



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas

**“Estudio de Oscilaciones en Sistemas Eléctricos de  
Potencia”**

TESIS

que para obtener el grado de:

**Doctor en Ciencias en el área de Física**

presenta:

**Maestra en Ciencias en el Área de  
Física Sarai Mendoza Armenta**

Asesor:

Doctor en Física Ricardo Becerril Bárcenas

Coasesor:

Docto en Ciencias Claudio R. Fuerte Esquivel

Julio de 2013

# Resumen

Un sistema eléctrico de potencia o sistema de potencia está conformado por un gran número de componentes conectados entre si. Las funciones principales de un sistema de potencia son generar, transmitir y distribuir la energía eléctrica. En este trabajo estudiamos dos grandes problemas que se presentan en los sistemas de potencia:

- A) la inestabilidad de voltaje y
- B) las oscilaciones entre áreas.

Se presenta un estudio numérico para evaluar cómo la estabilidad de voltaje se ve afectada por la presencia de bifurcaciones Hopf degeneradas. Del análisis de bifurcaciones multiparamétricas, se identifica la existencia de los puntos de bifurcación Hopf degenerados. Se calculan los diagramas de estabilidad para estas bifurcaciones. A partir de ellos se establece la dinámica del voltaje cuando el sistema esta operando cerca de las bifurcaciones Hopf degeneradas. Por último, se propone la aplicación de un StatCom para eliminar las oscilaciones de voltaje sostenidas y las bifurcaciones Hopf degeneradas.

En el caso de las oscilaciones entre áreas, se deriva una nueva fórmula para calcular la sensibilidad de oscilaciones electromecánicas débilmente amortiguadas con respecto al redespacho de generación. La fórmula podría lidiar con la combinación de algunas observaciones, cálculo y métodos heurísticos para amortiguar de manera más efectiva las oscilaciones entre áreas.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
1.1. Inestabilidad de voltaje . . . . .	5
1.2. Oscilaciones entre áreas . . . . .	6
<b>2. Inestabilidad de voltaje</b>	<b>11</b>
2.1. Descripción del sistema . . . . .	12
2.2. Ecuaciones diferenciales-algebraicas: modelado de componentes	13
2.2.1. Generador . . . . .	13
2.2.2. Sistema de excitación . . . . .	16
2.2.3. Carga . . . . .	17
2.2.4. Red de transmisión . . . . .	17
2.3. Cálculo numérico de la región de estabilidad . . . . .	18
2.4. Bifurcaciones Hopf degeneradas . . . . .	23
2.5. Colapsos de voltaje alrededor de $BHD_M$ y $BHD_N$ . . . . .	28
2.6. Sistema con StatCom . . . . .	29
<b>3. Oscilaciones entre Áreas</b>	<b>36</b>
3.1. Descripción del sistema . . . . .	36
3.2. Ecuaciones diferenciales-algebraicas . . . . .	37
3.3. Análisis de estabilidad lineal . . . . .	39
3.3.1. Relación entre los valores propios de $Q$ y el Jacobiano	40
3.4. Sensibilidad de $\lambda$ : diferencial . . . . .	42
3.4.1. Nuevas coordenadas relacionadas a las líneas de trans- misión . . . . .	43
3.4.2. Calculando $dL$ . . . . .	46
3.4.3. Calculando $dL_{\text{line}}$ . . . . .	47

3.4.4. Calculando $dH$ . . . . .	48
3.4.5. Calculando $dL_{\text{bus}}$ . . . . .	49
3.4.6. Calculando $x^T dLx$ . . . . .	49
3.5. Relacionando el redespacho con $d\theta$ y $dV_i^{\text{ln}}$ . . . . .	54
3.6. Calculando $d\lambda$ para un sistema de 3 buses . . . . .	55
3.7. Caso especial: modo con nulo amortiguamiento . . . . .	60
3.8. Caso Especial: magnitud del voltaje constante . . . . .	61
3.8.1. Caso: modo no amortiguado . . . . .	62
3.8.2. Caso: modo amortiguado . . . . .	65
3.9. Sistema de 10 buses . . . . .	68
3.10. Sistema de 6 buses . . . . .	72
<b>4. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>77</b>
4.1. Inestabilidades de voltaje . . . . .	77
4.2. Oscilaciones entre áreas . . . . .	78
4.3. Trabajo futuro . . . . .	81
<b>Anexos</b>	<b>83</b>
<b>A. Ecuaciones dinámicas</b>	<b>83</b>
A.1. Ecuación de oscilación . . . . .	83
A.2. Carga dinámica . . . . .	86
A.3. Sistema de excitación . . . . .	87
A.4. Ecuaciones del StatCom . . . . .	88
A.4.1. Ecuaciones del control del StatCom . . . . .	93
<b>B. Bifurcaciones</b>	<b>96</b>
B.1. Bifurcación silla . . . . .	96
B.2. Bifurcación Pitchfork . . . . .	97
B.2.1. Bifurcación Pitchfork supercrítica . . . . .	98
B.2.2. Bifurcación Pitchfork subcrítica . . . . .	98
B.3. Bifurcación Hopf . . . . .	99
B.3.1. Bifurcación Hopf supercrítica . . . . .	100
B.3.2. Bifurcación Hopf subcrítica . . . . .	102
<b>C. Nomenclatura</b>	<b>107</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>110</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Una oscilación es una variación, perturbación o fluctuación de un sistema en el tiempo. En áreas como la Física, Ingeniería o Química una oscilación es el movimiento repetido de un lado a otro alrededor de una posición de equilibrio. En el caso de Ingeniería Eléctrica, las oscilaciones están presentes en muchas áreas, por ejemplo, en los sistemas eléctricos de potencia. Un sistema eléctrico de potencia es un circuito muy grande compuesto por un gran número de elementos eléctricos que se encargan de generar, transmitir y distribuir la energía eléctrica. Todo lo que demanda energía se denomina carga, por ejemplo la industria y los hogares, son cargas. De manera muy general un sistema de potencia contiene los siguientes elementos: generadores que se encargan de generar la energía eléctrica, el sistema de transmisión que transporta la energía de los centros de generación a los centros de carga y el sistema de distribución que distribuye la energía cerca de los hogares y la industria.

Se dice que un sistema de potencia está operando en condiciones normales o está en un punto operativo estable, cuando se encuentra en un punto fijo estable del sistema. Como en cualquier sistema real, las perturbaciones están siempre presentes en los sistemas de potencia, las cuales crecerán o decaerán dependiendo de los parámetros del sistema. Grandes oscilaciones estresan el sistema de potencia y dañan el equipo, en particular las oscilaciones pueden provocar que el voltaje exceda los límites y que una consecuencia de malas decisiones de acciones de control produzcan un apagón, por lo cual es importante estudiar la dinámica de los sistemas eléctricos de potencia para suprimir o evitar las oscilaciones.

En este trabajo, en el capítulo 2 se estudian las inestabilidades en los sistemas eléctricos de potencia que están relacionadas con oscilaciones de magnitud de voltaje y en el capítulo 3 las oscilaciones debidas a la presencia de modos electromecánicos poco amortiguados y de baja frecuencia (0.15 Hz-0.3 Hz). Este tipo de oscilaciones se conocen como oscilaciones entre áreas debido a que involucran varias áreas del sistema de potencia. En las siguientes secciones de este capítulo damos una explicación más extensa sobre las inestabilidades de voltaje y las oscilaciones entre áreas así como una revisión a los trabajos más sobresalientes que han estudiado este tipo de inestabilidades en los sistemas eléctricos potencia.

## 1.1. Inestabilidad de voltaje

La estabilidad de voltaje se refiere a la capacidad de mantener el voltaje dentro del rango (margen operativo) en el cual el sistema tiene asociado un punto operativo estable. Para lograr este propósito se varían parámetros claves del sistema; sin embargo estas variaciones paramétricas pueden ocasionar que el punto fijo pierda estabilidad y se presente un colapso de voltaje y finalmente un apagón. Para lograr una buena operación de los sistemas de potencia, es importante conocer las regiones estables [46] del espacio de parámetros, es decir, las regiones compuestas por puntos de equilibrio estables. También es importante conocer las fronteras de dichas regiones. En este contexto la teoría de bifurcaciones es una herramienta natural para estudiar los mecanismos asociados con la pérdida de estabilidad de los puntos de equilibrio en la vecindad de las fronteras de las regiones estables [20]. El uso de esta teoría ha revelado que principalmente la bifurcación silla (BS) [46] está relacionada con los colapsos de voltaje monótonos (un colapso de voltaje se define como el proceso por el cual las inestabilidades de voltaje, producen un perfil muy bajo de voltaje en una parte significativa del sistema) y las bifurcaciones Hopf (BH) con las oscilaciones de voltaje. También se ha demostrado que las fronteras de estabilidad están compuestas por bifurcaciones silla, Hopf y singulares inducidas.

Las características topológicas de las regiones estables proveen información muy importante para los operadores del sistema de potencia en términos de que lejos de la frontera de estabilidad se encuentra el punto en el que

está operando el sistema. Existen estudios sobre la topología de una región de estabilidad en el espacio paramétrico [23] con base al sistema de potencia caótico de 3 nodos [9]. Dicho estudio está basado en un análisis multiparamétrico y fue extendido en [49] para investigar el efecto de un sistema de excitación sobre la característica topológica de la región de estabilidad. La contribución de estos estudios consiste en observar que una bifurcación Hopf degenerada (BHD) emerge cuando dos bifurcaciones Hopf colapsan y una región inestable o agujero aparece dentro de la región estable.

A pesar de que la teoría de bifurcaciones ha sido utilizada ampliamente para estudiar los mecanismos asociados a la pérdida de la estabilidad de voltaje y para determinar la estructura topológica de la región de estabilidad, el mecanismo de como acontecen problemas de estabilidad de voltaje cuando el sistema está operando cerca de una BHD no ha sido investigado ya que no es un problema trivial.

En el capítulo 2 de esta tesis se presenta un estudio numérico para evaluar como la estabilidad del voltaje de un sistema de potencia se afecta por la presencia de bifurcaciones Hopf degeneradas. El sistema de potencia de prueba de 3 nodos es utilizado para llevar a cabo el estudio [9]. Primero se calcula la estructura topológica de la región estable del sistema basado en el análisis multiparamétrico que se reporta en [23]. Con base a este diagrama de bifurcación paramétrico, se comprueba la existencia de las bifurcaciones Hopf degeneradas, estableciéndose la relación existente entre estas bifurcaciones con la aparición del agujero inestable dentro de la región estable. Lo anterior conlleva a una clasificación de las BHDs. Finalmente se incluye un dispositivo controlador denominado StatCom al sistema de potencia analizado para eliminar las BHDs y con ello el agujero inestable en la región estable.

## 1.2. Oscilaciones entre áreas

Como mencionamos anteriormente, un sistema eléctrico de potencia está compuesto por un gran número de elementos, de los cuales los generadores juegan un papel muy importante en las oscilaciones de potencia activa entre áreas de control. Un generador es una gran masa rotatoria y cuando el sistema de potencia se encuentra en un punto de operación estable (es decir, en un punto fijo estable) todos los generadores del sistema se encuentran rotando a

la misma velocidad; es decir, están sincronizados. Cuando ocurre una perturbación, los generadores pueden empezar a girar a diferentes velocidades. De hecho un grupo de generadores de una área del sistema pueden empezar a moverse periódicamente en contra de un grupo de generadores de otra área, en ese momento se dice que el sistema presenta una oscilación entre áreas. Dichas oscilaciones provocan oscilaciones del flujo de potencia activa entre regiones de un sistema de potencia o grupos de generadores [27, 6, 11], lo que inherentemente produce oscilaciones de los voltajes y las corrientes en el sistema. Las oscilaciones entre áreas están asociadas con modos (valores propios) de baja frecuencia y ligeramente amortiguados, es decir que tienen parte real muy pequeña. Los sistemas de potencia muy grandes generalmente presentan un gran número de modos de oscilación. Si el amortiguamiento de tales modos se reduce significativamente o se vuelve positivo, las oscilaciones pueden dañar el equipo eléctrico y en el peor de los casos producir apagones. Las oscilaciones pueden aparecer cuando se tiene transferencia de potencia a grandes distancias.

Los límites de seguridad prácticos frecuentemente requieren que los modos de oscilación tengan suficiente amortiguamiento [6, 40]. Para tratar de suprimir las oscilaciones de baja frecuencia, se tienen diferentes acciones de control; por ejemplo, se limita la transferencia de potencia a través de enlaces críticos, se instalan controles de lazo cerrado y/o se realiza el redespacho de generación. En esta tesis analizamos la supresión de oscilaciones a través del redespacho de generación.

Cambios en el despacho de generación modifican el amortiguamiento de las oscilaciones debido a que los sistemas de potencia son no lineales: al cambiar el despacho se cambia el punto de operación estable (punto de equilibrio estable) y por lo tanto la linealización del sistema de potencia alrededor del punto de equilibrio que determina la oscilación y el amortiguamiento de los modos del sistema. El uso del despacho de generación para amortiguar oscilaciones ha sido demostrado por varios autores mediante el empleo de algunas de las siguientes técnicas:

1. Métodos heurísticos que se basan en la forma del modo shape (vector propio derecho asociado al valor propio) para dar un patrón de redespacho [15, 16].
2. Existen cálculos exactos de la sensibilidad de el amortiguamiento que

se obtienen de suponer un modelo dinámico del sistema eléctrico de potencia [10, 11, 35, 47]. Dichas fórmulas requieren el cálculo de la matriz Hessiana del sistema así como de los vectores propios izquierdos del modo shape o derivadas de los vectores propios.

3. La efectividad del redespacho de generación puede ser determinada cuando se calculan varias veces los valores propios de un modelo dinámico del sistema de potencia para obtener sus sensibilidades numéricas [5, 21, 22, 8].

La aplicación de las técnicas enunciadas en los puntos 2 y 3 a sistemas eléctricos de gran escala requiere de un gran esfuerzo computacional. Además en el caso de 2 hasta el momento no parece factible que a partir de medidas tomadas al sistema se puedan calcular los vectores propios izquierdos de los modos shapes o las derivadas de los vectores propios.

En esta tesis presentamos una fórmula que derivamos para la sensibilidad de un modo dado del sistema de potencia. Dicha fórmula depende de cantidades del sistema de potencia que pueden ser observadas, de medidas hechas al sistema. En particular, la fórmula muestra que los efectos a primer orden de un redespacho de generación dependen del modo shape y el flujo de potencia. (La dinámica del generador solo aparece como un factor común a todos los redespachos.) El modo shape puede ser obtenido de las medidas de las unidades de medición fasorial (UMF) [24, 42, 3, 13].

Esta nueva fórmula puede usarse para entender como amortiguar oscilaciones a través del redespacho de generación tal que puede ser expresada y aplicada como los métodos heurísticos que se han desarrollado. De hecho este trabajo esta inspirado por el trabajo heurístico de Fisher y Erlich en [15, 16].

El análisis y comprensión de cómo el redespacho amortigua las oscilaciones entre áreas no es sencillo, de ahí la dificultad de obtener métodos heurísticos. Para derivar la nueva fórmula para la sensibilidad del amortiguamiento de la oscilación y de su frecuencia con respecto al redespacho de generación hemos combinado métodos de análisis nuevos y algunos no tan recientes.

La organización de esta tesis es como sigue:

1. En el capítulo II

- a) En la primera sección se presenta el sistema de estudio.
  - b) En la sección dos se muestran el conjunto de ecuaciones diferenciales-algebraicas que describen la dinámica del sistema de estudio.
  - c) En la sección tres se calcula la región de estabilidad del sistema de estudio.
  - d) En la sección cuatro se explora la dinámica alrededor de las bifurcaciones Hopf degeneradas del sistema de estudio.
  - e) Estudiamos los colapsos de voltaje alrededor de las bifurcaciones Hopf degeneradas en la sección cinco.
  - f) En la sección seis se estudian las inestabilidades de voltaje en el sistema cuando se incluye un StatCom.
2. En el capítulo III estudiamos oscilaciones entre áreas en sistemas eléctricos de potencia
- a) En la primera sección se presenta el sistema de estudio.
  - b) En la sección dos se dan las ecuaciones diferenciales algebraicas que describen la dinámica del sistema.
  - c) En la sección tres se calculan los modos a través de la forma cuadrática asociada a la eigenestructura del sistema. También se muestra la relación de los valores y vectores de la forma cuadrática con los del Jacobiano del sistema.
  - d) En la sección cuatro se deduce una nueva fórmula para la sensibilidad del amortiguamiento de las oscilaciones electromecánicas con respecto al redespacho de generación. Para facilitar los cálculos, se introducen nuevas coordenadas que están relacionadas con las líneas de transmisión.
  - e) La relación entre el redespacho y el cambio en los ángulos y las magnitudes de los voltajes es establecida en la sección cinco.
  - f) Para ejemplificar las nuevas ideas, en la sección seis calculamos la sensibilidad del modo de un sistema de tres nodos.
  - g) Los casos especiales de cero amortiguamiento y flujo de potencia activa son tratados con la nueva fórmula en las secciones siete y ocho.

- h)* En la sección nueve se verifica la nueva fórmula en un sistema de 10 buses y se exploran algunas ideas acerca del redespacho en un sistema de 6 buses en la sección 10.
- 3. Finalmente todas las conclusiones y perspectivas de trabajo futuro se dan en el capítulo IV.

# Capítulo 2

## Inestabilidad de voltaje

En este capítulo se presenta un estudio numérico para evaluar como la estabilidad de voltaje de un sistema de potencia se afecta por la presencia de bifurcaciones Hopf degeneradas (BHD). Cabe mencionar que en el apéndice B se presenta la parte de teoría de bifurcaciones que se utiliza el estudio mostrado en este capítulo.

La precisión del análisis de fenómenos eléctricos depende en gran medida de la precisión con que se modela matemáticamente las relaciones voltaje-corriente en terminales de los diversos dispositivos que integran el sistema eléctrico. Tales dispositivos tienen constantes de tiempo muy diferentes, por lo cual el modelado de cada elemento dependerá del tipo de estudio a realizar. Debido a que las oscilaciones y colapsos de voltaje abordados en este trabajo son de dinámica lenta, se requiere un modelado detallado de generadores síncronos, sistemas de excitación, cargas y dispositivos de control. Por otro lado, como la dinámica de la red de transmisión es mucho más rápida que la de aquellos componentes, es posible considerar que las variables de estado asociadas a la red varían de manera instantánea con respecto a la variación de las variables de estado de los dispositivos eléctricos mencionados.

Esta característica física permite estudiar los mecanismos de oscilaciones no lineales de voltaje y colapsos de voltaje que se presentan en un sistema de potencia mediante las relaciones de voltaje-corriente en terminales de las líneas de transmisión en términos de ecuaciones algebraicas no lineales. Basado en lo anterior, el comportamiento global de oscilaciones electromecánicas no lineales y colapso de voltaje que acontecen en un sistema eléctrico puede ser

analizado mediante un conjunto de ecuaciones diferencial-algebraico (EDA).

## 2.1. Descripción del sistema

El sistema de tres nodos mostrado en la Fig. 2.1 es utilizado en esta tesis para estudiar los mecanismos de inestabilidades de voltaje en la vecindad de BHDs. Este sistema ha sido ampliamente utilizado para mostrar la dinámica no lineal que suele observarse en sistemas eléctricos de potencia cuando se presentan inestabilidades de voltaje [9, 17, 23, 49].

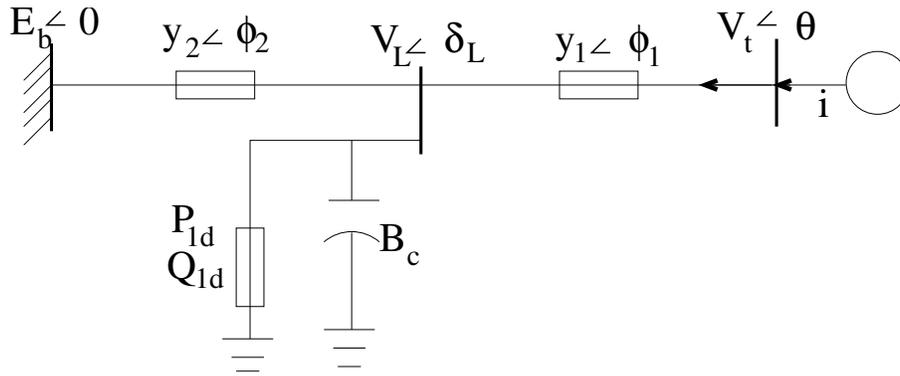


Figura 2.1: Sistema de 3 nodos con carga dinámica.

Una carga dinámica está conectada al nodo central o nodo de carga, así como un capacitor de susceptancia  $B_c$  para proveer potencia reactiva cuando la carga incrementa la demanda de dicha potencia.

Dos generadores alimentan la carga. Un sistema de excitación sencillo es conectado al generador con voltaje en terminales  $V_t \angle \delta_m$  para regular su voltaje de campo. El diagrama de bloques del sistema de excitación se muestra en la Fig. 2.2. Este sistema de potencia de tres nodos puede interpretarse como un circuito equivalente que permite estudiar de manera detallada solo una parte o área de interés de un sistema de potencia de gran escala. Así, el resto del sistema está representado por un generador compensador con magnitud de voltaje constante  $E_b$ .

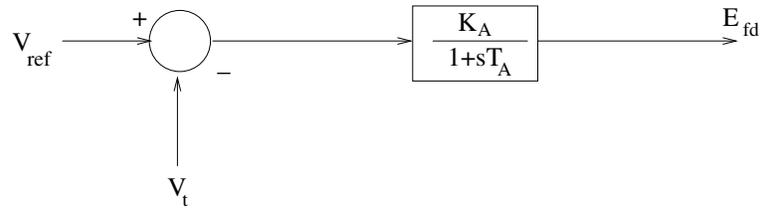


Figura 2.2: Diagrama de bloques del sistema de excitación.

## 2.2. Ecuaciones diferenciales-algebraicas: modelado de componentes

En esta sección se presentan las ecuaciones diferenciales-algebraicas que describen la dinámica de los componentes del sistema de estudio Fig. 2.1. Todas las cantidades están en por unidad (pu) (es decir, han sido divididas por una cantidad base que puede ser escogida de varias maneras, por ejemplo, como potencia base se puede escoger la potencia que hace que el resto de las cantidades de potencia del sistema sean más fáciles de manejar, al expresar una cantidad en por unidad también queda sin unidades) a menos que se indique lo contrario.

### 2.2.1. Generador

Un generador está principalmente compuesto por el rotor, el cual es una gran masa (de acero al silicio) rotatoria y el estator. En este estudio se considera un generador de dos ejes que incluye un devanado de campo sobre el eje directo  $d$  y un devanado de amortiguamiento sobre el eje de cuadratura  $q$ .

#### Estator

Debido a que la dinámica del estator es muy rápida podemos desprestigiar el estado transitorio en el estator y suponer que no hay pérdidas (es decir, desprestigiar la resistencia). Bajo estas suposiciones el estator está representado por las ecuaciones algebraicas [30].

$$v_q = E'_q + x'_d i_d, \quad (2.1)$$

$$v_d = E'_d - x'_q i_q. \quad (2.2)$$

Nótese que las ecuaciones anteriores están dadas en el sistema de referencia  $dq0$ .  $v_q$  y  $v_d$  son las magnitudes de los voltajes en el eje  $q$  y  $d$  respectivamente.  $E'_d$  y  $E'_q$  son las magnitudes de los voltajes internos cuando se presenta una perturbación en el sistema, razón por la cual se les denomina voltajes internos transitorios sobre los ejes  $d$  y  $q$  respectivamente,  $x_d$  y  $x'_d$  son las reactancias del estado estable y transitorio respectivamente sobre el eje directo, y  $x_q$  y  $x'_q$  son las reactancias del estado estable y transitorio sobre el eje de cuadratura. La magnitud  $V_t$  y ángulo de voltaje  $\theta$  en terminales del generador quedan relacionados con los voltajes expresados en los ejes  $d$  y  $q$  mediante las siguientes ecuaciones

$$V_t = \sqrt{v_q^2 + v_d^2}, \quad (2.3)$$

$$\theta = \delta_m + \arctan\left(\frac{v_d}{v_q}\right). \quad (2.4)$$

Para determinar las corrientes  $i_q$  e  $i_d$ , escribimos la ecuación de la red del sistema en el marco de referencia  $dq0$ . Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff para la malla conformada por el nodo de carga y el nodo del generador  $V_L \angle \delta_m$  se obtiene la siguiente ecuación

$$\hat{V}_L + \frac{\hat{i}}{\hat{y}} = \hat{V}_t, \quad (2.5)$$

donde

$$\hat{V}_t = (v_q + jv_d)e^{j\delta_m}, \quad (2.6)$$

$$\hat{i} = (i_q + ji_d)e^{j\delta_m}, \quad (2.7)$$

$$\hat{y}_1 = y_1 \angle \phi_1. \quad (2.8)$$

Sustituyendo (2.6-2.8) en (2.5)

$$(v_q + jv_d) = \frac{1}{y_1} [y_1 V_L e^{(\delta_L - \delta_m)} + (i_q + ji_d)e^{-j\phi_1}]. \quad (2.9)$$

Definiendo

$$a = YV_L \cos(\delta_L - \delta_m), \quad (2.10)$$

$$b = YV_L \sin(\delta_L - \delta_m) \quad (2.11)$$

y sustituyendo (2.10) y (2.11) en (2.9), resulta en el siguiente par de ecuaciones

$$i_q \cos(\phi_1) + i_d \sin(\phi_1) = y_1 v_q - a, \quad (2.12)$$

$$i_d \cos(\phi_1) - i_q \sin(\phi_1) = y_1 v_d - b. \quad (2.13)$$

Sustituyendo (2.1) y (2.2) en (2.12) y (2.13), se obtiene

$$\cos(\phi_1)i_q + [\sin(\phi_1) - y_1 x'_d]i_d = y_1 E'_q - a, \quad (2.14)$$

$$-[\sin(\phi_1) - y_1 x'_q]i_q + \cos(\phi_1)i_d = y_1 E'_d - b. \quad (2.15)$$

Por último resolviendo las ecuaciones (2.14) y (2.15) para  $i_q$  y  $i_d$ , se obtiene

$$i_q = \frac{\cos(\phi_1)(y_1 E'_q - a) + (y_1 E'_d - b)[y_1 x'_d - \sin(\phi_1)]}{1 + y_1^2 x'_d x'_q - y_1(x'_d + x'_q) \sin(\phi_1)}, \quad (2.16)$$

$$i_d = \frac{\cos(\phi_1)(y_1 E'_d - b) + (y_1 E'_q - a)[\sin(\phi_1) - y_1 x'_q]}{1 + y_1^2 x'_d x'_q - y_1(x'_d + x'_q) \sin(\phi_1)}.$$

## Rotor

La dinámica del rotor con respecto a la velocidad nominal es representada con la ecuación de oscilación (segunda ley de Newton aplicada al rotor, ver apéndice A.1)

$$\dot{\delta}_m = \omega_0 s_m, \quad (2.17)$$

$$\dot{s}_m = \frac{1}{2H}(P_m - P_e - Ds),$$

$$s_m = \frac{1}{\omega_0}(\omega - \omega_0), \quad (2.18)$$

donde  $\delta_m$  es el ángulo del voltaje en el nodo interno del generador en radianes,  $D$  es el factor de amortiguamiento,  $\omega$  es la frecuencia angular en rad/s,  $H$  es

la constante de inercia en segundos,  $P_m$  es la potencia mecánica de entrada al generador y  $P_e$  es la potencia eléctrica de salida del generador. La  $P_e$  en terminales del generador está dada por la ecuación

$$P_e = E'_q i_q + E'_d i_d + (x'_d - x'_q) i_d i_q.$$

Las ecuaciones que describen la dinámica de los voltajes transitorios en el eje directo  $d$  y en el de cuadratura  $q$  son dadas en (2.19) y (2.20) [30], bajo la suposición de que los enlaces de flujo dependen de manera lineal de las corrientes del rotor.

$$\dot{E}'_d = \frac{1}{T'_{q0}} [-E'_d + (x_q - x'_q) i_q], \quad (2.19)$$

$$\dot{E}'_q = \frac{1}{T'_{d0}} [-E'_q + (x_d - x'_d) i_d + E_{fd}], \quad (2.20)$$

donde  $T'_{d0}$  y  $T'_{q0}$  son las constantes de tiempo sobre el eje  $d$  y  $q$  respectivamente, es decir, el tiempo que dura el estado transitorio del sistema y  $E_{fd}$  es la magnitud del voltaje de campo. Cuando el devanado de amortiguamiento del eje  $q$  es despreciado, la ecuación (2.19) se reduce a

$$\frac{1}{T'_{q0}} [-E'_d + (x_q - x'_q) i_q] = 0 \quad \Rightarrow \quad E'_d = (x'_q - x_q) i_q. \quad (2.21)$$

### 2.2.2. Sistema de excitación

La función básica de un sistema de excitación es suministrar y ajustar automáticamente el voltaje de campo en el generador con la finalidad de controlar el voltaje en terminales, es decir, el sistema de excitación mide el voltaje en terminales de la máquina, si este no está en el rango de operabilidad, el sistema de excitación ajusta el voltaje de campo. Se considera que el generador utiliza el sistema de excitación mostrado esquemáticamente por la Fig. 2.2 y descrito por la ecuación (2.22) (ver apéndice A.3)

$$\dot{E}_{fd} = \frac{1}{T_A} [-E_{fd} + K_A (V_{ref} - V_t)], \quad (2.22)$$

donde  $V_{ref}$  es el voltaje del nodo de referencia,  $V_t$  es el voltaje en terminales del generador,  $K_A$  es la ganancia del control y  $T_A$  es la constante de tiempo del sistema de excitación en segundos (s).

### 2.2.3. Carga

La carga presente en el sistema de estudio es un modelo de carga mixto que incluye una combinación en paralelo de una carga estática o constante  $P_{1d}$ ,  $Q_{1d}$  en paralelo con un motor de inducción dependiente de la frecuencia  $\dot{\delta}_L$  y de los cambios de la magnitud del voltaje  $V_L$  del nodo de carga [9] (ver apéndice A.2), por lo cual el motor es una carga dinámica. Así las potencias activa y reactiva en el nodo de carga son especificadas por las siguientes ecuaciones

$$P_L = P_{1d} + P_0 + p_1\dot{\delta}_L + p_2\dot{V}_L + p_3V_L, \quad (2.23)$$

$$Q_L = Q_{1d} + Q_0 + q_1\dot{\delta}_L + q_2\dot{V}_L + (q_3 - B_c)V_L^2, \quad (2.24)$$

### 2.2.4. Red de transmisión

El modelado de un elemento de transmisión está dado por las ecuaciones de flujo de potencia (las cuales se deducen de aplicar las leyes de Kirchhoff al sistema de potencia) inyectada en sus terminales, así las potencias activa  $P$  y reactiva  $Q$  que la red suministra a la carga son

$$P_{Net} = V_t V_L y_1 \cos(\delta_L - \theta - \phi_1) - V_L^2 y_1 \cos(\phi_1) \\ + E_b V_L y_2 \cos(\delta_L - \phi_2) - V_L^2 y_2 \cos(\phi_2), \quad (2.25)$$

$$Q_{Net} = V_t V_L y_1 \sin(\delta_L - \theta - \phi_1) + V_L y_1 \sin(\phi_1) \\ + E_b V_L y_2 \sin(\delta_L - \phi_2) - V_L^2 y_2 \sin(\phi_2). \quad (2.26)$$

Así las ecuaciones diferenciales-algebraicas que describen la dinámica del sistema mostrado en la Fig. 2.1 son

1. Ecuación de Oscilación (ecuación para un oscilador armónico no lineal):

$$\dot{\delta}_m = \omega_0 s_m, \quad (2.27)$$

$$\dot{s}_m = \frac{1}{2H} [P_m - D s_m - E'_q i_q + E'_d i_d + (x'_d - x'_q) i_d i_q]. \quad (2.28)$$

2. Ecuación dinámica para el voltaje interno transitorio en el eje de cuadratura del rotor

$$\dot{E}'_q = \frac{1}{T'_{d0}} [E_{fd} - E'_q + (x_d - x'_d) i_d]. \quad (2.29)$$

3. Ecuación dinámica para el voltaje de campo

$$\dot{E}_{fd} = \frac{1}{T_A} [K_A (V_{ref} - V_t)]. \quad (2.30)$$

4. Carga Dinámica [9]

$$\dot{\delta}_L = \frac{1}{q_1} [Q_{Net} - Q_{1d} - Q_0 - q_2 V_L - (q_3 - B_c) V_L^2], \quad (2.31)$$

$$\dot{V}_L = \frac{1}{p_2} \left\{ P_{Net} - P_{1d} - P_0 - \frac{p_1}{q_1} [Q_{Net} - Q_{1d} - Q_0 - q_2 V_L - (q_3 - B_c) V_L^2] - p_3 V_L \right\}. \quad (2.32)$$

5. La potencia activa y reactiva que es suministrada a la carga son

$$\begin{aligned} P_{Net} &= V_t V_L y_1 \cos(\delta_L - \theta - \phi_1) - V_L^2 y_1 \cos(\phi_1) \\ &\quad + E_b V_L y_2 \cos(\delta_L - \phi_2) - V_L^2 y_2 \cos(\phi_2), \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} Q_{Net} &= V_t V_L y_1 \sin(\delta_L - \theta - \phi_1) + V_L y_1 \sin(\phi_1) \\ &\quad + E_b V_L y_2 \sin(\delta_L - \phi_2) - V_L^2 y_2 \sin(\phi_2). \end{aligned} \quad (2.34)$$

En base al conjunto de ecuaciones anteriores, estudiaremos la dinámica del sistema cuando se varían dos parámetros: la potencia mecánica  $P_m$  en el intervalo  $P_m \in [0.4, 2.0]$  y la constante de tiempo del sistema de excitación  $T_A$  en un rango  $T_A \in [0.02, 0.25]$ , en tales rangos de variación de los parámetros el sistema de estudio es operable. Los valores de las constantes del sistema se muestran en la tabla 2.1.

Definido el sistema de estudio y los parámetros, el siguiente paso que daremos es calcular numéricamente los diagramas de bifurcación del sistema.

## 2.3. Cálculo numérico de la región de estabilidad

La dinámica de un sistema eléctrico de potencia puede ser representada por un conjunto de ecuaciones diferencial-algebraico

$$\dot{x} = f(x, y, \beta), \quad f : \mathfrak{R}^{n+m+pa} \rightarrow \mathfrak{R}^n \quad (2.35)$$

$$0 = g(x, y, \beta), \quad g : \mathfrak{R}^{n+m+pa} \rightarrow \mathfrak{R}^m, \quad (2.36)$$

Tabla 2.1: Constantes del sistema de 3 nodos.

constante	valor	constante	valor	constante	valor
$y_1$	4.9752	$E_b$	1.0	$p_1$	0.24
$\phi_1$	-1.4711 rad	$V_{ref}$	1.122	$q_1$	-0.02
$y_2$	1.6584	$H$	2.849 s	$p_2$	1.7
$\phi_2$	-1.4711 rad	$\omega_0$	377 rad/s	$q_2$	-1.866
$x_d$	1.79	$D$	0.05	$p_3$	0.2
$x_q$	1.71	$P_0$	0.4	$q_3$	1.6
$x'_d$	0.169	$Q_0$	0.8	$B_c$	0.2
$x'_q$	0.23	$P_{1d}$	0.0	$K_A$	200
$T'_{d0}$	4.3 s	$Q_{1d}$	0.0	$V_{ref}$	1.122

donde  $x \in X \subset \mathfrak{R}^n$ ,  $y \in Y \subset \mathfrak{R}^m$  y  $\beta \in B \subset \mathfrak{R}^{pa}$  corresponden a vectores de variables dinámicas, algebraicas y parámetros. La región  $R_{EQ}$  en la cual un sistema eléctrico de potencia permanece en equilibrio esta caracterizada por una variedad  $pa$ -dimensional compuesta por el conjunto de puntos que satisface

$$R_{EQ} = \{(x, y, \beta) \in X \times Y \times B : f(x, y, \beta) = 0, g(x, y, \beta) = 0\}. \quad (2.37)$$

Tales puntos se conocen como puntos fijos o puntos de equilibrio  $P_E$ . La región de estabilidad  $\mathfrak{S}_R$  de un sistema eléctrico de potencia es un subconjunto de  $R_{EQ}$  compuesto por los puntos fijos estables del sistema. La frontera de la región de estabilidad  $\partial\mathfrak{S}_R$  está compuesta por puntos de bifurcación silla (BS), Hopf (BH) ó singularidad inducida [46].

Para determinar  $\mathfrak{S}_R$  y  $\partial\mathfrak{S}_R$ , se debe determinar la estabilidad de los puntos fijos. Así linealizando el sistema (2.35-2.36), se obtiene

$$\begin{pmatrix} \dot{\Delta x} \\ 0 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \Big|_{P_E} \quad (2.38)$$

El sistema de ecuaciones diferencial-algebraico linealizado puede ser reducido a un sistema puramente diferencial cuando las variables algebraicas se expresan en términos de las variables dinámicas y se sustituyen en el sistema.

Así

$$\Delta y = - \left[ \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix} \right] \Delta x \quad (2.39)$$

Nótese que en la ecuación anterior se requiere que la matriz  $\frac{\partial g}{\partial y}$  sea no singular. Sustituyendo (2.39) en el sistema de ecuaciones (2.38), el sistema reducido es

$$\dot{\Delta x} = J_{red} \Delta x, \quad (2.40)$$

donde

$$J_{red} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Así el sistema de EDOs (2.40) es la reducción del sistema de EDA (2.35-2.36). La reducción del sistema implica que la dinámica y propiedades de estabilidad del conjunto de EDA (2.35-2.36) están bien representados localmente por el conjunto de EDOs. Para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio trabajaremos con el sistema reducido (2.40).

En este contexto un punto de equilibrio  $P_E$  del sistema es estable si todos los valores propios de  $J_{red}|_{P_E}$  tienen parte real negativa,  $\lambda(J_{red}|_{P_E}) \subset \mathbb{C}^-$ , tales puntos componen la región de estabilidad de un sistema de potencia.

Para poder analizar las bifurcaciones Hopf degeneradas, primero calculamos numéricamente la región de estabilidad del sistema de estudio. Para llevar acabo las simulaciones numéricas primero se debe dar una condición inicial (CI), es decir, un conjunto de condiciones iniciales de las variables dinámicas del sistema. La CI debe estar lo suficientemente cerca de un punto fijo estable del sistema de ecuaciones diferenciales (2.27-2.32). A partir de este punto de equilibrio estable, se obtiene una rama de puntos fijos variando el parámetro seleccionado. Al mismo tiempo se hace el análisis de estabilidad de cada punto fijo obtenido, esto con la finalidad de determinar si se ha encontrado una bifurcación. Todas estas simulaciones son llevadas acabo en el paquete XPPAUT, el cual es un programa para simulación numérica de sistemas dinámicos. El paquete consiste de dos subprogramas: XPP (X-Windows Phase Plane) que resuelve el sistema para una CI dada y AUTO que obtiene diagramas de bifurcación y la estabilidad de los puntos de equilibrio que lo

conforman.

Para el valor de  $T_A = 0.03$  s y la CI  $\delta_m = 0.8684$ ,  $s_m = 0.0$  rad /s,  $E'_q = 1.0556$ ,  $E_{fd} = 2.3684$ ,  $\delta_L = 0.1312$  rad y  $V_L = 1.012$  el diagrama de bifurcación resultante en función de  $P_m$  se muestra en la Fig. 2.3. Las líneas continuas indican soluciones estables y las discontinuas soluciones inestables.

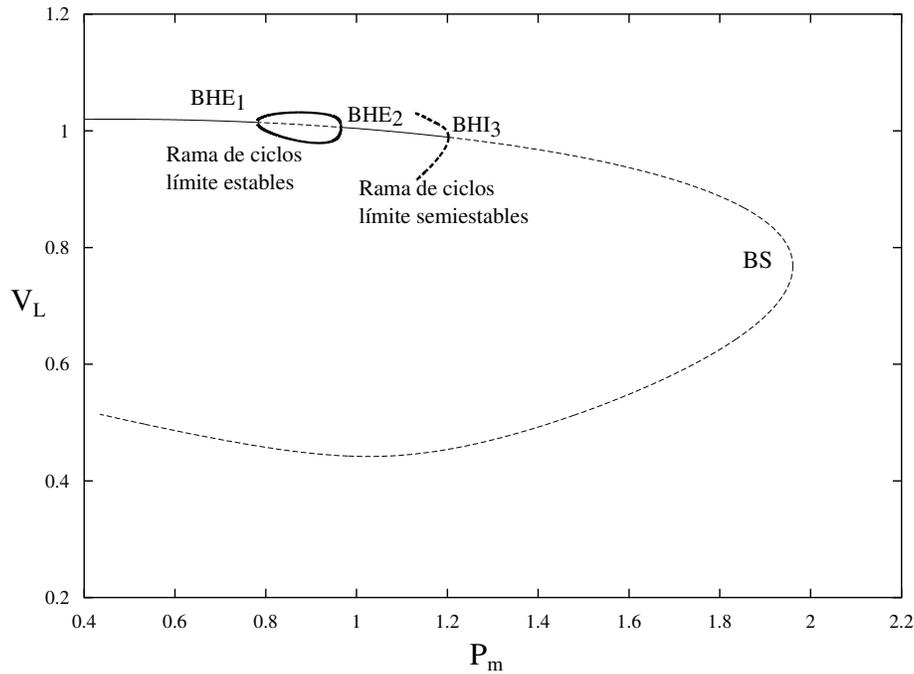


Figura 2.3: Diagrama de bifurcación  $V_L$  vs  $P_m$ , tres bifurcaciones Hopf están presentes en el diagrama:  $BHE_1$ ,  $BHE_2$ ,  $BHI_1$  y una bifurcación silla BS.

Con base al diagrama de bifurcación 2.3 se observa que el sistema presenta una bifurcación Hopf supercrítica estable  $BHE_1$  en el punto (0.7808, 1.0146) y una bifurcación Hopf subcrítica estable  $BHE_2$  en el punto (0.9659, 1.0061). Así para cada  $P_m \in (0.7808, 0.9659)$  el  $V_L$  tiende a un ciclo límite estable, es decir,  $V_L$  presenta oscilaciones. En el punto (1.2026, 0.9890) el sistema tiene una bifurcación subcrítica inestable  $BHI_1$  por lo cual para cada  $P_m \in (0.9659, 1.2026)$  dada una CI esta tenderá (oscilando debido a la presencia de los ciclo límite inestable) al punto fijo estable correspondiente. Finalmente el sistema presenta una bifurcación silla BS en el punto (1.9608,

0.7680), por lo cual para  $P_m > 1.9608$  el sistema no presenta puntos fijos, lo cual se traduce en que para  $P_m > 1.9608$  el sistema no puede operar.

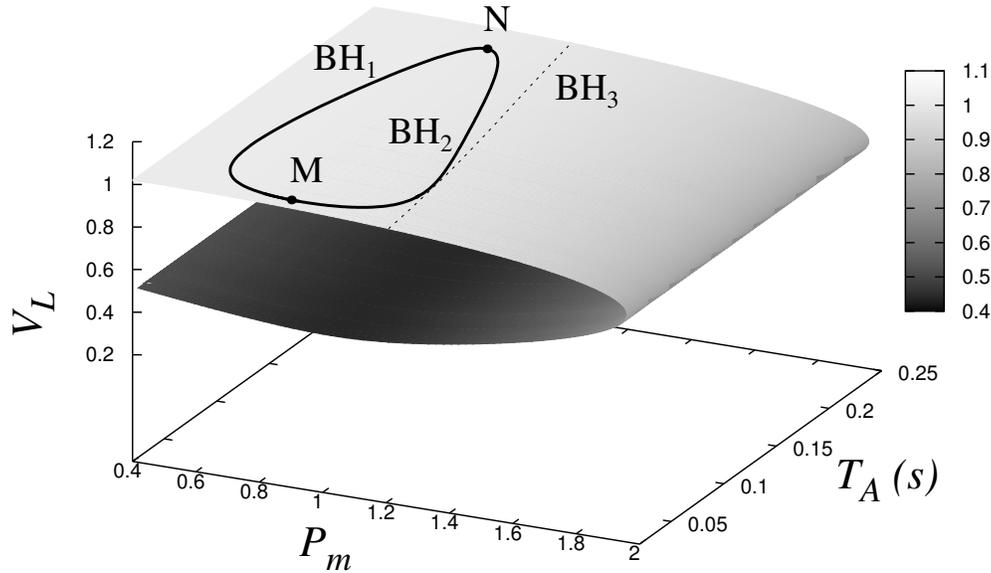


Figura 2.4: Diagrama de bifurcación para  $V_L$  en función de  $P_m$  y  $T_A$ . Se aprecian las bifurcaciones Hopf, el agujero inestable y la bifurcación silla.

Para construir el diagrama de bifurcación de  $V_L$  en función de los parámetros  $P_m$  y  $T_A$ . Damos un nuevo valor de  $T_A$  y nuevamente calculamos el diagrama de bifurcación uniparamétrico de  $V_L$  en función de  $P_m$ , repetimos este proceso para varios valores de  $T_A$  y al final unimos todos los diagramas de bifurcación uniparamétricos, el resultado es la Fig. 2.4 la cual muestra el diagrama de bifurcación para  $V_L$  en función de  $P_m$  y  $T_A$ . La figura divide el espacio  $(P_m, T_A, V_L)$  principalmente en dos regiones una estable y una inestables. La curva  $BH_3$  está compuesta por puntos  $BH_3$  y es la frontera entre tales regiones. La curva  $BH_1$  está compuesta por puntos  $BH_1$ ,  $BH_2$  está compuesta por puntos  $BH_2$ .  $BH_1$  y  $BH_2$  colapsan en los puntos  $M=(0.8723,0.02862,1.0109)$  y  $N=(0.8347,0.2260,1.01253)$ . Cuando dos bifurcaciones Hopf colapsan en un punto se produce una bifurcación Hopf degenerada (BHD) en dicho punto. En la sección 2.4 mostramos que los puntos  $M$  y  $N$  son puntos de BHDs y estudiaremos la dinámica alrededor de tales bifurcaciones.

## 2.4. Bifurcaciones Hopf degeneradas

En los puntos M y N de la Fig. 2.4 dos bifurcaciones Hopf Colapsan y con ello se producen bifurcaciones Hopf degeneradas en tales puntos, es decir, al menos una de las condiciones Hopf (ver apéndice B.3) falla en M y N. De las Figs. 2.5 y 2.6 vemos que la parte real del valor propio crítico (es decir, el valor propio que tiende al eje real) es tangente al eje real para los puntos  $(P_m, T_A) = (0.8723, 0.02862)$  y  $(P_m, T_A) = (0.8347, 0.2260)$  que corresponden a la proyección de los punto M y N en el espacio de parámetros, por lo cual la segunda condición Hopf (**H2**) no se satisface en tales puntos.

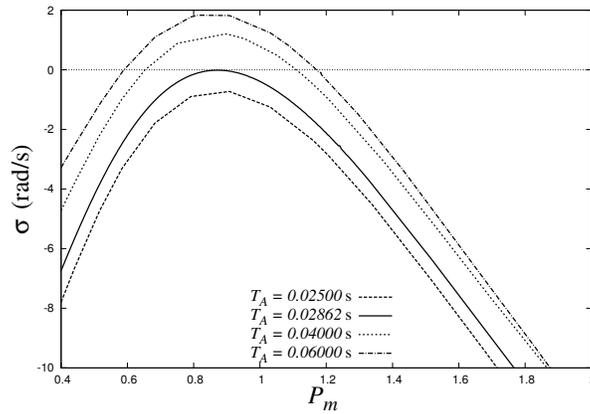


Figura 2.5: Gráfica de la parte real del valor propio crítico en función del parámetro  $P_m$  para diferentes valores de  $T_A$ . La figura muestra que para  $(P_m, T_A) = (0.8723, 0.02862)$  la curva es tangente al eje real.

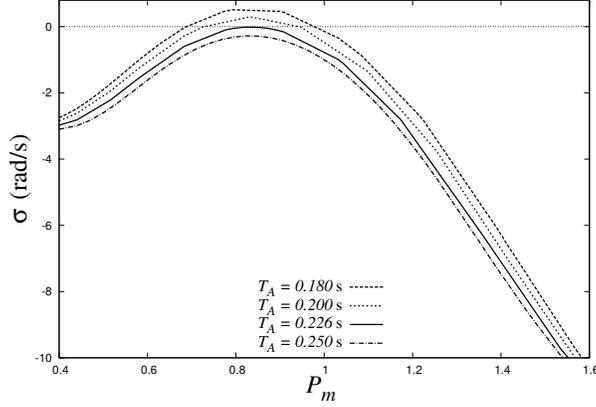


Figura 2.6: Gráfica de la parte real del valor propio crítico en función del parámetro  $P_m$  para diferentes valores de  $T_A$ . La figura muestra que para  $(P_m, T_A) = (0.8347, 0.2260)$  la curva es tangente al eje real.

llamamos  $BHD_M$  y  $BHD_N$  a la proyección de los puntos M y N en el espacio  $(P_m, V_L)$ . La teoría de bifurcaciones predice que cuando **H2** no se satisface la dinámica alrededor de  $BHD_M$  y  $BHD_N$  estará descrita por uno de los diagramas de bifurcación mostrados en las figuras B.7 y B.8 (ver apéndice B.3). Para saber cual de ellos corresponde a cada uno de los puntos  $BHD_M$  y  $BHD_N$  resolvimos numéricamente el sistema de EDOs (2.27-2.32) para varias CIs alrededor de dichos puntos. La Fig. 2.7 muestra el diagrama de bifurcación alrededor del punto  $BHD_M$ , donde la línea continua indica puntos fijos estables. Así cualquier CI definida alrededor de  $BHD_M$  tenderá al punto fijo estable correspondiente del sistema. A manera de ejemplo, la Fig. 2.8 muestra la evolución en tiempo de  $V_L$  para la CI  $\delta_m = 0.91931$ ,  $s_m = 0.0$  rad /s,  $E'_q = 1.0496$ ,  $E_{fd} = 2.4209$ ,  $\delta_L = 0.15579$  rad y  $V_L = 1.08$  con  $P_m = 0.8817$  y  $T_A = 0.02862$  s.

Al comparar el diagrama 2.7 con los diagramas B.7 y B.8 (ver apéndice B.3) que predice la teoría de bifurcaciones cuando **H2** no se satisface vemos que 2.7 corresponde al diagrama B.7 con  $T_A = \beta_0 = 0.02862$  s y  $\beta_1 = P_m$ . El hecho de que la condición **H2** no se satisfaga en  $BHD_M$  trae como consecuencia que no existen ciclos límites en una pequeña vecindad de dicho punto. La Fig. 2.9 muestra el diagrama de bifurcación alrededor del punto  $BHD_N$ . La línea continua indica puntos estables. Las líneas discontinuas por arriba y abajo de  $BHD_N$  indican la frontera a partir de la cual todas las condiciones

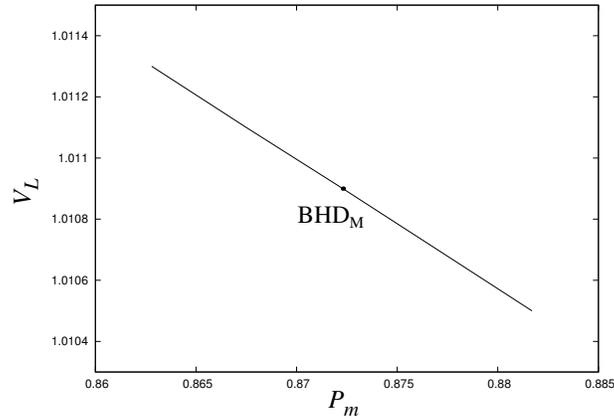


Figura 2.7: Diagrama de bifurcación en una pequeña vecindad de  $BHD_M$ . El diagrama está compuesto por puntos fijos estables, así cualquier CI cercana a  $BHD_M$  tenderá al punto fijo estable correspondiente del sistema.

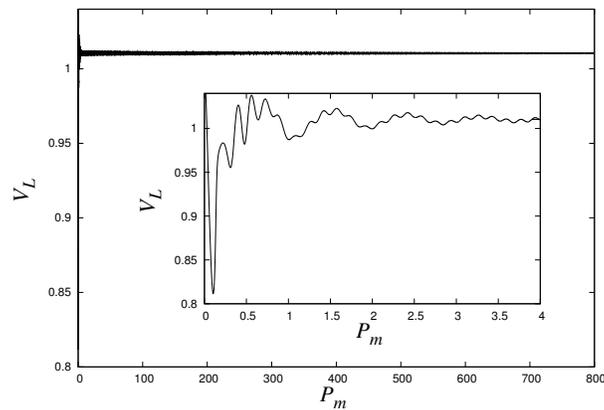


Figura 2.8: Evolución en tiempo de  $V_L$  para una CI cercana al punto  $BHD_M$ .

iniciales tienden a un ciclo límite. El plano  $(P_m, T_A)$  está dividido en cuatro regiones. Las regiones I y III son regiones asintóticamente estables, es decir, cualquier CI en tales regiones tenderá al punto fijo correspondiente. Las regiones II y IV son regiones oscilatorias estables, es decir, cualquier CI en ellas tenderá al ciclo límite correspondiente.

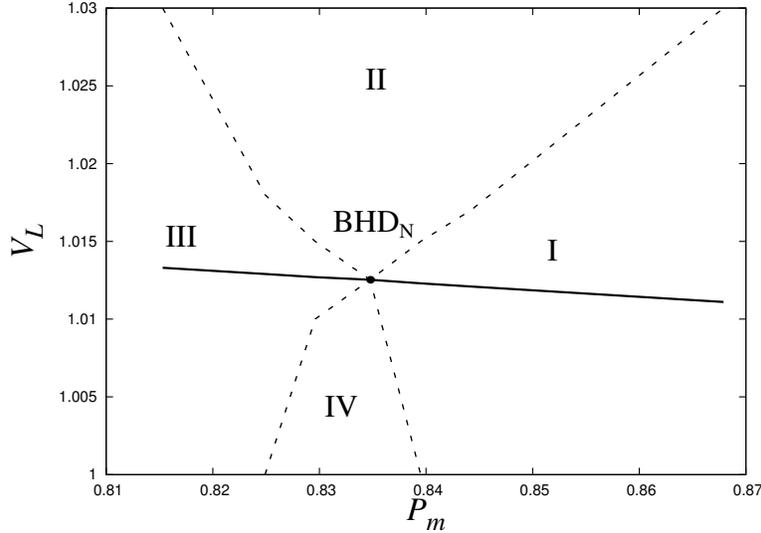


Figura 2.9: Diagrama de bifurcación en una pequeña vecindad de  $BHD_N$ . La línea continua esta compuesta por puntos fijos estables. Las líneas discontinuas por arriba y abajo de  $BHD_N$  indican la frontera a partir de la cual todas las condiciones iniciales tienden a un ciclo límite.

Al comparar el diagrama 2.9 con los diagramas B.7 y B.8 (ver apéndice B.3) que predice la teoría de bifurcaciones cuando **H2** no se satisface vemos que 2.9 corresponde al diagrama B.8 con  $T_A = \beta_0 = 0.226$  s y  $\beta_1 = P_m$ . El hecho de que **H2** no se satisfaga en el punto  $BHD_N$  trae como consecuencia que no se de el característico intercambio de estabilidad entre los puntos fijos y ciclos límite de una bifurcación Hopf. Los puntos fijos y los ciclos límite preservan su estabilidad en ambos lados de  $BHD_N$ .

A manera de ejemplo la Fig. 2.10 muestra la evolución en tiempo de  $V_L$  para la CI  $\delta_m = 0.86744$ ,  $s_m = 0.0$  rad /s,  $E'_q = 1.0557$ ,  $E_{fd} = 2.3675$ ,  $\delta_L = 0.13074$  rad y  $V_L = 1.0130$ , con  $P_m = 0.8395$  y  $T_A = 0.226$  s, que se encuentra en la región I de la Fig. 2.9. Nótese que la CI se encuentra en la región de atracción del punto fijo estable. Debido a la presencia de los ciclos límite el tiempo que se necesita para tender al punto fijo es más grande que cuando el sistema está operando en una vecindad de  $BHD_M$ .

La Fig. 2.11 muestra la evolución en tiempo de  $V_L$  para la CI  $\delta_m = 0.86744$ ,  $s_m = 0.0$  rad /s,  $E'_q = 1.0557$ ,  $E_{fd} = 2.3675$ ,  $\delta_L = 0.13074$  rad y  $V_L = 1.030$ , con  $P_m = 0.8395$  y  $T_A = 0.226$  s. Tal CI se encuentra en la región II de la

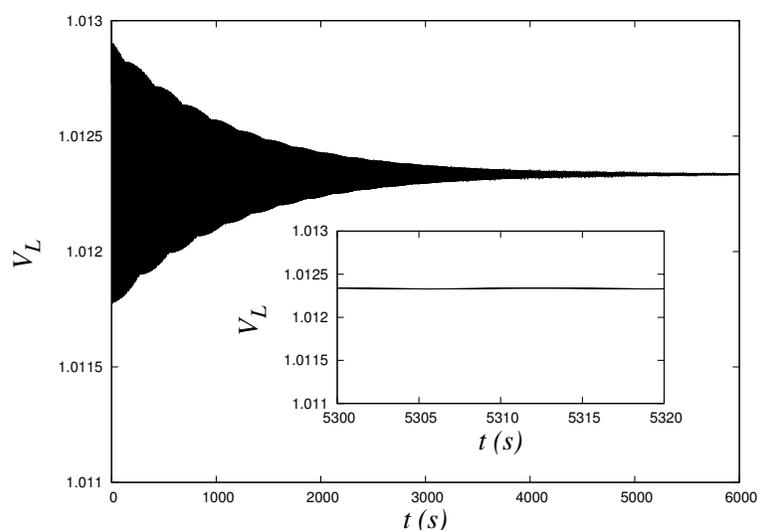


Figura 2.10: Evolución en tiempo de  $V_L$  para una CI cercana al punto  $BHD_N$  y en la región de atracción del punto fijo que corresponde a  $P_m = 0.8395$  y  $T_A = 0.226$  s.

Fig. 2.9, es decir, se encuentra en la región de atracción del ciclo límite que corresponde a  $P_m = 0.8395$ .

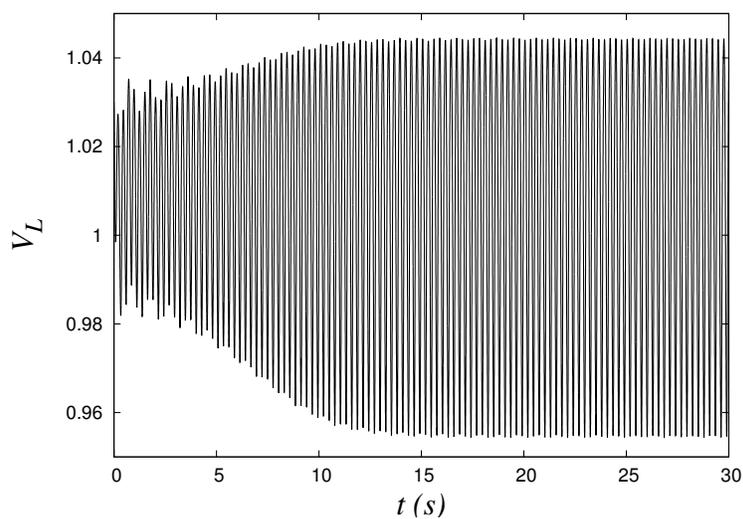


Figura 2.11: Evolución en tiempo de  $V_L$  para una CI cercana al punto  $BHD_N$  y en la región de atracción del ciclo límite.

En la siguiente sección encontraremos las CI alrededor de los puntos  $BHD_M$  y  $BHD_N$  para las cuales se puede producir un colapso de voltaje en el sistema.

## 2.5. Colapsos de voltaje alrededor de $BHD_M$ y $BHD_N$

Para calcular los colapsos de voltaje para  $V_L$  mayor que  $V_L$  de los puntos  $BHD_M$  y  $BHD_N$ , fijamos el parámetro  $P_m$  y resolvemos el sistema de EDOs (2.27-2.32) para una CI con  $V_L$  mayor que el correspondiente a  $BHD_M$ , si no se presenta colapso de voltaje, damos una nueva CI con  $V_L$  mayor que el de la CI anterior y resolvemos nuevamente el sistema. El proceso se repite hasta encontrar la primera CI para la cual el sistema presenta un colapso de voltaje. De manera similar encontramos los colapsos de voltaje para  $V_L$  menor que  $V_L$  de los puntos  $BHD_M$  y  $BHD_N$ .

El sistema de potencia presenta colapsos de voltaje alrededor de los puntos  $BHD_M$  y  $BHD_N$  para valores  $V_L$  que están fuera de la región limitada por los puntos  $(\cdot)$  de las Figs. 2.12 y 2.13. En el caso de  $BHD_M$  los colapsos de voltaje se presentan en puntos que ya no son considerados como puntos operativos del sistema, pero en el caso de  $BHD_N$  los colapsos de voltaje se presentan en puntos operables del sistema como es el caso mostrado en la Fig. 2.14 la gráfica fue generadas con los valores  $P_m = 0.8679$ ,  $T_A = 0.226$  s y la CI  $\delta_m = 0.90243$ ,  $s_m = 0.0$  rad /s,  $E'_q = 1.0515$ ,  $E'_{fd} = 2.4031$ ,  $\delta_L = 0.14756$  rad y  $V_L = 1.06$ .

Para eliminar el agujero inestable agregamos un StatCom al sistema, el análisis de la dinámica del sistema incluyendo el StatCom se presenta en la siguiente sección.

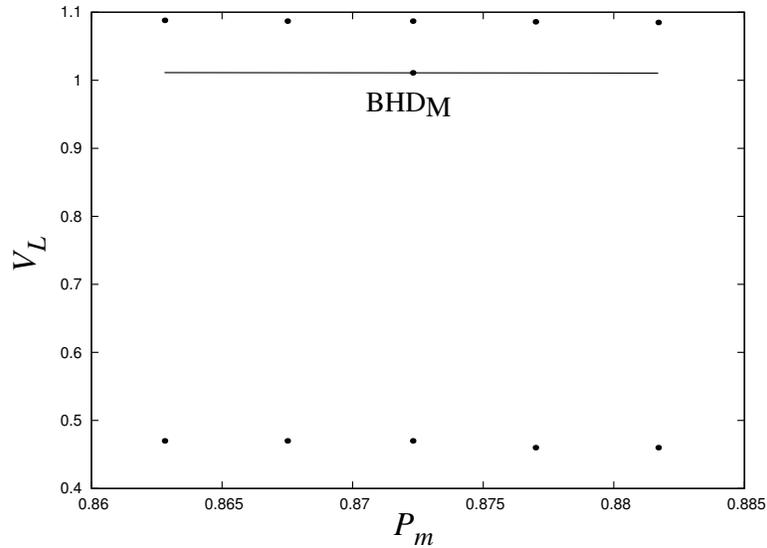


Figura 2.12: Para CIs que están fuera de la región limitada por los puntos (·) el sistema presenta colapsos de voltaje.

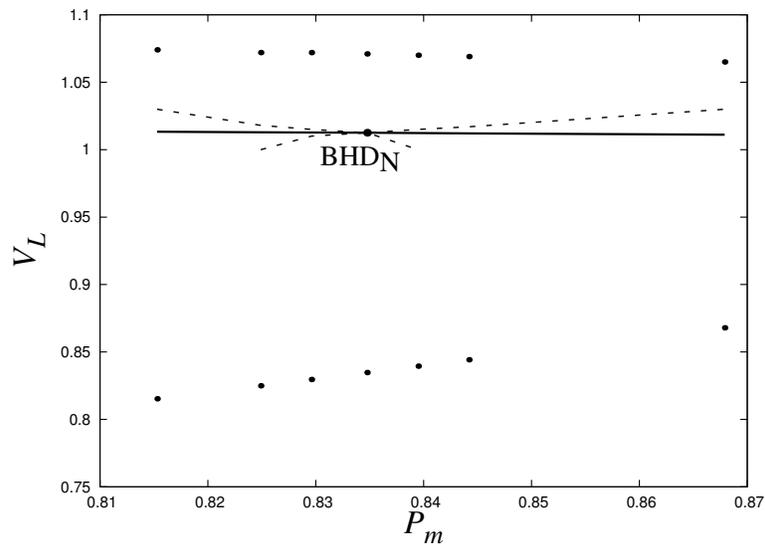


Figura 2.13: Para CIs que están fuera de la región limitada por los puntos (·) el sistema presenta colapsos de voltaje.

## 2.6. Sistema con StatCom

Un StatCom (Compensador Estático Síncrono) es un dispositivo basado en una fuente conmutada de voltaje (VSC) conectado en paralelo al sistema

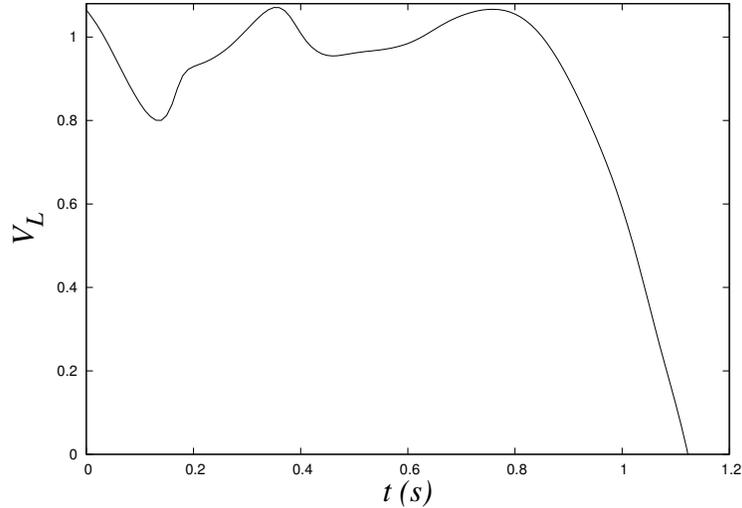


Figura 2.14: Colapso de  $V_L$  para una CI alrededor de  $BHD_N$ .

de transmisión a través de un transformador de acoplamiento y tiene como función convertir un voltaje de entrada de corriente directa (dc)  $V_{dc}$  en un voltaje de corriente alterna (ac) trifásico ( $V_a$ ,  $V_b$  y  $V_c$ ), con una magnitud y ángulo de fase controlable a frecuencia nominal. Un StatCom no tiene inercia, por lo cual puede actuar en fracciones de segundo [44].

El StatCom puede ser usado para la regulación de voltaje en un sistema de potencia, con lo cual se incrementa de transmisión de potencia y la estabilidad del sistema.

Básicamente el StatCom está compuesto de un transformador de acoplamiento, un VSC y un pequeño capacitor que funciona como dispositivo de almacenamiento de energía, debido a esto el StatCom solo tiene la capacidad de intercambiar potencia reactiva con el sistema de potencia. Si una batería o cualquier otra fuente de voltaje de  $dc$  son usadas para reemplazar al capacitor, entonces el StatCom podría intercambiar potencia activa y reactiva con el sistema de potencia. El circuito equivalente de este dispositivo se muestra en la Fig. 2.15, donde  $R_s$  y  $L_s$  representan las pérdidas del transformador trifásico,  $E_a$ ,  $E_b$  y  $E_c$  representan el voltaje de fase en el lado de corriente alterna del inversor,  $V_a$ ,  $V_b$  y  $V_c$  son los voltajes del lado del sistema de potencia e  $i_a$ ,  $i_b$  y  $i_c$  son las corrientes de fase.

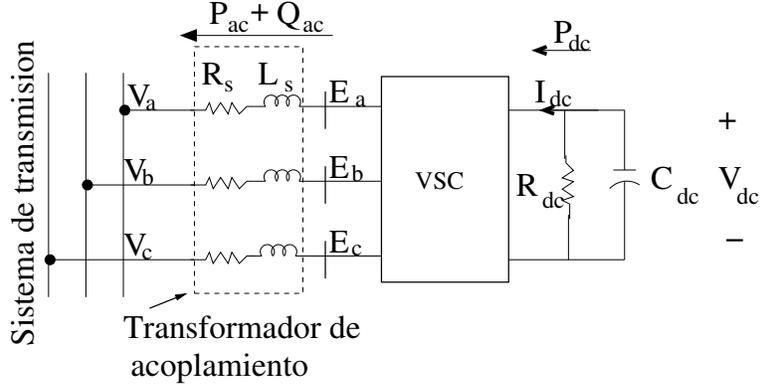


Figura 2.15: Circuito equivalente del StatCom.

El voltaje de salida del StatCom es [12]

$$E = M_k V_{dc} \cos(\omega t + \alpha). \quad (2.42)$$

donde  $V_{dc}$  es el voltaje en el capacitor,  $M_k$  es el índice de modulación y  $\alpha$  es el ángulo de fase del voltaje inyectado. Las ecuaciones de lazo para el circuito son

$$\begin{aligned} -V_a - L_s \frac{di_a}{dt} - i_a R_s + E_a &= 0, \\ -V_b - L_s \frac{di_b}{dt} - i_b R_s + E_b &= 0, \\ -V_c - L_s \frac{di_c}{dt} - i_c R_s + E_c &= 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

De expresar las ecuaciones (2.43) en pu y aplicarles la transformación de Park para simplificar el análisis del sistema de potencia [25, 31] (la deducción de las ecuaciones se encuentra en el apéndice A.4), se obtiene

$$\frac{di_{DL}}{dt} = \omega_0 \left[ -\frac{R_s}{L_s} i_{DL} + i_{QL} + \frac{M_k}{L_s} \cos(\alpha + \delta_L) V_{dc} - \frac{V_L}{L_s} \cos \delta_L \right], \quad (2.44)$$

$$\frac{di_{QL}}{dt} = \omega_0 \left[ -\frac{R_s}{L_s} i_{QL} - i_{DL} + \frac{M_k}{L_s} \sin(\alpha + \delta_L) V_{dc} - \frac{V_L}{L_s} \sin \delta_L \right]. \quad (2.45)$$

$$(2.46)$$

La ecuación que describe la dinámica del capacitor en el statcom es (ver apéndice A.4)

$$\frac{dV_{dc}}{dt} = -C_{dc}\omega_0 \left\{ M_k [\cos(\alpha + \delta_L)i_{DL} + \sin(\alpha + \delta_L)i_{QL}] + \frac{V_{dc}}{R_{dc}} \right\}. \quad (2.47)$$

Los objetivos de control del StatCom son proveer potencia reactiva y mantener el voltaje del capacitor constante. Conceptualmente, el intercambio de potencia reactiva del StatCom con el sistema de potencia es controlado al regular la amplitud de voltaje de salida del StatCom con respecto a la magnitud de voltaje medido en sus punto de conexión con la red de transmisión. Si la amplitud de voltaje de salida del StatCom es mayor que la amplitud de voltaje del sistema de potencia, la corriente fluye a través del transformador desde el StatCom hacia el sistema de potencia y el dispositivo inyecta potencia reactiva. Por el contrario, si la amplitud del voltaje de salida del StatCom es menor que la amplitud de voltaje del sistema de potencia, entonces la corriente fluye desde el sistema de potencia hacia el StatCom, tal que el dispositivo absorbe potencia reactiva. Si la amplitud de voltaje de salida del StatCom y la amplitud de voltaje del sistema de potencia son las mismas, el StatCom no genera ni absorbe potencia reactiva [44].

Una forma de lograr el intercambio de potencia reactiva y mantener el voltaje del capacitor constante, es mediante un control que permita ajustar el índice de la modulación  $M_k$  y el ángulo de fase  $\alpha$  en (ver apéndice A.21). El control implementado en este trabajo es el mostrado en la Fig. 2.16 [12], donde  $V_{dc}^*$  y  $Q_{ac}^*$  corresponden a las cantidades de referencia del voltaje a través del capacitor dc y de la potencia reactiva inyectada por el controlador respectivamente.

En este control las señales de entrada  $V_{dc}$  y  $Q_{ac}$  son comparadas con los valores de referencia  $V_{dc}^*$ ,  $Q_{ac}^*$  y usadas para calcular los errores de las señales  $i_{DL}$  e  $i_{QL}$ . El ángulo  $\alpha$  y el índice de modulación  $M_k$  son afectados por los cambios en  $i_{DL}$  e  $i_{QL}$ . De la Fig. 2.16 vemos que  $\alpha$  tiene una correlación más fuerte con  $i_{DL}$  y  $M_k$  con  $i_{QL}$  [12]. En base a esto los términos de acoplamiento  $\alpha - i_{QL}$  y  $k - i_{DL}$  pueden ser despreciados ( $k_d = k_q = 0$ ) logrando un control desacoplado. Así las ecuaciones diferenciales algebraicas asociadas al control



Tabla 2.2: Constantes relacionadas con el StatCom.

Constante	$R_s$	$L_s$	$C$	$R_{dc}$	$V_{dc}^*$	$Q_{ac}^*$	$\alpha_{limit}$
valor	0.01	0.1	0.7	22.0	1.951	0.1	1.0

Constante	$K_{1p}$	$K_{1v}$	$K_{1q}$	$K_{2p}$	$K_{2v}$	$K_{2q}$	$K_{lim}$
valor	0.1	0.1	0.3	-0.05	0.01	0.15	1.0

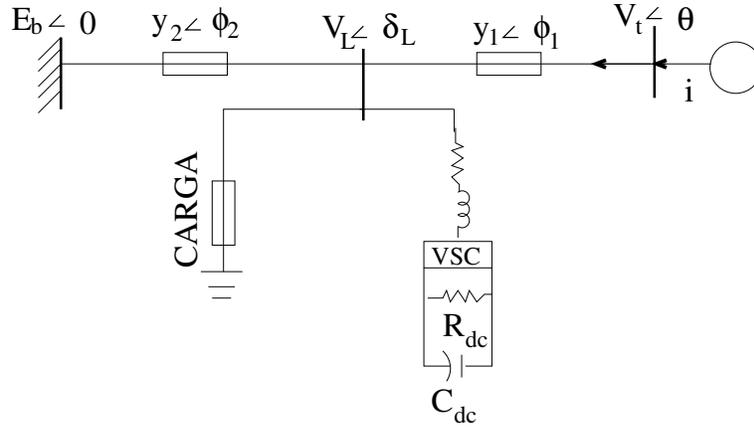


Figura 2.17: Sistema de 3 nodos con carga dinámica y con StatCom.

por lo cual las ecuaciones de potencia activa y reactiva al incluir el StatCom son  $P = P_{Net} + P_{StatCom}$  y  $Q = Q_{Net} + Q_{StatCom}$ . Una vez definidas las ecuaciones diferenciales algebraicas que describen la dinámica del sistema se obtiene el diagrama de bifurcación unidimensional Fig. 2.18, con  $P_m = 0.4$ ,  $T_A = 0.05$  s y la CI  $\delta_m = 0.8684$ ,  $s_m = 0.0$  rad /s,  $E'_q = 1.0556$ ,  $E_{fd} = 2.3684$ ,  $\delta_L = 0.1312$  rad y  $V_L = 1.012$ ,  $i_{DL} = -0.21302$ ,  $i_{QL} = -0.1521$ ,  $V_{dc} = 1.95$ ,  $x_1 = 0.0$ ,  $x_2 = 0.7534$ ,  $x_3 = -0.001955$ .

El análisis de bifurcación para  $T_A = 0.030$  s muestra solo una bifurcación Hopf subcrítica inestable Fig. 2.18. Recordemos que sin el StatCom tres bifurcaciones Hopf están presentes en el diagrama de bifurcación para  $T_A = 0.030$  s (Fig. 2.3). La única bifurcación Hopf en la Fig. 2.18 aparece para un valor mayor de  $P_m = 1.3348$  pu con  $V_L = 0.9698$  pu comparado con el diagrama de bifurcación 2.3 donde la primera bifurcación Hopf se presenta en  $P_m = 0.7808$ . Al incluir el StatCom el sistema presenta un mayor número

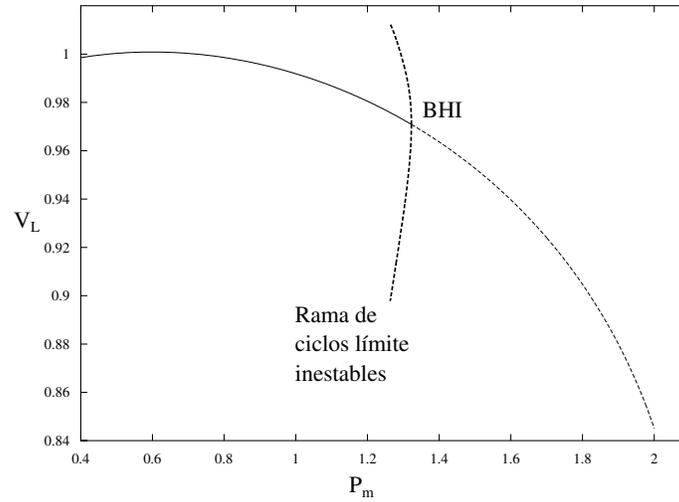


Figura 2.18: Diagrama de bifurcación  $V_L$  vs  $P_m$ . El sistema presenta solo una bifurcación Hopf BHI.

de puntos fijos estables y con ello un mayor rango de operación del sistema. La Fig. 2.19 muestra el diagrama de bifurcación para  $V_L$  en función de  $P_m$  y  $T_A$ . La desaparición de las primeras dos bifurcaciones Hopf tiene un impacto positivo en la región de estabilidad porque se elimina el agujero inestable y las bifurcaciones Hopf degeneradas, lo cual se muestra en la gráfica 2.19.

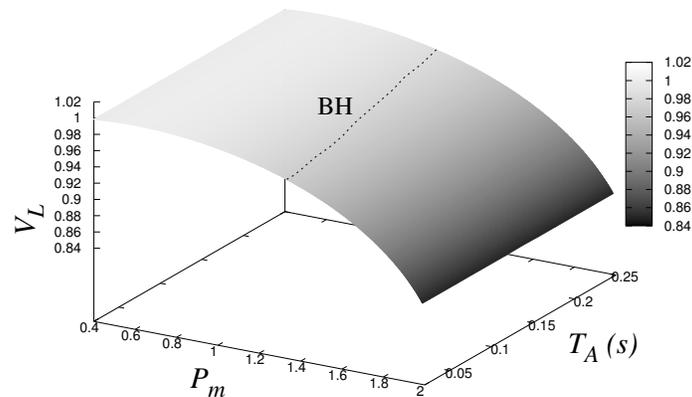


Figura 2.19: Diagrama de bifurcación para  $V_L$  en función de  $P_m$  y  $T_A$ . Se aprecian la bifurcación Hopf y la bifurcación silla.

# Capítulo 3

## Oscilaciones entre Áreas

Este capítulo está dedicado a derivar una nueva fórmula para la sensibilidad del amortiguamiento y la frecuencia de oscilación con respecto al redespacho de generación. Casos especiales y un par de ejemplos son tratados para mostrar algunas ideas sobre cómo la nueva fórmula puede aplicarse. La nomenclatura utilizada en este capítulo se da en el apéndice C.

### 3.1. Descripción del sistema

Para derivar la nueva fórmula para la sensibilidad de los valores propios del sistema consideramos la dinámica de los ángulos de los generadores y el flujo de potencia activa y reactiva, con lo cual se varían los ángulos y las magnitudes de los voltajes. Se desprecian las pérdidas en las líneas de transmisión.

La dinámica del generador es representada por la ecuación de oscilación, la cual es la ecuación del oscilador armónico no lineal con par constante. Estamos utilizando esta sencilla ecuación de segundo orden porque contemplamos usar mediciones de las variables de estado del sistema de potencia que permitan observar la dinámica del mismo. Como meta general nos interesa tomar más ventaja de las unidades de medición fasorial y ser menos dependientes de los modelos dinámicos detallados para los grandes sistemas de potencia ya que son difíciles de obtener. Es decir, la dinámica de las oscilaciones estará basada (al menos en parte) en observaciones directas del sistema de potencia, por lo cual sólo requerimos que la ecuación de oscilación represente a través de sus coeficientes de amortiguamiento y sincronización la dinámica

detallada del generador. El modelado de las cargas permite que la potencia activa dependa de la frecuencia y que sólo la potencia reactiva dependa de la magnitud del voltaje, pero no la potencia activa. Estas suposiciones son las típicas suposiciones que permiten un análisis a través de funciones de energía del sistema de potencia, además de que la red tiene asociado un Laplaciano simétrico. En realidad la derivación de la fórmula explota la estructura de la función de energía.

## 3.2. Ecuaciones diferenciales-algebraicas

Debido a que estamos modelando el sistema de potencia considerando la dinámica del ángulo interno del generador y las ecuaciones algebraicas del balance de potencia; despreciando las pérdidas en las líneas de transmisión las ecuaciones diferenciales-algebraicas asociadas al  $i$ -ésimo bus del sistema de potencia son

Ecuación de Oscilación:

$$m_i \ddot{\delta}_i + d_i \dot{\delta}_i + \sum_{j \sim i} b_{ij} V_i V_j \sin(\delta_i - \delta_j) = P_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

Ecuación de balance de potencia reactiva

$$- \sum_{j \sim i} b_{ij} V_j \cos(\delta_i - \delta_j) = \frac{Q_i}{V_i} + b_{ii} V_i, \quad i = m + 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

La notación  $j \sim i$  significa que la suma es sobre todos los buses  $j$  que están conectados al bus  $i$ , excluyendo  $i$ . Nótese que las ecuaciones de balance de potencia reactiva (3.2) están divididas por la magnitud del voltaje en el nodo  $i$  [7]. El modelo (3.1) y (3.2) es un conjunto de ecuaciones diferenciales-algebraicas escritas en términos de las variables de estado  $z = (\delta, V)$  definidas por los ángulos de voltaje  $\delta$  y la magnitud de voltaje en buses de carga  $V$ . (Las magnitudes de los voltajes de los generadores  $V_1, V_2, \dots, V_m$  se asumen constantes.) En [45] se hace énfasis en el acoplamiento entre la dinámica del ángulo de la máquina (3.1) y los voltajes (3.2).

El sistema está compuesto por dos tipos de buses:

1. **Generadores.** Se asume que el generador  $i$  tiene magnitud de voltaje constante  $V_i$  y que toda su dinámica esta descrita por la ecuación de oscilación.
2. **Cargas.** La carga  $i$  es modelada como una carga de potencia constante con potencia real  $P_i < 0$  y potencia reactiva  $Q_i$ , con,  $m_i = d_i = 0$ . (Si se desea se puede modelar la potencia real en función de la frecuencia [34], es decir,  $P_i(\delta_i) = P_i + d_i\delta_i$  con  $d_i \neq 0$  y permitir que la potencia reactiva  $Q_i$  esté en función de  $V_i$ .) Los buses de conexión son un caso especial de los buses de carga con  $m_i = 0$ ,  $d_i = 0$ ,  $P_i = 0$  y  $Q_i = 0$ .

Reescribiendo (3.1) y (3.2) en términos de las derivadas parciales de una función escalar de energía del sistema que llamaremos  $R$  se tiene

$$R = - \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j, i \sim j}} b_{ij} V_i V_j \cos(\delta_i - \delta_j) - \sum_{i=1}^n (P_i \delta_i + \frac{1}{2} b_{ii} V_i^2 + Q_i \ln V_i). \quad (3.3)$$

La primera suma en (3.3) es sobre todas las líneas.  $R$  es bien conocido desde el enfoque de funciones de energía en sistemas de potencia [2, 1, 36, 43, 38, 7]. Entonces (3.1) y (3.2) puede ser escrito como

$$m_i \ddot{\delta}_i + d_i \dot{\delta}_i + \frac{\partial R}{\partial \delta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial R}{\partial V_i} = 0, \quad i = m + 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

El modelo es un conjunto de ecuaciones diferenciales con parámetros  $P_i$  representando las inyecciones del generador que cambiamos para amortiguar las oscilaciones. Nótese que los parámetros  $P_i$  no aparecen explícitamente en el Jacobiano de (3.4-3.5).

Al modificar la generación de potencia activa  $P_i$  cambia el punto de operación del sistema y con ello los valores propios ya que el sistema es no lineal.

Una vez que hemos definido las ecuaciones que describen la dinámica del sistema aplicaremos análisis de estabilidad lineal para calcular los modos electromecánicos en la sección 3.3.

### 3.3. Análisis de estabilidad lineal

La dinámica del sistema está descrita por un conjunto de ecuaciones diferenciales algebraicas no lineales, aplicaremos análisis de estabilidad lineal para calcular los modos electromecánicos de oscilación del sistema. Linealizando (3.4-3.5) con respecto a variaciones en las variables de estado  $\Delta z = (\Delta\delta, \Delta V)$  y evaluando la ecuación resultante en el punto de equilibrio base  $z_*$

$$m_i \Delta \ddot{\delta}_i + d_i \Delta \dot{\delta}_i + \sum_{j=1}^{2n-m} L_{ij} \Delta z_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.6)$$

$$\sum_{j=1}^{2n-m} L_{ij} \Delta z_j = 0, \quad i = m + 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

La matriz Laplaciana ponderada  $L$  es definida como el Hessiano de  $R$  evaluado en el punto de equilibrio:

$$L = \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \Big|_{z_*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 R}{\partial \delta^2} & \frac{\partial^2 R}{\partial \delta \partial V} \\ \frac{\partial^2 R}{\partial V \partial \delta} & \frac{\partial^2 R}{\partial V^2} \end{pmatrix} \Big|_{z_*} \quad (3.8)$$

$L$  es una matriz simétrica de tamaño  $n \times n$ . Con las matrices  $M = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_{2n-m}\}$  y  $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_{2n-m}\}$  reescribimos (3.6) y (3.7) en forma matricial

$$M \Delta \ddot{z} + D \Delta \dot{z} + L \Delta z = 0. \quad (3.9)$$

Siguiendo [34], definimos la función cuadrática

$$Q(\lambda) = M\lambda^2 + D\lambda + L, \quad (3.10)$$

donde  $Q$  es una matriz simétrica con entradas complejas. Resolviendo el problema cuadrático de valores propios, para encontrar  $(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{2n-m}$  tal que

$$Q(\lambda)x = 0, \quad (3.11)$$

donde  $x$  es el vector propio derecho asociado al valor propio  $\lambda$ . Como estamos estudiando como suprimir oscilaciones entre áreas nos enfocaremos en un

valor propio complejo que corresponde a una oscilación entre áreas, con esto en mente,  $x$  sería un vector propio complejo. Debido a que  $M$ ,  $D$ ,  $L$  y  $Q$  son matrices simétricas, el vector propio izquierdo asociado a  $\lambda$  es el vector renglón  $x^T$ , es decir,  $x^T Q = 0$ , así

$$\sum_{i,j} Q_{ij} x_i x_j = x^T Q x = 0. \quad (3.12)$$

De manera natural uno tiende a escribir  $\bar{x}^T Q x = 0$  en lugar de (3.12), pero trabajaremos con (3.12).

Es fácil demostrar que los valores y vectores propios de la forma cuadrática se corresponden con los del Jacobiano del sistema. En la siguiente sección probamos la correspondencia.

### 3.3.1. Relación entre los valores propios de $Q$ y el Jacobiano

Es conveniente trabajar con el sistema completo de  $2n - m$  ecuaciones y asumir que se tienen inyecciones de potencia en balance y sin bus de referencia. Así el sistema siempre tendrá un modo nulo con todos los ángulos incrementándose, el cual podemos despreciar.

Para calcular los valores propios del Jacobiano del sistema, primero pasaremos el sistema de EDOs de segundo orden (3.9) a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, para lo cual definimos las variables  $\omega_{(2n-m)+i} = \dot{\delta}_i$ ,  $i = 1 \dots m$ . Así las ecuaciones linealizadas son

$$\Delta \dot{z}_i = \Delta \omega_{(2n-m)+i}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.13)$$

$$\Delta \dot{\omega}_{(2n-m)+i} = -\frac{d_i}{m_i} \Delta \omega_{(2n-m)+i} - \sum_{j=1}^{2n-m} \frac{L_{ij}}{m_i} \Delta z_j, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.14)$$

$$0 = -\sum_{j=1}^{2n-m} L_{ij} \Delta z_j, \quad i = m+1, \dots, 2n-m. \quad (3.15)$$

Escribiendo (3.13-3.15) en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{z}^d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta z^d \\ \Delta z^a \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

donde  $z^d$  es un vector de tamaño  $2m$  compuesto por las variables dinámicas del sistema y  $\Delta z^a$  es un vector de tamaño  $2(n-m)$  compuesto de las variables algebraicas. El sistema de ecuaciones diferencial algebraico puede ser reducido a un sistema puramente diferencial cuando las variables algebraicas se expresan en términos de las variables dinámicas y se sustituyen en el sistema. Así  $\Delta z^a = -J_{22}^{-1} J_{21} \Delta z^d$  y la linealización del sistema reducido es

$$\Delta \dot{z}^d = J_{red} \Delta z^d, \quad (3.17)$$

donde  $J_{red} = J_{11} - J_{12} J_{22}^{-1} J_{21}$ . Nótese que al reducir el sistema la simetría del Laplaciano se destruye, para evitar esto es mejor trabajar directamente con el sistema de ecuaciones diferencial-algebraico [41]. (3.16) puede ser escrito como un sistema de ecuaciones diferenciales singular.

$$E \begin{pmatrix} \dot{\Delta z}^d \\ \dot{\Delta z}^a \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \Delta z^d \\ \Delta z^a \end{pmatrix}, \quad \text{donde } E = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Para encontrar los valores propios de (3.18) debemos resolver el problema generalizado de valores propios, es decir,  $\mu E v = \gamma J v$ . Los valores propios  $\lambda$  son definidos como  $\lambda = \frac{\mu}{\gamma}$ . Si  $\gamma = 0$ , el valor propio es definido como infinito, tales valores propios existen debido a la singularidad de la matriz  $E$ .

Para los valores propios finitos del Jacobiano, podemos escribir  $J v = \lambda E v$  y  $v = (v^d, v^a)$  donde el tamaño del vector  $v^d$  es el número de variables dinámicas y  $v^a$  es de tamaño igual al número de variables algebraicas. Se ha probado [41] que para cualquier tripleta  $(\lambda, v^d, v^a)$  que satisface (3.18), el par  $(\lambda, v^d)$  satisface (3.17). También si  $(\lambda, v^d)$  satisface el sistema reducido, entonces  $(\lambda, v^d, v^a)$  satisface el sistema completo con  $v^a = -J_{22}^{-1} J_{21} v^d$ , así los valores propios finitos de  $J$  son los modos del sistema.

Ahora probaremos que los valores propios finitos de  $J$  son los valores propios finitos de  $Q$ . Sea  $v$  un vector propio  $\lambda$ , es decir,  $J v = \lambda E$ . Entonces de (3.13-3.15)

$$\lambda v_i = v_{(2n-m)+i}, \quad (3.19)$$

$$\lambda v_{(2n-m)+i} = -\frac{d_i}{m_i} v_{(2n-m)+i} - \sum_{j=1}^{2n-m} \frac{L_{ij}}{m_i} v_j, \quad (3.20)$$

$$0 = -\sum_{j=1}^{2n-m} L_{ij} v_j. \quad (3.21)$$

Usando (3.19) en (3.20) y multiplicando por  $m_i$

$$\lambda^2 m_i v_i + \lambda d_i v_i + \sum_{j=1}^{n+m} L_{ij} v_j = 0, \quad (3.22)$$

$$\sum_{j=1}^{n+m} L_{ij} v_j = 0. \quad (3.23)$$

Pero (3.22-3.23) es (3.11). Entonces los vectores propios  $x$  del problema cuadrático de valores propios con valor propio finito  $\lambda$  corresponde al vector propio  $v = (\lambda x_g, x)$  de  $J$ , donde  $x_g$  es el vector compuesto por las entradas de  $x$  que corresponden a los ángulos de los generadores.

Como mencionamos al inicio de este capítulo estamos interesados en cuantificar como el redespacho puede suprimir las oscilaciones entre áreas, por lo cual calcularemos la sensibilidad de los modos electromecánicos  $\lambda$  en la siguiente sección.

### 3.4. Sensibilidad de $\lambda$ : diferencial

En esta sección calculamos la sensibilidad de los modos electromecánicos no resonantes (es decir, de los modos que tienen multiplicidad algebraica igual a 1) del sistema a partir de (3.12). Suponiendo que  $M$  y  $D$  son matrices con entradas constantes, calculamos el diferencial de (3.12) y usando (3.11)

$$\begin{aligned} 0 &= d(x^T Q x) = (dx^T) Q x + x^T (dQ) x + x^T Q dx \\ &= x^T (dQ) x = x^T (d(\lambda^2 M + \lambda D + L)) x \\ &= 2\lambda x^T M x d\lambda + x^T D x d\lambda + x^T (dL) x. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Resolviendo para  $d\lambda$ , se obtiene

$$d\lambda = -\frac{x^T dL x}{2\lambda x^T M x + x^T D x}. \quad (3.25)$$

(3.25) captura la sensibilidad a primer orden del modo  $\lambda$ . Nótese que  $d\lambda$  depende del vector propio  $x$ , pero no de sus derivadas. Esto significa que para los cambios a primer orden de un modo no se necesita tomar en cuenta las variaciones de su modo shape, sin embargo el cambio del modo es proporcional

a los cambios en el sistema ( $dL$ ) causados por el redespacho de generación. El denominador de (3.25) puede ser definido por el número complejo

$$\alpha = 2\lambda x^T M x + x^T D x. \quad (3.26)$$

tal que sustituyendo en (3.25), da como resultado

$$d\lambda = -\frac{x^T dL x}{\alpha}. \quad (3.27)$$

Dado un modo  $\lambda$ , los parámetros dinámicos del generador y el valor propio  $\lambda$  sólo aparecen en el denominador de (3.27), el cual es común a todos los redespachos.

Como (3.27) depende del diferencial del Laplaciano en las siguientes subsecciones calcularemos  $dL$ .

### 3.4.1. Nuevas coordenadas relacionadas a las líneas de transmisión

Sabemos que el cambio del valor propio es proporcional al cambio del Laplaciano del sistema  $dL$ .  $L$  contiene toda la información del sistema mallado, es decir,  $L$  describe aspectos de la potencia que fluye a través de cada una de las líneas de transmisión del sistema mallado. Esto sugiere calcular  $L$  en términos de coordenadas que estén relacionadas a las líneas de transmisión del circuito y no de coordenadas que estén relacionadas a los buses del sistema. Por esta razón definimos un nuevo conjunto de coordenadas  $z' = (\theta, \nu)$  que están relacionadas a las líneas de transmisión y calcularemos  $L$  en función de tales coordenadas.  $z'$  es un vector de tamaño  $2\ell$  donde  $\ell$  es el número de líneas de transmisión en el sistema mallado. Para la línea  $k$  que une los buses  $i$  y  $j$  las variables  $\theta_k$  y  $\nu_k$  están definidas como

$$\theta_k = \sum_{r=1}^n A_{rk} \delta_r = \delta_i - \delta_j, \quad (3.28)$$

$$\nu_k = \sum_{r=1}^n |A_{rk}| \ln V_r = \ln(V_i V_j). \quad (3.29)$$

$\theta_k$  esta definida como la diferencia de los ángulos de voltaje de los buses (buses  $i$  y  $j$ ) que conecta la línea  $k$  y  $\nu_k$  es el logaritmo del producto de las magnitudes de los voltajes de los buses que conecta la línea  $k$ . Nótese que el cambio de coordenadas es no lineal.

$$(\theta, \nu) = h(\delta, V), \quad \circ \quad (3.30)$$

$$z' = h(z). \quad (3.31)$$

El Jacobiano del cambio de coordenadas  $h$  es una matriz de tamaño  $2\ell \times (2n - m)$

$$H = \frac{\partial h}{\partial z}, \quad (3.32)$$

con entradas

$$H_{ki} = \begin{cases} A_{ik}, & i = 1, \dots, n \\ 0, & i = m + 1, \dots, n \end{cases}, \quad k = 1, \dots, \ell, \quad (3.33)$$

$$H_{ki} = \begin{cases} 0, & i = 1, \dots, n \\ \frac{|A_{ik}|}{V_i}, & i = m + 1, \dots, n \end{cases}, \quad k = \ell + 1, \dots, 2\ell. \quad (3.34)$$

(3.34) depende de la magnitud del voltaje en el nodo de carga  $V_i$ . El vector propio  $x = (x_\delta, x_V)$  se transforma en el vector propio  $x' = (x'_\theta, x'_\nu)$  de acuerdo a

$$x' = Hx. \quad (3.35)$$

Para todo  $k = 1, \dots, \ell$ ,

$$\begin{aligned} x'_{\theta_k} &= \sum_{r=1}^n A_{rk} x_{\delta_r} \\ &= \begin{cases} x_{\delta_i} - x_{\delta_j} & \text{si el bus } i \text{ es el bus emisor de flujo en la línea } k, \\ x_{\delta_j} - x_{\delta_i} & \text{si el bus } i \text{ es el bus receptor de flujo en la línea } k. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned}
x'_{\nu_k} &= \sum_{r=m+1}^n \frac{|A_{rk}|}{V_r} x_{V_r} \\
&= \begin{cases} \frac{x_{V_i}}{V_i} + \frac{x_{V_j}}{V_j} & \text{si la línea } k \text{ une el bus de carga } i \text{ al bus de carga } j, \\ \frac{x_{V_i}}{V_i} & \text{si la línea } k \text{ une el bus de carga } i \text{ al bus generador } j. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

(En (3.37) podemos despreciar el caso en que dos generadores están conectados por una línea. Este caso puede ser excluido al combinar en un solo bus todos los generadores que están detrás de un transformador.)

Nótese que para sistemas radiales con un solo generador el número de variables  $\theta_i$  es igual al número de grados de libertad y el número de variables  $\nu_i$  es igual al número de variables  $V_i$ , pero si el sistema tiene más de un generador, el número de variables  $\nu_i$  no es igual al número de variables  $V_i$ .

Para sistemas mallados el número de nuevas variables  $z'_i$  es mayor que el número de variables  $z_i$ . Esperamos abordar esta cuestión en el trabajo futuro.

En las nuevas coordenadas las componentes de la matriz Laplaciana son

$$L'_{ij} = \frac{\partial^2 R}{\partial z'_i \partial z'_j}, \tag{3.38}$$

$L'$  es una matriz de tamaño  $2\ell \times 2\ell$ . A través de la función escalar  $R$  calcularemos como se transforman las derivadas parciales, es decir, calcularemos las derivadas parciales con respecto a las coordenadas  $z'$  en función de las coordenadas  $z$ .

$$dR = \sum_{i=1}^{2n-m} \frac{\partial R}{\partial z_i} dz_i = \sum_{k=1}^{2\ell} \frac{\partial R}{\partial z'_k} dz'_k, \quad \text{usando (3.31-3.32),} \tag{3.39}$$

$$= \sum_{k=1}^{2\ell} \frac{\partial R}{\partial z'_k} \left\{ \sum_{i=1}^{2n-m} H_{ki} dz_i \right\} = \sum_{i=1}^{2n-m} \sum_{k=1}^{2\ell} H_{ik} \frac{\partial R}{\partial z'_k} dz_i, \tag{3.40}$$

Entonces las derivadas parciales se transforman de acuerdo a

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \sum_{k=1}^{2\ell} H_{ik} \frac{\partial}{\partial z'_k}. \quad (3.41)$$

Así las componentes de  $L$  y  $L'$  se relacionan a través de

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \frac{\partial^2 R}{\partial z_i \partial z_j} \\ &= \sum_{h,k=1}^{2\ell} H_{ih} H_{kj} \frac{\partial^2 R}{\partial z'_h \partial z'_k} = \sum_{h,k=1}^{2\ell} H_{ih} H_{kj} L'_{hk}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

o

$$L = H^T L' H. \quad (3.43)$$

por lo cual

$$dL = d(H^T L' H) = H^T (dL') H + 2H^T L' dH. \quad (3.44)$$

En la siguiente sección calcularemos (3.44).

### 3.4.2. Calculando $dL$

En esta sección el objetivo es calcular el lado derecho de la expresión (3.44). Para hacerlo escribiremos  $R$  (3.3), en términos de  $z'$  pero note que  $R$  esta compuesta de manera natural en una parte relacionada a las líneas de transmisión y otra parte relacionada a los buses del sistema. Como  $z'$  está relacionada a las líneas de transmisión, expresaremos solo la primera suma de  $R$  en términos de  $z'$  y mantendremos la segunda en términos de las coordenadas relacionadas a los buses, es decir,

$$R = R_{\text{line}} + R_{\text{bus}}, \quad (3.45)$$

donde

$$R_{\text{line}} = - \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j, i \sim j}} b_{ij} V_i V_j \cos(\delta_i - \delta_j), \quad (3.46)$$

$$R_{\text{bus}} = - \sum_i^n (P_i \delta_i + \frac{1}{2} b_{ii} V_i^2 + Q_i \ln V_i). \quad (3.47)$$

Correspondientemente

$$L = L_{\text{line}} + L_{\text{bus}}, \quad (3.48)$$

donde

$$L_{\text{line}} = \frac{\partial^2 R_{\text{line}}}{\partial z^2}, \quad (3.49)$$

$$L_{\text{bus}} = \frac{\partial^2 R_{\text{bus}}}{\partial z^2}. \quad (3.50)$$

Nótese que  $R_{\text{bus}}$  contribuye sólo con términos de la diagonal de  $L$  que están relacionados con las variables algebraicas  $V_i$ . Calculando el diferencial de  $L$  a partir de (3.48)

$$dL = dL_{\text{line}} + dL_{\text{bus}}. \quad (3.51)$$

En la subsección 3.4.3 calcularemos  $dL_{\text{line}}$  en términos de las nuevas coordenadas  $\theta$  y  $V$  y calcularemos  $dL_{\text{bus}}$  en términos de las coordenadas  $\delta$  y  $V$ .

### 3.4.3. Calculando $dL_{\text{line}}$

De (3.43)

$$L_{\text{line}} = H^T L'_{\text{line}} H. \quad (3.52)$$

entonces

$$\begin{aligned} dL_{\text{line}} &= d(H^T L'_{\text{line}} H) \\ &= 2H^T L'_{\text{line}} dH + H^T (dL'_{\text{line}}) H. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Primero calcularemos  $L'_{\text{line}}$ . Escribiendo  $R_{\text{line}}$  en las coordenadas relacionadas con las líneas de transmisión dadas por (3.28) y (3.29), se obtiene

$$R'_{\text{line}} = - \sum_{k=1}^{\ell} b_k e^{\nu_k} \cos \theta_k. \quad (3.54)$$

Como  $R_{\text{line}}$  es una función escalar,  $R'_{\text{line}} = R_{\text{line}}$ . Entonces

$$L'_{\text{line}} = \frac{\partial^2 R'_{\text{line}}}{\partial z'^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 R'_{\text{line}}}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 R'_{\text{line}}}{\partial \theta \partial \nu} \\ \frac{\partial^2 R'_{\text{line}}}{\partial \nu \partial \theta} & \frac{\partial^2 R'_{\text{line}}}{\partial \nu^2} \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Conviene definir para la línea  $k$  las cantidades

$$p_k = b_k e^{\nu_k} \sin \theta_k, \quad (3.56)$$

$$q_k = -b_k e^{\nu_k} \cos \theta_k. \quad (3.57)$$

$p_k$  es el flujo de potencia real a través de la línea  $k$  y  $q_k$  es parte del flujo de potencia reactiva a través de la línea  $k$ . Así

$$\frac{\partial^2 R'_{\text{line}}}{\partial \theta_k^2} = b_k e^{\nu_k} \cos \theta_k = -q_k, \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial^2 R'_{\text{line}}}{\partial \theta_k \partial \nu_k} = b_k e^{\nu_k} \sin \theta_k = p_k, \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial^2 R'_{\text{line}}}{\partial \nu_k^2} = -b_k e^{\nu_k} \cos \theta_k = q_k. \quad (3.60)$$

Las submatrices de  $L'_{\text{line}}$  en (3.55) se convierten en las matrices diagonales

$$\frac{\partial^2 R'_{\text{line}}}{\partial \theta^2} = -\text{diag}\{q_1, q_2, \dots, q_\ell\}, \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial^2 R'_{\text{line}}}{\partial \theta \partial \nu} = \text{diag}\{p_1, p_2, \dots, p_\ell\}, \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial^2 R'_{\text{line}}}{\partial \nu^2} = \text{diag}\{q_1, q_2, \dots, q_\ell\}. \quad (3.63)$$

Las correspondientes submatrices de  $dL'_{\text{line}}$  son

$$d \left( \frac{\partial^2 R'_{\text{line}}}{\partial \theta^2} \right) = -\text{diag}\{dq_1, dq_2, \dots, dq_\ell\}, \quad (3.64)$$

$$d \left( \frac{\partial^2 R'_{\text{line}}}{\partial \theta \partial \nu} \right) = \text{diag}\{dp_1, dp_2, \dots, dp_\ell\}, \quad (3.65)$$

$$d \left( \frac{\partial^2 R'_{\text{line}}}{\partial \nu^2} \right) = \text{diag}\{dq_1, dq_2, \dots, dq_\ell\}. \quad (3.66)$$

#### 3.4.4. Calculando $dH$

Ahora calcularemos la matriz  $dH$ . De (3.33) y (3.34) se tiene que las entradas no nulas de  $dH$  son las entradas que corresponden a (3.34), es decir,

$$dH_{ki} = -\frac{dV_i}{V_i^2} |A_{ik}|, \quad i = m+1, \dots, n, \quad k = \ell+1, \dots, 2\ell. \quad (3.67)$$

Definiendo  $V_i^{\ln} = \ln V_i$

$$dV_i^{\ln} = d(\ln V_i) = \frac{dV_i}{V_i}. \quad (3.68)$$

Con (3.68) en mente, las componentes no nulas de (3.67) son

$$dH_{ki} = -\frac{dV_i^{\ln}}{V_i} |A_{ik}|, \quad i = m+1, \dots, n, \quad k = \ell+1, \dots, 2\ell. \quad (3.69)$$

### 3.4.5. Calculando $dL_{\text{bus}}$

Utilizaremos (3.50) para calcular  $L_{\text{bus}}$ . Así las componentes de la matriz  $L_{\text{bus}}$  son

$$(L_{\text{bus}})_{ij} = \begin{cases} -b_{ii} + \frac{Q_i}{V_i^2} & \text{si } i = j \text{ y } i = m+1, \dots, n. \\ 0 & \text{Cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (3.70)$$

Usando (3.68),

$$(dL_{\text{bus}})_{ij} = \begin{cases} -\frac{2Q_i}{V_i^2} dV_i^{\ln} & \text{si } i = j \text{ y } i = m+1, \dots, n. \\ 0 & \text{Cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (3.71)$$

### 3.4.6. Calculando $x^T dLx$

En esta sección calcularemos  $x^T dLx$ . De (3.51)

$$x^T dLx = x^T (dL_{\text{line}})x + x^T (dL_{\text{bus}})x. \quad (3.72)$$

Primero calcularemos  $x^T (dL_{\text{line}})x$  usando (3.53):

$$\begin{aligned} x^T (dL_{\text{line}})x &= x^T [H^T (dL'_{\text{line}})H + 2H^T L'_{\text{line}} dH]x \\ &= x^T (dL'_{\text{line}})x' + 2x'^T L'_{\text{line}} (dH)x. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Entonces

$$x'^T (dL'_{\text{line}})x' = (x'_\theta, x'_\nu) \begin{pmatrix} d\left(\frac{\partial^2 R_{\text{line}}}{\partial \theta^2}\right) & d\left(\frac{\partial^2 R_{\text{line}}}{\partial \theta \partial \nu}\right) \\ d\left(\frac{\partial^2 R_{\text{line}}}{\partial \theta \partial \nu}\right) & d\left(\frac{\partial^2 R_{\text{line}}}{\partial \nu^2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_\theta \\ x'_\nu \end{pmatrix}$$

y usando (3.64-3.66) en la ecuación anterior, se obtiene

$$x'^T (dL'_{\text{line}})x' = \sum_{k=1}^{\ell} [(x'_{\nu_k})^2 - (x'_{\theta_k})^2] dq_k + 2 \sum_{k=1}^{\ell} x'_{\theta_k} x'_{\nu_k} dp_k. \quad (3.74)$$

Ahora calcularemos  $2x'^T L'_{\text{line}}(dH)x$ .

De (3.69), las primeras  $k$  entradas de  $(dH)x$  son cero y las últimas  $k$  son

$$(dH)x = \begin{pmatrix} 0 \\ c_{\nu} \end{pmatrix}, \quad (3.75)$$

Escribiendo  $x_{V_i}^{\text{ln}} = \frac{x_{V_i}}{V_i}$ ,

$$c_{\nu_k} = - \sum_{i=m+1}^n x_{V_i}^{\text{ln}} dV_i^{\text{ln}} |A_{ik}|, \quad k = \ell + 1, \dots, 2\ell. \quad (3.76)$$

Ahora

$$2x'^T (L'_{\text{line}})(dH)x = 2(x'_{\theta}, x'_{\nu}) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 R_{\text{line}}}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 R_{\text{line}}}{\partial \theta \partial \nu} \\ \frac{\partial^2 R_{\text{line}}}{\partial \theta \partial \nu} & \frac{\partial^2 R_{\text{line}}}{\partial \nu^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c_{\nu} \end{pmatrix},$$

y usando (3.58-3.60),

$$\begin{aligned} &= 2 \sum_{k=1}^{\ell} (x'_{\theta_k} p_k + x'_{\nu_k} q_k) c_{\nu_k} \\ &= - \sum_{i=m+1}^n \left\{ 2 \sum_{k=1}^{\ell} |A_{ik}| (x'_{\theta_k} p_k + x'_{\nu_k} q_k) x_{V_i}^{\text{ln}} \right\} dV_i^{\text{ln}}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

De (3.74) y (3.77),

$$\begin{aligned} x^T (dL_{\text{line}})x &= \sum_{k=1}^{\ell} [(x'_{\nu_k})^2 - (x'_{\theta_k})^2] dq_k + 2 \sum_{k=1}^{\ell} x'_{\theta_k} x'_{\nu_k} dp_k \\ &\quad - \sum_{i=m+1}^n \left\{ 2 \sum_{k=1}^{\ell} |A_{ik}| (x'_{\theta_k} p_k + x'_{\nu_k} q_k) x_{V_i}^{\text{ln}} \right\} dV_i^{\text{ln}}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Por último calcularemos  $x^T(dL_{\text{bus}})x$ . De (3.71),

$$x^T(dL_{\text{bus}})x = - \sum_{i=m+1}^n 2(x_{V_i}^{\text{ln}})^2 Q_i dV_i^{\text{ln}}. \quad (3.79)$$

De (3.78) y (3.79)

$$\begin{aligned} x^T dLx &= \sum_{k=1}^{\ell} [(x'_{\nu_k})^2 - (x'_{\theta_k})^2] dq_k + 2 \sum_{k=1}^{\ell} x'_{\theta_k} x'_{\nu_k} dp_k \\ &\quad - \sum_{i=m+1}^n \left\{ 2 \sum_{k=1}^{\ell} |A_{ik}| (x'_{\theta_k} p_k + x'_{\nu_k} q_k) x_{V_i}^{\text{ln}} \right\} dV_i^{\text{ln}} \\ &\quad - \sum_{i=m+1}^n 2(x_{V_i}^{\text{ln}})^2 Q_i dV_i^{\text{ln}}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Expresando  $dp_k$  y  $dq_k$  en términos de  $d\theta_k$ ,  $dV_i^{\text{ln}}$  y  $dV_j^{\text{ln}}$ ,

$$dp_k = -q_k d\theta_k + p_k dV_i^{\text{ln}} + p_k dV_j^{\text{ln}}, \quad (3.81)$$

$$dq_k = p_k d\theta_k + q_k dV_i^{\text{ln}} + q_k dV_j^{\text{ln}}. \quad (3.82)$$

Sustituyendo (3.81) y (3.82) en (3.80) y reordenando términos

$$\begin{aligned}
x^T dLx &= \sum_{k=1}^{\ell} [(x'_{\nu_k})^2 - (x'_{\theta_k})^2] (p_k d\theta_k + q_k dV_i^{\text{ln}} + q_k dV_j^{\text{ln}}) \\
&+ 2 \sum_{k=1}^{\ell} x'_{\theta_k} x'_{\nu_k} (-q_k d\theta_k + p_k dV_i^{\text{ln}} + p_k dV_j^{\text{ln}}) \\
&- \sum_{i=m+1}^n \left\{ 2 \sum_{k=1}^{\ell} |A_{ik}| (x'_{\theta_k} p_k + x'_{\nu_k} q_k) x_{V_i}^{\text{ln}} \right\} dV_i^{\text{ln}} \\
&- \sum_{i=m+1}^n 2 (x_{V_i}^{\text{ln}})^2 Q_i dV_i^{\text{ln}} \\
&= \sum_{k=1}^{\ell} \{ [(x'_{\nu_k})^2 - (x'_{\theta_k})^2] p_k - 2x'_{\theta_k} x'_{\nu_k} q_k \} d\theta_k \\
&+ \sum_{i=m+1}^n \sum_{k=1}^{\ell} |A_{ik}| \{ x'_{\nu_k} [x'_{\nu_k} - 2x_{V_i}^{\text{ln}}] - (x'_{\theta_k})^2 \} q_k dV_i^{\text{ln}} \\
&+ \sum_{i=m+1}^n \sum_{k=1}^{\ell} |A_{ik}| \{ x'_{\nu_k} - x_{V_i}^{\text{ln}} \} 2x'_{\theta_k} p_k dV_i^{\text{ln}} \\
&- \sum_{i=m+1}^n 2 (x_{V_i}^{\text{ln}})^2 Q_i dV_i^{\text{ln}}. \tag{3.83}
\end{aligned}$$

Definiendo

$$C_{q_k} = x'_{\nu_k} (x'_{\nu_k} - 2x_{V_i}^{\text{ln}}) - (x'_{\theta_k})^2, \tag{3.84}$$

$$C_{p_k} = 2x'_{\theta_k} (x'_{\nu_k} - x_{V_i}^{\text{ln}}), \tag{3.85}$$

$$C_{Q_i} = -2 (x_{V_i}^{\text{ln}})^2. \tag{3.86}$$

Nótese que  $C_{p_k} \neq 0$  sólo en el caso en el que la línea  $k$  conecta dos buses de

carga. Sustituyendo (3.84-3.86) en (3.83),

$$\begin{aligned}
 x^T dLx &= \sum_{k=1}^{\ell} \{[(x'_{\nu_k})^2 - (x'_{\theta_k})^2]p_k - 2x'_{\theta_k} x'_{\nu_k} q_k\} d\theta_k \\
 &+ \sum_{i=m+1}^n \left\{ \sum_{k=1}^{\ell} |A_{ik}|(C_{q_k} q_k + C_{p_k} p_k) + C_{Q_i} Q_i \right\} dV_i^{\text{ln}}. \quad (3.87)
 \end{aligned}$$

La expresión (3.87) es el numerador de (3.27) tal que la fórmula final es

$$\begin{aligned}
 d\lambda &= -\frac{x^T dLx}{\alpha} \\
 &= -\frac{1}{\alpha} \left\{ \sum_{k=1}^{\ell} \{[(x'_{\nu_k})^2 - (x'_{\theta_k})^2]p_k - 2x'_{\theta_k} x'_{\nu_k} q_k\} d\theta_k \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=m+1}^n \left[ \sum_{k=1}^{\ell} |A_{ik}|(C_{q_k} q_k + C_{p_k} p_k) + C_{Q_i} Q_i \right] dV_i^{\text{ln}} \right\}, \quad (3.88)
 \end{aligned}$$

Por conveniencia volvemos a escribir (A.66)

$$\alpha = 2\lambda x^T Mx + x^T Dx. \quad (3.89)$$

Como comentarios generales sobre (3.88) tenemos:

- El redespacho de generación resulta en los cambios  $d\theta$  y  $dV^{\text{ln}}$  y afectan sólo al numerador de (3.88). El denominador  $\alpha$  depende de los parámetros del generador, el valor propio  $\lambda$  y el vector propio  $x$  y es el mismo para todos los redespachos. Así después de considerar el efecto del denominador sobre todos los redespachos de generación, podemos determinar la efectividad o ineffectividad de los despachos de generación por su influencia en el numerador.
- El numerador depende del redespacho vía los cambios en los ángulos a través de las líneas  $d\theta$  y de los cambios en la magnitud del voltaje para los nodos de carga  $dV^{\text{ln}}$ . Los coeficientes de  $d\theta$  dependen del vector propio  $x$  del modo expresado en las coordenadas relacionadas a las líneas de transmisión y en el flujo de potencia activa y reactiva. Los coeficientes de  $dV^{\text{ln}}$  además dependen de la potencia reactiva demandada por las cargas.

- Para encontrar un redespacho de generación que mejore el amortiguamiento del modo  $\lambda$  necesitamos identificar las  $k$  líneas que tienen coeficientes  $d\theta_k$  de magnitud y signo adecuados y entonces encontrar un redespacho que cambie de manera adecuada  $\theta_k$  en tales líneas. Si el redespacho también afecta la magnitud de los voltajes de carga, también se debe considerar  $dV^{\text{ln}}$  y los coeficientes  $dV^{\text{ln}}$ .
- En (3.88), el cambio en el valor propio está dado por un número complejo. En práctica, para mantener la estabilidad oscilatoria estamos más interesados en el cambio del amortiguamiento (en la parte real de  $d\lambda$ ) o en el cambio del coeficiente de amortiguamiento.
- La sensibilidad de un modo depende linealmente del flujo de potencia activa y reactiva a través de las líneas del circuito evaluados en el punto de equilibrio. En el caso de los buses de carga la potencia constante reactiva que demandan también afecta la sensibilidad del modo.
- La fórmula (3.88) es independiente de los cambios del vector propio  $x$ .

En la siguiente sección vamos a relacionar el redespacho a los cambios  $d\theta$  and  $dV_i^{\text{ln}}$ .

### 3.5. Relacionando el redespacho con $d\theta$ y $dV_i^{\text{ln}}$

La fórmula (3.88) relaciona el diferencial del modo  $d\lambda$  con  $d\theta$  y  $dV_i^{\text{ln}}$ . Nos queda por expresar  $d\theta$  y  $dV_i^{\text{ln}}$  en términos del redespacho  $dP$ , esto lo haremos usando las ecuaciones de flujo de potencia (también llamadas de carga) linealizadas. Las ecuaciones linealizadas del flujo de carga son

$$\sum_{j=1}^{2n-m} L_{ij} dz_j = dP_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.90)$$

$$\sum_{j=1}^{2n-m} L_{ij} dz_j = 0, \quad i = m + 1, \dots, n. \quad (3.91)$$

donde  $dz = (d\delta, dV)^T$ . En forma matricial

$$Ldz = \begin{pmatrix} dP \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.92)$$

Entonces podemos usar la inversa generalizada Moore-Penrose de  $L$  (indicada por  $\dagger$ ) para obtener

$$\begin{pmatrix} d\delta \\ dV \end{pmatrix} = dz = L^\dagger \begin{pmatrix} dP \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

Entonces  $d\theta$  y  $dV^{\text{ln}}$  se obtienen fácilmente:

$$d\theta_k = \sum_{r=1}^n A_{rk} d\delta_r, \quad k = 1, \dots, \ell. \quad (3.94)$$

$$dV_i^{\text{ln}} = \frac{dV_i}{V_i}, \quad i = m + 1, \dots, n. \quad (3.95)$$

En la siguiente sección ilustraremos el cálculo de  $d\lambda$  en términos de las nuevas coordenadas relacionadas a las líneas de transmisión en un pequeño sistema compuesto por tres buses.

### 3.6. Calculando $d\lambda$ para un sistema de 3 buses

Para mostrar un ejemplo de la deducción de  $d\lambda$  en las nuevas coordenadas usaremos el sistema sencillo de tres buses que se muestra en la Fig. 3.1. El bus 1 es un bus generador, el bus 2 es un punto de conexión y el bus 3 es un bus de carga.

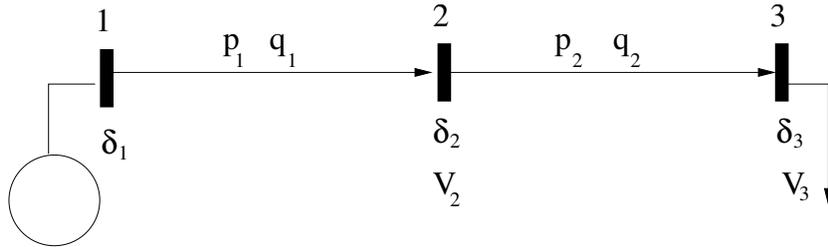


Figura 3.1: Sistema de tres buses. Bus 1 es un bus generador, bus 2 es un bus de conexión y bus 3 es un bus de carga.

Para este sistema pequeño  $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)^T$  y  $V = (V_2, V_3)^T$ , así  $z = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, V_2, V_3)^T$ .

La matriz de incidencia para el circuito es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.96)$$

Las coordenadas  $z' = (\theta, \nu)$  son

$$\theta = A^T \delta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad (3.97)$$

$$\nu = |A^T| \begin{pmatrix} \ln V_1 \\ \ln V_2 \\ \ln V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln V_1 \\ \ln V_2 \\ \ln V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}. \quad (3.98)$$

La matriz de transformación  $H$  es

$$H = \frac{\partial h}{\partial z} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{V_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{V_2} & \frac{1}{V_3} \end{pmatrix}. \quad (3.99)$$

Un vector propio  $(x_{\delta_1}, x_{\delta_2}, x_{\delta_3}, x_{\nu_2}, x_{\nu_3})^T$  se transforma como

$$\begin{aligned} x' = Hx &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{V_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{V_2} & \frac{1}{V_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\delta_1} \\ x_{\delta_2} \\ x_{\delta_3} \\ x_{\nu_2} \\ x_{\nu_3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{\delta_1} - x_{\delta_2} \\ x_{\delta_2} - x_{\delta_3} \\ \frac{x_{\nu_2}}{V_2} \\ \frac{x_{\nu_2}}{V_2} + \frac{x_{\nu_3}}{V_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_{\theta_1} \\ x'_{\theta_2} \\ x'_{\nu_1} \\ x'_{\nu_2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

La energía potencial del sistema es

$$R = R_{\text{line}} + R_{\text{bus}} = - \sum_{\substack{(i,j)= \\ (1,2),(2,3)}} b_{ij} V_i V_j \cos(\delta_i - \delta_j) - \sum_{i=1}^3 (P_i \delta_i + \frac{1}{2} b_{ii} V_i^2 + Q_i \ln V_i). \quad (3.101)$$

Expresando  $R_{\text{line}}$  en las coordenadas  $z'$  se tiene

$$R = R'_{\text{line}} + R_{\text{bus}} = - \sum_{k=1}^2 b_k e^{\nu_k} \cos \theta_k - \sum_{i=1}^3 (P_i \delta_i + \frac{1}{2} b_{ii} V_i^2 + Q_i \ln V_i). \quad (3.102)$$

Para calcular la sensibilidad del modo, primero calcularemos  $x^T dLx$  que es el numerador de (3.27). De (3.72)  $x^T dLx = x^T (dL_{\text{line}})x + x^T (dL_{\text{bus}})x$ . Trabajando con el primer término, de acuerdo a (3.73) tenemos que calcular  $L'_{\text{line}}$ ,  $dL'_{\text{line}}$  y  $(dH)x$ .

$$L'_{\text{line}} = \begin{pmatrix} b_1 e^{\nu_1} \cos \theta_1 & 0 & b_1 e^{\nu_1} \sin \theta_1 & 0 \\ 0 & b_2 e^{\nu_2} \cos \theta_2 & 0 & b_2 e^{\nu_2} \sin \theta_2 \\ b_1 e^{\nu_1} \sin \theta_1 & 0 & -b_1 e^{\nu_1} \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & b_2 e^{\nu_2} \sin \theta_2 & 0 & -b_2 e^{\nu_2} \cos \theta_2 \end{pmatrix} \quad (3.103)$$

y usando (3.56) y (3.57),

$$= \begin{pmatrix} -q_1 & 0 & p_1 & 0 \\ 0 & -q_2 & 0 & p_2 \\ p_1 & 0 & q_1 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & q_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$dL'_{\text{line}} = \begin{pmatrix} -dq_1 & 0 & dp_1 & 0 \\ 0 & -dq_2 & 0 & dp_2 \\ dp_1 & 0 & dq_1 & 0 \\ 0 & dp_2 & 0 & dq_2 \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

y

$$x'^T dL'_{\text{line}} x' = \begin{pmatrix} x'_{\theta_1} \\ x'_{\theta_2} \\ x'_{\nu_1} \\ x'_{\nu_2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -dq_1 & 0 & dp_1 & 0 \\ 0 & -dq_2 & 0 & dp_2 \\ dp_1 & 0 & dq_1 & 0 \\ 0 & dp_2 & 0 & dq_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_{\theta_1} \\ x'_{\theta_2} \\ x'_{\nu_1} \\ x'_{\nu_2} \end{pmatrix} \quad (3.105)$$

$$= \sum_{k=1}^2 [(x'_{\nu_k})^2 - (x'_{\theta_k})^2] dq_k + 2 \sum_{k=1}^2 x'_{\theta_k} x'_{\nu_k} dp_k. \quad (3.106)$$

Ahora calculando  $2x'^T L(dH)x$ 

$$dH = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{dV_2}{V_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{dV_2}{V_2^2} & -\frac{dV_3}{V_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{dV_2^{\text{ln}}}{V_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{dV_2^{\text{ln}}}{V_2} & -\frac{dV_3^{\text{ln}}}{V_3} \end{pmatrix}. \quad (3.107)$$

Entonces  $(dH)x$  es

$$dHx = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{dV_2^{\text{ln}}}{V_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{dV_2^{\text{ln}}}{V_2} & -\frac{dV_3^{\text{ln}}}{V_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\delta_1} \\ x_{\delta_2} \\ x_{\delta_3} \\ x_{V_2} \\ x_{V_3} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_{V_2}^{\text{ln}} dV_2^{\text{ln}} \\ -x_{V_2}^{\text{ln}} dV_2^{\text{ln}} - x_{V_3}^{\text{ln}} dV_3^{\text{ln}} \end{pmatrix} \quad (3.108)$$

y

 $2x'^T LdHx =$ 

$$2 \begin{pmatrix} x'_{\theta_1} \\ x'_{\theta_2} \\ x'_{\nu_1} \\ x'_{\nu_2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -q_1 & 0 & p_1 & 0 \\ 0 & -q_2 & 0 & p_2 \\ p_1 & 0 & q_1 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_{V_2}^{\text{ln}} dV_2^{\text{ln}} \\ -x_{V_2}^{\text{ln}} dV_2^{\text{ln}} - x_{V_3}^{\text{ln}} dV_3^{\text{ln}} \end{pmatrix} \\ = - \sum_{i=2}^3 \left\{ 2 \sum_{k=1}^2 |A_{ik}| (x'_{\theta_k} p_k + x'_{\nu_k} q_k) (x_{V_i}^{\text{ln}}) \right\} dV_i^{\text{ln}}. \quad (3.109)$$

De (3.106) y (3.109),

$$x^T dL_{\text{line}}x = \sum_{k=1}^2 [(x'_{\nu_k})^2 - (x'_{\theta_k})^2] dq_k + 2 \sum_{k=1}^2 x'_{\theta_k} x'_{\nu_k} dp_k - \sum_{i=2}^3 \left\{ 2 \sum_{k=1}^2 |A_{ik}| (x'_{\theta_k} p_k + x'_{\nu_k} q_k) (x_{V_i}^{\text{ln}}) \right\} dV_i^{\text{ln}}. \quad (3.110)$$

Ahora calcularemos  $x^T (dL_{\text{bus}})x$ .

$$L_{\text{bus}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{33} + \frac{Q_3}{V_3^2} \end{pmatrix}, \quad (3.111)$$

y

$$dL_{\text{bus}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \frac{Q_3 dV_3^{\text{ln}}}{V_3^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \frac{Q_3 dV_3^{\text{ln}}}{V_3^3} \end{pmatrix}. \quad (3.112)$$

Entonces

$$x^T dL_{\text{bus}}x = -2 \left( x_{V_3}^{\text{ln}} \right)^2 Q_3 dV_3^{\text{ln}}. \quad (3.113)$$

De (3.110) y (3.113),

$$x^T dLx = \sum_{k=1}^2 [(x'_{\nu_k})^2 - (x'_{\theta_k})^2] dq_k + 2 \sum_{k=1}^2 x'_{\theta_k} x'_{\nu_k} dp_k - \sum_{i=2}^3 \left\{ 2 \sum_{k=1}^2 |A_{ik}| (x'_{\theta_k} p_k + x'_{\nu_k} q_k) (x_{V_i}^{\text{ln}}) \right\} dV_i^{\text{ln}} - 2 \left( x_{V_3}^{\text{ln}} \right)^2 Q_3 dV_3^{\text{ln}}. \quad (3.114)$$

De (3.81-3.82) y (3.84-3.86), (3.114) es

$$x^T dLx = \sum_{k=1}^2 \{ [(x'_{\nu_k})^2 - (x'_{\theta_k})^2] p_k - 2x'_{\theta_k} x'_{\nu_k} q_k \} d\theta_k \\ + \sum_{i=2}^3 \left\{ \sum_{k=1}^2 |A_{ik}| (C_{q_k} q_k + C_{p_k} p_k) + C_{Q_i} Q_i \right\} dV_i^{\ln}. \quad (3.115)$$

Entonces, la sensibilidad del valor propio es:

$$d\lambda = - \frac{x^T dLx}{\alpha} \\ - \frac{1}{\alpha} \left\{ \sum_{k=1}^2 \{ [(x'_{\nu_k})^2 - (x'_{\theta_k})^2] p_k - 2x'_{\theta_k} x'_{\nu_k} q_k \} d\theta_k \right. \quad (3.116)$$

$$\left. + \sum_{i=2}^3 \left[ \sum_{k=1}^2 |A_{ik}| (C_{q_k} q_k + C_{p_k} p_k) + C_{Q_i} Q_i \right] dV_i^{\ln} \right\}. \quad (3.117)$$

### 3.7. Caso especial: modo con nulo amortiguamiento

Para empezar a entender la fórmula general (3.88), es de gran ayuda considerar casos especiales. Dado un par  $(\lambda, x)$  y siguiendo [34], resolvemos la ecuación cuadrática  $\bar{x}^T Q(\lambda)x = 0$

$$\lambda = \begin{cases} -\frac{l(x)}{d(x)} & \text{si } m(x) = 0, \\ \frac{-d(x) \pm \sqrt{d(x)^2 - 4m(x)l(x)}}{2m(x)} & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases} \quad (3.118)$$

donde  $m(x) = \bar{x}^T Mx$ ,  $d(x) = \bar{x}^T Dx$  y  $l(x) = \bar{x}^T Lx$ . (3.118) es el único cálculo en la tesis que usa  $\bar{x}^T Q(\lambda)x = 0$  en lugar de  $x^T Q(\lambda)x = 0$ .

Nótese que  $M \geq 0$ ,  $D > 0$  y  $L \geq 0$  tenemos  $m(x) \geq 0$ ,  $d(x) > 0$  y  $l(x) \geq 0$  para todo  $x$ .

Si el modo tiene amortiguamiento nulo, es decir, si  $\lambda$  es puramente imaginario con  $\lambda = j\omega$ , entonces de (3.118)  $0 = d(x) = \bar{x}^T Dx = |\sqrt{D}x|^2$ . Así  $0 = \sqrt{D}x = Dx$  y (3.12) se reduce a la ecuación matricial  $(-\omega^2 M + L)x = 0$ . Esto

implica que el vector propio  $x$  es real y sus componentes están exactamente en fase o desfasadas  $180^\circ$ . Además

$$\alpha = j2\omega x^T M x, \quad (3.119)$$

$$\frac{-1}{\alpha} = j \frac{1}{2\omega x^T M x}, \quad (3.120)$$

y la expresión (3.88) se vuelve puramente imaginaria. Concluimos que en el caso que  $\lambda$  es puramente imaginaria, el cambio en los ángulos a través de las líneas y el cambio en la magnitud del voltaje en los nodos de carga no cambian el amortiguamiento del valor propio a primer orden, es decir, el redespacho no estabiliza o desestabiliza el punto de operación. El único cambio posible a primer orden en este caso se da para la frecuencia del modo. Esta conclusión aplica para modos con amortiguamiento muy pequeño. En el caso de valores propios no coincidentes, debido a que el vector propio  $x$  depende de los parámetros de manera suave, un modo ligeramente amortiguado tiene un vector propio  $x$  que es aproximadamente real y el efecto del redespacho sobre el amortiguamiento es muy pequeño.

### 3.8. Caso Especial: magnitud del voltaje constante

Otro caso especial en el cual la fórmula (3.88) se simplifica dramáticamente es cuando la magnitud del voltaje de cada uno de los buses del circuito es considerada constante, bajo esta suposición las ecuaciones diferenciales-algebraicas que describen la dinámica del sistema son (3.4). Entonces (3.83) se simplifica a

$$x^T dLx = - \sum_{k=1}^{\ell} (x'_{\theta_k})^2 p_k d\theta_k. \quad (3.121)$$

Sustituyendo (3.121) en (3.27), y definiendo  $\lambda = \sigma \pm j\omega$ , con  $\omega$  positivo,

$$d\lambda = d\sigma + jd\omega = - \frac{x^T dLx}{\alpha} = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{(x'_{\theta_k})^2 p_k}{\alpha} d\theta_k. \quad (3.122)$$

### 3.8.1. Caso: modo no amortiguado

Si la magnitud del voltaje se asume constante y  $\lambda$  es un modo del sistema con cero amortiguamiento, es decir,  $\lambda = \pm j\omega$ , entonces la sección 3.7 muestra que el vector propio  $x$  es real y  $\alpha = j2\omega x^T Mx$ , entonces (3.122) es

$$d\lambda = d\sigma + jd\omega = - \sum_{k=1}^{\ell} j \frac{(x'_{\theta_k})^2 p_k}{2\omega m} d\theta_k. \quad (3.123)$$

Nótese que  $(x'_{\theta_k})^2 p_k / (2\omega m)$  es un número real positivo

$$d\sigma = 0, \quad (3.124)$$

$$d\omega = - \sum_{k=1}^{\ell} \left[ \frac{(x'_{\theta_k})^2 p_k}{2\omega m} \right] d\theta_k. \quad (3.125)$$

De acuerdo con la sección 3.7, (3.124) implica que a primer orden no se da cambio en  $\sigma$ . Definiendo el número positivo  $(x'_{\theta_k})^2 p_k / 2\omega m = a_k$  y sustituyendo en (3.125)

$$d\omega = - \sum_{k=1}^{\ell} a_k \cdot d\theta_k = -a \cdot d\theta. \quad (3.126)$$

Nótese que si los vectores  $a$  y  $d\theta$  son paralelos, cada una de las entradas del vector  $a$  contribuyen a  $d\omega$ . ¿Qué entradas del vector  $a$  contribuirán más?. Responderemos esta pregunta en las siguientes subsecciones.

#### Modo no amortiguado: sistema de 3 buses

Para ilustrar el uso de la fórmula (3.122), analizaremos de manera cualitativa un sistema de tres buses. La Fig. 3.2 muestra el flujo de potencia y el patrón de oscilación de su modo no amortiguado.

El patrón del modo muestra que el generador 1 está oscilando en contra del generador 3. Siguiendo la descripción modal en [15], 1 y 3 son antinodos del sistema (puntos con gran amplitud de oscilación). El generador 2 no participa en la oscilación, por lo cual es un nodo (punto con cero amplitud de oscilación). En un sistema de potencia general los nodos y antinodos no necesariamente están localizados en los buses.

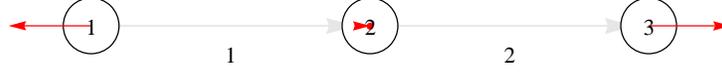


Figura 3.2: Las líneas grises que unen los buses muestran la magnitud del flujo de potencia con la escala de grises y la dirección del flujo con las flechas. Cada línea es numerada como lo muestra la figura. Las flechas rojas en cada bus muestran la oscilación del modo shape asociado con el valor propio crítico del sistema, es decir, muestran la magnitud y dirección de las entradas reales del vector propio derecho  $x$  asociado al valor propio crítico  $\lambda$ . Los buses 1, 2 y 3 son buses generadores.

De acuerdo a (3.125), la sensibilidad del valor propio crítico es

$$d\omega = - \left[ \frac{(x_{\delta_1} - x_{\delta_2})^2 p_1}{2\omega m} \right] d\theta_1 - \left[ \frac{(x_{\delta_2} - x_{\delta_3})^2 p_2}{2\omega m} \right] d\theta_2, \quad (3.127)$$

donde  $p_1 = b_1 V_1 V_2 \sin(\delta_1 - \delta_2)$  y  $p_2 = b_2 V_2 V_3 \sin(\delta_2 - \delta_3)$ . Como el flujo de potencia va del bus 1 al bus 2,  $\delta_1 > \delta_2$ , entonces  $p_1 > 0$  y de manera similar  $p_2 > 0$ . Como el bus 2 es un nodo  $x_{\delta_2} = 0$  y

$$d\omega = - \left[ \frac{x_{\delta_1}^2 p_1}{2\omega m} \right] d\theta_1 - \left[ \frac{x_{\delta_3}^2 p_2}{2\omega m} \right] d\theta_2. \quad (3.128)$$

Definiendo los números reales positivos  $a_1 = x_{\delta_1}^2 p_1 / (2\omega m)$ ,  $a_2 = x_{\delta_3}^2 p_2 / (2\omega m)$  y sustituyendo en (3.128),

$$d\omega = -a_1 d\theta_1 - a_2 d\theta_2 = -a \cdot d\theta, \quad (3.129)$$

donde  $a = (a_1, a_2)^T$ ,  $d\theta = (d\theta_1, d\theta_2)^T$ . Definiendo  $\omega_i$  como la frecuencia natural del sistema en el caso base, es decir, en el caso de cero redespacho y  $\omega_f$  como la frecuencia del sistema después del redespacho tal que  $d\omega = \omega_f - \omega_i$  entonces  $\omega_f = \omega_i + d\omega$ . Se tienen varios casos

1. Transferencia antinodo-antinodo. Hay dos subcasos:

- a) La transferencia se realiza en la dirección del flujo de potencia en el caso base, es decir, del bus 1 al bus 3. Entonces los vectores  $a$  y  $d\theta$  son paralelos. De (3.129),  $d\omega < 0$  y  $\omega_f < \omega_i$ , por lo cual la frecuencia del modo decrece con el redespacho.

- b) La transferencia se hace en la dirección opuesta al flujo de potencia en el caso base, es decir, del bus 3 al bus 1, entonces los vectores  $a$  y  $d\theta$  son antiparalelos. De (3.129),  $d\omega > 0$  y  $\omega_f > \omega_i$ , así la frecuencia del modo incrementa con el redespacho.
2. Transferencia entre un nodo y un antinodo, por ejemplo: entre bus 2 y 1. De (3.129), si la transferencia se realiza en la dirección del flujo de potencia en el caso base, entonces  $d\theta$  es positiva y  $\omega_f < \omega_i$ . Si la transferencia se hace en la dirección opuesta al flujo de potencia en el caso base, entonces  $d\theta < 0$  and  $\omega_f > \omega_i$ , es decir, la frecuencia incrementa con el redespacho.

De los casos 1 y 2 podemos concluir que la frecuencia del modo decrece cuando los vectores  $a$  y  $d\theta$  son paralelos. Como el vector  $a$  es un vector con entradas reales positivas para disminuir la frecuencia el redespacho tiene que ser hecho en la misma dirección del flujo de potencia en el caso base.

### Modo no amortiguado: sistema de $n$ buses

Consideremos un sistema de  $n$  buses que tiene un modo entre áreas con cero amortiguamiento, es decir,  $\lambda = \pm j\omega$ . Entonces

$$d\omega = - \sum_{k=1}^{\ell} \left[ \frac{(x'_{\theta_k})^2 p_k}{2\omega m(x)} \right] d\theta_k = - \sum_{k=1}^{\ell} a_k d\theta_k. \quad (3.130)$$

Notemos que  $a_k \geq 0$  con  $k = 1, \dots, \ell$ . Si los vectores  $a$  y  $d\theta$ , son paralelos (es decir,  $d\theta_k > 0$  o en otras palabras el redespacho produce que el flujo de potencia en cada línea incremente en la dirección del flujo de potencias en el caso base), entonces cada término de la suma (3.130) contribuirá a decrecer la frecuencia del modo. Cualquier línea en la cual el redespacho produce que el flujo de potencia disminuya en la dirección del flujo de potencia en el caso base tenderá a incrementar la frecuencia del modo.

Los términos de la suma (3.130) que contribuyen más corresponden a aquellas líneas en las cuales el producto  $(x'_{\theta_k})^2 p_k$  es grande. Tales líneas tiene un gran flujo de potencia y un cambio grande de las entradas del vector propio que corresponden a los ángulos a través de las líneas.

Un caso de interés se da cuando una área del sistema de potencia que incluye un antinodo  $A_1$  transfiere potencia a otra área del sistema de potencia que incluye un antinodo  $A_2$  y que oscila en dirección opuesta a  $A_1$ . Considere

un camino de  $A_1$  a  $A_2$ . También asuma que la amplitud de la oscilación tiene forma sinusoidal en el espacio tal que decrece a medida que se aleja del antinodo  $A_1$  hasta llegar a un nodo  $N$  y entonces la amplitud incrementa pero con fase opuesta cuando uno va del nodo  $N$  al antinodo  $A_2$ . Como los antinodos tiene amplitud máxima de oscilación, cerca de ellos el cambio en las componentes del vector propio es pequeño y  $(x'_{\theta_k})^2$  es pequeño. En el nodo la amplitud de oscilación es cero pero el gradiente del cambio en la amplitud es grande y  $(x'_{\theta_k})^2$  es grande. Así si existe un redespacho de  $A_1$  a  $A_2$  que incrementa el flujo de potencia en todas las líneas del camino, las líneas del camino que están cerca del nodo  $N$  contribuyen de manera significativa a disminuir la frecuencia del modo. El redespacho de  $A_1$  a  $N$  o redespacho de  $N$  a  $A_2$  decrecerá la frecuencia del modo.

### 3.8.2. Caso: modo amortiguado

Los modos entre áreas son modos electromecánicos de oscilación ligeramente amortiguados. En esta sección estudiamos la sensibilidad de tales modos. La sensibilidad de un modo esta dada por (3.122). Escribiendo  $\alpha$  como

$$\alpha = \alpha_r + j\alpha_I. \quad (3.131)$$

Sustituyendo (3.131) en (3.122)

$$d\lambda = d\sigma + jd\omega = \left[ \frac{\alpha_r - j\alpha_I}{\alpha_r^2 + \alpha_I^2} \right] \sum_{k=1}^{\ell} (x'_{\theta_k})^2 p_k d\theta_k \quad (3.132)$$

$$= \left[ \frac{\alpha_r - j\alpha_I}{\alpha_r^2 + \alpha_I^2} \right] \sum_{k=1}^{\ell} (Re[(x'_{\theta_k})^2] + jIm[(x'_{\theta_k})^2]) p_k \quad (3.133)$$

$$= \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\alpha_r Re[(x'_{\theta_k})^2] + \alpha_I Im[(x'_{\theta_k})^2]}{\alpha_r^2 + \alpha_I^2} p_k + j \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\alpha_r Im[(x'_{\theta_k})^2] - \alpha_I Re[(x'_{\theta_k})^2]}{\alpha_r^2 + \alpha_I^2} p_k. \quad (3.134)$$

Entonces

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\alpha_I \text{Im}[(x'_{\theta_k})^2] + \alpha_r \text{Re}[(x'_{\theta_k})^2]}{\alpha_r^2 + \alpha_I^2} p_k d\theta_k \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} a_{rk} d\theta_k = a_r \cdot d\theta, \end{aligned} \quad (3.135)$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\alpha_r \text{Im}[(x'_{\theta_k})^2] - \alpha_I \text{Re}[(x'_{\theta_k})^2]}{\alpha_r^2 + \alpha_I^2} p_k d\theta_k \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} a_{Ik} d\theta_k = a_I \cdot d\theta. \end{aligned} \quad (3.136)$$

El caso ideal para incrementar la magnitud de  $\sigma$  y disminuir  $\omega$  (y con ello incrementar el cociente de amortiguamiento) se da cuando los vectores  $a_r$  y  $a_I$  son paralelos y antiparalelos con el vector  $d\theta$ . Si  $d\theta$  es antiparalelo solo con  $a_r$ , la magnitud de  $\sigma$  se incrementa pero también  $\omega$  se incrementa, lo cual no ayuda a amortiguar la oscilación. Si  $d\theta$  es antiparalelo solo con  $a_I$ ,  $\omega$  disminuye pero la magnitud de  $\sigma$  también, lo cual disminuye el cociente de amortiguamiento. ¿Que entradas de los vectores  $a_r$  y  $a_I$  contribuyen más?. Contestaremos esta pregunta en las siguientes subsecciones.

### Caso amortiguado: sistema de 3 buses

En esta sección estudiamos la sensibilidad del modo electromecánico de oscilación de un sistema de 3 buses. La Fig. 3.3 muestra el flujo de potencia y el patrón de oscilación de su modo crítico.

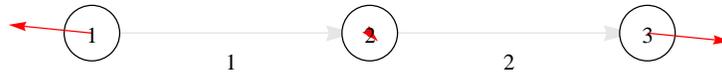


Figura 3.3: Las líneas grises que unen los buses muestran la magnitud del flujo de potencia con la escala de grises y la dirección con las flechas. Cada línea es numerada como se muestra. Las flechas rojas muestran la oscilación del modo shape, es decir, la magnitud y dirección de las entradas complejas del vector propio derecho  $x$  asociado al valor propio complejo  $\lambda$ . Los tres buses son buses generadores.

El patrón del modo muestra que el generador 1 está oscilando en contra del generador 3 y que el bus 2 no participa en la oscilación. De acuerdo a (3.135)

y (3.136) la sensibilidad de un valor propio no nulo del sistema está dada por

$$d\sigma = \frac{\alpha_I \text{Im}[(x'_{\theta_1})^2] + \alpha_r \text{Re}[(x'_{\theta_1})^2]}{\alpha_r^2 + \alpha_I^2} p_1 d\theta_1 + \frac{\alpha_I \text{Im}[(x'_{\theta_2})^2] + \alpha_r \text{Re}[(x'_{\theta_2})^2]}{\alpha_r^2 + \alpha_I^2} p_2 d\theta_2 \quad (3.137)$$

$$= a_r d\theta, \quad (3.138)$$

$$d\omega = \frac{\alpha_r \text{Im}[(x'_{\theta_1})^2] - \alpha_I \text{Re}[(x'_{\theta_1})^2]}{\alpha_r^2 + \alpha_I^2} p_1 d\theta_1 + \frac{\alpha_r \text{Im}[(x'_{\theta_2})^2] - \alpha_I \text{Re}[(x'_{\theta_2})^2]}{\alpha_r^2 + \alpha_I^2} p_2 d\theta_2 \quad (3.139)$$

$$= a_I d\theta, \quad (3.140)$$

donde  $p_1 = b_1 V_1 V_2 \sin(\delta_1 - \delta_2)$  y  $p_2 = b_2 V_2 V_3 \sin(\delta_2 - \delta_3)$ . Como el flujo de potencia va del bus 1 al bus 2.  $\delta_1 > \delta_2$  y  $p_1 > 0$ . De manera similar  $p_2 > 0$ . De la Fig. 3.3 podemos ver que  $x_{\delta_1}$  está en el segundo cuadrante del plano complejo y  $x_{\delta_3}$  en el cuarto cuadrante, por lo cual

1. Los números complejos  $x^T Mx$ ,  $x^T Dx$  están en el cuarto cuadrante del plano complejo. Entonces

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\lambda x^T Mx + x^T Dx \\ &= 2(-\sigma + j\omega)x^T Mx + x^T Dx \\ &= \alpha_r + j\alpha_I, \end{aligned} \quad (3.141)$$

Con  $\alpha_r > 0$ ,  $\alpha_I > 0$  y  $\alpha_r \ll \alpha_I$ .

2.  $a_{r1} < 0$ ,  $a_{r2} < 0$ . De (3.139) para disminuir  $\omega$ , el redespacho tiene que ser hecho en la dirección del flujo de potencia en el caso base. Este resultado coincide con las conclusiones para el caso de modo no amortiguado.
3.  $\text{Re}[(x'_{\theta_1})^2] > 0$ ,  $\text{Re}[(x'_{\theta_2})^2] > 0$ ,  $\text{Im}[(x'_{\theta_1})^2] < 0$ ,  $\text{Im}[(x'_{\theta_2})^2] < 0$ , así que para incrementar  $|\sigma|$  el redespacho tiene que ser hecho a través de las líneas en las que  $a_r < 0$ .

Nótese que  $|d\sigma| < |d\omega|$ .

### Caso amortiguado: sistema de $n$ buses

La sensibilidad de un modo electromecánico de oscilación de un sistema de  $n$  buses es dado por las ecuaciones (3.135) y (3.136). El caso ideal para incrementar la magnitud de  $\sigma$  y disminuir  $\omega$  (y con ello incrementar el cociente de amortiguamiento) se da cuando los vectores  $a_r$  y  $a_l$  son paralelos y antiparalelos con el vector  $d\theta$ . Si  $d\theta$  es antiparalelo solo con  $a_r$ , la magnitud de  $\sigma$  se incrementa pero también  $\omega$  se incrementa, lo cual no ayuda a amortiguar la oscilación. Si  $d\theta$  es antiparalelo solo con  $a_l$ ,  $\omega$  disminuye pero la magnitud de  $\sigma$  también lo cual disminuye el cociente de amortiguamiento. Los términos de las sumas (3.135) y (3.136) que contribuyen más son aquellos en los que el producto  $(x'_{\theta_k})^2 p_k$  es grande. Como mencionamos en 3.8.1 esperamos que  $(x'_{\theta_k})^2 p_k$  sea grande en las líneas que llevan el mayor flujo de potencia y que están cerca de los nodos en los que la fase de oscilación tiene un cambio cercano a los 180 grados. Así el redespacho debe ser llevado a cabo a través de estas líneas, pero necesitamos aprender más sobre la estructura espacial de los modos para poder describir de mejor manera y en detalle estas ideas.

## 3.9. Sistema de 10 buses

Esta sección esta dedicada a verificar la fórmula (3.88) en el sistema de 10 buses mostrado en la Fig. 3.4. El sistema está basado en el sistema presentado en [33] y consiste de dos áreas similares conectadas por una línea de transmisión de alta tensión. Cada generador es representado por el mismo modelo clásico con  $H = 6.5$  s,  $D = 1.0$  s, y una reactancia transitoria  $x' = 0.3$ . Las magnitudes constantes de los voltajes internos de los generadores son  $V_1 = 0.998337$ ,  $V_2 = 1.26781$ ,  $V_3 = 1.0782$  y  $V_4 = 1.1449$ . La tabla 3.1 muestra la generación y la potencia demanda por las cargas constantes en el caso base.

Todos los cálculos numéricos fueron hechos con el software Mathematica. Primero resolvemos las ecuaciones del flujo de potencia. Después calculamos los valores propios del caso base. El sistema tiene tres modos electromecánicos. La tabla 3.2 muestra tales modos en el caso base.

El flujo de potencia y la oscilación del caso base se muestran en la Fig. 3.5, así como el patrón del modo  $\lambda_{3i}$ . El patrón del modo muestra que el área 1 esta oscilando en contra del área 2.

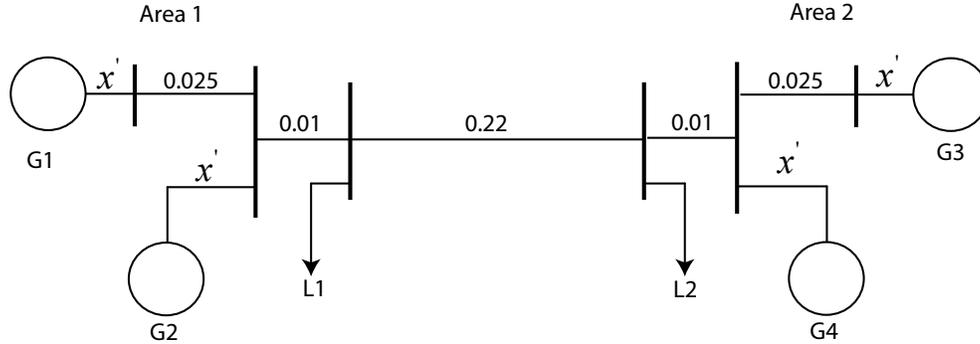


Figura 3.4: Sistema de 10 buses.

Tabla 3.1: Datos de generadores y cargas del sistema de 10 buses.

bus	tipo	$P_g$	$P_L$	$Q_L$
1	G	7.0	0.0	0.0
2	G	7.0	0.0	0.0
3	G	7.22049	0.0	0.0
4	G	7.0	0.0	0.0
5	L	0.0	10.110245	1.0
6	L	0.0	18.110245	1.0

Tabla 3.2: Valores propios del sistema de 10 buses en el caso base.

modo en el caso base	Valor propio (rad/s)	Perfil de Oscilación
$\lambda_{1i}$	$-0.038462 + 8.8206i$	1,4 $\leftrightarrow$ 2,3
$\lambda_{2i}$	$-0.038462 + 8.6023i$	1,4 $\leftrightarrow$ 2,3
$\lambda_{3i}$	$-0.038462 + 2.3832i$	1,2 $\leftrightarrow$ 3,4

Examinaremos los cambios  $\lambda_{3i}$  para verificar la fórmula (3.88). El redespacho se hace entre G1 que está en el área 1 y G3 que está en el área 2. La generación de G1 se incrementa por una cantidad  $r$  y la generación de G3 se decrementa por la misma cantidad. Usando la fórmula (3.88) calculamos  $d\lambda_3$  para varios valores de  $r$  y entonces calculamos el valor propio aproximado  $\lambda_{3f} = d\lambda_3 + \lambda_{3i}$  para cada valor de  $r$ . La tabla 3.3 muestra  $\lambda_{3f}$  exacto y aproximado para diferentes pasos de redespacho entre G1 y G3 y la gráfica 3.6 los muestra en el plano complejo. De la tabla 3.3 podemos ver que la  $|Re(\lambda_{3f})|$  aproximado

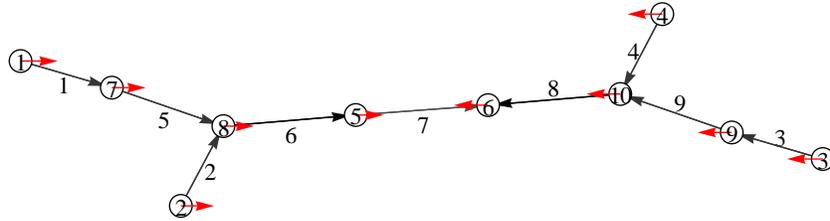


Figura 3.5: Las líneas grises que unen los buses muestran la magnitud del flujo de potencia con las flechas. Cada línea es numerada como se muestra. Las flechas rojas muestran la oscilación del modo shape, es decir, la magnitud y la dirección de las entradas  $x_s$  del vector propio derecho de  $\lambda_{3i}$ . 1, 2, 3 y 4 son buses generadores y 5 y 6 son buses de carga.

y exacto son iguales para cada redespacho y que sus partes imaginarias son aproximadamente iguales, así que podemos concluir que la fórmula (3.88) reproduce la variación a primer orden de los valores propios con respecto al redespacho. La gráfica 3.7 muestra  $\omega_{3f}$  exacta y aproximada versus el redespacho, para redespachos menores o iguales a 0.15 el modo aproximado está muy cerca del modo exacto.

Tabla 3.3:  $\lambda_{3f}$  para el redespacho de G1 a G3 en el sistema de 10 buses.

Redespacho	Modo Exacto (Mathematica)	Modo Aproximado
0.000	$-0.038462 + 2.3832j$	$-0.038462 + 2.3832j$
0.003	$-0.038462 + 2.3785j$	$-0.038462 + 2.3786j$
0.006	$-0.038462 + 2.3738j$	$-0.038462 + 2.3739j$
0.009	$-0.038462 + 2.3691j$	$-0.038462 + 2.3692j$
0.010	$-0.038462 + 2.3675j$	$-0.038462 + 2.3676j$
0.03	$-0.038462 + 2.3350j$	$-0.038462 + 2.3357j$
0.06	$-0.038462 + 2.2829j$	$-0.038462 + 2.2858j$
0.09	$-0.038462 + 2.2262j$	$-0.038462 + 2.2331j$
0.10	$-0.038462 + 2.2061j$	$-0.038462 + 2.2149j$
0.15	$-0.038462 + 2.0947j$	$-0.038462 + 2.1173j$
0.20	$-0.038462 + 1.9586j$	$-0.038462 + 2.0060j$
0.25	$-0.038462 + 1.7810j$	$-0.038462 + 1.8735j$
0.30	$-0.038462 + 1.5152j$	$-0.038462 + 1.7005j$

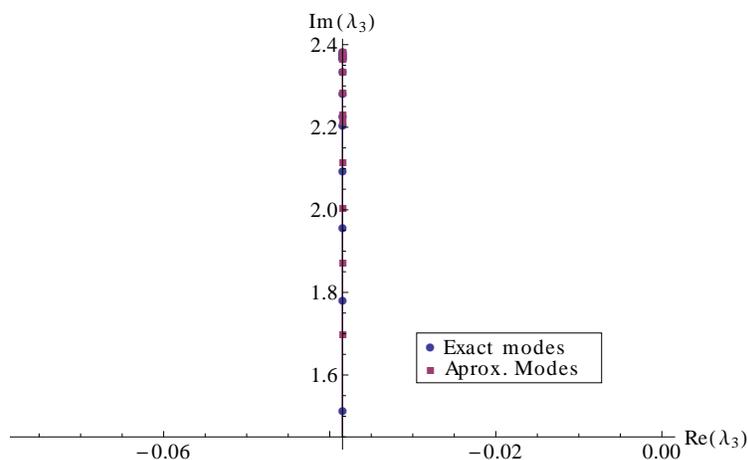


Figura 3.6: Comparando los modos  $\lambda_{3f}$  exactos y aproximados para diferentes valores del redespacho en el sistema de 10 buses. Para todos los redespachos la parte aproximada coincide con la parte exacta. En el caso de las partes imaginaria no se tiene tal coincidencia.

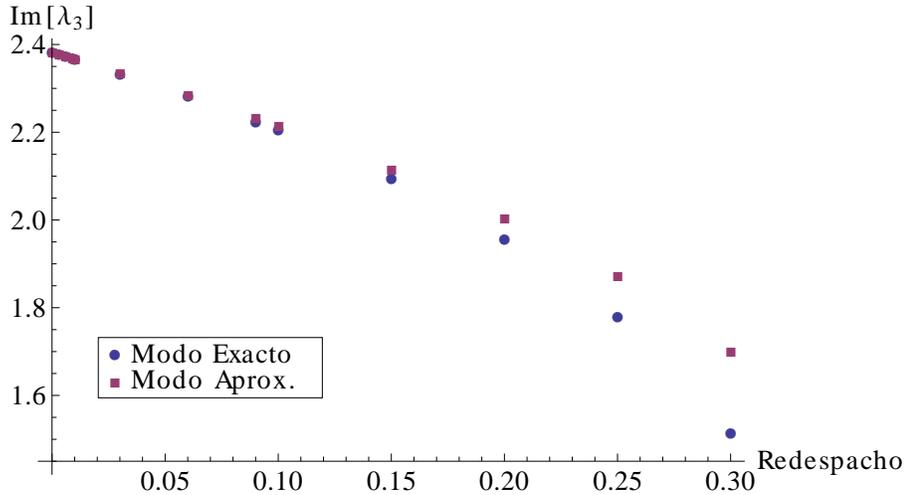


Figura 3.7: Frecuencias exactas y aproximadas de los modos versus la cantidad de redespacho en el sistema de 10 buses. A medida que el redespacho incrementa las frecuencias aproximadas se alejan más de las exactas.

### 3.10. Sistema de 6 buses

En esta sección ilustraremos el uso de las fórmulas (3.135) y (3.136) en un sistema sencillo de 6 buses. Tales fórmulas calculan la sensibilidad en el caso en el que el voltaje de cada uno de los nodos es considerado constante. Las cargas son modeladas con potencia real dependiente de la frecuencia [34]. La tabla 3.4 muestra los datos de los buses del sistema y la tabla 3.5 los datos de las líneas de transmisión.

El sistema tiene dos modos electromecánicos. La tabla 3.6 muestra los valores electromecánicos del sistema en el caso base.

La oscilación del flujo de potencia en el caso base y el patrón del modo  $\lambda_{2i}$  son mostradas en la Fig. 3.8. El patrón del modo muestra que G1 esta oscilando en contra de G2. La tabla 3.7 muestra los coeficientes reales  $a_{rk}$  y  $a_{Ik}$  en las ecuaciones (3.135) y (3.136) para el sistema de 6 buses.

De la tabla 3.7 vemos que los coeficientes asociados a las líneas 1 y 2 son las entradas de mayor tamaño de los vectores  $a_r$  y  $a_I$ , pero solo los coeficientes asociados a la línea 1 tienen el mismo signo,  $a_{r1} < 0$  y  $a_{I1} < 0$ . La línea 1 conecta a G1, por lo cual al incrementar la generación de G1 incrementará la

Tabla 3.4: Datos de los buses del sistema de seis buses.

bus	tipo	H (s)	D (s)	$P_g$	$P_L$
1	G	3.0	2.0	0.8	0.0
2	G	3.0	2.0	0.8	0.0
3	G	24.0	16.0	6.4	0.0
4	L	0.0	2.0	0.0	1.0
5	L	0.0	2.0	0.0	1.0
6	L	0.0	16.0	0.0	6.0

Tabla 3.5: Datos de las líneas de transmisión del sistema de 6 buses.

Línea	$x$
1	0.45
2	0.45
3	0.0563
4	0.02
5	0.075

Tabla 3.6: Valores propios del sistema de seis buses en el caso base.

	f (Hz)	$\zeta$ (%)	Valor propio (rad/s)	Perfil de Oscilación
$\lambda_{1i}$	1.53802	1.81694	$-0.175611 + 9.66364j$	1,2 $\leftrightarrow$ 3
$\lambda_{2i}$	1.72281	1.54097	$-0.166826 + 10.8247j$	1 $\leftrightarrow$ 2

Tabla 3.7: Coeficientes  $a_{rk}$  y  $a_{Ik}$  para el sistema de 6 buses.

$a_{r1}$	- 0.001346	$a_{I1}$	- 0.70652
$a_{r2}$	0.001275	$a_{I2}$	- 1.13594
$a_{r3}$	0.000055	$a_{I3}$	- 0.006992
$a_{r4}$	0.0	$a_{I4}$	- 0.000351
$a_{r5}$	0.0	$a_{I5}$	- 0.001029

amortiguación del modo. La gráfica 3.9 muestra los valores propios para el redespacho entre G1-G3, G1-G2 y G2-G3. Cuando G1 (antinodo) se incrementa y G3 (nodo) disminuye la magnitud  $|\sigma_2|$  se incrementa y  $\omega_2$  decrece. Si G1 decrece y G3 se incrementa el efecto es el opuesto. Cualquier otro par

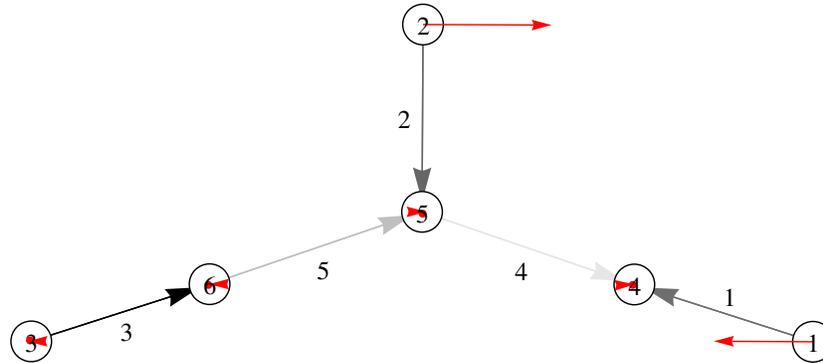


Figura 3.8: Sistema de 6 buses: Las líneas grises que unen los buses muestran la magnitud del flujo de potencia con las flechas. Cada línea es numerada como se muestra. Las flechas rojas muestran la oscilación del modo shape, es decir, la magnitud y la dirección de las entradas  $x_\delta$  del vector propio derecho de  $\lambda_{2i}$ . Buses 1 y 2 son antinodos y buses 3, 4, 5 y 6 son nodos.

de generadores incrementa o disminuye la parte real e imaginaria de  $\lambda_2$ . La tabla 3.8 muestra los valores de  $\lambda_{2f} = d\lambda_2 + \lambda_{2i}$  para diferentes pasos de redespacho entre G1 y G3. El cociente de amortiguamiento se muestra en la gráfica 3.10 como función del redespacho de potencia activa. El cociente de amortiguamiento se incrementa cuando G1 crece y G3 decrece. También cuando G2 crece y G3 decrece.

Tabla 3.8:  $\lambda_{2f}$  del redespacho de G1 a G3 en el sistema de 6 buses.

Redespacho	$\lambda_{2f}$
0.009	$-0.166830 + 10.8219j$
0.006	$-0.166830 + 10.8228j$
0.003	$-0.166828 + 10.8238j$
0.0	$-0.166826 + 10.8247j$
-0.003	$-0.166824 + 10.8257j$
-0.006	$-0.166822 + 10.8266j$
-0.009	$-0.166821 + 10.8276j$

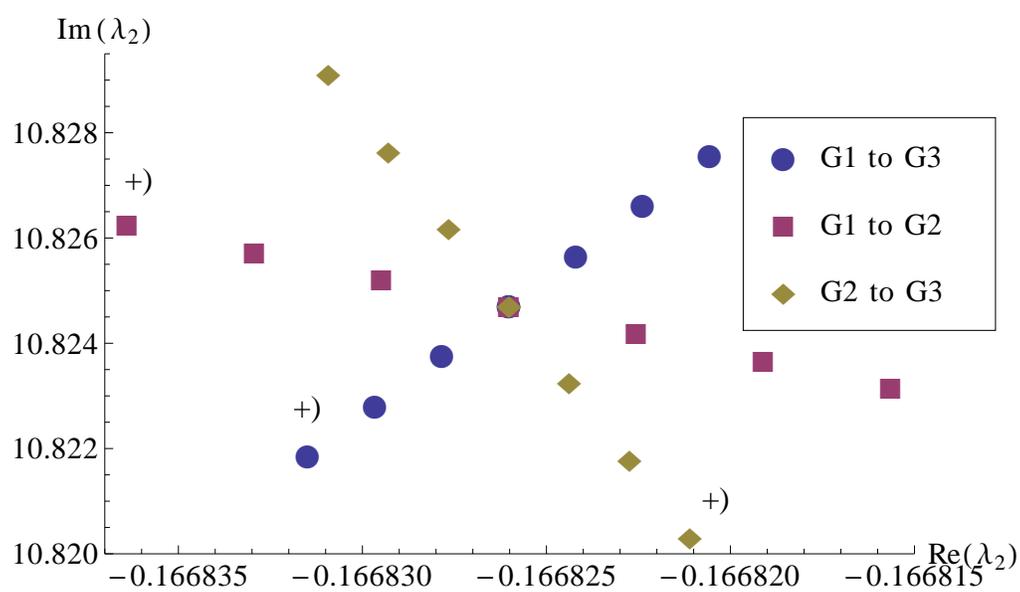


Figura 3.9: Valores propios para redespachos del sistema de 6 buses. El redespacho de G1 a G3 es el único que incrementa la magnitud de la parte real de  $\lambda_{2f}$  y disminuye su frecuencia.

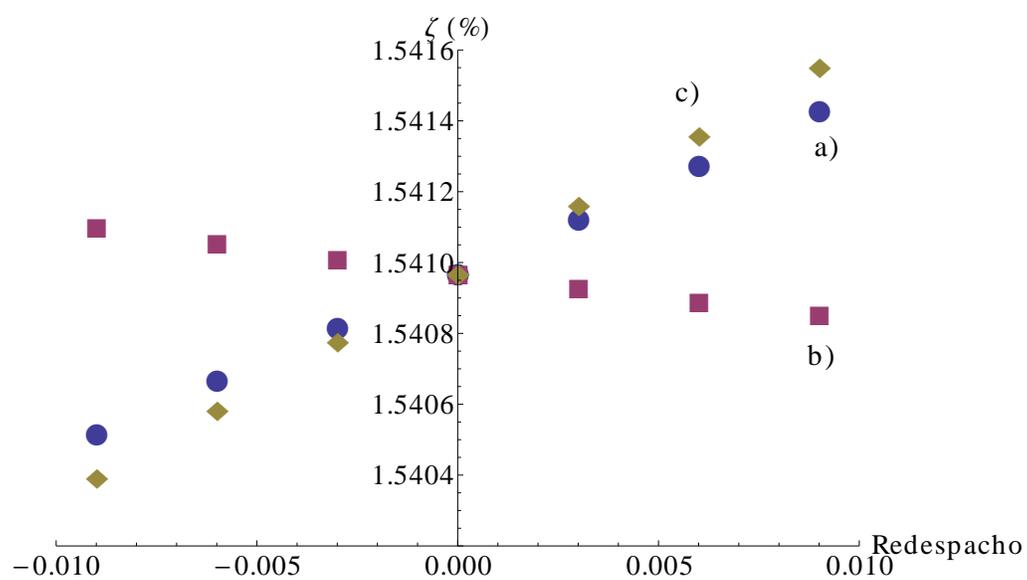


Figura 3.10: Coeficiente de amortiguamiento versus resespacho a) de G1 a G3, b) de G1 a G2, c) de G2 a G3. Los casos a) y b) incrementan el coeficiente de amortiguamiento.

# Capítulo 4

## Conclusiones y trabajo futuro

### 4.1. Inestabilidades de voltaje

En esta tesis se han estudiado las inestabilidades de voltaje que se presentan en un sistema de potencia de tres nodos con carga dinámica cuando se varían los parámetros  $P_m$  y  $T_A$  del sistema. El sistema presenta tres tipos de bifurcación: silla (BS), Hopf (BH) y Hopf degenerada (BHD). Dicho estudio se llevó a cabo a través de la teoría de bifurcaciones y con el paquete AUTO que permite obtener diagramas de bifurcación para sistemas dinámicos. Para conocer la evolución del sistema en el tiempo se utiliza el método de Runge-Kutta de orden 4.

Del diagrama de bifurcación 2-dimensional para el voltaje en el nodo de carga se sabe que el sistema presenta una región estable y una semiestable. La curva que divide ambas regiones está compuesta por puntos de bifurcación Hopf subcrítica. La región semiestable está compuesta por puntos fijos estables y por un conjunto cerrado de puntos fijos inestables. La frontera de dicho conjunto cerrado es una curva compuesta por dos ramas de bifurcaciones Hopf supercríticas. Dichas ramas se intersecan en dos puntos produciendo bifurcaciones Hopf degeneradas BHD1 y BHD2, debido a que la segunda condición **(H2)** Hopf no se satisface en tales puntos.

Se calculan los diagramas de bifurcación alrededor de las dos bifurcaciones Hopf degeneradas y se comparan con los predichos por la teoría de bifurcaciones cuando la segunda condición Hopf no se satisface. En el caso de BHD1

el hecho de que H1 no se satisfaga trae como consecuencia que no existan ciclos límites alrededor de BHD1.

En el caso de BHD2 el hecho de que H2 no se satisfaga trae como consecuencia que no se de el intercambio de estabilidad entre los puntos fijos y los ciclos límite tan característico en las bifurcaciones Hopf. Cabe destacar que hay muy pocos trabajos en el área de sistemas eléctricos de potencia que estudian bifurcaciones Hopf degeneradas.

Para eliminar el conjunto de puntos inestables en la región semiestable se añade un StatCom al sistema de potencia lo cual modifica el conjunto de ecuaciones que describen la dinámica del sistema. Se obtiene numéricamente el diagrama de bifurcación 2-dimensional para el voltaje, el cual está compuesto por una región estable y una región inestable. La frontera entre dichas regiones está formada por bifurcaciones Hopf Subcríticas.

Al incluir el StatCom se elimina el agujero inestable en la región estable, es decir, el StatCom elimina las ramas de bifurcaciones Hopf supercríticas y con ello las bifurcaciones Hopf degeneradas. Por lo cual el incluir el StatCom al sistema mejora significativamente la estabilidad del voltaje, ya que evita la aparición de inestabilidades de voltaje dentro de la región de confiabilidad.

Los resultados de este estudio se publicaron recientemente:

S. Mendoza-Armenta, C. R. Fuerte-Esquivel, R. Becerril Bárcenas, “A numerical study of the effect of degenerate Hopf Bifurcations on the voltage stability in Power Systems” *Electric Power Systems Research*, volumen 101, agosto 2013, páginas 102-109.

## 4.2. Oscilaciones entre áreas

Derivamos una nueva fórmula (3.88) para la sensibilidad de los valores propios de oscilación con respecto al redespacho de generación. La motivación de este trabajo es entender y mejorar el amortiguamiento de oscilaciones entre áreas a través del redespacho de generación.

El modelo dinámico de potencia utilizado incluye las ecuaciones de flujo de

potencia activa y reactiva y permite variaciones de los ángulos y magnitudes de los voltajes. La dinámica del generador está representada por la sencilla ecuación de oscilación (ecuación del oscilador no lineal con torca constante). El modelo usado para la carga permite que la frecuencia dependa de la potencia activa y que solo la potencia reactiva dependa de la magnitud del voltaje. Estas suposiciones en el modelado son las típicas que permiten un análisis del sistema de potencia a través de funciones de energía y en particular el circuito tiene asociado un Laplaciano simétrico. En realidad la derivación de la fórmula explota la estructura de las funciones de energía. La hipótesis del modelado de la dinámica del generador es que hay un modelo equivalente de segundo orden para cada generador que es suficiente para representar las oscilaciones presentes en grandes áreas, pero que no necesitamos conocer los parámetros de cada uno de los modelos equivalentes para los generadores. La fórmula (3.88) solo incluye la dinámica de los generadores combinada como un factor común a todos los redespachos.

A continuación damos las principales ideas que han permitido la derivación de la fórmula (3.88):

1. La nueva idea de trabajar con la función compleja  $x^T Q x$  (y no con la función más obvia  $\bar{x}^T Q x$ ).
2. Las nuevas coordenadas de “línea”  $(\theta, \nu)$  para las diferencias angulares y el logaritmo del producto de las magnitudes de los voltajes a través de las líneas de transmisión. Estas nuevas coordenadas simplifican de manera significativa partes de la derivación.
3. La formulación cuadrática del problema de valores propios. Esta formulación fue aplicada recientemente por Mallada y Tang en [34] al modelado de sistemas de potencia.
4. Las suposiciones de despreciar las pérdidas en las líneas de transmisión y el que la potencia real no dependa de la magnitud del voltaje de las cargas lo cual lleva a la función de energía y al Laplaciano simétrico del circuito.

La nueva fórmula (3.88) que describe la sensibilidad del modo  $\lambda$  tiene un factor  $\alpha$  en el denominador que es el mismo para todos los redespachos de generación.  $\alpha$  depende del valor propio, de la dinámica equivalente de los generadores y de su vector propio  $x$ .

El numerador de (3.88) expresa los cambios causados por el redespacho en los ángulos a través de las líneas y en las magnitudes de los voltajes de carga. Los coeficientes de tales cambios dependen del modo shape y del flujo de potencia a través de las líneas en el caso base, así como de la demanda de potencia reactiva de las cargas. El flujo de potencia en el caso base y la potencia reactiva demandada por la carga se pueden obtener del estimador de estados. El modo shape se obtiene de las unidades de medición fasorial (UMF). La nueva fórmula (3.88) se verifica numéricamente en un sistema de 10 buses.

Las coordenadas de línea  $\theta$  que son los ángulos a través de las líneas son tratados por Bergen y Hill en [2]. También se sabe que puede ser útil dividir las ecuaciones de balance de potencia reactiva por la magnitud del voltaje del bus, como se hace en [37]. Las coordenadas de línea  $(\theta, \nu)$  son una generalización que incluye las coordenadas  $\nu$  que describen el logaritmo del producto de las magnitudes de los voltajes asociados con las líneas, no con los buses. Las coordenadas de línea no solo simplifican de manera importante la derivación de la fórmula, también esperamos que ayuden a interpretar la nueva fórmula cuando es aplicada para analizar la efectividad del redespacho.

El redespacho de potencia real cambia de manera natural el patrón de flujo de la potencia real y en consecuencia los ángulo a través de las líneas. Cualquier flujo de potencia reactiva producido por el redespacho de generación también puede alterar el producto de la magnitud del voltaje a través de las líneas. El numerador de la fórmula (3.88) identifica las líneas en las que el cambio en el flujo de potencia es más efectivo para amortiguar la oscilación.

También hemos empezado a explorar las implicaciones y aplicaciones de (3.88) por lo cual indicamos algunas primeras conclusiones.

1. En el caso que los modos de oscilación tengan cero amortiguamiento, la fórmula predice que a primer orden, el redespacho de generación solo cambia la frecuencia del modo y no su parte real. Esto sugiere que en dicho caso el redespacho de generación puede ser más efectivo para mantener el amortiguamiento que como control de emergencia cuando el amortiguamiento ha desaparecido.
2. En el caso especial de considerar la magnitud del voltaje constante la fórmula (3.88) se reduce a (3.122), en el cual el cambio en el modo depende de los cambios en los ángulos a través de las líneas causados

por el redespacho del flujo de potencia real en las líneas y de las entradas de  $x$  relacionadas a las coordenadas angulares.

3. La fórmula indica que líneas tienen flujo de potencia y componentes del vector propio adecuados para afectar el amortiguamiento de la oscilación. En particular conviene utilizar el redespacho para cambiar los ángulos de línea que tienen cambio en el modo shape a través de las líneas y también tienen suficiente flujo de potencia en la dirección correcta.

Los resultados de este trabajo serán presentados por Sarai Mendoza Armenta en IREP.

S. Mendoza-Armenta, Ian Dobson, “A formula for damping interarea oscillations with generator redispatch”, IREP Symposium - Bulk Power System Dynamics and Control - IX Optimization, Security and Control of the Emerging Power Grid, Crete, Greece August 2013.

### 4.3. Trabajo futuro

1. Estamos interesados en confirmar y refinar el trabajo heurístico para amortiguar oscilaciones de Fisher y Erlich [15, 16] que inspiró nuestro trabajo analítico.
2. Como meta general, nos interesa tomar más ventajas de las unidades de medición fasorial (UMF) y ser menos dependientes de los modelos dinámicos para sistemas de potencia muy grandes ya que es muy difícil obtenerlos. Aunque no hemos probado que la fórmula puede ser la base de estas ideas, abre esta importante posibilidad.
3. Deseamos explorar las implicaciones y aplicaciones de la fórmula que obtuvimos y así poder aprovechar todo su potencial para controlar el amortiguamiento de la oscilación a través del redespacho de generación.

A continuación también damos varias consideraciones y especulaciones en la aplicación de (3.88) para escoger los generadores que estarán involucrados en el redespacho y que de manera efectiva mantienen el amortiguamiento de la oscilación o el coeficiente de amortiguamiento. Debido a que el número complejo  $\alpha$  en el denominador de (3.88) combina la dinámica equivalente del

generador y es común a todos los redespachos solo necesitamos una aproximación de su valor. El flujo de potencia a través de las líneas en el caso base se puede conocer del estimador de estados y las ecuaciones de flujo de carga pueden ser usadas para relacionar los redespachos de generación, los ángulos a través de las líneas y las magnitudes de los voltajes de carga. Lo último que queda por determinar es el modo shape.

El modo shape es el vector cuadrático  $x$  de  $\lambda$  y se puede obtener fácilmente de un vector propio convencional. En principio el modo shape se puede obtener de medidas fasoriales [42, 3, 13]. Esto es muy importante ya que deseamos usar cada vez más las medidas y así minimizar el uso de modelos dinámicos de los sistemas de potencia ya que los que se tienen capturan muy poco de la dinámica de sistemas de gran tamaño. Además se ha establecido [39, 48, 45, 32] que las unidades de medición fasorial pueden hacer medidas en línea del valor propio crítico (especialmente para los modos entre áreas de baja frecuencia), es decir, de su frecuencia y amortiguamiento. Una vez que la frecuencia del modo es conocida el modo podría tener un modo shape robusto. Entonces es posible que las observaciones históricas o los principios generales del modo shape pueden ser usados para aumentar o interpolar las observaciones de tiempo real o que las observaciones de tiempo real pueden ser usadas para verificar un modo shape predicho. Así la combinación de medidas y cálculos hechos a partir de modelos del sistema pueden darnos el modo que necesitamos para aplicar la fórmula a cálculos online del óptimo redespacho de generación.

Un enfoque alternativo de la fórmula es usarla para especificar y justificar métodos heurísticos para el amortiguamiento de oscilaciones basados en el modo shape y el flujo de potencia a través de las líneas. Esta aproximación, de manera similar, usarían una combinación de medidas y cálculos hechos a partir de modelos para obtener el modo shape, pero esperamos que la forma aproximada del modo shape sea suficiente. Nuestros resultados presentados en este trabajo sugieren una base para las ideas heurísticas desarrolladas para redespacho basados en cambios de los ángulos a través de las líneas con suficiente flujo de potencia y suficiente cambio en el modo shape. Estas ideas heurísticas serían similares a las ideas heurísticas para amortiguamiento modal desarrolladas por Fisher y Erlich [15, 16] que inspiró nuestra búsqueda analítica de patrones en el amortiguamiento modal y nos gustaría confirmar y refinar estas ideas heurísticas en trabajo futuro.

# Apéndice A

## Ecuaciones dinámicas

### A.1. Ecuación de oscilación

Un generador está principalmente compuesto por el rotor, el cual es una gran masa (de acero al silicio) rotatoria y el estator. De acuerdo a la segunda ley de Newton (en términos de torcas) la ecuación que describe el movimiento del rotor es

$$\begin{aligned} J\ddot{\delta}_m &= \tau_m - \tau_e - \tau_d \\ &= \tau_m - \tau_e - k_d(\dot{\delta}_m - \omega_{0m}), \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

donde  $J$  es el momento de inercia del rotor en  $\text{Kgm}^2$ ,  $\delta_m$  es el ángulo mecánico del rotor en radianes con respecto a un eje de referencia que está rotando a velocidad mecánica síncrona  $\omega_{0m}$  y está en  $\text{rad/s}$ , así  $(\dot{\delta}_m - \omega_{0m})$  es la desviación de la velocidad síncrona,  $\tau_m$ ,  $\tau_e$  y  $\tau_d$  son las torcas mecánica, eléctrica y de amortiguamiento en Nm. Suponemos que la torca de amortiguamiento es proporcional a la desviación de la velocidad síncrona, entonces

$$J\ddot{\delta}_m = \tau_m - \tau_e - k_d(\dot{\delta}_m - \omega_{0m}), \quad (\text{A.2})$$

donde  $k_d$  es el coeficiente de amortiguamiento expresado en Nms, el cual incluye las pérdidas por la fricción con el viento y la superficie.

Definiendo  $\dot{\delta}_m = \omega_m$  y sustituyendo en A.2 se tiene

$$J\dot{\omega}_m = \tau_m - \tau_e - k_d(\omega_m - \omega_{0m}). \quad (\text{A.3})$$

Multiplicando (A.3) por la velocidad angular mecánica  $\omega_m$ , se obtiene

$$\begin{aligned} J\omega_m\dot{\omega}_m &= \omega_m\tau_m - \omega_m\tau_e - \omega_mk_d(\omega_m - \omega_{0m}) \\ &= p_m - p_e - k_d\omega_m(\omega_m - \omega_{0m}). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Definiendo  $\omega_r = \omega_m - \omega_{0m}$  y sustituyendo en (A.4)

$$\begin{aligned} J\omega_m\dot{\omega}_m - 0 &= p_m - p_e - k_d\omega_m\omega_r \\ J\omega_m\dot{\omega}_m - J\omega_m\dot{\omega}_{0m} &= p_m - p_e - k_d\omega_m\omega_r \\ J\omega_m\dot{\omega}_r &= p_m - p_e - k_d\omega_m\omega_r. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$J\omega_m$  es el momento angular del rotor, el cual es representado por  $M_m = J\omega_m$ . Durante una perturbación la velocidad síncrona de la máquina es aproximadamente la velocidad síncrona, con esto en mente reemplazamos  $\omega_m$  por  $\omega_{0m}$  en la ecuación (A.5) y se obtiene

$$J\omega_{0m}\dot{\omega}_r = p_m - p_e - k_d\omega_{0m}\omega_r. \quad (\text{A.6})$$

Donde  $J\omega_{0m} = M$  es el momento angular del rotor a velocidad síncrona. La ecuación (A.6) es llamada la ecuación de oscilación y es la ecuación fundamental que gobierna la dinámica del rotor. Usualmente el fabricante da la constante de inercia  $H$  como dato de la máquina.  $H$  relaciona la energía cinética almacenada en el generador con la potencia aparente nominal  $S_0$  y se define como

$$H = \frac{\frac{1}{2}E_k}{S_0} = \frac{\frac{1}{2}(J\omega_{0m}^2)}{S_0}, \quad (\text{A.7})$$

entonces

$$M = \frac{2HS_0}{\omega_{0m}}. \quad (\text{A.8})$$

Sustituyendo (A.8) en (A.6), se obtiene

$$\frac{2HS_0}{\omega_{0m}} \frac{d\omega_r}{dt} = p_m - p_e - k_d\omega_{0m}\omega_r. \quad (\text{A.9})$$

$H$  está en segundos (s) y cuantifica la energía cinética del rotor a velocidad síncrona en términos del tiempo que le tomará al generador proveer una cantidad equivalente de energía eléctrica cuando está operando a una velocidad de salida  $S_0$ . Dividiendo (A.9) por  $S_0$

$$\begin{aligned}\frac{2H}{\omega_{0m}} \frac{d\omega_r}{dt} &= \frac{p_m}{S_0} - \frac{p_e}{S_0} - \frac{k_d \omega_{0m}}{S_0} \omega_r \\ &= \hat{p}_m - \hat{p}_e - \frac{k_d \omega_{0m}}{S_0} \omega_r,\end{aligned}\quad (\text{A.10})$$

donde  $\hat{p}_m$  y  $\hat{p}_e$  son las potencias eléctrica y mecánica en por unidad. El coeficiente  $k_d \omega_{0m}$  tiene unidades de energía (Joules) para expresarlo en por unidad multiplicaremos por 1 usando la velocidad nominal  $\omega_{0m}$

$$\begin{aligned}\frac{2H}{\omega_{0m}} \frac{d\omega_r}{dt} &= \hat{p}_m - \hat{p}_e - \frac{k_d \omega_{0m}}{S_0} \frac{\omega_{0m}}{\omega_{0m}} \omega_r, \quad \text{definiendo } D = k_d \omega_{0m}^2 \\ &= \hat{p}_m - \hat{p}_e - \frac{D}{S_0 \omega_{0m}} \omega_r \\ &= \hat{p}_m - \hat{p}_e - \frac{\hat{D}}{S_0 \omega_{0m}} \omega_r,\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

donde  $\hat{D}_m$  es el coeficiente de amortiguamiento en por unidad. Para escribir la ecuación (A.11) en términos de la velocidad nominal utilizaremos la relación entre la velocidad nominal  $\omega_0$  y la velocidad síncrona  $\omega_{0m}$ , es decir

$$\omega_0 = \frac{2\omega_{0m}}{p}, \quad (\text{A.12})$$

donde  $p$  es el número de polos, de manera similar

$$\omega_r = \frac{2\omega_m}{p}. \quad (\text{A.13})$$

Sustituyendo (A.12) y (A.13) en (A.11)

$$\begin{aligned}\frac{2H}{(p/2)\omega_0} \frac{d(p/2)\omega}{dt} &= \hat{p}_m - \hat{p}_e - \frac{\hat{D}}{(p/2)\omega_0} (p/2)\omega \\ \frac{2H}{\omega_0} \frac{d\omega}{dt} &= \hat{p}_m - \hat{p}_e - \frac{D}{\omega_0} \omega.\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

Para evitar notación pesada eliminaremos los gorritos de la ecuación anterior y mantendremos en mente que las variables están en pu,

$$\frac{2H}{\omega_0} \frac{d\omega}{dt} = p_m - p_e - \frac{D}{\omega_0} \omega. \quad (\text{A.15})$$

La ecuación anterior se conoce como la ecuación de oscilación y describe la dinámica del rotor de un generador dado.

## A.2. Carga dinámica

Entenderemos por carga todo aquello que demande energía eléctrica, ejemplos de cargas son: un motor, una casa, etc. La diversidad de cargas que conforman un sistema eléctrico hace que el modelado matemático de cargas sea uno de los problemas más difíciles de resolver. Sin embargo debido a que la demanda de energía eléctrica en un punto específico del sistema consiste de un conjunto agregado de diferentes cargas, el problema fundamental para el modelado consiste en identificar la composición de la carga en un instante de tiempo y su respectivo modelado como un equivalente en un cierto punto de la red.

La carga eléctrica puede considerarse como la representación matemática de la relación existente entre el voltaje en el nodo de carga y la potencia demandada o la corriente que fluye hacia la carga. En general las cargas pueden clasificarse en dos tipos: cargas estáticas las cuales se representan por ecuaciones algebraicas y cargas dinámicas que se representan por ecuaciones diferenciales. La carga presente en el sistema de estudio es un modelo de carga mixto que incluye una combinación en paralelo de una carga estática o constante  $P_{1d}$ ,  $Q_{1d}$  con un motor de inducción dependiente de la frecuencia  $\delta_L$  y de los cambios de la magnitud del voltaje  $\dot{V}_L$  del nodo de carga [9] por lo cual el motor es una carga dinámica. Así las potencias activa y reactiva en el nodo de carga son especificadas por las siguientes ecuaciones

$$P_L = P_{1d} + P_0 + p_1 \dot{\delta}_L + p_2 \dot{V}_L + p_3 V_L, \quad (\text{A.16})$$

$$Q_L = Q_{1d} + Q_0 + q_1 \dot{\delta}_L + q_2 \dot{V}_L + (q_3 - B_c) V_L^2, \quad (\text{A.17})$$

donde los coeficientes  $P_0$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $Q_0$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ , y  $q_3$  son constantes.  $B_c$  es la susceptancia constante de una capacitor conectado en paralelo a la carga para proveer potencia reactiva cuando la demanda de potencia reactiva de la

carga se incremente. Despejando  $\dot{\delta}_L$  y  $\dot{V}_L$  de (A.16) y (A.17)

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_L &= \frac{1}{q_1}[Q - Q_{1d} - Q_0 - q_2V_L - (q_3 - B_c)V_L^2], \\ \dot{V}_L &= \frac{1}{p_2}\{P - P_{1d} - P_0 - p_1\frac{1}{q_1}[Q - Q_{1d} - Q_0 - q_2V_L - (q_3 - B_c)V_L^2] - p_3V_L\}.\end{aligned}\tag{A.18}$$

### A.3. Sistema de excitación

Los sistemas de excitación son de gran importancia dentro del proceso dinámico de un sistema de potencia, ya que permiten regular el voltaje de campo del generador  $E_{fd}$  y así controlar el voltaje en terminales del generador. La regulación se logra de la siguiente manera: al ocurrir una falla en un punto del sistema que esté eléctricamente cercano a un generador, el flujo del devanado de campo comienza a variar, produciendo cambios en la magnitud del voltaje en terminales de la máquina. Durante este proceso transitorio, actúa el sistema de excitación proveyendo de corriente continua al devanado de campo de la máquina, para mantener el voltaje de campo  $E_{fd}$  constante, así los sistemas de excitación tratan de mantener el flujo de campo a un nivel de operación constante. Al controlar el voltaje de campo se controla el voltaje en terminales del generador. La ecuación que describe la dinámica de voltaje de campo se deduce de la función de transferencia asociada al diagrama de bloques del sistema de excitación. El diagrama de bloques del sistema de excitación utilizado en este trabajo se muestra en la Fig. A.1 y su ecuación de transferencia es

$$\frac{E_{fd}}{V_{ref} - V_t} = \frac{K_A}{1 + sT_A}.\tag{A.19}$$

Nótese que la ecuación anterior esta en el dominio de Laplace para expresarla en función del tiempo aplicamos la transformada inversa de Laplace, reacomodamos términos y obtenemos

$$\dot{E}_{fd} = \frac{1}{T_A}[-E_{fd} + K_A(V_{ref} - V_t)],\tag{A.20}$$

donde  $V_{ref}$  es el voltaje de referencia  $V_t$  es el voltaje en terminales del generador,  $K_A$  es la ganancia del control y  $T_A$  es la constante de tiempo del sistema de excitación.

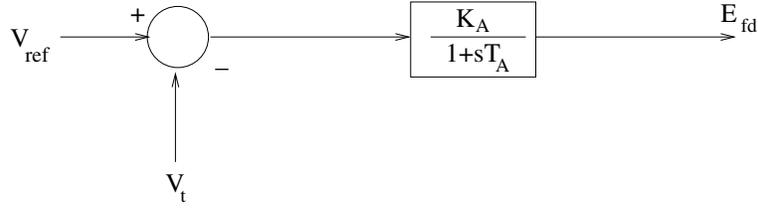


Figura A.1: Diagrama de bloques del Sistema de Excitación.

## A.4. Ecuaciones del StatCom

En esta sección se deducen las ecuaciones diferenciales asociadas al StatCom.

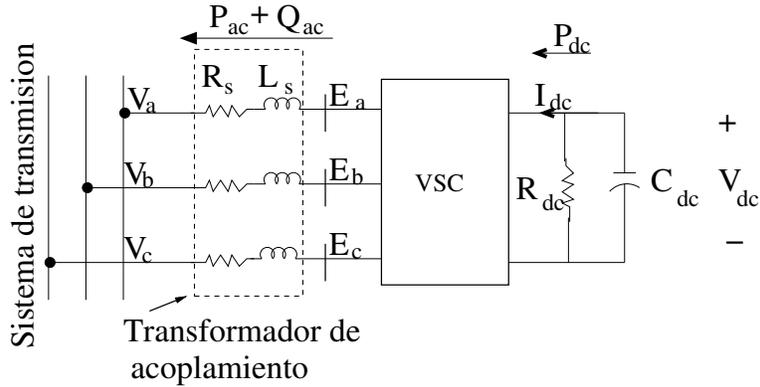


Figura A.2: Circuito Equivalente del StatCom.

La figura A.2 muestra el circuito equivalente del StatCom, donde  $R_s$  y  $L_s$  representan las pérdidas del transformador trifásico,  $E_a$ ,  $E_b$  y  $E_c$  representan el voltaje de fase en el lado de corriente alterna del inversor,  $V_a$ ,  $V_b$  y  $V_c$  son los voltajes del lado del sistema de potencia e  $i_a$ ,  $i_b$  y  $i_c$  son las corrientes de fase. El voltaje de salida del StatCom es [12]

$$E = M_k V_{dc} \cos(\omega t + \alpha), \quad (\text{A.21})$$

donde  $V_{dc}$  es el voltaje en el capacitor,  $M_k$  es el índice de modulación y  $\alpha$  es el ángulo de fase del voltaje inyectado. Las ecuaciones de lazo para el circuito

pueden escribirse de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
-V_a - L_s \frac{di_a}{dt} - i_a R_s + E_a &= 0, \\
-V_b - L_s \frac{di_b}{dt} - i_b R_s + E_b &= 0, \\
-V_c - L_s \frac{di_c}{dt} - i_c R_s + E_c &= 0,
\end{aligned} \tag{A.22}$$

las cuales podemos reescribir como

$$\begin{aligned}
\frac{di_a}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_a + \frac{1}{L_s} (E_a - V_a), \\
\frac{di_b}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_b + \frac{1}{L_s} (E_b - V_b), \\
\frac{di_c}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_c + \frac{1}{L_s} (E_c - V_c).
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Ahora expresaremos cada cantidad de (A.23) en pu para lo cual usaremos

$$L'_s = \frac{\omega_b}{Z_{base}} L_s, \quad C' = \frac{1}{\omega_b C Z_{base}}, \quad R'_s = \frac{R_s}{Z_{base}}, \quad R'_{dc} = \frac{R_{dc}}{Z_{base}} \tag{A.24}$$

$$i'_x = \frac{i_x}{i_{base}}, \quad V'_x = \frac{V_x}{V_{base}}, \quad E'_x = \frac{E_x}{V_{base}}, \quad Z_{base} = \frac{V_{base}}{i_{base}}. \tag{A.25}$$

Sustituyendo (A.24) y (A.25) en las ecuaciones (A.23) tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{di'_a}{dt} &= -\frac{R'_s}{L'_s} i'_a + \frac{1}{L'_s} (E'_a - V'_a), \\
\frac{di'_b}{dt} &= -\frac{R'_s}{L'_s} i'_b + \frac{1}{L'_s} (E'_b - V'_b), \\
\frac{di'_c}{dt} &= -\frac{R'_s}{L'_s} i'_c + \frac{1}{L'_s} (E'_c - V'_c).
\end{aligned} \tag{A.26}$$

Por comodidad quitaremos los apóstrofes pero debemos tener presente que estas cantidades ya están en pu

$$\begin{aligned}
\frac{di_a}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_a + \frac{1}{L_s} (E_a - V_a), \\
\frac{di_b}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_b + \frac{1}{L_s} (E_b - V_b), \\
\frac{di_c}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_c + \frac{1}{L_s} (E_c - V_c).
\end{aligned} \tag{A.27}$$

Nótese que las ecuaciones anteriores corresponden a un circuito de tres fases o corrientes alternas (CA) monofásicas (de igual frecuencia y amplitud con diferencia de fase entre ellas, en torno a 120 grados y están dadas en un orden determinado). Para facilitar el análisis de este circuito de tres fases aplicaremos una transformación a las ecuaciones (A.27). Dicha transformación reduce el circuito de tres fase de CA a un circuito de dos cantidades de corriente directa (CD) y es conocida como transformación  $dq0$  o transformación de Park (TP). La matriz de la transformación es

$$TP = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos \phi & \sqrt{2} \cos(\phi - \frac{2\pi}{3}) & \sqrt{2} \cos(\phi + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sqrt{2} \sin \phi & -\sqrt{2} \sin(\phi - \frac{2\pi}{3}) & -\sqrt{2} \sin(\phi + \frac{2\pi}{3}) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.28})$$

La transformación  $dq0$  puede pensarse en términos geométricos como la proyección de tres fases sinusoidales separadas en un sistema de referencia ortogonal inercial que está rotando a velocidad nominal  $\omega_0$ . Los dos ejes son llamados: eje directo ó  $d$  y eje de cuadratura ó  $q$ . En este nuevo marco de referencia el eje  $d$  del generador está siempre coincidiendo con el vector de voltaje instantáneo del sistema y el eje  $q$  está en cuadratura (es decir, es perpendicular al voltaje instantáneo del sistema) a este nuevo conjunto de coordenadas se le conoce como el sistema  $dq0$  ya que es una transformación de un grupo de tres coordenadas a dos coordenadas. La matriz de transformación es ortogonal; es decir,  $(TP)^t = (TP)^{-1}$ , como consecuencia la potencia es invariante bajo la transformación.

Así aplicando la transformación a (A.27) tenemos

$$\begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = (TP)^{-1} \begin{pmatrix} i_{DL} \\ i_{QL} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_a \\ E_b \\ E_c \end{pmatrix} = (TP)^{-1} \begin{pmatrix} E_d \\ E_q \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{pmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{pmatrix} = (TP)^{-1} \begin{pmatrix} V_d \\ V_q \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.30})$$

Sustituyendo (A.29) y (A.30) en (A.27) tenemos

$$\frac{d}{dt} \left[ (TP)^{-1} \begin{pmatrix} i_{DL} \\ i_{QL} \\ 0 \end{pmatrix} \right] = -\frac{R_s}{L_s} \omega_B (TP)^{-1} \begin{pmatrix} i_{DL} \\ i_{QL} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\omega_B}{L_s} (TP)^{-1} \left[ \begin{pmatrix} E_d \\ E_q \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V_d \\ V_q \\ 0 \end{pmatrix} \right], \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(TP)^{-1}] \begin{pmatrix} i_{DL} \\ i_{QL} \\ 0 \end{pmatrix} + [(TP)^{-1}] \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{DL} \\ i_{QL} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ -\omega_B \frac{R_s}{L_s} (TP)^{-1} \begin{pmatrix} i_{DL} \\ i_{QL} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\omega_B}{L_s} (TP)^{-1} \left[ \begin{pmatrix} E_d \\ E_q \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V_d \\ V_q \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Multiplicando por  $TP$  la ecuación anterior

$$TP \frac{d}{dt} [(TP)^{-1}] \begin{pmatrix} i_{DL} \\ i_{QL} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{DL} \\ i_{QL} \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega_B \frac{R_s}{L_s} \begin{pmatrix} i_{DL} \\ i_{QL} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\omega_B}{L_s} \left[ \begin{pmatrix} E_d \\ E_q \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V_d \\ V_q \\ 0 \end{pmatrix} \right],$$

donde

$$(TP) \frac{d}{dt} [(TP)^{-1}] = \omega_0 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{di_{DL}}{dt} = -\omega_0 \frac{R_s}{L_s} i_{DL} + \omega_0 i_{QL} + \frac{\omega_0}{L_s} (E_d - V_d), \quad (\text{A.32})$$

$$\frac{di_{QL}}{dt} = -\omega_0 \frac{R_s}{L_s} i_{QL} - \omega_0 i_{DL} + \frac{\omega_0}{L_s} (E_q - V_q). \quad (\text{A.33})$$

Debido a que la matriz de transformación  $TP$  es una matriz ortonormal la potencia es invariante bajo la transformación por lo cual la potencia instantánea en terminales  $ac - dc$  del inversor está dada por

$$V_{cd} i_{dc} = (E_d i_{DL} + E_q i_{QL}). \quad (\text{A.34})$$

La ecuación del circuito del lado de  $dc$  (del lado derecho de la Fig. A.2) es

$$\frac{d}{dt} V_{dc} = -\frac{1}{C} \left( i_{dc} + \frac{V_{dc}}{R_{dc}} \right). \quad (\text{A.35})$$

Expresando (A.34) y (A.35) en pu con ayuda de (A.24) y (A.25)

$$(V'_{dc} V_{base})(i'_{dc} i_{base}) = (V_{base} i_{base})(E'_d i'_{DL} + E'_q i'_{QL}) \Rightarrow$$

$$V'_{dc} i'_{dc} = (E'_d i'_{DL} + E'_q i'_{QL}), \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{d}{dt}(V_{base}V'_{dc}) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{C'\omega_0 Z_{base}}\right)} \left( i'_{dc}i_{base} + \frac{V'_{dc}V_{base}}{R'_s Z_{base}} \right), \quad (\text{A.37})$$

$$V_{base} \frac{d}{dt}V'_{dc} = -C'\omega_0 Z_{base} (i'_{dc}i_{base} + i_{base} \frac{V'_{dc}}{R'_s}). \quad (\text{A.38})$$

De (A.25)  $Z_{base}i_{base} = V_{base} \Rightarrow$

$$\frac{dV'_{dc}}{dt} = -C'\omega_0 \left( i'_{dc} + \frac{V'_{dc}}{R'_s} \right). \quad (\text{A.39})$$

Para simplificar la notación eliminaremos los apóstrofes en las ecuaciones (A.36) y (A.39) y sólo debemos tener en mente que tales ecuaciones están en pu. Despejando  $i_{dc}$  de (A.36) y sustituyendo en (A.39) tenemos

$$i_{dc} = \frac{1}{V'_{dc}} (E_d i_{DL} + E_q i_{QL}) \Rightarrow \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{dV_{dc}}{dt} = -C\omega_0 \left[ \frac{1}{V_{dc}} (E_d i_{DL} + E_q i_{QL}) + \frac{V_{dc}}{R_s} \right]. \quad (\text{A.41})$$

Recordemos que

$$E_d = M_k V_{dc} \cos(\alpha + \delta_L), \quad (\text{A.42})$$

$$E_q = M_k V_{dc} \sin(\alpha + \delta_L), \quad (\text{A.43})$$

$$V_d = V_L \cos \delta_L, \quad (\text{A.44})$$

$$V_q = V_L \sin \delta_L. \quad (\text{A.45})$$

Sustituyendo (A.42) y (A.43) en (A.41), se obtiene

$$\frac{dV_{dc}}{dt} = -C\omega_0 \left[ M_k (V_{dc} \cos(\alpha + \delta_L) i_{DL} + V_{dc} \sin(\alpha + \delta_L) i_{QL}) + \frac{V_{dc}}{R_s} \right]. \quad (\text{A.46})$$

Sustituyendo (A.42)-(A.45) en (A.32) y (A.33)

$$\frac{di_{DL}}{dt} = -\omega_0 \frac{R_s}{L_s} i_{DL} + \omega_0 i_{QL} + \frac{\omega_0}{L_s} (M_k V_{dc} \cos(\alpha + \delta_L) - V_L \cos \delta_L), \quad (\text{A.47})$$

$$\frac{di_{QL}}{dt} = -\omega_0 \frac{R_s}{L_s} i_{QL} - \omega_0 i_{DL} + \frac{\omega_0}{L_s} (M_k V_{dc} \sin(\alpha + \delta_L) - V_L \sin \delta_L). \quad (\text{A.48})$$

### A.4.1. Ecuaciones del control del StatCom

En esta sección se deducen las ecuaciones asociadas al control del StatCom. Para controlar el índice de modulación  $M_k$  y el ángulo de fase  $\alpha$  del voltaje de salida del StatCom se emplea el control mostrado en la Fig. A.3 [12].

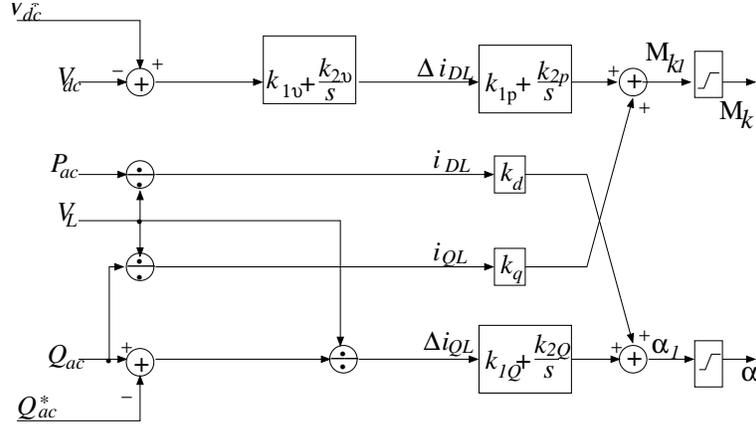


Figura A.3: Control del StatCom.

En este control las señales de entrada  $V_{dc}$  y  $Q_{ac}$  son comparadas con los valores de referencia  $V_{dc}^*$ ,  $Q_{ac}^*$  y usadas para calcular los errores de las señales  $i_{DL}$  e  $i_{QL}$ . El ángulo  $\alpha$  y el índice de modulación  $M_k$  son afectados por los cambios en  $i_{DL}$  e  $i_{QL}$ . De Fig. 2.16 vemos que  $\alpha$  tiene una correlación más fuerte con  $i_{DL}$  y  $M_k$  con  $i_{QL}$  [12]. En base a esto los términos de acoplamiento  $\alpha - i_{QL}$  y  $k - i_{DL}$  pueden ser despreciados ( $k_d = k_q = 0$ ) logrando un control desacoplado.

Primero deduciremos las ecuaciones correspondientes al control de modulación. Definiendo la diferencia entre el voltaje de entrada  $V_{dc}$  y su referencia  $V_{dc}^*$  como

$$V_{dc}^{error} = V_{dc}^* - V_{dc}. \quad (A.49)$$

De la ecuación de transferencia que relaciona la respuesta  $\Delta i_{DL}$  a la señal de entrada  $V_{dc}^{error}$

$$\frac{\Delta i_{DL}}{V_{dc}^{error}} = k_{1v} + \frac{k_{2v}}{s} \Rightarrow \Delta i_{DL} = k_{1v} V_{dc}^{error} + \frac{k_{2v}}{s} V_{dc}^{error}. \quad (A.50)$$

Definiendo

$$x_1 = (k_{2\nu}V_{dc}^{error})/s \quad (\text{A.51})$$

y aplicando la transformada inversa de Laplace a (A.51)

$$sx_1 = k_{2\nu}V_{dc}^{error} \Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = k_{2\nu}V_{dc}^{error}, \quad (\text{A.52})$$

sustituyendo (A.51) en (A.50)

$$\Delta i_{DL} = k_{1\nu}V_{dc}^{error} + x_1 = k_{1\nu}V_{dc}^* + x_1. \quad (\text{A.53})$$

De la ecuación de transferencia que relaciona la respuesta  $M_{k1}$  a la señal de entrada  $\Delta i_{DL}$

$$\frac{M_{k1}}{\Delta i_{DL}} = k_{1p} + \frac{k_{2p}}{s} \Rightarrow M_{k1} = k_{1p}\Delta i_{DL} + \frac{k_{2p}}{s}\Delta i_{DL}. \quad (\text{A.54})$$

Definiendo

$$x_2 = \frac{k_{2p}}{s}\Delta i_{DL}, \quad (\text{A.55})$$

aplicando la transformada inversa de Laplace a (A.55)

$$\frac{dx_2}{dt} = k_{2p}\Delta i_{DL}. \quad (\text{A.56})$$

Sustituyendo (A.55) en (A.54)

$$M_{k1} = k_{1p}\Delta i_{DL} + x_2. \quad (\text{A.57})$$

Ahora vamos a obtener las ecuaciones correspondientes al ángulo del voltaje inyectado.

$$Q_{ac}^{error} = Q_{ac} - Q_{ac}^*. \quad (\text{A.58})$$

De la ecuación de transferencia que relaciona la respuesta  $\Delta i_{QL}$  a la señal de entrada  $Q_{ac}^{error}$

$$\frac{Q_{ac}^{error}}{V_L} = \Delta i_{QL} \Rightarrow \Delta i_{QL} = \frac{Q_{ac}^{ref} - Q_{ac}}{V_L}. \quad (\text{A.59})$$

De la función de transferencia para la respuesta de salida  $\alpha_1$  es

$$\alpha_1 = k_{1Q}\Delta i_{QL} + \frac{k_{2Q}}{s}\Delta i_{QL}. \quad (\text{A.60})$$

Definiendo

$$x_3 = \frac{k_{2Q}}{s}\Delta i_{QL}. \quad (\text{A.61})$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a (A.61)

$$\frac{dx_3}{dt} = k_{2Q}\Delta i_{QL}. \quad (\text{A.62})$$

Sustituyendo (A.59) en (A.62)

$$\frac{dx_3}{dt} = k_{2Q} \left( \frac{Q_{ac}^* - Q_{ac}}{V_L} \right). \quad (\text{A.63})$$

Sustituyendo (A.59) y (A.61) en (A.60)

$$\alpha_1 = k_{1Q} \left( \frac{Q_{ac}^* - Q_{ac}}{V_L} \right) + x_3. \quad (\text{A.64})$$

Por último de las funciones de transferencia para las salidas  $M_k$  y  $\alpha$

$$M_k = M_{lim} \tanh \left( \frac{M_{k1}}{M_{lim}} \right), \quad (\text{A.65})$$

$$\alpha = \alpha_{lim} \tanh \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_{lim}} \right). \quad (\text{A.66})$$

Las ecuaciones (A.52), (A.56), (A.63), (A.53), (A.57), (A.64)-(A.66) son las ecuaciones asociadas al control del StatCom.

# Apéndice B

## Bifurcaciones

Bifurcación se puede entender como un cambio en el número de puntos fijos (y su estabilidad) de una ecuación cuando se varía al menos un parámetro del sistema, así la teoría de bifurcaciones es el estudio de ecuaciones con soluciones múltiples, dicha teoría permite conocer la dinámica de un sistema de manera cualitativa cuando se varía uno o más parámetros de un sistema. Existe una gran variedad de bifurcaciones, en este apéndice revisaremos las que son relevantes para el trabajo presentado en esta tesis.

### B.1. Bifurcación silla

La bifurcación silla está asociada con la aparición y desaparición de puntos de equilibrio conforme el parámetro del sistema es variado. La forma normal de una bifurcación silla es una ecuación diferencial de primero orden

$$\dot{u} = \beta_0 + u^2. \tag{B.1}$$

Si el parámetro de bifurcación  $\beta_0$  es menor que cero, existen dos puntos de equilibrio uno estable y el otro inestable. Cuando  $\beta_0 = 0$ , los puntos fijos colapsan y entonces se dice que se tiene una bifurcación silla, para  $\beta_0 > 0$  (B.1) no tiene puntos fijos. La Fig. B.1 muestra los puntos fijos en el espacio fase, así como el diagrama de bifurcación.

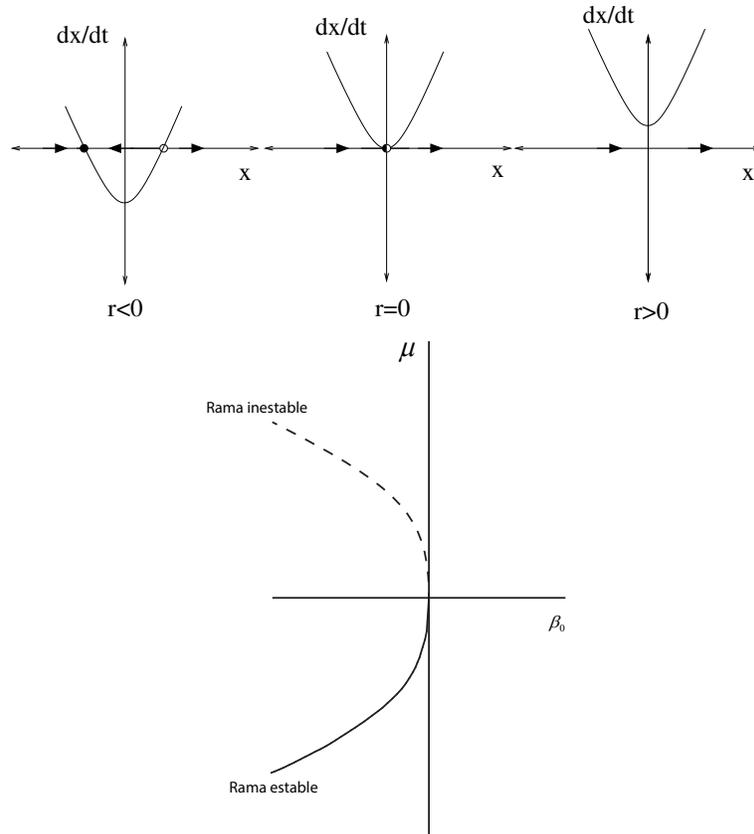


Figura B.1: Espacio fase y diagrama de bifurcación de la bifurcación silla.

## B.2. Bifurcación Pitchfork

La bifurcación Pitchfork tiene que ver con la creación y destrucción de puntos fijos, así como con el intercambio de estabilidad entre el punto de equilibrio trivial (o nulo) y los puntos fijos no nulos. Existen dos tipos de bifurcación Pitchfork: la bifurcación Pitchfork supercrítica y la bifurcación Pitchfork subcrítica.

### B.2.1. Bifurcación Pitchfork supercrítica

La EDO B.2 es la forma normal de la bifurcación Pitchfork supercrítica

$$\dot{u} = \beta_0 u - u^3. \quad (\text{B.2})$$

$\beta_0$  es el parámetro de bifurcación. Cuando  $\beta_0 < 0$  el sistema tiene solo punto fijo  $u = 0$ , el cual es estable Fig. B.2. Para  $\beta_0 > 0$ , existen tres puntos fijos, el trivial  $u = 0$  es inestable y los no triviales son estables. La bifurcación Pitchfork supercrítica ocurre en  $\beta_0 = 0$ .

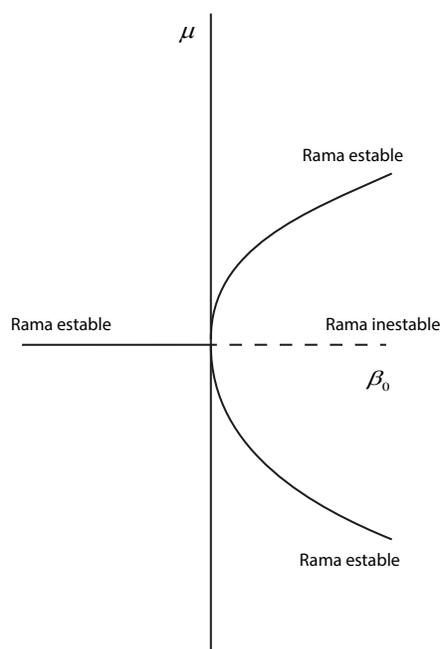


Figura B.2: Diagrama de bifurcación correspondiente a una bifurcación Pitchfork supercrítica.

### B.2.2. Bifurcación Pitchfork subcrítica

La forma normal de la bifurcación Pitchfork subcrítica es

$$\dot{u} = \beta_0 u + u^3. \quad (\text{B.3})$$

Nuevamente  $\beta_0$  es el parámetro de bifurcación. La figura B.3 muestra dicha bifurcación. Al comparar B.3 con B.2 vemos que B.3 está invertida y los punto

fijos tiene estabilidad opuesta, es decir, los punto estables en B.2 ahora son inestables en B.3 y los inestables ahora son estables.

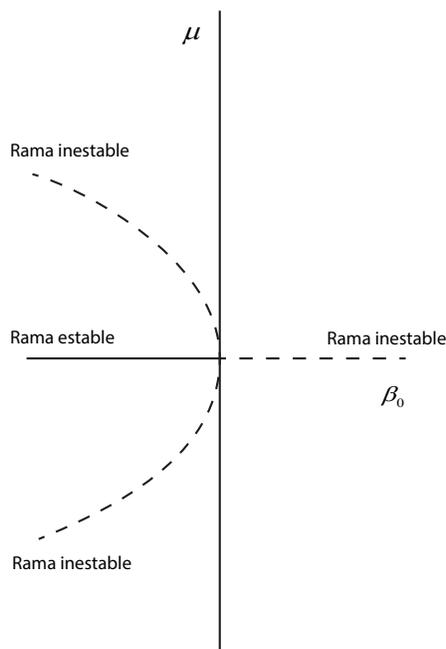


Figura B.3: Diagrama de la bifurcación Pitchfork subcrítica.

Las bifurcaciones Silla y Pitchfork tienen asociada una forma normal, en la siguiente sección revisaremos la bifurcación Hopf la cual se presenta en sistemas de más de una dimensión y están caracterizadas por órbitas periódicas.

### B.3. Bifurcación Hopf

Las bifurcaciones Hopf están relacionadas con sistemas de más de una dimensión, debido a que están caracterizadas por órbitas periódicas (ciclos límite) emergiendo alrededor de un punto de equilibrio cuando se varía un parámetro del sistema. Al variar el parámetro de bifurcación, el punto de equilibrio cambia y también lo hacen los valores propios correspondientes a la matriz Jacobiana del sistema. El punto donde un par de valores propios complejos (nos referiremos a estos valores como valores propios críticos) cruza el eje imaginario de izquierda a derecha con respecto al cambio del parámetro de

bifurcación es conocido como punto de bifurcación Hopf. Para describir de una manera más formal una bifurcación Hopf consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + F(\vec{u}, \beta_0) = 0, \quad (\text{B.4})$$

donde  $\beta_0$  es el parámetro de bifurcación. Supongamos que  $\vec{u} = \vec{0}$  es un punto fijo de (B.4) para todo  $\beta_0$ . Las condiciones que se deben satisfacer para que ocurra una bifurcación Hopf en el punto fijo cuando  $\beta_0 = 0$ , es decir, para que una familia de soluciones periódicas de (B.4) emane de  $(\vec{0}, 0)$  son

**H1.** El Jacobiano evaluado en el punto  $(\vec{0}, 0)$  tiene solamente un par de valores propios puramente imaginarios  $\pm j\omega$ , mientras que el resto de los valores propios tienen parte real distinta de cero.

**H2.** La derivada con respecto a  $\beta_0$  de la parte real de los valores propios críticos debe ser diferente de cero en  $\beta_0 = 0$ , es decir,

$$\frac{d\sigma(0)}{d\beta_0} \neq 0. \quad (\text{B.5})$$

La primera condición implica que el punto fijo es un punto fijo no hiperbólico (recordemos que un punto fijo es hiperbólico cuando uno de sus valores propios es cero). La segunda condición, llamada condición de transversalidad, implica que el par de valores propios críticos cruzan el eje imaginario con parte real distinta de cero conforme el parámetro  $\beta_0$  varía. Cuando **H1** y **H2** se cumplen un ciclo límite emerge del punto de bifurcación.

La característica oscilatoria que experimenta el sistema debido a la bifurcación Hopf permanecerá estable o crecerá dependiendo de si la bifurcación Hopf es supercrítica o subcrítica. A continuación revisaremos tales bifurcaciones.

### B.3.1. Bifurcación Hopf supercrítica

La bifurcación Hopf supercrítica ocurre cuando al variar el parámetro de bifurcación el punto fijo en cuestión pierde estabilidad y se crea un ciclo límite estable alrededor de dicho punto Fig B.5. Un ejemplo simple de una bifurcación Hopf supercrítica se presenta en el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(\beta_0 - r^2), \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2.\end{aligned}\tag{B.6}$$

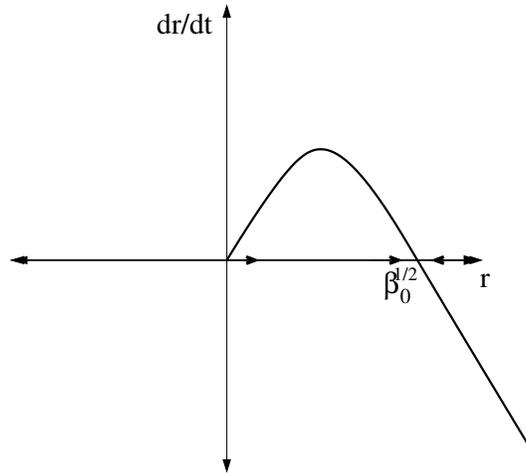


Figura B.4: Gráfica de  $r$  vs  $\dot{r}$ , cuando  $\beta_0 > 0$   $r = 0$ , es un punto fijo estable y  $r = \sqrt{\beta_0}$  es un ciclo límite estable.

El sistema (B.4) está dado en coordenadas polares, por lo cual  $r > 0$ . Para  $\beta_0 \leq 0$  el sistema tiene una solución de equilibrio  $r = 0$ , en cambio para  $\beta_0 > 0$  el sistema presenta dos soluciones de equilibrio:  $r = 0$ , que corresponde a un punto fijo y  $r = \sqrt{\beta_0}$ , que corresponde a un ciclo límite alrededor del punto fijo. De la figura B.4 podemos ver que para  $r < \sqrt{\beta_0}$ ,  $\dot{r} > 0$  y para  $r > \sqrt{\beta_0}$ ,  $\dot{r} < 0$ , por lo tanto el ciclo límite es estable.

El espacio fase en coordenadas cartesianas para este sistema es dado por la Fig. B.5, cuando  $\beta_0 < 0$ , el origen  $r = 0$  es un punto fijo estable así cualquier condición inicial cercana a  $r = 0$  tenderá a dicho punto y de hecho lo hará en forma de espiral como se muestra en la figura. Para  $\beta_0 = 0$ , el origen es todavía una espiral, aunque no muy bien formada. Para  $\beta_0 > 0$ , el origen todavía es una espiral pero ahora inestable y se encuentra rodeado por un ciclo límite estable, cuyo radio es  $r = \sqrt{\beta_0}$ .

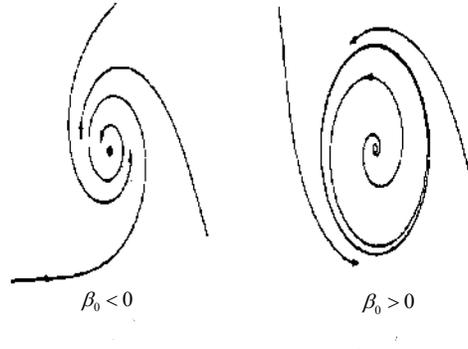


Figura B.5: Bifurcación Hopf supercrítica en el espacio fase. Para  $\beta_0 > 0$ , emerge un ciclo límite estable.

### B.3.2. Bifurcación Hopf subcrítica

Un sistema que presenta bifurcación Hopf subcrítica es

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \beta_0 r + r^3 - r^5, \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

El espacio fase en coordenadas cartesianas se muestra en la Fig. B.6, para  $\beta_0 < 0$  el sistema tiene dos atractores, un ciclo límite estable y un punto fijo estable, entre ellos un ciclo límite inestable el cual se representa con la curva discontinua. A medida que  $\beta_0$  se incrementa el ciclo límite inestable se reduce y envuelve el punto fijo. La bifurcación Hopf subcrítica ocurre en  $\beta_0 = 0$ , donde el ciclo límite inestable se reduce a una amplitud cero por lo cual envuelve al punto fijo y lo convierte en un punto fijo inestable. Para valores positivos de  $\beta_0$ , el ciclo límite estable es el único de atractor, así las soluciones que antes de la bifurcación permanecían cerca del origen ahora son forzadas a incrementar su amplitud.

Las bifurcaciones Hopf pueden ser estudiadas a través de la teoría de singularidades. El estudio se basa en caracterizar las órbitas periódicas de un conjunto EDOs por los ceros de un germen  $g(x, \alpha)$ , es decir, hay una correspondencia uno a uno entre los ceros de  $g(x, \alpha)$  y los ciclos límite de el conjunto EDOs, lo cual facilita el estudio de sistemas muy grandes y so-

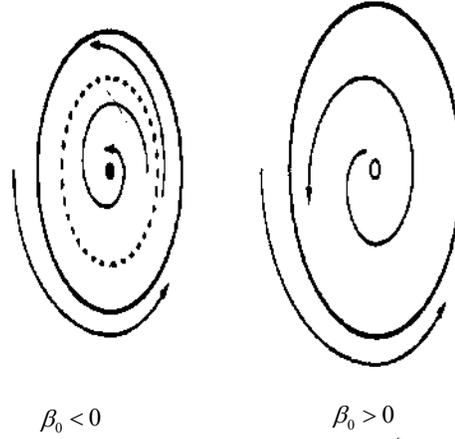


Figura B.6: Gráfica del espacio fase del sistema (B.7) que presenta una bifurcación Hopf subcrítica en  $\beta_0 = 0$ .

bre todo el estudio de las bifurcaciones Hopf degeneradas. Una bifurcación Hopf degenerada se presenta cuando al menos una de las condiciones Hopf no se satisface. En lo que resta de este apéndice expondremos los teoremas que establecen dicha relación y los resultados referentes a bifurcaciones Hopf degeneradas. El libro de *Golubitsky et al* [19] está dedicado en su totalidad a la demostración de tales teoremas y al seguimiento formal de dicho estudio.

Debido a que llevamos acabo un estudio multiparamétrico del sistema de potencia que estamos tratando, supondremos que (B.4) depende de parámetros auxiliares. Sea  $F : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^{k+1}$  tal que

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{F}(\vec{u}, \vec{\alpha}) = 0, \quad (\text{B.8})$$

donde  $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_k)$  y  $\alpha_0 = \beta_0$  con  $k$  parámetros auxiliares. De aquí en adelante supondremos

$$\vec{F}(\vec{0}, \vec{\alpha}) = \vec{0} \quad (\text{B.9})$$

y que  $A(\vec{\alpha})$  satisface **H1**, donde  $A(\vec{\alpha}) = (d\vec{F})_{\vec{0}, \vec{\alpha}}$ .

El siguiente teorema proporciona las condiciones suficientes para que exista una familia de órbitas periódicas para (B.8).

**Teorema 1** *Supongamos que el sistema de EDOs (B.8) satisface **H1** y **H2** (es decir,  $\sigma_{\beta_0}(\vec{0}) \neq 0$ ), entonces hay una familia  $(k+1)$ -paramétrica de órbitas periódicas de (B.8) bifurcándose de la solución de estado estacionario  $\vec{u} = 0$  en  $\vec{\alpha} = 0$ .*

El siguiente teorema permite relacionar los ciclos límite de (B.8) con los ceros de un germen  $g(x, \vec{\alpha})$ .

**Teorema 2** *Asumamos que el sistema (B.8) satisface **H1**. Entonces existe un germen  $g(x, \vec{\alpha})$  de la forma*

$$g(x, \vec{\alpha}) = r(x^2, \vec{\alpha})x, \quad r(0, \vec{0}) = 0, \quad (\text{B.10})$$

*tal que las soluciones locales de  $g(x, \vec{\alpha}) = 0$  con  $x \geq 0$  están en correspondencia uno a uno con órbitas de pequeña amplitud que corresponden a soluciones periódicas del sistema (B.8) cuyo período es aproximadamente  $2\pi$ .*

$x$  es la amplitud del ciclo límite. Centraremos nuestra atención en  $g(x^2, \alpha)$ , así el objetivo es encontrar los ceros de

$$g(x, \vec{\alpha}) = r(x^2, \vec{\alpha})x = 0, \quad (\text{B.11})$$

las soluciones no triviales de (B.11) se obtienen de resolver

$$r(x^2, \vec{\alpha}) = 0, \quad (\text{B.12})$$

Para enunciar el teorema que proporciona las condiciones suficientes para que las órbitas sean parametrizadas por el parámetro de bifurcación  $\beta_0$ , daremos la definición  $Z_2$ -equivalente y  $Z_2$ -simetría [19].

**Definición B.1** *Una función  $G(x, \beta_0)$  tiene simetría  $Z_2$  si  $G$  es una función impar, es decir, si  $G(-x, \beta_0) = -G(x, \beta_0)$ .*

**Definición B.2** *Sea  $G(x, \beta_0)$  y  $h(x, \beta_0)$  funciones con simetría  $Z_2$ .  $G$  y  $h$  son  $Z_2$ -equivalente si*

$$h(x, \beta_0) = S(x, \beta_0)G(X(x, \beta_0), \Theta(\beta_0)), \quad (\text{B.13})$$

donde la tripleta  $(S, X, \Theta)$  es una transformación equivalente tal que  $X$  es impar y  $S$  es par en  $x$ . Si la relación se satisface con  $\Theta(\beta_0) = \beta_0$ ,  $G$  y  $H$  son fuertemente  $Z_2$ -equivalentes.

**Teorema 3** Sea (B.8) que satisface **H1** y **H2**

$$\mathbf{H3} \quad r_z(0, \vec{0}) \neq 0. \quad (x^2 = z)$$

Entonces para cada  $\vec{\alpha}' = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  la ecuación de bifurcación reducida  $g$  es  $\mathbf{Z}_2$  equivalente a la bifurcación Pitchfork  $\epsilon x^3 + \delta \beta_0 x$ , donde  $\epsilon = \text{sgn} r_z(0, \vec{0})$  y  $\delta = \text{sgn} \sigma_{\beta_0}(\vec{0})$ .

Por último discutiremos la estabilidad de las órbitas periódicas, para lo cual primero reforzaremos **H1**. Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son los valores propios de  $A(\vec{0}) = (d\vec{F})_{\vec{0}, \vec{0}}$ , entonces supondremos que

$$\mathbf{H4} \quad \lambda_1 = \pm i, \quad \text{Re}(\lambda_j) > 0, \quad j = 3, \dots, n. \quad (\text{B.14})$$

**Teorema 4** Supongamos que  $\vec{u} = 0$  es una solución de equilibrio de (B.8) para todo  $\vec{\alpha}$ , también supongamos que la linearización de (B.8) valuada en  $\vec{u} = 0$ ,  $\vec{\alpha} = 0$  satisface (B.14). Entonces la solución periódica de (B.8) que corresponde a una solución  $(x, \vec{\alpha})$  de  $g(x, \vec{\alpha}) = 0$  es asintóticamente estable si  $g_x(x, \vec{\alpha}) > 0$  e inestable si  $g_x(x, \vec{\alpha}) < 0$ .

Hemos introducido las hipótesis **H1**, **H2**, **H3** y **H4**. Diremos que se tiene una bifurcación Hopf degenerada (HBD) cuando dada una bifurcación Hopf al variar los parámetros del sistemas una o más de las hipótesis no se cumple. Debido a que en el sistema de potencia que estamos estudiando se presentan (HBD) cuando **H2** falla, solo mostramos la teoría relacionada a este tipo de degeneración. La ecuación de bifurcación reducida  $g$  es  $\mathbf{Z}_2$  equivalente a una de las siguientes formas normales

$$(a) \quad x^3 + \beta_0^2 x, \quad (\text{B.15})$$

$$(b) \quad -x^3 + \beta_0^2, \quad (\text{B.16})$$

las cuales muestran un interesante dinámica cuando son perturbadas en sus formas universales [19]

$$(a) \quad x^3 + \beta_0^2 x + \beta_1 x, \quad (\text{B.17})$$

$$(b) \quad -x^3 + \beta_0^2 + \beta_1 x. \quad (\text{B.18})$$

Las Figs. B.7 y B.8 muestra los diagramas para B.17 y B.18 en función de  $\beta_0$ .

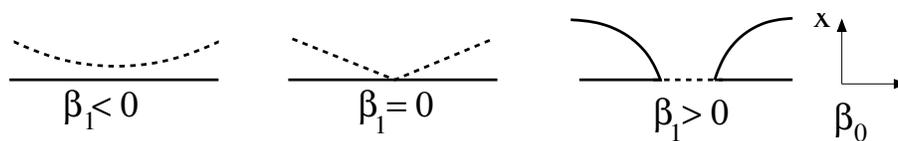


Figura B.7: Dinámica alrededor de una BHD que predice la teoría de bifurcaciones cuando **H2** no se satisface.

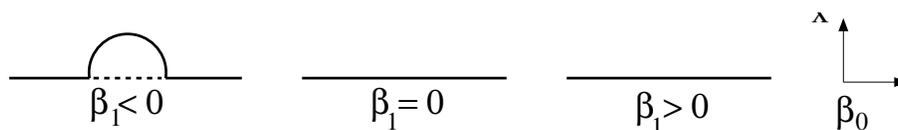


Figura B.8: Dinámica alrededor de una BHD que predice la teoría de bifurcaciones cuando **H2** no se satisface.

Las líneas continuas corresponden a soluciones estables y las discontinuas a soluciones inestables, la notación aplica para puntos fijos y ciclos límites.

# Apéndice C

## Nomenclatura

En el capítulo 3 de esta tesis usamos la siguiente notación y definiciones.

$n$	número de buses
$m$	número de buses generadores, buses 1,2, ..., $m$ son buses generadores
$\ell$	número de líneas de transmisión
$\delta_i$	ángulo del voltaje en el bus $i$
$\delta$	vector cuyas componentes son los ángulos de los voltajes $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)^T$
$V_i$	magnitud del voltaje en el bus $i$
$V$	vector de cuyas componentes son las magnitudes de los voltajes de los buses de carga $(V_{m+1}, V_{m+2}, \dots, V_n)^T$
$z$	vector de estados $(\delta, V)^T$
$V_i^{\ln}$	$\ln V_i$ ;
$P_i$	potencia real neta inyectada en el bus $i$
$Q_i$	potencia activa neta inyectada en el bus $i$
$\omega_0$	frecuencia nominal en rad/s
$h_i$	inercia en el bus $i$ en segundos
$m_i$	$2h_i/\omega_0$
$M$	Matriz diagonal $\text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_{2n-m}\}$
$d_i$	coeficiente de amortiguamiento en el bus $i$ en segundos
$D$	matriz diagonal $\text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_{2n-m}\}$
$b_{ij}$	parte imaginaria del elemento $ij$ de la matriz de admitancia (para $i \neq j$ , $b_{ij}$ es el valor absoluto de la susceptancia de la línea inductiva que une los buses $i$ y $j$ ; $b_{ii}$ es la suma de las susceptancias incidentes en el bus $i$ .)

$b_k$	valor absoluto de la susceptancia de la línea $k$
$p_k$	flujo de potencia real a través de la línea $k$ definido en (3.56)
$q_k$	parte del flujo de potencia reactiva a través de la línea $k$ definido en (3.57)
$R$	función escalar de energía potencial del sistema definida en (3.3)
$L$	Matriz Laplaciana; Hessiana de $R$
$Q$	$M\lambda^2 + D\lambda + L$ ; matriz cuadrática función de $\lambda$
$x$	vector propio de $Q$

Las componentes de la matriz de incidencia  $A$  se definen como

$$A_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si el bus } i \text{ es el bus emisor de la línea } k, \\ -1 & \text{si el bus } i \text{ es el bus receptor de la línea } k, \\ 0 & \text{En cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Denotamos  $|A|$  como la matriz cuyas componentes son el valor absoluto de las componentes de  $A$ , es decir,

$$|A_{ik}| = \begin{cases} 1 & \text{si el bus } i \text{ es el bus emisor o receptor de la línea } k, \\ 0 & \text{En cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Definimos el ángulo a través de la línea  $k$  como

$$\theta_k = \sum_{r=1}^n A_{rk} \delta_r = \begin{cases} \delta_i - \delta_j & \text{si el bus } i \text{ es el bus emisor de la línea } k \\ \delta_j - \delta_i & \text{si el bus } i \text{ es el bus receptor de la línea } k \end{cases}$$

y escribimos el vector  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\ell)^T$  cuyas componentes son los ángulos de las líneas.

Las nueva coordenada de voltaje para la línea  $k$  que conecta los buses  $i$  y  $j$  está definida como

$$\nu_k = \sum_{r=1}^n |A_{rk}| \ln V_r = \ln (V_i V_j)$$

y escribimos el vector  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\ell)^T$  cuyas componentes son las coordenadas de voltaje para todas las líneas.

- 
- $z'$  vector de estados  $(\theta, \nu)^T$   
 $h$   $z' = h(z)$ ; transforma las coordenadas  $z$  en las coordenadas  $z'$   
 $H$  Jacobiano del cambio de coordenadas  $h$   
 $x'$  vector propio de  $Q$  en coordenadas  $z'$

# Bibliografía

- [1] A. Arapostathis, S.S. Sastry, P. Varaiya, “Global Analysis of Swing Dynamics”, IEEE Trans. Circuits and Systems, vol CAS-29, no. 10, octubre de 1982, 673-679.
- [2] A.R. Bergen, D.J. Hill, “A structure preserving model for power systems stability analysis”, IEEE Trans. Power App. Syst., vol. PAS-101, enero de 1981, 25-35.
- [3] N.R. Chaudhuri, B. Chaudhuri, “Damping and relative mode-shape estimation in near real-time through phasor approach”, IEEE Trans. Power Syst., vol. 26, no. 1, febrero de 2011, 364-373.
- [4] R.L. Chen, P.P. Varaiya, “Degenerate Hopf bifurcations in power systems”, IEEE Trans. Circ. and Syst., Vol CAS-35, no. 7, julio de 1988, 818-824.
- [5] C.Y. Chung, L. Wang, F. Howell, P. Kundur, “Generation rescheduling methods to improve power transfer capability constrained by small-signal stability”, IEEE Trans. Power Syst., vol. 19, no. 1, febrero de 2004, 524-530.
- [6] Cigré Task Force 07 of Advisory Group 01 of Study Committee 38, “Analysis and control of power system oscillations”, Paris, diciembre de 1996.
- [7] C. L. DeMarco, J. J. Wassner, “A generalized eigenvalue perturbation approach to coherency”, Proc. IEEE Conference on Control Applications, Albany, NY, septiembre de 1995, 605-610.
- [8] R. Diao, Z. Huang, N. Zhou, Y. Chen, F. Tuffner, J. Fuller, S. Jin, J.E Dagle, “Deriving optimal operational rules for mitigating inter-area

- oscillations, Power Systems Conference and Exposition”, Phoenix AZ USA, marzo de 2011.
- [9] I. Dobson, H.D. Chiang, J.S. Thorp, “A model of voltage collapse in electric power systems”, in: 27th IEEE Conference on Decision and Control, Austin, Tx, diciembre de 1988, 2104-2109.
- [10] I. Dobson, Fernando Alvarado, C. L. DeMarco, “Sensitivity of Hopf bifurcations to power system parameters”, proceedings of the 31st Conference on Decision and Control, Tucson, Arizona, diciembre de 1992.
- [11] I. Dobson, F.L. Alvarado, C.L. DeMarco, P. Sauer, S. Greene, H. Engdahl, J. Zhang, “Avoiding and suppressing oscillations”, PSerc publication 00-01, diciembre de 1999.
- [12] L. Dong, M.L. Crow, Z. Yang, C. Shen, L. Zhang, S. Atcitty, “A Reconfigurable FACTS System for University Laboratories”, IEEE Trans. Power Syst., vol 19, no. 1, febrero de 2004, 120-128.
- [13] L. Dosiek, N. Zhou, J.W. Pierre, Z. Huang, D.J. Trudnowski, “Mode shape estimation algorithms under ambient conditions: A comparative review”, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 28, no. 2, mayo de 2013, 779-787.
- [14] B. Ermentrout, “Simulating, Analyzing and Animating Dynamical Systems: A Guide to XPPAUT for Researchers and Students”, SIAM, Philadelphia, PA, 2002.
- [15] A. Fischer, I. Erlich, “Assessment of power system small signal stability based on mode shape information”, IREP Bulk Power System Dynamics and Control V, Onomichi, Japón, agosto de 2001.
- [16] A. Fischer, I. Erlich, “Impact of long-distance power transits on the dynamic security of large interconnected power systems”, IEEE Porto Power Tech Conference, Porto, Portugal, septiembre de 2001.
- [17] J. J. Flores, C. R. Fuertes-Esquivel, J. Barrere, H. R. Carvajal, “Particle swarm optimization method to assess a voltage stability region by multi-parameter bifurcation analysis”, International Review of Electrical Engineering 6, diciembre de 2001, 3102-3110.

- 
- [18] M. Golubitsky, W.F. Langford, "Classification and unfoldings of degenerate Hopf bifurcations, *J. Diff. Eq.*", vol. 41, no. 3, septiembre de 1981, 375-415.
- [19] M. Golubitsky, D. G. Schaeffer, "Singularities and Groups in Bifurcation Theory", Vol 1. Springer.
- [20] T. Guo, R.A. Schlueter, "Identification of generic bifurcation and stability problems in power systems differential-algebraic equations", *IEEE Trans. Power Syst.* vol. 9, no. 2, mayo de 1994, 1032-1044.
- [21] Z. Huang, N. Zhou, F. Tuffner, Y. Chen, D. Trudnowski, W. Mittelstadt, J. Hauer, J. Dagle, "Improving small signal stability through operating point adjustment", *IEEE PES General Meeting*, Minneapolis, MN USA, julio de 2010.
- [22] Z. Huang, N. Zhou, F.K. Tuffner, Y. Chen, D.J. Trudnowski, "MANGO - Modal Analysis for Grid Operation: A method for damping improvement through operating point adjustment", Prepared for the U.S Department of Energy octubre de 2010.
- [23] H. Jia, X. Yu, P. Zhang, "Topological characteristic studies on power system small signal stability region", *IEEE Power Engineering Society General Meeting 2006*, Montreal, Que., junio de 2006, 1-7.
- [24] M. Jonsson, M. Begovic, J. Daalder, "A new method suitable for real-time generator coherency determination", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 19, no. 3, agosto de 2004, 1473-1482.
- [25] P. Lenh, "Exact modeling of the voltage source converter", *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 17, enero de 2002, 217-222.
- [26] IEEE Power system engineering committee, "Eigenanalysis and frequency domain methods for system dynamic performance", *IEEE Publication 90TH0292-3-PWR*, 1989.
- [27] IEEE Power Engineering Society Systems Oscillations Working Group, "Inter-area oscillations in power systems", *IEEE Publication 95 TP 101*, octubre de 1994.

- 
- [28] R. Ramírez-Betancourt, C. R. Fuerte Esquivel, T. Van Cutsem, “A two-time scale simulation for dynamic analysis of power systems”. *Electric Power System Research*, 83 185-195, 2012.
- [29] N. G. Sakellariadis, M. E. Karystianos, C. D. Vournas, “Homoclinic Loop and Degenerate Hopf Bifurcations Introduced by Load Dynamics”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 24, no. 4, 1892-1893, 2009.
- [30] P. W. Sauer, M. A. Pai, “Power System Dynamics and Stability”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ, 1998.
- [31] C. Schauder and H. Mehta, “Vector analysis and control of advanced static VAR compensators”, *Proc. Inst. Elect. Eng., Gen. Transm. Dist.*, vol. 140, no. 4, julio de 1993, 299-306.
- [32] IEEE Task Force on Identification of Electromechanical Modes, “Identification of electromechanical modes in power systems”, *IEEE Special Publication TP462*, junio de 2012.
- [33] M. Klein, G.J. Rogers, P. Kundur, “A fundamental study of inter-area oscillations in power systems”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 6, no. 3, agosto de 1991, 914-921.
- [34] E. Mallada, A. Tang, “Improving damping of power networks: power scheduling and impedance adaptation”, *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, Orlando, FL, USA, diciembre de 2011.
- [35] H.K. Nam, Y.K. Kim, K.S. Shim, K.Y. Lee, “A new eigen-sensitivity theory of augmented matrix and its applications to power system stability”, *IEEE Trans. Power Systems*, vol. 15, febrero de 2000, 363-369.
- [36] N. Narasimhamurthi and M. T. Musavi, “A general energy function for transient stability of power systems”, *IEEE Trans. Circuits and Systems.*, vol. CAS-31, julio de 1984, 637-645.
- [37] T.J. Overbye, I. Dobson, C.L. DeMarco, “Q-V Curve interpretations of energy measures for voltage security”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 9, no. 1, febrero de 1994, 331-340.

- 
- [38] M. A. Pai, “Energy Function Analysis for Power System Stability”, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1989.
- [39] J.W. Pierre, D.J. Trudnowski, M.K. Donnelly, “Initial results in electromechanical mode identification from ambient data”, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 12, no. 3, agosto 1997, 1245-1251.
- [40] G. Rogers, “Power System Oscillations”, Kluwer Academic, 2000.
- [41] T. Smed, “Feasible eigenvalue sensitivity for large power systems”, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 8, No. 2, mayo de 1993, 555-563.
- [42] D.J. Trudnowski, “Estimating electromechanical mode shape from synchrophasor measurements”, IEEE Trans. Power Syst., vol. 23, no. 3, agosto de 2008, 1188-1195.
- [43] N.K. Tsolas, A. Arapostathis, P.P. Varaiya, “A structure preserving energy function for power system transient stability analysis”, IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-32, no. 10, octubre de 1985, 1041-1049.
- [44] E. Uzunovic, “EMTP, Transient Stability and Power Flow Models and Controls of VSC Based FACTCS Controllers”, PhD Thesis, Department of Electrical and Computer Engineering, Waterloo, Ontario, Canada. 2001.
- [45] L. Vanfretti, J.H. Chow, “Analysis of power system oscillations for developing synchrophasor data applications”, 2010 IREP Symposium - Bulk Power System Dynamics and Control VIII, Buzios, Brazil, agosto de 2010,
- [46] V. Venkatasubramanian, H. Schättler, J. Zaborszky, “Local bifurcations and feasibility regions in differential-algebraic systems”, IEEE Trans. Aut. Control vol. 40, no. 12, diciembre de 1995, 1992-2013.
- [47] Shao-bu Wang, Quan-yuan Jiang, Yi-jia Cao, “WAMS-based monitoring and control of Hopf bifurcations in multi-machine power systems”, Journal of Zhejiang University Science A, vol. 9, no. 6, 840-848, 2008.
- [48] R.W. Wies, J.W. Pierre, D.J. Trudnowski, “Use of ARMA block processing for estimating stationary low-frequency electromechanical modes

of power systems”, IEEE Trans. Power Syst., vol. 18, no. 1, febrero de 2003, 167-173.

- [49] X. Yu, S. Cao, H. Jia, P. Zhang P., “Impact of the exciter voltage limit to power system small signal stability region”, IEEE Power Engineering Society General Meeting 2007, Tampa, Fl., junio de 2007, 1-7.