



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**LA TEORÍA DE EINSTEIN-MAXWELL AL NIVEL DE UN LAZO
USANDO EL FORMALISMO LÍNEA DE MUNDO**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA

JOSÉ MANUEL DÁVILA DÁVILA



DIRECTOR DE TESIS
DR. CHRISTIAN JOHANNES F. SCHUBERT BAUMGARTEL

MORELIA, MICHOACÁN, FEBRERO 2011.

*A mi Mamá.
A la vida y memoria de mi Papá.*

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Christian Schubert por ser el director de esta tesis. Por su enorme paciencia y llevarme por este fascinante camino de la teoría cuántica de campos.

Al Dr. Fiorenzo Bastianelli del Departamento de Física de la Universidad de Bologna, Italia, por su interés y ayuda en la realización de esta tesis. También le agradezco por su hospitalidad durante mi estancia en Italia.

Al Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

A mi familia por apoyarme y guiarme, en especial a mis Padres por estar siempre conmigo.

A Ana, Merced, Paola y Vanessa.

A la Vida por lo que me ha dado.

LA TEORÍA DE EINSTEIN-MAXWELL AL NIVEL DE UN LAZO USANDO EL FORMALISMO LÍNEA DE MUNDO

Resumen

En el presente trabajo de tesis se desarrolló el *formalismo línea de mundo* como una herramienta muy eficiente en el cálculo de la acción efectiva en la teoría de Einstein-Maxwell debido a un lazo escalar y espinorial. El cálculo se realiza en el límite de bajas energías y a orden lineal en la curvatura. La acción efectiva que se obtiene, es una generalización de la representación estándar del Lagrangiano de Euler-Heisenberg.

Primero hacemos la deducción del Lagrangiano efectivo a orden lineal en la curvatura, R , y cuadrático respecto al tensor del campo electromagnético, F . Los cálculos se realizan en dos versiones diferentes del *formalismo línea de mundo*, conocidas como *DBC* y *SI*. De los resultados comprobamos la compatibilidad de estos dos esquemas. Además, estos resultados son consistentes a otros encontrados anteriormente a este trabajo de tesis, por ejemplo el Lagrangiano efectivo de Drummond y Hathrell.

Usando las funciones de Green *línea de mundo* adaptadas a un campo electromagnético constante de fondo, es posible encontrar el Lagrangiano efectivo a orden lineal en R y a cualquier orden de F para un lazo espinorial, ésta es la aportación principal del trabajo de tesis. A partir de esta expresión se deduce el Lagrangiano efectivo de forma explícita hasta el orden RF^4 , resultado que también es nuevo. Se obtiene una forma particularmente sencilla para el caso especial importante de un campo autodual.

Finalmente, se aprovecha la sencillez del Lagrangiano efectivo de Drummond y Hathrell para calcular la amplitud de un gravitón y dos fotones en el límite de bajas energías en un proceso *on-shell*. Una vez que se introduce la polarización del gravitón y de los dos fotones, el sistema se comporta como si se tratara de cuatro fotones con polarización.

THE EINSTEIN-MAXWELL THEORY AT THE ONE-LOOP LEVEL USING THE WORLDLINE FORMALISM

Abstract

In this thesis we developed the *worldline formalism* as a very efficient tool for calculating the effective action in the Einstein-Maxwell theory due to a scalar or spinor loop. The calculation is performed in the limit of low energies and at the linear order in the curvature. The effective action obtained generalizes the Euler-Heisenberg Lagrangian in its standard proper-time representation.

In the first part, we obtain the effective Lagrangian to linear order in the curvature, R , and quadratic with respect to the electromagnetic field tensor, F . We perform this calculation in two different versions of the *worldline formalism*, known as *DBC* and *SI*. We could check from the results the compatibility of these two schemes. In addition, these results are consistent with others found previously, for example the effective Lagrangian of Drummond - Hathrell.

Using worldline Green's functions adapted to a constant background electromagnetic field, we then find the effective Lagrangian due to a spinor loop to linear order in R but at any order of F . This is the main contribution of the thesis. From this expression, we then obtain the effective Lagrangian explicitly to the order RF^4 , which is also a new result. A particularly simple form is obtained for the important special case of an self-dual field.

Finally, we take advantage of the simplicity of the effective Lagrangian of Drummond and Hathrell to calculate the on-shell amplitude of a graviton and two photons in the limit of low energies. Introducing circular polarizations for the graviton and two photons we find that this process can be related to the corresponding four-photon amplitude.

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción	1
2. Introducción al formalismo línea de mundo en la QED	15
2.1. QED en el vacío	15
2.1.1. Espín cero	15
2.1.2. Espín 1/2	18
2.2. Cálculo de la acción efectiva	19
2.2.1. Espín cero	19
2.2.2. Espín 1/2	22
2.3. Cálculo de las amplitudes con N fotones	24
2.3.1. Espín cero	24
2.3.2. Espín 1/2	27
2.4. QED más F constante	28
2.4.1. Espín cero	29
2.4.2. Espín 1/2	30
3. El formalismo línea de mundo en espacio curvo	33
3.1. Teoría de Einstein-Maxwell	33
3.1.1. Espín cero	33
3.1.2. Espín 1/2	37
3.2. Espacio curvo y F constante	40
3.2.1. Espín cero	40
3.2.2. Espín 1/2	41
4. El Lagrangiano efectivo al nivel RFF	43
4.1. Espín cero	43
4.1.1. Esquema DBC	43
4.1.2. Esquema SI	47
4.2. Espín 1/2	51
4.2.1. Esquema DBC	51
4.2.2. Esquema SI	60
4.3. Resumen y comparación DBC - SI	68
5. El Lagrangiano efectivo no perturbativamente en F	73
5.1. Espín cero	73
5.1.1. Término $F_{\alpha\beta;\gamma}F_{\mu\nu;\delta}$	73
5.1.2. Término $F_{\mu\nu;\alpha\beta}$	75
5.1.3. Término $F_{\lambda\nu}R^{\lambda}_{\alpha\beta\mu}$	75
5.1.4. Término $R_{\mu\alpha\beta\nu}$	75
5.1.5. Término $\bar{\eta}_{\mu}R^{\mu}_{\alpha\beta\nu}\eta^{\nu}$	76
5.2. Espín 1/2	76
5.2.1. Término $F_{\alpha\beta;\gamma}F_{\mu\nu;\delta}$	76

5.2.2. Término $F_{\mu\nu;\alpha\beta}$	78
5.2.3. Término $F_{\lambda\nu} R^{\lambda}_{\alpha\beta\mu}$	79
5.2.4. Término $R_{\mu\alpha\beta\nu}$	79
5.2.5. Término $\bar{\eta}_{\mu} R^{\mu}_{\alpha\beta\nu} \eta^{\nu}$	80
6. Reducción del Lagrangiano efectivo no perturbativo	83
6.1. Reducción a los términos RFF	83
6.1.1. Espín cero	83
6.1.2. Espín 1/2	86
6.2. Reducción a los términos $RFFFF$	89
6.2.1. Espín cero	90
6.2.2. Espín 1/2	90
7. El Lagrangiano efectivo autodual	93
7.1. Espacio plano	93
7.2. En la teoría de Einstein-Maxwell	94
7.3. RF^4 autodual con espín cero	95
7.4. RF^4 autodual con espín 1/2	96
8. De la acción efectiva a la amplitud en bajas energías	97
8.1. Dispersión de cuatro fotones	97
8.2. Dispersión de cuatro fotones en el formalismo línea de mundo	99
8.3. Polarización de fotones por productos espinoriales	101
9. Amplitudes gravitón-fotón-fotón	105
10. Conclusiones	111
A. Convenciones	113
B. Identidades	115
C. Función de Green	117
D. Integración de las funciones de Green	121
E. Campos fantasma en acción	123
F. Desarrollo de las funciones de Green	125
G. Relación entre lagrangianos efectivos	131
G.1. Espín cero	131
G.2. Espín 1/2	132
H. Desarrollo Fock-Schwinger y Riemann	135
I. Spinor Helicity	137
J. Programas en Mathematica	139
K. Correcciones al Lagrangiano Euler-Heisenberg en la QED	151
K.1. Espín cero	151
K.2. Espín 1/2	151

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Uno de los resultados no triviales más tempranos en electrodinámica cuántica (QED), aún usando *la teoría de Dirac de agujeros*, es el bien conocido *Lagrangiano de Euler-Heisenberg* [1, 2, 3], el cual describe los efectos de pares virtuales electrón-positrón en un campo electromagnético externo. En la notación moderna, este Lagrangiano se escribe de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_{spinor}^{EH} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{dT}{T^3} e^{-m^2 T} \left[\frac{(eaT)(ebT)}{\tanh(eaT) \tan(ebT)} - \frac{e^2}{3} (a^2 - b^2) T^2 - 1 \right]. \quad (1.1)$$

Aquí T es el tiempo propio del fermión en el lazo, e es la carga, m es la masa del electrón, y se han usado los invariantes de Lorentz del campo electromagnético:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= B^2 - E^2, \\ ab &= \vec{E} \cdot \vec{B}. \end{aligned}$$

Los dos términos que se sustraen en (1.1) se atribuyen a la renormalización de la carga eléctrica y a la energía del vacío.

En 1951, Schwinger [4] derivó nuevamente este resultado pero en esta ocasión usando el formalismo moderno, y además obtuvo una expresión análoga para el caso donde las partículas virtuales son escalares cargadas:

$$\mathcal{L}_{scalar}^{EH} = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dT}{T^3} e^{-m^2 T} \left[\frac{(eaT)(ebT)}{\sinh(eaT) \sin(ebT)} + \frac{e^2}{6} (a^2 - b^2) T^2 - 1 \right]. \quad (1.2)$$

A pesar de la simplicidad formal de los Lagrangianos efectivos (1.1), (1.2), contienen una enorme cantidad de información física. Mencionaremos sólo los siguientes tres aspectos:

1. Este Lagrangiano efectivo contiene información sobre las modificaciones cuánticas de las ecuaciones de Maxwell debido a la presencia de partículas virtuales escalares o espinoriales. En particular, esto permite estudiar las modificaciones de la propagación del fotón a bajas energías debido a un campo externo [5].
2. En el caso del campo eléctrico, permite calcular la tasa de creación de pares por el campo [4].
3. También contiene la información completa sobre la amplitud de N fotones a un lazo en el límite donde la energía de los fotones es pequeña comparada con la energía de Compton [6] (este límite se llama “límite de bajas energías” o “límite EH” en lo siguiente).

Para el último punto se expresan los invariantes de Lorentz de (1.1), o (1.2) según sea el caso, en términos del tensor de campo electromagnético, F , después se hace la descomposición

$$F = \sum_{i=1}^N F_i, \quad (1.3)$$

con

$$F_i^{\mu\nu} := i (k_i^\mu \varepsilon_i^\nu - \varepsilon_i^\mu k_i^\nu) e^{ik_i \cdot x}, \quad (1.4)$$

donde k_i^μ es el cuádrimomento y ε_i^μ es el vector de polarización del i -ésimo fotón. Esto permite encontrar una forma sencilla de la matriz de dispersión \mathcal{M} , para un número arbitrario N de fotones. Los detalles de este procedimiento se explican en el cap. 8. Por el momento sólo mostramos el resultado final que se obtuvo en [6], que es muy conciso, para el caso de la QED espinorial:

$$\begin{aligned} \Gamma_{spinor}^{(EH)}[\varepsilon_1^+; \dots; \varepsilon_K^+; \varepsilon_{K+1}^-; \dots; \varepsilon_N^-] &= -\frac{m^4}{8\pi^2} \left(\frac{2ie}{m^2}\right)^N (N-3)! \\ &\times \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^{N-K} (-1)^{N-K-l} \frac{\mathcal{B}_{k+l} \mathcal{B}_{N-k-l}}{k!!(K-k)!(N-K-l)!} \chi_K^+ \chi_{N-K}^-, \end{aligned} \quad (1.5)$$

con N y K números pares, en cualquier otro caso la amplitud es nula. La condición para N llega del teorema de Furry. Por otra parte, la propiedad de K no es clara, y como se verá más adelante, no se cumple más allá del límite de bajas energías. Los índices \pm se refieren a polarizaciones circulares, y \mathcal{B}_k son los números de Bernoulli. Los invariantes χ_K^\pm son escritos en la notación *spinor helicity* (ver cap. 8)

$$\begin{aligned} \chi_K^+ &= \frac{\left(\frac{K}{2}\right)!}{2^{\frac{K}{2}}} \left\{ [12]^2 [34]^2 \dots [(K-1)K]^2 + \text{todas las perm.} \right\}, \\ \chi_{N-K}^- &= \frac{\left(\frac{N-K}{2}\right)!}{2^{\frac{N-K}{2}}} \left\{ \langle (K+1)(K+2) \rangle^2 \langle (K+3)(K+4) \rangle^2 \dots \langle (N-1)N \rangle^2 + \text{todas las perm.} \right\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

La fórmula que resulta para el caso escalar es muy similar [6] y no se presenta aquí.

Cabe mencionar el papel especial que juegan las amplitudes con todas las polarizaciones positivas o todas negativas, llamadas *maximally helicity-violating* (MHV). Estas amplitudes corresponden, al nivel de la acción efectiva, al caso de un campo de Maxwell autodual ($F = \tilde{F}$) o anti-autodual ($F = -\tilde{F}$) respectivamente. Esta propiedad de la (anti-) autodualidad simplifica considerablemente el cálculo de la acción efectiva, tal que para el caso de las amplitudes MHV se logró obtener aún la generalización de la fórmula (1.5) al nivel de dos lazos [7]. En [7] también se mostró la siguiente relación sencilla entre las amplitudes MHV a un lazo en la QED espinorial y la QED escalar:

$$\Gamma_{spinor}^{(EH,MHV)} = (-2) \Gamma_{scalar}^{(EH,MHV)}. \quad (1.7)$$

Esta relación nos dice que el espín de la partícula en el lazo no tiene efecto más allá del factor (2) que viene de los grados de libertad, y el signo (−) que viene de la estadística de Pauli.

Gracias a que la teoría de cuerdas reproduce la teoría cuántica de campos (QFT) en el límite de bajas energías, se han generado nuevas herramientas para atacar los

problemas en QFT, muestra de ello es el formalismo *línea de mundo* que ofrece ciertas ventajas en los cálculos.

En 1950, Feynman obtuvo la siguiente representación de la acción efectiva en SQED a un lazo [8],

$$\Gamma_{scalar}[A] = \int d^4x \mathcal{L}_{scalar}[A] = \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_{x(T)=x(0)} \mathcal{D}x(\tau) e^{-S[x(\tau)]}, \quad (1.8)$$

donde

$$S[x(\tau)] = \int_0^T d\tau L = \int_0^T d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{4} + i e \dot{x}^\mu A_\mu(x(\tau)) \right), \quad (1.9)$$

con T el tiempo propio de la partícula, e la carga, m la masa, la integral $\int \mathcal{D}x$ es sobre todas la trayectorias cerradas y la acción *línea de mundo* S está compuesta por el término cinético y el término de interacción; para (1.8) hemos usado las convenciones de [9]. Para el caso de un lazo con espín hay que incorporar integrales de trayectoria sobre funciones de Grassmann [10],

$$\int \mathcal{D}\psi(\tau) \exp \left[- \int_0^T d\tau \left(\frac{1}{2} \psi \cdot \dot{\psi} - i e \psi^\mu F^{\mu\nu} \psi^\nu \right) \right], \quad (1.10)$$

donde las funciones ψ^μ anticonmutan y son antiperiódicas:

$$\psi(\tau_1) \psi(\tau_2) = -\psi(\tau_2) \psi(\tau_1), \quad \psi(T) = -\psi(0), \quad (1.11)$$

así que

$$\Gamma_{spinor}[A] = \int d^4x \mathcal{L}_{spinor}[A] = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int \mathcal{D}x(\tau) \int \mathcal{D}\psi(\tau) e^{-S[x(\tau)]}, \quad (1.12)$$

con

$$S[x(\tau)] = \int_0^T d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{4} + \frac{1}{2} \psi \cdot \dot{\psi} \right) + \int_0^T d\tau \left(i e \dot{x}^\mu A_\mu(x(\tau)) - i e \psi^\mu F^{\mu\nu} \psi^\nu \right), \quad (1.13)$$

nuevamente se ha realizado la separación entre la parte libre y la parte de interacción. El formalismo *línea de mundo* permite resolver estas integrales de trayectoria de forma muy sencilla, la idea es que las integrales se puedan escribir en forma de integrales gaussianas. Para ello se hace una expansión de los términos de interacción, con lo cual se llega a integrales de la forma

$$\int \mathcal{D}y y_{i_1} \cdots y_{i_{2k}} e^{-y \cdot \hat{A} \cdot y} \propto (\det \hat{A})^{-1/2} \left[(\hat{A}^{-1})_{i_1 i_2} (\hat{A}^{-1})_{i_3 i_4} \cdots \right. \\ \left. \times (\hat{A}^{-1})_{i_{2k-1} i_{2k}} + \text{perm.} \right]. \quad (1.14)$$

Es notable que para escribir la solución de las integrales se requiere sólo de las funciones de Green bosónicas G_B y fermiónicas G_F , así como calcular el determinante correspondiente. Estas funciones de Green se determinan más adelante.

Históricamente Bern y Kosower calcularon amplitudes de N gluones a un lazo directamente de la teoría de cuerdas [11, 12, 13]. Posteriormente Strassler realizó el mismo cálculo usando una generalización de esta integral de Feynman para la cromodinámica. Strassler [14] encontró las mismas representaciones integrales para las amplitudes de N gluones a un lazo como Bern y Kosower, sin embargo, el método empleado por Strassler resultó ser más eficiente. El formalismo *línea de mundo* es una herramienta muy útil para el cálculo de amplitudes con N fotones en la QED

en el vacío [15] y particularmente para amplitudes de fotones en un campo externo constante [16, 17, 18, 19].

En este trabajo de tesis se muestra el cálculo de la acción efectiva a un lazo, tanto escalar como espinorial, con un campo de fondo electromagnético más un campo gravitacional. Esto ocurre en el marco de la teoría de Einstein-Maxwell. Para dar inicio se considera la acción fundamental para un campo escalar complejo cargado acoplado al campo electromagnético y gravitacional

$$\mathcal{S}_{scalar}[\phi, \phi^*; g, A] = - \int d^D x \sqrt{g} (g^{\mu\nu} (\partial_\mu - ieA_\mu) \phi^* (\partial_\nu + ieA_\nu) \phi + (m^2 + \xi R) \phi \phi^*) , \quad (1.15)$$

aquí ξ es el coeficiente de acoplamiento no mínimo para el escalar de curvatura. La cuantización produce la siguiente acción efectiva a un lazo ($Z[g, A] = e^{\Gamma[g, A]} = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* e^{S[\phi, \phi^*; g, A]}$)

$$\Gamma[g, A] = \ln \det^{-1}(-\square_A + m^2 + \xi R) = \text{Tr} \ln(-\square_A + m^2 + \xi R) , \quad (1.16)$$

donde \square_A es el laplaciano covariante de norma y gravitacional para campos escalares. Esta acción efectiva puede ser representada por la siguiente integral de trayectorias *línea de mundo* (ver [20, 22])

$$\Gamma[g, A] = \int_0^\infty \frac{dT}{T} \int_{PBC} \mathcal{D}x e^{-S[x^\mu; g, A]} , \quad (1.17)$$

donde

$$S[x^\mu; g, A] = \int_0^T d\tau \left(\frac{1}{4} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + ie A_\mu(x) \dot{x}^\mu + \xi R(x) + m^2 \right) , \quad (1.18)$$

con T el tiempo propio de la partícula en el lazo, y la integral de trayectorias se realiza sobre todos los lazos cerrados en el espacio-tiempo $x(\tau)$ con condiciones periódicas $x(T) = x(0)$. Con esto se generaliza (1.8) y (1.9).

Para el caso en el que se trabaja con partículas de espín 1/2 en el lazo, se usa el campo de Dirac Ψ acoplado al campo electromagnético (A_μ) y el campo gravitacional (e_μ^a), con esto, la acción fundamental está dada por

$$\mathcal{S}_{spin}[\Psi, \bar{\Psi}; e, A] = - \int d^D x e \bar{\Psi} (\not{\nabla} + m) \Psi , \quad (1.19)$$

donde e_μ^a es el vielbein, $e = \det[e_\mu^a]$, $\omega_{\mu ab}$ es la conexión espín, y

$$\not{\nabla} = \gamma^a e_a^\mu \nabla_\mu, \quad \nabla_\mu = \partial_\mu + ie A_\mu + \frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \gamma^a \gamma^b . \quad (1.20)$$

La acción efectiva en los campos de fondo e_μ^a y A_μ está dada por ($e^{\Gamma[a, A]} \equiv \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} e^{S[\Psi, \bar{\Psi}; e, A]} = \text{Det}(\not{\nabla} + m)$)

$$\begin{aligned} \Gamma[e, A] &= \ln \text{Det}(\not{\nabla} + m) = \ln [\text{Det}(\not{\nabla} + m) \text{Det}(-\not{\nabla} + m)]^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(-\not{\nabla}^2 + m^2) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(-\square_A + m^2 + \frac{1}{4} R \right) . \end{aligned} \quad (1.21)$$

La representación en integrales de trayectoria *línea de mundo* para la acción efectiva puede ser escrita de la forma [23]:

$$\Gamma[g, A] = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \int_{PBC} \mathcal{D}x \int_{ABC} \mathcal{D}\psi e^{-S[x^\mu, \psi^\mu; g, A]} , \quad (1.22)$$

con

$$S[x^\mu, \psi^\mu; g, A] = \int_0^T d\tau \left[\frac{1}{4} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + ieA_\mu(x) \dot{x}^\mu + \frac{1}{4} R + m^2 + \frac{1}{2} \left(g_{\mu\nu}(x) \psi^\mu \dot{\psi}^\nu - \partial_\mu g_{\nu\lambda}(x) \psi^\mu \psi^\nu \dot{x}^\lambda \right) - ieF_{\mu\nu}(x) \psi^\mu \psi^\nu \right], \quad (1.23)$$

se puede notar que la primera línea de esta expresión es igual que en el caso escalar, (1.18), con $\xi = \frac{1}{4}$, mientras que la segunda línea contiene la dependencia del espín de la partícula. Los campos *línea de mundo* $\psi^\mu(\tau)$ son funciones de Grassmann y tienen la propiedad de ser antiperiódicas, $\psi(T) = -\psi(0)$. En nuestras convenciones se usa la signatura $(-+++)$.

El trabajo más antiguo del que sabemos en que han realizado correcciones cuánticas a nivel de un lazo en un campo electromagnético y gravitacional de fondo fue gracias a Drummond y Hathrell (1980) [25]. Estos autores determinaron el Lagrangiano efectivo para el caso de un lazo fermiónico, al nivel de un tensor de curvatura y dos campos electromagnéticos

$$\mathcal{L}_{spinor}^{(DH)} = \frac{1}{180(4\pi)^2 m^2} \left(5R F_{\mu\nu}^2 - 26R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + 2R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} + 24(\nabla^\alpha F_{\alpha\mu})^2 \right), \quad (1.24)$$

por convención, el valor de la carga eléctrica se absorbe en el tensor del campo electromagnético. La motivación del trabajo de Drummond y Hathrell esta enfocado en que (1.24) contiene información sobre la modificación que sufre la relación de dispersión del fotón debido a un campo gravitacional de fondo. El caso puramente electromagnético es bien conocido [5], el caso gravitacional es particularmente interesante pues este permite la propagación superlumínica [26, 27], dejando a especulaciones sobre una posible violación de microcausalidad [28]. Pero como se enfatiza en [29], estos detalles no pueden resolverse en el nivel la acción efectiva a bajas energías.

Usualmente hay tres formas de calcular la acción efectiva ya sea en el caso escalar o espinorial, y las mencionamos enseguida:

- I: Sumando sobre todas las derivadas de los campos y fijando el número de campos.
- II: Agrupando términos con una dimensión de masa fija.
- III: Fijando el número de derivadas y sumando sobre el número de campos.

La primera aproximación es usualmente llamada *expansión derivada*. Las correcciones con derivadas de orden alto para (1.24) ya fueron consideradas en [30].

La segunda opción corresponde al método estandar *Núcleo de Calor* (Heat Kernel) o expansión *inversa de masa*. De las tres opciones, ésta es manifiestamente invariante de norma y covariante orden por orden. La expansión *Núcleo de Calor* para la acción efectiva a un lazo es usualmente escrita como

$$\Gamma[g, A] = \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int \frac{d^D x \sqrt{g}}{(4\pi T)^{\frac{D}{2}}} \sum_{n=0}^\infty a_n(x) T^n, \quad (1.25)$$

donde D es la dimensión del espacio-tiempo y $a_n(x)$ son los *coeficientes Núcleo de Calor*. En la dimensión $D = 4$, los términos con $n = 0, 1, 2$ son divergencias ultravioleta en $T = 0$, así que dichos coeficientes son sujetos a una renormalización. En el caso de un campo de fondo Einstein-Maxwell con un lazo escalar o espinorial se obtienen los

coeficientes a_0, \dots, a_3 en la expansión *Núcleo de Calor* [31, 32]. Para el caso escalar se tiene ¹

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_1 &= \left(\frac{1}{6} - \xi\right)R, \\
a_2 &= -\frac{1}{12}F_{\mu\nu}^2, \\
a_3 &= \frac{1}{360} \left[5(6\xi - 1)RF_{\mu\nu}^2 + 4R_{\mu\nu}F^{\mu\alpha}F^\nu{}_\alpha - 6R_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} \right. \\
&\quad \left. - 2(\nabla^\alpha F_{\alpha\mu})^2 - 8(\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 - 12F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} \right], \tag{1.26}
\end{aligned}$$

en el caso espinorial se tiene

$$\begin{aligned}
a_0 &= -2, \\
a_1 &= \frac{1}{6}R, \\
a_2 &= -\frac{1}{3}F_{\mu\nu}^2, \\
a_3 &= \frac{1}{180} \left[5RF_{\mu\nu}^2 - 4R_{\mu\nu}F^{\mu\alpha}F^\nu{}_\alpha - 9R_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} \right. \\
&\quad \left. + 2(\nabla^\alpha F_{\alpha\mu})^2 - 7(\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 - 18F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} \right]. \tag{1.27}
\end{aligned}$$

Aquí los términos a_0, a_1, a_2 contribuyen a la renormalización de la energía del vacío, la constante de Newton y la carga eléctrica, respectivamente. El resultado (1.27) es igual a (1.24) más términos que involucran derivadas totales; esto se observará más adelante. Algo análogo se tiene para el caso escalar.

La tercera opción permite generalizar el Lagrangiano de Euler-Heisenberg. Contrario al caso puramente electromagnético, en la teoría de Einstein-Maxwell no es obvio definir el Lagrangiano Efectivo para campos externos constantes, esto por la ambigüedad de definir cantidades constantes en un espacio curvo. Sabemos de trabajos previos en los que se hace el tratamiento no perturbativo del campo electromagnético y/o gravitacional, esto es gracias a Avramidi [33, 34]. Estos autores generalizan la constancia F a la constancia covariante de F y R :

$$\nabla_\gamma F_{\mu\nu} = \nabla_\gamma R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0. \tag{1.28}$$

Para un campo de fondo que satisface (1.28) se obtiene una fórmula del tipo Euler-Heisenberg para el Lagrangiano efectivo. Sin embargo, las condiciones (1.28) son muy fuertes y además se tiene

$$\nabla_\alpha F_{\mu\nu} = 0 \rightarrow [\nabla_\alpha, \nabla_\beta]F_{\mu\nu} = 0 \rightarrow R_{\alpha\beta\mu\lambda}F^\lambda{}_\nu - R_{\alpha\beta\nu\lambda}F^\lambda{}_\mu = 0, \tag{1.29}$$

lo cual implica que la acción efectiva contenga información sólo parcialmente al nivel de bajas energías. Por esta razón, en este trabajo se hace una definición más general del Lagrangiano de Euler-Heisenberg en el espacio-tiempo con curvatura. Como es usual en el caso del gravitón, las amplitudes son definidas por una linealización de la gravedad alrededor del espacio plano de Minkowski. Nosotros calculamos el Lagrangiano de Euler-Heisenberg generalizado en la teoría de Einstein-Maxwell a orden lineal en la curvatura, conteniendo la información completa sobre las amplitudes

¹Se obtienen los coeficientes para el lazo escalar del apéndice B de [32], reemplazando $E \rightarrow -\xi R$ y $F_{ab} \rightarrow iF_{ab}$. Aquí el parametro ξ describe un acoplamiento no mínimo en gravedad. Para obtenerlos en el lazo espinorial, se reemplaza $E \rightarrow -\frac{1}{4}R + \frac{i}{2}F_{ab}\gamma^a\gamma^b$ y $F_{ab} \rightarrow \frac{1}{4}R_{abcd}\gamma^c\gamma^d + iF_{ab}$.

(una partícula-irreducibles) fotón-gravitón con cualquier número de fotones, pero no más de un gravitón, en el límite de bajas energías. Esto corresponde a escribir el Lagrangiano efectivo con cualquier número de tensores del campo electromagnético y con un sólo tensor de curvatura, éste último puede ser remplazado por dos derivadas covariantes.

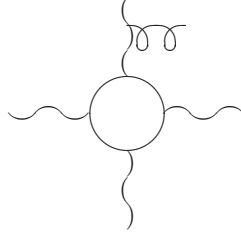


Figura 1.1: Ejemplo de un diagrama reducible con un gravitón y 4 fotones

La aplicación del formalismo *línea de mundo* con un campo gravitacional de fondo requiere la generalización al espacio curvo [35], lo cual encierra problemas matemáticos muy profundos, como ya se sabe del caso no relativista desde hace medio siglo [36]. Hablamos de tres problemas principales:

a) La existencia de una medida no trivial en la integral de trayectorias,

$$\mathcal{D}x = Dx \prod_{0 \leq \tau < T} \sqrt{|\det[g_{\mu\nu}(x(\tau))]|},$$

y cómo tratar esta medida para cálculos prácticos.

b) La existencia de divergencias UV en la teoría de campos unidimensional definida por la integral de Feynman (1.8).

c) Eliminar el modo cero contenido en la integral (1.8) de manera que el proceso sea consistente con la covariancia general. Si esto no es posible entonces no hay oportunidad de usar coordenadas riemannianas, las cuales ayudarían a simplificar los cálculos.

Estos problemas se han resuelto gracias a los trabajos de Bastianelli, van Nieuwenhuizen, Corradini, entre otros [23, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43], para ello se introducen *campos fantasma*, así que hemos escrito (1.18) y (1.23) de forma inocente ya que aún hay que incorporar los *campos fantasma*. Actualmente, el formalismo *línea de mundo* tiene una estructura sólida en este contexto [20]. El formalismo ya se aplicó en el cálculo de la amplitud fotón-gravitón en un campo electromagnético constante [44, 45].

En general se consideran dos formas de fijar el modo cero; ambas usan una restricción de la fluctuación de las integrales de trayectoria alrededor del punto de expansión x_0 ,

$$x^\mu(\tau) = x_0^\mu + y^\mu(\tau). \quad (1.30)$$

La restricción se pone sobre $y^\mu(\tau)$ y una forma de hacerlo es mediante las condiciones de frontera de Dirichlet

$$y^\mu(0) = y^\mu(T) = 0, \quad (1.31)$$

así que x_0 está sobre el lazo, este es el *esquema DBC* (Dirichlet Boundary Conditions). Otra forma de hacer la restricción es

$$\int_0^T d\tau y^\mu(\tau) = 0, \quad (1.32)$$

en este caso el punto x_0 es el centro de masa del lazo; este es el *esquema SI* (String Inspired). Cada esquema genera sus propias funciones de Green. Para el *esquema DBC* la función de Green es $\Delta(u, v)$ y está dada por:

$$\Delta(u, v) = (u - 1)v\theta(u - v) + (v - 1)u\theta(v - u), \quad (1.33)$$

donde θ es la función escalón, con

$$\theta(0) = 1/2. \quad (1.34)$$

Para el *esquema SI* la función de Green se denota por $G_B(u, v)$ y está dada por:

$$G_B(u, v) := |u - v| - (u - v)^2 - \frac{1}{6}. \quad (1.35)$$

Además los esquemas no usan los mismos *campos fantasma*. Los dos esquemas usan los mismos *campos fantasma* para la representación de la medida de la integral de trayectorias (ver el inciso a)). Sin embargo en el *esquema SI* adicionalmente existen *campos fantasma* que surgen de la solución del problema que se menciona en el inciso c).

En esta obra usaremos el *formalismo línea de mundo* para el cálculo de la acción efectiva en la teoría de Einstein-Maxwell a un lazo considerando los casos donde la partícula en el lazo es un escalar o un espinor. De tal manera nuestros resultados serán generalizaciones directas de los Lagrangianos de Euler-Heisenber de la QED. Primero se considera el Lagrangiano efectivo al mismo nivel de la obra de Drummond-Hethrell mencionada anteriormente, es decir involucrando un tensor de curvatura y dos campos electromagnéticos, al nivel dominante en la expansión de masas inversas. Llevaremos acabo este cálculo usando ambos esquemas *DBC* y *SI*. Este cálculo para el caso escalar ya se hizo en un trabajo anterior [46] y en el presente trabajo se aborda el caso espinorial. Los resultados que se obtienen son: En el *esquema DBC*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{spinor}^{(DBC)} = & -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[-\frac{1}{72} R F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{90} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + \frac{1}{40} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \right. \\ & \left. + \frac{7}{360} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{20} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} - \frac{1}{180} (\nabla^\alpha F_{\alpha\mu})^2 \right]. \quad (1.36) \end{aligned}$$

En el *esquema SI*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{spinor}^{(SI)} = & -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[-\frac{1}{72} R F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{180} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + \frac{1}{36} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \right. \\ & \left. - \frac{1}{180} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{36} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} \right]. \quad (1.37) \end{aligned}$$

Aunque estas dos expresiones parecen ser muy diferentes, es posible encontrar una relación entre ellas:

$$\mathcal{L}_{spinor}^{(SI)} - \mathcal{L}_{spinor}^{(DBC)} = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[-\frac{1}{45} \nabla^\alpha (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu;\alpha}) + \frac{1}{180} \left[\nabla_\alpha (F_\mu{}^\alpha \nabla_\beta F^{\mu\beta}) - \nabla_\beta (F_\mu{}^\alpha \nabla_\alpha F^{\mu\beta}) \right] \right], \quad (1.38)$$

así que los Lagrangianos efectivos son iguales bajo integración; esto sólo es posible con la introducción de los *campos fantasma* η y $\bar{\eta}$ y con ello se obtiene la compatibilidad entre los esquemas, lo que confirma los argumentos formales de [23].

A partir de los cálculos realizados, podemos decir que el *esquema DBC* es menos problemático y el *esquema SI* es más práctico. Por otra parte, también es posible encontrar que

$$\mathcal{L}_{spinor}^{(SI)} - \mathcal{L}_{spinor}^{(DH)} = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{e^2}{m^2} \left[\frac{1}{36} \nabla^\alpha (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu;\alpha}) + \frac{1}{15} \left[\nabla_\alpha (F_\mu{}^\alpha \nabla_\beta F^{\mu\beta}) - \nabla_\beta (F_\mu{}^\alpha \nabla_\alpha F^{\mu\beta}) \right] \right]. \quad (1.39)$$

Además se tiene que el resultado en el *esquema DBC* es igual al resultado que se obtiene en el formalismo estandar *Núcleo de Calor*, en conformidad con un teorema general [9]

$$\mathcal{L}_{scalar,spinor}^{(DBC)} = \mathcal{L}_{scalar,spinor}^{(HK)}. \quad (1.40)$$

De esta manera se ha removido cualquier duda sobre la validez del *esquema SI* tal que seguimos usando sólo este esquema, ya que es técnicamente preferible. En particular este esquema nos permite manejar de forma muy sencilla el caso de un campo electromagnético constante de fondo, lo cual generaliza las funciones de Green a \mathcal{G}_B y \mathcal{G}_F para bosones y fermiones respectivamente, de ahí nuestra inclinación por trabajar sólo en el *esquema SI*. En [46] se calcula la corrección dominante gravitacional al Lagrangiano de Euler-Heisenberg para la electrodinámica escalar

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{scalar}^{(SI)} = & \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dT}{T^3} e^{-m^2 T} \det^{-1/2} \left[\frac{\sin(FT)}{FT} \right] \left\{ 1 - T\bar{\xi}R + \frac{T}{3} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \right. \\ & + \frac{i}{8} T^2 F_{\mu\nu;\alpha\beta} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} + \frac{i}{8} T^2 (F_{\mu\nu;\beta\alpha} + F_{\mu\nu;\alpha\beta}) \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha} \\ & - \frac{i}{24} T^2 F_{\lambda\nu} R^\lambda{}_{\alpha\beta\mu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\nu\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha} \right) \\ & + \frac{1}{12} T R_{\mu\alpha\beta\nu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\alpha} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\nu} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\nu} + \left(\ddot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} - 2g^{\mu\nu} \delta(0) \right) \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \right) \\ & \left. - \frac{1}{6} T^3 F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\delta} \int_0^1 du_1 \left(\dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\nu} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\delta} + \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\nu} \mathcal{G}_{B12}^{\beta\delta} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\gamma\mu} \right) \right\}. \quad (1.41) \end{aligned}$$

La expresión para el caso espinorial es un resultado nuevo y es la aportación central de este trabajo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{spinor}^{(SI)} = & -2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} (4\pi T)^{-2} \det^{-1/2} \left[\frac{\tan(FT)}{FT} \right] \left\{ 1 + \frac{i}{8} T^2 F_{\mu\nu;\alpha\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} - 2\mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} \right) \right. \\ & + \frac{i}{8} T^2 (F_{\mu\nu;\beta\alpha} + F_{\mu\nu;\alpha\beta}) \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha} + \frac{1}{3} T R_{\alpha\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \\ & - \frac{i}{24} T^2 F_{\lambda\nu} R^\lambda{}_{\alpha\beta\mu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\nu\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha} + 4\mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \right) \\ & + \frac{1}{12} T R_{\mu\alpha\beta\nu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\alpha} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\nu} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\nu} + \left(\ddot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} - 2\delta(0) \eta^{\mu\nu} \right) \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \right. \\ & \left. + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\nu\beta} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\alpha} - \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \left(\dot{\mathcal{G}}_{F11}^{\mu\nu} - 2\delta(0) \delta^{\mu\nu} \right) \right) \\ & \left. - \frac{1}{6} T^3 F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\delta} \int_0^1 d\tau_1 \left(\dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\nu} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\delta} + \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\nu} \mathcal{G}_{B12}^{\beta\delta} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\gamma\mu} + \frac{3}{2} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\delta} \mathcal{G}_{F12}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{F12}^{\beta\nu} \right) \right\}. \quad (1.42) \end{aligned}$$

Una vez que se tiene (1.42) se puede hacer un desarrollo de los determinantes y de $\mathcal{G}_{B,F}$ a cualquier orden F^N . Reconsiderando primero el caso FF el resultado que se obtiene coincide con (1.37). Comparando el método por el cual se llega a (1.37), resulta que es mucho más eficiente hacerlo a partir de (1.42). El siguiente orden de aproximación de los determinantes, de \mathcal{G}_B y \mathcal{G}_F es al orden $FFFF$, el caso con un número impar de F es nulo por razones de paridad. El resultado para el Lagrangiano efectivo a este orden, que obtenemos en este trabajo, es completamente nuevo y debido a que es una expresión larga no la presentamos en la introducción.

Los resultados obtenidos para los Lagrangianos efectivos contienen mucha información sobre la propagación de la luz en campos de fondo gravitacionales genericos débiles, entre otros. Sin embargo, en este trabajo de tesis no exploraremos este aspecto, sino los usaremos, para comenzar, un estudio de las amplitudes con fotones y gravitones a un lazo.

En los últimos años, ha surgido mucho interés en ciertas relaciones que existen entre amplitudes de fotones o gluones en la teoría de norma y amplitudes de gravitones en la teoría cuántica de la gravitación. Tales relaciones originalmente se descubrieron al nivel de la teoría de cuerdas [47], pero más recientemente también se verificaban en la teoría de campos, para varios tipos de amplitudes (ver [48, 49, 50, 51, 52, 53, 54] y artículos ahí citados). Al nivel más básico, tales relaciones implican que un gravitón en cierto sentido se comporta como si fuera compuesto de dos fotones.

Considerando el gran número de trabajos que han sido publicados sobre amplitudes de fotones, de gluones o gravitones, es sorprendente, que todavía hay pocos resultados sobre el caso mezclado de amplitudes fotón-gravitón. Al nivel *árbol*, ya en 1961 se investigó la amplitud de conversión fotón-gravitón en un campo electromagnético constante [55]. Recientemente, se calcularon también las correcciones a este proceso involucrando un lazo escalar y espinorial [30,31]. Al nivel de un lazo existen también algunos trabajos clásicos relacionados, notablemente las obras [56, 57], donde se consideran las correcciones radiativas electromagnéticas a los vértices gravitón-fermión-fermión de la gravedad cuántica. Sin embargo, no conocemos trabajos donde se consideraran amplitudes con más de dos piernas, involucrando al mismo tiempo fotones y gravitones externos. Nuestros resultados para las acciones efectivas, principalmente, permiten reducir el cálculo de la amplitud de un gravitón y un número arbitrario de fotones, con un lazo de escalar o espinor, y con una asignación arbitraria de las polarizaciones, a un proceso puramente algebraico, es decir, programable. En la parte final de esta tesis, llevaremos a cabo este programa para el caso más sencillo de la amplitud gravitón-fotón-fotón:

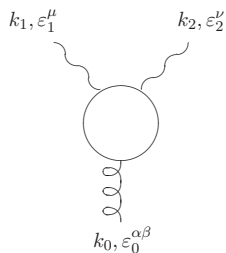


Figura 1.2: Diagrama gravitón-fotón-fotón

Se obtendrá un resultado para esta amplitud que sorprende por su sencillez, las

únicas componentes no nulas de la amplitud son:

$$\mathcal{M}_{spinor}^{(++;++)} = \frac{\kappa e^2}{90(4\pi)^2 m^2} [01]^2 [02]^2, \quad (1.43)$$

$$\mathcal{M}_{spinor}^{(--;--)} = \frac{\kappa e^2}{90(4\pi)^2 m^2} \langle 01 \rangle^2 \langle 02 \rangle^2, \quad (1.44)$$

$$\mathcal{M}_{scalar}^{(++;++)} = -\frac{1}{2} \mathcal{M}_{spinor}^{(++;++)}, \quad (1.45)$$

$$\mathcal{M}_{scalar}^{(--;--)} = -\frac{1}{2} \mathcal{M}_{spinor}^{(--;--)}. \quad (1.46)$$

La estructura de este trabajo de tesis es la siguiente: En el capítulo 2 se hace una introducción al formalismo *línea de mundo* en el vacío. Además se deduce la expresión maestra de la acción efectiva para N fotones, donde hemos colocado un ejemplo de la amplitud de 2 fotones. Todos los cálculos se realizan para el caso de un lazo formado por un par de partículas escalares y para el caso de partículas con espín $1/2$. También en este capítulo 2 se deduce la *fórmula maestra de Bern - Kosower* [13] para la amplitud de N fotones, esto gracias a que se considera al campo A_μ como una suma de ondas planas con una polarización definida. Finalmente hacemos la extensión de nuestros resultados al caso cuando se tiene un campo electromagnético de fondo constante, lo cual nos lleva a las funciones $\mathcal{G}_{B,F}$, las cuales se pueden expresar como una expansión de la matriz F , en este caso, cantidades como $(F^n)^{\mu\nu}$ deben ser interpretadas como $F^{\mu\alpha_1} \eta_{\alpha_1\alpha_2} F^{\alpha_2\alpha_3} \eta \dots F^{\alpha_{2(n-1)}\nu}$, donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski.

En el capítulo 3 se habla sobre los problemas que existen al hacer la generalización del formalismo *línea de mundo* en el espacio curvo; es aquí donde entran en juego los *campos fantasma*, con lo cual la *acción línea de mundo* toma su forma completa. Finalmente se considera un campo electromagnético constante de fondo. En este caso, cantidades como $(F^n)^{\mu\nu}$ deben ser interpretadas como $F^{\mu\alpha_1} g_{\alpha_1\alpha_2} F^{\alpha_2\alpha_3} g \dots F^{\alpha_{2(n-1)}\nu}$, donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo curvo evaluada en el punto x_0 .

El capítulo 4 contiene el cálculo para determinar el Lagrangiano efectivo al nivel RFF , con esto se muestra la forma en que se eliminan las divergencias por los *campos fantasma*, $a(\tau)$, $b(\tau)$ y $c(\tau)$, y la manera en que se logra la covariancia con los *campos fantasma* $\eta(\tau)$ y $\bar{\eta}(\tau)$. Esto es algo que no se había corroborado hasta la elaboración de [46]. En el caso de un lazo espinorial hay que considerar más *campos fantasma*, $\alpha(\tau)$. Los cálculos se realizan en los esquemas DBC y SI , lo cual permite comparar las ventajas de cada esquema y checar la equivalencia entre sus resultados.

En el capítulo 5 se determina el Lagrangiano efectivo en el caso de un campo electromagnético constante de fondo, así que se trabaja con la generalización de la función de Green que fue obtenida en el capítulo 3. Sólo se muestra un bosquejo para el caso escalar pues es un resultado que se ha deducido con anterioridad a este trabajo de tesis, y para el caso espinorial se muestra el cálculo con detalle, con esto se llega a (1.42).

En el capítulo 6 se derivan nuevamente los Lagrangianos efectivos a orden RFF pero esta vez a partir de (1.41) y (1.42), esto es por el uso del desarrollo de $\mathcal{G}_{B,F}$ en serie de potencias de F . Este método es más eficiente que el empleado en el capítulo

4. En este capítulo también se hace la aproximación al orden $RFFFF$, pero debido a la enorme cantidad de términos que se generan para obtener este último resultado, se usa MATHEMATICA [58] y MathTensor [59].

En el capítulo 7 se consideran los Lagrangianos efectivos escalar y espinorial con un campo de Maxwell autodual, en particular nos interesa el cálculo al orden RF^4 . Para ello se usan las expresiones generales de F^N a este orden de curvatura. Dichas expresiones se encontraron en este trabajo y permiten obtener un resultado muy sencillo.

En el capítulo 8 se muestra el proceso para obtener la amplitud a partir de la acción efectiva, esto se realiza al considerar $F = \sum_i^N F_i$ en el límite de bajas energías. Como ejemplo se muestra el cálculo para la dispersión fotón-fotón que se hace en [60]². En la siguiente sección se determina la forma de la matriz de dispersión \mathcal{M} pero esta vez usando la *fórmula maestra de Bern - Kosower*. En la parte final de este capítulo 8 se hace una introducción al formalismo *Spinor Helicity* [61], el cual resulta de gran utilidad cuando se considera la *helicity* de los fotones.

Para el capítulo 9 hemos reservado la amplitud de un gravitón y dos fotones, lo que requiere ver al campo electromagnético, $A(x)$, y al gravitón, $h(x)$, como superposiciones de ondas planas. Dada la sencillez de (1.24), resulta ser una buena opción para calcular este tipo de amplitudes. En la última parte de este capítulo se asigna una polarización al gravitón y a los fotones.

Finalmente en el capítulo 10 se escriben las conclusiones de este trabajo de tesis.

El trabajo cierra con varios apéndices:

En el apéndice A se han colocado las convenciones que se emplean cuando se trabaja en el espacio curvo, esto es principalmente el tensor de Riemann y la forma de la acción efectiva.

En el apéndice B se muestra una serie de identidades, las cuales se obtienen usando las identidades de Bianchi, éstas permiten simplificar considerablemente los resultados que se generan con los programas elaborados en MATHEMATICA.

En el apéndice C se deduce la forma de la función de Green en el vacío para el caso de una partícula bosónica.

En el apéndice D se muestra un programa en MATHEMATICA que permite hacer la integración de las funciones de Green, esto en los esquemas *DBC* y *SI*.

El apéndice E muestra la forma en que los *campos fantasma* cancelan las divergencias que surgen en el cálculo de la acción efectiva.

En el apéndice F se hace un desarrollo de las *funciones de Green generalizadas* en potencias de la matriz F , estos desarrollos son empleados en el capítulo 6.

En el apéndice G se encuentra la relación que existe entre los Lagrangianos efectivos que se encuentran usando los esquemas *DBC* y *SI*, tanto para el caso escalar como para el caso espinorial.

En el apéndice H se muestra el desarrollo de la métrica, $g(x)$ alrededor de un punto x_0 , esto en coordenadas riemannianas. También se escribe el desarrollo de campo electromagnético $A(x)$, de $F(x)$ y los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}(x)$.

En el apéndice I se han colocado algunos resultados que se usan frecuentemente en el formalismo *Spinor Helicity*.

²Al reproducir los cálculos de [60] encontramos algunos errores.

En el apéndice J se han colocado los programas elaborados en MATHEMATICA que usan la expansión del determinante y las funciones $\mathcal{G}_{B,F}$ al orden F^4 , esto para obtener el Lagrangiano efectivo al orden $RFFFF$.

En el apéndice K se muestra un pequeño resultado de los Lagrangianos efectivos, escalar y espinorial, en el límite de espacio plano y al orden F^6 .

CAPÍTULO 2

INTRODUCCIÓN AL FORMALISMO LÍNEA DE MUNDO EN LA QED

2.1. QED en el vacío

2.1.1. Espín cero

Al hablar de la electrodinámica cuántica escalar, SQED (*scalar quantum electrodynamics*), es importante referirnos a uno de los trabajos que presentó Feynman en el año 1950. Ahí se formula una primera cuantización en la SQED, lo cual resulta ser una opción alterna a la segunda cuantización [8]. En dicho artículo se dan reglas muy sencillas para la construcción de la matriz S en la SQED mediante la representación de escalares y fotones virtuales en términos de integrales de trayectoria para partículas relativistas. Así, una partícula escalar cargada que se mueve en un lazo produce una acción efectiva para el campo de Maxwell $A(x)$, $\Gamma[A]$, dada por:

$$\Gamma_{\text{scalar}}[A] = \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_{x(T)=x(0)} \mathcal{D}x(\tau) e^{-S[x(\tau)]}, \quad (2.1)$$

donde T es el tiempo propio de la partícula escalar en el lazo, m es su masa y $\int_{x(T)=x(0)} \mathcal{D}x(\tau)$ es la integral de trayectorias sobre todos los lazos cerrados en el espacio-tiempo, cuyo periodo se fija por el tiempo propio. La acción *línea de mundo*

$$S[x(\tau)] = \int_0^T d\tau L = \int_0^T d\tau \left[\frac{\dot{x}^2}{4} + i e \dot{x}^\mu A_\mu(x(\tau)) \right],$$

contiene información sobre la propagación libre de la partícula escalar, S_0 , así como información de la interacción con el campo externo, S_{int} :

$$S = S_0 + S_{\text{int}}, \quad (2.2)$$

con

$$S_0 = \int_0^T d\tau \frac{\dot{x}^2}{4}, \quad (2.3)$$

y

$$S_{\text{int}} = i e \int_0^T d\tau \dot{x}^\mu A_\mu(x(\tau)). \quad (2.4)$$

La conexión con la descripción estándar en diagramas de Feynman se hace por expansión de las exponenciales de interacción. Se usará $e = 1$.

La idea del formalismo *línea de mundo* es sencilla: *En las integrales de trayectoria se hace una expansión de la exponencial que contiene la interacción, así que las integrales adquieren una forma gaussiana y finalmente se resuelven empleando las funciones de correlación línea de mundo.* Esto se verá con detalle más adelante.

A partir de este momento se considera un lazo unitario, es decir, se hace un escalamiento de τ :

$$\tau = Tu, \quad (2.5)$$

con esto podemos escribir

$$S_0 = \frac{1}{4T} \int_0^1 du \dot{y}(u)^2. \quad (2.6)$$

Si ahora se realiza una integración por partes y se cumple que $y^\mu(u) \dot{y}_\mu(u)|_0^1 = 0$, entonces

$$S_0 = \int_0^1 du y^\mu(u) \left(-\frac{1}{4T} \frac{d^2}{du^2} \right) y_\mu(u). \quad (2.7)$$

En este punto resulta conveniente recordar que para el caso de dimensión finita n , se tiene

$$\int d^n y e^{-y^t \hat{A} y} = (\det \hat{A})^{-1/2} \pi^{n/2}, \quad (2.8)$$

con \hat{A} un número positivo, o bien, si se trata de un operador entonces \hat{A} es hermitiano y positivo. En un caso más general se tiene

$$\int d^n y y_{i_1} \cdots y_{i_{2k}} e^{-y^t \hat{A} y} = (\det \hat{A})^{-1/2} \frac{\pi^{n/2}}{2^k} \left[(\hat{A}^{-1})_{i_1 i_2} (\hat{A}^{-1})_{i_3 i_4} \cdots \right. \\ \left. \times (\hat{A}^{-1})_{i_{2k-1} i_{2k}} + \text{perm.} \right], \quad (2.9)$$

así que para resolver este tipo de integrales es suficiente con saber el determinante de \hat{A} y la función de Green correspondiente, \hat{A}^{-1} .

Es importante mencionar que de la naturaleza de las integrales de trayectoria, una invariancia traslacional del lazo completo nos lleva a divergencias, por lo cual es importante fijar cierta condición sobre las trayectorias que se integran. En el caso más sencillo se fija un punto en el espacio de integración, x_0 . Así que

$$\int \mathcal{D}x = \int dx_0 \int \mathcal{D}y, \quad (2.10)$$

con $x^\mu(\tau) = x_0^\mu + y^\mu(\tau)$ [9]. De hecho consideramos dos formas de fijar el punto x_0 , y cada una de ellas genera un esquema determinado.

Esquema DBC

El esquema DBC (*Dirichlet Boundary Conditions*) fija el punto x_0 sobre el lazo, es decir

$$y^\mu(0) = y^\mu(T) = 0. \quad (2.11)$$

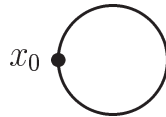


Figura 2.1: Esquema DBC

La función de Green correspondiente, $\Delta(u, v)$, está dada por:

$$\Delta(u, v) = (u - 1) v \theta(u - v) + (v - 1) u \theta(v - u),$$

además

$$\bullet\Delta(u, v) = v - \theta(v - u), \quad (2.12)$$

$$\Delta^\bullet(u, v) = u - \theta(u - v), \quad (2.13)$$

$$\bullet\Delta^\bullet(u, v) = 1 - \delta(u - v), \quad (2.14)$$

el punto del lado izquierdo de Δ indica derivada parcial con respecto a la primera variable y el punto del lado derecho indica derivada parcial respecto a la segunda variable. Se puede notar que en este esquema no hay invariancia ante una traslación de τ , lo cual complica considerablemente los cálculos.

Las funciones de correlación de este esquema tienen la siguiente forma [20]

$$\langle y^\mu(u) y^\nu(v) \rangle = -2T \Delta(u, v) \eta^{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

$$\langle \dot{y}^\mu(u) y^\nu(v) \rangle = -2T \bullet\Delta(u, v) \eta^{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

$$\langle y^\mu(u) \dot{y}^\nu(v) \rangle = -2T \Delta^\bullet(u, v) \eta^{\mu\nu}, \quad (2.17)$$

$$\langle \dot{y}^\mu(u) \dot{y}^\nu(v) \rangle = -2T \bullet\Delta^\bullet(u, v) \eta^{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

Esquema SI

El esquema SI (*String Inspired*) coloca el punto x_0 en el centro de masa del lazo

$$x_0^\mu := \frac{1}{T} \int_0^T d\tau x^\mu(\tau). \quad (2.19)$$

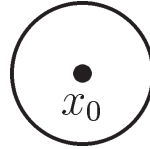


Figura 2.2: Esquema SI

La función de Green para este esquema es la siguiente (ver apéndice C)

$$G_B(u, v) := \left(\frac{1}{2} \frac{d^2}{du^2} \right)^{-1} = |u - v| - (u - v)^2 - \frac{1}{6},$$

con

$$\dot{G}_B(u, v) = \text{sign}(u - v) - 2(u - v), \quad (2.20)$$

$$\ddot{G}_B(u, v) = 2\delta(u - v) - 2, \quad (2.21)$$

el punto indica derivada parcial respecto a la primera variable. Es notable que en este esquema si hay invariancia ante una traslación del tiempo, ya que la función de Green depende de la diferencia $u - v$. Finalmente las funciones de correlación de este esquema son [14]

$$\langle y^\mu(u) y^\nu(v) \rangle = -T G_B(u, v) \eta^{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

$$\langle \dot{y}^\mu(u) y^\nu(v) \rangle = -T \dot{G}_B(u, v) \eta^{\mu\nu}, \quad (2.23)$$

$$\langle y^\mu(u) \dot{y}^\nu(v) \rangle = T \dot{G}_B(u, v) \eta^{\mu\nu}, \quad (2.24)$$

$$\langle \dot{y}^\mu(u) \dot{y}^\nu(v) \rangle = T \ddot{G}_B(u, v) \eta^{\mu\nu}. \quad (2.25)$$

Para simplificar las expresiones se usa la notación $G_B(u_1, u_2) = G_{B12}$, $\dot{G}_B(u_1, u_2) = \dot{G}_{B12}$, etc.

Finalmente, la acción efectiva se expresa de la siguiente forma

$$\Gamma[A]_{scalar} = \int d^4 x_0 \mathcal{L}_{scalar}, \quad (2.26)$$

con el Lagrangiano efectivo dado por

$$\mathcal{L}_{scalar} = \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int \mathcal{D}y \langle e^{-S_0 - S_{int}} \rangle. \quad (2.27)$$

Cuando se trabaja en un espacio plano:

- En el cálculo de las amplitudes, ambos esquemas arrojan resultados idénticos después de usar el principio de conservación del momento.
- También es posible mostrar que al determinar el Lagrangiano efectivo por ambos esquemas, los resultados difieren por términos que son derivadas totales [9]. Además, el Lagrangiano efectivo del esquema DBC siempre coincide con el Lagrangiano efectivo que se obtiene por el método *Núcleo de Calor* [9].

2.1.2. Espín 1/2

Al tratar el caso espinorial, no se hacen cambios significativos a la teoría expuesta. No es necesario iniciar de nuevo los cálculos, es suficiente con colocar una integral de trayectoria que incorpora los efectos del espín, dichas integrales de trayectoria son conocidas como integrales de Grassmann:

$$\int D\psi(\tau) \exp \left[- \int_0^T d\tau \left(\frac{1}{2} \psi \cdot \dot{\psi} - i \psi^\mu F_{\mu\nu}(x) \psi^\nu \right) \right], \quad (2.28)$$

la integral es sobre el espacio de funciones que anti-conmutan y que son anti-periódicas :

$$\psi^\mu(\tau_1) \psi^\nu(\tau_2) = -\psi^\nu(\tau_2) \psi^\mu(\tau_1), \quad \psi^\mu(T) = -\psi^\mu(0). \quad (2.29)$$

Gracias a esta última propiedad, las funciones de Grassman no se requiere fijar el cero modo ψ_0 .

Al hacer el escalamiento en el intervalo de integración también se va a adoptar una nueva convención en las funciones de Grassmann:

$$\psi \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{T}} \psi. \quad (2.30)$$

Por lo cual se define

$$\mathcal{S}_0 = \int_0^1 du \psi^\mu \left(\frac{1}{2T} \eta_{\mu\nu} \frac{d}{du} \right) \psi^\nu, \quad (2.31)$$

y

$$\mathcal{S}_{int} = \int_0^1 du \psi^\mu \left(-i F_{\mu\nu}(x) \right) \psi^\nu. \quad (2.32)$$

Entonces la función de Green fermiónica tiene la forma

$$G_F(u, v) = 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi(2m+1)(u-v)}}{i\pi(2m+1)} = \text{sign}(u-v), \quad (2.33)$$

y la función de correlación se escribe como sigue

$$\langle \psi^\mu(u) \psi^\nu(v) \rangle = \frac{1}{2} T G_F(u, v) \eta^{\mu\nu}. \quad (2.34)$$

Finalmente, la acción efectiva para un espinor es

$$\Gamma[A]_{spinor} = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int d^D x_0 \int_{y(1)=y(0)} \mathcal{D}y(u) \int_{\psi(1)=-\psi(0)} \mathcal{D}\psi(u) e^{-T \int_0^1 du L[y(u)]}, \quad (2.35)$$

donde m y T son la masa y el tiempo propio del lazo fermiónico respectivamente, además el Lagrangiano *línea de mundo*, L , es

$$L = \frac{1}{4T^2} \dot{y}^2 + \frac{i}{T} \dot{y}^\mu A_\mu + \frac{1}{2T^2} \psi \cdot \dot{\psi} - \frac{i}{T} \psi^\mu F_{\mu\nu} \psi^\nu. \quad (2.36)$$

2.2. Cálculo de la acción efectiva

En esta sección se muestra de forma sencilla la *idea* con la que se trabaja en el formalismo *línea de mundo*.

2.2.1. Espín cero

La acción efectiva para cuando existe una partícula escalar que interactúa con un campo de fondo $A_\mu(x)$ está dada por

$$\Gamma[A(x)] = \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_{x(T)=x(0)} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau [1/4\dot{x}^2 + i\dot{x} \cdot A(x(\tau))]}, \quad (2.37)$$

para resolver estas integrales se desea usar

$$\int dx e^{-x \cdot \hat{A} \cdot x + 2\hat{B} \cdot x} \sim (\det \hat{A})^{-1/2} e^{\hat{B} \cdot \hat{A}^{-1} \cdot \hat{B}}. \quad (2.38)$$

El primer paso es trabajar con el modo cero, en esta sección y las secciones restantes de este capítulo se va a usar el esquema *inspirado en cuerdas*, es decir x_0 es el centro de masa de los lazos escalares y la integral de trayectorias se realiza sobre la coordenada relativa y , así que se puede escribir la acción efectiva en términos del Lagrangiano efectivo \mathcal{L}_{eff} :

$$\Gamma[A] = \int d^4 x_0 \mathcal{L}_{eff}(x_0). \quad (2.39)$$

Se ha observado que para resolver las integrales de trayectoria se requiere conocer las funciones de Green y el determinante del operador; dado que las funciones de Green ya se conocen de la sección anterior, entonces solo resta conocer el determinante para la integral de trayectoria libre [9]:

$$\int \mathcal{D}y \exp \left[-\int_0^T d\tau \frac{1}{4} \dot{x}^2 \right] = (4\pi T)^{-D/2}. \quad (2.40)$$

Para el término de interacción se realiza una expansión de la exponencial:

$$\begin{aligned} e^{-S_{int}} &= \exp \left[-\int_0^T d\tau i \dot{x} \cdot A(x(\tau)) \right] \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \prod_{i=1}^N \int_0^1 du_i \dot{x}_i \cdot A_i, \end{aligned} \quad (2.41)$$

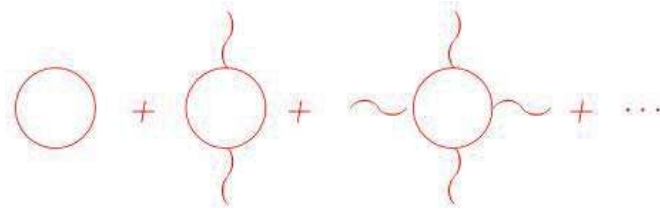


Figura 2.3: Diagramas de integración

cada término de la suma corresponde a un diagrama de Feynman que describe un número fijo de interacciones de la partícula en el lazo con el campo externo, la idea se muestra en la figura 2.3.

Una opción para calcular la acción efectiva es hacer un desarrollo de Taylor del campo de interacción alrededor del centro de masa del lazo x_0 :

$$A_\mu(x) = e^{y \cdot \partial} A_\mu(x_0) = A(x_0) + y^{\nu_1} \partial_{\nu_1} A_\mu(x_0) + \frac{1}{2!} y^{\nu_1} y^{\nu_2} \partial_{\nu_1} \partial_{\nu_2} A_\mu(x_0) + \dots, \quad (2.42)$$

así que

$$e^{-S_{int}} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \prod_{i=1}^N \int_0^1 du_i \dot{y}_i^{\mu_i} e^{y \cdot \partial} A_{\mu_i}(x_0), \quad (2.43)$$

después de este desarrollo todo se reduce a integrales gaussianas:

$$\Gamma_{scalar}[A] = \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int d^D x_0 \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \int \mathcal{D}y \prod_{i=1}^N \int_0^1 du_i \dot{y}_i^{\mu_i} e^{y \cdot \partial} A_{\mu_i}(x_0) \exp \left[- \int_0^1 du \frac{\dot{y}^2}{4T} \right], \quad (2.44)$$

es importante mencionar que se tiene la libertad de cortar el desarrollo del campo $A(x)$ a cualquier orden y las integrales que resultan sobre du_i son polinomiales; esto se notará con detalle más adelante.

Para manifestar el cumplimiento de la invarianza de norma se puede elegir la norma de *Fock-Schwinger*, ver apéndice H:

$$y^\mu(u) A_\mu(x_0 + y(u)) = 0. \quad (2.45)$$

Además de que esta elección simplifica los calculos también permite una expansión de Taylor covariante para el campo $A(x)$ [9]:

$$\begin{aligned} A_\mu(x_0 + y) &= y^\nu \int_0^1 d\lambda \lambda F_{\nu\mu}(x_0 + \lambda y) \\ &= \int_0^1 d\lambda \lambda y^\nu e^{\lambda y \cdot \partial} F_{\nu\mu}(x_0) \\ &= \frac{1}{2} y^\nu F_{\nu\mu} + \frac{1}{3} y^\alpha y^\nu \partial_\alpha F_{\nu\mu} + \dots \end{aligned} \quad (2.46)$$

Así que otra forma de escribir la acción efectiva es

$$\begin{aligned} \Gamma_{scalar}[A] &= \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int d^D x_0 \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \int \mathcal{D}y \exp \left[- \int_0^1 du \frac{\dot{y}^2}{4T} \right] \\ &\quad \times \prod_{i=1}^N \int_0^1 du_i \int_0^1 d\lambda_i \lambda_i \dot{y}_i^{\mu_i} y^{\nu_i} e^{\lambda_i y_i \cdot \partial_i} F_{\nu_i \mu_i}(x_0). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Como ejemplo de lo anterior se considera una partícula escalar en el lazo, la cual interactúa con un campo electromagnético

$$S_{int} = i \int_0^1 du \dot{x}^\mu A_\mu(x(u)), \quad (2.48)$$

donde se usará la aproximación

$$A_\mu(x(u) = x_0 + y(u)) = -\frac{1}{2} F_{\mu\alpha} y^\alpha(u), \quad (2.49)$$

así que

$$S_{int} = \int_0^1 du y^\mu(u) \frac{i}{2} F_{\mu\alpha} \dot{y}^\alpha(u), \quad (2.50)$$

ahora hay que usar

$$e^{-S} \sim 1 - S + \frac{1}{2!} S^2, \quad (2.51)$$

entonces

$$\begin{aligned} e^{-S_{int}} &= 1 - \int_0^1 du y^\mu \frac{1}{2} i F_{\mu\alpha} \dot{y}^\alpha + \frac{1}{2} \int_0^1 du_1 y_1^\mu \frac{1}{2} i F_{\mu\nu} \dot{y}_1^\nu \int_0^1 du_2 y_2^\alpha \frac{1}{2} i F_{\alpha\beta} \dot{y}_2^\beta \\ &= 1 - \frac{i}{2} F_{\mu\alpha} \int_0^1 du y^\mu \dot{y}^\alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2}\right)^2 F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \int_0^1 du_1 du_2 y_1^\mu \dot{y}_1^\nu y_2^\alpha \dot{y}_2^\beta. \end{aligned} \quad (2.52)$$

El siguiente paso es calcular las contracciones de Wick, $\langle e^{-S_{int}} \rangle$, con ello se tiene que la primera integral es cero pues

$$\langle y_1^\mu \dot{y}_2^\alpha \rangle = T \dot{G}_{12} \eta^{\mu\alpha}, \quad (2.53)$$

y

$$F_{\mu\alpha} \eta^{\mu\alpha} = 0. \quad (2.54)$$

Para el siguiente término se requiere calcular las contracciones para $\langle y_1^\mu \dot{y}_1^\nu y_2^\alpha \dot{y}_2^\beta \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle y_1^\mu \dot{y}_1^\nu y_2^\alpha \dot{y}_2^\beta \rangle &= \langle y_1^\mu y_2^\alpha \rangle \langle \dot{y}_1^\nu \dot{y}_2^\beta \rangle + \langle y_1^\mu \dot{y}_2^\beta \rangle \langle \dot{y}_1^\nu y_2^\alpha \rangle \\ &= \left(-T G_{B12} \eta^{\mu\alpha} \right) \left(T \ddot{G}_{B12} \eta^{\nu\beta} \right) + \left(T \dot{G}_{B12} \eta^{\mu\beta} \right) \left(-T \dot{G}_{B12} \eta^{\nu\alpha} \right) \\ &= -T^2 G_{B12} \ddot{G}_{B12} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} - T^2 \dot{G}_{B12}^2 \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Veamos la contracción de índices:

$$F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.56)$$

$$F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha} = -F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.57)$$

Ahora hay que calcular las integrales de las funciones de Green (ver apéndice D):

$$\int du_1 du_2 G_{B12} \ddot{G}_{B12} = - \int du_1 du_2 \dot{G}_{B12}^2 = -\frac{1}{3}. \quad (2.58)$$

De esta forma se tiene

$$\begin{aligned} \langle e^{-S_{int}} \rangle &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2}\right)^2 \left(-T^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{3}\right) - T^2 (-F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \left(\frac{1}{3}\right) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{i}{2}\right)^2 T^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Es importante observar que las dos contracciones de Wick para $\langle y_1^\mu y_1^\nu y_2^\alpha y_2^\beta \rangle$ dan el mismo resultado, esto se puede descubrir de la simetría que hay en la estructura tensorial $F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$ con lo cual sería suficiente obtener la contribución de una combinación y multiplicar por un factor (2); esto simplifica el número de cálculos considerablemente. Por lo tanto el Lagrangiano efectivo tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{scalar} &= \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{1}{(4\pi T)^{D/2}} e^{-m^2 T} \langle e^{-S_{int}} \rangle \\ &= \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{1}{(4\pi T)^2} e^{-m^2 T} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{i}{2} \right)^2 T^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \end{aligned} \quad (2.60)$$

y dado que

$$\Gamma[A]_{scalar} = \int d^4 x_0 \mathcal{L}_{scalar},$$

entonces la acción efectiva resulta ser

$$\Gamma[A]_{scalar} = \int d^4 x_0 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{1}{(4\pi T)^2} e^{-m^2 T} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{i}{2} \right)^2 T^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (2.61)$$

los términos dentro del corchete hacen que la integral sobre T sea divergente, por lo cual se atribuye la *unidad* a la renormalización de la energía del vacío y el término $\frac{1}{3} \left(\frac{i}{2} \right)^2 T^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ a la renormalización de la carga eléctrica.

2.2.2. Espín 1/2

Ya se ha dicho que para el caso cuando existe una partícula con espín 1/2 se tiene que incorporar las integrales de Grassmann, así que además de usar el desarrollo del campo $A_\mu(x)$ también hay que considerar el desarrollo de $F_{\mu\nu}(x)$:

$$F_{\mu\nu}(x_0 + y) = e^{y \cdot \partial} F_{\mu\nu}(x_0) = F_{\mu\nu}(x_0) + F_{\mu\nu,\xi}(x_0) y^\xi + \frac{1}{2} F_{\mu\nu,\xi\eta}(x_0) y^\xi y^\eta + \dots, \quad (2.62)$$

así que

$$\begin{aligned} e^{-S'_{int}} &= \exp \left[- \int_0^T d\tau \left(i \dot{x} \cdot A - i \psi^\mu F_{\mu\nu} \psi^\nu \right) \right] \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \prod_{j=1}^N \int_0^1 du_j \left(\dot{x}_j \cdot A_j - \psi_j^\mu F_{j\mu\nu} \psi_j^\nu \right) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \prod_{j=1}^N \int_0^1 du_j \left(\dot{y}^{\mu_j} e^{y \cdot \partial} A_{j\mu_j}(x_0) - \psi_j^{\mu_j} e^{y \cdot \partial} F_{j\mu_j\nu_j}(x_0) \psi_j^{\nu_j} \right). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Nuevamente se tiene la libertad de cortar los desarrollos a cualquier orden y se tienen integrales polinomiales. Por otra parte se puede escribir

$$\begin{aligned} e^{-S'_{int}} &= \exp \left[- \int_0^T d\tau \left(i \dot{x} \cdot A - i \psi^\mu F_{\mu\nu} \psi^\nu \right) \right] \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \prod_{j=1}^N \int_0^1 du_j \left(\dot{x}_j \cdot A_j - \psi_j^\mu F_{j\mu\nu} \psi_j^\nu \right) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \prod_{j=1}^N \int_0^1 du_j \left(\int_0^1 d\lambda_i \lambda_i \dot{y}_i^{\mu_i} y^{\nu_i} e^{\lambda_i y_i \cdot \partial_i} F_{\nu_i \mu_i}(x_0) - \psi_j^{\mu_j} e^{y \cdot \partial} F_{j\mu_j\nu_j}(x_0) \psi_j^{\nu_j} \right), \end{aligned} \quad (2.64)$$

así que

$$\begin{aligned} \Gamma_{spinor}[A] &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int d^D x_0 \sum_{N=0}^\infty \frac{(-i)^N}{N!} \int \mathcal{D}y \int \mathcal{D}\psi \exp \left[- \int_0^1 du \left(\frac{\dot{y}^2}{4T} - \frac{\psi \cdot \dot{\psi}}{2T} \right) \right] \\ &\quad \times \prod_{j=1}^N \int_0^1 du_j \left(\int_0^1 d\lambda_i \lambda_i \dot{y}_i^{\mu_i} y^{\nu_i} e^{\lambda_i y_i \cdot \partial_i} F_{\nu_i \mu_i}(x_0) - \psi_j^{\mu_j} e^{y \cdot \partial} F_{j \mu_j \nu_j}(x_0) \psi_j^{\nu_j} \right). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Ahora veamos un ejemplo en el cual se usa la aproximación (2.49) y

$$F_{\mu\nu}(x_0 + y) = F_{\mu\nu}(x_0), \quad (2.66)$$

entonces

$$S'_{int} = \int_0^1 du \left[y^\mu \left(\frac{i}{2} F_{\mu\nu}(x_0) \right) \dot{y}^\nu + \psi^\mu \left(-i F_{\mu\nu}(x_0) \right) \psi^\nu \right], \quad (2.67)$$

al usar

$$e^{-S} \sim 1 - S + \frac{S^2}{2!}, \quad (2.68)$$

se tiene

$$\begin{aligned} e^{-S'_{int}} &= 1 - \frac{i}{2} F_{\mu\alpha} \int_0^1 du y^\mu \dot{y}^\alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2} \right)^2 F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \int_0^1 du_1 du_2 y_1^\mu \dot{y}_1^\nu y_2^\alpha \dot{y}_2^\beta \\ &\quad + \int_0^1 du \psi^\mu (-i) F_{\mu\nu} \psi^\nu + \frac{1}{2} \int_0^1 du_1 du_2 \psi_1^\mu (-i) F_{\mu\nu} \psi_1^\nu \psi_2^\alpha (-i) F_{\alpha\beta} \psi_2^\beta \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 du y^\mu \left(\frac{i}{2} \right) F_{\mu\nu} \dot{y}^\nu \psi^\alpha (-i) F_{\alpha\beta} \psi^\beta, \end{aligned} \quad (2.69)$$

para la parte puramente escalar se conoce el resultado de la sección anterior, además se puede observar que el término lineal fermiónico y el término cruzado son nulos pues en ellos se tiene una contracción de Wick de la forma $\langle \psi^\mu \psi^\nu \rangle \propto \eta^{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = 0$, así que solo se van a calcular las contracciones de

$$\begin{aligned} \langle \psi_1^\mu \psi_1^\nu \psi_2^\alpha \psi_2^\beta \rangle &= -\langle \psi_1^\mu \psi_2^\alpha \rangle \langle \psi_1^\nu \psi_2^\beta \rangle + \langle \psi_1^\mu \psi_2^\beta \rangle \langle \psi_1^\nu \psi_2^\alpha \rangle \\ &= -\left(\frac{1}{2} T G_{F12} \eta^{\mu\alpha} \right) \left(\frac{1}{2} T G_{F12} \eta^{\nu\beta} \right) + \left(\frac{1}{2} T G_{F12} \eta^{\mu\beta} \right) \left(\frac{1}{2} T G_{F12} \eta^{\nu\alpha} \right) \\ &= -\left(\frac{1}{2} \right)^2 T^2 G_{F12}^2 \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 T^2 G_{F12}^2 \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha} \\ &= -\left(\frac{1}{2} \right)^2 T^2 \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 T^2 \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Ahora se hacen las contracciones de índices:

$$F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.71)$$

$$F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha} = F_{\mu\nu} F^{\nu\mu} = -F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.72)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle e^{-S'_{int}} \rangle &= 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{i}{2} \right)^2 T^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (i)^2 2 \left(-\frac{1}{4} \right) T^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{i}{2} \right)^2 T^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \left(\frac{i}{2} \right)^2 T^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{i}{2} \right)^2 T^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

En cuanto a la integral de la partícula libre hay contribución de los campos escalares, (2.40), y de los campos de Grassmann [9]:

$$\int \mathcal{D}\psi \exp \left[- \int_0^T d\tau \frac{1}{2} \psi \cdot \dot{\psi} \right] = 4. \quad (2.74)$$

Finalmente se escribe el Lagrangiano efectivo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{spinor} &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{1}{(4\pi T)^{D/2}} 4 e^{-m^2 T} \langle e^{-S_{int}} \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{4}{(4\pi T)^2} e^{-m^2 T} \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{i}{2} \right)^2 T^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \end{aligned} \quad (2.75)$$

y dado que

$$\Gamma[A]_{spinor} = \int d^4 x_0 \mathcal{L}_{spinor},$$

entonces la acción efectiva resulta ser

$$\Gamma[A]_{spinor} = -2 \int d^4 x_0 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{1}{(4\pi T)^2} e^{-m^2 T} \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{i}{2} \right)^2 T^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (2.76)$$

como en el caso anterior, hay una divergencia al realizar la integral sobre T , la *unidad* se atribuye a la renormalización de la energía del vacío y en este caso la renormalización de la carga eléctrica está dada por el término $-\frac{2}{3} \left(\frac{i}{2} \right)^2 T^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$.

2.3. Cálculo de las amplitudes con N fotones

En la sección anterior se ha notado, con un ejemplo muy sencillo, la ventaja del formalismo *línea de mundo* al realizar la expansión de la exponencial $e^{-S_{int}}$, ahora se va a considerar el desarrollo completo de la exponencial.

2.3.1. Espín cero

Para la acción de interacción se tiene

$$e^{-S_{int}} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \prod_{i=1}^N \int_0^1 du_i \dot{x}_i \cdot A_i,$$

ahora se va a considerar el campo electromagnético de fondo como una suma de ondas planas con una polarización definida:

$$A_\mu(x) = \sum_{j=1}^N \varepsilon_{j\mu} e^{i k_j \cdot x}, \quad (2.77)$$

donde ε_j y k_j son el vector de polarización y el momento del j -ésimo fotón respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} e^{-S_{int}} &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \prod_{i=1}^N \int_0^1 du_i \left[\dot{x}_1 \cdot A_1 \dot{x}_2 \cdot A_2 \cdots \dot{x}_N \cdot A_N \right] \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \prod_{i=1}^N \int_0^1 du_i \sum_{j_1=1}^N \varepsilon_{j_1} \cdot \dot{x}_1 e^{i k_{j_1} \cdot x_1} \cdots \sum_{j_N=1}^N \varepsilon_{j_N} \cdot \dot{x}_N e^{i k_{j_N} \cdot x_N}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Al requerir la linealidad con respecto a ε , la expresión anterior se reduce a

$$e^{-S_{int}} = \sum_{N=0}^{\infty} (-i)^N \prod_{i=1}^N \int_0^1 du_i \varepsilon_i \cdot \dot{x}_i e^{i k_i \cdot x_i}. \quad (2.79)$$

lo cual permite introducir el operador de vértice:

$$V_{scalar}^A[k, \varepsilon] = \int_0^1 du \varepsilon \cdot \dot{x} e^{i k \cdot x}, \quad (2.80)$$

este operador de vértice se usa en la teoría de cuerdas abiertas y con él se puede escribir

$$e^{-S_{int}} = \sum_{N=0}^{\infty} (-i)^N V_{scalar,1}^A V_{scalar,2}^A \cdots V_{scalar,N}^A. \quad (2.81)$$

Cuando se introduce esta expresión en la amplitud efectiva, $\Gamma_{scalar}[A]$, las integrales de trayectoria toman la forma de contracciones de Wick para los operadores:

$$\langle V_{scalar,1}^A V_{scalar,2}^A \cdots V_{scalar,N}^A \rangle. \quad (2.82)$$

Ahora se usa $x^\mu = x_0^\mu + y^\mu$, con lo cual es posible escribir

$$\begin{aligned} e^{-S_{int}} &= \sum_{N=0}^{\infty} (-i)^N \prod_{i=1}^N \int_0^1 du_i \varepsilon_i \cdot \dot{x}_i e^{i k_i \cdot x_i} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} (-i)^N \prod_{i=1}^N \int_0^1 du_i \varepsilon_i \cdot \dot{y}_i e^{i k_i \cdot y_i} e^{i k_i \cdot x_0} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} (-i)^N e^{i \sum_{i=1}^N k_i \cdot x_0} \prod_{i=1}^N \int_0^1 du_i \varepsilon_i \cdot \dot{y}_i e^{i k_i \cdot y_i}, \end{aligned} \quad (2.83)$$

en este momento es posible resolver la integral sobre x_0 , cuyo resultado es el principio de conservación del momento:

$$\int dx_0 e^{i \sum_{i=1}^N k_i \cdot x_0} = (2\pi)^D \delta\left(\sum_{i=1}^N k_i\right). \quad (2.84)$$

Para continuar se usa el siguiente truco:

$$\varepsilon_i \cdot \dot{y}_i e^{i k_i \cdot y_i} = e^{\varepsilon_i \cdot \dot{y}_i + i k_i \cdot y_i} \Big|_{\text{lin}(\varepsilon_i)}, \quad (2.85)$$

así que

$$\begin{aligned} \int dx_0 e^{-S_{int}} &= \sum_{N=0}^{\infty} (-i)^N (2\pi)^D \delta\left(\sum_{i=1}^N k_i\right) \prod_{i=1}^N \int_0^1 du_i e^{\varepsilon_i \cdot \dot{y}_i + i k_i \cdot y_i} \Big|_{\text{lin}(\varepsilon_i)} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} (-i)^N (2\pi)^D \delta\left(\sum_{j=1}^N k_j\right) \prod_{j=1}^N \int_0^1 du_j e^{\sum_i^N (\varepsilon_i \cdot \dot{y}_i + i k_i \cdot y_i)} \Big|_{\text{lin}(\varepsilon_i)}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \cdot \dot{y}_i &= \int du \delta(u - u_i) \varepsilon_i \cdot \dot{y}(u) \\ &= - \int du \dot{\delta}(u - u_i) \varepsilon_i \cdot y(u), \leftarrow \text{Al integrar por partes} \end{aligned} \quad (2.87)$$

de la misma forma podemos decir que

$$k_i \cdot y_i = \int du \delta(u - u_i) k_i \cdot y(u), \quad (2.88)$$

con esto se puede escribir

$$e^{\sum_i^N (\varepsilon_i \cdot \dot{y}_i + i k_i \cdot y_i)} = \exp \left[\sum_i^N \int du \left(i k_i \delta(u - u_i) - \varepsilon_i \dot{\delta}(u - u_i) \right) \cdot y(u) \right]. \quad (2.89)$$

Sea

$$\hat{B}_i^\mu(u) = i \sum_i^N \left(k_i^\mu \delta(u - u_i) - \varepsilon_i^\mu \dot{\delta}(u - u_i) \right), \quad (2.90)$$

entonces

$$\begin{aligned} \int dx_0 e^{-S_{int}} &= \sum_{N=0}^{\infty} (-i)^N (2\pi)^D \delta \left(\sum k_j \right) \prod_l^N \int_0^1 du_l e^{\sum_i^N (\varepsilon_i \cdot \dot{y}_i + i k_i \cdot y_i) |_{\text{lin}(\varepsilon_i)}} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} (-i)^N (2\pi)^D \delta \left(\sum k_j \right) \prod_l^N \int_0^1 du_l e^{\int du \hat{B}_i(u) \cdot y(u) |_{\text{lin}(\varepsilon_j)}}. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Podría decirse que $e^{-S_{int}}$ es de la forma $e^{\hat{B} \cdot y}$ y e^{-S_0} como $e^{-y \cdot \hat{A} \cdot y}$ entonces la integral $\int \mathcal{D}x(\tau)$ que aparece en (2.1) toma la forma

$$\int \mathcal{D}x(\tau) e^{-S[x(\tau)]} \rightarrow \int \mathcal{D}y(u) e^{-y \cdot \hat{A} \cdot y + \hat{B} \cdot y},$$

la solución de este tipo de integrales es conocida:

$$\int \mathcal{D}y(u) e^{-y \cdot \hat{A} \cdot y + \hat{B} \cdot y} = (\det \hat{A})^{-1/2} \exp \left[\int du \int dv \hat{B}(u) \cdot \langle u | \hat{A}^{-1} | v \rangle \cdot \hat{B}(v) \right], \quad (2.92)$$

para nuestro caso se tiene

$$\int \mathcal{D}y(u) e^{-y \cdot \hat{A} \cdot y + \hat{B} \cdot y} = (4\pi T)^{-D/2} \exp \left[\frac{1}{4} \int du \int dv \hat{B}_i^\mu(u) \left(-2T \eta_{\mu\nu} G_B(u, v) \right) \hat{B}_j^\nu(v) \right]. \quad (2.93)$$

Ahora el trabajo se reduce a calcular las integrales dentro de la exponencial:

$$\begin{aligned} \int du \int dv \hat{B}_i^\mu(u) \eta_{\mu\nu} G_B(u, v) \hat{B}_j^\nu(v) &= \sum_{i,j}^N \int du \int dv \left(i k_i^\mu \delta(u - u_i) - \varepsilon_i^\mu \dot{\delta}(u - u_i) \right) \eta_{\mu\nu} G_B(u, v) \\ &\quad \times \left(i k_j^\nu \delta(v - u_j) - \varepsilon_j^\nu \dot{\delta}(v - u_j) \right) \\ &= \sum_{i,j}^N \left(\int du \int dv \left[-k_i \cdot k_j \delta(u - u_i) G_B(u, v) \delta(v - u_j) \right] \right. \\ &\quad + \int du \int dv \left[-i k_i \cdot \varepsilon_j \delta(u - u_i) G_B(u, v) \dot{\delta}(v - u_j) \right] \\ &\quad + \int du \int dv \left[-i \varepsilon_i \cdot k_j \dot{\delta}(u - u_i) G_B(u, v) \delta(v - u_j) \right] \\ &\quad \left. + \int du \int dv \left[\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \dot{\delta}(u - u_i) G_B(u, v) \dot{\delta}(v - u_j) \right] \right), \end{aligned} \quad (2.94)$$

en las integrales en las que aparece $\dot{\delta}$ se hace una integración por partes, entonces por cada derivada se tiene un signo $(-)$ y una derivada sobre la función de Green pero hay que tener cuidado con la variable sobre la que se deriva ya que

$$\frac{d}{dv} G_B(u, v) = -\dot{G}_B(u, v), \quad (2.95)$$

de esta forma se tiene

$$\int du \int dv \hat{B}_i^\mu(u) \eta_{\mu\nu} G_B(u, v) \hat{B}_j^\nu(v) = \sum_{i,j}^N \left(-k_i \cdot k_j G_B(u_i, u_j) - i k_i \cdot \varepsilon_j \dot{G}_B(u_i, u_j) + i \varepsilon_i \cdot k_j \dot{G}_B(u_i, u_j) - \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \ddot{G}_B(u_i, u_j) \right) \quad (2.96)$$

pero

$$\sum_{i,j}^N \varepsilon_i \cdot k_j \dot{G}_{Bij} = \sum_{j,i}^N \varepsilon_j \cdot k_i \dot{G}_{Bji} = - \sum_{i,j}^N \varepsilon_j \cdot k_i \dot{G}_{Bij}. \quad (2.97)$$

Entonces

$$\int du \int dv \hat{B}_i^\mu(u) \eta_{\mu\nu} G_B(u, v) \hat{B}_j^\nu(v) = - \sum_{i,j}^N \left(k_i \cdot k_j G_{Bij} + 2 i k_i \cdot \varepsilon_j \dot{G}_{Bij} + \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \ddot{G}_{Bij} \right). \quad (2.98)$$

Finalmente se escribe la expresión para la amplitud de N fotones a un lazo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{scalar}[k_1, \varepsilon_1; \dots; k_N, \varepsilon_N] &= \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} (-i)^N (2\pi)^D \delta \left(\sum k_j \right) \prod_l \int_0^1 du_l (4\pi T)^{-D/2} \\ &\times \exp \left[\frac{1}{4} \sum_{i,j}^N \left(-k_i \cdot k_j G_{Bij} + i(\varepsilon_i \cdot k_j - k_i \cdot \varepsilon_j) \dot{G}_{Bij} - \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \ddot{G}_{Bij} \right) \right] \Big|_{\text{multi-lin } \varepsilon_j} \\ &= (-i)^N (2\pi)^D \delta \left(\sum k_j \right) \int_0^\infty \frac{dT}{T} (4\pi T)^{-D/2} e^{-m^2 T} \prod_l \int_0^1 du_l \\ &\times \exp \left[T \sum_{i,j}^N \left(\frac{1}{2} k_i \cdot k_j G_{Bij} + i k_i \cdot \varepsilon_j \dot{G}_{Bij} + \frac{1}{2} \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \ddot{G}_{Bij} \right) \right] \Big|_{\text{multi-lin } \varepsilon_j} \end{aligned} \quad (2.99)$$

esta expresión es conocida como la *fórmula maestra de Bern - Kosower* [13].

2.3.2. Espín 1/2

Continuando con la idea del caso anterior, esto es, usar el campo electromagnético de fondo como una suma de ondas planas, (2.77), entonces

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \sum_{j=1}^N \left(\varepsilon_{j\nu}(ik_{j\mu}) e^{ik_j \cdot x} - \varepsilon_{j\mu}(ik_{j\nu}) e^{ik_j \cdot x} \right), \quad (2.100)$$

por lo cual se tiene

$$\begin{aligned}\psi^\mu F_{\mu\nu} \psi^\nu &= i \sum_{j=1}^N (\psi \cdot k_j \psi \cdot \varepsilon_j - \psi \cdot \varepsilon_j \psi \cdot k_j) e^{i k_j \cdot x} \\ &= -2i \sum_{j=1}^N \varepsilon_j \cdot \psi k_j \cdot \psi e^{i k_j \cdot x}.\end{aligned}\quad (2.101)$$

Entonces

$$\begin{aligned}e^{-S'_{int}} &= \exp \left[-i \int du \dot{x} \cdot A(x) - (-i) \int du \psi^\mu F_{\mu\nu} \psi^\nu \right] \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \prod_{i=1}^N \int_0^1 du_i (\dot{x}_i \cdot A_i - \psi_i^\mu F_{i\mu\nu} \psi_i^\nu) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \prod_{i=1}^N \int_0^1 du_i \left(\sum_{j_1=1}^N \varepsilon_{j_1} \cdot \dot{x}_i e^{i k_{j_1} \cdot x_i} + 2i \sum_{j_1=1}^N \varepsilon_{j_1} \cdot \psi_i k_{j_1} \cdot \psi_i e^{i k_{j_1} \cdot x_i} \right).\end{aligned}\quad (2.102)$$

Al requerir la linealidad con respecto a ε , se tiene

$$e^{-S'_{int}} = \sum_{N=0}^{\infty} (-i)^N \prod_{i=1}^N \int_0^1 du_i (\varepsilon_i \cdot \dot{x}_i + 2i \varepsilon_i \cdot \psi_i k_i \cdot \psi_i) e^{i k_i \cdot x_i}, \quad (2.103)$$

con esto se introduce el operador de vértice para un espinor

$$V_{spinor}^A[k, \varepsilon] = \int_0^1 du (\varepsilon \cdot \dot{x} + 2i \varepsilon \cdot \psi k \cdot \psi) e^{i k \cdot x}, \quad (2.104)$$

así que

$$e^{-S'_{int}} = \sum_{N=0}^{\infty} (-i)^N V_{spinor,1}^A V_{spinor,2}^A \cdots V_{spinor,N}^A. \quad (2.105)$$

En lo que se refiere a determinar la *fórmula maestra de Bern - Kosower* para este caso no es necesario resolver las integrales de Grassmann de forma explícita ya que es más eficiente usar la fórmula maestra de la partícula escalar, en la cual se hace una integración por partes para colocar \ddot{G} en términos de \dot{G} y después usar la *regla de reemplazo de Bern - Kosower* [9]:

$$\dot{G}_{B\mu_1\mu_2} \dot{G}_{B\mu_2\mu_3} \cdots \dot{G}_{B\mu_N\mu_1} \longrightarrow \dot{G}_{B\mu_1\mu_2} \dot{G}_{B\mu_2\mu_3} \cdots \dot{G}_{B\mu_N\mu_1} - G_{F\mu_1\mu_2} G_{F\mu_2\mu_3} \cdots G_{F\mu_N\mu_1} \quad (2.106)$$

esta regla se aplica al caso fotónico, así como a las amplitudes de gluones, pero aún no se hace una extensión al caso de gravitones.

2.4. QED más F constante

Los campos externos constantes juegan un papel importante en electrodinámica cuántica, ya que para ese caso es posible encontrar una solución exacta a la ecuación de Dirac. Además, los campos en general se pueden aproximar a un campo constante siempre y cuando la variación del campo es pequeña comparada con la longitud de onda de Compton del electrón. En la teoría de campos estándar, el campo constante se absorbe en el propagador del electrón; en el formalismo *línea de mundo*, el campo se absorbe en las funciones de correlación, por lo cual este formalismo resulta ser una mejor opción ya que requiere modificaciones menores.

2.4.1. Espín cero

Al hacer un desarrollo de Taylor al campo $A(x)$, la acción de interacción *línea de mundo*, (2.4), se puede aproximar a

$$S_{int} = i \int_0^T d\tau \dot{x}^\mu A_\mu(x(\tau)) \approx i \int_0^1 du \left[-\frac{1}{2} \bar{F}_{\mu\alpha}(x_0) y^\alpha(u) \right] \dot{y}^\mu(u).$$

Si además se considera $\bar{F}_{\mu\nu}(x_0)$ constante, entonces se tiene una ligera modificación a la acción libre

$$S'_0 = \int_0^1 du \left[y^\mu(u) \left(-\frac{1}{4T} \frac{d^2}{du^2} \right) y_\mu(u) + \left(-\frac{1}{2} i \bar{F}_{\mu\nu}(x_0) y^\nu(u) \dot{y}^\mu(u) \right) \right]. \quad (2.107)$$

Este paso es opcional pero al trabajar de esta forma se simplifican considerablemente los calculos. Además, el Lagrangiano *línea de mundo* se modifica por

$$\Delta L_{scalar} = -\frac{1}{2} i \bar{F}_{\mu\nu} \dot{y}^\mu y^\nu, \quad (2.108)$$

así

$$\begin{aligned} S'_0 &= \int_0^1 du \left[y^\mu(u) \left(-\frac{1}{4T} \frac{d^2}{du^2} \right) y_\mu(u) + \left(\frac{1}{2} i \bar{F}_{\mu\nu}(x_0) y^\mu(u) \dot{y}^\nu(u) \right) \right] \\ &= \int_0^1 du \left[y^\mu(u) \left(-\frac{1}{4T} \eta_{\mu\nu} \frac{d^2}{du^2} \right) y^\nu(u) + y^\mu(u) \left(\frac{1}{2} i \bar{F}_{\mu\nu}(x_0) \frac{d}{du} \right) y^\nu(u) \right] \\ &= \int_0^1 du y^\mu(u) \left(-\frac{1}{4T} \eta_{\mu\nu} \frac{d^2}{du^2} + \frac{1}{2} i \bar{F}_{\mu\nu}(x_0) \frac{d}{du} \right) y^\nu(u) \\ &= \int_0^1 du y^\mu(u) \left(-\frac{1}{4T} \right) \left(\eta_{\mu\nu} \frac{d^2}{du^2} - 2i T \bar{F}_{\mu\nu}(x_0) \frac{d}{du} \right) y^\nu(u), \end{aligned} \quad (2.109)$$

por lo cual las funciones de Green se modifican [9]:

$$2\langle u_1 | \left(\eta \frac{d^2}{du^2} - 2iT\bar{F} \frac{d}{du} \right)^{-1} | u_2 \rangle \equiv \mathcal{G}_B(u_1, u_2), \quad (2.110)$$

$$G_B(u_1, u_2) \eta^{\mu\nu} \rightarrow \mathcal{G}_B^{\mu\nu}(u_1, u_2) =: \mathcal{G}_{B12}^{\mu\nu}. \quad (2.111)$$

La forma explicita de \mathcal{G}_B está dada por [16],[17]

$$\mathcal{G}_B(u_1, u_2) = \frac{1}{2\mathcal{Z}^2} \left(\frac{\mathcal{Z}}{\sin(\mathcal{Z})} e^{-i\mathcal{Z}\dot{G}_{B12}} + i\mathcal{Z}\dot{G}_{B12} - 1 \right), \quad (2.112)$$

donde $\mathcal{Z} = T\bar{F}$, además

$$\begin{aligned} \dot{G}_{B12} &= 2\langle u_1 | \left(\frac{d}{du} - 2iT\bar{F} \right)^{-1} | u_2 \rangle \\ &= \frac{i}{\mathcal{Z}} \left(\frac{\mathcal{Z}}{\sin(\mathcal{Z})} e^{-i\mathcal{Z}\dot{G}_{B12}} - 1 \right), \end{aligned} \quad (2.113)$$

$$\begin{aligned} \ddot{G}_{B12} &= 2\langle u_1 | \left(\mathbb{1} - 2iT\bar{F} \left(\frac{d}{du} \right)^{-1} \right)^{-1} | u_2 \rangle \\ &= 2\delta_{12} - \frac{2\mathcal{Z}}{\sin(\mathcal{Z})} e^{-i\mathcal{Z}\dot{G}_{B12}}. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Enseguida, se escribe la expansión de las funciones de Green en términos de las primeras potencias de \bar{F} :

$$\mathcal{G}_{B12} = \mathbb{1}G_{B12} - \frac{i}{3}\dot{G}_{B12}\bar{G}_{B12}\mathcal{Z} + \left(\frac{1}{3}\bar{G}_{B12}^2 - \frac{1}{90}\right)\mathcal{Z}^2 + \mathcal{O}(\mathcal{Z}^3), \quad (2.115)$$

$$\dot{\mathcal{G}}_{B12} = \mathbb{1}\dot{G}_{B12} + 2iG_{B12}\mathcal{Z} + \frac{2}{3}\dot{G}_{B12}\bar{G}_{B12}\mathcal{Z}^2 + \mathcal{O}(\mathcal{Z}^3), \quad (2.116)$$

$$\ddot{\mathcal{G}}_{B12} = \mathbb{1}\ddot{G}_{B12} + 2i\dot{G}_{B12}\mathcal{Z} - 4G_{B12}\mathcal{Z}^2 + \mathcal{O}(\mathcal{Z}^3), \quad (2.117)$$

donde se ha usado $\dot{G}_{B12}^2 = 1 - 4G_{B12}$ y $\bar{G}_{B12} = |u_1 - u_2| - (u_1 - u_2)^2$, ver apéndice F. Es importante decir que las funciones de Green \mathcal{G}_{B12} , $\dot{\mathcal{G}}_{B12}$ y $\ddot{\mathcal{G}}_{B12}$ contienen $\eta_{\mu\nu}$ de forma implícita ya que existe contracción de índices en expresiones de la forma $\bar{F}\eta\bar{F}\eta\bar{F}\eta\cdots$. Además, en el límite de coincidencia se tiene

$$\mathcal{G}_B(u, u) = \frac{T}{2\mathcal{Z}} \left(\cot(\mathcal{Z}) - \frac{1}{\mathcal{Z}} \right), \quad (2.118)$$

$$\dot{\mathcal{G}}_B(u, u) = i \cot(\mathcal{Z}) - \frac{i}{\mathcal{Z}}, \quad (2.119)$$

$$\ddot{\mathcal{G}}_B(u, u) = 2\delta(0) - \frac{2\mathcal{Z}}{T} \cot(\mathcal{Z}). \quad (2.120)$$

El determinante de las integrales de trayectorias también sufre un cambio debido a (2.126) [9]

$$(4\pi T)^{D/2} \longrightarrow (4\pi T)^{D/2} \det^{1/2} \left[\frac{\sin(\mathcal{Z})}{\mathcal{Z}} \right], \quad (2.121)$$

donde D es la dimensión sobre la que se trabaja, en nuestro caso $D = 4$ pero trabajaremos con D sin definir ya que esto ayuda en la regularización dimensional. Finalmente para las funciones de correlación se tiene

$$\langle y^\mu(u) y^\nu(v) \rangle = -T \mathcal{G}_B^{\mu\nu}(u, v). \quad (2.122)$$

En este caso también es posible encontrar una expresión para la amplitud efectiva de N fotones [16],[17]:

$$\begin{aligned} \Gamma_{scalar}[k_1 \varepsilon_1; \cdots; k_N \varepsilon_N] &= (-i)^N (2\pi)^D \delta \left(\sum_{k_j} k_j \right) \int_0^\infty \frac{dT}{T} (4\pi T)^{-D/2} \det^{-1/2} \left[\frac{\sin(\mathcal{Z})}{\mathcal{Z}} \right] e^{-m^2 T} \\ &\times \prod_l \int_0^1 du_l \exp \left[T \sum_{i,j} \left(\frac{1}{2} k_i \cdot \mathcal{G}_{Bij} \cdot k_j + i \varepsilon_j \cdot \dot{\mathcal{G}}_{Bij} \cdot k_i + \frac{1}{2} \varepsilon_i \cdot \ddot{\mathcal{G}}_{Bij} \cdot \varepsilon_j \right) \right] \Big|_{\text{multi-lin } \varepsilon_j}, \end{aligned} \quad (2.123)$$

2.4.2. Espín 1/2

En este caso se va a considerar una expansión de la cantidad $\bar{F}(x)$ que aparece en (2.62):

$$\bar{F}_{\mu\nu}(x_0 + y) = \bar{F}_{\mu\nu}(x_0) + \bar{F}_{\mu\nu,\xi}(x_0) y^\xi + \frac{1}{2} \bar{F}_{\mu\nu,\xi\eta}(x_0) y^\xi y^\eta + \mathcal{O}(y^3), \quad (2.124)$$

por lo cual se puede escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{int} &= \int_0^1 du \psi^\mu \left(-i \bar{F}_{\mu\nu}(x) \right) \psi^\nu \\ &\approx -i \int_0^1 du \psi^\mu \left(\bar{F}_{\mu\nu}(x_0) + \bar{F}_{\mu\nu,\xi}(x_0) y^\xi + \frac{1}{2} \bar{F}_{\mu\nu,\xi\eta}(x_0) y^\xi y^\eta \right) \psi^\nu. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Si ahora se considera que $\bar{F}(x_0)$ es constante, entonces el primer término de (2.125) genera una modificación al Lagrangiano *línea de mundo*:

$$\Delta L_{spin} = \frac{1}{2} i \bar{F}_{\mu\nu} y^\mu \dot{y}^\nu - i \psi^\mu \bar{F}_{\mu\nu} \dot{\psi}^\nu. \quad (2.126)$$

Este término puede ser adicionado a S_0 , lo cual genera una acción libre mas general:

$$\begin{aligned} S'_0 &= \int_0^1 du y^\mu \left(-\frac{1}{4T} \right) \left(\eta_{\mu\nu} \frac{d^2}{du^2} - 2i T \bar{F}_{\mu\nu}(x_0) \frac{d}{du} \right) y^\nu \\ &+ \int_0^1 du \left(\frac{1}{2T} \right) \psi^\mu \left(\eta_{\mu\nu} \frac{d}{du} - 2i T \bar{F}_{\mu\nu}(x_0) \right) \dot{\psi}^\nu. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Esto modifica la función de Green

$$2 \langle u_1 | \left(\eta \frac{d}{du} - 2i \bar{F}(x_0) \right)^{-1} | u_2 \rangle \equiv \mathcal{G}_F(u_1, u_2), \quad (2.128)$$

cuya forma explicita está dada por

$$\mathcal{G}_F(u_1, u_2) = G_{F12} \frac{e^{-i\mathcal{Z}\dot{G}_{B12}}}{\cos(\mathcal{Z})}, \quad (2.129)$$

$$\dot{\mathcal{G}}_F(u_1, u_2) = 2\delta_{12} + 2i G_{F12} \frac{\mathcal{Z}}{\cos(\mathcal{Z})} e^{-i\mathcal{Z}\dot{G}_{B12}}, \quad (2.130)$$

la expansión en las primeras potencias de \bar{F} se encuentra en el apéndice F. Además, en el límite de coincidencia se tiene

$$\mathcal{G}_F(u_1, u_1) = -i \tan(\mathcal{Z}), \quad (2.131)$$

$$\dot{\mathcal{G}}_F(u_1, u_1) = 2\delta(0) + 2\mathcal{Z} \tan(\mathcal{Z}). \quad (2.132)$$

Finalmente para la función de correlación se tiene

$$\langle \psi^\mu(u) \dot{\psi}^\nu(v) \rangle = \frac{1}{2} T \mathcal{G}_F^{\mu\nu}(u, v). \quad (2.133)$$

Al considerar las integrales de trayectoria de los campos escalares y los campos de Grassmann, el determinante sufre la siguiente modificación

$$(4\pi T)^{-D/2} \rightarrow (4\pi T)^{-D/2} \det^{-1/2} \left[\frac{\tan(\mathcal{Z})}{\mathcal{Z}} \right]. \quad (2.134)$$

Para este caso también es posible encontrar una *fórmula maestra de Bern-Kosower* al usar (2.123), pues de nuevo se hace una integración por partes que cambiar $\dot{\mathcal{G}}_B$ por $\dot{\mathcal{G}}_B$ y después se aplican las *reglas de remplazo de Bern-Kosower*:

$$\dot{\mathcal{G}}_{B\mu_1\mu_2} \dot{\mathcal{G}}_{B\mu_2\mu_3} \cdots \dot{\mathcal{G}}_{B\mu_N\mu_1} \longrightarrow \dot{\mathcal{G}}_{B\mu_1\mu_2} \dot{\mathcal{G}}_{B\mu_2\mu_3} \cdots \dot{\mathcal{G}}_{B\mu_N\mu_1} - \mathcal{G}_{F\mu_1\mu_2} \mathcal{G}_{F\mu_2\mu_3} \cdots \mathcal{G}_{F\mu_N\mu_1}, \quad (2.135)$$

sin olvidar que esta regla se aplica al caso fotónico, así como a las amplitudes de gluones y que aún se desconoce una extensión al caso de gravitones.

CAPÍTULO 3

EL FORMALISMO LÍNEA DE MUNDO EN ESPACIO CURVO

3.1. Teoría de Einstein-Maxwell

3.1.1. Espín cero

Cuando se trabajó en el espacio plano se uso del Lagrangiano *línea de mundo*

$$L = \frac{\dot{x}^2}{4} + i\dot{x}^\mu A_\mu(x(\tau)), \quad (3.1)$$

pero si ahora se desea trabajar en el espacio curvo podría pensarse que la forma de hacerlo, en el caso del término cinético, es mediante la modificación

$$\frac{1}{4} \int_0^T d\tau \dot{x}^2 \rightarrow \frac{1}{4} \int_0^T d\tau \dot{x}^\mu g_{\mu\nu}(x(\tau)) \dot{x}^\nu. \quad (3.2)$$

Además de usar la linealización

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

especificando la forma de una onda plana para $h_{\mu\nu}$:

$$h_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} e^{ik \cdot x}. \quad (3.4)$$

Con ello, el operador de vértice para el gravitón tiene la forma

$$\epsilon_{\mu\nu} \int_0^T d\tau \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu e^{ik \cdot x}, \quad (3.5)$$

donde $\epsilon_{\mu\nu}$ es el vector de polarización del gravitón. Frecuentemente la constante κ se colocará igual a uno.

Desgraciadamente no es tan sencillo, ya que al usar esta forma para el vértice en una integral de trayectorias gaussianas, se obtienen expresiones con cantidades indefinidas como $\delta(0)$, $\delta^2(\tau_i - \tau_j)$, $\delta^3(\tau_i - \tau_j)$,... El espacio curvo guarda ciertas sutilezas que deben ser consideradas al momento de trabajar en el formalismo *línea de mundo*.

En el año 1957, De Witt [35] realizó el cálculo de la amplitud de transición de una partícula escalar no relativista empleando dos métodos: la ecuación de Schrödinger e integrales de trayectoria

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \left\langle x_f \left| e^{-\frac{1}{\hbar}(t_f - t_i)\hat{H}} \right| x_i \right\rangle, \quad (3.6)$$

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} \mathcal{D}x e^{-S[x]}, \quad (3.7)$$

al hacer la comparación entre ambos resultados encontró que se requiere un término adicional al Lagrangiano *línea de mundo*, cambio que implicaba

$$\hat{H} \rightarrow \hat{H} + \xi_{DW} R. \quad (3.8)$$

El valor que encontró De Witt para ξ_{DW} , después de algunas correcciones a su trabajo original, es $-1/8$; este término adicional al hamiltoniano tiene que ver con las divergencias UV que surgen en la construcción de la integral de trayectorias. Por muchos años se discutía el valor de este parámetro, pero actualmente se ha establecido el valor correcto y bajo nuestras convenciones es $-1/4$. Finalmente a ξ_{DW} se adiciona el ξ que surge de la ambigüedad sobre el ordenamiento del Hamiltoniano y con esto

$$\bar{\xi} = \xi - \frac{1}{4}, \quad (3.9)$$

es el valor del coeficiente de R en la acción *línea de mundo*.

Otro problema al trabajar en un espacio curvo es que se tiene un factor de medida no trivial a lo largo de la trayectoria [36]

$$\mathcal{D}x = Dx \prod_{0 \leq \tau < T} \sqrt{\det g_{\mu\nu}(x(\tau))}. \quad (3.10)$$

Se ha logrado moldear $\mathcal{D}x$ para ser empleada en el formalismo *línea de mundo* [20]:

$$\mathcal{D}x = Dx \prod_{0 \leq \tau < T} \sqrt{\det g_{\mu\nu}(x(\tau))} = Dx \int_{PBC} Da Db Dc e^{-S_{gh}[x,a,b,c]}, \quad (3.11)$$

donde a , b y c son conocidos como *campos fantasma (ghost)*, por lo cual S_{gh} es la acción fantasma

$$S_{gh}[x, a, b, c] = \int_0^T d\tau \frac{1}{4} g_{\mu\nu}(x) (a^\mu a^\nu + b^\mu c^\nu). \quad (3.12)$$

Los campos a conmutan entre sí, mientras que los campos b y c anticonmutan. Gracias a los *campos fantasma* es posible cancelar los términos indefinidos que surgen en las contracciones de Wick.

Así que el operador de vértice gravitacional, ec. (3.5), es

$$V_{scalar}^h[k, \epsilon] = \epsilon_{\mu\nu} \int_0^T d\tau \left[\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + a^\mu a^\nu + b^\mu c^\nu \right]. \quad (3.13)$$

Antes de hacer el escalamiento sobre el intervalo de integración se va a hacer un ligero cambio en los *campos fantasma*, esto es:

$$a^\nu \rightarrow \frac{a^\nu}{T}, \quad b^\nu \rightarrow \frac{b^\nu}{T} \quad \text{y} \quad c^\nu \rightarrow \frac{c^\nu}{T}, \quad (3.14)$$

entonces las funciones de correlación se definen por

$$\langle a^\mu(\tau_1) a^\nu(\tau_2) \rangle = 2T \delta(\tau_1 - \tau_2) \eta^{\mu\nu}, \quad (3.15)$$

$$\langle b^\mu(\tau_2) c^\nu(\tau_2) \rangle = -4T \delta(\tau_1 - \tau_2) \eta^{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

Así que la acción *línea de mundo* tiene la siguiente forma:

$$S[x^\mu; g, A] = \int_0^1 du \left[\frac{1}{4T} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + i \dot{x}^\mu A_\mu(x) + T \bar{\xi} R(x) + \frac{1}{4T} g_{\mu\nu} (a^\mu a^\nu + b^\mu c^\nu) \right] \quad (3.17)$$

Por último se tiene el problema de la covariancia cuando se trabaja en un espacio curvo:

- El esquema *DBC* garantiza la covariancia del Lagrangiano efectivo [20].
- El esquema *SI* tiene un Lagrangiano efectivo que contiene términos con derivadas totales no covariantes, lo cual impide que se puedan usar coordenadas riemannianas. Éstas no son otra cosa que un desarrollo de Taylor del tensor métrico, $g(x)$, alrededor de un punto arbitrario x_0 en términos del tensor de Riemann y sus derivadas covariantes [20].

En los trabajos recientes de Bastianelli, Corradini y Zirotti encontraron la forma de generar el carácter covariante para el Lagrangiano efectivo en el esquema *inspirado en cuerdas* [23]; esto es posible al introducir términos del tipo Fadeev - Popov al Lagrangiano *línea de mundo*:

$$S_{FP} = - \int_0^1 du \bar{\eta}_\mu Q^\mu_\nu(x_0, y(u)) \eta^\nu, \quad (3.18)$$

donde

$$Q^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \frac{1}{3} R^\mu_{\alpha\beta\nu} y^\alpha y^\beta + \dots \quad (3.19)$$

$$\langle \eta^\mu \bar{\eta}_\nu \rangle = -\delta^\mu_\nu = -\langle \bar{\eta}_\nu \eta^\mu \rangle, \quad (3.20)$$

con η y $\bar{\eta}$ *campos fantasma* constantes. La acción S_{FP} proporciona los términos necesarios para que las derivadas totales que aparecen en el Lagrangiano efectivo del esquema *inspirado en cuerdas* adquieran la propiedad de ser covariantes, y una vez que adquieren esta cualidad, es posible usar coordenadas riemannianas y la norma de Fock-Schwinger simultaneamente (ver apéndice H) [24]:

$$g_{\mu\nu}(x = x_0 + y) = g_{\mu\nu}(x_0) + \frac{1}{3} R_{\mu\alpha\beta\nu}(x_0) y^\alpha y^\beta + \frac{1}{6} R_{\mu\alpha\beta\nu;\gamma}(x_0) y^\alpha y^\beta y^\gamma + \dots, \quad (3.21)$$

$$A_\mu(x = x_0 + y) = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}(x_0) y^\nu - \frac{1}{3} F_{\mu\nu;\alpha}(x_0) y^\nu y^\alpha - \frac{1}{8} \left[F_{\mu\nu;\alpha\beta}(x_0) + \frac{1}{3} F_{\delta\alpha}(x_0) R^\delta_{\beta\nu\mu}(x_0) \right] y^\alpha y^\beta y^\nu + \dots, \quad (3.22)$$

para subir y bajar índices se usa $g^{\mu\nu}(x_0)$ y $g_{\mu\nu}(x_0)$. En este momento la acción *línea de mundo* contiene una gran variedad de elementos, pero en este trabajo se ha truncado (3.21) y (3.22) hasta términos de la forma $R^F \dots F$, es decir lineal en la curvatura, aunque también se consideran expresiones que se puedan mezclar con éstos, por el hecho que $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \rightarrow R_{\mu\nu}$, así la acción *línea de mundo* se expresa como

$$\begin{aligned} S[x^\mu; R, F] &= \int_0^1 du \left[\frac{1}{4T} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + i \dot{x}^\mu A_\mu(x) + T \bar{\xi} R(x) + \frac{1}{4T} g_{\mu\nu} (a^\mu a^\nu + b^\mu c^\nu) - \bar{\eta}_\mu Q^\mu_\nu(x_0, y(u)) \eta^\nu \right] \\ &= \int_0^1 du \frac{1}{4T} \left[\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{3} R_{\mu\alpha\beta\nu}(x_0) y^\alpha y^\beta \right] \dot{y}^\mu \dot{y}^\nu \\ &\quad + \int_0^1 du i \dot{y}^\mu \left[-\frac{1}{2} F_{\mu\nu}(x_0) y^\nu - \frac{1}{3} F_{\mu\nu;\alpha}(x_0) y^\nu y^\alpha \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \left(F_{\mu\nu;\alpha\beta}(x_0) + \frac{1}{3} F_{\delta\alpha}(x_0) R^\delta_{\beta\nu\mu}(x_0) \right) y^\alpha y^\beta y^\nu \right] + \int_0^1 du T \bar{\xi} R(x) \\ &\quad + \int_0^1 du \frac{1}{4T} \left[\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{3} R_{\mu\alpha\beta\nu}(x_0) y^\alpha y^\beta \right] (a^\mu a^\nu + b^\mu c^\nu) - \int_0^1 du \bar{\eta}_\mu Q^\mu_\nu(x_0, y) \eta^\nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S[x^\mu; R, F] = & \int_0^1 du \left[\frac{1}{4T} \eta_{\mu\nu} \dot{y}^\mu \dot{y}^\nu + \frac{1}{12T} R_{\mu\alpha\beta\nu}(x_0) \dot{y}^\mu y^\alpha y^\beta \dot{y}^\nu + T \bar{\xi} R(x_0) \right. \\
& - \frac{i}{2} F_{\mu\nu}(x_0) \dot{y}^\mu y^\nu - \frac{i}{3} F_{\mu\nu;\alpha}(x_0) \dot{y}^\mu y^\nu y^\alpha - \frac{i}{8} \left(F_{\mu\nu;\alpha\beta}(x_0) + \frac{1}{3} F_{\lambda\nu} R^\lambda_{\alpha\beta\mu}(x_0) \right) y^\nu y^\alpha y^\beta \dot{y}^\mu \\
& \left. + \frac{1}{4T} \left(\eta_{\mu\nu} (a^\mu a^\nu + b^\mu c^\nu) + \frac{1}{3} R_{\mu\alpha\beta\nu}(x_0) y^\alpha y^\beta (a^\mu a^\nu + b^\mu c^\nu) \right) - \bar{\eta}_\mu Q^\mu_\nu(x_0, y) \eta^\nu \right], \tag{3.23}
\end{aligned}$$

los términos se pueden clasificar de la siguiente manera

- Acción libre:

$$S_0 = \int_0^1 du \frac{1}{4T} \eta_{\mu\nu} \dot{y}^\mu \dot{y}^\nu. \tag{3.24}$$

- Acción gravitacional:

$$S_{grav} = \int_0^1 du \left[\frac{1}{12T} R_{\mu\alpha\beta\nu}(x_0) \dot{y}^\mu y^\alpha y^\beta \dot{y}^\nu + T \bar{\xi} R(x_0) \right]. \tag{3.25}$$

- Acción electromagnética:

$$\begin{aligned}
S_{em} = & \int_0^1 du \left[-\frac{i}{2} F_{\mu\nu}(x_0) \dot{y}^\mu y^\nu - \frac{i}{3} F_{\mu\nu;\alpha}(x_0) \dot{y}^\mu y^\nu y^\alpha \right. \\
& \left. - \frac{i}{8} \left(F_{\mu\nu;\alpha\beta}(x_0) + \frac{1}{3} F_{\lambda\nu} R^\lambda_{\alpha\beta\mu}(x_0) \right) y^\nu y^\alpha y^\beta \dot{y}^\mu \right], \tag{3.26}
\end{aligned}$$

es conveniente definir

$$S_{em}^{(0)} = \int_0^1 du \left[-\frac{i}{2} F_{\mu\nu}(x_0) \dot{y}^\mu y^\nu \right], \tag{3.27}$$

$$S_{em}^{(1)} = \int_0^1 du \left[-\frac{i}{3} F_{\mu\nu;\alpha}(x_0) \dot{y}^\mu(u) y^\nu(u) y^\alpha(u) \right], \tag{3.28}$$

$$S_{em}^{(2)} = \int_0^1 du \left[-\frac{i}{8} F_{\mu\nu;\alpha\beta}(x_0) y^\nu(u) y^\alpha(u) y^\beta(u) \dot{y}^\mu(u) \right], \tag{3.29}$$

$$S_{em,grav} = \int_0^1 du \left[-\frac{i}{24} F_{\lambda\nu} R^\lambda_{\alpha\beta\mu}(x_0) y^\nu(u) y^\alpha(u) y^\beta(u) \dot{y}^\mu(u) \right], \tag{3.30}$$

- Acción fantasma

$$\begin{aligned}
S_{gh} = & \int_0^1 du \frac{1}{4T} \left[\eta_{\mu\nu} (a^\mu(u) a^\nu(u) + b^\mu(u) c^\nu(u)) \right. \\
& \left. + \frac{1}{3} R_{\mu\alpha\beta\nu}(x_0) y^\alpha y^\beta (a^\mu(u) a^\nu(u) + b^\mu(u) c^\nu(u)) + \dots \right]. \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Se define además

$$S_{gh}^{(0)} = \int_0^1 du \frac{1}{4T} \eta_{\mu\nu} (a^\mu(u) a^\nu(u) + b^\mu(u) c^\nu(u)), \tag{3.32}$$

$$S_{gh}^{(1)} = \int_0^1 du \frac{1}{12T} R_{\mu\alpha\beta\nu}(x_0) y^\alpha y^\beta (a^\mu(u) a^\nu(u) + b^\mu(u) c^\nu(u)). \tag{3.33}$$

Así que para el esquema *inspirado en cuerdas* se tiene

$$\langle \eta^\mu \bar{\eta}_\nu \rangle = -\delta_\nu^\mu = -\langle \bar{\eta}_\nu \eta^\mu \rangle, \quad (3.34)$$

$$\langle y^\mu(u) y^\nu(v) \rangle = -T G(u, v) \eta^{\mu\nu}, \quad (3.35)$$

$$\langle a^\mu(u) a^\nu(v) \rangle = 2T \delta(u - v) \eta^{\mu\nu}, \quad (3.36)$$

$$\langle b^\mu(u) c^\nu(v) \rangle = -4T \delta(u - v) \eta^{\mu\nu}, \quad (3.37)$$

$$G(u, v) = |u - v| - (u - v)^2 - 1/6. \quad (3.38)$$

Por último se escribe la acción efectiva

$$\Gamma[g, A] = \int d^4 x_0 \sqrt{g} \mathcal{L}_{scalar}, \quad (3.39)$$

con el Lagrangiano efectivo dado por

$$\mathcal{L}_{scalar} = \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{1}{(4\pi T)^{D/2}} e^{-m^2 T} \langle e^{-S_0 - S_{grav} - S_{gh} - S_{em} - S_{FP}} \rangle. \quad (3.40)$$

3.1.2. Espín 1/2

La generalización del Lagrangiano *línea de mundo* en un espacio curvo con una partícula de espín 1/2 es la siguiente

$$L = \frac{1}{4} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + i A_\mu(x) \dot{x}^\mu + \frac{1}{4} T R(x) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \psi^\mu (\dot{\psi}^\nu + \dot{x}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\nu(x) \psi^\beta) - i \psi^\mu F_{\mu\nu}(x) \psi^\nu, \quad (3.41)$$

así que además de (3.21) y (3.22), también se necesita el desarrollo del tensor $F_{\mu\nu}$ y de los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$ (ver apéndice H):

$$F_{\mu\nu}(x_0 + y) = F_{\mu\nu}(x_0) + F_{\mu\nu;\xi}(x_0) y^\xi + \frac{1}{2} F_{\mu\nu;\xi\eta}(x_0) y^\xi y^\eta + \frac{1}{6} \left(F_{\mu\lambda}(x_0) R_{\xi\eta\nu}^\lambda(x_0) - F_{\nu\lambda}(x_0) R_{\xi\eta\mu}^\lambda(x_0) \right) y^\xi y^\eta + \mathcal{O}(y^3), \quad (3.42)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\nu(x_0 + y) = \frac{1}{3} \left(R_{\alpha\xi\beta}^\nu(x_0) + R_{\beta\xi\alpha}^\nu(x_0) \right) y^\xi + \dots. \quad (3.43)$$

Lo cual permite escribir las integrales de Grassmann de la siguiente forma

$$\int \mathcal{D}\psi(\tau) \exp \left[- \int_0^T d\tau \left(\frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \psi^\mu \dot{\psi}^\nu + \frac{1}{6} R_{\mu\alpha\beta\nu}(x_0) y^\alpha y^\beta \psi^\mu \dot{\psi}^\nu + \frac{1}{6} \eta_{\mu\nu} \left(R_{\alpha\lambda\beta}^\nu(x_0) + R_{\beta\lambda\alpha}^\nu(x_0) \right) \dot{y}^\alpha y^\lambda \psi^\mu \psi^\beta - i F_{\mu\nu}(x_0) \psi^\mu \psi^\nu - i F_{\mu\nu;\alpha}(x_0) y^\alpha \psi^\mu \psi^\nu - \frac{i}{2} F_{\mu\nu;\alpha\beta}(x_0) y^\alpha y^\beta \psi^\mu \psi^\nu - \frac{i}{3} F_{\mu\lambda}(x_0) R_{\alpha\beta\nu}^\lambda(x_0) \psi^\mu \dot{\psi}^\nu y^\alpha y^\beta \right) \right], \quad (3.44)$$

se omitieron otra vez términos de la forma RR en la expresión anterior.

Además, para un lazo fermiónico el operador de vértice del gravitón tiene la forma

$$V_{spin}^h[k, \varepsilon] = \varepsilon_{\mu\nu} \int_0^1 du \frac{1}{T} \left[\dot{y}^\mu(u) \dot{y}^\nu(u) + a^\mu(u) a^\nu(u) + b^\mu(u) c^\nu(u) + 2 \left(\psi^\mu(u) \dot{\psi}^\nu(u) + \alpha^\mu(u) \alpha^\nu(u) + i \dot{y}^\mu(u) \psi^\nu(u) \psi(u) \cdot k \right) \right] e^{ik \cdot x(\tau)}, \quad (3.45)$$

donde α^μ son *campos fantasma* adicionales que surgen de las integrales de trayectorias para ψ^μ , cuya función de correlación es

$$\langle \alpha^\mu(u_1) \alpha^\nu(u_2) \rangle = T \delta(u_1 - u_2) \eta^{\mu\nu}. \quad (3.46)$$

Así que la acción *línea de mundo* está dada por

$$\begin{aligned} S[x^\mu; R, F] = & \int_0^1 du \left[\eta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{4T} \dot{y}^\mu(u) \dot{y}^\nu(u) + \frac{1}{2T} \psi^\mu(u) \dot{\psi}^\nu(u) \right) \right. \\ & + \frac{1}{12T} R_{\mu\alpha\beta\nu}(x_0) \dot{y}^\mu(u) y^\alpha(u) y^\beta(u) \dot{y}^\nu(u) + T \bar{\xi} R(x_0) \\ & + \frac{1}{6T} \eta_{\mu\nu} \left(R^\nu_{\alpha\lambda\beta}(x_0) + R^\nu_{\beta\lambda\alpha}(x_0) \right) \dot{y}^\alpha(u) y^\lambda(u) \psi^\mu(u) \dot{\psi}^\beta(u) \\ & + \frac{1}{6T} R_{\mu\alpha\beta\nu}(x_0) y^\alpha(u) y^\beta(u) \psi^\mu(u) \dot{\psi}^\nu(u) \\ & - \frac{i}{2} F_{\mu\nu}(x_0) \left(\dot{y}^\mu(u) y^\nu(u) + 2 \psi^\mu(u) \dot{\psi}^\nu(u) \right) \\ & - \frac{i}{3} F_{\mu\nu;\alpha}(x_0) \left(\dot{y}^\mu(u) y^\nu(u) + 3 \psi^\mu(u) \dot{\psi}^\nu(u) \right) y^\alpha(u) \\ & - \frac{i}{8} F_{\mu\nu;\alpha\beta}(x_0) \left(\dot{y}^\mu(u) y^\nu(u) + 4 \psi^\mu(u) \dot{\psi}^\nu(u) \right) y^\alpha(u) y^\beta(u) \\ & - \frac{i}{24} F_{\lambda\mu}(x_0) R^\lambda_{\alpha\beta\nu}(x_0) \left[y^\mu(u) \dot{y}^\nu(u) + 8 \psi^\nu(u) \dot{\psi}^\mu(u) \right] y^\alpha(u) y^\beta(u) \\ & + \frac{1}{4T} \left[\eta_{\mu\nu} \left(a^\mu(u) a^\nu(u) + b^\mu(u) c^\nu(u) + 2 \alpha^\mu(u) \alpha^\nu(u) \right) \right. \\ & + \frac{1}{3} R_{\mu\alpha\beta\nu}(x_0) y^\alpha y^\beta \left(a^\mu(u) a^\nu(u) + b^\mu(u) c^\nu(u) + 2 \alpha^\mu(u) \alpha^\nu(u) \right) \left. \right] \\ & \left. - \bar{\eta}_\mu Q^\mu_\nu \left(x_0, y(u) \right) \eta^\nu \right]. \quad (3.47) \end{aligned}$$

Se define

- Acción libre:

$$S_0 = \int_0^1 du \eta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{4T} \dot{y}^\mu(u) \dot{y}^\nu(u) + \frac{1}{2T} \psi^\mu(u) \dot{\psi}^\nu(u) \right),$$

después de hacer una integración por partes se tiene

$$S_0 = \int_0^1 du \eta_{\mu\nu} \left[y^\mu(u) \left(-\frac{1}{4T} \frac{d^2}{du^2} \right) y^\nu(u) + \psi^\mu(u) \left(\frac{1}{2T} \frac{d}{du} \right) \dot{\psi}^\nu(u) \right]. \quad (3.48)$$

- Acción gravitacional:

$$\begin{aligned} S_{grav} = & \int_0^1 du \left[\frac{1}{12T} R_{\mu\alpha\beta\nu}(x_0) \dot{y}^\mu(u) y^\alpha(u) y^\beta(u) \dot{y}^\nu(u) + T \bar{\xi} R(x_0) \right. \\ & + \frac{1}{6T} \eta_{\mu\nu} \left\{ R^\nu_{\alpha\lambda\beta}(x_0) + R^\nu_{\beta\lambda\alpha}(x_0) \right\} \dot{y}^\alpha(u) y^\lambda(u) \psi^\mu(u) \dot{\psi}^\beta(u) \\ & \left. + \frac{1}{6T} R_{\mu\alpha\beta\nu}(x_0) y^\alpha(u) y^\beta(u) \psi^\mu(u) \dot{\psi}^\nu(u) \right]. \quad (3.49) \end{aligned}$$

- Acción electromagnética:

$$S_{em} = \int_0^1 du \left[-\frac{i}{2} F_{\mu\nu}(x_0) \left(\dot{y}^\mu(u) y^\nu(u) + 2 \psi^\mu(u) \psi^\nu(u) \right) - \frac{i}{3} F_{\mu\nu;\alpha}(x_0) \left(\dot{y}^\mu(u) y^\nu(u) + 3 \psi^\mu(u) \psi^\nu(u) \right) y^\alpha(u) - \frac{i}{8} F_{\mu\nu;\alpha\beta}(x_0) \left(\dot{y}^\mu(u) y^\nu(u) + 4 \psi^\mu(u) \psi^\nu(u) \right) y^\alpha(u) y^\beta(u) \right]. \quad (3.50)$$

Conviene definir

$$S_{em}^{(0)} = \int_0^1 du \left(-\frac{i}{2} \right) F_{\mu\nu}(x_0) \left(\dot{y}^\mu(u) y^\nu(u) + 2 \psi^\mu(u) \psi^\nu(u) \right). \quad (3.51)$$

Nuevamente se realiza una integración por partes, con lo cual es posible escribir:

$$S_{em}^{(0)} = \int_0^1 du \left[\frac{1}{4} y^\mu(u) \left(2i F_{\mu\nu}(x_0) \frac{d}{du} \right) y^\nu(u) + \frac{1}{2} \psi^\mu(u) \left(-2i F_{\mu\nu}(x_0) \right) \psi^\nu(u) \right]. \quad (3.52)$$

Además se define

$$S_{em}^{(1)} = \int_0^1 du \left(-\frac{i}{3} \right) F_{\mu\nu;\alpha}(x_0) \left(\dot{y}^\mu(u) y^\nu(u) + 3 \psi^\mu(u) \psi^\nu(u) \right) y^\alpha(u), \quad (3.53)$$

$$S_{em}^{(2)} = \int_0^1 du \left(-\frac{i}{8} \right) F_{\mu\nu;\alpha\beta}(x_0) \left(\dot{y}^\mu(u) y^\nu(u) + 4 \psi^\mu(u) \psi^\nu(u) \right) y^\alpha(u) y^\beta(u). \quad (3.54)$$

- Acción electromagnética-gravitacional:

$$S_{em,grav} = \int_0^1 du \left(-\frac{i}{24} \right) F_{\lambda\mu}(x_0) R^\lambda_{\alpha\beta\nu}(x_0) \left[y^\mu(u) \dot{y}^\nu(u) + 8 \psi^\nu(u) \psi^\mu(u) \right] y^\alpha(u) y^\beta(u). \quad (3.55)$$

- Acción fantasma

$$S_{gh} = \int_0^1 du \frac{1}{4T} \left[\eta_{\mu\nu} \left(a^\mu(u) a^\nu(u) + b^\mu(u) c^\nu(u) + 2 \alpha^\mu(u) \alpha^\nu(u) \right) + \frac{1}{3} R_{\mu\alpha\beta\nu}(x_0) y^\alpha y^\beta \left(a^\mu(u) a^\nu(u) + b^\mu(u) c^\nu(u) + 2 \alpha^\mu(u) \alpha^\nu(u) \right) + \dots \right], \quad (3.56)$$

donde se define

$$S_{gh}^{(0)} = \int_0^1 du \frac{1}{4T} \eta_{\mu\nu} \left(a^\mu(u) a^\nu(u) + b^\mu(u) c^\nu(u) + 2 \alpha^\mu(u) \alpha^\nu(u) \right), \quad (3.57)$$

$$S_{gh}^{(1)} = \int_0^1 du \frac{1}{12T} R_{\mu\alpha\beta\nu}(x_0) y^\alpha y^\beta \left(a^\mu(u) a^\nu(u) + b^\mu(u) c^\nu(u) + 2 \alpha^\mu(u) \alpha^\nu(u) \right). \quad (3.58)$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Acción línea de mundo} & \text{Términos con campos} & \text{Acción línea de mundo} \\ \text{escalar} & + \text{Grassmann} & \rightarrow \text{fermiónica} \end{array}$$

Esto permite escribir la acción efectiva

$$\Gamma[A]_{spinor} = -2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_{x(T)=x(0)} \mathcal{D}x(\tau) \int_{\psi(T)=-\psi(0)} \mathcal{D}\psi(\tau) e^{-S}, \quad (3.59)$$

con

$$S = S_0 + S_{\text{grav}} + S_{\text{em}} + S_{\text{em,grav}} + S_{\text{gh}} + S_{\text{FP}}, \quad (3.60)$$

esta descomposición de la acción *línea de mundo* es semejante a la que se tiene en el caso de una partícula sin espín, pero recordemos que

Es importante mencionar que el formalismo *línea de mundo* de la forma como lo presentamos aquí está completo para cálculos al nivel lineal en la curvatura correspondiente a amplitudes con no más de un gravitón, si uno quiere ir más allá de esta aproximación hay que enfrentar sutilezas adicionales vinculadas con el hecho de que empezando con el nivel cuadrático en la curvatura las integrales sobre los parámetros u en general desarrollarán singularidades generando la necesidad de introducir una regularización y contratérminos ajustados a la regularización seleccionada. Los detalles se pueden encontrar en [20].

3.2. Espacio curvo y F constante

3.2.1. Espín cero

Al usar la norma de Fock-Schwinger en el espacio curvo (ver apéndice H), se tiene la posibilidad de unir el término cinético, S_0 con $S_{em}^{(0)}$, como se hace en la sección 2.4.1, de hecho se tiene la misma expresión ya que no hay presencia del espacio curvo en $S_{em}^{(0)}$:

$$S'_0 = \int_0^1 du y^\mu \left(-\frac{1}{4T} \right) \left(\eta_{\mu\nu} \frac{d^2}{du^2} - 2iT \bar{F}_{\mu\nu}(x_0) \frac{d}{du} \right) y^\nu,$$

entonces los efectos de $S_{em}^{(0)}$ se pueden tomar en cuenta de manera no perturbativa al usar la función de Green generalizada, ec. (2.110), lo cual implica los cambios indicados en (2.111) y (2.121):

$$G_B(u_1, u_2) \eta^{\mu\nu} \longrightarrow \mathcal{G}_B^{\mu\nu}(u_1, u_2) = \mathcal{G}_{B12}^{\mu\nu},$$

$$(4\pi T)^{D/2} \longrightarrow (4\pi T)^{D/2} \det^{1/2} \left[\frac{\sin(\mathcal{Z})}{\mathcal{Z}} \right],$$

estos cambios son como antes gracias a que en el término $S_{em}^{(0)}$ no hay presencia del espacio curvo, sin embargo existe el cambio

$$F \eta F \eta \cdots F \eta \longrightarrow F g F g \cdots F g.$$

3.2.2. Espín 1/2

Se procede como en la sección 2.4.2, esto es, considerar $\bar{F}(x_0)$ constante así que es posible fusionar (3.48) y (3.51), lo cual genera una acción libre más general:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}'_0 &= \int_0^1 du \eta_{\mu\nu} \left[y^\mu \left(-\frac{1}{4T} \frac{d^2}{du^2} \right) y^\nu + \psi^\mu \left(\frac{1}{2T} \frac{d}{du} \right) \psi^\nu \right] \\
&\quad + \int_0^1 du \left[\frac{1}{4} y^\mu \left(2i \bar{F}_{\mu\nu}(x_0) \frac{d}{du} \right) y^\nu + \frac{1}{2} \psi^\mu \left(-2i \bar{F}_{\mu\nu}(x_0) \right) \psi^\nu \right] \\
&= \int_0^1 du y^\mu \left(-\frac{1}{4T} \right) \left(\eta_{\mu\nu} \frac{d^2}{du^2} - 2iT \bar{F}_{\mu\nu}(x_0) \frac{d}{du} \right) y^\nu \\
&\quad + \int_0^1 du \psi^\mu \left(\frac{1}{2T} \right) \left(\eta_{\mu\nu} \frac{d}{du} - 2iT \bar{F}_{\mu\nu}(x_0) \right) \psi^\nu. \quad (3.61)
\end{aligned}$$

Esta expresión es igual a la que se encuentra en el espacio plano, debido a que el término que contiene $\bar{F}(x_0)$ no incorpora efectos del espacio curvo. Con esto se tienen los siguientes cambios

$$\begin{aligned}
G_B(u_1, u_2) \eta^{\mu\nu} &\longrightarrow \mathcal{G}_B^{\mu\nu}(u_1, u_2) = \mathcal{G}_{B12}^{\mu\nu}, \\
G_F(u_1, u_2) \eta^{\mu\nu} &\longrightarrow \mathcal{G}_F^{\mu\nu}(u_1, u_2) = \mathcal{G}_{F12}^{\mu\nu}, \\
(4\pi T)^{-D/2} &\longrightarrow (4\pi T)^{-D/2} \det^{-1/2} \left[\frac{\tan(\mathcal{Z})}{\mathcal{Z}} \right].
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 4

EL LAGRANGIANO EFECTIVO AL NIVEL $RF\dot{F}$

En este capítulo nos interesa encontrar todos los términos en la acción efectiva que son de la forma $RF\dot{F}$ y términos proporcionales a $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$:

$$\begin{aligned} & R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ & F_\mu^\alpha F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta} \\ & F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} \\ & F_{\mu;\alpha}^\alpha F^{\mu\beta}_{;\beta} \\ & F_{\alpha\beta;\gamma} F^{\alpha\beta;\gamma} \\ & F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_{;\gamma} \end{aligned}$$

aunque el método de hacer los cálculos no es el más eficiente se procede de esta forma para verificar en detalle la equivalencia $DBC - SI$. La integración de las funciones de Green se puede programar en MATHEMATICA, algunos ejemplos se pueden ver en el apéndice D.

4.1. Espín cero

Aquí sólo se muestra la forma en que se obtiene RF^2 en cada esquema y al final se colocan los resultados para las estructuras tensoriales restantes.

4.1.1. Esquema DBC

Para encontrar términos de la forma RF^2 en el esquema DBC se requiere el uso de (2.15) - (2.14), así como (3.24) - (3.33).

Término $RF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$

Para obtener esta estructura tensorial se requiere la contracción del tensor de Riemann para producir el escalar de curvatura, además de la contracción entre dos tensores de Maxwell; la forma de lograr esto es mediante el desarrollo de las exponenciales y usar sólo el término que es de nuestro interés, en este caso se desea $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, pero la cantidad $F^{\mu\nu}$ aparece en $S_{em}^{(0)}$, así que será necesario hacer el desarrollo de $e^{-S_{em}^{(0)}}$ y sólo conservar el término de segundo orden:

$$\frac{1}{2} \left(-S_{em}^{(0)} \right)^2, \quad (4.1)$$

por otra parte, para R sólo se requiere la parte lineal del desarrollo de $e^{-S_{grav}-S_{gh}^{(1)}}$:

$$-S_{grav} - S_{gh}^{(1)}. \quad (4.2)$$

Después hay que realizar las contracciones de Wick:

$$\frac{1}{2} \left\langle \left(-S_{em}^{(0)} \right)^2 \left(-S_{grav} - S_{gh}^{(1)} \right) \right\rangle. \quad (4.3)$$

Primero se hace el cálculo para la parte electromagnética:

$$\frac{1}{2} \left\langle \left(-S_{em}^{(0)} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \left(-\frac{i}{2} \right)^2 \left\langle \int du_1 du_2 F_{\mu\nu} \dot{y}_1^\mu \dot{y}_1^\nu F_{\alpha\beta} \dot{y}_2^\alpha \dot{y}_2^\beta \right\rangle. \quad (4.4)$$

Ahora se calculan las diferentes contracciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathcal{A} &= \langle \dot{y}_1^\mu \dot{y}_2^\alpha \rangle \langle \dot{y}_1^\nu \dot{y}_2^\beta \rangle \\ &= (-2T g^{\mu\alpha} \bullet \Delta_{12}^\bullet) (-2T g^{\nu\beta} \Delta_{12}) \\ &= 4T^2 g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \bullet \Delta_{12}^\bullet \Delta_{12}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Veamos que resulta de la integración sobre u_1 :

$$\begin{aligned} \int du_1 \bullet \Delta_{12}^\bullet \Delta_{12} &= \int du_1 (1 - \delta_{12}) \Delta_{12} \\ &= \int du_1 \Delta_{12} - \Delta_{22}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

entonces

$$\begin{aligned} \int du_1 du_2 \bullet \Delta_{12}^\bullet \Delta_{12} &= \int du_1 du_2 \Delta_{12} - \int du_2 \Delta_{22} \\ &= -\frac{1}{12} - \left(-\frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{1}{12}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

La contracción de los índices está dada por

$$F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (4.8)$$

por lo cual se tiene

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \int du_1 du_2 \mathcal{A}\mathcal{A} &= 4T^2 \left(\frac{1}{12} \right) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{3} T^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ahora veamos la siguiente contracción:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathcal{B} &= \langle \dot{y}_1^\mu \dot{y}_2^\beta \rangle \langle \dot{y}_1^\nu \dot{y}_2^\alpha \rangle \\ &= (-2T g^{\mu\beta} \bullet \Delta_{12}^\bullet) (-2T g^{\nu\alpha} \Delta_{12}^\bullet) \\ &= 4T^2 g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} \bullet \Delta_{12}^\bullet \Delta_{12}^\bullet, \end{aligned} \quad (4.10)$$

pero

$$\int du_1 du_2 \bullet \Delta_{12}^\bullet \Delta_{12}^\bullet = -\frac{1}{12}, \quad (4.11)$$

así que ahora se calcula la contracción de índices

$$F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} = F_{\mu\nu} F^{\nu\mu} = -F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (4.12)$$

entonces

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \int du_1 du_2 \mathcal{AB} &= -4T^2 \left(-\frac{1}{12}\right) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{3} T^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Al realizar la suma de estas dos contracciones se tiene

$$\frac{2}{3} T^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (4.14)$$

así que para la contracción de los tensores electromagnéticos se tiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\langle \left(-S_{em}^{(0)} \right)^2 \right\rangle &= \frac{1}{2} \left(-\frac{i}{2} \right)^2 \left\langle \int du_1 du_2 F_{\mu\nu} \dot{y}_1^\mu \dot{y}_1^\nu F_{\alpha\beta} \dot{y}_2^\alpha \dot{y}_2^\beta \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{i}{2} \right)^2 \left(\frac{2}{3} \right) T^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{12} T^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ahora se calculan las contracciones correspondientes a la parte gravitacional

$$\begin{aligned} \left\langle -S_{grav} - S_{gh}^{(1)} \right\rangle &= - \int du_3 \left\langle \frac{1}{12T} R_{\gamma\delta\epsilon\eta} \dot{y}_3^\gamma \dot{y}_3^\delta \dot{y}_3^\epsilon \dot{y}_3^\eta + T\bar{\xi} R + \frac{1}{12T} R_{\gamma\delta\epsilon\eta} \dot{y}_3^\delta \dot{y}_3^\epsilon \left(a_3^\gamma a_3^\eta + b_3^\gamma c_3^\eta \right) \right\rangle \\ &= -\frac{1}{12T} R_{\gamma\delta\epsilon\eta} \int du_3 \left\langle \dot{y}_3^\gamma \dot{y}_3^\delta \dot{y}_3^\epsilon \dot{y}_3^\eta + \dot{y}_3^\delta \dot{y}_3^\epsilon \left(a_3^\gamma a_3^\eta + b_3^\gamma c_3^\eta \right) \right\rangle - T\bar{\xi} R. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Veamos las contracciones de $S_{(grav)}$: la primera contracción es

$$\begin{aligned} \mathcal{AC} &= \langle \dot{y}_3^\gamma \dot{y}_3^\epsilon \rangle \langle \dot{y}_3^\delta \dot{y}_3^\eta \rangle \\ &= (-2T g^{\gamma\epsilon} \bullet \Delta_{33}) (-2T g^{\delta\eta} \Delta_{33}^\bullet) \\ &= 4T^2 g^{\gamma\epsilon} g^{\delta\eta} \bullet \Delta_{33} \Delta_{33}^\bullet, \end{aligned} \quad (4.17)$$

pero

$$\int du_3 \bullet \Delta_{33} \Delta_{33}^\bullet = \frac{1}{12} \quad (4.18)$$

La contracción de índices es la siguiente:

$$R_{\gamma\delta\epsilon\eta} g^{\gamma\epsilon} g^{\delta\eta} = R_{\gamma\delta}{}^\gamma{}_\eta g^{\delta\eta} = R_{\delta\eta} g^{\delta\eta} = R. \quad (4.19)$$

Entonces

$$R_{\gamma\delta\epsilon\eta} \int du_3 \mathcal{AC} = \frac{1}{3} T^2 R. \quad (4.20)$$

La siguiente contracción que se puede realizar es

$$\begin{aligned} \mathcal{AD} &= \langle \dot{y}_3^\gamma \dot{y}_3^\eta \rangle \langle \dot{y}_3^\delta \dot{y}_3^\epsilon \rangle \\ &= (-2T g^{\gamma\eta} \bullet \Delta_{33}^\bullet) (-2T g^{\delta\epsilon} \Delta_{33}) \\ &= (-2T)^2 g^{\gamma\eta} g^{\delta\epsilon} \bullet \Delta_{33}^\bullet \Delta_{33}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Para la integral se tiene

$$\int du_3 \bullet \Delta_{33} \Delta_{33} = \int du_3 (1 - \delta_{33}) \Delta_{33}, \quad (4.22)$$

pero el término que contiene a δ_{33} se cancela con la contribución de los *campos fantasma* (ver el apéndice E para los detalles). Entonces sólo se tiene

$$\int du_3 \Delta_{33} = -\frac{1}{6}. \quad (4.23)$$

Para la contracción de índices hay que tener presente la propiedad de antisimetría del tensor de curvatura (ver apéndice A):

$$R_{\gamma\delta\epsilon\eta} g^{\gamma\eta} g^{\delta\epsilon} = -R_{\gamma\delta\eta\epsilon} g^{\gamma\eta} g^{\delta\epsilon} = -R_{\gamma\delta}{}^{\gamma}{}_{\epsilon} g^{\delta\epsilon} = -R_{\delta\epsilon} g^{\delta\epsilon} = -R_{\epsilon}{}^{\epsilon} = -R, \quad (4.24)$$

entonces

$$R_{\gamma\delta\epsilon\eta} \int du_3 \mathcal{A}\mathcal{D} = \frac{2}{3} T^2 R. \quad (4.25)$$

Al sumar el resultado de las contracciones, (4.20) y (4.25), se tiene

$$T^2 R,$$

así que

$$\langle -S_{grav} - S_{gh}^{(1)} \rangle = -\frac{1}{12T} T^2 R - \bar{\xi} RT = -\left(\frac{1}{12} + \bar{\xi}\right) RT. \quad (4.26)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\langle \left(-S_{em}^{(0)} \right)^2 (-S_{grav} - S_{gh}) \right\rangle &= \left(-\frac{1}{12} T^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \left[-\left(\frac{1}{12} + \bar{\xi}\right) RT \right] \\ &= \frac{1}{12} \left(\frac{1}{12} + \bar{\xi} \right) T^3 R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \leftarrow \bar{\xi} = \xi - 1/4 \\ &= -\frac{1}{72} (1 - 6\xi) T^3 R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Para las estructuras tensoriales se obtiene

A)

$$-\frac{1}{72} (1 - 6\xi) T^3 R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

B)

$$\frac{1}{90} T^3 F_{\mu}{}^{\alpha} F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta},$$

C)

$$-\frac{1}{60} T^3 F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta},$$

D)

$$-\frac{1}{180} T^3 F_{\mu}{}^{\alpha}{}_{;\alpha} F^{\mu\beta}{}_{;\beta},$$

E)

$$-\frac{1}{45} T^3 F_{\alpha\beta;\gamma} F^{\alpha\beta;\gamma},$$

F)

$$-\frac{1}{30} T^3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^\gamma. \quad (4.28)$$

Una vez que se llega a este punto, es factible hacer la integral sobre T que aparece en (3.40), lo cual genera un factor $1/m^2$, así que la acción efectiva se escribe de la forma

$$\Gamma[g, A]_{scalar} = \frac{1}{360 m^2} \int \frac{d^4 x \sqrt{g}}{(4\pi)^2} \left[-5(1 - 6\xi) R F_{\mu\nu}^2 + 4 R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha \right. \\ \left. - 6 R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - 2(\nabla^\alpha F_{\alpha\mu})^2 - 8(\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 - 12 F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} \right], \quad (4.29)$$

esto concuerda con la expresión que se obtiene en [21] donde se ha usado el método *HK*. Para fines prácticos sólo se escribe el Lagrangiano efectivo:

$$\mathcal{L}_{scalar}^{(DBC)} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[\frac{1}{12} \left(\bar{\xi} + \frac{1}{12} \right) R F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{90} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \frac{1}{60} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \right. \\ \left. - \frac{1}{45} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{30} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} - \frac{1}{180} (\nabla^\alpha F_{\alpha\mu})^2 \right]. \quad (4.30)$$

4.1.2. Esquema SI

En este esquema se hace uso de (3.38) - (3.34).

Término $RF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$

Para obtener esta estructura tensorial hay que hacer algunas modificaciones al esquema anterior ya que ahora se debe considerar la acción S_{FP} , así que se trabajará con la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2} \left\langle \left(-S_{em}^{(0)} \right)^2 \left(-S_{grav} - S_{gh}^{(1)} - S_{FP} \right) \right\rangle. \quad (4.31)$$

Se procede en el mismo orden que en el caso del esquema *DBC*, esto es, primero se calculan las contracciones de la parte electromagnética:

$$\begin{aligned} Aa &= \langle \dot{y}_1^\mu \dot{y}_2^\alpha \rangle \langle \dot{y}_1^\nu \dot{y}_2^\beta \rangle \\ &= \left(+T g^{\mu\alpha} \ddot{G}_{12} \right) \left(-T g^{\nu\beta} G_{12} \right) \\ &= -T^2 g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \ddot{G}_{12} G_{12}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

pero al realizar una integración por partes sobre u_1 , se tiene

$$\begin{aligned} \int du_1 \ddot{G}_{12} G_{12} &= - \int du_1 \dot{G}_{12} \dot{G}_{12} \\ &= - \int du_1 \dot{G}_{12}^2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int du_1 du_2 \ddot{G}_{12} G_{12} &= - \int du_1 du_2 \dot{G}_{12}^2 \\ &= -\frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

La contracción de los índices es muy sencilla:

$$F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.35)$$

Por lo cual se tiene que

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \int du_1 u_2 \mathcal{A}a &= (-T^2) \left(-\frac{1}{3}\right) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \frac{T^2}{3} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Ahora veamos la siguiente contracción:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}b &= \langle \dot{y}_1^\mu y_2^\beta \rangle \langle y_1^\nu \dot{y}_2^\alpha \rangle \\ &= \left(-T g^{\mu\beta} \dot{G}_{12}\right) \left(+T g^{\nu\alpha} \dot{G}_{12}\right) \\ &= -T^2 g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} \dot{G}_{12} \dot{G}_{12}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

pero

$$\int du_1 du_2 \dot{G}_{12} \dot{G}_{12} = \frac{1}{3}, \quad (4.38)$$

y como la contracción de índices es

$$F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} = -F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (4.39)$$

entonces

$$F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \int du_1 du_2 \mathcal{A}b = \frac{T^2}{3} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.40)$$

Con la suma de estas dos contracciones se tiene

$$\frac{2}{3} T^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (4.41)$$

así que para la contracción de los tensores electromagnéticos se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\langle \left(-S_{em}^{(0)}\right)^2 \right\rangle &= \frac{1}{2} \left(-\frac{i}{2}\right)^2 \left\langle \int du_1 du_2 F_{\mu\nu} \dot{y}_1^\mu y_1^\nu F_{\alpha\beta} \dot{y}_2^\alpha y_2^\beta \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{i}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) T^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{12} T^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Ahora se trabaja con la parte gravitacional:

$$\langle -S_{grav} \rangle = \left\langle - \int du_3 \left[\frac{1}{12T} R_{\gamma\delta\epsilon\eta} \dot{y}_3^\gamma y_3^\delta y_3^\epsilon \dot{y}_3^\eta + T \bar{\xi} R \right] \right\rangle. \quad (4.43)$$

Veamos las contracciones del primer integrando. La contracción es

$$\begin{aligned} \mathcal{A}c &= \langle \dot{y}_3^\gamma y_3^\epsilon \rangle \langle y_3^\delta \dot{y}_3^\eta \rangle \\ &= \left(-T g^{\gamma\epsilon} \dot{G}_{33}\right) \left(+T g^{\delta\eta} \dot{G}_{33}\right), \end{aligned} \quad (4.44)$$

pero $\dot{G}_{33} = 0$, entonces

$$R_{\gamma\delta\epsilon\eta} \int du_3 \mathcal{A}c = 0. \quad (4.45)$$

La siguiente contracción es

$$\begin{aligned}
Ad &= \langle \dot{y}_3^\gamma \dot{y}_3^\eta \rangle \langle y_3^\delta y_3^\epsilon \rangle \\
&= \left(+Tg^{\gamma\eta} \ddot{G}_{33} \right) \left(-Tg^{\delta\epsilon} G_{33} \right) \\
&= -T^2 g^{\gamma\eta} g^{\delta\epsilon} \ddot{G}_{33} G_{33},
\end{aligned} \tag{4.46}$$

pero

$$\int du_3 \ddot{G}_{33} G_{33} = \int du_3 (2\delta(0) - 2) \left(-\frac{1}{6} \right), \tag{4.47}$$

al ignorar el término que contiene a $\delta(0)$, pues éste se cancela con la contribución de los *campos fantasma*, se tiene

$$\begin{aligned}
\int du_3 \ddot{G}_{33} G_{33} &= (-2) \left(-\frac{1}{6} \right) \int du_3 \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

La contracción de índices es muy sencilla

$$R_{\gamma\delta\epsilon\eta} g^{\gamma\eta} g^{\delta\epsilon} = -R. \tag{4.49}$$

Así que

$$R_{\gamma\delta\epsilon\eta} \int du_3 Ad = \frac{1}{3} T^2 R. \tag{4.50}$$

Entonces, para la parte gravitacional se tiene

$$\langle -S_{grav} \rangle = -\frac{1}{12T} \left(\frac{1}{3} T^2 R \right) - \bar{\xi} RT = -\frac{1}{3(12)} TR - \bar{\xi} RT. \tag{4.51}$$

Aún falta considerar la acción S_{FP} , $\langle -S_{FP} \rangle$, pero como se desea la forma R , entonces sólo se trabaja con la parte

$$\begin{aligned}
\langle -S_{FP} \rangle &= -(-1) \int du_3 \left\langle \bar{\eta}_\lambda \frac{1}{3} R^\lambda_{\delta\epsilon\sigma} y_3^\delta y_3^\epsilon g^\sigma \right\rangle \\
&= \frac{1}{3} R^\lambda_{\delta\epsilon\sigma} \langle \bar{\eta}_\lambda g^\sigma \rangle \int du_3 \langle y_3^\delta y_3^\epsilon \rangle \\
&= \frac{1}{3} R^\lambda_{\delta\epsilon\sigma} \delta^\sigma_\lambda \int du_3 \left(-Tg^{\delta\epsilon} G_{33} \right) \\
&= \frac{T}{3} \left(-R^\lambda_{\delta\sigma\epsilon} \right) \delta^\sigma_\lambda \left(-g^{\delta\epsilon} \right) \int du_3 \left(-\frac{1}{6} \right) \\
&= -\frac{T}{3} R_{\delta\epsilon} g^{\delta\epsilon} \left(\frac{1}{6} \right) \\
&= -\frac{T}{18} R.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

De la suma de estos dos últimos resultados se tiene

$$\begin{aligned}
\langle -S_{grav} \rangle + \langle -S_{FP} \rangle &= -\frac{TR}{3(12)} - \frac{TR}{18} - \bar{\xi} RT \\
&= -\left(\frac{1}{12} + \bar{\xi} \right) TR.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Finalmente se llega a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\langle \left(-S_{em}^{(0)} \right)^2 \left(-S_{grav} - S_{gh}^{(1)} \right) \right\rangle &= \left(-\frac{1}{12} T^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \left[-\left(\frac{1}{12} + \bar{\xi} \right) RT \right] \leftarrow \bar{\xi} = \xi - 1/4 \\ &= -\frac{1}{72} (1 - 6\xi) T^3 R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Ahora se escriben los resultados para todas las estructuras tensoriales en el esquema *SI*:

$$\begin{aligned} A') & \quad -\frac{1}{72} (1 - 6\xi) T^3 R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \\ B') & \quad \frac{1}{180} T^3 F_{\mu}^{\alpha} F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}, \\ C') & \quad -\frac{1}{72} T^3 F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}, \\ D') & \quad (0) T^3 F_{\mu;\alpha} F^{\mu\beta}_{;\beta}, \\ E') & \quad -\frac{1}{180} T^3 F_{\alpha\beta;\gamma} F^{\alpha\beta;\gamma}, \\ F') & \quad -\frac{1}{72} T^3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_{;\gamma}{}^{\gamma}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Si comparamos los resultados que se obtienen en cada esquema, podremos notar que sólo concuerdan los resultados A) y A'), lo cual sólo se logra con la ayuda de S_{FP} .

Para obtener el Lagrangiano efectivo para el esquema *SI* sólo hace falta hacer la integral sobre T y con ello se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{scalar}^{(SI)} &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[\frac{1}{12} \left(\bar{\xi} + \frac{1}{12} \right) R F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{180} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{72} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{180} (\nabla_{\alpha} F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{72} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Es posible mostrar que los Lagrangianos efectivos correspondientes a cada esquema se relacionan por

$$\mathcal{L}_{scalar}^{(SI)} = \mathcal{L}_{scalar}^{(DBC)} + \frac{7}{360} \nabla^{\alpha} \left(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu;\alpha} \right) + \frac{1}{180} \left[\nabla_{\alpha} \left(F_{\mu}^{\alpha} \nabla_{\beta} F^{\mu\beta} \right) - \nabla_{\beta} \left(F_{\mu}^{\alpha} \nabla_{\alpha} F^{\mu\beta} \right) \right], \quad (4.57)$$

esta relación se deduce en el apéndice G.

Podemos concluir que Lagrangianos efectivos son iguales bajo una integración por partes, lo cual verifica el teorema de Bastianelli, Corradini y Zirotti [23]. Además

$$\mathcal{L}_{scalar}^{(DBC)} = \mathcal{L}_{scalar}^{(HK)}. \quad (4.58)$$

4.2. Espín 1/2

4.2.1. Esquema DBC

Término $\bar{\xi} R \left(F \dot{y} y + 2 F \psi \psi \right)^2$

Para este término se tiene la siguiente expresión

$$\mathcal{A} = \bar{\xi} R \left(F_{\alpha\beta} \dot{y}_1^\alpha y_1^\beta F_{\mu\nu} \dot{y}_2^\mu y_2^\nu + 4 F_{\mu\nu} \dot{y}_2^\mu y_2^\nu F_{\alpha\beta} \psi_1^\alpha \psi_1^\beta + 4 F_{\alpha\beta} \psi_1^\alpha \psi_1^\beta F_{\mu\nu} \psi_2^\mu \psi_2^\nu \right). \quad (4.59)$$

Las contracciones que se generan para el primer término son puramente escalares, algo que ya se realizó en el trabajo de maestría, por lo cual sólo se coloca el resultado correspondiente:

$$\mathcal{A} \mathcal{A} = \frac{1}{12} T^3 \bar{\xi} R F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (4.60)$$

La contracción del segundo término dentro del paréntesis es

$$\mathcal{A} \mathcal{B} = \langle \dot{y}_2^\mu y_2^\nu \rangle \langle \psi_1^\alpha \psi_1^\beta \rangle, \quad (4.61)$$

pero dado que $\langle \psi_1^\alpha \psi_1^\beta \rangle = 0$, entonces no hay aportación. Ahora las contracciones del último término:

$$\mathcal{A} \mathcal{C} = -\langle \psi_1^\alpha \psi_2^\mu \rangle \langle \psi_1^\beta \psi_2^\nu \rangle, \quad (4.62)$$

$$\mathcal{A} \mathcal{D} = \langle \psi_1^\alpha \psi_2^\nu \rangle \langle \psi_1^\beta \psi_2^\mu \rangle. \quad (4.63)$$

Veamos el resultado de cada contracción:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \mathcal{C} &= -\langle \psi_1^\alpha \psi_2^\mu \rangle \langle \psi_1^\beta \psi_2^\nu \rangle = -\left(\frac{1}{2} T G_{F12} g^{\alpha\mu} \right) \left(\frac{1}{2} T G_{F12} g^{\beta\nu} \right) \\ &= -\frac{1}{4} T^2 G_{F12}^2 g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} = -\frac{1}{4} T^2 g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Los índices se contraen de forma muy sencilla

$$F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} = F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (4.65)$$

por lo cual se tiene

$$F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \int du_1 du_2 \mathcal{A} \mathcal{C} = -\frac{1}{4} T^2 \bar{\xi} R F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (4.66)$$

Consideremos la última contracción

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \mathcal{D} &= \langle \psi_1^\alpha \psi_2^\nu \rangle \langle \psi_1^\beta \psi_2^\mu \rangle = \left(\frac{1}{2} T G_{F12} g^{\alpha\nu} \right) \left(\frac{1}{2} T G_{F12} g^{\beta\mu} \right) \\ &= \frac{1}{4} T^2 G_{F12}^2 g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} = \frac{1}{4} T^2 g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

La contracción de índices también es sencilla

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} &= F_{\alpha\beta} F^{\beta\alpha} \\ &= -F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (4.68)$$

así que en este caso se tiene

$$F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \int du_1 du_2 \mathcal{A} \mathcal{D} = -\frac{1}{4} T^2 \bar{\xi} R F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (4.69)$$

Ahora se suman estos resultados, de lo cual se tiene

$$-\frac{1}{2} T^2 \bar{\xi} R F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (4.70)$$

Finalmente se usan los factores involucrados:

- (-T) ← Llega del desarrollo de la exponencial para el término que contiene $\bar{\xi} R$,
- $\left(-\frac{i}{2}\right)^2$ ← Llega del desarrollo de la exponencial para el término que contiene $\left(F \dot{y} y + 2 F \psi \psi\right)^2$,
- 4 ← Es el factor que aparece en el tercer término de (4.59),

por lo cual se tiene

$$-4 \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{i}{2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\right) T^3 \bar{\xi} R F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4} T^3 \bar{\xi} R F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (4.71)$$

Término $R \dot{y} y y \dot{y} \left(F \dot{y} y + 2 F \psi \psi\right)^2$

La forma explícita de este término es

$$\mathcal{B} = R_{\mu\alpha\beta\nu} \dot{y}_1^\mu y_1^\alpha y_1^\beta \dot{y}_1^\nu \left(F_{\sigma\lambda} \dot{y}_2^\sigma y_2^\lambda F_{\xi\eta} \dot{y}_3^\xi y_3^\eta + 4 F_{\sigma\lambda} \dot{y}_2^\sigma y_2^\lambda F_{\xi\eta} \psi_3^\xi \psi_3^\eta + 4 F_{\sigma\lambda} \psi_2^\sigma \psi_2^\lambda F_{\xi\eta} \psi_3^\xi \psi_3^\eta \right), \quad (4.72)$$

Las contracciones de la parte bosónica ya es conocida

$$\mathcal{B}\mathcal{A} = \frac{1}{144} T^3 R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{60} T^3 F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{90} T^3 F_\mu^\alpha F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}. \quad (4.73)$$

Nuevamente se observa que la contracción para el segundo término dentro del paréntesis se anula, $\langle \psi_3 \psi_3 \rangle = 0$, así que veamos las contracciones del último término:

$$\mathcal{B}\mathcal{B} = \langle \dot{y}_1^\mu y_1^\beta \rangle \langle y_1^\alpha \dot{y}_1^\nu \rangle (-1) \langle \psi_2^\sigma \psi_3^\xi \rangle \langle \psi_2^\lambda \psi_3^\eta \rangle, \quad (4.74)$$

$$\mathcal{B}\mathcal{C} = \langle \dot{y}_1^\mu y_1^\beta \rangle \langle y_1^\alpha \dot{y}_1^\nu \rangle \langle \psi_2^\sigma \psi_3^\eta \rangle \langle \psi_2^\lambda \psi_3^\xi \rangle, \quad (4.75)$$

$$\mathcal{B}\mathcal{D} = \langle \dot{y}_1^\mu \dot{y}_1^\nu \rangle \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle (-1) \langle \psi_2^\sigma \psi_3^\xi \rangle \langle \psi_2^\lambda \psi_3^\eta \rangle, \quad (4.76)$$

$$\mathcal{B}\mathcal{E} = \langle \dot{y}_1^\mu \dot{y}_1^\nu \rangle \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle \langle \psi_2^\sigma \psi_3^\eta \rangle \langle \psi_2^\lambda \psi_3^\xi \rangle. \quad (4.77)$$

Dado que

$$\begin{aligned} \langle \dot{y}_1^\mu y_1^\beta \rangle \langle y_1^\alpha \dot{y}_1^\nu \rangle &= \left(-2T \bullet \Delta_{11} g^{\mu\beta}\right) \left(-2T \Delta_{11}^\bullet g^{\alpha\nu}\right) \\ &= (-2T)^2 \bullet \Delta_{11} \Delta_{11}^\bullet g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Además,

$$\begin{aligned} -\langle \psi_2^\sigma \psi_3^\xi \rangle \langle \psi_2^\lambda \psi_3^\eta \rangle &= -\left(\frac{1}{2} T G_{F23} g^{\sigma\xi}\right) \left(\frac{1}{2} T G_{F23} g^{\lambda\eta}\right) \\ &= -\frac{1}{4} T^2 G_{F23}^2 g^{\sigma\xi} g^{\lambda\eta} = -\frac{1}{4} T^2 g^{\sigma\xi} g^{\lambda\eta}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\mathcal{B} &= \langle \dot{y}_1^\mu y_1^\beta \rangle \langle y_1^\alpha \dot{y}_1^\nu \rangle (-1) \langle \psi_2^\sigma \psi_3^\xi \rangle \langle \psi_2^\lambda \psi_3^\eta \rangle \\ &= (-2T)^2 \bullet \Delta_{11} \Delta_{11}^\bullet g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu} (-1) \frac{1}{4} T^2 g^{\sigma\xi} g^{\lambda\eta} \\ &= -T^4 \bullet \Delta_{11} \Delta_{11}^\bullet g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu} g^{\sigma\xi} g^{\lambda\eta}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

La contracción de índices es muy sencilla:

$$R_{\mu\alpha\beta\nu} g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu} = R_{\mu\alpha}{}^{\mu\alpha} = R, \quad (4.81)$$

$$F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} g^{\sigma\xi} g^{\lambda\eta} = F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda}. \quad (4.82)$$

La integral de las funciones de Green se ha calculado anteriormente, (4.18), así que

$$R_{\mu\alpha\beta\nu} F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} \int du_1 \mathcal{B}\mathcal{B} = -\frac{1}{12} T^4 R F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda}. \quad (4.83)$$

Ahora se calcula la contribución de $\mathcal{B}\mathcal{C}$: Ya que

$$\begin{aligned} \langle \psi_2^\sigma \psi_3^\eta \rangle \langle \psi_2^\lambda \psi_3^\xi \rangle &= \left(\frac{1}{2} T G_{F23} g^{\sigma\eta} \right) \left(\frac{1}{2} T G_{F23} g^{\lambda\xi} \right) \\ &= \frac{1}{4} T^2 G_{F23}^2 g^{\sigma\eta} g^{\lambda\xi} = \frac{1}{4} T^2 g^{\sigma\eta} g^{\lambda\xi}, \end{aligned} \quad (4.84)$$

entonces se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\mathcal{C} &= \langle \dot{y}_1^\mu y_1^\beta \rangle \langle y_1^\alpha \dot{y}_1^\nu \rangle \langle \psi_2^\sigma \psi_3^\eta \rangle \langle \psi_2^\lambda \psi_3^\xi \rangle \\ &= (-2T)^2 \bullet \Delta_{11} \Delta_{11}^\bullet g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu} \frac{1}{4} T^2 g^{\sigma\eta} g^{\lambda\xi} \\ &= T^4 \bullet \Delta_{11} \Delta_{11}^\bullet g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu} g^{\sigma\eta} g^{\lambda\xi}, \end{aligned} \quad (4.85)$$

la contracción de índices sobre R es como en el caso anterior, así que resta hacer la contracción sobre $F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta}$:

$$F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} g^{\sigma\eta} g^{\lambda\xi} = F_{\sigma\lambda} F^{\lambda\sigma} = -F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda}, \quad (4.86)$$

por lo cual

$$R_{\mu\alpha\beta\nu} F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} \int du_1 \mathcal{B}\mathcal{C} = -\frac{1}{12} T^4 R F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda}. \quad (4.87)$$

Ahora se trabaja sobre $\mathcal{B}\mathcal{D}$: Dado que

$$\begin{aligned} \langle \dot{y}_1^\mu \dot{y}_1^\nu \rangle \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle &= (-2T \bullet \Delta_{11}^\bullet g^{\mu\nu}) \left(-2T \Delta_{11} g^{\alpha\beta} \right) \\ &= (-2T)^2 \bullet \Delta_{11}^\bullet \Delta_{11} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\mathcal{D} &= \langle \dot{y}_1^\mu \dot{y}_1^\nu \rangle \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle (-1) \langle \psi_2^\sigma \psi_3^\xi \rangle \langle \psi_2^\lambda \psi_3^\eta \rangle \\ &= (-2T)^2 \bullet \Delta_{11}^\bullet \Delta_{11} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (-1) \frac{1}{4} T^2 g^{\sigma\xi} g^{\lambda\eta} \\ &= -T^4 \bullet \Delta_{11}^\bullet \Delta_{11} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} g^{\sigma\xi} g^{\lambda\eta}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Para la contracción de índices se tiene

$$R_{\mu\alpha\beta\nu} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} = R_{\mu\alpha}{}^{\alpha\mu} = -R, \quad (4.90)$$

$$F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} g^{\sigma\xi} g^{\lambda\eta} = F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda}. \quad (4.91)$$

La integral de las funciones de Green es conocida (4.23), con esto

$$R_{\mu\alpha\beta\nu} F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} \int du_1 \mathcal{B}\mathcal{D} = -\frac{1}{6} T^4 R F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda}. \quad (4.92)$$

Finalmente se considera $\mathcal{B}\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\mathcal{E} &= \langle \dot{y}_1^\mu \dot{y}_1^\nu \rangle \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle \langle \psi_2^\sigma \psi_3^\eta \rangle \langle \psi_2^\lambda \psi_3^\xi \rangle \\ &= (-2T)^2 \bullet \Delta_{11}^\bullet \Delta_{11} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{4} \right) T^2 g^{\sigma\eta} g^{\lambda\xi} \\ &= T^4 \bullet \Delta_{11}^\bullet \Delta_{11} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} g^{\sigma\eta} g^{\lambda\xi}, \end{aligned} \quad (4.93)$$

sabemos que la contracción de índices es

$$R_{\mu\alpha\beta\nu} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} = R_{\mu\alpha}{}^{\alpha\mu} = -R, \quad (4.94)$$

$$F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} g^{\sigma\eta} g^{\lambda\xi} = F_{\sigma\lambda} F^{\lambda\sigma} = -F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda}, \quad (4.95)$$

por lo tanto

$$R_{\mu\alpha\beta\nu} F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} \int du_1 \mathcal{B}\mathcal{E} = -\frac{1}{6} T^4 R F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda}. \quad (4.96)$$

Sólo resta sumar todos los resultados

$$\left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) T^4 R F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda} = -\frac{3}{6} T^4 R F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda}. \quad (4.97)$$

Es momento de considerar los factores implicados:

- (-1) ← Llega del desarrollo de la exponencial para el término $R \dot{y} y y \dot{y}$
- $\frac{1}{2}$ ← Llega del desarrollo de la exponencial para el término $(F \dot{y} y + 2 F \psi \psi)^2$
- $\frac{1}{12T}$ ← Llega de (3.49)
- $(-\frac{i}{2})^2$ ← Llega de (3.51)
- 4 ← Es el factor que aparece en el tercer término en el parentesis de (4.72).

Así que

$$4 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{12T}\right) \left(-\frac{i}{2}\right)^2 \left(-\frac{3}{6}\right) T^4 R F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda} = -\frac{1}{48} T^3 R F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda}. \quad (4.98)$$

Término $R y y \psi \dot{\psi} (F \dot{y} y + 2 F \psi \psi)^2$

El desarrollo de este término es

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= R_{\mu\alpha\beta\nu} y^\alpha y^\beta \psi^\mu \dot{\psi}^\nu \left(F_{\sigma\lambda} \dot{y}^\sigma y^\lambda + 2 F_{\sigma\lambda} \psi^\sigma \psi^\lambda \right)^2 \\ &= R_{\mu\alpha\beta\nu} y^\alpha y^\beta \psi^\mu \dot{\psi}^\nu \left(F_{\sigma\lambda} \dot{y}^\sigma y^\lambda F_{\xi\eta} \dot{y}^\xi y^\eta + 4 F_{\sigma\lambda} \dot{y}^\sigma y^\lambda F_{\xi\eta} \psi^\xi \psi^\eta + 4 F_{\sigma\lambda} \psi^\sigma \psi^\lambda F_{\xi\eta} \psi^\xi \psi^\eta \right) \end{aligned} \quad (4.99)$$

Las contracciones correspondientes al primer término son las siguientes

$$\mathcal{C}\mathcal{A} = \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle \langle \dot{y}_2^\sigma \dot{y}_3^\xi \rangle \langle y_2^\lambda y_3^\eta \rangle \langle \psi_1^\mu \psi_1^\nu \rangle, \quad (4.100)$$

$$\mathcal{C}\mathcal{B} = \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle \langle \dot{y}_2^\sigma y_3^\eta \rangle \langle y_2^\lambda \dot{y}_3^\xi \rangle \langle \psi_1^\mu \psi_1^\nu \rangle, \quad (4.101)$$

$$\mathcal{C}\mathcal{C} = \langle y_1^\alpha \dot{y}_2^\sigma \rangle \langle y_1^\beta \dot{y}_3^\xi \rangle \langle y_2^\lambda y_3^\eta \rangle \langle \psi_1^\mu \psi_1^\nu \rangle, \quad (4.102)$$

$$\mathcal{C}\mathcal{D} = \langle y_1^\alpha \dot{y}_2^\sigma \rangle \langle y_1^\beta y_3^\eta \rangle \langle y_2^\lambda \dot{y}_3^\xi \rangle \langle \psi_1^\mu \psi_1^\nu \rangle, \quad (4.103)$$

$$\mathcal{C}\mathcal{E} = \langle y_1^\alpha y_2^\lambda \rangle \langle y_1^\beta \dot{y}_3^\xi \rangle \langle \dot{y}_2^\sigma y_3^\eta \rangle \langle \psi_1^\mu \psi_1^\nu \rangle, \quad (4.104)$$

$$\mathcal{C}\mathcal{F} = \langle y_1^\alpha y_2^\lambda \rangle \langle y_1^\beta y_3^\eta \rangle \langle \dot{y}_2^\sigma \dot{y}_3^\xi \rangle \langle \psi_1^\mu \psi_1^\nu \rangle, \quad (4.105)$$

se puede observar que en todas las contracciones aparece $\langle \psi_1^\mu \psi_1^\nu \rangle$, lo cual genera δ_{11} y estas cantidades son canceladas con la contribución de los *campos fantasma*.

Ahora veamos las contracciones del segundo término:

$$\mathcal{C}\mathcal{G} = \langle y_1^\alpha \dot{y}_2^\sigma \rangle \langle y_1^\beta y_2^\lambda \rangle \langle \psi_1^\mu \psi_3^\xi \rangle \langle \dot{\psi}_1^\nu \psi_3^\eta \rangle, \quad (4.106)$$

$$\mathcal{C}\mathcal{H} = \langle y_1^\alpha \dot{y}_2^\sigma \rangle \langle y_1^\beta y_2^\lambda \rangle \langle \psi_1^\mu \psi_3^\eta \rangle \langle \dot{\psi}_1^\nu \psi_3^\xi \rangle, \quad (4.107)$$

$$\mathcal{C}\mathcal{I} = \langle y_1^\alpha y_2^\lambda \rangle \langle y_1^\beta \dot{y}_2^\sigma \rangle \langle \psi_1^\mu \psi_3^\xi \rangle \langle \dot{\psi}_1^\nu \psi_3^\eta \rangle, \quad (4.108)$$

$$\mathcal{C}\mathcal{J} = \langle y_1^\alpha y_2^\lambda \rangle \langle y_1^\beta \dot{y}_2^\sigma \rangle \langle \psi_1^\mu \psi_3^\eta \rangle \langle \dot{\psi}_1^\nu \psi_3^\xi \rangle. \quad (4.109)$$

No será necesario hacer el cálculo de estas contracciones, ya que se puede notar que en cada contracción aparece una cantidad de la forma $\langle \psi_1 \psi_3 \rangle \langle \dot{\psi}_1 \psi_3 \rangle$ lo cual genera $G_{F13} \delta_{13}$ que es nulo.

Finalmente se determinan las contracciones para el último término:

$$\mathcal{C}\mathcal{K} = \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle \langle \psi_1^\mu \dot{\psi}_1^\nu \rangle (-1) \langle \psi_2^\sigma \psi_3^\xi \rangle \langle \psi_2^\lambda \psi_3^\eta \rangle, \quad (4.110)$$

$$\mathcal{C}\mathcal{L} = \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle (-1) \langle \psi_1^\mu \psi_2^\sigma \rangle (-1) \langle \psi_2^\lambda \psi_3^\eta \rangle \langle \dot{\psi}_1^\nu \psi_3^\xi \rangle, \quad (4.111)$$

debido a que $\langle \psi_1^\mu \dot{\psi}_1^\nu \rangle$ es proporcional a δ_{11} entonces la contracción $\mathcal{C}\mathcal{K}$ se cancela con la contribución de los *campos fantasma*. Veamos la contribución de $\mathcal{C}\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\mathcal{L} &= \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle (-1) \langle \psi_1^\mu \psi_2^\sigma \rangle (-1) \langle \psi_2^\lambda \psi_3^\eta \rangle \langle \dot{\psi}_1^\nu \psi_3^\xi \rangle \\ &= (-2T) \Delta_{11} g^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} T G_{F12} g^{\mu\sigma} \right) \left(\frac{1}{2} T G_{F23} g^{\lambda\eta} \right) \left(\frac{1}{2} 2T \delta_{13} g^{\nu\xi} \right) \\ &= -\frac{1}{2} T^4 \Delta_{11} G_{F12} G_{F23} \delta_{13} g^{\alpha\beta} g^{\mu\sigma} g^{\lambda\eta} g^{\nu\xi}. \end{aligned} \quad (4.112)$$

La contracción de índices es la siguiente:

$$\begin{aligned} R_{\mu\alpha\beta\nu} F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} g^{\alpha\beta} g^{\mu\sigma} g^{\lambda\eta} g^{\nu\xi} &= R_{\mu\alpha}{}^\alpha{}_\xi F^{\mu\eta} F_\eta^\xi \\ &= R_{\mu\xi} F^{\mu\eta} F_\eta^\xi. \end{aligned} \quad (4.113)$$

Ahora se realiza la integración de las funciones de Green:

$$\begin{aligned} \int du_1 du_2 du_3 \Delta_{11} G_{F12} G_{F23} \delta_{13} &= \int du_2 du_3 \Delta_{33} G_{F32} G_{F23} = - \int du_3 \Delta_{33} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Por lo tanto se tiene

$$R_{\mu\alpha\beta\nu} F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} \int du_1 du_2 du_3 \mathcal{C}\mathcal{L} = -\frac{1}{12} T^4 R_{\mu\xi} F^{\mu\eta} F_\eta^\xi. \quad (4.115)$$

Al considerar los factores involucrados:

- (-1) ← Llega del desarrollo de la exponencial para el término $R y y \psi \dot{\psi}$
- $\frac{1}{2}$ ← Llega del desarrollo de la exponencial para el término $(F \dot{y} y + 2 F \psi \dot{\psi})^2$
- $(\frac{1}{6T})$ ← De (3.49)
- $(-\frac{i}{2})^2$ ← De (3.51)
- 4 ← Del desarrollo del cuadrado en (4.99)
- 8 ← Corresponde al número de posibles combinaciones, con esto se abarca todas las contracciones.

Por lo tanto

$$-(4)(8) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6T} \right) \left(-\frac{i}{2} \right)^2 \left(-\frac{1}{12} T^4 R_{\mu\xi} F^{\mu\eta} F_\eta^\xi \right) = -\frac{1}{18} T^3 R_{\mu\xi} F^{\mu\eta} F_\eta^\xi \quad (4.116)$$

Término $(R + R) \dot{y} y \psi \psi \left(F \dot{y} y + 2 F \psi \psi \right)^2$

En este caso se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= (R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\nu\beta\alpha}) \dot{y}_1^\alpha y_1^\beta \psi_1^\mu \psi_1^\nu \left(F_{\sigma\lambda} \dot{y}_2^\sigma y_2^\lambda + 2 F_{\sigma\lambda} \psi_3^\sigma \psi_3^\lambda \right)^2 \\
&= (R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\nu\beta\alpha}) \dot{y}_1^\alpha y_1^\beta \psi_1^\mu \psi_1^\nu \left(F_{\sigma\lambda} \dot{y}_2^\sigma y_2^\lambda F_{\xi\eta} \dot{y}_3^\xi y_3^\eta + 4 F_{\sigma\lambda} \dot{y}_2^\sigma y_2^\lambda F_{\xi\eta} \psi_3^\xi \psi_3^\eta \right. \\
&\quad \left. + 4 F_{\sigma\lambda} \psi_2^\sigma \psi_2^\lambda F_{\xi\eta} \psi_3^\xi \psi_3^\eta \right) \\
&= (R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\nu\beta\alpha}) F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} \left(\dot{y}_1^\alpha y_1^\beta \dot{y}_2^\sigma y_2^\lambda \dot{y}_3^\xi y_3^\eta \psi_1^\mu \psi_1^\nu + 4 \dot{y}_1^\alpha y_1^\beta \dot{y}_2^\sigma y_2^\lambda \psi_1^\mu \psi_1^\nu \psi_3^\xi \psi_3^\eta \right. \\
&\quad \left. + 4 \dot{y}_1^\alpha y_1^\beta \psi_1^\mu \psi_1^\nu \psi_2^\sigma \psi_2^\lambda \psi_3^\xi \psi_3^\eta \right). \quad (4.117)
\end{aligned}$$

Se puede notar que al realizar las contracciones del primer término dentro del paréntesis aparece $\langle \psi_1^\mu \psi_1^\nu \rangle$ lo cual es nulo. Ahora se calculan las contracciones del segundo término:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\mathcal{A} &= \langle \dot{y}_1^\alpha \dot{y}_2^\sigma \rangle \langle y_1^\beta y_2^\lambda \rangle (-1) \langle \psi_1^\mu \psi_3^\xi \rangle \langle \psi_1^\nu \psi_3^\eta \rangle \\
&= (-1) (-2T \bullet \Delta_{12}^\bullet g^{\alpha\sigma}) (-2T \Delta_{12} g^{\beta\lambda}) \left(\frac{1}{2} T G_{F13} g^{\mu\xi} \right) \left(\frac{1}{2} T G_{F13} g^{\nu\eta} \right) \\
&= -T^4 \bullet \Delta_{12}^\bullet \Delta_{12} G_{F13}^2 g^{\alpha\sigma} g^{\beta\lambda} g^{\mu\xi} g^{\nu\eta}. \quad (4.118)
\end{aligned}$$

Se realiza la contracción de índices:

$$(R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\nu\beta\alpha}) F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} g^{\alpha\sigma} g^{\beta\lambda} g^{\mu\xi} g^{\nu\eta} = (R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\nu\beta\alpha}) F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}. \quad (4.119)$$

Además, se sabe que

$$\int du_1 du_2 \bullet \Delta_{12}^\bullet \Delta_{12} = \frac{1}{12}, \quad (4.120)$$

por lo cual

$$(R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\nu\beta\alpha}) F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} \int du_1 du_2 \mathcal{D}\mathcal{A} = -\frac{1}{12} T^4 (R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\nu\beta\alpha}) F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}. \quad (4.121)$$

Esta expresión se puede simplificar si se usa una de las relaciones encontradas en un trabajo anterior

$$\begin{aligned}
R_{\mu\alpha\beta\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} &= -R_{\mu\alpha\nu\beta} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \leftarrow \text{ver } B \\
&= \frac{1}{2} R_{\mu\nu\beta\alpha} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}. \quad (4.122)
\end{aligned}$$

Con esto

$$\begin{aligned}
(R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\nu\beta\alpha}) F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} \int du_1 du_2 \mathcal{D}\mathcal{A} &= -\left(\frac{1}{12} T^4 \right) \frac{3}{2} R_{\mu\nu\beta\alpha} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{8} T^4 R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}. \quad (4.123)
\end{aligned}$$

Enseguida se calculan las contracciones para el último término de \mathcal{D} :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\mathcal{B} &= \langle \dot{y}_1^\alpha y_1^\beta \rangle (-1) \langle \psi_1^\mu \psi_2^\sigma \rangle \langle \psi_1^\nu \psi_3^\xi \rangle (-1) \langle \psi_2^\lambda \psi_3^\eta \rangle \\
&= (-2T \bullet \Delta_{11} g^{\alpha\beta}) \left(\frac{1}{2} T G_{F12} g^{\mu\sigma} \right) \left(\frac{1}{2} T G_{F13} g^{\nu\xi} \right) \left(\frac{1}{2} T G_{F23} g^{\lambda\eta} \right) \\
&= -\frac{1}{4} T^4 \bullet \Delta_{11} G_{F12} G_{F13} G_{F23} g^{\alpha\beta} g^{\mu\sigma} g^{\nu\xi} g^{\lambda\eta}, \quad (4.124)
\end{aligned}$$

pero

$$\int du_1 du_2 du_3 \bullet \Delta_{11} G_{F12} G_{F13} G_{F23} = 0. \quad (4.125)$$

Solo resta incluir los factores correspondientes:

- (-1) ← Llega del desarrollo de la exponencial para el término $(R + R) \dot{y} y \psi \psi$
- $\frac{1}{2}$ ← Llega del desarrollo de la exponencial para el término $(F \dot{y} y + 2 F \psi \psi)^2$
- $(\frac{1}{6T})$ ← De (3.49)
- $(-\frac{i}{2})^2$ ← De (3.51)
- 4 ← Del desarrollo del cuadrado en (4.169)
- 4 ← Corresponde al número de posibles combinaciones.

Por lo tanto

$$-(4)(4) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{6T}\right) \left(-\frac{i}{2}\right)^2 \frac{1}{8} T^4 R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} = \frac{1}{24} T^3 R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}. \quad (4.126)$$

Término $F R y y (y \dot{y} + 8 \psi \psi) F (\dot{y} y + 2 \psi \psi)$

La forma explicita de este término es

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= F_{\lambda\nu} R_{\alpha\beta\mu}^{\lambda} (y_1^{\mu} \dot{y}_1^{\nu} + 8 \psi_1^{\mu} \psi_1^{\nu}) y_1^{\alpha} y_1^{\beta} F_{\sigma\eta} (\dot{y}_2^{\sigma} y_2^{\eta} + 2 \psi_2^{\sigma} \psi_2^{\eta}) \\ &= F_{\lambda\nu} R_{\alpha\beta\mu}^{\lambda} F_{\sigma\eta} (y_1^{\mu} \dot{y}_1^{\nu} y_1^{\alpha} y_1^{\beta} \dot{y}_2^{\sigma} y_2^{\eta} + 2 y_1^{\mu} \dot{y}_1^{\nu} y_1^{\alpha} y_1^{\beta} \psi_2^{\sigma} \psi_2^{\eta} \\ &\quad + 8 y_1^{\alpha} y_1^{\beta} \psi_1^{\mu} \psi_1^{\nu} \dot{y}_2^{\sigma} y_2^{\eta} + 16 y_1^{\alpha} y_1^{\beta} \psi_1^{\mu} \psi_1^{\nu} \psi_2^{\sigma} \psi_2^{\eta}), \end{aligned} \quad (4.127)$$

se puede observar que las contracciones de los términos dos y tres dentro en el parentesis son nulas. Esto es porque aparecen cantidades como $\langle \psi_2^{\sigma} \psi_2^{\eta} \rangle$ y $\langle \psi_1^{\mu} \psi_1^{\nu} \rangle$. El resultado para la parte puramente escalar, es conocido, así que sólo se escribe el resultado:

$$\mathcal{E} \mathcal{A} = \frac{1}{180} T^3 F_{\mu}^{\alpha} F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta} + \frac{1}{120} T^3 F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (4.128)$$

Ahora veamos las contracciones para el último término:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \mathcal{B} &= \langle y_1^{\alpha} y_1^{\beta} \rangle (-1) \langle \psi_1^{\mu} \psi_2^{\sigma} \rangle \langle \psi_1^{\nu} \psi_2^{\eta} \rangle \\ &= (-1) (-2T \Delta_{11} g^{\alpha\beta}) \left(\frac{1}{2} T G_{F12} g^{\mu\xi}\right) \left(\frac{1}{2} T G_{F12} g^{\nu\eta}\right) \\ &= \frac{1}{2} T^3 \Delta_{11} G_{F12}^2 g^{\alpha\beta} g^{\mu\sigma} g^{\nu\eta}. \end{aligned} \quad (4.129)$$

Dado que

$$\int du_1 \Delta_{11} = -\frac{1}{6}. \quad (4.130)$$

Además, la contracción de índices es

$$F_{\lambda\nu} R_{\alpha\beta\mu}^{\lambda} F_{\sigma\eta} g^{\alpha\beta} g^{\mu\sigma} g^{\nu\eta} = F^{\lambda\eta} R_{\lambda\alpha}^{\alpha}{}_{\mu} F^{\mu}{}_{\eta} = -R_{\lambda\mu} F^{\lambda\eta} F^{\mu}{}_{\eta}. \quad (4.131)$$

Entonces

$$F_{\lambda\nu} R_{\alpha\beta\mu}^{\lambda} F_{\sigma\eta} \int du_1 du_2 \mathcal{E} \mathcal{B} = \frac{1}{12} T^3 R_{\lambda\nu} F^{\lambda\eta} F^{\nu}_{\eta}. \quad (4.132)$$

Es momento de considerar los factores correspondientes:

- (-1) ← Llega del desarrollo de la exponencial para el término $F R y y (y \dot{y} + 8\psi \psi)$
- (-1) ← Llega del desarrollo de la exponencial para el término $F(\dot{y} y + 2\psi \psi)$
- $-\frac{i}{2}$ ← Llega de (3.51)
- $-\frac{i}{24}$ ← De (3.55)
- 16 ← Es el factor del término
- 2 ← Corresponde al número de posibles combinaciones.

Con ello

$$2(16) \left(-\frac{i}{2}\right) \left(-\frac{i}{24}\right) \left(\frac{1}{12}\right) T^3 R_{\lambda\nu} F^{\lambda\eta} F^{\nu}_{\eta} = -\frac{1}{18} T^3 R_{\lambda\nu} F^{\lambda\eta} F^{\nu}_{\eta}. \quad (4.133)$$

Término $F(\dot{y} y + 4\psi \psi) y y F(\dot{y} y + 2\psi \psi)$

Sea

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= F_{\mu\nu;\alpha\beta} (\dot{y}_1^{\mu} y_1^{\nu} + 4\psi_1^{\mu} \psi_1^{\nu}) y_1^{\alpha} y_1^{\beta} F_{\sigma\lambda} (\dot{y}_2^{\sigma} y_2^{\lambda} + 2\psi_2^{\sigma} \psi_2^{\lambda}) \\ &= F_{\mu\nu;\alpha\beta} F_{\sigma\lambda} (\dot{y}_1^{\mu} y_1^{\nu} y_1^{\alpha} y_1^{\beta} \dot{y}_2^{\sigma} y_2^{\lambda} + 2\dot{y}_1^{\mu} y_1^{\nu} y_1^{\alpha} y_1^{\beta} \psi_2^{\sigma} \psi_2^{\lambda} + 4\psi_1^{\mu} \psi_1^{\nu} y_1^{\alpha} y_1^{\beta} \dot{y}_2^{\sigma} y_2^{\lambda} \\ &\quad + 8\psi_1^{\mu} \psi_1^{\nu} y_1^{\alpha} y_1^{\beta} \psi_2^{\sigma} \psi_2^{\lambda}). \end{aligned} \quad (4.134)$$

De las contracciones para la parte puramente escalar se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \mathcal{A} &= -\frac{1}{60} T^3 F_{\mu}^{\alpha} F^{\mu\beta}_{;\alpha\beta} - \frac{1}{60} T^3 F_{\mu}^{\alpha} F^{\mu\beta}_{;\beta\alpha} \\ &= -\frac{1}{120} T^3 F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{1}{60} T^3 F_{\mu}^{\alpha} F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{30} T^3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_{;\gamma}{}^{\gamma}. \end{aligned} \quad (4.135)$$

Las contracciones para los términos dos y tres dentro del parentesis de \mathcal{F} , son nulas ya que $\langle \psi_2^{\sigma} \psi_2^{\lambda} \rangle$ y $\langle \psi_1^{\mu} \psi_1^{\nu} \rangle$ son cero. Veamos las contracciones del último término:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \mathcal{B} &= \langle y_1^{\alpha} y_1^{\beta} \rangle (-1) \langle \psi_1^{\mu} \psi_1^{\sigma} \rangle \langle \psi_1^{\nu} \psi_2^{\lambda} \rangle \\ &= -(-2T \Delta_{11} g^{\alpha\beta}) \left(\frac{1}{2} T G_{F12} g^{\mu\sigma}\right) \left(\frac{1}{2} T G_{F12} g^{\nu\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{2} T^3 \Delta_{11} G_{F12}^2 g^{\alpha\beta} g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}. \end{aligned} \quad (4.136)$$

Dado que

$$\int du_1 \Delta_{11} = -\frac{1}{6}, \quad (4.137)$$

y

$$F_{\mu\nu;\alpha\beta} F_{\sigma\lambda} g^{\alpha\beta} g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} = F_{\mu\nu;\alpha}{}^{\alpha} F^{\mu\nu}, \quad (4.138)$$

entonces

$$F_{\mu\nu;\alpha\beta} F_{\sigma\lambda} \int du_1 \mathcal{F} \mathcal{B} = -\frac{1}{12} T^3 F_{\mu\nu;\alpha}{}^{\alpha} F^{\mu\nu}. \quad (4.139)$$

Finalmente hay que considerar los factores implicados para este término:

- (-1) ← Llega del desarrollo de la exponencial para el término $F(\dot{y}y + 4\psi\psi)y y$
- (-1) ← Llega del desarrollo de la exponencial para el término $F(\dot{y}y + 2\psi\psi)$
- $-\frac{i}{2}$ ← Llega de (3.51)
- $-\frac{i}{8}$ ← Llega de (3.54)
- 8 ← Es el factor del término
- 2 ← Corresponde al número de posibles combinaciones.

Así que

$$(2)(8) \left(-\frac{i}{2}\right) \left(-\frac{i}{8}\right) \left(-\frac{1}{12} T^3 F_{\mu\nu;\alpha} F^{\mu\nu}\right) = \frac{1}{12} T^3 F_{\mu\nu;\alpha} F^{\mu\nu}. \quad (4.140)$$

Término $\left[F_{\mu\nu;\alpha} (\dot{y}y + 3\psi\psi) y^\alpha\right]^2$

Explícitamente se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \left[F_{\mu\nu;\alpha} (\dot{y}^\mu y^\nu + 3\psi^\mu \psi^\nu) y^\alpha\right]^2 \\ &= F_{\alpha\beta;\gamma} \left(\dot{y}_1^\alpha y_1^\beta + 3\psi_1^\alpha \psi_1^\beta\right) y_1^\gamma F_{\mu\nu;\eta} \left(\dot{y}_2^\mu y_2^\nu + 3\psi_2^\mu \psi_2^\nu\right) y_2^\eta \\ &= F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\eta} \left(\dot{y}_1^\alpha y_1^\beta y_1^\gamma \dot{y}_2^\mu y_2^\nu y_2^\eta + 3\dot{y}_1^\alpha y_1^\beta y_1^\gamma \psi_2^\mu \psi_2^\nu y_2^\eta + 3\psi_1^\alpha \psi_1^\beta y_1^\gamma \dot{y}_2^\mu y_2^\nu y_2^\eta\right. \\ &\quad \left.+ 9\psi_1^\alpha \psi_1^\beta y_1^\gamma \psi_2^\mu \psi_2^\nu y_2^\eta\right) \end{aligned} \quad (4.141)$$

Las contracciones para el primer término es puramente escalar, es un resultado conocido

$$\mathcal{G}\mathcal{A} = -\frac{1}{180} F_{\mu;\alpha} F^{\mu\beta}{}_{;\beta} - \frac{1}{45} F^{\alpha\beta;\gamma} F_{\alpha\beta;\gamma}. \quad (4.142)$$

Las contracciones para el segundo y tercer término son nulas pues se debe a la presencia de $\langle\psi_2^\mu \psi_2^\nu\rangle$ y $\langle\psi_1^\alpha \psi_1^\beta\rangle$, las cuales son nulas. Calculemos las contracciones del último término:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}\mathcal{B} &= \langle y_1^\gamma y_2^\eta \rangle (-1) \langle \psi_1^\alpha \psi_2^\mu \rangle \langle \psi_1^\beta \psi_2^\nu \rangle \\ &= -(-2T \Delta_{12} g^{\gamma\eta}) \left(\frac{1}{2} T G_{F12} g^{\alpha\mu}\right) \left(\frac{1}{2} T G_{F12} g^{\beta\nu}\right) \\ &= \frac{1}{2} T^3 \Delta_{12} G_{F12}^2 g^{\gamma\eta} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}. \end{aligned} \quad (4.143)$$

Ya que

$$\int du_1 du_2 \Delta_{12} = -\frac{1}{12}, \quad (4.144)$$

y

$$F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\eta} g^{\gamma\eta} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} = F_{\alpha\beta;\gamma} F^{\alpha\beta;\gamma}, \quad (4.145)$$

entonces

$$F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\eta} \int du_1 du_2 \Delta_{12} = -\frac{1}{24} T^3 F_{\alpha\beta;\gamma} F^{\alpha\beta;\gamma}. \quad (4.146)$$

Finalmente consideramos los factores implicados:

- $\frac{1}{2} \leftarrow$ Llega del desarrollo de la exponencial para este término
- $-\frac{i}{3} \leftarrow$ Llega de (3.53)
- 9 \leftarrow Es el factor del término
- 2 \leftarrow Corresponde al número de posibles combinaciones.

Por lo tanto

$$(2)(9) \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{i}{3}\right)^2 \left(-\frac{1}{24} T^3 F_{\alpha\beta;\gamma} F^{\alpha\beta;\gamma}\right) = \frac{1}{24} T^3 F_{\alpha\beta;\gamma} F^{\alpha\beta;\gamma} \quad (4.147)$$

Ahora hay que hacer la integral sobre T . Después el resultado completo para el Lagrangiano efectivo espinorial se obtiene multiplicando el Lagrangiano efectivo escalar (4.30) (con $\bar{\xi} = 0$) con un factor (-2) , y sumando la contribución del espín.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{spin}^{(DBC)} = (-2) \frac{1}{(4\pi)^2 m^2} & \left[-\frac{1}{48} (1 - 12\bar{\xi}) R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right. \\ & \left. + \frac{1}{24} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{12} F_{\mu\nu;\alpha} F^{\mu\nu} + \frac{1}{24} F_{\mu\nu;\eta} F^{\mu\nu;\eta} \right]. \quad (4.148) \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{spinor}^{(DBC)} = (-2) \frac{1}{(4\pi)^2 m^2} & \left[\left(\frac{1}{144} - \frac{1}{48} \right) R F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{90} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + \left(-\frac{1}{60} + \frac{1}{24} \right) R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \right. \\ & \left. - \frac{1}{180} (\nabla^\alpha F_{\alpha\mu})^2 + \left(-\frac{1}{45} + \frac{1}{24} \right) (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{30} \right) F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} \right] \\ = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{m^2} & \left[-\frac{1}{72} R F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{90} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + \frac{1}{40} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \right. \\ & \left. + \frac{7}{360} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{20} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} - \frac{1}{180} (\nabla^\alpha F_{\alpha\mu})^2 \right]. \end{aligned}$$

4.2.2. Esquema SI

Ahora vamos a realizar los cálculos de la sección anterior pero usando el esquema SI. Es necesario comentar que las contracciones de Wick son iguales en ambos esquemas, así como el resultado de las contracciones fermiónicas y las contracciones de índices; la diferencia radica en la función de correlación bosónica.

Término $\bar{\xi} R (F \dot{y} y + 2 F \psi \psi)^2$

Para este término se tiene

$$\mathcal{A} = \bar{\xi} R \left(F_{\alpha\beta} \dot{y}_1^\alpha y_1^\beta F_{\mu\nu} \dot{y}_2^\mu y_2^\nu + 4 F_{\mu\nu} \dot{y}_2^\mu y_2^\nu F_{\alpha\beta} \psi_1^\alpha \psi_1^\beta + 4 F_{\alpha\beta} \psi_1^\alpha \psi_1^\beta F_{\mu\nu} \psi_2^\mu \psi_2^\nu \right).$$

Las contracciones que se generan para el primer término son puramente escalares, algo que ya se calculó en el trabajo de maestría; el resultado correspondiente es:

$$\mathcal{A}a = \frac{1}{12} T^3 \bar{\xi} R F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (4.149)$$

igual que en el esquema *DBC*. Las contracción del segundo término dentro del paréntesis son nulas porque aparece $\langle \psi_1, \psi_1 \rangle = 0$, entonces

$$\mathcal{A}b = 0. \quad (4.150)$$

Ahora, las contracciones del último término:

$$\mathcal{A}c = -\langle \psi_1^\alpha \psi_2^\mu \rangle \langle \psi_1^\beta \psi_2^\nu \rangle = \mathcal{A}\mathcal{C}, \quad (4.151)$$

$$\mathcal{A}d = \langle \psi_1^\alpha \psi_2^\nu \rangle \langle \psi_1^\beta \psi_2^\mu \rangle = \mathcal{A}\mathcal{D}. \quad (4.152)$$

De la suma de estos resultados se tiene

$$-\frac{1}{2}T^2\bar{\xi}RF_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad (4.153)$$

y al usar los factores involucrados se encuentra

$$-\frac{1}{4}T^3\bar{\xi}RF_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \quad (4.154)$$

Término $R\dot{y}y\dot{y}\dot{y}\left(F\dot{y}y+2F\psi\psi\right)^2$

Para este término tenemos

$$\mathcal{B} = R_{\mu\alpha\beta\nu}\dot{y}_1^\mu y_1^\alpha y_1^\beta \dot{y}_1^\nu \left(F_{\sigma\lambda}\dot{y}_2^\sigma y_2^\lambda F_{\xi\eta}\dot{y}_3^\xi y_3^\eta + 4F_{\sigma\lambda}\dot{y}_2^\sigma y_2^\lambda F_{\xi\eta}\psi_3^\xi \psi_3^\eta + 4F_{\sigma\lambda}\psi_2^\sigma \psi_2^\lambda F_{\xi\eta}\psi_3^\xi \psi_3^\eta \right),$$

El resultado de la parte bosónica es

$$\mathcal{B}a = \frac{1}{3(144)}T^3RF_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{72}T^3F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{3(45)}T^3F_\mu{}^\alpha F^{\mu\beta}R_{\alpha\beta}. \quad (4.155)$$

Sabemos que la contracción para el segundo término dentro del paréntesis se anula, así que veamos las contracciones del último término:

$$\mathcal{B}b = \mathcal{B}\mathcal{B} = \langle \dot{y}_1^\mu y_1^\beta \rangle \langle y_1^\alpha \dot{y}_1^\nu \rangle (-1)\langle \psi_2^\sigma \psi_3^\xi \rangle \langle \psi_2^\lambda \psi_3^\eta \rangle, \quad (4.156)$$

$$\mathcal{B}c = \mathcal{B}\mathcal{C} = \langle \dot{y}_1^\mu y_1^\beta \rangle \langle y_1^\alpha \dot{y}_1^\nu \rangle \langle \psi_2^\sigma \psi_3^\eta \rangle \langle \psi_2^\lambda \psi_3^\xi \rangle, \quad (4.157)$$

$$\mathcal{B}d = \mathcal{B}\mathcal{D} = \langle \dot{y}_1^\mu y_1^\nu \rangle \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle (-1)\langle \psi_2^\sigma \psi_3^\xi \rangle \langle \psi_2^\lambda \psi_3^\eta \rangle, \quad (4.158)$$

$$\mathcal{B}e = \mathcal{B}\mathcal{E} = \langle \dot{y}_1^\mu \dot{y}_1^\nu \rangle \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle \langle \psi_2^\sigma \psi_3^\eta \rangle \langle \psi_2^\lambda \psi_3^\xi \rangle. \quad (4.159)$$

Dado que en el esquema *SI* se tiene $\langle \dot{y}_1 y_1 \rangle = 0$, entonces las contracciones $\mathcal{B}b$ y $\mathcal{B}c$ son nulas.

Ahora se trabaja sobre $\mathcal{B}d$:

$$\begin{aligned} \langle \dot{y}_1^\mu \dot{y}_1^\nu \rangle \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle &= \left(T\ddot{G}_{B11}g^{\mu\nu} \right) \left(-TG_{B11}g^{\alpha\beta} \right) \\ &= -T^2\ddot{G}_{B11}G_{B11}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (4.160)$$

Además,

$$-\langle \psi_2^\sigma \psi_3^\xi \rangle \langle \psi_2^\lambda \psi_3^\eta \rangle = -\frac{1}{4}T^2g^{\sigma\xi}g^{\lambda\eta}.$$

Entonces

$$\mathcal{B}d = \frac{1}{4}T^4\ddot{G}_{B11}G_{B11}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}g^{\sigma\xi}g^{\lambda\eta}. \quad (4.161)$$

Para la contracción de índices se encontró

$$\begin{aligned} R_{\mu\alpha\beta\nu} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} &= -R, \\ F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} g^{\sigma\xi} g^{\lambda\eta} &= F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda}. \end{aligned}$$

Con esto se tiene

$$R_{\mu\alpha\beta\nu} F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} \int du_1 \mathcal{B}d = -\frac{1}{12} T^4 R F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda}, \quad (4.162)$$

la integral de las funciones de Green se conoce de (4.48).

Finalmente se considera $\mathcal{B}e$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}e &= -T^2 \ddot{G}_{B11} G_{B11} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{4}\right) T^2 g^{\sigma\eta} g^{\lambda\xi} \\ &= -\frac{1}{4} T^4 \ddot{G}_{B11} G_{B11} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} g^{\sigma\eta} g^{\lambda\xi}. \end{aligned} \quad (4.163)$$

Para la contracción de índices es tiene

$$R_{\mu\alpha\beta\nu} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} = -R, \quad (4.164)$$

$$F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} g^{\sigma\eta} g^{\lambda\xi} = -F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda}. \quad (4.165)$$

Por lo tanto,

$$R_{\mu\alpha\beta\nu} F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} \int du_1 \mathcal{B}e = -\frac{1}{12} T^4 R F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda}. \quad (4.166)$$

Ahora se suman todos los resultados

$$\left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{12}\right) T^4 R F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda} = -\frac{1}{6} T^4 R F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda}. \quad (4.167)$$

Es momento de considerar los factores implicados:

$$4 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{12T}\right) \left(-\frac{i}{2}\right)^2 \left(-\frac{1}{6}\right) T^4 R F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda} = -\frac{1}{144} T^3 R F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda}. \quad (4.168)$$

Término $R y y \psi \dot{\psi} (F \dot{y} y + 2 F \psi \psi)^2$

Para este término se tiene:

$$\mathcal{C} = R_{\mu\alpha\beta\nu} y^\alpha y^\beta \psi^\mu \dot{\psi}^\nu \left(F_{\sigma\lambda} \dot{y}^\sigma y^\lambda F_{\xi\eta} \dot{y}^\xi y^\eta + 4 F_{\sigma\lambda} \dot{y}^\sigma y^\lambda F_{\xi\eta} \psi^\xi \dot{\psi}^\eta + 4 F_{\sigma\lambda} \psi^\sigma \dot{\psi}^\lambda F_{\xi\eta} \psi^\xi \dot{\psi}^\eta \right) \quad (4.169)$$

Las contracciones correspondientes al primer término son

$$\mathcal{C}a = \mathcal{C}\mathcal{A} = \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle \langle \dot{y}_2^\sigma \dot{y}_3^\xi \rangle \langle y_2^\lambda y_3^\eta \rangle \langle \psi_1^\mu \dot{\psi}_1^\nu \rangle, \quad (4.170)$$

$$\mathcal{C}b = \mathcal{C}\mathcal{B} = \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle \langle \dot{y}_2^\sigma y_3^\eta \rangle \langle y_2^\lambda \dot{y}_3^\xi \rangle \langle \psi_1^\mu \dot{\psi}_1^\nu \rangle, \quad (4.171)$$

$$\mathcal{C}c = \mathcal{C}\mathcal{C} = \langle y_1^\alpha \dot{y}_2^\sigma \rangle \langle y_1^\beta \dot{y}_3^\xi \rangle \langle y_2^\lambda y_3^\eta \rangle \langle \psi_1^\mu \dot{\psi}_1^\nu \rangle, \quad (4.172)$$

$$\mathcal{C}d = \mathcal{C}\mathcal{D} = \langle y_1^\alpha \dot{y}_2^\sigma \rangle \langle y_1^\beta y_3^\eta \rangle \langle y_2^\lambda \dot{y}_3^\xi \rangle \langle \psi_1^\mu \dot{\psi}_1^\nu \rangle, \quad (4.173)$$

$$\mathcal{C}e = \mathcal{C}\mathcal{E} = \langle y_1^\alpha y_2^\lambda \rangle \langle y_1^\beta \dot{y}_3^\xi \rangle \langle \dot{y}_2^\sigma y_3^\eta \rangle \langle \psi_1^\mu \dot{\psi}_1^\nu \rangle, \quad (4.174)$$

$$\mathcal{C}f = \mathcal{C}\mathcal{F} = \langle y_1^\alpha y_2^\lambda \rangle \langle y_1^\beta y_3^\eta \rangle \langle \dot{y}_2^\sigma \dot{y}_3^\xi \rangle \langle \psi_1^\mu \dot{\psi}_1^\nu \rangle. \quad (4.175)$$

Recordemos que en todas las contracciones donde aparece $\langle \psi_1^\mu \psi_1^\nu \rangle \propto \delta_{11}$ y estas cantidades son canceladas con la contribución de los *campos fantasma*.

Ahora veamos las contracciones del segundo término:

$$\mathcal{C}g = \mathcal{C}\mathcal{G} = \langle y_1^\alpha \dot{y}_2^\sigma \rangle \langle y_1^\beta \dot{y}_2^\lambda \rangle \langle \psi_1^\mu \psi_3^\xi \rangle \langle \dot{\psi}_1^\nu \psi_3^\eta \rangle, \quad (4.176)$$

$$\mathcal{C}h = \mathcal{C}\mathcal{H} = \langle y_1^\alpha \dot{y}_2^\sigma \rangle \langle y_1^\beta \dot{y}_2^\lambda \rangle \langle \psi_1^\mu \psi_3^\eta \rangle \langle \dot{\psi}_1^\nu \psi_3^\xi \rangle, \quad (4.177)$$

$$\mathcal{C}i = \mathcal{C}\mathcal{I} = \langle y_1^\alpha \dot{y}_2^\lambda \rangle \langle y_1^\beta \dot{y}_2^\sigma \rangle \langle \psi_1^\mu \psi_3^\xi \rangle \langle \dot{\psi}_1^\nu \psi_3^\eta \rangle, \quad (4.178)$$

$$\mathcal{C}j = \mathcal{C}\mathcal{J} = \langle y_1^\alpha \dot{y}_2^\lambda \rangle \langle y_1^\beta \dot{y}_2^\sigma \rangle \langle \psi_1^\mu \psi_3^\eta \rangle \langle \dot{\psi}_1^\nu \psi_3^\xi \rangle. \quad (4.179)$$

Pero ya sabemos que estas contracciones son nulas, dado que $\langle \psi_1 \psi_3 \rangle \langle \dot{\psi}_1 \psi_3 \rangle \propto G_{F13} \delta_{13}$, lo cual es nulo bajo la integración.

Finalmente se determinan las contracciones para el último término:

$$\mathcal{C}k = \mathcal{C}\mathcal{K} = \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle \langle \psi_1^\mu \dot{\psi}_1^\nu \rangle (-1) \langle \psi_2^\sigma \psi_3^\xi \rangle \langle \psi_2^\lambda \psi_3^\eta \rangle, \quad (4.180)$$

$$\mathcal{C}l = \mathcal{C}\mathcal{L} = \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle (-1) \langle \psi_1^\mu \psi_2^\sigma \rangle (-1) \langle \psi_2^\lambda \psi_3^\eta \rangle \langle \dot{\psi}_1^\nu \psi_3^\xi \rangle. \quad (4.181)$$

Recordamos nuevamente que para debido a que para $\mathcal{C}k$ se tiene $\langle \psi_1^\mu \dot{\psi}_1^\nu \rangle \propto \delta_{11}$, lo cual se cancela con la contribución de los *campos fantasma*, así que damos paso a la contribución de $\mathcal{C}\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}l &= \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle (-1) \langle \psi_1^\mu \psi_2^\sigma \rangle (-1) \langle \psi_2^\lambda \psi_3^\eta \rangle \langle \dot{\psi}_1^\nu \psi_3^\xi \rangle, \\ &= -T G_{B11} g^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} T G_{F12} g^{\mu\sigma} \right) \left(\frac{1}{2} T G_{F23} g^{\lambda\eta} \right) \left(\frac{1}{2} 2T \delta_{13} g^{\nu\xi} \right) \\ &= -\frac{1}{4} T^4 G_{B11} G_{F12} G_{F23} \delta_{13} g^{\alpha\beta} g^{\mu\sigma} g^{\lambda\eta} g^{\nu\xi}. \end{aligned} \quad (4.182)$$

De la contracción de índices se tiene:

$$R_{\mu\alpha\beta\nu} F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} g^{\alpha\beta} g^{\mu\sigma} g^{\lambda\eta} g^{\nu\xi} = R_{\mu\xi} F^{\mu\eta} F_{\eta}{}^\xi. \quad (4.183)$$

Ahora bien, para la integración de las funciones de Green

$$\begin{aligned} \int du_1 du_2 du_3 G_{B11} G_{F12} G_{F23} \delta_{13} &= \int du_2 du_3 G_{B33} G_{F32} G_{F23} = - \int du_3 G_{B33} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned} \quad (4.184)$$

Por lo tanto

$$R_{\mu\alpha\beta\nu} F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} \int du_1 du_2 du_3 \mathcal{C}l = -\frac{1}{24} T^4 R_{\mu\xi} F^{\mu\eta} F_{\eta}{}^\xi. \quad (4.185)$$

Al tomar los factores involucrados se obtiene

$$-(4)(8) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6T} \right) \left(-\frac{i}{2} \right)^2 \left(-\frac{1}{24} T^4 R_{\mu\xi} F^{\mu\eta} F_{\eta}{}^\xi \right) = -\frac{1}{36} T^3 R_{\mu\xi} F^{\mu\eta} F_{\eta}{}^\xi. \quad (4.186)$$

Término $(R + R) \dot{y} y \psi \psi (F \dot{y} y + 2 F \psi \psi)^2$

Para este término se encontró

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= (R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\nu\beta\alpha}) F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} \left(\dot{y}_1^\alpha y_1^\beta \dot{y}_2^\sigma y_2^\lambda \dot{y}_3^\xi y_3^\eta \psi_1^\mu \psi_1^\nu + 4 \dot{y}_1^\alpha y_1^\beta \dot{y}_2^\sigma y_2^\lambda \psi_1^\mu \psi_1^\nu \psi_3^\xi \psi_3^\eta \right. \\ &\quad \left. + 4 \dot{y}_1^\alpha y_1^\beta \psi_1^\mu \psi_1^\nu \psi_2^\sigma \psi_2^\lambda \psi_3^\xi \psi_3^\eta \right). \end{aligned}$$

Sabemos que las contracciones del primer término dentro del parentesis son nulas, por lo cual en concentramos en el segundo término:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}a &= \langle \dot{y}_1^\alpha \dot{y}_2^\sigma \rangle \langle y_1^\beta y_2^\lambda \rangle (-1) \langle \psi_1^\mu \psi_3^\xi \rangle \langle \psi_1^\nu \psi_3^\eta \rangle \\
&= (-1)(T \ddot{G}_{B12} g^{\alpha\sigma}) (-T G_{B12} g^{\beta\lambda}) \left(\frac{1}{2} T G_{F13} g^{\mu\xi} \right) \left(\frac{1}{2} T G_{F13} g^{\nu\eta} \right) \\
&= \frac{1}{4} T^4 \ddot{G}_{B12} G_{B12} G_{F13}^2 g^{\alpha\sigma} g^{\beta\lambda} g^{\mu\xi} g^{\nu\eta}.
\end{aligned} \tag{4.187}$$

Se realiza la contracción de índices:

$$(R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\nu\beta\alpha}) F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} g^{\alpha\sigma} g^{\beta\lambda} g^{\mu\xi} g^{\nu\eta} = (R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\nu\beta\alpha}) F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}. \tag{4.188}$$

Además, se sabe que

$$\int du_1 du_2 \ddot{G}_{B12} G_{B12} = -\frac{1}{3}, \tag{4.189}$$

con lo cual

$$(R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\nu\beta\alpha}) F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} \int du_1 du_2 \mathcal{D}a = -\frac{1}{12} T^4 (R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\nu\beta\alpha}) F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}. \tag{4.190}$$

Esto se puede simplificar al usar

$$R_{\mu\alpha\beta\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} R_{\mu\nu\beta\alpha} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}. \tag{4.191}$$

De esta forma

$$\begin{aligned}
(R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\nu\beta\alpha}) F_{\sigma\lambda} F_{\xi\eta} \int du_1 du_2 \mathcal{D}a &= \left(-\frac{1}{12} T^4 \right) \frac{3}{2} R_{\mu\nu\beta\alpha} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{8} T^4 R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{4.192}$$

El cálculo para las contracciones del último término de \mathcal{D} es el siguiente

$$\mathcal{D}b = \mathcal{D}\mathcal{B} = \langle \dot{y}_1^\alpha y_1^\beta \rangle (-1) \langle \psi_1^\mu \psi_2^\sigma \rangle \langle \psi_1^\nu \psi_3^\xi \rangle (-1) \langle \psi_2^\lambda \psi_3^\eta \rangle,$$

pero $\langle \dot{y}_1 y_1 \rangle = 0$. Solo resta incluir los factores correspondientes

$$-(4)(4) \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{6T} \right) \left(-\frac{i}{2} \right)^2 \frac{1}{8} T^4 R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} = \frac{1}{24} T^3 R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}. \tag{4.193}$$

Término $F R y y (y \dot{y} + 8\psi \dot{\psi}) F (\dot{y} y + 2\psi \dot{\psi})$

Para este término es encontró

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= F_{\lambda\nu} R^{\lambda}_{\alpha\beta\mu} F_{\sigma\eta} \left(y_1^\mu \dot{y}_1^\nu y_1^\alpha y_1^\beta \dot{y}_2^\sigma y_2^\eta + 2 y_1^\mu \dot{y}_1^\nu y_1^\alpha y_1^\beta \psi_2^\sigma \psi_2^\eta + 8 y_1^\alpha y_1^\beta \psi_1^\mu \psi_1^\nu \dot{y}_2^\sigma y_2^\eta \right. \\
&\quad \left. + 16 y_1^\alpha y_1^\beta \psi_1^\mu \psi_1^\nu \psi_2^\sigma \psi_2^\eta \right),
\end{aligned}$$

recordemos que las contracciones de los términos dos y tres dentro son nulas debido a las cantidades $\langle \psi_2^\sigma \psi_2^\eta \rangle$ y $\langle \psi_1^\mu \psi_1^\nu \rangle$. El resultado para la parte puramente escalar, es ya conocido, así que sólo se escribe el resultado en el esquema SI

$$\mathcal{E}a = \frac{1}{18(24)} T^3 F_\mu^\alpha F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta} + \frac{1}{12(24)} T^3 F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}. \tag{4.194}$$

Ahora veamos las contracciones para el último término:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}b &= \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle (-1) \langle \psi_1^\mu \psi_2^\sigma \rangle \langle \psi_1^\nu \psi_2^\eta \rangle \\
&= (-1)(-T G_{B11} g^{\alpha\beta}) \left(\frac{1}{2} T G_{F12} g^{\mu\xi} \right) \left(\frac{1}{2} T G_{F12} g^{\nu\eta} \right) \\
&= \frac{1}{4} T^3 G_{B11} G_{F12}^2 g^{\alpha\beta} g^{\mu\sigma} g^{\nu\eta}.
\end{aligned} \tag{4.195}$$

Dado que

$$\int du_1 G_{B11} = -\frac{1}{6}. \tag{4.196}$$

Además

$$F_{\lambda\nu} R_{\alpha\beta\mu}^\lambda F_{\sigma\eta} g^{\alpha\beta} g^{\mu\sigma} g^{\nu\eta} = F^{\lambda\eta} R_{\lambda\alpha\mu}^\alpha F^\mu{}_\eta = -R_{\lambda\mu} F^{\lambda\eta} F^\mu{}_\eta. \tag{4.197}$$

Entonces

$$F_{\lambda\nu} R_{\alpha\beta\mu}^\lambda F_{\sigma\eta} \int du_1 du_2 \mathcal{E}\mathcal{B} = \frac{1}{24} T^3 R_{\lambda\nu} F^{\lambda\eta} F^\nu{}_\eta. \tag{4.198}$$

Cuando se consideran los factores correspondientes se tiene

$$2(16) \left(-\frac{i}{2} \right) \left(-\frac{i}{24} \right) \left(\frac{1}{24} \right) T^3 R_{\lambda\nu} F^{\lambda\eta} F^\nu{}_\eta = -\frac{1}{36} T^3 R_{\lambda\nu} F^{\lambda\eta} F^\nu{}_\eta. \tag{4.199}$$

Término $F(\dot{y}y + 4\psi\psi)y y F(\dot{y}y + 2\psi\psi)$

Como

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= F_{\mu\nu;\alpha\beta} F_{\sigma\lambda} (\dot{y}_1^\mu y_1^\nu y_1^\alpha y_1^\beta \dot{y}_2^\sigma y_2^\lambda + 2\dot{y}_1^\mu y_1^\nu y_1^\alpha y_1^\beta \psi_2^\sigma \psi_2^\lambda + 4\psi_1^\mu \psi_1^\nu y_1^\alpha y_1^\beta \dot{y}_2^\sigma y_2^\lambda \\
&\quad + 8\psi_1^\mu \psi_1^\nu y_1^\alpha y_1^\beta \psi_2^\sigma \psi_2^\lambda).
\end{aligned}$$

Para las contracciones de la parte puramente escalar se tiene:

$$\mathcal{F}a = -\frac{1}{288} T^3 F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{1}{144} T^3 F_\mu{}^\alpha F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{72} T^3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}{}_{;\gamma}{}^\gamma. \tag{4.200}$$

Recordemos que las contracciones para los términos dos y tres dentro son nulas, así que veamos las contracciones del último término:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}b &= \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle (-1) \langle \psi_1^\mu \psi_1^\sigma \rangle \langle \psi_1^\nu \psi_2^\lambda \rangle \\
&= (-T G_{B11} g^{\alpha\beta}) \left(\frac{1}{2} T G_{F12} g^{\mu\sigma} \right) \left(\frac{1}{2} T G_{F12} g^{\nu\lambda} \right) \\
&= \frac{1}{4} T^3 G_{B11} G_{F12}^2 g^{\alpha\beta} g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}.
\end{aligned} \tag{4.201}$$

Al usar

$$\int du_1 G_{B11} = -\frac{1}{6}, \tag{4.202}$$

y

$$F_{\mu\nu;\alpha\beta} F_{\sigma\lambda} g^{\alpha\beta} g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} = F_{\mu\nu;\alpha}{}^\alpha F^{\mu\nu}, \tag{4.203}$$

se obtiene

$$F_{\mu\nu;\alpha\beta} F_{\sigma\lambda} \int du_1 \mathcal{F}b = -\frac{1}{24} T^3 F_{\mu\nu;\alpha}{}^\alpha F^{\mu\nu}. \tag{4.204}$$

Al incluir los factores implicados para este término se obtiene

$$(2)(8) \left(-\frac{i}{2} \right) \left(-\frac{i}{8} \right) \left(-\frac{1}{24} T^3 F_{\mu\nu;\alpha}{}^\alpha F^{\mu\nu} \right) = \frac{1}{24} T^3 F_{\mu\nu;\alpha}{}^\alpha F^{\mu\nu}. \tag{4.205}$$

Término $\left[F_{\mu\nu;\alpha} (\dot{y} y + 3 \psi \psi) y^\alpha \right]^2$

Para este término se encontró

$$\mathcal{G} = F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\eta} \left(\dot{y}_1^\alpha y_1^\beta y_1^\gamma \dot{y}_2^\mu y_2^\nu y_2^\eta + 3 \dot{y}_1^\alpha y_1^\beta y_1^\gamma \psi_2^\mu \psi_2^\nu y_2^\eta + 3 \psi_1^\alpha \psi_1^\beta y_1^\gamma \dot{y}_2^\mu y_2^\nu y_2^\eta + 9 \psi_1^\alpha \psi_1^\beta y_1^\gamma \psi_2^\mu \psi_2^\nu y_2^\eta \right).$$

Las contracciones que se encuentran en el esquema *SI* para el primer término es puramente escalar, por lo cual solo se escribe el resultado

$$\mathcal{G}a = -\frac{1}{180} F^{\alpha\beta;\gamma} F_{\alpha\beta;\gamma}. \quad (4.206)$$

Se sabe que las contracciones para el segundo y tercer término son nulas debido a la presencia de $\langle \psi_2^\mu \psi_2^\nu \rangle$ y $\langle \psi_1^\alpha \psi_1^\beta \rangle$, así que calculemos las contracciones del último término:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}b &= \langle y_1^\gamma y_2^\eta \rangle (-1) \langle \psi_1^\alpha \psi_2^\mu \rangle \langle \psi_1^\beta \psi_2^\nu \rangle \\ &= -(T G_{B12} g^{\gamma\eta}) \left(\frac{1}{2} T G_{F12} g^{\alpha\mu} \right) \left(\frac{1}{2} T G_{F12} g^{\beta\nu} \right) \\ &= \frac{1}{4} T^3 G_{B12} G_{F12}^2 g^{\gamma\eta} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}. \end{aligned} \quad (4.207)$$

Pero

$$\int du_1 du_2 G_{B12} = 0, \quad (4.208)$$

de modo que para esta contracción no hay contribución.

En el caso del esquema *SI* es necesario incluir la acción Fedev-Popov, por lo cual, a diferencia del esquema *DBC*, tenemos el siguiente término

Término $\bar{\eta} R \eta y y [F (\dot{y} y + 2 \psi \psi)]^2$

En este caso se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \bar{\eta}_\mu R^\mu_{\alpha\beta\nu} g^\nu y^\alpha y^\beta [F_{\sigma\lambda} (\dot{y}^\sigma y^\lambda + 2 \psi^\sigma \psi^\lambda)]^2 \\ &= \bar{\eta}_\xi R^\xi_{\alpha\beta\kappa} g^\kappa y_1^\alpha y_1^\beta F_{\mu\nu} (\dot{y}_1^\mu y_1^\nu + 2 \psi_1^\mu \psi_1^\nu) F_{\sigma\lambda} (\dot{y}_2^\sigma y_2^\lambda + 2 \psi_2^\sigma \psi_2^\lambda) \\ &= R^\xi_{\alpha\beta\kappa} F_{\mu\nu} F_{\sigma\lambda} \bar{\eta}_\xi g^\kappa y_1^\alpha y_1^\beta \left(\dot{y}_1^\mu y_1^\nu \dot{y}_2^\sigma y_2^\lambda + 2 \dot{y}_1^\mu y_1^\nu \psi_2^\sigma \psi_2^\lambda + 2 \psi_1^\mu \psi_1^\nu \dot{y}_2^\sigma y_2^\lambda + 4 \psi_1^\mu \psi_1^\nu \psi_2^\sigma \psi_2^\lambda \right). \end{aligned} \quad (4.209)$$

La contracción de los campos η es sencilla, $\langle \bar{\eta}_\xi g^\kappa \rangle = \delta_\xi^\kappa$, así que podemos escribir

$$\mathcal{H} = -R_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\sigma\lambda} y_1^\alpha y_1^\beta \left(\dot{y}_1^\mu y_1^\nu \dot{y}_2^\sigma y_2^\lambda + \dot{y}_1^\mu y_1^\nu \psi_2^\sigma \psi_2^\lambda + \psi_1^\mu \psi_1^\nu \dot{y}_2^\sigma y_2^\lambda + \psi_1^\mu \psi_1^\nu \psi_2^\sigma \psi_2^\lambda \right). \quad (4.210)$$

Nuevamente se coloca el resultado en el esquema *SI* para la parte puramente escalar:

$$\mathcal{H}a = \frac{1}{12(18)} R F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{270} F_\mu^\alpha F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}. \quad (4.211)$$

La contracciones para los términos dos y tres son cero debido a $\langle \psi_2^\sigma \psi_2^\lambda \rangle$ y $\langle \psi_1^\mu \psi_1^\nu \rangle$. Ahora se calculan las contracciones para el último término:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}b &= \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle (-1) \langle \psi_2^\mu \psi_3^\sigma \rangle \langle \psi_2^\nu \psi_3^\lambda \rangle \\
&= -(-T G_{B11} g^{\alpha\beta}) \left(\frac{1}{2} G_{F23} g^{\mu\sigma} \right) \left(\frac{1}{2} G_{F23} g^{\nu\lambda} \right) \\
&= \frac{1}{4} G_{B11} G_{F23}^2 g^{\alpha\beta} g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} \\
&= -\frac{1}{24} g^{\alpha\beta} g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}.
\end{aligned} \tag{4.212}$$

Para la contracción de índices se tiene

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\sigma\lambda} g^{\alpha\beta} g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} &= R_\alpha{}^\alpha F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
&= R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{4.213}$$

Aún hay que tener en cuenta los factores correspondientes

- $-1 \leftarrow$ Llega del desarrollo de la exponencial para el término R
- $\frac{1}{2} \leftarrow$ Llega del desarrollo de la exponencial para el término $[F(y y + 2\psi\psi)]^2$
- $(-\frac{i}{2})^2 \leftarrow$ Llega de (3.51)
- $\frac{1}{3} \leftarrow$ Llega de (3.18)
- $4 \leftarrow$ Es el factor término
- $2 \leftarrow$ Corresponde al número de posibles combinaciones.

Por lo tanto

$$-2(4) \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right) \left(-\frac{i}{2} \right)^2 \left(-\frac{1}{24} T^3 F_{\alpha\beta;\gamma} F^{\alpha\beta;\gamma} \right) = -\frac{1}{72} T^3 F_{\alpha\beta;\gamma} F^{\alpha\beta;\gamma}. \tag{4.214}$$

Ahora hay que hacer la integral sobre T . Después el resultado completo para el Lagrangiano efectivo espinorial se obtiene multiplicando el Lagrangiano efectivo escalar (4.56) (con $\bar{\xi} = 0$) con un factor (-2) , y sumando la contribución del espín.

$$\mathcal{L}_{spin}^{(SI)} = -2 \frac{1}{(4\pi)^2 m^2} \left[-\frac{1}{48} (1 - 12\bar{\xi}) R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{24} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{24} F_{\mu\nu;\alpha}{}^\alpha F^{\mu\nu} \right]. \tag{4.215}$$

Finalmente se escribe el Lagrangiano efectivo cuando se tiene una partícula con espín

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{spinor}^{(SI)} &= -2 \frac{1}{(4\pi)^2 m^2} \left[\left(\frac{1}{144} - \frac{1}{48} \right) R F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{180} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + \left(-\frac{1}{72} + \frac{1}{24} \right) R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{180} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 + \left(-\frac{1}{72} + \frac{1}{24} \right) F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} \right] \\
&= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[-\frac{1}{72} R F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{180} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + \frac{1}{36} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{180} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{36} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} \right].
\end{aligned}$$

4.3. Resumen y comparación DBC - SI

Es posible encontrar (ver el apéndice G)

$$\mathcal{L}_{spin}^{(SI)} = \mathcal{L}_{spin}^{(DBC)} - \frac{1}{24} \nabla_\alpha (F_{\mu\nu} \nabla^\nu F^{\mu\alpha}). \quad (4.216)$$

Al jugar con las expresiones para $\mathcal{L}_{spinor}^{(DBC)}$ y $\mathcal{L}_{spinor}^{(SI)}$ se encuentra

$$\mathcal{L}_{spinor}^{(SI)} - \mathcal{L}_{spinor}^{(DBC)} = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[-\frac{1}{45} \nabla^\alpha (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu;\alpha}) + \frac{1}{180} \left[\nabla_\alpha (F_\mu{}^\alpha \nabla_\beta F^{\mu\beta}) - \nabla_\beta (F_\mu{}^\alpha \nabla_\alpha F^{\mu\beta}) \right] \right],$$

entonces podemos decir que los Lagrangianos efectivos sólo difieren por derivadas totales, lo cual implica que bajo una integral son iguales.

Las expresiones que se han obtenido para los Lagrangianos efectivos pueden ser comparadas con las que obtienen *Drummond y Hathrell (1980)* (ver [66])

$$\mathcal{L}_{spinor}^{(SI)} - \mathcal{L}_{spinor}^{(DH)} = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{e^2}{m^2} \left[\frac{1}{36} \nabla^\alpha (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu;\alpha}) + \frac{1}{15} \left[\nabla_\alpha (F_\mu{}^\alpha \nabla_\beta F^{\mu\beta}) - \nabla_\beta (F_\mu{}^\alpha \nabla_\alpha F^{\mu\beta}) \right] \right].$$

Otra vez vemos la equivalencia como se verá en el capítulo 9 la forma de $\mathcal{L}_{scal}^{(DH)}$ tiene una cierta ventaja a la hora de usarlo para el cálculo de la amplitud gravitón-fotón-fotón. Este hecho motiva a obtener también la forma del Lagrangiano efectivo escalar correspondiente; se obtiene [66]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{scalar}^{(DH)} &= \mathcal{L}_{scalar}^{(HK)} + \frac{1}{16\pi^2} \frac{e^2}{m^2} \left\{ \frac{1}{30} \nabla^\alpha (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu;\alpha}) + \frac{1}{45} \left[\nabla_\alpha (F_\mu{}^\alpha \nabla_\beta F^{\mu\beta}) - \nabla_\beta (F_\mu{}^\alpha \nabla_\alpha F^{\mu\beta}) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{e^2}{m^2} \left[\frac{1}{12} (\bar{\xi} + \frac{1}{12}) R F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{90} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \frac{1}{180} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{60} (\nabla^\alpha F_{\alpha\mu})^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.217)$$

Enseguida se escribe un sumario de los Lagrangianos efectivos con los que contamos hasta el momento.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(spinor)scalar}^{(DH)} &= \frac{1}{180(4\pi)^2 m^2} \left[\left(\frac{5}{15(\bar{\xi} + \frac{1}{12})} \right) R F_{\mu\nu}^2 - \binom{26}{2} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + \binom{2}{-1} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. + \binom{24}{3} (\nabla^\alpha F_{\alpha\mu})^2 \right], \\ \mathcal{L}_{(spinor)scalar}^{(SI)} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{m^2} \left[\left(\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{12}(\bar{\xi} + \frac{1}{12})} \right) R F_{\mu\nu}^2 + \left(\frac{-\frac{1}{90}}{\frac{1}{180}} \right) R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{72}} \right) R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} + \left(\frac{\frac{1}{90}}{-\frac{1}{180}} \right) (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 - \left(\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{72}} \right) F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} \right], \\ \mathcal{L}_{(spinor)scalar}^{(DBC=HK)} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{m^2} \left[\left(\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{12}(\bar{\xi} + \frac{1}{12})} \right) R F_{\mu\nu}^2 + \left(\frac{-\frac{1}{45}}{\frac{1}{90}} \right) R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{60}} \right) R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - \left(\frac{\frac{7}{180}}{\frac{1}{45}} \right) (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 - \left(\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{30}} \right) F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\frac{1}{90}}{-\frac{1}{180}} \right) (\nabla^\alpha F_{\alpha\mu})^2 \right]. \end{aligned}$$

Todos tienen la misma información sobre la amplitud *gravitón-fotón-fotón* a bajas energías.

En la siguiente tabla se comparan los resultados que se tiene para cada estructura tensorial en los diferentes esquemas en los que se trabaja; primero se escribe el resultado en el esquema *SI* e inmediatamente bajo la línea entrecortada el resultado en el esquema *DBC* :

	Escalar	Espín	Espinor
$\mathcal{A}_1 = \bar{\xi} R (F_{\mu\nu} \dot{y}^\mu \dot{y}^\nu + 2T F_{\mu\nu} \psi^\mu \psi^\nu)^2$	$\frac{1}{12} \bar{\xi} R F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$	$-\frac{1}{4} \bar{\xi} R F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$	
	$\frac{1}{12} \bar{\xi} R F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$	$-\frac{1}{4} \bar{\xi} R F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$	
	$\frac{1}{12} \bar{\xi} R F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$	$-\frac{1}{4} \bar{\xi} R F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$	
$\mathcal{A}_2 = R_{\mu\alpha\beta\nu} \dot{y}^\mu \dot{y}^\nu y^\alpha y^\beta \dot{y}^\sigma \dot{y}^\lambda (F_{\sigma\lambda} \dot{y}^\sigma \dot{y}^\lambda + 2T F_{\sigma\lambda} \psi^\sigma \psi^\lambda)^2$	$\frac{1}{3(144)} R F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$		$-\frac{1}{216} R F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$
	$\frac{1}{144} R F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$	$-\frac{1}{144} R F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$	$-\frac{1}{72} R F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$
	$-\frac{1}{72} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$		$-\frac{1}{72} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$
	$-\frac{1}{60} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$		$-\frac{1}{60} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$
	$-\frac{1}{3(45)} F_{\mu}^{\alpha} F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}$	$-\frac{1}{48} R F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$	$-\frac{1}{3(45)} F_{\mu}^{\alpha} F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}$
	$-\frac{1}{90} F_{\mu}^{\alpha} F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}$		$-\frac{1}{90} F_{\mu}^{\alpha} F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}$
$\mathcal{A}_8 = \frac{1}{3} \bar{\eta}_\mu R_{\alpha\beta\nu}^{\mu} \dot{y}^\nu \dot{y}^\rho y^\alpha y^\beta [F_{\sigma\lambda} (\dot{y}^\sigma \dot{y}^\lambda + 2\psi^\sigma \psi^\lambda)]^2$	$\frac{1}{12(18)} R F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$	$-\frac{1}{72} R F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$	$-\frac{1}{108} R F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$
	$+\frac{1}{270} F_{\mu}^{\alpha} F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}$		$\frac{1}{270} F_{\mu}^{\alpha} F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}$
$\mathcal{A}_3 = R_{\mu\alpha\beta\nu} y^\alpha y^\beta \psi^\mu \psi^\nu (F_{\sigma\lambda} \dot{y}^\sigma \dot{y}^\lambda + 2T F_{\sigma\lambda} \psi^\sigma \psi^\lambda)^2$		$\frac{1}{36} R_{\alpha\beta} F^{\alpha\mu} F_{\mu}^{\beta}$	$\frac{1}{36} R_{\alpha\beta} F^{\alpha\mu} F_{\mu}^{\beta}$
		$\frac{1}{18} R_{\alpha\beta} F^{\alpha\mu} F_{\mu}^{\beta}$	$\frac{1}{18} R_{\alpha\beta} F^{\alpha\mu} F_{\mu}^{\beta}$
			$\frac{1}{18} R_{\alpha\beta} F^{\alpha\mu} F_{\mu}^{\beta}$

	Scalar	Spin	Spinor
$\mathcal{A}_4 = (R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\nu\alpha\beta})\dot{y}^\alpha y^\beta \psi^\mu \psi^\nu (F_{\sigma\lambda}\dot{y}^\sigma y^\lambda + 2T F_{\sigma\lambda} \psi^\sigma \psi^\lambda)^2$		$\frac{1}{24} R_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$	$\frac{1}{24} R^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$
		$\frac{1}{24} R_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$	$\frac{1}{24} R^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$
$\mathcal{A}_5 = F_{\lambda\nu} R_{\alpha\beta\mu}^\lambda (y^\mu \dot{y}^\nu + 8T \psi^\mu \psi^\nu) y^\alpha y^\beta F_{\sigma\eta} (\dot{y}^\sigma y^\eta + 2T \psi^\sigma \psi^\eta)$	$\frac{1}{18(24)} F_\mu^\alpha F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}$	$-\frac{1}{36} F_\mu^\alpha F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}$	$-\frac{11}{36(12)} F_\mu^\alpha F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}$
	$\frac{1}{180} F_\mu^\alpha F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}$		$-\frac{1}{20} F_\mu^\alpha F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}$
	$\frac{1}{12(24)} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$		$\frac{1}{24(12)} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$
	$\frac{1}{120} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$	$-\frac{1}{18} F_\mu^\alpha F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}$	$\frac{1}{120} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$
$\mathcal{A}_6 = F_{\mu\nu;\alpha\beta} (\dot{y}^\mu y^\nu + 4T \psi^\mu \psi^\nu) y^\alpha y^\beta F_{\sigma\lambda} (\dot{y}^\sigma y^\lambda + 2T \psi^\sigma \psi^\lambda)$	$-\frac{1}{288} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$		$-\frac{1}{288} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$
	$+\frac{1}{144} F_\mu^\alpha F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}$	$\frac{1}{24} F_{\mu\nu;\gamma} F^{\mu\nu}$	$\frac{1}{144} F_\mu^\alpha F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}$
	$-\frac{1}{72} F_{\mu\nu;\gamma} F^{\mu\nu}$		$\frac{1}{36} F_{\mu\nu;\gamma} F^{\mu\nu}$
	$-\frac{1}{120} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$		$\frac{1}{240} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$
	$+\frac{1}{60} F_\mu^\alpha F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}$	$\frac{1}{12} F_{\mu\nu;\gamma} F^{\mu\nu}$	$\frac{1}{60} F_\mu^\alpha F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta}$
	$-\frac{1}{30} F_{\mu\nu;\gamma} F^{\mu\nu}$		$\frac{1}{20} F_{\mu\nu;\gamma} F^{\mu\nu}$

	Scalar	Spin	Spinor
$\mathcal{A}_7 = \left[F_{\mu\nu;\alpha} (y^\mu y^\nu + 3\psi^\mu \psi^\nu) y^\alpha \right]^2$	$-\frac{1}{180} F_{\mu;\alpha}^\alpha F^{\mu\beta}_{;\beta}$	0	$-\frac{1}{180} F_{\mu;\alpha}^\alpha F^{\mu\beta}_{;\beta}$
	$-\frac{1}{180} F^{\alpha\beta;\gamma} F_{\alpha\beta;\gamma}$	$\frac{1}{24} F^{\alpha\beta;\gamma} F_{\alpha\beta;\gamma}$	$-\frac{1}{180} F^{\alpha\beta;\gamma} F_{\alpha\beta;\gamma}$
	$-\frac{1}{45} F^{\alpha\beta;\gamma} F_{\alpha\beta;\gamma}$		$\frac{7}{360} F^{\alpha\beta;\gamma} F_{\alpha\beta;\gamma}$

CAPÍTULO 5

EL LAGRANGIANO EFECTIVO NO PERTUBATIVAMENTE EN F

Ahora podemos proceder como en las secciones 2.4 y 3.2, esto es tomar $F_{\mu\nu}(x_0)$ constante y fusionar S_0 con $S_{em}^{(0)}$, lo cual permite escribir una acción libre más general.

5.1. Espín cero

En este caso, la acción libre generalizada fue encontrada en la sección (3.2.1):

$$S'_0 = \int_0^1 du y^\mu \left(-\frac{1}{4T} \right) \left(\eta_{\mu\nu} \frac{d^2}{du^2} - 2i T \bar{F}_{\mu\nu}(x_0) \frac{d}{du} \right) y^\nu.$$

El siguiente paso es encontrar todos los términos que son lineales respecto al tensor de Riemann y cuadráticos respecto al tensor electromagnético.

Este cálculo ya se presentó en mi tesis de maestría [46] por ello no se muestra aquí en detalle, con excepción del primer término que se presenta con fines didácticos.

5.1.1. Término $F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\delta}$

Para formar este término se emplea (3.28), por lo cual se tiene que calcular las contracciones de Wick para el siguiente arreglo

$$F_{\alpha\beta;\gamma} \dot{y}^\alpha y^\beta y^\gamma F_{\mu\nu;\delta} \dot{y}^\mu y^\nu y^\delta, \quad (5.1)$$

las contracciones posibles son

$$a = \langle \dot{y}_1^\alpha \dot{y}_2^\mu \rangle \langle y_1^\beta y_2^\nu \rangle \langle y_1^\gamma y_2^\delta \rangle = T^3 \ddot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{12}^{\beta\nu} \mathcal{G}_{12}^{\gamma\delta}, \quad (5.2)$$

$$b = \langle \dot{y}_1^\alpha \dot{y}_2^\mu \rangle \langle y_1^\beta y_2^\delta \rangle \langle y_1^\gamma y_2^\nu \rangle = T^3 \ddot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{12}^{\beta\delta} \mathcal{G}_{12}^{\gamma\nu}, \quad (5.3)$$

$$c = \langle \dot{y}_1^\alpha y_2^\nu \rangle \langle y_1^\beta \dot{y}_2^\mu \rangle \langle y_1^\gamma y_2^\delta \rangle = T^3 \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\nu} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{12}^{\gamma\delta}, \quad (5.4)$$

$$d = \langle \dot{y}_1^\alpha y_2^\nu \rangle \langle y_1^\beta y_2^\delta \rangle \langle y_1^\gamma \dot{y}_2^\mu \rangle = T^3 \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\nu} \mathcal{G}_{12}^{\beta\delta} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\mu}, \quad (5.5)$$

$$e = \langle \dot{y}_1^\alpha y_2^\delta \rangle \langle y_1^\beta \dot{y}_2^\mu \rangle \langle y_1^\gamma y_2^\nu \rangle = T^3 \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\delta} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{12}^{\gamma\nu}, \quad (5.6)$$

$$f = \langle \dot{y}_1^\alpha y_2^\delta \rangle \langle y_1^\beta y_2^\nu \rangle \langle y_1^\gamma \dot{y}_2^\mu \rangle = T^3 \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\delta} \mathcal{G}_{12}^{\beta\nu} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\mu}. \quad (5.7)$$

Para a , se realiza una integración por partes sobre u_1 :

$$\int du_1 \ddot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{12}^{\beta\nu} \mathcal{G}_{12}^{\gamma\delta} = - \int du_1 \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\nu} \mathcal{G}_{12}^{\gamma\delta} - \int du_1 \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{12}^{\beta\nu} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\delta}, \quad (5.8)$$

es decir,

$$\ddot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{12}^{\beta\nu} \mathcal{G}_{12}^{\gamma\delta} \rightarrow - \underbrace{\dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\nu} \mathcal{G}_{12}^{\gamma\delta}}_{a_1} - \underbrace{\dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{12}^{\beta\nu} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\delta}}_{a_2}. \quad (5.9)$$

Trabajando un poco sobre a_1 vemos que

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta;\gamma}^{(1)} F_{\mu\nu;\delta}^{(2)} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\nu} \mathcal{G}_{12}^{\gamma\delta} &= F_{\alpha\beta;\gamma}^{(1)} F_{\nu\mu;\delta}^{(2)} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\nu} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{12}^{\gamma\delta} \\ &= -F_{\alpha\beta;\gamma}^{(1)} F_{\mu\nu;\delta}^{(2)} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\nu} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{12}^{\gamma\delta}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

así que

$$a_1 \rightarrow -c. \quad (5.11)$$

Para a_2 se tiene:

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta;\gamma}^{(1)} F_{\mu\nu;\delta}^{(2)} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{12}^{\beta\nu} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\delta} &= F_{\alpha\beta;\gamma}^{(1)} F_{\delta\nu;\mu}^{(2)} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\delta} \mathcal{G}_{12}^{\beta\nu} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\mu} \\ &= -F_{\alpha\beta;\gamma}^{(1)} \left(F_{\mu\delta;\nu}^{(2)} + F_{\nu\mu;\delta}^{(2)} \right) \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\delta} \mathcal{G}_{12}^{\beta\nu} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\mu} \\ &= -F_{\alpha\beta;\gamma}^{(1)} F_{\mu\nu;\delta}^{(2)} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\nu} \mathcal{G}_{12}^{\beta\delta} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\mu} + F_{\alpha\beta;\gamma}^{(1)} F_{\mu\nu;\delta}^{(2)} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\delta} \mathcal{G}_{12}^{\beta\nu} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\mu}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Entonces

$$a_2 \rightarrow -d + f, \quad (5.13)$$

con esto se tiene

$$a \rightarrow c + d - f. \quad (5.14)$$

Se hace lo mismo para b , esto es, se hace una integración por partes sobre u_1 :

$$\int du_1 \ddot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{12}^{\beta\delta} \mathcal{G}_{12}^{\gamma\nu} = - \int du_1 \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\delta} \mathcal{G}_{12}^{\gamma\nu} - \int du_1 \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{12}^{\beta\delta} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\nu}, \quad (5.15)$$

o bien, se dice que

$$\ddot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{12}^{\beta\delta} \mathcal{G}_{12}^{\gamma\nu} \rightarrow - \underbrace{\dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\delta} \mathcal{G}_{12}^{\gamma\nu}}_{b_1} - \underbrace{\dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{12}^{\beta\delta} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\nu}}_{b_2}. \quad (5.16)$$

Para b_1 se tiene

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta;\gamma}^{(1)} F_{\mu\nu;\delta}^{(2)} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\delta} \mathcal{G}_{12}^{\gamma\nu} &= F_{\alpha\beta;\gamma}^{(1)} F_{\delta\nu;\mu}^{(2)} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\delta} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{12}^{\gamma\nu} \\ &= -F_{\alpha\beta;\gamma}^{(1)} \left(F_{\mu\delta;\nu}^{(2)} + F_{\nu\mu;\delta}^{(2)} \right) \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\delta} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{12}^{\gamma\nu} \\ &= -F_{\alpha\beta;\gamma}^{(1)} F_{\mu\nu;\delta}^{(2)} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\nu} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{12}^{\gamma\delta} + F_{\alpha\beta;\gamma}^{(1)} F_{\mu\nu;\delta}^{(2)} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\delta} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{12}^{\gamma\nu}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

por lo cual

$$b_1 \rightarrow -c + e. \quad (5.18)$$

Ahora veamos b_2 :

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta;\gamma}^{(1)} F_{\mu\nu;\delta}^{(2)} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{12}^{\beta\delta} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\nu} &= F_{\alpha\beta;\gamma}^{(1)} F_{\nu\mu;\delta}^{(2)} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\nu} \mathcal{G}_{12}^{\beta\delta} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\mu} \\ &= -F_{\alpha\beta;\gamma}^{(1)} F_{\mu\nu;\delta}^{(2)} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\alpha\nu} \mathcal{G}_{12}^{\beta\delta} \dot{\mathcal{G}}_{12}^{\gamma\mu}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

entonces

$$b_2 \rightarrow -d. \quad (5.20)$$

Por lo tanto

$$b \rightarrow c - e + d. \quad (5.21)$$

Se puede notar que al sumar todas las contracciones, el resultado se reduce a

$$3(c + d), \quad (5.22)$$

es decir

$$3 F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\eta} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\nu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} + \mathcal{G}_{B12}^{\beta\eta} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\gamma\mu} \right). \quad (5.23)$$

Si ahora se consideran los factores para esta estructura tensorial:

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{i}{3} \right)^2, \quad (5.24)$$

con lo que finalmente se tiene

$$-\frac{1}{6} T^3 F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\eta} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\nu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} + \mathcal{G}_{B12}^{\beta\eta} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\gamma\mu} \right). \quad (5.25)$$

5.1.2. Término $F_{\mu\nu;\alpha\beta}$

Este término se genera mediante (3.29), así que se deben calcular las contracciones de

$$F_{\mu\nu;\alpha\beta} y^\nu y^\alpha y^\beta \dot{y}^\mu, \quad (5.26)$$

cuyo resultado es

$$T^2 F_{\mu\nu;\alpha\beta} \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{11}^{\alpha\beta} + (F_{\mu\nu;\beta\alpha} + T^2 F_{\mu\nu;\alpha\beta}) \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\beta} \mathcal{G}_{11}^{\nu\alpha}. \quad (5.27)$$

Al considerar los factores para esta estructura se tiene

$$\frac{i}{8} T^2 F_{\mu\nu;\alpha\beta} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} + \frac{i}{8} T^2 (F_{\mu\nu;\beta\alpha} + F_{\mu\nu;\alpha\beta}) \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha}. \quad (5.28)$$

5.1.3. Término $F_{\lambda\nu} R^\lambda_{\alpha\beta\mu}$

Este término se obtiene de (3.30), así que hay que determinar las contracciones para

$$F_{\lambda\nu} R^\lambda_{\alpha\beta\mu} y^\nu y^\alpha y^\beta \dot{y}^\mu, \quad (5.29)$$

y el resultado que se tiene es

$$T^2 F_{\lambda\nu} R^\lambda_{\alpha\beta\mu} (\dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{11}^{\alpha\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\alpha} \mathcal{G}_{11}^{\nu\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\beta} \mathcal{G}_{11}^{\nu\alpha}). \quad (5.30)$$

Si ahora se usa el factor de esta estructura

$$-\frac{i}{24} T^2 F_{\lambda\nu} R^\lambda_{\alpha\beta\mu} (\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\nu\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha}). \quad (5.31)$$

5.1.4. Término $R_{\mu\alpha\beta\nu}$

Este término se genera a partir de (3.25) y (3.33), por lo cual se deben determinar las contracciones de

$$R_{\mu\alpha\beta\nu} \dot{y}^\mu y^\alpha y^\beta \dot{y}^\nu \text{ y } R_{\mu\alpha\beta\nu} y^\alpha y^\beta (a^\mu a^\nu + b^\mu c^\nu), \quad (5.32)$$

de lo cual se obtiene

$$T^2 R_{\mu\alpha\beta\nu} \left(-\dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\alpha} \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\beta\nu} - \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\beta} \dot{\mathcal{G}}_{11}^{\alpha\nu} - \ddot{\mathcal{G}}_{11}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{11}^{\alpha\beta} \right) \text{ y } T^2 R_{\mu\alpha\beta\nu} \mathcal{G}_{11}^{\alpha\beta} 2 \eta^{\mu\nu} \delta(0), \quad (5.33)$$

finalmente hay que considerar los factores para esta estructura tensorial, $-1/(12T)$, por lo cual se tiene

$$\frac{1}{12} T R_{\mu\alpha\beta\nu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\alpha} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\nu} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\nu} + \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} (\ddot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} - 2 \eta^{\mu\nu} \delta(0)) \right). \quad (5.34)$$

5.1.5. Término $\bar{\eta}_\mu R^\mu{}_{\alpha\beta\nu} \eta^\nu$

Este término llega de la contribución de la acción tipo *Faddeev-Popov*, (3.18), entonces hay que determinar las contracciones de

$$\bar{\eta}_\mu R^\mu{}_{\alpha\beta\nu} y^\alpha y^\beta \eta^\nu, \quad (5.35)$$

de lo cual se obtiene

$$T R_{\alpha\beta} \mathcal{G}^{\alpha\beta}. \quad (5.36)$$

Finalmente se colocan los factores implicados para obtener

$$\frac{T}{3} R_{\alpha\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta}. \quad (5.37)$$

Ya que los detalles se encuentran en mi tesis de maestría nos vamos directamente al resultado final que se obtiene para el Lagrangiano efectivo escalar

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{scalar}^{(SI)} = & \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dT}{T^3} e^{-m^2 T} \det^{-1/2} \left[\frac{\sin(FT)}{FT} \right] \left\{ 1 - T \bar{\xi} R + \frac{T}{3} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \right. \\ & + \frac{i}{8} T^2 F_{\mu\nu;\alpha\beta} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} + \frac{i}{8} T^2 (F_{\mu\nu;\beta\alpha} + F_{\mu\nu;\alpha\beta}) \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha} \\ & - \frac{i}{24} T^2 F_{\lambda\nu} R^\lambda{}_{\alpha\beta\mu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\nu\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha} \right) \\ & + \frac{1}{12} T R_{\mu\alpha\beta\nu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\alpha} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\nu} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\nu} + \left(\ddot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} - 2g^{\mu\nu} \delta(0) \right) \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \right) \\ & \left. - \frac{1}{6} T^3 F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\delta} \int_0^1 du_1 \left(\dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\nu} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\delta} + \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\nu} \mathcal{G}_{B12}^{\beta\delta} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\gamma\mu} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Aquí hemos usado la propiedad de la invarianza bajo traslaciones de las funciones de Green para poner $u_2 = 0$. Es importante mencionar que el $\delta(0)$ que aparece en el penúltimo término viene de los *campos fantasma* y remueve otro $\delta(0)$ escondido en $\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu}$.

5.2. Espín 1/2

La expresión para este caso fue dada en la sección (3.2.2):

$$\mathcal{S}'_0 = \int_0^1 du \left[\frac{-1}{4T} y^\mu \left(\eta_{\mu\nu} \frac{d^2}{du^2} - 2iT F_{\mu\nu}(x_0) \frac{d}{du} \right) y^\nu + \frac{1}{2} \psi^\mu \left(\eta_{\mu\nu} \frac{d}{du} - 2iT F_{\mu\nu}(x_0) \right) \psi^\nu \right],$$

con lo cual se generaliza la función de Green, tanto en la parte bosónica (\mathcal{G}_B) como fermiónica (\mathcal{G}_F). Usando estas modificaciones queremos escribir la acción efectiva cuando se tiene una partícula con espín. Para ello necesitamos calcular nuevamente las contracciones de los términos anteriores:

5.2.1. Término $F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\delta}$

Esta estructura tensorial se obtiene de (3.53), entonces se deben calcular las contracciones para

$$\begin{aligned} T_1 &= F_{\alpha\beta;\gamma} (y_1^\alpha y_1^\beta + 3\psi_1^\alpha \psi_1^\beta) y_1^\gamma F_{\mu\nu;\eta} (y_2^\mu y_2^\nu + 3\psi_2^\mu \psi_2^\nu) y_2^\eta \\ &= F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\eta} (y_1^\alpha y_1^\beta y_1^\gamma y_2^\mu y_2^\nu y_2^\eta + 3y_1^\alpha y_1^\beta y_1^\gamma y_2^\mu \psi_2^\nu + 3y_2^\mu y_2^\nu y_2^\eta \psi_1^\alpha \psi_1^\beta + 9y_1^\gamma y_2^\eta \psi_1^\alpha \psi_1^\beta \psi_2^\mu \psi_2^\nu) \\ &= F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\eta} (y_1^\alpha y_1^\beta y_1^\gamma y_2^\mu y_2^\nu y_2^\eta + 6y_1^\alpha y_1^\beta y_1^\gamma y_2^\mu \psi_2^\nu + 9y_1^\gamma y_2^\eta \psi_1^\alpha \psi_1^\beta \psi_2^\mu \psi_2^\nu). \end{aligned} \quad (5.38)$$

El resultado para la parte bosónica ya se conoce de la sección anterior, por lo cual solo se trabaja sobre los términos que tienen contracciones de los campos Grassmann. Para el segundo término en (5.38) se tiene

$$A = \langle \dot{y}_1^\alpha y_1^\beta \rangle \langle y_1^\gamma y_2^\eta \rangle \langle \psi_2^\mu \psi_2^\nu \rangle, \quad (5.39)$$

$$B = \langle \dot{y}_1^\alpha y_1^\gamma \rangle \langle y_1^\beta y_2^\eta \rangle \langle \psi_2^\mu \psi_2^\nu \rangle, \quad (5.40)$$

$$C = \langle \dot{y}_1^\alpha y_2^\eta \rangle \langle y_1^\beta y_1^\gamma \rangle \langle \psi_2^\mu \psi_2^\nu \rangle. \quad (5.41)$$

Veamos cual es la contribución de cada contracción. Para A se tiene

$$\begin{aligned} A &= \langle \dot{y}_1^\alpha y_1^\beta \rangle \langle y_1^\gamma y_2^\eta \rangle \langle \psi_2^\mu \psi_2^\nu \rangle \\ &= \left(-T \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\beta} \right) \left(-T \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} \right) \left(\frac{1}{2} T \mathcal{G}_{F22}^{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2} T^3 \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} \mathcal{G}_{F22}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Para B tenemos

$$\begin{aligned} B &= \langle \dot{y}_1^\alpha y_1^\gamma \rangle \langle y_1^\beta y_2^\eta \rangle \langle \psi_2^\mu \psi_2^\nu \rangle \\ &= \left(-T \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\gamma} \right) \left(-T \mathcal{G}_{B12}^{\beta\eta} \right) \left(\frac{1}{2} T \mathcal{G}_{F22}^{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2} T^3 \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\gamma} \mathcal{G}_{B12}^{\beta\eta} \mathcal{G}_{F22}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Ahora se trabaja para C

$$\begin{aligned} C &= \langle \dot{y}_1^\alpha y_2^\eta \rangle \langle y_1^\beta y_1^\gamma \rangle \langle \psi_2^\mu \psi_2^\nu \rangle \\ &= \frac{1}{2} T^3 \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\eta} \mathcal{G}_{B12}^{\beta\gamma} \mathcal{G}_{F22}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Al realizar la suma de estas contracciones, además de considerar los factores implicados, se tienen

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{i}{3} \right)^2 (6) \frac{1}{2} T^3 F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\eta} \mathcal{G}_{F22}^{\mu\nu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\gamma} \mathcal{G}_{B12}^{\beta\eta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\eta} \mathcal{G}_{B12}^{\beta\gamma} \right), \quad (5.45)$$

es decir

$$-\frac{1}{6} T^3 F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\eta} \mathcal{G}_{F22}^{\mu\nu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\gamma} \mathcal{G}_{B12}^{\beta\eta} + \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\eta} \mathcal{G}_{B11}^{\beta\gamma} \right). \quad (5.46)$$

Para el último término de (5.38) se tienen las siguientes contracciones

$$D = \langle y_1^\gamma y_2^\eta \rangle (-1) \langle \psi_1^\alpha \psi_2^\mu \rangle \langle \psi_1^\beta \psi_2^\nu \rangle, \quad (5.47)$$

$$E = \langle y_1^\gamma y_2^\eta \rangle \langle \psi_1^\alpha \psi_2^\nu \rangle \langle \psi_1^\beta \psi_2^\mu \rangle, \quad (5.48)$$

$$F = \langle y_1^\gamma y_2^\eta \rangle \langle \psi_1^\alpha \psi_1^\beta \rangle \langle \psi_2^\mu \psi_2^\nu \rangle. \quad (5.49)$$

Calculemos cada una de estas contracciones:

$$\begin{aligned} D &= \langle y_1^\gamma y_2^\eta \rangle (-1) \langle \psi_1^\alpha \psi_2^\mu \rangle \langle \psi_1^\beta \psi_2^\nu \rangle \\ &= (-1) \left(-T \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} \right) \left(\frac{1}{2} T \mathcal{G}_{F12}^{\alpha\mu} \right) \left(\frac{1}{2} T \mathcal{G}_{F12}^{\beta\nu} \right) \\ &= \frac{1}{4} T^3 \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} \mathcal{G}_{F12}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{F12}^{\beta\nu}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Para E se tiene

$$\begin{aligned}
E &= \langle y_1^\gamma y_2^\eta \rangle \langle \psi_1^\alpha \psi_2^\nu \rangle \langle \psi_1^\beta \psi_2^\mu \rangle \\
&= \left(-T \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} \right) \left(\frac{1}{2} T \mathcal{G}_{F12}^{\alpha\nu} \right) \left(\frac{1}{2} T \mathcal{G}_{F12}^{\beta\mu} \right) \\
&= -\frac{1}{4} T^3 \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} \mathcal{G}_{F12}^{\alpha\nu} \mathcal{G}_{F12}^{\beta\mu}.
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Y para F se encuentra

$$\begin{aligned}
F &= \langle y_1^\gamma y_2^\eta \rangle \langle \psi_1^\alpha \psi_1^\beta \rangle \langle \psi_2^\mu \psi_2^\nu \rangle \\
&= -\frac{1}{4} T^3 \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} \mathcal{G}_{F11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{F22}^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Como antes, se realiza la suma de estas contracciones y se consideran los factores implicados

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{i}{3} \right)^2 (9) \frac{1}{4} T^3 F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\eta} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} \left(\mathcal{G}_{F12}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{F12}^{\beta\nu} - \mathcal{G}_{F12}^{\alpha\nu} \mathcal{G}_{F12}^{\beta\mu} - \mathcal{G}_{F11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{F22}^{\mu\nu} \right), \tag{5.53}$$

es decir

$$-\frac{1}{8} T^3 F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\eta} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} \left(\mathcal{G}_{F12}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{F12}^{\beta\nu} - \mathcal{G}_{F12}^{\alpha\nu} \mathcal{G}_{F12}^{\beta\mu} - \mathcal{G}_{F11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{F22}^{\mu\nu} \right). \tag{5.54}$$

Al sumar estos resultados con el que se obtiene en la parte de espín cero se tiene

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{6} T^3 F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\eta} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\nu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} + \mathcal{G}_{B12}^{\beta\eta} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\gamma\mu} \right) \\
&-\frac{1}{6} T^3 F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\eta} \mathcal{G}_{F22}^{\mu\nu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\gamma} \mathcal{G}_{B12}^{\beta\eta} + \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\eta} \mathcal{G}_{B11}^{\beta\gamma} \right) \\
&-\frac{1}{8} T^3 F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\eta} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} \left(\mathcal{G}_{F12}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{F12}^{\beta\nu} - \mathcal{G}_{F12}^{\alpha\nu} \mathcal{G}_{F12}^{\beta\mu} - \mathcal{G}_{F11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{F22}^{\mu\nu} \right) \\
= &-\frac{1}{6} T^3 F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\eta} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\nu} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} + \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\nu} \mathcal{G}_{B12}^{\beta\eta} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\gamma\mu} + \mathcal{G}_{F22}^{\mu\nu} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} + \mathcal{G}_{F22}^{\mu\nu} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\gamma} \mathcal{G}_{B12}^{\beta\eta} \right. \\
&\left. + \mathcal{G}_{F22}^{\mu\nu} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\eta} \mathcal{G}_{B11}^{\beta\gamma} + \frac{3}{4} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} \mathcal{G}_{F12}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{F12}^{\beta\nu} - \frac{3}{4} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} \mathcal{G}_{F12}^{\alpha\nu} \mathcal{G}_{F12}^{\beta\mu} - \frac{3}{4} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} \mathcal{G}_{F11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{F22}^{\mu\nu} \right).
\end{aligned} \tag{5.55}$$

5.2.2. Término $F_{\mu\nu;\alpha\beta}$

Este término se obtiene de (3.54):

$$T_2 = F_{\mu\nu;\alpha\beta} (\dot{y}^\mu y^\nu + 4 \psi^\mu \psi^\nu) y^\alpha y^\beta = F_{\mu\nu;\alpha\beta} (\dot{y}^\mu y^\nu y^\alpha y^\beta + 4 \psi^\mu \psi^\nu y^\alpha y^\beta). \tag{5.56}$$

La parte bosónica se conoce de la sección anterior, así que sólo nos enfocamos en la parte con campos de Grassmann:

$$\begin{aligned}
G &= \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle \langle \psi_1^\mu \psi_1^\nu \rangle \\
&= \left(-T \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \right) \left(\frac{1}{2} T \mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} \right) \\
&= -\frac{1}{2} T^2 \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Ahora se incluyen los factores correspondientes

$$-\left(-\frac{i}{8} \right) (4) \left(-\frac{1}{2} \right) T^2 \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} = -\frac{i}{4} T^2 F_{\mu\nu;\alpha\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu}. \tag{5.58}$$

Al sumar este resultado con la contribución de la parte escalar se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{i}{8} T^2 F_{\mu\nu;\alpha\beta} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} + \frac{i}{8} T^2 (F_{\mu\nu;\beta\alpha} + F_{\mu\nu;\alpha\beta}) \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha} - \frac{i}{4} T^2 F_{\mu\nu;\alpha\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} \\ &= \frac{i}{8} T^2 F_{\mu\nu;\alpha\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} - 2 \mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} \right) + \frac{i}{8} T^2 (F_{\mu\nu;\beta\alpha} + F_{\mu\nu;\alpha\beta}) \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

5.2.3. Término $F_{\lambda\nu} R^\lambda_{\alpha\beta\mu}$

Esta estructura tensorial se obtiene de (3.55), entonces hay que calcular las contracciones de Wick para

$$T_3 = R_{\alpha\mu}{}^\lambda{}_\beta F_{\lambda\nu} \left(\dot{y}^\mu y^\nu + 8 \psi^\mu \psi^\nu \right) y^\alpha y^\beta. \quad (5.60)$$

Nuevamente se ignora la parte bosónica pues ésta fue dada en la sección anterior. Además, se puede observar que las contracciones del término que contiene campos de Grassmann; es igual al caso G . Entonces sólo falta incorporar los factores que le corresponden a este término

$$- \left(-\frac{i}{24} \right) (8) \left(-\frac{1}{2} \right) T^2 \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} = -\frac{i}{6} T^2 F_{\lambda\nu} R^\lambda_{\alpha\beta\mu} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta}. \quad (5.61)$$

Este resultado se suma al que se encuentra en la parte escalar

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{24} T^2 F_{\lambda\nu} R^\lambda_{\alpha\beta\mu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\nu\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha} \right) - \frac{i}{6} T^2 F_{\lambda\nu} R^\lambda_{\alpha\beta\mu} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \\ &= -\frac{i}{24} T^2 F_{\lambda\nu} R^\lambda_{\alpha\beta\mu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\nu\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha} + 4 \mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \right). \end{aligned} \quad (5.62)$$

5.2.4. Término $R_{\mu\alpha\beta\nu}$

Esta estructura tensorial está presente en (3.49) y (3.58), entonces hay que calcular las contracciones para

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{1}{12T} R_{\mu\alpha\beta\nu} \dot{y}^\mu y^\alpha y^\beta \dot{y}^\nu + \frac{1}{6T} \eta_{\mu\nu} \left(R^\nu_{\alpha\lambda\beta} + R^\nu_{\beta\lambda\alpha} \right) \dot{y}^\alpha y^\lambda \psi^\mu \psi^\beta + \frac{1}{6T} R_{\mu\alpha\beta\nu} y^\alpha y^\beta \psi^\mu \dot{\psi}^\nu \\ &\quad + \frac{1}{12T} R_{\mu\alpha\beta\nu} y^\alpha y^\beta \left(a^\mu a^\nu + b^\mu c^\nu + 2 \alpha^\mu \alpha^\nu \right) \\ &= \frac{1}{12T} R_{\mu\alpha\beta\nu} \dot{y}^\mu y^\alpha y^\beta \dot{y}^\nu + \frac{1}{6T} \left(R_{\mu\alpha\lambda\beta} + R_{\mu\beta\lambda\alpha} \right) \dot{y}^\alpha y^\lambda \psi^\mu \psi^\beta + \frac{1}{6T} R_{\mu\alpha\beta\nu} y^\alpha y^\beta \psi^\mu \dot{\psi}^\nu \\ &\quad + \frac{1}{12T} R_{\mu\alpha\beta\nu} y^\alpha y^\beta \left(a^\mu a^\nu + b^\mu c^\nu + 2 \alpha^\mu \alpha^\nu \right). \end{aligned} \quad (5.63)$$

Nuevamente solo nos enfocamos en los términos que contienen contracciones de campos de Grassmann, así como los campos fantasma α , pues para la parte bosónica los resultados se saben de la sección anterior.

$$H = \langle \dot{y}_1^\alpha y_1^\lambda \rangle \langle \psi_1^\mu \psi_1^\beta \rangle, \quad (5.64)$$

$$I = \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle \langle \psi_1^\mu \dot{\psi}_1^\nu \rangle, \quad (5.65)$$

$$J = \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle \langle \alpha_1^\mu \alpha_1^\nu \rangle. \quad (5.66)$$

Para cada una de estas contracciones se tiene

$$\begin{aligned} H &= \langle \dot{y}_1^\alpha y_1^\lambda \rangle \langle \psi_1^\mu \psi_1^\beta \rangle \\ &= \left(-T \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\lambda} \right) \left(\frac{1}{2} T \mathcal{G}_{F11}^{\mu\beta} \right) \\ &= -\frac{1}{2} T^2 \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\lambda} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\beta}, \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned}
I &= \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle \langle \psi_1^\mu \dot{\psi}_1^\nu \rangle \\
&= \left(-T \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \right) \left(-\frac{1}{2} T \dot{\mathcal{G}}_{F11}^{\mu\nu} \right) \\
&= \frac{1}{2} T^2 \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \dot{\mathcal{G}}_{F11}^{\mu\nu}, \tag{5.68}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J &= \langle y_1^\alpha y_1^\beta \rangle \langle \alpha_1^\mu \alpha_1^\nu \rangle \\
&= \left(-T \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \right) \left(T \delta(0) \eta^{\mu\nu} \right) \\
&= -T^2 \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \delta(0) \eta^{\mu\nu}. \tag{5.69}
\end{aligned}$$

Ahora se consideran los factores correspondientes y se hace la suma de las contracciones:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{6T} \left(R_{\mu\alpha\lambda\beta} + R_{\mu\beta\lambda\alpha} \right) H - \frac{1}{6T} R_{\mu\alpha\beta\nu} I - \frac{1}{6T} R_{\mu\alpha\beta\nu} J \\
&= -\frac{1}{6T} \left(R_{\mu\alpha\lambda\beta} + R_{\mu\beta\lambda\alpha} \right) \left(-\frac{1}{2} T^2 \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\lambda} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\beta} \right) - \frac{1}{6T} R_{\mu\alpha\beta\nu} \left(\frac{1}{2} T^2 \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \dot{\mathcal{G}}_{F11}^{\mu\nu} \right) \\
& -\frac{1}{6T} R_{\mu\alpha\beta\nu} \left(-T^2 \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \delta(0) \eta^{\mu\nu} \right) \\
&= \frac{1}{12} T \left(R_{\mu\alpha\lambda\beta} + R_{\mu\beta\lambda\alpha} \right) \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\lambda} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\beta} - \frac{1}{12} T R_{\mu\alpha\beta\nu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \dot{\mathcal{G}}_{F11}^{\mu\nu} + \frac{1}{6} T R_{\mu\alpha\beta\nu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \delta(0) \eta^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{12} T \left(R_{\mu\alpha\lambda\beta} + R_{\mu\beta\lambda\alpha} \right) \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\lambda} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\beta} - \frac{1}{12} T R_{\mu\alpha\beta\nu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \left(\dot{\mathcal{G}}_{F11}^{\mu\nu} - 2 \delta(0) \eta^{\mu\nu} \right) \\
&= \frac{1}{12} T R_{\mu\alpha\beta\nu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\nu\beta} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\alpha} \right) - \frac{1}{12} T R_{\mu\alpha\beta\nu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \left(\dot{\mathcal{G}}_{F11}^{\mu\nu} - 2 \delta(0) \eta^{\mu\nu} \right). \tag{5.70}
\end{aligned}$$

Esto se suma al resultado encontrado en la parte escalar

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{12} T R_{\mu\alpha\beta\nu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\alpha} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\nu} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\nu} + \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \left(\ddot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} - 2 \eta^{\mu\nu} \delta(0) \right) \right) \\
& + \frac{1}{12} T R_{\mu\alpha\beta\nu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\nu\beta} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\alpha} \right) - \frac{1}{12} T R_{\mu\alpha\beta\nu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \left(\dot{\mathcal{G}}_{F11}^{\mu\nu} - 2 \delta(0) \eta^{\mu\nu} \right) \\
&= \frac{1}{12} T R_{\mu\alpha\beta\nu} \left[\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\alpha} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\nu} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\nu} + \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \left(\ddot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} - 2 \eta^{\mu\nu} \delta(0) \right) + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\nu\beta} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\alpha} \right. \\
& \left. - \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \left(\dot{\mathcal{G}}_{F11}^{\mu\nu} - 2 \delta(0) \eta^{\mu\nu} \right) \right]. \tag{5.71}
\end{aligned}$$

5.2.5. Término $\bar{\eta}_\mu R^\mu_{\alpha\beta\nu} \eta^\nu$

Sólo hay contribución bosónica

$$\frac{T}{3} R_{\alpha\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta}. \tag{5.72}$$

Así que para una partícula con espín se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{spinor}^{(SI)} &= \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} (4\pi T)^{-2} \det^{-1/2} \left[\frac{\tan(FT)}{FT} \right] \\
&\times \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \left[1 - \frac{1}{6} T^3 F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\eta} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\nu} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} + \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\nu} \mathcal{G}_{B12}^{\beta\eta} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\gamma\mu} + \mathcal{G}_{F22}^{\mu\nu} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} \right) \right. \\
&+ \mathcal{G}_{F22}^{\mu\nu} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\gamma} \mathcal{G}_{B12}^{\beta\eta} + \mathcal{G}_{F22}^{\mu\nu} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\eta} \mathcal{G}_{B11}^{\beta\gamma} + \frac{3}{4} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} \mathcal{G}_{F12}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{F12}^{\beta\nu} - \frac{3}{4} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} \mathcal{G}_{F12}^{\alpha\nu} \mathcal{G}_{F12}^{\beta\mu} - \frac{3}{4} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\eta} \mathcal{G}_{F11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{F22}^{\mu\nu} \left. \right) \\
&+ \frac{i}{8} T^2 F_{\mu\nu;\alpha\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} - 2 \mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} \right) + \frac{i}{8} T^2 (F_{\mu\nu;\beta\alpha} + F_{\mu\nu;\alpha\beta}) \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha} \\
&- \frac{i}{24} T^2 F_{\lambda\nu} R^\lambda_{\alpha\beta\mu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\nu\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha} + 4 \mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \right) \\
&+ \frac{1}{12} T R_{\mu\alpha\beta\nu} \left[\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\alpha} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\nu} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\nu} + \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \left(\ddot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} - 2 \eta^{\mu\nu} \delta(0) \right) + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\nu\beta} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\alpha} \right. \\
&\left. - \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \left(\dot{\mathcal{G}}_{F11}^{\mu\nu} - 2 \delta(0) \eta^{\mu\nu} \right) \right] + \frac{T}{3} R_{\alpha\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \left. \right]. \tag{5.73}
\end{aligned}$$

Podemos usar de nuevo el truco de colocar $u_2 = 0$, así que la expresión anterior se reduce a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{spinor}^{(SI)} &= -2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} (4\pi T)^{-2} \det^{-1/2} \left[\frac{\tan(FT)}{FT} \right] \\
&\times \left\{ 1 + \frac{i}{8} T^2 F_{\mu\nu;\alpha\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} - 2 \mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} \right) + \frac{i T^2}{8} (F_{\mu\nu;\beta\alpha} + F_{\mu\nu;\alpha\beta}) \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha} + \frac{1}{3} T R_{\alpha\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \right. \\
&- \frac{i}{24} T^2 F_{\lambda\nu} R^\lambda_{\alpha\beta\mu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\nu\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha} + 4 \mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \right) \\
&+ \frac{1}{12} T R_{\mu\alpha\beta\nu} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\alpha} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\nu} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\nu} + \left(\ddot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} - 2 \delta(0) \eta^{\mu\nu} \right) \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \right. \\
&+ \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\nu\beta} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\alpha} - \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \left(\dot{\mathcal{G}}_{F11}^{\mu\nu} - 2 \delta(0) \delta^{\mu\nu} \right) \left. \right) \\
&\left. - \frac{1}{6} T^3 F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\delta} \int_0^1 d\tau_1 \left(\dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\nu} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\delta} + \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\nu} \mathcal{G}_{B12}^{\beta\delta} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\gamma\mu} + \frac{3}{2} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\delta} \mathcal{G}_{F12}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{F12}^{\beta\nu} \right) \right\},
\end{aligned}$$

este resultado fue publicado en [66].

Para finalizar este capítulo observaremos que aún en el espacio plano, los Lagrangianos efectivos (1.41) y (1.42) arrojan resultados nuevos ya que $R = 0, R_{\mu\nu} = 0$ y $R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0$, con ello las derivadas covariantes se convierten en derivadas parciales, las cuales conmutan. Así que para el caso de un lazo escalar se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{scalar}^{(SI)} &= \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dT}{T^3} e^{-m^2 T} \det^{-1/2} \left[\frac{\sin(FT)}{FT} \right] \left\{ 1 + \frac{i}{8} T^2 F_{\mu\nu;\alpha\beta} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} + 2 \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha} \right) \right. \\
&\left. - \frac{1}{6} T^3 F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\delta} \int_0^1 du_1 \left(\dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\nu} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\delta} + \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\nu} \mathcal{G}_{B12}^{\beta\delta} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\gamma\mu} \right) \right\}. \tag{5.74}
\end{aligned}$$

Para el caso de un lazo espinorial se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{spinor}^{(SI)} &= -2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} (4\pi T)^{-2} \det^{-1/2} \left[\frac{\tan(FT)}{FT} \right] \\
&\times \left\{ 1 + \frac{i}{8} T^2 F_{\mu\nu, \alpha\beta} \left(\mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} (\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} - 2\mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu}) + 2\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{6} T^3 F_{\alpha\beta, \gamma} F_{\mu\nu, \delta} \int_0^1 d\tau_1 \left(\dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\nu} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\delta} + \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\nu} \mathcal{G}_{B12}^{\beta\delta} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\gamma\mu} + \frac{3}{2} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\delta} \mathcal{G}_{F12}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{F12}^{\beta\nu} \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.75}$$

Estos Lagrangianos efectivos constituyen las correcciones de los Lagrangianos de Euler-Heisenberg ordinarios (1.1) y (1.2) involucrando no más de dos derivadas; estas correcciones no han sido calculadas anteriormente.

En el apéndice K se presentan los resultados explícitos de un desarrollo de los Lagrangianos (5.74) y (5.75) al orden F^6 .

CAPÍTULO 6

REDUCCIÓN DEL LAGRANGIANO EFECTIVO NO PERTURBATIVO

En este capítulo se hace la expansión de los Lagrangianos (1.41) y (1.42) hasta el orden RFF y $RFFFF$ ($RFFF$ no existe por cuestiones de paridad). El cálculo RFF tiene el caracter de un chequeo de consistencia con nuestro cálculo directo del capítulo 4, mientras nuestro cálculo al orden $RFFFF$ ya está más allá de lo que se conocía anteriormente.

6.1. Reducción a los términos RFF

6.1.1. Espín cero

Es de esperarse que la expansión a orden RFF en $\mathcal{L}_{scalar}^{(SI)}$, (1.41), debe arrojar (4.56). Primero se hace la expansión de las funciones de Green caligráficas usando (F.4)-(F.7).

Término $F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\delta}$

- $\dot{G}_{B12}^{\alpha\nu} \dot{G}_{B12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\delta} \sim \left(\eta^{\alpha\nu} \dot{G}_{B12}\right) \left(\eta^{\beta\mu} \dot{G}_{B12}\right) \left(\eta^{\gamma\delta} G_{B12}\right) \sim \eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\mu} \eta^{\gamma\delta} \underbrace{\dot{G}_{B12} \dot{G}_{B12} G_{B12}}_{-1/45 \text{ (Bajo la integral)}}$,
- $\dot{G}_{B12}^{\alpha\nu} \mathcal{G}_{B12}^{\beta\delta} \dot{G}_{B12}^{\gamma\mu} \sim \eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\delta} \eta^{\gamma\mu} \dot{G}_{B12} G_{B12} \dot{G}_{B12}$.

Sea

$$\mathcal{G}_a^{\alpha\beta\mu\nu} := \dot{G}_{B12}^{\alpha\nu} \dot{G}_{B12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\delta} + \dot{G}_{B12}^{\alpha\nu} \mathcal{G}_{B12}^{\beta\delta} \dot{G}_{B12}^{\gamma\mu}.$$

Entonces para este término se tiene

$$\begin{aligned} -\frac{T^3}{6} F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\delta} \mathcal{G}_a^{\alpha\beta\mu\nu} &= -\frac{T^3}{6} F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\delta} \left(-\frac{1}{45} \eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\mu} \eta^{\gamma\delta} - \frac{1}{45} \eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\delta} \eta^{\gamma\mu} \right) \\ &= \frac{T^3}{6(45)} \left(F_{\alpha\beta;\gamma} F^{\beta\alpha;\gamma} + F_{\alpha\beta;\gamma} F^{\gamma\alpha;\beta} \right) \\ &= \frac{T^3}{6(45)} \left(-F_{\mu\nu;\alpha} F^{\mu\nu;\alpha} - \underbrace{F_{\alpha\beta;\gamma} F^{\alpha\gamma;\beta}}_{-1/2 F_{\mu\nu;\alpha} F^{\mu\nu;\alpha}} \right) \\ &= -\frac{T^3}{180} \left(F_{\mu\nu;\alpha} \right)^2. \end{aligned}$$

Término $F_{\mu\nu;\alpha\beta}$

- $\mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} \sim \left(-\frac{1}{6} \eta^{\alpha\beta} - \frac{T^2}{90} F^{\mu\lambda} F_{\lambda}{}^{\nu}\right) \left(-i\frac{T}{3} F^{\mu\nu}\right) \sim \frac{iT}{18} \eta^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}$,

así que

$$\begin{aligned} \frac{iT^2}{8} F_{\mu\nu;\alpha\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\mu\nu} &= \frac{iT^2}{8} F_{\mu\nu;\alpha\beta} \left(\frac{iT}{18}\right) \eta^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{T^3}{144} F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Por otra parte se tiene

- $\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha} \sim \left(-i\frac{T}{3} F^{\mu\beta}\right) \left(-\frac{1}{6} \eta^{\nu\alpha} - \frac{T^2}{90} F^{\nu\lambda} F_{\lambda}{}^{\alpha}\right) \sim \frac{iT}{18} F^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha}$.

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{iT^2}{8} (F_{\mu\nu;\alpha\beta} + F_{\mu\nu;\beta\alpha}) \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha} &= \frac{iT^2}{8} (F_{\mu\nu;\alpha\beta} + F_{\mu\nu;\beta\alpha}) \left(\frac{iT}{18}\right) F^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha} \\ &= -\frac{T^3}{144} F_{\mu}{}^{\beta} (\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} + \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha}) F^{\mu\alpha} \\ &= -\frac{T^3}{144} \left(\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} - F_{\mu}{}^{\alpha} F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta} + F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu}\right) \\ &= -\frac{T^3}{288} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{T^3}{144} F_{\mu}{}^{\alpha} F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{T^3}{144} F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Término $F_{\lambda\nu} R^{\lambda}{}_{\alpha\beta\mu}$

- $\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\nu\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \sim \left(-i\frac{T}{3} F^{\mu\nu}\right) \left(-\frac{1}{6} \eta^{\alpha\beta} - \frac{T^2}{90} F^{\alpha\lambda} F_{\lambda}{}^{\beta}\right) \sim \frac{iT}{18} F^{\nu\mu} \eta^{\alpha\beta}$,
- $\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\beta} \sim \frac{iT}{18} F^{\alpha\mu} \eta^{\nu\beta}$,
- $\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha} \sim \frac{iT}{18} F^{\beta\mu} \eta^{\nu\alpha}$.

Sea

$$\mathcal{G}_b^{\alpha\beta\mu\nu} := \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\nu\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha}.$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} -\frac{iT^2}{24} F_{\lambda\nu} R^{\lambda}{}_{\alpha\beta\mu} \mathcal{G}_b^{\alpha\beta\mu\nu} &= -\frac{iT^2}{24} F_{\lambda\nu} R^{\lambda}{}_{\alpha\beta\mu} \left(\frac{iT}{18} F^{\nu\mu} \eta^{\alpha\beta} + \frac{iT}{18} F^{\alpha\mu} \eta^{\nu\beta} + \frac{iT}{18} F^{\beta\mu} \eta^{\nu\alpha}\right) \\ &= \frac{T^3}{(18)(24)} \left(-R_{\lambda\mu} F^{\lambda\nu} F_{\nu}{}^{\mu} + \underbrace{R_{\lambda\alpha\beta\mu} F^{\lambda\beta} F^{\alpha\mu}}_{1/2 R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}} + R_{\lambda\alpha\beta\mu} F^{\lambda\alpha} F^{\beta\mu}\right) \\ &= \frac{T^3}{(18)(24)} \left(\frac{3}{2} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F_{\alpha}{}^{\nu}\right). \end{aligned}$$

Término $R_{\mu\alpha\beta\nu}$

- $\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\alpha} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\nu} \sim \left(-i\frac{T}{3} F^{\mu\alpha}\right) \left(-i\frac{T}{3} F^{\beta\nu}\right) = -\frac{T^2}{9} F^{\mu\alpha} F^{\beta\nu}$,
- $\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\nu} \sim -\frac{T^2}{9} F^{\mu\beta} F^{\alpha\nu}$,

- $\left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} - 2\delta(0)\eta^{\mu\nu}\right)\mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \sim \left(2\delta(0)\eta^{\mu\nu} - 2\eta^{\mu\nu} + \frac{2T^2}{3}F^{\mu\lambda}F_{\lambda}^{\nu} - 2\eta^{\mu\nu}\delta(0)\right)\left(-\frac{1}{6}\eta^{\alpha\beta} - \frac{T^2}{90}F^{\alpha\lambda}F_{\lambda}^{\beta}\right)$
 $\sim \frac{1}{3}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + \frac{T^2}{45}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\lambda}F_{\lambda}^{\beta} - \frac{T^2}{9}\eta^{\alpha\beta}F^{\mu\lambda}F_{\lambda}^{\nu},$

Se define

$$\mathcal{G}_c^{\alpha\beta\mu\nu} := \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\alpha}\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\nu} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta}\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\nu} + \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} - 2\eta^{\mu\nu}\delta(0)\right)\mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta}. \quad (6.1)$$

Entonces se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{T}{12}R_{\mu\alpha\beta\nu}\mathcal{G}_c^{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{T}{12}R_{\mu\alpha\beta\nu}\left(-\frac{T^2}{9}F^{\mu\alpha}F^{\beta\nu} - \frac{T^2}{9}F^{\mu\beta}F^{\alpha\nu} + \frac{1}{3}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\right. \\ &\quad \left. + \frac{T^2}{45}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\lambda}F_{\lambda}^{\beta} - \frac{T^2}{9}\eta^{\alpha\beta}F^{\mu\lambda}F_{\lambda}^{\nu}\right) \\ &= -\frac{T^3}{9(12)}R_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} - \frac{T^3}{9(12)}\underbrace{R_{\mu\alpha\beta\nu}F^{\mu\beta}F^{\alpha\nu}}_{1/2R_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}} - \frac{T}{3(12)}R \\ &\quad - \frac{T^3}{12(45)}R_{\alpha\beta}F^{\alpha\lambda}F_{\lambda}^{\beta} + \frac{T^3}{9(12)}R_{\mu\nu}F^{\mu\lambda}F_{\lambda}^{\nu} \\ &= -\frac{T}{3(12)}R - \frac{T^3}{72}R_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} + \frac{T^3}{3(45)}R_{\mu\nu}F^{\mu\lambda}F_{\lambda}^{\nu}. \end{aligned}$$

Término $R_{\alpha\beta}$

- $\mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \sim -\frac{1}{6}\eta^{\alpha\beta} - \frac{T^2}{90}F^{\alpha\lambda}F_{\lambda}^{\beta},$

con lo cual

$$\begin{aligned} \frac{T}{3}R_{\alpha\beta}\mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} &= \frac{T}{3}R_{\alpha\beta}\left(-\frac{1}{6}\eta^{\alpha\beta} - \frac{T^2}{90}F^{\alpha\lambda}F_{\lambda}^{\beta}\right) \\ &= -\frac{T}{18}R - \frac{T^3}{270}R_{\alpha\beta}F^{\alpha\lambda}F_{\lambda}^{\beta}. \end{aligned}$$

Ahora se hace la suma de todas las estructuras tensoriales

$$\begin{aligned} \Sigma_e &= 1 - T\bar{\xi}R - \frac{T^3}{180}\left(F_{\mu\nu;\alpha}\right)^2 - \frac{T^3}{144}F^{\mu\nu}\square F_{\mu\nu} - \frac{T^3}{288}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} \\ &\quad - \frac{T^3}{288}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{T^3}{144}F_{\mu}^{\alpha}F^{\mu\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{T^3}{144}F^{\mu\nu}\square F_{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{T^3}{(18)(24)}\left(\frac{3}{2}R_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} - R_{\mu\nu}F^{\mu\alpha}F_{\alpha}^{\nu}\right) \\ &\quad - \frac{T}{3(12)}R - \frac{T^3}{72}R_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} + \frac{T^3}{3(45)}R_{\mu\nu}F^{\mu\lambda}F_{\lambda}^{\nu} \\ &\quad - \frac{T}{18}R - \frac{T^3}{270}R_{\alpha\beta}F^{\alpha\lambda}F_{\lambda}^{\beta} \\ &= 1 - \left(\bar{\xi} + \frac{1}{12}\right)TR - \frac{T^3}{180}\left(F_{\mu\nu;\alpha}\right)^2 - \frac{T^3}{72}F^{\mu\nu}\square F_{\mu\nu} - \frac{T^3}{72}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{T^3}{180}R_{\mu\nu}F^{\mu\alpha}F_{\alpha}^{\nu}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Aún falta considerar el desarrollo del determinante

$$\det^{-1/2} \left[\frac{\sin(FT)}{FT} \right] \sim 1 - \frac{1}{12} T^2 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (6.3)$$

con esto se tiene

$$\begin{aligned} \Sigma_e \det^{-1/2} \left[\frac{\sin(FT)}{FT} \right] &\sim 1 - \left(\bar{\xi} + \frac{1}{12} \right) T R - \frac{1}{12} T^2 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{12} \left(\bar{\xi} + \frac{1}{12} \right) T^3 R F_{\alpha\beta}^2 \\ &\quad + \frac{T^3}{180} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \frac{T^3}{72} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - \frac{T^3}{180} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 \\ &\quad - \frac{T^3}{72} F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Entonces el Lagrangiano efectivo tiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{scalar}^{(SI)} &= \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} (4\pi T)^{-2} \det^{-1/2} \left[\frac{\sin(FT)}{FT} \right] \Sigma_e \\ &= \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} (4\pi T)^{-2} \left\{ 1 - \frac{1}{12} T^2 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \left(\bar{\xi} + \frac{1}{12} \right) T R + \frac{1}{12} \left(\bar{\xi} + \frac{1}{12} \right) T^3 R F_{\alpha\beta}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{T^3}{180} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \frac{T^3}{72} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - \frac{T^3}{180} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 - \frac{T^3}{72} F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Los dos primeros términos coinciden con el resultado encontrado en (2.60) y llegan sólo del desarrollo del determinante. Además, los tres primeros términos de esta expresión arrojan singularidades bajo la integral; es un lagrangiano efectivo no renormalizado, por lo cual se deben sustraer y de esta forma se llega al resultado

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{scalar}^{(SI)} &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[\frac{1}{12} \left(\bar{\xi} + \frac{1}{12} \right) R F_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{180} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \frac{1}{72} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{180} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{72} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} \right], \end{aligned}$$

lo cual coincide con (4.56).

6.1.2. Espín 1/2

Ahora se espera que la expansión hasta el orden FFF en $\mathcal{L}_{spinor}^{(SI)}$, (1.42), debe arrojar (4.216). Como antes, primero se hace la expansión de las funciones de Green caligráficas usando (F.4)-(F.7).

Término $F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\delta}$

- $\dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\nu} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\delta} \sim \left(\eta^{\alpha\nu} \dot{G}_{B12} \right) \left(\eta^{\beta\mu} \dot{G}_{B12} \right) \left(\eta^{\gamma\delta} G_{B12} \right) \sim \eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\mu} \eta^{\gamma\delta} \underbrace{\dot{G}_{B12} \dot{G}_{B12} G_{B12}}_{-1/45 \text{ (Bajo la integral)}},$
- $\dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\nu} \mathcal{G}_{B12}^{\beta\delta} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\gamma\mu} \sim \eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\delta} \eta^{\gamma\mu} \dot{G}_{B12} G_{B12} \dot{G}_{B12},$
- $\frac{3}{2} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\delta} \mathcal{G}_{F12}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{F12}^{\beta\nu} \sim \frac{3}{2} \eta^{\gamma\delta} \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} G_{B12} G_{F12}^2,$

pero bajo la integral se tiene $G_{B12} \rightarrow 0$. Sea

$$\mathcal{G}_A^{\alpha\beta\mu\nu} := \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\nu} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\delta} + \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\alpha\nu} \mathcal{G}_{B12}^{\beta\delta} \dot{\mathcal{G}}_{B12}^{\gamma\mu} + \frac{3}{2} \mathcal{G}_{B12}^{\gamma\delta} \mathcal{G}_{F12}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{F12}^{\beta\nu}.$$

Entonces para este término se tiene

$$\begin{aligned} -\frac{T^3}{6} F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\delta} \mathcal{G}_A^{\alpha\beta\mu\nu} &= -\frac{T^3}{6} F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\delta} \left(-\frac{1}{45} \eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\mu} \eta^{\gamma\delta} - \frac{1}{45} \eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\delta} \eta^{\gamma\mu} \right) \\ &= \frac{T^3}{6(45)} \left(F_{\alpha\beta;\gamma} F^{\beta\alpha;\gamma} + F_{\alpha\beta;\gamma} F^{\gamma\alpha;\beta} \right) \\ &= \frac{T^3}{6(45)} \left(-F_{\mu\nu;\alpha} F^{\mu\nu;\alpha} - \underbrace{F_{\alpha\beta;\gamma} F^{\alpha\gamma;\beta}}_{-1/2 F_{\mu\nu;\alpha} F^{\mu\nu;\alpha}} \right) \\ &= -\frac{T^3}{180} \left(F_{\mu\nu;\alpha} \right)^2. \end{aligned}$$

Término $F_{\mu\nu;\alpha\beta}$

- $\mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} - 2\mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} \right) \sim \left(-\frac{1}{6} \eta^{\alpha\beta} - \frac{T^2}{90} F^{\mu\lambda} F_{\lambda}^{\nu} \right) \left(-i\frac{T}{3} F^{\mu\nu} + 2iTF^{\mu\nu} \right) \sim -\frac{i5T}{18} \eta^{\alpha\beta} F^{\mu\nu},$

así que

$$\begin{aligned} \frac{iT^2}{8} F_{\mu\nu;\alpha\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} - 2\mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} \right) &= \frac{iT^2}{8} F_{\mu\nu;\alpha\beta} \left(-\frac{i5T}{18} \right) \eta^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \\ &= \frac{5T^3}{144} F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu} \\ &= \frac{T^3}{36} F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu} + \frac{T^3}{144} F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Por otra parte se tiene

$$\frac{iT^2}{8} (F_{\mu\nu;\alpha\beta} + F_{\mu\nu;\beta\alpha}) \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha} = -\frac{T^3}{288} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{T^3}{144} F_{\mu}^{\alpha} F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{T^3}{144} F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu}.$$

Término $F_{\lambda\nu} R^{\lambda}_{\alpha\beta\mu}$

- $\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\nu\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \sim \left(-\frac{iT}{3} F^{\mu\nu} \right) \left(-\frac{1}{6} \eta^{\alpha\beta} - \frac{T^2}{90} F^{\alpha\lambda} F_{\lambda}^{\beta} \right) \sim \frac{iT}{18} F^{\nu\mu} \eta^{\alpha\beta},$
- $\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\beta} \sim \frac{iT}{18} F^{\alpha\mu} \eta^{\nu\beta},$
- $\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha} \sim \frac{iT}{18} F^{\beta\mu} \eta^{\nu\alpha},$
- $4\mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \sim 4(-iT F^{\mu\nu}) \left(-\frac{1}{6} \eta^{\alpha\beta} - \frac{T^2}{90} F^{\alpha\lambda} F_{\lambda}^{\beta} \right) \sim \frac{2iT}{3} F^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta}.$

Sea

$$\mathcal{G}_B^{\alpha\beta\mu\nu} := \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\nu\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\mu} \mathcal{G}_{B11}^{\nu\alpha} + 4\mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta}.$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} -\frac{iT^2}{24} F_{\lambda\nu} R^{\lambda}_{\alpha\beta\mu} \mathcal{G}_B^{\alpha\beta\mu\nu} &= -\frac{iT^2}{24} F_{\lambda\nu} R^{\lambda}_{\alpha\beta\mu} \left(\frac{iT}{18} F^{\nu\mu} \eta^{\alpha\beta} + \frac{iT}{18} F^{\alpha\mu} \eta^{\nu\beta} + \frac{iT}{18} F^{\beta\mu} \eta^{\nu\alpha} + \frac{2iT}{3} F^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \right) \\ &= \frac{T^3}{(18)(24)} \left(-R_{\lambda\mu} F^{\lambda\nu} F_{\nu}^{\mu} + \underbrace{R_{\lambda\alpha\beta\mu} F^{\lambda\beta} F^{\alpha\mu}}_{1/2 R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}} + R_{\lambda\alpha\beta\mu} F^{\lambda\alpha} F^{\beta\mu} + 12 R_{\lambda\mu} F^{\lambda\nu} F_{\nu}^{\mu} \right) \\ &= \frac{T^3}{(18)(24)} \left(\frac{3}{2} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} + 11 R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F_{\alpha}^{\nu} \right). \end{aligned}$$

Término $R_{\mu\alpha\beta\nu}$

- $\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\alpha} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\nu} \sim \left(-\frac{iT}{3} F^{\mu\alpha}\right) \left(-\frac{iT}{3} F^{\beta\nu}\right) = -\frac{T^2}{9} F^{\mu\alpha} F^{\beta\nu},$
- $\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\nu} \sim -\frac{T^2}{9} F^{\mu\beta} F^{\alpha\nu},$
- $\left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} - 2\delta(0)\eta^{\mu\nu}\right) \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \sim \frac{1}{3}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + \frac{T^2}{45}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\lambda}F_{\lambda}^{\beta} - \frac{T^2}{9}\eta^{\alpha\beta}F^{\mu\lambda}F_{\lambda}^{\nu},$
- $\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} \sim \left(-\frac{iT}{3} F^{\alpha\beta}\right) (-iT F^{\mu\nu}) = -\frac{T^2}{3} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu},$
- $\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\nu\beta} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\alpha} \sim -\frac{T^2}{3} F^{\nu\beta} F^{\mu\alpha},$
- $\mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \left(\dot{\mathcal{G}}_{F11}^{\mu\nu} - 2\delta(0)\eta^{\mu\nu}\right) \sim \left(-\frac{1}{6}\eta^{\alpha\beta} - \frac{T^2}{90} F^{\alpha\lambda} F_{\lambda}^{\beta}\right) (2\delta(0)\eta^{\mu\nu} + 2T^2 F^{\mu\lambda} F_{\lambda}^{\nu} - 2\delta(0)\eta^{\mu\nu})$
 $\sim -\frac{T^2}{3}\eta^{\alpha\beta} F^{\mu\lambda} F_{\lambda}^{\nu}.$

Se define

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_C^{\alpha\beta\mu\nu} := & \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\alpha} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\beta\nu} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\beta} \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\nu} + \left(\dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\mu\nu} - 2\eta^{\mu\nu}\delta(0)\right) \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\nu} + \dot{\mathcal{G}}_{B11}^{\nu\beta} \mathcal{G}_{F11}^{\mu\alpha} \\ & - \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} \left(\dot{\mathcal{G}}_{F11}^{\mu\nu} - 2\delta(0)\eta^{\mu\nu}\right), \quad (6.6) \end{aligned}$$

entonces se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{T}{12} R_{\mu\alpha\beta\nu} \mathcal{G}_C^{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{T}{12} R_{\mu\alpha\beta\nu} \left(-\frac{T^2}{9} F^{\mu\alpha} F^{\beta\nu} - \frac{T^2}{9} F^{\mu\beta} F^{\alpha\nu} + \frac{1}{3}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + \frac{T^2}{45}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\lambda}F_{\lambda}^{\beta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{T^2}{9}\eta^{\alpha\beta}F^{\mu\lambda}F_{\lambda}^{\nu} - \frac{T^2}{3}F^{\alpha\beta}F^{\mu\nu} - \frac{T^2}{3}F^{\nu\beta}F^{\mu\alpha} + \frac{T^2}{3}\eta^{\alpha\beta}F^{\mu\lambda}F_{\lambda}^{\nu} \right) \\ &= -\frac{T^3}{9(12)} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - \frac{T^3}{9(12)} \underbrace{R_{\mu\alpha\beta\nu} F^{\mu\beta} F^{\alpha\nu}}_{1/2R_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}} - \frac{T}{3(12)} R \\ &\quad - \frac{T^3}{12(45)} R_{\alpha\beta} F^{\alpha\lambda} F_{\lambda}^{\beta} + \frac{T^3}{9(12)} R_{\mu\nu} F^{\mu\lambda} F_{\lambda}^{\nu} - \frac{T^3}{3(12)} \underbrace{R_{\mu\alpha\beta\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}}_{-1/2R_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}} \\ &\quad + \frac{T^3}{3(12)} R_{\mu\alpha\beta\nu} F^{\mu\alpha} F^{\beta\nu} - \frac{T^3}{3(12)} R_{\mu\nu} F^{\mu\lambda} F_{\lambda}^{\nu} \\ &= -\frac{T}{3(12)} R + \frac{T^3}{36} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - \frac{11T^3}{12(45)} R_{\mu\nu} F^{\mu\lambda} F_{\lambda}^{\nu}. \end{aligned}$$

Término $R_{\alpha\beta}$

Es como en la sección anterior

$$\frac{T}{3} R_{\alpha\beta} \mathcal{G}_{B11}^{\alpha\beta} = -\frac{T}{18} R - \frac{T^3}{270} R_{\alpha\beta} F^{\alpha\lambda} F_{\lambda}^{\beta}.$$

Ahora se hace la suma de todas las estructuras tensoriales

$$\begin{aligned}
\Sigma_E &= 1 - \frac{T^3}{180} (F_{\mu\nu;\alpha})^2 + \frac{T^3}{36} F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu} + \frac{T^3}{144} F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu} \\
&\quad - \frac{T^3}{288} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{T^3}{144} F_{\mu}{}^{\alpha} F^{\mu\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{T^3}{144} F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{T^3}{(18)(24)} \left(\frac{3}{2} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} + 11 R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F_{\alpha}{}^{\nu} \right) \\
&\quad - \frac{T}{3(12)} R + \frac{T^3}{36} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - \frac{11 T^3}{12(45)} R_{\mu\nu} F^{\mu\lambda} F_{\lambda}{}^{\nu} \\
&\quad - \frac{T}{18} R - \frac{T^3}{270} R_{\alpha\beta} F^{\alpha\lambda} F_{\lambda}{}^{\beta} \\
&= 1 - \frac{T^3}{180} (F_{\mu\nu;\alpha})^2 + \frac{T^3}{36} F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu} + \frac{T^3}{36} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{T^3}{180} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F_{\alpha}{}^{\nu} - \frac{T}{12} R. \quad (6.7)
\end{aligned}$$

Aún falta considerar el desarrollo del determinante (F.33):

$$\det^{-1/2} \left[\frac{\tan(FT)}{FT} \right] \sim 1 + \frac{1}{6} T^2 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (6.8)$$

con esto se tiene

$$\begin{aligned}
\Sigma_E \det^{-1/2} \left[\frac{\tan(FT)}{FT} \right] &\sim 1 + \frac{1}{6} T^2 F_{\alpha\beta}^2 - \frac{T}{12} R - \frac{T^3}{72} R F_{\alpha\beta}^2 + \frac{T^3}{180} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F_{\alpha}{}^{\nu} \\
&\quad + \frac{T^3}{36} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - \frac{T^3}{180} (\nabla_{\alpha} F_{\mu\nu})^2 + \frac{T^3}{36} F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu}. \quad (6.9)
\end{aligned}$$

Entonces el Lagrangiano efectivo tiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{spinor}^{(SI)} &= -2 \int_0^{\infty} \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} (4\pi T)^{-2} \det^{-1/2} \left[\frac{\tan(FT)}{FT} \right] \Sigma_E \\
&= -2 \int_0^{\infty} \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} (4\pi T)^{-2} \left\{ 1 + \frac{T^2}{6} F_{\alpha\beta}^2 - \frac{T}{12} R - \frac{T^3}{72} R F_{\alpha\beta}^2 + \frac{T^3}{180} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F_{\alpha}{}^{\nu} \right. \\
&\quad \left. + \frac{T^3}{36} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - \frac{T^3}{180} (\nabla_{\alpha} F_{\mu\nu})^2 + \frac{T^3}{36} F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu} \right\}. \quad (6.10)
\end{aligned}$$

Nuevamente, los dos primeros términos coinciden con (2.75) y surgen de la aproximación del determinante. También se puede notar que los primeros tres términos de esta expresión arrojan singularidades bajo la integral, así que se sustraen para obtener

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{spinor}^{(SI)} &= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[-\frac{1}{72} R F_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{180} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F_{\alpha}{}^{\nu} + \frac{1}{36} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{180} (\nabla_{\alpha} F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{36} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} \right],
\end{aligned}$$

este resultado coincide con (4.216).

6.2. Reducción a los términos RFFFF

En la sección anterior se ha observado la complejidad de hacer la aproximación de (1.41) y (1.42) al orden RFF pero es notable que el proceso es más sencillo que el desarrollado en el capítulo 4. El siguiente orden a calcular es RFFFF (las cantidades

con número impar de F son nulas debido a la paridad). Ahora el cálculo se complica considerablemente, por lo cual se usa MATHEMATICA para resolver las integrales y además se usa MathTensor para manipular las estructuras tensoriales.

En esta ocasión no se va a hacer la expansión de las funciones de Green que se emplearon en la sección 6.1, (F.4)-(F.7). Ahora se usa (F.8) y (F.9). En el apéndice J se encuentra el programa que se elabora en MATHEMATICA para realizar el cálculo. En el mismo apéndice, en el apartado *Resultado factorizado*, se muestra el resultado en bruto, el cual se puede simplificar considerablemente al usar (B.3)-(B.16). Estos resultados fueron publicados en [67]. Tiempo después de la publicación se encontró la identidad (B.17), la cual permite eliminar dos términos en los resultados de [67]. Enseguida se escriben los resultados más simplificados.

6.2.1. Espín cero

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{scalar}^{R(4)} = & \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[\frac{1}{12} \left(\bar{\xi} + \frac{1}{12} \right) R(F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{180} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^{\nu\alpha} - \frac{1}{72} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{180} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 \right. \\
 & - \left. \frac{1}{72} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} \right] + \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{m^6} \left[-\frac{1}{144} \left(\bar{\xi} + \frac{1}{12} \right) R(F_{\mu\nu})^4 - \frac{1}{180} \left(\bar{\xi} + \frac{1}{12} \right) R \operatorname{tr}[F^4] \right. \\
 & - \frac{1}{945} R_{\alpha\beta} (F^4)^{\alpha\beta} + \frac{1}{1080} R_{\alpha\beta} (F^2)^{\alpha\beta} (F_{\gamma\delta})^2 - \frac{1}{270} R_{\alpha\mu\beta\nu} (F^3)^{\alpha\mu} F^{\beta\nu} \\
 & + \frac{1}{432} R_{\alpha\mu\beta\nu} F^{\alpha\mu} F^{\beta\nu} (F_{\gamma\delta})^2 - \frac{1}{540} (F^3)^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu} + \frac{1}{432} F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu} (F_{\gamma\delta})^2 \\
 & - \frac{1}{540} F_{\mu\nu;\alpha\beta} (F^2)^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} + \frac{1}{1080} (F_{\alpha\beta;\gamma})^2 (F_{\mu\nu})^2 + \frac{2}{945} F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\delta}^\alpha (F^2)^{\beta\delta} \\
 & \left. - \frac{1}{1890} F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\delta}^{\beta;\gamma} (F^2)^{\alpha\mu} + \frac{1}{1890} F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\delta}^\gamma F^{\alpha\mu} F^{\beta\nu} + \frac{1}{1890} F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\delta}^\alpha F^{\beta\mu} F^{\gamma\delta} \right], \quad (6.11)
 \end{aligned}$$

6.2.2. Espín 1/2

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{spinor}^{R(4)} = & -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[-\frac{1}{72} R(F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{180} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^{\nu\alpha} + \frac{1}{36} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{180} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 \right. \\
 & \left. + \frac{1}{36} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} \right] - \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{m^6} \left[-\frac{1}{432} R(F_{\mu\nu})^4 + \frac{7}{1080} R \operatorname{tr}[F^4] - \frac{1}{945} R_{\alpha\beta} (F^4)^{\alpha\beta} \right. \\
 & - \frac{1}{540} R_{\alpha\beta} (F^2)^{\alpha\beta} (F_{\gamma\delta})^2 + \frac{4}{135} R_{\alpha\mu\beta\nu} (F^3)^{\alpha\mu} F^{\beta\nu} + \frac{1}{108} R_{\alpha\mu\beta\nu} F^{\alpha\mu} F^{\beta\nu} (F_{\gamma\delta})^2 \\
 & + \frac{7}{270} (F^3)^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu} + \frac{1}{108} F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu} (F_{\gamma\delta})^2 + \frac{1}{270} F_{\mu\nu;\alpha\beta} (F^2)^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \\
 & - \frac{1}{540} (F_{\alpha\beta;\gamma})^2 (F_{\mu\nu})^2 + \frac{2}{945} F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\delta}^\alpha (F^2)^{\beta\delta} - \frac{11}{945} F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\delta}^{\beta;\gamma} (F^2)^{\alpha\mu} \\
 & \left. - \frac{2}{189} F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu;\delta}^\gamma F^{\alpha\mu} F^{\beta\nu} - \frac{2}{189} F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\delta}^\alpha F^{\beta\mu} F^{\gamma\delta} \right]. \quad (6.12)
 \end{aligned}$$

Estos Lagrangianos efectivos son la generalización natural de los Lagrangianos de *Drummond-Hathrell* [25] y contienen toda la información de la amplitud de cuatro fotones y un gravitón a un lazo, con un lazo escalar o espinorial masivo, en el límite donde la energía de los fotones y el gravitón es pequeña comparada con la masa en el lazo. Los resultados (6.11) y (6.12) se publicaron en [67].

CAPÍTULO 7

EL LAGRANGIANO EFECTIVO AUTODUAL

Como se mencionó en la introducción, las amplitudes de fotones, en cierto sentido más sencillas, son las que tienen todas las polarizaciones “+” o todas “-”. Al nivel de la acción efectiva, este caso corresponde a un campo de Maxwell autodual. Teniendo esto en mente, en este capítulo se va a calcular la forma que adquieren los lagrangianos (6.11) y (6.12) en el caso del campo de Maxwell autodual.

7.1. *Espacio plano*

Para dar inicio se escribe la definición del dual del tensor de Maxwell [65]

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu}, \\ f^2 &= \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (B^2 - E^2), \\ z &= T f,\end{aligned}\tag{7.1}$$

con $\epsilon^{0123} = 1$. Además se define

$$\begin{aligned}g &= \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = i E \cdot B, \\ F^2 + \tilde{F}^2 &= -2f^2 \mathbb{1}, \\ F\tilde{F} &= -g \mathbb{1}, \\ \mathcal{Z} &= T F.\end{aligned}\tag{7.2}$$

Cuando F es autodual se tiene

$$\begin{aligned}F &= \tilde{F}, \\ F^2 &= -f \mathbb{1}, \\ f &= g, \\ (F^2)^{\mu\nu} &= -f^2 \eta^{\mu\nu}, \\ \mathcal{Z}^2 &= -z^2.\end{aligned}\tag{7.3}$$

7.2. En la teoría de Einstein-Maxwell

Es importante decir que las expresiones anteriores sólo son válidas en el espacio plano y la única oportunidad que tenemos de aplicarlas en la teoría de Einstein-Maxwell es cuando se han considerado todos los efectos de la curvatura. Si por ejemplo, se tiene una estructura tensorial de la forma $R_{\mu\nu}(F^2)^{\mu\nu}$, entonces la estructura $(F^2)^{\mu\nu}$ está en el espacio plano. Debido a que se hace la aproximación a un gravitón, así que se puede usar $(F^2)^{\mu\nu} = -f^2 \eta^{\mu\nu}$. Por otra parte, si se tiene una estructura tensorial de la forma $F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu}^{\beta;\gamma} (F^2)^{\alpha\mu}$ entonces ya no es tan claro ver la contribución del gravitón, pues ésta puede llegar de alguna derivada covariante o bien de subir o bajar índices en $(F^2)^{\alpha\mu}$. También el desarrollo del determinante representa un problema. Por si esto no fuera poco, en $\mathcal{G}_{B,F}$ está presente la métrica al momento de formar $F^n = F^{(1)} g F^{(2)} g \dots F^{(n)}$. Esto nos impide ir al caso autodual directamente en los Lagrangianos efectivos (1.41) y (1.42). Lo más conveniente es hacer un análisis de cada una de las estructuras tensoriales y hacer el desarrollo de $\mathcal{G}_{B,F}$ al orden que se desea estudiar. En este capítulo nos enfocamos en el estudio de los Lagrangianos efectivos a orden RF^4 , pero antes de estudiar cada una de las estructuras tensoriales será necesario encontrar una forma general de las cantidades F^N . Para iniciar se define

$$\begin{aligned} A^{\mu\nu} &:= F^{\mu\alpha} h_{\alpha\beta} F^{\beta\nu}, \\ B^{\mu\nu} &:= F^{\mu\lambda} h_{\lambda\eta} \eta^{\eta\nu}. \\ B^{[\mu\nu]} &:= B^{\mu\nu} - B^{\nu\mu}, \end{aligned}$$

Además se usan frecuentemente las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} A^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\beta} F^{\beta\nu} &= F^{\mu\lambda} h_{\lambda\eta} F^{\eta\alpha} \eta_{\alpha\beta} F^{\beta\nu} = -f^2 F^{\mu\lambda} h_{\lambda\eta} \eta^{\eta\nu} = -f^2 B^{\mu\nu}, \\ h^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\beta} F^{\beta\nu} &= \eta^{\mu\lambda} h_{\lambda\sigma} \eta^{\sigma\alpha} \eta_{\alpha\beta} F^{\beta\nu} = \eta^{\mu\lambda} h_{\lambda\beta} F^{\beta\nu} = -B^{\nu\mu}, \\ \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\beta} F^{\beta\nu} &= -B^{\nu\mu}, \\ B^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\beta} F^{\beta\nu} &= F^{\mu\lambda} h_{\lambda}^{\alpha} \eta_{\alpha\beta} F^{\beta\nu} = F^{\mu\lambda} h_{\lambda\beta} F^{\beta\nu} = A^{\mu\nu}, \\ B^{\alpha\mu} \eta_{\alpha\beta} F^{\beta\nu} &= -F^{\nu\beta} \eta_{\beta\alpha} B^{\alpha\mu} = -F^{\nu\beta} \eta_{\beta\alpha} F^{\alpha\lambda} h_{\lambda}^{\mu} = f^2 \eta^{\nu\lambda} h_{\lambda}^{\mu} = f^2 h^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Para el orden F^2 se tiene

$$\begin{aligned} (F^2)^{\mu\nu} &= F^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} F^{\beta\nu} = F^{\mu\alpha} (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) F^{\beta\nu} \\ &= F^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\beta} F^{\beta\nu} + F^{\mu\alpha} h_{\alpha\beta} F^{\beta\nu} \\ &= -f^2 \eta^{\mu\nu} + F^{\mu\alpha} h_{\alpha\beta} F^{\beta\nu} \\ &= -f^2 \eta^{\mu\nu} + A^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{7.5}$$

A orden F^3 se tiene

$$\begin{aligned} (F^3)^{\mu\nu} &= (F^2)^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} F^{\beta\nu} = (-f^2 \eta^{\mu\alpha} + A^{\mu\alpha}) (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) F^{\beta\nu} \\ &= (-f^2 \eta^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\beta} F^{\beta\nu} + A^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\beta} F^{\beta\nu} - f^2 \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\beta} F^{\beta\nu}) \\ &= -f^2 F^{\mu\nu} - f^2 B^{\mu\nu} + f^2 B^{\nu\mu} \\ &= -f^2 F^{\mu\nu} - f^2 B^{[\mu\nu]}. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Este proceso se continua hasta orden F^9 , enseguida sólo se escriben los resultados

$$(F^4)^{\mu\nu} = f^4 \eta^{\mu\nu} - 2 f^2 A^{\mu\nu} + f^4 h^{\mu\nu}, \quad (7.7)$$

$$(F^5)^{\mu\nu} = f^4 F^{\mu\nu} + 2 f^4 B^{[\mu\nu]}, \quad (7.8)$$

$$(F^6)^{\mu\nu} = -f^6 \eta^{\mu\nu} + 3 f^4 A^{\mu\nu} - 2 f^6 h^{\mu\nu}, \quad (7.9)$$

$$(F^7)^{\mu\nu} = -f^6 F^{\mu\nu} - 3 f^6 B^{[\mu\nu]}, \quad (7.10)$$

$$(F^8)^{\mu\nu} = f^8 \eta^{\mu\nu} - 4 f^6 A^{\mu\nu} + 3 f^8 h^{\mu\nu}, \quad (7.11)$$

$$(F^9)^{\mu\nu} = f^8 F^{\mu\nu} + 4 f^8 B^{[\mu\nu]}. \quad (7.12)$$

De estas expresiones se puede deducir una relación general para cualquier orden de F :

$$(F^{2k})^{\mu\nu} = (-)^k f^{2k} \eta^{\mu\nu} + (-)^{k+1} k f^{2(k-1)} A^{\mu\nu} + (-)^k (k-1) f^{2k} h^{\mu\nu}, \quad (7.13)$$

$$(F^{2k+1})^{\mu\nu} = (-)^k f^{2k} F^{\mu\nu} + (-)^k k f^{2k} B^{[\mu\nu]}. \quad (7.14)$$

7.3. RF^4 autodual con espín cero

Ahora se hace el análisis de cada una de las estructuras tensoriales en (6.11), algunas de ellas no se pueden desarrollar por lo cual sólo se le asignará un nombre.

$$\bullet R(F_{\mu\nu})^2 = R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -R \eta_{\mu\alpha} F^{\alpha\beta} \eta_{\beta\nu} F^{\nu\mu} = -R \eta_{\mu\alpha} (-f^2 \eta_{\alpha\mu}) = 4 R f^2. \quad (7.15)$$

$$\bullet R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha = -R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F_\alpha{}^\nu = -R_{\mu\nu} (-f^2 \eta^{\alpha\mu}) = f^2 R. \quad (7.16)$$

$$\bullet R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} = M_1. \quad (7.17)$$

$$\bullet (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 = M_2, \quad (\partial_\alpha F_{\mu\nu})^2 = m_2, \quad (7.18)$$

$$\bullet F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} = M_3, \quad F_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial_\alpha F^{\mu\nu} = m_3. \quad (7.19)$$

$$\bullet R(F_{\mu\nu})^4 = R((F_{\mu\nu})^2)^2 = R(4 f^2)^2 = 16 R f^4, \quad (7.20)$$

$$\bullet R \operatorname{tr}[F^4] = R (F^4)^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} = R (f^4 \eta^{\mu\nu}) \eta_{\mu\nu} = 4 R f^4. \quad (7.21)$$

$$\bullet R_{\alpha\beta} (F^4)^{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} (f^4 \eta^{\alpha\beta}) = R f^4. \quad (7.22)$$

$$\bullet R_{\alpha\beta} (F^2)^{\alpha\beta} (F_{\gamma\delta})^2 = R_{\alpha\beta} (-f^2 \eta^{\alpha\beta}) (4 f^2) = 4 R f^4. \quad (7.23)$$

$$\bullet R_{\alpha\mu\beta\nu} (F^3)^{\alpha\mu} F^{\beta\nu} = R_{\alpha\mu\beta\nu} (-f^2 F^{\alpha\mu}) F^{\beta\nu} = -R_{\alpha\mu\beta\nu} F^{\alpha\mu} F^{\beta\nu} = -f^2 M_1. \quad (7.24)$$

$$\bullet R_{\alpha\mu\beta\nu} F^{\alpha\mu} F^{\beta\nu} (F_{\gamma\delta})^2 = M_1 (4 f^2) = 4 f^4 M_1. \quad (7.25)$$

$$\begin{aligned} \bullet (F^3)^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu} &= (-f^2 F^{\mu\nu} - f^2 B^{[\mu\nu]}) \square F_{\mu\nu} = -f^2 F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu} - f^2 B^{[\mu\nu]} \partial^\alpha \partial_\alpha F_{\mu\nu} \\ &= -f^2 M_3 - f^2 M_4, \quad \text{con } M_4 = B^{[\mu\nu]} \partial^\alpha \partial_\alpha F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

$$\begin{aligned} \bullet F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu} (F_{\gamma\delta})^2 &= -M_3 \operatorname{tr}[F^2] = -M_3 (F^2)^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = -M_3 g_{\mu\nu} (-f^2 \eta^{\mu\nu} + A^{\mu\nu}) \\ &= -M_3 (-\eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} f^2 + \eta_{\mu\nu} A^{\mu\nu} - f^2 \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}) \\ &= 4 M_3 f^2 - m_3 (A - f^2 h), \quad \text{con } A := A^\mu{}_\mu, \quad h := h^\mu{}_\mu. \end{aligned} \quad (7.27)$$

$$\begin{aligned} \bullet F_{\mu\nu;\alpha\beta} (F^2)^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} &= F^{\mu\nu} F_{\mu\nu;\alpha\beta} (-f^2 \eta^{\alpha\beta} + A^{\alpha\beta}) = -f^2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu;\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta} + F^{\mu\nu} F_{\mu\nu;\alpha\beta} A^{\alpha\beta} \\ &= -f^2 M_5 + M_6 \quad \text{con } M_5 := F^{\mu\nu} F_{\mu\nu;\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta} \quad M_6 := F^{\mu\nu} F_{\mu\nu;\alpha\beta} A^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (7.28)$$

$$\bullet (F_{\alpha\beta;\gamma})^2 (F_{\mu\nu})^2 = -M_2 (-4 f^2 + A - f^2 h) = 4 f^4 M_2 - m_2 (A - f^2 h) \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} \bullet F_{\alpha\beta;\gamma}{}^\mu F_{\mu;\delta}{}^\alpha (F^2)^{\beta\delta} &= F_{\alpha\beta;\gamma}{}^\mu F_{\mu;\delta}{}^\alpha (-f^2 \eta^{\beta\delta} + A^{\beta\delta}) = -f^2 \eta^{\beta\delta} F_{\alpha\beta;\gamma}{}^\mu F_{\mu;\delta}{}^\alpha + F_{\alpha\beta;\gamma}{}^\mu F_{\mu;\delta}{}^\alpha A^{\beta\delta} \\ &= -f^2 M_7 + M_8, \quad \text{con } M_7 := \eta^{\beta\delta} F_{\alpha\beta;\gamma}{}^\mu F_{\mu;\delta}{}^\alpha, \quad M_8 := F_{\alpha\beta;\gamma}{}^\mu F_{\mu;\delta}{}^\alpha A^{\beta\delta}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$\begin{aligned} \bullet F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu}{}^{\beta;\gamma} (F^2)^{\alpha\mu} &= F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu}{}^{\beta;\gamma} (-f^2 \eta^{\alpha\mu} + A^{\alpha\mu}) = -f^2 \eta^{\alpha\mu} F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu}{}^{\beta;\gamma} + F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu}{}^{\beta;\gamma} A^{\alpha\mu} \\ &= -f^2 M_9 + M_{10}, \quad \text{con } M_9 := \eta^{\alpha\mu} F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu}{}^{\beta;\gamma}, \quad M_{10} := F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu}{}^{\beta;\gamma} A^{\alpha\mu}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

$$\bullet F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu}{}^\gamma F^{\alpha\mu} F^{\beta\nu} = M_{11}. \quad (7.32)$$

$$\bullet F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu}{}^\alpha{}_{;\delta} F^{\beta\mu} F^{\gamma\delta} = M_{12}. \quad (7.33)$$

Entonces (6.11) tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{scalar}^{R(4)} = & \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[\frac{1}{12} \left(\bar{\xi} + \frac{1}{12} \right) (4Rf^2) + \frac{1}{180} (f^2 R) - \frac{1}{72} (M_1) - \frac{1}{180} (M_2) - \frac{1}{72} (M_3) \right] \\
& + \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{m^6} \left[-\frac{1}{144} \left(\bar{\xi} + \frac{1}{12} \right) (16Rf^4) - \frac{1}{180} \left(\bar{\xi} + \frac{1}{12} \right) (4Rf^4) - \frac{1}{945} (Rf^4) \right. \\
& + \frac{1}{1080} (4Rf^4) - \frac{1}{270} (-f^2 M_1) + \frac{1}{432} (4f^2 M_1) - \frac{1}{540} (-f^2 M_3 - f^2 M_4) \\
& + \frac{1}{432} (4M_3 f^2) - m_3 (A - f^2 h) - \frac{1}{540} (f^2 M_5 + M_6) + \frac{1}{1080} (4f^2 M_2 - m_2 (A - f^2 h)) \\
& \left. + \frac{2}{945} (-f^2 M_7 + M_8) - \frac{1}{1890} (-f^2 M_9 + M_{10}) + \frac{1}{1890} M_{11} + \frac{1}{1890} M_{12} \right]. \quad (7.34)
\end{aligned}$$

7.4. RF^4 autodual con espín 1/2

Para (6.12) se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{spinor}^{R(4)} = & -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[-\frac{1}{72} (4Rf^2) + \frac{1}{180} (Rf^2) + \frac{1}{36} M_1 - \frac{1}{180} M_2 + \frac{1}{36} M_3 \right] \\
& -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{m^6} \left[-\frac{1}{432} (16Rf^2) + \frac{7}{1080} (4Rf^4) - \frac{1}{945} (Rf^4) - \frac{1}{540} (4Rf^4) \right. \\
& + \frac{4}{135} (-f^2 M_1) + \frac{1}{108} (4f^2 M_1) + \frac{7}{270} (-f^2 M_3 - f^2 M_4) + \frac{1}{108} (4M_3 f^2 - m_3 (A - f^2 h)) \\
& + \frac{1}{270} (-f^2 M_5 + M_6) - \frac{1}{540} (4f^2 M_2 - m_2 (A - f^2 h)) + \frac{2}{945} (-f^2 M_7 + M_8) \\
& \left. - \frac{11}{945} (-f^2 M_9 + M_{10}) - \frac{2}{189} (M_{11} + M_{12}) \right].
\end{aligned}$$

El cálculo se ha realizado a mano pero se observa que el proceso puede ser programado en MATHEMATICA y MathTensor.

CAPÍTULO 8

DE LA ACCIÓN EFECTIVA A LA AMPLITUD EN BAJAS ENERGÍAS

En este capítulo se introducen los conceptos y herramientas necesarias para nuestra última tarea, la conversión de la acción efectiva en amplitudes en bajas energías. En la sección 8.1 se muestra en detalle la forma en que se realiza la conversión para el caso relativamente sencillo de la dispersión fotón-fotón. En la sección 8.2, usamos la oportunidad para demostrar la utilidad de la *fórmula maestra de Bern-Kosower* (2.99) en el mismo cálculo. En la sección 8.3, se hace una breve introducción al formalismo *spinor helicity*, que hoy en día se usa casi universalmente para fijar los vectores de polarización de fotones, gluones o gravitones en procesos *on-shell*.

8.1. Dispersión de cuatro fotones

En [60] se usa el Lagrangiano efectivo de Euler - Heisenberg en un campo electromagnético constante al nivel cuártico,

$$i \delta \mathcal{L}_4 = i \frac{2\alpha^2}{45 m^4} \left[(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 \right] = i \frac{2\alpha^2}{45 m^4} \left[\left(\frac{F^2}{2} \right)^2 + 7 \left(\frac{F \cdot \tilde{F}}{4} \right)^2 \right], \quad (8.1)$$

para calcular la dispersión fotón - fotón en el límite $\omega \ll m$. Primero, se usan las identidades

$$(F^2)^2 = (\text{tr} F^2)^2, \quad (F \cdot \tilde{F})^2 = 4 \text{tr} F^4 - 2 (\text{tr} F^2)^2, \quad (8.2)$$

para eliminar el tensor dual \tilde{F} , dejando sólo F mismo. Con cada pierna de fotón se asocia una onda plana

$$A_{i\nu}(x) = \varepsilon_{i\nu} e^{ik_i \cdot x} \quad (8.3)$$

y un tensor de campo

$$F_{i\mu\nu} = i (k_{i\mu} \varepsilon_{i\nu} - k_{i\nu} \varepsilon_{i\mu}) e^{ik_i \cdot x}. \quad (8.4)$$

Enseguida, en $\delta \mathcal{L}_4$ se reemplaza F por la suma $F_1 + F_2 + F_3 + F_4$, y se mantienen sólo los términos, que contienen cada uno de los F_1, \dots, F_4 . En el resultado, se quita el factor exponencial $e^{i \sum_{i=1}^4 k_i \cdot x}$, ya que éste se integra sobre x (al pasar del Lagrangiano efectivo a la acción efectiva) y se convierte en el factor $(2\pi)^4 \delta(\sum_i k_i)$ para la conservación de

energía-momento, que no se incluye en el elemento de matriz de dispersión. Con esto se escribe la matriz de dispersión \mathcal{M} ¹:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & -i \frac{2\alpha^2}{45 m^4} \left[5(\text{tr}(F_1 F_2) \text{tr}(F_3 F_4) + \text{tr}(F_1 F_3) \text{tr}(F_2 F_4) + \text{tr}(F_1 F_4) \text{tr}(F_2 F_3)) \right. \\ & \left. - 7 \text{tr}(F_1 F_2 F_3 F_4 + F_3 F_1 F_2 F_4 + F_2 F_3 F_1 F_4 + F_3 F_2 F_1 F_4 + F_1 F_3 F_2 F_4 + F_2 F_1 F_3 F_4) \right]. \end{aligned} \quad (8.5)$$

donde ahora

$$F_{i\mu\nu} = i(k_{i\mu} \varepsilon_{i\nu} - k_{i\nu} \varepsilon_{i\mu}). \quad (8.6)$$

Por otra parte, la sección transversal sin polarización queda en función del promedio de la magnitud cuadrada de \mathcal{M}

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon^{(i)}} |\mathcal{M}|^2. \quad (8.7)$$

Ahora bien, al trabajar en el marco de referencia del centro de masa se tiene (ver [60])

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{4(k_1 \cdot k_2)} \int \frac{d^3 k_3}{2\omega_3 (2\pi)^3} \frac{d^3 k_4}{2\omega_4 (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(k_3 + k_4 - k_1 - k_2) |\overline{\mathcal{M}}|^2 \\ &= \frac{1}{64\omega^2 (2\pi)^2} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d\Omega. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Al realizar la suma sobre las polarizaciones se puede usar, para cada pierna, la identidad

$$\sum_{\varepsilon} F_{\alpha}^{* \beta} F_{\mu}^{\nu} = -k^{\beta} k^{\nu} g_{\alpha\mu} + k_{\mu} k^{\beta} g_{\alpha}^{\nu} + k_{\alpha} k^{\nu} g_{\mu}^{\beta} - k_{\alpha} k_{\mu} g^{\beta\nu}, \quad (8.9)$$

con lo cual es posible obtener

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2\omega^2} \frac{\alpha^4}{(90)^2 m^8} 139 \left[(k_1 \cdot k_2)^2 (k_3 \cdot k_4)^2 + (k_1 \cdot k_3)^2 (k_2 \cdot k_4)^2 + (k_1 \cdot k_4)^2 (k_2 \cdot k_3)^2 \right]. \quad (8.10)$$

Este resultado se logra al considerar que *la suma de las distintas permutaciones* de

$$(k_1 \cdot k_2)(k_2 \cdot k_3)(k_3 \cdot k_4)(k_4 \cdot k_1),$$

es igual a la mitad de la cantidad entre corchetes en (8.10). Si ahora se toma a θ como el ángulo de dispersión en el sistema de referencia del centro de masa, entonces se tiene

$$\begin{aligned} k_1 \cdot k_2 &= k_3 \cdot k_4 = 2\omega^2, \\ k_1 \cdot k_3 &= k_2 \cdot k_4 = \omega^2 (1 - \cos \theta), \\ k_1 \cdot k_4 &= k_2 \cdot k_3 = \omega^2 (1 + \cos \theta). \end{aligned} \quad (8.11)$$

Con esto, la sección transversal diferencial es igual a

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{139}{(90)^2} \alpha^4 \left(\frac{\omega}{m}\right)^6 \frac{1}{m^2} (3 + \cos^2 \theta)^2, \quad (8.12)$$

¹Al reproducir los cálculos para esta sección encontramos errores en [60]. Estos nos han sido confirmados por el Prof. Jean-Bernard Zuber, ver <http://www.lpthe.jussieu.fr/~zuber/> (Errata no. 2).

al integral sobre el ángulo sólido

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \frac{139}{(90)^2} \left(\frac{56}{5}\right) \alpha^4 \left(\frac{\omega}{m}\right)^6 \frac{1}{m^2}. \quad (8.13)$$

Por otra parte, cuando se trabaja en el límite de altas energías (masa cero), las amplitudes de cuatro fotones, con polarización circular, tienen la forma [62] (s , u y t son las variables de Mandelstam)

Caso Escalar:

$$\begin{aligned} A_{scalar}(1^+, 2^+, 3^+, 4^+) &= -\frac{16}{su} \varepsilon_1 \cdot k_3 \varepsilon_2 \cdot k_4 \varepsilon_3 \cdot k_4 \varepsilon_4 \cdot k_3, \\ A_{scalar}(1^-, 2^+, 3^+, 4^+) &= \frac{16}{su} \varepsilon_1 \cdot k_3 \varepsilon_2 \cdot k_4 \varepsilon_3 \cdot k_4 \varepsilon_4 \cdot k_3, \\ A_{scalar}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+) &= \frac{16}{s^2} \varepsilon_1 \cdot k_2 \varepsilon_2 \cdot k_1 \varepsilon_3 \cdot k_2 \varepsilon_4 \cdot k_2 \left[1 - \frac{tu}{s^2} \pi^2 + \frac{u-t}{s} \ln\left(\frac{u}{t}\right) - \frac{tu}{s^2} \ln^2\left(\frac{u}{t}\right) \right]. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Caso Espinorial:

$$\begin{aligned} A_{spinor}(1^+, 2^+, 3^+, 4^+) &= (-2) A_{scalar}(1^+, 2^+, 3^+, 4^+), \\ A_{spinor}(1^-, 2^+, 3^+, 4^+) &= (-2) A_{scalar}(1^-, 2^+, 3^+, 4^+), \\ A_{spinor}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+) &= -\frac{32}{s^2} \varepsilon_1 \cdot k_2 \varepsilon_2 \cdot k_1 \varepsilon_3 \cdot k_2 \varepsilon_4 \cdot k_2 \left[1 + \frac{t^2 + u^2}{2s^2} \pi^2 + \frac{u-t}{s} \ln\left(\frac{u}{t}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{t^2 + u^2}{2s^2} \ln^2\left(\frac{u}{t}\right) \right], \end{aligned} \quad (8.15)$$

para las polarizaciones $(++++)$ y $(-+++)$ se usan los momentos de referencia (k_4, k_1, k_1, k_1) , y para el caso $(--++)$ se usa (k_4, k_4, k_1, k_1) . De estas expresiones se puede observar que las amplitudes con número impar de polarizaciones “+” no son nulas. También se observa que las amplitudes escalares y espinoriales con MHV se relacionan por un factor (-2) como ocurre en bajas energías (1.7).

8.2. Dispersión de cuatro fotones en el formalismo línea de mundo

Para esta sección partiremos de la *fórmula maestra de Bern - Kosower*, (2.99), para la cual se puede expresar la exponencial como [9]

$$\exp\{\}_{|multi-lin} = (-i)^N P_N(\dot{G}_{Bij}, \ddot{G}_{Bij}) \exp\left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N G_{Bij} k_i \cdot k_j\right], \quad (8.16)$$

con P_N un polinomio que depende de \dot{G}_{Bij} y \ddot{G}_{Bij} . Se puede hacer una integración por partes sobre \ddot{G}_{Bij} , así que

$$P_N(\dot{G}_{Bij}, \ddot{G}_{Bij}) \exp\left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N G_{Bij} k_i \cdot k_j\right] \xrightarrow{int. por partes} Q_N(\dot{G}_{Bij}) \exp\left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N G_{Bij} k_i \cdot k_j\right], \quad (8.17)$$

de este proceso se obtiene cierta combinación de las invariantes cinéticas, los *ciclos de Lorentz* Z_n :

$$\begin{aligned} Z_2(ij) &\equiv \varepsilon_i \cdot k_j \varepsilon_j \cdot k_i - \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j k_i \cdot k_j, \\ Z_n(i_1 i_2 \cdots i_n) &\equiv \text{tr} \prod_{j=1}^n [k_{i_j} \otimes \varepsilon_{i_j} - \varepsilon_{i_j} \otimes k_{i_j}] \quad (n \geq 3). \end{aligned} \quad (8.18)$$

Esta última expresión generaliza al proyector transversal el cual se obtiene para el caso de dos puntos. También aparecen estructuras de la forma

$$\dot{G}_{B_{i_1 i_2}} \dot{G}_{B_{i_2 i_3}} \cdots \dot{G}_{B_{i_n i_1}}. \quad (8.19)$$

Estas cantidades son llamadas τ -ciclo en [9], pero aquí se ha realizado un escalamiento del tiempo y se ha adoptado otra notación así que estas estructuras serán llamadas u -ciclo.

Para el caso de cuatro puntos se tiene [9]

$$\begin{aligned} Q_4 &= Q_4^4 + Q_4^3 + Q_4^2 + Q_4^{22}, \\ Q_4^4 &= \dot{G}_{B_{12}} \dot{G}_{B_{23}} \dot{G}_{B_{34}} \dot{G}_{B_{41}} Z_4(1234) + 2 \text{ permutaciones}, \\ Q_4^3 &= \dot{G}_{B_{12}} \dot{G}_{B_{23}} \dot{G}_{B_{31}} Z_3(123) \dot{G}_{B_{4i}} \varepsilon_4 \cdot k_i + 3 \text{ permutaciones}, \\ Q_4^2 &= \dot{G}_{B_{12}} \dot{G}_{B_{21}} Z_2(12) \Sigma' \left\{ \dot{G}_{B_{3i}} \varepsilon_3 \cdot k_i \dot{G}_{B_{4j}} \varepsilon_4 \cdot k_j + \frac{1}{2} \dot{G}_{B_{34}} \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4 [\dot{G}_{B_{3i}} k_3 \cdot k_i - \dot{G}_{B_{4i}} k_4 \cdot k_i] \right\} \\ &\quad + 5 \text{ permutaciones}, \\ Q_4^{22} &= \dot{G}_{B_{12}} \dot{G}_{B_{21}} Z_2(12) \dot{G}_{B_{34}} \dot{G}_{B_{43}} Z_2(34) + 2 \text{ permutaciones}, \end{aligned} \quad (8.20)$$

con Σ' se indica que los términos con $i = 4$ y $j = 3$ deben ser omitidos; además se han escrito estas expresiones de forma que todos los u -ciclos se muestran explícitamente.

Finalmente se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{scalar}}[k_1, \varepsilon_1; \cdots; k_4, \varepsilon_4] &= (-i)^4 (2\pi)^D \delta \left(\sum_{j=1}^4 k_j \right) \int_0^\infty \frac{dT}{T} T^{4-D/2} (4\pi)^{-D/2} e^{-m^2 T} \\ &\quad \times \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \int_0^1 du_3 \int_0^1 du_4 Q_4(\dot{G}_{B_{ij}}) \exp \left[\frac{T}{2} \sum_{i,j}^4 k_i \cdot k_j G_{B_{ij}} \right]. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Esta expresión se puede simplificar aún mas al considerar que en el límite de Euler-Heisenberg (bajas energías) la exponencial se aproxima a la unidad, hecho esto se puede observar que al integrar Q_4^4 respecto a u_4 arroja la integral de una derivada total:

$$\int_0^1 du_4 \dot{G}_{B_{4i}} = G_{B_{4i}}|_0^1 = G_{B_{1i}} - G_{B_{0i}} = 0, \quad (8.22)$$

debido a la periodicidad de la función de Green. De forma análoga se procede para los términos dentro la suma de Q_4^2 . Con esto solo se tienen integrales de ciclos, las cuales se resuelven usando (ver [9])

$$\int_0^1 du_2 \cdots du_n \dot{G}_{B_{12}} \dot{G}_{B_{23}} \cdots \dot{G}_{B_{n(n+1)}} = -\frac{2^n}{n!} B_n(|u_1 - u_{n+1}|) \text{sign}^n(u_1 - u_{n+1}), \quad (8.23)$$

donde $B_n(x)$ es el n -ésimo polinomio de Bernoulli. Podemos observar que n es par. Con esto se tiene, $\text{sign}^n(u_1 - u_{n+1}) = 1$. Es claro que para formar el ciclo se tiene que

sustituir u_{n+1} por u_1 y $B_n(0)$ se convierten en los números de Bernoulli, B_n . Así que finalmente se tiene

$$\int_0^1 du_1 du_2 \cdots du_n \dot{G}_{B12} \dot{G}_{B23} \cdots \dot{G}_{Bn1} = -\frac{2^n}{n!} B_n. \quad (8.24)$$

Esto es en el caso de un lazo escalar. Si se desea trabajar con un lazo espinorial, se usa la *regla de reemplazo de Bern - Kosower*, (2.106), y en las integrales de las funciones de Green fermiónicas se usa

$$\int_0^1 du_2 \cdots du_n \dot{G}_{F12} \dot{G}_{F23} \cdots \dot{G}_{Fn(n+1)} = \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} E_{n-1}(|u_1 - u_{n+1}|) \text{sign}^n(u_1 - u_{n+1}), \quad (8.25)$$

con $E_n(x)$ el n -ésimo polinomio de Euler. Dado que n es número par, se tiene nuevamente $\text{sign}^n(u_1 - u_{n+1}) = 1$ y $u_{n+1} = u_1$ para formar el ciclo. En este caso $E_n(0)$ no coincide con los números de Euler pero se puede relacionar con los números de Bernoulli:

$$E_{n-1}(0) = -\frac{2(2^n - 1)}{n} B_n, \quad (8.26)$$

así que

$$\int_0^1 du_2 \cdots du_n \dot{G}_{F12} \dot{G}_{F23} \cdots \dot{G}_{Fn1} = -\frac{2^n}{n!} (2^n - 1) B_n. \quad (8.27)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Gamma_{spinor}[k_1, \varepsilon_1; \cdots; k_4, \varepsilon_4] &= -2(2\pi)^4 \delta\left(\sum^4 k_j\right) \int_0^\infty dT T(4\pi)^{-2} e^{-m^2 T} \\ &\times \left[\frac{4}{9} \left(Z_2(12) Z_2(34) + Z_2(13) Z_2(24) + Z_2(14) Z_2(23) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{14}{45} \left(Z_4(1234) + Z_4(1324) + Z_4(3124) \right) \right], \quad (8.28) \end{aligned}$$

dado que $Z_2(ij) = \frac{1}{2} \text{tr}(F_i F_j)$. Entonces, la matriz de dispersión \mathcal{M} tiene la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -i \frac{2\alpha^2}{45 m^2} \left[5 \left(\text{tr}(F_1 F_2) \text{tr}(F_3 F_4) + \text{tr}(F_1 F_3) \text{tr}(F_2 F_4) + \text{tr}(F_1 F_4) \text{tr}(F_2 F_3) \right) \right. \\ &\quad \left. - 14 \left(\text{tr}(F_1 F_2 F_3 F_4) + \text{tr}(F_1 F_3 F_2 F_4) + \text{tr}(F_3 F_1 F_2 F_4) \right) \right], \quad (8.29) \end{aligned}$$

es notable que este método permite calcular la matriz \mathcal{M} de forma más eficiente que el método de la sección anterior.

8.3. Polarización de fotones por productos espinoriales

El formalismo *Spinor Helicity* es una herramienta eficiente y elegante que permite calcular elementos de matriz, así como la sección transversal, en la interacción compleja entre partículas. Además, permite expresar de forma compacta las amplitudes en QCD a nivel *árbol* y a nivel de un lazo; este formalismo bien puede ser empleado en QED. En esta sección seguimos la presentación de [61].

Para iniciar con el análisis, se considera a $u(k)$ y $v(k)$ como las soluciones con energía positiva y negativa a la ecuación de Dirac sin masa, respectivamente, éstas a su vez permiten definir las soluciones con una *helicity* determinada:

$$u_\pm(k) = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)u(k) \quad \text{y} \quad v_\mp(k) = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)v(k), \quad (8.30)$$

las cuales satisfacen la relación de completéz:

$$\sum_{s=\pm} u_s(k) \bar{u}_s(k) = \not{k}, \quad \sum_{s=\pm} v_s(k) \bar{v}_s(k) = \not{k}. \quad (8.31)$$

También es importante escribir la relación que existe entre el conjugado de los espinores:

$$\overline{u_{\pm}(k)} = \overline{u(k)} \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5) \quad \text{y} \quad \overline{v_{\mp}(k)} = \overline{v(k)} \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5), \quad (8.32)$$

aquí se usan las convenciones de [61]

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.33)$$

que es la representación de Dirac. Las soluciones sin masa pueden elegirse de la siguiente forma

$$u_+(k) = v_-(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{k^+} \\ \sqrt{k^-} e^{i\psi_k} \\ \sqrt{k^+} \\ \sqrt{k^-} e^{i\psi_k} \end{bmatrix}, \quad u_-(k) = v_+(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{k^-} e^{-i\psi_k} \\ -\sqrt{k^+} \\ \sqrt{k^-} e^{-i\psi_k} \\ -\sqrt{k^+} \end{bmatrix}, \quad (8.34)$$

donde

$$e^{\pm i\psi_k} \equiv \frac{k^1 \pm i k^2}{\sqrt{(k^1)^2 + (k^2)^2}} = \frac{k^1 \pm i k^2}{\sqrt{k^+ k^-}}, \quad k^{\pm} = k^0 \pm k^3. \quad (8.35)$$

Ya que nos interesa calcular la amplitud de un número grande de partículas, será necesario asignar cada momento por k_i con $i = 1, 2, \dots, n$, esto permite usar una notación más compacta:

$$\begin{aligned} |i^+\rangle &\equiv |k_i^+\rangle \equiv u_+(k_i) = v_-(k_i), & |i^-\rangle &\equiv |k_i^-\rangle \equiv u_-(k_i) = v_+(k_i), \\ \langle i^+| &\equiv \langle k_i^+| \equiv \overline{u_+(k_i)} = \overline{v_-(k_i)}, & \langle i^-| &\equiv \langle k_i^-| \equiv \overline{u_-(k_i)} = \overline{v_+(k_i)}. \end{aligned} \quad (8.36)$$

El producto de espinores se define mediante:

$$\begin{aligned} \langle ij \rangle &\equiv \langle i^- | j^+ \rangle = \overline{u_-(k_i)} u_+(k_j) = \sqrt{k_i^- k_j^+} e^{i\phi_{k_i}} - \sqrt{k_i^+ k_j^-} e^{i\phi_{k_j}} = \sqrt{|s_{ij}|} e^{i\phi_{ij}}, \\ [ij] &\equiv \langle i^+ | j^- \rangle = \overline{u_+(k_i)} u_-(k_j) = -\sqrt{k_i^- k_j^+} e^{-i\phi_{k_i}} + \sqrt{k_i^+ k_j^-} e^{-i\phi_{k_j}} = \sqrt{|s_{ij}|} e^{-i(\phi_{ij} + \pi)}, \\ k_i^0 &> 0, \quad k_j^0 > 0, \end{aligned} \quad (8.37)$$

donde $s_{ij} = (k_i + k_j)^2 = 2 k_i \cdot k_j$, y

$$\cos \phi_{ij} = \frac{k_i^1 k_j^+ - k_j^1 k_i^+}{\sqrt{|s_{ij}| k_i^+ k_j^+}}, \quad \sin \phi_{ij} = \frac{k_i^2 k_j^+ - k_j^2 k_i^+}{\sqrt{|s_{ij}| k_i^+ k_j^+}}. \quad (8.38)$$

En el caso de energías negativas, el producto espinorial $\langle ij \rangle$ se define por continuación analítica del caso con energía positiva, esto es, en (8.37) se reemplaza k_i por $-k_i$ si $k_i^0 < 0$ y similarmente para k_j ; y con un factor i por cada partícula con energía negativa. El producto $[ij]$ se define mediante

$$\langle ij \rangle [j i] = \langle i^- | j^+ \rangle \langle j^+ | i^- \rangle = \text{tr} \left(\frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \not{k}_i \not{k}_j \right) = 2 k_i \cdot k_j = s_{ij}. \quad (8.39)$$

Algunas relaciones importante que se usarán son:
La identidad de Gordon y el operador de proyección:

$$\langle i^\pm | \gamma^\mu | i^\pm \rangle = 2k_i^\mu, \quad |i^\pm\rangle \langle i^\pm| = (1 \pm \gamma_5) \not{k}_i, \quad (8.40)$$

La antisimetría:

$$\langle j i \rangle = -\langle i j \rangle, \quad [j i] = -[i j], \quad \langle i i \rangle = [i i] = 0, \quad (8.41)$$

Regla de Fierz:

$$\langle i^+ | \gamma^\mu | j^+ \rangle \langle k^+ | \gamma_\mu | l^+ \rangle = 2 [i k] \langle l j \rangle, \quad (8.42)$$

Cambio de la helicity:

$$\langle i^+ | \gamma^\mu | j^+ \rangle = \langle j^- | \gamma^\mu | i^- \rangle. \quad (8.43)$$

Además, necesitaremos la representación espinorial del vector de polarización para bosones de norma sin masa con una helicity definida: ± 1 ,

$$\varepsilon_\mu^\pm(k, q) = \pm \frac{\langle q^\mp | \gamma_\mu | k^\mp \rangle}{\sqrt{2} \langle q^\mp | k^\pm \rangle}, \quad (8.44)$$

con k el momento del bosón y q es el momento de referencia, el cual refleja la libertad de la transformación de norma *on-shell*.

Dado que $\not{k} |k^\pm\rangle = 0$ y $\varepsilon^\pm(k, q)$ es transversal a k , entonces para cualquier q se tiene

$$\varepsilon^\pm(k, q) \cdot k = 0. \quad (8.45)$$

Algunas relaciones más en el formalismo *Spinor Helicity* se escriben en el apéndice I.

CAPÍTULO 9

AMPLITUDES GRAVITÓN-FOTÓN-FOTÓN

En el capítulo anterior hablamos de la forma en que se obtiene la amplitud para el caso puramente electromagnético, pues sólo se trabajó con fotones. Para este capítulo hemos reservado el cálculo de la amplitud para la teoría de Einstein-Maxwell. Iniciamos con el caso más sencillo de un gravitón y dos fotones. El procedimiento directamente generaliza el del caso puramente fotónico del capítulo anterior. Sin embargo, para ser preciso, cabe mencionar una diferencia que existe entre las amplitudes de fotones de la QED y las amplitudes en la teoría de Einstein-Maxwell: la acción efectiva generalmente se relaciona a las amplitudes una-partícula-irreducible, no a las amplitudes completas. Para el caso puramente fotónica esta sutileza no tiene relevancia, ya que estas no tienen contribuciones reducibles. Para las amplitudes con gravitones no es así, como se ve ya del ejemplo sencillo de la fig. 9.1.

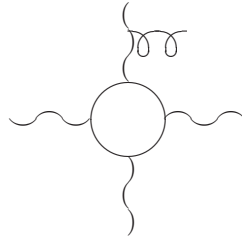


Figura 9.1: Ejemplo de un diagrama reducible con un gravitón y 4 fotones

Como antes, se considera el campo electromagnético $A(x)$ como una superposición de ondas planas, ver (2.77), con ε_j y k_j el vector de polarización y el cuatrimomento del j -ésimo fotón respectivamente. Además satisfacen

$$\varepsilon_j \cdot k_j = 0, \quad (9.1)$$

así que el tensor del campo electromagnético adquiere la forma

$$F^{\mu\nu} = \sum_{j=1}^N F_j^{\mu\nu}, \quad (9.2)$$

con

$$F_j^{\mu\nu} = i(k_j^\mu \varepsilon_j^\nu - \varepsilon_j^\mu k_j^\nu) e^{i k_j \cdot x}. \quad (9.3)$$

También es posible obtener

$$F^{\mu\nu}{}_{,\gamma} = - \sum_{j=1}^N F_j^{\mu\nu} k_{j\gamma}, \quad (9.4)$$

$$F^{\mu\nu}{}_{,\gamma\delta} = i \sum_{j=1}^N F_j^{\mu\nu} k_{j\gamma} k_{j\delta}. \quad (9.5)$$

Como antes, en (3.3), introducimos el campo de M gravitones por

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x),$$

donde

$$h_{\mu\nu}(x) = \sum_{i=1}^M \varepsilon_{i\mu\nu} e^{i k_i \cdot x}. \quad (9.6)$$

En lo siguiente consideraremos un sólo gravitón, tal que se puede escribir

$$h_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} e^{i k_0 \cdot x}.$$

Eso implica también que cualquier término cuadrático en h se puede omitir, en particular se puede escribir (usando $\kappa = 1$ en lo siguiente)

$$g^{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}(x), \quad (9.7)$$

donde

$$\eta^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu \quad \text{y} \quad h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\beta} \eta^{\beta\nu}, \quad (9.8)$$

con $\varepsilon_{\mu\nu}$ que satisface

$$\varepsilon^{\mu\nu} = \varepsilon^{\nu\mu}, \quad \varepsilon^\mu{}_\mu = 0, \quad k_{0\mu} \varepsilon^{\mu\nu} = 0. \quad (9.9)$$

Ahora bien, dado que (al orden lineal en h)

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (\partial_\nu g_{\rho\alpha} + \partial_\rho g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\nu\rho}), \quad (9.10)$$

entonces se tiene

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} (\partial_\nu h_{\rho\alpha} + \partial_\rho h_{\nu\alpha} - \partial_\alpha h_{\nu\rho}). \quad (9.11)$$

También es útil expresar el tensor de Riemann en términos de h . Si tenemos en mente que $\Gamma \Gamma \propto hh$ entonces

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}{}^\lambda{}_\rho &= \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\lambda\alpha} (\partial_\mu \partial_\nu h_{\rho\alpha} + \partial_\mu \partial_\rho h_{\nu\alpha} - \partial_\mu \partial_\alpha h_{\nu\rho}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \eta^{\lambda\alpha} (\partial_\nu \partial_\mu h_{\rho\alpha} + \partial_\nu \partial_\rho h_{\mu\alpha} - \partial_\nu \partial_\alpha h_{\mu\rho}) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\lambda\alpha} (h_{\nu\alpha,\mu\rho} - h_{\nu\rho,\mu\alpha} + h_{\mu\rho,\nu\alpha} - h_{\mu\alpha,\nu\rho}). \end{aligned} \quad (9.12)$$

Así que

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} \delta_\alpha^\lambda (h_{\nu\lambda} k_{0\mu} k_{0\beta} - h_{\nu\beta} k_{0\mu} k_{0\lambda} + h_{\mu\beta} k_{0\nu} k_{0\lambda} - h_{\mu\lambda} k_{0\nu} k_{0\beta}) \\ &= -\frac{1}{2} (h_{\nu\alpha} k_{0\mu} k_{0\beta} - h_{\nu\beta} k_{0\mu} k_{0\alpha} + h_{\mu\beta} k_{0\nu} k_{0\alpha} - h_{\mu\alpha} k_{0\nu} k_{0\beta}). \end{aligned} \quad (9.13)$$

A estas alturas ya se cuentan con los elementos necesarios para calcular la amplitud de N fotones y un gravitón. Por otra parte si consideramos un proceso *on-shell*, esto es

$$k_i \cdot k_i = 0, \quad (9.14)$$

entonces es fácil mostrar

$$R_{\mu\nu} = 0 \text{ y } R = 0, \quad (9.15)$$

lo cual simplifica considerablemente los cálculos. En los siguiente calculamos la amplitud de dos fotones y un gravitón (ver la figura 9.2), iniciando con el caso espinorial. Para ello podríamos usar cualquiera de las expresiones que aparecen a lo largo de este trabajo para \mathcal{L}_{spinor} : $\mathcal{L}_{spinor}^{(DH)}$, $\mathcal{L}_{spinor}^{(DBC)} = \mathcal{L}_{spinor}^{(HK)}$ o bien $\mathcal{L}_{spinor}^{(SI)}$. Sin embargo, se observa que el cálculo se hace más sencillo usando $\mathcal{L}_{spinor}^{(DH)}$.

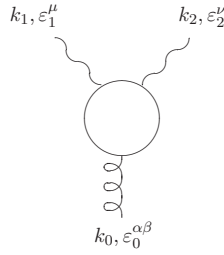


Figura 9.2: Diagrama gravitón-fotón-fotón

Si además se considera un proceso *on-shell* y recordamos la forma de $\mathcal{L}_{spinor}^{(DH)}$:

$$\mathcal{L}_{spinor}^{(DH)} = \frac{1}{180(4\pi)^2 m^2} \left(5R F_{\mu\nu}^2 - 26R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + 2R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} + 24(\nabla^\alpha F_{\alpha\mu})^2 \right),$$

entonces sólo hay que trabajar con los dos últimos términos. Este procedimiento resulta laborioso por lo cual se programa el cálculo en *MathTensor*, de esto se obtiene que el término $(\nabla^\alpha F_{\alpha\mu})^2$ resulta nulo. Sin embargo, para el término restante se obtiene

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} &= 4\varepsilon_{1\mu} \varepsilon_{2\nu} [k_1^\alpha k_2^\beta k_0^\mu k_0^\nu - \eta^{\alpha\mu} k_2^\beta k_0^\nu k_0 \cdot k_1 - \eta^{\beta\nu} k_1^\alpha k_0^\mu k_0 \cdot k_2 \\ &\quad + \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} k_0 \cdot k_1 k_0 \cdot k_2] \varepsilon_{\alpha\beta} e^{i(k_0+k_1+k_2)\cdot x}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Como en el cálculo de cuatro fotones en el capítulo anterior, la integración sobre x se convierte el factor exponencial en la función delta para la conservación de la energía y el momento; este factor se omite en lo siguiente. Ahora se define

$$\Gamma^{\alpha\beta;\mu\nu} = 4[k_1^\alpha k_2^\beta k_0^\mu k_0^\nu - \eta^{\alpha\mu} k_2^\beta k_0^\nu k_0 \cdot k_1 - \eta^{\beta\nu} k_1^\alpha k_0^\mu k_0 \cdot k_2 + \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} k_0 \cdot k_1 k_0 \cdot k_2]. \quad (9.17)$$

Entonces es posible escribir

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} = \varepsilon_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha\beta;\mu\nu} \varepsilon_{1\mu} \varepsilon_{2\nu}. \quad (9.18)$$

Ya que se tiene esta expresión para la amplitud, ahora es posible verificar si la teoría cumple con las *identidades de Ward*. Primero nos enfocamos en la parte electromagnética por lo cual se tiene que hacer el cambio $\varepsilon_{1\mu} \rightarrow k_{1\mu}$, de esto se tiene

$$\begin{aligned} k_{1\mu} \Gamma^{\alpha\beta;\mu\nu} &= 4[k_1^\alpha k_2^\beta k_1 \cdot k_0 k_0 \cdot \varepsilon_2 - k_1^\mu k_2^\nu \varepsilon_2 \cdot k_0 k_0 \cdot k_1 - \varepsilon_2^\nu k_1^\mu k_0 \cdot k_1 k_0 \cdot k_2 + k_1^\mu \varepsilon_2^\nu k_0 \cdot k_1 k_0 \cdot k_2] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Similarmente para el cambio $\varepsilon_{2\nu} \rightarrow k_{2\nu}$. Para la parte gravitacional se tiene que hacer el cambio $\varepsilon_{\alpha\beta} \rightarrow k_{0\alpha}$, con esto

$$\begin{aligned} k_{0\alpha} \Gamma^{\alpha\beta;\mu\nu} &= 4[k_1 \cdot k_0 k_2^\beta k_0^\mu k_0^\nu - k_0^\mu k_2^\beta k_0^\nu k_0 \cdot k_1 - \eta^{\beta\nu} k_0 \cdot k_1 k_0^\mu k_0 \cdot k_2 + k_0^\mu \eta^{\beta\nu} k_0 \cdot k_1 k_0 \cdot k_2] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (9.20)$$

y similarmente para $\varepsilon_{\alpha\beta} \rightarrow k_{0\beta}$.

Si se desea incorporar la polarización del gravitón, hay que tener en cuenta que éste sólo tiene dos polarizaciones físicas, como el fotón, esto es debido a las restricciones dadas en (9.9). Existen diferentes bases para asignar la polarización del gravitón, entre ellas está [45]

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\oplus\mu\nu} &\equiv \varepsilon^{+\mu} \varepsilon^{+\nu} - \varepsilon^{-\mu} \varepsilon^{-\nu}, \\ \varepsilon^{\otimes\mu\nu} &\equiv \varepsilon^{+\mu} \varepsilon^{-\nu} + \varepsilon^{-\mu} \varepsilon^{+\nu}, \end{aligned} \quad (9.21)$$

esta base es de gran utilidad en la astrofísica para el tratamiento de ondas gravitacionales. Otra base es

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu}^{++}(k, q) &= \varepsilon_\mu^+(k, q) \varepsilon_\nu^+(k, q), \\ \varepsilon_{\mu\nu}^{--}(k, q) &= \varepsilon_\mu^-(k, q) \varepsilon_\nu^-(k, q), \end{aligned} \quad (9.22)$$

ésta se emplea frecuentemente en física de altas energías y es óptima para descubrir las relaciones entre amplitudes con gravitones y fotones. Así que para el gravitón se tienen las polarizaciones $\varepsilon_{\mu\nu}^{++} = \varepsilon_\mu^+ \varepsilon_\nu^+$ y $\varepsilon_{\mu\nu}^{--} = \varepsilon_\mu^- \varepsilon_\nu^-$, y para los fotones se tiene $\varepsilon_1^+ \varepsilon_2^+$, $\varepsilon_1^+ \varepsilon_2^-$ y $\varepsilon_1^- \varepsilon_2^-$. Con esto se tienen los siguientes casos para las amplitudes:

- *Caso uno* (+ + ; + +):

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{++} \Gamma^{\alpha\beta;\mu\nu} \varepsilon_{1\mu}^+ \varepsilon_{2\nu}^+ = \langle k_0^+ | k_1^- \rangle^2 \langle k_0^+ | k_2^- \rangle^2, \quad (9.23)$$

- *Caso dos* (+ + ; + -):

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{++} \Gamma^{\alpha\beta;\mu\nu} \varepsilon_{1\mu}^+ \varepsilon_{2\nu}^- = 0, \quad (9.24)$$

- *Caso tres* (+ + ; - -):

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{++} \Gamma^{\alpha\beta;\mu\nu} \varepsilon_{1\mu}^- \varepsilon_{2\nu}^- = 0, \quad (9.25)$$

- *Caso cuatro* (- - ; + +):

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{--} \Gamma^{\alpha\beta;\mu\nu} \varepsilon_{1\mu}^+ \varepsilon_{2\nu}^+ = 0, \quad (9.26)$$

- *Caso cinco* (- - ; + -):

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{--} \Gamma^{\alpha\beta;\mu\nu} \varepsilon_{1\mu}^+ \varepsilon_{2\nu}^- = 0, \quad (9.27)$$

- *Caso seis* (- - ; - -):

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{--} \Gamma^{\alpha\beta;\mu\nu} \varepsilon_{1\mu}^- \varepsilon_{2\nu}^- = \langle k_0^- | k_1^+ \rangle^2 \langle k_0^- | k_2^+ \rangle^2. \quad (9.28)$$

El cálculo se ha realizado manualmente y también usando *MathTensor*. Cabe mencionar que de estas seis amplitudes sólo tres son linealmente independientes ya que la invariancia CP de la teoría de Einstein-Maxwell, como en la QED, relaciona cualquier amplitud \pm con la amplitud \mp . Incluyendo todos los factores globales se obtiene el siguiente resultado para los elementos de matriz no nulos

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{spinor}^{(++;++)} &= \frac{\kappa e^2}{90(4\pi)^2 m^2} [01]^2 [02]^2, \\ \mathcal{M}_{spinor}^{(--;--)} &= \frac{\kappa e^2}{90(4\pi)^2 m^2} \langle 01 \rangle^2 \langle 02 \rangle^2,\end{aligned}$$

donde también se restituyeron las constantes de acoplamiento. Para el caso escalar se usa $\mathcal{L}_{scalar}^{(DH)}$, (4.217), que contiene las mismas estructuras tensoriales como $\mathcal{L}_{spinor}^{(DH)}$. Entonces se vuelve obvio que la diferencia entre los casos escalar y espinorial reside únicamente en el coeficiente del término $R_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}$. Sin más cálculos se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{spinor}^{(++;++)} &= (-2) \mathcal{M}_{scalar}^{(++;++)}, \\ \mathcal{M}_{spinor}^{(--;--)} &= (-2) \mathcal{M}_{scalar}^{(--;--)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto podemos concluir que los resultados sólo difieren por un factor (-2) , que habla de la estadística y de los grados de libertad, sin efectos no triviales del espín de la partícula en el lazo, ver (1.7).

Un resultado muy interesante se logra cuando se considera el trabajo de L. Martin, C. Schubert, V. M. Villanueva [6] de donde se puede obtener la amplitud de cuatro fotones con polarización:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{++++}[k_1, k_2, k_3, k_4] &\sim [12]^2[34]^2 + [13]^2[24]^2 + [14]^2[23]^2, \\ \mathcal{M}^{+++ -}[k_1, k_2, k_3, k_4] &= 0, \\ \mathcal{M}^{++ - -}[k_1, k_2, k_3, k_4] &\sim [12]^2\langle 34 \rangle^2, \\ \mathcal{M}^{+ - - -}[k_1, k_2, k_3, k_4] &= 0, \\ \mathcal{M}^{- - - -}[k_1, k_2, k_3, k_4] &\sim \langle 12 \rangle^2\langle 34 \rangle^2 + \langle 13 \rangle^2\langle 24 \rangle^2 + \langle 14 \rangle^2\langle 23 \rangle^2,\end{aligned}$$

en estas expresiones se asigna $k_1 \rightarrow k_0, k_2 \rightarrow k_0$, con lo cual se encuentra

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{++++}[k_0, k_0, k_3, k_4] &\sim 2[03]^2[04]^2 \sim \mathcal{M}^{++;++}[k_0, k_3, k_4] \\ \mathcal{M}^{+++ -}[k_0, k_0, k_3, k_4] &= 0 = \mathcal{M}^{++;+-}[k_0, k_3, k_4] \\ \mathcal{M}^{++ - -}[k_0, k_0, k_3, k_4] &= 0 = \mathcal{M}^{++;-}[k_0, k_3, k_4] \\ \mathcal{M}^{- - ++}[k_0, k_0, k_3, k_4] &= 0 = \mathcal{M}^{- -; ++}[k_0, k_3, k_4] \\ \mathcal{M}^{- - + -}[k_0, k_0, k_3, k_4] &= 0 = \mathcal{M}^{- -; + -}[k_0, k_3, k_4] \\ \mathcal{M}^{- - - -}[k_0, k_0, k_3, k_4] &\sim 2\langle 03 \rangle^2\langle 04 \rangle^2 \sim \mathcal{M}^{- -; - -}[k_0, k_3, k_4]\end{aligned}$$

es notable la semejanza con los resultados que aquí hemos logrado, por lo cual se concluye que la amplitud de un gravitón y dos fotones con todas las polarizaciones iguales se comporta como la amplitud de cuatro fotones con todas las polarizaciones iguales.

CAPÍTULO 10

CONCLUSIONES

En este trabajo de tesis investigamos la acción efectiva en la teoría de Einstein-Maxwell, inducida por un lazo escalar o espinorial. Para ello se usa un formalismo novedoso el cual es conocido como *formalismo línea de mundo*.

Los primeros resultados se lograron en el trabajo de maestría, donde se trabaja en el caso escalar. Ahí se ha mostrado la equivalencia entre los *esquemas DBC* y *SI* al nivel *RFF*. Además, se hace la deducción del Lagrangiano de Euler-Heisenberg a orden lineal en el tensor de Riemann y a cualquier orden del campo electromagnético. En el presente trabajo hacemos una extensión de estos resultados al caso espinorial. Adicionalmente hemos generado un método para el desarrollo de las funciones de Green $\mathcal{G}_{B,F}$ lo cual nos permite calcular el Lagrangiano efectivo a orden RF^N . Para verificar nuestros resultados, se hizo el cálculo para $N = 2$ y las expresiones coinciden. Posteriormente se hizo un programa en MATHEMATICA y MathTensor para los cálculos a orden $N = 4$. El proceso arroja expresiones muy extensas las cuales se simplifican considerablemente con el uso de las identidades de Bianchi. Aún en el límite de espacio plano podemos encontrar resultados nuevos ya que el método de desarrollo de $\mathcal{G}_{B,F}$ también es útil para la *QED* en dicho espacio. Aquí hemos logrado correcciones con dos derivadas al Lagrangiano de Euler-Heisenberg.

En otros trabajos se ha observado que las amplitudes de fotones con todas las polarizaciones positivas (MHV) corresponden al nivel de la acción efectiva a amplitudes con un campo electromagnético autodual, todo esto en el espacio plano. Estas amplitudes han sido de interés particular para los estudios recientes mencionados en la introducción; pensando en ello incorporamos el caso autodual en la teoría de Einstein-Maxwell con lo cual logramos un resultado particularmente sencillo.

Las acciones efectivas que obtuvimos en esta tesis contienen una enorme cantidad de información entre otros sobre las amplitudes con un gravitón y cualquier número de fotones en el límite de bajas energías y con polarizaciones arbitrarias. Convertir las acciones efectivas en dichas amplitudes es un proceso puramente algebraico y se puede programar; en esta tesis llevamos a cabo esta tarea al nivel más bajo de las amplitudes gravitón-fotón-fotón. Sorprendentemente, de las seis componentes que tiene esta amplitud *on-shell*, sólo dos no son ceros, precisamente las amplitudes MHV, y para estas amplitudes se muestra que la diferencia entre el caso escalar y espinorial consiste sólo en el factor trivial (-2) que llega de la estadística y los grados de libertad. Este hecho generaliza un teorema que ya se conoce para las amplitudes puramente fotónicas.

Con este trabajo de tesis hemos introducido el *formalismo línea de mundo* como una herramienta muy eficiente en la teoría de Einstein-Maxwell, lo cual ha permitido sentar las bases para el cálculo de las amplitudes con un gravitón y un número arbitrario de fotones en el límite de bajas energías. Esto permitirá averiguar si la semejanza entre la amplitud gravitón-fotón-fotón y la amplitud de cuatro fotones se puede extender a un número N de fotones.

Finalmente, se observa que no hay obstáculos principales para extender nuestros cálculos más allá del nivel lineal en la curvatura, tal que se pueden investigar también las amplitudes con un número arbitrario de gravitones y fotones. Para ello pueden resultar útiles las relaciones en los apéndices B e I.

APÉNDICE A

CONVENCIONES

En nuestras convenciones, la teoría de Einstein-Maxwell es descrita por

$$\Gamma[g, A] = \int d^D x \sqrt{g} \left(\frac{1}{\kappa^2} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad (\text{A.1})$$

donde la métrica $g_{\mu\nu}$ tiene signatura $(-, +, +, \dots, +)$, $g = |\det g_{\mu\nu}|$, y $\kappa^2 = 16\pi G_N$. Nosotros usamos las siguientes convenciones para el tensor de curvatura:

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\lambda &= R_{\mu\nu}{}^\lambda{}_\rho V^\rho \quad \text{donde} \quad R_{\mu\nu}{}^\lambda{}_\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\lambda - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \\ \text{con} \quad \Gamma_{\nu\rho}^\mu &= \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (\partial_\nu g_{\rho\alpha} + \partial_\rho g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\nu\rho}), \\ R_{\mu\nu} &= R_{\lambda\mu}{}^\lambda{}_\nu, \quad R = R^\mu{}_\mu > 0 \text{ sobre esferas,} \\ [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \phi &= i F_{\mu\nu} \phi, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

donde V^μ es un vector sin carga y ϕ es un campo escalar con carga.

La acción efectiva a un lazo escalar es definida por

$$\Gamma[g, A] = \ln \text{Det}^{-1}(-\square_A + m^2 + \xi R), \quad (\text{A.3})$$

donde \square_A es la norma y el Laplaciano gravitacional covariante para campos escalares. El parámetro ξ describe el acoplamiento no minimal adicional al escalar de curvatura R .

Para una lazo con espín (Dirac), se define la acción efectiva de la siguiente forma

$$\Gamma[g, A] = \ln \text{Det}(\not{\nabla} + m) \quad (\text{A.4})$$

donde

$$\not{\nabla} = \gamma^a e_a{}^\mu \nabla_\mu, \quad \nabla_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu + \frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \gamma^a \gamma^b \quad (\text{A.5})$$

con $e_\mu{}^a$ el vielbein y $e = \det e_\mu{}^a$, $\omega_{\mu ab}$ la conexión espín..

APÉNDICE B

IDENTIDADES

Identidades de Bianchi:

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\beta\gamma\alpha\delta} + R_{\gamma\alpha\beta\delta} = 0. \quad (\text{B.2})$$

Las siguientes identidades se usan para lograr la forma de los Lagrangianos efectivos (6.11), (6.12), estas identidades son un consecuencia de (B.1) y (B.2):

$$F_\mu^\alpha F^{\mu\beta}_{;\alpha\beta} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu}, \quad (\text{B.3})$$

$$F_{\mu\alpha;\beta} F^{\mu\beta;\alpha} = \frac{1}{2} F_{\mu\beta;\alpha} F^{\mu\beta;\alpha}, \quad (\text{B.4})$$

$$F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\alpha\nu\beta} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (\text{B.5})$$

$$(F^3)_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\alpha\nu\beta} = \frac{1}{2} (F^3)_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (\text{B.6})$$

$$F_{\alpha\beta;\mu} F^{\alpha\beta}_{;\nu} (F^2)^{\mu\nu} = -2 F_{\alpha\beta}^{\;\mu} F_{\mu\;\nu}^\alpha (F^2)^{\beta\nu}, \quad (\text{B.7})$$

$$F_{\alpha\beta}^{\;\mu} F_{\mu\nu;\gamma} F^{\alpha\nu} F^{\beta\gamma} = -\frac{1}{2} F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu}^{\;\gamma} F^{\alpha\mu} F^{\beta\nu}, \quad (\text{B.8})$$

$$F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu}^{\;\beta} F^{\alpha\nu} F^{\gamma\mu} = -\frac{1}{2} F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu}^{\;\gamma} F^{\alpha\mu} F^{\beta\nu}, \quad (\text{B.9})$$

$$F_{\alpha\beta}^{\;\mu} F_{\mu\nu}^{\;\beta} (F^2)^{\alpha\nu} = -F_{\alpha\beta}^{\;\mu} F_{\mu\;\gamma}^\alpha (F^2)^{\beta\gamma} - F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu}^{\;\beta;\gamma} (F^2)^{\alpha\mu}, \quad (\text{B.10})$$

$$F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu}^{\;\beta} F^{\alpha\nu} F^{\gamma\mu} = F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\;\eta}^\alpha F^{\beta\mu} F^{\gamma\eta} - F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\;\eta}^\alpha F^{\beta\eta} F^{\gamma\mu}, \quad (\text{B.11})$$

$$F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\;\eta}^\alpha F^{\beta\eta} F^{\gamma\mu} = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\nu}^{\;\gamma} F^{\alpha\mu} F^{\beta\nu} + F_{\alpha\beta;\gamma} F_{\mu\;\eta}^\alpha F^{\beta\mu} F^{\gamma\eta}, \quad (\text{B.12})$$

$$F_\mu^\alpha F^{\mu\beta}_{;\alpha\beta} + F_\mu^\alpha F^{\mu\beta}_{;\beta\alpha} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} + (F^2)^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu}, \quad (\text{B.13})$$

$$F_{\mu\nu;\beta}^\nu F^{\beta\mu} + F_{\mu\nu}^{\;\nu} F^{\beta\mu}_{;\beta} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} - (F^2)^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu}, \quad (\text{B.14})$$

$$F_{\mu\nu;\beta}^\nu (F^3)^{\beta\mu} + F_{\mu\nu}^{\;\nu} (F^3)^{\beta\mu}_{;\beta} = -\frac{1}{2} (F^3)_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} - (F^4)^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - (F^3)_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu}, \quad (\text{B.15})$$

$$(F^2)^{\alpha\nu} F^{\beta\mu} F_{\mu\nu;\beta\alpha} - (F^2)^{\alpha\nu} F^{\beta\mu} F_{\mu\nu;\alpha\beta} = \frac{1}{2} (F^3)^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} + (F^2)^{\mu\alpha} (F^2)^{\nu\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (\text{B.16})$$

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} (F^2)^{\alpha\beta} (F^2)^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu;\alpha\beta} (F^2)^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R_{\alpha\mu\beta\nu} (F^3)^{\alpha\mu} F^{\beta\nu} - F_{\mu\nu;\alpha\beta} (F^2)^{\alpha\nu} F^{\beta\mu}. \quad (\text{B.17})$$

APÉNDICE C

FUNCIÓN DE GREEN

Sea \hat{A} un operador sobre u y \hat{A}^{-1} su inverso, entonces

$$\langle u | \hat{A}^{-1} \hat{A} | v \rangle = \delta(u - v) = \delta(v - u), \quad (\text{C.1})$$

es decir

$$\langle u | \hat{A}^{-1} | v \rangle \equiv G_{\hat{A}}(u, v), \quad (\text{C.2})$$

es la *función de Green*.

Para encontrar la forma explícita de $G_{\hat{A}}(u, v)$ cuando se tiene

$$S_0 = \int_0^1 du y^\mu(u) \left(-\frac{1}{4T} \frac{d^2}{du^2} \right) y_\mu(u),$$

se hace lo siguiente: Sea $\hat{A} = -\frac{1}{4T} \frac{d^2}{du^2}$, $\{\varphi_n\}$ y $\{\lambda_n\}$ un conjunto completo de funciones propias y valores propios de \hat{A} respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} G_{\hat{A}}(u, v) &= \langle u | \hat{A}^{-1} | v \rangle \\ &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \langle u | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \hat{A}^{-1} | \varphi_m \rangle \langle \varphi_m | v \rangle \\ &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_n^*(u) \langle \varphi_n | \hat{A}^{-1} | \varphi_m \rangle \varphi_m(v) \\ &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_n^*(u) \frac{1}{\lambda_m} \langle \varphi_n | \varphi_m \rangle \varphi_m(v) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^*(u) \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(v). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Pero

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{T} \quad \text{y} \quad \varphi_n(u) = e^{i2n\pi u}, \quad (\text{C.4})$$

entonces

$$G_{\hat{A}}(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T}{n^2 \pi^2} e^{i2n\pi(v-u)}. \quad (\text{C.5})$$

Ahora bien

$$\hat{A} G_{\hat{A}}(u, v) = -\frac{1}{4T} \frac{d^2}{du^2} G_{\hat{A}}(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{i2n\pi(v-u)} = \frac{1}{2} \delta(v - u) - 1, \quad (\text{C.6})$$

la presencia de (-1) se debe a que se ha eliminado el término con $n = 0$ en la serie. Lo ideal sería encontrar que

$$\hat{A} G_{\hat{A}}(u, v) = \delta(v - u) - 1, \quad (\text{C.7})$$

por lo cual se usa la siguiente definición para la función de Green:

$$G_{\hat{A}}(u, v) = 2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{T}{(2i\pi n)^2} e^{2i\pi n(v-u)}, \quad (\text{C.8})$$

pero aún así se tiene

$$\hat{A} G_{\hat{A}}(u, v) = -\frac{1}{2} (\delta(v - u) - 1). \quad (\text{C.9})$$

Entonces

$$\hat{A} \left(-2 G_{\hat{A}}(u, v) \right) = \delta(v - u) - 1. \quad (\text{C.10})$$

Por otra parte, podemos hacer la siguiente observación: Sea

$$f(u, v) = -2T \left[|u - v| - (u - v)^2 - \frac{1}{6} \right]. \quad (\text{C.11})$$

Entonces

$$-\frac{1}{4T} \frac{d^2}{du^2} f(u, v) = -\frac{1}{4} (-2 [2\delta(u - v) - 2]) = \delta(u - v) - 1. \quad (\text{C.12})$$

Así que

$$-\frac{1}{4T} \frac{d^2}{du^2} \left(-2G_{\hat{A}}(u, v) \right) = \delta(u - v) - 1,$$

y

$$-\frac{1}{4T} \frac{d^2}{du^2} f(u, v) = \delta(u - v) - 1.$$

Entonces podemos deducir una relación entre $G_{\hat{A}}$ y f :

$$-2G_{\hat{A}}(u, v) = -2 \left(2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{T}{(2i\pi n)^2} e^{2i\pi n(v-u)} \right) \longrightarrow f(u, v) = -2T \left[|u - v| - (u - v)^2 - \frac{1}{6} \right]. \quad (\text{C.13})$$

Se define

$$G_B(u, v) = |u - v| - (u - v)^2 - \frac{1}{6}. \quad (\text{C.14})$$

Se puede decir que

$$2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(2i\pi n)^2} e^{2i\pi n(v-u)} \longrightarrow G_B(u, v), \quad (\text{C.15})$$

lo cual puede notarse en la figura C.1.

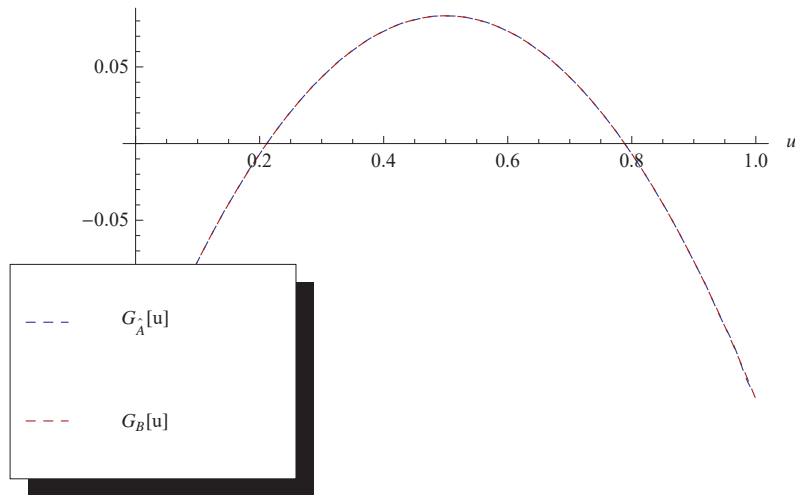


Figura C.1: Convergencia entre $G_{\hat{A}}(u)$ y $G_B(u)$

Además es posible simplificar algunos coeficientes para cálculos posteriores. Notamos que

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{4T} \frac{d^2}{du^2} G_{\hat{A}}(u, v) &= -\frac{1}{4T} \frac{d^2}{du^2} \left(-2T \left[|u-v| - (u-v)^2 - \frac{1}{6} \right] \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{du^2} \left[|u-v| - (u-v)^2 - \frac{1}{6} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{du^2} G_B(u, v),
 \end{aligned} \tag{C.16}$$

o bien

$$\langle u | \left(-\frac{1}{4T} \frac{d^2}{du^2} \right)^{-1} | v \rangle = -2T G_B(u, v). \tag{C.17}$$

APÉNDICE D

INTEGRACIÓN DE LAS FUNCIONES DE GREEN

En este apéndice se muestra el programa que se elabora en MATHEMATICA para calcular algunas de las integrales de las funciones de Green y sus derivadas.

Integración de las funciones de Green en el esquema DBC

Definiciones

Función escalón

$$\theta[u_-, v_-] := \text{UnitStep}[u - v]$$

$$\theta[u_-, v_-] := \frac{1}{2} /; (u - v) == 0$$

Función de Green

$$\Delta[u_-, v_-] := (u - 1) v \theta[u, v] + (v - 1) u \theta[v, u]$$

Primeras derivadas de la función de Green

$$p\Delta[u_-, v_-] := v - \theta[v, u]$$

$$\Delta p[u_-, v_-] := u - \theta[u, v]$$

Para AA

$$\text{Integrate}[\Delta[x, y], \{x, 0, 1\}, \{y, 0, 1\}]$$
$$-\frac{1}{12}$$

$$\text{Integrate}[\Delta[y, y], \{y, 0, 1\}]$$
$$-\frac{1}{6}$$

Para AB

$$\text{Integrate}[p\Delta[x, y] \Delta p[x, y], \{x, 0, 1\}, \{y, 0, 1\}]$$
$$-\frac{1}{12}$$

Para AC

$$\text{Integrate}[\text{p}\Delta[z, z] \Delta\text{p}[z, z], \{z, 0, 1\}]$$

$$\frac{1}{12}$$

Para AD

$$\text{Integrate}[\Delta[z, z], \{z, 0, 1\}]$$

$$-\frac{1}{6}$$

Integración de las funciones de Green en el esquema SI

Definiciones

Función de Green

$$G[u_-, v_-] := \text{Abs}[u - v] - (u - v)^2 - \frac{1}{6}$$

Primer derivada de la función de Green

$$\text{Gp}[u_-, v_-] := \text{Sign}[u - v] - 2(u - v)$$

Para Aa

$$\text{Integrate} [\text{Gp}[x, y]^2, \{x, 0, 1\}, \{y, 0, 1\}]$$

$$\frac{1}{3}$$

Para Ac

$$\text{Integrate} [\text{Gp}[z, z]^2, \{z, 0, 1\}]$$

$$0$$

APÉNDICE E

CAMPOS FANTASMA EN ACCIÓN

En este apéndice se mostrará la forma en que trabajan los *campos fantasma* para eliminar singularidades de la forma $\delta(0)$ que aparecen en las contracciones para el término $R F_{\gamma\eta} F^{\gamma\eta}$. Nos concentramos en la parte que involucra S_{grav} y $S_{gh}^{(1)}$, es decir,

$$\langle -S_{grav} - S_{gh}^{(1)} \rangle = -\frac{1}{12T} R_{\gamma\delta\epsilon\eta} \int du_3 \langle \dot{y}_3^\gamma y_3^\delta y_3^\epsilon \dot{y}_3^\eta + y_3^\delta y_3^\epsilon (a_3^\gamma a_3^\eta + b_3^\gamma c_3^\eta) \rangle - T\bar{\xi} R. \quad (\text{E.1})$$

Ahora, sólo nos enfocamos en las contracciones de Wick que se generan:

$$\begin{aligned} \langle \dot{y}_3^\gamma y_3^\delta y_3^\epsilon \dot{y}_3^\eta + y_3^\delta y_3^\epsilon (a_3^\gamma a_3^\eta + b_3^\gamma c_3^\eta) \rangle &= \langle \dot{y}_3^\gamma y_3^\delta y_3^\epsilon \dot{y}_3^\eta \rangle + \langle y_3^\delta y_3^\epsilon (a_3^\gamma a_3^\eta + b_3^\gamma c_3^\eta) \rangle - T\bar{\xi} R \\ &= \underbrace{\langle \dot{y}_3^\gamma y_3^\epsilon \rangle \langle y_3^\delta \dot{y}_3^\eta \rangle}_{\mathcal{AC}} + \underbrace{\langle \dot{y}_3^\gamma \dot{y}_3^\eta \rangle \langle y_3^\delta y_3^\epsilon \rangle}_{\mathcal{AD}} + \underbrace{\langle y_3^\delta y_3^\epsilon \rangle (\langle a_3^\gamma a_3^\eta \rangle + \langle b_3^\gamma c_3^\eta \rangle)}_{\mathcal{A}} - T\bar{\xi} R. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Veamos que se obtiene en \mathcal{A}

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \langle y_3^\delta y_3^\epsilon \rangle (\langle a_3^\gamma a_3^\eta \rangle + \langle b_3^\gamma c_3^\eta \rangle) \\ &= -2T\eta^{\delta\epsilon} \Delta_{33} (2T\eta^{\gamma\eta} \delta_{33} - 4T\eta^{\gamma\eta} \delta_{33}) \\ &= -2T\eta^{\delta\epsilon} \Delta_{33} (-2T\eta^{\gamma\eta} \delta_{33}) \\ &= (-2T)^2 \eta^{\delta\epsilon} \eta^{\gamma\eta} \delta_{33} \Delta_{33}. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

De (4.22), se tiene para \mathcal{AD} :

$$\begin{aligned} \mathcal{AD} &= \langle \dot{y}_3^\gamma \dot{y}_3^\eta \rangle \langle y_3^\delta y_3^\epsilon \rangle \\ &= (-2T\eta^{\gamma\eta} \bullet \Delta_{33}) (-2T\eta^{\delta\epsilon} \Delta_{33}) \\ &= (-2T)^2 \bullet \Delta_{33} \Delta_{33} \eta^{\gamma\eta} \eta^{\delta\epsilon} \\ &= (-2T)^2 (1 - \delta_{33}) \Delta_{33} \eta^{\gamma\eta} \eta^{\delta\epsilon}. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Al hacer la suma de \mathcal{A} y \mathcal{AD}

$$\begin{aligned} \mathcal{A} + \mathcal{AD} &= (-2T)^2 \eta^{\gamma\eta} \eta^{\delta\epsilon} \Delta_{33} (\delta_{33} + 1 - \delta_{33}) \\ &= (-2T)^2 \eta^{\gamma\eta} \eta^{\delta\epsilon} \Delta_{33}, \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

con lo cual se elimina $\delta(0)$.

APÉNDICE F

DESARROLLO DE LAS FUNCIONES DE GREEN

En el caso en que se tiene un campo electromagnético constante de fondo, $F_{\mu\nu}$, la acción *línea de mundo* generalizada tiene la forma

$$S_0[x^\mu; F] = \frac{1}{T} \int_0^1 du \left[\frac{1}{4} \dot{y}^\mu(u) g_{\mu\nu}(x_0) \dot{y}^\nu(u) + \frac{1}{2} iT y^\mu(u) F_{\mu\nu}(x_0) \dot{y}^\nu(u) + \frac{1}{2} \psi^\mu(u) g_{\mu\nu}(x_0) \dot{\psi}^\nu(u) - iT \psi^\mu(u) F_{\mu\nu}(x_0) \dot{\psi}^\nu(u) \right], \quad (\text{F.1})$$

lo cual requiere introducir las funciones de Green \mathcal{G}_B y \mathcal{G}_F como se hizo en las secciones 2.4 y 3.2 respectivamente:

$$\mathcal{G}_B(u_1, u_2) = 2 \langle u_1 | \left(\frac{d^2}{du^2} - 2iFT \frac{d}{du} \right)^{-1} | u_2 \rangle, \quad (\text{F.2})$$

$$\mathcal{G}_F(u_1, u_2) = 2 \langle u_1 | \left(\frac{d}{du} - 2iFT \right)^{-1} | u_2 \rangle. \quad (\text{F.3})$$

Su forma explícita en el esquema *SI* es la siguiente

$$\mathcal{G}_B(u_1, u_2) = \frac{1}{2\mathcal{Z}^2} \left(\frac{\mathcal{Z}}{\sin(\mathcal{Z})} e^{-i\mathcal{Z}\dot{G}_{B12}} + i\mathcal{Z}\dot{G}_{B12} - 1 \right), \quad (\text{F.4})$$

$$\mathcal{G}_F(u_1, u_2) = G_{F12} \frac{e^{-i\mathcal{Z}\dot{G}_{B12}}}{\cos(\mathcal{Z})}. \quad (\text{F.5})$$

El lado derecho de estas expresiones se entiende como una serie de potencias de la matriz $\mathcal{Z}_{\mu\nu} := TF_{\mu\nu}(x_0)$, donde los índices se suben y se bajan mediante $g_{\mu\nu}(x_0)$. Es posible observar que la expresión para $\mathcal{G}_{B,F}$ está en términos de las funciones de Green ordinarias \dot{G}_B, G_F .

Para nuestros propósitos es necesario conocer las derivadas de $\mathcal{G}_{B,F}$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{G}}_B(u_1, u_2) &= \frac{i}{\mathcal{Z}} \left(\frac{\mathcal{Z}}{\sin(\mathcal{Z})} e^{-i\mathcal{Z}\dot{G}_{B12}} - 1 \right), \\ \ddot{\mathcal{G}}_B(u_1, u_2) &= 2\delta_{12} - 2 \frac{\mathcal{Z}}{\sin(\mathcal{Z})} e^{-i\mathcal{Z}\dot{G}_{B12}}, \\ \dot{\mathcal{G}}_F(u_1, u_2) &= 2\delta_{12} + 2iG_{F12} \frac{\mathcal{Z}}{\cos(\mathcal{Z})} e^{-i\mathcal{Z}\dot{G}_{B12}}. \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

También se necesitará conocer los límites de coincidencia:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_B(u, u) &= \frac{1}{2\mathcal{Z}^2} \left(\mathcal{Z} \cot(\mathcal{Z}) - 1 \right), \\
\dot{\mathcal{G}}_B(u, u) &= i \cot(\mathcal{Z}) - \frac{i}{\mathcal{Z}}, \\
\ddot{\mathcal{G}}_B(u, u) &= 2\delta(0) - 2\mathcal{Z} \cot(\mathcal{Z}), \\
\mathcal{G}_F(u, u) &= -i \tan(\mathcal{Z}), \\
\dot{\mathcal{G}}_F(u, u) &= 2\delta(0) + 2\mathcal{Z} \tan(\mathcal{Z}).
\end{aligned} \tag{F.7}$$

Para recuperar los resultados perturbativos se requieren los coeficientes en las expansiones $\mathcal{G}_{B,F}$ como potencias de F . Estas expresiones pueden ser escritas como sigue

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_B(u_1, u_2) &= -2 \sum_{n=0}^{\infty} (2i\mathcal{Z})^n g_{n+2}(u_1 - u_2), \\
\dot{\mathcal{G}}_B(u_1, u_2) &= -2 \sum_{n=0}^{\infty} (2i\mathcal{Z})^n g_{n+1}(u_1 - u_2), \\
\ddot{\mathcal{G}}_B(u_1, u_2) &= 2\delta_{12} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (2i\mathcal{Z})^n g_n(u_1 - u_2), \\
\mathcal{G}_F(u_1, u_2) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (2i\mathcal{Z})^n f_{n+1}(u_1 - u_2), \\
\dot{\mathcal{G}}_F(u_1, u_2) &= 2\delta_{12} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2i\mathcal{Z})^n f_n(u_1 - u_2),
\end{aligned} \tag{F.8}$$

donde g_n, f_n son polinomios de $u_1 - u_2$. En términos de $u = u_1 - u_2$ se tiene

$$\begin{aligned}
g_n(u) &= \frac{1}{n!} \mathcal{B}_n(|u|) \text{sign}^n(u), \\
f_n(u) &= \frac{1}{2(n-1)!} \mathcal{E}_{n-1}(|u|) \text{sign}^n(u),
\end{aligned} \tag{F.9}$$

con \mathcal{B}_n el n -ésimo polinomio de Bernoulli, \mathcal{E}_n el n -ésimo polinomio de Euler. Alternativamente, es posible escribir los coeficientes de (F.8) en términos de las funciones de Green en el vacío [63]. Denotando por \bar{G} la función de Green sin el límite de coincidencia

$$\bar{G}(u) := |u| - u^2, \tag{F.10}$$

es posible encontrar

$$\begin{aligned}
g_0(u) &= 1, \\
g_1(u) &= -\frac{1}{2} \dot{\bar{G}}(u), \\
g_2(u) &= -\frac{1}{2} \bar{G}(u) + \frac{1}{12}, \\
g_n(u) &= \begin{cases} \frac{\mathcal{B}_n}{n!} + \frac{1}{2(n-1)!} \sum_{k=1}^{n/2-1} f\left(\frac{n}{2} - 1, k\right) (-\bar{G})^{k+1}(u); & n > 2 \text{ par}, \\ \frac{-1}{2n!} \sum_{k=1}^{(n-1)/2} f\left(\frac{n-1}{2}, k\right) (k+1) \dot{\bar{G}}(u) (-\bar{G})^k(u); & n > 2 \text{ impar}, \end{cases}
\end{aligned} \tag{F.11}$$

y

$$\begin{aligned}
f_1(u) &= \frac{1}{2} \text{sign}(u), \\
f_2(u) &= -\frac{1}{4} \text{sign}(u) \dot{G}(u), \\
f_n(u) &= \begin{cases} -\frac{1}{2n!} \sum_{k=1}^{n/2} s(\frac{n}{2}, k) k \text{sign}(u) \dot{G}(u) (-\bar{G})^{k-1}(u); & n > 2 \text{ par}, \\ \frac{1}{2(n-1)!} \sum_{k=1}^{(n-1)/2} s(\frac{n-1}{2}, k) \text{sign}(u) (-\bar{G})^k(u); & n > 2 \text{ impar}, \end{cases}
\end{aligned} \tag{F.12}$$

donde $f(m, k)$ son los números de Faulhaber y $s(m, k)$ son los números de Salié. Estos números pueden ser definidos en términos de los números de Bernoulli de la siguiente forma [64]

$$\begin{aligned}
f(m, k) &= (-1)^{k+1} \sum_{j=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \frac{1}{k-j} \binom{2k-2j}{k+1} \binom{2m+1}{2j+1} B_{2m-2j}, \\
s(m, k) &= 2(-1)^k \sum_{j=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \frac{1}{2k-2j-1} \binom{2k-2j-1}{k} \binom{2m}{2j} (1-2^{2m-2j}) B_{2m-2j}
\end{aligned} \tag{F.13}$$

($m \geq k \geq 1$).

Ahora se escribe la expansión de (F.8) a orden $O(F^4)$, usando (F.11), (F.12) para los coeficientes

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{B12} &= \bar{G}_{B12} - \frac{1}{6} - \frac{i}{3} \dot{G}_{B12} \bar{G}_{B12} \mathcal{Z} + \left(\frac{1}{3} \bar{G}_{B12}^2 - \frac{1}{90} \right) \mathcal{Z}^2 \\
&\quad - \frac{i}{15} \bar{G}_{B12} \dot{G}_{B12} \left(\bar{G}_{B12} + \frac{1}{3} \right) \mathcal{Z}^3 + \frac{1}{45} \left(2\bar{G}_{B12}^2 \left(\bar{G}_{B12} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{21} \right) \mathcal{Z}^4 + \mathcal{O}(\mathcal{Z}^5),
\end{aligned} \tag{F.14}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{G}}_{B12} &= \dot{G}_{B12} + 2i \left(\bar{G}_{B12} - \frac{1}{6} \right) \mathcal{Z} + \frac{2}{3} \dot{G}_{B12} \bar{G}_{B12} \mathcal{Z}^2 + i \left(\frac{2}{3} \bar{G}_{B12}^2 - \frac{1}{45} \right) \mathcal{Z}^3 \\
&\quad + \frac{2}{15} \bar{G}_{B12} \dot{G}_{B12} \left(\bar{G}_{B12} + \frac{1}{3} \right) \mathcal{Z}^4 + \mathcal{O}(\mathcal{Z}^5),
\end{aligned} \tag{F.15}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathcal{G}}_{B12} &= 2\delta_{12} - 2 + 2i \dot{G}_{B12} \mathcal{Z} - 4 \left(\bar{G}_{B12} - \frac{1}{6} \right) \mathcal{Z}^2 + \frac{4}{3} i \bar{G}_{B12} \dot{G}_{B12} \mathcal{Z}^3 \\
&\quad - \left(\frac{4}{3} \bar{G}_{B12}^2 - \frac{2}{45} \right) \mathcal{Z}^4 + \mathcal{O}(\mathcal{Z}^5),
\end{aligned} \tag{F.16}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{F12} &= G_{F12} - i G_{F12} \dot{G}_{B12} \mathcal{Z} + 2G_{F12} \bar{G}_{B12} \mathcal{Z}^2 - \frac{1}{3} i G_{F12} \dot{G}_{B12} (2\bar{G}_{B12} + 1) \mathcal{Z}^3 \\
&\quad + \frac{2}{3} G_{F12} \bar{G}_{B12} (\bar{G}_{B12} + 1) \mathcal{Z}^4 + \mathcal{O}(\mathcal{Z}^5),
\end{aligned} \tag{F.17}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{G}}_{F12} &= 2\delta_{12} + 2i G_{F12} \mathcal{Z} + 2G_{F12} \dot{G}_{B12} \mathcal{Z}^2 + 4i G_{F12} \bar{G}_{B12} \mathcal{Z}^3 \\
&\quad + \frac{2}{3} G_{F12} \dot{G}_{B12} (2\bar{G}_{B12} + 1) \mathcal{Z}^4 + \mathcal{O}(\mathcal{Z}^5).
\end{aligned} \tag{F.18}$$

Además, el desarrollo del determinante está dado de la siguiente forma:
Para el caso de una partícula escalar:

$$\det^{-1/2} \left[\frac{\sin(FT)}{FT} \right] = \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ par}}}^{\infty} \frac{B_n}{n!n} (2iT)^n \text{tr}[F^n] \right], \quad (\text{F.19})$$

donde B_n son los números de Bernoulli. Para nuestra aproximación se usa

$$e^{-x} \sim 1 - x + \frac{1}{2}x^2. \quad (\text{F.20})$$

Ya que

$$\sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ par}}}^{\infty} \frac{B_n}{n!n} (2iT)^n \text{tr}[F^n] \sim \frac{B_2}{2(2)} (2iT)^2 \text{tr}[F^2] + \frac{B_4}{24(4)} (2iT)^4 \text{tr}[F^4], \quad (\text{F.21})$$

donde se define

$$\text{tr}[F^2] = F^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} F^{\alpha\beta} g_{\beta\mu} = F_{\beta\alpha} F^{\alpha\beta} = -F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (\text{F.22})$$

$$\text{tr}[F^4] = F^{\alpha\beta} F_{\beta\mu} F^{\mu\nu} F_{\nu\alpha}. \quad (\text{F.23})$$

Entonces

$$\det^{-1/2} \left[\frac{\sin(FT)}{FT} \right] \sim 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{B_2}{2(2)} (2iT)^2 \text{tr}[F^2] + \frac{B_4}{24(4)} (2iT)^4 \text{tr}[F^4] \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{B_2}{2(2)} (2iT)^2 \text{tr}[F^2] \right)^2. \quad (\text{F.24})$$

Dado que

$$\frac{B_2}{2(2)} (2iT)^2 \text{tr}[F^2] = \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{6} \right) (-4T^2) (-F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) = \frac{1}{6} T^2 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (\text{F.25})$$

por lo cual

$$\det^{-1/2} \left[\frac{\sin(FT)}{FT} \right] \sim 1 - \frac{1}{12} T^2 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \frac{B_4}{24(4)} (2iT)^4 \text{tr}[F^4] + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{6} T^2 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)^2. \quad (\text{F.27})$$

Para el caso de una partícula con espín 1/2

$$\det^{-1/2} \left[\frac{\tan(FT)}{FT} \right] = \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ par}}}^{\infty} \frac{(2-2^n)B_n}{n!n} (2iT)^n \text{tr}[F^n] \right], \quad (\text{F.28})$$

donde B_n son los números de Bernoulli. Para nuestra aproximación se usa

$$e^{-x} \sim 1 - x + \frac{1}{2}x^2. \quad (\text{F.29})$$

Ya que

$$\sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ par}}}^{\infty} \frac{(2-2^n)B_n}{n!n} (2iT)^n \text{tr}[F^n] \sim \frac{(2-2^2)B_2}{2(2)} (2iT)^2 \text{tr}[F^2] + \frac{(2-2^4)B_4}{24(4)} (2iT)^4 \text{tr}[F^4] \quad (\text{F.30})$$

entonces

$$\begin{aligned} \det^{-1/2} \left[\frac{\tan(FT)}{FT} \right] &\sim 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{(2-2^2)B_2}{2(2)} (2iT)^2 \text{tr}[F^2] + \frac{(2-2^4)B_4}{24(4)} (2iT)^4 \text{tr}[F^4] \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{(2-2^2)B_2}{2(2)} (2iT)^2 \text{tr}[F^2] \right)^2, \end{aligned} \quad (\text{F.31})$$

pero

$$\frac{(2-2^2)B_2}{2(2)} (2iT)^2 \text{tr}[F^2] = \left(-\frac{2}{4} \right) \left(\frac{1}{6} \right) (-4T^2) (-F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) = -\frac{1}{3} T^2 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (\text{F.32})$$

Por lo tanto

$$\det^{-1/2} \left[\frac{\tan(FT)}{FT} \right] \sim 1 + \frac{1}{6} T^2 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{(2-2^4)B_4}{24(4)} (2iT)^4 \text{tr}[F^4] - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} T^2 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)^2. \quad (\text{F.33})$$

APÉNDICE G

RELACIÓN ENTRE LAGRANGIANOS EFECTIVOS

En este apéndice se deduce la relación que existe entre los Lagrangianos efectivos encontrados en cada esquema sobre el que se trabaja.

G.1. Espín cero

Dado que

$$\mathcal{L}_{scalar}^{(DBC)} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[\frac{1}{12} \left(\bar{\xi} + \frac{1}{12} \right) R F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{90} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \frac{1}{60} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{45} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{30} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} - \frac{1}{180} (\nabla^\alpha F_{\alpha\mu})^2 \right],$$

y

$$\mathcal{L}_{scalar}^{(SI)} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[\frac{1}{12} \left(\bar{\xi} + \frac{1}{12} \right) R F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{180} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \frac{1}{72} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{180} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{72} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} \right],$$

de la diferencia se tiene

$$\mathcal{L}_{scalar}^{(SI)} - \mathcal{L}_{scalar}^{(DBC)} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[-\frac{1}{180} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + \frac{1}{360} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{60} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 + \frac{7}{360} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} + \frac{1}{180} (\nabla^\alpha F_{\alpha\mu})^2 \right]. \quad (G.1)$$

pero dado que

$$F_{\mu\nu;\alpha}{}^\alpha F^{\mu\nu} = \nabla^\alpha (F^{\mu\nu} \nabla_\alpha F_{\mu\nu}) - \nabla^\alpha F^{\mu\nu} \nabla_\alpha F_{\mu\nu}, \quad (G.2)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{scalar}^{(SI)} - \mathcal{L}_{scalar}^{(DBC)} &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[-\frac{1}{180} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + \frac{1}{360} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \right. \\
&\quad \left. + \frac{7}{360} \nabla^\alpha (F^{\mu\nu} \nabla_\alpha F_{\mu\nu}) - \frac{1}{360} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{180} (\nabla^\alpha F_{\alpha\mu})^2 \right] \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[\frac{1}{180} ((\nabla^\alpha F_{\alpha\mu})^2 - \frac{1}{2} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \right. \\
&\quad \left. - R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha) + \frac{7}{360} \nabla^\alpha (F^{\mu\nu} \nabla_\alpha F_{\mu\nu}) \right] \quad (G.3)
\end{aligned}$$

Sea

$$D_c = (\nabla^\alpha F_{\alpha\mu})^2 - \frac{1}{2} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha, \quad (G.4)$$

en el tratamiento de esta expresión se usa la identidad (B.13) de la siguiente forma

$$\frac{1}{2} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha = F_\mu{}^\alpha (\nabla_\beta \nabla_\alpha + \nabla_\alpha \nabla_\beta) F^{\mu\beta} - F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu}. \quad (G.5)$$

Además,

$$F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} = 2 F_\mu{}^\alpha F^{\mu\beta}{}_{;\alpha\beta} = 2 F_\mu{}^\alpha \nabla_\beta \nabla_\alpha F^{\mu\beta}. \quad (G.6)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha &= F_\mu{}^\alpha (\nabla_\beta \nabla_\alpha + \nabla_\alpha \nabla_\beta) F^{\mu\beta} - 2 F_\mu{}^\alpha \nabla_\beta \nabla_\alpha F^{\mu\beta} \\
&= F_\mu{}^\alpha (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) F^{\mu\beta}, \quad (G.7)
\end{aligned}$$

por lo cual

$$\begin{aligned}
D_c &= \nabla_\alpha F_\mu{}^\alpha \nabla_\beta F^{\mu\beta} - F_{\mu\alpha;\beta} F^{\mu\beta;\alpha} + F_\mu{}^\alpha (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) F^{\mu\beta} \\
&= \nabla_\alpha F_\mu{}^\alpha \nabla_\beta F^{\mu\beta} - \nabla_\beta F_\mu{}^\alpha \nabla_\alpha F^{\mu\beta} + F_\mu{}^\alpha (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) F^{\mu\beta} \\
&= \nabla_\alpha F_\mu{}^\alpha \nabla_\beta F^{\mu\beta} + F_\mu{}^\alpha \nabla_\alpha \nabla_\beta F^{\mu\beta} - \nabla_\beta F_\mu{}^\alpha \nabla_\alpha F^{\mu\beta} - F_\mu{}^\alpha \nabla_\beta \nabla_\alpha F^{\mu\beta} \\
&= \nabla_\alpha (F_\mu{}^\alpha \nabla_\beta F^{\mu\beta}) - \nabla_\beta (F_\mu{}^\alpha \nabla_\alpha F^{\mu\beta}). \quad (G.8)
\end{aligned}$$

Así que

$$\mathcal{L}_{scalar}^{(SI)} = \mathcal{L}_{scalar}^{(DBC)} + \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[\frac{7}{360} \nabla^\alpha (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu;\alpha}) + \frac{1}{180} \left[\nabla_\alpha (F_\mu{}^\alpha \nabla_\beta F^{\mu\beta}) - \nabla_\beta (F_\mu{}^\alpha \nabla_\alpha F^{\mu\beta}) \right] \right]$$

G.2. Espín 1/2

Para este caso se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{spinor}^{(DBC)} &= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[-\frac{1}{72} R F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{90} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + \frac{1}{40} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \right. \\
&\quad \left. + \frac{7}{360} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{20} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} - \frac{1}{180} (\nabla^\alpha F_{\alpha\mu})^2 \right].
\end{aligned}$$

y

$$\mathcal{L}_{spinor}^{(SI)} = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[-\frac{1}{72} R F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{180} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + \frac{1}{36} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{180} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{36} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} \right].$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{spinor}^{(SI)} - \mathcal{L}_{spinor}^{(DBC)} &= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[\left(\frac{1}{180} - \frac{1}{90} \right) R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{40} \right) R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{180} + \frac{7}{360} \right) (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 + \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{20} \right) F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} + \frac{1}{180} (\nabla^\alpha F_{\alpha\mu})^2 \right] \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[-\frac{1}{180} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + \frac{1}{360} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{40} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{45} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} + \frac{1}{180} (\nabla^\alpha F_{\alpha\mu})^2 \right] \quad (\text{G.9}) \end{aligned}$$

Al usar (G.2) se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{spinor}^{(SI)} - \mathcal{L}_{spinor}^{(DBC)} &= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{m^2} \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{90} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + \frac{1}{180} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{20} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{45} \left(\nabla^\alpha (F^{\mu\nu} \nabla_\alpha F_{\mu\nu}) - \nabla^\alpha F^{\mu\nu} \nabla_\alpha F_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{90} (\nabla^\alpha F_{\alpha\mu})^2 \right], \quad (\text{G.10}) \end{aligned}$$

que al ordenar los términos arroja

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{spinor}^{(SI)} - \mathcal{L}_{spinor}^{(DBC)} &= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{m^2} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{90} \left((\nabla^\alpha F_{\alpha\mu})^2 - \frac{1}{2} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{45} \left(\nabla^\alpha (F^{\mu\nu} \nabla_\alpha F_{\mu\nu}) - (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 \right) - \frac{1}{20} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{180} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2 \right] \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{m^2} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{90} D_c - \frac{2}{45} \nabla^\alpha (F^{\mu\nu} \nabla_\alpha F_{\mu\nu}) \right], \quad (\text{G.11}) \end{aligned}$$

es decir

$$\mathcal{L}_{spinor}^{(SI)} - \mathcal{L}_{spinor}^{(DBC)} = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{m^2} \left[-\frac{1}{45} \nabla^\alpha (F^{\mu\nu} \nabla_\alpha F_{\mu\nu}) + \frac{1}{180} \left[\nabla_\alpha \left(F_\mu{}^\alpha \nabla_\beta F^{\mu\beta} \right) - \nabla_\beta \left(F_\mu{}^\alpha \nabla_\alpha F^{\mu\beta} \right) \right] \right].$$

APÉNDICE H

DESARROLLO FOCK-SCHWINGER Y RIEMANN

Una vez que nuestras expresiones son covariantes ante una translación, es conveniente usar un sistema de referencia que simplifique los cálculos. Este sistema es conocido como coordenadas riemannianas:

$$g_{\mu\nu}(x = x_0 + y) = g_{\mu\nu}(x_0) + \frac{1}{3}R_{\mu\alpha\beta\nu}(x_0)y^\alpha y^\beta + \frac{1}{6}R_{\mu\alpha\beta\nu;\gamma}(x_0)y^\alpha y^\beta y^\gamma + \dots,$$

una vez que llegemos a este punto se introduce un desarrollo del campo electromagnético:

$$A_\mu(x = x_0 + y) = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}(x_0)y^\nu - \frac{1}{3}F_{\mu\nu;\alpha}(x_0)y^\nu y^\alpha - \frac{1}{8}\left[F_{\mu\nu;\alpha\beta}(x_0) + \frac{1}{3}F_{\delta\alpha}(x_0)R_{\beta\nu\mu}^\delta(x_0)\right]y^\alpha y^\beta y^\nu + \dots,$$

al cual se le impone la norma de Fock-Schwinger:

$$y^\mu(u) A_\mu(x_0 + y(u)) = 0,$$

lo que permite simplificar aún más los cálculos.

Cuando se trabaja con una partícula con espín, se introducen términos a la *acción línea de mundo* que están en función de tensor de campo electromagnético y de los símbolos de Christoffel. Para estas cantidades también se realiza un desarrollo de Taylor:

$$F_{\mu\nu}(x_0 + y) = F_{\mu\nu}(x_0) + F_{\mu\nu;\xi}(x_0)y^\xi + \frac{1}{2}F_{\mu\nu;\xi\eta}(x_0)y^\xi y^\eta + \frac{1}{6}\left(F_{\mu\lambda}(x_0)R_{\xi\eta\nu}^\lambda(x_0) - F_{\nu\lambda}(x_0)R_{\xi\eta\mu}^\lambda(x_0)\right)y^\xi y^\eta + \mathcal{O}(y^3),$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\nu(x_0 + y) = \frac{1}{3}\left(R_{\alpha\xi\beta}^\nu(x_0) + R_{\beta\xi\alpha}^\nu(x_0)\right)y^\xi + \dots$$

APÉNDICE I

SPINOR HELICITY

Enseguida se escriben algunos resultados que se emplean en el capítulo 9.

$$\gamma_5 |k\rangle = \gamma_5 \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) u(k) = \frac{1}{2} (\gamma_5 + 1) u(k) = |k\rangle, \quad (\text{I.1})$$

$$\frac{1}{2} (1 + \gamma_5) |k\rangle = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) u(k) = \frac{1}{4} (1 + \gamma_5 + \gamma_5 + 1) u(k) = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) u(k) = |k\rangle, \quad (\text{I.2})$$

$$\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu = \eta_{\mu\alpha} \gamma_\nu + \eta_{\alpha\nu} \gamma_\mu - \eta_{\mu\nu} \gamma_\alpha - i \epsilon_{\sigma\mu\alpha\nu} \gamma^\sigma \gamma_5, \quad (\text{I.3})$$

$$k_i \cdot k_j = \frac{1}{2} \langle i j \rangle [j i], \quad (\text{I.4})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^+(i, q_i) \cdot k_j &= \frac{\langle q_i^- | \gamma_\mu | i^- \rangle}{\sqrt{2} \langle q_i^- | i^+ \rangle} \frac{1}{2} \langle j^+ | \gamma^\mu | j^+ \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\langle i^+ | \gamma_\mu | q_i^+ \rangle \langle j^+ | \gamma^\mu | j^+ \rangle}{\langle q_i i \rangle} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{2 [i j] \langle j q_i \rangle}{\langle q_i i \rangle} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[i j] \langle q_i j \rangle}{\langle i q_i \rangle}, \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^-(i, q_i) \cdot k_j &= -\frac{\langle q_i^+ | \gamma_\mu | i^+ \rangle}{\sqrt{2} \langle q_i^+ | i^- \rangle} \frac{1}{2} \langle j^+ | \gamma^\mu | j^+ \rangle = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\langle q_i^+ | \gamma_\mu | i^+ \rangle \langle j^+ | \gamma^\mu | j^+ \rangle}{[q_i i]} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{2 [q_i j] \langle j i \rangle}{[q_i i]} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle i j \rangle [q_i j]}{[i q_i]}, \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^+(i, q_i) \cdot \varepsilon^+(j, q_j) &= \varepsilon_i^{+\mu} \varepsilon_{\mu j}^+ = \frac{1}{2} \frac{\langle q_i^- | \gamma^\mu | i^- \rangle}{\langle q_i^- | i^+ \rangle} \frac{\langle q_j^- | \gamma_\mu | j^- \rangle}{\langle q_j^- | j^+ \rangle} = \frac{1}{2} \frac{\langle i^+ | \gamma^\mu | q_i^+ \rangle \langle j^+ | \gamma_\mu | q_j^+ \rangle}{\langle q_i i \rangle \langle q_j j \rangle} = \frac{[i j] \langle q_i q_j \rangle}{\langle q_i i \rangle \langle q_j j \rangle} \\ &= -\frac{[i j] \langle q_i q_j \rangle}{\langle i q_i \rangle \langle j q_j \rangle}, \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

$$\varepsilon^-(i, q_i) \cdot \varepsilon^-(j, q_j) = \varepsilon_i^{-\mu} \varepsilon_{\mu j}^- = \frac{1}{2} \frac{\langle q_i^+ | \gamma^\mu | i^+ \rangle}{\langle q_i^+ | i^- \rangle} \frac{\langle q_j^+ | \gamma_\mu | j^+ \rangle}{\langle q_j^+ | j^- \rangle} = \frac{[q_i q_j] \langle j i \rangle}{[q_i i] [q_j j]} = -\frac{\langle i j \rangle [q_i q_j]}{[i q_i] [j q_j]}, \quad (\text{I.8})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^+(i, q_i) \cdot \varepsilon^-(j, q_j) &= -\frac{1}{2} \frac{\langle q_i^- | \gamma^\mu | i^- \rangle}{\langle q_i^- | i^+ \rangle} \frac{\langle q_j^+ | \gamma_\mu | j^+ \rangle}{\langle q_j^+ | j^- \rangle} = -\frac{1}{2} \frac{\langle i^+ | \gamma^\mu | q_i^+ \rangle \langle q_j^+ | \gamma_\mu | j^+ \rangle}{\langle q_i i \rangle [q_j j]} = -\frac{[i q_i] \langle j q_i \rangle}{\langle q_i i \rangle [q_j j]} \\ &= -\frac{[i q_i] \langle j q_i \rangle}{\langle i q_i \rangle [j q_j]}. \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

Una elección correcta del momento de referencia q_i permite simplificar los cálculos ya que al tomar $\varepsilon_i^\pm(q) \equiv \varepsilon^\pm(k_i, q_i = q)$ se encuentra

$$\varepsilon_i^\pm(q) \cdot q = 0, \quad (\text{I.10})$$

$$\varepsilon_i^+(q) \cdot \varepsilon_j^+(q) = \varepsilon_i^-(q) \cdot \varepsilon_j^-(q) = 0, \quad (\text{I.11})$$

$$\varepsilon_i^+(k_j) \cdot \varepsilon_j^-(q) = \varepsilon_i^+(q) \cdot \varepsilon_j^-(k_i) = 0, \quad (\text{I.12})$$

$$\not{\varepsilon}_i^+(k_j)|j^+\rangle = \not{\varepsilon}_i^-(k_j)|j^-\rangle = 0, \quad (\text{I.13})$$

$$\langle j^+|\not{\varepsilon}_i^-(k_j) = \langle j^+|\not{\varepsilon}_i^+(k_j) = 0. \quad (\text{I.14})$$

APÉNDICE J

PROGRAMAS EN MATHEMATICA

En este apéndice se escriben los programas que se elaboran en MATHEMATICA para calcular el Lagrangiano efectivo a orden $RFFF$. Esto es para los casos en que se tiene una partícula escalar y el caso en que se tiene una partícula con espín $1/2$.

En la práctica, primero se realizó el programa para el caso de la partícula de espín $1/2$. Una vez que se tiene este programa, se puede ir de forma muy sencilla al caso de una partícula escalar al hacer cambios sencillos en el valor de $\bar{\xi}$, las funciones de Green $\dot{\mathcal{G}}_F = 0$, $\dot{\mathcal{G}}_F = 0$ y el cambio en el determinante.

En estos programas se usa (F.8) y (F.9), aunque también se elaboraron programas usando (F.10)-(F.13) para verificar los resultados y todo concuerda, pero estos últimos no son mostrados en este trabajo.

Enseguida el programa cuando se tiene una partícula de espín $1/2$:

Iniciar MathTensor

« *MathTensor.m*

Definiciones

Regla para truncar la expansión inversa de masa
 $\text{trunc6} = m^i / ; i < -6 \rightarrow 0$

Función de Green (espacio plano)
 $\text{Gb}[t_]:= t - t^2$

Derivada de Gb
 $\text{Gbp}[t_]:= 1 - 2t$

Números de Faulhaber
 $\text{fa}[m_ , k_]:= (-1)^{k+1} \sum_{j=0}^{\text{Floor}[\frac{k-1}{2}]} \frac{1}{k-j} \text{Binomial}[2k - 2j, k + 1] \text{Binomial}[2m + 1, 2j + 1] \text{BernoulliB}[2m - 2j]$

Números de Salié
 $\text{sa}[m_ , k_]:= 2(-1)^k \sum_{j=0}^{\text{Floor}[\frac{k-1}{2}]} \frac{1}{2k-2j-1} \text{Binomial}[2k - 2j - 1, k] \text{Binomial}[2m, 2j] (1 - 2^{2m-2j}) \text{BernoulliB}[2m - 2j]$

Definición de g_n

$$g[n_-, t_-] := \frac{1}{n!} \text{BernoulliB}[n, t]$$

Definición de f_n

$$f[n_-, t_-] := \frac{1}{2(n-1)!} \text{EulerE}[n-1, t]$$

Definición de los tensores $F2$, $F3$ y $F4$

$$\text{DefineTensor}[F3, \{\{2, 1\}, -1\}]$$

$$\text{DefineTensor}\{\{F2, F4\}, \{\{2, 1\}, 1\}\}$$

Definición de las funciones de Green generalizadas: \mathcal{G}_B y \mathcal{G}_F

$$\begin{aligned} \text{GB}[um_-, un_-, t1_-] := & -2\text{Metricg}[um, un] g[2, t1] - 2(2iT)\text{MaxwellF}[um, un] g[3, t1] \\ & - 2(2iT)^2 F2[um, un] g[4, t1] - 2(2iT)^3 F3[um, un] g[5, t1] - 2(2iT)^4 F4[um, un] g[6, t1] \end{aligned}$$

$$\text{GB}[um_-, un_-, t1_-] := -\frac{1}{6} \text{Metricg}[um, un] - \frac{T^2}{90} F2[um, un] - \frac{T^4}{945} F4[um, un] /; t1 == 0$$

$$\begin{aligned} \text{GBp}[um_-, un_-, t1_-] := & -2\text{Metricg}[um, un] g[1, t1] - 2(2iT)\text{MaxwellF}[um, un] g[2, t1] \\ & - 2(2iT)^2 F2[um, un] g[3, t1] - 2(2iT)^3 F3[um, un] g[4, t1] - 2(2iT)^4 F4[um, un] g[5, t1] \end{aligned}$$

$$\text{GBp}[um_-, un_-, t1_-] := -\frac{iT}{3} \text{MaxwellF}[um, un] - \frac{iT^3}{45} F3[um, un] /; t1 == 0$$

$$\begin{aligned} \text{GBpp}[um_-, un_-, t1_-] := & -2\text{Metricg}[um, un] g[0, t1] - 2(2iT)\text{MaxwellF}[um, un] g[1, t1] \\ & - 2(2iT)^2 F2[um, un] g[2, t1] - 2(2iT)^3 F3[um, un] g[3, t1] - 2(2iT)^4 F4[um, un] g[4, t1] \end{aligned}$$

$$\text{GBpp}[um_-, un_-, t1_-] := -2\text{Metricg}[um, un] + 2\frac{T^2}{3} F2[um, un] + 2\frac{T^4}{45} F4[um, un] /; t1 == 0$$

$$\begin{aligned} \text{GF}[um, un, t1] := & 2\text{Metricg}[um, un] f[1, t1] + 2(2iT)\text{MaxwellF}[um, un] f[2, t1] \\ & + 2(2iT)^2 F2[um, un] f[3, t1] + 2(2iT)^3 F3[um, un] f[4, t1] + 2(2iT)^4 F4[um, un] f[5, t1] \end{aligned}$$

$$\text{GF}[um, un, t1] := -iT \text{MaxwellF}[um, un] - i\frac{T^3}{3} F3[um, un] /; t1 == 0$$

$$\begin{aligned} \text{GFp}[um, un, t1] := & 2(2iT)\text{MaxwellF}[um, un] f[1, t1] + 2(2iT)^2 F2[um, un] f[2, t1] \\ & + 2(2iT)^3 F3[um, un] f[3, t1] + 2(2iT)^4 F4[um, un] f[4, t1] \end{aligned}$$

$$\text{GFp}[um, un, t1] := 2T^2 F2[um, un] + 2\frac{T^4}{3} F4[um, un] /; t1 == 0$$

Cálculos

Cálculos para $F_{\mu\nu;\alpha\beta}$

$$A1 := \frac{iT^2}{8} \text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ln], la, lb] \text{GB}[ua, ub, 0] (\text{GBp}[um, un, 0] - 2\text{GF}[um, un, 0])$$

Cálculos para $F_{\mu\nu;\alpha\beta} + F_{\mu\nu;\beta\alpha}$

$$A2 := \frac{iT^2}{8} (\text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ln], lb, la] + \text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ln], la, lb]) \text{GBp}[um, ub, 0] \text{GB}[un, ua, 0]$$

Cálculos para $R_{\beta\alpha}$

$$A3 := \frac{T}{3} \text{RicciR}[la, lb] \text{GB}[ua, ub, 0]$$

Cálculos para $F_{\lambda\nu}R^{\lambda}_{\alpha\beta\mu}$

$$A4 := -\frac{iT^2}{24} \text{MaxwellF}[le, ln] \text{RiemannR}[ue, la, lb, lm] (\text{GBp}[un, um, 0] \text{GB}[ua, ub, 0] \\ + \text{GBp}[ua, um, 0] \text{GB}[un, ub, 0] + \text{GBp}[ub, um, 0] \text{GB}[un, ua, 0] + 4 \text{GF}[um, un, 0] \text{GB}[ua, ub, 0])$$

Cálculos para $R_{\mu\nu\alpha\beta}$

$$A5 := \frac{T}{12} \text{RiemannR}[lm, la, lb, ln] (\text{GBp}[um, ua, 0] \text{GBp}[ub, un, 0] + \text{GBp}[um, ub, 0] \text{GBp}[ua, un, 0] \\ + \text{GBpp}[um, un, 0] \text{GB}[ua, ub, 0] + \text{GBp}[ua, ub, 0] \text{GF}[um, un, 0] + \text{GBp}[un, ub, 0] \text{GF}[um, ua, 0] \\ - \text{GB}[ua, ub, 0] \text{GFp}[um, un, 0])$$

Cálculos para $F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\mu\nu;\eta}$

$$A6 := -\frac{T^3}{6} \text{CD}[\text{MaxwellF}[la, lb, lc] \text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ln], ld] (\text{GBp}[ua, un, t1] \text{GBp}[ub, um, t1] \text{GB}[uc, ud, t1] \\ + \text{GBp}[ua, un, t1] \text{GB}[ub, ud, t1] \text{GBp}[uc, um, t1] + \frac{3}{2} \text{GB}[uc, ud, t1] \text{GF}[ua, um, t1] \text{GF}[ub, un, t1])$$

Determinante

$$\text{Det} := 1 - \frac{1}{2} \frac{2-2^2}{2(2!)} \text{BernoulliB}[2] (2iT)^2 \text{MaxwellF}[li, lj] \text{MaxwellF}[uj, ui] \\ - \frac{1}{2} \frac{2-2^4}{4(4!)} \text{BernoulliB}[4] (2iT)^4 \text{MaxwellF}[ui, uj] \text{MaxwellF}[lj, lk] \text{MaxwellF}[uk, ul] \text{MaxwellF}[ll, li] \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{2-2^2}{2(2!)} \text{BernoulliB}[2] (2iT)^2 \right)^2 \text{MaxwellF}[li, lj] \text{MaxwellF}[uj, ui] \text{MaxwellF}[lk, ll] \text{MaxwellF}[ul, uk]$$

Integral sobre $t1$

$$\text{Int1} := \text{Integrate}[1 + A1 + A2 + A3 + A4 + A5 + A6, \{t1, 0, 1\}]$$

Normalizar

$$\text{Norm} := \text{Expand} \left[\frac{1}{T^3} (\text{Det}) (\text{Int1}) \right] - \frac{1}{T^3} + \frac{1}{12T^2} \text{ScalarR} - \frac{1}{6T} \text{MaxwellF}[li, lj] \text{MaxwellF}[ui, uj]$$

Integral sobre T

$$\text{IntT} := \text{Integrate}[\text{Exp}[-m^2T] \text{Norm}, \{T, 0, \infty\}, \text{Assumptions} \rightarrow \text{Re}[m^2] > 0]$$

Resultado truncado

$$\text{ResTrunc6} := \text{IntT} /. \text{trunc6}$$

Resultado factorizado

$$\text{RT6Esc} = \text{Expand}[m^2 \text{ResTrunc6}]$$

$$\frac{1}{270} (F_{ab};^m) (F_m^a;^b) - \frac{1}{270} (F_{ab};c) (F^{ab};c) - \frac{(F_{ab};c) (F_m^b;^c) (F2^{am})}{180m^4} + \frac{(F_{ab};^m) (F_{mn};^b) (F2^{an})}{5670m^4} \\ - \frac{(F_{ab};c) (F_n^b;^c) (F2^{an})}{5670m^4} + \frac{2 (F_{ab};^m) (F_m^a;^d) (F2^{bd})}{2835m^4} + \frac{(F_{ab};c) (F_m^a;^c) (F2^{bm})}{5670m^4} \\ + \frac{(F_{ab};c) (F_n^a;^c) (F2^{bn})}{180m^4} - \frac{2 (F_{ab};c) (F^{ab};d) (F2^{cd})}{2835m^4} + \frac{(F_{ab};c) (F_m^a;^b) (F2^{cm})}{5670m^4} + \frac{(F_{mn};^b)^n (F3^{bm})}{1080m^4} \\ + \frac{(F_{mn};^n;^b) (F3^{bm})}{1080m^4} + \frac{29 (F_{mn};^a) (F3^{mn})}{1080m^4} + \frac{(F_{ab};^m) (F_{mn};^d) (F^{an}) (F^{bd})}{5670m^4} + \frac{1}{144} (F_{mn};^b)^n (F^{bm})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{144} (F_{mn;n_b}) (F^{bm}) + \frac{(F_{mn;ab}) (\mathbf{F2}^{an}) (F^{bm})}{1080m^4} + \frac{(F_{mn;ba}) (\mathbf{F2}^{an}) (F^{bm})}{1080m^4} - \frac{(F_{ab;c}) (F_{mn;c}) (F^{an}) (F^{bm})}{2835m^4} \\
& - \frac{(F_{ab;c}) (F_{mn;c}) (F^{am}) (F^{bn})}{90m^4} + \frac{(F_{ab;c}) (F_m^b;d) (F^{am}) (F^{cd})}{180m^4} - \frac{(F_{ab;c}) (F_n^b;d) (F^{an}) (F^{cd})}{5670m^4} \\
& + \frac{(F_{ab;c}) (F_m^a;d) (F^{bm}) (F^{cd})}{5670m^4} - \frac{(F_{ab;c}) (F_n^a;d) (F^{bn}) (F^{cd})}{180m^4} - \frac{(F_{ab;c}) (F_{mn;b}) (F^{an}) (F^{cm})}{2835m^4} \\
& + \frac{(F_{ab;c}) (F_m^a;d) (F^{bd}) (F^{cm})}{5670m^4} - \frac{1}{72} R (F_{ij}) (F^{ij}) + \frac{(F_{ab;m}) (F_m^a;b) (F_{ij}) (F^{ij})}{810m^4} \\
& - \frac{(F_{ab;c}) (F^{ab;c}) (F_{ij}) (F^{ij})}{810m^4} + \frac{(F_{mn;b^n}) (F_{ij}) (F^{bm}) (F^{ij})}{432m^4} + \frac{(F_{mn;n_b}) (F_{ij}) (F^{bm}) (F^{ij})}{432m^4} \\
& + \frac{7 (F_{il}) (F_{jk}) (F^{ij}) (F^{kl})}{180m^2} - \frac{7R (F_{il}) (F_{jk}) (F^{ij}) (F^{kl})}{1080m^4} + \frac{(F_{ij}) (F_{kl}) (F^{ij}) (F^{kl})}{72m^2} \\
& - \frac{R (F_{ij}) (F_{kl}) (F^{ij}) (F^{kl})}{432m^4} + \frac{5}{144} (F_{mn;a^a}) (F^{mn}) + \frac{(F_{mn;ab}) (\mathbf{F2}^{ab}) (F^{mn})}{216m^4} + \frac{5 (F_{mn;a^a}) (F_{ij}) (F^{ij}) (F^{mn})}{432m^4} \\
& - \frac{1}{180} (\mathbf{F2}^{ab}) (R_{ab}) - \frac{(\mathbf{F4}^{ab}) (R_{ab})}{945m^4} - \frac{(\mathbf{F2}^{ab}) (F_{ij}) (F^{ij}) (R_{ab})}{540m^4} - \frac{1}{54} (\mathbf{F2}^{mn}) (R_{mn}) \\
& - \frac{7 (\mathbf{F4}^{mn}) (R_{mn})}{405m^4} - \frac{(\mathbf{F2}^{mn}) (F_{ij}) (F^{ij}) (R_{mn})}{162m^4} - \frac{59 (\mathbf{F3}^{mn}) (F_{en}) (R_m^e)}{3240m^4} - \frac{11}{432} (F_{en}) (F^{mn}) (R_m^e) \\
& - \frac{11 (F_{en}) (F_{ij}) (F^{ij}) (F^{mn}) (R_m^e)}{1296m^4} - \frac{(\mathbf{F2}^{ab}) (\mathbf{F2}^{mn}) (R_{ambn})}{405m^4} + \frac{(\mathbf{F3}^{mn}) (F^{ab}) (R_{ambn})}{54m^4} \\
& + \frac{(\mathbf{F3}^{bn}) (F^{am}) (R_{ambn})}{405m^4} - \frac{(\mathbf{F3}^{bm}) (F^{an}) (R_{ambn})}{810m^4} - \frac{(\mathbf{F3}^{an}) (F^{bm}) (R_{ambn})}{810m^4} - \frac{1}{108} (F^{an}) (F^{bm}) (R_{ambn}) \\
& + \frac{7 (\mathbf{F3}^{am}) (F^{bn}) (R_{ambn})}{405m^4} + \frac{1}{54} (F^{am}) (F^{bn}) (R_{ambn}) - \frac{(F_{ij}) (F^{an}) (F^{bm}) (F^{ij}) (R_{ambn})}{324m^4} \\
& + \frac{(F_{ij}) (F^{am}) (F^{bn}) (F^{ij}) (R_{ambn})}{162m^4} + \frac{(\mathbf{F3}^{ab}) (F^{mn}) (R_{ambn})}{270m^4} + \frac{1}{36} (F^{ab}) (F^{mn}) (R_{ambn}) \\
& + \frac{(F_{ij}) (F^{ab}) (F^{ij}) (F^{mn}) (R_{ambn})}{108m^4} - \frac{(\mathbf{F3}^{bm}) (F_e^a) (R_{a^e}^b m)}{3240m^4} - \frac{(\mathbf{F3}^{am}) (F_e^b) (R_{a^e}^b m)}{3240m^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(F2^{bn})(F_{en})(F^{am})(R_a^e{}_{bm})}{3240m^4} - \frac{1}{432}(F_e^b)(F^{am})(R_a^e{}_{bm}) - \frac{(F2^{an})(F_{en})(F^{bm})(R_a^e{}_{bm})}{3240m^4} \\
& -\frac{1}{432}(F_e^a)(F^{bm})(R_a^e{}_{bm}) - \frac{(F_e^b)(F_{ij})(F^{am})(F^{ij})(R_a^e{}_{bm})}{1296m^4} - \frac{(F_e^a)(F_{ij})(F^{bm})(F^{ij})(R_a^e{}_{bm})}{1296m^4} \\
& -\frac{11(F2^{ab})(F_{en})(F^{mn})(R_a^e{}_{bm})}{3240m^4}
\end{aligned}$$

Reglas para simplificar

- R1 := MaxwellF[ui, uj] MaxwellF[li, lj] → (MaxwellF[li, lj])^2
- R2 := F2[um, un] RicciR[lm, ln] → F2[ua, ub] RicciR[la, lb]
- R3 := CD[MaxwellF[la, lb], lc] CD[MaxwellF[lm, ua], uc] F2[ub, um] →
 - CD[MaxwellF[la, lb], lc] CD[MaxwellF[lm, ub], uc] F2[ua, um]
- R4 := CD[MaxwellF[la, lb], lc] CD[MaxwellF[ln, ua], uc] F2[ub, un] →
 - CD[MaxwellF[la, lb], lc] CD[MaxwellF[lm, ub], uc] F2[ua, um]
- R5 := F4[um, un] RicciR[lm, ln] → F4[ua, ub] RicciR[la, lb]
- R6 := MaxwellF[lf, un] MaxwellF[uf, um] RicciR[lm, ln] → -F2[ua, ub] RicciR[la, lb]
- R7 := MaxwellF[lf, ub] MaxwellF[uf, ua] RicciR[la, lb] → -F2[ua, ub] RicciR[la, lb]
- R8 := MaxwellF[lf, ub] MaxwellF[ua, uf] RicciR[la, lb] → F2[ua, ub] RicciR[la, lb]
- R9 := CD[MaxwellF[la, lb], lc] CD[MaxwellF[ua, ub], uc] → (CD[MaxwellF[la, lb], lc])^2
- R10 := MaxwellF[le, ln] MaxwellF[um, un] RicciR[lm, ue] → -F2[ua, ub] RicciR[la, lb]
- R11 := F3[um, un] MaxwellF[le, ln] RicciR[lm, ue] → -F4[ua, ub] RicciR[la, lb]
- R12 := CD[MaxwellF[la, lb], lc] CD[MaxwellF[lm, ua], uc] F2[uc, um] →
 CD[MaxwellF[la, lb], uc] CD[MaxwellF[lm, ua], ld] F2[ub, ud]
- R13 := CD[MaxwellF[la, lb], lc] CD[MaxwellF[ln, ub], uc] F2[ua, un] →
 CD[MaxwellF[la, lb], lc] CD[MaxwellF[lm, ub], uc] F2[ua, um]
- R14 := CD[MaxwellF[la, lb], um] CD[MaxwellF[lm, ln], ub] F2[ua, un] →
 - CD[MaxwellF[la, lb], um] CD[MaxwellF[lm, ua], ld] F2[ub, ud] -
 CD[MaxwellF[la, lb], lc] CD[MaxwellF[lm, ub], uc] F2[ua, um]
- R15 := CD[MaxwellF[la, lb], um] CD[MaxwellF[lm, ua], ub] → -½(CD[MaxwellF[la, lb], lc])^2
- R16 := CD[MaxwellF[la, lb], lc] CD[MaxwellF[lm, ln], uc] MaxwellF[ua, um] MaxwellF[ub, un] →
 -CD[MaxwellF[la, lb], lc] CD[MaxwellF[lm, ln], uc] MaxwellF[ua, un] MaxwellF[ub, um]
- R17 := F3[ub, um] MaxwellF[ua, un] RiemannR[la, lm, lb, ln] →
 F3[um, un] MaxwellF[ua, ub] RiemannR[la, lm, lb, ln]

$$R18 := F3[ua, un] MaxwellF[ub, um] RiemannR[la, lm, lb, ln] \rightarrow \\ F3[um, un] MaxwellF[ua, ub] RiemannR[la, lm, lb, ln]$$

$$R19 := F3[ua, um] MaxwellF[ub, un] RiemannR[la, lm, lb, ln] \rightarrow \\ F3[ub, un] MaxwellF[ua, um] RiemannR[la, lm, lb, ln]$$

$$R20 := F3[um, un] MaxwellF[ua, ub] RiemannR[la, lm, lb, ln] \rightarrow \\ F3[ua, ub] MaxwellF[um, un] RiemannR[la, lm, lb, ln]$$

$$R21 := F3[ub, um] MaxwellF[le, ua] RiemannR[la, ue, lb, lm] \rightarrow \\ -F3[ub, un] MaxwellF[ua, um] RiemannR[la, lm, lb, ln]$$

$$R22 := F3[ua, um] MaxwellF[le, ub] RiemannR[la, ue, lb, lm] \rightarrow \\ -F3[ua, ub] MaxwellF[um, un] RiemannR[la, lm, lb, ln]$$

$$R23 := F2[ub, un] MaxwellF[le, ln] MaxwellF[ua, um] RiemannR[la, ue, lb, lm] \rightarrow \\ -F3[ua, ub] MaxwellF[um, un] RiemannR[la, lm, lb, ln]$$

$$R24 := F2[ua, un] MaxwellF[le, ln] MaxwellF[ub, um] RiemannR[la, ue, lb, lm] \rightarrow \\ -F3[ua, um] MaxwellF[ub, un] RiemannR[la, lm, lb, ln]$$

$$R25 := F3[ub, un] MaxwellF[ua, um] RiemannR[la, lm, lb, ln] \rightarrow \\ F3[ua, um] MaxwellF[ub, un] RiemannR[la, lm, lb, ln]$$

$$R26 := CD[MaxwellF[la, lb], lc] CD[MaxwellF[ua, ub], ld] F2[uc, ud] \rightarrow \\ -2 CD[MaxwellF[la, lb], um] CD[MaxwellF[lm, ua], ld] F2[ub, ud]$$

$$R27 := MaxwellF[le, ub] MaxwellF[ua, um] RiemannR[la, ue, lb, lm] \rightarrow \\ -MaxwellF[ua, ub] MaxwellF[um, un] RiemannR[la, lm, lb, ln]$$

$$R28 := MaxwellF[le, ua] MaxwellF[ub, um] RiemannR[la, ue, lb, lm] \rightarrow \\ -MaxwellF[ua, um] MaxwellF[ub, un] RiemannR[la, lm, lb, ln]$$

$$R29 := MaxwellF[le, ln] MaxwellF[um, un] RiemannR[la, ue, lb, lm] \rightarrow \\ -F2[um, un] RiemannR[la, lm, lb, ln]$$

$$R30 := MaxwellF[ua, un] MaxwellF[ub, um] RiemannR[la, lm, lb, ln] \rightarrow \\ MaxwellF[ua, ub] MaxwellF[um, un] RiemannR[la, lm, lb, ln]$$

$$R31 := CD[MaxwellF[lm, ln], lb, un] F3[ub, um] \rightarrow -CD[MaxwellF[lm, ln], un, lb] F3[ub, um] \\ -\frac{1}{2} F3[ua, um] MaxwellF[ub, un] RiemannR[la, lm, lb, ln] - F4[ua, ub] RicciR[la, lb] \\ - CD[MaxwellF[lm, ln], la, ua] F3[um, un]$$

$$R32 := CD[MaxwellF[lm, ln], lb, un] MaxwellF[ub, um] \rightarrow -CD[MaxwellF[lm, ln], un, lb] MaxwellF[ub, um] \\ -\frac{1}{2} MaxwellF[ua, um] MaxwellF[ub, un] RiemannR[la, lm, lb, ln] - F2[ua, ub] RicciR[la, lb] \\ - CD[MaxwellF[lm, ln], la, ua] MaxwellF[um, un]$$

$$R33 := MaxwellF[ua, ub] MaxwellF[um, un] RiemannR[la, lm, lb, ln] \rightarrow \\ \frac{1}{2} MaxwellF[ua, um] MaxwellF[ub, un] RiemannR[la, lm, lb, ln]$$

$$R34 := F3[ua, ub] MaxwellF[um, un] RiemannR[la, lm, lb, ln] \rightarrow \\ \frac{1}{2} F3[ua, um] MaxwellF[ub, un] RiemannR[la, lm, lb, ln]$$

$$R35 := CD[MaxwellF[lm, ln], lb, la] F2[ua, un] MaxwellF[ub, um] \rightarrow \\ CD[MaxwellF[lm, ln], la, lb] F2[ua, un] MaxwellF[ub, um] \\ +\frac{1}{2} F3[ua, um] MaxwellF[ub, un] RiemannR[la, lm, lb, ln] \\ +F2[ua, ub] F2[um, un] RiemannR[la, lm, lb, ln]$$

$$R36 := CD[MaxwellF[la, lb], lc] CD[MaxwellF[ln, ua], ld] MaxwellF[ub, un] MaxwellF[uc, ud] \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \text{CD}[\text{MaxwellF}[la, lb], lc] \text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ua], ld] \text{MaxwellF}[ub, um] \text{MaxwellF}[uc, ud] \\
\text{R37} & := \text{CD}[\text{MaxwellF}[la, lb], lc] \text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ub], ld] \text{MaxwellF}[ua, um] \text{MaxwellF}[uc, ud] \rightarrow \\
& \quad - \text{CD}[\text{MaxwellF}[la, lb], lc] \text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ua], ld] \text{MaxwellF}[ub, um] \text{MaxwellF}[uc, ud] \\
\text{R38} & := \text{CD}[\text{MaxwellF}[la, lb], lc] \text{CD}[\text{MaxwellF}[ln, ub], ld] \text{MaxwellF}[ua, un] \text{MaxwellF}[uc, ud] \rightarrow \\
& \quad - \text{CD}[\text{MaxwellF}[la, lb], lc] \text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ua], ld] \text{MaxwellF}[ub, um] \text{MaxwellF}[uc, ud] \\
\text{R39} & := \text{CD}[\text{MaxwellF}[la, lb], lc] \text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ln], ub] \text{MaxwellF}[ua, un] \text{MaxwellF}[uc, um] \rightarrow \\
& \quad - \text{CD}[\text{MaxwellF}[la, lb], lc] \text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ua], ld] \text{MaxwellF}[ub, ud] \text{MaxwellF}[uc, um] \\
& \quad + \text{CD}[\text{MaxwellF}[la, lb], lc] \text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ua], ld] \text{MaxwellF}[ub, um] \text{MaxwellF}[uc, ud] \\
\text{R40} & := \text{CD}[\text{MaxwellF}[la, lb], lc] \text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ua], ld] \text{MaxwellF}[ub, ud] \text{MaxwellF}[uc, um] \rightarrow \\
& \quad \frac{1}{2} \text{CD}[\text{MaxwellF}[la, lb], lc] \text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ln], uc] \text{MaxwellF}[ua, um] \text{MaxwellF}[ub, un] \\
& \quad + \text{CD}[\text{MaxwellF}[la, lb], lc] \text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ua], ld] \text{MaxwellF}[ub, um] \text{MaxwellF}[uc, ud] \\
\text{R41} & := \text{CD}[\text{MaxwellF}[la, lb], lc] \text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ln], uc] \text{MaxwellF}[ua, un] \text{MaxwellF}[ub, um] \rightarrow \\
& \quad - \text{CD}[\text{MaxwellF}[la, lb], lc] \text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ln], uc] \text{MaxwellF}[ua, um] \text{MaxwellF}[ub, un] \\
\text{R42} & := \text{CD}[\text{MaxwellF}[la, lb], lc] \text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ln], ub] \text{MaxwellF}[uc, um] \text{MaxwellF}[ua, un] \rightarrow \\
& \quad - \frac{1}{2} \text{CD}[\text{MaxwellF}[la, lb], lc] \text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ln], uc] \text{MaxwellF}[ua, um] \text{MaxwellF}[ub, un] \\
\text{R43} & := \text{CD}[\text{MaxwellF}[la, lb], um] \text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ln], ld] \text{MaxwellF}[ub, ud] \text{MaxwellF}[ua, un] \rightarrow \\
& \quad - \frac{1}{2} \text{CD}[\text{MaxwellF}[la, lb], lc] \text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ln], uc] \text{MaxwellF}[ua, um] \text{MaxwellF}[ub, un] \\
\text{R44} & := \text{MaxwellF}[lk, ll] \text{MaxwellF}[uk, ul] \rightarrow (\text{MaxwellF}[lk, ll])^2 \\
\text{R45} & := (\text{MaxwellF}[li, lj])^2 (\text{MaxwellF}[lk, ll])^2 \rightarrow (\text{MaxwellF}[li, lj])^4
\end{aligned}$$

Resultado simplificado

$$\begin{aligned}
\text{RT6SEsc} & := \text{Expand}[\text{RT6Esc} /. \text{R1} /. \text{R2} /. \text{R3} /. \text{R4} /. \text{R5} /. \text{R6} /. \text{R7} /. \text{R8} /. \text{R9} /. \text{R10} /. \text{R11} /. \text{R12} /. \text{R13} \\
& \quad /. \text{R14} /. \text{R15} /. \text{R16} /. \text{R17} /. \text{R18} /. \text{R19} /. \text{R20} /. \text{R21} /. \text{R22} /. \text{R23} /. \text{R24} /. \text{R25} /. \text{R26} /. \text{R27} \\
& \quad /. \text{R28} /. \text{R29} /. \text{R30} /. \text{R31} /. \text{R32} /. \text{R33} /. \text{R34} /. \text{R35} /. \text{R36} /. \text{R37} /. \text{R38} /. \text{R39} /. \text{R40} /. \text{R41} \\
& \quad /. \text{R42} /. \text{R43} /. \text{R44} /. \text{R45}
\end{aligned}$$

Resultado Final

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{180} (F_{ab;c})^2 - \frac{11 (F_{ab;c}) (F_m{}^b{}_c) (F2^{am})}{945m^4} + \frac{2 (F_{ab}{}^m) (F_m{}^a{}_d) (F2^{bd})}{945m^4} \\
& + \frac{7 (F_{mn;a}{}^a) (F3^{mn})}{270m^4} - \frac{1}{72} R (F_{ij})^2 - \frac{(F_{ab;c})^2 (F_{ij})^2}{540m^4} + \frac{(F_{ij})^4}{72m^2} - \frac{R (F_{ij})^4}{432m^4} + \frac{(F_{mn;ab}) (F2^{an}) (F^{bm})}{540m^4} \\
& - \frac{2 (F_{ab;c}) (F_{mn}{}^c) (F^{am}) (F^{bn})}{189m^4} - \frac{2 (F_{ab;c}) (F_m{}^a{}_d) (F^{bm}) (F^{cd})}{189m^4} + \frac{7 (F_{il}) (F_{jk}) (F^{ij}) (F^{kl})}{180m^2} \\
& - \frac{7R (F_{il}) (F_{jk}) (F^{ij}) (F^{kl})}{1080m^4} + \frac{1}{36} (F_{mn;a}{}^a) (F^{mn}) + \frac{(F_{mn;ab}) (F2^{ab}) (F^{mn})}{216m^4} + \frac{(F_{mn;a}{}^a) (F_{ij})^2 (F^{mn})}{108m^4} \\
& - \frac{1}{180} (F2^{ab}) (R_{ab}) - \frac{(F4^{ab}) (R_{ab})}{945m^4} - \frac{(F2^{ab}) (F_{ij})^2 (R_{ab})}{540m^4} + \frac{(F2^{ab}) (F2^{mn}) (R_{ambn})}{540m^4}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{11 (F3^{am}) (F^{bn}) (R_{ambn})}{360m^4} + \frac{1}{36} (F^{am}) (F^{bn}) (R_{ambn}) + \frac{(F_{ij})^2 (F^{am}) (F^{bn}) (R_{ambn})}{108m^4}$$

Ahora el programa cuando se tiene una partícula escalar:

Iniciar MathTensor

« MathTensor.m

Definiciones

Reglas para truncar la expansión inversa de masa

$$\text{trunc6} = m^i / ; i < -6 \rightarrow 0$$

Función de Green (espacio plano)

$$\text{Gb}[t_] := t - t^2$$

Derivada de Gb

$$\text{Gbp}[t_] := 1 - 2t$$

Números de Faulhaber

$$\text{fa}[m_ , k_] := (-1)^{k+1} \sum_{j=0}^{\text{Floor}[\frac{k-1}{2}]} \frac{1}{k-j} \text{Binomial}[2k-2j, k+1] \text{Binomial}[2m+1, 2j+1] \text{BernoulliB}[2m-2j]$$

Números de Salié

$$\text{sa}[m_ , k_] := 2(-1)^k \sum_{j=0}^{\text{Floor}[\frac{k-1}{2}]} \frac{1}{2k-2j-1} \text{Binomial}[2k-2j-1, k] \text{Binomial}[2m, 2j] \frac{(1-2^{2m-2j})}{\text{BernoulliB}[2m-2j]}$$

Definición de g_n

$$\text{g}[n_ , t_] := \frac{1}{n!} \text{BernoulliB}[n, t]$$

Definición de f_n

$$\text{f}[n_ , t_] := \frac{1}{2(n-1)!} \text{EulerE}[n-1, t]$$

Definición de los tensores $F2$, $F3$ y $F4$

$$\text{DefineTensor}[\text{F3}, \{\{2, 1\}, -1\}]$$

$$\text{DefineTensor}[\{\text{F2}, \text{F4}\}, \{\{2, 1\}, 1\}]$$

Definición de las funciones de Green generalizadas \mathcal{G}_B y \mathcal{G}_F

$$\text{GB}[um_ , un_ , t1_] := -2\text{Metricg}[um, un] \text{g}[2, t1] - 2(2iT)\text{MaxwellF}[um, un] \text{g}[3, t1] \\ - 2(2iT)^2 \text{F2}[um, un] \text{g}[4, t1] - 2(2iT)^3 \text{F3}[um, un] \text{g}[5, t1] - 2(2iT)^4 \text{F4}[um, un] \text{g}[6, t1]$$

$$\text{GB}[um_ , un_ , t1_] := -\frac{1}{6} \text{Metricg}[um, un] - \frac{T^2}{90} \text{F2}[um, un] - \frac{T^4}{945} \text{F4}[um, un] / ; t1 == 0$$

$$\text{GBp}[um_ , un_ , t1_] := -2\text{Metricg}[um, un] \text{g}[1, t1] - 2(2iT)\text{MaxwellF}[um, un] \text{g}[2, t1] \\ - 2(2iT)^2 \text{F2}[um, un] \text{g}[3, t1] - 2(2iT)^3 \text{F3}[um, un] \text{g}[4, t1] - 2(2iT)^4 \text{F4}[um, un] \text{g}[5, t1]$$

$$\text{GBp}[um_ , un_ , t1_] := -\frac{iT}{3} \text{MaxwellF}[um, un] - \frac{iT^3}{45} \text{F3}[um, un] /; t1 == 0$$

$$\text{GBpp}[um_ , un_ , t1_] := -2 \text{Metricg}[um, un] \text{g}[0, t1] - 2(2iT) \text{MaxwellF}[um, un] \text{g}[1, t1] \\ - 2(2iT)^2 \text{F2}[um, un] \text{g}[2, t1] - 2(2iT)^3 \text{F3}[um, un] \text{g}[3, t1] - 2(2iT)^4 \text{F4}[um, un] \text{g}[4, t1]$$

$$\text{GBpp}[um_ , un_ , t1_] := -2 \text{Metricg}[um, un] + 2\frac{T^2}{3} \text{F2}[um, un] + 2\frac{T^4}{45} \text{F4}[um, un] /; t1 == 0$$

$$\text{GF}[um_ , un_ , t1_] := 0$$

$$\text{GFp}[um_ , un_ , t1_] := 0$$

Cálculos

Cálculos para $F_{\mu\nu;\alpha\beta}$

$$\text{A1} := \frac{iT^2}{8} \text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ln], la, lb] \text{GB}[ua, ub, 0] (\text{GBp}[um, un, 0] - 2 \text{GF}[um, un, 0])$$

Cálculos para $F_{\mu\nu;\alpha\beta} + F_{\mu\nu;\beta\alpha}$

$$\text{A2} := \frac{iT^2}{8} (\text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ln], lb, la] + \text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ln], la, lb]) \text{GBp}[um, ub, 0] \text{GB}[un, ua, 0]$$

Cálculos para $R_{\beta\alpha}$

$$\text{A3} := \frac{T}{3} \text{RicciR}[la, lb] \text{GB}[ua, ub, 0]$$

Cálculos para $F_{\lambda\nu} R^{\lambda}_{\alpha\beta\mu}$

$$\text{A4} := -\frac{iT^2}{24} \text{MaxwellF}[le, ln] \text{RiemannR}[ue, la, lb, lm] (\text{GBp}[un, um, 0] \text{GB}[ua, ub, 0] \\ + \text{GBp}[ua, um, 0] \text{GB}[un, ub, 0] + \text{GBp}[ub, um, 0] \text{GB}[un, ua, 0] + 4 \text{GF}[um, un, 0] \text{GB}[ua, ub, 0])$$

Cálculos para $R_{\mu\nu\alpha\beta}$

$$\text{A5} := \frac{T}{12} \text{RiemannR}[lm, la, lb, ln] (\text{GBp}[um, ua, 0] \text{GBp}[ub, un, 0] + \text{GBp}[um, ub, 0] \text{GBp}[ua, un, 0] \\ + \text{GBpp}[um, un, 0] \text{GB}[ua, ub, 0] + \text{GBp}[ua, ub, 0] \text{GF}[um, un, 0] + \text{GBp}[un, ub, 0] \text{GF}[um, ua, 0] \\ - \text{GB}[ua, ub, 0] \text{GFp}[um, un, 0])$$

Cálculos para $F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\mu\nu;\eta}$

$$\text{A6} := -\frac{T^3}{6} \text{CD}[\text{MaxwellF}[la, lb], lc] \text{CD}[\text{MaxwellF}[lm, ln], ld] (\text{GBp}[ua, un, t1] \text{GBp}[ub, um, t1] \text{GB}[uc, ud, t1] \\ + \text{GBp}[ua, un, t1] \text{GB}[ub, ud, t1] \text{GBp}[uc, um, t1] + \frac{3}{2} \text{GB}[uc, ud, t1] \text{GF}[ua, um, t1] \text{GF}[ub, un, t1])$$

Determinante

$$\text{Det} := 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{2(2i)} \text{BernoulliB}[2] (2iT)^2 \text{MaxwellF}[li, lj] \text{MaxwellF}[uj, ui] \\ - \frac{1}{2} \frac{1}{4(4i)} \text{BernoulliB}[4] (2iT)^4 \text{MaxwellF}[ui, uj] \text{MaxwellF}[lj, lk] \text{MaxwellF}[uk, ul] \text{MaxwellF}[ll, li] \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2(2i)} \text{BernoulliB}[2] (2iT)^2 \right)^2 \text{MaxwellF}[li, lj] \text{MaxwellF}[uj, ui] \text{MaxwellF}[lk, ll] \text{MaxwellF}[ul, uk]$$

Integral sobre t1

$$\text{Int1} := \text{Integrate}[1 - T\bar{\xi} \text{ScalarR} + \text{A1} + \text{A2} + \text{A3} + \text{A4} + \text{A5} + \text{A6}, \{t1, 0, 1\}]$$

Normalizar

$$\text{Norm} := \text{Expand} \left[\frac{1}{T^3} (\text{Det}) (\text{Int1}) \right] - \frac{1}{T^3} + \frac{1}{12T^2} \text{ScalarR} + \frac{\bar{\xi}}{T^2} \text{ScalarR} + \frac{1}{12T} \text{MaxwellF}[li, lj] \text{MaxwellF}[ui, uj]$$

Integral sobre T

IntT := Integrate [Exp $[-m^2 T]$ Norm, {T, 0, ∞ }, Assumptions \rightarrow Re $[m^2] > 0$]

Resultado truncado

ResTrunc6 := IntT/.trunc6

Resultado factorizado

RT6Esc = Expand $[m^2$ ResTrunc6]

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{270} (F_{ab};^m) (F_m^a;^b) - \frac{1}{270} (F_{ab};c) (F^{abc};) + \frac{(F_{ab};^m) (F_{mn};^b) (F2^{an})}{5670m^4} - \frac{(F_{ab};c) (F_n^b;^c) (F2^{an})}{5670m^4} \\
& + \frac{2 (F_{ab};^m) (F_m^a;^d) (F2^{bd})}{2835m^4} + \frac{(F_{ab};c) (F_m^a;^c) (F2^{bm})}{5670m^4} - \frac{2 (F_{ab};c) (F^{ab};d) (F2^{cd})}{2835m^4} + \frac{(F_{ab};c) (F_m^a;^b) (F2^{cm})}{5670m^4} \\
& + \frac{(F_{mn};b^n) (F3^{bm})}{1080m^4} + \frac{(F_{mn};^n b) (F3^{bm})}{1080m^4} - \frac{(F_{mn};a^a) (F3^{mn})}{1080m^4} + \frac{(F_{ab};^m) (F_{mn};d) (F^{an}) (F^{bd})}{5670m^4} \\
& \frac{1}{144} (F_{mn};b^n) (F^{bm}) + \frac{1}{144} (F_{mn};^n b) (F^{bm}) + \frac{(F_{mn};ab) (F2^{an}) (F^{bm})}{1080m^4} + \frac{(F_{mn};ba) (F2^{an}) (F^{bm})}{1080m^4} \\
& - \frac{(F_{ab};c) (F_{mn};^c) (F^{an}) (F^{bm})}{2835m^4} - \frac{(F_{ab};c) (F_n^b;^d) (F^{an}) (F^{cd})}{5670m^4} + \frac{(F_{ab};c) (F_m^a;^d) (F^{bm}) (F^{cd})}{5670m^4} \\
& - \frac{(F_{ab};c) (F_{mn};^c) (F^{an}) (F^{bm})}{2835m^4} - \frac{(F_{ab};c) (F_n^b;^d) (F^{an}) (F^{cd})}{5670m^4} + \frac{(F_{ab};c) (F_m^a;^d) (F^{bm}) (F^{cd})}{5670m^4} \\
& - \frac{(F_{ab};c) (F_{mn};^b) (F^{an}) (F^{cm})}{2835m^4} + \frac{(F_{ab};c) (F_m^a;^d) (F^{bd}) (F^{cm})}{5670m^4} + \frac{1}{144} R(F_{ij}) (F^{ij}) \\
& - \frac{(F_{ab};^m) (F_m^a;^b) (F_{ij}) (F^{ij})}{1620m^4} + \frac{(F_{ab};c) (F^{ab};c) (F_{ij}) (F^{ij})}{1620m^4} - \frac{(F_{mn};b^n) (F_{ij}) (F^{bm}) (F^{ij})}{864m^4} \\
& - \frac{(F_{mn};^n b) (F_{ij}) (F^{bm}) (F^{ij})}{864m^4} - \frac{(F_{il}) (F_{jk}) (F^{ij}) (F^{kl})}{360m^2} + \frac{R(F_{il}) (F_{jk}) (F^{ij}) (F^{kl})}{2160m^4} \\
& + \frac{(F_{ij}) (F_{kl}) (F^{ij}) (F^{kl})}{288m^2} - \frac{R(F_{ij}) (F_{kl}) (F^{ij}) (F^{kl})}{1728m^4} - \frac{1}{144} (F_{mn};a^a) (F^{mn}) - \frac{(F_{mn};ab) (F2^{ab}) (F^{mn})}{1080m^4} \\
& + \frac{(F_{mn};a^a) (F_{ij}) (F^{ij}) (F^{mn})}{864m^4} + \frac{1}{12} R(F_{ij}) (F^{ij}) \bar{\xi} + \frac{R(F_{il}) (F_{jk}) (F^{ij}) (F^{kl}) \bar{\xi}}{180m^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{R(F_{ij})(F_{kl})(F^{ij})(F^{kl})\bar{\xi}}{144m^4} - \frac{1}{180}(\mathbf{F2}^{ab})(R_{ab}) - \frac{(\mathbf{F4}^{ab})(R_{ab})}{945m^4} + \frac{(\mathbf{F2}^{ab})(F_{ij})(F^{ij})(R_{ab})}{1080m^4} \\
& + \frac{1}{108}(\mathbf{F2}^{mn})(R_{mn}) + \frac{(\mathbf{F4}^{mn})(R_{mn})}{810m^4} - \frac{(\mathbf{F2}^{mn})(F_{ij})(F^{ij})(R_{mn})}{648m^4} + \frac{(\mathbf{F3}^{mn})(F_{en})(R_m{}^e)}{3240m^4} \\
& + \frac{1}{432}(F_{en})(F^{mn})(R_m{}^e) - \frac{(F_{en})(F_{ij})(F^{ij})(F^{mn})(R_m{}^e)}{2592m^4} + \frac{(\mathbf{F2}^{ab})(\mathbf{F2}^{mn})(R_{ambn})}{810m^4} - \frac{(\mathbf{F3}^{bn})(F^{am})(R_{ambn})}{810m^4} \\
& - \frac{(\mathbf{F3}^{bm})(F^{an})(R_{ambn})}{810m^4} - \frac{(\mathbf{F3}^{an})(F^{bm})(R_{ambn})}{810m^4} - \frac{1}{108}(F^{an})(F^{bm})(R_{ambn}) - \frac{(\mathbf{F3}^{am})(F^{bn})(R_{ambn})}{810m^4} \\
& - \frac{1}{108}(F^{am})(F^{bn})(R_{ambn}) + \frac{(F_{ij})(F^{an})(F^{bm})(F^{ij})(R_{ambn})}{648m^4} + \frac{(F_{ij})(F^{am})(F^{bn})(F^{ij})(R_{ambn})}{648m^4} \\
& - \frac{(\mathbf{F3}^{bm})(F_e{}^a)(R_a{}^e{}_{bm})}{3240m^4} - \frac{(\mathbf{F3}^{am})(F_e{}^b)(R_a{}^e{}_{bm})}{3240m^4} - \frac{(\mathbf{F2}^{bn})(F_{en})(F^{am})(R_a{}^e{}_{bm})}{3240m^4} \\
& - \frac{1}{432}(F_e{}^b)(F^{am})(R_a{}^e{}_{bm}) - \frac{(\mathbf{F2}^{an})(F_{en})(F^{bm})(R_a{}^e{}_{bm})}{3240m^4} - \frac{1}{432}(F_e{}^a)(F^{bm})(R_a{}^e{}_{bm}) \\
& + \frac{(F_e{}^b)(F_{ij})(F^{am})(F^{ij})(R_a{}^e{}_{bm})}{2592m^4} + \frac{(F_e{}^a)(F_{ij})(F^{bm})(F^{ij})(R_a{}^e{}_{bm})}{2592m^4} + \frac{(\mathbf{F2}^{ab})(F_{en})(F^{mn})(R_a{}^e{}_{bm})}{3240m^4}
\end{aligned}$$

Reglas para simplificar

Colocar las reglas que se usan para el caso con una partícula de espín 1/2

Resultado simlificado

RT6SEsc := Expand[RT6Esc /.R1 /.R2 /.R3 /.R4 /.R5 /.R6 /.R7 /.R8 /.R9 /.R10 /.R11 /.R12 /.R13
/.R14 /.R15 /.R16 /.R17 /.R18 /.R19 /.R20 /.R21 /.R22 /.R23 /.R24 /.R25 /.R26 /.R27
/.R28 /.R29 /.R30 /.R31 /.R32 /.R33 /.R34 /.R35 /.R36 /.R37 /.R38 /.R39 /.R40 /.R41
/.R42 /.R43 /.R44 /.R45

Resultado Final

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{180}(F_{ab;c})^2 - \frac{(F_{ab;c})(F_m{}^b{}^c)(\mathbf{F2}^{am})}{1890m^4} + \frac{2(F_{ab;{}^m})(F_m{}^a{}^d)(\mathbf{F2}^{bd})}{945m^4} - \frac{(F_{mn;a})(\mathbf{F3}^{mn})}{540m^4} + \frac{1}{144}R(F_{ij})^2 \\
& + \frac{(F_{ab;c})^2(F_{ij})^2}{1080m^4} + \frac{(F_{ij})^4}{288m^2} - \frac{R(F_{ij})^4}{1728m^4} + \frac{(F_{mn;ab})(\mathbf{F2}^{an})(F^{bm})}{540m^4} + \frac{(F_{ab;c})(F_{mn;{}^c})(F^{am})(F^{bn})}{1890m^4} \\
& + \frac{(F_{ab;c})(F_m{}^a{}^d)(F^{bm})(F^{cd})}{1890m^4} - \frac{(F_{il})(F_{jk})(F^{ij})(F^{kl})}{360m^2} + \frac{R(F_{il})(F_{jk})(F^{ij})(F^{kl})}{2160m^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{72} (F_{mn;a}) (F^{mn}) - \frac{(F_{mn;ab}) (F2^{ab}) (F^{mn})}{1080m^4} + \frac{(F_{mn;a}) (F_{ij})^2 (F^{mn})}{432m^4} + \frac{1}{12} R (F_{ij})^2 \bar{\xi} - \frac{R (F_{ij})^4 \bar{\xi}}{144m^4} \\
& + \frac{R (F_{il}) (F_{jk}) (F^{ij}) (F^{kl}) \bar{\xi}}{180m^4} - \frac{1}{180} (F2^{ab}) (R_{ab}) - \frac{(F4^{ab}) (R_{ab})}{945m^4} + \frac{(F2^{ab}) (F_{ij})^2 (R_{ab})}{1080m^4} \\
& + \frac{(F2^{ab}) (F2^{mn}) (R_{ambn})}{540m^4} - \frac{(F3^{am}) (F^{bn}) (R_{ambn})}{360m^4} - \frac{1}{72} (F^{am}) (F^{bn}) (R_{ambn}) \\
& + \frac{(F_{ij})^2 (F^{am}) (F^{bn}) (R_{ambn})}{432m^4}
\end{aligned}$$

Los *resultados finales* se simplifican aún más si se usa (B.17), así que finalmente se llega a (6.11) y (6.12).

APÉNDICE K

CORRECCIONES AL LAGRANGIANO EULER-HEISENBERG EN LA QED

En este apéndice se colocan los resultados de un programa elaborado en MATHEMATICA que permite encontrar las correcciones del tipo Euler-Heisenberg al orden F^6 y además se consideran términos hasta con dos derivadas.

K.1. Espín cero

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{scalar}^{(4)} = & \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{m^4} \left[-\frac{1}{180} (F_{\alpha\beta,\gamma})^2 + \frac{1}{72} F_{\mu\nu,\beta}{}^\nu F^{\beta\mu} - \frac{1}{144} F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu} + \frac{1}{288m^2} \text{tr}[F^2]^2 + \frac{1}{360m^2} \text{tr}[F^4] \right. \\
& - \frac{1}{1080m^4} \text{tr}[F^2] (F_{\alpha\beta,\gamma})^2 - \frac{1}{1890m^4} F_{\alpha\beta,\gamma} F_{\mu}{}^{\beta,\gamma} (F^2)^{\alpha\mu} - \frac{1}{945} F_{\alpha\beta,\gamma} F^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} (F^2)^{\gamma\eta} \\
& + \frac{1}{270m^4} F_{\mu\nu,\beta}{}^\nu (F^3)^{\beta\mu} + \frac{1}{432m^4} \text{tr}[F^2] F_{\mu\nu,\beta}{}^\nu F^{\beta\mu} + \frac{1}{1620m^4} F_{\alpha\beta,\gamma} F_{\mu\nu,\gamma} F^{\alpha\mu} F^{\beta\nu} \\
& + \frac{1}{1890m^4} F_{\alpha\beta,\gamma} F_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\eta} F^{\beta\mu} F^{\gamma\eta} + \frac{1}{5670m^4} F_{\alpha\beta,\gamma} F_{\mu\nu,\beta} F^{\alpha\nu} F^{\gamma\mu} - \frac{1}{864m^4} \text{tr}[F^2] F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu} \\
& \left. - \frac{1}{540m^4} F_{\mu\nu,\alpha\beta} (F^2)^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} + \frac{1}{864m^6} \text{tr}[F^2]^3 + \frac{1}{720m^6} \text{tr}[F^2] \text{tr}[F^4] + \frac{1}{945m^6} \text{tr}[F^6] \right]. \tag{K.1}
\end{aligned}$$

K.2. Espín 1/2

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{spinor}^{(4)} = & -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{m^4} \left[\frac{1}{m^2} - \frac{1}{180} (F_{\alpha\beta,\gamma})^2 + \frac{1}{36} F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu} + \frac{1}{72m^2} \text{tr}[F^2]^2 - \frac{7}{180m^2} \text{tr}[F^4] \right. \\
& + \frac{1}{540m^4} \text{tr}[F^2] (F_{\alpha\beta,\gamma})^2 - \frac{11}{945m^4} F_{\alpha\beta,\gamma} F_{\mu}{}^{\beta,\gamma} (F^2)^{\alpha\mu} - \frac{1}{945m^4} F_{\alpha\beta,\gamma} F^{\alpha\beta}{}_{,\eta} (F^2)^{\gamma\eta} \\
& - \frac{7}{135m^4} F_{\mu\nu,\beta}{}^\nu (F^3)^{\beta\mu} + \frac{1}{90m^4} (F^5)^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu} - \frac{2}{189m^4} F_{\alpha\beta,\gamma} F_{\mu\nu,\gamma} F^{\alpha\mu} F^{\beta\nu} \\
& - \frac{2}{189m^4} F_{\alpha\beta,\gamma} F_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\gamma} F^{\beta\mu} F^{\gamma\eta} - \frac{1}{108m^4} \text{tr}[F^2] F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu} + \frac{1}{270m^4} F_{\mu\nu,\alpha\beta} (F^2)^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \\
& \left. - \frac{1}{108m^6} \text{tr}[F^2]^3 + \frac{7}{180m^6} \text{tr}[F^2] \text{tr}[F^4] - \frac{62}{945m^6} \text{tr}[F^6] \right]. \tag{K.2}
\end{aligned}$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] H. Euler, B. Kockel, *Naturwissenschaften* **23** (1935) 246.
- [2] W. Heisenberg, H. Euler. *Z. Phys.* **98** (1936) 714.
- [3] V. Weisskopf, K. Dan, *Vidensk. Selsk. Mat. Fy. Medd.* 14 (1936) 1 (reprinted in: J. Schwinger (Ed.), *Quantum Electrodynamics*, Dover, New York, 1958).
- [4] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82** (1951) 664.
- [5] W. Dittrich, H. Gies, *Probing the Quantum Vacuum*, Springer (2000).
- [6] L. Martin, C. Schubert, V.M. Villanueva Sandoval, *Nucl. Phys. B* **668** (2003) 335.
- [7] G. V. Dunne, C. Schubert, *JHEP* **0208** (2002) 053 [arXiv:hep-th/0205004];
- [8] R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **80**, 440 (1950).
- [9] C. Schubert, *Phys. Rept.* 355 (2001) 73 (hep-th/0101036).
- [10] E. S. Fradkin, *Nucl. Phys. B* **76** (1996) 588.
- [11] Z. Bern, D. A. Kosower, *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 1669.
- [12] Z. Bern, D. A. Kosower, *Nucl. Phys. B* **362** (1991) 389.
- [13] Z. Bern, D. A. Kosower, *Nucl. Phys. B* **362** (1992) 451.
- [14] M. J. Strassler, *Nucl. Phys. B* **385** (1992) 145
- [15] M. G. Schmidt, C. Schubert, *Phys. Rev. D* **53** (1996) 2150 (hep-th/9410100).
- [16] M. Reuter, M. G. Schmidt, C. Schubert, *Ann. Phys. (N.Y.)* **259** (1997) 313 (hep-th/9610191).
- [17] R. Shaisultanov, *Phys. Lett. B* **378** (1996) 354 (hep-th/9512142).
- [18] S. L. Adler, C. Schubert, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 1695 (hep-th/960535).
- [19] C. Schubert, *Nucl. Phys. B* **585** (2000) 407 (hep-ph/0001288).
- [20] F. Bastianelli, P. van Nieuwenhuizen, *Path integrals and anomalies in curve space*, Cambridge University Press 2006.
- [21] F. Bastianelli, S. Frolov, A. A Tseytlin, *JHEP* 0002: 013 (2000).
- [22] F. Bastianelli, A. Zirotti, *Nucl. Phys.* **B642** (2002) 372 [hep-th/0205182].
- [23] F. Bastianelli, O. Corradini, A. Zirotti, *Phys. Rev. D* **67** (2003) 104009 [hep-th/0211134]
- [24] F. A. Dilkes, D. G. C. McKeon, *JHEP* 9509005 (1995).
- [25] I.T. Drummond, S.J. Hathrell, *Phys. Rev. D* **22** (1980) 343.
- [26] J.I. Latorre, P. Pascual, R. Tarrach, *Nucl. Phys.* **B 437** (1995) 60 [hep-th/9408016].
- [27] W. Dittrich, H. Gies, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 025004 [hep-ph/9804375].
- [28] G.M. Shore, *Nucl. Phys.* **B 460** (1996) 379 [gr-qc/9504041]; *Nucl. Phys.* **B 778** (2007) 219 [hep-th/0701185].

- [29] T.J. Hollowood, G.M. Shore, *Phys. Lett. B* **655** (2007) 67 [arXiv:0707.2302]; *Nucl. Phys. B* **795** (2008) 138 [arXiv:0707.2303]; arXiv:0806.1019.
- [30] A.O. Barvinsky, G.A. Vilkovisky, *Phys. Rep.* **119** (1985) 1; *Nucl. Phys. B* **333** (1990) 471; *ibido* 512; A.O. Barvinsky, Yu.V. Gusev, G.A. Vilkovisky, V.V. Zhytnikov, Univ. of Manitoba preprint, Winnipeg, 1993 (unpubl.).
- [31] P.B. Gilkey, *J. Diff. Geom.* **10** (1975) 601.
- [32] F. Bastianelli, S. Frolov, A. Tseytlin, *JHEP* **0002** (2000) 013 [hep-th/0001041].
- [33] I.G. Avramidi, *J. Math. Phys.* **37** (1996) 374 [hep-th/9406047].
- [34] I.G. Avramidi, *Heat Kernel on Homogeneous Bundles over Symmetric Spaces*, arXiv:math/0701489.
- [35] B. S. DeWitt, *Rev. Mod. Phys.* **29** (1957) 377.
- [36] T. D. Lee, C. N. Yang, *Phys. Rev.* **128** (1962)
- [37] F. Bastianelli, P. Van Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys. B* **389** (1993) 53.
- [38] F. Bastianelli, K. Schalm, P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Rev. D* **58**: 044022 (1998)
- [39] K. Schalm, P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Lett. B* **446**, 247 (1999)
- [40] F. Bastianelli, O. Corradini, *Phys. Rev. D* **60**: 044014 (1999)
- [41] F. Bastianelli, O. Corradini, P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Lett. B* **490** (2000)
- [42] F. Bastianelli, O. Corradini, A. Zirotti, *JHEP* 0401:023 (2004)
- [43] H. Kleinert, A. Chervyakov, *Phys. Lett. B* **464** (1999) 257.
- [44] F. Bastianelli, C. Schubert, *JHEP* 0502 (2005) 069.
- [45] F. Bastianelli, U. Nucamendi, C. Schubert, V.M. Villanueva, *JHEP* 0711:099(2007).
- [46] J. M. Dávila. (2008). *Corrección gravitacional dominante al Lagrangiano de Euler-Heisenberg escalar*. Director: C. Schubert. (Tesis de Maestría - Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo)
- [47] H. Kawai, D.C. Lewellen, S.H.H. Tye, *Nucl. Phys.* **B269** 1 (1986).
- [48] Z. Bern, L.J. Dixon, M. Perelstein, J.S. Rozowsky, *Nucl. Phys. B* **546** (1999) 423, hep-th/9811140.
- [49] Z. Bern, *Liv. Rev. Re.* **5** (2002) 5, gr-qc/0206071.
- [50] B.R. Holstein, *Phys. Rev. D* **74** 085002 (2006); *Am. J. Phys.* **74** (2006) 1002.
- [51] S. Ananth and S. Theisen, *Phys. Lett. B* **652** (2007) 128, arXiv:0706.1778 [hep-th].
- [52] G. Basar, G. V. Dunne, *J. Phys. A* **43**:072002 (2010), arXiv:0912.1260 [hep-th].
- [53] N.E.J. Bjerrum-Bohr, P. H. Damgaard, B. Feng, T. Sondergaard, *JHEP* **1009**:067 (2010), arXiv:1007.3111 [hep-th]
- [54] Z. Bern, J.J.M. Carrasco, H. Johansson, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 205-206:54-60, 2010 [arXiv:1007.4297[hep-th]], *Phys. Rev. Lett.* 105:061602 (2010), arXiv:1004.0476[hep-th].
- [55] M.E. Gertsenshtein, *Sov. Phys. JETP* **14** (1962) 84.
- [56] F.A. Berends, R. Gastmans, *Ann. Phys.* **98** (1976) 225.
- [57] K.A. Milton, *Phys. Rev. D* **15** (1977) 538; *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2149.
- [58] Stephen Wolfram (1988-2008). *MATHEMATICA* (6.0) [Software de cómputo]. Champaign, IL, USA: Wolfram Research.
- [59] Leonard Parker and Steve Christensen (1991-2000). *MathTensor* (2.2.1) [Software de cómputo]. Chapel Hill, NC, USA: MathTensor, Inc.

- [60] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum field theory*, McGraw-Hill Inc., 1980.
- [61] L. J. Dixon, TASI Lectures, 1996 (hep-ph/9601359).
- [62] C. López. (2010). *Amplitudes de fotones en el formalismo línea de mundo*. Director: C. Schubert. (Tesis de Maestría - Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo)
- [63] G.V. Dunne, A. Huet, D. Rivera, C. Schubert, JHEP **0611** (2005) 013 [hep-th/0609065].
- [64] I.M. Gessel, X.G. Viennot, *Determinants, Paths, and Plane Partitions*, Preprint (unpubl.), 1989.
- [65] C. Schubert, *Nucl.Phys.* **B585:407-428**, (2000)
- [66] F. Bastianelli, J. M. Dávila, C. Schubert, JHEP **0903:086** (2009).
- [67] J. M. Dávila, C. Schubert, *Class. Quantum Grav.* **27** 075007.