



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE  
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ ”  
POSGRADO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA FÍSICA

# ANÁLISIS DE SINCRONIZACIÓN EN SISTEMAS HIPERCAÓTICOS

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS EN  
INGENIERÍA FÍSICA

AUTOR

ZHARKY ALI VALDES GARCIA

Asesor:

Dr. Eduardo Salvador Tututi Hernández



Morelia, Michoacán, abril de 2026



# Resumen

Esta tesis doctoral investiga la sincronización de sistemas dinámicos caóticos, centrándose en la caracterización del potencial polinomial  $\Phi^8$  y en el análisis comparativo de distintos esquemas de acoplamiento. El trabajo se organiza en cuatro capítulos que presentan los siguientes resultados entre los sistemas dinámicos van der Pol-Duffing (VDP-D), Duffing (D) y Rayleigh-Duffing (R-D).

En el Capítulo 1 se establece una clasificación completa del potencial simétrico  $\Phi^8$ , determinando las condiciones algebraicas sobre sus coeficientes para que presente configuraciones de uno, dos, tres o cuatro pozos. Esta caracterización proporciona la base para los estudios de sincronización posteriores y representa una contribución original, dado que el potencial  $\Phi^8$  carecía de una clasificación en la literatura previa.

El Capítulo 2 se divide en dos partes. En la sección 2.1 se comparan cuatro esquemas de acoplamiento para tres sistemas en un arreglo lineal con patrón de cadena. La segunda sección extiende el análisis de diferentes patrones de interacción.

El Capítulo 3 aborda el fenómeno del desplazamiento vertical observado entre las soluciones numéricas en el límite de acoplamiento fuerte. Aplicando el método de perturbación, se obtienen soluciones analíticas aproximadas para el sistema esclavo. La comparación con soluciones numéricas revela que este desplazamiento no es el resultado de un efecto numérico, sino un fenómeno de transición que desaparece para tiempos suficientemente largos. Este análisis, además de explicar el comportamiento observado, establece las bases metodológicas para estudiar otros tipos de sincronización compleja. Esta es otra contribución importante de la presente tesis.

El Capítulo 4 presenta un resumen de los resultados más relevantes obtenidos.

En conjunto, esta investigación proporciona herramientas analíticas y resultados prácticos para el diseño y control de arreglos de osciladores no lineales acoplados. Los hallazgos, en particular la caracterización del potencial  $\Phi^8$  y la explicación del desplazamiento vertical, establecen una base sólida para futuros estudios en sincronización compleja de sistemas caóticos.

**Palabras clave:** Sistemas dinámicos caóticos, Potencial  $\Phi^8$ , Acoplamientos combinados, Sincronización con desplazamiento vertical, Solución analítica aproximada.

# Abstract

This doctoral thesis investigates the synchronization of chaotic dynamical systems, focusing on the characterization of the polynomial potential  $\Phi^8$  and the comparative analysis of different coupling schemes. The work is organized into four chapters presenting the following results for the van der Pol-Duffing (VDP-D), Duffing (D), and Rayleigh-Duffing (R-D) dynamical systems.

In Chapter 1, a complete classification of the symmetric  $\Phi^8$  potential is established by determining the algebraic conditions on its coefficients for configurations of single-well, double-well, triple-well or quadruple-well. This characterization provides the foundation for subsequent synchronization studies and represents an original contribution, as the  $\Phi^8$  potential lacked a systematic classification in the previous literature.

Chapter 2 is divided into two parts. Section 2.1 compares four coupling schemes for three systems in a linear chain configuration. The second section extends the analysis to different interaction motifs.

Chapter 3 addresses the phenomenon of vertical shift observed between numerical solutions in the strong coupling limit. By applying the perturbation method, approximate analytical solutions for the slave system are obtained. Comparison with numerical solutions reveals that this shift is not a numerical artifact but rather a transient phenomenon that vanishes for sufficiently long times. This analysis not only explains the observed behavior but also establishes the methodological basis for studying other types of complex synchronization. This constitutes another important contribution of the present thesis.

Chapter 4 provides a summary of the most relevant results.

In summary, this research provides analytical tools and practical results for the design and control of coupled nonlinear oscillator arrays. The findings, particularly the characterization of the  $\Phi^8$  potential and the explanation of the vertical shift, establish a solid foundation for future studies on complex synchronization of chaotic systems.

**Keywords:** Chaotic dynamical systems,  $\Phi^8$  potential, Combined couplings, Vertical shift synchronization, Approximate analytical solution.

# Índice general

|                                                                                                                                             |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Resumen</b>                                                                                                                              | <b>II</b>  |
| <b>Abstract</b>                                                                                                                             | <b>III</b> |
| <b>Introducción</b>                                                                                                                         | <b>1</b>   |
| <b>1. Potencial simétrico <math>\Phi^8</math></b>                                                                                           | <b>5</b>   |
| <b>2. Sincronización</b>                                                                                                                    | <b>12</b>  |
| 2.1. Diferentes tipos de acoplamientos . . . . .                                                                                            | 14         |
| 2.1.1. Acoplamiento giroscópico . . . . .                                                                                                   | 14         |
| 2.1.2. Acoplamiento elástico-disipativo . . . . .                                                                                           | 18         |
| 2.1.3. Acoplamiento elástico-giroscópico . . . . .                                                                                          | 21         |
| 2.1.4. Acoplamiento disipativo-giroscópico . . . . .                                                                                        | 24         |
| 2.1.5. Conclusiones . . . . .                                                                                                               | 27         |
| 2.2. Diferentes tipos de patrones . . . . .                                                                                                 | 28         |
| 2.2.1. Relay . . . . .                                                                                                                      | 29         |
| 2.2.2. Competitive . . . . .                                                                                                                | 33         |
| 2.2.3. Auxiliar . . . . .                                                                                                                   | 37         |
| 2.2.4. Conclusiones . . . . .                                                                                                               | 40         |
| <b>3. Estudio numérico y analítico de la sincronización entre dos sistemas<br/>no lineales diferentes con potencial <math>\Phi^8</math></b> | <b>42</b>  |
| 3.1. Estudio numérico . . . . .                                                                                                             | 43         |
| 3.1.1. Acoplamiento giroscópico . . . . .                                                                                                   | 43         |
| 3.1.2. Acoplamiento elástico-giroscópico . . . . .                                                                                          | 47         |
| 3.2. Solución analítica . . . . .                                                                                                           | 47         |
| 3.3. Conclusiones . . . . .                                                                                                                 | 54         |
| <b>4. Resumen de resultados y conclusiones</b>                                                                                              | <b>55</b>  |

# Introducción

Los sistemas dinámicos describen la evolución temporal de variables mediante ecuaciones diferenciales, permitiendo modelar fenómenos en física, ingeniería y biología [1, 2, 3, 4]. Estos sistemas pueden clasificarse según su dimensionalidad: los de baja dimensión, con dos o tres variables, son analíticamente más accesibles, mientras que los de alta dimensión, como redes de osciladores acoplados, permiten modelar comportamientos colectivos complejos. Para sistemas autónomos continuos y planos (dos dimensiones), el teorema de Poincaré-Bendixson establece que las trayectorias solo pueden tender a puntos fijos, ciclos límite o conjuntos límite de ciclos, excluyendo la posibilidad de caos [5, 6].

La aparición del caos en sistemas continuos requiere al menos tres dimensiones, como lo demostró el sistema de Lorenz (1963). Este sistema, derivado de un modelo de convección atmosférica, presenta trayectorias que exhiben sensibilidad a las condiciones iniciales y un atractor extraño. Su descubrimiento marcó un hito en la teoría del caos y de los sistemas dinámicos, ya que mostró que un sistema determinista simple puede generar un comportamiento aparentemente aleatorio y altamente impredecible [7]. Otro ejemplo paradigmático incluye el problema de los tres cuerpos en mecánica celeste, cuyas soluciones pueden volverse irregulares e impredecibles [8]. Por otro lado, el péndulo doble, un sistema plano descrito por dos variables que presenta dependencia sensible a las condiciones iniciales, puede generar caos cuando se le aplica una fuerza o impulso externo. Esto se debe a que el forzamiento aumenta la dimensión de su dinámica, permitiendo la aparición de comportamiento caótico [9]. Este principio se extiende a otros sistemas permitiendo que osciladores como el de Duffing o el de van der Pol, exhiban comportamiento caótico a pesar de ser descritos por ecuaciones de segundo orden [10].

La comprensión de estos fundamentos ha impulsado, en las últimas décadas, el estudio aplicado de sistemas dinámicos, tanto caóticos como no caóticos, el cual ha cobrado relevancia debido a sus diversas aplicaciones, que abarcan desde láseres acoplados y cifrado de datos hasta comunicaciones seguras, redes neuronales y neurociencia [11, 12, 13]. Gran parte de estos fenómenos estudiados parten del control de la sincronización de los sistemas. Las redes neuronales, por ejemplo, se componen por un conjunto de nodos acoplados, cada uno de los cuales es un sistema dinámico. En general, cuando todos los nodos presentan las mismas características dinámicas que los protocolos de red diseñados, se denomina sincronización de redes neuronales [12]. Precisamente, en dicho estudio [12] se analiza la sincronización de redes neuronales complejas en el marco del control impulsivo retardado disparado por eventos, donde se considera completamente el efecto de los retrasos de tiempo en los impulsos. Se presentan algunas condiciones suficientes para evitar el llamado comportamiento de Zenón y lograr una

estabilidad asintótica global del sistema abordado. De este modo, la sincronización ha atraído una amplia atención y se ha aplicado con éxito a campos tan diversos y emergentes como la inteligencia artificial [12]. Por otra parte, un principio fundamental de la neurociencia teórica, de acuerdo con Durstewitz et al. [13], sostiene que los procesos de cálculo neuronal pueden describirse mediante la dinámica no lineal de los sistemas subyacentes. Esto permite inferir modelos de sistemas dinámicos directamente a partir de series temporales de poblaciones neuronales, mediante un enfoque conocido como reconstrucción de sistemas dinámicos. En este trabajo se analiza el potencial de este enfoque para revolucionar la neurociencia, destacando avances y conceptos recientes en inteligencia artificial que aún no han sido adoptados por la comunidad neurocientífica. Particularmente, el estudio se centra en el uso de redes neuronales recurrentes como herramientas para dicha reconstrucción [13].

Precisamente, entre los sistemas dinámicos no lineales más ampliamente estudiados se encuentran los sistemas van der Pol-Duffing (VDP-D), Duffing (D) [14] y Rayleigh-Duffing (R-D). Los sistemas van der Pol-Duffing y Rayleigh-Duffing extienden los osciladores clásicos de van der Pol [15] y Rayleigh [16], respectivamente, mediante la incorporación de un potencial de tipo Duffing, lo que enriquece su dinámica no lineal. Estos sistemas provienen de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden homogéneas, las cuales, al ser representadas en el espacio de fase, dan lugar a los sistemas dinámicos mencionados. Esta representación resulta fundamental para el estudio de comportamientos complejos. Al ser forzados por una excitación externa periódica, pueden transitar hacia un régimen caótico. La dinámica caótica se caracteriza por una alta sensibilidad a las condiciones iniciales, donde trayectorias inicialmente cercanas divergen exponencialmente, generando atractores caóticos con estructura fractal en el espacio de fase. Un aspecto esencial es la dependencia crítica de estos atractores respecto a los parámetros del sistema, ya que variaciones leves pueden provocar la desaparición del caos, dando lugar a comportamientos periódicos, cuasiperiódicos o estados estacionarios.

La sincronización de sistemas dinámicos se extendió a la dinámica caótica con el trabajo de Fujisaka y Yamada en 1983, quienes demostraron por primera vez que dos sistemas caóticos idénticos pueden cambiar sus comportamientos individuales, de oscilaciones no correlacionadas a oscilaciones completamente idénticas, a medida que aumenta la fuerza de acoplamiento [17]. En este mismo sentido, la sincronización completa, para sistemas caóticos idénticos, fue analizada por primera vez por Kaneko y Afraimovich et al. en 1986, este tipo de sincronización se caracteriza porque las variables coinciden a medida que el tiempo tiende a infinito a pesar de dependencia característica de las condiciones iniciales [17]. Este tipo de sincronización completa se ha extendido a la sincronización de sistemas diferentes bajo la misma esencia.

Con el trabajo de Boccaletti [17], se dio inicio a gran cantidad de tipos y métodos de sincronización para su aplicación especialmente con fines de control. Algunos de estos tipos de sincronización son: sincronización completa; antisincronización; sincronización de fase y antifase; sincronización proyectiva; sincronización proyectiva funcional; sincronización proyectiva funcional con retardo; sincronización proyectiva matricial; sincronización híbrida; sincronización con retardo entre otras [11].

El mecanismo que permite una interacción entre sistemas con el fin de lograr la sincronización es el acoplamiento [17]. Esta interacción puede organizarse en distintas

configuraciones o esquemas, siendo las más elementales la unidireccional, también llamada configuración maestro-esclavo, y la bidireccional [18, 19, 20]. La elección del tipo de interacción determina la dinámica resultante. Bajo la configuración maestro-esclavo, se fuerza al sistema denominado esclavo a modificar su comportamiento con el fin de que sus variables se comporten como las del sistema llamado maestro. Aquí, el sistema esclavo depende del comportamiento del sistema maestro, pero este último no es influenciado por el primero.

El acoplamiento se logra mediante una función que depende de las variables de los sistemas en interacción. De la elección de la función de acoplamiento depende, en gran medida, que se alcance la sincronización.

Partiendo de este marco teórico, el presente trabajo se propone investigar la sincronización de sistemas dinámicos caóticos, con un enfoque que combina el desarrollo teórico con la simulación numérica. La primera contribución fundamental de esta tesis consiste en realizar una caracterización completa y original del potencial polinómico simétrico de orden ocho, es decir, el potencial  $\Phi^8$ , el cual carecía de una clasificación sistemática previa en la literatura especializada. Se determinan las condiciones sobre sus coeficientes para que este potencial adopte configuraciones específicas, que pueden incluir desde un solo pozo hasta cuatro pozos distintos. Esta clasificación no solo enriquece el conocimiento teórico sobre sistemas con potenciales de alto orden, sino que también establece la base esencial para analizar la dinámica y la posible sincronización de los sistemas caóticos estudiados, concretamente los sistemas van der Pol-Duffing, Duffing y Rayleigh-Duffing. Adicionalmente, se realiza un análisis comparativo y sistemático de diferentes tipos de acoplamientos, evaluando su efectividad para lograr sincronización completa. Se estudian esquemas de acoplamiento individuales, como el giroscópico, junto con configuraciones combinadas, como el acoplamiento elástico-disipativo y el elástico-giroscópico, entre otros. Este análisis no se limita a la clásica configuración maestro-esclavo, sino que se extiende a arreglos más complejos que involucran patrones de interacción específicos, como los patrones Relay, Competitive y Auxiliar [17], con el fin de determinar la viabilidad y eficiencia de la sincronización bajo distintas topologías de interconexión.

Otro aspecto crucial que se aborda es el fenómeno del desplazamiento vertical que surge entre las soluciones numéricas de los sistemas acoplados cuando la fuerza de acoplamiento es muy grande [21]. Para comprender el origen de este comportamiento, se aplica el método de perturbación, lo que permite obtener soluciones analíticas aproximadas para el sistema esclavo. La comparación directa entre estas soluciones analíticas y las obtenidas mediante métodos numéricos revela que el desplazamiento vertical no es una consecuencia del cálculo numérico, sino más bien un fenómeno de naturaleza transitoria que desaparece cuando se consideran intervalos de tiempo suficientemente largos, correspondiendo a un proceso de convergencia asintótica.

En la parte numérica del trabajo, todos los análisis y las gráficas se realizaron con el software Wolfram Mathematica 12. Las soluciones numéricas se obtuvieron mediante el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden para tiempos  $t \geq 0$ .

En síntesis, este trabajo proporciona aportes significativos tanto en el ámbito teórico, con la clasificación del potencial  $\Phi^8$ , como en el aplicado, con la evaluación exhaustiva de acoplamientos y el análisis de fenómenos transitorios. Los hallazgos obtenidos ofrecen herramientas valiosas y un fundamento sólido para el diseño, control y optimización



de redes complejas de osciladores no lineales, abriendo nuevas líneas de investigación en el campo de la sincronización de sistemas dinámicos caóticos.

# Capítulo 1

## Potencial simétrico $\Phi^8$

El propósito de utilizar diferentes potenciales es enriquecer y hacer más realista la dinámica de los sistemas dinámicos. Un ejemplo de esto es el potencial  $\Phi^4$ , el cual puede presentar las siguientes configuraciones según sus parámetros: un pozo único, dos pozos o dos jorobas [21]. De manera similar, se han estudiado sistemas con el potencial  $\Phi^6$  cuyas configuraciones posibles son: un pozo con dos jorobas, dos pozos con una joroba; tres pozos con dos jorobas, o dos pozos con tres jorobas [22]. El caso de  $\Phi^8$  es diferente, este potencial no ha sido caracterizado para conocer sus configuraciones a través de sus parámetros, aunque se ha utilizado en distintos trabajos. Por ejemplo, en [23] se analiza el efecto de ciertos parámetros sobre el número y la profundidad de los pozos del potencial  $\Phi^8$ . Además, se muestra que el sistema de Liénard con el potencial  $\Phi^8$  puede tener tres, cinco o siete puntos fijos. En [22], los autores estudian la transición al caos en un oscilador complejo  $\Phi^8$ -Duffing-Van der Pol, teniendo en cuenta las posibles configuraciones de los potenciales  $\Phi^2$ ,  $\Phi^4$  y  $\Phi^6$ , las cuales dependen de sus parámetros. En el caso del potencial  $\Phi^8$ , solo se mencionan brevemente dos configuraciones: tres pozos o un pozo único, dependiendo de si cierto parámetro es suficientemente pequeño o grande. Es importante destacar que el potencial  $\Phi^8$  se ha utilizado en el contexto de la teoría cuántica de campos para modelar la ruptura espontánea de simetría, útil para el mecanismo de Higgs o para modelar teorías no lineales en la búsqueda de soluciones de tipo kink [24, 25, 26, 27, 28]. La dinámica que surge de sistemas como el van der Pol y Duffing con potenciales  $\Phi^4$  o  $\Phi^6$  ha sido previamente estudiada en detalle [29, 30, 31, 32]. En este capítulo se establecen las condiciones necesarias para que el potencial simétrico de tipo  $\Phi^8$  presente configuraciones de uno, dos, tres o cuatro pozos. El potencial simétrico  $\Phi^8$  se expresa como [33] :

$$V(x) = \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{4}x^4 + \frac{\gamma}{6}x^6 + \frac{\delta}{8}x^8, \quad (1.1)$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  son números reales. Los pozos (mínimos) y jorobas (máximos) de este potencial se encuentran estableciendo  $\frac{dV}{dx} = 0$ , esto es:

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dx} &= \alpha x + \beta x^3 + \gamma x^5 + \delta x^7 = 0 \\ &\Leftrightarrow x(\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta x^6) = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Para encontrar raíces distintas de  $x = 0$ , utilizamos el cambio de variable  $z = x^2$ , de modo que el problema se reduce a resolver el siguiente polinomio de grado tres:

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 = 0, \quad (1.3)$$

con discriminante

$$\Delta = 18\alpha\beta\gamma\delta - 4\beta^3\delta + \beta^2\gamma^2 - 4\alpha\gamma^3 - 27\alpha^2\delta^2. \quad (1.4)$$

Como es conocido, un polinomio cúbico puede presentar distintos tipos de raíces, cuya clasificación depende del discriminante:

- Si  $\Delta > 0$ , entonces el polinomio tiene tres raíces reales distintas.
- Si  $\Delta = 0$ , entonces el polinomio tiene raíces reales repetidas.
- Si  $\Delta < 0$ , entonces el polinomio tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas.

La multiplicidad y el signo de estas raíces determina el número de pozos del potencial. A continuación, se desarrollan los tres casos para el discriminante, estableciendo las condiciones que deben satisfacer los coeficientes del potencial.

**caso  $\Delta > 0$ .** Se tienen tres raíces reales diferentes. Sean  $a, b$  y  $c$  las raíces de (1.3), entonces el polinomio tiene la siguiente factorización:

$$(z - a)(z - b)(z - c) = z^3 - (a + b + c)z^2 + (ab + bc + ac)z - abc. \quad (1.5)$$

Al igualar el lado derecho de la expresión (1.5) con la ecuación (1.3), se obtienen las siguientes relaciones entre sus coeficientes:

$$\begin{cases} \delta = 1, \\ \gamma = -(a + b + c), \\ \beta = ab + bc + ac, \\ \alpha = -abc. \end{cases} \quad (1.6)$$

De aquí, tenemos que el parámetro  $\delta$  debe ser positivo para cualquier número de pozos. En (1.5), por construcción, el coeficiente del término cúbico es uno, sin embargo, esto no implica que  $\delta$  sea igual a uno. Por otra parte, si  $a, b$  y  $c$  son mayores que cero, al regresar a la variable  $x$  mediante  $z = x^2$ , las raíces  $x_i$  son  $\pm\sqrt{a}$ ,  $\pm\sqrt{b}$  y  $\pm\sqrt{c}$ , lo que da el número máximo de pozos en el potencial. Si alguna de las raíces  $a, b, c$  es negativa, por ejemplo  $c$ , entonces  $\frac{dV}{dx}$  tiene dos raíces imaginarias  $\pm i\sqrt{c}$  y cuatro reales  $\pm\sqrt{a}, \pm\sqrt{b}$ , lo que implica que el potencial presentará tres pozos. Con base en este razonamiento, se deducen las siguientes relaciones para el potencial:

$$\begin{cases} 4 \text{ pozos si } a, b, c > 0, \\ 3 \text{ pozos si } a, b > 0 \text{ y } c < 0, \\ 2 \text{ pozos si } a > 0 \text{ y } b, c < 0, \\ 1 \text{ pozo si } a, b, c < 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Con las condiciones anteriores y las igualdades (1.6), se obtienen los signos que deben cumplir  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  para obtener las raíces de  $\frac{dV}{dx}$  y, en consecuencia, el número de pozos del potencial. Así, se tiene la siguiente tabla con las condiciones que deben satisfacer los coeficientes del potencial para generar una cantidad determinada de pozos:

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ | $\Delta$ | pozos |
|----------|---------|----------|----------|----------|-------|
| +        | +       | +        | +        | +        | 1     |
| -        | +       | -        | +        | +        | 4     |

Para los casos de dos y tres pozos, se necesita conocer el valor numérico de las raíces del polinomio de grado tres, específicamente, de cuál es mayor o menor. Por ello, estos casos se omiten en esta tabla, aunque más adelante se mencionarán las condiciones para generar estos casos.

Se seguirá un procedimiento análogo al realizado hasta aquí para las otras situaciones del discriminante.

**caso  $\Delta = 0$ .** Se tienen raíces reales repetidas (multiplicidad mayor que uno). Las raíces pueden ser dos distintas, una de ellas con multiplicidad dos o una única raíz de multiplicidad tres. A continuación, se presentan estos casos junto con las posibles configuraciones del potencial y la tabla de parámetros resultante.

Sean  $a$  y  $b$  dos raíces reales con  $b$  de multiplicidad dos. La factorización del polinomio de grado tres es

$$(z - a)(z - b)^2 = z^3 - (a + 2b)z^2 + (2ab + b^2)z - ab^2, \quad (1.8)$$

donde el potencial tendrá los siguientes casos:

- 3 pozos si  $a, b > 0$ .
- 2 pozos si  $a > 0, b < 0$ .
- 1 pozo si  $a, b < 0$ .

De modo que obtenemos la siguiente tabla:

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ | $\Delta$ | pozos |
|----------|---------|----------|----------|----------|-------|
| -        | +       | -        | +        | 0        | 3     |
| +        | +       | +        | +        | 0        | 1     |

Si se tiene una única raíz de multiplicidad tres, el polinomio se factoriza de la siguiente manera:

$$(z - a)^3 = z^3 - 3az^2 + 3a^2z - a^3, \quad (1.9)$$

y el potencial tendrá los siguientes dos casos

- 2 pozos si  $a > 0$ .
- 1 pozo si  $a < 0$ .

La tabla asociada a la única raíz de multiplicidad tres es:

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ | $\Delta$ | pozos |
|----------|---------|----------|----------|----------|-------|
| -        | +       | -        | +        | 0        | 2     |
| +        | +       | +        | +        | 0        | 1     |

**caso  $\Delta < 0$ .** Se tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas. La factorización y los casos del potencial son los siguientes:

$$(z-a)(z-[u+iv])(z-[u-iv]) = z^3 - (2u-a)z^2 + (u^2+v^2+2au)z - a(u^2+v^2). \quad (1.10)$$

- 2 pozos si  $a > 0$ .
- 1 pozo si  $a < 0$ .

La tabla resultante es

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ | $\Delta$ | pozos |
|----------|---------|----------|----------|----------|-------|
| -        | $\pm$   | $\pm$    | +        | -        | 2     |
| +        | $\pm$   | $\pm$    | +        | -        | 1     |

Al integrar todos los casos analizados para el dicriminante, se obtiene la siguiente tabla:

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ | $\Delta$ | pozos |
|----------|---------|----------|----------|----------|-------|
| +        | -       | +        | +        | +        | 1     |
| -        | +       | -        | +        | +        | 4     |
| -        | +       | -        | +        | 0        | 3     |
| +        | +       | +        | +        | 0        | 1     |
| -        | +       | -        | +        | 0        | 2     |
| +        | +       | +        | +        | 0        | 1     |
| -        | +       | +        | +        | -        | 2     |
| -        | -       | +        | +        | -        | 2     |
| -        | +       | -        | +        | -        | 2     |
| -        | -       | -        | +        | -        | 2     |
| +        | +       | +        | +        | -        | 1     |
| +        | -       | +        | +        | -        | 1     |
| +        | +       | -        | +        | -        | 1     |
| +        | -       | -        | +        | -        | 1     |

Finalmente, se presenta una tabla compacta (Tabla 1.1) con las condiciones necesarias para que el potencial de tipo  $\Phi^8$  presente configuraciones de 1, 2, 3 y 4 pozos. Adicionalmente, se incluyen las gráficas del potencial (Fig. 1.1) y del sistema de Duffing correspondientes a cada configuración (Fig. 1.2). Nótese que en el caso de  $\delta < 0$ , la cantidad de máximos y mínimos se invierte en relación al caso analizado.

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ | $\Delta$ | Pozos |
|----------|---------|----------|----------|----------|-------|
| -        | +       | -        | +        | +        | 4     |
| -        | +       | -        | +        | 0        | 3     |
| -        | -       | +        | +        | -        | 2     |
| +        | -       | +        | +        | -        | 1     |

Tabla 1.1: Posibles configuraciones del potencial  $\Phi^8$ . Observe que el símbolo  $\pm$  representa los valores positivos o negativos de los parámetros y el signo del discriminante (que podría anularse). Los números en la sexta columna indican la cantidad de pozos en cada caso.

En adelante, cuando se mencione el potencial  $\Phi^8$ , se entenderá que se trata del potencial simétrico de tipo  $\Phi^8$  con la cantidad de pozos que se especifique.

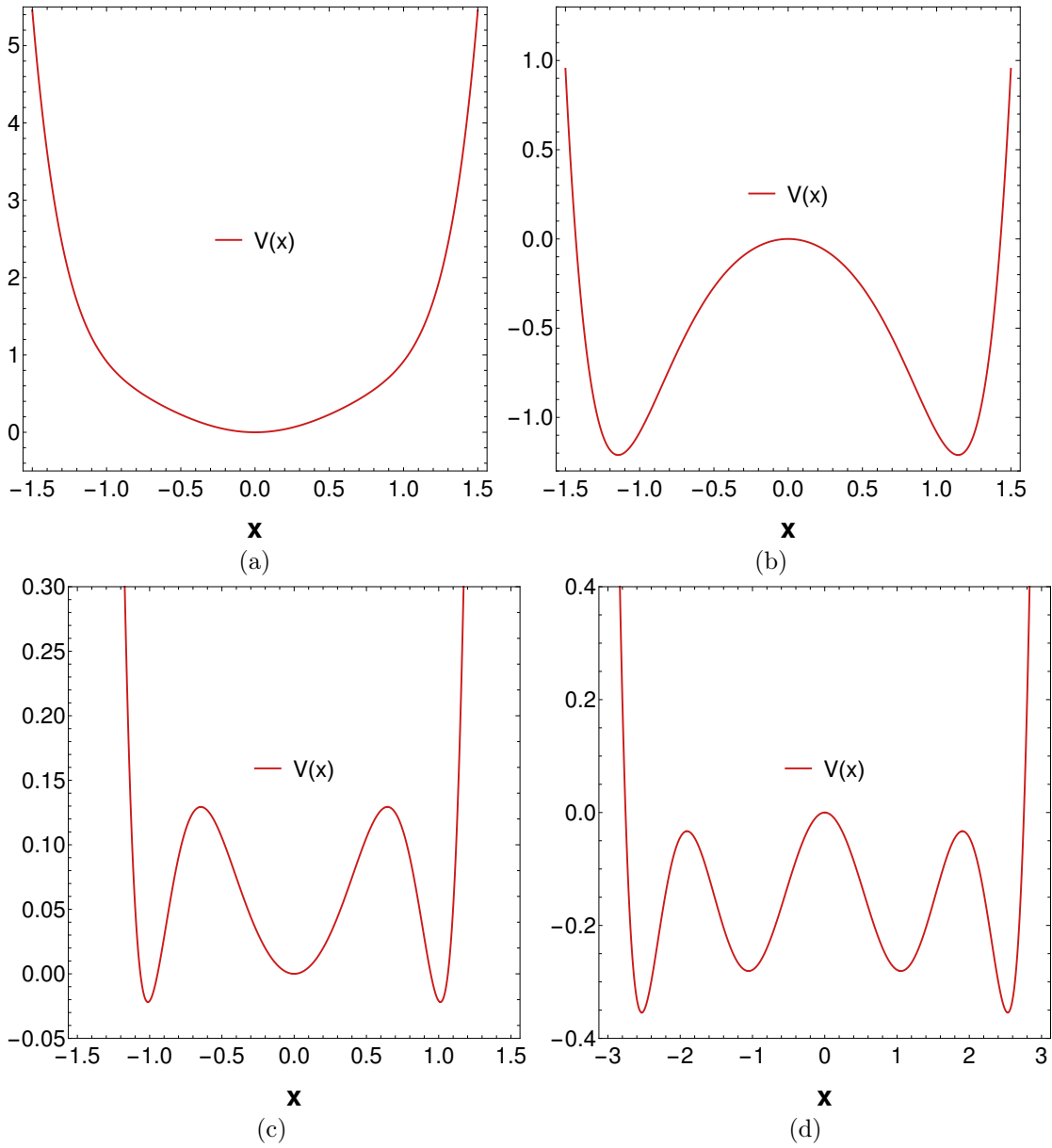


Figura 1.1: Perfiles del potencial  $V(x)$  del tipo  $\Phi^8$ : (a) un pozo con  $\alpha = 2, \beta = -1.5, \gamma = 1, \delta = 1$ ; (b) dos pozos con  $\alpha = -2, \beta = -1.5, \gamma = 1, \delta = 1$ ; (c) tres pozos con  $\alpha = 1, \beta = 0.036, \gamma = -9.18, \delta = 8$ ; (d) cuatro pozos con  $\alpha = -1.19, \beta = 1.584, \gamma = -0.513, \delta = 0.046$ .

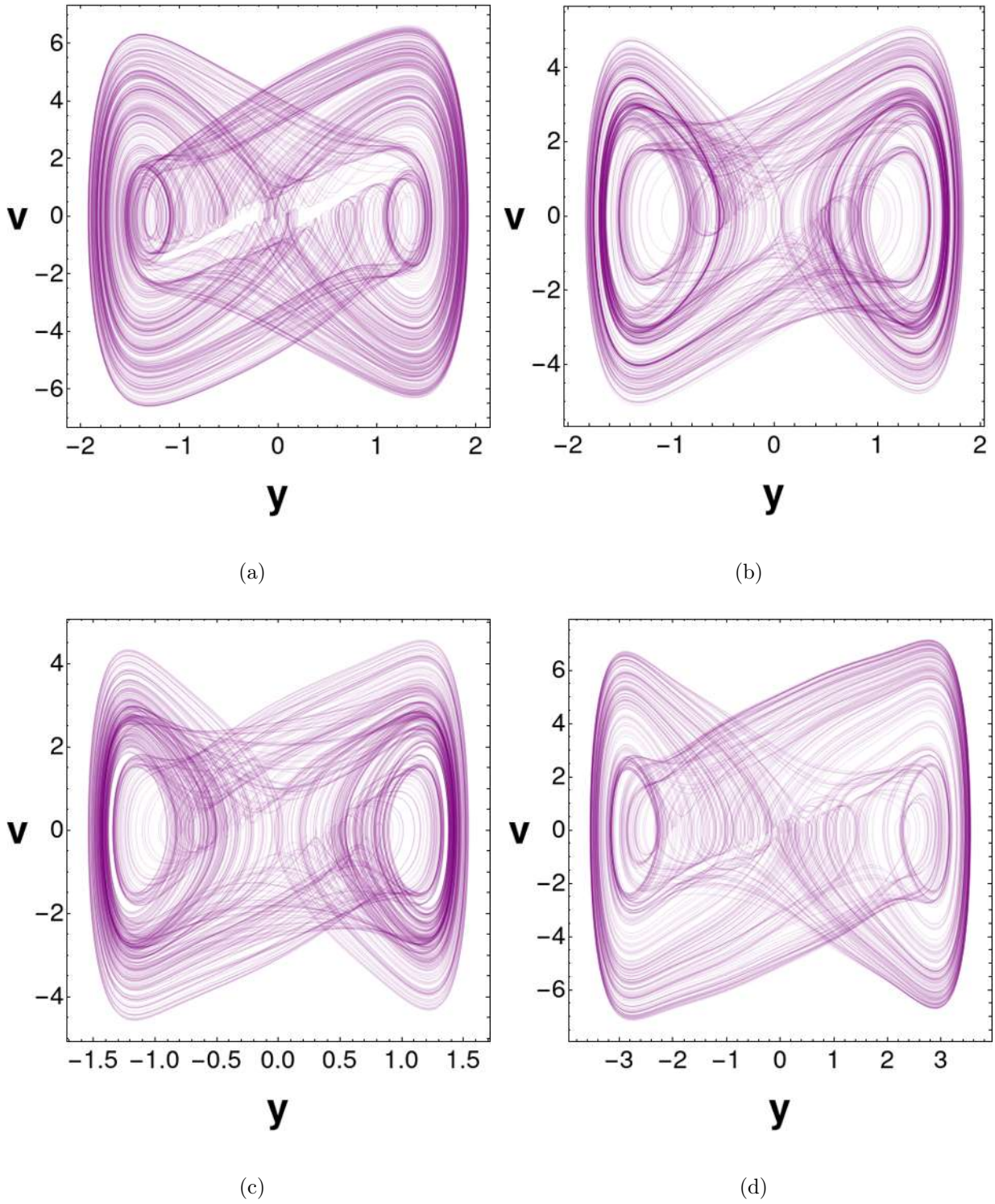


Figura 1.2: Espacio fase del atractor caótico de Duffing con un potencial  $\Phi^8$ : (a) un pozo; (b) dos pozos; (c) tres pozos; (d) cuatro pozos.



# Capítulo 2

## Sincronización

La sincronización es un proceso mediante el cual los sistemas oscilatorios acoplados ajustan alguna de sus propiedades individuales a una común [17]. El comportamiento sincronizado es fundamental en ciencia e ingeniería, y tiene numerosas aplicaciones en diversos campos, tales como mecánica, comunicaciones, electrónica, física, química, óptica, biología entre otras [17, 34, 35, 36, 37, 19, 20, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 18].

En la sincronización bajo una configuración maestro-esclavo, un aspecto importante es el tipo de acoplamiento utilizado. La elección del acoplamiento puede influir en la existencia y la eficiencia de la sincronización. Algunos de los acoplamientos más utilizados son el acoplamiento elástico y el disipativo que utilizan la posición y la velocidad de los sistemas respectivamente [21, 29, 30, 31, 32]. El acoplamiento giroscópico, a diferencia del acoplamiento elástico y disipativo, ha sido menos estudiado. Este acoplamiento, que utiliza la aceleración de los sistemas, ha sido empleado en algunos estudios como en [45, 46], donde utilizan un transductor electromecánico descrito por un oscilador de van der Pol acoplado a un oscilador de Duffing.

La idea de sincronizar dos sistemas bajo una configuración maestro-esclavo se puede extender a una mayor cantidad de sistemas de manera natural. Para tres sistemas se tienen diferentes tipos de arreglos. En esta sección usaremos un arreglo lineal con un patrón<sup>1</sup> en cadena, esto es, un primer sistema que actúa como maestro, el segundo sistema con una interacción mutua que actúa como esclavo del primer sistema y maestro de sistema tres, y por último, el tercer sistema que actúa como esclavo del segundo sistema. Este esquema se ilustra en la figura 2.1 (otros arreglos y patrones se discutirán en la siguiente sección). Algunos de los sistemas de baja dimensionalidad con comportamiento caótico más utilizados son los sistemas van der Pol-Duffing (VDP-D), Duffing (D) y Rayleigh-Duffing (R-D). Estos sistemas, cuando se les dota de un potencial tipo  $\Phi^8$ , se describen mediante las siguientes ecuaciones:

---

<sup>1</sup>Traducción propuesta para el término técnico “motifs” utilizado por Boccaletti et al.



Figura 2.1: Arreglo lineal con patrón en cadena para tres sistemas con una configuración maestro-esclavo. Donde los colores representan lo siguiente: verde para el sistema maestro, naranja para el sistema esclavo y mostaza para el sistema que interactúa mutuamente.

$$\begin{aligned}
 \text{van der Pol - Duffing} & : \begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{u} = \mu_1(1 - x^2)u - (\alpha x + \beta x^3 + \gamma x^5 + \delta x^7) + A_1 \cos(\omega_1 t), \end{cases} \\
 \text{Duffing} & : \begin{cases} \dot{y} = v, \\ \dot{v} = -\mu_2 v - (\alpha y + \beta y^3 + \gamma y^5 + \delta y^7) + A_2 \cos(\omega_2 t), \end{cases} \\
 \text{Rayleigh - Duffing} & : \begin{cases} \dot{z} = w, \\ \dot{w} = \mu_3(1 - w^2)w - (\alpha z + \beta z^3 + \gamma z^5 + \delta z^7) + A_3 \cos(\omega_3 t), \end{cases}
 \end{aligned}$$

donde las variables  $x, y$  y  $z$  describen la evolución de los sistemas VDP-D, D y R-D, respectivamente, y  $\mu_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) representa la amortiguación del sistema correspondiente. Una fuerza externa viene dada por la función coseno, que depende explícitamente del tiempo  $t$ , con amplitud  $A_i$  y frecuencia  $\omega_i$ . En la figura 2.2 se muestran los espacios fase de cada sistema. Todos los análisis numéricos realizados en este capítulo utilizan los siguientes valores, convenientes para obtener los atractores en el espacio fase que se muestran en la figura 2.2:  $\mu_1 = 0.1$ ,  $A_1 = 6.5$ ,  $\omega_1 = 0.5$ ,  $\mu_2 = 0.4$ ,  $A_2 = 7$ ,  $\omega_2 = 0.9$ ,  $\mu_3 = 0.2$ ,  $A_3 = 1$ ,  $\omega_3 = 1.2$ ,  $\alpha = -1.19$ ,  $\beta = 1.584$ ,  $\gamma = -0.513$ ,  $\delta = 0.046$ , con condiciones iniciales  $x(0) = \dot{x}(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0$ ,  $z(0) = 1$  y  $\dot{z}(0) = 0$ .

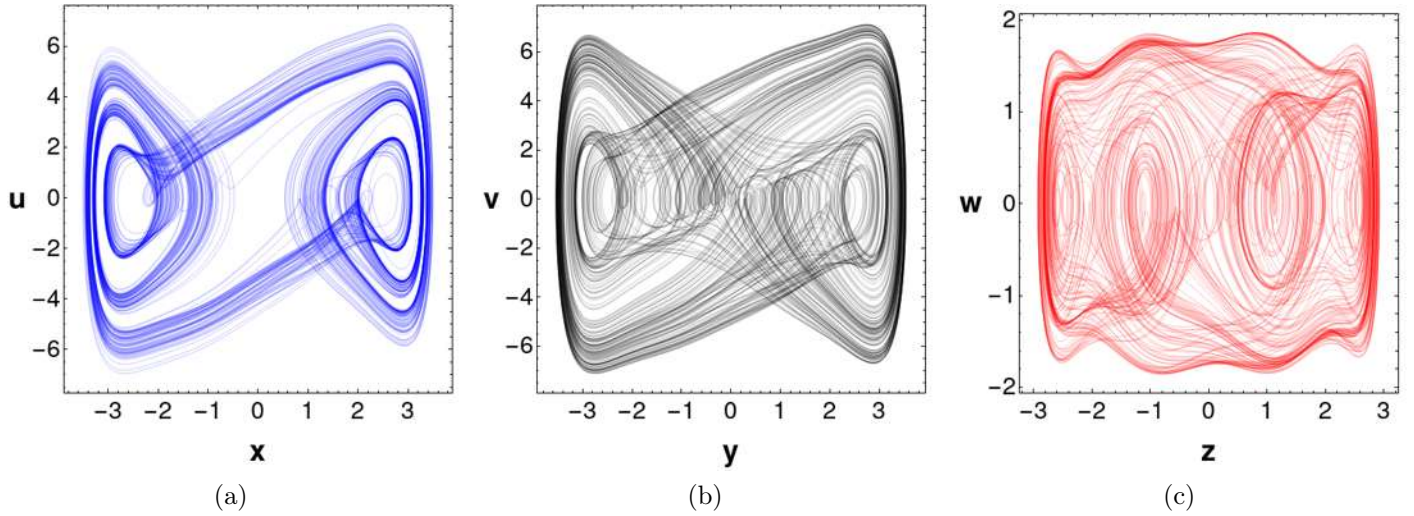


Figura 2.2: Espacios fases de los atractores caóticos de (a) van der Pol-Duffing, (b) Duffing y (c) Rayleigh-Duffing, todos con un potencial simétrico de tipo  $\Phi^8$  con cuatro pozos.

## 2.1. Diferentes tipos de acoplamientos

Dado que se cuenta con diferentes tipos de acoplamientos, resulta natural estudiar y comparar su eficiencia; en este contexto, la referencia [21] analiza la sincronización de los sistemas van der Pol-Duffing y  $\Phi^6$ -Duffing usando inicialmente el acoplamiento disipativo y después la combinación elástico-disipativo. En esta sección se estudian y comparan cuatro acoplamientos durante la sincronización de los tres sistemas ya mencionados: el sistema van der Pol-Duffing, que actúa como maestro; el sistema Duffing con interacción mutua, que funciona como esclavo del primero y maestro del tercero; y el sistema Rayleigh-Duffing, que es el esclavo. Los acoplamientos considerados son: giroscópico, elástico-disipativo, elástico-giroscópico y disipativo-giroscópico. Para cada esquema, bajo una configuración maestro-esclavo, se presentan gráficas de los espacios fase y de las series de tiempo correspondientes a las posiciones y a las velocidades. Todas las constantes de acoplamiento toman el valor 200, el cual está en el rango de magnitudes utilizado en referencias previas como [21, 31].

### 2.1.1. Acoplamiento giroscópico

El acoplamiento giroscópico es un método que involucra las aceleraciones de las soluciones de los sistemas. Los tres sistemas que se sincronizan mediante este acoplamiento

se presentan a continuación:

$$\begin{aligned}
 \text{VDP-D} & : \begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{u} = \mu_1(1 - x^2)u - (\alpha x + \beta x^3 + \gamma x^5 + \delta x^7) + A_1 \cos(\omega_1 t). \end{cases} \\
 \text{D} & : \begin{cases} \dot{y} = v, \\ \dot{v} = -\mu_2 v - (\alpha y + \beta y^3 + \gamma y^5 + \delta y^7) + A_2 \cos(\omega_2 t) + K(\dot{u} - \dot{v}). \end{cases} \\
 \text{R-D} & : \begin{cases} \dot{z} = w, \\ \dot{w} = \mu_3(1 - w^2)w - (\alpha z + \beta z^3 + \gamma z^5 + \delta z^7) + A_3 \cos(\omega_3 t) + G(\dot{v} - \dot{w}). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Las gráficas del espacio fase y las series de tiempo correspondientes a este acoplamiento se muestran en las figuras 2.3 y 2.4, respectivamente. Las figuras muestran claramente que no se alcanza la sincronización bajo este acoplamiento.

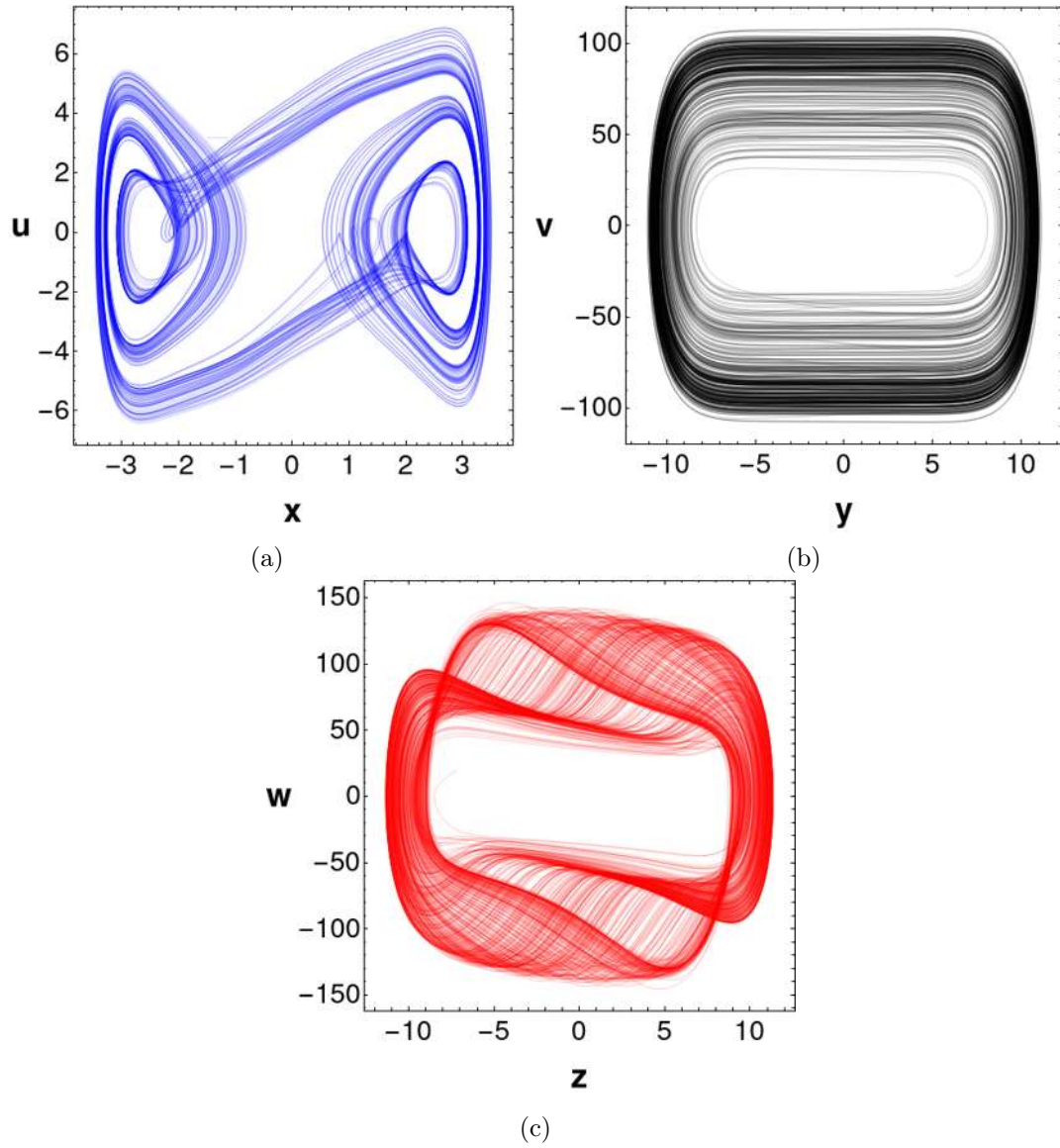
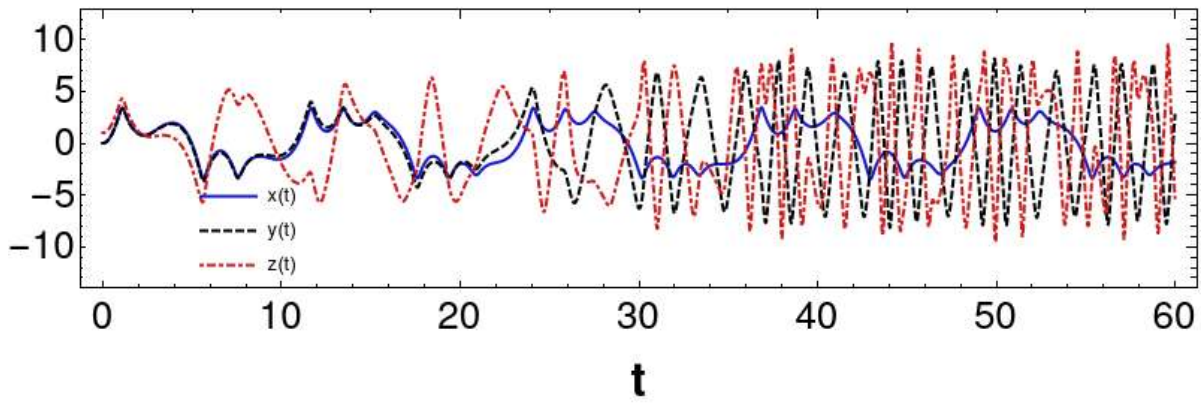
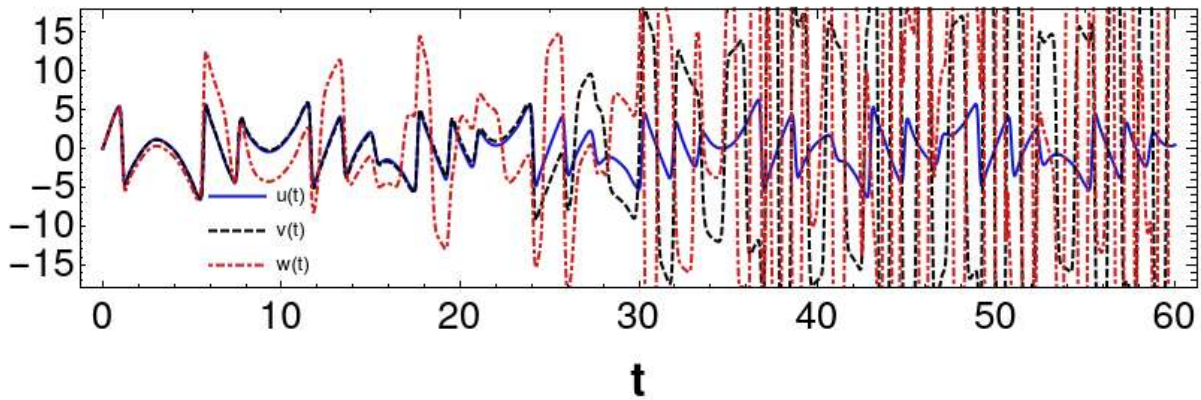


Figura 2.3: Espacios fase de los atractores caóticos con acoplamiento giroscópico: (a) van der Pol-Duffing, (b) Duffing, (c) Rayleigh-Duffing.



(a)



(b)

Figura 2.4: Series de tiempo de las posiciones  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  y de las velocidades  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $w(t)$ .

### 2.1.2. Acoplamiento elástico-disipativo

Un acoplamiento combinado es aquel que utiliza dos o más tipos de acoplamientos simultáneamente para lograr la sincronización. En [21] se estudia el acoplamiento combinado elástico-disipativo, donde se concluye su efectividad sobre el elástico y disipativo por separado. Este resultado motiva el uso de los acoplamientos combinados en el presente trabajo. El primer acoplamiento combinado que se analiza es el elástico-disipativo de [21]. Los sistemas con este acoplamiento se presentan a continuación:

$$\begin{aligned}
 \text{VDP-D} & : \begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{u} = \mu_1(1 - x^2)u - (\alpha x + \beta x^3 + \gamma x^5 + \delta x^7) + A_1 \cos(\omega_1 t). \end{cases} \\
 \text{D} & : \begin{cases} \dot{y} = v + K(x - y), \\ \dot{v} = -\mu_2 v - (\alpha y + \beta y^3 + \gamma y^5 + \delta y^7) + A_2 \cos(\omega_2 t) + K(u - v). \end{cases} \\
 \text{R-D} & : \begin{cases} \dot{z} = w + G(y - z), \\ \dot{w} = \mu_3(1 - w^2)w - (\alpha z + \beta z^3 + \gamma z^5 + \delta z^7) + A_3 \cos(\omega_3 t) + G(v - w). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Las gráficas del espacio fase y las series de tiempo correspondientes a este acoplamiento se muestran en las figuras 2.5 y 2.6, respectivamente, donde se observa que se alcanza la sincronización.



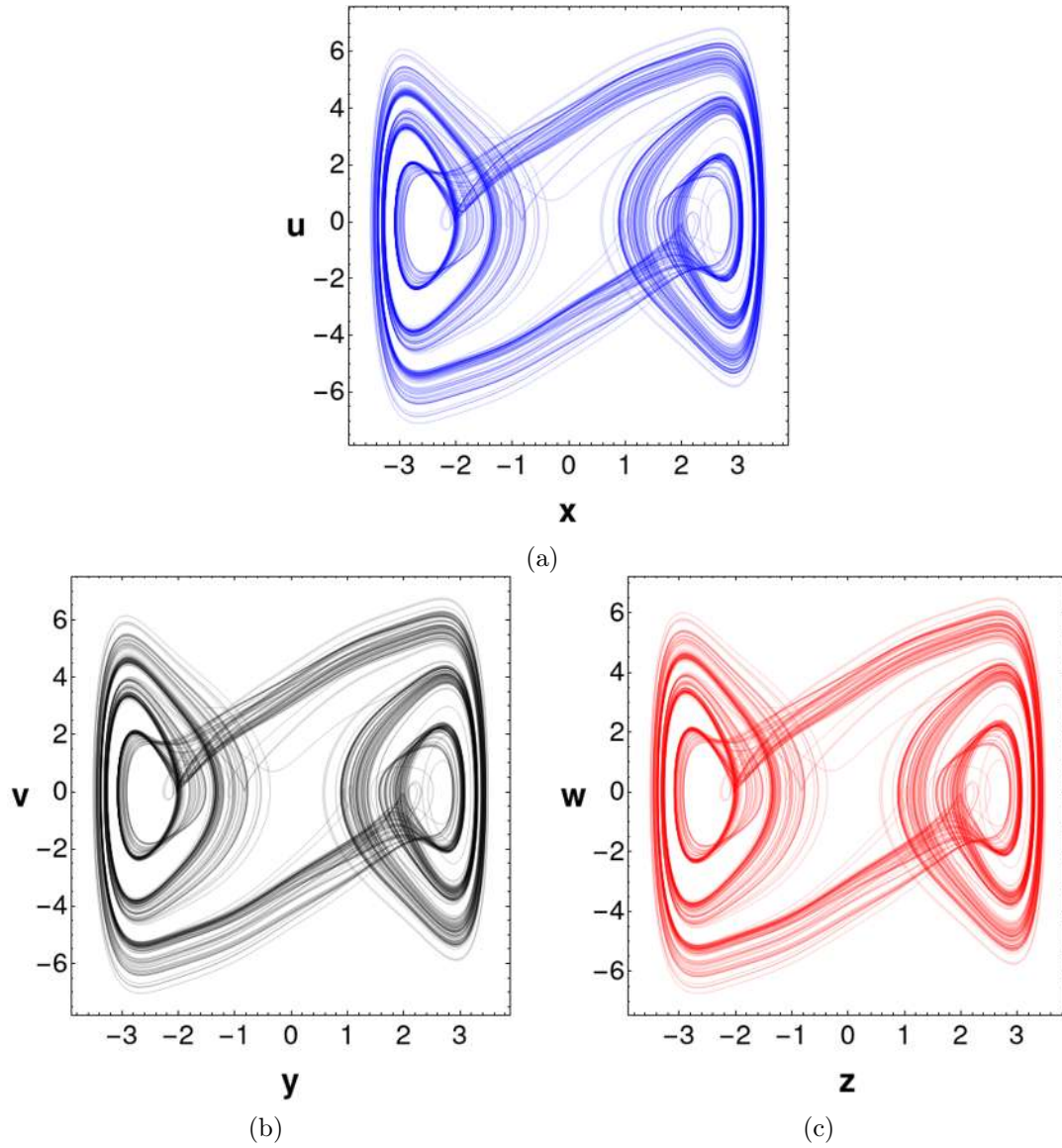
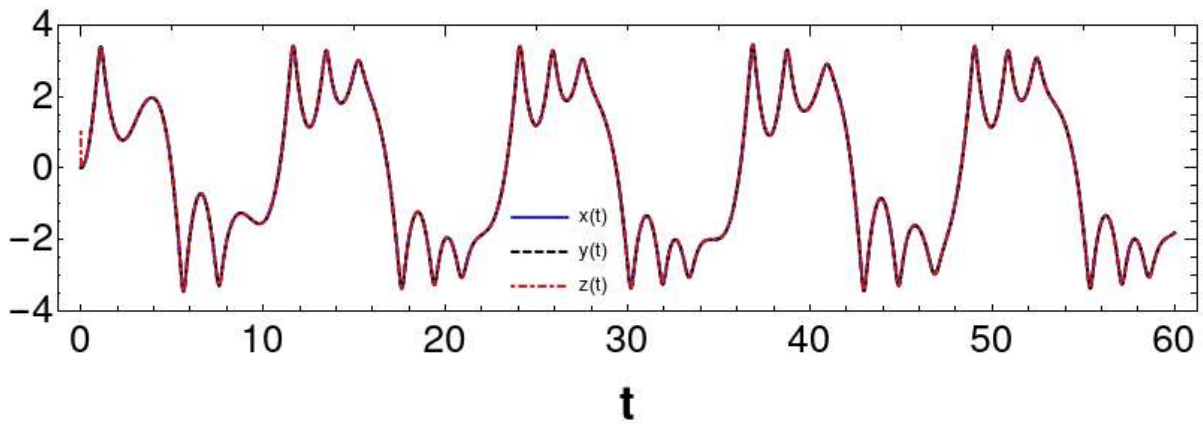
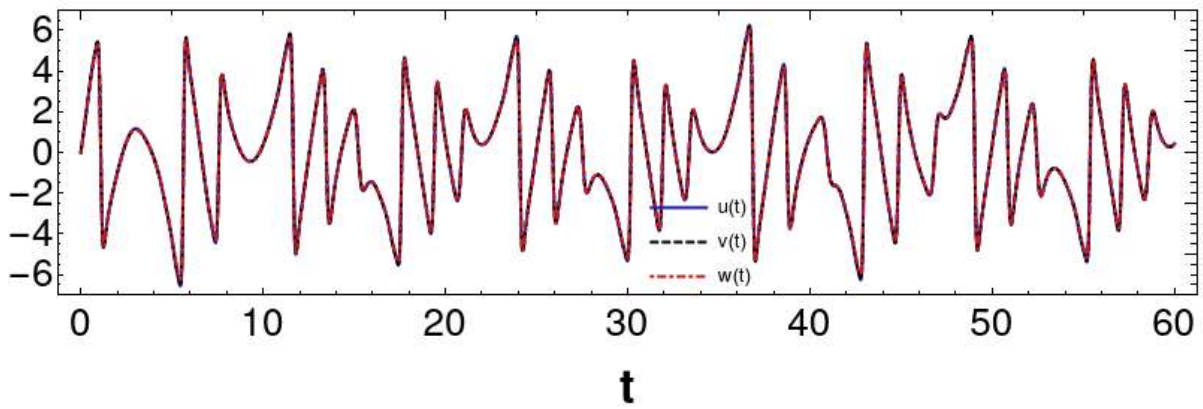


Figura 2.5: Espacios fase de los atractores caóticos con acoplamiento elástico-disipativo: (a) van der Pol-Duffing, (b) Duffing, (c) Rayleigh-Duffing.





(a)



(b)

Figura 2.6: Series de tiempo de las posiciones  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  y de las velocidades  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $w(t)$ .

### 2.1.3. Acoplamiento elástico-giroscópico

Como vimos en el análisis anterior, la combinación de dos tipos de acoplamientos puede dar resultados favorables en una sincronización. Ahora, el acoplamiento usado será la combinación del elástico y el giroscópico. Los sistemas a sincronizar son:

$$\begin{aligned}
 \text{VDP-D} & : \begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{u} = \mu_1(1 - x^2)u - (\alpha x + \beta x^3 + \gamma x^5 + \delta x^7) + A_1 \cos(\omega_1 t). \end{cases} \\
 \text{D} & : \begin{cases} \dot{y} = v + K(x - y), \\ \dot{v} = -\mu_2 v - (\alpha y + \beta y^3 + \gamma y^5 + \delta y^7) + A_2 \cos(\omega_2 t) + K(\dot{u} - \dot{v}). \end{cases} \\
 \text{R-D} & : \begin{cases} \dot{z} = w + G(y - z), \\ \dot{w} = \mu_3(1 - w^2)w - (\alpha z + \beta z^3 + \gamma z^5 + \delta z^7) + A_3 \cos(\omega_3 t) + G(\dot{v} - \dot{w}). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Las gráficas del espacio fase y las series de tiempo correspondientes a este acoplamiento se muestran en las figuras 2.7 y 2.8, respectivamente, donde se observa que se alcanza la sincronización, aunque con pequeñas diferencias en los mínimos del canal de velocidad en comparación con el acoplamiento anterior.

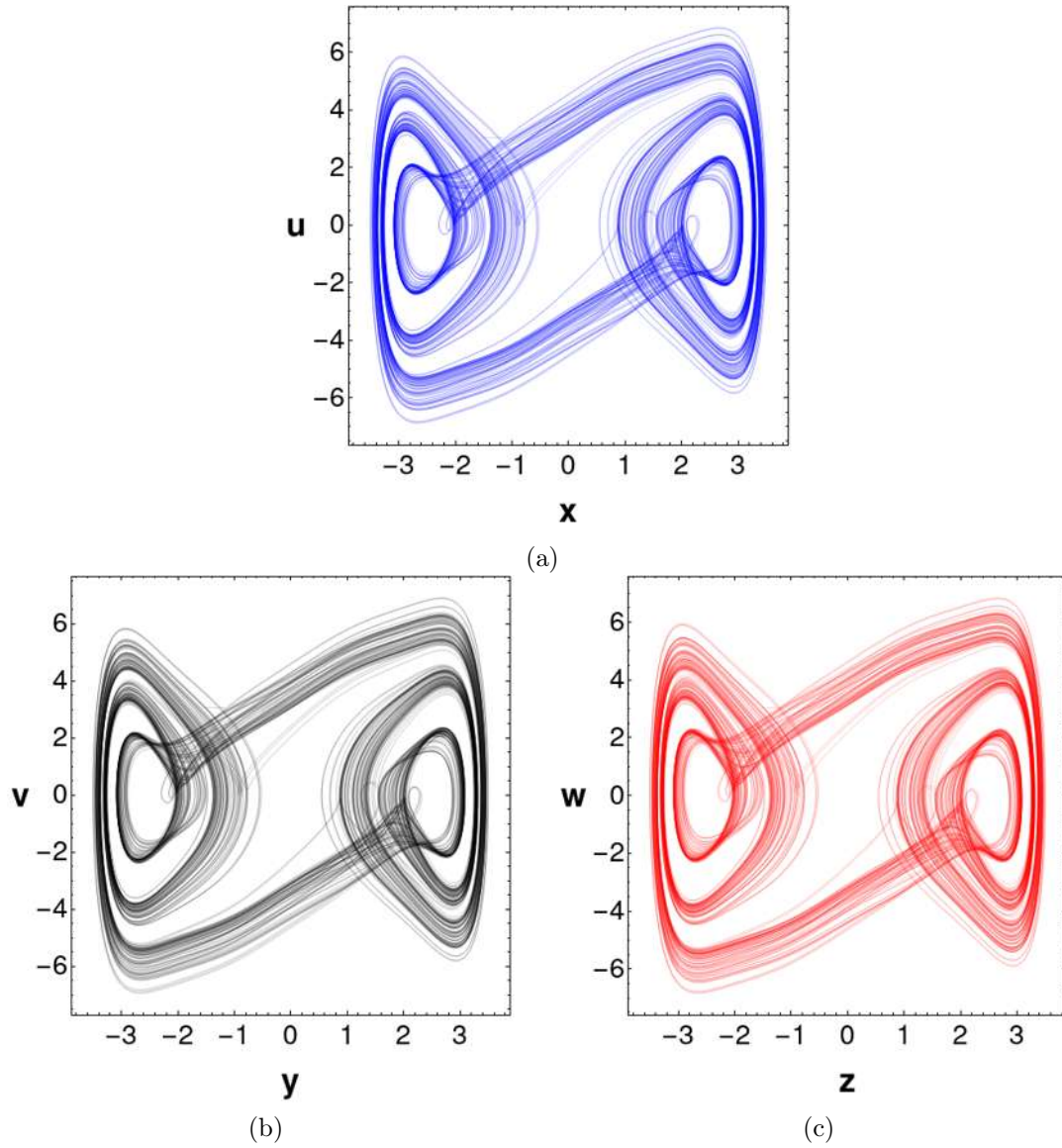
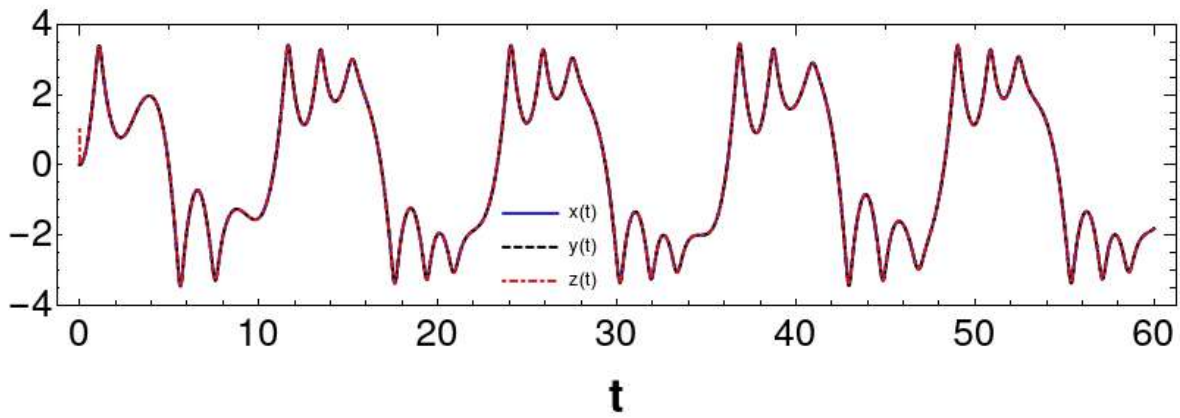
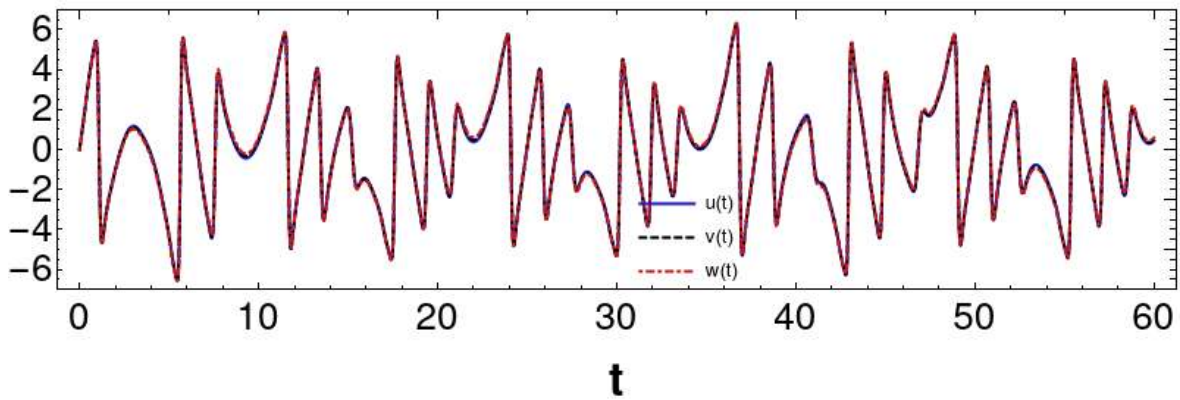


Figura 2.7: Espacios fase de los atractores caóticos con acoplamiento elástico-giroscópico: (a) van der Pol-Duffing, (b) Duffing, (c) Rayleigh-Duffing.



(a)



(b)

Figura 2.8: Series de tiempo de las posiciones  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  y de las velocidades  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $w(t)$ .

### 2.1.4. Acoplamiento disipativo-giroscópico

Seguendo con el estudio de acoplaminetos combinados, el último caso que veremos es uno que combina la velocidad con la aceleración de los sistemas. El acoplamiento disipativo-giroscópico de los sistemas se observa como:

$$\begin{aligned}
 \text{VDP-D} & : \begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{u} = \mu_1(1 - x^2)u - (\alpha x + \beta x^3 + \gamma x^5 + \delta x^7) + A_1 \cos(\omega_1 t). \end{cases} \\
 \text{D} & : \begin{cases} \dot{y} = v, \\ \dot{v} = -\mu_2 v - (\alpha y + \beta y^3 + \gamma y^5 + \delta y^7) + A_2 \cos(\omega_2 t) + K(u - v) + K(\dot{u} - \dot{v}). \end{cases} \\
 \text{R-D} & : \begin{cases} \dot{z} = w, \\ \dot{w} = \mu_3(1 - w^2)w - (\alpha z + \beta z^3 + \gamma z^5 + \delta z^7) + A_3 \cos(\omega_3 t) \\ \quad + G(v - w) + G(\dot{v} - \dot{w}). \end{cases}
 \end{aligned}$$

En las figuras 2.9 (espacio de fase) y 2.10 (series de tiempo) se representa la dinámica resultante de este acoplamiento, donde se aprecian diferencias en distintas regiones del canal de posición.

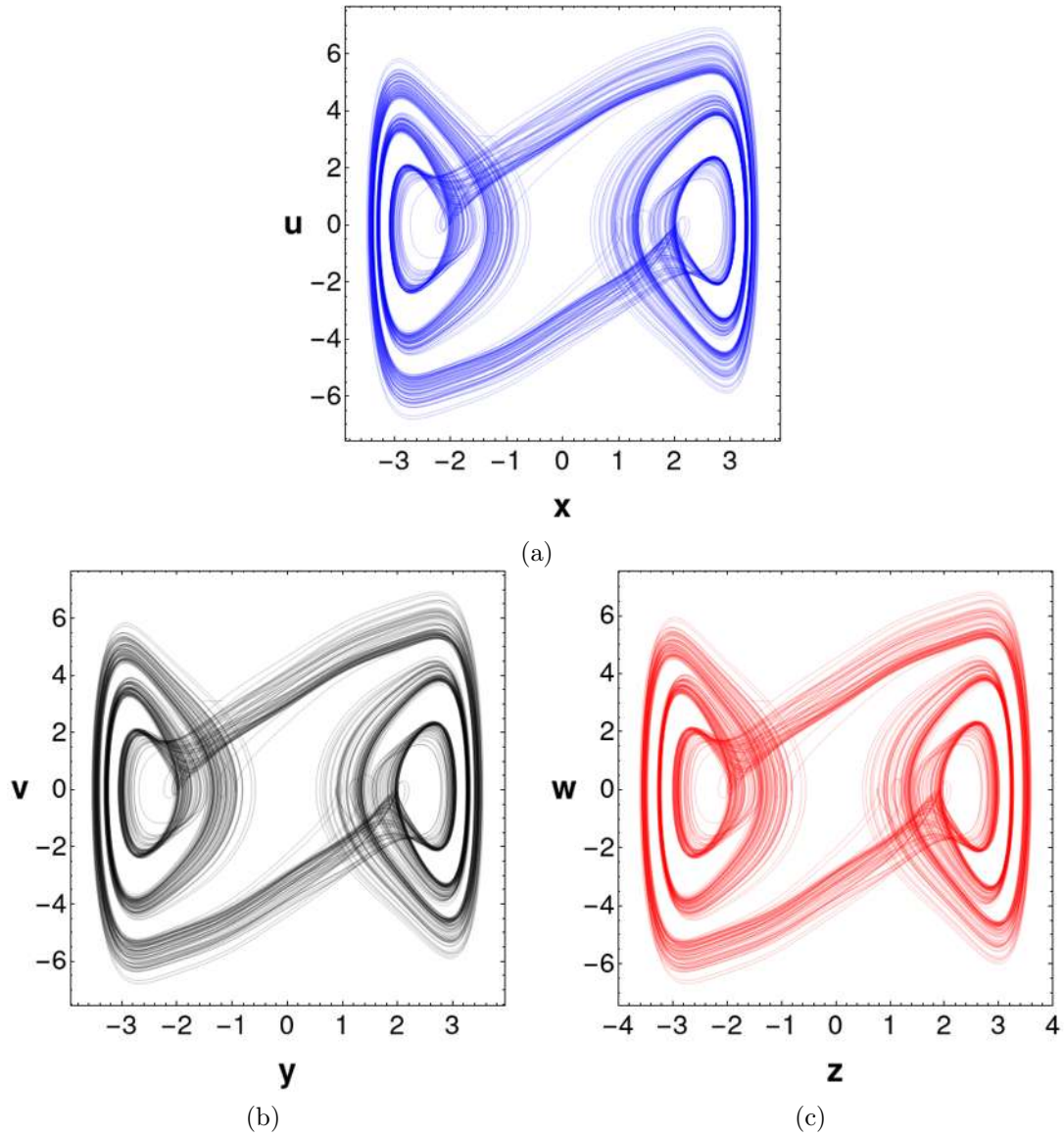
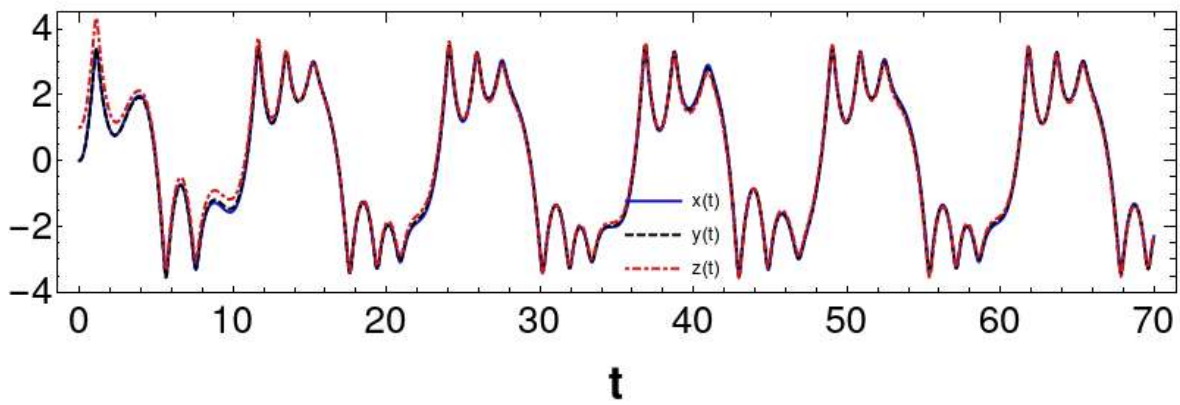
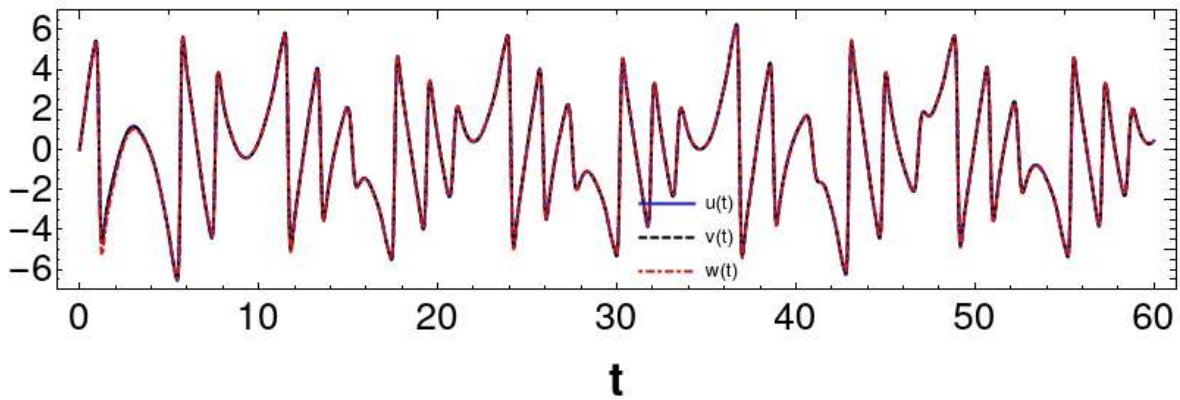


Figura 2.9: Espacios fase de los atractores caóticos con acoplamiento disipativo-giroscópico: (a) van der Pol-Duffing, (b) Duffing, (c) Rayleigh-Duffing.



(a)



(b)

Figura 2.10: Series de tiempo de las posiciones  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  y de las velocidades  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $w(t)$ .

### 2.1.5. Conclusiones

Al comparar los cuatro diferentes acoplamientos podemos concluir lo siguiente: Con el acoplamiento giroscópico no se alcanza la sincronización. Para los acoplamientos combinados, el acoplamiento elástico-disipativo confirma su eficiencia al momento de sincronizar como se hace para dos sistemas en [21]. En los casos de los acoplamientos elástico-giroscópico y disipativo-giroscópico se alcanza sincronización efectiva en solo un canal, mientras que en el otro canal no se logra sincronizar todas las zonas. El acoplamiento elastico-giroscópico es el más efectivo de estos últimos dos. Cabe destacar que, en las series de tiempo de la velocidad al usar el acoplamiento disipativo-giroscópico (Fig. 2.8), se aprecia un ligero desfase entre las soluciones del maestro y el esclavo, particularmente notable en los máximos y mínimos de las oscilaciones.



## 2.2. Diferentes tipos de patrones

El acoplamiento es el mecanismo que permite la interacción entre sistemas dinámicos. Esta interacción puede organizarse en distintas configuraciones, siendo las fundamentales la unidireccional (maestro-esclavo) y la bidireccional (interacción mutua). Para tres osciladores bajo una configuración maestro-esclavo, existen dos arreglos posibles: en línea y en anillo. Este trabajo considera cuatro de los seis posibles patrones de interacción en un arreglo lineal, los cuales se presentan en la figura 2.11. Estos casos fueron seleccionados por su relevancia en el estudio comparativo de esquemas de acoplamiento.

En esta sección se estudia la sincronización de los tres sistemas dinámicos utilizados anteriormente, bajo un arreglo lineal y para los patrones Relay, Competitive y Auxiliar. El patrón en cadena fue utilizado en la primera parte de este capítulo. Los acoplamientos usados son el elástico-disipativo y el elástico-giroscópico. Las posiciones de los sistemas dentro de cada patrón son las mismas a las utilizadas en el capítulo anterior.

Para cada patrón, se presentan el esquema de los acoplamientos, así como los atractores y series de tiempo resultantes de la sincronización. En general, las constantes de acoplamiento no tienen que ser las mismas para todos los casos. Sin embargo, cálculos numéricos previos, reportados en [21, 31] y en el capítulo anterior, muestran que con un valor igual a 200 es suficiente para alcanzar la sincronización cuando esta exista. Si la sincronización no es posible, la elección de este valor no altera el resultado final para nuestros fines. Por lo tanto, para todos los cálculos siguientes se fija el valor de la constante de acoplamiento en 200.

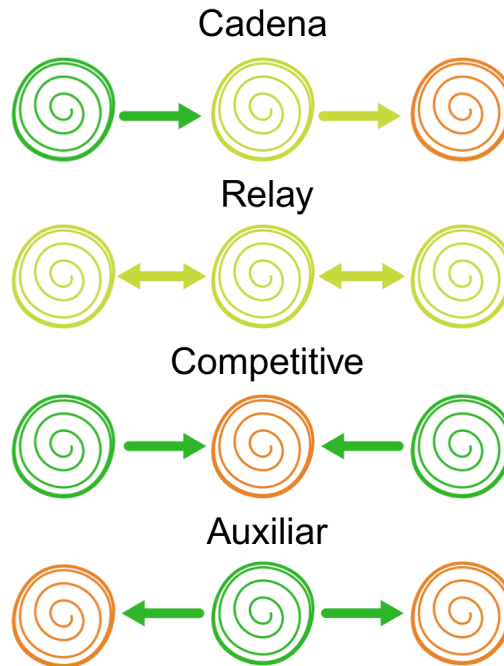


Figura 2.11: Patrones estudiados para tres sistemas acoplados y sus interacciones con una arreglo lineal y configuración maestro-esclavo. Los colores denotan lo siguiente: verde para sistemas maestros, naranja para sistemas esclavos y mostaza para sistemas que interactúan mutuamente.

### 2.2.1. Relay

El patrón Relay se caracteriza porque cada sistema interactúa como maestro y como esclavo al mismo tiempo. Bajo este patrón resulta de interés identificar si alguno de los sistemas exhibe un comportamiento dominante. Los sistemas bajo este patrón, con acoplamiento elástico-disipativo se observan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \text{VDP-D} &: \begin{cases} \dot{x} = u + \overline{G}(y - x), \\ \dot{u} = \mu_1(1 - x^2)u - (\alpha x + \beta x^3 + \gamma x^5 + \delta x^7) + A_1 \cos(\omega_1 t) + \overline{G}(v - u). \end{cases} \\
 \text{D} &: \begin{cases} \dot{y} = v + \overline{G}(x - y) + \overline{G}(z - y), \\ \dot{v} = -\mu_2 v - (\alpha y + \beta y^3 + \gamma y^5 + \delta y^7) + A_2 \cos(\omega_2 t) + \overline{G}(u - v) + \overline{G}(w - v). \end{cases} \\
 \text{R-D} &: \begin{cases} \dot{z} = w + \overline{G}(y - z), \\ \dot{w} = \mu_3(1 - w^2)w - (\alpha z + \beta z^3 + \gamma z^5 + \delta z^7) + A_3 \cos(\omega_3 t) + \overline{G}(v - w). \end{cases}
 \end{aligned}$$

En las figuras 2.12 y 2.13 se presentan, respectivamente, los espacios fase y las series de tiempo resultantes de la sincronización bajo este patrón.

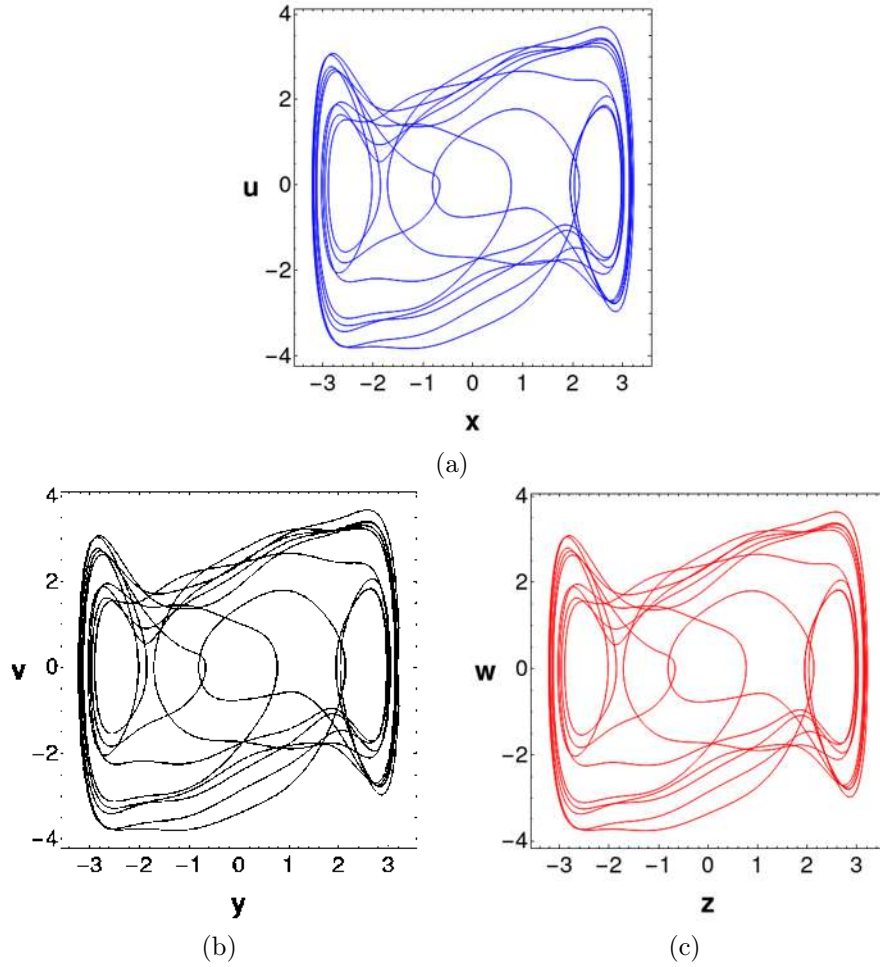
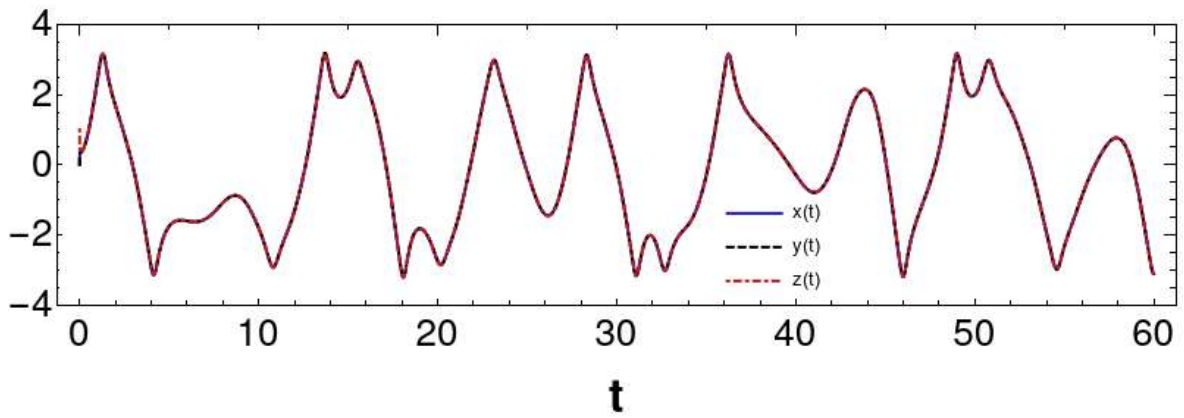
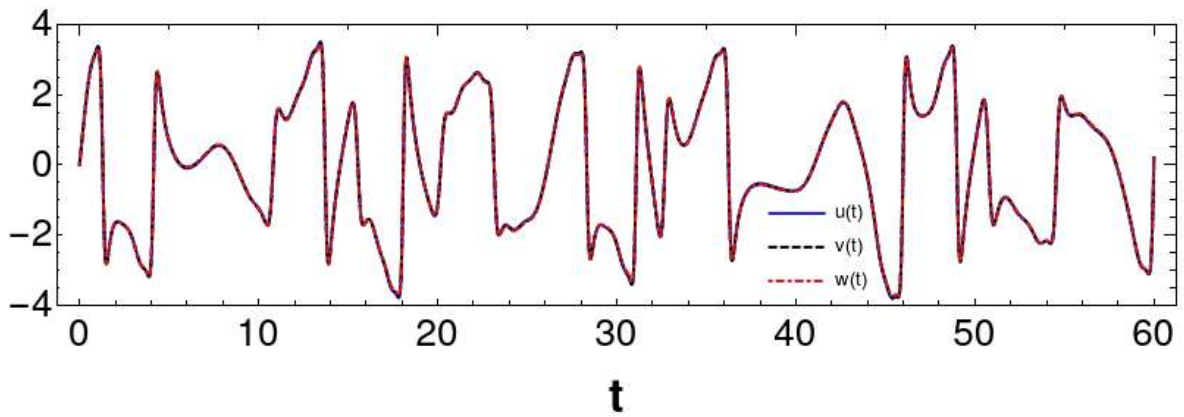


Figura 2.12: Espacios fases de los atractores caóticos de (a) van der Pol-Duffing; (b) Duffing; y (c) Rayleigh-Duffing  $\Phi^8$ .



(a)



(b)

Figura 2.13: Series de tiempo de las posiciones  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  y de las velocidades  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $w(t)$ .

Para el caso del acoplamiento elástico-giroscópico, los sistemas bajo el mismo patrón Relay se describen mediante:

$$\begin{aligned}
 \text{VDP-D} &: \begin{cases} \dot{x} = u + \overline{G}(y - x), \\ \dot{u} = \mu_1(1 - x^2)u - (\alpha x + \beta x^3 + \gamma x^5 + \delta x^7) + A_1 \cos(\omega_1 t) + \overline{G}(\dot{v} - \dot{u}). \end{cases} \\
 \text{D} &: \begin{cases} \dot{y} = v + \overline{G}(x - y) + \overline{G}(z - y), \\ \dot{v} = -\mu_2 v - (\alpha y + \beta y^3 + \gamma y^5 + \delta y^7) + A_2 \cos(\omega_2 t) + \overline{G}(\dot{u} - \dot{v}) + \overline{G}(\dot{w} - \dot{v}). \end{cases} \\
 \text{R-D} &: \begin{cases} \dot{z} = w + \overline{G}(y - z), \\ \dot{w} = \mu_3(1 - w^2)w - (\alpha z + \beta z^3 + \gamma z^5 + \delta z^7) + A_3 \cos(\omega_3 t) + \overline{G}(\dot{v} - \dot{w}). \end{cases}
 \end{aligned}$$

En las figuras 2.14 y 2.15 se presentan, respectivamente, los espacios fase y las series de tiempo resultantes de la sincronización bajo este patrón.

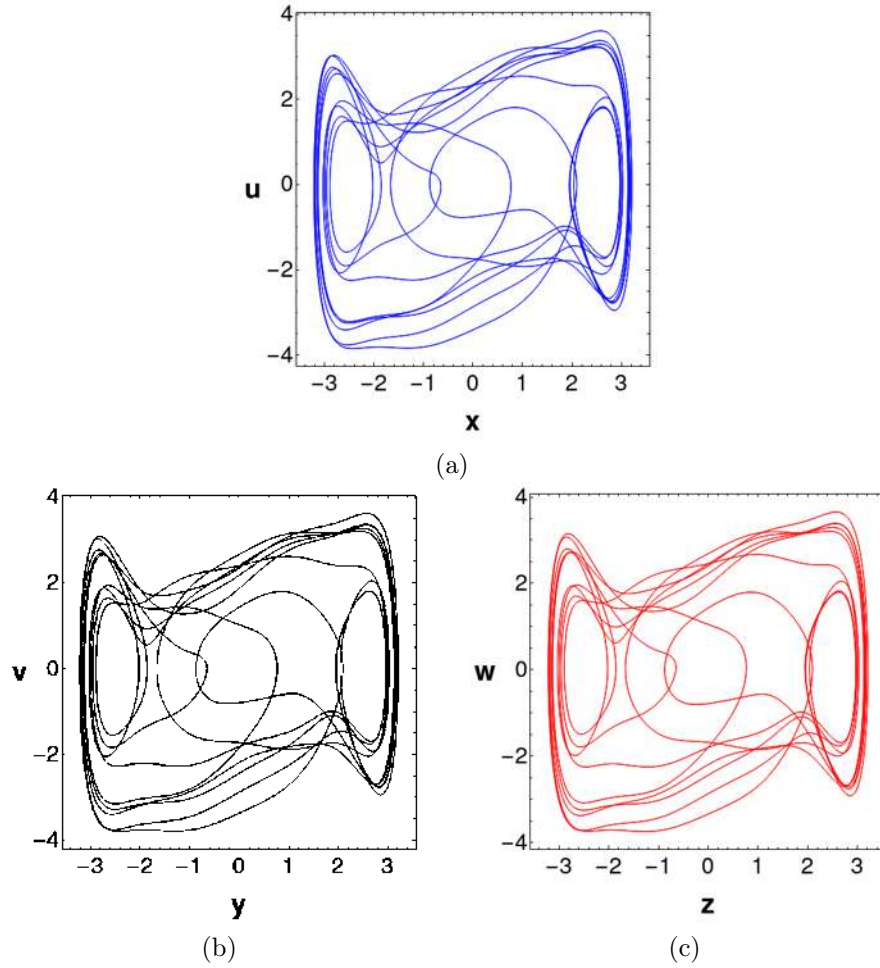
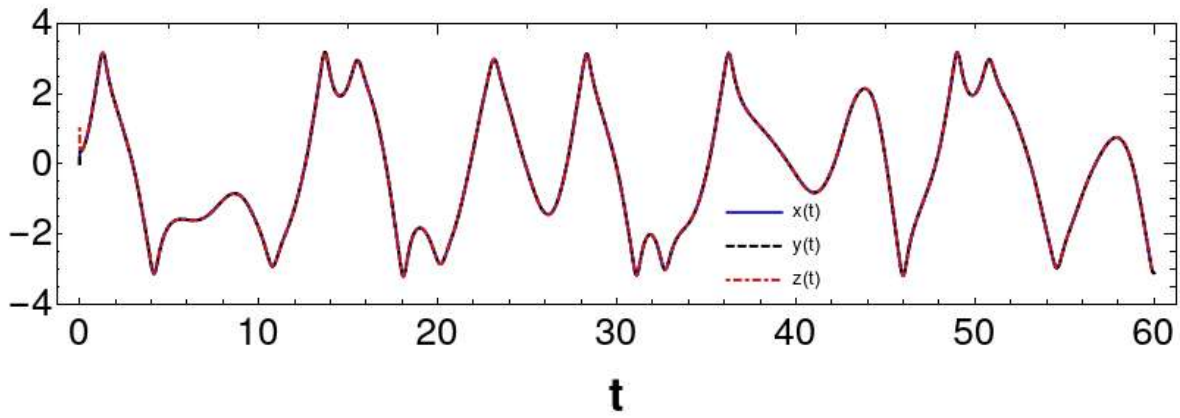
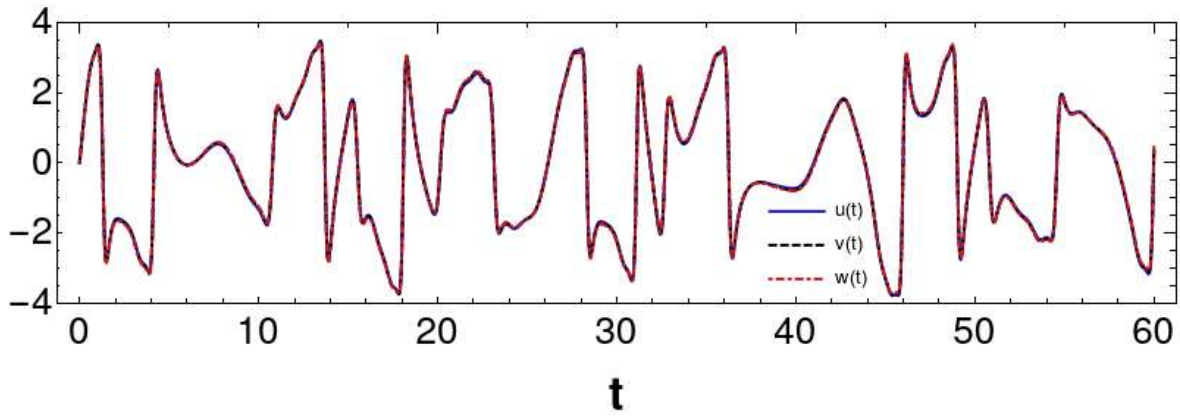


Figura 2.14: Espacios fases de los atractores caóticos de (a) van der Pol-Duffing, (b) Duffing y (c) Rayleigh-Duffing  $\Phi^8$ .



(a)



(b)

Figura 2.15: Series de tiempo de las posiciones  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  y de las velocidades  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $w(t)$ .

Al comparar los dos tipos de acoplamiento notamos que los espacios fase y las series de tiempo son muy parecidas. A pesar de que los espacios fase no coinciden con los originales, las series de tiempo muestran la existencia de sincronización.

### 2.2.2. Competitive

El patrón Competitive se define por la interacción de dos sistemas maestros que influyen sobre un único esclavo. Los sistemas bajo este patrón, con acoplamiento elástico-disipativo, se describen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \text{VDP-D} &: \begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{u} = \mu_1(1 - x^2)u - (\alpha x + \beta x^3 + \gamma x^5 + \delta x^7) + A_1 \cos(\omega_1 t). \end{cases} \\
 \text{D} &: \begin{cases} \dot{y} = v + \overline{G}(x - y) + \overline{G}(z - y), \\ \dot{v} = -\mu_2 v - (\alpha y + \beta y^3 + \gamma y^5 + \delta y^7) + A_2 \cos(\omega_2 t) + \overline{G}(u - v) + \overline{G}(w - v). \end{cases} \\
 \text{R-D} &: \begin{cases} \dot{z} = w, \\ \dot{w} = \mu_3(1 - w^2)w - (\alpha z + \beta z^3 + \gamma z^5 + \delta z^7) + A_3 \cos(\omega_3 t). \end{cases}
 \end{aligned}$$

En las figuras 2.16 y 2.17 se presentan, respectivamente, los espacios fase y las series de tiempo resultantes de la sincronización bajo este patrón.

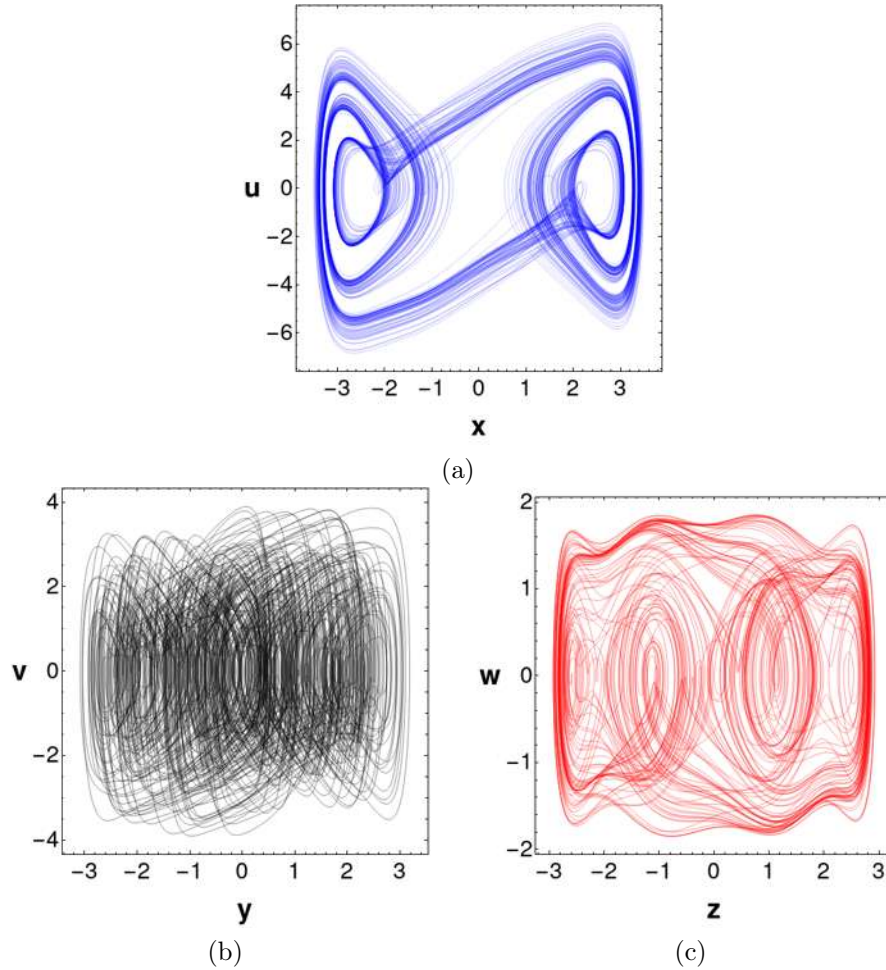
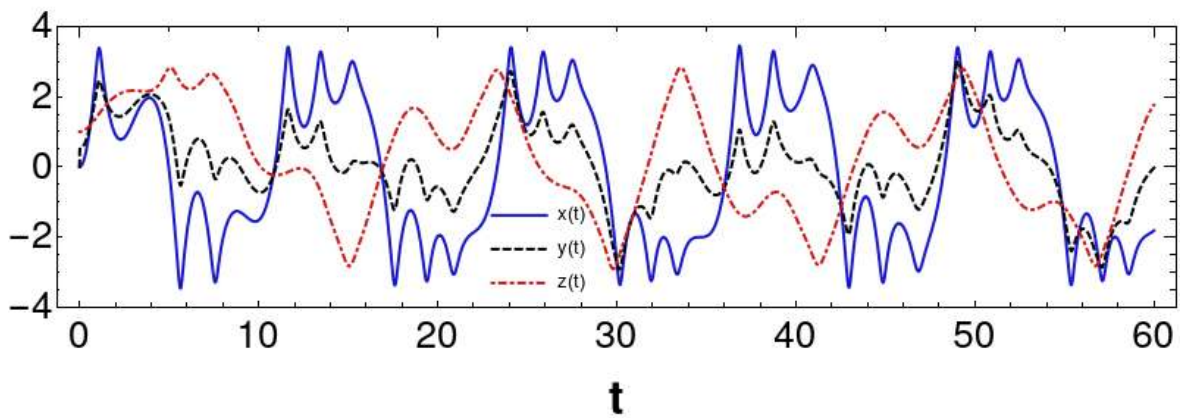
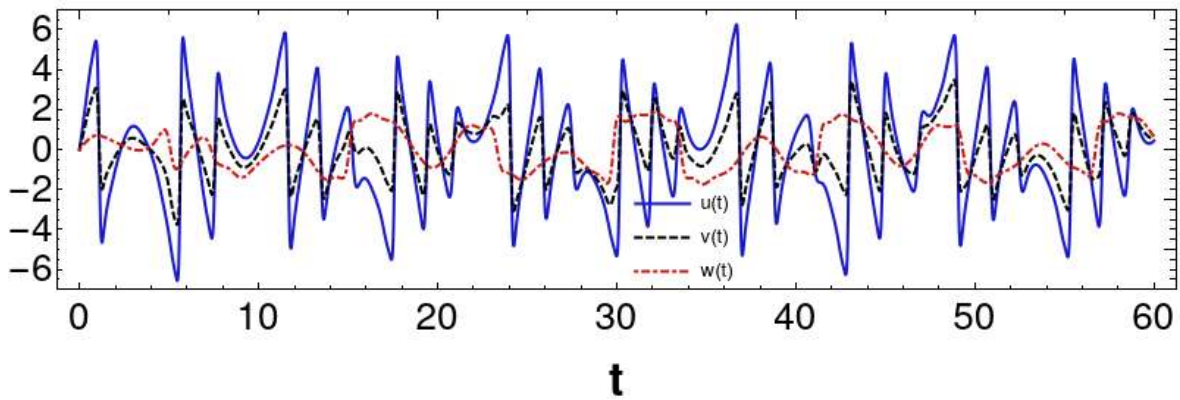


Figura 2.16: Espacios fases de los atractores caóticos de (a) van der Pol-Duffing; (b) Duffing; y (c) Rayleigh-Duffing  $\Phi^8$ .





(a)



(b)

Figura 2.17: Series de tiempo de las posiciones  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  y de las velocidades  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $w(t)$ .

Para el caso del acoplamiento elástico-giroscópico, los sistemas bajo el mismo patrón Competitive se describen mediante:

$$\begin{aligned}
 \text{VDP-D} &: \begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{u} = \mu_1(1 - x^2)u - (\alpha x + \beta x^3 + \gamma x^5 + \delta x^7) + A_1 \cos(\omega_1 t). \end{cases} \\
 \text{D} &: \begin{cases} \dot{y} = v + \overline{G}(x - y) + \overline{G}(z - y), \\ \dot{v} = -\mu_2 v - (\alpha y + \beta y^3 + \gamma y^5 + \delta y^7) + A_2 \cos(\omega_2 t) + \overline{G}(\dot{u} - \dot{v}) + \overline{G}(\dot{w} - \dot{v}). \end{cases} \\
 \text{R-D} &: \begin{cases} \dot{z} = w, \\ \dot{w} = \mu_3(1 - w^2)w - (\alpha z + \beta z^3 + \gamma z^5 + \delta z^7) + A_3 \cos(\omega_3 t). \end{cases}
 \end{aligned}$$

En las figuras 2.18 y 2.19 se presentan, respectivamente, los espacios fase y las series de tiempo resultantes de la sincronización bajo este patrón.

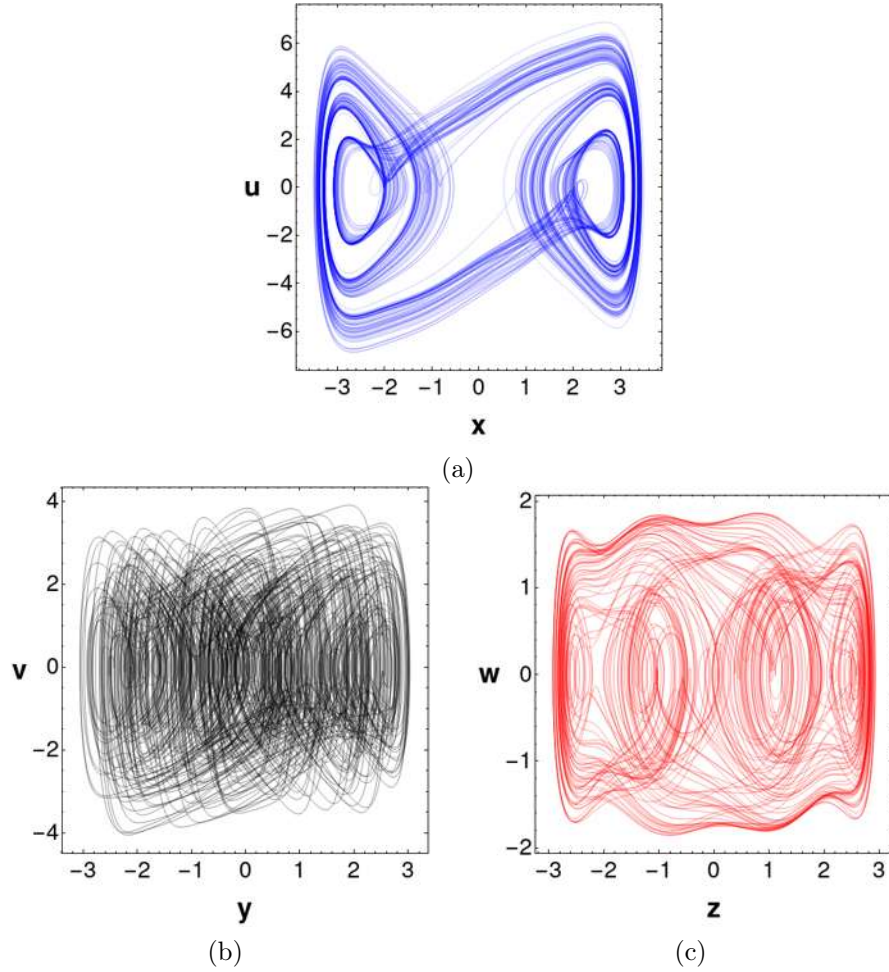
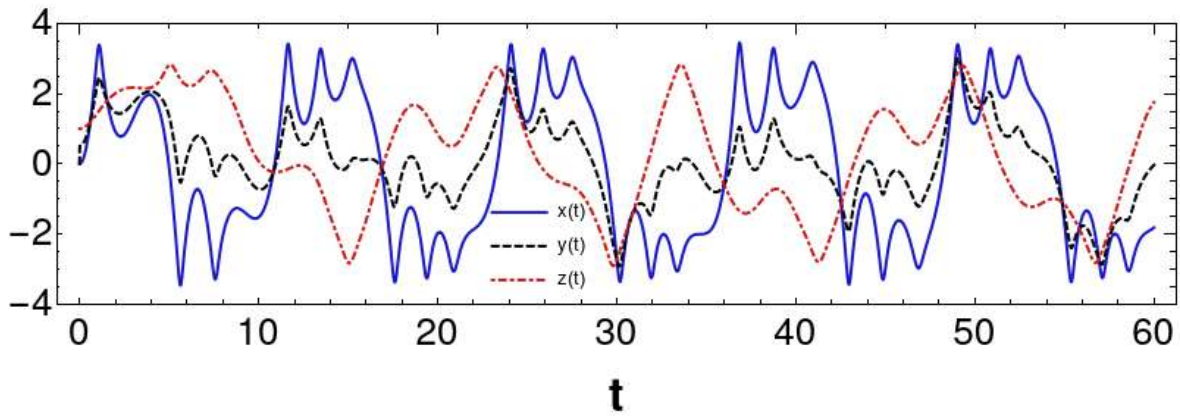
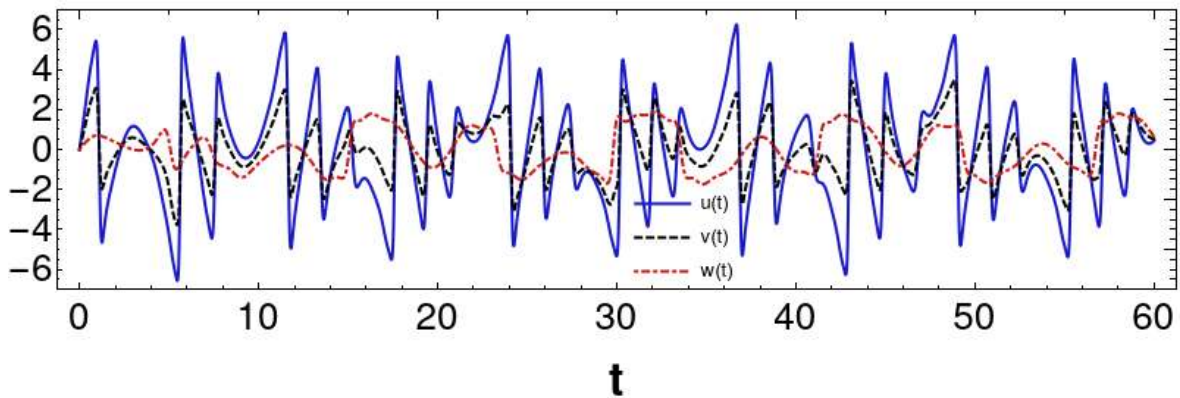


Figura 2.18: Espacios fases de los atractores caóticos de (a) van der Pol-Duffing; (b) Duffing; y (c) Rayleigh-Duffing  $\Phi^8$ .





(a)



(b)

Figura 2.19: Series de tiempo de las posiciones  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  y de las velocidades  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $w(t)$ .

Las series de tiempo arrojan la falta de sincronización en este patron. Sin importar el acoplamiento usado no se alcanza sincronización en ningún canal.

### 2.2.3. Auxiliar

A diferencia del patrón Competitive, en el patrón Auxiliar un único sistema maestro interactúa con dos esclavos. Los sistemas bajo este patrón, con acoplamiento elástico-disipativo, se describen mediante:

$$\begin{aligned} \text{VDP-D} &: \begin{cases} \dot{x} = u + \overline{G}(y - x), \\ \dot{u} = \mu_1(1 - x^2)u - (\alpha x + \beta x^3 + \gamma x^5 + \delta x^7) + A_1 \cos(\omega_1 t) + \overline{G}(v - u). \end{cases} \\ \text{D} &: \begin{cases} \dot{y} = v, \\ \dot{v} = -\mu_2 v - (\alpha y + \beta y^3 + \gamma y^5 + \delta y^7) + A_2 \cos(\omega_2 t). \end{cases} \\ \text{R-D} &: \begin{cases} \dot{z} = w + \overline{G}(y - z), \\ \dot{w} = \mu_3(1 - w^2)w - (\alpha z + \beta z^3 + \gamma z^5 + \delta z^7) + A_3 \cos(\omega_3 t) + \overline{G}(v - w). \end{cases} \end{aligned}$$

En las figuras 2.20 y 2.21 se presentan, respectivamente, los espacios fase y las series de tiempo resultantes de la sincronización bajo este patrón.

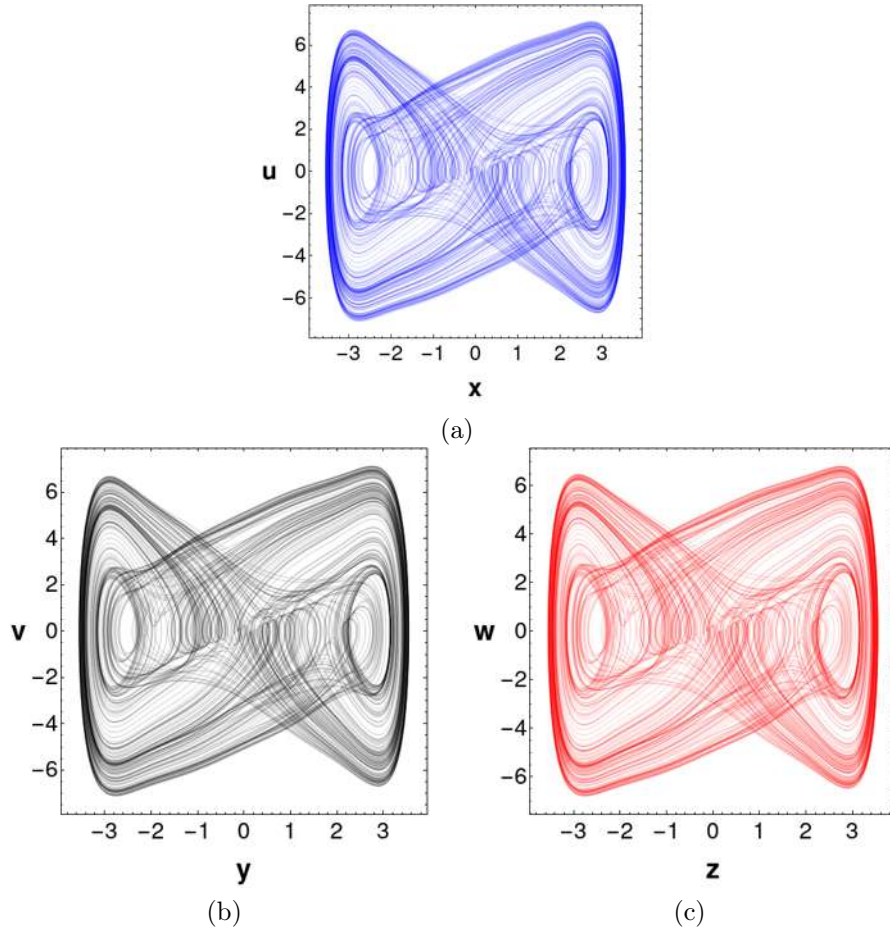
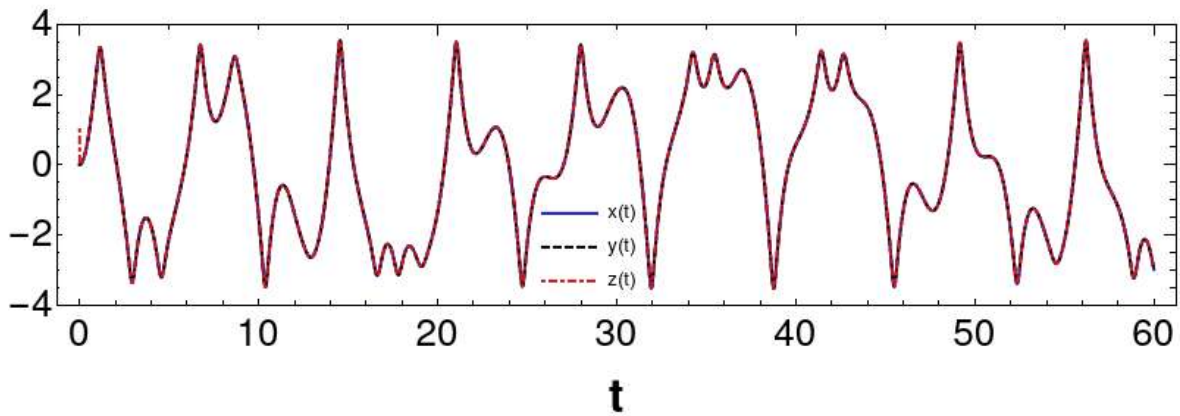
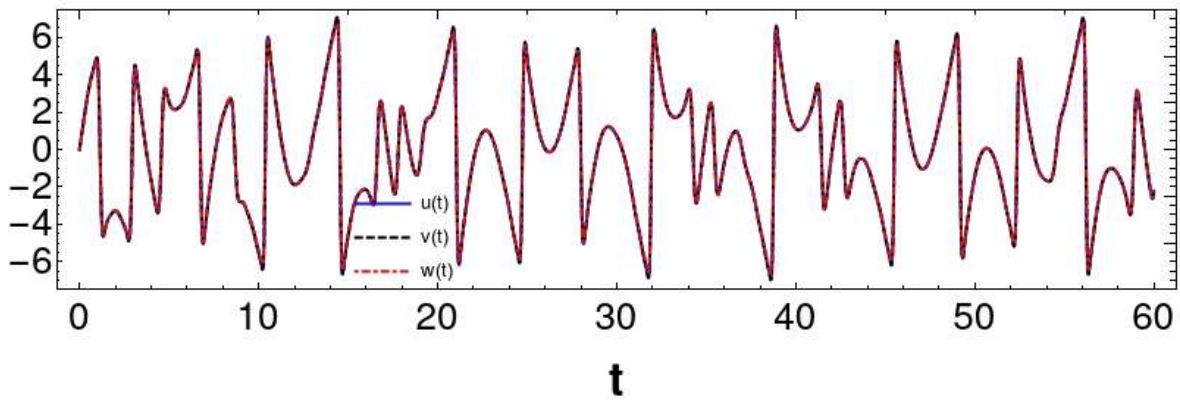


Figura 2.20: Espacios fases de los atractores caóticos de (a) van der Pol-Duffing; (b) Duffing; y (c) Rayleigh-Duffing  $\Phi^8$ .



(a)



(b)

Figura 2.21: Series de tiempo de las posiciones  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  y de las velocidades  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $w(t)$ .

Para el caso del acoplamiento elástico-giroscópico, los sistemas bajo este mismo patrón se describen mediante:

$$\begin{aligned} \text{VDP-D} &: \begin{cases} \dot{x} = u + \overline{G}(y - x), \\ \dot{u} = \mu_1(1 - x^2)u - (\alpha x + \beta x^3 + \gamma x^5 + \delta x^7) + A_1 \cos(\omega_1 t) + \overline{G}(\dot{v} - \dot{u}). \end{cases} \\ \text{D} &: \begin{cases} \dot{y} = v, \\ \dot{v} = -\mu_2 v - (\alpha y + \beta y^3 + \gamma y^5 + \delta y^7) + A_2 \cos(\omega_2 t). \end{cases} \\ \text{R-D} &: \begin{cases} \dot{z} = w + \overline{G}(y - z), \\ \dot{w} = \mu_3(1 - w^2)w - (\alpha z + \beta z^3 + \gamma z^5 + \delta z^7) + A_3 \cos(\omega_3 t) + \overline{G}(\dot{v} - \dot{w}). \end{cases} \end{aligned}$$

En las figuras 2.22 y 2.23 se presentan, respectivamente, los espacios fase y las series de tiempo resultantes de la sincronización bajo este patrón.

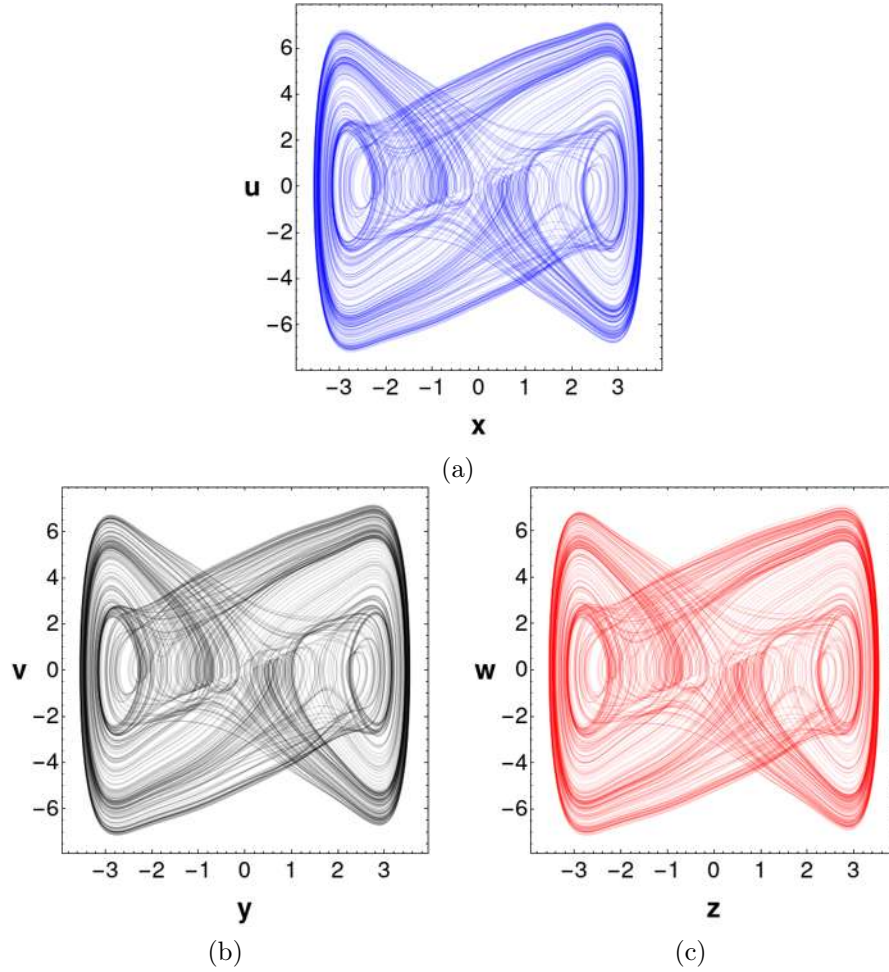
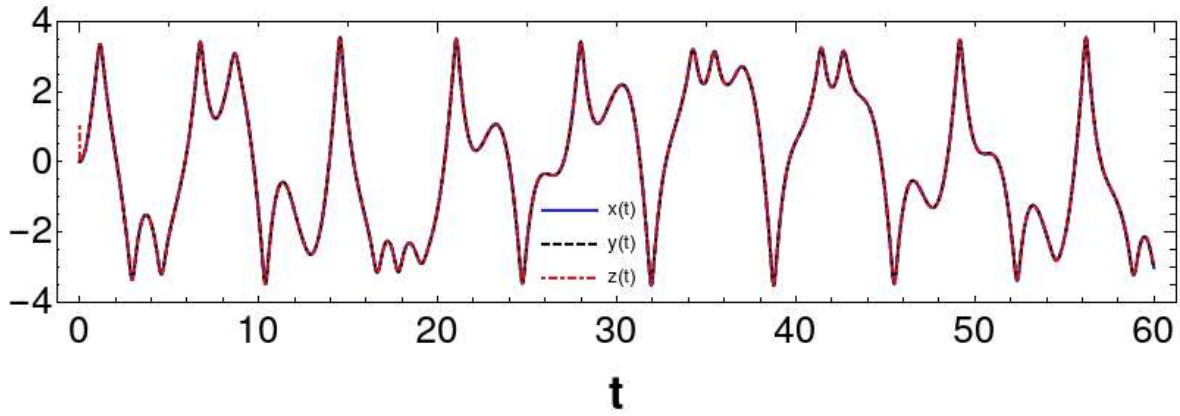
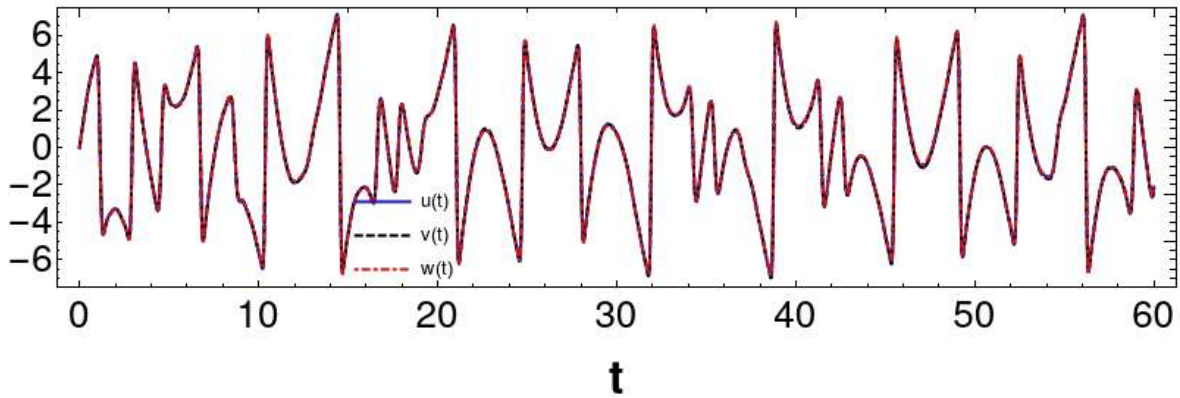


Figura 2.22: Espacios fases de los atractores caóticos de (a) van der Pol-Duffing; (b) Duffing; y (c) Rayleigh-Duffing  $\Phi^8$ .



(a)



(b)

Figura 2.23: Series de tiempo de las posiciones  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  y de las velocidades  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $w(t)$ .

Bajo este patrón se observa que existe sincronización sin importar el tipo de acoplamiento. Las series de tiempo de las posiciones son prácticamente las mismas para los dos acoplamientos usados. En el caso de la velocidad, se aprecia un ligero desplazamiento en algunas zonas.

#### 2.2.4. Conclusiones

En esta sección se estudió la sincronización de tres sistemas caóticos con potencial  $\Phi^8$  bajo distintos patrones de acoplamiento en una configuración lineal. Se evaluaron los patrones Relay, Competitive y Auxiliar utilizando acoplamientos elástico-disipativo y elástico-giroscópico.

- **Patrón Relay:** Se logró sincronización con ambos tipos de acoplamiento. Los espacios fase y series de tiempo resultantes son cualitativamente idénticos, mostrando que la dinámica sincronizada es independiente del acoplamiento utilizado, aunque difiere de la dinámica de los sistemas aislados.

- **Patrón Competitive:** Este es el único patrón donde no se alcanzó la sincronización en ningún canal (posición o velocidad), independientemente del acoplamiento empleado. La estructura de interacción, donde dos maestros compiten por influir en un único esclavo, parece impedir el ajuste coordinado necesario para la sincronización.
- **Patrón Auxiliar:** Se observó sincronización exitosa con ambos acoplamientos. Las series de tiempo de las posiciones son prácticamente indistinguibles. Para las velocidades, se aprecia una ligera discrepancia local en los máximos y mínimos, siendo esta ligeramente menor en el caso del acoplamiento elástico-giroscópico.

En conclusión, la posibilidad de sincronización en este arreglo de tres sistemas, está determinada principalmente por el tipo de interacción característico de cada patrón (Relay y Auxiliar la permiten, Competitive no), y no por el tipo específico de acoplamiento (elástico-disipativo o elástico-giroscópico) utilizado. Para los casos exitosos, ambos acoplamientos muestran un desempeño equivalente, lo que sugiere que la elección entre uno y otro puede basarse en consideraciones prácticas o de implementación física, sin afectar el resultado de sincronización.



## Capítulo 3

# Estudio numérico y analítico de la sincronización entre dos sistemas no lineales diferentes con potencial $\Phi^8$

Un fenómeno interesante que ocurre en la sincronización clásica maestro-esclavo en el límite de acoplamiento fuerte<sup>1</sup> es el desplazamiento vertical entre las soluciones numéricas de los sistemas maestro y esclavo. De hecho, en el caso de los sistemas  $\Phi^6$  van der Pol y Duffing este fenómeno ha sido reportado [21]. Una pregunta importante es si esto es un problema de aproximación numérica o el resultado de tomar series de tiempo no suficientemente largas o el resultado de algo más aún no considerado.

En este capítulo estudiamos la sincronización de los sistemas van der Pol y Duffing dotados de un potencial  $\Phi^8$  con cuatro pozos utilizando primero un acoplamiento giroscópico y luego un acoplamiento combinado (elástico-giroscópico). A diferencia del Capítulo 2, aquí se realiza un análisis detallado de los acoplamientos empleados, presentando gráficas de error y seleccionando las constantes de acoplamiento de manera adecuada con base en dichas gráficas. Se encuentran soluciones numéricas para atractores de cada sistema. Los resultados principales y conclusiones en este capítulo han sido publicados en [33].

El objetivo principal de este capítulo es proporcionar una comprensión del fenómeno de desplazamiento vertical observado en el Capítulo 2.1. Para ello, aplicamos el método de perturbación para encontrar soluciones analíticas aproximadas del sistema esclavo simulando soluciones numéricas proporcionadas por el sistema maestro. Este enfoque nos permite analizar sistemáticamente el origen y comportamiento del desplazamiento vertical. Para este análisis, se utiliza una función cuasiperiódica debido a su comportamiento y su relación con sistemas caóticos. Recientemente, el uso de funciones cuasiperiódicas en la sincronización de oscilaciones cuasiperiódicas fue estudiado [47]. También en [48], se propone un nuevo sistema caótico forzado cuasiperiódico, donde se estudiaron esquemas de acoplamiento bidireccional y unidireccional entre dos de tales sistemas caóticos.

---

<sup>1</sup>El acoplamiento fuerte ocurre cuando las constantes de acoplamiento son mucho mayores que los valores de los demás parámetros del sistema.

### 3.1. Estudio numérico

La evolución de los sistemas VDP-D y D para el caso del potencial  $\Phi^8$  con cuatro pozos se describe individualmente mediante las siguientes ecuaciones:

$$\text{VDP-D} : \begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{u} = \mu_1(1 - x^2)u - (\alpha x + \beta x^3 + \gamma x^5 + \delta x^7) + A_1 \cos(\omega_1 t), \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\text{D} : \begin{cases} \dot{y} = v, \\ \dot{v} = -\mu_2 v - (\alpha y + \beta y^3 + \gamma y^5 + \delta y^7) + A_2 \cos(\omega_2 t), \end{cases} \quad (3.2)$$

donde las variables  $x$ ,  $y$ , los parámetros del potencial y las condiciones iniciales son idénticos a los definidos en el Capítulo 2. Los atractores correspondientes se muestran en la figura 3.1.

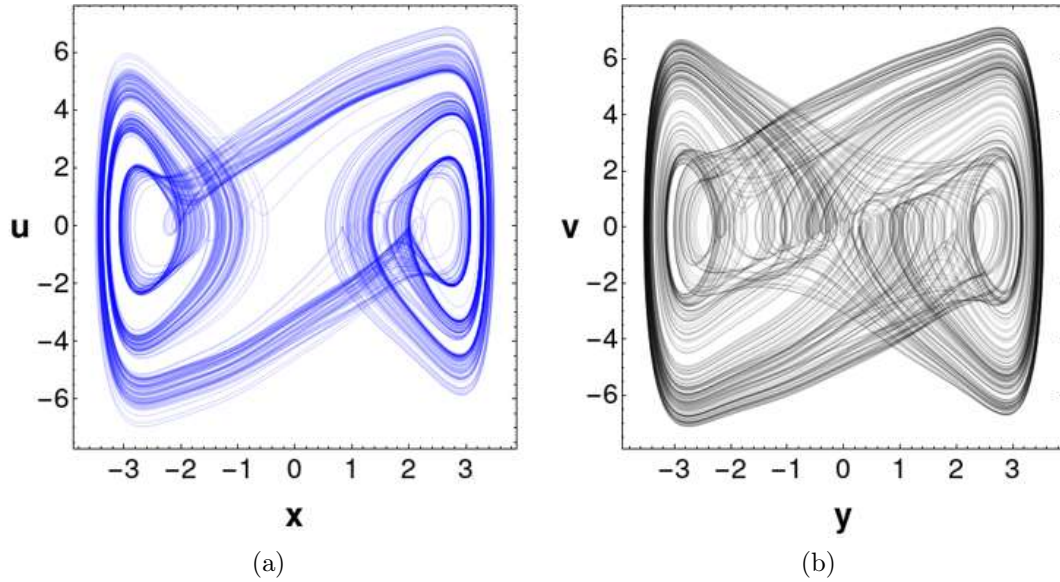


Figura 3.1: Espacios fase de los atractores caóticos de (a) van der Pol-Duffing y (b) Duffing con un potencial de cuatro pozos.

#### 3.1.1. Acoplamiento giroscópico

Para estudiar la sincronización entre los sistemas, consideramos primero el acoplamiento giroscópico en la configuración clásica maestro-esclavo. Los sistemas se presentan como:

$$\text{Maestro} : \begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{u} = \mu_1(1 - x^2)u - (\alpha x + \beta x^3 + \gamma x^5 + \delta x^7) + A_1 \cos(\omega_1 t), \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\text{Esclavo} : \begin{cases} \dot{y} = v, \\ \dot{v} = -\mu_2 v - (\alpha y + \beta y^3 + \gamma y^5 + \delta y^7) + A_2 \cos(\omega_2 t) + K_g (\dot{u} - \dot{v}), \end{cases} \quad (3.4)$$



donde el sistema van der Pol-Duffing actúa como maestro, el sistema de Duffing actúa como esclavo y  $K_g$  es la constante de acoplamiento giroscópico.

El problema de sincronización se reduce a encontrar un valor (o rango) de la constante de acoplamiento para el cual el sistema esclavo se comporta como el sistema maestro. Por lo tanto, estamos interesados en la evolución del sistema esclavo en función de la constante de acoplamiento  $K_g$ . Cuando se logra sincronización completa, las soluciones de los sistemas son idénticas, lo cual puede representarse mediante las siguientes funciones de error:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - v(t)| = 0. \quad (3.5)$$

Cuando solo una de las condiciones en (3.5) se satisface, ya sea posición o velocidad, ocurre sincronización parcial. Existen otros tipos de sincronización como sincronización por desplazamiento vertical, sincronización con retardo y sincronización anticipada [17, 21, 49, 50, 51]. Las gráficas de las funciones de error para el acoplamiento giroscópico se muestran en figura 3.2. Nótese que para valores grandes de la constante de

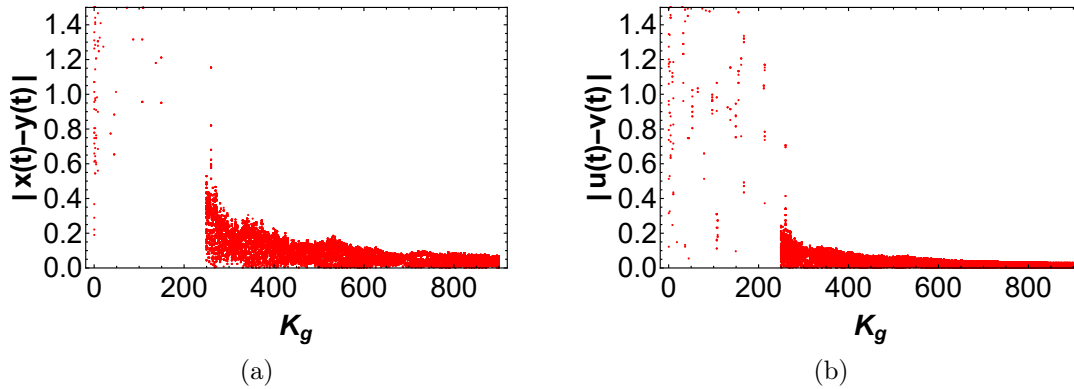


Figura 3.2: Las funciones de error de (a) posición y (b) velocidad, ambas en función del parámetro  $K_g$ .

acoplamiento, mayores a 400, las funciones de error decrecen. Para nuestros cálculos tomamos  $K_g = 500$ , que es al menos dos órdenes de magnitud mayor que los otros parámetros involucrados. Las gráficas del espacio fase de los sistemas acoplados, así como las series de tiempo para las posiciones y velocidades, se muestran en las figuras 3.3, 3.4 y 3.5 respectivamente. En la figura 3.4, notamos que no hay sincronización completa ya que, en el caso de la función de error para la posición, aparece una línea más gruesa, lo cual significa que las series de tiempo correspondientes no coinciden exactamente, como puede apreciarse en la figura 3.5 (a). Por otro lado, la función de error correspondiente a la velocidad indica que sí hay sincronización, ya que la línea correspondiente es más delgada que en el caso anterior y las series de tiempo para las variables  $u$  y  $v$  parecen coincidir mejor, como se muestra en la figura 3.5 (b), donde podría apreciarse una desviación muy ligera en los máximos o mínimos de la función. Por lo tanto, para este caso de acoplamiento giroscópico, se logra sincronización parcial.

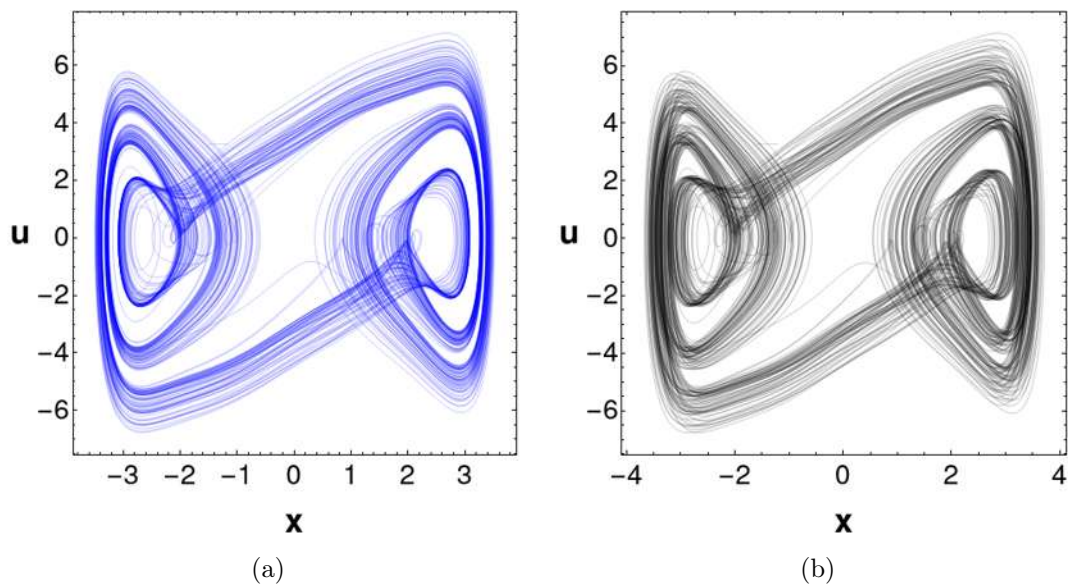


Figura 3.3: Espacios fase de los sistemas (a) van der Pol-Duffing y (b) Duffing acoplado.

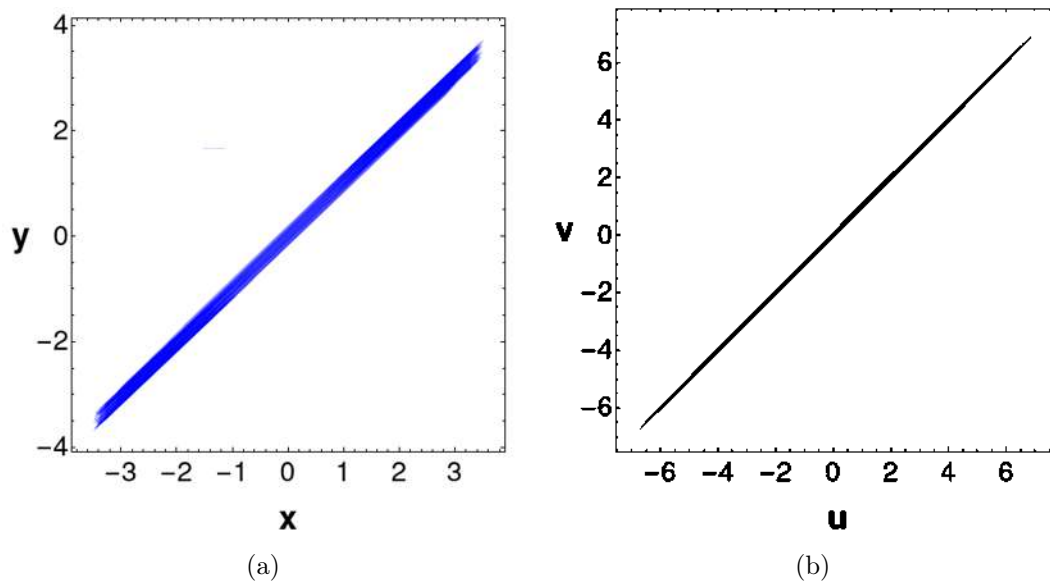
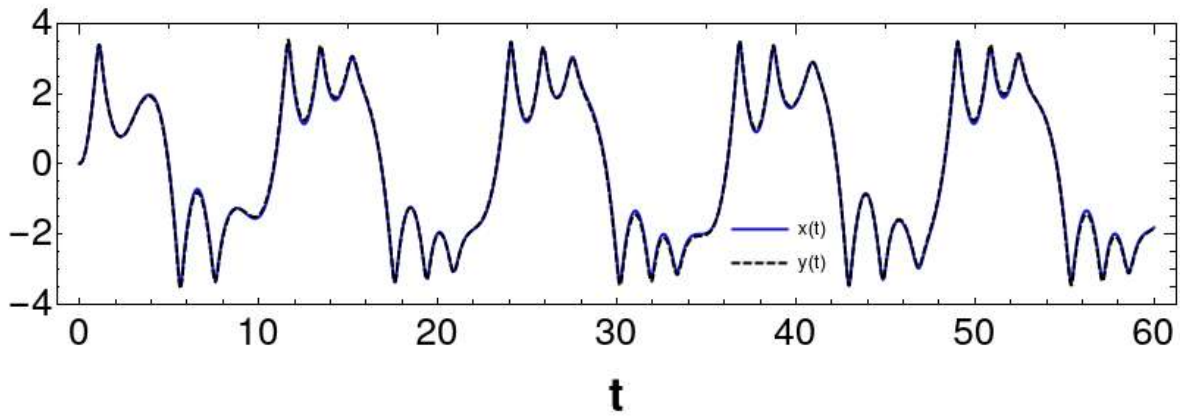
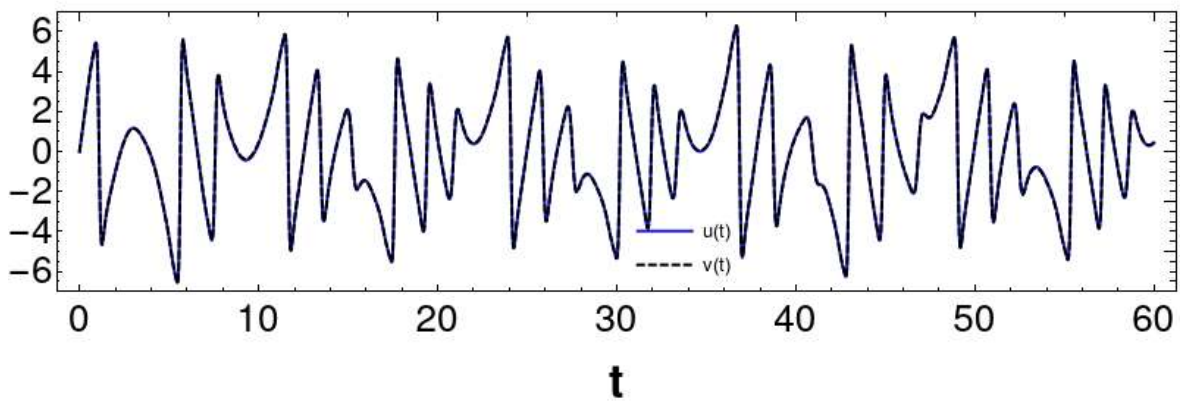


Figura 3.4: Proyecciones en los planos (a)  $(x, y)$  y (b)  $(u, v)$ .



(a)



(b)

Figura 3.5: Series de tiempo de las soluciones (a)  $x(t)$ ,  $y(t)$  y (b)  $u(t)$ ,  $v(t)$ .

### 3.1.2. Acoplamiento elástico-giroscópico

Ocasionalmente, es imposible encontrar una constante de acoplamiento tal que los sistemas se sincronicen, incluso en el caso de acoplamiento fuerte, en nuestro caso para  $K \gg 0$ . Para ciertos casos, la sincronización se logra en solo un canal, ya sea en el canal de posición o en el canal de velocidad [52], como ocurre en el caso del acoplamiento giroscópico discutido anteriormente. En [53], se utilizó un acoplamiento combinado elástico-disipativo para el estudio, lo cual evita el inconveniente de la sincronización en un solo canal. En esta sección analizamos la sincronización utilizando un acoplamiento combinado elástico-giroscópico. La evolución de este sistema se rige por las ecuaciones

$$\text{Maestro} : \begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{u} = \mu_1(1 - x^2)u - (\alpha x + \beta x^3 + \gamma x^5 + \delta x^7) + A_1 \cos(\omega_1 t), \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\text{Esclavo} : \begin{cases} \dot{y} = v + K_e (x - y), \\ \dot{v} = -\mu_2 v - (\alpha y + \beta y^3 + \gamma y^5 + \delta y^7) + A_2 \cos(\omega_2 t) + K_g (\dot{u} - \dot{v}), \end{cases} \quad (3.7)$$

donde  $K_e$  y  $K_g$  representan las constantes del acoplamiento elástico y giroscópico, respectivamente. Las gráficas de las funciones de error se presentan en las figuras 3.6 y 3.7. En la figura 3.6, la función de error tiende a cero conforme  $K_g$  aumenta, siendo

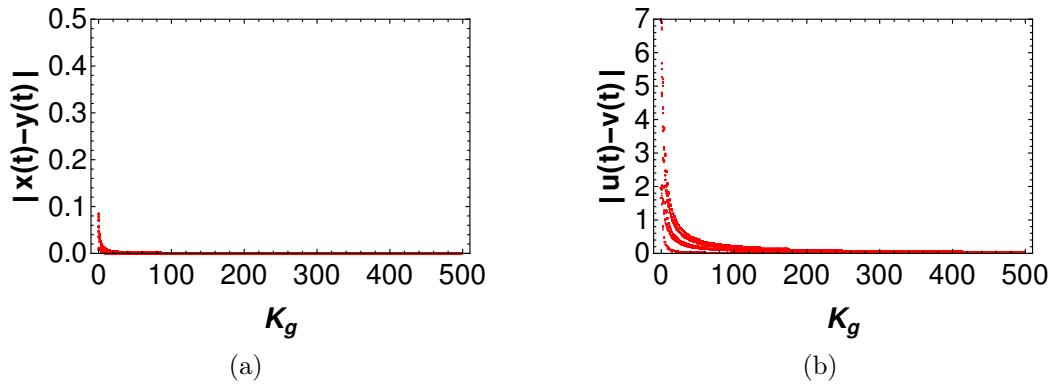


Figura 3.6: Funciones de error con  $K_e = 200$ : (a) en la posición y (b) en la velocidad, ambas en función del parámetro  $K_g$ .

este comportamiento más rápido en la función de error de posición. El mismo fenómeno se presenta en la figura 3.7, incluso más acentuado para el caso de la velocidad. Esto indica que la sincronización se alcanza rápidamente.

## 3.2. Solución analítica

En esta sección, calculamos una solución analítica para el sistema esclavo y la comparamos con los resultados numéricos en el límite de acoplamiento fuerte, es decir, cuando  $K_g$  y  $K_e$  son mucho mayores que los valores de los otros parámetros. Para hacer esto, comenzamos escribiendo el sistema esclavo con el acoplamiento elástico-giroscópico en

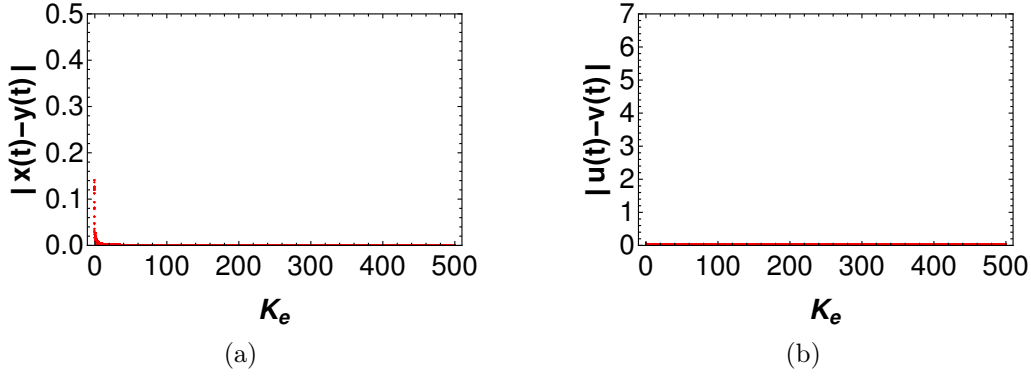


Figura 3.7: Funciones de error con  $K_g = 500$ : (a) en posición y (b) en velocidad, ambas en función del parámetro  $K_e$ .

la Ec. (3.7) de la forma:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \dot{y} \left( \frac{K_e(1 + K_g) + \mu_2}{1 + K_g} \right) + y \left( \frac{\mu_2 K_e + \alpha}{1 + K_g} \right) + \frac{\beta y^3 + \gamma y^5 + \delta y^7}{1 + K_g} \\ = \ddot{x} \left( \frac{K_g}{1 + K_g} \right) + \dot{x} K_e + x \left( \frac{\mu_2 K_e}{1 + K_g} \right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

la cual se obtiene eliminando  $u$ ,  $v$ ,  $\dot{u}$  y  $\dot{v}$  en esa ecuación. La Ec. (3.8) es útil ya que para la variable  $y$  representa un oscilador armónico amortiguado con una perturbación no lineal, mientras que el lado derecho de esta ecuación es el forzamiento debido al sistema maestro que también representa un oscilador armónico. Ahora, el punto no es determinar la solución  $x(t)$  dado que permanece desconocida, sino tener una mejor comprensión del desplazamiento vertical que ocurre en las soluciones numéricas, como el mostrado en la figura 3.5. Este fenómeno fue notado previamente en el oscilador Duffing-van der Pol con potencial asimétrico [21]. Independientemente de la función  $x(t)$  proporcionada por el sistema maestro, podemos probar diferentes funciones que no necesariamente correspondan a la solución del sistema maestro, sin embargo estas funciones ilustran el desplazamiento vertical. Para hacer esto, usemos primero una función cuasiperiódica y luego una aproximación de la solución de ciclo límite del sistema de van der Pol [54] para encontrar la solución  $y(t)$  usando el método de perturbación.

El método de perturbación es una técnica utilizada para obtener soluciones de ecuaciones que no pueden resolverse analíticamente a priori [55]. Dado que términos como  $\frac{\beta}{1+K_g} \ll 1$ , los términos no lineales en la Ec. (3.8) pueden tratarse como términos perturbativos. Así, podemos expandir en términos del parámetro perturbativo  $\varepsilon$  las variables en la Ec. (3.8) como

$$\begin{aligned} y &= y^{(0)} + \varepsilon y^{(1)} + \varepsilon^2 y^{(2)} + \dots \\ \beta &= \varepsilon \beta^{(0)} + \varepsilon^2 \beta^{(1)} + \varepsilon^3 \beta^{(2)} + \dots \\ \gamma &= \varepsilon \gamma^{(0)} + \varepsilon^2 \gamma^{(1)} + \varepsilon^3 \gamma^{(2)} + \dots \\ \delta &= \varepsilon \delta^{(0)} + \varepsilon^2 \delta^{(1)} + \varepsilon^3 \delta^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

los cuales, junto con la función seleccionada  $x(t)$ , se sustituyen en (3.8) para obtener

las siguientes dos ecuaciones hasta primer orden:

$$\ddot{y}^{(0)} + \dot{y}^{(0)} \left( \frac{K_e(1 + K_g) + \mu_2}{1 + K_g} \right) + y^{(0)} \left( \frac{\mu_2 K_e + \alpha}{1 + K_g} \right) = F_0(t), \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}^{(1)} + \dot{y}^{(1)} \left( \frac{K_e(1 + K_g) + \mu_2}{1 + K_g} \right) + y^{(1)} \left( \frac{\mu_2 K_e + \alpha}{1 + K_g} \right) \\ = - \frac{\beta^{(0)}(y^{(0)})^3 + \gamma^{(0)}(y^{(0)})^5 + \delta^{(0)}(y^{(0)})^7}{1 + K_g}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde  $F_0(t)$  es la señal proporcionada por el sistema maestro y depende de  $x(t)$ . Nótese que la ecuación de orden cero dada en (3.10) representa un oscilador armónico forzado. La solución aproximada consiste en la suma de la solución de orden cero  $y^{(0)}(t)$  y la solución de primer orden  $y^{(1)}(t)$ :

$$y(t) \approx y^{(0)}(t) + y^{(1)}(t) = \left[ y_h^{(0)}(t) + y_p^{(0)}(t) \right] + \left[ y_h^{(1)}(t) + y_p^{(1)}(t) \right], \quad (3.12)$$

donde los subíndices  $h$  y  $p$  denotan las soluciones homogénea y particular. Posteriormente, las soluciones de (3.10) y (3.11) se determinan para las funciones seleccionadas  $x(t)$ . Como primera instancia para describir el desplazamiento vertical usamos una función cuasiperiódica. Recordemos que una función cuasiperiódica es una función continua que puede escribirse como una suma finita de funciones con períodos inconmensurables [56, 57], un ejemplo de este tipo de función es

$$x_1(t) = A \sin(\omega_p t) + B \cos(\omega_q t), \quad (3.13)$$

donde las frecuencias  $\omega_p$  y  $\omega_q$  son inconmensurables, es decir  $\frac{\omega_p}{\omega_q} \neq \frac{n}{m}$  siendo  $n, m$  enteros. De aquí en adelante y por simplicidad, la función anterior se usará con los valores  $A = B = 1$ ,  $\omega_p = \sqrt{5}$  y  $\omega_q = \sqrt{11}$ . En este caso la función  $F_0(t)$  relacionada con  $x_1(t)$  está dada por:

$$\begin{aligned} F_0(t) = & - \left( \frac{1}{1 + K_g} \right) (\cos(\omega_p t) [-K_e \omega_p (1 + K_g)] + \sin(\omega_p t) [K_g \omega_p^2 - K_e \mu_2] \\ & + \cos(\omega_q t) [K_g \omega_q^2 - K_e \mu_2] + \sin(\omega_q t) [K_e \omega_q (1 + K_g)]). \end{aligned} \quad (3.14)$$

En la figura 3.8 se muestran las soluciones numéricas y analíticas aproximadas junto con la función cuasiperiódica para diferentes rangos de tiempo empleados en este caso. Las condiciones iniciales para la solución numérica son  $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ .

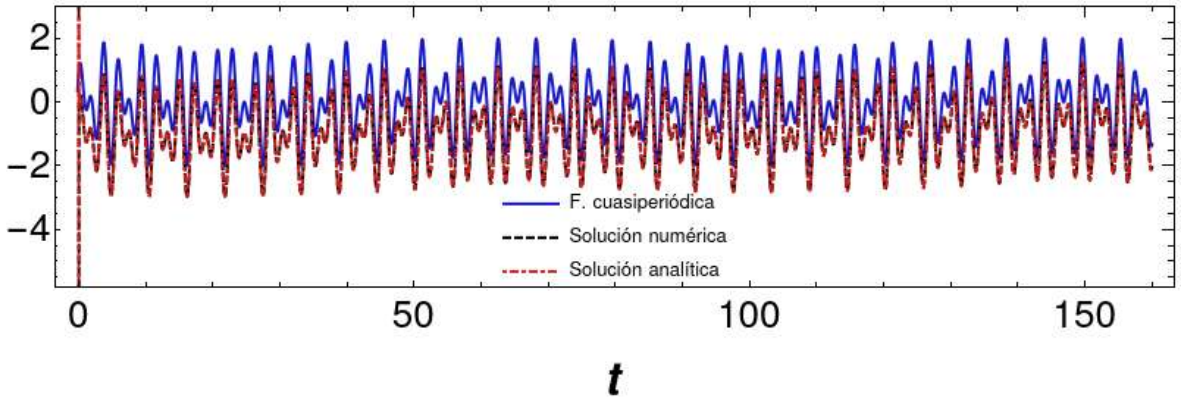
Es notable que el desplazamiento vertical que aparece en la figura 3.8 (b) tiende a desaparecer para tiempos más grandes, como puede apreciarse en la figura 3.8 (c). Este comportamiento se describe mejor en la figura 3.9, donde la diferencia entre las funciones tiende a cero conforme el tiempo crece. Para el siguiente caso, la aproximación a primer orden en teoría de perturbación de las soluciones al ciclo límite del sistema de van der Pol es [54]:

$$x_2(t) = 2 \cos(t) + \lambda \left( \frac{3}{4} \sin(t) - \frac{1}{4} \sin(3t) \right), \quad (3.15)$$

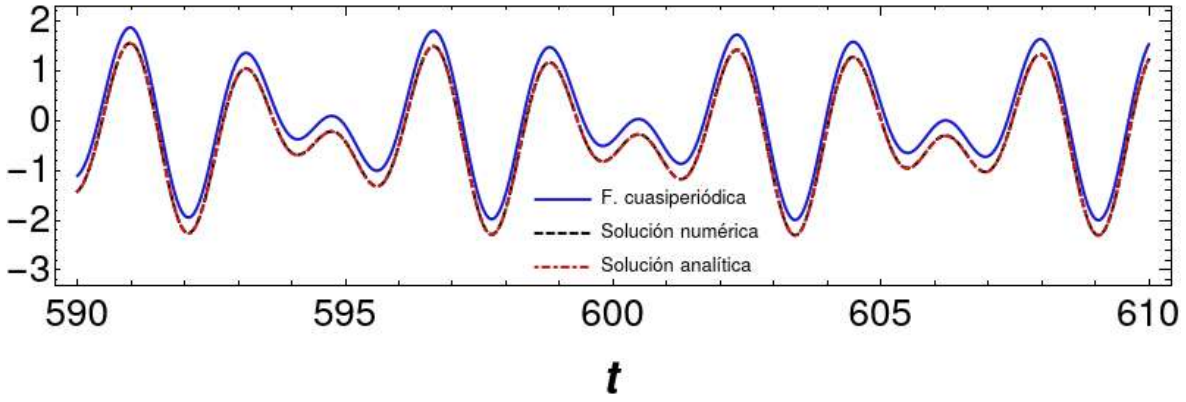
donde  $\lambda$  representa el amortiguamiento no lineal. Para este caso

$$F_0(t) = - \frac{1}{4(1 + K_g)} \left( s_1 \cos(t) + s_2 \cos(3t) + s_3 \sin(t) + s_4 \sin(3t) \right), \quad (3.16)$$

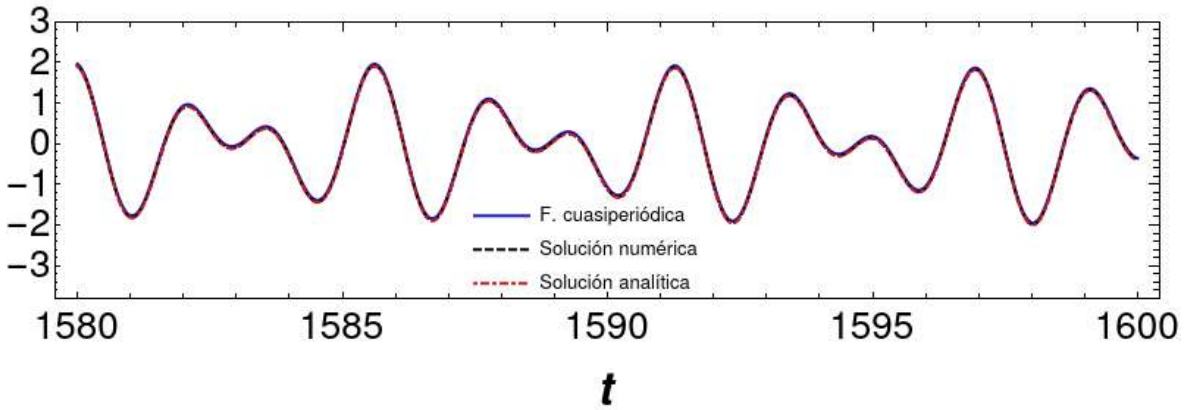




(a)



(b)



(c)

Figura 3.8: Gráfica de series de tiempo para la función cuasiperiódica (azul), la solución numérica (negro) y la solución analítica aproximada (rojo) en diferentes rangos de tiempo. Nótese que las soluciones numérica y analítica están empalmadas.

con

$$s_1 = (8K_g - 8K_e\mu_2 - 3K_e\lambda - 3K_eK_g\lambda), \quad (3.17)$$

$$s_2 = (3K_e\lambda + 3K_eK_g\lambda), \quad (3.18)$$

$$s_3 = (8K_e + 8K_eK_g + 3K_g\lambda - 3K_e\mu_2\lambda), \quad (3.19)$$

$$s_4 = (-9K_g\lambda + K_e\mu_2\lambda). \quad (3.20)$$



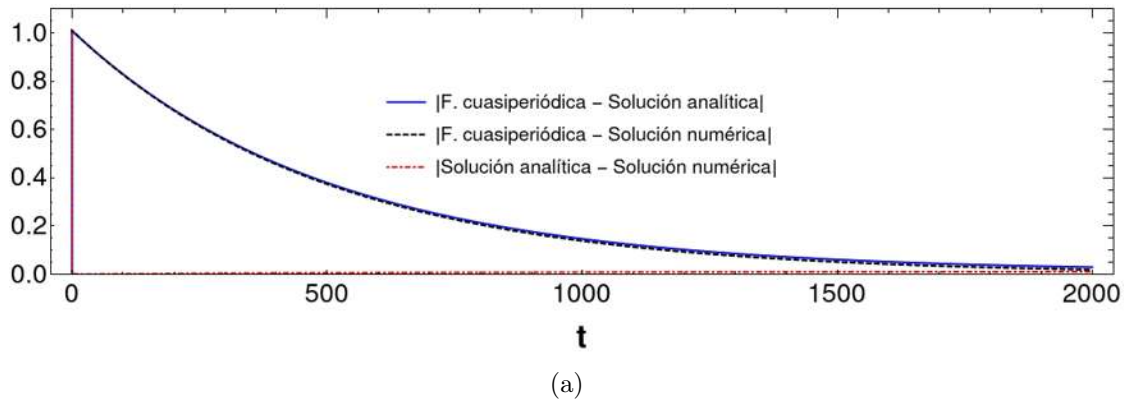


Figura 3.9: Gráficas de las diferencias: entre la función cuasiperiódica y la solución analítica aproximada (azul), entre la función cuasiperiódica y la solución numérica (negro), y entre la solución analítica aproximada y la solución numérica (rojo).

Análogo al primer caso, en la figura 3.10 se muestran las soluciones numéricas y analíticas aproximadas junto con la solución al ciclo límite. Nuevamente, las condiciones iniciales para la solución numérica son  $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ .

En estas gráficas puede observarse el desplazamiento vertical en las soluciones correspondientes para diferentes series de tiempo. Este fenómeno se aprecia mejor para tiempos suficientemente grandes, como puede observarse en las figuras 3.8 (c) y 3.10 (c). Nótese que conforme el tiempo crece, las diferencias entre las soluciones numéricas y analíticas tienden a cero, lo que indica que esto es más bien una cuestión de convergencia asintótica. Esto se ilustra en las figuras 3.9 y 3.11 para tiempos suficientemente grandes.

En algunas de las figuras anteriores se observa un segmento de recta vertical en las cercanías de  $t = 0$ . Este comportamiento se debe a que las soluciones numéricas parten de condiciones iniciales nulas en  $t = 0$ , mientras que las otras funciones toman valores distintos en ese mismo instante. En la figura 3.9, la solución analítica es aproximadamente igual a uno, y en la figura 3.11, la solución al ciclo límite es igual a dos. En las figuras 3.8 (a) y 3.10 (a), la recta vertical de la solución analítica se explica mediante la parte homogénea de la solución, la cual, para  $t < 0$ , tiende a valores que crecen rápidamente. Además, dado que la solución numérica no está definida para  $t < 0$ , el software emplea un recurso numérico para graficar donde no está definida la función.

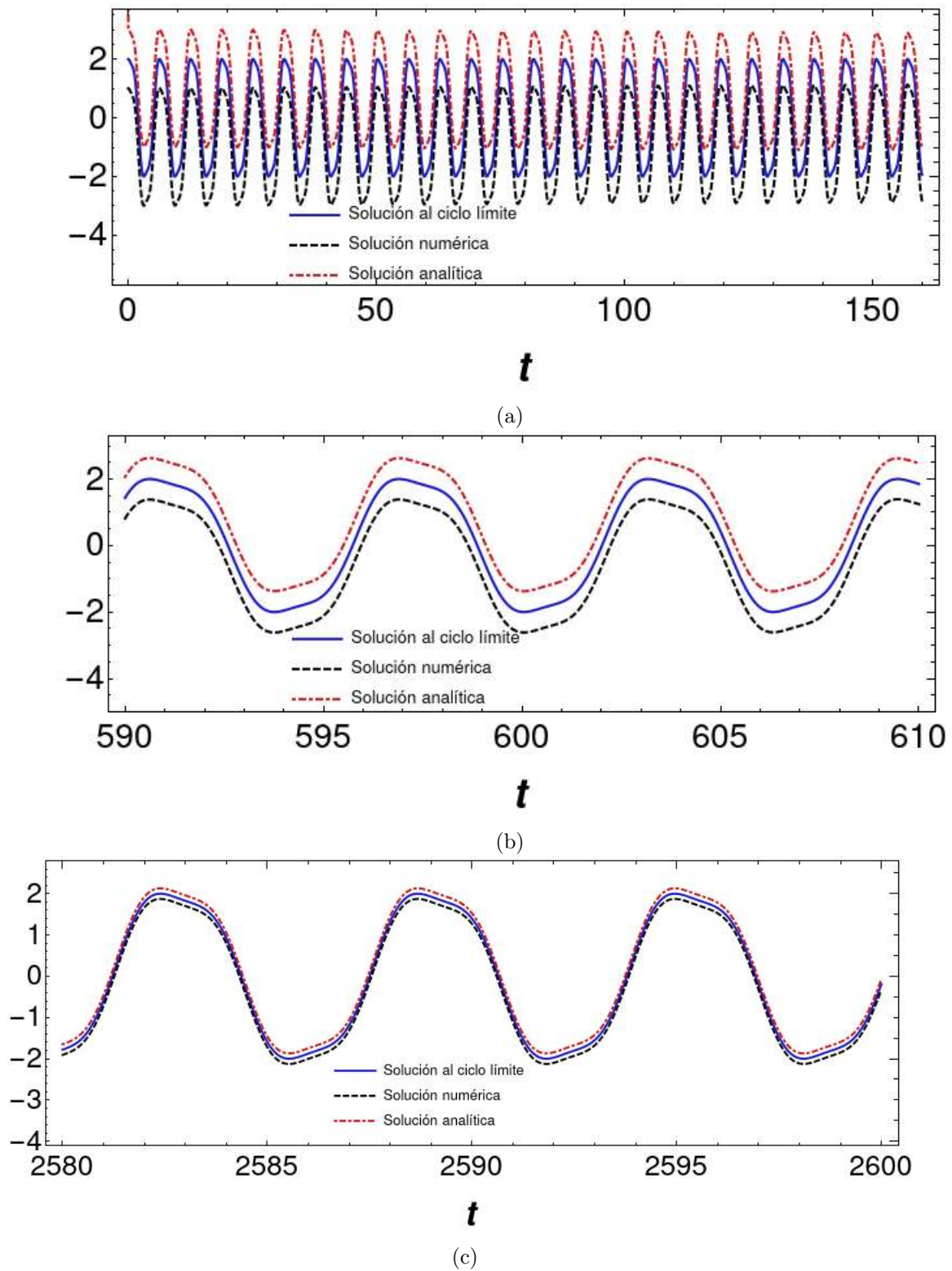


Figura 3.10: Gráfica de la solución al ciclo límite (azul), la solución numérica (negro) y la solución analítica aproximada (rojo) en diferentes rangos de tiempo.

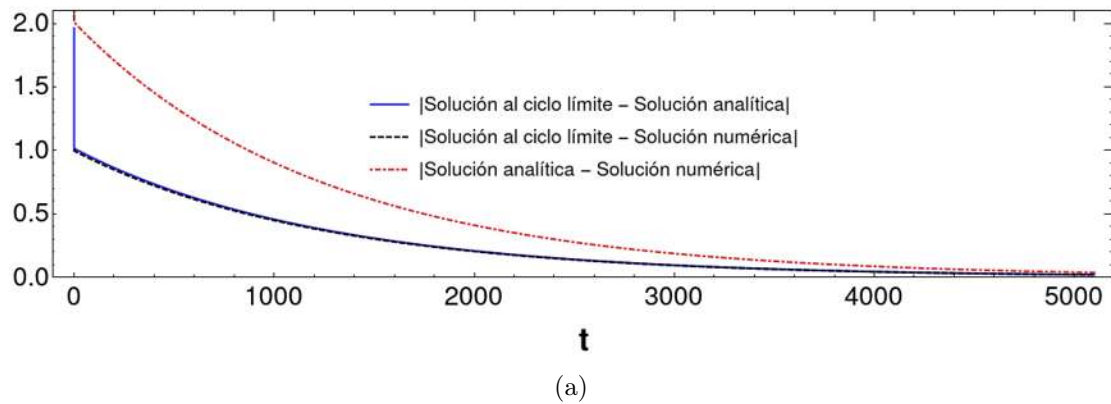


Figura 3.11: Gráficas de las diferencias: entre la solución de ciclo límite y la solución analítica aproximada (azul), entre la solución al ciclo límite y la solución numérica (negro), y entre la solución analítica aproximada y la solución numérica (rojo).

### 3.3. Conclusiones

En este capítulo se han estudiado los sistemas van der Pol y Duffing con un potencial  $\Phi^8$ . Para el caso de cuatro pozos, estudiamos la sincronización clásica maestro-esclavo para diferentes valores del acoplamiento. Para el acoplamiento giroscópico, las gráficas de error muestran que ocurre sincronización parcial para un valor de 500 o valores mayores del acoplamiento. En el plano  $(x, y)$  aparece una línea gruesa a  $45^\circ$  indicando que no se logra sincronización completa. En comparación, el acoplamiento combinado muestra sincronización tanto en los planos  $(x, y)$  como en  $(u, v)$ , confirmando que este acoplamiento es más efectivo que el acoplamiento giroscópico. Continuando con el acoplamiento combinado, mediante el método de perturbación, se calculó una solución aproximada para el sistema esclavo. Comparando la solución aproximada con la solución numérica, ambas muestran el mismo comportamiento, excepto por un pequeño desplazamiento vertical que desaparece conforme el tiempo se vuelve suficientemente grande. Así, el fenómeno de desplazamiento vertical resulta ser un problema de comportamiento asintótico.

# Capítulo 4

## Resumen de resultados y conclusiones

En esta tesis doctoral se estudió la sincronización de sistemas dinámicos no lineales con potenciales polinomiales de orden superior, en particular el potencial  $\Phi^8$ , bajo una configuración maestro-esclavo.

Se obtuvo la clasificación del potencial simétrico  $\Phi^8$ , estableciendo las condiciones algebraicas para que presente distintas configuraciones. Esta caracterización constituye la base teórica fundamental para los estudios numéricos posteriores.

Se compararon cuatro esquemas de acoplamiento, donde se mostró que la sincronización completa se logra de manera más eficaz con acoplamientos combinados y que su viabilidad depende del patrón de interacción utilizado.

El fenómeno de desplazamiento vertical, previamente reportado sin explicación analítica, fue analizado mediante el método de perturbación. Se obtuvieron soluciones analíticas que revelaron su naturaleza transitoria, descartando que fuera un error del método numérico. La metodología desarrollada representa la contribución principal y sienta las bases para estudiar otros tipos de sincronización compleja.

En conjunto, este trabajo aporta herramientas analíticas y resultados prácticos para el diseño y control de osciladores no lineales acoplados, estableciendo una base sólida para futuras investigaciones en sincronización de sistemas caóticos.

# Bibliografía

- [1] S.H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. CRC Press, 2024. ISBN 9780429676284. URL <https://books.google.com.mx/books?id=1wrsEAAAQBAJ>.
- [2] J. DiStefano. *Dynamic Systems Biology Modeling and Simulation*. Elsevier Science, 2015. ISBN 9780124104112. URL <https://books.google.com.mx/books?id=kckhmwEACAAJ>.
- [3] Antonio Palacios. *Mathematical Modeling: A Dynamical Systems Approach to Analyze Practical Problems in STEM Disciplines*. Springer, 2022.
- [4] Stephen Lynch. *Dynamical Systems with Applications using Python*. Birkhäuser Cham, 1 edition, 2018. ISBN 978-3-319-78144-0. doi: 10.1007/978-3-319-78145-7.
- [5] M.W. Hirsch, S. Smale, and R.L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Academic Press, 2012. ISBN 9780123820112. URL <https://books.google.com.mx/books?id=rly1AAmAXh8C>.
- [6] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2013. ISBN 9781461300038. URL <https://books.google.com.mx/books?id=VFnsBwAAQBAJ>.
- [7] Edward N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, 20(2):130 – 141, 1963. doi: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2. URL [https://journals.ametsoc.org/view/journals/atasc/20/2/1520-0469\\_1963\\_020\\_0130\\_dnf\\_2\\_0\\_co\\_2.xml](https://journals.ametsoc.org/view/journals/atasc/20/2/1520-0469_1963_020_0130_dnf_2_0_co_2.xml).
- [8] H. Poincaré and B.D. Popp. *The Three-Body Problem and the Equations of Dynamics: Poincaré’s Foundational Work on Dynamical Systems Theory*. Astrophysics and Space Science Library. Acta mathematica journal published by Institut Mittag-Leffler, 2017. ISBN 9783319528991. URL <https://books.google.com.mx/books?id=TjPbDgAAQBAJ>.
- [9] Troy Shinbrot, Celso Grebogi, Jack Wisdom, and James A. Yorke. Chaos in a double pendulum. *American Journal of Physics*, 60(6):491–499, 06 1992. ISSN 0002-9505. doi: 10.1119/1.16860. URL <https://doi.org/10.1119/1.16860>.
- [10] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2013. ISBN 9781461211402. URL <https://books.google.com.mx/books?id=XYIpBAAAQBAJ>.

- [11] Samir Bendoukha, Salem Abdelmalek, and Adel Ouannas. *Secure Communication Systems Based on the Synchronization of Chaotic Systems*, pages 281–311. Springer International Publishing, Cham, 2019. ISBN 978-3-030-12232-4. doi: 10.1007/978-3-030-12232-4\_9. URL [https://doi.org/10.1007/978-3-030-12232-4\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-030-12232-4_9).
- [12] Mingzhu Wang, Xiaodi Li, and Peiyong Duan. Event-triggered delayed impulsive control for nonlinear systems with application to complex neural networks. *Neural Networks*, 150:213–221, 2022. ISSN 0893-6080. doi: <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2022.03.007>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893608022000776>.
- [13] Daniel Durstewitz, Georgia Koppe, and Max Ingo Thurm. Reconstructing computational system dynamics from neural data with recurrent neural networks. *Nature Reviews Neuroscience*, 24(11):693–710, 2023.
- [14] Georg Duffing. *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*. Sammlung Vieweg, Heft 41/42. F. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Germany, 1918. Primera publicación de la ecuación que hoy se llama ecuación de Duffing.
- [15] Balth. van der Pol Jun. Lxxxviii. on “relaxation-oscillations”. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 2(11):978–992, 1926. doi: 10.1080/14786442608564127. URL <https://doi.org/10.1080/14786442608564127>.
- [16] Lord Rayleigh. On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s1-11(1):57–72, 1879. doi: <https://doi.org/10.1112/plms/s1-11.1.57>. URL <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/plms/s1-11.1.57>.
- [17] Stefano Boccaletti, Jürgen Kurths, Grigory Osipov, DL Valladares, and CS Zhou. The synchronization of chaotic systems. *Physics reports*, 366(1-2):1–101, 2002.
- [18] Adrian Arellano-Delgado, Rosa Martha López-Gutiérrez, Miguel Ángel Murillo-Escobar, and Cornelio Posadas-Castillo. Master–slave outer synchronization in different inner–outer coupling network topologies. *Entropy*, 25(5), 2023. ISSN 1099-4300. doi: 10.3390/e25050707. URL <https://www.mdpi.com/1099-4300/25/5/707>.
- [19] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge Nonlinear Science Series. Cambridge University Press, 2001. ISBN 9780521592857. URL <https://books.google.com.mx/books?id=FuIv845q3QUC>.
- [20] Duncan J Watts and Steven H Strogatz. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *nature*, 393(6684):440–442, 1998.
- [21] U Uriostegui-Legorreta and ES Tututi. Control and synchronization in the duffing-van der pol and  $\phi$  6 duffing oscillators. *Indian Journal of Physics*, 97(14):4303–4315, 2023.



- [22] AO Adelakun. Resonance oscillation and transition to chaos in  $\phi$  8-duffing–van der pol oscillator. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 7(3):82, 2021.
- [23] Clément Hodévèwan Miwadinou, Adjimon Vincent Monwanou, Laurent Amoussou Hinvi, and Jean Bio Chabi Orou. Stability and chaotic dynamics of forced  $\phi$  8 generalised liénard systems. *Pramana*, 93(5):80, 2019.
- [24] Vakhid A Gani, Aliakbar Moradi Marjaneh, and Petr A Blinov. Explicit kinks in higher-order field theories. *Physical review D*, 101(12):125017, 2020.
- [25] Avinash Khare, Ayhan Duzgun, and Avadh Saxena. Explicit kink solutions in several one-parameter families of higher-order field theory models. *International Journal of Modern Physics B*, 35(32):2150324, 2021.
- [26] Avadh Saxena, Ivan C Christov, and Avinash Khare. Higher-order field theories:, and beyond. In *A Dynamical Perspective on the  $\phi$ 4 Model: Past, Present and Future*, pages 253–279. Springer, 2019.
- [27] Ivan C Christov, Robert J Decker, A Demirkaya, Vakhid A Gani, PG Kevrekidis, and RV Radomskiy. Long-range interactions of kinks. *Physical Review D*, 99(1):016010, 2019.
- [28] Dionisio Bazeia, João GF Campos, and Azadeh Mohammadi. Kink-antikink collisions in the  $\phi$ 8 model: short-range to long-range journey. *Journal of High Energy Physics*, 2023(5):1–20, 2023.
- [29] J Kengne, F Kenmogne, and V Kamdoun Tamba. Experiment on bifurcation and chaos in coupled anisochronous self-excited systems: Case of two coupled van der pol-duffing oscillators. *Journal of Nonlinear Dynamics*, 2014(1):815783, 2014.
- [30] IA Korneev, VV Semenov, AV Slepnev, and TE Vadivasova. Complete synchronization of chaos in systems with nonlinear inertial coupling. *Chaos, Solitons & Fractals*, 142:110459, 2021.
- [31] U Uriostegui-Legorreta and ES Tututi. Synchronization in the van der pol-duffing system via elastic and dissipative couplings. *Revista mexicana de física*, 68(1):0–0, 2022.
- [32] Ulises Uriostegui Legorreta and Eduardo Salvador Tututi Hernández. Master–slave synchronization in the van der pol–duffing and duffing oscillators. *International Journal of Dynamics and Control*, 12(2):356–372, 2024.
- [33] Z. A. Valdes-Garcia, U. Uriostegui-Legorreta, and Eduardo S. Tututi. Numerical and analytical study of the synchronization of different nonlinear systems with potential  $\phi^8$ . *Indian Journal of Physics*, Mar 2026. ISSN 0974-9845. doi: 10.1007/s12648-026-03958-0. URL <https://doi.org/10.1007/s12648-026-03958-0>.
- [34] Shan Qiao, Zhiguo Shi, Tao Jiang, and Lixin Ran. A new architecture of uwb radar utilizing microwave chaotic signals and chaos synchronization. *Progress in Electromagnetics Research-pier*, 75:225–237, 2007. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:59033905>.

- [35] Apostolos Argyris and Dimitris Syvridis. Chaos applications in optical communications. In *Handbook of Information and Communication Security*, pages 479–510. Springer, 2010.
- [36] Alexander N Pisarchik and Flavio R Ruiz-Oliveras. Optical chaotic communication using generalized and complete synchronization. *IEEE journal of quantum electronics*, 46(3):279–284, 2009.
- [37] Haozhou Zheng, Jinfeng Hu, Peng Wu, Lidong Liu, and Zishu He. Study on synchronization and parameters insensitivity of a class of hyperchaotic systems using nonlinear feedback control. *Nonlinear Dynamics*, 67:1515–1523, 2012.
- [38] Bernd Blasius, Amit Huppert, and Lewi Stone. Complex dynamics and phase synchronization in spatially extended ecological systems. *Nature*, 399(6734):354–359, 1999.
- [39] Alex Arenas, Albert Díaz-Guilera, Jurgen Kurths, Yamir Moreno, and Changsong Zhou. Synchronization in complex networks. *Physics reports*, 469(3):93–153, 2008.
- [40] Jie Sun, Erik M Bollt, Mason A Porter, and Marian S Dawkins. A mathematical model for the dynamics and synchronization of cows. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 240(19):1497–1509, 2011.
- [41] Chengye Zou, Xiaopeng Wei, Qiang Zhang, and Yuan Liu. Synchronization of chemical reaction networks based on dna strand displacement circuits. *Ieee Access*, 6:20584–20595, 2018.
- [42] T. A. Bowen, E. Zhivun, A. Wickenbrock, V. Dumont, S. D. Bale, C. Pankow, G. Dobler, J. S. Wurtele, and D. Budker. A network of magnetometers for multi-scale urban science and informatics. *Geoscientific Instrumentation, Methods and Data Systems*, 8(1):129–138, 2019. doi: 10.5194/gi-8-129-2019. URL <https://gi.copernicus.org/articles/8/129/2019/>.
- [43] Ling Lü, Fuli Zhang, and Cunming Zou. Finite-time synchronization in the laser network based on sliding mode control technology. *Optik*, 225:165605, 2021. ISSN 0030-4026. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2020.165605>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S003040262031439X>.
- [44] Ling Lü and Lina Zhao. Finite-time synchronisation transmission of quantum signals between jaynes-cummings models based on coupling technology. *Optical and Quantum Electronics*, 55(2):145, 2023.
- [45] J. C. Chedjou, P. Wofo, and S. Domngang. Shilnikov chaos and dynamics of a self-sustained electromechanical transducer. *Journal of Vibration and Acoustics*, 123(2):170–174, 10 2000. ISSN 1048-9002. doi: 10.1115/1.1350821.
- [46] J. C. Chedjou, K. Kyamakya, I. Moussa, H.-P. Kuchenbecker, and W. Mathis. Behavior of a self-sustained electromechanical transducer and routes to chaos. *Journal of Vibration and Acoustics*, 128(3):282–293, 11 2005. ISSN 1048-9002. doi: 10.1115/1.2172255.

- [47] M Sato, H Hyodo, T Biwa, and R Delage. Synchronization of thermoacoustic quasiperiodic oscillation by periodic external force. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 30(6), 2020.
- [48] Aggelos Giakoumis, Christos Volos, Abdul Jalil M Khalaf, Atiyeh Bayani, Ioannis Stouboulos, Karthikeyan Rajagopal, and Sajad Jafari. Analysis, synchronization and microcontroller implementation of a new quasiperiodically forced chaotic oscillator with megastability. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Electrical Engineering*, 44:31–45, 2020.
- [49] AN Pisarchik, R Jaimes-Reátegui, JR Villalobos-Salazar, JH Garcia-Lopez, and S Boccaletti. Synchronization of chaotic systems with coexisting attractors. *Physical review letters*, 96(24):244102, 2006.
- [50] Michael G Rosenblum, Arkady S Pikovsky, and Jürgen Kurths. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, 78(22): 4193, 1997.
- [51] Henning U Voss. Anticipating chaotic synchronization. *Physical review E*, 61(5): 5115, 2000.
- [52] U Uriostegui Legorreta, ES Tututi, and G Arroyo-Correa. A new scheme of coupling and synchronizing low-dimensional dynamical systems. *Revista mexicana de física*, 67(2):334–342, 2021.
- [53] Ulises Uriostegui-Legorreta and Eduardo Salvador Tututi. Master-slave synchronization in the duffing-van der pol and  $\phi 6$  duffing oscillators. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 24(3):1059–1072, 2023.
- [54] C. M. Andersen and James F. Geer. Power series expansions for the frequency and period of the limit cycle of the van der pol equation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 42(3):678–693, 1982. doi: 10.1137/0142047.
- [55] D. Jordan and P. Smith. *Nonlinear Ordinary Differential Equations: An Introduction for Scientists and Engineers: An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford Texts in Applied and Engineering Mathematics. OUP Oxford, 2007. ISBN 9780199208241. URL [https://books.google.com.mx/books?id=FmIS\\_OUEAUAC](https://books.google.com.mx/books?id=FmIS_OUEAUAC).
- [56] TM Cherry. Analytic quasi-periodic curves of discontinuous type on a torus. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(1):175–215, 1938.
- [57] B.M. Levitan and V.V. Zhikov. *Almost Periodic Functions and Differential Equations*. Cambridge University Press, 1982. ISBN 9780521244077. URL <https://books.google.com.mx/books?id=1Qg9AAAAIAAJ>.

# Zharky Ali Valdes Garcia

## ANÁLISIS DE SINCRONIZACIÓN EN SISTEMAS HIPERCAÓTICOS.pdf

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

### Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:581517334

Fecha de entrega

21 abr 2026, 5:12 p.m. GMT-6

Fecha de descarga

21 abr 2026, 5:20 p.m. GMT-6

Nombre del archivo

ANÁLISIS DE SINCRONIZACIÓN EN SISTEMAS HIPERCAÓTICOS.pdf

Tamaño del archivo

10.8 MB

67 páginas

12.490 palabras

66.498 caracteres

# Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado  
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se **especifican abajo**.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están **debidamente** identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

## Datos del manuscrito que se presenta a revisión

|                                 |                                                      |                                   |
|---------------------------------|------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| <b>Programa educativo</b>       | Doctorado en Ciencias en Ingeniería Física           |                                   |
| <b>Título del trabajo</b>       | Análisis de sincronización en sistemas hipercaóticos |                                   |
|                                 | <b>Nombre</b>                                        | <b>Correo electrónico</b>         |
| <b>Autor/es</b>                 | Zharky Ali Valdes Garcia                             | zharky.valdes@umich.mx            |
| <b>Director</b>                 | Dr. Eduardo Salvador Tututi Hernández                | eduardo.tututi@umich.mx           |
| <b>Codirector</b>               |                                                      |                                   |
| <b>Coordinador del programa</b> | Dr. Eduardo Salvador Tututi Hernández                | doc.cs.ingenieria.fisica@umich.mx |

## Uso de Inteligencia Artificial

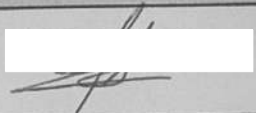
| Rubro                      | Uso (sí/no) | Descripción |
|----------------------------|-------------|-------------|
| Asistencia en la redacción | No          |             |

# Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado  
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



| Uso de Inteligencia Artificial             |             |                                                                                                 |
|--------------------------------------------|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Rubro                                      | Uso (sí/no) | Descripción                                                                                     |
| Traducción al español                      | No          |                                                                                                 |
| Traducción a otra lengua                   | No          |                                                                                                 |
| Revisión y corrección de estilo            | Sí          | Se utilizó inteligencia artificial para la revisión de ortografía y coherencia en la redacción. |
| Análisis de datos                          | No          |                                                                                                 |
| Búsqueda y organización de información     | No          |                                                                                                 |
| Formateo de las referencias bibliográficas | No          |                                                                                                 |
| Generación de contenido multimedia         | No          |                                                                                                 |
| Otro                                       |             |                                                                                                 |

| Datos del solicitante |                                                                                                               |
|-----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Nombre y firma        | Zharky Ali Valdes García  |
| Lugar y fecha         | 22 de abril de 2026 en Morelia, Michoacán                                                                     |