



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas

“Generación Dinámica de Masas y Confinamiento en QED_3 ”

Tesis presentada al

Instituto de Física y Matemáticas

para obtener el grado de

Doctor en Ciencias en el Área de Física

por

M.C. Saúl Sánchez Madrigal

Asesor

Dr. Alfredo Raya Montaña
(IFM-UMSNH)

Morelia, Michoacán, México
Febrero de 2012.

Prefacio

En este trabajo de tesis estudiamos los fenómenos de la Generación Dinámica de Masas GDM (Rompimiento Dinámico de la Simetría Quiral) y Confinamiento mediante las Ecuaciones de Schwinger-Dyson (ESD) [1], truncándolas a nivel no perturbativo. Estos fenómenos son dos características cruciales de la Cromodinámica Cuántica (QCD) responsables de la naturaleza del espectro hadrónico. Un modelo más simple que exhibe ambos es la Electrodinámica Cuántica en (2+1) las dimensiones del espacio-tiempo, QED_3 .

QED_3 es una teoría que además de servir de campo de entrenamiento para abordar problemas en teorías más complicadas, es interesante por méritos propios debido a sus múltiples aplicaciones. Modela, por ejemplo, el comportamiento a alta temperatura de QCD ordinaria ya que a altas temperaturas, ocurre una reducción dimensional a (2+1)-dimensiones, seguida de una abelianización [2] debida a las contribuciones dominantes de diagramas topológicamente planares. La física planar posee características intrínsecas muy interesantes que no se observan en el espacio, como la existencia de partículas de espín y estadística arbitrarios, llamadas anyones [3], así como novedosas características concernientes a paridad y quiralidad [4]. Las aplicaciones de QED_3 en sistemas de materia condensada incluyen superconductividad de alta temperatura [5, 6, 7, 8, 9], efecto Hall cuántico [10], aislantes de Mott dopados [11], antiferromagnetos de Heisenberg [12] y líquidos de espín [13]. Muy recientemente se ha descubierto un nuevo material, llamado grafeno [14, 15, 16], que es simplemente una lámina de átomos de carbono comprimidos en una red hexagonal, de un átomo de espesor, cuyas excitaciones de baja energía son la encarnación de QED_3 en la materia condensada.

Una discusión de muchos años en este modelo es la existencia de un número crítico de familias de fermiones, N_c , para el cual la GDM deja de ocurrir. Esto fue establecido de las soluciones de las ESD, en el orden dominante de la expansión $1/N$ en la norma de Landau [17]. El confinamiento también se ha encontrado ausente en este panorama [18].

Nosotros estudiamos algunos aspectos de la GDM y confinamiento en QED_3 modificando el propagador del fotón considerando un término de Chern-Simons en la acción correspondiente, por un lado, y vistiendo apropiadamente el vértice de la interacción en la teoría ordinaria por el otro. Esta tesis está organizada de la siguiente manera: En el Capítulo 1 estudiamos algunos aspectos generales de la ESD para el propagador del quark, llamada “ecuación de brecha” para entender las ideas detrás del fenómeno de GDM y la introducción del confinamiento en este tipo de estudios. Comenzamos estudiando el propagador de quark y exploramos la solución correspondiente del modelo de Nambu-Jona-Lassino [19] en varias dimensiones espacios-temporales. En el Capítulo 2, abordamos la electrodinámica de los sistemas planares. Discutimos en detalle las peculiaridades de estos sistemas en cuanto a sus simetrías y la riqueza de su estructura, que permiten for-

mular varios Lagrangianos que violan o respetan Paridad. En el Capítulo 3 revisamos el escenario clásico de GDM y confinamiento en QED_3 tanto en la aproximación apagada, es decir despreciando los loops de fermiones como considerando efectos de polarización del vacío al orden dominante en la aproximación $1/N$ resolviendo numéricamente las ESD. En el Capítulo 4 introducimos el término de Chern-Simons para el propagador del fotón y estudiamos su efecto en la estructura perturbativa y no perturbativa del propagador del fermión a través de las transformaciones de LKF [20]. En el Capítulo 5 incluimos este término de Chern-Simons estudiando cómo se modifica el escenario de la GDM y Confinamiento comparando y extendiendo el caso de QED_3 visto en el tercer Capítulo 3. En el capítulo 6 proponemos un vértice revestido adaptando la propuesta del vértice Bashir-Pennington [21] inicialmente formulado en QED_4 , para a mejorar la independencia de norma de las observables físicas, implementándolo en QED_3 tanto la GDM como el confinamiento. Finalmente presentaremos nuestras conclusiones en el Capítulo 7. Los resultados principales de esta tesis fueron publicados en varios artículos titulados:

- “Gauge Covariance Relations and the Fermion Propagator in Maxwell-Chern-Simons QED_3 ” A. Bashir, A. Raya y S. Sánchez Madrigal, J. Phys. A41 505401 (2008). Preprint arXiv:0811.3050 [hep-ph].
- “Confinement in Maxwell-Chern-Simons Planar Electrodynamics in the $1/N$ Approximation” C. Hofmann, A. Raya y S. Sánchez-Madrigal, Phys. Rev. D82, 096011 (2010). Preprint arXiv:1010.3466 [hep-ph].
- “Chiral Symmetry Breaking and Confinement Beyond the Rainbow-Ladder truncation” A. Bashir, A. Raya y S. Sánchez Madrigal, Phys. Rev. D84, 036013 (2011). Preprint: arXiv:1108.4748 [hep-ph].

Y en las memorias de eventos

- “Dynamical Masses and Confinement in QED_3 ” A. Raya y S. Sánchez, AIP Conf. Proc. CP1026 170 (2008).
- “A study of confinement and dynamical chiral symmetry breaking in QED_3 ” S. Sánchez, A. Raya y A. Bashir, AIP Conf. Proc. 1116 461 (2009).
- “Dynamical Mass Generation and Confinement in Maxwell-Chern-Simons Planar Quantum Electrodynamics” S. Sánchez, Christoph Hofmann, A. Raya, J. Phys. Conf. Ser. 287, 012028 (2011).

Índice general

Prefacio	III
1. Motivación	1
1.1. El origen de las masas	1
1.2. Ecuación de brecha (gap) en QCD	4
1.3. Modelo de Nambu–Jona-Lasinio	5
1.4. Nambu-Jona-Lasinio en Tres Dimensiones	10
1.5. Confinamiento en el modelo NJL	12
1.5.1. NJL con confinamiento en Tres Dimensiones	14
2. Electrodinámica Cuántica en el Plano QED₃	17
2.1. QED Ordinaria	17
2.1.1. Simetrías Locales y Globales	17
2.2. Lagrangiano de Dirac: Representación Irreducible	19
2.3. Lagrangiano de Dirac: Representación Reducible	20
2.4. Lagrangiano de Maxwell	21
2.4.1. Lagrangiano de Chern-Simons	21
2.4.2. Lagrangiano de QED ₃ Reducible	22
2.5. Potencial Electroestático y Confinamiento	22
3. GDM y Confinamiento en QED₃	25
3.1. ESD en la Aproximación Apagada	25
3.1.1. Propagador del Fermión	28
3.1.2. Propagador del Fotón	29
3.1.3. Vértice	29
3.1.4. GDM Aproximación Arcoiris	30
3.2. ESD Aproximación 1/ <i>N</i>	33
3.3. Confinamiento	39
3.4. LKFT del Propagador del Fermión e Invariancia de Norma	40
4. QED de Maxwell-Chern-Simons	45
4.1. Propagador del fermión	45
4.1.1. Transformaciones LKF y propagador del fermión no perturbativo . .	47
4.1.2. Propagador del fermión en la Teoría de Perturbaciones	48
4.1.3. Lagrangiano de QED ₃ incluyendo el Término de Chern-Simons . . .	49

5. GDM y Confinamiento en MCS-QED	55
5.1. GDM y Confinamiento en la Aproximación Arcoiris	55
5.2. Renormalización de la función de onda	57
5.3. Confinamiento	60
5.4. GDM en la aproximación $1/N$	61
5.5. Confinamiento en la Aproximación $1/N$	64
6. Ruptura de la simetría Quiral y Confinamiento mas allá de la Aproximación Arcoiris.	67
6.1. El Vértice Fermión-Bosón en QED_3	67
6.2. Nuestro modelo	69
6.3. Independencia de Norma en QED_3	71
6.3.1. GDM	72
6.4. Confinamiento	74
7. Conclusiones	77

Índice de figuras

1.1. ESD para el propagador del quark.	4
1.2. GDM para el modelo de Nambu-Jona-Lasinio en cuatro dimensiones	7
1.3. Función de Schwinger promediada espacialmente, con la parte escalar $\Delta(t)$ y vectorial $\Omega(t)$ del propagar del quark. Estas funciones son siempre positivas definidas, esto describe a los quarks desconfiados.	8
1.4. Parte vectorial del propagador del quark $\sigma^V(x)$ como función de $x = p^2$ y su segunda derivada, mostrando que su segunda derivada no cambia de signo, por tanto no exhibe confinamiento.	9
1.5. GDM para el modelo de Nambu-Jona-Lasinio en tres dimensiones	11
1.6. Función de Schwinger promediada espacialmente, con la parte escalar del propagar del quark en tres dimensiones	12
1.7. GDM para el modelo de Nambu-Jona-Lasinio en cuatro dimensiones con confinamiento	14
1.8. GDM para el modelo de Nambu-Jona-Lasinio en tres dimensiones con confinamiento	15
3.1. Correcciones radiativas al Propagador del Fermión.	26
3.2. Autoenergía $\Sigma(p)$	26
3.3. Expansión perturbativa del propagador del fermión en términos de la autoenergía.	27
3.4. ESD para el propagador del fermión.	28
3.5. ESD para el propagador del fotón	28
3.6. ESD para el vértice fermión-fotón.	28
3.7. ESD para el propagador del fermión en la Aproximación Apagada.	30
3.8. ESD para el propagador del fermión en el régimen de acoplamiento débil. .	31
3.9. ESD para el propagador del fermión en la Aproximación Arcoiris	31
3.10. Función de masa $M(p)$ en la Aproximación Arcoiris.	34
3.11. Propagador del fotón en la aproximación $1/N$	34
3.12. ESD para el propagador del fermión en la Aproximación $1/N$	35
3.13. Función de Masa para varios valores de N	37
3.14. Masa Generada Dinámicamente	38
3.15. Prueba de Confinamiento de la función de Schwinger con la parte escalar del propagador del fermión en la Aproximación Arcoiris en la norma de Landau.	40

3.16. Prueba de Confinamiento de la función de Schwinger con la parte escalar del propagador del fermión en la Aproximación $1/N$ para $N = 2$	41
3.17. Renormalización de la función de onda $F(p)$ y Función de masa $M(p)$ en varias normas arbitrarias con las transformaciones LKF en la aproximación Arcoiris.	41
3.18. Invarianza de norma del condensado con la Transformación LKF en la aproximación Arcoiris.	42
3.19. Invarianza de norma de la masa generada dinámicamente por medio con la Transformada LKF en la aproximación $1/N$	43
3.20. Invarianza de norma del condensado con las transformaciones LKF en la aproximación $1/N$	43
4.1. Proyección escalar del propagador en varias normas. La escala está dada por $e^2 = 1$ y hemos elegido $m_e = 1$, $m_o = 0,2$ y $\theta = 0,4$	52
4.2. Proyección vectorial del propagador en varias normas. La escala está dada por $e^2 = 1$ y hemos elegido $m_e = 1$, $m_o = 0,2$ y $\theta = 0,4$	52
5.1. Funciones $A_{\pm}(p)$ para varios valores de θ	56
5.2. Funciones $B_{\pm}(p)$ para varios valores de θ	56
5.3. Comportamiento crítico de $B_+(p)$ para $\theta \simeq 8 \times 10^{-3}$	58
5.4. Funciones de masa $M_{\pm}(p)$ para varios valores de θ	58
5.5. $\mu_{\pm}$ y los Condensados fermionicos como función de θ	58
5.6. Comportamiento Asintótico de la funciones de masa $M_{\pm}(p)$	59
5.7. Comparamos la masa generada dinámicamente de un sistema completo (5.1) y la perturbativa del sistema reducido (5.5).	59
5.8. Prueba de confinamiento de las funciones de Schwinger promediadas espacialmente.	60
5.9. Prueba de confinamiento de las funciones de Schwinger promediadas espacialmente involucrando la parte vectorial del propagador del fermión.	61
5.10. Funciones de masa $M_{\pm}(p)$ para $N = 2$ para varios valores del parámetro de Chern-Simons θ . $M_+(p)$ disminuye en la altura $M_-(p)$ cuando incrementa θ . Para $\theta_c \sim 8 \times 10^{-6}$, la meseta de $M_+(p)$ va a valores negativos, mientras que $M_-(p)$ continua incrementado.	62
5.11. $\mu_{\pm}$ como función de θ para $N = 2$. Ambas masas son iguales a $\theta = 0$ y se separan cuando θ incrementa. μ_- llega a ser mas pesado y μ_+ llega a ser mas ligero. A θ_c , μ_+ llega a ser negativo, con la misma magnitud que μ_-	63
5.12. ν_+ y ν_- , definidas en ecuación (5.12), como función de N y θ . ν_+ incrementa a lo largo de N . A lo largo de la curva ν_+^c que especifica el valor crítico θ para N , sufre una discontinuidad. ν_- evoluciona suavemente. Diverge en la región donde $N \rightarrow N_c$ para valores pequeños de θ	63
5.13. $\mu_{\pm}$ como función de θ para $N = 4$. Para estos valores de N , la única contribución a las masas viene del masas de Haldane. Las masas μ_+ y μ_- tengan la misma magnitud, pero sean opuesto en signo.	64

5.14. Funciones de Schwinger promediadas espacialmente para $N = 3$ y varios valores de θ ajustada de acuerdo a la ecuación (5.15). θ_c , $\Delta_+(t)$ es positiva definida, y se convierte en negativo definido sobre criticalidad. $\Delta_-(t)$ es siempre positivo definido. Estas funciones describen los fermiones desconfiados.	65
5.15. Funciones de Schwinger promediadas espacialmente involucrando la parte vectorial del propagador del fermión, ecuación (5.8), para $N = 3$ y varios valores de θ , ajustada a la ecuación (5.16). $\Omega_{\pm}(t)$ es positiva definida, y describen así los fermiones deconfinados.	66
6.1. Acomplamiento crítico como función del parámetro de norma, usando el vértice Bashir Pennington (BP), marcando una mejora con la independencia de norma en comparación con el vértice desnudo y Curtis-Pennington (CP).	71
6.2. Función de masa $M(p)$ y renormalización de la función de onda $F(p)$ en diferentes normas covariantes, seleccionando el valor $a_2^3 = 2,75$ que define nuestro vértice fijando a_6^3 en la ecuación (6.22)	73
6.3. Dependencia de norma para el condensado quiral para QED ₃ , comparando nuestro vértice con el de Curtis-Pennington y Burden-Roberts.	73
6.4. Diferencia de norma del condensado comparado con la norma de Landau, sobre el plano a_2/a_6 ecuación (6.1). El contorno de la independencia de norma para el condensado a lo largo de la línea de la ecuación (6.22)	74
6.5. Función de Schwinger promediada espacialmente en diferentes normas . . .	74
6.6. Primera derivada σ_v en diferentes normas	75

Índice de cuadros

1.1. Partículas e Interacciones del ME.	2
1.2. Partículas y Masa del ME.	3
2.1. Algunas Teorías de Norma	19
3.1. Comparación Masas Físicas de Appelquist y nosotros en la aproximación 1/N.	39

Capítulo 1

Motivación

1.1. El origen de las masas

El Modelo Estándar (ME) de partículas fundamentales describe las interacciones fuertes, débiles y electromagnéticas entre los constituyentes básicos de la materia mediante el intercambio de los correspondientes bosones de norma de espín 1 : 8 gluones sin masa y 1 fotón γ sin masa para las interacciones fuertes y electromagnéticas, respectivamente, y 3 bosones masivos ($W^\pm$ y Z) para la interacción débil. Este modelo es una teoría de norma basada en el grupo de simetrías locales $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ que fue propuesto por S. L. Glashow [22], S. Weinberg [23] y A. Salam [24] para describir las interacciones electromagnéticas y débiles y posteriormente fue extendido para grados de libertad hadrónicos mediante el llamado mecanismo GIM por Glashow, Iliopolus y Maiani [25]. El contenido de materia fermiónica consiste en tres familias de quarks y tres de leptones (Cuadro 1.1). Cada familia está formada por partículas de espín 1/2, con cargas eléctricas Q en unidades de la carga del protón, y sus correspondientes antipartículas. Los quarks aparecen en tres posibles estados de color (rojo, verde y azul). Los hadrones (mesones y bariones) están formados por quarks que interactúan entre sí a través de los gluones. La teoría que describe dichas interacciones es una teoría de norma no Abelianiana llamada Cromodinámica Cuántica (QCD) [26].

El origen de las masas de las partículas del ME electrodébil se explica por medio del Mecanismo de Higgs [27]. En este mecanismo, la simetría de norma se rompe espontáneamente para que los bosones adquieran masa, lo que exige la introducción de un campo escalar, el campo de Higgs ϕ todavía no descubierto, que adquiere espontáneamente un valor de expectación en el vacío, el condensado $\langle\phi\rangle = \langle 0|\phi|0\rangle \neq 0$, que forma un medio pegajoso en el cual se propagan los bosones de norma del ME, sintiéndose pesados, pues han adquirido su masa. Luego, a través de los acoplamientos de Yukawa, es decir, los acoplamientos entre el bosón de Higgs y los fermiones, estos últimos también adquieren su masa. Por ejemplo los quarks ligeros *up* y *down* adquieren masas de corriente de 3-6 MeV, ver (Cuadro 1.2), tal que la suma de las masas de tres de ellos es alrededor de 10 MeV. El Gran Colisionador de Hadrones (en inglés, Large Hadron Collider o LHC) está, entre otras cosas, en busca del bosón del Higgs. En este régimen de alto momento transferido, los quarks se comportan como casi libres, es decir, la interacción entre dos quarks debido al intercambio de gluones resulta ser muy pequeña. Éste es el dominio de la libertad

CAPÍTULO 1. MOTIVACIÓN

1.1. EL ORIGEN DE LAS MASAS

Fermiones		I	II	III	Q
Espín 1/2	Quarks	<i>uuu</i> up	<i>ccc</i> charm	<i>ttt</i> top	2/3
		<i>ddd</i> down	<i>sss</i> strange	<i>bbb</i> bottom	-1/3
	Leptones	ν_e neutrino e	ν_μ neutrino μ	ν_τ neutrino τ	0
		e electrón	μ muón	τ tau	-1

Bosones			Masa
Espín 1	8 g	Interacción fuerte	0 MeV
	γ	Interacción electromagnética	0 MeV
	$W^\pm, Z$	Interacción débil	80,4 GeV, 90.2 GeV
Espín 0	ζ Higgs?	ζ Origen de las masas?	115 – 180 GeV

Cuadro 1.1: Partículas e Interacciones del ME.

asintótica de los quarks [28]. Por lo tanto, dicha interacción puede tratarse utilizando teoría de perturbaciones, en función de la constante de acoplamiento quark-gluón.

Sabemos, por otro lado, que a escalas de distancia del orden del tamaño del protón, los quarks se comportan como si sus masas fueran de unos 300 MeV, de modo que el Mecanismo de Higgs no nos “alcanza” para explicar el 99 % de la masa total de protón o un neutrón, que son las partículas que forman casi toda la masa de nuestro universo visible. En este caso, para bajos momentos trasferidos ($\leq 1\text{GeV}$) QCD es altamente no lineal y exhibe confinamiento: los quarks no pueden separarse indefinidamente, ya que la energía de interacción entre ellos aumenta con la distancia.

La mayor parte de la masa que podemos ver debe su origen a las interacciones fuertes de QCD. Esta teoría exhibe fenómenos interesantes como Ruptura Dinámica de Simetría Quiral, también conocida como Generación Dinámica de Masas (GDM) y el Confinamiento antes mencionado. Ambos fenómenos son responsables de la naturaleza del espectro hadrónico y son probablemente coincidentes, por lo que pueden explicar el 99 % de la masa de nuestro universo visible. El origen las masas de los hadrones se explica como un fenómeno no perturbativo, donde nuevamente la simetría quiral se rompe por la formación de un condensado, que surge de manera dinámica. Cuando se juntan los quarks de valencia confinados dentro de los hadrones, los quarks y gluones virtuales en sus respectivas nubes de color, debido a la intensidad de la interacción, comienzan a aparearse, formando el condensado compuesto $\langle \bar{q}q \rangle$, llamado condensado de quark quiral. Este condensado proporciona a los quarks de la valencia del nucleón de un medio denso, pegajoso, en el cual se propagan como si sus masas fueran de manera dinámica de alrededor de 300 MeV. Tres de estos quarks *up* y *down* forman la masa correspondiente a la del proton o neutrón [29].

GDM y el Confinamiento se estudian mediante las Ecuaciones de Schwinger-Dyson (ESD) [1, 30], como alternativa a la formulación de la teoría de campos en la red (Lattice) [31]. Estas ecuaciones son una torre infinita de relaciones entre las funciones de Green de una teoría de campos cuánticos dada, cuya naturaleza es no perturbativa, de modo que son un escenario ideal para este tipo de estudios. En esta tesis elegimos estudiar las ESD en un modelo simplificado que comparte con QCD los fenómenos de Confinamiento y GDM, la electrodinámica cuántica en el plano, o QED₃. Siendo que esta teoría adolece de

CAPÍTULO 1. MOTIVACIÓN

1.1. EL ORIGEN DE LAS MASAS

Fermiones	Masa
u up	3 MeV
d down	6 MeV
c charm	1,24 GeV
s strange	95 MeV
t top	172,5 GeV
b bottom	4,2 GeV
neutrino ν_e	< 2 MeV
e	0,5 MeV
neutrino ν_μ	$< 0,19$ MeV
μ	106 MeV
neutrino ν_τ	$< 18,2$ MeV
τ	1,78 GeV

Cuadro 1.2: Partículas y Masa del ME.

divergencias ultravioleta, los estudios sobre la estructura de sus ESD se vuelven mucho más claros.

Antes de comenzar propiamente con nuestro estudio, veremos algunos aspectos relacionados con la GDM y Confinamiento en el espectro hadrónico. Muchos métodos se han empleado durante años para describir la física del espectro de hadrones y de sus procesos de dispersión. Uno de los primeros modelos, el de Nambu–Jona-Lasinio (NJL), fue desarrollado para describir los nucleones en la era pre QCD; su uso como teoría de campo eficaz ha persistido desde su inicio en 1961 con muchas extensiones y progresos. Su historia se remonta al año 1961, en el que Y. Nambu y G. Jona-Lasinio publicaron dos trabajos titulados “Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity” [19]. Poco antes, Nambu y Chou habían sugerido la existencia de un límite en el cual el pión es un bosón de Goldstone (no masivo) asociado con la Ruptura Espontánea de Simetría Quiral. Lo que ellos pretendían era explicar la masa pequeña que distingue al pión de los otros hadrones. En los trabajos de 1961, Nambu y Jona-Lasinio partieron de un Lagrangiano con una interacción de dos cuerpos entre nucleones no masivos (los bloques básicos de materia conocidos hasta ese momento) que respeta la simetría quiral. La ruptura espontánea hace que la masa de los nucleones resulte finita, dando lugar a bosones de Goldstone que fueron identificados con el pión.

Por esa época QCD aún no había sido formulada. Cuando esta teoría finalmente fue concebida, a mediados de los años 70, el modelo de NJL empezaría ser abandonado, debido a su naturaleza no fundamental y a su no renormalizabilidad. Sin embargo, como consecuencia de las dificultades antes mencionadas para tratar QCD a bajas energías en la segunda parte de la década del 80 surgía la idea de reinterpretar el modelo NJL como un modelo para un sistema de quarks interactuantes [19]. Se supone que los grados de libertad de los gluones se pueden congelar dando lugar a interacciones efectivas entre los quarks.

En la siguiente sección expondremos las características generales el modelo de Nambu y Jona-Lasinio. Estudiaremos las ESD para el propagador del quark en este modelo, llamada

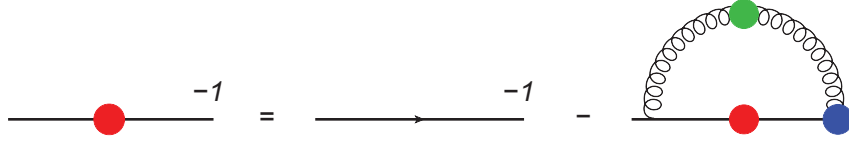


Figura 1.1: ESD para el propagador del quark.

“ecuación de brecha” o “ecuación de gap”. Comenzamos estudiando el propagador de quark y exploramos la solución correspondiente del modelo de NJL en varias dimensiones espacio-temporales.

1.2. Ecuación de brecha (gap) en QCD

Un método común de resolver las ESD es expandir cada Función de Green a un orden dado en el acoplamiento α . Aquí deseamos emprender los estudios en los cuales este acoplamiento no es pequeño, así que la teoría de perturbación es inaplicable. Introduciendo un ansatz para las funciones de Green, podemos colapsar la torre infinita de ESD y así solucionar para los propagadores de la teoría.

La ESD para el propagador quark, ecuación de brecha o gap ¹ de QCD que se muestra en la Figura 1.1, se expresa en espacio Euclidiano como

$$S(p)^{-1} = i\gamma \cdot p + m_d + \Sigma(p), \quad (1.1)$$

$$\Sigma(p) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}(k-p) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \frac{1}{i\gamma \cdot p A(p^2) + B(p^2)} \Gamma_\nu^a(k, p). \quad (1.2)$$

donde $\int^\Lambda$ representa una regularización invariante de Poincaré de la integral, con Λ la escala de masa de regularización. En esta expresión la masa desnuda m_d recibe correcciones de la autoenergía Σ , en la cual se integra el propagador del gluón, $D_{\mu\nu}(k, p)$ y el vértice vestido quark-gluón $\Gamma_\nu^a(k-p)$ y λ^a son las matrices de color de $SU(3)_c$.

La forma más general para el propagador del quark es (ver Capítulo 3)

$$S(p) = \frac{1}{i\gamma \cdot p A(p^2) + B(p^2)} = \frac{F(p^2)}{i\gamma \cdot p + M(p^2)} = -i\gamma \cdot p \sigma_v(p^2) + \sigma_s(p^2), \quad (1.3)$$

donde $F(p^2) = 1/A(p^2)$ es la renormalización de la función de onda y $M(p^2) = B(p^2)/A(p^2)$ es la función de masa, de tal manera que

$$\sigma_s(p^2) = \frac{F(p^2)M(p^2)}{p^2 + M^2(p^2)}, \quad \sigma_v(p^2) = \frac{F(p^2)}{p^2 + M^2(p^2)}. \quad (1.4)$$

Las ESD del propagador inverso del quark queda de la forma

$$S^{-1}(p) = i\gamma \cdot p + m_d + \frac{g^2 \lambda^a}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S(k) \Gamma_\nu^a(k, p) D_{\mu\nu}(k-p), \quad (1.5)$$

$D_{\mu\nu}$ y Γ_ν^a obedecen su propia ESD que los acopla a la torre infinita. Para proceder, plantearemos un ansatz para estas funciones, a fin de resolver la ecuación de brecha.

¹La derivación de ésta ecuación se presenta en el Capítulo 3.

1.3. Modelo de Nambu–Jona-Lasinio

El modelo de NJL consiste en el siguiente simple ansatz para el kernel del propagador del quark en la ecuación de brecha [32]

$$g^2 D_{\mu\nu}(k-p) = \delta_{\mu\nu} \frac{1}{m_G^2} \Theta(\Lambda^2 - k^2), \quad \Gamma_\nu^a(k, p) = \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2}, \quad (1.6)$$

donde m_G es un parámetro del modelo, que se puede interpretar como una masa escalar asociada con el comportamiento infrarrojo del propagador del gluón, es decir, una masa del gluón y Λ sirve como un corte ultravioleta. Este modelo es no renormalizable, pero nos servirá para ilustrar algunos aspectos de GDM y Confinamiento. Usamos el factor $\Sigma_a \lambda^a \lambda^a = 16/3I$, de modo que la ecuación del propagador la podemos escribir de la forma

$$\begin{aligned} i\gamma \cdot p A(p^2) + B(p^2) &= i\gamma \cdot p + m_d + \frac{g^2 \lambda^a}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu D_{\mu\nu}(k-p) S(k) \Gamma_\nu^a(k, p) \\ &= i\gamma \cdot p + m_d + \frac{g^2 \lambda^a \lambda^a}{4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \delta_{\mu\nu} \frac{1}{m_G^2} \Theta(\Lambda^2 - k^2) \\ &\quad \times \gamma_\mu \frac{1}{i\gamma \cdot k A(k^2) + B(k^2)} \gamma_\mu \\ &= i\gamma \cdot p + m_d + \frac{4}{3m_G^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \Theta(\Lambda^2 - k^2) \\ &\quad \times \frac{-i\gamma \cdot k A(k^2) + B(k^2)}{k^2 A^2(k^2) + B^2(k^2)} \gamma_\mu, \end{aligned} \quad (1.7)$$

donde m_d es la masa explícita del rompimiento de la simetría quiral. Si ahora multiplicamos por $(-i\gamma \cdot p)$

$$\begin{aligned} -i\gamma \cdot p \left[i\gamma \cdot p A(p^2) + B(p^2) \right] &= i\gamma \cdot p + m_d + \frac{4}{3m_G^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \Theta(\Lambda^2 - k^2) \\ &\quad \times \frac{-i\gamma \cdot k A(k^2) + B(k^2)}{k^2 A^2(k^2) + B^2(k^2)} \gamma_\mu, \end{aligned} \quad (1.8)$$

y tomamos la traza

$$\begin{aligned} Tr \left[p^2 A(p^2) - i\gamma \cdot p B(p^2) \right] &= p^2 - i\gamma \cdot p m_d - i\gamma \cdot p \frac{4}{3m_G^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \Theta(\Lambda^2 - k^2) \\ &\quad \times \frac{-i\gamma \cdot k A(k^2) + B(k^2)}{k^2 A^2(k^2) + B^2(k^2)} \gamma_\mu, \end{aligned} \quad (1.9)$$

de donde

$$p^2 A(p^2) = p^2 + \frac{8}{3m_G^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Theta(\Lambda^2 - k^2) \frac{p \cdot k A(k^2)}{k^2 A^2(k^2) + B^2(k^2)}. \quad (1.10)$$

Observamos que

$$\int d^4 k \, p \cdot k = 0 \implies A(p^2) = 1.$$

CAPÍTULO 1. MOTIVACIÓN

1.3. MODELO DE NAMBU-JONA-LASINIO

Esto se debe al hecho de que los modelos del tipo de Nambu-Jona-Lasinio son de interacción de cuatro fermiones en espacio de configuraciones, lo que exige la independencia de la interacción y por lo tanto también de la solución de la ecuación de brecha (gap) en los momentos. Si multiplicamos la ecuación (1.7) por la matriz identidad I y tomamos la traza

$$Tr \left[B(p^2) = m_d + \frac{4}{3m_G^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \Theta(\Lambda^2 - k^2) \frac{B(k^2) \gamma_\mu}{k^2 A^2(k^2) + B^2(k^2)} \right],$$

como $A(p^2) = 1$, $B(p) = M(p^2)$, que satisface

$$M(p^2) = m_d + \frac{16}{3m_G^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Theta(\Lambda^2 - k^2) \frac{M(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)}.$$

Notemos que $M(p^2) = cte = M$ no depende la integral de k^2 , lo que nos lleva a una ecuación integral no lineal para la masa constante:

$$M = m_d + \frac{16}{3m_G^2} \int^{\Lambda^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M}{k^2 + M^2}. \quad (1.11)$$

Ahora realizamos la integración angular. Para hacer esto, observamos que podemos escribir la integración sobre $d^4 k = dk k^3 \sin^2 \theta d\theta \sin(\phi) d\phi d\psi$. En esta expresión, $\theta, \phi = [0, \pi]$ y $\psi = [0, 2\pi]$. Por lo tanto, si el integrando no depende de los ángulos, podemos realizar la integración angular como sigue:

$$d^4 k = dq q^3 \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta (= \frac{\pi}{2}) \int_0^\phi \sin \phi d\phi (= 2) \int_0^{2\pi} d\psi (= 2\pi) = dq^2 q^2 \pi^2, \quad (1.12)$$

de donde

$$M = m_d + \frac{M}{3\pi^2} m_G^2 \int_0^{\Lambda^2} \frac{dk^2 k^2}{k^2 + M^2}. \quad (1.13)$$

Haciendo cambio de variable $k^2 = s$ tenemos

$$M = m_d + \frac{M}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^{\Lambda^2} \frac{ds s}{s + M^2}, \quad (1.14)$$

$$= m_d + \frac{M}{3\pi^2 m_G^2} \left[\Lambda^2 - M^2 \ln \left| 1 + \frac{\Lambda^2}{M^2} \right| \right]. \quad (1.15)$$

Si definimos la escala de masa en unidades de $\Lambda=1$, la ecuación de brecha se convierte en

$$M = m_d + \frac{M}{3\pi^2 m_G^2} \left[1 - M^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{M^2} \right| \right]. \quad (1.16)$$

En el límite quiral, tenemos que la masa desnuda del quark $m_d = 0$, por lo que

$$M = \frac{M}{3\pi^2 m_G^2} \left[1 - M^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{M^2} \right| \right]. \quad (1.17)$$

La solución trivial a esta ecuación es $M \equiv 0$, que está de acuerdo con la teoría de perturbaciones, que nos dice que uno comienza sin masa, se queda sin masa generada por las

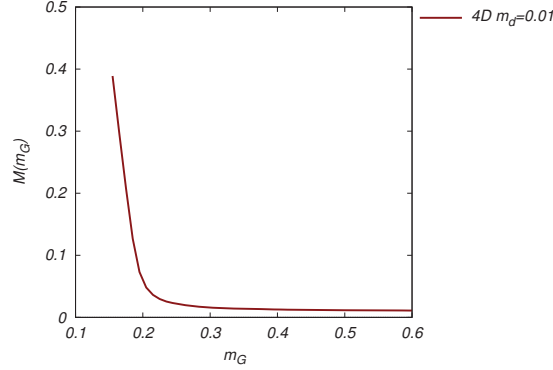


Figura 1.2: GDM para el modelo de Nambu-Jona-Lasinio en cuatro dimensiones

autointeracciones. Para encontrar $M \neq 0$ la solución de la ecuación de brecha es de la forma:

$$1 = \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \left[1 - M^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{M^2} \right| \right], \quad (1.18)$$

podemos ver que $1 - M^2 \ln |1 + 1/M^2|$ decrece monóticamente como función de M . Por tanto, existe una solución no trivial si

$$1 < \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \implies m_G^2 < \frac{1}{3\pi^2} \approx 0,033. \quad (1.19)$$

Para $\Lambda = 1\text{GeV}$ tenemos una masa de aproximada a $0,033\text{GeV}^2$.

Hemos visto hasta aquí que aunque comenzamos con fermiones sin masa, obtenemos masa a partir de la interacción entre los fermiones. Esto es el rompimiento dinámico de la simetría quiral. Podemos observar en la Figura (1.2) que existe una masa del gluón $m_G^c = 1/\sqrt{3\pi}$ donde la GDM de la ecuación (1.17) es imposible. Para $m_G > m_G^c$ la masa se aproxima a la masa de corriente del quark $M(m_G) \approx m_d$, donde la solución autoconsistente se aproxima a la teoría de perturbaciones. Una transición toma lugar para $m_G \simeq m_G^c$ y para $m_G < m_G^c$ la masa dinámica es mucho mayor que la masa desnuda, con M incrementa rápidamente cuando m_G disminuye.

Si uno trabaja dentro del dominio del modelo en el cual el Rompimiento Dinámico de la Simetría Quiral ocurre o no, el propagador del quark tiene siempre la forma

$$S^{NJL}(p) = \frac{1}{i\gamma \cdot p [A(p^2) = 1] + [B(p^2) = M]} = \frac{1}{i\gamma \cdot p + M} = \frac{-i\gamma \cdot p + M}{p^2 + M^2}, \quad (1.20)$$

donde tenemos que el polo Euclidiano del propagador es $p^2 + M^2 = 0$, con M constante.

La existencia de confinamiento se puede probar mediante la violación del Axioma de Osterwalder-Schrader de la reflexión de positividad [33]. Se expresa en términos de función

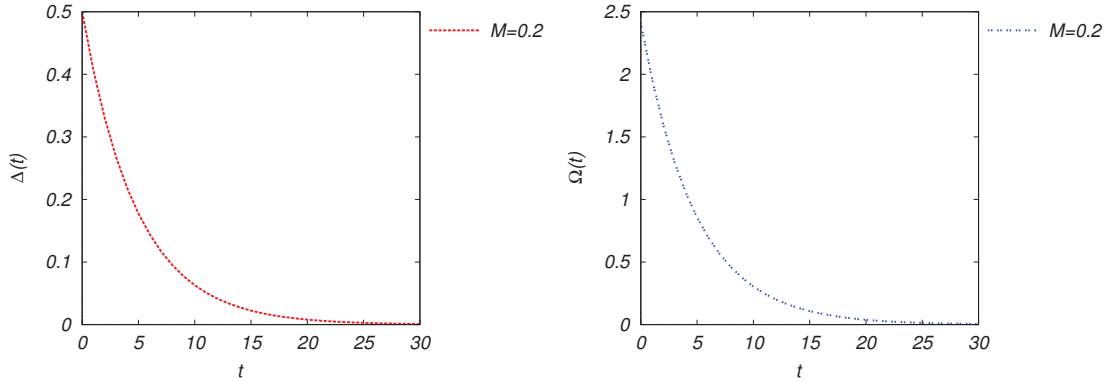


Figura 1.3: Función de Schwinger promediada espacialmente, con la parte escalar $\Delta(t)$ y vectorial $\Omega(t)$ del propagar del quark. Estas funciones son siempre positivas definidas, esto describe a los quarks desconfiados.

de Schwinger promediada espacialmente, definida por [34]

$$\begin{aligned}\Delta(t) &= \int d^3x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{i(tp_0 + x \cdot p)} \sigma_s(p^2) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dp \cos(tp) \sigma_s(p^2),\end{aligned}\tag{1.21}$$

debe ser positiva definida si se relaciona con un estado asintótico estable. En nuestro caso, construimos $\Delta(t)$ que podemos ver como un “detector” de quarks que indica si estos se encuentra dentro o fuera de un hadrón, es decir si se encuentran confinados o desconfiados. En este modelo encontramos que no hay confinamiento, pues el propagador corresponde al de una partícula libre, el cual la función de Schwinger es positiva definida escrita de la forma

$$\Delta(t) \simeq e^{-Mt}.\tag{1.22}$$

Graficamos $\Delta(t)$ para $M \simeq 0,2$, por lo tanto no encontrando confinamiento como vemos en la Figura 1.3. Un comportamiento oscilatorio revelaría confinamiento, lo que corresponde a dos masas complejas conjugadas $M = a \pm ib$, donde incluimos una masa imaginaria, para la cual

$$\Delta(t) \simeq e^{-at} \cos(bt + \delta).\tag{1.23}$$

Un análisis similar de la ecuación (1.21) puede ver las característica de $\sigma^V(p^2)$, como se hizo en la referencia [57]. Definimos la nueva funcion de Schwinger promediada espacialmente, ahora involucrando la parte vectorial del propagador del quark, de la forma

$$\Omega(t) = \int d^3x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{i(tp_0 + x \cdot p)} \sigma^V(p^2);\tag{1.24}$$

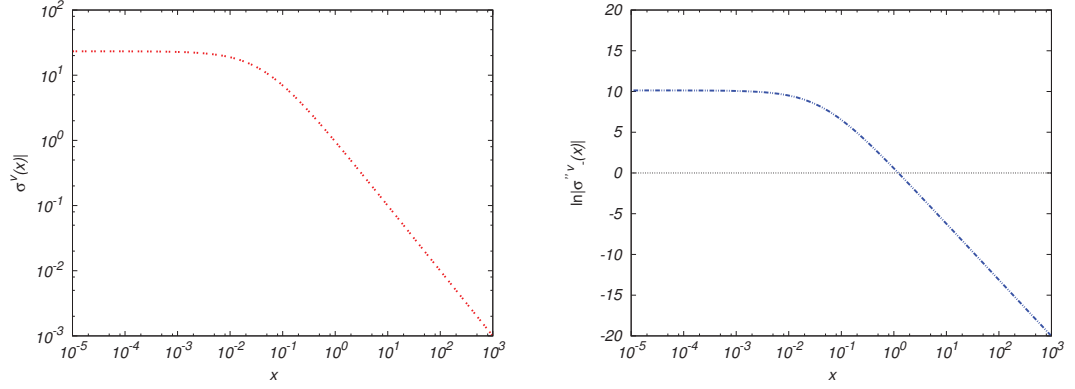


Figura 1.4: Parte vectorial del propagador del quark $\sigma^V(x)$ como función de $x = p^2$ y su segunda derivada, mostrando que su segunda derivada no cambia de signo, por tanto no exhibe confinamiento.

donde

$$\Omega(t) = \frac{1}{2M} e^{-Mt}, \quad (1.25)$$

observamos que la función $\Omega(t)$ es siempre positiva definida, Figura 1.3. Por lo tanto, ésta describe quarks deconfinados.

Una manera de ver el confinamiento es fijándonos en el propagador de quark. Cualquier función de Schwinger con un punto de inflexión en $p^2 > 0$ viola el Axioma de Osterwalder-Schrader de la reflexión de positividad [33]. En este caso usamos la parte vectorial del propagador $\sigma^V(p^2)$, y denotamos $x = p^2$; el parámetro de orden para el confinamiento se define como el punto de inflexión x^c de $\sigma^V(x)$,

$$\frac{d^2}{dx^2} \sigma^V(x) \Big|_{x=x^c} = 0. \quad (1.26)$$

Vemos que la función

$$\sigma^V(x) = \frac{1}{x + M^2}, \quad (1.27)$$

tiene su segunda derivada

$$\frac{d^2}{dx^2} \sigma^V(x) \Big|_{x=x^c} = \frac{2}{(x + M^2)^3} \neq 0, \quad (1.28)$$

que nunca se anula. Mostramos en la Figura 1.4, la parte vectorial del propagador del quark $\sigma^V(x)$ y su segunda derivada mostrando que no cambia de signo, por tanto no exhibe de confinamiento.

1.4. Nambu-Jona-Lasinio en Tres Dimensiones

Consideremos otra alternativa, un modelo en tres dimensiones. Introducimos un ansatz del kernel del propagador del gluón

$$e^2 \Delta_{\mu\nu}(k-p) = \delta_{\mu\nu} \frac{1}{m_G} \Theta(S-k), \quad \Gamma_\nu^a(k,p) = \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2}, \quad (1.29)$$

en tres dimensiones el propagador del fotón D se convierte en Δ . Hay una potencia menos de m_G porque e^2 tiene dimensiones de masa $[e^2] = 1$.

La ecuación del propagador la podemos escribir de la forma

$$\begin{aligned} i\gamma \cdot p A(p^2) + B(p^2) &= i\gamma \cdot p + m_d + \frac{e^2 \lambda^a}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \gamma_\mu \Delta_{\mu\nu}(k-p) S(k) \Gamma_\nu^a(k,p) \\ &= i\gamma \cdot p + m_d + \frac{e^2 \lambda^a \lambda^a}{4} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \delta_{\mu\nu} \frac{1}{m_G} \Theta(S-k) \\ &\quad \times \gamma_\mu \frac{1}{i\gamma \cdot k A(k^2) + B(k^2)} \gamma_\mu \\ &= i\gamma \cdot p + m_d + \frac{4}{3m_G} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \gamma_\mu \Theta(S-k) \\ &\quad \times \frac{-i\gamma \cdot k A(k^2) + B(k^2)}{k^2 A^2(k^2) + B^2(k^2)} \gamma_\mu. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Al igual que antes, multiplicamos por $(-i\gamma \cdot p)$ y sacamos la Traza tenemos $A(p^2) = 1$, $B(p^2) \rightarrow M(p^2)$. Ahora multiplicamos por la matriz identidad I y tomamos la traza

$$M(p^2) = m_d + \frac{4}{m_G} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Theta(S-k) \frac{M(k^2)}{l^2 + M^2(k^2)}$$

Notemos que $M(p^2) = cte = M$ no depende la integral de p^2

$$M = m_d + \frac{4}{m_G} \int^S \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{M}{k^2 + M^2}, \quad (1.31)$$

también podemos observar que la función de masa es similar en 4 dimensiones, pero integramos sólo sobre $d^3 k$. Ahora realizamos la integración angular. Para hacer esto, observemos que podemos escribir la integración sobre $d^3 k = dk k^2 \sin\theta d\theta d\psi$. En esta expresión, $\theta = [0, \pi]$ y $\psi = [0, 2\pi]$. Por lo tanto, si el integrando no depende de los ángulos, podemos realizar la integración angular como sigue:

$$\begin{aligned} M &= m_d + \frac{2M}{\pi^2 m_G} \int_0^S \frac{dk k^2}{k^2 + M^2} \\ &= m_d + \frac{2M}{\pi^2 m_G} (S - M \arctan(S/M)), \end{aligned} \quad (1.32)$$

En el límite quiral, masa desnuda $m_d = 0$, tenemos

$$M = \frac{2M}{\pi^2 m_G} (S - M \arctan(S/M)), \quad (1.33)$$

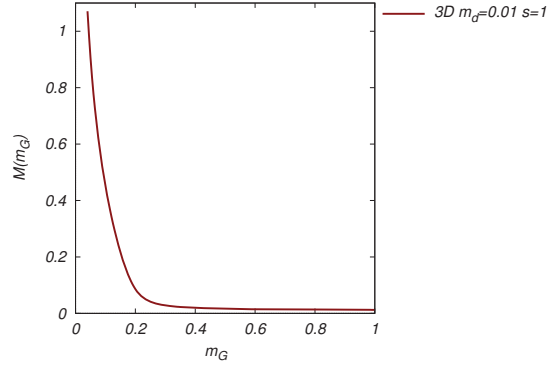


Figura 1.5: GDM para el modelo de Nambu-Jona-Lasinio en tres dimensiones

en el cual una solución trivial es cuando $M = 0$. Para $M \neq 0$ tenemos

$$1 = \frac{2}{\pi^2 m_G} (S - M \arctan(S/M)),$$

donde $(S - M \arctan(S/M))$ decrece monotónicamente como función de M . Tomamos el corte $S = 1$, Por lo tanto, para tener solución no trivial tenemos que

$$1 < \frac{2}{\pi^2 m_G},$$

por lo que tenemos que la masa del gluon es $m_G < 2/\pi^2 \approx 0,2026$, en la cual observamos en la Figura 1.5 hay un punto crítico $m_G^c = 2/\pi^2$ para la ecuación (1.33) y la generación dinámica de masas es imposible. Para $m_G > m_G^c$ la masa de gluón se aproxima a la masa de corriente $M(m_G) \approx m_0$. Para $m_G \approx m_G^c$ y $m_G < m_G^c$ la masa M crece rápidamente conforme m_G disminuye, donde la transición de fase ocurre.

Para tres dimensiones tenemos el propagador de quark

$$S^{NJL}(p) = \frac{1}{i\gamma \cdot p [A(p^2) = 1] + [B(p^2) = M]} = \frac{1}{i\gamma \cdot p + M} = \frac{-i\gamma \cdot p + M}{p^2 + M^2} \quad (1.34)$$

donde tenemos el polo del propagador Euclideo $p^2 + M^2 = 0$, en este modelo NJL no exhibe confinamiento.

En este caso usamos la función de Schwinger $\Delta(t)$ en tres dimensiones.

$$\Delta(t) = \int d^2x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i(tp_0 + x \cdot p)} \sigma_s(p^2), \quad (1.35)$$

que también se comporta de la forma $\Delta(t) = e^{-mt}$, confirmando que no tenemos confinamiento. Graficamos el logaritmo del valor absoluto de esta función para $m = 0,6$ en la Figura 1.6.

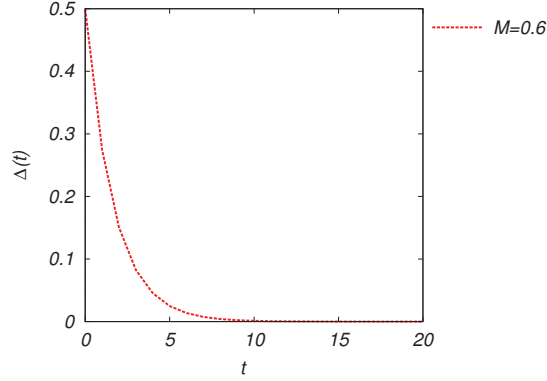


Figura 1.6: Función de Schwinger promediada espacilmente, con la parte escalar del propagador del quark en tres dimensiones

1.5. Confinamiento en el modelo NJL

Para introducir el confinamiento en el modelo NJL, en vez del corte de regularización para la integral (1.14), que es cuadráticamente divergente, utilizamos una regularización apropiada. Observamos que [35]

$$\int_a^b dx e^{-x(s+M)} = \frac{e^{-a(s+M)} - e^{-b(s+M)}}{s+M}.$$

Ahora tomamos de la ecuación (1.12), $\Lambda \rightarrow \infty$ y reemplazamos

$$\frac{1}{s+M^2} \longrightarrow \int_{r_{UV}^2=1/\Lambda_{UV}^2}^{r_{IR}^2=1/\Lambda_{IR}^2} d\tau e^{-\tau(s+M^2)} = \frac{Z(s)}{s+M^2}, \quad (1.36)$$

con

$$Z(s) = e^{-(s+M^2)r_{UV}^2} - e^{-(s+M^2)r_{IR}^2}, \quad (1.37)$$

por lo que $r_{UV} = 1/\Lambda_{UV}$ y $r_{IR} = 1/\Lambda_{IR}$, son respectivamente la regularización infrarroja y ultravioleta.

Este esquema de la regularización tiene consecuencias interesantes. Cuando $s+M^2 = 0$, tenemos $Z = 0$ [36]. Esto es como “matar” el polo en el propagador del fermión, lo que nos lleva a confinamiento. Por lo tanto, el modelo que corresponde a este esquema de la regularización es confinando. Con esta regularización, por lo tanto, $Z = 1$ debe ser entendido como el comportamiento de esta función antes de la regularización; es decir, el comportamiento que se insertará en un diagrama de Feynman antes de su regularización. Ahora sustituimos la ecuación (1.36) en la ecuación (1.14); tenemos

$$M = m_d + \frac{M}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s+M^2} [e^{-(s+M^2)r_{UV}^2} - e^{-(s+M^2)r_{IR}^2}]. \quad (1.38)$$

Haciendo cambio de variables $s + M^2 = s'$, tenemos

$$\int_0^\infty \frac{ds s}{s + M^2} [e^{-(s+M)r_{UV}^2} - e^{-(s+M)r_{IR}^2}] \quad (1.39)$$

$$= \int_{M^2}^\infty ds' [e^{-s'r_{UV}^2} - e^{-s'r_{IR}^2}] - M^2 \int_{M^2}^\infty \frac{s'}{ds'} e^{-s'r_{UV}^2} + M^2 \int_{M^2}^\infty \frac{s'}{ds'} e^{-s'r_{IR}^2}. \quad (1.40)$$

Haciendo otro cambio de variables $s'r_{UV}^2 = t$, donde denotamos la integral $\rho = C(M^2; r_{IR}^2; r_{UV}^2)$, tenemos entonces

$$\begin{aligned} C(M^2; r_{IR}^2; r_{UV}^2) &= -M^2 \Gamma(0, M^2 r_{UV}^2) + M^2 \Gamma(0, M^2 r_{IR}^2) \\ &\quad + \frac{1}{r_{UV}^2} e^{-M^2 r_{UV}^2} - \frac{1}{r_{IR}^2} e^{-M^2 r_{IR}^2}, \end{aligned} \quad (1.41)$$

donde

$$\Gamma(\alpha, y) = \int_y^\infty dt t^{\alpha-1} e^{-t},$$

es la función Gamma incompleta. Por lo tanto, tenemos que la ecuación de brecha es de la forma

$$M = m_d + \frac{M}{3\pi^2 m_G^2} C(M^2; r_{IR}^2; r_{UV}^2). \quad (1.42)$$

Con la integración parcial de los primeros dos términos, podemos escribir

$$C(M^2; r_{IR}^2; r_{UV}^2) = M^2 \Gamma(-1, M^2 r_{UV}^2) - M^2 \Gamma(-1, M^2 r_{IR}^2). \quad (1.43)$$

En el límite quiral, $m_d = 0$, por lo que la ecuación de brecha se convierte en

$$M = \frac{M}{3\pi^2 m_G^2} C(M^2; r_{IR}^2; r_{UV}^2). \quad (1.44)$$

Una solución trivial es cuando $M = 0$, donde vemos, como pasa en la teoría de perturbaciones, que comenzamos sin masa y terminamos sin masa. Para $M \neq 0$ tenemos

$$1 = \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} C(M^2; r_{IR}^2; r_{UV}^2). \quad (1.45)$$

Como $C(M^2; r_{IR}^2; r_{UV}^2)$ decrece monotónicamente como función de M , para los cortes infrarrojo y ultravioletas $\Lambda_{UV} = 0,823$ y $\Lambda_{IR} = 0,24$ [36] de donde

$$1 < \frac{1}{3\pi^2 m_G^2}, \quad (1.46)$$

esto implica $m_G^2 < 1/3\pi^2$. Vemos en la Figura 1.7 que para $m_G^c = 1/3\pi^2$ para la ecuación (1.32) la GDM es imposible. Para el caso $m_G^c < m_G$ la masa del quark se aproxima a la masa desnuda tanto para $m_d = 0,01$ y $m_d = 0$, $M(m_G) = m_d$. Tenemos una transición de fase para el caso $m_G^c > m_G$ y $m_G^c \approx m_G$ donde la masa crece M muy rápido cuando m_G disminuye.

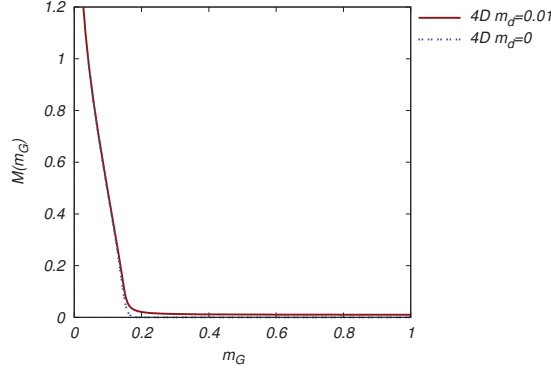


Figura 1.7: GDM para el modelo de Nambu-Jona-Lasinio en cuatro dimensiones con confinamiento

1.5.1. NJL con confinamiento en Tres Dimensiones

Para el caso de tres dimensiones hacemos, el corte de regularización de la ecuación (1.31), como lo hicimos en cuatro dimensiones. Ahora tomamos $S \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{l^2 + M^2} \rightarrow \int_{r_{UV}=1/S_{UV}}^{r_{IR}=1/S_{IR}} d\tau e^{-\tau(l^2+M^2)} = \frac{\Sigma(k)}{l^2 + M^2}, \quad (1.47)$$

donde

$$\Sigma(l) = e^{-(l^2+M^2)r_{UV}} - e^{-(l^2+M^2)r_{IR}}, \quad (1.48)$$

en la cual $r_{UV} = 1/S_{UV}$ y $r_{IR} = 1/S_{IR}$, son respectivamente la regularización infrarroja y ultravioleta.

Observemos que al igual que en 4 dimensiones, para $K^2 + M^2 = 0$, tenemos $Z = 0$. Esto es como matar el polo en el propagador del fermión que nos lleva a confinamiento. Por lo tanto, el modelo que corresponde a este esquema de la regularización está confinando. Ahora sustituimos de la ecuación (1.47) en ecuación (1.31), tenemos

$$M = m_d + \frac{2M}{\pi^2 m_G} \int_0^\infty \frac{dl l^2}{l^2 + M^2} [e^{-(l^2+M^2)r_{UV}} - e^{-(l^2+M^2)r_{IR}}], \quad (1.49)$$

de tal manera que

$$\begin{aligned} M = & m_d + \frac{M}{\pi^{3/2} m_G} \left(\frac{e^{-M^2 r_{UV}}}{\sqrt{r_{UV}}} - \frac{e^{-M^2 r_{IR}}}{\sqrt{r_{IR}}} \right. \\ & \left. - M \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{r_{UV}} M) + M \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{r_{IR}} M) \right) \end{aligned} \quad (1.50)$$

con la función de error $\operatorname{erf}(x)$ es dada por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x du e^{-u^2}.$$

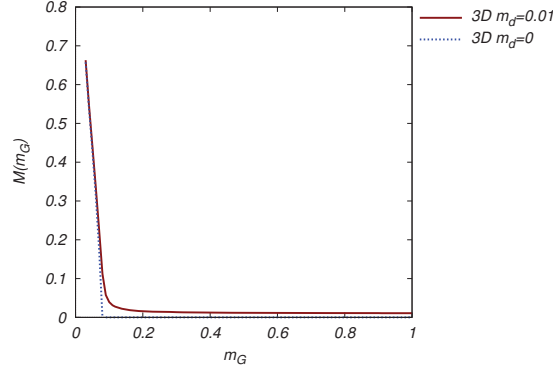


Figura 1.8: GDM para el modelo de Nambu-Jona-Lasinio en tres dimensiones con confinamiento

En el límite quiral, $m_d = 0$, por lo cual la ecuación de brecha se convierte

$$M = \frac{M}{\pi^{3/2}m_G} \left(\frac{e^{-M^2 r_{UV}}}{\sqrt{r_{UV}}} - \frac{e^{-M^2 r_{IR}}}{\sqrt{r_{IR}}} - M\sqrt{\pi}\text{erf}(\sqrt{r_{UV}}M) + M\sqrt{\pi}\text{erf}(\sqrt{r_{IR}}M) \right). \quad (1.51)$$

Como vimos antes una solución trivial es cuando $M = 0$, donde vemos como pasa en la teoría de perturbaciones que comenzamos sin masa y terminamos sin masa. Para $M \neq 0$ tenemos

$$1 = \frac{1}{\pi^{3/2}m_G} \left(\frac{e^{-M^2 r_{UV}}}{\sqrt{r_{UV}}} - \frac{e^{-M^2 r_{IR}}}{\sqrt{r_{IR}}} - M\sqrt{\pi}\text{erf}(\sqrt{r_{UV}}M) + M\sqrt{\pi}\text{erf}(\sqrt{r_{IR}}M) \right), \quad (1.52)$$

donde

$$\left(\frac{e^{-M^2 r_{UV}}}{\sqrt{r_{UV}}} - \frac{e^{-M^2 r_{IR}}}{\sqrt{r_{IR}}} - M\sqrt{\pi}\text{erf}(\sqrt{r_{UV}}M) + M\sqrt{\pi}\text{erf}(\sqrt{r_{IR}}M) \right),$$

decrece monótonicamente como función de M . Para los cortes infrarrojo y ultravioletas $S_{UV} = 0,823$ y $S_{IR} = 0,24$ por lo que

$$1 < \frac{1}{\pi^{3/2}m_G}. \quad (1.53)$$

Así tenemos $m_G^2 < 1/\pi^{3/2} \approx 0,1795$. Vemos en la Figura 1.8 como en el caso de cuatro dimensiones para $m_G^c = 1/\pi^{3/2}$ para la ecuación (1.51) la GDM. En este caso $m_G^c < m_G$ la masa del quark se aproxima a la masa desnuda tanto para $m_d = 0,01$ y $m_d = 0$, $M(m_G) = m_d$. Por lo tanto tenemos una transición de fase para el caso $m_G^c > m_G$ y $m_G^c \approx m_G$.

En los próximos capítulos nos proponemos estudiar la GDM y confinamiento en QED₃ mediante las ESD. Consideramos efectos de polarización en el vacío, en la aproximación

CAPÍTULO 1. MOTIVACIÓN

1.5. COFINAMIENTO EN EL MODELO NJL

$1/N$ donde incluimos N familias de fermiones, además un término de Chern-Simons, que induce una masa topológica al fotón. Estudiando cómo se modifica la Generación Dinámica de masas por el término de Chern-Simons comparando con el caso de QED₃ ordinario. Analizamos numéricamente las soluciones a las ESD para el propagador del fermión con un parámetro de norma fijo, correspondiente a la norma de Landau con un acoplamiento constante, variando la masa topológica para el fotón. Para este fin, estudiamos las simetrías del Lagrangiano de QED₃ en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Electrodinámica Cuántica en el Plano QED_3

2.1. QED Ordinaria

En este capítulo revisamos las propiedades básicas de las transformaciones de quiralidad y paridad, inversión temporal y conjugación de carga en la electrodinámica cuántica ordinaria. Estudiamos dichas transformaciones en (2+1) dimensiones y observamos que los Lagrangianos planares se comportan de una manera peculiar. Además, estudiamos el potencial electrostático que nos describe el confinamiento.

2.1.1. Simetrías Locales y Globales

Simetrías Globales: Los parámetros de la transformación no dependen de las coordenadas de espacio-tiempo. Algunos ejemplos son simetría de isospin $SU(2)$, simetría de sabor $SU(3)$, simetría bariónica $U(1)_B$, simetría leptónica $U(1)_L$.

Simetrías Locales (Norma): Los parámetros de la transformación dependen de las coordenadas de espacio-tiempo. Algunos ejemplos son simetría electromagnética $U(1)_{em}$, simetría de isospin débil $SU(2)_L$, simetría de hipercarga débil $U(1)_Y$, simetría de color $SU(3)_C$.

Si el Hamiltoniano (o el Lagrangiano) de un sistema físico posee una simetría global, deben existir dos cantidades conservadas: una corriente y su carga asociada.

La Electrodinámica Cuántica es una de las más importantes teorías de norma en Física de Partículas y ha sido comprobada con un alto nivel de precisión. A partir del campo libre de Dirac ψ se consideran varios fermiones de espín 1/2, cuyo Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi, \quad (2.1)$$

con $\cancel{\partial} \equiv \partial_\mu \gamma^\mu$, al cual corresponde como ecuación de movimiento la ecuación de Dirac, partiendo de la densidad Lagrangiana que describe a los fermiones sin interacción,

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0. \quad (2.2)$$

CAPÍTULO 2. ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA EN EL PLANO QED₃

2.1. QED ORDINARIA

Este Lagrangiano es invariante bajo las transformaciones globales de $U(1)$

$$\begin{aligned}\psi(x) &\longrightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\longrightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{-i\alpha}\bar{\psi}(x),\end{aligned}\tag{2.3}$$

donde α es una constante. Si ahora se hace que $\alpha = \alpha(x)$ dependa del espacio-tiempo la transformación será local. Solamente el término de masa en el Lagrangiano es invariante bajo la transformación, mientras que en la derivada

$$\partial_\mu \psi \longrightarrow e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \psi + ie^{i\alpha(x)} \psi \partial_\mu \alpha(x),\tag{2.4}$$

el término $\partial_\mu \alpha(x)$ rompe la invarianza del Lagrangiano.

Para imponer la invarianza del Lagrangiano bajo la transformación de fase local, se debe buscar una derivada modificada, D_μ , que transforme covariantemente bajo la misma fase que ψ . Para ello, se modifica el operador derivada añadiéndole la suma de los generadores del grupo por unos campos de norma, tantos como generadores, multiplicados por una constante de acoplamiento, que es el único parámetro de la teoría. Estos campos de norma se transforman bajo transformaciones de norma locales de forma que hacen que la densidad del Lagrangiano modificado sea invariante bajo transformaciones de norma locales. Por otro lado, para que la densidad Lagrangiana modificada sea invariante bajo a transformaciones de Lorentz, los campos de norma deben comportarse como el operador derivada, por lo que son cuadvectores,

$$D_\mu \psi \longrightarrow e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi.\tag{2.5}$$

Para formar la derivada covariante D_μ , se debe introducir el campo vectorial A_μ con propiedades de transformación tales que el término no deseado se cancele. Esto puede conseguirse por construcción

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu,\tag{2.6}$$

y a su vez se requiere que A_μ se transforme como

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x).\tag{2.7}$$

La invarianza del Lagrangiano se logra entonces reemplazando ∂_μ por D_μ

$$\mathfrak{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu.\tag{2.8}$$

Así para conseguir la invarianza bajo la transformación de de fase local, se debe introducir un campo vectorial A_μ (fotón) llamado campo de norma, el cual se acopla con ψ (los electrones). El nuevo término de interacción puede escribirse como $-j_\mu A_\mu$ en donde $j_\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ es la densidad de corriente. Si se considera éste nuevo campo como el campo físico del fotón, se debe agregar al Lagrangiano el término correspondiente a su energía cinética análogo al término $1/2(\partial_\mu \phi)^2$.

Dado que el término cinético debe ser invariante bajo la transformación de norma, éste puede contener el tensor electromagnético

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.\tag{2.9}$$

CAPÍTULO 2. ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA EN EL PLANO QED₃

2.2. LAGRANGIANO DE DIRAC: REPRESENTACIÓN IRREDUCIBLE

Grupo de Norma	Teoría
$U(1)_{em}$	Electrodinámica Cuántica
$SU(3)_C$	Cromodinámica Cuántica
$SU(2)_L \otimes U(1)_Y$	Electrodébil
$SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$	Modelo Estándar

Cuadro 2.1: Algunas Teorías de Norma

Así, el Lagrangiano para QED es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{FA} + \mathcal{L}_{Maxwell},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

donde $\mathcal{L}_F$ es el Lagrangiano de los fermiones sin interacción, $\mathcal{L}_{FA}$ describe la interacción de los bosones de norma con los fermiones, $\mathcal{L}_{Maxwell}$ es el Lagrangiano de los bosones de norma.

Debe notarse además que un término de masa de la forma $(1/2)m^2 A_\mu A^\mu$ está prohibido por la invarianza de norma. La partícula de norma, el fotón, no debe tener masa. Vemos entonces que el Lagrangiano de Maxwell posee una simetría de norma local, bajo la transformación (2.7).

El Principio de Norma es un aspecto muy importante en la física de partículas y ha jugado un papel crucial en la construcción del Modelo Estándar. Las teorías cuánticas de campos basadas en la existencia de algunas simetrías de norma se denominan Teorías de Norma, ver (Cuadro 2.1).

Las teorías de norma locales forman una clase muy especial entre las teoría cuánticas de campos, que permiten obtener la forma del Lagrangiano que describe la interacción entre fermiones, a partir de sus propiedades de simetría.

2.2. Lagrangiano de Dirac: Representación Irreducible

El Lagrangiano de Dirac (2+1) dimensiones el cual describe la interacción de una partícula de espín 1/2 con el campo electromagnético, tiene la siguiente forma

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi, \tag{2.11}$$

y sólo involucra tres matrices γ . Además, para satisfacer la forma en que está factorizada la ecuación de Dirac, nos basta utilizar matrices 2×2 , así que podemos construir esta representación utilizando las matrices de Pauli. Si hacemos esto, encontramos que existen dos representaciones inequivalentes de las matrices γ . Podemos escogerlas de la siguiente forma

$$\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = i\sigma_1, \quad \gamma^2 = i\sigma_2, \tag{2.12}$$

$$\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = i\sigma_1, \quad \gamma^2 = -i\sigma_2, \tag{2.13}$$

donde podemos tener dos especies de fermiones descritos en cada representación. Llamemos ψ_A al campo fermiónico de la primera representación y ψ_B al de la segunda. De esta

CAPÍTULO 2. ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA EN EL PLANO QED₃

2.3. LAGRANGIANO DE DIRAC: REPRESENTACIÓN REDUCIBLE

manera, si consideramos los campos de ambas representaciones simultáneamente, vemos que el Lagrangiano extendido es

$$\mathcal{L}_D = \psi_A(i\cancel{D} - m)\psi_A + \psi_B(i\cancel{D} + m)\psi_B. \quad (2.14)$$

Las simetrías para este Lagrangiano son [39, 40].

Simetría Quiral: Existen dos tipos de Transformaciones Quirales

$$\begin{aligned} \psi_A &\rightarrow \psi_A + \alpha\psi_B & \psi_B &\rightarrow \psi_B - \alpha\psi_A \\ \psi_A &\rightarrow \psi_A + i\alpha\psi_B & \psi_B &\rightarrow \psi_B - i\alpha\psi_A, \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde las corrientes quirales que se conservan son

$$j_1^\mu = (\bar{\psi}_A\gamma^\mu\psi_B - \bar{\psi}_B\gamma^\mu\psi_A), \quad j_2^\mu = (\bar{\psi}_A\gamma^\mu\psi_B + \bar{\psi}_B\gamma^\mu\psi_A). \quad (2.16)$$

Paridad $\mathcal{P}$: Bajo una transformación de Paridad, que en (2+1)-dimensiones equivale a la inversión de una coordenada espacial, tenemos que

$$(\psi_A)^\mathcal{P} \rightarrow -ie^{i\phi_1}\gamma^1\psi_B, \quad (\psi_B)^\mathcal{P} \rightarrow -ie^{i\phi_2}\gamma^1\psi_A, \quad (2.17)$$

así que esta transformación mezcla los espinores de ambas representaciones, dejando al Lagrangiano invariante bajo paridad $\mathcal{P}$.

Conjugación de Carga $\mathcal{C}$: Bajo conjugación de carga,

$$(\psi_A)^\mathcal{C} = e^{i\psi_1}\gamma^2(\vec{\psi}_A)^T, \quad (\psi_B)^\mathcal{C} = e^{i\psi_2}\gamma^2(\vec{\psi}_B)^T, \quad (2.18)$$

así que éste Lagrangiano es invariante bajo ésta operación.

Ahora consideremos otra representación reducible para las matrices de Dirac considerando espinores de cuatro componentes.

2.3. Lagrangiano de Dirac: Representación Reducible

Nosotros trabajamos con una representación reducible (4×4), de las matrices de Dirac. Definimos dos tipos de transformaciones quirales

$$\psi \rightarrow e^{i\sigma\gamma^3}\psi, \quad \psi \rightarrow e^{i\beta\gamma^5}\psi, \quad \sigma, \beta = \text{cte.} \quad (2.19)$$

Existen dos tipos de términos de masas para fermiones

$$m_e\bar{\psi}\psi, \quad m_o\bar{\psi}\tau\psi, \quad (2.20)$$

con $\tau = 1/2[\gamma_3, \gamma_5] = \text{diag}(I, -I)$. El primer término corresponde al término de masa de Dirac usual, mientras el segundo recibe el nombre de término de masa de Haldane [38]. Así, el Lagrangiano reducible es

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{D} + e\cancel{A} - m_e - \tau m_o)\psi, \quad (2.21)$$

con las matrices de Dirac

$$\begin{aligned}\gamma_0 &\equiv \begin{pmatrix} -i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix}, & \gamma_1 &\equiv \begin{pmatrix} i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix}, \\ \gamma_2 &\equiv \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix}, & \gamma_3 &\equiv \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

y

$$\gamma_5 \equiv \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Las simetrías de este Lagrangiano son [39, 40].

Simetría Quiral: El término ordinario $m_e\bar{\psi}\psi$ no es invariante bajo transformaciones quirales, pero $m_o\bar{\psi}\tau\psi$ si lo es.

Paridad $\mathcal{P}$: Podemos representar la transformación de paridad, $\mathcal{P} = -i\gamma_5\gamma_1$, así que el término ordinario $m_e\bar{\psi}\psi$ es invariante bajo paridad pero $m_o\bar{\psi}\tau\psi$ viola esta simetría.

Conjugación de Carga $\mathcal{C}$: Ambos términos son invariantes bajo la operación de conjugación de carga.

Inversión Temporal $\mathcal{T}$: El término ordinario $m_e\bar{\psi}\psi$ es invariante bajo Inversión Temporal $\mathcal{T}$ pero $m_o\bar{\psi}\tau\psi$ no lo es.

Las simetrías de los términos de masas de los Lagrangianos de Dirac reducibles e irreducibles en algunos casos modifican al Lagrangiano de Maxwell en el plano pues inducen el término de masa Chern-Simons como veremos.

2.4. Lagrangiano de Maxwell

Como hemos visto, en el Lagrangiano (2+1) dimensiones existen términos de masas que violan paridad e inversión temporal. Dichos términos inducen radiativamente en el Lagrangiano de un término, llamado Chern-Simons, que veremos a continuación.

2.4.1. Lagrangiano de Chern-Simons

Cuando acoplamos electrones con fotones en el plano, debido al término de masa de Haldane, por el teorema de Coleman-Hill [41] se observa que el Lagrangiano de Maxwell se modifica, generando un término de Chern-Simons

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\theta}{4}\epsilon_{\mu\nu\lambda}A^\mu F^{\nu\lambda}. \quad (2.23)$$

Bajo transformaciones de norma $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\Lambda$, éste Lagrangiano se modifica como

$$\delta\mathcal{L}_{CS} = \frac{\theta}{4}\epsilon_{\mu\nu\lambda}\partial\Lambda F^{\nu\lambda}, \quad (2.24)$$

por lo que no es el Lagrangiano, sino la acción correspondiente, la que es invariante bajo estas transformaciones. El parámetro θ que está relacionado con la conductividad de Hall [?], induce una masa topológica para los fotones (tiene unidades de masa), de modo que cuando consideramos los fotones de Maxwell-Chern-Simons, i.e., fotones provenientes

CAPÍTULO 2. ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA EN EL PLANO QED₃

2.5. POTENCIAL ELECTROSTÁTICO Y CONFINAMIENTO

del Lagrangiano $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{Maxwell} + \mathfrak{L}_{CS}$, estos son masivos, de masa θ . De este modo, el término de Chern-Simons actúa como un término de masa invariante de norma para el fotón, [42]. Podemos relacionar este término con fenómenos de la Materia Condensada como la Superconductividad de Alta Temperatura, pasando por el efecto Hall Cuántico, anyones y recientemente con el estudio del grafeno [14, 15, 16]. Las simetrías correspondientes a este Lagrangiano son:

Paridad $\mathcal{P}$: El término de Chern-Simons Viola Paridad.

Inversión Temporal $\mathcal{T}$: El término de Chern-Simons viola Inversión Temporal.

Conjugación de Carga $\mathcal{C}$: Es invariante bajo conjugación de Carga.

$\mathcal{CPT}$: El término de Chern-Simons es invariante bajo $\mathcal{CP}$ y $\mathcal{T}$; por lo tanto bajo $\mathcal{CPT}$.

2.4.2. Lagrangiano de QED₃ Reducible

El Lagrangiano de QED₃ para este caso, incluyendo el término de Chern-Simons y la masa m_o para los fermiones es

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{QED3} = & \psi(i\cancel{\partial} + e\cancel{A} - m_e - \tau m_o) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2 + \frac{\theta}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho}A_\mu F_{\nu\rho}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Este Lagrangiano se ha empleado para describir el efecto Hall cuántico a campo cero para los fermiones masivos de Dirac [10]. Además m_o y el término de Chern-Simons se induce mutuamente. Resta sólo estudiar el potencial electrostático de QED₃

2.5. Potencial Electrostático y Confinamiento

El potencial entre dos cargas estáticas cuando $r \rightarrow \infty$ es de la forma [43]

$$V(r) = \frac{e^2}{8\pi(1 + \Pi(0))} \ln(e^2 r) + cte + 0(1/r), \quad (2.26)$$

donde $\Pi(0)$ es el escalar de polarización del vacío a momento cero.

En la aproximación apagada, que corresponde a que no existe la contribución de loops de fermiones en la polarización del vacío $\Pi(0) = 0$. En este caso el potencial se comporta como un logaritmo. Aquí se necesita energía infinita para poder separar dichas cargas; esto nos dice que estas partículas permanecen siempre juntas, es decir, confinadas lo que se traduce en la imposibilidad de encontrar estados de quarks libres. El escalar polarización masivo a un lazo es de la forma

$$\Pi(k) = \frac{e^2}{4\pi^2} \left[2m + \frac{k^2 - m^2}{k} \tan^{-1} \left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + 4m^2}} \right) \right]. \quad (2.27)$$

Cuando incluimos N familias de fermiones no masivo, el escalar de la polarización es

$$\Pi(k) = \frac{\bar{\alpha}}{k},$$

CAPÍTULO 2. ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA EN EL PLANO QED₃

2.5. POTENCIAL ELECTROSTÁTICO Y CONFINAMIENTO

donde $\tilde{\alpha} = Ne^2/8$. Al orden dominante de la aproximación $1/N$, la contribución de fermiones no masivos elimina el confinamiento. En este caso podemos ver que

$$V(r) \sim \ln(\tilde{\alpha}r), \quad (2.28)$$

para r pequeño y

$$V(r) \sim \frac{-e^2}{2\pi} \frac{1}{\tilde{\alpha}r}, \quad (2.29)$$

para r grande. Observamos que en esta teoría es no confinada; no nos cuesta energía energía producir fermiones no masivos que a su vez producen un apantallamiento efectivo suficiente para poder separar las cargas. El confinamiento tiene lugar si los fermiones en los loops adquieren masa de manera dinámica o explícitamente; en este caso $\Pi(0) < \infty$ se restaura el confinamiento.

En el siguiente capítulo veremos las ecuaciones de Schwinger- Dyson y aprenderemos las características generales del fenómeno de la Generación Dinámica de Masas y confinamiento a través de las soluciones a estas ecuaciones.

CAPÍTULO 2. ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA EN EL PLANO QED₃
2.5. POTENCIAL ELECTROSTÁTICO Y CONFINAMIENTO

Capítulo 3

GDM y Confinamiento en QED₃

En esta capítulo estudiamos los fenómenos no perturbativos de la Generación Dinámica de Masas (GDM) y Confinamiento mediante las Ecuaciones de Schwinger-Dyson (ESD) [30] en la aproximación “apagada”, decir, despreciando los loops de fermiones, en la Electrodinámica Cuántica en el Plano, QED₃. Consideramos efectos de polarización del vacío en la aproximación $1/N$ en la norma de Landau $\xi = 0$. Traducimos nuestros resultados de una norma a otra por medio de las Transformaciones Landau-Khalatnikov-Fradkin (LKF) [20]. Comenzamos este capítulo describiendo cómo surgen las ESD y cómo podemos estudiar con ellas los fenómenos de nuestro interés.

El Lagrangiano que describe las interacciones en QED es invariante bajo ciertas transformaciones llamadas de norma y depende de cierto parámetro de norma. Esta simetría se refleja a través de las Identidades de Ward-Green-Takahashi WGT [44], que relacionan a las funciones de Green de n puntos con las de $n - 1$, y las transformaciones LKF que relacionan a una función de Green en una norma particular con la misma función en otra norma. El esquema más conveniente para resolver teorías cuánticas de campos (TCC) es la teoría de perturbaciones, donde dichas identidades se satisfacen en cada orden de aproximación. El problema que surge es que no todos los fenómenos aparecen en el régimen perturbativo. El confinamiento, el problema de estados ligados y el origen de las masas son ejemplos de fenómenos no perturbativos. Una plataforma conveniente para estudiar estos fenómenos, además de las simulaciones de lattice, son las ESD, una torre infinita de relaciones entre las funciones de Green de la teoría en estudio, que deben truncarse a fin de obtener información física relevante. Uno de los problemas del truncamiento no perturbativo de las ESD es la pérdida de invarianza de norma, que empaña entonces el poder predictivo de estas ecuaciones: Algunos fenómenos interesantes pueden surgir en una norma, pero están ausentes en todas la demás. Aunque las ESD se derivan formalmente en la TCC, en esta tesis consideramos un enfoque más familiar para entender el contenido físico de estas ecuaciones en QED. Los resultados de este Capítulo fueron publicados en las Ref. [18, 45, 46].

3.1. ESD en la Aproximación Apagada

Conviene estudiar el fenómeno de la GDM a partir de la ESD para el propagador del fermión. En el caso fermiónico, al propagador que representa la suma de todas las autoin-

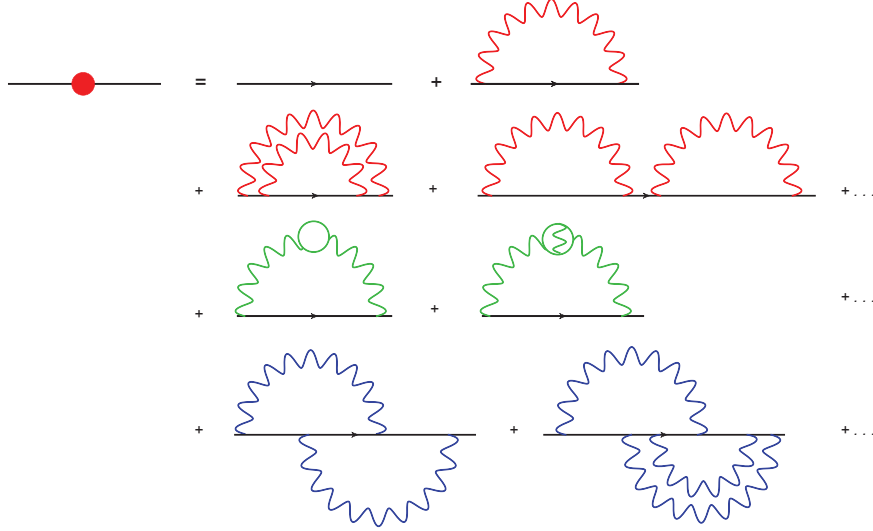


Figura 3.1: Correcciones radiativas al Propagador del Fermión.

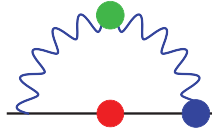


Figura 3.2: Autoenergía $\Sigma(p)$.

teracciones se le llama propagador completo y posee todas las propiedades de propagación del fermión. En el caso en que el propagador no emite ni absorbe fotones se le llama propagador desnudo. Existe una serie infinita de correcciones radiativas al propagador que, en términos de diagramas, donde en la teoría de perturbaciones podemos expresarlo por la Figura 3.1.

Estas correcciones se pueden clasificar en tres tipos de correcciones perturbativas: al propagador mismo del fermión, al del fotón y al vértice. Para poder realizar esta suma infinita es conveniente definir la autoenergía $\Sigma(p)$, representada por Figura 3.2. La autoenergía involucra todas las correcciones al propagador del fermión, propagador del fotón y al vértice fermión-fotón, como lo indican los puntos sobre las partes correspondientes en el diagrama. En términos de la autoenergía $\Sigma(p)$, la expansión perturbativa para el propagador del fermión se puede ver en la Figura 3.3, que corresponde a la expresión

CAPÍTULO 3. GDM Y CONFINAMIENTO EN QED₃

3.1. ESD EN LA APROXIMACIÓN APAGADA

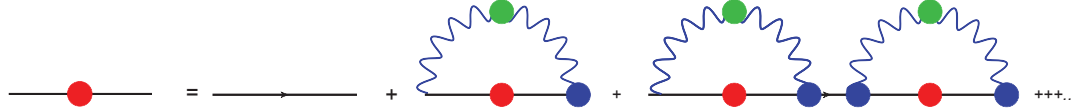


Figura 3.3: Expansión perturbativa del propagador del fermión en términos de la autoenergía.

$$\begin{aligned} S_F(p) &= S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p) + \dots \\ &= S_F^0(p)[1 + \Sigma(p)S_F(p) + \Sigma(p)S_F(p)\Sigma(p)S_F(p) + \dots], \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde $S_F(p)$ representa al propagador completo y $S_F^0(p)$ su contraparte desnuda. Si factorizamos la expresión entre corchetes es una serie geométrica, que se suma a

$$S_F(p) = S_F^0(p) \left[\frac{1}{1 - \Sigma(p)S_F^0(p)} \right]. \quad (3.2)$$

Ahora, si dejamos en la ecuación (3.1) a $S_F^0(p)$ aparte y factorizamos a partir del siguiente término, tenemos

$$\begin{aligned} S_F(p) &= S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F^0(p)[1 + \Sigma(p)S_F(p) + \Sigma(p)S_F(p)\Sigma(p)S_F(p) + \dots] \\ &= S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p) \left\{ S_F^0(p) \left[\frac{1}{1 - \Sigma(p)S_F^0(p)} \right] \right\} \\ &= S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F(p), \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde hemos usado la ecuación (3.2) en la última línea. Esta es la ESD para el propagador del fermión. Es conveniente escribir la ecuación correspondiente al inverso de este propagador. Multiplicando a la izquierda por $S_F^{-1}(p)$, obtenemos

$$1 = S_F^{0-1}(p)S_F^{-1}(p) + S_F^0(p)\Sigma(p).$$

Ahora, multiplicamos por $(S_F(p))^{-1}$ a la derecha, de modo que

$$S_F^{0-1}(p) = S_F^{-1}(p) + \Sigma(p),$$

lo que implica que

$$S_F^{-1}(p) = (S_F^0(p))^{-1} - \Sigma(p). \quad (3.4)$$

Esta es la ESD que corresponde a la función de Green de dos puntos del fermión, donde aparece la $\Sigma(p)$ y se representa en la Figura 3.4.

Las funciones de Green que aparecen en $\Sigma(p)$ obedecen cada una su ESD. Las correspondientes al propagador del fotón y al vértice se muestran en las Figuras 3.5 y 3.6. Vemos que las funciones de Green de dos puntos están relacionadas con las de tres puntos, la de tres puntos con las de dos y la de cuatro puntos y así sucesivamente, hasta formar una torre infinita de relaciones entre las funciones de Green. Para poder extraer información



Figura 3.4: ESD para el propagador del fermión.

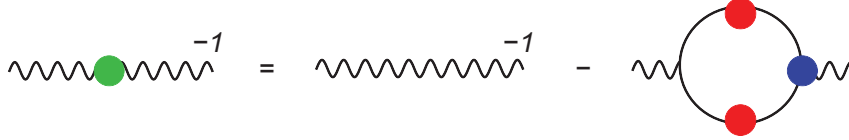


Figura 3.5: ESD para el propagador del fotón

física de las ESD, debemos truncar esta torre infinita de ecuaciones suponiendo alguna forma para las funciones de Green de varios puntos. Uno puede realizar este truncamiento en el régimen de acoplamiento débil, pero entonces no podemos estudiar GDM. Para estudiar este fenómeno, usualmente uno trunca la torre de ESD al nivel de los propagadores. En la próxima sección nos ocuparemos del estudio de las ESD para el propagador del fermión.

3.1.1. Propagador del Fermión

Veremos a continuación la estructura no perturbativa del propagador del fermión, S_F , del fotón $\Delta_{\mu\nu}$, y el vértice Γ^μ y las ESD para el propagador del fermión que los relaciona.

El propagador completo del fermión, $S_F(p)$ (hemos cambiado la notación que usabamos en el capítulo 1, $A(p^2)$, $B(p^2)$, $M(p^2)$ y $F(p^2)$, por simplicidad, pero en realidad, todas las funciones escalares que se escribirán de aquí en adelante, son funciones de la magnitud del tri momento), podemos expresarlo mediante una combinación lineal de matrices las matrices (4×4) , I y $\not{p}$ de la forma

$$S_F(p) = A(p)\not{p} + B(p), \quad (3.5)$$

Podemos escribirlo de la forma

$$S_F(p) = \frac{F(p)}{\not{p} - M(p)} = \frac{F(p)(\not{p} + M(p))}{p^2 - M^2(p)}, \quad (3.6)$$

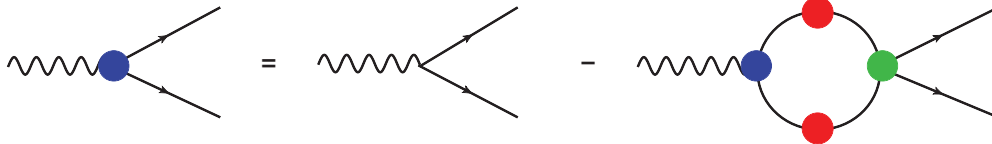


Figura 3.6: ESD para el vértice fermión-fotón.

CAPÍTULO 3. GDM Y CONFINAMIENTO EN QED₃

3.1. ESD EN LA APROXIMACIÓN APAGADA

y llamamos a $F(p)$ la renormalización de la función de onda y a $M(p)$ es la función de masa. El polo del propagador $M(p) = p$ corresponde a la masa física del fermión, para el caso cuando $M(p) = m$ y $F(p) = 1$ nos quedamos con el propagador desnudo

$$S_F^0(p) = \frac{1}{\not{p} - m} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}. \quad (3.7)$$

Recordemos que en QED₃, la ESD para el propagador del fermión en el espacio de Minkowski, usando reglas de Feynman, es

$$\begin{aligned} S_F(p)^{-1} &= (S_F^0)^{-1} - \Sigma(p) \\ &= (S_F^0)^{-1} - ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Gamma^\mu(k; p) S_F(k) \gamma^\nu \Delta_{\mu\nu}(q), \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde $q = k - p$, e^2 es el acoplamiento electromagnético, que en QED₃ tiene dimensiones de masa, y $S_F^0(p)$ es el propagador desnudo. Cuando $m = 0$, tenemos que $S_F^0(p)$ tiene un polo en $p = 0$, al igual que $S_F(p)$ con $M(p) = 0$. El fenómeno de la GDM toma lugar cuando la posición de este polo cambia de lugar debido a las autointeracciones.

3.1.2. Propagador del Fotón

El propagador completo del fotón está dado por

$$\Delta_{\mu\nu} = - \left[\frac{G(q)}{q^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) - \xi \frac{q_\mu q_\nu}{q^4} \right], \quad (3.9)$$

donde $G(q) = \frac{1}{1+\Pi(q)}$ es la renormalización de la función de onda del fotón, con $\Pi(q)$ que es el tensor de la polarización del vacío y ξ es el parámetro de norma covariante. Nosotros trabajamos en la norma de Landau $\xi = 0$. $G(q) = 1$ corresponde al propagador desnudo $\Delta_{\mu\nu}^0$, cuya expresión es

$$\Delta_{\mu\nu}^0 = - \frac{1}{q^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right]. \quad (3.10)$$

Vemos que este propagador diverge en el infrarrojo como $1/q^2$, enfatizando que el fotón no tiene masa.

3.1.3. Vértice

El vértice $\Gamma^\mu(k; p)$ de la interacción de fermiones con fotones se puede construir de una combinación lineal de la forma

$$\Gamma^\mu(k; p) = \sum_{i=1}^{12} v_i(k, p) V_i^\mu, \quad (3.11)$$

de los siguientes vectores base

$$\begin{aligned} V_1^\mu &= \gamma^\mu, & V_2^\mu &= k^\mu, & V_3^\mu &= p^\mu \\ V_4^\mu &= \not{k} \gamma^\mu, & V_5^\mu &= \not{k} k^\mu, & V_6^\mu &= \not{k} p^\mu \\ V_7^\mu &= \not{p} \gamma^\mu, & V_8^\mu &= \not{p} k^\mu, & V_9^\mu &= \not{p} p^\mu \\ V_{10}^\mu &= \not{k} \not{p} \gamma^\mu, & V_{11}^\mu &= \not{k} \not{p} k^\mu, & V_{12}^\mu &= \not{k} \not{p} p^\mu, \end{aligned} \quad (3.12)$$

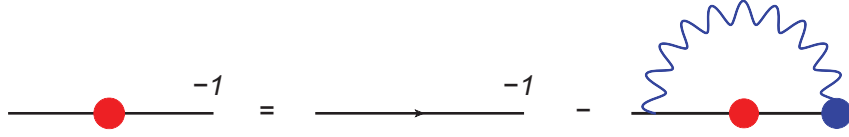


Figura 3.7: ESD para el propagador del fermión en la Aproximación Apagada.

donde las $v_i(k; p)$ son funciones escalares de k^2 , p^2 , y q^2 . De este modo, en la ESD para el propagador del fermión están involucradas 15 funciones desconocidas. Para obtener alguna información física, debemos hacer algunas suposiciones sobre estas funciones, i.e, debemos truncar la torre de ESD. Para truncar la torre infinita de ESD, un cuidado especial se debe tener en la invariancia de norma. Si queremos truncar la torre infinita de las ESD en el nivel de funciones Green de dos puntos, una manera popular es hacer un *ansatz* para la interacción del fermion–fotón; en este caso escogeremos el vértice desnudo γ^μ . La invariancia de norma de las observables físicas la estudiamos por medio de las transformaciones LKF. En la siguiente sección estudiaremos el fenómeno de GDM truncando convenientemente las ESD.

3.1.4. GDM Aproximación Arcoiris

Un punto de partida conveniente para estudiar el fenómeno de la GDM es a partir de la ESD para el propagador del fermión (Figura 3.3), cuya expresión está dada en la ecuación (3.6).

Para estudiar la GDM comenzamos tomando $m = 0$. Sustituyendo los propagadores correspondientes, tenemos la siguiente expresión:

$$\frac{\not{p} - M(p)}{F(p)} = \not{p} - ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 - M^2(k)} \Gamma^\mu(k; p) (\not{k} + M(k)) \gamma^\nu \Delta_{\mu\nu}(q).$$

Observemos que esta ecuación es matricial, pero puede escribirse como un sistema de ecuaciones integrales no lineales escalares acopladas para M y F . Estas se obtienen de tomar la traza a la ESD después de multiplicar por I y $\not{p}$, respectivamente:

$$\frac{3M(p)}{F(p)} = ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 - M^2(k)} \text{Tr}[\Gamma^\mu(k, p) (\not{k} + M(k)) \gamma^\nu] \Delta_{\mu\nu}(q), \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{F(p)} = 1 - \frac{ie^2}{3p^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 - M^2(k)} \text{Tr}[\not{p} \Gamma^\mu(k, p) (\not{k} + M(k)) \gamma^\nu] \Delta_{\mu\nu}(q). \quad (3.14)$$

Nos concentramos en el estudio de la aproximación apagada, despreciando lazos de fermiones, es decir, tomamos simplemente $\Delta_{\mu\nu}(q) \rightarrow \Delta_{\mu\nu}^0(q)$ que diagramáticamente representamos como en la Figura 3.7.

En esta aproximación, con una forma educada del vértice, podemos resolver la ESD para el propagador del fermión de forma autoconsistente. Quizás la forma más simple para el vértice consiste en tomar

$$\Gamma^\mu(k, p) = \gamma^\mu, \quad (3.15)$$

CAPÍTULO 3. GDM Y CONFINAMIENTO EN QED₃

3.1. ESD EN LA APROXIMACIÓN APAGADA

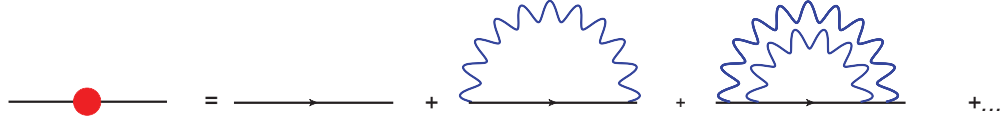


Figura 3.8: ESD para el propagador del fermión en el régimen de acoplamiento débil.

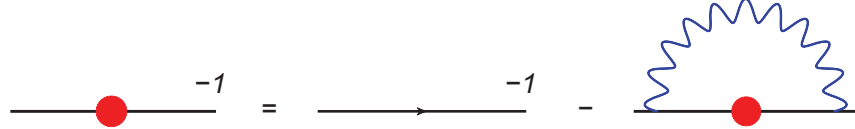


Figura 3.9: ESD para el propagador del fermión en la Aproximación Arcoiris

lo que se conoce como aproximación arcoiris. Esto debido a que en el régimen acoplamiento débil, el propagador completo toma la forma mostrada en la Figura 3.8.

La ESD para la Aproximación Arcoiris se muestra pictóricamente Figura 3.9, que es equivalente a las expresiones

$$\frac{3M(p)}{F(p)} = ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 - M^2(k)} \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{k} + M(k)) \gamma^\nu] \Delta_{\mu\nu}^0(q), \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{F(p)} = 1 - \frac{ie^2}{3p^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 - M^2(k)} \text{Tr}[\not{p} \gamma^\mu (\not{k} + M(k)) \gamma^\nu] \Delta_{\mu\nu}^0(q). \quad (3.17)$$

Para proseguir con el análisis, debemos tomar en cuenta algunas de las propiedades de las trazas de las matrices que usaremos:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^\mu] &= \text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma] = \text{Tr}[\text{impar}] = 0, \\ \text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta] &= 3g^{\alpha\beta}, \\ \text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\nu] &= 3[g^{\alpha\beta} g^{\delta\nu} - g^{\alpha\delta} g^{\nu\beta} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\delta}]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Entonces, tomando la traza correspondiente en la ecuación (3.16), vemos que

$$\frac{M(p)}{F(p)} = -2ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)M(k)}{q^2(k^2 - M^2(k))}. \quad (3.19)$$

Ahora tomamos ahora la traza correspondiente a (3.17) tenemos

$$\frac{1}{F(p)} = 1 - \frac{ie^2}{p^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{q^2(k^2 - M^2(k))} \left[-\frac{2}{q^2} (k \cdot q)(p \cdot q) \right]. \quad (3.20)$$

Ahora, hacemos una rotación de Wick al espacio Euclidean, con las prescripciones

$$\begin{aligned} k_0 &\longrightarrow ik_0, & p_0 &\longrightarrow ip_0, & p^2 &\longrightarrow -p^2, \\ k^2 &\longrightarrow -k^2, & k_0 &\longrightarrow ik_0, & k \cdot p &\longrightarrow -k \cdot p, \\ \int d^3k &\longrightarrow i \int d^3k. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 3. GDM Y CONFINAMIENTO EN QED₃

3.1. ESD EN LA APROXIMACIÓN APAGADA

Así, tenemos que en el espacio Euclideo

$$\frac{M(p)}{F(p)} = 2e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)M(k)}{q^2(k^2 + M^2(k))}. \quad (3.21)$$

Utilizando coordenadas esféricas tales que el elemento de volumen es $d^3k = k^2 dk \sin \theta d\theta d\varphi$, elegimos $k^\mu = (k \sin \theta \cos \varphi; k \sin \theta \sin \varphi; k \cos \theta)$ de modo que

$$\begin{aligned} \frac{M(p)}{F(p)} &= \frac{2e^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \frac{k^2 F(k)M(k)}{k^2 + M^2(k)} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{k^2 + p^2 - kp \cos \theta} \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{e^2}{2\pi^2 p} \int_0^\infty dk \frac{k F(k)M(k)}{k^2 + M^2(k)} \ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right|. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Análogamente encontramos $F(p) = 1$. En este caso, el sistema se reduce a una sola ecuación:

$$M(p) = \frac{e^2}{2\pi^2 p} \int_0^\infty dk \frac{k M(k)}{k^2 + M^2(k)} \ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right|. \quad (3.23)$$

La ecuación (3.23) son el resultado de truncar la ESD para el propagador del fermión en la Aproximación Arcoiris.

El comportamiento de la función de masa para momento grande puede ser deducido traduciendo esta ecuación en una ecuación diferencial con las condiciones de frontera apropiadas. Con este fin, realizamos el tratamiento analítico, haciendo la aproximación

$$\ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right| \simeq \frac{2p}{k} \Theta(k-p) + \frac{2k}{p} \Theta(p-k), \quad (3.24)$$

que es válida para $k \gg p$ y $k \ll p$ y $\Theta(x)$ es la función escalón. Tenemos que

$$M(p) = \frac{e^2}{\pi^2} \int_0^p dk \frac{M(k)}{k^2 + M^2(k)} + \frac{e^2}{p^2} \int_p^\infty dk \frac{k^2 M(k)}{k^2 + M^2(k)} \quad (3.25)$$

expresión que se puede convertir en una ecuación diferencial con condiciones de frontera. Derivando una vez tenemos

$$\frac{dM(p)}{dp} = -\frac{2e^2}{\pi^2 p^3} \int_p^\infty \frac{k^2 M(k)}{k^2 + M^2(k)}, \quad (3.26)$$

dando como resultado la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d}{dp} \left[p^3 \frac{dM(p)}{dp} \right] = -\frac{2e^2}{\pi^2} \frac{p^2 M(p)}{p^2 + M^2(p)}, \quad (3.27)$$

con las condiciones de frontera

$$\left[p^3 \frac{dM(p)}{dp} \right]_{p=0} \longrightarrow 0, \quad M(p)_{p=0} \longrightarrow 0. \quad (3.28)$$

Para $p^2 \gg M^2(p)$, la ecuación se simplifica

$$\frac{d}{dp} \left[p^3 \frac{dM(p)}{dp} \right] + \frac{2e^2}{\pi^2} M(p) = 0, \quad (3.29)$$

cuya solución es

$$M(p) = \frac{4e^2}{\pi^2 p} \left[C_1 J_2 \left(\sqrt{\frac{8}{\pi^2 p}} \right) + C_2 Y_2 \left(\frac{8}{\pi^2 p} \right) \right], \quad (3.30)$$

donde $J(x)$ y $Y(x)$ son funciones de Bessel de la primera y segunda clase. La segunda condición implica que $C_2 = 0$

$$M(p) = \frac{4e^2}{\pi^2 p} \left[C_1 J_2 \left(\sqrt{\frac{8}{\pi^2 p}} \right) \right], \quad (3.31)$$

en el límite para $p \rightarrow \infty$, $J(1/\sqrt{p}) \rightarrow 1/p$, lo que podemos observar que $M(p) \rightarrow 1/p^2$ para $p \rightarrow \infty$.

Notemos que C_1 no puede ser obtenido de la ecuación y las condiciones de frontera. Esto nos permite hacer una conexión con los resultados provenientes de la expansión de productos de operadores (OPE), que se da cuando una partícula se propaga en presencia de un condensado quiral $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, la función de masa correspondiente, cuando $p \rightarrow \infty$, se relaciona con este condensado de la forma

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \frac{4p^2 M(p)}{2 + \xi}, \quad (3.32)$$

la función de masa para la norma de Landau $\xi = 0$ es

$$M(p) = \frac{\pi^2 \langle \bar{\psi}\psi \rangle}{2pe^2} J_2 \left(\sqrt{\frac{8}{\pi^2 p}} \right) \quad (3.33)$$

De esta expresión observamos que tenemos una solución no trivial siempre y cuando el condensado quiral sea no nulo. Este condensado proporciona el medio pegajoso en el cual se propagan las partículas y adquieren masa. El condensado se forma por las auinteracciones de las partículas.

Para resolver esta ecuación numéricamente, usamos los métodos numéricos desarrollados en [47, 21, 46]. Vemos cuando $p \rightarrow 0$, la función de masa se vuelve constante, y cae como $1/p^2$ cuando $p \rightarrow \infty$, como se muestra en la Figura 3.10.

Esto señala que en esta Aproximación Arcoris, se generan masas dinámicamente en la norma de Landau. En la siguiente sección estudiaremos las ESD considerando efectos de la polarización del vacío en la aproximación 1/N, donde veremos que no siempre se generan masas dinámicamente.

3.2. ESD Aproximación 1/N

La teoría de perturbaciones ordinaria en términos de acoplamiento parece romperse debido a las divergencias infrarrojas de las funciones de Green de QED₃. Una manera de evitar esta situación es usando otro parámetro de expansión. Estudiaremos la GDM en QED₃ en la aproximación no apagada, considerando un número grande N de fermiones no masivos que pueden circular en los lazos, modificando el comportamiento infrarrojo del propagador del fotón, que se suaviza. Consideramos el límite de N grande, manteniendo $\tilde{\alpha} = Ne^2/8$ fijo. Seguiremos el análisis de Appelquist et al. [17] hecho en la norma de

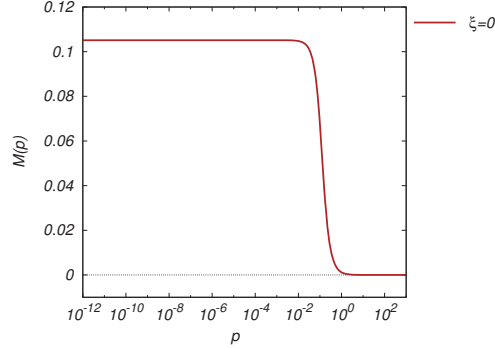


Figura 3.10: Función de masa $M(p)$ en la Aproximación Arcoiris.

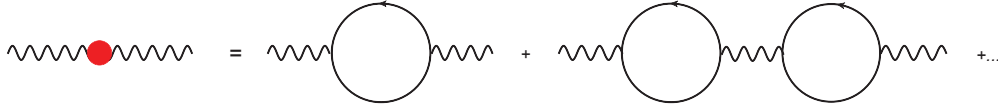


Figura 3.11: Propagador del fotón en la aproximación $1/N$.

Landau para establecer la existencia de un número crítico N_c de familias de fermiones, arriba del cual la GDM deja de tener lugar y extenderemos el razonamiento al caso de una norma covariante arbitraria.

Aunque $\tilde{\alpha}$ es un parámetro pequeño que tiene propósitos de guardar el orden de aproximación, la aproximación $1/N$ como tal es una técnica genuinamente no perturbativa, pues en cada orden de aproximación, consideramos un número infinito de diagramas correspondientes a la teoría de perturbaciones ordinaria en potencias del acoplamiento electromagnético e^2 : Aunque esta técnica, desarrollada por t'Hooft para QCD [48] se puede estudiar formalmente desde la teoría de los campos cuánticos, en esta tesis nos centramos sólo en la idea principal detrás de ella: Los diagramas no planares están suprimidos por potencias de $1/N$, de modo que son los diagramas planares los que dominan en cualquier proceso. En nuestro caso, esto corresponde a considerar sólo los diagramas que son inserciones de autoenergías a un lazo en la teoría de perturbaciones ordinaria.

Para resolver las ESD en la aproximación en $1/N$, debemos de considerar simultáneamente las ecuaciones correspondientes al propagador del fotón y del fermión. Primero resolvemos la ecuación para el fotón considerando la serie infinita de diagramas (planares) de burbujas, como se ve en la Figura 3.11 donde circulan los N fermiones no masivos que estamos considerando. El propagador correspondiente a esa expansión es de la forma

$$\Delta_{\mu\nu}(q) = -\frac{1}{q^2 + \tilde{\alpha}q} \left[g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right], \quad (3.34)$$

éste propagador lo insertamos en la ESD para el propagador del fermión, considerando además que $\Gamma^\mu(k;p) \longrightarrow \gamma^\mu$, como se muestra en la Figura 3.12.



Figura 3.12: ESD para el propagador del fermión en la Aproximación 1/N.

Esta es la aproximación 1/N para las ESD, en la cual estudiaremos la GDM. Trabajando la norma de Landau, tenemos que resolver la ecuación

$$S_F(p)^{-1} = (S_F^0)^{-1}(p) - i \frac{8\tilde{\alpha}}{N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Gamma^\mu(k; p) S_F(k) \gamma^\nu \Delta_{\mu\nu}(q). \quad (3.35)$$

Multiplicando por $\not{p}$ y I y tomando traza, obtenemos

$$\frac{M(p)}{F(p)} = i \frac{8\tilde{\alpha}}{N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)M(k)}{k^2 - M^2(k)} g^{\mu\nu} \Delta_{\mu\nu}(q), \quad (3.36)$$

$$\frac{1}{F(p)} = 1 - i \frac{8\tilde{\alpha}}{N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 - M^2(k)} (p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu - (k \cdot p)) \Delta_{\mu\nu}(q), \quad (3.37)$$

de donde obtenemos las expresiones para las funciones desconocidas F y M

$$\frac{M(p)}{F(p)} = -i \frac{16\tilde{\alpha}}{N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)M(k)}{k^2 - M^2(k)} \frac{1}{q^2 + \tilde{\alpha}q}, \quad (3.38)$$

$$\frac{1}{F(p)} = 1 - i \frac{8\tilde{\alpha}}{Np^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{F(k)}{k^2 - M^2(k)} \frac{1}{q^2(q^2 + \tilde{\alpha}q)} \left(-2(p \cdot q)(k \cdot q) \right). \quad (3.39)$$

Observamos que la renormalización de la función de onda

$$F(p) \approx 1 + O(1/N), \quad (3.40)$$

por lo que sus efectos en la función de masa son de orden $1/N^2$, que se encuentran altamente suprimidos en el límite de $N \rightarrow \infty$, así que podemos tomar simplemente $F(p) = 1$ y resolver la ecuación(3.38) sólo para $M(p)$; es decir,

$$M(p) = -i \frac{16\tilde{\alpha}}{N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{M(k)}{k^2 - M^2(k)} \frac{1}{q^2 + \tilde{\alpha}q}.$$

Realizando una rotación de Wick hacia el espacio Euclideo, tenemos

$$\begin{aligned} M(p) &= \frac{16\tilde{\alpha}}{N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{M(k)}{k^2 + M^2(k)} \frac{1}{q^2 + \tilde{\alpha}q} \\ &= \frac{4\tilde{\alpha}}{\pi^2 N} \int_0^\infty dk \frac{k^2 M(k)}{k^2 + M^2(k)} \int_0^\pi \frac{d\theta \sin \theta}{k^2 + p^2 - 2kp \cos \theta + \tilde{\alpha} \sqrt{k^2 + p^2 - 2kp \cos \theta}} \\ &= \frac{4\tilde{\alpha}}{\pi^2 N p} \int_0^\infty dk \frac{k M(k)}{k^2 + M^2(k)} \ln \left| \frac{\tilde{\alpha} + |k + p|}{\tilde{\alpha} + |k - p|} \right|. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Expandiendo el logaritmo en las regiones $k \gg p$ y $k \ll p$, tenemos que

$$\begin{aligned} M(p) &= \frac{8\tilde{\alpha}}{\pi^2 N p} \int_0^p dk \frac{kM(k)}{k^2 + M^2(k)} \left(\frac{k}{p + \tilde{\alpha}} \right) \\ &+ \frac{8\tilde{\alpha}}{\pi^2 N p} \int_p^\infty dk \frac{kM(k)}{k^2 + M^2(k)} \left(\frac{p}{k + \tilde{\alpha}} \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Esta expresión está escrita convenientemente para convertirla en una ecuación diferencial con condiciones de frontera. Derivando una vez, tenemos

$$\frac{dM(p)}{dp} = -\frac{8\tilde{\alpha}}{\pi^2 N} \frac{2p + \tilde{\alpha}}{p^2(p + \tilde{\alpha})^2} \int_0^p dk \frac{k^2 M(k)}{k^2 + M^2(k)}, \quad (3.43)$$

de modo que la ecuación diferencial resultante nos queda de la forma

$$\frac{d}{dp} \left[\frac{p^2(p + \tilde{\alpha})^2}{2p + \tilde{\alpha}} \frac{dM(p)}{dp} \right] = -\frac{8\tilde{\alpha}}{\pi^2 N} \frac{p^2 M(p)}{p^2 + M^2(p)}, \quad (3.44)$$

con las condiciones de frontera

$$0 \leq M(0) < \infty, \quad \left[p \frac{dM}{dp} + M(p) \right]_{p=\tilde{\alpha}} = 0. \quad (3.45)$$

En el límite cuando $p \ll \tilde{\alpha}$, la ecuación diferencial se simplifica como

$$\frac{d}{dp} \left[p^2 \frac{dM(p)}{dp} \right] = -\frac{8}{\pi^2 N} M(p), \quad (3.46)$$

que admite una solución en forma de ley de potencias,

$$M(p) = p^s \quad (3.47)$$

donde $s = -[1 \pm \sqrt{1 - 32/(\pi^2 N)}]/2$. La solución de la ecuación linealizada es entonces de la forma [17]

$$M(p) \approx p^{-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{32}{\pi^2 N}}}. \quad (3.48)$$

Vemos que existe un número crítico $N_c = 32/\pi^2$, que distingue entre un comportamiento oscilatorio y una genuina ley de potencias. Cuando $N_c > 32/\pi^2$; la solución no es compatible con las condiciones de frontera, así que sólo existe una solución compatible cuando $N_c < 32/\pi^2$. Recordemos que el comportamiento de una función de masa es tal que ésta se comporta como una constante para p pequeño y cae como $1/p^2$ para $p \rightarrow \infty$. La cantidad de masa generada dinámicamente puede cuantificarse como $M(0)$: La solución a

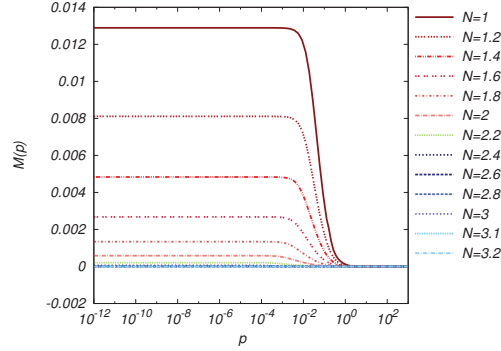


Figura 3.13: Función de Masa para varios valores de N .

la ecuación linealizada, escalada con $M(0)$, puede escribirse de la forma

$$\begin{aligned}
 M(p) &= p^{-\frac{1}{2}} \left[A \left(\frac{M(0)}{M(0)} p \right)^{\frac{i}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1}} + B \left(\frac{M(0)}{M(0)} p \right)^{-\frac{i}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1}} \right] \\
 &= p^{-\frac{1}{2}} \left[C e^{\frac{i}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1} \ln \left| \frac{p}{M(0)} \right|} + D e^{-\frac{i}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1} \ln \left| \frac{p}{M(0)} \right|} \right] \\
 &= p^{-\frac{1}{2}} \left[E \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1} \ln \left| \frac{p}{M(0)} \right| \right) + F \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1} \ln \left| \frac{p}{M(0)} \right| \right) \right] \\
 &= p^{-\frac{1}{2}} \left[\cos \beta \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1} \ln \left| \frac{p}{M(0)} \right| \right) + \sin \beta \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1} \ln \left| \frac{p}{M(0)} \right| \right) \right] \\
 &= p^{-\frac{1}{2}} \left[\sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1} \left\{ \ln \left| \frac{p}{M(0)} \right| + \frac{\beta}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1}} \right\} \right) \right] \\
 &= p^{-\frac{1}{2}} \left[\sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1} \left\{ \ln \left| \frac{p}{M(0)} \right| + \delta \right\} \right) \right], \tag{3.49}
 \end{aligned}$$

donde δ es la fase que puede depende de N . Para encontrar $M(0)$; imponemos la condición de frontera ultravioleta (3.45) en el límite $N \rightarrow 32/\pi^2$ tomamos

$$M(p) = p^{-\frac{1}{2}} \left[A p^{\frac{i}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1}} + B p^{-\frac{i}{2} \sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1}} \right]. \tag{3.50}$$

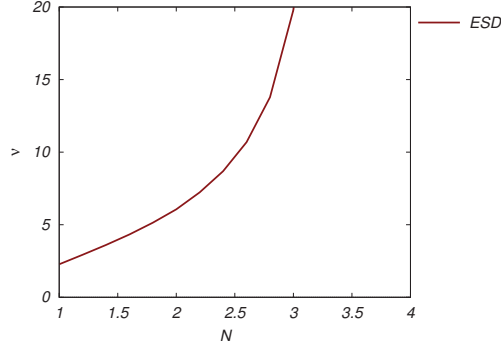


Figura 3.14: Masa Generada Dinámicamente

Entonces

$$\begin{aligned}
 [pM(p)]'_{p=\tilde{\alpha}} &= \frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}} \left[A \left(i\sqrt{\frac{32}{\pi^2 N}} - 1 + 1 \right) p^{\frac{i}{2}\sqrt{\frac{32}{1-\pi^2 N}}} \right. \\
 &\quad \left. - B \left(i\sqrt{\frac{32}{\pi^2 N}} - 1 + 1 \right) p^{-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{32}{1-\pi^2 N}}} \right]_{p=\tilde{\alpha}} \\
 &= \frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}} \left[Cp^{\frac{i}{2}\sqrt{1-\frac{32}{\pi^2 N}}} + Dp^{-\frac{i}{2}\sqrt{1-\frac{32}{\pi^2 N}}} \right]_{p=\tilde{\alpha}} \\
 &= p^{-\frac{1}{2}} \left[\sin \left(\frac{i}{2}\sqrt{\frac{32}{\pi^2 N}} - 1 \left\{ \ln \left| \frac{p}{M(0)} \right| + \delta \right\} \right) \right]_{p=\alpha\alpha} = 0, \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

lo que implica

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{32}{\pi^2 N}} - 1 \left\{ \ln \left| \frac{p}{M(0)} \right| + \delta \right\} = n\pi, \quad (3.52)$$

entonces tenemos que

$$M(0) = 8\tilde{\alpha}e^\delta \exp \left[\frac{-2\pi n}{\sqrt{\frac{32}{\pi^2 N} - 1}} \right], \quad (3.53)$$

donde $n = 1; 2; 3$; etc: La solución para $n = 1$ nos da la configuración de energía mínima del sistema [17]. De este análisis concluimos que existe criticalidad para la GDM en esta aproximación. Si $N = N_c$, entonces $M(0) \rightarrow 0$: Además, N no puede exceder a N_c , pues la solución en este caso es incompatible con las condiciones de frontera.

Numéricamente resolvemos la ecuación (3.41) en la norma de Landau con nuestros metodos numéricos para verificar los resultados de Appelquist et al. [17]. Para un N dado, encontramos la función de masa $M(p)$ sobre el rango completo de valores para p , como se muestra en la Figura 3.13.

N	Appelquist	Nosotros
1	2.3	2.27173
1.2	2.9	2.93054
1.4	3.6	3.60420
1.6	4.3	4.33178
1.8	5.1	5.14264
2	6.1	6.06110
2.2	7.2	7.23005
2.4	8.6	8.68578
2.6	10.7	10.6910
2.8	13.5	13.7874
3	19.5	19.8052
3.1	—	25.8991
3.2	—	39.3332

Cuadro 3.1: Comparación Masas Físicas de Appelquist y nosotros en la aproximación $1/N$.

La cantidad de masa generada dinámicamente la obtuvimos de la altura de la función de masa, $M(0)$. Siguiendo las convenciones de Appelquist et al. [17], calculamos

$$\nu = -\ln \left| \frac{M(0)}{\tilde{\alpha}} \right|. \quad (3.54)$$

Existe un completo acuerdo entre los resultados de Appelquist et al. [17] y los nuestros en la norma de Landau [46], ver (Cuadro 3.1). Ambos podemos observar que, efectivamente, existe un valor crítico $N_c = 3,24$ a partir del cual las masas dejan de generarse dinámicamente. Numéricamente, fue imposible encontrar una solución más allá de este valor. Esto puede observarse de mejor manera en la Figura 3.13, donde podemos ver que la altura de la función de masa disminuye cuando incrementamos N hasta casi desvanecerse para $N > 3$.

Observamos en la Figura 3.14 que la masa generada dinámicamente exhibe criticalidad $N = N_c = 32/\pi^2 = 3,24$ donde dejamos de generar masa y no es posible encontrar una solución a las ESD para $N > N_c = 32/\pi^2 = 3,24$.

3.3. Confinamiento

Realizando una prueba confinamiento descrita en el capítulo 2 con las soluciones encontradas, se muestra que el comportamiento oscilatorio de la función de Schwinger, es decir, confinamiento, se puede encontrar en la norma de Landau para la aproximación Arcoiris, Figura 3.15. Cuando incluimos loops de fermiones no masivos el confinamiento se borra, como observamos en la Figura 3.16. A continuación veremos las Transformaciones LKF, nos dicen la manera en que cambia una función de Green de una norma a otra.

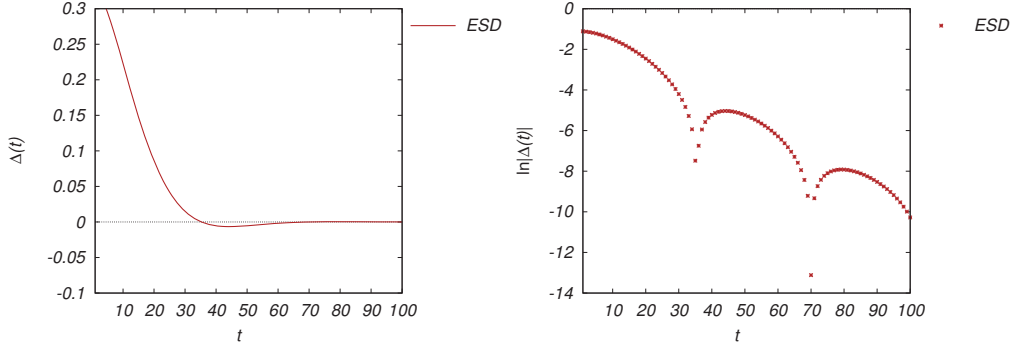


Figura 3.15: Prueba de Confinamiento de la función de Schwinger con la parte escalar del propagador del fermión en la Aproximación Arcoiris en la norma de Landau.

3.4. LKFT del Propagador del Fermión e Invariancia de Norma

La estrategia para implementar las transformaciones LKF se escriben en la Ref. [49]. Escribimos al propagador del fermión en el espacio Euclidiano de ambos, momentos y coordenadas en sus formas más generales:

$$S_F(p; \xi) = \frac{F(p; \xi)}{i\not{p} + M(p; \xi)}, \quad S(x; \xi) = i\not{x}X(x; \xi) + Y(x; \xi). \quad (3.55)$$

Agregamos la etiqueta ξ pues estaremos interesados en el propagador en distintas normas covariantes. Estas expresiones están relacionadas con una transformación de Fourier de d dimensiones. Asumiendo conocemos al propagador del fermión en la norma de Landau en el espacio de momentos, $S_F(p; 0)$, también lo conocemos en el espacio de coordenadas en la misma norma. Este propagador se traduce a otra norma covariante mediante la transformación [50]

$$S_F(x; \xi) = S_F(x; 0) \exp[-i[\Delta_d(0) - \Delta_d(x)]], \quad (3.56)$$

donde

$$\Delta_d(x) = -i\xi e^2 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\exp(-ip \cdot x)}{p^4}. \quad (3.57)$$

Esta transformación deja ESD e Identidades WGT invariantes en diferente normas, e imponen así restricciones fuertes ante la covariancia de norma del propagador dinámicamente generado del fermión. Las transformaciones LKF nos dicen la manera en que cambia una función de Green de una norma a otra, lo cual asegura la invariancia del condensado quiral pues [51]:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_\xi &= -\text{Tr}S(x=0; \xi) \\ &= -\text{Tr}S(x=0; 0) \exp[-i[\Delta_d(0) - \Delta_d(x=0)]] \\ &= -\text{Tr}S(x=0; 0) = \langle \bar{\psi}\psi \rangle_0. \end{aligned} \quad (3.58)$$

CAPÍTULO 3. GDM Y CONFINAMIENTO EN QED₃

3.4. LKFT DEL PROPAGADOR DEL FERMIÓN E INVARIANCIA DE NORMA

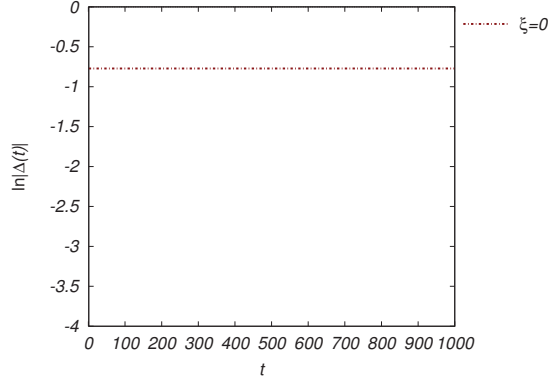


Figura 3.16: Prueba de Confinamiento de la función de Schwinger con la parte escalar del propagador del fermión en la Aproximación $1/N$ para $N = 2$.

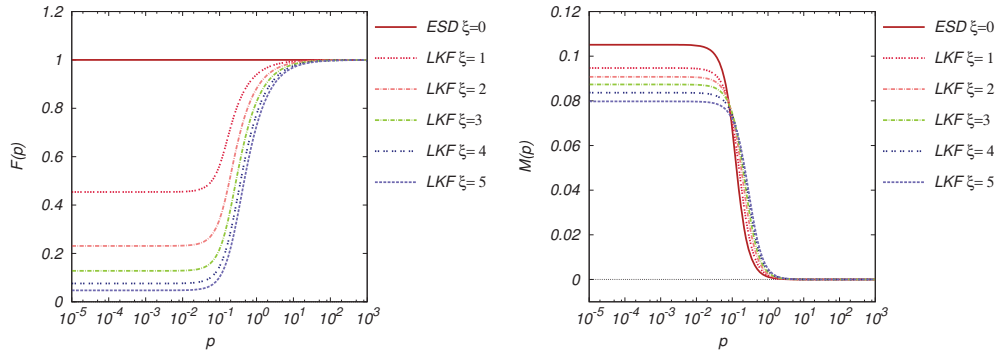


Figura 3.17: Renormalización de la función de onda $F(p)$ y Función de masa $M(p)$ en varias normas arbitrarias con las transformaciones LKF en la aproximación Arcoiris.

Así, las Transformaciones LKF en estudios de ESD debe desempeñar un papel importante para abordar la invariancia de norma. Estudiamos el caso de la teoría de QED₃. Conocemos al propagador dinámicamente generado del fermión generalmente en el espacio de momentos. Podemos obtener una representación del espacio de momentos para las Transformaciones LKF de la manera siguiente [50]. Asumiendo conocemos $S_F(p; 0)$, tenemos las expresiones correspondientes para el propagador en el espacio de coordenadas, dado por

$$\begin{aligned} X(x; 0) &= -\frac{i}{x^2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{F(k; 0)}{k^2 + M(k; 0)} \exp[-ik \cdot x] k \cdot x, \\ Y(x; 0) &= -\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{F(p; 0)}{k^2 + M(k; 0)} \exp[-ik \cdot x], \end{aligned} \quad (3.59)$$

CAPÍTULO 3. GDM Y CONFINAMIENTO EN QED₃
3.4. LKFT DEL PROPAGADOR DEL FERMIÓN E INVARIANCIA DE NORMA

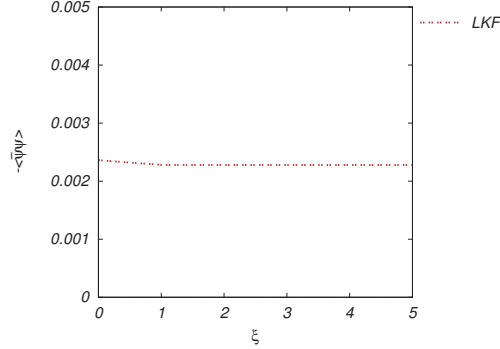


Figura 3.18: Invarianza de norma del condensado con la Transformación LKF en la aproximación Arcoiris.

integraremos la parte angular, simplificando a la forma

$$\begin{aligned} X(x; 0) &= \frac{1}{2\pi^2 x^2} \int dk \frac{k^2 F(k; 0)}{k^2 + M(k; 0)} \left[\cos kx - \frac{\sin kx}{kx} \right], \\ Y(x; 0) &= -\frac{1}{2\pi^2} \int dk \frac{k^2 F(k; 0) M(k; 0)}{k^2 + M(k; 0)} \left[\frac{\sin kx}{kx} \right]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

En este caso para la teoría QED₃, $d = 3$, $\Delta_3(0) - \Delta_3(x) = -i\alpha\xi/2$. Las transformaciones LKF se simplifica como

$$S_F(x; \xi) = S_F(x; 0)e^{-ax}, \quad (3.61)$$

donde $a = \alpha\xi/2$. Si aplicamos la transformaciones LKF a las ecuaciones (3.60) y la transformada de Fourier, nos queda en el espacio de momentos

$$\begin{aligned} \frac{F(p; \xi)}{p^2 + M(p; \xi)} &= \frac{i}{p} \int d^3x \exp[ip \cdot x] X(x; \xi), \\ \frac{F(p; \xi) M(p; \xi)}{p^2 + M(p; \xi)} &= - \int d^3x \exp[ip \cdot x] Y(x; \xi). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Las integraciones angulares llevan a la representación final del espacio de momentos de las Transformaciones LKF para el propagador del fermión

$$\begin{aligned} \frac{F(p; \xi)}{p^2 + M(p; \xi)} &= \frac{a}{\pi p^2} \int_0^\infty dk k^2 \frac{F(k; 0)}{k^2 + M(k; 0)} \left[\frac{1}{\lambda^-} + \frac{1}{\lambda^+} + \frac{1}{2kp} \ln \left| \frac{\lambda^-}{\lambda^+} \right| \right], \\ \frac{F(p; \xi) M(p; \xi)}{p^2 + M(p; \xi)} &= \frac{a}{\pi p} \int_0^\infty dk k \frac{F(k; 0) M(k; 0)}{k^2 + M(k; 0)} \left[\frac{1}{\lambda^-} - \frac{1}{\lambda^+} \right], \end{aligned} \quad (3.63)$$

donde $\lambda^\pm = a^2 + (k \pm p)^2$, de entrada conocemos $S_F(p; 0)$, así obtenemos la norma covariante arbitraria del propagador por medio de las Transformaciones LKF. Comenzando con la solución quiral asimétrica del propagador del fermión en la norma de Landau, resuelta numéricamente en secciones anteriores, aplicamos las transformaciones LKF para obtener

CAPÍTULO 3. GDM Y CONFINAMIENTO EN QED₃

3.4. LKFT DEL PROPAGADOR DEL FERMIÓN E INVARIANCIA DE NORMA

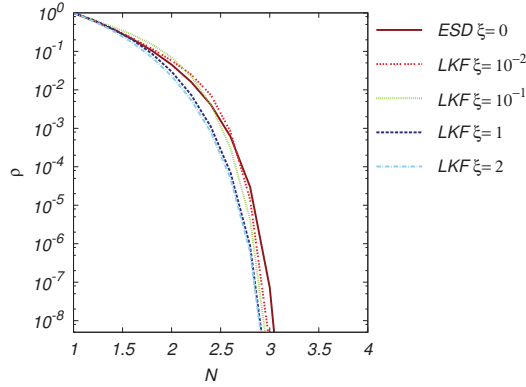


Figura 3.19: Invarianza de norma de la masa generada dinámicamente por medio con la Transformada LKF en la aproximación $1/N$

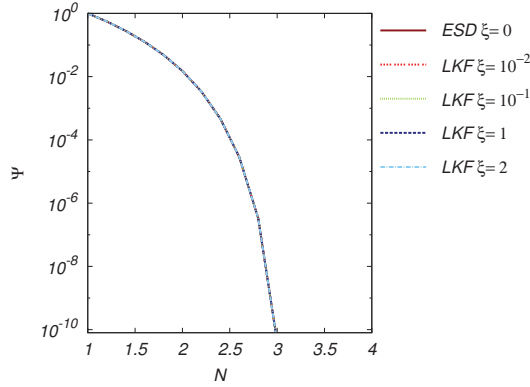


Figura 3.20: Invarianza de norma del condensado con las transformaciones LKF en la aproximación $1/N$.

al propagador del fermión de la Aproximación Arcoiris en una norma covariante arbitraria. En este caso el comportamiento del propagador del fermión lo vemos en la Figura 3.17, donde la Renormalización de la Función de onda y la Función de masa nos da diversas normas de la solución de las transformaciones LKF. Un cambio en la Función de masa en diversas norma nos lleva la invarianza de norma el condensado quiral, representada en la Figura 3.18 para la aproximación Arcoiris.

Así mismo aplicamos las transformaciones LKF al propagador del fermión en la aproximación $1/N$, obteniendo la invarianza de norma para el condensado, que normalizado es $\Psi = \langle \bar{\psi}\psi \rangle_N / \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{N=1}$, ver Figura 3.20. Así, representamos la masa generada dinámicamente normalizada en normas covariantes arbitrarias $\rho = M(p=0; N)/M(p=0; N=1)$, Figura 3.19.

En el siguiente capítulo estudiaremos la invarianza de norma del propagador del fermión incluyendo un término de Chern-Simons.

CAPÍTULO 3. GDM Y CONFINAMIENTO EN QED₃
3.4. LKFT DEL PROPAGADOR DEL FERMIÓN E INVARIANCIA DE NORMA

Capítulo 4

QED de Maxwell-Chern-Simons

En este capítulo estudiaremos la covariancia de norma del propagador del fermión para la electrodinámica cuántica en el plano con un término de Chern-Simons [52], considerando espinores de cuatro componentes con términos de masa de paridad par y paridad impar para ambos fermiones y fotones. Comenzando con la expresión a nivel árbol en la norma de Landau, la expresión no perturbativa para el propagador la llevamos a normas covariantes arbitrarias por medio de las Transformaciones LKF [50]. Comparamos nuestros resultados en el régimen de acoplamiento débil con el cálculo directo a un lazo de la función de Green de dos punto y observamos el acuerdo perfecto hasta un término independiente de norma. El contenido de este capítulo se publicó en la Ref. [52].

4.1. Propagador del fermión

Como mencionamos en el capítulo 2, se requieren tres matrices de Dirac para describir la dinámica de fermiones planares. Por lo tanto, uno puede elegir trabajar con espinores de dos o cuatro componentes. Aquí trabajamos con cuatro componentes espinoriales y una representación reducible 4×4 de las matrices de Dirac. Elegimos trabajar en el espacio Euclidean, donde las matrices de Dirac, ecuación (2.22), satisfacen el álgebra de Clifford $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu}$, con $\sigma_i, i = 1, 2, 3$ siendo las matrices de Pauli e I la matriz de identidad 2×2 . Una vez que hemos seleccionado un conjunto de matrices para escribir la ecuación de Dirac, $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2\}$, tenemos dos matrices gamma que anticonmutan con todas las demás, γ_3 y γ_5 , lo que nos permite definir así dos tipos de transformaciones quirales

$$\psi \rightarrow e^{i\sigma\gamma^3} \psi, \quad \psi \rightarrow e^{i\beta\gamma^5} \psi, \quad \sigma, \beta = \text{cte} \quad (4.1)$$

de modo que el Lagrangiano no masivo correspondiente es invariante bajo simetrías globales $U(2)$ con los generadores γ_3, γ_5 y $[\gamma_3, \gamma_5]$ correspondientes al intercambio de especies de fermiones. Dado que hay dos transformaciones quirales, se pueden definir dos tipos de términos de masas para fermiones, la ordinaria $m_e \bar{\psi} \psi$ para la cual la simetría quiral se rompe, y la masa $m_o \bar{\psi} \tau \psi$ con $\tau = \frac{1}{2}[\gamma_3, \gamma_5] = \text{diag}(I, -I)$, que es invariante bajo transformaciones quirales. Como lo vimos en el Capítulo 2, $m_e \bar{\psi} \psi$ es invariante bajo paridad pero $m_o \bar{\psi} \tau \psi$ no lo es; aquí, el subíndice e representa paridad par y o de paridad impar. Escribimos el Lagrangiano de QED₃ en la representación reducible con dos términos de

CAPÍTULO 4. QED DE MAXWELL-CHERN-SIMONS

4.1. PROPAGADOR DEL FERMIÓN

masas involucrados

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} + e\not{A} - m_e - \tau m_o)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2.$$

Deducimos el inverso del propagador del fermión en este caso toma la forma

$$S_F^{-1}(p; \xi) = A_e(p; \xi)\not{p} + A_o(p; \xi)\tau\not{p} - B_e(p; \xi) - B_o(p; \xi)\tau. \quad (4.2)$$

Etiquetamos explícitamente al propagador con ξ el parámetro de norma covariante, pues estaremos interesados en su expresión en diversas normas. El propagador desnudo corresponde a $A_e(p; 0) = 1$, $A_o(p; 0) = 0$, $B_e(p; 0) = m_e$, $B_o(p; 0) = m_o$. Una manera conveniente de escribir el propagador del fermión es de la forma

$$\begin{aligned} S_F^{-1}(p; \xi) &= (A_e(p; \xi) + A_o(p; \xi))\not{p}\frac{1}{2}(1 + \tau) + (A_e(p; \xi) - A_o(p; \xi))\not{p}\frac{1}{2}(1 - \tau) \\ &\quad - (B_e(p; \xi) + B_o(p; \xi))\frac{1}{2}(1 + \tau) - (B_e(p; \xi) - B_o(p; \xi))\frac{1}{2}(1 - \tau). \end{aligned}$$

Esto nos permite trabajar con una base quiral, donde introducimos proyectores quirales $\chi_\pm = (1 \pm \tau)$, con propiedades $\chi_\pm^2 = \chi_\pm$, $\chi_+\chi_- = 0$, $\chi_+ + \chi_- = 1$ [52]. Usamos la siguiente notación $K_\pm = K_e \pm K_o$ de tal manera que la descomposición quiral el propagador inverso del fermión es

$$\begin{aligned} S_F^{-1}(p; \xi) &= A_+(p; \xi)\not{p}\chi_+ + A_-(p; \xi)\not{p}\chi_- - B_+(p; \xi)\chi_+ - B_-(p; \xi)\chi_- \\ &= (A_+(p; \xi)\not{p} - B_+(p; \xi))\chi_+ + (A_-(p; \xi)\not{p} - B_-(p; \xi))\chi_-. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Correspondientemente, el propagador del fermión es

$$\begin{aligned} S_F(p; \xi) &= -\frac{A_+(p; \xi)\not{p} + B_+(p; \xi)}{A_+^2(p; \xi)p^2 + B_+^2(p; \xi)}\chi_+ - \frac{A_-(p; \xi)\not{p} + B_-(p; \xi)}{A_-^2(p; \xi)p^2 + B_-^2(p; \xi)}\chi_- \\ &\equiv -[\sigma_+^V(p^2; \xi)\not{p} + \sigma_+^S(p^2; \xi)]\chi_+ - [\sigma_-^V(p^2; \xi)\not{p} + \sigma_-^S(p^2; \xi)]\chi_-, \end{aligned} \quad (4.4)$$

En el espacio de coordenadas

$$\begin{aligned} S_F(x; \xi) &= -\frac{X_+(x; \xi)\not{x} + Y_+(x; \xi)}{X_+^2(x; \xi)x^2\chi_+ + Y_+^2(x; \xi)}\chi_+ - \frac{X_-(x; \xi)\not{x} + Y_-(x; \xi)}{X_-^2(x; \xi)x^2\chi_- + Y_-^2(x; \xi)}\chi_- \\ &\equiv -[\sigma_+^V(x^2; \xi)\not{x} + \sigma_+^S(x^2; \xi)]\chi_+ - [\sigma_-^V(x^2; \xi)\not{x} + \sigma_-^S(x^2; \xi)]\chi_-, \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde $\sigma_\pm^V$ y $\sigma_\pm^S$ son la proyección derecha e izquierda de las partes escalar y vectorial del propagador del fermión. Podemos relacionar el propagador del fermión ecuación (4.4) y (4.5) en el espacio de momentos y coordenadas por medio de una Transformada de Fourier

$$S_F(p; \xi) = \int d^3x e^{-ipx} S_F(x; \xi) \quad S_F(x; \xi) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ipx} S_F(p; \xi), \quad (4.6)$$

estas definiciones nos servirán para estudiar las transformaciones LKF.

4.1.1. Transformaciones LKF y propagador del fermión no perturbativo

Consideremos las transformaciones LKF estudiadas en el capítulo anterior, que nos dicen la manera en que cambia una función de Green de una norma a otra. Comenzamos con el propagador desnudo en espacio de momentos en la norma de Landau y lo llevamos al espacio de coordenadas, aplicamos la transformación LKF y tomamos la transformada de Fourier inversa al espacio de momentos.

Consideremos el Propagador del Fermión en la norma de Landau a nivel árbol con $A_+^0(p; 0) = A_-^0(p; 0) = 1$ y $B_\pm^0(p; 0) = m_e \pm m_o \equiv m_\pm$, con las proyecciones escalar y vectorial en el espacio de momentos

$$\sigma_\pm^{S(0)}(p; 0) = \frac{m_\pm}{p^2 + m_\pm^2}, \quad \sigma_\pm^{V(0)}(p; 0) = \frac{1}{p^2 + m_\pm^2}. \quad (4.7)$$

Tomando la transformada de Fourier al espacio de coordenadas,

$$\sigma_\pm^{S(0)}(x; 0) = \frac{m_\pm e^{-m_\pm x}}{4\pi x}, \quad \sigma_\pm^{V(0)}(x; 0) = \frac{i(1 + m_\pm x)e^{-m_\pm x}}{4\pi x^3}. \quad (4.8)$$

Aplicando las transformaciones LKF y la Transformada inversa de Fourier nos da

$$\begin{aligned} \sigma_\pm^S(p; \xi) &= \frac{m_\pm}{p^2 + (a + m_\pm)^2}, \\ \sigma_\pm^V(p; \xi) &= \frac{1}{p^2} \left[1 - \frac{m_\pm(a + m_\pm)}{p^2 + (a + m_\pm)^2} - aI(p, a + m_\pm) \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde definimos

$$I(p; m) = \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{m}.$$

Así obtenemos una forma no perturbativa del propagador del fermión en diferentes normas arbitrarias, expresada en la ecuación (4.9), por medio de las transformaciones LKF. Veamos algunos casos el límite de esta expresión.

Caso no masivo: Para el caso no masivo $m_e = m_o = 0$, propagador del fermión no perturbativo se reduce a

$$\sigma_{\pm \text{nomasivo}}^S(p; \xi) = 0, \quad \sigma_{\pm \text{nomasivo}}^V(p; \xi) = \frac{1}{p^2} [1 - aI(p; a)].$$

lo que implica que $B_\pm(p; \xi) = 0$, y $B_e(p; \xi) = B_o(p; \xi) = 0$, es decir, fermiones no masivos en todas la normas, por lo tanto no hay GDM. También tenemos que $A_+(p; \xi) = A_-(p; \xi)$ por lo que $A_o(p, \xi) = 0$ y

$$A_e(p; \xi) = [1 - aI(p, a)]^{-1}, \quad (4.10)$$

confirmando la forma covariante para el propagador sin masa dictado por el la transformación LKF [53, 54].

Caso QED3 ordinario En el caso ordinario $m_o = 0$ [54], esto nos da $m_\pm = m_e$, por lo tanto podemos ver que

$$\sigma_+^S(p; \xi) = \sigma_-^S(p; \xi) \quad \sigma_+^V(p; \xi) = \sigma_-^V(p; \xi).$$

CAPÍTULO 4. QED DE MAXWELL-CHERN-SIMONS

4.1. PROPAGADOR DEL FERMIÓN

lo que implica que

$$\sigma_o^S(p; \xi) = \sigma_o^V(p; \xi) = 0.$$

Tenemos así que solamente la contribución que no desaparece es la de paridad par del propagador del fermión

$$\begin{aligned}\sigma_e^S(p; \xi) &= \frac{m_e}{p^2 + (a + m_e)^2}, \\ \sigma_e^V(p; \xi) &= \frac{1}{p^2} \left[1 - \frac{m_e(a + m_e)}{p^2 + (a + m_e)^2} - aI(p; a + m_e) \right].\end{aligned}\quad (4.11)$$

Una comparación contra los resultados de [54] demuestra el acuerdo completo en este caso.

Régimen de acoplamiento débil: en el régimen de acoplamiento débil, haciendo una expansión en la ecuación (4.9) en α , donde $a = \alpha\xi/2$ al orden $O(\alpha)$, tenemos

$$\begin{aligned}\sigma_{\pm\text{debil}}^S(p; \xi) &= \frac{m_{\pm}}{p^2 + m_e^2} - \frac{\alpha\xi m_{\pm}^2}{(p^2 + m_{\pm})^2}, \\ \sigma_{\pm\text{debil}}^V(p; \xi) &= \frac{1}{p^2 + m_{\pm}^2} + \frac{\alpha\xi m_{\pm}(m_{\pm}^2 - p^2)^2}{2p^2(p^2 + m_{\pm}^2)^2} + \frac{\alpha\xi}{2p^2} I(p; m_{\pm}).\end{aligned}\quad (4.12)$$

Una de las propiedades de las transformaciones LKF es que a partir de expresiones no perturbativas, ecuación (4.9), obtenemos resultados perturbativos, a nivel de un lazo hasta un término de la independiente de norma. Para identificar tal término, necesitamos calcular el resultado perturbativo a nivel de un lazo del propagador y comparar con la ecuación (4.12).

4.1.2. Propagador del fermión en la Teoría de Perturbaciones

Trabajando con las funciones $A_{\pm}$ y $B_{\pm}$ que son obtenidas del propagador del fermión, hasta el orden $O(\alpha)$ tenemos

$$\begin{aligned}A_{\pm}^{(1)}(p; \xi) &= 1 - \frac{2\pi\alpha}{p^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr}[\not{p}\gamma_{\mu}S_{\pm}(k, \xi)\gamma_{\nu}\Delta_{\mu\nu}^{(0)}(q)\chi_{\pm}], \\ B_{\pm}^{(1)}(p; \xi) &= m_{\pm} - 2\pi\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr}[\gamma_{\mu}S_{\pm}(k, \xi)\gamma_{\nu}\Delta_{\mu\nu}^{(0)}(q)\chi_{\pm}].\end{aligned}\quad (4.13)$$

Observamos que el propagador desnudo del fotón asociado al Lagrangiano toma la forma $\Delta_{\mu\nu}^{(0)}(q; \xi) = (q^2\delta_{\mu\nu} + (\xi - 1)q_{\mu}q_{\nu})/q^4$. Sustituimos los propagadores correspondientes, tenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}A_{\pm}^{(1)}(p; \xi) &= 1 - \frac{\alpha\xi}{2\pi^2 p^2} \int d^3k \frac{(k^2 + p^2)(k \cdot p) - 2k^2 p^2}{q^4(k^2 + m_{\pm}^2)}, \\ B_{\pm}^{(1)}(p; \xi) &= m_{\pm} - \frac{\alpha(2 + \xi)m_{\pm}}{2\pi^2} \int d^3k \frac{1}{q^2(k^2 + m_{\pm}^2)}\end{aligned}\quad (4.14)$$

Estas expresiones son similares a las obtenidas con el Lagrangiano de QED₃ de paridad par [55], por lo que la integración nos da

$$\begin{aligned}A_{\pm}^{(1)}(p; \xi) &= 1 + \frac{a}{p^2} [m_{\pm} - (m_{\pm}^2 - p^2)I(p; m_{\pm})], \\ B_{\pm}^{(1)}(p; \xi) &= m_{\pm} [1 + \alpha(\xi + 2)I(p; m_{\pm})].\end{aligned}\quad (4.15)$$

CAPÍTULO 4. QED DE MAXWELL-CHERN-SIMONS

4.1. PROPAGADOR DEL FERMIÓN

Reconstruyendo las proyecciones escalares y vectoriales a un lazo $\sigma_{\pm}^{S(1)}$ y $\sigma_{\pm}^{V(1)}$, encontramos

$$\begin{aligned}\sigma_{\pm}^{S(1)}(p; \xi) &= \frac{m_{\pm}}{p^2 + m_{\pm}^2} - \frac{\alpha \xi m_{\pm}^2}{(p^2 + m_{\pm}^2)^2} + \frac{2\alpha m_{\pm}(p^2 - m_{\pm}^2)}{(p^2 + m_{\pm}^2)^2} I(p, m_{\pm}), \\ \sigma_{\pm}^{V(1)}(p; \xi) &= \frac{1}{p^2 + m_{\pm}^2} + \frac{\alpha \xi m_{\pm}(m_{\pm}^2 - p^2)^2}{2p^2(p^2 + m_{\pm}^2)} - \frac{\alpha \xi}{2p^2} I(p; m_{\pm}) - \frac{4\alpha m_{\pm}^2}{p(p^2 + m_{\pm}^2)^2}. \quad (4.16)\end{aligned}$$

Comparando estos resultados obtenidos de las Transformaciones LKF, con los de a nivel árbol por LKF, en el régimen de acoplamiento débil, ecuación (4.12), observamos el acuerdo perfecto hasta un término independiente de norma, una diferencia permitida por la estructura de la Transformaciones LKF.

Si incluimos otros efectos al propagador del fotón al Lagrangiano ordinario, como $m_o \bar{\psi} \tau \psi$ únicamente tiene paridad impar. Tal término radiativamente induciría un término de Chern-Simons en el Lagrangiano (4.2), modificando la forma del propagador del fotón. Estudiamos el de Lagrangiano extendido en la siguiente sección.

4.1.3. Lagrangiano de QED3 incluyendo el Término de Chern-Simons

El hecho de que el término de masa paridad-impar en el propagador del fermión radiativamente induzca una contribución paridad impar en la polarización del vacío se puede considerar la estructura del tensor de la polarización del vacío $\Pi(q)$ a nivel de un lazo

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(q) &= e^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \text{Tr}[\gamma_{\mu} S(k; \xi) \gamma_{\nu} S(k+q; \xi)] \\ &= \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_{\mu\nu}}{q^2} \right) \Pi^e(q^2) + \epsilon_{\mu\nu\rho} q_{\rho} \Pi^o(q^2). \quad (4.17)\end{aligned}$$

El segundo término corresponde a una interacción de Chern-Simons de la forma

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\theta}{4} \epsilon_{\mu\nu\rho} A_{\mu} F_{\nu\rho}. \quad (4.18)$$

Este término es no invariante bajo paridad. El parámetro $\theta = \Pi^o(q^2 \rightarrow 0)$ induce una masa topológica para los fotones, observamos que $\theta = \sigma_{xy}$, que es la conductividad transversa en el efecto Hall cuántico. El Lagrangiano de QED3 para este caso incluyendo el término de Chern-Simons y la masa m_o para los fermiones es

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\not{\partial} + e\not{A} - m_e - \tau m_o)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &\quad - \frac{1}{2\xi} (\partial_{\mu} A_{\mu})^2 + \frac{\theta}{4} \epsilon_{\mu\nu\rho} A_{\mu} F_{\nu\rho}. \quad (4.19)\end{aligned}$$

Al incluir el término de Chern-Simons, el Lagrangiano no es invariante bajo transformaciones de norma, pero su acción si lo es. Este de Lagrangiano se ha empleado para describir del efecto cuántico de Hall a campo cero para los fermiones masivos de Dirac [56]. La masa topológica θ para el fotón esta relacionado con la conductividad de Hall. Cualquier modificación este parámetro debe inducir en la forma perturbativa del propagador del fermión,

CAPÍTULO 4. QED DE MAXWELL-CHERN-SIMONS

4.1. PROPAGADOR DEL FERMIÓN

no modificará ciertamente la dependencia de norma que encontramos en la sección anterior. Así la ecuación (4.9) continúa estando igual en el presente caso. Para identificar el papel del término de Chern-Simons en la expansión perturbativa del propagador del fermión, vemos que el Propagador del fotón asociado al Lagrangiano (4.19), toma la forma

$$\Delta_{\mu\nu}(q; \xi) = \frac{1}{q^2 + \theta^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) - \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho} q_\rho \theta}{q^2(q^2 + \theta^2)} + \xi \frac{q_\mu q_\nu}{q^4}. \quad (4.20)$$

podemos observar que en nuestro propagador del fotón modificado aparece un coeficiente de Chern-Simons θ , veremos que tanto se modifica en la dinámica de los fermiones. Insertamos este propagador en $A_\pm$ y $B_\pm$ (4.13), tenemos entonces

$$\begin{aligned} A_\pm^{(1)}(p; \xi) &= 1 - \frac{\alpha\xi}{2\pi^2 p^2} \int d^3k \frac{(k^2 + p^2)(k \cdot p) - 2k^2 p^2}{q^4(k^2 + m_\pm^2)} \\ &\quad + \frac{\alpha}{\pi^2 p^2} \int d^3k \frac{(p \cdot q)(k \cdot q)}{(q^2 + \theta^2)(k^2 + m_\pm^2)} \\ &\quad \mp \frac{\alpha\theta m_\pm}{\pi^2 p^2} \int d^3k \frac{(p \cdot q)}{q^2(q^2 + \theta^2)(k^2 + m_\pm^2)}, \\ B_\pm^{(1)}(p; \xi) &= m_\pm + \frac{\alpha\xi m_\pm}{2\pi^2} \int d^3k \frac{1}{q^2(k^2 + m_\pm^2)} \\ &\quad + \frac{\alpha m_\pm}{\pi^2} \int d^3k \frac{1}{(q^2 + \theta^2)(k^2 + m_\pm^2)} \\ &\quad \mp \frac{\alpha\theta}{\pi^2} \int d^3k \frac{(k \cdot q)}{q^2(q^2 + \theta^2)(k^2 + m_\pm^2)}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

evaluando las integrales tenemos

$$\begin{aligned} A_\pm^{(1)} &= 1 + \frac{\alpha}{2p^2\theta^2} \{ (\theta^2 - p^2 - m_\pm^2)(\theta^2 + p^2 \pm 2m_\pm\theta) I(p, \theta + m_\pm) \\ &\quad + [(p^2 + m_\pm^2)(p^2 + m_\pm^2 \pm 2m_\pm\theta) + \xi\theta^2(p^2 - m_\pm^2)] I(p, m_\pm) \\ &\quad + m_\pm\theta^2(\xi + 1 \mp 2) - \theta(p^2 + m_\pm^2 + \theta^2) \}, \\ B_\pm^{(1)} &= m_\pm + \frac{\alpha}{\theta} \{ [2m_\pm\theta \pm (p^2 + m_\pm^2 + \theta^2)] I(p, \theta + m_\pm) \\ &\quad + [\xi m_\pm\theta \mp (p^2 + m_\pm^2)] I(p, m_\pm) \pm \theta \}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Consideremos algunos límites para casos particulares de estas expresiones:

Fotones sin masas: Para $\theta \rightarrow 0$, las funciones nos quedan

$$\begin{aligned} A_{\pm(\theta \rightarrow 0)}^{(1)}(p; \xi) &= 1 + \frac{\alpha}{p^2} [m_\pm - (m_\pm^2 - p^2) I(p, m_\pm)] \\ &\quad - \frac{\alpha\xi}{3p^2} \left(2 \pm \frac{(3 \mp 2)m_\pm}{p^2 + m_\pm^2} + 3m_\pm I(p, m_\pm) \right), \\ B_{\pm(\theta \rightarrow 0)}^{(1)}(p; \xi) &= m_\pm [1 + \alpha(\xi + 2) I(p, m_\pm)] \\ &\quad + \alpha\theta \left(-\frac{(2 \mp 1)m_\pm}{p^2 + m_\pm^2} \pm I(p, m_\pm) \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Recobramos el resultado de QED₃ en el límite cuando $\theta = 0$ de la ecuación (4.15).

CAPÍTULO 4. QED DE MAXWELL-CHERN-SIMONS

4.1. PROPAGADOR DEL FERMIÓN

Fermiones no masivos: En la presencia del término Chern-Simons, dejamos de generar masas quirales, es decir, $m_{\pm} = 0$, en este caso vemos que por la ecuación (4.22)

$$B_{\pm(m_{\pm}=0)}^{(1)}(p; \xi) = \pm \frac{\alpha}{\theta} \left[-\frac{\pi p}{2} + \theta + (p^2 + \theta^2)I(p, \theta) \right], \quad (4.24)$$

implica $B_e(p, \xi) = 0$, pero $B_o(p; \xi) \propto \alpha/\theta$ que es proporcional a α . El término del Chern-Simons radiativamente induce una masa m_o . Cuando $\theta \rightarrow 0$ la función de la masa inducida en la norma de Landau está dada por

$$m_o^{\text{inducido}}(p; 0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{B_{\pm(m_{\pm}=0)}^{(1)}(p; 0)}{A_{\pm(m_{\pm}=0)}^{(1)}(p; 0)} = \frac{\alpha\theta\pi}{2p}. \quad (4.25)$$

Generamos masas para los fermiones en presencia del término de Chern-Simons en la teoría de perturbaciones.

Caso QED3 ordinario: a un lazo lo recuperamos fijando $\theta = m_o = 0$ dada en la ecuación (4.22). Esto se puede lograr en dos pasos: primero, de (4.23) nosotros recuperamos los resultados puros QED3 (4.15) fijando $\theta = 0$. Entonces llegamos (4.11) fijando $m_o = 0$ dentro de (4.15).

Régimen de acoplamiento débil: Para realizar una comparación contra la extensión perturbativo de los resultados de Transformación LKF, la ecuación (4.9), es conveniente volver a las parte escalar y vectorial del propagador, por lo que tenemos

$$\begin{aligned} \sigma_{\pm}^S(p; \xi) &= \frac{m_{\pm}}{p^2 + m_{\pm}^2} - \frac{\alpha\xi m_{\pm}^2}{(p^2 + m_{\pm}^2)^2} \\ &+ \frac{\alpha}{\theta^2(p^2 + m_{\pm}^2)^2} \{ \theta[m_{\pm}(p^2 + m_{\pm}^2 + \theta^2) \pm \theta(p^2 + (1 \mp 1)m_{\pm}^2)] \\ &+ (p^2 + (\theta \pm m_{\pm})^2)[p^2(\theta \pm m_{\pm}) + m_{\pm}^2(m_{\pm} \mp \theta) - \theta^2 m_{\pm}] \\ &\times I(p, \theta + m_{\pm}) - (p^2 + m_{\pm}^2)^2(\theta \pm m_{\pm})I(p, m_{\pm}) \}, \\ \sigma_{\pm}^V(p; \xi) &= \frac{1}{p^2 + m_{\pm}^2} + \frac{\alpha\xi m_{\pm}(m_{\pm}^2 - p^2)}{2p^2(p^2 + m_{\pm}^2)^2} - \frac{\alpha\xi}{2p^2} I(p, m_{\pm}) \\ &+ \frac{\alpha}{2p^2\theta^2(p^2 + m_{\pm}^2)^2} \{ \theta[(p^2 - m_{\pm}^2)(p^2 + m_{\pm}^2 + \theta^2) \\ &\mp \theta m_{\pm}((2 \pm 1)p^2 + (2 \mp 1)m_{\pm}^2)] \\ &+ (p^2 + (\theta \pm m_{\pm})^2)[(p^2 + m_{\pm}^2 - \theta^2)(p^2 - m_{\pm}^2) \mp 4p^2\theta m_{\pm}] \\ &\times I(p, \theta + m_{\pm}) - (p^2 + m_{\pm}^2)^2(p^2 - m_{\pm}^2 \mp 2\theta m_{\pm})I(p, m_{\pm}) \}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

En las figuras (4.1) y (4.2), hemos extraído las proyecciones escalar y vectorial del propagador del fermión en varias normas, donde realizamos un análisis no perturbativo de las transformaciones LKF, ecuación (4.9) y el tratamiento perturbativo a un lazo, ecuación (4.26). Los términos independientes del parámetro de norma en los resultados del un lazo, que están ausentes en la expansión de acoplamiento débil de las expresiones de las transformaciones LKF, parecen desempeñar un papel sensible en el infrarrojo. Con el aumento de momento, su contribución disminuye como las expresiones en la ecuación (4.9) y el comienzo de la ecuación (4.26) que se combina en uno, dándonos la covariancia arbitraria de norma.

CAPÍTULO 4. QED DE MAXWELL-CHERN-SIMONS

4.1. PROPAGADOR DEL FERMIÓN

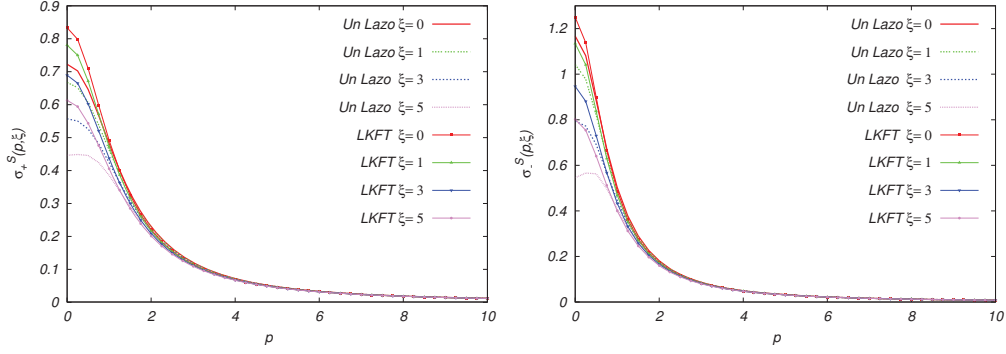


Figura 4.1: Proyección escalar del propagador en varias normas. La escala está dada por $e^2 = 1$ y hemos elegido $m_e = 1$, $m_o = 0,2$ y $\theta = 0,4$.

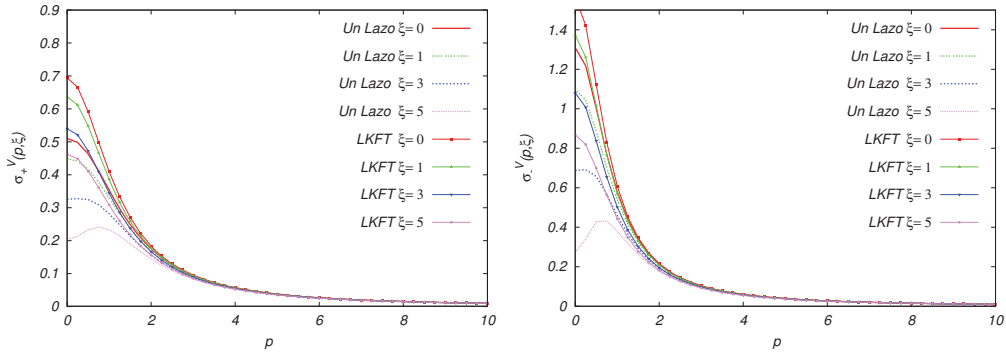


Figura 4.2: Proyección vectorial del propagador en varias normas. La escala está dada por $e^2 = 1$ y hemos elegido $m_e = 1$, $m_o = 0,2$ y $\theta = 0,4$.

CAPÍTULO 4. QED DE MAXWELL-CHERN-SIMONS

4.1. PROPAGADOR DEL FERMIÓN

Las transformaciones LKF contienen valiosa información no perturbativa del propagador del fermión incluso comenzando de su expresión a nivel árbol. Comparamos los resultados obtenidos a nivel árbol por las transformaciones LKF, en el régimen de acoplamiento débil, con los perturbativos y vimos que coinciden. Generamos masas de maneras de manera dinámica, pero en teorías de perturbaciones cuando inyectamos el término de Chern-Simons.

En el siguiente capítulo nos enfocaremos a estudiar el fenómeno no perturbativo de la GDM y Confinamiento en QED_3 incluyendo el término de Chern-Simon resolviendo las ESD correspondientes.

Capítulo 5

GDM y Confinamiento en MCS-QED

En este capítulo estudiaremos el fenómeno de la Generación Dinámica de Masas y Confinamiento truncando a nivel no perturbativo las ESD incluyendo el término de Chern-Simons en la Electrodinámica Cuántica en el plano, QED₃. Obtendremos soluciones numéricas al propagador del electrón en la norma de Landau en la Aproximación Arcoiris, y consideraremos efectos de polarización del vacío en la aproximación $1/N$. Compararemos los resultados en la teoría ordinaria con los obtenidos con el término de Chern-Simons. Los resultados de este capítulo fueron publicados en las Ref [57, 58].

5.1. GDM y Confinamiento en la Aproximación Arcoiris

En esta sección consideramos el esquema del truncamiento Aproximación Arcoiris, substituyendo $\Gamma^\mu \longrightarrow \gamma^\mu$ y $\Delta_{\mu\nu}(q) \longrightarrow \Delta_{\mu\nu}^0(q)$ dado en el Capítulo 3 según lo motivado por el diagrama de la Figura 3.9. Hacemos una descomposición quiral al propagador del fermión, ecuación (4.4) en la norma de Landau. Para las proyecciones izquierda y derecha de las partes escalar y vectorial del propagador del fermión, las ESD corresponden a ecuaciones matriciales, que se convierten en un sistema de ecuaciones escalares para $A_\pm(p)$ y $B_\pm(p)$ después de multiplicarlas por I y $\not{p}$ y de tomar la traza. En el límite quiral, esto lleva al sistema de ecuaciones desacopladas

$$\begin{aligned} A_\pm(p) &= 1 + \frac{\alpha}{\pi^2 p^2} \int d^3 k \sigma_\pm^V(k) \frac{(k \cdot q)(p \cdot q)}{q^2(q^2 + \theta^2)} \mp \frac{\alpha \theta}{\pi^2 p^2} \int d^3 k \sigma_\pm^S(k) \frac{(p \cdot q)}{q^2(q^2 + \theta^2)}, \\ B_\pm(p) &= \frac{\alpha}{\pi^2} \int d^3 k \sigma_\pm^S(k) \frac{1}{(q^2 + \theta^2)} \mp \frac{\alpha \theta}{\pi^2} \int d^3 k \sigma_\pm^V(k) \frac{(k \cdot q)}{q^2(q^2 + \theta^2)}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Numericamente resolveremos las funciones $A_\pm(p)$ y $B_\pm(p)$ variando el parámetro θ , fijando $e^2 = 1$, con $\alpha = e^2/(4\pi)$. La Figura 5.1 muestra para la función $A_\pm(p)$ una pequeña desviación del valor a nivel árbol para momento pequeño que, en cada caso, es debido al término de CS. Mientras que θ aumenta, ambas funciones se comportan como un constante para p pequeño y tienden suavemente a 1 en la región ultravioleta; la desviación se pronuncia más en $A_-(p)$. Mostramos en la Figura 5.2 la función $B_\pm(p)$; en este caso

CAPÍTULO 5. GDM Y CONFINAMIENTO EN MCS-QED

5.1. GDM Y CONFINAMIENTO EN LA APROXIMACIÓN ARCOIRIS

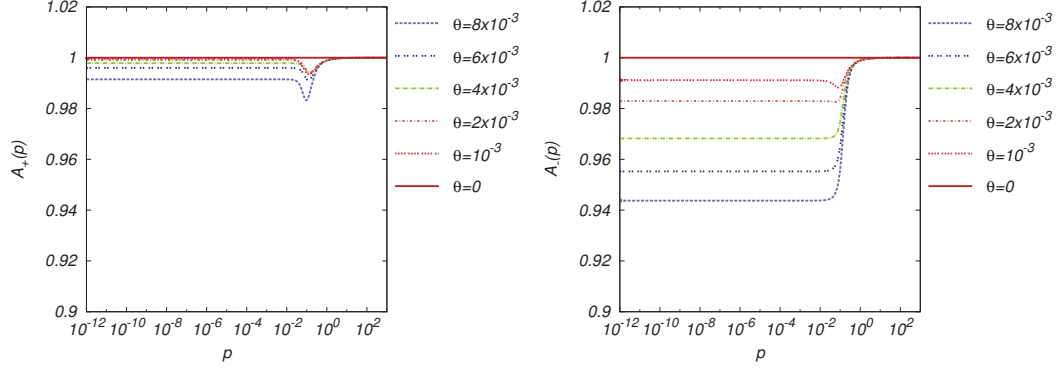


Figura 5.1: Funciones $A_{\pm}(p)$ para varios valores de θ .

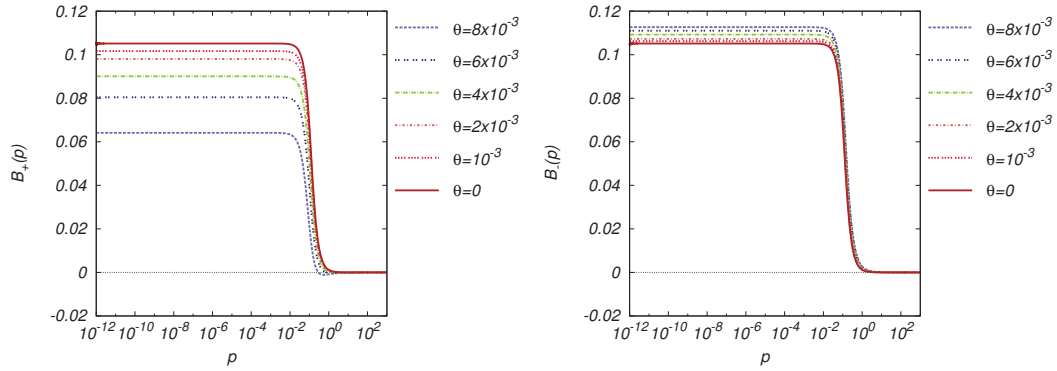


Figura 5.2: Funciones $B_{\pm}(p)$ para varios valores de θ .

CAPÍTULO 5. GDM Y CONFINAMIENTO EN MCS-QED

5.2. RENORMALIZACIÓN DE LA FUNCIÓN DE ONDA

observamos que la altura de la meseta de $B_-(p)$ para momento pequeño aumenta cuando θ es más grande, mientras que la altura de la meseta de $B_+(p)$ exhibe el comportamiento opuesto. Existe un valor crítico $\theta_c \simeq 8 \times 10^{-3}$ arriba del cual $B_+(p)$ cambia fuertemente en su comportamiento y la meseta llega a ser negativa.

La función de masa la podemos escribir como $M_\pm(p) = B_\pm(p)/A_\pm(p)$. Para $\theta > \theta_c$, la meseta de $M_+(p)$ cae en valores negativos, mientras que para $M_-(p)$, continúa aumentando con θ . Para asegurarse de que estos resultados sean físicos, estudiamos el comportamiento asintótico de $M_\pm(p)$. En el infrarrojo, la altura de la meseta se puede considerar como el parámetro de orden para la generación de masas. A este respecto, en la Figura 5.5 dibujamos la dependencia de $\mu_\pm = M_\pm(0)$ en función del parámetro θ . Cada parámetro $\mu_\pm$ se puede ver como la masa dinámica de la especie del fermión correspondiente.

Nosotros observamos que el papel del coeficiente de CS es remover la degeneración entre las especies de fermiones siempre y cuando $\theta < \theta_c$. Existe una especie ligera y una pesada. Para θ_c , sin embargo, hay un cambio drástico en este comportamiento, la especie ligera desarrolla una masa negativa, que en valor absoluto es igual la especie pesada, como puede ser apreciable en la curva punteada en la misma figura. Esto implica que arriba de este θ_c , la masa que preserva paridad $\mu_e = (\mu_+ + \mu_-)/2$ desaparece, y por lo tanto simetría quiral se restaura [59, 60]. En relación con el comportamiento ultravioleta de la función de masa $M_\pm(p)$, observamos que cuando $p \rightarrow \infty$,

$$M_\pm(p) \simeq \mp \frac{\theta}{8p} f_\pm(\theta) + \frac{b_\pm(\theta)}{p^2}, \quad (5.2)$$

donde

$$f_+(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta < \theta_c \\ -1 & \theta > \theta_c \\ 0 & \text{los otros casos} \end{cases} \quad (5.3)$$

y $f_-(\theta) = 1$ para todos los valores del parámetro. El comportamiento suave $1/p$ se hereda del comportamiento perturbativo de una función de masa impar inducida por el término de CS como discutimos en el capítulo anterior, ecuación (4.25), mientras que el comportamiento $1/p^2$ corresponde a la ruptura dinámica de la simetría quiral de paridad par, como podemos observar en la Figura 5.6. El comportamiento discontinuo de la generación dinámica de masa es el de una transición de fase de primer orden para la ruptura de la simetría quiral. Si existe la restauración de la simetría quiral, podemos entenderlo mejor del comportamiento de los condensados, que son los parámetros de orden genuinos

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_\pm = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \sigma_\pm^S(k). \quad (5.4)$$

El valor del condensado para cada especie de fermiones es la mitad del valor del condensado ordinario [62, 61]. Los fermiones de la especie pesada o ligera se aparean de la forma $\bar{\psi}_\downarrow \psi_\uparrow$ o $\bar{\psi}_\uparrow \psi_\downarrow$ (las flechas indican la orientación del espín), lo que para cada especie corresponde a la mitad del condensado quiral ordinario.

5.2. Renormalización de la función de onda

Consideremos los efectos de la renormalización de la función de onda en las masas generadas dinámicamente $M_\pm(p)$, comparando las soluciones del sistema completo de ecua-

CAPÍTULO 5. GDM Y CONFINAMIENTO EN MCS-QED

5.2. RENORMALIZACIÓN DE LA FUNCIÓN DE ONDA

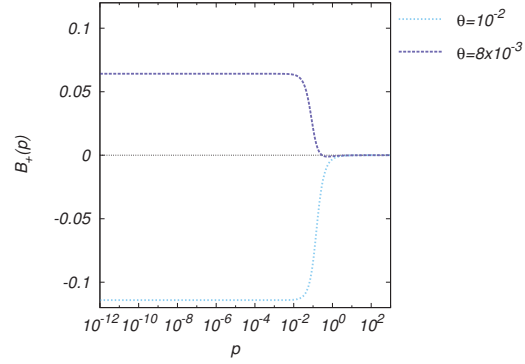


Figura 5.3: Comportamiento crítico de $B_+(p)$ para $\theta \simeq 8 \times 10^{-3}$.

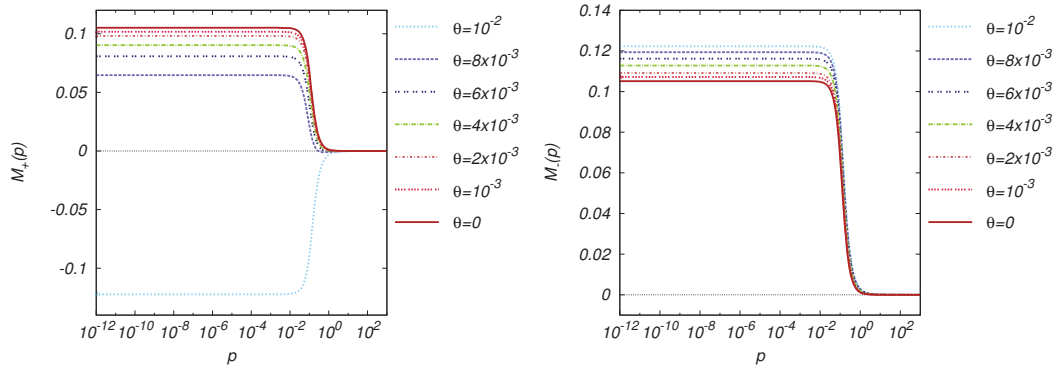


Figura 5.4: Funciones de masa $M_{\pm}(p)$ para varios valores de θ .

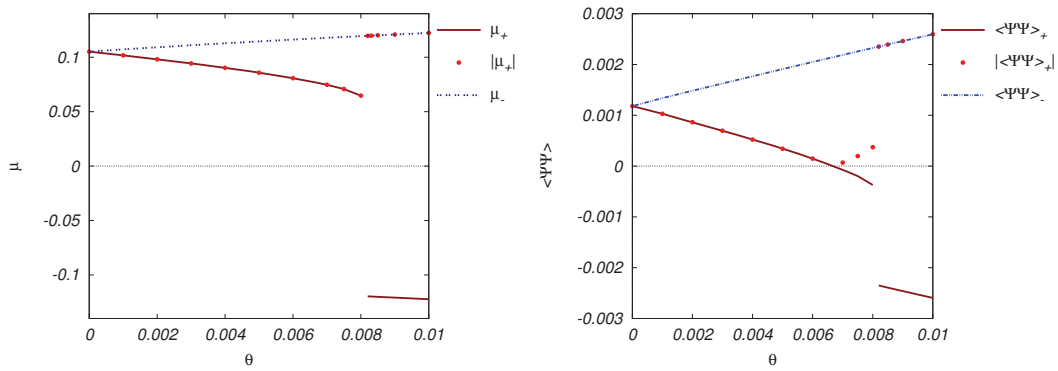


Figura 5.5: $\mu_{\pm}$ y los Condensados fermionicos como función de θ .

CAPÍTULO 5. GDM Y CONFINAMIENTO EN MCS-QED

5.2. RENORMALIZACIÓN DE LA FUNCIÓN DE ONDA

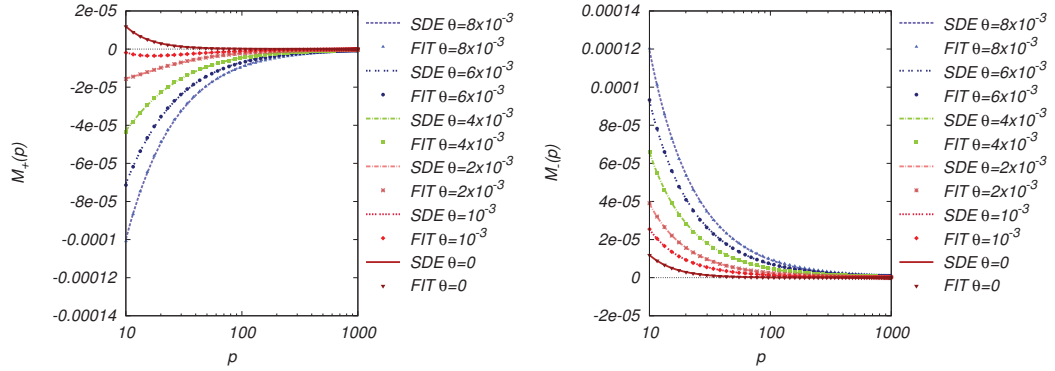


Figura 5.6: Comportamiento Asintótico de la funciones de masa $M_{\pm}(p)$

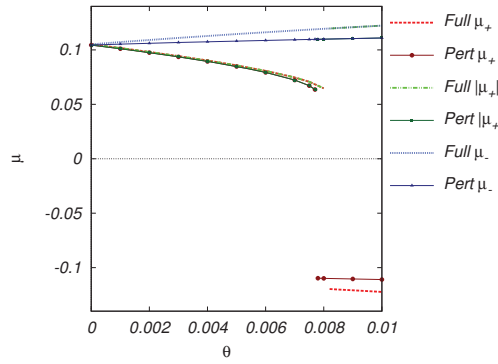


Figura 5.7: Comparamos la masa generada dinámicamente de un sistema completo (5.1) y la perturbativa del sistema reducido (5.5).

ciones, en (5.1), con las ecuaciones simplificadas que se obtienen del resultado motivado por la teoría de perturbaciones con el el ansatz $A_{\pm}(p) = 1$, es decir,

$$B_{\pm}(p) = \frac{\alpha}{\pi^2} \int d^3k \frac{B_{\pm}(k)}{k^2 + B_{\pm}^2(k)} \frac{1}{(q^2 + \theta^2)} \mp \frac{\alpha\theta}{\pi^2} \int d^3k \frac{1}{k^2 + B_{\pm}^2(k)} \frac{(k \cdot q)}{q^2(q^2 + \theta^2)}. \quad (5.5)$$

El comportamiento de las soluciones en este truncamiento es cualitativamente similar al del sistema completo. El comportamiento crítico de las masas dinámicas no es eliminado por el efecto de la renormalización de la función de onda, como puede ser visto en la Figura 5.7, donde una comparación de $\mu_{\pm}$ y $|\mu_{\pm}|$ entre el resultado completo y el motivado por la teoría de perturbaciones se muestra. El valor crítico θ_c^{pert} del mismo orden de θ_c y los efectos del $A_{\pm}(p) \approx 1$ no son tan significativos.

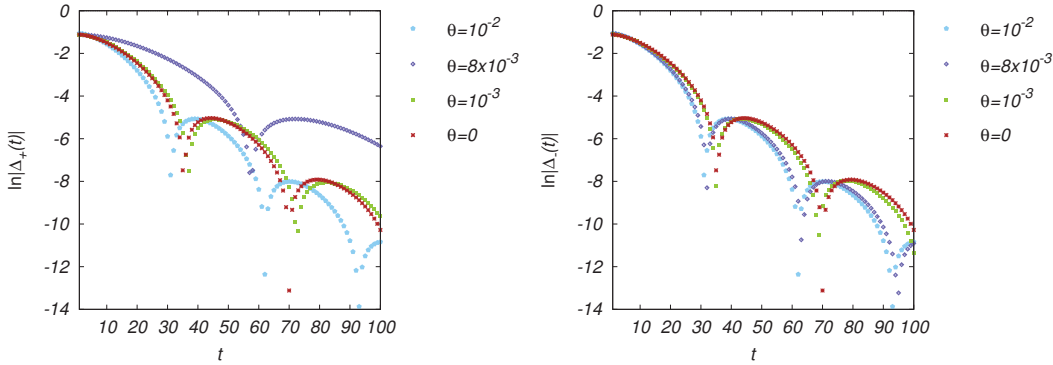


Figura 5.8: Prueba de confinamiento de las funciones de Schwinger promediadas espacialmente.

5.3. Confinamiento

Estudiaremos el caso del confinamiento en el cual veremos hasta donde persiste en presencia de un término de CS. Si una solución a la ESD describe confinamiento se puede probar a través del axioma de positividad de la función de Schwinger promediada espacialmente

$$\Delta_{\pm}(t) = \int d^2x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i(tp_0 + x \cdot p)} \sigma_{\pm}^S(p). \quad (5.6)$$

En nuestro caso, construimos la funciones $\Delta_{\pm}(t)$ insertando las soluciones a la ESD en la expresión antedicha, sobre la cual realizamos una prueba del confinamiento. En la Figura 5.8 graficamos el logaritmo del valor absoluto de cada una de estas funciones. El comportamiento oscilatorio deducido de los picos pronunciados en las Figuras revela que incluso en presencia de un término de CS, hay confinamiento. Este comportamiento corresponde a la masas $m = a \pm ib$ para cada especie, en el cual el ajuste es

$$\Delta_{\pm}(t) \simeq e^{-a_{\pm}t} \cos(b_{\pm}t + \delta_{\pm}). \quad (5.7)$$

Así, el confinamiento se observa en nuestro modelo. Un análisis similar de eso en la ecuación (5.6) puede ver las características de $\sigma_{\pm}^V$, como se hizo en la referencia [57]. Definimos las nuevas funciones de Schwinger promediadas espacialmente, ahora involucrando la parte del vectorial del propagador del fermión, de la forma

$$\Omega_{\pm}(t) = \int d^2x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i(tp_0 + x \cdot p)} \sigma_{\pm}^V(p). \quad (5.8)$$

En la Figura 5.9 presentamos el logaritmo del valor absoluto de $\Omega_{\pm}(t)$; las oscilaciones demuestran el confinamiento. Hacemos un comparación con el ajuste

$$\Omega_{\pm}(t) \simeq C_{\pm} e^{-a_{\pm}t} \cos(b_{\pm}t + \omega_{\pm}). \quad (5.9)$$

Como hemos visto en la aproximación arcoiris al incluir el término de CS siempre tenemos

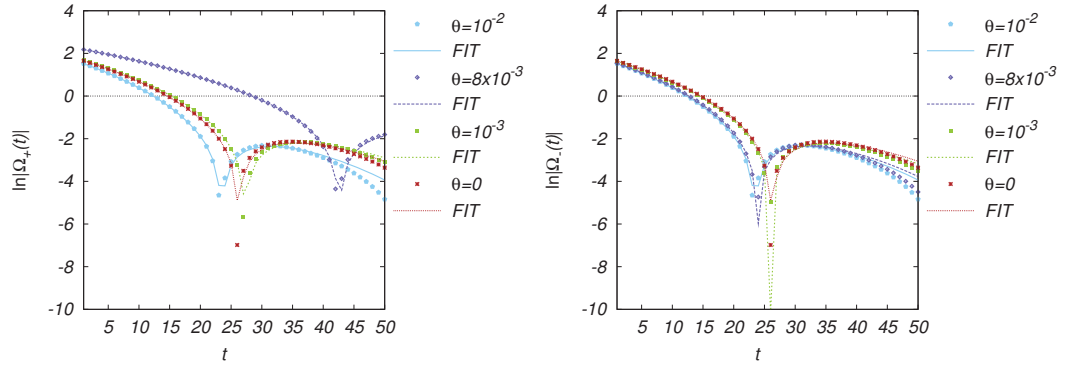


Figura 5.9: Prueba de confinamiento de las funciones de Schwinger promediadas espacialmente involucrando la parte vectorial del propagador del fermión.

confinamiento incluso si la simetría quiral ha sido restaurada. En un sentido, este es el efecto análogo que se observa en quarkonia, que podemos ver en esta Ref. pedagógica [63] y las Ref. [64, 65], donde no hay simetría quiral pero si confinamiento. En la siguiente sección incluiremos efectos de polarización en el vacío en la aproximación $1/N$.

5.4. GDM en la aproximación $1/N$

Consideremos ahora efectos de la polarización del vacío. Consideremos que hay N familias de fermiones, iniciamos con fermiones no masivos considerando a un loop la polarización del vacío del fotón al orden $1/N$; en ausencia del término de CS encontramos que existe un valor crítico $N_c = 32/\pi^2$ para la restauración de la simetría quiral, en la sección 3.2. Ahora, estudiaremos esta aproximación con el término de CS. Definimos nuestro nuevo acomplamiento $\tilde{\alpha} = N/8$, al orden de la expansión $1/N$ incluimos el término de CS. El propagador del fotón en la norma de Landau adquiere la forma [59, 60]

$$\Delta_{\mu\nu}(q) = \frac{q^2 + \tilde{\alpha}|q|}{q^2[(|q| + \tilde{\alpha})^2 + \theta^2]} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) - \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho} q_\rho \theta}{q^2[(|q| + \tilde{\alpha})^2 + \theta^2]}. \quad (5.10)$$

Insertamos este propagador en las ESD para el propagador del fermión, obteniendo un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A_{\pm}(p) &= 1 + \frac{16\tilde{\alpha}}{Np^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sigma_{\pm}^V(k^2) \frac{(k \cdot q)(p \cdot q)(q^2 + \tilde{\alpha}|q|)}{q^4[(|q| + \tilde{\alpha})^2 + \theta^2]} \\ &\mp \frac{16\tilde{\alpha}\theta}{Np^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sigma_{\pm}^S(k^2) \frac{(p \cdot q)}{q^2[(|q| + \tilde{\alpha})^2 + \theta^2]} \\ B_{\pm}(p) &= \frac{16\tilde{\alpha}}{N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sigma_{\pm}^S(k^2) \frac{q^2 + \tilde{\alpha}|q|}{q^2[(|q| + \tilde{\alpha})^2 + \theta^2]} \\ &\mp \frac{16\tilde{\alpha}\theta}{N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sigma_{\pm}^V(k^2) \frac{(k \cdot q)}{q^2[(|q| + \tilde{\alpha})^2 + \theta^2]}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

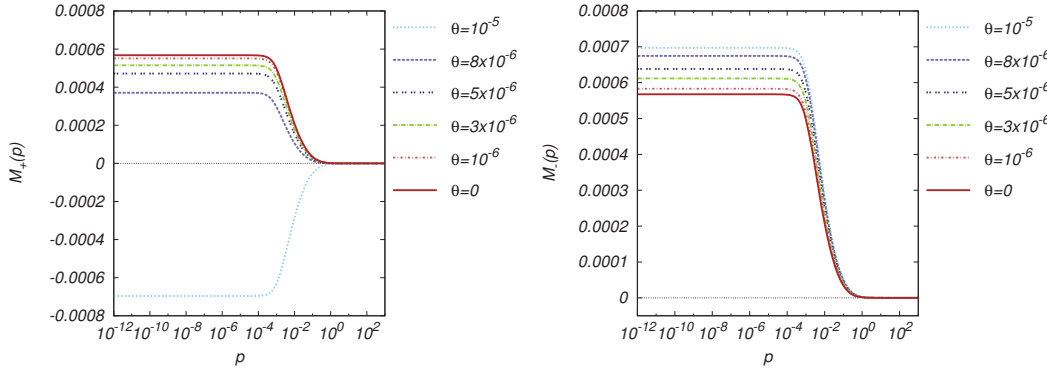


Figura 5.10: Funciones de masa $M_{\pm}(p)$ para $N = 2$ para varios valores del parámetro de Chern-Simons θ . $M_+(p)$ disminuye en la altura $M_-(p)$ cuando incrementa θ . Para $\theta_c \sim 8 \times 10^{-6}$, la meseta de $M_+(p)$ va a valores negativos, mientras que $M_-(p)$ continua incrementado.

para esta aproximación $1/N$ expandemos $A_{\pm} = 1 + O(1/N)$. Solucionamos el sistema de ecuaciones variando los parámetros N y θ . Si fijamos $N < N_c(0)$, donde $N_c(0) = \pi^2/32$ es el valor de N_c sin el término de CS, las soluciones exhiben una discontinuidad en el comportamiento del propagador para el valor crítico θ_c que depende de N . En la Figura 5.10, mostramos las funciones de masa $M_{\pm}(p)$ para diferentes valores de θ y fijamos $N = 2$. Observamos que la altura de $M_-(p)$ aumenta del valor que corresponde a $\theta = 0$, mientras que $M_+(p)$ disminuye. En $\theta_c \simeq 8 \times 10^{-6}$ una discontinuidad ocurre y la altura de $M_+(p)$ es negativa. Este comportamiento es mejor ilustrado en Figura 5.11, donde exhibimos los parámetros de las masas físicas $\mu_{\pm}$ como función de θ para el mismo número de familias. La discontinuidad existe en θ_c , donde $\mu_+ = -\mu_-$ para $\theta_c > \theta$.

Igual que en la aproximación apagada, observamos que a un N fijo existe una especie ligera y una pesada para valores pequeños de θ , y que además existe un valor θ_c arriba del cual la simetría quiral se restaura [59, 60]. Definamos los parámetros que dependen tanto de N como de θ

$$\nu_{\pm} = -\ln \left| \frac{\mu_{\pm}}{\bar{\alpha}} \right|. \quad (5.12)$$

Mostramos en la Figura 5.12 el logaritmo de las masas generadas llamadas ν_+ y ν_- con respecto a θ y N . Podemos observar que para ν_+ la transición de fase de primero orden se lleva a cabo y la curva de criticalidad depende de los parámetros θ y N , por lo que podemos hacer un ajuste numérico mencionado en la Ref. [60]

$$\theta_c \simeq \exp \left[\frac{-A + \delta}{\sqrt{\frac{N_c(0)}{N} - 1}} \right], \quad (5.13)$$

donde e^{δ} representa la amplitud y A el amortiguamiento. Para el caso de ν_- varía suavemente con respecto a N y θ y dejamos de generar masas cuando $N = N_c$ y $\theta_c = 0$ en ambas masas. Cuando las masas son iguales en magnitud $\mu_+ = \mu_- = \mu$ su comportamiento [17]

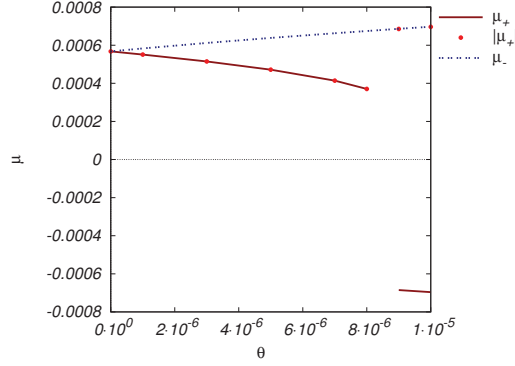


Figura 5.11: $\mu_{\pm}$ como función de θ para $N = 2$. Ambas masas son iguales a $\theta = 0$ y se separan cuando θ incrementa. μ_- llega a ser mas pesado y μ_+ llega a ser mas ligero. A θ_c , μ_+ llega a ser negativo, con la misma magnitud que μ_- .

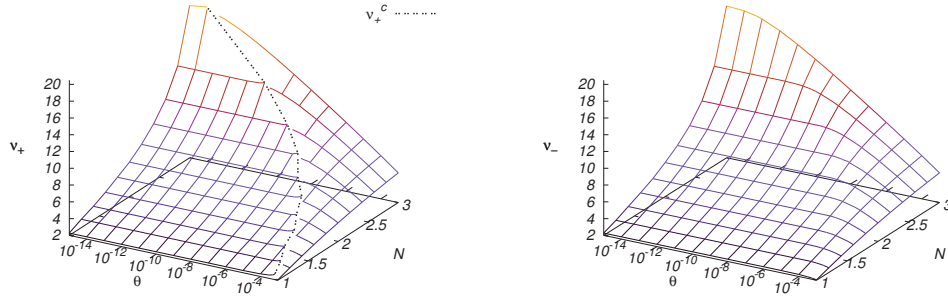


Figura 5.12: ν_+ y ν_- , definidas en ecuación (5.12), como función de N y θ . ν_+ incrementa a lo largo de N . A lo largo de la curva ν_+^c que especifica el valor crítico θ para N , sufre una discontinuidad. ν_- evoluciona suavemente. Diverge en la región donde $N \rightarrow N_c$ para valores pequeños de θ .

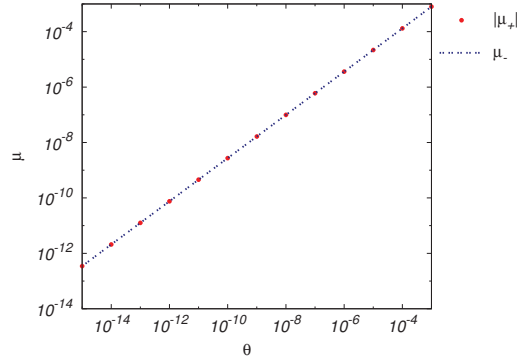


Figura 5.13: $\mu_{\pm}$ como función de θ para $N = 4$. Para estos valores de N , la única contribución a las masas viene de las masas de Haldane. Las masas μ_+ y μ_- tengan la misma magnitud, pero sean opuesto en signo.

de QED3 ordinario, el ajuste numérico es

$$\mu \simeq \tilde{\alpha} \exp \left[\frac{-2\pi + \delta'}{\sqrt{\frac{N_c(0)}{N} - 1}} \right]. \quad (5.14)$$

Por otra parte vemos cuando $N > N_c$ con $\theta \neq 0$ las masas μ_- y $|\mu_+|$ son iguales en magnitud, lo que contribuye al rompimiento de la simetría quiral para la masa μ_e , un ejemplo mostramos en la Figura 5.13 para $N = 4$.

5.5. Confinamiento en la Aproximación $1/N$

En cuanto al confinamiento, en la Figura 5.14 presentamos la prueba realizada a las funciones de Schwinger promediadas espacialmente $\Delta_{\pm}(t)$, que se definen en la ecuación (5.6) para $N = 3$. La falta de los picos nos permiten ajustar a estas funciones de forma exponencial $\Delta_{\pm}(t) = e^{-m_{\pm}t}$, que describe excitaciones estables de las masas $m_{\pm}$ respectivamente, es decir, el deconfinamiento se lleva a cabo. El ajuste numérico que realizamos es de la forma

$$\Delta_{\pm}(t) = \frac{1}{2} \text{sgn}(\mu_{\pm}) e^{-|\mu_{\pm}|t}. \quad (5.15)$$

Los fermiones en este truncamiento son desconfiados, el desconfinamiento con las masas dinámicas es una característica principal de truncamiento $1/N$, puesto que los fermiones en la polarización del vacío son no masivos, como podemos observar para la función $\Delta_-(p)$ siempre es positiva definida para cualquier valor de θ , $\Delta_+(p)$ alrededor $\theta \geq \theta_c$ es negativa definida, porque estas funciones no cambian de signo a medida que $t \rightarrow \infty$ lo cual no viola el axioma de Osterwalder-Schrader de la reflexión de positividad [33], y así los fermiones permanecen desconfiados. Podemos hacer la prueba de confinamiento por medio de la parte vectorial del propagador $\sigma_{\pm}^V$ realizada por medio de las nuevas función de Schwinger, ecuación (5.8). Graficamos numéricamente, Figura 5.15, el valor absoluto de $\Omega_{\pm}(t)$ para

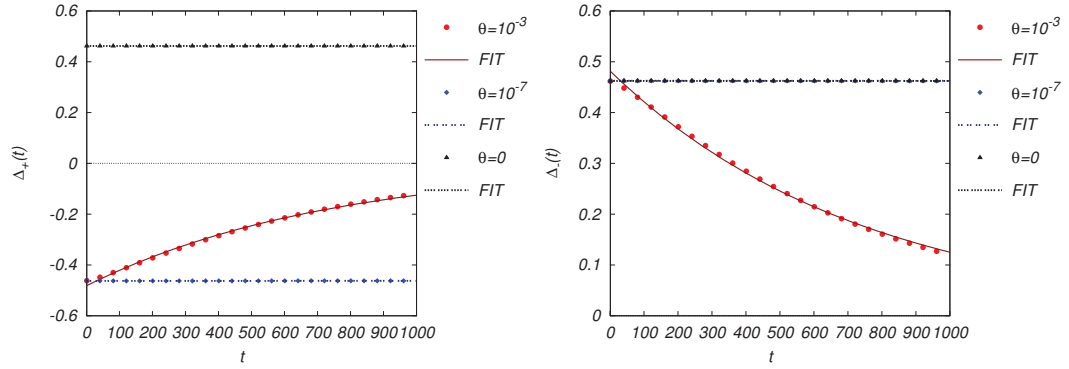


Figura 5.14: Funciones de Schwinger promediadas espacialmente para $N = 3$ y varios valores de θ ajustada de acuerdo a la ecuación (5.15). θ_c , $\Delta_+(t)$ es positiva definida, y se convierte en negativo definido sobre criticidad. $\Delta_-(t)$ es siempre positivo definido. Estas funciones describen los fermiones desconfiados.

$N = 3$ variando el valor de θ , y comparamos nuestros resultados con el ajuste

$$\Omega_{\pm}(t) = \frac{1}{2|\mu_{\pm}|} e^{-|\mu_{\pm}|t}, \quad (5.16)$$

observamos que las funciones $\Omega_{\pm}$ son siempre positiva definido, incluso después se restaura la simetría quiral. Por lo tanto, estos describen los fermiones en esta fase deconfinados.

Como hemos visto en la aproximación $1/N$, comenzamos con fermiones no masivos, y no obtuvimos confinamiento, al incluir el término de CS seguimos sin confinamiento. En el siguiente capítulo estudiaremos el vértice revestido de Bashir-Pennington en QED₃, basándonos en las características de QED₄, para la Aproximación Arcoiris. Compararemos con otros vértices sofisticados, uno de ellos es el vértice Curtis-Pennington, queriendo llegar a la independencia de las observables físicas.

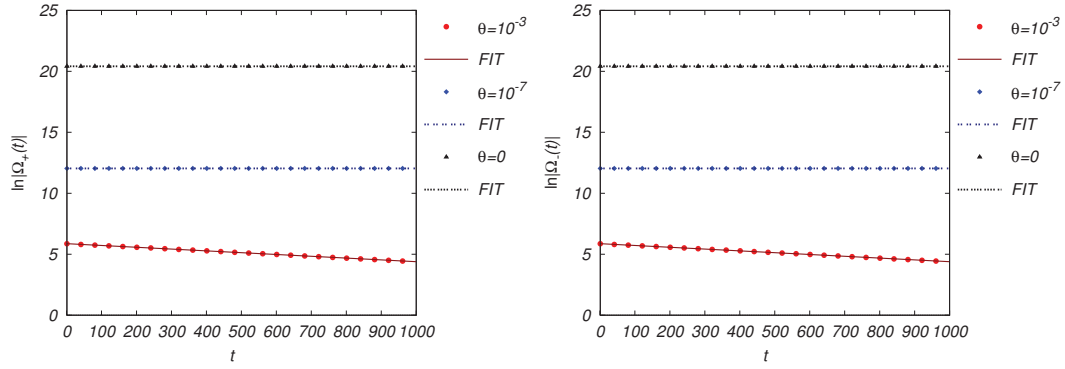


Figura 5.15: Funciones de Schwinger promediadas espacialmente involucrando la parte vectorial del propagador del fermión, ecuación (5.8), para $N = 3$ y varios valores de θ , ajustada a la ecuación (5.16). $\Omega_{\pm}(t)$ es positiva definida, y describen así los fermiones deconfinados.

Capítulo 6

Ruptura de la simetría Quiral y Confinamiento mas allá de la Aproximación Arcoiris.

En este capítulo estudiamos el vértice de Bashir-Pennington en la ecuación de Schwinger-Dyson para el propagador del fermión. Empleamos un ansatz simple para la parte transversal del vértice basándose en las características de QED₄ que reduce la dependencia de norma [21], en comparación incluso con uno de los vértices más sofisticados construidos hasta la fecha, es decir, el vértice Curtis-Pennington [67]. Los resultados de este capítulo se publicaron en la Ref [68].

6.1. El Vértice Fermión-Bosón en QED₃

El vértice completo comenzamos escribiendolo de una manera conveniente, partiendo de las Identidades de Ward-Takahashi (IWT) [44] que relaciona al propagador del fermión con el vértice

$$q_\mu \Gamma^\mu(k, p) = S_F^{-1}(k) - S_F^{-1}(p) . \quad (6.1)$$

Observamos que en el límite cuando $k \longrightarrow p$ esta igualdad se reduce a

$$\Gamma^\mu(p, p) = \frac{\partial}{\partial p_\mu} S_F^{-1}(p). \quad (6.2)$$

Esta última expresión se conoce como la identidad de Ward (IW). La estructura de las IWT para QED nos permite descomponer el vértice fermión-bosón en una parte longitudinal y otra transversal

$$\Gamma^\mu(k, p) = \Gamma_L^\mu(k, p) + \Gamma_T^\mu(k, p) , \quad (6.3)$$

donde tenemos la condición el vértice transversal $q_\mu \Gamma_T^\mu = 0$, lo que nos permite agregar una parte longitudinal del vértice fijado por las IWT. En la literatura existe varios vértices revestidos sofisticados para la parte transversal [21, 69, 70] que son propuestos para mantener la covariancia de norma del truncamiento no perturbativo de las ESD. Adaptaremos

CAPÍTULO 6. RUPTURA DE LA SIMETRÍA QUIRAL Y CONFINAMIENTO MAS ALLÁ DE LA APROXIMACIÓN ARCOIRIS.

6.1. EL VÉRTICE FERMIÓN-BOSÓN EN QED₃

la propuesta de Bashir-Pennington [70] para evitar cualquier dependencia de norma espuria en las cantidades físicas relacionadas a GDM y confinamiento en QED₃.

Si sustituimos en la expresión del propagador del fermión en las IW, se observa que

$$\begin{aligned}\Gamma_L^\mu(p, p) &= \frac{\partial}{\partial p_\mu} S_F^{-1}(p) \\ &= \frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{\not{p} - M(p)}{F(p)} \\ &= \frac{\gamma^\mu}{F(p)} + 2p^\mu \not{p} \frac{\partial}{\partial p^2} \frac{1}{F(p)} - 2p^\mu \frac{\partial}{\partial p^2} \frac{M(p)}{F(p)}.\end{aligned}\quad (6.4)$$

Para el vértice $\Gamma_L^\mu(p, k)$ vemos que debe ser una función simétrica respecto al intercambio de k con p , que se reduce a esta expresión (6.4). Para el caso $k \neq p$ esto se logra siguiendo la propuesta de Ball y Chiu [71]

$$\begin{aligned}\frac{1}{F(p)} &\rightarrow \frac{1}{2} \left[\frac{1}{F(k)} + \frac{1}{F(p)} \right], \\ p^\mu &\rightarrow \frac{1}{2} (k^\mu + p^\mu), \\ \not{p} &\rightarrow \frac{1}{2} (\not{k} + \not{p}), \\ \frac{\partial}{\partial p^2} \frac{1}{F(p)} &\rightarrow \frac{1}{k^2 - p^2} \left[\frac{1}{F(k)} - \frac{1}{F(p)} \right], \\ \frac{\partial}{\partial p^2} \frac{M(p)}{F(p)} &\rightarrow \frac{1}{k^2 - p^2} \left[\frac{M(k)}{F(k)} - \frac{M(p)}{F(p)} \right]\end{aligned}\quad (6.5)$$

Así, escribimos la parte longitudinal del vértice

$$\begin{aligned}\Gamma_L^\mu(k, p) &= \frac{\gamma^\mu}{2} \left[\frac{1}{F(k)} + \frac{1}{F(p)} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{(\not{k} + \not{p})(k + p)^\mu}{(k^2 - p^2)} \left[\frac{1}{F(k)} - \frac{1}{F(p)} \right] \\ &- \frac{(k + p)^\mu}{(k^2 - p^2)} \left[\frac{M(k)}{F(k)} - \frac{M(p)}{F(p)} \right], \\ &\equiv a(k^2, p^2) \gamma^\mu + b(k^2, p^2) (\not{k} + \not{p})(k + p)^\mu \\ &+ c(k^2, p^2) (k + p)^\mu.\end{aligned}$$

Esta elección es libre de singularidades cinemáticas (en el límite $k^2 \rightarrow p^2$). Ahora escribimos la parte transversal del vértice $\Gamma_T^\mu(k, p)$, en término de los ocho vectores restantes, con la condición $q_\mu T_i^\mu = 0$ para $i = 1, 2, \dots, 8$ como

$$\Gamma_T^\mu(k, p) = \sum_{i=1}^8 \tau_i(k^2, p^2, q^2) T_i^\mu(k, p). \quad (6.6)$$

Elegimos un conjunto de tensores independientes el cual Ball y Chiu propusieron una base (en el caso de QED₄) para cada coeficiente $\tau_i(k, p)$ obtenido mediante el cálculo

CAPÍTULO 6. RUPTURA DE LA SIMETRÍA QUIRAL Y CONFINAMIENTO MAS ALLÁ DE LA APROXIMACIÓN ARCOIRIS.

6.2. NUESTRO MODELO

perturbativo de primer orden en la norma de Feynman $\xi = 1$, que no presenta dichas singularidades

$$\begin{aligned}
T_1^\mu &= p^\mu(k \cdot q) - k^\mu(p \cdot q) \\
T_2^\mu &= [p^\mu(k \cdot q) - k^\mu(p \cdot q)](k + p) \\
T_3^\mu &= q^2 \gamma^\mu - q^\mu \not{q} \\
T_4^\mu &= [p^\mu(k \cdot q) - k^\mu(p \cdot q)] k^\lambda p^\nu \sigma_{\lambda\nu} \\
T_5^\mu &= q_\nu \sigma^{\nu\mu} \\
T_6^\mu &= \gamma^\mu(p^2 - k^2) + (p + k)^\mu \not{q} \\
T_7^\mu &= \frac{1}{2}(p^2 - k^2) [\gamma^\mu(\not{p} + \not{k}) - p^\mu - k^\mu] \\
&\quad + (k + p)^\mu k^\lambda p^\nu \sigma_{\lambda\nu} \\
T_8^\mu &= -\gamma^\mu k^\nu p^\lambda \sigma_{\nu\lambda} + k^\mu \not{p} - p^\mu \not{k},
\end{aligned}$$

con

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \quad (6.7)$$

La independencia de norma de las observables físicas deben ser el objetivo final de los estudios perturbativos de las ESD. Si alguna propuesta de la forma no perturbativa del vértice fermión-bosón está destinada a ser confiable, sería, sin duda llevar a la norma independiente las predicciones para las observables físicas.

6.2. Nuestro modelo

El vértice de Bashir-Pennington [21, 70] que fue construido en QED₄ para el estudio de la GDM a partir de los coeficientes transversales efectivos τ_i^{eff} en dimensiones arbitrarias. La idea es partir de la ecuación de Gap en el límite quiral

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F(p^2)} &= 1 - \frac{e^2}{p^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{F(k^2)}{k^2 q^2} \\
&\quad \left\{ a(k^2, p^2) \frac{1}{q^2} [(1-d)q^2(k \cdot p) - 2\Delta^2] \right. \\
&\quad + b(k^2, p^2) \frac{1}{q^2} [-2\Delta^2(k^2 + p^2)] \\
&\quad - \frac{\xi}{F(p^2)} \frac{p^2}{q^2} (k^2 - k \cdot p) \\
&\quad + \tau_2(k^2, p^2, q^2) [-\Delta^2(k^2 + p^2)] \\
&\quad + \tau_3(k^2, p^2, q^2) [(d-1)q^2(k \cdot p) + 2\Delta^2] \\
&\quad - \tau_6(k^2, p^2, q^2) [(d-1)(k^2 - p^2)k \cdot p] \\
&\quad \left. - \tau_8(k^2, p^2, q^2) [\Delta^2(d-2)] \right\}, \quad (6.8)
\end{aligned}$$

donde $\Delta^2 = (k \cdot p)^2 - k^2 p^2$, para fermiones no masivos. De esta manera el vértice de Bashir-Pennington se escribe así

$$\Gamma_{BP}^\mu(k, p) = \Gamma_{BC}^\mu(k, p) + \Gamma_{BP}^{\mu T}(k, p), \quad (6.10)$$

**CAPÍTULO 6. RUPTURA DE LA SIMETRÍA QUIRAL Y
CONFINAMIENTO MAS ALLÁ DE LA APROXIMACIÓN ARCOIRIS.**

6.2. NUESTRO MODELO

$$\Gamma_{BP}^{\mu T}(k, p) = \sum_{i=2,3,6,8} \tau_i^{\text{eff}}(k^2, p^2) T_i^\mu(k, p),$$

donde

$$\begin{aligned} \tau_2^{\text{eff}}(k^2, p^2) &= \frac{a_2^d}{(k^4 - p^4)} \left[\frac{1}{F(k)} - \frac{1}{F(p)} \right], \\ \tau_3^{\text{eff}}(k^2, p^2) &= \frac{a_3^d}{(k^2 - p^2)} \left[\frac{1}{F(k)} - \frac{1}{F(p)} \right], \\ \tau_6^{\text{eff}}(k^2, p^2) &= \frac{a_6^d(k^2 + p^2)}{(k^2 - p^2)^2} \left[\frac{1}{F(k)} - \frac{1}{F(p)} \right], \\ \tau_8^{\text{eff}}(k^2, p^2) &= \frac{a_8^d}{(k^2 - p^2)} \left[\frac{1}{F(k)} - \frac{1}{F(p)} \right], \end{aligned} \quad (6.11)$$

en término de los coeficientes transversales efectivos τ_i^{eff} . Estos τ_i^{eff} están relacionados con los τ_i completos de la forma

$$\begin{aligned} \tau_2^{\text{eff}} &= \int d\psi \frac{\sin^{d-2} \psi}{q^2} \tau_2[-\Delta^2], \\ \tau_3^{\text{eff}} &= \int d\psi \frac{\sin^{d-2} \psi}{q^2} \tau_3[2\Delta^2 + (d-1)(k \cdot p)q^2], \\ \tau_6^{\text{eff}} &= \int d\psi \frac{\sin^{d-2} \psi}{q^2} \tau_6[k \cdot p], \\ \tau_8^{\text{eff}} &= \int d\psi \frac{\sin^{d-2} \psi}{q^2} \tau_8[\Delta^2]. \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$(6.13)$$

La forma más general que no supone independencia del ángulo entre los momentos entrantes y salientes de los τ_i^{eff} se formuló en la Ref [72]. Postulamos que los parámetros que definen este vértice van a cambiar conforme lo extendamos a dimensiones arbitrarias. En el espacio de 4 dimenseiones, los parámetros a_i^4 son limitados por la exigencia de que el propagador del fermión sin masa sea multiplicativamente renormalizable, lo que impona una restricción entre los coeficientes de la siguiente manera:

$$1 + a_2^4 + 2a_3^4 + 2a_8^4 - 2a_6^4 = 0. \quad (6.14)$$

A partir del cálculo perturbativo a un lazo de la parte transversal del vértice fermión-bosón en una norma covariante arbitraria [71], vemos que

$$\Gamma_T^\mu(k, p)^{k^2 \gg p^2} = -\frac{\alpha \xi}{8\pi} \ln \frac{k^2}{p^2} \left[\gamma^\mu - \frac{k^\mu \not{k}}{k^2} \right]. \quad (6.15)$$

Esta condición perturbativa impone las siguientes limitaciones en a_i^4 :

$$a_3^4 + a_6^4 = \frac{1}{2}, \quad (6.16)$$

**CAPÍTULO 6. RUPTURA DE LA SIMETRÍA QUIRAL Y
CONFINAMIENTO MAS ALLÁ DE LA APROXIMACIÓN ARCOIRIS.**
6.3. INDEPENDENCIA DE NORMA EN QED₃

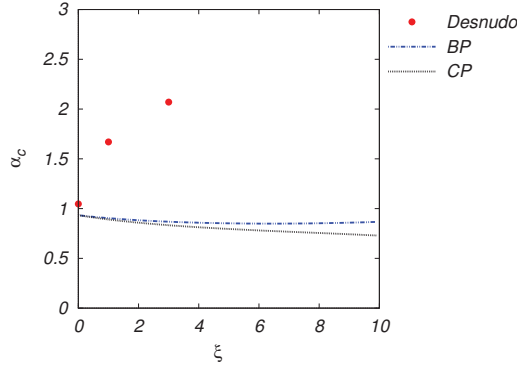


Figura 6.1: Acomplamiento crítico como función del parámetro de norma, usando el vértice Bashir Pennington (BP), marcando una mejora con la independencia de norma en comparación con el vértice desnudo y Curtis-Pennington (CP).

donde la condición $a_6^4 = 1/2$ y $a_3 = 0$ corresponde al vértice de Curtis-Pennington, y para el vértice de Bashir-Pennington escogemos

$$a_6^4 = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad a_2^4 = \frac{11}{4}. \quad (6.17)$$

Con estos parámetros observamos que el valor crítico del acomplamiento de las masas que se generan dinámicamente encontradas para el vértice Bashir-Pennington minimiza la dependencia de norma para diferentes valores de normas ξ en comparación con el vértice de Bashir-Pennington y el vértice desnudo, esto lo se muestra en la Figura 6.1.

6.3. Independencia de Norma en QED₃

En QED₃, el acoplamiento tiene dimensiones de masa. Como resultado no existe un valor crítico de acoplamiento para la GDM. Si esto sucede en un valor de acoplamiento, se lleva a cabo en cualquier otro valor también. Las observables físicas relacionados con la GDM son el condensado quiral y la masas físicas de los fermiones, y además debe haber señales de de confinamiento. Consideramos este vértice de Bashir-Pennigton, y tratamos de ver si sería suficiente para alcanzar la invarianza de norma en QED₃. En este caso el cálculo perturbativo a un lazo de la parte transversal para el vértice fermión-bosón en una norma covariante arbitraria es de la forma

$$\Gamma_T^\mu(k, p)^{k^2 > p^2} = -\frac{\alpha \xi \pi}{8p} \left[\gamma^\mu - \frac{k^\mu \not{k}}{k^2} \right], \quad (6.18)$$

al igual que en 4 dimensiones tenemos

$$a_3^3 + a_6^3 = \frac{1}{2}, \quad (6.19)$$

que es similar para 3 dimensiones. A continuación nos dedicamos a llevar a cabo un estudio de GDM y el confinamiento. Resolvemos la ecuación de brecha en QED₃ mediante el de

**CAPÍTULO 6. RUPTURA DE LA SIMETRÍA QUIRAL Y
CONFINAMIENTO MAS ALLÁ DE LA APROXIMACIÓN ARCOIRIS.**
6.3. INDEPENDENCIA DE NORMA EN QED₃

la misma forma de vértice, como para QED₄. Esta ecuación es equivalente al sistema

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F(p^2)} &= 1 + \frac{\alpha}{2\pi^2 p^2} \int d^3k \frac{F(k^2)}{k^2 + M(p^2)} \frac{1}{q^2} \\
&\quad \left\{ a(k^2, p^2) \frac{1}{q^2} [-2(k \cdot p)^2 + (2 - \xi)(k^2 + p^2)k \cdot p - 2(1 - \xi)k^2 p^2] \right. \\
&\quad - b(k^2, p^2) [(k^2 + p^2)k \cdot p + 2k^2 p^2 - (1 - \xi)(k^2 - p^2)^2 (k \cdot p/q^2)] \\
&\quad - c(k^2, p^2) (M(k^2)/q^2) [2\Delta^2 - \xi p \cdot q (k^2 - p^2)] \\
&\quad + \tau_2(k^2, p^2, q^2) [\Delta^2 (k^2 + p^2)] \\
&\quad - \tau_3(k^2, p^2, q^2) 2[q^2 (k \cdot p) + \Delta^2] \\
&\quad + \tau_6(k^2, p^2, q^2) 2[(k^2 - p^2)k \cdot p] \\
&\quad \left. + \tau_8(k^2, p^2, q^2) [\Delta^2], \right\} \\
\frac{M(p^2)}{F(p^2)} &= \frac{\alpha}{2\pi^2} \int d^3k \frac{F(k^2)}{k^2 + M(p^2)} \frac{1}{q^2} \\
&\quad \left\{ a(k^2, p^2) M(k^2) [2 + \xi] \right. \\
&\quad + b(k^2, p^2) (M(k^2)/q^2) [-4\Delta^2 + \xi(k^2 - p^2)^2] \\
&\quad - c(k^2, p^2) (1/q^2) [-2\Delta^2 + \xi(k^2 - p^2)k \cdot q] \\
&\quad + \tau_2(k^2, p^2) M(k^2) [-2\Delta^2] \\
&\quad - \tau_3(k^2, p^2) M(k^2) [-2q^2] \\
&\quad + \tau_6(k^2, p^2, q^2) M(k^2) [2(k^2 - p^2)] \\
&\quad \left. + \tau_8(k^2, p^2, q^2) [0] \right\}.
\end{aligned} \tag{6.20}$$

encontrando en sí la Función de masa $M(p)$ y la renormalización de la función de onda $F(p)$ en QED₃. Ahora incluiremos la parte transversal a nuestro vértice con los τ_i correspondientes.

6.3.1. GDM

Mostramos las soluciones numéricas para la función de masa $M(p)$ y renormalización de la función de onda $F(p)$ en la Figura (6.2), seleccionamos el valor de $a_2^3 = 2,75$ y definimos nuestro vértice fijando a_6^3 para la ecuación anterior.

Tenemos la independencia de norma para el condensado de nuestro vértice haciendo una comparación con la cantidad obtenida para el vértice Curtis-Pennington así como con el vértice de Burden-Roberts, dado en la Figura 6.3. Nuestro punto de partida es explorar el espacio de parámetros a_2/a_6 en la norma de Landau. Definimos la diferencia de norma del condensado en comparación con la Norma de Landau, sobre el plano a_2/a_6 es

$$\delta_\xi = \langle \bar{\psi}\psi \rangle_\xi - \langle \bar{\psi}\psi \rangle_\xi \simeq 0. \tag{6.21}$$

Las superficies en distintas normas y la correspondiente a la norma de Landau se intersecta a lo largo de la línea de parámetros dado por

$$a_2^3 = 3,81 - 7,6 a_6^3. \tag{6.22}$$

**CAPÍTULO 6. RUPTURA DE LA SIMETRÍA QUIRAL Y
CONFINAMIENTO MAS ALLÁ DE LA APROXIMACIÓN ARCOIRIS.
6.3. INDEPENDENCIA DE NORMA EN QED₃**

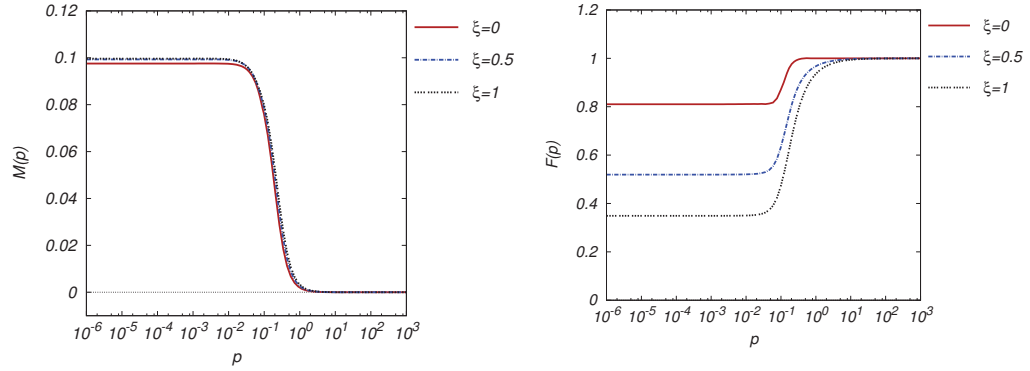


Figura 6.2: Función de masa $M(p)$ y renormalización de la función de onda $F(p)$ en diferentes normas covariantes, seleccionando el valor $a_2^3 = 2,75$ que define nuestro vértice fijando a_6^3 en la ecuación (6.22)

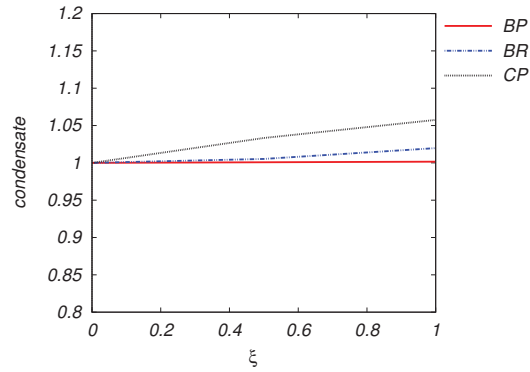


Figura 6.3: Dependencia de norma para el condensado quiral para QED₃, comparando nuestro vértice con el de Curtis-Pennington y Burden-Roberts.

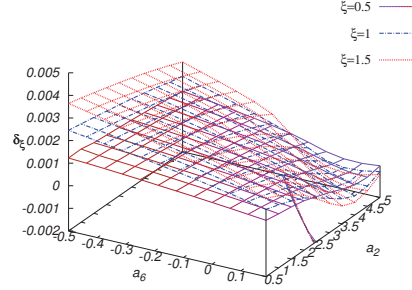


Figura 6.4: Diferencia de norma del condensado comparado con la norma de Landau, sobre el plano a_2/a_6 ecuación (6.1). El contorno de la independencia de norma para el condensado a lo largo de la línea de la ecuación (6.22)

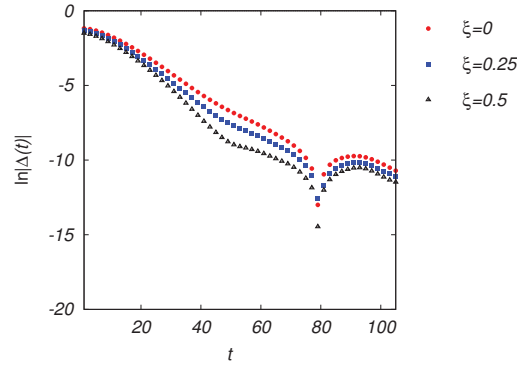


Figura 6.5: Función de Schwinger promediada espacialmente en diferentes normas

Esta ecuación lineal nos permite minimizar la dependencia de norma para el condensado como se muestra en la Figura 6.4

6.4. Confinamiento

Definimos nuevamente

$$\Delta(t) = \int d^2x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot x} \sigma_s(p^2) , \quad (6.23)$$

Graficamos la función de Schwinger promediada espacialmente en diferentes normas, en la Figura (6.5), dando oscilaciones periódicas, que es señal de confinamiento para diferentes normas y vemos como los picos coinciden, por lo tanto tenemos independencia de norma. Es la primera vez que se estudia el confinamiento con la parte transversal del vértice. Una visión alternativa de confinamiento se deriva del hecho que cualquier función con un punto

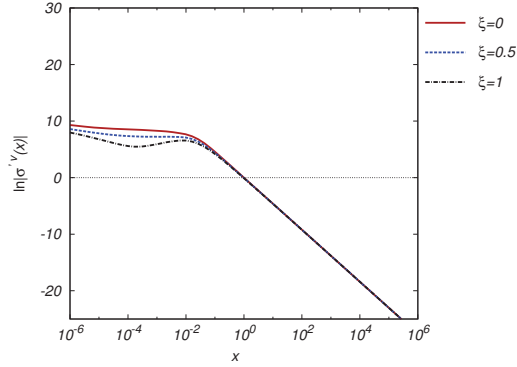


Figura 6.6: Primera derivada σ_v en diferentes normas

de inflexión debe violar el axioma de reflexión de positividad, $x = p^2$

$$\left. \frac{d^2}{dx^2} \sigma_v(x) \right|_{x=x_c} = 0, \quad (6.24)$$

En la Figura (6.6) graficamos el logaritmo de la primera derivada de $\sigma_v(x)$ en diferentes normas. Observamos que todas estas curvas desarrollan un máximo en el mismo punto x_c , que a su vez significa que hay confinamiento, y el parámetro de orden correspondiente es independiente de la elección de la norma covariante.

Demostramos que una simple forma del vértice Bashir-Pennington induce la independencia de norma para la GDM y confinamiento en QED₃ escogiendo los parámetros adecuados, mejorando en sí con los vértices más sofisticados que se encuentran en la literatura.

Capítulo 7

Conclusiones

Para entender la naturaleza del espectro hadrónico, es necesario entender algunos aspectos de generación dinámica de masas y confinamiento en teorías de interacción fuerte. En modelos del tipo NJL en (3+1) y (2+1) dimensiones, uno puede generar masas dinámicamente siempre y cuando el gluón adquiera una masa crítica, o equivalentemente, la interacción sea suficientemente fuerte. Notablemente, las hipótesis detrás del truncamiento de las ESD pueden hacer que GDM y confinamiento no necesariamente aparezcan al mismo tiempo, de modo que uno debe ser cuidadoso en plantear ansätze correctos para las funciones de Green en la ecuación de brecha. Ya que en QCD estos ansätze son en principio muy involucrados, llevamos a cabo nuestros estudios en una teoría más simple.

Elegimos trabajar en QED_3 por que es una teoría más simple pero que exhibe estos fenómenos no perturbativos. Además de ser un modelo de juguete de QCD, esta teoría ha tenido bastas aplicaciones en la física de la materia condensada. QED_3 posee una riqueza única que no puede encontrarse en otras dimensiones espacio-temporales. En el Capítulo 2 estudiamos en detalle las peculiaridades de los Lagrangianos fermiónicos y fotónicos en (2+1) dimensiones, particularmente respecto a las simetrías discretas y los términos de masa que pueden considerarse en la acción correspondiente.

Hemos estudiado la GDM y confinamiento en QED_3 , resolviendo numéricamente las ESD, truncándolas a nivel no perturbativo. Recordamos los truncamientos clásicos de las ESD que nos permiten visualizar los aspectos básicos de GDM y confinamiento en este modelo, partiendo del vértice desnudo. En la teoría apagada en la norma de Landau obtuvimos confinamiento, de acuerdo a lo esperado de la forma asintótica del potencial electrostático. Incluimos efectos de la polarización en el vacío en la aproximación $1/N$ y generamos masas de manera dinámica incrementando el número de familias del modelo hasta un $N_c = 32/\pi^2$ [17]; en este caso no tuvimos confinamiento tal como esperábamos. El truncamiento no perturbativo de las ESD debe mantener la covariancia de norma de la teoría. Esto se logra sólo si se conoce el vértice completo lo que es una tarea titánica. Las transformaciones LKF vienen al rescate. Dichas transformaciones garantizan la covariancia del truncamiento y la independencia de norma de las observables físicas, como vimos en el caso explícito del condensado quiral. Al incorporar las transformaciones LKF en estudios de ESD garantizaron la covariancia de norma en el truncamiento. Los resultados del Capítulo 3 fueron publicados en las Ref [18, 45, 46].

Las transformaciones LKF contienen valiosa información no perturbativa del propa-

CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES

gador del fermión incluso comenzando de su expresión a nivel árbol. En el Capítulo 4 comparamos los resultados obtenidos a través de LKF en el régimen de acoplamiento débil con los perturbativos y vimos que coinciden hasta un término independiente del parámetro de norma, lo cual se espera de la estructura de dichas transformaciones. Cabe enfatizar que contrario a la teoría ordinaria, se generan masas de manera dinámica pero en teoría de perturbaciones cuando incluimos el término de Chern-Simons [52].

Estudiamos cómo se modifica la GDM por el término de Chern-Simons comparando con el caso de QED₃ ordinario en el Capítulo 5. Analizamos numéricamente las soluciones a las ESD para el propagador del fermión con un parámetro de norma fijo, correspondiente a la norma de Landau con un acoplamiento constante, pero incorporando la masa topológica para el fotón. El término de Chern-Simons que induce masas topológicas a los fotones, genera también masas no perturbativamente a los fermiones. Se observa que este término rompe la degeneración de masas de los fermiones reducibles al aumentar la masa del fotón. Conduce a la restauración de simetría quiral tanto en la teoría apagada como incluyendo efectos de polarización en el vacío en la aproximación $1/N$ en una transición de fase de primer orden. Por otro lado, en la teoría apagada tenemos confinamiento antes y después de la restauración de la simetría quiral, lo que se observa como el análogo a la fase de quarkonia de QCD a temperatura y densidad finitas. En la teoría no apagada no tenemos confinamiento porque comenzamos con fermiones no masivos dentro de los loops. Esto quiere decir que el efecto de la masa topológica del fotón no cambia el comportamiento asintótico del potencial electrostático de la teoría.

Por otro lado, demostramos en el capítulo 6 que una simple forma del vértice induce la independencia de norma para la GDM y confinamiento en QED₃ ordinaria escogiendo los parámetros adecuados. Estos resultados fueron reportados en las referencias [68]. El vértice Bashir-Pennington fue construido explícitamente en QED₄ para cancelar cualquier dependencia de norma espúria de las observables físicas asociadas a GDM en dicha teoría. Adaptando los parámetros de dicho modelo al caso de QED₃, la propuesta hecha en Ref. [68] induce a la independencia de norma en QED₃ para los parámetros $a_2 = 3,81 - 7,6a_6$ para el condensado. Comparamos explícitamente con las propuestas anteriores, como el vértice Curtis-Pennington [67] (explícitamente en 4 dimensiones) así como el vértice [73] Burden-Roberts (construido en 3 dimensiones). Nuestra construcción ofrece una notable mejora respecto a la dependencia de norma del condensado de QED₃, pero además lo hace para los parámetros asociados con el confinamiento en la teoría. Una extensión natural es incluir el término de Chern-Simons con nuestra propuesta para el vértice.

Para el futuro, planeamos extender nuestro trabajo a Temperatura y Densidad finita para explorar similitudes y diferencias del efecto del término de Chern-Simons con quarkonia. Otras extensiones incluyen aplicaciones en la física de Materia Condensada, particularmente superconductividad de alta T_c y grafeno, adicionando los efectos de un campo magnético.

Bibliografía

- [1] Craig D. Roberts and Anthony G. Williams, Prog.Part.Nucl.Phys.33:477-575,(1994).
- [2] R. Pisarski, Phys. Rev. D44, 1866 (1991).
- [3] F. Wilczek “The Lightness of Being: Mass, Ether, and the Unification of Force”
- [4] K. Shimizu, Prog. Theor. Phys. 74, 610 (1985)
A. Bashir y Ma. de Jesus Anguiano Galicia, Few Body Systems 37, 71 (2005).
Ma. de Jesus Anguiano Galicia, Tesis de Licenciatura, FCFM-UMSNH (2004).
Ma. de Jesus Anguiano Galicia, Tesis de Maestría, IFM-UMSNH (2007).
- [5] M. Franz and Z. Tesanovic, Phys. Rev. Lett. 87, 257003 (2001).
- [6] M. Franz, Z. Tesanovic, and O. Vafek, Phys. Rev. B 66, 054535 (2002).
- [7] Z. Tesanovic, O. Vafek, and M. Franz, Phys. Rev. B 65, 180511 (2002).
- [8] I. F. Herbut, Phys. Rev. B 66, 094504 (2002).
- [9] I. O. Thomas and S. Hands, Phys. Rev. B 75, 134516 (2007)
- [10] A. Raya y E. Reyes, Jour. Phys. A 41, 355401 (2008).
- [11] Patrick A. Lee, Naoto Nagaosa, y Xiao-Gang Wen, arXiv:cond-mat/0410445v1 [cond-mat.str-el] (2004).
- [12] R. Dillenschneider and J. Richert, Phys. Rev. B 74, 144404 (2006).
- [13] C.L. Henley, Ann. Rev. Cond. Mat. Phys. 1, 179 (2010).
- [14] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S.V. Morozov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I.V. Grigorieva, S.V. Dubonos, and A. A. Firsov, Nature (London) 438, 197 (2005).
- [15] V. P. Gusynin, S. G. Sharapov, and J. P. Carbotte, Int. J. Mod. Phys. B 21, 4611 (2007).
- [16] Riazuddin, arXiv:1105.5956.
- [17] T. Appelquist, M. J. Bowick, E. Cohler y L. C. R. Wijewardhana, Phys. Rev. Lett. 55, 1715 (1985).
T. Appelquist, M. J. Bowick, D. Karabali y L. C. R. Wijewardhana, Phys. Rev. D33, 3704 (1986).
T. Appelquist, D. Nash y L. C. R. Wijewardhana, Phys. Rev. Lett. 60, 2575 (1988).

- [18] A. Bashir, S. Sánchez, AIP Conf. Proc. CP1026, 170 (2008).
- [19] Y. Nambu y G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122, 345 (1961); Phys. Rev. 124, 246 (1961).
- [20] L. D. Landau e I. M. Khalatnikov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 29, 89 (1956).
 L. D. Landau e I. M. Khalatnikov, Sov. Phys. JETP 2, 69 (1956).
 E. S. Fradkin, Sov. Phys. JETP 2, 361 (1956).
 K. Johnson y B. Zumino, Phys. Rev. Lett. 3, 351 (1959).
 B. Zumino, J. Math. Phys. 1, 1 (1960).
 S. Okubo, Nouvo Cimento 15, 949 (1960).
 I. Białynicki-Birula, Nouvo Cimento 17, 951 (1960).
 H. Sonoda, Phys. Lett. B499, 253 (2001).
- [21] A. Bashir Tesis Doctoral, Universidad de Durham (1995).
 A. Huet, Tesis de Licenciatura, FCFM-UMSNH (2001).
 A. Huet, Tesis de Maestría, IFM-UMSNH (2003).
 A. Raya, Tesis Doctoral IFM-UMSNH (2003).
- [22] S. L. Glashow, Ph. D. Thesis. Harvard University (1958).
 S. L. Glashow, Nucl. Phys. 22, 579 (1961).
- [23] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 19, 1264 (1967).
- [24] A. Salam. en Elementary Particle physics (Nobel Symp No. 8)(Ed. N. Svartholm).
 Almquis and Wilsell, Stockholm (1968)
- [25] S. L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, Phys. Rev. D2, 1285 (1970)
- [26] F. J. Ynduráin, The theory of quarks and gluon interactions (Springer- Verlag,
 Heilderberg, (1999).
- [27] P. W. Higgs, Phys. Lett. 12, 132 (1964).
 P. W. Higgs, Phys. Rev. Lett. 13, 508 (1964).
 P. W. Higgs, Phys. Rev. 145, 1156 (1966).
 T. W. B. Kibble, Phys. Rev. 155, 1554 (1967).
- [28] Kei Ichi Kondo, Phys. Rev. D 57, 7467-7487 (1998)
- [29] F. Halzen y A. D. Martin «Quarks and Leptons: An introductory Course in Modern
 Particle Physics» ed. John Wiley Sons Inc. (1984) ISBN 0-471-88741-2
- [30] J. S. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sc. 37, 452 (1951).
 F. J. Dyson, Phys. Rev. 75, 1736 (1949).
- [31] S. Aoki, et. al, para la colaboración CP-PACS, Phys. Rev. D67, 034503 (2003)
- [32] L. Chang, Y-X Liu, M.S. Bhagwat, C.D. Roberts and S.V. Wright, Phys. Rev. C75
 015201 (2007).
- [33] K. Osterwalder and R. Schrader, Commun. Math. Phys. 31, 83 (1973) ; 42, 281 1975.

- [34] R. Alkofer, W. Detmold, C. S. Fischer, y P. Maris, Phys. Rev. D 70, 014014 (2004).
- [35] D. Ebert, T. Feldmann, and H. Reinhardt, Phys. Lett. B388, 154 (1996).
- [36] L. X. Gutierrez-Guerrero, A. Bashir, I. C. Cloet, and C. D. Roberts, (2010)
- [37] Lasinio, G. Y Marchetti, F. Preprint, hep-th/9906014.1999.
- [38] F.D.M Haldane, Model of a Quantum Hall Effect without Landau Levels: Condensed-Matter Realization of the "parity Anomaly", Phys. Rev. Lett. 61,2015 (1988).
- [39] K. Shimizu, Prog. Theor. Phys. 74 610 (1985).
- [40] A. Bashir y Ma. de J. Anguiano Galicia, Few Body 37, 71 (2005).
- [41] S. Coleman y B. Hill, No more corrections to the topological mass term in QED3 , Phys. Lett. B159, 184 (1985).
- [42] A. Khare, Fractional Statistics and Quantum Theory 2a Edici on. World Scientific, (2005). ISBN 981-256-160-9.
- [43] Burden, C.J. y Robert C.D., Pgys. Rev 44, 540 (1991)
- [44] J. C. Ward, Phys. Rev. 78, 182 (1950).
E. S. Fradkin, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 29, 258 (1955).
E. S. Fradkin, Sov. Phys. JETP 2, 361 (1956).
H. S. Green, Procc. Phys. Soc. (London) A66, 873 (1953).
Y. Takahashi, Nouvo Cimento 6, 371 (1957).
- [45] A. Bashir, A. Raya y S. Sánchez, AIP Conf. Proc. CP1116, 461 (2009).
- [46] S. Sanchez, Tesis Maestría IFM-UMSNH (2007).
- [47] A. Bashir, A. Huet y A. Raya. Phys. Rev. D66, 025029 (2002).
- [48] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B75, 461 (1974).
- [49] Adnan Bashir, Few-Body Syst. 41 185 (2007).
- [50] Landau L D and Khalatnikov I M 1956 Zh. Eksp. Teor. Fiz. 29 89
Landau L D and Khalatnikov I M 1956 Sov. Phys.-JETP 2 69
- [51] A. Bashir and A. Raya, Gauge Independent Chiral Condensate in QED3 hep-ph/0511291.
- [52] A. Bashir A, A. Raya. y S. Sánchez, J. Phys. A. 41, 505401 (2008).
- [53] Bashir A 2000 Phys. Lett. B 491 280
- [54] Bashir A and Raya A 2002 Phys. Rev. D 66 105005

- [55] Bashir A and Raya A 2001 *Phys. Rev. D* **64** 105001
- [56] Raya A and Reyes E 2008 *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** 355401
- [57] C.P. Hofmann, A. Raya and S. Sánchez Madrigal 2010 *Phys. Rev. D* **82** 096011
- [58] C. Hofmann, A. Raya y S. Sánchez, *J. Phys. Conf. Ser.* **287**, 012028 (2011).
- [59] K.-I. Kondo and P. Maris 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 18
- [60] K.-I. Kondo and P. Maris 1995 *Phys. Rev. D* **52** 1212
- [61] A. Bashir and A. Raya, *Few Body Syst.* **41**, 185 (2007).
- [62] C.D. Roberts and A. G. Williams, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **33**, 477 (1994).
- [63] Larry McLerran, arXiv:1105.4103v1 [hep-ph] 20 May 2011.
- [64] A. Andronic, D. Blaschke, P. Braun-Munzinger, J. Cleymans, K. Fukushima, L.D. McLerran, H. Oeschler, R.D. Pisarski, K. Redlich, C. Sasaki, H. Satz, J. Stachel, *Nucl.Phys. A837* (2010) 65-86, e-Print: arXiv:0911.4806 [hep-ph]
- [65] Larry McLerran, Robert D. Pisarski, *Nucl.Phys.A796:83-100,2007*, arXiv:0706.2191v3 [hep-ph]
- [66] T. Appelquist, M. Bowick, D. Karabali and L.C.R. Wijewardhana, *Phys. Rev.* **D33** 3774 (1986).
- [67] D. C. Curtis and M. R. Pennington, *Phys. Rev. D* **42**, 4165
- [68] A. Bashir, A. Raya y S. Sánchez Madrigal. *Phys. Rev. D* **84**, 036013 (2011).
- [69] R. Bermudez, Tesis Maestria IFM-UMSNH (2011).
- [70] A.raya, A.Bashir, Ed. Nova Science Publishers Inc. N.Y. (2006), ISBN 1-59454-521-9. Preprint hep-ph/0411310.
- [71] J. S. Ball and T.W. Chiu, *Phys. Rev. D* **22**, 2542 (1980).
- [72] A. kizilersu *Phys. Rev. D* **79**, 125020 (2009)
- [73] C. J. Burden and C. D. Roberts, *Phys. Rev. D* **44**, 540 (1991).