Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado en Ciencias Matemáticas
Instituto de Física y Matemáticas

Soluciones Asintóticas para un Problema No Lineal de Onda.

TESIS

Que para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Cristian Jesús Rojas Milla

Director: Dr. Pavel Naumkin

Morelia, Michoacan - agosto de 2011.

A Dios y a toda mi familia.

Índice general

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a Dios por darme la oportunidad de estar aquí en Morelia-México, logrando mi formación doctoral.

Agradezco al Dr. Pavel Naumkin la confianza que depositó en mi en un momento difícil y aceptar guiarme en la investigación e iniciarme en este maravilloso mundo de las aplicaciones del análisis asintótico y análisis funcional lineal y no lineal para estudiar cualitativamente EDP'S no-lineales.

A Fundayacucho, fundación Venezolana que me dió el financiamiento para poder concluir mis estudios doctorales, mil gracias.

Al Conacyt, gracias por su apoyo y su interés en apoyar a la nuevas generaciones de científicos que genera México. De verdad infinítas gracias.

El profesor Dr. Jesús Muciño y la profesora Dra. Elena Kaikina han jugado un papel importante en mi formación, gracias Profesores.

Al profesor Dr. Osvaldo Osuna, sus cursos fueron de gran valor para mí. También mi agradecimiento por aceptar ser sinodal de esta tesis.

Quiero expresar mi agradecimiento a la Lic. Adriana Briseño y a Lic. Maura Chavero por tanta paciencia conmigo, consejos valiosos que siempre llevaré conmigo que me han ayudado a crecer y a madurar en lo personal.

Al Centro de Matemáticas de la Unam-Unidad Morelia donde he vivido los últimos 4 años, el lugar donde se ha realizado este trabajo.

A la UMSNH, mil gracias por abrirme las puertas de sus aulas y en tu seno se desarrolló este sueño de ser Doctor en Matemáticas. De forma muy especial a todos lo que conforman el IFM, todos pusieron un granito de arena en mi formación, en este sentido un muy especial agradecimiento al Dr. Pierre Bayard, le prometo profesor que su esfuerzo por enseñar Geometría Rienmanniana dará muchos frutos.

También agradezco de forma especial al Dr. Ulises Nucamendi, gracias por tu amistad Ulises.

A todos mis compañeros becarios que han contribuido a que el ambiente fuera agradable.

A toda mi familia en Venezuela que en muchos momentos difíciles siempre me dio apoyo, y por supuesto la persona que más me motiva : MI MADRE.....GRACIAS MAMÁ. GRACIAS MECHE.

A mi PADRE, que se fue al cielo, estando yo en México, se que estás conmigo y con mis hermanas, gracias PAPÁ.

A mis bellas hermanas, Dexy, Dany, Naily, Melvi, Roxy, motivo de superación en mi vida. A mis sobrinos a ellos les regalo mi esfuerzo.

A Juan Francisco Gomez, el Chiche, y a Israel Milla, primo y amigo, a ellos mis honores, mis primeros maestros de matemáticas.

A todo el comité tutoral, gracias por todos sus consejos, motivaciones y colaboración que me han brindado en el desarrollo de mi investigación.

Al Profesor Dr. Anatoli Merzon, su exigencia me recordó lo serio que significa hacer investigación en matemáticas.

A los Profesores doctores, Abdón Choque y José Zapata, sinodales de esta tesis, gracias por el ánimo y el apoyo, de verdad GRACIAS.

Al profesor y paisano del Instituto de matemáticas puras y aplicadas de Río de Janeiro, IMPA, Brasil, Dr. Felipe Linares, fueron bastante provechosas las conversaciones con usted.

Al Dr. Gustavo Ponce, ejemplo de humildad y trabajo en este mundo de las matemáticas, fue muy motivador para mí tener la oportunidad de conversar sobre mi tesis con usted.

A la Profesora Dra. Luz de Teresa, sinodal de esta tesis, gracias por su apoyo en mi investigación y por darme la oportunidad de participar en el WHAPDE.

A mi compañero de oficina Lic. José Hernández y al Profesor Dr. Eugenio Balanzario les agradezco infinito su amistad.

A la misionera del Verbum -Dey, Angelina Benitez, gracias por recordarme que la palabra de Dios, es palabra de esperanza, palabra que llena de virtudes al ser humano, y con esto aprendí que es la fuente que nos permite alejarnos de nuestras debilidades, de nuestros vicios, mil gracias Angelina (Angelical).

0.1. Prefacio

Consideramos el problema con datos iniciales periódicos para la ecuación no lineal tipo ondas

$$\begin{cases} u_{tt} + 2\alpha u_t - \beta u_{xx} = -\lambda \left|u\right|^{\sigma} u + f(t,x), t > 0, \\ u(0,x) = \phi(x), u_t(0,x) = \psi(x), x \in \Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

donde $\Omega = [-\pi, \pi]$; y α, β, λ y $\sigma > 0$.

La fuerza $f(t,x)$ y los datos iniciales $\phi(x)$, $\psi(x)$ son periódicos con respecto a la variable espacial $x : f(t, 2\pi + x) = f(t,x)$, $\phi(2\pi + x) = \phi(x)$, $\psi(2\pi + x) = \psi(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Nos interesa hacer estimaciones asintóticas de las soluciones, para esto estudiamos el problema lineal asociado

$$\begin{cases} u_{tt} + 2\alpha u_t - \beta u_{xx} = f(t,x), t > 0, \\ u(0,x) = \phi(x), u_t(0,x) = \psi(x), x \in \Omega, \end{cases} \tag{0.2}$$

donde f es una función en $C^{\infty}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ y datos iniciales $\phi, \psi \in C^{\infty}_{per}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Se define el operador de Green

$$G(t)\psi = e^{-\alpha t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}_n e^{inx} sen(t\sqrt{\beta n^2 - \alpha^2}) \frac{1}{\sqrt{\beta n^2 - \alpha^2}},$$

por lo tanto la solución del problema periódico lineal puede ser escrito usando la fórmula de Duhamel como

$$u(t) = \widetilde{G}(t)\phi + G(t)\psi + \int_0^t G(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

donde $\widetilde{G}(t) = (2\alpha + \partial_t)G(t)$. Nuestro primer paso será hacer estimaciones sobre el problema lineal periódico 0.2 en los espacios de Sobolev H^s y $\dot{H}^s$. Denotaremos por $\mu = \Re e(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}) > 0$.

En lo anterior, H^s y $\dot{H}^s$ son los espacios de Sobolev para funciones periódicas:

$$H^s = \{\phi \in \wp' : ||\phi||^2 = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \langle n \rangle^{2s} \left|\hat{\phi}_n\right|^2 < \infty\},$$

$\dot{H}^s = \{\phi \in H^s : \hat{\phi}_0 = 0\}$, el espacio de Sobolev homogéneo.

Para $n \in \mathbb{Z}$, denotamos $\langle n \rangle = \sqrt{1 + n^2}$, y $\hat{\phi}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} e^{-inx} \phi(x) dx$ son los coeficientes de la serie de Fourier de la función 2π periódica $\phi(x)$. También podremos llamar $\hat{\phi}_n$, los coeficientes de la transformada discreta de Fourier.

Denotaremos por $\wp'$ el espacio dual de $\wp = C^{\infty}_{per}$, el cual denota el espacio de las funciones infinito diferenciables y $2\pi-$periódicas, del cual se hablará en los preliminares del trabajo. En el caso continuo $\langle x \rangle = \sqrt{1+x^2}$, con $x \in \mathbb{R}$. Toda vez que tenemos la solución del problema lineal, definimos el siguiente operador

$$Av(t) = \widetilde{G}(t)\phi + G(t)\psi + \int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau + \int_0^t G(t-\tau)N(v)(\tau)d\tau,$$

con dominio y contradominio del espacio $C([0,T] : H^s)$.

Esta transformación es una contracción en un espacio métrico completo, y así tiene un punto fijo, lo cual garantiza solución para tiempos pequeños de la ecuación no-lineal.

En nuestra investigación probamos que si el dato inicial $\phi \in H^1$ y $\psi \in L^2$, $f \in H^s$, con $s > \frac{1}{2}$, y f satisfece una desigualdad la cual es $||f||_{H^s} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{3}{2}}$, $t \geq 0$. Entonces existe una única solución

$$u(t,x) \in C([0,\infty) : H^1),$$

del problema periódico. Además tiene los estimados de decaimiento

$$||u(t)||_{L^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}}, ||\partial_t u(t)||_{L^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}}, \tag{0.3}$$

para todo $t > 0$. Más aún, bajo algunas condiciones iniciales encontramos fórmulas asintóticas para la solución.

Establecemos los resultados principales en esta tesis.

Teorema 39: *Supongamos que el dato inicial $\phi \in H^1$, $\psi \in L^2$ y $f \in H^s$ que satisface la desigualdad $||f||_{H^s} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{3}{2}}$ con $s > \frac{1}{2}$. Entonces existe una única solución*

$$u(t,x) \in C([0,\infty) : H^1),$$

del problema periódico (1,1) *el cual obedece los estimados de decaimiento*

$$||u(t)||_{L^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}}, ||\partial_t u(t)||_{L^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}}.$$

Por teorema 39, la solución decae en el tiempo y podemos considerar el problema periódico 0.1 tomando dato inicial al tiempo T, y así los datos iniciales tienen norma pequeña

$$||u(T)||_{L^\infty} + ||\partial_t u(T)||_{L^\infty} \leq \varepsilon.$$

Consideraremos el problema periódico 0.1 con tiempo inicial en T.

Teorema 40: *Supongamos que el dato inicial $\phi \in H^1$, $\psi \in L^2$ son suficientemente pequeños $||\phi||_{\dot{H}^1} + ||\psi||_{L^2} \leq \varepsilon$. Más aún, el valor medio $\hat{\phi}_0 = 0$ y f cumple la desigualdad $||f||_{H^s} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{3}{2}}$ con $s > \frac{1}{2}$. Entonces la siguiente relación asintótica es cierta*

$$u(t,x) = At^{-\frac{1}{\sigma}} + O(t^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}}), \tag{0.4}$$

cuando $t \to \infty$ uniformemente con respecto a $x \in \Omega$, donde $A = 2\alpha(\frac{2\alpha}{\sigma\lambda})^{\frac{1}{\sigma}}$.

Por lo general matemáticamente la no linealidad representa una obstrucción en la diferenciabilidad de las soluciones. Como nuestras soluciones vienen de resolver una ecuación integral asociada al problema no lineal, nuestras soluciones son las llamadas soluciones moderadas. Es cierto que toda solución de nuestros problemas serán soluciones de la ecuación integral, lo que no es cierto es lo contrario, es decir que no toda solución de la ecuación integral que se construye será solución de nuestro problema no-lineal. La solución que se obtiene de resolver la ecuación integral vía el mapeo de contracción sólo es continua y por tanto no necesariamente diferenciable. Lo que podemos hacer es relacionar el orden del espacio de Sobolev, con la diferenciabilidad de nuestras soluciones. Es claro que mientras mayor sea el orden del espacio de Sobolev que soporta nuestros datos iniciales, más diferenciabilidad obtenemos. En una investigación futura, nos proponemos conseguir el mínimo orden del espacio de Sobolev para garantizar soluciones clásicas, conjuntamente con estudiar las curvas caracteristicas asociadas a la ecuación. En nuestro trabajo verificamos en detalle la convergencia uniforme de la solución y que se verifican los datos iniciales. Demostramos que

$$u(t,x) \in H^1, t > 0, x \in \mathbb{R},$$

y

$$u_t(t,x) \in L^2, t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

No es difícil ver que colocando datos iniciales al menos de clase C^2, garantizamos la continuidad de la solución. Colocando datos iniciales en C^4, obtenemos soluciones clásicas. Ver afirmaciones 1 y 2 del capítulo 3.

En esta tesis también estudiamos un problema no-lineal tipo Burgers, el cual tiene la forma

$$\begin{cases} \Psi_t = \Psi_{xx} + \lambda\Psi + \Psi\Psi_x, \; x \in \Omega, \; t > 0, \\ \Psi(0,x) = \tilde{\Psi}(x), \; x \in \Omega. \end{cases}$$

En este problema probamos la existencia local de soluciones. Para ello resolvemos una ecuación integral y, haciendo uso de la propiedad de difusión de la ecuación de Burgers, probamos que tenemos solución clásica $u(t,x) \in C^{\infty}((0,T] \times \mathbb{R})$.

También usando estimados tipo energía, probamos la existencia global de solución $u(t,x) \in C([0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C^{\infty}((0,\infty) \times \mathbb{R})$. Para encontrar fórmula asintótica de la solución, se diseñan unas ecuaciones en diferencias, que están motivadas de la solución del problema lineal asociado. Estas ecuaciones en recurrencia nos invitan a hacer implementaciones numéricas del problema. Esto sería lo inmediato a realizar despues en la investigación.

Por último cabe mencionar, que de mis resultados del problema tipo Burgers, cuento con una publicación, ver [12].

0.2. Objetivo

Desarrollar un método general para estudiar el comportamiento asintótico de la solución del problema no lineal de ondas con datos iniciales periódicos (0.1).

El propósito de este trabajo es estudiar cierto tipo de ecuación diferencial parcial no-lineal de segundo orden con datos iniciales periódicos, que nos permita junto con diseñar una técnica de ataque a este tipo de ecuaciones, tener de por si garantizado un comportamiento asintótico de las soluciones de estas ecuaciones siempre que los datos iniciales vivan en un espacio de Sobolev de cierto orden.

En esta tesis también se responden las preguntas naturales al estudiar una ecuación diferencial con datos iniciales, como lo es la existencia y unicidad de soluciones, tiempos de vida de soluciones, si explotan las soluciones en tiempo finito y la principal contribución de nuestra investigación es que se obtiene cota de decaimiento óptima para f que nos permite generalizar el problema (3.1) del capítulo 3, trabajo que se realiza en el capítulo 4, sumando una fuerza externa, obteniendo soluciones globales y asintótica de la solución.

Para el problema tipo Burger, capítulo 5 de la tesis, se obtiene solución local y global, y junto con esto se obtiene asintótica de la solución. En este problema de tipo parabólico, se usa la propiedad de difusión de la ecuacion de Burgers, que la hereda de la ecuación del calor, y esta interesante propiedad nos regala soluciones C^{∞}.

Se obtiene asintótica de la solución, usando proyectores y apoyándonos da la ecuación integral que nos da solución local. Todas nuestras soluciones se obtienen vía el mapeo de contracción.

0.3. Descripción por capítulos

Este trabajo consta de cinco capítulos y un apéndice, organizados de la siguiente forma:

El capítulo 1 de este trabajo está dedicado a la introducción e inicia con una recapitulación de la teoría acerca de las EDP no lineales y el lugar que ocupan los métodos asintóticos en la solución de estas ecuaciones.

En el capítulo 2 nos concentramos en desarrollar la teoría básica necesaria para hacer del trabajo lo más autocontenido posible. Damos un repaso a conceptos fundamentales del análisis funcional, de la teoría de las Series de Fourier, una visión general de la teoría de distribuciones y Espacios de Sobolev, en particular demostramos el importante teorema del encaje de Sobolev.

En el capítulo 3 hacemos nuestras primeras estimaciones estudiando un subproblema del nuestro, el cual nos llevará directamente a estudiar las estimaciones asintóticas de nuestro problema.

En el capítulo 4 estudiamos nuestro problema principal y nos abocamos a obtener las estimaciones asintóticas que se quieren obtener y se dan las condiciones cualitativas necesarias para dichas estimaciones asintóticas.

En el capítulo 5, estudiaremos una ecuación tipo Burgers

$$\begin{cases} \Psi_t = \Psi_{xx} + \lambda\Psi + \Psi\Psi_x,\ x \in \Omega, t > 0, \\ \Psi(0,x) = \tilde{\Psi}(x), x \in \Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega = [-\pi, \pi], \lambda < 1$.

Probaremos que si el dato inicial $\tilde{\Psi} \in L^2(\Omega)$, $\tilde{\Psi}$ una función 2π-periódica, entonces existe una única solución $\Psi(t,x) \in C([0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R})$ del problema periódico. Bajo algunas condiciones adicionales encontraremos expansiones asintóticas de las soluciones. El caso $\lambda = 0$ es la ecuación de Burgers. Esta se resuelve explícitamente usando la transformación de Hopf-Cole. Esta solución describe el comportamiento de ondas en un líquido. En nuestro problema λ, se interpreta en física como un factor de contracción en el proceso de difusión de la onda en el líquido que va de la mano con un factor equilibrado de viscocidad. Este es un problema importantísimo en mecánica de fluidos que tiene relación simplificada con el famoso problema de Navier-Stokes.

Por otra parte también es de alto interes para el autor estudiar las ondas de choque

que presenta esta ecuación. Para el desarrollo de este capítulo fue de capital importancia leer los artículos, [9],[21],[25].

Es bueno comentar que el siguiente paso de la investigación es hacer implementaciones numéricas del problema y hacer comparaciones con artículos donde se han encontrado aproximaciones numéricas de la solución, ya que la ventaja de nuestra metodología es que encontramos la solución exacta del problema.

En el apéndice se explica la técnica útilizada para extender el dominio de definición de la solución de una ecuación diferencial parcial en particular no-lineal.

Capítulo 1

Preliminares

La teoría de ecuaciones dispersivas no lineales evolutivas juega un papel muy importante en la teoría de la Física-Matemática contemporánea, ya que tales ecuaciones aparecen en la Teoría Cuántica de Campos, la Biología, la Ingeniería y otros campos de la ciencia.

El caso de datos iniciales periódicos es relativamente nuevo en la literatura. Para nuestra investigación sólo necesitamos requisitos de ecuaciones diferenciales ordinarias, análisis real y fundamentos de variable compleja, y la tesis es autocontenida en lo posible.

El concepto de no-linealidad en el contexto de las matemáticas viene apareciendo en la literatura científica con significativa mayor frecuencia, desde mediados del siglo XX, al comenzar el auge de los temas que conforman la teoría de la complejidad, el caos, el fractal y análogos.

Puede decirse que hasta ese momento en matemáticas se trataba de aproximar las funciones manejadas en Física y disciplinas afines, de por si no-lineales, mediante simple supresión de términos de grado superior, a expresiones lineales mucho más fáciles de manipular, aunque el resultado se apartaba significativamente de la realidad física. Es aquí que se implementan nuevos y eficaces procedimientos de linealización que conducen a mayor aproximación a los valores verdaderos, a la vez que los sistemas no-lineales se hacen cada vez más presentes en la ciencia moderna.

En nuestra tesis estudiamos el comportamiento asintótico de soluciones para el problema no-lineal de ondas amortiguado cuya ecuación es

$$\begin{cases} u_{tt} + 2\alpha u_t - \beta u_{xx} = -\lambda \left|u\right|^{\sigma} u + f(t,x), t > 0, \\ u(0,x) = \phi(x), u_t(0,x) = \psi(x), x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $\Omega = [-\pi, \pi]$, $\alpha, \beta, \lambda, \sigma > 0$. Consideramos soluciones de la ecuación (1.1), las cuales satisfacen condiciones de frontera periódica $u(t, x) = u(t, 2\pi + x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, con datos iniciales $\phi(x)$ y $\psi(x)$ 2π periódicos.

Recientemente se tiene una atención considerable al problema de Cauchy para ecuaciones no lineales de ondas con diferentes términos disipativos. En casos particulares nuestra ecuación se reduce a varias ecuaciones conocidas de la física-matemática, por ejemplo la de Poisson, la clásica de ondas bajo valores particulares de las constantes que aparecen en la ecuación. Válido es decir que las ecuaciones nombradas anteriormente son prototipos de los tipo elíptico e hiperbólico. En esta tesis estudiamos en los capítulos 3 y 4 un problema hiperbólico, y en el capítulo 5, un problema parabólico. Es decir en esta investigación se describen técnicas para estudiar ecuaciones diferenciales parciales no-lineales con coeficientes constantes, de tipo hiperbólico y parabólico con datos iniciales periódicos.

Hacemos un poco de la historia relacionada con nuestro problema del capítulo 3 y 4.

En [21] se prueba que si nuestra ecuación presenta no-linealidad del tipo $|u|^{1+\sigma}$, con $\sigma < 2$ y los datos iniciales satisfacen que $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx > 0$ y $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx > 0$, las soluciones existirán para todo tiempo.

La existencia de soluciones para el problema de Cauchy, en el caso de ecuaciones con no linealidades del tipo $\pm |u|^{1+\sigma}$ o $\pm |u|^{\sigma} u$ para una potencia supercrítica $\sigma > 2$ fue probado también en [21], donde para tiempos grandes las soluciones decaen si los datos iniciales tienen módulo pequeño y soporte compacto.

También en [7], [5] y [6] se estudian potencias subcríticas, críticas y supercrítica con no linealidades del tipo mencionado.

En [9] se encuentran fórmulas asintóticas para soluciones del problema periódico para algunas ecuaciones no lineales.

En [7] y [8] se establecen resultados asintóticos para la ecuación amortiguada no lineal de ondas para el caso sub-crítico ($0 < \sigma < 2$), crítico ($\sigma = 2$) y supercrítico ($\sigma > 2$) el cual dio pie a nuestra investigación pues seguimos esta metodología y nuestro resultado generaliza [8].

En [13] se estudiaron relaciones para dispersividad y propiedades de los espacios de Sobolev.

Para la ecuación de Benjamin-Bona-Mahony-Peregrine-Burgers, se obtiene la existencia global de soluciones y estimados de energía que decaen se obtienen en [21].

En resumen, nuestra metodología de trabajo esta inspirada en [8] y en [9] estudiamos la existencia global de soluciones para un problema no lineal de Cauchy con potencia crítica y supercrítica y la regularidad de las soluciones nos da pie a interpretar físicamente la no linealidad.

En nuestra investigación probamos que si el dato inicial $\phi \in H^1$, $\psi \in L^2$ y $f \in H^s$, con $s > \frac{1}{2}$, junto con una condición sobre f, la cual es $||f||_{H^s} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{3}{2}}$, $t \geq 0$. Entonces existe una única solución $u(t,x) \in C([0,\infty) : H^1)$ del problema periódico, el cual tiene los estimados de decaimiento

$$||u(t)||_{L^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}}, ||\partial_t u(t)||_{L^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}}, \tag{1.2}$$

para todo $t > 0$.

Bajo algunas condiciones iniciales encontramos fórmulas asintóticas para la solución.

En el caso parabólico, capítulo 5, estudiamos el problema periódico para la ecuación no-lineal tipo Burgers

$$\begin{cases} \Psi_t = \Psi_{xx} + \lambda\Psi + \Psi\Psi_x, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \Psi(0,x) = \tilde{\Psi}(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

donde $\Omega = [-\pi, \pi]$, $\lambda < 1$. Probamos que si el dato inicial $\tilde{\Psi} \in L^2(\Omega)$, entonces existe una única solución $\Psi(t,x) \in C([0,+\infty) : L^2(\Omega)) \cap C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R})$.

Nótese que obtenemos soluciones clásicas, para esto nos apoyamos en la velocidad de propagación infiníta que tiene la ecuación del calor, y por ende la de Burgers.

El estudio de las ecuaciones de los fluidos incomprensibles tiene cada vez un mayor interes, tanto del punto de vista teórico (integrales singulares...) como desde el enfoque más aplicado (simulaciones numéricas...).

Las ecuaciones que aparecen modelizando problemas de mecánica de fluidos son variadas, pero las más importantes son las de Euler y Navier-Stokes. De hecho por demostrar (o refutar) la existencia global de solución clásica para Navier-Stokes el Instituto Clay otorga un premio de un millón de dólares. La ecuación parabólica que estudiamos tiene aplicaciones en el estudio de turbulencias. La turbulencia tiene como efecto principal facilitar que dos fluidos se mezclen. Así que nuestro problema viene de una simplificación de la dimensión espacial. Por último es bueno comentar que esta ecuación (5.1), tambien tiene aplicaciones en metereología, ya que tiene relación con el modelo de "frontogénesis"(la formación de frentes de aire a distinta temperatura). Este problema tiene interes en metereología , porque ya se sabe que la falta de acierto de quienes predicen el tiempo se ha hecho ya proverbial, y sin embargo no hay ningun meteorólogo competente que no opine que los fenomenos atmosfericos estan causalmente determinados.

También es de nuestro interés relacionar nuestros temas estudiados con el caso de medios heterogéneos, esto es, cuando los coeficientes de la ecuación no son constantes y estudiar también la estabilidad de nuestras soluciones usando técnicas que vienen del análisis inverso, teoría scattering, análisis microlocal, entre otras.

Con el desarrollo de software y hardware que actualmente se tiene en los grandes sistemas de cómputo, se han podido efectuar complicados experimentos de cálculos numéricos para estudiar ecuaciones no-lineales evolutivas, permitiéndole al investigador descubrir nuevas leyes y efectos no-lineales que son difíciles de detectar a simple vista y así abrir una nueva ruta de investigación para estudios futuros.

De esta manera, en 1967 fue encontrado un método usado para encontrar explícitamente la solución de una clase particular de ecuaciones no-lineales. Este método es conocido como "Transformada Inversa de Dispersión", (IST, por sus siglas en inglés). Este Método estudia las propiedades de esta clase particular de ecuaciones no-lineales y es posible encontrar en muchos casos el comportamiento asintótico de las soluciones por medio de esta herramienta.

Desgraciadamente no hay recetas para la solución de una ecuación no-lineal evolutiva, porque cada ecuación posee su propia individualidad y requiere un enfoque especial y hasta un juego de métodos analíticos para su investigación. Sin embargo, es posible aplicar muchos de los métodos ya desarrollados y generalizarlos para algunas clases de EDP no-lineales.

Por otra parte en caso de que una ecuación no lineal exista para todo tiempo, podemos obtener asintóticas de la solución haciendo t tender al infinito; ya que en pocas ocasiones se puede resolver explícitamente una ecuación no lineal evolutiva. Es muy importante tener una representación analítica aproximada para las soluciones en forma explícita cerrada o desarrollada en serie para poder controlar los errores. Los desarrollos asintóticos se utilizan para deducir fácilmente las propiedades básicas de la solución tales como el crecimiento o decaimiento de la solución en diferentes regiones, nos permite saber dónde oscila y dónde es monótona, además de que nos da información sobre los datos iniciales despues de un tiempo grande.

Así los métodos asintóticos son importantes no sólo desde el punto de vista teórico sino también son usados provechosamente en la práctica como un complemento para los métodos numéricos. Sin embargo, los métodos asintóticos son difíciles aún en el caso de ecuaciones lineales evolutivas. En el caso de ecuaciones no-lineales es necesario probar la existencia global de soluciones clásicas o soluciones moderadas que son el tipo de soluciones que manejaremos en esta tesis, y obtener algunas estimaciones adicionales para aclarar las expansiones asintóticas. Es comun hacer lo que se llama estimaciones a priori, este es un estimado el cual puede ser establecido sin un conocimiento preliminar de las soluciones, para el cual el estimado es válido y de hecho existe. Ya que los métodos asintóticos no representan un método general, es importante mencionar que cada tipo de no linealidad debe ser estudiado individualmente, especialmente en el caso de tener datos iniciales en norma grandes.

A pesar de la importancia y de la actualidad de los métodos asintóticos, hay relativamente pocos resultados para las ecuaciones evolutivas no-lineales. Sin embargo una gran cantidad de publicaciones se han ocupado de la representación asintótica de soluciones al problema de Cauchy para las ecuaciones no-lineales en los últimos 20 años.

La útilidad del método asintótico en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales no-lineales es digno de llamarse teoría cualitativa de EDP'S no-lineales.

Capítulo 2

Fundamentos

En este capítulo describimos las herramientas básicas que necesitamos para estudiar nuestro problema. Presentaremos nociones fundamentales de análisis funcional, teoría de Fourier y objetos como las distribuciones periódicas y los espacios de Sobolev asociados a éstas, que llamaremos Sobolev periódicos, debidos al Matemático Ruso Sergei Sobolev por los años de 1935. También haremos un breve recorrido por las distribuciones temperadas, es decir el espacio de Sobolev, que toma como sus funciones test, a las funciones C_0^∞, que denota a las funciones C^∞ con soporte compacto. La mayor parte de este material fue tomado de las referencias [13], [17], [18] y [22].

2.1. Espacios de Banach

Definición 1 *: Sea V un espacio vectorial real o complejo. Una norma en V es una función*

$$||\cdot|| : V \to [0,\infty),$$

cualquiera que sean $u, v \in V$ y α escalar,

$$\begin{array}{rrcl} \textit{1)} & ||v|| & = & 0 \Leftrightarrow v = 0; \\ \textit{2)} & ||\alpha v|| & = & |\alpha|\,|v|\,; \\ \textit{3)} & ||u+v|| & \leq & ||u|| + ||v||\,. \end{array}$$

La propiedad 3 es llamada la desigualdad triangular. En el caso en que $||\cdot||$ satisface las propiedades 2 y 3 pero no satisface 1 decimos que $||\cdot||$ es una seminorma en V. Un espacio vectorial V dotado de una norma $||\cdot||$ es llamado un espacio vectorial normado; se usará por lo general la notación $(V, ||\cdot||)$.

En lo que sigue estaremos interesados en espacios vectoriales complejos de modo que si no se afirma explícitamente lo contrario, todos los espacios vectoriales sobre los que trabajaremos serán sobre el cuerpo de los números complejos.

Sea V un espacio vectorial normado. Una consecuencia inmediata de la desigualdad triangular es

$$||u - v|| \geq |||u|| - ||v|||.$$

Sea $\{v_n\}$ una sucesión en V. Decimos que la sucesión converge en norma a un elemento $v \in V$ si

$$||v_n - v|| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Más precisamente, si, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow ||v_n - v|| < \epsilon.$$

La sucesión $\{v_n\}$ es una sucesión de Cauchy si

$$n, m \geq N \Rightarrow ||v_n - v_m|| < \epsilon.$$

Es claro que toda sucesión convergente es de Cauchy, el recíproco es falso.

Definición 2 *: Un espacio normado donde toda sucesión de Cauchy converja se llama espacio completo o espacio de Banach.*

Ejemplo 3 *: Si $1 \leq p \leq \infty$, $p \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, y si $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ definimos*

$$\begin{aligned} ||z||_p &= [\sum_{j=1}^{n} |z_j|^p]^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p \leq \infty; \qquad (2.1) \\ ||z||_\infty &= \sup_{1 \leq j \leq n} |z_j|. \end{aligned}$$

Entonces $\mathbb{C}^n$ es un espacio de Banach en relación a cualquiera de esas normas. De hecho, todas esas normas son equivalentes. Esto es, si $p, q \in [1, \infty)$, existen constantes C_1 y C_2 tal que

$$C_1 ||z||_p \leq ||z||_q \leq C_2 ||z||_p,$$

cualquiera sea $z \in \mathbb{C}^n$. La norma $||z||_2$ es llamada la norma euclidiana.

Ejemplo 4 *Sea $l^p = l^p(\mathbb{Z})$ el espacio de las sucesiones complejas $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tales que*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^p < \infty,$$

donde $p \in [1, \infty)$. Es fácil ver que l^p es un espacio vectorial con la suma y la multiplicación por escalar definida componentes a componentes , esto es

$$\begin{aligned} (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} + (\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}} &= (\alpha_n + \beta_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \\ \lambda(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} &= (\lambda\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

El espacio l^p dotado de la norma

$$||\alpha||_p = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{2.2}$$

es completo. El espacio $l^\infty = l^\infty(\mathbb{Z})$ de las sucesiones complejas acotadas es también un espacio de Banach. La norma $||\cdot||_p$ es llamada la norma l^p, $1 \leq p \leq \infty$.

Ejemplo 5 *Para cada $p \in [1, \infty)$ defina $||\cdot||_p$ en $C([a, b])$ por*

$$||f||_p = \left[\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Entonces cualquiera sea $p \in [1, \infty)$, $(C[a, b], ||\cdot||_p)$ es un espacio vectorial que no es completo. En tanto que $C[a, b]$ es un espacio de Banach en relación a la norma

$$||f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

La norma $||f||_p$ es llamada la norma L^p, $1 \leq p \leq \infty$; la norma L^∞ es también llamada la norma del supremo. El siguiente teorema nos enseña una desigualdad muy útil en nuestros cálculos.

2.2. Desigualdad de Hölder

Teorema 6 *:(Desigualdad de Hölder)*

Sean $f \in L^p([-\pi, \pi])$ y $g \in L^q([-\pi, \pi])$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces el producto $fg \in L^1([-\pi, \pi])$ y

$$||fg||_{L^1} \leq ||f||_{L^p} \, ||g||_{L^q}.$$

2.3. Espacios de Hilbert

Definición 7 *Un espacio de Banach cuya norma proviene de un producto interno es llamado un espacio de Hilbert.*

Ejemplo 8 *Como vimos anteriormente $\mathbb{C}^n$ es un espacio de Banach en relación a cualquiera de las normas $||\cdot||_p$, $1 \leq p \leq \infty$, definidas en (6). En tanto que $(\mathbb{C}^n, ||\cdot||_p)$ es de Hilbert sí y solamente sí $p = 2$.*

En ese caso la norma proviene del producto interno

$$\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{w}_j,$$

donde $z = (z_1, ..., z_n)$, $w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n$.

Ejemplo 9 *Análogamente al ejemplo anterior, l^p es un espacio de Hilbert sí y solamente sí $p = 2$, y en ese caso, el producto interior es dado por*

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \bar{\beta}_n.$$

El espacio de Hilbert l^2 esta íntimamente ligado a la teoría de las serie de Fourier que hablaremos pronto.

2.4. Una desigualdad importante

Teorema 10 *Para todo $u, v \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, se cumple que*

$$\left| |u|^\sigma u - |v|^\sigma v \right| \leq \left(|u|^\sigma + |v|^\sigma \right) |u - v| .$$

Prueba. Consideremos el intervalo $[a, b]$ con $a < b$ y $a, b \in \mathbb{R}$.
definiendo $f(x) = x\,|x|^\sigma$, $\sigma > 0$, tenemos que

$$f'(x) = \begin{cases} (\sigma+1)x^\sigma \text{ si } x \geq 0 \\ (-x)^\sigma(\sigma+1) \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Por el teorema del valor medio para derivadas, tenemos que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Por tanto procediendo por casos tenemos que:

$a, b > 0$

$|f(b) - f(a)| = (\sigma + 1)c^{\sigma}(b - a) \leq C(|b|^{\sigma} + |a|^{\sigma})(b - a).$

$a < 0, b > 0.$

Así para $c < 0$, tenemos

$|f(b) - f(a)| = |f'(c)(b - a)| = (-c)^{\sigma}(\sigma + 1)\,|b - a| \leq ||a|^{\sigma} + |b|^{\sigma}|\,|b - a|$

$a < 0, b < 0,$

es análogo al caso anterior. ∎

2.5. Notaciones asintóticas

Decimos que la función $f(x)$ es del mismo orden que la función $g(x)$ en algún punto x_0 y denotamos $f(x) = O(g(x))$ cuando $x \to x_0$ si la desigualdad

$$|f(x)| \leq C\,|g(x)|$$

es válida para una vecindad del punto x_0. También es común escribir $f(x) = O(g(x))$ para $x \in D$, cuando la desigualdad es cierta para toda $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, donde C es alguna constante.

Decimos que la función $u(t, x)$ tiene la asintótica:

$$u(t, x) = \Psi(t, x) + O(\varphi(t, x))$$

cuando $t \to \infty$ uniformemente con respecto a $x > 0$ si existe algún $T_0 > 0$ y una constante $C > 0$ la cual no depende de los valores de las variables t y x, que satisfaga la siguiente estimación

$$|u(t, x) - \Psi(t, x)| \leq C\,|\varphi(t, x)|$$

para todo valor $t > T_0$.

2.6. El Lema de contracción

Teorema 11 *Sea M un conjunto cerrado de un espacio de Banach. Sea $f : M \to M$ una función, y supongamos que existe un número K, $0 < K < 1$, tal que, para todo x y $z \in M$, tenemos*

$$|f(x) - f(z)| \leq K\,|x - z|\,.$$

Entonces f tiene un punto fijo, esto es, existe un único punto $x_0 \in M$ tal que $f(x_0) = x_0$. Si $x \in M$, entonces la sucesión $\{f^n(x)\}$, (iteración de f repetida n-veces), es una sucesión de Cauchy que converge al punto fijo.

Prueba. Tenemos que para $x \in M$ fijo,

$$\left|f^2(x) - f(x)\right| = |f(f(x) - f(x)| \leq K\,|f(x) - x|\,.$$

Por inducción

$$\left|f^{n+1}(x) - f^n(x)\right| \leq K\left|f^n(x) - f^{n-1}(x)\right| \leq K^n\,|f(x) - x|\,.$$

En particular vemos que el conjunto de elementos $\{f^n(x)\}$ está acotado, pues

$$\begin{aligned} |f^n(x) - x| &\leq \left|f^n(x) - f^{n-1}(x)\right| + \left|f^{n-1}(x) - f^{n-2}(x)\right| + ...\,|f(x) - x| \\ &\leq (K^{n-1} + K^{n-2} + ... + K)\,|f(x) - x|\,, \end{aligned}$$

y la serie geométrica converge.

Ahora de nuevo por inducción, para cualquier entero $m \geq 1$ y $k \geq 1$ tenemos

$$\left|f^{m+k}(x) - f^m(x)\right| \leq K\left|f^k(x) - x\right|.$$

Ya vimos que el término $f^k(x) - x$ está acotado, independientemente de k. Por lo tanto, existe N tal que, si m y $n \geq N$, y digamos que $n = m + k$, tenemos

$$\left|f^{m+k}(x) - f^m(x)\right| < \varepsilon,$$

pues $k^m \to 0$ cuando $m \to \infty$. Por lo tanto, la sucesión $\{f^n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy. Sea x_0 su límite. Seleccionemos N tal que, para todo $n \geq N$, tenemos

$$|x_0 - f^n(x)| < \varepsilon,$$

$$\left|f(x_0) - f^{n+1}(x)\right| \leq K\left|x_0 - f^n(x)\right| < \varepsilon.$$

Esto prueba que la sucesión $\{f^n(x)\}$ converge a $f(x_0)$. Por lo tanto $f(x_0) = x_0$ y x_0, es un punto fijo. Finalmente, supongamos que x_1 también es un punto fijo, esto es, que $f(x_1) = x_1$. Entonces

$$|x_1 - x_0| = |f(x_1) - f(x_0)| \leq K|x_1 - x_0|.$$

Como $0 < K < 1$, se sigue que $x_1 - x_0 = 0$ y $x_1 = x_0$. ■

Una función como la del teorema se llama contracción.

2.7. Series de Fourier

Sea $l > 0$ y $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ una función integrable. La serie de Fourier de f es la serie

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(\frac{n\pi x}{l}) + b_n sen(\frac{n\pi x}{l})],$$

donde los coeficientes a_n, $n \in \mathbb{Z}^+$ y b_n, $n \in \mathbb{N}$, son dados por las fórmulas de Euler-Fourier, las cuales son

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{l})dx \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) sen(\frac{n\pi x}{l})dx. \end{aligned}$$

Nótese que el cambio de variable $y = \frac{\pi}{l}$, permite escribir la serie de Fourier como:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(ky) + b_k sen(ky)).$$

En otras palabras, en vez de considerar funciones periódicas de período $2l$ arbitrario, consideramos funciones periódicas de periodo 2π, sin ninguna pérdida de generalidad.

La próxima simplificación es reescribir las series de Fourier de una formas más compacta usando exponenciales complejas, recordando que

$$\begin{aligned} \cos(ky) &= \frac{e^{iky} + e^{-iky}}{2}, \\ sen(ky) &= \frac{e^{iky} - e^{-iky}}{2i}, \end{aligned}$$

obtenemos para todo $k = 1, 2, 3...n$

$$\begin{aligned} a_k \cos(ky) + b_k sen(ky) &= (\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i})e^{iky} + (\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i})e^{-iky} \\ &= \frac{a_k - ib_k}{2}e^{iky} + \frac{a_k + ib_k}{2}e^{-iky}. \end{aligned}$$

Podemos por tanto reescribir la serie de Fourier como

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{iky}, \tag{2.3}$$

donde

$$c_o = \frac{a_0}{2},\ c_k = \frac{a_k - ib_k}{2},\ c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2},$$

$k = 1, 2, ..., n$.

Supongamos ahora que la serie (8) converge uniformemente a una función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},$$

y es claro que las funciones

$$\Phi_k(x) = e^{ikx},\ k \in \mathbb{Z},$$

satisfacen las relaciones de ortogonalidad

$$\begin{aligned} \langle \Phi_k, \Phi_j \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_k(x)\overline{\Phi_j(x)}dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}e^{-ijx}dx \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq k \\ 2\pi \text{ si } j = k \end{cases} \\ \langle f, \Phi_k \rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \langle \Phi_n, \Phi_k \rangle \\ &= 2\pi c_k, \end{aligned}$$

y de allí:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \langle f, \Phi_k \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dada una función $f \in C_{per}([-\pi,\pi])$, donde esto denotará el conjunto de funciones continuas y periódicas en ese intervalo, la serie de Fourier generada por f y la serie (2.3) donde c_k es dado por (2.4). La sucesión compleja $\{\hat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ definida por

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx,$$

es llamada la Transformada de Fourier de f y los números complejos $\hat{f}(k) = c_k$ son los coeficientes de Fourier de f. Nótese que la aplicación

$$f \to \hat{f}$$

es lineal y

$$\begin{aligned} \left|\hat{f}(k)\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left|\left|f\right|\right|_1 \leq \left|\left|f\right|\right|_\infty, \end{aligned}$$

cualquiera sea $f \in (C_{per}([-\pi,\pi]), ||.||_1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Por tanto la aplicación que lleva f en su transformada $\hat{f}$, es una transformación lineal continua de $(C_{per}([-\pi,\pi]), ||.||_1)$ en $l^\infty(\mathbb{Z})$ con su norma usual.

Enunciaremos un teorema en función de encontrarnos con una identidad que se usa mucho en el trabajo, esta identidad recibe el nombre de Identidad de Parserval. De inmediato enunciaremos un teorema, que nos da condiciones de convergencia uniforme para una función con derivada seccionalmente continua. En el próximo teorema $SC_{per}(2\pi)$ denotara a las funciones seccionalmente continuas y periódicas de periódo 2π.

Teorema 12 *Suponga que $f \in C_{per}(2\pi)$, y diferenciable en $(-\pi,\pi)$ menos un número finito de puntos, con $f' \in SC_{per}(2\pi)$. Entonces la serie de fourier de f converge uniformemente en $\mathbb{R}$ para f.*

Teorema 13 *Sean $f, g \in C_{per}(2\pi)$ y suponga que f es diferenciable en $(-l,l)$ menos un número finito de puntos con $f' \in SC_{per}(2\pi)$. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi}\langle f, g\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}.$$

En particular vale la identidad de Parserval.

$$\frac{1}{2\pi}\left|\left|f\right|\right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(n)\right|^2.$$

Prueba.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\langle f,g\rangle &= \frac{1}{2l}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx \\
&= \frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\hat{f}(n)\int_{-\pi}^{\pi}\overline{g(x)}e^{inx}dx \\
&= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\hat{f}(n)\frac{1}{2l}\overline{\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-inx}dx} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\ \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}.
\end{aligned}$$

En particular entonces:

$$\frac{1}{2l}\langle f,f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\left|\hat{f}(n)\right|^2 = ||f||^2 \tag{2.5}$$

■

A la igualdad (2.5) se llama identidad de Parserval.

El siguiente teorema que enunciaremos, nos da condiciones para saber cuando tenemos convergencia uniforme de la serie de Fourier de una función continua.

Teorema 14 *Suponga que f es continua en $[-\pi,\pi]$ y que su serie de Fourier converge absolutamente, i.e.*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}(k)\right| < \infty.$$

Entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente a f, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = f(x), \text{ uniformemente en } x.$$

Nótese que existen funciones continuas cuyas series de Fourier son divergentes.

¿Qué condiciones en f garantizan la convergencia absoluta de la serie de Fourier?

Como veremos en el próximo teorema la suavidad en f implicará convergencia absoluta.

Teorema 15 *Suponga que f es dos veces continuamente diferenciable en $[-\pi,\pi]$. Entonces $\hat{f}(k) = O(\frac{1}{k^2})$, cuando $|k| \to \infty$,de manera que la serie de Fourier converge absoluta y uniformemente para f.*

Prueba. Suponga que $k \neq 0$. Integrando por partes y usando la periodicidad de f tenemos que

$$\begin{aligned} 2\pi\hat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{ik}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{(ik)^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)e^{-ikx}dx \\ &= -\frac{1}{k^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)e^{-ikx}dx. \end{aligned}$$

Luego como $f''(x)$ es continua, así en $[-\pi, \pi]$, está acotada y de allí tenemos que:

$$\left|\hat{f}(k)\right| \leq \frac{c}{k^2}$$

por tanto

$$\hat{f}(k) = O(\frac{1}{k^2}),$$

es decir que con condiciones de suavidad impuesta a la función podemos asegurar rapidez de convergencia más rápida que cuadrática. ■

2.8. Distribuciones

Denotaremos $C_0^\infty(\Omega)$ el conjunto de funciones pertenecientes a $C^\infty(\Omega)$, con soporte compacto en Ω. Llamaremos funciones test a los elementos de $C_0^\infty(\Omega)$.

Ejemplo 16 *Es fácil verificar que la función dada por:*

$$\eta(x) = \begin{cases} ce^{\frac{1}{|x|^2-1}} \text{ si } 0 \leq |x| \leq 1 \\ 0 \text{ si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

pertenece a $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

La función anterior es un típico ejemplo de una función test.

A $C_0^\infty(\Omega)$ le dotaremos de una adecuada noción de convergencia. Obsérvese que el símbolo

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}, \ldots .\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n),$$

denota la derivada de orden $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Definición 17 *Sea* $\{\varphi_k\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ *y* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. *Diremos que*

$$\varphi_k \to \varphi \text{ en } C_0^\infty(\Omega) \text{ cuando } k \to \infty,$$

si

1.) $D^\alpha \varphi_k \to D^\alpha \varphi$ uniformemente en Ω para toda $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$

2.) Existe un conjunto compacto $K \subset \Omega$, conteniendo el soporte de toda φ_k.

Es posible mostrar que el límite así definido es único. El espacio $C_0^\infty(\Omega)$ es denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$, cuando lo equipamos con la noción anterior de convergencia.

Fijemos nuestra atención en los funcionales lineales de $\mathcal{D}(\Omega)$. Si L es uno de éstos, usaremos el corchete $\langle L, \varphi \rangle$ para denotar la acción de L en la función test φ.

Diremos que el funcional lineal

$$L : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R},$$

es continuo en $\mathcal{D}(\Omega)$ si

$$\langle L, \varphi_k \rangle \to \langle L, \varphi \rangle \text{ cuando } \varphi_k \to \varphi \text{ en } \mathcal{D}(\Omega).$$

Definición 18 *Una distribución en* Ω *es un funcional lineal continuo en* $\mathcal{D}(\Omega)$. *El conjunto de distribuciones es denotado por* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dos distribuciones F y G coinciden si toda acción en una función test es la misma, es decir, si

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle G, \varphi \rangle \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Para toda $u \in L^2(\Omega)$ corresponde el funcional I_u cuya acción en φ es

$$\langle I_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u\varphi dx.$$

El cual es ciertamente continuo en $\mathcal{D}(\Omega)$. Por lo tanto I_u es una distribución en $\mathcal{D}'(\Omega)$. Nótese que la función I_u, puede ser identificada con u. Luego la noción de distribución generaliza la noción de función.

Los mismos argumentos muestran que toda función $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ pertenece a $\mathcal{D}'(\Omega)$ y

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_\Omega u\varphi dx.$$

$\mathcal{D}'(\Omega)$ es un espacio lineal. Si α, β son escalares reales (o complejos), $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $L_{1,}L_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definimos

$$\alpha L_1 + \beta L_2 \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ por medio de la fórmula,}$$
$$\langle \alpha L_1 + \beta L_2, \varphi \rangle = \alpha \langle L_1, \varphi \rangle + \beta \langle L_2, \varphi \rangle .$$

En $\mathcal{D}'(\Omega)$ podemos introducir una noción de convergencia débil: $\{L_k\}$ converge a L en $\mathcal{D}'(\Omega)$ si

$$\langle L_{k,}\varphi \rangle \to \langle L, \varphi \rangle \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Si $1 \leq p \leq \infty$, tenemos el encaje continuo

$$L^p(\Omega) \to L^1_{loc}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega).$$

Esto significa que si $u_k \to u$ en $L^p(\Omega)$ o en $L^1(\Omega)$, entonces $u_k \to u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Como observación de lo anterior podemos ver que las distribuciones son generalizaciones de las funciones localmente integrables.

Enunciaremos dos teoremas que serán útiles en lo que sigue, los cuales son teoremas importantes tanto de la teoría de de integración, como del análisis de Fourier.

Teorema 19 *(Teorema de la convergencia dominada)*

Sea $\{g_n\}$ una sucesión de funciones medibles e integrables convergiendo en medida en casi todas partes a una función integrable g. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles tales que $|f_n| \leq g_n$ y f_n converge a f en medida en casi todas partes. Suponga que

$$\int_S g(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_S g_n(x)d\mu(x),$$

donde S es un conjunto medible. Entonces

$$\int_S f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_S f_n(x)d\mu(x).$$

El teorema 18 es una generalización del teorema de la convergencia dominada usual. En su forma más simple y más conocida tenemos $g_n = g$ para todo n.

Teorema 20 *La transformada de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es una función continua, acotada y satisface la desigualdad*

$$\left|\left|\hat{f}\right|\right|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \left|\left|f\right|\right|_{L^1} .$$

En particular la aplicación $f \to \hat{f}$, es un operador acotado de $L^1(\mathbb{R}^n, dx)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n, d\xi)$. Más aún vale el lema de Riemann-Lebesgue, es decir

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

2.9. Los espacios de Sobolev en $\mathbb{R}^n$

Sea $s \in \mathbb{R}$. Los espacios de Sobolev en $\mathbb{R}^n$ son los siguientes subconjuntos de $\mathcal{D}'$

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{D}' \, tal \ que \ (1 + \left|\xi^2\right|)^{\frac{s}{2}} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Por tanto $\widehat{f} = (1 + \left|\xi^2\right|)^{-\frac{s}{2}} h$, con $h \in L^2(\mathbb{R}^n, d\xi)$.

El espacio $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, es de Hilbert dotado del producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \left|\xi^2\right|)^s \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} d\xi.$$

La norma correspondiente es evidentemente

$$||f||_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \left|\xi^2\right|)^s \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi.$$

En particular, $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$. $L_s^2(\mathbb{R}^n)$ denotará a los espacios L^2 con peso. Por otra parte

$$(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n, d\xi),$$

esto es $\widehat{f}$ es una función medible y

$$||f||_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \left|\xi^2\right|)^s \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi < \infty.$$

Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 21 *Sean $s, s' \in \mathbb{R}$. Entonces:*

i) $H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq H^{s'}(\mathbb{R}^n)$ si $s \geq s'$. Además de eso esta inclusión es continua y densa.

ii) $(H^s(\mathbb{R}^n))^\wedge = L^2(\mathbb{R}^n, (1 + |\xi|^2)^s d\xi) = L_s^2(\mathbb{R}^n)$

iii) El dual topológico de $H^s(\mathbb{R}^n)$ es decir, la colección de todos los funcionales lineales continuos de $H^s(\mathbb{R}^n)$ en $\mathbb{C}$, es isométricamente isomorfo a $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Prueba. Nótese que $s \geq s'$ implica que

$$(1+|\xi|^2)^{\frac{s'}{2}} \leq (1+\left|\xi^2\right|)^{\frac{s}{2}}.$$

Por tanto, si $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ se sigue que

$$\begin{aligned} ||f||_{s'} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+\left|\xi^2\right|)^{s'} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+\left|\xi^2\right|)^{s} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = ||f||_s^2 < \infty. \end{aligned}$$

Esto prueba que

$$H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq H^{s'}(\mathbb{R}^n))$$

y que la inclusión es continua. Para obtener la densidad, basta mostrar que

$$H^\infty(\mathbb{R}^n) = \cap_{\theta\in\mathbb{R}} H^\theta(\mathbb{R}^n),$$

es denso en $H^r(\mathbb{R}^n)$, cualquiera que sea $r \in \mathbb{R}$. Sea $f \in H^r(\mathbb{R}^n)$ y considere

$$f_t = (e^{-t|\cdot|^2}\widehat{f})^\vee, \ t \geq 0,$$

entonces $f_t \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$ si $t > 0$. De hecho

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} (1+\left|\xi^2\right|)^\theta \left|(f_t)^\wedge(\xi)\right|^2 d\xi \\ = &\int_{\mathbb{R}^n} (1+\left|\xi^2\right|)^{\theta-r}(1+\left|\xi^2\right|)^r e^{-2t\left|\xi^2\right|} \left|(\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\ \leq &\left[\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} (1+\left|\xi^2\right|)^{\theta-r} e^{-2t\left|\xi^2\right|}\right] ||f||_r^2 < \infty, \end{aligned}$$

cualquiera que sean $r, \theta \in \mathbb{R}$. Observe ahora que

$$\begin{aligned} &||f_t - f||_r^2 \\ = &\int_{\mathbb{R}^n} (1+\left|\xi^2\right|)^r \left|1-e^{-t\left|\xi^2\right|}\right|^2 \left|(\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi. \end{aligned}$$

El lado derecho de la última igualdad tiende a cero cuando $t \to 0$ por el teorema de la convergencia dominada. Esto termina la demostración de i. Para las partes ii y iii, remitimos al lector a [15]. ■

Finalmente es interesante y extremadamente útil observar que si s es suficientemente grande entonces los elementos de $H^s(\mathbb{R}^n)$ son funciones continuas. Más precisamente, vale el Lema de Sobolev o teorema de inmersión de Sobolev:

2.10. Teorema de inmersión de Sobolev

Teorema 22 *Sea $s > \frac{n}{2}$. Entonces $H^s(\mathbb{R}^n)$ puede ser inmerso continuamente en el espacio de funciones continuas de $\mathbb{R}^n$ que tienden a cero cuando $|x| \to \infty$ y vale la desigualdad*

$$||f||_{L^\infty} \leq (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \left|\xi^2\right|)^{-s} \right]^{\frac{1}{2}} ||f||_s \, .$$

Prueba. Vamos a probar que sobre las condiciones dadas $\widehat{f}(\xi)$ es una función integrable. El resultado se sigue del teorema 19. Tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{f}(\xi)\right| d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \left|\xi^2\right|)^{-\frac{s}{2}} (1 + \left|\xi^2\right|)^{\frac{s}{2}} \left|\widehat{f}(\xi)\right| d\xi \\ &\leq ||f||_s \int_{\mathbb{R}^n} \left[(1 + \left|\xi^2\right|)^{-s}\right]^{\frac{1}{2}} < \infty, \end{aligned}$$

toda vez que la integral del miembro derecho de la última desigualdad es finita por la hipótesis $s > \frac{n}{2}$. ■

Observación 2.1 *:Toda $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s > \frac{n}{2}$ es Hölder-continua. Es decir una función $f : X \to Y$, donde f es continua diremos que es Hölder-continua si existe $C > 0$ que satisface la desigualdad*

$$|f(x) - f(y)| \leq C \, |x - y|^{\varepsilon} \ \ para \ \varepsilon > 0.$$

Para concluir este capítulo enunciamos un teorema que nos va a permitir trabajar tanto de forma continua como discreta y esto último siendo de valiosa ayuda en el caso periódico que nos interesa.

Teorema 23 *La transformada de Fourier restringida a $L^2([-\pi, \pi])$ es una biyección entre $L^2([-\pi, \pi])$ y $l^2(\mathbb{Z})$. Además de eso vale la identidad de Parserval*

$$||f||_2^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f}(k)\right|^2 = 2\pi \left|\left|\widehat{f}\right|\right|_2^2, \quad f \in L^2([-\pi, \pi]),$$

o equivalentemente

$$\langle f, g \rangle = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)} = 2\pi \left\langle \widehat{f}, \widehat{g} \right\rangle \quad f, g \in L^2([-\pi, \pi]).$$

Prueba. Dada $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$, defina para $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= \sum_{|k|\leq n} \alpha_k e^{ikx} \\ &= \sum_{|k|\leq n} \alpha_k \Phi_k(x). \end{aligned}$$

Es claro que $\psi_n \in D$, usando las relaciones de ortogonalidad

$$||\psi_n - \psi_m||_{L^2}^2 = 2\pi \sum_{n\leq|k|\leq m+1} |\alpha_k|^2 , \tag{A}$$

donde sin pérdida de generalidad podemos suponer que $n > m$; como $\alpha \in L^2(\mathbb{Z})$, el lado derecho (A) tiende a cero cuando $n, m \to \infty$, y por tanto $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en relación a la norma L^2. Así existe $f \in L^2([-\pi, \pi])$ tal que $\psi_n \to f$ en la norma L^2; por la unicidad de la serie de Fourier en $\mathcal{D}'$, $\widehat{f} = \alpha$.

Recíprocamente, dada $f \in L^2([-\pi, \pi])$, sea $\psi_n \subseteq \mathcal{D}$ tal que $\psi_n \to f$ en la norma L^2.

Como $\psi_n \to f$ en $\mathcal{D}'$, para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \widehat{f(k)} &= \frac{1}{2\pi} \langle f, \Phi_{-k} \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle \psi_{n,} \Phi_{-k} \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \widehat{\psi_n}(k). \end{aligned} \tag{B}$$

Por la identidad de Parseval (válida en $\mathcal{D}$), tenemos:

$$||\psi_n - \psi_m||_{L^2}^2 = 2\pi \left|\left| \widehat{\psi_n} - \widehat{\psi_m} \right|\right|_{L^2}$$

Luego, $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $l^2(\mathbb{Z})$, que es completo, y por tanto $\psi_n \to \alpha$ en $l^2(\mathbb{Z})$, para algún $\alpha \in l^2(\mathbb{Z})$. Entonces para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} & \left| \alpha_k - \widehat{\psi}_n(k) \right|^2 \\ \leq & \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left| \alpha_l - \widehat{\psi}_n(l) \right|^2 \\ = & ||\alpha - \psi_n||_{L^2}^2 \to 0, \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, y de (B), $\alpha = \widehat{f} \in l^2(\mathbb{Z})$. Con esto probamos entonces que la transformada de Fourier es una biyección entre $L^2([-\pi, \pi])$ y $l^2(\mathbb{Z})$. ■

Este teorema nos dice entonces que $L^2([-\pi,\pi])$ es la colección de las "funciones" de la forma

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \Phi_k,$$

donde la convergencia de la serie en el sentido L^2 es $\alpha = \widehat{f} \in l^2(\mathbb{Z})$.

Para terminar esta sección, podemos resumir algunos de los resultados más importantes, sobre la serie de Fourier en la siguiente figura, donde en cada caso la transformada de Fourier $\widehat{\cdot}$ es una biyección lineal con inversa continua $\check{\cdot}$ y las inclusiones son continuas con imagen densa, esto es, cada elemento del espacio mayor puede ser aproximada por una sucesión en el espacio menor, la convergencia como es claro en el sentido del espacio mayor.

$$\mathcal{D} \hookrightarrow L^2([-\pi,\pi]) \hookrightarrow \mathcal{D}'$$

$$\downarrow\uparrow \qquad \downarrow\uparrow \qquad \vee \downarrow\uparrow \wedge$$

$$S(\mathbb{Z}) \hookrightarrow l^2(\mathbb{Z}) \hookrightarrow S'(\mathbb{Z})$$

La flecha hacia arriba es la transformada de Fourier y la flecha hacia abajo indica la transformada inversa de Fourier.

Expliquemos que son los espacios $S(\mathbb{Z})$ y $S(\mathbb{R}^n)$.

$S(\mathbb{Z})$ es el espacio de Schwartz también llamado el espacio de las sucesiones complejas rápidamente decrecientes, es decir

$$\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$$

tales que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k| < \infty, \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|\,|k|^n < \infty, n = 1, 2, ...$$

Se puede mostrar que $S(\mathbb{Z})$, es la imagen de , $\mathcal{D}$ bajo la transformada de Fourier.

También podemos definir el espacio de Schwartz (o el espacio de funciones rápidamente decrecientes), denotado por $S(\mathbb{R}^n)$,como la colección de funciones

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},$$

tales que

$$||f||_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right| < \infty,$$

para todo par de multi-índices α, β.

Como observación final en este sentido, es importante comentar que el espacio $\mathcal{D}$, de las funciones C^{∞} con soporte compacto, esta contenido en $S(\mathbb{R}^n)$. La contención contraria no se da pues la función (Gaussiana) definida por:

$$\gamma(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}, \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

está en $S(\mathbb{R})$ pero no tiene soporte compacto.

2.11. Sobolev periódicos.

También podemos definir el espacio de Sobolev de orden s en el caso periódico de la forma

$$H^s(\Omega) = \{\phi \in \wp' : ||\phi||^2_{H^s} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \langle n \rangle^{2s} \left|\hat{\phi}_n\right|^2 < \infty\},$$

donde $\wp = C^{\infty}_{per}$; $\langle n \rangle = \sqrt{1+n^2}$, con $n \in \mathbb{Z}$.

$\wp$, denota la colección de todas las funciones $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, las cuales son C^{∞} y $2\pi-$periódicas, $\wp'$ es el espacio dual topológico de $\wp$, es decir la colección de todos los funcionales lineales y continuos de $\wp$ a $\mathbb{C}$, y a sus elementos le llamaremos distribuciones periódicas que en la próxima sección definiremos.

Claramente $\wp$ es un subespacio vectorial de C^n_{per} para todo $n \in \mathbb{N}$. $\wp$ es denso en C^n_{per}, con respecto a las normas $\mathbb{C}^n$, definidas anteriormente. Esto muestra que $\wp$ no es completo con respecto a esas normas. No existe una norma natural repecto a la cual $\wp$, es un espacio de Banach. Sin embargo existe una distancia natural con respecto a la cual $\wp$, es un espacio de Banach.

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\left|\left|\varphi^{(j)} - \psi^{(j)}\right|\right|_{\infty}}{1 + \left|\left|\varphi^{(j)} - \psi^{(j)}\right|\right|_{\infty}}, \varphi, \psi \in \wp,$$

define un métrica en $\wp$ tal que

$$\varphi_n \to \varphi \text{ en } \wp \iff \left|\left|\varphi^{(j)} - \psi^{(j)}\right|\right|_{\infty} \to 0 \ n \to \infty \ \forall j = 0, 1, 2, ...$$

Esta noción de convergencia es muy fuerte: φ_n y todas sus derivadas convergen uniformemente sobre $\mathbb{R}$ (a φ y sus derivadas). En particular $\varphi_n \to \varphi$ en $\wp$ implica que $\varphi_n \to \varphi$ con respectos a todas las normas L^p, $1 \leq p \leq \infty$. Como veremos esto es muy conveniente par nuestros propósitos.

Teorema 24 *$(\wp, d)$ es un espacio métrico completo. Más aún, si $(\varphi_n) \subset \wp$ y $\varphi \in \wp$, entonces*

$$\varphi_n \to \varphi \text{ en } (\wp, d) \iff \left|\left|\varphi^{(j)} - \psi^{(j)}\right|\right|_\infty \to 0 \ n \to \infty \forall j = 0, 1, 2, ...$$

Observación 2.2 *La completitud de $(\wp, d)$, es una condición necesaria para que toda distribución periódica sea un funcional lineal continuo en $\wp$.*

Definición 25 *Sea $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. La transformada inversa de Fourier de α, es la función*

$$\alpha^\vee(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx}, x \in \mathbb{R}.$$

Afirmación 2.1 *La transformada de Fourier $\wedge : \wp \to S(\mathbb{Z})$, es un isomorfismo y un homeomorfismo, esto es, es lineal, inyectiva, sobre $S(\mathbb{Z})$, y continua con inversa $\vee$ continua.*

Afirmación 2.2 *El espacio de Sobolev periódico es completo.*

Prueba. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en H^s. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que , si

$$m, n \geq N \Rightarrow ||f_n - f_m||_{H^s} < \varepsilon.$$

En particular para cada $x \in \Omega$

$$||f_n(x) - f_m(x)||_{H^s} < \varepsilon,$$

y así para cada x $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy, por tanto existe el límite de la sucesión $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$. Además

$$\begin{aligned} ||f(x)||_{H^s} &= ||f(x) - f_n(x) + f_n(x)||_{H^s} \\ &\leq ||f_n(x) - f_n(x)||_{H^s} + ||f_n(x)||_{H^s} \\ &< \varepsilon + ||f_n||_{H^s} . \end{aligned}$$

Luego $f \in H^s$ y H^s es completo. ■

Por tanto el espacio $C([0, T] : H^s)$ es un espacio normado completo. En el siguiente teorema resumimos algunas propiedades de los espacios Sobolev escrito en su forma discreta para el caso periódico.

Teorema 26 *a.) Para todo $s \in \mathbb{R}$, $H^s = H^s([-\pi,\pi])$ es un espacio de Hilbert con relación al producto interno*

$$\langle f,g\rangle = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (1+k^2)^s \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}.$$

b.) Sean $s,r \in \mathbb{R}$, $s \geq r$. Entonces H^s está continua y densamente inmerso en H^r y

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s \text{ para todo } f \in H^s.$$

El siguiente resultado conocido como el lema de Sobolev para el caso periódico nos permite relacionar "derivadas débiles" con derivadas en el sentido clásico.

Teorema 27 *Si $s > \frac{1}{2}$, entonces $H^s([-\pi,\pi])$ es continua y densamente inmerso en C_{per} y*

$$\|f\|_\infty \leq \left\|\hat{f}\right\|_{l^1} \leq \|f\|_{H^s}, \ f \in H^s.$$

Prueba. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la hipótesis $s > \frac{1}{2}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(k)\right| &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(1+k^2)^{\frac{s}{2}}\left|\hat{f}(k)\right|}{(1+k^2)^{\frac{s}{2}}} \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}((1+k^2)^s\left|\hat{f}(k)\right|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(1+|k|^2)^s})^{\frac{1}{2}} \\ &= (\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(1+|k|^2)^s})^{\frac{1}{2}}\|f\|_{H^s},\end{aligned}$$

por lo tanto $\{\hat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l^1$ y así

$$g(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}$$

converge absolutamente y uniformemente en $[-\pi,\pi]$. Por lo tanto $g \in C_{per}(2\pi)$. ■

Observación 2.3 *Los espacios de Sobolev miden la diferenciabilidad de funciones en L^2. Por otra parte, la importancia de estos espacios, radican en su persistencia, es decir tomando condiciones iniciales en Sobolev, la solución de una ecuación diferencial evolutiva, en particular no-lineal vivirá en el Sobolev.*

2.12. Distribuciones Periódicas.

Definición 28 *Un funcional lineal en $\wp, L : \wp \to \mathbb{C}$, es llamada una distribución periódica si existe una sucesión $(\Psi_n)_{n\geq 1} \subset \wp$ tal que*

$$L(\varphi) = \langle L, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(x)\varphi(x)dx, \forall\varphi \in \wp.$$

Observación 2.4 *El conjunto de las distribuciones periódicas será denotado por $\wp'$.*

Observación 2.5 *Los elementos del espacio Sobolev periódico, son las distribuciones periódicas.*

Proposición 2.1 *Sea $f \in C_{per}$, es decir una función continua y periódica. Entonces la fórmula*

$$\langle L_f, \varphi\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi(x)dx, \varphi \in \wp,$$

define una distribución periódica L_f. La función

$$f \in C_{per} \to L_f \in \wp',$$

es lineal, inyectiva y continua en el sentido que si $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset C_{per}$ converge uniformemente a f entonces

$$\langle L_{f_n}, \varphi\rangle \to \langle L_f, \varphi\rangle \ \forall\varphi \in \wp.$$

Capítulo 3

Problema no-lineal de ondas I

3.1. Problema lineal I

Estudiaremos el problema con datos iniciales periódicos, definido por la ecuación diferencial parcial no-lineal tipo onda:

$$\begin{cases} u_{tt} + 2\alpha u_t - \beta u_{xx} = -\lambda \left|u\right|^{\sigma} u, t > 0 \\ u(0,x) = \phi(x), u_t(0,x) = \psi(x), x \in \Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

con ϕ y ψ funciones 2π-periódicas y de clase C^{∞}, es decir $\phi, \psi \in C^{\infty}_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Aquí α, β, λ y σ denotan constantes positivas.

Nos interesa hacer estimaciones asintóticas de la solución, para esto utilizaremos como ambientes de estas soluciones a los espacios de Sobolev, es decir usaremos estos espacios para garantizar existencia y unicidad de solución, además de garantizar que la solución viva en el mismo espacio donde son tomados los datos iniciales, fenómeno que llamamos persistencia y nos permite ser más exigentes con las hipótesis impuestas a los datos iniciales.

Usaremos también la transformada de Fourier como primer paso, en el caso linealizado.

$$u_{tt} + 2\alpha u_t - \beta u_{xx} = f(t,x); \;\; f \in C^{\infty}((0,\infty) \times \mathbb{R}),$$

donde f, ϕ, ψ son periódicas con respecto a la variable espacial, es decir

$$f(t, 2\pi + x) = f(t,x),$$

$$\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x),$$

$$\phi(x + 2\pi) = \phi(x).$$

Entonces consideremos la ecuación,

$$u_{tt} + 2\alpha u_t - \beta u_{xx} = f(t,x),$$

donde denotaremos a

$$\widehat{u}_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)e^{-inx}dx,$$

a la transformada de Fourier de u. De la misma forma

$$\widehat{f}_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,x)e^{-inx}dx.$$

denota la transformda de Fourier de f.

Procedamos entonces utilizando la transformada de Fourier.

$$\begin{aligned}
e^{-inx}u_{tt} + e^{-inx}2\alpha u_t - e^{-inx}\beta u_{xx} &= e^{-inx}f(t,x)\\
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{-inx}u_{tt} + 2e^{-inx}\alpha u_t - e^{-inx}\beta u_{xx})dx &= \widehat{f}_n(t)\\
\frac{\partial}{\partial t^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}udx + \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}udx - \beta\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}u_{xx}dx &= \widehat{f}_n(t)\\
\frac{\partial}{\partial t^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}udx + \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}udx - \beta\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}u_{xx}dx &= \widehat{f}_n(t)\\
u_n^{''}(t) + u_n^{'}(t) - \frac{\beta}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_{xx}e^{-inx}dx &= \widehat{f}_n(t).
\end{aligned}$$

Ahora aplicamos integración por partes para la integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}u_{xx}dx,$$

y en este proceso obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}u_{xx}dx = -n^2\widehat{u}_n(t),$$

así tenemos la ecuación diferencial ordinaria con datos iniciales

$$\begin{cases}
\widehat{u}_n^{''}(t) + 2\alpha\widehat{u}_n^{'}(t) + \beta n^2\widehat{u}_n(t) = \widehat{f}_n(t),\\
\widehat{u}_n(0) = \widehat{\phi}_n,\\
\widehat{u}_n'(0) = \widehat{\psi}_n.
\end{cases}$$

Resolvemos esta ecuación ordinaria por el método de variación de parámetros. A esta ecuación ordinaria le asociamos el polinomio caracteristico, el cual es

$$m^2 + 2\alpha m + \beta n^2 = 0,$$
$$-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta n^2} = m.$$

Nótese que m, puede ser real o complejo segun el signo de $\alpha^2 - \beta n^2$.

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha^2 - \beta n^2} &\in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta n^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 \geq \beta n^2 \\ &\Leftrightarrow n^2 \leq \frac{\alpha^2}{\beta} \\ |n| &\leq \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}. \end{aligned}$$

Tómese $N_0 = \left[\left|\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}\right|\right]$ y veamos cual es la cara de la solución para $|n| \leq N_0$.

$y_n(t)$ denotara la solución para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ donde $|n| \leq N_0$, la solución de la homogenea asociada es

$$y_n = A_n e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} + B_n e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}.$$

Buscamos una solución particular de la no-homogenea asociada, esto nos da lugar al sistema:

$$\begin{cases} (1) \qquad A_n'(t) e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} + B_n'(t) e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} = 0 \\ \qquad\qquad A_n'(t) e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta n^2}) + \\ (2) \qquad B_n'(t) e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta n^2}) = \widehat{f}_n(t) \end{cases}$$

Resolvamos este sistema. De (1), obtenemos que

$$\begin{aligned} A_n'(t) &= -\frac{B_n'(t) e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}}{e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}} \\ &= -B_n'(t) e^{(-2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}. \end{aligned}$$

sustituyendo en (2), obtenemos

$$\begin{aligned} & -B_n'(t) e^{(-2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta n^2}) \\ & + B_n'(t) e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta n^2}) \\ = {} & B_n'(t) e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}(-2\sqrt{\alpha^2 - \beta n^2}) \\ = {} & \widehat{f}_n(t), \end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_n(t) &= B_n'(t)e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}(-2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})\\
B_n'(t) &= -\frac{\widehat{f}_n(t)e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}}{2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}\\
B_n(t) &= -\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})s}}{2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}.
\end{aligned}$$

por otra parte tenemos:

$$\begin{aligned}
A_n'(t) &= \frac{\widehat{f}_n(t)e^{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}}{2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}\\
A_n(t) &= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})s}}{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}ds.
\end{aligned}$$

Luego, la solución general de la no-homogenea es:

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_n(t) &= A_n e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} + B_n e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}\\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})s}}{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}ds e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}\\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})s}}{2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}.
\end{aligned}$$

La cual podemos escribir como:

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_n(t) &= A_n e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} + B_n e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}\\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}(t-s)}}{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}ds\\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}(t-s)}}{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}ds.
\end{aligned}$$

y considerano la diferencia de integrales tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}(t-s)}}{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}ds - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}(t-s)}}{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}ds\\
= &\int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)}}{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}\frac{e^{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}(t-s)} - e^{-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}(t-s)}}{2}ds\\
= &\int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)}}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}\frac{e^{i\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}(t-s)} - e^{-i\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}(t-s)}}{2i}ds\\
&\int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)}}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}sen(\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}(t-s)).
\end{aligned}$$

Por tanto podemos escribir la solución general de la ecuación no homogenea como:

$$\begin{aligned}\widehat{u}_n(t) &= A_n e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} + B_n e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t}\\ &+ \int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)}}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}} sen(\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}(t-s)).\end{aligned}$$

Sólo nos falta conseguir A_n y B_n y esto lo hacemos gracias a las condiciones iniciales.

$$\widehat{u}_n(0) = \widehat{\phi}_n,$$

luego

$$A_n + B_n = \widehat{\phi}_n \Rightarrow A_n = \widehat{\phi}_n - B_n,$$

y por condición inicial

$$u_n'(0) = \widehat{\psi}_n,$$

tenemos que:

$$A_n(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}) + B_n(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}) = \widehat{\psi}_n,$$

y sustituyendo $A_n = \widehat{\phi}_n - B_n$, en la última ecuación tenemos que:

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}_n &= (\widehat{\phi}_n - B_n)(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}) + B_n(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})\\ B_n(-2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}) &= \widehat{\psi}_n + \widehat{\phi}_n(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})\\ B_n &= \frac{\widehat{\psi}_n + \widehat{\phi}_n(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})}{-2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}.\end{aligned}$$

y luego

$$\begin{aligned}A_n &= \widehat{\phi}_n + \frac{\widehat{\psi}_n + \widehat{\phi}_n(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})}{2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}},\\ A_n &= \frac{\widehat{\psi}_n}{2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}} + \frac{\widehat{\phi}_n(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})}{2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}},\\ A_n &= \frac{\widehat{\psi}_n}{2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}} + \frac{\widehat{\phi}_n(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})}{2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}.\end{aligned}$$

Así, sustituyendo los valores de A_n y B_n en la solución general de la ecuación no homogenea, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\widehat{u}_n(t) &= (\frac{\widehat{\psi}_n}{2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}} + \frac{\widehat{\phi}_n(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})}{2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}})e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} \\
&+(\frac{\widehat{\psi}_n+\phi_n(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})}{-2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}})e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} \\
&+\int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)}}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}} sen(\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}(t-s)).
\end{aligned}
$$

Trabajemos entonces los coeficientes $\widehat{\phi}_n$ y $\widehat{\psi}_n$ por separados. Iniciaremos con ψ_n .

$$
\begin{aligned}
& \frac{\widehat{\psi}_n}{2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} - \frac{\widehat{\psi}_n}{2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} \\
= & \frac{\widehat{\psi}_n}{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}e^{-\alpha t}\frac{e^{-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}t}-e^{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}t}}{2} \\
= & \frac{\widehat{\psi}_n}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}e^{-\alpha t}\frac{e^{-i\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}t}-e^{i\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}t}}{2i} \\
= & \frac{\widehat{\psi}_n}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}e^{-\alpha t}sen(\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}t).
\end{aligned}
$$

Hagamos lo propio con el término ϕ_n.

$$
\begin{aligned}
& \frac{\widehat{\phi}_n(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})}{2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}})e^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} \\
& +\frac{\phi_n(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})}{2\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}})e^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2})t} \\
= & \frac{2\alpha\phi_n}{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}}e^{-\alpha t}\frac{e^{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}t}-e^{-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}t}}{2} \\
& +\widehat{\phi}_n e^{-\alpha t}\frac{e^{\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}t}+e^{-\sqrt{\alpha^2-\beta n^2}t}}{2} \\
= & \frac{2\alpha\widehat{\phi}_n}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}e^{-\alpha t}\frac{e^{i\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}t}-e^{-i\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}t}}{2i} \\
& +\widehat{\phi}_n e^{-\alpha t}\frac{e^{i\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}t}+e^{-i\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}t}}{2} \\
= & \frac{2\alpha\widehat{\phi}_n}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}e^{-\alpha t}sen(\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}t)+\widehat{\phi}_n e^{-\alpha t}\cos(\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}t).
\end{aligned}
$$

Así la solución general con los datos iniciales para $|n| \leq N_0$ es:

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \frac{\widehat{\psi}_n}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}} e^{-\alpha t} sen(\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}t) \\ &+\phi_n(\frac{2\alpha}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}} e^{-\alpha t} sen(\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}t) + e^{-\alpha t}\cos(\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}t)) \\ &+\int_0^t \frac{\widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)}}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}} sen(\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}(t-s)). \end{aligned}$$

Por otra parte para $|n| > N_0$, tenemos : la solución a la ecuación homogenea asociada es

$$y = A_n e^{-\alpha t} sen(\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}t) + B_n e^{-\alpha t}\cos(\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}t),$$

donde consideramos

$$p_n = \sqrt{\beta n^2-\alpha^2},$$

y haciendo variar los coeficientes dependiendo de t, el método de variación de parámetros nos lleva a plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{c} A_n'(t)e^{-\alpha t} sen(p_n t) + B_n'(t)e^{-\alpha t}\cos(p_n t) = 0 \\ -\alpha\ A_n'(t)e^{-\alpha t} sen(p_n t) + e^{-\alpha t}\cos(p_n t)p_n - \alpha B_n'(t)e^{-\alpha t}\cos(p_n t) \\ -B_n'(t)e^{-\alpha t} sen(p_n t)p_n = \widehat{f}_n(t) \end{array} \right.$$

La solución de este sistema es

$$\begin{aligned} A_n(t) &= e^{\alpha s}\int_0^t f_n(s)\cos(p_n s)\frac{1}{p_n}ds \\ B_n(t) &= -e^{\alpha s}\int_0^t f_n(s) sen(p_n s)\frac{1}{p_n}ds, \end{aligned}$$

y la solución general de la ecuación es

$$\begin{aligned} \widehat{u}_n(t) &= A_n e^{-\alpha t} sen(p_n t) + B_n e^{-\alpha t}\cos(p_n t) \\ &+ \int_0^t \widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)}) sen(p_n(t-s))\frac{1}{p_n}ds, \\ \widehat{u}_n(0) &= \widehat{\phi}_n, \widehat{u}_n'(0) = \widehat{\varphi}_n \text{ sus condiciones iniciales.} \end{aligned}$$

y de esto obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
B_n &= \widehat{\phi}_n \\
\widehat{u}_n'(t) &= -\alpha A_n e^{-\alpha t} sen(p_n t) + A_n e^{-\alpha t}\cos(p_n t) - \alpha\widehat{\phi}_n \cos(p_n t) \\
&\quad + e^{-\alpha t} sen(p_n t)\widehat{\varphi}_n, \\
\widehat{u}_n'(t) &= -\alpha A_n e^{-\alpha t} sen(p_n t) + A_n e^{-\alpha t}\cos(p_n t) - \alpha\widehat{\phi}_n \cos(p_n t) \\
&\quad + e^{-\alpha t} sen(p_n t)\widehat{\varphi}_n,
\end{aligned}
$$

y para obtener A_n ,vemos que:

$$
u_n'(0) = A - \alpha\widehat{\phi}_n = \widehat{\varphi}_n.
$$

Luego la solución de la ecuación ordinaria la escribimos como

$$
\widehat{u}_n(t) = (\widehat{\psi}_n + \alpha\widehat{\phi}_n)\frac{1}{p_n} e^{-\alpha t} sen(p_n t) + e^{-\alpha t}\cos(p_n t)\widehat{\phi}_n +
$$
$$
\int_0^t \widehat{f_n}(s) e^{-\alpha(t-s)} sen(p_n(t-s))\frac{1}{p_n} ds.
$$

La cual también podemos escribir como:

$$
\begin{aligned}
\widehat{u}_n(t) \quad = \quad & \widehat{\psi}_n \frac{1}{p_n} e^{-\alpha t} sen(p_n t) + \widehat{\phi}_n(\alpha\frac{1}{p_n} e^{-\alpha t} sen(p_n t) + e^{-\alpha t}\cos(p_n t)) \\
& + \int_0^t \widehat{f_n}(s) e^{-\alpha(t-s)} sen(p_n(t-s))\frac{1}{p_n} ds.
\end{aligned}
$$

y tiene la misma expresión que para los $|n| \leq N_0$.

Observación 3.1 *La función* $\frac{\sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$ *es una función entera.*

Ahora construimos el operador de Green, y así podemos escribir la solución de nuestra ecuación en la siguiente forma, definiendo el operador G cuyo dominio y contradominio de este operador es:

$$
\begin{aligned}
&G : C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},\mathbb{R}),\ \text{definido por}\\
G(t)\psi(x) &= e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}_n \frac{sen(p_n t)}{p_n} e^{inx},\\
G(t)\psi(x) &= e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}_n e^{inx}\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\frac{1}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}\\
&\widetilde{G} : C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},\mathbb{R}),\\
\widetilde{G}(t) &= (2\alpha + \partial_t)G(t),\\
\widetilde{G}(t)\phi(x) &= e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}_n e^{inx}(\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\frac{1}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}} + \cos(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})).
\end{aligned}
$$

Nótese que estos operadores definidos por series son uniformemente convergentes en norma l^1. Estudiemos por separado cada una de estas series.

El operador definido por

$$
G(t)\psi = e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}_n e^{inx}\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\frac{1}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}},
$$

converge absolutamente, ya que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\psi}_n e^{inx}\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\frac{1}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}\right|\\
\leq\ &\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\psi}_n\right|\left|\frac{1}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}\right|,
\end{aligned}
$$

ya que el dato inicial ψ es infinitamente diferenciable y por teorema 15 del capítulo 2, bastaría que fuese de clase C^2 para que sus coeficientes de Fourier se fueran a cero más rápido que cuadrático. Por tanto

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\psi}_n\right|\left|\frac{1}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^3}
$$

y por criterio de Weierstrass la serie converge uniformemente en

$$
(0,\infty)\times\mathbb{R}.
$$

Análogamente la serie definida por

$$
e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_n e^{inx}(\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\frac{1}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}} + \cos(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}))
$$

converge absolutamente en

$$(0,\infty)\times\mathbb{R}$$

ya que si descomponemos la suma, en suma de series, cada serie por separado es absolutamente convergente y por el criterio de Weierstrass la serie converge uniformemente en el dominio señalado. De igual forma para

$$\int_0^t G(t-s)f(s)ds$$

la serie que esta integral define es uniformemente convergente ya que suponemos f de clase C^∞.

Luego escribimos $\widehat{u}_n(t)$, para $n\in\mathbb{Z}$, como

$$\begin{aligned}\widehat{u}_n(t) = \frac{1}{p_n}e^{-\alpha t}sen(p_n t)\widehat{\psi}_n + e^{-\alpha t}(\cos(p_n t) + \alpha sen(p_n t)\frac{1}{p_n})\widehat{\phi}_n \\ + \int_0^t \widehat{f}_n(s)e^{-\alpha(t-s)}sen(p_n(t-s))\frac{1}{p_n}ds,\end{aligned}$$

Por tanto escribimos la solución del problema lineal como

$$\begin{aligned}u(t,x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{u}_n(t)e^{inx} \\ &= e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{\psi}_n e^{inx}\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\frac{1}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}} \\ &+ e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{\phi}_n e^{inx}(\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\frac{1}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}} + \cos(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})) \\ &+ \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}_n(s)e^{inx}\sin((t-s)\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}))\frac{1}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}ds.\end{aligned}$$

Nótese aqui, que $\widehat{f}_n(s)$ conserva la propiedad de decaimiento, donde s es un parámetro en el intervalo $[0,t]$ con $t>0$. Es decir gracias a la suavidad de f, podemos asegurar que para cada s en $[0,T]$, $\widehat{f}_n(s)$ se va a cero más rapido que cuadrático. De hecho se va a cer más rápido que cualquier polinimio. La prueba es identica a la prueba del teorema 14 del capítulo 2. Luego de lo anterior tenemos que la fórmula de Duhamel para la solución del problema lineal:

$$u(t,x) = G(t)\psi + \widetilde{G}(t)\phi + \int_0^t G(t-s)f(s)ds.$$

Ahora iniciamos con una serie de lemas que nos permitiran construir las estimaciones que se quieren.

Lema 29 *Sea $\phi \in H^s$, $\psi \in H^{s-1}$, con $s \geq 0$. Entonces los siguientes estimados son verdaderos para todo $t > 0$ y $\mu = \Re e(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}) > 0$.*

$$\begin{aligned}
\left|\left|\widetilde{G}(t)\phi\right|\right|_{H^s} &\leq C\,||\phi||_{H^s} \\
\left|\left|\widetilde{G}(t)\phi\right|\right|_{\dot{H}^s} &\leq Ce^{-\mu t}\,||\phi||_{\dot{H}^s} \\
||G(t)\psi||_{H^s} &\leq C\,||\psi||_{H^{s-1}} \\
||G(t)\psi||_{\dot{H}^s} &\leq C\,||\psi||_{\dot{H}^{s-1}} \\
\left|\left|\int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau\right|\right|_{H^s} &\leq C\int_0^t ||f(\tau)||_{H^{s-1}}\,d\tau \\
\left|\left|\int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau\right|\right|_{\dot{H}^s} &\leq Ce^{-\mu(t-\tau)}\int_0^t ||f(\tau)||_{\dot{H}^{s-1}}\,d\tau
\end{aligned}$$

Prueba. Por la identidad de Parseval tenemos:

$$\begin{aligned}
\left|\left|\widetilde{G}(t)\phi\right|\right|^2_{H^s} &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle n\rangle^{2s}e^{-2\alpha t}\left|\begin{array}{c}\frac{1}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}sen(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}) \\ +\cos(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\end{array}\right|^2\left|\hat{\phi}_n\right|^2 \\
&\leq C\,||\phi||^2_{H^s}.
\end{aligned}$$

Luego tenemos un operador lineal y continuo definido en un subespacio denso de H^s, para todo $s \in \mathbb{R}$, como lo son las funciones C^∞, y así por teorema de Hahn-Banach el operador $G(t)$, se puede extender de manera continua y canónica a todo H^s. Análogamente se obtienen los demás estimados del lema.

$$\begin{aligned}
||G(t)\psi||^2_{H^s} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-2\alpha t}\langle n\rangle^{2s}\left|\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\right|^2\left|\frac{1}{\beta n^2-\alpha^2}\right|\left|\widehat{\psi}_n\right|^2 \\
&\leq C\,||\psi||^2_{H^{s-1}}.
\end{aligned}$$

En la misma forma obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\widetilde{G}(t)\phi\right|\right|^2_{\dot{H}^s} \\
&= \sum_{|n|\geq 1}\langle n\rangle^{2s}e^{-2\alpha t}\left|\begin{array}{c}\frac{1}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}sen(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}) \\ +\cos(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\end{array}\right|^2\left|\hat{\phi}_n\right|^2 \\
&\leq Ce^{-2\mu t}\,||\phi||^2_{\dot{H}^s}.
\end{aligned}$$

y

$$||G(t)\psi||^2_{\dot{H}^s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha t} \langle n\rangle^{\ 2s} \left|\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\right|^2 \left|\frac{1}{\beta n^2-\alpha^2}\right| \left|\widehat{\psi}_n\right|^2$$
$$\leq Ce^{-2\mu t} ||\psi|| .$$

Aplicando los estimados anteriores tenemos

$$\left|\left|\int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau\right|\right|_{H^s}$$
$$\leq C\int_0^t ||G(t-\tau)f(\tau)||_{H^s}\, d\tau$$
$$\leq C\int_0^t ||f(\tau)||_{H^{s-1}}\, d\tau.$$

y

$$\left|\left|\int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau\right|\right|_{\dot{H}^s}$$
$$\leq \int_0^t ||g(t-\tau)f(\tau)||_{\dot{H}^{s-1}}\, d\tau$$
$$\leq Ce^{-\mu(t-\tau)}\int_0^t ||f(\tau)||_{H^{s-1}}\, d\tau.$$

■

Por lo anterior el operador de Green G, queda definido con el siguiente dominio y contradominio

$$G : C([0,T] : H^s) \to C([0,T] : H^s).$$

3.2. Existencia local de solución moderada I

Probaremos la existencia local de solución, vía el mapeo de contracción.

Lema 30 *Supongamos que el dato inicial $\phi \in H^s$, $\psi \in H^{s-1}$ con $1 \geq s > \frac{1}{2}$ y $\sigma > 0$ .Entonces para algún tiempo $T > 0$ existe una única solución $u(t,x)$ del problema periódico (1.1).*

Prueba. Denotemos por

$$\begin{aligned} N &: C([0,T] : H^s) \to C([0,T] : H^s), \\ N(u) &= -\lambda\, |u|^{\sigma} u. \end{aligned}$$

En virtud del operador de Green $G(t)$ del problema periódico (3.1) escribimos el problema periódico no lineal en forma de ecuación integral

$$u(t,x) = \widetilde{G}(t)\phi + G(t)\psi + \int_0^t G(t-\tau)N(u)(\tau)d\tau. \tag{3.2}$$

Resolvemos la ecuación integral 3.2 usando el principio de contracción. Definimos la transformación

$$Av(t) = \widetilde{G}(t)\phi + G(t)\psi + \int_0^t G(t-\tau)N(v)(\tau)d\tau,$$

en el espacio $C([0,T] : H^s)$.

Debemos estimar $T > 0$. Por la desigualdad :

$$|N(u) - N(v)| \leq C\, ||u|^\sigma + |v|^\sigma|\, |u-v|\,,$$

tenemos lo siguiente:

$$||N(u) - N(v)||_{H^{s-1}} \leq C(||u||_{H^s}^\sigma + ||v||_{H^s}^\sigma)\, ||u-v||_{H^s} \quad s > \frac{1}{2}.$$

Probemos esta desigualdad.

$s \in (\frac{1}{2}, 1)$: $s-1 \in (-\frac{1}{2}, 0)$

$L^2 \subset H^{s-1}$, veamos:

$$||\varphi||_{H^{s-1}} \leq ||\varphi||_{L^2}$$

ya que

$$\begin{aligned} ||\varphi||_{H^{s-1}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle n \rangle^{2(s-1)} |\widehat{\varphi}_n|^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1+n^2)^{s-1} |\widehat{\varphi}_n|^2 \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}_n|^2\,, \text{ ya que } (1+n^2)^{s-1} \leq 1 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} ||N(u) - N(v)||_{H^{s-1}} &\leq ||N(u) - N(v)||_{L^2} \\ &\leq C\, ||(|u|^\sigma + |v|^\sigma)\, |u-v|||_{L^2}\,, \end{aligned}$$

Por desigualdad de Hölder tenemos que:

$$\begin{aligned} ||N(u) - N(v)||_{H^{s-1}} &\leq C\, ||(|u|^\sigma + |v|^\sigma)||_{L^\infty}\, ||u-v||_{L^2} \\ &\leq C(||u||_{L^\infty} + ||v||_{L^\infty})\, ||u-v||_{H^s}\,, \end{aligned}$$

ya que

$$||\varphi||_{L^2} \leq ||\varphi||_{H^s} \;\; s > \frac{1}{2}. \text{ Teorema 21, capítulo 2.}$$

tenemos que:

$$||N(u) - N(v)||_{H^{s-1}} \leq C(||u||_{H^s} + ||v||_{H^s})\, ||u - v||_{H^s}\,,$$

y con esto probamos la desigualdad.

Gracias al lema 29, tenemos que:

$$\begin{aligned} Sup_{t\in[0,T]}\, ||Av(t)||_{H^s} &\leq Sup_{t\in[0,T]}(\left|\left|\tilde{G}(t)\phi\right|\right|_{H^s} + ||G(t)\psi||_{H^s} \\ &+ \left|\left|\int_0^t G(t-\tau)N(v)(\tau)d\tau\right|\right|_{H^s}) \\ &\leq C\,||\phi||_{H^s} + C\,||\psi||_{H^{s-1}} + CTSup_{t\in[0,T]}\,||N(v)(t)||_{H^{s-1}} \\ &\leq C\,||\phi||_{H^s} + C\,||\psi||_{H^{s-1}} + CT\,||v||^{\sigma+1}\,, \end{aligned}$$

podemos concluir que existe suficientemente pequeño T que depende de la norma del dato inicial

$$||\phi||_{H^s} + ||\psi||_{H^{s-1}}\,,$$

tomando v en la bola de radio $2C(||\phi||_{H^s} + ||\psi||_{H^{s-1}})$, tenemos

$$Sup_{t\in[0,T]}\, ||Av(t)||_{H^s} \leq 2C(\; ||\phi||_{H^s} + ||\psi||_{H^{s-1}}).$$

Estimemos ahora la diferencia para u, v en la bola de radio $2C(||\phi||_{H^s} + ||\psi||_{H^{s-1}})$:

$$\begin{aligned} Sup_{t\in[0,T]}\, ||Au(t) - Av(t)||_{H^s} &\leq Sup_{t\in[0,T]}\, ||G(t-\tau)(N(u)(\tau) - N(v)(\tau)d\tau||_{H^s} \\ &\leq CTSup_{t\in[0,T]}\, ||u(\tau) - v(\tau)||_{H^s}\, (||u||^{\sigma}_{H^s} + ||v||^{\sigma}_{H^s}) \\ &\leq \frac{1}{2} Sup_{t\in[0,T]}\, ||u(\tau) - v(\tau)||_{H^s}\,, \end{aligned}$$

$T > 0$ es suficientemente pequeño y dependiendo sólo de la norma de los datos iniciales.

Por tanto la transformación A es una contracción en la bola cerrada de radio $2C(\; ||\phi||_{H^s} + ||\psi||_{H^{s-1}})$ en el espacio $C([0,T] : H^s)$. Luego existe una única solución $u(t,x) \in C([0,T] : H^s)$ del problema periódico (3.1). ■

Definición 31 *Una solución continua de la ecuación integral (3.2) la llamaremos una solución moderada (Mild solution), del problema de valor inicial (3.1).*

En lo que sigue con el objetivo de explicar en detalle como se logra ampliar el dominio de definición de la solución de (3.1), nos apoyamos en las técnicas de [15], para garantizar la existencia del límite

$$\lim_{t\to T^-} ||u(t)||_{H^1}$$

que nos permite aplicar el principio de extensión explicado en el apéndice.

3.3. Existencia global de solución moderada I.

Lema 32 *Supongamos que el dato inicial $\phi \in H^1$, $\psi \in L^2$. Entonces existe una única solución en tiempo global $u(t,x) \in C([0,\infty] : H^1)$ del problema periódico (3.1). Más aún para todo $\varepsilon > 0$ existe un tiempo T tal que*

$$||u(t)||_{H^S} + ||u_t(t)||_{L^2} \leq \varepsilon \textit{ para todo } t \geq T.$$

Prueba. Usaremos estimados tipo energía. Sea u la solución construida en lema 30, multipliquemos por $2u_t + \alpha u$ la ecuación (3.1). Entonces integrando sobre Ω, tenemos :

$$0 = \int_\Omega (2u_t u_{tt+} 4\alpha u_t^2 - 2\beta u_t u_{xx} + 2\lambda\, |u|^\sigma\ \mathrm{u}_t u + \alpha\, \mathrm{u}_{tt} u + 2\alpha^2 u_t u - \beta\alpha u_{xx} + \lambda\alpha\, |u|^{\sigma+2}) dx.$$

Entonces integrando por partes y tomando las condiciones de frontera periódicas tenemos

$$\frac{dE}{dt} + H = 0$$

donde la energía

$$E = \int_\Omega (u_t^2 + \alpha u_t + \alpha^2 u^2 + \beta u_x^2 - \frac{2\lambda}{\sigma+2}\, |u|^{\sigma+2}) dx$$

y

$$H = \int_\Omega (3\alpha u_t^2 + \frac{\beta}{2}\alpha u_x^2 + \lambda\alpha\, |u|^{\sigma+2}) dx.$$

Nótese que $H \geq 0$. Por otra parte $\frac{dE}{dt} \leq 0$. Integrando es claro que $E(t) \leq E(0)$. lo cual nos da los siguientes estimados para la solución

$$||u(t)||_{H^1} + ||u_t(t)||_{L^2} + ||u(t)||_{L^{\sigma+2}} < C \text{ para todo } t \in [0,T]$$

Nótese que una solución moderada definida en $[0,T]$ puede ser extendida a un intervalo $[0, T+\delta]$, $\delta > 0$ por definir

$$u(t+t_1) = w(t)$$

donde $w(t)$ es una solución moderada de

$$\begin{cases} w_{tt} + 2\alpha w_t - w_{xx} = -\lambda\,|w|^{\sigma}\,w \\ w(0,x) = u(t_1,x) \\ w(0,x) = u_t(t_1,x) \end{cases}$$

La existencia de un intervalo de longitud $\delta > 0$ es asegurado por teorema de existencia local de solución.

Aseguremos que el siguiente límite existe

$$\lim_{t\to T^-} ||u(t)||_{H^1}$$

Veamos: consideremos $0 < \rho < t < t' < T$ y estimemos la diferencia

$$\left|\left|u(t') - u(t)\right|\right|_{H^1}.$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} \left|\left|u(t') - u(t)\right|\right|_{H^1} &= \\ & \left|\left| \begin{array}{c} \widetilde{G}(t')\phi + G(t')\psi + \int_0^t G(t'-s)N(u)(s)ds \\ -\widetilde{G}(t)\phi - G(t)\psi - \int_0^t G(t-s)N(u)(s)ds \end{array} \right|\right|_{H^1} \\ &\leq \left|\left|\widetilde{G}(t')\phi - \widetilde{G}(t)\phi\right|\right|_{H^1} + \left|\left|\widetilde{G}(t')\psi - \widetilde{G}(t)\psi\right|\right|_{H^1} \\ & \quad + \left|\left| \begin{array}{c} (\int_0^{t-\rho} + \int_{t-\rho}^t) \\ (G(t'-s) - G(t-s))N(u)(s)ds \end{array} \right|\right|_{H^1} \\ & \quad + \left|\left| \int_t^{t'} (G(t'-s)N(u)(s)ds \right|\right|_{H^1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leq \; & \left|\left|\widetilde{G}(t')\phi - \widetilde{G}(t)\phi\right|\right|_{H^1} + C_1 \int_0^{t-\rho} \left|\left|G(t'-s) - G(t-s)\right|\right|_{H^1} ds + \\ & C_\rho + (t'-t)C \end{aligned}$$

G es un operador continuo, luego

$$\begin{aligned} (t,t') &\to T^- \Rightarrow \left|\left|u(t') - u(t)\right|\right|_{H^1} \to 0 \\ &\Rightarrow u(t) \to u(T) \text{ cuando } t \to T^- \text{ ya que } H^1 \text{ es completo.} \end{aligned}$$

así el

$$\lim_{t \to T^-} ||u(t)||_{H^1} = ||u(T)||_{H^1}$$

Luego tenemos

$$||u(t)||_{H^1} < C \; \forall t \in [0, T]$$

y como la constante C no crece, siempre podremos extender el problema de Cauchy intervalos regulares de tiempo de longitud δ, y por tal razon existe solución

$$u(t, x) \in C([0, \infty] : H^1).$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -H(t) \\ E(t) - E(0) &= -\int_0^t H(s)ds \end{aligned}$$

Lo que implica que

$$\int_0^\infty H(s)ds < \infty$$

Por tanto

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists T > 0 \text{ tal que } H(T) \leq \varepsilon$$

De esto último tenemos que

$$\begin{aligned} & ||u(t)||_{H^1} + ||u_t(t)||_{L^2} + ||u(t)||_{L^{\sigma+2}} \\ \leq \; & C_2 E(t) \leq C_2 E(T) \\ \leq \; & \frac{C_2}{C_1}(||u(T)||_{H^1} + ||u_t(T)||_{L^2} + ||u(T)||_{L^{\sigma+2}}) \\ < \; & \frac{C_2}{C_1}\varepsilon_1 < \varepsilon \text{ con } \varepsilon_1 < \varepsilon C_1, \end{aligned}$$

Luego

$$||u(t)||_{H^1} + ||u_t(t)||_{L^2} < \varepsilon \text{ para todo } t \geq T,$$

ya que $E(t)$ decae para todo $t \geq 0$. Así el lema 32 está probado.

Recordemos que

$$u(t, x) = \widetilde{G}(t)\phi(x) + G(t)\psi(x) + \int_0^t G(t-s)N(u)(s)ds.$$

Afirmación 1:

$$u(t,x)\in C([0,\infty]:H^1).$$

Sea $T>0$, y consideremos el intervalo $[0,T]$. Por el operador contracción existe $v_n(t)\in C([0,\infty]:H^1)$, con $A(v_n(t))=v_{n+1}(t)$, tal que

$$\begin{aligned}
\|v_{n+1}(t)\|_{H^1} &\leq \left\|\widetilde{G}(t)\phi(x)\right\|_{H^1}+\|G(t)\psi(x)\|_{H^1}+C\int_0^t\|N(v_n)(s)\|_{L^2}\,ds\\
&\leq C\|\phi\|_{H^1}+C\|\psi\|_{L^2}+CT\sup_{t\in[0,T]}\|v_n(t)\|_{H^1}^{\sigma+1}\\
&\leq C\|\phi\|_{H^1}+C\|\psi\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Tomando límite obtenemos

$$\|u(t)\|_{H^1}\leq C\|\phi\|_{H^1}+C\|\psi\|_{L^2}.$$

Afirmación 2:

$$u_t\in C([0,+\infty]:L^2).$$

$$(u_n)_t(t,x)=\frac{\partial}{\partial_t}\widetilde{G}(t)\phi(x)+\frac{\partial}{\partial_t}G(t)\psi(x)+\int_0^t\frac{\partial}{\partial_t}G(t-s)N(v_n)(s)ds$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial_t}\widetilde{G}(t)\phi(x) &= -\alpha e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{\phi}_n e^{inx}(\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\frac{1}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}\\
&\quad +\cos(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}))+\\
&\quad e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{\phi}_n e^{inx}(\cos(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\\
&\quad -\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}))
\end{aligned}$$

Estimemos entonces $\frac{\partial}{\partial_t}\widetilde{G}(t)\phi(x)$ en L^2.

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\partial}{\partial_t}\widetilde{G}(t)\phi(x)\right\|_{L^2}^2\\
&= \alpha^2 e^{-2\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\phi_n}\right|^2\left|\begin{array}{c}\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\frac{1}{|\beta n^2-\alpha^2|}\\ +\cos(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\end{array}\right|^2\\
&\quad +e^{-2\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\phi_n}\right|^2\left|\begin{array}{c}\cos(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})-\\ \sqrt{\beta n^2-\alpha^2}\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\end{array}\right|^2.
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\frac{\partial}{\partial_t}G(t)\psi(x) = -\alpha e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{\psi}_n\frac{sen(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}e^{inx} + e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{\psi}_n\cos(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})e^{inx}.$$

$$\left|\left|\frac{\partial}{\partial_t}G(t)\psi(x)\right|\right|_{L^2}^2 = \alpha^2 e^{-2\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\psi}_n\right|^2\frac{sen^2(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})}{|\beta n^2-\alpha^2|} + e^{-2\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\psi}_n\right|^2\cos^2(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}).$$

■

Observación 3.2 *De lo anterior, concluimos que u, u_t, convergen en sentido de L^2.*

3.4. Lemas auxiliares

Por lema 32 podemos reducir el estudio de la soluciones asintóticas al caso de pequeño dato inicial. En lo que sigue probaremos un resultado auxiliar. Consideremos la ecuación diferencial ordinaria :

$$y'' + 2\alpha y' = -\lambda\,|y|^\sigma\,y + \varphi(t). \tag{3.3}$$

Observación 3.3 *Podemos reescribir la ecuación diferencial anterior, como un sistema de primer orden, por hacer los siguientes cambios de variables*

$$\begin{cases} y' = x_2 \\ y = x_1, \end{cases}$$

luego

$$\frac{d}{dt}(x_1, x_2) = (x_2, -\lambda\,|x_1|^\sigma\,x_1 + \varphi(t)).$$

Considerando $X = (x_1, x_2)$ y

$$F(x_1, x_2) = (x_2, -\lambda\,|x_1|^\sigma\,x_1 + \varphi(t))$$

tenemos

$$\frac{d}{dt}X = F(X).$$

Por teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias, existe una única solución de clase C^1, definida para todo $t > 0$, en particular de las hipótesis de los próximos lemas F, está acotada y esto nos permite extender la solución para todo tiempo positivo.

Lema 33 *Sea $\varphi \in C([O,\infty))$ y $|\varphi(t)| \leq C \langle t\rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{3}{2}}$. Supongamos que $|y(t)| + |y'(t)| \leq \varepsilon$, para todo $t \geq 0$, donde $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño. Entonces las soluciones de la ecuación (2.3) satisfacen los estimados*

$$\langle t\rangle^{\frac{1}{\sigma}} |y(t)| + \langle t\rangle^{\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{2}} \left|y'(t)\right| \leq C. \tag{3.4}$$

Prueba. Multiplicamos (3.3) por $2y' + |y|^{\sigma} y$, entonces

$$\frac{d}{dt}E(t) = -(4\alpha - (1+\sigma)|y|^{\sigma})(y')^2 - \lambda |y|^{2+2\sigma} + (2y' + |y|^{\sigma} y)\varphi(t),$$

donde $E(t)$

$$E(t) = (y')^2 + |y|^{\sigma} yy' + \frac{2(\alpha+\lambda)}{2+\sigma}\left|y^{2+\sigma}\right|.$$

Nótese que

$$\left||y|^{\sigma} yy'\right| \leq \frac{1}{2}\left|y^{2+2\sigma}\right| + \frac{1}{2}(y')^2,$$

luego por la condición $|y| \leq \varepsilon$, tenemos el estimado

$$E(t) \geq \frac{1}{2}(y')^2 + \frac{\alpha+\lambda}{2+\sigma}|y|^{2+\sigma}.$$

También tenemos el estimado

$$\begin{aligned}&-(4\alpha - (1+\sigma)|y|^{\sigma})(y')^2 - \lambda |y|^{2+2\sigma} + (2y' + |y|^{\sigma} y)\varphi(t)\\ &\leq -2\alpha(y')^2 - \frac{\lambda}{2}|y|^{2+2\sigma} + C\varphi^2(t).\end{aligned}$$

Luego tenemos que

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -CE^{\frac{2+2\sigma}{2+\sigma}}(t) + C\varphi^2(t). \tag{3.5}$$

Integrando esta desigualdad, damos lugar al estimado

$$E(t) \leq C\langle t\rangle^{-1-\frac{2}{\sigma}}$$

■

Esto implica que los estimados del lema 33 son probados.

Ahora estudiamos el caso de pequeño dato inicial.

Lema 34 *Sea* $\varphi \in C([O,\infty))$ *y* $|\varphi(t)| \leq C\varepsilon^{1+\sigma} \langle t\rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{3}{2}}$*. Supongamos que* $|y(0)| \leq \varepsilon$ $|y'(0)| \leq \varepsilon^{1+\frac{\sigma}{2}}$*, donde* $\varepsilon > 0$ *es suficientemente pequeño. Entonces las soluciones de la ecuación (2.3) satisfacen los estimados*

$$|y(t)| \leq C\varepsilon \langle t\rangle^{-\frac{1}{\sigma}}, \ \left|y'(t)\right| \leq C\varepsilon^{1+\frac{\sigma}{2}} \langle t\rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}}. \tag{3.6}$$

Prueba. Considerando (3.5) nuevamente

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -CE^{\frac{2+2\sigma}{2+\sigma}}(t) + C\varepsilon^{2+2\sigma} \langle t\rangle^{-\frac{2}{\sigma}-3}. \tag{3.7}$$

Integrando (3.7) tenemos el estimado

$$\left|y'\right|^2 + |y|^{2+\sigma} \leq CE(t) \leq C\varepsilon^{2+\sigma} \langle t\rangle^{-1-\frac{2}{\sigma}}.$$

Esto implica el estimado de decaimiento (3.6). ■

3.5. Estimados de decaimiento I

Teorema 35 *Supongamos que el dato inicial* $\phi \in H^1$ *y* $\psi \in L^2$ *. Entonces existe una única solución* $u(t,x) \in C([0,\infty) : H^1)$ *del problema periódico* (1,1) *el cual obedece los estimados de decaimiento:*

$$||u(t)||_{L^\infty} \leq C \langle t\rangle^{-\frac{1}{\sigma}}, ||\partial_t u(t)||_{L^\infty} \leq C \langle t\rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}}. \tag{*}$$

Prueba. Existencia global de una única solución $u(t,x) \in C([0,\infty) : H^1)$ del problema periódico no lineal (3.1) viene del lema 33. Despues de un tiempo T, tenemos el estimado

$$||u(t)||_{H^1} + ||u_t(t)||_{L^2} \leq \varepsilon, \tag{3.8}$$

para todo $t \geq T$.

Para probar la relación asintótica de la solución consideramos el problema periódico (3.1) con el tiempo inicial T. Por el cambio $t' = t - T$, reescribimos el problema periódico (3.1) con el tiempo inicial en el origen y pequeños datos iniciales $\phi \in H^1, \psi \in L^2$. Denotaremos el valor medio de la solución por

$$
\begin{aligned}
h(t) = \hat{u}_0(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_\Omega u(t,x)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\widetilde{G}(t)\phi + G(t)\psi + \int_0^t G(t-\tau)N(u)(\tau))d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{G}(t)\phi dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\psi dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\int_0^t G(t-\tau)N(u)(\tau))d\tau)dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2\alpha+\partial_t)G(t)\phi dx + \\
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{\psi}_n e^{inx}\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\frac{1}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}})dx + \cos(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}))dx \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_0^t(\int_{-\pi}^{\pi} G(t-\tau)N_u(\tau))dx)d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{\phi}_n e^{inx}(\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\frac{1}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}} + \cos(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}))dx \\
&+ e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\frac{1}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}}\widehat{\psi}_n\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{inx}dx \\
&+ \int_0^t G(t-\tau)N_0(u)(\tau)d\tau \\
&= e^{-\alpha t}(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\frac{1}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}} + \cos(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}))\hat{\phi}_n\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{inx}dx \\
&+ e^{-\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{\psi}_0\sin(t\sqrt{\beta n^2-\alpha^2})\frac{1}{\sqrt{\beta n^2-\alpha^2}} + \int_0^t G(t-\tau)\widehat{N}_0(u)(\tau)d\tau \\
&= \widehat{G}(t)\widehat{\phi}_0 + G(t)\widehat{\psi}_0 + \int_0^t G(t-\tau)\widehat{N}_0(u)(\tau)d\tau.
\end{aligned}
$$

Para $h(t)$ obtenemos de la ecuación

$$
h''(t) + 2\alpha h'(t) = \hat{N}_0(h+r), \tag{3.9}
$$

donde

$$
\hat{N}_0(u) = \frac{-\lambda}{2\pi}\int_\Omega |u(t,x)|^\sigma u(t,x)dx.
$$

Para la función $r(t,x)$ tenemos la ecuación integral :

$$
\begin{aligned}
r(t) &= u - h \\
&= \tilde{G}(t)(\phi-\phi_0) + G(t)(\psi-\psi_0) + \int_0^t G(t-\tau)(N(u)(\tau) - N_0(u)(\tau))d\tau. \quad (3.1)
\end{aligned}
$$

Nótese que por (1.8) tenemos el estimado

$$|h(t)| + \left|h'(t)\right| \leq \varepsilon,$$

para todo $t \geq 0$.

Probaremos el siguiente estimado:

$$||r(t)||_{\dot{H}^1} < c\varepsilon e^{-\Lambda t} \tag{3.11}$$

para todo $t \geq 0$, donde $0 < \Lambda < \mu$ y $\mu = \Re e(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}) > 0$.

Probaremos estimado (3.11) por contradicción. Supongamos que (3.11) es no válido en algún tiempo T_1, entonces por la continuidad tenemos que:

$$||r(t)||_{\dot{H}^1} \leq c\varepsilon e^{-\Lambda t}, \tag{3.12}$$

para todo $t \in [0, T_1]$, ya que en tiempo $t = 0$, tiene modulo menor que ε en norma $\dot{H}^1$ y en esta norma $r(t)$, es continua.

Luego por (3.8) y (3.12) encontramos el estimado:

$$\begin{aligned}
||N(u)(t)||^2_{\dot{H}^0} &= \sum_{|n|\geq 1} \left|\widehat{N(u)_n}\right|^2 \\
&= ||N(u) - N(h)||^2_{\dot{H}^0} \\
&\leq \ ||N(u) - N(h)||^2_{H^0} \\
&\leq \ ||N(u) - N(h)||^2_{L^2} \\
&\leq C(||u||^{2\sigma}_{L^\infty} + |h|^{2\sigma})\, ||r||^2_{L^2} \\
&\leq C\varepsilon^{2+2\sigma} e^{-2\Lambda t}.
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T_1]$.

Tenemos que

$$\begin{aligned}
||r(t)||_{\dot{H}^1} &\leq C\varepsilon e^{-\mu t} + C\int_0^t e^{-\mu(t-\tau)}\, ||N(u)(t)||_{\dot{H}^0}\, d\tau \\
&\leq C\varepsilon e^{-\mu t} + C\varepsilon^{1+\sigma} e^{-\mu t}\int_0^t e^{(\mu-\Lambda)\tau} d\tau \\
&< C\varepsilon e^{-\Lambda t},
\end{aligned}$$

donde $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño. Luego el estimado (3.11) es verdadero para todo $t \geq 0$. Consideraremos la evolución del valor medio de la solución

$$h''(t) + 2\alpha h'(t) = -\lambda\, |h|^\sigma\, h + \varphi(t),$$

donde

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= |h|^{\sigma} h - \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega} |u(t,x)|^{\sigma} u(t,x)dx, \\ |\varphi(t)| &\leq \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega} (|u(t,x)|^{\sigma} u(t,x) - |h|^{\sigma} h)dx \right| \\ &\leq C(||u||_{L^\infty}^{\sigma} + |h|^{\sigma})\, ||r(t)||_{L^\infty}.\end{aligned}$$

por lema 33, tenemos el estimado:

$$\langle t\rangle^{\frac{1}{\sigma}} |h(t)| + \langle t\rangle^{\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{2}} \left|h'(t)\right| \leq C.$$

Este estimado con desigualdad (3.11) nos da el estimado (*) para las soluciones.

■

3.6. Asintótica de solución moderada I

Teorema 36 *Supongamos que el dato inicial $\phi \in H^1$, $\psi \in L^2$ son suficientemente pequeños $||\phi||_{\dot{H}^1} + ||\psi||_{L^2} \leq \varepsilon$. Más aún , el valor medio $\hat{\phi}_0 = 0$. Entonces la siguiente relación asintótica es cierta:*

$$u(t,x) = At^{-\frac{1}{\sigma}} + O(t^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}}),$$

cuando $t \to \infty$ uniformemente con respecto a $x \in \Omega$, donde $A = 2\alpha(\frac{2\alpha}{\sigma\lambda})^{\frac{1}{\sigma}}$.

Prueba. Como en la sección previa por (3.3) y (3.6) y estimados del lema 29, encontramos

$$\begin{aligned}||r(t)||_{\dot{H}^1} &\leq C\varepsilon^{1+\frac{\sigma}{2}} e^{-\mu t} + C\int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} ||N(u)(\tau)||_{\dot{H}^0}\, d\tau \\ &\leq C\varepsilon^{1+\frac{\sigma}{2}} e^{-\mu t} + C\varepsilon^{1+\sigma} e^{-\mu t}\int_0^t e^{(\mu-\lambda)\tau} d\tau \\ &\leq C\varepsilon^{1+\frac{\sigma}{2}} e^{-\Lambda t}.\end{aligned}$$

donde $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño.

Luego el estimado

$$||r(t)||_{\dot{H}^1} \leq C\varepsilon^{1+\frac{\sigma}{2}} e^{-\Lambda t}, \tag{3.13}$$

es verdad para todo $t \geq 0$.

Luego aplicamos el lema 34, para obtener los estimados

$$\begin{aligned} |h(t)| &\leq C\varepsilon \langle t\rangle^{\frac{1}{\sigma}} \\ \left|h'(t)\right| &\leq C\varepsilon^{1+\frac{\sigma}{2}} \langle t\rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Colocando

$$z = h' + 2\alpha h,$$

podemos reescribir la ecuación (3.7) como

$$\frac{dz}{dt} = -\theta |z|^{\sigma} z(1 - q(t)) \tag{3.15}$$

donde

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{\Phi(t)}{|z|^{\sigma} z}, \\ \theta &= \lambda(2\alpha)^{-1-\sigma}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= |z|^{\sigma} z - \frac{(2\alpha)^{1+\sigma}}{2\pi} \int_{\Omega} |u(t,x)|^{\sigma} u(t,x)dx, \\ &= |z|^{\sigma} z - \frac{(2\alpha)^{1+\sigma}}{2\pi} \int_{\Omega} |u(t,x)|^{\sigma} u(t,x)dx \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} z(0) &= h'(0) + 2\alpha h(0) \\ &= h'(0) + 2\alpha\varepsilon \\ &= 2\alpha\varepsilon - O(\varepsilon^{1+\frac{\sigma}{2}}) > 0. \end{aligned}$$

En virtud del estimado (3.2), tenemos

$$\begin{aligned} |\Phi(t)| &= \left|\frac{(2\alpha)^{1+\sigma}}{2\pi} \int_{\Omega} |u(t,x)|^{\sigma} u(t,x)dx - |z|^{\sigma} z\right| \\ &\leq C \int_{\Omega} (|u(t,x)|^{\sigma} + |h(t)|^{\sigma}) \, ||r(t)||_{\dot{H}^1} + C(|z|^{\sigma} + |h(t)|^{\sigma}) \left|h'(t)\right| \\ &\leq C\varepsilon^{\sigma}\varepsilon^{1+\frac{\sigma}{2}} e^{-\Lambda t} + C\varepsilon^{2\sigma+1} \langle t\rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{3}{2}} \\ &\leq C\varepsilon^{1+\frac{3}{2}\sigma} \langle t\rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{3}{2}}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Integrando con respecto al tiempo, tenemos :

$$z(t) = z(0)(1 + \sigma\theta |z(0)|^{\sigma} (t - \int_0^t q(\tau)d\tau))^{-\frac{1}{\sigma}}.$$

Probaremos el estimado:

$$|q(t)| < \frac{1}{2}\langle t\rangle^{-\frac{1}{2}} \quad t \geq 0, \tag{3.17}$$

$$|q(0)| = \frac{|\Phi(0)|}{|z(0)|^{\sigma} z(0)} = \frac{|\Phi(0)|}{|z(0)|^{\sigma+1}} \leq \frac{C\varepsilon^{1+\frac{3}{2}\sigma}}{\varepsilon^{1+\sigma}} = C\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Por la continuidad en el tiempo, podemos encontrar un intervalo de tiempo maximal $[0, T]$, tal que el estimado es verdadero

$$|q(t)| \leq \frac{1}{2}\langle t\rangle^{-\frac{1}{2}}, t \in [0, T]. \tag{3.18}$$

Luego :

$$|z(t)|^{1+\sigma} \geq |z(0)|^{1+\sigma} (1 + \frac{\sigma\theta}{2}|z(0)|^{\sigma} t)^{-1-\frac{1}{\sigma}},$$

y por (3.16) tenemos:

$$\begin{aligned} |q(t)| &\leq \frac{|\Phi(t)|}{|z(0)|^{1+\sigma}}(1 + \frac{\sigma\theta}{2}|z(0)|^{\sigma} t)^{1+\frac{1}{\sigma}} \\ &< C\varepsilon^{\frac{\sigma}{2}}\langle t\rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{3}{2}}(1 + \frac{\sigma\theta}{2}\varepsilon^{\sigma} t)^{\frac{1}{\sigma}+1} \\ &< \frac{1}{2}\langle t\rangle^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$.

Como $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño, por tanto el estimado (3.18) es cierto para todo $t \geq 0$. Por ecuaciones (3.17) y (3.16) tenemos lugar a las siguiente relación asintótica

$$|z(t)|^{1+\sigma} \geq |z(0)|^{1+\sigma} (1 + \frac{\sigma\theta}{2}|z(0)|^{\sigma} t)^{-1-\frac{1}{\sigma}}.$$

En virtud de (3.13) y (3.14) tenemos el estimado:

$$\left|u(t, x) - \frac{z(t)}{2\alpha}\right| \leq |r(t, x)| + \left|\frac{h'(t)}{2\alpha}\right| \leq C\langle t\rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}}.$$

Luego la relación asintótica (0.3) es verdadera y el teorema (36) es probado.

$$u(t, x) = At^{-\frac{1}{\sigma}} + O(t^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}}).$$

■

Capítulo 4

Problema no-lineal de ondas II

Estudiamos el comportamiento asintótico de soluciones para el problema periódico no lineal de ondas disipativo

$$\begin{cases} u_{tt} + 2\alpha u_t - \beta u_{xx} = -\lambda \left|u\right|^{\sigma} u + f(t,x), t > 0 \\ u(0,x) = \phi(x), u_t(0,x) = \psi(x), x \in \Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

donde $\Omega = [-\pi, \pi]$, $\alpha, \beta, \lambda, \sigma > 0$.

Consideramos soluciones de la ecuación (4.1), las cuales satisfacen condiciones de frontera periódica $u(t,x) = u(t, 2\pi + x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, con datos iniciales $\phi(x)$ y $\psi(x)$ 2π periódicos.

Nótese que este problema generaliza lo hecho en capítulo 3, en caso de considerar f, no identicamente cero. Esta generalización es importante pues involucra una fuerza externa la cual tiene infinidades de interpretaciones físicas, como por ejemplo podemos medir según la magnitud de esta fuerza como varía la amplitud de la onda y como se deforma la onda con el tiempo. También existen aplicaciones de esta ecuación diferencial (4.1) a problemas en teoría cuántica de campos. Iniciemos nuestras estimaciones.

Basándonos en los resultados del capitulo 3, iniciamos nuestro capitulo 4, con dos lemas que nos dan el camino para probar nuestros teoremas principales.

4.1. Existencia local de solución moderada II

Lema 37 *Supongamos que el dato inicial* $\phi \in H^s$, $\psi \in H^{s-1}$, $f \in H^s$ *con* $1 \geq s > \frac{1}{2}$, $\sigma > 0$ *y la siguiente condición cualitativa sobre* f :

$$||f||_{H^s} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{3}{2}},$$

para $t \geq 0$ *. Entonces para algún tiempo* $T > 0$ *existe una única solución*

$$u(t,x) \in C([0,T] : H^s)$$

del problema periódico (4.1).

Prueba. Denotemos por $N(u) = -\lambda |u|^\sigma u$.

En virtud del operador de Green $G(t)$ del preblema periódico (4.1) escribimos el problema periódico no lineal en forma de ecuación integral

$$u(t) = \widetilde{G}(t)\phi + G(t)\psi + \int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau + \int_0^t G(t-\tau)N(u)(\tau)d\tau. \tag{4.1}$$

$u(t) = \widetilde{G}(t)\phi + G(t)\psi + \int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau + \int_0^t G(t-\tau)N(u)(\tau)d\tau.$

Resolvemos la ecuación integral usando el principio de contracción. Definimos la transformación

$$Av(t) = \widetilde{G}(t)\phi + G(t)\psi + \int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau + \int_0^t G(t-\tau)N(v)(\tau)d\tau,$$

en el espacio $C([0,T] : H^s)$.

Debemos estimar $T > 0$.

Por la desigualdad :

$$|N(u) - N(v)| \leq C \, ||u|^\sigma + |v|^\sigma| \, |u-v| \, ,$$

tenemos lo siguiente:

$$||N(u) - N(v)||_{H^{s-1}} \leq C(||u||_{H^s}^\sigma + ||v||_{H^s}^\sigma) \, ||u-v||_{H^s} \quad s > \frac{1}{2}.$$

Gracias al lema 29 capítulo 3, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]} \|Av(t)\|_{H^s} \\
&\leq \sup_{t\in[0,T]} (\left\|\widetilde{G}(t)\phi\right\|_{H^s} + \|G(t)\psi\|_{H^s} \\
&+ \left\|\int_0^t G(t-\tau)N(v)(\tau)d\tau\right\|_{H^s} + \left\|\int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau\right\|_{H^s}) \\
&\leq C\|\phi\|_{H^s} + C\|\psi\|_{H^{s-1}} + CT\sup_{t\in[0,T]}\|N(v)(t)\|_{H^{s-1}} + \\
&CT\sup_{t\in[0,T]}|f| \\
&\leq C\|\phi\|_{H^s} + C\|\psi\|_{H^{s-1}} + CT\|v\|_{H^s}^{\sigma+1} + CT\sup_{t\in[0,T]}\|f\|_{H^{s-1}}.
\end{aligned}$$

Con la hipótesis cualitativa sobre f la cual es $\|f\|_{H^s} \leq C\langle t\rangle^{\frac{-1}{\sigma}-\frac{3}{2}}$ con $s > \frac{1}{2}$, podemos concluir que existe suficientemente pequeño T que depende de la norma del dato inicial $\|\phi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^{s-1}}$ tal que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|Av(t)\|_{H^s} \leq 2C(\ \|\phi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^{s-1}}).$$

Estimemos ahora la diferencia:

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]}\|Au(t)-Av(t)\|_{H^s} &\leq \sup_{t\in[0,T]}\|G(t-\tau)(N(u)(\tau)-N(v)(\tau)d\tau\|_{H^s} \\
&\leq CT\sup_{t\in[0,T]}\|u(\tau)-v(\tau)\|_{H^s}(\|u\|_{H^s}^{\sigma}+\|v\|_{H^s}^{\sigma}) \\
&\leq \frac{1}{2}\sup_{t\in[0,T]}\|u(\tau)-v(\tau)\|_{H^s}
\end{aligned}$$

$T > 0$ es suficientemente pequeño.

Por tanto la transformación A es una contracción en la bola cerrada de radio $2C(\ \|\phi\|_{H^s}+\|\psi\|_{H^{s-1}})$ en el espacio $C([0,T]:H^s)$. Luego existe una única solución $u(t,x)\in C([0,T]:H^s)$ del problema periódico. ■

4.2. Existencia global de solución moderada II

Lema 38 *Supongamos que el dato inicial $\phi\in H^s$, $\psi\in L^2$ y $f\in H^s$ con hipótesis $(*)$ para $t\geq 0$. Entonces existe una única solución en tiempo global $u(t,x)\in C([0,\infty]:H^1)$ del problema periódico (1.1). Más aún para todo $\varepsilon>0$ existe un tiempo T tal que*

$$\|u(t)\|_{H^S} + \|u_t(t)\|_{L^2} \leq \varepsilon \text{ para todo } t\geq T.$$

Prueba. Usaremos estimados tipo energía. Sea u la solución construida en (lema 37). Multipliquemos por $2u_t + \alpha u$ la ecuación (4.1). Entonces integrando sobre Ω, tenemos :

$$2f(t)(u_t + \alpha u) = \int_\Omega (2u_t u_{tt+} 4\alpha u_t^2 - 2\beta u_t u_{xx} + 2\lambda\, |u|^\sigma\ \mathrm{u}_t u + \alpha\, \mathrm{u}_{tt} u + 2\alpha^2 u_t u$$
$$- \beta\alpha u_{xx} + \lambda\alpha\, |u|^{\sigma+2})dx.$$

Integrando por partes y tomando las condiciones de frontera periódicas nos queda lo siguiente

$$\frac{dE}{dt} + H = 2f(t)(u_t + \alpha u)$$

donde la energía

$$E = \int_\Omega (u_t^2 + \alpha u_t + \alpha^2 u^2 + \beta u_x^2 - \frac{2\lambda}{\sigma+2}\, |u|^{\sigma+2})dx \text{ y}$$
$$H = \int_\Omega (3\alpha u_t^2 + \frac{\beta}{2}\alpha u_x^2 + \lambda\alpha\, |u|^{\sigma+2})dx.$$

Nótese que $H(t) \geq 0$ para $t \in [0, T]$. Luego como $2f(t)(u_t + \alpha u)$ tiene norma pequeña para T grande y se hace más pequeña cad vez que t crece, se tiene que $\frac{dE}{dt} \leq 0$ para $t \in [0, T]$. Es claro que integrando la desigualdad anterior obtenemos $E(t) \leq E(0)$, lo cual nos da los siguientes estimados para la solución

$$||u(t)||_{H^1} + ||u_t(t)||_{L^2} + ||u(t)||_{L^{\sigma+2}} \leq C,$$

para todo $t > 0$.

Entonces por un razonamiento análogo a lo hecho en el capítulo 3, tenemos la existencia en tiempo global de la solución $u(t,x) \in C([0,\infty] : H^1)$, del problema periódico (4.1). También tenemos el estimado

$$\int_0^\infty H(t)dt \leq C.$$

Esto implica que para todo $\varepsilon > 0$ existe un tiempo T tal que

$$||u(T)||_{H^1} + ||u_t(T)||_{L^2} \leq \varepsilon.$$

Como la energía$E(t)$ decae en el tiempo tenemos:

$$||u(t)||_{H^1} + ||u_t(t)||_{L^2} \leq \varepsilon,$$

para todo $t \geq T$. ■

Por lema 38 podemos reducir el estudio de las asintóticas al caso de pequeño dato inicial.

4.3. Estimados de decaimiento II

Teorema 39 *Supongamos que el dato inicial* $\phi \in H^1$, $\psi \in L^2$ *y* $f \in H^s$ *con hipótesis cualitativa* $||f||_{H^s} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{3}{2}}$ *con* $s > \frac{1}{2}$. *Entonces existe una única solución*

$$u(t,x) \in C([0,\infty) : H^1)$$

del problema periódico (1,1) *el cual obedece los estimados de decaimiento*

$$||u(t)||_{L^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}}, ||\partial_t u(t)||_{L^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}}$$

Prueba. Existencia global de una única solución $u(t,x) \in C([0,\infty) : H^1)$ del problema periódico no lineal (1.1) viene del lema 38. Despues de un tiempo T, tenemos el estimado

$$||u(t)||_{H^1} + ||u_t(t)||_{L^2} \leq \varepsilon, \tag{4.3}$$

para todo $t \geq T$.

Para probar la relación asintótica de la solución, consideramos el problema periódico (4.1) con el tiempo inicial T. Por el cambio $t' = t - T$, reescribimos el problema periódico (4.1) con el tiempo inicial en el origen y pequeños datos iniciales $\phi \in H^1, \psi \in L^2$. Denotaremos el valor medio de la solución por

$$\begin{aligned} h(t) = \hat{u}_0(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_\Omega u(t,x)dx \\ u(t,x) = h(t) &+ r(t,x) \end{aligned}$$

Para $h(t)$ obtenemos de la ecuación

$$h''(t) + 2\alpha h'(t) = \hat{N}_0(h+r) + f_0(t) \tag{4.4}$$

$$\hat{N}_0(u) = \frac{-\lambda}{2\pi}\int_\Omega |u(t,x)|^\sigma u(t,x)dx$$

$$f_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_\Omega f(t,x)dx.$$

Para la función $r(t,x)$ tenemos la ecuación integral:

$$\begin{aligned} r(t) &= u - h \\ &= \tilde{G}(t)(\phi - \phi_0) + G(t)(\psi - \psi_0) + \int_0^t G(t-\tau)(N(u)(\tau) - N_0(\tau))d\tau \\ &\quad + \int_0^t G(t-\tau)(f(\tau) - f_0(\tau))d\tau, \end{aligned} \tag{4.5}$$

Nótese que por (4.3) tenemos el estimado

$$|h(t)| + \left|h'(t)\right| \leq \varepsilon \ , t \geq 0$$

Probaremos el siguiente estimado:

$$||r(t)||_{\dot{H}^1} < c\varepsilon e^{-\Lambda t}, t \geq 0, donde\ 0 < \Lambda < \mu,\ y\ \mu = \Re e(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}) > 0. \tag{4.6}$$

Probaremos estimado (4.6) por contradicción. Supongamos que (4.6) no se cumple en algún tiempo T_1, razonando de manera similar a lo hecho en capítulo 3, tenemos entonces que por la continuidad :

$$||r(t)||_{\dot{H}^1} \leq c\varepsilon e^{-\Lambda t},\ t \in [0, T_1]. \tag{4.7}$$

Luego por

(4.3) y (4.7) encontramos el estimado:

$$\begin{aligned}
\left|\left|N_{(u)}(\tau)\right|\right|^2_{\dot{H}^0} &= \sum_{|n|\geq 1} \left|\widehat{N(u)_n}\right|^2 \\
&= ||N(u) - N(h)||^2_{\dot{H}^0} \\
&\leq\ ||N(u) - N(h)||^2_{H^0} \\
&\leq\ ||N(u) - N(h)||^2_{L^2} \\
&\leq C(||u||^{2\sigma}_{L^\infty} + |h|^{2\sigma})\, ||r||^2_{L^2} \\
&\leq C\varepsilon^{2+2\sigma} e^{-2\Lambda t}.
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T_1]$.

Por hipótesis sobre f

$$||f(t,x)||^2_{\dot{H}^0} \leq C \left\langle t\right\rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{3}{2}}, t \geq 0,$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
||r(t)||_{\dot{H}^1} &\leq C\varepsilon e^{-\mu t} + C\int_0^t e^{-\mu(t-\tau)}\, ||N(u)(t)||_{\dot{H}^0}\, d\tau + \\
&\quad C\int_0^t e^{-\mu(t-\tau)}\, ||f(t,x)||_{\dot{H}^0}\, d\tau \\
&\leq C\varepsilon e^{-\mu t} + C\varepsilon^{1+\sigma} e^{-\mu t} \int_0^t e^{(\mu-\Lambda)\tau} d\tau \\
&< C\varepsilon e^{-\Lambda t}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

donde $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño. Luego el estimado (4.6) es verdadero para todo $t \geq 0$. Consideraremos la evolución del valor medio de la solución

$$h''(t) + 2\alpha h'(t) = -\lambda \left|h\right|^{\sigma} h + \varphi(t).$$

Donde

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \left|h\right|^{\sigma} h - \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega} \left|u(t,x)\right|^{\sigma} u(t,x)dx + f_0(t,x) \\ \left|\varphi(t)\right| &\leq \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega} (\left|u(t,x)\right|^{\sigma} u(t,x) - \left|h\right|^{\sigma} h)dx\right| + \left|\left|f_0(t,x)\right|\right|_{\dot{H}^0} \\ &\leq C(\left|\left|u\right|\right|_{L^\infty}^{\sigma} + \left|h\right|^{\sigma}) \left|\left|r(t)\right|\right|_{L^\infty} + \left|\left|f_0(t,x)\right|\right|_{\dot{H}^0}. \end{aligned}$$

por lema 33, tenemos el estimado:

$$\langle t\rangle^{\frac{1}{\sigma}} \left|h(t)\right| + \langle t\rangle^{\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{2}} \left|h'(t)\right| \leq C.$$

Este estimado con desigualdad (4.6) nos da el estimado (2) para las soluciones. ■

4.4. Asintótica de la solución moderada II

Teorema 40 *Supongamos que el dato inicial $\phi \in H^1$, $\psi \in L^2$ son suficientemente pequeños $\left|\left|\phi\right|\right|_{\dot{H}^1} + \left|\left|\psi\right|\right|_{L^2} \leq \varepsilon$. Más aún , el valor medio $\hat{\phi}_0 = 0$ y f cumple la desigualdad $\left|\left|f\right|\right|_{H^s} \leq C\langle t\rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{3}{2}}$ con $s > \frac{1}{2}$. Entonces la siguiente relación asintótica es cierta*

$$u(t,x) = At^{-\frac{1}{\sigma}} + O(t^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}}), \tag{3}$$

cuando $t \to \infty$ uniformemente con respecto a $x \in \Omega$, donde $A = 2\alpha(\frac{2\alpha}{\sigma\lambda})^{\frac{1}{\sigma}}$.

Prueba. Como en la sección previa por (4.5) y (4.8) y estimados del lema 29, encontramos

$$\begin{aligned} \left|\left|r(t)\right|\right|_{\dot{H}^1} &\leq C\varepsilon^{1+\frac{\sigma}{2}} e^{-\mu t} + C\int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} \left|\left|N(u)(\tau)\right|\right|_{\dot{H}^0} d\tau \\ &\leq C\varepsilon^{1+\frac{\sigma}{2}} e^{-\mu t} + C\varepsilon^{1+\sigma} e^{-\mu t}\int_0^t e^{(\mu-\lambda)\tau} d\tau \\ &\leq C\varepsilon^{1+\frac{\sigma}{2}} e^{-\Lambda t}, \end{aligned}$$

donde $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño.

Luego el estimado

$$\left|\left|r(t)\right|\right|_{\dot{H}^1} \leq C\varepsilon^{1+\frac{\sigma}{2}} e^{-\Lambda t},$$

es verdad para todo $t \geq 0$.

Luego aplicamos el lema 34, para obtener los estimados

$$\begin{aligned} |h(t)| &\leq C\varepsilon \langle t \rangle^{\frac{1}{\sigma}} \\ \left|h'(t)\right| &\leq C\varepsilon^{1+\frac{\sigma}{2}} \langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Colocando $z = h' + 2\alpha h$, podemos reescribir la ecuación (4.7) como

$$\frac{dz}{dt} = -\theta |z|^{\sigma} z(1 - q(t)), \tag{4.10}$$

donde $q(t) = \frac{\Phi(t)}{|z|^{\sigma} z}$ y $\theta = \lambda(2\alpha)^{-1-\sigma}$

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= |z|^{\sigma} z - \frac{(2\alpha)^{1+\sigma}}{2\pi} \int_{\Omega} |u(t,x)|^{\sigma} u(t,x)dx - f_0(t,x), \\ \Phi(t) &= |z|^{\sigma} z - \frac{(2\alpha)^{1+\sigma}}{2\pi} \int_{\Omega} |u(t,x)|^{\sigma} u(t,x)dx - f_0(t,x), \\ z(0) &= h'(0) + 2\alpha h(0) \\ &= h'(0) + 2\alpha\varepsilon \\ &= 2\alpha\varepsilon - O(\varepsilon^{1+\frac{\sigma}{2}}) > 0. \end{aligned}$$

En virtud del estimado (4.9), tenemos

$$\begin{aligned} |\Phi(t)| &= \left| \frac{(2\alpha)^{1+\sigma}}{2\pi} \int_{\Omega} |u(t,x)|^{\sigma} u(t,x)dx - |z|^{\sigma} z - f_0(t,x) \right| \\ &\leq C \int_{\Omega} (|u(t,x)|^{\sigma} + |h(t)|^{\sigma}) \, ||r(t)||_{\dot{H}^1} + C(|z|^{\sigma} + |h(t)|^{\sigma}) \left|h'(t)\right| + \\ &||f_0(t,x)||_{\dot{H}^1} \\ &\leq C\varepsilon^{\sigma}\varepsilon^{1+\frac{\sigma}{2}} e^{-\Lambda t} + C\varepsilon^{2\sigma+1} \langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{3}{2}} \\ &\leq C\varepsilon^{1+\frac{3}{2}\sigma} \langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{3}{2}}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Integrando con respecto al tiempo, tenemos :

$$z(t) = z(0)(1 + \sigma\theta |z(0)|^{\sigma} (t - \int_0^t q(\tau)d\tau))^{-\frac{1}{\sigma}}. \tag{4.12}$$

Probaremos el estimado:

$$|q(t)| < \frac{1}{2} \langle t \rangle^{-\frac{1}{2}} \tag{4.13}$$

para todo $t \geq 0$.

$$|q(0)| = \frac{|\Phi(0)|}{|z(0)|^{\sigma} z(0)} = \frac{|\Phi(0)|}{|z(0)|^{\sigma+1}} \leq \frac{C\varepsilon^{1+\frac{3}{2}\sigma}}{\varepsilon^{1+\sigma}} = C\varepsilon^{\frac{\sigma}{2}}.$$

Por la continuidad en el tiempo, podemos encontrar un intervalo de tiempo maximal $[0, T]$, tal que el estimado es verdadero

$$|q(t)| \leq \frac{1}{2} \langle t \rangle^{-\frac{1}{2}},$$

para todo $t \in [0, T]$.

Luego :

$$|z(t)|^{1+\sigma} \geq |z(0)|^{1+\sigma} (1 + \frac{\sigma\theta}{2} |z(0)|^{\sigma} t)^{-1-\frac{1}{\sigma}},$$

y por (4.11) tenemos:

$$\begin{aligned} |q(t)| &\leq \frac{|\Phi(t)|}{|z(0)|^{1+\sigma}} (1 + \frac{\sigma\theta}{2} |z(0)|^{\sigma} t)^{1+\frac{1}{\sigma}} \\ &< C\varepsilon^{\frac{\sigma}{2}} \langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{3}{2}} (1 + \frac{\sigma\theta}{2} \varepsilon^{\sigma} t)^{\frac{1}{\sigma}+1} \\ &< \frac{1}{2} \langle t \rangle^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$.

Como $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño, por tanto el estimado (4.11) es cierto para todo $t \geq 0$. Por ecuaciones (4.12) y (4.13) tenemos lugar a las siguiente relación asintótica

$$z(t) = (\sigma\theta)^{-\frac{1}{\sigma}} t^{-\frac{1}{\sigma}} + O(t^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}}).$$

En virtud de (4.1) y (4.2) tenemos el estimado:

$$\left| u(t, x) - \frac{z(t)}{2\alpha} \right| \leq |r(t, x)| + \left| \frac{h'(t)}{2\alpha} \right| \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}}.$$

■

Luego la relación asintótica (3) es verdadera y el teorema (40) es probado.

4.5. Observaciones

1.) Por la prueba del teorema 37, podemos garantizar que si el valor medio $h(t) \equiv 0$ para todo $t \geq 0$ y $||f||_{H^s} \leq e^{-\Lambda t}$, $t > 0$ entonces la relación asintótica es más rapida

$$u(t,x) = r(t,x) = O(e^{-\Lambda t}) \; t \to \infty,$$

uniformemente con respecto a $x \in \Omega$.

2.) Si los datos iniciales son funciones impares junto con f con respecto a la variable espacial es facil ver que $u(t,x)$ es impar para todo $t \geq 0$. Esto nos habla de una conservación de simetrías a pesar de ser un problema no lineal.

Análogamente si ϕ,ψ y f son funciones pares con respecto a la variable espacial entonces u es par, pero en este caso $h(t) \neq 0$, y no se tiene la misma rapidez asintótica.

Capítulo 5

Soluciones asintóticas para ecuación tipo Burgers

5.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos el comportamiento asintótico de soluciones del problema periódico para la ecuación no-lineal tipo Burgers

$$\begin{cases} \Psi_t = \Psi_{xx} + \lambda\Psi + \Psi\Psi_x, \qquad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \Psi(0,x) = \tilde{\Psi}(x), \ x \in \Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

donde $\Omega = [-\pi, \pi]$, $\lambda < 1$. Probamos que si el dato inicial $\tilde{\Psi} \in L^2(\Omega)$, entonces existe una única solución $\Psi(t,x) \in C([0,+\infty) : L^2(\Omega)) \cap C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R})$ del problema periódico. Más aún bajo algunas condiciones iniciales encontramos expansiones asintóticas de las soluciones.

Consideraremos soluciones de la ecuación (5.1), la cual satisface condiciones de frontera periódica $\Psi(t,x) = \Psi(t,x+2\pi)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$ y el dato inicial 2π periódico $\tilde{\Psi}(x)$.

Tomando el cambio de variable

$$\Psi(t,x) = e^{\lambda t} w(t,x),$$

tenemos:

$$\begin{cases} w_t = w_{xx} + e^{\lambda t} w w_x \\ w(0,x) = \tilde{\Psi}(x), \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

Nótese que el valor medio es una ley de conservación

$$\begin{aligned} w_0(t) &= \int_\Omega w(t,x)dx \\ &= \int_\Omega \tilde{\Psi}(x)dx \\ &= M. \end{aligned}$$

Es claro que $w_0'(t) = 0$.

Luego realizamos el cambio

$$w(t,x) = v(t,x) + M,$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} + e^{\lambda t} v v_x + e^{\lambda t} M v_x \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ v(0,x) &= \tilde{\psi}(x) - M, \; x \in \Omega. \end{aligned}$$

Por último hacemos el cambio

$$u(t,x) = v(t, x - M \int_0^t e^{\lambda\tau} d\tau),$$

esto da a lugar al problema periódico

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + e^{\lambda t} u u_x, \; x \in \Omega, \; t > 0, \\ u(0,x) &= \phi(x) \end{aligned} \tag{5.2}$$

donde el dato inicial

$$\phi(x) = \tilde{\psi}(x) - M$$

tiene el valor medio cero. La solución $\psi(t,x)$ del problema periódico (5.1) es entonces dada por

$$\psi(t,x) = e^{\lambda t} M + e^{\lambda t} u(t, x + M \int_0^t e^{\lambda\tau} d\tau)$$

El objetivo de este capítulo es estudiar el comportamiento asintótico del problema periódico (5.2).

Nótese que en el caso $\lambda = 0$, la ecuación (5.1) es la ecuación de Burgers. Esta se resuelve usando la transformación de Hopf-Cole, la cual es

$$u := \frac{-2}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

donde $\varphi \in C^3((0,\infty)\times\Omega,\mathbb{R}^*)$, y de forma impresionante esto da a lugar a la ecuación del calor que es lineal y se útiliza el método clásico de separación de variables. Es decir si φ es solución de la ecuación del calor entonces u segun la transformación Hopf-Cole es solución de la ecuación de Burgers.

El propósito de este capítulo es encontrar fórmulas asintóticas para tiempos largos de las soluciones del problema periódico (5.2) con $\lambda < 1$. Aplicamos estimados tipo energía para remover toda restricción del tamaño del dato inicial. Conocemos que no existen resultados para el comportamiento asintótico para largos tiempos de las soluciones para el caso $\lambda \geq 1$, en la ecuación (5.2). Este caso es objetivo de investigación futura.

5.2. Problema lineal

Consideremos el problema periódico lineal

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(t,x),\ \ x\in\Omega,\ \ t>0 \\ u(0,x) = \phi(x),\ x\in\Omega \end{cases} \tag{5.3}$$

donde la fuerza $f(t,x)$, y el dato inicial $\phi(x)$ son periódicas con respecto a la variable especial $x : f(t, 2\pi+x) = f(t,x)$, $\phi(2\pi+x) = \phi(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}$, $t>0$. Usando la Transformada de Fourier, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} u_n'(t) &= -n^2u_n(t) + f_n(t), \\ f_n(t) &= u_n'(t) + n^2u_n(t) \end{aligned}$$

tenemos así una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y multiplicando por su factor integrante, tenemos:

$$\begin{aligned} e^{n^2t}f_n(t) &= -e^{n^2t}n^2u_n(t) + u_n'(t)e^{n^2t}, \\ \frac{d}{dt}(e^{n^2t}u_n(t)) &= f_n(t)e^{n^2t}. \end{aligned}$$

Luego integrando, obtenemos:

$$\begin{aligned} e^{n^2t}u_n(t) &= \int_0^t e^{n^2s}f_n(s)ds + k \\ u_n(t) &= e^{-n^2t}\int_0^t e^{n^2s}f_n(s)ds + e^{-n^2t}k \\ u_n(t) &= \int_0^t e^{n^2s-tn^2}f_n(s)ds + e^{-n^2t}k \\ u_n(t) &= \int_0^t e^{n^2(s-t)}f_n(s)ds + e^{-n^2t}k. \end{aligned}$$

Luego por la condición inicial, tenemos

$$\begin{aligned} u_n(0) &= \phi_n \\ u_n(t) &= \int_0^t e^{n^2(s-t)} f_n(s)ds + e^{-n^2 t}\phi_n. \end{aligned}$$

Luego definimos el operador de Green de la forma:

$$G(t)\phi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_n e^{inx-tn^2}$$

y así podemos escribir la solución del problema periódico usando la fórmula de Duhamel

$$u(t) = G(t)\phi + \int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

A continuación haremos algunas estimaciones para la solución del problema lineal periódico (5.2) en el espacio de Sobolev H^s. Definimos dos proyectores

$$\begin{aligned} P_N u &= \sum_{|n|\le N} \widehat{u}_n(t)e^{inx}, \\ R_n(u) &= \sum_{|n|\ge N} \widehat{u}_n(t)e^{inx}. \end{aligned}$$

donde $N \geq 1$. Por tanto tenemos

$$P_N u + R_n(u) = u \text{ para } N \geq 0.$$

También nótese que:

$$P_0 u \equiv 0, \text{ y } u = R_1(u).$$

Denotarémos

$$\{t\} = \text{mín}(1, t)$$

Lema 41 *Sea $s \in \mathbb{R}$, $\phi \in H^s(\Omega)$ y $f \in C([0,+\infty) : H^s(\Omega))$. Entonces los siguientes estimados son ciertos*

$$||R_N G(t)\phi||_{H^{s+2\alpha}} \leq C\{t\}^{-\alpha} e^{-tN^2} ||R_N\phi||_{H^s}$$

para todo $t > 0$, donde $N \geq 1, \alpha \geq 0$,

$$\left|\left|R_N \int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau\right|\right|_{H^{s+2\alpha}} \leq C\{t\}^{1-\alpha-\beta} e^{-t\,\text{mín}(\Lambda,N^2)} \sup_{t>0} e^{\Lambda t}\{t\}^{\beta} ||R_N f(\tau)||_{H^s}$$

para todo $t > 0$, *donde* $N \geq 1, \alpha, \beta \in [0,1), \Lambda \neq N^2$, *y*

$$\left|\left|P_N \int_t^{\infty} G(t-\tau) f(\tau) d\tau\right|\right|_{H^{s+2\alpha}} \leq C\{t\}^{1-\alpha-\beta} e^{-\Lambda t} \sup_{\tau>0} e^{\Lambda\tau} \{\tau\}^{\beta} \left|\left|P_N f(\tau)\right|\right|_{H^s},$$

Para todo $t > 0$, *donde* $\alpha, \beta \in [0,1), \Lambda > N^2 \geq 1$. C_N, *será una constante que depende de* N, *que en general llamaremos* C.

Prueba. . *Como*

$$e^{-2tn^2} \leq C_N e^{-2tN^2} (\{t\} \langle n \rangle^2)^{-\alpha},$$

para $|n| \geq N \geq 1$ con $\alpha \geq 0$, luego por la identidad de Parseval tenemos que:

$$\begin{aligned} \left|\left|R_N G(t)\phi\right|\right|^2_{H^{s+2\alpha}} &= \sum_{|n|\geq N} \langle n \rangle^{2s+4\alpha} e^{-2tn^2} \left|\widehat{\phi_n}\right|^2 \\ &\leq C\{t\}^{-2\alpha} e^{-2tN^2} \sum_{|n|\geq N} \langle n \rangle^{2s} \left|\widehat{\phi_n}\right|^2 \\ &\leq C\{t\}^{-2\alpha} e^{-2tN^2} \left|\left|R_N \phi\right|\right|^2_{H^s}, \end{aligned}$$

para todo $t > 0$, y para todo $\tau > t$

$$\begin{aligned} \left|\left|P_N G(t-\tau)\phi\right|\right|^2_{H^{s+2\alpha}} &= \sum_{|n|\leq N} \langle n \rangle^{2s+4\alpha} e^{-2(t-\tau)n^2} \left|\widehat{\phi_n}\right|^2 \\ &\leq C \langle N \rangle^{4\alpha} e^{-2(t-\tau)N^2} \sum_{|n|\leq N} \langle n \rangle^{2s} \left|\widehat{\phi_n}\right|^2 \\ &\leq C_N e^{-2(t-\tau)N^2} \left|\left|P_N \phi\right|\right|^2_{H^s}. \end{aligned}$$

Aplicando los estimados anteriores con $\alpha \in (0,1)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} &\left|\left|R_N \int_0^t G(t-\tau) f(\tau) d\tau\right|\right|_{H^{s+2\alpha}} \\ \leq\ & C \int_0^t \{t-\tau\}^{-\alpha} e^{-(t-\tau)N^2} \left|\left|R_N f(\tau)\right|\right|_{H^s} d\tau \\ \leq\ & C e^{-tN^2} \int_0^t \{t-\tau\}^{-\alpha} \{\tau\}^{-\beta} e^{\tau(N^2-\Lambda)} d\tau \sup_{\tau>0} e^{\Lambda t} \{\tau\}^{\beta} \left|\left|R_N f(\tau) d\tau\right|\right|_{H^s} \\ \leq\ & C\{t\}^{1-\alpha-\beta} e^{-t \min(\Lambda, N^2)} \sup_{\tau>0} e^{\Lambda t} \{\tau\}^{\beta} \left|\left|R_N f(\tau) d\tau\right|\right|_{H^s}. \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} & e^{-tN^2}\int_0^t \{t-\tau\}^{-\alpha}\tau^{-\beta}e^{\tau(N^2-\Lambda)}d\tau \\ = \; & e^{-t\Lambda}\int_0^t \{t-\tau\}^{-\beta}\{\tau\}^{-\alpha}e^{-\tau(N^2-\Lambda)}d\tau \\ \leq \; & C\{t\}^{1-\alpha-\beta}e^{-t\Lambda}, \end{aligned}$$

para todo $t > 0$ si $\Lambda < N^2$ y

$$Ce^{-tN^2}\int_0^t \{t-\tau\}^{-\alpha}\{\tau\}^{-\beta}e^{\tau(N^2-\Lambda)}d\tau \leq C\{t\}^{1-\alpha-\beta}e^{-tN^2},$$

para todo $t > 0$ si $\Lambda > N^2$. De igual forma encontramos el siguiente estimado:

$$\begin{aligned} & \left|\left|P_N\int_t^\infty G(t-\tau)f(\tau)d\tau\right|\right|_{H^{s+2\alpha}} \\ \leq \; & C\int_t^\infty \{\tau-t\}^{-\alpha}e^{(\tau-t)N^2}\,||P_Nf(\tau)||_{H^s}\,d\tau \\ \leq \; & Ce^{-tN^2}\int_t^\infty \{\tau-t\}^{-\alpha}\{\tau\}^{-\beta}e^{-\tau(\Lambda-N^2)}d\tau \sup_{\tau>0} e^{\Lambda t}\{\tau\}^{\beta}\,||P_Nf(\tau)||_{H^s} \\ \leq \; & C\{t\}^{1-\alpha-\beta}e^{-\Lambda t}\sup_{\tau>0} e^{\Lambda\tau}\{\tau\}^{\beta}\,||P_Nf(\tau)||_{H^s}, \end{aligned}$$

para todo $t > 0$, donde $\alpha, \beta \in [0, 1)$, $\Lambda > N^2 \geq 1$. Con esto el lema 43 es probado. ■

Lo que haremos de inmediato será probar la existencia local de soluciones del problema periódico (5.2). Suponemos que $\lambda < 1$, pero esta suposición no es esencial para la existencia local de soluciones. Esta básicamente será usada para la existencia global de soluciones y los estimados asintóticos.

Observación 5.1 *El factor $\{t\}$ que se introduce en las estimaciones anteriores es debido a la propiedad de difusión de la ecuación de Burgers.*

5.3. Existencia local de solución clásica

Lema 42 *Supongamos que el dato inicial $\phi \in L^2(\Omega)$. Entonces existe para algún tiempo $T > 0$ existe una única solución $u(t,x) \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^\infty((0,T] \times \mathbb{R})$ del problema periódico (5.2).*

Prueba. Denote

$$N(u) = e^{\lambda t}uu_x.$$

En virtud del operador de Green $G(t)$ del problema periódico lineal (5.3), escribimos el problema periódico no lineal (5.2) en la forma de ecuación integral

$$u(t) = G(t)\phi + \int_0^t g(t-\tau)N(u)(\tau)d\tau. \tag{5.4}$$

Note que $\phi = R_1\phi$ y $u = R_1 u$. Resolvemos la ecuación (5.4) por el principio de contracción, definiendo la transformación

$$Av(t) = G(t)\phi + \int_0^t g(t-\tau)N(v)(\tau)d\tau,$$

en el espacio

$$X = \{\phi \in C([0,T] : L^2(\Omega)) \cap C([0,T] : H^s(\Omega)) : ||\phi||_X < \infty\},$$

con la norma

$$||\phi||_X = \sup_{t\in[0,T]} e^t \, ||\phi(t)||_{L^2} + \sup_{t\in[0,T]} \{t\}^{\frac{s}{2}} e^t \, ||\phi(t)||_{H^s} \, ,$$

donde $s \in (\frac{1}{2}, 1)$, y el valor $T > 0$ debera ser estimado. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
||N(u) - N(v)||_{H^{-1}} &= \left|\left|e^{\lambda t} u u_x - e^{\lambda t} v v_x\right|\right|_{H^{-1}} \\
&\leq C e^{\lambda t} \left|\left|\partial_x (u^2 - v^2)\right|\right|_{H^{-1}} \\
&\leq C e^{\lambda t} \left|\left|u^2 - v^2\right|\right|_{L^2} \\
&\leq C e^{\lambda t} \, ||u + v||_{L^\infty} \, ||u - v||_{L^2} \\
&\leq C e^{\lambda t} (||u||_{L^\infty} + ||v||_{L^\infty}) \, ||u - v||_{L^2} \\
&\leq C e^{\lambda t} (||u||_{H^s} + ||v||_{H^s}) \, ||u - v||_{L^2} \, ,
\end{aligned}$$

esto último se cumple, gracias a la desigualdad de Hölder y al teorema de inmersión de Sobolev para todas las funciones $u, v \in H^s(\Omega)$, con $s \in (\frac{1}{2}, 1)$. En virtud de los estimados del lema 41 y considerando $\nu = \min(1, 1-\lambda) \in (0, 1]$

$$\begin{aligned}
& \sup_{t\in[0,T]} e^t \, ||Av(t)||_{L^2} \\
\leq \; & C \sup_{t\in[0,T]} (||\phi||_{L^2} + \{t\}^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} e^{-\upsilon t} \sup_{\tau>0} e^{(1+\upsilon)\tau} \{\tau\}^{\frac{s}{2}} \, ||R_1 N(v)(\tau)||_{H^{-1}}) \\
\leq \; & C \, ||\phi||_{L^2} + C T^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \sup_{\tau>0} e^{(1+\upsilon)\tau} \{\tau\}^{\frac{s}{2}} \, ||N(v)(\tau)||_{H^{-1}} \\
\leq \; & C \, ||\phi||_{L^2} + C T^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \sup_{\tau>0} e^{(1+\upsilon+\lambda)\tau} \{\tau\}^{\frac{s}{2}} \, ||v||_{H^s} \, ||v||_{L^2} \, .
\end{aligned}$$

Nótese que para el estimado $R_1N(\upsilon)$, hemos hecho en el lema 41, $s=-1,\alpha=0$, al igual se hace en el segundo componente de la norma X.

De la misma forma obtenemos

$$\begin{aligned}
& \sup_{t\in[0,T]}\{t\}^{\frac{s}{2}}e^{t}\left\|\phi(t)\right\|_{H^s} \\
\leq\ & C\sup_{t\in[0,T]}(\left\|\phi\right\|_{L^2}+\{t\}^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}e^{-\upsilon t}\sup_{\tau>0}e^{(1+\upsilon)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}\left\|R_1N(\upsilon)(\tau)\right\|_{H^{-1}}) \\
\leq\ & C\sup_{t\in[0,T]}(\left\|\phi\right\|_{L^2}+T^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}\sup_{\tau>0}e^{(1+\upsilon+\lambda)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}\left\|\upsilon\right\|_{H^s}\left\|\upsilon\right\|_{L^2}).
\end{aligned}$$

Luego consideramos suficientemente pequeño T el cual depende de la norma del dato inicial $\left\|\phi\right\|_{L^2}$ tal que

$$\left\|A\upsilon(t)\right\|_X\leq C\left\|\phi\right\|_{L^2}.$$

Estimemos ahora la diferencia, utilizaremos la desigualdad de Hölder y el teorema de inmersión de Sobolev.

$$\begin{aligned}
& \left\|Au(t)-A\upsilon(t)\right\|_X \\
\leq\ & C\sup_{t\in[0,T]}\{t\}^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}e^{-\upsilon t}\sup_{\tau>0}e^{(1+\upsilon)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}\left\|R_1(N(u)-N(\upsilon)(\tau)\right\|_{H^{-1}} \\
\leq\ & CT^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}\sup_{\tau>0}e^{(1+\upsilon)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}\left\|R_1(N(u)-N(\upsilon)(\tau)\right\|_{H^{-1}} \\
\leq\ & CT^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}\sup_{\tau>0}e^{(1+\upsilon)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}\left\|N(u)-N(\upsilon)\right\|_{H^{-1}} \\
\leq\ & CT^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}\sup_{\tau>0}e^{(1+\upsilon)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}\left\|\partial_x(u^2-\upsilon^2)\right\|_{H^{-1}} \\
\leq\ & CT^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}\sup_{\tau>0}e^{(1+\upsilon)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}\left\|u^2-\upsilon^2\right\|_{L^2} \\
\leq\ & CT^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}\sup_{\tau>0}e^{(1+\upsilon)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}\left\|(u-\upsilon)(u+\upsilon)\right\|_{L^2} \\
\leq\ & CT^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}\sup_{\tau>0}e^{(1+\upsilon)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}\left\|u+\upsilon\right\|_{L^\infty}\left\|u-\upsilon\right\|_{L^2} \\
\leq\ & CT^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}\sup_{\tau>0}e^{(1+\upsilon)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}(\left\|u\right\|_{L^\infty}+\left\|\upsilon\right\|_{L^\infty})\left\|u-\upsilon\right\|_{L^2} \\
\leq\ & CT^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}\sup_{\tau>0}e^{(1+\upsilon+\lambda)\tau}\{\tau\}^{\frac{s}{2}}(\left\|\upsilon\right\|_{H^s}\left\|u-\upsilon\right\|_{L^2}+\left\|u\right\|_{L^2}\left\|u-\upsilon\right\|_{H^s}) \\
\leq\ & CT^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}(\left\|u\right\|_X+\left\|\upsilon\right\|_X)\left\|u-\upsilon\right\|_X \\
\leq\ & \frac{1}{2}\left\|u-\upsilon\right\|_X.
\end{aligned}$$

Recurede que

$$\begin{aligned} s &> \frac{1}{2} : ||u||_{L^2} \leq ||u||_{Hs} \\ s &\geq 0 : ||u||_{L^2} \leq ||u||_{H^s} \end{aligned}$$

Si $T > 0$, suficientemente pequeño. Por tanto, la transformación A es una contracción en la bola cerrada de radio $C\,||\phi||_{L^2}$ en el espacio X.

Luego existe una única solución en el espacio $u(t,x) \in X$ del problema periódico (5.2). Debido a la propiedad de difusión de la ecuación de Burgers, la solución obtiene más regularidad en el tiempo $t > 0$.

Así tomando un tiempo $t_1 > 0$ y considerando el problema periódico (5.2) con el dato inicial $\phi_1(x) = u(t_1, x)$, en la misma forma podemos considerar encontrar que existe una única solución $u(t,x) \in C([t_1, T]; H^s(\Omega)) \cap C((t_1, T]; H^{2s}(\Omega))$. Repitiendo este argumento vemos que $u(t,x) \in C((0,T]; H^\infty(\Omega))$. Entonces por ecuación (5.2) esto muestra que $u(t,x) \in C^\infty((0,T] \times \mathbb{R})$. ■

5.4. Solución global al problema tipo Burgers

Teorema 43 *Supongamos que el dato inicial* $\phi \in L^2(\Omega)$. *Entonces existe una única solución* $u(t,x) \in C([0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R})$ *del problema periódico (5.2), el cual obedece el estimado de decaimiento* $||u(t)||_{L^\infty} \to 0$, *para* $t \to \infty$.

Prueba. Usaremos estimados tipo energía. Sea u la solución construida en Lema 42. Multiplicamos la ecuación (5.2) por $2u$. Luego integrando sobre Ω, obtenemos

$$\int_\Omega (2uu_t - 2uu_x - 2e^{\lambda t} u^2 u_x) dx = 0.$$

De esto, integrando por partes y tomando las condiciones de frontera periódica tenemos que :

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega u^2(t,x) dx + 2 \int_\Omega u_x^2(t,x) dx = 0. \tag{5.6}$$

Luego, la norma $||u(t)||_{L^2}$ decae en el tiempo. Integrando un estimado a priori para la solución

$$||u(t)||_{L^2} \leq ||\phi||_{L^2} \leq C,$$

para todo $t > 0$.

En lo quen sigue estimaremos la norma L^∞ para la solución. Como la solución del problema periódico (5.2) tiene valor medio cero

$$\int_\Omega u(t,x) = 0,$$

vemos que

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\Omega} u(t,x) &\geq 0, \\ \inf_{x\in\Omega} u(t,x) &\leq 0 \end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Nos apoyamos en el siguiente lema para terminar prueba del teorema 43.

Lema 44 *$u \in C^1([0,T);C(\Omega))$ y $m(t) = \inf_{x\in\Omega} u(t,x) < 0$ para todo $t \in [0,T)$. Entonces existe un punto $\xi(t) \in \Omega$ tal que $m(t) = u(t,\xi(t))$; más aún $m'(t) = u_t(t,\xi(t))$ en todo $[0,T)$.*

Prueba. Sea c, una constante genérica.

Fijemos $t \in [0,T)$ y definamos

$$m(t) = \inf_{x\in\Omega} u(t,x).$$

Como $u(t,.) \in H^1(\mathbb{R})$, vemos que

$$\lim_{|x|\to\infty} u(t,x) = 0,$$

así existe al menos un punto $\xi(t) \in \mathbb{R}$ con

$$m(t) = u(t,\xi(t)).$$

Sean ahora $s,t \in [0,T)$ fijos.

Si $m(t) \leq m(s)$, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq m(s) - m(t) \\ &= \inf_{x\in\Omega}(u(t,x)) - u(t,\xi(t)) \\ &\leq u(s,\xi(t)) - u(t,\xi(t)). \end{aligned}$$

Por el teorema de inmersión de Sobolev $H^1(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$, concluimos que

$$\begin{aligned} & |m(s) - m(t)| \\ \leq\ & |u(t) - u(s)|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ \leq\ & c\,|u(t) - u(s)|_{H^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Luego por el teorema del valor medio para funciones con valores en un espacio de Banach-$H^1(\mathbb{R})$, tenemos

$$
\begin{aligned}
& |m(t) - m(s)| \\
\leq \quad & c\,|t-s| \max_{0 \leq \tau \leq \max\{s,t\}} [|u_t(\tau)|_{H^1(\mathbb{R})}], \qquad t, s \in [0, T).
\end{aligned}
$$

Como $u_t \in C([0,T) : L^2(\mathbb{R}))$, vemos que m es localmente Lipschitz en $[0,T)$ y por ende es de variación acotada, lo que implica que m es diferenciable casi en todas partes en $(0,T)$, entonces tenemos que

$$
\begin{aligned}
m'(t) &= \lim_{s \to t^+} \frac{m(s) - m(t)}{s - t} \\
&\leq \lim_{s \to t^+} \frac{u(t, \xi(t)) - u(s, \xi(t))}{s - t} \\
&= u_t(t, \xi(t)),
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
m'(t) &= \lim_{s \to t^-} \frac{m(s) - m(t)}{s - t} \\
&\geq \lim_{s \to t^-} \frac{u(t, \xi(t)) - u(s, \xi(t))}{s - t} \\
&= u_t(t, \xi(t)),
\end{aligned}
$$

casi en todas partes en $(0,T)$, y por el teorema de inmersión de Sobolev

$$
\lim_{s \to t} \frac{u(t,x) - u(s,x)}{s - t},
$$

existe uniformemente con respecto a $x \in \mathbb{R}$. Por tanto

$$
m'(t) = u_t(t, \xi(t)).
$$

■

El lema anterior básicamente es una consecuencia del teorema de funciones implícitas.

Continuemos la demostración del teorema 43. Considerando el punto $\xi(t)$ en la ecuación (5.2), tenemos para la función

$$
\begin{aligned}
m(t) &= \inf_{x \in \Omega} u(t,x) \\
\frac{d}{dt} m(t) &\geq 0,
\end{aligned}
$$

ya que

$$\begin{aligned} u_x(t,\xi(t)) &= 0 \\ u_{xx}(t,\xi(t)) &\geq 0, \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned} m'(t) &= u_t(t,\xi(t)) \\ &= u_{xx}(t,\xi(t)) + e^{\lambda t}u(t,\xi(t))u_x(t,\xi(t)) \geq 0. \end{aligned}$$

Esto muestra que $m(t) \geq m(T)$ para todo $t \geq T$.

En la misma forma tenemos que:

$$\sup_{x\in\Omega} u(t,x) \leq \sup_{x\in\Omega} u(T,x),$$

para todo $t \geq T$.

Es conocido de la teoría clásica parabólica [1],[4],[11], que en el caso de que la no-linealidad no cresca más rapido que cuadrático en el gradiente, es suficiente un estimado L^∞ a priori para probar la existencia global de las soluciones.

También por (5.6) tenemos el estimado:

$$\int_0^t \int_\Omega u_x^2(\tau,x)dxd\tau \leq \int_\Omega \phi^2(x)dx.$$

Esto implica que para todo $\varepsilon > 0$ existe un tiempo T tal que

$$||u_x(T)||_{H^1} \leq \varepsilon.$$

En particular

$$\begin{aligned} & ||u(T)||_{L^2} \\ = & \sum_{n\neq 0} |u_n(T)|^2 \\ \leq & \sum_{n\neq 0} \langle n\rangle^2 |u_n(T)|^2 \\ = & ||u_x(T)||_{L^2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por la identidad de Parseval, tenemos que:

$$\begin{aligned} & ||u(t)||_{L^2}^2 \\ = & \sum_{|n|\geq 1} |\hat{u}_n(t)|^2 \\ \leq & \sum_{|n|\geq 1} \langle n\rangle^2 |\hat{u}_n(t)|^2 \\ \leq & ||u(t)||_{H^1}^2 , \end{aligned}$$

y la norma $||u(t)||_{L^2}^2$ decae en el tiempo, así tenemos la siguiente desigualdad:

$$||u(t)||_{L^2} \leq \varepsilon$$

para todo $t \geq T$.

También nótese que la norma L^∞ es pequeña, es decir

$$\begin{aligned} & ||u(t)||_{L^\infty} \\ \leq & ||u(T)||_{L^\infty} \\ \leq & 2\,||u(T)||_{L^2}^{\frac{1}{2}} ||u_x(T)||_{L^2}^{\frac{1}{2}} \\ \leq & 2\varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $t \geq T$. Con esto tenemos probado el teorema 43. ■

Para probar desigualdad

$$||u(t)||_{L^\infty}^2 \leq 2\,||u(T)||_{L^2}\,||u_x(T)||_{L^2}\,.$$

Considerese

$$f \in H^1,$$

y es sencillo probar que existe $C > 0$, tal que

$$||f||_{L^\infty}^2 \leq C[||f||_{L^2}^2 + ||f||_{L^2}\,||f'||_{L^2}\,.$$

Para esto considerese

$$f = 2\pi\widehat{f}(0) + g,$$

esto muestra que

$$g \in H^1 \hookrightarrow C_{per},$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(y)dy = 0,$$

luego existe $x_0 \in [-\pi, \pi]$, tal que $g(x_0) = 0$. Combinando esto con el hecho que $(g^2)^{'} \in H^{s-1}$, obtenemos

$$g^2(x) = 2\int_{-\pi}^{\pi} g(y)g^{'}(y)dy,$$

y de lo anterior concluimos que

$$|g(x)|^2 \leq 2\,||g||_{L^2}\,||g'||_{L^2}\,.$$

Esta última desigualdad es la que usamos en nuestra prueba.

5.5. Asintótica para el problema tipo Burgers

Como objetivo final de este capítulo, obtendremos la asintótica de la solución. Denotaremos el operador de Green de la forma

$$G_n(t)\psi = \sum_{|n|\leq N} \widehat{\psi}_n e^{ixn-tn^2}.$$

Denotemos para $N \geq 0$

$$b_N = \phi + \int_0^\infty G_{N_0}(-\tau)(N(u) - N(h_N))(\tau)d\tau,$$

donde

$$N_0 = [\sqrt{1+\upsilon N}],\ \nu = \text{mín}(1, 1-\lambda),\ \lambda < 1,$$

y definamos las funciones $h_{N+1}(t)$, por las relaciones de recurrencia :

$$\begin{aligned} h_0(t) &= 0, \\ h_N(t) &= G_N(t)b_{N-1}(t) + \int_0^t G_N(t-\tau)N(h_{n-1})(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

para $N \geq 1$.

Con esto enunciaremos nuestro segundo resultado principal del capítulo:

Teorema 45 *Supongamos que el dato inicial $\phi \in L^2(\Omega)$. Para todo $N \geq 0$ la siguiente relación asintótica es cierta:*

$$u(t,x) = h_N(t,x) + O(e^{-t-\upsilon Nt}), \tag{A.5}$$

cuando $t \to \infty$ uniformemente con respecto a $x \in \Omega$.

Prueba. Denote

$$\begin{aligned} u_N(t) &= P_N u \\ &= \sum_{|n|\leq N} \widehat{u}_n(t)e^{inx}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} r_N(t) &= R_{N+1}u \\ &= \sum_{|n|\geq N+1} \widehat{u}_n(t)e^{inx},\ N \geq 0. \end{aligned}$$

Luego descomponemos

$$u = u_{N-1} + r_{N-1}.$$

En virtud del operador de Green $G(t)$ del problema periódico lineal (5.1), escribimos el problema periódico no-lineal (5.2), en la forma de ecuación integral

$$r_N(t) = R_N G(t)\phi + \int_0^t R_N G(t-\tau)N(u)(\tau)d\tau, \tag{5.7}$$

donde

$$N(u) = e^{\lambda t}uu_x.$$

Definamos el espacio:

$$X_N = \{\psi \in C([0,\infty) : L^2(\Omega)) \cap C((0,\infty) : H^s(\Omega)) : ||\psi||_{X_N} < \infty\},$$

con la norma

$$||\psi||_{X_N} = \sup_{t>0} e^{t+\upsilon Nt}(||\psi||_{L^2} + \{t\}^{\frac{s}{2}}\, ||\psi||_{H^s}),$$

donde $s \in (\frac{1}{2}, 1), \upsilon = \text{mín}(1, 1-\lambda) > 0$.

En lo que sigue probaremos por inducción que :

$$||r_N||_{X_N} \leq C_N. \tag{5.8}$$

Como

$$r_0(t) = u(t),$$

estimamos (5.8) con $N = 0$, y este estimado es obtenido en la misma forma como se procedió en la prueba del lema 41. Supongamos por inducción que (5.8) es cierta con $0 \leq N < N_1$ y considere $N = N_1 \geq 1$.

En virtud de las estimaciones del lema 40, tenemos que:

$$\begin{aligned}
& ||R_N G(t)\phi||_{X_N} \\
= \; & \sup_{t>0} e^{t+\upsilon Nt}(||R_N G(t)\phi||_{L^2} + \{t\}^{\frac{s}{2}} ||R_N G(t)\phi||_{H^s}) \\
\leq \; & C \sup_{t>0} e^{t+\upsilon Nt - tN^2} ||\phi||_{L^2} \leq C_N,
\end{aligned}$$

entonces apoyándonos en los estimados del lema 43, obtenemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^t ||R_N G(t-\tau)N(u)(\tau)d\tau||_{X_N} \\
= \; & \sup_{t>0} e^{t+\upsilon Nt} \left|\left| \int_0^t R_N G(t-\tau)N(u)(\tau)d\tau \right|\right|_{L^2} \\
& + \sup_{t>0} e^{t+\upsilon Nt}\{t\}^{\frac{s}{2}} \left|\left| \int_0^t R_N G(t-\tau)N(u)(\tau)d\tau \right|\right|_{H^s} \\
\leq \; & C \sup_{t>0} \{t\}^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} e^{-\upsilon t} \sup_{\tau>0} e^{t+\upsilon Nt}\{\tau\}^{\frac{s}{2}} ||R_N N(\upsilon)(\tau)||_{H^{-1}}.
\end{aligned}$$

De todo lo anterior tenemos, ya que

$$u = u_{N-1} + r_{N-1},$$

entonces

$$N(u) = \partial_x(u_{N-1}^2 + 2u_{N-1}r_{N-1} + r_{N-1}^2).$$

Por la identidad de Parseval, tenemos:

$$\begin{aligned}
& ||R_N N(u_{N-1})||^2_{H^{-1}} \\
= \;& e^{2\lambda t} \sum_{|n|\geq N+1} \left| \sum_{\substack{|j|\leq N-1 \\ |n-j|\leq N-1}} \widehat{u_{n-j}} \widehat{u}_j \right|^2 \\
\leq \;& C_N e^{2\lambda t} \sum_{N+1\leq |n| \leq 2N} \sum_{\substack{|j|\leq N-1 \\ |n-j|\leq N-1}} \left|\widehat{u_{n-j}}\right|^2 |\widehat{u}_j|^2 \\
\leq \;& C_N e^{2\lambda t} \sum_{N+1\leq |n| \leq 2N} \sum_{\substack{|j|\leq N-1 \\ |n-j|\leq N-1}} ||r_{n-j-1}||^2_{L^2} \, ||r_{j-1}||^2_{L^2} \\
\leq \;& C_N e^{2\lambda t} \sum_{N+1\leq |n| \leq 2N} \sum_{\substack{|j|\leq N-1 \\ |n-j|\leq N-1}} e^{-2t-2\upsilon(n-j-1)t} e^{-2t-2\upsilon(j-1)t} \\
\leq \;& C_N \sum_{N+1\leq |n| \leq 2N} e^{-2t-2(1-\lambda)t-2\upsilon(n-2)t} \leq C_N e^{-2t-2\upsilon N t}.
\end{aligned}$$

También estimamos:

$$\begin{aligned}
& \left|\left|R_N \partial_x (2u_{N-1} r_{N-1} + r^2_{n-1}\right|\right|_{H^{-1}} \\
\leq \;& C \, ||u||_{H^s} \, ||r_{N-1}||_{L^2} \\
\leq \;& C\{t\}^{-\frac{s}{2}} e^{-2t-\upsilon(N-1)t},
\end{aligned}$$

de lo anterior, obtenemos lo siguiente:

$$e^{t+\upsilon N t}\{t\}^{\frac{s}{2}} \, ||R_N N(\upsilon)(t)||_{H^{-1}} \leq C_N.$$

Por tanto tenemos:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t ||R_N G(t-\tau) N(u)(\tau) d\tau||_{X_N} \\
\leq \;& C \sup_{t>0} e^{t+\upsilon N t} \{t\}^{\frac{s}{2}} \, ||R_N N(u)(\tau)||_{H^{-1}} \leq C_N.
\end{aligned}$$

Luego el estimado (5.8) es cierto para todo $N \geq 0$.

En lo que sigue obtendremos la asintótica de la solución. Denote para $N \geq 0$

$$a_N = \phi + \int_0^\infty P_{N_0} G(-\tau)(N(u) - N(u_N)(\tau) d\tau,$$

donde

$$N_0(N) = [\sqrt{1+\upsilon N}],$$

tal que

$$N_0^2(N) < 1 + v(N+1).$$

Entonces representamos

$$\begin{aligned} u_{n+1}(t) &= P_{N+1}G(t)a_N + \int_0^t P_{n+1}g(t-\tau)N(u_N)(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_0^t R_{N_0+1}P_{N+1}G(t-\tau)(N(u)-N(u_N))(\tau)d\tau \\ &\quad - \int_t^\infty P_{N_0}G(t-\tau)(N(u)-N(u_N))(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{5.9}$$

También definimos para $N \geq 0$

$$b_N = a_N + \int_0^\infty P_{N_0}G(-\tau)(N(u_N)-N(h_N))(\tau)d\tau,$$

y

$$h_{N+1}(t) = P_{N+1}(G(t)b_N + \int_0^t G(t-\tau)N(h_N)(\tau)d\tau). \tag{5.10}$$

Por ecuaciones (5.9) y (5.10) tenemos que la diferencia

$$w_{N+1}(t) = u_{N+1}(t) - h_{N+1}(t),$$

cumple

$$\begin{aligned} w_{N+1}(t) &= -\int_t^\infty P_{N_0}G(t-\tau)(N(u)-N(h_N))(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_0^t R_{N_0+1}P_{N+1}G(t-\tau)(N(u)-N(h_N))(\tau)d\tau, \end{aligned} \tag{5.11}$$

para probar que

$$||w_N|| \leq C_N, \tag{5.12}$$

para todo $N \geq 0$. Por el lema 41, tenemos

$$\begin{aligned} &\left|\left|\int_0^t R_{N_0+1}P_{N+1}G(t-\tau)(N(u)-N(h_N))(\tau)d\tau\right|\right|_{X_{N+1}} \\ = &\sup_{t>0} e^{t+v(N+1)t}\left|\left|\int_0^t R_{N_0+1}P_{N+1}G(t-\tau)(N(u)-N(h_N))(\tau)d\tau\right|\right|_{L^2} \\ &+\sup_{t>0} e^{t+v(N+1)t}\{t\}^{\frac{s}{2}}\left|\left|\int_0^t R_{N_0+1}P_{N+1}G(t-\tau)(N(u)-N(h_N))(\tau)d\tau\right|\right|_{H^s} \\ = &\sup_{t>0}\{t\}^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}e^{-vt}\sup_{t>0} e^{t+v(N+1)t}\{t\}^{\frac{s}{2}}\left|\left|(N(u)-N(h_N))(t)\right|\right|_{H^{-1}}. \end{aligned}$$

Entonces tenemos el estimado:

$$\begin{aligned}
& ||(N(u)-N(h_n))(t)||_{H^{-1}} \\
\leq\ & ||(N(u)-N(u_N))(t)||_{H^{-1}} + ||(N(u_N)-N(h_N))(t)||_{H^{-1}} \\
\leq\ & Ce^{\lambda t}\, ||u||_{H^s} \left(||r_N||_{L^2} + ||w_N||_{L^2}\right) \\
\leq\ & C\{t\}^{\frac{-s}{2}} e^{\lambda t - 2t - \upsilon N t}.
\end{aligned}$$

Luego

$$e^{t+\upsilon(N+1)t}\{t\}^{\frac{s}{2}}\, ||(N(u)-N(h_n))(t)||_{H^{-1}} \leq C_N.$$

De lo anterior tenemos :

$$\begin{aligned}
& \left|\left|\int_0^t R_{N_0+1}P_{N+1}G(t-\tau)(N(u)-N(h_N))(\tau)d\tau\right|\right|_{X_{N+1}} \\
\leq\ & \sup_{t>0} e^{t+\upsilon(N+1)t}\{t\}^{\frac{s}{2}}\, ||(N(u)-N(h_N))(t)||_{H^{-1}} \leq C_N.
\end{aligned}$$

En vista de la desigualdad

$$1+\upsilon(N+1) > N_0^2,$$

por los estimados del lema 41, tenemos:

$$\begin{aligned}
& \left|\left|\int_t^\infty P_{N_0}G(t-\tau)(N(u)-N(h_N))(\tau)d\tau\right|\right|_{X_{N+1}} \\
=\ & \sup_{t>0} e^{t+\upsilon(N+1)t} \left|\left|\int_t^\infty P_{N_0}G(t-\tau)(N(u)-N(h_N))(\tau)d\tau\right|\right|_{L^2} \\
& + \sup_{t>0} e^{t+\upsilon(N+1)t}\{t\}^{\frac{s}{2}} \left|\left|\int_t^\infty P_{N_0}G(t-\tau)(N(u)-N(h_N))(\tau)d\tau\right|\right|_{H^s} \\
\leq\ & C\sup_{t>0}\{t\}^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}e^{-\upsilon t} \sup_{t>0} e^{t+\upsilon(N+1)t} t^{\frac{s}{2}}\, ||(N(u)-N(h_N))(t)||_{H^{-1}}.
\end{aligned}$$

también y tenemos los estimados:

$$\begin{aligned}
& \sup_{t>0} e^{t+\upsilon(N+1)t}\{t\}^{\frac{s}{2}}\, ||(N(u)-N(h_N))(t)||_{H^{-1}} \\
\leq\ & e^{t+\upsilon(N+1)t}\{t\}^{\frac{s}{2}}\left(||(N(u)-N(u_N))(t)||_{H^{-1}} + ||(N(u_N)-N(h_N))(t)||_{H^{-1}}\right) \\
\leq\ & Ce^{t+\lambda t+\upsilon(N+1)t}\{t\}^{\frac{s}{2}}\, ||u||_{H^s}\left(||r_N||_{L^2} + ||w_N||_{L^2}\right) \leq C_N
\end{aligned}$$

Por tanto tenemos:

$$\begin{aligned}
& \left|\left|\int_t^\infty P_{N_0}G(t-\tau)(N(u)-N(h_N))(\tau)d\tau\right|\right|_{X_{N+1}} \\
\leq\ & \sup_{t>0} e^{t+\upsilon(N+1)t}\{t\}^{\frac{s}{2}}\, ||(N(u)-N(h_N))(t)||_{H^{-1}} \\
\leq\ & C_N\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Luego de los estimados (5.11) y (5.12) son probados. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} ||u(t) - h_N(t)||_{L^\infty} &\leq C\,||u(t) - h_N(t)||_{H^s} \\ &\leq C\,||r_N(t)||_{H^s} + C\,||w_N(t)||_{H^s} \\ &\leq C_N e^{-t-vNt}, \end{aligned}$$

para todo $t > 1$. Luego la relación asintótica (A.5) se cumple. Con lo anterior el teorema 45 es probado. ■

Apéndice A

Resultados importantes.

En esta sección final de la tesis, abordaremos enunciados de un teorema usado en la tesis y de gran importancia en el estudio del análisis funcional como lo es el consagrado teorema de Hahn- Banach.

También explicaremos lo que significa que un problema de ecuaciones diferenciales parciales esté localmente y globalmente bien puesto.

En partícular estudiaremos un problema clásico al estudiar ecuaciones diferenciales ya seán ordinarias o parciales, el cual es el problema de como prolongar el dominio de definición de una solución de estas ecuaciones.

Estudiaremos un poco esta problemática, visto desde el análisis funcional y pensando en ecuaciones diferenciales parciales no-lineales.

Teorema 46 *(Teorema de Hahn-Banach)*

Sea E un espacio vectorial normado, F un subespacio, y G un espacio vectorial normado completo. Sea

$$\lambda : F \to G,$$

un operador lineal continuo, con norma C. Entonces la clausura $\overline{F}$ de F en E es un subespacio de E. Entonces exista una única extensión de λ a un funcional lineal

$$\overline{\lambda} : \overline{F} \to G,$$

y $\overline{\lambda}$ tiene la misma norma que λ.

Observación A.1 *:Las funciones periódicas de clase C^{∞}, son densas en los espacios de Sobolev de cualquier orden.*

La prueba de la observación anterior es sencilla, basta pensar en los polinomios trigonométricos. De igual forma escribimos un bosquejo de la prueba de la observación.

Prueba. Sea $\varphi \in H^{\alpha}$, luego

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}_n|^2 \langle n \rangle^{2\alpha} &< \infty \\ \varphi(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}\widehat{\varphi}_n. \end{aligned}$$

Definamos

$$\varphi_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}\widehat{\varphi}_n \in C^{\infty}_{per}.$$

De lo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{R} : ||\varphi_N(x) - \varphi(x)||^2_{H^{\alpha}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}\widehat{\varphi}_n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}\widehat{\varphi}_n \right|^2 \langle n \rangle^{2\alpha} \\ &= \sum_{|n| \geq N} |\widehat{\varphi}_n|^2 \langle n \rangle^{2\alpha} \to 0, N \to \infty. \end{aligned}$$

■

Definición 47 *Sean X, Y espacios de Banach, $T_0 \in (0, \infty)$ y sea $F : [0, T_0] \times Y \to X$ una función continua. Diremos que el problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) &= F(t, u(t)) \in X, \\ u(0) &= \phi \in Y, \end{aligned} \tag{A.1}$$

es localmente bien puesto en Y si

Existe $T \in (0, T_0]$ y una función $u \in C([0, T] : Y)$ tal que $u(0) = \phi$ y la ecuación diferencial es sastisfecha en el sentido que

$$\lim_{h \to 0} \left|\left| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - F(t, u(t)) \right|\right|_X = 0,$$

donde las derivadas en $t = 0$ y $t = T$ son tomadas por la derecha y la izquierda respectivamente,

b) El problema (6.1) tiene al menos una solución en $C([0, T] : Y)$,

c) La función $\phi \to u$ es continua. Más precisamente, sea $\phi_n \in Y, n = 1, 2, ..., \infty$, son tales que $\phi_n \to \phi_\infty$ en Y y sean $u_n \in C([0, T_n] : Y)$ las correspondientes soluciones. Sea $T \in (0, T_\infty)$. Entonces las soluciones u_n pueden ser extendidas al intervalo $[0, T]$ para todo n suficientemente grande y

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T]} ||u_n(t) - u_\infty(t)||_Y = 0.$$

Nosotros resumiremos esas propiedades por decir que el problema está localmente bien puesto. Si una de esas propiedades falla diremos que el problema está mal puesto.

A.1. Máximos intervalos de existencia.

Despues de establecer cuando un problema de Cauchy está localmente bien puesto, surge una pregunta natural, la cual es

¿Puedo extender la solución?

Si $F(t, u)$ está definida para todo tiempo positivo, quisieramos saber si la solución exista también para todo tiempo positivo. En esta sección introducimos un método para responder a está pregunta. La respuesta en sí depende de entender las propiedades de la ecuación diferencial bajo examinación. Expondremos el caso autónomo y asumímos que F está definida en todo Y.

Definición 48 *(Globalmente bien puesto).Sean X, Y espacios de Banach, $T_0 \in (0, \infty)$ y sea $F : [0, T_0] \times Y \to X$ una función continua. Diremos que el problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) &= F(u(t)) \in X, \\ u(0) &= \phi \in Y, \end{aligned} \tag{A.2}$$

es globalmente bien puesto en Y si

Existe una única $u \in C([0, \infty) : Y)$ tal que $u(0) = \phi$ y la ecuación diferencial es sastisfecha en el sentido que

$$\lim_{h\to 0} \left|\left| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - F(u(t)) \right|\right|_X = 0 \ \forall t \in [0, \infty)$$

con derivada en $t = 0$ tomada por la derecha.

La función $\phi \to u$ es continua. Más precisamente, sea $\phi_n \in Y, n = 1, 2, ..., \infty$, son tales que $\phi_n \to \phi_\infty$ en Y y sean $u_n \in C([0, T_n] : Y)$ las correspondientes soluciones. Para cada $T > 0$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T]} ||u_n(t) - u_\infty(t)||_Y = 0.$$

Para obtener la existencia global para (6.2), debemos combinar una estimación global a priori para $||u(t)||_Y$ con el principio de extensión.

A.2. Principio de extensión.

Sea $\phi \in Y$ y asuma que (5.47) es localmente bien puesto. Sea

$$T^*(\phi) = \sup\{T > 0 : \exists! \text{ solución de (A.2) en } [0, T]\}.$$

Entonces lo siguiente es válido

a) $T^*(\phi) = \infty$ ó $T^*(\phi) < \infty$ y

$$\lim_{t\to T^*(\phi)} ||u(t)||_Y = \infty.$$

En el segundo caso diremos que la solución explota en tiempo finito. La función

$$u \in C([0, T^*(\phi)) : Y),$$

es llamada la máxima extensión de la solucion del problema (A.2).

b) La función $\phi \to T^*(\phi)$ es semicontinua inferiormente, esto es

$$\begin{aligned} \forall\varepsilon &> 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon, \phi) > 0 / \, ||\phi - \psi||_Y \leq \delta \\ &\Rightarrow T^*(\phi) - \varepsilon < T^*(\psi). \end{aligned}$$

En términos de sucesiones, semicontinuidad inferior significa que si

$$\phi_n \to \phi_\infty \text{ en } Y,$$

entonces dado $T \in (0, T^*(\phi_\infty))$, tenemos $T^*(\phi_n) \geq T$ para todo n suficientemente grande. En particular, las soluciones locales $u_n(t)$ pueden ser extendidas a $[0, T]$ para todo n.

Observación A.2 *:La razon de no establecer el principio de extensión como un teorema es que uno prueba o desprueba según cada situación bajo consideración.*

A.3. Álgebra de Banach.

Definición 49 *Un álgebra de Banach es un espacio X, junto con un producto*

$$(x, y) \in X \times X \to xy \in X$$

tal que, para todo $x, y, z \in X$ y todo $r, s \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} (xy)z &= x(yz), \\ r(xy) &= x(ry) = (rx)y, \\ (x+y)z &= xz + yz \text{ y } x(y+z) = xy + xz, \\ \|xy\| &\leq \|x\| \, \|y\| \,. \end{aligned}$$

Lema 50 *Sean $a, b \in [0, \infty)$ y $s \geq 0$. Existen constantes positivas m_s y M_s dependiendo solo de s tal que*

$$m_s(a^s + b^s) \leq (a+b)^s \leq M_s(a^s + b^s). \tag{A.3}$$

Prueba. Si $a = 0$, no hay nada que probar. Asuma que $a > 0$. Entonces A.3 es equivalente a

$$m_s[1 + (\frac{b}{a})^s] \leq (a+b)^s \leq M_s[1 + (\frac{b}{a})^s].$$

Es suficiente con probar que existen m_s y M_s tales que

$$m_s(1 + r^s) \leq (1+r)^s \leq M_s(1 + r^s) \ \forall r \in [0, \infty).$$

Esto es cierto gracias a que a función

$$F(r) = \frac{(1+r)^s}{1 + r^s},$$

es acotada y tiene inversa acotada. ■

Introducimos una conveniente definición.

Definición 51 *Sea $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ y $\beta = (\beta_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ dos sucesiones de números complejos. La convolución de α y β es la sucesión $\alpha * \beta$ definida por*

$$(\alpha * \beta)_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j \beta_{k-j},$$

siempre que el lado derecho de la igualdad tenga sentido.

Necesitamos una versión especial de la desigaldad de Young, para el caso de convoluciones de sucesiones.

Proposición A.1 *Sea* $\alpha \in l^1 = l^1(\mathbb{Z})$ *y* $\beta \in l^2 = l^2(\mathbb{Z})$*. Entonces* $\alpha * \beta \in l^2$ *y*

$$||\alpha * \beta||_{l^2} \leq ||\alpha||_{l^1} \, ||\beta||_{l^2} \, . \tag{A.4}$$

En particular, para toda $\alpha \in l^1$*, la función* $\beta \to \alpha * \beta$ *define un operador lineal acotado de* l^2 *en si mismo.*

Teorema 52 *Si* $s > \frac{1}{2}$*,* H^s *es un álgebra de Banach. En particular, existe una constante* $C_s \geq 0$*, dependiendo sólo de* s *tal que*

$$||fg||_{H^s} \leq C_s \, ||f||_{H^s} \, ||g||_{H^s} \quad \forall f, g \in H^s.$$

Prueba. De la prueba del lema de Sobolev se tiene que, para $s > \frac{1}{2}$, la serie de Fourier de una función en H^s, converge absolutamente y uniformemente sobre $[-\pi, \pi]$. Por lo tanto, si $f, g \in H^s$ tenemos

$$\begin{aligned} (fg)^\wedge(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(j) e^{ijx} \Big) g(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(j) \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-i(k-j)x} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(j) \widehat{g}(k-j). \end{aligned} \tag{A.5}$$

Por lema 50 tenemos que

$$(1 + |k|^2)^{\frac{s}{2}} \leq K_s(1 + |k|^s) \leq K_s(1 + |k-j|^s + |j|^s) \; \forall k, j \in \mathbb{Z} \tag{A.6}$$

donde K_s es una constante no negativa. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &(1 + |k|^2)^{\frac{s}{2}} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(j) \widehat{g}(k-j) \right| \\ \leq \; & K_s \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} [(1 + |k-j|^s + |j|^s)] \widehat{f}(j) \widehat{g}(k-j) \right| \\ \leq \; & K_s \sum_{j=-\infty}^{\infty} \{ \left| \widehat{f}(j) \widehat{g}(k-j) \right| + \left| \widehat{f}(j) \right| |(k-j) \widehat{g}(k-j)| + \left| j^s \widehat{f}(j)) \right| |\widehat{g}(k-j)| \}. \end{aligned}$$

Como $(m^2\widehat{f}(m))_{m\in\mathbb{Z}}, (m^s\widehat{g}(m))_{m\in\mathbb{Z}} \in l^2$y $(\widehat{f}(m))_{m\in\mathbb{Z}}, (\widehat{g}(m))_{m\in\mathbb{Z}} \in l^1 \cap l^2$ Proposición A.1 combinado con A.5 nos da que

$$((1+|k|^2)^{\frac{s}{2}} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(j)\widehat{g}(k-j) \right|)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2,$$

y

$$\begin{aligned}
||fg||_{H^s}^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^{\frac{s}{2}} \left| \widehat{fg}(k) \right|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^{\frac{s}{2}} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(j)\widehat{g}(k-j) \right| \\
&\leq K_s[\left|\left|\widehat{f}\right|\right|_{l^1} ||\widehat{g}||_{l^2} + ||(\cdot)^s\widehat{g}(\cdot)||_{l^1} \left|\left|\widehat{f}\right|\right|_{l^2} + \left|\left|(\cdot)^s\widehat{f}(\cdot)\right|\right|_{l^1} ||\widehat{g}||_{l^2}] \\
&\leq C_s \, ||f||_{H^s} \, ||g||_{H^s} \, .
\end{aligned}$$

■

Bibliografía

[1] A. Constantin and J. Escher, Global solutions for quasilinear parabolic problems.J Evol. Equ. 2 (2002) Nro. 1, 97-111.Doering, C.R., Gibbon.

[2] B. Reinhard Horst (2011) Introduction to Classical Partial Differential Equations. Mpi for Gravitational Physics Am Muehlenberg 1 D-14476 Golm. Germany.

[3] B. Rafael Granero y Valderrama Jose Manuel, La ecuación de Burgers como paso previo al estudio de fluidos incomprensibles.arXiv:1105.5990v1[math.HO].30 May 2011.

[4] H. Amann, Dinamic theory of quasilinear parabolic systems. Global existence. Math .Z. 202(1989). Nro.2, 219-250.

[5] Hayashy,N., Kaikina E.I., Naumkin, P.I, Damped wave equation with a critical nonlinearity.Trans.Am.Math.Soc.358(3),1165-1185(2006).

[6] Hayashi,N., Kaikina, E.I, Naumkin, P.I|, Damped wave equation with supercritical nonlinearities.Diferrential integral equations.17(5-6), 637-652, (2004).

[7] Hayashi, N., Kaikina, E.I., Naumkin, P.I Damped wave equation in the subcritical cases. J.Differ.Equ.207(1), 161-194(2004).

[8] Hayashi, N., Naumkin, P.I., and Rodriguez -Ceballos Joel A., Asymptotics of solutions to the periodic problem for the nonlinear damped wave equation.Journal of evolutions equations.

[9] Hiroshi, Fujita., On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac Sci. Univ. Tokyo. Sect.I.13. 109-124(1966). MR35#5761.

[10] J.D.,Levermore, C.D.Weak and strong solutions of the complex Ginsburg-landau equation.Physica D 71 (3), 183-202(1995)

[11] Kaikina, E.I, Naumkin, P.I., Shishmarev, I.A., Periodic problem for a model nonlinear evolution equation.Adv.Differ.Equ. 7(5), 581-616 (2002).

[12] Naumkin I. Pavel and Rojas Milla Cristian Jesús, Asymptotics of solutions to the periodic problem for a Burgers Type equation. J. Evol.Equ. 2010 Springer Basel AGDOY 10.1007.

[13] Linares, Felipe, Ecuaciones dispersivas no lineales.Caso periódico. XX Escuela Venezolana de Matemáticas.Septiembre 2007.

[14] O.A. Ladyzheskaya, V.A.Solonnikov and N.N.Uralceva, Linear and quailinear equations of parabolic type, Translations of Mathematical monographaps, Vol 23, AMS, Providence, R.I, 1967, 648 pp.

[15] Pazy, A, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Aplpplied mathematical sciences; v.44. Springer-Verlag, New York, Inc.1983.

[16] L.S Achdev, Chsrnivasa, Rao and B.OI Enflo, Large time asymptotics for periodic problems solutions of the modifiec Burgers equations, Stud, Appl. Math 114 ,(2005), Nro. 3, pp 307-323.

[17] Iório, Rafael Valeria Iório, Valeria, Equacoes diferenciais parciais: Uma introducao. Instituto de Matemática Pura y Aplicada. CNPq, 1988. (Proyeto Euclides).

[18] Lang.S, Introducción al Análisis Matemático. 1990. Addison-Wesley Iberoamericana.

[19] Salsa.S, Partial Differenttial Equations in Action. Springer. 2009.

[20] Todorova, G., Yordanov, B Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping. J. Differ. Equ.(174), 464-489(2001).

[21] You, Y Global dynamics of dissipative generalized Korteweg de Vries equations. Chin. Ann. Math. Ser. B 17(4), 389-402 (1996).

[22] Valeria de Magalhaes Iório. EDP, un curso de gradacuao. Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura y Aplicada, CNPq, 1991.

[23] W. Kirsh and A. Kulzelnigg, Time asymptotics for solutions of the Burgers equations with a periodic force, Math zz. 232 (1999). nro. 4, pp 69-705.

[24] Xing, J Global strong solution for a class of Burger - BBM type equation. Appl. Math. J. Chin. Univ. 6(1), 31-37 (1991).

[25] Zuazua, E Some recent results on the large time behavior for scalar parabolic conservation laws, in elliptic and parabolic problems. Proc, 2nd European Conference. Pitman Res. Notes Math. Ser. 325 , pp 251-263 (1995).

Cristian J. Rojas-Milla
e-mail:crojas@matmor.unam.mx