



**UNIVERSIDAD MICHOCANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO**



TESIS

**SIMETRÍAS E INTEGRALES PRIMERAS DE CAMPOS VECTORIALES EN EL
PLANO**

PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

GASPAR RODRIGO DE JESÚS LEÓN GIL

ASESOR

JESÚS RUPERTO MUCIÑO RAYMUNDO

DOCTOR EN MATEMÁTICAS

MORELIA MICHOCÁN, MÉXICO

JUNIO DE 2015

Índice general

Introducción	v
1. Nociones de integrabilidad	1
1.1. Integrales primeras y campos vectoriales Hamiltonianos.	1
1.2. Factores integrantes y simetrías.	3
1.3. Primera visión unificada de integrabilidad.	10
1.4. Ejemplos de integrabilidad.	14
1.5. Campos vectoriales globalmente rectificables.	18
1.6. Campos vectoriales y \mathbb{R}^2 -acciones locales.	20
1.7. Campos vectoriales analíticos complejos.	25
1.8. Campos vectoriales holomorfizables.	29
1.9. Resumen de integrabilidad.	33
2. Existencia de aplicación rectificadora y sus obstrucciones	35
2.1. Regiones canónicas y aplicación rectificadora.	35
2.2. Aplicación rectificadora cerca de ciclos límite y gráficas límite.	38
2.3. Holonomía e integrales primeras en sectores hiperbólicos.	40
2.4. Aplicación rectificadora en sectores hiperbólicos.	42
2.5. Ejemplos de aplicación rectificadora cerca de sillars.	47
3. Integrabilidad global	52
3.1. Existencia de integral primera global.	52
3.2. Descomposición en regiones canónicas.	53
3.3. Transversales C^∞ en regiones canónicas.	54
3.4. Integrales primeras C^∞ en regiones canónicas.	59
3.5. Extensión de integrales primeras.	64
3.6. Ejemplos.	64
A. Apéndice	66
A.1. Difeomorfismos.	66
A.2. Funciones multivaluadas y monodromía.	68
A.3. Descomposición de un campo vectorial en sectores alrededor de un punto singular.	70
A.4. Plano proyectivo real \mathbb{RP}^2	71

Resumen

Describimos las relaciones entre siete nociones de integrabilidad para campos vectoriales C^∞ en el plano. Las primeras tres nociones de integrabilidad están relacionadas con la existencia de integrales primeras no triviales. El resto de las nociones están relacionadas con las ecuaciones de Cauchy-Riemann y estructuras complejas. Mostramos que todo campo vectorial con un número finito de separatrices, admite una integral primera univaluada.

Palabras clave: campo vectorial, estructura compleja, integral primera.

Abstract

We describe the relations between seven integrability notions for C^∞ vector fields on the plane. The three first integrability notions are related to the existence of non trivial first integrals. The rest of the notions are related to Cauchy-Riemann equations and to complex structures. We show that all vector field with a finite number of separatrices, admits an univariate first integral.

Key words: vector field, complex structure, first integral.

Notaciones y convenciones.

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ denota un conjunto abierto conexo.
- $\mathcal{X}^\infty(\Omega)$ denota el espacio (vectorial) de los *campos vectoriales de clase C^∞* en Ω .
- Consideramos un *campo vectorial real*

$$X = a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

de clase C^∞ y con puntos singulares aislados en Ω .

- Un *punto singular* de X es un punto $q \in \Omega$, tal que X se anula o no está definido en q .
- Decimos que $\gamma : (\epsilon, \delta) \rightarrow \Omega$ es *trayectoria regular* de X , si es trayectoria solución de X y su imagen es homeomorfa a \mathbb{R} .
- Decimos que $\gamma : [\epsilon, \delta] \rightarrow \Omega$ es *trayectoria periódica* de X , si es trayectoria solución de X y su imagen es homeomorfa al círculo S^1 .
- Los nombres *trayectoria* o *trayectoria solución* de X los usamos indistintamente.

- Usualmente

$$\Omega' = \Omega - \{\text{unión finita de trayectorias de } X\},$$

donde las elecciones de tales trayectorias se precisarán en el trabajo.

- El campo vectorial

$$Y = c(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + d(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

usualmente será de clase C^∞ en Ω o Ω' y es transversal con X en Ω' .

- El determinante de X y Y es

$$T(x, y) = \det(X, Y) = (ad - bc)(x, y).$$

- La *derivada de Lie* de una función h , de clase C^∞ , en la dirección de X es

$$X(h) = \mathcal{L}_X(h) = a \frac{\partial h}{\partial x} + b \frac{\partial h}{\partial y}.$$

- El *corchete de Lie* es

$$\begin{aligned} [X, Y] &= (\mathcal{L}_Y(a) - \mathcal{L}_X(c)) \frac{\partial}{\partial x} + (\mathcal{L}_Y(b) - \mathcal{L}_X(d)) \frac{\partial}{\partial y} \\ &= \left(c \frac{\partial a}{\partial x} + d \frac{\partial a}{\partial y} - a \frac{\partial c}{\partial x} - b \frac{\partial c}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(c \frac{\partial b}{\partial x} + d \frac{\partial b}{\partial y} - a \frac{\partial d}{\partial x} - b \frac{\partial d}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

- Y es una *simetría* de X si $[X, Y] = \nu X$, para una función $\nu : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^∞ .

-
- Una *integral primera* de X es $f : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^∞ (ver definición 1). Siempre supondremos que f es de clase C^∞ y no es idénticamente constante en algún subconjunto abierto de Ω' .

- El *campo vectorial Hamiltoniano* de f es

$$X_f = -\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}.$$

- El *campo gradiente* de f es

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

- Un *factor integrante* de X es $\mu : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^∞ (ver definición 2).
- El *flujo (local)* de X es $\varphi : \Delta \subset \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$.
- El *flujo (local)* de Y es $v : \Delta \subset \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$.
- Una *caja de flujo (local)* de X en un punto regular $p \in \Omega$ es $\Phi : \mathcal{U} \subset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$.
- Una *caja de flujo (local)* de Y en un punto regular $p \in \Omega$ es $\Upsilon : \mathcal{U} \subset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$.
- Una *aplicación rectificadora global* de X es $\Psi : \Omega' \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$, ella satisface que $\Psi_* X = \partial/\partial x$, ver definición 9, pág. 18.
- Las cajas de flujo (locales) de X lo envían en $\partial/\partial x$, cajas de flujo (locales) de Y lo envían en $\partial/\partial y$.
- Una \mathbb{R}^2 -*acción con generador infinitesimal* X es $\psi : \mathbb{R}^2 \times \Omega \rightarrow \Omega$ (una acción global de \mathbb{R}^2 o local, esto es que a veces su dominio no es todo $\mathbb{R}^2 \times \Omega$), que satisface

$$X \doteq \frac{d}{dt} \psi((t, 0), (x, y)) \big|_{t=0},$$

ver definición 10, pág. 20.

- Un *factor de reescalamiento* para X es una función $\rho : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^∞ , tal que ρX admite una aplicación rectificadora global (factor integrante y factor de reescalamiento son conceptos distintos, la existencia de uno no implica la del otro), ver pág. 43.
- Todas las *funciones multivaluadas* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ó *aplicaciones multivaluadas* $\Psi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que aparezcan, serán *aditivamente automorfas* (es decir, con diferencial univaluada, ver definición 8. pág. 6), pero por simplicidad solamente las llamaremos funciones (aplicaciones) multivaluadas.
- Un disco abierto es $B(q, r) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid |q - p| < r\}$.
- \mathcal{U}, \mathcal{V} denotan conjuntos abiertos de forma apropiada en el texto.
- $\bar{\mathcal{U}}$ denota la *cerradura* de \mathcal{U} , es decir, la unión de \mathcal{U} con su frontera.

- Para Y simetría de X , la *función de Y -tiempo local* es $Y_{(x_0, y_0)}(x, y) : B((x_0, y_0), r) \subset \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$Y_{(x_0, y_0)}(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} \text{tiempo requerido bajo el flujo de } Y \\ \text{para enviar la trayectoria solución de } X \\ \text{que pasa por } (x_0, y_0), \text{ en la trayectoria solución} \\ \text{de } X \text{ que pasa por } (x, y) \end{array} \right\}$$

(cuando ello tenga sentido), ver definición 7, pág 6.

- $\sigma : [\epsilon, \delta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^2$ denota una trayectoria transversal a X .
- Σ denota la traza de σ .
- La función proyección de \mathcal{U} a Σ está dada por

$$\begin{aligned} \Pi : \mathcal{U} &\rightarrow \Sigma \\ p &\mapsto \Sigma \cap \left\{ \begin{array}{l} \text{trayectoria solución} \\ \text{de } X \text{ que pasa por } p \end{array} \right\} \end{aligned}$$

(cuando ello tenga sentido), ver pág. 59.

- Decimos que un campo vectorial X en $B(q, r) \subset \mathbb{R}^2$ es *topológicamente equivalente* a un campo vectorial W en $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ si existe un homeomorfismo $F : B(q, r) \rightarrow \mathcal{V}$, tal que F lleva trayectorias de X en trayectorias de W .
- Decimos que un campo vectorial X en $B(q, r) \subset \mathbb{R}^2$ es *C^∞ -equivalente* a un campo vectorial W en $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ si existe un difeomorfismo $F : B(q, r) \rightarrow \mathcal{V}$, de clase C^∞ , tal que

$$F_*X = W.$$

- Para un difeomorfismo local Φ , los símbolos Φ_* y Φ^* denotan el empujar y jalar objetos.
- γ denota una trayectoria de X .
- ζ denota una *separatriz* de X , ver definición 24, pág 40.
- Γ denota una *gráfica límite* de X , ver definición 22, pág. 39.
- \mathcal{S} denota un sector de X alrededor de un punto singular, ver apéndice A.3.
- $\mathcal{X}(\mathbb{R}\mathbb{P}^2)$ denota la *característica de Euler-Poincaré* de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$.
- ϑ denota la *función de periodos* para X (cuando ello tenga sentido), ver pág. 37.
- Identificamos $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, como es usual $(x, y) \longleftrightarrow x + iy = z$.
- $\Re(\)$, $\Im(\)$ denotan la parte real e imaginaria de los objetos complejos a los cuales se aplican.
- Z, P, E denotan respectivamente los ceros, polos y/o singularidades esenciales aisladas, de una función analítica compleja $\mathcal{H}(z)$.
- C denota el conjunto de puntos críticos de una aplicación C^∞ .
- Para $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, ambas de clase C^1 , denotamos mediante $\nabla f \cdot \sigma'(0)$ a la *derivada direccional* de f en el punto $\sigma(0)$ y en la dirección del vector $v = \sigma'(0)$.

Introducción

Para un campo vectorial $X \neq 0$, de clase C^∞ en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, consideramos las siete nociones de integrabilidad siguientes.

I1. X admite una integral primera si existe una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^∞ (no idénticamente constante en subconjuntos abiertos), tal que

$$df(X) \equiv 0.$$

Ver definición 1, pág. 1.

I2. X admite un factor integrante si existe una función $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^∞ , tal que

$$\mu X = X_f,$$

donde X_f es el campo vectorial Hamiltoniano de una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^∞ . Ver definición 2, pág. 1.

I3. X admite una simetría si existe un campo vectorial diferenciable Y transversal con X en Ω' , tal que el flujo de Y lleva soluciones de X en soluciones de X , esto es

$$[X, Y] = \nu X,$$

para una función $\nu : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^∞ . Ver definición 4, pág. 3.

I4. X es globalmente rectificable si existe una aplicación $\Psi : \Omega' \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$, de clase C^∞ , tal que Ψ es una caja de flujo global de X , esto es, Ψ satisface que

$$\Psi_* X = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Llamamos a Ψ aplicación rectificadora global de X . Ver definición 9, pág. 18.

I5. X proviene de una \mathbb{R}^2 -acción (a priori local) en Ω si existe un campo vectorial diferenciable Y transversal con X en Ω' , tal que

$$[X, Y] = 0.$$

Recordamos que la acción $\psi : \mathbb{R}^2 \times \Omega \rightarrow \Omega$ es local cuando los flujos de sus generadores infinitesimales X y Y no existen para todo tiempo en Ω . Pensamos a $(\mathbb{R}^2, +)$ como grupo de Lie con su estructura aditiva, es decir, es un grupo de Lie Abeliano. Ver definición 12, pág 21.

I6. X es la parte real de un campo analítico complejo en Ω si existe un campo vectorial analítico complejo \mathbb{X} en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, tal que

$$X = \Re e(\mathbb{X}).$$

\mathbb{X} puede poseer como puntos singulares a ceros, polos y/o singularidades esenciales aisladas. Ver definición 14, pág. 26.

I7. X es *holomorfizable* en $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^2$ si existe una estructura compleja J y un difeomorfismo $F : (\Omega', J) \rightarrow (\mathcal{V}, J_o)$, de clase C^∞ , con J_o la estructura compleja canónica en \mathbb{R}^2 , tal que F es (J, J_o) -holomorfo y

$$F_*X = \Re e(\mathbb{X}),$$

para algún campo vectorial analítico complejo \mathbb{X} en \mathcal{V} , esto es, las componentes de F_*X satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $(\mathcal{V}, J_o) \subset \mathbb{C}$. Ver definición 18, pág. 30.

Debemos precisar que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ denota al dominio original del campo vectorial X , que se va a estudiar. Sin embargo en muchas ocasiones al aplicar alguna de las definiciones I1 - I7, es indispensable considerar como nuevo dominio algún

$$\Omega' = \Omega - \{\text{unión finita de trayectorias de } X\}.$$

En cada resultado donde se requiera este cambio explicaremos qué trayectorias han de removerse de Ω . A continuación se presentan dos bloques de integrabilidad para I1 - I7.

Primer bloque de integrabilidad. Las nociones de integrabilidad I1 a I3 son equivalentes



El diagrama es conocido en la literatura. La equivalencia entre I1 e I2 ha sido estudiada desde el origen de la teoría por Euler, Hamilton, Darboux y Jouanolou entre otros, ver [11]. La equivalencia I1 e I3 ha sido estudiada por Lie, ver [25]. En la monografía de Pereira y el libro de Ibragimov, ver [35] y [13] respectivamente, se exponen algunos aspectos de ambas teorías empleando lenguaje moderno.

Probamos el primer bloque de integrabilidad como sigue: a partir de revisar y comparar las definiciones de I1 e I2 concluimos la equivalencia de estas dos nociones de integrabilidad, ver lema 1. Interpretamos I3 de forma geométrica mediante el uso de flujos y computacionalmente utilizando el corchete de Lie; un estudio completo de ello se realiza en los lemas 2, 3 y 5, ver pág. 4 - 8. Como consecuencia de dicho estudio, se verifica la equivalencia entre I1 e I3, ver lema 4, pág. 6.

Nuestra contribución a lo anterior radica en la construcción de seis correspondencias que realizan el diagrama (1). Algunas de ellas son bien conocidas, pero no así la correspondencia \mathfrak{c}_4 que envía factores integrantes en simetrías, ver fórmula (1.17), dicha correspondencia es una propuesta novedosa. Es de notar que las seis correspondencias no siempre son invertibles entre si; un estudio completo de ello se realiza en las observaciones 6, 7 y 9, ver pág. 12 - 13.

Notamos que aún cuando X esté definido en Ω , no siempre es posible construir mediante las correspondencias del diagrama (1), integrales primeras, factores integrantes y simetrías en todo Ω , por ello introducimos un nuevo dominio Ω' , ver ejemplo 3. Adicionalmente este ejemplo muestra que el hecho de usar integrales primeras univaluadas es muy restrictivo, por ello admitimos integrales primeras multivaluadas y aditivamente automorfias (es decir, con diferencial univaluada), las cuales por simplicidad llamamos integrales primeras multivaluadas, ver definición 8, pág. 6.

Segundo bloque de integrabilidad. Las nociones de integrabilidad I4 a I7 son equivalentes

$$\begin{array}{ccc}
 \text{I4} & \longleftrightarrow & \text{I5} \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 \text{I6} & \longleftrightarrow & \text{I7} .
 \end{array} \tag{2}$$

Las equivalencias anteriores son más recientes y no han sido completamente estudiadas; para el caso de \mathbb{R}^2 con o sin puntos singulares arbitrarios; para el caso de dominios planos Ω con puntos singulares arbitrarios. La noción de integrabilidad I5 ha sido estudiada para el caso en que Ω es una superficie compacta, orientable C^ω en [23]. Por otra parte, una familia de ejemplos que han sido bien estudiados es I6, ya que $X = \Re e(\mathbb{X})$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, de hecho se cumplen las siete nociones de integrabilidad para X .

Probamos el segundo bloque de integrabilidad como sigue: aplicando las propiedades del corchete de Lie mostramos que I4 implica I5; para el converso utilizamos 1-formas diferenciales para construir una aplicación rectificadora local, dicha construcción extiende C^∞ a Ω' , ver lema 11, pág. 21. Seguidamente mostramos que I5 implica I7, para ello probamos que una pareja de campos vectoriales que conmutan admite una estructura compleja adecuada, ver proposición 3, pág 30. Utilizando dicha estructura y una colección de aplicaciones rectificadoras locales, construimos una superficie de Riemann donde X es la parte real de un campo vectorial analítico complejo, ver lema 12, pág. 30. El converso se obtiene aplicando las propiedades del corchete de Lie. La equivalencia entre I6 e I7 se sigue de observar sus definiciones, ver corolario 2, pág 31.

El trabajo de W. Kaplan (ver [18]) sugiere estudiar, para el caso de un campo vectorial X sin puntos singulares en $\Omega = \mathbb{R}^2$, si las siete nociones de integrabilidad I1 - I7 son o no equivalentes. Sin embargo, no hay enunciados generales en la literatura para el caso X con puntos singulares. Nuestro primer resultado es como sigue:

Teorema 1. *Considerando las nociones de integrabilidad I1 a I7; se tiene que el segundo bloque de integrabilidad implica el primer bloque, esto es*

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{I3} & \dashrightarrow \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \text{I1} & \longleftrightarrow & \text{I2} \\
 & \longleftarrow & \\
 & & \begin{array}{ccc}
 \text{I4} & \longleftrightarrow & \text{I5} \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 \text{I6} & \longleftrightarrow & \text{I7} .
 \end{array}
 \end{array}$$

La flecha central \longleftarrow representa que dicha implicación entre ambos bloques siempre se cumple en Ω' adecuado para X mientras que la flecha \dashrightarrow representa que la implicación no se cumple en general para todo X , aunque hay ejemplos de campos vectoriales para los que sí se cumple.

Para la demostración del teorema 1 basta considerar un campo vectorial X que satisface la noción de integrabilidad I5, es decir, existe un segundo campo vectorial Y transversal con X que satisface $[X, Y] = 0$, de ello se sigue que X pertenece al primer bloque de integrabilidad.

Nuestro segundo resultado describe el dominio máximo en donde existe una integral primera para un campo vectorial en \mathbb{R}^2 . En resultados recientes L. Mazzi y M. Sabatini, ver [29], mostraron la existencia de una integral primera para un campo vectorial cuyos puntos singulares son centros o multi-sillas y que posee un número finito de separatrices. Adicionalmente W. Li, J. Llibre, M. Nicolau y X. Zhang, ver [26], mostraron que removiendo las separatrices de X , esto es

puntos singulares y trayectorias regulares que no admiten una vecindad paralela, entonces existe una integral primera para dicho campo vectorial. Nuestro segundo resultado generaliza los dos trabajos anteriores, ya que permitimos la presencia de atractores y extendemos la integral primera a las separatrices del campo vectorial. Dicho resultado ha sido escrito en [24] para su publicación.

Teorema 2. *Consideramos un campo vectorial X , de clase C^∞ en \mathbb{R}^2 , tal que posee un número finito de separatrices en $\mathbb{R}P^2$, entonces X admite una integral primera univaluada*

$$f : \mathbb{R}^2 - \text{Atrac}(X) \longrightarrow \mathbb{R},$$

de clase C^∞ , con $df = 0$ en a lo más una colección finita de trayectorias.

El plan de la demostración es el siguiente: retiramos las separatrices de X del dominio \mathbb{R}^2 con lo que obtenemos una unión finita de conjuntos abiertos llamados regiones canónicas; el concepto de separatriz y región canónica se debe a L. Markus, ver [27]. Seguidamente mostramos que en cada región canónica existe una transversal C^∞ a X . A partir de esta transversal construimos una integral primera, tal que en su frontera menos los atractores de X , los valores de la integral primera y de todas sus derivadas son cero. Finalmente cuando dos regiones canónicas posean una frontera común (que no es atractor), verificamos que la integral primera extiende C^∞ en dicha frontera.

• • •

A continuación enunciamos una reseña histórica sobre el estudio de integrales primeras para campos vectoriales en el plano (restringiéndonos a lo más relevante con respecto a nuestro trabajo). Para ello se considera:

1. Campos vectoriales X , de clase C^r , con $r = 1, \dots, \infty, \omega$, o incluso a veces foliaciones que sólo son C^0 .
2. Una integral primera f , la cual satisface que no es idénticamente constante en todo abierto contenido en su dominio de definición.

Se dice que f es una *integral primera débil* si no posee puntos extremos (máximos o mínimos en el sentido C^0) en su dominio de definición. Por ejemplo, para el campo vectorial $X = \partial/\partial x$, la función $f(x, y) = y^2$ no es integral primera débil, ya que tiene mínimo a lo largo de una trayectoria solución, pero $f(x, y) = y^3$ si es integral primera débil. Se dice que f es una *integral primera fuerte* si no posee puntos extremos (en el sentido C^1) en su dominio de definición, esto es df no se anula para algún punto en su dominio. Por ejemplo, para el campo vectorial $X = \partial/\partial x$, la función $f(x, y) = y^3$ no es integral primera fuerte, ya que $df = 0$ a lo largo de la trayectoria solución $\{y = 0\}$, pero $f(x, y) = y$ si es integral primera fuerte.

- En 1878 G. Darboux creó su método para hallar integrales primeras de campos vectoriales polinomiales en el plano \mathbb{R}^2 , para ello asume el conocimiento de un número suficiente de curvas algebraicas que son trayectorias del campo vectorial. El método utiliza fuertemente las propiedades algebraicas de los campos vectoriales polinomiales; no posee un análogo en clase C^∞ . El método produce integrales primeras fuertes de clase C^ω , fuera de algunas de sus separatrices, ver [11] para la fuente original, mientras que [35] capítulo 2 ó [12] capítulo 8 contienen exposiciones modernas de esta teoría.
- En 1883 S. Lie creó su método para hallar integrales primeras de campos vectoriales X en el plano \mathbb{R}^2 , para ello asume el conocimiento de una simetría infinitesimal Y para X .

El método utiliza fuertemente las propiedades del corchete de campos vectoriales $[X, Y]$; este método trabaja para X de clase C^r , $r = 1, \dots, \infty, \omega$. El método produce integrales primeras fuertes de la misma clase que X , fuera de algunas de sus separatrices, ver [25] para la fuente original, mientras que [35] capítulo 3 ó [13] contienen exposiciones modernas de esta teoría.

- En 1934 T. Ważewsky mostró que existe un campo vectorial X no singular en \mathbb{R}^2 de clase C^∞ , que no admite una integral primera (débil) de clase C^1 . Ello debido a que tal X posee separatrices que son densas en el plano.
- En 1940 W. Kaplan mostró que todo campo vectorial X no singular en \mathbb{R}^2 de clase C^1 , admite una integral primera (débil) de clase C^0 , ver [17].
- En 1951 W. M. Boothby mostró que una foliación de clase C^0 , cuyos puntos singulares son sillars con modelos locales topológicamente equivalentes a $\Re e((1/z^k)\partial/\partial z)$, $k \geq 1$, en \mathbb{R}^2 , admite una integral primera (débil) de clase C^0 , ver [7] y [8].
- En 1954 L. Markus mostró que un campo vectorial X con todos sus puntos singulares de tipo centro en \mathbb{R}^2 y de clase C^r , con $r = 1, \dots, \infty$, admite una integral primera (débil) de clase C^1 , pero que es de clase C^r fuera de las separatrices, ver [27], específicamente su definición de separatriz límite en pág. 131 y su teorema 10.1. La contribución de Markus (en particular) es que introdujo el concepto de separatriz y de región canónica.
- En 1964 I. G. Petrovski observó (en su libro de texto) que los campos vectoriales lineales poseen integrales primeras fuertes de clase C^ω , fuera de algunas de sus separatrices, ver [36] sección 22 pág. 66.
- En 1974 W. Kaplan mostró que un campo vectorial X de clase C^ω que posee un sector hiperbólico cuya holonomía no es un difeomorfismo de clase C^ω , no admite una integral primera fuerte de clase C^ω en dicho sector hiperbólico, ver [19]. Su idea trabaja también para el caso C^r , con $r = 1, \dots, \infty$.
- En 1976 M.–P. Muller halló un campo vectorial X no singular en \mathbb{R}^2 de clase C^ω , que no admite una integral primera (débil) de clase C^1 , ver [32]. Ello es el análogo analítico real del ejemplo de Ważewsky.
En este mismo año M.–P. Muller mostró que un campo vectorial X de clase C^ω que posee un sector hiperbólico (con vértice en la línea al infinito) y cuya holonomía no es un difeomorfismo de clase C^ω ; no admite una integral primera fuerte de clase C^ω en dicho sector hiperbólico, ver [33]. Su idea trabaja también para el caso C^r , con $r = 1, \dots, \infty$.
- En 1988 J. L. Weiner estudió campos vectoriales X de clase C^r , $r = 1, \dots, \infty$, no singulares en \mathbb{R}^2 ; definió que tal X es r -normal si en cada sector hiperbólico (con vértice en la línea al infinito) su holonomía es un difeomorfismo de clase C^r . Él mostró que para tal X las siguientes condiciones son equivalentes:
 1. X admite una integral primera fuerte de clase C^r .
 2. X es r -normal.
 3. X admite una caja de flujo global.
Ver [41] teoremas 2 y 3.

- En 1993 L. Mazzi y M. Sabatini mostraron que un campo vectorial X de clase C^r , $r = 1, \dots, \infty$, no singular en \mathbb{R}^2 , tal que sus separatrices son discretas (en un sentido definido por ellos), admite una integral primera débil de clase C^r , ver [28].
- En 1992 L. Mazzi y M. Sabatini (en este segundo trabajo, aunque apareció primero), adicionalmente mostraron que un campo vectorial X de clase C^r en \mathbb{R}^2 , $r = 1, \dots, \infty$, que satisface que sus puntos singulares son centros o multi-sillas y que posee un número finito de separatrices, admite una integral primera débil de clase C^r , ver [29] teorema 4.1. Ellos también muestran que todo campo vectorial polinomial con un número finito de puntos singulares y sin atractores compactos (en particular sin pozos, fuentes o sectores parabólicos) admite una integral primera débil de clase C^∞ , ver [29] teorema 5.1.
- En 1999 J. Chavarriga, H. Giacomini, J. Gine y J. Llibre argumentaron que la noción de integral primera fuerte es demasiado restrictiva para campos vectoriales en variedades de dimension dos, ya que:
 1. Las integrales primeras de campos vectoriales polinomiales, construidas mediante el método de Darboux (mirando a las curvas algebraicas invariantes) resultan en general ser C^ω fuera de algunas de sus separatrices.
 2. Lo anterior es calculado de manera completa para campos vectoriales lineales (similar a lo mostrado por Petrovski). Ver [9], pág. 165 y proposición 3 respectivamente.
- En 2002 W. Li, J. Llibre, M. Nicolau y X. Zhang, mostraron que para un campo vectorial X de clase C^r , $r = 1, \dots, \infty, \omega$, en el plano, existe una partición en regiones canónicas removiendo las separatrices de X , tal que X posee integral primera fuerte con la misma clase de diferenciabilidad del campo vectorial, ver [26].

• • •

El contenido de este trabajo es el siguiente:

En el capítulo 1 estudiamos las siete nociones de integrabilidad. Demostramos las equivalencias para cada uno de los dos bloques de integrabilidad, establecemos correspondencias entre los elementos del primer bloque y estudiamos cuatro casos para el segundo bloque de integrabilidad. Finalmente demostramos el teorema 1.

En el capítulo 2 analizamos el concepto de región canónica, las obstrucciones a la existencia de una aplicación rectificadora y la existencia de dicha aplicación en sectores hiperbólicos. También mostramos que no siempre se cumple el converso del teorema 1.

En el capítulo 3 construimos integrales primeras en regiones canónicas. Luego las extendemos a las fronteras que no son atractores y construimos una integral primera en el plano menos los atractores del campo vectorial, con ello demostramos el teorema 2.

Capítulo 1

Nociones de integrabilidad

El objetivo de este capítulo es demostrar las equivalencias dadas en los dos bloques de integrabilidad, ver diagramas (1) y (2) en la introducción, así como el teorema 1, ello se realizará en la secciones 1.2 y 1.8. En la sección 1.3 establecemos correspondencias entre los elementos del primer bloque de integrabilidad y en la sección 1.9 estudiamos cuatro casos para el segundo bloque de integrabilidad.

1.1. Integrales primeras y campos vectoriales Hamiltonianos.

Consideramos un campo vectorial X , de clase C^∞ en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Para establecer ideas y notación, recordamos las siguientes nociones elementales.

Definición 1. Decimos que X admite una integral primera si existe una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ (no idénticamente constante en subconjuntos abiertos) que satisface alguna de las condiciones siguientes:

1. $df(X) \equiv 0$.
2. $\mathcal{L}_X f \equiv 0$.
3. f es constante a lo largo de las trayectorias solución de X .

Definición 2. Una función $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^∞ , es un *factor integrante* para X si satisface alguna de las condiciones siguientes:

1. $\frac{\partial(\mu a)}{\partial x} = -\frac{\partial(\mu b)}{\partial y}$.
2. $div(\mu X) \equiv 0$.
3. $X(\mu) = -\mu div(X)$.

La equivalencia de (2) y (3) se sigue de la igualdad:

$$div(\mu X) = a \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \frac{\partial a}{\partial x} + b \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \frac{\partial b}{\partial y} = X(\mu) + \mu div(X).$$

Definición 3. Una función $(1/\mu) : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^∞ , es un *factor integrante inverso* para X si

$$X \left(\frac{1}{\mu} \right) = \frac{1}{\mu} div(X).$$

donde $\Omega' = \Omega - \{(x, y) \in \Omega \mid \mu(x, y) = 0\}$.

Observación 1. μ es un factor integrante para X si y sólo si $(1/\mu)$ es un factor integrante inverso para X . En efecto, si μ es factor integrante calculamos

$$X\left(\frac{1}{\mu}\right) = a\left(-\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial\mu}{\partial x}\right) + b\left(-\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial\mu}{\partial y}\right) = -\frac{1}{\mu^2}X(\mu) = \frac{\mu \operatorname{div}(X)}{\mu^2} = \frac{1}{\mu}\operatorname{div}(X),$$

ello nos da el resultado deseado.

Lema 1. Para un campo vectorial X , las condiciones siguientes son equivalentes:

1. X admite una integral primera $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
2. X admite un factor integrante $\mu : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$.
3. X admite un factor integrante inverso $(1/\mu) : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$.
4. μX es un campo vectorial Hamiltoniano.

Demostración. El caso trivial es cuando f es constante y $\mu \equiv 0$. Discutamos el caso no trivial, f no es idénticamente constante en subconjuntos abiertos.

(1 \Rightarrow 2) Supongamos que X admite una integral primera $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, entonces f es constante a lo largo de las trayectorias solución de X , luego X es colineal con el campo vectorial Hamiltoniano X_f . Si sucede que $X = X_f$, entonces μ igual a una constante no nula es un factor integrante para X . En caso contrario, $X \neq X_f$, reescalamos X mediante una función $\mu : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , dada por $\mu = -a(\partial f/\partial y) = b(\partial f/\partial x)$ donde

$$\Omega' = \Omega - \{(x, y) \in \Omega \mid a(x, y) = b(x, y) = 0\}.$$

Es fácil verificar que $\operatorname{div}(\mu X) = 0$. Así μ es un factor integrante para X .

Las implicaciones (2 \Rightarrow 3) y (3 \Rightarrow 4) se siguen de la observación 1.

(4 \Rightarrow 1) Si μX es un campo vectorial Hamiltoniano entonces existe una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\mu X = X_f$, luego f es la integral primera deseada. \square

Observación 2. Si X admite una integral primera no idénticamente constante, entonces admite una infinidad de integrales primeras. En efecto, si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una integral primera para X y $\kappa \in \operatorname{Dif}^\infty(f(\Omega), \mathbb{R})$ es un difeomorfismo C^∞ , entonces $d(\kappa \circ f) = \kappa' df$ (donde κ' es la derivada de κ) se anula en los puntos donde originalmente $df = 0$. Luego $\kappa \circ f$ es una integral primera para X .

A partir de lo anterior surgen dos preguntas naturales:

¿Cómo difieren los factores integrantes μ de X asociados a las integrales primeras f y $(\kappa \circ f)$?

¿Cómo difieren los campos vectoriales Hamiltonianos de f y $(\kappa \circ f)$?

Si μ es un factor integrante para X , es decir $\mu X = X_f$, la regla de la cadena muestra que

$$X_{(\kappa \circ f)} = \kappa' X_f = \kappa' \mu X.$$

Así, tanto los factores integrantes como los campos vectoriales Hamiltonianos de las integrales primeras f y $(\kappa \circ f)$ difieren por el factor κ' . El cálculo anterior también muestra que:

Observación 3. Si X admite una integral primera no idénticamente constante, entonces admite una infinidad de factores integrantes no constantes.

La propiedad de ser un campo vectorial Hamiltoniano X_f es muy restrictiva, ya que existen retratos fase topológicos de campos vectoriales que no son realizados por campos vectoriales

Hamiltonianos. Entre esos retratos se encuentran los que contienen gráficas límite. Para ello recordamos que

Una *gráfica* de X es un conjunto finito $\Gamma \subset \Omega$ de trayectorias de X , tal que:

Γ es conexo y está formado por la unión finita de trayectorias y puntos singulares.

El ω -límite y α -límite de cada trayectoria en Γ está en Γ .

Una *gráfica límite* Γ es una gráfica tal que existe una trayectoria γ de X que no pertenece a Γ pero el ω -límite o α -límite de γ es Γ .

En el capítulo 2, sección 2.2 veremos con más detalle ambos tipos de gráficas.

Proposición 1. *Los campos vectoriales Hamiltonianos satisfacen lo siguiente:*

1. *Preservan área.*
2. *No admiten pozos y/o fuentes.*
3. *No admiten ciclos límites.*
4. *No admiten gráficas límite.*

Demostración. Consideramos X_f un campo vectorial Hamiltoniano. Para mostrar (1), recordamos que su divergencia satisface $\text{div}(X_f) = 0$. Entonces X_f preserva áreas, ver [4] pág. 251. Las pruebas de (2) a (4) se siguen de (1). \square

1.2. Factores integrantes y simetrías.

A lo largo de esta sección consideramos una pareja de campos vectoriales X, Y , de clase C^∞ en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y denotamos mediante T al *determinante de X, Y* , esto es, $T = \det(X, Y)$. El dominio Ω' donde Y es transversal a X se expresa mediante

$$\Omega' = \{(x, y) \in \Omega \mid T(x, y) \neq 0\}.$$

A continuación enunciamos tres definiciones (a priori distintas) para parejas de campos vectoriales, la primera y la tercera se deben esencialmente a S. Lie (ver [13] pág. 208).

Definición 4. Decimos que X *admite una simetría Y* si existe un campo vectorial diferenciable Y transversal con X en Ω' , tal que el flujo de Y lleva soluciones de X en soluciones de X .

Definición 5. Decimos que Y *es proyectable con respecto a X* en Ω' si para cada punto de Ω' existe una caja de flujo $\Phi : \mathcal{U} \subset \Omega' \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ para X , tal que

$$\Phi_* Y = c(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + d(y) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (1.1)$$

El hecho de que la función $d : \Phi(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$ sólo depende de una variable, dice que en $\Phi(\mathcal{U})$ la proyección $\pi(x, y) = y$ envía el campo vectorial $\Phi_* Y$ en $d(y)(\partial/\partial y)$.

Definición 6. (Ver [35] pág. 21). Decimos que X *admite una simetría infinitesimal Y* si existe un campo vectorial Y en Ω , tal que $[X, Y] = \nu X$ para una función $\nu : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^∞ .

Observación 4. *La propiedad para el campo vectorial Y dada en (1.1) es local y no depende de la caja de flujo utilizada.* En efecto si consideramos $\Phi_1, \Phi_2 : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ dos cajas de flujo para X , por el lema 24 (ver apéndice A.1), el cambio de coordenadas entre esas dos cajas de flujo $\Theta : \Phi_1(\mathcal{U}) \rightarrow \Phi_2(\mathcal{U})$ es de la forma $\Theta(x, y) = (h(y) + x, k(y))$, con $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase

C^∞ y $k \in \text{Dif}^\infty(\mathbb{R})$, tal que Θ deja invariante al campo vectorial $\partial/\partial x$. Para el campo vectorial $(\Phi_1)_*Y$ de la forma (1.1), tenemos que

$$\Theta_*((\Phi_1)_*Y) = (c(x, y) + d(y)h'(y))\Big|_{(x-h(y), k^{-1}(y))} \frac{\partial}{\partial x} + (k'(y)d(y))\Big|_{(x-h(y), k^{-1}(y))} \frac{\partial}{\partial y},$$

donde k', h' representan las derivadas de las funciones k y h respectivamente. Así la segunda componente del campo vectorial transformado $\Theta_*((\Phi_1)_*Y)$ es una función que sólo depende de la variable y . Ello concluye la observación.

Notamos de la definición 6 que dada una pareja de campos vectoriales X, Y , verificar que Y es una simetría infinitesimal de X se reduce a un cálculo de derivadas para el corchete de Lie y a factorizar la función ν .

Dos casos especiales de la ecuación $[X, Y] = \nu X$ son:

$\nu \equiv 0$ que corresponde a que X y Y provienen de una \mathbb{R}^2 -acción local sobre Ω .

$\nu \equiv 1$ que corresponde a que X y Y provienen de una acción local del grupo afín en \mathbb{R} sobre Ω .

El siguiente resultado muestra que no existe diferencia entre las tres definiciones anteriores.

Lema 2. (*S. Lie*). *Consideramos un campo vectorial X en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Las condiciones siguientes son equivalentes para un segundo campo vectorial Y :*

1. Y es una simetría de X .
2. Y es proyectable con respecto a X en Ω' .
3. Y es una simetría infinitesimal de X .

Demostración. Mostraremos las equivalencias deseadas en un disco abierto $B((x_0, y_0), r) \subset \Omega'$, con $r > 0$ suficientemente pequeño, alrededor de un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, ya que (1), (2) y (3) son propiedades locales. Adicionalmente, como X no se anula en Ω' podemos suponer usando una caja de flujo Φ , que X se escribe como $\partial/\partial x$ y Y como $c(x, y)(\partial/\partial x) + d(x, y)(\partial/\partial y)$ con $d(x, y)$ no nula en la imagen $\Phi(B((x_0, y_0), r))$.

(1 \Rightarrow 2) El flujo de Y , el cual denotamos por

$$\begin{aligned} v : \Delta \subset \mathbb{R} \times \Phi(B((x_0, y_0), r)) &\rightarrow \Phi(B((x_0, y_0), r)) \\ (t, (x, y)) &\mapsto (v_1(t, (x, y)), v_2(t, (x, y))), \end{aligned}$$

lleva trayectorias de Φ_*X en trayectorias de Φ_*X , cuya imagen es de la forma $\{y = \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Entonces v_2 no depende explícitamente de la variable x , ya que $(\partial/\partial t)v_2(t, y)|_{(0, y)} = d(x, y)$. De ello se sigue que la función $d(x, y)$ sólo depende de la coordenada y . Así Y es proyectable con respecto a X .

(2 \Rightarrow 3) Consideramos Y proyectable con respecto a X . Calculamos el corchete de Lie de Φ_*X y Φ_*Y , esto es

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, c(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + d(y) \frac{\partial}{\partial y} \right] = - \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Hacemos $\nu = -\partial c/\partial x$, luego Φ_*Y es simetría infinitesimal de Φ_*X . Como Φ es difeomorfismo C^∞ , se concluye que Y es simetría infinitesimal de X .

(3 \Rightarrow 1) Calculamos el corchete de Lie de Φ_*X y Φ_*Y con Φ_*Y considerado como al inicio de la demostración

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, c(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + d(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \right] = - \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{\partial d}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} = \nu \frac{\partial}{\partial x}. \quad (1.2)$$

Se sigue que $\partial d/\partial x = 0$, con ello la función $d(x, y)$ sólo depende de la variable y . Entonces el flujo de Φ_*Y asume la forma particular

$$\begin{aligned} v : \Delta \subset \mathbb{R} \times \Phi(B((x_0, y_0), r)) &\rightarrow \Phi(B((x_0, y_0), r)) \\ (t, (x, y)) &\mapsto (v_1(t, (x, y)), v_2(t, (y))), \end{aligned}$$

donde $v_2(t, (y))$ es la solución de $dy/dt = d(y)$. Luego, el flujo v de Φ_*Y lleva soluciones de Φ_*X en soluciones de Φ_*X . Como Φ es difeomorfismo C^∞ , se concluye que Y es simetría de X . \square

Lema 3. *Consideramos un campo vectorial X en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Para un segundo campo vectorial Y transversal a X en Ω' y una función $f : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^∞ , con $df = 0$ en a lo más un conjunto discreto de trayectorias de X y $\Omega' = \Omega - \{(x, y) \in \Omega \mid T(x, y) = 0 \text{ ó } df(x, y) = 0\}$, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. Y es simetría de X y f es una integral primera para X .
2. $\mathcal{L}_Y f = h \circ f$, para alguna función $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^∞ .
3. Existe una integral primera $\tilde{f} : \mathcal{U} \subset \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ quizá multivaluada para X , tal que $\mathcal{L}_Y \tilde{f} \equiv 1$.

Demostración. (1 \Rightarrow 2) Por el lema 2 el campo vectorial Y es proyectable con respecto a X en abiertos $\mathcal{U} \subset \Omega'$. Luego existe una caja de flujo $\Phi : \mathcal{U} \subset \Omega' \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ para X , tal que $\Phi_*Y = c(x, y)(\partial/\partial x) + d(y)(\partial/\partial y)$. En estas nuevas variables la integral primera f sólo depende de la variable y . Calculamos la derivada de Lie de f en la dirección de Φ_*Y , esto es

$$\mathcal{L}_{\Phi_*Y} f = f'(y) \cdot d(y),$$

entonces $\mathcal{L}_{\Phi_*Y} f$ es constante sobre las curvas de nivel de f en $\Phi(\mathcal{U})$. Se sigue que $\mathcal{L}_Y f$ también es constante a lo largo de las curvas de nivel de f en \mathcal{U} . Asumimos que f es C^∞ , entonces $\mathcal{L}_Y f$ varía C^∞ con respecto a las curvas de nivel de f , de aquí se sigue que existe una función $h : f(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , tal que $\mathcal{L}_Y f = h \circ f$.

(2 \Rightarrow 3) Como Y es transversal a X , entonces $\mathcal{L}_Y f = h \circ f$ es no nula en Ω' . Consideramos una función $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $k(\xi) = \int d\xi/h(\xi)$. Notamos que k es C^∞ , luego $k \circ f$ es integral primera para X . Calculamos $\mathcal{L}_Y(k \circ f) = k' \mathcal{L}_Y f \equiv 1$. Concluimos esta parte de la prueba haciendo $\tilde{f} = k \circ f$.

(3 \Rightarrow 1) Supongamos $\mathcal{L}_Y \tilde{f} \equiv 1$, por ello el flujo de Y a tiempo t_0 lleva la curva de nivel $\{\tilde{f} = \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ en la curva $\{\tilde{f} = \alpha + t_0\}$, con lo cual se concluye que Y es simetría de X . \square

Ejemplo 1. Consideramos el campo vectorial lineal

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$$

en $\Omega = \mathbb{R}^2$. Una simetría infinitesimal para X está dada por $Y = -y(\partial/\partial x) + x(\partial/\partial y)$, la cual satisface $[X, Y] \equiv 0$. Una integral primera $f : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ para X , donde $\Omega' = \mathbb{R}^2 - \{\text{eje } x \text{ negativo}\}$, viene dada por $f(x, y) = \arg(x, y)$ la cual es multivaluada en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ pero univaluada en Ω' y satisface $\mathcal{L}_Y f \equiv 1$. En el ejemplo 3 pág. 14 abordaremos con mayor detalle este campo vectorial. \square

A continuación discutimos la relación entre la existencia de una simetría Y y la existencia de un factor integrante μ , para ello requerimos las siguientes definiciones

Definición 7. Consideramos Y simetría de X y un disco $B((x_0, y_0), r) \subset \Omega'$ con $r > 0$ suficientemente pequeño, tal que se satisfacen las tres condiciones siguientes:

1. X, Y son linealmente independientes en todo punto de $B((x_0, y_0), r)$.
2. Cada trayectoria de X en $B((x_0, y_0), r)$ corta exactamente dos veces a la frontera de $B((x_0, y_0), r)$.
3. Cada trayectoria de Y en $B((x_0, y_0), r)$ corta exactamente dos veces a la frontera de $B((x_0, y_0), r)$.

Definimos la función de Y -tiempo local en $B((x_0, y_0), r)$ como sigue

$$Y_{(x_0, y_0)}(x, y) : B((x_0, y_0), r) \subset \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{tiempo requerido bajo el flujo de } Y \\ \text{para enviar la trayectoria solución de } X \\ \text{que pasa por } (x_0, y_0), \text{ en la trayectoria} \\ \text{solución de } X \text{ que pasa por } (x, y) \end{array} \right\}. \quad (1.3)$$

Notamos que $Y_{(x_0, y_0)}$ es C^∞ , ya que el flujo de Y es C^∞ en las variables (x, y) y en el tiempo t . Como consecuencia de que Y es simetría de X , se sigue que $Y_{(x_0, y_0)}$ es integral primera para X , pues las curvas de nivel de $Y_{(x_0, y_0)}$ coinciden con las trayectorias de X .

Definición 8. Una función multivaluada y aditivamente automorfa en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es una colección de funciones $\{f_\alpha : B((x_\alpha, y_\alpha), r_\alpha) \subset \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f_\alpha \text{ es } C^\infty, \alpha \in I\}$, que satisface las tres condiciones siguientes:

1. Ω está cubierta por $\bigcup_\alpha B((x_\alpha, y_\alpha), r_\alpha)$.
2. Para todo par de ramas $f_\alpha : B((x_\alpha, y_\alpha), r_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}, f_\beta : B((x_\beta, y_\beta), r_\beta) \rightarrow \mathbb{R}$, con $B((x_\alpha, y_\alpha), r_\alpha) \cap B((x_\beta, y_\beta), r_\beta) \neq \emptyset$, se cumple que $f_\alpha(x, y) = f_\beta(x, y) + c_{\alpha\beta}$, para una constante $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$.
3. Para todo par de ramas f_α, f_β existe una trayectoria $\gamma : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ que une (x_α, y_α) con (x_β, y_β) y ramas $f_\alpha = f_0, f_1, \dots, f_n = f_\beta$ elementos de la colección, con f_α continuación C^∞ de f_β a lo largo de γ . En detalle $f_i = f_{i+1}$ en $B((x_i, y_i), r_i) \cap B((x_{i+1}, y_{i+1}), r_{i+1}) \neq \emptyset$, para $i = 0, 1, \dots, n-1$.

En lo que sigue, convenimos que todas las funciones multivaluadas que aparecen en este trabajo son aditivamente automorfas, ya que requerimos que df sea univaluada en Ω' . Por esta razón llamamos multivaluada a la función que es multivaluada y aditivamente automorfa. En el apéndice A.2 estudiamos este tipo de funciones.

Lema 4. *Un campo vectorial X admite una simetría Y si y sólo si admite un factor integrante μ .*

Demostración. (\Leftarrow) Supongamos que existe un factor integrante μ para X . Por el lema 1 existe una integral primera local para X a partir de la cual construimos una integral primera global: como $\mu X = \mu a(\partial/\partial x) + \mu b(\partial/\partial y)$ es localmente Hamiltoniano entonces la 1-forma diferencial $-\mu b dx + \mu a dy$ es cerrada. Definimos $f \doteq \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (-\mu b dx + \mu a dy)$ la cual es una integral primera quizá multivaluada pero con df univaluada. Utilizando f definimos el campo vectorial

$$Y = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|^2}. \quad (1.4)$$

Claramente $\mathcal{L}_Y f \equiv 1$, entonces Y es una simetría para X . Notamos que para cualquier otra integral primera \tilde{f} para X , esto es $\tilde{f} = k \circ f$ para alguna función $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, C^\infty$, un cálculo sencillo muestra que $\nabla \tilde{f} / \|\nabla \tilde{f}\|^2 = \pm \nabla f / \|\nabla f\|^2$. De lo anterior se sigue que salvo orientación

Y no depende de la integral primera. Otra manera de mostrar que Y es una simetría de X , se sigue de calcular el corchete de Lie de X_f y Y

$$[X_f, Y] = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right. \\ \left. + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right) X_f,$$

lo cual concluye que Y es simetría de X_f y por ende también es simetría de X .

(\Rightarrow) Consideramos la función de Y -tiempo local la cual es una integral primera para X en un disco $B((x_0, y_0), r)$. Queremos la función de $Y_{(x_0, y_0)}$ para obtener una integral primera f en todo punto de Ω' . Comenzamos con $(x'_1, y'_1) \in \Omega'$ para el cual trazamos una trayectoria $\gamma : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega'$, C^∞ , con la propiedad de que $\gamma(0) = (x_0, y_0)$, $\gamma(1) = (x'_1, y'_1)$. Cubrimos la traza de γ con una colección finita de discos $\{B(\gamma(t_i), r_i)\}$ en Ω' con $i = 0, \dots, n$, tal que un disco $B(\gamma(t_i), r_i)$ de ella se intersecta sólo con el disco precedente $B(\gamma(t_{i-1}), r_{i-1})$ y con el sucesor $B(\gamma(t_{i+1}), r_{i+1})$, como es usual y cada disco satisface las condiciones de la definición 7. Con ello tenemos una colección de integrales primeras locales

$$\{Y_{\gamma(t_i)} : B(\gamma(t_i), r_i) \rightarrow \mathbb{R}\},$$

las cuales satisfacen $\mathcal{L}_Y Y_{\gamma(t_i)} \equiv 1$. Pegamos estas integrales primeras entre sí de manera C^∞ agregando constantes adecuadas. Hagámoslo para $Y_{(x_0, y_0)}$ en $B((x_0, y_0), r)$ y $Y_{\gamma(t_1)}$ en $B(\gamma(t_1), r_1)$. Para un punto $(x_1, y_1) \in B((x_1, y_1), r) \cap B(\gamma(t_1), r_1)$ fijo calculamos la diferencia de las dos integrales primeras en (x_1, y_1) , denotada por

$$\alpha_1 = Y_{(x_0, y_0)}(x_1, y_1) - Y_{\gamma(t_1)}(x_1, y_1).$$

Definimos la función f en $B((x_0, y_0), r) \cup B(\gamma(t_1), r_1)$ por

$$f(x, y) \doteq \begin{cases} Y_{(x_0, y_0)}(x, y) & \text{si } (x, y) \in B((x_0, y_0), r) \\ Y_{\gamma(t_1)}(x, y) + \alpha_1 & \text{si } (x, y) \in B(\gamma(t_1), r_1), \end{cases}$$

la cual es integral primera C^∞ de X y además satisface que $\mathcal{L}_Y f \equiv 1$ en $B((x_0, y_0), r) \cup B(\gamma(t_1), r_1)$. Continuando con este proceso f extiende C^∞ a la unión de los elementos de la cubierta $\{B(\gamma(t_i), r_i)\}$ de la traza de γ . Así, usando una trayectoria γ que une (x_0, y_0) con (x'_1, y'_1) mostramos que existe f en (x'_1, y'_1) . Nos resta discutir como el valor $f(x'_1, y'_1)$ depende de la trayectoria elegida para su construcción. Para esto consideremos una segunda trayectoria $\gamma_1 : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega'$, C^∞ , satisfaciendo que $\gamma_1(0) = (x_0, y_0)$, $\gamma_1(1) = (x'_1, y'_1)$. Para la traza de γ_1 consideramos una cubierta $\{B(\gamma(t_j), r_j)\}$ con $j = 0, \dots, m$, y construimos una integral primera f_1 de clase C^∞ , que satisface $\mathcal{L}_Y f_1 \equiv 1$ en la unión de los elementos de esta cubierta.

Nos preguntamos ¿cómo difieren las integrales primeras f y f_1 en el punto (x'_1, y'_1) ? La respuesta depende si γ es homotópica o no a γ_1 en Ω' , esto es:

1. Si γ es homotópica a γ_1 en Ω' , por el teorema de monodromía (ver [2] pág. 295), se tiene que $f(x'_1, y'_1) = f_1(x'_1, y'_1)$.
2. Si γ no es homotópica a γ_1 en Ω' , comenzamos con el hecho que $f(x_0, y_0) = f_1(x_0, y_0) = 0$. Como γ y γ_1 no son homotópicas, entonces el valor de f y de f_1 en (x'_1, y'_1) difieren por una constante, ya que $df = df_1$ en $B(\gamma(t_n), r_n) \cap B(\gamma_1(t_m), r_m)$.

Concluimos que f extiende posiblemente de manera multivaluada. Así hemos probado que hay una integral primera f (quizá multivaluada) y como su diferencial df es univaluada, entonces X_f es un campo univaluado C^∞ en Ω' . Por el lema 1 concluimos que X admite un factor integrante. \square

Observamos que tanto la simetría como el factor integrante existen en Ω' y en ocasiones pueden extenderse a todo Ω . Una prueba computacional del lema 4 puede verse en [35] pág. 22. En ella se obtiene una expresión explícita para la simetría y el factor integrante. Antes de llevar a cabo dicha prueba, se requiere del siguiente resultado

Lema 5. *Si dos campos vectoriales X, Y cumplen que $T = \det(X, Y)$ es no nulo en Ω' , entonces*

$$[X, Y] = \left(\frac{\mathcal{L}_Y(T)}{T} - \operatorname{div}(Y) \right) X + \left(\operatorname{div}(X) - \frac{\mathcal{L}_X(T)}{T} \right) Y. \quad (1.5)$$

Demostración. Recordemos que en la base $\mathcal{B} = \{\partial/\partial x, \partial/\partial y\}$ el corchete de Lie de X, Y se escribe como

$$[X, Y] = (\mathcal{L}_Y(a) - \mathcal{L}_X(c)) \frac{\partial}{\partial x} + (\mathcal{L}_Y(b) - \mathcal{L}_X(d)) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Dado que por la definición de Ω' se cumple que $T \neq 0$ en Ω' , entonces $\mathcal{B}' = \{X, Y\}$ también es una base para el espacio vectorial de campos vectoriales en Ω' . Nos interesa escribir $[X, Y]$ en término de esta nueva base. Para ello consideramos la matriz de cambio de base:

$$P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} [X, Y]_{\mathcal{B}'} &= P \cdot [X, Y]_{\mathcal{B}} \\ &= \frac{1}{T} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_Y(a) - \mathcal{L}_X(c) \\ \mathcal{L}_Y(b) - \mathcal{L}_X(d) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{T} \begin{pmatrix} d(\mathcal{L}_Y(a) - \mathcal{L}_X(c)) - c(\mathcal{L}_Y(b) - \mathcal{L}_X(d)) \\ -b(\mathcal{L}_Y(a) - \mathcal{L}_X(c)) + a(\mathcal{L}_Y(b) - \mathcal{L}_X(d)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A partir de las dos igualdades siguientes.

$$\begin{aligned} d(\mathcal{L}_Y(a) - \mathcal{L}_X(c)) - c(\mathcal{L}_Y(b) - \mathcal{L}_X(d)) &= \det \begin{pmatrix} \mathcal{L}_Y(a) - \mathcal{L}_X(c) & c \\ \mathcal{L}_Y(b) - \mathcal{L}_X(d) & d \end{pmatrix} = \det([X, Y], Y), \\ -b(\mathcal{L}_Y(a) - \mathcal{L}_X(c)) + a(\mathcal{L}_Y(b) - \mathcal{L}_X(d)) &= \det \begin{pmatrix} \mathcal{L}_Y(a) - \mathcal{L}_X(c) & -a \\ \mathcal{L}_Y(b) - \mathcal{L}_X(d) & -b \end{pmatrix} = -\det([X, Y], X), \end{aligned}$$

el corchete de Lie se escribe en términos de la base \mathcal{B}' como

$$[X, Y] = \frac{\det([X, Y], Y)}{T} X - \frac{\det([X, Y], X)}{T} Y.$$

Un cálculo sencillo muestra que

$$\det([X, Y], X) = \mathcal{L}_X(T) - T \cdot \operatorname{div}(X) \quad (1.6)$$

$$\det([X, Y], Y) = \mathcal{L}_Y(T) - T \cdot \operatorname{div}(Y). \quad (1.7)$$

Para esto utilizamos la multilinealidad del determinante

$$\mathcal{L}_X(T) = \det \begin{pmatrix} \mathcal{L}_X(a) & c \\ \mathcal{L}_X(b) & d \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a & \mathcal{L}_X(c) \\ b & \mathcal{L}_X(d) \end{pmatrix}$$

y

$$\det([X, Y], X) = \det \begin{pmatrix} \mathcal{L}_Y(a) & a \\ \mathcal{L}_Y(b) & b \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \mathcal{L}_X(c) & a \\ \mathcal{L}_X(d) & b \end{pmatrix}.$$

Restando las dos igualdades anteriores obtenemos

$$\begin{aligned} \det([X, Y], X) - \mathcal{L}_X(T) &= \det \begin{pmatrix} \mathcal{L}_Y(a) & a \\ \mathcal{L}_Y(b) & b \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \mathcal{L}_X(a) & c \\ \mathcal{L}_X(b) & d \end{pmatrix} \\ &= b\mathcal{L}_Y(a) - a\mathcal{L}_Y(b) - d\mathcal{L}_X(a) + c\mathcal{L}_X(b) \\ &= bc \frac{\partial a}{\partial x} + bd \frac{\partial a}{\partial y} - ac \frac{\partial b}{\partial x} - ad \frac{\partial b}{\partial y} - ad \frac{\partial a}{\partial x} - bd \frac{\partial a}{\partial y} + ac \frac{\partial b}{\partial x} + bc \frac{\partial b}{\partial y} \\ &= -(ad - bc) \frac{\partial a}{\partial x} - (ad - bc) \frac{\partial b}{\partial y} \\ &= -T \cdot \operatorname{div}(X). \end{aligned}$$

Ello muestra la igualdad (1.6). De manera análoga se muestra la igualdad (1.7). \square

Demostración computacional del lema 4. (\Rightarrow) Conociendo la simetría Y se cumple $[X, Y] = \nu X$.

Por el lema 5 obtenemos la anulación de $\operatorname{div}(X) - \mathcal{L}_X(T)/T = 0$.

Proponemos como factor integrante la función C^∞

$$\begin{aligned} \mu : \Omega' &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto -\frac{1}{\det(X, Y)} = -\frac{1}{T}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

donde $\Omega' = \mathbb{R}^2 - \{T = 0\}$. Para verificarlo calculamos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mu X) &= \operatorname{div} \left(-\frac{X}{T} \right) \\ &= -\frac{1}{T^2} \left(T \frac{\partial a}{\partial x} - a \frac{\partial T}{\partial x} + T \frac{\partial b}{\partial y} - b \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{1}{T^2} (T \operatorname{div}(X) - \mathcal{L}_X T) \\ &= -\frac{1}{T} \left(\operatorname{div}(X) - \frac{\mathcal{L}_X T}{T} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Concluimos que $\mu \doteq -(1/T)$ es un factor integrante para X . La expresión (1.8) se debe a S. Lie.

(\Leftarrow) Tenemos dos casos para el factor integrante μ :

1. Si μ es igual a una constante no nula, entonces existe una integral primera f para X y definimos Y como en (1.4).

2. Si μ no es constante, entonces proponemos el campo vectorial

$$Y = \frac{1}{\mu^2 \operatorname{div}(X)} \left(-\frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right). \tag{1.9}$$

Para mostrar que Y es una simetría de X primero notamos que

$$T = \det(X, Y) = \frac{1}{\mu^2 \operatorname{div}(X)} \left(a \frac{\partial \mu}{\partial x} + b \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = \frac{\mathcal{L}_X(\mu)}{\mu^2 \operatorname{div}(X)} \quad (1.10)$$

y como μ es factor integrante para X se satisface que $\mu \operatorname{div}(X) + \mathcal{L}_X(\mu) = 0$. Aplicando lo anterior en (1.10) se tiene que $\mu = -(1/T)$. Desarrollando $\operatorname{div}(\mu X)$ observamos que

$$0 = \operatorname{div}(\mu X) = \operatorname{div}\left(-\frac{X}{T}\right) = -\frac{1}{T} \left(\operatorname{div}(X) - \frac{\mathcal{L}_X(T)}{T} \right).$$

Sustituyendo dicho coeficiente en la expresión (1.5) del lema 5 tenemos

$$[X, Y] = \left(\frac{\mathcal{L}_Y(T)}{T} - \operatorname{div}(Y) \right) X.$$

Ello muestra que Y es simetría de X . □

Lema 6. Consideramos un campo vectorial X en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Las condiciones siguientes son equivalentes para un segundo campo vectorial Y :

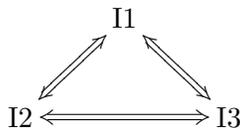
1. X es simetría de Y y Y es simetría de X .
2. $[X, Y] \equiv 0$.

Demostración. (\Rightarrow) Como Y es simetría de X existe una función $\nu_1 : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , tal que $[X, Y] = \nu_1 X$. Por otra parte, X es simetría de Y , luego existe una función $\nu_2 : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , tal que $[X, Y] = \nu_2 Y$. Como Y es transversal con X en Ω' , se concluye que $\nu_1 = \nu_2 = 0$.

(\Leftarrow) Es inmediato. □

Empleando los lemas 1 y 4 concluimos que

Primer bloque de integrabilidad. Las nociones de integrabilidad I1 a I3 son equivalentes



1.3. Primera visión unificada de integrabilidad.

Partimos de un campo vectorial X , de clase C^∞ en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y construimos correspondencias entre integrales primeras (quizá multivaluadas), factores integrantes y simetrías de X .

Para un campo vectorial X en Ω tenemos los siguientes tres conjuntos:

1. $\mathcal{I}(X) = \{f : \Omega' \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es integral primera (quizá multivaluada) para } X\}$.
2. $\mathcal{FI}(X) = \{\mu : \Omega' \rightarrow \mathbb{R} \mid \mu \text{ es factor integrante para } X\}$.
3. $\mathcal{S}(X) = \{Y \in \Omega' \mid Y \text{ es simetría de } X\}$.

Observación 5. Los conjuntos anteriores cumplen lo siguiente: $(\mathcal{I}(X), +, \cdot)$ es un anillo, $(\mathcal{FI}(X), +)$ es un grupo y $\mathcal{S}(X)$ es un espacio vectorial. Revisamos la demostración enfatizando algunos detalles.

En $\mathcal{I}(X)$ incluimos integrales primeras constantes, en abiertos de Ω o incluso en todo Ω . Con ello las operaciones de suma y producto en $\mathcal{I}(X)$ son cerradas. Estas integrales primeras constantes son triviales para la teoría y por ello las habiamos removido en la hoja de notaciones y convenciones, ahora las incluimos para obtener las estructuras algebraicas ya mencionadas. Suponemos $f_1, f_2 \in \mathcal{I}(X)$, lo cual es equivalente con $\mathcal{L}_X(f_1) = \mathcal{L}_X(f_2) \equiv 0$; con ello tenemos que

$$\mathcal{L}_X(f_1 + f_2) = \mathcal{L}_X(f_1) + \mathcal{L}_X(f_2) \equiv 0, \quad \mathcal{L}_X(f_1 \cdot f_2) = f_2 \mathcal{L}_X(f_1) + f_1 \mathcal{L}_X(f_2) \equiv 0.$$

Así $\mathcal{I}(X)$ es cerrado bajo las operaciones de suma y producto. El resto de los axiomas de anillo son fáciles de verificar.

En $\mathcal{FI}(X)$ incluimos el factor integrante trivial $\mu \equiv 0$, para que la operación de suma sea cerrada en $\mathcal{FI}(X)$. Este factor integrante no lo habiamos considerado ya que es trivial para la teoría. Suponemos $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{FI}(X)$, lo cual es equivalente con $div(\mu_1 X) = div(\mu_2 X) \equiv 0$; con ello tenemos que

$$div((\mu_1 + \mu_2)X) = div(\mu_1 X) + div(\mu_2 X) \equiv 0.$$

Así $\mathcal{FI}(X)$ es cerrado bajo la operación de suma. El resto de los axiomas de grupo son fáciles de verificar.

En $\mathcal{S}(X)$ incluimos momentáneamente campos vectoriales que se anulan en abiertos de Ω , incluso el campo vectorial nulo en todo Ω y los campos de la forma hX con $h : \mathcal{U} \subset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ función C^∞ en subconjuntos abiertos \mathcal{U} de Ω , con ello la operación de suma es cerrada. Estos campos vectoriales no han sido considerados en la hoja de notaciones y convenciones ya que son triviales para la teoría. Suponemos que $Y_1, Y_2 \in \mathcal{S}(X)$, esto es, Y_1 y Y_2 satisfacen $[X, Y_1] = \nu_1 X$ y $[X, Y_2] = \nu_2 X$; con ello tenemos que

$$[X, Y_1 + Y_2] = [X, Y_1] + [X, Y_2] = (\nu_1 + \nu_2)X, \quad [X, \alpha Y_1] = \alpha[X, Y_1] = \alpha \nu_1 X,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. El resto de los axiomas de espacio vectorial son fáciles de verificar. Esto concluye la observación.

Las relaciones entre los conjuntos $\mathcal{I}(X)$, $\mathcal{FI}(X)$ y $\mathcal{S}(X)$ se expresan en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{S}(X) & \\ \swarrow \mathfrak{c}_2 & & \searrow \mathfrak{c}_5 \\ \mathcal{I}(X) & \xleftrightarrow{\mathfrak{c}_3} & \mathcal{FI}(X) \\ \xleftarrow{\mathfrak{c}_1^{-1}} & & \xrightarrow{\mathfrak{c}_1} \end{array} \quad (1.11)$$

Las correspondencias \mathfrak{c}_i están dadas como sigue:

- La correspondencia \mathfrak{c}_1 está dada por

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{c}_1 : \mathcal{I}(X) & \rightarrow & \mathcal{FI}(X) \\ f & \mapsto & -\frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial f}{\partial x} \end{array} \quad (1.12)$$

Por simplicidad denotamos $\mathfrak{c}_1(f) \doteq \mu$. El dominio de \mathfrak{c}_1 es

$$\left\{ f \in \mathcal{I}(X) \mid \begin{array}{l} f \text{ es } C^\infty \text{ en algún } \Omega' \text{ y} \\ f \text{ no es idénticamente constante en todo } \Omega \end{array} \right\}.$$

A partir de X y μ se obtiene una 1-forma diferencial $\omega = \mu(b dx - a dy)$, C^∞ en Ω' , que es cerrada pero a priori no es exacta. Proponemos la correspondencia inversa

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}_1^{-1} : \mathcal{FI}(X) &\rightarrow \mathcal{I}(X) \\ \mu &\mapsto \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \mu(b dx - a dy) \end{aligned} \quad (1.13)$$

la cual está bien definida salvo integración por una constante. El dominio de \mathfrak{c}_1^{-1} es

$$\left\{ \mu \in \mathcal{FI}(X) \mid \begin{array}{l} \mu \text{ es } C^\infty \text{ en algún } \Omega' \text{ y} \\ \mu \text{ no es idénticamente constante en abiertos de } \Omega \end{array} \right\}.$$

Denotamos mediante $\pi(\Omega', p)$ al grupo fundamental de Ω' . A partir de la teoría de integración de 1-formas diferenciales se tienen las siguientes posibilidades para \mathfrak{c}_1^{-1} :

1. Si $\pi(\Omega', p)$ es trivial, esto es $\pi(\Omega', p) = e$, entonces \mathfrak{c}_1^{-1} es univaluada y ω es exacta.
2. Si $\pi(\Omega', p) \neq e$ y $\int_\gamma \omega = 0$ para toda $[\gamma] \in \pi(\Omega', p)$, entonces \mathfrak{c}_1^{-1} es univaluada y ω es exacta.
3. Si al menos una clase $[\gamma] \in \pi(\Omega', p)$, con $[\gamma] \neq e$, cumple que $\int_\gamma \omega \neq 0$, entonces \mathfrak{c}_1^{-1} es multivaluada y ω no es exacta.

Observación 6. Las correspondencias \mathfrak{c}_1 y \mathfrak{c}_1^{-1} son inversas una de la otra.

- La correspondencia \mathfrak{c}_2 está dada por

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}_2 : \mathcal{I}(X) &\rightarrow \mathcal{S}(X) \\ f &\mapsto \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|^2} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Otra expresión para (1.14) es $\mathfrak{c}_2(f) = (1/(a(\partial f/\partial y) - b(\partial f/\partial x))(-b(\partial/\partial x) + a(\partial/\partial y)))$, la cual se obtiene despejando $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ de $\mathcal{L}_X f = 0$ y de una sustitución directa en la primera expresión de \mathfrak{c}_2 . El dominio de \mathfrak{c}_2 es

$$\left\{ f \in \mathcal{I}(X) \mid \begin{array}{l} f \text{ es } C^\infty \text{ en algún } \Omega' \text{ y} \\ f \text{ no es idénticamente constante en todo } \Omega \end{array} \right\}.$$

Observamos que $\mathfrak{c}_2(f)$ es ortogonal a X , $\mathcal{L}_{\mathfrak{c}_2(f)} f \equiv 1$ y $\mathfrak{c}_2(f)$ no siempre es C^∞ en los puntos críticos de f , basta considerar la integral primera dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$.

- La correspondencia \mathfrak{c}_3 está dada por

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}_3 : \mathcal{S}(X) &\rightarrow \mathcal{I}(X) \\ Y &\mapsto \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{b dx - a dy}{\det(X, Y)} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Notamos que $\mathfrak{c}_3(Y) \doteq Y_{(x_0, y_0)}(x, y)$ es la función de Y -tiempo construida utilizando el flujo de Y (ver definición 7). El dominio de \mathfrak{c}_3 es

$$\left\{ Y \in \mathcal{S}(X) \mid \begin{array}{l} Y \text{ es } C^\infty \text{ en algún } \Omega' \text{ y} \\ Y \text{ no es idénticamente cero en abiertos de } \Omega \end{array} \right\}.$$

$\mathfrak{c}_3(Y)$ no siempre es C^∞ aún cuando X, Y lo sean. La función $Y_{(x_0, y_0)}(x, y)$ se aproxima a infinito cuando el punto (x, y) se aproxima a una singularidad de Y , ya que $\det(X, Y)$ se anula en dicha singularidad. La integral primera $\mathfrak{c}_3(Y)$ es en general multivaluada (por ejemplo cuando X tiene un pozo-fuente) ver ejemplo 3.

Observación 7. La correspondencia \mathfrak{c}_2 no es la inversa de \mathfrak{c}_3 . Esto se debe a que hay ejemplos de campos vectoriales X tales que \mathfrak{c}_3 envía una infinidad de simetrías $\{Y\}$, no necesariamente ortogonales a X , a una misma integral primera. Para ello basta que los Y -tiempos de las simetrías $\{Y\}$ sean iguales. Por ejemplo para $X = \partial/\partial x$ consideramos las simetrías

$$Y_1 = c_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + d(y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y_2 = c_2(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + d(y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (1.16)$$

con $c_1 \neq c_2$. Notamos que $Y_1 \neq Y_2$, pero los Y -tiempos de Y_1, Y_2 son iguales, ya que estos sólo dependen de $d(y)$. Con ello $\mathfrak{c}_3(Y_1) = \mathfrak{c}_3(Y_2)$, luego \mathfrak{c}_3 no admite una inversa. Esto concluye la observación.

- La correspondencia \mathfrak{c}_4 está dada por

$$\mathfrak{c}_4 : \mathcal{FI}(X) \rightarrow \mathcal{S}(X) \\ \mu \mapsto \begin{cases} \frac{\nabla \mu}{\|\nabla \mu\|^2}, & \text{si } X \text{ es Hamiltoniano para } \mu \text{ no constante,} \\ \frac{1}{\mu^2 \operatorname{div}(X)} X \mu, & \text{si } X \text{ no es Hamiltoniano.} \end{cases} \quad (1.17)$$

El dominio de \mathfrak{c}_4 es

$$\left\{ \mu \in \mathcal{FI}(X) \mid \begin{array}{l} \mu \text{ es } C^\infty \text{ en algún } \Omega' \text{ y} \\ \mu \text{ no es idénticamente constante en abiertos de } \Omega \end{array} \right\}.$$

Observación 8. 1. Todo factor integrante μ no constante para X_f es integral primera para X_f . 2. La fórmula (1.17) no se comporta continuamente en familias de campos vectoriales C^∞ . Para (1) un cálculo sencillo muestra que $\mathcal{L}_{X_f}(\mu) = 0$. Para (2) tenemos el siguiente

Ejemplo 2. Consideramos $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, difeomorfismo C^∞ y la familia de campos vectoriales $X_\epsilon = (\alpha(y) + \epsilon \operatorname{sen}(xy))(\partial/\partial x)$, la cual es C^∞ con respecto a la función $\alpha(y)$ y al parámetro $\epsilon \in \mathbb{R}$. Un factor integrante (con respecto a ϵ) para la familia X_ϵ es $\mu_\epsilon(x, y) = 1/(\alpha(y) + \epsilon \operatorname{sen}(xy))$. Una integral primera para la familia $\mu_\epsilon X_\epsilon$ es $f(x, y) = -y$, la cual satisface que $X_f = \mu_\epsilon X_\epsilon$.

Si $\epsilon = 0$, entonces X_0 es Hamiltoniano y $\mathfrak{c}_4(\mu_0) = -((\alpha^2/\alpha')(y))(\partial/\partial y)$.

Si $\epsilon \neq 0$, entonces X_ϵ no es Hamiltoniano y $\mathfrak{c}_4(\mu_\epsilon) = ((\alpha'(y) + \epsilon x \cos(xy))/\epsilon y \cos(xy))(\partial/\partial x) - (\partial/\partial y)$.

Observamos que cuando $\epsilon \rightarrow 0$, la primera componente de $\mathfrak{c}_4(\mu_\epsilon)$ va a infinito. Luego $\mathfrak{c}_4(\mu_\epsilon)$ no es continua respecto al parámetro ϵ cuando $\epsilon = 0$. \square

- La correspondencia \mathfrak{c}_5 está dada por

$$\mathfrak{c}_5 : \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{FI}(X) \\ Y \mapsto -\frac{1}{\det(X, Y)} \quad (1.18)$$

Por simplicidad denotamos $\mathfrak{c}_5(Y) \doteq \mu$, el cual es llamado el factor integrante de Lie para X . (ver fórmula 1.8). El dominio de \mathfrak{c}_5 es

$$\left\{ Y \in \mathcal{S}(X) \mid \begin{array}{l} Y \text{ no es idénticamente cero en abiertos de } \Omega \text{ y} \\ Y \text{ no es linealmente dependiente con } X \text{ en abiertos de } \Omega \end{array} \right\}.$$

Observación 9. La correspondencia \mathfrak{c}_4 no es la inversa de \mathfrak{c}_5 . Esto se debe a que hay ejemplos de campos vectoriales X tales que \mathfrak{c}_5 envía distintas simetrías de X a un mismo factor integrante. Por ejemplo para las simetrías Y_1, Y_2 de $X = \partial/\partial x$ dadas en (1.16), se tiene que $\mathfrak{c}_5(Y_1) = \mathfrak{c}_5(Y_2) = -1/d(y)$, luego \mathfrak{c}_5 no admite una inversa. Ello concluye la observación.

1.4. Ejemplos de integrabilidad.

En esta sección consideramos un campo vectorial X , de clase C^∞ en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, provisto de uno de los tres elementos siguientes: una integral primera, un factor integrante o una simetría. Utilizando las correspondencias descritas en la sección 1.3, encontramos los dos elementos restantes.

Ejemplo 3. Consideramos el campo vectorial lineal

$$X = (\alpha x + \beta y) \frac{\partial}{\partial x} + (\delta x + \eta y) \frac{\partial}{\partial y}$$

en \mathbb{R}^2 , con un punto singular aislado en el origen. Se sabe que X asume, salvo cambio de coordenadas lineales, una de las siguientes tres expresiones

$$\begin{aligned} X_1 &= \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y}, & \lambda_1, \lambda_2 &\in \mathbb{R} - \{0\}, \\ X_2 &= (\lambda x + y) \frac{\partial}{\partial x} + \lambda y \frac{\partial}{\partial y}, & \lambda &\in \mathbb{R} - \{0\}, \\ X_3 &= (\lambda_1 x - \lambda_2 y) \frac{\partial}{\partial x} + (\lambda_2 x + \lambda_1 y) \frac{\partial}{\partial y}, & \lambda_1 &\in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{R} - \{0\}. \end{aligned}$$

I. G. Petrovski observó que los campos vectoriales lineales poseen integrales primeras, de clase C^ω , fuera de algunas de sus separatrices, ver [36], pág. 66. Consideramos $f_i : \Omega_i \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , integrales primeras univaluadas de X_i , para $i = 1, 2, 3$, dadas por

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \frac{x \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)}{y}, & \Omega_1 &= \begin{cases} \mathbb{R}^2 - \{xy = 0\} & \text{si } \lambda_1 \lambda_2 < 0, \\ \mathbb{R}^2 - \{y = 0\} & \text{si } \lambda_1 \lambda_2 > 0, \end{cases} \\ f_2(x, y) &= \frac{\lambda x - y \ln y}{\lambda y}, & \Omega_2 &= \mathbb{R}^2 - \{y = 0\}, \\ f_3(x, y) &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \arg(x, y), & \Omega_3 &= \mathbb{R}^2 - \{(x, 0) \mid x \leq 0\}. \end{aligned}$$

En el apéndice A.2 se estudia a detalle la función argumento. Los dos siguientes lemas muestran la existencia de integrales primeras que involucran la función \arg .

Lema 7. *El campo vectorial lineal X_1 con $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, admite una integral primera univaluada $f : \mathbb{R}^2 - \{(x, 0) \mid x \leq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^∞ .*

Demostración. La idea de la prueba consiste en construir un difeomorfismo $F : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$, C^∞ , tal que $F_* X_1 = x(\partial/\partial x) + y(\partial/\partial y)$ y mostrar que la función $\arg(x, y)$ es una integral primera univaluada de $F_* X_1$ en $\mathbb{R}^2 - \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$, luego $f = \arg \circ F$ es la integral primera deseada.

La siguiente construcción puede verse en [34], pág. 27. Denotamos mediante $\varphi, v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, C^∞ , a los flujos de los campos vectoriales $X_1, x(\partial/\partial x) + y(\partial/\partial y)$ respectivamente. Observamos que el círculo unitario S^1 es transversal a X_1 e intersecta a todas las trayectorias de X_1 exceptuando el origen. Lo anterior también se cumple para $x(\partial/\partial x) + y(\partial/\partial y)$. Utilizando el flujo φ de X_1 , calculamos el tiempo $\tau(x, y)$ requerido para enviar un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ a S^1 , dicho tiempo es función C^∞ de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ a \mathbb{R} . Definimos $F : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ mediante

$$F(x, y) = v(-\tau(x, y), \varphi(\tau(x, y), (x, y))).$$

La función F es C^∞ y posee inversa C^∞ , ello se debe a que F está expresada en término de los flujos φ, v los cuales son C^∞ . Así F es un difeomorfismo C^∞ que por construcción satisface $F_*X_1 = x(\partial/\partial x) + y(\partial/\partial y)$.

Para la segunda parte de la prueba consideramos la función univaluada $arg : \mathbb{R}^2 - \{(x, 0) \mid x \leq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ . Un cálculo sencillo muestra que $darg(F_*X_1) = 0$, así $arg(x, y)$ es integral primera de F_*X_1 . Finalmente definimos $f \doteq arg \circ F : \mathbb{R}^2 - \{(x, 0) \mid x \leq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, la cual es integral primera de X_1 , ello se debe a que f es constante a lo largo de las trayectorias de X_1 . Evidentemente f es C^∞ y univaluada, ya que es composición de funciones C^∞ y univaluadas. \square

Con una demostración similar a la realizada en el lema 7, obtenemos el siguiente resultado

Lema 8. *El campo vectorial lineal X_3 , con $\lambda_1 \neq 0$, admite una integral primera univaluada $f : \mathbb{R}^2 - (\{la\ trayectoria\ de\ } X_3\ que\ pasa\ por\ (-1, 0)\} \cup \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^∞ .*

Observación 10. *Los campos vectoriales lineales X_1, X_3 , con $\lambda_1\lambda_2 > 0$ y $\lambda_1 \neq 0$ respectivamente, admiten una integral primera multivaluada en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. En efecto, basta considerar la función multivaluada $Arg(x, y)$ en la demostración del lema 7.*

Aplicando la correspondencia \mathbf{c}_1 a las integrales primeras f_i , obtenemos $\mu_i \doteq \mathbf{c}_1(f_i) : \Omega_i \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , factores integrantes de X_i , para $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} \mu_1(x, y) &= \frac{x\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1\right)}{\lambda_1 y^2}, & \Omega_1 &= \begin{cases} \mathbb{R}^2 - \{xy = 0\} & \text{si } (\lambda_2/\lambda_1) < 1, \\ \mathbb{R}^2 - \{y = 0\} & \text{si } (\lambda_2/\lambda_1) > 1, \end{cases} \\ \mu_2(x, y) &= \frac{1}{\lambda y^2}, & \Omega_2 &= \mathbb{R}^2 - \{y = 0\}, \\ \mu_3(x, y) &= \frac{1}{\lambda_2(x^2 + y^2)}, & \Omega_3 &= \mathbb{R}^2 - \{0\}. \end{aligned}$$

Para obtener las simetrías de X_i , aplicamos la correspondencia \mathbf{c}_2 a las integrales primeras f_i y la correspondencia \mathbf{c}_4 a los factores integrantes μ_i , para $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_2(f_1) &= \frac{\lambda_1 y^2}{x^{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1}} (\lambda_1^2 x^2 + \lambda_2^2 y^2)} \left(\lambda_2 y \frac{\partial}{\partial x} - \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial y} \right), & \Omega_1 &= \begin{cases} \mathbb{R}^2 - \{y = 0\} & \text{si } \lambda_2 = \lambda_1, \\ \mathbb{R}^2 - \{xy = 0\} & \text{si } \lambda_2 \neq \lambda_1, \end{cases} \\ \mathbf{c}_4(\mu_1) &= \begin{cases} \frac{\lambda_1 x^3 y^3}{2(x^2 + y^2)} \left(x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\lambda_2 y}{x^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} (\lambda_1 + \lambda_2)} \left(2\lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + (\lambda_2 - \lambda_1) y \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{cases} & \Omega_1 &= \begin{cases} \mathbb{R}^2 - \{xy = 0\} & \text{si } \lambda_2 = -\lambda_1, \\ \mathbb{R}^2 - \{xy = 0\} & \text{si } \lambda_2 \neq -\lambda_1, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\mathbf{c}_2(f_2) = \frac{\lambda y^2}{\lambda^2 y^2 + (\lambda x + y)^2} \left(\lambda y \frac{\partial}{\partial x} - (\lambda x + y) \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \Omega_2 = \mathbb{R}^2 - \{y = 0\},$$

$$\mathbf{c}_4(\mu_2) = y \frac{\partial}{\partial x}, \quad \Omega_2 = \mathbb{R}^2 - \{y = 0\},$$

$$\mathbf{c}_2(f_2) = \frac{\lambda y^2}{\lambda^2 y^2 + (\lambda x + y)^2} \left(\lambda y \frac{\partial}{\partial x} - (\lambda x + y) \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \Omega_2 = \mathbb{R}^2 - \{y = 0\},$$

$$\mathbf{c}_4(\mu_2) = y \frac{\partial}{\partial x}, \quad \Omega_2 = \mathbb{R}^2 - \{y = 0\},$$

$$\mathbf{c}_2(f_3) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \left((\lambda_2 x + \lambda_1 y) \frac{\partial}{\partial x} - (\lambda_1 x - \lambda_2 y) \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \Omega_3 = \mathbb{R}^2,$$

$$\mathbf{c}_4(\mu_3) = \begin{cases} -\frac{\lambda_2(x^2+y^2)}{2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) & \text{si } \lambda_1 = 0, \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) & \text{si } \lambda_1 \neq 0, \end{cases} \quad \Omega_3 = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{si } \lambda_1 = 0, \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } \lambda_1 \neq 0. \end{cases}$$

El hecho que $\mathbf{c}_2(f_i) \neq (\mathbf{c}_4 \circ \mathbf{c}_1)(f_i)$ verifica que el diagrama de correspondencias (1.11) no es conmutativo. Aplicando el corchete de Lie a X_i y sus simetrías, obtenemos

$$[X_1, \mathbf{c}_2(f_1)] = \nu_1 X_1, \quad [X_1, \mathbf{c}_4(\mu_1)] = \begin{cases} \nu_2 X_1 & \text{si } \lambda_2 = -\lambda_1, \\ 0 & \text{si } \lambda_2 \neq -\lambda_1, \end{cases}$$

$$[X_2, \mathbf{c}_2(f_2)] = \nu_3 X_2, \quad [X_2, \mathbf{c}_4(\mu_2)] = 0,$$

$$[X_3, \mathbf{c}_2(f_3)] = 0, \quad [X_3, \mathbf{c}_4(\mu_3)] = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_1 = 0, \\ 0 & \text{si } \lambda_1 \neq 0, \end{cases}$$

donde $\nu_1 = 2y^3 \lambda_1^2 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) x^{(2\lambda_1 - \lambda_2)/\lambda_1} / (\lambda_1^2 x^2 + \lambda_2^2 y^2)^2$; $\nu_2 = \lambda_1 x^3 y^3 (y^2 - x^2) / (x^2 + y^2)^2$; $\nu_3 = \lambda y^2 (\lambda x + y + \lambda y) (\lambda x + y - \lambda y) / (\lambda^2 x^2 + 2\lambda x y + \lambda^2 y^2 + y^2)^2$.

En la siguiente tabla se representan las nociones de integrabilidad I1 a I3 para cada una de las expresiones del campo vectorial lineal X . Las integrales primeras f_1 y f_2 son conocidas en la literatura. Nuestras aportaciones son la integral primera f_3 , los factores integrantes μ_i y las simetrías $\mathbf{c}_2(f_i)$, $\mathbf{c}_4(\mu_i)$, para $i = 1, 2, 3$.

X	Integral primera	Factor integrante	Simetría
X_1	$f_1(x, y) = \frac{x \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)}{y}$	$\mu_1(x, y) = \frac{x \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 \right)}{\lambda_1 y^2}$	$\mathbf{c}_2(f_1) = \frac{\lambda_1 y^2}{x \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} (\lambda_1^2 x^2 + \lambda_2^2 y^2)} \left(\lambda_2 y \frac{\partial}{\partial x} - \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial y} \right)$ $\mathbf{c}_4(\mu_1) = \begin{cases} \frac{\lambda_1 x^3 y^2}{2(x^2 + y^2)} \left(x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} \right) & \text{si } \lambda_2 = -\lambda_1, \\ \frac{y}{x \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) (\lambda_1 + \lambda_2)} \left(2\lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + (\lambda_2 - \lambda_1) y \frac{\partial}{\partial y} \right) & \text{si } \lambda_2 \neq -\lambda_1. \end{cases}$
X_2	$f_2(x, y) = \frac{\lambda x - y \ln y}{\lambda y}$	$\mu_2(x, y) = \frac{1}{\lambda y^2}$	$\mathbf{c}_2(f_2) = \frac{\lambda y^2}{\lambda^2 y^2 + (\lambda x + y)^2} \left(\lambda y \frac{\partial}{\partial x} - (\lambda x + y) \frac{\partial}{\partial y} \right)$ $\mathbf{c}_4(\mu_2) = y \frac{\partial}{\partial x}$
X_3	$f_3(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \operatorname{arg}(x, y)$	$\mu_3(x, y) = \frac{1}{\lambda_2(x^2 + y^2)}$	$\mathbf{c}_2(f_3) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \left((\lambda_2 x + \lambda_1 y) \frac{\partial}{\partial x} - (\lambda_1 x - \lambda_2 y) \frac{\partial}{\partial y} \right)$ $\mathbf{c}_4(\mu_3) = \begin{cases} -\frac{\lambda_2(x^2+y^2)}{2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) & \text{si } \lambda_1 = 0, \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) & \text{si } \lambda_1 \neq 0. \end{cases}$

Ejemplo 4. Consideramos el campo vectorial de Lotka - Volterra

$$X = (\alpha x + \delta xy) \frac{\partial}{\partial x} + (\beta y + \eta xy) \frac{\partial}{\partial y}$$

en \mathbb{R}^2 con coeficientes $\alpha, \beta, \delta, \eta \in \mathbb{R}$ y no simultáneamente nulos, ver [35], pág. 8 para el caso con coeficientes complejos. Si α ó β son nulos, entonces X posee líneas de puntos singulares. Si α y β son ambos no nulos, entonces el número de puntos singulares de X depende de δ y η como sigue:

1. Si δ ó η son nulos, entonces X posee un sólo punto singular en el origen que puede asumir la topología de una silla, un pozo o una fuente. Ver ejemplo 3 para el caso en que δ y η son ambos nulos.
2. Si δ y η son ambos no nulos, entonces X posee dos puntos singulares: una silla en el origen y un centro en $(-\beta/\eta, -\alpha/\delta)$ si α y β tienen signos opuestos; un pozo o una fuente en el origen y una silla en $(-\beta/\eta, -\alpha/\delta)$ si α y β tienen el mismo signo.

Para este ejemplo contamos con una integral primera $f : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , para X dada por $f(x, y) = \alpha \ln y - \beta \ln x + \delta y - \eta x$, donde $\Omega' = \mathbb{R}^2 - \{xy = 0\}$. Aplicamos las correspondencias \mathfrak{c}_1 y \mathfrak{c}_2 a la integral primera f para obtener un factor integrante y una simetría para X como sigue: Calculamos $\mathfrak{c}_1(f) = -1/(xy) \doteq \mu$ la cual es C^∞ en Ω' y satisface $\text{div}(\mu X) \equiv 0$. Una simetría para X es

$$\mathfrak{c}_2(f) = \frac{xy}{(\alpha + \delta y)^2 x^2 + (\beta + \eta x)^2 y^2} \left(-(\beta y + \eta xy) \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha x + \delta xy) \frac{\partial}{\partial y} \right) \doteq Y_1,$$

la cual es C^∞ en $\Omega'_1 = \mathbb{R}^2 - (\{0\} \cup \{(-\beta/\eta, -\alpha/\delta)\})$ y satisface que $[X, Y_1] = \nu X$, con

$$\nu = \frac{xy(-2\alpha xy\beta^2 - x\delta y^2\beta^2 + y^3\beta^2\eta + \eta^3 x^2 y^3 - \delta^3 x^3 y^2 + 2\alpha x^2 \delta y^2 \eta - \eta^2 x^3 y^2 \delta - 2x^2 \delta y^2 \beta \eta + \eta x^2 \delta^2 y^3 + 4\alpha x \delta y^2 \beta + x^2 \alpha^2 y \eta - 4x^2 \alpha y \eta \beta - 2x^3 \alpha \delta^2 y - 2x^3 \alpha y \eta^2 - x^3 \alpha^2 \delta + 2x \alpha^2 y \beta + 2y^3 \beta x \delta^2 + 2y^3 \beta \eta^2 x)}{(x^2 \alpha^2 + 2x^2 \alpha \delta y + x^2 \delta^2 y^2 + y^2 \beta^2 + 2y^2 \beta \eta x + y^2 \eta^2 x^2)^2}.$$

Utilizando la correspondencia \mathfrak{c}_4 encontramos una simetría adicional a Y_1 , para ello calculamos

$$\mathfrak{c}_4(\mu) = \frac{1}{\alpha + \beta + \eta x + \delta y} \left(-x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \doteq Y_2,$$

la cual es C^∞ en $\Omega'_2 = \mathbb{R}^2 - \{\alpha + \beta + \eta x + \delta y = 0\}$ y satisface que $[X, Y_2] = -((\delta y - \eta x)/(\alpha + \beta + \eta x + \delta y)^2)X$. Notamos que Y_2 no es ortogonal a X , pero Y_1 si lo es. El hecho que $\mathfrak{c}_2(f) \neq (\mathfrak{c}_4 \circ \mathfrak{c}_1)(f)$ verifica que el diagrama de correspondencias (1.11) no es conmutativo. \square

Ejemplo 5. Consideramos el campo vectorial X (de tipo Riccati)

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (2 - x^2 y^2) \frac{\partial}{\partial y}$$

en \mathbb{R}^2 . Para este ejemplo contamos con una simetría $Y = x(\partial/\partial x) - y(\partial/\partial y)$, la cual satisface $[X, Y] = -X$ en Ω , ver [13], pág. 268. Aplicamos las correspondencias \mathfrak{c}_3 y \mathfrak{c}_5 a la simetría Y para obtener una integral primera y un factor integrante para X como sigue: Consideramos $\Upsilon : \mathcal{U} \subset \Omega' \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$, caja de flujo de Y dada por $\Upsilon(x, y) = (xy, \ln(x^3(xy - 2)/(xy + 1))^{1/3})$,

donde $\Omega' = \mathbb{R}^2 - \{x = 0, xy = -1, xy = 2\}$ y \mathcal{U} es un abierto simplemente conexo en Ω' . La función de Y -tiempo está dada por la integral de $\Upsilon^* dy$, a partir de la cual se obtiene

$$\mathfrak{c}_3(Y) = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x^3(xy - 2)}{xy + 1} \right) \doteq f,$$

la cual es C^∞ en Ω' y satisface que $\mathcal{L}_X f = 0$. Finalmente un factor integrante para X es

$$\mathfrak{c}_5(Y) = -\frac{1}{x(xy - 2)(xy + 1)} \doteq \mu,$$

el cual es C^∞ en Ω' y satisface que $\text{div}(\mu X) = 0$. Notamos que $[\mu X, Y] \equiv 0$, más aún Υ satisface $\Upsilon_* \mu X = \partial/\partial x$ y $\Upsilon_* Y = \partial/\partial y$. \square

1.5. Campos vectoriales globalmente rectificables.

En esta sección estudiamos la noción de integrabilidad I4 mencionada en la Introducción. También mostramos que todo difeomorfismo local es aplicación rectificadora para algún campo vectorial.

Consideramos un campo vectorial X , de clase C^r en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, con $r = 1, 2, \dots, \infty$. Decimos que X es *localmente rectificable* en un abierto $\mathcal{U} \subset \Omega$ si existe una aplicación $\Psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ también de clase C^r , la cual satisface que $\Psi_* X = \partial/\partial x$. A Ψ se le conoce como *aplicación rectificadora local* para X . La aplicación Ψ también es conocida como “caja de flujo local” de X , ver [34] pág. 40. Observamos que el teorema de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias afirma, en el caso de campos vectoriales, que si X es de clase C^r en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, con $r = 1, 2, \dots, \infty$ y $X(x_0, y_0) \neq 0$, entonces X es localmente rectificable en una vecindad $\mathcal{U} \subset \Omega$ de $(x_0, y_0) \in \Omega$.

En lo que resta de esta sección, todos los campos vectoriales que consideramos son de clase C^∞ .

Definición 9. Decimos que X es *globalmente rectificable* en Ω' si existe una aplicación $\Psi : \Omega' \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$, de clase C^∞ (quizá multivaluada), la cual satisface que su diferencial $D\Psi$ es univaluada y $\Psi_* X = \partial/\partial x$. A Ψ se le conoce como *aplicación rectificadora global* para X . La aplicación Ψ también es conocida como “caja de flujo global” de X .

Observación 11. Para $\Psi : \Omega' \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$, aplicación rectificadora global de X , se satisface que:

1. Ψ no está definida en los puntos singulares de X .
2. A veces Ψ extiende C^0 a puntos aislados en $\mathbb{R}^2 - \Omega'$, aún cuando X no sea C^∞ en dichos puntos.

Para probar el primer punto asumimos que Ψ es difeomorfismo local, de manera que si Ψ estuviese definida en un punto singular de X , entonces Ψ_* enviaría un vector nulo $X(x_0, y_0) = 0$ en $\partial/\partial x$ lo cual no puede suceder ya que Ψ es difeomorfismo local. Para el segundo punto notamos que existen campos meromorfs que no están definidos en un polo, pero su aplicación rectificadora si extiende C^0 a dicho polo, ver ejemplos 8 y 16, pág. 20 y 28 respectivamente. Esto concluye la observación.

El problema de hallar una aplicación rectificadora global para X es complicado, incluso encontrar el flujo de X de manera explícita por medio de simetrías de Lie Y lo es, ya que necesitamos conocer el flujo de Y . Pero muy pocos flujos se conocen explícitamente, por ejemplo el problema

de clasificar flujos polinomiales en \mathbb{R}^2 está abierto, ver [5]. Por otra parte si X admite una integral primera $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, entonces podemos encontrar una aplicación rectificadora local de X . Es fácil ver que si (x_0, y_0) no es punto singular de X , entonces existen un disco $B((x_0, y_0), r) \subset \Omega$ con $r > 0$ suficientemente pequeño, tal que no posee puntos singulares de X en su interior y una función $g : B((x_0, y_0), r) \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , tal que $(g, f) : B((x_0, y_0), r) \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ es un difeomorfismo C^∞ y $\det(D(g, f)) \neq 0$, donde $D(g, f)$ representa la diferencial de la aplicación (g, f) .

Lema 9. *Consideramos una pareja de funciones $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ambas de clase C^∞ . Si la aplicación $(g, f) : \Omega' \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ es un difeomorfismo local C^∞ , con $\Omega' = \{(x, y) \in \Omega \mid D(g(x, y), f(x, y)) \neq 0\}$, entonces*

$$(g, f)^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{-X_f}{\det(D(g, f))}, \quad (g, f)^* \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{X_g}{\det(D(g, f))}.$$

Demostración. Con $(g, f)^*$ jalamos el campo vectorial $\partial/\partial x$, esto es

$$(g, f)^* (\partial/\partial x) = (D(g, f))^{-1} (\partial/\partial x) = -X_f/\det(D(g, f)),$$

de donde se sigue el resultado deseado. El cálculo para encontrar $(g, f)^*(\partial/\partial y)$ es similar al anterior. \square

Lema 10. *Consideramos una pareja de campos vectoriales Hamiltonianos X, Y en $\Omega' = \{(x, y) \in \Omega \mid T(x, y) \neq 0\}$ y con funciones Hamiltonianas $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ambas de clase C^∞ , respectivamente. Entonces $[X, Y] = 0$ si y sólo si la aplicación $(g, f) : \Omega' \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ cumple que $\det(D(g, f))$ es igual a una constante no nula.*

Demostración. (\Rightarrow) Por el lema 9 tenemos que

$$\left[\frac{X}{\det(D(g, f))}, \frac{Y}{\det(D(g, f))} \right] = \left[(g, f)^* \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right), (g, f)^* \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \right] = (g, f)^* \left[-\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] = 0.$$

Por otra parte calculamos

$$\begin{aligned} \left[\frac{X}{\det(D(g, f))}, \frac{Y}{\det(D(g, f))} \right] &= \left(\frac{1}{\det(D(g, f))} \right)^2 [X, Y] \\ &\quad + \frac{ad - bc}{\det(D(g, f))} \left(\frac{\partial(1/\det(D(g, f)))}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial(1/\det(D(g, f)))}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

Utilizando el hecho que $[X/\det(D(g, f)), Y/\det(D(g, f))] = [X, Y] = 0$, concluimos que $1/\det(D(g, f))$ es una constante. De ello se sigue el resultado deseado.

(\Leftarrow) Utilizando los dos cálculos anteriores y el hecho que $\det(D(g, f))$ es una constante no nula, se concluye el resultado deseado. \square

Como consecuencia del lema 10 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1. *Consideramos una pareja de campos vectoriales Hamiltonianos X, Y , con funciones Hamiltonianas $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ambas de clase C^∞ , respectivamente. Si $\det(D(g, f)) = 1$, entonces $[X, Y] \equiv 0$ y $(g, f) : \Omega' \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ es una aplicación rectificadora para X .*

Ejemplo 6. Consideramos la pareja de funciones $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , dadas por $f(x, y) = y$, $g(x, y) = x^2$. La aplicación $(g, f) : \Omega' \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$, con $\Omega' = \mathbb{R}^2 - \{x = 0\}$ es aplicación rectificadora para los campos vectoriales

$$X = \frac{1}{2x} \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Tal aplicación se conoce como el doblez y es 2 a 1 en Ω' . \square

Ejemplo 7. Consideramos la pareja de funciones $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , dadas por $f(x, y) = y$, $g(x, y) = x^3/3 + xy$. La aplicación $(g, f) : \Omega' \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$, con $\Omega' = \mathbb{R}^2 - \{y + x^2 = 0\}$ es aplicación rectificadora para los campos vectoriales

$$X = \frac{1}{x^2 + y} \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \frac{1}{x^2 + y} \left(-x \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + y) \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Tal aplicación se conoce como la cúspide simple, la cual es 3 a 1 en $\{y + x^2 < 0\} \subset \Omega'$ y 1 a 1 en su complemento en Ω' . \square

Ejemplo 8. Consideramos la pareja de funciones $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , dadas por $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x^2/2 - y^2/2$. La aplicación $(g, f) : \Omega' \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$, con $\Omega' = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ es aplicación rectificadora para los campos vectoriales

$$X = \frac{1}{x^2 + y^2} \left(-x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad Y = \frac{1}{x^2 + y^2} \left(y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Notamos que Ψ extiende C^0 en el origen. Tal aplicación está formada por las componentes real e imaginaria de la función holomorfa $z^2/2$. \square

1.6. Campos vectoriales y \mathbb{R}^2 -acciones locales.

En esta sección estudiamos la noción de integrabilidad I5, recordamos el concepto de \mathbb{R}^2 -acción, C^∞ , sobre Ω y mostramos la equivalencia de las nociones de integrabilidad I4 e I5. Las siguientes definiciones para el caso C^ω pueden encontrarse en [23] pág. 43.

Definición 10. Una \mathbb{R}^2 -acción sobre Ω es una función C^∞

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^2 \times \Omega &\rightarrow \Omega \\ ((t, s), (x, y)) &\mapsto \psi((t, s), (x, y)) \end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $\psi((t + t', s + s'), (x, y)) = \psi((t, s), \psi((t', s'), (x, y)))$,
2. $\psi((0, 0), (x, y)) = (x, y)$, para cualesquiera $(t, s), (t', s') \in (\mathbb{R}^2, +)$ y $(x, y) \in \Omega$.

Decimos que una \mathbb{R}^2 -acción es local si $\psi : A \subset \mathbb{R}^2 \times \Omega \rightarrow \Omega$ satisface las propiedades (1) y (2) para toda $(x, y) \in \Omega$ pero con $t, s, t', s' \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeños de manera que las dos expresiones tengan sentido.

A partir de una \mathbb{R}^2 -acción local ψ , de clase C^∞ sobre Ω , se obtiene una pareja de campos vectoriales C^∞

$$X \doteq \frac{d}{dt} \psi((t, 0), (x, y)) |_{t=0}, \quad Y \doteq \frac{d}{ds} \psi((0, s), (x, y)) |_{s=0},$$

llamados *generadores infinitesimales* de la \mathbb{R}^2 -acción ψ , los cuales satisfacen $[X, Y] \equiv 0$.

Definición 11. Decimos que una \mathbb{R}^2 -acción local es *genérica* si sus generadores infinitesimales son linealmente dependientes en a lo más un conjunto discreto de trayectorias comunes en Ω .

Ejemplo 9. La \mathbb{R}^2 -acción, $\psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\psi((t, s), (x, y)) = e^t(x \cos s - y \sin s, x \sin s + y \cos s)$ es genérica. Los generadores infinitesimales de ψ son

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Ambos campos vectoriales satisfacen $T = \det(X, Y) = 0$ en $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Luego las singularidades de ψ se encuentran en $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. \square

Ejemplo 10. La \mathbb{R}^2 -acción, $\psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\psi((t, s), (x, y)) = (xe^{t+s}, ye^{t-s})$ es genérica. Los generadores infinitesimales de ψ son

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \quad y \quad Y = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Ambos campos vectoriales satisfacen $T = \det(X, Y) = 0$ en $\{xy = 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Luego las singularidades de ψ se encuentran en $\{xy = 0\}$. \square

Definición 12. Decimos que un campo vectorial X *proviene de una \mathbb{R}^2 -acción local* en Ω si existe un campo vectorial Y de clase C^∞ , transversal a X en Ω' , tal que $[X, Y] = 0$.

Consideramos un campo vectorial X , C^∞ en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Denotamos mediante $\varphi(t, (x_0, y_0))$ a la trayectoria solución (usando el flujo) de X , donde $t \in \mathbb{R}$ es la variable tiempo y $(x_0, y_0) \in \Omega$ es la condición inicial. Decimos que X es *completo* si para todo punto $(x, y) \in \Omega$, la trayectoria $\varphi(t, (x, y))$ está definida para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$.

Observación 12. Si $[X, Y] \equiv 0$ y Ω es compacto e invariante bajo los flujos de X y Y , entonces los campos vectoriales X, Y son completos (poseen flujo para todo tiempo) y dan origen a una \mathbb{R}^2 -acción, C^∞ , sobre Ω . Basta definir $\psi : \mathbb{R}^2 \times \Omega \rightarrow \Omega$ mediante $\psi((t, s), (x, y)) = \nu(s, \varphi(t, (x, y)))$, donde $\varphi(t, (x, y))$, $\nu(s, (x, y))$ son los flujos de X, Y respectivamente. Si Ω es no compacto, hay ejemplos de campos vectoriales X, Y completos o no completos, ambas cosas ocurren para distintas parejas de X, Y . Notamos que una \mathbb{R}^2 -acción ocurre si en particular los campos vectoriales X, Y son completos.

El siguiente resultado relaciona las nociones de integrabilidad I4 e I5.

Lema 11. X *proviene de una \mathbb{R}^2 -acción genérica si y sólo si X es globalmente rectificable.*

Demostración. Para mostrar la equivalencia trabajamos en una Ω' adecuada.

(\Leftarrow) Supongamos que X es globalmente rectificable, entonces existe $\Psi : \Omega' \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ difeomorfismo local, tal que $\Psi_* X = (\partial/\partial x)$. Consideramos un segundo campo vectorial Y en Ω' , tal que $Y \doteq \Psi^*(\partial/\partial y)$. Calculamos el corchete de Lie de X, Y

$$[X, Y] = \left[\Psi^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right), \Psi^* \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \right] = \Psi^* \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] = 0,$$

de ello se sigue que X proviene de una \mathbb{R}^2 -acción local genérica. Notamos que de considerar solamente una aplicación rectificadora local para X , entonces sólo se obtendría una \mathbb{R}^2 -acción local.

(\Rightarrow) Supongamos que X admite una \mathbb{R}^2 -acción local genérica, entonces existe un campo vectorial Y transversal a X en $\Omega' = \Omega - \{\text{unión finita de trayectorias de } X\}$, tal que $[X, Y] = 0$; de ello se sigue que X, Y son los generadores infinitesimales de la \mathbb{R}^2 -acción. Denotamos estos campos vectoriales mediante

$$X = a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = c(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + d(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Deseamos construir localmente una aplicación rectificadora para X . Para ello requerimos 1-formas diferenciales ω_X, ω_Y , tales que

$$\begin{aligned} \omega_X(X) &= \omega_Y(Y) = 1, \\ \omega_X(Y) &= \omega_Y(X) = 0. \end{aligned}$$

Usamos la inversa de la matriz formada por las componentes de X y Y . Como Y es transversal a X , las entradas de dicha matriz inversa son C^∞ en Ω' . Proponemos las 1-formas diferenciales

$$\omega_X = \frac{d \, dx}{ad - bc} - \frac{c \, dy}{ad - bc}, \quad \omega_Y = -\frac{b \, dx}{ad - bc} + \frac{a \, dy}{ad - bc}.$$

Ellas satisfacen $\omega_X(X) = \omega_Y(Y) = 1$ y $\omega_X(Y) = \omega_Y(X) = 0$. Más aún, ω_X y ω_Y son 1-formas cerradas en Ω' . Para mostrar esto calculamos sus derivadas exteriores

$$\begin{aligned} d\omega_X &= \left(-d \left(c \frac{\partial a}{\partial x} + d \frac{\partial a}{\partial y} - a \frac{\partial c}{\partial x} - b \frac{\partial c}{\partial y} \right) + c \left(c \frac{\partial b}{\partial x} + d \frac{\partial b}{\partial y} - a \frac{\partial d}{\partial x} - b \frac{\partial d}{\partial y} \right) \right) dx \wedge dy, \\ d\omega_Y &= \left(-b \left(c \frac{\partial a}{\partial x} + d \frac{\partial a}{\partial y} - a \frac{\partial c}{\partial x} - b \frac{\partial c}{\partial y} \right) + a \left(c \frac{\partial b}{\partial x} + d \frac{\partial b}{\partial y} - a \frac{\partial d}{\partial x} - b \frac{\partial d}{\partial y} \right) \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Como $[X, Y] = 0$, entonces $c(\partial a/\partial x) + d(\partial a/\partial y) - a(\partial c/\partial x) - b(\partial c/\partial y) = c(\partial b/\partial x) + d(\partial b/\partial y) - a(\partial d/\partial x) - b(\partial d/\partial y) = 0$. Así concluimos que $d\omega_X = d\omega_Y = 0$ en Ω' . Definimos localmente la aplicación rectificadora Ψ de X , para esto consideramos un punto $(x_0, y_0) \in \Omega'$ para X, Y y un disco abierto $B((x_0, y_0), r) \subset \Omega'$ con $r > 0$ suficientemente pequeño:

$$\Psi : B((x_0, y_0), r) \subset \Omega' \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto \left(\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \omega_X, \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \omega_Y \right) = (X_{(x_0, y_0)}(x, y), Y_{(x_0, y_0)}(x, y)),$$

donde $X_{(x_0, y_0)}(x, y)$ y $Y_{(x_0, y_0)}(x, y)$ son las funciones de X -tiempo y Y -tiempo respectivamente. Ψ está bien definida, ya que ω_X, ω_Y son cerradas y $B((x_0, y_0), r) \subset \Omega'$ es simplemente conexo, más aún Ψ extiende C^∞ a todo Ω' (dicha extensión puede ser incluso multivaluada). Notamos que $\Psi_* X = \partial/\partial x$, de ello se sigue que Ψ es aplicación rectificadora para X .

Por último discutimos cuando Ψ es univaluada o multivaluada. Usando las mismas ideas para el Y -tiempo, empleadas en la prueba del lema 4, es posible mostrar que:

Si para toda trayectoria cerrada γ con $[\gamma] \in \pi_1(\Omega')$ se satisface que las integrales de ω_X y ω_Y alrededor de γ son cero, entonces Ψ es univaluada.

Si para alguna $[\gamma] \in \pi_1(\Omega')$ distinta del elemento identidad se satisface que la integral de ω_X ó ω_Y es distinta de cero, entonces Ψ es multivaluada. \square

Ejemplo 11. Consideramos los campos vectoriales (fuente y centro)

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Estos satisfacen $[X, Y] = 0$, entonces X proviene de una \mathbb{R}^2 -acción genérica (ver ejemplo 9), ya que X, Y poseen flujo para todo tiempo. Las 1-formas diferenciales asociadas son

$$\omega_X = \frac{xdx}{x^2 + y^2} + \frac{ydy}{x^2 + y^2}, \quad \omega_Y = -\frac{ydx}{x^2 + y^2} + \frac{xdy}{x^2 + y^2},$$

las cuales son cerradas en $\Omega' = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Definimos una aplicación $\Psi : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$, mediante $\Psi(x, y) = (\log(\sqrt{x^2 + y^2}), \arg(x, y))$; esta resulta ser una aplicación rectificadora para X , ya que $\Psi_*X = \partial/\partial x$. Notamos que Ψ es multivaluada, ya que $\arg(x, y)$ es integral primera multivaluada de X en Ω' , la cual no es C^0 en el punto singular $(0, 0)$ de Y . En este ejemplo X y Y son los campos real e imaginario asociados al campo vectorial holomorfo $\mathbb{X} = z(\partial/\partial z)$, el cual tiene como función rectificadora (multivaluada) a $\Psi(z) = \log(z)$ en $\Omega' = \mathbb{C} - \{0\}$. \square

Ejemplo 12. Consideramos los campos vectoriales

$$X = f(x) \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = c(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + d(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Supongamos que X, Y son C^∞ en $\Omega' = \{(x, y) \in \Omega \mid T(x, y) \neq 0\}$.

1. Si f es constante, entonces $[X, Y] \equiv 0$ si y sólo si las funciones $c(x, y)$ y $d(x, y)$ dependen sólo de la variable y .

2. Si f es no constante, entonces $[X, Y] \equiv 0$ si y sólo si la función $d(x, y)$ depende sólo de la variable y , mientras que la función $c(x, y)$ es nula o de la forma $c(x, y) = f(x)e^{-h(y)}$, con $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ .

Para un caso explícito consideramos $X = e^y(\partial/\partial x)$, entonces $Y = \partial/\partial y$ es tal que $[X, Y] \equiv 0$. La aplicación $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$, donde $\mathcal{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$ es el semiplano izquierdo, dada por $\Psi(x, y) = (-e^{-x}, y)$ es aplicación rectificadora de X (también es rectificadora de Y). La \mathbb{R}^2 -acción $\psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ está dada por $\psi(t, s, (x, y)) = (-\ln(e^{-x} - t), y + s)$.

Si cambiamos el coeficiente de X por $f(y)$ de manera que X, Y son C^∞ en Ω' , se tiene lo siguiente:

1. Si f es constante, entonces $[X, Y] \equiv 0$ si y sólo si las funciones $c(x, y)$ y $d(x, y)$ dependen sólo de la variable y .

2. Si f no es constante, entonces $[X, Y] \equiv 0$ si y sólo si la función $d(x, y)$ depende sólo de la variable y , mientras que $c(x, y)$ tiene la forma $c(x, y) = (xd(y)f'(y)/f(y)) + h(y)$, con $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ .

Para un caso explícito consideramos $X = e^y(\partial/\partial x)$, entonces $Y = x(\partial/\partial x) + (\partial/\partial y)$ es tal que $[X, Y] \equiv 0$. La aplicación $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$, donde $\mathcal{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$ es el semiplano izquierdo, dada por $\Psi(x, y) = (-e^{-x}, y)$ es aplicación rectificadora de X (también es rectificadora de Y). La \mathbb{R}^2 -acción $\psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ está dada por $\psi(t, s, (x, y)) = (e^s(te^y + x), y + s)$. \square

Ejemplo 13. Consideramos la pareja de funciones $f, g : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ ambas de clase C^∞ , donde $\Omega' = \mathbb{R}^2 - (\{\text{eje } x \text{ negativo}\} \cup \{0\})$ y cuyas expresiones están dadas por $f(x, y) = \arg(x, y)$ y $g(x, y) = (x^2 + y^2)/2$, respectivamente. Definimos la aplicación $\Psi : \Omega' \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$, C^∞ , dada por $\Psi(x, y) = (g(x, y), f(x, y))$. Notamos que $\det(D(g, f)) = -1$. Los campos vectoriales Hamiltonianos asociados a las funciones f y g son

$$X = X_f = \frac{1}{x^2 + y^2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad Y = X_g = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Por el corolario 1 concluimos que $[X, Y] \equiv 0$ y Ψ es una aplicación rectificadora univaluada para X en Ω' . Notamos que Ψ es multivaluada en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. \square

Ejemplo 14. Consideramos la pareja de funciones $f, g : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ ambas de clase C^∞ , donde $\Omega' = \mathbb{R}^2 - (\{\text{eje } x \text{ negativo}\} \cup \{0\})$ y cuyas expresiones están dadas por $f(x, y) = \arg(x, y)$ y $g(x, y) = \log\sqrt{x^2 + y^2}$, respectivamente.

Definimos la aplicación $\Psi : \Omega' \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$, C^∞ , dada por $\Psi(x, y) = (g(x, y), f(x, y))$. Notamos que $\det(D(g, f)) = 1/(x^2 + y^2)$. Los campos vectoriales Hamiltonianos asociados a las funciones f y g son

$$X = X_f = \frac{1}{x^2 + y^2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad Y = X_g = \frac{1}{x^2 + y^2} \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

los cuales no conmutan, pero al reescalarlos con $1/\det(D(g, f))$ si lo hacen. Luego Ψ es aplicación rectificadora univaluada para $(x^2 + y^2)X$ en Ω' . Notamos que Ψ es multivaluada en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. \square

Notamos que en los ejemplos 11, 13 y 14 las integrales primeras para X son la misma salvo composición de funciones $\kappa \in \text{Dif}^\infty(f(\Omega), \mathbb{R})$, ver observación 2.

Para finalizar esta sección consideramos siete familias de ecuaciones diferenciales ordinarias para las cuales encontramos un campo vectorial asociado X (cuya expresión no es única), una simetría Y y calculamos el corchete de Lie $[X, Y]$. Estas expresiones se encuentran en [13] pág. 221 y nuestra aportación es el cálculo explícito de $[X, Y]$, observando que cuando este es cero, X, Y poseen una aplicación rectificadora (ver lema 11). Como X admite muchas simetrías Y , los casos 3, 4, 6 y 7 no prohíben a priori la existencia de otro campo vectorial Y , tal que $[X, Y] = 0$.

Ecuación diferencial	Campo vectorial	Simetría	$[X, Y]$
$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$	$X = \frac{\partial}{\partial x} + f(x) \cdot g(y) \frac{\partial}{\partial y}$	$Y = g(y) \frac{\partial}{\partial y}$ con flujo por expansión – contracción en el eje y ver apéndice A.1	0
$\frac{dy}{dx} = f(\alpha x + \beta y)$	$X = \frac{\partial}{\partial x} + f(\alpha x + \beta y) \frac{\partial}{\partial y}$	$Y = \beta \frac{\partial}{\partial x} - \alpha \frac{\partial}{\partial y}$ con flujo por translaciones	0
$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$	$X = \frac{\partial}{\partial x} + f\left(\frac{y}{x}\right) \frac{\partial}{\partial y}$	$Y = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ con flujo por homotecias	$-X$

Ecuación tipo Riccati $\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3}$	$X = x^3 \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + x^2y + y^2) \frac{\partial}{\partial y}$	$Y = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$ con flujo por transformaciones afines	X
$\frac{dy}{dx} = \frac{y+xf(\sqrt{x^2+y^2})}{x-yf(\sqrt{x^2+y^2})}$	$X = \left(x - yf(\sqrt{x^2+y^2})\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(y + xf(\sqrt{x^2+y^2})\right) \frac{\partial}{\partial y}$	$Y = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$ con flujo por rotaciones	0
$\frac{dy}{dx} = \frac{y+xf(x,y)}{x-yf(x,y)}$	$X = (x - yf(x,y)) \frac{\partial}{\partial x} + (y + xf(x,y)) \frac{\partial}{\partial y}$	$Y = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$ con flujo por rotaciones	$-X$
$\frac{dy}{dx} = x^{k-1} f\left(\frac{y}{x^k}\right)$	$X = \frac{\partial}{\partial x} + x^{k-1} f\left(\frac{y}{x^k}\right) \frac{\partial}{\partial y}$	$Y = x \frac{\partial}{\partial x} + ky \frac{\partial}{\partial y}$ con flujo por transformaciones afines	$-X$

1.7. Campos vectoriales analíticos complejos.

En esta sección estudiamos la noción de integrabilidad I6. Para ello consideramos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, un conjunto abierto y conexo. La siguiente definición describe un tipo especial de campo vectorial en Ω , al cual se le asocia de manera natural dos campos vectoriales linealmente independientes que conmutan.

Definición 13. Un *campo vectorial analítico complejo* \mathbb{X} en $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es un campo vectorial de la forma

$$\mathbb{X} = \mathcal{H}(z) \frac{\partial}{\partial z} = (u(z) + iv(z)) \frac{\partial}{\partial z},$$

con \mathcal{H} una función analítica compleja en Ω , que puede poseer ceros Z , polos P y/o singularidades esenciales aisladas E , los cuales satisfacen que $Z \cup P \cup E \subset \Omega$.

En $\Omega' = \Omega - \{Z \cup P \cup E\}$, existe una correspondencia uno a uno entre campos vectoriales analíticos complejos \mathbb{X} y un par de campos vectoriales reales $X, J_\circ X$, donde J_\circ es la estructura compleja canónica en \mathbb{R}^2 (la cual se verá con más detalle en la sección 1.8). Las aplicaciones entre campos vectoriales reales y complejos están dadas por:

$$X \rightarrow \mathbb{X} = \frac{1}{2}(X - iJ_\circ X) \quad y \quad \mathbb{X} \rightarrow X = \frac{1}{2}(\mathbb{X} + \overline{\mathbb{X}}),$$

ver [21] pág. 125 y [30]. En coordenadas explícitas lo anterior se expresa por

$$\begin{aligned}\mathbb{X} &= \mathcal{H}(z) \frac{\partial}{\partial z} = (u(x, y) + iv(x, y)) \frac{\partial}{\partial z}, \\ X(x, y) &= \Re(\mathbb{X})(x, y) = u(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + v(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \\ J_o X(x, y) &= -\Im(\mathbb{X})(x, y) = -v(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + u(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}$$

Definición 14. Decimos que un campo vectorial X es la *parte real de un campo vectorial analítico complejo* \mathbb{X} en Ω si $X = \Re(\mathbb{X})$ para algún \mathbb{X} en $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Es de notarse que los campos vectoriales reales $X, J_o X$ tienen la característica de ser normales entre sí y $\|X\| = \|J_o X\|$, por lo que para precisar al campo vectorial analítico complejo \mathbb{X} es suficiente precisar un elemento de la pareja de campos vectoriales reales $\Re(\mathbb{X}), \Im(\mathbb{X})$, con la condición adicional que sus funciones componentes satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Más aún X y $J_o X$ satisfacen que $[X, J_o X] \equiv 0$, por lo que $J_o X$ es una simetría de X la cual denotamos por $Y = J_o X$.

La siguiente proposición muestra como a partir de un campo vectorial analítico complejo \mathbb{X} se pueden obtener una 1-forma diferencial ω y una aplicación rectificadora Ψ asociadas a \mathbb{X} .

Proposición 2. *Existe una correspondencia uno a uno entre campos vectoriales analíticos complejos, 1-formas diferenciales analíticas complejas y aplicaciones analíticas complejas (quizá multivaluadas) como sigue:*

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{X}(z) = \mathcal{H}(z) \frac{\partial}{\partial z} & (1.19) \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \omega = \frac{dz}{\mathcal{H}(z)} & \xrightarrow{\quad} & \Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \\ & & z \mapsto \int_{z_0}^z \omega, \end{array}$$

donde $z_0 \in \Omega$ es tal que $1/\mathcal{H}(z_0) \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Demostración. Ver [30]. Para la prueba basta considerar las asignaciones dadas en (1.19) y notar que se cumple $\omega(\mathbb{X}) = 1$, $d\Psi = \omega$, $\Psi_* \mathbb{X} = \partial/\partial z$. \square

Observación 13. *Consideramos $\Psi : \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$ aplicación rectificadora para \mathbb{X} . Se cumple que:*

1. Ψ no es única, depende del punto base $z_0 \in \Omega$ que elegimos como punto regular de \mathbb{X} .
2. Ψ es univaluada si y sólo si todos los residuos de ω son cero.

El siguiente resultado tiene sus orígenes en el trabajo de B. Riemann 1857, donde él distinguió entre formas diferenciales holomorfas y formas diferenciales con polos que tienen residuo cero o no cero, ver [38] pág. 96–97. F. Klein también describió el mismo comportamiento, ver [20] pág. 1–9. Para pruebas modernas del mismo resultado ver [1] pág. 111 y [31] capítulo III.

Teorema 3. *(Formas normales de campos vectoriales analíticos complejos alrededor de un polo, un cero o un punto regular). Consideramos un campo vectorial analítico complejo \mathbb{X} definido en una vecindad del origen. Existe un biholomorfismo local, tal que si el origen es:*

1. *Un punto regular de \mathbb{X} , entonces \mathbb{X} es equivalente con $\partial/\partial \xi$.*

2. Un polo de multiplicidad $-r \leq -1$ de \mathbb{X} , entonces \mathbb{X} es equivalente con $\xi^{-r}(\partial/\partial\xi)$.
3. Un cero de multiplicidad 1 de \mathbb{X} , entonces \mathbb{X} es equivalente con $\lambda_1\xi(\partial/\partial\xi)$, donde λ_1 es una constante no nula que coincide con la derivada de \mathcal{H} evaluada en el origen.
4. Un cero de multiplicidad $s \geq 2$ de \mathbb{X} , entonces \mathbb{X} es equivalente con $(\xi^s/(1 + \lambda_2\xi^{s-1}))(\partial/\partial\xi)$, donde λ_2 es el residuo de la 1-forma diferencial meromorfa ω en el origen (ver 1.19).

Demostración. Denotamos el origen del plano complejo \mathbb{C} mediante 0. Para mostrar el primer punto supongamos que el origen es un punto regular de \mathbb{X} , entonces existe una vecindad $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}_z$ del origen la cual no contiene ceros ni polos de \mathbb{X} y un cambio de coordenadas holomorfo

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{U} \subset \mathbb{C}_z &\rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{C}_\xi \\ z &\mapsto \int_0^z \frac{d\zeta}{\mathcal{H}(\zeta)}. \end{aligned}$$

Bajo este cambio de coordenadas se obtiene $\Psi_*(\mathbb{X}) = \partial/\partial\xi$. Ello concluye la prueba del punto (1).

Para mostrar el segundo punto supongamos que el origen es un polo de multiplicidad $-r \leq -1$ de \mathbb{X} , entonces existe una vecindad $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}_z$ del origen la cual no contiene a otro polo o a otro cero de \mathbb{X} . En $\mathcal{U} - \{0\}$ la expresión de \mathbb{X} es $z^{-r}G(z)(\partial/\partial z)$, donde $G : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y no nula en el origen. El cambio de coordenadas local holomorfo Ψ que se desea hallar, debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial definida en \mathcal{U}

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{(\Psi(z))^{r+1}}{r+1} \right) = \frac{z^r}{G(z)}, \quad (1.20)$$

para que $\Psi_*(\mathbb{X}) = \xi^{-r}(\partial/\partial\xi)$. Como $(1/\mathcal{H}(z))$ es distinto de 0 y de ∞ en $\mathcal{U} - \{0\}$, entonces existe una función holomorfa $H : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}_\xi$, tal que $dH/dz = z^r/G(z)$. Luego H tiene un cero de multiplicidad $r+1$ en el origen, de ello se sigue que existe una función holomorfa $H_0 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}_\xi$, no nula en el origen y tal que

$$H(z) = \int_0^z \frac{\zeta^r d\zeta}{G(\zeta)} = \frac{z^{r+1}}{r+1} H_0(z).$$

Integrando la ecuación (1.20) se tiene que $(\Psi(z))^{r+1} = z^{r+1}H_0(z)$. Entonces existe una vecindad $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ del origen, tal que $H_0(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}_1$, donde $\mathcal{V}_1 \subset \mathbb{C}_\xi$ es una rama adecuada de $z^{1/(r+1)}$. Definimos la función $\Psi : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{V}_1$, dada por $\Psi(z) = z(H_0(z))^{1/(r+1)}$. Notamos que Ψ satisface (1.20), más aún en el origen Ψ se anula pero no así su derivada. Entonces por el teorema de la función inversa, existen vecindades $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1$, $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1$ de 0 y $\Psi(0)$ respectivamente, tal que al restringir el dominio y contradominio de la aplicación Ψ , esto es $\Psi : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{V}_2$, dicha aplicación resulta ser un cambio de coordenadas local holomorfo que satisface $\Psi_*(\mathbb{X}) = \xi^{-r}(\partial/\partial\xi)$. Ello concluye la prueba del punto (2).

Para mostrar el tercer punto supongamos que el origen es un cero de multiplicidad 1 de \mathbb{X} , entonces existe una vecindad $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}_z$ del origen la cual no contiene a otro cero o a otro polo de \mathbb{X} . En \mathcal{U} la expresión de \mathbb{X} es $\lambda_1 z G(z)(\partial/\partial z)$, donde $G : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, $G(0) = 1$ y λ_1 es una constante no nula que coincide con la derivada de \mathcal{H} evaluada en el origen. El cambio de coordenadas local holomorfo Ψ que se desea hallar, debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial definida en \mathcal{U}

$$\frac{d\Psi(z)}{\Psi(z)} = \frac{dz}{zG(z)}, \quad (1.21)$$

para que $\Psi_*(\mathbb{X}) = \lambda_1 \xi(\partial/\partial \xi)$. Como $G(z)$ es holomorfa en \mathcal{U} y $G(0) = 1$, entonces existe una vecindad $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ del origen, tal que en \mathcal{U}_1 menos la unión del origen y el eje real negativo, la expresión de $(1/zG(z))$ en series de potencias es $(1/z) + a_1 + a_2z + a_3z^2 + \dots$. Denotamos por \mathcal{U}_2 (respectivamente \mathcal{V}_1) al conjunto abierto \mathcal{U}_1 (respectivamente \mathbb{C}_ξ) menos la unión del origen y el eje real negativo. Definimos la función $\log(\Psi(z)) : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{V}_1$ dada por $\log(\Psi(z)) = \log z + H_0(z)$, donde $H_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$. De esta forma la aplicación $\Psi : \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_\xi$, dada por $\Psi(z) = ze^{H_0(z)}$, es la continuación analítica de alguna solución Φ de (1.21). De ello se sigue que Ψ satisface (1.21), más aún Ψ se anula y su derivada es igual a uno. Así Ψ es un cambio de coordenadas local holomorfo. Ello concluye la prueba del punto (3).

Para mostrar el cuarto punto supongamos que el origen es un cero de multiplicidad $s \geq 2$ de \mathbb{X} , entonces existe una vecindad $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}_z$ del origen la cual no contiene a otro cero o a otro polo de \mathbb{X} . En $\mathcal{U} - \{0\}$ la expresión de la 1-forma diferencial meromorfa ω asociada a \mathbb{X} es

$$\omega = \frac{dz}{\mathcal{H}(z)} = \frac{b_{-s}}{z^s} + \frac{b_{-(s-1)}}{z^{s-1}} + \dots + \frac{\lambda_2}{z} + G(z)$$

donde λ_2 es el residuo en el origen (ver 1.19) y $G : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa. Consideramos la función $\Psi_1 : \mathcal{U} \subset \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_{\hat{\xi}}$ dada por $\Psi_1(z) = ze^{h(z)}$, con $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Notamos que Ψ_1 es holomorfa, se anula en el origen y la expresión de la integral de ω en la coordenada $\hat{\xi}$ es $\hat{\xi}^{-s+1} + \lambda_2 \log \hat{\xi} + \beta$, donde β es una constante en \mathbb{C} . Así en una vecindad del origen la expresión de \mathbb{X} es $(\hat{\xi}^s / (1 - s + \lambda_2 \hat{\xi}^{s-1}))(\partial/\partial \hat{\xi})$. Trabajamos con la función holomorfa $\Psi_2 : \mathbb{C}_{\hat{\xi}} \rightarrow \mathbb{C}_\xi$, dada por $\Psi_2(\hat{\xi}) = \hat{\xi} / \sqrt[s-1]{-s+1}$, para alguna $(s-1)$ -ésima raíz de $1/(-s+1)$. Luego es fácil verificar que

$$\Psi_2 \left(\frac{\hat{\xi}^s}{(-s+1) + \lambda_2 \hat{\xi}^{s-1}} \frac{\partial}{\partial \hat{\xi}} \right) = \frac{\xi^s}{1 + \lambda_2 \xi^{s-1}} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Ello concluye la prueba del punto (4). □

Ejemplo 15. Consideramos el campo vectorial analítico complejo $\mathbb{X} = e^z(\partial/\partial z)$. La 1-forma diferencial asociada a \mathbb{X} es $\omega = e^{-z} dz$. Los campos vectoriales real e imaginario asociados a \mathbb{X} son:

$$X = \Re e(\mathbb{X}) = e^x \left(\cos y \frac{\partial}{\partial x} + \sin y \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad Y = -\Im m(\mathbb{X}) = e^x \left(-\sin y \frac{\partial}{\partial x} + \cos y \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

los cuales satisfacen $[X, Y] = 0$. La aplicación $\Psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, donde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, dada por $\Psi(z) = -e^{-z}$, es una aplicación rectificadora para \mathbb{X} . Cabe señalar que Ψ es una aplicación infinito a uno y para $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \Im m z \leq \pi\}$, la restricción $\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^*$ es una biyección. □

Ejemplo 16. Consideramos el campo vectorial analítico complejo

$$\mathbb{X}(z) = \lambda z^n \frac{\partial}{\partial z} \tag{1.22}$$

en $\Omega = \mathbb{C}^*$, con $\lambda \in \mathbb{C}^*$ y $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Para la 1-forma diferencial ω y la aplicación rectificadora Ψ , asociadas a \mathbb{X} se tienen los siguientes casos:

1. Si $n > 1$, entonces $\omega = dz/\lambda z^n$ y $\Psi(z) = -1/((n-1)\lambda z^{n-1})$ es univaluada en Ω .
2. Si $n = 1$, entonces $\omega = dz/\lambda z$ y $\Psi(z) = (\log(z))/\lambda$ es multivaluada en Ω .
3. Si $n \leq -1$, entonces $\omega = z^{-n} dz/\lambda$ y $\Psi(z) = z^{-n+1}/((-n+1)\lambda)$ es univaluada en Ω . □

Observación 14. Para cualquier $z \in \Omega - \{0\}$, la aplicación rectificadora Ψ asociada al campo vectorial analítico complejo \mathbb{X} dado en (1.22) cumple que: $\Psi(z) = \infty$ para $n > 1$, $\Psi(z) = -\infty$ para $n = 1$ y $\Psi(z) = z^{-n+1}/((-n+1)\lambda)$ para $n < 1$.

1.8. Campos vectoriales holomorfizables.

En esta sección estudiamos la noción de integrabilidad I7, demostramos el segundo bloque de integrabilidad y el teorema 1. Para esto identificamos $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, ello requiere de una estructura compleja J que nos permita tratar a \mathbb{R}^2 como un espacio vectorial complejo. Nos interesa encontrar condiciones para X en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ que permitan la existencia de una estructura compleja J , tal que X sea la parte real de un campo vectorial analítico complejo en la superficie de Riemann (Ω, J) . Las siguientes definiciones pueden encontrarse en [21] pág. 115.

Definición 15. Una *estructura compleja* J en Ω (considerada como variedad C^∞) es una aplicación $J : T_{(x,y)}\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$, definida para todo $(x, y) \in \Omega$, tal que se cumple lo siguiente:

1. J se escribe como una matriz de funciones C^∞ respecto a (x, y)

$$J = \begin{pmatrix} J_{11}(x, y) & J_{12}(x, y) \\ J_{21}(x, y) & J_{22}(x, y) \end{pmatrix}.$$

2. J satisface $J \circ J = -Id$.

Definición 16. Dadas dos estructuras complejas J, J' en \mathbb{R}^2 (como espacio vectorial) y $L : (\mathbb{R}^2, J) \rightarrow (\mathbb{R}^2, J')$ una aplicación \mathbb{R} -lineal. Decimos que L es (J, J') -lineal si $L \circ J = J' \circ L$.

La estructura compleja usual o *estructura compleja canónica* en \mathbb{R}^2 es

$$i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notamos que i satisface $i(\partial/\partial x) = (\partial/\partial y)$ y $i(\partial/\partial y) = -(\partial/\partial x)$. Las aplicaciones (i, i) -lineales $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, son las aplicaciones \mathbb{R} -lineales cuya matriz en la base $\{e_1, e_2\}$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}.$$

Las aplicaciones (i, i) -lineales son también llamadas \mathbb{C} -lineales.

Definición 17. Dadas dos estructuras complejas J, J' en $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ respectivamente (considerando \mathcal{U}, \mathcal{V} como variedades C^∞) y un difeomorfismo $F : (\mathcal{U}, J) \rightarrow (\mathcal{V}, J')$ de clase C^∞ . Decimos que F es (J, J') -holomorfo si se cumple que $DF \circ J = J' \circ DF$.

En particular tenemos que J actúa en campos vectoriales $X = a(x, y)(\partial/\partial x) + b(x, y)(\partial/\partial y)$ sobre Ω , como sigue

$$J(X) = \begin{pmatrix} J_{11}(x, y) & J_{12}(x, y) \\ J_{21}(x, y) & J_{22}(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \end{pmatrix}.$$

La definición 17 generaliza las ecuaciones de Cauchy-Riemann. El siguiente resultado muestra como las estructuras complejas dan lugar a superficies de Riemann. Para una prueba se recomienda ver [37] pág. 20.

Teorema 4. (Integrabilidad de estructuras complejas en dimensión real dos.) Una pareja (Ω, J) con J una estructura compleja, es una superficie de Riemann, esto es existe un atlas $\{\vartheta_\alpha : B((x_\alpha, y_\alpha), r_\alpha) \subset \Omega \rightarrow \mathbb{C}\}$, el cual satisface:

1. ϑ_α es (J, i) -holomorfo.
2. ϑ_α es un homeomorfismo sobre su imagen.
3. Cada vez que la composición $\vartheta_\beta \circ \vartheta_\alpha^{-1}$ tiene sentido, es un biholomorfismo entre los abiertos respectivos en \mathbb{C} .

En lo que sigue para $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}$ consideramos $J_\circ = i$. El siguiente resultado muestra la existencia de una estructura compleja adecuada J para una pareja de campos vectoriales que conmutan.

Proposición 3. Consideramos una pareja de campos vectoriales X, Y , ambos de clase C^∞ en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Si $[X, Y] \equiv 0$ en $\Omega' = \{(x, y) \in \Omega \mid T(x, y) \neq 0\}$, entonces existen una estructura compleja asociada J en Ω' que satisface $J(X) = Y$, $J(Y) = -X$ y una aplicación rectificadora global $\Psi : \Omega' \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{C}$, la cual es (J, J_\circ) -holomorfa.

Demostración. Por (1) y (2) existe $\Psi : \Omega' \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{C}$ aplicación rectificadora para X la cual también rectifica a Y , ver lema 11. Para un punto $(x, y) \in \Omega'$ definimos la aplicación $J : T_{(x,y)}\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$ mediante $J = (D\Psi)^{-1} \circ J_\circ \circ D\Psi$. El hecho de que J es una estructura compleja en Ω' se sigue de

$$J \circ J = ((D\Psi)^{-1} \circ J_\circ \circ D\Psi) \circ ((D\Psi)^{-1} \circ J_\circ \circ D\Psi) = -Id.$$

Calculamos $J(X) = (D\Psi)^{-1} \circ J_\circ \circ (D\Psi)(X) = (D\Psi)^{-1} \circ J_\circ(\partial/\partial x) = (D\Psi)^{-1}(\partial/\partial y) = Y$. Con un cálculo similar tenemos que $J(Y) = -X$. Para mostrar que $\Psi : (\Omega', J) \rightarrow (\mathcal{V}, J_\circ)$ es (J, J_\circ) -holomorfa verificamos que

$$D\Psi \circ J = D\Psi \circ ((D\Psi)^{-1} \circ J_\circ \circ D\Psi) = J_\circ \circ D\Psi,$$

luego por la definición 17 se concluye que Ψ es (J, J_\circ) -holomorfa. \square

En la sección 1.7 observamos que para todo campo vectorial analítico complejo \mathbb{X} se satisface que $[\Re(\mathbb{X}), \Im(\mathbb{X})] \equiv 0$ y existe una aplicación Ψ que rectifica tanto a $\Re(\mathbb{X})$ como a $\Im(\mathbb{X})$. De hecho los campos vectoriales analíticos complejos satisfacen los siete tipos de integrabilidad descritos en la introducción y tratados a detalle en este capítulo. Nos interesan campos vectoriales reales X para los cuales existan una estructura compleja J y una aplicación (J, J_\circ) -holomorfa F , tal que F_*X es la parte real de un campo vectorial analítico complejo en $(F(\Omega), J_\circ)$.

Definición 18. Decimos que un campo vectorial real X de clase C^∞ es *holomorfizable* en $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^2$ si existe una estructura compleja J en Ω' y un difeomorfismo $F : (\Omega', J) \rightarrow (\mathcal{V}, J_\circ)$ de clase C^∞ , tal que F es (J, J_\circ) -holomorfo y $F_*X = \Re(\mathbb{X})$ para algún campo vectorial analítico complejo \mathbb{X} en \mathcal{V} , esto es, las componentes de F_*X satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $(\mathcal{V}, J_\circ) \subset \mathbb{C}$.

En la definición anterior escribimos $\mathbb{X} = \mathcal{H}(z)\partial/\partial z$, con \mathcal{H} una función analítica compleja en $\mathcal{V} = \mathbb{C} - \{Z \cup P \cup E\}$. Así el dominio Ω' que se menciona es $F^{-1}(\mathcal{V})$. El siguiente resultado muestra la equivalencia de las nociones de integrabilidad I5 e I7.

Lema 12. Un campo vectorial X proviene de una \mathbb{R}^2 -acción genérica (a priori local) en $\Omega' = \Omega - \{\text{unión finita de trayectorias de } X\}$ si y sólo si X es holomorfizable en Ω' .

Demostración. (\Leftarrow) Como $F_*X = \Re e(\mathbb{X})$ para algún campo vectorial analítico complejo \mathbb{X} en $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}$, consideramos un segundo campo vectorial $Y \doteq F^*(\Im m(\mathbb{X}))$. Calculamos el corchete de Lie de X, Y

$$[X, Y] = F^*[F_*X, F_*Y] = F^*[\Re e(\mathbb{X}), \Im m(\mathbb{X})] \equiv 0.$$

Así X admite una \mathbb{R}^2 -acción (a priori local).

(\Rightarrow) Supongamos que X admite una \mathbb{R}^2 -acción (a priori local), entonces existe un segundo campo vectorial Y transversal con X en Ω' , tal que $[X, Y] \equiv 0$, donde X, Y son los generadores infinitesimales de la \mathbb{R}^2 -acción. Hacemos a (Ω', J) una superficie de Riemann, con el atlas $\{\Psi_{(x_\alpha, y_\alpha)} : B((x_\alpha, y_\alpha), r_\alpha) \subset \Omega' \rightarrow \mathbb{C}\}$, dado por

$$\Psi_{(x_\alpha, y_\alpha)}(x, y) = \left(\int_{(x_\alpha, y_\alpha)}^{(x, y)} \omega_X, \int_{(x_\alpha, y_\alpha)}^{(x, y)} \omega_Y \right),$$

ver demostración de lema 11, ya que si $B((x_\alpha, y_\alpha), r_\alpha) \cap B((x_\beta, y_\beta), r_\beta) \neq \emptyset$, entonces $\Psi_{(x_\alpha, y_\alpha)} \circ \Psi_{(x_\beta, y_\beta)}^{-1}$ es una translación Euclideana. En $\Psi_{(x_\alpha, y_\alpha)}(B((x_\alpha, y_\alpha), r)) \subset \mathbb{C}$, la expresión del campo vectorial $(\Psi_{(x_\alpha, y_\alpha)})_*X$ es $\partial/\partial x = \Re e(\partial/\partial z)$. Entonces X es la parte real de un campo vectorial analítico complejo en la superficie de Riemann (Ω', J) . Notamos que (Ω', J) puede poseer perforaciones y hoyos en el sentido holomorfo. \square

Observamos que si X admite una \mathbb{R}^2 -acción (a priori local) en Ω' , entonces por el lema 11 existe una aplicación rectificadora $\Psi : \Omega' \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ para X , pero para muchos casos, la aplicación Ψ no es difeomorfismo global. El siguiente resultado muestra la equivalencia de las nociones de integrabilidad I6 e I7.

Corolario 2. *Existe una correspondencia 1 a 1 entre campos vectoriales analíticos complejos y campos holomorfizables.*

Demostración. Como X es holomorfizable en Ω' , existe una estructura compleja J en Ω' y un difeomorfismo $F : (\Omega', J) \rightarrow (\mathcal{V}, J_\circ) \subset \mathbb{C}$, tal que F es (J, J_\circ) -holomorfo y $F_*(X) = \Re e(\mathbb{X})$, para algún campo vectorial analítico complejo \mathbb{X} en \mathcal{V} . Notamos que $X = \Re e(F^*\mathbb{X})$, esto concluye la prueba. \square

Ejemplo 17. Consideramos los campos vectoriales

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y},$$

en $\Omega = \mathbb{R}^2$ los cuales satisfacen $[X, Y] = 0$. Siguiendo la prueba del lema 12 obtenemos las 1-formas diferenciales $\omega_X = (1/(2x))dx + (1/(2y))dy$, $\omega_Y = (1/(2x))dx - (1/(2y))dy$, a partir de las cuales construimos la aplicación rectificadora $\Psi : \Omega' \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ dada por $\Psi(x, y) = (1/2)(\ln xy, \ln(x/y))$, donde $\Omega' = \Omega - \{xy = 0\}$. Ψ está bien definida salvo suma por una constante. La estructura compleja J en Ω' que hace a X holomorfizable es $J = \begin{pmatrix} 0 & x/y \\ -y/x & 0 \end{pmatrix}$. \square

En los siguientes dos ejemplos consideramos campos vectoriales holomorfizables para los cuales encontramos una simetría y una aplicación rectificadora.

Ejemplo 18. El campo vectorial

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$$

es holomorfizable. Para esto consideramos la estructura compleja $J = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-x} \\ e^x & 0 \end{pmatrix}$, el conjunto $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2 - \{x \leq 0\}$ y el difeomorfismo $F : (\mathbb{R}^2, J) \rightarrow (\mathcal{V}, J_\circ)$ dado por $F(x, y) = (e^x, y)$, el cual es (J, J_\circ) -holomorfo y satisface $F_*X = \Re e(z\partial/\partial z)$. Una simetría para X está dada por

$$Y = J(X) = -ye^{-x} \frac{\partial}{\partial x} + e^x \frac{\partial}{\partial y},$$

la cual satisface $[X, Y] \equiv 0$. La aplicación $\Psi : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$, dada por $\Psi(x, y) = (\log \sqrt{e^{2x} + y^2}, \arg(e^{2x}, y))$ es aplicación rectificadora multivaluada de X . \square

Ejemplo 19. El campo vectorial

$$X = (x + 2y^3) \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$$

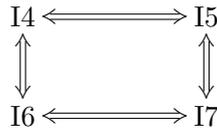
es holomorfizable. Para esto consideramos la estructura compleja $J = \begin{pmatrix} 3y^2 & -(1 + 9y^4) \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}$ y el difeomorfismo $F : (\mathbb{R}^2, J) \rightarrow (\mathbb{R}^2, J_\circ)$ dado por $F(x, y) = (x - y^3, y)$, el cual es (J, J_\circ) -holomorfo y satisface $F_*X = \Re e(z\partial/\partial z)$. Una simetría para X está dada por

$$Y = J(X) = (-y + 3xy^2 - 3y^5) \frac{\partial}{\partial x} + (x - y^3) \frac{\partial}{\partial y},$$

la cual satisface $[X, Y] \equiv 0$. La aplicación $\Psi : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$, dada por $\Psi(x, y) = (\log \sqrt{(x - y^3)^2 + y^2}, \arg((x - y^3)^2, y))$ es aplicación rectificadora multivaluada de X . \square

A continuación mostramos nuestro primer resultado principal. Utilizando los lemas 11 y 12, así como el corolario 2 se demuestra:

Segundo bloque de integrabilidad. Las nociones de integrabilidad I4 a I7 son equivalentes



Teorema 1. Para las nociones de integrabilidad I1 a I7, se tiene que el segundo bloque de integrabilidad implica a el primer bloque, esto es



Demostración. Si X pertenece al segundo bloque de integrabilidad, entonces satisface la noción de integrabilidad I5, luego existe un campo vectorial diferenciable Y transverso a X en Ω' , tal que $[X, Y] = 0$. De ello se sigue que Y es simetría de X , luego X pertenece al primer bloque de integrabilidad.

El converso no siempre se cumple como veremos en el capítulo 2, sección 2.1, pág. 36. \square

1.9. Resumen de integrabilidad.

En esta sección mostramos cuatro casos en los que los campos vectoriales son integrables siguiendo las nociones de integrabilidad I4 a I7, esto es, proporcionamos las correspondencias entre las cuatro nociones de integrabilidad que se encuentran en el segundo bloque de integrabilidad.

Proposición 4. *Para estructuras complejas adecuadas en los lugares no singulares, existe una correspondencia uno a uno como sigue:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} = \mathcal{H}(z) \frac{\partial}{\partial z} & \longleftrightarrow & [X, Y] = 0 \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \Psi(z) = \int_{z_0}^z \frac{dz}{\mathcal{H}(z)} & \longleftrightarrow & (g, f) \end{array}$$

Demostración. Realizaremos la demostración a partir de cuatro casos:

Caso 1. Consideramos el campo vectorial

$$X = u(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + v(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

C^∞ , tal que es la parte real de un campo vectorial analítico complejo en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, es decir X satisface la noción de integrabilidad I6. Aplicando la estructura compleja canónica J_\circ a X obtenemos un segundo campo vectorial $J_\circ X \doteq Y$. Construimos el campo vectorial analítico complejo $\mathbb{X} = (X - iJ_\circ X)/2$ cuya expresión en coordenadas complejas es $(u + iv)(\partial/\partial z)$, además satisface $X \doteq \Re(\mathbb{X})$, $Y \doteq -\Im(\mathbb{X})$ y $[X, Y] \equiv 0$ en $\Omega' = \Omega - (Z \cup P \cup E)$. Con ello se muestra que X satisface la noción de integrabilidad I5. Para mostrar que X también admite una aplicación rectificadora, consideramos las 1-formas diferenciales que forman una base dual del haz tangente a Ω'

$$\omega_X = \frac{1}{u^2 + v^2}(u dx + v dy), \quad \omega_Y = \frac{1}{u^2 + v^2}(-v dx + u dy),$$

las cuales satisfacen $\omega_X(X) = \omega_Y(Y) = 1$ y $\omega_X(Y) = \omega_Y(X) = 0$. Obtenemos una pareja de integrales primeras (a veces multivaluadas)

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \omega_X : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}, \quad V(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \omega_Y : \Omega' \rightarrow \mathbb{R},$$

para Y y X respectivamente, donde (x_0, y_0) es un punto en Ω' . Construimos la aplicación $(U, V) : \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$, la cual es un biholomorfismo local que satisface $(U, V)_* X = (\partial/\partial x)$ y $(U, V)_* Y = (\partial/\partial y)$. Luego (U, V) es una aplicación rectificadora local para X . Notamos que a priori X no satisface la noción de integrabilidad I4.

Caso 2. Consideramos un difeomorfismo $(U, V) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ local, C^∞ , tal que sus componentes $U, V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Denotamos por $Sing(U, V) = (P \cup E)$, donde P, E son como en el caso 1 y C es el conjunto de puntos críticos de (U, V) , esto es, puntos que satisfacen $(\partial U/\partial x)^2 + (\partial U/\partial y)^2 = 0$. Utilizando el lema 9 se obtienen los campos vectoriales

$$X \doteq (U, V)^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = -\frac{X_V}{\|\nabla V\|^2}, \quad Y \doteq (U, V)^* \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{X_U}{\|\nabla U\|^2},$$

en $\Omega' = \Omega - \text{Sing}(U, V)$, los cuales satisfacen $[X, Y] \equiv 0$, con ello se muestra que X satisface la noción de integrabilidad I5. Por otra parte X es la parte real de un campo vectorial analítico complejo, para mostrarlo consideramos las 1-formas diferenciales que forman una base dual de $T\mathbb{R}^2$

$$\omega_X = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) dy = dU, \quad \omega_Y = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) dy = dV,$$

las cuales satisfacen $\omega_X(X) = \omega_Y(Y) = 1$ y $\omega_X(Y) = \omega_Y(X) = 0$. El campo vectorial analítico complejo construido a partir de la aplicación (U, V) es $\mathbb{X} = (X - iJ_\circ X)/2$; así X satisface la noción de integrabilidad I6. Notamos que se satisface $(U, V)_* \mathbb{X} = \partial/\partial z$, luego (U, V) es un biholomorfismo local que además es una aplicación rectificadora para X .

Caso 3. Consideramos un difeomorfismo $(g, f) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, C^\infty$, tal que sus componentes $g, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, no satisfacen a priori las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Utilizando el lema 9 se obtienen los campos vectoriales

$$X \doteq (g, f)^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{-X_f}{\det D(g, f)}, \quad Y \doteq (g, f)^* \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{X_g}{\det D(g, f)},$$

en $\Omega' = \{(x, y) \in \Omega \mid \det D(g(x, y), f(x, y)) \neq 0\}$, tales que $[X, Y] \equiv 0$, con ello se muestra que X satisface la noción de integrabilidad I5. Como g, f no cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces (g, f) no es holomorfa y por tanto X no es la parte real de un campo vectorial analítico complejo. Por ello encontramos una estructura compleja $J = D(g, f)^{-1} \circ J_\circ \circ D(g, f)$, tal que $(g, f) : (\Omega', J) \rightarrow (\mathbb{R}^2, J_\circ)$ es (J, J_\circ) -holomorfa y las componentes de $(g, f)_* X$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann, luego X es holomorfizable, es decir, se cumple la noción de integrabilidad I7.

Caso 4. Consideramos el campo vectorial

$$X = a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

C^∞ en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ que admite un segundo campo vectorial $Y = c(x, y)(\partial/\partial x) + d(x, y)(\partial/\partial y)$, tal que $[X, Y] \equiv 0$, es decir, X satisface la noción de integrabilidad I5.

Como $[X, Y] \equiv 0$ tenemos que X admite una \mathbb{R}^2 -acción a priori local en $\Omega' = \{(x, y) \in \Omega \mid T(x, y) \neq 0\}$, entonces por el lema 12 el campo vectorial X es holomorfizable, es decir, satisface la noción de integrabilidad I7, luego existe una estructura compleja J y una aplicación $F : (\Omega, J) \rightarrow (\mathbb{R}^2, J_\circ)$ la cual es (J, J_\circ) -holomorfa, tal que $F_* X = \Re(\mathbb{X})$ para algún campo vectorial analítico complejo \mathbb{X} . Para mostrar que X también admite una aplicación rectificadora, consideramos Ψ la expresión en coordenadas cartesianas de la aplicación rectificadora de \mathbb{X} . Así $\Psi \circ F$ es aplicación rectificadora para X , es decir, X satisface la noción de integrabilidad I4. A partir de los cuatro casos anteriores se obtienen las cuatro correspondencias buscadas. \square

Capítulo 2

Existencia de aplicación rectificadora y sus obstrucciones

En este capítulo nos interesa caracterizar las trayectorias regulares de un campo vectorial X que obstruyen la existencia de una aplicación rectificadora global. Mostramos que no siempre se cumple el converso del teorema 1 y estudiamos la existencia de aplicación rectificadora en sectores hiperbólicos.

2.1. Regiones canónicas y aplicación rectificadora.

A lo largo de esta sección para un campo vectorial X , de clase C^∞ en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, consideramos tres tipos de puntos singulares: pozo-fuente, centro y silla (ver definiciones 31, 32 y 33 en apéndice A.3). En lo sucesivo denotamos los puntos singulares de X mediante q , de igual manera los puntos regulares $(x, y) \in \Omega$ se representan mediante p . Utilizamos de manera indistinta p y (x, y) según lo amerite el contexto a tratar. Iniciamos esta sección enunciando el concepto de región canónica atribuido a L. Markus [27].

Definición 19. Para un campo vectorial X , de clase C^∞ en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, consideramos $\mathcal{U} \subset \Omega$ subconjunto abierto, conexo e invariante bajo X . Decimos que:

1. La pareja (\mathcal{U}, X) es una *banda*, si es topológicamente equivalente a $(\mathbb{R}^2, \partial/\partial x)$.
 2. La pareja (\mathcal{U}, X) es un *anillo*, si es topológicamente equivalente a $(\mathbb{R}^2 - \{0\}, -y \partial/\partial x + x \partial/\partial y)$.
 3. La pareja (\mathcal{U}, X) es un *pozo-fuente*, si es topológicamente equivalente a $(\mathbb{R}^2 - \{0\}, x \partial/\partial x + y \partial/\partial y)$.
- Cualquier pareja (\mathcal{U}, X) es llamada una *región paralela*. Una región paralela maximal se conoce como una *región canónica*.

Por ejemplo, en la definición de región paralela no se considera el campo vectorial lineal con una silla en \mathbb{R}^2 , ya que los sectores hiperbólicos que lo conforman son bandas. En la sección 2.3 estudiamos a detalle el caso en que un campo vectorial posee una silla.

Decimos que un anillo es isocrono si todas sus trayectorias poseen el mismo periodo. El siguiente resultado muestra la existencia de una aplicación rectificadora para un anillo isocrono.

Lema 13. *Un anillo (\mathcal{U}, X) de trayectorias periódicas es isocrono si y sólo si (\mathcal{U}, X) admite una aplicación rectificadora necesariamente multivaluada.*

Demostración. Supongamos que (\mathcal{U}, X) posee una aplicación rectificadora, entonces por el lema 11 existe un segundo campo vectorial Y transversal con X en \mathcal{U} , tal que $[X, Y] \equiv 0$. Siguiendo el lema 6 tenemos que Y es simetría de X y viceversa. Entonces el flujo de X lleva soluciones de Y en soluciones de Y , de ello se sigue que las trayectorias de X en \mathcal{U} tienen el mismo periodo. En la prueba del otro sentido consideramos una trayectoria $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$, C^∞ , transversal a X donde $\sigma(0)$ es el punto singular q (la existencia de la transversal se prueba a detalle en el lema 21). Movemos $\sigma'(s)$ con el flujo de X , con ello obtenemos un campo vectorial Y del cual X es simetría. De ser necesario modificamos Y con un factor de reescalamiento $\rho : \mathcal{U} - \{q\} \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , de manera que $[X, \rho Y] \equiv 0$, luego X proviene de una \mathbb{R}^2 -acción genérica. Por el lema 11, X posee una aplicación rectificadora la cual es multivaluada. \square

Del lema anterior se deduce que una obstrucción a la existencia de aplicación rectificadora para X es la presencia de centros no isocronos. Ello permite mostrar que no siempre se cumple el converso del teorema 1. Para esto consideramos X un centro no isocrono cuyas trayectorias son círculos centrados en el origen. Notamos que X satisface el primer bloque de integrabilidad pero no así el segundo, ya que X no posee aplicación rectificadora.

Otra obstrucción a la existencia de aplicación rectificadora para X se tiene en las trayectorias que no admiten una región paralela, estas trayectorias son llamadas ciclos límite, gráficas límite o separatrices de X . En las secciones 2.2 y 2.3 veremos a detalle dichas trayectorias.

Para el caso en que X es polinomial y posee un centro isocrono, el lema 11 indica la existencia de un segundo campo vectorial Y transversal con X . El siguiente ejemplo, debido a E. Volokitin y V. Ivanov [39], muestra que Y no es necesariamente polinomial.

Ejemplo 20. Consideramos el campo vectorial

$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + (x + x^{2m-1}y(x^2 + y^2)) \frac{\partial}{\partial y}$$

con $m \in \mathbb{N}$, el cual posee un centro isocrono en el origen. Mostramos que todo campo vectorial polinomial que conmuta con X es de la forma $Y = \nu X$ con ν constante.

Por simplicidad denotamos $X = a(\partial/\partial x) + b(\partial/\partial y)$, $Y = c(\partial/\partial x) + d(\partial/\partial y)$. Calculando el corchete de Lie de X, Y e igualándolo a cero obtenemos

$$c \frac{\partial a}{\partial x} + d \frac{\partial a}{\partial y} - a \frac{\partial c}{\partial x} - b \frac{\partial c}{\partial y} = 0 \tag{2.1}$$

$$c \frac{\partial b}{\partial x} + d \frac{\partial b}{\partial y} - a \frac{\partial d}{\partial x} - b \frac{\partial d}{\partial y} = 0 \tag{2.2}$$

Sustituyendo $a = -y$ en (2.1) obtenemos d en términos de las derivadas parciales de c , esto es, $d = y(\partial c/\partial x) - b(\partial c/\partial y)$. Sustituyendo la expresión de d en (2.2) obtenemos

$$\left(c \frac{\partial b}{\partial x} + y \frac{\partial b}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial x} - y \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial y} - 2yb \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} - b \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \left(b^2 \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) + \left(y^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Comparando los sumandos desde el punto de vista del grado de y , sabiendo que el grado de b es 3 y considerando el grado de c igual a ℓ se obtiene

$$c \frac{\partial b}{\partial x} + y \frac{\partial b}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial x} - y \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial y} - 2yb \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} - b \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

$$b^2 \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = 0 \quad (2.4)$$

$$y^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0 \quad (2.5)$$

Resolviendo (2.4) obtenemos $c(x, y) = (k_1(x))y + k_2(x)$. Sustituyendo la expresiones de b y c en (2.3) debemos encontrar condiciones para k_1 y k_2 de manera que se cumpla la igualdad

$$\begin{aligned} & (yk_1 + k_2)(1 + (2m - 1)x^{2m-2}y(x^2 + y^2) + 2x^{2m}y) \\ & \quad + y(yk'_1 + k'_2)(x^{2m-1}(x^2 + y^2) + 2x^{2m-1}y^2) \\ & \quad - yk_1(1 + (2m - 1)x^{2m-2}y(x^2 + y^2) + 2x^{2m}y) \\ & \quad \quad - 2yk'_1(x + x^{2m-1}y(x^2 + y^2)) \\ & \quad - (yk'_1 + k_2)(x + x^{2m-1}y(x^2 + y^2)) = 0 \end{aligned}$$

Dicha igualdad se cumple sólo si $k_2 = 0$ y $k_1 = \nu$ con ν constante. Sin pérdida de generalidad suponemos $k_1 = -\nu$. Así $c = \nu a$ y $d = \nu b$, luego $Y = \nu X$.

Resolviendo (2.5) obtenemos $c(x, y) = (k_1(y))x + k_2(y)$. Sustituyendo la expresiones de b y c en (2.3) debemos encontrar condiciones para k_1 y k_2 de manera que se cumpla la igualdad

$$\begin{aligned} & (xk_1 + k_2)(1 + (2m - 1)x^{2m-2}y(x^2 + y^2) + 2x^{2m}y) \\ & \quad + y(x^{2m-1}(x^2 + y^2) + 2x^{2m-1}y^2) \\ & \quad - y(xk'_1 + k'_2)(1 + (2m - 1)x^{2m-2}y(x^2 + y^2) + 2x^{2m}y) \\ & \quad \quad - 2yk'_1(x + x^{2m-1}y(x^2 + y^2)) \\ & \quad - k_1(x + x^{2m-1}y(x^2 + y^2)) = 0 \end{aligned}$$

Dicha igualdad se cumple sólo si $k_1 = k_2 = 0$. Así $Y = 0$, esto es el caso $\nu = 0$. \square

Un centro no isocrono X puede ser multiplicado por un factor de reescalamiento $\rho : \mathcal{U} - \{q\} \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , que modifica la velocidad de X en una vecindad $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ de un punto singular q para convertirlo en un centro isocrono lo cual conlleva a que ρX satisfaga el teorema 1. El siguiente resultado muestra la existencia de un factor de reescalamiento para un centro no isocrono.

Lema 14. *Consideramos un campo vectorial X de clase C^∞ en \mathbb{R}^2 . Si X posee un centro no isocrono en $q \in \mathbb{R}^2$, entonces existe un abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ que contiene a q y un factor de reescalamiento $\rho : \mathcal{U} - \{q\} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ , tal que ρX posee un centro isocrono en q .*

Demostración. Necesitamos conocer el periodo de cada trayectoria en X , por ello definimos la función de periodos como

$$\begin{aligned} \vartheta : \mathcal{U} - \{q\} & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{periodo de la trayectoria} \\ \text{de } X \text{ que pasa por } (x, y) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Observamos que ϑ es una integral primera para X . Para hallar una expresión de la función de periodos consideramos X en coordenadas polares, esto es, $X^0 = f(r, \theta)(\partial/\partial r) + g(r, \theta)(\partial/\partial \theta)$ y la función de periodos se escribe como

$$\vartheta(r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{g(r(\theta), \theta)}.$$

donde la función $r(\theta)$ describe una solución de X^0 en el rectángulo $\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi)$ con condición inicial $r(\theta) = r \in \mathbb{R}^+$. Notamos que la función de periodos es C^∞ . Finalmente consideramos el factor de reescalamiento $\rho : \mathcal{U} - \{q\} \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , dado por $\rho = 1/\vartheta$. Así el campo vectorial ρX es un centro isocrono y todas las trayectorias resultan de periodo 1. Ello concluye la prueba. \square

En la prueba de la observación 13 modificamos la velocidad de la simetría Y de X para encontrar una aplicación rectificadora para X . A continuación mostramos la existencia local de un factor de reescalamiento para X .

Lema 15. *Consideramos un campo vectorial X , de clase C^∞ en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Si X admite una simetría Y , entonces existe un abierto $\mathcal{U} \subset \Omega'$ y un factor de reescalamiento $\rho : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ para X , tal que $[\rho X, Y] \equiv 0$.*

Demostración. Como Y no se anula en Ω' , entonces existe un abierto $\mathcal{U} \subset \Omega'$ y una caja de flujo $\Upsilon : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$, C^∞ para Y , tal que $\Upsilon_* Y = \partial/\partial y$. Como Y es transversal con X en Ω' , entonces en $\Upsilon(\mathcal{U})$ las trayectorias de $\Upsilon_* X$ se describen por una función $y = k(x)$, C^∞ . Construimos la aplicación $F : \Upsilon(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ mediante $F(x, y) = (x, y - k(x))$, la cual es un difeomorfismo C^∞ , además satisface que $F_*(\partial/\partial y) = \partial/\partial y$ y $F_*(\Upsilon_* X) = h(x, y)(\partial/\partial x)$, donde $h : \Upsilon(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función C^∞ , no nula (ver apéndice A1). Definimos un difeomorfismo $\Psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ y una función $\rho : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $\Psi \doteq F \circ \Upsilon$ y $\rho \doteq 1/(h \circ F \circ \Upsilon)$ respectivamente; ambas son C^∞ . Calculamos

$$[\rho X, Y] = [\rho \Psi^*(h(x, y)(\partial/\partial x)), \Psi^*(\partial/\partial y)] = \Psi^*[\partial/\partial x, \partial/\partial y] = 0.$$

Así ρ es un factor de reescalamiento para X y Ψ es una aplicación rectificadora para ρX . \square

2.2. Aplicación rectificadora cerca de ciclos límite y gráficas límite.

En esta sección convenimos que una trayectoria periódica γ de X es *trivial* si el periodo de γ es cero. Una trayectoria periódica γ de X es *no trivial* si el periodo (mínimo) de γ es estrictamente positivo. En lo que sigue usaremos el nombre de trayectoria periódica para referirnos solamente al caso no trivial.

Definición 20. Una trayectoria γ de X es un *ciclo límite* si γ es una trayectoria periódica aislada. Usando la Teoría de Poincaré-Bendixon se tiene que para todo punto p en una vecindad de γ , el ω -límite ó α -límite de la trayectoria de X que pasa por p es γ (ver [12] pág. 21).

Definición 21. Una *gráfica* de X es un conjunto finito $\Gamma \subset \Omega$ de trayectorias de X , tal que: Γ es unión de trayectorias y puntos singulares.

Γ es conexo.

El ω -límite y α -límite de cada trayectoria en Γ está en Γ .

Definición 22. Una *gráfica límite* Γ es una gráfica tal que existe una trayectoria γ de X que no pertenece a Γ pero su ω -límite ó α -límite es Γ .

Nuestra definición de “gráfica” es un poco diferente de la usual, ver [34] pág. 139. Ello se debe a que nos interesa hallar aplicaciones rectificadoras cuyos dominios tienen como frontera a Γ . Notamos que tanto un ciclo límite como una gráfica no admiten una región paralela que los contenga. Para mostrar que la presencia de un ciclo límite es una obstrucción a la existencia de una aplicación rectificadora, requerimos del siguiente concepto el cual puede leerse para el caso de una trayectoria cerrada en [34] pág. 92.

Definición 23. Dada una gráfica Γ y una trayectoria $\sigma : [\epsilon, \delta] \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^2$, transversal a X con extremo p_1 en una trayectoria regular de Γ . La *aplicación de primer retorno de la gráfica* Γ es

$$P : \Sigma \rightarrow \Sigma$$

$$p \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{el primer punto donde la trayectoria} \\ \text{solución de } X \text{ que pasa por } p \text{ a tiempo} \\ t = 0 \text{ interseca a } \Sigma, \text{ para } t > 0 \end{array} \right\}.$$

Observación 15. La *aplicación de primer retorno* $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ es difeomorfismo C^∞ . Este hecho sigue de que el flujo de X es C^∞ .

Lema 16. Consideramos un ciclo límite γ de X . Para cualquier vecindad abierta $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ de γ , se cumple que no existe aplicación rectificadora $\Psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ para X .

Demostración. Supongamos por contradicción que existe tal aplicación rectificadora $\Psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$. Por el lema 11 existe un segundo campo vectorial Y transversal con X , tal que $[X, Y] \equiv 0$. Siguiendo el lema 6 tenemos que Y es simetría de X y viceversa.

Consideramos γ_1 trayectoria solución de X , tal que su ω -límite es γ y $\sigma : [\epsilon, \delta] \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^2$, un segmento de trayectoria de Y con extremos p_2, p_3 en las trazas de γ, γ_1 respectivamente y $\tau > 0$ el periodo de γ . Tomamos el punto p_1 de primer retorno de γ_1 bajo X en Σ . Como X es simetría de Y , el flujo φ de X cumple que $\varphi(\tau, p_2) = p_2$ y $\varphi(\tau, p_3) = p_1$. Utilizando que Y es simetría de X se tiene para la función de Y -tiempo que $|Y_{p_3}(p_2)| = |Y_{p_1}(p_2)|$.

Por otra parte sucede que $p_1 \neq p_3$, puesto que γ es ciclo límite y $\varphi(\tau, \Sigma) \subset \Sigma$, donde esta contención es estricta. Como Y no se anula en Σ , entonces $|Y_{p_3}(p_2)| > |Y_{p_1}(p_2)|$. Ella es la contradicción buscada. \square

Corolario 3. El lema 16 es válido para gráficas límite, es decir, gráficas con aplicación de primer retorno distinta de la identidad.

Lema 17. Consideramos una región canónica (\mathcal{U}, X) pozo-fuente que tiene por frontera un ciclo límite γ de X . Existe una aplicación rectificadora $\Psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ para X , dicha aplicación es necesariamente multivaluada.

Demostración. Consideramos una trayectoria $\sigma : [\epsilon, \delta] \rightarrow \mathcal{U}$, C^∞ , transversal a X , tal que su valor y el de todas sus derivadas coinciden en los puntos extremos ϵ, δ . Una construcción detallada de tal trayectoria transversal a X se encuentra en el lema 21 del capítulo 3.

$\{X, \sigma'(s)\}$ es base positivamente orientada de $T\mathbb{R}^2$, donde σ' denota la derivada de σ . Movemos $\sigma'(s)$ con el flujo de X , ello da origen a un segundo campo vectorial Y transversal con X en \mathcal{U} . Notamos que por la construcción Y es C^∞ . De ser necesario utilizamos el lema 14 para hacer

que Y sea isocrono de manera que $[X, Y] \equiv 0$ en \mathcal{U} . Siguiendo la demostración del lema 11, a partir de Y construimos

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{U} &\rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2 \\ p &\mapsto \left(\int_{p_0}^p \omega_X, \int_{p_0}^p \omega_Y \right), \end{aligned}$$

la cual es aplicación rectificadora C^∞ de X (con $p_0 \in \mathcal{U}$ fijo). Ella es necesariamente multivaluada, ya que $\int_\sigma \omega_Y = \delta - \epsilon > 0$ es el periodo de Y en σ . \square

Ejemplo 21. Consideramos el campo vectorial

$$X = (-y + x(x^2 + y^2 - 1)) \frac{\partial}{\partial x} + (x + y(x^2 + y^2 - 1)) \frac{\partial}{\partial y}$$

el cual posee un ciclo límite en S^1 , luego por el lema 16 no existe una aplicación rectificadora para X en $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Aplicando el lema 17 en (\mathcal{U}, X) , donde $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |(x, y)| < 1\}$, existe una aplicación rectificadora multivaluada para X . \square

2.3. Holonomía e integrales primeras en sectores hiperbólicos.

Recordamos que un campo vectorial X posee un *sector hiperbólico* $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$ si la restricción de X a \mathcal{S} es topológicamente equivalente con el campo vectorial $x(\partial/\partial x) - y(\partial/\partial y)$ en una vecindad del primer cuadrante de la forma $\tilde{\mathcal{S}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq 4xy \leq 1\}$, ver apéndice A.3. Notamos que no todas las componentes de la frontera de \mathcal{S} son trayectorias de X .

Definición 24. Una trayectoria solución ζ de X es una *separatriz* de un sector hiperbólico \mathcal{S} si satisface alguna de las siguientes condiciones:

1. ζ es un punto singular q de X en \mathbb{R}^2 .
2. ζ es una trayectoria regular en \mathbb{R}^2 , que no admite una región paralela.

Definición 25. Dado un campo vectorial X de clase C^∞ y dos segmentos $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset \mathbb{R}^2$ transversales con X , unidos por γ , donde γ admite alguna de las siguientes dos posibilidades:

γ un segmento de trayectoria de X que intersecta a Σ_1 y Σ_2 .

$\gamma = \{\zeta_1 \cup q_1 \cup \zeta_2\}$, la unión de las separatrices de un sector hiperbólico \mathcal{S} , tal que ζ_1, ζ_2 intersectan a Σ_1, Σ_2 respectivamente.

La aplicación de *holonomía* de γ es

$$\begin{aligned} hol_{12} : \Sigma_1 &\rightarrow \Sigma_2 \\ p &\mapsto \Sigma_2 \cap \left\{ \begin{array}{l} \text{trayectoria solución} \\ \text{de } X \text{ que pasa por } p \end{array} \right\} \end{aligned}$$

(donde Σ_1 es suficientemente pequeño para que $hol_{12}(p) \in \Sigma_2$).

Aplicaremos la definición 25 suponiendo que Σ_1 contiene o no a sus puntos extremos, según convenga. La aplicación hol_{12} depende de γ pero ello lo omitimos en nuestra notación. Esta aplicación recibe distintos nombres en la literatura: aplicación de holonomía (ver [10] pág. 62), transformación de monodromía (ver [15] pág. 12) o aplicación de correspondencia (ver [16] pág. 452). El siguiente resultado es válido para Σ_1 considerando sus puntos extremos:

Observación 16. Si la aplicación de holonomía $hol_{12} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$, está bien definida para γ un segmento de trayectoria de X , entonces hol_{12} es difeomorfismo C^∞ . Este hecho sigue del teorema de la caja de flujo larga (ver [34] pág. 93).

Convención: Para el caso $\gamma = \{\zeta_1 \cup q_1 \cup \zeta_2\}$ consideramos un sector hiperbólico \mathcal{S} y suponemos sin pérdida de generalidad (para simplificar la notación) que en sus coordenadas originales, sus separatrices ζ_1, ζ_2 son el eje x y el eje y positivos, respectivamente. Por ello dos transversales a X en \mathcal{S} son:

$$\Sigma_1 = \{(x, 1) \in \mathcal{S} \mid 0 \leq x \leq \delta_1\}, \quad \Sigma_2 = \{(1, y) \in \mathcal{S} \mid 0 \leq y \leq \delta_2\}. \quad (2.6)$$

Hemos incluido los puntos extremos de Σ_1 y Σ_2 de manera que los puntos $(\delta_1, 1)$ y $(1, \delta_2)$ se encuentran en una misma trayectoria de X , mientras que los puntos $(0, 1)$ y $(1, 0)$ están en ζ_1 y ζ_2 , respectivamente. Evidentemente $hol_{12}(0, 1) = (1, 0)$ y por ello es C^0 en dicho punto extremo. Por la observación 16, hol_{12} es difeomorfismo C^∞ en $\Sigma_1 - \{(0, 1)\}$.

Para un sector hiperbólico \mathcal{S} de X , decimos que su aplicación de holonomía $hol_{12} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ es un difeomorfismo si tal aplicación es difeomorfismo incluyendo en el punto extremo $\Sigma_1 \cap \zeta_1$. Las propiedades de diferenciabilidad, condiciones de anulamiento en todas las derivadas o analiticidad de hol_{12} en el punto extremo $\Sigma_1 \cap \zeta_1$, son extremadamente difíciles de estudiar (ver [15] pág. 12, [16] pág. 452). El siguiente resultado relaciona la aplicación de holonomía con una integral primera para X en \mathcal{S} .

Lema 18. Consideramos un sector hiperbólico \mathcal{S} de X con transversales Σ_1 y Σ_2 (incluyendo sus puntos extremos como en (2.6)).

1. Si la aplicación de holonomía $hol_{12} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ es difeomorfismo C^∞ , ella determina una integral primera $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ para X , con $df \neq 0$ en \mathcal{S} .
2. Inversamente, una integral primera f , C^∞ y con $df \neq 0$ en \mathcal{S} , determina la holonomía que resulta ser difeomorfismo C^∞ .

Demostración. Para (1) suponemos que $hol_{12} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ es difeomorfismo C^∞ en el punto extremo $(0, 1) \in \Sigma_1 \cap \zeta_1$, eligiendo δ_1 adecuadamente y reduciendo \mathcal{S} si es necesario. Definimos la función

$$f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{la coordenada } y \text{ del punto} \\ \text{donde la trayectoria de } X \\ \text{que pasa por } p \text{ intersecta a } \Sigma_2 \end{array} \right\},$$

la cual es integral primera para X . Para mostrar que f es C^∞ en todo punto $p \in \mathcal{S}$, tenemos dos posibilidades: p en el interior de \mathcal{S} ó p en alguna separatriz.

Si p está en el interior de \mathcal{S} , por la observación 16 se tiene el resultado deseado.

Si p está en alguna separatriz, requerimos el siguiente desarrollo:

Por simplicidad supongamos p en el eje y positivo y consideramos Σ_3 un segmento horizontal en \mathcal{S} que tiene como punto extremo a p . Por la observación 16 se tiene que la aplicación de holonomía $hol_{13} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_3$ es un difeomorfismo C^∞ . Definimos una nueva aplicación de holonomía $hol_{32} : \Sigma_3 \rightarrow \Sigma_2$, dada por $hol_{32}(p) = (hol_{12} \circ hol_{13}^{-1})(p)$, la cual es difeomorfismo C^∞ , ya que es composición de difeomorfismos C^∞ .

Consideramos $\sigma : [0, \delta_2] \rightarrow \Sigma_2$, C^∞ la parametrización natural de Σ_2 como subvariedad. Definimos $f \doteq (\sigma^{-1} \circ hol_{32})$, la cual es integral primera C^∞ , ya que es composición de funciones C^∞

que son difeomorfismos. Entonces $df \neq 0$ en el punto p , luego concluimos que $df \neq 0$ en \mathcal{S} . El argumento es similar si p está en la otra separatriz de \mathcal{S} . Notamos que con hol_{32} hemos evitado empujar p con el flujo de X a travez del punto singular $q_1 = (0, 0)$.

Para probar el punto (2) en el lema, consideramos las restricciones de f a Σ_1 y Σ_2 las cuales denotamos por $f_1 : \Sigma_1 \rightarrow [0, \delta_0]$ y $f_2 : \Sigma_2 \rightarrow [0, \delta_0]$. Como $df \neq 0$, entonces f_1 y f_2 son difeomorfismos en una variable. Definimos la aplicación de holonomía $hol_{12} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ mediante $hol_{12}(p) = (f_2^{-1} \circ f_1)(p)$. Ella es difeomorfismo C^∞ , ya que es composición de funciones C^∞ que son difeomorfismos. \square

Ejemplo 22. Para el campo silla

$$X = \lambda x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y},$$

con $\lambda \geq 1$, no siempre se cumple que las aplicaciones de holonomía son difeomorfismos C^∞ , cuando se incluyen los puntos extremos de sus transversales. Una integral primera $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ para X está dada por $f(x, y) = xy^\lambda$. Consideramos el sector hiperbólico \mathcal{S} determinado por el primer cuadrante incluyendo su frontera y las transversales Σ_1, Σ_2 dadas por

$$\Sigma_1 = \{(1, y) \in \mathcal{S} \mid 0 \leq y \leq \delta_1\}, \quad \Sigma_2 = \{(x, 1) \in \mathcal{S} \mid 0 \leq x \leq \delta_2\},$$

donde los puntos $(1, \delta_1), (\delta_2, 1)$ se encuentran en una misma trayectoria de X , mientras que los puntos $(1, 0), (0, 1)$ están en las separatrices de X . La aplicación de holonomía $hol_{21} : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$ está dada por $hol_{21}(x, 1) = (1, x^{1/\lambda})$. Evidentemente hol_{21} es difeomorfismo C^∞ (pensando Σ_2 como subvariedad con frontera) si y sólo si $\lambda \equiv 1$. \square

2.4. Aplicación rectificadora en sectores hiperbólicos.

Existen varios casos locales en los que aparecen sectores hiperbólicos, uno de estos es cuando el campo vectorial X posee una silla la cual está formada por cuatro sectores hiperbólicos. Se tiene otro caso cuando X posee una $2k$ -silla la cual está formada por $2(k+1)$ sectores hiperbólicos. Estudiamos la existencia de una aplicación rectificadora para los dos tipos de sillas.

Definición 26. Decimos que un campo vectorial X , de clase C^∞ posee una $2k$ -silla en $q \in \Omega$, con $k \geq 2$, si existe un disco abierto $B(q, r) \subset \Omega$ y un difeomorfismo $F : B(q, r) - \{q\} \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$, de clase C^∞ , tal que

$$F_*X = \Re e \left(\frac{1}{z^k} \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Observación 17. Un campo vectorial X , de clase C^∞ , con una $2k$ -silla en q , no posee una aplicación rectificadora. Para ello suponemos por contradicción que existe tal aplicación rectificadora Ψ . Consideramos un punto $p \in B(q, r) - \{q\}$ en una separatriz ζ cuyo ω -límite es q y Σ el segmento de trayectoria en ζ que se obtiene al mover p con el flujo de X para todo tiempo positivo. Entonces el tiempo positivo para recorrer Σ es infinito. De la existencia de Ψ sigue que $Y = \Psi^*(\partial/\partial y)$ es simetría de X en $B(q, r) - \{q\}$ (ver lema 6). Empujamos Σ con el flujo de Y y obtenemos que su tiempo de recorrido bajo el flujo de X es finito. Ello da la contradicción, ver [23] pág. 46.

Nuestro problema es hallar una aplicación rectificadora en $B(q, r) - \{q\}$ para un campo vectorial X , C^∞ , con una silla en q . Tenemos dos obstrucciones:

1. Los tiempos de llegada o salida de las cuatro separatrices respecto a q deben ser finitos (como se sigue de la prueba de observación 17).
2. La holonomía de los sectores hiperbólicos deben asumir cierta forma precisa.

Para eliminar la obstrucción en (1) debemos reescalar de forma adecuada el campo vectorial X en una vecindad de q , como veremos más adelante en la proposición 5. En particular el campo vectorial reescalado no será C^∞ en q . La obstrucción (2) puede leerse en los valores propios de la silla respectiva.

En los siguientes resultados que involucran la existencia de una aplicación rectificadora para X , C^∞ en sectores hiperbólicos \mathcal{S} , es necesario remover el punto singular q , ya que las aplicaciones rectificadoras no están definidas en los puntos singulares de X . Por abuso de notación llamamos sector hiperbólico \mathcal{S} a un sector hiperbólico al cual se le ha removido el punto singular.

Lema 19. *Consideramos un campo vectorial X , de clase C^∞ en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. En un sector hiperbólico \mathcal{S} de X , las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *La aplicación de holonomía $hol : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ es difeomorfismo C^∞ .*
2. *Existe un factor de reescalamiento $\rho : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que ρX admite una aplicación rectificadora en \mathcal{S} .*

Demostración. (1 \Rightarrow 2). Por la afirmación (1) en lema 18, existe una integral primera $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , para X , cuya diferencial $df \neq 0$ en \mathcal{S} . Aplicamos la correspondencia $\mathbf{c}_1 : \mathcal{I}(X) \rightarrow \mathcal{S}(X)$, ver (1.12) en sección 1.3 y obtenemos una simetría para X

$$\mathbf{c}_1(f) = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|^2} \doteq Y.$$

Denotamos por γ_{12} al segmento de trayectoria de X cuyos extremos son los extremos de Σ_1 y Σ_2 que no están en las separatrices de \mathcal{S} . Utilizando el flujo $v : \Delta \subset \mathbb{R} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, C^∞ de Y , construimos un factor de reescalamiento $\rho : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

Para un punto $p \in \mathcal{S}$, empujamos $X(p)$ con el flujo v hasta la trayectoria γ_{12} . El campo empujado $v_*X(p)$ es colineal con $X(p_0)$, para algún punto p_0 en la traza de γ_{12} , tal que p y p_0 están en la misma trayectoria de Y . Definimos $\rho(p)$ como el escalar requerido para que $v_*(\rho X(p)) = X(p_0)$. La función ρ es C^∞ , ya que los flujos de X y Y son C^∞ .

Al jalar con v la restricción de X en γ_{12} se tiene que $v^*(X) = \rho X$; así ρ es un factor de reescalamiento para X . De ello se sigue que $[\rho X, Y] \equiv 0$ y por el lema 11 concluimos que el campo ρX admite una aplicación rectificadora Ψ en \mathcal{S} .

(2 \Rightarrow 1). Dado que ρX admite una aplicación rectificadora Ψ en \mathcal{S} , entonces existe una integral primera $f : \Psi(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , para $\Psi_*(\rho X)$, tal que $df \neq 0$ en $\Psi(\mathcal{S})$. De ello se sigue que $\Psi \circ f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ es integral primera C^∞ para X , la cual satisface que $d(\Psi \circ f) \neq 0$ en \mathcal{S} . Por la afirmación (2) en el lema 18, la aplicación de holonomía resulta ser difeomorfismo C^∞ en todo Σ_1 . Ello concluye la prueba. \square

Corolario 4. *Consideramos un campo vectorial X con un sector hiperbólico \mathcal{S} . Si la aplicación de holonomía $hol : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ no es difeomorfismo en los extremos de Σ_1 , entonces X no admite una aplicación rectificadora $\Psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ en \mathcal{S} .*

A lo largo de esta sección los resultados obtenidos son válidos para un sector hiperbólico. Nos interesa extender estos resultados a la unión de todos los sectores hiperbólicos que forman la

silla en el punto singular q . Para nuestro siguiente resultado denotamos por \mathcal{U} al interior del conjunto formado por la unión de los cuatro sectores hiperbólicos $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4$ (incluyendo el punto singular q).

Proposición 5. *Para un campo vectorial X , de clase C^∞ en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, que posee una silla en $q \in \Omega$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *Existen un factor de reescalamiento $\rho : \mathcal{U} - \{q\} \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ para X y un difeomorfismo $F : \mathcal{U} - \{q\} \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$, C^∞ , tales que*

$$F_*(\rho X) = \frac{1}{x^2 + y^2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} \right) = \Re e \left(\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

2. *Existe un factor de reescalamiento $\rho : \mathcal{U} - \{q\} \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ para X , tal que ρX admite una aplicación rectificadora en $\mathcal{U} - \{q\}$.*

Demostración. (1 \Rightarrow 2). Consideramos la aplicación dada por $\Psi(x, y) = ((x^2 - y^2)/2, xy)$, ver ejemplo 8 pág. 20, la cual es difeomorfismo C^∞ y rectifica al campo vectorial $F_*(\rho X)$. Se sigue que $\tilde{\Psi} = \Psi \circ F$ es una aplicación rectificadora para ρX en $\mathcal{U} - \{q\}$.

(2 \Rightarrow 1). Supongamos que $\tilde{\Psi} : \mathcal{U} - \{q\} \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ es una aplicación rectificadora para ρX . Sabemos que Ψ es aplicación rectificadora para el campo vectorial

$$\frac{1}{x^2 + y^2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (2.7)$$

La idea de la prueba consiste en usar que Ψ y $\tilde{\Psi}$ son difeomorfismos locales restringiendo ambas aplicaciones a dominios pequeños, con ello $F = \Psi^{-1} \circ \tilde{\Psi}$ tendrá sentido y procediendo por continuación C^∞ (en dicha colección de dominios pequeños) la construcción producirá F en todo $\mathcal{U} - \{q\}$. Veamos los detalles.

Denotamos mediante $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4\}$ a los cuatro sectores hiperbólicos de (2.7) numerados como los cuatro cuadrantes de \mathbb{R}^2 , en sentido contrario a las manecillas del reloj. Análogamente $\{\tilde{\mathcal{S}}_1, \tilde{\mathcal{S}}_2, \tilde{\mathcal{S}}_3, \tilde{\mathcal{S}}_4\}$ son los cuatro sectores hiperbólicos de X , de tal forma que corresponden con los $\{\mathcal{S}_i\}$ bajo un homeomorfismo que preserva la orientación de las trayectorias de (2.7) con las de X . Con ello $\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{S}}_1 \cup \dots \cup \tilde{\mathcal{S}}_4$. Para la construcción del difeomorfismo F consideramos los conjuntos

$$\mathcal{S}_{12} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 - \{\text{eje } x\}, \quad \tilde{\mathcal{S}}_{12} = \tilde{\mathcal{S}}_1 \cup \tilde{\mathcal{S}}_2 - \{\text{separatrices en común a } \tilde{\mathcal{S}}_3 \cup \tilde{\mathcal{S}}_4\}$$

y las restricciones de $\tilde{\Psi}, \Psi$ a los conjuntos $\tilde{\mathcal{S}}_{12}, \mathcal{S}_{12}$ como sigue:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{12} &\doteq \tilde{\Psi}|_{\tilde{\mathcal{S}}_{12}} : \tilde{\mathcal{S}}_{12} \rightarrow (\mathcal{V} - \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}), \\ \Psi_{12} &\doteq \Psi|_{\mathcal{S}_{12}} : \mathcal{S}_{12} \rightarrow (\mathcal{V} - \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}), \end{aligned}$$

ambos son difeomorfismos C^∞ . Así definimos $F_{12} : \tilde{\mathcal{S}}_{12} \rightarrow \mathcal{S}_{12}$ mediante $F_{12} = \Psi_{12}^{-1} \circ \tilde{\Psi}_{12}$, el cual también resulta ser difeomorfismo C^∞ . El proceso se repite para $\mathcal{S}_{23} = \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 - \{\text{eje } y\}$ y $\tilde{\mathcal{S}}_{23} = \tilde{\mathcal{S}}_2 \cup \tilde{\mathcal{S}}_3 - \{\text{separatrices en común a } \tilde{\mathcal{S}}_1 \cup \tilde{\mathcal{S}}_4\}$, obteniéndose $F_{23} = \Psi_{23}^{-1} \circ \tilde{\Psi}_{23}$ en $\tilde{\mathcal{S}}_{23}$, el cual resulta ser un difeomorfismo. Notamos que F_{23} es la extensión de F_{12} a \mathcal{S}_{23} , ya que

$$\left(\Psi_{12}^{-1} \circ \tilde{\Psi}_{12} \right) \Big|_{\tilde{\mathcal{S}}_2} \equiv \left(\Psi_{23}^{-1} \circ \tilde{\Psi}_{23} \right) \Big|_{\tilde{\mathcal{S}}_2}.$$

Continuando con este proceso F_{12}, F_{23}, F_{34} y F_{41} extienden a un difeomorfismo F , C^∞ en todo $\mathcal{U} - \{q\}$, el cual satisface que $F_*(\rho X)$ es igual al campo vectorial dado en (2.7). \square

En el siguiente ejemplo estudiamos un campo vectorial sin puntos singulares en \mathbb{R}^2 que no admite una aplicación rectificadora en \mathbb{R}^2 , ello se debe a que los puntos singulares se encuentran en la línea al infinito y dan origen a sectores hiperbólicos que no admiten una aplicación de holonomía que sea difeomorfismo C^∞ en las separatrices de dichos sectores, ver [33]. Nosotros mostramos de dos formas distintas que el campo vectorial no admite una aplicación rectificadora.

Ejemplo 23. El campo vectorial

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (1 - 2xy) \frac{\partial}{\partial y}$$

no admite una aplicación rectificadora Ψ , C^∞ , en todo \mathbb{R}^2 . Observamos que la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x(1 - xy)$ hace al campo Hamiltoniano, esto es $X = X_f$, a esta integral primera se le conoce como el polinomio de Broughton. Este campo vectorial no posee puntos singulares en \mathbb{R}^2 , pero si tiene dos puntos singulares en la línea al infinito L_∞ , que dan origen a dos sectores hiperbólicos que tienen como separatriz común el eje y . El primero de estos sectores tiene por separatrices a las trayectorias ζ_1, ζ_2 determinadas por la rama de la hipérbola $\{xy = 1 \mid x < 0\}$ y el eje y , respectivamente. El segundo sector tiene por separatriz a la trayectoria ζ_3 determinada por la rama de la hipérbola $\{xy = 1 \mid x > 0\}$ y la trayectoria ζ_2 antes mencionada.

Siguiendo la discusión de la observación 17, la existencia de una aplicación rectificadora Ψ requiere que los tiempos de llegada o salida de las separatrices de los sectores hiperbólicos de X sean finitos. Para encontrar el tiempo empleado en recorrer la separatriz ζ_1 consideramos una parametrización de ella, $\tilde{\zeta}_1(t) = (t, 1/t)$ con $t \in \mathbb{R}^-$, que no es la parametrización del tiempo en X , esto es, $\tilde{\zeta}'_1(t) \neq X|_{\tilde{\zeta}_1(t)}$. Sin embargo para el campo vectorial $t^2(\partial/\partial t)$ en el dominio de $\tilde{\zeta}_1$ se satisface que

$$(\tilde{\zeta}_1)_* \left(t^2 \frac{\partial}{\partial t} \right) = X|_{\tilde{\zeta}_1(t)}.$$

Luego el tiempo en X empleado para recorrer la traza de ζ_1 es infinito cuando ζ_1 se aproxima a ζ_2 . El tiempo en X empleado para recorrer la separatriz ζ_2 es trivialmente infinito en ambos extremos de ella, ya que $X = \partial/\partial y$ en ζ_2 . De manera similar a lo realizado en ζ_1 , el tiempo en X empleado para recorrer la traza de ζ_3 es infinito cuando esta se aproxima a ζ_2 . Con ello los tiempos de llegada y salida de las separatrices de los dos sectores hiperbólicos de X son infinitos, lo cual impide la existencia de una aplicación rectificadora Ψ .

Otra manera de mostrar que X no admite una aplicación rectificadora es utilizando el plano proyectivo real \mathbb{RP}^2 , ver apéndice A.4. Para ello calculamos los campos vectoriales X_{02}, X_{12} en las cartas $\mathbb{R}_{x_0x_2}, \mathbb{R}_{x_1x_2}$, respectivamente.

$$X_{02} = \frac{1}{x_2} \left((3x_0^2 - x_0x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_0} + (2x_0x_2 - x_2^3) \frac{\partial}{\partial x_2} \right),$$

$$X_{12} = \frac{1}{x_2} \left((x_2^2 - 3x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right).$$

Luego los puntos singulares de X se encuentran en la línea al infinito. Procediendo por contradicción suponemos que existe una aplicación rectificadora $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ para X . Consideramos una transversal Σ y las separatrices $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$. Como Ψ es rectificadora, la trayectoria $\Psi(\Sigma)$ recorre su futuro en un tiempo finito. En particular la trayectoria $\Psi(\zeta_2)$ tiene tiempo de recorrido finito. Ello contradice que la función rectificadora preserva los tiempos de recorrido, ya que ζ_2 tiene tiempo de recorrido infinito (ver figura 1). \square

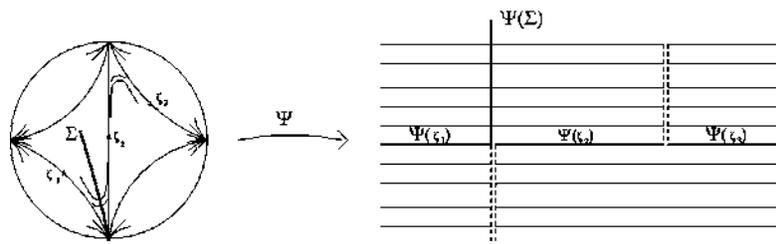


Figura 1.

El siguiente resultado permite conocer la existencia de una aplicación rectificadora para un campo vectorial con una silla cuya parte lineal es invertible. En algunas ocasiones es necesario reescalar la velocidad de dicho campo vectorial

Proposición 6. *Para un campo vectorial X , de clase C^∞ en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, que posee una silla en $q \in \Omega$, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *Existe un difeomorfismo $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$, C^∞ , tal que $F_*X = \lambda x(\partial/\partial x) - \lambda y(\partial/\partial y)$ y los valores propios de DX en q son $\pm\lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.*
2. *Existe un factor de reescalamiento $\rho : \mathcal{U} - \{q\} \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , para X , tal que ρX admite una aplicación rectificadora $\Psi : \mathcal{U} - \{q\} \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$.*

Demostración. (1 \Rightarrow 2). Sabemos que la función $\rho_1 : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\rho_1(x, y) = 1/(\lambda x^2 + \lambda y^2)$ es un factor de reescalamiento C^∞ para F_*X , de manera que $\rho_1(F_*X)$ admite una aplicación rectificadora $\Psi_1 : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathcal{V}_1 \subset \mathbb{R}^2$. Consideramos $\rho \doteq \rho_1 \circ F$ el cual es un factor de reescalamiento para X . Luego $\Psi \doteq \Psi_1 \circ F$ es aplicación rectificadora para ρX en $\mathcal{U} - \{q\}$.

(2 \Rightarrow 1). Como Ψ es una aplicación rectificadora para ρX , entonces los valores propios de DX en q son $\pm\lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Para mostrarlo, recordamos que la parte lineal de X asume salvo cambio de coordenadas una de las siguientes formas:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Por el teorema de Hartman-Grobman la matriz M_1 es tal que su campo vectorial asociado en q es pozo o fuente, hecho por el cual descartamos M_1 , ya que ello contradice que X posee una silla C^∞ . Análogamente si $\lambda_1 \neq 0$, la matriz M_2 da origen a pozos o fuentes. Si $\lambda_1 = 0$, la matriz M_2 da origen a centros, luego por la Propiedad 2 en [4] pág 310, el índice del campo vectorial

$$X_\epsilon = (-\lambda_2 y + \epsilon R_{12}(x, y)) \frac{\partial}{\partial x} + (\lambda_2 x + \epsilon R_{22}(x, y)) \frac{\partial}{\partial y},$$

donde R_{12} y R_{22} denotan los términos con grado mayor o igual a 2, es invariante bajo transformaciones continuas respecto al parámetro $0 \leq \epsilon \leq 1$. Descartamos M_2 ya que el índice del punto singular de X para $\epsilon = 0$ es $+1$, mientras que para $\epsilon = 1$ es -1 .

La matriz M_3 da origen a pozos, fuentes o sillas. Nos interesa que $\lambda_1\lambda_2 < 0$, ya que por el ejemplo 22 tenemos que $\lambda_1 = -\lambda_2$.

Necesitamos encontrar un difeomorfismo $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ que envíe X al campo vectorial $\lambda x(\partial/\partial x) - \lambda y(\partial/\partial y)$. Por la proposición 5 existe un difeomorfismo $F : \mathcal{U} - \{q\} \rightarrow \mathcal{V}$, C^∞ , que envía X al campo vectorial $(1/(x^2 + y^2))(x(\partial/\partial x) - y(\partial/\partial y))$. Debemos mostrar que F es difeomorfismo C^∞ en q , para ello usamos dos difeomorfismos: una rotación y un movimiento

de cartas. Denotamos mediante $F_1 : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}_1$ a la composición de esos dos difeomorfismos. Suponemos sin pérdida de generalidad que la variedad inestable de X coincide con el eje x y el punto singular con el origen. El campo vectorial $(F_1)_*X$ en el eje x tiene parte lineal $\lambda > 0$ y es no lineal, esto es

$$X_1 \doteq (F_1)_*X|_{\{\text{eje } x\}} = (\lambda x + R_{12}(x)) \frac{\partial}{\partial x},$$

donde $R_{12}(x)$ denota los términos en x con grado mayor o igual a 2. Por el teorema 3.4 y el ejemplo 6.1 en [6], existe un difeomorfismo $h(x)$ con $h(0) = 0$ que lo linealiza. Consideramos el difeomorfismo local $F_2 : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ alrededor del origen dado por $F_2(x, y) = (h(x), y)$ y a partir del cual obtenemos

$$X_2 \doteq (F_2)_*X_1 = \lambda x \frac{\partial}{\partial x} - (\lambda y + R_{22}(x, y)) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Más aún existe un difeomorfismo $F_3 : \mathcal{V}_2 \rightarrow \mathcal{V}$ el cual satisface que $F_3(x, 0) = (x, 0)$ y es C^∞ a lo largo del eje x . Así $F_3 = F \circ F_1^{-1} \circ F_2^{-1}$ es C^∞ y por tanto F es C^∞ a lo largo de la variedad inestable. De manera análoga se muestra que F es C^∞ a lo largo de la variedad estable. De ello se sigue que F es C^∞ en el punto singular. Ello concluye la prueba. \square

2.5. Ejemplos de aplicación rectificadora cerca de sillas.

En esta sección damos ejemplos de campos vectoriales con sectores hiperbólicos, encontramos las aplicaciones de holonomía y aplicando los resultados obtenidos en la sección 2.4 mostramos si existe o no una aplicación rectificadora Ψ para el campo vectorial (salvo reescalamiento); siempre que sea posible daremos la fórmula explícita para Ψ . Los siguientes ejemplos son afirmativos.

Ejemplo 24. *La cúspide; un campo vectorial con ambos valores propios nulos, parte lineal no nula y dos sectores hiperbólicos.*

Consideramos

$$X = y \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y},$$

el cual posee una integral primera $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , dada por $f(x, y) = x^3/3 - y^2/2$. El nombre del campo vectorial se sigue del hecho que sus separatrices están determinadas por la curva de nivel $\{x^3/3 - y^2/2 = 0\}$, la cual es conocida como la cúspide. Las regiones a la derecha e izquierda de la cúspide determinan los dos sectores hiperbólicos de X . Calculamos la aplicación de holonomía para el sector hiperbólico \mathcal{S} a la derecha de la cúspide. Consideramos las transversales a X ,

$$\Sigma_1 = \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x\}, \quad \Sigma_2 = \{(x, -1) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x\}$$

y denotamos mediante f_1, f_2 a las restricciones de f a Σ_1 y Σ_2 , como en la prueba del punto (2) del lema 18. La aplicación de holonomía $hol_{12} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ está dada por $hol_{12}(x, 1) = (f_2^{-1} \circ f_1)(x, 1) = (x, -1)$, la cual es difeomorfismo C^∞ , incluso en el punto extremo $(1, 1) \in \Sigma_1$. El cálculo de la aplicación de holonomía para el sector hiperbólico a la izquierda de la cúspide es similar.

Notamos que las curvas de nivel de la función $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = ye^x$, son transversales a X en todo \mathbb{R}^2 . Aplicando las fórmulas dadas en el caso 3 de la sección 1.9 tenemos que la aplicación $\Psi : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$, dada por $\Psi(x, y) = (g(x, y), f(x, y))$ es aplicación rectificadora C^∞ para X , salvo reescalamiento por $1/\det(D(g, f))$, esto es $\Psi_*((e^{-x}/(x^2 + y^2))X) = \partial/\partial x$. \square

Ejemplo 25. *Un campo vectorial no lineal con valores propios $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.*

Consideramos

$$X = (x + x^2) \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y},$$

el cual posee una integral primera $f : \mathbb{R}^2 - \{x = -1\} \rightarrow \mathbb{R}, C^\infty$, dada por $f(x, y) = xy/(x + 1)$. Las separatrices de X están determinadas por el eje y , el eje x positivo y el segmento $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x \leq 0\}$, luego X posee cuatro sectores hiperbólicos alrededor del origen. Nos interesan las aplicaciones de holonomía en los sectores hiperbólicos, para ello consideramos las transversales Σ_1, Σ_2 a X y los segmentos de separatrices que por abuso de notación denotamos mediante ζ_1, ζ_2 como sigue

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \left\{ (x, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \right\}, & \Sigma_2 &= \left\{ (1, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \frac{2}{3} \right\}, \\ \zeta_1 &= \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}, & \zeta_2 &= \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1\}. \end{aligned}$$

Con ello construimos un sector hiperbólico \mathcal{S} , que tiene por frontera a $(0, 0)$, ζ_1 , ζ_2 , Σ_1 , Σ_2 y el segmento de trayectoria de X que une los puntos extremos $(1/2, 1), (1, 2/3)$ de Σ_1 y Σ_2 . Denotamos mediante f_1, f_2 a las restricciones de f a Σ_1 y Σ_2 , como en la prueba del punto (2) del lema 18. La aplicación de holonomía $hol_{12} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ está dada por $hol_{12}(x, 1) = (f_2^{-1} \circ f_1)(x, 1) = (1, 2x/(x + 1))$, la cual es difeomorfismo C^∞ , incluso en el punto extremo $(0, 1) \in \Sigma_1$. El cálculo de la aplicación de holonomía para los tres sectores hiperbólicos restantes es similar. De ello se sigue la existencia de un factor de reescalamiento $\rho : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ y una aplicación rectificadora para ρX en cada sector hiperbólico \mathcal{S} ; más aún la proposición 6 garantiza la existencia de un abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al origen, un factor de reescalamiento $\rho_1 : \mathcal{U} - \{q\} \rightarrow \mathbb{R}$ y una aplicación rectificadora para $\rho_1 X$ en $\mathcal{U} - \{q\}$. \square

Ejemplo 26. *Un campo vectorial no lineal y con parte lineal nula.*

Consideramos

$$X = x^3 \frac{\partial}{\partial x} - y^3 \frac{\partial}{\partial y},$$

el cual posee una integral primera $f : \mathbb{R}^2 - \{xy = 0\} \rightarrow \mathbb{R}, C^\infty$, dada por $f(x, y) = (x^2 + y^2)/(x^2 y^2)$. Las separatrices de X están determinadas por los ejes coordenados x e y , luego X posee cuatro sectores hiperbólicos alrededor del origen. Nos interesan las aplicaciones de holonomía en los sectores hiperbólicos, para ello consideramos las transversales Σ_1, Σ_2 a X y los segmentos de separatrices que por abuso de notación denotamos mediante ζ_1, ζ_2 como sigue

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \left\{ (x, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \right\}, & \Sigma_2 &= \left\{ (1, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \right\} \\ \zeta_1 &= \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}, & \zeta_2 &= \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1\}. \end{aligned}$$

Con ello construimos un sector hiperbólico \mathcal{S} , que tiene por frontera a $(0, 0)$, ζ_1 , ζ_2 , Σ_1 , Σ_2 y el segmento de trayectoria de X que une los puntos extremos $(1/2, 1), (1, 1/2)$ de Σ_1 y Σ_2 . Denotamos mediante f_1, f_2 a las restricciones de f a Σ_1 y Σ_2 , como en la prueba del punto (2) del lema 18. La aplicación de holonomía $hol_{12} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ está dada por $hol_{12}(x, 1) = (f_2^{-1} \circ f_1)(x, 1) = (1, x)$, la cual es difeomorfismo C^∞ , incluso en el punto extremo $(0, 1) \in \Sigma_1$. El cálculo de la aplicación de holonomía para los tres sectores hiperbólicos restantes es similar. De ello se sigue existe un factor de reescalamiento $\rho : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ y una aplicación rectificadora para ρX en cada sector hiperbólico \mathcal{S} ; más aún la proposición 6 garantiza la existencia de un abierto

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al origen, un factor de reescalamiento $\rho_1 : \mathcal{U} - \{q\} \rightarrow \mathbb{R}$ y una aplicación rectificadora para $\rho_1 X$ en $\mathcal{U} - \{q\}$. \square

En los siguientes ejemplos la aplicación de holonomía resulta no ser difeomorfismo C^∞ en los extremos de las transversales Σ_1, Σ_2 a X .

Ejemplo 27. *Un campo vectorial con un sector hiperbólico al infinito, ver [33] pág. 11-12.*
Consideramos

$$X = -x^4 \frac{\partial}{\partial x} + (x^3 y + 2xy + 2) \frac{\partial}{\partial y},$$

el cual posee una integral primera $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , dada por $f(x, y) = (xy + 1)e^{-1/x^2}$. Las separatrices de X están determinadas por el eje y y las dos ramas de la hipérbola $\{xy = -1\}$, luego X posee dos sectores hiperbólicos en la línea al infinito L_∞ (ver apéndice A.4). Nos interesan las aplicaciones de holonomía en los sectores hiperbólicos, para ello consideramos las transversales Σ_1, Σ_2 a X y los segmentos de separatrices que por abuso de notación denotamos mediante ζ_1, ζ_2 como sigue

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \left\{ (x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \right\}, & \Sigma_2 &= \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq e^{-3} - 1\}, \\ \zeta_1 &= \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}, & \zeta_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = -1 \text{ con } 0 \leq x \leq 1\}. \end{aligned}$$

Con ello construimos un sector hiperbólico \mathcal{S} , que tiene por frontera a ∞ , $\zeta_1, \zeta_2, \Sigma_1, \Sigma_2$ y el segmento de trayectoria de X que une los puntos extremos $(1, 1/2), (1, e^{-3} - 1)$ de Σ_1 y Σ_2 . Denotamos mediante f_1, f_2 a las restricciones de f a Σ_1 y Σ_2 , como en la prueba del punto (2) del lema 18. La aplicación de holonomía $hol_{12} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ está dada por $hol_{12}(x, 0) = (f_2^{-1} \circ f_1)(x, 0) = (1, e^{(1-1/x^2)} - 1)$, la cual es C^∞ en Σ_1 pero no es difeomorfismo en el punto extremo $(0, 0)$, ya que la derivada de $e^{(1-1/x^2)} - 1$ se anula en dicho punto. Del corolario 4 se sigue que X no admite una aplicación rectificadora en el sector hiperbólico \mathcal{S} . \square

Ejemplo 28. *La silla-nodo; un campo vectorial con valores propios $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$, parte lineal no nula y dos sectores hiperbólicos.*

Consideramos

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y},$$

el cual posee una integral primera $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , dada por $f(x, y) = ye^{1/x}$. Las separatrices de X están determinadas por el eje y y la parte negativa del eje x , luego X posee dos sectores hiperbólicos y uno parabólico alrededor del origen. Nos interesan las aplicaciones de holonomía en los sectores hiperbólicos, para ello consideramos las transversales Σ_1, Σ_2 a X y los segmentos de separatrices que por abuso de notación denotamos mediante ζ_1, ζ_2 como sigue

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 0\}, & \Sigma_2 &= \{(-1, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq e^{-1}\}, \\ \zeta_1 &= \left\{ (x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \right\}, & \zeta_2 &= \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1\}. \end{aligned}$$

Con ello construimos un sector hiperbólico \mathcal{S} , que tiene por frontera a $(0, 0)$, $\zeta_1, \zeta_2, \Sigma_1, \Sigma_2$ y el segmento de trayectoria de X que une los puntos extremos $(-1/2, 1), (-1, e^{-1})$ de Σ_1 y Σ_2 . Denotamos mediante f_1, f_2 a las restricciones de f a Σ_1 y Σ_2 , como en la prueba del punto (2) del lema 18. La aplicación de holonomía $hol_{12} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ está dada por $hol_{12}(x, 1) = (f_2^{-1} \circ f_1)(x, 1) =$

$(-1, e^{1+1/x})$, la cual es C^∞ en Σ_1 pero no es difeomorfismo en el punto extremo $(0, 1)$, ya que la derivada de $e^{1+1/x}$ se anula en dicho punto. Del corolario 4 se sigue que X no admite una aplicación rectificadora en \mathcal{S} . \square

Ejemplo 29. *Un campo vectorial no lineal con valores propios $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$.*

Consideramos

$$X = (x + x^2) \frac{\partial}{\partial x} - 2y \frac{\partial}{\partial y},$$

el cual posee una integral primera $f : \mathbb{R}^2 - \{x = -1\} \rightarrow \mathbb{R}, C^\infty$, dada por $f(x, y) = x^2 y / (x + 1)^2$. Las separatrices de X están determinadas por el eje y , el eje x positivo y el segmento $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x \leq 0\}$, luego X posee cuatro sectores hiperbólicos alrededor del origen. Nos interesan las aplicaciones de holonomía en los sectores hiperbólicos, para ello consideramos las transversales Σ_1, Σ_2 a X y los segmentos de separatrices que por abuso de notación denotamos mediante ζ_1, ζ_2 como sigue

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \left\{ (x, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \right\}, & \Sigma_2 &= \left\{ (1, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \frac{4}{9} \right\}, \\ \zeta_1 &= \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}, & \zeta_2 &= \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1\}. \end{aligned}$$

Con ello construimos un sector hiperbólico \mathcal{S} , que tiene por frontera a $(0, 0), \zeta_1, \zeta_2, \Sigma_1, \Sigma_2$ y el segmento de trayectoria de X que une los puntos extremos $(1/2, 1), (1, 4/9)$ de Σ_1 y Σ_2 . Denotamos mediante f_1, f_2 a las restricciones de f a Σ_1 y Σ_2 , como en la prueba del punto (2) del lema 18. La aplicación de holonomía $hol_{12} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ está dada por $hol_{12}(x, 1) = (f_2^{-1} \circ f_1)(x, 1) = (1, 4x^2 / (x + 1)^2)$, la cual es C^∞ en Σ_1 pero no es difeomorfismo en el punto extremo $(0, 1)$, ya que la derivada de $4x^2 / (x + 1)^2$ se anula en dicho punto. Del corolario 4 se sigue que X no admite una aplicación rectificadora en el sector hiperbólico \mathcal{S} . \square

Ejemplo 30. *Un campo vectorial no lineal con valores propios $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$.*

Consideramos

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} - y^3 \frac{\partial}{\partial y},$$

el cual posee una integral primera $f : \mathbb{R}^2 - \{xy = 0\} \rightarrow \mathbb{R}, C^\infty$, dada por $f(x, y) = (1 - 2y^2 \ln(x)) / y^2$. Las separatrices de X están determinadas por los ejes x y y , luego X posee cuatro sectores hiperbólicos alrededor del origen. Nos interesan las aplicaciones de holonomía en los sectores hiperbólicos, para ello consideramos las transversales Σ_1, Σ_2 a X y los segmentos de separatrices que por abuso de notación denotamos mediante ζ_1, ζ_2 como sigue

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \left\{ (x, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \right\}, & \Sigma_2 &= \left\{ (1, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \ln 4}} \right\}, \\ \zeta_1 &= \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}, & \zeta_2 &= \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1\}. \end{aligned}$$

Con ello construimos un sector hiperbólico \mathcal{S} , que tiene por frontera a $(0, 0), \zeta_1, \zeta_2, \Sigma_1, \Sigma_2$ y el segmento de trayectoria de X que une los puntos extremos $(1/2, 1), (1, 1/\sqrt{1 + \ln 4})$ de Σ_1 y Σ_2 . Denotamos mediante f_1, f_2 a las restricciones de f a Σ_1 y Σ_2 , como en la prueba del punto (2) del lema 18. La aplicación de holonomía $hol_{12} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ está dada por $hol_{12}(x, 1) = (f_2^{-1} \circ f_1)(x, 1) = (1, 1/\sqrt{1 - 2 \ln(x)})$, la cual no es C^0 en el punto extremo $(0, 1) \in \Sigma_1$. Del corolario 4 se sigue que X no admite una aplicación rectificadora en \mathcal{S} . \square

CAPÍTULO 2. EXISTENCIA DE APLICACIÓN RECTIFICADORA Y SUS OBSTRUCCIONES

Para finalizar esta sección, en la siguiente tabla comparamos una silla lineal con una silla analítica compleja.

<p>Silla real C^∞ con valores propios $\lambda, -\lambda$</p> $X = \lambda x \frac{\partial}{\partial x} - \lambda y \frac{\partial}{\partial y}.$	<p>Silla analítica compleja</p> $X = \Re e \left(\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{1}{x^2+y^2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} \right).$
<p>Es campo vectorial Hamiltoniano de $f(x, y) = -\lambda xy$.</p>	<p>No es campo vectorial Hamiltoniano pero posee integral primera $f(x, y) = xy$.</p>
<p>No posee aplicación rectificadora en vecindades del origen.</p>	<p>Posee aplicación rectificadora $\Psi(x, y) = \left(\frac{x^2-y^2}{2}, xy \right)$.</p>
<p>La integral primera f es función de Morse.</p>	<p>Las componentes de la aplicación rectificadora Ψ son funciones de Morse.</p>
<p>El flujo preserva áreas.</p>	<p>El flujo preserva áreas.</p>
<p>Simetría transversal $\mathfrak{c}_1(f) = \left(\frac{1}{\lambda(x^2+y^2)} \right) \left(y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) \doteq Y_1$.</p>	<p>Simetría transversal $-\Im m \left(\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{x^2+y^2} \right) \left(y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) \doteq Y_1$.</p>
<p>Simetría radial (con alineamientos en $\{xy = 0\}$) $Y_2 = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$.</p>	<p>Simetría radial (con alineamientos en $\{xy = 0\}$) $Y_2 = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$.</p>
<p>Conmutadores $[X, Y_1] = \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} X$, $[X, Y_2] \equiv 0$.</p>	<p>Conmutadores $[X, Y_1] \equiv 0$, $[X, Y_2] = -2X$.</p>
<p>Y_1-tiempo $\mathfrak{c}_2(Y_1) = xy \doteq f_1$.</p>	<p>Y_1-tiempo $\mathfrak{c}_2(Y_1) = xy \doteq f_1$.</p>
<p>Y_2-tiempo $\mathfrak{c}_2(Y_2) = \frac{1}{2} \ln(xy) \doteq f_2$.</p>	<p>Y_2-tiempo $\mathfrak{c}_2(Y_2) = \frac{1}{2} \ln(xy) \doteq f_2$.</p>

Capítulo 3

Integrabilidad global

Para fijar la notación trabajamos con campos vectoriales e integrales primeras, ambos de clase C^∞ . Nuestro resultado principal en este capítulo (teorema 2) describe un dominio máximo donde existe una integral primera f para un campo vectorial X en \mathbb{R}^2 ; f se considera univaluada y no idénticamente constante en subconjuntos abiertos. El resultado describe la obstrucción topológica a la existencia de una integral primera f . Dicha obstrucción se encuentra en ciertas trayectorias y/o gráficas límite de X que llamamos atractores, es decir, tal f no puede existir en una vecindad de un atractor de X .

3.1. Existencia de integral primera global.

Para enunciar el resultado principal de este capítulo, requerimos los siguientes conceptos

Definición 27. El conjunto de *atractores* de X en \mathbb{R}^2 denotado mediante $Atrac(X)$, consta de:

1. Los puntos singulares de X que son: pozo o fuente o admiten al menos un sector de tipo parabólico o elíptico (ver apéndice A.3).
2. Las trayectorias periódicas y/o gráficas de X con aplicación de primer retorno distinta de la identidad.

Un resultado de existencia de una integral primera para un campo vectorial X con un número finito de puntos singulares y sin la presencia de atractores se debe a L. Mazzi y M. Sabatini, ver [29]. Estamos interesados en encontrar una integral primera permitiendo la presencia de atractores de X . Para esto es necesario dar una definición precisa de separatriz en $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ que sea acorde con la definición 24.

Definición 28. Decimos que una trayectoria $\zeta \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ de X es una *separatriz* si satisface alguna de las siguientes condiciones:

1. ζ es punto singular de X en \mathbb{R}^2 .
2. $\zeta \subset L_\infty$ es punto singular al infinito de X (ver apéndice A.4, definición 41).
3. ζ es trayectoria regular o periódica en \mathbb{R}^2 , que no está contenida en una región paralela.
4. $\zeta \subset L_\infty$ es trayectoria regular al infinito de X (ver apéndice A.4, definición 42).

Con todo lo anterior, podemos enunciar el resultado principal de este capítulo.

Teorema 2. *Consideramos un campo vectorial X , de clase C^∞ en \mathbb{R}^2 , tal que posee un número finito de separatrices en $\mathbb{R}P^2$. Entonces X admite una integral primera univaluada*

$$f : \mathbb{R}^2 - \text{Atrac}(X) \longrightarrow \mathbb{R},$$

de clase C^∞ , con $df = 0$ en a lo más una colección finita de trayectorias.

Es posible construir integrales primeras en el interior de las regiones canónicas (ver definición 19 en sección 2.1 para el concepto de región canónica), dichas integrales primeras no son únicas. Como \mathbb{R}^2 es no compacto, puede darse el caso que las regiones canónicas se acumulen en el infinito. Para tener control de X en el infinito, consideramos la foliación $\mathcal{F}(X)$ de X en $\mathbb{R}P^2$.

Notamos que la integral primera f no puede extender a los atractores de X . Supongamos por contradicción que f si extiende a un atractor, entonces f es constante en el interior de la región canónica que intersecta a la cuenca de atracción cuyo α -límite es dicho atractor.

Por esta razón no consideramos en nuestro estudio a los atractores, pero permitimos $df = 0$ en a lo más una colección finita de trayectorias.

Demostración del teorema 2. Ella consta de cuatro pasos:

Paso 1. Mostramos que $\mathbb{R}^2 - \{\text{separatrices de } X\}$ es unión de regiones canónicas.

Paso 2. Mostramos que existe una transversal C^∞ a X en cada región canónica.

Paso 3. A partir de la transversal en cada región canónica construimos una integral primera, tal que en su frontera menos los atractores de X , los valores de la integral primera y de todas sus derivadas son cero.

Paso 4. Cuando dos regiones canónicas posean una frontera común (que no es atractor), verificamos que la integral primera extiende C^∞ en dicha frontera.

En las siguientes secciones 3.2 a 3.5 desarrollamos cada paso en la sección respectiva.

3.2. Descomposición en regiones canónicas.

En esta sección mostramos que al remover las separatrices de X del dominio \mathbb{R}^2 , el resultado es unión de regiones canónicas.

Lema 20. *Consideramos un campo vectorial X , de clase C^∞ . Si X posee un número finito de separatrices en $\mathbb{R}P^2$, entonces \mathbb{R}^2 se descompone en un número finito de regiones canónicas (\mathcal{U}_i, X) y separatrices ζ_j de X .*

$$\mathbb{R}^2 = \left(\bigcup_{i \in \mathcal{A}} (\mathcal{U}_i, X) \right) \cup \left(\bigcup_{j \in \mathcal{B}} \zeta_j \right).$$

Demostración. Removiendo todas las separatrices de X , obtenemos un número finito de componentes conexas $\mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^2$, cada una de las cuales es abierta. Debemos mostrar que en cada \mathcal{U}_i solamente pueden haber trayectorias de un mismo tipo: regulares o periódicas. Con ello construimos un homeomorfismo de todo \mathcal{U}_i a \mathbb{R}^2 ó $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ que satisface el caso respectivo en la definición de región canónica para tal \mathcal{U}_i . Veamos los detalles:

Procedemos por contradicción. Supongamos $\gamma_1 : (\epsilon, \delta) \rightarrow \mathcal{U}_i$, $\gamma_2 : [\epsilon, \delta] \rightarrow \mathcal{U}_i$ trayectorias regular y periódica de X (esto es, las imágenes de γ_1, γ_2 en \mathcal{U}_i son homeomorfas a \mathbb{R} y al círculo S^1

respectivamente (ver Notaciones y convenciones pág. II) y $\sigma : [0, 1] \rightarrow \Sigma \subset \mathcal{U}_i$ trayectoria transversal a X que intersecta a γ_1, γ_2 y tal que partiendo de γ_2 sobre Σ , γ_1 es la primera trayectoria regular que intersecta a Σ . Construimos regiones paralelas para las trayectorias periódicas entre γ_2 y γ_1 . Como Σ es compacto, existe una colección finita $\{\mathcal{U}_{i_1}, \dots, \mathcal{U}_{i_n}\}$ de regiones paralelas que cubren a Σ . Para cada \mathcal{U}_{ij} con $j = 1, \dots, n$, existen homeomorfismos $F_j : \mathcal{U}_{ij} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ que envían trayectorias de X en \mathcal{U}_{ij} a círculos centrados en el origen en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. También existen homeomorfismos $G_j : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathcal{A}_j$ con $\mathcal{A}_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid j - 1 < x^2 + y^2 < j\}$ para $j = 1, \dots, n - 1$ y $\mathcal{A}_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid n - 1 < x^2 + y^2\}$ que envían círculos centrados en el origen en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ a círculos en \mathcal{A}_j .

Componiendo los homeomorfismos anteriores obtenemos la colección $\{G_j \circ F_j\}$ que da origen a un homeomorfismo $F : \{\mathcal{U}_{i_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{i_n}\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$; con ello la unión de \mathcal{U}_{ij} es una región paralela de γ_2 que tiene por frontera a γ_1 . Luego γ_1 es separatriz de X , lo cual no puede suceder ya que \mathcal{U}_i no contiene separatrices. Así \mathcal{U}_i solo posee trayectorias de un mismo tipo.

Construimos un homeomorfismo $F : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Para ello suponemos que \mathcal{U}_i solo posee trayectorias periódicas. Consideramos $\sigma : (\epsilon, \delta) \rightarrow \Sigma \subset \mathcal{U}_i$ trayectoria del campo vectorial ortogonal a X en \mathcal{U}_i . Notamos que el dominio de σ puede incluso tener extremos infinitos, por lo que no siempre es posible cubrir Σ con una colección finita de regiones paralelas, pero si con una colección numerable de ellas que denotamos por \mathcal{U}_{ik} con $k = 1, 2, \dots$ y cuya unión es \mathcal{U}_i . Al igual que en la primera parte de la prueba, existe una colección numerable de homeomorfismos $\{G_k \circ F_k : \mathcal{U}_{ik} \rightarrow \mathcal{A}_k\}$ con $\mathcal{A}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid k - 1 < x^2 + y^2 < k\}$ que envían trayectorias de \mathcal{U}_{ik} en círculos de \mathcal{A}_k . A partir de esta colección se obtiene un homeomorfismo $F : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$; con ello \mathcal{U}_i es una región paralela máxima, esto es \mathcal{U}_i es una región canónica.

De manera similar se puede mostrar que si \mathcal{U}_i sólo posee trayectorias regulares, entonces \mathcal{U}_i es una región canónica. \square

3.3. Transversales C^∞ en regiones canónicas.

En esta sección mostramos que existe una transversal C^∞ a X en cada región canónica. El enunciado preciso es como sigue:

Lema 21. *Para (\mathcal{U}_i, X) región canónica (banda, anillo o pozo-fuente) existe una trayectoria transversal $\sigma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}_i$, de clase C^∞ , que intersecta exactamente una vez a cada trayectoria de X en \mathcal{U}_i .*

Demostración. El resultado es fácil de obtener para el caso en que la trayectoria transversal es continua: La pareja $(\mathbb{R}^2, \partial/\partial x)$ admite una trayectoria continua que intersecta exactamente una vez a cada trayectoria de $\partial/\partial x$. Por la definición 19 la pareja (\mathcal{U}_i, X) es una banda si es topológicamente equivalente a $(\mathbb{R}^2, \partial/\partial x)$, de ello se sigue que existe una trayectoria continua $\eta : I \rightarrow \mathcal{U}_i$ que intersecta exactamente una vez a cada trayectoria de X en \mathcal{U}_i . De manera análoga se obtiene el resultado para el caso en que (\mathcal{U}_i, X) es un anillo o un pozo-fuente.

La construcción de la trayectoria transversal σ la realizamos en dos etapas: Primero extendemos η a la frontera de \mathcal{U}_i . Segundo utilizamos una colección de cajas de flujo que cubre a la traza de η y reemplazamos en el dominio de cada caja de flujo, el trozo respectivo de η por una trayectoria σ_j, C^∞ . Con ello se obtiene una colección de trayectorias $\{\sigma_j\}$, que extienden C^∞ entre sí y producen la trayectoria $\sigma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}_i$ deseada. A continuación enlistamos los pasos a seguir en cada región canónica:

(\mathcal{U}_i, X) es un pozo–fuente: reemplazamos η por $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, de clase C^∞ .

(\mathcal{U}_i, X) es una banda: extendemos η a la frontera de \mathcal{U}_i en $\mathbb{R}P^2$,
reemplazamos η por $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}P^2$, de clase C^∞ .

(\mathcal{U}_i, X) es un anillo: extendemos η a la frontera de \mathcal{U}_i en $\mathbb{R}P^2$,
reemplazamos η por $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}P^2$, de clase C^∞ .

Veamos los detalles.

(\mathcal{U}_i, X) es un pozo–fuente.

Denotamos por $\eta : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}_i$, la trayectoria cerrada C^0 que intersecta exactamente una vez a cada trayectoria de X en \mathcal{U}_i . A partir de ella vamos a construir la transversal σ deseada.

Reemplazamos η por $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, de clase C^∞ :

Como la traza de η es compacta, existe una colección finita de cajas de flujo $\{\Phi_j : \mathcal{V}_j \subset \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid (\Phi_j)_* X|_{\mathcal{V}_j} = \partial/\partial x, j = 1, \dots, n\}$ que la cubren. Elegimos n puntos p_j en \mathcal{U}_i colocados de manera cíclica sobre η , de manera que $p_j \in \mathcal{V}_j \cap \mathcal{V}_{j+1}$, asumiendo que $\mathcal{V}_{n+1} = \mathcal{V}_1$.

Para reemplazar en \mathcal{V}_1 el trozo de η con extremos p_n, p_1 , consideramos en $\Phi_1(\mathcal{V}_1)$ un segmento de recta $\eta_1 : [0, \delta_1] \rightarrow \Phi_1(\mathcal{V}_1)$ con extremos $\Phi_1(p_n), \Phi_1(p_1)$. La trayectoria $\Phi_1^{-1} \circ \eta_1 : [0, \delta_1] \rightarrow \mathcal{V}_1$ es C^∞ y transversal a X . En \mathcal{V}_1 reemplazamos el trozo de η con extremos p_n, p_1 , por $\Phi_1^{-1} \circ \eta_1$. Para el siguiente reemplazo observamos que en la imagen $\Phi_2(\mathcal{V}_2)$, la trayectoria $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1} \circ \eta_1 : (\epsilon_1, \delta_1] \rightarrow \Phi_2(\mathcal{V}_2)$ es C^∞ y transversal a $\partial/\partial x$. Por el teorema de la función implícita existe un dominio adecuado donde la trayectoria anterior se reescribe como $(k_{21}(t), t)$, con k_{21} función C^∞ en una variable. Por ello existen todas las derivadas de k_{21} en el punto extremo de su dominio, las cuales por abuso de notación denotamos por α_i ; ellas expresan el comportamiento C^∞ de $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1} \circ \eta_1$ en $\Phi_2(p_1)$. Así nuestro problema de extender la trayectoria $\Phi_1^{-1} \circ \eta_1$ se reduce a extender la función k_{21} . Para ello usamos:

Observación 18. *El teorema de Besicovitch (ver [22] pág. 55), afirma que dadas dos colecciones de números reales $\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}$ con $i = 0, 1, 2, \dots$, existe una función $k : [\epsilon, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^∞ , con*

$$\frac{d^i k}{ds^i}(\epsilon) = \alpha_i, \quad \frac{d^i k}{ds^i}(\delta) = \beta_i.$$

De lo anterior se sigue que k_{21} posee una extensión $k_2 : [0, \delta_2] \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , tal que sus i –ésimas derivadas en $s = 0$ son α_i y pasa por los puntos extremos preescritos $(k_2(0), 0) = \Phi_2(p_1), (k_2(\delta_2), \delta_2) = \Phi_2(p_2)$. Denotamos mediante $\eta_2 : [0, \delta_2] \rightarrow \Phi_2(\mathcal{V}_2)$ a la trayectoria C^∞ dada por $\eta_2(t) \doteq (k_2(t), t)$. La trayectoria $\Phi_2^{-1} \circ \eta_2$ es C^∞ , transversal a X , con extremos p_1, p_2 y cuyas derivadas coinciden con las de $\Phi_1^{-1} \circ \eta_1$ en el extremo p_1 . Reemplazamos el trozo de η en \mathcal{V}_2 con extremos p_1 y p_2 , por $\Phi_2^{-1} \circ \eta_2$.

Aplicando repetidas veces el proceso de reemplazo anterior se obtiene una colección finita de trayectorias C^∞ , $\{\Phi_1^{-1} \circ \eta_1, \Phi_2^{-1} \circ \eta_2, \dots, \Phi_n^{-1} \circ \eta_n\}$ en cuyos extremos todas sus derivadas coinciden y de ello se sigue que sus trazas pegan entre sí. Notamos que para realizar el último reemplazo $\Phi_n^{-1} \circ \eta_n$, utilizamos las derivadas en los extremos $\Phi_n(p_{n-1}), \Phi_n(p_n)$ de $\Phi_n \circ \Phi_{n-1}^{-1} \circ \eta_{n-1}$, $\Phi_n \circ \Phi_1^{-1} \circ \eta_1$ respectivamente y el teorema de Besicovitch. A priori las trayectorias en esta colección no extienden C^∞ entre sí, ya que sus velocidades de recorrido pueden ser distintas en los extremos

p_j . Para evitar esta dificultad consideramos $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$, reparametrizaciones por longitud de arco de $\{\Phi_1^{-1} \circ \eta_1, \Phi_2^{-1} \circ \eta_2, \dots, \Phi_n^{-1} \circ \eta_n\}$, las cuales poseen velocidad unitaria. De esta forma la colección de trayectorias $\{\sigma_j\}$ extienden C^∞ entre si, pegando sus dominios por translaciones obtenemos un intervalo I , con $\sigma : I \rightarrow \mathcal{U}_i$, trayectoria cerrada C^∞ y transversal a X en \mathcal{U}_i . Hemos terminado con el caso (\mathcal{U}_i, X) pozo–fuente.

(\mathcal{U}_i, X) es una banda.

Denotamos por $\eta : I \rightarrow \mathcal{U}_i$ la trayectoria C^0 , que intersecta exactamente una vez a cada trayectoria de X en \mathcal{U}_i . A partir de ella vamos a construir la transversal σ deseada. Una nueva dificultad es que a diferencia del caso (\mathcal{U}_i, X) pozo–fuente donde η es cerrada, ahora no lo es y a priori los extremos de η no existen, ya que I es un intervalo abierto. Por el método que utilizaremos en la prueba del teorema 2, necesitamos que η tenga sus extremos en la frontera de \mathcal{U}_i (e incluso sea transversal a ella). Para ello primero extendemos η a la frontera de \mathcal{U}_i , luego reemplazamos trozos de η para construir σ de clase C^∞ .

Extendemos η a la frontera de \mathcal{U}_i en $\mathbb{R}P^2$:

Veamos en un ejemplo que significa extender η .

Ejemplo 31. Para un campo vectorial X , con una banda $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi/2 < x < \pi/2\}$, en la cual X coincide con $\partial/\partial y$; la trayectoria

$$\begin{aligned} \eta : (0, 1) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\pi t - \pi/2, \tan(\pi t - \pi/2)), \end{aligned}$$

intersecta exactamente una vez a cada trayectoria de X en \mathcal{U} , pero no a las componentes $\{x = \pm\pi/2\}$ de la frontera de \mathcal{U} , ya que estas son asíntotas de la traza de η . Reemplazamos el trozo de η en $(0, \epsilon)$ con $\epsilon < 1$, por $\eta_1 : [0, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^2$, que es C^∞ , intersecta transversalmente a $\{x = -\pi/2\}$ en $\eta_1(0)$ y satisface $\eta(\epsilon) = \eta_1(\epsilon)$. Análogamente existe una $\eta_2 : (\delta, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, para $\delta > \epsilon$, que intersecta transversalmente a $\{x = \pi/2\}$ en $\eta_2(1)$ y satisface $\eta(\delta) = \eta_2(\delta)$. A partir de reemplazar los extremos de η por η_1 y η_2 , obtenemos la trayectoria deseada $\eta_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, C^0 , con extremos en la frontera de \mathcal{U} y transversal a ella. \square

Necesitamos la descripción precisa de la frontera de la banda \mathcal{U}_i . Para ello consideramos la foliación de X y $\mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}P^2$, tomando la frontera de \mathcal{U}_i en $\mathbb{R}^2 \cup L_\infty$.

Para nuestro fin, la línea al infinito la consideramos sin identificar proyectivamente, esto es $(x_0, x_1, x_2) \sim (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$ sólo para $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Lo anterior significa que puntos antípodos en dicha línea los consideramos distintos; ya que las integrales primeras del teorema 2 no requieren estar bien definidas en L_∞ . Por abuso de notación mantenemos el simbolo L_∞ . La frontera de \mathcal{U}_i en $\mathbb{R}P^2$ está formada por un número finito de trayectorias regulares y puntos singulares de la foliación de X , esto es

$$\{q_1 \cup \zeta_1 \cup q_2 \cup \zeta_2 \cup \dots \cup q_n \cup \zeta_n\}. \quad (3.1)$$

\mathcal{U}_i es topológicamente un disco en $\mathbb{R}^2 \cup L_\infty$. Su frontera posee dos orientaciones, eligiendo una de ellas, suponemos que sus elementos ya están ordenados de manera cíclica en (3.1). Al recorrer (3.1) con esa orientación, se alternan puntos singulares q_j y separatrices ζ_j de la foliación de X . Para algunas \mathcal{U}_i , su encaje en $\mathbb{R}^2 \cup L_\infty$, impone que algunos q_j ó ζ_j se repiten; incluimos dichas repeticiones en (3.1).

Consideramos una trayectoria regular γ de X en \mathcal{U}_i y tomamos su α -límite y ω -límite llamándolos q_1 y q_ℓ respectivamente, los cuales son distintos en (3.1). Removiendo q_1 y q_ℓ tenemos dos subcolecciones

$$\{\zeta_1 \cup q_2 \cup \zeta_2 \cup \cdots \cup q_{\ell-1} \cup \zeta_{\ell-1}\}, \quad \{\zeta_\ell \cup q_{\ell+1} \cup \zeta_{\ell+1} \cup \cdots \cup q_n \cup \zeta_n\}, \quad (3.2)$$

los denotamos como “lado superior” y “lado inferior” de la banda \mathcal{U}_i , si bien dichos nombres son intercambiables entre si, cada lado es conexo, posee una trayectoria regular y la aplicación de holonomía de la foliación de X está definida a lo largo de cada lado, esta propiedad la usaremos en el lema 22. Con lo anterior tenemos que la frontera de \mathcal{U}_i está formada por los puntos singulares extremos q_1, q_ℓ y los lados superior e inferior.

Para extender $\eta : (0, 1) \rightarrow \mathcal{U}_i$ a la frontera de \mathcal{U}_i , primero trabajamos con el lado inferior.

Si todo el lado inferior está contenido en L_∞ , entonces la integral primera del teorema 2 no requiere extenderse a dicho lado. En este caso $\mathcal{U}_i = \mathbb{R}^2$, hay una sola banda y X es topológicamente $\partial/\partial x$.

Si el lado inferior no está contenido en L_∞ , él posee al menos una trayectoria finita $\zeta_\alpha \subset \mathbb{R}^2$, entonces siempre necesitamos realizar el reemplazo. Veamos los detalles:

Para $\eta : (0, \epsilon) \subset I \rightarrow \mathcal{U}_i$ consideramos el conjunto

$$\alpha(\eta) \doteq \{(\text{la cerradura en } \mathbb{R}^2 \text{ de } \eta(0, \epsilon)) - \eta(0, \epsilon)\},$$

que por abuso de notación es el α -límite de η . Sin pérdida de generalidad suponemos

$$\alpha(\eta) \subset \{q_1 \cup (\zeta_1 \cup q_2 \cup \cdots \cup \zeta_{\ell-1}) \cup q_\ell\}.$$

Tenemos cuatro casos cualitativamente distintos para $\alpha(\eta)$ (los tres primeros no son mutuamente excluyentes).

Caso 1. El conjunto $\alpha(\eta)$ posee al menos un punto en una trayectoria finita $\zeta_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ de X . Entonces existe un tiempo positivo pequeño $\epsilon_1 < 1$, tal que $\eta(\epsilon_1)$ y un trozo de ζ_α están en el dominio de una misma caja de flujo $\Phi : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Reemplazamos η en $(0, \epsilon_1]$ por una nueva $\eta_1 : [0, \epsilon_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que es C^∞ cerca de 0, interseca transversalmente a ζ_α en $\eta_1(0)$ y satisface $\eta(\epsilon_1) = \eta_1(\epsilon_1)$.

Caso 2. El conjunto $\alpha(\eta)$ posee al menos un punto en una trayectoria regular al infinito $\zeta_\beta \subset L_\infty$ de X , entonces ζ_β es trayectoria regular del campo vectorial $\rho_{02}X_{02}$ que describe la foliación de X cerca de ζ_β (ver definición 42). Existe un tiempo positivo pequeño $\epsilon_1 < 1$, tal que $\eta(\epsilon_1)$ y un trozo de ζ_β están en el dominio de una misma caja de flujo de $\rho_{02}X_{02}$. Como en el caso 1, realizamos el reemplazo del extremo de η en $(0, \epsilon_1]$.

Caso 3. El conjunto $\alpha(\eta)$ posee al menos un punto singular q_α distinta de los puntos singulares extremos q_1 y q_ℓ . Entonces en q_α , la foliación de X tiene un sector hiperbólico. Por ello existe una colección finita de cajas de flujo $\{\Phi_j : \mathcal{V}_j \subset \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^2\}$ con $j = 1, \dots, n$, tal que:

$$\mathcal{V}_j \cap \mathcal{V}_{j+1} \neq \emptyset,$$

$$\eta(\epsilon_1) \subset \mathcal{V}_1 \text{ para } \epsilon_1 < 1,$$

\mathcal{V}_n contiene un trozo de ζ_α , trayectoria adyacente a q_α y

la intersección de cada trayectoria de X con la unión de los dominios \mathcal{V}_j es conexa.

Reemplazamos η en $(0, \epsilon_1]$ por una nueva $\eta_1 : [0, \epsilon_1] \rightarrow \mathcal{V}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{V}_n \subset \mathbb{R}^2$ que es C^∞ cerca de 0, interseca transversalmente a ζ_α en $\eta_1(0)$ y satisface $\eta(\epsilon_1) = \eta_1(\epsilon_1)$.

Caso 4. El conjunto $\alpha(\eta)$ es uno de los puntos singulares extremos q_1 ó q_ℓ . Supongamos $\eta(\alpha) = q_1$.

Tenemos que η se aproxima a q_1 . Entonces existe una colección finita de cajas de flujo como en el caso 3 y realizamos el reemplazo del extremo de η en $(0, 1]$.

Para extender η a el lado superior, utilizamos la idea del lado inferior. Consideramos el conjunto

$$\omega(\eta) \doteq \{(la\ cerradura\ en\ \mathbb{R}P^2\ de\ \eta(\delta, 1)) - \eta(\delta, 1)\},$$

que por abuso de notación es el ω -límite de η . Considerando $\omega(\eta)$ en vez de $\alpha(\eta)$, repetimos el argumento del lado inferior. De esta forma extendemos η a la frontera de \mathcal{U}_i .

De la extensión de $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}P^2$ y de la forma de la frontera de \mathcal{U}_i , tenemos que son posibles tres casos para el dominio I de η como sigue: $[0, 1)$, $(0, 1]$, $[0, 1]$.

Reemplazamos η por $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}P^2$, de clase C^∞ :

Este depende de la forma que asume el intervalo I .

Para $I = [0, 1)$, cubrimos la traza de η con una colección a priori no finita de cajas de flujo. Aplicando repetidas veces el proceso de reemplazo descrito en el caso pozo-fuente, construimos $\sigma : I \rightarrow \mathcal{U}_i$, C^∞ , transversal a X en \mathcal{U}_i . La condición de finitud en la colección de cajas de flujo, permite que σ sea transversal al lado inferior de la banda \mathcal{U}_i .

Para $I = (0, 1]$, cubrimos la traza de η con una colección a priori no finita de cajas de flujo. Como en el caso $I = [0, 1)$, construimos $\sigma : I \rightarrow \mathcal{U}_i$, C^∞ , transversal a X en \mathcal{U}_i y que también es transversal al lado superior de la banda \mathcal{U}_i .

Para $I = [0, 1]$, cubrimos la traza de η con una colección finita de cajas de flujo. Como antes (ver construcción de σ en el caso pozo-fuente) construimos $\sigma : I \rightarrow \mathcal{U}_i$, C^∞ , transversal a X en \mathcal{U}_i , de manera que también sea transversal a los lados superior e inferior de la banda \mathcal{U}_i . Hemos terminado con el caso (\mathcal{U}_i, X) una banda.

(\mathcal{U}_i, X) es un anillo.

Denotamos por $\eta : I \rightarrow \mathcal{U}_i$ la trayectoria C^0 , que intersecta exactamente una vez a cada trayectoria de X en \mathcal{U}_i . A partir de ella vamos a construir la transversal σ deseada. La dificultad, al igual que en el caso (\mathcal{U}_i, X) banda, es que a priori los extremos de η no existen, ya que I es un intervalo abierto. Primero extendemos η a la frontera de \mathcal{U}_i , luego reemplazamos trozos de η para construir σ , C^∞ .

Extendemos η a la frontera de \mathcal{U}_i en $\mathbb{R}P^2$:

Dicha frontera consta de dos componentes que denotamos como “lado interior” y “lado exterior” del anillo \mathcal{U}_i , análogamente a (3.2) cada lado es conexo.

El lado interior está formado por un sólo punto singular o por una sólo trayectoria regular o por una combinación de puntos singulares y trayectorias regulares.

El lado exterior está formado por una sólo trayectoria regular o por una combinación de puntos singulares y trayectorias regulares.

La aplicación de holonomía de la foliación de X está definida a lo largo de cada lado, esta propiedad la usaremos en el lema 22.

Para extender η a la frontera de \mathcal{U}_i , consideramos el α -límite y ω -límite de η , los cuales se encuentran en la frontera de \mathcal{U}_i . Primero trabajamos con el lado interior para el cual tenemos dos casos cualitativamente distintos.

Caso 1. El conjunto $\alpha(\eta)$ posee al menos un punto en una trayectoria finita $\zeta_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ de X . Entonces existe un tiempo positivo pequeño $\epsilon_1 < 1$, tal que $\eta(\epsilon_1)$ y un trozo de ζ_α están en el

dominio de una misma caja de flujo $\Phi : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Reemplazamos η en $(0, \epsilon_1]$ por una nueva $\eta_1 : [0, \epsilon_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que es C^∞ cerca de 0, interseca transversalmente a ζ_α en $\eta_1(0)$ y satisface $\eta(\epsilon_1) = \eta_1(\epsilon_1)$.

Caso 2. El conjunto $\alpha(\eta)$ posee al menos un punto singular q_α . Entonces en q_α , X tiene un sector hiperbólico. Como en el caso 3 para (\mathcal{U}_i, X) una banda, existe una colección finita de cajas de flujo y una nueva $\eta_1 : [0, \epsilon_1] \rightarrow \mathcal{V}_1 \cup \dots \cup \mathcal{V}_n \subset \mathbb{R}^2$ que es C^∞ cerca de 0, interseca transversalmente a ζ_α en $\eta_1(0)$ y satisface $\eta(\epsilon_1) = \eta_1(\epsilon_1)$.

Para extender η a el lado exterior tenemos dos posibilidades:

Si todo el lado exterior está contenido en L_∞ , entonces la integral primera del teorema 2 no requiere extenderse a dicho lado.

Si el lado exterior no está contenido en L_∞ , él posee al menos una trayectoria finita $\zeta_\alpha \subset \mathbb{R}^2$, entonces siempre necesitamos realizar el reemplazo y repetimos el argumento utilizado para (\mathcal{U}_i, X) banda.

De esta forma hemos extendido η a la frontera de \mathcal{U}_i .

Al igual que en el caso (\mathcal{U}_i, X) tenemos que son posibles tres casos para el dominio I de η como sigue: $[0, 1)$, $(0, 1]$, $[0, 1]$.

Reemplazamos η por $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}P^2$, de clase C^∞ :

La prueba de la existencia de la trayectoria $\sigma : I \rightarrow \mathcal{U}_i$, C^∞ y transversal a X en \mathcal{U}_i , es similar a el caso en que (\mathcal{U}_i, X) es una banda.

Hemos concluido la prueba del lema 21. □

3.4. Integrales primeras C^∞ en regiones canónicas.

En esta sección a partir de la transversal C^∞ en cada región canónica construimos una integral primera, tal que en su frontera menos los atractores de X , los valores de la integral primera y de todas sus derivadas son cero. Para el desarrollo de esta sección requerimos el siguiente concepto

Definición 29. Una función $\kappa : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^∞ , es *plana* en $t_0 \in I$ si todas sus derivadas se anulan en t_0 .

Por el lema 21 para cada región canónica (\mathcal{U}_i, X) existe una trayectoria $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}_i$, C^∞ , transversal a X . Σ denota a la imagen de $[0, 1]$ bajo σ . La transversal Σ es variedad encajada, C^∞ en \mathbb{R}^2 , por ello existen muchas funciones, $\kappa_\alpha : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , (α en un conjunto no numerable). Componiendo la función proyección de (\mathcal{U}_i, X) en Σ ,

$$\begin{aligned} \Pi : \mathcal{U}_i &\rightarrow \Sigma \\ p &\mapsto \Sigma \cap \left\{ \begin{array}{l} \text{trayectoria solución} \\ \text{de } X \text{ que pasa por } p \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

con las funciones κ_α ; obtenemos muchas integrales primeras, C^∞ , para X en \mathcal{U}_i

$$\kappa_\alpha \circ \Pi : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

En lo que sigue, para cada región canónica (\mathcal{U}_i, X) buscamos una función κ_α adecuada, de manera que la integral primera $\kappa_\alpha \circ \Pi$ sea C^∞ , se anule y sea plana en la frontera de \mathcal{U}_i menos los atractores de X . La construcción de κ_α es la misma cuando (\mathcal{U}_i, X) es una banda o un anillo, sin embargo dicha construcción difiere cuando (\mathcal{U}_i, X) es un pozo-fuente. Veamos los detalles

(\mathcal{U}_i, X) es un pozo–fuente.

La frontera de \mathcal{U}_i consta de dos componentes disjuntas que denotamos como “lado interior” y “lado exterior” de \mathcal{U}_i . Sabemos que los ω –límite y α –límite de todas las trayectorias en \mathcal{U}_i se encuentran en la frontera de \mathcal{U}_i . Por el teorema de Poincaré–Bendixon ellos pueden ser: un punto singular, un ciclo límite o una gráfica. El lado interior puede admitir las tres posibilidades anteriores mientras que el lado exterior solamente puede ser un ciclo límite o una gráfica. Así ambos lados de \mathcal{U}_i son atractores, ver definición 27. Para construir la integral primera de X en \mathcal{U}_i , consideramos una función $\kappa_\alpha : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , tal que $d\kappa_\alpha$ se anula en dos puntos de Σ , la cual es homeomorfa a un círculo en \mathcal{U}_i . Con ello, la integral primera $\kappa_\alpha \circ \Pi : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , obtenida con el método (3.4) es tal que $d(\kappa_\alpha \circ \Pi)$ se anula a lo largo de dos trayectorias de X en \mathcal{U}_i . Notamos que $\kappa_\alpha \circ \Pi$ no extiende C^0 a la frontera de \mathcal{U}_i , ya que de hacerlo, sería constante en \mathcal{U}_i .

Ejemplo 32. Para el campo vectorial radial $X = x(\partial/\partial x) + y(\partial/\partial y)$, una integral primera $f : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , está dada por

$$f(x, y) = x/\sqrt{x^2 + y^2},$$

la cual es obtenida con el método descrito en (3.4).

Aplicando el mismo método, para el campo vectorial lineal $X = (x - y)\partial/\partial x + (x + y)\partial/\partial y$ con un pozo (espiral) en $(0, 0)$, obtenemos una integral primera $f : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , dada por

$$f(x, y) = (x \cos(\ln \sqrt{x^2 + y^2}) + y \sen(\ln \sqrt{x^2 + y^2}))/\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Notamos que ambas integrales primeras no extienden C^0 al origen y sus diferenciales se anulan respectivamente a lo largo de dos trayectorias de X . \square

(\mathcal{U}_i, X) es una banda.

El enunciado preciso es:

Lema 22. *Para cada banda (\mathcal{U}_i, X) existe una integral primera $f : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^∞ , la cual se anula y es plana en ambos lados de la frontera de \mathcal{U}_i .*

Demostración. La frontera de \mathcal{U}_i está formada por un número finito de trayectorias regulares y puntos singulares de la foliación de X , como se describió en (3.1). Removiendo de (3.1) los α –límite y ω –límite de las trayectorias de X en \mathcal{U}_i , q_1 y q_ι (los cuales son atractores de X), obtenemos dos subcolecciones que denotamos como lados: superior e inferior de \mathcal{U}_i , ver (3.2). Dependiendo del número de trayectorias en los lados de la banda \mathcal{U}_i , la construcción de la integral primera se divide en dos casos:

Caso 1. Ambos lados de \mathcal{U}_i constan de una sólo trayectoria regular de X .

Caso 2. Al menos uno de los lados de \mathcal{U}_i , consta de dos o más trayectorias regulares de X .

En el caso 1, consideramos entre todas las funciones $\kappa_\alpha : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , una función $\kappa_\beta : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , tal que:

κ_β se anula sólo en los extremos de Σ y es positiva en el interior de Σ ,

κ_β es plana en los extremos de Σ ,

$d\kappa_\beta$ se anula en sólo un punto interior de Σ .

Con ello la integral primera $\kappa_\beta \circ \Pi : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{R}$ obtenida con el método (3.4) satisface:

$\kappa_\beta \circ \Pi$ es C^∞ en ambos lados de la frontera de \mathcal{U}_i ,

$\kappa_\beta \circ \Pi$ se anula sólo en la frontera de \mathcal{U}_i ,

$\kappa_\beta \circ \Pi$ es plana en la frontera de \mathcal{U}_i .

La última condición implica que en ambos lados de la frontera de \mathcal{U}_i , la derivada de $\kappa_\beta \circ \Pi$ en cualquier dirección siempre es cero. En particular $d(\kappa_\beta \circ \Pi)$ se anula en las dos trayectorias que forman la frontera de \mathcal{U}_i y en una trayectoria en el interior de \mathcal{U}_i .

En el caso 2, sin pérdida de generalidad suponemos que el lado inferior de \mathcal{U}_i consta de al menos dos trayectorias regulares. Siguiendo la notación empleada en (3.2), el lado inferior está formado por

$$\{\zeta_1 \cup q_2 \cup \zeta_2 \cup \cdots \cup q_{\iota-1} \cup \zeta_{\iota-1}\}, \quad (3.5)$$

con $\iota - 1 \geq 2$. Denotamos mediante $\sigma_\nu : [0, 1] \rightarrow \Sigma_\nu \subset \overline{\mathcal{U}_i}$ (donde $\overline{\mathcal{U}_i}$ es la cerradura de \mathcal{U}_i), a la transversal obtenida por el lema 21; ella interseca al lado inferior de \mathcal{U}_i en un punto regular $\sigma_\nu(0)$ de la trayectoria regular ζ_ν . Usando la misma idea que en (3.4), para alguna $\kappa_\beta : \Sigma_\nu \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo las mismas condiciones del caso 1, la integral primera $\kappa_\beta \circ \Pi : \mathcal{U}_i \cup \zeta_\nu \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , satisface:

$\kappa_\beta \circ \Pi$ se anula en todo el lado inferior $\{\zeta_1 \cup q_2 \cup \zeta_2 \cup \cdots \cup q_{\iota-1} \cup \zeta_{\iota-1}\}$,

$\kappa_\beta \circ \Pi$ es plana en ζ_ν ,

pero a priori no se cumple que $\kappa_\beta \circ \Pi$ extiende C^∞ en todo el lado inferior de \mathcal{U}_i .

Debemos estudiar la extensión de esta integral primera a todas las trayectorias regulares ζ_i en el lado inferior (3.5), con $i = 1, \dots, \iota - 1$, $i \neq \nu$. Para ello notamos que cada punto singular q_i en el lado inferior junto con sus dos trayectorias adyacentes ζ_{i-1}, ζ_i , forman un sector hiperbólico de X en \mathcal{U}_i .

Continuación del ejemplo 22. Para el campo vectorial con una silla $X = \lambda x(\partial/\partial x) - y(\partial/\partial y)$, con $\lambda \geq 1$ e integral primera $f(x, y) = xy^\lambda$, consideramos la banda \mathcal{U} determinada por el primer cuadrante.

Convenimos que el lado inferior de \mathcal{U} está formado por $\{\zeta_1 \cup q_2 \cup \zeta_2\}$; donde ζ_1 es el eje x positivo, ζ_2 es el eje y positivo y $q_2 = (0, 0)$.

X posee un sector hiperbólico $\mathcal{S} = \mathcal{U}$ con $(0, 0)$ como punto singular de X . Consideramos en \mathcal{S} dos transversales $\sigma_i : [0, \delta_i] \rightarrow \Sigma_i \subset \mathcal{U}$ con $i = 1, 2$, cuyas imágenes son

$$\Sigma_1 = \{(1, y) \in \mathcal{U} \mid 0 \leq y \leq \delta_1\}, \quad \Sigma_2 = \{(x, 1) \in \mathcal{U} \mid 0 \leq x \leq \delta_2\}.$$

Notamos que f es C^∞ en \mathbb{R}^2 y se anula en el lado inferior $\{\zeta_1 \cup q_2 \cup \zeta_2\}$, adicionalmente la derivada de f en la dirección $\sigma'_1(0)$ es cero, pero la derivada de f en la dirección $\sigma'_2(0)$ es uno. En resumen si $\sigma_i(0) \in \zeta_i \cap \Sigma_i$, con $i = 1, 2$; no siempre se cumple que al extender una integral primera f usando la aplicación de holonomía de Σ_1 a Σ_2 , la derivada de f en las direcciones $\sigma'_1(0)$ y $\sigma'_2(0)$ sean ambas cero. \square

Regresando al caso 2, necesitamos seleccionar, para el lado inferior (3.5), una función “adecuada” $\kappa_1 : \Sigma_\nu \rightarrow [0, 1]$, C^∞ , de la forma κ_β y de manera que la integral primera $\kappa_1 \circ \Pi : \mathcal{U}_i \cup \zeta_\nu \rightarrow \mathbb{R}$, obtenida con el método (3.4) satisfaga que:

$\kappa_1 \circ \Pi$ es C^∞ en todo el lado inferior,

$\kappa_1 \circ \Pi$ se anula en el lado inferior,

$\kappa_1 \circ \Pi$ es plana en el lado inferior.

En consecuencia $d(\kappa_1 \circ \Pi)$ se anula en el lado inferior de \mathcal{U}_i y en una trayectoria en el interior de \mathcal{U}_i . Veamos los detalles de la selección de κ_1 .

Usamos la transversal a X , $\sigma_\nu : [0, 1] \rightarrow \Sigma_\nu \subset \bar{U}_i$, que intersecta al lado inferior en un punto regular $\sigma_\nu(0) \in \zeta_\nu$ de X . Completamos la transversal (Σ_ν, σ_ν) a una colección finita de transversales

$$\{(\Sigma_j, \sigma_j) \mid \sigma_j : [0, 1] \rightarrow \Sigma_j \subset \bar{U}_i \text{ con } j = 1, \dots, \iota - 1\}$$

las cuales satisfacen que $\sigma_j(0) \in \zeta_j \cap \Sigma_j$ y $\sigma_j'(0)$ es transversal a X .

Notamos que $\{(\Sigma_j, \sigma_j)\}$ es una colección de subvariedades con frontera, encajadas en \bar{U}_i y donde cada subvariedad Σ_j tiene como carta a $\sigma_j^{-1} : \Sigma_j \rightarrow [0, 1]$. Considerando la colección de transversales $\{(\Sigma_j, \sigma_j)\}$ tenemos las aplicaciones de holonomía de X de una transversal a otra

$$\begin{aligned} \text{hol}_{ij} : \Sigma_i &\rightarrow \Sigma_j \\ p &\mapsto \Sigma_j \cap \left\{ \begin{array}{l} \text{trayectoria solución} \\ \text{de } X \text{ que pasa por } p \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Las propiedades de las aplicaciones de holonomía son:

hol_{ii} es la aplicación identidad,

$\text{hol}_{ij} = \text{hol}_{ji}^{-1}$ y $\text{hol}_{ij} \circ \text{hol}_{jl} = \text{hol}_{il}$,

hol_{ij} es difeomorfismo C^∞ de Σ_i menos sus puntos extremos $\sigma_i(0)$, $\sigma_i(1)$, en Σ_j menos sus puntos extremos $\sigma_j(0)$, $\sigma_j(1)$, no siempre hol_{ij} es difeomorfismo entre variedades con frontera (ver continuación del ejemplo 22).

Notamos que para la función proyección Π dada en (3.4), su restricción a $\{(\Sigma_j, \sigma_j)\}$ cumple que

$$\Pi \equiv \text{hol}_{ij} : \Sigma_i \rightarrow \Sigma_j,$$

por ello estas aplicaciones de holonomía describen a Π . Dichas aplicaciones expresadas en los atlas de la colección $\{(\Sigma_j, \sigma_j)\}$ tienen la forma

$$\sigma_j^{-1} \circ \text{hol}_{ij} \circ \sigma_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

(usando rigurosamente la definición de hol_{ij} como función C^r entre las subvariedades Σ_i, Σ_j con frontera, para la clase de diferenciabilidad $r = 0, 1, \dots, \infty$). Fijamos la transversal (Σ_ν, σ_ν) que proviene del lema 21. Existe una función $\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, C^∞ , tal que:

θ se anula en el extremo $t = 0$ del intervalo $[0, 1]$,

θ es plana en el extremo $t = 0$ del intervalo $[0, 1]$,

para toda $j = 1, \dots, \iota - 1$, se cumple

$$|\theta(t)| \leq |\sigma_j^{-1} \circ \text{hol}_{\nu j} \circ \sigma_\nu(t)| \tag{3.6}$$

en un intervalo $[0, \delta] \subset [0, 1]$ con δ suficientemente pequeño. Como la colección $\{\text{hol}_{\nu j}\}$ es finita, la función θ existe. Siguiendo la idea empleada en [33], deseamos utilizar

$$\theta \circ \theta \circ \sigma_\nu^{-1} : \Sigma_\nu \rightarrow [0, 1]$$

para la construcción de κ_1 en (3.4). Debemos verificar que esta integral primera $\theta \circ \theta \circ \sigma_\nu^{-1} \circ \Pi : \mathcal{U}_i \cup \zeta_\nu \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaga que:

$\theta \circ \theta \circ \sigma_\nu^{-1} \circ \Pi$ es C^∞ en $\mathcal{U}_i \cup (\zeta_1 \cup \zeta_2 \cup \dots \cup \zeta_\nu \cup \dots \cup \zeta_{\iota-1})$,

$\theta \circ \theta \circ \sigma_\nu^{-1} \circ \Pi$ se anula en $\zeta_1 \cup \zeta_2 \cup \dots \cup \zeta_\nu \cup \dots \cup \zeta_{\iota-1}$,

$\theta \circ \theta \circ \sigma_\nu^{-1} \circ \Pi$ es plana en $\zeta_1 \cup \zeta_2 \cup \dots \cup \zeta_\nu \cup \dots \cup \zeta_{\iota-1}$.

Para ello estimamos el valor de $\theta \circ \theta \circ \sigma_\nu^{-1}$ a lo largo de cada subvariedad Σ_j , especialmente en

sus puntos frontera $\sigma_j(0) \in \Sigma_j$. Usando el hecho que Σ_j son subvariedades, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \Sigma_1 & \xrightarrow{\text{hol}_{12}} & \cdots & \Sigma_{\nu-1} & \xrightarrow{\text{hol}_{(\nu-1)\nu}} & \Sigma_\nu & \xleftarrow{\text{hol}_{(\nu+1)\nu}} & \Sigma_{\nu+1} & \cdots & \xleftarrow{\text{hol}_{(\iota-1)(\iota-2)}} & \Sigma_{\iota-1} \\
 \sigma_1 \uparrow & & & \sigma_{\nu-1} \uparrow & & \sigma_\nu^{-1} \downarrow & & \sigma_{\nu+1} \uparrow & & & \sigma_{\iota-1} \uparrow \\
 [0, 1] & & & [0, 1] & & [0, 1] & & [0, 1] & & & [0, 1] \\
 & & & & & \theta \circ \theta \downarrow & & & & & \\
 & & & & & [0, 1] & & & & &
 \end{array}$$

Dadas las transversales $\Sigma_j \neq \Sigma_\nu$; para expresar la integral primera en Σ_j , se tiene la composición

$$\theta \circ \theta \circ \sigma_\nu^{-1} \circ \text{hol}_{j\nu} \circ \sigma_j : [0, 1] \rightarrow [0, 1]. \quad (3.7)$$

Utilizando las propiedades de las aplicaciones de holonomía y la condición (3.6) para θ , podemos estimar como crece la función en (3.7) en $[0, \delta] \subset [0, 1]$

$$\begin{aligned}
 |\theta \circ \theta \circ \sigma_\nu^{-1} \circ \text{hol}_{j\nu} \circ \sigma_j(t)| &\leq |\theta \circ (\sigma_j^{-1} \circ \text{hol}_{\nu j} \circ \sigma_\nu) \circ \sigma_\nu^{-1} \circ \text{hol}_{j\nu} \circ \sigma_j(t)| \\
 &\leq |\theta(t)|.
 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como θ es plana en el punto extremo $t = 0$ del intervalo $[0, 1]$, se tiene por (3.8) que la función $\theta \circ \theta \circ \sigma_\nu^{-1} \circ \text{hol}_{j\nu} \circ \sigma_j$ también es plana en $t = 0$; así todas las derivadas direccionales de $\theta \circ \theta \circ \sigma_\nu^{-1}$ en las direcciones $\sigma_j'(0)$ son cero.

Para terminar la construcción de la integral primera (en el lado inferior de \mathcal{U}_i) consideramos una función $\kappa_2 : \Sigma_\nu \rightarrow [0, 1]$ de la forma κ_β y $\theta \circ \theta \circ \sigma_\nu^{-1}$. Usando el teorema de Besicovitch obtenemos una función $\kappa_1 : \Sigma_\nu \rightarrow [0, 1]$, C^∞ , la cual satisface:

κ_1 y $\theta \circ \theta \circ \sigma_\nu^{-1}$ coinciden en el intervalo $[0, \delta/2]$,

κ_1 y κ_2 coinciden en el intervalo $[\delta, 1]$.

Así κ_1 es de la forma κ_β y

$$\kappa_1 \circ \Pi : \mathcal{U}_i \cup (\zeta_1, \cup \zeta_2 \cup \cdots \cup \zeta_\nu \cup \cdots \cup \zeta_{\iota-1}) \rightarrow \mathbb{R}$$

satisface la afirmación del lema para el lado inferior de la banda \mathcal{U}_i . Con una construcción similar a la realizada en el lado inferior (3.5), para el lado superior $\{\zeta_\iota \cup q_{\iota+1} \cup \zeta_{\iota+1} \cup q_{\iota+2} \cup \zeta_{\iota+2} \cup \cdots \cup q_n \cup \zeta_n\}$, obtenemos una función $\kappa_3 : \Sigma_\nu \rightarrow [0, 1]$, C^∞ , de la forma κ_β , tal que

$$\kappa_3 \circ \Pi : \mathcal{U}_i \cup (\zeta_\iota \cup \zeta_{\iota+1} \cup \zeta_{\iota+2} \cup \cdots \cup \zeta_n) \rightarrow \mathbb{R}$$

satisface la afirmación del lema para el lado superior de la banda \mathcal{U}_i .

Finalmente para las funciones κ_1 y κ_3 , usamos el teorema de Besicovitch y obtenemos una función $\kappa_4 : \Sigma_\nu \rightarrow [0, 1]$ C^∞ , de la forma κ_β , tal que la integral primera $\kappa_4 \circ \Pi : \mathcal{U}_i \cup \zeta_\nu \rightarrow \mathbb{R}$, obtenida con el método (3.4) satisfaga que:

$\kappa_4 \circ \Pi$ es C^∞ en ambos lados de la frontera de \mathcal{U}_i ,

$\kappa_4 \circ \Pi$ se anula sólo en la frontera de \mathcal{U}_i ,

$\kappa_4 \circ \Pi$ es plana en la frontera de \mathcal{U}_i .

En consecuencia $d(\kappa_4 \circ \Pi)$ se anula en la frontera de \mathcal{U}_i y en una trayectoria en el interior de \mathcal{U}_i . \square

(\mathcal{U}_i, X) es un anillo.

El enunciado preciso es

Corolario 5. *Para cada anillo (\mathcal{U}_i, X) existe una integral primera $f : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ , la cual se anula y es plana en ambos lados de la frontera de \mathcal{U}_i .*

La demostración es similar al caso en que (\mathcal{U}_i, X) es una banda.

3.5. Extensión de integrales primeras.

En esta sección mostramos que cuando dos regiones canónicas posean una frontera común (que no es atractor), la integral primera extiende C^∞ en dicha frontera.

Si una de las dos regiones canónicas es pozo–fuente, entonces la integral primera (obtenida en la sección anterior) no extiende siquiera C^0 a la frontera de \mathcal{U}_i , ya que está formada por atractores de X .

Si ninguna de las dos regiones canónicas es pozo–fuente, entonces las integrales primeras son planas en la frontera común y por el teorema de Besicovitch las integrales primeras extienden C^∞ entre si en la frontera común.

Fin de la demostración del teorema 2. □

3.6. Ejemplos.

Ejemplo 33. *Un campo vectorial C^∞ , con dos puntos singulares en \mathbb{R}^2 . Consideramos*

$$X = (x^2 - 1)\frac{\partial}{\partial x} - xy\frac{\partial}{\partial y},$$

el cual posee sillas en $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y siete separatrices en \mathbb{R}^2 . Por el teorema 2 concluimos que existe $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ integral primera C^∞ para X . □

Ejemplo 34. *Un campo vectorial C^∞ , con siete puntos singulares en \mathbb{R}^2 . Consideramos*

$$X = (-2x^4y + 2x^2y + x^4 - x^2)\frac{\partial}{\partial x} + (2x^3y^2 - 2x^3y - x^2y^2 + y^2 + x^2y - y)\frac{\partial}{\partial y},$$

el cual posee sillas en $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$; sillas–nodo en $(0, 0)$, $(0, 1)$; centro en $((1/6)(1 - (53 - 6\sqrt{78})^{1/3} - 1/(53 - 6\sqrt{78})^{1/3}), 1/2)$ y diecisiete separatrices en \mathbb{R}^2 . Por el teorema 2 concluimos que existe $f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0), (0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}$ integral primera C^∞ para X . □

Existen campos vectoriales C^∞ , que a pesar de no satisfacer la hipótesis del teorema 2, poseen una integral primera C^∞ . Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 35. *Un campo vectorial C^∞ , sin puntos singulares y con un número infinito de separatrices en \mathbb{R}^2 , que admite una integral primera C^∞ . Consideramos*

$$X \doteq \Re e \left(e^z \frac{\partial}{\partial z} \right) = e^x \cos y \frac{\partial}{\partial x} + e^x \sen y \frac{\partial}{\partial y},$$

el cual posee un punto singular en $[1 : 0 : 0] \in \mathbb{RP}^2$ e infinitas separatrices en \mathbb{R}^2 . Por ello X posee una infinidad de bandas $\mathcal{U}_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2n + 1)\pi < y < (2n + 3)\pi, n \in \mathbb{Z}\}$, con separatrices $\zeta_n = \{y = (2n + 1)\pi/2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ y donde cada banda posee un sector hiperbólico linealizable en $[1 : 0 : 0]$. Así la técnica empleada en el teorema 2 para construir una integral primera, aplica a X . \square

La acumulación de separatrices es una obstrucción a la existencia de una integral primera C^∞ (no constante) para un campo vectorial X .

Ejemplo 36. *Por el trabajo de Ważewsky (ver [40]) existe un campo vectorial C^∞ , sin puntos singulares y con un conjunto denso de separatrices en \mathbb{R}^2 .*

Este se consigue remplazando una banda de un campo vectorial sin puntos singulares, por ejemplo $X = \partial/\partial x$, por dos componentes de Reeb. Repitiendo este proceso en un conjunto de trayectorias que resulta denso en \mathbb{R}^2 , se consigue el campo vectorial deseado. Cualquier integral primera C^1 de este campo vectorial es constante. Para una descripción detallada de lo anterior, ver [10] pág. 54. \square

Corolario 6. *Si X es un campo vectorial polinomial sin términos comunes, entonces X posee un número finito de separatrices que provienen de trayectorias regulares cuyos ω -límite y/o α -límite son los puntos singulares de X .*

Demostración. El resultado de Ilyashenko-Ecalle (ver [15]), es que para campos vectoriales polinomiales hay un número finito de ciclos límites y se cumple lo mismo para gráficas con aplicación de primer retorno distinta de la identidad. Por el teorema 2, todo campo vectorial polinomial sin términos comunes posee una integral primera, C^∞ , univaluada en $\mathbb{R}^2 - \text{Atrac}(X)$. \square

Apéndice A

Apéndice

A.1. Difeomorfismos.

Al trabajar con campos vectoriales X , de clase C^∞ , no solo estamos interesados en la equivalencia topológica entre campos vectoriales, también nos interesa que se conserve la clase de diferenciabilidad entre ellos. Los difeomorfismos de clase C^∞ nos permiten realizar cambios de coordenadas preservando la topología y diferenciabilidad de los campos vectoriales.

Decimos que una función $(f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^r en un abierto \mathcal{U} , con $r = 1, \dots, \infty$, si sus derivadas parciales

$$\frac{\partial^s f_k}{\partial x_{\alpha_1} \cdots \partial x_{\alpha_s}}$$

existen y son continuas en \mathcal{U} , para toda $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ y toda $\alpha_i \in \{1, 2, \dots, m\}$, con $1 \leq s \leq r$ para r finito o para toda s natural si $r = \infty$.

Definición 30. Consideramos dos conjuntos abiertos $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ y una aplicación $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ de clase C^r , con $r \geq 1$. Decimos que F es un *difeomorfismo de clase C^r* entre \mathcal{U} y \mathcal{V} si existe la aplicación inversa $F^{-1} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ y ella es de clase C^r .

Denotamos por $Dif^r(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ al conjunto de difeomorfismos de clase C^r entre \mathcal{U} y \mathcal{V} . En particular usamos la notación, $Dif^\infty(\mathbb{R}^2) = Dif^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ y por simplicidad en lo que sigue trabajamos sólo el caso C^∞ , el caso C^r es similar.

Lema 23. $(Dif^\infty(\mathbb{R}^2), \circ)$ es grupo.

Demostración. Verificamos que los elementos de $Dif^\infty(\mathbb{R}^2)$ satisfacen los axiomas de grupo. La composición es asociativa: Consideramos las aplicaciones $F, G, H \in Dif^\infty(\mathbb{R}^2)$, entonces al realizar la composición tenemos $((F \circ G) \circ H)(x, y) = (F \circ G \circ H)(x, y) = (F \circ (G \circ H))(x, y)$.

Existencia de elemento neutro: La aplicación identidad $Id \in Dif^\infty(\mathbb{R}^2)$ satisface $Id \circ F = F = F \circ Id$ para cualquier elemento $F \in Dif^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Existencia de elemento inverso: Por la definición 30 para cualquier aplicación $F \in Dif^\infty(\mathbb{R}^2)$ existe la aplicación inversa $F^{-1} \in Dif^\infty(\mathbb{R}^2)$, tal que $F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = Id$. \square

Observación 19. 1. $(Dif^\infty(\mathbb{R}^2), \circ)$ no es un grupo abeliano.
2. $Dif^\infty(\mathbb{R})$ admite diversos morfismos de grupos a $Dif^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Para mostrar el inciso 1 basta considerar las aplicaciones $F, G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por $F(x, y) = (2x, y + 3)$ y $G(x, y) = (x + 2y, 2y)$ satisfacen $(F \circ G)(x, y) = (2x + 4y, 2y + 3)$ y $(G \circ F)(x, y) = (2x + 2y + 6, 2y + 6)$, luego $(F \circ G)(x, y) \neq (G \circ F)(x, y)$.

Para mostrar el inciso 2 consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{K} : Dif^\infty(\mathbb{R}) &\rightarrow Dif^\infty(\mathbb{R}^2) \\ \{x \mapsto f(x)\} &\mapsto \{(x, y) \mapsto (f(x), y)\} \end{aligned}$$

es un morfismo de grupos. Para ello verificamos los siguientes tres puntos:

1. Denotamos por Id_1 e Id_2 a las aplicaciones identidad, las cuales juegan el papel de elementos neutros en $Dif^\infty(\mathbb{R})$ y $Dif^\infty(\mathbb{R}^2)$ respectivamente. Se tiene que $\mathcal{K}(Id_1(x)) = (Id_1(x), y) = Id_2(x, y)$.

2. Para las funciones $f, g \in Dif^\infty(\mathbb{R})$ se tiene $\mathcal{K}((f \circ g)(x)) = ((f \circ g)(x), y) = (f(x), y) \circ (g(x), y) = \mathcal{K}(f(x)) \circ \mathcal{K}(g(x))$.

3. Para la función $f^{-1} \in Dif^\infty(\mathbb{R})$ se tiene que $\mathcal{K}(f^{-1}(x)) = (f^{-1}(x), y) = \mathcal{K}^{-1}(f(x))$.

Concluimos que \mathcal{K} es un morfismo de grupos.

Un resultado similar al inciso 2 de la observación 19 se tiene para el grupo $(C^\infty(\mathbb{R}), +)$ de funciones reales C^∞ con la operación de suma.

Observación 20. $(C^\infty(\mathbb{R}), +)$ admite diversos morfismos de grupos a $Dif^\infty(\mathbb{R}^2)$. En efecto la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 : C^\infty(\mathbb{R}) &\rightarrow Dif^\infty(\mathbb{R}^2) \\ \{x \mapsto f(x)\} &\mapsto \{(x, y) \mapsto (x, f(x) + y)\}, \end{aligned}$$

es un morfismo de grupos. Para ello verificamos los siguientes tres puntos:

1. Denotamos por $e_1 \doteq \{f(x) \equiv 0\}$ el elemento neutro en el grupo $(C^\infty(\mathbb{R}), +)$ y $e_2 = Id$ el elemento neutro en $Dif^\infty(\mathbb{R}^2)$ respectivamente. Se tiene que $\mathcal{K}_1(e_1(x)) = (x, e_1(x) + y) = e_2(x, y)$.

2. Para las funciones $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ se tiene que $\mathcal{K}_1((f + g)(x)) = (x, (f + g)(x) + y) = (x, f(x) + g(x) + y) = \mathcal{K}_1(f(x)) \circ \mathcal{K}_1(g(x))$.

3. Para la función $(-f) \in C^\infty(\mathbb{R})$ se tiene que $\mathcal{K}_1(-f(x)) = (x, -f(x) + y) = \mathcal{K}_1^{-1}(f(x))$.

Concluimos que \mathcal{K}_1 es un morfismo de grupos.

Dos subgrupos de $Dif^\infty(\mathbb{R}^2)$ que nos son de utilidad son movimientos de cartas \mathcal{MC} y difeomorfismos de expansión-contracción transversal \mathcal{EC} .

$$\begin{aligned} \mathcal{MC} &= \left\{ \begin{array}{l} F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (f(y) + x, y) \end{array} \middle| f \in C^\infty(\mathbb{R}) \right\}, \\ \mathcal{EC} &= \left\{ \begin{array}{l} F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x, f(y)) \end{array} \middle| f \in Dif^\infty(\mathbb{R}) \right\}. \end{aligned}$$

Observamos que \mathcal{MC} y \mathcal{EC} son subgrupos de $(Dif^\infty(\mathbb{R}^2), \circ)$.

Lema 24. *Todo difeomorfismo que deja invariante al campo vectorial $\partial/\partial x$ es composición única de elementos de \mathcal{MC} y \mathcal{EC} .*

Demostración. Consideramos un difeomorfismo $\Phi \doteq (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, C^\infty$, que deja invariante a $\partial/\partial x$, esto es $\Phi_*(\partial/\partial x) = \partial/\partial x$. Entonces se satisface $\partial\varphi_1/\partial x = 1$ y $\partial\varphi_2/\partial x = 0$; de ello se sigue que $\varphi_2(x, y)$ sólo depende de y mientras que φ_1 es de la forma $\varphi_1(x, y) = x + c(y)$. Como Φ es difeomorfismo existe su inversa Φ^{-1} , tal que $\Phi \circ \Phi^{-1} = Id$, así $\varphi_2(y) \in Dif^\infty(\mathbb{R})$ y $c(y) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Luego $\Phi(x, y) = (F_1 \circ F_2)(x, y)$, donde $F_1(x, y) = (x, \varphi_2(y)) \in \mathcal{EC}$ y $F_2(x, y) = (c(y) + x, y) \in \mathcal{MC}$. Concluimos que Φ es composición de elementos únicos de \mathcal{MC} y \mathcal{EC} . \square

A.2. Funciones multivaluadas y monodromía.

El concepto de función multivaluada y aditivamente automorfa lo utilizamos para encontrar integrales primeras de campos vectoriales que poseen atractores; dichas integrales primeras poseen un dominio máximo que no puede ser obtenido mediante funciones univaluadas, en ello radica la importancia del estudio de funciones multivaluadas y aditivamente automorfas.

definición 8. Una *función multivaluada y aditivamente automorfa* en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es una colección $\{f_\alpha : B((x_\alpha, y_\alpha), r_\alpha) \subset \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f_\alpha \text{ es de clase } C^\infty, \alpha \in I\}$, que satisface las siguientes tres condiciones:

1. Ω está cubierta por $\bigcup_\alpha B((x_\alpha, y_\alpha), r_\alpha)$.
2. Para todo par de ramas $f_\alpha : B((x_\alpha, y_\alpha), r_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_\beta : B((x_\beta, y_\beta), r_\beta) \rightarrow \mathbb{R}$, con $B((x_\alpha, y_\alpha), r_\alpha) \cap B((x_\beta, y_\beta), r_\beta) \neq \emptyset$, se cumple que $f_\alpha(x, y) = f_\beta(x, y) + c_{\alpha\beta}$, para una constante $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$.
3. Para todo par de ramas f_α, f_β existe una trayectoria $\gamma : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ que une q_α con q_β y ramas $f_\alpha = f_0, f_1, \dots, f_n = f_\beta$ elementos de la colección, con f_α continuación C^∞ de f_β a lo largo de γ . En detalle $f_i = f_{i+1}$ en $B((x_i, y_i), r_i) \cap B((x_{i+1}, y_{i+1}), r_{i+1}) \neq \emptyset$, para $i = 0, 1, \dots, n-1$.

El punto (2) proviene de la variable compleja, el nombre técnico es *f aditivamente automorfa* (ver [6] pág. 579). Como consecuencia de la definición 8, la diferencial df es univaluada. Convenimos que todas las funciones multivaluadas que aparecen en este trabajo son aditivamente automorfas, ya que requerimos que df sea univaluada en Ω' .

Una función multivaluada bastante conocida es la función argumento, la cual describimos en detalle para fijar su notación y hacer explícitas las propiedades que nos interesan.

Consideramos la trayectoria del círculo $\gamma : [-\pi, \pi) \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Definimos la función $arg : S^1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow [-\pi, \pi)$ como la función inversa γ^{-1} , que satisface:
 $(arg \circ \gamma)(t) = t$, para todo $t \in [-\pi, \pi)$,
 $(\gamma \circ arg)(x, y) = (x, y)$ para todo $(x, y) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

La función arg puede describirse geoméricamente como el ángulo formado entre el eje x positivo y el vector unitario con extremo $(x, y) \in S^1$, medido en radianes y en sentido antihorario. Observamos que arg es C^∞ en $S^1 - \{(-1, 0)\}$. Más aún arg no es C^0 en $(-1, 0)$, ya que al aproximarnos mediante valores positivos de y , el límite que se obtiene es π ; mientras que si nos aproximamos mediante valores negativos de y , el límite que se obtiene es $-\pi$.

Definimos las ramas de arg para $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo como

$$arg_\alpha : S^1 - \{(\cos \alpha, \sin \alpha)\} \rightarrow [\alpha - \pi, \alpha + \pi) \subset \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \alpha + \beta$$

donde β es el ángulo formado entre el rayo engendrado por el vector $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ y el vector unitario con extremo $(x, y) \in S^1$ medido en radianes y en sentido antihorario. Notamos que arg_α es C^∞ y $arg_0(x, y) = arg(x, y)$.

Observación 21. Cada función arg_α extiende C^∞ a $\mathbb{R}^2 - \{(r \cos \alpha, r \sin \alpha) \mid r \geq 0\}$. En efecto basta definir $arg_\alpha(x, y)$ como el ángulo formado entre el rayo $(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ y el vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(r \cos \alpha, r \sin \alpha) \mid r \geq 0\}$, medido en radianes y en sentido antihorario. La fórmula explícita para arg_0 es

$$arg_0(x, y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Otra expresión explícita para arg_0 viene dada en término de la función $\arctan(y/x)$

$$arg_0(x, y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0, \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x < 0, y > 0, \\ -\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x < 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

La colección de funciones $\{arg_\alpha : (\mathbb{R}^2 - \{(r \cos \alpha, r \sin \alpha)\}) \rightarrow \mathbb{R} \mid r \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}\}$ es conocida como la función argumento que denotamos por Arg , la cual es multivaluada y aditivamente automorfa en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, ya que satisface las tres condiciones de la definición 8. Observamos que la diferencial $d(Arg) = (1/(x^2 + y^2))(-y dx + x dy)$ es C^∞ univaluada en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Ejemplo 37. La función $\log : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\log(z) = \log|z| + iArg(z)$ es multivaluada y aditivamente automorfa. \square

Observación 22. Evidentemente, no toda función multivaluada es aditivamente automorfa. Para ello consideramos las funciones \log y $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, con P función polinomial de grado dos o más. La parte imaginaria de la composición $\Im m(P \circ \log)$ resulta ser multivaluada pero no aditivamente automorfa.

Una fuente natural de funciones multivaluadas son las funciones de Y -tiempo, cuando Y es simetría de X (ver sección 1.2). El siguiente lema de monodromía es importante en el caso X sin puntos singulares, porque permite construir una integral primera diferenciable de X en todo Ω . Para el caso X con puntos singulares, modificamos el dominio de X de manera que X no tenga puntos singulares en su nuevo dominio y de esta manera trabajamos con el caso no singular.

Lema 25. (lema de monodromía para los tiempos de parejas X, Y). Consideramos un campo vectorial X sin puntos singulares en Ω que admite una simetría Y no nula en Ω y dos trayectorias $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, C^∞ , con puntos iniciales y puntos finales comunes. Si X no posee puntos singulares en el disco con frontera $\{\gamma_1\} \cup \{\gamma_2\}$, entonces el Y -tiempo de γ_1 es igual a el Y -tiempo de γ_2 .

Demostración. Construimos una homotopía $F : [0, 1] \times [0, 1] \subset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, C^∞ entre γ_1 y γ_2 , tal que $F(s, 0) = \gamma_1(s)$ y $F(s, 1) = \gamma_2(s)$ para toda $s \in [0, 1]$. Escogemos $s_0 < s_1 < \dots < s_n$ y $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, subdivisiones adecuadas de $[0, 1]$. Para cada rectángulo $F([s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j])$ existe una aplicación rectificadora local $\Psi_{ij} : B((x_{ij}, y_{ij}), r_{ij}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ de Y , cuyo dominio cubre al rectángulo $F([s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j])$. Consideramos

$$\begin{aligned} l_1 &= ([0, s_{i-1}] \cup [s_i, 1]) \times \{0\}, \\ l_2 &= (\{s_{i-1}\} \times [0, t_1]) \cup ([s_{i-1}, s_i] \times \{t_1\}) \cup (\{s_i\} \times [0, t_1]) \end{aligned}$$

y en $[0, 1] \times [0, 1]$ reemplazamos el segmento $[0, 1] \times \{0\}$ por $l_1 \cup l_2$. Como la 1-forma diferencial $\Psi_{ij}^* dy$ es cerrada y exacta en $B((x_{ij}, y_{ij}), r_{ij})$ y $F(l_2)$ es C^∞ por pedazos, se tiene que

$$\int_{F(l_2)} \Psi_{ij}^* dy = \int_{F([s_{i-1}, s_i] \times \{0\})} \Psi_{ij}^* dy.$$

Concluimos que el Y -tiempo de γ_1 es igual al Y -tiempo de $F(l_1 \cup l_2)$. Después de un número finito de reemplazos obtenemos que el Y -tiempo de γ_1 es igual al Y -tiempo de γ_2 \square

A.3. Descomposición de un campo vectorial en sectores alrededor de un punto singular.

Enunciamos tres topologías básicas para un punto singular aislado de un campo vectorial X , C^∞ en \mathbb{R}^2 y la descomposición de X en sectores alrededor de dicho punto singular.

Definición 31. Decimos que X posee un *pozo* (respectivamente una *fuerza*) en q si existe un círculo pequeño $S_\epsilon = \{p \in B(q, r) \mid \|p - q\|^2 = \epsilon^2\} \subset B(q, r)$, tal que en $B(q, \epsilon)$:

1. Toda trayectoria de X cruza transversalmente a S_ϵ y apunta hacia adentro (respectivamente afuera).
2. No existen trayectorias periódicas de X .

Definición 32. Decimos que X posee un *centro* en q si existe $\epsilon \in \mathbb{R}$ con $0 < \epsilon \leq r$, tal que toda trayectoria de X en $B(q, \epsilon) - \{q\}$ es periódica y contiene a q en su interior.

Definición 33. Decimos que X posee una *silla* en q si:

1. Existen dos trayectorias γ_1, γ_2 de X que se aproximan a q cuando el tiempo $t \rightarrow \infty$ y dos trayectorias γ_3, γ_4 de X que se aproximan a q cuando $t \rightarrow -\infty$.
2. Existe $\epsilon \in \mathbb{R}$ con $0 < \epsilon \leq r$, tal que cualquier otra trayectoria distinta de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ que comienza en $B(q, \epsilon) - \{q\}$, abandona $B(q, \epsilon)$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

Las trayectorias $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ son llamadas *separatrices* de X .

Observación 23. Por el teorema de Poincaré-Bendixson y la condición (2) en la definición 31 toda trayectoria de X que pasa por S_ϵ , tiene α -límite (respectivamente ω -límite) igual a q .

Una vecindad de un punto singular q de un campo vectorial X con una trayectoria cuyo α -límite ó ω -límite es q , se descompone en una unión finita de elementos llamados sectores parabólicos, elípticos e hiperbólicos. Las definiciones de los tres tipos de sectores son usuales y pueden leerse en [14] págs. 85 - 86.

Definición 34. Decimos que un campo vectorial X posee un *sector hiperbólico* $\mathcal{S} \subset \Omega$ si la restricción de X a \mathcal{S} es topológicamente equivalente con el campo vectorial $x(\partial/\partial x) - y(\partial/\partial y)$ en una vecindad del primer cuadrante de la forma $\tilde{\mathcal{S}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq 4xy \leq 1\}$.

Definición 35. Decimos que un campo vectorial X posee un *sector parabólico* $\mathcal{S} \subset \Omega$ si la restricción de X a \mathcal{S} es topológicamente equivalente con el campo vectorial $x(\partial/\partial x) + y(\partial/\partial y)$ en una vecindad del primer cuadrante de la forma $\tilde{\mathcal{S}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Definición 36. Decimos que un campo vectorial X posee un *sector elíptico* $\mathcal{S} \subset \Omega$ si la restricción de X a \mathcal{S} es topológicamente equivalente con el campo vectorial $\Re(z^3(\partial/\partial z)) = x(x^2 - 3y^2)(\partial/\partial x) + y(3x^2 - y^2)(\partial/\partial y)$ en una vecindad del primer cuadrante de la forma $\tilde{\mathcal{S}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Observación 24. Campos vectoriales lineales con puntos singulares aislados admiten una descomposición en los tres tipos de sectores o bien en un centro. Sin embargo no todo campo vectorial C^∞ admite una descomposición en esos sectores, para un ejemplo ver [14] pág. 85.

Los siguientes resultados muestran de forma afirmativa la existencia de una descomposición en sectores, ellos pueden leerse en [14] pág. 86. Para ello recordamos que:

1. Un campo vectorial X , C^∞ , es plano en un punto singular si él y los valores de todas sus

derivadas se anulan en dicho punto singular.

2. El único campo vectorial analítico y plano es $X \equiv 0$.
3. Una trayectoria característica de un punto singular, es una solución del campo vectorial que se aproxima a dicho punto singular con una pendiente fija.
4. En algunos casos se requiere saber que tan rápido se anula un campo vectorial en un punto singular, para cuantificar esto se introduce la condición de Lojasiewicz (ver [14] pág. 82).

Teorema 5. *Sea X un campo vectorial de clase C^∞ con un punto singular que no es plano. Si el punto singular tiene una trayectoria característica y una vecindad la cual no contiene un número contable de sectores elípticos sin puntos interiores en común, entonces X posee una vecindad que se descompone en una unión finita de sectores parabólicos, elípticos e hiperbólicos de X que no tienen puntos interiores en común.*

Teorema 6. *La conclusión del teorema anterior se cumple para un punto singular de un campo vectorial C^∞ que satisface la condición de Lojasiewicz en dicho punto singular. En particular se cumple para un punto singular aislado de un campo vectorial analítico.*

A.4. Plano proyectivo real \mathbb{RP}^2 .

Para describir el comportamiento global de un campo vectorial X en \mathbb{R}^2 , necesitamos conocer lo que sucede con X cerca del infinito. Para dar sentido a ello requerimos de la siguiente definición:

Definición 37. Consideramos $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ provisto de una relación de equivalencia \sim , tal que dos puntos $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ son equivalentes si existe $\beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ con $q_1 = \beta q_2$. El *plano proyectivo real* \mathbb{RP}^2 es el espacio de clases de equivalencia $\mathbb{RP}^2 \doteq (\mathbb{R}^3 - \{0\}) / \sim$.

Los elementos de una clase de equivalencia se denotan por $[x_0 : x_1 : x_2]$. La topología de \mathbb{RP}^2 es la que hereda de la topología usual de \mathbb{R}^3 bajo el cociente. Los conjuntos $U_i = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{RP}^2 \mid x_i = 1\}$ para $i = 0, 1, 2$, son abiertos con la topología en \mathbb{RP}^2 . Las aplicaciones $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por

$$\phi_0([1 : x_1 : x_2]) = (x_1, x_2), \quad \phi_1([x_0 : 1 : x_2]) = (x_0, x_2), \quad \phi_2([x_0 : x_1 : 1]) = (x_0, x_1),$$

proveen al espacio topológico \mathbb{RP}^2 de un atlas $\{(U_i, \phi_i) \mid i = 0, 1, 2\}$. Con ello el plano proyectivo \mathbb{RP}^2 es variedad diferenciable C^∞ , compacta y no orientable. Por simplicidad denotamos mediante $\mathbb{R}_{x_1 x_2}^2, \mathbb{R}_{x_0 x_2}^2, \mathbb{R}_{x_0 x_1}^2$ a las imágenes de ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 respectivamente y las llamamos *cartas afines*. Para fijar nuestra notación, los campos vectoriales X en \mathbb{R}^2 que consideramos originalmente se encuentran en la carta afín $\mathbb{R}_{x_0 x_1}^2$, por ello $\mathbb{R}_{x_0 x_1}^2 = \mathbb{R}_{xy}^2$. Se define la *línea al infinito* mediante $L_\infty \doteq \mathbb{RP}^2 - \phi_2^{-1}(\mathbb{R}_{x_0 x_1}^2)$. Con ello tenemos que

$$\mathbb{RP}^2 = \phi_2^{-1}(\mathbb{R}_{x_0 x_1}^2) \cup L_\infty,$$

es una compactificación de \mathbb{R}^2 . Para extender un campo vectorial X en \mathbb{R}^2 al plano proyectivo \mathbb{RP}^2 , basta calcular sus expresiones en las imágenes de las cartas afines $\mathbb{R}_{x_0 x_2}^2, \mathbb{R}_{x_1 x_2}^2$, las cuales son:

$$\begin{aligned} X_{02} &= (\phi_1 \circ \phi_2^{-1})_* X = x_2 \left(a \left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{1}{x_2} \right) - x_0 b \left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{1}{x_2} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_0} - x_2^2 b \left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{1}{x_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ X_{12} &= (\phi_0 \circ \phi_2^{-1})_* X = x_2 \left(b \left(\frac{1}{x_2}, \frac{x_1}{x_2} \right) - x_1 a \left(\frac{1}{x_2}, \frac{x_1}{x_2} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2^2 a \left(\frac{1}{x_2}, \frac{x_1}{x_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_2}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Notamos que para un campo vectorial X dado, los campos vectoriales X_{02}, X_{12} existen pero a priori no son C^∞ en L_∞ .

Definición 38. Un *campo vectorial de clase C^∞ en el plano proyectivo \mathbb{RP}^2* es una terna de campos vectoriales $\{X, X_{02}, X_{12}\}$ en $\mathbb{R}_{xy}^2, \mathbb{R}_{x_0x_2}^2, \mathbb{R}_{x_1x_2}^2$ respectivamente, que satisfacen (A.1) y donde cada una de sus tres expresiones es C^∞ .

Por abuso de notación usamos X para denotar la terna $\{X, X_{02}, X_{12}\}$. En general no todo campo vectorial C^∞ en \mathbb{R}^2 , extiende de manera C^∞ a \mathbb{RP}^2 .

Ejemplo 38. Un *campo vectorial X , de clase C^∞ , no singular en \mathbb{R}^2 que no extiende C^∞ a \mathbb{RP}^2 , pero que admite un reescalamiento ρ , tal que ρX si es C^∞ en \mathbb{RP}^2* . Consideramos en \mathbb{R}^2 el campo vectorial

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + (1 - 2xy) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Las expresiones de X en las cartas afines $\mathbb{R}_{x_0x_2}^2, \mathbb{R}_{x_1x_2}^2$ son:

$$X_{02} = \frac{3x_0^2 - x_0x_2^2}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_0} - (x_2^2 - 2x_0) \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_{12} = \frac{x_2^2 - 3x_1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

La terna $\{X, X_{02}, X_{12}\}$ satisface (A.1), pero X_{02}, X_{12} no son C^∞ . Así X no extiende C^∞ a \mathbb{RP}^2 . Procedemos a encontrar una función de reescalamiento $\rho : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, C^∞ , tal que $\rho X, \rho_{02}X_{02}, \rho_{12}X_{12}$ si sean C^∞ en sus respectivas cartas afines. Las expresiones ρ_{02}, ρ_{12} denotan las restricciones de ρ a las cartas afines $\mathbb{R}_{x_0x_2}^2, \mathbb{R}_{x_1x_2}^2$. Por abuso de notación escribimos ρ para denotar la restricción de ρ a \mathbb{R}_{xy}^2 . Proponemos la función

$$\rho : \mathbb{R}^3 - \{\bar{0}\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$(x_0, x_1, x_2) \mapsto \frac{x_2}{\sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}},$$

la cual satisface:

1. ρ es constante en líneas que pasan por el origen en \mathbb{R}^3 , ya que $\rho(x_0, x_1, x_2) = \rho(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$, para $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

2. ρ restringida a $\mathbb{R}_{xy}^2, \mathbb{R}_{x_0x_2}^2, \mathbb{R}_{x_1x_2}^2$ está bien definida y es C^∞ .

Así $(\phi_1 \circ \phi_2^{-1})_*(\rho X) = \rho_{02}X_{02}$, $(\phi_0 \circ \phi_2^{-1})_*(\rho X) = \rho_{12}X_{12}$ satisfacen (A.1) y $\rho X, \rho_{02}X_{02}, \rho_{12}X_{12}$ son C^∞ en las cartas afines. De ello se concluye que ρX extiende C^∞ a \mathbb{RP}^2 . \square

Definición 39. Dos campos vectoriales X_1, X_2 son *equivalentes* en \mathbb{R}^2 si existe una función $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , no nula, tal que $X_1 = \rho X_2$. Denotamos la equivalencia de X_1 y X_2 mediante $X_1 \sim X_2$. Es posible mostrar que “ \sim ” es relación de equivalencia para campos vectoriales C^∞ en \mathbb{R}^2 .

Definición 40. La *foliación de un campo vectorial X en \mathbb{R}^2* es la clase de equivalencia $[X]$ inducida por la relación “ \sim ”.

Lo anterior permite reescalar la velocidad de X sin cambiar su conjunto de puntos singulares. Nuestro siguiente paso consiste en extender la foliación de X a \mathbb{RP}^2 , para ello requerimos de las siguientes definiciones en la línea al infinito L_∞ .

Definición 41. Decimos que $q \in L_\infty$ es un *punto singular al infinito* de X , si existe una trayectoria regular de X en \mathbb{R}^2 cuyo ω -límite o α -límite es q .

Definición 42. Decimos que $\gamma_\infty \subset L_\infty$ es una *trayectoria regular al infinito* de X , si para todo punto $p \in \{\text{traza de } \gamma_\infty\}$ en una carta afín $\mathbb{R}_{x_0x_2}^2$ (respectivamente $\mathbb{R}_{x_1x_2}^2$) existe una vecindad abierta \mathcal{U} que contiene a p y una función $\rho_{02} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ (respectivamente $\rho_{12} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$) tal que $\rho_{02}X_{02}$ es C^∞ , no nulo en p y la restricción de γ_∞ en \mathcal{U} es trayectoria regular de dicho campo vectorial (respectivamente $\rho_{12}X_{12}$).

Los dos conceptos anteriores son independientes de las cartas afines. Para mostrarlo supongamos sin pérdida de generalidad que $q \in L_\infty$ es un punto singular al infinito de X en la carta afín $\mathbb{R}_{x_1x_2}^2$. Debemos mostrar que la expresión de q bajo el cambio de coordenadas $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}$ en $\mathbb{R}_{x_0x_2}^2$, también es un punto singular al infinito. Consideramos $\gamma(t)$ trayectoria regular de X en \mathbb{R}^2 , tal que su ω -límite es q . Notamos que:

1. Si $q = [1 : 0 : 0]$, entonces $q \notin \mathbb{R}_{x_0x_2}^2$ y no hay nada que verificar.
2. Si $q \neq [1 : 0 : 0]$, entonces $(\phi_1 \circ \phi_0^{-1})(q) = [1/x_1 : 1 : 0] \in \mathbb{R}_{x_0x_2}^2$ es un punto en la línea al infinito L_∞ y es el ω -límite de la trayectoria $(\phi_1 \circ \phi_0^{-1}) \circ (\gamma(t))$, ya que el ω -límite es invariante bajo difeomorfismos.

Lo anterior puede verificarse de manera similar para el α -límite.

Por otra parte supongamos que $\gamma_\infty \subset L_\infty$ es trayectoria regular al infinito de X en la carta afín $\mathbb{R}_{x_1x_2}^2$. Debemos mostrar que si $p \in \{\text{traza de } \gamma_\infty\}$ se encuentra en la carta afín $\mathbb{R}_{x_1x_2}^2$, entonces para la expresión de p bajo el cambio de coordenadas $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}$ en $\mathbb{R}_{x_0x_2}^2$, existe una vecindad abierta \mathcal{U} que lo contiene y una función $\rho_{02} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\rho_{02}X_{02}$ es C^∞ , no nulo en $(\phi_1 \circ \phi_0^{-1})(p)$ y la restricción de $(\phi_1 \circ \phi_0^{-1}) \circ (\gamma_\infty)$ en \mathcal{U} es trayectoria regular de dicho campo vectorial. Notamos que:

1. Si $p = [1 : 0 : 0]$, entonces $p \notin \mathbb{R}_{x_0x_2}^2$ y no hay nada que verificar.
2. Si $p \neq [1 : 0 : 0]$, entonces $(\phi_1 \circ \phi_0^{-1})(p) = [1/x_1 : 1 : 0] \in \mathbb{R}_{x_0x_2}^2$ es un punto en la línea al infinito L_∞ , tal que el campo vectorial $(\rho_{12} \circ \phi_1 \circ \phi_0^{-1})X_{02}$ es C^∞ y no se anula en dicho punto. De ello se sigue la existencia de una vecindad abierta \mathcal{U} suficientemente pequeña de $(\phi_1 \circ \phi_0^{-1})(p)$ en la cual se encuentra definida $\rho_{02} \doteq \rho_{12} \circ \phi_1 \circ \phi_0^{-1}$. Más aún como $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}$ es difeomorfismo, la restricción de $(\phi_1 \circ \phi_0^{-1}) \circ (\gamma_\infty)$ en \mathcal{U} es trayectoria regular de $\rho_{02}X_{02}$.

Con ello la definición 42 está bien hecha.

Definición 43. Para un campo vectorial X en \mathbb{R}^2 , la *foliación de X en $\mathbb{R}P^2$* consta de:

1. La foliación de X en \mathbb{R}^2 .
2. Los puntos singulares al infinito de X .
3. Las trayectorias regulares al infinito de X .

En un sentido usual (ver [10] pág. 28), un punto $p \in \mathbb{R}^2$ es no singular para la foliación \mathcal{F} de X si admite un campo vectorial Y en una vecindad abierta \mathcal{U} de p , tal que es C^∞ , no nulo y describe las hojas de \mathcal{F} en \mathcal{U} . Las integrales primeras para X que buscamos, no incluyen en su dominio de definición a la línea al infinito L_∞ . Por ello los puntos singulares al infinito que se consideran en la definición 43, en ocasiones son puntos no singulares para la foliación \mathcal{F} de X en el sentido usual.

Ejemplo 39. Consideramos el campo vectorial

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y},$$

el cual es C^∞ en \mathbb{R}_{xy}^2 y cuyas expresiones en las cartas afines $\mathbb{R}_{x_0x_2}^2$, $\mathbb{R}_{x_1x_2}^2$ están dadas por

$$X_{02} = -x_0 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_{12} = -\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Notamos que la trayectoria $L_\infty \cap \mathbb{R}_{x_1x_2}^2$ está compuesta en su totalidad por puntos no singulares, pero para nuestros fines, siguiendo la definición 43, todos estos puntos son singulares al infinito. \square

Ejemplo 40. *No todo campo vectorial X , de clase C^∞ en \mathbb{R}^2 , determina una foliación en \mathbb{RP}^2 con la definición 43.* Consideramos el campo vectorial

$$X = \operatorname{sen} y \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{cos} x \frac{\partial}{\partial y},$$

el cual es C^∞ en \mathbb{R}_{xy}^2 y cuyas expresiones en las cartas afines $\mathbb{R}_{x_0x_2}^2$, $\mathbb{R}_{x_1x_2}^2$ están dadas por

$$\begin{aligned} X_{02} &= x_2 \left(\left(\operatorname{sen} \frac{1}{x_2} - x_0 \operatorname{cos} \frac{x_0}{x_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_0} - \operatorname{cos} \frac{x_0}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \\ X_{12} &= x_2 \left(\left(\operatorname{cos} \frac{1}{x_2} - x_1 \operatorname{cos} \frac{x_1}{x_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} - \operatorname{sen} \frac{x_1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

Las rectas $\{y = \pm x + n\pi/2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ delimitan rombos en \mathbb{R}_{xy}^2 cuyos vértices y aristas son puntos singulares y trayectorias regulares de X respectivamente. El interior de cada uno de estos rombos está compuesto de trayectorias regulares periódicas y un punto singular aislado de X . Notamos que las rectas anteriores se acumulan en los puntos $[1 : 1 : 0], [1 : -1 : 0] \in L_\infty$, por lo que en esos puntos X_{02} y X_{12} no satisfacen la definición 41. También es de observar que en $\mathbb{R}_{x_0x_2}^2$ y $\mathbb{R}_{x_1x_2}^2$ los rombos se van acumulando en puntos de L_∞ , por lo que en esos puntos X_{02} y X_{12} no poseen cajas de flujo, lo cual impide que se satisfaga la definición 42. Así X no determina una foliación en \mathbb{RP}^2 con la definición 43. \square

Bibliografía

- [1] L. V. Ahlfors. *Conformal Invariants*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math., 1973.
- [2] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math., third edition, 1979.
- [3] A. Alvarez-Parrilla, J. Muciño-Raymundo. *Complex analytic vector fields with essential singularities*. Preprint (2014).
- [4] V. I. Arnold. *Ordinary Differential Equations*. Springer Verlag, first edition, 1992.
- [5] H. Bass, G. Meisters. *Polynomial flows in the plane*. *Advances in Mathematics*, 55 (1985), 173–208.
- [6] J. Basto-Goncalves. *Linearization on resonant vector fields*. *Transactions of the American Mathematical Society* 362, 12 (2010), 6457–6476.
- [7] W. M. Boothby. *The Topology of regular curve families with multiple saddle points*. *Amer. J. Math.* 73, 2 (1951), 405–438.
- [8] W. M. Boothby. *The Topology of level curves of harmonic functions with critical points*. *Amer. J. Math.* 73, 3 (1951), 512–538.
- [9] J. Chavarriga, H. Giacomini, J. Gine, J. Llibre. *On the integrability of two dimensional flows*. *J. of Diff. Equations*, 157 (1999), 163–182.
- [10] C. Camacho, A. L. Neto. *Geometric Theory of Foliations*. Birkhäuser Verlag, 1985.
- [11] G. Darboux. *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier order et de premier degré*. *Bull. Sci. Math.* (1878), 60–96.
- [12] F. Dumortier, J. Llibre, J. A. Artés. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Springer-Verlag, 2006.
- [13] N. H. Ibragimov. *Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations*. Chichester, Wiley, 1999.
- [14] Y. Iliashenko. *Dynamical Systems I*. Springer Verlag, first edition, 1994.
- [15] Y. Iliashenko. *Finiteness Theorems for Limit Cycles*. American Mathematical Society, 1991.
- [16] Y. Ilyashenko, S. Yakovenko. *Lectures on Analytic Differential Equations*. American Mathematical Society, 2008.

- [17] W. Kaplan. *Regular curve-families filling the plane, I and II*. Duke Math. J., vol. 7 (1940), 154–185 and vol. 8 (1941), 11–46.
- [18] W. Kaplan. *Topology of level curves of harmonic functions*. Transactions of the American Mathematical Society 63, 3 (1948), 514–522.
- [19] W. Kaplan. *On partial differential equations of first order*. Topics in Analysis, Jyväskylä 1970, O. Lehto *et al.* (eds.), Lecture Notes in Math. 419, Springer, Berlin (1974), 221–231.
- [20] F. Klein. *On Riemann's Theory of Algebraic Functions and Their Integrals*. Dover, 2003.
- [21] S. Kobayashi, K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry, Vol. II*. Wiley, 1969.
- [22] S. Krantz, H. Parks. *A Primer of Real Analytic Functions*. Birkhäuser, Verlag, 1992.
- [23] G. R. León-Gil. *Simetrías de campos vectoriales analíticos en superficies compactas*. Aportaciones Matemáticas, Memorias 40 (2009), 41–58.
- [24] G. R. León-Gil, J. Muciño-Raymundo. *Integrability and complex structures adapted to smooth vector fields on the plane*. Preprint (2015).
- [25] S. Lie. *Classification and integration of ordinary differential equations between x, y , admitting a group of transformations*. En alemán, 1883, B. Teubner, H. Aschehoug (eds.), Collected Works, vol. 5, Leipzig–Oslo (1922).
- [26] W. Li, J. Llibre, M. Nicolau, X. Zhang. *On the differentiability of first integrals of two-dimensional flows*. Proc. Amer. Math. Soc. 130, 7 (2002), 2079–2088.
- [27] L. Markus. *Global structure of ordinary differential equations in the plane*. Transactions of the American Mathematical Society 76, 1 (1954), 127–148.
- [28] L. Mazzi, M. Sabatini. *On the existence of global first integrals in the plane*. Annali di Mat. pura et applicata vol. CLXIII (1993), 143–160.
- [29] L. Mazzi, M. Sabatini. *Global first integrals for plane systems with finitely many singularities*. Non Linear Analysis 19, 9 (1992), 873–883.
- [30] J. Muciño-Raymundo. *Complex structures adapted to smooth vector fields*. Math. Annalen, 322 (2003), 229–265.
- [31] J. Muciño-Raymundo, C. Valero-Valdéz. *Bifurcations of meromorphic vector fields on the Riemann sphere*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. 15 (1995), 1211–1222.
- [32] M.–P. Muller. *An analytic foliation of the plane without weak first integrals of class C^1* . Boletín de la Soc. Mat. Mex. (2) 21, 1 (1976), 1–5.
- [33] M.–P. Muller. *Quelques propriétés des feuilletages polynomiaux du plan*. Boletín de la Soc. Mat. Mex. (2) 21, 1 (1976), 6–14.
- [34] J. Palis, J. de Melo. *Geometric Theory of Dynamical Systems. An Introduction*. Springer-Verlag, 1982.

- [35] J. V. Pereira. *Integrabilidade de Folheações Holomorfas*. 24o Colóquio Brasileiro de Matemática, Publicações Matemáticas, IMPA (2003).
- [36] I. G. Petrovski. *Ordinary Differential Equations*. Dover, 1973.
- [37] M. Porter. *Superficies de Riemann*. 3er Colóquio Departamento de Matemáticas. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. “La Trinidad”, Tlaxcala, México. 8 al 26 de agosto de 1983. Publicaciones Matemáticas, 2003.
- [38] B. Riemann. *Bernhard Riemann Collected Papers*. Kendrick Press, 2004.
- [39] E. P. Volokitin, V. V. Ivanov. *Isochrinicity and commutation of polynomial vector fields*. Siberian Mathematical Journal vol. 40 (1999), 23–38
- [40] T. Ważewsky. *Sur un problème de caractère intégral relatif à l'équation $\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$* . Mathematica vol. VIII (1934), 103–116.
- [41] J. L. Weiner. *First integrals for a direction field on a simply connected plane domain*. Pacific J. Math. 132, 1 (1988), 195–208.