para las curvas en $\mathcal{M}_2$ tienen la forma $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^5$, por lo tanto, tiene corango exactamente 4 para todas las curvas en $\mathcal{M}_2$.

- Si $g = 3$, entonces las aplicaciones de Wahl para las curvas en $\mathcal{M}_3$ tienen la forma $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^{10}$. También se tiene que el corango es exactamente 7 para las curvas hiperelípticas y para las curvas no-hiperelípticas en $\mathcal{M}_3$.
- Si $g = 4$, entonces las aplicaciones de Wahl para las curvas en $\mathcal{M}_4$ tienen la forma $\mathbb{C}^6 \rightarrow \mathbb{C}^{15}$. En este caso, Brawner-Wahl mostraron que el corango es 10 para el caso de curvas hiperelípticas y el corango es 9 en otro caso.
- Si $g = 5$, entonces las aplicaciones de Wahl para las curvas en $\mathcal{M}_5$ tienen la forma $\mathbb{C}^{10} \rightarrow \mathbb{C}^{20}$. También en este caso, Brawner-Wahl mostraron que el corango es 13 para el caso de curvas hiperelípticas y el corango es 10 en otro caso (que pueden ser curvas trigonales o intersecciones completas de tres cuádricas en $\mathbb{P}^4$).

Por lo que en género bajo, los valores intermedios para el corank(Φ_C) no son posibles. Sin embargo esto ha llevado a algunos autores a preguntarse si, en género alto, todos los valores intermedios para el corango son posibles. Esta cuestión sigue abierta.

Ahora, ejemplificaremos la importancia de los resultados obtenidos en este trabajo en el caso $\delta = 1$.

Ejemplo 5.1.2. Tomemos la primer superficie de Hirzebruch $\mathbb{F}_1$ y (por las condiciones numéricas del teorema B de la sección 4.3) consideremos $a \geq 6$ y $b \geq a + 4$. Fijemos $a = 6$ y $b = 10$. Sea C es una curva 1-nodal en el sistema lineal $|6C_0 + 10F|$ en $\mathbb{F}_1$. Entonces $\tilde{C}$ es una curva suave género $g = 29$ con aplicación de Wahl no sobreyectiva y, más aún, tiene corango igual a $8 = h^0(\mathcal{O}_X(-K_X))$ usando los cálculos del capítulo 4. Por otro lado, consideremos el estrato en $\mathcal{M}_{29}$,

$$\text{Wahl}_{29,8} = \{[C] \in \mathcal{M}_{29} : C \text{ corank}(\Phi_C) \geq 8\}.$$

Entonces la imagen de $V_{|6C_0+10F|,1}$ bajo $\pi_{|6C_0+10F|,1}$ cae dentro de este estrato y, por el Teorema 5.0.39, tiene dimensión 48 por lo tanto,

$$\dim \text{Wahl}_{29,8} \geq 48.$$

Esto nos dice que en el espacio moduli $\mathcal{M}_{29}$, de dimensión 84, el estrato de curvas en $\mathcal{M}_{29}$ cuya aplicación de Wahl tiene corango mayor a 8 tiene dimensión mayor o igual a 48.

En general, para $n \geq 3$, $a \geq 6$ y $b \geq an + 3$, tenemos que la imagen de la Variedad de Severi $V_{|aC_0+bF|,1}$ en el sistema lineal $|aC_0 + bF| \subset \mathbb{F}_n$, es $\pi_{|aC_0+bF|,1}(V_{|aC_0+bF|,1}) \subset \mathcal{M}_{ab-a-b+\frac{an(1-a)}{2}}$ y tiene dimensión $\frac{(2b-an+2)(a+1)}{2} - n - 7$. Y por los resultados de la capítulo 4 cae en el estrato

$$\text{Wahl}_{ab-a-b+\frac{an(1-a)}{2},n+5} \subset \mathcal{W}_{ab-a-b+\frac{an(1-a)}{2}}$$

de curvas suaves cuya aplicación de Wahl tiene corango mayor o igual a $n + 5$.

Bibliografía

- [1] Enrico Arbarello, Andrea Bruno, and Edoardo Sernesi. On hyperplane sections of K3 surfaces. *Algebr. Geom.*, 4(5):562–596, 2017. doi:[10.14231/2017-028](https://doi.org/10.14231/2017-028). [8](#), [10](#)
- [2] Arnaud Beauville. *Complex algebraic surfaces*, volume 68 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1983. Translated from the French by R. Barlow, N. I. Shepherd-Barron and M. Reid. [16](#), [17](#), [19](#), [20](#)
- [3] Mauro C. Beltrametti, Sandra Di Rocco, and Andrew J. Sommese. On generation of jets for vector bundles. *Rev. Mat. Complut.*, 12(1):27–45, 1999. URL: https://doi.org/10.5209/rev_rema.1999.v12.n1.17182, doi:[10.5209/rev_rema.1999.v12.n1.17182](https://doi.org/10.5209/rev_rema.1999.v12.n1.17182). [35](#)
- [4] Aaron Bertram, Lawrence Ein, and Robert Lazarsfeld. Vanishing theorems, a theorem of Severi, and the equations defining projective varieties. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(3):587–602, 1991. doi:[10.2307/2939270](https://doi.org/10.2307/2939270). [46](#)
- [5] Ciro Ciliberto, Thomas Dedieu, and Edoardo Sernesi. Wahl maps and extensions of canonical curves and K3 surfaces. *J. Reine Angew. Math.*, 761:219–245, 2020. doi:[10.1515/crelle-2018-0016](https://doi.org/10.1515/crelle-2018-0016). [11](#)
- [6] Ciro Ciliberto, Joe Harris, and Rick Miranda. On the surjectivity of the Wahl map. *Duke Math. J.*, 57(3):829–858, 1988. doi:[10.1215/S0012-7094-88-05737-7](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-88-05737-7). [7](#)
- [7] Ciro Ciliberto, Angelo Lopez, and Rick Miranda. Projective degenerations of k3 surfaces, gaussian maps, and fano threefolds. *Inventiones mathematicae*, 114(3):641–667, December 1993. doi:[10.1007/BF01232682](https://doi.org/10.1007/BF01232682). [66](#)
- [8] Ciro Ciliberto, Angelo Felice Lopez, and Rick Miranda. On the Wahl map of plane nodal curves. In *Complex analysis and algebraic geometry*, pages 155–163. de Gruyter, Berlin, 2000. [15](#), [47](#), [51](#)
- [9] Ciro Ciliberto and Rick Miranda. Gaussian maps for certain families of canonical curves. In *Complex projective geometry (Trieste, 1989/Bergen, 1989)*, volume 179 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 106–127. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992. doi:[10.1017/CB09780511662652.009](https://doi.org/10.1017/CB09780511662652.009). [7](#)

- [10] Fernando Cukierman and Douglas Ulmer. Curves of genus ten on $K3$ surfaces. *Compositio Math.*, 89(1):81–90, 1993. URL: http://www.numdam.org/item?id=CM_1993__89_1_81_0. 7
- [11] Jeanne Duflot and Rick Miranda. The Gaussian map for rational ruled surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 330(1):447–459, 1992. doi:10.2307/2154174. 14, 15, 32, 34, 64
- [12] Hélène Esnault and Eckart Viehweg. *Lectures on vanishing theorems*, volume 20 of *DMV Seminar*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992. doi:10.1007/978-3-0348-8600-0. 13
- [13] Gavril Farkas and Mihnea Popa. Effective divisors on $\overline{M}_g$, curves on $K3$ surfaces, and the slope conjecture. *J. Algebraic Geom.*, 14(2):241–267, 2005. doi:10.1090/S1056-3911-04-00392-3. 7
- [14] F. Flamini. Moduli of nodal curves on smooth surfaces of general type. *J. Algebraic Geom.*, 11(4):725–760, 2002. doi:10.1090/S1056-3911-02-00322-3. 61
- [15] Flaminio Flamini. *Families of nodal curves on projective surfaces*. Ph.d. thesis, Università degli Studi di Roma “La Sapienza”, Roma, 1999. 58
- [16] William Fulton. *Intersection theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998. doi:10.1007/978-1-4612-1700-8. 30
- [17] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume No. 52 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. 30, 32, 39, 44, 62
- [18] S. Huh, S. Marchesi, J. Pons-Llopis, and J. Vallès. Generalized logarithmic sheaf on smooth projective surfaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (21):18387–18442, 2023. doi:10.1093/imrn/rnad029. 39
- [19] Robert Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. I*, volume 48 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Classical setting: line bundles and linear series. doi:10.1007/978-3-642-18808-4. 13
- [20] G. Martens. On curves on $K3$ surfaces. In *Algebraic curves and projective geometry (Trento, 1988)*, volume 1389 of *Lecture Notes in Math.*, pages 174–182. Springer, Berlin, 1989. doi:10.1007/BFb0085931. 15
- [21] Rick Miranda. Graph curves and curves on $K3$ surfaces. In *Lectures on Riemann surfaces (Trieste, 1987)*, pages 119–176. World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989. 1, 4

- [22] E. Sernesi. On the existence of certain families of curves. *Invent. Math.*, 75(1):25–57, 1984. doi:[10.1007/BF01403088](https://doi.org/10.1007/BF01403088). 61
- [23] Edoardo Sernesi. *Deformations of algebraic schemes*, volume 334 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. 30, 59, 62
- [24] Edoardo Sernesi. The Wahl map of one-nodal curves on K3 surfaces. In *Local and global methods in algebraic geometry*, volume 712 of *Contemp. Math.*, pages 307–315. Amer. Math. Soc., [Providence], RI, [2018] ©2018. doi:[10.1090/conm/712/14352](https://doi.org/10.1090/conm/712/14352). 15
- [25] Jonathan Wahl. Gaussian maps on algebraic curves. *J. Differential Geom.*, 32(1):77–98, 1990. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214445038>. 8, 14, 15
- [26] Jonathan Wahl. On cohomology of the square of an ideal sheaf. *J. Algebraic Geom.*, 6(3):481–511, 1997. 10
- [27] Jonathan Wahl. Hyperplane sections of Calabi-Yau varieties. *J. Reine Angew. Math.*, 544:39–59, 2002. doi:[10.1515/crll.2002.027](https://doi.org/10.1515/crll.2002.027). 14, 15
- [28] Jonathan M. Wahl. The Jacobian algebra of a graded Gorenstein singularity. *Duke Math. J.*, 55(4):843–871, 1987. doi:[10.1215/S0012-7094-87-05540-2](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-87-05540-2). 1, 6, 9, 10

Miguel Ángel Guerrero Castillo

La aplicación de Wahl para la normalización de curvas nodales en superficies de Hirzebruch.pdf

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:560813925

Fecha de entrega

25 feb 2026, 12:23 p.m. GMT-6

Fecha de descarga

25 feb 2026, 12:27 p.m. GMT-6

Nombre del archivo

La aplicación de Wahl para la normalización de curvas nodales en superficies de Hirzebruch.pdf

Tamaño del archivo

906.6 KB

79 páginas

24.498 palabras

100.395 caracteres

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Doctorado en Ciencias Matemáticas	
Título del trabajo	La aplicación de Wahl para la normalización de curvas nodales en superficies de Hirzebruch.	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	Miguel Angel Guerrero Castillo	1838356g@umich.mx
Director	Luis Abel Castorena Martínez	abel@matmor.umich.mx
Codirector		
Coordinador del programa	Elmar Wagner	elmar.wagner@umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	No	

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Traducción al español	No	
Traducción a otra lengua	No	
Revisión y corrección de estilo	No	
Análisis de datos	No	
Búsqueda y organización de información	No	
Formateo de las referencias bibliográficas	No	
Generación de contenido multimedia	No	
Otro	No	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	
Lugar y fecha	Morelia, Michoacán a 25 de febrero de 2026