



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLAS DE HIDALGO
INSTITUTO DE FÍSICA Y
MATEMÁTICAS



MESONES PION, RHO Y LOS DIQUARKS: FACTORES DE FORMA

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE DOCTOR EN
CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA

Presenta: Laura Xiomara Gutiérrez Guerrero

Asesor: Dr. Adnan Bashir

Morelia - Michoacan
Agosto 2012

Resumen

Presentamos resultados de las propiedades estáticas y electromagnéticas de los mesones pseudoescalares, vectoriales y correlaciones de diquarks basados en una interacción de contacto. Una motivación básica de este estudio es la necesidad de documentar una comparación entre los factores de forma electromagnéticos de los mesones y los diquarks los cuáles tienen un papel muy importante en la estructura del nucleón. Este es un paso muy importante para una descripción unificada de los factores de forma de los mesones y bariones basados en una sola interacción. Un resultado notable, es entonces el gran grado de similitud entre los mesones y los diquarks. La simplicidad de la interacción nos permite hacer cálculos de los factores de forma a grandes momentos.

Agradecimientos

a mis padres.

Contenido

| | |
|---|-----------|
| Resumen | I |
| Agradecimientos | II |
| Índice de Tablas | V |
| Índice de Figuras | VI |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Las Partículas que Constituyen la Materia | 1 |
| 1.2. Los Hadrones | 3 |
| 1.2.1. Los Mesones | 5 |
| 1.2.2. Los Bariones | 8 |
| 1.2.3. Los Diquarks | 8 |
| 1.3. Modelo del Quark | 8 |
| 1.4. Las Interacciones | 13 |
| 1.5. La QCD | 14 |
| 1.6. Trabajo de esta Tesis | 18 |
| 2. La QCD y Ecuaciones de Schwinger-Dyson | 20 |
| 2.1. La QCD y sus Simetrías | 20 |
| 2.2. Grupo Unitario Especial $SU(3)$ | 21 |
| 2.3. Transformaciones de Norma $SU(3)$ | 22 |
| 2.4. Lagrangiano de QCD | 24 |
| 2.5. Fijar la Norma | 26 |
| 2.6. Simetría Quiral y sus Consecuencias | 27 |
| 2.7. Ecuaciones de Schwinger-Dyson (SD) | 29 |
| 2.8. Ecuaciones de SD para el quark y Ecuación BS para el meson | 32 |
| 2.9. Ecuación de Bethe-Salpeter (BSE) | 37 |
| 2.10. Identidad Vector-Axial de WT) | 38 |
| 2.11. Relaciones de Goldberger-Triemann | 40 |
| 2.12. Modelo NJL | 43 |

| | |
|--|------------|
| 3. El Factor de Forma del Pi3n | 46 |
| 3.1. Ecuaci3n Matricial | 46 |
| 3.2. Constante de Decaimiento del Pi3n | 52 |
| 3.3. Normalizaci3n Can3nica | 54 |
| 3.4. Verificaci3n de GT en el Modelo NJL | 57 |
| 3.5. El Factor de Forma del Pi3n para el Caso No Masivo | 59 |
| 3.6. Conclusiones | 66 |
| 4. El Factor de Forma de Transici3n del Pi3n | 67 |
| 4.1. Anomal3as | 67 |
| 4.2. Anomal3a Abeliana | 68 |
| 4.3. El Factor de forma de transici3n del pi3n en un modelo NJL | 73 |
| 4.3.1. Introducci3n | 73 |
| 4.3.2. C3lculo del FFT para el pion usando Interacci3n de Contacto | 76 |
| 4.4. Comparaci3n experimental y te3rica con los resultados con- tempor3neos | 79 |
| 4.4.1. Amplitud de distribuci3n de transici3n para el pion | 81 |
| 4.5. Conclusiones | 87 |
| 5. El Mes3n ρ | 88 |
| 5.1. Introducci3n | 88 |
| 5.2. La Normalizaci3n | 91 |
| 5.3. C3lculo de $F_i(Q^2)$ | 94 |
| 5.4. Factor de Forma de Transici3n $\rho - \pi$ | 102 |
| 6. Los Diquarks y sus Factores de Forma | 108 |
| 6.1. Introducci3n | 108 |
| 6.2. Los Diquarks 0^+ y 1^+ y su Amplitud de Bethe-Salpeter | 110 |
| 6.3. Los Factores de Forma de los diquarks | 111 |
| 6.3.1. Factores de Forma de un Diquark Pseudovectorial | 112 |
| 6.3.2. Factores de Forma de Transici3n para los Diquarks 1^+ y 0^+ | 113 |
| 7. Conclusiones | 116 |
| Bibliograf3a | 118 |

Índice de cuadros

| | |
|---|-----|
| 1.1. Masas de los quarks y los Leptones | 2 |
| 1.2. El espectro de algunos mesones. | 6 |
| 3.1. Tabla de Eigenvalores para E_π y F_π | 52 |
| 3.2. Eigenvalores usando las Relaciones GT | 53 |
| 3.3. Constante de decaimiento del pi3n | 54 |
| 3.4. Constantes de decaimiento para el pi3n | 57 |
| 3.5. | 57 |
| 3.6. Resultados obtenidos con (en GeV) $m = 0$, $m_G = 0,11$, $\Lambda_{\text{ir}} =$ 0,24, $\Lambda_{\text{uv}} = 0,823$ | 63 |
| 4.1. Resultados obtenidos usando los par3metros en (2.74)[55]. . . | 81 |
| 6.1. Cantidades calculadas con $\alpha_{\text{IR}}/\pi = 0.93$ y (en GeV) $m =$ 0.007, $\Lambda_{\text{ir}} = 0.24$, $\Lambda_{\text{uv}} = 0.905$. (Todas las cantidades son listadas en GeV.) | 111 |

Índice de figuras

| | | |
|-------|---|----|
| 1.1. | Diferencia entre π^+ y ρ^+ , | 7 |
| 1.2. | Los tres antiquarks de Gell-Mann forman un triángulo cuando ordenamos en términos de su carga y su extrañeza. | 9 |
| 1.3. | Los tres quarks de Gell-Mann forman un triángulo invertido cuando ordenamos en términos de su carga y su extrañeza. | 9 |
| 1.4. | El nonete de mesones. Los nueve mesones más ligeros pueden disponerse en un hexágono con tres partículas en el centro | 10 |
| 1.5. | El octete de bariones. Los ocho bariones más ligeros pueden organizarse en un hexágono con dos partículas en el centro. | 11 |
| 1.6. | El octete de bariones. Los ocho bariones más ligeros pueden organizarse en un hexágono con dos partículas en el centro. | 11 |
| 1.7. | El decuplete de bariones. Diez bariones pesados se organizan en un triángulo. | 12 |
| 1.8. | En términos de u , d y s , el decuplete de bariones. Diez bariones pesados se organizan en un triángulo. | 12 |
| 1.9. | Tres gluones interactuando. | 15 |
| 1.10. | Cuatro gluones interactuando. | 15 |
| 1.11. | Constante de acoplamiento. | 16 |
| 2.1. | El propagador completo. | 30 |
| 2.2. | Correcciones al propagador fermiónico. | 30 |
| 2.3. | Correcciones al propagador del fotón. | 30 |
| 2.4. | Correcciones al vértice. | 31 |
| 2.5. | El propagador completo. | 31 |
| 2.6. | El propagador completo inverso. | 32 |
| 2.7. | La Ecuación de Schwinger-Dyson para la energía propia del quark. | 33 |
| 2.8. | Función de Masa. | 36 |
| 2.9. | El vértice mesón-quark Γ_{meson} | 37 |
| 2.10. | La amplitud de Bethe-Salpeter para el mesón $i\chi = S\Gamma_{meson}S$ | 37 |
| 2.11. | Diagramas. | 39 |

| | |
|--|----|
| 2.12. Diagramas 2 | 39 |
| 3.1. Polarización del Vacío | 55 |
| 3.2. Aproximación de Impulso. | 59 |
| 3.3. El vértice mesón-quark Γ_{meson} | 59 |
| 3.4. $F_\pi(Q^2)$ descompuesta en su parte vectorial, pseudovectorial y componentes cruzadas. La suma ha sido normalizada a 1 en $Q^2 = 0$ | 61 |
| 3.5. $F_\pi(Q^2)$ en el modelo NJL, si incluimos el pseudo-vector en la ecuación BS la amplitud cambia para Q^2 grande de $1/Q^2$ a una constante. | 62 |
| 3.6. Comparación de $F_\pi(Q^2)$ en el modelo NJL con resultados experimentales y resultados teóricos recientes. | 63 |
| 3.7. Incorporar las simetrías correctas de QCD implica una constante $F_\pi(Q^2)$ para $Q^2 \rightarrow \infty$ | 64 |
| 3.8. Función que viste la parte transversa del vértice quark-fotón $P_T(Q^2)$ en (5.67). | 66 |
| 4.1. El diagrama V-V-A que nos da la anomalía. | 69 |
| 4.2. El diagrama V-V-P que nos da la anomalía. | 69 |
| 4.3. Resultados del FFT para el pión. | 74 |
| 4.4. El detector BaBar. | 75 |
| 4.5. Resultados de Belle y BaBar. | 76 |
| 4.6. El diagrama del vértice $\gamma^*\pi^0\gamma$ en la aproximación impulso. | 77 |
| 4.7. Factor de Forma de Transición $\gamma^*\pi^0\gamma$. <i>Curva sólida</i> – cálculo completo, incluyendo la contribución $F_\pi(P)$; <i>Curva discontinua</i> – resultado obtenido sin vestir al vértice quark-fotón; <i>Curva trazo punto</i> – resultado obtenido $F_\pi(P) \equiv 0$, i.e., forzado a desaparecer; <i>Curva puntada</i> –ajuste basado en los cálculos presentados en [32], los cuales están de acuerdo con los datos reportados en [13, 14], diamantes verdes y cuadrados azules, respectivamente | 80 |
| 4.8. Factor de Transición de $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$. Datos: círculos rojos, [12]; diamantes verdes, [13]; y cuadrados azules, [14]. <i>Curva sólida</i> – $G(Q^2, 0)$ cálculos usando las simetrías en la truncación arcoiris de la interacción de contacto en (2.55), la <i>curva punteada</i> muestra el límite asintótico distinto de cero. y <i>curva discontinua con puntos</i> – ajuste de el factor de forma de transición $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$, calculado basado en ecuaciones SD [32]. Las curvas han sido divididas por $(2\pi^2 f_\pi)$ con la finalidad de comparar los datos. | 82 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 4.9. | El factor de forma de transición $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$ Datos: círculos rojos [12]; diamantes verdes, [13]; cuadrados azules, [14]. <i>curva sólida</i> – $Q^2G(Q^2, 0)$ cálculo usando la interacción de contacto en la aproximación arcoiris, la cual produce $\phi_\pi(x) = \text{constante}$ y <i>curva punto-guión</i> – ajuste del factor de transición $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$ calculado en QCD en la aproximación arcoiris usando un estudio de las ecuaciones SD [32]. Ambas curvas han sido divididas por $(2\pi^2 f_\pi)$ para poder comparar. | 83 |
| 4.10. | Factor de forma de transición de $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$. Datos: círculos rojos, [12]; diamantes verdes, [13]; y cuadrados azules, [14]. El límite de pQCD está marcado por la línea punteada en “1”. <i>Curva sólida</i> – $Q^2G_E(Q^2, 0)$ resultado obtenido con este trabajo normalizado según (4.50); <i>Curva discontinua</i> – monopolo con escala de masa $(2/3)4\pi^2 f_\pi^2$ calculado en Ref. [32] <i>Curva discontinua con puntos</i> – monopolo con escala de masa $(7/8)4\pi^2 f_\pi^2$, obtenido con el ajuste de el factor de transición $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$ calculado en [32], normalizado usando la misma escala de masa. | 86 |
| 5.1. | a)Mesones Pseudoescalares, b)Mesones Escalares. | 89 |
| 5.2. | El vértice mesón-quark Γ_{meson} | 89 |
| 5.3. | Factor de Forma F_1 | 97 |
| 5.4. | Factor de Forma F_2 | 98 |
| 5.5. | Factor de Forma F_3 | 99 |
| 5.6. | <i>Curva sólida</i> –factor de forma electromagnético $G_E^\rho(Q^2)$ del ρ -mesón, el cuál muestra un cero en $Q^2 = 5.0 \text{ GeV}^2$ (es notable que $1 - \frac{2}{3}\eta = 0$ para $Q^2 = 6m_\rho^2 = 5,2 \text{ GeV}^2$). La <i>curva discontinua</i> , es $G_M^\rho(Q^2)/\mu_\rho$, y <i>curva discontinua con puntos</i> es el resultado de $G_Q^\rho(Q^2)/\mathcal{Q}_\rho$, finalmente con la curva punteada podemos observar que $[G_M^\rho(Q^2)/\mu_\rho]/[G_Q^\rho(Q^2)/\mathcal{Q}_\rho]$ es casi uno . | 100 |
| 5.7. | (Color online) <i>Solid curve</i> – ρ -meson electric form factor, $G_E^\rho(Q^2)$, which exhibits a zero at $Q^2 = 5,0 \text{ GeV}^2$. (It is notable that $1 - \frac{2}{3}\eta = 0$ for $Q^2 = 6m_\rho^2 = 5,2 \text{ GeV}^2$.) The <i>dashed curve</i> , $G_M^\rho(Q^2)/\mu_\rho$, and <i>dot-dashed curve</i> , $G_Q^\rho(Q^2)/\mathcal{Q}_\rho$, are almost indistinguishable, as emphasised by the <i>dotted curve</i> , $[G_M^\rho(Q^2)/\mu_\rho]/[G_Q^\rho(Q^2)/\mathcal{Q}_\rho]$. The charge radii, and magnetic and quadrupole moments are given in Table ???. NB. All form factors exhibit a pole at $Q^2 = -m_\rho^2$ because the quark-photon vertex is dressed as described in Sec. ???. | 101 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 5.8. | (Color online) <i>Solid curve</i> – the full result for $G^{\pi\gamma\rho}(Q^2)$; and <i>dashed curve</i> – $G^{\pi\gamma\rho}(Q^2)$ obtained with $F_\pi(P) \equiv 0$. Experimentally [58], the partial width for $\rho^+ \rightarrow \pi^+\gamma$ is 68 ± 7 keV, which corresponds to [32] $g_{\pi\gamma\rho} = (0,74 \pm 0,05) m_\rho$. This is in fair agreement with our computed result; viz., $g_{\pi\gamma\rho} = 0,63 m_\rho$. | 103 |
| 5.9. | Función para la parte transversa del vértice quark-fotón $P_T(Q^2)$ en (5.67). | 105 |
| 5.10. | <i>Curva sólida</i> – el resultado completo para $G^{\pi\gamma\rho}(Q^2)$; y <i>línea punteada</i> – $G^{\pi\gamma\rho}(Q^2)$ obtenida con $F_\pi(P) \equiv 0$. Experimentalmente [58]. | 107 |
| 6.1. | <i>Curva sólida</i> – Factor de forma pseudovectorial del diquark $G_E^{1+}(Q^2)$, el cual muestra un cero en $Q^2 = 6.5$ GeV ² (En este caso $1 - \frac{2}{3}\eta = 0$ por $Q^2 = 6m_{1+}^2 = 6.7$ GeV ² , que nos da la masa 1.06 GeV). La <i>curva discontinua</i> , $G_M^{1+}(Q^2)/\mu_{1+}$, y <i>curva discontinua con puntos</i> , $G_Q^{1+}(Q^2)/\mathcal{Q}_{1+}$, <i>curva punteada</i> , muestra que $[G_M^{1+}(Q^2)/\mu_\rho]/[G_Q^{1+}(Q^2)/\mathcal{Q}_{1+}]$ es casi uno. Todos los factores de forma exhiben un polo en $Q^2 = -m_\rho^2$ por que el vértice quark-fotón está vestido. | 112 |
| 6.2. | <i>Curva sólida</i> – factor de forma de transición del diquark axial-vector-escalar $G^{0^+\gamma 1^+}(Q^2)$; y <i>curva discontinua</i> – resultado para $G^{\pi\gamma\rho}(Q^2)$ en Figura 5.10. Notemos que $e_{\{ud\}}g_{0^+\gamma 1^+}m_{qq_{1+}} = e_{\{ud\}}0,74 = 0,25$. | 114 |

Capítulo 1

Introducción

La física de partículas es el estudio de las partículas subatómicas que forman el universo y sus interacciones. El modelo estándar de Física de Partículas describe estas interacciones con muy alta precisión. El reto de la Física Moderna es entender mejor el modelo estándar (que es un reto a nivel teórico) y hacer predicciones experimentales. Todos los trabajos que se incluyen en esta tesis se encuentra dentro del ámbito del modelo estándar. Comenzamos por una breve introducción a las partículas y sus interacciones.

1.1. Las Partículas que Constituyen la Materia

En el presente sabemos que la materia está compuesta por seis quarks y seis leptones (y sus respectivas antipartículas). Podemos suponer que estas partículas son fundamentales porque no tenemos ninguna indicación de que no lo sean. Los quarks son el up (u), charm (c) y top (t), todos con carga eléctrica $+\frac{2}{3}$ (en una escala donde el electrón tiene una carga igual a -1), y el down (d), strange (s) y bottom (b), todos con carga $-\frac{1}{3}$. Los leptones son el electron (e), mu (μ) y tau (τ), todos con carga -1 , y los tres correspondientes neutrinos, ν_e , ν_μ y ν_τ , todos con carga 0.

$$\begin{array}{l} \text{Quarks :} \\ \text{Leptones :} \end{array} \begin{array}{l} \text{carga } +\frac{2}{3} : \\ \text{carga } -\frac{1}{3} : \\ \text{carga } 0 : \\ \text{carga } -1 : \end{array} \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} u \\ d \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} c \\ s \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} t \\ b \end{array} \right), \\ \left(\begin{array}{c} \nu_e \\ e \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \nu_\mu \\ \mu \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \nu_\tau \\ \tau \end{array} \right). \end{array} \quad (1.1)$$

Si nos movemos hacia la derecha en la primera, segunda y cuarta línea¹, las partículas son cada vez más masivas. Las partículas de la tercera línea

¹Cada columna es llamada una generación; Hasta ahora todo indica que sólo hay tres generaciones de fermiones. El decaimiento de Z^0 claramente favorece tres familias de neu-

| Quark | Masa del Quark | | Leptón | Masa del Leptón |
|-------|------------------|----------------|------------|------------------------|
| | Corriente | Constituyente | | |
| u | 2 a 8 MeV | ~ 300 MeV | ν_e | < 5.1 eV (95 % CL) |
| c | 1.0 a 1.6 GeV | ~ 1.5 GeV | ν_μ | < 0.16 MeV (90 % CL) |
| t | 180 ± 12 GeV | ~ 180 GeV | ν_τ | < 31 MeV (95 % CL) |
| d | 5 a 15 MeV | ~ 300 MeV | e | 0.51099906(15) MeV |
| s | 100 a 300 MeV | ~ 500 MeV | μ | 105.658389(34) MeV |
| b | 4.1 a 4.5 GeV | ~ 5 GeV | τ | 1777.1 MeV |

Tabla 1.1: Masas de los quarks y leptones. El número dentro del paréntesis denota la desviación estándar. CL significa el límite de confiabilidad (ejemplo estamos 95 % seguros que $m_{\nu_e} < 5.1$ eV).

tienen masas más pequeñas que las que los experimentos pueden medir, y pueden no tener masa. Los valores experimentales de las masas ² son dadas en la Tabla 1.1. Dos diferentes masas son listadas para los quarks. La masa corriente que es la masa que aparece en el lagrangiano describiendo la interacción fuerte y la masa constituyente, que es la masa efectiva del quark cuando se encuentra en un estado ligado dentro del hadrón. Los números dados son aproximados porque dependen del modelo que se use. Es fácil notar que la masa efectiva para los quarks ligeros es más grande que su masa corriente. Esto se debe a un proceso llamado rompimiento de la simetría quiral. Para los quarks pesados este proceso no parece jugar un papel importante, pues su masa corriente y su masa constituyente no son muy diferentes. La simetría quiral y su rompimiento son los temas centrales de nuestro trabajo de investigación.

Asociado con cada tipo de quark y leptón existe su antipartícula, la cual tiene la misma masa, pero números cuánticos opuestos (como la carga). Las antipartículas son denotadas por una barra (ejemplo \bar{u}). Una partícula y su antipartícula tienen sabores opuestos. Cada quark y leptón tienen un momento angular intrínseco, llamado espín, de $\frac{1}{2}$, para los fermiones.

En adición a su carga eléctrica, cada quark tiene una carga adicional llamada color (que no tiene nada que ver con los colores que vemos en la naturaleza). Hay tres valores posibles de carga de color, más tres anti-colores

trinos ligeros.

²Nótese que las masas en la Tabla 1.1 son dadas en unidades de energía (eV), cuando las unidades de masa son normalmente dadas en eV/c^2 . Estamos siguiendo la convención de física de partículas donde $c \equiv \hbar \equiv 1$, la cual expresa masa y momento en unidades de energía, y longitud y tiempo en unidades de energía⁻¹. Cuando convertimos estas unidades naturales a unidades estándar debemos introducir \hbar y c según el análisis dimensional.

de los antiquarks. Es una propiedad de la naturaleza que las partículas con color no existan libres en la naturaleza, los quarks están confinados dentro de los hadrones en configuraciones que producen un objeto sin color. La prueba teórica de confinamiento es todavía un reto para la comunidad de físicos.

1.2. Los Hadrones

Los seis quarks y seis leptones (más sus antipartículas y bosones de norma) constituyen toda la materia, pero sólo tres de ellos forman la materia común que nos rodea. Toda la materia está constituida por los átomos. Un átomo está formado por un núcleo denso rodeado por una nube de electrones. La estructura de la nube de electrones es responsable de las propiedades químicas del átomo.

El núcleo está formado por un número de nucleones (protones (carga 1) y, por lo general, los neutrones (carga 0)) unidos por la interacción fuerte. El número atómico del átomo está dado por el número de protones. Un átomo neutro también tiene el mismo número de electrones. El número de neutrones es aproximadamente igual al número de protones. Tanto los protones como los neutrones están compuestos de tres quarks ligeros: los protones de dos quarks u y un d , y el neutrón de un u y dos d . (Observe que las cargas de los quarks se suman para dar la carga correcta del nucleón.) Toda la materia que vemos en nuestro mundo está constituida por e^- , u y d y son partículas estables.³

Los protones y los neutrones son ejemplos de bariones, que es uno de los dos tipos de estructuras que los quarks pueden formar. Los bariones están formados por tres quarks (qqq), un anti-barión se compone de tres antiquarks. El otro tipo de estructura se conoce como el mesón, que está formado por un quark y un antiquark, $q\bar{q}$ (por lo que un anti-mesón es un mesón). La complicada estructura de QCD significa que los grupos de quarks pueden estar unidas entre sí sólo en configuraciones que no pueden tener color. También significa que la fuerza de atracción entre los objetos de colores es enorme, por lo que se limitan siempre junto a los objetos incoloros. Esta propiedad se llama confinamiento. En un barión, cada quark tiene un color diferente, y los tres colores mezclados producen un objeto sin color. En un mesón, el quark tiene un color y el antiquark tiene el correspondiente anti-color para cancelarlo, produciendo un objeto sin color. Las partículas formadas de quarks y gluones son llamadas hadrones. Para la descripción de partículas microscópicas se usan los siguientes números cuánticos:

³De hecho, sabemos que un quark u puede convertirse en un quark d via la interacción débil.

- Número Leptónico:** El estudio de las desintegraciones μ y τ (el e^- es estable por conservación de la carga ya que es el leptón más ligero sin contar los neutrinos) ha llevado a introducir unos números cuánticos, llamados *Números leptónicos* que se conservan en las interacciones débiles, a saber:

Número Leptónico electrónico L_e

$$L_e = \begin{cases} 1 & \text{Para } e \text{ y } \nu_e \\ -1 & \text{Para } e^+ \text{ y } \bar{\nu}_e \\ 0 & \text{Para el resto} \end{cases}$$

Número Leptónico muónico L_μ

$$L_\mu = \begin{cases} 1 & \text{Para } \mu^- \text{ y } \nu_\mu \\ -1 & \text{Para } \mu^+ \text{ y } \bar{\nu}_\mu \\ 0 & \text{Para el resto} \end{cases}$$

Número Leptónico tauónico L_τ

$$L_\tau = \begin{cases} 1 & \text{Para } \tau^- \text{ y } \nu_\tau \\ -1 & \text{Para } \tau^+ \text{ y } \bar{\nu}_\tau \\ 0 & \text{Para el resto} \end{cases}$$

- Número Bariónico:** Se introduce para justificar el hecho experimental de que el protón es estable y que otras partículas (Λ, Σ, \dots) decaen a él.

Número Bariónico (B)

$$B = \begin{cases} 1 & \text{Para el protón y todas aquellas partículas que decaigan} \\ & \text{en él} \\ -1 & \text{Para sus antipartículas} \\ 0 & \text{Para el resto} \end{cases}$$

Hasta ahora, no hay ninguna evidencia de que se viole la conservación del número bariónico y la vida del protón sea superior a 10^{31} años (no se ha observado ninguna desintegración espontánea desde su estudio). No obstante, hay teorías que predicen una vida finita para el protón.

- Extrañeza:** Se introduce para justificar el hecho experimental de que algunos hadrones ($K, \Lambda, \Sigma, \dots$) tengan vidas relativamente largas, lo cual implica que no decaen a otros hadrones más ligeros (p, π) por la interacción fuerte o la electromagnética, sino por la débil. Por otro lado,

los experimentos también indican que estas partículas se producen con secciones eficaces consistentes con la fuerza nuclear fuerte, lo cual fue una aparente paradoja, ya que estas partículas "extrañas" pueden sentir la fuerza fuerte cuando se producen, pero no después. La solución surgió de la observación de que las partículas extrañas aparecen por parejas. Extrañeza (S)

$$S = \begin{cases} 1 & \text{Para los kaones } K^0 \text{ y } K^+ \\ -1 & \text{Para los hadrones que produzcan las partículas } \Lambda, \Sigma^+, \dots \\ -2 & \text{Para las cascadas } \Xi^0, \Xi^- \\ 0 & \text{Para el resto} \end{cases}$$

S es conservado por la interacción fuerte y electromagnética y puede ser violado por la interacción débil. Las antipartículas tienen extrañeza opuesta a la de las partículas. Cuando un hadrón con extrañeza S decae, si existen otros hadrones más ligeros a los que puede decaer conservando S (además de los otros números), el fenómeno será rápido al producirse por la interacción débil o electromagnética. En caso contrario, el decaimiento ocurrirá por la interacción débil, que puede cambiar la extrañeza en una unidad.

- **Isoespín:** Se introduce para dar cuenta del hecho empírico de la existencia de grupos de partículas con propiedades muy parecidas (p^-, n^0), (π^-, π^0, π^+), ..., excepto que tienen carga eléctrica que varía de uno en uno. Para describir este hecho se definen tres operadores I_3, I_+ y I_- que cumplen las reglas de conmutación del momento angular. I_3 está relacionado con la carga eléctrica

$$I_3 = \frac{Y}{2} + \frac{Q}{e}, \quad (1.2)$$

donde $Y = B+S$ es una constante para cada grupo llamada Hipercarga.

1.2.1. Los Mesones

Los mesones son partículas mediadoras que están formadas de un quark y un antiquark. Los mesones son bosones, mientras los bariones son fermiones. Algunos de los mesones más importantes están listados en la Tabla (1.2). Se cree que todos los mesones conocidos consisten de un par quark-antiquark. Está en progreso la búsqueda de mesones exóticos que tienen constituyentes diferentes. Los quarks de valencia pueden existir en una superposición de

| Partícula | Símbolo | Antipartícula | Hecho de | Masa (MeV/c^2) |
|-----------|------------|---------------|----------|--------------------|
| Pion | π^+ | π^- | ud | 139.6 |
| Pion | π^0 | π^0 | uu, dd | 135.0 |
| Kaon | K^+ | K^- | us | 493.7 |
| Rho | ρ^+ | ρ^- | ud | 770 |
| Rho | ρ^0 | ρ^0 | uu, dd | 770 |
| Omega | ω^0 | ω^0 | uu, dd | 782 |
| Phi | ϕ | ϕ | ss | 1020 |
| D | D^+ | D^- | cd | 1869.4 |
| J/Psi | J/ψ | J/ψ | cc | 3096.9 |
| Upsilon | Υ | Υ | bb | 9460.4 |

Tabla 1.2: El espectro de algunos mesones.

estados de sabor; por ejemplo, el pión neutro no es ni un par arriba-antiarriba ni un par abajo-antiabajo, sino una superposición cuántica igual de ambos. Los mesones pseudoescalares (con espín 0) tienen la menor energía en reposo, donde el quark y antiquark tienen espines opuestos, y luego el mesón vectorial (con espín 1), donde el quark y antiquark tienen espines paralelos. Ambos vienen en versiones de mayor energía, donde el espín queda aumentado por el momento angular orbital. Todos los mesones son inestables.

Los mesones fueron predichos originalmente como portadores de la fuerza que une al protón y al neutrón, de ahí su nombre. Cuando fue descubierto, el muon se identificó con esta familia de masa similar y fue bautizado como *mesón muón*, sin embargo, no mostró una atracción fuerte a la materia nuclear y es en realidad un leptón. En 1949, Hideki Yukawa fue galardonado con el Premio Nobel de Física por predecir la existencia del pión. Originalmente lo llamo mesontrón, pero fue corregido por Werner Heisenberg (su padre fue profesor de griego en la Universidad de Munich), quien indicó que no había una 'tr' en la palabra griega mesos.

Los mesones sin sabor son mesones que tienen los números cuánticos de sabor todos cero. Esto significa que esos quarks son estados quarkonios (pares quark-antiquark del mismo sabor) o una superposición lineal de tales estados.

Los mesones sin sabor pueden ser especificados por su espín total S y su momento orbital angular L . Como un mesón está compuesto de dos quarks con $s=1/2$, el espín puede sólo ser $S = 1$ (espines paralelos) o $S = 0$ (espines anti-paralelos). El número cuántico orbital L es debido a la revolución de un quark sobre otro. Usualmente los momentos orbitales angulares mayores se traducen en unos de mayor masa para el mesón. Estos dos números cuánticos

determinan la paridad P y la paridad de la carga conjugada C de los mesones:

$$P = (-1)^{L+1} \quad (1.3)$$

$$C = (-1)^{L+S}. \quad (1.4)$$

También, L y S se suman para formar un número cuántico de momento angular total J , que su valor está en el rango de $|L - S|$ a $L + S$ en un paso unitario. En esta tesis nos enfocaremos en los dos mesones más ligeros, es decir, en el mesón pión y en el mesón rho.

- El Pión es el más ligero de los mesones, y es frecuentemente utilizado para predecir el alcance máximo de la interacción fuerte. El pión neutral decae en un electrón positrón y en rayos gamma por la interacción electromagnética a una escala de tiempo de aproximadamente 10^{-16} seg., es decir,

$$\pi^0 \implies e^- + e^+ + \gamma \quad (1.5)$$

$$\pi^{+/-} \implies \mu^{+/-} + \nu \quad (1.6)$$

Los piones positivo y negativo tienen una vida media de aproximadamente 2.6×10^{-8} seg.

- El rho-meson tiene la misma composición de quarks como los piones, y puede ser considerado como un estado de excitación de los piones. El hecho de que su masa es cinco veces y media la masa del pión, ilustra las dificultades de asignación de masas de los quarks. Las masas de los hadrones depende de la dinámica dentro de la partícula, y no sólo a los quarks contenidos. El modelo de quarks de los piones y rho clasifica al pión como un mesón pseudoescalar con momento angular cero. Los quarks tienen espín $1/2$. En el mesón rho, un mesón vectorial, el momento angular es $j = 1$, lo que indica espines paralelos.

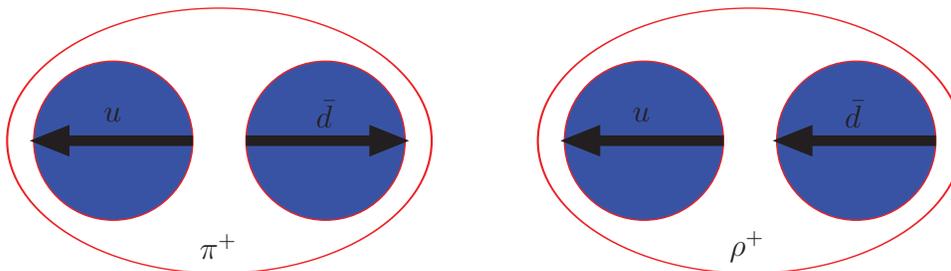


Figura 1.1: Diferencia entre π^+ y ρ^+ ,

1.2.2. Los Bariones

Un barión es una partícula compuesta formada por tres quarks (a diferencia de los mesones, los cuales comprenden un quark y un antiquark). Los bariones más familiares son los protones y neutrones que componen la mayor parte de la masa de la materia visible en el universo. Cada barión tiene una correspondiente antipartícula (antibarión), donde los quarks son reemplazados por sus correspondientes antiquarks. Por ejemplo, un protón está formado por dos quarks up y un quark down, y su correspondiente antipartícula, el antiprotón, se compone de dos antiquarks up y un antiquark down.

1.2.3. Los Diquarks

Un diquark es el estado hipotético de dos quarks agrupados dentro de un barión (que consta de tres quarks) (Lichtenberg, 1982). El diquark se trata a menudo como una sola partícula con la que el tercero de los quarks interactúa a través de la interacción fuerte. La existencia de diquarks dentro de los nucleones es una cuestión controvertida, pero ayuda a explicar algunas propiedades y reproducen los datos experimentales sensibles a la estructura del nucleón.

1.3. Modelo del Quark

El modelo del quark fue introducido por primera vez en 1964 por Gell-Mann [1], en una época en la que la formulación de la teoría de campos para las interacciones fuertes fue abandonada por muchos físicos eminentes. Hoy en día casi nadie pone seriamente en duda la existencia de los quarks, a pesar de que nunca han sido observados experimentalmente en forma aislada. En principio, la posibilidad de la observación de quarks y gluones libres existe en muy alta temperatura y densidad, en una fase de QCD llamada quark-gluón plasma (QGP). Gell-Mann postuló que los hadrones están compuestos por dos quarks ligeros up y down a los que asignó extrañeza $S = 0$ y un quark más pesado extraño s , con $S = -1$. La carga eléctrica de d y s sería de $-1/3$, mientras que la de u sería de $2/3$ Figura (1.3). Los antiquarks tienen valores opuestos, Fig. (1.2).

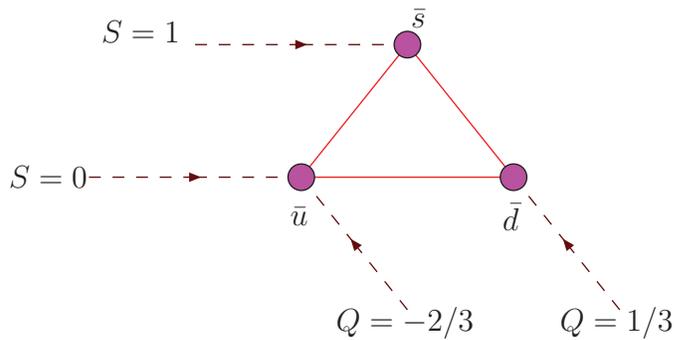


Figura 1.2: Los tres antiquarks de Gell-Mann forman un triángulo cuando ordenamos en términos de su carga y su extrañeza.

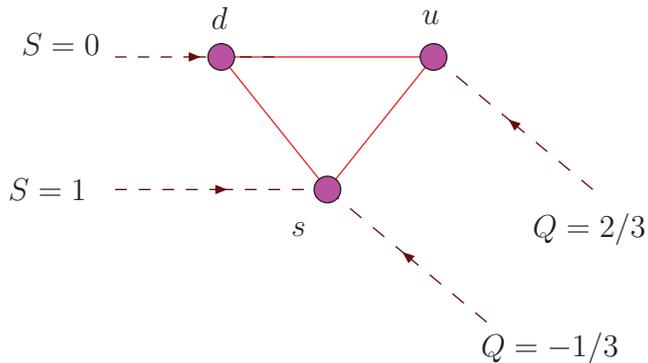


Figura 1.3: Los tres quarks de Gell-Mann forman un triángulo invertido cuando ordenamos en términos de su carga y su extrañeza.

El primer paso que llevaría a Gell-Mann al modelo quark y la explicación de la estructura interna de los hadrones consistió en organizar a los bariones y mesones en términos de su carga y su extrañeza, dándose cuenta de las curiosas figuras geométricas que aparecían al hacerlo. Consideremos un sistema de coordenadas en cuyo eje vertical situemos la magnitud de la hipercarga Y y en el eje horizontal la componente z del isospín (I_z). Agrupando los hadrones conocidos hasta ese momento, Figuras (1.4),(1.5),(1.7) observaron, que podían ser distribuidos en grupos de partículas del mismo espín, número bariónico y aproximadamente igual masa, como se puede ver

en las ecuaciones (1.9), (1.12), considerando el octete de bariones:

$$M_{\Lambda} - M_N = 177MeV, \quad (1.7)$$

$$M_{\Sigma} - M_N = 254MeV, \quad (1.8)$$

$$M_{\Xi} - M_{\Lambda} = 203MeV. \quad (1.9)$$

Entonces, la diferencia entre las masas es de aproximadamente $200MeV$. Algo parecido ocurre en el decuplete de bariones:

$$M_{\Sigma} - M_{\Delta} = 153MeV, \quad (1.10)$$

$$M_{\Xi} - M_{\Sigma} = 145MeV, \quad (1.11)$$

$$M_{\Omega^-} - M_{\Xi} = 142MeV. \quad (1.12)$$

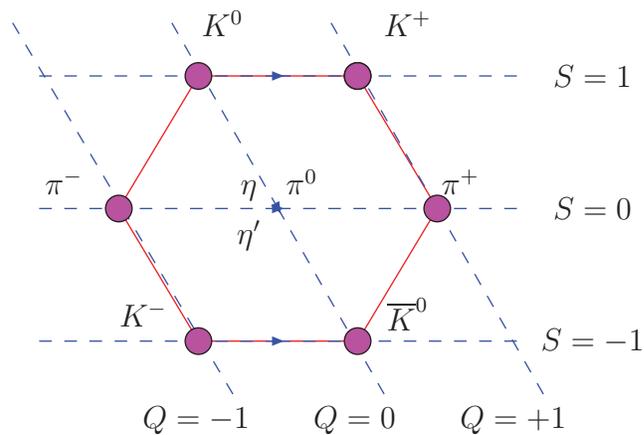


Figura 1.4: El nonete de mesones. Los nueve mesones más ligeros pueden disponerse en un hexágono con tres partículas en el centro

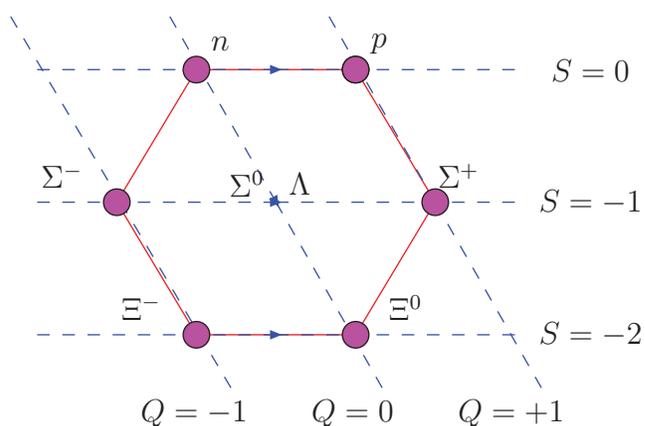


Figura 1.5: El octete de bariones. Los ocho bariones más ligeros pueden organizarse en un hexágono con dos partículas en el centro.

En términos de los quarks u , d y s .

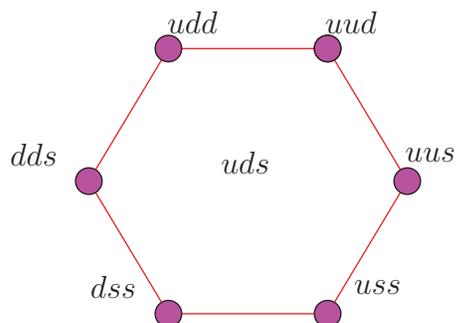


Figura 1.6: El octete de bariones. Los ocho bariones más ligeros pueden organizarse en un hexágono con dos partículas en el centro.

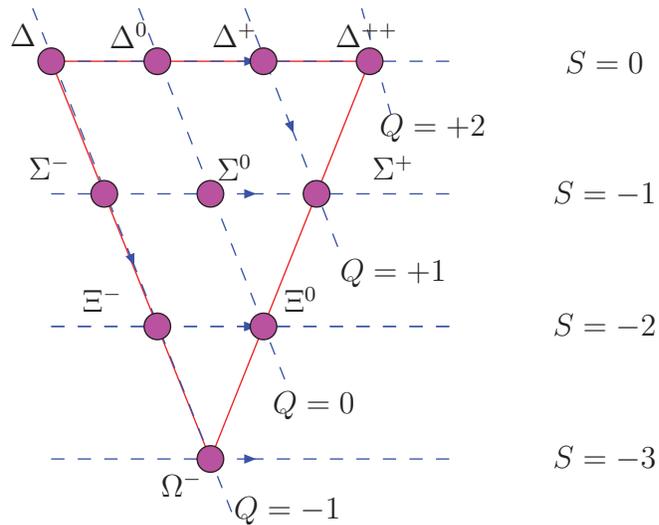


Figura 1.7: El decuplete de bariones. Diez bariones pesados se organizan en un triángulo.

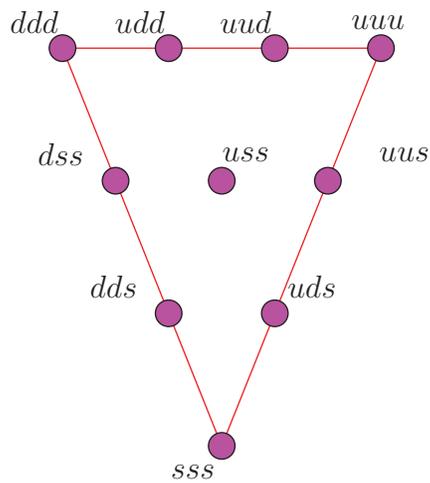


Figura 1.8: En términos de u , d y s , el decuplete de bariones. Diez bariones pesados se organizan en un triángulo.

En ese momento quedaban muchas interrogantes por responder. Entre otras cosas, no se sabía por qué la configuración debía ser con esos números

cuánticos y no otros. De todas maneras, el modelo funcionaba muy bien y permitió a Gell-Mann postular la existencia de una partícula con carga negativa, extrañeza -3 y de la que dedujo casi exactamente su masa. Esta partícula, aparece en la Figura 1.7 y fue llamada Ω^- . Esta predicción permitió establecer la importancia y validez del modelo, independientemente de las interrogantes que planteaba. Fue el establecimiento del modelo de quarks, en primer lugar, y el descubrimiento de centenares de partículas, después, lo que permitió esclarecer los misterios que el propio modelo planteaba. Ya sabemos que en la teoría original utilizaron 3 tipos de quarks: arriba (u), abajo (d) y extraño (s). Formando todos los grupos posibles de tres quarks cuyo resultado sea una carga eléctrica entera, se obtienen los diez bariones de la Fig (1.8). Si además exigimos que al menos un quark sea distinto de los otros dos, obtenemos los ocho bariones de la Figura (1.6). Es interesante señalar que este modelo de quarks, como ya hemos comentado, no tenía repuestas para todas las preguntas (especialmente a la de por qué debía ser así), pero la verdad es que funcionaba. En los últimos años de la década de los sesenta, se obtuvieron predicciones correctas con este modelo al parecer carente de fundamento. Posteriormente, los experimentos de los años setenta dieron un aldabonazo definitivo a la hipótesis de los quarks. El modelo del quark fue el primer signo de que había algo dentro de los hadrones. Después de muchos años de trabajo, la comunidad científica empezó a entender más sobre las interacciones entre quarks. Ahora sabemos que los quarks y los gluones que están dentro de los hadrones están regidos por el grupo de color $SU(3)$. De muchas maneras, estas interacciones son similares a las interacciones electromagnéticas y las débiles. Vamos a analizar estas propiedades en la siguiente sección.

1.4. Las Interacciones

Hay cuatro tipos de interacciones entre las partículas. A cada una de ellas corresponde uno o más bosones de norma, que son partículas que llevan los efectos de la interacción cuando hay intercambios entre dos partículas.

- La interacción electromagnética ocurre entre objetos con carga eléctrica. La teoría que gobierna las interacciones electromagnéticas es llamada Electrodinámica Cuántica (QED).
- La interacción débil ocurre entre leptones y quarks. Los bosones que llevan la interacción débil son Z^0 y W^\pm (espín 1) con cargas y masas 91.187 ± 0.007 GeV y 80.33 ± 0.15 GeV, respectivamente. Las interacciones débiles y la eléctrica pueden ser combinadas dentro de una sola

teoría llamada Teoría Electro débil. La interacción débil es la causa de ciertos decaimientos, como el decaimiento del neutrón $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$.

- La interacción fuerte ocurre entre objetos que tienen color, incluyendo partículas de color neutro con constituyentes de color. Esta carga de color es llevada por 8 gluones g , los cuales tienen espín 1, y no tienen carga ni masa. Sin embargo, tienen color, lo cual complica la teoría de las interacciones fuertes llamada Cromodinámica cuántica (QCD).

Las partículas y las interacciones descritas arriba, junto con un mecanismo espontáneo de la simetría (llamado mecanismo de Higgs), que da masa a los fermiones y bosones débiles, hace lo que conocemos como modelo estándar de Física de Partículas.

- La última interacción, la gravedad, ha sido descrita por la teoría clásica de la Relatividad General, pero no ha podido ser incorporada dentro de una teoría cuántica de campos (como la teoría electromagnética o QED). El bosón que lleva esta interacción es el gravitón y debe tener espín 2, ser neutral y no tener masa.

1.5. La QCD

QCD es una teoría de norma que exhibe la faceta perturbativa y la no perturbativa. Fue propuesta como una teoría para entender la estructura de los hadrones en términos de los grados de libertad más fundamentales, es decir, quarks y gluones. Como en QED los gluones tienen carga de color, pueden interactuar como se muestra en las Figuras (1.9) y (1.10). QCD goza de dos propiedades notables:

- **Libertad Asintótica.** Esto significa que a muy altas energías, los quarks y los gluones interactúan muy débilmente. QCD predice este comportamiento, que fue descubierto por David Politzer, Frank Wilczek y Davis Gross, y gracias al cual obtuvieron el Premio Nobel de Física en 2004, [2]. El descubrimiento de la libertad asintótica permitió a los físicos hacer predicciones más precisas usando la técnica de teoría de perturbaciones. La evidencia de gluones fue vista en tres lugares primero en PETRA en 1979. Estos experimentos fueron cada vez más precisos, culminando en la verificación perturbativa de QCD en LEP y CERN.
- **Confinamiento.** Los objetos de color como los quarks y los gluones no son estados que se hayan observado, pues los estados físicos corresponden a estados sin color. Dado que los gluones pueden interactuar entre

ellos, éstos forman un campo de color que impide que los quarks se separen. El potencial entre los quarks crece linealmente con la distancia y, por lo tanto, se requiere una cantidad infinita de energía para separar dos quarks. Creemos en su veracidad debido a que explica porque no se han encontrado quarks libres ni gluones libres.

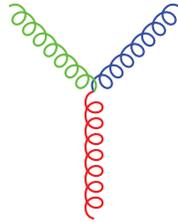


Figura 1.9: Tres gluones interactuando.

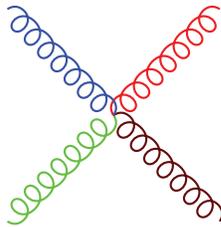


Figura 1.10: Cuatro gluones interactuando.

Diversas técnicas se han desarrollado para trabajar con QCD. Algunas de ellas son mencionadas a continuación:

- **QCD Perturbativa:** Su validez se limita a aquellos regímenes en los que el parámetro del desarrollo, y en este caso, la constante de acoplamiento α , tenga un valor pequeño. El enfoque de QCD perturbativo se basa en la *Libertad Asintótica*. El fenómeno de la libertad asintótica contrasta fuertemente con el carácter de otras interacciones, como la electromagnética y la gravitatoria, que son más fuertemente acopladas para distancias cortas. El decrecimiento del acoplamiento α_{QCD} entre los quarks y los gluones a distancias pequeñas nos ayuda a desarrollar la teoría perturbativa para QCD en esta región, como se ejemplifica en la Figura 1.11.

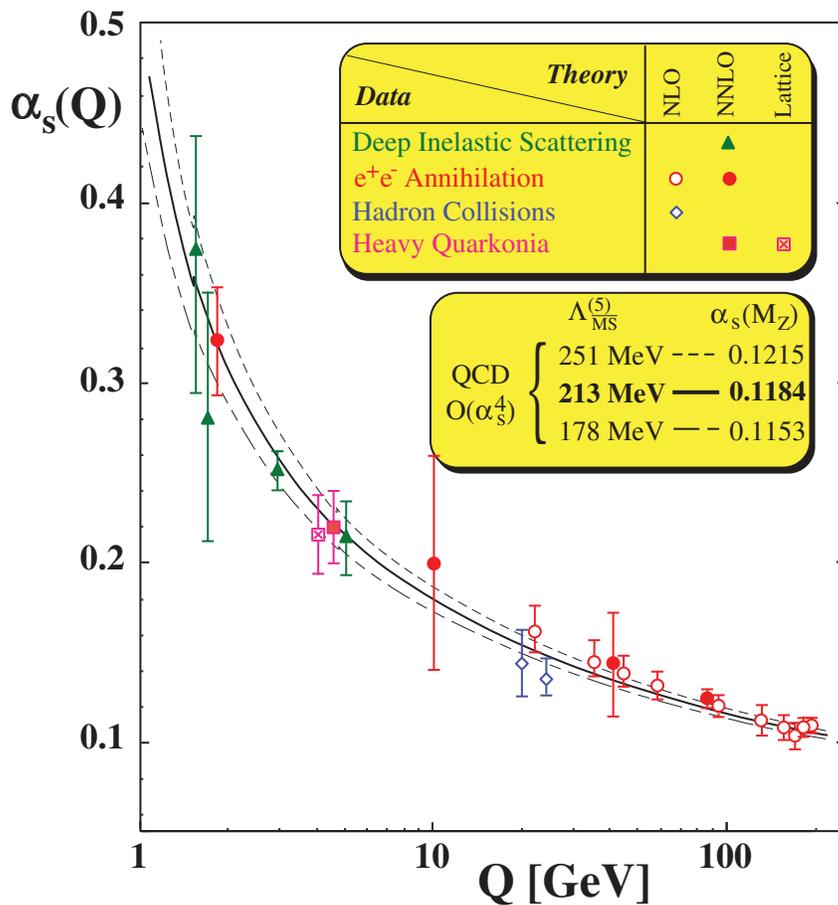


Figura 1.11: Constante de acoplamiento.

- **QCD No Perturbativa:** Se requiere para energías del orden de las masas de los hadrones, donde el valor del acoplamiento tiene un valor suficientemente elevado como para anular los desarrollos perturbativos. Confinamiento y Rompimiento Dinámico de la simetría quiral son dos fenómenos no perturbativos en la naturaleza.

Rompimiento Dinámico de Simetría Quiral: Es decir, la generación de las masas de los quarks ligeros a través de interacciones fuertes. A pesar de que en QCD quiral no existe ninguna escala de masa, éstas pueden generarse mediante la dinámica fuerte de QCD .

- **QCD en la Red:** Es una de las herramientas para la predicción de resultados en el régimen no perturbativo. Consiste en la utilización de poderosas computadoras para simular la dinámica de QCD en un

espacio-tiempo discretizado en los nodos de un retículo. Esto introduce una escala natural $1/a$ de momentos ultravioletas, donde a es la distancia entre dos puntos vecinos de la red. La otra escala natural serán claramente las dimensiones de la misma red. Sin embargo el volumen de la red está limitado por la velocidad y memoria de la computadora que se use. Debemos tomar en cuenta, además, que momentos mayores del orden de aproximadamente $1/a$ no pueden ser representados en la red, y que el valor de a debe ser suficientemente pequeño, comparado con las distancias relevantes del problema.

- **Ecuaciones de Schwinger-Dyson (SD):** Debido a que la red tiene un volumen finito y la separación entre dos puntos cercanos de la red también es finita, es necesaria una extrapolación para conectar estos resultados con QCD continua. Por ejemplo, las masas de los quarks ligeros son muy difíciles de tratar con QCD en la red, pues se necesita un número suficientemente grande de puntos en la red, lo cual incrementa considerablemente el esfuerzo computacional a realizar. Un método complementario para investigar los aspectos no perturbativos de QCD son las ecuaciones de Schwinger Dyson (SDEs). Estas son las ecuaciones fundamentales de QCD y pueden ser derivadas sin suponer que el acoplamiento es pequeño y son la plataforma ideal para estudiar QCD no perturbativa. Abundaremos más acerca de estas ecuaciones en un capítulo posterior.
- **Teorías Efectivas:** Para problemas específicos, estas teorías pueden dar resultados cualitativamente correctos. En el mejor de los casos, estos pueden ser obtenidos con expansiones sistemáticas en algunos parámetros del lagrangiano de QCD. Algunos ejemplos son:
 1. **El Esquema de aproximación $1/N$** parte de la premisa que el número N del grupo de norma es infinito, en otras palabras, $1/N$ es el parámetro de expansión para estudiar propiedades de un sistema representado por el grupo de norma $SU(N)$.
 2. Otro ejemplo de las teorías efectivas es **la teoría de perturbaciones quirales** (usa como parámetro de expansión las masas de los quarks ligeros, las cuales están cerca del cero en comparación con otras escalas de masa involucradas).
 3. El otro ejemplo es **la teoría efectiva de quarks pesados** en donde el parámetro de expansión es el inverso de la masa de los quarks pesados.

4. **El Modelo NJL.** En su versión más sencilla, solamente utiliza una interacción local del tipo escalar-isoescalar y pseudoescalar-isovectorial entre fermiones y permite entender el mecanismo de ruptura espontánea de simetría quiral y la consiguiente aparición de los piones como bosones de Goldstone. Este modelo, ha sido utilizado en numerosos estudios de las propiedades hadrónicas tanto en $SU(2)$ como en $SU(3)$ [3], [4]. Un problema del modelo NJL, relacionado con el uso de interacciones locales, es en el que se debe introducir algún tipo de regularización para evitar que los diagramas involucrados en la determinación de la autoenergía de los quarks, las masas de los mesones, las constantes de acoplamiento, etc., resulten divergentes. Esto introduce ciertas ambigüedades en el cálculo de dichas propiedades, así como de las correcciones debidas a los lazos de mesones. A partir de los 90's, han aparecido trabajos que proponen el uso de interacciones no locales para solucionar este tipo de inconvenientes, a cambio de algunas complicaciones en el cálculo. Una de las propuestas de mayor interés surge de la relación entre el modelo NJL y el modelo de intercambio de un gluón, según el cual, se utiliza el propagador de un gluón modificado fenomenológicamente, para generar las interacciones efectivas entre quarks. El propagador gluónico efectivo provee una forma natural de introducir una no localidad dentro de la interacción quark-quark.

1.6. Trabajo de esta Tesis

El trabajo de esta tesis está basado en los artículos:

- **PION FORM FACTOR FROM A CONTACT INTERACTION** L. X. Gutiérrez-Guerrero, A. Bashir, I. C. Cloët and C. D. Roberts, Phys. Rev. C **81**, 065202 (2010).
- **ABELIAN ANOMALY AND NEUTRAL PION PRODUCTION** H. L. L. Roberts, C. D. Roberts, A. Bashir, L. X. Gutierrez-Guerrero and P. C. Tandy, Phys. Rev. C **82**, 065202 (2010).
- **CRITICAL NUMBER OF FLAVORS IN QED**, A. Bashir, C. Calcáneo-Roldan, L.X. Gutiérrez-Guerrero, and M.E. Tejeda-Yeomans, Phys. Rev. D **83**, 033003 (2011).
- **PI AND RHO MESONS, AND THEIR DIQUARK PARTNERS, FROM A CONTACT INTERACTION** H. L. L. Roberts,

A. Bashir, L. X. Gutiérrez-Guerrero, C. D. Roberts and D. J. Wilson, Phys. Rev. **C83**, 065206 (2011).

Los capítulos están organizados de la siguiente manera:

- En el Primer Capítulo se hace una introducción sobre el Modelo Estándar de Física de Partículas, particularmente de los mesones y bariones que son la materia de trabajo que involucra este análisis. También se estudian los diferentes modelos que han surgido para estudiar la QCD, como lo son el modelo NJL, teorías efectivas, lattice y las Ecuaciones de Schwinger-Dyson.
- En el Segundo Capítulo estudiamos la QCD y algunas de sus características más importantes como lo es la simetría quiral, que tiene importantes consecuencias en los fenómenos físicos. También en este capítulo se introducen las Ecuaciones de Schwinger-Dyson y la ecuación de Bethe-Salpeter para estudiar a los mesones. Gracias a la introducción de estas ecuaciones, derivamos las Relaciones de Goldberger-Treimann y observamos que la Identidad Axial de Ward Takahashi se preserva.
- El Tercer Capítulo es de gran importancia, ya que en esta sección se introduce el modelo NJL, que es la base de este trabajo. Se calculan algunas de las características del pión, como lo es la constante de decaimiento y su factor de forma electromagnético. Se comparan los resultados con resultados obtenidos con otros métodos.
- La anomalía abeliana y sus consecuencias experimentales son estudiadas en el Capítulo 4, donde también se calcula el factor de forma de Transición del Pión que es de gran relevancia, ya que una vez calculado éste, es muy fácil el cálculo de los factores de Transición de $\rho - \pi$ y de los diquarks $\mathbf{1}^+ - \mathbf{0}^+$.
- Los factores de forma para el rho-mesón son calculados en el Capítulo 5. Los resultados obtenidos usando Interacción de Contacto se comparan con los obtenidos experimentalmente. En este capítulo también se estudian los momentos cuadripolares, eléctricos y magnéticos de los mesones y se comparan con los resultados recientes.
- Los diquarks y sus factores de forma son introducidos en el penúltimo capítulo. Esta sección es de especial importancia pues se puede observar claramente la relación que existe entre los diquarks y sus correspondientes mesones.
- Finalmente, se dan las conclusiones generales de esta tesis.

Capítulo 2

La QCD y Ecuaciones de Schwinger-Dyson

Las ecuaciones de Schwinger-Dyson (SD), son llamadas así en honor a Julian Schwinger y Freeman Dyson [5, 6] y son las ecuaciones que nos permiten estudiar el rompimiento dinámico de la simetría quiral, es decir, la generación de masa para fermiones en las teorías de campo. Las ecuaciones de SD son un conjunto de ecuaciones integrales acopladas que relacionan las ecuaciones de Green de una teoría cuántica de campos. En general, una teoría de campos puede considerarse resuelta una vez que se conocen todas sus funciones de Green. Debido a esto, la teoría se puede representar mediante un sistema de ecuaciones de SD que tenga por solución a estas funciones.

2.1. La QCD y sus Simetrías

En 1940, se establece la electrodinámica cuántica (QED) como la teoría cuántica de campos que describe las interacciones electromagnéticas entre los leptones cargados y los campos electromagnéticos. En 1970, surge la cromodinámica cuántica (QCD), que es la teoría cuántica de campos de las interacciones fuertes, una de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza. Su estructura es similar a la de QED, pero con una diferencia importante: el grupo de norma no es abeliano. Tanto QCD como QED son teorías de campo renormalizables. Los campos fundamentales de QCD son:

- Campos espinoriales de Dirac que describen partículas de espín $1/2$, llamados quarks, con carga eléctrica fraccionaria.
- Campos normados correspondientes a partículas sin carga y sin masa de espín 1, llamados gluones, los cuales pueden interactuar con los

quarks y entre sí.

Ahora, establecemos la notación que usaremos:

- Denotamos los campos de los quarks como q_α^A , donde $A = 1, 2, \dots, N_f$ se refiere al sabor, es decir,

$$q_\alpha^1 = u, \quad q_\alpha^2 = d, \quad q_\alpha^3 = s, \quad (2.1)$$

$$q_\alpha^4 = c, \quad q_\alpha^5 = b, \quad q_\alpha^6 = t. \quad (2.2)$$

Como sabemos, existen 6 sabores.

- El índice $\alpha = 1, 2, \dots, N$ es el color. La evidencia experimental nos dice que hay tres colores. La notación usual es:

$$q_1^A = \text{rojo}, \quad q_2^A = \text{azul}, \quad q_3^A = \text{verde}. \quad (2.3)$$

La densidad de lagrangiano para quarks libres sin masa puede ser escrita como:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{i}{2} \bar{q}_\alpha^A(x) \gamma^\mu \partial_\mu q_\alpha^A(x) - \frac{i}{2} [\partial_\mu \bar{q}_\alpha^A(x)] \gamma^\mu q_\alpha^A(x), \quad (2.4)$$

donde hemos usado la métrica $g^{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ y hay una suma sobre los índices A y α . $SU(N)$ es el grupo del color, y los quarks se transforman como la representación fundamental de este grupo.

2.2. Grupo Unitario Especial $SU(3)$

$SU(N)$ es el grupo de las matrices unitarias $N \times N$ con determinante igual a uno, en donde,

$$G^\dagger G = GG^\dagger = 1 \quad \det(G) = 1. \quad (2.5)$$

Una matriz unitaria G puede ser escrita en términos de una matriz hermitiana H como e^{iH} . De la identidad $\det(e^A) = e^{Tr(A)}$ se sigue que la $Tr(H) = 0$. Sabemos que para las matrices $N \times N$ existen $N^2 - 1$ matrices hermitianas con traza nula. Ahora, si consideramos el grupo $SU(3)$, tenemos $(3)^2 - 1 = 8$ matrices con traza nula. Esto corresponde a 8 gluones. Un elemento de $SU(N)$ puede ser escrito como:

$$G = \exp \left[i \sum_{a=1}^{N^2-1} \theta_a J_a \right], \quad (2.6)$$

donde θ_a son parámetros reales del grupo. J_a son los generadores del grupo representados por las matrices hermitianas con traza nula. Únicamente $N - 1$ de los $N^2 - 1$ generadores son diagonales. Entonces, decimos que $SU(N)$ es un grupo de rango $N - 1$. $SU(3)$ tiene 8 parámetros de grupo. Y podemos escribir los elementos de G de $SU(3)$ como:

$$G(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_8) = \text{Exp}[i\theta_a T_a] \quad a = 1, \dots, 8 \quad (2.7)$$

$$\text{Tr}(T_a) = 0 \quad [T_a, T_b] = if_{abc}T_c, \quad (2.8)$$

donde f_{abc} son totalmente antisimétricos. Los campos de los quarks se transforman bajo $SU(3)$ como la representación fundamental $T_a = \frac{1}{2}\lambda_a$, donde λ_a son matrices hermitianas 3×3 de traza nula. Podemos escoger estas matrices como:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Estas matrices se llaman matrices de Gell-Mann. $SU(3)$ es de rango 2. Por lo tanto, sólo existen dos matrices (λ_3 y λ_8 en este caso) que son diagonales. Los λ_i satisfacen:

$$\text{Tr}[\lambda_a \lambda_b] = 2\delta_{ab}. \quad (2.9)$$

2.3. Transformaciones de Norma $SU(3)$

Por el hecho de que los quarks se transforman como representaciones fundamentales del grupo $SU(3)$, podemos escribir:

$$q_\alpha^A(x) \longrightarrow q_\alpha^{A'}(x) = [e^{-igT_a\theta_a}]_{\alpha\beta} q_\beta^A(x), \quad (2.10)$$

donde g es una constante de acoplamiento real sin dimensiones. a es una constante que puede tomar valores de 1 a 8 para el caso de $SU(3)$. T_a son

matrices hermitianas con traza igual a cero. α, β son índices de la matriz T_a . En notación compacta podemos escribir

$$q_\alpha^A(x) \longrightarrow q_\alpha^{A'}(x) = G_{\alpha\beta} q_\beta^A(x). \quad (2.11)$$

Los parámetros θ_a no dependen de x en el caso de las interacciones globales. Los campos de los quarks se transforman exactamente de la misma manera para cada x . Se puede comprobar que el lagrangiano (2.4) es invariante bajo estas transformaciones globales. Cuando θ_a , y consecuentemente G , dependen de x , se dice que las transformaciones son locales:

$$q_\alpha^A(x) \longrightarrow q_\alpha^{A'}(x) = G_{\alpha\beta}(x) q_\beta^A(x). \quad (2.12)$$

Bajo estas transformaciones el lagrangiano (2.4) se modifica como sigue:

$$\mathcal{L}'_0(x) = \mathcal{L}_0(x) - \underbrace{\frac{i}{2} \bar{q}_\alpha^A(x) \gamma^\mu [(\partial_\mu G^\dagger(x)) G(x)]_{\alpha\beta} q_\beta^A(x)}_{\text{adicionales}}. \quad (2.13)$$

Entonces, concluimos que el lagrangiano para los quarks no es invariante bajo transformaciones locales de norma SU(3). El principio de norma nos genera interacciones. La manera de proceder en este caso es introducir la derivada covariante para SU(N) de la siguiente manera:

$$\delta_{\alpha\beta} \partial^\mu \longrightarrow D_{\alpha\beta}^\mu \equiv \delta_{\alpha\beta} \partial^\mu - ig T_{\alpha\beta}^a B_a^\mu(x), \quad (2.14)$$

donde $B_a^\mu(x)$ son los $(N^2 - 1)$ campos gluónicos. Y ahora el nuevo lagrangiano será invariante bajo transformaciones locales de norma si q_α^A y $D_{\alpha\beta}^\mu q_\beta^A(x)$ se transforman de la misma forma:

$$D_{\alpha\beta}^\mu q_\beta^A \longrightarrow D_{\alpha\beta}^{\prime\mu} q_\beta^{A'}(x) = G_{\alpha\gamma}(x) D_{\gamma\delta}^\mu q_\delta^A(x), \quad (2.15)$$

donde la prima sobre D significa que $B_a^\mu(x)$ se transforma a $B_a^{\prime\mu}(x)$. Para deducir la expresión para los campos gluónicos reescribimos el lagrangiano sin interacciones como:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{i}{2} \bar{q}_\alpha^A(x) \gamma^\mu \delta_{\alpha\beta} \partial_\mu q_\beta^A(x) - \frac{i}{2} [\delta_{\alpha\beta} \partial_\mu \bar{q}_\alpha^A(x)] \gamma^\mu q_\beta^A(x). \quad (2.16)$$

Considerando θ_a pequeña, sustituimos las expresiones (2.12) y (2.14) en la ecuación (2.16). Requiriendo que \mathcal{L} sea invariante bajo transformaciones locales, obtenemos:

$$B_a^{\prime\mu}(x) = B_a^\mu(x) + gf_{abc} \delta\theta_b(x) B_c^\mu(x) - \partial^\mu \delta\theta_a(x). \quad (2.17)$$

Así que finalmente el lagrangiano con interacciones es:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{q}_\alpha^A(x) \gamma^\mu \partial_\mu q_\alpha^A(x) - \frac{i}{2} [\partial_\mu \bar{q}_\alpha^A(x)] \gamma^\mu q_\alpha^A(x) + \frac{g}{2} \bar{q}_\alpha^A(x) \lambda_{\alpha\beta}^a \gamma_\mu q_\beta^A(x) B_a^\mu(x) . \quad (2.18)$$

Este lagrangiano describe los quarks libres sin masa y sus interacciones con los campos gluónicos con una constante de acoplamiento g . La densidad de lagrangiano dada por la ecuación (2.18) no nos da las ecuaciones de movimiento de los campos gluónicos. Así que necesitamos agregar el término de energía cinética para los gluones. Para tal fin definimos:

$$F^{\mu\nu} = -[D^\mu, D^\nu] , \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} f(x) &= -[D^\mu, D^\nu] f(x) = -[\partial^\mu - B^\mu, \partial^\nu - B^\nu] f(x) \\ &= (\partial^\mu B^\nu(x) - \partial^\nu B^\mu(x) - [B^\mu(x), B^\nu(x)]) f(x) . \end{aligned} \quad (2.20)$$

Entonces:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu(x) - \partial^\nu B^\mu(x) - [B^\mu(x), B^\nu(x)] \quad (2.21)$$

y se satisface la identidad de Bianchi:

$$[D^\rho, F^{\mu\nu}] + [D^\mu, F^{\nu\rho}] + [D^\nu, F^{\rho\mu}] = 0 . \quad (2.22)$$

Entonces el lagrangiano completo de QCD es:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \frac{1}{2g^2} Tr[F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] + \frac{1}{2} \bar{q}^A(x) \gamma_\mu D^\mu q_A - \frac{1}{2} [\overline{D^\mu q^A(x)}] \gamma_\mu q^A(x) .$$

Este lagrangiano contiene términos: (i) términos cinéticos (ii) términos de interacción entre gluones y (iii) términos de interacción entre quarks y gluones.

2.4. Lagrangiano de QCD

Es imposible dar masa a los gluones sin un rompimiento de la invarianza local de norma. El término en el lagrangiano que contiene la masa del gluón debe ser de la forma:

$$m^2 B_\mu(x) B^\mu(x) . \quad (2.23)$$

Empleando las transformaciones (2.17), es fácil de ver, que este término no es invariante bajo transformaciones de norma. Para los quarks primero definimos los quarks derechos e izquierdos:

$$q_{\alpha L,R} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)q_\alpha(x) . \quad (2.24)$$

Recordemos que el índice α se refiere al color. $q_\alpha(x)$ es una matriz de columna y $\gamma_5 = -i\gamma^0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. Por lo tanto, $+$ es para quarks izquierdos y $-$ para quarks derechos. El término más general para la masa de los quarks sin romper la simetría de norma es:

$$\mathcal{L}_M = q_{\alpha L}^\dagger(x)\gamma^0 M q_{\alpha R}(x) + q_{\alpha R}^\dagger(x)\gamma^0 M^\dagger q_{\alpha L}(x) , \quad (2.25)$$

donde M es una matriz arbitraria $N_f \times N_f$ y $\det M \neq 0$. En este caso podemos definir de manera única una matriz H definida positiva y una matriz U tal que:

$$M = M_H U \quad M M^\dagger = M_H M_H^\dagger \quad (2.26)$$

y entonces:

$$\mathcal{L}_M = q_{\alpha L}^\dagger(x)\gamma^0 M_H U q_{\alpha R}(x) + q_{\alpha R}^\dagger(x)\gamma^0 U^\dagger M_H^\dagger q_{\alpha L}(x) . \quad (2.27)$$

Después de sustituciones sucesivas podemos conseguir:

$$\mathcal{L}_M = q_\alpha^{\prime\prime\prime\dagger} M_D q_\alpha^{\prime\prime\prime}(x) , \quad (2.28)$$

donde $M_D = V M_H V^\dagger$ y $q_\alpha^{\prime\prime\prime} \equiv V q_\alpha^{\prime\prime}(x)$ con V una matriz unitaria. $q_\alpha^{\prime\prime}(x) = q_{\alpha R}'(x) + q_{\alpha L}(x)$ y finalmente $q_\alpha'(x) = U q_{\alpha R}(x)$. Y ahora el lagrangiano es invariante bajo el cambio $q(x) \rightarrow q''(x)$. Así que el término de masa de los quarks del lagrangiano se puede escribir como:

$$\mathcal{L}_M = q_\alpha^\dagger M_D q_\alpha(x) . \quad (2.29)$$

Por lo tanto, el Lagrangiano de QCD para quarks masivos es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} &= \frac{1}{2g^2} \text{Tr}[F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] + \frac{1}{2} \bar{q}^A(x) \gamma_\mu D^\mu q_A - \frac{1}{2} [\overline{D^\mu q^A(x)}] \gamma_\mu q^A(x) \\ &- m_A \bar{q}^A(x) q^A(x) . \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.5. Fijar la Norma

Es claro que no podemos aplicar la cuantización canónica para los campos gluónicos en la densidad de Lagrangiano dado por la ecuación (2.30) debido a que en el lagrangiano no aparecen términos del tipo \dot{B}_0 . Por esta situación incómoda, debemos agregar un término que contenga una derivada con respecto al tiempo de B^0 al lagrangiano, de tal manera que, la teoría no se altere. En QED esto se logra agregando un término al lagrangiano, que es

$$-\frac{1}{2\eta}(\partial^\mu B_\mu^a(x))(\partial^\nu B_\nu^a(x)). \quad (2.31)$$

η se llama parámetro de norma covariante y puede ser cualquier número real finito. $\eta = 1$ es norma de Feynman. $\eta = 0$ es llamada norma de Landau. Este término adicional se puede considerar como una restricción. La teoría se queda invariante tras imponer la condición de Lorentz $\partial^\mu B_\mu^a = 0$.

En QED estas normas son muy convenientes para el estudio de procesos de dispersión de altas energías donde es deseable mantener manifiesta la invarianza de Lorentz y, usando el método de Gupta y Bleuler, es posible cuantizar las componentes de B_μ^a como grados independientes de libertad. Aunque existen fotones longitudinales y temporales pero nos podemos quedar en el subespacio de fotones transversos sin perder la unitaridad de la teoría. Es importante resaltar que la física no es afectada por el valor de η . Cualquier η puede ser usada. Los pasos intermedios pueden ser diferentes para diferentes elecciones de η , pero el resultado final para cualquier observable físico es independiente de la η escogida.

Sin embargo, en QCD, a la hora de usar la misma receta, caemos en el problema de que si nos restringimos en el subespacio de gluones transversos, perdemos la unitaridad. Para recuperar la unitaridad, tenemos que agregar campos auxiliares no físicos que se llaman fantasmas Faddeev-Popov. Estos campos son escalares no masivos pero satisfacen la estadística de Fermi-Dirac. Como estos fantasmas no aparecen en el cálculo del vértice de quark-gluon a un lazo, nosotros no los tomamos en cuenta desde el principio. Por lo tanto, trabajaremos con el lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} = & \frac{1}{2g^2} Tr[F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] + \frac{1}{2} \bar{q}^A(x) \gamma_\mu D^\mu q_A - \frac{1}{2} [\overline{D^\mu q^A(x)}] \gamma_\mu q^A(x) \\ & - m_A \bar{q}^A(x) q^A(x) - \frac{1}{2\eta} (\partial^\mu B_\mu^a(x)) (\partial^\nu B_\nu^a(x)). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Partimos de este lagrangiano, poniendo $\eta = \xi - 1$.

2.6. Simetría Quiral y sus Consecuencias

Simetría quiral es una simetría de QCD en el límite de la desaparición de masas de los quarks. Sabemos, sin embargo, que la masa corriente de los quarks es finita. Sin embargo, en comparación con las escalas de hadrones, las masas de los dos quarks más ligeros son muy pequeñas, por lo que la simetría quiral puede ser considerada una simetría aproximada de las interacciones fuertes. La existencia de simetría quiral vino a partir del estudio de la desintegración beta nuclear. La identificación de la corriente axial, se debe a una característica muy importante e interesante de la interacción fuerte, esto es que la simetría asociada con la corriente vector axial es "espontáneamente rota". Una consecuencia importante de la ruptura espontánea de simetría es la existencia de un modo sin masa, el llamado bosón de Goldstone. En nuestro caso, el bosón de Goldstone es el pión. Si la simetría quiral fuera una perfecta simetría de QCD, los piones no deberían tener masa. Como la simetría quiral es sólo aproximada, esperamos que el pión tenga una masa pequeña (en comparación con todos los otros hadrones).

El hecho de que el pión es un bosón de Goldstone es de gran utilidad práctica. A bajas energías y temperaturas los procesos hadrónicos son dominados por los piones y, por lo tanto, todos los observables se pueden expresar como una expansión en las masas y los momentos de piones. Esta es la idea básica de la teoría de perturbaciones quirales, que es muy exitosa en la descripción física del umbral de piones.

Una de las grandes ventajas de la formulación lagrangiana es que la simetrías del lagrangiano conservan cantidades (corrientes). De Mecánica Clásica sabemos que las simetrías del lagrangiano implican cantidades conservadas. Por ejemplo, si la función de Lagrange es independiente del espacio y tiempo, el momento y la energía son conservados.

Como un ejemplo de la corriente de Noether, consideremos el lagrangiano de dos sabores de fermiones sin masa. Aunque sólo discutiremos las transformaciones sobre los fermiones, los resultados pueden ser directamente aplicables a QCD. El lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_j \not{\partial} \psi_j, \quad (2.33)$$

donde el índice 'j' se refiere a los dos diferentes sabores y $\not{\partial}$ es la manera abreviada de $\partial_\mu \gamma^\mu$.

(i) Consideremos la siguiente transformación:

$$\Lambda_V : \psi \longrightarrow e^{-i\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\Theta}}{2}} \psi \simeq (1 - i\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\Theta}}{2}) \psi, \quad (2.34)$$

donde $\vec{\tau}$ se refiere a las matrices de Pauli - (iso)espín- matrices, y donde hemos pasado a una notación iso-espinor para los fermiones, $\psi = (u, d)$. El campo conjugado $\bar{\psi}$, se transforma bajo Λ_V como sigue:

$$\bar{\psi} \longrightarrow e^{+i\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\Theta}} \bar{\psi} \simeq (1 + i\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\Theta}) \bar{\psi} \quad (2.35)$$

y el lagrangiano es invariante bajo Λ_V ,

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\not{\partial}\psi &\longrightarrow i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - i\vec{\Theta} \cdot \left(\bar{\psi}i\not{\partial}\frac{\vec{\tau}}{2}\psi - \bar{\psi}\frac{\vec{\tau}}{2}i\not{\partial}\psi \right) \\ &= i\bar{\psi}\not{\partial}\psi . \end{aligned} \quad (2.36)$$

Entonces, la corriente asociada es:

$$V_{\mu}^a = \bar{\psi} \gamma_{\mu} \frac{\tau^a}{2} \psi , \quad (2.37)$$

que es frecuentemente conocida como la corriente vectorial.

(ii) Ahora, consideremos la transformación

$$\begin{aligned} \Lambda_A : \quad \psi &\longrightarrow e^{-i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\Theta}} \psi = (1 - i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\Theta}) \psi \\ \Rightarrow \bar{\psi} &\longrightarrow e^{-i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\Theta}} \bar{\psi} \simeq (1 - i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\Theta}) \bar{\psi} , \end{aligned} \quad (2.38)$$

donde hemos hecho uso de las relaciones de anticonmutación de las matrices gamma, específicamente, $\gamma_0\gamma_5 = -\gamma_5\gamma_0$. El lagrangiano se transforma bajo Λ_A como sigue:

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\not{\partial}\psi &\longrightarrow i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - i\vec{\Theta} \cdot \left(\bar{\psi}i\partial_{\mu}\gamma^{\mu}\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\psi + \bar{\psi}\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}i\partial_{\mu}\gamma^{\mu}\psi \right) \\ &= i\bar{\psi}\not{\partial}\psi . \end{aligned} \quad (2.39)$$

El segundo término desaparece porque γ_5 anticonmuta con γ_{μ} . Entonces, el lagrangiano también es invariante bajo Λ_A con la **corriente vectorial axial**, es decir,

$$A_{\mu}^a = \bar{\psi} \gamma_{\mu} \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \psi . \quad (2.40)$$

En conclusión, el lagrangiano para fermiones sin masa y en consecuencia las partículas sin masa de QCD, son invariantes bajo ambas transformaciones

Λ_V and Λ_A .¹ **Esta simetría es lo que se entiende por simetría quiral**².

Ahora, veamos qué pasa si introducimos un término de masa

$$\delta\mathcal{L} = -m(\bar{\psi}\psi) \quad (2.41)$$

de arriba $\delta\mathcal{L}$ es invariante bajo transformaciones vectoriales Λ_V pero *no* bajo Λ_A , con

$$\Lambda_A : m(\bar{\psi}\psi) \longrightarrow m\bar{\psi}\psi - 2im\vec{\Theta} \left(\bar{\psi} \frac{\vec{\tau}}{2} \gamma_5 \psi \right) . \quad (2.42)$$

Entonces, Λ_A no es una buena simetría si los fermiones (quarks) tienen masa. Pero como las masas son pequeñas comparadas con una escala relevante de la teoría, podemos tratar a Λ_A como una simetría aproximada.

En el caso de QCD, sabemos que las masas de los quarks ligeros es entre 5 – 10 MeV. Mientras que la escala de energía relevante está entre $\Lambda_{QCD} \simeq 200$ MeV, que es considerablemente grande. Entonces, podemos considerar a Λ_A como una simetría aproximada y, entonces, la corriente axial debe ser aproximadamente conservada. Esta simetría que se rompe debido a la masa de los quarks es la base de la llamada Hipótesis de la Conservación Parcial de la Corriente Axial (PCAC). Además, como la ruptura de la simetría es pequeña, también es de esperar que su efecto pueda ser descrito en un enfoque perturbativo. Esto se lleva a cabo de manera sistemática en el marco de la teoría de perturbaciones quirales .

2.7. Ecuaciones de Schwinger-Dyson (SD)

Las ecuaciones de SD pueden ser derivadas formalmente a partir de las integrales de trayectoria de Feynman. Sin embargo, lo que obtenemos con este formalismo es una columna infinita de ecuaciones integrales acopladas. En consecuencia, el sistema debe de ser truncado. El método de truncamiento típico es el cálculo perturbativo, y sólo puede emplearse cuando existe un parámetro suficientemente pequeño para realizar dicha expansión. En este caso, el parámetro es precisamente la constante de acoplamiento α . Sin embargo, podemos encontrarnos con situaciones donde no se cumpla que $\alpha \ll 1$.

¹Notemos que el lagrangiano de arriba también es invariante bajo las operaciones $\psi \rightarrow \exp(-i\Theta)\psi$ y $\psi \rightarrow \exp(-i\gamma_5\Theta)\psi$. La primera operación está relacionada con la conservación del número bariónico, mientras la segunda está rota en el nivel cuántico.

²Frecuentemente se habla de simetría quiral, pero de hecho, sólo se refiere a la transformación axial Λ_A

Entonces, es necesario buscar otro método para truncarlas. Dichos métodos se llaman no perturbativos. Los cálculos no perturbativos muestran efectos muy importantes que quedan fuera de la teoría de perturbación, como la generación dinámica de masas para los fermiones fundamentales y el confinamiento de quarks y gluones en QCD. Nosotros estamos particularmente interesados en la generación dinámica de masas, pues sabemos que aproximadamente el noventa y nueve por ciento de la masa de la materia ordinaria es de origen dinámico. Para ello, veamos la manera en que los propagadores del fermión y del fotón se modifican a través de autointeracciones. Por ejemplo, un electrón puede emitir y reabsorber fotones en varias maneras como veremos en figuras posteriores. Iniciemos por ver la representación diagramática del propagador completo que muestra la Figura (2.1).



Figura 2.1: El propagador completo.

Este propagador se expresa mediante una serie infinita de correcciones, que clasificamos en tres : las correcciones al propagador fermiónico, las correcciones al propagador fotónico y las correcciones correspondientes al vértice. El proceso de autointeracciones genera tres series infinitas. Dichas series se encuentran esquemáticamente representadas por las Figuras (2.2), (2.3), y (2.4), respectivamente.

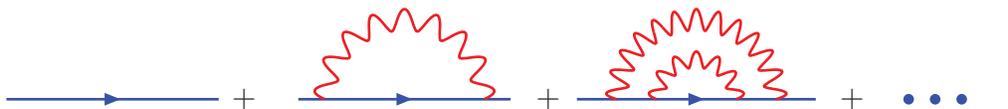


Figura 2.2: Correcciones al propagador fermiónico.

Utilizamos un círculo relleno sobre el propagador fermiónico para representar la suma de todas las interacciones que pueden afectar al fermión en su propagación. Sucede lo mismo para el propagador completo del fotón y el vértice completo del fermión, que también poseen dichos círculos rellenos, a diferencia de los propagadores desnudos que no lo tienen.

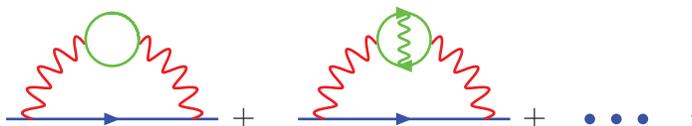


Figura 2.3: Correcciones al propagador del fotón.

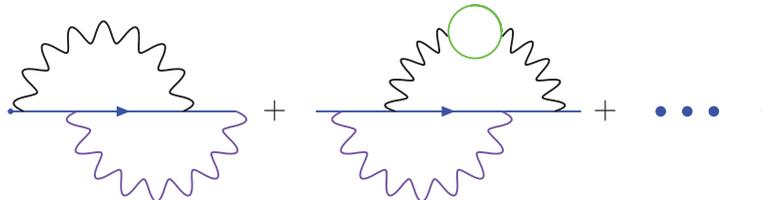


Figura 2.4: Correcciones al vértice.

Las series anteriormente mencionadas se pueden dibujar en una forma compacta, como se exhibe en la Figura (2.5). Debemos observar que, en el tercer diagrama, uno de los vértices no lleva un círculo relleno, porque, de ponerlo, estaríamos contando doble. Esta ecuación que representamos con diagramas es llamada la ecuación de Schwinger Dyson (SD) para el propagador del fermión y corresponde a la ecuación

$$S_F(p) = S_F^0(p) + S_F^0(p)\Sigma(p)S_F(p) , , \quad (2.43)$$

donde $S_F^0(p) = \frac{1}{\not{p} - m}$ como vimos en la sección anterior, y $\Sigma(p)$ representa la autoenergía.

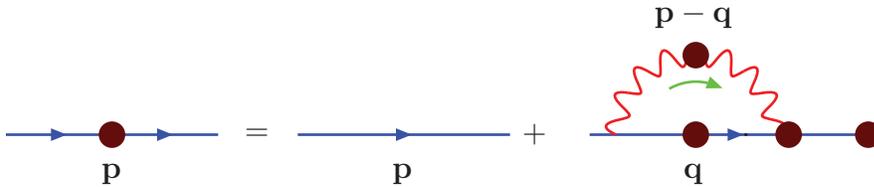


Figura 2.5: El propagador completo.

Si multiplicamos la ecuación anterior a la derecha por $S_F^{-1}(p)$ obtenemos

$$1 = S_F^0(p)S_F^{-1}(p) + S_F^0(p)\Sigma(p) , \quad (2.44)$$

y a continuación multiplicamos a la ecuación (2.44) por $S_F^{0-1}(p)$ por la izquierda, para obtener la expresión

$$S_F^{0-1}(p) = S_F^{-1}(p) + \Sigma(p) . \quad (2.45)$$

Es claro finalmente que podemos reescribir al propagador completo inverso en una forma mucho más simple de manejar, es decir, de la siguiente manera:

$$S_F^{-1}(p) = S_F^{0-1}(p) - \Sigma(p) , \quad (2.46)$$

cuyo diagrama asociado está representado en la Figura (2.6).

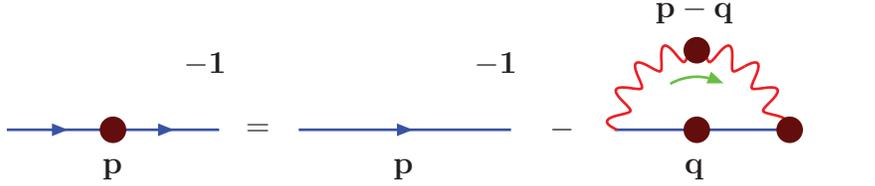


Figura 2.6: El propagador completo inverso.

2.8. Ecuaciones de SD para el quark y Ecuación BS para el meson

En esta tesis trabajaremos en el espacio Euclideo donde:

$$a \cdot b = a_\mu b_\nu \delta_{\mu\nu} \sum_{i=1}^4 a_i b_i, \quad (2.47)$$

donde $\delta_{\mu\nu}$ es la delta de Kronecker. En este caso, Q_μ es un vector espacial ($Q^2 > 0$). Y las matrices de Dirac satisfacen

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}; \quad \gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu; \quad \gamma_5 = \gamma_4\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \quad (2.48)$$

Como habiamos mencionado antes, las ecuaciones SD son una torre infinita de integrales acopladas que relacionan las funciones de Green de QCD. Esta torre de ecuaciones incluye la ecuación de la energía propia del quark llamada ecuación gap y la Ecuación de Bethe-Salpeter (BSE) la cual nos da la solución de la amplitud del quark-antiquark.

Propagador del quark. La cantidad basica que aparece en cualquier estado ligado es el propagador vestido del quark. Que consiste de dos funciones σ_V y σ_S los cuales corresponden al propagador fermionico general:

$$S(p) = -i\gamma \cdot p \sigma_V(p^2) + \sigma_S(p^2) = \frac{Z(p^2)}{i\gamma \cdot p + M(p^2)} = \frac{1}{i\gamma \cdot p A(p^2) + B(p^2)} \quad (2.49)$$

Otras notaciones frecuentemente usadas son en términos de las funciones $A = 1/Z(p^2)$, $B = M(p^2)/Z(p^2)$ y la función de masa $M(p^2) = \sigma_S(p^2)/\sigma_V(p^2)$ y constante de renormalización $Z(p^2) = \sigma_V^{-1}(p^2)$. En QCD la función de masa se obtiene apartir de la ecuación

$$S^{-1}(p) = Z_2(\mu^2, \Lambda^2)(i\gamma \cdot p + m) + \Sigma(p), \quad (2.50)$$

que es la ecuación de SD para el propagador del quark o, equivalentemente la ecuación gap de QCD y es la llave para entender el Rompimiento Espontáneo de la simetría Quiral (DCSB). $Z_2(\mu^2, \Lambda^2)$ es la constante de renormalización la cual depende del punto de renormalización, μ^2 , la escala de masa Λ^2 y el parámetro de norma. $\Sigma(p)$ es la energía propia, Figura (2.7).

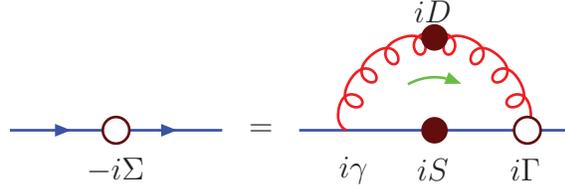


Figura 2.7: La Ecuación de Schwinger-Dyson para la energía propia del quark.

$$\Sigma(p) = Z_1(\mu^2, \Lambda^2) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}(p-q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q) \frac{\lambda^a}{2} \Gamma_\nu(q, p), \quad (2.51)$$

donde Z_1 es la constante de renormalización del vértice quark-gluón, $D_{\mu\nu}(k)$ es el propagador del gluón y Γ_ν es el vertice quark-gluon.

Propagador del gluon y vertice del quark-gluon. El propagador del gluon, caracterizado por una función Z_g en norma de Landau y momento $k = q - p$ es:

$$D^{\mu\nu}(k, \mu) = \frac{Z_g(k^2, \mu^2)}{k^2} T_k^{\mu\nu}, \quad T_k^{\mu\nu} := \delta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \quad (2.52)$$

El vertice del quark-gluon consiste de 12 estructuras tensoriales y puede ser escrito como:

$$\Gamma^\mu(l, k, \mu) = \sum_{i=1}^4 (f_i^{(1)} i\gamma^\mu + f_i^{(2)} i l^\mu + f_i^{(3)} i k^\mu) \tau_i(l, k) \quad (2.53)$$

donde los $f_i^{(j)}(l^2, l \cdot k, k^2, \mu^2)$ son funciones invariantes de Lorentz. Una posible representación de los elementos de Dirac de la base es dada por:

$$\tau_i(l, k) = \{1, \not{k}, \not{l}, [\not{l}, \not{k}]\}. \quad (2.54)$$

Para solucionar (2.51) usamos el ansatz

$$\begin{aligned} g^2 D_{\mu\nu}(p-q) &= \delta_{\mu\nu} \frac{1}{m_G^2} \delta(\tilde{\Lambda}^2 - q^2), \\ \Gamma_\nu^a(p, q) &= \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu, \end{aligned} \quad (2.55)$$

en el que tenemos que m_G es alguna escala de masa del gluón que puede ser asociada con su comportamiento infrarrojo. El parámetro Λ sirve como corte y todas las cantidades dependen de él. Entonces, podemos escoger un conjunto de constantes de renormalización que sean todas iguales a uno, $Z_1 = Z_2 = 1$. Por lo tanto, la ecuación (2.50) se transforma en

$$S(p)^{-1} = i\gamma \cdot p + m + \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}(p-q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q) \frac{\lambda^a}{2} \Gamma_\nu(q, p), \quad (2.56)$$

la cual es la llamada **ecuación de Nambu-Jona-Lasino**. Si usamos el resultado $\sum_a \lambda^a \lambda^a = \frac{16}{3} I$ y el ansatz (2.55) encontramos la siguiente ecuación:

$$S^{-1}(p) = i\gamma \cdot p + m + \frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S(q) \gamma_\mu. \quad (2.57)$$

Ahora cambiamos la notación $\tilde{\Lambda} \rightarrow \Lambda \quad \int_q^\Lambda \rightarrow \frac{1}{4\pi^2} \int^\Lambda d^4q$ que representa una regularización invariante traslacional,

$$S^{-1}(p) = i\gamma \cdot p + m + \frac{4}{3\pi^2} \frac{1}{m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\mu S(q) \gamma_\mu. \quad (2.58)$$

La integral es cuadráticamente divergente. Sustituyendo (2.49) en (2.58),

$$\frac{Z(p^2)}{i\gamma \cdot p + M(p^2)} = i\gamma \cdot p + m + \frac{4}{3\pi^2} \frac{1}{m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\mu S(q) \gamma_\mu. \quad (2.59)$$

Para encontrar $M(p)$, tomamos la traza de la ecuación resultante:

$$Tr[M(p) = m + \frac{4}{3\pi^2} \frac{1}{m_G^2} \int_q^\Lambda \frac{M(q)(\gamma_\mu \gamma_\mu = \delta_{\mu\mu} = 4)}{-q^2 + M^2(q)}]. \quad (2.60)$$

Ahora, sabemos que $d^4q = dq^3 \sin^2\theta d\theta \sin\phi d\phi d\psi$ $\theta, \phi = [0, \pi]$ y $\psi = [0, 2\pi]$. Entonces, la integral no depende de los ángulos, por lo tanto:

$$d^4q = dq^3 \underbrace{\int_0^\pi \sin^2\theta d\theta}_{\pi/2} \underbrace{\int_0^\pi \sin\phi d\phi}_2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\psi}_{2\pi} = dq^2 q^2 \pi^2, \quad (2.61)$$

$$S(p)^{-1} = i\gamma \cdot p + M. \quad (2.62)$$

Entonces hacemos el cambio $q^2 \rightarrow s$ y notamos que $M(p) = M$ es una solución de la gap:

$$M = m + \frac{M}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^\infty ds s \frac{1}{s + M^2}. \quad (2.63)$$

Luego, hacemos regularización de tiempo propio. Para hacer esto notamos que

$$\int_a^b dx e^{-x(s+M)} = \frac{e^{-a(s+M)} - e^{-b(s+M)}}{M+s}, \quad (2.64)$$

$$\frac{1}{s+M^2} = \int_0^\infty d\tau e^{-\tau(s+M^2)} \rightarrow \int_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} d\tau e^{-\tau(s+M^2)} = \frac{Z(s)}{s+M^2}, \quad (2.65)$$

donde $\tau_{ir,uv}$ son los reguladores infrarojo y ultravioleta respectivamente,

$$Z(s) = e^{-(s+M^2)r_{UV}^2} - e^{-(s+M^2)r_{IR}^2}. \quad (2.66)$$

Sustituyendo 2.65 en 2.63 tenemos que:

$$M = m + \frac{M}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^\infty ds s \frac{1}{s+M^2} [e^{-(s+M^2)r_{UV}^2} - e^{-(s+M^2)r_{IR}^2}]. \quad (2.67)$$

Haciendo el cambio de variable $s+M^2 = s'$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty ds s \frac{1}{s+M^2} [e^{-(s+M^2)r_{UV}^2} - e^{-(s+M^2)r_{IR}^2}] &= \int_{M^2}^\infty ds' [e^{-s'r_{UV}^2} - e^{-s'r_{IR}^2}] \\ &\quad - M^2 \int_{M^2}^\infty ds' e^{-s'r_{UV}^2} + M^2 \int_{M^2}^\infty \frac{ds'}{s'} e^{-s'r_{IR}^2}. \end{aligned}$$

Con otro cambio de variable es decir, $s'r_{UV}^2 = t$ y si denotamos la integral como lo hemos hecho anteriormente $\mathcal{C}(M^2; \tau_{ir}, \tau_{uv})$,

$$\mathcal{C}(M^2; \tau_{ir}, \tau_{uv}) = M^2 \Gamma(-1, M^2 \tau_{uv}^2) - M^2 \Gamma(0, M^2 \tau_{ir}^2) - \frac{1}{r_{IR}^2} e^{-M^2 r_{IR}^2}, \quad (2.68)$$

donde

$$\Gamma(\alpha, y) = \int_y^\infty dt t^{\alpha-1} e^{-t}. \quad (2.69)$$

Entonces, ahora podemos escribir:

$$M = m + \frac{M}{3\pi^2 m_G^2} \mathcal{C}(M^2; \tau_{ir}, \tau_{uv}), \quad (2.70)$$

para el condensado

$$-\langle \bar{q}q \rangle = Tr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} S(k) \quad (2.71)$$

$$= \frac{12\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty ds s \sigma_s(s) \quad (2.72)$$

$$= \frac{3}{4\pi^2} \int_0^\infty ds s \sigma_s(s). \quad (2.73)$$

Si escribimos los valores fenomenológicos (en GeV)

$$m_G = 0.11, \Lambda_{\text{ir}} = 0.24, \Lambda_{\text{uv}} = 0.823, \quad (2.74)$$

obtenemos los valores $M = 0.40$ y $\kappa = 0.22$. Podemos notar que M resulta una constante. Sin embargo, el comportamiento de la solución no perturbativa de la ecuación gap de QCD ha sido estudiada en [7] y [8], y sus resultados son ilustrados en la siguiente figura:

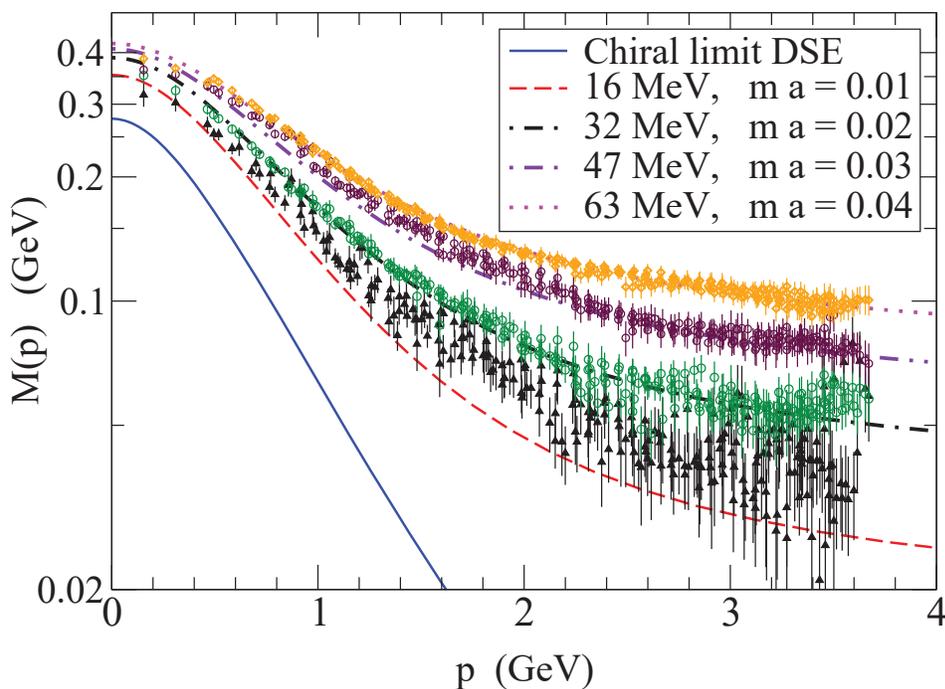


Figura 2.8: Función de Masa.

Sabemos que cualquier modelo que nos permite encontrar una buena descripción de observables, como la masa de hadrones, constantes de decaimiento, etc. incluye la generación de una masa euclideana $M \sim 400 \text{ MeV}$, es decir la generación de una gran "masa efectiva" para los quarks u y d quarks esto es ilustrado por ejemplo en [9, 10]. Para el quark es una consecuencia directa del comportamiento infrarrojo de $D_{\mu\nu}$.

2.9. Ecuación de Bethe-Salpeter (BSE)

Los estados ligados mas simples en QCD estan compuestos de un quark y un antiquark. La correspondiente BSE depende de una expresion no perturbativa que involucra el propagador del quark y el kernel $q\bar{q}$. Entender el pión es la llave para entender el problema de la interacción fuerte en física. Para estudiar al pión como un estado compuesto por quarks requerimos la ecuación de Bethe Salpeter. La cual se puede escribir como:

$$i\Gamma_\pi(P) = \int d^4q iS(q+P) i\Gamma_\pi(P) iS(q) \mathcal{K}, \quad (2.75)$$

donde $\Gamma_\pi(P)$ es la amplitud de Bethe-Salpeter del pión y \mathcal{K} es el llamado kernel de la BSE, el cual describe la interacción del quark y el antiquark. $\Gamma_\pi(P)$ puede ser determinado separadamente de la BSE una vez que el kernel \mathcal{K} sea especificado.

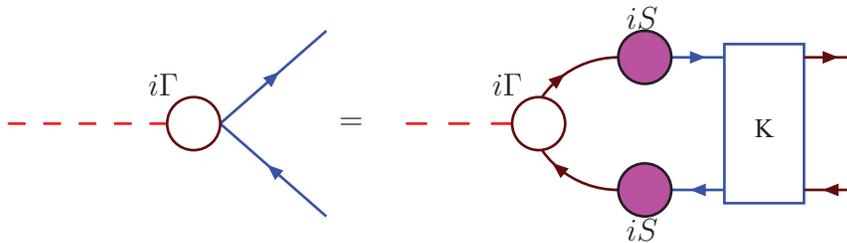


Figura 2.9: El vértice mesón-quark Γ_{meson} .

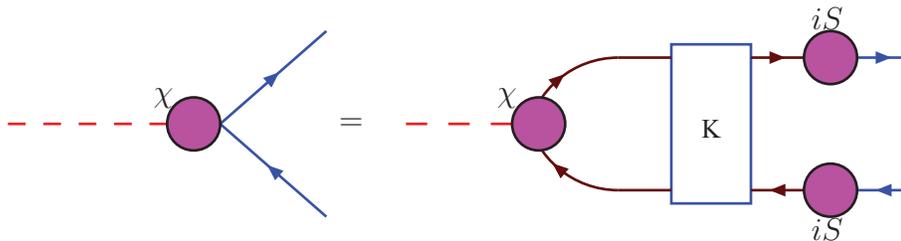


Figura 2.10: La amplitud de Bethe-Salpeter para el mesón $i\chi = S\Gamma_{meson}S$

En las Figuras (2.9) y (2.10) se muestran dos formas equivalentes de la BSE. En esta figuras empleamos la convención de que $i\chi = S\Gamma_{pion}S$, S y el

kernel de la ecuación de BSE quark-anti-quark es $\mathcal{K} = (i\Gamma)(iD)(\Gamma) + \dots$. La amplitud de Bethe Salpeter de cualquier partícula pseudoescalar, incluyendo el pión puede ser descompuesta en 4 estructuras $1, \not{k}, \not{P}, \not{k} \not{P}$.

$$\Gamma_{\pi}^j(k, P) = \tau^j \gamma_5 \left[iE_{\pi}(k; P) + \gamma \cdot P F_{\pi}(k; P) + \gamma \cdot k k \cdot P G_{\pi}(k; P) + \sigma_{\mu\nu} k_{\mu} P_{\nu} H_{\pi}(k; P) \right], \quad (2.76)$$

donde $\tau_{j=1\dots 3}^j$ son las matrices de Pauli. k , y P son el momento relativo y total del par quark-antiquark respectivamente. Donde las amplitudes invariantes E, F, G y H son funciones escalares de Lorentz de k^2 y $k \cdot P$ El vértice axial es:

$$\Gamma_{5\mu}^j(k, P) = \frac{\tau^j}{2} \gamma_5 \left[\gamma_{\mu} F_R(k; P) + \gamma \cdot k k_{\mu} G_R(k; P) - \sigma_{\mu\nu} k_{\nu} H_R(k; P) \right] + \tilde{\Gamma}_{5\mu}^j(k; P) + \frac{f_{\pi} P_{\mu}}{P^2 + m_{\pi}^2} \Gamma_{\pi}^j(k, P). \quad (2.77)$$

2.10. Identidad Vector-Axial de WT)

Para solucionar las ecuaciones SD para el propagador del quark y el vértice quark-gluon debemos introducir un esquema de truncación. Las ecuaciones BS deben ser truncadas consistentemente cuidando que se preserve la simetría quiral. Esto es expresado via la identidad Vectorial Axial de Ward Takahashi, que asegura que los piones son bosones de Goldstone. La truncación mas sencilla que satisface este criterio es la truncación arcoiris donde el vértice quark-gluon se reemplaza con el vértice a nivel árbol. La constante de decaimiento, f_{π} , y la constante de renormalización canónica son proporcionales en el límite quiral sí y solo sí, la identidad Vectorial Axial Ward- Takahashi se satisface, es decir, si:

$$P_{\mu} \Gamma_{5\mu}(q_+, q) = S^{-1}(q_+) i\gamma_5 + i\gamma_5 S^{-1}(q). \quad (2.78)$$

Vamos a checar si esta identidad se satisface en el presente modelo. Primero, veamos la ecuación SD del vértice, y calculemos el kernel \mathcal{K} de este diagrama. Para ello obtenemos la siguiente ecuación:

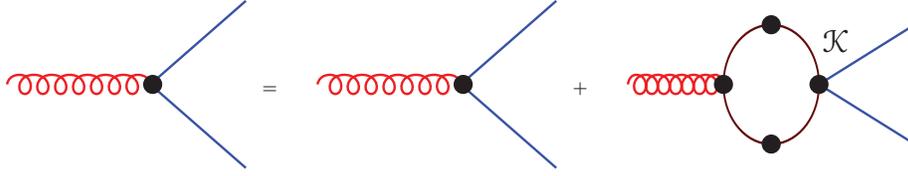


Figura 2.11: Diagramas.

En la aproximación Rainbow ladder esto se convierte:

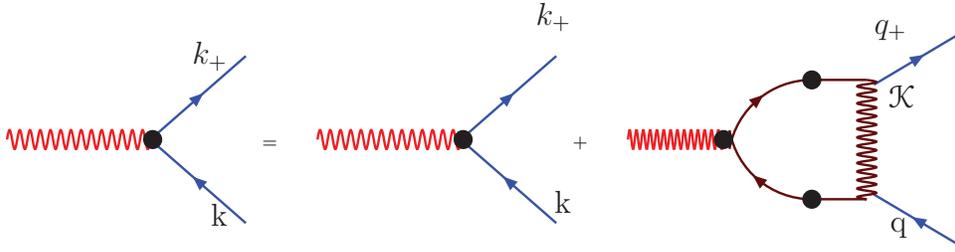


Figura 2.12: Diagramas 2

$$\mathcal{K} = \left[\sum_a \frac{\lambda^a \lambda^a}{4} \right] \gamma_\alpha \gamma_\beta \delta_{\alpha\beta} \frac{\delta(\Lambda^2 - q^2)}{m_g^2} \quad (2.79)$$

$$= \frac{1}{4} * \frac{16}{3} \gamma_\alpha \gamma_\alpha \frac{\delta(\Lambda^2 - q^2)}{m_g^2} \quad (2.80)$$

Hemos usado el ansatz para el propagador del gluón. Ahora, con la ayuda de este kernel calculamos el vértice axial $\Gamma_{5\mu}(k_+, k)$, el cual es determinado por

$$ie\Gamma_{5\mu}(k_+, k) = ie\gamma_5\gamma_\mu + \frac{16}{12} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha iS(q) [ie\Gamma_{5\mu}(q_+, q)] iS(q) \gamma_\alpha \frac{\delta(\Lambda^2 - q^2)}{m_g^2}. \quad (2.81)$$

Así que:

$$\Gamma_{5\mu}(k_+, k) = \gamma_5\gamma_\mu - \frac{1}{3\pi^2 m_g^2} \int_q^\Lambda \gamma_\alpha S(q_+) \Gamma_{5\mu}(q_+, q) S(q) \gamma_\alpha. \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned}
 P_\mu \Gamma_{5\mu}(k_+, k) &= \gamma_5 \gamma \cdot P = -\frac{1}{3\pi^2 m_g^2} \int_q^\Lambda \gamma_\alpha S(q_+) P_\mu \Gamma_{5\mu}(q_+, q) S(q) \gamma_\alpha \\
 &= -\frac{1}{3\pi^2 m_g^2} \int_q^\Lambda \gamma_\alpha S(q_+) [S^{-1}(q_+) i\gamma_5 + i\gamma_5 S^{-1}(q)] S(q) \gamma_\alpha \\
 &= +\frac{i\gamma_5}{3\pi^2 m_g^2} \int_q^\Lambda \gamma_\alpha S(q) \gamma_\alpha + \frac{1}{3\pi^2 m_g^2} \int_q^\Lambda \gamma_\alpha S(q_+) \gamma_\alpha i\gamma_5 .
 \end{aligned}$$

Usando $m=0$ en (2.57),

$$\frac{1}{3\pi^2 m_g^2} \int_q^\Lambda \gamma_\mu S(q) \gamma_\mu = S^{-1}(p) - i\gamma \cdot p. \quad (2.83)$$

Podemos escribir

$$\begin{aligned}
 P_\mu \Gamma_{5\mu}(k_+, k) &= \gamma_5 \gamma \cdot P + i\gamma_5 [S^{-1}(k) - i\gamma \cdot k] + [S^{-1}(k) - i\gamma \cdot k] i\gamma_5 , \\
 P_\mu \Gamma_{5\mu}(k_+, k) &= \gamma_5 \gamma \cdot P + S^{-1}(k) i\gamma_5 + i\gamma_5 S^{-1}(k) .
 \end{aligned} \quad (2.84)$$

Esto es lo mismo que la siguiente expresión:

$$P_\mu \Gamma_{5\mu}(q_+, q) = \gamma_5 \gamma \cdot P + S^{-1}(q) i\gamma_5 + i\gamma_5 S^{-1}(q) , \quad (2.85)$$

Lo cual está de acuerdo con la Identidad de Ward-Takahashi, (2.78), únicamente si $P = 0$. Notamos que $P^2 = 0$ no necesariamente implica $P = 0$. En la teoría de Poincaré la condición $P = 0$ es imposible. Sin embargo, como mencionamos antes, $P = 0$ implica $P^2=0$, lo cual garantiza un pión sin masa. Esto, por supuesto, puede suceder en el límite quiral.

2.11. Relaciones de Goldberger-Triemann

En el establecimiento de las ecuaciones de Bethe-Salpeter o cualquier variedad de estas ecuaciones, es esencial mantener las Identidades de Ward-Takahashi (WT), ya que, de lo contrario, muchas propiedades importantes se perderán. Esta restricción también nos ayuda a determinar correctamente las ecuaciones para los factores de forma.

$$\begin{aligned}
 &P_\mu \Gamma_{5\mu}^j(k, P) \\
 &= \frac{\tau^j}{2} \gamma_5 \left[\gamma \cdot P F_R(k; P) + \gamma \cdot k k \cdot P G_R(k; P) - \sigma_{\mu\nu} k_\nu P_\mu H_R(k; P) \right] \\
 &+ P_\mu \tilde{\Gamma}_{5\mu}^j(k; P) + \frac{f_\pi P^2}{P^2 + m_\pi^2} \Gamma_\pi^j(k, P) .
 \end{aligned} \quad (2.86)$$

Multiplicamos por P_μ para ser consistentes con la ecuación de WT. Entonces llegamos a $P_\mu \tilde{\Gamma}_{5\mu}^j(k; P) \sim O(P^2)$ y escribimos $m_\pi^2 = 0$

$$\begin{aligned}
 & - i P_\mu \Gamma_{5\mu}^j(k, P) = S^{-1}(k_+) \gamma_5 \frac{\tau^j}{2} + \frac{\tau^j}{2} \gamma_5 S^{-1}(k_-) \\
 & = \frac{-i\tau^j}{2} \gamma_5 \left[\gamma \cdot P F_R(k; P) + \gamma \cdot k k \cdot P G_R(k; P) - \sigma_{\mu\nu} k_\nu P_\mu H_R(k; P) \right] \\
 & - i f_\pi \tau^j \gamma_5 \left[\gamma \cdot P F_\pi(k; P) + \gamma \cdot k k \cdot P G_\pi(k; P) + \sigma_{\mu\nu} k_\mu P_\nu H_\pi(k; P) \right] \\
 & + f_\pi \tau^j \gamma_5 E_\pi(k; P) . \tag{2.87}
 \end{aligned}$$

Ahora, usando ec(2.49), llegamos a que:

$$\begin{aligned}
 -i P_\mu \Gamma_{5\mu}^j(k, P) & = \left\{ i\gamma \cdot (k + P) A[(k + P)^2] + B[(k + P)^2] \right\} \gamma_5 \frac{\tau^j}{2} \\
 & + \frac{\tau^j}{2} \gamma_5 \left\{ i\gamma \cdot (k - P) A[(k - P)^2] + B[(k - P)^2] \right\} \\
 & = \left\{ i\gamma \cdot (k + P) A[(k + P)^2] - i\gamma \cdot (k - P) A[(k - P)^2] \right. \\
 & \left. + B[(k + P)^2] + B[(k - P)^2] \right\} \gamma_5 \frac{\tau^j}{2} \tag{2.88}
 \end{aligned}$$

Si multiplicamos (2.88) por iP_μ obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{5\mu}^j(k, P) &= iP^{-2}P_\mu\gamma_5\frac{\tau^j}{2}\left\{B[(k+P)^2]+B[(k-P)^2]\right\} \\
 &+ \left\{-P^{-2}P_\mu\gamma\cdot kA[(k+P)^2]-P^{-2}P_\mu\gamma\cdot PA[(k+P)^2]\right. \\
 &+ \left.P^{-2}P_\mu\gamma\cdot kA[(k-P)^2]-P^{-2}P_\mu\gamma\cdot PA[(k-P)^2]\right\}\gamma_5\frac{\tau^j}{2} \\
 &= iP^{-2}P_\mu\gamma_5\frac{\tau^j}{2}\left\{B[(k+P)^2]+B[(k-P)^2]\right\} \\
 &+ -P^{-2}P_\mu\gamma\cdot k\left\{-A[(k+P)^2]+A[(k-P)^2]\right\}\gamma_5\frac{\tau^j}{2} \\
 &- P^{-2}P_\mu\gamma\cdot P\left\{A[(k+P)^2]+A[(k-P)^2]\right\}\gamma_5\frac{\tau^j}{2} \\
 &= iP^{-2}P_\mu\gamma_5\frac{\tau^j}{2}\left\{B[(k+P)^2]+B[(k-P)^2]\right\} \\
 &- \gamma_\mu\left\{+A[(k+P)^2]+A[(k-P)^2]\right\}\gamma_5\frac{\tau^j}{2} \\
 &- \frac{\gamma\cdot kk_\mu}{P\cdot k}\left\{-A[(k+P)^2]+A[(k-P)^2]\right\}\gamma_5\frac{\tau^j}{2}. \quad (2.89)
 \end{aligned}$$

Con el fin de comparar con (2.87) multiplicamos (2.89) con $-iP_\mu$ y obtenemos

$$\begin{aligned}
 -iP_\mu\Gamma_{5\mu}^j(k, P) &= i\gamma\cdot P\left\{+A[(k+P)^2]+A[(k-P)^2]\right\}\gamma_5\frac{\tau^j}{2} \\
 &+ \frac{i\gamma\cdot kk\cdot P}{P\cdot k}\left\{-A[(k+P)^2]+A[(k-P)^2]\right\}\gamma_5\frac{\tau^j}{2} \\
 &+ \gamma_5\frac{\tau^j}{2}\left\{B[(k+P)^2]+B[(k-P)^2]\right\}. \quad (2.90)
 \end{aligned}$$

Entonces cuando $P \rightarrow 0$, $\Gamma_{5\mu}^j$ es determinada por la Identidad Axial de WT:

$$\begin{aligned}
 & - i P_\mu \Gamma_{5\mu}^j(k, P) = \gamma_5 \tau^j B(k^2) + i \gamma \cdot P A(k^2) \gamma_5 \tau^j + \\
 & + i \gamma \cdot k k \cdot P \left\{ \lim_{P \rightarrow 0} \frac{-A[(k+P)^2] + A[(k-P)^2]}{P \cdot k} \right\} \gamma_5 \frac{\tau^j}{2} \\
 & = \frac{-i \tau^j}{2} \gamma_5 \left[\gamma \cdot P F_R(k; P) + \gamma \cdot k k \cdot P G_R(k; P) - \sigma_{\mu\nu} k_\nu P_\mu H_R(k; P) \right] \\
 & - i f_\pi \tau^j \gamma_5 \left[\gamma \cdot P F_\pi(k; P) + \gamma \cdot k k \cdot P G_\pi(k; P) + \sigma_{\mu\nu} k_\mu P_\nu H_\pi(k; P) \right] \\
 & + f_\pi \tau^j \gamma_5 E_\pi(k; P) . \tag{2.91}
 \end{aligned}$$

Con la definición $P = \frac{p}{2}$ y comparando con: $S^{-1}(p) = i \gamma \cdot p + M$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 f_\pi E_\pi(k; P=0) & = B(k^2) \\
 F_R(k; 0) + 2f_\pi F_\pi(k; 0) & = A(k^2) \\
 G_R(k; 0) + 2f_\pi G_\pi(k; 0) & = 2A'(k^2) \\
 H_R(k; 0) + 2f_\pi H_\pi(k; 0) & = 0 . \tag{2.92}
 \end{aligned}$$

Las relaciones (2.92) son llamadas las **relaciones de Goldberger-Treimann**. Donde A y B son las soluciones en el límite quiral de (2.56). Una consecuencia necesaria de 2.92 es que las pseudocomponentes F_π y G_π y la componente del pseudovector H_π no son cero en (2.76). Esto corrige un concepto erróneo de que únicamente $E_\pi \neq 0$ y esto tiene importantes consecuencias fenomenológicas. En teoría de perturbaciones $B(k^2) \equiv 0$ en el límite quiral. la aparición de un $B(k^2)$ en la solución de (2.50) en el límite quiral significa $D\chi SB$: hemos generado dinámicamente un término de masa del quark en la ausencia de una semilla de masa. Entonces, el rompimiento de la simetría quiral es una condición necesaria y suficiente para la aparición de un bosón de Goldstone.

2.12. Modelo NJL

En los modelos efectivos se busca un lagrangiano simplificado que contenga las características principales de QCD a bajas energías, como por ejemplo, sus simetrías. Uno de los modelos efectivos que ha recibido gran atención en los últimos 15-20 años es el de Nambu y Jona-Lasino (NJL). Su historia se remonta al año 1961, en el que Y. Nambu y Jona-Lasino publicaron dos trabajos titulados "Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity"[11]. Poco antes, Nambu y Chou habían

sugerido la existencia de un límite, en el cual el pión es un bosón de Goldstone (no masivo) asociado con la ruptura espontánea de la simetría quiral. Lo que ellos pretendían era la masa pequeña que distingue al pión de los otros hadrones. En los trabajos de 1961, Nambu y Jona-Lasino partieron de un lagrangiano de una interacción de dos cuerpos entre nucleones (los bloques básicos de materia conocidos hasta el momento) no masivos que respetan la simetría quiral. La ruptura espontánea hace que la masa de los nucleones resulte finita, dando lugar a bosones de Goldstone que fueron identificados con el pión. Por esa época QCD aún no había sido formulada. Cuando QCD finalmente fue concebida, a mediados de los años 70, el modelo NJL empezó a ser abandonado, debido a su naturaleza no fundamental y a su no renormalizabilidad. Sin embargo, como consecuencia de las dificultades para tratar QCD a bajas energías, en la segunda parte de la década de los 80's surgió la idea de reinterpretar el modelo NJL como un modelo para un sistema de quarks interactuantes. Se supone así que los grados de libertad de los gluones se pueden congelar, dando lugar a interacciones efectivas entre los quarks. Este modelo ofrece un esquema simple para estudiar la ruptura espontánea de la simetría quiral y sus manifestaciones en la física de hadrones, como la generación dinámica de masas de los quarks, la aparición de un condensado de quarks y el papel de los piones como bosones de Goldstone. Tal vez el punto débil más importante del modelo es que no posee la propiedad de confinamiento de color de QCD. Su aplicabilidad está entonces limitada a aquellos fenómenos hadrónicos y nucleares que no dependen sensiblemente de los detalles del mecanismo de confinamiento. Sin embargo, para muchos aspectos importantes de la física hadrónica de bajas energías, las simetrías de QCD son probablemente tan o más importantes que el confinamiento. El modelo NJL es una interacción de contacto en el espacio de configuración. Entonces, la amplitud-BS para un par quark-antiquark no depende del momento relativo. Entonces, para el modelo NJL tenemos:

$$\Gamma_\pi(P) = \gamma_5 \left[iE_\pi(P) + \frac{\gamma \cdot P}{M} F_\pi(P) \right], \quad (2.93)$$

donde hemos extraído M por razones dimensionales. La amplitud BS puede ser obtenida a partir de la ecuación-BS, la cual puede ser escrita como:

$$i\Gamma_\pi(P) = \int d^4q iS(q+P) i\Gamma_\pi(P) iS(q) \mathcal{K}. \quad (2.94)$$

Ahora, el orden más bajo del Kernel \mathcal{K} es:

$$\mathcal{K} = \left[\sum_a \frac{\lambda^a \lambda^a}{4} \right] \gamma_\mu \gamma_\nu \delta_{\mu\nu} \frac{\delta(\Lambda^2 - q^2)}{m_g^2}. \quad (2.95)$$

Sustituyendo esto en la ecuación BS podemos escribir:

$$\Gamma_\pi(P) = -\frac{1}{3\pi^2} \frac{1}{m_g^2} \int_q^\Lambda \gamma_\mu S(q+P) \Gamma_\pi(P) S(q) \gamma_\mu. \quad (2.96)$$

Esta es una ecuación matricial, la cual separaremos en dos ecuaciones independientes para $E_\pi(p)$ y $F_\pi(p)$.

Capítulo 3

El Factor de Foma del Pión

El pión tiene un lugar único en el Modelo Estándar de Física de partículas. Es un estado compuesto de un quark y un antiquark y también es el boson de Goldstone asociado al rompimiento de la simetría quiral. un buen entendimiento del pión se obtiene através de las ecuaciones SD. La llave de esto es la existencia de una simetría no perturbativa que preserve el esquema de truncación esto nos permite: la conexión entre el rompimiento de la simetría quiral y el estado compuesto del pión. Los estudios que nos dicen que $Q^2 F_\pi \approx cte$ para $Q^2 \gg m_\pi^2$ es una gran motivación para los experimentos modernos.

3.1. Ecuación Matricial

Para obtener la primera ecuación, multiplicamos (2.96) por $-\frac{i}{4}\gamma_5$ y tomamos la traza. Empleando (2.93), el lado izquierdo puede ser escrito como:

$$\text{Tr} \left[-\frac{i}{4} \gamma^5 \Gamma_\pi(P) \right] = \text{Tr} \left[\frac{1}{4} E_\pi(P) I \right] = E_\pi(P) . \quad (3.1)$$

Y el lado derecho se convierte en

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3\pi^2} \frac{1}{m_g^2} \frac{i}{4} \int_q^\Lambda \text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu S(q+P) \Gamma_\pi(P) S(q) \gamma_\mu] \\ &= \frac{1}{3\pi^2} \frac{1}{m_g^2} \frac{i}{4} \int_q^\Lambda \text{Tr} [\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\mu S(q+P) \Gamma_\pi(P) S(q)] \\ &= -\frac{i}{3\pi^2} \frac{1}{m_g^2} \int_q^\Lambda \text{Tr} [\gamma_5 S(q+P) \Gamma_\pi(P) S(q)] . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ahora, usamos las expresiones

$$\begin{aligned} S(q) &= -i\gamma \cdot q \sigma_V(q^2) + \sigma_s(q^2) \equiv -i\gamma \cdot q \sigma_V + \sigma_S , \\ S(q+P) &= -i\gamma \cdot [q+P] \sigma_V((q+P)^2) + \sigma_s((q+P)^2) \\ &\equiv -i\gamma \cdot q_+ \sigma_V^+ + \sigma_S^+ , \end{aligned}$$

y la forma general de $\Gamma_\pi(P)$, Ec. (2.93). El t3ermino proporcional a $E_\pi(P)$ se simplifica como sigue:

$$\begin{aligned} &- \frac{i}{3\pi^2} \frac{1}{m_g^2} \int_q^\Lambda \text{Tr} \left[\gamma_5 (-i\gamma \cdot q_+ \sigma_V^+ + \sigma_S^+) i\gamma_5 E_\pi (-i\gamma \cdot q \sigma_V + \sigma_S) \right] \\ &= \frac{4}{3\pi^2} \frac{1}{m_g^2} E_\pi \int_q^\Lambda [q_+ \cdot q \sigma_V^+ \sigma_V + \sigma_S^+ \sigma_S] . \end{aligned} \quad (3.3)$$

Similarmente, podemos calcular la contribuci3n de F_π

$$\begin{aligned} E_\pi &= \frac{4}{3\pi^2 m_g^2} \int_q^\Lambda E_\pi (q_+ \cdot q \sigma_V^+ \sigma_V + \sigma_S^+ \sigma_S) \\ &+ \frac{4}{3\pi^2 m_g^2} \int_q^\Lambda \frac{F_\pi}{M} (q_+ \cdot P \sigma_V^+ \sigma_S - q \cdot P \sigma_S^+ \sigma_V) , \end{aligned}$$

donde

$$\sigma_V(q^2) = \frac{1}{q^2 + M^2} , \quad \sigma_S(q^2) = M \sigma_V(q^2) . \quad (3.4)$$

En (3.4) podemos ver que en general E_π recibe contribuci3n F_π . Veamos qu3 sucede en el l3mite quiral. En este l3mite $P^2 = 0$. Entonces, $q_+ \cdot P = q \cdot P$. La contribuci3n de F_π a E_π desaparece y tenemos:

$$\begin{aligned} E_\pi(P) &= \frac{4}{3\pi^2 m_g^2} \int_q^\Lambda E_\pi(P) [q_+ \cdot q \sigma_V^+ \sigma_V] \\ &= \frac{4}{3\pi^2 m_g^2} \int_q^\Lambda E_\pi(P) \frac{M^2 + q \cdot P + q^2}{(q_+^2 + M^2)(q^2 + M^2)} . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Para realizar el c3lculo de estas integrales, empleamos la parametrizaci3n de Feynmann

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 d\alpha \frac{1}{[\alpha a + (1-\alpha)b]^2} . \quad (3.6)$$

Entonces, las integrales adquieren la forma

$$\begin{aligned}
 & \int_q^\Lambda \int_0^1 d\alpha \frac{M^2 + q \cdot P + q^2}{[\alpha(q_+^2 + M^2) + (1 - \alpha)(q^2 + M^2)]^2} \\
 = & \int_q^\Lambda \int_0^1 d\alpha \frac{M^2 + q \cdot P + q^2}{[(q + \alpha P)^2 + M^2 + \alpha(1 - \alpha)P^2]^2} \\
 \stackrel{P^2=0}{=} & \int_q^\Lambda \int_0^1 d\alpha \frac{M^2 + q \cdot P + q^2}{[(q + \alpha P)^2 + M^2]^2} \\
 = & \int_{q'}^\Lambda \int_0^1 d\alpha \frac{q'^2 + (1 - 2\alpha)q' \cdot P + M^2}{[q'^2 + M^2]^2} \\
 = & \int_{q'}^\Lambda \frac{1}{[q'^2 + M^2]}, \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

donde hemos hecho el cambio de variable $q' = q + \alpha P$. Con esto obtenemos

$$\begin{aligned}
 E_\pi(P) &= \frac{4}{3\pi^2 m_g^2} \int_q^\Lambda \frac{1}{q^2 + M^2} E_\pi(P) \\
 &= \frac{1}{3\pi^2 m_g^2} \int_0^\infty ds \frac{s}{s + M^2} E_\pi(P) \\
 &= \frac{1}{3\pi^2 m_g^2} \mathcal{C}(M^2; r_{IR}^2, r_{UV}^2) E_\pi(P). \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

Notemos que 3sta es la misma ecuaci3n que (??). Lo cual no es una coincidencia. Es debido a la naturaleza del pi3n.

Por ahora dejemos el an3lisis del l3mite quiral y regresemos a (2.96) y multipliqu3mosla por $\frac{M}{4P^2} \gamma \cdot P \gamma_5$ y tomemos la traza

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} \left[\frac{M}{4P^2} \gamma \cdot P \gamma_5 \Gamma_\pi(P) \right] &= \\
 & - \frac{1}{3\pi^2 m_g^2} \frac{M}{4P^2} \int_q^\Lambda \text{Tr} [\gamma \cdot P \gamma_5 \gamma_\mu S(q + P) \Gamma_\pi(P) S(q) \gamma_\mu] . \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

Ahora sustituyendo en la forma m3s general de $\Gamma_\pi(P)$ en el modelo NJL, i.e., ec. (2.93), es f3cil ver que el t3rmino $E_\pi(P)$ no contribuye en la parte izquierda, entonces el t3rmino F_π queda solo, como se ve en la siguiente ecuaci3n

$$\text{Tr} \left[\frac{M}{4P^2} \gamma \cdot P \gamma_5 \Gamma_\pi(P) \right] = \frac{1}{4P^2} \text{Tr} [\gamma \cdot p \gamma_5 \gamma_5 \gamma \cdot P] F_\pi(P) = F_\pi(P) . \tag{3.10}$$

El **t3rmino proporcional a $E_\pi(P)$** con la traza en el lado derecho, puede ser simplificado como sigue

$$\begin{aligned}
 & \text{Tr} [\gamma \cdot P \gamma_5 \gamma_\mu S(q + P) i \gamma_5 E_\pi(P) S(q) \gamma_\mu] \\
 &= -i \text{Tr} [\gamma \cdot P \gamma_\mu (i \gamma \cdot q_+ + M) (-i \gamma \cdot q + M) \gamma_\mu] \sigma_V^\dagger \sigma_V \\
 &= M \text{Tr} [\gamma \cdot P \gamma_\mu \gamma \cdot P \gamma_\mu] \\
 &= -2 M 4P^2,
 \end{aligned}$$

donde hemos usado $\gamma_\mu \gamma \cdot P \gamma_\mu = -2\gamma \cdot P$. Entonces, el primer t3rmino de RHS es:

$$\frac{2}{3\pi^2 m_g^2} \int_q^\Lambda \frac{E_\pi(P)}{(q_+^2 + M^2)(q^2 + M^2)}. \quad (3.11)$$

Similarmente, el **t3rmino proporcional a $F_\pi(P)$** con la traza puede ser simplificado como sigue:

$$\begin{aligned}
 & \frac{F_\pi(P)}{M} \text{Tr} [\gamma_\mu \gamma \cdot P \gamma_\mu S(q + P) \gamma_5 \gamma \cdot P S(q)] \\
 &= -2 \frac{F_\pi(P)}{M} 4P^2 \frac{M^2 + q \cdot P - q^2 + 2(q \cdot P)^2/P^2}{(q_+^2 + M^2)(q^2 + M^2)}.
 \end{aligned}$$

Entonces, la expresi3n final es:

$$\begin{aligned}
 F_\pi(P) &= \frac{2}{3\pi^2 m_g^2} \int_q^\Lambda \left[\frac{M^2}{(q_+^2 + M^2)(q^2 + M^2)} E_\pi(P) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{M^2 + q \cdot P - q^2 + 2(q \cdot P)^2/P^2}{(q_+^2 + M^2)(q^2 + M^2)} F_\pi(P) \right]. \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Para solucionar estas integrales, nuevamente usamos parametrizaci3n de Feynman. Unicamente la segunda integral es nueva. Y adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 & \int_q^\Lambda \frac{M^2 + q \cdot P - q^2 + 2(q \cdot P)^2/P^2}{(q_+^2 + M^2)(q^2 + M^2)} \\
 &= \int_q^\Lambda \int_0^1 d\alpha \frac{M^2 + q \cdot P - q^2 + 2(q \cdot P)^2/P^2}{[\alpha(q_+^2 + M^2) + (1 - \alpha)(q^2 + M^2)]^2} \\
 &= \int_q^\Lambda \int_0^1 d\alpha \frac{M^2 + q \cdot P - q^2 + 2(q \cdot P)^2/P^2}{[(q + \alpha P)^2 + M^2 + \alpha(1 - \alpha)P^2]^2},
 \end{aligned}$$

donde hemos usado el cambio de variable $q' = q + \alpha P$. Ahora, hacemos uso de la invarianza translacional de las integrales y tomamos el l3mite quiral y conseguimos

$$\int_q^\Lambda \int_0^1 d\alpha \frac{q^2 + M^2 + \frac{2}{P^2} ((P \cdot q)^2 - q^2 P^2)}{[q^2 + M^2]^2}. \quad (3.13)$$

Para simplificar esta integral, notamos que en la forma m3s general

$$\int_q^\Lambda \frac{q^\mu q^\nu}{(q^2 + s)^n} = A(n, s) g^{\mu\nu}. \quad (3.14)$$

Contrayendo con $g_{\mu\nu}$ y $p_\mu p_\nu$ respectivamente, conseguimos

$$\begin{aligned} \int_q^\Lambda \frac{q^2}{(q^2 + s)^n} &= 4A(n, s), \\ \int_q^\Lambda \frac{(p \cdot q)^2}{(q^2 + s)^n} &= A(n, s) p^2. \end{aligned}$$

Comparando las 3ltimas dos expresiones,

$$\frac{1}{p^2} \int_q^\Lambda \frac{(p \cdot q)^2}{(q^2 + s)^n} = \frac{1}{4} \int_q^\Lambda \frac{q^2}{(q^2 + s)^n}. \quad (3.15)$$

Entonces la expresi3n. (3.13) se simplifica a

$$\int_q^\Lambda \frac{M^2 - q^2 + \frac{1}{2}q^2}{[q^2 + M^2]^2} = \int_q^\Lambda \frac{\frac{3}{2}M^2 - \frac{1}{2}(q^2 + M^2)}{[q^2 + M^2]^2}. \quad (3.16)$$

lo que implica,

$$F_\pi(P) = \frac{2}{3\pi^2 m_g^2} \int_q^\Lambda \left[\frac{M^2 E_\pi(P)}{(q^2 + M^2)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q^2 + M^2} - \frac{3M^2}{(q^2 + M^2)^2} \right) F_\pi(P) \right] \quad (3.17)$$

Necesitamos regularizar esta expresi3n. Para hacer esto, recalquemos que

$$\begin{aligned} \int_q^\Lambda &= \frac{1}{4} \int_0^\infty ds s, \\ \int_0^\infty ds \frac{s}{s + M^2} &\rightarrow \mathcal{C}(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2), \\ \frac{M^2}{(s + M^2)^2} &= -M^2 \frac{d}{dM^2} \frac{1}{s + M^2}. \end{aligned}$$

Entonces, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2) &\equiv -M^2 \frac{d}{dM^2} \mathcal{C}(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2) \\ &= \int_0^\infty ds \frac{s M^2}{(s + M^2)^2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Con esto (3.17) adquiere la forma

$$\begin{aligned} F_\pi(P) &= \frac{1}{6\pi^2 m_g^2} \left[\mathcal{C}_1(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2) E_\pi(P) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\mathcal{C}(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2) - 3\mathcal{C}_1(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2) F_\pi(P)) \right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Si recordamos la ecuaci3n matricial, se observa que debemos resolver simult3neamente (3.8, 3.19) lo que significa la soluci3n de la siguiente ecuaci3n:

$$\begin{pmatrix} E_\pi(P) \\ F_\pi(P) \end{pmatrix} = \frac{1}{3\pi^2 m_g^2} \begin{pmatrix} K_\pi^{EE} & K_\pi^{EF} \\ K_\pi^{FE} & K_\pi^{FF} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_\pi(P) \\ F_\pi(P) \end{pmatrix},$$

donde

$$K_\pi^{EE} = \mathcal{C}(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2), \quad (3.20)$$

$$K_\pi^{EF} = 0, \quad (3.21)$$

$$K_\pi^{FE} = \frac{1}{2} \mathcal{C}_1(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2), \quad (3.22)$$

$$K_\pi^{FF} = \frac{1}{4} \mathcal{C}(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2) - \frac{3}{4} \mathcal{C}_1(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2). \quad (3.23)$$

Para resolver este sistema de ecuaciones, necesitamos calcular \mathcal{C}_1 . Con este fin, usamos la f3rmula general

$$\frac{1}{X^n} \rightarrow \frac{1}{(n-1)!} \int_{r_{UV}^2}^{r_{IR}^2} d\tau \tau^{n-1} e^{-\tau X}. \quad (3.24)$$

Para nuestro caso,

$$\frac{1}{X^2} \rightarrow \int_{r_{UV}^2}^{r_{IR}^2} d\tau \tau e^{-\tau X}. \quad (3.25)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2) &= M^2 \int_0^\infty ds \frac{s}{(s + M^2)^2} \\ &\rightarrow M^2 \int_0^\infty ds s \frac{e^{-r_{UV}^2(M^2+s)} [1 + r_{UV}^2(M^2 + s)] - e^{-r_{IR}^2(M^2+s)} [1 + r_{IR}^2(M^2 + s)]}{(M^2 + s)^2}. \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable y simplificamos.

$$= M^2 \left[\int_{M^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'^2} (s' - M^2) \left\{ e^{-r_{UV}^2 s'} [1 + r_{UV}^2 s'] - e^{-r_{IR}^2 s'} [1 + r_{IR}^2 s'] \right\} \right]. \quad (3.26)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2) = M^2 & \left[(1 - M^2 r_{UV}^2) \Gamma(0, M^2 r_{UV}^2) + e^{-M^2 r_{UV}^2} - e^{-M^2 r_{IR}^2} \right. \\ & - (1 - M^2 r_{IR}^2) \Gamma(0, M^2 r_{IR}^2) - M^2 r_{UV}^2 \Gamma(-1, M^2 r_{UV}^2) \\ & \left. + M^2 r_{IR}^2 \Gamma(-1, M^2 r_{IR}^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Resolviendo simult3nemente (3.8, 3.19) conseguimos

Tabla 3.1: Tabla de Eigenvalores para E_π y F_π

| eigenvalue | $E_\pi(P)$ | $F_\pi(P)$ |
|------------|------------|------------|
| 1 | 0.964575 | 0.26381 |
| -0.27 | 0 | 1 |

3.2. Constante de Decaimiento del Pi3n

Podemos ver que las relaciones de Goldberger-Triemann (2.92) para el modelo NJL con

$$\Gamma_\pi(P) = \gamma_5 \left[iE_\pi(P) + \frac{\gamma \cdot P}{M} F_\pi(P) \right], \quad (3.28)$$

se reducen a :

$$\begin{aligned} f_\pi E_\pi(k; P=0) &= B(k^2), \\ F_R(k; 0) + 2f_\pi F_\pi(k; 0) &= A(k^2), \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde f_π es la constante de decaimiento del pi3n. Para nuestro caso, es decir para el modelo NJL, $B(k^2) = M$, $A(k^2) = 1$. Entonces las relaciones Goldberger-Treiman son

$$f_\pi E_\pi = M \quad 2 \frac{F_\pi}{E_\pi} + F_R = 1. \quad (3.30)$$

Por otra parte, la constante de decaimiento del pi3n f_π est1a dada por [?] como

$$f_\pi P_\mu = N_c \text{Tr} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_5 \gamma_\mu S(q_+) \Gamma_\pi(P) S(q). \quad (3.31)$$

En nuestra notaci3n usual y para $N_c = 3$, tenemos

$$f_\pi^C P_\mu = \frac{3}{4\pi^2} \text{Tr} \int_q^\Lambda \gamma_5 \gamma_\mu S(q_+) \Gamma_\pi^C(P) S(q). \quad (3.32)$$

Multiplicando (2.93) por $M/E_\pi = f_\pi$ y evaluando para $P^2 = 0$, conseguimos

$$f_\pi \Gamma_\pi(P) = \gamma_5 \left[iM + \gamma \cdot P \frac{F_\pi(P)}{E_\pi(P)} \right] \Big|_{P^2=0}, \quad (3.33)$$

la cual define las relaciones entre las cantidades GT

$$\Gamma_\pi^{\text{GT}}(P^2 = 0) = i\gamma_5 E_\pi^{\text{GT}} + \gamma_5 \gamma \cdot P F_\pi^{\text{GT}}, \quad (3.34)$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma_\pi^{\text{GT}} &= f_\pi^{\text{GT}} \Gamma_\pi \\ E_\pi^{\text{GT}} &= M \\ F_\pi^{\text{GT}} &= \frac{F_\pi}{E_\pi} = 0.270795. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Con la normalizaci3n, $E_\pi \rightarrow E_\pi^{\text{GT}}/f_\pi^{\text{GT}}$ y $\Gamma_\pi \rightarrow \Gamma_\pi^{\text{GT}}/f_\pi^{\text{GT}}$. Obtenemos,

Tabla 3.2: Eigenvalores usando las Relaciones GT

| GT Values | E_π^{GT} | F_π^{GT} |
|-----------|---------------------|---------------------|
| | 0.400257 | 0.270795 |

$$(f_\pi^{\text{GT}})^2 P_\mu = \frac{3}{4\pi^2} \text{Tr} \int_q^\Lambda \gamma_5 \gamma_\mu S(q_+) \Gamma_\pi^{\text{GT}}(P) S(q). \quad (3.36)$$

Despu3s sustituimos (3.3, 3.34), multiplicamos con P^μ y tomando la traza y el l3mite quiral conseguimos:

$$\begin{aligned} f_\pi^{\text{GT}^2} &= \frac{3}{\pi^2} \int_q^\Lambda \sigma_V^+ \sigma_V \left[M E_\pi^{\text{GT}} - F_\pi^{\text{GT}} \left\{ (M^2 + q \cdot P - q^2) + 2 \frac{(q \cdot P)^2}{P^2} \right\} \right] \Big|_{P^2=0} \\ &= \frac{3}{4\pi^2} \left[\mathcal{C}_1(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2) \frac{E_\pi^{\text{GT}}(P)}{M} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\mathcal{C}(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2) - 3\mathcal{C}_1(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2) F_\pi^{\text{GT}}(P)) \right]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Sustituyendo E_π^{GT} y F_π^{GT} de (3.35), podemos calcular la constante de decaimiento del pi3n. Esto nos permite obtener la Tabla (3.3). La segunda columna de esta tabla es obtenida ignorando la componente pseudovectorial del pi3n i.e., haciendo que $F_\pi^{\text{GT}} = 0$ en (3.37). Se puede observar que si agregamos esta componente, la constante de decaimiento del pi3n se incrementa aproximadamente 11 %.

Tabla 3.3: Constante de decaimiento del pi3n

| | Full Γ_π^{GT} | $F_\pi^{\text{GT}} = 0$ |
|---------------------|-------------------------------|-------------------------|
| f_π^{GT} | 0.0820151 | 0.0923286 |

3.3. Normalizaci3n Can3nica

Para mostrar una consistencia total en el c3lculo de la constante de decaimiento del pi3n y las otras observables, debemos calcular la normalizaci3n can3nica y renormalizar la amplitud BS. Entonces, debemos calcular \mathcal{N} atraves de:

$$\mathcal{N}^2 P_\mu = \frac{3}{4\pi^2} \text{Tr} \int_q^\Lambda \Gamma_\pi(-P) \left[\frac{\partial S(q_+)}{\partial P_\mu} \Gamma_\pi(P) S(q_-) + S(q_+) \Gamma_\pi(P) \frac{\partial S(q_-)}{\partial P_\mu} \right].$$

Esta ecuaci3n garantiza que el factor de forma electromagn3tico del pi3n sea uno para momento igual a cero. En el capitulo siguiente podemos verificar esta propiedad. Ahora usando invarianza traslacional vemos que:

$$\mathcal{N}^2 P_\mu = \frac{3}{4\pi^2} \text{Tr} \int_q^\Lambda \Gamma_\pi(-P) \left(\frac{\partial S(q_+)}{\partial P_\mu} \right) \Gamma_\pi(P) S(q). \quad (3.38)$$

La amplitud de Bethe-Salpeter $\Gamma_\pi(P)$ en esta ecuaci3n es definida por (2.93, 3.1). Entonces, la amplitud BS renormalizada debe ser definida como

$$\Gamma_\pi^C = \frac{1}{\mathcal{N}} \Gamma_\pi(P). \quad (3.39)$$

Trivialmente, podemos reescribir (3.38) como

$$\mathcal{N}^2 P_\mu = \left[\frac{\partial}{\partial P_\mu} \frac{3}{4\pi^2} \text{Tr} \int_q^\Lambda \Gamma_\pi(-K) S(q_+) \Gamma_\pi(K) S(q) \right] \Bigg|_{K=P}. \quad (3.40)$$

Ahora, usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial P_\mu} = \frac{dP^2}{dP_\mu} \frac{d}{dP^2}, \quad (3.41)$$

podemos escribir (3.40) como sigue:

$$\mathcal{N}^2 P_\mu = 2P_\mu \left[\frac{d}{dP^2} \frac{3}{4\pi^2} \text{Tr} \int_q^\Lambda \Gamma_\pi(-K)S(q_+)\Gamma_\pi(K)S(q) \right] \Bigg|_{K=P}. \quad (3.42)$$

Con esto podemos deducir que:

$$\mathcal{N}^2(P) = 2 \left[\frac{d}{dP^2} \Pi(K, P) \right] \Bigg|_{K=P}, \quad (3.43)$$

donde

$$\Pi(K, P) = \frac{3}{4\pi^2} \text{Tr} \int_q^\Lambda \Gamma_\pi(-K)S(q_+)\Gamma_\pi(K)S(q). \quad (3.44)$$

La raz3n de que podamos identificar esto con la energ3a propia del pi3n es obvia. $\Pi(K, P)$ es la polarizaci3n del vac3o fig[3.1]

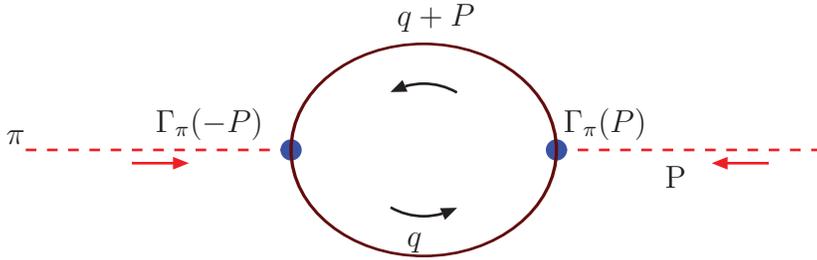


Figura 3.1: Polarizaci3n del Vac3o

Usando reglas de Feynman llegamos a que

$$\Pi(K, P) = N_c \text{Tr} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Gamma_\pi(-K)S(q_+)\Gamma_\pi(K)S(q). \quad (3.45)$$

Ahora, para calcular \mathcal{N} , usamos (3.40) o (3.43). Como Γ_π contiene t3rminos proporcionales a E^2 , F^2 y $E \times F$. Podemos verlos t3rmino por t3rmino

$$\mathcal{N}_{E_\pi^2} = \frac{3}{4\pi^2} \frac{1}{M^2} \mathcal{C}_1(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2) E_\pi^2(P). \quad (3.46)$$

Similarmente,

$$\mathcal{N}_{E_\pi F_\pi} = -\frac{3}{4\pi^2} \frac{1}{M^2} \mathcal{C}_1(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2) [E_\pi(P)F_\pi(-P) + E_\pi(-P)F_\pi(P)] \quad (3.47)$$

Podemos ver que

$$\mathcal{N}_{F_\pi^2} = 0 . \quad (3.48)$$

La expresi3n final puede ser escrita como

$$\mathcal{N}^2 = \frac{3}{4\pi^2} \frac{1}{M^2} \mathcal{C}_1(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2) E_\pi(P) [E_\pi(P) - 2F_\pi(P)] . \quad (3.49)$$

La soluci3n num3rica nos da $\mathcal{N} = 0.152151$. Adem3s,

$$\begin{aligned} \Gamma_\pi^C &= i\gamma_5 E_\pi^C + \gamma_5 \gamma \cdot P \frac{1}{M} F_\pi^C \\ &\equiv i\gamma_5 \frac{E_\pi}{\mathcal{N}} + \gamma_5 \gamma \cdot P \frac{1}{M} \frac{F_\pi}{\mathcal{N}} , \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde $E_\pi^C = 6.40288$ y $F_\pi^C = 1.73387$. Notemos que las relaciones de Goldberger-Triemann se satisfacen cuando la identidad axial-vector de WT se satisface, entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned} f_\pi^{\text{WI}} E_\pi^C &= M \\ f_\pi^{\text{WI}} &= \frac{M}{E_\pi^C} = 0.062512 \text{ GeV} . \end{aligned} \quad (3.51)$$

Comparando (2.93) con (3.34) y (3.32) con (3.36), y haciendo uso de la normalizaci3n can3nica \mathcal{N} y f_π^C pueden ser obtenidas sustituyendo $E_\pi^{\text{GT}} \rightarrow E_\pi^C$ y $F_\pi^{\text{GT}} \rightarrow F_\pi^C/M$ en (3.37).

$$\begin{aligned} f_\pi^C &= \frac{3}{4\pi^2 M} \left[\mathcal{C}_1(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2) E_\pi^C(P) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\mathcal{C}(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2) - 3\mathcal{C}_1(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2) F_\pi^C(P)) \right] \end{aligned} \quad (3.52)$$

En la siguiente tabla se resumen los resultados num3ricos obtenidos apartir de esta secci3n.

Tabla 3.4: Constantes de decaimiento para el pi3n

| | f_π^C | f_π^{GT} | f_π^{WI} |
|----------------|-----------|--------------|--------------|
| $F_\pi \neq 0$ | 0.107518 | 0.0820151 | 0.062512 |
| $F_\pi = 0$ | 0.0923286 | 0.0923286 | 0.0923286 |

3.4. Verificaci3n de GT en el Modelo NJL

Notemos que los problemas que presenta el modelo NJL para satisfacer la identidad vector Axial WT se solucionan si regularizamos apropiadamente dicho modelo. Para hacer esto redefinimos dicho modelo.

La Identidad WT se satisface si:

$$\int_q^\Lambda \frac{\frac{1}{2} q^2 + M^2}{(q^2 + M^2)^2} = 0. \quad (3.53)$$

Ahora, el kernel se modifica a:

$$K_\pi^{EE} = \mathcal{C}(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2) \quad (3.54)$$

$$K_\pi^{EF} = 0 \quad (3.55)$$

$$K_\pi^{FE} = \frac{1}{2} \mathcal{C}_1(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2) \quad (3.56)$$

$$K_\pi^{FF} = -\mathcal{C}_1(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2). \quad (3.57)$$

Entonces, el c3lculo de la constante de decaimiento tambi3n se modifica como lo muestra la siguiente tabla:

| Tabla 3.5: | | | |
|----------------|-----------|--------------|--------------|
| | f_π^C | f_π^{GT} | f_π^{WI} |
| $F_\pi \neq 0$ | 0.0709 | 0.0709 | 0.0709 |
| $F_\pi = 0$ | 0.0923286 | 0.0923286 | 0.0923286 |

Para verificar que las relaciones GT para el modelo NJL (3.30) sean correctas, necesitamos calcular:

$$\Gamma_{5\mu}(P) = \gamma_5 \gamma_\mu - \frac{1}{3\pi^2} \frac{1}{m_g^2} \int_q^\Lambda \gamma_\alpha S(q+P) \Gamma_{5\mu}(P) S(q) \gamma_\alpha. \quad (3.58)$$

Esta expresi3n puede ser descompuesta en el siguiente conjunto de ecuaciones :

$$\begin{pmatrix} E_5(P) \\ F_5(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3\pi^2 m_g^2} \begin{pmatrix} K_\pi^{EE} & K_\pi^{EF} \\ K_\pi^{FE} & K_\pi^{FF} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_5(P) \\ F_5(P) \end{pmatrix}.$$

La soluci3n en el l3mite quiral

$$\begin{pmatrix} E_5(P) \\ F_5(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.590 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

Ahora, podemos checar

$$2 \frac{F_\pi}{E_\pi} + F_5 = 2 \frac{0.200822}{0.979628} + 0.590 = 0.410 + 0.590 = 1. \quad (3.60)$$

Para conseguir esto debemos implementar una regularizaci3n que mantenga (2.78). Para ver esto, contraemos (2.82) con P_μ y usamos Eq. (2.78) con el integrando. Esto nos permite obtener las siguientes dos identidades en el l3mite quiral:

$$M = \frac{8 M}{3 m_g^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{q^2 + M^2} + \frac{1}{q_+^2 + M^2} \right], \quad (3.61)$$

$$0 = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\frac{P \cdot q_+}{q_+^2 + M^2} - \frac{P \cdot q}{q^2 + M^2} \right]. \quad (3.62)$$

Las cuales deben ser satisfechas despu3s de la regularizaci3n. Si usamos parametrizaci3n de Feynman, llegamos a las siguientes identidades para $P^2 = 0 = m$:

$$M = \frac{16 M}{3 m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q^2 + M^2]}, \quad (3.63)$$

$$0 = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{2}q^2 + M^2}{[q^2 + M^2]^2}. \quad (3.64)$$

(3.63) es justamente el l3mite quiral de la ecuaci3n gap. La aproximaci3n de impulso es muy utilizada en los estudios de los factores de forma de transici3n para los mesones. En esta aproximaci3n la posibilidad de crear un quark antiquark es despreciada. La interacci3n de una corriente externa con el mes3n es la suma del acoplamiento del quark y el antiquark como se ilustra en la Figura 3.2. En el diagrama M_1 y M_2 son los estados iniciales y finales de los mesones.

$q = (0, 0, Q, 0)$, $K = (0, 0, 0, iQ/2)$. Con esta formulaci3n del modelo NJL, la aproximaci3n de este proceso esta dada por la siguiente expresi3n:

$$2K_\mu F_\pi^{em}(Q^2) = \frac{3}{2\pi^2} \int_t^\Lambda \text{Tr}_D \left[i\Gamma_\pi^C(-p_2) S(t+p_2) i\gamma_\mu S(t+p_1) i\Gamma_\pi^C(p_1) S(t) \right], \quad (3.65)$$

Si multiplicamos (3.65) por $-2K_\mu$, obtenemos:

$$-4K^2 F_\pi^{em}(Q^2) = Q^2 F_\pi^{em}(Q^2), \quad (3.66)$$

donde F_π^{em} la podemos descomponer en sus componentes vectoriales, pseudo-vectoriales y t3rminos cruzados : $F_\pi^{em} = F_{\pi,EE}^{em} + F_{\pi,EF}^{em} + F_{\pi,FF}^{em}$. Notemos que $F_{\pi,EE}^{em}$, $F_{\pi,EF}^{em}$ y $F_{\pi,FF}^{em}$ corresponden a los t3rminos que contienen E_π^2 , $E_\pi F_\pi$ y F_π^2 , respectivamente :

$$\begin{aligned} F_{\pi,EE}^{em} &= -\frac{3}{2\pi^2} \int_t^\Lambda \frac{4(2K \cdot t - q^2)}{I_{em}} \\ F_{\pi,EF}^{em} &= -\frac{3}{2\pi^2} \int_t^\Lambda \frac{4q^2 (M^2 - 2K \cdot t + t^2)}{(M^2 + t^2) I_{em}} \\ F_{\pi,FF}^{em} &= -\frac{3}{2\pi^2} \int_t^\Lambda \frac{8K \cdot t (q^2 M^2 - 4K \cdot t^2 + q \cdot t^2 - q^2 t^2)}{M^2 (M^2 + t^2) I_{em}}. \end{aligned}$$

$$I_{em} = (M^2 + 2K \cdot t - q \cdot t + t^2) (M^2 + 2K \cdot t + q \cdot t + t^2) \quad (3.67)$$

Ahora, haciendo uso de algunas definiciones y de la parametrizaci3n de Feynmann, podemos escribir estos t3rminos en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} F_{\pi,EE}^{em} &= \frac{3}{4\pi^2} \int_0^1 dx \frac{1}{\sigma(x)} \mathcal{C}_1(\sigma(x)), \\ F_{\pi,EF}^{em} &= \frac{3}{4\pi^2} \int_0^1 dx_1 dx_2 \frac{2x_1^2 Q^2}{\omega^2(x_1, x_2)} \mathcal{C}_2(\omega(x_1, x_2)), \\ F_{\pi,FF}^{em} &= \frac{3}{4\pi^2} \int_0^1 dx_1 dx_2 \frac{x_1^2 Q^2}{M^2} \left[\frac{1}{\omega(x_1, x_2)} \mathcal{C}_1(\omega(x_1, x_2)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega(x_1, x_2) + 2M^2}{\omega(x_1, x_2)^2} \mathcal{C}_2(\omega(x_1, x_2)) \right], \end{aligned} \quad (3.68)$$

donde

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= M^2 + Q^2 x(1-x), \\ \omega^2(x_1, x_2) &= M^2 + Q^2 x_1^2 x_2(1-x_2), \\ \mathfrak{C}_1 &= -M^2 \frac{d}{dM^2} \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{C}_2 = \frac{1}{2} M^2 \left(\frac{d}{dM^2} \right)^2 \mathfrak{C}.\end{aligned}$$

Las expresiones (3.68) han sido regularizadas apropiadamente. La integral final se puede calcular num6ricamente. El t6rmino $F_{\pi,EE}^{em}$ domina el comportamiento del factor de forma en $Q^2 < 6\text{GeV}^2$, como podemos observar en la Figura. (3.4). $F_{\pi,EE}^{em}$ tiene un valor m6ximo a $Q^2 = 0$ y decrece uniformemente cuando Q^2 se incrementa. Para $Q^2 \gg M^2$, $F_{\pi,EE}^{em} \propto M^2/Q^2$. $F_{\pi,EF}^{em}$ se incrementa con Q^2 y pasa por cero en $Q^2 = 1.5\text{GeV}^2$ continua creciendo aproximandose a una constante distinta de cero cuando $Q^2 \rightarrow \infty$. La componente $F_{\pi,FF}^{em}$ es cero en $Q^2 = 0$ y se va a una constante negativa cuando $Q^2 \rightarrow \infty$, y siempre es m6s peque1a en magnitud que $F_{\pi,EF}^{em}$.

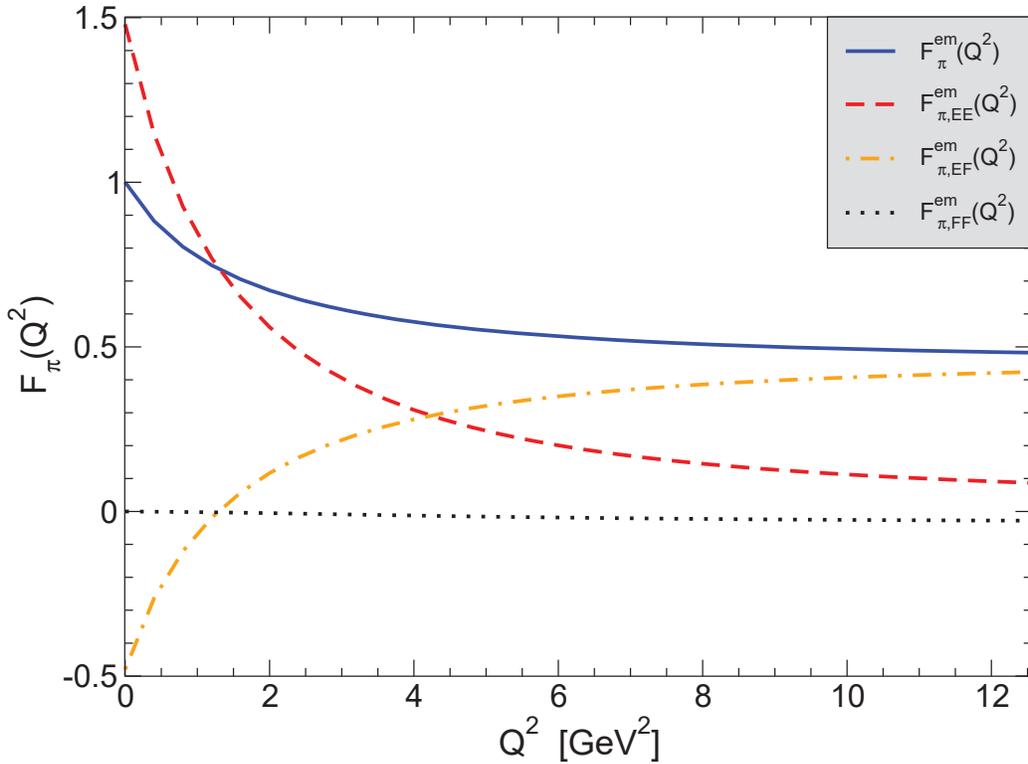


Figura 3.4: $F_{\pi}(Q^2)$ descompuesta en su parte vectorial, pseudovectorial y componentes cruzadas. La suma ha sido normalizada a 1 en $Q^2 = 0$.

En la Figura (3.5) mostramos el efecto que tiene la componente pseudo-vectorial en el factor de forma para el pi3n.

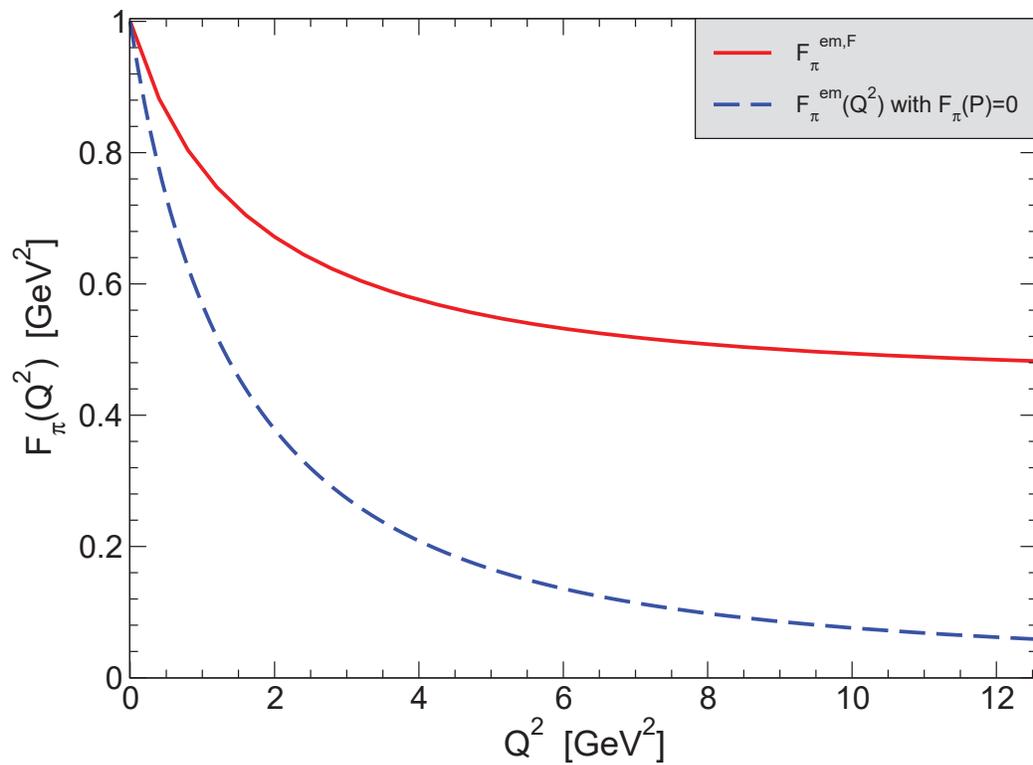
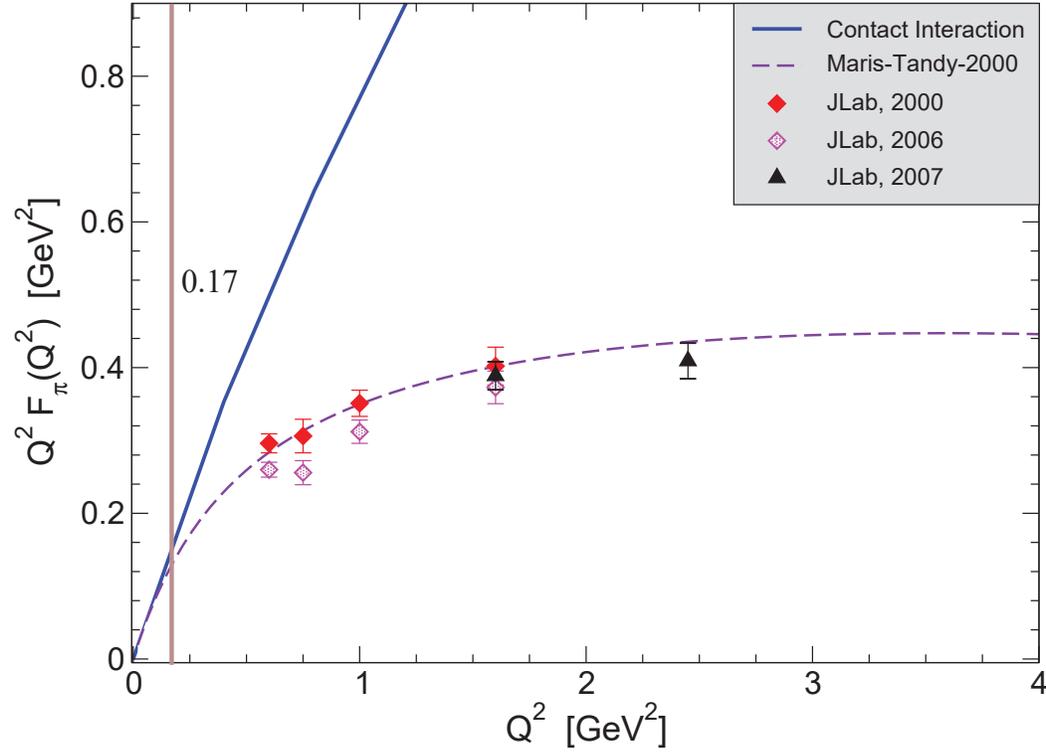


Figura 3.5: $F_\pi(Q^2)$ en el modelo NJL, si incluimos el pseudo-vector en la ecuaci3n BS la amplitud cambia para Q^2 grande de $1/Q^2$ a una constante.

Tabla 3.6: Resultados obtenidos con (en GeV) $m = 0$, $m_G = 0.11$, $\Lambda_{\text{ir}} = 0.24$, $\Lambda_{\text{uv}} = 0.823$.

| \mathcal{N} | E_π^c | F_π^c | F_R | M | κ | f_π^0 | $f_\pi^0 _{F_\pi \rightarrow 0}$ | r_π^0 | $r_\pi^0 _{F_\pi \rightarrow 0}$ |
|---------------|-----------|-----------|-------|------|----------|-----------|----------------------------------|-----------|----------------------------------|
| 0.23 | 4.28 | 0.69 | 0.68 | 0.40 | 0.22 | 0.094 | 0.11 | 0.29 | 0.41 |


 Figura 3.6: Comparaci3n de $F_\pi(Q^2)$ en el modelo NJL con resultados experimentales y resultados te3ricos recientes.

Vemos que la interacci3n de contacto es capaz de describir las propiedades estaticas del pi3n Tabla (3.6) generadas por un factor de forma cuya evoluci3n con Q^2 se desvía marcadamente de los experimentos para $Q^2 > 0.17 \text{ GeV}^2 \approx M^2$ y produce un comportamiento asint3tico.

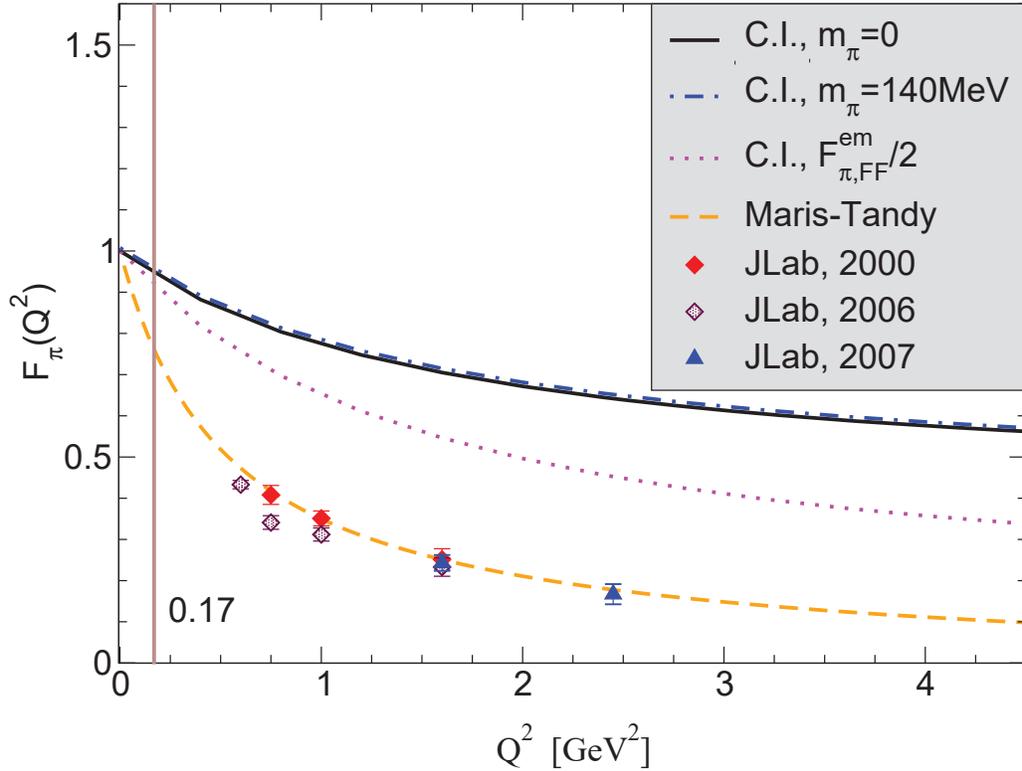


Figura 3.7: Incorporar las simetrías correctas de QCD implica una constante $F_\pi(Q^2)$ para $Q^2 \rightarrow \infty$.

In Fig.(3.6,3.7), graficamos nuestros resultados, junto con el cálculo efectuado por Maris y Tandy utilizando la ecuación de BS junto con las ecuaciones SD para QCD. Ambos cálculos se basan en el mismo supuesto e invocan las mismas simetrías de QCD. Mientras los resultados de Maris-Tandy reproducen muy bien el comportamiento de Q^2 para QCD perturbativa, el modelo NJL no puede hacerlo. La línea vertical de color rojo en la Figura. (3.6) indica el límite más allá del cual los resultados del modelo NJL se desvían de la curva de Maris-Tandy en más de un 20%. Al trabajar con estados de quarks, es importante que el vértice quark-fotón sea vestido y también que la identidad WT. El vértice debe ser vestido a un nivel consistente con la truncación usada para calcular la amplitud de BS. Con nuestro tratamiento de la interacción descrito en este capítulo, el vértice a nivel árbol γ_μ es suficiente para satisfacer la identidad de WT y asegura $F_\pi(Q^2 = 0) = 1$. Sin embargo dada la simplicidad de los kernels de las ecuaciones SD podemos hacerlo mejor. Un vértice vestido consistente con la aproximación arcoiris es

determinado por la siguiente ecuaci3n inhomognea de BS.

$$\Gamma_\mu(Q) = \gamma_\mu - \frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha \chi_\mu(q_+, q) \gamma_\alpha, \quad (3.69)$$

donde $\chi_\mu(q_+, q) = S(q+P)\Gamma_\mu(Q)S(q)$. Debido a la naturaleza independiente del momentum del kernel, la forma geneneral de la soluci3n es:

$$\Gamma_\mu(Q) = \gamma_\mu^T P_T(Q^2) + \gamma_\mu^L P_L(Q^2), \quad (3.70)$$

donde $Q_\mu \gamma_\mu^T = 0$ y $\gamma_\mu^T + \gamma_\mu^L = \gamma_\mu$. Esta simplicidad no es cierta con una interacci3n m1s complicada.

Si sustituimos (3.70) en (3.69), podemos obetener

$$P_L(Q^2) = 1, \quad (3.71)$$

debido a (3.62). Usando esta misma identidad, encontramos

$$P_T(Q^2) = \frac{1}{1 + K_\gamma(Q^2)} \quad (3.72)$$

con

$$K_\gamma(Q^2) = \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \times \int_0^1 d\alpha \alpha(1-\alpha) Q^2 \bar{C}_1^{iu}(\omega(M^2, \alpha, Q^2)). \quad (3.73)$$

Es evidente que

$$P_T(Q^2 = 0) = 1, \quad (3.74)$$

entonces en $Q^2 = 0$ con la aproximaci3n arcoiris el v3rtice vestido es igual al v3rtice desnudo. Esto no es verdad para $Q^2 \neq 0$. La parte transversa del v3rtice quark-fot3n exhibe un polo en $Q^2 < 0$

$$1 + K_\gamma(Q^2) = 0. \quad (3.75)$$

En la Figura. 5.9 graficamos la funci3n que viste la parte transversa del v3rtice quark-fot3n. El polo asociado es claro. Otra importante caracter1stica de esta funci3n es su comportamiento para grandes Q^2 ; esto es $P_T(Q^2) \rightarrow 1^-$ para $Q^2 \rightarrow \infty$. Podemos definir el radio de un quark vestido como

$$r_q^2 = -6 \left. \frac{d}{dQ^2} P_T(Q^2) \right|_{Q^2=0}. \quad (3.76)$$

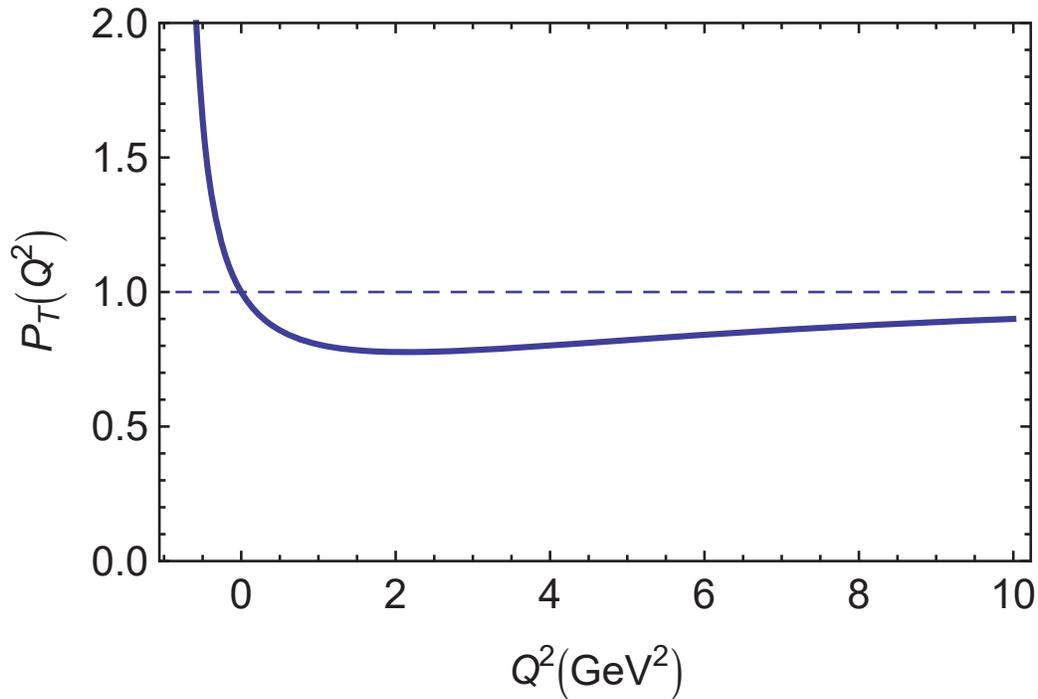


Figura 3.8: Funci3n que viste la parte transversa del v3rtice quark-fot3n $P_T(Q^2)$ en (5.67).

3.6. Conclusiones

Con el fin de incorporar las propiedades clave de QCD en el modelo, agregamos las componentes pseudo-vectoriales en la descripci3n del pi3n y las simetr3as de regularizaci3n implementado lo que asegura la preservaci3n de la identidad Axial de Takahashi. En consecuencia, las relaciones de Goldberger-Treiman son respetadas. Obtenemos as3 un modelo coherente y podemos extraer resultados confiables para las observables f3sicas del pi3n. Calculamos el factor de forma pi3n y lo comparamos con los resultados te3ricos y experimentales. La inclusi3n de la componente pseudo-vectorial nos da el comportamiento correcto de $1/Q^2$ para el factor de forma del pi3n en el l3mite ultravioleta [25].

Capítulo 4

El Factor de Forma de Transición del Pión

4.1. Anomalías

Las simetrías y sus leyes de conservación juegan un gran papel en la formulación de la física moderna y sus consecuencias experimentales. Sin embargo, nada nos garantiza que una simetría clásica sea respetada en teoría cuántica. Una teoría es llamada anómala cuando una corriente que es conservada clásicamente no se conserva después que la teoría es cuantizada. Para ser más precisos, una teoría tiene anomalías si no existe una regularización que preserve todas las simetrías después que la teoría es cuantizada. La más importante de las simetrías clásicas que juega un papel muy importante en teoría cuántica de campos es la simetría de **Norma**. Esta simetría es una de las bases del modelo estándar de Física de Partículas y gracias a ella podemos obtener las identidades de Ward- Takahashi para QED o las identidades de Slavnov-Taylor para Yang-Mills. Estas identidades, o la simetría de norma son necesarias para la renormalizabilidad de la teoría, sin simetrías de norma, la renormalización de la teoría se pierde y la teoría es inconsistente. Por lo tanto, todas las anomalías de norma se deben cancelar entre sí. En el modelo estándar sí se cancelan estas anomalías locales de norma.

Sin embargo, no todas las anomalías son un desastre. Por ejemplo, la anomalía Adler-Bell-Jackiw (ABJ) tiene consecuencias físicas. La anomalía abeliana es responsable del decaimiento del pión en dos fotones. La anomalía no abeliana explica las masas grandes de η y η' . En la próxima sección estudiamos la anomalía abeliana ABJ.

4.2. Anomalía Abelian

La simetría quiral es una simetría global y no afecta la renormalización ni la consistencia de la teoría de campos. Por lo tanto la anomalía quiral es bienvenida fenomenológicamente. En este capítulo calculamos explícitamente la llamada Anomalía Quiral ABJ (Adler-Bell-Jackiw) en QED. Empleamos la regularización de Pauli-Villars, pero debemos notar que la anomalía existe para todos los demás esquemas de regularización. Consideremos la parte fermiónica del lagrangiano de QED:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i \not{\partial} - m + e \not{A})\psi , \quad (4.1)$$

donde hemos usado la notación $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$ y $\not{A} = \gamma^\mu A_\mu$, con A_μ el campo de norma de U(1). Definimos las tres corrientes:

$$j_\mu(x) = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \quad (4.2)$$

$$j_\mu^5(x) = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi \quad (4.3)$$

$$P(x) = \bar{\psi} \gamma_5 \psi . \quad (4.4)$$

$j_\mu(x)$, $j_\mu^5(x)$ y $P(x)$ son las corrientes vectorial, axial y pseudoescalar respectivamente. Usando las ecuaciones de Dirac, podemos derivar las leyes de conservación:

$$\partial^\mu j_\mu = \bar{\psi} \overleftarrow{\not{\partial}} \psi(x) + \bar{\psi} \not{\partial} \psi(x) = 0 , \quad (4.5)$$

$$\partial^\mu j_\mu^5 = \bar{\psi} \overleftarrow{\not{\partial}} \gamma_5 \psi(x) + \bar{\psi} \not{\partial} \gamma_5 \psi(x) = 2imP . \quad (4.6)$$

La corriente axial se conserva en el límite de masa igual a cero. Este no es el caso cuando cuantizamos la teoría. La divergencia de la corriente axial no es cero en el límite cuando la masa tiende a cero. Debemos examinar el diagrama que rompe esta simetría.

Para esto, consideramos el lagrangiano con los campos de norma vectorial y axial V_μ y A_μ , respectivamente,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i \not{\partial} + \not{V} + \not{A} \gamma_5 - m)\psi . \quad (4.7)$$

El lagrangiano es invariante bajo transformaciones de norma locales (vectoriales y axiales). Podemos ver que los elementos de matriz del diagrama (4.1) y (4.2) son:

$$T_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, q) = \int d^4x e^{-ik_1x_1 - ik_2x_2 + iqx_3} \langle 0 | T [j_\mu(x_1) j_\nu(x_2) j_\rho^5(x_3)] | 0 \rangle \quad (4.8)$$

$$T_{\mu\nu}(k_1, k_2) = \int d^4x e^{-ik_1x_1 - ik_2x_2 + iqx_3} \langle 0 | T [j_\mu(x_1) j_\nu(x_2) P(x_3)] | 0 \rangle , \quad (4.9)$$

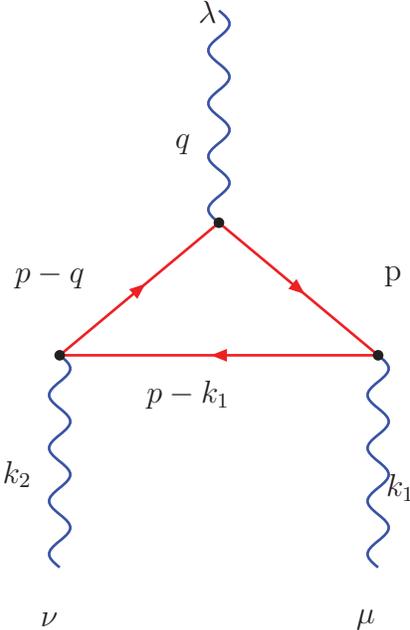


Figura 4.1: El diagrama V-V-A que nos da la anomalía.

4

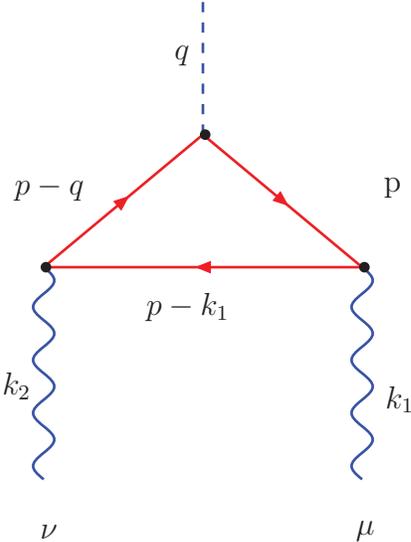


Figura 4.2: El diagrama V-V-P que nos da la anomalía.

donde se ha definido $d^4x = d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3$. Tomando derivadas podemos

deducir importantes relaciones:

$$\begin{aligned}
 q^\rho T_{\mu\nu\rho} &= \partial_{x_3}^\rho \left[\int d^4x e^{-ik_1x_1 - ik_2x_2 + iqx_3} \right] \langle 0 | T [j_\mu(x_1) j_\nu(x_2) j_\rho^5(x_3)] | 0 \rangle \\
 &= \int d^4x \langle 0 | T [j_\mu(x_1) j_\nu(x_2) \partial_{x_3}^\rho j_\rho^5(x_3)] | 0 \rangle e^{-ik_1x_1 - ik_2x_2 + iqx_3} \\
 &= \int d^4x [-2m \langle 0 | T [j_\mu(x_1) j_\nu(x_2) P(x_3)] | 0 \rangle] e^{-ik_1x_1 - ik_2x_2 + iqx_3} \\
 &= 2m T_{\mu\nu} .
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Para preservar la simetría de norma, insistimos en que $\partial_\mu j^\mu = 0$, lo que significa que:

$$k^\mu T_{\mu\nu\rho} = k^\nu T_{\mu\nu\rho} = 0 . \tag{4.11}$$

La ecuación (4.10) es conocida como la identidad de Ward y la ecuación (4.11) es la identidad de Ward vectorial. Ahora, si calculamos las amplitudes $T_{\mu\nu\lambda}$ y $T_{\mu\nu}$, usando directamente las reglas de Feynmann podemos ver que esto no está de acuerdo con (4.10) y (4.11). Las amplitudes son:

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu\lambda} &= -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{i}{\not{p} - m} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{i}{\not{p} - \not{q} - m} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \gamma_\mu \right] \\
 &+ \left(\begin{array}{l} k_1 \rightarrow k_2 \\ \mu \rightarrow \nu \end{array} \right)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu} &= -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{i}{\not{p} - m} \gamma_5 \frac{i}{\not{p} - \not{q} - m} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \gamma_\mu \right] \\
 &+ \left(\begin{array}{l} k_1 \rightarrow k_2 \\ \mu \rightarrow \nu \end{array} \right) .
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Con $q = k_1 + k_2$. La amplitud regularizada de Pauli-Villars se define como la diferencia de la amplitud no regularizada y la amplitud con masa M ,

$$T_{\mu\nu\lambda}^{reg} = T_{\mu\nu\lambda}(m) - T_{\mu\nu\lambda}(M). \tag{4.14}$$

La amplitud física $T_{\mu\nu\lambda}^{física}$ se entiende como el límite del regulador de masa tendiendo a infinito

$$T_{\mu\nu\lambda}^{física} = \lim_{M \rightarrow \infty} T_{\mu\nu\lambda}^{reg} . \tag{4.15}$$

Lo mismo se puede aplicar a $T_{\mu\nu}^{física}$, pero $T_{\mu\nu} \sim 1/M$ y podemos ver que $T_{\mu\nu}$ es convergente y no necesita regularización.

$$T_{\mu\nu\lambda}^{física} = \lim_{M \rightarrow \infty} [T_{\mu\nu\lambda}(m) - T_{\mu\nu\lambda}(M)] = T_{\mu\nu\lambda}(m) \tag{4.16}$$

Ahora si usamos la (4.10), podemos ver que la ley de conservación axial se convierte en:

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}^{fisica} = 2mT_{\mu\nu\lambda}(m) - \lim_{M \rightarrow \infty} T_{\mu\nu\lambda}(M). \quad (4.17)$$

Entonces la anomalía ABJ es completamente descrita por el segundo término en (4.6),

$$A_{\mu\nu} = - \lim_{M \rightarrow \infty} 2MT_{\mu\nu}(M). \quad (4.18)$$

Para evaluar (4.18) necesitamos escribir 4.9 en una forma más usual. Primero usaremos la parametrización de Feynmann:

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \frac{1}{[ax_1 + b(1-x_1-x_2) + cx_1]^3} \quad (4.19)$$

Ahora podemos escribir:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_5 \frac{i(\not{p} - \not{q} + m)}{(p-q)^2 - m^2} \gamma_\mu \frac{i(\not{p} - \not{k}_1 + m)}{(p-k_1)^2 - m^2} \gamma_\nu \right] \\ &= -2i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \\ &\quad \times \frac{Tr[i(\not{p} + m)]\gamma_5 i(\not{p} - \not{q} + m)\gamma_\mu i(\not{p} - \not{k}_1 + m)\gamma_\nu}{[(p^2 - m^2)x_2 + ((p-q)^2 - m^2)(1-x_1-x_2) + ((p-k_1)^2 - m^2)x_3]^3} \\ &\quad + \left(\begin{array}{l} k_1 \rightarrow k_2 \\ \mu \rightarrow \nu \end{array} \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Ahora, vamos a evaluar explícitamente la traza:

$$Tr \left[i(\not{p} + m)\gamma_5 i(\not{p} - \not{q} + m)\gamma_\mu i(\not{p} - \not{k}_1 + m)\gamma_\nu \right] = -im Tr[\gamma_5 \not{q} \gamma_\nu \not{k}_1 \gamma_\mu] \quad (4.21)$$

Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -2i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \\ &\quad \times \frac{im Tr[\gamma_5 \not{q} \gamma_\nu \not{k}_1 \gamma_\mu]}{[(p^2 - m^2)x_2 + ((p-q)^2 - m^2)(1-x_1-x_2) + ((p-k_1)^2 - m^2)x_3]^3} \\ &\quad + \left(\begin{array}{l} k_1 \rightarrow k_2 \\ \mu \rightarrow \nu \end{array} \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ahora, explícitamente calculamos la traza:

$$\begin{aligned}
 Tr[\gamma_5 \not{q} \gamma_\mu \not{k}_1 \gamma_\nu] &= Tr[\gamma_5 (\not{k}_1 + \not{k}_2) \gamma_\mu \not{k}_1 \gamma_\nu] \\
 &= Tr[\gamma_5 \gamma_\alpha k_1^\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta k_1^\beta \gamma_\nu] \\
 &+ Tr[\gamma_5 \gamma_\alpha k_2^\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta k_2^\beta \gamma_\nu] \\
 &= Tr[\gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu] k_1^\alpha k_1^\beta \\
 &+ Tr[\gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu] k_2^\alpha k_2^\beta \\
 &= 4i \varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu} k_2^\alpha k_1^\beta .
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Con este resultado podemos escribir:

$$T_{\mu\nu} = 2i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 2 \frac{im 4i \varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu} k_2^\alpha k_1^\beta}{[p^2 - 2pk - \bar{m}^2]^3} .$$

En (4.24) hemos incluido un factor de 2 por el factor $k_1 \rightarrow k_2$ y $\mu \rightarrow \nu$. también hemos definido:

$$k = q(1 - x_1 - x_2) + k_1 x_1 , \tag{4.24}$$

$$\bar{m}^2 = m^2 - q^2(1 - x_1 - x_2) . \tag{4.25}$$

Ahora, usamos la integral:

$$\int \frac{d^n p}{(p^2 - 2pk - \bar{m}^2)^\alpha} = i^{1-2\alpha} \pi^{n/2} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(k^2 + \bar{m}^2)^{\alpha - \frac{n}{2}}} . \tag{4.26}$$

En nuestro caso, $\alpha = 3$ y $n = 4$. Para M grande la integral claramente se comporta como $1/M^2$, entonces:

$$\begin{aligned}
 \lim_{M \rightarrow \infty} 2MT_{\mu\nu}(M) &= \lim_{M \rightarrow \infty} 2 \frac{2i}{(2\pi)^4} \frac{\pi^2}{2i} 2i \frac{M^2}{M^2} 4i \varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu} k_1^\alpha k_2^\beta \\
 &= \frac{1}{2\pi^2} \varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu} k_1^\alpha k_2^\beta .
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

La cual es la expresión en el espacio de momentos para la anomalía.

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}^{física} = 2m T_{\mu\nu\lambda}(m) - \frac{1}{2\pi^2} \varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu} k_1^\alpha k_2^\beta . \tag{4.28}$$

Entonces, en espacio de posiciones:

$$\partial^\mu j_\mu^5 = +2miP + \frac{1}{16\pi^2} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} . \tag{4.29}$$

En el caso de masa cero

$$\mathbf{A}(x) = \partial^\mu j_\mu^5 = \frac{1}{16\pi^2} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} . \quad (4.30)$$

Las expresiones (4.29) y (4.28) son equivalentes. Esto se puede demostrar si consideramos los valores de expectación con dos fotones externos con momentos k_1 y k_2 y vectores de polarización ϵ_1 y ϵ_2 . $\mathbf{A}(x)$ es llamada **ANOMALÍA ABELIANA**. Esta anomalía es independiente de la regularización empleada.

4.3. El Factor de forma de transición del pión en un modelo NJL

4.3.1. Introducción

El $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$ es fascinante porque nos sirve para explicar el factor de forma de transición (FFT) en el dominio de transferencia de momento. Para calcular este factor debemos combinar una explicación de la anomalía abeliana no perturbativa con las características de QCD perturbativa. Lepage y Brodsky estudiarón la importancia de el FFT hace más de 30 años y propusieron predicciones perturbativas para varios procesos [39], incluyendo el FFT para el pión. Ellos sugieren que para $Q^2 \rightarrow \infty$:

$$Q^2 F(Q^2) = \sqrt{2} f_\pi \quad (4.31)$$

Los resultados reportados por CELLO [37] y CLEO [38] estan de acuerdo con esta predicción: Los valores parecen aproximarse cada vez mas a este valor ver fig. 4.3. Los experimentos de BaBar [12] han cambiado esta situación drasticamente, pues $Q^2 |F(Q^2)|$ parece incrementarse con Q^2 , superando el límite asintotico por mas de un 50%. Esto ha creado un exitante interes en esta cantidad. Las mediciones de BaBar se extienden a $40 GeV^2$ que es el rango mas alto superando a las mediciones de CELLO para $Q^2 < 2.5 GeV^2$ [37] y CLEO $Q^2 < 9 GeV^2$ [38]. Esto ha creado un exitante interes en esta cantidad.

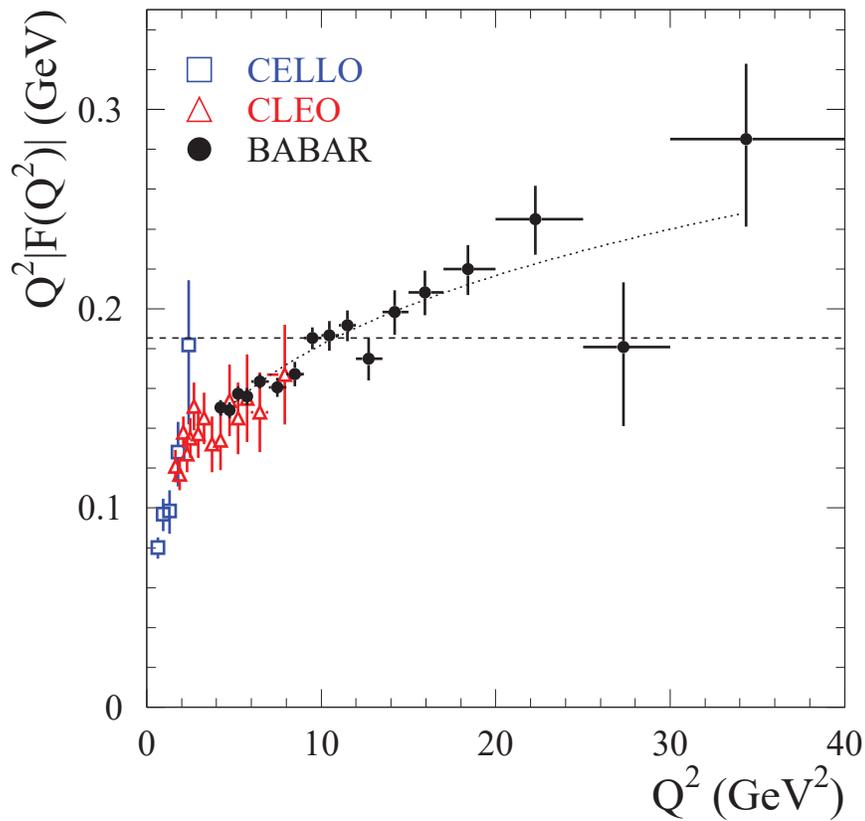


Figura 4.3: Resultados del FFT para el pión.

El experimento de BaBar usa dos aceleradores: El Slac linac (un acelerador lineal) el cual sirve como un inyector que acelera los electrones y los positrones a grandes energias y los deposita en el PEP-II que es el otro acelerador. El PEP-II consiste de dos anillos, uno de grandes energias (HER) para los electrones 9GeV y el de baja energia (LER) para los positrones 3.1GeV . las dos partículas se mueven en direcciones opuestas y chocan en el punto de interacción, donde se localiza el detector fig 4.4. El nombre del experimento se deriva de la nomenclatura para el meson B y su antipartícula \bar{B} (B bar).

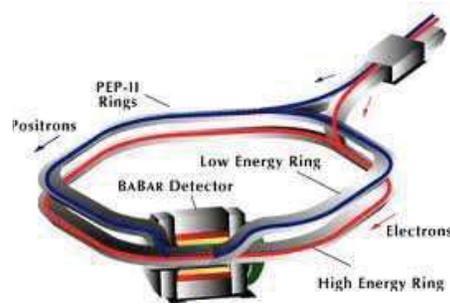


Figura 4.4: El detector BaBar.

Se han hecho muchos analisis teoricos para tratar de explicar los resultados de BaBar y las conclusiones de estos se resumen en dos grupos: los que estan de acuerdo con los resultados de Babar [40, 41] y los que no pueden explicar estos resultados [42, 43]. En [40] se hace el calculo del FFT usando las reglas de suma del cono de luz con varias formas para la amplitud de distribución del pion usando solo el término que más contribuye. El trabajo en [41], esta basado en el papel de la anomalia quiral para procesos que involucran un pion y fotones virtuales. En [42] usan las sumas del cono de luz tomando en cuenta las correcciones radiactivas a next-to-next-to-leading order de teoria de perturbaciones. Finalmente [43] es el articulo que involucra este capitulo de la tesis, y es el calculo del FFT para el pion usando interacción de contacto. Con el reciente articulo publicado por Belle [44] parece que se aclara este problema, por las siguientes razones

- Los resultados de Belle fig 4.5 no muestran el crecimiento para grandes momentos como BaBar.
- Las mediciones reportadas por Belle estan muy cerca de las predicciones dadas por pQCD.
- Belle esta de acuerdo con los experimentos previos para $Q^2 \leq 9\text{GeV}^2$, [37, 38, 36]

Tambien es importante mencionar que segun un analisis de Brodsky, Cao y Teramond [45] quienes investigaron el FFT usando cuatro modelos tipicos para la amplitud de distribución del pion, el comportamiento de el FFT para el pion medido por BaBar es dificil de explicar con las plataformas de QCD existentes, asi que si se confirma que BaBar esta en lo correcto, esto implicara nueva fisica mas alla del modelo estandar.

de transición [29, 30]. En la aproximación arcoiris, este proceso se calcula como en [27].

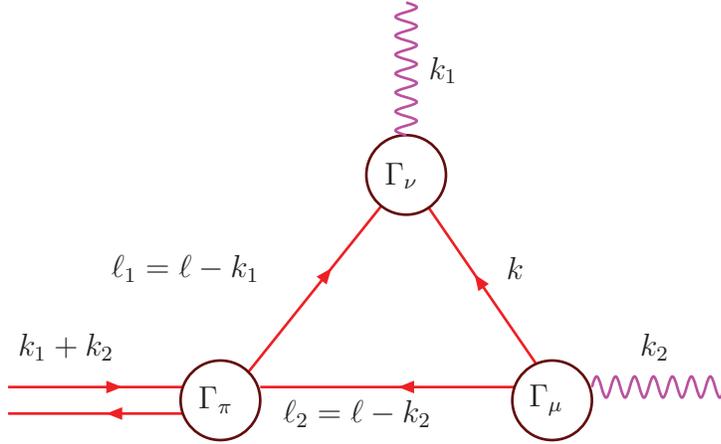


Figura 4.6: El diagrama del vértice $\gamma^* \pi^0 \gamma$ en la aproximación impulso.

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}(k_1, k_2) = T_{\mu\nu}(k_1, k_2) + T_{\nu\mu}(k_2, k_1), \quad (4.32)$$

donde el momento del pión es $P = k_1 + k_2$ y k_1, k_2 son los momentos del fotón

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(k_1, k_2) &= \frac{\alpha_{em}}{\pi f_\pi} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} G(k_1^2, k_1 \cdot k_2, k_2^2) \\ &= \text{tr} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \chi_\pi(\ell_1, \ell_2) i\mathcal{Q}\Gamma_\mu(\ell_2, \ell_{12}) S(\ell_{12}) i\mathcal{Q}\Gamma_\nu(\ell_{12}, \ell_1), \end{aligned} \quad (4.33)$$

con $\ell_1 = \ell - k_1$, $\ell_2 = \ell + k_2$, $\ell_{12} = \ell - k_1 + k_2$, y $\mathcal{Q} = \text{diag}[e_u, e_d] = e \text{diag}[2/3, -1/3]$, $\alpha_{em} = e^2/(4\pi)$. Las condiciones cinemáticas son:

$$k_1^2 = Q^2, \quad k_2^2 = 0, \quad 2k_1 \cdot k_2 = -(m_\pi^2 + Q^2). \quad (4.34)$$

Primero consideramos el límite quiral, es decir, $Q^2 = 0$. Este es el caso para el cual (4.33) describe el “triangle diagram” que produce la anomalía abeliana,

y entonces podemos calcular $G(0, 0, 0)$. Como hemos explicado, nuestra regularización asegura que las identidades WT se satisfacen. Dos ecuaciones son obtenidas de insertar (2.93) en (4.33); asociamos $E_\pi(P)$, con G_E , y $F_\pi(P)$, con el factor designado como G_F . Primero consideremos $G_F(0, 0, 0)$. Para esto sólo expandemos los integrandos en (4.33) alrededor de $k_1 = 0 = k_2$ y sólo nos quedamos con los términos lineales en $F_\pi(P)k_{1\alpha}k_{2\beta}$. Con esto obtenemos

$$G_F(0, 0, 0) = -\frac{f_\pi}{M} \int_0^\infty ds s^2 F_\pi(P) \sigma_V(s) \times [\sigma_V(s)^2 + s\sigma_V(s)\sigma'_V(s) + \sigma_S(s)\sigma'_S(s)], \quad (4.35)$$

donde $\sigma'(s) = \frac{d}{ds}\sigma(s)$. Entonces podemos escribir

$$S(\ell) = -i\gamma \cdot \ell \sigma_V(\ell^2) + \sigma_S(\ell^2).$$

Usando (2.49), encontramos que $\sigma'_V = -\sigma_V^2$, $\sigma'_S = -M\sigma_V^2$. Cuando escribimos estas identidades en (4.35), obtenemos que:

$$G_F(0, 0, 0) = 0.$$

Este es un caso particular del resultado general encontrado en [25]. Ahora sólo nos resta por calcular G_E . Si usamos los métodos que hasta ahora hemos considerado, obtenemos:

$$G_E(0, 0, 0) = \frac{M f_\pi}{\pi^2} \int d^4\ell E_\pi(P) \sigma_V(\ell_{12}^2) \sigma_V(\ell_1^2) \sigma_V(\ell_2^2). \quad (4.36)$$

La integral es convergente y entonces un cambio en las variables de integración no afecta el resultado. Se sigue entonces que:

$$G_E(0, 0, 0) = E_\pi(P) \frac{f_\pi}{M} \int_0^\infty ds s \frac{M^2}{(s + M^2)^3}. \quad (4.37)$$

Si emplemos (2.65), como hemos hecho anteriormente, esto se convierte en:

$$G_E(0, 0, 0) = \frac{1}{M^2} \mathcal{C}_2^{\text{iu}}(M^2), \quad (4.38)$$

donde $\mathcal{C}_2^{\text{iu}}(z) = (z^2/2)(d^2/dz^2)\mathcal{C}^{\text{iu}}(z)$. En esta ecuación usamos las relaciones GT (3.30). Sabemos que de la identidad anómala de WT $G_E(0, 0, 0) = \frac{1}{2}$: una simple fracción. Entonces, la ecuación (4.38) es claramente inconsistente con esto, ya que depende de los valores de los parámetros Λ_{ir} , Λ_{uv} . Si escribimos nuestros parámetros (2.74), nuestra regularización (2.55) es $f_\pi G_E(0, 0, 0) = 0.36$. ¿Qué está mal?

La respuesta está en la observación de que:

$$\mathcal{C}_2^{\infty 0}(M^2) = \mathcal{C}_2(M^2, \tau_{\text{ir}}^2 \rightarrow \infty, \tau_{\text{uv}}^2 \rightarrow 0) = \frac{1}{2} M^2. \quad (4.39)$$

Para aclarar esto, regresemos a (4.37). La integral es convergente y no tiene dimensiones. Entonces no depende de M . Es una aplicación del proceso desarrollado en [21, 23, 24, 25], donde el cambio de variable $C(s) = M/s$ nos da:

$$\begin{aligned} G_E(0, 0, 0) &= \int_0^\infty dC \frac{1}{(1+C)^3} \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty dC \frac{d}{dC} \frac{1}{(1+C)^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

La última línea enfatiza que la anomalía es determinada por la integral de una derivada total. El resultado en (4.40) es obtenido sí y solo sí, la simetría quiral se rompe dinámicamente, solo en ese caso podemos usar (3.30) para eliminar completamente la estructura $E_\pi(P)$ de la expresión.

4.4. Comparación experimental y teórica con los resultados contemporáneos

Ahora nos enfocaremos a los resultados obtenidos con la interacción de contacto (2.55). Recordemos (4.35) y (4.37): La primera es logarítmicamente divergente mientras la segunda es convergente incluso si cambiamos los parámetros de regularización. Necesitamos quitar las escalas de regularización si queremos recuperar el valor de la anomalía. Sin embargo, el factor de forma está mal definido ya que el término $F_\pi(P)$ contribuye a la divergencia logarítmica. Procedemos quitando la regularización en el cálculo de G_E pero la mantenemos en el cálculo de G_F . Cabe destacar que (2.55) no es completamente consistente con el esquema de QCD en el comportamiento ultravioleta, pero esta receta sirve para preservar el comportamiento infrarojo. Hay un paso más para implementar este esquema. Para llegar a las expresiones para el kernel de BS reescribimos el producto de los denominadores de los propagadores usando la parametrización de Feynman. Sin embargo, éste no es el caso para la anomalía. La integral que define G_F es logarítmicamente divergente. Un cambio de las variables de integración cambia su valor y, al hacerlo uno entra en conflicto con el hecho de que es imposible conservar al mismo tiempo el vector y el vector axial WT de los diagramas de triángulo en las teorías de campo con las corrientes axiales que son bilineales en los

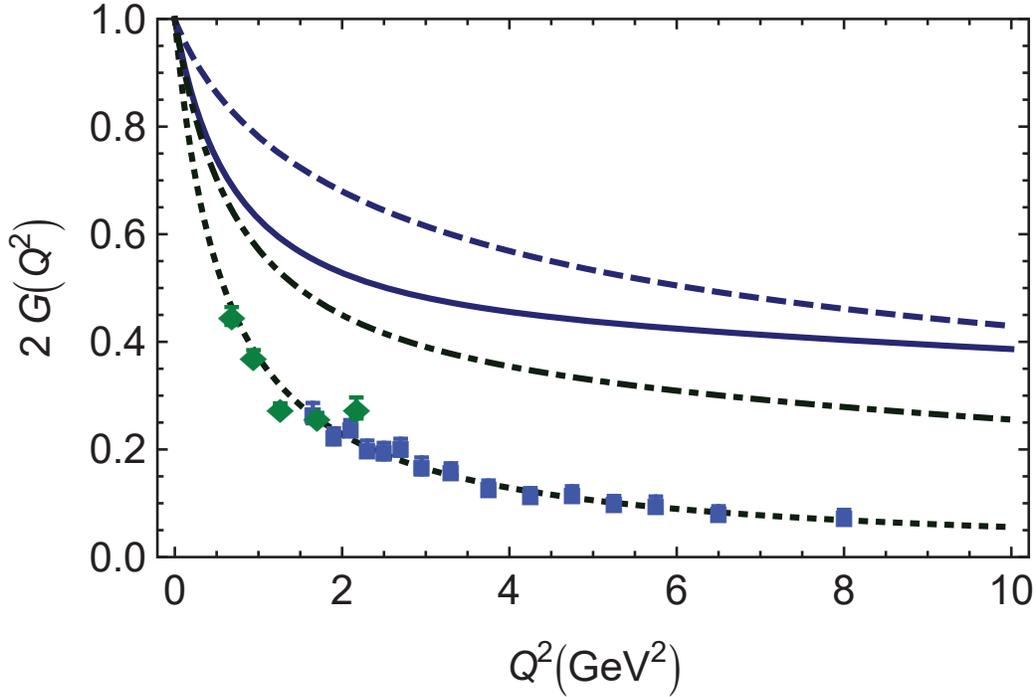


Figura 4.7: Factor de Forma de Transición $\gamma^*\pi^0\gamma$. *Curva sólida* – cálculo completo, incluyendo la contribución $F_\pi(P)$; *Curva discontinua* – resultado obtenido sin vestir al vértice quark-fotón; *Curva trazo punto* – resultado obtenido $F_\pi(P) \equiv 0$, i.e., forzado a desaparecer; *Curva puntada* – ajuste basado en los cálculos presentados en [32], los cuales están de acuerdo con los datos reportados en [13, 14], diamantes verdes y cuadrados azules, respectivamente

campos de fermiones. Cualquier cambio en las variables de la Ec. (??) cambia el valor de $G_F(0, 0, 0)$. Para compensar esto, usamos una regularización adicional de sustracción, es decir,

$$\begin{aligned} & G_F(Q^2, -(m_\pi^2 + Q^2)/2, 0) \\ \rightarrow & G_F(Q^2, -(m_\pi^2 + Q^2)/2, 0) - G_F(0, 0, 0). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Para hacerlo implementamos una anomalía electromagnética sin corriente [46].

En la Fig. (4.7) se presentan los resultados producidos en (2.55) usando la regularización descrita. Comparando la curva discontinua con la curva sólida, es evidente que el efecto del vértice quark-fotón vestido disminuye cuando se incrementa Q^2 y entonces no es de gran impacto en el comportamiento

Tabla 4.1: Resultados obtenidos usando los parámetros en (2.74)[55].

| | E_π | F_π | M | m_π | $\sqrt[3]{\kappa_\pi}$ | f_π | m_ρ | r_q | r_π | r_π^ρ |
|---------|---------|---------|------|---------|------------------------|---------|----------|-------|---------|--------------|
| m=0 | 4.28 | 0.69 | 0.40 | 0 | 0.22 | 0.094 | 0.90 | 0.34 | 0.30 | 0.45 |
| m=0.008 | 4.36 | 0.72 | 0.41 | 0.14 | 0.22 | 0.094 | 0.91 | 0.33 | 0.30 | 0.44 |

asintótico del factor de forma de transición. Sin embargo, sí afecta el radio:

$$r_{\pi^0}^{*2} = -6 \left. \frac{d}{dQ^2} \ln G(Q^2, -(m_\pi^2 + Q^2)/2, 0) \right|_{Q^2=0}. \quad (4.42)$$

Esto nos da $r_{\pi^0}^* = 0.30$ fm y $r_{\pi^0}^{*\rho} = 0.45$ fm, los cuales son valores que no son sensiblemente diferentes de los valores listados en la Tabla (4.1). Más significativamente, la curva sólida y la curva discontinua en la Figura (4.7) muestra que, como en el caso del factor de forma del pión en [33], la presencia de la componente pseudoescalar $F_\pi(P)$, necesariamente no nos da cero,

$$\lim_{Q^2 \rightarrow \infty} G(Q^2, -(m_\pi^2 + Q^2)/2, 0) = \text{constante} \quad (4.43)$$

Esto es consistente con la figura mostrada en [33];

El factor de forma de $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$ obtenido usando las simetrías y la aproximación arcoiris en el esquema de interacción de contacto (2.55) está claramente en desacuerdo con los datos existentes. Lo que queremos es tener un acuerdo en el pión: todas los factores de forma deben ser asintóticos aproximándose a una constante. Este límite rápidamente se vuelve más aparente cuando se incrementa el momento. Esto es por la escala de masa asociada con las bajas energías $M \sim 0.4$ GeV. Ningún estudio que no considere las componentes pseudovectoriales nos dará una buena explicación de el factor de transición de $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$. Por otro lado, cabe destacar, que el resultado usando las ecuaciones DS en [32], el cual se basa en una interacción que preserva la renormalización a un lazo, está de acuerdo con los resultados de Babar, excepto para grandes Q^2 .

4.4.1. Amplitud de distribución de transición para el pion

Como sabemos los ingredientes básicos que describen los hadrones son las distribuciones de partones. Estas distribuciones pueden ser determinadas experimentalmente a un valor relativamente alto de la transferencia de momento Q^2 . Entonces la QCD perturbativa dicta la evolución de estas distribuciones con la transferencia de momento, con la cual podemos dar predicciones

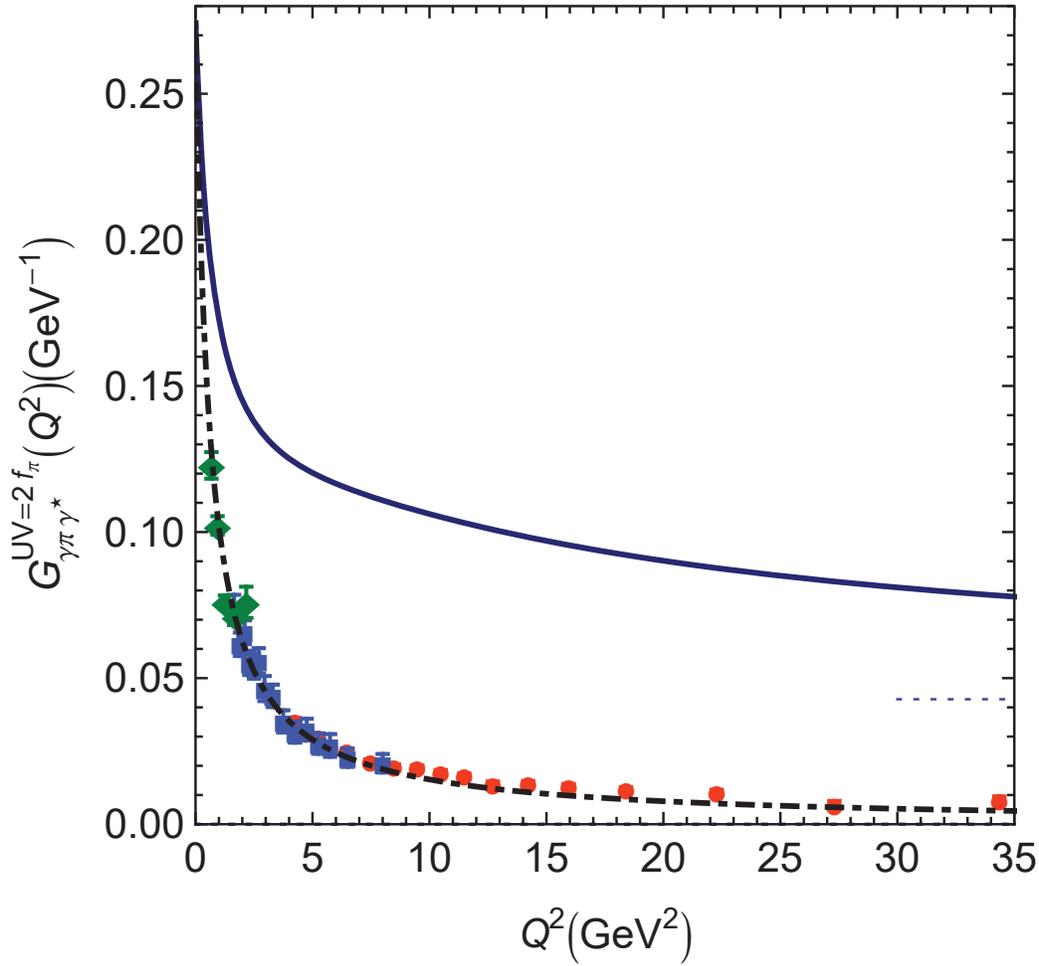


Figura 4.8: Factor de Transición de $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$. Datos: círculos rojos, [12]; diamantes verdes, [13]; y cuadrados azules, [14]. *Curva sólida* – $G(Q^2, 0)$ cálculos usando las simetrías en la truncación arcoiris de la interacción de contacto en (2.55), la *curva punteada* muestra el límite asintótico distinto de cero, y *curva discontinua con puntos* – ajuste de el factor de forma de transición $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$, calculado basado en ecuaciones SD [32]. Las curvas han sido divididas por $(2\pi^2 f_\pi)$ con la finalidad de comparar los datos.

para las observables. La amplitud de distribución de transición (TDA) representa una generalización de las distribuciones de los partones al caso donde estado inicial y final corresponden a partículas diferentes. Vale la pena considerar un poco más la naturaleza de los piones puntuales. Como se explica en [34], con el propagador vestido y la amplitud de BS a la mano, podemos calcular la distribución de valencia del pión en la aproximación arcoiris. Con la

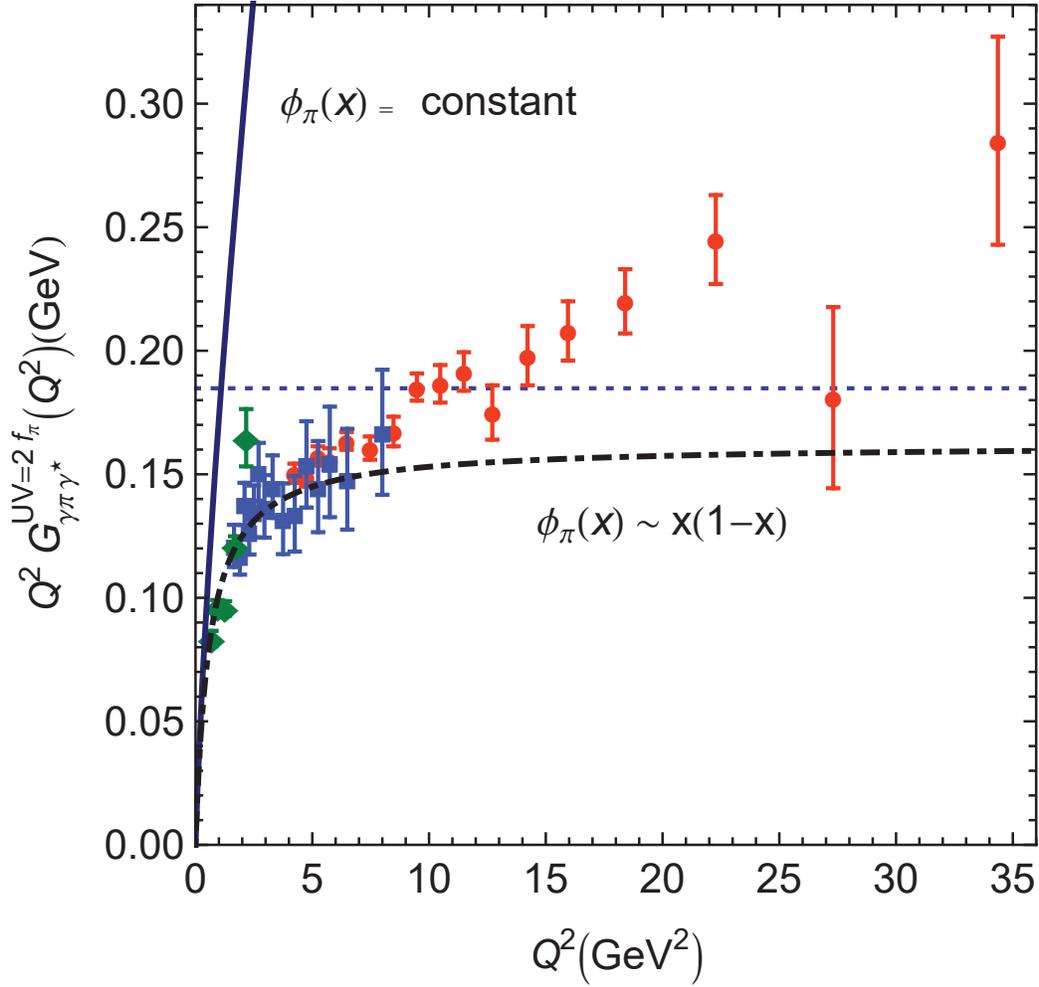


Figura 4.9: El factor de forma de transición $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$ Datos: círculos rojos [12]; diamantes verdes, [13]; cuadrados azules, [14]. *curva sólida* – $Q^2 G(Q^2, 0)$ cálculo usando la interacción de contacto en la aproximación arcoiris, la cual produce $\phi_\pi(x) = \text{constante}$ y *curva punto-guión* – ajuste del factor de transición $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$ calculado en QCD en la aproximación arcoiris usando un estudio de las ecuaciones SD [32]. Ambas curvas han sido divididas por $(2\pi^2 f_\pi)$ para poder comparar.

interacción de contacto tenemos:

$$\begin{aligned}
 q_V(x) &= \frac{3}{2i} \text{tr}_D \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \delta(n \cdot \ell - x n \cdot P) \\
 &\times \Gamma_\pi(-P) S(\ell) n \cdot \gamma S(\ell) \Gamma_\pi(P) S(\ell - P), \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

donde $n^2 = 0$, $n \cdot P = P^+$, y x es la variable de Bjorke. Se sigue de esta expresión que

$$(n \cdot P)^{n+1} \int_0^1 dx x^n q_V(x) = \frac{3}{2i} \text{tr}_D \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} (n \cdot \ell)^n \times \Gamma_\pi(-P) S(\ell) n \cdot \gamma S(\ell) \Gamma_\pi(P) S(\ell - P). \quad (4.45)$$

En este punto nos especializaremos en el límite quiral y evaluaremos la traza de Dirac; usando una parametrización de Feynmann para re-expresar el producto $\sigma_V(\ell^2) \sigma_V((\ell - P)^2)$ que surge en las expresiones. Haciendo un cambio de variables $\ell \rightarrow (\ell + \alpha P)$, donde α es el parámetro de Feynmann; usamos la invarianza de la medida $O(4)$ para evaluar las integrales angulares y entonces llegamos a:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx x^n q_V(x) &= \frac{1}{n+1} \frac{3}{4\pi^2} \bar{\mathcal{C}}_1^{\text{iu}}(M^2) E_\pi[E_\pi - 2F_\pi] \\ &= \frac{1}{n+1}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde la última línea se sigue porque la amplitud BS es normalizada canónicamente, (3.49). La función de distribución es fácilmente reconstruida a partir de (4.46); y se encuentra que incluso con la inclusión de la componente pseudovectorial distinta de cero, se encuentra:

$$q_V(x) = \theta(x) \theta(1-x), \quad (4.47)$$

el cual corresponde a la amplitud de distribución del pión

$$\phi_\pi(x) = \text{constant}. \quad (4.48)$$

Este resultado proporciona otra forma de entender la incapacidad de la interacción de contacto para reproducir los resultados de la QCD.

Como se explica en [34], el teorema de Goldstone en QCD es expresado como una correspondencia entre el propagador del quark y la amplitud de BS. Y sabemos que la función de masa del quark vestido se comporta como: [48, 49, 50, 51, 52]

$$M(p^2) \underset{\sim}{\text{large-}p^2} \frac{1}{p^2}, \quad (4.49)$$

que implica que en QCD cada función escalar en la amplitud de BS, (2.76), depende del momento relativo, k , como $\sim 1/k^2$ para grandes- k^2 .

Hemos mostrado que un tratamiento consistente de la interacción de contacto es incompatible con los resultados existentes para el pión Fig.?? y los datos del factor de transición Figuras (4.8, 4.9). A pesar de esto, los resultados mostrados pueden ser usados con los estudios de QCD usando las ecuaciones SD con el fin de formular observaciones sobre los datos disponibles para el proceso de $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$.

Para empezar nuestro análisis sobre las similitudes de la curva punto-guión y la curva punteada en la Figura 4.7; i.e., los resultados de QCD basados en las ecuaciones SD y los obtenidos con la interacción de contacto si la componente pseudovectorial es eliminada artificialmente. Recalquemos que si $F_\pi(P)$ es forzada a cero, entonces uno ya no representa fielmente las características y consecuencias de una interacción de contacto. Estas consecuencias fueron tratadas en [33]. Se describen los resultados obtenidos a través de este cálculo con el fin de aclarar su verdaderas implicaciones para el proceso $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$.

Un análisis de (??) muestra que la interacción de contacto nos da

$$G_E(Q^2, -(Q^2 + m_\pi^2)/2, 0) \stackrel{Q^2 \gg M^2}{\cong} \frac{1}{2} \frac{M^2}{Q^2} \left[\ln \frac{Q^2}{M^2} \right]^2. \quad (4.50)$$

Debemos subrayar que en (4.50), M es la masa del quark vestido. La Tabla 4.1 enfatiza que M es una cantidad calculada una vez que la interacción y la truncación son completamente especificadas. El valor de M está estrechamente conectado con las otras medidas de la Tabla. Entonces, en un análisis no se puede alterar M sin que se cambien las otras propiedades que caracterizan al pión. Ningún análisis teórico es confiable si se dejan de lado estas limitaciones. En la Figura 4.10 presentamos el resultado de la interacción de contacto para $Q^2 G_E(Q^2, -(Q^2 + m_\pi^2)/2, 0)$ normalizada por la forma asintótica de (4.50). Podemos entender mejor este límite si consideramos un monopolo como en [32], con esto el límite perturbativo es:

$$Q^2 G(Q^2, -(Q^2 + m_\pi^2)/2, Q^2) = (2/3) 4\pi^2 f_\pi^2 \quad (4.51)$$

$$\lim_{Q^2 \rightarrow \infty} Q^2 G(Q^2) = 4\pi^2 f_\pi^2 J(\omega) \quad (4.52)$$

$$J(\omega) = \frac{2}{3} \int_0^1 dx \frac{1}{1 - \omega^2(2x - 1)} \phi_\pi(x) \quad (4.53)$$

$$\omega = \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} \quad (4.54)$$

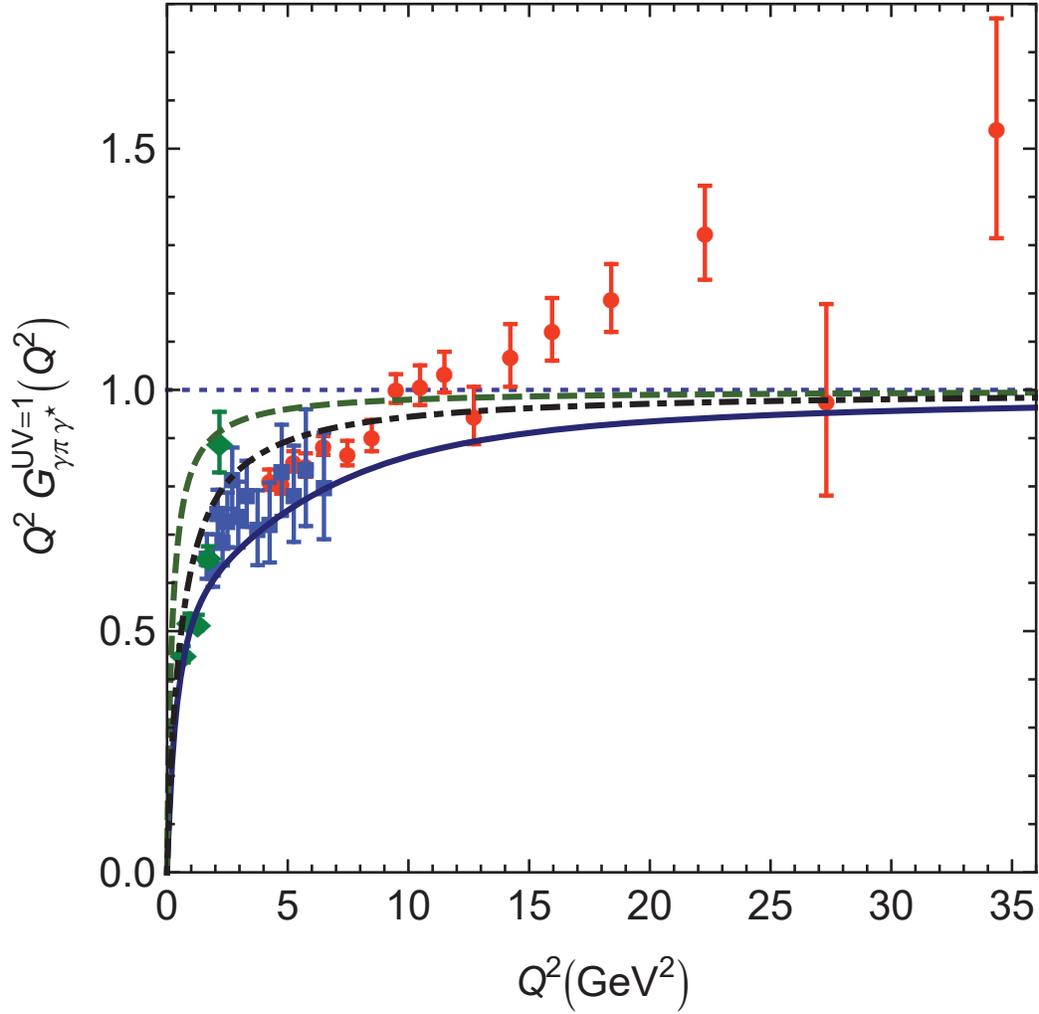


Figura 4.10: Factor de forma de transición de $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$. Datos: círculos rojos, [12]; diamantes verdes, [13]; y cuadrados azules, [14]. El límite de pQCD está marcado por la línea punteada en “1”. *Curva sólida* – $Q^2 G_E(Q^2, 0)$ resultado obtenido con este trabajo normalizado según (4.50); *Curva discontinua* – monopolo con escala de masa $(2/3)4\pi^2 f_\pi^2$ calculado en Ref. [32] *Curva discontinua con puntos* – monopolo con escala de masa $(7/8)4\pi^2 f_\pi^2$, obtenido con el ajuste de el factor de transición $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$ calculado en [32], normalizado usando la misma escala de masa.

Si $\omega = 0$ la integral converge este es el caso cuando los dos fotones son virtuales el problema surge cuando uno es virtual y el otro es real, es decir cuando $\omega = 1$ la integral diverge. Por lo tanto $\phi_\pi(x) = cte$ si y solo si no hay dependencia del momento relativo.

4.5. Conclusiones

Nuestro análisis muestra que para grandes Q^2 , los datos de BaBar son inconsistentes con QCD y también son inconsistentes con una corriente vectorial en la interacción de contacto. Esto nos lleva a la conclusión que, para grandes Q^2 los datos reportados por BaBar no son ciertos para el factor de transición de $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$, el punto de vista desarrollado también en otros lugares [35]. Con esto confirmamos que el factor de forma de transición de $\gamma^* \rightarrow \eta\gamma$ y el factor de forma $\gamma^* \rightarrow \eta'\gamma$ han sido medidos también por BaBar [36], a $Q^2 = 112 \text{ GeV}^2$, y en estos casos el resultado de CLEO [14] y los datos de BaBar son completamente consistentes con los esperados por QCD perturbativa.

Capítulo 5

El Mesón ρ

5.1. Introducción

En numerosos problemas, π y ρ mesones son los estados compuestos más simples que se pueden estudiar en QCD. En teoría cuántica de campos un barión aparece como un polo en una función de Green de seis puntos. El residuo del polo es proporcional a la amplitud de Faddeev, que es obtenida de la ecuación de Faddeev que suma todas las posibles interacciones que pueden tener los quarks vestidos. Una truncación de la ecuación de Faddeev está basada en la observación de que una interacción que describe mesones también genera correlaciones de diquarks. Las correlaciones dominantes para el estado base de octetes y decupletes de bariones son diquarks escalares (0^+) y diquarks vectoriales (1^+). Si usamos leading-order y una simetría que preserva la truncación de las DSE unos pequeños cambios en las ecuaciones de los mesones π y ρ nos da las expresiones que detallan información acerca de los diquarks axial vectoriales y de los diquarks escalares, ejemplos sus masas y sus factores de forma de transición que son elementos básicos en el cálculo de las propiedades de los bariones. Es entonces natural estudiar a los mesones π y ρ y las correlaciones de los diquarks por que esto nos abre el camino para una explicación unificada de las propiedades de los mesones y bariones con una sola interacción.

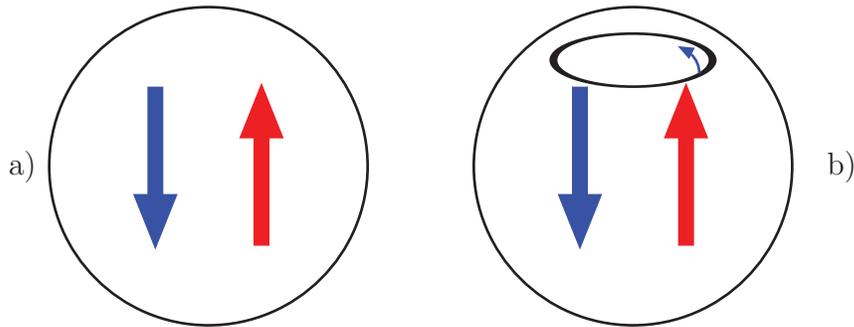


Figura 5.1: a) Mesones Pseudoescalares, b) Mesones Escalares.

La función de 3-puntos $\Lambda_{\mu\rho\sigma}$ que describe el acoplamiento de un fotón con momento Q con un mesón vectorial con momento inicial y final $P \pm Q/2$ está dado por:

$$\Lambda_{\mu\rho\sigma}(P, Q) = N_c \int \frac{d^4t}{(2\pi)^4} \text{Tr} [i\Gamma_\mu(t + p_1, t + p_2) S(t + p_2) iV_\rho(-p_2) iV_\sigma(p_1) S(t + p_1)] \quad (5.1)$$

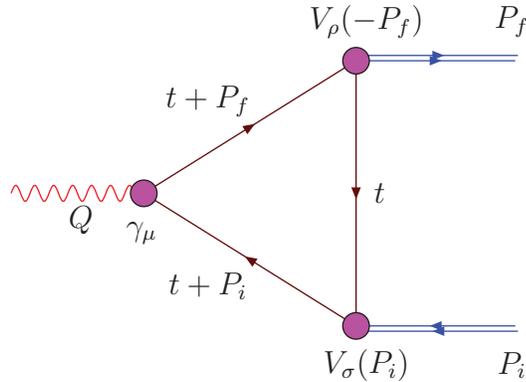


Figura 5.2: El vértice mesón-quark Γ_{meson} .

En la aproximación de impulso podemos escribir $Q^2 = 0$. En la ecuación mencionada arriba (5.1), $p_1 = P - Q/2$ y $p_2 = P + Q/2$. Entonces $p_1^2 = p_2^2 = P^2 = -m_\rho^2$. Tomamos la ecuación del vértice quark-fotón como:

$$\Gamma_\mu(t + p_1, t + p_2) = \gamma_\mu \quad (5.2)$$

y el vértice mesón-quark es

$$V_\mu(p_1) = \gamma_\mu^T = \gamma_\mu + \gamma \cdot \hat{p}_1 \hat{p}_{1\mu} . \quad (5.3)$$

El propagador del fermión está dado por:

$$S(t) = -i\gamma \cdot t \sigma_V(t) + \sigma_S(t) = (-i\gamma \cdot t + M) \sigma_V(t) \quad (5.4)$$

con

$$\sigma_S(t) = M\sigma_V(t) , \quad \sigma_V(t) = \frac{1}{t^2 + M^2} . \quad (5.5)$$

la expresión más general para $\Lambda_{\mu\rho\sigma}$ está dada por:

$$\Lambda_{\mu\rho\sigma}(P, Q) = - \sum_{i=1}^3 T_{\mu\rho\sigma}^i(P, Q) F_i(Q^2) . \quad (5.6)$$

Para poder extraer $F_1(0)$, notamos que para on-shell mesons,

$$\delta_{\rho\sigma} T_{\mu\rho\sigma}^i(P, Q) = 0 \quad \text{para} \quad i = 2, 3 . \quad (5.7)$$

Entonces,

$$P_\mu \delta_{\rho\sigma} \Lambda_{\mu\rho\sigma} = 6M^2 F_1(0) . \quad (5.8)$$

Con las reglas usuales para obtener trazas encontramos

$$\begin{aligned} & \text{Tr} [i\Gamma_\mu(t + p_1, t + p_2) S(t + p_2) iV_\rho(-p_2) iV_\sigma(p_1) S(t + p_1)] \\ &= 4 \left[3M^2(2m_\rho^2 - P \cdot t) + m_\rho^2(3P \cdot t + 2t^2) + P \cdot t t^2 - 4(P \cdot t)^2 - 2(Q \cdot t)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{4(P \cdot t)^3 + 3P \cdot t (Q \cdot t)^2}{m_\rho^2} \right] \sigma_V(t) \sigma_V(t + p_1) \sigma_V(t + p_2) . \quad (5.9) \end{aligned}$$

Empleando parametrización de Feynmann,

$$\sigma_V(t + P_2) \sigma_V(t + P_1) \sigma_V(t) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2x_1 dx_1 dx_2}{\{[t + x_1(x_2 P_1 + (1 - x_2) P_2)]^2 + \rho^2 + M^2\}^3} \quad (5.10)$$

donde $\rho^2 = x_1^2 x_2 (1 - x_2) Q^2$ y $Q = P_2 - P_1$. Simplificando podemos obtener

$$F_1(0) = \frac{N_c}{2\pi^2} \int_0^1 dx x \int_t^\Lambda \frac{2m_\rho^2 x(1-x)^2 + 2M^2(2-x) + t^2(2-x)}{[t^2 + \omega(x)]^3} , \quad (5.11)$$

donde $\omega(x) = M^2 + m_\rho^2(x-1)x$. En términos de las funciones C_1 y C_2 tenemos

$$F_1(0) = \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^1 dx x \left[\frac{(2-x)}{\omega(x)} C_1(\sqrt{\omega}; r_{IR}^2, r_{UV}^2) + \frac{2m_\rho^2 x (1-x)^2 + (2-x)(2M^2 - \omega(x))}{\omega^2(x)} C_2(\sqrt{\omega}; r_{IR}^2, r_{UV}^2) \right].$$

5.2. La Normalización

La normalización global de la amplitud de BS no es un parámetro libre. La condición de normalización es:

$$\mathcal{N}^2 P_\mu \left[\delta_{\alpha\beta} + \frac{P_\alpha P_\beta}{m_\rho^2} \right] = N_c \text{Tr} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \Gamma_{\rho\alpha}(-P) \left[\frac{\partial S(q_+)}{\partial P_\mu} \Gamma_{\rho\beta}(P) S(q_-) + S(q_+) \Gamma_{\rho\beta}(P) \frac{\partial S(q_-)}{\partial P_\mu} \right].$$

Notemos que el símbolo $\Gamma_{\rho\mu}$ corresponde a la amplitud de BS para el ρ -mesón. Entonces, tenemos sólo un índice de Lorentz μ . Ahora, contraemos con $\delta_{\alpha\beta}$ y usamos $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta} = 4$ y $\delta_{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta = -m_\rho^2$. Con esto,

$$\mathcal{N}^2 P_\mu = \frac{1}{4\pi^2} \text{Tr} \int_q^\Lambda \Gamma_{\rho\alpha}(-P) \left[\frac{\partial S(q_+)}{\partial P_\mu} \Gamma_{\rho\alpha}(P) S(q_-) + S(q_+) \Gamma_{\rho\alpha}(P) \frac{\partial S(q_-)}{\partial P_\mu} \right],$$

donde hemos usado el hecho de que $N_c = 3$.

$$\mathcal{N}^2 P_\mu = \left[\frac{\partial}{\partial P_\mu} \frac{1}{4\pi^2} \text{Tr} \int_q^\Lambda \Gamma_{\rho\alpha}(-K) S(q_+) \Gamma_{\rho\alpha}(K) S(q) \right]_{K=P} \quad (5.12)$$

$$\mathcal{N}^2 = \frac{2}{3} \left[\frac{d}{dP^2} \Pi(K, P) \right]_{K=P}, \quad (5.13)$$

donde

$$\Pi(K, P) = \frac{3}{4\pi^2} \text{Tr} \int_q^\Lambda \Gamma_{\rho\alpha}(-K) S(q_+) \Gamma_{\rho\alpha}(K) S(q). \quad (5.14)$$

Para ρ on-shell, únicamente los grados transversos de libertad existen. Entonces, podemos usar:

$$\Gamma_{\rho\alpha}(K) = \gamma_\alpha^T E_\rho = \left[\gamma_\alpha - \hat{K} K_\alpha \right] = \left[\gamma_\alpha - \frac{\gamma \cdot K K_\alpha}{K^2} \right] E_\rho. \quad (5.15)$$

Con este *ansatz*, $\Gamma_{\rho\alpha}(-K) = \Gamma_{\rho\alpha}(K)$. Además, la transversalidad de ρ implica

$$K_\alpha \Gamma_{\rho\alpha}(K) = 0. \quad (5.16)$$

El único ingrediente que necesitamos ahora es el propagador del quark que podemos escribir como:

$$S(q) = -i\not{q}\sigma_V(q) + \sigma_S(q) = [-i\not{q} + m]\sigma_V(q), \quad (5.17)$$

con $\sigma_S(q) = m\sigma_V(q)$. De nuevo hacemos uso de las reglas para obtener trazas y obtenemos

$$\Pi(K, P) = \frac{3E_\rho^2}{\pi^2} \int_q^\Lambda \frac{\sigma_V(q)\sigma_V(q_+)}{K^2} [2K \cdot q(K \cdot P + K \cdot q) + K^2(3M^2 + P \cdot q + q^2)].$$

Ahora hacemos uso de la Parametrización de Feynmann

$$\sigma_V(q)\sigma_V(q_+) = \int_0^1 \frac{d\alpha}{[(q + \alpha P)^2 + M^2 + \alpha(1 - \alpha)P^2]^2}. \quad (5.18)$$

Escribimos

$$\Pi(K, P) = \frac{3E_\rho^2}{4\pi^2} \int_0^1 d\alpha \int_q^\Lambda \frac{4[2K \cdot q(K \cdot P + K \cdot q) + K^2(3M^2 + P \cdot q + q^2)]}{K^2 [(q + \alpha P)^2 + M^2 + \alpha(1 - \alpha)P^2]^2} \quad (5.19)$$

Hacemos un cambio de variable para escribir el denominador como sigue :

$$\begin{aligned} N &\equiv 4 [2K \cdot q(K \cdot P + K \cdot q) + K^2(3M^2 + P \cdot q + q^2)] \\ &\rightarrow 4 \left[2 \{ \alpha(\alpha - 1)(K \cdot P)^2 + (1 - 2\alpha)\mathbf{K} \cdot \mathbf{q} K \cdot P + (K \cdot q)^2 \} \right. \\ &\quad \left. + K^2 \{ 3M^2 + \alpha(\alpha - 1)P^2 + (1 - 2\alpha)\mathbf{P} \cdot \mathbf{q} + q^2 \} \right]. \quad (5.20) \end{aligned}$$

La contribución de los términos en negritas será cero, pues son integrales impares. Para el propósito de integración sobre el momento, podemos reemplazar

$$(K \cdot q)^2 \Rightarrow \frac{1}{4} K^2 q^2. \quad (5.21)$$

Finalmente, tenemos

$$N = 2 [2\alpha(\alpha - 1) (2(K \cdot P)^2 + K^2 P^2) + 6M^2 K^2 + 3K^2 q^2]. \quad (5.22)$$

Con un poco de manipulación de estos resultados podemos escribir

$$\begin{aligned} \Pi(K, P) = \frac{6E_\rho^2}{\pi^2 K^2} \int_0^1 d\alpha \int_q^\Lambda \left[\frac{[4(K \cdot P)^2 + 5K^2 P^2] \alpha(\alpha - 1) + 3M^2 K^2}{[q^2 + M^2 + \alpha(1 - \alpha)P^2]^2} \right. \\ \left. + \frac{3K^2}{q^2 + M^2 + \alpha(1 - \alpha)P^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Podemos usar

$$\mathcal{N}^2 P_\mu = \frac{1}{3} \left[\frac{\partial}{\partial P_\mu} \Pi(K, P) \right]_{K=P}. \quad (5.24)$$

Tomando la derivada de $\Pi(K, P)$ con respecto a P_μ , tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^2 = \frac{24E_\rho^2}{\pi^2} \int_0^1 d\alpha \alpha(\alpha - 1) \left[(3P^2 \alpha(\alpha - 1) + M^2) \int_q^\Lambda \frac{1}{[q^2 + M^2 + \alpha(1 - \alpha)P^2]^3} \right. \\ \left. + 2 \int_q^\Lambda \frac{1}{[q^2 + M^2 + \alpha(1 - \alpha)P^2]^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Con nuestra notación usual tenemos

$$\int_q^\Lambda = \frac{1}{4} \int_0^\infty ds s \quad (5.26)$$

$$\int_q^\Lambda \frac{1}{(q^2 + \omega)^2} = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{ds s}{(s + \omega)^2} = \frac{1}{4\omega} \mathcal{C}_1(\sqrt{\omega}; r_{IR}^2, r_{UV}^2) \quad (5.27)$$

$$\int_q^\Lambda \frac{1}{(q^2 + \omega)^3} = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{ds s}{(s + \omega)^3} = \frac{1}{4\omega^2} \mathcal{C}_2(\sqrt{\omega}; r_{IR}^2, r_{UV}^2). \quad (5.28)$$

La expresión final entonces es:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^2 = \frac{6E_\rho^2 P^2}{\pi^2} \int_0^1 d\alpha \alpha(\alpha - 1) \left[\frac{(3P^2 \alpha(\alpha - 1) + M^2)}{\omega^2} \mathcal{C}_2(\sqrt{\omega}; r_{IR}^2, r_{UV}^2) \right. \\ \left. + \frac{2}{\omega} \mathcal{C}_1(\sqrt{\omega}; r_{IR}^2, r_{UV}^2) \right], \end{aligned} \quad (5.29)$$

donde

$$\omega = M^2 + \alpha(1 - \alpha)P^2. \quad (5.30)$$

5.3. Cálculo de $F_i(Q^2)$

Empezamos de nuevo con la forma más general de $\Lambda_{\mu\rho\sigma}$. Está dada por:

$$\Lambda_{\lambda,\mu\nu}(K, Q) = \sum_{j=1}^3 T_{\lambda,\mu\nu}^j(K, Q) F_j(Q^2), \quad (5.31)$$

Los tensores de la base son dados por

$$\begin{aligned} T_{\lambda,\mu\nu}^1(K, Q) &= 2K_\lambda \mathcal{P}_{\mu\alpha}^T(p^i) \mathcal{P}_{\alpha\nu}^T(p^f), \\ T_{\lambda,\mu\nu}^2(K, Q) &= \left[Q_\mu - p_\mu^i \frac{Q^2}{2m_\rho^2} \right] \mathcal{P}_{\lambda\nu}^T(p^f) \\ &\quad - \left[Q_\nu + p_\nu^f \frac{Q^2}{2m_\rho^2} \right] \mathcal{P}_{\lambda\mu}^T(p^i), \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$T_{\lambda,\mu\nu}^3(K, Q) = \frac{K_\lambda}{m_\rho^2} \left[Q_\mu - p_\mu^i \frac{Q^2}{2m_\rho^2} \right] \left[Q_\nu + p_\nu^f \frac{Q^2}{2m_\rho^2} \right], \quad (5.33)$$

La proyección transversa del vector está dada por:

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}^T(P) = \delta_{\alpha\beta} - \frac{P_\alpha P_\beta}{P^2}. \quad (5.34)$$

Para encontrar las expresiones de los factores de forma $F_1(Q^2)$, $F_2(Q^2)$ y $F_3(Q^2)$, contraemos (5.31) con $K_\mu\delta_{\lambda\nu}$, $K_\lambda\delta_{\mu\nu}$ y $Q_\mu K_{1\lambda}K_{2\nu}$

$$\begin{aligned}
K_\mu\delta_{\lambda\nu}T_{\mu\rho\sigma}^1(K, Q) &= -\frac{Q^2(4m_\rho^2+Q^2)(2m_\rho^2+Q^2)}{16m_\rho^4} \equiv -a_{11} \\
K_\mu\delta_{\lambda\nu}T_{\mu\rho\sigma}^2(K, Q) &= Q^2 - \frac{Q^6}{16m_\rho^4} \equiv -a_{12} \\
K_\mu\delta_{\lambda\nu}T_{\mu\rho\sigma}^3(K, Q) &= -\frac{Q^4(4m_\rho^2+Q^2)^2}{64m_\rho^6} \equiv -a_{13} \\
K_\lambda\delta_{\mu\nu}T_{\mu\rho\sigma}^1(K, Q) &= -\frac{(4m_\rho^2+Q^2)(12m_\rho^4+4m_\rho^2Q^2+Q^4)}{8m_\rho^4} \equiv -a_{21} \\
K_\lambda\delta_{\mu\nu}T_{\mu\rho\sigma}^2(K, Q) &= \frac{-Q^2(2m_\rho^2+Q^2)(4m_\rho^2+Q^2)}{8m_\rho^4} \equiv -a_{22} \\
K_\lambda\delta_{\mu\nu}T_{\mu\rho\sigma}^3(K, Q) &= -\frac{Q^2(2m_\rho^2+Q^2)(4m_\rho^2+Q^2)}{32m_\rho^6} \equiv -a_{23} \\
Q_\mu K_{1\lambda}K_{2\nu}T_{\mu\rho\sigma}^1(K, Q) &= \frac{Q^2(2m_\rho^2+Q^2)(4m_\rho^2+Q^2)}{16m_\rho^4} \equiv -a_{31} \\
Q_\mu K_{1\lambda}K_{2\nu}T_{\mu\rho\sigma}^2(K, Q) &= \frac{Q^4(4m_\rho^2+Q^2)^2}{16m_\rho^4} \equiv -a_{32} \\
Q_\mu K_{1\lambda}K_{2\nu}T_{\mu\rho\sigma}^3(K, Q) &= \frac{Q^4(4m_\rho^2+Q^2)^3}{64m_\rho^6} \equiv -a_{33}. \tag{5.35}
\end{aligned}$$

Entonces, hemos resuelto la siguiente matriz para desacoplar F_1 , F_2 y F_3 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}, \tag{5.36}$$

donde

$$\begin{aligned}
N_1 &= K_\mu\delta_{\lambda\nu}\Lambda_{\mu\rho\sigma} \\
N_2 &= K_\lambda\delta_{\mu\nu}\Lambda_{\mu\rho\sigma} \\
N_3 &= Q_\mu K_{1\lambda}K_{2\nu}\Lambda_{\mu\rho\sigma}. \tag{5.37}
\end{aligned}$$

Ahora, podemos calcular $F_1(Q^2)$, $F_2(Q^2)$ y $F_3(Q^2)$. En la aproximación de impulso el vertice ρ - γ se convierte en

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\lambda,\mu\nu} &= 2N_c\text{tr}_D \int \frac{d^4q}{(2\pi^4)} E_\rho(-p^f)\gamma_\nu^T S(q+p^f) P_T(Q^2) i\gamma_\lambda \\
&\quad \times S(q+p^i) E_\rho(p^i)\gamma_\mu^T S(q), \tag{5.38}
\end{aligned}$$

donde E_ρ esta normalizada. Las expresiones explicitas para las funciones escalares $F_{1,2,3}(Q^2)$ son obtenidas atraves de las expresiones 5.36 y usando parametrización de Feynmann

$$F_i(Q^2) = \frac{3}{4\pi^2} E_\rho^2 \int_0^1 d\alpha d\beta \alpha \left[\mathcal{A}_i \bar{\mathcal{C}}_1^{iu}(\omega_2) + [\mathcal{B}_i - \mathcal{A}_i \omega_2] \bar{\mathcal{C}}_2^{iu}(\omega_2) \right], \quad (5.39)$$

where $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i(M^2, \alpha, \beta, Q^2, m_\rho^2)$, $\mathcal{F}_i = \mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i$; viz.,

$$\mathcal{A}_1 = 2 - \alpha, \quad (5.40)$$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{m_\rho^2(\alpha(10\beta - 7) - 4) + Q^2\alpha(2\beta - 1)}{2m_\rho^2}, \quad (5.41)$$

$$\mathcal{A}_3 = \frac{2\alpha(1 - 2\beta)(5m_\rho^2 + Q^2)}{4m_\rho^2 + Q^2}, \quad (5.42)$$

$$\mathcal{B}_1 = 2 \left[M^2(2 - \alpha) + m_\rho^2\alpha(1 - \alpha)^2 - \alpha^2\beta(2 - \alpha)(1 - \beta)Q^2 \right], \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} m_\rho^2 \mathcal{B}_2 &= m_\rho^2 [M^2(-4 - 7\alpha + 10\alpha\beta) - m_\rho^2(-1 + \alpha)\alpha(1 - 7\alpha - 6\beta + 10\alpha\beta)] \\ &\quad + \alpha [M^2(-1 + 2\beta) + m_\rho^2\alpha(-1 + 2\beta + \alpha[1 + \beta - 5\beta^2 + 2\beta^3])Q^2], \quad (5.44) \\ (4m_\rho^2 + Q^2)\mathcal{B}_3 &= 4\alpha [m_\rho^2(5M^2(1 - 2\beta) + m_\rho^2(-1 + \alpha)[3 - 6\beta + \alpha(-5 - 6\beta + 16\beta^2)]) \\ &\quad + (M^2(1 - 2\beta) - m_\rho^2\alpha[-1 + \alpha - 2\beta + 3\alpha\beta + 4\beta^2 - 7\alpha\beta^2 + 2\alpha\beta^3])Q^2] \end{aligned}$$

Tenemos las siguientes gráficas para representar $F_1(Q^2)$, $F_2(Q^2)$ y $F_3(Q^2)$:

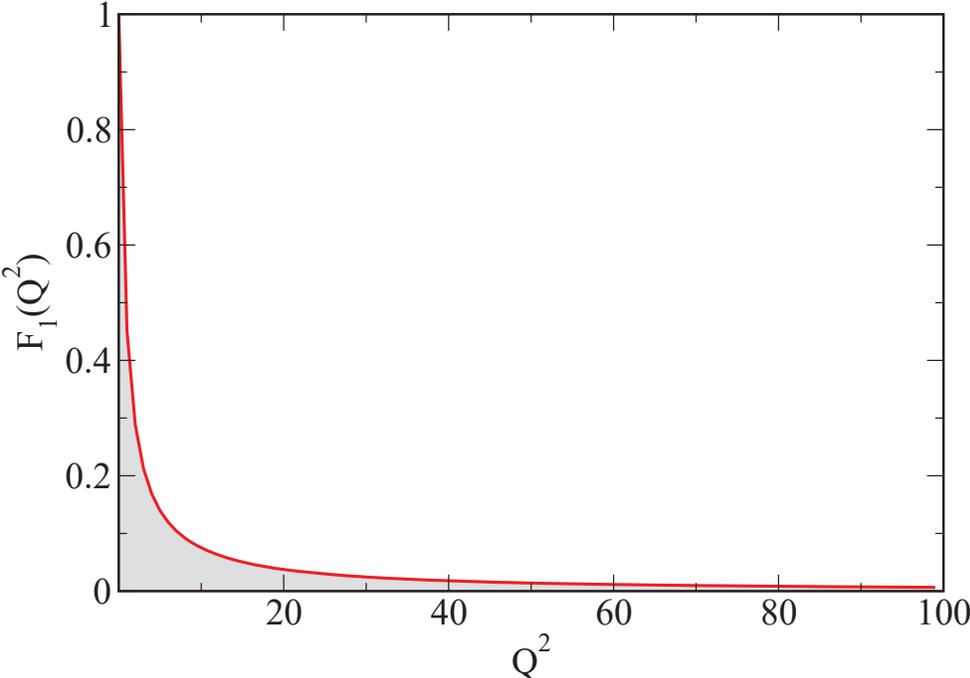


Figura 5.3: Factor de Forma F_1 .

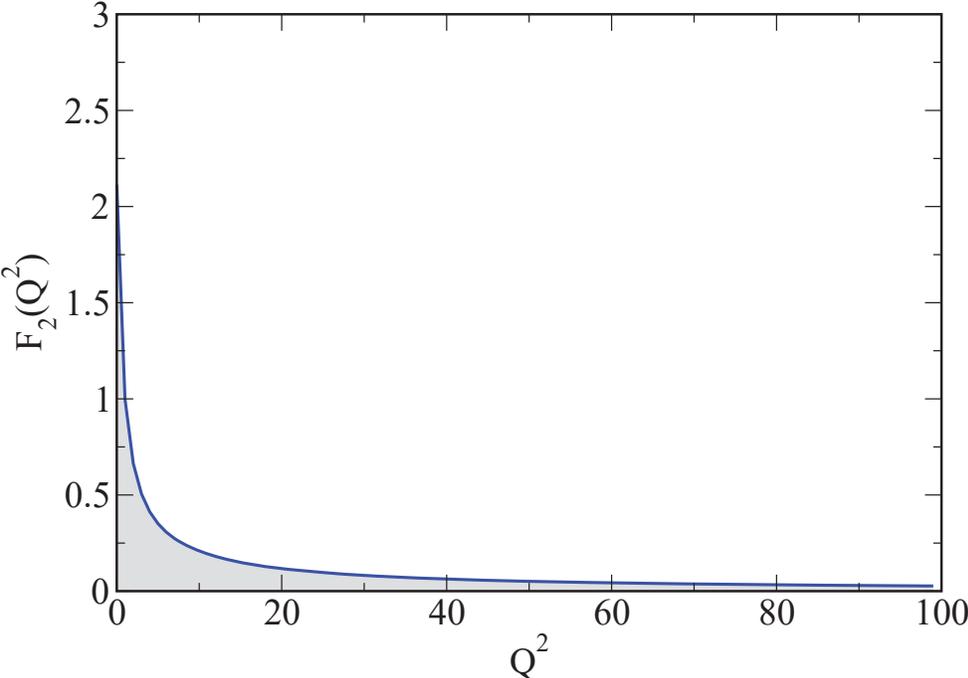
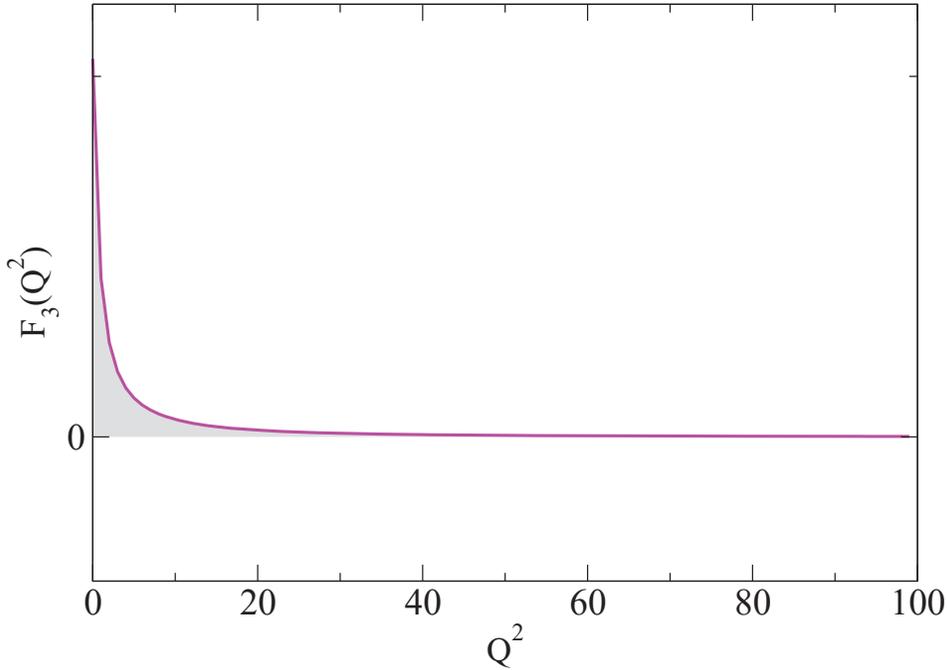


Figura 5.4: Factor de Forma F_2 .

Figura 5.5: Factor de Forma F_3 .

The electric, magnetic and quadrupole form factors are constructed as follows:

$$G_E(Q^2) = F_1(Q^2) + \frac{2}{3}\eta G_Q(Q^2), \quad (5.46)$$

$$G_M(Q^2) = -F_2(Q^2), \quad (5.47)$$

$$G_Q(Q^2) = F_1(Q^2) + F_2(Q^2) + [1 + \eta] F_3(Q^2), \quad (5.48)$$

where $\eta = Q^2/[4m_\rho^2]$. In the limit $Q^2 \rightarrow 0$, these form factors define the charge, and magnetic and quadrupole moments of the ρ -meson; viz.,

$$G_E^\rho(Q^2 = 0) = 1, \quad (5.49)$$

$$G_M^\rho(Q^2 = 0) = \mu_\rho, \quad G_Q^\rho(Q^2 = 0) = Q_\rho. \quad (5.50)$$

It is readily seen that Eq. (5.49) is a symmetry constraint. One has $G_E(Q^2 = 0) = F_1(Q^2 = 0)$ and

$$\Lambda(K, Q) \stackrel{Q^2 \rightarrow 0}{=} 2K_\lambda \mathcal{P}_{\mu\alpha}^T(K) \mathcal{P}_{\alpha\nu}^T(K) F_1(0). \quad (5.51)$$

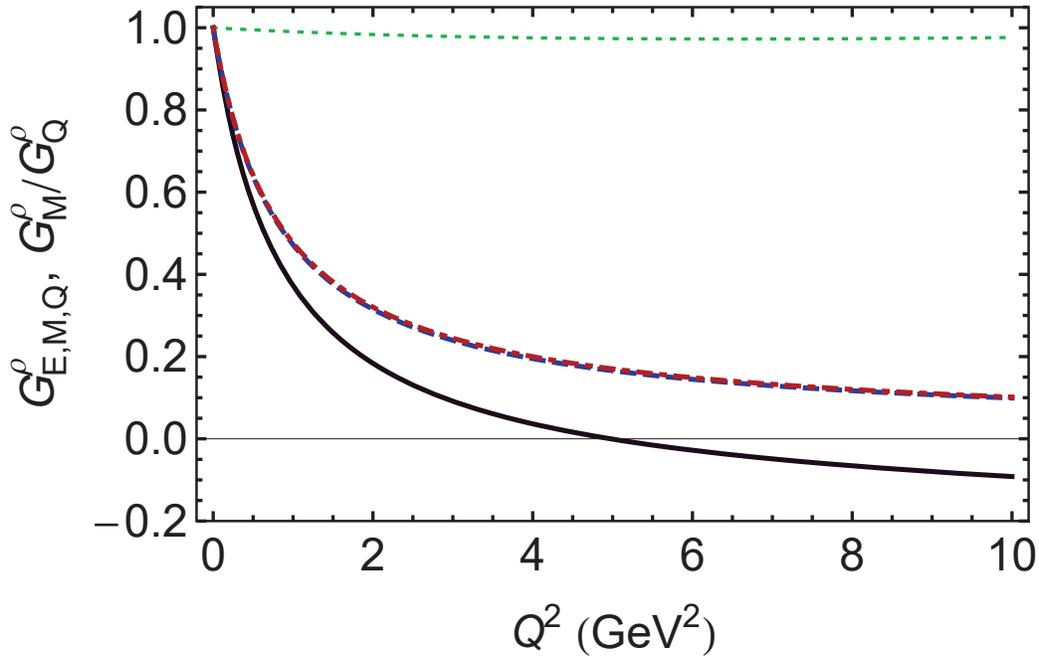


Figura 5.6: *Curva sólida* –factor de forma electromagnético $G_E^\rho(Q^2)$ del ρ -mesón, el cuál muestra un cero en $Q^2 = 5.0 \text{ GeV}^2$ (es notable que $1 - \frac{2}{3}\eta = 0$ para $Q^2 = 6m_\rho^2 = 5.2 \text{ GeV}^2$). La *curva discontinua*, es $G_M^\rho(Q^2)/\mu_\rho$, y *curva discontinua con puntos* es el resultado de $G_Q^\rho(Q^2)/Q_\rho$, finalmente con la curva punteada podemos observar que $[G_M^\rho(Q^2)/\mu_\rho]/[G_Q^\rho(Q^2)/Q_\rho]$ es casi uno

Using Eqs. (??), (5.67), (5.38), this becomes

$$\begin{aligned} & K_\lambda \mathcal{P}_{\mu\nu}^T(K) F_1(0) \\ &= N_c E_\rho^2 \text{tr}_D \int \frac{d^4 q}{(2\pi^4)} i\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial K_\lambda} S(\ell + K) i\gamma_\mu S(\ell). \end{aligned} \quad (5.52)$$

The right-hand-side (rhs) is simply the analogue of Eq. (??) for the rainbow-ladder vector meson. Hence, when E_ρ is normalised according to Eq. (??) and so long as one employs a symmetry-preserving regularisation procedure, the rhs is equal to $K_\lambda \mathcal{P}_{\mu\nu}^T(K)$ and thus $F_1(0) = 1$.

We compute the form factors using the formulae in Sec. ?? . In Table ?? we report form factor radii, and the magnetic and quadrupole moments. The comments following Eq. (??) are also relevant to the magnitudes of the ρ -meson radii. An interpretation of the ratio $r_\pi/r_\rho = 0.80$ determined from the Table is complicated by the fact that we have consistently used the rainbow-ladder truncation; but in this case alone $F_\rho(P) = 0$, whereas $F_\pi(P) \neq 0$

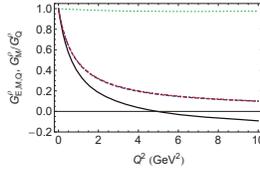


Figura 5.7: (Color online) *Solid curve* – ρ -meson electric form factor, $G_E^\rho(Q^2)$, which exhibits a zero at $Q^2 = 5.0 \text{ GeV}^2$. (It is notable that $1 - \frac{2}{3}\eta = 0$ for $Q^2 = 6m_\rho^2 = 5.2 \text{ GeV}^2$.) The *dashed curve*, $G_M^\rho(Q^2)/\mu_\rho$, and *dot-dashed curve*, $G_Q^\rho(Q^2)/\mathcal{Q}_\rho$, are almost indistinguishable, as emphasised by the *dotted curve*, $[G_M^\rho(Q^2)/\mu_\rho]/[G_Q^\rho(Q^2)/\mathcal{Q}_\rho]$. The charge radii, and magnetic and quadrupole moments are given in Table ???. NB. All form factors exhibit a pole at $Q^2 = -m_\rho^2$ because the quark-photon vertex is dressed as described in Sec. ???.

always and $F_\rho(P) \neq 0$ in all other truncations. We observe therefore that $r_\pi = 0.51 \text{ fm}$ if one artificially sets $F_\pi(P) = 0$, in which case $r_\pi/r_\rho = 0.92$. Moreover, the DSE computation in Ref. [?], which employs a QCD-based interaction, produces $r_\pi/r_\rho = 0.90$; and in combination, the more phenomenological DSE studies of Refs. [?, ?] yield $r_\pi/r_\rho = 0.92$.

Our computed ρ -meson electric form factor is plotted in Fig. 5.7. It displays a zero at $Q^2 = 5.0 \text{ GeV}^2$ and remains negative thereafter. Given that the deuteron is a weakly-bound $J = 1$ system, constituted from two fermions, and its electric form factor possesses a zero [?], it is unsurprising that $G_E^\rho(Q^2)$ exhibits a zero. It is notable in addition that the deuteron's zero is located at $z_Q^D := \sqrt{Q^2} = 0.8 \text{ GeV}$, so that

$$z_Q^D r_D \approx z_Q^\rho r_\rho^E, \quad (5.53)$$

where r_D is the deuteron's radius. An interpolation valid on $Q^2 \in [-m_\rho^2, 10 \text{ GeV}^2]$ is

$$G_E^\rho(Q^2) \stackrel{\text{interpolation}}{=} \frac{1 - 0.20 Q^2}{1 + 1.15 Q^2 - 0.013 Q^4}. \quad (5.54)$$

In Fig. 5.7 we also depict the magnetic and quadrupole form factors of the ρ -meson, both normalised by their values $Q^2 = 0$. Notably, neither of these two form factors change sign: for $Q^2 > -m_\rho^2$, $G_M^\rho(Q^2)$ is positive definite and $G_E^\rho(Q^2)$ is negative definite. Furthermore, over this entire domain of Q^2 , these form factors exhibit a very similar Q^2 -dependence, which is made especially apparent via the dotted-curve in Fig. 5.7. Interpolations valid on

$Q^2 \in [-m_\rho^2, 10 \text{ GeV}^2]$ are

$$G_M^\rho(Q^2) \stackrel{\text{interpolation}}{=} \frac{2.11 + 0.021 Q^2}{1 + 1.15 Q^2 - 0.015 Q^4}, \quad (5.55)$$

$$G_Q^\rho(Q^2) \stackrel{\text{interpolation}}{=} -\frac{0.85 + 0.038 Q^2}{1 + 1.17 Q^2 + 0.014 Q^4}. \quad (5.56)$$

The similar momentum-dependence of G_M^ρ and G_Q^ρ recalls a prediction in Ref. [?]; namely,

$$G_E(Q^2) : G_M(Q^2) : G_Q(Q^2) \stackrel{Q^2 \rightarrow \infty}{=} 1 - \frac{2}{3}\eta : 2 : -1 \quad (5.57)$$

in theories with a vector-vector interaction mediated via bosons propagating as $1/k^2$ at large- k^2 . Our computed ratio $r_{M/Q} := G_M^\rho(Q^2)/G_Q^\rho(Q^2)$ conforms approximately with this prediction on a large domain of Q^2 ; e.g.,

$$\begin{array}{ccccc} Q^2 & 0 & 10 & 10^2 & 10^3 \\ r_{M/Q} & -2.48 & -2.54 & -2.38 & -2.17 \end{array} \quad (5.58)$$

However, at $Q^2 = 10^4 \text{ GeV}^2$, $r_{M/Q} = -1.28$. Moreover, the remaining two ratios are always in conflict with the prediction; and closer inspection reveals that even the apparent agreement for $G_M^\rho(Q^2)/G_Q^\rho(Q^2)$ is accidental, since Eqs. (5.57) are true if, and only if,

$$F_1(Q^2) : F_2(Q^2) : Q^2 F_3(Q^2) \stackrel{Q^2 \rightarrow \infty}{=} 1 : -2 : 0; \quad (5.59)$$

and none of these predictions are satisfied in our computation.

The mismatch originates, of course, with Eq. (??) and the concomitant need for a regularisation procedure in which the ultraviolet cutoff plays a dynamical role. If one carefully removes $\Lambda_{\text{uv}} \rightarrow \infty$, Eqs. (5.59) are recovered but at the cost of a logarithmic divergence in the individual form factors. We conclude therefore that a vector-vector contact interaction cannot reasonably be regularised in a manner consistent with Eq. (5.57).

In closing this subsection we reiterate that it is only in the rainbow-ladder truncation that $F_\rho(P) \equiv 0$. Therefore in connection with the ρ -meson's form factors, material changes should be anticipated when proceeding beyond this leading-order truncation.

5.4. Factor de Forma de Transición $\rho - \pi$

Esta transición esta fuertemente relacionada con la transición $\gamma^* \pi \gamma$, cuyo comportamiento en relación a (2.55) fue analizado en [55]. El vértice de in-

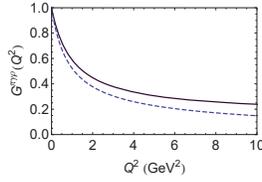


Figura 5.8: (Color online) *Solid curve* – the full result for $G^{\pi\gamma\rho}(Q^2)$; and *dashed curve* – $G^{\pi\gamma\rho}(Q^2)$ obtained with $F_\pi(P) \equiv 0$. Experimentally [58], the partial width for $\rho^+ \rightarrow \pi^+\gamma$ is 68 ± 7 keV, which corresponds to [32] $g_{\pi\gamma\rho} = (0.74 \pm 0.05) m_\rho$. This is in fair agreement with our computed result; viz., $g_{\pi\gamma\rho} = 0.63 m_\rho$.

teracción está expresado en (5.62) y define un solo factor de forma; viz.,

$$T_{\mu\nu}^{\pi\gamma\rho}(k_1, k_2) = \frac{g_{\pi\gamma\rho}}{m_\rho} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} G^{\pi\gamma\rho}(Q^2), \quad (5.60)$$

donde $k_1^2 = Q^2$, $k_2^2 = -m_\rho^2$. La constante de acoplamiento, $g_{\pi\gamma\rho}$, está definida como $G^{\pi\gamma\rho}(Q^2 = 0) = 1$.

La interacción que describe la transición π - ρ es:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\pi\gamma\rho}(k_1, k_2) &= \frac{g_{\pi\gamma\rho}}{m_\rho} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} G^{\pi\gamma\rho}(Q^2) \\ &= \text{tr}_D \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \Gamma_\pi(-P) S(\ell_2) P_T(Q^2) i\gamma_\mu \\ &\quad \times S(\ell_{12}) i\Gamma_\nu^\rho(k_2) S(\ell_1), \end{aligned} \quad (5.61)$$

donde el ρ -mesón tiene momento k_2 , el fotón tiene momento $k_1 = Q$, el pión saliente tiene momento $P = (k_1 + k_2)$; y $\ell_1 = \ell - k_1$, $\ell_2 = \ell + k_2$, $\ell_{12} = \ell - k_1 + k_2$. Con esto tenemos las siguientes condiciones

$$k_1^2 = -m_\rho^2, \quad k_2^2 = Q^2, \quad 2k_1 \cdot k_2 = m_\rho^2 - m_\pi^2 - Q^2. \quad (5.63)$$

Con una dependencia del momento dado por la interacción [56]

$$\Gamma^\pi(P) = i\gamma_5 E_\pi(P) + \frac{1}{M} \gamma_5 \gamma \cdot P F_\pi(P), \quad (5.64)$$

$$\Gamma_\mu^\rho(P) = \gamma_\mu^T E_\rho(P) + \frac{1}{M} \sigma_{\mu\nu} P_\nu F_\rho(P), \quad (5.65)$$

donde $P_\mu \gamma_\mu^T = 0$ y $\gamma_\mu^T + \gamma_\mu^L = \gamma_\mu$. Observamos que

$$F_\rho(P) \stackrel{\text{ladder}}{\equiv} 0. \quad (5.66)$$

Sin embargo, hay que tomar en cuenta que esta es una herramienta de la aproximación arcoiris.

$$P_T(Q^2) = \frac{1}{1 + K_\gamma(Q^2)}, \quad (5.67)$$

con $(\bar{\mathcal{C}}_1(z) = \mathcal{C}_1(z)/z)$

$$K_\gamma(Q^2) = \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \times \int_0^1 d\alpha \alpha(1-\alpha) Q^2 \bar{\mathcal{C}}_1^{iu}(\omega(M^2, \alpha, Q^2)). \quad (5.68)$$

Entonces,

$$P_T(Q^2 = 0) = 1. \quad (5.69)$$

Notemos que a $Q^2 = 0$ en la aproximación arcoiris la interacción en (2.55) el vértice vestido quark-fotón es igual al vértice a nivel árbol.¹

Sin embargo, esto no es cierto para $Q^2 \neq 0$. De hecho, la parte transversa del vértice quark-fotón tiene un polo $Q^2 < 0$ para el cual

$$1 + K_\gamma(Q^2) = 0. \quad (5.70)$$

Esto es justamente el modelo para la ecuación de BS para el estado base del mesón.

En la Figura 5.9 graficamos la función que viste a la parte transversa del vértice. El polo asociado con el estado base del mesón es claro. Otra cosa importante es el comportamiento a momentos grandes Q^2 ; notemos, $P_T(Q^2) \rightarrow 1^-$ y $Q^2 \rightarrow \infty$. Dada la estructura de la amplitud de BS, podemos escribir

$$G^{\pi\gamma\rho}(Q^2) = G_E^{\pi\gamma\rho}(Q^2) + G_F^{\pi\gamma\rho}(Q^2), \quad (5.71)$$

donde

$$G_E^{\pi\gamma\rho}(Q^2) = \frac{E_\pi \mathcal{E}_\rho \mathcal{M}}{2\pi^2 \omega_3^2} \int_0^1 d\alpha d\beta \alpha \int_0^\infty dl \frac{l\omega_3^2}{(l + \omega_3)^2} \quad (5.72)$$

$$\hat{G}_F^{\pi\gamma\rho}(Q^2) = -\frac{F_\pi \mathcal{E}_\rho}{4\pi^2} \frac{1}{M} \int_0^1 d\alpha d\beta \alpha \left[f_1^{\pi\gamma\rho} \int_0^1 \frac{dl l^2}{(l + \omega_3)^3} + f_0^{\pi\gamma\rho} \int_0^\infty dl \frac{l}{(l + \omega_3)^3} \right],$$

¹La ecuación (5.69) garantiza un fotón sin masa y muestra que nuestra regularización también asegura la identidad de WT [57].

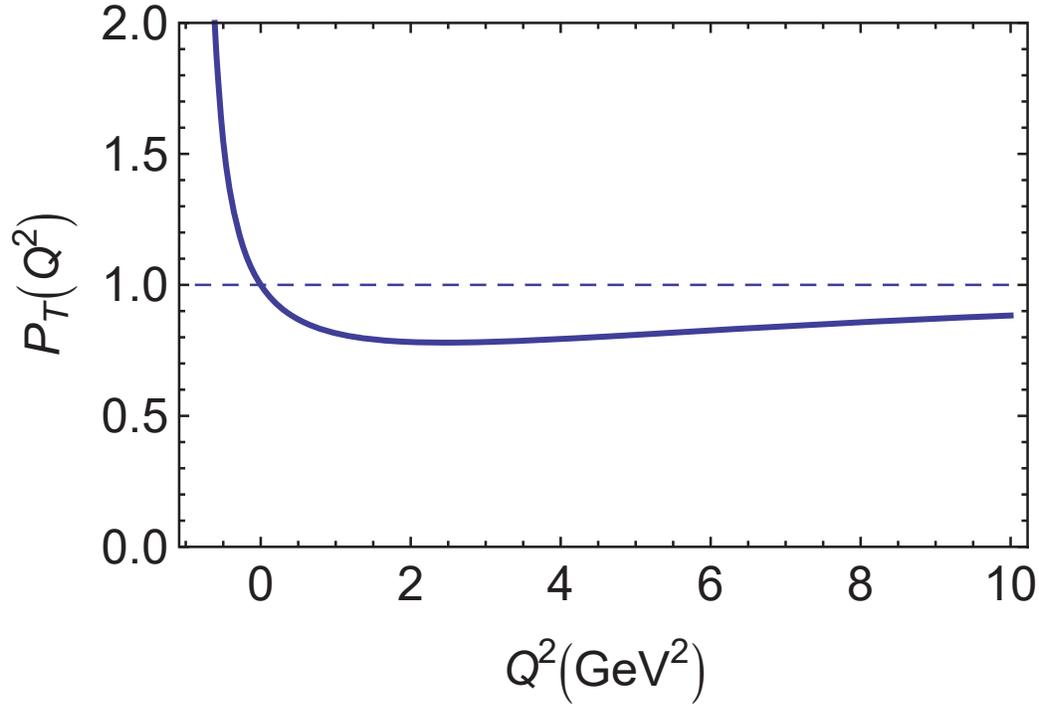


Figura 5.9: Función para la parte transversa del vértice quark-fotón $P_T(Q^2)$ en (5.67).

$$G_E^{\pi\gamma\rho}(Q^2) = \frac{E_\pi \mathcal{E}_\rho}{2\pi^2} M \int_0^1 d\alpha d\beta \alpha \bar{\mathcal{C}}_2^{\text{ir}}(\omega_3), \quad (5.73)$$

$$\begin{aligned} \hat{G}_F^{\pi\gamma\rho}(Q^2) &= -\frac{F_\pi \mathcal{E}_\rho}{4\pi^2} \frac{1}{M} \int_0^1 d\alpha d\beta \alpha [f_1^{\pi\gamma\rho} \bar{\mathcal{C}}_1^{\text{ir}}(\omega_3) \\ &\quad + (f_0^{\pi\gamma\rho} - \omega_3 f_1^{\pi\gamma\rho}) \bar{\mathcal{C}}_2^{\text{ir}}(\omega_3)], \end{aligned} \quad (5.74)$$

con

$$\begin{aligned} \omega_3 &:= \omega_3(M^2, \alpha, \beta, m_\rho^2, m_\pi^2, Q^2) \\ &= M^2 - \alpha [\alpha\beta(1-\beta)m_\pi^2 + (1-\alpha)(1-\beta)m_\rho^2 \\ &\quad - (1-\alpha)\beta Q^2] \end{aligned} \quad (5.75)$$

y

$$f_1^{\pi\gamma\rho} = 2 - 3\alpha, \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned} f_0^{\pi\gamma\rho} &= (2-\alpha)(M^2 + \alpha^2\beta(1-\beta)m_\pi^2) \\ &\quad + (1-\alpha)^2(\alpha(1-\beta)m_\rho^2 - \alpha\beta Q^2). \end{aligned} \quad (5.77)$$

$$\begin{aligned} \int_q^\Lambda &= \frac{1}{4} \int_0^\infty ds s, \\ \int_0^\infty ds \frac{s}{s+M^2} &\rightarrow \mathcal{C}(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2), \\ \frac{M^2}{(s+M^2)^2} &= -M^2 \frac{d}{dM^2} \frac{1}{s+M^2}. \end{aligned}$$

Entonces, podemos concluir que

$$\mathcal{C}_1(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2) \equiv -M^2 \frac{d}{dM^2} \mathcal{C}(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2) = \int_0^\infty ds \frac{s M^2}{(s+M^2)^2} \quad (5.78)$$

$$\mathcal{C}_2(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2) = \int_0^\infty ds \frac{s M^4}{(s+M^2)^3}. \quad (5.79)$$

$$\int_0^\infty ds \frac{s^2}{(s+M^2)^3} = \frac{1}{M^2} [\mathcal{C}_1(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2) - \mathcal{C}_2(M; r_{IR}^2, r_{UV}^2)]. \quad (5.80)$$

El vértice en (5.62) está íntimamente conectada co la anomalía abeliana, la cual describe el proceso $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ y los factores de forma asociados con la transición.

Nuestro cálculo es graficado en la Figura 5.10. Naturalmente como el vértice quark-fotón está vestido, el factor de forma de la transición exhibe un polo para $Q^2 = -m_\rho^2$. Una interpolación en: $Q^2 \in [-m_\rho^2, 10 \text{ GeV}^2]$ es

$$G^{\pi\gamma\rho}(Q^2) \stackrel{\text{interpolation}}{=} \frac{1 + 0.37 Q^2 + 0.024 Q^4}{1 + 1.29 Q^2 + 0.015 Q^4}. \quad (5.81)$$

En la vecindad de $Q^2 = 0$, los factores de forma son caracterizados por un radio,

$$r_{\pi\gamma\rho}^2 := -6 \frac{d}{dQ^2} G^{\pi\gamma\rho}(Q^2) \Big|_{Q^2=0} = (0.46 \text{ fm})^2. \quad (5.82)$$

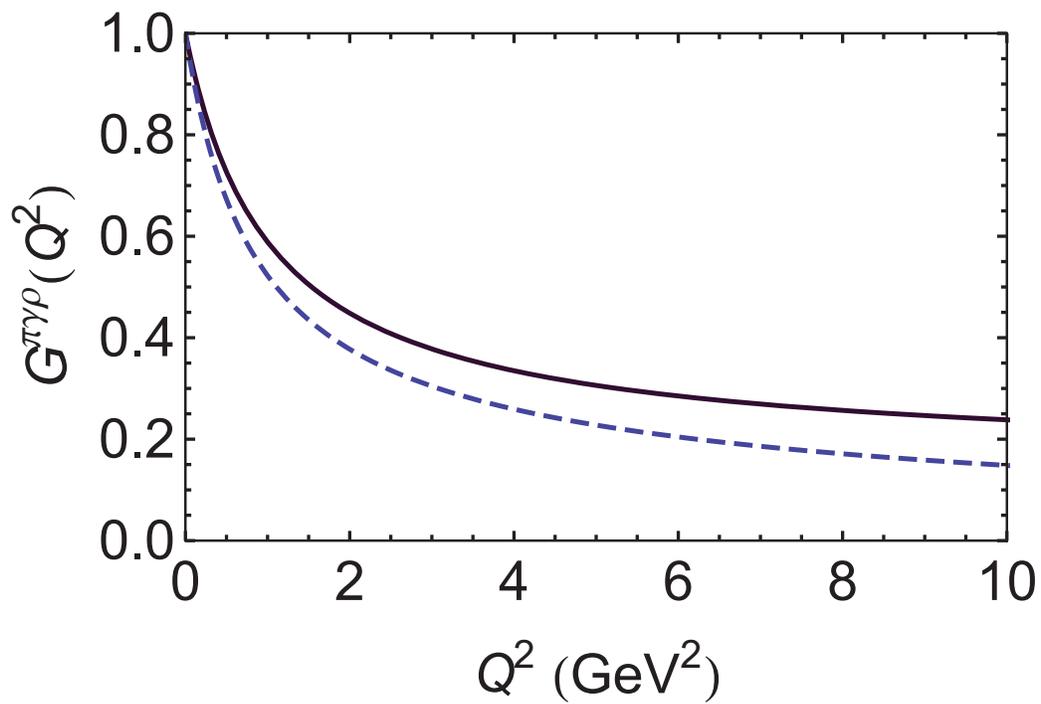


Figura 5.10: *Curva sólida* – el resultado completo para $G^{\pi\gamma\rho}(Q^2)$; y *línea punteada* – $G^{\pi\gamma\rho}(Q^2)$ obtenida con $F_\pi(P) \equiv 0$. Experimentalmente [58].

Capítulo 6

Los Diquarks y sus Factores de Forma

6.1. Introducción

El problema de los estados ligados en física ha sido un tema bastante estudiado debido a que se presentan a todas las escalas, desde galaxias hasta partículas elementales. A nivel atómico y molecular, la ecuación de Schrodinger no relativista da una explicación satisfactoria de tales sistemas si se excluyen los efectos de estructura que pueden ser estudiados con técnicas perturbativas. Sin embargo, no se puede decir lo mismo de los sistemas que interaccionan fuertemente, ya que a esta escala de energía los efectos no representables por medio de una teoría de potencial (no relativista) son muy grandes y no pueden ser tratados perturbativamente. En otras palabras se hace necesario traer al escenario La Teoría Cuántica de Campos la cual ofrece una descripción cuántica y relativista de estos sistemas. En el estudio de la espectroscopia bariónica es muy llamativo pensar en un diquark como una partícula fuertemente ligada, dado que se disminuye la complejidad en los cálculos, pasando de un problema de tres cuerpos a dos. En la estructura de quark-diquark han sido desarrollados recientemente algunos modelos con buenos resultados.

La posibilidad de los diquarks fue mencionada por Gell-Mann en su artículo original sobre quarks. Más tarde, Ida, Kobayashi(1966) Lichtenberg y Tessie (1967) introdujeron la idea de los diquarks con el fin de describir los bariones como un estado compuesto de dos partículas: un quark y un diquark. Es muy simple pensar en los diquarks como partículas puntuales con los números cuánticos de dos quarks. Más generalmente, un diquark es cualquier sistema de 2 quarks considerados juntos. Un diquark en su estado

base tiene paridad positiva y puede ser un vector axial (espín 1) o un escalar (espín cero). Un diquark axial vectorial a veces es llamado un diquark vectorial sólo por simplicidad. QCD nos lleva a ver al barión formado por tres quarks de valencia, más un mar de gluones y pares quark-antiquark. Sin embargo, resulta que es una buena aproximación para el cálculo de las propiedades estáticas de un barión, tratarlo como un estado ligado de sólo tres quarks constituyentes de valencia o de un quark constituyente y diquark. La idea de un quark y un diquark es una buena aproximación para los procesos de transferencia de momento pequeño o intermedio. Cuanto más pesado es cualquiera de los dos quarks es más pequeña su separación. Con esta nueva aproximación se tendrán los bariones compuestos de quark-diquark, lo que tiene obvias ventajas a nivel analítico ya que reduce el problema de tres cuerpos a dos. A nivel fenomenológico, la existencia del diquark puede ser argumentada debido a que el modelo de tres quarks reproduce algunos estados que aún no han podido ser observados experimentalmente, mientras que en el modelo quark-diquark estos estados no aparecen. Aunque la idea de diquark parece muy llamativa para la espectroscopia bariónica, a nivel fundamental el diquark no ha podido ser entendido completamente y su conexión con la QCD es aun un tema de constante investigación. Podemos representar a los diquarks de la siguiente manera:

Diquarks

| | |
|-------|----------------|
| 0^+ | Escalar |
| 1^+ | Vector Axial |
| 0^- | Pseudo escalar |
| 1^- | Vector |

Los diquarks 0^- y 1^- tienen paridad opuesta a la de un nucleón. Aunque ellos potencialmente pueden contribuir a la amplitud de Faddeev de un nucleón, en la práctica no es así. El tercer quark tiene que tener un momento angular orbital " l " no cero para obtener la paridad correcta del nucleón. Por lo tanto no contribuyen de manera significativa en determinar la estructura del mismo. Estos diquarks son mucho más pesados que el 0^+ y 1^+ . Por lo tanto, se puede despreciar su contribución a la amplitud de Faddeev de un nucleón. Hay que recordar que los diquarks tienen carga de color como los quarks. Por lo tanto están confinados y solo se pueden ver como constituyentes de los bariones. Esta discusión nos motiva a estudiar a los diquarks 0^+ y 1^+ los cuales son pareja de paridad de los mesones π y ρ .

6.2. Los Diquarks 0^+ y 1^+ y su Amplitud de Bethe-Salpeter

La amplitud de Bethe-Salpeter para los diquarks es muy similar a la de un pión con la diferencia de un factor de 2. [59],

$$\begin{aligned} \Gamma_{qq}(k; P)H^c &= - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}(p-q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q+P) \Gamma_{qq}(q; P) H^c [S(-q)]^T \\ &\times \left[\frac{\lambda^a}{2} \right]^T [\gamma_\nu]^T, \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde $c = 1, 2, 3$ es la etiqueta para el color y $\{H^c\}$ son definidas en términos de las matrices antisimétricas de Gell-Mann como:

$$\{H^1 = i\lambda^7, H^2 = -i\lambda^5, H^3 = i\lambda^2\}. \quad (6.2)$$

Usando las propiedades de las matrices de Dirac es sencillo mostrar que:

$$\Gamma_{qq}(k; P)C^\dagger = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}(p-q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q+P) \Gamma_{qq}(q; P) C^\dagger S(q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu. \quad (6.3)$$

ahora podemos escribir la ecuación Bethe-Salpeter para un diquark $J^P = 0^+$ como

$$\Gamma_{qq_0^+}^C(P) = -\frac{2}{3} \frac{1}{m_G^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S(q+P) \Gamma_{qq_0^+}^C(P) S(q) \gamma_\mu, \quad (6.4)$$

donde

$$\Gamma_{qq_0^+}^C(P) = \Gamma_{qq_0^+}(P)C^\dagger = \gamma_5 \left[iE_{qq_0^+}(P) + \frac{1}{M} \gamma \cdot P F_{qq_0^+}(P) \right] \quad (6.5)$$

Entonces, (6.4) es:

$$\begin{bmatrix} E_{qq_0^+}(P) \\ F_{qq_0^+}(P) \end{bmatrix} = \frac{1}{6\pi^2 m_G^2} \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{EE}^\pi & \mathcal{K}_{EF}^\pi \\ \mathcal{K}_{FE}^\pi & \mathcal{K}_{FF}^\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{qq_0^+}(P) \\ F_{qq_0^+}(P) \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

La ec. (6.6) es un problema de eigenvalores. Usando los mismos parámetros que antes podemos calcular la masa y los elementos que constituyen la amplitud de BS de los diquarks

De la Tabla 6.1 es fácil notar que la masa del diquark 0^+ es mucho mas grande que la masa del pión.

$$\Gamma_{qq}^c(k; P) = \Gamma_{qq}(k; P)C^\dagger H^c. \quad (6.7)$$

Tabla 6.1: Cantidades calculadas con $\alpha_{\text{IR}}/\pi = 0.93$ y (en GeV) $m = 0.007$, $\Lambda_{\text{ir}} = 0.24$, $\Lambda_{\text{uv}} = 0.905$. (Todas las cantidades son listadas en GeV.)

| M | m_{qq0^+} | m_{qq1^+} | E_{qq0^+} | F_{qq0^+} | E_{qq1^+} | $Md_{\mathcal{F}}^{1/2}$ |
|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------------------|
| 0.368 | 0.776 | 1.056 | 4.354 | 0.499 | 1.3029 | 0.880 |

Ahora la ecuación es

$$\Gamma_{qq}(k; P) = -\frac{2}{3m_G^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \chi_{qq}(q; P) \gamma_\mu. \quad (6.8)$$

Aqui, podemos obtener la masa y la amplitud para un diquark con J^P de la ecuación de un mesón J^{-P} . El unico cambio en el signo de la paridad ocurre por que los fermiones y antifermiones tienen paridad opuesta. Las correlaciones escalares y axial-vector son dominantes en los estudios del nucleon. Con nuestro esquema de aproximación son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{qq0^+}(P) &= i\gamma_5 E_{qq0^+}(P) + \frac{1}{M} \gamma_5 \gamma \cdot P F_{qq0^+}(P) \\ \Gamma_{qq1^+\mu}(P) &= \gamma_\mu^T E_{qq1^+}(P) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Estas cantidades son renormalizadas canónicamente:

$$P_\mu = 2\text{tr} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Gamma_{qq}^{0^+}(-P) \frac{\partial}{\partial P_\mu} S(q+P) \Gamma_{qq}^{0^+}(P) S(q); \quad (6.10)$$

y

$$P_\mu = \frac{2}{3} \text{tr} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Gamma_{qq\alpha}^{1^+}(-P) \frac{\partial}{\partial P_\mu} S(q+P) \Gamma_{qq\alpha}^{1^+}(P) S(q). \quad (6.11)$$

6.3. Los Factores de Forma de los diquarks

Usando la información [60] vemos que para el factor de forma del diquark en una truncación arcoiris es:

$$F_{0^+}^{\text{em}}(Q^2) = \frac{1}{3} F_\pi^{\text{em}}(Q^2) \Big|_{m_\pi \rightarrow m_{qq0^+}}^{(E_\pi, F_\pi) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}}(E_{qq0^+}, F_{qq0^+})}, \quad (6.12)$$

Nuestro resultado para el factor de forma electromagnético del diquark es presentado en la Fig. ?? . Una interpolación válida en $Q^2 \in [-m_\rho^2, 10 \text{ GeV}^2]$ es

$$F_{0^+}^{\text{em}}(Q^2) \stackrel{\text{interpolation}}{=} \frac{1}{3} \frac{1 + 0.25 Q^2 + 0.027 Q^4}{1 + 1.27 Q^2 + 0.13 Q^4}. \quad (6.13)$$

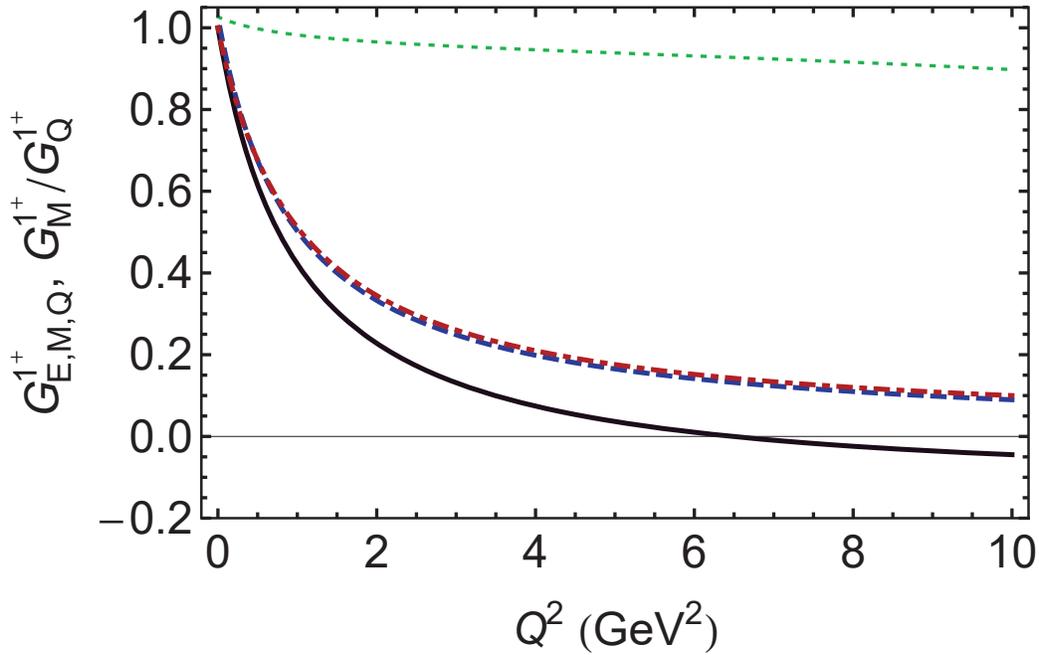


Figura 6.1: *Curva sólida* – Factor de forma pseudovectorial del diquark $G_E^{1+}(Q^2)$, el cual muestra un cero en $Q^2 = 6.5 \text{ GeV}^2$ (En este caso $1 - \frac{2}{3}\eta = 0$ por $Q^2 = 6m_{1+}^2 = 6.7 \text{ GeV}^2$, que nos da la masa 1.06 GeV). La *curva discontinua*, $G_M^{1+}(Q^2)/\mu_{1+}$, y *curva discontinua con puntos*, $G_Q^{1+}(Q^2)/Q_{1+}$, *curva punteada*, muestra que $[G_M^{1+}(Q^2)/\mu_{1+}]/[G_Q^{1+}(Q^2)/Q_{1+}]$ es casi uno. Todos los factores de forma exhiben un polo en $Q^2 = -m_\rho^2$ por que el vértice quark-fotón está vestido.

La normalización es diferente pero la dependencia del momento es similar a la de F_π^{em} . Esto está indicado también, por el radio $r_{0+}/r_\pi = 1.08$, el cual puede ser comparado con el radio 1.09 obtenido en [61] y contrasta con el valor de 0.8 en [62]. En la ausencia de la componente, $F_{qq_0+} \equiv 0$, encontramos $r_{0+} = 0.51 \text{ fm}$; i.e., un incremento del 6% .

6.3.1. Factores de Forma de un Diquark Pseudovectorial

De las observaciones de arriba se puede ver que en la aproximación arcoiris los resultados del factor de forma del diquark axial-vector pueden ser obtenida directamente usando el ρ -meson através de las sustituciones

$$F_{\{ud\},j}^{\text{em}}(Q^2) = \frac{1}{3} F_j(Q^2) \Big|_{m_\pi \rightarrow m_{qq_1+}}^{E_\rho \rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} E_{qq_1+}}. \quad (6.14)$$

La dependencia del momento de los factores de forma para las correlaciones $\{uu\}$ y $\{dd\}$ es idéntico pero en estos casos la normalización es de $\frac{4}{3}$ y $-\frac{2}{3}$, respectivamente.

Para el factor de forma del diquark vector-axial mostramos los resultados en la Figura 6.1. Estos son similares pero no son indistinguibles de los del ρ -mesón, cayendo un poco menos rápido debido a la gran masa del diquark vector axial. Las interpolaciones válidas en $Q^2 \in [-m_\rho^2, 10 \text{ GeV}^2]$ son

$$G_E^{1^+}(Q^2) \stackrel{\text{interpolacion}}{=} \frac{1 - 0.16 Q^2}{1 + 1.17 Q^2 + 0.012 Q^4}, \quad (6.15)$$

$$G_M^{1^+}(Q^2) \stackrel{\text{interpolacion}}{=} \frac{2.13 - 0.19 Q^2}{1 + 1.07 Q^2 - 0.10 Q^4}, \quad (6.16)$$

$$G_Q^{1^+}(Q^2) \stackrel{\text{interpolacion}}{=} -\frac{0.81 - 0.029 Q^2}{1 + 1.11 Q^2 - 0.054 Q^4}. \quad (6.17)$$

6.3.2. Factores de Forma de Transición para los Diquarks 1^+ y 0^+

Debido a la estructura de sabor del diquark escalar, este factor de transición sólo puede implicar el diquark axial vector $\{ud\}$. Esto está descrito por un sólo factor de forma, el cual puede ser introducido através de:

$$T_{\mu\nu}^{0^+\gamma 1^+}(k_1, k_2) = \frac{1}{3} \frac{g_{0^+\gamma 1^+}}{m_{qq_{1^+}}} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} G^{0^+\gamma 1^+}(Q^2), \quad (6.18)$$

y uno puede fácilmente determinar que el truncamiento arcoiris

$$\begin{aligned} & G^{0^+\gamma 1^+}(Q^2) \\ &= G^{\pi\gamma\rho}(Q^2) \Big|_{m_\pi \rightarrow m_{qq_{0^+}}, m_\rho \rightarrow m_{qq_{1^+}}}^{(E_\pi, F_\pi, E_\rho) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}}(E_{qq_{0^+}}, F_{qq_{0^+}}, E_{qq_{1^+}})} \end{aligned} \quad (6.19)$$

El cálculo del factor de forma es sencillo y los resultados se muestran en la Figura 6.2. Una interpolación válida en $Q^2 \in [-m_\rho^2, 10 \text{ GeV}^2]$ es

$$G^{0^+\gamma 1^+}(Q^2) \stackrel{\text{interpolacion}}{=} \frac{1 + 0.10 Q^2}{1 + 1.073 Q^2}. \quad (6.20)$$

El radio de transición asociado es

$$r_{0^+\gamma 1^+} = 0.48 \text{ fm}, \quad (6.21)$$

el cual es 5% mas grande que $r_{\pi\gamma\rho}$ en Ec. (5.82), y

$$\lim_{Q^2 \rightarrow \infty} G^{0^+\gamma 1^+}(Q^2) = 0.049, \quad (6.22)$$

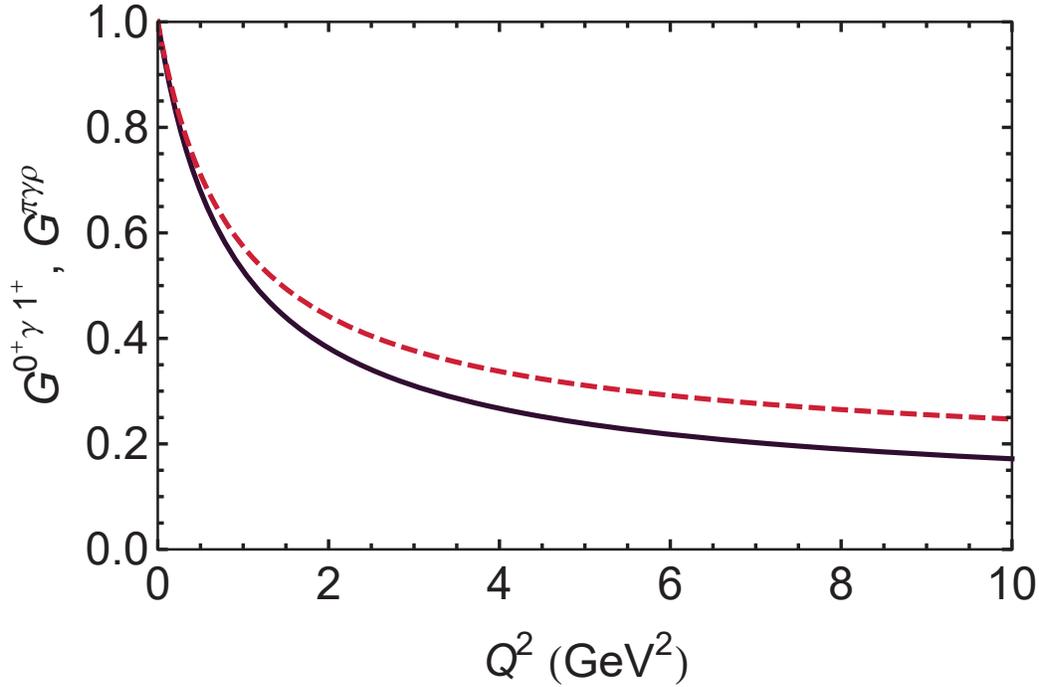


Figura 6.2: *Curva sólida* – factor de forma de transición del diquark axial-vector-escalar $G^{0^+\gamma 1^+}(Q^2)$; y *curva discontinua* – resultado para $G^{\pi\gamma\rho}(Q^2)$ en Figura 5.10. Notemos que $e_{\{ud\}}g_{0^+\gamma 1^+}m_{qq_{1^+}} = e_{\{ud\}}0.74 = 0.25$.

un poco menos de la mitad del valor en Ec. (??).

Hemos descrito una ecuación de SD para estudiar las propiedades estáticas y electromagnéticas de los mesones pseudoescalares y vectoriales, y los diquarks axial-vector basados en una interacción de contacto vector-vector. La simetría del isospín se asume con $m_u = m_d = m = 7 \text{ MeV}$ produciendo una masa física del pión. Una motivación básica para nuestro estudio es la necesidad de documentar una comparación entre los factores de forma electromagnéticos de los mesones y los diquarks que juegan un papel muy importante en la estructura del nucleón que es un paso muy importante para una descripción unificada de los factores de forma de los mesones y bariones basados en una sola interacción. Una característica importante de nuestros resultados es el alto grado de similitud entre los factores de forma relacionados. Por ejemplo, encontramos que podríamos tener una aproximación muy práctica al asumir la igualdad de los radios $r_{0^+} \approx r_\pi$ y $r_{1^+} \approx r_\rho$. Como ya se ha observado, un tratamiento totalmente consistente de la interacción de contacto produce un factor de forma electromagnético para el pión que se acerca a un valor constante distinto de cero en el espacio de grande mo-

mentos. Por otro lado, debido a una peculiaridad del truncamiento arcoiris, que previene la aparición de un elemento tensorial del ρ -mesón producido por una interacción de contacto, el factor de forma del ρ -mesón se aproxima a cero para grandes momentos. La simplicidad de la interacción de contacto nos permite calcular el factor de forma del ρ -meson a momentos muy grandes Q^2 y expone un cero en el factor de forma electrico en $z_Q^2 \approx 6m_\rho^2$. Notablemente, $r_D z_Q^D \approx r_\rho^E z_Q^\rho$, donde r_D y z_Q^D son el radio del deuteron y la localizacion del cero de este factor de forma electrico. Los Factores de forma magnéticos y cuadrupolares del ρ -mesón son positivos y negativos definidos respectivamente. Reiteramos que el comportamiento de todos los diquarks pseudovectoriales es semicuantitativamente el mismo.

Capítulo 7

Conclusiones

En esta tesis hemos examinado varias partículas, pero el problema esencial ha sido el cálculo de los factores de forma usando interacción de contacto y hemos llegado a las siguientes conclusiones:

- Calculamos el factor de forma electromagnético para el pión, mostrando el comportamiento de cada uno de sus componentes vectorial, pseudovectorial y componentes cruzadas, y normalizamos la suma de éstas a 1. Pudimos observar la dependencia del factor de forma con respecto a la componente pseudo-vectorial, la inclusión de esta componente en el factor de forma cambia la amplitud para Q^2 grande de $1/Q^2$ a una constante. Nuestros resultados comparados con los datos experimentales y las curvas obtenidas usando las ecuaciones SD, reflejan la incapacidad del modelo de interacción de contacto para predecir los resultados para grandes Q^2 .
- Para poder preservar las identidades de WT teníamos que usar un vértice vestido para este fin se introdujo la función $P_T(Q^2)$, que tiene la propiedad de que para $Q^2 = 0$ es el vértice desnudo. Como la función $P_T(Q^2)$ tiene un polo, este se ve reflejado en los factores de forma que usa éste vértice vestido.
- Calculamos la anomalía abeliana para poder usarla en el cálculo del factor de transición que fue de gran utilidad para después calcular los factores de transición de $\rho - \pi$ y de los diquarks $\mathbf{1}^+ - \mathbf{0}^+$.
- Calculamos los tres factores de forma de rho mesón y pudimos observar que los tres tienen un comportamiento asintótico como se había predicho, además se comparo con los resultados existentes.

- Una motivación básica para nuestro estudio es la necesidad de documentar una comparación entre los factores de forma electromagnéticos de los mesones y los diquarks. Los diquarks juegan un papel muy importante en la estructura del nucleón, que es un paso muy importante para una descripción unificada de los factores de forma de los mesones y bariones basados en una sola interacción. Una característica importante de nuestros resultados es el alto grado de similitud entre los factores de forma relacionados. Por ejemplo, encontramos que podríamos tener una aproximación muy práctica al asumir la igualdad de los radios $r_{0^+} \approx r_\pi$ y $r_{1^+} \approx r_\rho$.

Bibliografía

- [1] M. Gell-Mann, Phys. Rev. 125 (1962)
- [2] D.J. Gross, Rev. Mod. Phys. **77** 837 (2005); H.D. Politzer, Rev. Mod. Phys. **77** 851 (2005); F. Wilczek, Rev. Mod. Phys. **77** (2005).
- [3] U. Vogl y W. Weise, Prog. Part. Nucl. Phys. 27, 195 (1991).
- [4] S. Klevansky, Rev. Mod. Phys. 64, 649 (1992).
- [5] F.J. Dyson, Phys. Rev. **75** 1736 (1949).
- [6] J.S. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sc. **37** 452 (1951).
- [7] P. Maris and C.D. Roberts, Int. J.Mod. Phys. E12 297(2003).
- [8] C.D. Roberts and S.M. Schmidt, Prog.Part.Nucl.Phys. 45, S1 (2000).
- [9] M.R. Frank and C.D Roberts, Phys.Rev. **C 53**, 390(1996)
- [10] C.H. Llewellyn-Smith, Ann. Phys (NY)**53**, 521(1969)
- [11] Y. Nambu y G. Jona-Lasino, Phys.Rev. **122**, 345(1961);Phys.Rev. **124**,246 (1961)
- [12] B. Aubert *et al.*, Phys. Rev. D **80**, 052002 (2009).
- [13] H. J. Behrend *et al.*, Z. Phys. C **49**, 401 (1991).
- [14] J. Gronberg *et al.*, Phys. Rev. D **57**, 33 (1998).
- [15] C. D. Roberts and A. G. Williams, Prog. Part. Nucl. Phys. **33**, 477 (1994).
- [16] C. D. Roberts and S. M. Schmidt, Prog. Part. Nucl. Phys. **45**, S1 (2000).
- [17] P. Maris and C. D. Roberts, Int. J. Mod. Phys. E **12**, 297 (2003).

- [18] C. S. Fischer, J. Phys. G **32**, R253 (2006).
- [19] J. Rodríguez-Quintero, “On the massive gluon propagator, the PT-BFM scheme and the low-momentum behaviour of decoupling and scaling DSE solutions,” arXiv:1005.4598 [hep-ph].
- [20] C. D. Roberts, M. S. Bhagwat, A. Höll and S. V. Wright, Eur. Phys. J. ST **140**, 53 (2007).
- [21] C. D. Roberts, R. T. Cahill and J. Praschifka, Annals Phys. **188**, 20 (1988).
- [22] M. Bando, M. Harada and T. Kugo, Prog. Theor. Phys. **91**, 927 (1994).
- [23] C. D. Roberts, Nucl. Phys. A **605**, 475 (1996).
- [24] R. Alkofer and C. D. Roberts, Phys. Lett. B **369**, 101 (1996).
- [25] P. Maris and C. D. Roberts, Phys. Rev. C **58**, 3659 (1998).
- [26] B. Bistrovic and D. Klabučar, Phys. Lett. B **478**, 127 (2000).
- [27] A. Höll *et al.*, Phys. Rev. C **71**, 065204 (2005).
- [28] M. S. Bhagwat *et al.*, Phys. Rev. C **76**, 045203 (2007).
- [29] D. Kekez and D. Klabučar, Phys. Lett. B **457**, 359 (1999).
- [30] C. D. Roberts, Fizika B **8**, 285 (1999).
- [31] E. Witten, Nucl. Phys. B **223**, 422 (1983).
- [32] P. Maris and P. C. Tandy, Phys. Rev. C **65**, 045211 (2002).
- [33] L. X. Gutiérrez-Guerrero, A. Bashir, I. C. Cloët and C. D. Roberts, Phys. Rev. C **81**, 065202 (2010).
- [34] R. J. Holt and C. D. Roberts, Rev. Mod. Phys. **82**, 2991 (2010).
- [35] S. V. Mikhailov and N. G. Stefanis, Mod. Phys. Lett. **A24**, 2858 (2009).
- [36] BABAR, B. Aubert *et al.*, Phys. Rev. **D74**, 012002 (2006).
- [37] H.J. Behrend *et al.* (CELLO Collaboration), Z. Phys. C. **49**, 401 (1991).
- [38] J. Gronberg *et al.* (CLEO Collaboration), Phys. Rev. D **57**, 33 (1998).

- [39] G.P. Lepage and S.J. Brodsky, Phys. Rev. D **22**, 2157 (1980).
- [40] S.S. Agaev, V.M. Braun, N. Offen, and F.A. Porkert, Phys. Rev. D **83**, 054020 (2011);
- [41] T.N. Pham and X.Y. Pham, Int. J. Mod. Phys. A **26**, 4125 (2011).
- [42] S.V. Mikhailov and N.G. Stefanis, Mod. Phys. Lett. A **24**, 2858 (2009).
- [43] H.L.L. Roberts, C.D. Roberts, A. Bashir, L.X. Gutiérrez-Guerrero and P.C. Tandy, Phys. Rev. C **82**, 065202 (2010).
- [44] Belle Collaboration, S. Uehara *et al.*, arXiv:1205.3249 [hep-ex].
- [45] S.J. Brodsky, F.-G. Cao and G.F. de Téra mond, Phys. Rev. D **84**, 033001 (2011); Phys. Rev. D **84**, 075012 (2011);
- [46] R. Jackiw, “Field Theoretic Investigation Current Algebra,” in *Current Algebra and Anomalies* (World Scientific, Singapore, 1985) pp. 108–141.
- [47] H. L. L. Roberts, C. D. Roberts, A. Bashir, L. X. Gutierrez-Guerrero and P. C. Tandy, “Abelian anomaly and neutral pion production,” Phys. Rev. C **82** (2010) 065202 [10 pages].
- [48] K. D. Lane, Phys. Rev. D **10**, 2605 (1974).
- [49] H. D. Politzer, Nucl. Phys. B **117**, 397 (1976).
- [50] M. S. Bhagwat, M. A. Pichowsky, C. D. Roberts and P. C. Tandy, Phys. Rev. C **68**, 015203 (2003).
- [51] M. S. Bhagwat and P. C. Tandy, AIP Conf. Proc. **842**, 225 (2006).
- [52] P. O. Bowman *et al.*, Phys. Rev. D **71**, 054507 (2005).
- [53] A. V. Radyushkin, Phys. Rev. D **80**, 094009 (2009).
- [54] M. V. Polyakov, JETP Lett. **90**, 228 (2009).
- [55] H. L. L. Roberts *et al.*, Phys. Rev. C **82**, 065202 (2010).
- [56] C. H. Llewellyn-Smith, Annals Phys. **53**, 521 (1969).
- [57] C. J. Burden, J. Praschifka and C. D. Roberts, Phys. Rev. D **46**, 2695 (1992).
- [58] K. Ōnakamura *et al.* J. Phys. G **37**, 075021 (2010).

- [59] R. T. Cahill, C. D. Roberts and J. Praschifka, Phys. Rev. D **36**, 2804 (1987).
- [60] H. L. L. Roberts, L. Chang, I. C. Cloët and C. D. Roberts “Masses of ground and excited-state hadrons,” arXiv:1101.4244 [nucl-th], Few Body Syst. *in press*.
- [61] P. Maris, Few Body Syst. **35**, 117 (2004).
- [62] J. C. R. Bloch *et al.*, Phys. Rev. C **60**, 062201 (1999).