



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**APLICACIÓN DEL MÉTODO DEL SUBESPACIO DE
KRYLOV AL PROBLEMA DE FLUJOS DE POTENCIA DE
CONTINUACIÓN PARA EL ANÁLISIS ESTÁTICO DE
ESTABILIDAD DE VOLTAJE**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

PRESENTA:

JOSÉ ANDRÉS CASTRO MARÍN

DIRECTOR DE TESIS:

DR. NORBERTO GARCÍA BARRIGA

**MORELIA, MICHOACÁN
FEBRERO DE 2026**



**APLICACIÓN DEL MÉTODO DEL SUBESPACIO DE KRYLOV AL
PROBLEMA DE FLUJOS DE POTENCIA DE CONTINUACIÓN PARA
EL ANÁLISIS ESTÁTICO DE ESTABILIDAD DE VOLTAJE**

Los Miembros del Jurado de Examen de Grado aprueban la Tesis de Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica de José Andrés Castro Marín.

Dr. Claudio Rubén Fuerte Esquivel
Presidente del Jurado

Dr. Norberto García Barriga
Director de Tesis

Dr. Alejandro Zamora Méndez
Vocal

Dr. José Antonio Camarena Ibarrola
Vocal

M.C. Christian Pérez Negrón Pérez
Revisor Externo

Dr. J. Aurelio Medina Rios
*Jefe de la División de Estudios de Posgrado
de la Facultad de Ingeniería Eléctrica. UMSNH
(Por reconocimiento de firmas)*

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
Agosto 2025

*En primer lugar, quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mi familia,
por su amor incondicional, su apoyo constante y su confianza en mí a lo largo
de toda mi formación académica.*

*A mi director de tesis, el Dr. Norberto García Barriga, por su orientación,
paciencia y compromiso durante el desarrollo de este trabajo. Su experiencia y
consejos han sido clave en cada etapa del proceso.*

*Quiero agradecer también al SECIHTI (La Secretaría de Ciencia, Humanidades,
Tecnología e Innovación), cuyo respaldo fue esencial para llevar a cabo esta
investigación. Los recursos brindados contribuyeron de manera significativa al
desarrollo de este proyecto.*

*A mis compañeros y compañeras de generación, por el compañerismo y la
colaboración durante este camino.*

Resumen

La estabilidad de voltaje es un problema importante en la planeación, operación y control de los sistemas eléctricos de potencia. Numerosas interrupciones del suministro eléctrico en todo el mundo han sido causadas por la pérdida de la estabilidad del voltaje y, como consecuencia, se han producido pérdidas económicas en el orden de miles de millones de dólares. Los métodos tradicionales de análisis de la estabilidad estática de voltaje requieren la solución de las ecuaciones de flujos de potencia para diversas condiciones de operación que cambian gradualmente. Además, este proceso debe repetirse para cada escenario de contingencia que se desee analizar. Como consecuencia, el cálculo del límite de estabilidad de voltaje es una tarea computacionalmente demandante y no es adecuada para aplicaciones en tiempo real. En la actualidad, los métodos más rápidos para estimar los márgenes de estabilidad de voltaje se basan en simplificaciones del problema de estabilidad de voltaje o se exploran solo algunos escenarios de contingencias para cumplir con la ventana de tiempo limitada.

En esta tesis se propone una metodología basada en el método de flujos de potencia de continuación y el subespacio de Krylov para identificar los componentes críticos en un sistema de potencia para mantener la estabilidad de voltaje. Se evalúa la aplicación del subespacio de Krylov mediante el método del mínimo residuo generalizado (GMRES) en conjunto con preconditionadores y la descomposición QR para resolver el problema de mínimos cuadrados y mejorar la eficiencia del método GMRES. Los resultados indican que la metodología propuesta ofrece mejores resultados que los métodos directos en sistemas eléctricos de gran escala. Por ejemplo, el método de flujos de potencia de continuación basado en el método GMRES aplicado a un sistema de 3120 nodos demanda solo el 44.3 % del tiempo de cómputo requerido con la opción de la descomposición LU. Por lo tanto, esta propuesta contribuye a reducir el esfuerzo computacional para lograr implementar soluciones en tiempo real. Por otra parte, el estudio de la estabilidad de voltaje mediante curvas PV y análisis modal del Jacobiano permite determinar el punto de colapso de voltaje.

Palabras clave: estabilidad de voltaje, sistemas eléctricos de potencia, flujos de potencia de continuación, subespacio de Krylov, GMRES.

Abstract

Voltage stability is an important issue in the planning, operation, and control of electric power systems. Numerous power supply interruptions around the world have been caused by voltage instability, resulting in economic losses on the order of billions of dollars. Traditional methods for analyzing static voltage stability require solving the power flow equations for various gradually changing operating conditions. Furthermore, this process must be repeated for each contingency scenario to be analyzed. As a result, computing the voltage stability limit is a computationally demanding task and is not suitable for real-time applications. Currently, the fastest methods for estimating voltage stability margins rely on simplifications of the voltage stability problem or explore only a few contingency scenarios in order to meet the limited time window required for real-time applications.

This thesis proposes a methodology based on the continuation power flow method and the Krylov subspace method to identify the critical components in a power system that are essential for maintaining voltage stability. The application of the Krylov subspace method is evaluated using the Generalized Minimal Residual (GMRES) method along with preconditioners and QR decomposition to solve the least squares problem and improve the efficiency of the GMRES method. Results indicate that the proposed methodology provides better performance in large-scale power systems. For example, the continuation power flow method based on the GMRES method applied to a 3120-bus system requires only 44.3% of the computation time compared to using LU decomposition. Moreover, voltage stability analysis using PV curves and modal analysis of the jacobian allows for determining the voltage collapse point.

Keywords: voltage stability; electric power systems; continuation power flow; Krylov subspace; GMRES.

Índice general

Resumen	II
Abstract	III
Índice de figuras	IX
Índice de tablas	XIII
Lista de abreviaturas	XVII
1. Introducción	1
1.1. Descripción del problema	1
1.2. Estado del arte	5
1.3. Objetivos de la tesis	9
1.4. Hipótesis	9
1.5. Metodología	10
1.6. Justificación	11
1.7. Contribuciones	12
1.8. Descripción por capítulos	13

ÍNDICE GENERAL

2. Estabilidad en sistemas eléctricos de potencia	15
2.1. Estabilidad de voltaje	17
2.2. Impactos negativos	19
2.3. Métodos de análisis de estabilidad de voltaje	20
2.3.1. Ecuación cuadrática de voltaje	23
2.3.2. Flujos de potencia	26
2.3.2.1. Matriz de admitancia nodal	27
2.3.2.2. Ecuaciones de flujos de potencia	28
2.3.3. Flujos de potencia de continuación	33
2.4. Modelado de componentes del sistema eléctrico	40
2.5. Análisis modal	40
2.6. Sumario	41
3. Subespacio de Krylov	43
3.1. Métodos de solución de sistemas lineales	43
3.2. Subespacio de Krylov	44
3.3. Método del residuo mínimo generalizado (GMRES)	47
3.4. Algoritmo de Arnoldi	48
3.5. Descomposición QR	51
3.6. Precondicionadores	54
3.6.1. Precondicionamiento izquierdo	55
3.6.2. GMRES precondicionado	55
3.6.3. Factorización LU incompleta	56
3.7. Subespacio de Krylov aplicado a flujos de potencia de continuación	60
3.7.1. Residuo inicial precondicionado	61

3.7.2.	Producto matriz-vector preconditionado	62
3.7.3.	Algoritmo de flujos de potencia de continuación basado en GMRES.	64
3.8.	Sumario	68
4.	Casos de estudio	69
4.1.	Diseño del experimento	70
4.2.	Sistema de prueba IEEE 14 Nodos	71
4.2.1.	Flujos de potencia de continuación	73
4.2.2.	Análisis de estabilidad	77
4.3.	Sistema IEEE 118 Nodos	81
4.3.1.	Flujos de potencia de continuación	83
4.3.2.	Análisis de estabilidad	84
4.4.	Sistema de 3120 Nodos	90
4.4.1.	Flujos de potencia de continuación	91
4.4.2.	Análisis de estabilidad	93
4.5.	Conclusiones	96
5.	Conclusiones	99
5.1.	Conclusiones	99
5.2.	Trabajos futuros	101
A.	Datos de los sistemas de prueba	103
A.1.	Sistema IEEE 14 nodos	103
A.2.	Sistema IEEE 118 nodos	106
A.3.	Sistema de 3120 nodos	115

ÍNDICE GENERAL

B. Ejemplo numérico de dos nodos.	117
Bibliografía	129

Índice de figuras

1.1. Curvas PV generadas con: a) Flujos de potencia y b) Flujos de potencia de continuación.	4
2.1. Demanda de carga en el Sistema Eléctrico Nacional en distintas fechas.	16
2.2. Clasificación de estabilidad en sistemas eléctricos de potencia [Hatzigiorgiou et al., 2021].	17
2.3. Métodos de análisis de estabilidad de voltaje en sistemas eléctricos	22
2.4. Sistema de 2 nodos.	22
2.5. Curva PV para el sistema de dos nodos con diferentes factores de potencia.	25
2.6. Nodo típico de un sistema de potencia.	29
2.7. Representación gráfica del método de flujos de potencia de continuación.	35
2.8. Diagrama de flujo del método de flujos de potencia de continuación.	39
3.1. Representación vectorial del subespacio de Krylov	46
3.2. Estructura de dispersidad para: a) matriz original, b) descomposición LU y c) descomposición iLU(0).	59

ÍNDICE DE FIGURAS

3.3. Flujos de potencia de continuación usando GMRES.	65
3.4. Flujos de potencia de continuación usando GMRES y factorización QR.	66
4.1. Etapas del experimento para todos los casos.	70
4.2. Sistema de prueba IEEE 14 nodos.	73
4.3. Patrón de dispersidad para: a) Jacobiano método LU, b) Ma- triz Hessenberg método GMRES y c) Matriz Hessenberg método GMRES-PRE.	76
4.4. Curva PV completa en el nodo 5 del sistema IEEE 14 nodos. . . .	78
4.5. Análisis modal del sistema IEEE 14 nodos.	79
4.6. Análisis modal para: a) Parte superior de la curva, b) Punto de inflexión de la curva y c) Parte inferior de la curva.	80
4.7. Valores característicos vs Lambda: a) 22 valores característicos y b) acercamiento al valor característico más crítico.	81
4.8. Curva PV completa en el nodo 38 del sistema IEEE 118 nodos. . .	85
4.9. Análisis modal del sistema IEEE 118 nodos.	85
4.10. Análisis modal para: a) Parte superior de la curva, b) Punto de inflexión de la curva y c) Parte inferior de la curva.	87
4.11. Parte real de los valores característicos vs lambda: a) 181 valores característicos y b) valor característico más crítico.	88
4.12. Gráfica del error mínimo del sistema IEEE 118.	88
4.13. Zona de la curva con problemas de convergencia.	89
4.14. Curva PV en el nodo 217 del sistema de 3120 nodos	94
4.15. Análisis modal del sistema de 3120 nodos.	95

4.16. Parte real de los valores característicos vs lambda: a) 5889 valores característicos y b) valor característico más crítico.	96
B.1. Primera etapa de predicción del sistema de 2 nodos.	120
B.2. Primera etapa de corrección del sistema de 2 nodos.	125
B.3. Primera mitad de la curva para sistema de 2 nodos.	126
B.4. Curva PV completa para el sistema de 2 nodos.	127

Índice de tablas

1.1. Interrupciones del suministro eléctrico en el mundo	3
4.1. Datos del sistema IEEE 14 para flujos de potencia de continuación.	72
4.2. Convergencia del método de Newton en el problema de flujos de potencia para el sistema IEEE 14 nodos	74
4.3. Tiempos de cómputo para determinar la solución de flujos de potencia para el sistema IEEE 14 nodos.	74
4.4. Tiempos de cómputo para determinar la solución de flujos de potencia de continuación para el sistema IEEE 14 nodos	75
4.5. Datos del sistema IEEE 118 para flujos de potencia de continuación.	82
4.6. Convergencia del método de flujos de potencia para el sistema IEEE 118 nodos.	82
4.7. Tiempos de cómputo para el método de flujos de potencia para el sistema IEEE 118 nodos.	83
4.8. Tiempos de cómputo para el método de flujos de potencia de continuación para el sistema IEEE 118 nodos	84
4.9. Datos del sistema de 3120 nodos para flujos de potencia de continuación.	90

ÍNDICE DE TABLAS

4.10. Convergencia del método de Newton en el problema de flujos de potencia para el sistema de 3120 nodos.	91
4.11. Tiempos para flujos de potencia para el sistema de 3120 nodos . .	92
4.12. Tiempos para flujos de potencia de continuación para el sistema de 3120 nodos.	93
A.1. Datos de nodos del sistema	103
A.2. Datos de generadores del sistema analizado	104
A.3. Datos de líneas de transmisión del sistema analizado	104
A.4. Datos de transformadores del sistema analizado	104
A.5. Datos de nodos del sistema	106
A.6. Datos de generadores del sistema	108
A.7. Datos de líneas de transmisión del sistema	110
A.8. Datos de transformadores del sistema	114
B.1. Parámetros del sistema	118
B.2. Punto inicial de operación	118

Abreviaturas

s	Segundos.
PV	Potencia-Voltaje
GMRES	Residuo Mínimo Generalizado (por sus siglas en inglés: Generalized Minimal Residual).
QR	Descomposición QR
MATLAB	MATrix LABoratory
GW	GigaWatt
AVR	Automatic Voltage Regulator (Regulador Automático de Voltaje)
ULTC	Under Load Tap Change
EMS	Sistema de Gestión de Energía
SCADA	Control de Supervisión y Adquisición de Datos
PMU	Unidad de Medición Fasorial
$\mathbb{R}$	Conjunto de números reales
P	Potencia real
Q	Potencia reactiva

V	Magnitud de voltaje
δ	Ángulo de fase de voltaje
FP	Factor de potencia
J	Jacobiano
J_{red}	Jacobiano reducido
P_0	Potencia activa caso base
λ	Factor de carga
K_L	Factor de incremento de carga
$\mathbf{t}$	Vector tangencial
e_k	Vector renglón
σ	Tamaño de paso
x_k	Parámetro de continuación
$\mathbf{J}_c$	Jacobiano aumentado
$\Delta \mathbf{x}$	Vector de corrección de la iteración Newton
$\Delta \mathbf{y}$	Deltas de potencia reactiva y real.
$\tilde{\mathbf{x}}$	Solución aproximada de $\mathbf{x}$
$\mathbf{x}_0$	Valor inicial de solución
K_k	Subespacio de dimensión k
$\mathbf{r}_0$	Residuo inicial.
$\mathbf{V}_k$	Matriz de columnas ortonormales
$\mathbf{y}_k$	Vector que minimiza residuo
$\bar{\mathbf{H}}_k$	Matriz triangular superior Hessenberg
ρ	Residuo de mínimos cuadrados.
GMRES-PRE	Método GMRES preconditionado

GMRES-QR	Método GMRES con descomposición QR
GMRES-PRE-QR	Método GMRES con preconditionamiento y descomposición QR
IN	Iteraciones Newton
IK	Iteraciones Krylov
LU	Método solución de sistemas de ecuaciones LU

Capítulo 1

Introducción

1.1. Descripción del problema

La interrupción del suministro eléctrico en los sistemas eléctricos de potencia ocasiona la ausencia del servicio eléctrico en un área particular durante un periodo de tiempo específico. Como consecuencia de la interrupción del suministro eléctrico, se desencadenan un conjunto de problemas en la infraestructura crítica de las sociedades modernas, tales como la red de internet, control de tráfico automotriz y ferroviario, transporte aéreo, red de telefonía, transacciones bancarias, servicios médicos y manufactura industrial.

La aparición de interrupciones en el suministro eléctrico tiene su origen en causas naturales o técnicas. Los desastres naturales incluyen tormentas, terremotos, inundaciones, movimientos de tierra, accidentes vehiculares o caída de árboles sobre líneas de transmisión. Por su parte, las causas técnicas incluyen falla en líneas, aspectos de estabilidad, errores humanos, falla en equipos y sobrecarga de líneas de transmisión. Además, la falta de inversión para la expansión del sistema de transmisión ante escenarios de incremento de la demanda trae como consecuencia la necesidad de implementar la reducción estratégica de la carga con el

1. INTRODUCCIÓN

propósito de eludir el colapso del sistema [Kundur et al., 1994].

La pérdida en la estabilidad del voltaje es una de las causas que provocan la aparición de la interrupción del suministro eléctrico. Según el IEEE/CIGRE [Kundur et al., 2004], la estabilidad de voltaje se refiere a la habilidad del sistema de potencia para mantener los voltajes constantes en todos los nodos del sistema después de la ocurrencia de una perturbación para una condición de operación dada. Una de las principales causas que conducen a la pérdida de la estabilidad de voltaje es la sobrecarga de los sistemas de transmisión [Makarov et al., 2005]. Como consecuencia, este escenario obliga a recortar la carga en un sistema eléctrico de potencia que ya se encuentra estresado. Sin embargo, la interrupción del suministro eléctrico no se puede evitar si la reducción de la carga se realiza de forma no adecuada. Por el contrario, el recorte excesivo de la carga puede traer como consecuencia el problema de incrementar la frecuencia y la inevitable interrupción del suministro eléctrico. La Tabla 1.1 sintetiza las principales interrupciones del suministro eléctrico reportadas en el mundo en las últimas décadas [Haes Alhelou et al., 2019] [Larik et al., 2019a]. Esta tabla indica claramente la necesidad de desarrollar sistemas de detección y prevención del colapso del voltaje, así como también la pérdida de estabilidad de frecuencia, angular y transitoria.

Uno de los índices utilizados para determinar el punto de colapso de voltaje es el margen de carga, el cual se mide basándose en el límite de carga en una curva potencia-voltaje (Curva PV). El límite de carga indica el punto de carga máxima que puede soportar un nodo de la red antes de colapsar. Una de las maneras para determinar este límite de carga es a través del método de flujos de potencia, aumentando gradualmente la carga de potencia activa y reactiva, pero manteniendo el factor de potencia constante, hasta llegar al punto en donde

Tabla 1.1: Interrupciones del suministro eléctrico en el mundo

País/Región	Fecha	Duración (Hr)	Personas afectadas (Millones)	Causas
Egipto	1990	4	0.5	Tormenta eléctrica
Brasil	1999	5	97	Salida de línea de transmisión
India	2001	12	230	Salida de línea de transmisión
Canadá/EE.UU.	2003	96	55	Error humano
Italia	2003	3	0.3	Salida de línea de transmisión
Indonesia	2005	6	100	Salida de línea de transmisión
Brasil/Paraguay	2006	7	70	Daño en transformador
Europa	2006	2	15	Sobrecarga
Brasil	04-feb-11	16	53	Falla de línea de transmisión
México/EE.UU.	08-sep-11	12	2.7	Salida de línea de transmisión
India	30-jul-12	15	620	Línea de transmisión sobrecargada
Vietnam	22-may-13	10	10	Error humano
Filipinas	06-ago-13	10	10	Colapso de voltaje
Tailandia	2013	10	8	Tormenta eléctrica
Bangladesh	01-nov-13	8	150	Apagón estación HVDC
Pakistán	26-ene-15	2	140	Falla en plan técnico
Países Bajos	27-mar-15	5	3	Mal clima
Turquía	31-mar-15	6	40	Falla sistema de potencia
Ucrania	21-nov-15	6	70	Falla sistema de potencia
Ucrania	23-dic-15	5	1.4	Ciberataque
Kenia	07-jun-16	6	1.5	Daño en transformador
Australia	18-sep-16	6.1	1.7	Tormenta eléctrica
Sri Lanka	2016	2	2.5	Tormenta eléctrica
Uruguay	26-ago-17	17	3	Salida de líneas de transmisión en cascada
Nueva York	2017	6	2	Mal clima
EE.UU.	2018	6	1	Falla en cascada
Sudán	10-ene-18	24	1.5	Altas temperaturas
Brasil	01-mar-18	5	3	Velocidad del viento alta (100km/hr)
Azerbaiyán	03-jul-18	8	1	Falla de línea de transmisión
Canadá	20-dic-18	4	0.4	Colapso de voltaje
México	2020	1.5	10.3	Salida de línea de transmisión
Texas	2021	14	10	Mal clima
Pakistán	2023	12	230	Fluctuaciones de voltaje
España	28-abr-25	10	50	En proceso de investigación

el método de Newton ya no converge. Sin embargo, este método no permite determinar la curva PV completa debido al problema de convergencia al llegar al punto de silla. El método de flujos de potencia de continuación realiza un proceso predictivo-correctivo para encontrar los puntos de operación, aumentando la matriz Jacobiana del método Newton y evitando el punto de singularidad,

1. INTRODUCCIÓN

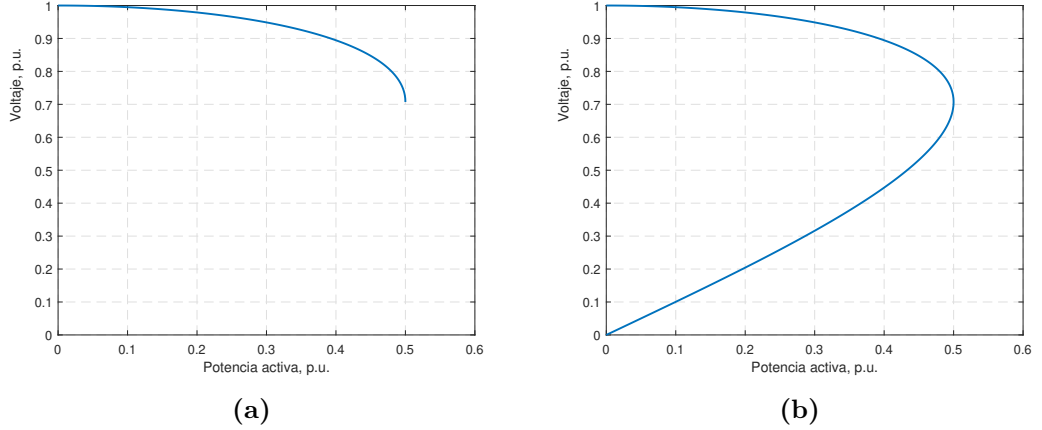


Figura 1.1: Curvas PV generadas con: a) Flujos de potencia y b) Flujos de potencia de continuación.

calculando un punto de la curva posterior, por lo que, este método resulta útil para generar curvas PV completas.

La Figura 1.1 compara las curvas PV obtenidas con el método de flujos de potencia y el método de flujos de potencia de continuación. Se puede apreciar en la Figura 1.1(a) la curva PV obtenida mediante el método de flujos de potencia convencional, la cual contiene el último punto denominado el límite de carga, pero a partir de este punto el método ya no converge. Por su parte, el método de flujos de potencia de continuación produce el resultado reportado en la Figura 1.1(b), en donde se obtiene la curva PV completa y se evitan los problemas de convergencia en el método de Newton.

El análisis de estabilidad de voltaje basado en el método de flujos de potencia de continuación aplicado a sistemas eléctricos de gran escala con miles de nodos puede representar un esfuerzo de cómputo formidable. Una de las tareas más demandantes al resolver problemas de gran escala es la necesidad de resolver sistemas de ecuaciones del tipo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. La revisión de la literatura indica una

cantidad importante de contribuciones que se centran en la solución eficiente del problema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mediante métodos directos, iterativos o heurísticos. En este sentido, en este trabajo se propone aplicar métodos iterativos de solución específicos para sistemas $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ basados en el método del subespacio de Krylov. Este enfoque permite reducir el esfuerzo computacional, haciendo posible el análisis de estabilidad de voltaje de forma eficiente en sistemas eléctricos de potencia de grandes dimensiones.

1.2. Estado del arte

La revisión del estado del arte asociado al estudio de la estabilidad de voltaje indica una gran cantidad de contribuciones con diversos enfoques de análisis. A continuación se presentan los trabajos de investigación más relevantes que están vinculados con este trabajo.

En 1992 se presenta por primera vez el método de flujos de potencia de continuación basado en un método predictivo-correctivo, en donde la etapa de predicción consiste en una aproximación tangencial, la cual se toma como condición inicial para la etapa de corrección [Ajjarapu and Christy, 1992]. Por su parte, la literatura reporta un método de continuación con una etapa de predicción no lineal basada en mínimos cuadrados para ajustar parábolas [Gan et al., 2015], cuyos resultados muestran mejoras respecto al enfoque tradicional de predicción tangente.

Un método de continuación con una etapa de predicción no lineal basada en una interpolación lagrangiana de segundo orden se reporta en la literatura [Mori and Seki, 2007]. En donde se utiliza el método GMRES para resolver sistemas

1. INTRODUCCIÓN

tipo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Un año después se propone un método de continuación basado en el método GMRES y una etapa de preconditionamiento para tratar matrices dispersas [Jasni et al., 2008]. Este preconditionamiento se aplica a la matriz Jacobiana aumentada y se proponen 4 métodos diferentes de preconditionamiento, seleccionando como mejor opción de preconditionamiento una matriz diagonal del Jacobiano, la cual se aplica internamente en el método GMRES.

En la literatura se presenta una revisión de la aplicación de métodos de bifurcación estática y dinámica en los estudios de estabilidad de voltaje [Ma et al., 2018]. Las bifurcaciones tipo SNB y LIB (Saddle node y limit inducted) son analizadas, mientras que para el análisis dinámico se analizan las bifurcaciones tipo HB y SIB (Hopf y Singular Induced). Se ha propuesto un análisis de las bifurcaciones de Hopf degeneradas [Mendoza-Armenta et al., 2013]. Una bifurcación de Hopf degenerada ocurre cuando dos puntos de una bifurcación Hopf colisionan debido a la variación de dos parámetros del sistema y se crea una región inestable dentro de una región que antes se consideraba estable.

Existen diversas contribuciones que proponen el uso de algoritmos heurísticos para generar diagramas de bifurcación. Se ha presentado un método para graficar diagramas de bifurcación completos basados en un algoritmo de optimización por enjambre de partículas [Barrera et al., 2008], haciendo posible la generación de diagramas de bifurcación variando dos parámetros al mismo tiempo. También, se ha propuesto en la literatura un método para realizar diagramas de bifurcación multiparamétricos sin necesidad de utilizar técnicas de continuación [Flores et al., 2011].

Se ha propuesto un índice para la predicción del colapso de voltaje [Balamourougan et al., 2004]. En comparación con los métodos tradicionales, en donde se

puede variar y analizar solo un nodo a la vez, con esta técnica es posible analizar un nodo particular e incluir el efecto de esta variación en otros nodos. Esta propuesta no requiere el cálculo de matrices inversas, solo se requiere de información fasorial de voltaje y ángulo junto con la matriz de admitancia de la red en la forma de índices de predicción. Un método rápido para calcular el mínimo valor singular y sus correspondientes vectores singulares izquierdo-derechos se ha propuesto en la literatura [Lof et al., 1992]. La ventaja de este método radica en un bajo esfuerzo de cómputo y solo requiere de información disponible del programa de flujos de potencia. También, se ha presentado un índice de estabilidad basado en información adquirida por unidades de medición fasorial (PMU), el cual se puede calcular de manera rápida y algebraica [Pu et al., 2014]. Este método se deriva de uno más preciso que considera la capacitancia de las ramas. La literatura reporta un enfoque para el análisis de la estabilidad de voltaje basado en datos de medición fasorial [Parniani et al., 2006], en el que se estiman modelos equivalentes simples del sistema interconectado y de las cargas, los cuales permiten determinar las curvas PV y predecir el límite de estabilidad.

Se ha presentado un método para el análisis de estabilidad de voltaje considerando los efectos armónicos [Gao et al., 2019]. En este trabajo, se propone una metodología que primeramente desacopla el sistema para resolver la corriente armónica, enseguida efectúa un análisis basado en nodos débiles para evaluar la estabilidad de voltaje y después se hace uso de un muestreo de hipercubo latino (Latin-Hypercube Sampling), el cual es un método estadístico en el que se generan muestras representativas de varias variables y se combinan para crear una matriz muestral, se utiliza para el muestreo de corrientes armónicas inciertas. Finalmente, se validan los métodos propuestos con el sistema de prueba de

1. INTRODUCCIÓN

33 nodos del IEEE, considerando escenarios con una y varias fuentes armónicas. Se ha analizado el impacto de la integración de la energía eólica a la red, desde el punto de vista estático y transitorio de la estabilidad de voltaje, usando diferentes índices [Wang et al., 2019]. En este trabajo se concluye que cuando la integración de la energía eólica a la red eléctrica supera cierto índice, la estabilidad de voltaje del sistema decrece. También se ha presentado en la literatura un método simplificado para el análisis de estabilidad estática de voltaje, el cual consiste en utilizar un equivalente de Thévenin usando datos de mediciones, y asume que el voltaje y reactancia de Thévenin se mantienen constantes durante algunos periodos de tiempo [Burchett et al., 2018]. Es un método confiable, ya que no resuelve un conjunto de ecuaciones no lineales que involucra datos con ruido en las mediciones.

Se ha propuesto un método para determinar el máximo margen de carga, el cual consiste en encontrar las direcciones de generación para maximizar el margen de estabilidad de voltaje [Sode-Yome et al., 2006]. En la literatura también se ha presentado un método de flujos de potencia que elimina directamente el problema de singularidad de la matriz Jacobiana que surge en los cálculos de las curvas PV, lo cual se logra mediante la introducción de un nuevo tipo de bus llamado AQ-bus [Ghiocel and Chow, 2014].

En este trabajo de tesis se implementa el método de flujos de potencia de continuación basado en el subespacio de Krylov con el propósito de llevar a cabo el estudio de estabilidad de voltaje en sistemas eléctricos. En particular, se aplica el método del mínimo residuo generalizado (GMRES), el cual tiene como objetivo resolver de forma eficiente los sistemas de ecuaciones del tipo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ que aparecen en el problema de flujos de potencia convencional y de continuación.

Se evalúa la aplicación conjunta de matrices de preconditionamiento y descomposición QR para mejorar el desempeño del método GMRES en el problema de flujos de potencia de continuación en sistemas eléctricos de gran escala. Además, se analiza la estabilidad de voltaje mediante curvas PV y análisis modal.

1.3. Objetivos de la tesis

El objetivo general de esta tesis es estudiar la estabilidad estática de voltaje en los sistemas eléctricos de potencia mediante el desarrollo de una metodología basada en flujos de potencia de continuación y métodos iterativos del tipo subespacio de Krylov que permitan resolver sistemas eléctricos de gran escala.

Los objetivos particulares de esta tesis son:

- Aplicar el método del subespacio de Krylov basado en el algoritmo GMRES con descomposición QR a la solución del problema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ que aparece en el método de flujos de potencia de continuación con el propósito de eficientar el cálculo de la solución de sistemas de gran escala.
- Aplicar técnicas de preconditionamiento al método GMRES con el propósito de mejorar la convergencia del proceso iterativo Krylov.
- Estudiar la estabilidad de voltaje mediante curvas PV y análisis modal del Jacobiano.

1.4. Hipótesis

La aplicación de métodos iterativos basados en el subespacio de Krylov al método de flujos de potencia de continuación permite la predicción oportuna y

eficiente del fenómeno de colapso del voltaje en redes eléctricas de potencia de gran escala.

1.5. Metodología

La obtención de curvas potencia-voltaje (curvas PV) se llevará a cabo utilizando el método de flujos de potencia de continuación en conjunto con el método del Mínimo Residuo Generalizado (GMRES), es decir, la idea consiste en aplicar un método iterativo para la solución de sistemas de ecuaciones lineales que aparecen dentro del proceso del método de flujos de potencia de continuación. El enfoque de flujos de potencia de continuación permite obtener curvas PV incluso más allá del punto de singularidad, el cual corresponde al punto en el cual el problema de flujos de potencia no tiene solución y el voltaje colapsa. El método de flujos de potencia de continuación se basa en el método de flujos de potencia tradicional, pero incorpora una proyección tangencial que determina el siguiente punto de operación al variar la potencia de la carga. Esta proyección tangencial se utiliza como condición inicial en una etapa denominada etapa de corrección, en donde el sistema aumentado resultante se resuelve aplicando el método GMRES. El GMRES, a su vez, incluye varios procesos matemáticos fundamentales, entre los cuales destacan:

- El algoritmo de Arnoldi.- construye la base ortonormal del subespacio de Krylov usando la descomposición Gram-Schmidt modificada. Este algoritmo genera vectores ortogonales a partir de los vectores de la matriz original.
- La factorización QR.- Se realiza mediante rotaciones de Givens y se aplica a la matriz de Hessenberg. Permite la resolución de forma eficiente del

problema de mínimos cuadrados del GMRES.

El método de flujos de potencia de continuación se aplicará a sistemas de prueba estandarizados, como los sistemas IEEE 14 nodos y 118 nodos, así como a un sistema de 3120 nodos obtenido a partir del paquete de análisis de potencia MATPOWER en MATLAB. Adicionalmente, se llevará a cabo un análisis de estabilidad evaluando los valores propios de la matriz Jacobiana obtenida por medio de análisis modal. Este enfoque permite estudiar la evolución de la estabilidad de voltaje del sistema frente a variaciones en la carga y su cercanía al colapso de voltaje.

1.6. Justificación

El estudio de la estabilidad de voltaje es crucial para la operación segura y eficiente de los sistemas eléctricos de potencia. Los eventos de colapso de voltaje no son incidentes aislados, sino que pueden tener consecuencias significativas y presentarse en diversos sistemas eléctricos alrededor del mundo. Por ejemplo, en 2018, el sistema eléctrico de potencia del sureste de Sumatra, Indonesia, sufrió el colapso de voltaje y salida de operación debido a un proceso de falla que agotó sus reservas de potencia reactiva, resultado de una serie de fallos en cascada [Agustriadi et al., 2019]. Este incidente subrayó la importancia de contar con suficientes reservas de potencia reactiva y sistemas de protección adecuados. De manera similar, una revisión de los apagones ocurridos en los últimos años destaca un evento de colapso de voltaje en Vietnam en 2013 [Wu et al., 2017]. Estos incidentes ponen de relieve la vulnerabilidad de los sistemas eléctricos a fallas de voltaje, y la necesidad de implementar medidas preventivas para evitar colapsos.

1. INTRODUCCIÓN

Más recientemente, en 2021, el sistema eléctrico de potencia en Texas, Estados Unidos, experimentó un evento climático que estuvo a punto de colapsar el suministro eléctrico, lo cual tuvo un impacto económico significativo en la región, con pérdidas estimadas en 130 mil millones de dólares [Busby et al., 2021]. Este evento no solo demuestra el impacto económico de los colapsos de voltaje, sino también la importancia de efectuar estudios detallados y soluciones robustas para mejorar la estabilidad del sistema.

Estos ejemplos ilustran la necesidad de realizar estudios de estabilidad de voltaje para prevenir colapsos y sus consecuencias asociadas. Por lo tanto, esta tesis se enfoca en desarrollar una técnica para mejorar el análisis de la estabilidad de voltaje en sistemas eléctricos de potencia, contribuyendo a la seguridad y confiabilidad de la red eléctrica.

1.7. Contribuciones

La contribución de este trabajo se centra en:

1. El desarrollo de un método de análisis estático de la estabilidad de voltaje basado en el método de flujos de potencia de continuación y el subespacio de Krylov para sistemas de gran escala. El análisis de estabilidad se realiza mediante la elaboración de curvas PV y análisis modal de la matriz Jacobiana, aplicando el método del subespacio de Krylov a través del algoritmo GMRES con descomposición QR. De esta forma es posible ubicar el punto de máxima cargabilidad del sistema.

1.8. Descripción por capítulos

La tesis se encuentra dividida en los siguientes capítulos:

- En el Capítulo 1 se presenta la introducción a la tesis, en la cual se trata la descripción del problema, los objetivos y se realiza una revisión de antecedentes en el tema de estudio.
- En el Capítulo 2 se describe de manera detallada la estabilidad estática de voltaje en los sistemas eléctricos de potencia, así como la revisión de métodos existentes para realizar este tipo de análisis.
- En el Capítulo 3 se presentan los fundamentos matemáticos del subespacio de Krylov, haciendo especial énfasis en el método del mínimo residuo generalizado (GMRES).
- En el Capítulo 4 se presentan los casos de estudio y la aplicación del método GMRES.
- Por último, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones del trabajo, así como posibles trabajos futuros de investigación en el tema.

Capítulo 2

Estabilidad en sistemas eléctricos de potencia

Un sistema eléctrico de potencia es un sistema dinámico en el cual sus variables y parámetros varían con el tiempo. Como cualquier sistema dinámico, se puede analizar su estabilidad mediante diversos métodos ante las variaciones o disturbios de sus variables. Estas variaciones o disturbios pequeños en la red se deben principalmente a cambios controlados que realizan los operadores del sistema eléctrico para realizar mantenimiento de la red de transmisión y los generadores.

Una de las variables que cambia constantemente es la potencia demandada, la cual varía según sea la hora o el día. En la Figura 2.1 se presenta la demanda de carga en el Sistema Eléctrico Nacional correspondiente al mes de enero de 2025 [CENACE, 2025]. Se observa que, a medida que amanece y comienza la jornada laboral, se tiene un aumento en la demanda de potencia que crece hasta casi 42 GW a las 8 de la noche del día 8 de Enero. En cambio, para el día 1 de Enero, el cual es un día feriado, se puede ver cómo la demanda de potencia no varía como lo hace en un día laboral, ya que la potencia consumida asciende a casi 32 GW alrededor de las 8 de la noche, lo cual tiene sentido y es bastante

2. ESTABILIDAD EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

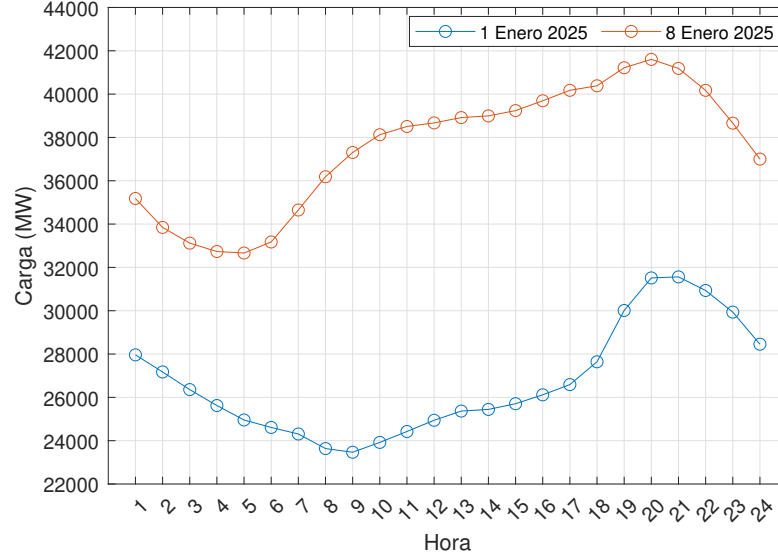


Figura 2.1: Demanda de carga en el Sistema Eléctrico Nacional en distintas fechas.

lógico. Según datos del SECIHTI [Planeas / Conacyt, 2025], más del 50 % del consumo de energía en México es debido a la mediana y gran industria, al ser el día primero de Enero un día feriado, donde la industria no se encuentra al 100 % de su operación, es de esperarse que el consumo eléctrico este día sea menor que en un día laborable habitual. Esta figura muestra que el perfil de carga varía en el tiempo según los requerimientos de las cargas acopladas al sistema eléctrico.

La Figura 2.2 presenta la clasificación de la estabilidad en los sistemas eléctricos de potencia [Hatziargyriou et al., 2021], la cual se divide en distintas categorías:

- Estabilidad de resonancia, la cual puede ser de tipo eléctrica o torsional.
- Estabilidad controlador-convertidor, la cual se clasifica en interacción rápida o lenta.
- Estabilidad angular, se clasifica en transitoria o pequeños disturbios.

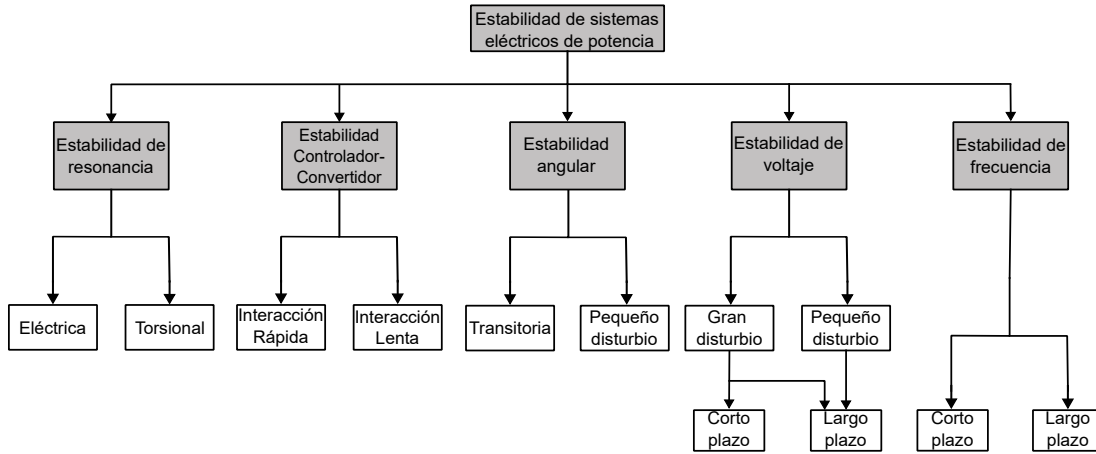


Figura 2.2: Clasificación de estabilidad en sistemas eléctricos de potencia [Hatziargyriou et al., 2021].

- Estabilidad de voltaje, que se clasifica en gran o pequeño disturbio, considerando su evolución a corto o largo plazo.
- Estabilidad de frecuencia, la cual puede analizarse en corto o largo plazo.

A diferencia de la clasificación de la estabilidad presentada en [Kundur et al., 2004], se añaden dos clasificaciones adicionales, que son la estabilidad de resonancia y la estabilidad controlador-convertidor.

2.1. Estabilidad de voltaje

La estabilidad de voltaje se define como:

“La estabilidad de voltaje se refiere a la capacidad de un sistema de potencia para mantener voltajes estables cercanos al valor nominal en todos los nodos del sistema después de ser sometido a una perturbación” [Hatziargyriou et al., 2021].

2. ESTABILIDAD EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

En la Figura 2.2 se observa que la estabilidad de voltaje se divide en dos categorías: gran disturbio y pequeño disturbio. La estabilidad de voltaje de gran disturbio, como su nombre lo indica, se refiere a la capacidad del sistema para mantener y controlar los niveles de voltaje después de una perturbación considerable, tales como fallas en la red, pérdida de carga o de generación, entre otras. El análisis de este tipo de estabilidad requiere un estudio dinámico del sistema durante un periodo de tiempo suficiente para observar la interacción entre sus diferentes componentes. Generalmente, se evalúa mediante simulaciones de modelos no lineales del sistema eléctrico de potencia [Kundur et al., 1994]. La estabilidad de voltaje de pequeño disturbio es la habilidad del sistema eléctrico de controlar los voltajes después de una pequeña perturbación, como lo son cambios pequeños en la carga. Este tipo de estabilidad de voltaje se puede estudiar adecuadamente mediante un análisis de estado estacionario, utilizando un modelo linealizado del sistema de las ecuaciones dinámicas en un punto de operación de interés [Kundur et al., 1994].

A su vez, la estabilidad de gran disturbio se divide en corto plazo y largo plazo, mientras que la estabilidad de pequeño disturbio se clasifica en largo plazo. En el estudio de estabilidad de voltaje de corto plazo se involucran elementos de acción rápida como lo son motores de inducción, cargas controladas electrónicamente, enlaces de corriente directa de alto voltaje y generadores basados en inversores. El periodo de interés del estudio es de varios segundos [Hatziargyriou et al., 2021]. El estudio de estabilidad de voltaje de largo plazo involucra elementos de acción lenta como lo son los cambiadores de tap de los transformadores, cargas controladas termostáticamente y limitadores de corriente del generador. Generalmente, se presenta en forma de una reducción de manera progresiva en los voltajes de

algunos nodos de la red. El periodo de estudio es de varios minutos y se requieren simulaciones de largo plazo para el análisis dinámico del sistema [Hatziaargyriou et al., 2021].

2.2. Impactos negativos

La carga representa comúnmente un elemento determinante en la pérdida de la estabilidad del voltaje. La sobrecarga o la desconexión involuntaria de una línea de transmisión o un generador pueden provocar condiciones críticas en el sistema, lo cual puede llevar a incrementar la demanda de la potencia reactiva y, eventualmente, la interrupción del suministro eléctrico [Larik et al., 2019b].

El colapso de voltaje es una condición severa asociada a este fenómeno, lo cual puede afectar diversos componentes del sistema eléctrico de potencia. Se define como el proceso en el que una serie de eventos asociados a la pérdida en la estabilidad del voltaje conducen a un perfil de voltaje inaceptable en una parte significativa del sistema eléctrico de potencia [Kundur et al., 1994]. Este fenómeno puede manifestarse como un evento repentino y severo, con el potencial de desencadenar una reacción en cadena que provoque la desconexión de una gran parte del sistema. A continuación, se describe un escenario típico de colapso de voltaje [Kundur et al., 1994]:

1. El sistema opera en condiciones anormales con grandes generadores fuera de servicio, lo que sobrecarga las líneas de transmisión y reduce las reservas de potencia reactiva.
2. La pérdida de una línea de alta tensión altamente cargada, provoca la sobrecarga de las líneas adyacentes, aumentando la demanda de potencia

reactiva y reduciendo el voltaje.

3. Los AVR's intentan restablecer el voltaje, pero el flujo de potencia reactiva adicional provoca caídas de tensión en más generadores, transformadores y líneas de transmisión.
4. Los ULTCs (Under Load Tap Changer) restauran el voltaje de distribución, pero esto incrementa la carga en líneas de alta tensión, aumentando pérdidas y sobrecargando generadores.
5. Con los generadores alcanzando sus límites de potencia reactiva, la estabilidad del sistema se compromete, lo que puede llevar a un colapso de voltaje y la interrupción del suministro eléctrico.

2.3. Métodos de análisis de estabilidad de voltaje

La vulnerabilidad del sistema eléctrico de potencia se puede identificar mediante métodos para determinar la estabilidad del voltaje. La Figura 2.3 muestra una clasificación general de los métodos de análisis de la estabilidad del voltaje. Dicho análisis se clasifica en dos enfoques principales: el análisis estático y el análisis dinámico [Kundur et al., 1994]. El análisis estático puede realizarse mediante ecuaciones diferenciales ordinarias linealizadas (EDO linealizadas), de esta manera es posible aplicar técnicas como el análisis modal y el análisis de bifurcaciones, o bien, mediante el análisis de flujos de potencia, donde se incluyen la solución al estado estable, flujos de potencia de continuación, el análisis de sensibilidad VQ y el análisis modal del Jacobiano. Por otra parte, el análisis

dinámico permite evaluar la evolución en el tiempo de las distintas variables del sistema como respuesta a ciertas perturbaciones específicas mediante ecuaciones diferenciales-algebraicas, lo que permite aplicar métodos para conocer la evolución de las variables de interés en el tiempo, tomando en cuenta los diferentes componentes de la red y sus dispositivos de control.

En esta tesis se propone un análisis estático de estabilidad de voltaje, el cual se fundamenta en el uso de flujos de potencia de continuación combinado con un método iterativo de solución de sistemas lineales basado en el subespacio de Krylov, el cual será descrito en el siguiente capítulo. Además de un análisis modal del Jacobiano. Ambos métodos, como se muestra en la Figura 2.3, se enmarcan dentro del enfoque de análisis estático basado en flujos de potencia. Además, dicha figura presenta una clasificación del análisis de estabilidad de voltaje en dos grandes enfoques: estático y dinámico. El enfoque estático incluye el análisis mediante ecuaciones linealizadas y flujos de potencia, incorporando técnicas como el análisis modal y los flujos de potencia de continuación; mientras que el enfoque dinámico se basa en ecuaciones diferenciales-algebraicas y en simulaciones en el tiempo.

La elección del tipo de análisis estático sobre un enfoque dinámico se da debido a razones tanto técnicas como prácticas. Entre ellas destaca la simplicidad del modelo, ya que el análisis estático se basa en condiciones de equilibrio del sistema, sin necesidad de representar su comportamiento dinámico. Además, este enfoque permite identificar con eficiencia problemas de estabilidad de voltaje, como la proximidad al punto de máxima cargabilidad. A diferencia del análisis dinámico mostrado en la Figura 2.3, el enfoque estático requiere un número considerablemente menor de datos detallados del sistema eléctrico, lo cual reduce la

2. ESTABILIDAD EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

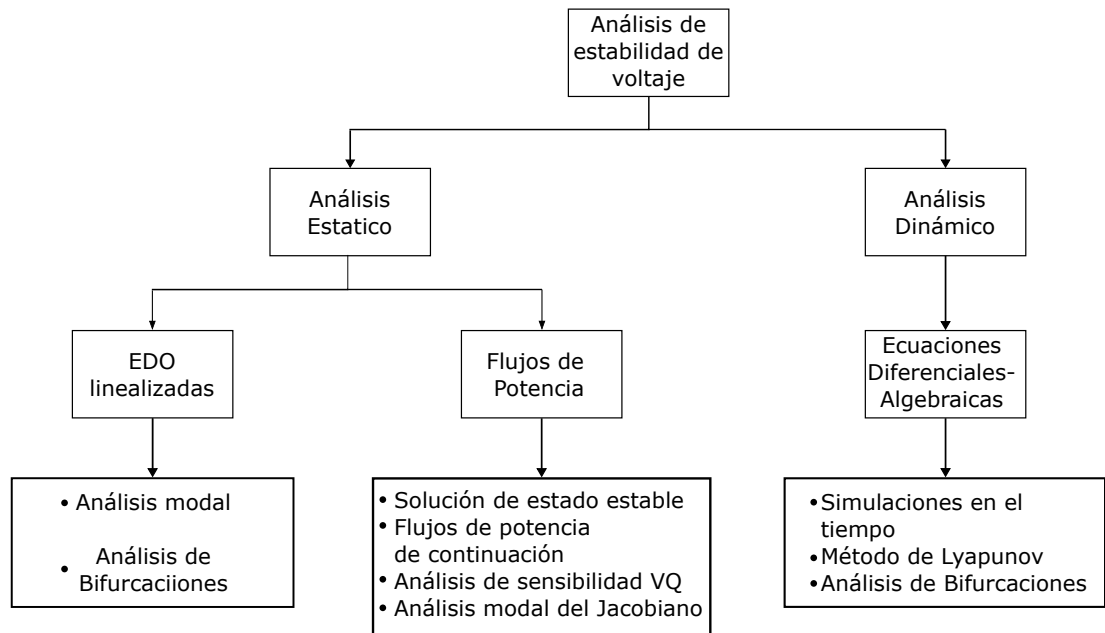


Figura 2.3: Métodos de análisis de estabilidad de voltaje en sistemas eléctricos

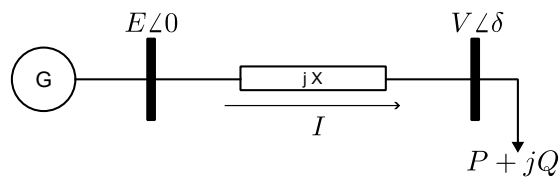


Figura 2.4: Sistema de 2 nodos.

complejidad y el esfuerzo computacional del estudio.

Las curvas PV son uno de los métodos de análisis estáticos de estabilidad de voltaje más utilizados, debido a que permiten conocer de manera muy precisa el punto de máxima cargabilidad y de colapso de voltaje. Existen diversos métodos para generar y analizar las curvas PV completas, los cuales se presentan a continuación.

2.3.1. Ecuación cuadrática de voltaje

Considere el sistema de dos nodos que se muestra en la Figura 2.4, en el cual se conecta la carga al generador a través de una línea de transmisión sin pérdidas. Se cumple que:

$$I = \frac{E\angle 0 - V\angle \delta}{jX} \quad (2.1)$$

en donde V es la magnitud del voltaje, δ es el ángulo de fase del voltaje, E es la fuerza electromotriz interna del generador, jX es la reactancia del generador e I es la corriente de salida del generador.

La potencia aparente S transmitida a la carga a través de la línea de transmisión es,

$$S = P + jQ = V\angle \delta \cdot I^* \quad (2.2)$$

Sustituyendo (2.1) en (2.2) se tiene,

$$S = \frac{j}{X} (EV\cos(\delta) + jEV\sin(\delta) - V^2) \quad (2.3)$$

Reorganizando la expresión,

$$S = j\frac{EV\cos(\delta) - V^2}{X} - \frac{EV\sin(\delta)}{X} \quad (2.4)$$

De la Ecuación (2.2) se sabe que $S = P + jQ$, por lo que se puede deducir que la potencia activa y reactiva entregada a la carga es,

$$P = -\frac{EV}{X}\sin(\delta) \quad (2.5)$$

$$Q = \frac{EV\cos(\delta) - V^2}{X} \quad (2.6)$$

2. ESTABILIDAD EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

Se pueden combinar las ecuaciones (2.5) y (2.6), despejando $\sin(\delta)$ y $\cos(\delta)$ de (2.5) y (2.6),

$$\sin(\delta) = -\frac{PX}{EV} \quad (2.7)$$

$$\cos(\delta) = \frac{QX + V^2}{EV} \quad (2.8)$$

Es posible realizar una combinación de las ecuaciones (2.7) y (2.8) haciendo uso de la identidad trigonométrica $\sin^2(\delta) + \cos^2(\delta) = 1$, de la siguiente manera,

$$(-PX)^2 + (V^2 + QX)^2 = (EV)^2 \quad (2.9)$$

Desarrollando la expresión, se tiene,

$$(V^2)^2 + (2QX - E^2)V^2 + X^2(P^2 + Q^2) = 0. \quad (2.10)$$

Esta última ecuación es del tipo $Ax^2 + Bx + C = 0$ y se puede resolver mediante la fórmula general. Por lo tanto, la solución de la ecuación cuadrática es,

$$V^2 = \frac{E^2 - 2QX \pm \sqrt{(2QX - E^2)^2 - 4X^2(P^2 + Q^2)}}{2} \quad (2.11)$$

A manera de ejemplo, se resuelve el sistema mostrado en la Figura 2.4, tomando los valores constantes de $E = 1$, $X = 1$ y una carga $P + jQ$, la cual varía a lo largo de la formación de la curva PV. Primeramente, se utilizará un $FP = 1.0$, por lo que, P varía desde 0 hasta 0.5 p.u. en incrementos de 0.00001, y para cada

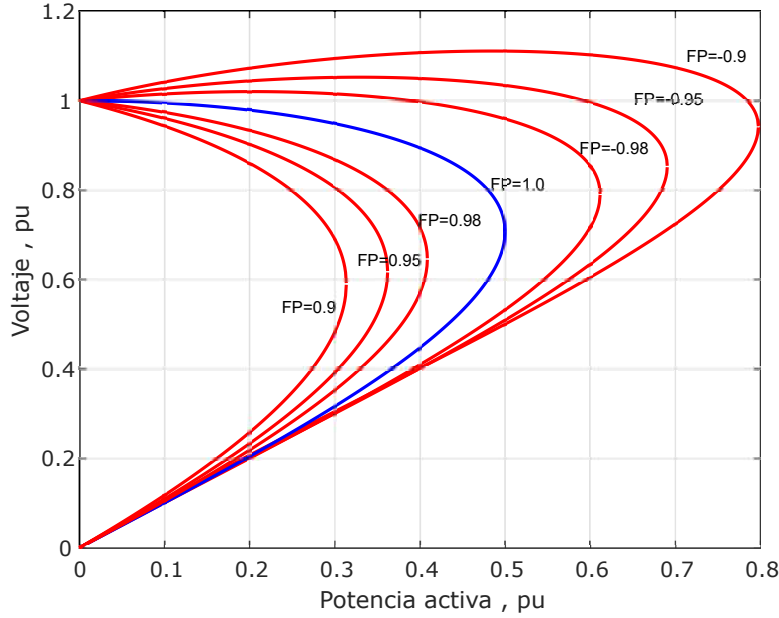


Figura 2.5: Curva PV para el sistema de dos nodos con diferentes factores de potencia.

punto de P se tiene un valor de Q que se calcula de la siguiente manera,

$$Q = P \tan(\cos^{-1}(FP)) \quad (2.12)$$

La curva PV se grafica de la siguiente manera:

1. Se elige el primer valor de P .
2. Se calcula su respectiva Q con (2.12).
3. Se resuelve la ecuación (2.11), la cual da como resultado dos raíces reales.
4. Se grafican estas dos raíces en la gráfica, donde el eje 'x' es la potencia activa en p.u. y el eje 'y' son los valores de voltaje en p.u.
5. Se incrementa P en 0.00001, y se repite del paso 2, 3, 4, 5 hasta llegar al

punto de inflexión.

La Figura 2.5 muestra en azul la gráfica obtenida para este ejemplo, además, se muestran las diferentes curvas PV formadas al variar el factor de potencia para el sistema de 2 nodos de la Figura 2.4. Sin embargo, este método de análisis no es adecuado para sistemas de gran escala debido a que es muy complejo encontrar una ecuación que proporcione la solución analítica del voltaje en un nodo específico de cierto sistema. Por lo tanto, este enfoque no es utilizado para los estudios de estabilidad de voltaje de sistemas eléctricos de gran escala.

2.3.2. Flujos de potencia

El análisis de estabilidad de voltaje se encuentra ampliamente estudiado en la literatura y existen diferentes métodos para llevar a cabo los análisis, tales como el método de flujos de potencia, el método de flujos de potencia de continuación, entre otros. Para el análisis de estabilidad de voltaje en esta tesis se optará por analizar la parte estática. Esto se logrará utilizando el método de flujos de potencia y variando la potencia en la carga para generar las curvas PV. Eventualmente, se alcanzará un punto en donde el método Newton no converge debido a la singularidad del Jacobiano.

El análisis de flujos de potencia se refiere a un análisis de estado estable de un sistema interconectado de potencia durante condiciones normales de operación. Las ecuaciones de la red eléctrica de potencia pueden ser formuladas de diferentes maneras. Una de las representaciones de ecuaciones más utilizadas para el análisis de un sistema de potencia está basada en la representación de voltajes nodales, en la cual, mediante una representación de admitancia nodal de la red

se obtienen una serie de ecuaciones lineales en términos de las corrientes nodales. Cuando las corrientes nodales son conocidas, se puede resolver este sistema de ecuaciones lineales para los voltajes nodales, sin embargo, en los sistemas eléctricos de potencia se conocen las potencias en lugar de las corrientes nodales, por lo que, las ecuaciones resultantes en términos de potencias, conocidas como ecuaciones de flujos de potencia, se convierten en un sistema de ecuaciones no lineales, las cuales requieren ser resueltas mediante métodos numéricos iterativos [Saadat, 2009].

2.3.2.1. Matriz de admitancia nodal

La matriz de admitancia nodal de la red, conocida comúnmente como matriz Y_{bus} , es una matriz que muestra la conexión de los nodos de la red con base en sus admitancias. El elemento diagonal correspondiente a cada nodo es la suma de las admitancias conectadas a este [Saadat, 2009],

$$Y_{ii} = \sum_{j=0}^n y_{ij}, \text{ para } j \neq i \quad (2.13)$$

en donde n es el número total de nodos del sistema, i representa el índice del nodo en el cual se está calculando el elemento diagonal y j representa el índice de los otros nodos conectados al nodo i .

Los elementos fuera de la diagonal, se calculan como el negativo de la admitancia entre los nodos,

$$Y_{ij} = Y_{ji} = -y_{ij} \quad (2.14)$$

2.3.2.2. Ecuaciones de flujos de potencia

Para resolver el problema de flujos de potencia, se asume que el sistema está operando bajo condiciones balanceadas y se utiliza un sistema de una fase. Se asocian cuatro variables a cada nodo, las cuales son: Magnitud de voltaje (V), ángulo de fase (δ), potencia real (P) y potencia reactiva (Q). Los nodos generalmente se clasifican en tres tipos [Saadat, 2009]:

- **Nodo Slack.** Es el nodo que se toma como referencia donde la magnitud de voltaje y ángulo de fase son especificados desde el inicio.
- **Nodos de carga.** Se especifican las potencias activa y reactiva. Las magnitudes de voltaje y ángulos de fase son desconocidas. Se conocen también como nodos PQ.
- **Nodos regulados.** Son los nodos de generación, también conocidos como nodos de voltaje controlado. El voltaje y la potencia activa en este tipo de nodo están especificados desde el inicio. El ángulo de fase del voltaje y la potencia reactiva serán determinados. También conocidos como nodos PV.

La Figura 2.6 presenta un nodo típico de un sistema de potencia, en el cual están conectadas varias líneas de transmisión hacia otros nodos, cada conexión entre nodos contiene su respectiva admitancia. Además, el nodo i tiene una línea hacia tierra representada con la admitancia y_{i0} . Aplicando la ley de corrientes de Kirchoff a este sistema, se llega al siguiente resultado,

$$I_i = y_{i0}V_i + \sum_{j=1}^n y_{ij}(V_i - V_j) \quad (2.15)$$

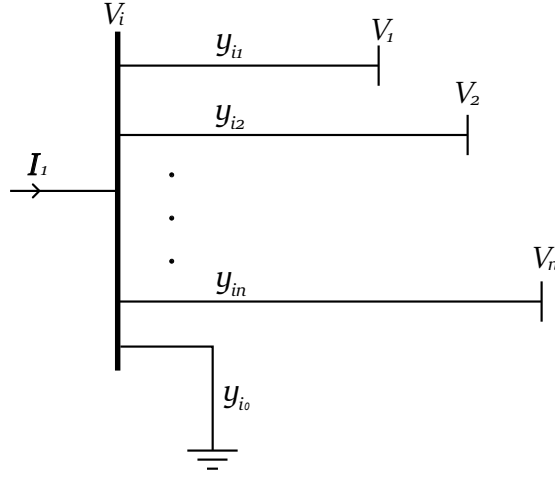


Figura 2.6: Nodo típico de un sistema de potencia.

La potencia compleja en el nodo i se define como,

$$P_i + jQ_i = V_i I_i^* \quad (2.16)$$

Despejando I_i se llega a la siguiente expresión,

$$I_i = \frac{P_i - jQ_i}{V_i^*} \quad (2.17)$$

Igualando las expresiones (2.17) y (2.15) se tiene,

$$\frac{P_i - jQ_i}{V_i^*} = y_{i0} V_i + \sum_{j=1}^n y_{ij} (V_i - V_j) \quad (2.18)$$

De esta última relación, se obtiene un sistema de ecuaciones no lineales que se requiere resolver de manera iterativa. En esta tesis se utiliza el método de Newton para la resolución de sistemas de ecuaciones algebraicos no lineales, debido a que su convergencia es cuadrática y es menos propenso a divergir en sistemas bien condicionados.

2. ESTABILIDAD EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

La Ecuación (2.15) reescrita en términos de la matriz de admitancia y considerando que j incluye al nodo i ,

$$I_i = \sum_{j=1}^n Y_{ij} V_j \quad (2.19)$$

expresando esta ecuación en forma polar, se tiene,

$$I_i = \sum_{j=1}^n |Y_{ij}| |V_j| \angle \theta_{ij} + \delta_j \quad (2.20)$$

La potencia compleja en nodo i se define como,

$$P_i - jQ_i = V_i^* I_i \quad (2.21)$$

sustituyendo (2.20) en (2.21),

$$P_i - jQ_i = |V_i| \angle -\delta_i \sum_{j=1}^n |Y_{ij}| |V_j| \angle \theta_{ij} + \delta_{ij} \quad (2.22)$$

esta última expresión puede ser representada como,

$$P_i - jQ_i = \sum_{j=1}^n |V_i| |V_j| |Y_{ij}| e^{j(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j)} \quad (2.23)$$

se tiene también,

$$e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi \quad (2.24)$$

así que,

$$P_i - jQ_i = \sum_{j=1}^n |V_i||V_j||Y_{ij}|[\cos(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) + j \sin(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j)] \quad (2.25)$$

separando la parte real e imaginaria, se tiene,

$$P_i = \sum_{j=1}^n |V_i||V_j||Y_{ij}| \cos(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \quad (2.26)$$

$$Q_i = - \sum_{j=1}^n |V_i||V_j||Y_{ij}| \sin(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \quad (2.27)$$

Las Ecuaciones (2.26) y (2.27) conforman un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas, la magnitud de voltaje se encuentra en volts y el ángulo de fase en radianes. Se tienen dos ecuaciones por cada nodo de carga, dadas por (2.26) y (2.27), y una ecuación por cada nodo de voltaje controlado, dada por (2.27).

Se puede aproximar la solución del sistema de ecuaciones algebraicas no lineales mediante un sistema de ecuaciones linealizado que se obtiene al expandir las ecuaciones (2.26) y (2.27) en series de Taylor alrededor de una condición inicial, sin tomar en cuenta los términos de orden mayor a 1 y tomando en cuenta el nodo 1 como el nodo slack, lo que nos da el siguiente sistema de ecuaciones linealizado,

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2^{(h)} \\ \vdots \\ \Delta P_n^{(h)} \\ \Delta Q_2^{(h)} \\ \vdots \\ \Delta Q_n^{(h)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial \delta_n} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial |V_2|} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial |V_n|} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial \delta_n} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial |V_2|} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial |V_n|} \\ \hline \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_n} & \dots & \frac{\partial Q_2}{\partial |V_2|} & \dots & \frac{\partial Q_2}{\partial |V_n|} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial Q_n}{\partial \delta_n} & \dots & \frac{\partial Q_n}{\partial |V_2|} & \dots & \frac{\partial Q_n}{\partial |V_n|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_2^{(h)} \\ \vdots \\ \Delta \delta_n^{(h)} \\ \Delta |V_2|^{(h)} \\ \vdots \\ \Delta |V_n|^{(h)} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

2. ESTABILIDAD EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

Haciendo $H = \frac{\partial P}{\partial \delta}$, $L = \frac{\partial P}{\partial V}$, $M = \frac{\partial Q}{\partial \delta}$ y $N = \frac{\partial Q}{\partial V}$ se tiene el siguiente sistema de ecuaciones linealizado,

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & L \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta |V| \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Tomando en cuenta que existen dos ecuaciones por cada nodo de carga, una ecuación por cada nodo de voltaje controlado y un nodo slack, entonces, H es de dimensión $(n-1)(n-1)$, L es de dimensión $(n-1)(n-1-m)$, M de dimensión $(n-1-m)(n-1)$ y N de dimensión $(n-1-m)(n-1-m)$. Siendo así el Jacobiano completo de dimensión $(2n-2-m)(2n-2-m)$, donde n es el número de nodos del sistema y m el número de nodos de voltaje controlado del sistema.

La diferencia entre la potencia especificada y la potencia calculada se llama residuo de potencia y se calcula de la siguiente manera,

$$\Delta P_i^{(h)} = P_i^{esp} - P_i^h \quad (2.30)$$

$$\Delta Q_i^{(h)} = Q_i^{esp} - Q_i^h \quad (2.31)$$

donde h representa la iteración de Newton.

Los voltajes nodales y ángulos de fase en la h -ésima iteración se determinan mediante,

$$\begin{bmatrix} \delta \\ |V| \end{bmatrix}^{(h+1)} = \begin{bmatrix} \delta \\ |V| \end{bmatrix}^{(h)} + \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V \end{bmatrix}^{(h)} \quad (2.32)$$

A continuación, se define un nodo PQ para poder formar una curva PV. El

modelo de la carga se define como,

$$P = P_0(1 + \lambda K_L) \quad (2.33)$$

en donde P_0 es la potencia activa de la carga para el caso base, λ es el factor de carga y K_L es el factor de incremento de carga.

Este método permite formar una mitad de la curva PV a la vez, dependiendo de las condiciones iniciales del problema. El procedimiento es el siguiente:

- Seleccionar un nodo de carga.
- Variar la potencia activa en la carga mediante el factor de carga λ y el factor de incremento de carga K_L .
- Calcular la solución de flujos de potencia para la condición actual de la carga y almacenar el voltaje nodal.
- Incrementar el factor de carga y repetir el paso anterior hasta que la solución de flujos de potencia no converja.
- Generar la curva PV utilizando los datos almacenados.
- Calcular el margen de potencia activa, el cual se define como la potencia máxima en el último punto de convergencia menos la potencia inicial de operación en el nodo.

2.3.3. Flujos de potencia de continuación

Este método consiste en un algoritmo predictivo-correctivo, el cual evita el problema de singularidad en la matriz Jacobiana. La primera parte de este mé-

2. ESTABILIDAD EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

todo, la parte predictiva, consiste en hacer una aproximación tangencial a la siguiente solución con base en una matriz Jacobiana aumentada en un renglón y una columna. Esta aproximación tangencial se utiliza como condición inicial para la parte correctiva, la cual consiste en aplicar el método de Newton y así corregir la aproximación de la parte predictiva [Ajjarapu and Christy, 1992]. La Figura 2.7 ilustra el proceso de generación de una curva PV. El eje vertical representa el voltaje nodal, mientras que el eje horizontal muestra el nivel de carga del sistema, representado por λ . A lo largo de la curva se puede observar cómo varía el voltaje nodal a medida que incrementa la demanda. A medida que se incrementa λ , el flujo de potencia sigue soluciones estables hasta alcanzar un punto crítico $\lambda_{\max}$, el cual corresponde al punto de máxima cargabilidad del sistema. El método de continuación emplea un esquema predictor-corrector, el paso predictor realiza un avance tangencial aproximado hacia el siguiente punto de la curva, mientras que el paso corrector ajusta la solución previamente estimada para ubicarla en el punto real de operación del sistema. En el punto de máxima cargabilidad, matemáticamente no existe solución debido a que el Jacobiano se vuelve singular. Una de las principales ventajas del método de continuación es que permite evitar dicho punto directamente, ya que el algoritmo predice un punto posterior y luego lo corrige, garantizando así la convergencia incluso en condiciones cercanas al colapso de voltaje.

La descripción matemática del método de flujos de potencia de continuación es la siguiente,

$$\begin{aligned} 0 &= P_{Gi}(V_i, \delta_i, \lambda) - P_{Li}(V_i, \delta_i, \lambda) - P_i(V_i, \delta_i) \\ 0 &= Q_{Gi}(V_i, \delta_i) - Q_{Li}(V_i, \delta_i, \lambda) - Q_i(V_i, \delta_i) \end{aligned} \tag{2.34}$$

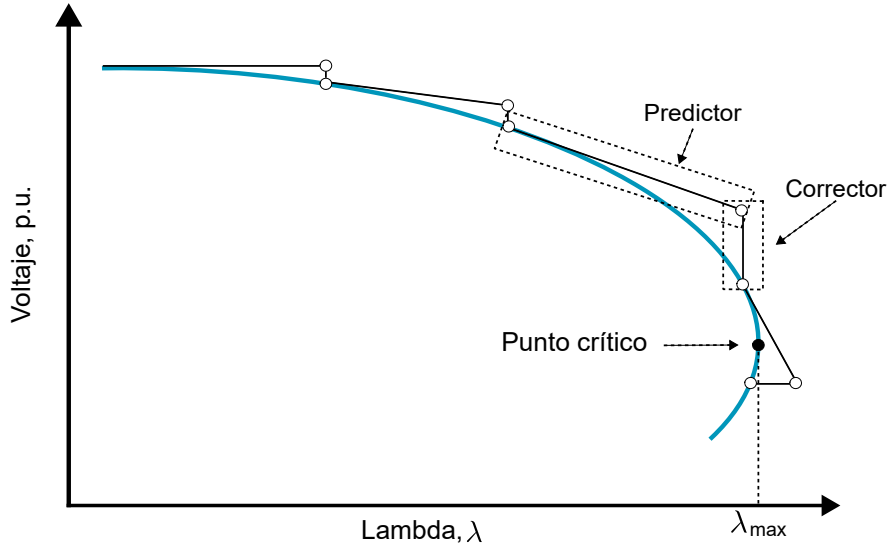


Figura 2.7: Representación gráfica del método de flujos de potencia de continuación.

en donde P_i y Q_i se calculan como se muestra en (2.26) y (2.27).

Las potencias de carga y generación se definen como,

$$\begin{aligned} P_{Li} &= P_{Li0}(1 + \lambda K_{Li}) \\ Q_{Li} &= P_{Li0} \cdot \tan(\phi_i)(1 + \lambda K_{Li}) \\ P_{Gi} &= P_{Gi0}(1 + \lambda K_{Gi}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

en donde P_{Li0} , Q_{Li0} son potencias activa y reactiva de carga en el caso base, P_{Gi0} es la potencia activa de generación en el caso base, λ es el parámetro de carga que se introduce en las ecuaciones no lineales, el cual se introduce para modelar el incremento progresivo de la carga. Además, esta variable actúa como variable de seguimiento en el método de continuación, variando su valor en cada punto calculado de la curva PV para representar un cambio gradual en el nivel de carga del sistema, ϕ es el factor de potencia en el nodo i , K_{Li} y K_{Gi} son multiplicadores de relación de cambio.

2. ESTABILIDAD EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

El vector tangente se determina con la solución del sistema de ecuaciones,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial \delta} & \frac{\partial P}{\partial V} & \frac{\partial P}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial Q}{\partial \delta} & \frac{\partial Q}{\partial V} & \frac{\partial Q}{\partial \lambda} \\ e_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\delta \\ dV \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \pm 1 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

en donde $d\theta$, dV y $d\lambda$ forman un vector tangencial $\mathbf{t}$ que se proyecta desde el punto de operación anterior. Así mismo, e_k es un vector renglón con todos sus elementos iguales a cero, excepto el k -ésimo elemento que es igual a uno. El vector de la derecha en la igualdad contiene un vector $\mathbf{0}$, el cual representa un vector con todos sus elementos iguales a cero de tamaño $(2n - 2 - m)$, y el elemento final puede ser $+1$ o -1 , lo cual depende de si el parámetro lambda está creciendo o decreciendo. Una vez calculado el vector tangente, la predicción al siguiente punto de operación se calcula mediante,

$$\begin{bmatrix} \delta^* \\ V^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ V \\ \lambda \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} d\delta \\ dV \\ d\lambda \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

en donde σ es un escalar que establece el tamaño de paso del predictor a lo largo de la curva PV. Aunque su valor inicial puede escogerse libremente, conviene cambiar su valor a valores más pequeños de manera arbitraria a medida que el sistema se acerca al punto crítico para evitar problemas de convergencia.

Para la parte correctiva, el nuevo sistema de ecuaciones a resolver se trans-

forma de la siguiente manera,

$$\begin{bmatrix} F(x) \\ x_k - \eta \end{bmatrix} = 0 \quad (2.38)$$

en donde $F(x)$ representa el conjunto de ecuaciones de flujos de potencia presentado en (2.34) y la ecuación $x_k - \eta = 0$ es la ecuación de parametrización utilizada durante el paso corrector de Newton, la cual fija el valor del parámetro de continuación para mantenerlo constante mientras se corrige el punto predictor. Esto se logra mediante la inclusión del renglón e_k . Además, el valor de η corresponde al valor predicho del parámetro de continuación determinado mediante (2.37).

Se debe considerar como primer parámetro de continuación la variable lambda y, al llegar al punto crítico donde el método deja de converger, hacer el cambio de este, considerando que el nuevo valor del parámetro de continuación es matemáticamente la variable de estado que tiene una componente tangencial más grande en (2.36) y se calcula de la siguiente manera,

$$\mathbf{x}_k = \begin{cases} \lambda, & \text{para } V > V_{crit} \\ |\mathbf{t}_k| = \mathbf{max}(\mathbf{t}), & \text{para } V < V_{crit}. \end{cases} \quad (2.39)$$

Dado que este nuevo sistema de ecuaciones es de naturaleza no lineal debido a la incorporación de senos y cosenos en las ecuaciones aumentadas de flujos de potencia, su resolución requiere el uso del método Newton, en el cual se resuelve

2. ESTABILIDAD EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

iterativamente mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial \delta} & \frac{\partial P}{\partial V} & \frac{\partial P}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial Q}{\partial \delta} & \frac{\partial Q}{\partial V} & \frac{\partial Q}{\partial \lambda} \\ & e_k & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

De forma compacta se tiene,

$$\mathbf{J}_c \Delta \mathbf{x} = -\Delta \mathbf{y} \quad (2.41)$$

en donde J_c es el Jacobiano aumentado del sistema.

La solución corregida se obtiene con la iteración Newton,

$$\begin{bmatrix} \delta \\ V \\ \lambda \end{bmatrix}^{h+1} = \begin{bmatrix} \delta \\ V \\ \lambda \end{bmatrix}^h + \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

La Figura 2.8 describe el diagrama de flujo del método de flujos de potencia de continuación. En esta figura se enfatizan las etapas del método en donde se resuelven sistemas de ecuaciones lineales del tipo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Se puede observar que los sistemas de ecuaciones que se resuelven están vinculados con la resolución del problema de flujos de potencia base, el cálculo del vector tangente y la parte de la corrección. Para la predicción basta con resolver una vez este sistema y conocer la aproximación tangencial. En cambio, para la parte de la corrección, se requiere hacer un proceso iterativo, debido a que se tiene que resolver el problema de flujos de potencia mediante el método Newton.

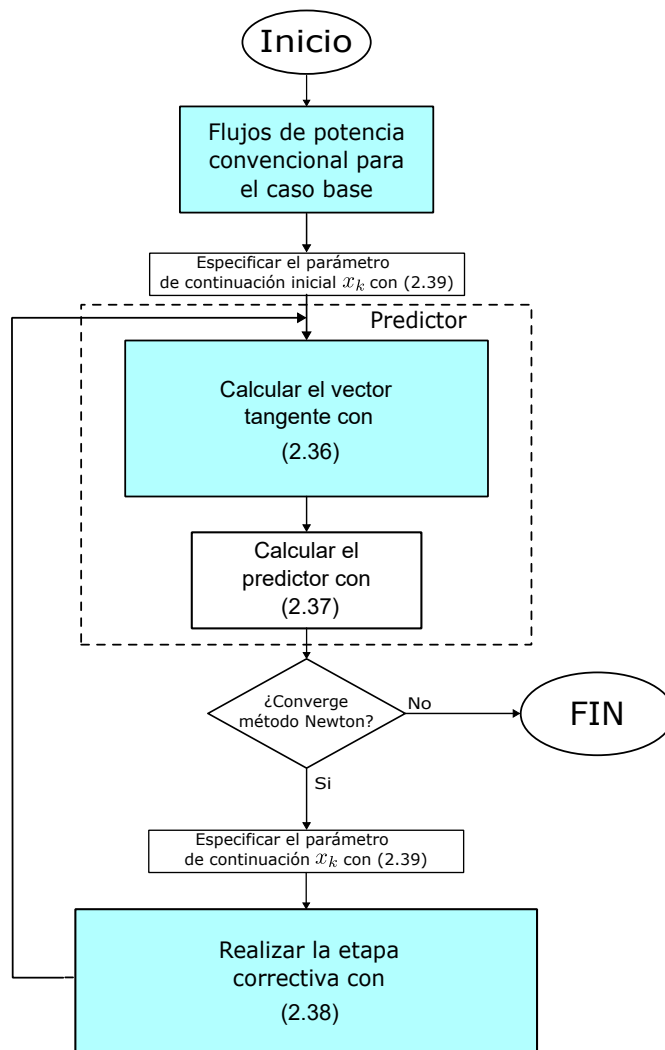


Figura 2.8: Diagrama de flujo del método de flujos de potencia de continuación.

2.4. Modelado de componentes del sistema eléctrico

El modelado de componentes del sistema eléctrico para llevar a cabo estudios de estabilidad estática de voltaje se realiza con las siguientes consideraciones:

- El generador conectado al nodo “SLACK” se modela como una fuente de voltaje con magnitud constante en terminales y con capacidad de proveer cualquier potencia activa y reactiva.
- El resto de los generadores se modelan como fuentes que producen potencia activa fija y mantienen constante el voltaje en terminales.
- Las cargas se modelan como inyecciones de potencia constante.

2.5. Análisis modal

El análisis modal consiste en evaluar el Jacobiano del sistema en la solución de estado estable y se determinan sus valores característicos. El análisis de los valores característicos se realiza de la siguiente manera,

- Si todos los valores característicos μ_i de $\mathbf{J}_{\text{red}}$ tienen una parte real mayor que cero $Re(\mu_i) > 0$ para toda i , se concluye que la solución es asintóticamente estable.
- Si se tiene al menos un valor característico de $\mathbf{J}_{\text{red}}$ que en su parte real sea menor que cero $Re(\mu_i) < 0$, entonces se concluye que la solución es inestable.

2.6. Sumario

En este capítulo se presentó la clasificación y definiciones de la estabilidad en los sistemas eléctricos de potencia, con un enfoque especial en la estabilidad de voltaje. Además, se analizaron los impactos negativos de la pérdida en la estabilidad de voltaje y se describió el proceso de colapso de voltaje, en el cual un conjunto de eventos conduce a un perfil de voltaje inaceptable. Finalmente, se describieron los métodos de análisis de estabilidad de voltaje, con énfasis en la construcción de curvas PV a través del método de flujos de potencia de continuación, con el objetivo de determinar el límite de cargabilidad del sistema.

Capítulo 3

Subespacio de Krylov

En esta tesis se propone desarrollar el método de flujos de potencia de continuación usando el método del subespacio de Krylov. Específicamente, se propone utilizar el método del mínimo residuo generalizado (GMRES), el cual se aplica en la solución de sistemas del tipo,

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \tag{3.1}$$

en donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. El método GMRES es un método de subespacio de Krylov para resolver sistemas no simétricos, mediante un enfoque iterativo, el cual se presentó por primera vez en 1986 [Saad and Schultz, 1986]. Este método se basa en un proceso de proyección ortogonal que busca una solución aproximada $\tilde{\mathbf{x}}$.

3.1. Métodos de solución de sistemas lineales

La resolución de las ecuaciones (2.28) y (2.40) mediante el método de Newton, trae consigo una matriz Jacobiana de primeras derivadas parciales, que representan en forma compacta sistemas de ecuaciones linealizadas. Los métodos

3. SUBESPACIO DE KRYLOV

numéricos de solución de sistemas de ecuaciones lineales se agrupan en métodos directos y métodos iterativos. Los métodos directos buscan la solución exacta del sistema de ecuaciones lineales mediante un proceso de factorización. Por su parte, los métodos iterativos parten de una condición inicial que se corrige de forma iterativa hasta que converge a una solución en un número finito de pasos.

Los métodos directos para resolver sistemas de ecuaciones son adecuados si:

1. El Jacobiano se puede calcular y almacenar de forma eficiente,
2. El costo de la factorización del Jacobiano no es excesivo y
3. Los métodos iterativos no convergen para el problema específico.

En general, los métodos iterativos ofrecen importantes ventajas respecto a los métodos directos cuando se resuelven sistemas lineales de gran escala y dispersos.

Las principales ventajas son:

1. Menor esfuerzo computacional,
2. Manejo de arreglos dispersos y
3. Menor demanda de memoria.

3.2. Subespacio de Krylov

El fundamento principal de los métodos iterativos basados en el subespacio de Krylov es la proyección del espacio de soluciones completo sobre un subespacio de menor tamaño, que permite encontrar un vector de solución aproximado de manera más eficiente. En estos métodos se busca la solución en un subespacio generado por las iteraciones de la matriz del sistema sobre un vector inicial $\mathbf{r}_0$, en

lugar de buscar la solución en todo el espacio. La ventaja de estos métodos es que, para sistemas altamente dispersos, no es necesario formar todo el subespacio, sino que es posible encontrar un vector de solución en un número reducido de vectores que forman el subespacio de Krylov [Saad, 2003].

La solución aproximada $\tilde{\mathbf{x}}$ para (3.1) es,

$$\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}_0 + \mathbf{K}_k \quad (3.2)$$

con la condición de ortogonalidad,

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \perp \mathbf{K}_k \quad (3.3)$$

en donde $\tilde{\mathbf{r}}$ representa el residuo asociado a la solución aproximada de $\tilde{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x}_0$ es un valor inicial de la solución y $\mathbf{K}_k$ es un subespacio de dimensión k . Cabe señalar que k representa, de igual manera, el índice de la iteración de Krylov, esto debido a que en cada iteración el subespacio de Krylov aumenta a un subespacio de mayor dimensión.

El subespacio $\mathbf{K}_k$ correspondiente se define como,

$$\mathbf{K}_k = \text{span}(\mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{r}_0, \mathbf{A}^2\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{r}_0) \quad (3.4)$$

para $k \geq 1$ y el residuo inicial $\mathbf{r}_0$ se define como,

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \quad (3.5)$$

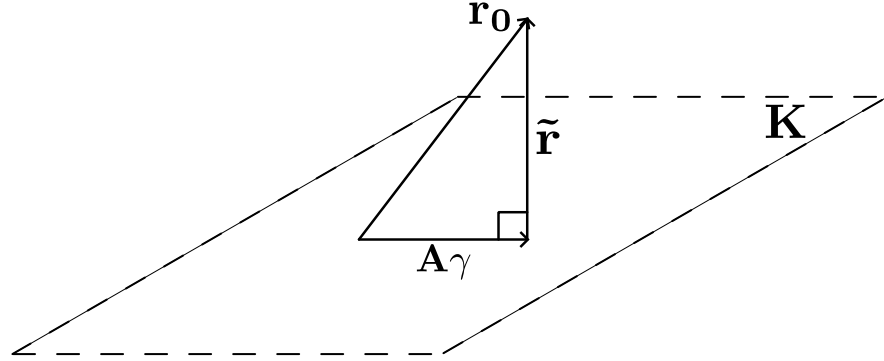


Figura 3.1: Representación vectorial del subespacio de Krylov

Para una condición inicial de la solución $\mathbf{x}_0$, la aproximación $\tilde{\mathbf{x}}$ toma la forma,

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0 + \gamma \quad (3.6)$$

en donde γ es un incremento en la iteración actual para mejorar la aproximación de la solución, el cual, se define de manera distinta, para los diferentes métodos basados en el subespacio de Krylov.

Por lo tanto, el residuo definido en (3.3) toma la forma,

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \gamma) = \mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\gamma \perp \mathbf{K}_k \quad (3.7)$$

El vector $\mathbf{A}\gamma$ es la proyección ortogonal del vector $\mathbf{r}_0$ sobre el subespacio $\mathbf{K}$, como se muestra en la Figura 3.1. La solución se determina minimizando el residuo $\tilde{\mathbf{r}}$.

3.3. Método del residuo mínimo generalizado (GMRES)

El método GMRES fue propuesto en el año de 1986 en [Saad and Schultz, 1986]. Este método se basa en el subespacio de Krylov y es adecuado para resolver sistemas no-simétricos, en otras palabras, sistemas donde la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ no es igual a su transpuesta.

El método GMRES minimiza la norma del residuo de cualquier vector $\mathbf{x}$ en $\mathbf{x}_0 + \mathbf{K}_k$ mediante la iteración,

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_k \mathbf{y}_k \quad (3.8)$$

en donde $\mathbf{V}_k$ es una matriz de columnas ortonormales $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_k\}$. Además, el vector $\mathbf{y}_k$ es la solución al problema de mínimos cuadrados que minimiza el residuo,

$$\|\tilde{\mathbf{r}}_k\|_2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}_k\|_2 \quad (3.9)$$

Sustituyendo (3.8) en (3.9), se tiene,

$$\|\tilde{\mathbf{r}}_k\|_2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_k \mathbf{y}_k)\|_2 = \|\mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\mathbf{V}_k \mathbf{y}_k\|_2 \quad (3.10)$$

Después de obtener la expresión (3.10), se observa que el problema consiste en minimizar la norma del residuo dentro del subespacio de Krylov. Sin embargo, para que la minimización sea consistente, se requiere construir una base ortonormal del subespacio de Krylov. Es en este punto donde es necesaria la aplicación del algoritmo de Arnoldi, el cual construye de manera iterativa y eficiente una

base ortonormal del subespacio de Krylov.

3.4. Algoritmo de Arnoldi

El algoritmo de Arnoldi [Arnoldi, 1951] produce la matriz $\mathbf{V}_k$ mediante columnas ortogonales tal que,

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_{k+1}\bar{\mathbf{H}}_k \quad (3.11)$$

en donde $\mathbf{V}_k \in \mathbb{R}^{n \times k}$ con vectores columna $\{\mathbf{v}_1 \cdots, \mathbf{v}_k\}$ y $\bar{\mathbf{H}}_k$ es una matriz triangular superior Hessenberg de dimensión $\bar{\mathbf{H}}_k \in \mathbb{R}^{(k+1) \times k}$. Una matriz triangular superior de Hessenberg es una matriz casi triangular superior, con la diferencia de que todos los elementos que están dos o más posiciones debajo de la diagonal principal son cero.

En el procedimiento de Arnoldi se define como,

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r}_0\|_2} \quad (3.12)$$

y

$$\beta = \|\mathbf{r}_0\|_2 \quad (3.13)$$

Por lo tanto, sustituyendo (3.13) en (3.12), se tiene,

$$\mathbf{r}_0 = \beta \mathbf{v}_1 \quad (3.14)$$

Sustituyendo (3.11) y (3.14) en (3.10) se tiene,

$$\|\beta \mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_{k+1} \bar{\mathbf{H}}_k \mathbf{y}_k\|_2 = \|\mathbf{V}_{k+1}(\beta \mathbf{e}_1 - \bar{\mathbf{H}}_k \mathbf{y}_k)\|_2 \quad (3.15)$$

en donde $\mathbf{e}_1$ es un vector unitario $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{k+1}$. Es importante señalar que $\beta \mathbf{v}_1 = \mathbf{V}_{k+1} \beta \mathbf{e}_1$, esto es debido a que $\mathbf{V}_{k+1} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3 \ \cdots \ \mathbf{v}_{k+1}]$, por lo que,

$$\mathbf{V}_{k+1} \mathbf{e}_1 = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3 \ \cdots \ \mathbf{v}_{k+1}] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1 \quad (3.16)$$

En virtud de que los vectores columna de $\mathbf{V}_{k+1}$ son ortonormales, entonces

$$\|\mathbf{V}_{k+1}(\beta \mathbf{e}_1 - \bar{\mathbf{H}}_k \mathbf{y}_k)\|_2 = \|\beta \mathbf{e}_1 - \bar{\mathbf{H}}_k \mathbf{y}_k\|_2 \quad (3.17)$$

donde,

$$\mathbf{y}_k = \operatorname{argmin} \|\beta \mathbf{e}_1 - \bar{\mathbf{H}}_k \mathbf{y}\|_2 \quad (3.18)$$

donde $\mathbf{y}_k$ se encuentra resolviendo el problema de mínimos cuadrados mediante,

$$\mathbf{y}_k = (\bar{\mathbf{H}}_k' \bar{\mathbf{H}}_k)^{-1} \cdot \bar{\mathbf{H}}_k' (\beta \mathbf{e}_1) \quad (3.19)$$

Una vez que se determina el vector $\mathbf{y}_k$, se evalúa el residuo de mínimos cuadrados ρ como,

$$\rho = \|\beta \mathbf{e}_1 - \bar{\mathbf{H}}_k \mathbf{y}_k\|_2 \quad (3.20)$$

3. SUBESPACIO DE KRYLOV

El lazo iterativo de Krylov termina cuando el residuo ρ es suficientemente pequeño respecto a una tolerancia previamente establecida. Es importante mencionar que el residuo ρ se calcula en cada iteración del método GMRES. Como el sistema a resolver aumenta de tamaño conforme crece el subespacio de Krylov, para sistemas de gran tamaño esto se traduce en un esfuerzo computacional cada vez más elevado, lo cual resulta contraproducente para el método. En la siguiente sección se analiza una técnica de descomposición QR para evitar este inconveniente.

En este trabajo, la matriz de Hessenberg $\bar{\mathbf{H}}_k$ se determina mediante el proceso de ortogonalización de Arnoldi basado en un algoritmo Gram-Schmidt modificado, el cual se presenta en el Algoritmo 1 [Saad, 2003].

Algoritmo 1 Gram-Schmidt modificado

```
1: Escoger un vector  $\mathbf{v}_1$  con norma 1
2: for  $j = 1, 2, \dots, m$  do
3:   Calcular  $\mathbf{w}_j = \mathbf{A}\mathbf{v}_j$ 
4:   for  $i = 1, \dots, j$  do
5:      $h_{ij} = \mathbf{w}_j' * \mathbf{v}_i$ 
6:      $\mathbf{w}_j = \mathbf{w}_j - h_{ij}\mathbf{v}_i$ 
7:   end for
8:    $h_{j+1,j} = \|\mathbf{w}_j\|_2$ 
9:   if  $h_{j+1,j} = 0$  then Stop
10:  end if
11:   $\mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{w}_j/h_{j+1,j}$ 
12: end for
```

En el Algoritmo 2 se presenta el pseudo-código del método GMRES, en donde se aplica el algoritmo de Arnoldi usando el proceso de ortogonalización Gram-Schmidt.

Algoritmo 2 GMRES

```

1: Calcular  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$ ,  $\beta := \|\mathbf{r}_0\|_2$ , y  $\mathbf{v}_1 := \mathbf{r}_0/\beta$ 
2: for  $k = 1, 2, \dots, m$  do
3:   Calcular  $\mathbf{w}_k := \mathbf{A}\mathbf{v}_k$ 
4:   for  $i = 1, \dots, k$  do
5:      $h_{ik} = \mathbf{w}_k' * \mathbf{v}_i$ 
6:      $\mathbf{w}_k := \mathbf{w}_k - h_{ik}\mathbf{v}_i$ 
7:   end for
8:    $h_{k+1,k} = \|\mathbf{w}_k\|_2$ 
9:   if  $h_{k+1,k} = 0$  then
10:    Break For
11:   end if
12:    $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{w}_k/h_{k+1,k}$ 
13: end for
14: Definir la matriz de Hessenberg de tamaño  $(k+1) \times k$ :
     $\bar{\mathbf{H}}_k = \{h_{ij}\}_{1 \leq i \leq k+1, 1 \leq j \leq k}$ .
15: Calcular  $\mathbf{y}_k$  el cual minimiza a  $\|\beta\mathbf{e}_1 - \bar{\mathbf{H}}_k\mathbf{y}_k\|_2$ .
16: Evaluar  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_k\mathbf{y}_k$ .

```

3.5. Descomposición QR

La factorización QR de una matriz $\mathbf{A}$ de dimensión $m \times n$ está dada por,

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R} \quad (3.21)$$

donde $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es ortogonal y $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es triangular superior.

La descomposición QR en el método GMRES se utiliza para simplificar el cálculo de (3.20). Esto se logra al transformar la matriz Hessenberg del proceso GMRES en una matriz triangular superior usando la descomposición QR [Saad, 2003]. En este trabajo, la descomposición QR se implementa mediante las matrices

3. SUBESPACIO DE KRYLOV

de rotación Givens, las cuales se definen como,

$$\Omega_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & c_i & -s_i & \\ & & & s_i & c_i & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

en donde,

$$s_i = \frac{h_{i+1,i}}{\sqrt{\left(h_{ii}^{(i-1)}\right)^2 + h_{i+1,i}^2}} \quad (3.23)$$

$$c_i = \frac{h_{ii}^{(i-1)}}{\sqrt{\left(h_{ii}^{(i-1)}\right)^2 + h_{i+1,i}^2}} \quad (3.24)$$

y h es el valor de la matriz Hessenberg en la posición (i, i) .

Por ejemplo, para una matriz de 4x4, las matrices de rotación Givens tienen la siguiente forma,

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Omega_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Omega_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & -s_3 \\ 0 & 0 & s_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Considérese $\mathbf{Q}_k$ como el producto de las matrices

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{\Omega}_k \mathbf{\Omega}_{k-1} \dots \mathbf{\Omega}_1 \quad (3.26)$$

y

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{Q}_k \bar{\mathbf{H}}_k \quad (3.27)$$

Entonces, el problema de mínimos cuadrados de (3.20) se transforma de la siguiente manera,

$$\| \beta \mathbf{e}_1 - \bar{\mathbf{H}}_k \mathbf{y}_k \|_2 = \| \mathbf{Q}_k \beta \mathbf{e}_1 - \mathbf{Q}_k \bar{\mathbf{H}}_k \mathbf{y}_k \|_2 = \| \mathbf{g}_k - \mathbf{R}_k \mathbf{y}_k \|_2 \quad (3.28)$$

en donde se observa que,

$$\mathbf{g}_k = \mathbf{Q}_k \beta \mathbf{e}_1 \quad (3.29)$$

Para encontrar una $\mathbf{y}_k$ que minimice a (3.28) es necesario resolver el sistema de ecuaciones resultante,

$$\mathbf{R}_k \mathbf{y}_k = \mathbf{g}_k \quad (3.30)$$

Una vez que se determina $\mathbf{y}_k$, se calcula $\tilde{\mathbf{x}}_k$ mediante la iteración de Krylov (3.8).

Como $\mathbf{R}_k$ es una matriz triangular superior, el sistema de ecuaciones de (3.30) se resuelve por sustitución hacia atrás. Sin embargo, debido a la estructura de $\bar{\mathbf{H}}_k$, el vector $\mathbf{g}_k$ tiene una dimensión de $\mathbb{R}^{k+1}$, en donde el elemento $g(k+1)$ mide el residuo en la iteración k . Por lo tanto, el residuo actual se define como [Saad, 2003],

$$\rho = |g(k+1)| \quad (3.31)$$

Si ρ es menor que la tolerancia especificada, entonces, el proceso iterativo

termina.

Hasta este punto del capítulo se ha explicado el método GMRES basado en el subespacio de Krylov, cómo se resuelve el problema de mínimos cuadrados y cómo se puede evitar la resolución de este en cada iteración interna del método GMRES mediante la descomposición QR, sin embargo, la falta de robustez y eficiencia es una debilidad de este método, lo cual dificulta la aplicación de este método en sistemas altamente dispersos. La eficiencia y la robustez de los métodos basados en el subespacio de Krylov pueden mejorarse mediante el uso de matrices preconditionadoras.

3.6. Precondicionadores

Los métodos de solución de sistemas lineales directos son bastante más robustos que los métodos iterativos, como lo son los métodos basados en el subespacio de Krylov. Es por esto que en esta tesis se propone el uso de preconditionadores para el método GMRES. Los preconditionadores son matrices que se utilizan para modificar el sistema original en otro que tiene la misma solución, pero más fácil de resolver, mejorando sus características y acelerando la convergencia del método iterativo. El objetivo de las matrices preconditionadoras es transformar la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ para obtener un espectro de valores característicos que favorezca la convergencia del GMRES [Saad, 2003]. El primer paso de preconditionamiento es encontrar una matriz de preconditionamiento $\mathbf{M}$. El requisito más importante que debe cumplir esta matriz de preconditionamiento es que sea una matriz que no requiera mucho esfuerzo computacional para resolver sistemas lineales del tipo $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, debido a que, al contar con una matriz de preconditionamiento,

se resolverá este tipo de sistemas lineales en cada iteración del método. Además, la matriz de preconditionamiento $\mathbf{M}$ tiene que ser muy parecida a la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ del sistema lineal a resolver y no ser singular [Saad, 2003].

3.6.1. Precondicionamiento izquierdo

Sea $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ un sistema de ecuaciones lineales, entonces el preconditionamiento izquierdo se define como,

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \quad (3.32)$$

en donde $\mathbf{M}$ es la matriz preconditionadora. Del sistema de (3.32) se puede observar que la solución del sistema es la misma, ya que al premultiplicar ambos lados de la igualdad por la matriz $\mathbf{M}$, el sistema se convierte en uno equivalente y conserva la solución original.

Sí existen dos matrices preconditionadoras, entonces,

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 * \mathbf{M}_2 \quad (3.33)$$

3.6.2. GMRES preconditionado

La aplicación de preconditionamiento izquierdo al método GMRES descrito en el Algoritmo 2 requiere que se modifiquen las dos tareas siguientes:

1. Cálculo del residuo inicial (línea 1 del Algoritmo 2).- El residuo inicial con preconditionamiento izquierdo se define como,

$$\mathbf{r}'_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}_0 \quad (3.34)$$

3. SUBESPACIO DE KRYLOV

2. Cálculo del producto matriz-vector (línea 3 del Algoritmo 2).- El producto matriz-vector con preconditionamiento izquierdo se define como,

$$\mathbf{v}'_{k+1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{v}_k \quad (3.35)$$

Por lo tanto, el método GMRES con preconditionamiento izquierdo minimiza,

$$\|\tilde{\mathbf{r}}'_k\|_2 = \|\mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{r}}_k\|_2 = \|\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}_k\|_2 \quad (3.36)$$

y el subespacio de Krylov se expande como,

$$K_k = \text{span}(\mathbf{r}'_0, \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{r}'_0, \dots, (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A})^{k-1}\mathbf{r}'_0) \quad (3.37)$$

Existen varios caminos para encontrar una matriz de preconditionamiento $\mathbf{M}$, en esta tesis se utiliza la técnica de preconditionamiento conocida como factorización **LU** incompleta, cuyo objetivo es encontrar una matriz de preconditionamiento $\mathbf{M} = \mathbf{LU}$, el proceso para encontrar esta matriz se aborda en la siguiente sección.

3.6.3. Factorización LU incompleta

En este trabajo se utiliza factorización LU incompleta para determinar las matrices preconditionadoras. La factorización LU incompleta es una técnica de preconditionamiento muy utilizada en los métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales basados en el subespacio de Krylov [Saad, 2003]. En este trabajo se utilizó la factorización LU incompleta del tipo *no-fill*, también conocida como *iLU(0)* para obtener preconditionadores. Este tipo de factoriza-

Algoritmo 3 Factorización LU incompleta (ILU(0))

Require: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (Matriz del sistema)

```
1:  $n$  = número de filas de  $A$ 
2: for  $k = 1$  to  $n - 1$  do
3:   for  $i = k + 1$  to  $n$  do
4:     if  $A[i, k] \neq 0$  then
5:        $A[i, k] = A[i, k] / A[k, k]$ 
6:       for  $j = k + 1$  to  $n$  do
7:         if  $A[i, j] \neq 0$  then
8:            $A[i, j] = A[i, j] - A[i, k] \cdot A[k, j]$ 
9:         end if
10:      end for
11:    end if
12:  end for
13: end for
14:  $L$  = parte triangular inferior de  $A$  con unos en la diagonal.
15:  $U$  = parte triangular superior de  $A$ .
```

ción es una variante de la factorización LU incompleta en la que no se generan nuevos elementos no nulos fuera de la estructura dispersa de la matriz original. Esta factorización realiza la descomposición,

$$\mathbf{A} \approx \mathbf{LU} \tag{3.38}$$

En (3.38) se puede notar que, al no ser una factorización completa, entonces el producto de estas matrices L y U no produce exactamente la matriz original. El Algoritmo 3 describe el procedimiento para construir una factorización LU incompleta de nivel cero (ILU(0)) a partir de la matriz del sistema $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Este tipo de factorización se utiliza comúnmente como preconditionador en métodos iterativos para la resolución de sistemas lineales dispersos, debido a su bajo costo computacional y a su reducido requerimiento de memoria.

El algoritmo sigue una estrategia similar a la eliminación gaussiana clásica; sin

3. SUBESPACIO DE KRYLOV

embargo, impone la restricción de conservar estrictamente el patrón de dispersión original de la matriz. En particular, durante el proceso de eliminación no se permite la generación de nuevos elementos no nulos, lo cual caracteriza al método ILU(0).

En cada iteración k , asociada al pivote $A(k, k)$, se procesan las filas inferiores $i = k + 1, \dots, n$. Si el elemento $A(i, k)$ es distinto de cero, se calcula el multiplicador,

$$A(i, k) = \frac{A(i, k)}{A(k, k)}, \quad (3.39)$$

el cual corresponde a un elemento de la matriz triangular inferior L .

Posteriormente, se actualizan los elementos de la submatriz restante mediante la expresión,

$$A(i, j) = A(i, j) - A(i, k) A(k, j), \quad j = k + 1, \dots, n, \quad (3.40)$$

únicamente cuando el elemento $A(i, j)$ es no nulo. Esta condición garantiza que la estructura dispersa original de la matriz se conserve a lo largo de todo el proceso de factorización.

Al finalizar el ciclo de eliminación, la matriz resultante contiene de forma implícita los factores incompletos L y U . La matriz L se obtiene tomando la parte triangular inferior estricta de A y asignando unos en la diagonal principal, mientras que la matriz U corresponde a la parte triangular superior de A .

En conclusión, la factorización ILU(0) proporciona una aproximación eficiente de la descomposición LU exacta sin introducir nuevos elementos no nulos, lo que la convierte en una herramienta adecuada para el preconditionamiento de sistemas grandes y dispersos. En este trabajo se utiliza una función de MATLAB para

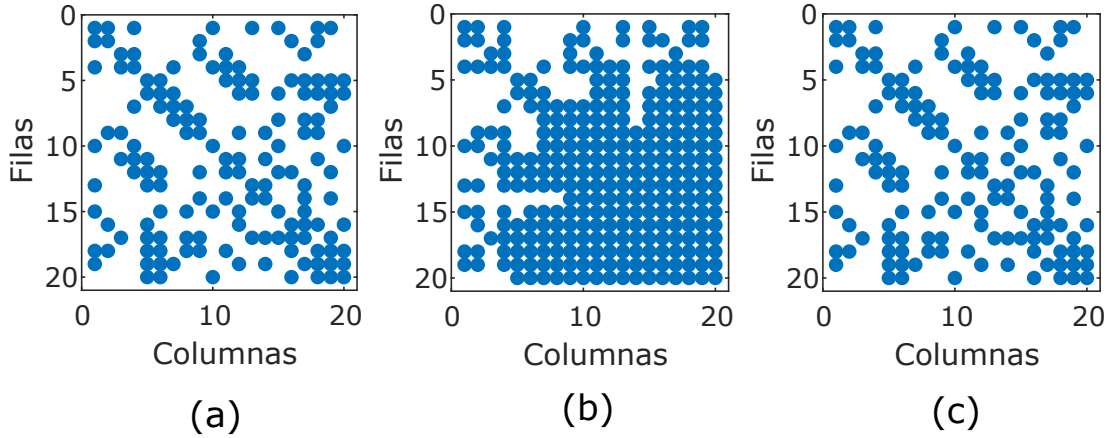


Figura 3.2: Estructura de dispersidad para: a) matriz original, b) descomposición LU y c) descomposición iLU(0).

realizar esta factorización.

En la Figura 3.2 se muestra, a manera de ejemplo, la comparación de la estructura de una matriz $\mathbf{A}$ de 20 renglones por 20 columnas y la estructura resultante de factorizar esta matriz en dos matrices LU, tanto su forma completa como incompleta. Se observa que la factorización LU incompleta mantiene la misma estructura de dispersidad que la matriz original sin formar nuevos elementos no nulos (ver Figura 3.2(c)), mientras que la factorización LU completa crea nuevos elementos no nulos (ver Figura 3.2(b)). Este tipo de factorización es útil para utilizarse como preconditionador en el método GMRES debido a que es más eficiente en términos de esfuerzo de cómputo formar una factorización LU incompleta que una factorización LU normal, sobre todo para sistemas altamente dispersos y de gran tamaño. Existen algoritmos de selección de pivotes en la factorización LU tales como el esquema 2 y el esquema 3 de Tinney, los cuales generan un menor número de elementos diferentes de cero. Sin embargo, dichos algoritmos no se aplican en este trabajo.

3.7. Subespacio de Krylov aplicado a flujos de potencia de continuación

El método de flujos de potencia de continuación basado en el subespacio de Krylov consiste en un procedimiento iterativo anidado de dos niveles. El primer nivel representa el lazo de la iteración Newton, mientras que el segundo nivel involucra el lazo iterativo encargado de la construcción del subespacio de Krylov. El método del subespacio de Krylov se utiliza para resolver el sistema de ecuaciones lineales del problema de flujos de potencia de continuación definido en el capítulo 2.

Considérese la condición inicial definida como,

$$\Delta \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \Delta \delta_0 \\ \Delta \mathbf{V}_0 \\ \Delta \lambda_0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

entonces de (2.41) se tiene que el residuo inicial de la corrección Newton se define como,

$$\mathbf{r}_0 = -\Delta \mathbf{y} - \mathbf{J}_c \Delta \mathbf{x}_0 \quad (3.42)$$

en donde,

$$\Delta \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{Q} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

y $\mathbf{J}_c$ es el Jacobiano aumentado del sistema.

La k -ésima iteración GMRES definida en (3.8) requiere de un vector $\mathbf{y}_k$ el

cual minimiza a,

$$\| \mathbf{r}_0 \|_2 = \| -\Delta \mathbf{y} - \mathbf{J}_c \Delta \mathbf{x}_k \|_2 \quad (3.44)$$

La aproximación de la solución $\Delta \mathbf{x}_k$ se obtiene de la expansión del subespacio dado por los vectores de Krylov,

$$\{\mathbf{r}_0, \mathbf{J}_c \mathbf{r}_0, \mathbf{J}_c^2 \mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{J}_c^{k-1} \mathbf{r}_0\} \quad (3.45)$$

La base ortogonal definida en (3.11) toma la forma,

$$\mathbf{J}_c \mathbf{V}_k = \mathbf{V}_{k+1} \bar{\mathbf{H}}_k \quad (3.46)$$

la cual se obtiene aplicando el algoritmo Gram-Schmidt modificado. El problema de mínimos cuadrados que se debe resolver se define en (3.17).

3.7.1. Residuo inicial preconditionado

Primeramente, se aplica el Algoritmo 3 a la matriz Jacobiana $\mathbf{J}_c$ para encontrar las dos matrices preconditionadoras $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ incompletas. Estas matrices de preconditionamiento se utilizan tanto para el residuo inicial como para el producto matriz-vector. El residuo inicial con preconditionamiento izquierdo definido en (3.34) aplicado al método de flujos de potencia de continuación toma la forma,

$$\mathbf{r}'_0 = \mathbf{M}^{-1}(-\Delta \mathbf{y} - \mathbf{J}_c \Delta \mathbf{x}_0) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}_0 \quad (3.47)$$

Para una matriz preconditionadora obtenida mediante factorización LU incompleta, se tiene,

$$\mathbf{r}'_0 = (\mathbf{LU})^{-1} \mathbf{r}_0 \quad (3.48)$$

3. SUBESPACIO DE KRYLOV

De (3.48) se observa que el preconditionamiento del residuo inicial $\mathbf{r}_0$ requiere el producto de las matrices $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ y la inversión de la matriz resultante. Con el propósito de eficientar el cálculo del residuo $\mathbf{r}'_0$, enseguida se propone un procedimiento modificado para calcular (3.48).

Reagrupando (3.48), se tiene,

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}\mathbf{r}'_0) = \mathbf{r}_0 \quad (3.49)$$

Introduciendo un nuevo vector, $\mathbf{q}$ se tiene el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\mathbf{L}\mathbf{q} = \mathbf{r}_0 \quad (3.50)$$

$$\mathbf{U}\mathbf{r}'_0 = \mathbf{q} \quad (3.51)$$

De esta forma, se determina el residuo inicial preconditionado $\mathbf{r}'_0$ de forma eficiente y se evita la inversión de la matriz preconditionadora $\mathbf{M}$ y el producto de las matrices $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$.

3.7.2. Producto matriz-vector preconditionado

Se puede apreciar en (3.45) que la expansión del subespacio de Krylov por medio del método GMRES involucra el Jacobiano aumentado $\mathbf{J}_c$ en la forma de productos matriz-vector. El método GMRES no requiere explícitamente la matriz $\mathbf{J}_c$ ya que únicamente se requiere calcular el producto matriz-vector en cada iteración para construir la base ortonormal del subespacio de Krylov, como se define en (3.46).

Una ventaja clave del método GMRES es que no es necesario elevar la matriz Jacobiana a la potencia k en cada iteración. Esto se debe a que el producto matriz-vector calculado en la iteración anterior ya contiene la información correspondiente a la matriz Jacobiana elevada a la potencia $k - 1$. De esta forma, se evita el costo computacional asociado con la multiplicación repetida de matrices y se optimiza el proceso de generación de la base de Krylov.

El primer vector de la base ortonormal en (3.46) se define por (3.42), en donde $\mathbf{r}_0 = -\Delta\mathbf{y} - \mathbf{J}_c\Delta\mathbf{x}_0$. La secuencia de vectores se genera por medio del producto matriz-vector,

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{J}_c\mathbf{v}_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k \quad (3.52)$$

De esta manera, el proceso se simplifica mediante productos matriz-vector en lugar de potencias sucesivas de la matriz Jacobiana, lo que reduce el costo computacional y mejora la estabilidad numérica. Asimismo, se logra una transición directa entre la representación de (3.45) y la de (3.46), facilitando la construcción eficiente de la base ortonormal de Krylov.

El producto matriz-vector con preconditionamiento izquierdo definido en (3.35) se aplica al método de flujos de potencia de continuación de la siguiente forma,

$$\mathbf{v}'_{k+1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}_c\mathbf{v}_k \quad (3.53)$$

Por lo tanto, el producto matriz-vector definido en (3.53) toma la forma,

$$\mathbf{v}'_{k+1} = (\mathbf{LU})^{-1}\mathbf{v}_{k+1} \quad (3.54)$$

Se puede apreciar que el cálculo de (3.54) requiere también el producto matricial $\mathbf{L}\mathbf{U}$ y enseguida la inversión de la matriz resultante. Para el caso de sistemas de gran escala, el esfuerzo de cómputo para realizar estas tareas puede ser considerable.

Con el propósito de calcular el producto matriz-vector de forma eficiente, la representación de (3.54) cambia de la siguiente forma,

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}\mathbf{v}'_{k+1}) = \mathbf{V}_{k+1} \quad (3.55)$$

Considérese introducir un nuevo vector $\mathbf{z}$, de tal forma que el cálculo del producto matriz-vector se transforma en la solución del siguiente sistema de ecuaciones,

$$\mathbf{L}\mathbf{z} = \mathbf{v}_{k+1} \quad (3.56)$$

y,

$$\mathbf{U}\mathbf{v}'_{k+1} = \mathbf{z} \quad (3.57)$$

3.7.3. Algoritmo de flujos de potencia de continuación basado en GMRES.

En la Figura 3.3 se presenta el diagrama de flujo del algoritmo de flujos de potencia de continuación basado en el método GMRES implementado para este trabajo, el cual incluye una sección de inicialización y dos lazos principales:

- En la sección de inicialización se determinan las condiciones iniciales mediante el método de flujos de potencia. Además, se calcula el vector tangente y el predictor.

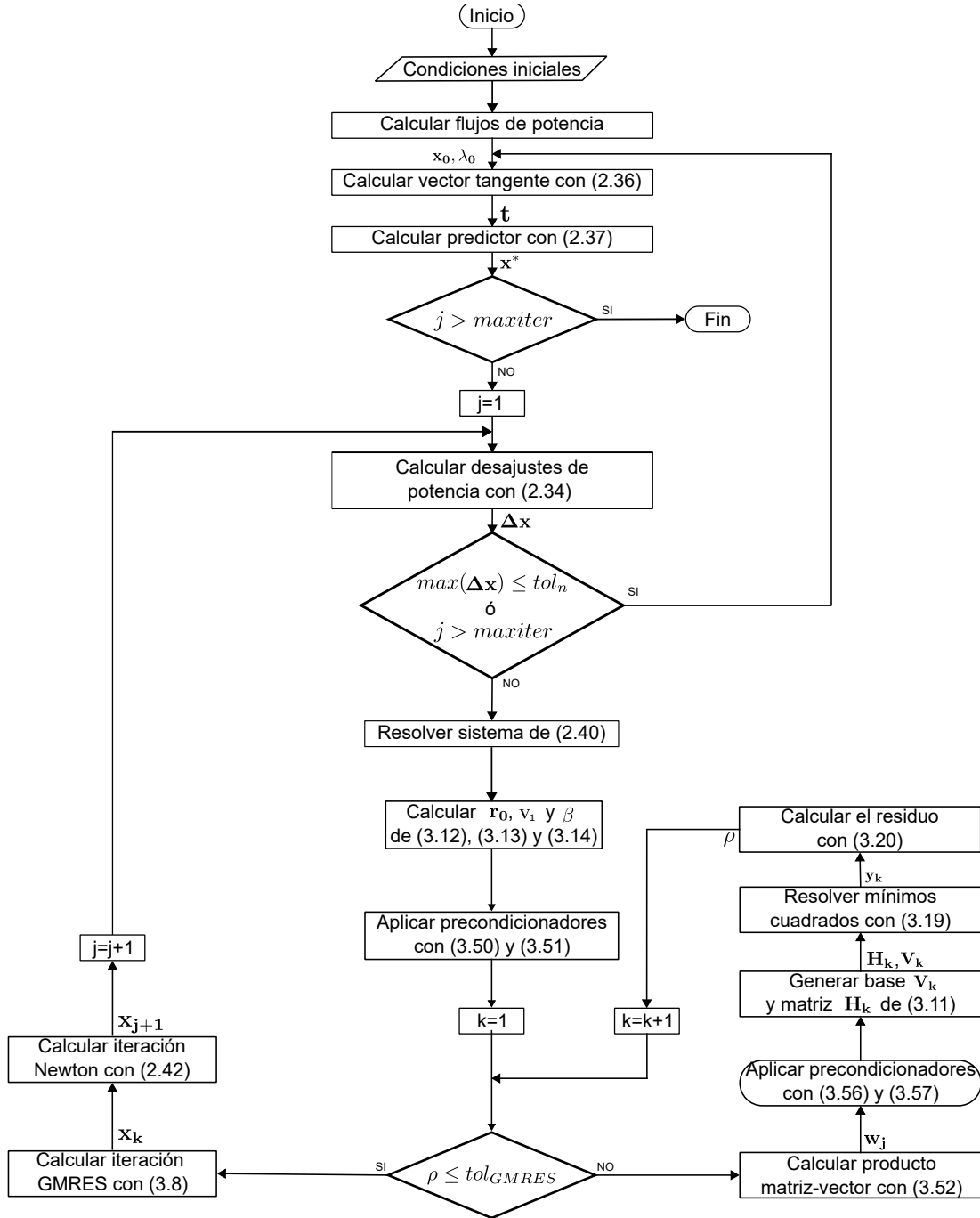


Figura 3.3: Flujos de potencia de continuación usando GMRES.

3. SUBESPACIO DE KRYLOV

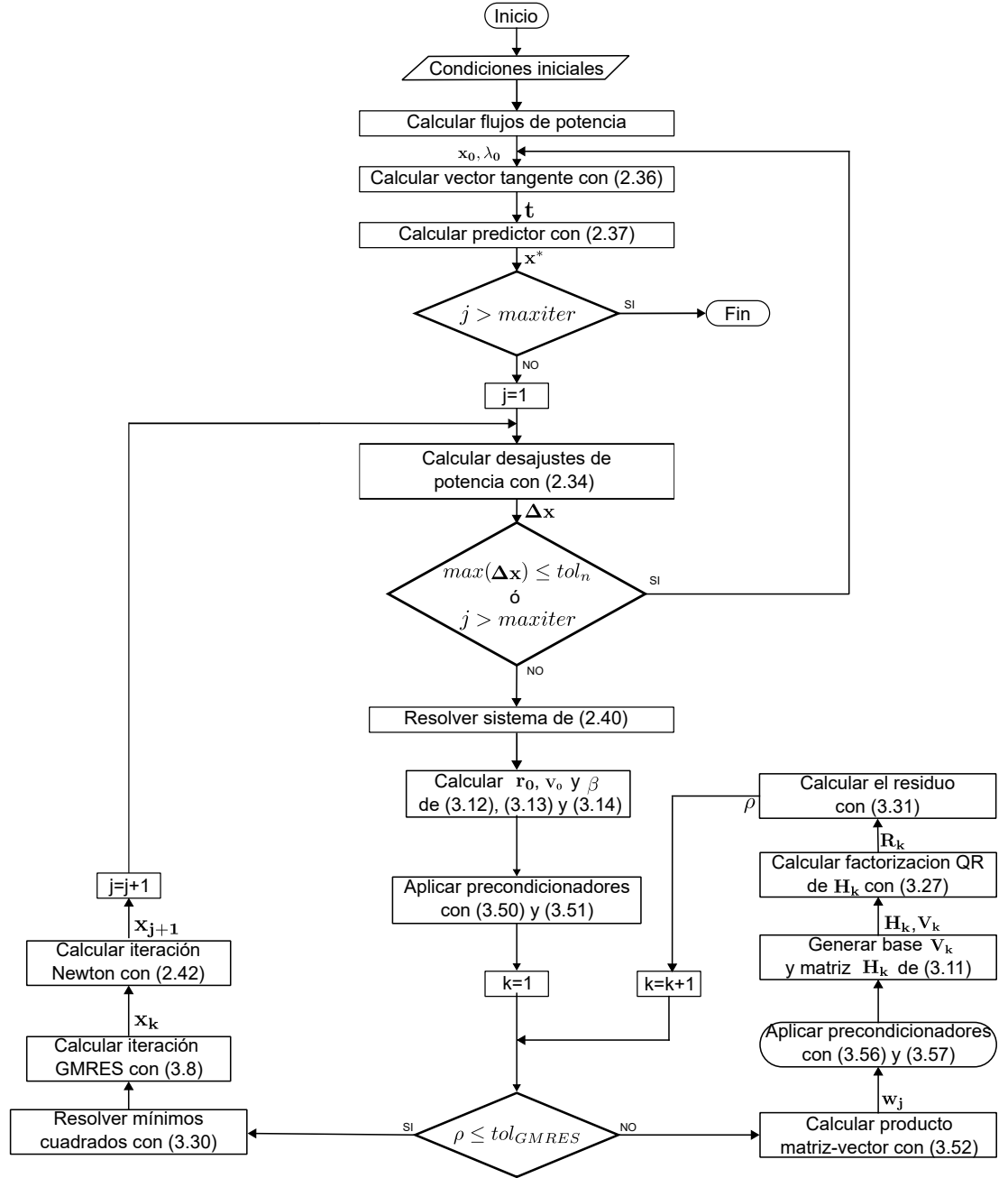


Figura 3.4: Flujos de potencia de continuación usando GMRES y factorización QR.

- El primer lazo corresponde al método de Newton aplicado en la etapa correctiva del método de flujos de potencia de continuación. En esta etapa se resuelve un sistema de ecuaciones que incluye un Jacobiano aumentado, construido a partir de las derivadas parciales de las ecuaciones de flujos de potencia, junto con el parámetro de continuación λ , como se presenta en (2.40). La condición de finalización de este lazo se da cuando el valor absoluto del máximo de los desajustes de potencia en (2.34) es menor que una tolerancia establecida.
- El segundo lazo corresponde al método GMRES, el cual se encarga de resolver iterativamente el sistema de ecuaciones lineales aumentado en la etapa correctiva. Las principales tareas que se realizan son el cálculo del producto matriz-vector, aplicación de preconditionadores, generación de la base ortogonal, solución del problema de mínimos cuadrados y cálculo del residuo.

Por otro lado, en la Figura 3.4 se presenta el diagrama de flujos del método de flujos de potencia de continuación usando el método GMRES y aplicando factorización QR.

La diferencia principal de este enfoque respecto a la propuesta en la Figura 3.3 se encuentra en el lazo iterativo dedicado al método GMRES. En la Figura 3.4 se observa que las principales tareas que se realizan en el lazo GMRES es el cálculo del producto matriz-vector, aplicación de preconditionadores, generación de la base ortogonal, factorización QR y el cálculo del residuo. Obsérvese que no se requiere resolver el problema de mínimos cuadrados en el lazo GMRES. En este enfoque, la solución del método de mínimos cuadrados se realiza hasta finalizar la iteración GMRES. Por lo tanto, el cálculo del vector $\mathbf{y}_k$ se realiza únicamente

al finalizar el ciclo GMRES, lo cual reduce significativamente el esfuerzo computacional requerido. En el Apéndice B se detalla la solución de un sistema de dos nodos usando el algoritmo GMRES.

3.8. Sumario

Se presentaron los fundamentos matemáticos del subespacio de Krylov, aplicado específicamente en el algoritmo GMRES el cual se realiza a través del algoritmo de Arnoldi y la ortogonalización Gram-Schmidt. Además, se presenta el proceso de multiplicación matriz-vector presente en el algoritmo GMRES usando preconditionadores. Además, se describe el subespacio de Krylov aplicado al método de flujos de potencia de continuación.

Capítulo 4

Casos de estudio

En este capítulo se reportan los resultados obtenidos para un conjunto de casos de estudio usando el algoritmo de flujos de potencia de continuación, en donde los sistemas de ecuaciones lineales se resuelven con el método del subespacio de Krylov basado en el método GMRES. Esta metodología se aplica a sistemas de prueba tales como el IEEE 14 nodos y 118 nodos [ICSEG, 2025], así como también a un sistema de prueba de 3120 nodos, el cual corresponde al sistema eléctrico de Polonia en 2008. Los datos para cada uno de estos sistemas se muestran en el Apéndice A. A lo largo de este capítulo se presentan resultados comparativos de la solución del problema de flujos de potencia y flujos de potencia de continuación usando métodos directos de solución de sistemas de ecuaciones, tales como descomposición LU (LU) y métodos iterativos como GMRES (GMRES), GMRES con preconditionamiento (GMRES-PRE), GMRES con descomposición QR (GMRES-QR) y GMRES con preconditionamiento y descomposición QR (GMRES-PRE-QR).

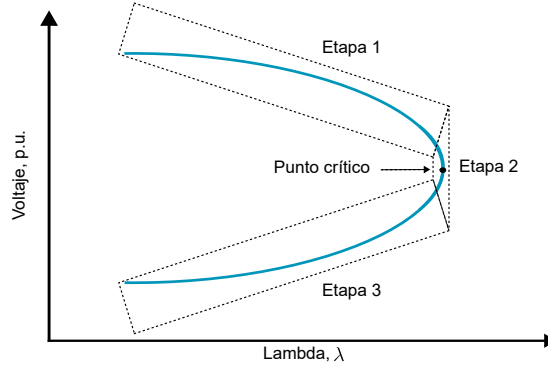


Figura 4.1: Etapas del experimento para todos los casos.

4.1. Diseño del experimento

Para cada sistema de prueba se evalúa el desempeño de los distintos métodos numéricos implementados en este trabajo, considerando tanto su convergencia al estado estable obtenido mediante el método de Newton-Raphson como el esfuerzo computacional requerido por el método de continuación. La convergencia se determina cuando las ecuaciones de balance de potencia activa y reactiva se satisfacen en todos los nodos dentro de una tolerancia de error aceptable. Adicionalmente, se lleva a cabo un análisis de estabilidad de voltaje a través de las curvas PV y un análisis modal del Jacobiano del sistema. Los resultados presentados en este capítulo fueron obtenidos empleando MATLAB, ejecutado en una computadora con procesador AMD Ryzen 7 5700G a 3.8 GHz y 32 GB de memoria RAM.

Cada caso de estudio se desarrolla en tres etapas, correspondientes a tres variaciones del parámetro de continuación. En la Figura 4.1 se ilustran dichas etapas:

- La primera etapa corresponde a la parte superior de la curva PV.
- La segunda etapa abarca el punto de inflexión de la curva.

- La tercera etapa se asocia con la región inferior de la curva, hasta que el método deja de converger o el parámetro λ retorna a su valor inicial.

En cada etapa se ejecuta el método de flujos de potencia de continuación de manera iterativa, repitiendo el proceso varias veces según el tamaño de paso σ , hasta que el método pierde convergencia. El valor del tamaño de paso σ se elige de manera arbitraria, procurando utilizar un valor pequeño cerca del punto de inflexión de la curva PV para mejorar la precisión del método. En ese punto, se modifica el parámetro de continuación, sustituyéndolo por la variable asociada al voltaje en el último nodo analizado (para la segunda etapa). Posteriormente, se restablece el parámetro de continuación a λ para continuar con la tercera etapa, hasta alcanzar nuevamente la pérdida de convergencia o el valor inicial de λ .

En cada paso del método de continuación, los sistemas de ecuaciones lineales generados en la fase correctiva se resuelven mediante el método directo LU y los diferentes métodos iterativos GMRES, con el fin de comparar su desempeño numérico y su eficiencia computacional.

4.2. Sistema de prueba IEEE 14 Nodos

El sistema IEEE 14 nodos cuenta con 9 nodos del tipo PQ, 4 nodos del tipo PV y un nodo SLACK. Los generadores se ubican en los nodos 1, 2, 3, 5, 6 y 8 (ver Figura 4.2). Por lo tanto, el Jacobiano tendrá una dimensión de 22x22, por lo que el subespacio de Krylov desarrollado con el método GMRES podrá tener una dimensión máxima de $k=22$.

Para la realización del experimento se tienen las siguientes consideraciones:

- Los elementos shunt se mantienen conectados durante todo el experimento.

4. CASOS DE ESTUDIO

Tabla 4.1: Datos del sistema IEEE 14 para flujos de potencia de continuación.

	Etapa		
	1	2	3
Parámetro de continuación.	λ	V_{14}	λ
K_{Gi}	1	1	1
K_{Li}	1	1	1
σ	0.1	0.001	0.1

- Se mantiene constante el factor de potencia de las cargas.
- No se toman en cuenta las restricciones de voltaje y potencia reactiva en los generadores.
- El sistema de transmisión no se opera en el punto de operación SIL.

La Tabla 4.1 muestra los datos empleados en la aplicación del método de flujos de potencia de continuación en el sistema IEEE 14 nodos. En la primera columna se indica el parámetro de continuación utilizado en cada una de las etapas en que se construye la curva PV. En la etapa 1, se selecciona λ como parámetro de continuación. Al aproximarse al punto de máxima cargabilidad, se realiza un cambio de parámetro, se utiliza la variable de estado correspondiente al voltaje en el nodo 14 según la Ecuación (2.39) y se reduce el valor de σ a 0.001 (ver etapa 2 en la Tabla 4.1), esto debido a que cerca del punto de colapso el sistema se vuelve mal condicionado y un tamaño de paso grande provocaría pérdida de convergencia en la etapa de corrección. Esta modificación permite que el método mantenga la convergencia durante el cruce por el punto de máxima cargabilidad, donde existe la singularidad del Jacobiano. En la etapa 3, una vez superado este punto, se retorna a λ como parámetro de continuación y se ajusta el valor de σ nuevamente a 0.1.

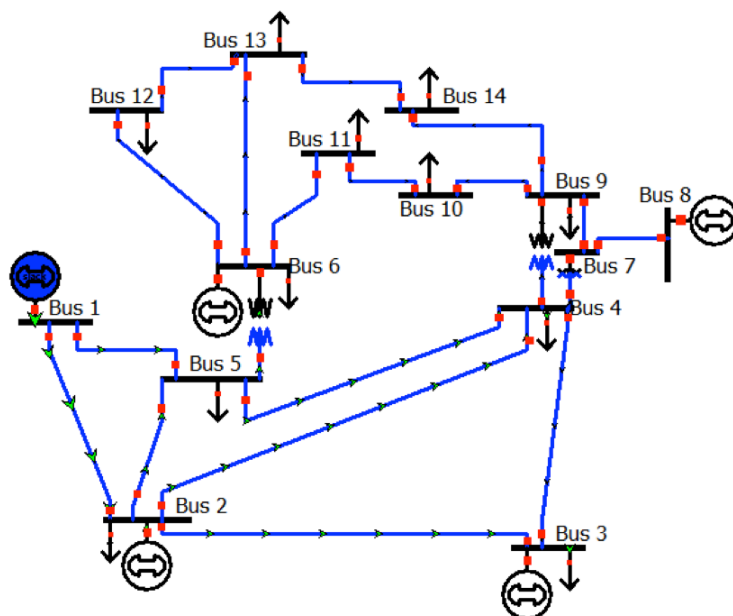


Figura 4.2: Sistema de prueba IEEE 14 nodos.

4.2.1. Flujos de potencia de continuación

En la Tabla 4.2 se reporta la convergencia del método de flujos de potencia para este caso de estudio, en donde se muestra, para cada iteración del método Newton (IN), los máximos desbalances de potencia obtenidos con los diferentes métodos de resolución del sistema linealizado que aparece dentro del método de Newton, así como el número de iteraciones de Krylov (IK) requeridas por cada uno de los métodos GMRES utilizados. Se puede observar que tanto el método directo LU como los métodos iterativos basados en GMRES alcanzan la tolerancia establecida (1×10^{-10}) en 5 iteraciones de Newton, lo cual indica que utilizar métodos iterativos para la solución de sistemas lineales no altera la tasa de convergencia global del método de Newton. En cuanto al desempeño del lazo iterativo interno GMRES, las versiones GMRES y GMRES-QR para este caso de

4. CASOS DE ESTUDIO

Tabla 4.2: Convergencia del método de Newton en el problema de flujos de potencia para el sistema IEEE 14 nodos

IN	LU	GMRES	IK	GMRES-PRE	IK	GMRES-QR	IK	GMRES-PRE-QR	IK
1	9.2194e-01	9.2194e-01	22	9.2194e-01	2	9.2194e-01	22	9.2194e-01	2
2	1.0121e-01	1.0121e-01	22	1.0121e-01	4	1.0121e-01	22	1.0121e-01	4
3	7.1685e-04	7.1685e-04	22	7.1711e-04	4	7.1685e-04	22	7.1711e-04	4
4	6.1476e-08	6.1476e-08	22	6.4392e-08	4	6.1476e-08	22	6.4392e-08	4
5	4.9682e-15	6.2034e-15	22	5.4701e-13	5	5.3291e-15	22	5.4601e-13	5

Tabla 4.3: Tiempos de cómputo para determinar la solución de flujos de potencia para el sistema IEEE 14 nodos.

Método	Tiempo
LU	0.0262 s
GMRES	0.0686 s
GMRE-PRE	0.0552 s
GMRES-QR	0.0608 s
GMRES-PRE-QR	0.0636 s

estudio requieren un número de IK=22 en cada iteración de Newton, es decir, el subespacio de Krylov crece a su valor límite, mientras que las versiones GMRES-PRE y GMRES-PRE-QR requieren únicamente IK= 5 iteraciones de Krylov para lograr el mismo resultado. Esto indica que la aplicación de preconditionadores mejora significativamente la eficiencia de los métodos iterativos, reduciendo el número de iteraciones en el lazo interno sin modificar la precisión del proceso de convergencia.

La Tabla 4.3 reporta los tiempos de ejecución para resolver el problema de flujos de potencia con la tolerancia establecida, en donde se aprecia que los métodos GMRES con o sin preconditionamiento son más lentos en comparación con la alternativa del método directo basado en la factorización LU. Además, no se aprecia una gran diferencia entre los diferentes métodos GMRES para este sistema de prueba de dimensiones pequeñas. Se puede apreciar que, las versiones GMRES son aproximadamente 3 veces más lentas que la versión LU.

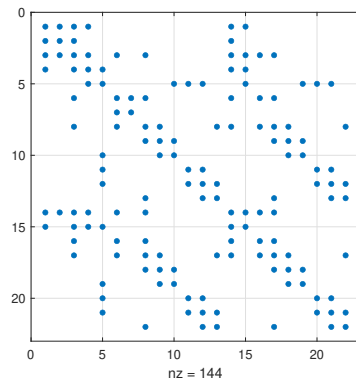
Tabla 4.4: Tiempos de cómputo para determinar la solución de flujos de potencia de continuación para el sistema IEEE 14 nodos

Método	Tiempo
LU	0.2488 s
GMRES	0.5487 s
GMRES-PRE	0.2927 s
GMRES-QR	0.4594 s
GMRES-PRE-QR	0.3229 s

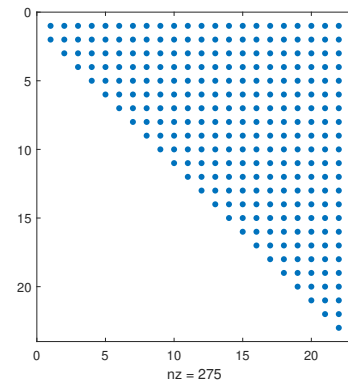
La Tabla 4.4 reporta los resultados en términos de tiempo de cómputo total para generar la curva PV en el nodo 5 del sistema IEEE 14 nodos usando el método de flujos de potencia de continuación. Se puede apreciar que el método LU resuelve una curva PV completa en un tiempo menor en comparación con los métodos GMRES. Mientras que la versión LU demanda 0.2488 s, las versiones iterativas GMRES, GMRES-PRE, GMRES-QR y GMRES-PRE-QR requieren 0.5487 s, 0.2927 s, 0.4594 s y 0.3229 s, respectivamente.

En la Figura 4.3 se presenta el patrón de dispersidad, el cual se define como la distribución de los elementos nulos y no nulos dentro de la matriz Jacobiana para este caso de estudio. Mientras que la Figura 4.3(a) describe el patrón de dispersidad de la matriz Jacobiana que se utiliza en el método LU, la Figura 4.3(b) describe el patrón de dispersidad de la matriz Hessenberg que se forma en el proceso interno de los métodos GMRES y GMRES-QR. Por su parte, la Figura 4.3(c) describe el patrón de dispersidad de la matriz Hessenberg con preconditionamiento de los métodos GMRES-PRE y GMRES-PRE-QR. Se observa que la matriz Hessenberg es una matriz triangular superior con elementos diferentes de cero debajo de la diagonal. El número de elementos diferentes de cero en el Jacobiano usado en el algoritmo LU, la matriz de Hessenberg con el método GMRES y la matriz Hessenberg con el método GMRES-PRE es de 144, 275 y 20, respecti-

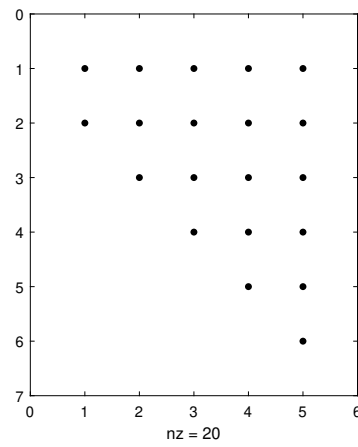
4. CASOS DE ESTUDIO



(a)



(b)



(c)

Figura 4.3: Patrón de dispersidad para: a) Jacobiano método LU, b) Matriz Hessenberg método GMRES y c) Matriz Hessenberg método GMRES-PRE.

vamente. Además, la matriz Hessenberg del método GMRES sin preconditionar alcanza una dimensión de 23x22, mientras que el método GMRES-PRE produce una matriz de Hessenberg de dimensión de solo 6x5. Además, la matriz Hessenberg de la Figura 4.3(c) tiene dimensiones menores que el Jacobiano involucrado en la descomposición LU debido a que el subespacio de Krylov alcanzó un valor máximo de solo $IK=5$.

4.2.2. Análisis de estabilidad

En la Figura 4.4 se presenta la curva PV completa para el sistema IEEE 14 nodos en el nodo 5 obtenida con el método de flujos de potencia de continuación y el método GMRES. Se puede observar que el eje horizontal representa el parámetro λ que varía la potencia real en la carga en todos los nodos del sistema de la forma $P_0(1 + \lambda K_L)$, mientras que en el eje vertical se muestra el voltaje en por unidad en el nodo 5.

La Figura 4.4 muestra también el punto de máxima cargabilidad del sistema IEEE 14 nodos. Se observa que el punto de colapso o máxima carga posible se ubica en $\lambda = 3.064$, lo que se traduce en un aumento en la carga en todos los nodos del sistema de P_0 a $4.064P_0$. Después de este punto de operación es imposible volver a los valores de voltaje anteriores, aun cuando se reduzca la carga gradualmente, ya que el voltaje sigue decreciendo al mismo tiempo que decrece el parámetro λ .

La Figura 4.5 reporta los resultados del análisis modal aplicado al Jacobiano de este caso de estudio. Se puede apreciar que los 22 valores característicos del sistema se desplazan en el plano complejo conforme se varía la carga, pero solamente uno de los valores característicos cruza del semiplano derecho al semiplano

4. CASOS DE ESTUDIO

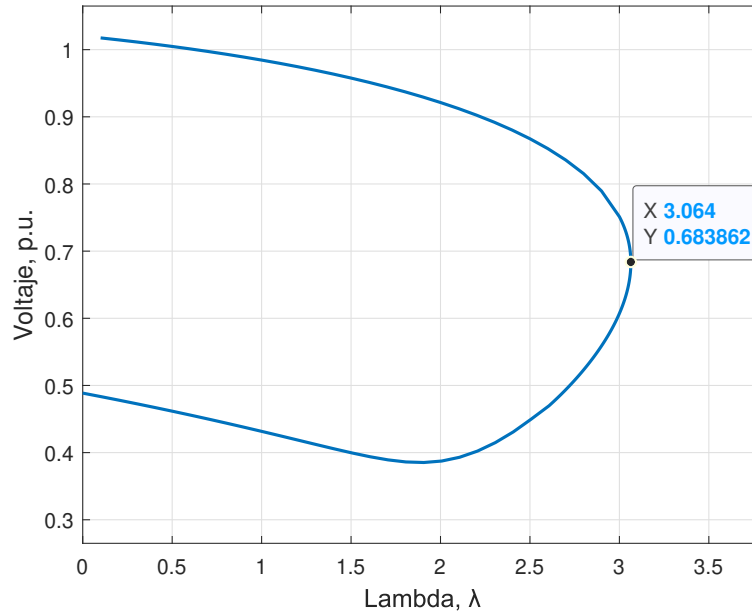


Figura 4.4: Curva PV completa en el nodo 5 del sistema IEEE 14 nodos.

izquierdo, el cual es el valor característico más crítico. Se puede apreciar que la mayoría de los valores característicos del Jacobiano se mantienen en el semiplano positivo.

La Figura 4.6 muestra un análisis nodal del sistema de 14 nodos. En la primera etapa en negro, se muestra la evolución de los valores característicos a medida que el método de continuación forma la curva PV completa para el sistema IEEE 14 nodos, la flecha en la Figura 4.6 (a) indica cómo es que los valores característicos se desplazan de derecha a izquierda a medida que el método de continuación se acerca al punto de máxima cargabilidad sin que ningún valor característico cambie de signo, es decir, no se cruza el eje imaginario. La Figura 4.6 (b) muestra la evolución de los valores característicos en la zona correspondiente al punto de inflexión de la curva, donde se puede observar que hay un valor característico que cruza el eje imaginario, lo que indica que se llega al punto de máxima cargabilidad

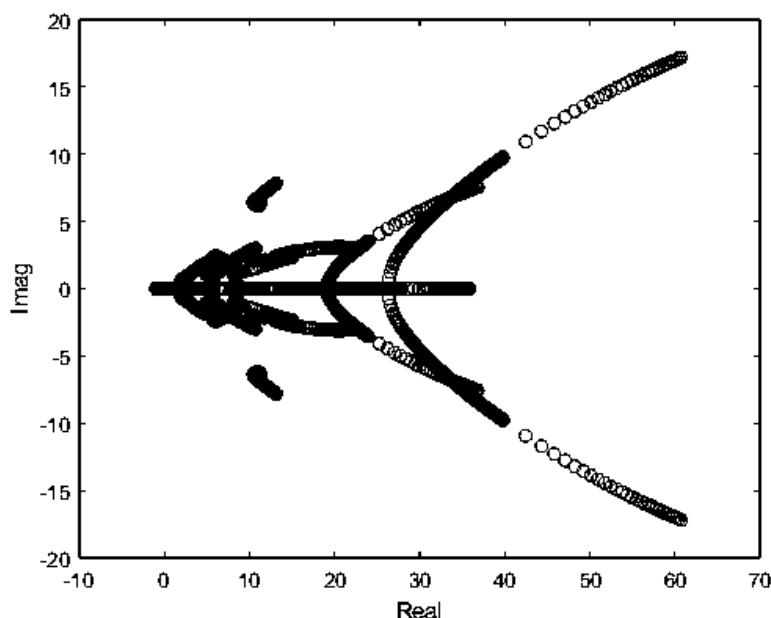
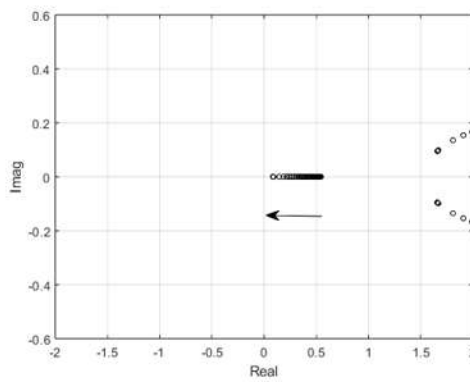


Figura 4.5: Análisis modal del sistema IEEE 14 nodos.

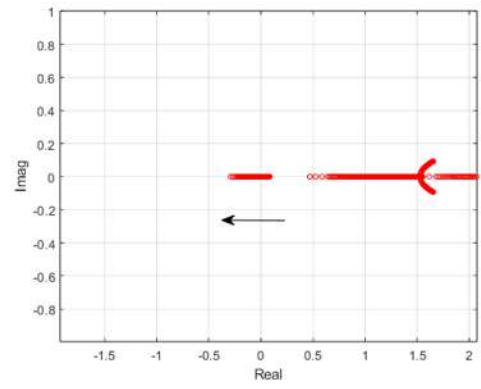
y el sistema se convierte en inestable. La Figura 4.6 (c) muestra la evolución de los valores característicos al cruzar el punto de inflexión de la curva, donde la fecha indica cómo los valores característicos continúan desplazándose en su parte real, incluido el único valor característico que ya se encuentra en el semiplano inestable del plano complejo.

La Figura 4.7 reporta la parte real de los 22 valores característicos en función del parámetro λ , este parámetro se incrementó gradualmente desde $\lambda = 0$ hasta un λ crítico, siguiendo el mismo esquema que en el método de flujos de potencia de continuación utilizado para formar la curva PV de la Figura 4.4. Mientras que la Figura 4.7(a) muestra los valores característicos del Jacobiano del sistema IEEE 14 nodos, la Figura 4.7(b) se enfoca en el valor característico más crítico. El valor característico de la Figura 4.7(b) cambia de signo en su parte real al llegar al punto de máxima cargabilidad, el cual se ubica en λ igual

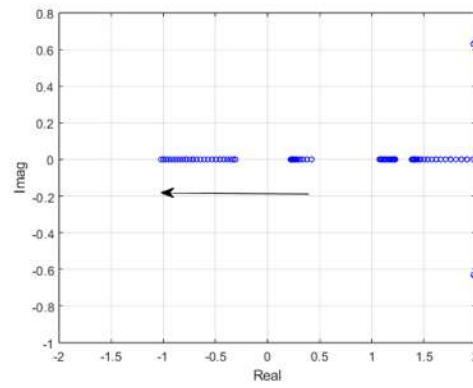
4. CASOS DE ESTUDIO



(a)



(b)



(c)

Figura 4.6: Análisis modal para: a) Parte superior de la curva, b) Punto de inflexión de la curva y c) Parte inferior de la curva.

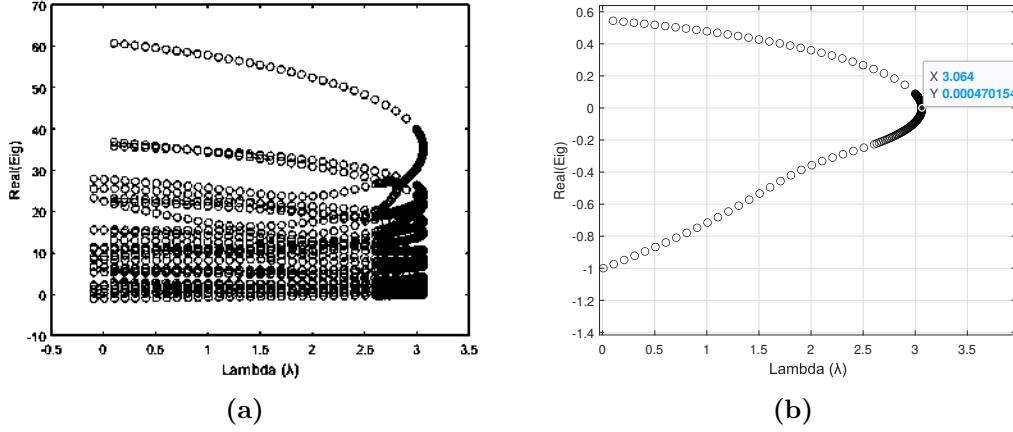


Figura 4.7: Valores característicos vs Lambda: a) 22 valores característicos y b) acercamiento al valor característico más crítico.

a 3.064. A partir de este punto, la parte real del valor característico cambia de positiva a negativa, lo cual indica que se cruzó el eje imaginario. Por lo tanto, la solución cambia de ser estable a inestable y a partir de ese punto el voltaje se colapsa.

4.3. Sistema IEEE 118 Nodos

El sistema de prueba IEEE 118 nodos consta de 64 nodos PQ, 53 nodos PV y un nodo SLACK. El Jacobiano de este sistema tiene una dimensión de 181×181 , por lo tanto, el subespacio de Krylov podría crecer a un valor máximo de 181 columnas. La Tabla 4.5 presenta los parámetros utilizados para aplicar el método de flujos de potencia de continuación en el sistema IEEE 118 nodos. Inicialmente, se selecciona λ como parámetro de continuación. Conforme se aproxima el punto de inflexión en la curva PV, se realiza un primer cambio del parámetro de continuación, eligiendo la variable de estado asociada al voltaje del nodo 118. En

4. CASOS DE ESTUDIO

Tabla 4.5: Datos del sistema IEEE 118 para flujos de potencia de continuación.

	Etapa		
	1	2	3
Parámetro de continuación	λ	V_{118}	λ
K_{Gi}	1	1	1
K_{Li}	1	1	1
σ	0.1	0.0001	0.1

Tabla 4.6: Convergencia del método de flujos de potencia para el sistema IEEE 118 nodos.

IN	LU	GMRES	IK	GMRES-PRE	IK	GMRES-QR	IK	GMRES-PRE-QR	IK
1	5.8894e+00	5.8894e+00	106	5.8894e+00	4	5.8894e+00	106	5.8894e+00	4
2	8.2538e-01	8.2538e-01	106	8.2538e-01	6	8.2538e-01	106	8.2538e-01	6
3	1.0411e-02	1.0411e-02	106	1.0411e-02	5	1.0411e-02	106	1.0411e-02	5
4	3.2319e-06	3.2317e-06	107	3.2604e-06	5	3.2317e-06	107	3.2604e-06	5
5	4.0501e-13	1.3298e-12	112	3.3284e-11	6	1.3297e-12	112	3.3289e-11	6

esta etapa, el valor de σ se reduce a 0.0001 con el objetivo de que el predictor tangencial avance en pasos más pequeños, evitando así la posible singularidad de la matriz Jacobiana durante la fase correctiva. Una vez superado el punto de inflexión, se efectúa un segundo cambio del parámetro de continuación, regresando a λ , y se ajusta el valor de σ a 0.1.

Para la realización del experimento se tienen las siguientes consideraciones:

- Los elementos shunt se mantienen constantes en todo el experimento.
- Se mantiene constante el factor de potencia.
- No se toman en cuenta las restricciones de voltaje y potencia reactiva.
- El sistema de transmisión no se opera en el punto de operación SIL.

Tabla 4.7: Tiempos de cómputo para el método de flujos de potencia para el sistema IEEE 118 nodos.

Método	Tiempo
LU	0.0645 s
GMRES	0.3307 s
GMRES-PRE	0.0781 s
GMRES-QR	0.1858 s
GMRES-PRE-QR	0.0801 s

4.3.1. Flujos de potencia de continuación

La Tabla 4.6 reporta la convergencia del método de flujos de potencia usando el método directo LU y el método iterativo GMRES. Se puede apreciar que tanto el método LU como el método GMRES requieren 5 iteraciones del método Newton. Además, se puede apreciar que los métodos GMRES, GMRES-PRE, GMRES-QR y GMRES-PRE-QR demandan un número máximo de iteraciones de Krylov de 112, 6, 112 y 6, respectivamente. Estos resultados demuestran claramente que el método GMRES preconditionado permite reducir considerablemente el número de iteraciones Krylov necesarias para alcanzar la tolerancia deseada.

En la Tabla 4.7 se reportan los tiempos de cómputo demandados para alcanzar el estado estable mediante el método de Newton para flujos de potencia en el caso base del sistema. El algoritmo LU presenta el menor esfuerzo de cómputo con 0.0645 s, seguido del GMRES-PRE con 0.0781 s y el GMRES-PRE-QR con 0.0801 s. Se observa que los tiempos de cómputo se incrementan notablemente cuando el método GMRES no se preconditiona. Si bien el método GMRES-QR ofrece una disminución de casi el 50 % del tiempo de cómputo demandado por la versión GMRES, dicho tiempo sigue siendo mayor que las versiones GMRES-PRE y GMRES-PRE-QR.

4. CASOS DE ESTUDIO

Tabla 4.8: Tiempos de cómputo para el método de flujos de potencia de continuación para el sistema IEEE 118 nodos

Método	Tiempo
LU	4.4192 s
GMRES	22.2604 s
GMRES-PRE	4.5313 s
GMRES-QR	9.2222 s
GMRES-PRE-QR	4.4902 s

Para el caso del método de flujos de potencia de continuación, se puede apreciar en la Tabla 4.8 que los tiempos de cómputo de los métodos GMRES-PRE y GMRES-PRE-QR son prácticamente iguales al método directo LU. El método GMRES sin preconditionar tarda 5 veces más que el método directo y los métodos GMRES preconditionados. Al agregar la factorización QR al método GMRES se obtiene una reducción importante en el tiempo de cómputo de 22.2604 s a 9.2222 s. Sin embargo el tiempo demandado por el método GMRES-QR es aproximadamente el doble del tiempo requerido por las versiones GMRES-PRE y GMRES-PRE-QR.

4.3.2. Análisis de estabilidad

En la Figura 4.8 se muestra la curva PV completa para este caso de estudio en el nodo 38. Se puede ver que el voltaje colapsa después del punto de inflexión de la curva. Además, en la Figura 4.8 se observa que el punto de máxima carga posible se ubica en un valor de $\lambda = 2.1885$, en donde el voltaje alcanza un valor de 0.7136 p.u.

En la Figura 4.9 se muestra la evolución de los 181 valores característicos obtenidos a partir del análisis modal del sistema IEEE de 118 nodos, conforme se

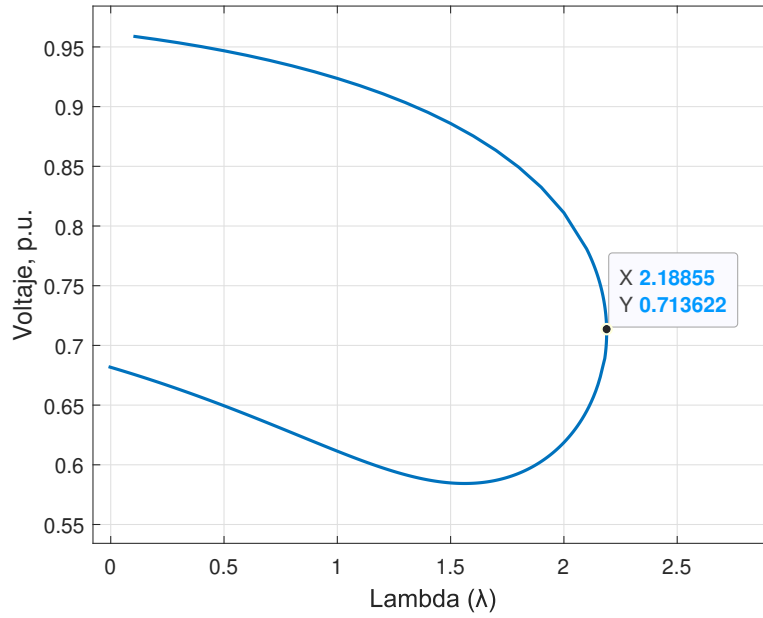


Figura 4.8: Curva PV completa en el nodo 38 del sistema IEEE 118 nodos.

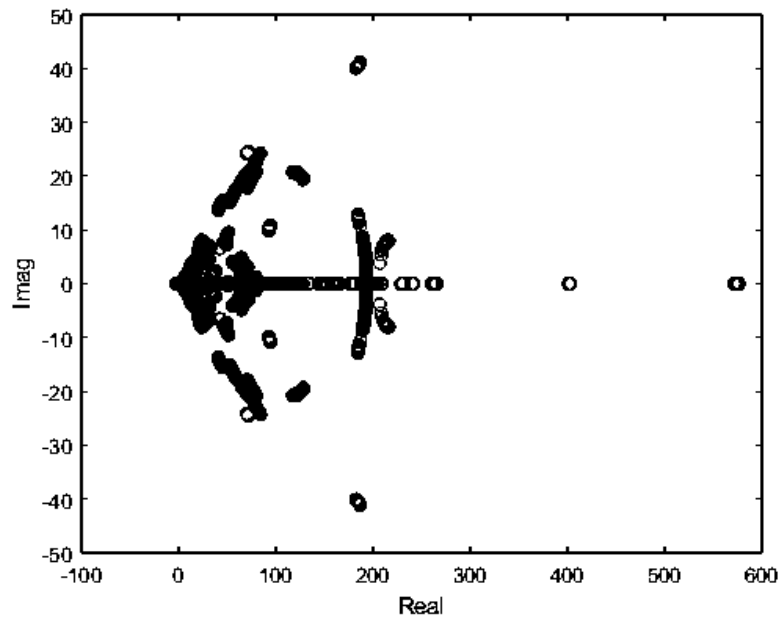
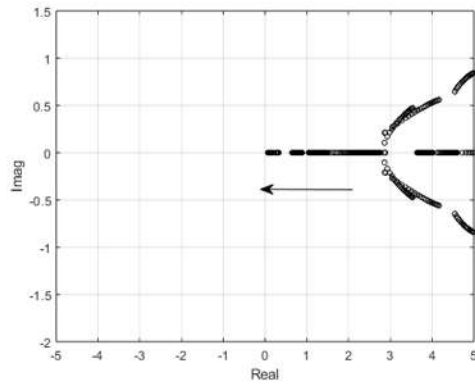


Figura 4.9: Análisis modal del sistema IEEE 118 nodos.

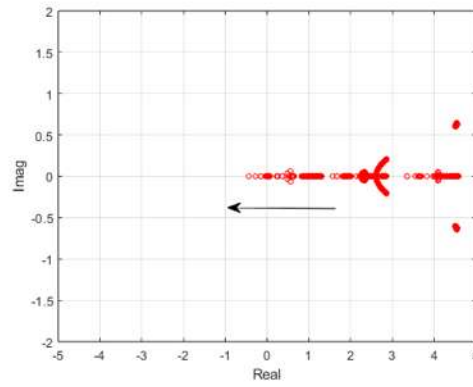
4. CASOS DE ESTUDIO

incrementa el parámetro de cargabilidad λ . Se observa que una gran proporción de los valores característicos permanece sobre el eje real y en el semiplano derecho del plano complejo. En la Figura 4.10 se presenta el mismo espectro modal dividido en tres etapas. En particular, la Figura 4.10(a) corresponde al análisis modal en la parte superior de la curva PV, es decir, entre los puntos A y B de la Figura 4.13. Se observa que, a medida que avanza el método de continuación, los valores característicos se desplazan de derecha a izquierda, como lo indica la flecha, sin llegar a cruzar el eje imaginario. Este comportamiento indica que en esta etapa de la curva PV no se presentan problemas de estabilidad. La Figura 4.10(b) muestra el análisis modal de la curva PV entre los puntos B y C de la Figura 4.13. En esta etapa se aprecia cómo los valores característicos continúan aproximándose al eje imaginario, hasta que uno de ellos lo cruza exactamente en el punto de máxima cargabilidad. Este cruce indica la pérdida de estabilidad del sistema y explica que, a partir de este punto, aun cuando se reduzca la carga, los niveles de voltaje no regresan a sus valores previos. Finalmente, la Figura 4.10(c) presenta el análisis modal correspondiente al tramo entre los puntos C y D de la Figura 4.13. En este caso, los valores característicos continúan moviéndose a lo largo del eje real, incluido el valor característico más crítico, el cual permanece en el semiplano inestable. Este comportamiento confirma que el sistema no recupera su estabilidad en esta región de la curva PV.

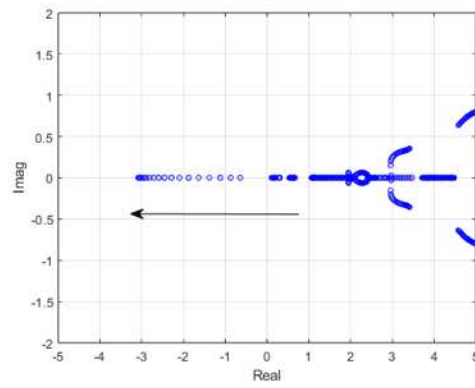
La Figura 4.11 reporta la parte real de los valores característicos respecto de λ . Mientras que la Figura 4.11(a) reporta el comportamiento de todos los valores característicos del Jacobiano del sistema IEEE 118 nodos, la Figura 4.11(b) presenta únicamente el comportamiento del valor característico más crítico, el cual es el único valor característico que cambia de signo en su parte real.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.10: Análisis modal para: a) Parte superior de la curva, b) Punto de inflexión de la curva y c) Parte inferior de la curva.

4. CASOS DE ESTUDIO

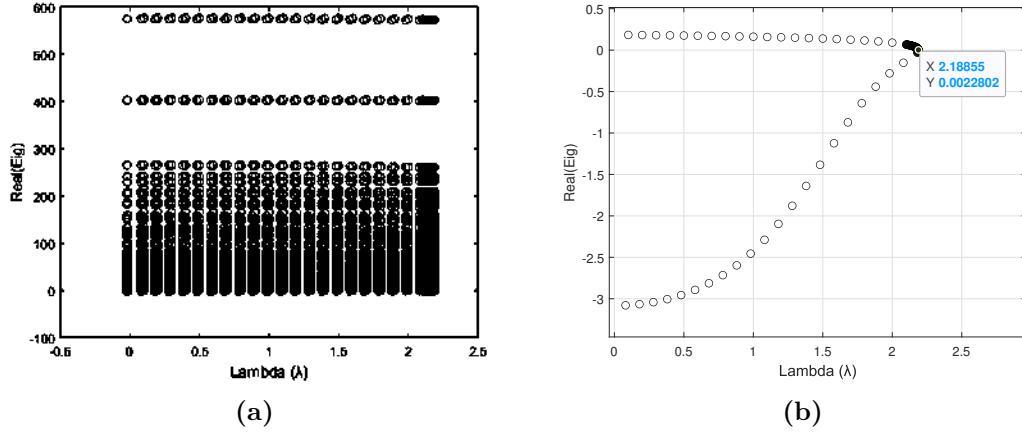


Figura 4.11: Parte real de los valores característicos vs lambda: a) 181 valores característicos y b) valor característico más crítico.

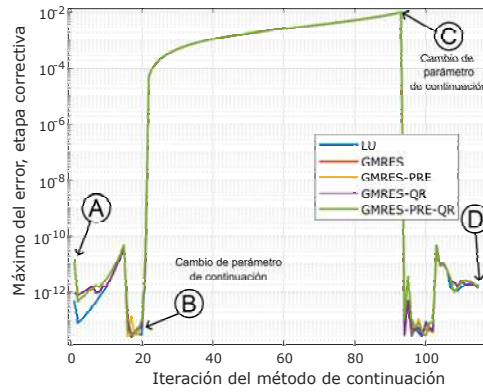


Figura 4.12: Gráfica del error mínimo del sistema IEEE 118.

Se puede apreciar que el valor característico más crítico cambia de signo para un valor de $\lambda = 2.1886$. Por lo tanto, este valor de lambda coincide con el valor determinado mediante la curva PV reportada en la Figura 4.8.

Para formar la curva PV de la Figura 4.8 con los parámetros mencionados previamente, hacen falta 115 iteraciones del método de continuación. La Figura 4.12 muestra la evolución del error mínimo de la parte correctiva del método de flujos de potencia de continuación en función del número de iteraciones del método de

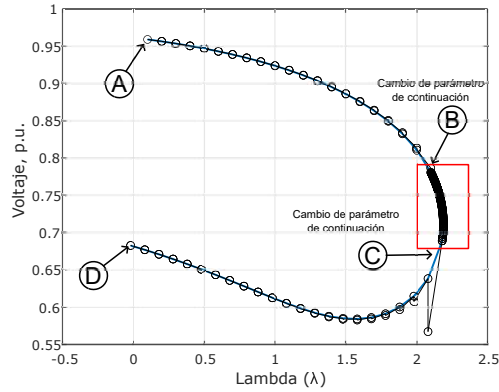


Figura 4.13: Zona de la curva con problemas de convergencia.

continuación. Se presentan los diferentes métodos iterativos para la resolución de los sistemas de ecuaciones. En el eje horizontal se representa el número de iteraciones requeridas por el algoritmo de flujos de potencia de continuación, mientras que en el eje vertical se muestra el valor del máximo del absoluto del vector de error en la última iteración del método de Newton alcanzado para cada iteración del método de continuación. Se observa que, conforme avanza el proceso iterativo, el error disminuye progresivamente, lo que indica una adecuada convergencia del método. Sin embargo, al aproximarse al punto crítico del sistema, el cual se observa en un cuadrado en rojo en la Figura 4.13 (región cercana al colapso de voltaje) y entre los puntos B y C de las figuras 4.12 y 4.13, el error comienza a incrementarse, dejando en evidencia los problemas de convergencia cercana a este punto. Este comportamiento es característico del método cuando el sistema se acerca a su límite de estabilidad, ya que la matriz Jacobiana se vuelve mal condicionada, dificultando la solución del sistema de ecuaciones no lineales. El incremento repentino del error permite identificar el punto máximo de cargabilidad del sistema. Posteriormente, a partir del punto C, se realiza nuevamente un

4. CASOS DE ESTUDIO

Tabla 4.9: Datos del sistema de 3120 nodos para flujos de potencia de continuación.

	Etapa		
	1	2	3
Parámetro de continuación	λ	V_{3120}	λ
K_{Gi}	1	1	1
K_{Li}	1	1	1
σ	0.1	0.001	0.05

cambio en el parámetro de continuación. Una vez que se ha sobrepasado el punto de máxima cargabilidad, los valores de convergencia comienzan a decrecer, lo que indica que el sistema vuelve a estar bien condicionado.

4.4. Sistema de 3120 Nodos

El sistema de prueba de mayores dimensiones que se resolvió en este trabajo consiste de 3120 nodos, de los cuales 2770 nodos son del tipo PQ, 349 nodos del tipo PV y un nodo SLACK. Los datos de este sistema de prueba se encuentran en el Apéndice A. El tamaño del Jacobiano para este sistema es de 5889×5889 y, por lo tanto, la dimensión del subespacio de Krylov podría crecer a un valor máximo de 5889 columnas. En la Tabla 4.9 se presentan los datos correspondientes al sistema de 3120 nodos utilizados en el método de flujos de potencia de continuación. Siguiendo la misma estrategia empleada en los casos anteriores, se inicia el proceso eligiendo a λ como parámetro de continuación, con un valor inicial de $\sigma = 0.1$. Al alcanzar el punto de inflexión en la curva PV, se modifica el parámetro de continuación, seleccionando la variable asociada al voltaje del nodo 3120, y se reduce el valor de σ a 0.001 con el fin de mejorar la precisión del método en esta región crítica. Finalmente, se retorna a λ como parámetro de continuación, estableciendo un nuevo valor de $\sigma = 0.05$.

Tabla 4.10: Convergencia del método de Newton en el problema de flujos de potencia para el sistema de 3120 nodos.

IN	LU	GMRES	IK	GMRES-PRE	IK	GMRES-QR	IK	GMRES-PRE-QR	IK
1	6.1107e+02	6.1107e+02	1834	6.1107e+02	27	6.1107e+02	1834	6.1107e+02	27
2	4.7192e+01	4.7192e+01	2109	4.7193e+01	33	4.7192e+01	2109	4.7193e+01	33
3	1.5889e+01	1.5889e+01	2070	1.5887e+01	29	1.5889e+01	2070	1.5887e+01	29
4	1.3837e+00	1.3837e+00	2059	1.3829e+00	32	1.3836e+00	2059	1.3829e+00	32
5	1.5611e-02	1.5611e-02	2104	1.5593e-02	29	1.5608e-02	2104	1.5593e-02	29
6	2.2571e-06	2.2571e-06	2119	2.2531e-06	32	2.2575e-06	2119	2.2531e-06	32
7	7.8657e-12	2.9132e-11	2301	2.9132e-11	36	9.8872e-12	2298	2.9146e-11	36

Para la realización del experimento se tienen las siguientes consideraciones:

- Los elementos shunt se mantienen constantes en todo el experimento.
- Se mantiene el factor de potencia constante.
- No se toman en cuenta las restricciones de voltaje y potencia reactiva.
- El sistema de transmisión no se opera en el punto de operación SIL.

4.4.1. Flujos de potencia de continuación

En la Tabla 4.10 se reporta la convergencia del método de flujos de potencia para este caso de estudio en el primer punto de la curva PV, es decir, el caso base donde la carga aún no aumenta. Cabe mencionar que la solución al problema de flujos de potencia se realiza tomando en cuenta condiciones iniciales planas, es decir, se toman valores de voltaje en 1 y ángulos de fase en 0. Es por esto que el error Newton de la primera iteración es demasiado grande. Se aprecia que tanto el enfoque basado en la descomposición LU como las variantes del método GMRES demandan un número total de siete iteraciones Newton. Respecto al número de iteraciones de Krylov, los métodos GMRES, GMRES-PRE, GMRES-QR y GMRES-PRE-QR requieren 2301, 36, 2298 y 36 iteraciones, respectivamente. Ob-

4. CASOS DE ESTUDIO

Tabla 4.11: Tiempos para flujos de potencia para el sistema de 3120 nodos

Método	Tiempo
LU	34.5125 s
GMRES	4065.5489 s
GMRES-PRE	17.7800 s
GMRES-QR	540.6093 s
GMRES-PRE-QR	17.5177 s

sérvese que para el método GMRES sin preconditionar, el método del subespacio de Krylov requiere un máximo de $IK=2301$ iteraciones, lo que representa menos de un 50 % del tamaño máximo factible. Por su parte, los métodos GMRES-PRE y GMRES-PRE-QR generan un subespacio de Krylov máximo de $k=36$, lo cual representa únicamente el 0.6 % de la máxima dimensión factible del subespacio de Krylov.

En términos de tiempos de cómputo, se observa en la Tabla 4.11 que el método más lento es el método iterativo GMRES con 4065.5489 s y el más rápido es el método GMRES-PRE-QR con 17.5177 s, que por unas décimas de segundo resulta más rápido que el método GMRES-PRE (17.78 s). El método GMRES-PRE-QR es un 50 % más rápido que el método directo LU, por lo que se espera que el método de flujos de potencia de continuación sea igual de eficaz para obtener una curva PV completa. Por otra parte, se observa que el método sin preconditionar GMRES-QR es aproximadamente 7.5 veces más rápido que el método GMRES sin preconditionar convencional. Esto se debe a que la descomposición QR genera un sistema de ecuaciones triangular superior, el cual se resuelve eficientemente. Sin embargo, el GMRES-QR no es tan eficiente como la versión preconditionada, por lo que este método no sería adecuado para formar una curva PV completa en el método de flujos de potencia de continuación.

Tabla 4.12: Tiempos para flujos de potencia de continuación para el sistema de 3120 nodos.

Método	Tiempo
LU	554.8215 s
GMRES	130767.9988 s
GMRES-PRE	247.0459 s
GMRES-QR	7556.5689 s
GMRES-PRE-QR	248.2352 s

En la Tabla 4.12 se presentan los tiempos de ejecución del método de flujos de potencia de continuación para este caso de estudio. Se puede ver que el método GMRES-PRE y GMRES-PRE-QR presentan los menores tiempos, con 247.0459 s y 248.2352 s, mientras que a la descomposición LU le tomó 554.8215 s. Es decir, las versiones GMRES-PRE y GMRES-PRE-QR demandaron solo el 44.3 % y 44.7 % del tiempo demandado por la descomposición LU. Por otro lado, los métodos GMRES sin preconditionar demandan un tiempo de ejecución excesivamente grande en comparación con los demás métodos. El método GMRES-QR ejecuta el algoritmo de flujos de potencia de continuación completo en 7556.5689 s, mientras que el método GMRES requiere 130767.9988 s para resolver una curva PV completa para este caso de estudio de 3120 nodos. Por lo tanto, las variantes del método GMRES sin preconditionar no son recomendables para realizar el análisis de estabilidad de sistemas de gran escala.

4.4.2. Análisis de estabilidad

La Figura 4.14 presenta la curva PV en el nodo 217 del sistema de prueba de 3120 nodos. Se puede apreciar que la curva PV para este nodo no es completa. Esto se debe al hecho de que el método de flujos de potencia de continuación

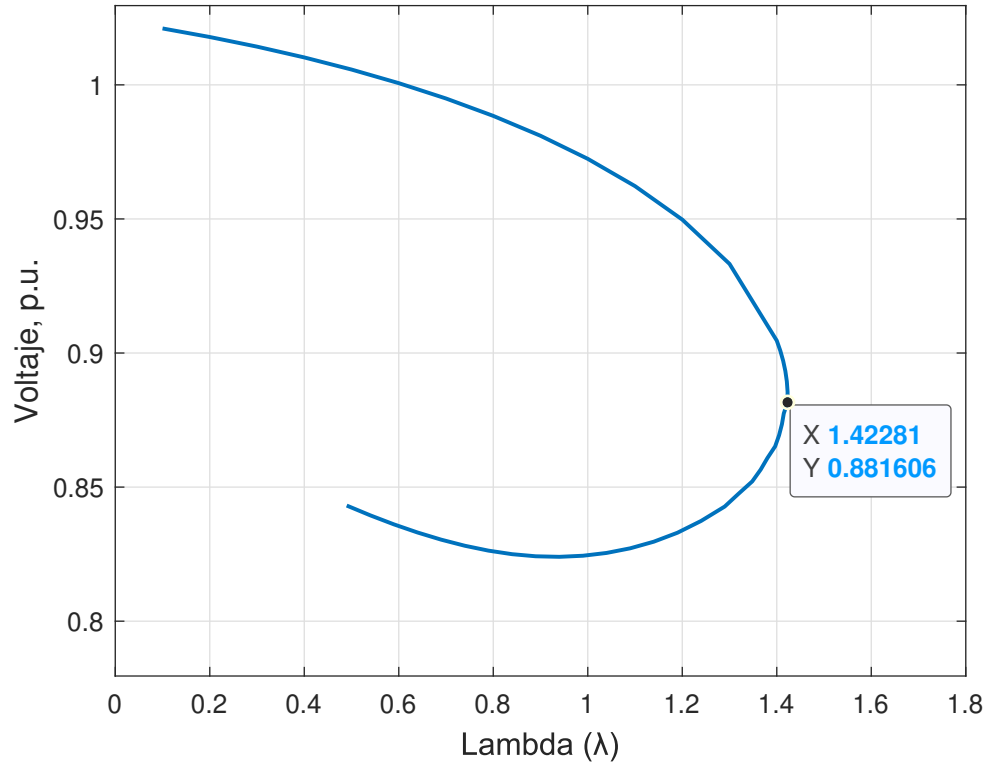


Figura 4.14: Curva PV en el nodo 217 del sistema de 3120 nodos

no converge más allá de este último punto mostrado. Sin embargo, se observa que el punto de máxima cargabilidad en el nodo 217 se ubica en $\lambda = 1.4229$ que corresponde a un voltaje de 0.8816 p.u. Se observa también en la Figura 4.14 que el margen no es muy amplio al tener un punto de colapso en un valor de $\lambda = 1.4229$ lo que indica que la carga crece un máximo de $2.4229P_0$.

El sistema de 3120 nodos es un sistema con un Jacobiano de 5889×5889 . El análisis modal arroja un número total de 5889 valores característicos. La Figura 4.15 muestra la evolución del análisis modal cuando se varía lambda. Se puede apreciar que la mayoría de los valores característicos contienen parte real e imaginaria. Sin embargo, en este caso se puede observar que, cerca del cruce con el

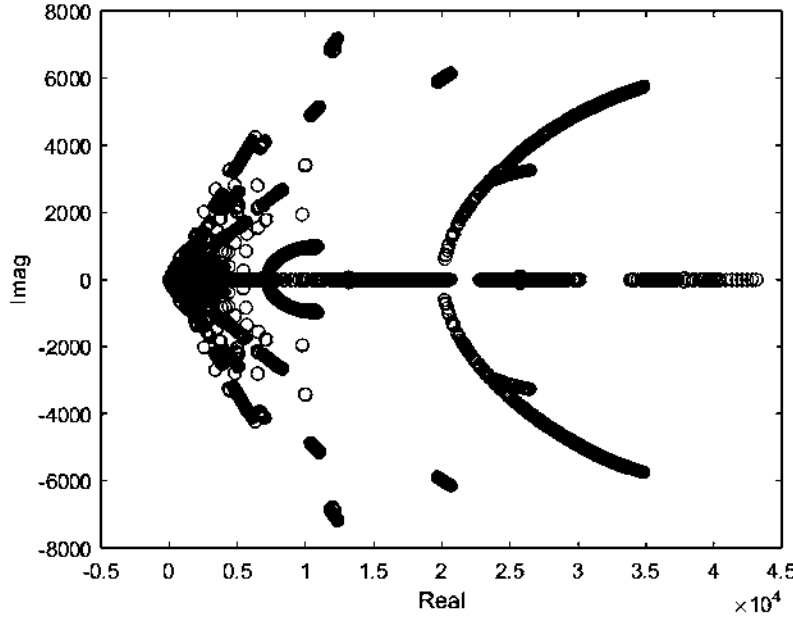


Figura 4.15: Análisis modal del sistema de 3120 nodos.

eje imaginario, se presenta una aglomeración de valores característicos que tienen tanto parte real como parte imaginaria.

En la Figura 4.16(a) se muestra la evolución de la componente real de los 5889 valores característicos del sistema de 3120 nodos conforme se varía λ , mientras que en la Figura 4.16(b) se muestra el valor característico más crítico a lo largo del proceso de variación del parámetro λ en el algoritmo de flujos de potencia de continuación. Para este caso de estudio, se observa en la Figura 4.16(b) que un valor característico cambia de signo en su parte real en $\lambda = 1.4228$. Se puede apreciar que el valor de λ determinado con la cura PV y el análisis modal coinciden.

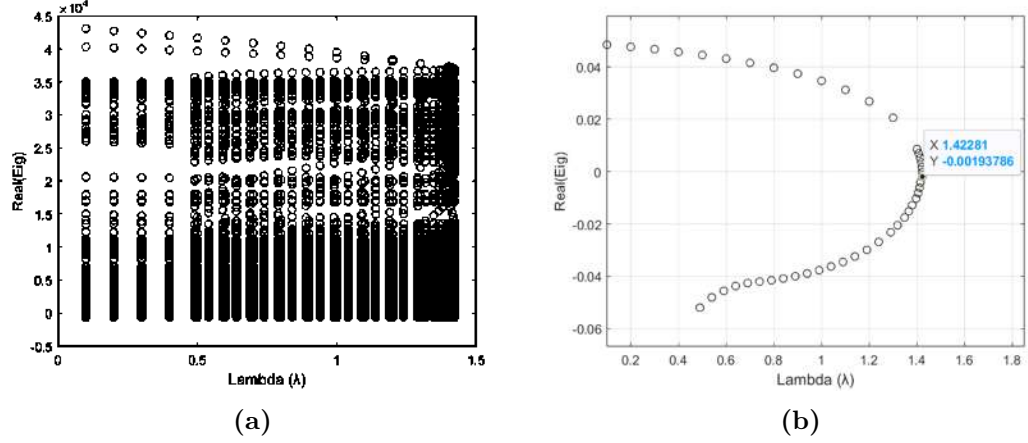


Figura 4.16: Parte real de los valores característicos vs lambda: a) 5889 valores característicos y b) valor característico más crítico.

4.5. Conclusiones

En este capítulo se aplicó el método de flujos de potencia de continuación a 3 diferentes sistemas de prueba, desde un sistema pequeño de 14 nodos hasta un sistema de 3120 nodos. Se aplicaron diferentes variantes del método GMRES, basado en el subespacio de Krylov, en el proceso de resolución de la parte correctiva del método de flujos de continuación. Se observó que la aplicación de preconditionadores al método GMRES permite reducir el tamaño del subespacio de Krylov y, por lo tanto, los tiempos de cómputo respecto a los métodos directos. Además, el análisis de las curvas PV y el análisis modal arrojaron resultados similares para determinar el valor característico del sistema, que indica problemas de estabilidad de voltaje.

Para el sistema IEEE 14 se observó que el método directo LU presenta el menor tiempo registrado, con 0.0262 s. Todos los métodos iterativos GMRES muestran tiempos mayores que el obtenido con LU. Dentro de los métodos ite-

rativos, GMRES-PRE presenta el tiempo más bajo, con 0.0552 s. En el sistema IEEE 118, el método LU nuevamente presenta el menor tiempo, con 0.0645 s. Los métodos GMRES-PRE y GMRES-PRE-QR registran tiempos mayores que LU, con 0.0781 s y 0.0801 s, respectivamente. El método GMRES presenta un tiempo que es cinco veces mayor que el de LU, y el método GMRES-QR presenta un tiempo tres veces mayor que el de LU. Para el sistema de gran escala de 3120 nodos, se observa un comportamiento distinto. Los métodos GMRES-PRE y GMRES-PRE-QR presentan los tiempos más bajos, mientras que el método LU registra un tiempo mayor, alcanzando 34.5125 s, equivalente a 1.94 veces el tiempo de GMRES-PRE. El método GMRES presenta el mayor tiempo de todos, con 4065.5489 s, que es 232 veces mayor que el registrado por GMRES-PRE-QR.

Para formar la curva PV completa mediante el método de flujos de potencia de continuación en el sistema IEEE 14, el método directo LU presenta el menor tiempo de cómputo, con 0.2488 s. Entre los métodos iterativos, el método GMRES-PRE registra el tiempo más bajo, con 0.2927 s. El método GMRES presenta un tiempo 2.2 veces mayor que el registrado por LU, alcanzando 0.5487 s. En el sistema IEEE 118, los métodos LU, GMRES-PRE y GMRES-PRE-QR muestran tiempos muy próximos entre sí, con 4.4192 s, 4.5313 s y 4.4902 s, respectivamente. En contraste, el método GMRES presenta un tiempo mayor, cinco veces el de LU, con 22.2604 s. Para el sistema de 3120 nodos, los menores tiempos se obtienen con los métodos iterativos GMRES-PRE y GMRES-PRE-QR, con 247.0459 s y 248.2352 s, respectivamente. El método LU presenta un tiempo mayor al requerir 554.8215 s, equivalente a 2.2 veces el registrado por GMRES-PRE-QR. Los métodos GMRES y GMRES-QR presentan tiempos considerablemente mayores; en particular, el método GMRES muestra un tiempo tal

4. CASOS DE ESTUDIO

que GMRES-PRE resulta aproximadamente 529 veces menor en comparación.

De los resultados anteriores se concluye que el método directo LU es ideal para sistemas de pequeña escala. Por el contrario, el método directo LU aplicado al método de flujos de potencia de continuación se vuelve muy ineficiente para resolver sistemas de gran escala en comparación con las versiones iterativas preconditionadas. Los métodos iterativos GMRES y GMRES-QR son ineficientes en todos los sistemas analizados, especialmente para sistemas de gran escala. Sin embargo, los métodos preconditionados GMRES-PRE y GMRES-PRE-QR ofrecen la mejor escalabilidad y rendimiento en sistemas de gran escala.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Conclusiones

Se presentó un método para obtener curvas PV mediante el flujo de potencia de continuación, el cual está basado en el subespacio de Krylov. En este enfoque, se incorpora el uso de preconditionadores dentro del método GMRES con el fin de modificar la matriz Jacobiana del sistema. El objetivo es transformar dicha matriz en una equivalente, cuyos valores característicos estén mayoritariamente cercanos a 1. Esta transformación permite reducir significativamente el número de iteraciones requeridas por GMRES para encontrar la solución, ya que trabaja dentro de un subespacio considerablemente más pequeño que el espacio vectorial original.

Se observó que, al aplicar preconditionamiento en sistemas de gran tamaño y alta dispersidad, es posible obtener la solución en aproximadamente el 1 % de las iteraciones necesarias en comparación con la versión no preconditionada del método GMRES, lo que representa una mejora notable en la eficiencia computacional. Se aplicó el método de flujos de potencia de continuación a tres sistemas de prueba de diferentes tamaños: IEEE 14, IEEE 118 y un sistema de 3120 no-

5. CONCLUSIONES

dos. Durante el proceso correctivo del método, se utilizaron distintas variantes del método GMRES basado en el subespacio de Krylov, incluyendo versiones preconditionadas y con factorización QR.

En sistemas pequeños como el IEEE 14, el método directo LU resultó ser el más eficiente, con 0.0262 s para el problema de flujos de potencia y 0.2488 s para la curva PV. Sin embargo, a medida que el tamaño del sistema aumenta, los métodos iterativos preconditionados comienzan a superar al método LU. En el sistema IEEE 118, GMRES-PRE y GMRES-PRE-QR ofrecieron tiempos competitivos, acercándose demasiado a los tiempos del método directo LU. Para el sistema de gran escala de 3120 nodos, los métodos GMRES-PRE y GMRES-PRE-QR fueron significativamente superiores, resolviendo la curva PV en 247.0459 s y 248.2352 s, mientras que el método LU requirió 554.8215 s. En este caso, GMRES-PRE-QR fue 2.2 veces más rápido que LU. El método GMRES sin preconditionamiento fue ineficiente, tomando hasta 4065.5489 s para el problema de flujos de potencia, lo que representa un tiempo 529 veces mayor que GMRES-PRE. Para resolver una curva PV mediante flujos de potencia de continuación, se observó que el método GMRES requiere un tiempo de cómputo excesivamente grande, con 130767.9988 s.

En conclusión, el método LU resulta ser el más adecuado para sistemas de pequeña escala debido a su rapidez y simplicidad. No obstante, en sistemas de gran tamaño, su rendimiento disminuye considerablemente frente a métodos iterativos preconditionados. En particular, los métodos GMRES-PRE y GMRES-PRE-QR destacan por su escalabilidad y eficiencia computacional, lo que los convierte en la opción preferente para el análisis de estabilidad de voltaje mediante flujos de potencia de continuación.

En términos de tiempo de cómputo, el método GMRES-PRE-QR demostró ser el más eficiente en sistemas de gran escala. Por ejemplo, en el caso del sistema de 3120 nodos, fue capaz de obtener la curva PV completa en aproximadamente un 50 % menos de tiempo que otros métodos. En contraste, el método GMRES sin preconditionamiento, ya sea con o sin factorización QR, presentó un rendimiento computacional muy deficiente. Estos resultados evidencian que el uso de preconditionadores es esencial para el análisis eficiente de curvas PV en sistemas altamente dispersos, ya que permiten reducir significativamente el número de iteraciones requeridas y, por ende, el tiempo total de cómputo. Así, los métodos GMRES-PRE y GMRES-PRE-QR representan una solución robusta y escalable para estudios de estabilidad en redes eléctricas de gran tamaño.

Se realizó, también, un análisis modal de valores característicos de la matriz Jacobiana del sistema, se llegó a la conclusión de que se puede obtener el punto de máxima cargabilidad, ya sea mediante el método de flujos de potencia de continuación aplicando el subespacio de Krylov así como llevando a cabo un análisis modal. Existe un valor propio que es crítico y cruza el eje imaginario al alcanzar la máxima cargabilidad.

5.2. Trabajos futuros

El presente trabajo abre la posibilidad a diversas líneas de investigación que podrían complementar los resultados obtenidos. A continuación, se enumeran algunas de las propuestas más relevantes:

- Explorar técnicas de preconditionamiento más eficientes para acelerar la convergencia del método basado en el subespacio de Krylov, especialmente

5. CONCLUSIONES

en redes de gran escala o con mayor dispersión.

- Codificar los programas utilizando lenguajes de medio nivel como C++ y Fortran para mejorar los tiempos de cómputo demandados para resolver sistemas de gran escala.
- Aplicar técnicas de dispersidad para mejorar el desempeño de los métodos basados en el subespacio de Krylov.
- Explorar el uso de algoritmos de cómputo paralelo avanzados basados en GPU para reducir aún más los tiempos de simulación del método de flujos de potencia de continuación.
- Incorporar las restricciones de potencia reactiva y voltaje en el problema de flujos de potencia de continuación basado en el subespacio de Krylov.

Apéndice A

Datos de los sistemas de prueba

A.1. Sistema IEEE 14 nodos

Tabla A.1: Datos de nodos del sistema

Bus	P_d	Q_d	G_s	B_s	V_{max}	V_{min}
1	0.0	0.0	0	0	1.06	0.94
2	21.7	12.7	0	0	1.06	0.94
3	94.2	19.0	0	0	1.06	0.94
4	47.8	-3.9	0	0	1.06	0.94
5	7.6	1.6	0	0	1.06	0.94
6	11.2	7.5	0	0	1.06	0.94
7	0.0	0.0	0	0	1.06	0.94
8	0.0	0.0	0	0	1.06	0.94
9	29.5	16.6	0	19	1.06	0.94
10	9.0	5.8	0	0	1.06	0.94
11	3.5	1.8	0	0	1.06	0.94
12	6.1	1.6	0	0	1.06	0.94
13	13.5	5.8	0	0	1.06	0.94
14	14.9	5.0	0	0	1.06	0.94

A. DATOS DE LOS SISTEMAS DE PRUEBA

Tabla A.2: Datos de generadores del sistema analizado

Bus	P_g	Q_g	$Q_{\text{máx}}$	$Q_{\text{mín}}$	V_g	$P_{\text{máx}}$	$P_{\text{mín}}$
1	0	0	10	0	1.06	615	0
2	40.0	0	50	-40	1.045	60	0
3	0.0	0	40	0	1.010	60	0
6	0.0	0	24	-6	1.070	25	0
8	0.0	0	24	-6	1.090	25	0

Tabla A.3: Datos de líneas de transmisión del sistema analizado

f_{bus}	t_{bus}	r	x	b	Ratio
1	2	0.01938	0.05917	0.0528	1
1	5	0.05403	0.22304	0.0492	1
2	3	0.04699	0.19797	0.0438	1
2	4	0.05811	0.17632	0.0340	1
2	5	0.05695	0.17388	0.0346	1
3	4	0.06701	0.17103	0.0128	1
4	5	0.01335	0.04211	0.0000	1
6	11	0.09498	0.19890	0.0000	1
6	12	0.12291	0.25581	0.0000	1
6	13	0.06615	0.13027	0.0000	1
7	8	0.00000	0.17615	0.0000	1
7	9	0.00000	0.11001	0.0000	1
9	10	0.03181	0.08450	0.0000	1
9	14	0.12711	0.27038	0.0000	1
10	11	0.08205	0.19207	0.0000	1
12	13	0.22092	0.19988	0.0000	1
13	14	0.17093	0.34802	0.0000	1

Tabla A.4: Datos de transformadores del sistema analizado

f_{bus}	t_{bus}	r	x	b	Ratio
4	7	0.00000	0.20912	0.0000	0.978
4	9	0.00000	0.55618	0.0000	0.969
5	6	0.00000	0.25202	0.0000	0.932

A.2. Sistema IEEE 118 nodos

Tabla A.5: Datos de nodos del sistema

Bus	P_d	Q_d	G_s	B_s
1	51	27	0	0
2	20	9	0	0
3	39	10	0	0
4	39	12	0	0
5	0	0	0	-40
6	52	22	0	0
7	19	2	0	0
8	28	0	0	0
9	0	0	0	0
10	0	0	0	0
11	70	23	0	0
12	47	10	0	0
13	34	16	0	0
14	14	1	0	0
15	90	30	0	0
16	25	10	0	0
17	11	3	0	0
18	60	34	0	0
19	45	25	0	0
20	18	3	0	0
21	14	8	0	0
22	10	5	0	0
23	7	3	0	0
24	13	0	0	0
25	0	0	0	0
26	0	0	0	0
27	71	13	0	0
28	17	7	0	0
29	24	4	0	0
30	0	0	0	0
31	43	27	0	0
32	59	23	0	0
33	23	9	0	0

Bus	P_d	Q_d	G_s	B_s
34	59	26	0	14
35	33	9	0	0
36	31	17	0	0
37	0	0	0	-25
38	0	0	0	0
39	27	11	0	0
40	66	23	0	0
41	37	10	0	0
42	96	23	0	0
43	18	7	0	0
44	16	8	0	10
45	53	22	0	10
46	28	10	0	10
47	34	0	0	0
48	20	11	0	15
49	87	30	0	0
50	17	4	0	0
51	17	8	0	0
52	18	5	0	0
53	23	11	0	0
54	113	32	0	0
55	63	22	0	0
56	84	18	0	0
57	12	3	0	0
58	12	3	0	0
59	277	113	0	0
60	78	3	0	0
61	0	0	0	0
62	77	14	0	0
63	0	0	0	0
64	0	0	0	0
65	0	0	0	0
66	39	18	0	0
67	28	7	0	0
68	0	0	0	0
69	0	0	0	0

Bus	P_d	Q_d	G_s	B_s
70	66	20	0	0
71	0	0	0	0
72	12	0	0	0
73	6	0	0	0
74	68	27	0	12
75	47	11	0	0
76	68	36	0	0
77	61	28	0	0
78	71	26	0	0
79	39	32	0	20
80	130	26	0	0
81	0	0	0	0
82	54	27	0	20
83	20	10	0	10
84	11	7	0	0
85	24	15	0	0
86	21	10	0	0
87	0	0	0	0
88	48	10	0	0
89	0	0	0	0
90	163	42	0	0
91	10	0	0	0
92	65	10	0	0
93	12	7	0	0
94	30	16	0	0
95	42	31	0	0
96	38	15	0	0
97	15	9	0	0
98	34	8	0	0
99	42	0	0	0
100	37	18	0	0
101	22	15	0	0
102	5	3	0	0
103	23	16	0	0
104	38	25	0	0
105	31	26	0	20
106	43	16	0	0
107	50	12	0	6
108	2	1	0	0

Bus	P_d	Q_d	G_s	B_s
109	8	3	0	0
110	39	30	0	6
111	0	0	0	0
112	68	13	0	0
113	6	0	0	0
114	8	3	0	0
115	22	7	0	0
116	184	0	0	0
117	20	8	0	0
118	33	15	0	0

A. DATOS DE LOS SISTEMAS DE PRUEBA

Tabla A.6: Datos de generadores del sistema

Bus	P_g	Q_g	Q_{max}	Q_{min}	V_g	P_{max}	P_{min}
1	0	0	15	-5	0.955	100	0
4	0	0	300	-300	0.998	100	0
6	0	0	50	-13	0.99	100	0
8	0	0	300	-300	1.015	100	0
10	450	0	200	-147	1.05	100	0
12	85	0	120	-35	0.99	100	0
15	0	0	30	-10	0.97	100	0
18	0	0	50	-16	0.973	100	0
19	0	0	24	-8	0.962	100	0
24	0	0	300	-300	0.992	100	0
25	220	0	140	-47	1.05	100	0
26	314	0	1000	-1000	1.015	100	0
27	0	0	300	-300	0.968	100	0
31	7	0	300	-300	0.967	100	0
32	0	0	42	-14	0.963	100	0
34	0	0	24	-8	0.984	100	0
36	0	0	24	-8	0.98	100	0
40	0	0	300	-300	0.97	100	0
42	0	0	300	-300	0.985	100	0
46	19	0	100	-100	1.005	100	0
49	204	0	210	-85	1.025	100	0
54	48	0	300	-300	0.955	100	0
55	0	0	23	-8	0.952	100	0
56	0	0	15	-8	0.954	100	0
59	155	0	180	-60	0.985	100	0
61	160	0	300	-100	0.995	100	0
62	0	0	20	-20	0.998	100	0
65	391	0	200	-67	1.005	100	0
66	392	0	200	-67	1.05	100	0
69	0	0	300	-300	1.035	100	0
70	0	0	32	-10	0.984	100	0
72	0	0	100	-100	0.98	100	0
73	0	0	100	-100	0.991	100	0
74	0	0	9	-6	0.958	100	0
76	0	0	23	-8	0.943	100	0
77	0	0	70	-20	1.006	100	0
80	477	0	280	-165	1.04	100	0
85	0	0	23	-8	0.985	100	0

Bus	P_g	Q_g	Q_{max}	Q_{min}	V_g	P_{max}	P_{min}
87	4	0	1000	-100	1.015	100	0
89	607	0	300	-210	1.005	100	0
90	0	0	300	-300	0.985	100	0
91	0	0	100	-100	0.98	100	0
92	0	0	9	-3	0.99	100	0
99	0	0	100	-100	1.01	100	0
100	252	0	155	-50	1.017	100	0
103	40	0	40	-15	1.01	100	0
104	0	0	23	-8	0.971	100	0
105	0	0	23	-8	0.965	100	0
107	0	0	200	-200	0.952	100	0
110	0	0	23	-8	0.973	100	0
111	36	0	1000	-100	0.98	100	0
112	0	0	1000	-100	0.975	100	0
113	0	0	200	-100	0.993	100	0
116	0	0	1000	-1000	1.005	100	0

A. DATOS DE LOS SISTEMAS DE PRUEBA

Tabla A.7: Datos de líneas de transmisión del sistema

f_{bus}	t_{bus}	r	x	b
1	2	0.0303	0.0999	0.0254
1	3	0.0129	0.0424	0.01082
2	12	0.0187	0.0616	0.01572
3	5	0.0241	0.108	0.0284
3	12	0.0484	0.16	0.0406
4	5	0.00176	0.00798	0.0021
4	11	0.0209	0.0688	0.01748
5	6	0.0119	0.054	0.01426
5	11	0.0203	0.0682	0.01738
6	7	0.00459	0.0208	0.0055
7	12	0.00862	0.034	0.00874
8	9	0.00244	0.0305	1.162
8	30	0.00431	0.0504	0.514
9	10	0.00258	0.0322	1.23
11	12	0.00595	0.0196	0.00502
11	13	0.02225	0.0731	0.01876
12	14	0.0215	0.0707	0.01816
12	16	0.0212	0.0834	0.0214
12	117	0.0329	0.14	0.0358
13	15	0.0744	0.2444	0.06268
14	15	0.0595	0.195	0.0502
15	17	0.0132	0.0437	0.0444
15	19	0.012	0.0394	0.0101
15	33	0.038	0.1244	0.03194
16	17	0.0454	0.1801	0.0466
17	18	0.0123	0.0505	0.01298
17	31	0.0474	0.1563	0.0399
17	113	0.00913	0.0301	0.00768
18	19	0.01119	0.0493	0.01142
19	20	0.0252	0.117	0.0298
19	34	0.0752	0.247	0.0632
20	21	0.0183	0.0849	0.0216
21	22	0.0209	0.097	0.0246
22	23	0.0342	0.159	0.0404
23	24	0.0135	0.0492	0.0498
23	25	0.0156	0.08	0.0864
23	32	0.0317	0.1153	0.1173
24	70	0.00221	0.4115	0.10198

f_{bus}	t_{bus}	r	x	b
24	72	0.0488	0.196	0.0488
25	27	0.0318	0.163	0.1764
26	30	0.00799	0.086	0.908
27	28	0.01913	0.0855	0.0216
27	32	0.0229	0.0755	0.01926
27	115	0.0164	0.0741	0.01972
28	29	0.0237	0.0943	0.0238
29	31	0.0108	0.0331	0.0083
30	38	0.00464	0.054	0.422
31	32	0.0298	0.0985	0.0251
32	113	0.0615	0.203	0.0518
32	114	0.0135	0.0612	0.01628
33	37	0.0415	0.142	0.0366
34	36	0.00871	0.0268	0.00568
34	37	0.00256	0.0094	0.00984
34	43	0.0413	0.1681	0.04226
35	36	0.00224	0.0102	0.00268
35	37	0.011	0.0497	0.01318
37	39	0.0321	0.106	0.027
37	40	0.0593	0.168	0.042
38	65	0.00901	0.0986	1.046
39	40	0.0184	0.0605	0.01552
40	41	0.0145	0.0487	0.01222
40	42	0.0555	0.183	0.0466
41	42	0.041	0.135	0.0344
42	49	0.0715	0.323	0.086
42	49	0.0715	0.323	0.086
43	44	0.0608	0.2454	0.06068
44	45	0.0224	0.0901	0.0224
45	46	0.04	0.1356	0.0332
45	49	0.0684	0.186	0.0444
46	47	0.038	0.127	0.0316
46	48	0.0601	0.189	0.0472
47	49	0.0191	0.0625	0.01604
47	69	0.0844	0.2778	0.07092
48	49	0.0179	0.0505	0.01258
49	50	0.0267	0.0752	0.01874
49	51	0.0486	0.137	0.0342
49	54	0.073	0.289	0.0738
49	54	0.0869	0.291	0.073

A. DATOS DE LOS SISTEMAS DE PRUEBA

f_{bus}	t_{bus}	r	x	b
49	66	0.018	0.0919	0.0248
49	66	0.018	0.0919	0.0248
49	69	0.0985	0.324	0.0828
50	57	0.0474	0.134	0.0332
51	52	0.0203	0.0588	0.01396
51	58	0.0255	0.0719	0.01788
52	53	0.0405	0.1635	0.04058
53	54	0.0263	0.122	0.031
54	55	0.0169	0.0707	0.0202
54	56	0.00275	0.00955	0.00732
54	59	0.0503	0.2293	0.0598
55	56	0.00488	0.0151	0.00374
55	59	0.04739	0.2158	0.05646
56	57	0.0343	0.0966	0.0242
56	58	0.0343	0.0966	0.0242
56	59	0.0825	0.251	0.0569
56	59	0.0803	0.239	0.0536
59	60	0.0317	0.145	0.0376
59	61	0.0328	0.15	0.0388
60	61	0.00264	0.0135	0.01456
60	62	0.0123	0.0561	0.01468
61	62	0.00824	0.0376	0.0098
62	66	0.0482	0.218	0.0578
62	67	0.0258	0.117	0.031
63	64	0.00172	0.02	0.216
64	65	0.00269	0.0302	0.38
65	68	0.00138	0.016	0.638
66	67	0.0224	0.1015	0.02682
68	81	0.00175	0.0202	0.808
68	116	0.00034	0.00405	0.164
69	70	0.03	0.127	0.122
69	75	0.0405	0.122	0.124
69	77	0.0309	0.101	0.1038
70	71	0.00882	0.0355	0.00878
70	74	0.0401	0.1323	0.03368
70	75	0.0428	0.141	0.036
71	72	0.0446	0.18	0.04444
71	73	0.00866	0.0454	0.01178
74	75	0.0123	0.0406	0.01034
75	77	0.0601	0.1999	0.04978

f_{bus}	t_{bus}	r	x	b
75	118	0.0145	0.0481	0.01198
76	77	0.0444	0.148	0.0368
76	118	0.0164	0.0544	0.01356
77	78	0.00376	0.0124	0.01264
77	80	0.017	0.0485	0.0472
77	80	0.0294	0.105	0.0228
77	82	0.0298	0.0853	0.08174
78	79	0.00546	0.0244	0.00648
79	80	0.0156	0.0704	0.0187
80	96	0.0356	0.182	0.0494
80	97	0.0183	0.0934	0.0254
80	98	0.0238	0.108	0.0286
80	99	0.0454	0.206	0.0546
82	83	0.0112	0.03665	0.03796
82	96	0.0162	0.053	0.0544
83	84	0.0625	0.132	0.0258
83	85	0.043	0.148	0.0348
84	85	0.0302	0.0641	0.01234
85	86	0.035	0.123	0.0276
85	88	0.02	0.102	0.0276
85	89	0.0239	0.173	0.047
86	87	0.02828	0.2074	0.0445
88	89	0.0139	0.0712	0.01934
89	90	0.0518	0.188	0.0528
89	90	0.0238	0.0997	0.106
89	92	0.0099	0.0505	0.0548
89	92	0.0393	0.1581	0.0414
90	91	0.0254	0.0836	0.0214
91	92	0.0387	0.1272	0.03268
92	93	0.0258	0.0848	0.0218
92	94	0.0481	0.158	0.0406
92	100	0.0648	0.295	0.0472
92	102	0.0123	0.0559	0.01464
93	94	0.0223	0.0732	0.01876
94	95	0.0132	0.0434	0.0111
94	96	0.0269	0.0869	0.023
94	100	0.0178	0.058	0.0604
95	96	0.0171	0.0547	0.01474
96	97	0.0173	0.0885	0.024

A. DATOS DE LOS SISTEMAS DE PRUEBA

f_{bus}	t_{bus}	r	x	b
98	100	0.0397	0.179	0.0476
99	100	0.018	0.0813	0.0216
100	101	0.0277	0.1262	0.0328
100	103	0.016	0.0525	0.0536
100	104	0.0451	0.204	0.0541
100	106	0.0605	0.229	0.062
101	102	0.0246	0.112	0.0294
103	104	0.0466	0.1584	0.0407
103	105	0.0535	0.1625	0.0408
103	110	0.03906	0.1813	0.0461
104	105	0.00994	0.0378	0.00986
105	106	0.014	0.0547	0.01434
105	107	0.053	0.183	0.0472
105	108	0.0261	0.0703	0.01844
106	107	0.053	0.183	0.0472
108	109	0.0105	0.0288	0.0076
109	110	0.0278	0.0762	0.0202
110	111	0.022	0.0755	0.02
110	112	0.0247	0.064	0.062
114	115	0.0023	0.0104	0.00276

Tabla A.8: Datos de transformadores del sistema

f_{bus}	t_{bus}	r	x	b	Ratio
8	5	0	0.0267	0	0.985
26	25	0	0.0382	0	0.96
30	17	0	0.0388	0	0.96
38	37	0	0.0375	0	0.935
63	59	0	0.0386	0	0.96
64	61	0	0.0268	0	0.985
65	66	0	0.037	0	0.935
68	1	0	0.037	0	0.935
81	80	0	0.037	0	0.935

A.3. Sistema de 3120 nodos

Los datos del sistema de 3120 nodos se pueden encontrar en el paquete de simulación basado de sistemas de potencia basado en matlab MATPOWER [Zimmerman et al., 2011].

Apéndice B

Ejemplo numérico de dos nodos.

En esta sección se resuelve el sistema de dos nodos de la Figura 2.4 introduciendo los nuevos parámetros λ y K . Se pueden representar los incrementos de carga mediante la Ecuación (2.35). Además, en esta sección, los valores numéricos se muestran con cuatro cifras decimales únicamente por motivos de presentación. No obstante, todos los cálculos se realizan empleando una mayor precisión numérica. Las ecuaciones correspondientes a la potencia real y la potencia reactiva son,

$$P_{Li0}(1 + \lambda K) + Y_{21}V_2 \cos(\theta_{21} - \delta) + Y_{22}V_2^2 \cos(\theta_{22}) = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$Q_{Li0}(1 + \lambda K) - Y_{21}V_2 \sin(\theta_{21} - \delta) - Y_{22}V_2^2 \sin(\theta_{22}) = 0 \quad (\text{B.2})$$

por lo que el Jacobiano en el caso base se calcula como,

$$\begin{aligned} J_0 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \delta} & \frac{\partial f_1}{\partial V_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \delta} & \frac{\partial f_2}{\partial V_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Y_{21}V_2 \sin(\theta_{21} - \delta) & Y_{21} \cos(\theta_{21} - \delta) + 2Y_{22}V_2 \cos(\theta_{22}) \\ Y_{21}V_2 \cos(\theta_{21} - \delta) & -Y_{21} \sin(\theta_{21} - \delta) - 2Y_{22}V_2 \sin(\theta_{22}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

B. EJEMPLO NUMÉRICO DE DOS NODOS.

Los parámetros del sistema para este caso de estudio son:

Tabla B.1: Parámetros del sistema

Parámetro	Valor
K	1.0
P_{Li0}	0.1
Q_{Li0}	0
fp	1.0
Y_{12}	10
Y_{22}	10
θ_{12}	90°
θ_{22}	-90°

En el punto inicial de operación se tienen los siguientes valores,

Tabla B.2: Punto inicial de operación

Variable	Valor
V_2	1.004
δ	0.75°
λ	0

Con estas condiciones iniciales es posible calcular un vector tangencial a la siguiente solución utilizando un valor de $\sigma = 10$, mediante el uso de un Jacobiano aumentado que se calcula de la siguiente manera,

$$J_c = \begin{bmatrix} J_0 & \frac{\partial f}{\partial \lambda} \\ e_k & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \delta} & \frac{\partial f_1}{\partial V_2} & P_{Li0} * K \\ \frac{\partial f_2}{\partial \delta} & \frac{\partial f_2}{\partial V_2} & Q_{Li0} * K \\ & e_k & \end{bmatrix} \quad (B.4)$$

a partir de la ecuación (2.39) se observa que, mientras el voltaje del sistema se mantenga por encima del voltaje crítico, el parámetro de continuación es λ , por lo que,

$$e_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Por lo que el jacobiano aumentado en la primera iteraci3n es,

$$J_c = \begin{bmatrix} 10.0392 & 0.1300 & 0.1000 \\ 0.1305 & 10.0808 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

entonces, el vector tangencial se determina mediante la soluci3n del siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{bmatrix} 10.0392 & 0.1300 & 0.1000 \\ 0.1305 & 10.0808 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\delta \\ dV \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

resolviendo este sistema mediante factorizaci3n LU se tiene que el vector tangencial es,

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} d\delta \\ dV \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0100 \\ 0.0001 \\ 1.0000 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

una vez teniendo el vector tangente es necesario calcular el paso predictor con (2.37),

$$\begin{bmatrix} \delta^* \\ V^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0130 \\ 1.0040 \\ 0 \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} -0.0100 \\ 0.0001 \\ 1.0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0866 \\ 1.0053 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Hasta este punto del proceso se tiene el primer punto de la curva y la primera

B. EJEMPLO NUMÉRICO DE DOS NODOS.

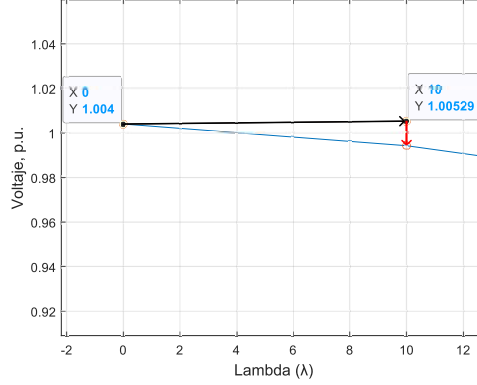


Figura B.1: Primera etapa de predicción del sistema de 2 nodos.

aproximación tangencial al siguiente punto, gráficamente la Figura B.1 muestra esto. En negro se ve el vector tangencial apuntando al siguiente punto de la curva, en rojo se observa la parte correctiva, la cual se resuelve aplicando el método de Newton y resolviendo los sistemas de ecuaciones que aparezcan en el proceso mediante cualquiera de los métodos GMRES.

Etapa correctiva.

Para la etapa correctiva se toman como condiciones iniciales el punto predicho anteriormente, primeramente se evalúan las ecuaciones (B.1) y (B.2),

$$\begin{aligned} & (0.1)(1 + 10) \\ & + (10)(1.0053) \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-0.0866)\right) + (10)(1.0053)^2 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.2302 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} & (0)(1 + 10) \\ & - (10)(1.0053) \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-0.0866)\right) - (10)(1.0053)^2 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.0909 \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

El Jacobiano utilizando (B.3) queda como,

$$J_0 = \begin{bmatrix} 10.0152 & -0.8652 \\ -0.8698 & 10.1433 \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

por lo tanto, el sistema a resolver en la etapa correctiva es,

$$\begin{bmatrix} 10.0152 & -0.8652 & 0.1000 \\ -0.8698 & 10.1433 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta V \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0.2302 \\ 0.0909 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Método GMRES aplicado al primer punto de corrección.

Paso 1.- Calcular $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}$ y β :

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} -0.2302 \\ -0.0909 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

$$\beta = \|\mathbf{r}_0\| = 0.2475 \quad (\text{B.15})$$

el primer vector del subespacio de Krylov es,

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{r}_0}{\beta} = \begin{bmatrix} -0.9302 \\ -0.3671 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Primera iteración GMRES

B. EJEMPLO NUMÉRICO DE DOS NODOS.

Paso 2.- Calcular el producto matriz-vector con (3.52),

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{J}_c \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 10.0152 & -0.8652 & 0.1000 \\ -0.8698 & 10.1433 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.9302 \\ -0.3671 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.9982 \\ -2.9149 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

Paso 3.- Generar base $\mathbf{V}_k$ y matriz $\mathbf{H}_k$ de (3.11), para esto es necesario aplicar el método Gram-Schmidt modificado representado en el Algoritmo 2,

$$\mathbf{H}_{(1,1)} = \mathbf{v}_2' \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -8.9982 & -2.9149 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.9302 \\ -0.3671 \\ 0 \end{bmatrix} = 9.4400 \quad (\text{B.18})$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{H}_{(1,1)} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -8.9982 \\ -2.9149 \\ 0 \end{bmatrix} - 9.4400 \begin{bmatrix} -0.9302 \\ -0.3671 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2171 \\ 0.5508 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbf{H}_{(2,1)} = \|\mathbf{v}_2\|_2 = 0.5922 \quad (\text{B.20})$$

Como $\mathbf{H}_{(2,1)}$ es diferente de 0, entonces,

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\mathbf{H}_{(2,1)}} = \begin{bmatrix} -0.3671 \\ 0.9302 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

Paso 4.- Calcular $\mathbf{y}_k$ mediante (3.19),

$$\mathbf{y}_k = \left(\begin{bmatrix} 9.4400 \\ 0.5922 \end{bmatrix}' \cdot \begin{bmatrix} 9.4400 \\ 0.5922 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 9.4400 \\ 0.5922 \end{bmatrix}' \cdot 0.2475 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.0261 \quad (\text{B.22})$$

Paso 5.- Calcular el residuo con (3.20),

$$\rho = \left\| 0.2475 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9.4400 \\ 0.5922 \end{bmatrix} \cdot 0.0261 \right\|_2 = 0.0155 \quad (\text{B.23})$$

Segunda iteración GMRES

Paso 2.- Calcular el producto matriz-vector con (3.52),

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{J}_c \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 10.0152 & -0.8652 & 0.1000 \\ -0.8698 & 10.1433 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.3671 \\ 0.9302 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.4817 \\ 9.7543 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

Paso 3.- Generar base $\mathbf{V}_k$ y matriz $\mathbf{H}_k$ de (3.11), para esto es necesario aplicar el método Gram-Schmidt modificado representado en el Algoritmo 2,

$$\mathbf{H}_{(1,2)} = \mathbf{v}_3' \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -4.4817 & 9.7543 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.9302 \\ -0.3671 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.5876 \quad (\text{B.25})$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3 - \mathbf{H}_{(1,2)} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -4.4817 \\ 9.7543 \\ 0 \end{bmatrix} - 0.5876 \begin{bmatrix} -0.9302 \\ -0.3671 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.9351 \\ 9.9700 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.26})$$

B. EJEMPLO NUMÉRICO DE DOS NODOS.

$$\mathbf{H}_{(2,2)} = \mathbf{v}_3' \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4.4817 & 9.7543 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.3671 \\ 0.9302 \\ 0 \end{bmatrix} = 10.7185 \quad (\text{B.27})$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3 - \mathbf{H}_{(2,2)} \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3.9351 \\ 9.9700 \\ 0 \end{bmatrix} - 10.7185 \begin{bmatrix} -0.3671 \\ 0.9302 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.28})$$

$$\mathbf{H}_{(3,2)} = \|\mathbf{v}_3\|_2 = 1.3938 \times 10^{-14} \quad (\text{B.29})$$

Paso 4.- Calcular $\mathbf{y}_k$ mediante (3.19),

$$\mathbf{y}_k = \left(\begin{bmatrix} 9.4400 & 0.5876 \\ 0.5922 & 10.7185 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}' \cdot \begin{bmatrix} 9.4400 & 0.5876 \\ 0.5922 & 10.7185 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 9.4400 & 0.5876 \\ 0.5922 & 10.7185 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}' \cdot 0.2475 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0263 \\ -0.0015 \end{bmatrix} \quad (\text{B.30})$$

Paso 5.- Calcular el residuo con (3.20),

$$\rho = \left\| 0.2475 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9.4400 & 0.5876 \\ 0.5922 & 10.7185 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.0263 \\ -0.0015 \end{bmatrix} \right\|_2 = 3.8494 \times 10^{-17} \simeq 0 \quad (\text{B.31})$$

Después de 2 iteraciones de Krylov el error ρ es prácticamente 0, por lo que se calcula la iteración GMRES con (3.8),

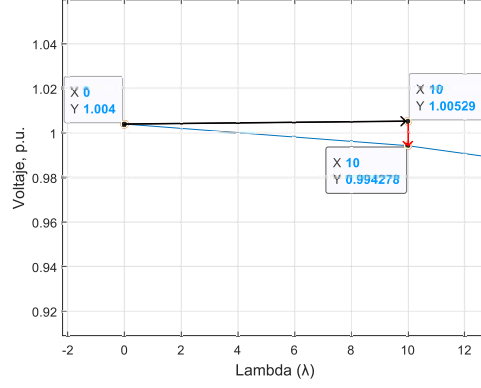


Figura B.2: Primera etapa de corrección del sistema de 2 nodos.

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.9302 & -0.3671 \\ -0.3671 & 0.9302 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.0263 \\ -0.0015 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0239 \\ -0.0110 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.32})$$

se calcula la iteración Newton con (2.42),

$$\begin{bmatrix} \delta \\ V \\ \lambda \end{bmatrix}^{h+1} = \begin{bmatrix} -0.0866 \\ 1.0053 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0239 \\ -0.0110 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1106 \\ 0.9943 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (\text{B.33})$$

por lo tanto, el punto corregido se encontraría en (10,0.9943), la Figura B.2 muestra con una flecha negra la aproximación tangencial y en rojo el punto corregido.

Este mismo proceso se repite durante toda la parte superior de la curva. La Figura B.3 muestra gráficamente este proceso, para la parte superior de la curva se utiliza un valor de $\sigma = 10$, hasta llegar a un punto donde el método deja de converger debido a la singularidad del Jacobiano cerca del punto de máxima

B. EJEMPLO NUMÉRICO DE DOS NODOS.

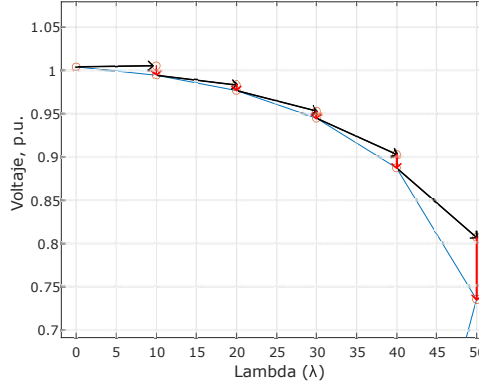


Figura B.3: Primera mitad de la curva para sistema de 2 nodos.

cargabilidad. El último punto de la parte superior de la curva cercano al punto de máxima cargabilidad es,

$$\begin{bmatrix} \delta \\ V \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7319 \\ 0.7353 \\ 50 \end{bmatrix} \quad (\text{B.34})$$

En el punto de máxima cargabilidad el determinante del sistema se hace 0. Posterior a este punto es necesario cambiar el parámetro de continuación mediante (2.39), por lo que el nuevo vector $\mathbf{e}_k$ es,

$$\mathbf{e}_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.35})$$

El siguiente punto de aproximación tangencial se calcula según,

$$\begin{bmatrix} 5.3701 & -6.8305 & 0.1 \\ -5.0221 & 7.4013 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\delta \\ dV \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.36})$$

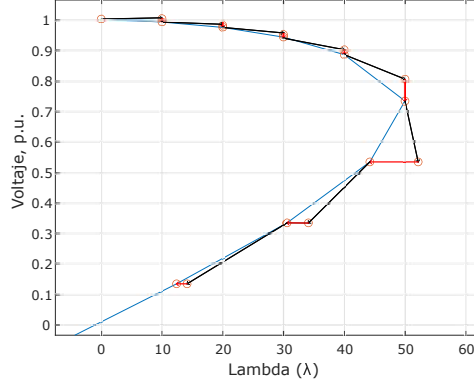


Figura B.4: Curva PV completa para el sistema de 2 nodos.

cabe resaltar que el vector de la derecha del sistema de ecuaciones se hace negativo en valor debido a que el parámetro λ comenzará a disminuir. Además, es necesario reducir σ a 0.2, debido a que se necesitan realizar aproximaciones tangenciales más pequeñas.

A partir de este punto, el proceso se repite de manera análoga a la parte superior de la curva hasta alcanzar nuevamente el valor inicial de λ . La Figura B.4 muestra el proceso completo de predicción y corrección de la curva, donde el punto de corrección se calcula mediante el método GMRES, tal como se describió anteriormente. En la primera mitad de la curva se utiliza λ como parámetro de continuación; esto implica que, durante la etapa correctiva, el valor de λ permanece constante. Como consecuencia, en la figura se observa que la corrección se realiza de forma vertical, manteniéndose sobre el mismo valor de λ . Posteriormente, en la parte inferior de la curva, el parámetro de continuación cambia al valor del voltaje en el nodo 2. En esta etapa, la corrección se lleva a cabo de manera horizontal, lo cual refleja el cambio en el parámetro de continuación utilizado.

Bibliografía

- Agustriadi, Sinisuka, N. I., Banjar-Nahor, K. M., and Bésanger, Y. (2019). Modeling, simulation, and prevention of july 23, 2018, indonesia’s southeast sumatra power system blackout. In *2019 North American Power Symposium (NAPS)*, pages 1–6. [11](#)
- Ajjarapu, V. and Christy, C. (1992). The continuation power flow: a tool for steady state voltage stability analysis. *IEEE Transactions on Power Systems*, 7(1):416–423. [5](#), [34](#)
- Arnoldi, W. E. (1951). The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, 9(1):17–29. [47](#)
- Balamourougan, V., Sidhu, T., and Sachdev, M. (2004). Technique for online prediction of voltage collapse. *Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings-*, 151:453 – 460. [6](#)
- Barrera, J., Flores, J., and fuerte esquivel, C. (2008). Plotting of complete bifurcation diagrams using a dynamic environment particle swarm optimization algorithm. *Journal of Artificial Evolution and Applications*, 2008:399–406. [6](#)

BIBLIOGRAFÍA

- Burchett, S. M., Douglas, D., Ghiocel, S. G., Liehr, M. W. A., Chow, J. H., Kosterev, D., Faris, A., Heredia, E., and Matthews, G. H. (2018). An optimal thévenin equivalent estimation method and its application to the voltage stability analysis of a wind hub. *IEEE Transactions on Power Systems*, 33(4):3644–3652. [8](#)
- Busby, J. W., Baker, K., Bazilian, M. D., Gilbert, A. Q., Grubert, E., Rai, V., Rhodes, J. D., Shidore, S., Smith, C. A., and Webber, M. E. (2021). Cascading risks: Understanding the 2021 winter blackout in texas. *Energy Research Social Science*, 77:102106. [12](#)
- CENACE (2025). Estimación de la demanda real. <https://www.cenace.gob.mx/Paginas/SIM/Reportes/EstimacionDemandaReal.aspx>. Consultado el 1 de abril de 2025. [15](#)
- Flores, J., fuerte esquivel, C., Barrera, J., and Carvajal, H. (2011). Particle swarm optimization method to assess a voltage stability region by multi-parameter bifurcation analysis. *International Review of Electrical Engineering*, 6:3102–3110. [6](#)
- Gan, R., Luan, Z., Yang, Y., Liu, W., and Yang, S. (2015). Static voltage stability analysis based on improved continuous power flow. In *TENCON 2015 - 2015 IEEE Region 10 Conference*, pages 1–3. [5](#)
- Gao, M., Lu, R., Qin, W., Cao, R., and Wang, J. (2019). Static voltage stability assessment considering harmonic effects. In *2019 IEEE 3rd Conference on Energy Internet and Energy System Integration (EI2)*, pages 1183–1187. [7](#)

- Ghiocel, S. G. and Chow, J. H. (2014). A power flow method using a new bus type for computing steady-state voltage stability margins. *IEEE Transactions on Power Systems*, 29(2):958–965. [8](#)
- Haes Alhelou, H., Hamedani-Golshan, M. E., Njenda, T. C., and Siano, P. (2019). A survey on power system blackout and cascading events: Research motivations and challenges. *Energies*, 12(4). [2](#)
- Hatziargyriou, N., Milanovic, J., Rahmann, C., Ajjarapu, V., Canizares, C., Erlich, I., Hill, D., Hiskens, I., Kamwa, I., Pal, B., Pourbeik, P., Sanchez-Gasca, J., Stankovic, A., Van Cutsem, T., Vittal, V., and Vournas, C. (2021). Definition and classification of power system stability – revisited extended. *IEEE Transactions on Power Systems*, 36(4):3271–3281. [16](#), [17](#), [18](#), [19](#)
- ICSEG (2025). Power cases. <https://icseg.itl.illinois.edu/power-cases/>. Consultado el 2 de noviembre de 2025.
- Jasni, J., Hizam, H., Kadir, M., Mariun, N., and Noor, S. (2008). Determination of proximity to static voltage collapse using cpf-gmres method. In *2008 IEEE 2nd International Power and Energy Conference*, pages 520–525.
- Kundur, P., Balu, N., and Lauby, M. (1994). *Power System Stability and Control*. EPRI power system engineering series. McGraw-Hill.
- Kundur, P., Paserba, J., Ajjarapu, V., Andersson, G., Bose, A., Canizares, C., Hatziargyriou, N., Hill, D., Stankovic, A., Taylor, C., Van Cutsem, T., and Vittal, V. (2004). Definition and classification of power system stability ieee/cigre joint task force on stability terms and definitions. *IEEE Transactions on Power Systems*, 19(3):1387–1401.

BIBLIOGRAFÍA

- Larik, R. M., Mustafa, M., and Aman, M. (2019a). A critical review of the state-of-art schemes for under voltage load shedding. *International Transactions on Electrical Energy Systems*, 29.
- Larik, R. M., Mustafa, M. W., and Aman, M. N. (2019b). A critical review of the state-of-art schemes for under voltage load shedding. *International Transactions on Electrical Energy Systems*, 29(5):e2828. e2828 ITEES-18-0343.R1.
- Lof, P.-A., Smed, T., Andersson, G., and Hill, D. (1992). Fast calculation of a voltage stability index. *IEEE Transactions on Power Systems*, 7(1):54–64.
- Ma, Y., Lv, S., Zhou, X., and Gao, Z. (2018). Voltage stability analysis of power system based on bifurcation theory. In *2018 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA)*, pages 427–432.
- Makarov, Y., Reshetov, V., Stroev, A., and Voropai, I. (2005). Blackout prevention in the united states, europe, and russia. *Proceedings of the IEEE*, 93(11):1942–1955.
- Mendoza-Armenta, S., Fuerte-Esquivel, C. R., and Becerril, R. (2013). A numerical study of the effect of degenerate hopf bifurcations on the voltage stability in power systems. *Electric Power Systems Research*, 101:102–109.
- Mori, H. and Seki, K. (2007). Continuation newton-gmres power flow with linear and nonlinear predictors. In *2007 Large Engineering Systems Conference on Power Engineering*, pages 171–175.
- Parniani, M., Chow, J. H., Vanfretti, L., Bhargava, B., and Salazar, A. (2006). Voltage stability analysis of a multiple-infeed load center using phasor measu-

- rement data. In *2006 IEEE PES Power Systems Conference and Exposition*, pages 1299–1305.
- Planeas / Conacyt (2025). Consumo de electricidad — plataforma nacional de energía, ambiente y sociedad (planeas). <https://energia.conacyt.mx/planeas/electricidad/consumo>. Consultado: 24 de septiembre de 2025.
- Pu, T., Zhang, Z., Yu, T., Han, W., and Dong, L. (2014). A fast calculation static voltage stability index based on wide area measurement system. In *2014 International Conference on Power System Technology*, pages 30–35.
- Saad, Y. (2003). *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, second edition.
- Saad, Y. and Schultz, M. H. (1986). Gmres: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7(3):856–869.
- Saadat, H. (2009). *Power System Analysis*. McGraw-Hill.
- Sode-Yome, A., Mithulanathan, N., and Lee, K. (2006). A maximum loading margin method for static voltage stability in power systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 21(2):799–808.
- Wang, Y., Li, Z., and Lu, F. (2019). Research on the impact of wind power integration on power system voltage stability. In *2019 IEEE Innovative Smart Grid Technologies - Asia (ISGT Asia)*, pages 1683–1687.
- Wu, Y.-K., Chang, S. M., and Hu, Y.-L. (2017). Literature review of power

BIBLIOGRAFÍA

system blackouts. *Energy Procedia*, 141:428–431. Power and Energy Systems Engineering.

Zimmerman, R. D., Murillo-Sánchez, C. E., and Thomas, R. J. (2011). Matpower: Steady-state operations, planning, and analysis tools for power systems research and education. *IEEE Transactions on Power Systems*, 26(1):12–19.

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión

Programa educativo	Maestría en ciencias en Ingeniería Eléctrica	
Título del trabajo	“Aplicación del método del subespacio de Krylov al problema de flujos de potencia de continuación para el análisis estático de estabilidad de voltaje”.	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	José Andrés Castro Marín	1414672c@umich.mx
Director	Dr. Norberto García Barriga	norberto.garcia@umich.mx
Codirector		
Coordinador del programa	Dr. Norberto García Barriga	norberto.garcia@umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial

Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	Si	Revisión de puntuación, puntos y comas.

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Traducción al español	Si	Traducción al español de pequeños párrafos u oraciones que no conocía el significado en inglés.
Traducción a otra lengua	No	
Revisión y corrección de estilo	Si	Detección de redundancias en frases o fragmentos.
Análisis de datos	No	
Búsqueda y organización de información	No	
Formateo de las referencias bibliográficas	No	
Generación de contenido multimedia	No	
Otro	No	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	José Andrés Castro Marín 
Lugar y fecha	Morelia, Michoacan

José Andrés Castro Marín

Aplicación del método del subespacio de Krylov al problema de flujos de potencia de continuación para el análisis estático ...

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:558282832

Fecha de entrega

18 feb 2026, 12:58 p.m. GMT-6

Fecha de descarga

18 feb 2026, 1:01 p.m. GMT-6

Nombre del archivo

Aplicación del método del subespacio de Krylov al problema de flujos de potencia de continuació....pdf

Tamaño del archivo

2.5 MB

156 páginas

29.784 palabras

137.223 caracteres

19% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Fuentes principales

- 18%  Fuentes de Internet
- 11%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión



Caracteres reemplazados

103 caracteres sospechosos en N.º de páginas

Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.