



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Restricciones De Norma Sobre El Vértice Fermión-Fotón

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:
Doctor en Ciencias en el Área de Física

PRESENTA:
Luis Albino Fernández Rangel

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Adnan Bashir

MORELIA, MICH.

AGOSTO, 2018.

Índice general

Resumen	I
Abstract	III
Prefacio	1
1. Introducción a QED	9
1.1. Ecuaciones de Maxwell	10
1.2. Ecuación de Dirac	14
1.3. Principio de norma en QED	16
1.4. Lagrangiano de QED	18
2. QED en el continuo	21
2.1. Formulación de integral de camino	22
2.2. Reglas de Feynman	24
2.3. Propagador fermiónico a un lazo	30
2.4. Ecuaciones de Schwinger-Dyson	33

2.5. Identidad de Ward-Fradkin-Green-Takahashi	37
2.6. Identidades transversas de Takahashi	39
2.7. Transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin	43
2.8. Renormalizabilidad multiplicativa	44
3. El vértice fermión-fotón	47
3.1. Estructura general del vértice	48
3.2. Vértice longitudinal	50
3.3. Vértice transverso	52
Conclusiones	55
Apéndice A: Matrices de Dirac	57
Bibliografía	59

Resumen

Estudios no-perturbativos a través de las ecuaciones de Schwinger-Dyson (SDEs) requieren la implementación de un esquema de truncamiento para este conjunto infinito y acoplado de ecuaciones, para poder reducirlos a un sistema tratable. Una de las prácticas más comunes es la implementación de un *ansatz* para el vértice de interacción fermión-bosón de 3-puntos. La electrodinámica cuántica (QED) es una teoría adecuada para el estudio de las restricciones de invarianza de norma sobre la construcción de dicho *ansatz* para el vértice, y estas son: i) las identidades de Ward-Fradkin-Green-Takahashi (WFGTIs), las cuales determinan la llamada componente longitudinal de este vértice, y ii) las transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin (LKFTs), las cuales restringen la componente del vértice transversa al momento del fotón, la cual queda indeterminada por la WFGTI. En este trabajo de tesis, empleamos las identidades transversas de Takahashi (TTIs) para imponer restricciones no-perturbativas sobre la componente trasnversa del vértice de 3-puntos fermión-fotón. Demostramos que la implementación de estas identidades es crucial para asegurar la correcta covarianza de norma del propagador fermiónico y su renormalizabilidad multiplicativa. También hacemos una comparación entre distintas contrucciones ya existentes para el vértice y verificamos si éstas satisfacen las TTIs. Adicionalmente, analizamos el rompimiento dinámico de simetría quirral (DCSB) en la SDE para el propagador fermiónico, y derivamos los requerimientos básicos que debe satisfacer el vértice para asegurar que el acoplamiento crítico, arriba del cual toma lugar el DCSB, sea independitente de la norma.

Palabras clave: Electrodinámica Cuántica, Ecuaciones de Schwinger-Dyson, Identidades de Ward-Takahashi, Transformaciones de Ladau-Khalatnikov-Fradkin, Rompimiento Dinámico de Simetría Quiral.

Abstract

Non-perturbative studies of the Schwinger-Dyson equations (SDEs) require their infinite, coupled tower to be truncated in order to reduce them to a practically solvable set. A usual practice is to make an ansatz for the 3-point fermion-boson vertex. Quantum electrodynamics (QED) is an illuminating example in which we can study the constraints of gauge invariance, namely, i) the Ward- Fradkin-Green-Takahashi identities (WFGTIs), which determine the so called longitudinal part of this vertex and ii) the Landau-Khalatnikov-Fradkin transformations (LKFTs), which probe its component transverse to the photon momentum and undetermined by the WFGTI. In this work, we employ the transverse Takahashi identities (TTIs) to impose further non-perturbative constraints on the latter component of the 3-point fermion-photon vertex. We show that the implementation of these identities is crucial in ensuring the correct local gauge transformation for the electron propagator and its multiplicative renormalizability. We also make an explicit comparison of various existing constructions of this vertex against the demands of the TTIs. In addition, we analyse dynamical chiral symmetry breaking (DCSB) in the SDE for the fermion propagator, and derive the non-perturbative constraints on the vertex in order to ensure for the critical coupling, above which DCSB takes place in QED, to be gauge independent.

Prefacio

Las *teorías de norma* constituyen el pilar central sobre el que se sustenta la descripción más precisa y elegante de las partículas fundamentales en la naturaleza y sus interacciones. La idea primordial detrás de estas teorías es sorprendentemente simple pero con implicaciones trascendentales y se le conoce como el *principio de norma*, el cual establece que las interacciones entre partículas pueden ser naturalmente incorporadas en la descripción del sistema en estudio demandando al lagrangiano correspondiente ser invariante ante transformaciones locales generadas por un grupo de simetría muy particular: la llamada *simetría de norma*, que además de caracterizar la naturaleza de cada tipo de interacción, es una simetría exacta a nivel clásico.

Históricamente, la idea de *invarianza de norma* fue introducida por primera vez en la electrodinámica clásica, con fundamento teórico en las ecuaciones de Maxwell, las cuales exhiben explícitamente dicha invarianza. Esta idea es retomada en el contexto de las *Teorías Cuánticas de Campo* (QFTs, por sus siglas en inglés) en los años 40s por S. Tomonaga [1], J. Schwinger [2, 3] y R. Feynman [4], quienes sentaron las bases de la que al día de hoy es la teoría más precisa que existe: la *Electrodinámica Cuántica* (QED), la cual describe las interacciones electromagnéticas (EM) y tiene una simetría de norma de tipo $U_{EM}(1)$, donde el subíndice hace referencia a la conservación de la carga eléctrica en este tipo de interacciones. La descripción unificada de las interacciones electromagnéticas y las interacciones débiles (originalmente teorizadas por E. Fermi a principios de los años 30s) surge en los años 60s gracias al trabajo de S. Glashow [5], A. Salam y S. Weinberg [6, 7], en la llamada *Teoría Electrodébil*, cuya simetría de norma es $SU_L(2) \times U_Y(1)$, en la cual se conserva la hipercarga débil (Y) y los fermiones no-masivos poseen únicamente quiralidad izquierda (L). Por otra parte, en 1964 M. Gell-Mann y G. Zweig [8–10], de manera independiente, sientan las bases

del *modelo de quarks*, el cual es el arquetipo de las interacciones fuertes posteriormente descritas por la *Cromodinámica Cuántica* (QCD), en las cuales se conserva la carga de color (C) y su correspondiente grupo de norma es $SU_C(3)$.

En conjunto, la teoría electrodébil y QCD constituyen el *Modelo Estándar* (SM) de partículas elementales, cuyo grupo de simetría es por supuesto $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$. Este modelo describe toda la materia visible en el universo en términos de *fermiones fundamentales* de espín-1/2 (quarks y leptones), interactuando entre sí a través del intercambio de *bosones de norma* de espín-1 (el gluón, los W s, el Z y el fotón). Las predicciones teóricas del SM han sido puestas a prueba y validadas experimentalmente, mostrando una precisión sin precedentes, proporcionando así la descripción más sólida y detallada que tenemos hoy en día del mundo subatómico. No obstante, este exitoso modelo deja abiertas muchas preguntas de relevancia trascendental, actualmente bajo escrutinio científico.

Uno de los enigmas más importantes es sin duda alguna el origen de la masa. Por ejemplo, la inclusión de un término de masa para cada uno de los bosones mediadores de la interacción débil en el lagrangiano correspondiente supone *a priori* la ruptura explícita de la simetría de norma correspondiente al sector electrodébil, por lo que preservar el principio de norma requeriría que dichos bosones no tuvieran masa. Sin embargo, esta conjetura está en contraste con las observaciones experimentales, las cuales indican una masa de aproximadamente 80 y 90 GeV para los bosones W^\pm y el Z , respectivamente. El *mecanismo de Higgs* resuelve esta aparente inconsistencia en la teoría [11–13].

Las partículas fundamentales del SM adquieren masa debido a su interacción con el llamado *bosón de Higgs*, un campo escalar fundamental de espín-0, cuyo valor de expectación $\langle \phi \rangle_{vac} \approx 250$ GeV en el vacío [14] rompe la simetría de norma a nivel cuántico, en un proceso denominado *ruptura espontánea de simetría*¹ [7,15,16], pero la preserva a nivel clásico (i.e. en el lagrangiano). Este valor de expectación finito (diferente de cero) es directamente responsable de las masas de los bosones W^\pm y el Z , y a su vez produce una masa para cada uno de los quarks y leptones proporcional al acoplamiento de Yukawa entre el fermión correspondiente y el campo de Higgs. El valor de $\langle \phi \rangle_{vac}$ fue medido experimentalmente en el 2012 en el *Large Hadron Collider* (LHC), sugiriendo una masa aproximada de 125 GeV

¹Al ser tomadas en cuenta las correcciones cuánticas, el campo del Higgs produce la ruptura espontánea de la simetría $SU_L(2) \times U_Y(1)$ de la teoría electrodébil en la simetría $U_{EM}(1)$ de QED

para el bosón de Higgs, la última pieza del SM en ser finalmente detectada [17].

Pese al esclarecedor panorama que revela el mecanismo de Higgs, éste es capaz de explicar tan sólo un pequeño porcentaje de la masa total de la materia visible en el universo. Las predicciones teóricas del sector electrodébil se ajustan a las observaciones experimentales si se considera una masa *corriente* del orden de 5 MeV para los quarks *up* y *down*, lo que representa menos del 2% en comparación con la masa de aproximadamente 300–500 MeV que se espera de un quark *constituyente*. De hecho, el 98% de la masa restante es atribuida a las interacciones fuertes entre los bloques fundamentales de los cuales están compuestos los protones y neutrones en lo núcleos atómicos.

La cromodinámica cuántica es aceptada como la teoría de las interacciones fuertes entre los componentes primordiales de los cuales están compuestos los mesones y bariones. Esta teoría de norma no-abeliana describe a los hadrones como estados ligados fuertemente interactuantes, constituidos por los grados de libertad fundamentales de QCD, i.e., quarks y gluones. En el régimen de altas energías, el acoplamiento entre estos grados de libertad es muy débil y la teoría se vuelve *asintóticamente libre* [18–20]. En este régimen ultravioleta (UV) es posible aplicar teoría de perturbaciones (PT) en el tratamiento de QCD. No obstante, en el régimen infrarrojo (IR) de bajas energías en el que el las interacciones entre quarks y gluones es muy intensa, no es posible aplicar PT en el estudio de QCD.

En el régimen IR, la descripción de las propiedades hadrónicas tales como las masas, sus factores de forma y transición, entre otras, representa un enorme desafío al intelecto humano puesto que QCD es la única teoría de naturaleza no-perturbativa de la que tenemos conocimiento. A las escalas de baja energía en las que protones y neutrones coexisten en el núcleo atómico, la faceta no-perturbativa de QCD tiene su máximo esplendor y la intensa dinámica entre quarks y gluones da lugar a dos fenómenos emergentes muy importantes: el ***confinamiento de color*** dentro de los hadrones [21–23], y el ***Rompimiento Dinámico de Simetría Quiral*** (DCSB), siendo este último el mecanismo responsable de la *generación dinámica de masas* para los quarks constituyentes y cuyo parámetro de orden es el llamado *condensado quiral* $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$, un valor de expectación de un campo compuesto (en contraste con un rompimiento dinámico de simetría, en el que la masa viene dada en términos del valor de expectación de un campo fundamental). Una descripción realista del espectro hadrónico y sus propiedades físicas debe incorporar estos dos fenómenos de primeros principios, lo

cual implica la necesidad de implementar técnicas no-perturbativas en el estudio de estados fuertemente ligados.

Para el estudio de QCD en el continuo, las *Ecuaciones de Schwinger-Dyson* (SDEs) proporcionan un marco teórico con invarianza de Poincaré manifiesta en el que podemos estudiar el comportamiento de las *funciones de Green de n -puntos* [24, 25], ingredientes básicos en la descripción de hadrones, tanto en el régimen IR como en el UV. Estas ecuaciones incorporan confinamiento y DCSB de manera natural en QCD, provando ser una herramienta poderosa en la descripción del espectro hadrónico [26–28] y en la predicción de resultados experimentales [29–32]. En las últimas décadas, se ha logrado un considerable progreso en el estudio de *propagadores* (funciones de Green de 2-puntos) [33–37] y el *vértice fermión-bosón* (función de Green de 3-puntos) [38–40].

Las SDEs son las ecuaciones fundamentales de cualquier QFT y dado que su derivación es independiente de la magnitud del acoplamiento (α) entre los grados de libertad elementales, son ideales para el estudio de teorías no-perturbativas como QCD. No obstante, siendo un conjunto infinito de ecuaciones integrales no-lineales y acopladas entre sí, el estudio de la teoría a través de este formalismo requiere un esquema de truncamiento auto-consistente del sistema de ecuaciones. Dicho truncamiento debe preservar las simetrías y propiedades fundamentales de la teoría. En el régimen perturbativo, las SDEs pueden ser sistemáticamente truncadas en potencias de α . La simetría de norma es preservada orden por orden en la expansión perturbativa, y además la teoría es renormalizable. Sin embargo, en el régimen no-perturbativo resulta ser necesario implementar un esquema de truncamiento totalmente diferente.

En el régimen no-perturbativo, la práctica más común es truncar las SDEs a nivel de los propagadores. En el contexto de QED y QCD, esto implica la necesidad de introducir un *ansatz* para los vértices quark-gluón y fermión-fotón², respectivamente, para así desacoplar a los propagadores de las funciones de Green de 4-puntos y órdenes más altos. No obstante, la elección de este *ansatz* no puede ser arbitraria puesto que debe preservar las características y propiedades esenciales de estas QFTs, tales como la invarianza local de norma, la renormalizabilidad de la teoría y sus respectivas implicaciones, *viz.*, las *Iden-*

²En QED, el fermión puede pertenecer a la familia de los leptones o de los quarks.

tidades de Ward-Fradkin-Green-Takahashi (WFGTIs) en QED [41–44], las *Identidades de Slavnov Taylor* (STIs) en QCD [45, 46], así como las *Identidades Transversas de Takahashi* (TTIs) [47–51] y las *Transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin* (LKFTs) en ambas teorías [42, 52–55]. Adicionalmente, este ansatz debe poseer las mismas propiedades que su versión *a nivel de árbol*³ ante las transformaciones de conjugación de carga, paridad e inversión temporal, y debe reducirse a su expansión perturbativa en el límite de acomplamiento débil.

El vértice fermión-bosón se comporta como un cuadri-vector ante una transformación de Lorentz, y en su descomposición más general está constituido por 12 estructuras (cuadri-) vectoriales linealmente independientes, cada una de ellas ponderada por un *factor de forma*. Implementar un ansatz no-perturbativo para este vértice en el truncamiento de las SDEs implica modelar la estructura analítica de cada uno de sus factores de forma, preservando las propiedades e identidades antes mencionadas. En conexión con lo anterior, las WFGTIs (y su contraparte no-abeliana, las STIs) permiten separar al vértice en dos partes: las componentes ***longitudinal*** y ***transversa***. La parte longitudinal del vértice fermión-fotón está completamente determinada por la WFGTI en términos del propagador fermiónico [56]. De manera análoga, la STI fija la componente longitudinal del vértice quark-gluón en términos del propagador del quark, el propagador del fantasma⁴ y el kernel de dispersión quark-fantasma [57]. En ambos casos, el vértice longitudinal consta de 4 estructuras vectoriales, pero uno de los correspondientes factores de forma longitudinales es cero en QED. Desafortunadamente, tanto la WFGTI como la STI dejan completamente indeterminado al vértice transversal, definido en términos de las 8 estructuras vectoriales restantes y sus correspondientes factores de forma transversos. La componente transversal del vértice juega un papel importante en la renormalizabilidad de la teoría y tiene efectos medibles en física hadrónica, por lo que es imperativo estudiar esta componente del vértice.

En la construcción de un ansatz para los factores de forma transversos, las LKFTs para QED han demostrado ser capaces de imponer restricciones sobre el vértice electrón-

³El nivel de árbol de una función de Green es la expresión para dicha función extraída directamente del lagrangiano del sistema, i.e., sin correcciones cuánticas.

⁴En la formulación de integral de camino para QCD, es necesario introducir los llamados *fantasmas de Faddeev-Popov*: campos escalares ficticios, necesarios para preservar la unitariedad de la teoría en normas covariantes.

fotón y describir un DCSB invariante de norma [58–66]. Dichas transformaciones describen la respuesta de las funciones de Green ante una variación en el parámetro de norma, dejando a las WFGTIs invariantes. Recientemente, estas transformaciones han sido derivadas para QCD [55, 67]. Además, una de las implicaciones de las LKFTs es la *Renormalizabilidad Multiplicativa* (MR) del propagador fermiónico, una propiedad que ha sido implementada en el estudio de restricciones y en la construcción de *ansätze* para el vértice electrón-fotón [39, 68–79]. Los resultados a *un lazo* en PT imponen restricciones adicionales [56, 72, 80–82].

Por otra parte, las TTIs han sido recientemente utilizadas para estudiar la estructura no-perturbativa de los factores de forma transversos del vértice fermión-fotón [83, 84], modelando un vértice transverso que incorpora DCSB en su estructura analítica y además se reduce a su correcto límite asintótico en PT. Desafortunadamente, este modelo para el vértice no garantiza la MR del propagador fermiónico. Es entonces razonable buscar modelar al vértice transverso utilizando en conjunto a las TTIs y el argumento de renormalizabilidad multiplicativa.

Uno de los aspectos más importantes en el truncamiento de las SDEs para el estudio de estados fuertemente ligados es la correcta incorporación del DCSB tanto en el propagador del fermión como en el vértice, pues este tiene efectos medibles en el espectro hadrónico [31, 32]. Estudios no-perturbativos de la SDE para el propagador del quark, la llamada *ecuación de gap*, sugieren que debido al DCSB la función de masa $\mathcal{M}(p^2)$ del quark se satura en el límite IR ($p^2 \rightarrow 0$) a un valor finito de alrededor de 300–500 MeV [85–87], su valor constituyente, incluso en el *límite quiral* en el que la masa corriente del quark (la que aparece en el lagrangiano) es igual a cero. Estudios de QCD *en la red* (LQCD) confirman estos resultados [88–90]. En el régimen UV, esta función de masa se reduce a su valor perturbativo de tan sólo unos cuantos MeV. Las investigaciones tanto en el continuo como en la red muestran que el propagador del quark corresponde a una excitación confinada [31, 91]. Por otro lado, se han iniciado estudios en LQCD para calcular los factores de forma transversos del vértice quark-gluón para algunas configuraciones cinemáticas de momento [92–95]. Estos estudios revelan que todos los factores de forma del vértice se saturan a un valor finito en el régimen IR, incluso en el límite quiral en donde algunos de estos factores de forma serían idénticamente cero a cualquier orden en PT. Este fenómeno de saturación es proporcional a la masa dinámicamente generada, develando los efectos del DCSB en el vértice [92, 93, 96]. Estudios

a través de las SDEs proveen resultados que están en buen acuerdo con aquellos reportados en LQCD [97–100], provando que estas dos aproximaciones son complementarias [101]. Sin embargo, mejorar la retroalimentación entre los estudios en el continuo y en LQCD requiere predicciones teóricas más precisas, lo que a su vez implica truncamientos de las SDEs más refinados, siendo el vértice quark-gluón una pieza fundamental para lograrlo.

En virtud de la naturaleza no-abeliana de QCD, la construcción de un ansatz para el vértice quark-gluón evoca la complejidad de los cálculos no-perturbativos, siendo esencial el perfeccionamiento progresivo de este tipo de truncamiento. En este sentido, el estudio del vértice fermión-fotón en el régimen no-perturbativo de QED propicia un escenario amigable en el que podemos explorar las prescripciones básicas en la construcción de un ansatz físicamente aceptable. No obstante, la motivación para estudiar la faceta no-perturbativa de QED va más allá de ser un simple modelo de juguete de QCD, y es relevante por sí misma.

Aunque QED manifiesta un comportamiento perturbativo en la naturaleza, se cree que un campo EM suficientemente intenso (tal como en los experimentos de colisiones de iones pesados) podría desencadenar una transición de su fase perturbativa a una dinámica no-perturbativa, a medida que se incrementa el acoplamiento electromagnético α . Esta transición de fase es continua y está caracterizada por un *valor crítico* α_c del acoplamiento, distinto de cero, arriba del cual la simetría chiral se rompe dinámicamente: para $\alpha > \alpha_c$, la función de masa \mathcal{M} del fermión entra en el plano complejo, indicando un DCSB. El acoplamiento crítico señala entonces el punto de bifurcación entre las soluciones perturbativa y no-perturbativa de la función de masa del fermión. Estudios en el continuo usando un vértice desnudo sugieren que $\alpha_c = \pi/3$ [102, 103], revelando un comportamiento exponencial de la función de masa, el llamado *escalamiento de Miransky* [104–106]. Por otro lado, se demostró que en la *criticalidad* $\alpha = \alpha_c$, la dimensión anómala de la función de masa es $\gamma_m = 1$ [107, 108]. Análisis posteriores tienden a argumentar que, en la criticalidad, este resultado sigue siendo válido independiente de la elección del vértice [109–111]. Esta conjetura ha sido implementada en la construcción del ansatz para el vértice [77], que debe reproducir $\gamma_m = 1$. Cabe mencionar que este valor de la dimensión anómala implica una dimensión dinámica $d = 2(3 - \gamma_m) = 4$ para el operador $(\bar{\psi}\psi)^2$, en contraste con su correspondiente dimensión canónica $d = 6$. Esto indica que, mientras en PT este operador es irrelevante, para $\alpha \geq \alpha_c$ las interacciones de 4-fermiones se vuelven relevantes y estas deben ser tomadas en cuenta para poder estudiar la fase no

perturbativa de QED de manera consistente [109, 112]. Cabe mencionar que esta transición de fase también se ha estudiado para QED en la red, confirmando una transición de segundo orden en la criticalidad [113] para un número de fermiones N_f pequeño ($N_f \leq 8$) [114–116].

Debido a que el acoplamiento crítico determina un punto de transición de fase con efectos posiblemente medibles en un experimento, es natural pensar que dicho acoplamiento crítico sea una observable física y por lo tanto invariante de norma. Esta independencia de α_c sobre el parámetro de norma ha sido implementada para imponer restricciones sobre los factores de forma del vértice transverso [40].

El objetivo principal de este trabajo de tesis es determinar las restricciones no-perturbativas que debe satisfacer un ansatz físicamente aceptable para el vértice fermión-fotón en QED, de manera que este vértice satisfaga las TTIs, garantice la MR del propagador fermiónico, describa un DCSB independiente de norma, reproduzca la dimensión anómala $\gamma_m = 1$ esperada para la función de masa, y se reduzca a su expansión perturbativa en el límite asintótico. Para este propósito, la presente tesis está organizada de la siguiente forma:...

Capítulo 1

Introducción a QED

La *Electrodinámica Cuántica* (QED) es la teoría de norma que describe las interacciones electromagnéticas entre fermiones de espín-1/2, eléctricamente cargados, y los bosones de norma de espín-1 correspondientes a la teoría, *viz.*, los fotones. Desde el punto de vista del SM, las interacciones EM son consecuencia de la ruptura espontánea de la simetría de norma $SU_L(2) \times U_Y(1)$ de la teoría electrodébil, la cual se reduce a la simetría fundamental $U_{EM}(1)$ de QED para energías del orden $\sim 10^2$ GeV. Como resultado de este rompimiento de simetría, los bosones mediadores de la interacción débil adquieren una masa de alrededor de 80–90 GeV, mientras que los fotones no adquieren masa. Debido a estos fotones no masivos, las interacciones EM son de alcance infinito, por lo que éstas no sólo determinan las propiedades físicas de sistemas a nivel atómico, sino que además resultan ser relevantes en la descripción de muchos fenómenos en la micro y la macroescala.

Entre las teorías que conforman al SM, QED ostenta las predicciones más precisas. La más sobresaliente de estas predicciones es el llamado *momento magnético anómalo* (AMM) del electrón, el cual determina el valor de la constante de estructura fina α (i.e. el acoplamiento EM). El cálculo del AMM fue derivado por primera vez en 1948 por J. Schwinger en PT a un lazo [2]. En la actualidad, el AMM ha sido calculado hasta orden $\mathcal{O}(\alpha^5)$ [117], coincidiendo con más de 10 cifras de precisión con recientes resultados experimentales [118, 119]. Esto confirma a QED como la teoría más precisa que existe.

En el contexto de las QFTs, la QED es la formulación covariante de la teoría electromagnética clásica, la cual se sustenta en un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que describen el comportamiento de los campos EM en presencia de cargas y corrientes eléctricas, las llamadas *ecuaciones de Maxwell*. Dado que estas ecuaciones conforman los cimientos de QED y manifiestan propiamente la simetría de norma $U_{EM}(1)$, estas serán revisadas en la siguiente sección.

1.1. Ecuaciones de Maxwell

Las propiedades eléctricas y magnéticas de la materia fueron reconocidas desde tiempos ancestrales por las antiguas culturas Griega, India y China, en materiales como el ámbar y la magnetita. No obstante, es a partir del siglo XV que se comienza a implementar el método científico en el estudio de estas propiedades, sobresaliendo los experimentos en electrostática de Cavendish y Coulomb a finales del siglo XVI, entre otros. Durante mucho tiempo, electricidad y magnetismo fueron considerados fenómenos independientes. Sin embargo, la conexión entre estos dos fenómenos fue notada en 1820 por Ørsted, quien observó que una corriente eléctrica puede cambiar la orientación de la aguja magnetizada en una brújula. Poco tiempo después, Ampère postuló que el magnetismo es resultado de cargas eléctricas en movimiento¹. En contraste, en 1831 Faraday descubrió que el movimiento de un imán puede inducir una corriente eléctrica, y especuló acertadamente que la luz es de naturaleza electromagnética. Todas estas conjeturas son retomadas por Maxwell, quien las sintetiza en las ecuaciones que llevan su nombre. La interpretación de los campos eléctricos y magnéticos como dos manifestaciones de un mismo fenómeno fue finalmente establecida en el contexto de la relatividad especial.

En conjunción con la ley de Lorentz, las ecuaciones de Maxwell proveen una descripción completa de la dinámica clásica entre partículas eléctricamente cargadas y los campos electromagnéticos. Explícitamente, las ecuaciones de Maxwell son

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0, \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.2)$$

¹Hoy en día, sabemos que el espín es otra fuente de magnetismo.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (1.4)$$

donde \vec{E} y \vec{B} son los campos eléctrico y magnético, respectivamente. Además, ρ es la densidad de carga y \vec{J} es la corriente eléctrica. En este caso, $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ es la velocidad de la luz en el vacío, siendo μ_0 y ϵ_0 las constantes de permeabilidad y permitividad del vacío, respectivamente. Por un lado, es fácil ver que al tomar la divergencia de la ec. (1.4), y sustituir en el resultado la ec. (1.1), se obtiene la ecuación de continuidad para la carga eléctrica

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.5)$$

Por otro lado, las ecs. (1.2,1.3) permiten reescribir, sin pérdida de generalidad, a los campos eléctrico y magnético en término de un campo vectorial \vec{A} y un campo escalar ϕ de la siguiente manera:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (1.6)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (1.7)$$

Las ecuaciones de Maxwell pueden ser reescritas de manera que la covarianza de Lorentz se manifieste de manera explícita en ellas. Para este propósito, es necesario introducir el cuadrivector de corriente eléctrica J^μ (o simplemente cuadricorriente) y el cuadrivector potencial A^μ , definidos como

$$J^\mu = (c\rho, \vec{J}), \quad (1.8)$$

$$A^\mu = (\phi/c, \vec{A}). \quad (1.9)$$

Así, en su forma covariante, las ecs. (1.1,1.4) se escriben

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (1.10)$$

mientras que las ecs. (1.2,1.3) se escriben

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0, \quad (1.11)$$

donde se ha introducido el tensor de campo electromagnético $F^{\mu\nu}$, antisimétrico ante el intercambio $\mu \leftrightarrow \nu$, definido como

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (1.12)$$

y además, usando la convención $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ para la métrica de Minlowski, se ha definido el gradiente

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \quad \Rightarrow \quad \partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right). \quad (1.13)$$

En este espacio de Minkowski, los índices griegos toman los valores $\mu = 0, 1, 2, 3$, donde $\mu = 0$ denota la componente temporal de un (cuadri)vector² arbitrario a^μ , mientras que $\mu = 1, 2, 3$ denota la componente espacial. Sustituyendo la ec. (1.12) en (1.10) obtenemos explícitamente la ecuación que satisface el campo vectorial A^μ :

$$\partial^2 A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = J^\nu. \quad (1.14)$$

Las ecs. (1.10) y (1.14) son equivalentes. Es preciso agregar que la ecuación de continuidad está naturalmente incorporada en esta formulación covariante: tomando la divergencia en la ec. (1.14), es claro que

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (1.15)$$

la cual es la expresión covariante de la ecuación de continuidad, ec. (1.5).

Es muy importante notar de las ecs. (1.7,1.6) que, escrito en esta notación covariante, los campos \vec{E} y \vec{B} quedan invariantes ante la transformación

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi, \quad (1.16)$$

donde χ es una función escalar arbitraria, pero analítica. Esta ecuación define propiamente una **transformación de norma** del campo A^μ . Además, la ec. (1.12) hace evidente que esta transformación deja invariante al tensor electromagnético, es decir

$$F^{\mu\nu} \rightarrow F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}, \quad (1.17)$$

²En lo sucesivo, nos referiremos a los cuadvectores simplemente como vectores.

lo que a su vez implica, via las ec. (1.10,1.15), que la transformación de norma definida en la ec. (1.16) deja invariantes a la corriente J^μ y a la ecuación de continuidad, puesto que

$$J^\mu \rightarrow J'^\mu = J^\mu . \quad (1.18)$$

Esta ***invarianza de norma*** de las observables físicas ρ , \vec{J} , \vec{E} y \vec{B} , nos da la libertad de escoger (en virtud de la arbitrariedad de la función escalar χ) un campo A^μ tal que

$$\partial_\mu A^\mu = 0 , \quad (1.19)$$

la llamada *condición de Lorentz*, de manera que la ec. (1.14) se reduce a la ecuación

$$\partial^2 A^\mu = J^\mu , \quad (1.20)$$

la cual admite soluciones de ondas planas en el vacío (donde $J^\mu = 0$), como se espera de las ondas EM. Para garantizar que al aplicar a A^μ una transformación de norma, ec. (1.16), los nuevos campos A'^μ satisfagan también la condición de Lorentz, ec. (1.19), es necesario que la función escalar χ satisfaga la ecuación

$$\partial^2 \chi = 0 , \quad (1.21)$$

lo que suprime la arbitrariedad de esta función, y es consecuencia directa de la invarianza de norma de la ec. (1.19), motivo por el cual implementar restricciones de tipo $\partial_\mu A^\mu = Cte$ define el denominado proceso de ***fijación de norma***. Además, dado que las ecuaciones que satisfacen cada una de las cuatro componentes de A^μ en la ec. (1.20) están sujetas a dos ecuaciones de restricción, ecs. (1.19,1.21), vemos entonces que A^μ sólo tiene dos grados de libertad, correspondientes a las polarizaciones transversales en una onda EM.

Por otra parte, es conveniente señalar que la ecuación (1.10), y por tanto la dinámica del campo electromagnético, puede ser obtenida de las ecuaciones de Euler-Lagrange para un lagrangiano definido como

$$\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu . \quad (1.22)$$

Este lagrangiano del electromagnetismo es un elemento fundamental en la formulación de la teoría cuántica de las interacciones EM entre partículas cargadas, la QED. No obstante, para poder describir la dinámica de fermiones cargados y su interacción a través del intercambio

de fotones, *viz.* los *cuantos* del campo EM, es necesario estudiar la ecuación de Dirac. En conexión con lo anterior, en la siguiente sección se introduce el lagrangiano de Dirac y se muestra cómo a partir de éste es posible derivar el lagrangiano de QED implementando el principio de norma.

1.2. Ecuación de Dirac

Las primeras décadas del siglo XX fueron testigo del nacimiento de un trascendental paradigma de unificación entre la mecánica cuántica y la relatividad especial: las teorías cuánticas de campo. Uno de sus precursores más importantes fue P. Dirac, quien introduce la famosa ecuación que lleva su nombre, la cual describe fermiones no interactuantes de espín-1/2 y sus respectivas antipartículas. En unidades naturales³ (las cuales utilizaremos en lo sucesivo, a menos que se especifique lo contrario), la ecuación de Dirac se escribe

$$(i \not{\partial} - m) \psi = 0, \quad (1.23)$$

donde el espinor (de 4 componentes) $\psi = \psi(x)$ denota la función de onda de un fermión con masa m , y se define $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$ en términos de las matrices γ de Dirac, cuya representación y propiedades se definen en el apéndice **APÉNDICE**. Esta ecuación puede ser extraída del lagrangiano de Dirac, definido como

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi, \quad (1.24)$$

en donde $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange para este lagrangiano son

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right] = 0, \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \psi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right] = 0. \quad (1.26)$$

La primera de estas dos ecuaciones, ec. (1.25), implica la ecuación de Dirac para ψ , ec. (1.23). Por otro lado, a partir de la ec. (1.26) se deriva la ecuación de Dirac para el campo $\bar{\psi}$, la cual se escribe

$$\bar{\psi} (i \overleftarrow{\not{\partial}} + m) = 0, \quad (1.27)$$

³En unidades naturales tenemos que $\hbar = c = 1$.

donde $\overleftarrow{\partial}$ indica que la derivada actua del lado izquierdo. Para derivar la ecuación de continuidad correspondiente al sistema de fermiones libres de espín-1/2 descrito por el lagrangiano de Dirac, debemos multiplicar a la ec. (1.23) por $\bar{\psi}$ por el lado izquierdo, así como también multiplicar a la ec. (1.27) por ψ por el lado derecho. Al sumar ambas ecuaciones resltantes, se obtiene

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) + i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi = 0, \quad (1.28)$$

la cual se puede reescribir como una ecuación de continuidad, esto es

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (1.29)$$

donde la corriente J^μ se define como

$$J^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad (1.30)$$

y el factor e , la carga eléctrica del fermión, es convenientemente introducido para poder interpretar a J^μ como el vector de corriente eléctrica definido en la ec. (1.8). Esta conexión quedará claramente establecida en el contexto de las transformaciones locales de norma. Con esto en mente, es preciso recordar el asombroso teorema de Noether, el cual establece que para cada simetría continua que exhibe el lagrangiano de un sistema, existe una correspondiente ley de conservación. En este caso, podemos derivar la ec. (1.29) de continuidad si demandamos que el lagrangiano de Dirac, ec. (1.24), sea invariante ante una transformación global de fase definida como

$$\psi \rightarrow \psi' = \mathcal{U}(\lambda)\psi, \quad \Rightarrow \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}\mathcal{U}^\dagger(\lambda), \quad (1.31)$$

donde la constante λ es el parámetro de la transformación global $\mathcal{U}(\lambda)$, la cual pertenece al grupo $U(1)$ y por lo tanto puede escribirse, sin pérdida de generalidad, como

$$\mathcal{U}(\lambda) = e^{i\lambda}. \quad (1.32)$$

Las transformaciones globales para ψ y $\bar{\psi}$, ec. (1.31), pueden reescribirse en su forma infinitesimal (para un valor pequeño de λ) como

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi + \delta\psi, \quad \text{donde} \quad \delta\psi = i\lambda\psi, \quad (1.33)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} + \delta\bar{\psi}, \quad \text{donde} \quad \delta\bar{\psi} = -i\lambda\bar{\psi}. \quad (1.34)$$

Pedir que el lagrangiano de Dirac, ec. (1.24), sea invariante ante las transformaciones globales de ψ y $\bar{\psi}$, ecs. (1.33,1.34), es equivalente a pedir que la correspondiente variación en el lagrangiano sea $\partial\mathcal{L}_D = 0$, lo cual implica que

$$\partial\mathcal{L}_D = \frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial\bar{\psi}}\delta\bar{\psi} + \frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta(\partial_\mu\psi) + \frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\delta(\partial_\mu\bar{\psi}) = 0, \quad (1.35)$$

lo cual puede reducirse, utilizando las ecs. (1.33,1.34), a la ecuación

$$\left\{ \frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial\psi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\psi)} \right] \right\} \psi - \bar{\psi} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} \right] \right\} + \partial_\mu J^\mu = 0, \quad (1.36)$$

donde se ha utilizado J^μ para definir

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi - \bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}, \quad (1.37)$$

y la razón para hacerlo es que las definiciones (1.30) y (1.37) para la corriente J^μ son completamente equivalentes: en virtud de las ecs. (1.25,1.26) de Euler-Lagrange, la ec. (1.36) se reduce a la ecuación de continuidad, ec. (1.29). Para ver claramente esta equivalencia y establecer la conexión con el vector de corriente eléctrica, ec. (1.8), es necesario retomar el concepto de simetría global y generalizarlo a una simetría local del sistema. Por esta razón, en la siguiente sección estudiaremos el principio de norma para una simetría local de tipo $U(1)$, y veremos cómo éste, aplicado al lagrangiano de Dirac, da origen a la teoría cuántica de las interacciones electromagnéticas, QED.

1.3. Principio de norma en QED

El principio de norma constituye el eje central en la formulación de teorías que describen las interacciones fundamentales en la naturaleza. Este principio establece que para un sistema cuyo lagrangiano posea una simetría global, la cual implique la conservación de la carga responsable de algún tipo de interacción, la dinámica correspondiente puede ser incluida en la descripción del sistema si se exige a su lagrangiano ser invariante ante la acción local del grupo de dicha simetría. En esta sección, aplicaremos el principio de norma para una simetría local de tipo $U(1)$ en el lagrangiano de Dirac, ec. (1.24).

En su versión local, las transformaciones del grupo $U(1)$ sobre los campos ψ y $\bar{\psi}$, definidas en las ec. (1.31), se escriben

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\lambda(x)}\psi(x), \quad \Rightarrow \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{-i\lambda(x)}, \quad (1.38)$$

y en su forma infinitesimal se tiene (*cf.* ecs. (1.33,1.34))

$$\psi(x) \rightarrow \psi(x) + \delta\psi(x), \quad \text{donde} \quad \delta\psi(x) = i\lambda(x)\psi(x), \quad (1.39)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) + \delta\bar{\psi}(x), \quad \text{donde} \quad \delta\bar{\psi}(x) = -i\lambda(x)\bar{\psi}(x), \quad (1.40)$$

donde se ha escrito explícitamente la dependencia en el vector de posición x^μ para enfatizar el hecho de que $\lambda(x)$ es ahora una función y no una fase global. Aplicando la transformación (1.38) al lagrangiano de Dirac, ec. (1.24), tenemos

$$\mathcal{L}_D \rightarrow \mathcal{L}'_D = \mathcal{L}_D - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi(\partial_\mu\lambda) \quad (1.41)$$

lo que indica que el lagrangiano de Dirac no es invariante ante transformaciones locales de tipo $U(1)$. Esto se debe a la presencia del último término en la ecuación anterior, el cual es consecuencia de la derivada ∂_μ actuando sobre $\psi'(x)$. Este problema se puede resolver si reemplazamos ∂_μ por una derivada covariante D_μ definida como

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (1.42)$$

donde e es la carga eléctrica del fermión, y además se ha introducido un campo vectorial A_μ el cual debe transformarse ante $U(1)$ como

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\lambda, \quad (1.43)$$

de manera que el nuevo lagrangiano es invariante ante las transformaciones (1.38), y éste se escribe

$$\mathcal{L}_{D+I} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_I, \quad (1.44)$$

donde el lagrangiano \mathcal{L}_I se define como

$$\mathcal{L}_I = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = -J^\mu A_\mu, \quad (1.45)$$

y es denominado el lagrangiano de interacción (de ahí el subíndice I) debido a que acopla al vector J^μ , que es justamente la corriente definida en la ec. (1.30), con el campo vectorial A_μ .

Debido a que la transformación (1.43) es completamente equivalente a la transformación de norma para el electromagnetismo, ec. (1.16) con $\chi = -\lambda/e$, podemos interpretar acertadamente a A^μ como el campo del fotón. Además, en virtud de las ecs. (1.22,1.45), podemos identificar a J^μ como el vector de corriente eléctrica, ec. (1.8). Por lo anterior, vemos entonces que \mathcal{L}_I es un término de interacción entre el fermión de espín-1/2 y el **bosón de norma** del electromagnetismo, i.e., el fotón de espín-1.

Es importante agregar que, para poder tener una teoría electromagnética consistente, debemos agregar en la ec. (1.44) el término cinético para el campo del fotón, que resulta ser el término proporcional a $F_{\mu\nu}$ en el lagrangiano del electromagnetismo, ec. (1.22). De esta manera, se define el lagrangiano

$$\mathcal{L}_{D+EM} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_\gamma = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (1.46)$$

donde \mathcal{L}_γ denota el término cinético del fotón, definido como

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (1.47)$$

El lagrangiano (1.46) describe las interacciones electromagnéticas entre fermiones cargados y fotones, y además es invariante ante transformación de norma de tipo $U_{EM}(1)$ definida por las ecs. (1.38,1.43), motivo por el cual el lagrangiano (1.46) define una **teoría abeliana**. No obstante, Para describir las interacciones EM en el contexto de las QFTs, es necesario cuantizar esta teoría. En la siguiente sección se estudia la cuantización de la teoría electromagnética.

1.4. Lagrangiano de QED

La teoría electromagnética descrita por el lagrangian \mathcal{L}_{D+EM} , ec. (1.46), no puede ser cuantizada de manera consistente. Para mostrarlo, es conveniente recordar el método canónico de cuantización, en el que a cada campo involucrado se asocia un momento conjugado con el que debe satisfacer una cierta relación de conmutación (o anticonmutación) de manera análoga a la relación entre posición y momento en mecánica cuántica. En particular, el campo A_μ debe satisfacer una relación de conmutación con su correspondiente momento conjugado π^μ , definido como

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_{D+EM}}{\partial A_\mu}. \quad (1.48)$$

Es preciso recordar que, aunque el campo A_μ tiene *a priori* cuatro grados de libertad, sólo dos de estos pertenecen al espacio de Hilbert de estados físicos (correspondientes al campo eléctrico y magnético de fotón), por lo que es necesario aplicar ecuaciones de restricción a este campo. Sin embargo, esto genera inconsistencias en el proceso de cuantización canónica. Por ejemplo, en la norma de Coulomb (o norma de radiación) donde $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$, tenemos que la componente temporal $A_0 = 0$, lo que implica que $\pi^0 = 0$ y por tanto estas componentes no satisfagan su respectiva relación canónica de conmutación. Además, esta norma sacrifica la invarianza de Lorentz.

Una alternativa a este problema es mantener los 4 grados de libertad del fotón, permitiendo que los dos grados de libertad adicionales generen un espacio de Hilbert extendido. Una manera de separar los estados físicos del resto de este espacio de Hilbert es utilizando el método de Gupta-Bleuler en el que se generaliza la condición de Lorentz, ec. (1.19), aplicándose ésta a los estados físicos y no al campo A_μ . En específico, los estados físicos $|\Psi\rangle$ son aquellos que satisfacen

$$\partial_\mu A^\mu |\Psi\rangle = 0, \quad (1.49)$$

Aunque esta condición es mucho más “débil” que su versión clásica, ec. (1.19), es suficiente para una cuantización consistente de las interacciones EM. Con este fin, se introduce el llamado término de *fijación de norma* (GF), definido como

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (1.50)$$

donde ξ es una constante denominada **parámetro de norma**: $\xi = 0$ define la llamada *norma de Landau*, $\xi = 1$ es llamada la *norma de Feynman*, entre otras. Entonces, el lagrangiano para la electrodinámica cuántica es

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (1.51)$$

Debido a que el término de fijación de norma, ec. (1.50), fue introducido de manera artificial para cuantizar consistentemente la teoría, y además dicho término rompe la invarianza del lagrangiano ante las transformaciones locales de tipo $U_{EM}(1)$, es entonces obligatorio imponer restricciones sobre la teoría para garantizar la correcta covarianza de norma de las funciones de Green y asegurar que las observables físicas sean independientes del parámetro

de norma ξ . Estas restricciones se manifiestan en las llamadas *identidades de Ward*, y en las *LKFTs*, las cuales serán analizadas en el siguiente capítulo, en el contexto de la *formulación de integral de camino*.

En el siguiente capítulo estudiaremos QED en el continuo, en particular, a través del formalismo de las ecuaciones de Schwinger-Dyson. Discutiremos los esquemas de truncamiento de estas ecuaciones, y mostraremos la manera en que las identidades de Ward y las LKFTs son necesarias para preservar la invarianza de norma de las observables dísicas, y la covarianza de norma de las funciones de Green.

Capítulo 2

QED en el continuo

En el capítulo anterior se mostró cómo, implementando el principio de norma, es posible construir la teoría de las interacciones EM entre fermiones de espín-1/2 y los bosones de norma del electromagnetismo (fotones). El lagrangiano de esta teoría, ec. (1.46), es invariante ante transformaciones locales de norma de tipo $U_{EM}(1)$. No obstante, dentro del marco de la cuantización canónica, se discutieron las razones por las que la teoría descrita por este lagrangiano no corresponde a una QFT. En este contexto, se enfatizó la necesidad de introducir un término de fijación de norma, ec. (1.50), para poder así evitar inconsistencias en el proceso de cuantización de la teoría electromagnética, especificando finalmente al lagrangiano para la electrodinámica cuántica, ec. (1.51).

Desafortunadamente, la invarianza de norma de la teoría clásica se ve comprometida debido al proceso de fijación de norma. Por esta razón, es necesario introducir restricciones que restauren la correcta covarianza de norma de las funciones de Green de la teoría, y aseguren la invarianza de norma de las observables físicas. Estas **restricciones de norma** no son exclusivas del método de cuantización canónica y, de hecho, es mucho más sencillo derivarlas mediante el método de integración funcional. Por esta razón, es conveniente estudiar el método funcional en QED.

En este capítulo se introduce la formulación de la integral de camino para QED [120], y a partir de ésta se derivan las ecuaciones fundamentales para las funciones de Green de

la teoría en el continuo: las **ecuaciones de Schwinger-Dyson** (SDEs) [24, 25]. Además, se estudian las restricciones de invarianza y covarianza de norma, las cuales se manifiestan a través de las llamadas identidades de Ward-Fradkin-Green-Takahashi (WFGTIs) [41–44], las identidades transversas de Takahashi (TTIs) [47–51] y las transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin (LKFTs) [42, 52–55].

2.1. Formulación de integral de camino

La electrodinámica cuántica (y en general cualquier QFT) está completamente caracterizada por sus funciones de Green, las cuales pueden escribirse como integrales funcionales sobre los campos ψ , $\bar{\psi}$ y A_μ de la siguiente manera:

$$\langle 0| T \left[\hat{A}^\mu(x_1) \hat{A}^\nu(x_2) \right] |0\rangle = \frac{\int \mathcal{D} [\psi, \bar{\psi}, A] A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) \exp [iS]}{\int \mathcal{D} [\psi, \bar{\psi}, A] \exp [iS]}, \quad (2.1)$$

$$\langle 0| T \left[\hat{\psi}(x_1) \hat{\bar{\psi}}(x_2) \right] |0\rangle = \frac{\int \mathcal{D} [\psi, \bar{\psi}, A] \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \exp [iS]}{\int \mathcal{D} [\psi, \bar{\psi}, A] \exp [iS]}, \quad (2.2)$$

$$\langle 0| T \left[\hat{\psi}(x_1) \hat{A}^\mu(x_2) \hat{\bar{\psi}}(x_3) \right] |0\rangle = \frac{\int \mathcal{D} [\psi, \bar{\psi}, A] \psi(x_1) A^\mu(x_2) \bar{\psi}(x_3) \exp [iS]}{\int \mathcal{D} [\psi, \bar{\psi}, A] \exp [iS]}, \quad (2.3)$$

⋮ ⋮

Funciones de Green de n -puntos,

donde $|0\rangle$ es el estado de vacío, T es el operador de ordenamiento temporal, la integral sobre las configuraciones de los campos fermiónicos y bosónicos se denota como

$$\int \mathcal{D} [\psi, \bar{\psi}, A] = \prod_i \int d\psi(x_i) \times \prod_j \int d\bar{\psi}(x_j) \times \prod_{k,\alpha} \int dA^\alpha(x_k), \quad (2.4)$$

y la acción clásica S se define como

$$S = \int d^4x \mathcal{L}_{QED}(x). \quad (2.5)$$

Las primeras dos funciones de Green de 2-puntos, ecs. (2.1,2.2), definen los llamados **propagadores** del fotón y del fermión, respectivamente. Además, la función de Green de 3-puntos, ec.(2.3), define el llamado **vértice fermión-fotón**. En general, los valores de expectación

$\langle 0|T [\hat{\phi}_1(x_1) \cdots \hat{\phi}_n(x_n)] |0\rangle$, para n campos ϕ_i que pueden ser fermiónicos ($\phi_i = \psi, \bar{\psi}$) o bosónicos ($\phi_i = A^\mu$), denotan las **funciones de Green de n -puntos**. Es preciso agregar que, en una función de Green, el número de campos ψ debe ser igual al número de campos $\bar{\psi}$, de lo contrario el correspondiente valor de expectación (y por tanto la función de Green) es cero.

En la formulación de integral de camino, las funciones de Green son obtenidas a partir de derivadas funcionales de la siguiente forma (cf. ecs. (2.1-2.3)):

$$\langle 0|T [\hat{A}^\mu(x_1)\hat{A}^\nu(x_2)] |0\rangle = \frac{(-i)^2}{\mathcal{Z}[0]} \frac{\delta^2 \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, \zeta]}{\delta \zeta_\mu(x_1) \delta \zeta_\nu(x_2)} \Big|_{\eta, \bar{\eta}, \zeta=0}, \quad (2.6)$$

$$\langle 0|T [\hat{\psi}(x_1)\hat{\bar{\psi}}(x_2)] |0\rangle = -\frac{(-i)^2}{\mathcal{Z}[0]} \frac{\delta^2 \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, \zeta]}{\delta \bar{\eta}(x_1) \delta \eta(x_2)} \Big|_{\eta, \bar{\eta}, \zeta=0}, \quad (2.7)$$

$$\langle 0|T [\hat{\psi}(x_1)\hat{A}^\mu(x_2)\hat{\bar{\psi}}(x_3)] |0\rangle = -\frac{(-i)^3}{\mathcal{Z}[0]} \frac{\delta^3 \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, \zeta]}{\delta \bar{\eta}(x_1) \delta \zeta_\mu(x_2) \delta \eta(x_3)} \Big|_{\eta, \bar{\eta}, \zeta=0}, \quad (2.8)$$

⋮ ⋮

donde \mathcal{Z} es la llamada *función generadora*, definida como

$$\mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, \zeta] = \int \mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}, A] \exp \left[i\mathcal{S} + i \int d^4x \left\{ \bar{\psi}(x) \eta(x) + \bar{\eta}(x) \psi(x) + \zeta_\mu(x) A^\mu(x) \right\} \right], \quad (2.9)$$

y donde se han introducido las *fuentes* externas $\eta, \bar{\eta}$ y ζ_μ . Cada una de las componentes del vector A^μ , y sus respectivas fuentes ζ_μ , son funciones escalares. En contraste, cada uno de los campos ψ y $\bar{\psi}$, así como también sus respectivas fuentes $\bar{\eta}$ y η , deben ser considerados como *campos de Grassmann*: esto es necesario para poder garantizar que los campos fermiónicos satisfagan sus correspondientes relaciones canónicas de anticonmutación. De hecho, el signo global “−” en las ecs. (2.7,2.8) toma en cuenta la anticonmutación entre $\bar{\psi}$ y η en la acción de la derivada funcional $\delta/\delta\eta$ sobre la función generadora \mathcal{Z} , ec. (2.9). En general, debe aparecer un factor adicional −1 por cada derivada funcional respecto a η . Las derivadas funcionales satisfacen

$$\frac{\delta \zeta_\nu(x)}{\delta \zeta_\mu(y)} = g_\nu^\mu \delta^{(4)}(x-y), \quad \frac{\delta \bar{\eta}(x)}{\delta \bar{\eta}(y)} = \delta^{(4)}(x-y), \quad \frac{\delta \eta(x)}{\delta \eta(y)} = \delta^{(4)}(x-y), \quad (2.10)$$

lo cual nos permite establecer, a partir de la ec. (2.9), las siguientes relaciones de equivalencia:

$$\frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta \zeta_\mu(y)} = i A^\mu(y) \mathcal{Z}, \quad \frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta \bar{\eta}(y)} = i \psi(y) \mathcal{Z}, \quad \frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta \eta(y)} = -i \bar{\psi}(y) \mathcal{Z}. \quad (2.11)$$

En el cálculo de procesos de dispersión, únicamente las funciones de Green *conectadas* contribuyen en la matriz- S . La función \mathcal{W} generadores de las funciones de Green conectadas se define como

$$\mathcal{Z} [\eta, \bar{\eta}, \zeta] = \exp \left(\mathcal{W} [\eta, \bar{\eta}, \zeta] \right), \quad (2.12)$$

y está relacionada con la llamada *acción efectiva* $\Gamma [\psi, \bar{\psi}, A]$, definida como

$$i\Gamma [\psi, \bar{\psi}, A] = \mathcal{W} [\eta, \bar{\eta}, \zeta] - i \int d^4x \left\{ \bar{\psi}(x) \eta(x) + \bar{\eta}(x) \psi(x) + \zeta_\mu(x) A^\mu(x) \right\}, \quad (2.13)$$

a partir de la cuál podemos obtener las funciones de Green *una-partícula irreducibles* (1-PI). De las ecs. (2.10,2.13) es claro que

$$-i \frac{\delta}{\delta \zeta_\mu} \mathcal{W} [\eta, \bar{\eta}, \zeta] = A^\mu, \quad -i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \mathcal{W} [\eta, \bar{\eta}, \zeta] = \psi, \quad i \frac{\delta}{\delta \eta} \mathcal{W} [\eta, \bar{\eta}, \zeta] = \bar{\psi}, \quad (2.14)$$

y similarmente

$$-\frac{\delta}{\delta A^\mu} \Gamma [\psi, \bar{\psi}, A] = \zeta_\mu, \quad \frac{\delta}{\delta \psi} \Gamma [\psi, \bar{\psi}, A] = \bar{\eta}, \quad -\frac{\delta}{\delta \bar{\psi}} \Gamma [\psi, \bar{\psi}, A] = \eta. \quad (2.15)$$

Antes de estudiar la derivación no-perturbativa de las ecuaciones fundamentales para las funciones de Green en QED, es conveniente estudiar dichas funciones en el régimen perturbativo. En la siguiente sección derivaremos las reglas de feynman para los propagadores y el vértice.

2.2. Reglas de Feynman

En la teoría libre, la correspondiente función \mathcal{Z}_0 generadora de las funciones de Green se define de manera análoga a la ec. (2.9), pero haciendo la sustitución $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}_0$. La acción clásica \mathcal{S}_0 de la teoría libre se define exactamente igual a \mathcal{S} , ec. (2.5), pero omitiendo en \mathcal{L}_{QED} el término de interacción \mathcal{L}_I , ec. (1.45). Explícitamente tenemos

$$\mathcal{Z}_0 [\eta, \bar{\eta}, \zeta] = \int \mathcal{D} [\psi, \bar{\psi}, A] \exp [i\mathcal{E}], \quad (2.16)$$

con

$$\mathcal{E} = \int d^4x \left\{ \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_\gamma + \mathcal{L}_{GF} + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi + \zeta_\mu A^\mu \right\}, \quad (2.17)$$

en donde, por simplicidad, se ha omitido la dependencia en x en las funciones correspondientes. Es conveniente simplificar este exponente los términos proporcionales a \mathcal{L}_γ y \mathcal{L}_{GF} , ecs. (1.47,1.50), de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\gamma+GF} &= \int d^4x \left\{ \mathcal{L}_\gamma + \mathcal{L}_{GF} \right\}, \\
&= -\frac{1}{2} \int d^4x \left\{ (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\nu A^\mu) + \frac{1}{\xi} (\partial_\mu A^\mu) (\partial_\nu A^\nu) \right\}, \\
&= +\frac{1}{2} \int d^4x \left\{ A_\nu \partial^2 A^\nu - A_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu - \frac{1}{\xi} A^\mu \partial_\mu \partial_\nu A^\nu \right\} \\
&\quad -\frac{1}{2} \int d^4x \partial_\mu \left(A_\nu \partial^\mu A^\nu - A_\nu \partial^\nu A^\mu + \frac{1}{\xi} A^\mu \partial_\nu A^\nu \right). \tag{2.18}
\end{aligned}$$

En virtud del teorema de la divergencia, el último término de integración en la ecuación anterior es cero, pues suponemos que los campos A_μ desvanecen asintóticamente. Podemos entonces escribir

$$\mathcal{E}_{\gamma+GF} = \frac{1}{2} \int d^4x A^\mu \left[g_{\mu\nu} \partial^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A^\nu. \tag{2.19}$$

Para poder calcular los propagadores del fermión y el fotón, resulta conveniente aplicar una transformación de Fourier al exponente en la ecuación anterior, lo cual requiere

$$\psi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \psi(p), \quad \Rightarrow \quad i\partial_\mu \psi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} p_\mu \psi(p), \tag{2.20}$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \bar{\psi}(p), \tag{2.21}$$

$$A_\nu(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} A_\nu(p), \quad \Rightarrow \quad i\partial_\mu A_\nu(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} p_\mu A_\nu(p), \tag{2.22}$$

y similarmente para las fuentes $\eta(x)$, $\bar{\eta}(x)$ y $\zeta_\mu(x)$, de manera que el exponente en la definición de \mathcal{Z}_0 , ec. (2.16), se reescribe como

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-i(k+p) \cdot x} \left\{ \bar{\psi}(k) S^{-1}(p) \psi(p) + \bar{\psi}(k) \eta(p) + \bar{\eta}(k) \psi(p) \right\} \\
&+ \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-i(k+p) \cdot x} \left\{ \frac{1}{2} A^\mu(k) \Delta_{\mu\nu}^{-1}(p) A^\nu(p) + \zeta_\mu(k) A^\mu(p) \right\}, \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ \bar{\psi}(-p) S^{-1}(p) \psi(p) + \bar{\psi}(-p) \eta(p) + \bar{\eta}(-p) \psi(p) \right\} \\
&+ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{2} A^\mu(-p) \Delta_{\mu\nu}^{-1}(p) A^\nu(p) + \zeta_\mu(-p) A^\mu(p) \right\}, \tag{2.23}
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la definición de la delta de Dirac, $\delta^{(4)}(q) = (2\pi)^{-4} \int d^4x \exp[-iq \cdot x]$, y además hemos definido

$$\Delta_{\mu\nu}^{-1}(p) = -p^2 \left[g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right], \quad (2.24)$$

$$S^{-1}(p) = \not{p} - m, \quad (2.25)$$

los cuales definen propiamente al inverso de los propagadores del fermión y el fotón en la teoría libre, como veremos más adelante. Si en la ec. (2.23) redefinimos los campos

$$\psi'(p) = \psi(p) + \frac{1}{\not{p} - m} \eta(p), \quad \bar{\psi}'(-p) = \bar{\psi}'(-p) + \bar{\eta}(-p) \frac{1}{\not{p} - m}, \quad (2.26)$$

$$A'^\mu(-p) = A^\mu(-p) + \zeta_\alpha(-p) \Delta^{\alpha\mu}(-p), \quad A'^\mu(p) = A^\nu(p) + \Delta^{\nu\beta}(p) \zeta_\beta(p), \quad (2.27)$$

donde $\Delta^{\mu\nu}$ y su inverso $\Delta_{\mu\nu}^{-1}$, definido en ec. (2.24), satisfacen la relación

$$\Delta_{\mu\alpha}^{-1}(p) \Delta^{\alpha\nu}(-p) = g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu}, \quad (2.28)$$

entonces el exponente \mathcal{E} , ec. (2.23), se reescribe

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}' - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ \bar{\eta}(-p) S(p) \eta(p) + \frac{1}{2} \zeta^\mu(-p) \Delta_{\mu\nu}(p) \zeta^\nu(p) \right\}, \quad (2.29)$$

con la definición

$$\mathcal{E}' = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ \bar{\psi}'(-p) S^{-1}(p) \psi(p) + \frac{1}{2} A^\mu(-p) \Delta_{\mu\nu}^{-1}(p) A^\nu(p) \right\}, \quad (2.30)$$

Con esto, la función generadora \mathcal{Z}_0 de la teoría libre, ec. (2.16), se reescribe como

$$\mathcal{Z}_0[\eta, \bar{\eta}, \zeta] = \mathcal{Z}_0[0] \exp \left[-i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ \bar{\eta}(-p) S(p) \eta(p) + \frac{1}{2} \zeta^\mu(-p) \Delta_{\mu\nu}(p) \zeta^\nu(p) \right\} \right], \quad (2.31)$$

donde

$$\mathcal{Z}_0[0] = \int \mathcal{D}[\psi', \bar{\psi}', A'] \exp[i\mathcal{E}']. \quad (2.32)$$

Por otra parte, aplicando una transformación de Fourier a los propagadores, obtenemos

$$\langle 0 | T \left[\hat{A}^\mu(x_1) \hat{A}^\nu(x_2) \right] | 0 \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x_1 + ip \cdot x_2} \langle 0 | T \left[\hat{A}^\mu(k) \hat{A}^\nu(-p) \right] | 0 \rangle, \quad (2.33)$$

$$\langle 0 | T \left[\hat{\psi}(x_1) \hat{\bar{\psi}}(x_2) \right] | 0 \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x_1 + ip \cdot x_2} \langle 0 | T \left[\hat{\psi}(k) \hat{\bar{\psi}}(-p) \right] | 0 \rangle. \quad (2.34)$$

Para aplicar una transformación de Fourier al lado derecho de las ecs. (2.6,2.7) es necesario notar que, utilizando las relaciones (2.11), las derivadas funcionales se transforman de la siguiente manera

$$\frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta \zeta_\mu(x)} = i A^\mu(x) \mathcal{Z} = i \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} e^{-i k \cdot x} A^\mu(k) \mathcal{Z} = \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} e^{-i k \cdot x} \left[(2\pi)^4 \frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta \zeta_\mu(-k)} \right], \quad (2.35)$$

$$\frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta \bar{\eta}(x)} = i \psi(x) \mathcal{Z} = i \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} e^{-i k \cdot x} \psi(k) \mathcal{Z} = \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} e^{-i k \cdot x} \left[(2\pi)^4 \frac{\delta \mathcal{Z}}{\bar{\eta}(-k)} \right], \quad (2.36)$$

$$\frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta \eta(x)} = -i \bar{\psi}(x) \mathcal{Z} = -i \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} e^{-i k \cdot x} \bar{\psi}(k) \mathcal{Z} = \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} e^{-i k \cdot x} \left[(2\pi)^4 \frac{\delta \mathcal{Z}}{\eta(-k)} \right], \quad (2.37)$$

donde se ha utilizado el hecho de que, en analogía con las relaciones (2.11), las ecs. (2.10,2.31) nos permiten establecer en (espacio de momentos) la equivalencia

$$A^\mu(k) \mathcal{Z} = \frac{(2\pi)^4}{i} \frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta \zeta_\mu(-k)}, \quad \psi(k) \mathcal{Z} = \frac{(2\pi)^4}{i} \frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta \bar{\eta}(-k)}, \quad \bar{\psi}(k) \mathcal{Z} = -\frac{(2\pi)^4}{i} \frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta \eta(-k)}. \quad (2.38)$$

De esta manera, los valores de expectación en el espacio de momentos en las ecs. (2.33,2.34) se definen

$$\langle 0 | T \left[\hat{A}^\mu(k) \hat{A}^\nu(-p) \right] | 0 \rangle = (2\pi)^8 \frac{(-i)^2}{\mathcal{Z}[0]} \frac{\delta^2 \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, \zeta]}{\delta \zeta_\mu(-k) \delta \zeta_\nu(p)} \Bigg|_{\eta, \bar{\eta}, \zeta=0}, \quad (2.39)$$

$$\langle 0 | T \left[\hat{\psi}(k) \hat{\bar{\psi}}(-p) \right] | 0 \rangle = -(2\pi)^8 \frac{(-i)^2}{\mathcal{Z}[0]} \frac{\delta^2 \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, \zeta]}{\delta \bar{\eta}(-k) \delta \eta(p)} \Bigg|_{\eta, \bar{\eta}, \zeta=0}. \quad (2.40)$$

Reemplazando $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}_0$ (definida en ec. (2.31)) en las ecs. (2.39,2.40), obtenemos las funciones de Green de 2-puntos en el espacio de momentos para la teoría libre:

$$\langle 0 | T \left[\hat{A}^\mu(k) \hat{A}^\nu(-p) \right] | 0 \rangle = (2\pi)^4 i \Delta_0^{\mu\nu}(p) \delta^{(4)}(k-p), \quad (2.41)$$

$$\langle 0 | T \left[\hat{\psi}(k) \hat{\bar{\psi}}(-p) \right] | 0 \rangle = (2\pi)^4 i S_0(p) \delta^{(4)}(k-p). \quad (2.42)$$

en donde

$$\Delta_0^{\mu\nu}(p) = -\frac{1}{p^2} \left[g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right] - \xi \frac{p^\mu p^\nu}{p^4}, \quad (2.43)$$

$$S_0(p) = \frac{1}{\not{p} - m}, \quad (2.44)$$

los cuales definen a los propagadores del fotón y el fermión en el espacio de momentos, respectivamente. Se agregó el subíndice “0” para denotar que estos propagadores están dados en la teoría libre: Estos son los denominados **propagadores a nivel de árbol**.

Para describir interacciones en la teoría, es necesario tomar en cuenta el término de interacción \mathcal{L}_I , ec. (1.45), en la acción clásica \mathcal{S} y en la función generadora \mathcal{Z} , ecs. (2.5,2.9). No obstante, para poder calcular las funciones de Green de 3-puntos o superiores, es conveniente considerar un valor pequeño para la carga eléctrica e que aparece en \mathcal{L}_I (lo cual es permisible pues, en unidades naturales, $e \sim 1/\sqrt{137}$ en la naturaleza), para entonces poder implementar una expansión perturbativa en la función generadora:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, \zeta] &= \int \mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}, A] \exp \left[-ie \int d^4x \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) + i\mathcal{E} \right], \\ &= \int \mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}, A] \left\{ 1 - ie \int d^4x \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) + \mathcal{O}(e^2) \right\} \times \exp[i\mathcal{E}], \\ &= \mathcal{Z}_0[\eta, \bar{\eta}, \zeta] - ie \int d^4x \int \mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}, A] \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) e^{i\mathcal{E}} + \mathcal{O}(e^2). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Alicando una transformación de Fourier a la ecuación anterior, y notando de la ec. (2.23) que

$$A^\mu(k)e^{i\mathcal{E}} = \frac{(2\pi)^4}{i} \frac{\delta e^{i\mathcal{E}}}{\delta \zeta_\mu(-k)}, \quad \psi(k)e^{i\mathcal{E}} = \frac{(2\pi)^4}{i} \frac{\delta e^{i\mathcal{E}}}{\delta \bar{\eta}(-k)}, \quad \bar{\psi}(k)e^{i\mathcal{E}} = -\frac{(2\pi)^4}{i} \frac{\delta e^{i\mathcal{E}}}{\delta \eta(-k)}, \quad (2.46)$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, \zeta] &= \mathcal{Z}_0[\eta, \bar{\eta}, \zeta] \\ &\quad - e(2\pi)^4 \int d^4k d^4p d^4q \delta^{(4)}(q - k + p) \frac{\delta}{\delta \eta(k)} \gamma^\mu \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(-p)} \frac{\delta}{\delta \zeta^\mu(-q)} \mathcal{Z}_0[\eta, \bar{\eta}, \zeta] \\ &\quad + \mathcal{O}(e^2), \\ &= \mathcal{Z}_0[\eta, \bar{\eta}, \zeta] \\ &\quad - ie(2\pi)^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(q - k + p) \\ &\quad \quad \quad \times \left\{ \eta(p) \bar{\eta}(-k) S_0(k) \gamma^\mu S_0(p) \Delta_{\mu\nu}^0(q) \zeta^\nu(q) \right\} \mathcal{Z}_0[\eta, \bar{\eta}, \zeta] \\ &\quad + \left\{ \dots \right\} + \mathcal{O}(e^2), \end{aligned} \quad (2.47)$$

donde $\left\{ \dots \right\}$ denota términos a orden $\mathcal{O}(e)$ que no contribuyen al vértice 1-PI fermión-fotón. Para calcular este vértice, de la ec. (2.8) notemos que

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \left[\hat{\psi}(x_1) \hat{A}^\nu(x_2) \hat{\bar{\psi}}(x_3) \right] | 0 \rangle &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-ik' \cdot x_1 + iq' \cdot x_2 + ip' \cdot x_3} \\ &\quad \times \langle 0 | T \left[\hat{\psi}(k') \hat{A}^\nu(-q') \hat{\bar{\psi}}(-p') \right] | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde se define

$$\langle 0| T \left[\hat{\psi}(k) \hat{A}^\nu(-q) \hat{\psi}(-p) \right] |0\rangle = -(2\pi)^{12} \frac{(-i)^3}{\mathcal{Z}[0]} \frac{\delta^3 \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, \zeta]}{\delta \bar{\eta}(-k) \delta \zeta_\nu(q) \delta \eta(p)} \Big|_{\eta, \bar{\eta}, \zeta=0}. \quad (2.49)$$

Sustituyendo la ec. (2.47) en la ecuación anterior, obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} \langle 0| T \left[\hat{\psi}(k) \hat{A}^\nu(-q) \hat{\psi}(-p) \right] |0\rangle = \\ (2\pi)^4 [iS_0(k)] [-ie\Gamma_\mu^0(k, p)] [iS_0(p)] [i\Delta_0^{\mu\nu}(q)] g^{\beta\mu} \delta^{(4)}(q - k + p), \end{aligned} \quad (2.50)$$

en donde el **vértice a nivel de árbol** se define como

$$\Gamma_0^\mu(k, p) = \gamma^\mu. \quad (2.51)$$

Las ecs. (2.43,2.44,2.51) definen las reglas de Feynman para los propagadores y el vértice a nivel de árbol, y estas son las expansiones a orden $\mathcal{O}(e^0)$ y $\mathcal{O}(e^1)$ en la teoría de perturbaciones, respectivamente. En el contexto de los *diagramas de Feynman*, la representación para estas funciones a nivel árbol está dada en la fig. 2.1.

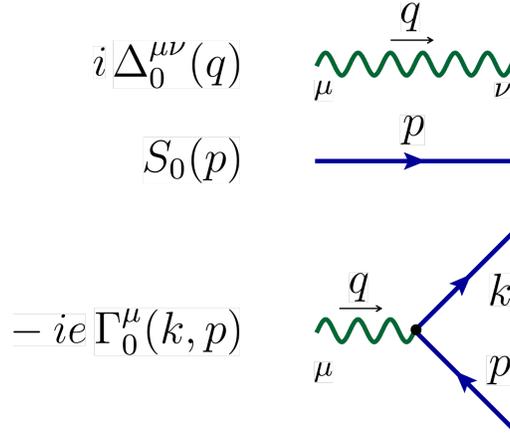


Figura 2.1: Reglas de Feynman.

Las llamadas *correcciones a n-lazos* en PT modifican las funciones escalares que definen la estructura de los propagadores, el vértice, y en general de cualquier función de Green. En

particular, la expresión para la propagadores en términos de sus funciones de estructura es

$$\Delta^{\mu\nu}(q) = -\Delta(q^2) \left[g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right] - \xi \frac{q^\mu q^\nu}{q^4}, \quad (2.52)$$

$$S(p) = \frac{\mathcal{F}(p^2)}{\not{p} - \mathcal{M}(p^2)}, \quad (2.53)$$

donde a nivel de árbol se tiene

$$\Delta_0(q^2) = \frac{1}{q^2}, \quad \mathcal{F}_0(p^2) = 1, \quad \mathcal{M}_0(p^2) = m. \quad (2.54)$$

Cabe mencionar que esta estructura de los propagadores, ecs. (2.52,2.53), no es exclusiva de PT y de hecho es la misma no perturbativamente. La definición de la estructura general del vértice se deja para el siguiente capítulo. El cálculos de los propagadores a un lazo es relativamente sencillo, y puede ser expresado en términos de los diagramas de Feynman. En la siguiente sección se calcula el propagador del fermión a un lazo, pues esto será relevante más adelante.

2.3. Propagador fermiónico a un lazo

La expresión diagramática para las correcciones a un lazo al propagador fermiónico se representa en la fig. 2.2, donde S_1 denota su expansión a un lazo.

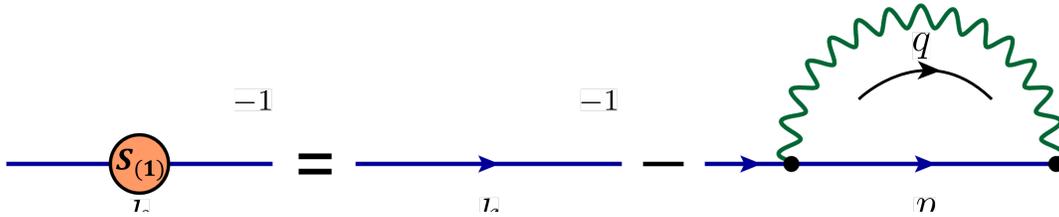


Figura 2.2: Propagador del fermión a un lazo.

Matemáticamente, la ecuación del propagador fermiónico a un lazo se escribe

$$iS_1(k) = iS_0(k) + [iS_0(k)] [-i\Sigma_0(k)] [iS_0(k)], \quad (2.55)$$

siendo $\Sigma_0(k)$ la llamada *autoenergía* del fermión a un lazo, definida

$$\Sigma_0(k) = \int_M \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [-ie\gamma^\mu] [iS_0(p)] [-ie\Gamma_0^\nu(k,p)] [i\Delta_{\mu\nu}^0(q)], \quad (2.56)$$

donde $q = k - p$ y M denota que estamos en espacio de Minkowski, lo cual es necesario indicar a partir de ahora pues en las integraciones angulares será necesario cambiar a espacio Euclidiano. Multiplicando por $S^{-1}(k)$ en ambos lados de la ec. (2.55), esta se reescribe

$$S_1^{-1}(k) = S_o^{-1}(k) - ie^2 \int_M \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma^\mu S_0(p) \Gamma_0^\nu(k, p) \Delta_{\mu\nu}^0(q). \quad (2.57)$$

Por otro lado, de la ec. (2.53) vemos que

$$\frac{1}{\mathcal{F}(k^2)} = \frac{1}{4k^2} Tr \{ \not{k} S^{-1}(k) \}, \quad (2.58)$$

$$\frac{\mathcal{M}(k^2)}{\mathcal{F}(k^2)} = -\frac{1}{4} Tr \{ S^{-1}(k) \}, \quad (2.59)$$

y entonces, de las ecs. (2.57-2.59), vemos que a un lazo

$$\frac{1}{\mathcal{F}_1(k^2)} = 1 + \frac{i\alpha}{4\pi^3} \int_M \frac{d^4q}{q^2} \frac{1}{4k^2} Tr \left\{ \gamma_\mu S(p) \gamma^\mu + (\xi - 1) \frac{\not{q} S(p) q_\mu \Gamma_0^\mu(k, p)}{q^2} \right\}, \quad (2.60)$$

$$\frac{\mathcal{M}_1(k^2)}{\mathcal{F}_1(k^2)} = m - \frac{i\alpha}{4\pi^3} \int_M \frac{d^4q}{q^2} \frac{1}{4} Tr \left\{ \gamma_\mu S(p) \gamma^\mu + (\xi - 1) \frac{\not{q} S(p) q_\mu \Gamma_0^\mu(k, p)}{q^2} \right\}, \quad (2.61)$$

donde se ha definido al acoplamiento α en QED como

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \quad (2.62)$$

Notando que podemos reescribir

$$q_\mu \Gamma_0^\mu(k, p) = \not{q} = (\not{k} - m) - (\not{p} - m) = S_o^{-1}(k) - S_o^{-1}(p), \quad (2.63)$$

entonces, de las ecs. (2.60,2.61) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{F}_1(k^2)} &= 1 - \frac{\alpha\xi}{4\pi^3} \int_E \frac{d^4q}{q^4} \frac{k^2(q \cdot p) + m^2(q \cdot k)}{k^2(p^2 + m^2)} \\ &\quad + \frac{\alpha}{4\pi^3} \int_E \frac{d^4q}{q^4} \frac{2q^2(k \cdot p) + k^2(q \cdot p) + m^2(q \cdot k)}{k^2(p^2 + m^2)}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\frac{\mathcal{M}_1(k^2)}{\mathcal{F}_1(k^2)} = m + m \frac{\alpha}{4\pi^3} (3 + \xi) \int_E \frac{d^4q}{q^2} \frac{1}{p^2 + m^2}, \quad (2.65)$$

donde se han aplicado las propiedades de las trazas para las matrices γ (**APENDICE 1**). Además, se ha implementado una *rotación de Wick* del espacio de Minkowski al espacio

Euclidiano (denotado con el subíndice E en las integrales), para lo cual es necesario transformar las componentes temporales $X_0 \rightarrow iX_0$ y $Q_0 \rightarrow iQ_0$ para cualquier vector en espacio de configuraciones (X_μ) o momentos (Q_μ). Esto implica que

$$\begin{array}{ll}
\text{Minkowski} & \text{Euclidiano} \\
\int_M d^4q & \rightarrow i \int_E d^4q \\
a^\mu & \rightarrow -i a_\mu \\
\gamma^\mu & \rightarrow \gamma_\mu \\
a \cdot b & \rightarrow -a \cdot b \\
\not{d} & \rightarrow -i \gamma \cdot a
\end{array} \tag{2.66}$$

En el llamado *límite quiral*, en donde $m = 0$, las ecs. (2.64,2.64) se reducen a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathcal{F}_1(k^2)} &= 1 + \frac{\alpha\xi}{4\pi^3} \int_E \frac{d^4p}{p^2} \frac{(p^2 - k \cdot p)}{q^4} \\
&+ \frac{\alpha}{4\pi^3} \int_E \frac{d^4p}{p^2} \frac{2q^2(k \cdot p) + k^2(q \cdot p)}{k^2 q^4},
\end{aligned} \tag{2.67}$$

$$\frac{\mathcal{M}_1(k^2)}{\mathcal{F}_1(k^2)} = 0, \tag{2.68}$$

en donde hemos redefinido convenientemente $\int d^4q \rightarrow \int d^4p$. De este modo, la integración angular ([Apéndice 2](#)) conduce la ec. (2.67) a

$$\frac{1}{\mathcal{F}_1(k^2)} = 1 + \frac{\alpha\xi}{4\pi} \int_{k^2}^{\Lambda^2} \frac{d^4p}{p^2}, \tag{2.69}$$

donde Λ^2 es un regulador de corte UV, empleado para *regularizar* la divergencia ($\Lambda^2 \rightarrow \infty$) en la integral anterior. De las ecs. (2.67,2.69) vemos entonces que, en espacio Euclidiano, a orden $\mathcal{O}(\alpha)$ tenemos

$$\mathcal{F}_1(k^2, \Lambda^2) = 1 + \frac{\alpha\xi}{4\pi} \log\left(\frac{k^2}{\Lambda^2}\right), \tag{2.70}$$

$$\mathcal{M}_1(k^2) = 0, \tag{2.71}$$

en donde se ha denotado explícitamente la dependencia en Λ^2 de la función de onda \mathcal{F} .

De manera análoga, es posible calcular las contribuciones a un lazo para el propagador del fotón, ec. (2.52). Sorprendentemente, sólo la parte transversa de este propagador (i.e. el

término proporcional a $[g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / q^2]$) recibe correcciones a todo orden en PT, y de ahí que únicamente es necesario el factor de forma $\Delta(q^2)$ para describir su estructura. Esto es una consecuencia de la invarianza de norma. Es preciso agregar que en la literatura también existen cálculos a un lazo para los factores de forma del vértice fermión-bosón en diferentes configuraciones cinemáticas de momento [56, 72, 80, 81], pero debido a su complejidad, la revisión de estos cálculos queda fuera de este trabajo de tesis. Cabe mencionar que el autor de esta tesis ha contribuido al cálculo de los factores de forma del vértice a un lazo [82].

En el límite quiral ($m = 0$), el resultado a un lazo para la función de masa $\mathcal{M}(k^2) = 0$, ec. (2.71), se satisface a todo orden en la expansión perturbativa en $\alpha \ll 1$. En contraste, existe un cierto valor crítico α_c del acoplamiento EM arriba del cual las interacciones son tan intensas que son capaces de generar masa para los fermiones, incluso en el límite quiral, en un proceso de naturaleza exclusivamente no-perturbativa denominado *rompimiento dinámico de simetría quiral* (DCSB). Esta transición de la fase perturbativa a una dinámica no-perturbativa en QED ha sido confirmada por estudios en la red [113–116]. Además, estudios en el continuo sugieren que $\alpha_c = \pi/3$ define el acoplamiento crítico arriba del cual la simetría quiral se rompe dinámicamente [102–106]. No obstante, para poder entender a fondo el fenómeno del DCSB en QED, es preciso conocer la estructura no-perturbativa de las funciones de Green, para lo cual es necesario estudiar las ecuaciones fundamentales de esta teoría. En conexión con lo anterior, en la siguiente sección estudiaremos las SDEs, en particular, para los propagadores fermiónico y fotónico.

2.4. Ecuaciones de Schwinger-Dyson

Las SDEs son las ecuaciones fundamentales de cualquier QFT [24, 25], las cuales proporcionan un marco teórico con invarianza de Poincaré manifiesta en el que podemos estudiar las funciones de Green de la teoría. Estas definen un conjunto de ecuaciones integrales no lineales, infinitas en número, que acoplan a las funciones de Green unas con otras. Debido a que su derivación es independiente del acoplamiento, las SDE dan acceso tanto al dominio IR como al régimen UV de la teoría, por lo que estas son ideales para estudios no-perturbativos. En esta sección, derivaremos las SDEs para los propagadores *completamente vestidos* por las interacciones en QED, utilizando el método funcional antes descrito.

Con la finalidad de derivar las SDEs correspondientes a los propagadores del fotón y del fermión en QED, ecs. (2.52,2.53), es necesario señalar que, en el formalismo de integral de camino, los propagadores vestidos están definidos como (*cf.* ecs. (2.33,2.34,2.41,2.42)):

$$(2\pi)^4 i \Delta_{\mu\nu}(p) \delta^{(4)}(k-p) = \int d^4x_1 d^4x_2 i \Delta_{\mu\nu}(x_1, x_2) e^{ik \cdot x_1 - ip \cdot x_2}, \quad (2.72)$$

$$(2\pi)^4 i S(p) \delta^{(4)}(k-p) = \int d^4x_1 d^4x_2 i S(x_1, x_2) e^{ik \cdot x_1 - ip \cdot x_2}, \quad (2.73)$$

donde a partir de la función \mathcal{W} generadora de las funciones de Green conectadas, ec. (2.12), las ecs. (2.6,2.7) permiten definir a los propagadores como

$$\Delta_{\mu\nu}(x_1, x_2) = i \left. \frac{\delta^2 \mathcal{W}}{\delta \zeta^\mu(x_1) \delta \zeta^\nu(x_2)} \right|_{\eta, \bar{\eta}, \zeta=0}, \quad (2.74)$$

$$S(x_1, x_2) = -i \left. \frac{\delta^2 \mathcal{W}}{\delta \bar{\eta}(x_1) \delta \eta(x_2)} \right|_{\eta, \bar{\eta}, \zeta=0}. \quad (2.75)$$

Además, la acción efectiva Γ , ec. (2.13), permite definir el inverso de estos propagadores a partir de una transformación de Legendre de \mathcal{W} , que en este caso se define

$$\int d^4y \frac{\delta^2 \mathcal{W}}{\delta \zeta^\mu(x_1) \delta \zeta^\alpha(y)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_\alpha(y) \delta A_\nu(x_2)} = -i g_\mu^\nu \delta^{(4)}(x_1 - x_2), \quad (2.76)$$

$$\int d^4y \frac{\delta^2 \mathcal{W}}{\delta \bar{\eta}(x_1) \delta \eta^\nu(y)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(x_2)} = +i \delta^{(4)}(x_1 - x_2), \quad (2.77)$$

lo que implica que

$$\left. \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A^\mu(x_1) \delta A^\nu(x_2)} \right|_{\psi, \bar{\psi}, A=0} = \Delta_{\mu\nu}^{-1}(x_1, x_2), \quad (2.78)$$

$$\left. \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(x_1) \delta \bar{\psi}(x_2)} \right|_{\psi, \bar{\psi}, A=0} = S^{-1}(x_1, x_2), \quad (2.79)$$

y de manera análoga, el vértice 1-PI completamente vestido se define

$$\left. \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \bar{\psi}(x_1) \delta \psi(x_2) \delta A^\mu(x_3)} \right|_{\psi, \bar{\psi}, A=0} = e \Gamma_\mu(x_1, x_2, x_3). \quad (2.80)$$

Por otra parte, las funciones de Green deben anularse en el infinito, lo que (en virtud del teorema de la divergencia) implica que la derivada de la función \mathcal{Z} generadora, ec. (2.9), respecto a cualquiera de los campos $\phi_i = \psi, \bar{\psi}, A^\mu$ debe ser cero, es decir

$$\int \mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}, A] \frac{\delta}{\delta \phi_i(y)} \exp \left[i\mathcal{S} + i \int d^4x \left\{ \bar{\psi}(x) \eta(x) + \bar{\eta}(x) \psi(x) + \zeta_\mu(x) A^\mu(x) \right\} \right] = 0, \quad (2.81)$$

la cual es propiamente la *ecuación maestra* para las SDEs. Para $\phi_1 = \bar{\psi}$ tenemos

$$\int \mathcal{D} [\psi, \bar{\psi}, A] \left\{ \eta(y) + [i\gamma^\nu \partial_\nu - m - e\gamma^\nu A_\nu(y)] \psi(y) \right\} e^{iS + i\int d^4x \{ \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi + \zeta_\mu A^\mu \}} = 0, \quad (2.82)$$

pero reemplazando $A_\nu \rightarrow -i\delta/\delta\zeta^\nu$ y $\psi \rightarrow -i\delta/\delta\bar{\eta}$, entonces se tiene

$$\left\{ \eta(y) + [\gamma^\nu \partial_\nu + im + e\gamma^\nu \frac{\delta}{\delta\zeta^\nu(y)}] \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(y)} \right\} \mathcal{Z} [\eta, \bar{\eta}, \zeta] = 0. \quad (2.83)$$

Sustituyendo la ec. (2.12) en la ecuación anterior, y reescribiendo $\eta = -\delta\Gamma/\delta\bar{\psi}$, se obtiene

$$-\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(y)} - i[i\gamma^\nu \partial_\nu - m] \frac{\delta\mathcal{W}}{\delta\bar{\eta}(y)} + e\gamma^\nu \frac{\delta\mathcal{W}}{\delta\zeta^\nu(y)} \frac{\delta\mathcal{W}}{\delta\bar{\eta}(y)} + e\gamma^\nu \frac{\delta^2\mathcal{W}}{\delta\zeta^\nu(y) \delta\bar{\eta}(y)} = 0, \quad (2.84)$$

pero al implementar las ecs. (2.14), la ecuación anterior se puede reescribir como

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(y)} = [i\gamma^\nu \partial_\nu - m] \psi(y) - e\gamma^\nu A_\nu(y) \psi(y) + e\gamma^\nu \frac{\delta^2\mathcal{W}}{\delta\zeta^\nu(y) \delta\bar{\eta}(y)}, \quad (2.85)$$

donde es conveniente aplicar una transformación de Legendre al último término en la ecuación anterior, obteniendo que su inverso es

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x) \delta A_\nu(y)} = -i \left[\frac{\delta^2\mathcal{W}}{\delta\zeta^\nu(x) \delta\bar{\eta}(y)} \right]^{-1}, \quad (2.86)$$

y por lo tanto, la ec. (2.85) se escribe

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(y)} = [i\gamma^\nu \partial_\nu - m] \psi(y) - e\gamma^\nu A_\nu(y) \psi(y) - ie\gamma^\nu \left[\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(y) \delta A_\nu(y)} \right]^{-1}. \quad (2.87)$$

Derivando la ecuación anterior respecto a $\psi(x)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(x) \delta\bar{\psi}(y)} &= [\gamma^\nu \partial_\nu - m] \delta^{(4)}(x-y) - e\gamma^\nu A_\nu(y) \delta^{(4)}(x-y) \\ &\quad - ie \int d^4z_1 d^4z_2 \gamma^\nu \left[\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(z_1) \delta\bar{\psi}(y)} \right]^{-1} \left[\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{\psi}(z_1) \delta\psi(x) \delta A_\mu(z_2)} \right] \left[\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A_\mu(z_2) \delta A_\nu(y)} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (2.88)$$

donde tomando $\psi, \bar{\psi}, A = 0$, las ecs. (2.78-2.80) nos permiten reescribir la expresión anterior como

$$\begin{aligned} S^{-1}(x, y) &= [i\gamma^\nu \partial_\nu - m] \delta^{(4)}(x-y) \\ &\quad - ie^2 \int d^4z_1 d^4z_2 \gamma^\nu S(z_1, y) \Gamma^\mu(z_1, x, z_2) \Delta_{\mu\nu}(z_2, y), \end{aligned} \quad (2.89)$$

la cual es propiamente la SDE para el propagador fermiónico en espacio de configuraciones. De manera análoga, pero tomando $\phi_i = A_\mu$ en la ec. (2.81), es posible derivar la SDE para el propagador fotónico. Aplicando una transformación de Fourier, las SDEs para el propagador fermiónico y fotónico, en espacio de momentos, se escriben respectivamente

$$S^{-1}(k) = S_0^{-1}(k) - ie^2 \int_M \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \gamma^\nu S(p) \Gamma^\mu(k, p) \Delta_{\mu\nu}(q^2), \quad (2.90)$$

$$\Delta_{\mu\nu}^{-1}(q) = \Delta_{\mu\nu}^{0-1}(q) - ie^2 N_f \int_M \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \gamma_\nu S(p) \Gamma_\mu(k, p) S(k), \quad (2.91)$$

donde $q - k + p = 0$ y N_f es el número de sabores para los fermiones. La respectiva representación diagramática para estas SDEs está dada en la fig. 2.3, en donde los círculos naranja denotan el completo vestimientio de las correspondientes funciones de Green.

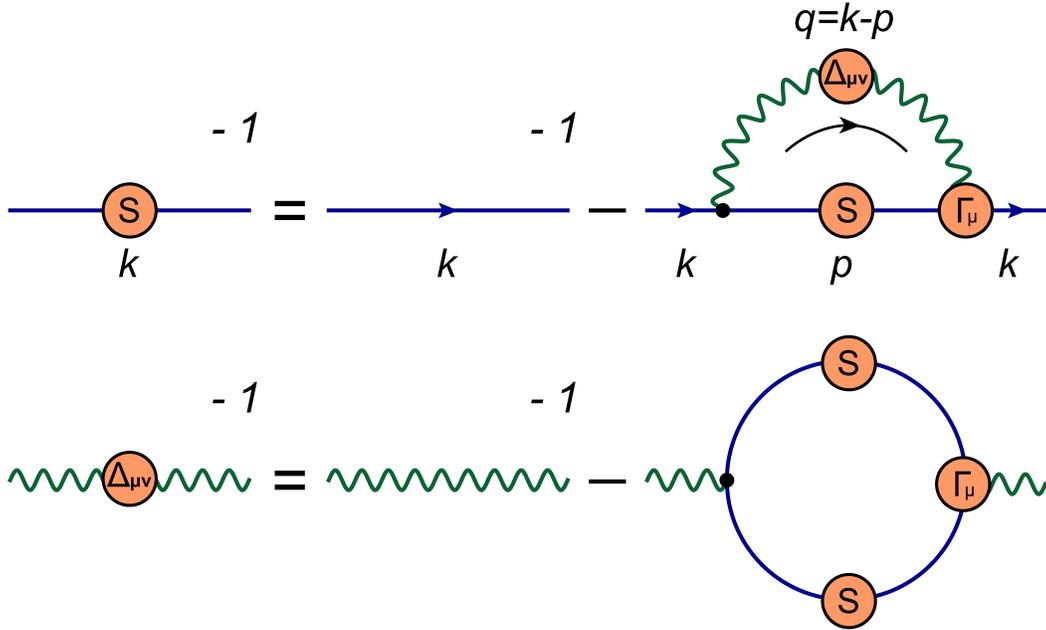


Figura 2.3: SDEs para los propagadores del fermión y el fotón.

Cabe mencionar que la SDE para el fermión, ec. (2.90), también es conocida como la *ecuación de gap*¹ debido a que en el régimen no perturbativo dicha ecuación admite soluciones no triviales para la función de masa $\mathcal{M} \neq 0$, aún en el límite quiral donde $m = 0$, en contraste

¹En español podría traducirse como “ecuación de brecha”, lo cual hace referencia a la diferencia entre la solución perturbativa \mathcal{M}_P y la no perturbativa \mathcal{M}_{NP} , donde $\mathcal{M}_{NP} > \mathcal{M}_P$.

con las soluciones perturbativas, *viz.* $\mathcal{M} = 0$ en el límite quiral. Esto es consecuencia del DCSB.

Es importante notar que las ecs. (2.90,2.91) están acopladas entre sí, por lo que encontrar soluciones exactas para los propagadores $S(k)$ y $\Delta_{\mu\nu}(q^2)$ implica resolver las respectivas ecuaciones de manera simultánea. Esta situación se vuelve más compleja puesto que dichas SDEs también están acopladas al vértice $\Gamma^\mu(k, p)$, el cual también satisface su propia SDE que lo acopla a funciones de Green más elevadas. De manera efectiva, el infinito número de SDEs que describen las funciones de Green de n -puntos en QED (y en general en cualquier QFT) están acopladas unas con otras, por lo que determinar dichas funciones implica resolver de manera simultánea y auto-consistente la torre infinita de SDEs. Por supuesto, las herramientas matemáticas actuales no son suficientemente poderosas para lograr este objetivo. Por esta razón, es necesario implementar técnicas para truncar el conjunto infinito de SDEs.

En el régimen perturbativo ($\alpha \ll 1$), las SDEs pueden ser truncadas de manera sistemática en potencias del acoplamiento α : orden por orden, la simetría de norma se preserva, y la teoría es renormalizable. No obstante, en el régimen no-perturbativo es imposible expandir las funciones de Green en potencias del acoplamiento, por lo que en este régimen es necesario aplicar otro esquema de truncamiento. En el régimen no-perturbativo, las SDEs son típicamente truncadas a nivel de los propagadores $S(k)$ y $\Delta_{\mu\nu}(q^2)$, y para ello es necesario definir un *ansatz* para el vértice fermión-fotón $\Gamma^\mu(k, p)$. No obstante, la elección del *ansatz* para el vértice no puede ser arbitraria, pues este truncamiento debe preservar la características más fundamentales de la teoría, especialmente la invarianza de norma.

En la construcción de un *ansatz* físicamente aceptable para el vértice fermión-fotón, la invarianza de norma impone fuertes restricciones a través de las WFGTIs, las TTIs y las LKFTs. En las siguientes secciones derivaremos dichas identidades.

2.5. Identidad de Ward-Fradkin-Green-Takahashi

Como ya se ha discutido previamente, para cuantizar consistentemente QED es necesario introducir el término de fijación de norma \mathcal{L}_{GF} , ec. (1.50). En consecuencia, el lagrangiano

de QED, ec. (1.51), deja de ser invariante ante las transformaciones locales de norma definidas por las ecs. (1.39,1.40,1.43), i.e. se pierde la invarianza de norma a nivel clásico. Esta es la razón por la que aparece dependencia en el parámetro de norma ξ en las funciones de Green. No obstante, es preciso recuperar la simetría de norma en la teoría cuántica, y para ello es necesario demandar que la función generadora \mathcal{Z} , ec. (2.9), sea invariante ante las transformaciones de norma. Bajo las transformaciones (1.39,1.40,1.43), tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, \zeta] \rightarrow \mathcal{Z}'[\eta, \bar{\eta}, \zeta] &= \int \mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}, A] \exp[i\mathcal{S}_{ef} + i\delta\mathcal{S}_{ef}], \\ &= \int \mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}, A] e^{i\mathcal{S}_{ef}} \{1 + i\delta\mathcal{S}_{ef}\}, \\ &= \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, \zeta] + \delta\mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, \zeta] \end{aligned} \quad (2.92)$$

donde en términos de la acción clásica \mathcal{S} , ec. (2.5), se define la acción clásica efectiva

$$\mathcal{S}_{ef} = \mathcal{S} + \int d^4x \left\{ \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + \zeta_\mu A^\mu \right\}, \quad (2.93)$$

la cual, ante las transformaciones locales de norma sufre la variación

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}_{ef} &= \int d^4x \left\{ \frac{1}{e\xi} (\partial_\mu A^\mu) \partial^2 \lambda - i\lambda \bar{\psi}\eta + i\lambda \bar{\eta}\psi - \frac{1}{e} \zeta_\mu \partial^\mu \lambda \right\}, \\ &= \frac{1}{e} \int d^4x \lambda \left\{ -\frac{1}{\xi} \partial^2 (\partial_\mu A^\mu) + \partial^\mu \zeta_\mu - i e \bar{\psi}\eta + i e \bar{\eta}\psi \right\}, \end{aligned} \quad (2.94)$$

donde se ha integrado por partes. Demandar que la función generadora sea invariante de norma es equivalente a pedir $\mathcal{Z}' = \mathcal{Z}$, lo que en términos de las ecs. (2.92,2.94) se expresa

$$\int d^4x \lambda \left\{ -\frac{1}{\xi} \partial^2 (\partial_\mu A^\mu) + \partial^\mu \zeta_\mu - i e \bar{\psi}\eta + i e \bar{\eta}\psi \right\} \mathcal{Z} = 0, \quad (2.95)$$

pero dado que $\lambda = \lambda(x)$ es una función arbitraria, la ecuación anterior implica que

$$\left[-\frac{1}{\xi} \partial^2 (\partial_\mu A^\mu) + \partial^\mu \zeta_\mu - i e \bar{\psi}\eta + i e \bar{\eta}\psi \right] \mathcal{Z} = 0. \quad (2.96)$$

De las ecs. (2.11) es claro que la ecuación anterior se puede reescribir

$$\left[\frac{i}{\xi} \partial^2 \partial_\mu \frac{\delta}{\delta \zeta_\mu} + \partial^\mu \zeta_\mu - e\eta \frac{\delta}{\delta \eta} + e\bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \right] \mathcal{Z} = 0, \quad (2.97)$$

y en términos de la función \mathcal{W} , ec. (2.12), esta ecuación se escribe

$$\frac{i}{\xi} \partial^2 \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta \zeta_\mu} + \partial^\mu \zeta_\mu - e\eta \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta \eta} + e\bar{\eta} \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta \bar{\eta}} = 0. \quad (2.98)$$

Utilizando las ecs. (2.14), y posteriormente empleando las ecs. (2.15), en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{1}{\xi} \partial^2 \partial_\mu A^\mu(x) + \partial^\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu(x)} - i e \bar{\psi}(x) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}(x)} + i e \psi(x) \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(x)} = 0, \quad (2.99)$$

donde se ha expresado explícitamente la dependencia en x . Derivando la ecuación anterior respecto a $\psi(y)$, después respecto a $\bar{\psi}(z)$, y finalmente evaluando en $\psi, \bar{\psi}, A^\mu = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} i \partial^\mu \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \bar{\psi}(z) \delta \psi(y) \delta A^\mu(x)} \Big|_{\psi, \bar{\psi}, A=0} &= e \delta^{(4)}(x-y) \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\psi}(z) \delta \psi(x)} \Big|_{\psi, \bar{\psi}, A=0} \\ &- e \delta^{(4)}(x-z) \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(x)} \Big|_{\psi, \bar{\psi}, A=0}, \end{aligned} \quad (2.100)$$

y entonces, de las ecs. (2.79,2.80) implica que

$$i \partial^\mu \Gamma_\mu(z, y, x) = \delta^{(4)}(x-y) S^{-1}(x, z) - \delta^{(4)}(x-z) S^{-1}(y, x), \quad (2.101)$$

la cual es la WFGTI para el vértice. En espacio de momentos, la WFGTI para el vértice fermión-fotón se escribe

$$q_\mu \Gamma^\mu(k, p) = S^{-1}(k) - S^{-1}(p), \quad (2.102)$$

donde $q = k - p$. En el límite $k \rightarrow p$, se obtiene la llamada *identidad de Ward*, i.e.

$$\frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial p_\mu} = \Gamma^\mu(p, p). \quad (2.103)$$

Las WFGTIs son necesarias para restaurar la covarianza de norma de las observables físicas, y en particular, las ecs. (2.102,2.103) imponen fuertes restricciones sobre la estructura no-perturbativa del vértice fermión-fotón, las cuales mostraremos en el siguiente capítulo. Por esta razón, cualquier ansatz físicamente aceptable del vértice implementado en el truncamiento de las SDEs debe satisfacer las WGTIs. En conjunto con las WGTIs, las identidades transversas de Takahashi también imponen restricciones sobre este vértice, por lo cual las estudiaremos en la siguiente sección.

2.6. Identidades transversas de Takahashi

El proceso para derivar las TTIs es análogo a la derivación de las WGTIs, es decir, se pide a la función generadora \mathcal{Z} ser invariante ante una cierta transformación de los campos

$\psi, \bar{\psi}, A^\mu$, que en este caso está definida como la transformación de Lorentz de las transformaciones de norma y las transformaciones quirales. Es decir, para cada transformación de los campos $\phi_i = \psi, \bar{\psi}, A^\mu$, definida en su versión infinitesimal como

$$\phi_i(x) \rightarrow \phi'_i(x) = \phi_i(x) + \delta\phi_i(x), \quad (2.104)$$

existe una correspondiente transformación de Lorentz, cuya variación infinitesimal se define

$$\delta_T\phi_i(x) = -\frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\delta\phi_i(x), \quad (2.105)$$

donde $\epsilon^{\mu\nu}$ es el tensor de Levi-Civita, y

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \quad (2.106)$$

En términos matemáticos, mientras la ec. (2.104) define una transformación donde el cambio $\delta\phi_i$ es por supuesto paralelo a la dirección de cambio $\phi'_i - \phi_i$, la ec. (2.105) define una transformación donde la variación $\delta_T\phi_i$ es transversa a dicha dirección de cambio. Por esta razón, la tec. (2.105) es denominada *transformación transversa*. En particular, para las transformaciones locales de norma definida por las ecs. (1.39,1.40,1.43), en donde la variación infinitesimal de los campos se escribe

$$\delta\psi(x) = i\lambda(x)\psi(x), \quad \delta\bar{\psi}(x) = -i\lambda(x)\bar{\psi}(x), \quad \delta A^\rho(x) = -\frac{1}{e}\partial^\rho\lambda(x), \quad (2.107)$$

sus correspondientes transformaciones infinitesimales transversas se definen como

$$\delta_T\psi(x) = \frac{1}{4}\lambda(x)\epsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\psi(x), \quad (2.108)$$

$$\delta_T\bar{\psi}(x) = -\frac{1}{4}\lambda(x)\epsilon^{\mu\nu}\bar{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}, \quad (2.109)$$

$$\delta_TA^\rho(x) = \frac{i}{4e}\epsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\partial^\rho\lambda(x). \quad (2.110)$$

Además, para cada una de las transformaciones quirales escritas en su forma infinitesimal como

$$\delta^{(5)}\psi(x) = i\lambda(x)\gamma^5\psi(x), \quad \delta^{(5)}\bar{\psi}(x) = i\lambda(x)\bar{\psi}(x)\gamma^5, \quad (2.111)$$

las correspondientes transformaciones infinitesimales transversas se escriben

$$\delta_T^{(5)}\psi(x) = \frac{1}{4}\lambda(x)\epsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\gamma^5\psi(x), \quad (2.112)$$

$$\delta_T^{(5)}\bar{\psi}(x) = \frac{1}{4}\lambda(x)\epsilon^{\mu\nu}\bar{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\gamma^5, \quad (2.113)$$

donde se ha insertado el índice (5) para distinguirlas de las transformaciones de norma. Demandando la invarianza de la función generadora \mathcal{Z} ante las transformaciones (2.108-2.110), es posible derivar la denominada **TTI vectorial** para el vértice $\Gamma_\mu(k, p)$, que en espacio Euclidiano se escribe

$$\begin{aligned} q_\mu \Gamma_\nu(k, p) - q_\nu \Gamma_\mu(k, p) &= S^{-1}(p) \sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} S^{-1}(k) \\ &+ 2i m \Gamma_{\mu\nu}(k, p) + t_\alpha \epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} \Gamma_\beta^A(k, p) \\ &+ A_{\mu\nu}^V(k, p), \end{aligned} \quad (2.114)$$

donde $q = k - p$, $t = k + p$, $\epsilon_{\alpha\mu\nu\beta}$ es el tensor de Levi-Civita, y en este espacio Euclidiano los propagadores se definen

$$S(p) = \frac{\mathcal{F}(p^2)}{i\gamma \cdot p + \mathcal{M}(p^2)}, \quad (2.115)$$

$$\Delta_{\mu\nu}(q^2) = \Delta(q^2) \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] + \xi \frac{q_\mu q_\nu}{q^4}. \quad (2.116)$$

Además, en la ec. (2.114) aparecen el vértice axial $\Gamma_\mu^A(k, p)$, un vértice tensorial inhomogéneo $\Gamma_{\mu\nu}(k, p)$ definido como

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 iS(k) \Gamma_{\mu\nu}(k, p) iS(p) \delta^{(4)}(q - k + p) &= \\ &\int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 y e^{i k \cdot x_1 - i p \cdot x_2 - i q \cdot y} \\ &\times \langle 0 | T [\bar{\psi}(y) \sigma_{\mu\nu} \psi(y) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)] | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (2.117)$$

y la definición del tensor no-local $A_{\mu\nu}^V(k, p)$ es

$$A_{\mu\nu}^V(k, p) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 2q_\lambda \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \tilde{\Gamma}_\rho^A(k, p; q), \quad (2.118)$$

con

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 iS(k) \tilde{\Gamma}_\rho^A(k, p; q) iS(p) \delta^{(4)}(q - k + p) &= \\ &\int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 y d^4 z e^{i k \cdot x_1 - i p \cdot x_2 + i (q-k) \cdot y - i (q-p) \cdot z} \\ &\times \langle 0 | T [\bar{\psi}(z) \gamma_\rho \gamma_5 U_p(z, y) \psi(y) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)] | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (2.119)$$

en donde $U_p(z, y) = P \exp \left[i e \int_y^z dw^\alpha A_\alpha(y) \right]$ es una línea de Wilson introducida para preservar la invarianza de norma en estas identidades.

Demandando la invarianza de la función generadora \mathcal{Z} pero ahora ante las transformaciones (2.112,2.113), se deriva la denominada **TTI axial** para el vértice axial $\Gamma_\mu^A(k, p)$, que en espacio Euclidiano se escribe

$$q_\mu \Gamma_\nu^A(k, p) - q_\nu \Gamma_\mu^A(k, p) = S^{-1}(p) \sigma_{\mu\nu}^5 - \sigma_{\mu\nu}^5 S^{-1}(k) + t_\alpha \epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} \Gamma_\beta(k, p) + V_{\mu\nu}^A(k, p), \quad (2.120)$$

donde $\sigma_{\mu\nu}^5 = \gamma_5 \sigma_{\mu\nu}$ y el tensor no-local $V_{\mu\nu}^A(k, p)$ se define exactamente igual a $A_{\mu\nu}^V(k, p)$, ec. (2.118), pero sin la matriz γ_5 en la ec. (2.119). Es preciso observar que las TTIs vectorial y axial, ecs. (2.114,2.120) están acopladas entre sí a través de los términos no-locales A^V y V^A , los cuales son muy complicados incluso a un lazo en PT [121, 122], y además, mezclan los vértices axial y vectorial.

Debido a su complejidad, las TTIs no habían recibido mucha atención hasta hace algunos años. Sin embargo, estudios recientes han delineado un procedimiento para extraer información del vértice Γ_μ a partir de las TTIs [83]. Para desacoplar los vértices axial y vectorial de las ecs. (2.114,2.120), es conveniente introducir los tensores

$$T_{\mu\nu}^1 = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} t_\alpha q_\beta, \quad (2.121)$$

$$T_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} \gamma_\alpha q_\beta. \quad (2.122)$$

Contrayendo la TTI axial, ec. (2.120), con el tensor $T_{\mu\nu}^1$, el lado izquierdo de la ecuación resultante se hace cero puesto que

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^1 [q_\mu \Gamma_\nu^A - q_\nu \Gamma_\mu^A] &= \frac{1}{2} [\epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} t_\alpha q_\beta q_\mu \Gamma_\nu^A - \epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} t_\alpha q_\beta q_\nu \Gamma_\mu^A], \\ &= \frac{1}{2} [\epsilon_{\alpha\mu\nu\beta} t_\alpha q_\beta q_\mu \Gamma_\nu^A - \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} t_\alpha q_\nu q_\beta \Gamma_\mu^A] = 0, \end{aligned} \quad (2.123)$$

mientras que el lado derecho se reescribe

$$q \cdot t t \cdot \Gamma(k, p) = T_{\mu\nu}^1 [S^{-1}(p) \sigma_{\mu\nu}^5 - \sigma_{\mu\nu}^5 S^{-1}(k)] + t^2 q \cdot \Gamma(k, p) + T_{\mu\nu}^1 V_{\mu\nu}^A \quad (2.124)$$

y similarmente, contrayendo la ec. (2.120) con el tensor $T_{\mu\nu}^2$ definido en la ec. (2.122), se obtiene

$$q \cdot t \gamma \cdot \Gamma(k, p) = T_{\mu\nu}^2 [S^{-1}(p) \sigma_{\mu\nu}^5 - \sigma_{\mu\nu}^5 S^{-1}(k)] + \gamma \cdot t q \cdot \Gamma(k, p) + T_{\mu\nu}^2 V_{\mu\nu}^A. \quad (2.125)$$

Las ecs. (2.124,2.125) sólo involucran al vértice $\Gamma_\mu(k, p)$ y no contienen dependencia explícita sobre la masa desnuda del fermión, m . De manera análoga, es posible desacoplar el vértice axial $\Gamma_\mu^A(k, p)$ contrayendo los tensores $T_{\mu\nu}^1$ y $T_{\mu\nu}^2$ con la TTI vectorial, ec. (2.114). Es importante observar que, aunque los términos $T_{\mu\nu}^1 V_{\mu\nu}^A$ y $T_{\mu\nu}^2 V_{\mu\nu}^A$ son desconocidos, la contracción les da carácter de escalares de Lorentz por lo que pueden ser expresados como

$$\begin{aligned} iT_{\mu\nu}^1 V_{\mu\nu}^A &= \mathbf{I}_D Y_1(k, p) + i(\gamma \cdot q) Y_2(k, p) \\ &\quad + i(\gamma \cdot t) Y_3(k, p) + [\gamma \cdot q, \gamma \cdot t] Y_4(k, p), \end{aligned} \quad (2.126)$$

$$\begin{aligned} iT_{\mu\nu}^2 V_{\mu\nu}^A &= i\mathbf{I}_D Y_5(k, p) + (\gamma \cdot q) Y_6(k, p) \\ &\quad + (\gamma \cdot t) Y_7(k, p) + i[\gamma \cdot q, \gamma \cdot t] Y_8(k, p), \end{aligned} \quad (2.127)$$

donde $Y_i(k, p)$ son funciones escalares desconocidas, y \mathbf{I}_D es la matriz identidad de 4×4 . Es preciso agragar que las ecs. (2.124, 2.125) pueden ser implementadas para estudiar la estructura analítica del vértice fermión-fotón. Esto es de hecho uno de los objetivos principales de este trabajo de tesis, el cual será discutido en el siguiente capítulo. No obstante, es importante dicuir una de las propiedades que cualquier truncamiento de las SDEs debe preservar, *viz.* la renormalizabilidad multiplicativa del propagador fermiónico, la cual es una consecuencia de las LKFTs, las cuales se discuten en la siguiente sección.

2.7. Transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin

Las LKFTs son un conjunto de ecuaciones que describen la respuesta de las funciones de Green ante un cambio en el parámetro de norma [42, 52–55]. La estructura de estas transformaciones es mucho más simple en espacio de coordenadas. Para analizar la LKFT asociada al propagador fermiónico, es conveniente reescribir las ecs, (2.34,2.42,2.73) como

$$S(x; \xi) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} S(k; \xi) = \not{x} X(x; \xi) + Y(x; \xi), \quad (2.128)$$

$$S(k; \xi) = \int d^d x e^{ik \cdot x} S(x; \xi), \quad (2.129)$$

$$(2.130)$$

donde hemos escrito explícitamente la dependencia sobre el parámetro de norma y hemos generalizado a d dimensiones. La LKFT que relaciona al propagador fermiónico (en espacio

de configuraciones) en una norma específica ξ_0 a este mismo propagador en otra norma arbitraria ξ se escribe

$$S(x; \xi) = S(x; \xi_0) e^{-i[\Theta(0) - \Theta(x)]}, \quad (2.131)$$

con

$$\begin{aligned} \Theta(x) &= -i(\xi - \xi_0) e^2 (\mu x)^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i k \cdot x}}{k^4}, \\ &= -\frac{i(\xi - \xi_0) e^2}{16\pi^{d/2}} (\mu x)^{4-d} \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right), \end{aligned} \quad (2.132)$$

donde Γ denota la función Gamma y μ es una escala de masa introducida para asegurar que en cualquier dimensión arbitraria d , el acoplamiento e sea adimensional. Típicamente, se elige $d = 4 - 2\epsilon$, donde entonces aparecerán

$$\begin{aligned} \Gamma(-\epsilon) &= -\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon), \\ x^\epsilon &= 1 + \epsilon \ln x + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (2.133)$$

Siendo γ_E la constante de Euler-Mascheroni. En el límite quiral ($m=0$), para un acoplamiento pequeño, las LKFTs implican que a un lazo [60]

$$\mathcal{F}_1(k^2, \Lambda^2) = 1 + \frac{\alpha\xi}{4\pi} \log\left(\frac{k^2}{\Lambda^2}\right), \quad (2.134)$$

$$\mathcal{M}_1(k^2) = 0, \quad (2.135)$$

lo cual es consistente con los resultados derivados en las ecs. (2.70,2.71) en espacio Euclidiano. En la siguiente sección mostraremos la conexión entre estos resultados con la renormalizabilidad multiplicativa del propagador fermiónico.

2.8. Renormalizabilidad multiplicativa

Es bien sabido que la ecuación de gap, ec.(2.90), implica un propagador fermiónico divergente, como se puede ver de las ecs. (2.70,2.134) donde fue necesario introducir el regulador Λ para regularizar las divergencias UV. No obstante, es posible definir un propagador renormalizado absorbiendo dichas divergencias en las llamadas funciones de normalización.

En el caso de QED no-masivo, donde $\mathcal{M} = 0$, es posible renormalizar al propagador fermiónico de manera multiplicativa si se introducen los campos fermiónico y fotónico renormalizados, $\psi_R = Z_2^{-1/2}\psi$ y $A_\mu^R = Z_3^{-1/2}A_\mu$, respectivamente. La renormalización $e_R = Z_2 Z_3^{1/2} e / Z_1$ del acoplamiento también es necesaria. La MR del propagador fermiónico requiere que la función de onda renormalizada \mathcal{F}_R esté relacionada con la función de onda no-renormalizada \mathcal{F} a través de un factor multiplicativo, es decir

$$\mathcal{F}_R(k^2, \mu^2) = \mathcal{Z}_2^{-1}(\mu^2, \Lambda^2) \mathcal{F}(k^2, \Lambda^2), \quad (2.136)$$

donde en este caso μ^2 juega el rol de una escala de renormalización. En el régimen perturbativo, es posible encontrar soluciones a la ec. (2.136) si las funciones involucradas se expanden en potencias del acoplamiento α . En la llamada *aproximación de logaritmos principales* (LLA), sólo los términos de la forma $\alpha^n \ln^n$ son considerados, y esto es permisible en QED pues es una teoría logarítmicamente divergente. En la LLA tenemos entonces

$$\mathcal{F}(k^2, \Lambda^2) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n A_n \ln^n \left(\frac{k^2}{\Lambda^2} \right), \quad (2.137)$$

$$\mathcal{Z}_2^{-1}(\mu^2, \Lambda^2) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n B_n \ln^n \left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right), \quad (2.138)$$

$$\mathcal{F}_R(k^2, \mu^2) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n C_n \ln^n \left(\frac{k^2}{\mu^2} \right), \quad (2.139)$$

donde A_n , B_n y C_n son coeficientes desconocidos. No obstante, la ec. (2.136) requiere que estos coeficientes sean

$$A_n = C_n = (-1)^n B_n = \frac{A_1^n}{n!}, \quad (2.140)$$

de manera que las funciones \mathcal{F} , \mathcal{F}_R y Z_2 obedecen una ley de potencias. En particular, la solución para \mathcal{F} de la ec. (2.136) en la LLA es

$$\mathcal{F}(k^2, \Lambda^2) = \left(\frac{k^2}{\Lambda^2} \right)^\beta, \quad (2.141)$$

donde se define $\beta = \alpha A_1$, la cual es una dimensión anómala *a priori* desconocida. Sin embargo, ecomparando la expansión (2.137) hasta orden $\mathcal{O}(\alpha)$ con el resultado perturbativo (2.70), vemos entonces que PT sugiere

$$\beta = \frac{\alpha \xi}{4\pi}. \quad (2.142)$$

Es importante notar que la solución para \mathcal{F} en la LLA, ec. (2.141), con β especificado en la ec. (2.142), puede ser obtenido de la ecuación

$$\frac{1}{\mathcal{F}(k^2, \Lambda^2)} = 1 + \frac{\alpha\xi}{4\pi} \int_{k^2}^{\Lambda^2} \frac{dp^2}{p^2} \frac{\mathcal{F}(p^2, \Lambda^2)}{\mathcal{F}(k^2, \Lambda^2)}. \quad (2.143)$$

En el truncamiento de las SDEs, la ecuación anterior puede implementarse entonces como un requerimiento no-perturbativo para garantizar la MR de la función de onda \mathcal{F} del propagador fermiónico en el límite no-masivo. En particular, cualquier ansatz para el vértice fermión-fotón debe garantizar que la solución para \mathcal{F} en la ecuación de gap, ec. (2.90), sea también una solución a la ec. (2.143) en el límite $\mathcal{M} = 0$, para así asegurar una función de onda multiplicativamente renormalizable.

En el siguiente capítulo se estudiará la estructura general del vértice fermión-fotón y se mostrará cómo la WFGTI fija la llamada componente longitudinal del vértice en términos de las funciones \mathcal{F} y \mathcal{M} que definen el propagador fermiónico. Como parte central de este trabajo de tesis, se implementarán las TTIs para estudiar los factores de forma que definen la llamada componente transversa del vértice, y se mostrará cómo el requerimiento de MR para el propagador fermiónico restringe la estructura analítica de estos factores transversos. Adicionalmente, se construirá un kernel para la ecuación de gap que garantice un acoplamiento crítico α_c independiente de norma.

Capítulo 3

El vértice fermión-fotón

En un esquema no-perturbativo para el truncamiento de la torre infinita de SDEs que definen a una QFT, las funciones de Green de 3-puntos juegan un papel central en el desacoplamiento de dichas ecuaciones. En el contexto de QED, la implementación de un *ansatz* no-perturbativo para el vértice fermión-fotón permite desacoplar las SDEs para los propagadores fermiónico y fotónico del resto de SDEs correspondientes a las funciones de Green de 4-puntos y órdenes más altos. No obstante, la elección de un *ansatz* para el vértice no puede ser arbitraria, pues este esquema de truncamiento debe preservar las características y propiedades derivadas de las simetrías fundamentales en la teoría. En particular, la invarianza de norma impone fuertes restricciones sobre la estructura analítica de los factores de forma que definen al vértice, y por lo tanto, un *ansatz* físicamente aceptable debe satisfacer dichas restricciones, las cuales se manifiestan a través de las identidades de Ward-Takahashi y las LKFTs. En la construcción del *ansatz*, la implementación de estas identidades funcionales es necesaria para garantizar la renormalizabilidad de la teoría y la correcta covarianza de norma del propagador fermiónico.

Además, uno de los aspectos más importantes en este esquema de truncamiento es la correcta incorporación del DCSB, tanto en el propagador fermiónico como en el mismo vértice. Es bien sabido que en el dominio donde las interacciones son muy intensas, la dinámica entre las componentes fundamentales es capaz de generar una masa \mathcal{M} para los fermiones, incluso en el límite donde la masa desnuda es $m = 0$, definiendo un fenómeno de naturaleza

estrictamente no-perturbativa. En este contexto, la presencia del vértice fermión-fotón en el kernel de integración de la ecuación de gap, ec. (2.90), es un factor determinante en la posible existencia de múltiples soluciones (no físicas) para la función de masa en la SDE del propagador fermiónico [123], y establece la dependencia de norma en el acoplamiento crítico arriba del cual toma lugar el DCSB [77, 102–106, 109–111].

En este capítulo se estudian las restricciones de norma sobre el vértice fermión-fotón, tema central de este trabajo de tesis. En las primeras secciones se analiza la estructura general del vértice y, a partir de las simetrías e identidades fundamentales en QED, se derivan restricciones no-perturbativas para sus correspondientes factores de forma. La última parte de este capítulo se designa al estudio del DCSB y su conexión con los factores de forma del vértice.

3.1. Estructura general del vértice

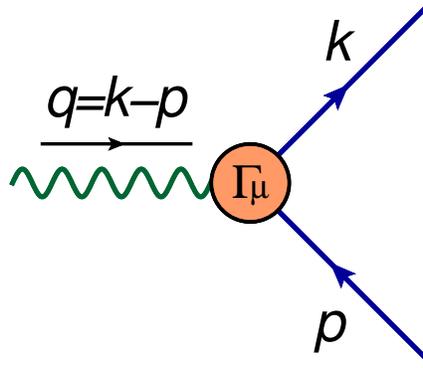


Figura 3.1: Vértice fermión-fotón

Debido a que en QED los fermiones de espín-1/2 interactúan con los bosones vectoriales de norma, i.e. fotones de espín-1, el vértice de interacción fermión-fotón es un vector de Lorentz. Para la configuración cinemática representada en la fig. 3.1, existen 3 vectores de Lorentz linealmente independientes, y 4 escalares de Lorentz asociados:

$$\begin{aligned}
 \text{Vectores:} & \quad \gamma_\mu, \quad k_\mu, \quad p_\mu, \\
 \text{Escalares:} & \quad \mathbf{1}_D, \quad \gamma \cdot k, \quad \gamma \cdot p, \quad \gamma \cdot k \gamma \cdot p,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

escritos en espacio Euclidiano. Debido a la conservación de momento y energía, q no contribuye a estas estructuras linealmente independientes. Además, debido a que el vértice en QED debe preservar la paridad, los tensores de Levi-Civita no pueden formar parte de su estructura vectorial. Por lo tanto, en su descomposición más general, el vértice fermión-fotón puede ser escrito en términos de las 12 posibles combinaciones de las estructuras anteriores, ec. (3.1), es decir

$$\Gamma_\mu(k, p) = \sum_{i=1}^{12} \Omega_i(k, p) V_\mu^i(k, p), \quad (3.2)$$

donde las funciones escalares $\Omega_i(k, p) = \Omega_i(k^2, p^2, q^2)$ expresan la dependencia funcional que en general tiene el vértice sobre las variables (escalares) cinemáticas linealmente independientes: k^2 , p^2 y el ángulo θ entre k_μ y p_μ , definido a través de $q^2 = k^2 - 2k \cdot p + p^2$. Los factores de forma Ω_i ponderan la contribución de cada una de las estructuras $V_\mu^i(k, p)$ en la base vectorial $\{V_\mu^i\}$ para el vértice, en este caso definidas como

$$\begin{aligned} V_\mu^1(k, p) &= \gamma_\mu, & V_\mu^2(k, p) &= k_\mu, & V_\mu^3(k, p) &= p_\mu, \\ V_\mu^4(k, p) &= (\gamma \cdot k) \gamma_\mu, & V_\mu^5(k, p) &= (\gamma \cdot k) k_\mu, & V_\mu^6(k, p) &= (\gamma \cdot k) p_\mu, \\ V_\mu^7(k, p) &= (\gamma \cdot p) \gamma_\mu, & V_\mu^8(k, p) &= (\gamma \cdot p) k_\mu, & V_\mu^9(k, p) &= (\gamma \cdot p) p_\mu, \\ V_\mu^{10}(k, p) &= (\gamma \cdot k) (\gamma \cdot p) \gamma_\mu, & V_\mu^{11}(k, p) &= (\gamma \cdot k) (\gamma \cdot p) k_\mu, & V_\mu^{12}(k, p) &= (\gamma \cdot k) (\gamma \cdot p) p_\mu. \end{aligned} \quad (3.3)$$

No obstante, la descomposición del vértice definida en la ec. (3.2), y en general una descomposición arbitraria, contiene *singularidades cinemáticas* en sus factores de forma. Es decir, más allá del nivel de árbol, los funciones de estructura $\Omega_i(k, p)$ divergen en el límite $k^2 \rightarrow p^2$. A diferencia de las divergencias dinámicas (por ejemplo, los polos $p^2 = m^2$ y $q^2 = 0$ para los propagadores del fermión y el fotón en PT, respectivamente), las divergencias cinemáticas no tienen un origen físico, y por lo tanto no deberían aparecer en el vértice. Esto es evidente en la identidad de Ward, ec. (2.103), en donde el vértice tiene un límite bien definido para $k \rightarrow p$, como consecuencia de la invarianza de norma.

La adecuada elección de la base vectorial es la clave para definir un vértice libre de singularidades cinemáticas. La primera definición de una base vectorial que evita la aparición de este tipo de singularidades en el vértice fue propuesta por J.S. Ball y T.W. Chiu [56, 124], quienes separan la estructura general del vértice en una componente Γ_μ^L longitudinal al momento q_μ del fotón (i.e. $q_\mu \Gamma_\mu^L \neq 0$), el llamado *vértice de Ball-Chiu*, y una componente Γ_μ^T

transversa ($q_\mu \Gamma_\mu^T = 0$). En esta descomposición, la componente longitudinal del vértice satisface la WFGTI, ec. (2.102), la cual fija los correspondientes factores de forma longitudinales en términos de las funciones \mathcal{F} y \mathcal{M} del propagador fermiónico, y dichos factores de forma son libres de singularidades cinemáticas. En contraste, la componente transversa queda totalmente ideterminada por la WFGTI. No obstante, el análisis perturbativo de Ball-Chiu muestra que a un lazo, en la norma de Feynman ($\xi = 0$), los factores de forma transversos tampoco contienen divergencias cinemáticas. En la siguiente sección se introduce la descomposición longitudinal y transversa del vértice fermión-fotón.

3.2. Vértice longitudinal

Para configuración cinemática representada en la fig. 3.1, la WFGTI para el vértice fermión-fotón, ec. (2.102), se reescribe en espacio Euclidiano como

$$iq_\mu \Gamma_\mu(k, p) = S^{-1}(k) - S^{-1}(p), \quad (3.4)$$

donde $q = k - p$. Esta identidad permite descomponer al vértice en una componente longitudinal y una transversa, tal como fue sugerido por Ball y Chiu [56]:

$$\Gamma_\mu(k, p) = \Gamma_\mu^L(k, p) + \Gamma_\mu^T(k, p). \quad (3.5)$$

El *vértice longitudinal* $\Gamma_\mu^L(k, p)$ satistace por sí mismo la WFGTI, ec. (3.4), la cual restringe esta componente longitudinal a 4 estructuras linealmente independientes, y determina los respectivos factores de forma (uno de los cuales es cero en QED). Explícitamente

$$\Gamma_\mu^L(k, p) = a(k^2, p^2)\gamma_\mu + \frac{1}{2}b(k^2, p^2)t_\mu \gamma \cdot t - i c(k^2, p^2)t_\mu, \quad (3.6)$$

con $t = k + p$, y los factores de forma longitudinales se definen

$$a(k^2, p^2) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\mathcal{F}(k^2, \Lambda^2)} + \frac{1}{\mathcal{F}(p^2, \Lambda^2)} \right], \quad (3.7)$$

$$b(k^2, p^2) = \left[\frac{1}{\mathcal{F}(k^2, \Lambda^2)} - \frac{1}{\mathcal{F}(p^2, \Lambda^2)} \right] \frac{1}{k^2 - p^2}, \quad (3.8)$$

$$c(k^2, p^2) = \left[\frac{\mathcal{M}(k^2, \Lambda^2)}{\mathcal{F}(k^2, \Lambda^2)} - \frac{\mathcal{M}(p^2, \Lambda^2)}{\mathcal{F}(p^2, \Lambda^2)} \right] \frac{1}{k^2 - p^2}. \quad (3.9)$$

En el límite $k \rightarrow p$, estos factores de forma están bien definidos, pues en éste límite

$$a(p^2, p^2) = \frac{1}{\mathcal{F}(p^2)}, \quad b(p^2, p^2) = \frac{\partial}{\partial p^2} \left[\frac{1}{\mathcal{F}(p^2)} \right], \quad c(p^2, p^2) = \frac{\partial}{\partial p^2} \left[\frac{\mathcal{M}(p^2)}{\mathcal{F}(p^2)} \right], \quad (3.10)$$

donde se ha omitido la dependencia sobre el regulador de corte ultravioleta, Λ , para una notación más simple. Con estos resultados, de la ec. (3.6) tenemos entonces

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^L(p, p) &= \frac{\gamma_\mu}{\mathcal{F}(p^2)} + 2p_\mu \gamma \cdot p \frac{\partial}{\partial p^2} \left[\frac{1}{\mathcal{F}(p^2)} \right] - 2i p_\mu \frac{\partial}{\partial p^2} \left[\frac{\mathcal{M}(p^2)}{\mathcal{F}(p^2)} \right], \\ &= \frac{\gamma_\mu}{\mathcal{F}(p^2)} + \gamma \cdot p \frac{\partial}{\partial p_\mu} \left[\frac{1}{\mathcal{F}(p^2)} \right] - i \frac{\partial}{\partial p_\mu} \left[\frac{\mathcal{M}(p^2)}{\mathcal{F}(p^2)} \right], \\ &= -i \frac{\partial}{\partial p_\mu} \left[\frac{i\gamma \cdot p + \mathcal{M}(p^2)}{\mathcal{F}(p^2)} \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

es decir

$$i\Gamma_\mu^L(p, p) = \frac{\partial}{\partial p_\mu} S^{-1}(p), \quad (3.12)$$

que es justo la identidad de Ward, ec. (2.103), en espacio Euclidiano. Dado que \mathcal{F} y \mathcal{M} son funciones continuas, la ecuación anterior implica que este vértice longitudinal no contiene divergencias cinemáticas, como era de esperarse. Además, la divergencia UV queda contenida únicamente en el factor de forma $a(k^2, p^2)$. Esto puede ser verificado fácilmente a un lazo, en el límite quiral ($m = 0$), en donde la expansión a un lazo para la función de onda \mathcal{F} del propagador fermiónico, ec. (2.70), implica que

$$a_1(k^2, p^2) = 1 - \frac{\alpha\xi}{8\pi} \ln \left(\frac{k^2 p^2}{\Lambda^4} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (3.13)$$

$$b_1(k^2, p^2) = -\frac{\alpha\xi}{4\pi} \frac{1}{k^2 - p^2} \ln \left(\frac{k^2}{p^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (3.14)$$

Por otro lado, la WFGTI deja completamente indeterminados a los factores de forma que definen la componente transversa del vértice. No obstante, las simetrías de la teoría imponen fuertes restricciones sobre la estructura analítica de estos factores de forma. En la siguiente sección se estudia la estructura general del vértice transverso, y se muestran los requerimientos básicos que éste debe satisfacer.

3.3. Vértice transverso

Por definición, el *vértice transverso* satisface

$$iq_\mu \Gamma_\mu^T(k, p) = 0, \quad (3.15)$$

lo que hace evidente que esta componente del vértice no aparece en la WFGTI, ec. (3.4). Pese a que la ec. (3.15) no especifica los factores de forma transversos, dicha ecuación tiene dos implicaciones muy importantes. La primera de éstas es que el vértice transverso tiene un límite $k \rightarrow p$ bien definido, *viz.*

$$\Gamma_\mu^T(p, p) = 0. \quad (3.16)$$

La segunda implicación es que sólo existen 8 estructuras vectoriales T_μ^i trasnversas a q_μ , i.e. que satisfacen $q_\mu T_\mu^i = 0$. La primera representación para la base transversa del vértice fue introducida por Ball y Chiu [56], quienes mostraron que a un lazo, en norma de Feynman, los correspondientes factores de forma transversos no contenían singularidades cinemáticas. Sin embargo, A. Kizilersü, M. Reenders y M. Pennington [80] probaron que en norma arbitraria, a un lazo, existen dos factores de forma transversos en la base de Ball-Chiu que sí tienen singularidades cinemáticas, pero éstas desaparecen incidentalmente en norma de Feynman. Kiziilersü *et al.* proponen una modificación a la base transversa, la cual no presenta singularidades cinemáticas. En esta nueva base, el vértice transverso se escribe

$$\Gamma_\mu^T(k, p) = \sum_{i=1}^8 \tau_i(k, p) T_\mu^i(k, p), \quad (3.17)$$

en donde

$$\begin{aligned} T_\mu^1(k, p) &= i [p_\mu(k \cdot q) - k_\mu(p \cdot q)], \\ T_\mu^2(k, p) &= [p_\mu(k \cdot q) - k_\mu(p \cdot q)] \gamma \cdot t, \\ T_\mu^3(k, p) &= q^2 \gamma_\mu - q_\mu \gamma \cdot q, \\ T_\mu^4(k, p) &= iq^2 [\gamma_\mu \gamma \cdot t - t_\mu] + 2q_\mu p_\nu k_\rho \sigma_{\nu\rho}, \\ T_\mu^5(k, p) &= \sigma_{\mu\nu} q_\nu, \\ T_\mu^6(k, p) &= -\gamma_\mu (k^2 - p^2) + t_\mu \gamma \cdot q, \\ T_\mu^7(k, p) &= \frac{i}{2} (k^2 - p^2) [\gamma_\mu \gamma \cdot t - t_\mu] + t_\mu p_\nu k_\rho \sigma_{\nu\rho}, \\ T_\mu^8(k, p) &= -i \gamma_\mu p_\nu k_\rho \sigma_{\nu\rho} - p_\mu \gamma \cdot k + k_\mu \gamma \cdot p. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Aunque los factores de forma transversos son *a priori* desconocidos, es posible derivar algunas de sus propiedades a partir de requerimientos básicos. Debido a que el vértice completamente vestido debe satisfacer las mismas propiedades de simetría que su versión desnuda, γ_μ , es conveniente observar que, bajo la operación de conjugación de carga (C), el vértice desnudo se transforma como

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T, \quad (3.19)$$

por lo que entonces, el vértice completamente vestido debe satisfacer

$$C\Gamma_\mu(k, p)C^{-1} = -\Gamma_\mu^T(-p, -k). \quad (3.20)$$

Notando de las ecs. (3.18,3.19) que

$$CT_\mu^i(k, p)C^{-1} = -T_\mu^{iT}(-p, -k), \quad i = 1, 2, 3, 5, 7, 8, \quad (3.21)$$

$$CT_\mu^i(k, p)C^{-1} = T_\mu^{iT}(-p, -k), \quad i = 4, 6, \quad (3.22)$$

entonces, la ec. (3.20) implica que

$$\tau_i(p, k) = \tau_i(k, p), \quad i = 1, 2, 3, 5, 7, 8, \quad (3.23)$$

$$\tau_i(p, k) = -\tau_i(k, p), \quad i = 4, 6, \quad (3.24)$$

es decir, todas las τ_i s deben ser completamente simétricas ante el intercambio $k \leftrightarrow p$, excepto por τ_4 y τ_6 que deben ser completamente antisimétricas. Además, debido a que el vértice desnudo γ_μ es adimensional, el vértice vestido también debe ser adimensional, lo que implica que los factores de forma transversos deben tener dimensión de masa

$$\begin{aligned} [\tau_1] &= M^{-3}, & [\tau_2] &= M^{-4}, & [\tau_3] &= M^{-2}, & [\tau_4] &= M^{-3}, \\ [\tau_5] &= M^{-1}, & [\tau_6] &= M^{-2}, & [\tau_7] &= M^{-3}, & [\tau_8] &= M^{-2}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Conclusiones

En un esquema no-perturbativo para el truncamiento de la torre infinita de SDEs que definen a una QFT, las funciones de Green de 3-puntos juegan un papel central en el desacoplamiento de dichas ecuaciones. En el contexto de QED, la implementación de un *ansatz* no-perturbativo para el vértice fermión-fotón permite desacoplar las SDEs para los propagadores fermiónico y fotónico del resto de SDEs correspondientes a las funciones de Green de 4-puntos y órdenes más altos. No obstante, la elección de un *ansatz* para el vértice no puede ser arbitraria, pues este esquema de truncamiento debe preservar las características y propiedades derivadas de las simetrías fundamentales en la teoría. En particular, la invarianza de norma impone fuertes restricciones sobre la estructura analítica de los factores de forma que definen al vértice, y por lo tanto, un *ansatz* físicamente aceptable debe satisfacer dichas restricciones, las cuales se manifiestan a través de las identidades de Ward-Takahashi y las LKFTs. En la construcción del *ansatz*, la implementación de estas identidades funcionales es necesaria para garantizar la renormalizabilidad de la teoría y la correcta covarianza de norma del propagador fermiónico.

Además, uno de los aspectos más importantes en este esquema de truncamiento es la correcta incorporación del DCSB, tanto en el propagador fermiónico como en el mismo vértice. Es bien sabido que en el dominio donde las interacciones son muy intensas, la dinámica entre las componentes fundamentales es capaz de generar una masa \mathcal{M} para los fermiones, incluso en el límite donde la masa desnuda es $m = 0$, definiendo un fenómeno de naturaleza estrictamente no-perturbativa. En este contexto, la presencia del vértice fermión-fotón en el kernel de integración de la ecuación de gap, ec. (2.90), es un factor determinante en la posible existencia de múltiples soluciones (no físicas) para la función de masa en la SDE del propagador fermiónico [123], y establece la dependencia de norma en el acoplamiento crítico

arriba del cual toma lugar el DCSB [77, 102–106, 109–111].

En este trabajo de tesis se estudiaron las restricciones de norma sobre el vértice fermión-fotón, el cual se comporta como un cuadri-vector ante una transformación de Lorentz, y en su descomposición más general está constituido por 12 estructuras (cuadri-) vectoriales linealmente independientes, cada una de ellas ponderada por un *factor de forma*. Las WFGTIs (y su contraparte no-abeliana, las STIs) permiten separar al vértice en dos partes: las componentes *longitudinal* y *transversa*. Este vértice longitudinal consta de 4 estructuras vectoriales, pero uno de los correspondientes factores de forma longitudinales es cero en QED. Desafortunadamente, la WFGTI deja completamente indeterminado al vértice transversal, definido en términos de las 8 estructuras vectoriales restantes y sus correspondientes factores de forma transversos. La componente transversal del vértice juega un papel importante en la renormalizabilidad de la teoría. Los requerimientos mínimos que debe satisfacer el ansatz para el vértice, y por lo tanto su parte transversal son: 1) Debe satisfacer la WFGTI, 2) debe satisfacer la renormalizabilidad multiplicativa del propagador fermiónico, 3) debe satisfacer las TTIs, y 4) debe asegurar que la constante crítica de acoplamiento sea independiente de norma.

Apéndice A: Matrices de Dirac

En la representación de Dirac, las matrices γ^μ se definen como

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & -\mathbf{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.26)$$

donde $\mathbf{I}_{2 \times 2}$ es la matriz unidad de 2×2 , $\mathbf{0}_{2 \times 2}$ es la matriz nula, y σ^i son las matrices de Pauli, definidas como

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Las matrices γ^μ satisfacen la siguiente relación de anticonmutación (álgebra de Clifford):

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (3.28)$$

En dimensión $d = 4$, las matrices de Dirac satisfacen las siguientes relaciones

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4\mathbf{I}_D, \quad (3.29)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma_\mu = -2\gamma^\alpha, \quad (3.30)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\mu = 4g^{\alpha\beta}, \quad (3.31)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma_\mu = -2\gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\alpha. \quad (3.32)$$

Bibliografía

- [1] S. Tomonaga, “On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields,” *Prog. Theor. Phys.*, vol. 1, pp. 27–42, 1946.
- [2] J. S. Schwinger, “On Quantum electrodynamics and the magnetic moment of the electron,” *Phys. Rev.*, vol. 73, pp. 416–417, 1948.
- [3] J. S. Schwinger, “Quantum electrodynamics. I A covariant formulation,” *Phys. Rev.*, vol. 74, p. 1439, 1948.
- [4] R. P. Feynman, “Space - time approach to quantum electrodynamics,” *Phys. Rev.*, vol. 76, pp. 769–789, 1949.
- [5] S. L. Glashow, “Partial Symmetries of Weak Interactions,” *Nucl. Phys.*, vol. 22, pp. 579–588, 1961.
- [6] S. Weinberg, “A Model of Leptons,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 19, pp. 1264–1266, 1967.
- [7] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, “Broken Symmetries,” *Phys. Rev.*, vol. 127, pp. 965–970, 1962.
- [8] M. Gell-Mann, “The Eightfold Way: A Theory of strong interaction symmetry,” 1961.
- [9] M. Gell-Mann, “A Schematic Model of Baryons and Mesons,” *Phys. Lett.*, vol. 8, pp. 214–215, 1964.
- [10] G. Zweig, “An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 2,” in *DEVELOPMENTS IN THE QUARK THEORY OF HADRONS. VOL. 1. 1964 - 1978* (D. Lichtenberg and S. P. Rosen, eds.), pp. 22–101, 1964.

- [11] F. Englert and R. Brout, “Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 13, pp. 321–323, 1964. [,157(1964)].
- [12] P. W. Higgs, “Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 13, pp. 508–509, 1964. [,160(1964)].
- [13] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble, “Global Conservation Laws and Massless Particles,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 13, pp. 585–587, 1964. [,162(1964)].
- [14] C. Amsler *et al.*, “Review of Particle Physics,” *Phys. Lett.*, vol. B667, pp. 1–1340, 2008.
- [15] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. 1.,” *Phys. Rev.*, vol. 122, pp. 345–358, 1961. [,127(1961)].
- [16] J. Goldstone, “Field Theories with Superconductor Solutions,” *Nuovo Cim.*, vol. 19, pp. 154–164, 1961.
- [17] G. Aad *et al.*, “Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC,” *Phys. Lett.*, vol. B716, pp. 1–29, 2012.
- [18] D. J. Gross and F. Wilczek, “Asymptotically Free Gauge Theories - I,” *Phys. Rev.*, vol. D8, pp. 3633–3652, 1973.
- [19] D. J. Gross and F. Wilczek, “Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 30, pp. 1343–1346, 1973. [,271(1973)].
- [20] H. D. Politzer, “Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 30, pp. 1346–1349, 1973. [,274(1973)].
- [21] K. G. Wilson, “Confinement of Quarks,” *Phys. Rev.*, vol. D10, pp. 2445–2459, 1974. [,319(1974)].
- [22] J. M. Cornwall and G. Tiktopoulos, “Infrared Behavior of Nonabelian Gauge Theories. 2.,” *Phys. Rev.*, vol. D15, p. 2937, 1977.
- [23] H. J. Munczek and A. M. Nemirovsky, “The Ground State q anti- q Mass Spectrum in QCD,” *Phys. Rev.*, vol. D28, p. 181, 1983.

- [24] F. Dyson, “The S matrix in quantum electrodynamics,” *Phys.Rev.*, vol. 75, pp. 1736–1755, 1949.
- [25] J. S. Schwinger, “On the Green’s functions of quantized fields. 1.,” *Proc.Nat.Acad.Sci.*, vol. 37, pp. 452–455, 1951.
- [26] D. J. Wilson, I. C. Cloet, L. Chang, and C. D. Roberts, “Nucleon and Roper electromagnetic elastic and transition form factors,” *Phys. Rev.*, vol. C85, p. 025205, 2012.
- [27] L. Chang, C. D. Roberts, and P. C. Tandy, “Selected highlights from the study of mesons,” *Chin. J. Phys.*, vol. 49, pp. 955–1004, 2011.
- [28] L. Chang, I. C. Cloet, J. J. Cobos-Martinez, C. D. Roberts, S. M. Schmidt, and P. C. Tandy, “Imaging dynamical chiral symmetry breaking: pion wave function on the light front,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, no. 13, p. 132001, 2013.
- [29] L. Chang, I. C. Cloet, C. D. Roberts, S. M. Schmidt, and P. C. Tandy, “Pion electromagnetic form factor at spacelike momenta,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 111, no. 14, p. 141802, 2013.
- [30] K. Raya, L. Chang, A. Bashir, J. J. Cobos-Martinez, L. X. Gutiérrez-Guerrero, C. D. Roberts, and P. C. Tandy, “Structure of the neutral pion and its electromagnetic transition form factor,” 2015.
- [31] A. Bashir, L. Chang, I. C. Cloet, B. El-Bennich, Y.-X. Liu, *et al.*, “Collective perspective on advances in Dyson-Schwinger Equation QCD,” *Commun.Theor.Phys.*, vol. 58, pp. 79–134, 2012.
- [32] I. G. Aznauryan *et al.*, “Studies of Nucleon Resonance Structure in Exclusive Meson Electroproduction,” *Int. J. Mod. Phys.*, vol. E22, p. 1330015, 2013.
- [33] P. Boucaud, J. Leroy, A. Le Yaouanc, J. Micheli, O. Pene, *et al.*, “On the IR behaviour of the Landau-gauge ghost propagator,” *JHEP*, vol. 0806, p. 099, 2008.
- [34] A. Aguilar, D. Binosi, and J. Papavassiliou, “Gluon and ghost propagators in the Landau gauge: Deriving lattice results from Schwinger-Dyson equations,” *Phys.Rev.*, vol. D78, p. 025010, 2008.

- [35] M. Pennington and D. Wilson, “Are the Dressed Gluon and Ghost Propagators in the Landau Gauge presently determined in the confinement regime of QCD?,” *Phys.Rev.*, vol. D84, p. 119901, 2011.
- [36] A. Ayala, A. Bashir, D. Binosi, M. Cristoforetti, and J. Rodriguez-Quintero, “Quark flavour effects on gluon and ghost propagators,” *Phys.Rev.*, vol. D86, p. 074512, 2012.
- [37] A. Bashir, A. Raya, and J. Rodriguez-Quintero, “QCD: Restoration of Chiral Symmetry and Deconfinement for Large N_f ,” *Phys.Rev.*, vol. D88, p. 054003, 2013.
- [38] L. Chang and C. D. Roberts, “Sketching the Bethe-Salpeter kernel,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 103, p. 081601, 2009.
- [39] A. Kizilersu and M. Pennington, “Building the Full Fermion-Photon Vertex of QED by Imposing Multiplicative Renormalizability of the Schwinger-Dyson Equations for the Fermion and Photon Propagators,” *Phys.Rev.*, vol. D79, p. 125020, 2009.
- [40] A. Bashir, R. Bermudez, L. Chang, and C. Roberts, “Dynamical chiral symmetry breaking and the fermion–gauge-boson vertex,” *Phys.Rev.*, vol. C85, p. 045205, 2012.
- [41] J. C. Ward, “An Identity in Quantum Electrodynamics,” *Phys.Rev.*, vol. 78, p. 182, 1950.
- [42] E. S. Fradkin, “Concerning some general relations of quantum electrodynamics,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, vol. 29, pp. 258–261, 1955. [Sov. Phys. JETP2,361(1956)].
- [43] H. Green, “A Pre-renormalized quantum electrodynamics,” *Proc.Phys.Soc.*, vol. A66, pp. 873–880, 1953.
- [44] Y. Takahashi, “On the generalized Ward identity,” *Nuovo Cim.*, vol. 6, p. 371, 1957.
- [45] A. A. Slavnov, “Ward Identities in Gauge Theories,” *Theor. Math. Phys.*, vol. 10, pp. 99–107, 1972. [Teor. Mat. Fiz.10,153(1972)].
- [46] J. C. Taylor, “Ward Identities and Charge Renormalization of the Yang-Mills Field,” *Nucl. Phys.*, vol. B33, pp. 436–444, 1971.

- [47] Y. Takahashi, “CANONICAL QUANTIZATION AND GENERALIZED WARD RELATIONS: FOUNDATION OF NONPERTURBATIVE APPROACH,” in *Positano Symp.1985:0019*, p. 0019, 1985.
- [48] K.-I. Kondo, “Transverse Ward-Takahashi identity, anomaly and Schwinger-Dyson equation,” *Int. J. Mod. Phys.*, vol. A12, pp. 5651–5686, 1997.
- [49] H.-X. He, F. C. Khanna, and Y. Takahashi, “Transverse Ward-Takahashi identity for the fermion boson vertex in gauge theories,” *Phys. Lett.*, vol. B480, pp. 222–228, 2000.
- [50] H.-X. He, “Transverse vector vertex function and transverse Ward-Takahashi relations in QED,” *Commun. Theor. Phys.*, vol. 46, pp. 109–112, 2006.
- [51] H.-X. He, “Transverse Ward-Takahashi relation for the fermion-boson vertex function in four-dimensional Abelian gauge theory,” *Int. J. Mod. Phys.*, vol. A22, pp. 2119–2132, 2007.
- [52] L. Landau and I. Khalatnikov, “The gauge transformation of the Green function for charged particles,” *Sov.Phys.JETP*, vol. 2, p. 69, 1956.
- [53] K. Johnson and B. Zumino, “Gauge Dependence of the Wave-Function Renormalization Constant in Quantum Electrodynamics,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 3, pp. 351–352, 1959.
- [54] B. Zumino, “Gauge properties of propagators in quantum electrodynamics,” *J.Math.Phys.*, vol. 1, pp. 1–7, 1960.
- [55] M. J. Aslam, A. Bashir, and L. Gutierrez-Guerrero, “Local Gauge Transformation for the Quark Propagator in an SU(N) Gauge Theory,” 2015.
- [56] J. S. Ball and T.-W. Chiu, “Analytic Properties of the Vertex Function in Gauge Theories. 1.,” *Phys. Rev.*, vol. D22, p. 2542, 1980.
- [57] A. C. Aguilar and J. Papavassiliou, “Chiral symmetry breaking with lattice propagators,” *Phys. Rev.*, vol. D83, p. 014013, 2011.
- [58] C. J. Burden and C. D. Roberts, “Gauge covariance and the fermion - photon vertex in three-dimensional and four-dimensional, massless quantum electrodynamics,” *Phys. Rev.*, vol. D47, pp. 5581–5588, 1993.

- [59] A. Bashir, “Nonperturbative fermion propagator for the massless quenched QED3,” *Phys.Lett.*, vol. B491, pp. 280–284, 2000.
- [60] A. Bashir and A. Raya, “Landau-Khalatnikov-Fradkin transformations and the fermion propagator in quantum electrodynamics,” *Phys.Rev.*, vol. D66, p. 105005, 2002.
- [61] A. Bashir and R. Delbourgo, “The Nonperturbative propagator and vertex in massless quenched QED(d),” *J.Phys.*, vol. A37, pp. 6587–6598, 2004.
- [62] A. Bashir, L. Gutierrez-Guerrero, and Y. Concha-Sanchez, “Scalar quantum electrodynamics: Perturbation theory and beyond,” *AIP Conf.Proc.*, vol. 857, pp. 279–282, 2006.
- [63] A. Bashir and A. Raya, “Truncated Schwinger-Dyson equations and gauge covariance in QED3,” *Few Body Syst.*, vol. 41, pp. 185–199, 2007.
- [64] A. Bashir, A. Raya, and S. Sanchez-Madrigal, “Gauge Covariance Relations and the Fermion Propagator in Maxwell-Chern-Simons QED(3),” *J.Phys.*, vol. A41, p. 505401, 2008.
- [65] A. Bashir, A. Raya, S. Sanchez-Madrigal, and C. Roberts, “Gauge invariance of a critical number of flavours in QED3,” *Few Body Syst.*, vol. 46, pp. 229–237, 2009.
- [66] N. Ahmadinia, A. Bashir, and C. Schubert, “Multiphoton amplitudes and generalized Landau-Khalatnikov-Fradkin transformation in scalar QED,” *Phys. Rev.*, vol. D93, no. 4, p. 045023, 2016.
- [67] T. De Meerleer, D. Dudal, S. P. Sorella, P. Dall’Olio, and A. Bashir, “Fresh look at the Abelian and non-Abelian Landau-Khalatnikov-Fradkin transformations,” *Phys. Rev.*, vol. D97, no. 7, p. 074017, 2018.
- [68] C. Parker, “Introducing Transverse Vertices Into the Gauge Technique,” *J.Phys.*, vol. A17, p. 2873, 1984.
- [69] R. Delbourgo and R. Zhang, “Transverse Vertices in Electrodynamics and the Gauge Technique,” *J.Phys.*, vol. A17, p. 3593, 1984.
- [70] J. M. Cornwall, “Dynamical Mass Generation in Continuum QCD,” *Phys.Rev.*, vol. D26, p. 1453, 1982.

- [71] J. E. King, “The Transverse Vertex and Gauge Technique in Quantum Electrodynamics,” *Phys.Rev.*, vol. D27, p. 1821, 1983.
- [72] D. C. Curtis and M. R. Pennington, “Truncating the Schwinger-Dyson equations: How multiplicative renormalizability and the Ward identity restrict the three point vertex in QED,” *Phys. Rev.*, vol. D42, pp. 4165–4169, 1990.
- [73] D. Curtis and M. Pennington, “The Nonperturbative fermion propagator in massless quenched QED,” *Phys.Rev.*, vol. D44, pp. 536–539, 1991.
- [74] D. C. Curtis and M. R. Pennington, “Nonperturbative study of the fermion propagator in quenched QED in covariant gauges using a renormalizable truncation of the Schwinger- Dyson equation,” *Phys. Rev.*, vol. D48, pp. 4933–4939, 1993.
- [75] Z.-h. Dong, H. J. Munczek, and C. D. Roberts, “Gauge covariant fermion propagator in quenched, chirally symmetric quantum electrodynamics,” *Phys.Lett.*, vol. B333, pp. 536–544, 1994.
- [76] A. Bashir and M. Pennington, “Gauge independent chiral symmetry breaking in quenched QED,” *Phys.Rev.*, vol. D50, pp. 7679–7689, 1994.
- [77] A. Bashir and M. Pennington, “Constraint on the QED vertex from the mass anomalous dimension $\gamma(m) = 1$,” *Phys.Rev.*, vol. D53, pp. 4694–4697, 1996.
- [78] A. Bashir, A. Kizilersu, and M. Pennington, “The Nonperturbative three point vertex in massless quenched QED and perturbation theory constraints,” *Phys.Rev.*, vol. D57, pp. 1242–1249, 1998.
- [79] L. A. Fernandez-Rangel, A. Bashir, L. X. Gutierrez-Guerrero, and Y. Concha-Sanchez, “Constructing Scalar-Photon Three Point Vertex in Massless Quenched Scalar QED,” *Phys. Rev.*, vol. D93, no. 6, p. 065022, 2016.
- [80] A. Kizilersu, M. Reenders, and M. R. Pennington, “One loop QED vertex in any covariant gauge: Its complete analytic form,” *Phys. Rev.*, vol. D52, pp. 1242–1259, 1995.
- [81] A. I. Davydychev, P. Osland, and L. Saks, “Quark gluon vertex in arbitrary gauge and dimension,” *Phys. Rev.*, vol. D63, p. 014022, 2001.

- [82] R. Bermudez, L. Albino, L. X. Gutiérrez-Guerrero, M. E. Tejeda-Yeomans, and A. Bashir, “Quark-gluon Vertex: A Perturbation Theory Primer and Beyond,” *Phys. Rev.*, vol. D95, no. 3, p. 034041, 2017.
- [83] S.-X. Qin, L. Chang, Y.-X. Liu, C. D. Roberts, and S. M. Schmidt, “Practical corollaries of transverse Ward-Green-Takahashi identities,” *Phys. Lett.*, vol. B722, pp. 384–388, 2013.
- [84] S.-X. Qin, C. D. Roberts, and S. M. Schmidt, “Ward-Green-Takahashi identities and the axial-vector vertex,” *Phys. Lett.*, vol. B733, pp. 202–208, 2014.
- [85] P. Maris and C. D. Roberts, “Pi- and K meson Bethe-Salpeter amplitudes,” *Phys. Rev.*, vol. C56, pp. 3369–3383, 1997.
- [86] M. S. Bhagwat and P. C. Tandy, “Analysis of full-QCD and quenched-QCD lattice propagators,” *AIP Conf. Proc.*, vol. 842, pp. 225–227, 2006. [,225(2006)].
- [87] R. Williams, C. S. Fischer, and M. R. Pennington, “Anti- $q\bar{q}$ condensate for light quarks beyond the chiral limit,” *Phys. Lett.*, vol. B645, pp. 167–172, 2007.
- [88] P. O. Bowman, U. M. Heller, and A. G. Williams, “Lattice quark propagator with staggered quarks in Landau and Laplacian gauges,” *Phys. Rev.*, vol. D66, p. 014505, 2002.
- [89] M. B. Parappilly, P. O. Bowman, U. M. Heller, D. B. Leinweber, A. G. Williams, and J. B. Zhang, “Scaling behavior of quark propagator in full QCD,” *Phys. Rev.*, vol. D73, p. 054504, 2006.
- [90] S. Furui and H. Nakajima, “Unquenched Kogut-Susskind quark propagator in lattice Landau gauge QCD,” *Phys. Rev.*, vol. D73, p. 074503, 2006.
- [91] C. S. Fischer, “Infrared properties of QCD from Dyson-Schwinger equations,” *J. Phys.*, vol. G32, pp. R253–R291, 2006.
- [92] J. Skullerud and A. Kizilersu, “Quark gluon vertex from lattice QCD,” *JHEP*, vol. 09, p. 013, 2002.

- [93] J. I. Skullerud, P. O. Bowman, A. Kizilersu, D. B. Leinweber, and A. G. Williams, “Nonperturbative structure of the quark gluon vertex,” *JHEP*, vol. 04, p. 047, 2003.
- [94] J.-I. Skullerud, P. O. Bowman, A. Kizilersu, D. B. Leinweber, and A. G. Williams, “Quark-gluon vertex in arbitrary kinematics,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, vol. 141, pp. 244–249, 2005. [,244(2004)].
- [95] A. Kizilersu, D. B. Leinweber, J.-I. Skullerud, and A. G. Williams, “Quark-gluon vertex in general kinematics,” *Eur. Phys. J.*, vol. C50, pp. 871–875, 2007.
- [96] L. Chang, Y.-X. Liu, and C. D. Roberts, “Dressed-quark anomalous magnetic moments,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 106, p. 072001, 2011.
- [97] M. S. Bhagwat and P. C. Tandy, “Quark-gluon vertex model and lattice-QCD data,” *Phys. Rev.*, vol. D70, p. 094039, 2004.
- [98] M. S. Bhagwat, A. Holl, A. Krassnigg, C. D. Roberts, and P. C. Tandy, “Aspects and consequences of a dressed quark gluon vertex,” *Phys. Rev.*, vol. C70, p. 035205, 2004.
- [99] F. J. Llanes-Estrada, C. S. Fischer, and R. Alkofer, “Semiperturbative construction for the quark-gluon vertex,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, vol. 152, pp. 43–46, 2006.
- [100] R. Williams, “The quark-gluon vertex in Landau gauge bound-state studies,” *Eur. Phys. J.*, vol. A51, no. 5, p. 57, 2015.
- [101] E. Rojas, J. de Melo, B. El-Bennich, O. Oliveira, and T. Frederico, “On the Quark-Gluon Vertex and Quark-Ghost Kernel: combining Lattice Simulations with Dyson-Schwinger equations,” *JHEP*, vol. 1310, p. 193, 2013.
- [102] V. A. Miransky, “Dynamics of Spontaneous Chiral Symmetry Breaking and Continuum Limit in Quantum Electrodynamics,” *Nuovo Cim.*, vol. A90, pp. 149–170, 1985.
- [103] P. I. Fomin, V. P. Gusynin, V. A. Miransky, and Yu. A. Sitenko, “Dynamical Symmetry Breaking and Particle Mass Generation in Gauge Field Theories,” *Riv. Nuovo Cim.*, vol. 6N5, pp. 1–90, 1983.
- [104] P. I. Fomin and V. A. Miransky, “On the Dynamical Vacuum Rearrangement and the Problem of Fermion Mass Generation,” *Phys. Lett.*, vol. 64B, pp. 166–168, 1976.

- [105] P. I. Fomin, V. P. Gusynin, and V. A. Miransky, “Vacuum Instability of Massless Electrodynamics and the Gell-mann-low Eigenvalue Condition for the Bare Coupling Constant,” *Phys. Lett.*, vol. 78B, pp. 136–139, 1978.
- [106] T. Maskawa and H. Nakajima, “Spontaneous Symmetry Breaking in Vector-Gluon Model,” *Prog. Theor. Phys.*, vol. 52, pp. 1326–1354, 1974.
- [107] W. A. Bardeen, C. N. Leung, and S. T. Love, “The Dilaton and Chiral Symmetry Breaking,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 56, p. 1230, 1986.
- [108] C. N. Leung, S. T. Love, and W. A. Bardeen, “Spontaneous Symmetry Breaking in Scale Invariant Quantum Electrodynamics,” *Nucl. Phys.*, vol. B273, pp. 649–662, 1986.
- [109] F. Akram, A. Bashir, L. X. Gutiérrez-Guerrero, B. Masud, J. Rodríguez-Quintero, C. Calcano-Roldan, and M. E. Tejada-Yeomans, “Vacuum Polarization and Dynamical Chiral Symmetry Breaking: Phase Diagram of QED with Four-Fermion Contact Interaction,” *Phys. Rev.*, vol. D87, no. 1, p. 013011, 2013.
- [110] B. Holdom, “Raising Condensates Beyond the Ladder,” *Phys. Lett.*, vol. B213, pp. 365–369, 1988.
- [111] B. Holdom, “Continuum Limit of Quenched Theories,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 62, p. 997, 1989.
- [112] W. A. Bardeen, S. T. Love, and V. A. Miransky, “On the scaling properties of quenched QED,” *Phys. Rev.*, vol. D42, pp. 3514–3519, 1990.
- [113] J. H. Sloan, J. B. Kogut, M. Stone, H. W. Wyld, J. Bartholomew, S. H. Shenker, J. Shigemitsu, and D. K. Sinclair, “Chiral Symmetry Breaking in Lattice Electrodynamics,” *Nucl. Phys.*, vol. B230, pp. 222–240, 1984.
- [114] J. B. Kogut, E. Dagotto, and A. Kocic, “A New Phase of Quantum Electrodynamics: A Nonperturbative Fixed Point in Four-Dimensions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 60, p. 772, 1988.
- [115] S. P. Booth, R. D. Kenway, and B. J. Pendleton, “The Phase Diagram of the Gauge Invariant Nambu-Jona-Lasinio Model,” *Phys. Lett.*, vol. B228, pp. 115–120, 1989.

- [116] M. Gockeler, R. Horsley, E. Laermann, P. E. L. Rakow, G. Schierholz, R. Sommer, and U. J. Wiese, “QED: A Lattice Investigation of the Chiral Phase Transition and the Nature of the Continuum Limit,” *Nucl. Phys.*, vol. B334, pp. 527–558, 1990.
- [117] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, and M. Nio, “Tenth-Order QED Contribution to the Electron $g-2$ and an Improved Value of the Fine Structure Constant,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 109, p. 111807, 2012.
- [118] P. J. Mohr, B. N. Taylor, and D. B. Newell, “CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2006,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 80, pp. 633–730, 2008.
- [119] D. Hanneke, S. F. Hoogerheide, and G. Gabrielse, “Cavity Control of a Single-Electron Quantum Cyclotron: Measuring the Electron Magnetic Moment,” *Phys. Rev.*, vol. A83, p. 052122, 2011.
- [120] R. P. Feynman, “Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 20, pp. 367–387, 1948.
- [121] M. R. Pennington and R. Williams, “Checking the transverse Ward-Takahashi relation at one loop order in 4-dimensions,” *J. Phys.*, vol. G32, pp. 2219–2234, 2006.
- [122] H.-x. He and F. C. Khanna, “Transverse Ward-Takahashi relation for the fermion-boson vertex to one-loop order,” *Int. J. Mod. Phys.*, vol. A21, pp. 2541–2551, 2006.
- [123] K. Raya, A. Bashir, S. Hernández-Ortiz, A. Raya, and C. D. Roberts, “Multiple solutions for the fermion mass function in QED3,” *Phys. Rev.*, vol. D88, no. 9, p. 096003, 2013.
- [124] J. S. Ball and T.-W. Chiu, “Analytic Properties of the Vertex Function in Gauge Theories. 2.,” *Phys. Rev.*, vol. D22, p. 2550, 1980. [Erratum: *Phys. Rev.*D23,3085(1981)].