



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas

Colapso gravitacional y estabilidad de singularidades desnudas

Tesis
que para obtener el título de

Doctor en Ciencias en el área de Física

presenta:

Néstor Enrique Ortiz Madrigal

Bajo la asesoría del:
Doctor en Ciencias Físicas Olivier Charles-Albert Sarbach
Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH.

Morelia, Michoacán. Febrero de 2014.

Índice general

1. Introducción	9
2. Las ecuaciones dinámicas del colapso de un fluido perfecto esféricamente simétrico	15
2.1. El espacio-tiempo esféricamente simétrico y las ecuaciones de Einstein-Euler . . .	15
2.1.1. Las ecuaciones de Einstein-Euler	17
2.2. Termodinámica del fluido en colapso	20
2.2.1. La ecuación de estado	21
2.3. Las ecuaciones de evolución	22
2.3.1. El sistema adimensional para un sistema politrópico	24
2.3.2. El problema de Cauchy	25
2.4. Discusión	29
3. El modelo de colapso gravitacional de Tolman-Bondi	31
3.1. Descripción del modelo	32
3.2. Rayos de luz provenientes de la singularidad: análisis cualitativo	34
3.2.1. Comportamiento asintótico de los rayos nulos radiales cerca de Σ	37
3.2.2. Comportamiento asintótico de los rayos nulos radiales cerca de Σ_0	39
3.2.3. Visibilidad global de la singularidad	42
3.3. Diagramas conformes	45
3.3.1. El caso especial de una nube de densidad homogénea con velocidad inicial cero.	45
3.3.2. El caso genérico	46
3.3.3. Construcción del diagrama conforme	48
3.3.4. Perfiles iniciales de densidad y velocidad	50
3.3.5. Ejemplos de diagramas conformes generados numéricamente	54
3.3.6. Espacio fase de parámetros	58
3.3.7. Discusión	59

4. Estabilidad de singularidades desnudas I: campos de prueba esféricos	61
4.1. Preliminares y notación	62
4.2. Acotamiento del corrimiento al azul a lo largo de rayos de luz radiales	64
4.3. Acotamiento de campos efectivos de prueba esféricamente simétricos	69
4.4. Discussion	74
5. Estabilidad de singularidades desnudas II: estudios numéricos de la propagación de campos de prueba no esféricos	77
5.1. Formulación característica	78
5.1.1. Regularidad de los coeficientes del sistema de evolución	81
5.1.2. Comportamiento asintótico de la solución	82
5.2. Análisis numérico	84
5.3. Resultados numéricos	84
5.4. Discusión	85
6. Estabilidad de singularidades desnudas III: estimaciones de energía para campos de prueba fuera de simetría esférica	87
6.1. Preliminares	88
6.1.1. La ecuación de balance	89
6.1.2. La fuente de la ecuación de balance	92
6.2. Estimaciones de energía	97
6.2.1. Campos escalares no esféricos	98
6.2.2. Campos electromagnéticos	99
6.2.3. Acotamiento uniforme de campos escalares no esféricos	99
6.3. Discusión	101
7. El corrimiento al rojo gravitacional a través de una nube en colapso	103
7.1. Introducción	103
7.2. El caso homogéneo	105
7.2.1. El corrimiento al rojo total	107
7.2.2. Sobre el corrimiento al azul de fotones emitidos desde el interior de la nube	109
7.3. Relación entre la razón de compacidad y el factor de corrimiento al azul	109
7.4. El corrimiento al rojo total en el caso de una nube inhomogénea	111
7.4.1. El caso del colapso marginalmente ligado	111
7.4.2. El caso genérico	113
7.5. Ejemplos numéricos	114
7.6. Discusión	117
8. Distinción observacional entre singularidades desnudas y agujeros negros	121

8.1. Características distintivas de una singularidad desnuda a partir del corrimiento al rojo	122
8.2. Discusión.	125
9. Conclusiones	127
A. Teorema de existencia para perturbaciones no lineales de puntos singulares regulares	129
B. Prueba del Lema 3.2.2	131
C. La superficie de la nube de polvo que colapsa en coordenadas de Kruskal	133
D. Divergencia del campo vectorial X	135
E. Análisis numérico	137
E.1. Caso del fondo plano (coeficientes constantes)	137
E.1.1. El régimen continuo	137
E.1.2. El régimen semi-discreto	139
E.2. Caso del fondo de Tolman-Bondi (coeficientes variables)	144
E.2.1. El régimen continuo	144
E.2.2. El régimen semi-discreto	145
F. Aproximaciones numéricas	151
F.1. Derivación	151
F.2. Suma por partes	152
G. Prueba del Lema 6.2.1	153

Resumen

En esta tesis se discute el colapso gravitacional total de una nube de polvo esféricamente simétrica y se lleva a cabo un análisis de estabilidad de las singularidades desnudas que aparecen dentro del modelo. El trabajo comienza con la derivación de las ecuaciones de Einstein-Euler que gobiernan la dinámica del colapso de un fluido perfecto con una ecuación de estado arbitraria. Enseguida se considera el caso particular de polvo con datos iniciales genéricos y sin restricciones particulares. Después se realiza un profundo análisis de los rayos nulos, el cual es importante para entender la estructura causal del espacio-tiempo y desarrollar un algoritmo numérico para generar los diagramas conformes correspondientes. También se da una condición suficiente sobre el dato inicial del colapso para la formación de una singularidad globalmente desnuda. La segunda parte de esta tesis estudia la estabilidad del horizonte de Cauchy asociado a una singularidad desnuda proveniente del colapso total de una nube de polvo esférica. Como perturbación se considera la propagación de campos de prueba en la vecindad de la singularidad central y del horizonte de Cauchy. Primero se estudia el régimen de altas frecuencias de los campos y se demuestra que éstos experimentan un corrimiento al azul uniformemente acotado a lo largo de rayos nulos entrantes y salientes. Enseguida, en el régimen de bajas frecuencias, se demuestra que los campos de prueba esféricos que se propagan cerca de la singularidad con datos iniciales regulares, son uniformemente acotados en tal vecindad y a lo largo del horizonte de Cauchy. Después se realizan estudios numéricos de la evolución de campos de prueba fuera de simetría esférica en la vecindad de la singularidad, sin encontrar evidencia de inestabilidades. Tal resultado ha motivado el estudio analítico de la propagación de dichos campos no esféricos vía estimaciones de energía, lo cual resultó en el hallazgo del acotamiento uniforme de la energía asociada a los campos y consecuente acotamiento de los mismos cerca de la singularidad. En la última parte de esta tesis se estudia la función de corrimiento al rojo de fotones que atraviesan una nube de polvo esférica en colapso. Se muestra que tal función provee información observacional acerca de la distribución de masa de la nube, y de manera aún más interesante, que la función de corrimiento al rojo presenta propiedades diferentes dependiendo del estado final del colapso, ya sea un agujero negro o una singularidad desnuda.

Palabras clave: Colapso gravitacional, estabilidad.

Abstract

This dissertation discusses the complete gravitational collapse of a spherical dust cloud, and a stability analysis of naked singularities arising within this model is also performed. The work starts with the derivation of the Einstein-Euler governing the dynamics of the collapse for a spherical perfect fluid with an arbitrary equation of state. Next, the particular case dust collapse with generic initial data and no particular restrictions is considered. Then, it is performed a deep analysis of the radial light rays, which is important to understand the causal structure of the spacetime and develop a novel numerical algorithm for generating the corresponding conformal diagrams. Also, a sufficient condition on the initial data to generate a globally naked singularity is provided. The second part of this dissertation discusses the stability of the Cauchy horizon associated to a naked singularity resulting from the collapse of a spherical dust cloud. The perturbations were considered to be the propagation of test fields in the vicinity of the central singularity and the Cauchy horizon. First, the high frequency limit of test fields propagating in the vicinity of the Cauchy horizon is studied, and it is shown that they undergo a uniformly bounded blueshift along incoming and outgoing null rays. Next, it is proved that spherically symmetric test scalar fields which propagate under reasonable physical initial conditions are uniformly bounded in a vicinity of the central singularity and along the Cauchy horizon. The numerical evolution of non-spherical test fields was then performed in the vicinity of the singularity, which did not show evidence of instability. This fact motivated analytic studies of the propagation of non-spherical test fields in the vicinity of the Cauchy horizon of naked singularities via energy estimates, which resulted in the founding of the uniform boundedness of the energy associated to the field and consequently, its uniform boundedness. In the last part of this work, it is studied the redshift function of photons traversing a collapsing spherical dust cloud, and it is shown that this function provides observational information on the mass distribution of the cloud, and more interestingly, the redshift function shows distinct features depending on the final fate of the collapse, namely a black hole or a naked singularity.

Key words: Gravitational collapse, stability.

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo se presentan los resultados de un extenso proyecto de investigación sobre el fenómeno conocido como *colapso gravitacional*, el cual consiste en la contracción de un objeto masivo sobre sí mismo debido a su auto-gravedad, lo que provoca una disminución de su volumen y un aumento de su densidad de materia-energía. El colapso gravitacional es responsable, al menos en primera instancia, de la formación de las estructuras macroscópicas conocidas en el universo, desde planetas y estrellas hasta galaxias y cúmulos de galaxias. Por ejemplo: el colapso de una nube de hidrógeno molecular y polvo interestelar suficientemente masiva puede dar lugar al nacimiento de una estrella cuando se induce la fusión nuclear del hidrógeno, lo que a su vez genera una presión térmica que contrarresta a la fuerza gravitacional. Si se alcanza el equilibrio hidrostático, el colapso se detiene y el objeto alcanza un estado estacionario; en cambio si la presión del gas es insuficiente para contrarrestar a la gravedad -como típicamente ocurre cuando los elementos químicos de la estrella ya no pueden ser fusionados sin absorber energía-, el colapso continúa y, dependiendo de la masa del sistema, puede inducir un fenómeno astrofísico tan complejo y violento como una *supernova* y/o la formación de una *enana blanca* o una *estrella de neutrones* [1], las cuales alcanzan el equilibrio gracias a presiones de degeneración cuántica. Si ni siquiera una presión de este tipo fuera suficientemente grande para detener el colapso, entonces éste proseguiría continuamente. En última instancia, la Relatividad General, que es la teoría de la gravitación más exitosa y aceptada actualmente, predice que cuando un objeto suficientemente masivo se encuentra concentrado en una región muy pequeña de un espacio-tiempo asintóticamente plano -como ocurre por ejemplo al colapsar completamente una estrella aislada-, se forma una superficie atrapada [2] y entonces los resultados de Hawking y Penrose conocidos como *teoremas de singularidad* (ver por ejemplo [3, 4]) implican la formación de una *singularidad* espacio-temporal. Además, la formación de un agujero negro es de esperarse según el estudio de Oppenheimer y Snyder [5], y no existe *a priori* un mecanismo que impida que la singularidad comience a formarse antes que el horizonte de eventos, de tal manera que al menos una porción de dicha singularidad resulte *globalmente desnuda* en el sentido de que quede causalmente conectada con una región del universo que se extiende asintóticamente. Al respecto de esa posibilidad hay al menos un par de observaciones interesantes: (1) el hecho de que un observador arbitrariamente lejano pudiera recibir información proveniente de la vecindad de una región singular del universo, en principio abriría la posibilidad de conocer nuevos aspectos de la naturaleza; (2) asumiendo que la Relatividad General es el marco correcto para describir y predecir los fenómenos gravitatorios -para lo cual es una sólida candidata hasta ahora-, la presencia de singularidades desnudas en el

universo resultaría catastrófica para el determinismo de la teoría, pues no tiene sentido plantear un problema de Cauchy global en un espacio-tiempo en presencia de una región singular a menos que se impongan condiciones de frontera sobre la misma, para lo cual no existe una prescripción natural. Esta última observación en parte ha motivado la llamada *conjetura de la censura cósmica débil*, formulada la primera vez por Roger Penrose en 1969 [6]. Técnicamente, esta conjetura establece que si la materia que colapsa satisface condiciones físicamente razonables, entonces el máximo desarrollo de Cauchy de un dato inicial regular y asintóticamente plano, genéricamente debe ser un espacio-tiempo asintóticamente plano con un infinito nulo futuro completo, o en otras palabras, su pasado causal no debe contener puntos singulares. Por lo tanto, durante un colapso total genérico, el horizonte de eventos debe formarse antes que la singularidad, y en ese sentido, la presencia del agujero negro debe *censurar* la ocasión de que la singularidad sea globalmente desnuda. Sin embargo, aún queda abierta la posibilidad de que la singularidad resulte *localmente desnuda*, es decir, conectada causalmente con observadores locales dentro del horizonte de eventos, lo cual es menos relevante desde el punto de vista astrofísico porque no tendría consecuencias catastróficas para la predictibilidad de la teoría en regiones asintóticas. Aún así, la versión *fuerte* de la conjetura establece que ni siquiera las singularidades localmente desnudas deben aparecer como resultado de un colapso gravitacional genérico.

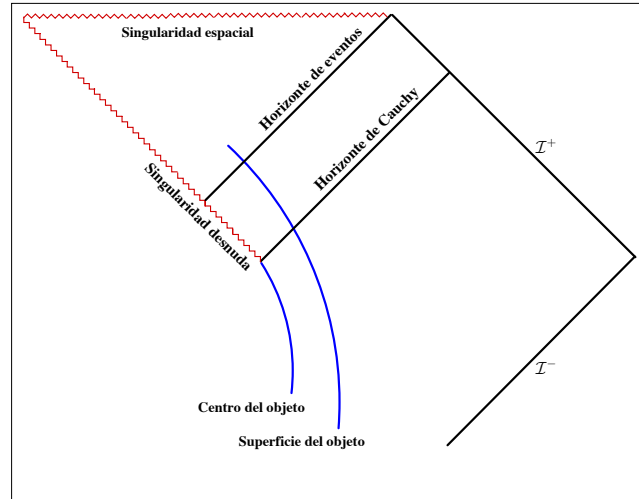


Figura 1.1: Representación caricaturizada del diagrama de Penrose del espacio-tiempo resultante del colapso gravitacional total de un objeto, el cual da lugar a una singularidad globalmente desnuda. Nótese que el pasado causal del infinito nulo futuro ($\mathcal{I}^+$) contiene puntos singulares y que el horizonte de Cauchy queda fuera del horizonte de eventos.

Para aclarar esta discusión es conveniente introducir un concepto geométrico importante e ilustrarlo con una figura. Supóngase por un momento que el colapso total de un objeto masivo da lugar a la formación de una singularidad desnuda. En este caso, el espacio-tiempo resulta no ser globalmente hiperbólico y por lo tanto existe una superficie no trivial constituida por la frontera del máximo desarrollo de Cauchy del dato inicial para el colapso. Esa frontera es una superficie nula y se llama *horizonte de Cauchy*.¹ Nótese que si la singularidad es globalmente desnuda,

¹En otras palabras, el horizonte de Cauchy es la superficie crítica que delimita la región donde es posible

entonces el horizonte de Cauchy queda fuera del horizonte de eventos, y por lo tanto se extiende hasta el infinito nulo futuro. Para proporcionar una idea gráfica de la situación, en la figura 1.1 se muestra un diagrama de Penrose idealizado del espacio-tiempo en cuestión.

En cuanto a la conjetura de la censura cósmica, es importante hacer énfasis en que su formulación hace clara referencia al carácter *genérico* del espacio-tiempo resultante del colapso, lo que en particular significa que éste debe ser *estable* bajo cualquier perturbación. En otras palabras: esta conjetura podría *tolerar* la formación de singularidades desnudas en algún modelo teórico de colapso, lo cual no se considera una violación si no se demuestra que el espacio-tiempo resultante es estable. Efectivamente, se ha descubierto que las singularidades desnudas pueden ocurrir dentro de algunos modelos de colapso con un alto grado de simetría, como es el caso del modelo de Tolman-Bondi -que describe el colapso de una nube de polvo esférica [7, 8, 9, 10]-, o el colapso de un campo escalar esférico no masivo [11, 12]. En este último caso se ha demostrado que las singularidades desnudas son inestables [13] y por lo tanto inofensivas en el sentido de que no atentan contra la conjetura de la censura cósmica. En contraste, la situación del modelo de polvo no es tan clara porque las singularidades desnudas encontradas en ese caso resultan ser estables bajo perturbaciones esféricas [7, 8], y entonces un problema altamente relevante, el cual sigue abierto salvo progresos que se mencionan más adelante, es determinar si tales singularidades también son estables bajo perturbaciones genéricas, pues ello constituiría un contra-ejemplo a la conjetura de la censura cósmica. Por lo pronto, no se ha descartado la posibilidad de que la naturaleza admita la formación de singularidades desnudas estables como resultado del colapso total de un sistema aislado, es decir: no existe todavía una prueba contundente a favor o en contra de la conjetura de la censura cósmica débil, y ello constituye un reto vigente para la física teórica. Se pueden encontrar revisiones extendidas sobre el tema en referencias [14, 15, 16].

Este trabajo se especializa en el estudio del modelo de Tolman-Bondi. Se trata un modelo simple y tal vez poco realista para modelar objetos astrofísicos, pero resulta relevante desde el punto de vista teórico y por lo tanto es importante resolver sus aspectos de estabilidad pendientes. Una de las grandes ventajas del modelo de Tolman-Bondi es que la métrica del espacio-tiempo se puede calcular de forma explícita. Sin embargo, el análisis de la estructura causal en la vecindad de la singularidad no es una tarea trivial puesto que para calcular las trayectorias nulas -incluso radiales- es necesario resolver ecuaciones diferenciales ordinarias singulares y no lineales. Al respecto, el primer estudio sistemático y riguroso fue realizado por Christodoulou en 1984 [8], demostrando que para un dato inicial regular, simétrico en el tiempo y genérico, existe una infinidad de rayos de luz radiales que emanan de la singularidad central, implicando que ésta es al menos localmente desnuda, pero además, dependiendo del grado de homogeneidad del perfil de densidad inicial, algunos de esos rayos de luz pueden llegar a la superficie de la nube antes de que se forme un horizonte de eventos, de manera que se propagan hasta el infinito nulo futuro, y por lo tanto se tiene una singularidad globalmente desnuda. Algunas generalizaciones de estos resultados para datos iniciales asimétricos en el tiempo, pueden encontrarse en las referencias [9, 10, 17, 18]. Sobre el problema de la estabilidad de las singularidades desnudas dentro del modelo de Tolman-Bondi se han realizado avances importantes: una de las ideas ha sido considerar la propagación de campos de prueba en la vecindad de la singularidad central y del horizonte de Cauchy asociado y estudiar su comportamiento: si ocurriera una divergencia del campo, ello se interpretaría como un síntoma de inestabilidad. Una cuestión similar surge al analizar la estabilidad de los horizontes internos de agujeros negros, como los de Reissner-Nordström o Kerr-Newman. En estos casos, la radiación entrante emitida por un observador en la región exterior experimenta un corrimiento al azul infinito en el horizonte de Cauchy, y por lo tanto se

resolver un problema de Cauchy global en el espacio-tiempo.

espera que tal horizonte interno sea inestable. En el caso particular de Reissner-Nordström, la existencia de esa inestabilidad fue demostrada numéricamente por Simpson y Penrose [19] evolucionando campos de prueba, y luego fue confirmada por Poisson e Israel [20] y Dafermos [21]. Por supuesto que el caso de una singularidad desnuda es diferente puesto que no hay un argumento físico que pronostique claramente un corrimiento al azul infinito en el horizonte de Cauchy, y entonces tal efecto no es evidente *a priori*. Por otro lado, no es del todo absurdo esperar que un rayo de luz que pasa muy cerca de la singularidad desnuda pudiera experimentar un corrimiento infinito debido a que atraviesa una región de curvatura muy pronunciada, y entonces si ocurriera un corrimiento al azul infinito, uno esperaría una inestabilidad del horizonte de Cauchy como en el caso de Reissner-Nordström. En las referencias [22, 23, 24] se pueden encontrar estudios concernientes a la propagación de rayos de luz cerca de singularidades desnudas, es decir, en el régimen de campos de altas frecuencias, en cuyo caso no se ha encontrado evidencia de inestabilidades. En cuanto a la propagación de campos lineales fuera de simetría esférica, existen trabajos analíticos [25, 26, 24] y numéricos [27, 28, 29, 30] que consideran varios casos particulares y han llegado a encontrar ciertos indicios de inestabilidades que aún deben ser estudiados para datos iniciales genéricos.

El presente trabajo se organiza de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se comienza por plantear el problema del colapso de un fluido perfecto esféricamente simétrico con una ecuación de estado general. Luego, de las ecuaciones de Einstein-Euler se deduce el sistema diferencial que gobierna la dinámica del colapso, el cual se escribe como un problema de Cauchy bien planteado. En el Capítulo 3 se presenta la solución exacta de dicho sistema en el caso particular de presión cero, lo que constituye de entrada el modelo de Tolman-Bondi. Enseguida se imponen condiciones físicamente razonables sobre la materia que colapsa y se presenta una revisión exhaustiva de la estructura causal del espacio-tiempo en base al análisis de los rayos de luz radiales, confirmando que en este modelo pueden aparecer singularidades desnudas estables bajo perturbaciones esféricas. Además se presenta un algoritmo numérico para generar diagramas conformes del espacio-tiempo resultante del colapso.

En el Capítulo 4 se comienza con los estudios de estabilidad de singularidades globalmente desnudas dentro del modelo de Tolman-Bondi. Como perturbación se considera la propagación de campos de prueba esféricos en la vecindad de la singularidad y del horizonte de Cauchy asociado. Los resultados en el régimen de altas frecuencias son compatibles con las conclusiones de los trabajos previos donde no se encontraron indicios de inestabilidad. En el régimen de bajas frecuencias se presenta una demostración rigurosa de que un campo escalar esférico de prueba es uniformemente acotado, excepto posiblemente sobre la singularidad central, sin que esa eventual divergencia se propague a lo largo del horizonte de Cauchy. En el Capítulo 5 se continúa con el análisis de estabilidad, esta vez estudiando numéricamente la propagación de campos de prueba no esféricos en la vecindad de la singularidad central, sin encontrar evidencias de inestabilidad. Con esa motivación, en el Capítulo 6 se demuestra rigurosamente que, asociada a los campos de prueba no esféricos, existe una energía uniformemente acotada en superficies tipo espacio, lo cual permite probar que tales campos son uniformemente acotados, excepto tal vez por la posibilidad de cierta divergencia *débil* en la singularidad en el sentido de que no se propaga a lo largo del horizonte de Cauchy. Finalmente, en los Capítulos 7 y 8 se presentan algunas consecuencias del Capítulo 4 que no conciernen necesariamente al problema de estabilidad de singularidades desnudas. En particular, se discute la posibilidad de aprovechar las propiedades del corrimiento al rojo de fotones que provienen de fuentes lejanas y atraviesan la nube de polvo por el centro para luego ser detectados por observadores igualmente lejanos, para inferir la distribución de masa de la nube e incluso para distinguir observacionalmente la formación de una singularidad

globalmente desnuda de la de agujero negro dentro del modelo de Tolman-Bondi.

En el Capítulo 9 se presenta un resumen y las conclusiones del trabajo. Además se bosquejan las posibles las investigaciones futuras que de aquí se desprenden.

A lo largo de todo el texto se utilizan unidades tales que la velocidad de la luz c y la constante de la gravitación universal G son ambas iguales a uno.

Capítulo 2

Las ecuaciones dinámicas del colapso de un fluido perfecto esféricamente simétrico

En este capítulo se deducen las ecuaciones diferenciales que gobiernan la dinámica del colapso gravitacional de un fluido perfecto en un espacio-tiempo 4-dimensional esféricamente simétrico. Por ahora no representa grandes ventajas asumir que el fluido tiene presión cero, de tal forma que la deducción es completamente general. En la primera sección se construye el espacio-tiempo y, considerando un tensor de energía-impulso genérico, se describen las consecuencias de las ecuaciones de Einstein -para una discusión complementaria sobre este desarrollo se puede consultar la referencia [31]-. Luego en particular se introduce el tensor de energía-impulso correspondiente a un fluido perfecto y se deducen las ecuaciones que gobiernan la dinámica del colapso. En la segunda sección se discute brevemente la termodinámica del fluido y la clase especial de ecuaciones de estado politrópicas, las cuales son ampliamente usadas en modelos de estrellas de neutrones o incluso flujos de acreción [1, 4, 32, 33], por ejemplo. La tercera sección está dedicada al planteamiento del problema de Cauchy como un sistema diferencial fuertemente hiperbólico para los campos que describen el fluido en colapso. El enfoque al final del capítulo pretende preparar el sistema para ser resuelto por métodos numéricos, y es por eso que se plantea de forma adimensional, se describen los datos iniciales y las condiciones de frontera apropiadas. Aunque en el resto de este trabajo se asumirá que el fluido tiene presión cero -en cuyo caso las ecuaciones se pueden resolver de forma exácta-, es importante plantear el problema de forma tan general como sea posible para poder retomarlo con ventaja en trabajos futuros.

2.1. El espacio-tiempo esféricamente simétrico y las ecuaciones de Einstein-Euler

Esta sección está dedicada a la exposición de las propiedades geométricas generales de cualquier fondo esféricamente simétrico 4-dimensional. Para comenzar, considérese un espacio-tiempo $(M, \mathbf{g})$, donde $\mathbf{g}$ es una métrica Lorenziana y M una variedad diferenciable de dimensión cuatro. El espacio-tiempo $(M, \mathbf{g})$ se llama esféricamente simétrico si y sólo si es posible descomponer la

variedad M como el producto cartesiano

$$M = \tilde{M} \times S^2,$$

y además la métrica $\mathbf{g}$ puede descomponerse en la forma $\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{g}} + r^2 \hat{\mathbf{g}}$, de tal manera que $(\tilde{M}, \tilde{\mathbf{g}})$ es una variedad pseudo-Riemmaniana 2-dimensional ortogonal a la 2-esfera unitaria $(S^2, \hat{\mathbf{g}})$ con la métrica inducida $\hat{\mathbf{g}} = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$, donde $\{\theta, \phi\}$ son las coordenadas esféricas usuales y $r \geq 0$ es una función real sobre $\tilde{M}$ definida a partir del área de una esfera que pasa por un punto arbitrario $p \in \tilde{M}$. Dado que el área de dicha esfera es $A(p) = 4\pi r^2(p)$, se define $r(p) := \sqrt{A(p)}/\sqrt{4\pi}$ y se llama *radio de área*.

Para lo sucesivo se introducen coordenadas locales sobre M , clasificadas en dos conjuntos: sobre $\tilde{M}$ serán $\{x^a\}$ -arbitrarias por el momento- y sobre S^2 serán $\{x^A\} = \{\theta, \phi\}$. En términos de tales coordenadas locales la métrica se escribe como:

$$\mathbf{g} = \tilde{g}_{ab} dx^a dx^b + r^2(x^a) \hat{g}_{AB} dx^A dx^B.$$

El objetivo es encontrar la forma genérica de las componentes de $\tilde{\mathbf{g}}$ y la función r . Por lo pronto una observación importante y útil en todo caso es que $\mathbf{g}$ es simétrica por bloques:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{ab} & 0 \\ 0 & r^2 \hat{g}_{AB} \end{pmatrix},$$

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \tilde{g}^{ab} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \hat{g}^{AB} \end{pmatrix}.$$

Como primer paso en el camino de calcular las componentes de la métrica se deben calcular los símbolos de Christoffel respecto a la conexión de Levi-Civita ∇ asociada a $\mathbf{g}$, los cuales son dados por $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} (\partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta})/2$. En total hay 40 de ellos, pero afortunadamente no es necesario calcularlos todos gracias a la simetría del espacio-tiempo. A fin de cuentas sólo es necesario hacer seis cálculos: Γ^a_{bc} , Γ^a_{bC} , Γ^a_{BC} , Γ^A_{bc} , Γ^A_{Bc} y Γ^A_{BC} . En términos del gradiente de $r(x^a)$, definido por $r_a := \tilde{\nabla}_a r$, donde $\tilde{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita asociada a $\tilde{\mathbf{g}}$, los símbolos de Christoffel son:

$$\begin{aligned} \Gamma^a_{bc} &= \tilde{\Gamma}^a_{bc}, \\ \Gamma^a_{bC} &= 0, \\ \Gamma^a_{BC} &= -r r^a \hat{g}_{BC}, \\ \Gamma^A_{bc} &= 0, \\ \Gamma^A_{Bc} &= \delta^A_B \frac{r_c}{r}, \\ \Gamma^A_{BC} &= \hat{\Gamma}^A_{BC}. \end{aligned}$$

El siguiente paso es encontrar el tensor de curvatura, cuyas componentes están dadas por $R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\nu} + \Gamma^\sigma_{\beta\nu} \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\nu} - \Gamma^\sigma_{\alpha\nu} \Gamma^\mu_{\beta\sigma}$ y satisface las simetrías algebraicas $R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha} =$

2.1. El espacio-tiempo esféricamente simétrico y las ecuaciones de Einstein-Euler17

$-R_{\nu\mu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$. El resultado de los cálculos directos es:

$$\begin{aligned} R^c_{dab} &= \tilde{R}^c_{dab} = \tilde{k}(\delta^c_a \tilde{g}_{bd} - \delta^c_b \tilde{g}_{ad}), \\ R^c_{DaB} &= -r(\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}^c r) \hat{g}_{DB}, \\ R^C_{DAB} &= (1-N)(\delta^C_A \hat{g}_{DB} - \delta^C_B \hat{g}_{DA}), \\ R^c_{Dab} &= 0, \\ R^c_{dAB} &= 0, \\ R^c_{DAB} &= 0, \end{aligned}$$

donde N denota la norma al cuadrado del gradiente de r , es decir $N := r^b r_b = \tilde{g}^{ab}(\tilde{\nabla}_a r)(\tilde{\nabla}_b r)$, y $\tilde{k}$ denota la curvatura de Gauss de $(\tilde{M}, \tilde{\mathbf{g}})$. Enseguida puede calcularse el tensor de Ricci, cuyas componentes se definen como la contracción $R_{\nu\beta} := R^\mu_{\nu\mu\beta}$, que para las distintas combinaciones entre coordenadas angulares y radiales resulta ser

$$\begin{aligned} R_{ab} &= R^\mu_{a\mu b} = R^d_{adb} + R^D_{aDb} = \tilde{k}\tilde{g}_{ab} - \frac{2}{r}\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r, \\ R_{aB} &= R^\mu_{a\mu B} = R^d_{adB} + R^D_{aDB} = 0, \\ R_{AB} &= R^\mu_{A\mu B} = R^d_{AdB} + R^D_{ADB} = -r(\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}^a r) \hat{g}_{AB} + (1-N)\hat{g}_{AB}, \end{aligned}$$

donde se han usado las identidades

$$\begin{aligned} R^d_{adb} &= \tilde{k}(2\tilde{g}_{ab} - \tilde{g}_{ab}) = \tilde{k}\tilde{g}_{ab}, \\ R^D_{aDb} &= g^{DE} R_{DaEb} = g^{DE} R_{aDbE} = \frac{1}{r^2} \hat{g}^{DE} (-r \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r \hat{g}_{DE}) = -\frac{2}{r} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r. \end{aligned}$$

El cálculo del escalar de Ricci, definido como $R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, es menos extenso y resulta

$$R = \tilde{g}^{ab} R_{ab} + \frac{1}{r^2} \hat{g}^{AB} R_{AB} = 2\tilde{k} - \frac{4}{r}(\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}^a r) + \frac{2(1-N)}{r^2}.$$

Finalmente, el tensor de Einstein, el cual se define en términos de sus componentes como $G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, para las diferentes combinaciones entre coordenadas angulares y radiales es:

$$\begin{aligned} G_{ab} &= -\frac{2}{r}\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r - \frac{1}{r^2}(1-N - 2r\tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}^c r)\tilde{g}_{ab}, \\ G_{aB} &= 0, \\ G_{AB} &= (r\tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}_c r - r^2\tilde{k})\hat{g}_{AB}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.1.1. Las ecuaciones de Einstein-Euler

Sea $\mathbf{T}$ un tensor de energía-impulso arbitrario cuyas componentes en alguna carta local $\{x^a, x^A\}$ son $T_{\mu\nu}$ y tal que $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$. A partir de la solución de las ecuaciones de Einstein, $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$, donde G es la constante universal de la gravitación, podrán calcularse los coeficientes de la métrica $\mathbf{g}$. El problema puede separarse estrictamente en las tres partes en las que puede descomponerse el tensor de Einstein, sin embargo la identidad de Bianchi, $\nabla_\mu G^\mu_b = 0$, simplifica

considerablemente el problema. Por un lado se tiene

$$0 = \nabla_\mu G^\mu_b = \frac{1}{r^2} \tilde{\nabla}_a (r^2 G^a_b) - \frac{r_b}{r^3} \hat{g}^{AB} G_{AB}, \quad (2.2)$$

y por otro lado

$$0 = \nabla_\mu T^\mu_b = \frac{1}{r^2} \tilde{\nabla}_a (r^2 T^a_b) - \frac{r_b}{r^3} \hat{g}^{AB} T_{AB}. \quad (2.3)$$

Multiplicando la ecuación (2.3) por $8\pi G$ y tomando la diferencia con (2.2) resulta

$$0 = \frac{1}{r^2} \tilde{\nabla}_a (r^2 [G^a_b - 8\pi G T^a_b]) - \frac{r_b}{r^3} \hat{g}^{AB} (G_{AB} - 8\pi G T_{AB}).$$

Si se satisfacen las ecuaciones $G^a_b = 8\pi G T^a_b$ y $\nabla_\mu T^\mu_b = 0$, y si además se asume que $r_b \neq 0$, entonces automáticamente se satisface la parte angular de las ecuaciones de Einstein, es decir $\hat{g}^{AB} (G_{AB} - 8\pi G T_{AB}) \equiv 0$, y por lo tanto el problema se reduce a resolver solamente

$$\begin{aligned} G_{ab} - 8\pi G T_{ab} &= 0, \\ \nabla_\mu T^\mu_b &= 0, \end{aligned}$$

lo cual explícitamente se escribe como:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{r} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r - \frac{1}{r^2} (1 - N - 2r \tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}^c r) \tilde{g}_{ab} &= 8\pi G T_{ab}, \\ \nabla_a (r^2 T^a_b) - \frac{r_b}{r^3} \hat{g}^{AB} T_{AB} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

En este caso, la métrica general sobre $\tilde{M}$, en términos de coordenadas co-móviles sincronizadas $\{x^a\} = \{\tau, R\}$, resulta ser [34]

$$\tilde{\mathbf{g}} = -e^{2\phi(\tau, R)} d\tau^2 + e^{2\psi(\tau, R)} dR^2,$$

con la cuadri-velocidad $\mathbf{u} = e^{-\phi} \partial_\tau$, normalizada de tal manera que $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -1$. La coordenada radial R se elige de tal modo que coincide con el radio de área de cada cascarón de fluido al tiempo inicial ($\tau = 0$), por lo tanto funciona como etiqueta para los cascarones, y sus líneas de mundo quedan descritas por las superficies de R constante.

A continuación se introduce el tensor de energía-impulso particular de un fluido perfecto, cuyas componentes son $T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}$, donde ρ y P denotan respectivamente la densidad de energía y la presión medidas por observadores co-móviles con el fluido, ambas funciones definidas sobre $\tilde{M}$ dada la simetría esférica. Enseguida se deducen las ecuaciones dinámicas que gobiernan el colapso. Como primer paso se pueden calcular la expansión, definida por $\Theta := (1/r^2) \tilde{\nabla}^a (r^2 u_a)$, las componentes de la cuadri-aceleración $a_\mu := \nabla_{\mathbf{u}} u_\mu$, y resulta

$$\begin{aligned} \Theta &= 2 \frac{\dot{r}}{r} + \dot{\psi}, \\ a_\tau &= 0, \\ a_R &= e^\psi \phi', \\ a_B &= 0, \end{aligned}$$

donde el punto denota la aplicación del campo $e^{-\phi} \partial_\tau$ y el apóstrofe la aplicación de $e^{-\psi} \partial_R$.

2.1. El espacio-tiempo esféricamente simétrico y las ecuaciones de Einstein-Euler19

Luego, de las ecuaciones de movimiento para el fluido, $\tilde{\nabla}_{\mathbf{u}}\rho + (\rho + P)\Theta = 0$ y $(\rho + P)a_b + (\tilde{g}_{ab} + u_a u_b)\tilde{\nabla}^a P = 0$ se deduce que

$$\dot{\rho} + (\rho + P)\left(2\frac{\dot{r}}{r} + \dot{\psi}\right) = 0, \quad (2.5)$$

$$P' + (\rho + P)\phi' = 0, \quad (2.6)$$

y de la expresión para el gradiente de la masa de Misner-Sharp [35], $\tilde{\nabla}_a m = (k/2)r^2\rho(r_a + u_a u_b r^b) + (k/2)r^2 P u_a u_b r^b$, con $k := 8\pi G$, se obtiene

$$\dot{m} = -\frac{k}{2}r^2\dot{r}P, \quad (2.7)$$

$$m' = \frac{k}{2}r^2r'\rho. \quad (2.8)$$

Finalmente, las ecuaciones de Einstein

$$-\frac{2}{r}(\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r)^{tf} = k(\rho + P)\left(u_a u_b + \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\right) \text{ y} \quad (2.9)$$

$$\frac{2}{r^2}\left[r\tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r - (1 - N)\right] = -k(\rho - P), \quad (2.10)$$

donde (tf) denota la parte sin traza, implican las siguientes ecuaciones dinámicas:

$$\dot{\psi} = \frac{(\dot{r})'}{r'}, \quad (2.11)$$

$$\ddot{r} - r'' + \dot{r}\dot{\psi} - r'\phi' + \frac{2m}{r^2} = \frac{kr}{2}(\rho - P), \quad (2.12)$$

$$\ddot{r} = -\frac{m}{r^2} + r'\phi' - \frac{kr}{2}P, \quad (2.13)$$

y para cerrar el sistema se agrega la definición de $N (= r^a r_a)$,

$$1 - \frac{2m}{r} = r'^2 - \dot{r}^2. \quad (2.14)$$

Definiendo las dos nuevas variables $U := \dot{r}$ y $\Gamma := r'$, se puede probar la siguiente

Proposición 2.1.1 *Las funciones U y Γ satisfacen el sistema de ecuaciones*

$$\dot{U} = \phi'\Gamma - \frac{m}{r^2} - \frac{k}{2}rP, \quad (2.15)$$

$$U' = \dot{\psi}\Gamma, \quad (2.16)$$

$$\Gamma' = \dot{\psi}U + \frac{m}{r^2} - \frac{k}{2}r\rho, \quad (2.17)$$

$$\dot{\Gamma} = \phi'U, \quad (2.18)$$

donde en términos de U y Γ se puede escribir $m = r(1 + U^2 - \Gamma^2)/2$.

Demostración. Dado que $\dot{U} = \ddot{r}$, de la ecuación (2.13) se tiene $\dot{U} = \phi'\Gamma - m/r^2 - krP/2$.

Análogamente para U' , usando la ecuación (2.11), se obtiene $U' = (\dot{r})' = \dot{\psi}\Gamma$. Luego, dado que $\Gamma' = r''$ la ecuación (2.12) se puede escribir como $\Gamma' = \dot{U} + \dot{\psi}U - \phi'\Gamma + 2m/r^2 - kr(\rho - P)/2$, y sustituyendo en ésta la ecuación (2.15) resulta $\Gamma' = \dot{\psi}U + m/r^2 - kr\rho/2$. Finalmente para $\dot{\Gamma}$,

$$\dot{\Gamma} = (\dot{r}') = (e^{-\psi}\partial_{Rr})' = -\Gamma\dot{\psi} + e^{-\phi}(e^{\phi}\dot{r})' = -\Gamma\dot{\psi} + U\phi' + U',$$

y usando la ecuación (2.11) se obtiene $\dot{\Gamma} = \phi'U$. □

2.2. Termodinámica del fluido en colapso

En esta sección se considera un fluido perfecto tal que cada uno de sus elementos se mantiene en equilibrio termodinámico a lo largo de su trayectoria, de tal manera que se cumple la primera ley de la termodinámica. También se asume que no hay transporte de calor entre los elementos de fluido y por lo tanto no hay incrementos de entropía. Si se denota con n a la densidad de partículas medida por un observador co-móvil con el flujo, entonces $\epsilon := \rho/n$ es la energía interna por partícula de fluido y la primera ley de la termodinámica se escribe como $d\epsilon = -PdV$, donde $V = 1/n$ es el volumen por partícula. En términos de n se tiene

$$d\epsilon = -Pd\left(\frac{1}{n}\right).$$

Es conveniente introducir la variable termodinámica conocida como *entalpía* $f := (\rho + P)/n = \epsilon + P/n$, cuyo incremento diferencial está dado por $df = d\epsilon + d(P/n)$, y de acuerdo con la primera ley,

$$df = \frac{1}{n}dP. \quad (2.19)$$

Otras cantidades relevantes y útiles en lo sucesivo son la *velocidad del sonido* V_s -la cual mide la rapidez de propagación de las perturbaciones mecánicas a través del fluido-, y su derivada logarítmica W , definidas por

$$\begin{aligned} V_s^2 &:= \frac{\partial P}{\partial \rho}, \\ W &:= \frac{\partial \log(V_s)}{\partial \log(n)} = \frac{n}{V_s} \frac{\partial V_s}{\partial n}. \end{aligned}$$

Como resultado central de este apartado se tiene la siguiente

Proposición 2.2.1 *La densidad de energía del fluido ρ , su presión P y su densidad de partículas n , medidas por un observador co-móvil con el flujo, satisfacen la identidad*

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho + P} = \frac{\dot{n}}{n}.$$

Demostración. Por un lado, la primera ley de la termodinámica implica que $\dot{f} = \dot{P}/n$, y entonces $\dot{f}/f = \dot{P}/(\rho + P)$. Por otro lado, de la definición de la entalpía,

$$\frac{\dot{f}}{f} = \frac{n}{\rho + P} \left(\frac{\dot{\rho} + \dot{P}}{n} - \frac{\dot{n}(\rho + P)}{n^2} \right) = \frac{\dot{\rho}}{\rho + P} + \frac{\dot{P}}{\rho + P} - \frac{\dot{n}}{n}.$$

Combinando ambos resultados se llega directamente a lo que se quería probar. $\square$

2.2.1. La ecuación de estado

En esta subsección se asume que el fluido perfecto que colapsa gravitacionalmente obedece una ecuación de estado particular correspondiente a un gas politrópico. Dicha relación politrópica está dada por

$$P(n) = Kn^\gamma,$$

donde $K > 0$ es una constante real, al igual que $1 < \gamma \leq 5/3$, la cual se llama *índice politrópico* del gas. Combinando esta ecuación con (2.19) se llega a la forma particular de la primera ley de la termodinámica

$$d\epsilon = Kn^{\gamma-2}dn, \quad (2.20)$$

la cual puede integrarse para obtener la energía interna ϵ y luego calcular $\rho = n\epsilon$ y $f = \epsilon + P/n$. Los resultados son:

$$\begin{aligned} \epsilon(n) &= \frac{K}{\gamma-1} n^{\gamma-1} + \epsilon_0, \\ \rho(n) &= \frac{K}{\gamma-1} n^\gamma + \epsilon_0 n, \\ f(n) &= \frac{K\gamma}{\gamma-1} n^{\gamma-1} + \epsilon_0, \end{aligned}$$

donde ϵ_0 es una constante de integración interpretada como la energía en reposo por partícula de fluido. Luego, de la definición de la velocidad del sonido, la primera ley de la termodinámica y el enunciado de la Proposición 2.2.1, se obtiene

$$V_s^2 = \frac{d \log(f)}{d \log(n)}.$$

En resumen, para el caso particular de un gas politrópico se tiene,

$$\begin{aligned}\epsilon(n) &= \frac{K}{\gamma-1}n^{\gamma-1} + \epsilon_0, \\ \rho(n) &= \frac{K}{\gamma-1}n^\gamma + \epsilon_0 n, \\ f(n) &= \frac{K\gamma}{\gamma-1}n^{\gamma-1} + \epsilon_0, \\ V_s^2(n) &= \frac{\gamma(\gamma-1)Kn^{\gamma-1}}{\epsilon_0(\gamma-1) + \gamma Kn^{\gamma-1}}, \\ W &= \frac{n}{V_s} \frac{\partial V_s}{\partial n}.\end{aligned}$$

2.3. Las ecuaciones de evolución

El siguiente objetivo es plantear un sistema de ecuaciones diferenciales parciales que gobierne la dinámica del colapso del fluido perfecto, el cual se planea resolver después¹ utilizando métodos numéricos. Por lo tanto es importante formular el sistema como un problema de Cauchy bien planteado, y lo anterior se logra al escribirlo de forma que sea *fuertemente hiperbólico* [36], lo cual se precisa más adelante.

La primera ecuación de este sistema se puede deducir de la ecuación (2.5), que al combinarse con el enunciado de la Proposición 2.2.1 resulta

$$\frac{\dot{n}}{n} = - \left(2 \frac{\dot{r}}{r} + \dot{\psi} \right). \quad (2.21)$$

Luego tomando $\dot{\psi}$ del enunciado de la Proposición 2.1.1 se obtiene $\dot{n} = -nU'/\Gamma - 2nU/r$.

Observación 2.3.1 *Es importante notar que la ecuación (2.21) se puede escribir como $(r^2 n e^\psi)' = 0$, la cual puede obtenerse paralelamente del principio de conservación de partículas, $\nabla_\mu(nu^\mu) = 0$. En ese sentido, (2.5) junto con las consecuencias de la termodinámica (Proposición 2.2.1), es equivalente a tener conservación de partículas.*

La segunda y tercera ecuaciones de evolución vienen de (2.15) y (2.18), con la función ϕ' calculada a partir de la ecuación del fluido (2.6), la primera ley de la termodinámica y la definición de la entalpía, lo cual resulta

$$\phi' = -\frac{P'}{\rho + P} = -\frac{nf'}{\rho + P} = -\frac{f'}{f}, \quad (2.22)$$

además por otro lado se tiene que

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial n} n' = \left(\frac{n}{f} \frac{\partial f}{\partial n} \right) \frac{n'}{n},$$

donde la cantidad entre paréntesis es justamente el cuadrado de la velocidad del sonido (V_s^2),

¹Fuera de los alcances de este trabajo.

entonces

$$\phi' = -V_s^2 \frac{n'}{n}, \quad (2.23)$$

lo cual debe ser introducido en las ecuaciones (2.15) y (2.18).

La última ecuación, para cerrar el sistema, es $\dot{r} = U$, y en resumen las ecuaciones de evolución son:

$$\dot{n} = -\frac{n}{\Gamma} U' - \frac{2n}{r} U, \quad (2.24)$$

$$\dot{U} = -\frac{\Gamma}{n} V_s^2(n) n' - \frac{m}{r^2} - \frac{k}{2} r P(n), \quad (2.25)$$

$$\dot{\Gamma} = -\frac{U}{n} V_s^2(n) n', \quad (2.26)$$

$$\dot{r} = U, \quad (2.27)$$

con $m = r(1 + U^2 - \Gamma^2)/2$.

Proposición 2.3.1 *El sistema (2.24)- (2.27) es quasi-lineal y fuertemente hiperbólico siempre que $n > 0$, $V_s > 0$ y $\Gamma > 0$.*

Demostración. El sistema (2.24)- (2.27) se puede escribir matricialmente como

$$\begin{pmatrix} \dot{n} \\ \dot{U} \\ \dot{\Gamma} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} n \\ U \\ \Gamma \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2n}{r} U \\ \frac{m}{r^2} + \frac{k}{2} r P \\ 0 \\ -U \end{pmatrix},$$

donde el *símbolo principal* del sistema es

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -n/\Gamma & 0 & 0 \\ -\Gamma V_s^2/n & 0 & 0 & 0 \\ -U V_s^2/n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por definición, el sistema es *fuertemente hiperbólico* [36] si A es una matriz diagonalizable con eigenvalores reales. Al respecto se obtiene que los eigenvalores de A son $\{V_s, -V_s, 0, 0\}$. Luego, el conjunto de eigenvectores $\{(-n/\Gamma V_s, 1, U/\Gamma, 0)^T, (n/\Gamma V_s, 1, U/\Gamma, 0)^T, (0, 0, 1, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T\}$ es linealmente independiente dado que la matriz que forman es invertible, en efecto

$$\det \begin{pmatrix} -n/\Gamma V_s & n/\Gamma V_s & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ U/\Gamma & U/\Gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \frac{n}{\Gamma V_s} \neq 0.$$

Entonces se ha exhibido un conjunto de eigenvectores de A que forman una base de $\mathbb{R}^4$, y por lo tanto A es diagonalizable y se sigue la afirmación de la proposición. $\square$

Sucede que el sistema (2.24)- (2.27) así escrito presenta un par de inconvenientes sutiles. En primer lugar, todos sus eigenvalores se degeneran a cero cuando $V_s \rightarrow 0$, es decir, sobre la superficie de la estrella. En segundo lugar, en ese mismo límite, el elemento de matriz $-n/\Gamma \rightarrow 0$, mientras

que $V_s^2/n \rightarrow 0/0$. Con el objetivo de evitar tales problemas se introduce el siguiente cambio de variable: $n \rightarrow x^\alpha$, con $\alpha > 0$, de tal manera que $\dot{n}/n = \alpha \dot{x}/x$ y $n'/n = \alpha x'/x$. Luego en términos de x , el sistema se ve como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{x}{\alpha\Gamma}U' - \frac{2x}{\alpha r}U, \\ \dot{U} &= -\alpha\Gamma V_s^2 \frac{x'}{x} - \frac{m}{r^2} - \frac{k}{2}rP(x), \\ \dot{\Gamma} &= -\alpha U V_s^2 \frac{x'}{x}, \\ \dot{r} &= U.\end{aligned}$$

Como se discutió previamente, la ecuación de estado politrópica implica que $V_s^2(n) \propto n^{\gamma-1}$, lo cual sugiere identificar V_s con x para luego determinar α dado que $\dot{V}_s = \dot{n}\partial_n V_s = W V_s \dot{n}/n$. Por lo tanto $\alpha = W^{-1}$, $\dot{n}/n = \dot{V}_s/(W V_s)$ y $n'/n = V'_s/(W V_s)$. Así finalmente, en términos de $V_s(n)$, el sistema toma la forma

$$\begin{aligned}\dot{V}_s &= -W \frac{V_s}{\Gamma}U' - \frac{2W}{r}V_s U, \\ \dot{U} &= -\frac{\Gamma}{W}V_s V'_s - \frac{m}{r^2} - \frac{k}{2}rP(V_s), \\ \dot{\Gamma} &= -\frac{U}{W}V_s V'_s, \\ \dot{r} &= U,\end{aligned}$$

el cual sigue siendo fuertemente hiperbólico y es tal que el símbolo principal es proporcional a V_s y por lo tanto se anula en la superficie de la estrella.

2.3.1. El sistema adimensional para un sistema politrópico

Puesto que el propósito a largo plazo es resolver numéricamente el sistema de evolución para el fluido perfecto en colapso gravitacional, es necesario plantear el mismo de forma que las cantidades involucradas sean adimensionales. Para lograrlo, la primera variable adimensional que se define es la *densidad específica* de partículas $z := n/n_0$, donde la constante n_0 es una densidad de partículas característica arbitraria por ahora. La siguiente cantidad adimensional es la *entalpía específica* $h := f/\epsilon_0$. En términos de z , para una ecuación de estado politrópica se tiene $f(z) = \epsilon_0 + K\gamma(n_0 z)^{\gamma-1}/(\gamma-1)$, de forma que la entalpía específica es

$$h(z) = 1 + \frac{\gamma K}{\epsilon_0(\gamma-1)} n_0^{\gamma-1} z^{\gamma-1}.$$

Luego el truco para tener $h(z) = 1 + z^{\gamma-1}$ es definir n_0 tal que $n_0^{\gamma-1} = \epsilon_0(\gamma-1)/(\gamma K)$. Con esa elección particular, para una ecuación de estado politrópica, las funciones termodinámicas en

términos de z son, en resumen,

$$\begin{aligned}
P(z) &= Kn_0^\gamma z^\gamma, \\
\epsilon(z) &= \epsilon_0 \left(1 + \frac{z^{\gamma-1}}{\gamma}\right), \\
\rho(z) &= n_0 \epsilon_0 z \left(1 + \frac{z^{\gamma-1}}{\gamma}\right), \\
f(z) &= \epsilon_0 (1 + z^{\gamma-1}), \\
h(z) &= 1 + z^{\gamma-1}, \\
V_s^2(z) &= \frac{(\gamma-1)z^{\gamma-1}}{1 + z^{\gamma-1}}, \\
W(z) &= \frac{\gamma-1}{2(1 + z^{\gamma-1})},
\end{aligned}$$

Enseguida las ecuaciones de evolución para el colapso se pueden escribir en términos de cantidades adimensionales. Considérese por ejemplo el último término de la ecuación (2.25), $krP/2$, donde $k = 8\pi G$ y $P = P(z)$. En términos de z se tiene $krP(z)/2 = (4\pi GKn_0^\gamma)rz^\gamma$. La expresión entre paréntesis tiene unidades de longitud inversa al cuadrado, lo cual sugiere definir la longitud característica $l_0 := (4\pi GKn_0^\gamma)^{-1/2}$, y en términos de la misma,

$$\frac{k}{2}rP(z) = \frac{1}{l_0^2}rz^\gamma.$$

Asimismo se re-escala el resto de las funciones involucradas en las ecuaciones: $R \rightarrow l_0 R$, $\tau \rightarrow l_0 \tau$, $r \rightarrow l_0 r$, $m \rightarrow l_0 m$, $R_1 \rightarrow l_0 R_1$, y como consecuencia $\dot{V}_s \rightarrow \dot{V}_s/l_0$ y $U' \rightarrow U'/l_0$. Entonces que las ecuaciones adimensionales y re-escaladas se leen:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_s &= -W \frac{V_s}{\Gamma} U' - \frac{2W}{r} V_s U, \\
\dot{U} &= -\frac{\Gamma}{W} V_s V_s' - \frac{1}{2r} (1 + U^2 - \Gamma^2) - rz(V_s)^\gamma, \\
\dot{\Gamma} &= -\frac{U}{W} V_s V_s', \\
\dot{r} &= U.
\end{aligned}$$

donde se ha usado $m = r(1 + U^2 - \Gamma^2)/2$ (ver la ecuación (2.14)) y además se escribe z como función de V_s .

2.3.2. El problema de Cauchy

En la práctica, al plantear el problema de Cauchy para resolverlo por medios numéricos, es necesario desplegar la notación para los operadores diferenciales, esto es,

$$\begin{aligned}
\cdot &\equiv e^{-\phi} \partial_\tau, \\
' &\equiv e^{-\psi} \partial_R,
\end{aligned}$$

de modo que se requiere la forma explícita de las funciones exponenciales. Primero se calculará $e^{-\psi}$ retomando la ecuación (2.21), la cual implica que $\partial_\tau (r^2 n e^\psi) = 0$, es decir, $r^2 n e^\psi = \zeta(R)$, donde $\zeta(R)$ se puede determinar evaluando la ecuación en $\tau = 0$ y resulta $\zeta(R) = R^2 n(0, R) e^{\psi_0(R)}$, con $\psi_0(R) := \psi(0, R)$. Por otro lado se sabe que $e^{\psi_0(R)} = 1/\Gamma_0(R)$, donde $\Gamma_0(R) := \Gamma(0, R)$, entonces

$$r^2 n e^\psi = R^2 \frac{n(0, R)}{\Gamma_0(R)},$$

y en términos de z ,

$$e^{-\psi} = \left(\frac{\Gamma_0(R)}{z_0(R)} \right) z(\tau, R) \left(\frac{r}{R} \right)^2,$$

donde $z_0(R) := z(0, R)$.

Para determinar la función exponencial e^ϕ hay que integrar la ecuación (2.22), que en términos de la entalpía específica $h = f/\epsilon_0$ -adimensional-, se ve como $\phi' = -h'/h$. Eligiendo de manera conveniente la constante de integración se llega a $\phi = -\log(h)$, y entonces

$$e^\phi = \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{1 + z^{\gamma-1}}.$$

Finalmente, el sistema a evolucionar numéricamente es

$$\partial_\tau V_s = -e^\phi \left[\frac{e^{-\psi}}{\Gamma} W V_s \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{2}{r} W V_s U \right], \quad (2.28)$$

$$\partial_\tau U = -e^\phi \left[\frac{e^{-\psi}}{W} \Gamma V_s \frac{\partial V_s}{\partial R} + \frac{1}{2r} (1 + U^2 - \Gamma^2) + r z (V_s)^\gamma \right], \quad (2.29)$$

$$\partial_\tau \Gamma = -e^\phi \left[\frac{e^{-\psi}}{W} U V_s \frac{\partial V_s}{\partial R} \right], \quad (2.30)$$

$$\partial_\tau r = e^\phi U, \quad (2.31)$$

con

$$z(V_s) = \left(\frac{V_s^2}{\gamma - 1 - V_s^2} \right)^{1/(\gamma-1)},$$

$$W(z) = \frac{\gamma - 1}{2(1 + z^{\gamma-1})}.$$

Datos iniciales

El dato inicial para la evolución del sistema -es decir, las funciones dadas en el tiempo inicial $\tau = 0$ - consta de $U_0(R) := U(0, R)$, $\Gamma_0(R)$, $V_s(0, R)$ y $r(0, R) = R$. Considérese primero $U_0(R) = \dot{r}(0, R)$, que no es más que el perfil inicial de velocidad $v_0(R)$. Considérese la siguiente función q -cuya definición será interpretada después-,

$$q^2(R) := \frac{\frac{1}{2} v_0^2(R) - \frac{m_0(R)}{R}}{-\frac{m_0(R)}{R}},$$

donde $m_0(R) := m(0, R)$. Recordando que para trabajar con cantidades adimensionales se hacen los cambios $m \rightarrow l_0 m$ y $R \rightarrow l_0 R$, entonces es claro que q es adimensional. Enseguida considérese la siguiente función c , la cual es proporcional a la densidad media de masa contenida en un cascarón esférico etiquetado por R , $c(R) := \frac{2m_0(R)}{R^3}$. En términos de ésta se tiene $v_0^2(R) = R^2 c(R) (1 - q^2(R))$, lo cual conduce a $U_0(R) = -\sqrt{R^2 c(R) (1 - q^2(R))}$, con la elección del signo *menos* de acuerdo con la tendencia inicial de la nube a colapsar y no de expandirse. Notar que $U_0(R)$ también es adimensional porque el producto $R^2 c$ lo es. Para calcular dicho producto, a partir de la ecuación (2.8) se calcula la masa al tiempo inicial:

$$\begin{aligned} m_0(R) &= 4\pi G \int_0^R \rho(z_0(\bar{R})) \bar{R}^2 d\bar{R} \\ &= 4\pi G n_0 \epsilon_0 \int_0^R z_0(\bar{R}) \left(1 + \frac{z_0(\bar{R})^{\gamma-1}}{\gamma}\right) \bar{R}^2 d\bar{R} \\ &= \frac{\gamma}{l_0^2(\gamma-1)} \int_0^R z_0(\bar{R}) \left(1 + \frac{z_0(\bar{R})^{\gamma-1}}{\gamma}\right) \bar{R}^2 d\bar{R}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene la forma explícita de $c(R)$, y por lo tanto

$$R^2 c(R) = \frac{2\gamma}{(\gamma-1)R} \int_0^R z_0(\bar{R}) \left(1 + \frac{z_0(\bar{R})^{\gamma-1}}{\gamma}\right) \bar{R}^2 d\bar{R}.$$

El cálculo de la función $\Gamma_0(R) = r'(0, R)$ -que también forma parte del dato inicial- es más directo, pues de la ecuación (2.14) se tiene

$$\Gamma_0^2(R) = 1 + v_0^2(R) - \frac{2m_0(R)}{R} = 1 - (1 - q^2(R)) R^2 c(R) - R^2 c(R),$$

lo que conduce a la función adimensional $\Gamma_0(R) = \sqrt{1 - R^2 c(R) q^2(R)}$.

Finalmente, el dato inicial para V_s es

$$V_s(0, R) = \sqrt{\frac{(\gamma-1)z_0(R)^{\gamma-1}}{1 + z_0(R)^{\gamma-1}}}.$$

En resumen se tiene:

$$\begin{aligned} U_0(R) &= -\sqrt{R^2 c(R) (1 - q^2(R))}, \\ \Gamma_0(R) &= \sqrt{1 - R^2 c(R) q^2(R)}, \\ V_s(0, R) &= \sqrt{\frac{(\gamma-1)z_0(R)^{\gamma-1}}{1 + z_0(R)^{\gamma-1}}}, \\ r(0, R) &= R, \end{aligned}$$

donde

$$R^2 c(R) = \frac{2\gamma}{(\gamma-1)R} \int_0^R z_0(\bar{R}) \left(1 + \frac{z_0(\bar{R})^{\gamma-1}}{\gamma}\right) \bar{R}^2 d\bar{R},$$

y únicamente falta especificar las funciones q y z , o alternativamente q y c . Una elección particular para éstas se discutirá en el siguiente capítulo.

Propagación de la restricción de masa

En todo momento de la evolución, las cantidades dinámicas están restringidas de tal manera que satisfacen la ecuación (2.8), $m' = kr^2 r' \rho / 2$, donde $k = 8\pi G$. Definase la nueva función $\mathcal{C}(\tau, R) := m' - kr^2 r' \rho / 2$. En términos de ésta, el sistema de evolución está sujeto a la llamada *restricción de masa*

$$\mathcal{C}(\tau, R) = 0$$

para todo τ .

Lema 2.3.1 *El sistema de evolución (2.15)-(2.18) implica la ecuación (2.7),*

$$\dot{m} = -\frac{k}{2} r^2 \dot{r} P.$$

Demostración. De la ecuación (2.14) se sabe que $m = r(1 + U^2 - \Gamma^2)/2$. Diferenciando ésta respecto a τ se obtiene $\dot{m} = U(1 + U^2 - \Gamma^2)/2 + r(U\dot{U} - \Gamma\dot{\Gamma})$, luego las ecuaciones (2.15) y (2.18) conducen a

$$U\dot{U} - \Gamma\dot{\Gamma} = -U\left(\frac{m}{r} + 4\pi GrP\right),$$

y por lo tanto

$$\dot{m} = U\frac{m}{r} - rU\left(\frac{m}{r^2} + 4\pi GrP\right) = -4\pi Gr^2 UP.$$

□

Proposición 2.3.2 *Si la restricción de masa se cumple en el tiempo inicial $\tau = 0$, entonces el sistema de evolución (2.15)-(2.18) implica que tal restricción se cumple para cualquier tiempo subsecuente.*

Demostración. Diferenciando $\mathcal{C}$ respecto a τ se obtiene $\dot{\mathcal{C}} = (m') - 8\pi GrU\Gamma\rho - 4\pi Gr^2\dot{\Gamma}\rho - 4\pi Gr^2\Gamma\dot{\rho}$. Luego a consecuencia del Lema 2.3.1 y de la ecuación (2.23),

$$\begin{aligned} (m') &= -\dot{\psi}m' + \phi'\dot{m} + (\dot{m})' \\ &= -\dot{\psi}(\mathcal{C} + 4\pi Gr^2\Gamma\rho) + 4\pi G\left(r^2UPV_s^2\frac{n'}{n} - (r^2UP)'\right). \end{aligned}$$

Por otro lado se puede escribir $P' = \frac{\partial P}{\partial \rho}\rho' = V_s^2\rho'$, que utilizando la definición de la entalpía f y el enunciado de la Proposición 2.2.1, se puede re-escribir como $P' = V_s^2fn'$, entonces

$$(m') = -\dot{\psi}(\mathcal{C} + 4\pi Gr^2\Gamma\rho) + 4\pi G\left(r^2UPV_s^2\frac{n'}{n} - 2r\Gamma UP - r^2U'P - r^2UV_s^2fn'\right).$$

Poniendo esto último en la expresión para $\dot{\mathcal{C}}$ y usando otra vez la Proposición 2.2.1, así como (2.24) y (2.26), se llega a

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{C}} &= -\dot{\psi} (\mathcal{C} + 4\pi Gr^2 \Gamma \rho) + 4\pi G (fnr^2 U' - r^2 U' P) \\ &= -\dot{\psi} \mathcal{C} + 4\pi Gr^2 \left[U' (fn - P) - \dot{\psi} \Gamma \rho \right].\end{aligned}$$

Luego de (2.21) y (2.24), se encuentra que $\dot{\psi} = U'/\Gamma$, entonces $\dot{\mathcal{C}} = -\dot{\psi} \mathcal{C} + 4\pi Gr^2 U' (fn - \rho - P) = -\dot{\psi} \mathcal{C}$, lo cual es equivalente a

$$(e^{\psi} \mathcal{C})' = 0.$$

Esto significa que $e^{\psi} \mathcal{C}$ es independiente del tiempo, y si al inicio de la evolución se tiene $\mathcal{C}(0, R) = 0$, entonces la restricción de masa se cumple para tiempos posteriores. $\square$

Para comprobar numéricamente la validez de la restricción de masa -usando las cantidades adimensionales-, en cada paso de tiempo se deben calcular las funciones

$$\frac{\partial m}{\partial R} = \frac{\Gamma}{2e^{-\psi}} (1 + U^2 - \Gamma^2) + r \left(U \frac{\partial U}{\partial R} - \Gamma \frac{\partial \Gamma}{\partial R} \right)$$

y

$$4\pi Gr^2 \frac{\partial r}{\partial R} \rho = \frac{\gamma}{\gamma - 1} r^2 \left(\frac{\Gamma}{e^{-\psi}} \right) \left(z + \frac{z^\gamma}{\gamma} \right),$$

luego conforme se incrementa la resolución numérica, para todo tiempo debe ocurrir

$$e^{\Psi} \mathcal{C} = \frac{\partial m}{\partial R} - 4\pi Gr^2 \frac{\partial r}{\partial R} \rho \longrightarrow 0.$$

2.4. Discusión

En este capítulo se ha deducido el sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna la dinámica de los campos que describen el colapso de un fluido perfecto esféricamente simétrico. Se comenzó por construir el espacio-tiempo 4-dimensional y se obtuvieron las ecuaciones de evolución a partir de las ecuaciones de Einstein. Después se hizo un apunte breve sobre la termodinámica del fluido considerando la clase particular de ecuaciones de estado politrópicas, la cual es ampliamente usada en la descripción de flujos en astrofísica. En la última sección de este capítulo se escribió el sistema de evolución como un sistema fuertemente hiperbólico adimensional pensando en la futura implementación de métodos numéricos para calcular su solución, y por esa misma razón se han discutido los datos iniciales adecuados para resolver el problema de Cauchy. No obstante el planteamiento con miras a la solución numérica dicho sistema, en este trabajo el estudio del colapso esférico de un fluido perfecto con presión distinta de cero no va más allá del presente capítulo. El resto del trabajo de doctorado se centra en el estudio de las bastas propiedades del colapso de polvo, cuya principal ventaja es el hecho de que la solución del sistema dinámico se puede obtener de forma exacta y así mismo la métrica del espacio-tiempo. Sin embargo, en proyectos futuros se pretende retomar el problema del colapso de fluidos perfectos con presiones distintas de cero y ecuaciones de estado genéricas para determinar si la formación de singularidades desnudas es posible y establecer condiciones bajo las que esto ocurre, y aunque el problema sigue siendo abierto en varios aspectos, ya existen importantes avances al respecto (ver por ejem-

plo las referencias [37, 38, 39]). Dada la gran extensión y complejidad del problema del colapso gravitacional en relatividad general, es necesario concentrar los esfuerzos en casos simples cuyo entendimiento a detalle pueda conducir a la comprensión del fenómeno en condiciones más realistas, es por eso que en los siguientes capítulos se asume que la presión del fluido es cero.

Capítulo 3

El modelo de colapso gravitacional de Tolman-Bondi

En este capítulo se analiza extensivamente el colapso gravitacional de una nube de polvo esféricamente simétrica, el cual está descrito por el modelo de Tolman-Bondi [40, 41], el cual describe el colapso total de una nube de polvo esféricamente simétrica. La métrica del espacio-tiempo correspondiente a este modelo es conocida de forma exacta, lo cual simplifica enormemente el análisis de su estructura causal. Incluso se sabe que este modelo de colapso permite la formación de singularidades de enfoque con una porción nula y visibles para observadores locales [42, 7, 8, 9, 43, 10], y además, dados los datos iniciales adecuados, una parte de la singularidad se vuelve visible para observadores arbitrariamente lejanos a la nube de polvo [8], en otras palabras, se forma un horizonte de Cauchy que se extiende hasta el infinito nulo futuro. En gran parte de este trabajo se estudia qué tan genérico es este fenómeno, al menos dentro del modelo de colapso de Tolman-Bondi.

Con el propósito de esclarecer la estructura causal del espacio-tiempo que describe el colapso de una nube de polvo esférica, en este capítulo se desarrolla un método para generar diagramas conformes a partir del dato inicial constituido por las distribuciones de materia y velocidad. Este método, el cual representa una herramienta valiosa para determinar de manera sistemática si cierto dato inicial da lugar o no a una singularidad desnuda, está basado en una combinación de técnicas analíticas y numéricas: las analíticas son necesarias para entender el comportamiento de las geodésicas nulas en la vecindad de la singularidad, mientras que las numéricas son necesarias para integrar los rayos de luz lejos de la misma. Generando diagramas conformes para diferentes datos iniciales es posible obtener espacio-tiempos con singularidades desnudas sin necesidad de ajustar finamente los parámetros, lo que indica que estas singularidades son genéricas dentro del modelo de Tolman-Bondi. De esta forma es posible identificar una clase de datos iniciales que conducen a la formación de singularidades desnudas.

En la primera sección se describe dicho modelo de Tolman-Bondi y se establece claramente una lista con las condiciones físicamente razonables y generales que se imponen sobre el dato inicial. En la sección 3.2 se hace un análisis cualitativo de los rayos de luz radiales entrantes y salientes que emanan de la singularidad o que terminan en ella, y en particular se analiza la existencia, la unicidad y las propiedades asintóticas de tales rayos en la vecindad de la singularidad. Los resultados de esta sección resumen de manera simple los conocimientos anteriores sobre el tema,

sin embargo el alcance es mayor puesto que se obtienen nuevas expansiones asintóticas de los rayos de luz que terminan en la singularidad y una nueva cota sobre el dato inicial que garantiza la formación de una singularidad desnuda. Después, en la sección 3.3 se describe el algoritmo para construir coordenadas conformes dentro de la nube que colapsa y se presenta una manera natural de extenderlas hacia afuera de la nube, es decir, al espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Penrose-Kruskal. Finalmente, en la sección 3.3.5 se presentan diagramas conformes generados numéricamente correspondientes a distintos datos iniciales y se analiza en qué casos la singularidad resultante es desnuda u oculta detrás de un agujero negro.¹

3.1. Descripción del modelo

En términos de coordenadas co-móviles sincronizadas [34], la solución de las ecuaciones de Einstein-Euler (2.15)- (2.18) en el caso en que el fluido es polvo ($P = 0$) conduce a la siguiente expresión para la métrica del espacio-tiempo $\mathbf{g}$, la quadri-velocidad $\mathbf{u}$ y la densidad ρ del fluido:

$$\mathbf{g} = -d\tau^2 + \frac{r'(\tau, R)^2}{1 + 2E(R)} dR^2 + r(\tau, R)^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \rho(\tau, R) = \rho_0(R) \left(\frac{R}{r(\tau, R)} \right)^2 \frac{1}{r'(\tau, R)}, \quad (3.2)$$

donde la función $\tau \mapsto r(\tau, R)$ describe la evolución del radio de área a lo largo del cascarón de polvo R como función del tiempo propio, y $\dot{r}$ y r' denotan derivadas parciales de r respecto a τ y R , respectivamente. Se elige la coordenada R de tal manera que cada cascarón de polvo esté etiquetado por su radio de área en $\tau = 0$, es decir, $r(0, R) = R$. La evolución temporal de r está gobernada por el sistema mecánico unidimensional

$$\frac{1}{2} \dot{r}(\tau, R)^2 + V(r(\tau, R), R) = E(R), \quad V(r, R) := -\frac{m(R)}{r}, \quad (3.3)$$

para cada cascarón R , donde $m(R)$ es la función de masa de Misner-Sharp [35] la cual está determinada por el perfil de densidad inicial ρ_0 por medio de

$$m(R) = 4\pi G \int_0^R \rho_0(\bar{R}) \bar{R}^2 d\bar{R}, \quad (3.4)$$

donde G es la constante de la gravitación universal. El dato inicial consiste de los perfiles de velocidad y densidad iniciales $v_0(R) := \dot{r}(0, R)$ y $\rho_0(R)$, respectivamente, los cuales determinan la energía $E(R) = v_0(R)^2/2 - m(R)/R$ para cada cascarón R .

En este trabajo se consideran nubes de polvo de radio finito $R_1 > 0$. Más precisamente, se asumen las siguientes condiciones sobre el dato inicial:

- (i) $\rho_0, v_0 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tienen extensiones de clase C^∞ par e impar, respectivamente, en el eje real $\mathbb{R}$ (dato inicial suave y regular),
- (ii) $\rho_0(R) > 0$ para $0 \leq R < R_1$ y $\rho_0(R) = 0$ para $R \geq R_1$ (densidad positiva y finita),

¹Este capítulo está basado en el artículo [18].

- (iii) $\rho'_0(R) \leq 0$ para toda $R \geq 0$ (densidad monótonamente decreciente),
- (iv) $2m(R)/R < 1$ para toda $R > 0$ (ausencia de superficies atrapadas en la superficie inicial).

Nótese que la condición (iv) automáticamente implica que $1 + 2E(R) > 0$ para toda $R \geq 0$, de tal manera que la ecuación (3.1) no presenta singularidades de coordenadas siempre que $r > 0$ y $r' > 0$. Enseguida se imponen condiciones sobre el perfil de velocidad inicial:

- (v) $v_0(R)/R < 0$ para toda $R \geq 0$ (nube que colapsa),
- (vi) $(v_0(R)/R)^2 < 2m(R)/R^3$ para toda $R \geq 0$ (colapso en estado ligado).

La condición (vi) significa que inicialmente la energía potencial domina sobre la cinética de tal manera que la energía total es negativa, es decir $E(R)/R^2 < 0$ para toda $R \geq 0$. Nótese que la condición (v) no representa una restricción genuina en el sentido de que, si se desea, se puede considerar un dato inicial tal que la velocidad inicial sea cero en algunos puntos, en un intervalo, o en toda la nube (en tal caso el dato inicial sería simétrico en el tiempo) pero después de un tiempo arbitrariamente pequeño el dato inicial evolucionará a una configuración donde se cumplen (v) y (vi). Sin embargo los resultados del trabajo en este capítulo también aplican para el caso simétrico en el tiempo con solo sustituir $v_0 = 0$ en las fórmulas siguientes. Notar también que las suposiciones enunciadas aquí no cubren el caso de una nube de polvo de densidad inicial uniforme y $E = 0$ estudiado por Oppenheimer y Snyder [5], aunque este caso puede ser aproximado en cierto límite de un dato inicial que sí cumpla las condiciones dadas.

Enseguida es conveniente introducir las siguientes funciones -las cuales fueron someramente introducidas en el capítulo anterior-:

$$c(R) := \frac{2m(R)}{R^3}, \quad q(R) := \sqrt{E(R)/V(R, R)} = \sqrt{1 - \frac{Rv_0(R)^2}{2m(R)}}.$$

La primera de ellas es proporcional a la densidad promedio dentro del cascarón de polvo R , mientras el cuadrado de la segunda es la razón entre la energía total y la potencial. De acuerdo con la suposición (i), estas funciones tienen extensiones pares de clase C^∞ en el eje real, y las suposiciones (ii) y (iii) garantizan que $c(R) > 0$ y $c'(R) \leq 0$, mientras que las suposiciones (v) y (vi) implican que $0 < q(R) < 1$ para toda $R \geq 0$. De hecho, los resultados son igualmente válidos si se reemplaza la suposición (iii) por la condición más débil:

- (iii)' $c'(R) \leq 0$ para toda $R > 0$ (densidad promedio monotonamente decreciente).

Finalmente se imponen las siguientes dos condiciones sobre la función q . Primero,

- (vii) $q'(R) \geq 0$ para toda $R > 0$ (exclusión de singularidades de cruzamiento),

que, junto con la condición (iii)', implica que $r'(R) > 0$ para toda $R > 0$ y garantiza que no se forman singularidades de cruzamiento (ver la referencia [9] y la nota después de la prueba del Lema 3.2.1 para detalles sobre singularidades de cruzamiento). Para formular la segunda condición sobre q , primero hay que notar que las funciones c'/R y q'/R son acotadas cerca de $R = 0$ y tienen extensiones pares de clase C^∞ en el eje real. Entonces, la segunda condición es

- (viii) Para toda $R \geq 0$, se tiene $q'(R)/R > 0$ siempre que $c'(R)/R = 0$ (condición de no-degeneración).

En particular, esta última condición significa que los valores centrales de q'' y c'' no pueden ser cero simultáneamente, y como se verá en la siguiente sección, esta condición implica la existencia de rayos de luz que escapan de la singularidad central, permitiendo que ésta sea visible al menos para observadores locales. Si los valores centrales de q'' y c'' son ambos cero, se puede mostrar [9, 44] que no existen tales rayos de luz. Por lo tanto la condición (viii) para $R = 0$ es la propiedad clave sobre el dato inicial que determina si la singularidad central es localmente visible o no.

Bajo las condiciones (i)–(viii), la solución de la ecuación (3.3) se puede calcular analíticamente y resulta ser

$$r(\tau, R) = \frac{R}{q(R)^2} \left[f^{-1} \left(f(q(R)) + \sqrt{c(R)} q(R)^3 \tau \right) \right]^2, \quad (3.5)$$

con la función estrictamente decreciente

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, \pi/2], \quad x \mapsto x\sqrt{1-x^2} + \arccos(x), \quad (3.6)$$

cuya derivada es $f'(x) = -2x^2/\sqrt{1-x^2}$, $0 \leq x < 1$. Nótese que f es de clase C^∞ en el intervalo $[0, 1]$ y la solución es regular en el dominio $R \geq 0$ y $0 \leq \tau < \tau_s(R)$, donde la frontera $\tau = \tau_s(R)$ describe la singularidad de enfoque, la cual está definida por $r/R = 0$. De la ecuación (3.5), se obtiene

$$\tau_s(R) = \frac{\frac{\pi}{2} - f(q(R))}{\sqrt{c(R)} q(R)^3}, \quad R \geq 0. \quad (3.7)$$

Como la densidad ρ del polvo diverge en $r/R = 0$, las ecuaciones de campo de Einstein implican que el escalar de Ricci diverge en la singularidad de enfoque, y por lo tanto, la superficie frontera $\tau = \tau_s(R)$ representa una singularidad de curvatura. Las fuerzas de marea son mucho más intensas cerca de esa superficie que en el caso de singularidades de cruzamiento [45]. Fuera de la nube ($R > R_1$), el espacio-tiempo es isométrico a un subconjunto de la variedad de Schwarzschild-Kruskal de acuerdo al Teorema de Birkhoff (ver por ejemplo la referencia [46]).

Vale la pena notar que la ecuación clave (3.3), que describe la dinámica de los cascarones de polvo, es idéntica a su contraparte newtoniana si τ se identifica con el tiempo newtoniano -absoluto-. Lo que hace mucho más interesante el caso relativista es el análisis de la estructura causal del espacio-tiempo resultante del colapso. Una pregunta relevante en particular es si existen o no rayos de luz que emanen de la singularidad de enfoque y que puedan ser vistos en el infinito nulo futuro. La respuesta se investiga más adelante.

3.2. Rayos de luz provenientes de la singularidad: análisis cualitativo

En esta sección se analiza el comportamiento de las geodésicas nulas radiales en la vecindad de la singularidad de enfoque. Aunque la mayoría de los resultados obtenidos aquí son conocidos en la literatura (ver por ejemplo las referencias [8, 9, 43]) y han sido generalizados para geodésicas causales no radiales [47] (ver también [48, 49] para el caso marginalmente ligado), la derivación alternativa de la teoría presentada en este trabajo es auto-consistente y simple. Además se obtienen expansiones asintóticas nuevas de los rayos de luz (las cuales serán importantes para generar los diagramas conformes más adelante) y nuevos resultados sobre el comportamiento global del horizonte de Cauchy.

Se comienza por dividir los puntos singulares en: la singularidad central $\Sigma_0 := \{(\tau_s(0), 0)\}$, y la parte restante $\Sigma := \{(\tau_s(R), R) : 0 < R \leq R_1\}$. Primero, para cada punto $p \in \Sigma$ se establece la existencia de una única pareja de rayos de luz radiales, uno entrante y uno saliente que terminan en p . Enseguida, se demuestra que bajo las suposiciones listadas previamente, existe un único rayo de luz entrante que termina en Σ_0 , mientras que hay una infinidad de rayos de luz salientes que emanan de la singularidad central Σ_0 . Luego se analiza el comportamiento global del horizonte de Cauchy y se determinan condiciones generales sobre el dato inicial para garantizar que éste permanezca fuera de la región del agujero negro. En particular, se obtiene una cota superior para la densidad central tal que si el dato inicial la satisface, entonces aparece una singularidad central visible desde el infinito nulo futuro.

El método para analizar los rayos de luz se basa en el uso de nuevas coordenadas $\{y, R\}$, donde y se define mediante $r(\tau, R) = Ry^2$, es decir, para cada punto (τ, R) , y^2 es la razón entre los radios de área del cascarón R medidos a tiempos τ y 0. Con este cambio de coordenadas, el espacio-tiempo dentro de la nube de polvo que colapsa se convierte en la región rectangular

$$\Delta := \{(y, R) : 0 < y < 1, 0 < R < R_1\},$$

cuya frontera consiste de la unión de $\Sigma \cup \Sigma_0 = \{(0, R) : 0 \leq R \leq R_1\}$ (la singularidad central), $\Theta := \{(y, R_1) : 0 < y \leq 1\}$ (la superficie de la nube), $\Gamma := \{(y, 0) : 0 < y \leq 1\}$ (el centro de la nube), y $\Pi := \{(1, R) : 0 \leq R \leq R_1\}$ (la superficie inicial). Ver la figura 3.1.

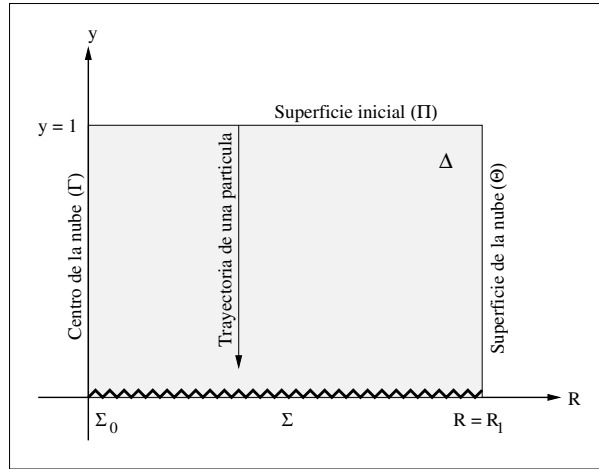


Figura 3.1: Diagrama del espacio-tiempo en el interior de la nube de polvo en las coordenadas $\{y, R\}$. En estas coordenadas el interior de la nube es el rectángulo Δ cuya frontera es la unión de la superficie inicial Π , la superficie de la nube Θ , la singularidad $\Sigma \cup \Sigma_0$ y el centro Γ .

Las geodésicas nulas radiales son las curvas nulas de la parte radial de la métrica (3.1),

$$\frac{d\tau}{dR} = \epsilon \frac{r'(\tau, R)}{\sqrt{1 + 2E(R)}}, \quad (3.8)$$

donde $\epsilon = 1$ para geodésicas nulas salientes y $\epsilon = -1$ para entrantes. En términos de las nuevas

coordenadas $\{y, R\}$ se tiene

$$\tau = \frac{g(q(R), y)}{\sqrt{c(R)}}, \quad r' = y^2 + \frac{R^2}{y} \sqrt{1 - q(R)^2 y^2} \Lambda(y, R), \quad (3.9)$$

y la ecuación para los rayos de luz radiales es

$$\frac{dy}{dR} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - q(R)^2 y^2} \left[\frac{R\Lambda(y, R)}{y^2} \left(1 - \frac{\epsilon R Q(R)}{y} \sqrt{1 - q(R)^2 y^2} \right) - \epsilon Q(R) \right], \quad (3.10)$$

donde las funciones $\Lambda : [0, 1) \times [0, R_1] \rightarrow \mathbb{R}$, $Q : [0, R_1] \rightarrow \mathbb{R}$, y $g, h : (0, 1) \times [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ están definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Lambda(y, R) &:= 2 \frac{q'(R)}{Rq(R)} h(q(R), y) - \frac{c'(R)}{2Rc(R)} g(q(R), y), \\ Q(R) &:= \sqrt{\frac{c(R)}{1 - R^2 q(R)^2 c(R)}}, \\ g(q, y) &:= \frac{f(qy) - f(q)}{q^3}, \\ h(q, y) &:= \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}} - \frac{y^3}{\sqrt{1 - q^2 y^2}} - \frac{3}{2} g(q, y). \end{aligned}$$

Nótese que $1 - R^2 q^2(R) c(R) = 1 + 2E(R) > 0$ y $c(R) > 0$ son positivas, de tal manera que Q está bien definida. De las suposiciones sobre el dato inicial, se sigue que las funciones Λ , Q , g y h son de clase C^∞ . Como consecuencia, los coeficientes en el lado derecho de la ecuación (3.10) son suaves para todos los puntos $(y, R) \in \Delta$ dentro de la nube. Sin embargo la ecuación (3.10) es singular para $y = 0$, y entonces el análisis de los rayos de luz que terminan o emanan de esos puntos debe ser especial.

Antes de emprender ese análisis, se resumen las propiedades elementales de las funciones Λ , Q , g y h , las cuales serán importantes más adelante.

Lema 3.2.1 *Las funciones Λ , Q , g y h son estrictamente positivas y de clase C^∞ en su dominio. Además, para q fija, $g(q, \cdot)$ y $h(q, \cdot)$ son estrictamente decrecientes, y para R fija, $\Lambda(\cdot, R)$ es estrictamente decreciente.*

Demostración. Primero, $Q > 0$ se sigue directamente de su definición y las suposiciones sobre el dato inicial. Después, que la función g sea positiva y monótona en y se sigue de que f es estrictamente decreciente. Para la función h , sea $0 < q < 1$ fija. Notar que

$$\lim_{y \rightarrow 1} h(q, y) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(q, y) = -\frac{q^2 y^4}{(1 - q^2 y^2)^{3/2}} < 0, \quad 0 < y < 1,$$

lo cual implica que $h(q, \cdot)$ es estrictamente decreciente y que $h(q, \cdot) > 0$ en el intervalo $[0, 1)$. Esto, junto con las suposiciones (iii)', (vii) y (viii) inmediatamente implica que $\Lambda > 0$ y que $\Lambda(\cdot, R)$ es estrictamente decreciente para R fija. $\square$

En particular, de la ecuación (3.9) y $\Lambda > 0$ se sigue que $r' > 0$ en Δ , lo cual descarta la existencia de singularidades de cruzamiento e implica que en cada punto $p \in \Delta$ pasa solamente un par de

geodésicas nulas radiales, una entrante y una saliente. Enseguida se analizan los rayos de luz en los puntos singulares $p \in \Sigma$ y $p \in \Sigma_0$.

Finalmente se mencionan dos casos límite que pueden ser incluidos en este análisis con los siguientes ajustes:

1. $q = 1$ (dato inicial simétrico en el tiempo)

Este caso corresponde a una velocidad inicial cero. Aquí $g(q, y) = f(y)$ mientras que la función Λ es

$$\Lambda(y, R) = -\frac{c'(R)}{2Rc(R)}f(y),$$

y la función h es innecesaria.

2. $q = 0$ (colapso marginalmente ligado)

Éste corresponde al caso en que cada cascarón tiene energía cero ($E(R) = 0$). Aquí, las funciones $g(q, y)$ y $\Lambda(y, R)$ tienen las siguientes formas:

$$g(q, y) = \frac{2}{3}(1 - y^3), \quad \Lambda(y, R) = -\frac{c'(R)}{3Rc(R)}(1 - y^3).$$

3.2.1. Comportamiento asintótico de los rayos nulos radiales cerca de Σ

Sea $p = (0, R_0) \in \Sigma$ un punto en la parte no central de la singularidad, con $0 < R_0 \leq R_1$. Se mostrará que existe un único par de rayos nulos radiales, uno entrante y uno saliente, que terminan en p , los cuales pueden parametrizarse en la forma $R = R_0 + \phi(y)$ para alguna función de clase C^∞ $\phi : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga $\phi(0) = 0$. Para esto, primero se escribe la ecuación (3.10) en su forma inversa,

$$\frac{d\phi}{dy} = \frac{dR}{dy} = \frac{2}{\sqrt{1 - q^2 y^2}} \left[\frac{R\Lambda}{y^2} \left(1 - \frac{\epsilon RQ}{y} \sqrt{1 - q^2 y^2} \right) - \epsilon Q \right]^{-1}. \quad (3.11)$$

Para encontrar el comportamiento asintótico de la función ϕ , se asume que $\phi \approx Ay^\alpha$ donde $A \neq 0$ y $\alpha > 0$ es algún exponente positivo a ser determinado. Más precisamente, siguiendo [43], se establece $x := y^\alpha$ y se asume $\phi(y) = \psi(x)$, con $\psi : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 que satisface $\psi(0) = 0$ y $d\psi/dx(0) = A \neq 0$. La ecuación para la función ψ implicada por la ecuación (3.11) es

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{2}{\alpha} \frac{x^{\frac{4}{\alpha}-1}}{\sqrt{1 - q^2 x^{\frac{2}{\alpha}}}} \left[R\Lambda \left(y - \epsilon RQ \sqrt{1 - q^2 y^2} \right) - \epsilon Q y^3 \right]^{-1} \Big|_{y=x^{\frac{1}{\alpha}}, R=R_0+\psi(x)}.$$

Como el lado izquierdo converge a $A \neq 0$ mientras que la expresión dentro del corchete en el lado derecho converge a $-\epsilon R_0^2 Q(R_0)\Lambda(0, R_0) \neq 0$ cuando $x \rightarrow 0$, una condición necesaria para la existencia de tal solución es $\alpha = 4$. En este caso se obtiene, en el límite $x \rightarrow 0$,

$$A = -\frac{1}{2\epsilon R_0^2 Q(R_0)\Lambda(0, R_0)}. \quad (3.12)$$

Para dar condiciones suficientes para la existencia de una solución, se propone el ansatz

$$\phi(y) = Ay^4[1 + z(y)],$$

donde A está dada por la ecuación (3.12) y $z : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^∞ y satisface $z(0) = 0$. Como consecuencia de la ecuación (3.11), la función z satisface la ecuación diferencial

$$y \frac{dz}{dy} + 4z = yF(y, z), \quad (3.13)$$

con el término no lineal definido por

$$yF(y, z) := \frac{2}{A\sqrt{1 - q^2y^2} \left[R\Lambda y - \epsilon R^2 Q \Lambda \sqrt{1 - q^2y^2} - \epsilon Q y^3 \right]} \Big|_{R=R_0 + Ay^4(1+z)} - 4.$$

De acuerdo con la definición de la constante A y las propiedades elementales de las funciones q , Q y Λ , se sigue que $yF : [0, \delta) \times (-\delta_1, \delta_1) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^∞ bien definida siempre que $\delta > 0$ y $\delta_1 > 0$ sean suficientemente pequeñas. Como $yF(0, z) = 0$ para toda $|z| < \delta_1$, también se sigue que la misma función $F : [0, \delta) \times (-\delta_1, \delta_1) \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^∞ .

La ecuación (3.13) es una ecuación diferencial ordinaria con un punto singular regular en $y = 0$ con el término no lineal $yF(y, z)$. Entonces existe una única solución de clase C^∞ , $z : [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface $z(0) = 0$ y $dz/dy(0) = F(0, 0)/5$ (ver el Teorema 1 en [8] ó el Teorema A.0.1 en el Apéndice A). Los resultados hasta ahora se resumen en la siguiente

Proposición 3.2.1 *Sea $p = (0, R_0) \in \Sigma$. En la vecindad de p existe un único par de rayos de luz radiales de clase C^1 que terminan en p . Además estos rayos son de la forma*

$$R(y) = R_0 + Ay^4[1 + z(y)], \quad (3.14)$$

donde A está dada en la ecuación (3.12), y $z : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^∞ que satisface $z(0) = 0$.

Demostración. Como se argumentó antes, la existencia se sigue del Teorema A.0.1. Para probar la unicidad, supóngase que $(y(\lambda), R(\lambda))$ es un rayo de luz radial de clase C^1 que termina en p . Se puede elegir el parámetro λ tal que el punto p corresponda a $\lambda = 0$. Entonces, de acuerdo a la ecuación (3.11),

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{dR}{d(y^4)} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{dR}{4y^3 dy} = A \neq 0,$$

lo cual implica que se puede elegir $\lambda = y$ en una vecindad $[0, \delta)$ de p . Además, la función C^1 $z : (0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, $z(y) := (R(y) - R_0)/(Ay^4) - 1$ es acotada y satisface la ecuación (3.13) y de acuerdo a la Regla de l'Hôpital, $\lim_{y \rightarrow 0} z(y) = 0$. Luego la unicidad se sigue del Theorem A.0.1.

Finalmente, de la ecuación (3.8) y del signo de A se sigue que τ crece cuando y decrece a cero, evidenciando que en el punto p terminan los rayos de luz. $\square$

3.2.2. Comportamiento asintótico de los rayos nulos radiales cerca de Σ_0

Ahora se consideran los rayos de luz radiales que emanan o terminan en la singularidad central, $p = (0, 0) \in \Sigma_0$. Como en la subsección previa, primero se discute el comportamiento asintótico asumiendo que la solución de la ecuación (3.10) se puede escribir en la forma $y(R) = \varphi(u)$, donde $\varphi : [0, \delta) \rightarrow [0, \delta_1)$ es una función de clase C^1 de la variable adimensional $u := (R/R_1)^\alpha$ y que satisface $\varphi(0) = 0$ y $d\varphi/du(0) = \lambda > 0$, con $\alpha > 0$ por ser determinado.

La función φ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{R_1}{2\alpha} \sqrt{1 - q(R)^2 y^2} \times \left[R_1 \Lambda(y, R) u^{\frac{2}{\alpha} - 3} \left(\frac{u}{y} \right)^2 \left(1 - \epsilon R_1 Q(R) u^{\frac{1}{\alpha} - 1} \frac{u}{y} \sqrt{1 - q(R)^2 y^2} \right) - \epsilon Q(R) u^{\frac{1}{\alpha} - 1} \right]_{y=\varphi(u), R=R_1 u^{\frac{1}{\alpha}}} \quad (3.15)$$

El lado izquierdo converge a $\lambda > 0$ en el límite $u \rightarrow 0$. El lado derecho también converge a un valor positivo si $\alpha = 2/3$, en cuyo caso la ecuación (3.15) se simplifica a

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{3R_1}{4} \sqrt{1 - q(R)^2 y^2} \times \left[R_1 \Lambda(y, R) \left(\frac{u}{y} \right)^2 \left(1 - \epsilon R_1 Q(R) \sqrt{u} \frac{u}{y} \sqrt{1 - q(R)^2 y^2} \right) - \epsilon Q(R) \sqrt{u} \right]_{y=\varphi(u), R=R_1 u^{\frac{3}{2}}} \quad (3.16)$$

En el límite $u \rightarrow 0$ se obtiene

$$\lambda = \left(\frac{3}{4} R_1^2 \Lambda_0 \right)^{\frac{1}{3}} > 0, \quad (3.17)$$

con

$$\Lambda_0 := \Lambda(0, 0) = \frac{2q_0''}{q_0} h(q_0, 0) - \frac{c_0''}{2c_0} g(q_0, 0) > 0, \quad (3.18)$$

donde $q_0 := q(0)$, $q_0'' := q''(0)$, $c_0 := c(0)$ y $c_0'' := c''(0)$.

Para probar la existencia de tales rayos de luz, se propone el ansatz $\varphi(x) = \lambda x^2 v(x)$, donde $x := (R/R_1)^{1/3}$ y $v : [0, \delta) \rightarrow [0, \delta_1)$ es una función de clase C^∞ que satisface $v(0) = 1$. La ecuación para v se obtiene de la ecuación (3.15) con $\alpha = 1/3$ y se puede escribir como

$$x \frac{dv^3}{dx} + 6v^3 = \frac{9R_1}{2} \sqrt{1 - q(R)^2 y^2} \times \left[\frac{R_1 \Lambda(y, R)}{\lambda^3} \left(1 - \frac{\epsilon R_1 Q(R) x}{\lambda v} \sqrt{1 - q(R)^2 y^2} \right) - \frac{\epsilon Q(R) x v^2}{\lambda} \right]_{R=R_1 x^3, y=\lambda x^2 v}.$$

Finalmente, se define la nueva función de clase C^∞ $z : [0, \delta) \rightarrow (-\delta_2, \delta_2)$ mediante $v(x)^3 = 1 + z(x)$, y tal que $z(0) = 0$. En términos de ésta se tiene

$$x \frac{dz}{dx} + 6z = xF(x, z), \quad (3.19)$$

con el término no lineal

$$xF(x, z) := \frac{9R_1}{2} \sqrt{1 - q(R)^2 y^2} \times \left[\frac{R_1 \Lambda(y, R)}{\lambda^3} \left(1 - \frac{\epsilon R_1 Q(R) x}{\lambda(1+z)^{1/3}} \sqrt{1 - q(R)^2 y^2} \right) - \frac{\epsilon Q(R) x (1+z)^{2/3}}{\lambda} \right]_{R=R_1 x^3, y=\lambda x^2 (1+z)^{1/3}} - 6. \quad (3.20)$$

Como $xF(x, z)$ es idénticamente cero en $x = 0$ de acuerdo a la definición de λ en la ecuación (3.17), entonces $F : [0, \delta) \times (-\delta_2, \delta_2) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^∞ y se puede aplicar el Teorema A.0.1 para concluir la existencia de una única solución local $z : [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ para la ecuación (3.19) tal que $z(0) = 0$ y $dz/dx(0) = F(0, 0)/7$. Ahora, de la ecuación (3.8) se tiene que τ crece (decrece) con R para rayos nulos radiales salientes (entrantes), y ello demuestra la existencia de un rayo de luz radial saliente que emana de Σ_0 y la existencia de un rayo de luz radial entrante que termina en Σ_0 . Todo esto se resume en la siguiente

Proposición 3.2.2 *Sea $p = (0, 0) \in \Sigma_0$ la singularidad central. Existe un rayo de luz radial saliente que emana de p y un rayo de luz radial entrante que termina en p , los cuales son de la forma*

$$y(x) = \lambda x^2 [1 + z(x)]^{1/3}, \quad x = \left(\frac{R}{R_1} \right)^{1/3}, \quad (3.21)$$

donde la constante λ está dada en la ecuación (3.17) y $z : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^∞ que satisface $z(0) = 0$.

Además, éstos son los únicos rayos de luz radiales de clase C^1 , $y : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen $\lim_{x \rightarrow 0} y(x)/x^2 = \lambda$.

En este caso la unicidad es más sutil que en la subsección anterior y merece una discusión detallada. La razón es en que podrían existir rayos de luz radiales $y : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ con $y(0) = 0$ cuyo límite $y(x)/x^2$ cuando $x \rightarrow 0$ no exista. Para analizarlo se hará uso del siguiente lema técnico, el cual se demuestra en el Apéndice B,

Lema 3.2.2 *Sea $\varphi : I := (0, \delta) \rightarrow (0, \delta_1)$ una solución local de clase C^1 de la ecuación (3.16) tal que $\lim_{u \rightarrow 0} \varphi(u) = 0$. Defínanse*

$$m := \inf_{u \in I} \frac{\varphi(u)}{u} \geq 0, \quad M := \sup_{u \in I} \frac{\varphi(u)}{u} \leq \infty.$$

Entonces se cumplen los siguientes enunciados:

- (i) Si $m > 0$, entonces $M < \infty$.
- (ii) Si $M < \infty$ y $\epsilon = -1$, entonces $m > 0$.
- (iii) Si $m > 0$ y $M < \infty$, entonces $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\varphi(u)}{u} = \lambda$, donde λ está definida en la ecuación (3.17).

Como consecuencia de este lema se tiene el siguiente resultado sobre la unicidad:

Proposición 3.2.3 *Sea $\varphi_0 : I := (0, \delta) \rightarrow (0, \delta_1)$ la solución de la ecuación (3.16) de la forma $\varphi_0(u) = \lambda u v_0(u)$ con $v_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que $\lim_{u \rightarrow 0} v_0(u) = 1$, cuya existencia*

fue probada en la Proposición 3.2.2. Sea $\varphi : I' := (0, \delta') \rightarrow (0, \delta'_1)$ una solución local C^1 de la ecuación (3.16) con $0 < \delta' \leq \delta$ y $0 < \delta'_1 \leq \delta_1$ tal que $\lim_{u \rightarrow 0} \varphi(u) = 0$.

Entonces, en el caso entrante ($\epsilon = -1$) se tiene $\varphi(u) = \varphi_0(u)$ para toda $u \in I'$, es decir, φ_0 es la única solución local que se conecta con Σ_0 . En el caso saliente ($\epsilon = 1$) se tiene que $\varphi(u) \leq \varphi_0(u)$ para toda $u \in I'$, es decir, φ_0 es el primer rayo de luz radial que sale de Σ_0 .

Demostración. Como $\lim_{u \rightarrow 0} v_0(u) = 1$, entonces existen constantes $M > m > 0$ tales que $m \leq \lambda v_0(u) \leq M$ para toda $u \in I$. Definase la función $v(u) := \varphi(u)/(\lambda u)$, $u \in I'$. De acuerdo a la Proposición 3.2.2, se sigue que $v(u) = v_0(u)$ para todo $u \in I'$ si es posible mostrar que $\lim_{u \rightarrow 0} v(u) = 1$.

Primero considérese el caso $\epsilon = -1$ y supóngase que $\varphi(u) \neq \varphi_0(u)$ para algún $u \in I'$. Como las soluciones no se pueden cruzar en Δ , se sigue que, o bien $\varphi(u) > \varphi_0(u)$ para toda $u \in I'$ ó $\varphi(u) < \varphi_0(u)$ para toda $u \in I'$. En el primer caso se sigue que $\varphi(u)/u > \varphi_0(u)/u = \lambda v_0(u) \geq m > 0$ para toda $u \in I'$. Entonces el Lema 3.2.2, (i) y (iii) implican que $\lim_{u \rightarrow 0} \varphi(u)/u = \lambda$, y se tiene la unicidad. En el segundo caso, $\varphi(u)/u < \varphi_0(u)/u = \lambda v_0(u) \leq M$ para toda $u \in I'$ y el Lema 3.2.2, (ii) y (iii) implican que $\lim_{u \rightarrow 0} \varphi(u)/u = \lambda$.

Finalmente, supóngase que $\epsilon = 1$ y $\varphi(u) > \varphi_0(u)$. Entonces el Lema 3.2.2, (i) y (iii) implican que $\lim_{u \rightarrow 0} \varphi(u)/u = \lambda$ como antes, y entonces se tiene la unicidad. $\square$

Nótese que en el caso de geodésicas nulas radiales salientes que emanan de Σ_0 no se puede probar que $\varphi_0(u)$ sea única. De hecho, resulta que hay una infinidad de rayos de luz radiales salientes que emanan de Σ_0 . Ciertamente, dado un punto $p = (R_0, y_0) \in \Delta$ suficientemente cerca de Σ_0 y tal que $y_0 < \varphi_0(u_0)$ con $u_0 = (R_0/R_1)^{2/3}$, el rayo de luz saliente $\varphi(u)$ que pasa por este punto no puede cruzar φ_0 , y entonces $\varphi(u)/u < \varphi_0(u)/u \leq M$ para toda $u \in I$ donde φ está definida. Luego, como la Proposición 3.2.1 garantiza que el rayo de luz φ no puede emanar de Σ , se sigue que $\varphi(u)$ se conecta con Σ_0 . Por lo tanto, hay una infinidad de rayos de luz radiales que emanan de Σ_0 , siendo el primero de ellos φ_0 , el cual genera un horizonte de Cauchy.

Los resultados obtenidos hasta ahora se resumen en el siguiente

Teorema 3.2.1 *Dadas las suposiciones (i), (ii), (iii)', (iv)–(viii) hechas en la sección 3.1, se tiene el siguiente comportamiento de las geodésicas nulas radiales cerca de la singularidad de enfoque: para cada punto $p = (0, R_0) \in \Sigma$, $R_0 > 0$, existe un único par de rayos de luz radiales de clase C^∞ que terminan en p , uno entrante y uno saliente. También hay un único rayo de luz radial entrante de clase C^∞ que termina en la singularidad central $(0, 0) \in \Sigma_0$. Sin embargo, hay una infinidad de rayos de luz salientes que emanan de Σ_0 . El primero de ellos es descrito por la solución dada en la Proposición 3.2.2 y genera el horizonte de Cauchy.*

Estos resultados, incluyendo las expansiones asintóticas (3.14, 3.21) resultan ser ingredientes importantes para el algoritmo generador de diagramas conformes que se describirá en la sección 3.3. Pero antes de describir ese algoritmo, se analizan las condiciones bajo las cuales el rayo de luz que genera el horizonte de Cauchy llega a la superficie de la nube de polvo antes que el horizonte de eventos, implicando que una parte de la singularidad sea visible para observadores en el infinito nulo futuro.

3.2.3. Visibilidad global de la singularidad

En esta subsección se establecen condiciones sobre el dato inicial que garantizan la formación de una singularidad desnuda visible no solo para observadores locales, sino también para observadores a una distancia arbitraria de la nube. Esto ocurre si y sólo si el rayo de luz que genera el horizonte de Cauchy llega a la superficie de la nube antes que el horizonte de eventos, implicando la existencia de rayos de luz que emanan de la singularidad y que llegan al espacio-tiempo de Schwarzschild con $r > 2m$.

Para hacer este análisis, es útil considerar el horizonte aparente, el cual en el modelo esféricamente simétrico es la superficie crítica que divide las regiones en las cuales el radio de área crece y decrece, respectivamente, a lo largo de rayos nulos radiales salientes. Si se parametrizan los rayos nulos radiales salientes con R , y usando las ecuaciones (3.8), (3.3) y (3.9) se obtiene

$$\frac{dr}{dR} = \frac{d\tau}{dR} \dot{r} + r' = \left(y^2 + R^2 \Lambda(y, R) \frac{\sqrt{1 - q(R)^2 y^2}}{y} \right) \left(1 - RQ(R) \frac{\sqrt{1 - q(R)^2 y^2}}{y} \right) \quad (3.22)$$

a lo largo de rayos nulos salientes, donde como antes $y^2 = r/R$. Entonces el horizonte aparente es la superficie para la cual la expresión dentro del segundo paréntesis se anula, lo cual es equivalente a la condición $y = y_{AH}(R) := R\sqrt{c(R)}$ ó bien

$$r = r_{AH}(R) := R^3 c(R) = 2m(R). \quad (3.23)$$

De la ecuación (3.21), se ve que al menos para $R \ll R_1$ el rayo de luz $y = y_0(R)$ que genera el horizonte de Cauchy permanece fuera del horizonte aparente, pues $y_0(R) \simeq R^{2/3}$ mientras que $y_{AH}(R) \simeq R$. Ahora, nótese que un rayo nulo saliente que emana de un punto dentro del horizonte aparente, $r < 2m(R)$, no puede escapar de esa región porque r decrece mientras que $m(R)$ crece conforme R crece. Por lo tanto, un rayo nulo que emana de un punto dentro del horizonte aparente dentro de la nube o bien llega a la singularidad dentro de la nube o a la superficie de la misma con $r < 2m(R_1)$, y entonces permanece dentro de la región del agujero negro. Como consecuencia, una condición necesaria y suficiente para que el horizonte de Cauchy quede fuera del horizonte de eventos es que el rayo de luz y_0 permanezca *fuera* del horizonte aparente para toda $R > 0$, es decir,

$$r_0(R) := Ry_0(R)^2 > 2m(R)$$

para toda $R > 0$. En lo sucesivo se verá que esta estimación es válida bajo ciertas condiciones sobre el dato inicial. Esto se logra estimando cada término en la ecuación de propagación (3.22) para el radio de área, pero primero es importante hacer la siguiente observación.

Lema 3.2.3 *La siguiente cota superior es válida para la función y_0 , que describe el generador del horizonte de Cauchy:*

$$y_0(R) \leq \frac{1}{q(R)} f^{-1} \left(f(q(R)) + \left[\frac{\pi}{2} - f(q_0) \right] \frac{q(R)^3}{q_0^3} \sqrt{\tilde{c}(R)} \right) =: \eta(R), \quad (3.24)$$

para toda $0 \leq R \leq R_1$, donde $\tilde{c}(R) := c(R)/c_0$ es el perfil de densidad media normalizado, y donde $c_0 := c(0)$ y $q_0 := q(0)$.

Demostración. A consecuencia de la ecuación (3.8), τ no puede decrecer a lo largo de y_0 ,

entonces, usando la ecuación (3.9) se tiene

$$g(q(R), y_0(R)) = \sqrt{c(R)}\tau \geq \sqrt{c(R)}\tau_s(0),$$

donde de acuerdo a la ecuación (3.7), $\tau_s(0) = (\pi/2 - f(q_0))/(q_0^3\sqrt{c_0})$. Luego el enunciado del lema se sigue de la definición de la función g y de que f es estrictamente monótona decreciente.

□

Notar que $\eta(R)$ es estrictamente positiva para $R > 0$ y satisface $\eta(R) \simeq R^{2/3}$ para $R \ll R_1$. Además η solamente depende de la función inicial q y de la densidad media inicial normalizada $\tilde{c} = c/c_0$, y no de su magnitud c_0 .

Enseguida, asumiendo que el radio de área es uniformemente acotado lejos del horizonte aparente en algún intervalo, se integra la ecuación (3.22) para obtener una cota inferior conveniente para r :

Lema 3.2.4 *Sea $\delta > 0$, y supóngase que $y_0(R) \geq (1+\delta)y_{AH}(R)$ para toda $0 \leq R \leq R_0$. Entonces el generador del horizonte de Cauchy satisface*

$$r_0(R) \geq \frac{\delta}{1+\delta}\xi(R) + \delta(1+\delta) \int_0^R \bar{R}^2 c(\bar{R}) d\bar{R}, \quad \xi(R) := \int_0^R \bar{R}^2 \Lambda(\eta(\bar{R}), \bar{R}) \frac{\sqrt{1 - q(\bar{R})^2 \eta(\bar{R})^2}}{\eta(\bar{R})} d\bar{R} \quad (3.25)$$

para toda $0 \leq R \leq R_0$.

Demostración. Considérese la ecuación (3.22). Se pretende estimar cada término dentro de los paréntesis del lado derecho. Para el primero se tiene que $y^2 \geq (1+\delta)^2 R^2 c(R)$, $\Lambda(y, R) \geq \Lambda(\eta(R), R)$ y $\sqrt{1 - q(R)^2 y^2}/y \geq \sqrt{1 - q(R)^2 \eta(R)^2}/\eta(R)$, donde se han usado los resultados del Lema previo y del Lema 3.2.1. Para el segundo término se usa

$$\begin{aligned} RQ(R) \frac{\sqrt{1 - q(R)^2 y^2}}{y} &\leq RQ(R) \frac{\sqrt{1 - (1+\delta)^2 R^2 q(R)^2 c(R)}}{(1+\delta)R\sqrt{c(R)}} \\ &= \sqrt{\frac{1 - (1+\delta)^2 R^2 q(R)^2 c(R)}{1 - R^2 q(R)^2 c(R)}} \frac{1}{1+\delta} \leq \frac{1}{1+\delta}. \end{aligned}$$

Reuniendo los resultados se obtiene

$$\frac{dr}{dR} \geq \left[(1+\delta)^2 R^2 c(R) + R^2 \Lambda(\eta(R), R) \frac{\sqrt{1 - q(R)^2 \eta(R)^2}}{\eta(R)} \right] \frac{\delta}{1+\delta}$$

para toda $0 \leq R \leq R_0$. Integrando ambos lados de esta desigualdad y observando que $r(0) = 0$, el enunciado del Lema se sigue inmediatamente. □

Igual que $\eta(R)$, la función $\xi(R)$ es estrictamente positiva para $R > 0$ y solo depende de q y de la densidad media normalizada $\tilde{c} = c/c_0$. En contraste con esto, la función de masa $m(R) = R^3 c(R)/2$ se escala con la magnitud de la densidad central c_0 . Por lo tanto, bajo la hipótesis del Lema 3.2.4, siempre se puede hacer un ajuste para que $r_0(R) > 2m(R)$ en el intervalo $0 \leq R \leq R_0$ por medio de un re-escalo del perfil de densidad inicial. Esta observación conduce al resultado final en cuanto al comportamiento global del horizonte de Cauchy.

Teorema 3.2.2 *Considérense perfiles iniciales de densidad y velocidad $(\tilde{\rho}_0, \tilde{v}_0)$ que satisfagan las condiciones (i), (ii), (iii)', (iv)–(viii) de la sección 3.1, y con $\tilde{c}(0) = 1$. Sea $\mu > 0$ suficientemente pequeña y tal que $\mu \leq 1$ y*

$$\mu^2 \leq \inf_{0 < R \leq R_1} \frac{4}{27} \frac{\xi(R)}{R^3 \tilde{c}(R)}. \quad (3.26)$$

Entonces el dato inicial re-escalado $(\rho_0 := \mu^2 \tilde{\rho}_0, v_0 := \mu \tilde{v}_0)$ también satisface las condiciones (i), (ii), (iii)', (iv)–(viii) de la sección 3.1, y el generador del horizonte de Cauchy en el espacio-tiempo resultante satisface

$$r_0(R_1) \geq \frac{9}{2}m(R_1) + \frac{3\mu^2}{4} \int_0^{R_1} \bar{R}^2 \tilde{c}(\bar{R}) d\bar{R} > 2m(R_1).$$

Demostración. Primero, notar que $\xi(R) \simeq R^{7/3}$ para $R \ll R_1$, y que $\xi(R)$ es estrictamente positiva para $R > 0$, de tal manera que la función $\xi(R)/(R^3 \tilde{c}(R))$ es estrictamente positiva y diverge cuando $R \rightarrow 0$. Por lo tanto, el ínfimo en la cota (3.26) es estrictamente positivo.

Luego, notar que la solución re-escalada satisface $c = \mu^2 \tilde{c}$ y $q = \tilde{q}$ porque el re-escalo es tal que las energías cinética y potencial ambas se escalan con el factor μ^2 . Ahora se fija² $\delta = 1/2$. Sea $R_0 \in [0, R_1]$ el valor máximo para el cual $y_0(R) \geq (1 + \delta)y_{AH}(R)$ para toda $0 \leq R \leq R_0$. Obsérvese que $R_0 > 0$ porque $y_0(R) \simeq R^{2/3}$ mientras que $y_{AH}(R) \simeq R$ para $R \ll R_1$. Entonces el Lema 3.2.4 y las hipótesis implican que

$$r_0(R) \geq \frac{\delta}{1 + \delta} \xi(R) + \delta(1 + \delta) \int_0^R \bar{R}^2 c(\bar{R}) d\bar{R} \geq \frac{9}{4} R^3 c(R) + \frac{3}{4} \int_0^R \bar{R}^2 c(\bar{R}) d\bar{R}$$

para toda $0 \leq R \leq R_0$. En particular esto implica que $y_0(R_0) > 3y_{AH}(R_0)/2$. Pero entonces el requerimiento de que R_0 sea máximo conduce a que $R_0 = R_1$. $\square$

Por lo tanto, dado un perfil de densidad media normalizada $\tilde{c}$ y una razón inicial entre la energía total y la potencial q^2 , que satisfagan las condiciones mencionadas, la existencia de una singularidad localmente visible se basa en el requisito de que las segundas derivadas $\tilde{c}''$ y q'' no se anulen simultáneamente en el centro ($R = 0$) (ver los comentarios debajo de la condición (viii) en la sección 3.1), mientras que la visibilidad global está garantizada si la magnitud central de la densidad media (c_0) es suficientemente pequeña. En el caso de un dato inicial simétrico en el tiempo ($q = 1$) la expresión para la función ξ se simplifica a

$$\xi(R) = \int_0^R \bar{R} \frac{d}{d\bar{R}} \eta(\bar{R})^2 d\bar{R} = R\eta(R)^2 - \int_0^R \eta(\bar{R})^2 d\bar{R}, \quad \eta(R) = f^{-1} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\tilde{c}(R)} \right).$$

En la siguiente sección se calcula numéricamente la cota (3.26) para una familia de datos iniciales de cuatro parámetros y se muestra que ésta es consistente con los diagramas conformes generados.

²También se podrían considerar otros valores positivos para δ . Esta elección particular es la que maximiza la constante en la cota (3.26).

3.3. Diagramas conformes

En esta sección se presenta un algoritmo para construir coordenadas conformes (T, X) , en las cuales la parte radial de la métrica (3.1),

$$\tilde{g} := -d\tau^2 + \frac{dR^2}{\gamma(\tau, R)^2}, \quad \gamma(\tau, R) := \frac{\sqrt{1 + 2E(R)}}{r'(\tau, R)},$$

adquiere la forma simple

$$\tilde{g} = \Omega(T, X)^2(-dT^2 + dX^2),$$

con $\Omega(T, X) > 0$ el factor conforme. En estas coordenadas, la estructura causal del espacio-tiempo se vuelve clara porque los rayos de luz radiales están descritos por las líneas rectas $T \pm X = \text{const.}$ Las coordenadas T y X se obtienen convenientemente por medio de coordenadas nulas $U := T - X$ y $V := T + X$, las cuales satisfacen las ecuaciones de advección

$$\dot{U} = -\gamma U', \quad \dot{V} = +\gamma V', \quad (3.27)$$

sujetas a condiciones de frontera adecuadas. Ciertamente, si U y V satisfacen la ecuación (3.27), entonces

$$\Omega^2(-dT^2 + dX^2) = -\Omega^2 dU dV = \Omega^2 \dot{U} \dot{V} \left(-d\tau^2 + \frac{dR^2}{\gamma(\tau, R)^2} \right),$$

y el factor conforme es $\Omega = 1/\sqrt{\dot{U}\dot{V}}$, dado que $\dot{U}$ y $\dot{V}$ son positivas.

3.3.1. El caso especial de una nube de densidad homogénea con velocidad inicial cero.

Como ejemplo simple, considérese el caso de densidad homogénea y velocidad inicial cero, en el cual $q = 1$ y $c = c_0 = \text{const.}$ En este caso $r = Ry^2$, $\gamma^{-1} = y^2/\sqrt{1 - c_0 R^2}$, donde $y = f^{-1}(\sqrt{c_0}\tau)$ es independiente de R . Por lo tanto,

$$\tilde{g} = \frac{y^4}{c_0} \left[-\left(\frac{2dy}{\sqrt{1 - y^2}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{c_0} dR}{\sqrt{1 - c_0 R^2}} \right)^2 \right],$$

y las sustituciones $y = \cos(T/2)$, $\sqrt{c_0}R = \sin(X)$ conducen a una métrica de tipo Friedmann-Robertson-Walker con tiempo conforme T ,

$$g = \frac{\cos^4(T/2)}{c_0} [-dT^2 + dX^2 + \sin^2(X)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)],$$

con $0 \leq T \leq \pi$ y $0 \leq X \leq \arcsin(\sqrt{c_0}R_1)$. El diagrama conforme correspondiente para $c_0 = 0.75$ y $R_1 = 1$ se muestra en la figura 3.2. Notar que la ecuación del horizonte aparente $y_{AH}(R) = \sqrt{c_0}R$ se reduce a la simple ecuación $T = \pi - 2X$, que describe una 3-superficie tipo tiempo. La singularidad resulta ser tipo espacio y oculta detrás de la región del agujero negro. Sorpresivamente, esto cambia por completo en el caso genérico, pues como se aclaró en el Teorema 3.2.1, la singularidad central es nula y visible para observadores locales cuando se cumplen las condiciones (i)-(viii). Además, la parte nula de la singularidad se puede extender hacia el pasado lo suficiente

para que el horizonte de Cauchy quede fuera del agujero negro: ver Teorema 3.2.2 y los siguientes diagramas conformes.

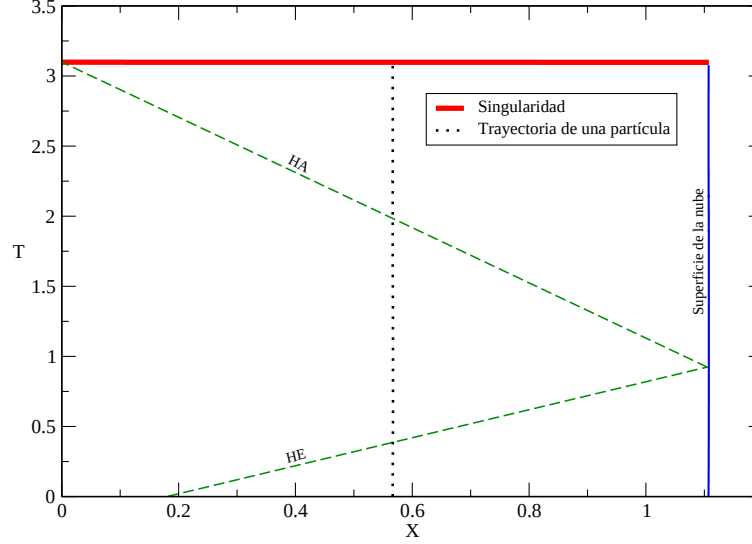


Figura 3.2: Diagrama conforme para una nube de polvo homogénea con velocidad inicial cero y parámetros $c_0 = 0.75$ y $R_1 = 1$. Las líneas denotadas por “HA” y “HE” se refieren a los horizontes aparente y de eventos, respectivamente. Se sabe que en el vacío, el horizonte aparente coincide con el de eventos, entonces dentro de la nube, este último queda determinado por el rayo nulo saliente que pasa por la intersección del horizonte aparente con la superficie de la nube. Notar también que, para esta elección de parámetros, el horizonte de eventos intersecta la superficie inicial, lo cual implica que las partículas de polvo inicialmente cercanas al centro de la nube se encuentran atrapadas dentro del agujero negro desde el inicio del colapso.

3.3.2. El caso genérico

En el caso genérico, donde los perfiles de velocidad y densidad inicial satisfacen las condiciones (i)–(viii), es posible resolver las ecuaciones de advección (3.27) por el método de características. Las ecuaciones (3.27) implican que U y V son constantes a lo largo de las geodésicas nulas radiales salientes ($\tau_+(R)$) y entrantes ($\tau_-(R)$), respectivamente, donde

$$\frac{d\tau_+}{dR} = +\frac{1}{\gamma(\tau_+, R)}, \quad \frac{d\tau_-}{dR} = -\frac{1}{\gamma(\tau_-, R)}. \quad (3.28)$$

En términos de las coordenadas $\{y, R\}$ introducidas en la sección 3.2, estas ecuaciones son

$$\frac{dy_+}{dR} = w_+(y_+, R), \quad \frac{dy_-}{dR} = w_-(y_-, R), \quad (3.29)$$

donde la función $w_\epsilon(y, R)$ ($\epsilon = \pm 1$) está dada por el lado derecho de la ecuación (3.10). Para la integración numérica se usa un nuevo parámetro λ (en lugar de R) y se re-escriben las ecuaciones para los rayos nulos radiales como el sistema autónomo

$$\frac{dy_\pm}{d\lambda} = \frac{\pm w_\pm(y_\pm, R_\pm)}{\sqrt{1 + w_\pm(y_\pm, R_\pm)^2}}, \quad \frac{dR_\pm}{d\lambda} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + w_\pm(y_\pm, R_\pm)^2}}. \quad (3.30)$$

La definición del parámetro λ es tal que éste corresponde a la longitud de arco respecto a la métrica euclídea (artificial) en la carta (y, R) , entonces el lado derecho de las ecuaciones (3.30) no puede ser muy grande ni muy pequeño en magnitud, y por lo tanto no hay necesidad de usar métodos adaptativos o implícitos para integrar numéricamente el sistema (3.30), y es suficiente implementar un método integrador de Runge-Kutta de cuarto orden de precisión (ver por ejemplo la referencia [50]) con tamaño de paso h fijo. El signo de λ es tal que τ crece con λ a lo largo de los rayos de luz radiales entrantes y salientes.

Una vez que se encuentran las curvas características, las coordenadas nulas U y V se pueden construir asignando a cada rayo nulo saliente un único valor para U y a cada rayo nulo entrante un único valor para V , tales que $\dot{U} > 0$, $\dot{V} > 0$. Para esto, se especifican condiciones de frontera para U y V en la superficie de la nube Θ , condiciones de frontera para U en la singularidad Σ y condiciones de frontera para V en la superficie inicial Π (ver la figura 3.1). Para asegurar que $\dot{U}, \dot{V} > 0$ se requiere que U crezca cuando uno se mueve hacia el futuro a lo largo de Θ y luego hacia el centro a lo largo de la singularidad Σ . Asimismo, se pide que V crezca cuando uno se mueve del centro hacia la superficie a lo largo de Π y luego hacia el futuro a lo largo de Θ .

A continuación se describen tales condiciones de frontera con más detalle. La idea es unir suavemente el diagrama conforme del interior de la nube con el diagrama de Penrose-Kruskal correspondiente a la solución exterior de Schwarzschild.

Condiciones de frontera para U y V en Θ

Las coordenadas U y V en Θ se determinan haciendo coincidir sus valores con los correspondientes a las coordenadas de Penrose-Kruskal en el espacio-tiempo de Schwarzschild. U y V se obtienen analíticamente calculando la trayectoria de un observador radial en caída libre en el espacio-tiempo de Schwarzschild, el cual inicia en $r = R_1$ con velocidad inicial $v_0(R_1)$. El cálculo,

presentado en el Apéndice C conduce al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \tan(U_\Theta(y)) &= \frac{1}{a_1} \left(\sqrt{a_1^2 - b_1^2 y^2} - y \sqrt{1 - b_1^2} \right) \times \\ &\exp \left\{ \frac{y^2}{2a_1^2} - \frac{\sqrt{1 - b_1^2}}{2b_1^2} \left[\frac{1 + 2b_1^2}{b_1} \left(\arctan \left(\frac{\sqrt{a_1^2 - b_1^2 y^2}}{b_1 y} \right) - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{y}{a_1^2} \sqrt{a_1^2 - b_1^2 y^2} \right] \right\}, \\ \tan(V_\Theta(y)) &= \frac{1}{a_1} \left(\sqrt{a_1^2 - b_1^2 y^2} + y \sqrt{1 - b_1^2} \right) \times \\ &\exp \left\{ \frac{y^2}{2a_1^2} + \frac{\sqrt{1 - b_1^2}}{2b_1^2} \left[\frac{1 + 2b_1^2}{b_1} \left(\arctan \left(\frac{\sqrt{a_1^2 - b_1^2 y^2}}{b_1 y} \right) - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{y}{a_1^2} \sqrt{a_1^2 - b_1^2 y^2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

donde $a_1 := \sqrt{2m(R_1)/R_1} = R_1 \sqrt{c(R_1)}$ y $b_1 := \sqrt{-2E(R_1)} = q(R_1)a_1$. Como se muestra en el Apéndice C, U_Θ y V_Θ son funciones estrictamente decrecientes en y y normalizadas de tal manera que $U_\Theta(0) = V_\Theta(0) = \arctan(1) = \pi/4$.

Condiciones de frontera para V en Π

En la superficie inicial Π , se elige V como una función lineal tal que sus valores y los de su primera derivada coincidan con aquellos correspondientes en las coordenadas de Penrose-Kruskal, por lo tanto

$$V_\Pi(R) := V_\Theta(1) + \beta \left(\frac{R}{R_1} - 1 \right), \quad \beta := R_1 \left. \frac{\partial V_\Theta}{\partial R_1} \right|_{y=1}.$$

En los casos estudiados más adelante, se ha verificado que β sea positiva, lo cual implica que $V' > 0$ a lo largo de Π .

Condiciones de frontera para U en Σ

La elección de U en la porción tipo espacio de la singularidad Σ es natural y se basa en la observación de que en el diagrama de Penrose para el espacio-tiempo de Schwarzschild, la singularidad de curvatura en $r = 0$ es un subconjunto de la línea recta $2T = U + V = \text{const.}$ Por lo tanto, se opta por elegir U de tal manera que $U + V = \text{const.} = U_\Theta(0) + V_\Theta(0) = \pi/2$. Sin embargo esto requiere conocer V en cada punto de Σ , así que en cada punto dado $p \in \Sigma$ se determina el valor V_p de la función V mediante la integración numérica de una geodésica nula radial entrante hacia el pasado hasta que ésta intersecta ya sea la superficie de la nube Θ o la superficie inicial Π , donde V es conocida, y como V es constante a lo largo del rayo nulo entrante, esto determina V_p , y luego $U_p := \pi/2 - V_p$.

3.3.3. Construcción del diagrama conforme

Las condiciones de frontera determinan un único par de coordenadas (U, V) para cada punto $p \in \Delta$ dentro de la nube. Para encontrarlo es suficiente integrar un rayo nulo radial saliente dirigido hacia el futuro y uno entrante dirigido hacia el pasado desde p . El rayo saliente intersecta ya sea Σ o Θ , donde U está dada. El rayo entrante intersecta ya sea Π o Θ , donde V es conocida. Con este algoritmo, en principio es posible construir las imágenes conformes de las superficies relevantes Π , Γ , Θ , Σ , el horizonte aparente o la trayectoria de una partícula de polvo en el

diagrama T - X , donde $T = (V + U)/2$, $X = (V - U)/2$, y las coordenadas (U, V) se calculan numéricamente para cada punto de esas superficies.

Sin embargo, en la práctica, un problema con este procedimiento ocurre cuando los rayos salientes se aproximan a la superficie singular Σ , pues ahí la ecuación de los rayos nulos está indefinida. Para evitar integrar hacia la singularidad, se adopta el siguiente algoritmo:

Paso 1. Se construye una malla uniforme (y_j, R_1) a lo largo de la superficie de la nube Θ , donde $y_j = j/J$, $j = 0, 1, 2, \dots, J$. Como U y V son conocidas en Θ , su imagen conforme se obtiene de inmediato calculando $(U_\Theta(y_j), V_\Theta(y_j))$ para cada punto de la malla, $j = 0, 1, 2, \dots, J$.

Paso 2. Para cada $j = J, J - 1, \dots$ se integra un rayo de luz radial saliente hacia el pasado desde (y_j, R_1) . Ese rayo de luz puede intersectar ya sea la superficie Π , Γ , el horizonte aparente o la trayectoria de una partícula en algún punto p , al cual se le asocia el valor $U_p = U_\Theta(y_j)$, y luego se determina V_p integrando un rayo de luz radial entrante hacia el pasado desde p . El procedimiento anterior da la imagen conforme de las superficies relevantes localizadas en el pasado de la superficie Θ . Esa región necesariamente contiene una porción de la superficie inicial Π o incluso podría contenerla completa, además de una porción del centro Γ , o incluso todo el centro. En este último caso ocurre que algún rayo nulo saliente dirigido al pasado llega a la singularidad central Σ_0 para algún j^* positivo. De acuerdo con el Teorema 3.2.1 los subsecuentes rayos de luz salientes con $j < j^*$ deben provenir de Σ_0 también.

Paso 3. De manera similar, se define una malla uniforme $(0, R_k)$ a lo largo de la singularidad Σ , donde $R_k = R_1 k/K$, $k = 1, 2, \dots, K$, y a partir de cada uno de los puntos de la malla se integra un rayo de luz radial saliente hacia el pasado. Para efectuar tal integración se empieza en el punto cercano a la singularidad $(y, R) = (h, R_k + Ah^4)$, el cual proviene del truncamiento de la expansión asintótica (3.14). Luego el rayo de luz se intersecta con las superficies relevantes y se determina la pareja (U, V) en cada punto de intersección como en el paso previo. De esta manera se obtiene la imagen conforme de las superficies relevantes más allá del pasado de la superficie Θ .

Paso 4. Finalmente, se determina la imagen conforme de las singularidades Σ_0 y Σ . Por construcción, la imagen de Σ es una línea horizontal en el diagrama T - X con extremos en $(\pi/4, X_0)$ y $(\pi/4, 0)$, donde $X_0 = (V_0 - U_0)/2$ como se estableció previamente. En cambio, la imagen de Σ_0 , está determinada por un único valor V_0 de V y todo un rango de valores $U \in [U_0, U_1]$. De hecho, de acuerdo al Teorema 3.2.1, hay un único rayo de luz radial entrante que termina en Σ_0 mientras que hay una infinidad de rayos de luz radiales salientes que emanan de Σ_0 , siendo el primero de ellos el generador del horizonte de Cauchy. Como consecuencia, en el diagrama conforme T - X , Σ_0 se desenvuelve en un subconjunto de la línea recta $T + X = V_0$. Por lo tanto, para determinar sus puntos extremos, es suficiente calcular V_0 , U_0 y U_1 .

Para calcular V_0 se integra hacia el pasado el único rayo de luz radial entrante empezando desde el punto $(y, R) = (1.25h, \sqrt{4(1.25h)^3/(3\Lambda_0)})$, el cual se obtiene del truncamiento de la expansión asintótica (3.21), hasta que éste intersecta Θ o Π . Para calcular U_1 , se integra hacia el futuro el rayo de luz radial saliente generador del horizonte de Cauchy empezando desde el punto $(y, R) = (1.25h, \sqrt{4(1.25h)^3/(3\Lambda_0)})$ hasta que éste intersecta Θ ó Σ . El punto de intersección establece el valor de U_1 . Finalmente, U_0 se determina mediante el requisito de que $U_0 + V_0 = 2T = \pi/2$, pues U_0 debe coincidir con el valor de U en el extremo de Σ .

3.3.4. Perfiles iniciales de densidad y velocidad

En esta subsección se presenta una familia particular de datos iniciales con cuatro parámetros. Se verá que tales parámetros satisfacen ciertas condiciones que garantizan que los correspondientes perfiles de densidad y velocidad iniciales $(\rho_0, v_0) = ((R^3 c)' / (8\pi G R^2), -R\sqrt{(1-q^2)c})$ satisfagan los requisitos (i)–(viii) en el intervalo $[0, R_1]$. Aunque el perfil resultante de densidad inicial $\rho_0(R)$ no se puede hacer coincidir con cero en $R = R_1$ de forma arbitrariamente suave, de todas formas se tiene esencialmente $\rho_0(R_1) = 0$. A continuación se pretende extender la función c fuera de la nube de manera *suave* a través de su superficie. Para ello, denótese con m_1 la masa total de la nube. Por un lado se tiene $m(R) = m_1$ para $R \geq R_1$, y por otro lado $m(R_1) = R_1^3 c(R_1)/2$, entonces se deduce que $m_1 = R_1^3 c_1/2$, donde $c_1 := c(R_1)$. Denótese la densidad media fuera de la nube -en el espacio-tiempo de Schwarzschild- por $\bar{c}$, que por analogía se define como $\bar{c} := 2m(R)/R^3$ para $R \geq R_1$. Como afuera de la nube se tiene $m(R) = m_1$ para toda R , entonces

$$\bar{c}(R) = c_1 \left(\frac{R_1}{R} \right)^3, \quad R \geq R_1.$$

Adicionalmente se tiene

$$\begin{aligned} \bar{c}'(R) &= -3 \frac{\bar{c}(R)}{R}, \\ \bar{c}''(R) &= 12 \frac{\bar{c}(R)}{R^2}, \\ \bar{c}'''(R) &= -60 \frac{\bar{c}(R)}{R^3}. \end{aligned}$$

Para obtener una extensión de la densidad media fuera de la nube que al menos sea de clase $\mathcal{C}^3$ en $R = R_1$, se requiere que

- (a) $c(R_1) = \bar{c}(R_1)$,
- (b) $c'(R_1) = \bar{c}'(R_1)$,
- (c) $c''(R_1) = \bar{c}''(R_1)$,
- (d) $c'''(R_1) = \bar{c}'''(R_1)$.

Para determinar las implicaciones de las condiciones (a)–(d) sobre el perfil de densidad inicial ρ_0 , primero se definen la densidad central de la nube $\rho_c := \rho_0(0) > 0$ y la densidad central media $c_0 := c(0) > 0$.

Proposición 3.3.1 *Sea c una función de densidad media con una extensión $\bar{c}$ en el espacio-tiempo de Schwarzschild, al menos de clase $\mathcal{C}^3$ a través de la superficie R_1 y que satisfaga las condiciones (a)–(d), además de $c'(0) = 0$ y regularidad de c'' en $R = 0$. Entonces ρ_c y c_0 se relacionan mediante $c_0 = 8\pi G \rho_c/3$, además $\rho_0(R_1) = 0$, $\rho'_0(0) = 0$, $\rho'_0(R_1) = 0$ y $\rho''_0(R_1) = 0$.*

Demostración.

De la definición de c y de relación (3.4) se obtiene $R^3 c(R) = 8\pi G \int_0^R \rho_0(\bar{R}) \bar{R}^2 d\bar{R}$, luego $\rho_0(R) = [Rc'(R) + 3c(R)] / (8\pi G)$. Dadas $\rho_c > 0$ y $c_0 > 0$, se sigue que $c_0 = 8\pi G \rho_c/3$. Entonces se puede escribir

$$\rho_0(R) = \frac{\rho_c}{3c_0} [Rc'(R) + 3c(R)].$$

Usando esta última ecuación y sus dos primeras derivadas, se concluye que

- 1) Las condiciones (a) y (b) implican que $\rho_0(R_1) = 0$,
- 2) La regularidad de c'' en $R = 0$ y $c'(0) = 0$ implican que $\rho'_0(0) = 0$,
- 3) Las condiciones (b) y (c) implican que $\rho'_0(R_1) = 0$, y
- 4) Las condiciones (c) y (d) implican que $\rho''_0(R_1) = 0$.

□

Enseguida se propone la siguiente familia de perfiles de densidad media inicial con cuatro parámetros reales: α , β , γ y δ ,

$$\begin{aligned}\rho_0(R) &= \frac{\rho_c}{3} \left[3 - 5\alpha \left(\frac{R}{R_1} \right)^2 + 7\beta \left(\frac{R}{R_1} \right)^4 + 9\gamma \left(\frac{R}{R_1} \right)^6 + 11\delta \left(\frac{R}{R_1} \right)^8 \right], \\ \rho'_0(R) &= \frac{2\rho_c}{3R_1} \left[-5\alpha \left(\frac{R}{R_1} \right) + 14\beta \left(\frac{R}{R_1} \right)^3 + 27\gamma \left(\frac{R}{R_1} \right)^5 + 44\delta \left(\frac{R}{R_1} \right)^7 \right], \\ \rho''_0(R) &= \frac{2\rho_c}{3R_1^2} \left[-5\alpha + 42\beta \left(\frac{R}{R_1} \right)^2 + 135\gamma \left(\frac{R}{R_1} \right)^4 + 308\delta \left(\frac{R}{R_1} \right)^6 \right].\end{aligned}\quad (3.31)$$

Por construcción esta familia es tal que c'' es regular en $R = 0$ y $c'(0) = 0$. Un poco más adelante se mostrará que los parámetros $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ no son independientes entre ellos si se imponen las condiciones (a)-(d). Enseguida se integra para obtener la función de densidad media:

$$\begin{aligned}c(R) &= c_0 \left[1 - \alpha \left(\frac{R}{R_1} \right)^2 + \beta \left(\frac{R}{R_1} \right)^4 + \gamma \left(\frac{R}{R_1} \right)^6 + \delta \left(\frac{R}{R_1} \right)^8 \right], \\ c'(R) &= \frac{2c_0}{R_1} \left[-\alpha \left(\frac{R}{R_1} \right) + 2\beta \left(\frac{R}{R_1} \right)^3 + 3\gamma \left(\frac{R}{R_1} \right)^5 + 4\delta \left(\frac{R}{R_1} \right)^7 \right], \\ c''(R) &= \frac{2c_0}{R_1^2} \left[-\alpha + 6\beta \left(\frac{R}{R_1} \right)^2 + 15\gamma \left(\frac{R}{R_1} \right)^4 + 28\delta \left(\frac{R}{R_1} \right)^6 \right], \\ c'''(R) &= \frac{24c_0}{R_1^3} \left[\beta \left(\frac{R}{R_1} \right) + 5\gamma \left(\frac{R}{R_1} \right)^3 + 14\delta \left(\frac{R}{R_1} \right)^5 \right].\end{aligned}\quad (3.32)$$

Para propósitos numéricos es necesario codificar la función c , es por eso que los coeficientes en (3.31) se eligen de tal manera que en (3.32) tengan una forma simple. Con esta elección, no es difícil ver que la condición (a) se satisface automáticamente, mientras que (b)-(d) imponen ciertas relaciones entre los parámetros α , β , γ y δ , a saber, la condición (b) implica que $7\beta + 9\gamma + 11\delta = -3 + 5\alpha$; la condición (c) implica que $9\gamma + 22\delta = 6 - 5\alpha$; y la condición (d) implica que $7\beta + 15\gamma + 33\delta = -5 + 5\alpha$. Sin pérdida de generalidad se considera α como parámetro libre y se tiene el siguiente sistema lineal para β , γ y δ ,

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 \\ 0 & 9 & 22 \\ 7 & 15 & 33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 5\alpha \\ 6 - 5\alpha \\ -5 + 5\alpha \end{pmatrix},$$

cuya solución es

$$\beta = -\frac{3}{7}(6 - 5\alpha), \quad (3.33)$$

$$\gamma = \frac{1}{3}(8 - 5\alpha), \quad (3.34)$$

$$\delta = -\frac{1}{11}(9 - 5\alpha). \quad (3.35)$$

Se concluye entonces que la familia de densidad inicial media (3.32) solamente tiene dos parámetros libres: c_0 y α . También vale la pena hacer énfasis en que la Proposición 3.3.1 garantiza que $\rho_0(R_1) = 0$, $\rho'_0(0) = 0$, $\rho'_0(R_1) = 0$ y $\rho''_0(R_1) = 0$, entonces el estatus de la satisfacción de las condiciones (i) – (iv) sobre ρ_0 establecidas en la Sección 3.1 es la siguiente: La condición (i) se satisface parcialmente puesto que se tiene ρ_0 regular y de clase $\mathcal{C}^2$. En cuanto a la condición (ii) ya se tiene $\rho_0(0) > 0$ y $\rho_0(R_1) = 0$ pero faltan $\rho_0(R) = 0$ para $R > R_1$ y $\rho_0(R) > 0$ para $0 < R < R_1$. En cuanto a la condición (iii) se tiene $\rho'_0(0) = 0$ y $\rho'_0(R_1) = 0$, pero falta $\rho'_0(R) < 0$ para $0 < R < R_1$, y la condición (iv) todavía no se satisface. A continuación se cubre lo que falta: Primero nótese que se puede pedir $\rho_0(R) = 0$ para $R > R_1$ sin que eso afecte la suavidad de ρ_0 en R_1 , dado que se tiene $\rho_0(R_1) = 0$ y $\rho'_0(R_1) = 0$. Enseguida, nótese que dadas $\rho_0(0) > 0$ y $\rho_0(R_1) = 0$, la condición $\rho'_0(R) < 0$ para $0 < R < R_1$ automáticamente implica que, en ese mismo intervalo, $\rho_0(R) > 0$. Con lo anterior terminan por satisfacerse las condiciones (i) – (iii). Enseguida se establece una condición suficiente sobre el parámetro α para garantizar que $\rho'_0(R) < 0$ con $R \in (0, R_1)$.

Proposición 3.3.2 *Sea $R_1 > 0$. Considérese el perfil de densidad inicial ρ_0 dado en la ecuación (3.31) con $0 < \alpha < 12/5$ y β, γ, δ restringidos por las ecuaciones (3.33)– (3.35). Entonces $\rho'_0(R) < 0$ para todo $R \in (0, R_1)$.*

Demostración.

Sean $R \in [0, R_1]$ y $0 < \alpha < 12/5$. Supóngase que se cumplen las relaciones (3.33)– (3.35). Defínase $x := (R/R_1)^2$ y $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 44\delta x^3 + 27\gamma x^2 + 14\beta x - 5\alpha$. Notar que $\rho'_0(R) < 0$ para $R \in (0, R_1)$ es equivalente a $g(x) < 0$ con $x \in (0, 1)$. Para mostrar eso último, primero hay que notar que $g(0) = -5\alpha < 0$, y a partir de $\rho'_0(R_1) = 0$ y $\rho''_0(R_1) = 0$ automáticamente se tiene $g(1) = 0$ y $g'(1) = 0$, respectivamente. Por otro lado se puede calcular que $g''(x) = 264\delta x + 54\gamma$ y $g''(1) = -6(12 - 5\alpha) < 0$, lo cual implica que g tiene un máximo local en $x = 1$. Luego, como $g'(x)$ es un polinomio de segundo grado, g no puede tener más de un punto crítico en $(0, 1)$. Supóngase que $g(x) \geq 0$ para algún $x \in (0, 1)$. Esto requiere que g tenga al menos dos puntos críticos en $(0, 1)$, lo cual es contradictorio. Por lo tanto $g(x) < 0$ para $x \in (0, 1)$. $\square$

La última condición por satisfacer es la (iv), la cual implica que $R^2 c(R) < 1$. Como $c(R_1) < c(R)$ para $0 \leq R < R_1$, entonces $R^2 c(R_1) < 1$. En particular $R_1^2 c(R_1) < 1$, es decir $R_1^2 c_0(1 - \alpha + \beta + \gamma + \delta) < 1$. Tomando en cuenta las relaciones (3.33)– (3.35) se obtiene la restricción

$$R_1^2 c_0 < \frac{231}{16(4 - \alpha)}.$$

El siguiente paso es extender la función q hacia el espacio-tiempo de Schwarzschild de manera suave a través de la superficie de la nube. Dentro de la nube se propone

$$\begin{aligned} q(R) &= q_0 + q_1 \left(\frac{R}{R_1} \right)^2, \\ q'(R) &= \frac{2q_1}{R_1^2} R, \\ q''(R) &= \frac{2q_1}{R_1^2}, \\ q'''(R) &= 0, \end{aligned}$$

donde q_0 y q_1 son parámetros reales sujetos a $0 < q_0 < 1$ y $0 < q_1 < 1 - q_0$ para satisfacer las condiciones (v)- (viii) establecidas en la Sección 3.1. Sea $\bar{q}$ la extensión de q fuera de la nube sujeta a las siguientes condiciones:

- (e) $\lim_{R \rightarrow \infty} \bar{q}(R) = 1$,
- (f) $\bar{q}(R_1) = q(R_1)$,
- (g) $\bar{q}'(R_1) = q'(R_1)$,
- (h) $\bar{q}''(R_1) = q''(R_1)$,
- (j) $\bar{q}'''(R_1) = q'''(R_1)$.

Luego considerérese el siguiente ansatz

$$\begin{aligned} \bar{q}(R) &= 1 + \alpha \left(\frac{R_1}{R} \right) + \beta \left(\frac{R_1}{R} \right)^2 + \gamma \left(\frac{R_1}{R} \right)^3 + \delta \left(\frac{R_1}{R} \right)^4, \\ \bar{q}'(R) &= -\frac{1}{R} \left[\alpha \left(\frac{R_1}{R} \right) + 2\beta \left(\frac{R_1}{R} \right)^2 + 3\gamma \left(\frac{R_1}{R} \right)^3 + 4\delta \left(\frac{R_1}{R} \right)^4 \right], \\ \bar{q}''(R) &= \frac{2}{R^2} \left[\alpha \left(\frac{R_1}{R} \right) + 3\beta \left(\frac{R_1}{R} \right)^2 + 6\gamma \left(\frac{R_1}{R} \right)^3 + 10\delta \left(\frac{R_1}{R} \right)^4 \right], \\ \bar{q}'''(R) &= -\frac{6}{R^3} \left[\alpha \left(\frac{R_1}{R} \right) + 4\beta \left(\frac{R_1}{R} \right)^2 + 10\gamma \left(\frac{R_1}{R} \right)^3 + 20\delta \left(\frac{R_1}{R} \right)^4 \right]. \end{aligned}$$

La condición (e) se satisface automáticamente, mientras que (f) implica $1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta = q_0 + q_1$, (g) implica $\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta = -2q_1$, (h) implica $\alpha + 3\beta + 6\gamma + 10\delta = q_1$ y (j) implica $\alpha + 4\beta + 10\gamma + 20\delta = 0$. Lo anterior define el siguiente sistema algebraico que relaciona los parámetros de $\bar{q}$ con q_0 y q_1 ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 + q_1 - 1 \\ -2q_1 \\ q_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuya solución es $\alpha = 4(q_0 + 5q_1 - 1)$, $\beta = -3(2q_0 + 15q_1 - 2)$, $\gamma = 4(q_0 + 9q_1 - 1)$ y $\delta = -(q_0 + 10q_1 - 1)$.

3.3.5. Ejemplos de diagramas conformes generados numéricamente

En las figuras 3.3, 3.4 y 3.5 se muestran diagramas conformes correspondientes a tres elecciones particulares de parámetros. Como se anticipó en la sección anterior, la estructura causal en el caso genérico es bastante diferente a la del caso del colapso simétrico en el tiempo con densidad homogénea ilustrado en la figura 3.2. Primero, nótese que en los diagramas 3.3, 3.4 y 3.5 el horizonte aparente puede ser tipo espacio dentro de la nube, mientras que en el diagrama 3.2 siempre es tipo tiempo. Nótese también que en este último caso $\Sigma_0 \cup \Sigma$ es tipo espacio mientras que en el caso genérico Σ es tipo espacio pero la singularidad central Σ_0 es nula, y por lo tanto es visible para observadores locales; además la parte nula de la singularidad puede estar completamente oculta dentro de la región del agujero negro como en la figura 3.3, o bien una porción de ésta puede ser visible desde el infinito nulo futuro como en las figuras 3.4 y 3.5.

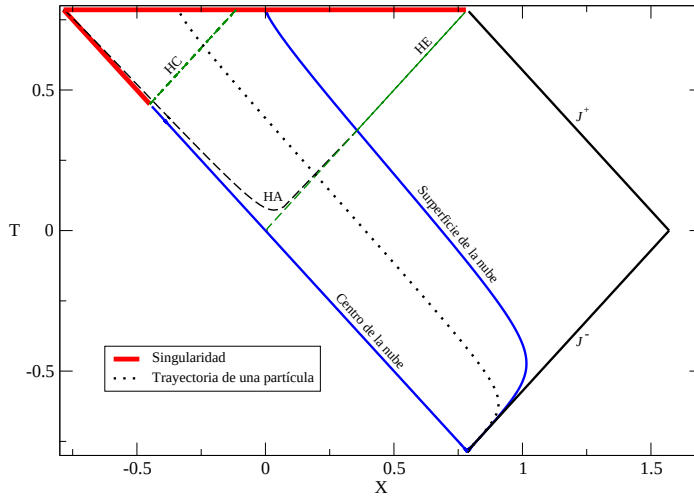


Figura 3.3: Diagrama conforme para el modelo descrito en la ecuación (3.32) con la elección de parámetros $c_0 = 0.521943$, $\alpha = 1.5$, $q_0 = 0.75$ y $q_1 = 0.02$. Las líneas etiquetadas con “HA”, “HE” y “HC” se refieren al horizonte aparente, de eventos y de Cauchy, respectivamente. En este caso la singularidad está oculta dentro de la región del agujero negro, pues todos los rayos de luz que emanan de ésta terminan en la singularidad tipo espacio. Aunque el centro de la nube parece ser nulo en el diagrama, una inspección cuidadosa revela que en realidad es tipo tiempo. La línea punteada corresponde a la trayectoria de la partícula de polvo con radio de área inicial $R_0 = 0.97R_1$. Este diagrama fue generado con 1500 y 500 puntos en las mallas y_j y R_k , respectivamente (ver los pasos 2 y 3 en la sección previa), y usando un tamaño de paso $h = 0.0005$ para las integraciones numéricas.

Es importante remarcar que no se necesita hacer un ajuste fino de los parámetros para construir los ejemplos mostrados con singularidades globalmente visibles. De hecho, como lo establece

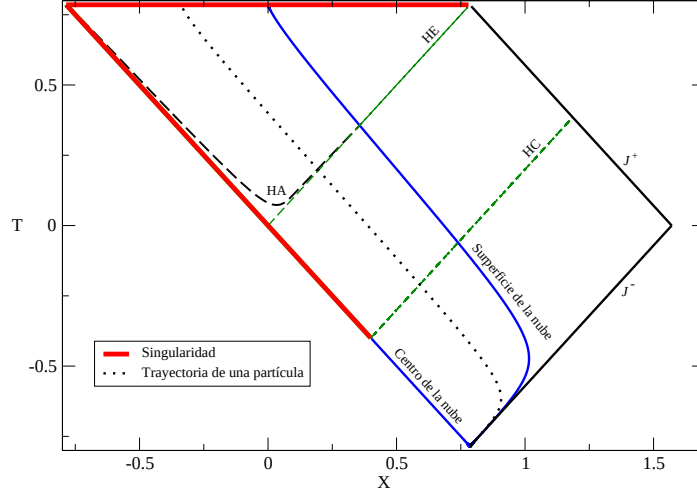


Figura 3.4: Diagrama conforme para el modelo descrito en la ecuación (3.32) con la misma elección de parámetros de la figura previa, excepto por $c_0 = 0.521907$. En este caso existen rayos de luz que emanan de la parte nula de la singularidad y que llegan a la superficie de la nube *antes* que el horizonte aparente, por lo tanto una porción de la singularidad es visible para observadores arbitrariamente distantes fuera del agujero negro.

el Teorema 3.2.2, es suficiente disminuir la densidad central $\rho_0 = 3c_0/(8\pi G)$ por debajo de cierto valor crítico para generar este tipo de singularidades. Para el dato inicial descrito en la ecuación (3.32) con los parámetros usados en las figuras 3.3 y 3.4 la cota (3.26) sobre c_0 dada en el Teorema 3.2.2 resulta

$$\mu^2 \leq 0.18,$$

la cual es consistente con los resultados en esas figuras. Sin embargo los resultados numéricos también indican que la cota (3.26) está lejos de ser óptima porque la transición de visibilidad local a global ocurre alrededor de $c_0 \approx 0.521$ lo cual es mucho mayor que μ^2 .

Se ha verificado la auto-convergencia de los resultados numéricos generando los diagramas conformes con diferentes tamaños de paso h . En la tabla 3.1 se muestran los valores de las cantidades clave U_1 y V_0 en el ejemplo de la figura 3.4, los cuales determinan la localización del primer punto singular, del cual emana el horizonte de Cauchy. Los resultados muestran auto-convergencia a un orden entre tres y cuatro. Una prueba de auto-convergencia similar se llevó a cabo para la trayectoria de la partícula de polvo mostrada en la figura 3.4, correspondiente a un radio de área inicial $R_0 = 0.97R_1$. En la figura 3.6, se muestra el error numérico para cada punto de la trayectoria. Los errores numéricos se estiman calculando la norma euclidiana entre dos resoluciones sucesivas (h y $h/2$, $h/2$ y $h/4$, etcétera), y claramente decrece conforme se aumenta la resolución. Para analizar cuantitativamente estos errores, en la tabla 3.2 se muestra el máximo del error

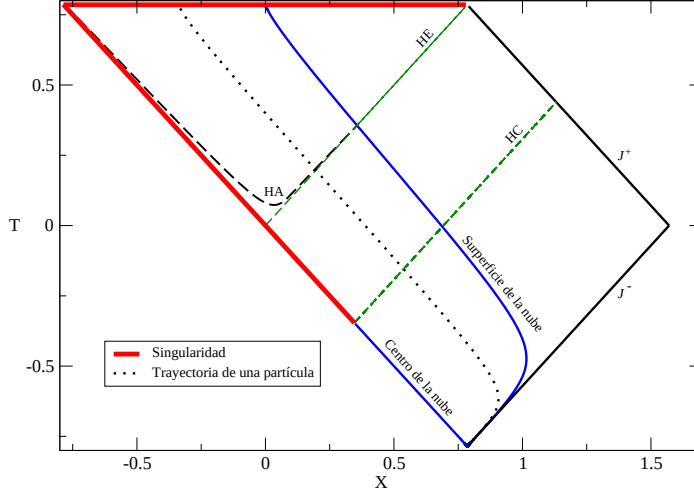


Figura 3.5: Diagrama conforme para el modelo descrito en la ecuación (3.32) con la misma elección de parámetros de la figura 3.3, excepto por $q_0 = 0.7501$. También en este caso una porción de la singularidad es visible fuera de la región del agujero negro.

Resolución	Paso	U_1	Error	FC
1	$h = 0.01$	$-8.420575541310E - 01$	—	—
2	$h/2$	$-8.035660851224E - 01$	$3.849146900854E - 02$	—
3	$h/4$	$-8.003654350247E - 01$	$3.200650097737E - 03$	12.0261408879
4	$h/8$	$-8.001195839923E - 01$	$2.458510324211E - 04$	13.0186563229
5	$h/16$	$-8.001020899334E - 01$	$1.749405890161E - 05$	14.0534014320
6	$h/32$	$-8.001010377021E - 01$	$1.052231238807E - 06$	16.6256790868
Resolución	Paso	V_0	Error	FC
1	$h = 0.01$	$4.816850209055E - 05$	—	—
2	$h/2$	$4.816841584155E - 05$	$8.624900550295E - 11$	—
3	$h/4$	$4.816840759756E - 05$	$8.243991013662E - 12$	10.4620450653
4	$h/8$	$4.816840680132E - 05$	$7.962398508544E - 13$	10.3536528657
5	$h/16$	$4.816840672312E - 05$	$7.819538473761E - 14$	10.1826962489
6	$h/32$	$4.816840671528E - 05$	$7.847448548186E - 15$	9.96443420526

Cuadro 3.1: Prueba de auto-convergencia para las cantidades U_1 y V_0 en el ejemplo mostrado en la figura 3.4. Para la i -ésima resolución, el error se define como $E_i := |U_i - U_{i-1}|$, y el factor de convergencia como $FC_i := E_{i-1}/E_i$.

respecto a todos los puntos de la trayectoria para cada resolución fija. Los resultados exhiben auto-convergencia a cuarto orden.

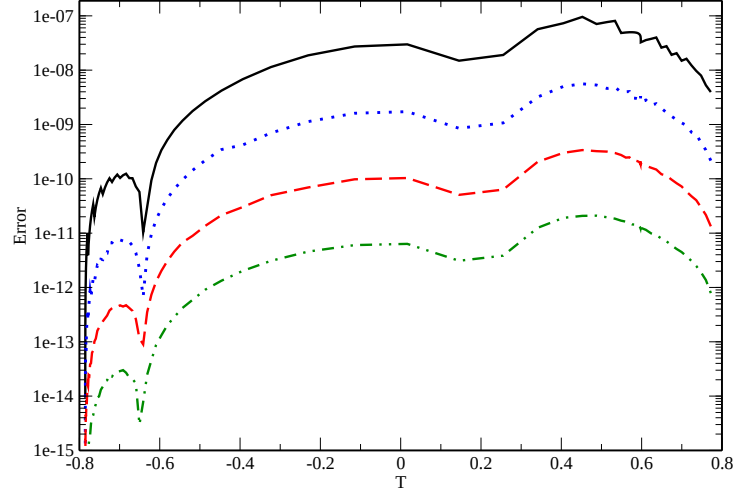


Figura 3.6: Error numérico para los puntos de la trayectoria de la partícula mostrada en la figura 3.4. La línea continua indica la distancia euclidiana entre puntos correspondientes calculados con tamaños de paso $h = 0.01$ y $h/2$. La línea punteada representa el error entre puntos calculados con tamaños de paso $h/2$ y $h/4$, y así sucesivamente.

Resolución	Tamaño de paso	Error máximo	FC
1	$h = 0.01$	—	—
2	$h/2$	$9.5726038E - 08$	—
3	$h/4$	$5.5985632E - 09$	17.0983222981211
4	$h/8$	$3.3830969E - 10$	16.5486338863070
5	$h/16$	$2.0961372E - 11$	16.1396730137703

Cuadro 3.2: Prueba de auto-convergencia para la trayectoria de la partícula de polvo mostrada en la figura 3.4. El i -ésimo máximo del error se define como la mayor distancia euclidiana entre puntos correspondientes en la trayectoria calculados con las resoluciones i e $i - 1$. El factor de convergencia se calcula como en la tabla 3.1. Notar que un tamaño de paso del orden de $h = 0.01$ es suficiente para mantener el máximo del error por debajo de 9.6×10^{-8} .

Es importante anotar que los resultados numéricos mostrados en esta sección son semejantes a los mostrados en la referencia [18], los cuales fueron generados con una familia de datos iniciales distinta a la que se usa en este trabajo. El hecho de que los resultados sean cualitativamente similares prueba que el algoritmo es robusto.

3.3.6. Espacio fase de parámetros

En esta subsección se exploran algunas propiedades del espacio fase correspondiente a la familia de datos iniciales de cuatro parámetros dada en (3.32). En la figura 3.7 se muestra un subconjunto de tal espacio con q fija, es decir, el plano a - c_0 . La curva sólida, obtenida numéricamente, contiene valores críticos de la densidad central promedio y al espacio fase en dos regiones, una donde los datos iniciales dan lugar a agujeros negros y otra donde dan lugar a singularidades globalmente visibles. De la figura se observa que los perfiles de densidad con $a \ll 1$ (distribuciones de polvo casi uniformes cerca del centro) tienen un valor crítico menor para c_0 que los perfiles con distribuciones de polvo concentradas cerca del centro. En ese sentido, los perfiles *diluidos* favorecen la formación de agujeros negros mientras que los perfiles concentrados favorecen la formación de singularidades globalmente visibles. La curva quebrada corresponde a la cota obtenida del Teorema 3.2.2, nótese que tal cota está lejos de ser óptima, sin embargo cualitativamente se comporta como la curva crítica.

En la figura 3.8 se muestra la curva crítica en el plano a - c_0 para diferentes valores de q_0 y $q_1 = 0.01$. Como puede observarse, el valor crítico de c_0 decrece conforme q_0 decrece de 0.98 a 0.015. Como $1 - q^2$ es la razón entre la energía cinética inicial y la magnitud de la energía potencial inicial, esto significa que las velocidades iniciales grandes en dirección radial negativa favorecen la formación de agujeros negros.

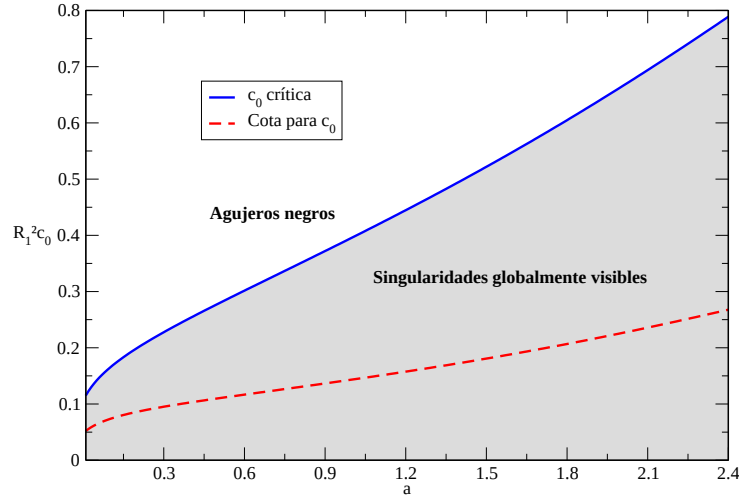


Figura 3.7: Corte del espacio fase correspondiente a la familia de datos iniciales de cuatro parámetros dada en la ecuación (3.32). El corte corresponde al subconjunto con parámetros fijos $q_0 = 0.75$ y $q_1 = 0.02$. La región sombreada corresponde a datos iniciales que dan lugar a singularidades globalmente visibles. La línea quebrada describe la cota superior para c_0 del Teorema 3.2.2.

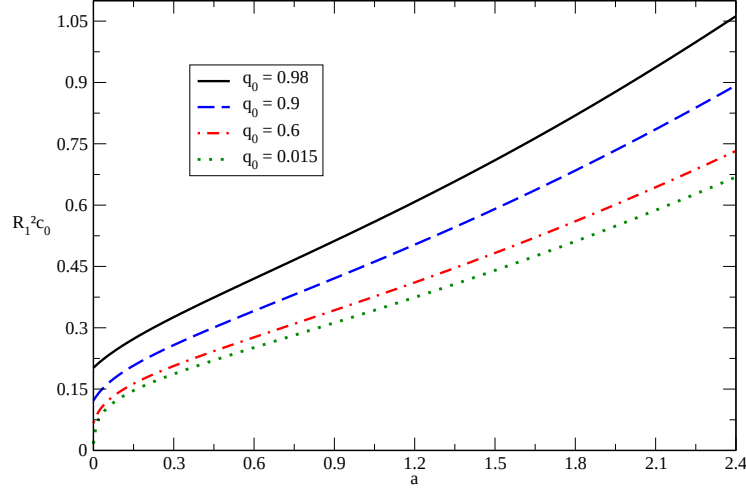


Figura 3.8: Línea crítica que delimita las regiones de datos iniciales que dan lugar a agujeros negros y singularidades globalmente visibles para distintos valores de q_0 y con $q_1 = 0.01$ fija.

3.3.7. Discusión

En este capítulo se ha presentado un algoritmo numérico para construir el diagrama conforme del espacio-tiempo en el interior de una nube de polvo esférica que colapsa gravitacionalmente. La construcción se basa en la integración de geodésicas nulas radiales y en un cuidados análisis de su comportamiento cerca de la singularidad. Las suposiciones sobre el dato inicial, a saber, los perfiles iniciales de densidad y velocidad, son físicamente razonables y genéricas dentro del modelo de Tolman-Bondi. Se ha encontrado que bajo tales suposiciones, la singularidad de enfoque siempre consta de una porción tipo espacio que se extiende hasta el espacio-tiempo exterior de Schwarzschild, y una porción nula visible al menos para observadores suficientemente cercanos al centro de la nube. Estos resultados confirman los encontrados en las referencias [8, 9, 43, 10].

En base al método presentado aquí para construir diagramas conformes, se ha considerado una familia de datos iniciales de cuatro parámetros y se han determinado las condiciones bajo las cuales la parte nula de la singularidad comienza a formarse suficientemente temprano de tal manera que una porción de ella quede fuera del horizonte de eventos, dando como resultado una singularidad desnuda visible para observadores globales, es decir arbitrariamente lejanos. Además se comprobó que lo anterior ocurre sin necesidad de ajustar finamente los parámetros del dato inicial, lo que significa que no es difícil obtener singularidades conectadas causalmente con el infinito nulo futuro, lo que confirma los resultados en [8] para datos iniciales simétricos en el tiempo, pero además lo anterior indica que la formación de singularidades desnudas es estable bajo perturbaciones esféricas dentro del modelo de Tolma-Bondi. De hecho, este resultado de estabilidad se confirma y se refuerza en el Teorema 3.2.2, el cual provee una cota sobre el dato

inicial que garantiza la formación de una singularidad desnuda. Como consecuencia, un espacio-tiempo con una singularidad de este tipo no es globalmente hiperbólico y entonces es imposible determinar -más allá del horizonte de Cauchy- la evolución de campos de prueba gobernados por ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas propagándose a la velocidad de la luz, a menos que se impongan condiciones de frontera sobre la parte nula de la singularidad. Como el horizonte de Cauchy se localiza fuera del agujero negro, esto implica, en particular, que ni siquiera es posible predecir la evolución de tales campos de prueba en la región de Schwarzschild para $r > 2m$.

Aparte de los resultados mencionados hasta ahora, existen varias posibles aplicaciones del algoritmo numérico discutido en este capítulo: en primer lugar, éste constituye una herramienta para analizar de manera sistemática el espacio fase del colapso de polvo esféricamente simétrico, identificando la clase de datos iniciales que conducen a la formación de singularidades globalmente desnudas. Al respecto, en la sección 3.3.6 se han explorado distintos cortes del espacio fase y en ellos se ha determinado el conjunto crítico que separa los agujeros negros de las singularidades desnudas; en segundo lugar, la construcción numérica de las coordenadas conformes puede ser útil para describir la propagación de campos de prueba en el espacio-tiempo considerado aquí, donde por ejemplo la ecuación de onda $\square\Phi = 0$ se reduce a una familia ecuaciones de onda de la forma

$$\frac{\partial^2 \psi_{\ell m}}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \psi_{\ell m}}{\partial X^2} + V(T, X)\psi_{\ell m} = 0, \quad \Phi(T, X, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r} \sum_{\ell m} \psi_{\ell m}(T, X) Y^{\ell m}(\vartheta, \varphi) \quad (3.36)$$

con potencial V , cuando se descompone el campo en armónicos esféricos $Y^{\ell m}$. Por lo tanto, las propiedades de las soluciones fuera del horizonte de Cauchy se pueden inferir, en principio, de la estructura del potencial V .

Aún falta estudiar si los resultados mostrados aquí se pueden extrapolar a casos más realistas de colapso gravitacional considerando que la presencia de momento angular y/o presión pudieran retrasar la formación de la singularidad. Si tales efectos fueran suficientemente intensos, es de esperarse que la singularidad resultante sea oculta por un agujero negro de tal manera que la censura cósmica débil sea válida. Desafortunadamente, analizar escenarios con ecuaciones de estado más realistas y en ausencia de simetrías requiere un esfuerzo mayor dado que en esos casos no se conocen soluciones exactas -al menos no para datos iniciales genéricos-. Algunos pasos intermedios en el entendimiento de el caso más general son los siguientes: primero, dado que el método discutido aquí se basa en la integración numérica de rayos nulos radiales y su comportamiento asintótico cerca de la singularidad central, debería ser posible generalizarlo para el caso de un colapso esférico con presión distinta de cero. Después, se podría considerar un fluido no esférico, en cuyo caso el problema se podría analizar usando la teoría de perturbación de espacio-tiempos esféricamente simétricos [31]. Además existen escenarios más exóticos donde se ha estudiado el colapso gravitacional en espacio-tiempos cinco-dimensiones [51, 52] y aún en dimensiones más altas [53, 54].

Incluso si se concluyera que las singularidades resultantes del colapso con ecuaciones de estado más realistas son siempre ocultas detrás de agujeros negros, será interesante entender qué pasa en el límite en que el objeto se aproxima a la simetría esférica y su presión se vuelve despreciable, pues el hecho de que en ese límite existan las singularidades desnudas debe tener consecuencias en el caso perturbado.

Capítulo 4

Estabilidad de singularidades desnudas I: campos de prueba esféricos

Como se ha discutido a lo largo de los capítulos anteriores, el modelo más simple de colapso gravitacional de un objeto masivo en la teoría de la relatividad general es de Tolman-Bondi, el cual describe el colapso total de una nube de polvo esférica. Aunque las suposiciones de simetría esférica y presión cero difícilmente se satisfacen en un escenario realista, la ventaja de este modelo yace en el hecho de que la métrica del espacio-tiempo y la densidad de energía se pueden describir de forma exácta en términos de coordenadas co-móviles sincronizadas, lo que facilita el análisis de las propiedades físicas del modelo, el cual ha tenido un papel importante en el entendimiento de la formación de agujeros negros en el trabajo trascendental de Oppenheimer y Snyder [5].

En este capítulo¹ se inicia un estudio de la propagación de campos de prueba en el espacio-tiempo fijo -aunque dinámico- de Tolman-Bondi. El interés particular consiste en estudiar el comportamiento de tales campos en una vecindad de la singularidad central desnuda y el horizonte de Cauchy asociado. Asumiendo un dato inicial regular para los campos de prueba sobre una superficie de Cauchy, es relevante investigar si la amplitud del campo o su densidad de energía crecen sin cota en la vecindad del horizonte de Cauchy. Un comportamiento divergente sugeriría que el horizonte de Cauchy es inestable cuando se toma en cuenta la auto-gravedad de los campos, y por lo tanto la singularidad desnuda también sería inestable.

Al respecto de la estabilidad del horizonte de Cauchy asociado a una singularidad desnuda originada por el colapso de polvo en el modelo de Tolman-Bondi hay varios trabajos previos: en el régimen de la óptica geométrica para los campos de prueba, Christodoulou [8] mostró que, para un dato inicial simétrico en el tiempo, un rayo de luz radial emitido desde el centro de la nube (incluso cerca de la singularidad) no experimenta un corrimiento al rojo infinito; en una aproximación similar, Waugh y Lake [22] estudiaron la estabilidad del horizonte de Cauchy en el caso particular del colapso auto-similar y no encontraron evidencia de inestabilidad; después, el comportamiento del corrimiento al rojo en el caso del colapso marginalmente ligado fue analizado por Dwivedi [23]. Duffy y Nolan fueron más allá del régimen de la óptica geométrica y estudiaron

¹Este capítulo está basado en el artículo [24].

la estabilidad del horizonte de Cauchy en el caso del colapso auto-similar marginalmente ligado bajo perturbaciones métricas lineales con paridad par [25] e impar [26]. En el sector impar, ellos encontraron que las perturbaciones permanecen finitas a lo largo del horizonte de Cauchy. En contraste, en el sector par, mostraron que las perturbaciones divergen a lo largo del mismo. Otros progresos en el caso marginalmente ligado incluyen el trabajo de Iguchi, Harada y Nakao [27], quienes analizaron numéricamente la estabilidad del horizonte de Cauchy bajo perturbaciones gravitacionales lineales con paridad impar, las cuales no divergen en el horizonte de Cauchy cuando se desprecian las perturbaciones materiales, y en cambio sí divergen cuando las perturbaciones materiales son tomadas en cuenta [28], sin embargo esa divergencia solamente ocurre en la singularidad central y no se propaga a lo largo del horizonte de Cauchy. Los mismos autores extendieron sus estudios numéricos al sector de perturbaciones de paridad par, concluyendo que éstas divergen cerca del horizonte de Cauchy pero el flujo de energía se mantiene acotado [29], sugiriendo que este tipo de singularidad no sería una fuente importante de ondas gravitacionales.

El principal propósito de este capítulo es profundizar en el estudio de los efectos que ocurren cerca de las singularidades centrales y el horizonte de Cauchy dentro del modelo de Tolman-Bondi con dato inicial genérico y bajo suposiciones físicamente razonables, sin restricciones a casos particulares como el colapso marginalmente ligado o auto-similar. En la primera sección se establecen algunos resultados preliminares que serán útiles en lo sucesivo; en la sección 4.2 se calcula el factor de corrimiento al rojo gravitacional para un rayo de luz emitido y recibido por observadores en caída libre con la nube. Primero se muestra que para observadores suficientemente cercanos a la singularidad central, este factor siempre es negativo, implicando un *corrimiento al azul* gravitacional, incluso a lo largo de rayos nulos salientes. Se mostrará que el hecho de que haya un corrimiento al azul y no al rojo se debe a que al colapsar la nube, incluso los fotones salientes se mueven hacia regiones donde el campo gravitacional es más intenso. Conforme la trayectoria del rayo de luz se acerca a la singularidad central, ese corrimiento al azul se vuelve más pronunciado -como es de esperarse-, sin embargo en la sección 4.2 también se demuestra que el corrimiento al azul total es uniformemente acotado. Con esa motivación, en la sección 4.3 se analiza la dinámica de un campo escalar esféricamente simétrico Φ sobre el fondo de Tolman-Bondi. La propagación de tal campo está gobernada por una ecuación de onda efectiva en 1+1 dimensiones con potencial V para el campo re-escalado $\psi = r\Phi$, donde r denota el radio de área. Luego se demuestra que bajo condiciones adecuadas de integrabilidad para el potencial efectivo V , el campo re-escalado ψ se puede extender continuamente hasta el horizonte Cauchy. Enseguida se verifica que V satisface tales condiciones y se concluye que el campo físico Φ debe ser acotado por una constante dividida por r en la vecindad del horizonte de Cauchy, lo cual implica, en particular, que Φ es finito a lo largo del horizonte de Cauchy, excepto posiblemente en la singularidad central. Por lo tanto, si Φ fuera divergente en la singularidad central, esa divergencia no podría propagarse a lo largo del horizonte de Cauchy.

4.1. Preliminares y notación

En esta sección se introduce notación útil y se derivan algunos resultados preliminares acerca del colapso del modelo de Tolman-Bondi que serán usados posteriormente en el capítulo.

En lo sucesivo se denotará con $1/\gamma^2$ al coeficiente métrico radial de la métrica de Tolman-Bondi descrita en la ecuación (3.1). Recordando la definición de la funciones c y q , se tiene $1 - R^2 q^2(R) c(R) = 1 + 2E(R) > 0$, y entonces en términos de las coordenadas $\{y, R\}$ introducidas

en el capítulo anterior, la función γ se escribe como

$$\gamma(y, R) = \frac{\sqrt{1 - R^2 q(R)^2 c(R)}}{r'(y, R)}. \quad (4.1)$$

Asimismo, la densidad de energía ρ dada en la ecuación (3.2) puede calcularse de acuerdo a:

$$\rho(y, R) = \frac{\rho_0(R)}{y^4 r'(y, R)}, \quad (4.2)$$

donde $\rho_0(R) = 2m'(R)/(8\pi GR^2) = [R^3 c(R)]'/(8\pi GR^2)$ y la derivada parcial de $r(\tau, R)$ respecto a R se re-escribe convenientemente de la ecuación (3.9) como

$$r'(y, R) = y^2 \left(1 + \frac{R^2}{y^3} \sqrt{1 - q(R)^2 y^2 \Lambda(y, R)} \right). \quad (4.3)$$

En el resto de este capítulo se considerará solamente el caso de una singularidad globalmente desnuda, aunque la mayoría de los resultados también son válidos en el caso de agujeros negros. Sea D la región del espacio-tiempo que describe el desarrollo máximo de la superficie inicial ($\tau = 0$). Ver la figura 4.1. En términos de las coordenadas $\{y, R\}$ esta región es

$$D := \{(y, R) : R \geq 0, y_{CH}(R) < y \leq 1\},$$

donde la curva $y_{CH}(R)$ describe el horizonte de Cauchy, es decir, el primer rayo de luz que emana de la singularidad. Para $0 < R < \delta$ suficientemente pequeña, en la Proposición 3.2.2 del capítulo anterior se mostró que $y_{CH}(R)$ tiene la forma

$$y_{CH}(R)^3 = \frac{3\Lambda_0}{4} R^2 \left[1 + z(R^{1/3}) \right], \quad R \in [0, \delta),$$

donde $\Lambda_0 := \Lambda(0, 0) > 0$ y $z : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^∞ que satisface $z(0) = 0$. Además de la región D , para cada $\varepsilon \in (0, 1)$ considérese la pequeña región $D(\varepsilon) \subset D$ cerca de la singularidad central $(0, 0)$ definida por

$$D(\varepsilon) := \{(y, R) : 0 \leq R \leq R(\varepsilon), y_{CH}(R) < y \leq y(\varepsilon)\} \quad (4.4)$$

(ver la figura 4.1), donde las funciones $R(\varepsilon) \in (0, \delta)$ y $y(\varepsilon) := y_{CH}(R(\varepsilon))$ se eligen tales que convergen a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ y tales que

- (i) $z(R^{1/3}) \geq -\varepsilon$ para toda $0 \leq R \leq R(\varepsilon)$
- (ii) $\Lambda(y, R) \leq (1 + \varepsilon)\Lambda_0$ para toda $0 \leq R \leq R(\varepsilon)$ y $0 \leq y \leq y(\varepsilon)$,

Para cada $(y, R) \in D(\varepsilon)$ se tiene que

$$0 \leq \frac{R^2}{y^3} \sqrt{1 - q(R)^2 y^2 \Lambda(y, R)} \leq \frac{R^2}{y_{CH}(R)^3} \Lambda(y, R) = \frac{4}{3} \frac{1}{1 + z(R^{1/3})} \frac{\Lambda(y, R)}{\Lambda_0} \leq \frac{4}{3} \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}. \quad (4.5)$$

Lo anterior junto con la ecuación (4.3) implican que dentro de la región $D(\varepsilon)$ vale la estimación

$$y^2 \leq r'(y, R) \leq \left(1 + \frac{4}{3} \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right) y^2. \quad (4.6)$$

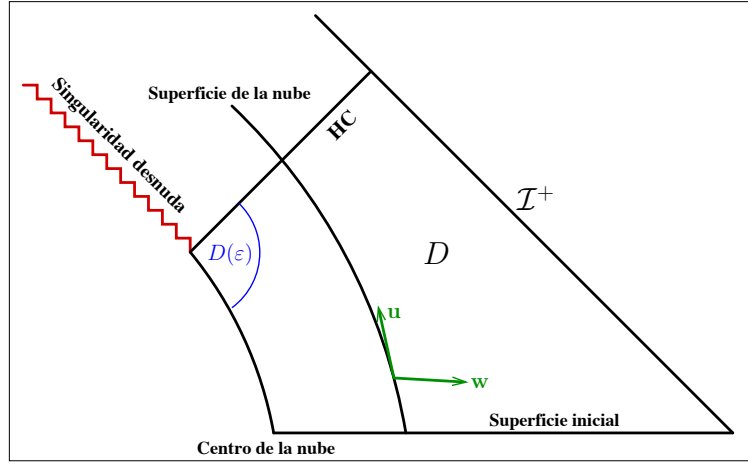


Figura 4.1: Diagrama conforme que ilustra el desarrollo máximo D de la superficie inicial, así como los pequeños subconjuntos $D(\varepsilon)$ cercanos a la singularidad central. “HC” denota al horizonte de Cauchy mientras que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ son una base ortonormal de vectores radiales.

Considerando las ecuaciones (4.1,4.2) se tiene el siguiente comportamiento del coeficiente métrico γ y la densidad de energía ρ en la vecindad de la singularidad central:

Lema 4.1.1 *Sea $\varepsilon \in (0, 1)$. Entonces existen constantes $m < M$ tales que para toda $(y, R) \in D(\varepsilon)$,*

$$\frac{m}{y^2} \leq \gamma(y, R) \leq \frac{M}{y^2}, \quad \frac{m}{y^6} \leq \rho(y, R) \leq \frac{M}{y^6}. \quad (4.7)$$

Por lo tanto γ diverge como $1/y^2$ y ρ como $1/y^6$ conforme uno se acerca a la singularidad desde el interior de D . En las dos secciones siguientes, se analiza la propagación de campos de prueba en el espacio-tiempo de fondo $(D, \mathbf{g})$ y se muestra que, a pesar de esas divergencias, los campos no se comportan *tan mal* conforme uno se aproxima a la singularidad central $(0, 0)$ y al horizonte de Cauchy.

De ahora en adelante los campos vectoriales radiales $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{k}$ y $\mathbf{l}$ juegan un papel importante: $\mathbf{u} = \partial_\tau$ es la quadri-velocidad de los observadores radiales co-móviles con los cascarones que colapsan, $\mathbf{w} := \gamma(\tau, R)\partial_R$ es el vector radial unitario saliente ortogonal a $\mathbf{u}$, y $\mathbf{k} := \mathbf{u} + \mathbf{w}$, $\mathbf{l} := \mathbf{u} - \mathbf{w}$ son campos vectoriales nulos salientes y entrantes, respectivamente.

4.2. Acotamiento del corrimiento al azul a lo largo de rayos de luz radiales

En esta sección se comienza el estudio del comportamiento de campos de prueba en el espacio-tiempo de fondo $(D, \mathbf{g})$ en el límite de la óptica geométrica. En este límite, la propagación de campos de prueba -con o sin masa- se describe por geodésicas nulas en $(D, \mathbf{g})$. Esto lleva a la identificación de los campos vectoriales $\xi \in \mathcal{X}(D)$ que satisfacen $\mathbf{g}(\xi, \xi) = 0$ y $\nabla_\xi \xi = 0$ (en este

trabajo el estudio se restringe a geodésicas nulas radiales). Considérese un emisor (e) que envía una señal de alta frecuencia a un observador (obs). La tarea es calcular el cambio en la frecuencia de la señal debida a efectos gravitacionales, para eso se asume que ambos, el emisor y el receptor se mueven con los cascarones de polvo que colapsan y por lo tanto su cuadri-velocidad es $\mathbf{u}$. Ver la figura 4.2 para identificar los posibles escenarios.

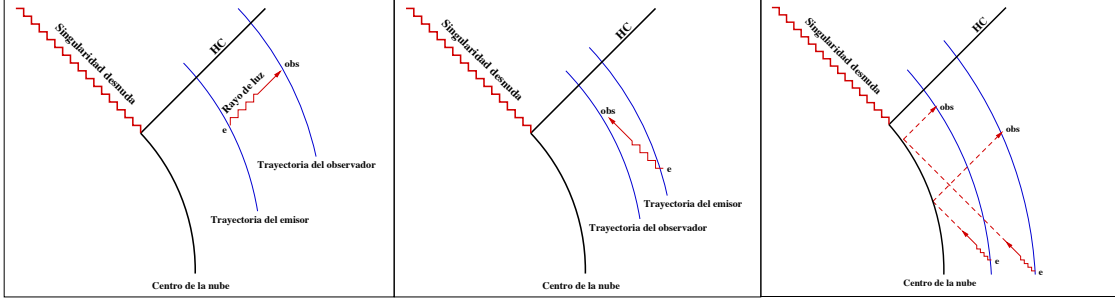


Figura 4.2: Panel izquierdo: un emisor (e) en caída libre envía un rayo de luz radial saliente el cual es recibido por un observador (obs) en caída libre. Panel central: la misma situación, pero ahora (e) emite un rayo de luz radial entrante el cual es recibido por el observador (obs). Panel derecho: situaciones similares, pero ahora el observador se localiza en un punto diametralmente opuesto al emisor.

Bajo tales suposiciones, el cambio en la frecuencia está dado por (ver por ejemplo la referencia [46])

$$\frac{\nu_{obs}}{\nu_e} = \frac{\mathbf{g}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi})|_{obs}}{\mathbf{g}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi})|_e} \quad (4.8)$$

con $\boldsymbol{\xi}$ el generador de los rayos nulos. El interés particular se centra en el caso en que la señal es emitida o recibida en una región arbitrariamente cercana a la singularidad central, pues un corrimiento al azul no-acotado en esa región indicaría una gran concentración de energía y por lo tanto una inestabilidad del horizonte de Cauchy. De hecho, hay otro fenómeno interesante que puede ocurrir debido a un corrimiento al azul infinito, a saber, cuando se toma en cuenta la auto-gravedad del campo de prueba, un corrimiento al azul grande a lo largo de rayos de luz entrantes podría conducir a la formación de una superficie atrapada, cuya presencia efectivamente censuraría la singularidad [55], como ocurre en el caso del colapso de un campo escalar auto-gravitante esféricamente simétrico [56, 11, 13].

Para poder estudiar el cambio de frecuencia, primero se identifican los campos vectoriales radiales $\boldsymbol{\xi}$ que generan las geodésicas nulas. Éstos deben ser paralelos a uno u otro de los vectores nulos $\mathbf{k}$ y $\mathbf{l}$ definidos al final de la sección anterior, entonces lo único que se necesita determinar es el factor entre $\boldsymbol{\xi}$ y $\mathbf{k}$ ó $\boldsymbol{\xi}$ y $\mathbf{l}$.

Lema 4.2.1 *Las geodésicas nulas radiales de $(M, \mathbf{g})$ dirigidas al futuro y parametrizadas de manera afín, son generadas por los campos vectoriales $\boldsymbol{\xi}_+ = f_+ \mathbf{k}$ y $\boldsymbol{\xi}_- = f_- \mathbf{l}$, donde las funciones $f_{\pm}$ se determinan mediante las ecuaciones de advección*

$$\mathbf{k}[f_+] = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} f_+, \quad \mathbf{l}[f_-] = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} f_-. \quad (4.9)$$

Demostración. Respecto a las coordenadas locales $\{\tau, R, \vartheta, \varphi\}$ se tiene para $\xi = \xi_+$ ó $\xi = \xi_-$:

$$0 = \nabla_\xi \xi_b = \xi^a \nabla_a \xi_b = \xi^a (\nabla_a \xi_b - \nabla_b \xi_a) = \xi^a (\partial_a \xi_b - \partial_b \xi_a), \quad (4.10)$$

donde se ha usado el hecho de que ξ es nulo. Usando las expresiones

$$\xi_\pm^\tau = f_\pm, \quad \xi_\pm^R = \pm \gamma f_\pm, \quad \xi_\pm^\vartheta = \xi_\pm^\varphi = 0,$$

y

$$\xi_{\pm\tau} = -f_\pm, \quad \xi_{\pm R} = \pm \gamma^{-1} f_\pm, \quad \xi_{\pm\vartheta} = \xi_{\pm\varphi} = 0,$$

para las componentes contravariantes y covariantes de $\xi_\pm$ se obtiene de (4.10) la ecuación

$$\left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \tau} \pm \frac{\partial}{\partial R} \right) f_\pm = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma^2} f_\pm, \quad (4.11)$$

lo cual es equivalente a lo que se buscaba. $\square$

Una representación explícita de las funciones $f_\pm$ se puede obtener por el método de características, para ello defínase como $\tau_\pm(R)$ a una solución de

$$\frac{d}{dR} \tau_\pm(R) = \pm \frac{1}{\gamma(\tau_\pm(R), R)},$$

la cual describe un rayo nulo radial saliente o entrante. Sea $F_\pm(R) := f_\pm(\tau_\pm(R), R)$, entonces en virtud de la ecuación (4.11), $F_\pm$ satisface las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d}{dR} F_\pm(R) = \pm \frac{\dot{\gamma}}{\gamma^2} (\tau_\pm(R), R) F_\pm(R).$$

Para lo siguiente se introducen los propagadores

$$\mathcal{P}_\pm(R_2, R_1) := \exp \left[\pm \int_{R_1}^{R_2} \frac{\dot{\gamma}}{\gamma^2} (\tau_\pm(R), R) dR \right], \quad (4.12)$$

los cuales propagan los valores de $f_\pm$ a lo largo de los rayos de luz radiales $(\tau_\pm(R), R)$ desde $R = R_1$ hasta $R = R_2$. Usando estos propagadores, el Lema 4.2.1 y la observación de que $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{k}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{l}) = -1$, la ecuación (4.8) conduce a la siguiente expresión para el cambio en la frecuencia gravitacional:

$$\frac{\nu_{obs}}{\nu_e} = \mathcal{P}_\pm(R_{obs}, R_e), \quad (4.13)$$

donde el signo *más* se refiere al caso en que se envía una señal saliente, y el *menos* al caso de una señal entrante. Por lo tanto, la pregunta acerca del acotamiento del cambio de frecuencia se reduce al análisis de los propagadores (4.12). Como el interés está en la vecindad de la singularidad central, primero se resalta la siguiente propiedad del integrando $\dot{\gamma}/\gamma^2$:

Lema 4.2.2 *Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña, existe una constante $C_1 > 0$ tal que sobre $D(\varepsilon)$,*

$$0 < y \frac{\dot{\gamma}}{\gamma^2} \leq C_1. \quad (4.14)$$

Demostración. Primeramente se calcula explícitamente la función $\dot{\gamma}/\gamma^2$ en base a la ecuación (4.1), la cual se puede re-escribir como

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{r'}{\sqrt{1 - R^2 q(R)^2 c(R)}}.$$

Tomando la derivada parcial respecto a τ a ambos lados se obtiene

$$-\frac{\dot{\gamma}}{\gamma^2} = \frac{Q(R)}{\sqrt{c(R)}} \dot{r}',$$

donde la función $Q(R)$ es la misma que se definió en el capítulo anterior. Luego para evaluar la función r' se usa la ecuación

$$\dot{r} = -\sqrt{2E(R) + \frac{2m(R)}{r}} = -\frac{R\sqrt{c(R)}}{y} \sqrt{1 - q(R)^2 y^2},$$

la cual proviene de la ley de conservación de la energía (3.3). Junto con

$$y' = \frac{R}{2y^2} \sqrt{1 - q(R)^2 y^2} \Lambda(y, R),$$

finalmente se obtiene

$$\frac{\dot{\gamma}}{\gamma^2} = \frac{Q(R)}{y} H(y, R), \quad (4.15)$$

con la función

$$H(y, R) := \frac{1}{\sqrt{1 - q(R)^2 y^2}} \left[1 + R \frac{c'(R)}{2c(R)} - q(R)^2 y^2 \left(1 + R \frac{c'(R)}{2c(R)} + R \frac{q'(R)}{q(R)} \right) \right] - \frac{1}{2} \frac{R^2}{y^3} \Lambda(y, R), \quad (4.16)$$

cuyo primer término del lado derecho es una función continua de (y, R) que converge a 1 cuando $(y, R) \rightarrow (0, 0)$. Para el segundo término se usa una estimación similar a (4.5), lo que muestra que dentro de la región $D(\varepsilon)$,

$$0 \leq \frac{R^2}{y^3} \Lambda(y, R) \leq \frac{4}{3} \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

Entonces se sigue que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, $0 < H(y, R) < 4/3$ para toda $(y, R) \in D(\varepsilon)$, y como Q es estrictamente positiva y continua, se sigue el enunciado del lema. $\square$

Una primera consecuencia del Lema 4.2.2 es el hecho de que $\mathcal{P}_+(R_{obs}, R_e) > 1$ para $R_{obs} > R_e > 0$ suficientemente pequeña, y que $\mathcal{P}_-(R_{obs}, R_e) > 1$ para $R_e > R_{obs} > 0$ suficientemente pequeña. Esto implica que los fotones sin momento angular detectados por observadores co-móviles cerca de la singularidad experimentan un *corrimiento al azul*, lo cual es de esperarse en el caso entrante porque los fotones se mueven hacia la singularidad central, sin embargo, el hecho de que en el caso saliente los fotones se corran al azul y no al rojo resulta poco intuitivo y sorprendente porque en este caso se alejan de la singularidad. De hecho, recientemente se mostró evidencia numérica [57] de que, en el caso del colapso marginalmente ligado, el corrimiento al azul que experimentan los fotones emitidos en el interior de la nube puede ser mayor que el corrimiento al rojo en la región exterior, de forma que un observador lejano puede medir en total un corrimiento al azul.

68Capítulo 4. Estabilidad de singularidades desnudas I: campos de prueba esféricos

Para clarificar por qué los fotones salientes se corren al azul cerca de la singularidad, considérese la razón de compacidad definida como

$$\mathcal{C}(\tau, R) := \frac{2m(R)}{r(\tau, R)} \quad (4.17)$$

la cual da una medida de la intensidad del campo gravitacional en cada punto (τ, R) . Su variación a lo largo de las geodésicas nulas salientes está dado por

$$\mathbf{k}[\mathcal{C}] = -\frac{2m}{r^2} \mathbf{k}[r] + \frac{\gamma}{r} 2m'.$$

Como el rayo nulo permanece fuera del horizonte aparente, se tiene $\mathbf{k}[r] > 0$ y el primer término es negativo. Como se asume que la densidad de masa es positiva, el segundo término es positivo dentro de la nube, pero fuera de la misma, este término se anula y los fotones se corren al rojo dado que llegan a la superficie de la nube antes de que se forme el horizonte de eventos. Para ver cuál término domina dentro de la nube, se usa $2m = R^3 c$ y $r = Ry^2$ para re-escribir la variación

$$\mathbf{k}[\mathcal{C}] = \frac{2m}{r^2} \left[-\mathbf{k}[r] + \left(3 + \frac{Rc'}{c} \right) \gamma y^2 \right], \quad (4.18)$$

y dado que

$$\begin{aligned} \mathbf{k}[r] &= \dot{r} + \gamma r' = -\frac{R\sqrt{c}}{y} \sqrt{1 - q^2 y^2} + \sqrt{1 - R^2 q^2 c}, \\ \gamma y^2 &= \frac{\sqrt{1 - R^2 q^2 c}}{1 + \frac{R^2}{y^3} \sqrt{1 - q^2 y^2} \Lambda}, \end{aligned}$$

es claro que $\mathbf{k}[r]$ y γy^2 convergen ambas a 1 cuando $R \rightarrow 0$ dado que y es acotada lejos de cero. En consecuencia, la expresión dentro de los corchetes en el lado derecho de la ecuación (4.18) converge a 2, y como $2m/r^2 > 0$, se concluye que $\mathbf{k}[\mathcal{C}] > 0$ para rayos de luz radiales salientes cerca del centro. Usando la estimación (4.5) se puede ver que $\mathbf{k}[\mathcal{C}]$ es positiva en el interior de la región $D(\varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. En este sentido, cuando los fotones salientes se encuentran cerca del centro de la nube o cerca de la singularidad central, se mueven hacia regiones donde el campo gravitacional es más intenso, lo cual explica por qué se corren al azul.

Otra consecuencia importante del Lema 4.2.2 tiene qué ver con el acotamiento del corrimiento al azul² Este resultado se formula en términos del *factor de corrimiento al rojo*:

$$z := \frac{\nu_e}{\nu_{obs}} - 1 = \mathcal{P}_{\pm}(R_e, R_{obs}) - 1 = \exp \left[\mp \int_{R_e}^{R_{obs}} \frac{\dot{\gamma}}{\gamma^2}(\tau_{\pm}(R), R) dR \right] - 1. \quad (4.19)$$

Proposición 4.2.1 *Considérese el factor de corrimiento al rojo z a lo largo de las geodésicas nulas radiales entrantes y salientes en la región D del espacio-tiempo. Entonces, $|z|$ es uniformemente acotado dentro de la nube de polvo y z es negativo en una región de la forma $D(\varepsilon)$ cercana a la singularidad central.*

²Para el caso de colapso marginalmente ligado, el acotamiento del cambio de frecuencia también ha sido encontrado en [23] bajo la condición de no-degeneración (viii). Algunos ejemplos en los que se viola tal condición en el caso marginalmente ligado y donde hay un corrimiento al rojo infinito se han mostrado en [23] y [58].

Demostración. Sea $D(\varepsilon)$ tal que la desigualdad del Lema 4.2.2 sea válida. Como $\dot{\gamma}/\gamma^2$ es una función suave en D , es suficiente probar que $|z|$ es uniformemente acotada en $D(\varepsilon)$. Para eso se usa una estimación similar a (4.5) para encontrar que

$$\frac{R^2}{y^3} \leq M^3 := \frac{4}{3\Lambda_0} \frac{1}{1-\varepsilon}$$

sobre $D(\varepsilon)$. Por lo tanto, del Lema 4.2.2 se sigue que dentro de $D(\varepsilon)$,

$$0 < \frac{\dot{\gamma}}{\gamma^2} \leq \frac{C_1}{y} \leq \frac{C_1 M}{R^{2/3}},$$

lo cual implica que

$$0 < \int_{R_e}^{R_{obs}} \frac{\dot{\gamma}}{\gamma^2} dR \leq C_1 M \int_{R_e}^{R_{obs}} \frac{dR}{R^{2/3}} \leq 3C_1 M R_{obs}^{1/3} < \infty$$

para $R_{obs} \geq R_e > 0$ suficientemente pequeña. Esto prueba que z es uniformemente acotada y negativa en $D(\varepsilon)$. $\square$

Resumiendo los resultados de esta sección, se ha encontrado que los fotones emitidos y recibidos por observadores radiales co-móviles con los cascarones de polvo se corren al azul en una vecindad de la singularidad central. Tal corrimiento al azul se puede calcular explícitamente de (4.19). Dado que $\dot{\gamma}/\gamma^2$ diverge como $1/y$ cerca de la singularidad (ver el Lema 4.2.2), el corrimiento al azul es más pronunciado cerca de la singularidad -como era de esperarse-, sin embargo la Proposición 4.2.1 muestra que este corrimiento al azul es uniformemente acotado incluso cuando el rayo de luz pasa arbitrariamente cerca de la singularidad. En particular esto implica que los fotones que son enviados por un observador estático fuera de la nube, que atraviesan la misma y luego son recibidos por otro observador estático fuera de la nube, no pueden ganar una cantidad arbitrariamente grande de energía incluso si pasan cerca de la singularidad central. En los capítulos 7 y 8 se analizará este efecto con más detalle.

4.3. Acotamiento de campos efectivos de prueba esféricamente simétricos

En la sección anterior se discutió la propagación de campos en el límite de la óptica geométrica sobre el fondo de polvo que colapsa. En esta sección se relaja la suposición de alta frecuencia y se considera la evolución de Cauchy de campos escalares de prueba masivos y no-masivos Φ a partir de un dato inicial regular sobre la superficie de Cauchy $\tau = 0$. La dinámica de Φ está gobernada por una ecuación de onda efectiva con potencial V para el campo re-escalado $\psi = r\Phi$ sobre el espacio-tiempo 2-dimensional $(\tilde{M}, \tilde{\mathbf{g}})$, donde $\tilde{M} = \{(\tau, R) : R \geq 0, 0 \leq \tau < \tau_s(R)\}$, $\tilde{\mathbf{g}} = -d\tau^2 + dR^2/\gamma(\tau, R)^2$ y r es el radio de área. Considerando una solución ψ sobre el dominio de dependencia D de la superficie inicial $\tau = 0$ que satisfaga condiciones de regularidad adecuadas en $R = 0$, en el Teorema 4.3.1 se demuestra que ψ se puede extender continuamente a la cerradura de $\overline{D}$ de D , dado que el potencial V sea L^1 -integrable sobre subconjuntos compactos de $(\tilde{M}, \tilde{\mathbf{g}})$ y sobre una vecindad de la forma de $D(\varepsilon)$ de la singularidad desnuda (ver la figura 4.1). Esto significa que el

campo ψ se puede extender continuamente al horizonte de Cauchy, incluyendo el primer punto singular del cual emana. En particular este resultado implica que ψ es uniformemente acotado en la parte D_c de D dentro de la nube. En el Lema 4.3.1 se muestra que para un campo escalar de prueba esféricamente simétrico Φ de masa arbitraria se cumplen las condiciones de integrabilidad sobre V , y por lo tanto se concluye que $r\Phi$ se puede extender hacia el horizonte de Cauchy y es uniformemente acotado en D_c .

Se comienza por descomponer el campo en armónicos esféricos:

$$\Phi(\tau, R, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \psi_{\ell m}(\tau, R) Y^{\ell m}(\vartheta, \varphi),$$

y entonces la ecuación de Klein-Gordon sobre un espacio-tiempo de fondo esféricamente simétrico arbitrario se reduce a una familia de ecuaciones de onda efectivas sobre $(\tilde{M}, \tilde{\mathbf{g}})$ (ver por ejemplo la referencia [31])

$$\tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \psi_{\ell m} = V_{\ell} \psi_{\ell m}, \quad (4.20)$$

con potencial

$$V_{\ell} = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{\tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r}{r} + \mu^2, \quad (4.21)$$

donde $\tilde{\nabla}$ denota la conexión de Levi-Civita asociada a $(\tilde{M}, \tilde{\mathbf{g}})$ y μ es el inverso de la longitud de Compton del campo Φ . Es importante resaltar que el potencial efectivo V_{ℓ} diverge en la singularidad central incluso para $\ell = 0$ (ver abajo la ecuación (4.32)), entonces uno esperaría que el campo escalar divergiera en la singularidad central y que esa divergencia se propagara a lo largo del horizonte de Cauchy, pero sorpresivamente ese no es el caso, y eso es precisamente lo que se demuestran enseguida.

Teorema 4.3.1 *Sea $(\tilde{M}, \tilde{\mathbf{g}})$ el espacio-tiempo 2-dimensional $\tilde{M} = \{(\tau, R) : R \geq 0, 0 \leq \tau < \tau_s(R)\}$ con métrica $\tilde{\mathbf{g}} = -d\tau^2 + dR^2/\gamma(\tau, R)^2$ obtenida de la ecuación (3.1) fijando las coordenadas angulares. Sopóngase que se cumplen las condiciones (i)–(viii) sobre el dato inicial y que además V es una función localmente integrable sobre $(\tilde{M}, \tilde{\mathbf{g}})$ y tal que para algún $\varepsilon \in (0, 1)$,*

$$\int_{D(\varepsilon)} |V(x)| \sqrt{|\det \tilde{g}(x)|} d^2x < \infty. \quad (4.22)$$

Entonces, cualquier solución ψ de la ecuación de onda efectiva

$$\tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \psi = V \psi, \quad (4.23)$$

sobre el dominio de dependencia D perteneciente a un dato inicial suave sobre la superficie inicial $\tau = 0$ y que satisface la condición de regularidad en el centro $\psi(\tau, R = 0) = 0$, $0 \leq \tau < \tau_s(0)$, se puede extender continuamente a la cerradura $\bar{D}$ de D . En particular, ψ es uniformemente acotada en la región D_c , es decir, existe una constante $C > 0$ tal que para toda $x \in D_c$

$$|\psi(x)| \leq C. \quad (4.24)$$

Observación: Es interesante notar que el principio de extensión de ψ solamente requiere la condición de integrabilidad (4.22) y ninguna otra condición sobre la métrica $\tilde{\mathbf{g}}$. La razón de esto

es que en términos de coordenadas doble-nulas (u, v) la 2-métrica tiene la forma $\tilde{g} = -\Omega^2 du dv$, y entonces todas las singularidades de $\tilde{g}$ están contenidas en el factor conforme positivo Ω . En términos de esas coordenadas, la ecuación (4.23) se ve

$$-2\partial_u\partial_v\psi = \sqrt{|\det\tilde{g}(x)|}V(x)\psi, \quad (4.25)$$

y es claro que la singularidad solamente entra en la combinación $\sqrt{|\det\tilde{g}(x)|}V(x)$. En consecuencia, el Teorema 4.3.1 también es válido para espacio-tiempos esféricamente simétricos cuyo diagrama conforme se ve como el de la figura 4.1 y los cuales son mucho más generales que los que describen el colapso de polvo.

Demostración. Primeramente, de acuerdo a los teoremas estándar de existencia y unicidad, la solución ψ debe ser al menos continua en D . La prueba del Teorema 4.3.1 se basa en la integración de la ecuación (4.25) sobre un rectángulo característico $E := [u_1, u_2] \times [v_1, v_2] \subset D$, lo que conduce a

$$-2[\psi(u_2, v_2) - \psi(u_1, v_2) - \psi(u_2, v_1) + \psi(u_1, v_1)] = \int_E V(x)\psi(x)\sqrt{|\det\tilde{g}(x)|}d^2x. \quad (4.26)$$

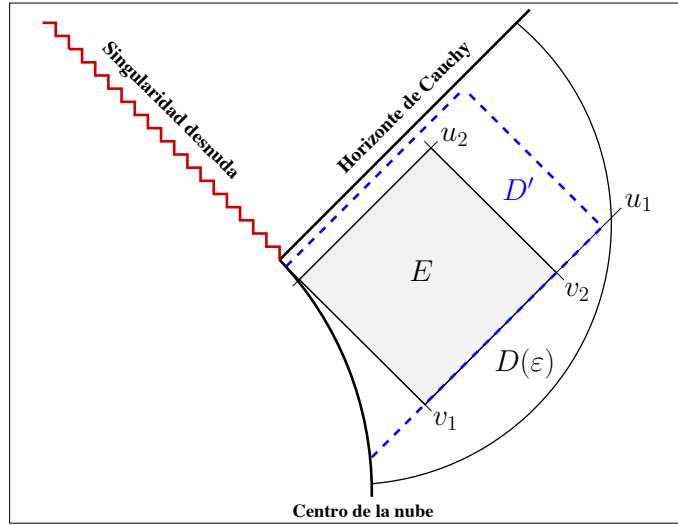


Figura 4.3: Ilustración de las regiones usadas en la prueba del principio de extensión.

Primero se mostrará que ψ es uniformemente acotado dentro de la región $D(\varepsilon)$. Para ello se elige E tal que el punto (u_2, v_1) esté en el centro de la nube (ver la figura 4.3). Luego, como $\psi = 0$ en el centro, se obtiene la relación implícita

$$\psi(u_2, v_2) = \psi(u_1, v_2) - \psi(u_1, v_1(u_2)) - \frac{1}{2} \int_E V(x)\psi(x)\sqrt{|\det\tilde{g}(x)|}d^2x \quad (4.27)$$

para ψ , donde $v_1(u_2)$ indica que v_1 depende de u_2 . Esto conduce a la estimación

$$|\psi(u_2, v_2)| \leq |\psi(u_1, v_2)| + |\psi(u_1, v_1(u_2))| + \frac{1}{2} \int_E |V(x)| |\psi(x)| \sqrt{|\det \tilde{g}(x)|} d^2x. \quad (4.28)$$

De acuerdo a las hipótesis del teorema, la cantidad

$$B := \frac{1}{2} \int_{D(\varepsilon)} |V(x)| \sqrt{|\det \tilde{g}(x)|} d^2x$$

es finita para algún $\varepsilon \in (0, 1)$. Haciendo $\varepsilon > 0$ más pequeño si es necesario, se puede asumir que $B < 1$ (esto se sigue del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. Ver por ejemplo la referencia [59]). En lo sucesivo, se fija ε , así como u_1 alejada del horizonte de Cauchy, y se elige un subconjunto cerrado $D' \subset D(\varepsilon)$ de la forma descrita en la figura 4.3. Además, se introduce la cantidad

$$A := 2 \sup\{|\psi(u_1, v)| : v \text{ tal que } (u_1, v) \in D'\},$$

la cual es finita de acuerdo a las hipótesis del teorema. Con esta notación, la estimación (4.28) implica que

$$|\psi(u_2, v_2)| \leq A + B \sup_{(u,v) \in D'} |\psi(u, v)| \quad (4.29)$$

para toda $(u_2, v_2) \in D'$. Tomando el supremo sobre $(u_2, v_2) \in D'$ a ambos lados se obtiene la desigualdad

$$x \leq A + Bx, \quad x := \sup_{(u,v) \in D'} |\psi(u, v)|.$$

Puesto que $0 \leq B < 1$, entonces

$$x \leq \frac{A}{1-B} < \infty,$$

lo que demuestra que ψ es uniformemente acotado en la unión de todos los subconjuntos cerrados $D' \subset D(\varepsilon)$ de la forma descrita en la figura 4.3 con u_1 fija. Como $|V|$ es integrable en cualquier subconjunto compacto $K \subset \tilde{M}$ de acuerdo a las suposiciones del teorema, se pueden usar argumentos similares para concluir que ψ es acotado sobre cualquier subconjunto de la forma $K \cap D$.

Enseguida se prueba el resultado de extensión. Para ello, sea (u_c, v_c) un punto sobre el horizonte de Cauchy y sea $(u^{(n)}, v^{(n)})$ una sucesión en D que converge a (u_c, v_c) . Evaluando la relación implícita (4.27) en $(u_2, v_2) = (u^{(k)}, v^{(k)})$ y $(u_2, v_2) = (u^{(n)}, v^{(n)})$, y tomando la diferencia se obtiene la estimación

$$\begin{aligned} |\psi(u^{(k)}, v^{(k)}) - \psi(u^{(n)}, v^{(n)})| &\leq |\psi(u_1, v^{(k)}) - \psi(u_1, v^{(n)})| + |\psi(u_1, v_1(u^{(k)})) - \psi(u_1, v_1(u^{(n)}))| \\ &+ M \int_{E^{(k)} \triangle E^{(n)}} |V(x)| \sqrt{|\det \tilde{g}(x)|} d^2x, \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde $E^{(k)} \triangle E^{(n)}$ denota la diferencia simétrica de $E^{(k)}$ y $E^{(n)}$, es decir, el conjunto de puntos que están en alguno de los dos conjuntos pero no en su intersección. Al derivar esta estimación se ha usado el resultado previo de acotamiento para ψ . Como ψ es continuo en D , y por la condición de integrabilidad de V , se sigue que el lado derecho de (4.30) se anula en el límite $k, n \rightarrow \infty$. En

consecuencia, de la ecuación (4.30) se concluye que $\psi(u^{(n)}, v^{(n)})$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, y el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(u^{(n)}, v^{(n)})$$

existe en $\mathbb{R}$. Este límite es independiente de la sucesión que converge a (u_c, v_c) , pues si $(\tilde{u}^{(n)}, \tilde{v}^{(n)})$ es otra sucesión que converge a (u_c, v_c) , se tiene que al reemplazar $(u^{(k)}, v^{(k)})$ con $(\tilde{u}^{(n)}, \tilde{v}^{(n)})$ en la ecuación (4.30) y tomar el límite $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(\tilde{u}^{(n)}, \tilde{v}^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(u^{(n)}, v^{(n)}) =: \psi(u_c, v_c).$$

Esto define una extensión continua de ψ sobre $\bar{D}$. En particular ψ se anula en la singularidad central desnuda puesto que es cero a lo largo de todo el centro. $\square$

El siguiente lema muestra que las condiciones de integrabilidad sobre V_ℓ se satisfacen en el caso de simetría esférica ($\ell = 0$).

Lema 4.3.1 *Para $\ell = 0$ el potencial efectivo V_0 definido en la ecuación (4.21) es localmente integrable, y para todo $\varepsilon \in (0, 1)$ se satisface*

$$\int_{D(\varepsilon)} |V_0(x)| \sqrt{|\det \tilde{g}(x)|} d^2x < \infty. \quad (4.31)$$

Demostración. En términos de las coordenadas $\{y, R\}$, el potencial efectivo (4.21) está dado por

$$V_\ell(y, R) = \frac{\ell(\ell+1)}{R^2 y^4} + \frac{c(R)}{y^6} - \frac{Rc'(R) + 3c(R)}{2y^4 r'} + \mu^2, \quad (4.32)$$

y

$$\sqrt{|\det \tilde{g}(y, R)|} = \frac{1}{\sqrt{c(R)} \sqrt{1 - q(R)^2 y^2}} \frac{2y^2 r'}{\sqrt{1 - R^2 q(R)^2 c(R)}}.$$

Por lo tanto, el lema se reduce a la verificación de la integrabilidad de la función

$$V_\ell \sqrt{|\det \tilde{g}|} = \frac{1}{\sqrt{c} \sqrt{1 - q^2 y^2} \sqrt{1 - R^2 q^2 c}} \left[\frac{2\ell(\ell+1)A}{R^2} + \frac{2cA}{y^2} - \frac{Rc' + 3c}{y^2} + \mu^2 y^4 A \right], \quad (4.33)$$

donde se ha introducido la función

$$A(y, R) := \frac{r'}{y^2} = 1 + \frac{R^2}{y^3} \sqrt{1 - q(R)^2 y^2} \Lambda(y, R).$$

Esta función es continua en D , lo que implica la integrabilidad local de V_0 . Además la función $A(y, R)$ es acotada en $D(\varepsilon)$ de acuerdo a la estimación (4.6). Como el factor junto al corchete en la ecuación (4.33) es acotado, se sigue que existe una constante $k > 0$ tal que para $\ell = 0$,

$$|V_\ell| \sqrt{|\det \tilde{g}|} \leq \frac{k}{y^2}$$

sobre $D(\varepsilon)$. Luego el lema es una consecuencia de la integrabilidad de la función $1/y^2$ sobre la región $D(\varepsilon)$. Para mostrar esto, recuérdese la definición (4.4) de $D(\varepsilon)$, la cual implica en particular

que $y_{CH}(R)^3 \geq \frac{3\Lambda_0}{4}(1-\varepsilon)R^2$ para todo $(y, R) \in D(\varepsilon)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{D(\varepsilon)} \frac{1}{y^2} dy dR &= \int_0^{R(\varepsilon)} \left(\int_{y_{CH}(R)}^{y(\varepsilon)} \frac{dy}{y^2} \right) dR \\ &= \int_0^{R(\varepsilon)} \left(\frac{1}{y_{CH}(R)} - \frac{1}{y(\varepsilon)} \right) dR \\ &\leq \left(\frac{4}{3\Lambda_0(1-\varepsilon)} \right)^{1/3} \int_0^{R(\varepsilon)} \frac{dR}{R^{2/3}} - \frac{R(\varepsilon)}{y(\varepsilon)} \\ &= 3 \left(\frac{4}{3\Lambda_0(1-\varepsilon)} \right)^{1/3} R(\varepsilon)^{1/3} - \frac{R(\varepsilon)}{y(\varepsilon)} < \infty, \end{aligned}$$

lo cual es finito. □

En contraste con el resultado anterior, la función $1/R^2$ no es integrable sobre $D(\varepsilon)$, y en consecuencia el enunciado del lema no se puede generalizar para el caso $\ell > 0$. En tal caso es necesario obtener cotas via estimaciones de energía, lo cual se explorará en el capítulo 6.

Como consecuencia del Teorema 4.3.1 y del Lema 4.3.1 se obtiene el siguiente:

Teorema 4.3.2 *Considérese una solución suave y esféricamente simétrica Φ de la ecuación de Klein-Gordon en el dominio D con dato inicial suave y acotado para Φ y $\dot{\Phi}$ sobre la superficie inicial $\tau = 0$. Entonces, existe una extensión continua de Φ sobre $\overline{D} \setminus \{(0,0)\}$ y existe una constante C tal que*

$$|\Phi(x)| \leq \frac{C}{r} \tag{4.34}$$

para toda $x \in D_c$ en el interior de la nube.

Es importante remarcar que esta cota no garantiza que Φ sea finito en la singularidad central, pues aún permite que Φ diverja cuando $r \rightarrow 0$, sin embargo la importancia de este resultado es que descarta que un campo infinito se propague a lo largo del horizonte de Cauchy. En otras palabras, incluso si Φ divergiera en la singularidad central, esa divergencia no podría propagarse a lo largo del horizonte de Cauchy.

4.4. Discussion

En este capítulo se han analizado los fenómenos físicos que ocurren en la vecindad de una singularidad central originada por el colapso de polvo en el modelo de Tolman-Bondi. El dato inicial para los perfiles de densidad y velocidad satisfacen un conjunto de suposiciones razonables y son genéricas. En particular, no se ha restringido el estudio a los casos de colapso marginalmente ligado o auto-similar. El primer fenómeno analizado fue el corrimiento al rojo gravitacional a lo largo de rayos de luz radiales medido por observadores que se mueven con los cascarones de polvo. Al respecto, se ha mostrado que en la vecindad de la singularidad hay un corrimiento al azul a lo largo de rayos entrantes y salientes. Como se explicó antes, ese efecto se debe al colapso

de la nube, lo cual implica que los fotones salientes se mueven hacia regiones donde el campo gravitacional es más intenso y por lo tanto ganan energía. Aunado a esto, se mostró que ese corrimiento al azul es uniformemente acotado cerca de la singularidad y del horizonte de Cauchy. Un corrimiento al azul infinito hubiera indicado una inestabilidad del horizonte de Cauchy, como sucede en el caso de horizontes internos de agujeros negros [19, 21, 20]. Por supuesto que el hecho de que se ha excluido un corrimiento al azul infinito no prueba que el horizonte de Cauchy sea estable, pero indica que su estabilidad podría ser mucho más sutil que en el caso de los horizontes internos.

Con la motivación de los resultados en el límite de la óptica geométrica, después se consideró un campo escalar de prueba esféricamente simétrico Φ propagándose en fondo de Tolman-Bondi. El resultado principal fue el principio de extensión probado en el Teorema 4.3.1, el cual establece que el campo re-escalado $r\Phi$ se puede extender continuamente al horizonte de Cauchy. Este resultado tiene varias consecuencias interesantes: en primer lugar, implica que es posible extender el campo escalar continuamente más allá del horizonte de Cauchy dado un dato apropiado sobre una superficie característica entrante en lugar de la porción nula de la singularidad; en segundo lugar, el principio de extensión implica que cerca de la singularidad, Φ es acotado por una constante dividida por el radio de área r . Una consecuencia importante de esta cota es que incluso si Φ divergiera en la singularidad central, esa divergencia no podría propagarse a lo largo del horizonte de Cauchy. Aunque las técnicas usadas para obtener esta cota no se pueden extender para campos no-esféricos (como campos electromagnéticos u ondas gravitacionales linealizadas), este resultado es interesante en vista de que es consistente con los reportes numéricos del estudio de perturbaciones gravitacionales, donde se encontró que una singularidad desnuda no representaría una fuente importante de radiación gravitacional [27, 28, 29].

Capítulo 5

Estabilidad de singularidades desnudas II: estudios numéricos de la propagación de campos de prueba no esféricos

Este capítulo constituye la segunda parte del estudio de estabilidad del horizonte de Cauchy asociado a una singularidad desnuda proveniente del colapso gravitacional total de una nube de polvo esférica. Después de haber estudiado analíticamente la estabilidad del horizonte de Cauchy bajo la propagación de campos de prueba en el límite geométrico y esféricos en el capítulo previo, en el presente se plantea una estrategia numérica para estudiar la evolución de campos de prueba fuera de simetría esférica en la vecindad de la singularidad central y del horizonte de Cauchy, lo que puede aportar información acerca de la estabilidad del mismo en un escenario más realista que el anterior.

Sucede que en un fondo esféricamente simétrico $M = \tilde{M} \times S^2$ como el que se considera en este trabajo, la propagación de un campo Φ -cuya naturaleza puede ser variada-, ya sea de prueba o incluso de perturbaciones gravitacionales, está gobernada por una ecuación efectiva en $1 + 1$ dimensiones de la forma [31]

$$\tilde{\square}\phi + V_\ell\phi = 0, \tag{5.1}$$

donde $\phi := r\Phi$ es un campo re-escalado, V_ℓ es un potencial efectivo cuya forma particular depende de la naturaleza del campo, y $\tilde{\square}$ es el operador de d’Alambert sobre la 2-variedad $(\tilde{M}, \tilde{\mathbf{g}})$. Por ejemplo, puede tratarse de un campo escalar que satisface la ecuación de Klein-Gordon y tiene número de momento angular ℓ (ver la ecuación (4.20)), o de un campo electromagnético con índice multipolar ℓ . Dado que no es necesario definir el tipo de campo por el momento, en la primera sección de este capítulo, se considera un campo genérico Φ propagándose en el fondo de Tolman-Bondi y se plantea el problema de Cauchy para su evolución usando una formulación característica que se motiva más adelante. Luego, en la Sección 5.2 se discute la estabilidad y convergencia del algoritmo numérico que se implementa para resolver el problema. Finalmente, en la Sección 5.3 se presentan los resultados numéricos de la evolución característica de un campo escalar de prueba no esférico y se discuten los resultados y sus implicaciones sobre el problema

de estabilidad del horizonte de Cauchy.

5.1. Formulación característica

El interés de este capítulo se centra en resolver la ecuación efectiva en $1 + 1$ dimensiones (5.1), la cual describe la propagación del campo efectivo $\phi = r\Phi$ sobre la variedad $\tilde{M}$. El operador d'Alembertiano respecto a $(\tilde{M}, \tilde{g})$ es explícitamente $\square := -\tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b$. El potencial V_ℓ depende de la naturaleza del campo y será discutido más adelante. Por lo pronto vale la pena recordar que en coordenadas locales co-móviles sincronizadas $\{\tau, R, \theta, \varphi\}$, la métrica sobre $\tilde{M}$ es

$$\tilde{g} = -d\tau^2 + \frac{dR^2}{\gamma(\tau, R)^2}, \quad \gamma(\tau, R) = \frac{\sqrt{1 + 2E(R)}}{r'(\tau, R)} > 0.$$

La intención es estudiar el comportamiento del campo ϕ cuando éste se propaga en una vecindad del horizonte de Cauchy, el cual es una superficie nula. Entonces la idea es hacer una foliación el espacio-tiempo adaptada al horizonte de Cauchy, es decir, usando hipersuperficies nulas, las cuales, por otro lado, resultan ser superficies características de la propagación del campo ϕ . En ese sentido, la formulación del problema de Cauchy para ϕ será característica. El primer paso es definir la coordenada nula U y la foliación de la 2-variedad $\tilde{M}$ con superficies de U constante. Ver la figura 5.1.

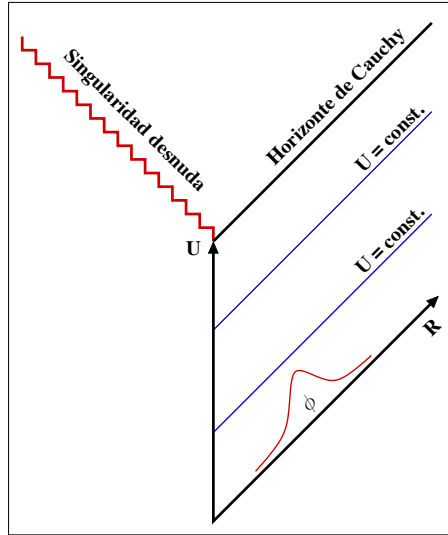


Figura 5.1: Representación idealizada de la foliación del espacio-tiempo de Tolman-Bondi usando hipersuperficies de U constante, útil para formular el problema de evolución característico para campos de prueba ϕ que obedecen la ecuación tipo onda (5.1)

A partir de las coordenadas locales $\{y, R\}$ discutidas en el Capítulo 3, la coordenada nula $U =$

$U(y, R)$ se define como la solución la ecuación de advección

$$\dot{U} = -\gamma U', \quad U(y, 0) = U_0(y), \quad (5.2)$$

con condiciones de frontera adecuadas en el centro de la nube ($R = 0$) $U_0(y) := U(0, y)$. La función $U_0(y)$ debe ser estrictamente monótona para obtener una foliación unívoca. Nótese que $dU = \dot{U}(d\tau - \gamma^{-1}dR)$ es nula. Ahora se puede trabajar en las nuevas coordenadas $\{U, R\}$, en las cuales la 2-métrica es

$$\tilde{g} = -e^{2\beta} (W dU^2 + 2dU dR), \quad \text{con } W := \frac{\gamma}{\dot{U}} \quad \text{y} \quad e^{2\beta} := \frac{1}{\gamma \dot{U}}. \quad (5.3)$$

Obsérvese que en el caso de $W \equiv 1$, $e^{2\beta} \equiv 1$ se recupera el espacio-tiempo de Minkowski en las coordenadas semi-nulas $\{U, R\}$.

En estas coordenadas, la ecuación de onda (5.1) toma la forma:

$$2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial U \partial R} - \frac{\partial}{\partial R} \left(W \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + V_\ell e^{2\beta} \phi = 0, \quad (5.4)$$

donde U juega el papel de *tiempo retrasado*. La ecuación (5.4) sugiere definir la nueva función

$$\Psi := \frac{\partial \phi}{\partial R}, \quad (5.5)$$

en términos de la cual la ecuación (5.4) se puede escribir como el siguiente problema de evolución integro-diferencial de primer orden:

$$2 \frac{\partial \Psi}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial R} (W \Psi) = -V_\ell e^{2\beta} \int_0^R \Psi(U, \bar{R}) d\bar{R}, \quad (5.6)$$

lo cual supone la condición de regularidad para el campo efectivo

$$\phi(U, R = 0) = 0. \quad (5.7)$$

Para resolver la ecuación (5.6) es necesario conocer los coeficientes métricos W , $e^{2\beta}$ y el potencial efectivo V_ℓ en función de las coordenadas semi-nulas $\{U, R\}$. Todos ellos dependen del espacio-tiempo de fondo y por lo tanto para calcularlos se pueden seguir los siguientes pasos:

Primer paso: calcular y en función de (U, R) integrando la ecuación de los rayos nulos radiales salientes, es decir, la ecuación diferencial ordinaria (3.10) tomando $(y_0(U), 0)$ como dato inicial, donde $y_0(U)$ se obtiene al invertir $U_0(y)$. Como por definición U es constante a lo largo de los rayos nulos radiales salientes, entonces la integración de la ecuación (3.10) con dato inicial $(y_0(U), 0)$ devuelve el valor de $y(U, R)$ a lo largo del rayo nulo radial saliente que emana del punto $(y_0(U), 0)$.

Segundo paso: calcular $\dot{U}$ en función de (U, R) . Para ello se deriva la ecuación (5.2) respecto a τ y se obtiene

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma \frac{\partial}{\partial R} \right) \dot{U} - \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \dot{U} = 0.$$

Como a lo largo del rayo de luz saliente

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial R} = \frac{d}{dR} \Big|_U, \quad (5.8)$$

entonces se tiene la ecuación ordinaria para $\dot{U}$ a lo largo de las superficies de U constante,

$$\frac{d}{dR} \Big|_U \dot{U} - \frac{\dot{\gamma}}{\gamma^2} \dot{U} = 0, \quad (5.9)$$

donde $\dot{\gamma}/\gamma^2$ está dada por la ecuación (4.15). La ecuación (5.9) se puede integrar numéricamente para obtener $\dot{U}$ a lo largo de las superficies de U constante a partir de un dato inicial adecuado en el centro de la nube $\dot{U}_0(U) := \dot{U}(U, 0)$. Para determinar la función $\dot{U}_0(U)$ se puede partir de la observación de que

$$\dot{U}_0 = \frac{\partial U_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau} \Big|_{R=0},$$

donde la relación $\tau(y, R)|_{R=0}$ se puede obtener de (3.9) y luego

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} \Big|_{R=0} = \frac{-2y^2}{\sqrt{c_0} \sqrt{1 - q_0^2 y^2}},$$

donde, como antes, $c_0 = c(0)$ y $q_0 = q(0)$. Como además $U_0 = y_0^{-1}$, se obtiene

$$\dot{U}_0(U) = \frac{-1}{y'_0(U)} \frac{\sqrt{c_0} \sqrt{1 - q_0^2 y^2}}{2y^2} \Big|_{y=y_0(U)}. \quad (5.10)$$

Tercer paso: finalmente hay que escribir los coeficientes métricos W , β y el potencial efectivo V_ℓ en función de las coordenadas $\{U, R\}$. De los dos pasos anteriores se conocen $y(U, R)$ y $\dot{U}(U, R)$ y además se tiene

$$\gamma(y, R) = \frac{\sqrt{1 + 2E(R)}}{r'(y, R)} = \frac{\sqrt{1 - R^2 q(R)^2 c(R)}}{r'(y, R)}, \quad (5.11)$$

con $r'(y, R)$ dada en la ecuación (4.3), entonces se puede escribir explícitamente $W = \gamma/\dot{U}$ y $e^{2\beta} = 1/(\gamma\dot{U})$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} W(y, R) &= \frac{1}{y^2 \dot{U}(y, R)} \frac{\sqrt{1 - R^2 q(R)^2 c(R)}}{1 + \frac{R^2}{y^3} \sqrt{1 - q(R)^2 y^2} \Lambda(y, R)}, \\ e^{2\beta(y, R)} &= \frac{y^2}{U(y, R)} \frac{1 + \frac{R^2}{y^3} \sqrt{1 - q(R)^2 y^2} \Lambda(y, R)}{\sqrt{1 - R^2 q(R)^2 c(R)}}. \end{aligned}$$

Para calcular el potencial efectivo $V_\ell(U, R)$, primero es necesario definir la naturaleza del campo físico de prueba Φ . Por ejemplo, para un campo escalar de masa μ (en unidades tales que $\hbar = c = 1$) que satisface la ecuación de Klein-Gordon y cuya descomposición en armónicos esféricos es $\Phi = r^{-1} \sum_{\ell m} \phi_{\ell m} Y^{\ell m}$, el potencial efectivo correspondiente tiene la forma (4.32). De igual manera, cuando se trata de un campo electromagnético descompuesto en armónicos esféricos $Y^{\ell m}$, el correspondiente potencial efectivo es $V_\ell = \ell(\ell+1)/r^2 = \ell(\ell+1)/(R^2 y^4)$. Entonces en en

resumen se tiene:

$$V_\ell(y, R) = \frac{\ell(\ell+1)}{R^2 y^4} + \frac{c(R)}{y^6} - \frac{Rc'(R) + 3c(R)}{2y^4 r'(y, R)} + \mu^2 \quad (\text{campo escalar}), \quad (5.12a)$$

$$V_\ell(y, R) = \frac{\ell(\ell+1)}{R^2 y^4} \quad (\text{campo electromagnético}). \quad (5.12b)$$

Recapitulando esta sección, la formulación característica del problema de evolución (5.1) sobre $\tilde{M}$ comienza de la siguiente manera: se construye una foliación del espacio-tiempo usando hipersuperficies de U constante, las cuales definen superficies nulas radiales que son curvas características del problema de evolución del campo efectivo $\phi = r\Phi$. En las coordenadas locales semi-nulas $\{U, R\}$, el problema de evolución se reduce a resolver la ecuación intregro-diferencial (5.6) para $\Psi = \partial_R \phi$, donde los coeficientes originalmente están dados en función de (y, R) y deben ponerse en función de (U, R) de acuerdo al siguiente algoritmo: dada una función estrictamente monótona $y_0(U)$ en el centro de la nube, para cada U fija, la solución de la ecuación de los rayos nulos radiales (3.10) con dato inicial $(y_0(U), 0)$, devuelve $y(U, R)$ para toda R , lo que se utiliza para calcular los coeficientes de la ecuación de evolución -de manera similar se calcula la función $\dot{U}(U, R)$ -.

Para elegir la función $y_0(U)$ en el centro de la nube se tiene cierta libertad, sin embargo por consistencia con la definición de la coordenada y , se pide $y_0(0) = 1$ e $y_0 \rightarrow 0$ cuando $U \rightarrow \infty$, de tal forma que la superficie definida por $U = 0$ intersecte el centro de la nube en la superficie inicial ($\tau = 0$), y de tal manera que la foliación se aproxime al horizonte de Cauchy asintóticamente cuando el tiempo retardado va a infinito. Un par de posibilidades que se usarán en este trabajo para y_0 son las siguientes:

$$y_0(U) = 1/(1+U)^\sigma, \quad \sigma > 0, \quad \text{ó} \quad (5.13)$$

$$y_0(U) = e^{-\alpha U}, \quad \alpha > 0, \quad (5.14)$$

cuya implementación numérica se discutirá más adelante.

5.1.1. Regularidad de los coeficientes del sistema de evolución

En este apartado se muestra que los coeficientes del problema de evolución (5.6) son regulares en el centro de simetría del espacio-tiempo y en particular en una vecindad de la singularidad central. Primero nótese que la función $\dot{U}$ satisface la misma ecuación diferencial que el propagador del corrimiento al rojo a lo largo de los rayos nulos salientes (comparar las ecuaciones (5.9) y (4.11)). Entonces por analogía con los estudios del corrimiento al rojo presentados en la Sección 4.2, se puede definir un propagador $\mathcal{P}(R)$ de la función $\dot{U}$ a lo largo de los rayos nulos salientes tal que $\dot{U}(U_0(U), R) = \mathcal{P}(R)\dot{U}_0(U)$, el cual es uniformemente acotado según el resultado de la Proposición 4.2.1 aún cerca del horizonte de Cauchy y de la singularidad central. Entonces el análisis de regularidad de las funciones

$$W = \frac{1}{\mathcal{P}} \frac{\gamma}{\dot{U}_0} \quad \text{y} \quad e^{2\beta} = \frac{1}{\mathcal{P}} \frac{1}{\gamma \dot{U}_0},$$

se reduce a al análisis de $\gamma/\dot{U}_0$ y $1/(\gamma\dot{U}_0)$. Del Lema 4.1.1 se sabe que existen constantes m y M tales que la función γ es acotada en la vecindad de la singularidad $D(\epsilon)$ de acuerdo a

$m/y^2 \leq \gamma \leq M/y^2$. Entonces, usando la expresión para 5.10 y evaluando en el centro de la nube se obtiene

$$W \leq -\frac{2My'_0}{\mathcal{P}\sqrt{c_0}\sqrt{1-q_0^2y_0^2}} < \infty, \quad e^{2\beta} \leq -\frac{2y'_0y_0^4}{m\mathcal{P}\sqrt{c_0}\sqrt{1-q_0^2y_0^2}} < \infty.$$

En particular, eligiendo cualquiera de las posibilidades sugeridas para $y_0(U)$, ya sea (5.13) ó (5.14), se tiene $y_0 \rightarrow 0$ y $y'_0 \rightarrow 0$ cuando $U \rightarrow \infty$, y como $\mathcal{P}$ es regular, entonces $W \rightarrow 0$ y $e^{2\beta} \rightarrow 0$ cuando $U \rightarrow \infty$, lo que significa que los coeficientes métricos W y $e^{2\beta}$ se mantienen regulares arbitrariamente cerca del horizonte de Cauchy.

Enseguida se analiza el coeficiente $V_\ell e^{2\beta}$ que aparece en el lado derecho de la ecuación (5.6) en el caso simple de un campo escalar masivo ($\mu \neq 0$) sin momento angular ($\ell = 0$). De (5.12a) se obtiene

$$V_0 e^{2\beta} = \frac{1}{\mathcal{P}\dot{U}_0} \frac{1}{\sqrt{1-R^2q^2c}} \left[\frac{r'c}{y^6} - \frac{(Rc' + 3c)}{2y^4} + r'\mu^2 \right].$$

Lo cual en el centro de la nube ($y = y_0, R = 0$) se ve

$$V_0 e^{2\beta} = \frac{1}{\mathcal{P}\dot{U}_0} \left(-\frac{c_0}{2y_0^4} + y_0^2\mu^2 \right) = \frac{1}{\mathcal{P}} \frac{1}{\sqrt{c_0}\sqrt{1-q_0^2y_0^2}} \left(\frac{c_0y'_0}{y_0^2} - 2y_0^4y'_0\mu^2 \right),$$

lo cual diverge cuando $y_0 \rightarrow 0$, y entonces en el caso simple de $\ell = 0$ el producto $V_0 e^{2\beta}$ diverge cerca de la singularidad. Tal comportamiento anómalo evidentemente persiste en el caso general de $\ell \neq 0$ -donde se pueden incluir los campos electromagnéticos- y las consecuencias serán discutidas más adelante.

5.1.2. Comportamiento asintótico de la solución

En esta sección se analiza el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación (5.6) cerca del centro de la nube que colapsa ($R = 0$) en una superficie de U fija. Primero, se analiza el caso simple del espacio-tiempo de Minkowski, es decir, cuando $W = 1$ y $e^{2\beta} = 1$. En este caso la ecuación (5.6) se puede escribir como

$$\partial_U \Psi = \frac{1}{2} \partial_R \Psi - \frac{1}{2} V_\ell \phi, \quad \Psi = \partial_R \phi,$$

donde el potencial V_ℓ es

$$V_\ell = \begin{cases} \ell(\ell+1)/R^2 + \mu^2, & \text{para un campo escalar de masa asociada } \mu, \\ \ell(\ell+1)/R^2, & \text{para un campo electromagnético.} \end{cases}$$

Para un campo escalar masivo con $\ell = 0$, la condición de regularidad $\phi|_{R=0} = 0$ para toda U (ecuación (5.7)) implica que

$$\partial_U \Psi|_{R=0} = \frac{1}{2} \partial_R \Psi|_{R=0}.$$

En cambio, en el caso de $\ell \neq 0$, ya sea para un campo escalar masivo o un campo electromagnético, se tiene

$$\partial_U \Psi|_{R=0} = \frac{1}{2} \partial_R \Psi|_{R=0} - \frac{1}{2} \ell(\ell+1) \lim_{R \rightarrow 0} \left(\frac{\phi}{R^2} \right),$$

y la regla de l'Hôpital indica que

$$\partial_U \Psi|_{R=0} = \frac{1}{2} \partial_R \Psi|_{R=0} - \frac{1}{4} \ell(\ell+1) \lim_{R \rightarrow 0} \left(\frac{\Psi}{R} \right). \quad (5.15)$$

Para que el último término de la derecha sea regular se necesita $\Psi|_{R=0} = 0$ para toda U . Por un lado esto implica que $\partial_U \Psi|_{R=0} = 0$, y por otro lado, permite aplicar otra vez la regla de l'Hôpital en la ecuación (5.15) para llegar a

$$0 = \left[1 - \frac{1}{2} \ell(\ell+1) \right] \partial_R \Psi|_{R=0}. \quad (5.16)$$

Nótese que para $\ell = 1$ la expresión dentro del corchete se anula y entonces esta condición se satisface automáticamente si $\partial_R \Psi|_{R=0}$ es finita, es decir si Ψ es lineal en R cerca de $R = 0$. Sin embargo, para $\ell > 1$ el interior del corchete no se anula y entonces necesariamente debe ocurrir $\partial_R \Psi|_{R=0} = 0$, es decir: la condición de regularidad requiere que al menos Ψ sea cuadrática en R en una vecindad de $R = 0$.

Ahora se deja el caso de Minkowsky y se considera el fondo general de Tolman-Bondi. En este caso la ecuación de evolución es (ver (5.6))

$$\partial_U \Psi = \frac{1}{2} \partial_R (W \Psi) - \frac{1}{2} V_\ell e^{2\beta} \phi$$

con el potencial V_ℓ :

$$V_\ell = \begin{cases} \ell(\ell+1)/R^2 y^4 + c/y^6 - (Rc' + 3c)/2y^4 r' + \mu^2, & \text{para un campo escalar de masa } \mu, \\ \ell(\ell+1)/R^2 y^4, & \text{para un campo electromagnético.} \end{cases}$$

En el caso de un campo escalar con $\ell = 0$, la condición de regularidad $\phi|_{R=0} = 0$ implica simplemente

$$\partial_U \Psi|_{R=0} = \frac{1}{2} \partial_R (W \Psi)|_{R=0}.$$

En cambio, en el caso de $\ell \neq 0$, ya sea para un campo escalar masivo o para un campo electromagnético, se tiene

$$\begin{aligned} \partial_U \Psi|_{R=0} &= \frac{1}{2} \partial_R (W \Psi)|_{R=0} - \frac{1}{2} \ell(\ell+1) \left. \frac{e^{2\beta}}{y^4} \right|_{R=0} \lim_{R \rightarrow 0} \left(\frac{\phi}{R^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} [(\partial_R W) \Psi + W(\partial_R \Psi)]_{R=0} - \frac{1}{4} \ell(\ell+1) \left. \frac{e^{2\beta}}{y^4} \right|_{R=0} \lim_{R \rightarrow 0} \left(\frac{\Psi}{R} \right), \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde se aplicó la regla de l'Hôpital en el último paso. Nótese que

$$W_0 := W|_{R=0} = \left. \frac{\gamma}{\dot{U}} \right|_{R=0} = - \frac{2y'_0}{\sqrt{c_0(1 - q_0^2 y_0^2)}} \neq 0,$$

donde se ha usado que $\gamma = \sqrt{1 - R^2 q^2 c/r'}$, $r'|_{R=0} = y_0^2$ y $\dot{U}_0 = -\sqrt{c_0(1 - q_0^2 y_0^2)}/2y_0^2 y'_0$. También nótese que

$$\left. \frac{e^{2\beta}}{y^4} \right|_{R=0} = \left. \frac{1}{\gamma \dot{U} y^4} \right|_{R=0} = W_0,$$

y además un cálculo directo revela que $\partial_R W|_{R=0} < \infty$. Luego, para que el último término en el lado derecho de la ecuación (5.17) sea finito, se necesita $\Psi|_{R=0} = 0$ para toda U . Por un lado esto implica que $\partial_U \Psi|_{R=0} = 0$, y por otro lado permite aplicar otra vez la regla de l'Hôpital en la ecuación (5.17), lo que conduce a

$$0 = W_0 \left[1 - \frac{1}{2} \ell(\ell + 1) \right] \partial_R \Psi|_{R=0}.$$

Como $W_0 \neq 0$, entonces valen la mismas conclusiones obtenidas para la ecuación (5.16), es decir: para $\ell = 1$ es suficiente que Ψ sea lineal en R , y para $\ell > 1$ es necesario que Ψ sea al menos cuadrática en R cerca de $R = 0$.

5.2. Análisis numérico

Es importante mostrar que la solución del problema de evolución característica (5.4), además de ser única, es estable en cierto sentido que se precisa más adelante. Dado que no se conoce la solución exacta, se plantea resolverlo por métodos numéricos empleando un esquema de diferencias finitas con operadores diferenciales e integrales particulares, los cuales son consistentes con los operadores continuos correspondientes. Sin embargo, no es claro *a priori* que las soluciones del problema discretizado sean estables bajo este esquema, y tampoco es claro que deban ser convergentes a la solución en el régimen continuo. Saber si las soluciones numéricas serán estables y convergentes es fundamental antes de intentar implementar un algoritmo computacional, y para investigarlo es preciso emplear las herramientas del análisis numérico que se presentan en el Apéndice E. La estrategia es obtener los resultados primero en un caso simplificado del problema y después generalizarlos; es por eso que este estudio se divide en dos amplios apartados: el primero concierne al caso en que los coeficientes de la ecuación de evolución son constantes, y el segundo corresponde al caso de coeficientes variables. El resultado en ambos casos es que el esquema es estable y las soluciones numéricas deben ser convergentes a las exactas, y por lo tanto tiene sentido construir un algoritmo computacional para resolver el problema de propagación de campos de prueba en el fondo de Tolman-Bondi en una vecindad del horizonte de Cauchy, de cuyos resultados se espera obtener información valiosa acerca la estabilidad del mismo.

Dado que el análisis numérico es bastante técnico en este caso y que requiere de algunos conceptos que desviarían significativamente el enfoque de este capítulo, se ha optado por incluirlo completo en el Apéndice E.

5.3. Resultados numéricos

En esta sección se presentan los resultados numéricos del estudio de la propagación campos de prueba Φ no esféricos en la vecindad de una singularidad globalmente desnuda. Para ello se ha elegido el espacio-tiempo de fondo presentado en la figura 3.4. La evolución del campo Φ se determina resolviendo el problema característico formulado en la primera parte de este capítulo: específicamente se resuelve la ecuación de evolución (5.6) para Ψ , donde $\Psi = \partial_R \phi$, y $\phi = r\Phi$ es un campo efectivo re-escalado. Para ilustrar los resultados se ha elegido un campo escalar masivo no esférico, al cual corresponde el potencial efectivo V_ℓ dado en la ecuación (5.12a) con $\ell = 1$ y $\mu = 1$ en unidades geométricas. Para la solución numérica se ha implementado el esquema de diferencias finitas descrito en el Apéndice E junto con un integrador temporal de Runge-Kutta

de cuarto orden de precisión [50]. La malla espacial es uniforme con distancia entre sus puntos $\Delta R = 9.72 \times 10^{-4}$ y el tamaño de paso temporal es $\Delta U = 9.72 \times 10^{-5}$. El dato inicial para el campo efectivo ϕ es un perfil gaussiano de amplitud $A = 0.15R_1$, ancho $\sigma = 0.15R_1$ y centrado en $R_0 = 0.73R_1$, donde R_1 es el radio de área inicial de la nube de polvo que colapsa. Este pulso es posicionado inicialmente de tal manera que el máximo de su amplitud incida sobre una vecindad de la singularidad central (ver la figura 5.1). En la figura 5.2 se muestra la amplitud del campo escalar Φ en función del tiempo propio τ de un observador en caída libre con un cascarón de polvo etiquetado por su radio de área inicial $R = 9.72 \times 10^{-4}R_1$ (muy cercano al centro de la nube). La evolución termina cuando τ se aproxima al tiempo propio en que comienza a formarse la singularidad respecto al centro de la nube, τ_s^0 , sobrepasando una tolerancia $\Delta\tau = 1.0 \times 10^{-4}$.

La figura 5.2 hace evidente que la amplitud del campo escalar es acotada en la vecindad de la singularidad, es decir, cuando $\tau \rightarrow \tau_s^0$. Aquí se muestra un caso representativo, no obstante se ha experimentado con distintos valores de ℓ , μ , A , σ , R_0 , e incluso cambiando los parámetros del espacio-tiempo de fondo o usando el potencial efectivo correspondiente a un campo electromagnético, y se han obtenido cualitativamente los mismos resultados. Como prueba de la efectividad

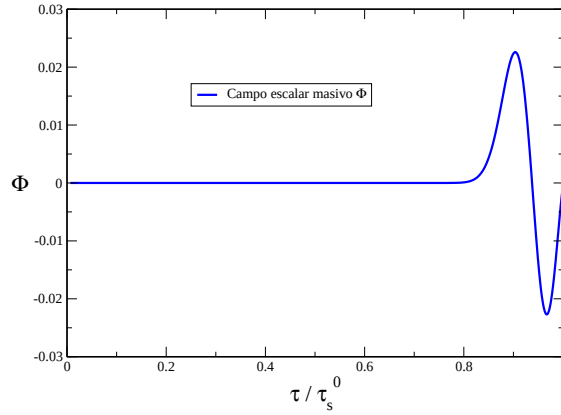


Figura 5.2: Amplitud del campo escalar de prueba masivo y no esférico Φ como función del tiempo propio de un observador en caída libre muy cerca del centro de la nube ($R = 9.72 \times 10^{-4}R_1$).

del algoritmo numérico, en la figura 5.3 se grafica la magnitud del error relativo $|\Phi_i - \Phi_{i-1}|$ en función de τ , donde Φ_1 es calculada con el tamaño de paso ΔR , Φ_2 es calculada con $\Delta R/2$ y así sucesivamente. El hecho de que la magnitud que el error numérico disminuya al aumentar la resolución, muestra que la solución es auto-convergente.

5.4. Discusión

En este capítulo se ha implementado una estrategia numérica para estudiar la evolución de campos de prueba no esféricos en la vecindad de una singularidad globalmente desnuda y el horizonte de Cauchy asociado. Antes de realizar cualquier experimento numérico, si se tiene en

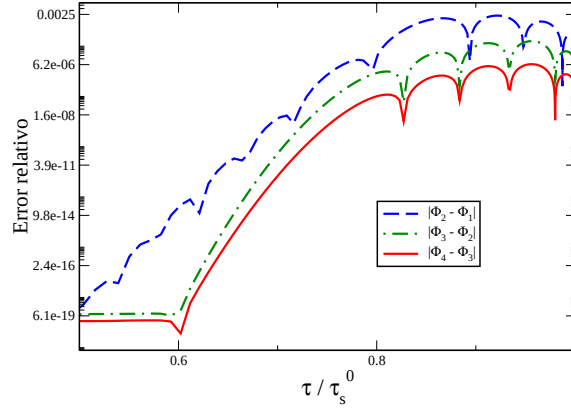


Figura 5.3: Prueba de la efectividad del algoritmo que calcula numéricamente el campo Φ . Se muestra que la magnitud del error relativo $|\Phi_i - \Phi_{i-1}|$ disminuye al aumentar la resolución numérica, lo que indica auto-convergencia de la solución.

cuenta la divergencia del producto $V_\ell e^{2\beta}$ en la fuente de la ecuación de evolución, y si se piensa que la conjetura de la censura cósmica debería ser válida dentro de este modelo, entonces uno esperaría encontrar algún comportamiento anómalo cuando los campos de prueba evolucionan cerca de la singularidad, como una divergencia de su amplitud, por ejemplo. Sin embargo, el resultado numérico no es consistente con esa intuición, pues la figura 5.2 (junto con la prueba de auto-convergencia 5.3), sugiere que el campo de prueba es bien comportado en la vecindad de la singularidad y por lo tanto no se tiene evidencia de alguna inestabilidad. En otras palabras, no se tienen elementos que permitan descartar la violación de la conjetura de la censura cósmica dentro del modelo de Tolman-Bondi cuando se perturba la singularidad desnuda con la propagación de campos de prueba fuera de simetría esférica. Esta observación motiva el trabajo del siguiente capítulo, el cual constituye la tercera parte de los estudios de estabilidad, donde se retoma el trabajo analítico para tratar de demostrar rigurosamente los hallazgos numéricos.

Capítulo 6

Estabilidad de singularidades desnudas III: estimaciones de energía para campos de prueba fuera de simetría esférica

En el presente capítulo se continúa con la línea de estudio iniciada en los anteriores, el cual concierne al estudio de la estabilidad del horizonte de Cauchy asociado a una singularidad globalmente desnuda que proviene del colapso gravitacional total de una nube de polvo esféricamente simétrica, cuyo espacio-tiempo interior está descrito por la métrica de Tolman-Bondi discutida en el Capítulo 3. Vale la pena mencionar que el orden de presentación de los capítulos de este trabajo corresponde al orden cronológico en que se desarrolló el estudio, de modo que la motivación del presente apartado proviene de las conclusiones previas: en vista de que los resultados numéricos sugieren que los campos de prueba no esféricos son bien comportados cuando se propagan arbitrariamente cerca del horizonte de Cauchy, uno se plantea retomar el trabajo analítico para intentar demostrar rigurosamente que tales campos son acotados, y ese es justamente el problema que se aborda en este capítulo. Como se mencionó previamente, algunos ejemplos conocidos de este tipo de campos son: campos electromagnéticos, o campos escalares -ya sean masivos o no-, con momento angular no trivial. La principal dificultad al tratar este tipo de campos yace en que no se puede generalizar el resultado del Lema 4.3.1 para $\ell \geq 1$ (y en consecuencia tampoco el Teorema 4.3.2) puesto que el potencial efectivo involucrado en la ecuación que gobierna la propagación del campo resulta no ser integrable en una vecindad de la singularidad. Este hecho sugiere cambiar de estrategia y atacar el problema utilizando una herramienta conocida como *estimaciones de energía*, la cual a grandes rasgos funciona de la siguiente manera: dado el tensor de energía impulso $\mathbf{T}$ correspondiente al campo en cuestión, el cual típicamente proviene de una teoría fundamental y tiene divergencia cero como consecuencia de las ecuaciones de movimiento para el campo, la idea es encontrar un campo vectorial $\mathbf{X}$ respecto al cual pueda definirse una densidad de corriente $\mathbf{J}_{\mathbf{X}}$ mediante $J_{\mathbf{X}}^{\mu} := -T^{\mu}_{\nu} X^{\nu}$, tal que se cumpla la condición de energía dominante,¹ y luego una *energía* asociada a $\mathbf{J}_{\mathbf{X}}$ que obedezca cierta ley de balance en una región

¹Es decir que $\mathbf{J}_{\mathbf{X}}$ sea causal y dirigido hacia el futuro.

dada de la variedad de fondo (no se trata necesariamente de una energía física). El siguiente paso es verificar que esa *energía* sea uniformemente acotada en cualquier superficie espacial, y ese hecho a su vez permite acotar la energía del campo medida por observadores en caída libre con el polvo que colapsa, y finalmente -con ayuda de una estimación de Sobolev- establecer cotas sobre la amplitud del campo y de su gradiente. El método de estimaciones de energía funciona típicamente en geometrías estáticas como el espacio-tiempo de Schwarzschild [60], donde resulta natural elegir a $\mathbf{X}$ como el vector de Killing que genera la simetría temporal. En cambio en el caso de una geometría de fondo dinámica y singular como la de Tolman-Bondi resulta inesperado que el método funcione puesto que no hay una elección natural para el campo $\mathbf{X}$. Sin embargo en este capítulo se muestra cómo es posible hacerlo. En la primera sección se establecen algunas herramientas preliminares, se introduce un campo $\mathbf{X}$ conveniente, luego se define una energía y se comprueba que ésta es uniformemente acotada. Luego en la Sección 6.2 se realizan las estimaciones que implican que la energía del campo es acotada, así como los flujos a través de superficies nulas. En las Sub-secciones 6.2.1 y 6.2.2 respectivamente, se consideran los tensores particulares de energía-impulso asociados a campos escalares no esféricos y a campos electromagnéticos, y se describe explícitamente su energía uniformemente acotada. Finalmente, en la Sección 6.2.3 se considera un campo escalar de prueba no esférico Φ y se muestra que el campo re-escalado $\sqrt{r}|\Phi|$ es uniformemente acotado, lo que implica que la amplitud del campo $|\Phi|$ es uniformemente acotada excepto posiblemente sobre la singularidad central ($r = 0$). La importancia de este resultado, el cual -como era de esperarse- es consistente con las simulaciones numéricas discutidas en el capítulo anterior, radica en que no proporciona evidencia de inestabilidad del horizonte de Cauchy bajo la propagación de campos escalares de prueba no esféricos, lo cual será discutido más adelante.

6.1. Preliminares

En esta primera sección se proporcionan algunos resultados preliminares que serán útiles para las estimaciones de energía. A lo largo de todo este capítulo se asume que el espacio-tiempo de fondo $(M, \mathbf{g})$ es fijo y está descrito por la métrica de Tolman-Bondi. Además se usan las descomposiciones $M = \tilde{M} \times S^2$ y $\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{g}} + r^2 \hat{\mathbf{g}}$ discutidas en el Capítulo 2, y se asume que el campo vectorial $\mathbf{u}$ es la quadri-velocidad de los observadores en caída libre con el polvo que colapsa, y que $\mathbf{w}$ es el campo radial ortonormal a $\mathbf{u}$. A lo largo de este capítulo también se utilizarán los campos vectoriales radiales nulos $\mathbf{k}_\pm := \mathbf{u} \pm \mathbf{w}$ salientes y entrantes, respectivamente.

Lema 6.1.1 *Sea $\mathbf{T}$ un tensor de energía-impulso con divergencia cero, asociado a un campo arbitrario Φ que satisface la condición de energía dominante sobre el fondo de Tolman-Bondi. Considérese un campo vectorial tipo tiempo dirigido hacia el futuro $\mathbf{X}$. Entonces existe una constante C tal que*

$$|\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{w})| \leq C\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{u}). \quad (6.1)$$

Demostración. Defínase la densidad de corriente con respecto al campo vectorial $\mathbf{X}$ como $J_{\mathbf{X}}^\mu := -T^\mu{}_\nu X^\nu$. La condición de energía dominante establece que $\mathbf{J}_{\mathbf{X}}$ es un vector causal dirigido hacia el futuro. Considérese una tetraeda ortonormal $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$ adaptada al flujo de polvo, donde $\{\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$ es la base ortonormal usual del espacio tangente de la 2-esfera en cada punto. Supóngase primero que $\mathbf{X} = \mathbf{u}$, entonces $J_{\mathbf{u}}^\mu = -T^\mu{}_\nu u^\nu = -T^\mu{}_0$, y en ese caso la desigualdad (6.1) se reduce a $|\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{w})| \leq C\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$. El hecho de que $\mathbf{J}_{\mathbf{u}}$ sea dirigido al futuro implica que $T_{00} > 0$,

mientras que la causalidad implica que

$$0 \geq J_{\mathbf{u}}^\mu J_{\mathbf{u}\mu} = T^0_0 T_{00} + T^j_0 T_{j0} = -(T_{00})^2 + \sum_{j=1}^3 (T_{j0})^2,$$

y por lo tanto

$$|T_{10}| \leq T_{00}, \quad (6.2)$$

lo que demuestra el lema para el caso $\mathbf{X} = \mathbf{u}$. Ahora sean $\alpha > 0$ y $\beta^2 < 1$. Otro campo vectorial tipo tiempo y dirigido al futuro es $\mathbf{X} = \alpha(\mathbf{u} + \beta\mathbf{w})$. Al respecto nótese que

$$T_{\mu\nu} X^\mu u^\nu = \alpha(T_{00} + \beta T_{01}) \geq \alpha(T_{00} - |\beta||T_{01}|) \geq \alpha(1 - |\beta|)T_{00},$$

donde se ha usado la desigualdad (6.2) en el último paso. Similarmente se obtiene $T_{\mu\nu} X^\mu u^\nu \leq \alpha(1 + |\beta|)T_{00}$, entonces $\alpha(1 - |\beta|)T_{00} \leq T_{\mu\nu} X^\mu u^\nu \leq \alpha(1 + |\beta|)T_{00}$, que junto con la desigualdad (6.2) implica

$$|T_{01}| \leq \frac{\alpha(1 - |\beta|)}{\alpha(1 + |\beta|)} T_{00} \leq C T_{\mu\nu} X^\mu u^\nu,$$

con $C := [\alpha(1 - |\beta|)]^{-1}$, lo cual demuestra el lema para $\mathbf{X} = \alpha(\mathbf{u} + \beta\mathbf{w})$. $\square$

6.1.1. La ecuación de balance

En esta sub-sección se obtiene una ecuación de balance a partir de la densidad de corriente $\mathbf{J}_{\mathbf{X}}$, primero en una carta local con coordenadas arbitrarias y después en coordenadas co-móviles sincronizadas y doble-nulas. Como primer paso se calcula la divergencia de la corriente $\mathbf{J}_{\mathbf{X}}$, que en virtud de que el tensor de energía-impulso $\mathbf{T}$ tiene divergencia cero, resulta ser $\nabla_\mu J_{\mathbf{X}}^\mu = -T^{\mu\nu} \nabla_\mu X_\nu$, donde el término de la derecha no se anula en general puesto que $\mathbf{X}$ no necesariamente es un vector de Killing, lo cual motiva el siguiente paso: definir la *fente* asociada a $\mathbf{T}$ y a $\mathbf{X}$:

$$S_{\mathbf{X}} := -T^{\mu\nu} \nabla_\mu X_\nu.$$

Para obtener una ley de balance hay que integrar ambos lados de la ecuación $\nabla_\mu J_{\mathbf{X}}^\mu = S_{\mathbf{X}}$ sobre un dominio cerrado $\Omega \subset M$. En una carta local con coordenadas arbitrarias $\{x^\mu\}$ esto es:

$$\int_{\Omega} \nabla_\mu J_{\mathbf{X}}^\mu \sqrt{|g|} d^4x = \int_{\Omega} S_{\mathbf{X}} \sqrt{|g|} d^4x, \quad \text{con} \quad \nabla_\mu J_{\mathbf{X}}^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} J_{\mathbf{X}}^\mu).$$

Aplicando el teorema de Gauss en $\mathbb{R}^4$ con la normal unitaria $\mathbf{n}$ sobre la frontera de Ω , $\partial\Omega$, se tiene

$$\int_{\partial\Omega} J_{\mathbf{X}}^\mu n_\mu \sqrt{|g|} d^3x = \int_{\Omega} S_{\mathbf{X}} \sqrt{|g|} d^4x. \quad (6.3)$$

Supóngase que el dominio Ω queda fuera del horizonte de Cauchy y que su frontera $\partial\Omega$ se puede dividir en N segmentos no triviales $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2, \dots, \partial\Omega_N$, entonces el lado izquierdo de la ecuación de balance (6.3) se puede descomponer de la siguiente manera:

$$\int_{\partial\Omega} J_{\mathbf{X}}^\mu n_\mu \sqrt{|g|} d^3x = \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega_i} J_{\mathbf{X}}^\mu n_\mu^{(i)} \sqrt{|g|} d^3x =: \sum_{i=1}^N I_i,$$

donde la normal unitaria $\mathbf{n}^{(i)}$ corresponde al segmento de frontera $\partial\Omega_i$. En el resto de esta sub-sección se introducen cartas particulares del espacio-tiempo de Tolman-Bondi y se define la descomposición el dominio Ω respecto a ellas, lo cual permitirá calcular de manera explícita las integrales de frontera del lado izquierdo de la ecuación de balance (6.3). Sobre la 2-esfera $(S^2, \hat{\mathbf{g}})$ se toman siempre las coordenadas estándar $\{\theta, \varphi\}$, en cambio sobre la 2-variedad $(\tilde{M}, \tilde{\mathbf{g}})$ se eligen alternativamente dos conjuntos de coordenadas, a saber, las co-móviles sincronizadas $\{\tau, R\}$ y las doble-nulas $\{u, v\}$. Como se discutió en los capítulos anteriores, en las coordenadas $\{\tau, R, \theta, \varphi\}$ la métrica de Tolman-Bondi tiene la forma

$$\mathbf{g} = -d\tau^2 + \frac{1}{\gamma(\tau, R)^2} dR^2 + r^2 \hat{\mathbf{g}} \quad \text{y} \quad \sqrt{|g|} = r^2 \sqrt{|\tilde{g}|} \sqrt{|\hat{g}|} = \frac{r^2}{\gamma} \sqrt{|\hat{g}|},$$

en cambio en las coordenadas $\{u, v, \theta, \varphi\}$,

$$\mathbf{g} = -\frac{1}{\dot{u}\dot{v}} du dv + r^2 \hat{\mathbf{g}} \quad \text{y} \quad \sqrt{|g|} = r^2 \sqrt{|\tilde{g}|} \sqrt{|\hat{g}|} = \frac{r^2}{2\dot{u}\dot{v}} \sqrt{|\hat{g}|},$$

donde el punto denota derivación parcial respecto a τ con R constante.

En particular considérese un dominio Ω como el de la figura 6.1, el cual se servirá para formular la ecuación de balance. Sin pérdida de generalidad se eligen las fronteras $\partial\Omega_2$ y $\partial\Omega_5$ de tal manera que sean superficies nulas con u y v constantes, respectivamente. En contraste, las fronteras $\partial\Omega_1$ y $\partial\Omega_4$ están adaptadas a superficies de τ_2 y τ_1 constantes, respectivamente, mientras que $\partial\Omega_3$ está adaptada a la superficie de $R = 0$. Para calcular las integrales de frontera I_1 , I_3 e I_4 se

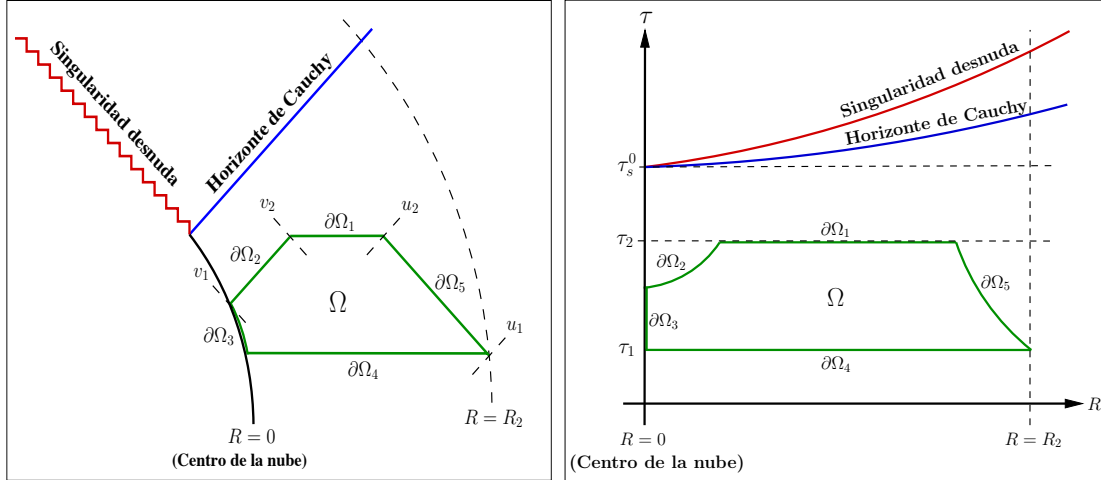


Figura 6.1: Ilustración idealizada de la región particular $\Omega \subset M$ considerada para escribir explícitamente la ley de balance 6.3. En el panel izquierdo se usan coordenadas conformes $\{T, X, \theta, \varphi\}$ y en el panel derecho se usan coordenadas co-móviles sincronizadas $\{\tau, R, \theta, \varphi\}$. En ambos diagramas están suprimidas las coordenadas angulares.

trabaja en la carta de coordenadas $\{\tau, R, \theta, \varphi\}$, donde los vectores normales convenientes son,

respectivamente:

$$\left(n_\mu^{(1)}\right) = (1, 0, 0, 0)^T, \quad \left(n_\mu^{(3)}\right) = (0, -1, 0, 0)^T, \quad \left(n_\mu^{(4)}\right) = (-1, 0, 0, 0)^T,$$

luego

$$I_1 = \int_0^{R_2} \left\langle r^2 J_{\mathbf{X}}^\tau \right\rangle_{S^2} \frac{dR}{\gamma} \Big|_{\tau=\tau_2}, \quad I_3 = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\langle r^2 J_{\mathbf{X}}^R \right\rangle_{S^2} \frac{d\tau}{\gamma} \Big|_{R=0}, \quad I_4 = - \int_0^{R_2} \left\langle r^2 J_{\mathbf{X}}^\tau \right\rangle_{S^2} \frac{dR}{\gamma} \Big|_{\tau=\tau_1},$$

con $R_2 > 0$, $\tau_2 > \tau_1$, y $\langle f \rangle_{S^2} := \int_{S^2} f \sqrt{|\hat{g}|} d\theta d\varphi$ denota integración sobre la 2-esfera. Nótese que si $\mathbf{J}_{\mathbf{X}}$ es regular en el centro, entonces $I_3 = 0$ puesto que $r(\tau, 0) = 0$ para todo τ . Para calcular las integrales de frontera I_2 e I_5 se trabaja en la carta de coordenadas $\{u, v, \theta, \varphi\}$, donde los vectores normales útiles en este caso son:

$$\left(n_\mu^{(2)}\right) = (1, 0, 0, 0)^T, \quad \left(n_\mu^{(5)}\right) = (0, 1, 0, 0)^T,$$

entonces

$$I_2 = \int_{v_1}^{v_2} \left\langle \frac{r^2}{\dot{u}\dot{v}} J_{\mathbf{X}}^u \right\rangle_{S^2} dv \Big|_{u=u_2}, \quad I_5 = \int_{u_1}^{u_2} \left\langle \frac{r^2}{\dot{u}\dot{v}} J_{\mathbf{X}}^v \right\rangle_{S^2} du \Big|_{v=v_2},$$

con $u_1, v_1 > 0$ y $u_2 > u_1$, $v_2 > v_1$. Enseguida se calculan las componentes de la densidad de corriente $\mathbf{J}_{\mathbf{X}}$ necesarias para efectuar las integraciones. En la base ortonormal $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ se tiene $\mathbf{J}_{\mathbf{X}} = J_{\mathbf{X}}^0 \mathbf{u} + J_{\mathbf{X}}^1 \mathbf{w}$, donde $J_{\mathbf{X}}^0 = -J_{\mathbf{X}}^\nu u_\nu = T_{\mu\nu} X^\mu u^\nu$ y $J_{\mathbf{X}}^1 = J_{\mathbf{X}}^\nu w_\nu = -T_{\mu\nu} X^\mu w^\nu$. Luego, las formas particulares de $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ en cada carta particular, $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\} = \{\partial_\tau, \gamma \partial_R\}$ y $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\} = \{\dot{u} \partial_u + \dot{v} \partial_v, -\dot{u} \partial_u + \dot{v} \partial_v\}$ conducen a

$$J_{\mathbf{X}}^\tau = J_{\mathbf{X}}^0 = T_{\mu\nu} X^\mu u^\nu, \quad J_{\mathbf{X}}^R = \gamma J_{\mathbf{X}}^1 = -\gamma T_{\mu\nu} X^\mu w^\nu,$$

y

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{X}}^u &= \dot{u} (J_{\mathbf{X}}^0 - J_{\mathbf{X}}^1) = \dot{u} T_{\mu\nu} X^\mu (u^\nu + w^\nu) = \dot{u} T_{\mu\nu} X^\mu k_+^\nu, \\ J_{\mathbf{X}}^v &= \dot{v} (J_{\mathbf{X}}^0 + J_{\mathbf{X}}^1) = \dot{v} T_{\mu\nu} X^\mu (u^\nu - w^\nu) = \dot{v} T_{\mu\nu} X^\mu k_-^\nu. \end{aligned}$$

Introduciendo estas componentes en las expresiones para las integrales de frontera I_1 - I_5 , en resumen se tiene:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{R_2} \left\langle r^2 T_{\mu\nu} X^\mu u^\nu \right\rangle_{S^2} \frac{dR}{\gamma} \Big|_{\tau=\tau_2}, \\ I_2 &= \int_{v_1}^{v_2} \left\langle r^2 T_{\mu\nu} X^\mu k_+^\nu \right\rangle_{S^2} \frac{dv}{\dot{v}} \Big|_{u=u_2}, \\ I_3 &= 0, \\ I_4 &= - \int_0^{R_2} \left\langle r^2 T_{\mu\nu} X^\mu u^\nu \right\rangle_{S^2} \frac{dR}{\gamma} \Big|_{\tau=\tau_1}, \\ I_5 &= \int_{u_1}^{u_2} \left\langle r^2 T_{\mu\nu} X^\mu k_-^\nu \right\rangle_{S^2} \frac{du}{\dot{u}} \Big|_{v=v_2}. \end{aligned}$$

Ahora puede definirse la *energía* asociada a una superficie de τ constante (tipo espacio), Σ_τ :

$$E(\tau) := \int_{\Sigma_\tau} \langle r^2 \mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{u}) \rangle_{S^2} \frac{dR}{\gamma}, \quad (6.4)$$

la cual es definida positiva en virtud de que el campo vectorial $\mathbf{X}$ es causal y dirigido hacia el futuro. Nótese que $I_1 = E(\tau_2) > 0$ e $I_4 = -E(\tau_1) < 0$. Además los *flujos* a través de superficies de u y v constantes (Σ_u y Σ_v), respectivamente se definen como:

$$F(u) := \int_{\Sigma_u} \langle r^2 \mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{k}_+) \rangle_{S^2} \frac{dv}{\dot{v}} \quad \text{y} \quad F(v) := \int_{\Sigma_v} \langle r^2 \mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{k}_-) \rangle_{S^2} \frac{du}{\dot{u}}, \quad (6.5)$$

los cuales también son definidos positivos. Nótese que $I_2 = F(u_2) > 0$ e $I_5 = F(v_2) > 0$, y entonces la ecuación de balance (6.3) en términos de las energías y los flujos toma la forma

$$E(\tau_2) - E(\tau_1) + F(u_2) + F(v_2) = \int_{\Omega} S_{\mathbf{X}} \sqrt{|g|} d^4x. \quad (6.6)$$

6.1.2. La fuente de la ecuación de balance

En este apartado se presentan las herramientas técnicas necesarias para calcular la fuente $S_{\mathbf{X}}$ que aparece en el lado derecho de la ecuación de balance (6.6). Recordando su definición, $S_{\mathbf{X}} := -T^{\mu\nu} \nabla_\mu X_\nu$, la primera observación es que ahora se hace necesario definir el campo vectorial $\mathbf{X}$ y calcular su gradiente simetrizado $\nabla_{(\mu} X_{\nu)}$. Una elección natural en el caso de un espacio-tiempo estacionario es $\mathbf{X} = \mathbf{k}$, donde $\mathbf{k}$ es el vector de Killing que genera la simetría temporal. En ese caso $S_{\mathbf{k}} = 0$ como consecuencia de la ecuación de Killing y entonces de la ecuación (6.6) se obtiene directamente la siguiente estimación de energía: $E(\tau_2) = E(\tau_1) - F(u_2) - F(v_2) \leq E(\tau_1)$. En nuestro caso, como el espacio-tiempo de Tolman-Bondi es dinámico, no existe un vector de Killing tipo tiempo dentro de la nube, y por lo tanto no hay una elección evidente para $\mathbf{X}$. Una elección simple es tomar $\mathbf{X}$ igual a la quadri-velocidad de las partículas de polvo, $\mathbf{X} = \mathbf{u}$, pero esta elección no resulta ser conveniente. Para explicar ese punto se calcula el gradiente de $\mathbf{u}$:

$$\nabla_a u_b = -\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} w_a w_b, \quad \nabla_a u_B = 0, \quad \nabla_A u_b = 0, \quad \nabla_A u_B = \hat{g}_{AB} r \dot{r},$$

donde $\{x^a\}$ y $\{x^A\}$ son coordenadas locales arbitrarias sobre $\tilde{M}$ y S^2 , respectivamente. Lo anterior conduce a la fuente

$$S_{\mathbf{u}} = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \mathbf{T}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) - \frac{\dot{r}}{r} T^A{}_A.$$

Evaluando explícitamente los dos coeficientes $\dot{\gamma}/\gamma$ y $\dot{r}/r$ se obtiene

$$\frac{\gamma}{\dot{\gamma}} = \frac{\sqrt{c}}{y^3} \frac{H(y, R)}{1 + \frac{R^2}{y^3} \sqrt{1 - q^2 y^2} \Lambda(y, R)}, \quad (6.7)$$

$$\frac{\dot{r}}{r} = -\frac{\sqrt{c}}{y^3} \sqrt{1 - q^2 y^2}, \quad (6.8)$$

donde la función regular $H(y, R)$ fue definida en la ecuación (4.16). Claramente, ambos coeficientes divergen como $1/y^3$ cerca de la singularidad central. Como se verá más abajo, esa divergencia es demasiado pronunciada como para obtener una cota uniforme para la energía. Intuitivamente,

esta divergencia es de esperarse puesto que los cascarones de polvo convergen hacia el centro de la nube. La idea central ahora es evitar que el campo $\mathbf{X}$ converja al centro de la nube junto con los cascarones, y para lograrlo se elige

$$\mathbf{X} = \gamma r' \mathbf{u} - \dot{r} \mathbf{w}.$$

Este campo satisface las siguientes propiedades:

- (a) $\mathbf{X}[r] = 0$,
- (b) $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = -(1 - R^2 c / y^2)$,
- (c) $-\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{u}) = \gamma r' = \sqrt{1 - R^2 q^2 c} > 0$,
- (d) $\nabla_a X_b = \dot{r} u_a w_b + \left[\frac{\dot{r}}{\gamma} + \gamma(\gamma r')' \right] w_a u_b$, $\nabla_a X_B = \nabla_A X_b = 0$ y $\nabla_A X_B = 0$.

Como consecuencia de la propiedad (a) se tiene que $\mathbf{X}$ es paralelo a las líneas de r constante. La propiedad (b) implica que el vector $\mathbf{X}$ es tipo tiempo en la región exterior del horizonte aparente ($y > y_{AH}(R) = R\sqrt{c}$), lo cual junto con la propiedad (c) implica que $\mathbf{X}$ es dirigido hacia el futuro, y por lo tanto satisface las hipótesis del Lemma 6.1.1. Finalmente, la propiedad (d) conduce a la siguiente fuente:

$$S_{\mathbf{X}} = -T^{\mu\nu} \nabla_\mu X_\nu = - \left[\frac{1}{\gamma} (\gamma \dot{r})' + \gamma (\gamma r')' \right] \mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{w}). \quad (6.9)$$

Un cálculo explícito usando las ecuaciones (2.12)- (2.13) muestra que

$$\frac{1}{\gamma} (\gamma \dot{r})' + \gamma (\gamma r')' = -\frac{k}{2} r \rho = -\frac{Rc}{2y^4} \frac{3 + R \frac{c'}{c}}{1 + \frac{R^2}{y^3} \sqrt{1 - q^2 y^2} \Lambda(y, R)}. \quad (6.10)$$

Dado que R^2/y^3 es acotado en el dominio $D(\varepsilon)$ (ver la figura (4.1)), la expresión (6.10) diverge como $1/y^{5/2}$ cerca de la singularidad. Como se demuestra enseguida, esta pequeña diferencia en el exponente que caracteriza la divergencia de la fuente (5/2 en lugar de 3), permite obtener una cota uniforme para la energía $E(\tau)$. Nótese que la parte derecha de la ecuación (6.10) se anula en la región exterior de la nube.

Para lo que sigue se usa el siguiente resultado:

Lema 6.1.2 *Sea $\tau_s(R)$ el tiempo propio que le toma llegar a la singularidad a un cascarón esférico de radio de área inicial R , entonces valen las siguientes desigualdades:*

$$\frac{2}{3} \frac{1}{\tau_s(R) - \tau} \leq \frac{\sqrt{c}}{y^3} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\tau_s(R) - \tau}. \quad (6.11)$$

Demostración.

Considérese la primera ecuación de (3.9), que explícitamente se ve como $\tau = [f(qy) - f(q)]/\sqrt{cq^3}$, con $f(x) = x\sqrt{1 - x^2} + \arccos(x)$ definida en (3.6) para $0 \leq x \leq 1$. Usando las desigualdades:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} x^3 \geq f(x) \geq \frac{\pi}{2} (1 - x^3), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

por sustitución directa se obtiene

$$\frac{\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}(qy)^3 - f(q)}{\sqrt{cq^3}} \geq \tau \geq \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(qy)^3 - f(q)}{\sqrt{cq^3}}.$$

La afirmación se obtiene recordando que $\tau_s(R) = [\pi/2 - f(q)]/(\sqrt{cq^3})$. $\square$

Como consecuencia del lema anterior y los comentarios posteriores a la ecuación (6.10), se ha demostrado la siguiente:

Proposición 6.1.1 *Considérese el espacio-tiempo de Tolman-Bondi con las supociones (i)-(viii) discutidas en el Capítulo 3. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que fuera del horizonte de Cauchy vale la siguiente estimación:*

$$\left| \frac{1}{\gamma} (\gamma \dot{r}) + \gamma (\gamma r')' \right| \leq \frac{C}{(\tau_s(R) - \tau)^{5/6}}.$$

Proposición 6.1.2 *Considérese el dominio finito $\Omega \subset M$ ilustrado en la figura 6.1. Sea $E(\tau)$ la energía definida para superficies espaciales de τ constante en la ecuación (6.4). Entonces vale la cota superior*

$$E(\tau_2) - E(\tau_1) \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \alpha(\tau) E(\tau) d\tau, \quad \tau_2 > \tau_1 > 0,$$

donde $\alpha(\tau)$ es una función no negativa e integrable, es decir

$$\int_0^\infty \alpha(\tau) d\tau < \infty.$$

Demostración. Dado que los flujos (6.5) son positivos, entonces a partir de la ecuación de balance (6.6) se tiene

$$E(\tau_2) - E(\tau_1) \leq \int_{\Omega} S_{\mathbf{X}} \sqrt{|g|} d^4x.$$

Sustituyendo la fuente (6.9) en la ecuación de balance (6.6) y usando los resultados de los Lemas 6.1.1 y 6.1.1, así como el hecho de que los flujos son positivos, se obtiene

$$\begin{aligned} E(\tau_2) - E(\tau_1) &\leq C \int_{\Omega} (\tau_s(R) - \tau)^{-5/6} \mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{u}) \sqrt{|g|} d^4x \\ &= C \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{R_1(\tau)}^{R_2(\tau)} \left\langle (\tau_s(R) - \tau)^{-5/6} r^2 \mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{u}) \right\rangle_{S^2} \frac{dR}{\gamma} d\tau. \\ &\leq C \int_{\tau_1}^{\tau_2} \max_{R_1(\tau) \leq R \leq R_2(\tau)} (\tau_s(R) - \tau)^{-5/6} \int_{R_1(\tau)}^{R_2(\tau)} \left\langle r^2 \mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{u}) \right\rangle_{S^2} \frac{dR}{\gamma} d\tau \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \alpha(\tau) E(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

donde $\alpha(\tau) := C \max_{R_1(\tau) \leq R \leq R_2(\tau)} (\tau_s(R) - \tau)^{-5/6}$. A continuación se estima $\alpha(\tau)$ para los tres casos siguientes:

Caso 1. $0 \leq \tau \leq \tau_s^0$ (ver la figura 6.1).

Claramente en este caso $\tau_s^0 - \tau \geq 0$. Por otro lado siempre se tiene $\tau_s(R) \geq \tau_s^0$ para toda R , por lo tanto $\tau_s(R) - \tau \geq \tau_s^0 - \tau \geq 0$. Como consecuencia,

$$\alpha(\tau) \leq C (\tau_s^0 - \tau)^{-5/6},$$

y para todo $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 < \tau_s^0$ vale

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \alpha(\tau) d\tau \leq \int_0^{\tau_s^0} \alpha(\tau) d\tau = 6C (\tau_s^0)^{1/6} < \infty.$$

Caso 2. $\tau_s^0 < \tau \leq \tau_*$, donde τ_* es el tiempo propio de un observador en la superficie de la nube en el momento en que cruza el horizonte de Cauchy (ver la figura 6.2).

En este caso no es trivial demostrar que la integral de $\alpha(\tau)$ es finita. La parte no trivial consiste

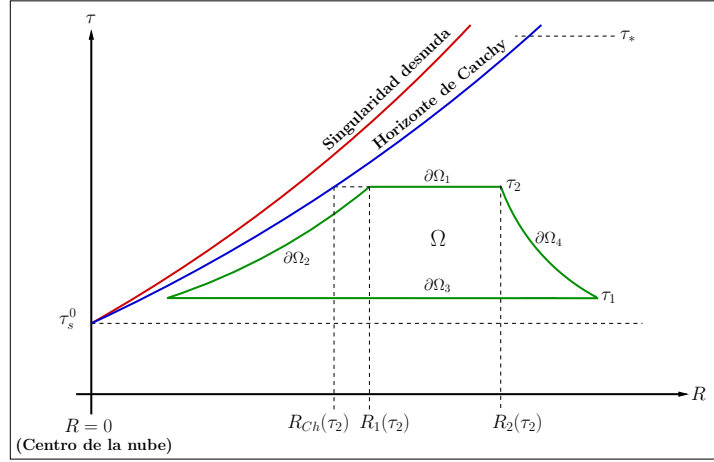


Figura 6.2: Ilustración idealizada del dominio Ω considerado en las estimaciones de energía.

en demostrar que $\alpha(\tau)$ es integrable en una vecindad de la singularidad central $(\tau_s^0, \tau_s^0 + \epsilon)$, $\epsilon > 0$. (la integrabilidad sobre $[\tau_s^0 + \epsilon, \tau_*]$ es inmediata en virtud de la continuidad de $\alpha(\tau)$). Para verlo se comienza con la siguiente estimación:

$$\max_{R_1(\tau) \leq R \leq R_2(\tau)} (\tau_s(R) - \tau)^{-5/6} = (\tau_s(R_1(\tau)) - \tau)^{-5/6} \leq (\tau_s(R_{Ch}(\tau)) - \tau)^{-5/6},$$

donde $R_{Ch}(\tau)$ es la coordenada R con la cual la superficie de τ constante intersecta al horizonte de Cauchy (ver la figura 6.2). Enseguida se debe estimar $\tau_s(R_{Ch}(\tau)) - \tau$, y para ello resulta útil la expansión obtenida a partir de los resultados sobre el comportamiento de los rayos nulos en el Capítulo 3,

$$\tau_s(R) = \tau_s^0 + \frac{\Lambda_0}{2\sqrt{c_0}} R^2 + \mathcal{O}(R^4), \quad (6.12)$$

donde Λ_0 fue definida en la ecuación (3.18). A partir de ello se puede escribir

$$\tau_s(R_{Ch}(\tau)) - \tau = \tau_s^0 - \tau + \frac{\Lambda_0}{2\sqrt{c_0}} R_{Ch}(\tau)^2 + \mathcal{O}(R_{Ch}(\tau)^4). \quad (6.13)$$

Ahora el objetivo es estimar $R_{Ch}(\tau)$ y sustituirla en la ecuación (6.13). Esto se logra de la siguiente manera: primero se usa la ecuación (3.9) y la expansión $f(x) = \pi/2 - 2x^3/3 + \mathcal{O}(x^5)$ para obtener la siguiente parametrización del horizonte de Cauchy:

$$\tau_{Ch}(R) = \frac{f(q(R)y_{Ch}(R)) - f(q(R))}{\sqrt{c(R)}q(R)^3} = \tau_s(R) - \frac{2}{3\sqrt{c(R)}} y_{Ch}(R)^3 + \mathcal{O}(q(R)^5 y_{Ch}(R)^5).$$

Enseguida hay que recordar que en la Proposición 3.2.2 se estableció que cerca de la singularidad central, $y_{Ch}(R) = \lambda x^2 [1 + z(x)]^{1/3}$ con $x = (R/R_1)^{1/3}$, $\lambda = (3R_1^2 \Lambda_0/4)^{1/3}$ y z una función de la forma $z(x) = z'_0 x + \mathcal{O}(x^2)$. Además, antes de dicha Proposición, en la ecuación (3.20), se da implícitamente una función $F(x, z)$ tal que $F(0, 0)/7 = z'_0$, ver el Teorema A.0.1. En el presente problema se requiere el término lineal de la función z , y éste se puede obtener expandiendo la función $x F(x, z)$ a primer orden y evaluando en $(0, 0)$. El resultado para rayos nulos salientes es $F(0, 0)/7 = -3R_1 \sqrt{c_0}/2\lambda$, y entonces $z(x) = -3R_1 \sqrt{c_0} x/2\lambda + \mathcal{O}(x^2)$, por lo tanto

$$y_{Ch}(R)^3 = \lambda^3 \left(\frac{R}{R_1} \right)^2 - \frac{3R_1 \lambda^2}{2} \sqrt{c_0} \left(\frac{R}{R_1} \right)^{7/3} + \mathcal{O}(R^{8/3}),$$

y en consecuencia

$$\tau_{Ch}(R) = \tau_s(R) - \frac{2\lambda^3}{3\sqrt{c_0}} \left(\frac{R}{R_1} \right)^2 + R_1 \lambda^2 \left(\frac{R}{R_1} \right)^{7/3} + \mathcal{O}(R^{8/3}) = \tau_s^0 + \frac{1}{k^2} R^{7/3} + \mathcal{O}(R^{8/3}),$$

donde se ha usado la expansión (6.12) de $\tau_s(R)$ y se ha definido $k := (3\Lambda_0/4)^{-1/3}$. Invirtiendo esta relación se obtiene

$$R_{Ch}(\tau) = [k^2(\tau - \tau_s^0)]^{3/7} \left[1 + \mathcal{O}(k^2(\tau - \tau_s^0))^{1/7} \right].$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (6.13) se obtiene

$$\tau_s(R_{Ch}(\tau)) - \tau = \kappa (\tau - \tau_s^0)^{6/7} \left[1 + \mathcal{O}(\tau - \tau_s^0)^{1/7} \right],$$

donde $\kappa := 2/(3\sqrt{c_0} k^{9/7}) > 0$ es constante. Por lo tanto existe una constante $\tilde{C}$ tal que

$$\alpha(\tau) \leq \tilde{C} (\tau - \tau_s^0)^{-5/7}, \quad \tau_s^0 < \tau < \tau_*$$

y es claro que la integral

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \alpha(\tau) d\tau \leq \int_{\tau_s^0}^{\tau_*} \alpha(\tau) d\tau \leq \tilde{C} \int_{\tau_s^0}^{\tau_*} (\tau - \tau_s^0)^{-5/7} d\tau = \frac{7\tilde{C}}{2} (\tau_* - \tau_s^0)^{2/7}$$

es finita para todo $\tau_s^0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_*$.

Caso 3. $\tau > \tau_*$.

En esta región, la fuente $S_{\mathbf{X}} = 0$ dado que $\mathbf{X}$ es un vector de Killing en el exterior de la nube, por lo tanto se puede elegir $\alpha(\tau) = 0$ para $\tau > \tau_*$. $\square$

6.2. Estimaciones de energía

El resultado central de este capítulo se puede resumir de la siguiente forma:

Teorema 6.2.1 *Considérese un espacio-tiempo de fondo de Tolman-Bondi $(M, \mathbf{g})$ que satisface las condiciones (i)-(viii) dadas en el Capítulo 3, con una singularidad globalmente desnuda, y el desarrollo máximo $D \subset M$ ilustrado en la figura 4.1. Sea Φ un campo de prueba suave (no necesariamente escalar) que se propaga sobre M , que tiene asociado un tensor de energía-impulso $\mathbf{T}$ con divergencia cero y que satisface la condición de energía dominante. Entonces existe una constante C tal que para cada hipersuperficie espacial de τ constante $\Sigma_\tau \subset D$ y cada hipersuperficie nula de u y v constante, $\Sigma_u \subset D$ y $\Sigma_v \subset D$ respectivamente, se tiene*

$$\int_{\Sigma_\tau} \langle r^2 \mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \rangle_{S^2} \frac{dR}{\gamma} \leq C \quad (\text{Cota uniforme para la energía}), \quad (6.14)$$

$$\int_{\Sigma_u} \langle r^2 \mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{k}_+) \rangle_{S^2} \frac{dv}{\dot{v}} \leq C \quad (\text{Cota uniforme para el flujo nulo saliente}), \quad (6.15)$$

$$\int_{\Sigma_v} \langle r^2 \mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{k}_-) \rangle_{S^2} \frac{du}{\dot{u}} \leq C \quad (\text{Cota uniforme para el flujo nulo entrante}). \quad (6.16)$$

Demostración. A partir del enunciado de la Proposición 6.1.2 considérese

$$\frac{E(\tau_2) - E(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} \leq \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \alpha(\tau) E(\tau) d\tau$$

y en el límite en que $\tau_2 \rightarrow \tau_1$. Asumiendo la suavidad suficiente se tiene $\dot{E}(\tau) \leq \alpha(\tau)E(\tau)$, lo que es equivalente a

$$\frac{d}{d\tau} \left[e^{-\int_0^\tau \alpha(\tau') d\tau'} E(\tau) \right] \leq 0.$$

Integrando esto último sobre τ se llega a $E(\tau_2) \leq E(\tau_1) e^{\int_{\tau_1}^{\tau_2} \alpha(\tau) d\tau} < \infty$, lo que significa que la función de energía es uniformemente acotada, es decir que para todo τ se tiene

$$E(\tau) \leq A < \infty, \quad (6.17)$$

donde A es una constante independiente de τ . De acuerdo a la definición de la energía (6.4), el resultado en (6.17) se puede escribir explícitamente como

$$\int_{\Sigma_\tau} \langle r^2 T_{\mu\nu} X^\mu u^\nu \rangle_{S^2} \frac{dR}{\gamma} \leq A < \infty. \quad (6.18)$$

Recordando que en la base ortonormal $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ las componentes del campo vectorial $\mathbf{X}$ son $X^\mu = \gamma r' u^\mu - \dot{r} w^\mu$, y tomando en cuenta que $\dot{r} \leq 0$ y la desigualdad (6.2), se puede hacer la siguiente

estimación:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} X^\mu u^\nu &= \gamma r' T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu - \dot{r} T_{\mu\nu} w^\mu u^\nu &= \gamma r' T_{00} + |\dot{r}| T_{01} \\ &\geq \gamma r' T_{00} - |\dot{r}| |T_{01}| \\ &\geq (\gamma r' - |\dot{r}|) T_{00} = (\gamma r' - |\dot{r}|) T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu. \end{aligned}$$

Además se tiene que $(\gamma r' - |\dot{r}|) \geq \delta$ con $\delta > 0$, lo cual implica que $T_{\mu\nu} X^\mu u^\nu \geq \delta T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$, y por lo tanto, re-escalando la constante A en (6.18),

$$\int_0^{R_2} \left\langle r^2 \mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \right\rangle_{S^2} \frac{dR}{\gamma} \Big|_\tau \leq A < \infty,$$

lo cual era precisamente el primero de objetivos por demostrar. Los dos restantes se pueden probar de la siguiente manera: el resultado del Lema 6.1.1 permite acotar la fuente (6.9), de hecho siguiendo las mismas ideas de la prueba de la Proposición 6.1.2 se obtiene

$$\int_\Omega S_{\mathbf{X}} \sqrt{|g|} d^4 x \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \alpha(\tau) E(\tau) d\tau,$$

después usando el hecho (6.17) de que la energía es acotada, se sigue

$$\int_\Omega S_{\mathbf{X}} \sqrt{|g|} d^4 x \leq A \int_{\tau_1}^{\tau_2} \alpha(\tau) d\tau,$$

lo cual es finito puesto que la integral de $\alpha(\tau)$ lo es (ver la Proposición 6.1.2). Entonces las energías y la integral sobre la fuente en la ecuación de balance (6.6) son acotados, y en consecuencia

$$F(u_2) + F(v_2) \leq C < \infty,$$

lo que implica que cada uno de los flujos F es uniformemente acotado en una vecindad de la singularidad, y por lo tanto

$$\int_{v_1}^{v_2} \left\langle r^2 \mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{k}_+) \right\rangle_{S^2} \frac{dv}{\dot{v}} \Big|_u \leq C \quad \text{y} \quad \int_{u_1}^{u_2} \left\langle r^2 \mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{k}_-) \right\rangle_{S^2} \frac{du}{\dot{u}} \Big|_v \leq C.$$

□

6.2.1. Campos escalares no esféricos

Sea Φ un campo escalar de masa μ , que satisface la ecuación de Klein-Gordon. Su tensor de energía impulso asociado a Φ es [4]

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla^\alpha \Phi \nabla_\alpha \Phi + \mu^2 \Phi^2),$$

donde $\nabla^\alpha \Phi \nabla_\alpha \Phi = -\dot{\Phi}^2 + (\gamma \Phi')^2 + \frac{1}{r^2} \hat{\nabla}^A \Phi \hat{\nabla}_A \Phi$, $\nabla^0 \Phi = -\dot{\Phi}$ y $\nabla^1 \Phi = \gamma^2 \Phi'$. El Teorema 6.2.1 garantiza que, en una superficie de τ constante Σ_τ , la energía medida por observadores co-móviles

con el polvo que colapsa es acotada, es decir

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma_\tau} r^2 \left\langle \dot{\Phi}^2 + (\gamma \Phi')^2 + \frac{1}{r^2} \hat{\nabla}^A \Phi \hat{\nabla}_A \Phi + \mu^2 \Phi^2 \right\rangle_{S^2} \frac{dR}{\gamma} < \infty, \quad (6.19)$$

y además los flujos a través de superficies nulas de u y v constantes (Σ_u y Σ_v) también son acotados:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma_u} r^2 \left\langle \left(\dot{\Phi} + \gamma \Phi' \right)^2 + \frac{1}{r^2} \hat{\nabla}^A \Phi \hat{\nabla}_A \Phi + \mu^2 \Phi^2 \right\rangle_{S^2} \frac{dv}{\dot{v}} &< \infty, \\ \frac{1}{2} \int_{\Sigma_v} r^2 \left\langle \left(\dot{\Phi} - \gamma \Phi' \right)^2 + \frac{1}{r^2} \hat{\nabla}^A \Phi \hat{\nabla}_A \Phi + \mu^2 \Phi^2 \right\rangle_{S^2} \frac{du}{\dot{u}} &< \infty. \end{aligned}$$

6.2.2. Campos electromagnéticos

Para un campo electromagnético el tensor de energía-impulso está dado por [4]

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\beta} F^\nu{}_\beta - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta},$$

donde $F_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor de Faraday. Un marco de referencia lorentziano particular es el de la base ortonormal $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$, en el cual el tensor de Faraday tiene las componentes usuales

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = -2(E^2 - B^2),$$

donde E y B denotan los campos eléctrico y magnético, respectivamente. En este caso, del Teorema 6.2.1 se sigue que la energía del campo es acotada en superficies de τ constante Σ_τ :

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma_\tau} r^2 (E^2 + B^2)_\tau \frac{dR}{\gamma} < \infty,$$

y además los flujos a través de superficies nulas de u y v constantes (Σ_u y Σ_v) también son acotados:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma_u} r^2 \langle E^2 + B^2 - 2(E_2 B_3 - E_3 B_2) \rangle_{S^2} \frac{dv}{\dot{v}} &< \infty, \\ \frac{1}{2} \int_{\Sigma_v} r^2 \langle E^2 + B^2 + 2(E_2 B_3 - E_3 B_2) \rangle_{S^2} \frac{du}{\dot{u}} &< \infty. \end{aligned}$$

6.2.3. Acotamiento uniforme de campos escalares no esféricos

Sea Φ un campo escalar suave no esférico con masa asociada $\mu \geq 0$. Considérese una hipersuperficie de τ constante $\Sigma_\tau := [0, \infty) \times S^2$ donde el campo Φ tiene soporte compacto, lo que significa que existe $R_1 > 0$ tal que $\Phi(R, \cdot) = 0$ para toda $R > R_1$. La descomposición de Φ en esféricos armónicos es:

$$\Phi = \sum_{\ell m} \phi_{\ell m} Y^{\ell m}.$$

De la ecuación (6.19) se sabe que

$$\int_0^{R_2} r^2 \left\langle \dot{\Phi}^2 + (\gamma \Phi')^2 + \frac{1}{r^2} \hat{\nabla}^A \Phi \hat{\nabla}_A \Phi + \mu^2 \Phi^2 \right\rangle_{S^2} \frac{dR}{\gamma} \leq A < \infty,$$

con $R_2 > 0$. Obsérvese que en una superficie de τ constante, $dr = r' dR$, y que en una vecindad de la singularidad se tiene $0 \leq cte. \leq \gamma r' \leq 1$, entonces se puede re-escalar la constante A para obtener

$$\int_0^{r_2} r^2 \left\langle \dot{\Phi}^2 + \Phi_r^2 + \frac{1}{r^2} \hat{\nabla}^A \Phi \hat{\nabla}_A \Phi + \mu^2 \Phi^2 \right\rangle_{S^2} dr \leq A, \quad (6.20)$$

donde Φ_r denota la derivada parcial $\partial_r \Phi$ y $r_2 := r(R_2)$. Como Φ satisface la ecuación de Klein-Gordon, entonces a consecuencia de la simetría esférica sus derivadas angulares también la satisfacen, lo que permite concluir que los resultados obtenidos en este capítulo son válidos para las derivadas angulares de Φ , en particular se cumple de desigualdad (6.20). Enseguida defínase la *derivada angular* generalizada $D^\sigma \Phi := \sum_{\ell m} (2\ell + 1)^\sigma \phi_{\ell m} Y^{\ell m}$, $\sigma \geq 0$. En términos de ésta, la desigualdad (6.20) implica

$$\int_0^{r_2} \left\langle r^2 (D^\sigma \Phi_r)^2 + \hat{\nabla}^A (D^\sigma \Phi) \hat{\nabla}_A (D^\sigma \Phi) \right\rangle_{S^2} dr \leq A.$$

Como ingrediente adicional se tienen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{\nabla}^A (D^\sigma \Phi) \hat{\nabla}_A (D^\sigma \Phi) \right\rangle_{S^2} &= \sum_{\ell m} \ell(\ell + 1) |(2\ell + 1)^\sigma \phi_{\ell m}|^2, \\ \left\langle |D^{\sigma+1} \Phi|^2 \right\rangle_{S^2} &= \sum_{\ell m} (2\ell + 1)^2 |(2\ell + 1)^\sigma \phi_{\ell m}|^2, \end{aligned}$$

y dado que $(2\ell + 1)^2 \leq 8\ell(\ell + 1)$ para $\ell \geq 1$, entonces

$$\left\langle |D^{\sigma+1} \Phi|^2 \right\rangle_{S^2} \leq 8 \left\langle \hat{\nabla}^A (D^\sigma \Phi) \hat{\nabla}_A (D^\sigma \Phi) \right\rangle_{S^2},$$

lo que implica que

$$\int_0^{r_2} \left\langle r^2 |D^\sigma \Phi_r|^2 + |D^{\sigma+1} \Phi|^2 \right\rangle_{S^2} dr \leq A. \quad (6.21)$$

Lema 6.2.1 Sea $r_1 \geq 0$, $\Sigma_\tau := [r_1, \infty) \times S^2$, y sea $\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma_\tau)$ un campo escalar suave con soporte compacto en Σ_τ . Entonces, para $\sigma > 1/2$ existe una constante $C > 0$ tal que

$$r |\Phi(r, \hat{x})|^2 \leq C \int_{r_1}^\infty \left\langle r^2 |D^\sigma \Phi_r|^2 + |D^{1+\sigma} \Phi|^2 \right\rangle_{S^2} dr$$

para todo $\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma_\tau)$.

La demostración se encuentra en el Apéndice G. El enunciado del Lema 6.2.1, junto con (6.21) implica que $r|\Phi|^2$ es uniformemente acotado, es decir

$$|\Phi|^2 \leq \frac{AC}{r}$$

para $\ell \geq 1$. El resultado anterior indica que el campo re-escalado $\sqrt{r}\Phi$ es uniformemente acotado. Como consecuencia, lejos de $r = 0$ el campo Φ es uniformemente acotado, en particular cuando se propaga arbitrariamente cerca del horizonte de Cauchy, lo cual es consistente con los resultados numéricos discutidos en el capítulo anterior, y por lo tanto no se ha encontrado evidencia de inestabilidades en el horizonte de Cauchy asociado a la singularidad desnuda.

6.3. Discusión

En este capítulo se ha considerado el colapso de una nube de polvo esférica que da lugar a la formación de una singularidad desnuda con su correspondiente horizonte de Cauchy asociado. Se ha considerado además la propagación de un campo de prueba no esférico Φ sobre la geometría del fondo fijo de Tolman-Bondi. El resultado central de este capítulo ha sido el Teorema 6.2.1, el cual establece que la energía y los flujos nulos asociados al campo de prueba Φ son uniformemente acotados aún cuando el espacio-tiempo es dinámico y no hay prescripción clara que permita hacer estimaciones de energía. A partir de este resultado, para un campo escalar con momento angular no trivial, se demuestra que el campo re-escalado $\sqrt{r}\Phi$ es uniformemente acotado incluso cuando la propagación ocurre arbitrariamente cerca del horizonte de Cauchy o de la singularidad central. La estrategia consistió en definir una función de energía sobre superficies espaciales que pueda ser acotada por arriba, la cual a su vez proporciona una cota para la energía del campo medida por observadores co-móviles con el polvo que colapsa. Finalmente se efectúa una estimación de Sobolev que conduce al acotamiento uniforme del campo re-escalado $\sqrt{r}\Phi$, lo cual es consistente con los resultados numéricos discutidos en la Sección 5 porque que significa que el campo Φ es uniformemente acotado lejos de $r = 0$, en particular cuando se propaga arbitrariamente cerca del horizonte de Cauchy. Sin embargo es importante señalar que el estudio analítico llevado a cabo en este capítulo deja abierta la posibilidad de que el campo diverja cuando $r \rightarrow 0$ (pero no más rápido de $cte./\sqrt{r}$), aunque los resultados numéricos no mostraron evidencia de ello.

La conclusión acerca de los estudios de estabilidad realizados en este trabajo -Capítulos 4, 5 y 6- es que no se tiene evidencia de inestabilidades del horizonte de Cauchy bajo la propagación de campos escalares de prueba esféricos y no esféricos. Este hecho sugiere que la búsqueda de inestabilidades del horizonte de Cauchy debe hacerse más allá del régimen de campos de prueba, es decir: si uno asume que debe cumplirse la conjetura de la censura cósmica débil en el modelo de Tolman-Bondi, y de alguna manera se espera encontrar inestabilidades del horizonte de Cauchy asociado a una singularidad desnuda dentro de este modelo, parece ser necesario considerar la auto-gravedad de los campos. Una posibilidad es considerar perturbaciones gravitacionales -naturalmente fuera de la simetría esférica- acopladas al polvo que colapsa y estudiar su propagación. Para ello puede comenzarse en el régimen de perturbaciones linealizadas, el cual está ampliamente desarrollado, por ejemplo en la referencia [31]. Al respecto existen estudios numéricos donde no se encontró evidencia de que las perturbaciones diverjan a lo largo del horizonte de Cauchy [27, 28, 29]. Como complemento a esos estudios, actualmente se está explorando la técnica de estimaciones de energía para tratar de establecer cotas sobre los campos de perturbaciones gravitacionales linealizadas. De no encontrar alguna inestabilidad, el siguiente paso sería explorar el régimen no lineal de las perturbaciones.

Capítulo 7

El corrimiento al rojo gravitacional a través de una nube en colapso

7.1. Introducción

El trabajo desarrollado en los capítulos previos se orientó principalmente a los estudios de estabilidad de singularidades globalmente desnudas provenientes del colapso de polvo, sin embargo a partir de este capítulo el enfoque cambia considerablemente para analizar algunos rasgos observacionales del objeto que colapsa.¹ Por ejemplo, para caracterizar tal objeto es relevante examinar la radiación electromagnética emitida desde su superficie y así obtener información valiosa a partir del corrimiento al rojo de la luz o de la desviación de la misma como funciones del tiempo. Al respecto ver por ejemplo las referencias [62, 63, 64, 65, 66].

Recientemente se mostró evidencia numérica [57] de que una fracción significativa de los fotones emitidos desde el interior de un objeto en colapso gravitacional sería detectada por un observador distante con un corrimiento al azul en lugar de al rojo. Este efecto, el cual fue verificado explícitamente en el caso de rayos de luz radiales provenientes de una nube de polvo esférica y marginalmente ligada que colapsa gravitacionalmente, se debe a que los fotones se corren al azul dentro de la nube, y para algunos de ellos ese efecto puede llegar a ser mayor que el corrimiento al rojo en la región exterior de la nube. Incluso en [57] ha sido calculado el espectro de la radiación emitida por una nube de polvo esférica en colapso dada una función de emisividad simple, y en [67] se ha estudiado la posibilidad de usar ese espectro para distinguir si el resultado del colapso es un agujero negro o una singularidad desnuda, sin obtener resultados favorables.

En este capítulo se considera un escenario similar, pero significativamente diferente, en el cual los fotones son emitidos por una fuente distante, luego atraviesan un objeto que colapsa sin interactuar con su contenido de materia, y finalmente son detectados por un observador distante. Como ejemplo, se puede pensar en la radiación emitida desde una galaxia distante o una supernova, que atraviesa una nube en colapso y finalmente es detectada en la tierra. Para longitudes de onda suficientemente grandes, los fotones no interactúan significativamente con la materia que colapsa y por lo tanto sólo se ven afectados por el campo gravitacional de la nube, representando así una posible fuente de información sobre la distribución de masa que atraviesan. Este capítulo se

¹Este capítulo está basado en el artículo [61].

concentra en el corrimiento de la frecuencia de tales fotones, asumiendo que ambos, el emisor y el receptor son estáticos y se localizan arbitrariamente lejos del objeto en colapso. Para objetos estacionario, como estrellas en equilibrio, por ejemplo, naturalmente no se espera un corrimiento en la frecuencia, pues en ese caso idealizado se conserva la energía a lo largo de la trayectoria. Sin embargo, como se demuestra más adelante, en el caso de un objeto que colapsa, la dinámica del espacio-tiempo induce un corrimiento de frecuencia no trivial, el cual siempre se manifiesta como un corrimiento al rojo en el escenario simple de una nube de polvo esféricamente simétrica que satisface condiciones poco restrictivas.

Para modelar este problema se asume que el objeto que colapsa está aislado, de tal manera que el espacio-tiempo correspondiente es asintóticamente plano. Entonces, un rayo de luz proveniente de un emisor asintótico y detectado por un observador asintótico también, se puede describir por una geodésica nula que se propaga desde el infinito nulo pasado hasta el infinito nulo futuro. En este trabajo se calcula el corrimiento de frecuencia de los fotones que viajan a largo de geodésicas nulas radiales, atravesando una nube de polvo esférica por su centro.

En la primera sección se comienza con el caso simple de una nube con distribución de materia homogénea, cuyo interior se puede modelar como un espacio-tiempo de Friedman-Robertson-Walker (FRW) en contracción (ver por ejemplo la Sección 3.3.1). Cuando los fotones viajan desde el infinito nulo pasado hacia la nube experimentan un corrimiento al azul dado que se aproximan a una región donde el campo gravitacional es más intenso. En el interior de la nube los fotones también se corren al azul puesto que se propagan en un *universo* en contracción. Sin embargo, se demuestra explícitamente que esos corrimientos al azul se compensan por un par de efectos Doppler y por el corrimiento al rojo gravitacional que los fotones experimentan cuando viajan desde la superficie de la nube hasta el infinito nulo futuro, de tal manera que el corrimiento total siempre es hacia el rojo. De paso se obtienen cotas sobre el corrimiento al azul discutido en [57].²

Después, en la sección 7.3 se deriva una identidad geométrica válida para cualquier espacio-tiempo esféricamente simétrico con un fluido como materia que colapsa; tal identidad constituye una interesante relación entre el factor de corrimiento al rojo a lo largo de rayos nulos radiales entrantes y salientes, el campo de velocidad de los cascarones que colapsan y la presión radial del fluido. En el caso particular del polvo, la presión es cero y se tiene una relación directa entre el factor de corrimiento al rojo y la razón de compacidad de los cascarones. Con base en esa identidad, en la sección 7.4 se considera una nube de polvo esférica inhomogénea y se deriva una cota superior explícita sobre el factor de corrimiento al rojo de los fotones sin momento angular que viajan desde el infinito nulo pasado hasta el infinito nulo futuro a través del centro de dicha nube. La cota se deriva primero para el caso del colapso marginalmente ligado y luego para el caso ligado, asumiendo solamente que la masa es positiva, que no hay singularidades de cruzamiento y que la energía total de los cascarones es una función decreciente del radio de área. La mayor importancia de esta cota es que implica que los fotones siempre sufren un corrimiento al rojo total respecto a observadores estacionario asintóticos.

En la sección 7.5 se calcula numéricamente el corrimiento total de la frecuencia de los fotones para una familia particular de datos iniciales simétricos en el tiempo para la nube de polvo. Tal familia consta del perfil inicial de densidad de masa inhomogénea, el cual está parametrizado por la densidad central, el radio inicial de la nube y un parámetro inicial que mide el grado de homogeneidad del perfil: si éste último se elige muy grande, el escenario se aproxima con

²Es importante señalar que en contraste con el trabajo [57], aquí no se restringe el estudio al colapso marginalmente ligado.

precisión arbitraria al caso homogéneo discutido en la sección 7.2, y de esa forma se puede verificar la validez del algoritmo numérico: comparando el corrimiento en la frecuencia calculado computacionalmente con los resultados de la sección 7.2. De paso se muestra que la cota superior para el corrimiento al azul derivada en la sección 7.4 es consistente con los resultados numéricos. Luego, se toma una sub-familia particular con masa total y radio inicial fijos para graficar el corrimiento al rojo total medido por un observador arbitrariamente lejano como función de su tiempo propio. Lo mismo puede hacerse para perfiles con distintas distribuciones de masa -siempre manteniendo la masa total y el radio inicial constantes-, lo cual sugiere un método observacional para inferir el perfil de densidad de la nube que colapsa a partir de la función de corrimiento al rojo. Al final se definen y discuten algunas implicaciones cosmológicas que los resultados pudieran tener.

A lo largo de este capítulo se usan unidades geométricas, donde la constante gravitacional y la velocidad de la luz son iguales a uno.

7.2. El caso homogéneo

En esta sección se deriva el corrimiento al rojo total en el caso simple de una nube de polvo esférica de densidad homogénea y radio finito. El espacio-tiempo en el interior de la nube corresponde a un *universo* de FRW en contracción, mientras que el exterior está descrito por la métrica de Schwarzschild. Se considera un fotón sin momento angular que viaja desde el infinito nulo pasado ($\mathcal{J}^-$) hasta el infinito nulo futuro ($\mathcal{J}^+$) a través del centro de la nube (ver la figura 7.1). El corrimiento en la frecuencia del fotón tiene tres diferentes contribuciones: la primera consta de un efecto combinado de un corrimiento al azul gravitacional desde $\mathcal{J}^-$ hasta la superficie de la nube, con un corrimiento al rojo tipo Doppler debido al movimiento de la superficie relativo a observadores estáticos; la segunda contribución consta de un corrimiento al azul debido a la contracción del *universo*; la tercera contribución es similar a la primera, ahora desde la superficie de la nube hasta $\mathcal{J}^+$, pero en este caso el efecto Doppler y el efecto gravitacional son ambos corrimientos al rojo. Enseguida se calculan explícitamente esas tres contribuciones. El corrimiento al azul gravitacional medido por observadores estáticos cuando el fotón viaja desde $\mathcal{J}^-$ hasta la superficie de la nube está dado por $(1 - 2m_1/r_1^-)^{-1/2}$ (los detalles se pueden encontrar en la referencia [4], por ejemplo), donde m_1 es la masa total de la nube y r_1^- es su radio de área en el momento en que el fotón incide en ella. El efecto Doppler debido al movimiento de la superficie está dado por $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{k}_-)/\mathbf{g}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{k}_-)$, donde $\mathbf{g}$ es la métrica del espacio-tiempo, $\mathbf{u}$ y $\hat{\mathbf{u}}$ son las cuadri-velocidades de observadores co-móviles y estáticos en la superficie de la nube, respectivamente, y $\mathbf{k}_-$ es un vector nulo radial entrante proporcional al cuadri-momento del fotón. En términos del campo vectorial unitario radial saliente $\mathbf{w}$ ortogonal a $\mathbf{u}$, se tiene $\mathbf{k}_- = \mathbf{u} - \mathbf{w}$. Para determinar el campo vectorial $\hat{\mathbf{u}}$, primero hay que recordar que el movimiento de la superficie de la nube está dado por la ecuación de movimiento (ver la ecuación (3.3))

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{m_1}{r} = E_1, \quad (7.1)$$

donde E_1 es la energía total de la trayectoria y $\dot{r} := \mathbf{u}[r]$. En lo sucesivo se asume que $-1/2 < E_1 \leq 0$ (ver el Capítulo 3), lo que significa que la trayectoria es ligada ($E_1 < 0$) o marginalmente ligada ($E_1 = 0$), y que $2m_1/r < 1$ en la región donde $\dot{r}^2$ es pequeña, de tal manera que no haya superficies atrapadas dentro de esa región. Combinando la ecuación (7.1) con el requisito de que $\hat{\mathbf{u}}[r] = 0$ y la definición invariante de la función de masa de Misner-Sharp [35], $m(r) =$

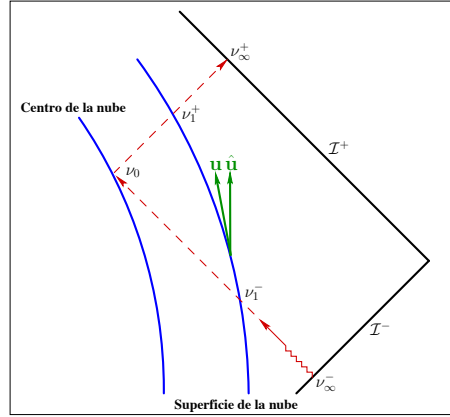


Figura 7.1: Diagrama conforme idealizado que muestra la trayectoria de un fotón que viaja desde el infinito nulo pasado hasta el infinito nulo futuro a través del centro de la nube de polvo que colapsa. Las etiquetas ν se refieren a la frecuencia del fotón en los eventos indicados. También se muestra la cuadri-velocidad de observadores estacionarios ($\hat{\mathbf{u}}$) y en caída libre ($\mathbf{u}$) en la superficie de la nube.

$r[1 - \mathbf{g}(dr, dr)]/2 = r(1 + \mathbf{u}[r]^2 - \mathbf{w}[r]^2)/2$, se obtiene que $\mathbf{w}[r] = \sqrt{1 + 2E_1}$ y entonces

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m_1}{r}}} \left(\sqrt{1 + 2E_1} \mathbf{u} - \dot{r} \mathbf{w} \right). \quad (7.2)$$

Por lo tanto, el efecto Doppler es

$$\frac{\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{k}_-)}{\mathbf{g}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{k}_-)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2m_1}{r}}}{\sqrt{1 + 2E_1} - \dot{r}} \bigg|_{r=r_1^-}, \quad (7.3)$$

y el corrimiento en la frecuencia del fotón entre un observador estático arbitrariamente cercano a $\mathcal{I}^-$ y un observador en caída libre con la superficie de la nube es

$$\frac{\nu_1^-}{\nu_\infty^-} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2E_1} + \sqrt{\mathcal{C}_1^- + 2E_1}}. \quad (7.4)$$

Recordando la definición de la razón de compacidad de la nube, $\mathcal{C} = 2m/r$, se observa que en el caso particular del colapso marginalmente ligado ($E_1 = 0$), el corrimiento en la frecuencia se simplifica a $\nu_1^-/\nu_\infty^- = \left(1 + \sqrt{\mathcal{C}_1^-}\right)^{-1/2} < 1$, lo que muestra que en este caso el corrimiento al rojo de Doppler domina al corrimiento al azul gravitacional.

En el interior de la nube que colapsa, el fotón experimenta un corrimiento al azul debido a la

contracción del *universo* de FRW (ver por ejemplo la referencia [46]) dado por

$$\frac{\nu_1^+}{\nu_1^-} = \frac{a(\tau_1^-)}{a(\tau_1^+)} = \frac{\mathcal{C}_1^+}{\mathcal{C}_1^-}, \quad (7.5)$$

donde τ_1 denota el tiempo propio de un observador co-móvil con la superficie de la nube y donde se ha usado el hecho de que el factor de escala $a(\tau_1)$ es proporcional al radio de área r_1 a lo largo de esa misma superficie.

Finalmente, el corrimiento al rojo entre la superficie de la nube y un observador estático arbitrariamente cercano a $\mathcal{I}^+$ está dado por

$$\frac{\nu_\infty^+}{\nu_1^+} = \sqrt{1 + 2E_1} - \sqrt{\mathcal{C}_1^+ + 2E_1} < 1, \quad (7.6)$$

como lo demuestra un cálculo similar al que condujo a la ecuación (7.4).

7.2.1. El corrimiento al rojo total

De los resultados obtenidos hasta ahora se concluye que el corrimiento total en la frecuencia de los fotones es

$$\frac{\nu_\infty^+}{\nu_\infty^-} = \frac{\mathcal{C}_1^+}{\mathcal{C}_1^-} \frac{\sqrt{1 + 2E_1} - \sqrt{\mathcal{C}_1^+ + 2E_1}}{\sqrt{1 + 2E_1} + \sqrt{\mathcal{C}_1^- + 2E_1}}. \quad (7.7)$$

Esta fórmula se puede simplificar encontrando la relación explícita entre las razones de compacidad $\mathcal{C}_1^+$ y $\mathcal{C}_1^-$ mediante la integración de los rayos de luz dentro de la nube. Para ello, primero hay que notar que el radio de área es proporcional al factor de escala, es decir $r = r_0 a(\tau)$ con alguna constante r_0 independiente de τ . Sustituyendo esta relación en la ecuación (7.1) se obtiene la ecuación de Friedmann

$$\dot{a}^2 = \frac{\lambda}{a} - k, \quad (7.8)$$

con $\lambda := 2m/r_0^3$ y el parámetro de curvatura espacial $k := -2E_1/r_0^2$. De acuerdo a la convención usual, se elige r_0 tal que $k = 1$ cuando $E_1 < 0$, en cuyo caso la geometría espacial es S^3 . En el caso marginalmente ligado k es cero, lo que corresponde a una geometría espacial plana y r_0 es indeterminado. La métrica del espacio-tiempo de FRW es entonces

$$\mathbf{g} = -d\tau^2 + a(\tau)^2 (dR^2 + \text{sinn}^2(R) d\Omega^2), \quad (7.9)$$

con $\text{sinn}(R) = \sin(R)$ para $k = 1$ y $\text{sinn}(R) = R$ para $k = 0$, y se sigue que $r_0 = \text{sinn}(R)$. Integrando a lo largo del rayo nulo dentro de la nube se obtiene

$$2R_1 = \int_{\tau_1^-}^{\tau_1^+} \frac{d\tau}{a(\tau)}. \quad (7.10)$$

Usando la ecuación de Friedmann (7.8) se llega a

$$R_1 = \begin{cases} \sqrt{\frac{a(\tau_1^-)}{\lambda}} - \sqrt{\frac{a(\tau_1^+)}{\lambda}}, & k = 0 \\ \arccos\left(\sqrt{\frac{a(\tau_1^+)}{\lambda}}\right) - \arccos\left(\sqrt{\frac{a(\tau_1^-)}{\lambda}}\right), & k = 1 \end{cases} \quad (7.11)$$

lo cual conduce a la siguiente relación entre las razones de compacidad $\mathcal{C}_1^+$ y $\mathcal{C}_1^-$:

$$\sqrt{\frac{\mathcal{C}_1^-}{\mathcal{C}_1^+}} = \sqrt{1+2E_1} - \sqrt{\mathcal{C}_1^- + 2E_1} \quad \text{ó} \quad \sqrt{\frac{\mathcal{C}_1^+}{\mathcal{C}_1^-}} = \sqrt{1+2E_1} + \sqrt{\mathcal{C}_1^- + 2E_1}. \quad (7.12)$$

Usando estas relaciones para eliminar $\mathcal{C}_1^+$ en la ecuación (7.7), se obtiene

$$\frac{\nu_\infty^+}{\nu_\infty^-} = \frac{1}{1 - \mathcal{C}_1^-} \left[1 - \frac{\mathcal{C}_1^-}{\left(\sqrt{1+2E_1} - \sqrt{\mathcal{C}_1^- + 2E_1}\right)^2} \right]. \quad (7.13)$$

Como se trata de un colapso ($\dot{r} < 0$), y como se ha supuesto que el rayo de luz está fuera del horizonte de eventos, es decir $\mathcal{C}_1^+ < 1$, entonces la razón de compacidad en el momento en que el rayo penetra la nube $\mathcal{C}_1^-$ está restringido al intervalo

$$-2E_1 < \mathcal{C}_1^- < \frac{1}{4(1+2E_1)}. \quad (7.14)$$

Esto a su vez restringe E_1 al intervalo $-1/4 < E_1 \leq 0$.

Cuando el rayo de luz incide sobre la nube en el instante en que ésta se encuentra en reposo ($\dot{r} = 0$), $\mathcal{C}_1^- = -2E_1 > 0$, y el corrimiento total en la frecuencia es

$$\frac{\nu_\infty^+}{\nu_\infty^-} = \frac{1+4E_1}{1+4E_1+4E_1^2} < 1, \quad (7.15)$$

lo que implica un corrimiento al rojo. Cuando $\mathcal{C}_1^-$ se aproxima a su cota superior $[4(1+2E_1)]^{-1}$, la razón de frecuencias $\nu_\infty^+/\nu_\infty^-$ converge a cero, lo cual es de esperarse porque en este caso el rayo de luz sale de la nube en un punto muy cercano al horizonte de eventos, implicando un corrimiento al rojo enorme en la región de Schwarzschild. Para analizar el comportamiento del corrimiento en la frecuencia dentro del intervalo (7.14) es conveniente introducir las cantidades adimensionales $x := -\dot{r}/\sqrt{1+2E}$ y $\varepsilon_1 := -2E_1/(1+2E_1)$, $0 < \varepsilon_1 < 1$, en términos de las cuales la ecuación (7.13) se puede re-escribir como

$$\frac{\nu_\infty^+}{\nu_\infty^-} = (1 + \varepsilon_1) \frac{1 - \varepsilon_1 - 2x_1^-}{(1 + x_1^-)(1 - x_1^-)^3}, \quad (7.16)$$

con $0 < x_1^- < (1 - \varepsilon_1)/2$. Derivando explícitamente el lado derecho respecto a x_1^- se comprueba que la razón de frecuencias $\nu_\infty^+/\nu_\infty^-$ es una función monótonamente decreciente de x_1^- dentro del intervalo $0 < x_1^- < (1 - \varepsilon_1)/2$, de forma que tal razón siempre es menor que 1. Esto conduce a la primera conclusión importante de este capítulo: *un rayo de luz radial que atraviesa una nube*

de polvo esférica y homogénea a través de su centro, siempre se corre al rojo.

En el límite $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, el cual corresponde al caso del colapso marginalmente ligado, la ecuación (7.16) se simplifica a

$$\frac{\nu_\infty^+}{\nu_\infty^-} = \frac{1 - 2x_1^-}{(1 + x_1^-)(1 - x_1^-)^3} = 1 - 2(x_1^-)^3 + \mathcal{O}^4(x_1^-), \quad (7.17)$$

y resulta que el factor de corrimiento al rojo $z := \nu_\infty^-/\nu_\infty^+ - 1 = 2(x_1^-)^3 + \mathcal{O}^4(x_1^-)$ se escala como la razón de compacidad a la potencia $3/2$ para x_1^- pequeña.

7.2.2. Sobre el corrimiento al azul de fotones emitidos desde el interior de la nube

Como se mencionó al inicio de este capítulo, en el trabajo reciente de Kong *et al.* [57] se mostró que los fotones emitidos desde el interior de la nube pueden experimentar un corrimiento al azul en lugar de un corrimiento al rojo cuando son detectados por un observador distante y estacionario. En [57] se ha analizado solamente el caso del colapso marginalmente ligado, y aquí se generaliza esa discusión para el caso ligado, el cual es más general.

De los resultados obtenidos hasta ahora se sabe que todos los fotones dentro de la nube homogénea se corren al azul, pero el máximo de ese corrimiento se obtiene al considerar los que son emitidos desde la superficie de la nube, que la atraviesan por el centro y finalmente escapan a $\mathcal{I}^+$. Asimismo, de los resultados previos se obtiene la siguiente expresión para el corrimiento de frecuencia de tales fotones:

$$\frac{\nu_\infty^+}{\nu_1^-} = \sqrt{1 + \varepsilon_1} \frac{1 - \varepsilon_1 - 2x_1^-}{(1 - x_1^-)^3}. \quad (7.18)$$

En el caso marginalmente ligado, el cual corresponde al modelo de colapso de Oppenheimer-Snyder [5], esta expresión se simplifica a $\nu_\infty^+/\nu_1^- = (1 - 2x_1^-)/(1 - x_1^-)^3 = 1 + x_1^- + \mathcal{O}^2(x_1^-)$, mostrando que es posible tener un corrimiento al azul para x_1^- suficientemente pequeña.

En general, la expresión en el lado derecho de la ecuación (7.18) tiene un máximo local en $x_1^- = (1 - 3\varepsilon_1)/4$, donde

$$\left. \frac{\nu_\infty^+}{\nu_1^-} \right|_{max} = \frac{32}{27} \frac{1}{(1 + \varepsilon_1)^{3/2}}.$$

Por lo tanto, los fotones que emanan desde la superficie de la nube con $x_1^- \simeq (1 - 3\varepsilon_1)/4$ se corren al azul si $\varepsilon_1 < \varepsilon_1^* := 8 \cdot 2^{1/3}/9 - 1 \simeq 0.1199$. Por encima de ese umbral el corrimiento en la frecuencia siempre es menor que uno, y por lo tanto, los fotones sin momento angular que son emitidos dentro de la nube homogénea durante un colapso ligado y con $\varepsilon_1 > \varepsilon_1^*$, siempre experimentan un corrimiento al rojo medido un observador distante y estacionario.

7.3. Relación entre la razón de compacidad y el factor de corrimiento al azul

En esta sección se deriva una identidad geométrica válida para cualquier espacio-tiempo esféricamente simétrico $(M, \mathbf{g})$ que satisfaga las ecuaciones de campo de Einstein con el tensor de energía-impulso $\mathbf{T}$ correspondiente a un fluido. Como se discutió en la Sección 2.1, tal espacio-tiempo es

de la forma $M = \tilde{M} \times S^2$ con la métrica $\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{g}} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$, donde $\tilde{\mathbf{g}} = \tilde{g}_{ab}dx^a dx^b$ es una métrica Lorentziana 2-dimensional sobre $\tilde{M}$ y r es la función de radio de área. El tensor de energía-impulso del fluido tiene la forma genérica

$$\mathbf{T} = (\rho u_a u_b + p_\perp w_a w_b) dx^a dx^b + r^2 p_\parallel (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (7.19)$$

con $\mathbf{u} = u^a \partial_a$ la cuadri-velocidad del fluido y $\mathbf{w} = w^a \partial_a$ el vector radial, unitario y saliente ortogonal a $\mathbf{u}$. Aquí ρ , $p_\perp$ y $p_\parallel$ denotan la densidad de energía y las presiones radial y tangencial del fluido medidas por observadores lagrangianos, respectivamente. Enseguida las ecuaciones de campo de Einstein-Euler (2.9-2.10) se pueden re-escribir como

$$(\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r)^{tf} = -2\pi r(\rho + p_\perp)(u_a u_b + w_a w_b), \quad (7.20)$$

$$\tilde{\Delta} r = \frac{2m}{r^2} - 4\pi r(\rho - p_\perp), \quad (7.21)$$

donde $\tilde{\nabla}$ es la derivada covariante asociada con $(\tilde{M}, \tilde{\mathbf{g}})$, $\tilde{\Delta} r = \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r$ y (tf) denota la parte sin traza.

Los campos vectoriales $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ dan lugar a los campos vectoriales radiales nulos entrantes y salientes $\mathbf{k}_- := \mathbf{u} - \mathbf{w}$ y $\mathbf{k}_+ := \mathbf{u} + \mathbf{w}$. En lo sucesivo, las cantidades $\beta_\pm$, definidas por

$$\nabla_{\mathbf{k}_\pm} \mathbf{k}_\pm = -\beta_\pm \mathbf{k}_\pm, \quad (7.22)$$

juegan un papel importante porque determinan el corrimiento al azul a lo largo de las geodésicas nulas radiales entrantes y salientes medido por observadores co-móviles con cuadri-velocidad $\mathbf{u}$. Específicamente, si ν es la frecuencia de una señal de luz radial medida por un observador con cuadri-velocidad $\mathbf{u}$, entonces ν satisface la ecuación diferencial

$$\mathbf{k}_\pm[\log \nu] = \beta_\pm$$

a lo largo de geodésicas nulas entrantes (-) y salientes (+). Usando el hecho de que $\mathbf{k}_\pm$ son radiales y nulos, además de su normalización relativa $\mathbf{g}(\mathbf{k}_+, \mathbf{k}_-) = -2$, se llega a que

$$\nabla_{\mathbf{k}_\pm} \mathbf{k}_\mp = \beta_\pm \mathbf{k}_\mp, \quad (7.23)$$

y a que la aceleración de los elementos de fluido satisface

$$\mathbf{a} := \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = -\frac{\beta_+ - \beta_-}{2} \mathbf{w}. \quad (7.24)$$

Enseguida se introduce (el valor absoluto de) la velocidad de los elementos de fluido en caída libre $V := -\mathbf{u}[r]$, donde el signo *menos* indica que los elementos de fluido se mueven hacia el centro. La identidad clave se obtiene aplicando los campos vectoriales nulos $\mathbf{k}_\pm$ sobre V . Usando el hecho de que $2\mathbf{u} = \mathbf{k}_+ + \mathbf{k}_-$ y las ecuaciones (7.22, 7.23), se obtiene

$$\mathbf{k}_\pm[V] = -\mathbf{k}_\pm \mathbf{u}[r] = -\frac{1}{2} \left[k_\pm^a k_\pm^b (\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r)^{tf} - \tilde{\Delta} r \right] \pm \beta_\pm \mathbf{w}[r]. \quad (7.25)$$

En este punto se usan las ecuaciones de campo de Einstein (7.20, 7.21) para eliminar las segundas

derivadas de r y obtener, de la ecuación (7.25), la identidad

$$\mathbf{k}_{\pm}[V] = 4\pi r p_{\perp} + \frac{m}{r^2} \pm \beta_{\pm} \mathbf{w}[r]. \quad (7.26)$$

Para ver la relevancia de esta identidad, considérese el caso particular del colapso de polvo marginalmente ligado, para el cual $p_{\perp} = 0$, $\mathbf{a} = 0$, $\mathbf{w}[r] = 1$, y $V = -\mathbf{u}[r] = \sqrt{2m/r}$ es la raíz cuadrada de la razón de compacidad. Bajo estas suposiciones, la ecuación (7.26) se simplifica considerablemente y conduce a

$$\mathbf{k}_{\pm}[\log \nu] = \beta_{\pm} = \pm \mathbf{k}_{\pm}[V] \mp \frac{m}{r^2}. \quad (7.27)$$

Esta es la identidad clave que proporciona una relación directa entre el corrimiento al azul a lo largo de los rayos nulos radiales y la razón de compacidad. Las consecuencias de esta identidad y su generalización para el caso del colapso ligado de polvo se discuten en la siguiente sección.

7.4. El corrimiento al rojo total en el caso de una nube inhomogénea

En esta sección se aborda el caso en que los fotones cruzan una nube de polvo en colapso cuyo perfil de densidad es genérico y no necesariamente homogéneo. Para ello, es preciso establecer claramente las siguientes suposiciones:

- (i) La densidad de masa es no-negativa, es decir $m \geq 0$ y $m' \geq 0$.
- (ii) La energía total de los cascarones es una función decreciente de R , es decir $E' \leq 0$.
- (iii) $r' > 0$, lo cual excluye la posibilidad de que se formen singularidades de cruzamiento.

7.4.1. El caso del colapso marginalmente ligado

Como se explicó en la sección anterior, el caso particular del colapso marginalmente ligado se caracteriza por el hecho de que todos los cascarones de polvo tienen energía total cero ($E(R) = 0$), y en este caso se tiene la identidad simplificada (7.27), que relaciona el corrimiento en la frecuencia con el cambio de $x := V = \sqrt{2m/r}$ a lo largo de geodésicas nulas radiales entrantes y salientes. En el caso saliente, la integración de la ecuación (7.27) desde el centro hasta la superficie de la nube (ver la figura 7.1) conduce al siguiente corrimiento en la frecuencia:

$$\frac{\nu_1^+}{\nu_0} = \exp \left(x_1^+ - \int_0^{R_1} \frac{m}{r^2} r' dR \right), \quad (7.28)$$

donde se ha parametrizado el rayo de luz por la coordenada R , se ha usado el hecho de que $\mathbf{k}_+[R] = 1/r'$, y que $x \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow 0$ a lo largo del rayo de luz. De manera similar en el caso entrante, la integración de la ecuación (7.27) desde la superficie de la nube hasta su centro conduce a

$$\frac{\nu_0}{\nu_1^-} = \exp \left(x_1^- + \int_0^{R_1} \frac{m}{r^2} r' dR \right), \quad (7.29)$$

lo cual es evidentemente mayor que 1, implicando un corrimiento al azul. Por lo tanto, el corrimiento en la frecuencia de los fotones emitidos desde la superficie de la nube, que pasan por el centro y son recibidos por un observador co-móvil en un punto diametralmente opuesto sobre la superficie de la nube está dado por

$$\frac{\nu_1^+}{\nu_1^-} = \exp \left[x_1^- + x_1^+ + \int_0^{R_1} m(R) \left(\left. \frac{r'}{r^2} \right|_- - \left. \frac{r'}{r^2} \right|_+ \right) dR \right], \quad (7.30)$$

donde los subíndices $(-)$ y $(+)$ indican evaluación a lo largo de rayos nulos entrantes y salientes, respectivamente.

Enseguida se agrega la contribución del corrimiento de frecuencia entre un observador estático arbitrariamente cercano a $\mathcal{S}^-$ y un observador en caída libre en la superficie de la nube, así como la contribución del corrimiento de frecuencia entre la superficie de la nube y un observador estático arbitrariamente cercano a $\mathcal{S}^+$. Tales contribuciones son independientes del interior de la nube y fueron calculadas explícitamente en la sección 7.2. El corrimiento de frecuencia resultante para un rayo de luz radial que se propaga desde $\mathcal{S}^-$ hasta $\mathcal{S}^+$ pasando por el centro de la nube es

$$\frac{\nu_\infty^+}{\nu_\infty^-} = \frac{1 - x_1^+}{1 + x_1^-} \exp \left[x_1^+ + x_1^- + \int_0^{R_1} m(R) \left(\left. \frac{r'}{r^2} \right|_- - \left. \frac{r'}{r^2} \right|_+ \right) dR \right]. \quad (7.31)$$

Para encontrar una cota superior para este corrimiento de frecuencia, primero hay que notar que a lo largo de los rayos nulos se tiene

$$\frac{d}{dR} \frac{1}{r} = \pm r' \mathbf{k}_\pm \left[\frac{1}{r} \right] = -\frac{r'}{r^2} \mp r' \frac{\dot{r}}{r^2},$$

así que la integral en el lado derecho de la ecuación (7.31) se puede escribir como

$$-\int_0^{R_1} m(R) \left(\left. \frac{d}{dR} \frac{1}{r} \right|_- - \left. \frac{d}{dR} \frac{1}{r} \right|_+ \right) dR + \int_0^{R_1} m(R) \left(\left. \frac{r' \dot{r}}{r^2} \right|_+ + \left. \frac{r' \dot{r}}{r^2} \right|_- \right) dR.$$

Integrando por partes el primer término se obtiene

$$\frac{\nu_\infty^+}{\nu_\infty^-} = f_+(x_1^+) f_-(x_1^-) \exp \left[\int_0^{R_1} m'(R) \left(\left. \frac{1}{r} \right|_- - \left. \frac{1}{r} \right|_+ \right) + m(R) \left(\left. \frac{r' \dot{r}}{r^2} \right|_+ + \left. \frac{r' \dot{r}}{r^2} \right|_- \right) dR \right], \quad (7.32)$$

con las funciones $f_\pm$ definidas como

$$f_+(x) := (1 - x) \exp(x + x^2/2), \quad f_-(x) := (1 + x)^{-1} \exp(x - x^2/2), \quad x \geq 0. \quad (7.33)$$

La afirmación por demostrar es que la expresión dentro de los corchetes del lado derecho de la ecuación (7.32) es negativa o cero. Para verlo, hay que recordar que m y m' son no-negativas puesto que se asumió una densidad de masa no-negativa; además, como la nube colapsa, es evidente que $r^- > r^+$ pues para un cascarón parametrizado con un valor fijo de R , su radio de área r es mayor en el momento en que es penetrado por el rayo de luz que en el momento en que el rayo sale del mismo; finalmente, teniendo en cuenta que $\dot{r} < 0$ y la suposición de que no hay singularidades de cruzamiento ($r' > 0$), se concluye que el corrimiento total de frecuencia está

acotado por arriba de acuerdo a

$$\frac{\nu_{\infty}^+}{\nu_{\infty}^-} \leq f_+(x_1^+)f_-(x_1^-), \quad (7.34)$$

con las funciones $f_{\pm}$ definidas en la ecuación (7.33), las cuales son monótonamente decrecientes en el intervalo $0 \leq x < 1$ y satisfacen $f_+(0) = f_-(0) = 1$. Lo anterior demuestra que *hay un corrimiento total al rojo, igual como ocurre en el caso homogéneo*.

Además, como $x_1^+ \geq x_1^-$ y f_+ es monótonamente decreciente, se puede estimar $f_+(x_1^+) \leq f_+(x_1^-)$ y obtener la cota solamente en términos de x_1^- :

$$\frac{\nu_{\infty}^+}{\nu_{\infty}^-} \leq f_+(x_1^-)f_-(x_1^-) = \frac{1-x_1^-}{1+x_1^-} \exp(2x_1^-). \quad (7.35)$$

En particular para valores pequeños de x_1^- se tiene

$$\frac{\nu_{\infty}^+}{\nu_{\infty}^-} \leq 1 - \frac{2}{3}(x_1^-)^3 + \mathcal{O}^5(x_1^-). \quad (7.36)$$

Comparando esto último con el resultado del caso homogéneo en la ecuación (7.17) se observa que el factor de corrimiento al rojo $z = \nu_{\infty}^-/\nu_{\infty}^+ - 1$ tiene la misma dependencia en la razón de compacidad $\mathcal{C}_1^- = (x_1^-)^2$ pero con la constante $-2/3$ en lugar de -2 . Por lo tanto, para $\mathcal{C}_1^-$ pequeña, la cota superior deducida en esta sección reproduce la dependencia correcta en términos de la razón de compacidad pero con una constante mayor.

7.4.2. El caso genérico

A continuación se generaliza la cota (7.34) para el caso en que los cascarones de polvo tienen una energía total cero o negativa ($E(R) \leq 0$). En este caso se sigue la misma cadena de argumentos que en el caso marginalmente ligado, empezando con la identidad (7.26) con $p_{\perp} = 0$ y $\mathbf{w}[r] = \sqrt{1+2E}$. Introduciendo la variable adimensional $x := V/\sqrt{1+2E} = \sqrt{\frac{2m}{r}} + 2E/\sqrt{1+2E}$ como en la sección 7.2 e integrando la ecuación (7.26) a lo largo de los rayos de luz radiales entrantes y salientes, se encuentra la generalización de las ecuaciones (7.28) y (7.29),

$$\frac{\nu_1^+}{\nu_0} = \exp \left(x_1^+ - \int_0^{R_1} \frac{m}{1+2E} \frac{r'}{r^2} dR + \int_0^{R_1} \frac{x E'}{1+2E} dR \right), \quad (7.37)$$

$$\frac{\nu_0}{\nu_1^-} = \exp \left(x_1^- + \int_0^{R_1} \frac{m}{1+2E} \frac{r'}{r^2} dR + \int_0^{R_1} \frac{x E'}{1+2E} dR \right), \quad (7.38)$$

donde se ha usado el hecho de que $\mathbf{k}_{\pm}[R] = \pm\sqrt{1+2E}/r'$. Lo anterior conduce a la siguiente generalización de la ecuación (7.31) para el corrimiento total en la frecuencia:

$$\frac{\nu_{\infty}^+}{\nu_{\infty}^-} = \frac{1-x_1^+}{1+x_1^-} \exp \left[x_1^+ + x_1^- + \int_0^{R_1} \frac{m}{1+2E} \left(\left. \frac{r'}{r^2} \right|_- - \left. \frac{r'}{r^2} \right|_+ \right) dR + \int_0^{R_1} \frac{E'}{1+2E} (x^+ + x^-) dR \right]. \quad (7.39)$$

Usando la siguiente identidad a lo largo de los rayos nulos radiales entrantes y salientes:

$$\frac{d}{dR} \frac{1}{r} = \pm \frac{r'}{\sqrt{1+2E}} \mathbf{k}_{\pm} \left[\frac{1}{r} \right] = -\frac{r'}{r^2} \mp \frac{r'}{\sqrt{1+2E}} \frac{\dot{r}}{r^2},$$

e integrando por partes, se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} \frac{\nu_{\infty}^+}{\nu_{\infty}^-} &= f_+(x_1^+) f_-(x_1^-) \exp \left\{ \int_0^{R_1} \frac{m'}{1+2E} \left(\frac{1}{r} \Big|_- - \frac{1}{r} \Big|_+ \right) dR \right. \\ &+ \left. \int_0^{R_1} \frac{m}{(1+2E)^{3/2}} \left(\frac{r'\dot{r}}{r^2} \Big|_+ + \frac{r'\dot{r}}{r^2} \Big|_- \right) dR + \int_0^{R_1} \frac{E'}{1+2E} \left[x^+ + x^- + (x^+)^2 - (x^-)^2 \right] dR \right\}, \end{aligned}$$

donde las funciones $f_{\pm}$ son las mismas que fueron definidas en (7.33). Los argumentos dados en el caso marginalmente ligado también son válidos aquí e implican que las dos primeras integrales en el lado derecho son negativas o cero; en cuanto a la tercera integral, ésta también es negativa o cero de acuerdo a la suposición de que $E' \leq 0$ y al hecho de que $x^+ \geq x^-$. Por lo tanto se llega exáctamente a la misma estimación para la razón de frecuencias $\nu_{\infty}^+/\nu_{\infty}^-$ que en el caso marginalmente ligado (ver la ecuación (7.34)). En particular, hay un corrimiento al rojo total, y para x_1^- pequeña, el factor de corrimiento al rojo se escala como $(x_1^-)^3$.

7.5. Ejemplos numéricos

En esta sección se dan algunos ejemplos numéricos para el corrimiento al rojo de un fotón con momento angular cero que viaja desde $\mathscr{I}^-$ hasta $\mathscr{I}^+$ a través de la nube de polvo que colapsa. Para ello se considera una nube de polvo inicialmente en reposo y cuyo perfil inicial de densidad está dado por (los detalles sobre este perfil particular se pueden encontrar en la referencia [68])

$$\rho_0(R) = \rho_c \left[1 - \left(\frac{R}{R_1} \right)^{2n} \right], \quad 0 \leq R \leq R_1, \quad (7.40)$$

donde R_1 es el radio de área inicial de la nube, $\rho_c > 0$ es la densidad central, y el parámetro $n \geq 1$ proporciona una medida del grado de homogeneidad del perfil y es tal que en el límite $n \rightarrow \infty$ se recupera el caso homogéneo discutido en la sección 7.2. Nótese que $\rho_0(R_1) = 0$, de tal manera que la densidad es una función continua y monótonamente decreciente en el intervalo $(0, R_1)$. Para lo sucesivo se fijan el radio inicial R_1 y la masa total de la nube, la cual está dada por

$$m_1 = \frac{4\pi}{3} R_1^3 \rho_c \frac{2n}{2n+3}, \quad (7.41)$$

y entonces la densidad central del perfil (7.40) en términos del parámetro libre $n \geq 1$ es

$$\rho_c = \bar{\rho} \left(1 + \frac{3}{2n} \right), \quad (7.42)$$

donde $\bar{\rho} := 3m_1/(4\pi R_1^3)$ es la densidad inicial promedio de la nube. En la figura 7.2 se muestra este perfil inicial de densidad para diferentes valores de n .

Como una primera prueba numérica, en la figura 7.3, que corresponde al perfil (7.40) con $n = 50$

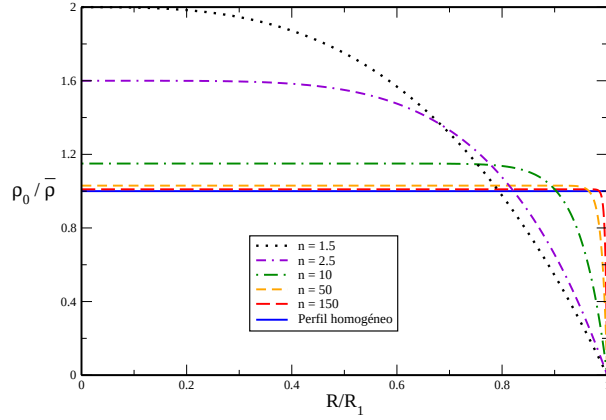


Figura 7.2: Perfil inicial de densidad $\rho_0(R)/\bar{\rho}$ descrito en (7.40,7.42) como función de R/R_1 para $n = 1.5, 2.5, 10, 50, 150$.

y $2m_1/R_1 = 1/10$, se muestra la razón total de frecuencias $\nu_\infty^+/\nu_\infty^-$ como función de la razón de compacidad $\mathcal{C}_1^+$ de la nube en el momento en que el rayo de luz sale de la misma. Esa curva se compara con la cota superior obtenida en la ecuación (7.34) de la sección 7.4. Para este perfil de densidad inicial particular, la condición $E' \leq 0$ deja de ser válida dentro de la nube, sin embargo la figura 7.3 muestra que aún en ese caso la cota sigue siendo válida. La integración numérica de los rayos de luz radiales se llevó a cabo mediante un algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden de precisión.

En la figura 7.4 se muestra la razón de frecuencias $\nu_\infty^+/\nu_\infty^-$ calculada numéricamente para un fotón que recorre una trayectoria γ desde $\mathcal{J}^-$ hasta $\mathcal{J}^+$ a través del centro de una nube con razón de compacidad inicial fija $2m_1/R_1 = 1/10$ pero con diferentes distribuciones de densidad. Este corrimiento de frecuencia se muestra como función del tiempo propio τ de un observador estático arbitrariamente distante que enciende su cronómetro y su espectrómetro al tiempo $\tau = 0$ cuando detecta el rayo de luz radial γ_0 el cual incide sobre la nube en el momento en que ésta se encuentra en reposo. A continuación se muestra cómo este tiempo propio τ se puede relacionar con el radio de área r_1^+ de la nube cuando el fotón sale de la misma: en términos de coordenadas de Schwarzschild estándar se tiene

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{2m_1}{r_{obs}}}(t - t_0) = \sqrt{1 - \frac{2m_1}{r_{obs}}}(u - u_0),$$

donde r_{obs} es el radio de área del observador estático, t y t_0 son los tiempos de Schwarzschild en el momento en que el observador detecta los rayos de luz γ y γ_0 , respectivamente, y $u = t - r - 2M \log(r/2M - 1)$ es el tiempo retrasado, el cual es constante a lo largo de las trayectorias γ y γ_0 . Por otro lado, en la superficie de la nube, u está dada por (ver el Apéndice C)

$$u(y) = -4m_1 \log(-U(y)),$$

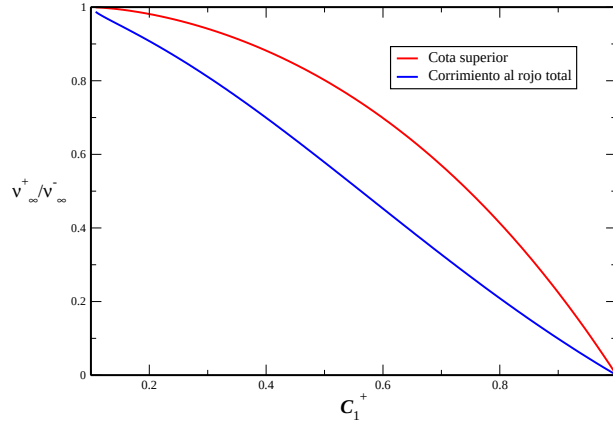


Figura 7.3: Comparación del corrimiento total de frecuencia $\nu_{\infty}^+/\nu_{\infty}^-$ con su cota superior dada en la ecuación (7.34) en la sección 7.4. El perfil inicial de densidad corresponde al dado en la ecuación (7.40) con $n = 50$ y $2m_1/R_1 = 1/10$. La cota se mantiene válida incluso cuando en este caso $E' > 0$ en una región dentro de la nube cercana a la superficie. Nótese que la cota es prácticamente exacta en el límite $C_1^+ \rightarrow 1$, el cual corresponde a un rayo de luz que sale de la nube muy cerca del horizonte de eventos.

donde para un dato inicial simétrico en el tiempo,

$$U(y) = \left(\sqrt{1-y^2} - \frac{y}{a_1} \sqrt{1-a_1^2} \right) \times \exp \left\{ \frac{y^2}{2a_1^2} - \frac{\sqrt{1-a_1^2}}{2a_1^2} \left[\frac{1+2a_1^2}{a_1} \arctan \left(\frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \right) + \frac{y}{a_1} \sqrt{1-y^2} \right] \right\},$$

con $a_1 := \sqrt{2m_1/R_1}$ y $y := \sqrt{r/R_1}$. Como u es constante a lo largo de rayos nulos radiales salientes, se obtiene que para observadores con $r_{obs} \gg 2m_1$ localizados a muchos radios de Schwarzschild de la nube que colapsa,

$$\tau = 4m_1 \log \left(\frac{U(1)}{U(y_1^+)} \right), \quad (7.43)$$

donde $y_1^+ := \sqrt{r_1^+/R_1}$. Una observación interesante es que para m_1 y R_1 fijos, el corrimiento al rojo es mayor para nubes cuyo perfil de densidad es poco homogéneo, es decir más concentrado cerca del centro (n pequeña), que para nubes cuyo perfil es muy homogéneo (n grande).

Finalmente se discute el efecto de corrimiento al azul estudiado en la referencia [57] por Kong *et al.*, donde se argumentó que los fotones emitidos desde el interior de la nube que colapsa pueden experimentar un corrimiento al azul medido por observadores distantes. En la figura 7.5 se muestra la razón de frecuencias ν_{∞}^+/ν_1^- para fotones que viajan en trayectorias radiales que

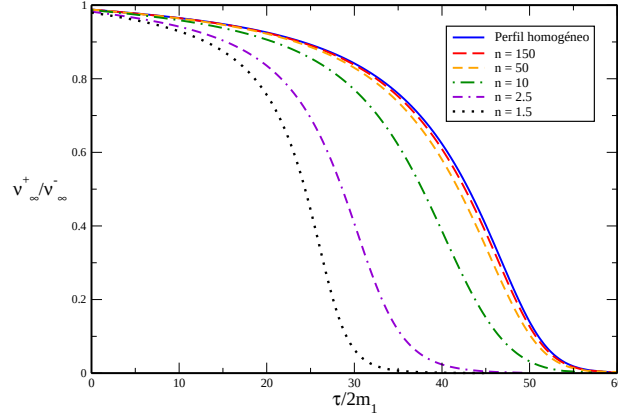


Figura 7.4: El corrimiento total de frecuencia $\nu_{\infty}^+/\nu_{\infty}^-$ que experimenta un fotón que viaja desde $\mathcal{I}^-$ hasta $\mathcal{I}^+$ a través del centro de una nube con razón de compacidad inicial fija $2m_1/R_1 = 1/10$, mostrada como función del tiempo propio τ de un observador estático arbitrariamente distante. Este corrimiento de frecuencia fue calculado usando las diferentes distribuciones de densidad mostradas en la figura 7.2. Se observa claramente que para una masa total fija, el corrimiento al rojo es mayor para nubes cuyo perfil de densidad es poco homogéneo (n pequeña) que para aquellas con perfil casi homogéneo (n grande).

emanan de la superficie de la nube, la atraviesan por el centro y llegan a $\mathcal{I}^+$. Como puede verse, para la familia de datos iniciales considerada, existen fotones que experimentan un corrimiento al azul ($\nu_{\infty}^+/\nu_{\infty}^- > 1$), sin embargo es claro que tal efecto solamente ocurre para perfiles de densidad que son casi homogéneos (n grande). Para perfiles poco homogéneos ($n < 10$) ninguno de los fotones se corre al azul, lo que sugiere que tal efecto podría ser difícil de detectar en la práctica.

7.6. Discusión

En este capítulo se ha estudiado el corrimiento de frecuencia de rayos de luz que se propagan en un espacio-tiempo dinámico asintóticamente plano descrito por el colapso gravitacional total de una nube de polvo esféricamente simétrica. Como primera aproximación al problema se ha asumido que los fotones no tienen momento angular y no se dispersan ni experimentan algún otro efecto debido a interacciones con la materia que colapsa. Específicamente, se han considerado fotones provenientes del infinito nulo pasado que atraviesan la nube de polvo por el centro y luego escapan al infinito nulo futuro; al respecto, se ha discutido la información que se puede obtener del corrimiento de su frecuencia, la cual es medida por observadores estacionarios. La suposición de que los fotones no interactúan con las partículas de polvo cambia esencialmente la concepción del trabajo de Kong *et al.* [57, 67], donde se supone que los fotones son emitidos desde el interior de la nube, lo que involucra procesos complejos que deben ser simplificados asumiendo un espectro de emisión particular. En este sentido, el enfoque de este trabajo es más limpio y más simple

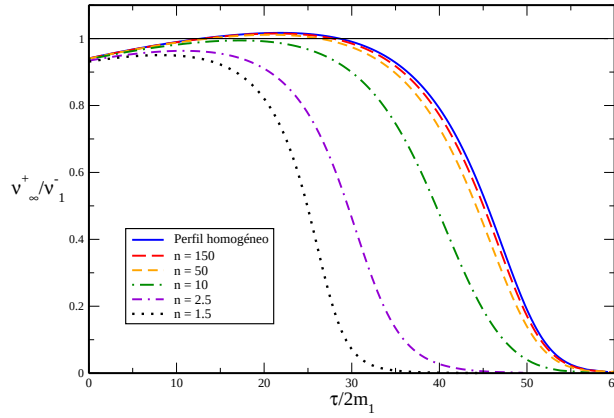


Figura 7.5: Cálculo numérico de la razón de frecuencias $\nu_{\infty}^{+}/\nu_1^{-}$ para fotones que viajan desde la superficie de la nube, la atraviesan por el centro y son detectados en $\mathcal{I}^{+}$ en función del tiempo propio τ de por un observador estático arbitrariamente distante. En todos los casos la razón de compacidad inicial de la nube es $2m_1/R_1 = 1/10$. Para perfiles de densidad casi homogéneos (n grandes), algunos fotones experimentan un corrimiento al azul ($\nu_{\infty}^{+}/\nu_1^{-} > 1$), sin embargo tal efecto no ocurre con perfiles poco homogéneos (n pequeñas).

puesto que se asume que los fotones provienen de fuentes conocidas *a priori*, como explosiones de supernovas o la radiación cósmica de fondo, por ejemplo.

Primero, se ha analizado la situación simple en la cual la nube posee una distribución de densidad homogénea: bajo este modelo, el colapso de la nube está descrito por un espacio-tiempo de FRW en contracción mientras, que el exterior está descrito por la métrica de Schwarzschild. En este escenario, se han considerado fotones propagándose desde $\mathcal{I}^{+}$ hasta $\mathcal{I}^{-}$ pasando por el centro de la nube, los cuales experimentan un corrimiento de frecuencia que consta de tres contribuciones, la primera de ellas consiste de un corrimiento al azul gravitacional entre el emisor estático cerca de $\mathcal{I}^{-}$ y la superficie de la nube, combinado con un corrimiento al rojo tipo Doppler debido al movimiento de la superficie respecto a observadores estáticos; la segunda contribución consiste de un corrimiento al azul debido a la contracción del espacio-tiempo de FRW; y la tercera contribución es una combinación de un corrimiento al rojo tipo Doppler en la superficie de la nube, con un corrimiento al rojo gravitacional entre dicha superficie y un observador estático cerca de $\mathcal{I}^{+}$. El cálculo explícito de estas tres contribuciones en conjunto revela que los fotones siempre se corren al rojo respecto a observadores estáticos. Además se ha escrito el corrimiento de frecuencia en función de la razón de compacidad de la nube al momento en que es incidida por el rayo de luz. Adicionalmente, se ha calculado el corrimiento de frecuencia de los fotones que son emitidos en la superficie de la nube para luego atravesarla por el centro y escapar a $\mathcal{I}^{+}$. Los resultados obtenidos en este trabajo confirman el hecho de que algunos de los fotones pueden experimentar un corrimiento al azul, como se mostró en la referencia [57] para el caso particular del colapso marginalmente ligado, sin embargo, aquí se ha demostrado que en el caso ligado existe cierto umbral en la energía total por debajo del cual todos los fotones se corren al

rojo.

Después se ha dado un paso más allá del caso de densidad homogénea y se ha considerado el modelo de Tolman-Bondi con dato inicial genérico. Con base en una identidad geométrica que relaciona el factor de corrimiento al azul a lo largo de las geodésicas nulas radiales entrantes y salientes con la razón de compacidad de los cascarones que colapsan, se ha encontrado una cota superior sobre el factor de corrimiento al azul de los fotones sin momento angular que viajan desde $\mathcal{S}^-$ hasta $\mathcal{S}^+$. Asumiendo solamente una densidad de masa no-negativa, la ausencia de singularidades de cruzamiento y que la energía total es una función decreciente del radio de área, la cota se puede expresar en términos de las razones de compacidad de la nube en los momentos en que el rayo entra y sale de la nube. Esta cota implica, en particular, que los fotones siempre se corren al rojo.

Después se calculó el corrimiento en la frecuencia experimentado por los fotones como función del tiempo propio de un observador estacionario arbitrariamente lejano, y se mostró la dependencia de tal función en la distribución de masa del objeto que colapsa, lo cual conduce al problema inverso que consiste en determinar la distribución de masa a partir del corrimiento de frecuencia observado en función del tiempo propio.

La cota para el corrimiento de frecuencia derivada en este capítulo también es válida para una nube de polvo esférica que colapsa y forma una singularidad desnuda siempre que la razón de compacidad $2m/r$ converja a cero cuando uno se aproxima al centro a lo largo de rayos de luz entrantes y salientes. Tal condición se cumple para rayos de luz radiales que pasan arbitrariamente cerca del primer punto singular bajo suposiciones razonables y genéricas sobre el dato inicial que caracteriza el colapso, y como consecuencia, esta cota excluye la posibilidad de que los fotones que viajan a lo largo de tales rayos de luz se corran al azul en una magnitud arbitrariamente grande, lo cual hubiese indicado una inestabilidad del horizonte de Cauchy. En ese sentido, este resultado es consistente y confirma el resultado del capítulo 4.³

Adicionalmente, el estudio del corrimiento al rojo total en este capítulo indica que una nube de polvo que colapsa no se puede concebir como un mecanismo que provee de energía a los fotones cosmológicos, como por ejemplo aquellos emitidos por supernovas, galaxias distantes o la radiación cósmica de fondo; por el contrario, tales fotones experimentarían una pérdida de energía cada vez que atravesaran una nube en colapso gravitacional. Entonces una pregunta relevante es: *¿los fotones cosmológicos que atraviesan varias nubes de polvo interestelar en colapso pueden experimentar un corrimiento al rojo comparable en magnitud al corrimiento al rojo que experimentan debido a la expansión del universo?* Típicamente esas nubes interestelares son muy poco compactas y están lejos de poder ser consideradas en el régimen relativista (su razón de compacidad $\mathcal{C} = 2m/r$ es mucho menor que uno), y en ese caso los cálculos realizados en las secciones 7.2 y 7.4 revelan que el factor de corrimiento al rojo z debido al colapso se escala de acuerdo a

$$z = \frac{\nu_{\infty}^-}{\nu_{\infty}^+} - 1 \sim \mathcal{C}^{3/2}, \quad (7.44)$$

lo cual sugiere que la corrección al corrimiento al rojo cosmológico es casi despreciable, a menos que el fotón atravesase un número enorme de nubes interestelares en colapso gravitacional.

³En el caso marginalmente ligado, este resultado también coincide con el de la referencia [23].

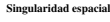
Capítulo 8

Distinción observacional entre singularidades desnudas y agujeros negros

Desde el punto de vista teórico -y astrofísico en particular-, es importante contar con herramientas teóricas listas y a la mano para poder distinguir la formación de una singularidad desnuda de la de un agujero negro durante el colapso gravitacional de un sistema aislado. Por ejemplo, se puede obtener información importante sobre la naturaleza del objeto que colapsa a partir del espectro de radiación electromagnética emitida desde la superficie o desde el interior del objeto (ver las referencias [62, 63, 64, 65, 66, 57, 67]). En este capítulo, siguiendo las ideas del capítulo anterior, se considera un escenario físico en el cual la radiación, en lugar de originarse en el interior del objeto en colapso, proviene de una fuente lejana y lo atraviesa sin interactuar con la materia. Esa fuente podría ser una supernova distante o ser parte de la radiación cósmica de fondo, por ejemplo. Este escenario tiene algunas similitudes con el que se plantea en las referencias [69, 70, 71], donde se discute la idea de usar lentes gravitacionales para distinguir agujeros negros de singularidades desnudas descritas por una solución estática y esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein con un campo escalar no-masivo, sin embargo la diferencia es que aquí se tiene un espacio-tiempo dinámico dado que describe un colapso, y además el análisis se centra en el comportamiento de los fotones entrantes que pasan cerca de la singularidad.

En el resto de este capítulo, como se ha hecho a lo largo de todo el trabajo, se asume que el objeto que colapsa es una nube de polvo esférica y que los fotones que la atraviesan carecen de momento angular. Específicamente, se consideran fotones que viajan desde el infinito nulo pasado hasta el infinito nulo futuro a través del centro de la nube de polvo y se muestra que el corrimiento al rojo experimentado por tales fotones en función del tiempo propio de un observador estacionario distante, exhibe rasgos distintos dependiendo del estado final de la nube.¹

¹Este capítulo está basado en el artículo [72]



observador en la región asintótica futura enciende su detector.

a partir del corrimiento al rojo

un observador lejano estático. Ver la figura 8.1.

Considérese un dato inicial simétrico en el tiempo para la nube que colapsa², a saber, la siguiente familia de perfiles de densidad, la cual fue introducida y ampliamente usada en la referencia [18],

$$\rho(R) = \rho_c \times \begin{cases} 1 - 2a \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 + (2a - 1) \left(\frac{R}{R_1}\right)^4, & 0 \leq R \leq R_1, \\ 0, & R > R_1, \end{cases} \quad (8.1)$$

donde $R_1 > 0$ es el radio de área inicial de la nube, $\rho_c > 0$ es su densidad central y a es un parámetro adimensional que provee una medida del grado de homogeneidad del perfil y está restringido al intervalo $0 < a \leq 1$. Este perfil es continuo y monótonamente decreciente en el intervalo $[0, \infty)$ y satisface los requerimientos físicamente razonables (i)-(viii) listados y ampliamente discutidos en el capítulo 3, excepto por la falta de diferenciabilidad en la superficie de la nube ($R = R_1$). En particular, este perfil de densidad es suave en el centro de la nube, donde $\partial_R \rho(0) = 0$ y $\partial_R^2 \rho(0) < 0$. Como se discutió antes, tales condiciones garantizan la formación de

²Se ha experimentado numéricamente con datos iniciales asimétricos en el tiempo y los resultados son cualitativamente similares.

una singularidad de enfoque visible para observadores locales, y además, en el capítulo 3 se han establecido condiciones sobre los parámetros para garantizar la formación de una singularidad desnuda. Para la densidad definida en la ecuación (8.1) la masa total de la nube es

$$m_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho_c \left[1 - \frac{6}{5}a + \frac{3}{7}(2a - 1) \right]. \quad (8.2)$$

Para lo siguiente se elige $a = 1/2$ -se comprobó que otras elecciones para a conducen a resultados cualitativamente similares-.

Enseguida se calcula numéricamente la razón de frecuencias $\nu_\infty^+/\nu_\infty^-$ como función del tiempo propio τ de un observador estático distante -de igual manera que en el capítulo anterior-, el cual enciende su cronómetro ($\tau = 0$) cuando recibe el rayo de luz radial que incide en la nube en el momento de simetría temporal, es decir, en el instante en que la nube se encuentra en reposo (ver la figura 8.1). Al respecto es importante aclarar que se trata de una convención arbitraria, aunque geométrica, para fijar $\tau = 0$.

La fórmula explícita para calcular la razón de frecuencias $\nu_\infty^+/\nu_\infty^-$ fue derivada en el capítulo anterior (ver la ecuación (7.39)). Para dicho cálculo se requiere integrar numéricamente los rayos de luz radiales (ecuación (3.10)), para lo cual se implementó el mismo algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden descrito en el capítulo anterior.

El panel izquierdo de la figura 8.2 muestra el corrimiento total de frecuencia $\nu_\infty^+/\nu_\infty^-$ como función de τ . La línea sólida corresponde a una nube con razón de compacidad $\mathcal{C}_1 := 2m_1/R_1 = 1/5$ cuyo colapso da origen a un agujero negro; las líneas no sólidas corresponden a nubes con valores menores de $\mathcal{C}_1$ y su colapso da lugar a singularidades globalmente desnudas. La integración numérica de los rayos de luz se detiene un instante antes de la formación ya sea de un horizonte de eventos asociado a un agujero negro, o de un horizonte de Cauchy asociado a una singularidad desnuda, con una tolerancia de aproximación arbitrariamente pequeña. Como era de esperarse, en virtud de las propiedades del espacio-tiempo de Schwarzschild, se observa que en el caso del agujero negro los fotones experimentan un corrimiento al rojo infinito ($\nu_\infty^+/\nu_\infty^- \rightarrow 0$) conforme éstos se aproximan al horizonte de eventos. En contraste, la razón de frecuencias presenta un *corte* repentino en el caso de formación de singularidades desnudas cuando los fotones se aproximan al horizonte de Cauchy, mostrando de paso que su corrimiento al rojo es finito, lo cual confirma el resultado del capítulo 4. Dicho corte se debe a que en cierto momento los rayos de luz entrantes provenientes de $\mathcal{J}^-$ ya no pueden atravesar la nube, se dirigen al agujero negro y su destino final es la porción espacial de la singularidad (ver la figura 8.1). Este corte constituye el primer rasgo observable que podría ayudar a distinguir una singularidad desnuda de un agujero negro.

El panel derecho de la figura 8.2 muestra la primera derivada del corrimiento de frecuencia $\nu_\infty^+/\nu_\infty^-$ con respecto al tiempo propio τ de un observador estático distante. Nótese que esta derivada temporal alcanza un valor negativo y finito conforme el observador se aproxima al horizonte de Cauchy, sin embargo en el caso de un agujero negro esta derivada tiende a cero suavemente conforme el observador se aproxima al horizonte de eventos. Esta diferencia en el comportamiento de la primera derivada constituye un segundo rasgo distintivo entre singularidades desnudas y agujeros negros. Finalmente, del panel derecho de la figura 8.2 se infiere que la segunda derivada del corrimiento de frecuencia también juega un papel importante en la distinción entre singularidades desnudas y agujeros negros: en el primer caso, la segunda derivada se mantiene negativa y diverge cuando el observador se aproxima al horizonte de Cauchy, mientras que en el caso del agujero negro de pronto se vuelve positiva y converge a cero conforme el observador se aproxima al horizonte de eventos. Estas tres diferencias sugieren un procedimiento sistemático para descri-

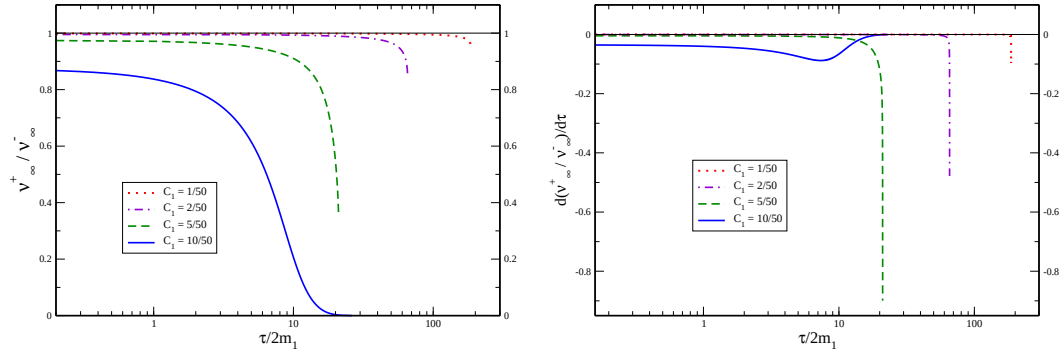


Figura 8.2: Panel izquierdo: comparación de corrimientos de frecuencia en los casos de formación de un agujero negro y singularidades desnudas a partir del colapso de una nube de polvo esférica con el perfil de densidad (8.1) con $a = 1/2$. La línea sólida corresponde a una nube con razón de compacidad $C_1 = 2m_1/R_1 = 1/5$ cuyo colapso da lugar a un agujero negro. Las líneas no sólidas corresponden a nubes con valores más pequeños de C_1 cuyo colapso genera singularidades desnudas. Panel derecho: Derivada temporal de los corrimientos de frecuencia mostrados en el panel izquierdo. Se observa que la primera y segunda derivadas de tales curvas exhiben comportamientos cualitativamente diferentes en el caso de la formación de agujeros negros y de singularidades desnudas.

minar entre singularidades desnudas y agujeros negros en base a observaciones del corrimiento al rojo.

Es importante mostrar que las propiedades cualitativas discutidas hasta ahora no dependen de las características particulares del perfil de densidad empleado (8.1). Para dar evidencia de ello, a continuación se repiten los cálculos numéricos discutidos hasta ahora, implementando la siguiente familia de perfiles de densidad introducida en la Sección 3.3.4:

$$\rho(R) = \rho_c \times \begin{cases} 1 - \frac{5\alpha}{3} \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 + \frac{7\beta}{3} \left(\frac{R}{R_1}\right)^4 + 3\gamma \left(\frac{R}{R_1}\right)^6 + \frac{11\delta}{3} \left(\frac{R}{R_1}\right)^8, & 0 \leq R \leq R_1, \\ 0, & R > R_1. \end{cases} \quad (8.3)$$

Como antes, $R_1 > 0$ es el radio de área inicial de la nube, $\rho_c > 0$ es su densidad central y el parámetro adimensional α provee una medida del grado de homogeneidad del perfil. El resto de los parámetros está determinado por $\beta = -3(6 - 5\alpha)/7$, $\gamma = (8 - 5\alpha)/3$ y $\delta = -(9 - 5\alpha)/11$. Además, α es tal que $0 < \alpha < 12/5$ para que el perfil satisfaga las condiciones (i)–(viii) listadas en el capítulo 3, a excepción de la diferenciabilidad C^∞ en $R = R_1$. Como en el caso previo, este perfil de densidad es continuo y monótonamente decreciente en el intervalo $[0, \infty)$, sin embargo, a diferencia de (8.1), este perfil es dos veces continuamente diferenciable en todo su dominio. La masa total de la nube descrita por el perfil de densidad (8.3) está dada por

$$m_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho_c (1 - \alpha + \beta + \gamma + \delta). \quad (8.4)$$

La figura 8.3 muestra las mismas funciones que la figura 8.2 pero ahora empleando el perfil de densidad definido en la ecuación (8.3) con la elección $\alpha = 1$. Claramente, las diferencias observables entre agujeros negros y singularidades desnudas persisten.

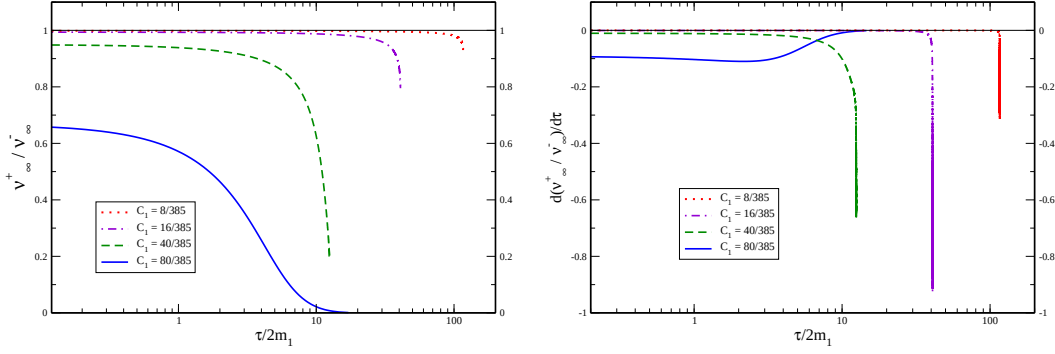


Figura 8.3: Las mismas funciones que las mostradas en la figura 8.2, empleando el perfil de densidad más suave definido en la ecuación (8.3) con $\alpha = 1$ y $C_1 = 2m_1/R_1 = 16/77$. Se observa que los rasgos mostrados en la figura 8.2 se preservan, sugiriendo que los resultados son robustos.

8.2. Discusión.

En este capítulo se ha estudiado el corrimiento de frecuencia de rayos de luz propagándose en un espacio-tiempo dinámico y asintóticamente plano que describe el colapso gravitacional total de una nube de polvo esférica. Específicamente, se han considerado fotones viajando desde el infinito nulo pasado hasta el infinito nulo futuro a través del centro de la nube y se ha discutido cómo se puede discriminar una singularidad desnuda de un agujero negro a partir de la información obtenida del corrimiento al rojo de tales fotones, medido por un observador estacionario distante. El análisis ha revelado las siguientes tres diferencias fundamentales: (i) el corrimiento de frecuencia correspondiente a fotones salientes propagándose en la vecindad del horizonte de Cauchy asociado a una singularidad desnuda muestra un corte repentino con un corrimiento al rojo finito. En contraste con ello, en el caso en que se forma un agujero negro, el corrimiento de frecuencia converge suavemente a cero y por lo tanto el correspondiente factor de corrimiento al rojo diverge (ver el panel izquierdo de las figuras 8.2 y 8.3); (ii) la primera derivada temporal del corrimiento de frecuencia de los fotones se comporta de forma completamente distinta dependiendo de si se forma una singularidad desnuda o un agujero negro. En el primer caso la derivada alcanza un valor negativo finito cuando el observador se aproxima al horizonte de Cauchy, mientras que en el segundo caso, la derivada converge suavemente a cero cuando el observador se aproxima al horizonte de eventos (ver el panel derecho de las figuras 8.2 y 8.3); (iii) la segunda derivada temporal del corrimiento de frecuencia de los fotones también muestra claras diferencias entre singularidades desnudas y agujeros negros. En el primer caso, esta segunda derivada se mantiene negativa y diverge cuando el observador se acerca al horizonte de Cauchy, mientras que en el

segundo caso, la segunda derivada cambia de signo y tiende a cero conforme el observador se acerca el horizonte de eventos (ver el panel derecho de las figuras 8.2 y 8.3). Se ha verificado que las diferencias cualitativas (i) – (iii) son robustas en el sentido de que éstas persisten aún cuando se consideran datos iniciales distintos. Por lo tanto, se puede concluir que dentro del modelo simple considerado en este trabajo, es posible distinguir entre la formación de una singularidad desnuda y la de un agujero negro en base a la información obtenida de la detección de fotones que atraviesan el objeto que colapsa.

Es importante enfatizar que una confirmación de la posibilidad de distinguir singularidades desnudas de agujeros negros en escenarios más realistas requiere trabajo adicional. Por ejemplo, es importante generalizar este estudio para fotones con momento angular distinto de cero, e incluso considerar modelos de colapso que involucren la rotación de la nube y/o presión, entre otros aspectos.

Capítulo 9

Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado exhaustivamente el modelo de Tolman-Bondi en el contexto de la teoría de la Relatividad General, el cual describe el colapso gravitacional total de una nube de polvo esféricamente simétrica. Se ha comenzado, en el Capítulo 2, por deducir las ecuaciones de Einstein-Euler que gobiernan el colapso de un fluido perfecto con una ecuación de estado genérica en un espacio-tiempo esférico. Después, en el Capítulo 3, se ha tomado el caso particular de presión cero y se ha obtenido la solución exácta del sistema de Einstein-Euler, lo que permite establecer la métrica de Tolman-Bondi y una fórmula explícita para la evolución de la densidad de materia de la nube. Enseguida se ha llevado a cabo una amplia revisión de la estructura causal del espacio-tiempo en base al análisis de los rayos de luz radiales, confirmando que en este modelo pueden aparecer singularidades desnudas estables bajo perturbaciones esféricas. Además se ha dado una condición sobre el dato inicial del colapso para garantizar la formación de una singularidad globalmente desnuda. Asimismo se ha presentado un algoritmo numérico para generar sistemáticamente diagramas conformes del espacio-tiempo resultante del colapso.

En los Capítulos 4, 5 y 6 se han realizado estudios de estabilidad de singularidades globalmente desnudas dentro del modelo de Tolman-Bondi. Como perturbación se ha considerado la propagación de campos de prueba en la vecindad de la singularidad y del horizonte de Cauchy asociado. Los resultados en el régimen de altas frecuencias -Capítulo 4- no muestran indicios de inestabilidad, lo cual es consistente con estudios previos discutidos oportunamente. En el régimen de bajas frecuencias se ha demostrado rigurosamente que los campos escalares esféricos de prueba son uniformemente acotados, excepto posiblemente sobre la singularidad central, sin que esa divergencia se propague a lo largo del horizonte de Cauchy. En el Capítulo 5 se ha estudiado numéricamente la propagación de campos de prueba no esféricos en la vecindad de la singularidad, sin haber encontrado evidencia de inestabilidades. Con esa motivación, en el Capítulo 6 se ha demostrado rigurosamente que, asociada a los campos de prueba no esféricos, existe una energía uniformemente acotada en superficies tipo espacio, lo que permite probar que tales campos son uniformemente acotados, excepto tal vez por una divergencia en la singularidad, de la cual no hay evidencia numérica en el Capítulo 5. De hecho, los resultados de los Capítulos 5 y 6 son consistentes y complementarios.

Finalmente, en los Capítulos 7 y 8, fuera del contexto de la estabilidad, se han encontrado propiedades interesantes sobre el corrimiento al rojo de fotones sin momento angular provenientes de fuentes lejanas, que atraviesan la nube de polvo por el centro para luego ser detectados por observadores igualmente lejanos. En especial se ha demostrado que siempre hay un corrimiento

al rojo y no al azul. Además se ha discutido la posibilidad de aprovechar las propiedades de ese corrimiento para inferir la distribución de masa de la nube que colapsa, y de paso se ha mostrado que ese mismo corrimiento al rojo exhibe propiedades distintas dependiendo de si el remanente del colapso es un agujero negro o una singularidad globalmente desnuda, lo que sugiere un método observacional que permite distinguir la formación de una singularidad globalmente desnuda de la de agujero negro dentro del modelo de Tolman-Bondi.

Este trabajo revela un amplio panorama de proyectos a futuro, pues prácticamente cada capítulo sugiere nuevas líneas de investigación: por ejemplo, se pueden implementar métodos numéricos para resolver el problema de Cauchy bien planteado en el Capítulo 2 para las ecuaciones que describen el colapso de un fluido perfecto con ecuaciones de estado genéricas, lo cual permitiría explorar la aparición de singularidades desnudas en ese ámbito y complementar los avances existentes en la literatura, ver por ejemplo [37, 38, 39]; en ese mismo contexto, se planea generalizar el algoritmo numérico presentado en el Capítulo 3 para construir diagramas conformes en el caso del colapso con presión distinta de cero, y buscar condiciones que garanticen la formación de singularidades desnudas en los casos en que éstas existan. Por otra parte, los estudios de estabilidad aquí discutidos sugieren ir más allá del régimen de campos de prueba y considerar, por ejemplo, la propagación de perturbaciones gravitacionales en la vecindad el horizonte de Cauchy. Al respecto se tienen algunos resultados primitivos sobre estimaciones de energía que permitirían demostrar que cierto tipo de perturbaciones gravitacionales linealizadas son uniformemente acotadas. Además se tienen herramientas computacionales valiosas y algunos estudios numéricos preliminares que reproducen los resultados de trabajos previos sobre la propagación de ciertas perturbaciones gravitacionales linealizadas [27, 28, 29] y marcan una pauta para investigar los casos más generales. En cuanto al estudio del corrimiento al rojo de fotones que atraviesan la nube en colapso, una extensión natural que se planea realizar a mediano plazo es considerar rayos de luz que no necesariamente atraviesan la nube por el centro, lo cual implica el estudio de trayectorias nulas no radiales, es decir, fotones con momento angular distinto de cero. Al respecto no se tiene un pronóstico claro de lo que pueda ser el resultado, de modo que el proyecto es bastante intrigante, y de persistir las diferencias observacionales entre agujeros negros y singularidades desnudas en ese escenario más realista, el interés sería mayor.

Apéndice A

Teorema de existencia para perturbaciones no lineales de puntos singulares regulares

En este apéndice se presenta una prueba corta del siguiente teorema, el cual se usa en la sección 3.2 para mostrar la existencia local de rayos de luz que emanan o terminan en la singularidad. La prueba se basa en herramientas básicas de la teoría de sistemas dinámicos.¹ Una generalización para sistemas de ecuaciones y aplicaciones a estrellas relativistas puede encontrarse en la referencia [73].

Teorema A.0.1 Sean $\beta > 0$ y $D \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ que contiene el origen. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^∞ . Entonces la ecuación diferencial

$$x \frac{dy}{dx} + \beta y = x f(x, y) \quad (\text{A.1})$$

tiene una única solución local de clase C^∞ , $y : (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ la cual es acotada y satisface

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{dy}{dx}(x) = \frac{f(0, 0)}{\beta + 1}.$$

Demostración. Definanse $\alpha := f(0, 0)$ y el parámetro $t = -\log(x)$ para $x > 0$. Entonces las soluciones de la ecuación (A.1) están dadas por las trayectorias del sistema autónomo

$$\frac{d}{dt} u = Au + F(u), \quad (\text{A.2})$$

con

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix}, \quad F(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ x[f(0, 0) - f(x, y)] \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

¹Se agradece que Thomas Zannias por sugerir esta elegante prueba.

El sistema dinámico descrito por la ecuación (A.2) tiene un punto estacionario en $u = 0$, y el sistema linealizado en ese punto está dado por la matriz A . Los eigenvalores de A son -1 y $\beta > 0$, con sus correspondientes variedades uno-dimensionales estable e inestable, las cuales contienen los puntos en el espacio fase que convergen a $u = 0$ para $t \rightarrow \infty$ y para $t \rightarrow -\infty$, respectivamente; ver por ejemplo la referencia [74]. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación (A.1) acotadas para pequeñas $x = \exp(-t)$ corresponden a la variedad estable. Su vector tangente en $u = 0$ está dado por el eigenspacio de A correspondiente al eigenvalor -1 . Como este eigenspacio es generado por el vector $(\beta + 1, \alpha)$, la pendiente de la solución en $u = 0$ es $\alpha/(\beta + 1)$. $\square$

Apéndice B

Prueba del Lema 3.2.2

El propósito de este apéndice es probar el Lema 3.2.2, que concierne a las soluciones locales de clase C^1 de la ecuación (3.16) que satisfacen $\lim_{u \rightarrow 0} \varphi(u) = 0$. Para la prueba es conveniente re-escribir la ecuación (3.16) en la forma

$$\frac{dy}{du} = A(y, u) \left(\frac{u}{y} \right)^2 \left[1 - \epsilon B(y, u) \sqrt{u} \left(\frac{u}{y} \right) \right] - \frac{3\epsilon}{4} B(y, u) \sqrt{u}, \quad (\text{B.1})$$

donde las funciones $A, B : [0, 1) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ están definidas por

$$\begin{aligned} A(y, u) &:= \frac{3}{4} R_1^2 \Lambda(y, R) \sqrt{1 - q(R)^2 y^2} \Big|_{R=R_1 u^{3/2}}, \\ B(y, u) &:= R_1 Q(R) \sqrt{1 - q(R)^2 y^2} \Big|_{R=R_1 u^{3/2}}. \end{aligned}$$

De acuerdo al Lema 3.2.1, esas funciones son continuas y satisfacen

$$\begin{aligned} A_0 &:= A(0, 0) = \frac{3}{4} R_1^2 \Lambda(0, 0) = \lambda^3 > 0, \\ B_0 &:= B(0, 0) = R_1 Q_0 > 0, \end{aligned}$$

donde λ está definida en la ecuación (3.17) y $Q_0 := Q(0) > 0$. Por lo tanto, dada $\delta > 0$ con $\delta < \min\{A_0, B_0\}$, existen $\delta_y > 0$ y $\delta_u > 0$ suficientemente pequeñas tales que $D := [0, \delta_y] \times [0, \delta_u] \subset [0, 1) \times [0, 1]$ y

$$\begin{aligned} 0 < A_0 - \delta &\leq A(y, u) \leq A_0 + \delta, \\ 0 < B_0 - \delta &\leq B(y, u) \leq B_0 + \delta \end{aligned}$$

para todo $(y, u) \in D$. Sea $\varphi : (0, \delta_u) \rightarrow (0, \delta_y)$ una solución local de la ecuación (B.1) tal que $\lim_{u \rightarrow 0} \varphi(u) = 0$, y defínanse

$$m := \inf_{0 < u < \delta_u} \frac{\varphi(u)}{u} \geq 0, \quad M := \sup_{0 < u < \delta_u} \frac{\varphi(u)}{u} \leq \infty.$$

Ahora se está en condiciones de probar el lema.

- (i) Supóngase que $m > 0$. Entonces se puede usar $u/y \leq 1/m$ en la ecuación (B.1) y estimar

$$\frac{dy}{du} \leq \frac{A_0 + \delta}{m^2} \left[1 + \frac{B_0 + \delta}{m} \sqrt{\delta_u} \right] + \frac{3(B_0 + \delta)}{4} \sqrt{\delta_u} =: M',$$

para $0 < u < \delta_u$. Como $\lim_{u \rightarrow 0} \varphi(u) = 0$, entonces $\varphi(u) \leq M'u$ para toda $0 < u < \delta_u$. Por lo tanto, $M \leq M' < \infty$.

- (ii) En cambio, si se supone que $M < \infty$ y se asume $\epsilon = -1$, usando la estimación $u/y \geq 1/M$ en la ecuación (B.1) y el hecho de que B es positiva en D , se obtiene

$$\frac{dy}{du} \geq \frac{A_0 - \delta}{M^2} =: m' > 0,$$

lo cual implica que $\varphi(u) \geq m'u$ para toda $0 < u < \delta_u$. Por lo tanto, $m \geq m' > 0$.

- (iii) Finalmente, supóngase que $m > 0$ y $M < \infty$. De acuerdo a la regla de L'Hôpital (ver por ejemplo la referencia [75]), se tiene

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\varphi(u)^3}{u^3} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\varphi(u)}{u} \right)^2 \frac{d\varphi}{du} = A_0 = \lambda^3,$$

donde, en el segundo paso, se ha usado la ecuación (B.1) y el hecho de que u/y es acotada. Por lo tanto $\lim_{u \rightarrow 0} \varphi(u)/u = \lambda$.

□

Apéndice C

La superficie de la nube de polvo que colapsa en coordenadas de Kruskal

En este apéndice se construyen coordenadas de Penrose-Kruskal a lo largo de la superficie de la nube Θ . Para ello se comienza con las expresiones para las coordenadas nulas de Kruskal, las cuales están relacionadas a las coordenadas de Schwarzschild (t, r) por medio de [4]:

$$\begin{aligned} U &= \pm \sqrt{\left| \frac{r}{2m} - 1 \right|} \exp\left(\frac{r-t}{4m}\right), \\ V &= \sqrt{\left| \frac{r}{2m} - 1 \right|} \exp\left(\frac{r+t}{4m}\right), \end{aligned}$$

donde la elección de signo $(+/-)$ corresponde a la región dentro o fuera del horizonte de eventos, respectivamente. Estas coordenadas satisfacen la relación

$$UV = \left(1 - \frac{r}{2m}\right) \exp\left(\frac{r}{2m}\right), \quad r > 0. \quad (\text{C.1})$$

La superficie Θ está generada por la trayectoria de una partícula en caída libre sin momento angular en el espacio-tiempo de Schwarzschild, y la dinámica de tal partícula está gobernada por la ecuación (3.3) con $R = R_1$. La coordenada t a lo largo de la geodésica se determina mediante la ecuación de conservación de la energía

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\sqrt{1 + 2E_1}}{1 - \frac{2m_1}{r}},$$

donde $E_1 := 2E(R_1)$ y $m_1 := m(R_1)$. Usando esto último, la ecuación (3.3) y la definición de U y V , se encuentran las siguientes ecuaciones:

$$4m_1 \frac{d}{dr} \log(U) = \frac{r}{r - 2m_1} \left(1 + \sqrt{\frac{1 + 2E_1}{\frac{2m_1}{r} + 2E_1}}\right), \quad (\text{C.2})$$

$$4m_1 \frac{d}{dr} \log(V) = \frac{r}{r - 2m_1} \left(1 - \sqrt{\frac{1 + 2E_1}{\frac{2m_1}{r} + 2E_1}}\right), \quad (\text{C.3})$$

las cuales son válidas tanto fuera como dentro del horizonte de eventos. Integrando la ecuación (C.2) se obtiene

$$U(y) = \frac{1}{a_1} \left(\sqrt{a_1^2 - b_1^2 y^2} - y \sqrt{1 - b_1^2} \right) \times \\ \exp \left\{ \frac{y^2}{2a_1^2} - \frac{\sqrt{1 - b_1^2}}{2b_1^2} \left[\frac{1 + 2b_1^2}{b_1} \arctan \left(\frac{\sqrt{a_1^2 - b_1^2 y^2}}{b_1 y} \right) + \frac{y}{a_1^2} \sqrt{a_1^2 - b_1^2 y^2} \right] \right\},$$

donde $a_1^2 := 2m_1/R$, $b_1^2 := -2E_1$ y $y^2 = r/R_1$. De la relación (C.1) se sigue de inmediato que

$$V(y) = \frac{1}{a_1} \left(\sqrt{a_1^2 - b_1^2 y^2} + y \sqrt{1 - b_1^2} \right) \times \\ \exp \left\{ \frac{y^2}{2a_1^2} + \frac{\sqrt{1 - b_1^2}}{2b_1^2} \left[\frac{1 + 2b_1^2}{b_1} \arctan \left(\frac{\sqrt{a_1^2 - b_1^2 y^2}}{b_1 y} \right) + \frac{y}{a_1^2} \sqrt{a_1^2 - b_1^2 y^2} \right] \right\}.$$

Una translación en t induce las transformaciones $U \mapsto \kappa U$ y $V \mapsto V/\kappa$ con $\kappa > 0$. Aquí se elige κ tal que $U(0) = V(0) = 1$. Las coordenadas de Penrose-Kruskal U_Θ y V_Θ en la sección 3.3 se obtienen del re-escalamiento después de la compactificación $U_\Theta(y) := \arctan(U(y))$, $V_\Theta(y) := \arctan(V(y))$.

Usando las ecuaciones (C.2) y (C.3) y el hecho de que $\dot{r} < 0$ a lo largo de la superficie, no es difícil comprobar que $\dot{U}$ y $\dot{V}$ siempre son positivas a lo largo de Θ . Por lo tanto, el factor conforme de la sección 3.3, $\Omega = 1/\sqrt{\dot{U}_\Theta \dot{V}_\Theta}$, está bien definido.

Apéndice D

Divergencia del campo vectorial $\mathbf{X}$

Dado el campo vectorial

$$\mathbf{X} = e^f \left(r' \mathbf{u} - \frac{\dot{r}}{\gamma} \mathbf{w} \right),$$

y la decomposición $\nabla^\mu f = gu^\mu + hw^\mu$, las componentes de su divergencia son

$$\nabla_\mu X_\nu = e^f \left[gr' u_\mu u_\nu + hr' w_\mu u_\nu + \nabla_\mu r' u_\nu + r' \nabla_\mu u_\nu - g \frac{\dot{r}}{\gamma} u_\mu w_\nu - h \frac{\dot{r}}{\gamma} w_\mu w_\nu - \nabla_\mu \left(\frac{\dot{r}}{\gamma} \right) w_\nu - \frac{\dot{r}}{\gamma} \nabla_\mu w_\nu \right].$$

Si se elige $e^f = \gamma$, entonces $g = -\dot{\gamma}/\gamma$ y $h = \gamma'$. Usando las propiedades de simetría del espacio-tiempo y las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} (u_\mu) &= (-1, 0, 0, 0), & (w_\mu) &= (0, 1/\gamma, 0, 0), \\ \tilde{\nabla}_a u_b &= -\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} w_a w_b, & \tilde{\nabla}_a u_B &= 0 = \hat{\nabla}_A u_b, & \hat{\nabla}_A u_B &= \hat{g}_{AB} r \dot{r}, \\ \tilde{\nabla}_a w_b &= -\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} w_a u_b, & \tilde{\nabla}_a w_B &= 0 = \hat{\nabla}_B u_a, & \hat{\nabla}_A w_B &= \hat{g}_{AB} \gamma r r', \end{aligned}$$

se obtienen las componentes

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_a X_b &= \gamma \left[-\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} r' u_a u_b + \left(\gamma' r' + \frac{\dot{\gamma} \dot{r}}{\gamma^2} \right) w_a u_b + \tilde{\nabla}_a r' u_b - \frac{1}{\gamma} (\gamma' \dot{r} + \dot{\gamma} r') w_a w_b + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma^2} \dot{r} u_a w_b - \tilde{\nabla}_a \left(\frac{\dot{r}}{\gamma} \right) w_b \right], \\ \tilde{\nabla}_a X_B &= 0 = \hat{\nabla}_A X_b, \\ \hat{\nabla}_A X_B &= 0. \end{aligned}$$

Luego, las descomposiciones $\tilde{\nabla}_a r' = -\dot{r}' u_a + \gamma r'' w_a$ y $\tilde{\nabla}_a \left(\frac{\dot{r}}{\gamma} \right) = -\left(\frac{\ddot{r}}{\gamma} - \frac{\dot{\gamma}}{\gamma^2} \dot{r} \right) u_a + \left(\dot{r}' - \frac{\gamma'}{\gamma} \dot{r} \right) w_a$, así como el hecho de que $(\gamma r')' = 0$, implican

$$\tilde{\nabla}_a X_b = \ddot{r} u_a w_b + \left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \dot{r} + \gamma (\gamma r')' \right) w_a u_b.$$

Nótese que

$$\tilde{\nabla}_{(a}X_{b)} = \left(\frac{1}{\gamma} (\gamma \dot{r}) + \gamma (\gamma r')' \right) u_{(a}w_{b)}.$$

Sólo para comparar, si $\mathbf{X} = e^f \mathbf{u}$ resulta

$$\tilde{\nabla}_a X_b = e^f \left(g u_a u_b + h w_a u_b - \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} w_a w_b \right), \quad \tilde{\nabla}_a X_B = 0 = \hat{\nabla}_A X_b, \quad \hat{\nabla}_A X_B = e^f r \dot{r} \hat{g}_{AB}.$$

Apéndice E

Análisis numérico

En este apéndice se muestra que la solución del problema de evolución característica (5.4), además de ser única, es estable en el sentido que se precisa más adelante. Después se plantea un esquema de diferencias finitas para resolverlo numéricamente, y se demuestra que bajo tal esquema las soluciones del problema discretizado son estables y convergentes a la solución en el régimen continuo. Primero, en la Sección E.1, se estudia el caso simplificado en que los coeficientes de la ecuación de evolución son constantes; después, en la Sección E.2, se estudia el caso más complejo en que los coeficientes son variables.

E.1. Caso del fondo plano (coeficientes constantes)

E.1.1. El régimen continuo

Considérese la ecuación efectiva (5.4) en el caso en que el espacio tiempo de fondo es de Minkowski, es decir: $W = 1$ y $e^{2\beta} = 1$. Lo anterior permite plantear el siguiente problema de coeficientes constantes:

$$2\partial_t\partial_R\phi(t, R) - \partial_R^2\phi(t, R) + V(t, R)\phi(t, R) = 0, \quad t > 0, \quad 0 \leq R \leq R_{max}, \quad (\text{E.1})$$

con condiciones de frontera $\phi(t, 0) = 0$ y $\partial_R\phi(t, R_{max}) = 0$. Supóngase que V es una función suave y acotada. Defínanse las nuevas funciones $\Psi := \partial_R\phi$, y $F(t, R, \Psi) := -V(t, R) \int_0^R \Psi(t, \bar{R}) d\bar{R}$, entonces la ecuación (E.1) toma la forma

$$\partial_t\Psi(t, R) - \frac{1}{2}\partial_R\Psi(t, R) = \frac{1}{2}F(t, R, \Psi), \quad t > 0, \quad 0 \leq R \leq R_{max}. \quad (\text{E.2})$$

Considérese el espacio L^2 de funciones reales cuadráticamente integrables con dominio $[0, R_{max}]$. Sean $f, g \in L^2$. El producto escalar de f y g sobre el espacio L^2 se define como

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_0^{R_{max}} f(R)g(R)dR,$$

el cual induce la norma sobre el espacio L^2 definida para f como $\|f\|_{L^2} := \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2}}$.

Lema E.1.1 *La estimación $\|F(t, R, \Psi)\|_{L^2}^2 \leq \|\sqrt{R}V(t)\|_{L^2}^2 \cdot \|\Psi(t)\|_{L^2}^2$ es válida respecto a la norma L^2 .*

Demostración.

$$\begin{aligned} |F(t, R, \Psi)| &= |V(t, R)| \left| \int_0^R \Psi(t, \bar{R}) d\bar{R} \right| \leq |V(t, R)| \int_0^R 1 \cdot |\Psi(t, \bar{R})| d\bar{R} \\ &\leq |V(t, R)| \left(\int_0^R 1^2 \cdot d\bar{R} \right)^{1/2} \left(\int_0^R |\Psi(t, \bar{R})|^2 d\bar{R} \right)^{1/2} = \sqrt{R} |V(t, R)| \|\Psi(t)\|_{L^2}, \end{aligned}$$

donde se ha usado la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|\langle f, g \rangle|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}$. Finalmente

$$\|F(t, R, \Psi)\|_{L^2}^2 \leq \int_0^{R_{max}} R |V(t, R)|^2 \|\Psi\|_{L^2}^2 dR \leq \|\sqrt{R}V(t)\|_{L^2}^2 \cdot \|\Psi(t)\|_{L^2}^2.$$

□

Teorema E.1.1 (Estabilidad) *Sea $R_1 > 0$, $R \in [0, R_1]$, $t \in [0, \infty)$. Supóngase que $\Psi : [0, \infty) \times [0, R_1] \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, R) \mapsto \Psi(t, R)$, es una solución suave de la ecuación diferencial parcial inhomogénea de primer orden (E.2), con condiciones de frontera $\Psi(t, R_{max}) = 0$. Entonces Ψ es estable en el sentido de que existe una constante c independiente de Ψ , tal que $\|\Psi(t, R)\|_{L^2} \leq e^{ct} \|\Psi(0, R)\|_{L^2}$ para todo $t \geq 0$.*

Demostración. La estrategia de la prueba es usar estimaciones de energía, la cual en este caso se define como

$$E(t) := \int_0^{R_{max}} \Psi(t, R)^2 dR \geq 0.$$

Derivando respecto a t y usando la ecuación de evolución (E.2) y la condición de frontera $\Psi(t, R_{max}) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= 2 \int_0^{R_{max}} \Psi(t, R) \partial_t \Psi(t, R) dR \\ &= 2 \int_0^{R_{max}} \Psi(t, R) \left[\frac{1}{2} \partial_R \Psi(t, R) + \frac{1}{2} F(t, R, \Psi) \right] dR \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{R_{max}} \partial_R (\Psi(t, R)^2) dR + \int_0^{R_{max}} \Psi(t, R) F(t, R, \Psi) dR \\ &= -\frac{1}{2} \Psi(t, 0)^2 + \int_0^{R_{max}} \Psi(t, R) F(t, R, \Psi) dR \\ &\leq \int_0^{R_{max}} \Psi(t, R) F(t, R, \Psi) dR. \end{aligned} \tag{E.3}$$

Lo anterior puede escribirse en términos de la norma y del producto escalar sobre L^2 de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \|\Psi(t, R)\|_{L^2}^2 \leq \langle \Psi(t, R), F(t, R, \Psi) \rangle_{L^2},$$

luego la desigualdad de Cauchy-Schwarz conduce a $2\frac{d}{dt}\|\Psi(t, R)\|_{L^2} \leq \|F(t, R, \Psi)\|_{L^2}$, y usando el enunciado del Lema E.1.1 se llega a $\frac{d}{dt}\|\Psi(t, R)\|_{L^2} \leq c\|\Psi(t, R)\|_{L^2}$, donde $c := \frac{1}{2}\|\sqrt{R}V(t)\|_{L^2}$. Finalmente, multiplicando ambos lados por e^{-ct} se obtiene $\frac{d}{dt}(e^{-ct}\|\Psi(t, R)\|_{L^2}) \leq 0$, e integrando sobre t ,

$$\|\Psi(t, R)\|_{L^2} \leq e^{ct}\|\Psi(0, R)\|_{L^2}, \quad t \geq 0.$$

□

Corolario E.1.1 (Unicidad) *La solución del problema de valores iniciales con valores en la frontera (E.2) es única y depende de manera continua del dato inicial.*

Demostración. Supóngase que existen dos soluciones distintas de la ecuación (E.2), a saber Ψ_1 y Ψ_2 . Entonces por linealidad, $\Psi_1 - \Psi_2$ también es solución y a consecuencia del Teorema E.1.1:

$$\|\Psi_1(t, R) - \Psi_2(t, R)\|_{L^2} \leq e^{ct}\|\Psi_1(0, R) - \Psi_2(0, R)\|_{L^2}, \quad t \geq 0.$$

Dado un dato inicial único se tiene $\Psi_1(0, R) = \Psi_2(0, R)$, por lo tanto $\Psi_1(t, R) = \Psi_2(t, R)$ para todo $t \geq 0$, lo que implica que la solución es única.

Dados datos iniciales distintos, $\Psi_1(0, R) \neq \Psi_2(0, R)$ implica $\Psi_1(t, R) \neq \Psi_2(t, R)$ para toda $t \geq 0$, lo que significa que la solución depende continuamente del dato inicial. □

E.1.2. El régimen semi-discreto

En lo subsecuente supóngase que el dominio espacial está discretizado en N puntos separados por una distancia constante $h := R_{max}/N$, de tal manera que el j -ésimo punto del dominio se encuentre en la posición $R_j := jh$, con $j \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$. Una función $f : \{R_j\} \rightarrow \mathbb{R}$, $R_j \mapsto f(R_j) =: f_j$ se llama *discreta* en el sentido de que su dominio es el conjunto finito $\{R_j\} \subset \mathbb{R}$, y por lo tanto su co-dominio es el conjunto finito $\{f_j\} \subset \mathbb{R}$. Es claro entonces que el operador continuo d/dR no tiene sentido para la función f y en su lugar es necesario definir un operador diferencial discreto D . Existen varias opciones para ello, y una elección particular es

$$(Df)_j := \begin{cases} (f_1 - f_0)/h & , \quad j = 0, \\ (f_{j+1} - f_{j-1})/2h & , \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \\ (f_N - f_{N-1})/h & , \quad j = N, \end{cases}$$

que corresponde a una derivada espacial de segundo orden de precisión, excepto en las fronteras, donde es de primer orden. Esto significa que si f es al menos una función de clase $\mathcal{C}^3$, entonces

$$\frac{df}{dR}(R_j) = (Df)_j + r_j, \quad (\text{E.4})$$

donde $r_j = \mathcal{O}(h^2)$ para $j = 1, 2, \dots, N-1$, mientras que para $j = 0$ y $j = N$, $r_j = \mathcal{O}(h)$ (ver el Apéndice F). r_j es se llama *error de truncamiento* y aparece necesariamente cuando se aproxima la derivada espacial por un operador discreto D . Nótese que $(Df)_j \rightarrow \frac{df}{dR}(R_j)$ conforme $h^2 \rightarrow 0$ para $j = 1, 2, \dots, N-1$, mientras que para $j = 0$ y $j = N$ ocurre conforme $h \rightarrow 0$. Esta propiedad se conoce como *consistencia* del operador D con el operador d/dR . También la integral de Riemann de la función discreta f pierde sentido y es necesario aproximar su valor. Una manera

estándar de hacerlo es mediante la llamada *regla del trapecio* [50]:

$$\text{int}(f)_j := \frac{h}{2}(f_0 + f_j) + h \sum_{i=1}^{j-1} f_i, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad \text{int}(f)_0 = 0, \quad (\text{E.5})$$

la cual es de segundo orden de precisión puesto que el error de truncamiento introducido al aproximar la integral $\int_0^{R_j} f$ por $\text{int}(f)_j$ se puede acotar por un término de segundo orden en h , es decir

$$\int_0^{R_j} f = \text{int}(f)_j + \bar{r}_j, \quad (\text{E.6})$$

con $|\bar{r}_j| \leq (h^2/12)R_j |f''|_\infty$, $j = 0, 1, 2, \dots, N$. Nótese que $\text{int}(f)_j \rightarrow \int_0^{R_j} f$ cuando $h \rightarrow 0$, de tal forma que el operador int es consistente con la integral continua.

Dado que computacionalmente no se puede evaluar una función real con precisión infinita, el planteamiento discreto es apropiado para reproducir la situación que se tiene al intentar resolver un problema de evolución numericamente. El problema particular que se aborda en esta sección es la versión *semi-discreta* de la ecuación diferencial parcial (E.2)

$$\partial_t \psi_j(t) - \frac{1}{2}(D\psi)_j(t) = \frac{1}{2}F_j(t, \psi), \quad t > 0, \quad (\text{E.7})$$

donde se asume que las funciones discretas $\psi_j(t)$ y $F_j(t, \psi)$ son aproximaciones numéricas de $\Psi(t, R_j)$ y $F(t, R_j, \Psi)$, respectivamente. Como se trata de aproximaciones, en general $\psi_j(t) \neq \Psi(t, R_j)$ y $F_j(t, \psi) \neq F(t, R_j, \Psi)$. De hecho, la magnitud de las diferencias depende del algoritmo, por ejemplo si $F_j(t, \psi)$ aproxima a $F(t, R_j, \Psi)$ mediante la regla del trapecio (E.5), es decir,

$$F_j(t, \psi) := -V_j(t) \left[\frac{h}{2} (\psi_0(t) + \psi_j(t)) + h \sum_{i=1}^{j-1} \psi_i(t) \right], \quad \text{con } j = 1, \dots, N,$$

y $F_0(t, \psi) = 0$, y $V_j(t) := V(t, R_j)$, entonces de acuerdo a la ecuación (E.6), $F_j(t, \psi) - F(t, R_j, \Psi) = V_j \bar{r}_j(t)$.

Para lo siguiente hay que introducir otro concepto útil: sean $f, g : \{R_i\} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones discretas arbitrarias, $R_i \mapsto f_i := f(R_i)$ y $R_i \mapsto g_i := g(R_i)$, con $i = 0, 1, \dots, N$. En analogía con la definición del producto escalar sobre L^2 , se define el h -producto escalar de la siguiente manera:

$$\langle f, g \rangle_h := \frac{h}{2} (f_0 g_0 + f_N g_N) + h \sum_{i=1}^{N-1} f_i g_i, \quad (\text{E.8})$$

lo que constituye una aproximación del producto escalar sobre L^2 mediante la regla del trapecio. La correspondiente h -norma discreta es $\|f\|_h := \sqrt{\langle f, f \rangle_h}$.

Lema E.1.2 La función $F_j(\psi) := -V_j \left[\frac{h}{2} (\psi_0 + \psi_j) + h \sum_{i=1}^{j-1} \psi_i \right]$, $j = 0, 1, \dots, N$, con $F_0(\psi) = 0$, se puede acotar respecto a la h -norma de la siguiente manera:

$$\|F\|_h \leq \|\sqrt{RV}\|_h \|\psi\|_h.$$

Demostración. La función $F_j(\psi)$ se puede escribir como $-V_j \langle \chi^{(j)}, \psi \rangle_h$, donde

$$\chi_i^{(j)} := \begin{cases} 1 & , \quad i \leq j-1, \\ 1/2 & , \quad i = j, \\ 0 & , \quad i > j, \end{cases}$$

para $1 \leq j \leq N$, mientras que $\chi_i^{(0)} = 0$ y $\chi_i^{(N)} = 1$ para cada i . Entonces, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|F_j| = |V_j| \left| \langle \chi^{(j)}, \psi \rangle_h \right| \leq |V_j| \|\chi^{(j)}\|_h \cdot \|\psi\|_h.$$

De manera trivial se tiene $\|\chi^{(0)}\|_h = 0$, mientras que para $1 \leq j \leq N$,

$$\|\chi^{(j)}\|_h^2 = \frac{h}{2} (\chi_0^{(j)} + \chi_N^{(j)}) + h \sum_{i=1}^{N-1} (\chi_i^{(j)})^2 = \frac{h}{2} + h \sum_{i=1}^{j-1} 1 + \frac{h}{2} = jh = R_j,$$

de tal forma que $|F_j| \leq \sqrt{R_j} |V_j| \cdot \|\psi\|_h$, y por lo tanto $\|F\|_h \leq \|\sqrt{RV}\|_h \|\psi\|_h$. $\square$

Ahora se tienen las herramientas necesarias para demostrar la estabilidad numérica de la solución del sistema semi-discreto, y más adelante el teorema de Lax, el cual establece que la estabilidad numérica de la solución y la consistencia de los operadores discretos con los continuos, garantiza que para todo t , $\psi_j(t) \rightarrow \Psi(t, R_j)$ cuando $h \rightarrow 0$, para todo j , es decir, la solución del sistema semi-discreto (numérica) converge a la solución del sistema continuo (exacta).

El siguiente teorema (que constituye la versión semi-discreta del Teorema E.1.1), establece la estabilidad numérica de ψ_j , luego el Teorema E.1.3 establece la convergencia y proporciona una cota superior para la magnitud del *error numérico*, el cual se define como

$$e_j(t) := \psi_j(t) - \Psi(t, R_j). \quad (\text{E.9})$$

Teorema E.1.2 (Estabilidad numérica) Sean $N \in \mathbb{N}$, $R_{\max} > 0$. Sea $h := R_{\max}/N$, $R_j := jh$, con $j \in \{0, \dots, N\}$, y sea $t \in [0, \infty)$. Supóngase que $\psi : [0, \infty) \times \{R_j\} \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, R_j) \mapsto \psi_j(t)$, es una solución del sistema diferencial parcial inhomogéneo y semi-discreto de primer orden

$$\partial_t \psi_j(t) - \frac{1}{2} (D\psi)_j(t) = \frac{1}{2} \mathcal{F}_j(t, \psi)$$

con la condición de frontera $\psi_N(t) = 0$ y $\mathcal{F}_j(t, \psi) := F_j(t, \psi) + f_j(t)$, donde f una función semi-discreta arbitraria. Entonces ψ es estable en el sentido de que existe una constante $\tilde{c}$ independiente de ψ , tal que $\|\psi(t)\|_h^2 \leq e^{\tilde{c}t} (\|\psi(0)\|_h^2 + \xi(t, h))$, $\xi \geq 0$, para todo $t \geq 0$.

Observación. En futuras aplicaciones del Teorema E.1.1, la función semi-discreta f será relevante porque jugará el papel del error de truncamiento.

Demostración. La idea de la demostración es la misma que en el Teorema E.1.1. La versión discreta de la *energía* es la siguiente:

$$E_h(t) := \|\psi(t)\|_h^2 = \frac{h}{2} \psi_0(t)^2 + h \sum_{j=1}^{N-1} \psi_j(t)^2,$$

donde ya se ha tomado en cuenta la condición de frontera. Luego, omitiendo la dependencia en

t por simplicidad de la notación,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_h &= \langle \psi, \psi \rangle_h = 2 \left\langle \psi, \frac{d}{dt}\psi \right\rangle_h \\ &= \langle \psi, D\psi \rangle_h + \langle \psi, \mathcal{F} \rangle_h,\end{aligned}$$

donde explícitamente el primer término es

$$\langle \psi, D\psi \rangle_h = \frac{1}{2}\psi_0(\psi_1 - \psi_0) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \psi_j (\psi_{j+1} - \psi_{j-1}) = -\frac{1}{2}\psi_0^2,$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_h &= -\frac{1}{2}\psi_0^2 + \langle \psi, \mathcal{F} \rangle_h = -\frac{1}{2}\psi_0^2 + \frac{h}{2}\psi_0\mathcal{F}_0 + h \sum_{j=1}^{N-1} \psi_j\mathcal{F}_j \\ &= -\frac{1}{2} \left(\psi_0 - \frac{h}{2}\mathcal{F}_0 \right)^2 + \frac{h^2}{8}\mathcal{F}_0^2 + h \sum_{j=1}^{N-1} \psi_j\mathcal{F}_j.\end{aligned}$$

Aprovechando la negatividad el primer término y la desigualdad $\sum_{j=1}^{N-1} \psi_j\mathcal{F}_j \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{2}{\kappa}\psi_j^2 + \frac{\kappa}{2}\mathcal{F}_j^2 \right)$ con $\kappa > 0$, se obtiene la siguiente estimación:

$$\frac{d}{dt}\|\psi\|_h^2 \leq \frac{h^2}{8}\mathcal{F}_0^2 + \frac{1}{\kappa}h \sum_{j=1}^{N-1} \psi_j^2 + \frac{h\kappa}{4} \sum_{j=1}^{N-1} \mathcal{F}_j^2.$$

Además se puede agregar el término positivo $(h/2\kappa)\psi_0^2$ y usar la condición de frontera (la cual implica que $\psi_N = 0$) para escribir

$$\frac{d}{dt}\|\psi\|_h^2 \leq \frac{1}{\kappa}\|\psi\|_h^2 + \frac{h^2}{8}\mathcal{F}_0^2 + \frac{h\kappa}{4} \sum_{j=1}^{N-1} \mathcal{F}_j^2 = \frac{1}{\kappa}\|\psi\|_h^2 + \frac{\kappa}{4}\|\tilde{\mathcal{F}}\|_h^2,$$

donde $\tilde{\mathcal{F}}_0 := \sqrt{\frac{h}{\kappa}}\mathcal{F}_0$, y $\tilde{\mathcal{F}}_i := \mathcal{F}_i$ para $i = 1, \dots, N$. Como $F_0 \equiv 0$, entonces $\tilde{\mathcal{F}}_0 = \sqrt{\frac{h}{\kappa}}f_0 =: \tilde{f}_0$. Defínase $\tilde{f}_i = f_i$ para $i = 1, \dots, N$, entonces $\|\tilde{\mathcal{F}}\|_h^2 = \|F + \tilde{f}\|_h^2 \leq 2\|F\|_h^2 + 2\|\tilde{f}\|_h^2$, y usando el Lema E.1.2, $\|\tilde{\mathcal{F}}\|_h^2 \leq 2\|\sqrt{RV}\|_h^2 \cdot \|\psi\|_h^2 + 2\|\tilde{f}\|_h^2$, lo que conduce a

$$\frac{d}{dt}\|\psi\|_h^2 - \tilde{c}\|\psi\|_h^2 \leq \frac{\kappa}{2}\|\tilde{f}\|_h^2,$$

donde $\tilde{c} := 1/\kappa + (\kappa/2)\|\sqrt{RV}\|_h^2$. Finalmente, multiplicando ambos lados por $e^{-\tilde{c}t}$ se obtiene

$$\frac{d}{dt} (e^{-\tilde{c}t}\|\psi\|_h^2) \leq \frac{\kappa}{2}e^{-\tilde{c}t}\|\tilde{f}\|_h^2,$$

luego integrando en t ,

$$\|\psi(t)\|_h^2 \leq e^{\tilde{c}t} \left(\|\psi(0)\|_h^2 + \frac{\kappa}{2} \int_0^t e^{-\tilde{c}s} \|\tilde{f}(s)\|_h^2 ds \right).$$

□

Teorema E.1.3 (Teorema de Lax) Sea $\Psi(t, R)$ una solución de la ecuación diferencial parcial

$$\partial_t \Psi(t, R) - \frac{1}{2} \partial_R \Psi(t, R) = \frac{1}{2} F(t, R, \Psi), \quad (\text{E.10})$$

donde $F(t, R, \Psi) = -V(t, R) \int_0^R \Psi(t, \bar{R}) d\bar{R}$. Sea $\psi_j(t)$ una solución de la misma ecuación ahora en el régimen semi-discreto, es decir

$$\partial_t \psi_j(t) - \frac{1}{2} (D\psi)_j(t) = \frac{1}{2} F_j(t, \psi), \quad (\text{E.11})$$

con la condición de frontera $\Psi(t, R_{\max}) = 0 = \psi_N(t)$, y donde

$F_j(t, \psi) = -V_j \left[\frac{h}{2} (\psi_0 + \psi_j) + h \sum_{i=1}^{j-1} \psi_j \right]$, para $j = 1, \dots, N$, y $F_0(t) = 0$. Entonces para todo t , la h -norma del error numérico es del orden de h^2 .

Demostración. Evaluando la ecuación (E.10) en $R = R_j$ se obtiene $\partial_t \Psi(t, R_j) - \partial_R \Psi(t, R_j)/2 = F(t, R_j, \Psi)/2$, lo que, usando la ecuación (E.4), se puede escribir como

$$\partial_t \Psi(t, R_j) - \frac{1}{2} (D\Psi)_j(t) = \frac{1}{2} F(t, R_j, \Psi) + \frac{1}{2} r_j(t). \quad (\text{E.12})$$

Tomando la diferencia de (E.11) y (E.12) se encuentra que el error numérico (ver la definición (E.9)) satisface la siguiente ecuación:

$$\partial_t e_j(t) - \frac{1}{2} (De)_j(t) = \frac{1}{2} \mathcal{F}_j(t, \psi, \Psi), \quad (\text{E.13})$$

donde $\mathcal{F}_j(t, \psi, \Psi) := F_j(t, \psi) - F(t, R_j, \Psi) - r_j(t)$. Sea $\bar{r}_j(t)$ el error cometido al aproximar la integral $\int_0^R \Psi(t, \bar{R}) d\bar{R}$ mediante la regla del trapecio, entonces

$$F(t, R_j, \Psi) = -V_j \left[\frac{h}{2} (\Psi(t, 0) - \Psi(t, R_j)) + h \sum_{i=1}^{j-1} \Psi(t, R_i) + \bar{r}_j(t) \right],$$

y luego la diferencia:

$$F_j(t, \psi) - F(t, R_j, \Psi) = -V_j \left[\frac{h}{2} (e_0(t) - e_j(t)) + h \sum_{i=1}^{j-1} e_i(t) - \bar{r}_j(t) \right] = F_j(t, e) + V_j \bar{r}_j(t),$$

por lo tanto $\mathcal{F}_j(t, \psi, \Psi) = F_j(t, e) + f_j(t)$, con $f_j(t) := V_j \bar{r}_j(t) - r_j(t)$. Nótese que la ecuación (E.13) tiene precisamente la forma de la ecuación en el Teorema E.1.2 con $\mathcal{F}_j = \mathcal{F}_j(t, e)$, y en consecuencia

$$\|e(t)\|_h^2 \leq e^{\tilde{c}t} \left(\|e(0)\|_h^2 + \frac{\kappa}{2} \int_0^t e^{-\tilde{c}s} \|\tilde{f}(s)\|_h^2 ds \right),$$

donde $\kappa > 0$ y $\tilde{c} = 1/\kappa + (\kappa/2)\|\sqrt{R}V\|_h^2$. Ahora, recordando que la función $\tilde{f}$ se definió mediante $\tilde{f}_0 = \sqrt{(h/\kappa)}f_0$ y $\tilde{f}_j = f_j$ para $j = 1, \dots, N$, entonces se puede calcular

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}\|_h^2 &= \frac{h}{2}(\tilde{f}_0^2 + \tilde{f}_N^2) + h \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{f}_j^2 = \frac{h}{2} \left(\frac{h}{\kappa} f_0^2 + f_N^2 \right) + h \sum_{j=1}^{N-1} f_j^2 \\ &= \frac{h}{2} \left(\frac{h}{\kappa} (V_0 \bar{r}_0 - r_0)^2 + (V_N \bar{r}_N - r_N)^2 \right) + h \sum_{j=1}^{N-1} (V_j \bar{r}_j - r_j)^2.\end{aligned}$$

Finalmente, del Apéndice F se tiene $|r_0| \leq (h/2)|\psi''|_\infty$, $r_j \leq (h^2/6)|\psi'''|_\infty$ para $j = 1, \dots, N-1$, y $|r_N| \leq \frac{h}{2}|\psi''|_\infty$, mientras que $|\bar{r}_j| \leq (h^2/12)R_j|\psi''|_\infty$ para $j = 0, 1, \dots, N$. Por lo tanto

$$\|e(t)\|_h^2 \leq e^{\tilde{c}t} \|e(0)\|_h^2 + \mathcal{O}(h^4).$$

□

En la práctica, al resolver el problema numérico, si al menos $\|e(0)\|_h = \mathcal{O}(h^2)$ (a veces incluso es posible elegir $\|e(0)\|_h \equiv 0$), entonces $\|e(t)\|_h \leq \mathcal{O}(h^2)$, lo que significa que un algoritmo numérico basado en el esquema semi-discreto mostrado en este capítulo debe ser convergente a segundo orden.

E.2. Caso del fondo de Tolman-Bondi (coeficientes variables)

E.2.1. El régimen continuo

Considérese la ecuación efectiva

$$\partial_t \Psi(t, R) - \frac{1}{2} \partial_R (W(t, R) \Psi(t, R)) = \frac{1}{2} F(t, R, \Psi). \quad (\text{E.14})$$

donde $F(t, R, \Psi) := -V(t, R) \int_0^R \Psi(t, \bar{R}) d\bar{R}$, con V y $W > 0$, funciones dadas arbitrarias y suficientemente suaves. El siguiente resultado es análogo al del Teorema E.1.1:

Teorema E.2.1 (Estabilidad) *Sea $R_{\max} > 0$, $R \in [0, R_{\max}]$, $t \in [0, \infty)$. Sean $\Psi : [0, \infty) \times [0, R_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, R) \mapsto \Psi(t, R)$ una solución suave de la ecuación diferencial parcial inhomogénea de primer orden (E.14) con condiciones de frontera $\Psi(t, R_{\max}) = 0$. Entonces Ψ es estable en el sentido de que existe una constante c independiente de Ψ , tal que $\|\Psi(t)\|_{L^2} \leq e^{ct} \|\Psi(0)\|_{L^2}$ para todo $t \geq 0$.*

Demostración. Siguiendo la idea de la demostración del Teorema E.1.1,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|\Psi\|_{L^2}^2 &= \int_0^{R_{max}} \Psi \partial_R (W \Psi) dR + \int_0^{R_{max}} \Psi F dR \\
&= \int_0^{R_{max}} \left[\frac{1}{2} \partial_R (W \Psi^2) + \frac{1}{2} (\partial_R W) \Psi^2 \right] dR + \langle \Psi, F \rangle_{L^2} \\
&\leq -\frac{1}{2} W(0) \Psi(0)^2 + \frac{1}{2} \int_0^{R_{max}} (\partial_R W) \Psi^2 dR + \langle \Psi, F \rangle_{L^2} \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^{R_{max}} (\partial_R W) \Psi^2 dR + \langle \Psi, F \rangle_{L^2}.
\end{aligned}$$

El primer término se puede acotar por arriba por $(1/2) |\partial_R W|_\infty \|\Psi\|_{L^2}^2$, y el segundo -usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz- por $\|\Psi\|_{L^2} \|F\|_{L^2}$, entonces $\frac{d}{dt} \|\Psi\|_{L^2}^2 \leq (1/2) |\partial_R W|_\infty \|\Psi\|_{L^2}^2 + \|\Psi\|_{L^2} \|F\|_{L^2}$. Luego usando el resultado del Lema E.1.1 se llega a $\frac{d}{dt} \|\Psi\|_{L^2} - c \|\Psi\|_{L^2} \leq 0$, donde $c := (1/2) \left[(1/2) |\partial_R W|_\infty + \|\sqrt{RW}\|_{L^2} \right]$ es una constante independiente de Ψ . Multiplicando ambos lados por e^{-ct} e integrando en t se obtiene finalmente

$$\|\Psi(t)\|_{L^2} \leq e^{ct} \|\Psi(0)\|_{L^2}.$$

□

E.2.2. El régimen semi-discreto

En este apartado se discute la estabilidad y convergencia de las soluciones de la versión semi-discreta de la ecuación efectiva de coeficientes variables (E.14), lo cual en analogía con (E.7) se escribe como

$$\partial_t \psi_j(t) - \frac{1}{2} D(W\psi)_j(t) = \frac{1}{2} F_j(t, \psi), \quad t > 0, \quad (\text{E.15})$$

donde

$$F_j(t, \psi) := -V_j(t) \left[\frac{h}{2} (\psi_0(t) + \psi_j(t)) + h \sum_{i=1}^{j-1} \psi_i(t) \right], \quad j = 1, \dots, N,$$

y $F_0(t, \psi) = 0$, con $V_j(t) := V(t, R_j)$ y $W(t, R) > 0$.

Lema E.2.1 Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $R \mapsto g(R)$ al menos de clase $\mathcal{C}^1$. Denótese su primera derivada respecto a R con g' . Sea $N \in \mathbb{N}$ y $\{R_j\} \subset \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \dots, N$. Defínase $g_j := g(R_j)$. Entonces

$$\|[D, g]\psi\|_h \leq |g'|_\infty \|\psi\|_h,$$

donde D es el operador diferencial discreto definido en la sección E.1.2, y $[D, g] := Dg - gD$.

Demostración. Expandiendo el conmutador, $[D, g]\psi = D(g\psi) - gD\psi$, se obtiene explícitamente

$$[D, g]\psi = \begin{cases} \left(\frac{g_1\psi_1 - g_0\psi_0}{h} \right) - g_0 \left(\frac{\psi_1 - \psi_0}{h} \right) & , \quad j = 0, \\ \left(\frac{g_{j+1}\psi_{j+1} - g_{j-1}\psi_{j-1}}{2h} \right) - g_j \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2h} \right) & , \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \\ \left(\frac{g_N\psi_N - g_{N-1}\psi_{N-1}}{h} \right) - g_N \left(\frac{\psi_N - \psi_{N-1}}{h} \right) & , \quad j = N, \end{cases}$$

lo cual es equivalente a

$$[D, g]\psi = \begin{cases} \left(\frac{g_1 - g_0}{h} \right) \psi_1 & , \quad j = 0, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{g_{j+1} - g_j}{h} \right) \psi_{j+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{g_j - g_{j-1}}{h} \right) \psi_{j-1} & , \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \\ \left(\frac{g_N - g_{N-1}}{h} \right) \psi_{N-1} & , \quad j = N. \end{cases}$$

Luego el teorema del valor medio[75] implica que

$$[D, g]\psi = \begin{cases} g'(R_0^*)\psi_1 & , \quad j = 0, \\ \frac{1}{2}g'(R_j^*)\psi_{j+1} + \frac{1}{2}g'(R_{j-1}^*)\psi_{j-1} & , \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \\ g'(R_{N-1}^*)\psi_{N-1} & , \quad j = N, \end{cases}$$

donde $R_j < R_j^* < R_{j+1}$. Finalmente calculando explícitamente y estimando el cuadrado de la h -norma:

$$\begin{aligned} \|[D, g]\psi\|_h^2 &= \frac{h}{2} [g'(R_0^*)^2 \psi_1^2 + g'(R_{N-1}^*)^2 \psi_{N-1}^2] \\ &+ h \sum_{j=1}^{N-1} \left[\frac{1}{4} g'(R_j^*)^2 \psi_{j+1}^2 + \frac{1}{4} g'(R_{j-1}^*)^2 \psi_{j-1}^2 + \frac{1}{2} g'(R_j^*) \psi_{j+1} g'(R_{j-1}^*) \psi_{j-1} \right] \\ &\leq |g'|_\infty^2 \left[\frac{h}{2} (\psi_1^2 + \psi_{N-1}^2) + \frac{h}{2} \sum_{j=1}^{N-1} (\psi_{j+1}^2 + \psi_{j-1}^2) \right] \\ &= |g'|_\infty^2 \left[\frac{h}{2} (\psi_1^2 + \psi_{N-1}^2) + \frac{h}{2} (\psi_2^2 + \psi_0^2 + \psi_3^2 + \psi_1^2 + \dots + \psi_N^2 + \psi_{N-2}^2) \right] \\ &= |g'|_\infty^2 \left[\frac{h}{2} (\psi_0^2 + \psi_N^2) + h \sum_{j=1}^{N-1} \psi_j^2 \right] = |g'|_\infty^2 \|\psi\|_h^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|[D, g]\psi\|_h \leq |g'|_\infty \|\psi\|_h.$$

□

El siguiente resultado es análogo al Teorema E.1.2.

Teorema E.2.2 (Estabilidad numérica) Sea $N \in \mathbb{N}$, $R_{max} > 0$, $h := R_{max}/N$, $R_j := jh$, con $j \in \{0, \dots, N\}$, y sea $t \in [0, \infty)$. Supóngase que $\psi : [0, \infty) \times \{R_j\} \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, R_j) \mapsto \psi_j(t)$ es una solución de la ecuación parcial semi-discreta e inhomogénea de primer orden

$$\partial_t \psi_j(t) - \frac{1}{2} D(W\psi)_j(t) = \frac{1}{2} \mathcal{F}_j(t, \psi), \quad t > 0,$$

donde $\mathcal{F}_j(t, \psi) := F_j(t, \psi) + f_j(t)$, con f una función semi-discreta arbitraria. Considérese la condición de frontera $\psi_N(t) = 0$. Entonces ψ es estable en el sentido de que existe una constante $\tilde{c}$ independiente de ψ , tal que $\|\psi(t)\|_h^2 \leq e^{\tilde{c}t} (\|\psi(0)\|_h^2 + \xi(t, h))$, $\xi \geq 0$, para todo $t \geq 0$. La constante $\tilde{c}$ y la función ξ están por determinarse.

Demostración. Esta prueba sigue las mismas ideas que la del Teorema E.1.2. Considérese la energía

$$E_h(t) := \|\psi(t)\|_h^2 = \frac{h}{2} \psi_0(t)^2 + h \sum_{j=1}^{N-1} \psi_j(t)^2,$$

donde ha sido implementada la condición de frontera. Luego

$$\frac{d}{dt} E_h = 2 \left\langle \psi, \frac{d\psi}{dt} \right\rangle_h = \langle \psi, D(W\psi) \rangle_h + \langle \psi, F \rangle_h,$$

donde la dependencia en t ha sido omitida por simplicidad de la notación. El primer término se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \langle \psi, D(W\psi) \rangle_h &= \frac{1}{2} (\langle \psi, D(W\psi) \rangle_h + \langle D\psi, W\psi \rangle_h) + \frac{1}{2} (\langle \psi, D(W\psi) \rangle_h - \langle D\psi, W\psi \rangle_h) \\ &= \frac{1}{2} (W_N \psi_N^2 - W_0 \psi_0^2) + \frac{1}{2} (\langle \psi, D(W\psi) \rangle_h - \langle \psi, WD\psi \rangle_h), \end{aligned}$$

donde se ha aprovechado la simetría del h -producto escalar y se ha *sumado por partes* (ver el Apéndice F). Recombinando los últimos términos y recordando la condición de frontera se obtiene $\langle \psi, D(W\psi) \rangle_h = -(1/2)W_0\psi_0^2 + (1/2)\langle \psi, [D, W]\psi \rangle_h$. Luego usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el resultado del Lema E.2.1, $\langle \psi, D(W\psi) \rangle_h \leq -(1/2)W_0\psi_0^2 + (1/2)|\partial_R W|_\infty \|\psi\|_h^2$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\psi\|_h^2 &\leq -\frac{1}{2}W_0\psi_0^2 + \frac{1}{2}|\partial_R W|_\infty \|\psi\|_h^2 + \frac{h}{2}\psi_0\mathcal{F}_0 + h \sum_{j=1}^{N-1} \psi_j\mathcal{F}_j \\ &= -\frac{1}{2} \left(\sqrt{|W_0|}\psi_0 - \frac{h}{2\sqrt{|W_0|}}\mathcal{F}_0 \right)^2 + \frac{h^2}{8W_0}\mathcal{F}_0^2 + \frac{1}{2}|\partial_R W|_\infty \|\psi\|_h^2 + h \sum_{j=1}^{N-1} \psi_j\mathcal{F}_j \\ &\leq \frac{h^2}{8W_0}\mathcal{F}_0^2 + \frac{1}{2}|\partial_R W|_\infty \|\psi\|_h^2 + h \sum_{j=1}^{N-1} \psi_j\mathcal{F}_j, \end{aligned}$$

luego usando la desigualdad $\sum_{j=1}^{N-1} \psi_j\mathcal{F}_j \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} (\frac{2}{\kappa}\psi_j^2 + \frac{\kappa}{2}\mathcal{F}_j^2)$, con $\kappa > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\psi\|_h^2 &\leq \frac{h^2}{8W_0}\mathcal{F}_0^2 + \frac{1}{2}|\partial_R W|_\infty \|\psi\|_h^2 + \frac{1}{\kappa}h \sum_{j=1}^{N-1} \psi_j^2 + \frac{h\kappa}{4} \sum_{j=1}^{N-1} \mathcal{F}_j^2 \\ &\leq \frac{h^2}{8W_0}\mathcal{F}_0^2 + \frac{1}{2}|\partial_R W|_\infty \|\psi\|_h^2 + \frac{1}{\kappa}\|\psi\|_h^2 + \frac{h\kappa}{4} \sum_{j=1}^{N-1} \mathcal{F}_j^2 \\ &= \frac{1}{2}|\partial_R W|_\infty \|\psi\|_h^2 + \frac{1}{\kappa}\|\psi\|_h^2 + \frac{\kappa}{4}\|\tilde{\mathcal{F}}\|_h^2, \end{aligned}$$

donde $\tilde{\mathcal{F}}_0 := \sqrt{\frac{h}{\kappa W_0}} \mathcal{F}_0$, y $\tilde{\mathcal{F}}_i := \mathcal{F}_i$ para $i = 1, \dots, N$. Como $F_0 \equiv 0$, entonces $\tilde{\mathcal{F}}_0 = \sqrt{\frac{h}{\kappa W_0}} f_0 =: \tilde{f}_0$. Definase $\tilde{f}_i = f_i$ para $i = 1, \dots, N$, entonces $\|\tilde{\mathcal{F}}\|_h^2 = \|F + \tilde{f}\|_h^2 \leq 2\|F\|_h^2 + 2\|\tilde{f}\|_h^2$, y usando el Lema E.1.2 se llega a

$$\frac{d}{dt} \|\psi\|_h^2 \leq \frac{1}{2} |\partial_R W|_\infty \|\psi\|_h^2 + \frac{1}{\kappa} \|\psi\|_h^2 + \frac{\kappa}{2} \|\sqrt{R} V e^{2\beta}\|_h^2 \cdot \|\psi\|_h^2 + \frac{\kappa}{2} \|\tilde{f}\|_h^2,$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{d}{dt} \|\psi\|_h^2 - \tilde{c} \|\psi\|_h^2 \leq \frac{\kappa}{2} \|\tilde{f}\|_h^2,$$

donde $\tilde{c} := (1/\kappa) + (1/2) |\partial_R W|_\infty + (\kappa/2) \|\sqrt{R} V\|_h^2$. Finalmente, multiplicando ambos lados por $e^{-\tilde{c}t}$ e integrando sobre t se obtiene

$$\|\psi(t)\|_h^2 \leq e^{\tilde{c}t} \left(\|\psi(0)\|_h^2 + \frac{\kappa}{2} \int_0^t e^{-\tilde{c}s} \|\tilde{f}(s)\|_h^2 ds \right).$$

□

Teorema E.2.3 (Teorema de Lax) Sea $\Psi(t, R)$ la solución de la ecuación diferencial parcial

$$\partial_t \Psi(t, R) - \frac{1}{2} \partial_R (W(t, R) \Psi(t, R)) = \frac{1}{2} F(t, R, \Psi), \quad t > 0, \quad (\text{E.16})$$

con $F(t, R, \Psi) = -V(t, R) \int_0^R \Psi(t, \bar{R}) d\bar{R}$. Sea $\psi_j(t)$ una solución de la misma ecuación pero en el régimen semi-discreto, es decir

$$\partial_t \psi_j(t) - \frac{1}{2} D(W\psi)_j(t) = \frac{1}{2} F_j(t, \psi), \quad (\text{E.17})$$

con la condición de frontera $\Psi(t, R_{\max}) = 0 = \psi_N(t)$, y $F_j(t, \psi) = -V_j \left[\frac{h}{2} (\psi_0 + \psi_j) + h \sum_{i=1}^{j-1} \psi_j \right]$, $j = 1, \dots, N$, y $F_0(t) = 0$, con $V_j(t) := V(t, R_j)$. V y $W > 0$ son funciones dadas arbitrarias y suficientemente suaves. Entonces, para todo t y j , $\psi_j(t)$ converge a $\Psi(t, R_j)$, y la h -norma del error numérico se puede acotar de acuerdo a $\|e(t)\|_h \leq \mathcal{O}(h^2)$.

Demostración. Evaluando la ecuación (E.16) en $R = R_j$, $\partial_t \Psi(t, R_j) - \frac{1}{2} \partial_R (W(t, R_j) \Psi(t, R_j)) = \frac{1}{2} F(t, R_j, \Psi)$. Luego usando la ecuación (E.4) lo anterior se puede escribir como

$$\partial_t \Psi(t, R_j) - \frac{1}{2} D(W\Psi)_j(t) = \frac{1}{2} F(t, R_j, \Psi) + \frac{1}{2} r_j(t). \quad (\text{E.18})$$

Tomando la diferencia entre (E.17) y (E.18), uno encuentra que el error numérico (ver la definición (E.9)) satisface la siguiente ecuación:

$$\partial_t e_j(t) - \frac{1}{2} D(We)_j(t) = \frac{1}{2} \mathcal{F}_j(t, \psi, \Psi), \quad (\text{E.19})$$

donde $\mathcal{F}_j(t, \psi, \Psi) := F_j(t, \psi) - F(t, R_j, \Psi) - r_j(t)$. Sea $\bar{r}_j(t)$ el error introducido al aproximar la integral $\int_0^R \Psi(t, \bar{R}) d\bar{R}$ mediante la regla del trapecio, entonces

$$F(t, R_j, \Psi) = -V_j \left[\frac{h}{2} (\Psi(t, 0) - \Psi(t, R_j)) + h \sum_{i=1}^{j-1} \Psi(t, R_i) + \bar{r}_j(t) \right],$$

y la diferencia es

$$F_j(t, \psi) - F(t, R_j, \Psi) = -V_j \left[\frac{h}{2} (e_0(t) - e_j(t)) + h \sum_{i=1}^{j-1} e_i(t) - \bar{r}_j(t) \right] = F_j(t, e) + V_j \bar{r}_j(t),$$

por lo tanto $\mathcal{F}_j(t, \psi, \Psi) = F_j(t, e) + f_j(t)$, con $f_j(t) := V_j \bar{r}_j(t) - r_j(t)$. Nótese que la ecuación (E.19) tiene precisamente la forma de la ecuación del Teorema E.2.2 con $\mathcal{F}_j = \mathcal{F}_j(t, e)$, y como consecuencia

$$\|e(t)\|_h^2 \leq e^{\tilde{c}t} \left(\|e(0)\|_h^2 + \frac{\kappa}{2} \int_0^t e^{-\tilde{c}s} \|\tilde{f}(s)\|_h^2 ds \right),$$

donde $\kappa > 0$ y $\tilde{c} = (1/\kappa) + (1/2) |\partial_R W|_\infty + (\kappa/2) \|\sqrt{RV}\|_h^2$. Recordando que la función $\tilde{f}$ fue definida mediante $\tilde{f}_0 = \sqrt{\frac{h}{\kappa W_0}} f_0$ y $\tilde{f}_j = f_j$ para $j = 1, \dots, N$. Entonces

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\|_h^2 &= \frac{h}{2} (\tilde{f}_0^2 + \tilde{f}_N^2) + h \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{f}_j^2 = \frac{h}{2} \left(\frac{h}{\kappa W_0} f_0^2 + f_N^2 \right) + h \sum_{j=1}^{N-1} f_j^2 \\ &= \frac{h}{2} \left(\frac{h}{\kappa W_0} (V_0 \bar{r}_0 - r_0)^2 + (V_N \bar{r}_N - r_N)^2 \right) + h \sum_{j=1}^{N-1} (V_j \bar{r}_j - r_j)^2. \end{aligned}$$

Del Apéndice F, se tiene que $|r_0| \leq (h/2) |\psi''|_\infty$, $r_j \leq (h^2/6) |\psi'''|_\infty$ para $j = 1, \dots, N-1$, y $|r_N| \leq (h/2) |\psi''|_\infty$, mientras que $|\bar{r}_j| \leq (h^2/12) R_j |\psi''|_\infty$ para $j = 0, 1, \dots, N$. Por lo tanto

$$\|e(t)\|_h^2 \leq e^{\tilde{c}t} \|e(0)\|_h^2 + \mathcal{O}(h^4).$$

□

En la práctica, al resolver el problema numéricamente, si al menos $\|e(0)\|_h = \mathcal{O}(h^2)$, entonces $\|e(t)\|_h \leq \mathcal{O}(h^2)$, lo que significa que un algoritmo numérico basado en el esquema semi-discreto presentado aquí, debe ser convergente a segundo orden.

Apéndice F

Aproximaciones numéricas

F.1. Derivación

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ una función al menos de clase C^3 . Denótese con apóstrofes las derivadas de f . Considérese la siguiente expansión truncada¹ de Taylor de f alrededor de $x = x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_*)(x - x_0)^3,$$

donde $x < x_* < x_0$. Evaluando esta expansión en $x = x_0 + h$, con $h > 0$, se tiene

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(x_*) \quad (\text{F.1})$$

donde $x_0 < x_* < x_0 + h$. Por otro lado, evaluando la expansión inicial en $x = x_0 - h$:

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{6}f'''(x_{**}),$$

donde $x_0 - h < x_{**} < x_0$. Ahora se puede calcular la siguiente diferencia $f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2hf'(x_0) + (h^3/6)[f'''(x_*) + f'''(x_{**})]$, de la cual se obtiene la fórmula

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + r(x_0, h), \quad (\text{F.2})$$

donde $r(x_0, h) := -(h^2/12)[f'''(x_*) + f'''(x_{**})]$ se conoce como el *error de truncamiento*. Esta aproximación es de segundo orden de precisión en el sentido de que $r(x_0, h) = \mathcal{O}(h^2)$. Además nótese que $|r| \leq (h^2/6)|f'''|_\infty$. Otra alternativa común para aproximar la derivada $f'(x_0)$ es truncar la serie de Taylor (F.1) en el término de segundo orden en h y luego tomar la diferencia con $f(x_0)$ para obtener

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \bar{r}(x_0, h), \quad (\text{F.3})$$

¹El último término se conoce como el *término complementario de Lagrange*.

donde $\bar{r}(x_0, h) := -(h/2)f''(x_*)$, y $x_0 < x_* < x_0 + h$. Esta aproximación es de primer orden de precisión puesto que $\bar{r}(x_0, h) = \mathcal{O}(h)$. De nuevo, el error de truncamiento se puede acotar de acuerdo a $|\bar{r}| \leq (h/2)|f''|_\infty$. La aproximación (F.3) se llama *diferencia adelantada*, mientras que (F.2) se llama *diferencia centrada*. Análogamente se puede construir la *diferencia atrasada*

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \bar{r}(x_0, h),$$

con

$$\bar{r}(x_0, h) := \frac{h}{2}f''(x_*), \quad x_0 - h < x_* < x_0, \quad \text{y} \quad |\bar{r}| \leq \frac{h}{2}|f''|_\infty.$$

F.2. Suma por partes

Sean $\phi, \psi : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones al menos de clase $\mathcal{C}^1$ y denótese su derivada con un apóstrofe. Considérese la integración por partes

$$\int_a^b \phi \psi' dx + \int_a^b \phi' \psi dx = \int_a^b (\phi \psi)' dx = \phi(b)\psi(b) - \phi(a)\psi(a),$$

la cual se puede escribir en términos del producto escalar sobre el espacio de funciones cuadráticamente integrables $\langle \cdot \rangle_{L^2}$ como

$$\langle \phi, \psi' \rangle_{L^2} + \langle \phi', \psi \rangle_{L^2} = \phi(b)\psi(b) - \phi(a)\psi(a). \quad (\text{F.4})$$

Ahora sean ϕ, ψ funciones discretas en el sentido del Apéndice E. Entonces, en analogía con la integración por partes de la ecuación (F.4), en el régimen discreto se tiene la identidad

$$\langle \phi, D\psi \rangle_h + \langle D\phi, \psi \rangle_h = \phi_N \psi_N - \phi_0 \psi_0,$$

donde D es un operador diferencial discreto y $\langle \cdot \rangle_h$ denota el h -producto escalar definido en la ecuación (E.8), con $h := (b - a)/N$, $N \in \mathbb{N}$. Esta fórmula se conoce como *suma por partes* [76].

Apéndice G

Prueba del Lema 6.2.1

En este apéndice se demuestra el Lema 6.2.1. Sea $r_1 > 0$, $\Sigma_\tau := [r_1, \infty) \times S^2$, y sea $\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma_\tau)$ un campo escalar con soporte compacto en Σ_τ . Para $\sigma \geq 0$, sea D^σ el operador lineal definido por

$$D^\sigma \Phi := \sum_{\ell m} (2\ell + 1)^\sigma \phi_{\ell m} Y^{\ell m}, \quad \Phi = \sum_{\ell m} \phi_{\ell m} Y^{\ell m},$$

donde $Y^{\ell m}$ denota los armónicos esféricos estándar. Sean ℓ y m fijos y $v := \phi_{\ell m} \in \mathbb{C}$, entonces para todo $r \geq r_1$,

$$r|v(r)|^2 = - \int_r^\infty \frac{d}{ds} s|v(s)|^2 ds = - \int_r^\infty [|v(s)|^2 + 2s \operatorname{Re}(\bar{v}(s)v'(s))] ds,$$

donde $' \equiv \frac{\partial}{\partial r}$. Multiplicando ambos lados por $\Lambda_\ell^{1+2\sigma}$ donde $\Lambda_\ell := 2\ell + 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} \Lambda_\ell^{1+2\sigma} r|v(r)|^2 &= - \int_r^\infty [\Lambda_\ell^{1+2\sigma} |v(s)|^2 + 2\operatorname{Re}(\Lambda_\ell^{1+\sigma} \bar{v}(s) \Lambda_\ell^\sigma s v'(s))] ds \\ &\leq \int_{r_1}^\infty [|\Lambda_\ell^{1/2+\sigma} v(s)|^2 + |\Lambda_\ell^{1+\sigma} v(s)|^2 + s^2 |\Lambda_\ell^\sigma v'(s)|^2] ds, \end{aligned}$$

donde se ha usado la desigualdad $2\operatorname{Re}(\bar{a}b) \leq |a|^2 + |b|^2$, $a, b \in \mathbb{C}$. Enseguida obsérvese que $|\Lambda_\ell^{1/2+\sigma} v(s)|^2 \leq |\Lambda_\ell^{1+\sigma} v(s)|^2$, entonces

$$\Lambda_\ell^{1+2\sigma} r|v(r)|^2 \leq 2 \int_{r_1}^\infty [|\Lambda_\ell^{1+\sigma} v(s)|^2 + s^2 |\Lambda_\ell^\sigma v'(s)|^2] ds.$$

Sumando sobre ℓm y teniendo en cuenta las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \langle |D^\sigma \Phi|^2 \rangle_{S^2} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell m} |\Lambda_\ell^\sigma \phi_{\ell m}|^2, \\ \langle r |D^\kappa \Phi|^2 \rangle_{S^2} &\leq 2 \int_{r_1}^\infty \langle r^2 |D^\sigma \Phi'|^2 + |D^{1+\sigma} \Phi|^2 \rangle_{S^2} dr, \end{aligned} \tag{G.1}$$

con $\kappa := 1/2 + \sigma > 1$. Solamente falta mostrar que el lado izquierdo es una cota superior de $r\Phi^2$. Para ello se usa el hecho de que $4\pi \sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y^{\ell m}|^2 = \Lambda_{\ell}$ y se define $a_{\ell} := \left(\sum_{m=-\ell}^{\ell} |\phi_{\ell m}|^2 \right)^{1/2}$, entonces para cada $r \geq r_1$ fijo y $\hat{x} \in S^2$,

$$|\Phi|^2 \leq \left(\sum_{\ell m} |\phi_{\ell m}| |Y^{\ell m}| \right)^2 \leq \frac{1}{4\pi} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \Lambda_{\ell}^{1/2-\kappa} \Lambda_{\ell}^{\kappa} a_{\ell} \right)^2 \leq \frac{1}{4\pi} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \Lambda_{\ell}^{1-2\kappa} \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} |\Lambda_{\ell}^{\kappa} a_{\ell}|^2 \right).$$

La suma dentro del primer paréntesis del lado derecho converge puesto que $\kappa > 1$. La expresión dentro del segundo paréntesis en el lado derecho es igual a $4\pi \langle |D^{\kappa} \Phi|^2 \rangle_{S^2}$. Por lo tanto,

$$|\Phi(r, \hat{x})|^2 \leq C_{\kappa} \langle |D^{\kappa} \Phi|^2 \rangle_{S^2} \quad (\text{G.2})$$

para todo $(r, \hat{x}) \in \Sigma_{\tau}$ con $C_{\kappa} := \sum_{\ell=0}^{\infty} \Lambda_{\ell}^{1-2\kappa}$, y el enunciado del lema se sigue de la combinación de las desigualdades (G.1) y (G.2). $\square$

Bibliografía

- [1] S.L Shapiro and S.A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. Wiley-Interscience, New York, 1983.
- [2] R. Schoen and S.-T. Yau. The existence of a black hole due to condensation of matter. *Comm.Math.Phys.*, 90:575–579, 1983.
- [3] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space Time*. Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [4] R.M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago, London, 1984.
- [5] J.R. Oppenheimer and H. Snyder. On continued gravitational contraction. *Phys. Rev.*, 56:455–459, 1939.
- [6] R. Penrose. Gravitational collapse: The role of general relativity. *Riv. del Nuovo Cimento*, 1:252–276, 1969.
- [7] D.M. Eardley and L. Smarr. Time functions in numerical relativity: Marginally bound dust collapse. *Phys. Rev. D*, 19:2239–2259, 1979.
- [8] D. Christodoulou. Violation of cosmic censorship in the gravitational collapse of a dust cloud. *Comm. Math. Phys.*, 93:171–195, 1984.
- [9] R.P.A.C Newman. Strengths of naked singularities in Tolman-Bondi spacetimes. *Class. Quantum Grav.*, 3:527–539, 1986.
- [10] P.S. Joshi. *Gravitational Collapse and Spacetime Singularities*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [11] D. Christodoulou. Examples of naked singularity formation in the gravitational collapse of a scalar field. *Annals Math.*, 140:607–653, 1994.
- [12] M.W. Choptuik. Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field. *Phys.Rev.Lett.*, 70:9–12, 1993.
- [13] D. Christodoulou. The instability of naked singularities in the gravitational collapse of a scalar field. *Annals Math.*, 149:183–217, 1999.
- [14] R.M. Wald. Gravitational collapse and cosmic censorship. *arXiv:gr-qc/9710068v3*, 1997.
- [15] R. Penrose. The question of cosmic censorship. *J.Astrophys.Astr.*, 20:233–248, 1999.

- [16] P.S. Joshi. Gravitational collapse: The story so far. *Pramana Journal of Physics*, 55:529–544, 2000.
- [17] I.H. Dwivedi and P.S. Joshi. Cosmic censorship violation in non-self-similar Tolman-Bondi models. *Class. Quantum Grav.*, 9:L69–L75, 1992.
- [18] N. Ortiz and O. Sarbach. Conformal diagrams for the gravitational collapse of a spherical dust cloud. *Class. Quantum Grav.*, 28:235001 (27pp), 2011.
- [19] M. Simpson and R. Penrose. Internal instability in a Reissner-Nordström black hole. *Int.J.Theor.Phys.*, 7:183–197, 1973.
- [20] M. Dafermos. The interior of charged black holes and the problem of uniqueness in general relativity. *Commun.Pure Appl.Math.*, 58:0445–0504, 2005.
- [21] E. Poisson and W. Israel. Internal structure of black holes. *Phys.Rev. D*, 41:1796–1809, 1990.
- [22] B. Waugh and K. Lake. Shell-focusing singularities in spherically symmetric self-similar spacetimes. *Phys.Rev. D*, 40:2137–2139, 1989.
- [23] I.H. Dwivedi. Photon redshift and the appearance of naked singularity. *Phys.Rev.*, D58:064004, 1998.
- [24] N. Ortiz and O. Sarbach. Cauchy horizon stability in a collapsing spherical dust cloud I: geometric optics approximation and spherically symmetric test fields. 2013. arXiv:1311.0268 [gr-qc].
- [25] E.M. Duffy and B.C. Nolan. Cosmic censorship for self-similar spherical dust collapse. 2011. arXiv:1108.1103 [gr-qc].
- [26] E.M. Duffy and B.C. Nolan. Odd-parity perturbations of the self-similar LTB spacetime. *Class. Quantum Grav.*, 28:105020 (30pp), 2011.
- [27] T. Harada H. Iguchi and K. Nakao. Gravitational waves around a naked singularity: Odd parity perturbation of Lemaître-Tolman-Bondi space-time. *Phys. Rev. D*, 57:7262–7273, 1998.
- [28] H. Iguchi, T. Harada, and K. Nakao. Gravitational radiation from a naked singularity: Odd parity perturbation. *Prog. Theor. Phys.*, 101:1235–1252, 1999.
- [29] H. Iguchi, T. Harada, and K. Nakao. Gravitational radiation from a naked singularity. 2. Even parity perturbation. *Prog. Theor. Phys.*, 103:53–72, 2000.
- [30] N. Ortiz and O. Sarbach. In preparation.
- [31] E. Chaverra, N. Ortiz, and O. Sarbach. Linear perturbations of self-gravitating spherically symmetric configurations. *Phys.Rev. D*, 87:044015, 2013.
- [32] Marek A. Abramowicz and P. Chris Fragile. Foundations of black hole accretion disk theory. *Living Reviews in Relativity*, 16(1), 2013.
- [33] E. Chaverra and O. Sarbach. Polytropic spherical accretion flows on Schwarzschild black holes. *AIP Conf.Proc.*, 1473:54–58, 2011.

- [34] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, 1973.
- [35] C.W. Misner and D.H. Sharp. Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse. *Phys. Rev.*, 136:B571–B576, 1964.
- [36] B. Gustafsson, H. Kreiss, and J. Oliger. *Time dependent problems and difference methods*. John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [37] M. May and H. White. Hydrodynamic calculations of general-relativistic collapse. *Phys. Rev.*, 141:1232–1240, 1966.
- [38] S.L. Shapiro and S.A. Teukolsky. Formation of naked singularities: The violation of cosmic censorship. *Phys. Rev. Lett.*, 66:994–997, 1991.
- [39] T. Harada. Final fate of spherically symmetric collapse of a perfect fluid. *Phys. Rev. D*, 58:104015, 1998.
- [40] R. C. Tolman. *Phys. Rev.*, 55:364, 1939.
- [41] H. Bondi. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 107:410, 1947.
- [42] P. Yodzis, H.-J. Seifert, and H. Müller zum Hagen. On the occurrence of naked singularities in general relativity. *Comm. Math. Phys.*, 34:135–148, 1973.
- [43] P.S. Joshi and I.H. Dwivedi. Naked singularities in spherically symmetric inhomogeneous Tolman-Bondi dust cloud collapse. *Phys. Rev. D*, 47:5357–5369, 1993.
- [44] N. Ortiz. *Diagramas conformes para el colapso gravitacional de polvo en simetría esférica*. Tesis de maestría, UMSNH, Mexico, 2010.
- [45] P. Szekeres and A. Lun. What is a shell-crossing singularity? *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, 41:167–179, 1999.
- [46] N. Straumann. *General Relativity and Relativistic Astrophysics*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [47] S.S. Deshingkar, P.S. Joshi, and I.H. Dwivedi. Appearance of the central singularity in spherical collapse. *Phys. Rev. D*, 65:084009, 2002.
- [48] T.P. Singh and P.S. Joshi. The final fate of spherical inhomogeneous dust collapse. *Class. Quantum Grav.*, 13:559–571, 1996.
- [49] F.C. Mena and B.C. Nolan. Non-radial null geodesics in spherical dust collapse. *Class. Quantum Grav.*, 18:4531–4548, 2001.
- [50] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [51] L. Lehner and F. Pretorius. Black strings, low viscosity fluids, and violation of cosmic censorship. *Phys.Rev.Lett.*, 105:101102, 2010.
- [52] Y. Yamada and H. Shinkai. Formation of naked singularities in five-dimensional space-time. *Phys.Rev. D*, 83:064006, 2011.

- [53] R. Goswami and P.S. Joshi. Cosmic censorship in higher dimensions. *Phys. Rev. D*, 69:104002, 2004.
- [54] R. Goswami and P.S. Joshi. Spherical gravitational collapse in N dimensions. *Phys. Rev. D*, 76:084026, 2007.
- [55] M. Dafermos. Spherically symmetric space-times with a trapped surface. *Class. Quantum Grav.*, 22:2221–2232, 2005.
- [56] D. Christodoulou. A mathematical theory of gravitational collapse. *Comm. Math. Phys.*, 109:613–647, 1987.
- [57] L. Kong, D. Malafarina, and C. Bambi. Gravitational blueshift from a collapsing object. arXiv:1310.1320v1 [gr-qc].
- [58] R. Giambo. Global visibility of naked singularities. *J. Math. Phys.*, 47:022501, 2006.
- [59] H. L. Royden. *Real Analysis*. Macmillan Publishing Company, New York, 1989.
- [60] M. Dafermos and I. Rodnianski. Lectures on black holes and linear waves. 2008.
- [61] N. Ortiz and O. Sarbach. The gravitational redshift of photons traversing a collapsing dust cloud and observable consequences. 2013. arXiv:1312.7817 [gr-qc].
- [62] W.L. Ames and K.S. Thorne. The optical appearance of a star that is collapsing through its gravitational radius. *Ap. J.*, 151:659–670, 1968.
- [63] J. Jaffe. Collapsing objects and the backward emission of light. *Annals of Physics*, 55(2):374 – 390, 1969.
- [64] K. Lake and R.C. Roeder. Note on the optical appearance of a star collapsing through its gravitational radius. *Ap. J.*, 232:227–281, 1979.
- [65] H.K. Lee and V. Frolov. Observable characteristics of radiation emitted from relativistic collapsing objects. *Korean Phys. Soc.*, 49:791–796, 2006.
- [66] V.P. Frolov, K. Kim, and H.K. Lee. Spectral broadening of radiation from relativistic collapsing objects. *Phys.Rev.*, D75:087501, 2007.
- [67] L. Kong, D. Malafarina, and C. Bambi. Can we observationally test the weak cosmic censorship conjecture? arXiv:1310.8376 [gr-qc].
- [68] N. Ortiz. Initial data giving rise to naked singularities in spherically symmetric dust collapse. *AIP Conf. Proc.*, 1473:49–53, 2012.
- [69] K.S. Virbhadra, D. Narasimha, and a S.M. Chitre. Role of the scalar field in gravitational lensing. *Astron. Astrophys.*, 337:1–8, 1998.
- [70] K.S. Virbhadra and G.F.R. Ellis. Gravitational lensing by naked singularities. *Phys.Rev.*, D65:103004, 2002.
- [71] K.S. Virbhadra and C.R. Keeton. Time delay and magnification centroid due to gravitational lensing by black holes and naked singularities. *Phys.Rev.*, D77:124014, 2008.

-
- [72] N. Ortiz, O. Sarbach, and T. Zannias. Observational distinction between black holes and naked singularities: the role of the redshift function. 2014. arXiv:1401.4227 [gr-qc].
 - [73] A.D. Rendall and B.G. Schmidt. Existence and properties of spherically symmetric static fluid bodies with a given equation of state. *Class. Quantum Grav.*, 8:985–1000, 1991.
 - [74] P. Hartman. *Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.
 - [75] M. Spivak. *Calculus*. W. A. Benjamin, Inc., New York, 2001.
 - [76] Olivier Sarbach and Manuel Tiglio. Continuum and Discrete Initial-Boundary-Value Problems and Einstein’s Field Equations. *Living Rev.Rel.*, 15:9, 2012.