



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

T E S I S

***UNA REPRESENTACIÓN DE LA CURVATURA
PARA CONEXIONES GENERALIZADAS***

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

DOCTOR EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

HOMERO GEOVANI DÍAZ MARÍN

ASESORES:

JOSÉ ANTONIO ZAPATA RAMÍREZ

RAYMUNDO BAUTISTA RAMOS

Mayo 2013

Una representación de la curvatura para conexiones generalizadas

Homero G. Díaz Marín

A mis padres

Índice general

0. Introducción	1
1. Preliminares	7
1.1. Variedades lineales a pedazos	7
1.2. Conexiones generalizadas	19
1.3. Conexiones suaves en un haz principal	22
1.4. Apéndice: k -formas discretas en complejos simpliciales	29
1.5. Apéndice: Límites inyectivos y proyectivos	31
1.6. Apéndice: Medidas	32
2. Escalas y conexiones C-planas	35
2.1. Descomposiciones celulares y escalas	36
2.2. Conexiones C -planas	39
2.3. Engrosamiento y límite proyectivo de conexiones C -planas	45
2.4. Aproximaciones simpliciales	48
2.5. El grupo $\mathcal{P}_{C_i, \star}$ como grupo fundamental	49
3. Formas de curvatura generalizadas	57
3.1. 2-cocadenas cerradas de curvatura	57
3.2. Espacios afines y espacios vectoriales	60
3.3. Grupos de homología y escisiones	62
3.4. Evaluación de la curvatura y de la holonomía	64
3.5. El límite proyectivo	66
3.6. Curvatura y holonomía de conexiones suaves	71
4. Medidas gaussianas	75
4.1. Espacios vectoriales topológicos	75
4.2. Medidas gaussianas para formas de área	77
4.3. Medidas cilíndricas	82
4.4. Medidas gaussianas en espacios topológicos	84
4.5. Isometría de las normas $\ \cdot\ _{\mathcal{Q}}$ y L^2 para funciones lineales.	86
5. Evaluación de la curvatura	89
5.1. Curvatura en superficies simpliciales	89
5.2. Aproximación simplicial de superficies lineales a pedazos	91

5.3. Aproximación simplicial de trayectorias lineales a pedazos	99
5.4. Regularidad de las escalas respecto la métrica	103
5.5. Curvatura en superficies lineales a pedazos	109
5.6. Independencia de la representación	112
5.7. Apéndice: El soporte de la gaussiana en el caso $\dim M = 2$	118
6. Conclusiones	123
6.1. Resumen de resultados	123
6.2. Problemas no resueltos	124

Capítulo 0

Introducción

*Mathematicians really understand what mathematics is.
Theoretical physicists really understand what physics is...
...the deep intersection of these two understandings seems to me to be quite modest.*¹.

Los ingredientes básicos de esta tesis son:

1. Un haz principal (p, E, M) donde el fibrado es $p : E \rightarrow M$ y la fibra es el grupo de Lie $G = U(1)$.
2. Una sucesión \mathcal{E} de escalas, cada una de las cuales consiste de: a) un complejo simplicial $Sd|C_i|$, $i \in \mathbb{N}$; b) una estructura lineal a pedazos dada por homeomorfismos $h_i : Sd|C_i| \rightarrow M$. La colección de las estructuras lineales a pedazos en M son todas isomorfas; además hay una relación de "engrosamiento" que permite describir los simplejos de $Sd|C_i|$ a una escala $i \in \mathbb{N}$, como subcomplejos de $Sd|C_j|$ en cualquier escala más fina $j \geq i$.
3. Una métrica riemanniana g en M . La sucesión \mathcal{E} satisface cierta condición técnica de regularidad respecto a la métrica g .

A. Conexiones y curvatura en haces principales El estudio de la geometría de las conexiones en un haz principal (p, E, M) es una herramienta fundamental para la modelación de sistemas físicos clásicos. El espacio \mathcal{A}/\mathcal{G} consiste de las conexiones \mathcal{A} módulo la acción del grupo de gauge \mathcal{G} , las conexiones sólo son físicamente distinguibles módulo la acción de gauge. Los puntos de \mathcal{A}/\mathcal{G} hacen las veces de "configuraciones" de una teoría de gauge clásica.

En el caso abeliano, $G = U(1)$ que es el que nos ocupa, $\mathcal{A}/\mathcal{G} = \mathcal{A}/\mathcal{G}_*$, donde $\mathcal{G}_* \subset \mathcal{G}$ es el grupo de gauge que deja univariante la fibra sobre $\star \in M$.

Clásicamente, cada clase $[\varphi^A] \in \mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ en el caso abeliano, $G = U(1)$, se caracteriza completamente por dos tipos de parámetros:

La forma de curvatura: En el caso más general de un haz principal con fibra un grupo de Lie G , la curvatura de una conexión suave es una 2-forma valuada en E con valores en el álgebra de Lie. Más aún, dicha 2-forma está bien definida, módulo conjugación, en las órbitas del grupo de gauge \mathcal{G}_* sobre \mathcal{A} . Por lo tanto, la curvatura está bien definida, módulo

¹D. Sullivan, Prólogo de [dFdm]

conjugación en cada clase $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$. en el caso abeliano que es el que nos ocupa $G = U(1)$, la curvatura está determinada por una 2-forma cerrada real, F^A , en la base M . La clase de cohomología $[F^A]$ que coincide con la clase de Euler del haz $\mathbf{e} \in H^2(M, \mathbb{Z})$. La curvatura de una conexión, se emplea para construir diversas "observables" de modelos físicos.

La holonomía en representantes de la 1-homología libre: Es decir, la asignación $hol_{\varphi^A}(l) \in G$, para un representante l de cada clase que es generador libre de la 1-homología $H_1(M)$.

B. Conexiones generalizadas Para construir una teoría cuántica de campos de gauge, sería deseable poder definir una medida μ sobre $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$, para luego considerar "estados cuánticos" como vectores en el espacio de Hilbert $L^2(\mathcal{A}/\mathcal{G}_*, \mu)$. Sin embargo no es posible definir medidas no triviales en este espacio $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$. Para sortear esta dificultad la *cuantización de lazos*, ver [AL], propone considerar una extensión del espacio de conexiones. Una "configuración", φ , de dicha extensión se define como la colección de las holonomías o transportes paralelos, $\varphi(\gamma) \in G$, a lo largo de todos los lazos de holonomía $\gamma \in \mathcal{P}_*$. Los lazos de holonomía γ son las clases de equivalencia $[l]$ de trayectorias cerradas l en la variedad base M , donde dos trayectorias serán equivalentes si definen las mismas holonomías para todas las conexiones suaves. El espacio de configuraciones que se obtiene se llama espacio de "conexiones generalizadas", consiste del conjunto de todos homomorfismos algebraicos del grupo \mathcal{P}_* en el grupo G .

$$\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_*} = \text{hom}(\mathcal{P}_*, G).$$

En lo sucesivo llamaremos a los homomorfismos algebraicos mencionados, conexiones generalizadas u holonomías.

La ventaja de extender $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ al espacio $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_*}$ es que: a) $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ está contenido densamente en $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_*}$ mediante una aplicación de holonomía,

$$hol : \mathcal{A}/\mathcal{G}_* \rightarrow \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_*},$$

donde $hol(\varphi^A)(\gamma) := hol_{\varphi^A}(l)$, $\gamma = [l]$. Adicionalmente $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_*}$ contiene otros homomorfismos algebraicos que varían discontinuamente al perturbar trayectorias en la variedad base M . b) $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_*}$ es compacto. c) Admite medidas no triviales, por ejemplo una medida μ_{Haar} , inducida por la medida de Haar en G . Esto hace posible considerar el espacio de Hilbert $L^2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_*}, \mu_{Haar})$.

El espacio $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_*}$ se puede considerar como un límite proyectivo de espacios de holonomías, $\mathcal{A}/\mathcal{G}_{*\Gamma}$, de lazos contenidos en gráficas encajadas $\Gamma \subset M$. Si bien una conexión en $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ puede reconstruirse a partir de sus holonomías, esto no ocurre cuando se consideran sólo las holonomías de lazos contenidos en Γ . En $\mathcal{A}/\mathcal{G}_{*\Gamma}$ se puede almacenar la información sobre las holonomías $hol_{\varphi^A}(\gamma) \in U(1)$, de los lazos γ que caben en Γ , pero la curvatura integrada en superficies, $\int_U F^A \in \mathbb{R}$, con frontera $\partial U \subset \Gamma$ sólo se conoce módulo 2π . Esta incapacidad de determinar la magnitud del campo se hereda hasta $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_*}$, esto representa una desventaja para las conexiones generalizadas.

C. Formas de curvatura generalizadas Nuestra propuesta, siguiendo [MMZ], [DZ], considera una sucesión de escalas \mathcal{E} . Cada escala etiquetada con $i \in \mathbb{N}$ tiene asignada un complejo simplicial $Sd|C_i|$ y un homeomorfismo $h_i : Sd|C_i| \rightarrow M$. Además para escalas más finas, $j \geq i$, $h_j : Sd|C_j| \rightarrow M$ es una subtriangulación rectilínea con inclusión afín $h_i^{-1} \circ h_j : Sd|C_j| \rightarrow Sd|C_i|$.

A cada escala i describimos parcialmente la información correspondiente a la 2–forma de curvatura de conexiones módulo gauge mediante:

La forma discreta de curvatura: Es decir mediante espacios afines Ω_i de las 2–cocadenas cerradas ω_i en el complejo simplicial $Sd|C_i|$, con clase de cohomología $h_i^* \mathbf{e} \in H^2(Sd|C_i|, \mathbb{Z})$.

La ventaja es que están bien definidas las evaluaciones de $\omega_i \in \Omega_i$, en superficies simpliciales, $U \subset M$, contenidas en el 2–esqueleto $h_i(Sd|C_i|^{(2)})$. Para $j \geq i$ las inclusiones de 2–esqueletos $h_j(Sd|C_i|^{(2)}) \subset h_i(Sd|C_j|^{(2)})$ inducen aplicaciones de "engrosamiento"

$$\pi_{ji} : \Omega_j \rightarrow \Omega_i,$$

las cuales permiten definir 2–cocadenas a escala i a partir de 2–cocadenas ω_j a escala más fina $j \geq i$. En el límite proyectivo $\underline{\Omega} = \varprojlim \Omega_i$, se puede definir

$$\text{Curv} : \mathcal{A}/\mathcal{G}_* \rightarrow \underline{\Omega}$$

tal que a dos formas de curvatura distintas $F^A \neq F^{A'}$ le asigna secuencias de 2–cocadenas distintas $\text{Curv}(F^A) \neq \text{Curv}(F^{A'})$. Por ello podemos considerar a $\underline{\Omega}$ como un espacio de 2–formas de curvatura generalizadas.

D. Evaluación de la curvatura El espacio afín $\underline{\Omega}$ tiene además la cualidad de admitir medidas positivas. De hecho, al considerar una métrica riemanniana g en M podemos definir medidas gaussianas ρ . Tanto las leyes de la física como los invariantes de la geometría en el contexto de las conexiones de un haz principal, se construyen a partir la evaluación de las 2–formas de curvatura, $\int_U F^A$. Con esta intención, para cada superficie lineal a pedazos $U \subset M$, podremos definir una función afín F_U definida casi dondequiera en $\underline{\Omega}$, para la cual

$$F_U(\text{Curv}(F^A)) = \int_U F^A.$$

La función afín, $F_U \in L^2(\underline{\Omega}, \rho)$ es la observable asociada a la evaluación de la curvatura en la superficie U . La representación de esta observable requiere una elección de escalas. Sin embargo, la representación no depende de la elección de escalas, sino de la clase de isomorfismo de la estructura lineal a pedazos. La construcción sólo es posible con la condición técnica regularidad respecto a la métrica riemanniana.

E. Nuestra aportación Primero describiremos el contexto en el que se insertan nuestros resultados. En una primera instancia, se introdujeron observables importantes en las teorías cuánticas de campos de gauge en la red, correspondientes a los lazos de Wilson, [Wi]. Estas observables emplean el hecho de que las holonomías describen completamente las conexiones, ver [Ba2]. Posteriormente, en la cuantización de lazos, Ashtekar y Lewandowski, en [AL], introdujeron una estructura de límite proyectivo en continuo, correspondiente a un espacio de conexiones generalizadas $\overline{\mathcal{A}}/\overline{\mathcal{G}}_*$. Por otro lado, un elemento central de la teoría cuántica de campos es el proceso de renormalización de Wilson [Wi], pero este proceso se formula en términos de escalas de medición que se definen usando un fondo métrico. La estructura del límite continuo que resulta cuando se considera el límite de la escala de medición más fina posible, es también la de un

límite proyectivo. Siguiendo esta línea de pensamiento, Zapata et. al. [MMZ], [MOWZ], emplea una noción de escala asociada a descomposiciones celulares C_i de poliedros, para luego describir holonomías $\text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, G)$ donde $\mathcal{P}_{C_i, \star}$ es un grupo de lazos en 1-esqueletos $Sd|C_i|^{(1)}$. El correspondiente límite proyectivo $\varprojlim \mathcal{A}/\mathcal{G}_\star$, permite recuperar valores esperados de la teoría cuántica de lazos. En todo este desarrollo el ingrediente esencial de la descripción de una conexión a una escala fija, es la holonomía, pero no es evidente la descripción de la evaluación de la curvatura de una superficie a partir de las holonomías.

En este punto entra en escena nuestra aportación, la cual se puede desglosar en las siguientes propuestas:

- Nosotros adoptamos la noción de escalas \mathcal{E} de [MMZ], para proponer el espacio de 2-cadenas cerradas de clase de cohomología \mathfrak{e} , en el complejo simplicial $Sd|C_i|$,

$$\Omega_i.$$

De esta manera a cada escala consideramos las evaluaciones de curvatura de ω_i en superficies simpliciales $U \subset M$ de $Sd|C_i|$, en lugar de la evaluación de holonomías, como se ha venido haciendo desde los lazos de Wilson. Aunque es bien conocido el empleo numérico de formas discretas, creemos que su uso explícito en el contexto de la cuantización de lazos no se ha explotado en la literatura.

- La consideración de este espacio Ω_i es pertinente porque a diferencia de las propuestas previas, es posible reconstruir el haz principal (p, E, M) a partir de las evaluaciones de la curvatura. Cosa que no ocurre con la evaluación de la holonomía, ver [DZ].
- A partir de la inclusión de 2-esqueletos $h_i(Sd|C_i|^{(2)}) \subset h_j(Sd|C_j|^{(2)})$, proponemos una aplicación de "engrosamiento" de escalas

$$\pi_{ji} : \Omega_j \rightarrow \Omega_i.$$

El engrosamiento permite construir 2-cadenas cerradas en Ω_i a partir de 2-cadenas cerradas $\omega_j \in \Omega_j$ a escala más fina $j \geq i$.

- Describimos condiciones generales para construir medidas ρ en el espacio de medida

$$\underline{\Omega} := \varprojlim \Omega_i.$$

Ejemplificamos la construcción de medidas considerando medidas gaussianas ρ asociadas a métricas riemannianas \mathfrak{g} en M .

- Exhibimos cómo la evaluación de la curvatura en una superficie $U \subset M$ es una observable en este contexto ya que queda descrita como una función afín

$$F_U = \lim_{i \rightarrow \infty} F_{U_i},$$

definida casi dondequiera en $\underline{\Omega}$. Esta función se obtiene como el límite L^2 de evaluaciones F_{U_i} en aproximaciones simpliciales U_i de la superficie U a escalas cada vez más finas, $i \rightarrow \infty$. La convergencia queda garantizada por la condición de regularidad de las escalas respecto a la métrica riemanniana \mathfrak{g} .

- La inclusión de 1–esqueletos $h_i(Sd|C_i|^{(1)}) \subset h_j(Sd|C_j|^{(1)})$ permite definir la inclusión de $\mathcal{P}_{C_i, \star}$, los lazos en el primero de ellos, dentro de $\mathcal{P}_{C_j, \star}$, los lazos en el segundo de ellos, es decir permiten obtener el ”engrosamiento” de holonomías

$$\pi_{ji} : \text{hom}(\mathcal{P}_{C_j, \star}, G) \rightarrow \text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, G)$$

descrito en [MMZ]. Con ello podemos dar una relación explícita entre evaluaciones de la curvatura Ω_i y holonomías $\text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, G)$. Así podemos relacionar nuestro límite proyectivo $\underline{\Omega}$ con el límite proyectivo $\overleftarrow{\mathcal{A}/\mathcal{G}_\star}$ de [MMZ], para posteriormente describir una relación con el espacio de conexiones generalizadas, $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_\star}$, de la cuantización de lazos. Así podremos describir valores esperados en la teoría cuántica de lazos a partir de nuestra teoría, este procedimiento no lo incluimos en este trabajo.

- Cuando es válida la condición técnica de regularidad respecto a la métrica riemanniana g , entonces probamos un resultado de independencia. A saber, la observable asociada a la evaluación de la curvatura en una superficie no depende de la sucesión de escalas adoptada sino exclusivamente de la clase de isomorfismo de la estructura lineal a pedazos considerada sobre M .

La exposición resumida de esta tesis aparece en [DZ2]. Algunos resultados preliminares como la descripción del espacio Ω_i ya aparece publicada en [DZ].

F. Descripción de capítulos Los capítulo 1 y 2 no contienen resultados originales ya que consisten en una descripción concisa del lenguaje básico que empleamos en los demás capítulos. Los capítulos 3, 4 y 5, contienen resultados originales y la aportación descrita en el párrafo anterior.

En el capítulo 1, describimos el lenguaje básico que empleamos a lo largo de la tesis. No contiene resultados originales. Principalmente nos ocupamos en definir poliedros y estructuras lineales a pedazos en una variedad, recordamos algunos conceptos de conexiones suaves en un haz principal y nos encargamos de definir el espacio de conexiones generalizadas empleado en la cuantización a lazos. Asimismo recordamos las principales propiedades del espacio de conexiones generalizadas $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_\star}$. Damos algunas definiciones y terminología de teoría de la medida y también de formas discretas de un complejo simplicial.

En el capítulo 2, tampoco hay resultados originales. Definimos en qué consiste una elección \mathcal{E} de escalas, según 2.4. Siguiendo la sección 2.2 de [MMZ], describimos para cada escala las conexiones ” C_i –planas”, ver definición 2.13.

Nuestra aportación en este contexto es describir el espacio de estas conexiones, $\text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, G)$, mostrando que $\mathcal{P}_{C_i, \star}$ es isomorfo al grupo fundamental del 1–esqueleto $h_i(Sd|C_i|^{(1)})$, ver teorema 2.24. Debido a la inclusión de 1–esqueletos $h_i(Sd|C_i|^{(1)}) \subset h_j(Sd|C_j|^{(1)})$, se tienen inclusiones de $\mathcal{P}_{C_i, \star}$ en $\mathcal{P}_{C_j, \star}$ y por tanto aplicaciones de ”engrosamiento” de holonomías $\pi_{ji} : \text{hom}(\mathcal{P}_{C_j, \star}, G) \rightarrow \text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, G)$, ver (2.12). Ello brinda la estructura necesaria para definir el límite proyectivo, $\overleftarrow{\mathcal{A}/\mathcal{G}_\star}$, ver (2.13). El límite proyectivo de las conexiones C –planas se juxtapone al espacio de conexiones generalizadas, $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_\star}$. El lema 2.20 exhibe las relaciones entre estos espacios, en particular existe cierta aplicación $\beta : \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_\star} \rightarrow \overleftarrow{\mathcal{A}/\mathcal{G}_\star}$, ver el diagrama conmutativo (2.14).

En el capítulo 3, comenzamos a escribir resultados originales. Describimos a detalle los espacios de configuraciones Ω_i , los cuales consisten en todos los posibles flujos de curvatura evaluados en superficies simpliciales, ver (3.1). En el espacio afín Ω_i están bien definidas las observables asociadas a flujos de curvatura en superficies simpliciales. Estas observables están dadas por funciones afines $F_{\sigma_i^k}$, $k = 1, \dots, \dim \Omega_i$, ver su definición en (4.3).

Por otro lado, las aplicaciones de engrosamiento

$$\pi_{ji} : \Omega_j \rightarrow \Omega_i,$$

ver (2.12), consisten en considerar flujos a través de superficies simpliciales a escala fina j , como flujos a través de superficies simpliciales a escala más gruesa $i \leq j$. De esta manera podemos considerar el límite proyectivo, $\underline{\Omega}$. $\underline{\Omega}$ es un espacio afín provisto de una aplicación en el continuo de conexiones C -planas $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$, ver teoremas 3.11, 3.14.

En el capítulo 4 el resultado principal es el teorema 4.13, el cual afirma que es posible construir medidas gaussianas ρ , a partir de una forma de área en M asociada a una métrica riemanniana g .

En el capítulo 5 nos ocupamos de definir funciones afines F_U , definidas casi dondequiera en $\underline{\Omega}$. Estas funciones extienden la evaluación de la curvatura F^A en una superficie lineal a pedazos $\bar{U} \subset M$, ver definición 5.1.

Un primer paso es describir a detalle la aproximación simplicial U_i de una superficie lineal a pedazos U en cada escala $i \in \mathbb{N}$, ver definición 5.9. La evaluación $F_{U_i} : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}$ en las superficies simpliciales se extiende a una función afín $F_{U,i}$ en $\underline{\Omega}$. El segundo paso es tomar el límite

$$F_U = \lim_{i \rightarrow \infty} F_{U,i}$$

en $L^2(\underline{\Omega}, \rho)$, ver lema 5.19. En este punto es de importancia crucial la condición técnica de regularidad de las escalas respecto a la métrica, referida en el punto 3 al inicio de esta introducción. El teorema 5.22 afirma que tal representación del operador multiplicativo \widehat{F}_U , (5.19), es posible en el espacio de $L^2(\underline{\Omega}, \rho)$. Por su parte el teorema 5.26 afirma que la representación es independiente de la elección de escalas \mathcal{E} , siempre y cuando la sucesión de escalas \mathcal{E} sea regular respecto a la métrica. En el caso particular $\dim M = 2$, el soporte de ρ está contenido en un espacio de Banach $\Omega_{va} \subset \underline{\Omega}$, ver teorema 5.28.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo es un compendio de nociones generales y los conceptos básicos que emplearemos a lo largo de este trabajo. Ninguno de los resultados presentados en este capítulo son originales.

Siguiendo las ideas de [AL] definiremos las conexiones generalizadas en la categoría lineal a pedazos, para ello procedemos de acuerdo a los siguientes puntos:

1. Definiremos una estructura lineal a pedazos compatible con la estructura suave en una variedad M .
2. Definiremos la relación de equivalencia módulo retrazo y reparametrización de trayectorias cerradas basadas en un punto fijo $\star \in M$, lineales a pedazos. El conjunto de dichas clases de equivalencia constituirá el grupo de lazos de holonomía lineales a pedazos

$$\mathcal{P}_\star.$$

3. Recordaremos las definiciones y propiedades básicas de conexiones \mathcal{A} en un haz principal (E, p, M) con fibra difeomorfa a un grupo de Lie compacto G y base M . Recordaremos las definiciones de grupo de gauge \mathcal{G} , el grupo de gauge \mathcal{G}_\star que fija la fibra $p^{-1}(\star)$, el cociente de las conexiones módulo gauge $\mathcal{A}/\mathcal{G}_\star$, así como la holonomía y la curvatura asociadas a una conexión.
4. Definiremos una conexión generalizada como una colección de holonomías para cada clase de una trayectoria lineal a pedazos, $\gamma \in \mathcal{P}_\star$. Es decir, el espacio de conexiones generalizadas, será el espacio

$$\text{hom}(\mathcal{P}_\star, G)$$

con una topología (de Tychonoff). $\mathcal{A}/\mathcal{G}_\star$ está contenida en $\text{hom}(\mathcal{P}_\star, G)$.

Finalizaremos este capítulo con una serie de apéndices para completar el lenguaje básico de teoría de la medida y formas discretas que requeriremos a lo largo de nuestro trabajo.

1.1. Variedades lineales a pedazos

Recordamos tres conceptos básicos: complejo simplicial, realización geométrica y poliedro, ver por ejemplo [Ha], para nociones de complejos simpliciales. Ver [BY] para nociones de polítopos, y [Li], [Rs] sección 1.6, para más detalles sobre estructuras lineales a pedazos.

Un **complejo simplicial** (abstracto) K es un conjunto cuyos elementos se llaman vértices provisto de una colección especial de subconjuntos, llamados *simplices* o *simplejos*. Los vértices son simplejos y cualquier subconjunto de un simplejo es un simplejo.

Un simplejo que consta de $n + 1$ vértices $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ es un simplejo de dimensión n . La dimensión del complejo simplicial es la dimensión del simplejo dentro del complejo simplicial que tiene dimensión máxima. Supondremos que nuestros complejos simpliciales son de dimensión finita. Una **aplicación simplicial** es una función $f : K_1 \rightarrow K_2$, tal que para cada simplejo σ de K_1 , la imagen $f(\sigma)$, es un simplejo de K_2 .

Consideraremos complejos simpliciales *localmente finitos*, es decir, aquellos cuyos vértices pertenecen a un número finito de simplejos. El d -*esqueleto* de un complejo simplicial K , consta de la unión de los simplejos de dimensión menor o igual a d y se denota $K^{(d)}$.

Dado un simplejo $\sigma \subset K$, la **realización geométrica** de dicho simplejo es el conjunto de funciones

$$|K_\sigma| = \left\{ s : K \rightarrow [0, 1] \mid \sum_{x \in K} s(x) = 1, \text{ sop } s \subset \sigma \right\}$$

donde $\text{sop } s$ es el soporte de la función. Consideramos la unión disjunta sobre los simplejos $\sqcup_\sigma |K_\sigma|$; dados $s, s' \in \sqcup_\sigma |K_\sigma|$ decimos que $s \in |K_\sigma|$ es equivalente a $s' \in |K_{\sigma'}|$, $s \sim_K s'$ si son la misma función $s = s' : K \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos la **realización geométrica del complejo simplicial** K como

$$|K| := \bigsqcup_\sigma |K_\sigma| / \sim_K.$$

Podemos considerar en cada $|K_\sigma|$ la topología dada por la distancia

$$\text{dist}_\sigma(s_1, s_2) := \sqrt{\sum_{x \in \sigma} (s_1(x) - s_2(x))^2}. \quad (1.1)$$

Consideramos la unión disjunta $\sqcup_\sigma |K_\sigma|$ con la topología inducida. Entonces tenemos una topología en el cociente $|K|$.

Definimos el *simplejo estándar* de dimensión k , como

$$\Delta^k := \{(t_0, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \sum_{i=0}^k t_i = 1, t_i \geq 0\} \subset \mathbb{R}^{k+1}.$$

Para un simplejo de dimensión k , $\sigma = \{x_0, \dots, x_k\}$, podemos considerar funciones (no únicas) de la forma,

$$\phi_\sigma : |K_\sigma| \rightarrow \Delta^k$$

dadas por

$$\phi_\sigma(s) := (s(x_0), \dots, s(x_k)).$$

La cual es una aplicación biyectiva; además ϕ_σ es homeomorfismo pues $\text{dist}_\sigma(s_1, s_2)$ coincide con la distancia euclidiana entre $\phi_\sigma(s_1)$, y $\phi_\sigma(s_2)$ en \mathbb{R}^{k+1} . Decimos que $\phi_\sigma(s)$ es la **coordenada baricéntrica** de s .

La **célula** de dimensión $k > 0$ asociada a un simplejo $\sigma \subset K$, $\dim \sigma = k$, es un subconjunto de $|K_\sigma|$, definido por

$$\{s \in |K_\sigma| \mid s(x) \neq 0 \forall x \in \sigma\} \subset |K_\sigma|,$$

Definiremos las células de dimensión 0 como los vértices. Se sigue inmediatamente que la cerradura de una célula es el simplejo $|K_\sigma|$ que la contiene.

Consideremos una aplicación simplicial $f : K_1 \rightarrow K_2$, es decir, tal que la imagen de un simplejo $\sigma = \{x_0, \dots, x_k\} \subset K_1$ es otro simplejo $\sigma' = \{y_0, \dots, y_l\} \subset K_2$. Entonces existe una aplicación entre las dos realizaciones geométricas, $|K_1|$ y $|K_2|$, $|f| : |K_1| \rightarrow |K_2|$, dada por

$$(|f|(s))(y_a) = \sum_{x_b \in f^{-1}(y)} s(x_b), \text{ para cada } s \in |K_\sigma|, \text{ y para } y_a \in f(\sigma).$$

Diremos que $|f|$ es una **aplicación simplicial entre las realizaciones geométricas**. Usando coordenadas baricéntricas, se tiene que la aplicación $\phi_{\sigma'} \circ |f| \circ (\phi_\sigma)^{-1} : \Delta^k \rightarrow \Delta^l$,

$$\phi_{\sigma'} \circ |f| \circ (\phi_\sigma)^{-1}(t_0, \dots, t_k) := \left(\sum_{x_{i_0} \in f^{-1}(y_0)} t_{i_0}, \dots, \sum_{x_{i_k} \in f^{-1}(y_k)} t_{i_k} \right),$$

es una aplicación afín por tanto es una aplicación continua. Dos realizaciones geométricas son *isomorfas* si existe una aplicación biyectiva simplicial con inversa simplicial.

Dada una realización geométrica $|K|$, la **subdivisión baricéntrica de $|K|$** , es la realización geométrica $Sd|K|$ de otro complejo simplicial SdK . El complejo simplicial, SdK tiene como vértices los simplejos de K , los simplejos de SdK son familias de simplejos de K , $\{\sigma_0, \dots, \sigma_r\}$, que satisfacen $\sigma_0 \subset \dots \subset \sigma_r$.

Un **polígono convexo** τ de dimensión k , es la intersección acotada de interior no vacío

$$\tau = \bigcap_{i=1}^n L_i^+ \subset \mathbb{R}^k$$

de un número finito de semiespacios correspondientes a hiperplanos afines $L_i \subset \mathbb{R}^k$.

Una **cara** $\xi \subset \tau$ del polígono τ , es la intersección con semiplanos

$$L_{i_1} \cap \dots \cap L_{i_s} \cap \tau.$$

Con esta definición, la intersección $\xi_1 \cap \xi_2 \subset \tau$ de dos caras $\xi_1, \xi_2 \subset \tau$ es otra cara. Notemos que los vértices corresponden a intersecciones que constan de un sólo punto $\{x\} = L_{i_1} \cap \dots \cap L_{i_s}$. Una cara de un polígono está contenida en el espacio afín $L_{i_1} \cap \dots \cap L_{i_s}$ y mediante una traslación corresponde a un polígono en un subespacio vectorial de \mathbb{R}^k .

Consideremos una unión disjunta de polígonos, $\sqcup_{i \in I} \tau_i$, sea

$$\mathcal{F} = \{\xi_i \mid i \in J\}$$

el conjunto formado por todos los polígonos τ_i con $i \in I$, y por todas las caras $\xi \subset \tau_i$. Consideremos una relación de equivalencia

$$\mathcal{R}_P \subset \mathcal{F} \times \mathcal{F}$$

que consista de parejas (ξ_i, ξ_j) , tales que:

1. $\dim \xi_i = \dim \xi_j$.
2. La restricción $\mathcal{R}_P \cap (\mathcal{F}_{\xi_i} \cap \mathcal{F}_{\xi_j})$ define una biyección del conjunto \mathcal{F}_{ξ_i} de las caras de ξ_i en el conjunto \mathcal{F}_{ξ_j} de las caras de ξ_j

3. Si ξ_i, ξ_j son dos caras de un mismo polígono τ_i y si están relacionadas, $(\xi_i, \xi_j) \in \mathcal{R}_P$, entonces ambas caras coinciden, es decir, $\xi_i = \xi_j$.

Una relación de equivalencia, \mathcal{R}_P , con las características mencionadas, permite definir "pegados" de las caras de la siguiente manera: Supongamos que para cada $(\xi_i, \xi_j) \in \mathcal{R}_P$, existen funciones afines biyectivas $f_{\xi_i, \xi_j} : \xi_i \rightarrow \xi_j$, que satisfacen las siguientes condiciones:

1. $f_{\xi_i, \xi_i} = \text{id}_{\xi_i}$.
2. $f_{\xi_j, \xi_i} = f_{\xi_i, \xi_j}^{-1}$.
3. Para cada $(\xi_i, \xi_j) \in \mathcal{R}_P$, y para cada pareja de caras $\xi'_i \subset \xi_i$, $\xi'_j \subset \xi_j$, que se corresponden de tal manera que $(\xi'_i, \xi'_j) \in \mathcal{R}_P$, se tiene que $f_{\xi'_i, \xi'_j}$ es restricción de f_{ξ_i, ξ_j} en ξ'_i .
4. Para $(\xi_i, \xi_j), (\xi_j, \xi_l) \in \mathcal{R}_P$, se tiene $f_{\xi_j, \xi_l} \circ f_{\xi_i, \xi_j} = f_{\xi_i, \xi_l}$, donde el dominio de las funciones consideradas es $f_{\xi_i, \xi_j}^{-1}(\xi_j)$.

Definimos $x \sim_P y$ para $x, y \in \sqcup_{i \in I} \tau_i$, si existe $(\xi_i, \xi_j) \in \mathcal{R}_P$ y $f_{\xi_i, \xi_j} : \xi_i \rightarrow \xi_j$, tales que $f_{\xi_i, \xi_j}(x) = y$.

La relación \sim_P es una relación de equivalencia. La reflexividad se sigue de la condición 1 y la simetría de la condición 2. Para la transitividad consideremos $x \sim_P y$ con $x \in \xi_i$, $y \in \xi_j$ y $(\xi_i, \xi_j) \in \mathcal{R}_P$, y $y \sim_P z$ con $y \in \xi_s$, $z \in \xi_t$ y $(\xi_s, \xi_t) \in \mathcal{R}_P$. Entonces existe una cara $\xi'_i \subset \xi_i$ que se corresponde biyectivamente con una cara $\xi = \xi_s \cap \xi_j \subset \xi_j$, con $(\xi'_i, \xi) \in \mathcal{R}_P$. También existe una cara $\xi'_t \subset \xi_t$ que se corresponde biyectivamente con la cara $\xi \subset \xi_s$, con $(\xi, \xi'_t) \in \mathcal{R}_P$. Como $x \sim_P y$, se tiene

$$f_{\xi, \xi'_t} \circ f_{\xi'_i, \xi}(x) = f_{\xi_s, \xi_t} |_{\xi} \left(f_{\xi_i, \xi_j} |_{\xi'_i}(x) \right) = f_{\xi_s, \xi_t} |_{\xi}(y) = z.$$

Por lo tanto

$$f_{\xi'_i, \xi'_t}(x) = z,$$

es decir, $x \sim_P z$.

Definición 1.1. Consideramos para cada polígono τ_i la topología heredada del espacio afín \mathbb{R}^k que lo contiene. Un **poliedro** será el espacio cociente

$$P = \bigsqcup_{i \in I} \tau_i / \sim_P .$$

Denotamos la función de clase de equivalencia como:

$$\eta_P : \sqcup_i \tau_i \rightarrow P.$$

Notemos que no habrá dos caras de un mismo polígono identificadas en el poliedro P . La dimensión del poliedro es la dimensión máxima de un polígono de la cubierta. Supondremos también que los poliedros son localmente finitos, es decir, solo un número finito de polígonos pasa por cada punto. Todo poliedro compacto consta de un número finito de polígonos.

Consideremos una realización geométrica de un complejo simplicial $|K|$, y un homeomorfismo, $f : |K| \rightarrow P$, tal que la imagen de un simplejo $|K_\sigma|$ está contenida en la imagen de un polígono

$\eta_P(\tau) \subset P$, donde $\eta_P : \sqcup_{i \in I} \tau_i \rightarrow P$ es el paso al cociente. Además supongamos que para una pareja (σ, τ) existe una aplicación afín $f_{(\sigma, \tau)} : \Delta^k \rightarrow \tau$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} |K_\sigma| & \xrightarrow{f} & P \\ \phi_\sigma \downarrow & & \uparrow \eta_P \\ \Delta^k & \xrightarrow{f_{(\sigma, \tau)}} & \tau \end{array}$$

cuando tomamos coordenadas baricéntricas $\phi_\sigma : |K_\sigma| \rightarrow \Delta^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$. Diremos entonces que la pareja $(|K|, f)$ del complejo simplicial $|K|$ y el homeomorfismo $f : |K| \rightarrow P$ es una **triangulación rectilínea** de un poliedro P . Si el contexto es claro diremos simplemente que $|K|$ es una subtriangulación rectilínea del poliedro P .

Notemos que si $|K_{\sigma'}| \subset |K|$ es otro simplejo y τ' otro polígono tales que $|K_\sigma| \cap |K_{\sigma'}| \neq \emptyset$ tiene imagen contenida en $\tau \cap \tau' \neq \emptyset$, entonces conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{k'} & \xrightarrow{f_{(\sigma', \tau')}} & \tau' \\ \phi_{\sigma'}^{-1} \searrow & & \nearrow \eta_P^{-1} \\ & |K_\sigma| \cap |K_{\sigma'}| \xrightarrow{f} \eta_P(\tau \cap \tau') & \\ \phi_\sigma \swarrow & & \nwarrow \eta_P \\ \Delta^k & \xrightarrow{f_{(\sigma, \tau)}} & \tau \end{array} \quad \cdot$$

Como $f_{(\sigma, \tau)}, f_{(\tau, \tau')}$ son afines, entonces $f_{(\sigma', \tau')} = f_{(\tau, \tau')} \circ f_{(\sigma, \tau)} \circ \phi_\sigma \circ \phi_{\sigma'}^{-1}$, también es afín.

Recíprocamente, supongamos que para cada simplejo $|K_\sigma|$ de una triangulación $|K|$ existe un polígono τ de un poliedro P y una función afín $f_{(\sigma, \tau)} : |K_\sigma| \rightarrow \tau$. Supongamos que si $|K_\sigma| \cap |K_{\sigma'}| \neq \emptyset$, entonces $\eta_P(\tau) \cap \eta_P(\tau')$ y además $f_{(\sigma', \tau')} = f_{(\tau, \tau')} \circ f_{(\sigma, \tau)} \circ \phi_\sigma \circ \phi_{\sigma'}^{-1}$. Entonces está bien definida una función $f : |K| \rightarrow P$ y además esta función es una triangulación rectilínea del poliedro P .

Proposición 1.2. *Todo poliedro tiene al menos una triangulación rectilínea.*

Demostración. Consideremos el poliedro $P = \sqcup_{i \in I} \tau_i / \sim_P$, sea

$$\eta : \sqcup_{i \in I} \tau_i \rightarrow P$$

la proyección en clases de equivalencia. Definamos la familia de polítopos \mathcal{J} formado por los τ_i , $i \in I$ y todas sus caras $\xi \in \tau_i$. Para cada polígono $\xi \in \mathcal{J}$, $\dim \xi > 0$ consideremos un punto x_ξ al interior de ξ de tal manera que $x_\xi \sim_P x_{\xi'}$ si $(\xi, \xi') \in \mathcal{R}_P$. Si ξ es un vértice definimos $x_\xi = \xi$. Diremos que x_ξ es un **baricentro** de ξ .

Consideremos el complejo simplicial $K_{\mathcal{F}}$ asociado al conjunto \mathcal{F} formado por las imágenes ρ_ξ de los polítopos de $\xi \in \mathcal{J}$.

$$\mathcal{F} := \{\rho_\xi \subset P \mid \rho_\xi = \eta(\xi), \xi \in \mathcal{J}\}.$$

Un k -simplejo $\sigma \subset K_{\mathcal{F}}$ es una colección ordenada por la inclusión $\{\rho_{\xi_0} \subset \dots \subset \rho_{\xi_k}\} \subset K_{\mathcal{F}}$, con $\rho_{\xi_l} = \eta(\xi_l)$, $l = 0, \dots, k$. Para cada simplejo σ definamos

$$f_{\sigma, \xi_k} : |K_\sigma| \rightarrow \xi_k$$

por la fórmula

$$f_{\sigma, \xi_k}(s) = \sum_{l=0}^k s(\rho_{\xi_l}) x_{\xi_l} \in \tau_k, \rho_{\xi_l} = \eta(\xi_l).$$

La aplicación f_{σ, ξ_k} está bien definida ya que $\sum_{l=0}^k s(\rho_{\xi_l}) = 1$, $s(\rho_{\xi_l}) \in [0, 1]$.

La aplicación f_{σ, ξ_k} es inyectiva. En efecto supongamos que $f_{\sigma, \xi_k}(s) = f_{\sigma, \xi_k}(s')$, y sea $t_l := s(\xi_l) - s'(\xi_l)$, entonces tenemos la ecuación

$$\sum_{l=0}^k x_{\xi_l} t_l = 0 \in \mathbb{R}^k, \quad (1.2)$$

que se traduce en k ecuaciones para $\{t_0, \dots, t_k\}$. Además se tiene la condición $\sum_{l=0}^k s(\rho_{\xi_l}) = 1 = \sum_{l=0}^k s'(\rho_{\xi_l})$, la cual implica que

$$\sum_{l=0}^k t_l = 0, t_l \in [-1, 1]. \quad (1.3)$$

Entonces de las ecuaciones (1.2) y (1.3) obtenemos k ecuaciones dadas por

$$\sum_{l=1}^k (x_{\xi_l} - x_{\xi_0}) t_l = 0 \in \mathbb{R}^k.$$

Como $\dim \xi_k \geq k$, entonces $x_{\xi_l} - x_{\xi_0} \in \mathbb{R}^k$ son vectores independientes, por lo tanto $t_1 = \dots = t_k = 0$. Luego también $t_0 = 0$. Esto prueba la inyectividad de f_{σ, ξ_k} .

Ahora probemos que f_{σ, ξ_k} define una inclusión $f_{\sigma, \xi_k} : |K_\sigma| \rightarrow P$. Supongamos que $(\xi_i, \xi_j) \in \mathcal{R}_P$ entonces existe una aplicación afín $f_{\xi_i, \xi_j} : \xi_i \rightarrow \xi_j$. Consideremos todas las caras de ξ_i , $\mathcal{F}_{\xi_i} = \{\xi'_k \mid k = 0, \dots, r\}$, y sean $\xi''_k = f_{\xi_i, \xi_j}(\xi'_k)$ la colección \mathcal{F}_{ξ_j} de todas las caras de ξ_j . Consideremos $s \in |K_\sigma|$. Para los baricentros tendremos $x_{\xi'_k} = f_{\xi_i, \xi_j}^{-1}(x_{\xi''_k})$ para toda $k = 0, \dots, r$, de donde:

$$\begin{aligned} f_{\sigma, \xi_j}(s) &= \sum_{k=0}^r s(\eta(\xi''_k)) x_{\xi''_k} = \sum_{k=0}^r s(\eta(\xi''_k)) f_{\xi_i, \xi_j}(x_{\xi'_k}) = \\ &= f_{\xi_i, \xi_j} \left(\sum_{k=0}^r s(\eta(\xi''_k)) x_{\xi'_k} \right). \end{aligned}$$

Como $\eta(\xi'_k) = \eta(\xi''_k)$, entonces tendremos

$$f_{\sigma, \xi_j}(s) = f_{\xi_i, \xi_j} \left(\sum_{k=0}^r s(\eta(\xi'_k)) x_{\xi'_k} \right) = f_{\xi_i, \xi_j}(f_{\sigma, \xi_i}(s)).$$

Es decir, está bien definida la aplicación $f_\sigma(x) = \eta \circ f_{\sigma, \xi_i}(x)$,

$$f_\sigma : |K_\sigma| \rightarrow P.$$

Consideremos dos simplejos $\sigma, \sigma' \in K_{\mathcal{F}}$, $\sigma = \{\rho_{\xi_0} \subset \cdots \subset \rho_{\xi_k}\}$, $\sigma' = \{\rho_{\xi'_0} \subset \cdots \subset \rho_{\xi'_r}\}$. Sean $s \sim_{K_{\mathcal{F}}} s'$, con $s \in |K_{\sigma}|$, $s' \in |K_{\sigma'}|$, dos representantes del mismo punto en $|K_{\mathcal{F}}| = \sqcup_{\sigma} |K_{\sigma}| / \sim_{K_{\mathcal{F}}}$. Entonces como s, s' definen la misma función extendida $s_{K_{\mathcal{F}}} = s'_{K_{\mathcal{F}}} : K_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}$. Si consideramos el los soportes coinciden $\sigma'' = \text{sop } s = \text{sop } s' \subset \sigma \cap \sigma'$. Por lo que

$$f_{\sigma}(s) = \eta(f_{\sigma, \xi_k}) = \eta(f_{\sigma, \xi_k} |_{|K_{\sigma''}|}) = \eta(f_{\sigma'', \xi_k}) = (f_{\sigma'', \xi'_r}) = \eta(f_{\sigma', \xi'_r}) = f_{\sigma'}(s').$$

Con esto concluimos que está bien definida la aplicación continua en el cociente $f([s]_{K_{\mathcal{F}}}) = \eta(f_{\sigma, \xi_k})$, donde $[\cdot]_{K_{\mathcal{F}}}$ es la clase de equivalencia de $\sim_{K_{\mathcal{F}}}$:

$$f : |K_{\mathcal{F}}| = \bigsqcup_{\sigma} |K_{\sigma}| / \sim_{K_{\mathcal{F}}} \longrightarrow P$$

es continua pues f_{σ, ξ_k} son afines y continuas (con inversa continua).

Es inyectiva porque dada f_{σ, ξ_k} , y dados dos puntos $s, s' \in \sqcup_{\sigma} |K_{\sigma}|$, s, s' están en la misma clase $s \sim_{K_{\mathcal{F}}} s'$ si y sólo si $\eta(f_{\sigma, \xi_k}(s)) = \eta(f_{\sigma', \xi'_r}(s'))$. En efecto ya hemos visto $s \sim_{K_{\mathcal{F}}} s'$ implica $f_{\sigma, \xi_k}(s) \sim_P f_{\sigma', \xi'_r}(s')$. Para la otra implicación supongamos que $f_{\sigma, \xi_k}(s) \sim_P f_{\sigma', \xi'_r}(s')$, entonces tomemos $\sigma'' = \sigma' \cap \sigma$ y $\xi = \xi_k \cap \xi'_r$, entonces

$$f_{\sigma, \xi_k}(s) \sim_P f_{\sigma', \xi'_r}(s) \sim_P f_{\sigma'', \xi}(s)$$

esto implica que tiene una única imagen inversa de la forma $s \in |K_{\sigma''}|$ que a su vez extiende a una única función $s_{K_{\mathcal{F}}} : K_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}$ que da lugar a una única clase $[s]_{K_{\mathcal{F}}} \in |K_{\mathcal{F}}|$.

Es sobreyectiva: Consideremos un polígono ξ_i y sea $z \in \eta(\xi_i) \subset P$, con $x = \eta^{-1}(z) \in \xi_i$. Queremos probar que z tiene imagen inversa $f^{-1}(z)$.

Caso 1. Si x es un vértice de ξ_i ó el baricentro x_{ξ_i} del polígono. Entonces para el simplejo $\sigma = \{z\}$, $f_{\sigma, \xi_i}(z) = f_{\sigma, \xi_i}(|K_{\sigma}|) = x$, y por tanto z está en la imagen de f .

Caso 2. El punto $x \in \xi_i$ no es un vértice ni tampoco $x \neq x_{\xi_i}$. Haremos la prueba por inducción sobre la dimensión del polígono ξ_i . La base de inducción $\dim \xi_i = 0$ está contenida en e caso 1. Supongamos que la afirmación de sobreyectividad es cierta para todo ξ de dimensión $\dim \xi < m = \dim \xi_i$.

Consideremos la recta

$$\ell = \{x_{\tau_i} + rx, \mid r \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^m.$$

El conjunto convexo $\ell \cap \xi_i \subset \xi_i$, es acotado, por que es un segmento $x_{\xi_i} + rx$, $a \leq r \leq b$, donde $x_a = x_{\xi_i} + ax$, $x_b = x_{\xi_i} + bx$ están en las caras ξ_a, ξ_b respectivamente de ξ_i . Por lo tanto, ó bien x está en el intervalo que une x_a con x_{ξ_i} , ó bien x está en el intervalo que une x_{ξ_i} con x_b . Es decir, ó bien

$$x = \lambda x_{\xi_i} + (1 - \lambda)x_a, \quad (1.4)$$

ó bien

$$x = \lambda x_{\xi_i} + (1 - \lambda)x_b,$$

con $0 \leq \lambda \leq 1$. Por hipótesis de inducción aplicada a alguna de las caras $\xi' \subset \xi$ de dimensión $\dim \xi' < \dim \xi_i$, se tiene que x_a ó x_b está en la imagen de f . Supongamos que $x' \in \{x_a, x_b\}$ está en la cara ξ' de ξ_i . Entonces para cierto simplejo $\sigma' = \{\rho_{\xi'_0} \subset \cdots \subset \rho_{\xi'_n}\} \subset K_{\mathcal{F}}$, con ξ'_k caras de ξ_i , tendremos $f_{\sigma', \xi'_k}(s') = x'$, con $s' \in |K_{\sigma'}|$. Es decir, haciendo $\lambda_k := s'(\rho_{\xi'_k})$ tendremos:

$$x' = \lambda_n x_{\xi'_n} + \lambda_{n-1} x_{\xi'_{n-1}} + \cdots + \lambda_1 x_{\xi'_1} + \lambda_0 x_{\xi'_0}, \quad \sum_{k=0}^n \lambda_k = 1; \dim \sigma = n < \dim \xi_i \quad (1.5)$$

donde se tienen las caras $\xi'_0 \subset \xi'_1 \subset \cdots \subset \xi'_{n-1} \subset \xi'_n \subset \xi_i$, con baricentros $x_{\xi'_k} \in \xi'_k$, $k = 0, \dots, n$. Sustituyendo en (1.4) tendremos

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x + (1 - \lambda) \left(\lambda_n x_{\xi'_i} + \lambda_{n-1} x_{\xi'_{n-1}} + \cdots + \lambda_1 x_{\xi'_1} + \lambda_0 x_{\xi'_0} \right) \\ &= \lambda x_{\xi_i} + (1 - \lambda) \lambda_n x_{\xi'_i} + \cdots + (1 - \lambda) \lambda_0 x_{\xi'_0}. \end{aligned}$$

Si definimos

$$s(y) := \begin{cases} (1 - \lambda) \lambda_k = (1 - \lambda) s'(y), & y = x_{\xi'_k} \\ \lambda & y = x_{\xi_i} \end{cases}$$

donde $\sigma = \sigma' \cup \xi_i$, entonces tendremos $f_{\sigma, \xi_i}(s) = x$. Esto prueba la sobreyectividad.

Finalmente es homeomorfismo pues la inversa se construye a partir de las inversas continuas f_{σ, ξ_i}^{-1} . □

Definición 1.3. El complejo simplicial $|K_{\mathcal{F}}|$ y la aplicación afín $f_K \mathcal{F} \rightarrow P$ descritos en la proposición 1.2 anterior definen una triangulación rectilínea llamada **triangulación baricéntrica del poliedro P** . Denotamos el complejo simplicial $|K_{\mathcal{F}}|$ por

$$Sd P.$$

Notemos que si P es un poliedro isomorfo a un complejo simplicial $|K|$, la triangulación baricéntrica del poliedro $Sd P$ es isomorfa como poliedro a la triangulación baricéntrica del complejo simplicial $Sd |K|$.

Definición 1.4. Una aplicación continua entre dos poliedros, $f : P \rightarrow Q$, es una **aplicación lineal a pedazos**, si existen triangulaciones rectilíneas $(|K_P|, h_P : |K_P| \rightarrow P)$ y $(|K_Q|, h_Q : |K_Q| \rightarrow Q)$, de P y Q respectivamente; tales que la aplicación entre realizaciones geométricas

$$h_Q^{-1} \circ f \circ h_P : |K_P| \rightarrow |K_Q|$$

es una aplicación simplicial. Dos *poliedros son isomorfos* si existe un homeomorfismo que es una aplicación lineal a pedazos entre ellos.

En particular todo complejo simplicial es un poliedro y una aplicación simplicial entre ellos, también es una aplicación lineal a pedazos.

Consideremos dos poliedros $P = \sqcup_{i \in I} \tau_i$, $Q = \sqcup_{j \in J} \tau'_j$, y un homeomorfismo $f : P \rightarrow Q$. Supongamos que para todo polígono τ_i que define P existe un polígono τ'_j que constituye Q , tal que $f(\eta_P(\tau_i)) \subset \eta_Q(\tau'_j)$, y además se tienen diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & Q \\ \eta_P \uparrow & & \uparrow \eta_Q \\ \tau_i & \xrightarrow{f_{\tau_i, \tau'_j}} & \tau'_j \end{array}$$

donde f_{τ_i, τ'_j} son aplicaciones afines. Supongamos que $\eta_Q(\tau'_j)$ es unión de imágenes de polígonos en Q ; es decir,

$$f^{-1}(\eta_Q(\tau'_j)) = \eta_P(\tau_{i_1}) \cup \cdots \cup \eta_P(\tau_{i_n}).$$

Diremos que P es **subpoliedro** de Q .

Observemos que una triangulación baricéntrica SdP del poliedro P , dada en la definición 1.3, es un subpoliedro de P .

Definición 1.5. Una **célula** c de un poliedro $P = \sqcup_{i \in I} \tau_i / \sim_P$, es la imagen bajo la proyección $\eta : \sqcup_{i \in I} \tau_i \rightarrow P$,

1. ó bien del interior de un polítopo convexo τ_i , $\bar{c} = \eta(\tau_i)$,
2. ó bien del interior de alguna de sus caras $\xi_j \subset \tau_i$, $\bar{c} = \eta(\xi_j)$,
3. ó bien de un vértice $x \in \tau_i$, $\bar{c} = \eta(x)$.

La dimensión de la célula es ó la dimensión del polítopo, ó de la cara correspondiente, ó 0 según el caso.

Teorema 1.6. La relación definida por el isomorfismo es una relación de equivalencia para el conjunto de todos los poliedros.

Para ello verifiquemos las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad de la relación.

1. Reflexividad: La identidad trivialmente es lineal a pedazos.
2. Simetría: Dado un homeomorfismo lineal a pedazos $f : P \rightarrow Q$, consideremos una triangulación $h_P : |K_P| \rightarrow P$ tal que $h_Q^{-1} \circ f \circ h_P : |K_P| \rightarrow |K_Q|$ es una aplicación simplicial en cada simplejo de $|K_P|$, entonces la imagen de cada k -simplejo σ de $|K_P|$ es un k -simplejo σ' de $|K_Q|$. La función inversa $h_P^{-1} \circ f^{-1} \circ h_Q$ es una aplicación simplicial, la imagen de σ' es σ .
3. Transitividad: Consideremos dos homeomorfismos lineales a pedazos f, g y el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 P & \xrightarrow{f} & Q & \xrightarrow{g} & R \\
 \uparrow h_P & & \nearrow h_Q & & \uparrow h_R \\
 |K_P| & \xrightarrow{h_{PQ}} & |K_Q| & \xleftarrow{h'_Q} & |K'_Q| & \xrightarrow{h_{Q'R}} & |K_R|
 \end{array}$$

Para demostrar la transitividad recurrimos a la proposición 1.9, más adelante cuya prueba requiere de la siguiente definición.

Definición 1.7. Dada una triangulación $h : |K| \rightarrow P$ decimos que un complejo simplicial $|K_1|$ y un homeomorfismo $f : |K_1| \rightarrow |K|$ es una **subtriangulación** o **un refinamiento de la triangulación** $h : |K| \rightarrow P$ si para todo simplejo $|K_{\sigma_1}| \subset |K_1|$ existe otro simplejo $|K_\sigma| \subset |K|$, tal que $f(|K_{\sigma_1}|) \subset |K_\sigma|$ y diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc}
 |K_{\sigma_1}| & \xrightarrow{f} & |K_\sigma| \\
 \downarrow \phi_{\sigma_1} & & \downarrow \phi_\sigma \\
 \Delta^{k_1} & \xrightarrow{f_{(\sigma_1, \sigma)}} & \Delta^k
 \end{array}$$

donde $f_{(\sigma_1, \sigma)}$ son aplicaciones afines, y donde $\phi_\sigma, \phi_{\sigma_1}$ son coordenadas baricéntricas.

Lema 1.8. Dado un refinamiento $f : |K_1| \rightarrow |K|$, de una triangulación rectilínea $h : |K| \rightarrow P$, el homeomorfismo $h \circ f : |K_1| \rightarrow P$ es a su vez una triangulación rectilínea de P .

Demostración. En efecto, ya que para cada simplejo $|K_{\sigma_1}| \subset |K_1|$ se tienen simplejos $|K_{\sigma}| \subset |K|$ y un polítopo τ_i para P , con aplicaciones

$$\begin{array}{ccccc} |K_{\sigma_1}| & \xrightarrow{f} & |K_{\sigma}| & \xrightarrow{h} & P \\ \downarrow \phi_{\sigma_1} & & \downarrow \phi_{\sigma} & \eta_P \uparrow & \\ \Delta^{k_1} & \xrightarrow{f(\sigma_1, \sigma)} & \Delta^k & \xrightarrow{h(\sigma_1, \tau_i)} & \tau_i \end{array}$$

como la composición $h(\sigma_1, \tau_i) = h(\sigma_1, \tau_i) \circ f(\sigma_1, \sigma)$ es afín, y entonces se tienen diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} |K_{\sigma_1}| & \xrightarrow{h \circ f} & P \\ \downarrow \phi_{\sigma_1} & \eta_P \uparrow & \\ \Delta^{k_1} & \xrightarrow{h(\sigma_1, \tau_i)} & \tau_i \end{array}$$

Es decir $h \circ f : |K_1| \rightarrow P$ es una triangulación rectilínea de P . \square

Proposición 1.9. Dadas dos triangulaciones rectilíneas $h_Q : |K_Q| \rightarrow Q$ y $h'_Q : |K'_Q| \rightarrow Q$ de un poliedro Q , existe una triangulación rectilínea $h : |K_{\mathcal{F}}| \rightarrow Q$ que es refinamiento común de ambas. Es decir, existe un complejo simplicial $|K_{\mathcal{F}}|$ y subtriangulaciones $f'_Q : |K_{\mathcal{F}}| \rightarrow |K'_Q|$ y $f_Q : |K_{\mathcal{F}}| \rightarrow |K_Q|$ tales que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & Q & \\ h'_Q \nearrow & & \nwarrow h_Q \\ |K'_Q| & & |K_Q| \\ f'_Q \nwarrow & & \nearrow f_Q \\ & |K_{\mathcal{F}}| & \end{array}$$

Por el lema 1.8, $h = h_Q \circ f_Q = h'_Q \circ f'_Q$ es un homeomorfismo que define una triangulación rectilínea de Q .

Demostración. Consideramos $|K_Q|$ y $|K'_Q|$ como dos triangulaciones del poliedro

$$Q = \bigsqcup_{j \in J} \tau_j / \sim_Q.$$

Consideremos la familia de intersecciones no vacías de imágenes de simplejos,

$$\mathcal{F} := \{ \rho_{(\sigma, \sigma')} = h'_Q(|K_{\sigma'}|) \cap h_Q(|K_{\sigma}|) \neq \emptyset \mid |K_{\sigma}| \subset |K_Q|, |K_{\sigma'}| \subset |K'_Q| \}.$$

La aplicación $f_Q : |K_Q| \rightarrow Q$ es una triangulación del poliedro Q . Para cada simplejo $|K_{\sigma}| \subset |K_Q|$, elegimos coordenadas baricéntricas $\phi_{\sigma} : |K_{\sigma}| \rightarrow \Delta^k$. Entonces para cada polítopo $\tau_j \subset \mathbb{R}^m$ que define el poliedro Q con $f(|K_{\sigma}|) \subset \eta_Q(\tau_j)$, está bien definida una aplicación afín

$$h_{(\sigma, \tau_j)} : \Delta^k \subset \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \tau_j \subset \mathbb{R}^{k_j}$$

tal que $\eta \circ h_{(\sigma, \tau_j)} = h_Q \circ \phi_\sigma^{-1}$,

$$\begin{array}{ccc} Q & \xleftarrow{\eta_Q} & \tau_j \\ h_Q \uparrow & & \uparrow h_{(\sigma, \tau_j)} \\ |K_\sigma| & \xrightarrow{\phi_\sigma} & \Delta^k \end{array} .$$

Aquí $\eta_Q : \tau_j \rightarrow Q$ es la aplicación que toma la clase $\sqcup_{j \in J} \tau_j / \sim_Q = Q$. Consideramos la realización geométrica $|K_{\mathcal{F}}|$ del complejo $K_{\mathcal{F}}$ en el que los simplejos K_σ consisten en conjuntos ordenados por la inclusión

$$K_\sigma = \left\{ \rho_{(\sigma_1, \sigma'_1)} \subset \cdots \subset \rho_{(\sigma_n, \sigma'_n)} \right\} \subset K_{\mathcal{F}}.$$

Dado un simplejo $|K_\sigma| \subset |K_{\mathcal{F}}|$, como arriba, cada punto $s \in |K_\sigma|$ define una función $s : K_\sigma \rightarrow [0, 1]$ con $\sum_{k=1}^n s(\rho_{(\sigma_k, \sigma'_k)}) = 1$.

Consideremos ó bien puntos interiores $x_{(\sigma_k, \sigma'_k)} \in \rho_{(\sigma_k, \sigma'_k)}$, ó bien vértices $x_{(\sigma_k, \sigma'_k)} = \rho_{(\sigma_k, \sigma'_k)}$ si $\rho_{(\sigma_k, \sigma'_k)}$ es un punto, para $k = 1, \dots, n$. Entonces por ser h_Q un homeomorfismo existe un único $s_{(\sigma_k, \sigma'_k)} \in |K_{\sigma_n}| \subset |K_Q|$, tal que $h_Q(s_{(\sigma_k, \sigma'_k)}) = x_{(\sigma_k, \sigma'_k)}$, definamos la función $f_{(\sigma, \sigma_n)} : |K_\sigma| \rightarrow |K_{\sigma_n}|$, por,

$$f_{(\sigma, \sigma_n)}(s) = \sum_{k=1}^n s(\rho_{(\sigma_k, \sigma'_k)}) \cdot s_{(\sigma_k, \sigma'_k)}.$$

Si consideramos las coordenadas baricéntricas $\phi_\sigma : |K_\sigma| \rightarrow \Delta^{m_0}$, $\phi_{\sigma_n} : |K_{\sigma_n}| \rightarrow \Delta^{m_n}$, tendremos que

$$\phi_{\sigma_n} \circ f_{(\sigma, \sigma_n)} \circ \phi_\sigma^{-1}(t_0, \dots, t_{m_0}) = \sum_{k=1}^n t_k \cdot \phi_{\sigma_n}(s_{(\sigma_k, \sigma'_k)}).$$

es afín.

Para cada dos simplejos $K_{\sigma_1}, K_{\sigma_2} \subset K_{\mathcal{F}}$, tales que $K_{\sigma_3} = K_{\sigma_1} \cap K_{\sigma_2} \neq \emptyset$, se tiene que $f_{(\sigma_3, \sigma_{n_3})} = f_{(\sigma_1, \sigma_{n_1})}|_{|K_{\sigma_3}|}$, por lo tanto está bien definida la aplicación $f_Q : |K_{\mathcal{F}}| \rightarrow |K_Q|$ tal que conmutan los diagramas

$$\begin{array}{ccc} & |K_\sigma| & \xrightarrow{f_Q} & |K_{\sigma_n}| \\ & \nearrow \phi_\sigma^{-1} & & \nwarrow \phi_{\sigma_n}^{-1} \\ \Delta^{m_0} & \xrightarrow{\phi_{\sigma_n} \circ f_{(\sigma, \sigma_n)} \circ \phi_\sigma^{-1}} & & \Delta^{m_n} \end{array}$$

La función f_Q es inyectiva: Supongamos que $\sum_{k=1}^n t_k \cdot \phi_{\sigma_n}(s_{(\sigma_k, \sigma'_k)}) = \sum_{k=1}^n t'_k \cdot \phi_{\sigma_n}(s_{(\sigma_k, \sigma'_k)})$ con $\sum_{k=1}^n t_k = \sum_{k=1}^n t'_k = 1$; entonces como en el conjunto de vectores $\phi_{\sigma_n}(s_{(\sigma_k, \sigma'_k)})$, $k = 1, \dots, n$, hay $n - 1$ vectores linealmente independiente (recordemos que $s_{(\sigma_k, \sigma'_k)}$ son puntos interiores de caras de dimensión $k - 1$ del simplejo $|K_\sigma|$). Por lo tanto $t_k = t'_k = 0$ (para un argumento más detallado ver la demostración de la inyectividad en la proposición 1.2).

La función f_Q es sobreyectiva: Todo simplejo $|K_\sigma| \subset |K_Q|$ se descompone como unión de intersecciones

$$h_Q(|K_\sigma|) = \bigcup_{|K_{\sigma'}| \subset |K'_Q|} (h'_Q(|K_{\sigma'}|) \cap (h_Q(|K_\sigma|))).$$

Entonces para todo $x \in P$, existen simplejos $|K_{\sigma_1}| \subset |K_Q|$ y $|K_{\sigma'_1}| \subset |K'_Q|$ tales que

$$x \in h_Q(|K_{\sigma_1}|) \cap h'_Q(|K_{\sigma'_1}|).$$

Sea $y_1 = h_Q^{-1}(x)$ y $y'_1 = (h'_Q)^{-1}(x)$. Si $y_1 = s_{(\sigma_1, \sigma'_1)}$, entonces se define $s : K_{\mathcal{F}} \rightarrow [0, 1]$ dada por $s(\rho_{(\sigma_1, \sigma'_1)}) = 1$, y nula en otro lado. En este caso $f_Q(s) = y_1$. Si $y_1 \neq s_{(\sigma_1, \sigma'_1)}$ entonces por convexidad existe un $\lambda_1 > 0$ tal que, ó bien,

$$y_2 = \lambda_1 y_1 + (1 - \lambda_1) s_{(\sigma_1, \sigma'_1)} \in |K_{\sigma_2}| \subset |K_{\sigma_1}|,$$

ó bien,

$$y'_2 = \lambda_1 y'_1 + (1 - \lambda_1) s_{(\sigma'_1, \sigma_1)} \in |K_{\sigma'_2}| \subset |K_{\sigma'_1}|,$$

donde $|K_{\sigma_2}| \subset |K_{\sigma_1}|$, $|K_{\sigma'_2}| \subset |K_{\sigma'_1}|$ son caras de dimensión menor, y donde $s_{(\sigma'_1, \sigma_1)} = h'_Q(x_{(\sigma_1, \sigma'_1)}) \in |K'_Q|$.

Procediendo por analogía, tenemos una colección de parejas de simplejos $(\sigma_1, \sigma'_1), \dots, (\sigma_n, \sigma'_n)$, con dimensiones decrecientes

$$\text{mín}(\dim \sigma_1, \dim \sigma'_1) > \dots > \text{mín}(\dim \sigma_n, \dim \sigma'_n); \quad |K_{\sigma_n}| \subset \dots \subset |K_{\sigma_1}|; \quad |K_{\sigma'_n}| \subset \dots \subset |K_{\sigma'_1}|;$$

tales que ó bien $y_k = s_{(\sigma_k, \sigma'_k)}$, ó bien $y'_k = s_{(\sigma'_k, \sigma_k)}$, ó bien existe $\lambda_n > 0$ con

$$y_{k+1} := \lambda_k y_k + (1 - \lambda_k) s_{(\sigma_k, \sigma'_k)} \in |K_{\sigma_{k+1}}| \subset |K_{\sigma_k}|,$$

ó

$$y'_{k+1} := \lambda_k y'_k + (1 - \lambda_k) s_{(\sigma'_k, \sigma_k)} \in |K_{\sigma'_{k+1}}| \subset |K_{\sigma'_k}|.$$

Por lo tanto podemos suponer que para algún $n \in \mathbb{N}$, se tiene que ó bien $y_n = s_{(\sigma_n, \sigma'_n)}$, ó bien $y'_n = s_{(\sigma'_n, \sigma_n)}$, ó bien y_n es un vértice de $|K_Q|$ ó de $|K'_Q|$ (es decir $\text{mín}(\dim \sigma_n, \dim \sigma'_n) = 0$), en cuyo caso también se tiene $y_n = s_{(\sigma_n, \sigma'_n)}$, ó bien $y'_n = s_{(\sigma'_n, \sigma_n)}$. Haciendo sustituciones sucesivas y despejando y_1, y'_1 se tienen coeficientes a_k, a'_k tales que

$$y_1 = \sum_{k=1}^n a_k s_{(\sigma_k, \sigma'_k)}, \quad y'_1 = \sum_{k=1}^n a'_k s_{(\sigma'_k, \sigma_k)}.$$

Inductivamente se puede probar que $\sum_{k=1}^n a_k = 1$ con $0 \leq a_k \leq 1$.

Sea $\sigma \subset K_{\mathcal{F}}$ el simplejo $\{\rho_{(\sigma_n, \sigma'_n)} \subset \dots \subset \rho_{(\sigma_1, \sigma'_1)}\}$, entonces si $s(\rho_{(\sigma_k, \sigma'_k)}) := a_k$ se tendrá $f_{(\sigma, \sigma_1)}(s) = y_1$. Y también si definimos $s'(\rho_{(\sigma'_k, \sigma_k)}) = a'_k$, tendremos $f_{(\sigma, \sigma'_1)}(s') = y'_1$ (notemos que como conjuntos $\rho_{(\sigma_k, \sigma'_k)} = \rho_{(\sigma'_k, \sigma_k)}$). Esto prueba la sobreyectividad.

La aplicación f_Q es biyectiva y es afín por lo tanto es homeomorfismo.

La aplicación $f_Q : |K_{\mathcal{F}}| \rightarrow |K_Q|$ es un refinamiento de la triangulación $h_Q : |K_Q| \rightarrow Q$. Análogamente se define un refinamiento $f'_Q : |K_{\mathcal{F}}| \rightarrow |K'_Q|$ de la triangulación $h_Q : |K'_Q| \rightarrow Q$. Finalmente se tiene que $h_Q \circ f_Q(s) = h'_Q \circ f'_Q(s') = x$.

□

Demostración del teorema 1.6. Considerando $|K_{\mathcal{F}}|$ como subtriangulación de P con $h : |K_{\mathcal{F}}| \rightarrow P$ dada por $h_P \circ h_{P_Q}^{-1} \circ f_Q$, se verifica que $h \circ g \circ f \circ h_R^{-1} : |K_{\mathcal{F}}| \rightarrow |K_R|$ es un homeomorfismo afín, considerando la triangulación inducida en la imagen es un homeomorfismo afín. Esto prueba finalmente la transitividad de la relación de isomorfismo de estructuras lineales a pedazos. □

Ahora consideramos las tres categorías de estructuras inducidas en una variedad: triangulación, estructura simplicial y estructura lineal a pedazos. Consideramos una variedad topológica M . Una triangulación de M , es una descomposición, $M = \cup_{\sigma} \sigma$, donde cada σ es homeomorfo a algún simplejo canónico, $\Delta^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$; y cada vez que dos simplejos de la descomposición tienen intersección no vacía, $\partial\sigma \cap \partial\sigma' \neq \emptyset$, entonces dicha intersección es unión de simplejos y cada simplejo $\sigma'' \subset \partial\sigma \cap \partial\sigma'$ pertenece también a la descomposición. Dos triangulaciones son equivalentes si hay un homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ que lleva los simplejos de una descomposición en un simplejo de la otra descomposición. Una estructura simplicial de M es un complejo simplicial K y un homeomorfismo $f : |K| \rightarrow M$. Dos estructuras simpliciales, $f_i : |K_i| \rightarrow M$, $i = 1, 2$, son isomorfas; si la aplicación $f_2 \circ f_1^{-1} : |K_1| \rightarrow |K_2|$, es una aplicación simplicial. Serán equivalentes, si $|K_1|$, $|K_2|$, son isomorfos como complejos simpliciales.

Definición 1.10. Una **estructura lineal a pedazos** (P, f) de una variedad topológica M es un poliedro P y un homeomorfismo $f : P \rightarrow M$. Dos estructuras lineales a pedazos, $f_i : P_i \rightarrow M$, $i = 1, 2$, son **isomorfas** si la aplicación $f_2 \circ f_1^{-1} : P_1 \rightarrow P_2$ es una aplicación lineal a pedazos. Dos estructuras lineales a pedazos son *equivalentes* si P_1, P_2 son isomorfos como poliedros. Dadas dos variedades M_1, M_2 , con estructura lineal a pedazos, $f_i : P_i \rightarrow M_i$; diremos que una aplicación continua $f : M_1 \rightarrow M_2$, es una *aplicación lineal a pedazos* entre las variedades M_1 y M_2 , si $f_2 \circ f \circ f_1^{-1}$ es una aplicación lineal a pedazos de poliedros.

Si M tiene estructura C^∞ , ver [KS], diremos que la estructura lineal a pedazos, $f : P \rightarrow M$, es **compatible con la estructura** C^∞ , si para todo simplejo σ de alguna triangulación rectilínea del poliedro P , $t : |K| \rightarrow P$, al considerar un simplejo $|K_\sigma|$, la aplicación en el cerrado $f \circ t \circ \phi_\sigma^{-1} : \Delta^k \rightarrow M$, es una inmersión diferenciable no singular, donde $\dim \sigma = k$ y $\phi_\sigma : |\sigma| \rightarrow \Delta$ es la coordenada baricéntrica del simplejo $|\sigma|$.

NOTACIÓN. Dado un homeomorfismo $f : |K| \rightarrow M$, diremos que la imagen $f(|K_\sigma|) \subset M$, de la realización de un simplejo $|K_\sigma| \subset |K|$, es un simplejo *en* M . Con un abuso de notación, en lo sucesivo denotaremos las imágenes de los simplejos $|K_\sigma|$ en M como,

$$\sigma = f(|K_\sigma|) \subset M.$$

Análogamente al considerar una estructura lineal a pedazos $f : P \rightarrow M$, diremos que las imágenes $f(e)$ de células $e \subset P$ son células *en* M .

1.2. Conexiones generalizadas

En esta sección definiremos las conexiones generalizadas en la categoría lineal a pedazos. Para ver la construcción de conexiones generalizadas ver por ejemplo [AL], [ALMMT], [AMMT], [Ba2], [Th], [Le], como referencia básica.

Consideramos M una variedad con una estructura lineal a pedazos (P, f) , $f : P \rightarrow M$. Consideramos trayectorias lineales a pedazos, $l : [0, 1] \rightarrow M$, es decir suponemos que existe:

1. una partición (estructura lineal a pedazos del intervalo), $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$,
2. una triangulación rectilínea $f : |K| \rightarrow P$ del poliedro P

3. para cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de la partición un simplejo $|K_\sigma| \subset |K|$ de la triangulación rectilínea, para el cual $\phi_\sigma \circ f^{-1} \circ l : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \Delta^k$ es inyectiva afín o constante para una coordenada baricéntrica $\phi_\sigma : |K_\sigma| \rightarrow \Delta^k$.

Denotamos como \mathcal{L} al conjunto de trayectorias lineales a pedazos inyectivas o constantes.

Decimos que $l' \in \mathcal{L}$ es **reparametrización** de $l \in \mathcal{L}$ si existe $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$, lineal a pedazos creciente con inversa lineal a pedazos, tal que $l'(t) = l(\tau(t))$.

Se define la **composición de dos trayectorias** $m_1, m_2 \in \mathcal{L}$, cuando $m_1(1) = m_2(0)$ como la trayectoria $m_1 \cdot m_2$, dada por

$$m_2 \cdot m_1(t) := \begin{cases} m_1(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ m_2(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}. \quad (1.6)$$

Para verificar que

$$m_1 \cdot m_2 \in \mathcal{L},$$

consideramos dos particiones $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$, $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_M = 1$, y dos triangulaciones $f_1 : |K_1| \rightarrow P$, $f_2 : |K_2| \rightarrow P$ con dos simplejos $|K_{\sigma_1}| \subset |K_1|$, $|K_{\sigma_2}| \subset |K_2|$.

Supongamos que para las coordenadas $\phi_{\sigma_1} : |K_{\sigma_1}| \rightarrow \Delta^{k_1} \subset \mathbb{R}^{k_1+1}$, $\phi_{\sigma_2} : |K_{\sigma_2}| \rightarrow \Delta^{k_2} \subset \mathbb{R}^{k_2+1}$, son tales que $\phi_{\sigma_1} \circ f_1^{-1} \circ m_1 : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \Delta^{k_1}$, $\phi_{\sigma_2} \circ f_2^{-1} \circ m_2 : [s_{j-1}, s_j] \rightarrow \Delta^{k_2}$ son afines inyectivas o constantes para $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$. Por la proposición 1.9 existe una triangulación $h_1 : |K_{\mathcal{F}}| \rightarrow |K_1|$, $h_2 : |K_{\mathcal{F}}| \rightarrow |K_2|$, tal que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ f_1 \nearrow & & \nwarrow f_2 \\ |K_1| & & |K_2| \\ h_1 \nwarrow & & \nearrow h_2 \\ & |K_{\mathcal{F}}| & \end{array}$$

Para verificar que $m_1 \cdot m_2$ es una trayectoria lineal a pedazos consideramos la triangulación $f_1 \circ h_1 : |K_{\mathcal{F}}| \rightarrow P$, y una partición, $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_L = 1$, la cuál es refinamiento de la partición

$$0 < \frac{t_1}{2} < \dots < \frac{t_{N-1}}{2} < \frac{1}{2} < \frac{1+s_1}{2} < \dots < \frac{1+s_{M-1}}{2} < 1,$$

tal que $(f_1 \circ h_1)^{-1} \circ m_1 \cdot m_2 : [z_{l-1}, z_l] \rightarrow |K_{\mathcal{F}}|$ tiene imagen contenida en un simplejo $|K_\sigma| \subset |K_{\mathcal{F}}|$. El intervalo $[z_{l-1}, z_l]$ está contenido en algún intervalo ó bien de la forma $[t_{i-1}, t_i]$, ó bien de la forma $[s_{j-1}, s_j]$. Entonces ó bien $m_1 \cdot m_2(z) = m_1(2z)$, ó bien $m_1 \cdot m_2(z) = m_2(2z-1)$, en cuyo caso se tiene una función afín $\phi_{\sigma_1} \circ f_1^{-1} \circ m_1 \cdot m_2 : [z_{l-1}, z_l] \rightarrow \Delta^{k_1}$, ó $\phi_{\sigma_2} \circ f_2^{-1} \circ m_1 \cdot m_2 : [z_{l-1}, z_l] \rightarrow \Delta^{k_2}$. En cualquier caso se tiene una función afín

$$h_1^{-1} \circ f_1^{-1} \circ m_1 \cdot m_2 : [z_{l-1}, z_l] \rightarrow |K_{\mathcal{F}}|, \quad \text{ó} \quad h_2^{-1} \circ f_2^{-1} \circ m_1 \cdot m_2 : [z_{l-1}, z_l] \rightarrow |K_{\mathcal{F}}|.$$

Esto prueba que $m_1 \cdot m_2 \in \mathcal{L}$.

También para cada $l \in \mathcal{L}$ se define la trayectoria inversa $l^{-1} \in \mathcal{L}$ como

$$l^{-1}(t) := l(1 - t).$$

Consideramos un punto fijo $\star \in M$ y las trayectorias l que comienzan y terminan en \star , es decir $l(0) = l(1) = \star$, denotamos dicho conjunto como \mathcal{L}_\star . Este conjunto no es un grupo pues la operación de composición de trayectorias no es asociativa. Si consideramos el conjunto de clases de \mathcal{L}_\star módulo reparametrización, entonces la composición de trayectorias si es asociativa. Definiendo la trayectoria identidad como aquel que tiene imagen constante \star , no es posible definir el inverso de por ejemplo una trayectoria de la forma $l = l_1^{-1} \cdot l_1$, por ello tampoco obtenemos una estructura de grupo.

Decimos que $l' \in \mathcal{L}$ es un **retrazo simple** de $l \in \mathcal{L}$, si existen $l_1, l_2, m \in \mathcal{L}$ y $0 < t' < 1$ tales que

$$l = l_2 \cdot l_1, \quad l' = l_2 \cdot m^{-1} \cdot m \cdot l_1$$

Definición 1.11. $l' \in \mathcal{L}$ es un **retrazo de** $l \in \mathcal{L}$, $l \sim l'$, si existe una secuencia finita

$$l = l_0, l_1, \dots, l_N = l'$$

donde l_{i+1} es reparametrización o retrazo simple de l_i o viceversa. La relación \sim es una relación de equivalencia.

Definición 1.12. El **grupo de lazos de holonomía** lineales a pedazos en M basados en \star , es el conjunto de trayectorias lineal a pedazos cerradas, basadas en \star , módulo retrazo y/o reparametrización, es decir, consideramos el conjunto

$$\mathcal{P}_\star := \mathcal{L}_\star / \sim.$$

La operación de grupo es la composición de dos trayectorias, $\gamma_2 \cdot \gamma_1 = [l_1 \cdot l_2]$, $\gamma_1 = [l_1]$, $\gamma_2 = [l_2]$, y el inverso es $\gamma^{-1} = [l^{-1}]$, $\gamma = [l] \in \mathcal{P}_\star$. Dado un grupo de Lie compacto G , el conjunto de **conexiones generalizadas** es el conjunto de todos los homomorfismos algebraicos del grupo de lazos de holonomía en el grupo G , es decir,

$$\text{hom}(\mathcal{P}_\star, G).$$

Verifiquemos que la operación de grupo está bien definida: supongamos que $[l_1] = [l'_1] = \gamma_1$, y que $[l_2] = [l'_2] = \gamma_2$, entonces existen dos secuencias

$$l_{(1,0)} = l_1, l_{(1,1)}, \dots, l_{(1,n)} = l'_1; \quad l_{(2,0)} = l_2, l_{(2,1)}, \dots, l_{(2,m)} = l'_2,$$

donde dos trayectorias consecutivas son retrazos simples o reparametrizaciones. Como $l_1 \sim l'_1$ entonces también $l_{(1,1)} \cdot l_2 \sim l_1 \cdot l_2$, y sucesivamente

$$l'_1 \cdot l_2 = l_{(1,n)} \cdot l_2 \sim l_{(1,n-1)} \cdot l_2 \sim \dots \sim l_{(1,1)} \cdot l_2 \sim l_1 \cdot l_2.$$

Y también por analogía se tiene

$$l'_1 \cdot l'_2 = l'_1 \cdot l_{(2,m)} \sim l'_1 \cdot l_{(2,m-1)} \sim \dots \sim l'_1 \cdot l_{(2,0)} = l'_1 \cdot l_2.$$

Por lo tanto $l_1 \cdot l_2 = l'_1 \cdot l'_2$.

Verifiquemos las propiedades de grupo:

1. Asociatividad: Sean $\gamma = [l], \gamma' = [l'], \gamma'' = [l''] \in \mathcal{P}_*$. Si $l_1(t)$ es una parametrización de $(l \cdot l') \cdot l''$, entonces

$$l_1(t) = \begin{cases} l(4t), & 0 \leq t \leq 1/4 \\ l'(4t-1), & 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ l''(2t-2), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

de donde con una reparametrización adecuada

$$t(s) = \begin{cases} 2s, & 0 \leq s \leq 1/2 \\ s - 1/4, & 1/2 \leq s \leq 3/4 \\ 2s - 1/2, & 3/4 \leq s \leq 1 \end{cases} .$$

Podemos obtener una parametrización $l_2(s) = l_1(t(s))$,

$$l_2(s) = \begin{cases} l(2s), & 0 \leq s \leq 1/2 \\ l'(4s-2), & 1/2 \leq s \leq 3/4 \\ l''(4s-3), & 3/4 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

para $l \cdot (l' \cdot l'')$.

2. Definimos la identidad $\text{id}_{\mathcal{P}_*} = [l] \in \mathcal{P}_*$, como la clase de l donde $l = l_0, l_1, \dots, l_N = l_*$, con l_* , la trayectoria constante dada por

$$l_*(t) = *, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Entonces para cualquier trayectoria l' , se tiene que $l' \cdot l$ es equivalente módulo retrazo a $l' \cdot l_*$, la cual módulo reparametrización es equivalente a l' .

3. Para cada $\gamma = [l] \in \mathcal{P}_*$, definimos el inverso $\gamma^{-1} = [l^{-1}]$. Trivialmente verificamos que la composición $l \cdot l^{-1}$ es equivalente módulo retrazo a la trayectoria constante l_* .

1.3. Conexiones suaves en un haz principal

La motivación de considerar el conjunto de conexiones generalizadas $\text{hom}(\mathcal{P}_*, G)$, ha sido extender el espacio de conexiones diferenciables módulo gauge $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ en un haz principal (p, E, M) con grupo G . Esto lo describiremos en la sección siguiente.

Supongamos que M es una variedad de clase \mathcal{C}^∞ . Supongamos que (p, E, M) , es un haz fibrado principal, $p : E \rightarrow M$, con fibra un grupo de Lie compacto $p^{-1}(x) \cong G$ para todo $x \in M$. Denotamos \mathfrak{g} el álgebra de Lie de G . Para más nociones básicas sobre conexiones en haces principales ver por ejemplo [Bl], [Sp] capítulo 8, [CD], [N], y resultados adicionales en [Moo].

La aplicación

$$y \cdot g = R_g(y),$$

denota la acción por la derecha de $g \in G$ en E . La identificación de los espacios tangentes a las fibras $T_y p^{-1}(x)$, $p(y) = x$ se hace mediante la derivada DR_g ,

$$DR_g : T_y p^{-1}(x) \rightarrow T_{y \cdot g} p^{-1}(x),$$

Además hay un isomorfismo canónico de cada uno de los espacios tangentes a las fibras álgebra de Lie \mathfrak{g} , que identifica a $X \in T_y p^{-1}(x)$ con $\hat{X} \in \mathfrak{g}$,

$$X \leftrightarrow \hat{X},$$

de tal manera que

$$X = \frac{d}{dt} \left(y \cdot \exp(t\hat{X}) \right) \Big|_{t=0}$$

Una **conexión** del haz principal (p, E, M) , se define como una 1-forma \mathfrak{g} -valuada, φ , de E , tal que

1. Para todo $y \in E$, y $\hat{X} \in \mathfrak{g}$, se tiene

$$\hat{X} = \varphi_y \left(\frac{d}{dt} \left(y \cdot \exp(t\hat{X}) \right) \Big|_{t=0} \right).$$

2. Son 1-formas invariantes bajo la acción adjunta de G , es decir,

$$\varphi_{y \cdot g}(DR_{g \cdot}) = \mathfrak{Ad}_{g^{-1}}[\varphi_y(\cdot)];$$

donde $\mathfrak{Ad}_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ es la representación adjunta de G en \mathfrak{g} , que proviene de tomar la derivada en la identidad $\text{id} \in G$, $D(\text{Ad}_g)|_{\text{id}}$, de la acción adjunta Ad de G en G ,

$$\begin{array}{ccc} \text{Ad}_g : G & \rightarrow & G \\ g' & \mapsto & gg'g^{-1} \end{array}.$$

El conjunto de conexiones de un haz principal se denota por \mathcal{A} . Denotamos $\overline{\Lambda^k(E, \mathfrak{g})}$ como el conjunto de k -formas \mathfrak{g} -valuadas, τ , que satisfacen

1. Para todo $y \in E$, y $\hat{X} \in \mathfrak{g}$, se tiene $\tau_y(X) = 0$.
2. $\tau_{y \cdot g}(DR_{g \cdot}) = \mathfrak{Ad}_{g^{-1}}\tau_y(\cdot)$

Se tiene la siguiente caracterización del conjunto de conexiones suaves de un haz principal.

Teorema 1.13 ([Bl]). *Sea $\varphi^0 \in \mathcal{A}$ una conexión fija, entonces existe una biyección $\overline{\Lambda^1(E, \mathfrak{g})} \leftrightarrow \mathcal{A}$, dada por $\tau \mapsto \varphi^0 + \tau$. Como $\overline{\Lambda^1(E, \mathfrak{g})}$ es un espacio vectorial, \mathcal{A} tiene una estructura afín bien definida.*

Consideremos una trayectoria lineal a pedazos $l : [0, 1] \rightarrow M$, suponiendo que la estructura lineal a pedazos de M es compatible con la estructura \mathcal{C}^∞ . Consideremos un punto fijo en la base, $x \in M$, y un punto fijo en su fibra, $y_0 \in p^{-1}(x)$. Consideremos una conexión $\varphi \in \mathcal{A}$, entonces existe una única trayectoria $\tilde{l}_{y_0} : [0, 1] \rightarrow E$, tal que

1. \tilde{l}_{y_0} es levantamiento de l , es decir

$$p \left[\tilde{l}_{y_0}(t) \right] = l(t).$$

2. Tiene velocidad horizontal respecto a la conexión A , es decir,

$$\varphi_{\tilde{l}_{y_0}(t)} \left(\frac{d}{dt} \tilde{l}_{y_0}(t) \right) = 0.$$

Se define la *traslación paralela* a lo largo de l , desde $x_0 = l(0)$ hasta $x_1 = l(1)$, como la aplicación $Hol_{\varphi, y_0, x_0, x_1}(l) : p^{-1}(x_0) \rightarrow p^{-1}(x_1)$, definida como

$$Hol_{\varphi, y_0, x_0, x_1}(l) := \tilde{l}_{y_0}(1) \quad (1.7)$$

Consideremos una trayectoria cerrada l basada en un punto fijo \star sobre la base, $\star = l(0) = l(1)$. Consideremos un punto fijo sobre la fibra $y_\star \in p^{-1}(\star)$. Al sustituir $\star = x_0 = x_1$ en (1.7) se define la **holonomía de la conexión** a lo largo de l , como

$$Hol_{\varphi, y_\star} : \mathcal{L}_\star \rightarrow p^{-1}(\star), \quad Hol_{\varphi, y_\star}(l) := Hol_{\varphi, y_\star, \star, \star}(l) = \tilde{l}_{y_\star}(1).$$

Como G actúa transitivamente en las fibras, entonces existe $g \in G$ tal que $\tilde{l}_{y_\star}(1) = y_\star \cdot g$. Entonces la función $\tilde{l}_{y_\star}(1) \mapsto g$, permite definir

$$hol_{\varphi, y_\star} : \mathcal{L}_\star \rightarrow G$$

Se verifica que

$$hol_{\varphi, y_\star \cdot g} = g^{-1} hol_{\varphi, y_\star} g$$

El **grupo de gauge** \mathcal{G} del haz principal (p, E, M) es el grupo de difeomorfismos $f : E \rightarrow E$, que preservan fibras $p = p \circ f$, y que conmutan con la acción de G , $f(y \cdot g) = f(y) \cdot g$. Se define el subgrupo $\mathcal{G}_\star \subset \mathcal{G}$ como el conjunto de transformaciones de gauge f tales que $f(y) = y$ para todo $y \in p^{-1}(\star)$. Para todo $y \in p^{-1}(\star)$ definimos $g_\star \in G$ a partir de la ecuación, $y \cdot g_\star = f(y)$. Consideremos la acción de los grupos \mathcal{G} y \mathcal{G}_\star en las 1-formas \mathfrak{g} -valuadas:

$$f^* \varphi_y(X) = \varphi_{f(y)}(Df(X)), \quad X \in T_y p^{-1}(\star).$$

para $f \in \mathcal{G}$.

Proposición 1.14. $f^* \varphi$ es también una conexión.

Demostración. 1. Verifiquemos que $f^* \varphi$ deja invariantes los campos vectoriales tangentes a las fibras que provienen de vectores en el álgebra e Lie \mathfrak{g} :

$$\begin{aligned} f^* \varphi_y \left(\frac{d}{dt} \left(y \cdot \exp(t\hat{X}) \Big|_{t=0} \right) \right) &= \varphi_{f(y)} \left(Df \left(\frac{d}{dt} \left(y \cdot \exp(t\hat{X}) \Big|_{t=0} \right) \right) \right) = \\ &= \varphi_{f(y)} \left(f(y) \cdot \frac{d}{dt} \left(\exp(t\hat{X}) \Big|_{t=0} \right) \right) = \varphi_{f(y)} \left(\frac{d}{dt} \left(f(y) \cdot \exp(t\hat{X}) \Big|_{t=0} \right) \right) = \hat{X}, \quad \hat{X} \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

2. Verifiquemos que son 1-formas invariantes bajo la acción adjunta:

$$\begin{aligned} f^* \varphi_{y \cdot g}(DR_g(X)) &= \varphi_{f(y) \cdot g}(Df(DR_g(X))) = \varphi_{f(y) \cdot g}(DR_g(Df(X))) = \\ &= \mathfrak{Ad}_{g^{-1}} \left[\varphi_{f(y)}(Df(X)) \right] = \mathfrak{Ad}_{g^{-1}} [f^* \varphi_y(X)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto $f^* \varphi \in \mathcal{A}$. □

Entonces podemos describir la acción en la holonomía como

$$\text{hol}_{\varphi,y} = \text{hol}_{f^*\varphi,y \cdot g_\star},$$

para $f \in \mathcal{G}_\star$; donde $f(y) = y \cdot g_\star$, $p(y) = \star$. En particular, para $f \in \mathcal{G}_\star$ y para $y_\star \in p^{-1}(\star)$ fijo, tendremos que $\text{hol}_{\varphi,y_\star} = \text{hol}_{f^*\varphi,y_\star}$.

Por la identificación del teorema 1.13, está bien definida la acción de \mathcal{G} y \mathcal{G}_\star en $\overline{\Lambda^1(E, \mathfrak{g})}$ por lo que se tiene una biyección de las clases $\mathcal{A}/\mathcal{G}_\star$ en las clases $\overline{\Lambda^1(E, \mathfrak{g})}/\mathcal{G}_\star$.

La **curvatura de una conexión** $\varphi \in \mathcal{A}$, es la aplicación bilineal antisimétrica \mathfrak{g} -valuada, $\omega \in \Lambda^2(E, \mathfrak{g})$,

$$\omega_y : T_y E \times T_y E \rightarrow \mathfrak{g},$$

definida como

$$\omega := d\varphi + \varphi \wedge \varphi.$$

En esta definición, el producto alternante

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha,$$

de 1-formas \mathfrak{g} -valuadas, es una 2-forma que toma valores en el haz vectorial $\Lambda^2 \mathfrak{g}$ de vectores antisimétricos del espacio vectorial de productos tensoriales $\mathfrak{g}^{\otimes 2}$. La derivada exterior de una 1-forma \mathfrak{g} -valuada, α , se define en sus componentes como una 2-forma \mathfrak{g} -valuada. Explícitamente si consideramos una base $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$, de \mathfrak{g} , y si consideramos la descomposición

$$\alpha = \sum_{k=1}^n \alpha_k \hat{e}_k,$$

donde α_k son 1-formas en E , $\alpha_k \in \mathcal{C}^\infty(E, \Lambda^1 T^* E)$, entonces

$$d\alpha := \sum_{k=1}^n (d\alpha_k) \hat{e}_k.$$

Se demuestra que la en esta definición $d\alpha$ no depende de la elección de la base $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$.

El grupo de Gauge también actúa en las formas de curvatura.

Lema 1.15 (Lema 5.2. en [N]). *Si ω es la curvatura de una conexión φ , y si $f \in \mathcal{G}$, actúa según $f(y) = y \cdot g$ con $g \in G$, para $p(y) = x$, $x \in M$, $y \in p^{-1}(x)$, entonces*

$$(f^*\omega)_y = (\mathfrak{A}d_{g^{-1}} \circ \omega_{y \cdot g}) \circ DR_g.$$

Consideremos trivializaciones del haz principal (p, E, M) , es decir, consideremos una cubierta abierta V_α para M , para la cual están bien definidas secciones del haz principal

$$s_\alpha : V_\alpha \rightarrow p^{-1}(V_\alpha) \cong V_\alpha \times G.$$

Notemos que $s_\alpha^* E$ define un G -haz principal sobre V_α . Denominamos a la sección s_α como **gauge local** del haz principal.

Dada una conexión $\varphi \in \mathcal{A}$ del haz principal, definimos el **potencial local de gauge** en V_α , como la 1-forma \mathfrak{g} -valuada,

$$A_\alpha := s_\alpha^* \varphi \in \Lambda^1(V_\alpha, \mathfrak{g}),$$

La colección de 1-formas \mathfrak{g} valuadas no necesariamente define una 1-forma en la base del haz principal M . Consideremos un punto en la intersección de dos abiertos $x \in V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, entonces existe un $g \in G$, tal que

$$s_\alpha(x) \cdot g = s_\beta(x).$$

Definimos las **funciones de transición** como las aplicaciones,

$$g_{\alpha\beta} : V_\alpha \cap V_\beta \rightarrow G,$$

tales que $s_\alpha(x) \cdot g_{\alpha\beta}(x) = s_\beta(x)$.

Teorema 1.16 (Teorema 5.1.1 en [N]). *Consideremos el haz principal (p, E, M) con fibra G , y sea V_α una cubierta abierta de la base M con secciones $s_\alpha : V_\alpha \rightarrow p^{-1}(V_\alpha)$. Supongamos que $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, y sean $g_{\alpha\beta} : V_\alpha \cap V_\beta \rightarrow G$, las funciones de transición. Entonces*

$$A_\beta = \mathfrak{Ad}_{g_{\alpha\beta}^{-1}} \circ A_\alpha + g_{\alpha\beta}^* \theta$$

donde $\theta_g : T_g G \rightarrow \mathfrak{g}$ es la **forma canónica de Cartan** en G definida por

$$\theta_g(\hat{X}) := [D(L_{g^{-1}})(g)](\hat{X}), \hat{X} \in \mathfrak{g}$$

L_g es la acción por traslación izquierda en G , $L_g(g') = g \cdot g'$. Usando una notación de grupos de matrices tendremos

$$A_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} A_\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta}. \quad (1.8)$$

Para la curvatura ω de una conexión φ , se definen 2-formas \mathfrak{g} -valuadas F^{A_α} , en los abiertos V_α , correspondientes a las trivializaciones $s_\alpha : V_\alpha \rightarrow p^{-1}(V_\alpha)$,

$$F_\alpha := s_\alpha^* \omega.$$

Denominamos **campos locales de fuerza** a las 2-formas \mathfrak{g} -valuadas, $F_\alpha^A \in C^\infty(V_\alpha, \mathfrak{g})$.

Teorema 1.17 (Teorema 5.2.3 en [N]). *Consideremos el haz principal (E, p, M) con fibra G , y sea V_α una cubierta abierta de la base M con secciones $s_\alpha : V_\alpha \rightarrow p^{-1}(V_\alpha)$. Supongamos que $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, y sean $g_{\alpha\beta} : V_\alpha \cap V_\beta \rightarrow G$, las funciones de transición. Entonces*

$$F_\beta = \mathfrak{Ad}_{g_{\alpha\beta}^{-1}} \circ F_\alpha. \quad (1.9)$$

Como en grupos de matrices $\mathfrak{Ad}_g(A) = gAg^{-1}$, entonces podemos escribir la identidad (1.9) como

$$F_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} F_\alpha g_{\alpha\beta}.$$

Nos concentramos ahora en el caso de un grupo G **abeliano**, específicamente en $G = U(1)$. Entonces, el teorema 1.17 implica que en la intersección $V_\alpha \cap V_\beta$, de dos trivializaciones, se tiene

$$F_\alpha = F_\beta.$$

Es decir, la colección de 2–formas locales \mathfrak{g} –valuadas en M , F_α , que son los campos de fuerza locales, define una 2–forma \mathfrak{g} –valuada *global* en la base M , ver [BI], [Moo] página 18. Denotamos dicha forma como

$$F \in C^\infty(M, \mathfrak{g}),$$

Como $\mathfrak{g} = \sqrt{-1}\mathbb{R}$ en el caso $G = U(1)$, entonces F es una 2–forma imaginaria, es decir

$$F^A := -\sqrt{-1}F \in C^\infty(M, \Lambda^2 T^*M)$$

es una 2–forma real, a la que llamamos **2–forma (real) de curvatura** de la conexión φ . El superíndice A hace énfasis en que F^A depende de la colección de potenciales locales de gauge,

$$A = \{A_\alpha\}.$$

Además localmente se tiene

$$F_\alpha^A = -\sqrt{-1}dA_\alpha,$$

por lo que las 2–formas de curvatura son cerradas.

La clase de cohomología de De Rham, es un invariante del haz principal (p, E, M) con fibra $U(1)$, ver [N]. En efecto, para dos conexiones $\varphi^{A^1}, \varphi^{A^2}$, se tiene

$$F_\alpha^{A^1} - F_\alpha^{A^2} = -\sqrt{-1}d(A_\alpha^1 - A_\alpha^2),$$

debido a los cambios de coordenadas (1.8), se tiene que las secciones $a_\alpha = A_\alpha^1 - A_\alpha^2$ definen 1–formas a en la base M y por lo tanto $F_\alpha^{A^1} - F_\alpha^{A^2} = -\sqrt{-1}da_\alpha$. Por lo tanto, se tiene que $\mathbf{e} \in H^2(M, \mathbb{R})$, la clase de cohomología *real con valores en los enteros*

$$\mathbf{e} := \frac{1}{2\pi} [F^A] \in H^2(M, \mathbb{R}).$$

es un invariante topológico del haz principal. A este invariante se le conoce como **clase de Euler**.

Para clasificar las conexiones en un haz principal (pE, M) con fibra $U(1)$. Consideramos el siguiente teorema.

Teorema 1.18 (Teorema de Clasificación de Conexiones Unitarias, [Moo] página 31). *Para un haz vectorial complejo unitario $\pi : L \rightarrow M$ en una variedad compàcta M , existe una biyección*

$$\mathcal{A}/\mathcal{G}_* \leftrightarrow U(1)^{b_1} \times (\Lambda^2 M)_\mathbf{e}.$$

donde $(\Lambda^2 M)_\mathbf{e} \subset C^\infty(M, \Lambda^2 T^*M)$, es el espacio de las 2–formas cerradas que representan la clase de Euler \mathbf{e} del haz vectorial. El entero positivo b_1 es el rango de la 1–homología libre singular de M , $H_1(M)$.

Para ver la definición de conexiones unitarias y clase de Euler en un haz vectorial unitario $\pi : L \rightarrow M$, ver por ejemplo [Moo] sección 1.5. En particular notamos que tienen los haces vectoriales complejos unitarios tienen funciones de transición en $U(1)$, por lo que existe una correspondencia biyectiva entre estos haces y los haces principales con grupo $U(1)$. También al comparar los potenciales locales A_α , notamos que existe una correspondencia biyectiva entre conexiones unitarias en el haz vectorial unitario y las conexiones en el haz principal con fibra $U(1)$.

Por lo tanto, para un haz principal (E, p, M) , sobre una variedad compacta M , con grupo de Lie $G = U(1)$, existe una biyección

$$\mathcal{A}/\mathcal{G}_\star \leftrightarrow U(1)^{b_1} \times (\Lambda^2 M)_e.$$

donde $(\Lambda^2 M)_e \subset \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^2 T^*M)$, son las 2-formas que representan la clase de Euler e del haz principal. El entero positivo b_1 es el rango de la 1-homología singular de M , $H_1(M)$.

Para construir la aplicación biyectiva $\mathcal{A}/\mathcal{G}_\star \rightarrow U(1)^{b_1} \times (\Lambda^2 M)_e$, se considera una colección fija de trayectorias lineales a pedazos cerradas *fijas* l_1, \dots, l_{b_1} . Suponemos que las clases de homología $[l_1], \dots, [l_{b_1}] \in H_1(M)$ son generadoras de la parte libre. Entonces para cada conexión módulo Gauge $[\varphi] \in \mathcal{A}/\mathcal{G}_\star$, se consideran las holonomías $hol_{\varphi, y_\star}(l_1), \dots, hol_{\varphi, y_\star}(l_{b_1})$, a lo largo de todas las trayectorias l_k .

Por otro lado se considera se considera para cada $[\varphi]$, su 2-forma de curvatura F^A . En particular si el haz principal es trivial, $e = 0$ y en este caso la colección de potenciales locales de gauge, A_α , define una 1-forma imaginaria global

$$A \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathfrak{g}),$$

cuya derivada sirve para definir la 2-forma de curvatura mediante,

$$F^A = -\sqrt{-1}dA.$$

También en el caso abeliano se tiene una simplificación para la descripción de \mathcal{A}/\mathcal{G} , ver [Moo] página 29, pues se tiene una biyección,

$$\mathcal{A}/\mathcal{G} \leftrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{G}_\star.$$

Supondremos que G es un grupo de Lie compacto y conexo.

Lema 1.19. 1. Para trayectorias $l', l'' \in \mathcal{L}_\star$, se tiene $hol_{\varphi, y_\star}(l' \cdot l'') = hol_{\varphi, y_\star}(l') \cdot hol_{\varphi, y_\star}(l'')$.

2. Para cualquier trayectoria $l \in \mathcal{L}_\star$, $hol_{\varphi, y_\star}(l^{-1}) = hol_{\varphi, y_\star}(l)^{-1}$.

Demostración. 1. Consideremos una conexión fija $\varphi \in \mathcal{A}$. Consideremos dos trayectorias l', l'' con puntos inicial y final \star y sus respectivos levantamientos $\tilde{l}'_{y_\star}, \tilde{l}''_{z_\star}$ donde tomamos punto fijo $y_\star \in p^{-1}(\star)$ y el punto $z_\star = \tilde{l}'_{y_\star}(1) = y_\star \cdot g'$.

Entonces para los puntos finales se tiene $\tilde{l}'_{y_\star}(1) = y_\star \cdot g'$, $\tilde{l}''_{z_\star}(1) = z_\star \cdot g''$ donde $g', g'' \in G$.

Con esto podemos considerar el levantamiento de $l = l'' \cdot l'$, $\tilde{l}_{y_\star} = \tilde{l}''_{z_\star} \cdot \tilde{l}'_{y_\star}$ para el cual se tiene punto final

$$\tilde{l}_{y_\star}(1) = \tilde{l}''_{z_\star} \cdot \tilde{l}'_{y_\star}(1) = z_\star \cdot g'' = (y_\star \cdot g') \cdot g'' = y_\star \cdot (g'g'').$$

Por lo tanto $hol_{\varphi, y_\star}(l' \cdot l'') = hol_{\varphi, y_\star}(l') \cdot hol_{\varphi, y_\star}(l'')$.

2. Consideramos el levantamiento $\tilde{l}_{z_\star}^{-1}$ de l^{-1} , donde z_\star es el punto final del levantamiento \tilde{l}_{y_\star} . Entonces $\tilde{l}_{z_\star}^{-1} = \tilde{l}_{y_\star}^{-1}$. Si $\tilde{l}_{y_\star}(1)y_\star \cdot g$, entonces $\tilde{l}_{z_\star}^{-1}(1) = y_\star = z_\star \cdot g^{-1}$. Por lo tanto, $hol_{\varphi, y_\star}(l^{-1}) = hol_{\varphi, y_\star}(l)^{-1}$.

□

Proposición 1.20. *Dos lazos lineales a pedazos $l, l' \in \mathcal{L}_\star$ definen la misma holonomía si son equivalentes módulo retrazo y/o reparametrización, $[l] = [l'] \in \mathcal{P}_\star$. Por lo tanto, está bien definida la aplicación*

$$hol_{y_\star} : \begin{array}{ccc} \mathcal{A}/\mathcal{G}_\star & \rightarrow & \text{hom}(\mathcal{P}_\star, G) \\ [\varphi] & \mapsto & hol_{\varphi, y_\star} \end{array}$$

Demostración. La prueba en la categoría suave está contenida en el teorema de representación de [Ba2] pág. 1178, y [Le] teorema 4.4. En la categoría analítica dentro de [AL] sección A.1 página 2182.

En la categoría lineal a pedazos que es la que nosotros consideramos, podemos seguir los mismos argumentos de [Ba2] sección 2.1.2. Supongamos que $l_1 \sim l_2$, con $[l_1] = [l_2] \in \mathcal{P}_\star$ entonces $l_1 \cdot l_2^{-1}$ es equivalente módulo retrazo a la trayectoria constante $l_\star = \star$. Un ejercicio de ecuaciones diferenciales verifica que dos trayectorias $l, l' \in \mathcal{L}_\star$ equivalentes bajo reparametrización, definen la misma holonomía. Consideremos una secuencia finita l_0, l_1, \dots, l_N donde $l_1 \cdot l_2^{-1} = l_N$, $l_0 = l_\star$ y donde cada pareja l_k, l_{k+1} es equivalente módulo reparametrización y/o retrazo simple para $k = 0, \dots, N-1$. Gracias a que según el lema 1.19, $hol_{\varphi, y_\star}(l' \cdot l'') = hol_{\varphi, y_\star}(l') \cdot hol_{\varphi, y_\star}(l'')$ y a que $hol_{\varphi, y_\star}(l^{-1}) = hol_{\varphi, y_\star}(l)^{-1}$ para $l, l', l'' \in \mathcal{L}$, se tiene que $id_G = hol_{\varphi, y_\star}(l_1 \cdot l_2^{-1})$. En consecuencia

$$id_G = hol_{\varphi, y_\star}(l_1 \cdot l_2^{-1}) = hol_{\varphi, y_\star}(l_1) \cdot hol_{\varphi, y_\star}(l_2^{-1}) = hol_{\varphi, y_\star}(l_1) \cdot hol_{\varphi, y_\star}(l_2)^{-1},$$

de donde $hol_{\varphi, y_\star}(l_1) = hol_{\varphi, y_\star}(l_2)$. □

Se verifica que dos trayectorias $l, l' \in \mathcal{L}_\star$, equivalentes módulo retrazo, definen la misma holonomía, ver [Ba2].

NOTACIÓN. en los sucesivos fijamos el punto y_\star sobre la fibra de \star y abreviamos la notación haciendo $hol := hol_{y_\star}$. De esta manera escribimos:

$$hol : \begin{array}{ccc} \mathcal{A}/\mathcal{G}_\star & \rightarrow & \text{hom}(\mathcal{P}_\star, G) \\ [\varphi] & \mapsto & hol_\varphi \end{array} \quad (1.10)$$

OBSERVACIÓN. En el caso abeliano hol_{y_\star} no depende del punto en la fibra y_\star .

1.4. Apéndice: k -formas discretas en complejos simpliciales

Como referencias para esta sección, ver por ejemplo [So], [DLM], [Ar] capítulo 7. Consideramos la realización geométrica de un complejo simplicial $|K|$ y un homeomorfismo $H : |K| \rightarrow M$ donde M es una variedad. Denotamos la imagen de un simplejo de dimensión k por $\sigma := H(|\sigma|) \subset M$, donde $|\sigma| \subset |K|$ es un simplejo de dimensión k . Denotamos K^k la colección de simplejos $\sigma \subset M$ de dimensión k ,

$$K^k := \{\sigma \subset M \mid \dim \sigma = k\}.$$

Denotamos $|K|^{(k)} \subset |K|$ el k -esqueleto formado por los simplejos de dimensión a lo más k , es decir

$$|K|^{(k)} = \cup \{|\sigma| \mid |\sigma| \subset |K| \text{ es simplejo } \dim \sigma \leq k\} \subset |K|.$$

El grupo de k -**cadena simpliciales** de dimensión k , $S_k|K|$ consta de la colección de sumas formales

$$\sum_{n=1}^{N_k} r_n \sigma^n$$

donde $K^k = \{\sigma^1, \dots, \sigma^{N_k}\}$, y $r_n \in \mathbb{Z}$, es decir,

$$S_k|K| := \left\{ \sum_{n=1}^{N_k} r_n \sigma^n \mid r_j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Definición 1.21. Definimos las k -**formas discreta ó k -cocadena**, como las funciones $\omega : S_k|K| \rightarrow \mathbb{R}$. Denotamos el conjunto de k -cocadenas discretas por

$$\Lambda_{\mathfrak{d}}^k M := \text{hom}(S_k|K|, \mathbb{R}).$$

Una k -forma discreta ω evaluada en una k -cadena simplicial, tiene valor

$$\omega \left(\sum_{n=1}^{N_k} r_n \sigma^n \right) = \sum_{n=1}^{N_k} r_n \omega(\sigma^n);$$

por lo que basta definir los valores $\omega(\sigma^j)$ de ω en el conjunto K^k .

Observamos que una k -forma suave $\omega \in C^\infty(M, \Lambda^k T^*M)$ tiene asociada una k -forma discreta $\omega_{\mathfrak{d}}$, definida a partir de la función

$$\omega_{\mathfrak{d}}(\sigma) := \int_{\sigma} \omega, \quad \sigma \in K^k.$$

El operador borde $\partial : S_k|K| \rightarrow S_{k-1}|K|$ está bien definido para cadenas simpliciales ya que para simplejos abstractos $\sigma = [v_0 v_1 \dots v_k]$ el borde se define como

$$\partial[v_0 v_1 \dots v_k] = \sum_j (-1)^j [v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k].$$

∂ induce un operador de coborde para las formas discretas, $(d\omega)(\sigma) := \omega(\partial\sigma)$.

$$d : \Lambda_{\mathfrak{d}}^k M \rightarrow \Lambda_{\mathfrak{d}}^{k+1} M.$$

Una k -forma discreta **cerrada** ω es aquella que satisface $d\omega = 0$, la condición $\partial \circ \partial = 0$ implica $d \circ d = 0$. Si una k -forma suave ω es cerrada, se verifica que la forma discreta $\omega_{\mathfrak{d}} \in \Lambda_{\mathfrak{d}}^k M$ también es cerrada.

Se tiene el siguiente resultado, ver por ejemplo [DLM] corolario 25.

Teorema 1.22 (Lema de Poincaré discreto). *Sea M homeomorfa a una bola, $\dim M = N$ con borde ∂M homeomorfo a una $(N-1)$ -esfera. Sea $H : |K| \rightarrow M$, una estructura lineal a pedazos, y $\omega \in \Lambda_{\mathbb{d}}^k M$ una k -forma discreta cerrada. Supongamos que existe un vértice $x \in K^0$ tal que*

$$\forall \Delta \in K \text{ simplejo } \dim \Delta = N, x \in \Delta.$$

Entonces existe una $(k-1)$ -forma discreta $\eta \in \Lambda_{\mathbb{d}}^{k-1} M$ tal que $d\eta = \omega$.

Definición 1.23. El espacio de k -cadenas con coeficientes reales o k -corrientes discretas, es el espacio dual de funciones lineales,

$$(\Lambda_{\mathbb{d}}^k M)' := \text{hom} \left(\Lambda_{\mathbb{d}}^k M, \mathbb{R} \right)$$

el cual se puede generar a partir de las funciones

$$F^n(\omega) := \omega(\sigma^n), \text{ donde } n = 1, \dots, N_k, \text{ con } K^k = \{\sigma^1, \dots, \sigma^{N_k}\}.$$

1.5. Apéndice: Límites inyectivos y proyectivos

Una referencia básica para límites proyectivos en el contexto de espacios de probabilidad es por ejemplo [Da], sección 1.3. En el caso de límites proyectivos e inyectivos de espacios vectoriales topológicos que será de nuestro interés se puede consultar [Sc], [Ko].

Consideremos una familia $X_i, i \in I$, de grupos topológicos Hausdorff localmente compactos, donde (I, \succeq) es un conjunto parcialmente ordenado, y una colección $\pi_{ji} : X_j \rightarrow X_i$ epimorfismos continuos para todo $j \succeq i$. El **límite proyectivo** $\varprojlim_{\pi} X_i$ es el subconjunto del producto cartesiano $\prod_i X_i$, formado por las colecciones π -compatibles. Es decir, consta de las colecciones $\{x_i\}_{i \in I} \in \prod_i X_i$, tales que $\pi_{ji}(x_j) = x_i$ para todo $j \succeq i$. La topología proyectiva es la topología como subespacios del espacio $\prod_i X_i$. Es la topología más débil tal que son continuas las proyecciones $\pi_i : \varprojlim_{\pi} X_i \rightarrow X_i$.

Lema 1.24. $\varprojlim_{\pi} X_i$ hereda las propiedades de la familia X_i , es Hausdorff, en el caso de grupos compactos X_i , es compacto (Tychonoff). Si Y es otro grupo topológico que satisface $t_i : Y \rightarrow X_i$ son homomorfismos continuos, con $t_i = \pi_{ji} \circ t_j$, entonces existe un homomorfismo continuo $t : Y \rightarrow \varprojlim_{\pi} X_i$, y diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc}
 & & Y \\
 & \swarrow^{t_i} & \searrow^{t_j} \\
 X_i & \longleftarrow X_j & \varprojlim_{\pi} X_i \\
 & \swarrow^{\pi_{ji}} & \searrow^{\pi_j} \\
 & & X_i
 \end{array}$$

π_i

Sea X_i una familia de grupos topológicos Hausdorff, localmente compactos, $i \in I$ un conjunto parcialmente ordenado. Para una colección de monomorfismos $\iota_{ij} : X_i \rightarrow X_j$, para todo $i \preceq j$, el grupo **límite inyectivo**, $\varinjlim_{\iota} X_i$, es

$$\sqcup_i X_i / \sim,$$

donde la relación de equivalencia es $x_i \sim x_j$ si $\iota_{ij}(x_i) = x_j$. El límite inyectivo tiene la topología más gruesa tal que al tomar clase, las aplicaciones $\iota_i : X_i \rightarrow \varinjlim X_i$ son continuas.

En el caso de que X_i sean espacios vectoriales topológicos podemos identificar $\varinjlim X_i$ como un subespacio de $\oplus_i X_i$. En general no tiene la estructura de grupo topológico.

Lema 1.25. *Si existen monomorfismos continuos $t_i : X_i \rightarrow Y$, tales que $t_i = t_j \circ \iota_{ij}$, entonces existe un monomorfismo continuo $t : \varinjlim X_i \rightarrow Y$ y diagramas conmutativos*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & Y \\
 & & & \nearrow^{t_i} & \uparrow t \\
 X_i & \xrightarrow{\iota_{ij}} & X_j & \xrightarrow{\iota_j} & \varinjlim X_i \\
 & \searrow^{\iota_i} & & \nearrow^{\iota_j} & \\
 & & & &
 \end{array}$$

1.6. Apéndice: Medidas

Referencias básicas para los conceptos de teoría de la medida empleados en esta tesis son por ejemplo [CD], [Bi], [Ru], [KF], [HL], [Da].

Consideremos un espacio topológico X Hausdorff, localmente compacto. Una **medida boreliana** (positiva), es una función numerablemente aditiva, $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$, en la σ -álgebra de borelianos provenientes de la topología \mathcal{B} . Si $\mu(X) < \infty$, decimos que es una medida finita.

Se define el **soporte** de μ como un conjunto cerrado $\text{sop } \mu \subset X$ que satisface

1. $\mu(X - \text{sop } \mu) = 0$.
2. $\mu(G \cap \text{sop } \mu) > 0$, para todo abierto G , tal que $G \cap \text{sop } \mu \neq \emptyset$.

El soporte es único módulo conjuntos de medida 0.

No toda medida tiene soporte. Sin embargo, si X es segundo numerable entonces toda medida tiene soporte.

Consideramos medidas borelianas con signo en X , $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. μ admite una descomposición $\mu = \mu^+ - \mu^-$ donde μ^\pm son medidas positivas, [CD] D.7. La medida positiva $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ se llama **variación total** de μ .

De manera análoga las medidas complejas, μ , toman valores en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} + \sqrt{-1}(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$, se descomponen como $\mu = (\mu_{\mathbb{R}}^+ - \mu_{\mathbb{R}}^-) + \sqrt{-1}(\mu_{\mathbb{C}}^+ - \mu_{\mathbb{C}}^-)$.

Se suele añadir más estructura al espacio de medidas. Una medida boreliana (positiva) μ , de un espacio topológico Hausdorff, localmente compacto, X , se llama **regular** si

1. $\mu(U) = \sup \{\mu(K) \mid K \subset U, K \text{ es compacto}\}$.
2. $\mu(U) = \inf \{\mu(A) \mid U \subset A, A \text{ es abierto}\}$.
3. $\mu(K) < \infty$ para todo compacto $K \subset X$.

En una variedad toda medida boreliana se puede regularizar tiene una medida exterior regular. Ver [Fe] para el caso \mathbb{R}^n .

Los mismas definiciones aplican para medidas con signo (resp. complejas) usando las condiciones sobre las componentes μ^\pm (resp. $\mu_{\mathfrak{R}}^\pm, \mu_{\mathfrak{I}}^\pm$).

Una medida **de Radon** (real) en un espacio Hausdorff localmente compacto X es una función lineal continua en el espacio de funciones continuas con soporte compacto $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$, provisto de la topología inductiva de las normas del supremo en los espacios de funciones continuas en compactos $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, $K \subset X$, más detalles por ejemplo en [CD] página 430. A una medida boreliana regular con signo μ se le asigna una medida de Radon $\hat{\mu}$ mediante

$$\hat{\mu}(f) := \int_X f d\mu, f \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}).$$

El recíproco también es cierto, ver por ejemplo [CD] página 48 o [HL].

Teorema 1.26 (Riesz). *Sea X un espacio Hausdorff, localmente compacto, dada una medida de Radon*

$$\hat{\mu} : \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

en las funciones (complejas) de soporte compacto $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$, continuo en la restricción a $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ para todo compacto $K \subset X$. Entonces existe una medida boreliana regular con signo $\mu \in \mathfrak{M}^\pm(X)$ tal que

$$\hat{\mu}(\Psi) = \int_X \Psi d\mu, \text{ para todo } \Psi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}).$$

Además, si el funcional es positivo $\hat{\mu}(\Psi) \geq 0$, para toda $\Psi \geq 0$, entonces la medida es positiva, $\mu \in \mathfrak{M}^+(X)$.

Capítulo 2

Escalas y conexiones C –planas

En el capítulo anterior hemos definido el grupo de lazos lineales a pedazos de holonomía \mathcal{P}_\star de clases módulo retrazo y reparametrización de lazos lineales a pedazos en M basados en un punto fijo $\star \in M$, (definición 1.12). También hemos definido una conexión generalizada como la holonomías definidas a lo largo de clases en \mathcal{P}_\star , es decir como un punto de $\text{hom}(\mathcal{P}_\star, G)$. Hemos visto como las conexiones módulo gauge $\mathcal{A}/\mathcal{G}_\star$ de un haz principal dan lugar a conexiones generalizadas.

En este capítulo describiremos el concepto de escalas empleado en [MMZ], el cual nos permitirá definir conexiones C –planas. Los resultados de este capítulo no son originales sino que para conveniencia del lector conforman un compendio del formalismo esbozado en [MMZ]. La única parte novedosa es la sección 2.5 en donde se describe el grupo de lazos de holonomía $\mathcal{P}_{C_i, \star}$ a una escala fija como el grupo fundamental de una gráfica.

1. Definiremos una sucesión de escalas \mathcal{E} , etiquetadas por $i \in \mathbb{N}$. Cada escala tiene asociada una estructura lineal a pedazos pedazos en M , $\phi_i : |C_i| \rightarrow M$, donde $|C_i|$ es un poliedro, y también un homeomorfismo $h_i : Sd|C_i| \rightarrow M$ de cierto complejo simplicial $Sd|C_i|$. Para dos escalas distintas tendremos que $h_i^{-1} \circ h_j : Sd|C_j| \rightarrow Sd|C_i|$ es una aplicación simplicial con $j \geq i$.
2. El grupo de lazos de holonomía a una escala fija, $\mathcal{P}_{C_i, \star}$, descrito en [MMZ], se corresponderá con el grupo fundamental del 1–esqueleto $h_i(Sd|C_i|^{(1)})$. El espacio de las conexiones C_i –planas, será $\text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, G)$. Esto lo demostramos en la sección 2.5.
3. Empleando la inclusión de 1–esqueletos $h_i(Sd|C_i|^{(1)}) \subset h_j(Sd|C_j|^{(1)})$, tendremos la inclusión $\mathcal{P}_{C_i, \star}$ en $\mathcal{P}_{C_j, \star}$ y entonces obtendremos las aplicaciones de engrosamiento definidas en [MMZ],

$$\pi_{ji} : \text{hom}(\mathcal{P}_{C_j, \star}, G) \rightarrow \text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, G), \quad i \leq j.$$

Así obtendremos el límite proyectivo

$$\underline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_\star} = \varprojlim \text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, G)$$

de conexiones C_i –planas.

4. Describiremos la relación de este espacio $\underline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_\star}$ con las conexiones generalizada en $\text{hom}(\mathcal{P}_\star, G)$.

5. Aunque no será necesario en el resto de la tesis, al final del capítulo describiremos una colección de generadores y una presentación para $\mathcal{P}_{C,i,\star}$.

2.1. Descomposiciones celulares y escalas

En esta sección nos interesa definir el concepto de "escalas" en una variedad M a partir de estructuras lineales a pedazos en M .

Consideramos una variedad suave M , provista de una estructura lineal a pedazos (P, ϕ) compatible con la estructura suave, $\phi : P \rightarrow M$ donde $P = \sqcup_{i \in I} \tau_i / \sim_P$ es un poliedro, recordar definición 1.10.

Definición 2.1. Definimos la **descomposición celular** C de M , asociadas al poliedro P . Como el conjunto de imágenes $c = \phi(a) \subset M$, de células del poliedro $a \subset P$. Recordemos la definición de células de un poliedro 1.5.

NOTACIÓN. Para hacer énfasis en el papel que jugarán las descomposiciones celulares, denotaremos los poliedros P :

$$|C| = P$$

de tal manera que la estructura lineal a pedazos se puede escribir como

$$\phi : |C| \rightarrow M, \quad \text{donde } |C| \text{ es poliedro.} \quad (2.1)$$

Proposición 2.2. *Se tiene una descomposición como unión disjunta de células de C ,*

$$M = \bigsqcup_{c \in C} c.$$

Demostración. Por la sobreyectividad de $\eta_{|C|} : \sqcup_{i \in I} \tau_i \rightarrow |C|$, para todo punto $x \in |C|$ existe un punto en la unión disjunta $y \in \sqcup_{i \in I} \tau_i$, y está contenido en el interior de un polígono τ_i o bien en el interior de una cara $\tau_{p,i} \subset \tau_i$ (recordemos que el interior de un polígono es el complemento de sus caras propias). Esto prueba que $|C|$ es unión de células de polítopos, por tanto M es unión de sus imágenes en M . Para verificar que se trata de una unión disjunta, consideremos dos células $a, a' \subset |C|$. Consideremos la familia \mathcal{F} de todos los polítopos τ_i y todas sus caras. Supongamos que $a = \eta_{|C|}(\text{int}\tau_{p,i})$ y $a' = \eta_{|C|}(\text{int}\tau_{q,j})$, donde $\tau_{p,i}, \tau_{q,j} \in \mathcal{F}$. Si $a \cap a' \neq \emptyset$ entonces $(\tau_{p,i}, \tau_{q,j})$ están en la relación \mathcal{R}_P que define el poliedro $P = |C|$. Por tanto $\tau_i'' \subset \tau_{p,i}, \tau_j'' \subset \tau_{q,j}$, $\eta_{|C|}(\tau_i'') \cap \eta_{|C|}(\tau_j'') \neq \emptyset$, y una biyección afín $f_{\tau_i'', \tau_j''} : \tau_i'' \rightarrow \tau_j''$. Por lo tanto $\eta_{|C|}(\tau_j'') = \eta_{|C|}(\tau_i'') \subset |C|$. De hecho como $\eta(\text{int}\tau_{p,i}) \cap \eta(\text{int}\tau_{q,j}) \neq \emptyset$ entonces podemos considerar $\tau_i'' = \tau_{p,i}$ y $\tau_j'' = \tau_{q,j}$, por tanto $\eta_{|C|}(\tau_{q,j}) = \eta_{|C|}(\tau_{p,i})$ y entonces $a = a' = \eta_{|C|}(\text{int}\tau_{p,i})$. \square

Definición 2.3. Consideremos un poliedro $|C|$ con descomposición celular C y una elección de puntos $\{x_c \in c \mid c \in C\}$ a los que llamaremos **baricentros** del poliedro. Si consideramos el complejo simplicial $Sd|C|$ como en la proposición 1.2, diremos que una aplicación afín biyectiva $T : Sd|C| \rightarrow |C|$, es una **triangulación baricéntrica**. Denotamos

$$h := \phi \circ T : Sd|C| \rightarrow M$$

Las imágenes de los vértices de $Sd|C|$ corresponden al conjunto de baricentros $\{x_c \in c \mid c \in C\}$ Si $|K_\sigma| \subset Sd|C|$ es un simplejo entonces la colección de células $h(|K_\sigma| - \partial|K_\sigma|) \subset M$ forman una **descomposición celular baricéntrica** de M .

NOTACIÓN. Denotamos el k -esqueleto de la triangulación baricéntrica $Sd|C|$, como $Sd|C|^{(k)}$, es decir $Sd|C|^{(k)}$ es la realización geométrica de un subcomplejo simplicial de dimensión k de $Sd|C|$,

$$Sd|C|^{(k)} \subset Sd|C|.$$

Denotamos la colección de k -simplejos de $Sd|C|$ como

$$Sd|C|^k := \{|K_\sigma| \subset Sd|C| \mid |K_\sigma| \text{ es un simplejo, } \dim |K_\sigma| = k\}.$$

Por otro lado al conjunto $h(|K_\sigma|) \subset M$ de imágenes de simplejos orientados de dimensión k en $Sd|C|$, lo denotaremos por SdC^k .

$$(Sd|C|^k, h) := \{h(|K_\sigma|) \subset M \mid |K_\sigma| \text{ es simplejo de } Sd|C|, \dim |K_\sigma| = k\}.$$

Además adoptaremos la notación

$$\sigma := h(|K_\sigma|) \in (Sd|C|^k, h),$$

para las imágenes de los simplejos de $Sd|C|$ en M .

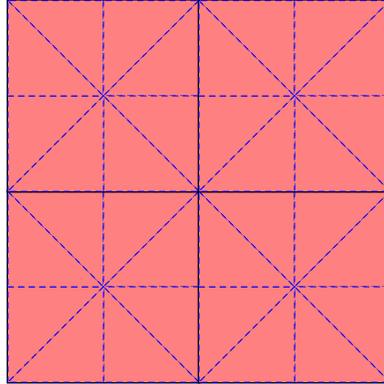


Figura 2.1: Una porción de un poliedro $|C_i|$ y su triangulación baricéntrica $Sd|C_i|$ en dimensión 2

Definición 2.4. Diremos que una sucesión

$$\mathcal{E} = \{(|C_i|, \phi_i; Sd|C_i|, T_i)\}_{i \in \mathbb{N}},$$

de estructuras lineales a pedazos $\phi_i : |C_i| \rightarrow M$ compatibles con la estructura suave de M , y triangulaciones baricéntricas $T_i : Sd|C_i| \rightarrow |C_i|$, constituyen una sucesión de **escalas** si:

1. $|C_j|$ es subpoliedro de $|C_i|$ y $\phi_i^{-1} \circ \phi_j : |C_j| \rightarrow |C_i|$ es una biyección afín. En particular, ambas estructuras lineal a pedazos sobre M son isomorfismos según la definición 1.10, pues toda subtriangulación rectilínea $H : |K| \rightarrow |C_j|$ del poliedro $|C_j|$ induce una triangulación rectilínea $\phi_i^{-1} \circ \phi_j \circ H : |K| \rightarrow |C_i|$ del poliedro $|C_i|$.

2. Tiene propiedad de refinamiento en las triangulaciones baricéntricas: El complejo simplicial $Sd|C_j|$ es subtriangulación del poliedro $Sd|C_i|$ con aplicación afín $h_i^{-1} \circ h_j : Sd|C_j| \rightarrow Sd|C_i|$, donde $h_i = \phi_i \circ T_i$.
3. Es una sucesión exhaustiva: Para todo abierto $U \subset M$, existe una escala $(|C_i|, \phi_i; Sd|C_i|, T_i)$ y una célula $c \in C_i$, $\dim c = \dim M$, tal que $c \subset U$.

Por la primera condición cada célula en C_i se descompone en unión finita de células de C_j . Por la segunda condición cada k -simplejo $\sigma \in (Sd|C_i|^k, h_i)$ es unión de k -simplejos, $\sigma = \sigma^1 \cup \dots \cup \sigma^n$, $\sigma^n \in (Sd|C_j|^k, h_j)$ para toda $j \geq i$. En este caso diremos que la escala $(|C_j|, \phi_j; Sd|C_j|, T_j)$ es **más fina que la escala** $(|C_i|, \phi_i; Sd|C_i|, T_i)$. Esta es una relación en \mathcal{E} que se corresponde con el buen orden de los naturales.

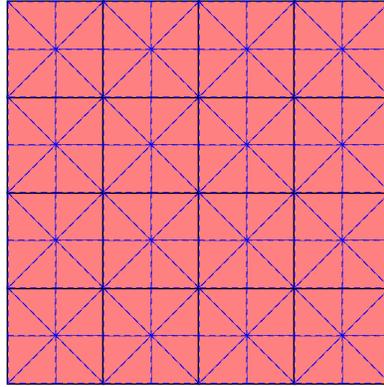


Figura 2.2: Un poliedro C_i y su triangulación baricéntrica $Sd|C_{i+1}|$ en una escala más fina

EJEMPLO. Consideramos un complejo simplicial $|K|$ y un homeomorfismo $h : |K| \rightarrow M$ donde para cada coordenada baricéntrica $\phi_\sigma : |K_\sigma| \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$, la composición $h \circ \phi_\sigma^{-1} : |K_\sigma| \rightarrow M$, es suave. Entonces es posible considerar el complejo simplicial $|K|$ como poliedro y h como una estructura lineal a pedazos compatible con la estructura suave de M . Definimos el complejo simplicial $Sd|K|$ como la subdivisión baricéntrica del poliedro $|K|$ que corresponde a la elección de los **baricentros geométricos** $x_\sigma = \phi_\sigma^{-1}(\frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+1})$ en cada simplejo $|K_\sigma| \subset |K|$, según se construyó en la proposición 1.2. Se define inductivamente $Sd^i|K| = Sd(Sd^{i-1}|K|)$. Consideremos la sucesión de poliedros $|C_0| = |K|$ y $|C_i|$ como la i -ésima subdivisión baricéntrica sucesiva $Sd^i|K|$ de $|K|$. Notemos que $Sd|C_i| = Sd^{i+1}|K|$. Consideremos las inclusiones afines $T_{i+1,i} : Sd^{i+1}|K| \rightarrow Sd^i|K|$, y definimos las estructuras lineales a pedazos

$$\phi_i = T_{1,0} \circ \dots \circ T_{i+1,i} : Sd^{i+1}|K| \rightarrow M.$$

Verifiquemos que $(Sd^i|K|, \phi_i; Sd^{i+1}|K|, T_{i+1,i})$ es en efecto una sucesión de escalas:

1. El poliedro $Sd^j|K|$ es subpoliedro de $Sd^i|K|$ con aplicación afín $\phi_i^{-1} \circ \phi_j = T_{i+1,i} \circ \dots \circ T_{j,j-1}$.
2. Para ver la propiedad de refinamiento para triangulaciones baricéntricas vemos que $Sd^{j+1}|K|$ es subtriangulación de $Sd^{i+1}|K|$ con aplicación afín $h_i \circ h_j^{-1} = T_{i+1,i} \circ \dots \circ T_{j+1,j}$.

3. Para garantizar que se trata de una sucesión exhaustiva consideramos una distancia $\text{dist}_\sigma \leq \sqrt{2}$, en cada simplejo $|K_\sigma| \subset |K|$ de dimensión máxima $\dim |K_\sigma| = \dim |K|$, dicha distancia está definida en (1.1). Entonces todo simplejo de la subdivisión baricéntrica $|K_{\sigma'}| \subset \text{Sd}|K_\sigma|$ tiene diámetro

$$\text{diam}_\sigma(|K_{\sigma'}|) \leq \text{máx dist}_\sigma(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2})$$

donde $x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2} \in |K_\sigma|$, recorre los baricentros de los subsimplejos de $|K_\sigma|$ (incluyendo los vértices de $|K_\sigma|$). Por argumentos geométricos, para todo subsimplejo $|K_{\sigma'}| \subset \text{Sd}|K_\sigma|$,

$$\text{diam}_\sigma(|K_{\sigma'}|) \leq \frac{N-1}{N} \text{diam}_\sigma(|K_\sigma|).$$

Entonces por compacidad de M para $\varepsilon > 0$ existe una escala $(\text{Sd}^i|K|, \phi_i; \text{Sd}^{i+1}|K|, T_{i+1,i})$ suficientemente fina tal que

$$\text{máx}_{\sigma, \dim \sigma = N} \left\{ \text{máx}_{\sigma' \subset \sigma} \{ \text{diam}_\sigma(|K_{\sigma'}|) \} \right\} \leq \left(\frac{N-1}{N} \right)^i \text{máx}_{\sigma, \dim \sigma = N} \text{diam}_\sigma(|K_\sigma|) < \varepsilon,$$

donde $|K_{\sigma'}$ recorre todos los simplejos de $\text{Sd}^i|K|$, y donde $|K_\sigma|$ es cada simplejo de $|K|$.

En particular para toda dist_σ -bola B contenida en $h_i^{-1}(U) \cap |K_\sigma|$, donde $U \subset M$ es un abierto cualquiera, existe un simplejo $|K_{\sigma'}| \subset \text{Sd}^i|K|$, $\dim |K_{\sigma'}| = N$, contenido en $B \subset h_i^{-1}(U)$. Por lo tanto en cualquier abierto $U \subset M$, existe un N -simplejo $\sigma' \subset M$, $\sigma' \in (\text{Sd}^{i+1}|K|^N, h_i)$, tal que $\sigma' \subset U$.

2.2. Conexiones C-planas

En esta sección definiremos la noción de conexiones C-planas asociadas a una descomposición celular C , según [MMZ].

Consideremos una escala fija $(|C|, \phi; \text{Sd}|C|, h)$. Definiremos una relación de equivalencia \sim_C en la colección de trayectorias lineales a pedazos

$$\mathcal{L} = \{l : [0, 1] \rightarrow M \mid l \text{ es lineal a pedazos}\}.$$

Lema 2.5. *Dada una trayectoria lineal a pedazos $l \in \mathcal{L}$ existe una única colección de células $c_k \in C$, $k = 1, \dots, m$ tal que*

1. *La unión disjunta $\sqcup_{k=1}^m c_k$ cubre la imagen $l([0, 1])$.*
2. *$\sqcup_{k=1}^m c_k$ es cubierta mínima, es decir, deja de ser cubierta si no consideramos alguna célula.*
3. *Las células se pueden ordenar como una secuencia de células (no necesariamente distintas)*

$$(c_1, \dots, c_n)$$

*tal que $c_j \neq c_{j+1}$, con $\bar{c}_j \cap c_{j+1} = c_{j+1}$ ó bien $c_j \cap \bar{c}_{j+1} = c_j$, para $j = 1, \dots, n-1$. Diremos ésta es una secuencia de **células disjuntas adyacentes**.*

Demostración. Como vimos en la proposición 2.2 la unión disjunta de todas las células cubre M por lo que la imagen de l es cubierta por células c_1, \dots, c_m , elegimos esta cubierta tal que $l([0, 1]) \cap c_k \neq \emptyset$ para $k = 1, \dots, n$. Claramente es mínima ya que es unión disjunta y si quitamos una célula, deja de estar cubierta la imagen en $l([0, 1]) \cap c_k$. Para ver que es única consideremos otra cubierta $\sqcup_{k=1}^r c'_k$, entonces para toda c_k de la primera cubierta elegimos c'_k en la segunda cubierta que cubre $l([0, 1]) \cap c_k$. Entonces $c_k \cap c'_k \neq \emptyset$ en consecuencia $c_k = c'_k$, así concluimos que la cubierta $\sqcup_{k=1}^r c'_k$ es la misma cubierta que $\sqcup_{k=1}^m c_k$.

Como $l : [0, 1] \rightarrow M$ es lineal a pedazos, existe una partición $t_0 = 0 < \dots < t_N = 1$ de $[0, 1]$ tal que $l([t_k, t_{k+1}])$ está contenida en la imagen $\phi(\rho_k) \subset M$ correspondiente a un polítopo ρ_k del poliedro $|C|$, $\phi : |C| \rightarrow M$, y tal que la aplicación $\phi^{-1} \circ l : [t_k, t_{k+1}] \rightarrow \rho_k \subset |C|$ es inyectiva y afín, por lo tanto la imagen es un segmento de recta. Consideremos una cara c de $\phi_i(\rho_k)$ tal que intersecta el segmento de recta $l([t_k, t_{k+1}])$. Entonces $l([t_k, t_{k+1}]) \cap \bar{c} = \overline{l([t_k, t_{k+1}]) \cap c}$ es un compacto conexo (es un segmento cerrado de recta), de donde por inyectividad y continuidad

$$J_k(c) := l^{-1}(l([t_k, t_{k+1}]) \cap c) \subset [0, 1],$$

es un intervalo de $[0, 1]$. Entonces $l^{-1}(c)$ consta de una unión finita disjunta de intervalos

$$\sqcup \{J_k(c) : l([t_k, t_{k+1}]) \cap c \neq \emptyset\}$$

Si $J_k(c), J_{k+1}(c)$ son dos **intervalos adyacentes**, es decir si,

$$\overline{J_k(c)} \cap J_{k+1}(c) \neq \emptyset \text{ ó } J_k(c) \cap \overline{J_{k+1}(c)} \neq \emptyset,$$

entonces su unión es otro intervalo. Uniendo intervalos adyacentes $J_x(c)$, hasta un intervalo maximal

$$L_s(c) = J_k(c) \cup J_{k+1}(c) \cup \dots \cup J_{k+r}(c),$$

podemos considerar una unión finita y disjunta de intervalos no consecutivos $L_s(c) \subset [0, 1]$ tales que

$$l^{-1}(c) = \sqcup_{s=1}^m L_s(c).$$

Finalmente reetiquetando todos los intervalos $\sqcup_c \sqcup_r L_r(c)$ como $\sqcup_{j=1}^n I_j$, tenemos una colección de intervalos adyacentes disjuntos de $[0, 1]$, $I_j, j = 1, \dots, n$ tales que $\sqcup_{j=1}^n I_j = [0, 1]$. Esto lo escribimos como

$$I_1 < \dots < I_n.$$

Consideramos la secuencia de células no necesariamente distintas c_1, \dots, c_n donde $l(I_j) \subset c_j \cap l([0, 1])$. Notemos que $c_j \neq c_{j+1}$. Además por continuidad ó bien $\bar{c}_j \cap c_{j+1} \neq \emptyset$, ó bien $c_j \cap \bar{c}_{j+1} \neq \emptyset$. Es decir, ó bien c_j es cara de c_{j+1} ó bien c_{j+1} es cara de c_j . \square

Definición 2.6. De la demostración anterior tenemos que para toda trayectoria lineal a pedazos $l : [0, 1] \rightarrow M$, existe una secuencia de intervalos adyacentes consecutivos

$$I_1 < \dots < I_n,$$

tal que para todo $x \in I_k$, el intervalo I_k es el intervalo maximal conteniendo x , tal que $l(I_k)$ está contenido en alguna célula $c_k \in C$.

Decimos que la trayectoria lineal a pedazos $l : [0, 1] \rightarrow M$ **recorre la secuencia de células adyacentes**

$$(c_1, \dots, c_n).$$

Las células c_j son en general de dimensiones distintas.

Definición 2.7. Consideremos dos trayectorias $l, l' \in \mathcal{L}$, decimos que son **equivalentes módulo la descomposición celular** C , $l \sim_C l'$ si recorren la misma secuencia de células disjuntas, descrita en la definición 2.6.

La relación \sim_C es una relación de equivalencia.

Proposición 2.8. *Existe una correspondencia biunívoca entre clases $[l]_C \in \mathcal{L} / \sim_C$ y colecciones ordenadas de células disjuntas adyacentes*

$$\leftrightarrow (c_1, \dots, c_n), \text{ donde o bien } \overline{c_j} \cap c_{j+1} = c_{j+1} \text{ ó bien } c_j \cap \overline{c_{j+1}} = c_j, j = 1, \dots, n-1.$$

Demostración. La asignación $[l]_C \mapsto (c_1, \dots, c_n)$ es inyectiva pues si l, l' recorren la misma secuencia de células adyacentes entonces por definición $[l]_C = [l']_C$. Es sobreyectiva: dada una secuencia de células adyacentes (c_1, \dots, c_n) consideramos una trayectoria $l \in \mathcal{L}$ de la forma

$$l = t_{x_n, x_{n-1}} \cdots \cdots t_{x_2, x_1}$$

donde $t_{x_k, x_{k-1}}$ es una aplicación afín que tiene por imagen una arista $\tau_k \in (Sd|C|^1, h)$. Dicha arista tiene vértices x_k, x_{k-1} los cuales corresponden a los puntos final e inicial de $t_{x_k, x_{k-1}}$ respectivamente, es decir,

$$t_{x_k, x_{k-1}}(0) = x_{k-1}, t_{x_k, x_{k-1}}(1) = x_k.$$

Por tratarse de células adyacentes podemos hacer la composición de trayectorias l . Notemos que si la imagen de $t_{x_k, x_{k-1}}$ es una arista entonces podemos asociarle una pareja ordenada de células adyacentes (c_{k-1}, c_k) dentro de la secuencia de células adyacentes (c_1, \dots, c_n) . El punto inicial x_{k-1} , de t_k coincide con el baricentro x_{k-1} de c_{k-1} , mientras que el punto final x_k coincide con el baricentro de c_k . De esta manera, la cubierta disjunta de células $\sqcup_{j=1}^n c_j$ está asociada a $[l]_C$. \square

Proposición 2.9. 1. *Si (c_1, \dots, c_n) es la secuencia de células adyacentes asociadas a la trayectoria lineal a pedazos $l : [0, 1] \rightarrow M$ entonces (c_n, \dots, c_1) es la secuencia de células adyacentes asociada a la trayectoria $l^{-1}(t) = l(1-t)$.*

2. *Si (c_1, \dots, c_n) es la secuencia de células adyacentes asociadas a la trayectoria lineal a pedazos $l : [0, 1] \rightarrow M$ y si $s : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función continua lineal a pedazos creciente, $s(0) = 0, s(1) = 1$, entonces la trayectoria lineal a pedazos que se obtiene de la reparametrización $l'(t) := l(s(t))$ tiene asociada la misma secuencia de células adyacentes (c_1, \dots, c_n) .*

Demostración. Para la primera afirmación consideremos la secuencia de intervalos adyacentes consecutivos I_1, \dots, I_n tales que $l(I_k)$ es el intervalo maximal contenido en una célula c_k , entonces los intervalos $I'_k = \{1-t : t \in I_k\}$ son intervalos maximales tales que $l^{-1}(I'_k)$ está contenida en una célula c_k .

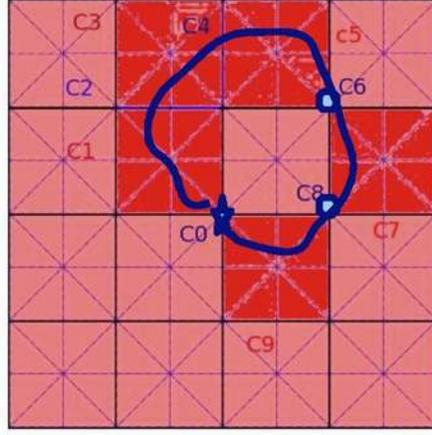


Figura 2.3: Una trayectoria $l \in \mathcal{L}_*$ y la secuencia de células correspondiente $[l]_C = (c_0, c_1, \dots, c_9, c_0) \in \mathcal{L}_*/\sim_C$

Para la segunda afirmación consideremos los intervalos adyacentes consecutivos $I_1 < \dots < I_n$ tales que tienen imagen maximal $l(I_k)$ contenida en células c_k . Entonces $I'_k := s^{-1}(I_k)$ es una secuencia de intervalos adyacentes consecutivos con imagen maximal $l \circ s(I'_k)$ contenida en una célula c_k . Por tratarse de una función creciente y biyectiva $[0, 1] = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_n$ y también $I_1 < \dots < I_n$. \square

Lema 2.10. *Definimos*

$$\mathcal{L}_{h(Sd|C|^{(1)})} := \left\{ l : [0, 1] \rightarrow h(Sd|C|^{(1)}) \mid l \text{ es lineal a pedazos} \right\}.$$

Consideremos la relación de equivalencia \approx de reparametrización en $\mathcal{L}_{h(Sd|C|^{(1)})}$, entonces existe una biyección

$$\left(\mathcal{L}_{h(Sd|C|^{(1)})} / \approx \right) \leftrightarrow \mathcal{L} / \sim_C.$$

Demostración. Consideramos la aplicación $l \mapsto [l]_C$, con dominio $\mathcal{L}_{h(Sd|C|^{(1)})}$ y codominio \mathcal{L} / \sim_C . Supongamos que l' es reparametrización de l entonces $l = l' \circ s$ donde $s : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función creciente con $s(0) = 0, s(1) = 1$. Entonces $l' = l \circ s$ y l tienen la misma imagen y recorren la misma secuencia de células, según la proposición 2.9. Por tanto definen la misma clase $[l']_C = [l]_C$. Esto prueba que está bien definida la aplicación

$$\left(\mathcal{L}_{h(Sd|C|^{(1)})} / \approx \right) \rightarrow \mathcal{L} / \sim_C.$$

Esta es una aplicación inyectiva: Si dos trayectorias l, l' recorren la misma secuencia de células $[l]_C = [l']_C$, entonces recorren los mismos vértices de $h(Sd|C|^{(1)})$, y corresponden a la misma trayectoria

$$t_{n,n-1} \cdots t_{2,1}, \quad \text{con } t_{k,k-1}(0) = x_{k-1}, t_{k,k-1}(1) = x_k.$$

Es sobreyectiva: Esto se probó en la proposición 2.9. \square

Definición 2.11. Dadas dos clases de reparametrización $[l]_{\approx}, [l']_{\approx} \in \mathcal{L}_{h(Sd|C|^{(1)})}/\approx$, decimos que son equivalentes módulo retrazo

$$[l]_{\approx} \asymp [l']_{\approx},$$

si tienen representantes $l, l' \in \mathcal{L}_{h(Sd|C|^{(1)})}$ equivalentes módulo retrazo y reparametrización, es decir si $l \sim l'$.

Notemos que $l \approx l'$ implica $l \sim l'$ por lo que están bien definidas las clases de \asymp –equivalencia y el cociente

$$\left(\mathcal{L}_{h(Sd|C|^{(1)})}/\approx \right) / \asymp.$$

y además como \sim es la clase de equivalencia módulo reparametrización y retrazo, entonces se tiene la biyección

$$\left(\mathcal{L}_{h(Sd|C|^{(1)})}/\approx \right) / \asymp \quad \leftrightarrow \quad \mathcal{L}_{h(Sd|C|^{(1)})}/\sim.$$

Definición 2.12. Por la biyección del lema 2.10, tendremos una **relación de equivalencia módulo retrazo en \mathcal{L}/\sim_C** que también denotamos por \asymp . Así tautológicamente tendremos la biyección

$$\left(\mathcal{L}_{h(Sd|C|^{(1)}, \star)}/\approx \right) / \asymp \quad \leftrightarrow \quad (\mathcal{L}_{\star}/\sim_C) / \asymp.$$

Para trayectorias cerradas basadas en \star también se tiene las clases de equivalencia y la biyección,

$$\left(\mathcal{L}_{h(Sd|C|^{(1)}, \star)}/\approx \right) / \asymp \quad \leftrightarrow \quad (\mathcal{L}_{\star}/\sim_C) / \asymp. \quad (2.2)$$

Las trayectorias cerradas

$$\mathcal{L}_{\star} = \{l : [0, 1] \rightarrow M \mid l \text{ es lineal a pedazos, } l(0) = l(1) = \star\},$$

no constituyen un grupo con la composición de trayectorias ya que no es asociativa la composición.

El conjunto $\mathcal{L}_{\star}/\sim_C$ tampoco tiene estructura de grupo con la composición de trayectorias ya que no hay un inverso por ejemplo de $l \cdot l^{-1}$ con la composición de trayectorias de células como operador y con neutro la trayectoria constante \star .

Por otro lado, sí es posible es definir una estructura de grupo en

$$(\mathcal{L}_{\star}/\sim_C) / \asymp = \left(\mathcal{L}_{h(Sd|C|^{(1)}, \star)}/\approx \right) / \asymp.$$

Por ejemplo la clase de las trayectorias $l \cdot l^{-1}$ es el neutro del grupo.

Definición 2.13. Definimos el **grupo de C -lazos de holonomía**, como

$$\mathcal{P}_{C, \star} := (\mathcal{L}_{\star}/\sim_C) / \asymp. \quad (2.3)$$

Dado un grupo de Lie compacto G , reconocemos las **conexiones C -planas** como el conjunto de holonomías

$$\text{hom}(\mathcal{P}_{C, \star}, G).$$

Lema 2.14. *Se tiene el isomorfismo*

$$\mathcal{P}_{C,\star} \simeq \mathcal{L}_{h(Sd|C|^{(1)},\star)/\sim}, \quad (2.4)$$

donde la equivalencia \sim es módulo retrazo y reparametrización en $Sd|C|^{(1)}$, recordar la definición 1.11.

Demostración. Se tiene la biyección

$$\left[\left(\mathcal{L}_{h(Sd|C|^{(1)},\star)/\approx} \right) / \asymp \right] \leftrightarrow \mathcal{P}_{C,\star}$$

Por otro lado existe una biyección

$$\left[\left(\mathcal{L}_{h(Sd|C|^{(1)},\star)/\approx} \right) / \asymp \right] \leftrightarrow \left(\mathcal{L}_{h(Sd|C|^{(1)},\star)/\sim} \right),$$

Por lo tanto, se tiene una biyección

$$\mathcal{P}_{C,\star} \leftrightarrow \mathcal{L}_{h(Sd|C|^{(1)},\star)/\sim}.$$

Usando la estructura de grupo dada por la composición de trayectorias, se verifica que es un homomorfismo de grupos. \square

El siguiente lema nos da una descripción precisa de la relación de equivalencia módulo retrazo \asymp defina según el lema 2.10 por la biyección (2.2) para las trayectorias de células $\mathcal{L}_\star / \sim_C$.

Usando esta caracterización de las clases módulo retrazo en secuencias de células $\mathcal{L}_\star / \sim_C$, podemos probar la siguiente afirmación.

Teorema 2.15. *Existe un epimorfismo de grupos*

$$\widehat{\text{pr}}_C : \mathcal{P}_\star \rightarrow \mathcal{P}_{C,\star} = \mathcal{P}_{C,\star}. \quad (2.5)$$

Denotamos dicho homomorfismo por

$$\widehat{\text{pr}}_C(\gamma) = [\gamma]_C \text{ para } \gamma \in \mathcal{P}_\star \quad (2.6)$$

Demostración. Tenemos la aplicación sobreyectiva

$$\mathcal{L}_\star \rightarrow (\mathcal{L}_\star / \sim_C) \rightarrow (\mathcal{L}_\star / \sim_C) / \asymp \leftrightarrow \mathcal{P}_{C,\star}$$

Consideremos dos trayectorias $l, l' \in \mathcal{L}_\star$ equivalentes módulo retrazo, $l \sim l'$, consideremos las secuencias de células que definen $[l]_C, [l']_C$. Entonces las trayectorias

$$l_1 = t_{x_n, x_{n-1}} \cdots t_{x_2, x_1}, \quad l'_1 = t_{x_n, x_{n-1}} \cdots t_{x_2, x_1}, \quad t_{x_k, x_{k-1}}(0) = x_{k-1}, t_{x_k, x_{k-1}}(1) = x_k,$$

descritas en la proposición 2.9, con $l_1 \in [l]_C, l'_1 \in [l']_C$, coinciden. Por lo tanto, se tiene la equivalencia módulo retrazo de células $[l]_C \asymp [l']_C$, según la definición 2.12. Es decir está bien definida la aplicación

$$[\mathcal{L}_\star / \sim] \rightarrow [(\mathcal{L}_\star / \sim_C) / \asymp] = \mathcal{P}_{C,\star}.$$

Se verifica que es homomorfismo. La sobreyectividad es inmediata por la propiedad de que las células cubren todo M , $\sqcup_{c \in C} c = M$. \square

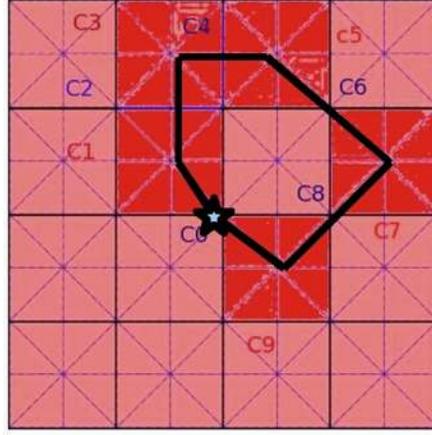


Figura 2.4: Una secuencia $[l]_C = (c_0, c_1 \dots, c_9, c_0)$ representante de una secuencia de células $\gamma \in \mathcal{P}_{C,\star}$ y la trayectoria representante de $\text{bar}(\gamma) \in \mathcal{P}_\star$.

Sea

$$\mathcal{L}_{Sd|C|^{(1),\star}} := \left\{ l : [0, 1] \rightarrow Sd|C|^{(1)} \right\}$$

el conjunto de lazos en el uno esqueleto $Sd|C|^{(1)}$. Notemos que

$$\mathcal{P}_{C_i,\star} \simeq \mathcal{L}_{h(Sd|C|^{(1),\star})} \simeq \mathcal{L}_{Sd|C|^{(1),\star}}$$

Como observamos en la demostración de la proposición 2.14,

$$h_* : \mathcal{L}_{Sd|C|^{(1),\star}} \rightarrow \mathcal{L}_\star$$

envía trayectorias equivalentes módulo retrazo en $\mathcal{L}_{Sd|C|^{(1),\star}}$ en trayectorias equivalentes módulo retrazo en \mathcal{L}_\star . Entonces está bien definido el homomorfismo inducido en

$$\mathcal{P}_{C,\star} \simeq \mathcal{L}_{Sd|C|^{(1),\star}} / \sim$$

las clases módulo retrazo y reparametrización, así h_* definen el homomorfismo

$$\text{bar}_C : \mathcal{P}_{C,\star} \rightarrow \mathcal{P}_\star; \tag{2.7}$$

Éste es una sección de la relación de equivalencia \sim_C , descrita en la proposición 2.15 como un homomorfismo $\widehat{\text{pr}}_i : \mathcal{P}_\star \rightarrow \mathcal{P}_{C,\star}$. Es decir $\widehat{\text{pr}}_C \circ \text{bar}_C = \text{id}$.

2.3. Engrosamiento y límite proyectivo de conexiones C -planas

En esta sección definiremos la aplicación de "engrosamiento",

$$\pi_{ji} : \text{hom}(\mathcal{P}_{C_j,\star}, G) \rightarrow \text{hom}(\mathcal{P}_{C_i,\star}, G),$$

las cuales definirán conexiones C_i -planas de una escala gruesa $(|C_i|, \phi_i; Sd|C_i|, T_i)$ a partir de conexiones C_j -planas a una escala más fina $(|C_j|, \phi_j; Sd|C_j|, T_j)$, $j \geq i$. Vemos también que la

sucesión de conexiones C_i -planas de todas las escalas junto con los engrosamientos definirán un límite proyectivo

$$\overleftarrow{\mathcal{A}/\mathcal{G}_\star}$$

Denotamos la clase descrita en la proposición 2.15 como

$$\widehat{\text{pr}}_i(\gamma) = [\gamma]_{C_i}, \quad \gamma \in \mathcal{P}_\star.$$

Tomemos dos escalas $(|C_i|, \phi_i; Sd|C_i|, T_i), (|C_j|, \phi_j; Sd|C_j|, h_j), i \leq j$, existe entonces un epimorfismo que consiste en considerar la clase \sim_{C_i} de γ , para cada representante γ se tiene $[\gamma]_{C_j} \in \mathcal{P}_{C_j, \star}$, y está bien definido el homomorfismo de grupos

$$\text{pr}_{ji} : \mathcal{P}_{C_j, \star} \longrightarrow \mathcal{P}_{C_i, \star}. \quad (2.8)$$

Se tienen los siguientes diagramas conmutativos para $i \leq j \leq k$:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{P}_{C_j, \star} & \\ \text{pr}_{ji} \swarrow & & \nwarrow \text{pr}_{kj} \\ \mathcal{P}_{C_i, \star} & \xleftarrow{\text{pr}_{ki}} & \mathcal{P}_{C_k, \star} \end{array},$$

los cuales inducen una colección de monomorfismos $\iota_{ij} := \text{hom}(\text{pr}_{ji}, G)$, con diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} & \text{hom}(\mathcal{P}_{C_j, \star}, G) & \\ \iota_{ij} \nearrow & & \nwarrow \iota_{jk} \\ \text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, G) & \xrightarrow{\iota_{ik}} & \text{hom}(\mathcal{P}_{C_k, \star}, G) \end{array}. \quad (2.9)$$

También están bien definidas las aplicaciones:

$$\widehat{\iota}_i : \text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, G) \rightarrow \text{hom}(\mathcal{P}_\star, G) = \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_\star}. \quad (2.10)$$

Así es posible tomar los límites inyectivos y proyectivos:

$$\varinjlim_{\iota} \text{hom}(\mathcal{P}_{C, \star}, G), \quad \text{y} \quad \varprojlim_{\text{pr}} \mathcal{P}_{C, \star}.$$

Además si consideramos las proyecciones del grupo de lazos lineales a pedazos, \mathcal{P}_\star ; a cada $\mathcal{P}_{C_i, \star}$ definidos en (2.6), tendremos las aplicaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\star &\rightarrow \varprojlim_{\text{pr}} \mathcal{P}_{C, \star}, \\ \varinjlim_{\iota} \text{hom}(\mathcal{P}_{C, \star}, G) &\rightarrow \text{hom}(\mathcal{P}_\star, G). \end{aligned}$$

El ingrediente esencial para definir las aplicaciones de engrosamiento, son monomorfismos de $\mathcal{P}_{C_i, \star}$ en $\mathcal{P}_{C_j, \star}$.

Proposición 2.16. Consideremos una pareja de escalas $(|C_i|, \phi_i; Sd|C_i|, T_i), (|C_j|, \phi_j; Sd|C_j|, T_j)$ con $i \leq j$. Entonces:

1. Los monomorfismos

$$\text{enc}_{ij} : \mathcal{P}_{C_i, \star} \rightarrow \mathcal{P}_{C_j, \star},$$

definidos como

$$\text{enc}_{ij} = \widehat{\text{pr}}_j \circ \text{bar}_i$$

(ver la definición (2.7)) satisfacen, $\text{pr}_{ji} \circ \text{enc}_{ij} = \text{id}_{\mathcal{P}_{C_i, \star}}$.

2. Además se tienen los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{P}_{C_j, \star} & \\ \text{enc}_{ij} \nearrow & & \searrow \text{enc}_{jk} \\ \mathcal{P}_{C_i, \star} & \xrightarrow{\text{enc}_{ik}} & \mathcal{P}_{C_k, \star} \end{array} \quad (2.11)$$

Demostración. La verificación es un cálculo. Para la primera afirmación se tiene:

$$\text{pr}_{ji} \circ \text{enc}_{ij} = \text{pr}_{ji} \circ (\widehat{\text{pr}}_j \circ \text{bar}_i) = \widehat{\text{pr}}_i \circ \text{bar}_i = \text{id},$$

ya que bar_i es sección de $\widehat{\text{pr}}_i$, es decir, $\widehat{\text{pr}}_i \circ \text{bar}_i = \text{id}$. Para la segunda afirmación se tiene:

$$\text{enc}_{jk} \circ \text{enc}_{ij} = \widehat{\text{pr}}_k \circ \text{bar}_j \circ \widehat{\text{pr}}_j \circ \text{bar}_i$$

dado que $Sd|C_j|^{(1)} \subset Sd|C_i|^{(1)}$ se tiene $\text{bar}_j \circ \widehat{\text{pr}}_j \circ \text{bar}_i = \text{bar}_i$, ver definición (2.7). Por tanto $\text{enc}_{jk} \circ \text{enc}_{ij} = \widehat{\text{pr}}_k \circ \text{bar}_i = \text{enc}_{ik}$. \square

Definición 2.17. Con las aplicaciones enc_{ij} es posible definir **aplicaciones de engrosamiento de conexiones C_j -planas**

$$\pi_{ji} := \text{hom}(\text{enc}_{ij}) : \text{hom}(\mathcal{P}_{C_j, \star}, G) \rightarrow \text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, G). \quad (2.12)$$

Proposición 2.18. La aplicación π_{ji} es sobreyectiva.

Demostración. Como enc_{ij} es sección de $\widehat{\text{pr}}_{ji}$ se tiene que, $\text{pr}_{ji} \circ \text{enc}_{ij} = \text{id}$, es decir,

$$\pi_{ji} \circ \iota_{ij} = \text{id}.$$

Dado $\varphi \in \text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, G)$ consideramos

$$\varphi' := \iota_{ij}(\varphi) \in \text{hom}(\mathcal{P}_{C_j, \star}, G),$$

y claramente $\pi_{ji}(\varphi') = \varphi$. \square

El hecho importante es que también se pueden considerar límites proyectivos de conexiones C -planas.

Definición 2.19. Denotamos el **límite proyectivo de conexiones C_i -planas** como

$$\mathcal{A}/\mathcal{G}_\star := \varprojlim_{\pi} \text{hom}(\mathcal{P}_{C,\star}, G). \quad (2.13)$$

El siguiente teorema se sigue de la proposición 2.16

Teorema 2.20. Sea $\mathcal{E} = \{|C_i|, \phi_i; Sd|C_i|, T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de escalas (definidas en 2.4), consideremos los monomorfismos $\text{enc}_{ij} : \mathcal{P}_{C_i,\star} \rightarrow \mathcal{P}_{C_j,\star}$ de acuerdo al lema 2.16. Se tienen las siguientes afirmaciones:

1. Conmutan los diagramas

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{P}_\star & \\ \text{bar}_i \nearrow & & \nwarrow \text{bar}_j \\ \mathcal{P}_{C_i,\star} & \xrightarrow{\text{enc}_{ij}} & \mathcal{P}_{C_j,\star} \end{array}$$

2. En consecuencia tendremos los diagramas conmutativos,

$$\begin{array}{ccc} & \text{hom}(\mathcal{P}_\star, G) & \\ \beta_j \swarrow & & \searrow \beta_i \\ \text{hom}(\mathcal{P}_{C_i,\star}, G) & \xleftarrow{\pi_{ji}} & \text{hom}(\mathcal{P}_{C_j,\star}, G) \end{array}$$

donde $\beta_i := \text{hom}(\text{bar}_i, G)$.

3. Por la segunda afirmación existe una aplicación β , tal que conmutan los diagramas

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}/\mathcal{G}_\star \xrightarrow{\text{hol}} \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_\star} \xlongequal{\quad} \text{hom}(\mathcal{P}_\star, G) & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{A}/\mathcal{G}_\star \\ & \downarrow \beta_i & \swarrow \pi_i \\ & \text{hom}(\mathcal{P}_{C_i,\star}, G) & \end{array} \quad (2.14)$$

Demostración. La primera afirmación se sigue de

$$\text{bar}_j \circ \text{enc}_{ij} = \text{bar}_j \circ \widehat{\text{pr}}_j \circ \text{bar}_i.$$

Como $Sd|C_i|^{(1)} \subset Sd|C_j|^{(1)}$ entonces se tiene $\text{bar}_j \circ \widehat{\text{pr}}_j \circ \text{bar}_i = \text{bar}_i$.

La segunda afirmación se sigue de la primera. La tercera es el paso al límite. \square

2.4. Aproximaciones simpliciales

Para esta sección consideramos como referencias básicas [Md] y [Ha].

Definición 2.21. Dada una aplicación continua entre dos complejos simpliciales $f : |K| \rightarrow |L|$, decimos que una aplicación simplicial $g : |K| \rightarrow |L|$ es una **aproximación simplicial** de f si $g(a) = f(a)$ para cada vértice $a \in |K|$, y además la unión $st_K(a)$ de los simplejos con vértice a , es tal que $f(st_K(a)) \subset st_L(g(a))$. De acuerdo a [Md] teorema 2.5.3 toda aproximación simplicial g de f es homotópica a f relativa a los vértices de $|K|$.

Teorema 2.22 ([Md] Teorema 2.5.20). *Sean K, L complejos simpliciales y M subcomplejo de K y $f : |K| \rightarrow |L|$ una aplicación continua tal que $f|_{|M|}$ es simplicial. Entonces existe una subdivisión baricéntrica restringida $Sd^r(|K|, |M|)$, y una aplicación simplicial $g : Sd^r(|K|, |M|) \rightarrow |L|$ homotópica a f tal que $f = g$ en $|M|$, es decir $g \simeq f \text{ rel } |M|$.*

Para describir los simplejos del complejo simplicial $Sd^r(|K|, |M|)$, consideremos los vértices los baricentros de los simplejos de $K - L$, junto con los vértices de M . Si x_1, \dots, x_r son baricentros de $\sigma_1 \subset \sigma_2 \cdots \subset \sigma_r$ con $\dim \sigma_r \geq \dim \sigma_{r-1}$, y si a_0, \dots, a_s son vértices de un simplejo en L , entonces $x_1, \dots, x_r, a_0, \dots, a_s$ son vértices de un simplejo en $Sd(|K|, |M|)$, ver (proposición 2.5.10 en [Md]).

Como corolario del teorema de aproximación simplicial cuando M es vacío, se tiene la siguiente.

Proposición 2.23 ([Ha] Teorema 2C.1). *Si K es un complejo simplicial finito y si L es un complejo simplicial arbitrario, entonces toda aplicación continua $f : |K| \rightarrow |L|$ es homotópica a una aplicación simplicial $g : Sd^r|K| \rightarrow |L|$, donde $Sd^r|K|$ es una subdivisión baricéntrica iterada de $|K|$.*

2.5. El grupo $\mathcal{P}_{C_i, \star}$ como grupo fundamental

Teorema Principal 2.24 (Teorema 3.3.9 en [Md]). *Consideremos una escala $(|C|, \phi; Sd|C|, T)$ en M . Entonces $\mathcal{P}_{C, \star}$ es isomorfo al grupo de clases de homotopía de trayectorias basadas en \star , en la gráfica o 1-esqueleto $Sd|C|^{(1)}$. Es decir*

$$\mathcal{P}_{C, \star} \simeq \pi_1 \left(Sd|C|^{(1)}, \star \right).$$

Demostración. La demostración sigue argumentos del teorema 3.3.9 en [Md].

Recordemos que por definición

$$\mathcal{P}_{C, \star} \simeq (\mathcal{L}_{\star} / \sim_C) / \simeq$$

Al elegir los baricentros x_k de cada célula c_k , las trayectorias de células adyacentes (c_1, \dots, c_n) están en correspondencia con **trayectorias de baricentros** (x_1, \dots, x_n) donde x_k, x_{k+1} son vértices de una arista en $Sd|C|$. Dos trayectorias de células son equivalentes módulo retrazo \simeq si y sólo si sus trayectorias de baricentros se pueden obtener una a partir de la otra mediante una secuencia finita de operaciones de la forma

1. Reemplaza $(\dots, x_k, x_{k+1}, \dots)$ por (\dots, x_k, \dots) si $x_k = x_{k+1}$, o conversamente (\dots, x_k, \dots) por (\dots, x_k, x_k, \dots) .
2. Reemplaza $(\dots x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots)$ por $(\dots x_{k-1}, x_{k+1}, \dots)$, si $x_{k-1} = x_{k+1}$, o conversamente $(\dots x_k, x_k, \dots)$ por $(\dots x_k, x, x_k, \dots)$.

Decimos entonces que dos **secuencias de baricentros son equivalentes módulo retrazo**.

Según la demostración de la proposición ??, para toda secuencia de células disjuntas adyacentes $(c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{L}_{\star} / \sim_C$, $c_1 = c_n = \star$, hay una trayectoria $l \in \mathcal{L}_{h(Sd|C|^{(1)}, \star)}$, tal que l recorre sucesivamente los baricentros de las células $c_1, \dots, c_n = c_1$; es decir,

$$l = t_{x_n, x_{n-1}} \cdots t_{x_2, x_1}$$

donde si x_k son los baricentros de las células c_k ,

$$t_{x_k, x_{k-1}}(0) = x_{k-1}, t_{x_k, x_{k-1}}(1) = x_k, k = 2, \dots, n.$$

y donde la imagen $t_{x_k, x_{k-1}}([0, 1]) \subset h(Sd|C|^{(1)})$ es una arista τ_k en $Sd|C|^{(1)}$. Consideremos la secuencia $(c'_1, \dots, c'_r) \in \mathcal{L}_*/\sim_C$, y la trayectoria l' con descomposición análoga:

$$l' = t_{x'_r, x'_{r-1}} \cdots \cdots t_{x'_2, x'_1},$$

donde si x'_k son los baricentros de las células c'_k ,

$$t_{x'_k, x'_{k-1}}(0) = x'_{k-1}, t_{x'_k, x'_{k-1}}(1) = x'_k, k = 2, \dots, r.$$

Si dos trayectorias de células cerradas $[l]_C, [l']_C \in \mathcal{L}_*/\sim_C$ son equivalentes según \asymp , entonces, según el lema 2.14, l es equivalente módulo retrazo/reparametrización a l' . Por lo tanto, $l = l^1, l' = l^m$, donde l^1, \dots, l^m es una secuencia de trayectorias de la forma

$$l^a = t_{x_n, x_{n-1}}^a \cdots \cdots t_{x_{k+2}, x_{k+1}}^a \cdot t_{x_{k+1}, x_k}^a \cdot t_{x_k, x_{k-1}}^a \cdot t_{x_{k-1}, x_{k-2}}^a \cdots \cdots t_{x_2, x_1}^a$$

con $t_{x_k, x_{k-1}}^a(1) = x_k, t_{x_k, x_{k-1}}^a(0) = x_{k-1}$. Notamos que l^a es homotópica a l^{a+1} ,

$$l^{a+1} = t_{x_n, x_{n-1}}^{a+1} \cdots \cdots t_{x_{k+2}, x_{k+1}}^{a+1} \cdot t_{x_{k-1}, x_{k-2}}^a \cdots \cdots t_{x_2, x_1}^{a+1}$$

cuando $x_{k+1} = x_{k-1}$. Por lo tanto l es homotópica a l' .

Esto prueba que existe el homomorfismo

$$\mathcal{P}_{C, \star} \rightarrow \pi_1 \left(Sd|C|^{(1)}, \star \right).$$

La sobreyectividad se sigue del teorema de aproximación simplicial 2.23 aplicado a trayectorias cerradas $l : [0, 1] \rightarrow h(Sd|C|^{(1)})$.

Para la inyectividad consideremos una trayectoria contraíble

$$l = t_{x_n, x_{n-1}} \cdots \cdots t_{x_k, x_{k-1}} \cdots \cdots t_{x_2, x_1}, x_n = x_1 = \star$$

entonces existe una partición $a_1 = 0 < a_2 < \dots < a_{n+1} = 1$ de $[0, 1]$ tal que $l(a_k) = x_k$ y $l|_{[a_k, a_{k+1}]}$ es simplicial. También existe una homotopía

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow h(Sd|C|^{(1)}), H(\cdot, 0) = l(\cdot), H(\cdot, 1) = H(0, 1) = H(1, 1) = \star.$$

Consideremos el complejo simplicial $|K| = [0, 1]^2$ con vértices,

$$v_k = (a_k, 0), k = 1, \dots, n, v_0 = (0, 1), v_{n+1} = (1, 1)$$

Definimos los 2-simplejos

$$\sigma_k := (v_0, v_k, v_{k+1}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Consideremos el subsimplejo 1-dimensional $|M| = \partial|K| \subset |K|$ con vértices $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, v_0$. Por el teorema de aproximación simplicial 2.22 (ver también [Md] corolario 2.5.22) existe un complejo simplicial $Sd^r(|K|, |M|)$ que es subcomplejo de $|M|$, tal que $H \simeq G \text{ rel } |M|$, tal que

$$G : Sd^r(|K|, |M|) \rightarrow Sd|C|^{(1)},$$

que es una aplicación simplicial

$$G(\cdot, 0) = l(\cdot), G(\cdot, 1) = H(0, 1) = H(1, 1) = \star.$$

Notemos que tenemos

$$x_k = G(v_k), k = 1, \dots, n; \quad \star = G(v_1) = G(v_n) = G(v_0) = G(v_{n+1}).$$

Denotemos los baricentros de los 2-simplejos $\sigma_k \subset |K|$ como b_k y los 2-subsimplejos correspondientes a la subdivisión baricéntrica $Sd(|K|, |M|)$ como $\sigma_{k,1}, \dots, \sigma_{k,m}$. Por su parte denotamos los baricentros $b_{k,1}, \dots, b_{k,m}$ de $\sigma_{k,1}, \dots, \sigma_{k,m}$ respectivamente. De manera recursiva podemos denotar los 2-simplejos de $Sd^r(|K|, |M|)$ y sus respectivos baricentros como

$$\sigma_{k,k_1,k_2,\dots,k_r} \subset Sd^r(|K|, |M|), b_{k,k_1,k_2,\dots,k_r} \in \text{int } \sigma_{k,k_1,k_2,\dots,k_r}$$

Tomemos un 2-simplejo $\sigma \subset Sd^r(|K|, |M|)$, hay dos casos:

CASO I. Si σ no tiene aristas en $|M|$, entonces σ es de la forma $\sigma = \sigma_{k,k_1,k_2,\dots,k_r} \subset Sd^r(|K|, |M|)$ elegimos la trayectoria lineal a pedazos

$$t_\sigma := t_{b_{k_r-1,\dots,k_1,k}, b_{k_r,\dots,k_1,k}} \cdots t_{b_{k,k_1}, b_k} \cdot t'_{b_k, v_0} \quad (2.15)$$

las cuales se obtienen como composición de trayectorias simpliciales $t_{b_{k_r-1,\dots,k_1,k}, b_{k_r,\dots,k_1,k}}, \dots, t_{b_k, v_0}$, cuyos puntos iniciales y finales son respectivamente $b_{k_r,\dots,k_1,k}, b_{k_r-1,\dots,k_1,k}, \dots, v_0, b_k$. Notemos que t_σ tiene punto inicial en v_0 y punto final en $b_{k_r,\dots,k_1,k}$, el cual es vértice de σ .

CASO II. Si σ tiene aristas en $|M|$, entonces tiene vértices b, v_k, v_{k+1} donde b es algún baricentro. Entonces elegimos la trayectoria con imagen contenida en $|M|$,

$$t_\sigma := t_{v_k, v_{k-1}} \cdots t_{v_1, v_0}.$$

Por otro lado consideramos los vértices a_0, a_1, a_2 de $\sigma = (a_0, a_1, a_2)$, donde a_0 es el punto final de t_σ , y también la trayectoria lineal a pedazos cerrada

$$l_\sigma := t_{a_0, a_2} \cdot t_{a_2, a_1} \cdot t_{a_1, a_0}. \quad (2.16)$$

Entonces podemos considerar la trayectoria cerrada con punto inicial y final v_0 ,

$$t_\sigma^{-1} \cdot l_\sigma \cdot t_\sigma,$$

la cual se asocia a la 1-cadena simplicial $\partial\sigma$.

De esta manera la trayectoria lineal a pedazos cerrada $t_{v_0, v_{n+1}} \cdot t_{v_{n+1}, v_n} \cdot t_{v_n, v_1} \cdot t_{v_1, v_0}$ que da lugar a la 1-cadena $\partial|K|$, es también la composición

$$t_{v_0, v_{n+1}} \cdot t_{v_{n+1}, v_n} \cdot t_{v_n, v_1} \cdot t_{v_1, v_0} = \prod_{\sigma \subset Sd^r(|K|, |M|)} t_\sigma^{-1} \cdot l_\sigma \cdot t_\sigma$$

Pero $l = G \circ t_{v_0, v_{n+1}} \cdot t_{v_{n+1}, v_n} \cdot t_{v_n, v_1} \cdot t_{v_1, v_0}$, es simplicial, entonces

$$l = \prod_{\sigma \subset Sd^r(|K|, |M|)} G \circ (t_\sigma^{-1} \cdot l_\sigma \cdot t_\sigma) : [0, 1] \rightarrow Sd|C|^{(1)}.$$

Por lo tanto para cada 2-simplejo σ , la imagen $G \circ (t_\sigma^{-1} \cdot l_\sigma \cdot t_\sigma)$ está contenida en un 1-simplejo τ de $Sd|C|^{(1)}$. Si por ejemplo G envía la arista (a_0, a_1) en la arista τ , entonces o bien la imagen de (a_1, a_2) es $-\tau$ ó bien la imagen de (a_2, a_0) es $-\tau$. Esto significa que l es de la forma

$$l = l_s \cdots \cdots l_d \cdot m^{-1} \cdot m \cdot l_{d-1} \cdots \cdots l_1,$$

donde $m^{-1} \cdot m = G \circ l_\sigma$. Entonces l es equivalente módulo retrazo a $l_s \cdots \cdots l_d \cdot l_{d-1} \cdots \cdots l_1$. Procediendo de manera análoga con $l_s \cdots \cdots l_d \cdot l_{d-1} \cdots \cdots l_1$, podemos verificar que l es equivalente módulo retrazo a la trayectoria constante $l_\star = \star$. □

Lema 2.25. *Conmutan los diagramas*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{C_i, \star} & \xrightarrow{\text{enc}_{ij}} & \mathcal{P}_{C_j, \star} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \pi_1(Sd|C_i|^{(1)}, \star) & \xrightarrow{\pi_1(\lambda_{ij}, \star)} & \pi_1(Sd|C_j|^{(1)}, \star) \end{array}$$

Donde $\lambda_{ij} : Sd|C_i|^{(1)} \rightarrow Sd|C_j|^{(1)}$ es la inclusión de 1-esqueletos $Sd|C_i|^{(1)} \subset Sd|C_j|^{(1)}$.

Demostración. Consideremos el isomorfismo $\mathcal{P}_{C_i, \star} \simeq \mathcal{L}_{Sd|C_i|^{(1)}, \star} / \sim$ donde se consideran las clases de equivalencia \sim módulo retrazo y reparametrización de trayectorias en el 1-esqueleto $Sd|C_i|^{(1)}$.

Consideremos una trayectoria $l \in \mathcal{L}_{Sd|C_i|^{(1)}, \star}$, se tiene

$$\text{bar}_{C_i}[l] = [(h_i)_* l]$$

donde $[(h_i)_* l] \in \mathcal{L}_\star / \sim$, es la clase módulo retrazo y reparametrización de una trayectoria lineal a pedazos $(h_i)_* l \in \mathcal{L}_\star$. Sabemos que l puede considerarse una trayectoria simplicial

$$l = t_{x_n, x_{n-1}} \cdots \cdots t_{x_3, x_2} \cdot t_{x_2, x_1}, \quad x_1 = x_n = \star,$$

donde $t_{x_{k+1}, x_k} : [0, 1] \rightarrow Sd|C_i|$ es una trayectoria simplicial con punto inicial y final, en los baricentros x_k, x_{k+1} de células adyacentes $c_k, c_{k+1} \in C_i$. Entonces

$$\begin{aligned} \widehat{\text{pr}}_{C_j} \circ \text{bar}_{C_i}[l] &= \text{pr}_{C_j} [(h_i)_* l] = \\ &= \text{pr}_{C_j} [(h_j)_* \circ (\lambda_{ij})_* l]. \end{aligned}$$

Como $Sd|C_i|$ es subcomplejo de $Sd|C_j|^{(1)}$, entonces $(\lambda_{ij})_* l$ es una trayectoria simplicial en $Sd|C_j|^{(1)}$, es decir

$$(\lambda_{ij})_* (t_{x_n, x_{n-1}} \cdots \cdots t_{x_3, x_2} \cdot t_{x_2, x_1}) = t_{y_m, y_{m-1}} \cdots \cdots t_{y_3, y_2} \cdot t_{y_2, y_1}$$

de donde

$$\widehat{\text{pr}}_{C_j} [t_{y_m, y_{m-1}} \cdots \cdots t_{y_3, y_2} \cdot t_{y_2, y_1}] = [c'_1, \dots, c'_m], \quad c'_r \in C_j.$$

y donde y_k son los baricentros de $c'_k \in C_j$. Por lo tanto

$$\text{enc}_{ij}[c_1, \dots, c_n] = [c'_1, \dots, c'_m].$$

Por otro lado $[c_1, \dots, c_n] \in \mathcal{P}_{C_i, \star}$ corresponde a la clase de homotopía $[l] \in \pi_1(Sd|C_i|, \star)$. Mientras que $[(\lambda_{ij})_* l] \in \pi_1(Sd|C_j|^{(1)}, \star)$ corresponde a $[c'_1, \dots, c'_m] \in \mathcal{P}_{C_j, \star}$. □

Notemos que la aplicación $(h_i)_* : \mathcal{L}_{Sd|C_i|^{(1)}, \star} \rightarrow \mathcal{L}_\star$ en clases de homotopía define un homomorfismo

$$(h_i)_* : \pi_1 \left(Sd|C_i|^{(1)}, \star \right) \rightarrow \pi_1(M, \star) \quad (2.17)$$

por tanto, gracias a la proposición 2.24, se tiene un homomorfismo $\Phi_i : \mathcal{P}_{C_i, \star} \rightarrow \pi_1(M, \star)$. También se verifica el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{C_i, \star} & \xrightarrow{\text{enc}_{ij}} & \mathcal{P}_{C_j, \star} \\ & \searrow \Phi_i & \swarrow \Phi_j \\ & \pi_1(M, \star) & \end{array}$$

El homomorfismo $(h_i)_*$ es sobreyectivo: consideremos una trayectoria cerrada continua $l : [0, 1] \rightarrow M$, entonces por el teorema de la aproximación simplicial [Ha], $h_i^{-1} \circ l : [0, 1] \rightarrow Sd|C_i|$ es homotópica a una aplicación simplicial $m_1 : [0, 1] \rightarrow Sd|C_i|$. Claramente Φ_i también es sobreyectivo.

Al dualizar se tiene

$$\Phi'_i : \text{hom}(\pi_1(M, \star), G) \rightarrow \text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, G), \quad \Phi'_i = \text{hom}(\Phi_i, G).$$

Consideremos familia de trayectorias $\{l_i^1, \dots, l_i^n\}$, $l_i^k : [0, 1] \rightarrow h_i(Sd|C_i|^{(1)})$, tales que las clases de homotopía

$$[l_i^k]$$

generan $\pi_1(M, \star)$. Entonces

$$[l_i^k] = \Phi_i \left([l_i^k]_{C_i} \right), \quad [l_i^k]_{C_i} \in \mathcal{P}_{C_i, \star}.$$

Las trayectorias con $l : [0, 1] \rightarrow h_i(Sd|C_i|^{(1)})$, también son trayectorias de la forma $l : [0, 1] \rightarrow h_j(Sd|C_j|^{(1)})$ para $j \geq i$. Entonces, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que

$$l^k := l_i^k$$

no depende de la escala C_i .

Definición 2.26. Para la presentación del grupo $\mathcal{P}_{C_i, \star}$ consideraremos como generadores las clases $[\cdot]_{C_i}$ de trayectorias,

$$A \cup \Gamma_i, \quad A = \{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}; \quad \Gamma_i = \left\{ \gamma_t^{\sigma_i^k} \right\} \quad (2.18)$$

Dichas trayectorias se dividen en dos tipos:

1. Por un lado tenemos los generadores $\alpha^r = [l^k]_{C_i}, r = 1, 2, \dots, n$, que corresponden a los generadores $[l^k]$ del grupo fundamental, $\pi_1(M, \star)$.
2. Por otro lado tendremos los $\gamma_t^{\sigma_i^k}$ dados por las clases

$$\gamma_t^{\sigma_i^k} = \left[t^{-1} \cdot l_{\sigma_i^k} \cdot t \right],$$

donde consideramos ciertas trayectorias $l_{\sigma_i^k} : [0, 1] \rightarrow h_i(Sd|C_i|^{(1)})$, construidas como en la demostración del teorema 2.24, y son tales que las imágenes de $l_{\sigma_i^k}$ se corresponden con el borde $\partial\sigma_i^k$ para cada 2-simplejo $\sigma_i^k \in (Sd|C_i|^2, h_i)$, es decir,

$$\partial\sigma_i^k = l_{\sigma_i^k}([0, 1]).$$

También se consideran ciertas trayectorias no cerradas $t \in \mathcal{L}$ teniendo como punto inicial $t(0) = \star$ y como punto final un vértice de σ ,

$$t(1) = l_{\sigma_i^k}(0) = l_{\sigma_i^k}(1).$$

Suponemos en nuestra notación que la colección de 2-simplejos es

$$(Sd|C_i|^2, h_i) = \left\{ \sigma_i^1, \dots, \sigma_i^{N_i} \right\}.$$

Lema 2.27. *El 1-esqueleto $Sd|C|^{(1)}$ es homotópico a una unión de círculos identificados en un punto, por lo que tiene grupo fundamental libre.*

Demostración. Consideramos un 1-simplejo $L \subset Sd|C|^{(1)}$ que es un árbol maximal. Entonces L tiene una arista por cada 2-simplejo de $Sd|C|^{(2)}$, ver [Md]. Consideramos todas las aristas $\tau \subset Sd|C|^{(1)}$ que no están contenidas en L . Consideramos un círculo \mathbb{S}_τ^1 , por cada arista τ . La homotopía H de L a un punto, permite construir una homotopía G de $Sd|C|^{(1)}$ a $\sqcup \mathbb{S}_\tau^1 / \sim_L$ donde la relación de equivalencia \sim_L identifica un punto de cada círculo \mathbb{S}_τ^1 (que corresponde a los extremos de la arista τ los cuales están en L). \square

Proposición 2.28. *Supongamos que el grupo fundamental $\pi_1(M, \star)$ está generado por $\{[l^1], \dots, [l^n]\}$, entonces para cada escala $(|C_i|, \phi_i; Sd|C_i|, T_i)$, el grupo $\mathcal{P}_{C_i, \star}$ está generado por la colección (2.18).*

Demostración. Como $\pi_1(Sd|C|^{(1)}, \star)$ es un grupo libre podemos considerar generadores libres. Supongamos que f es un generador libre en el núcleo $\ker(h_i)_*$. Entonces f es la clase de homotopía de una trayectoria $l : [0, 1] \rightarrow Sd|C|^{(1)}$, contraíble en $Sd|C|$.

Para cada generador libre $f_a : [0, 1] \rightarrow Sd|C|^{(1)}$, $a = 1, \dots, m$, contraíble en M consideramos la homotopía simplicial $G_a : Sd^r(|K|, |M|) \rightarrow Sd|C|^{(2)}$, que se obtiene como aproximación simplicial de la homotopía $H : |K| \rightarrow Sd|C|$, ver demostración del teorema 2.24. Entonces podemos escribir

$$f = \prod_{\sigma \subset Sd^r(|K|, |M|)} G \circ (t_\sigma^{-1} \cdot l_\sigma \cdot t_\sigma) : [0, 1] \rightarrow Sd|C|^{(1)},$$

Para estos generadores tomamos las trayectorias l_σ que se definieron en (2.16) y las trayectorias t_σ que se definieron en (2.15).

Al tomar clase módulo retrazo tendremos

$$[f] = \prod_{\sigma \subset G_a([0, 1]^2)} \gamma_\sigma, \quad \text{con } \gamma_\sigma = [t_\sigma^{-1} \cdot l_\sigma \cdot t_\sigma].$$

Por lo tanto $[l] \in \mathcal{P}_{C_i, \star}$ se expresa en términos de las clases de trayectorias (2.18).

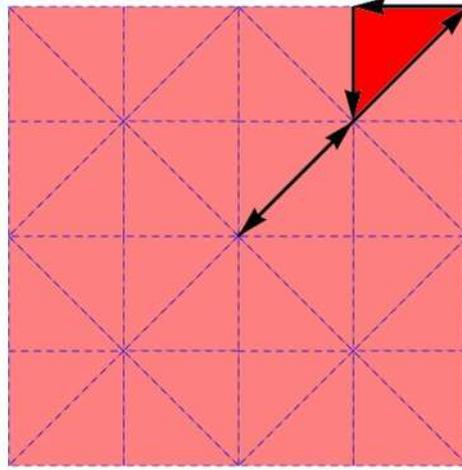


Figura 2.5: Un generador de $\mathcal{P}_{C_i, \star}$ de la forma $\gamma_t^{\sigma_i^k}$ en torno al simplejo $\sigma_i^k \in SdC^2$ marcado.

Para el resto de los generadores γ_σ que se proponen en la presentación, tales que σ no está presente en la unión de las imágenes $\cup_{a=1}^m G_a([0, 1]^2)$, $a = 1, \dots, m$, consideramos cualquier elección de trayectorias t_σ, l_σ tales que $\gamma_\sigma = [t_\sigma^{-1} \cdot l_\sigma \cdot t_\sigma]$.

□

Afirmamos que en la presentación de $\mathcal{P}_{C_j, \star}$ se tiene que

$$\text{enc}_{ij}(\alpha^k) = \alpha^k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Capítulo 3

Formas de curvatura generalizadas

En el capítulo anterior describimos una sucesión de escalas \mathcal{E} , definición 2.4, y vimos como a partir de una escala consideramos un complejo simplicial $Sd|C_i|$ y un homeomorfismo $h_i : Sd|C_i| \rightarrow M$.

Los resultados de éste capítulo son aportaciones originales y están resumidas en [DZ2]. Dada la clase cohomología fija $\mathbf{e} \in H^2(M, \mathbb{R})$, correspondiente a la clase de Euler del haz principal (p, E, M) con fibra $G = U(1)$:

1. Describiremos el espacio afín Ω_i como las 2–cocadenas cerradas de $Sd|C_i|$, con clase de cohomología $h_i^* \mathbf{e}$.
2. Mediante la inclusión de 2–esqueletos $h_i(Sd|C_i|^{(2)}) \subset h_j(Sd|C_j|^{(2)})$, daremos aplicaciones de "engrosamiento" de escalas, $\pi_{ji} : \Omega_j \rightarrow \Omega_i$.
3. Obtendremos el límite proyectivo $\underline{\Omega}$ de formas de curvatura generalizadas. Este espacio extiende las 2–formas de curvatura F^A asociadas a clases módulo gauge $[\varphi^A] \in \mathcal{A}/\mathcal{G}_*$.
4. Finalmente mostraremos la relación del espacio $\underline{\Omega}$ con el límite proyectivo $\underline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_*}$ de conexiones C –planas de [MMZ] y con espacio de conexiones generalizadas $\text{hom}(\mathcal{P}_*, U(1))$ de a teoría de lazos [AL].

A diferencia de la cuantización a la lazos, nuestra propuesta no se limita a describir $[\varphi^A]$ empleando solamente las holonomías a lo largo de gráficas $h_i(Sd|C_i|^{(1)})$, sino que considera la evaluación de la forma de curvatura F^A a lo largo de el 2–esqueleto $h_i(Sd|C_i|^{(2)})$.

3.1. 2–cocadenas cerradas de curvatura

Definimos el grupo libre abeliano de k –**cadenas simpliciales** en $Sd|C_i|$ con coeficientes enteros como

$$S_k(Sd|C_i|, h_i) := \left\{ r_1 \sigma_i^1 + \cdots + r_{N_{k,i}} \sigma_i^{N_{k,i}} \mid r_l \in \mathbb{Z} \right\} \text{ donde } (Sd|C_i|^k, h_i) = \{ \sigma_i^1, \dots, \sigma_i^{N_{k,i}} \}.$$

En particular, para las 2–cadenas simpliciales,

$$S_2(Sd|C_i|, h_i) := \left\{ r_1 \sigma_i^1 + \cdots + r_{N_{2,i}} \sigma_i^{N_{2,i}} \mid r_l \in \mathbb{Z} \right\} \text{ donde } (Sd|C_i|^2, h_i) = \{ \sigma_i^1, \dots, \sigma_i^{N_{2,i}} \}.$$

Consideremos el conjunto de funciones lineales en las 2–cocadenas

$$V_i := \text{hom} (S_2(Sd|C_i|^2, h_i), \mathbb{R})$$

el cual está en correspondencia biyectiva con $\mathbb{R}^{N_{2,i}}$ mediante la biyección

$$w \in V_i \leftrightarrow (w(\sigma_i^1), \dots, w(\sigma_i^{N_{2,i}})) \in \mathbb{R}^{N_{2,i}}.$$

Las 2–**cocadenas cerradas** $w \in V_i$ satisfacen $dw = 0$, es decir, $w(\partial V) = 0$ para las 2–cadenas que son borde de una 3–cadena $V \in S_3(Sd|C_i|, h_i)$. Por lo tanto definen aplicaciones

$$\mathbf{w} : \frac{S_2(Sd|C_i|, h_i)}{\partial(S_3(Sd|C_i|, h_i))} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Al restringir a las 2–cadenas cerradas se tiene

$$\mathbf{w} |_{\ker \partial} : \frac{\ker [\partial : S_2(Sd|C_i|, h_i) \rightarrow S_1(Sd|C_i|, h_i)]}{\partial(S_3(Sd|C_i|, h_i))} \rightarrow \mathbb{R},$$

es decir

$$\mathbf{w} : H_2(Sd|C_i|) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Como vimos en la sección 1.3, dada una conexión φ^A en un haz principal (p, E, M) con fibra $U(1)$, tiene asociada una 2–forma cerrada de curvatura F^A cuya clase de cohomología de De Rham $\mathbf{e} \in H^2(M, \mathbb{R})$ es un invariante topológico conocido como clase de Euler.

Cada clase de cohomología $\alpha \in H^2(M, \mathbb{R})$ determina una función lineal sobre el grupo de homologías simpliciales $[S] \in H_2(Sd|C_i|)$,

$$\alpha_i[S] = \alpha_i(S) := \sum_{k=1}^{N_{2,i}} r_k \int_{\sigma_i^k} \alpha.$$

donde α es una 2–forma representante de $\alpha \in H^2(M, \mathbb{R})$ y $S = \sum_{k=1}^{N_{2,i}} r_k \sigma_i^k$ es una 2–cadena representante de la clase de homología $[S] \in H_2(Sd|C_i|)$. Por el teorema de Stokes, $d\alpha(c) = \alpha_i(\partial c)$, de donde $\alpha_i : H_2(Sd|C_i|) \rightarrow \mathbb{R}$ está bien definida.

Por el isomorfismo $H_2(Sd|C_i|) \simeq H_2(Sd|C_j|) \simeq H_2(M)$, se tiene que α_i se corresponde con α_j . Por lo tanto podemos denotar ambas funciones lineales como α . En el caso particular de la clase Euler \mathbf{e} tendremos la función lineal

$$\mathbf{e} : H_2(Sd|C_i|) \rightarrow \mathbb{R}$$

la cual resulta tener valores enteros. Por lo que podemos considerar la función lineal

$$\mathbf{e} : H_2(Sd|C_i|) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Para un grupo G se define el grupo cohomología $H^k(Sd|C_i|, G)$ se define como el cociente del grupo de cociclos por el grupo de cociclos equivalentes a 0. Una k –cocadena es una función lineal sobre las k –cadenas de coeficientes enteros con valores en el grupo G . En general se tiene una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{k-1}(Sd|C_i|), G) \longrightarrow H^k(Sd|C_i|, G) \longrightarrow \text{hom}(H_k(Sd|C_i|), G) \longrightarrow 0.$$

Para un campo $G = \mathbb{k}$ toda función lineal $\alpha : H_k(Sd|C_i|, \mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}$ corresponde con una única clase de cohomología en $H^k(Sd|C_i|, \mathbb{k})$, ver [DNF] página 33. Además $H^k(Sd|C_i|, \mathbb{R})$ es isomorfo al grupo de cohomologías de de Rham, $H^k(M, \mathbb{R})$, ver [DNF] página 35 y §14. En resumen se tienen los isomorfismos

$$H^k(M, \mathbb{R}) \simeq H^k(Sd|C_i|, \mathbb{R}) \simeq \text{hom}(H_k(Sd|C_i|, \mathbb{R}), \mathbb{R}).$$

Definición 3.1. Consideremos un haz principal (p, E, M) con fibra $U(1)$, supongamos que la clase de cohomología de la clase de Euler es $\mathbf{e} \in H^2(M, \mathbb{R})$. Definimos $\Omega_i = \Omega_i^{\mathbf{e}}$, como el conjunto de 2-cocadenas cerradas que tienen clase de cohomología \mathbf{e} . Es decir,

$$\Omega_i := \{\omega \in \text{hom}(S_2(Sd|C_i|^2, h_i), \mathbb{R}) \mid \omega = \mathbf{e}\} \subset V_i \quad (3.1)$$

donde ω es la aplicación inducida en las 2-cadenas cerradas, $\omega[U] = \omega(U)$, para $U \in \ker \partial$, $[U] \in H_2(Sd|C_i|)$,

$$\omega|_{\ker \partial} = \mathbf{e} : \frac{\ker[\partial : S_2(Sd|C_i|, h_i) \rightarrow S_1(Sd|C_i|, h_i)]}{\partial(S_3(Sd|C_i|, h_i))} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Para la clase de cohomología nula $\mathbf{e} = 0$ definimos

$$\Omega_i^0 := \{\omega \in \text{hom}(S_2(Sd|C_i|^2, h_i), \mathbb{R}) \mid \omega = 0\} \subset V_i$$

Se verifica inmediatamente que V_i, Ω_i^0 tienen estructura de espacios vectoriales sobre \mathbb{R} , con Ω_i^0 subespacio de V_i . Gracias al refinamiento de escalas es posible definir aplicaciones lineales entre ellos.

Consideremos dos escalas distintas etiquetadas con $i, j \in \mathbb{N}$, $i \leq j$, existen inclusiones de lss k -cadenas a escala i como k -cadenas a escala j ,

$$\iota_{ij}^{(k)} : S_k(Sd|C_i|, h_i) \hookrightarrow S_k(Sd|C_j|, h_j), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

donde cada 2-simplejo $\sigma_i^l \in (Sd|C_i|^2, h_i)$, $l = 1, 2, \dots, N_{2,i}$, se corresponde con una 2-cadena a escala más fina $\sum_{l=1}^{N_{2,j}} \delta_l(\sigma_i^k) \sigma_j^l$,

$$\delta_l(\sigma_i^k) := \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma_j^l \subset \sigma_i^k \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Es decir

$$\iota_{ij}^{(2)}(\sigma_i^k) = \sum_{l=1}^{N_{2,j}} \delta_l(\sigma_i^k) \sigma_j^l \in S_2(Sd|C_j|, h_j).$$

Se pueden considerar aplicaciones lineales duales de las 2-cocadenas

$$\pi_{ji} = \text{hom}(\iota_{ij}^{(2)}, \mathbb{R}) : \text{hom}(S_2(Sd|C_i|^2, h_j), \mathbb{R}) \rightarrow \text{hom}(S_2(Sd|C_i|^2, h_i), \mathbb{R}).$$

Definición 3.2. Para dos escalas $(|C_i|, \phi_i; Sd|C_i|, T_i)$, $(|C_j|, \phi_j; Sd|C_j|, T_j)$, $i \leq j$, existe una colección de aplicaciones $\pi_{ji} : V_j \rightarrow V_i$,

$$\pi_{ji} : V_j \longrightarrow V_i \quad (3.4)$$

definidas por

$$\pi_{ji}(w)(\sigma_i^k) = \sum_{l=1}^{N_{2,j}} \delta_l(\sigma_i^k) w(\sigma_j^l)$$

Con estas definiciones obtenemos el límite proyectivo de espacios vectoriales

$$\varprojlim V_i.$$

el cual es un espacio vectorial.

3.2. Espacios afines y espacios vectoriales

Un **espacio afín** A correspondiente a un espacio vectorial V es un conjunto A provisto de una aplicación $A \times A \rightarrow V$, que a cada pareja (a, b) le asigna un vector $\overrightarrow{ab} \in V$, con las siguientes propiedades: (a) para cada $a^0 \in A$ fijo la asignación $\overrightarrow{a^0 a}$ es una biyección de A en V ; (b) para cualesquiera $a, b, c \in A$ se tiene $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{ca} = 0$. La dimensión de A es la dimensión del espacio vectorial correspondiente.

Para cada vector $v \in V$ y cada $a \in A$ se define la traslación por v , como $a + v = a'$, donde $a' \in A$ es el único punto tal que $\overrightarrow{aa'} = v$. Es decir, V actúa libremente en A .

Un espacio vectorial V da lugar a un espacio afín correspondiente a sí mismo. Un subconjunto $A' \subset A$ es un subespacio afín de A si \overrightarrow{ab} con $a, b \in A'$ forman un subespacio vectorial de V . Una aplicación entre espacios afines $f : A_1 \rightarrow A_2$ es una aplicación afín si existe una aplicación lineal $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ entre los espacios vectoriales correspondientes tal que

$$f\left(a^0 + \overrightarrow{a^0 a}\right) = f(a^0) + \phi\left(\overrightarrow{a^0 a}\right)$$

En particular si $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ es una aplicación lineal y $A_1 \subset V_1, A_2 \subset V_2$ son subespacios afines tales que $\phi(A_1) \subset A_2$ entonces $\phi|_{A_1}$ define una aplicación afín entre A_1 y A_2 .

Proposición 3.3. 1. El conjunto Ω_i es un subespacio afín de V_i correspondiente al espacio vectorial Ω_i^0 definido en 3.1;

2. La aplicación lineal $\pi_{ji} : V_j \rightarrow V_i$ induce una aplicación lineal $\pi_{ji} : \Omega_j^0 \rightarrow \Omega_i^0$;

3. También induce una aplicación afín $\pi_{ji} : \Omega_i \rightarrow \Omega_j$.

Demostración. Sea $\omega_i^0 \in \Omega_i \subset V_i$, entonces para cualquier otro $\omega_i \in \Omega_i$ se tiene

$$\omega_i(S) - \omega_i^0(S) = 0, S \in S_2(Sd|C_i|), \partial S = 0$$

es decir $\overrightarrow{\omega_i^0 \omega_i} := \omega_i - \omega_i^0 \in \Omega_i^0$. Para ω_i^0 fijo la aplicación $\omega_i \mapsto \overrightarrow{\omega_i^0 \omega_i}$ es una biyección. Además $\overrightarrow{\omega_i^0 \omega_i^1} + \overrightarrow{\omega_i^1 \omega_i^2} + \overrightarrow{\omega_i^2 \omega_i^0} = 0$. Esto prueba la primera afirmación.

Para la segunda afirmación notemos la conmutación de los diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 S_k(Sd|C_i|, h_i) & \xrightarrow{\iota_{ij}^{(k)}} & S_k(Sd|C_j|, h_j) \\
 \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 S_{k-1}(Sd|C_i|, h_i) & \xrightarrow{\iota_{ij}^{(k-1)}} & S_{k-1}(Sd|C_j|, h_j)
 \end{array} \tag{3.5}$$

Por lo tanto, las aplicaciones $\iota_{ij}^{(k)}$, envían cadenas cerradas $S \in S_k(Sd|C_i|, h_i)$ en cadenas cerradas $\iota_{ij}^{(k)}(S) \in S_k(Sd|C_j|, h_j)$. Es decir, para una 2-cadena cerrada $\partial S = 0$ se tiene $\pi_{ji}(\omega)(S) = \omega(S') = 0$. Por lo tanto π_{ji} define aplicaciones lineales

$$\pi_{ji} : \frac{S_2(Sd|C_j|, h_j)}{\partial(S_3(Sd|C_j|h_j))} \rightarrow \frac{S_2(Sd|C_i|, h_i)}{\partial(S_3(Sd|C_i|h_i))}$$

y también

$$\pi_{ji} : H_2(Sd|C_j|) \rightarrow H_2(Sd|C_i|).$$

Por tratarse de aplicaciones lineales, si $\omega = 0 \in H^2(Sd|C_j|, \mathbb{R})$, entonces $\pi_{ji}(\omega) = 0 \in H^2(Sd|C_i|, \mathbb{R})$. Por lo tanto $\pi_{ji}(\Omega_j^0) \subset \Omega_i^0$.

Para la tercera afirmación consideramos $\omega_j^0 \in \Omega_j$ y $\omega_i^0 = \pi_{ji}(\omega_j^0) \in \Omega_i$. Se verifica de la definición que

$$\begin{aligned}
 \pi_{ji}(\omega_j) &= \pi_{ji}(\omega_j^0) + \pi_{ji}\left(\overrightarrow{\omega_j^0 \omega_j}\right) = \\
 &= \pi_{ji}(\omega_j^0) + \pi_{ji}(\omega_j) - \pi_{ji}(\omega_j^0) = \overrightarrow{\omega_i^0 \omega_i}
 \end{aligned}$$

es decir la aplicación lineal $\pi_{ji}|_{\Omega_j^0} : \Omega_j^0 \rightarrow \Omega_i^0$ induce la aplicación afín

$$\pi_{ji} : \Omega_j \rightarrow \Omega_i,$$

la cual de hecho coincide con $\pi_{ji}|_{\Omega_j}$. □

Definición 3.4. Las aplicaciones lineales

$$\pi_{ji} : \Omega_j^0 \rightarrow \Omega_i^0.$$

inducen un límite proyectivo de espacios vectoriales que a su vez es un espacio vectorial

$$\underline{\Omega}^0 := \varprojlim \Omega_i^0$$

Este a su vez es subespacio vectorial de

$$\underline{V} := \varprojlim V_i.$$

Por otro lado, las aplicaciones afines $\pi_{ji} : \Omega_j \rightarrow \Omega_i$ inducen el límite proyectivo

$$\underline{\Omega} := \varprojlim \Omega_i.$$

Proposición 3.5. *El límite $\underline{\Omega}$ tiene estructura de espacio afín correspondiente al espacio vectorial $\underline{\Omega}^0$. El espacio afín $\underline{\Omega}$ es subespacio afín del espacio vectorial $\underline{\mathcal{V}}$.*

Demostración. Elegimos $\omega^0 \in \underline{\Omega}$ fijo, y consideramos para cada escala $\omega_i^0 := \pi_i(\omega^0) \in \Omega_i$ fijo. Consideramos las biyecciones correspondientes

$$\omega_i \in \Omega_i \leftrightarrow \overrightarrow{\omega_i^0 \omega_i} \in \Omega_i^0$$

Estas biyecciones inducen la biyección

$$\omega \in \underline{\Omega} \leftrightarrow \overrightarrow{\omega^0 \omega} \in \underline{\Omega}^0$$

Se verifica que $\underline{\Omega}$ es un espacio afín correspondiente al espacio vectorial $\underline{\Omega}^0$.

Para ver que $\underline{\Omega}$ es un subespacio afín del espacio vectorial $\underline{\mathcal{V}}$ basta considerar las aplicaciones afines $\underline{\Omega} \rightarrow \Omega_i \rightarrow \mathcal{V}_i$ y recordar que las aplicaciones afines $\pi_{ji} : \Omega_j \rightarrow \Omega_i$ coinciden con las restricciones $\pi_{ji}|_{\Omega_j}$ de las aplicaciones lineales $\pi_{ji} : \mathcal{V}_j \rightarrow \mathcal{V}_i$. \square

A partir de las definiciones se tiene que $\Omega_i = \Omega_i^0 + \omega^0 \subset \mathbb{R}^{N_2, i}$ para un vector fijo $\omega^0 \in \mathcal{V}_i$, tal que $\omega^0(S) = \mathbf{e}[S]$ para 2-cadenas cerradas $\partial S = 0$. Por ende es un subespacio afín de \mathcal{V}_i .

Notemos que usando la terminología de la sección 1.4, \mathcal{V}_i se puede describir como el espacio de 2-formas discretas

$$\mathcal{V}_i = \Lambda_i^2 M := \text{hom}(S_2(Sd|C_i|), \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{N_2, i}.$$

3.3. Grupos de homología y escisiones

Consideramos el homeomorfismo $h_i : Sd|C_i|^{(1)} \rightarrow M$ y el homomorfismo inducido en 1-homología

$$(h_i)_* : H_1(Sd|C_i|^{(1)}) \rightarrow H_1(M).$$

Se tiene la sucesión exacta de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \ker(h_i)_* \longrightarrow H_1(Sd|C_i|^{(1)}) \xrightarrow{(h_i)_*} H_1(M) \longrightarrow 0. \quad (3.6)$$

Al considerar $\text{hom}(\cdot, G)$ para un grupo abeliano G se tiene la sucesión exacta

$$\text{hom}(\ker(h_i)_*, G) \longleftarrow \text{hom}(H_1(Sd|C_i|^{(1)}), G) \xleftarrow{(h_i)_*} \text{hom}(H_1(M), G) \longleftarrow 0_G \quad (3.7)$$

Lema 3.6. *Si G es un grupo abeliano divisible, entonces se tiene la sucesión exacta*

$$0_G \longrightarrow \text{hom}(H_1(M), G) \xrightarrow{(h_i)_*} \text{hom}(H_1(Sd|C_i|^{(1)}), G) \longrightarrow \text{hom}(\ker(h_i)_*, G) \longrightarrow 0_G.$$

Demostración. El grupo fundamental $\pi_1(Sd|C_i|^{(1)}, \star)$ es el grupo fundamental de una gráfica por lo tanto es libre. El grupo $H_1(Sd|C_i|^{(1)})$ es el abelianizado de un grupo libre, por lo tanto es un grupo abeliano libre. El subgrupo $\ker(h_i)_*$ de un abeliano libre, también es un grupo abeliano

libre. En particular, si g_1, \dots, g_n son generadores libres de $\ker(h_i)_*$, entonces existe una colección de generadores libres f_1, \dots, f_N de $H_1(Sd|C_i|^{(1)})$, con $N \geq n$, tales que

$$g_1 = d_1 f_1, \quad \dots, \quad g_n = d_n f_n,$$

para una colección de enteros $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{Z}$.

Tomemos un homomorfismo $\varphi \in \text{hom}(\ker(h_i)_*, G)$ definido en los generadores g_k como $\varphi(g_k) = e_k \in G$. Como G es divisible existen $e'_k \in G$ tales que $d_k e'_k = e_k$. Si definimos

$$\varphi'(f_k) := e'_k, \text{ para } 1 \leq k \leq n; \quad \varphi'(f_k) = 0_G, \text{ para } n < k \leq N$$

entonces

$$\varphi'(g_k) = d_k \varphi'(f_k) = d_k e'_k = e_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Por lo tanto $\varphi' \in \text{hom}(H_1(Sd|C_i|), G)$, pues basta definirlo en los generadores. Además φ' es preimagen de $\varphi \in \text{hom}(\ker(h_i)_*, G)$. \square

En particular para $G = U(1)$ y $G = \mathbb{R}$ se tienen las sucesiones exactas:

$$1 \longrightarrow \text{hom}(H_1(M), U(1)) \xrightarrow{(h_i)^*} \text{hom}(H_1(Sd|C_i|^{(1)}), U(1)) \longrightarrow \text{hom}(\ker(h_i)^*, U(1)) \longrightarrow 1.$$

$$0 \longrightarrow \text{hom}(H_1(M), \mathbb{R}) \xrightarrow{(h_i)^*} \text{hom}(H_1(Sd|C_i|^{(1)}), \mathbb{R}) \longrightarrow \text{hom}(\ker(h_i)_*, \mathbb{R}) \longrightarrow 0.$$

Lema 3.7. *Si G es un grupo abeliano divisible y libre de torsión, entonces la sucesión exacta*

$$0_G \longrightarrow \text{hom}(H_1(M), G) \xrightarrow{(h_i)^*} \text{hom}(H_1(Sd|C_i|^{(1)}), G) \longrightarrow \text{hom}(\ker(h_i)_*, G) \longrightarrow 0_G$$

se escinde. Por lo tanto se tiene la descomposición en suma directa

$$\text{hom}\left(H_1\left(Sd|C_i|^{(1)}\right), G\right) = \text{hom}(H_1(M), G) \oplus \text{hom}(\ker(h_i)_*, G).$$

Demostración. De la demostración del lema anterior tenemos que hay una base g_1, \dots, g_n de generadores libres de $\ker(h_i)_*$, y una colección de generadores libres f_1, \dots, f_N de $H_1(Sd|C_i|^{(1)})$, con $N \geq n$, tales que

$$g_1 = d_1 f_1, \quad \dots, \quad g_n = d_n f_n,$$

para una colección de enteros $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{Z}$. Para un homomorfismo $\varphi \in \text{hom}(\ker(h_i)_*, G)$ definido en los generadores g_k como $\varphi(g_k) = e_k \in G$, existen $e'_k \in G$ tales que $d_k e'_k = e_k$, y definimos

$$\varphi'(f_k) := e'_k, \text{ para } 1 \leq k \leq n; \quad \varphi'(f_k) := 0_G, \text{ para } n < k \leq N$$

de donde

$$\varphi'(g_k) = d_k \varphi'(f_k) = d_k e'_k = e_k.$$

Para un grupo libre de torsión G la solución $e'_k = \frac{1}{d_k} e_k$ de la ecuación

$$d_k \cdot x = e_k \in G$$

es única. Entonces se verifica que la aplicación $\psi(\varphi) := \varphi'$ es un homomorfismo

$$\psi : \text{hom}(\ker(h_i)'_*, G) \rightarrow \text{hom}(H_1(Sd|C_i|^{(1)}), G).$$

En efecto, al considerar las soluciones $x_{d,g} =: \frac{1}{d}g$, de la ecuación $d \cdot x = g$, se tiene que $x_{d,g} + x_{d,g'}$ es la solución de $d \cdot x = g + g'$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} [\psi(\varphi_1) + \psi(\varphi_2)](f_k) &= \frac{1}{d_k}\varphi_1(g_k) + \frac{1}{d_k}\varphi_2(g_k) = \\ &= \frac{1}{d_k}((\varphi_1 + \varphi_2)(g_k)) = \psi(\varphi_1 + \varphi_2)(f_k), \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\psi(\varphi_1) + \psi(\varphi_2) = \psi(\varphi_1 + \varphi_2).$$

De manera análoga se puede probar que $\psi(0) = 0$. Por otro lado se verifica que ψ escinde por la derecha la sucesión exacta

$$0_G \longrightarrow \text{hom}(H_1(M), G) \xrightarrow{(h_i)'} \text{hom}(H_1(Sd|C_i|^{(1)}), G) \xrightarrow{\psi} \text{hom}(\ker(h_i)'_*, G) \longrightarrow 0_G.$$

□

En particular para \mathbb{R} se tiene la suma directa

$$\text{hom}(H_1(Sd|C_i|^{(1)}), \mathbb{R}) = \text{hom}(\ker(h_i)'_*, \mathbb{R}) \oplus \text{hom}(H_1(M), \mathbb{R}) \quad (3.8)$$

Usando la descomposición de

$$H_1(M) = \mathbb{Z}^{b_1} \oplus T,$$

donde $T \subset H_1(M)$ es subgrupo de torsión, se tiene una expresión equivalente de la descomposición (3.8) dada por:

$$\text{hom}(H_1(Sd|C_i|^{(1)}), \mathbb{R}) = \text{hom}(\ker(h_i)'_*, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{b_1}. \quad (3.9)$$

3.4. Evaluación de la curvatura y de la holonomía

En esta sección describiremos las relaciones que hay entre Ω_i y las conexiones C_i -planas $\text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, G)$, definidas en la sección 2.2. Concluiremos con la definición de $\mathbf{e} : \underline{\Omega} \times U(1)^{b_1} \rightarrow \text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, U(1))$ donde b_1 es el rango libre de la 1-homología de la variedad base M . Esta aplicación permite obtener la evaluación de la holonomía a partir de la evaluación de la curvatura.

Lema 3.8. Usando la exponencial $\exp 2\pi\sqrt{-1}(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow U(1)$:

1. Se tienen homomorfismos

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}(H_1(Sd|C_i|^{(1)}), \mathbb{R}) & \xleftarrow{\hspace{2cm}} & \text{hom}(\ker(h_i)'_*, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{b_1} \\ \exp 2\pi\sqrt{-1}(\cdot) \downarrow & & \downarrow \exp 2\pi\sqrt{-1}(\cdot) \oplus \exp 2\pi\sqrt{-1}(\cdot) \\ \text{hom}(H_1(Sd|C_i|^{(1)}), U(1)) & & \text{hom}(\ker(h_i)'_*, U(1)) \oplus \text{hom}(H_1(M), U(1)). \end{array}$$

2. También se tienen diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} \text{hom} \left(H_1(Sd|C_i|^{(1)}), \mathbb{R} \right) & \longrightarrow & \text{hom}(\ker(h_i)_*, \mathbb{R}) \\ \exp 2\pi\sqrt{-1}(\cdot) \downarrow & & \downarrow \exp 2\pi\sqrt{-1}(\cdot) \\ \text{hom} \left(H_1(Sd|C_i|^{(1)}), U(1) \right) & \longrightarrow & \text{hom}(\ker(h_i)_*, U(1)). \end{array}$$

3. Finalmente se tienen diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} \text{hom} \left(H_1(Sd|C_i|^{(1)}), \mathbb{R} \right) & \xleftarrow{\psi} & \text{hom}(\ker(h_i)_*, \mathbb{R}) \\ \exp 2\pi\sqrt{-1}(\cdot) \downarrow & & \downarrow \exp 2\pi\sqrt{-1}(\cdot) \\ \text{hom} \left(H_1(Sd|C_i|^{(1)}), U(1) \right) & \longrightarrow & \text{hom}(\ker(h_i)_*, U(1)). \end{array}$$

donde ψ es el homomorfismo que escinde por la derecha la sucesión exacta correspondiente descrita en el lema 3.7.

Demostración. Sólo tenemos que probar la tercera parte: Sea $\varphi \in \text{hom}(\ker(h_i)_*, \mathbb{R})$, entonces

$$\exp 2\pi\sqrt{-1}(\psi(\varphi)) \in \text{hom} \left(H_1(Sd|C_i|^{(1)}), U(1) \right),$$

define un homomorfismo en el subgrupo $\ker(h_i)_* \subset H_1(Sd|C_i|^{(1)})$. También se tiene el homomorfismo

$$\exp 2\pi\sqrt{-1}\varphi \in \text{hom}(\ker(h_i)_*, U(1)),$$

Por la escisión, $\psi(\varphi)$ restringido a $\ker(h_i)_*$ coincide con φ , por lo tanto

$$\exp 2\pi\sqrt{-1}(\psi(\varphi))|_{\ker(h_i)_*} = \exp 2\pi\sqrt{-1}\varphi.$$

□

Tenemos la siguiente identificación.

Lema 3.9. *El espacio afín Ω_i es isomorfo al espacio vectorial $\text{hom}(\ker(h_i)_*, \mathbb{R})$.*

Demostración. En lugar del espacio afín consideramos el espacio vectorial correspondiente $\Omega_i^0 \subset \mathbf{V}_i$, que consta de todas las 2-cadenas cerradas $\omega \in \mathbf{V}_i$ tales que la aplicación inducida en homología $\omega : H_2(Sd|C_i|) \rightarrow \mathbb{R}$ es nula.

Consideremos un $\omega \in \Omega_i^0$ fijo. Consideremos una 1-cadena cerrada $\tau \in S_1(Sd|C_i|^{(1)})$ cuya clase de homología pertenece a $\ker(h_i)_*$; entonces τ es el borde de una 2-cadena,

$$U = \sum_{k=1}^{N_{2,i}} r_k \sigma^k \in S_2(Sd|C_i|), \quad \tau = \partial U.$$

Definamos

$$\varphi(\tau) := \omega(U) = \sum_{k=1}^{N_{2,i}} r_k \omega(\sigma^k).$$

Si U' es otra 2-cadena tal que $\partial U' = \tau$ entonces $\partial(U - U') = 0$, por lo que $\omega(U - U') = 0$ pues $\omega \in \Omega_i^0$, es decir, $\omega(U) = \omega(U')$. Por lo tanto $\varphi(\tau) \in \mathbb{R}$ está bien definida. Si τ_1, τ_2 son dos 1-cadenas cerradas con clases de 1-homología en $\ker(h_i)_*$ entonces $\tau_1 = \partial U_1, \tau_2 = \partial U_2$, por lo que $\varphi(\tau_1 + \tau_2) = \omega(U_1 + U_2) = \omega(U_1) + \omega(U_2) = \varphi(\tau_1) + \varphi(\tau_2)$.

Por lo tanto, $\varphi \in \text{hom}(\ker(h_i)_*, \mathbb{R})$. Con esto concluimos que está bien definido el homomorfismo $\omega \mapsto \varphi$ de Ω_i^0 en $\text{hom}(\ker(h_i)_*, \mathbb{R})$.

La aplicación $\omega \mapsto \varphi$ es inyectiva: Supongamos que $\varphi(\tau) = 0$ para toda 1-cadena en $\ker(h_i)_*$, entonces $\omega(U) = \tau(\partial U) = 0$ para toda 2-cadena U .

La aplicación $\omega \mapsto \varphi$ es sobreyectiva: Para una 1-cocadena $\varphi \in \text{hom}(\ker(h_i)_*, \mathbb{R})$. Para cada 2-cadena U , consideramos la 1-cadena cerrada $\partial U \in \ker(h_i)_*$ y definimos

$$\omega(U) := \varphi(\partial U).$$

Entonces ω es una 2-cocadena cerrada pues $\varphi(\partial \partial V) = 0$ para una 3-cadena V . Al evaluar ω en las 2-cadenas cerradas U , $\partial U = 0$, se tiene $\omega(U) = \tau(0) = 0$ por lo tanto $\omega \in \Omega_i^0$. \square

Al componer este isomorfismo con la exponencial

$$\exp 2\pi\sqrt{-1} : \text{hom}(\ker(h_i)_*, \mathbb{R}) \rightarrow \text{hom}(\ker(h_i)_*, U(1)),$$

se tiene el siguiente

Corolario 3.10. *Existen una aplicación cubriente*

$$e_i^0 : \Omega_i \rightarrow \text{hom}(\ker(h_i)_*, U(1)).$$

El siguiente teorema resume los lemas 3.7, 3.9, 3.8, al aplicarlos al abelianizado $H_1(Sd|C_i|^{(1)})$ del grupo $\mathcal{P}_{C_i, \star} = \pi_1(Sd|C_i|^{(1)}, \star)$.

Teorema Principal 3.11. 1. *Se tiene la factorización*

$$\text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, \mathbb{R}) \simeq \text{hom}(\ker(h_i)_*, \mathbb{R}) \oplus \text{hom}(H_1(Sd|C_i|), \mathbb{R}) \cong \Omega_i \times \mathbb{R}^{b_1}.$$

2. *Se tiene la aplicación continua ϵ_i tal que conmuta el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \Omega_i \times \mathbb{R}^{b_1} & \longleftrightarrow & \text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, \mathbb{R}) \\ & \searrow \epsilon_i & \downarrow \exp 2\pi\sqrt{-1} \\ & & \text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, U(1)) \end{array}$$

3.5. El límite proyectivo

Recordemos que por la conmutación del diagrama (3.5), $\iota_{ij}^{(k)} \circ \partial = \partial \circ \iota_{ij}^{(k-1)}$. En particular si $\omega \in \mathbb{V}_j$ es una 2-cocadena cerrada, entonces $\pi_{ji}(\omega)$ también lo es, es decir:

$$\pi_{ji}(\omega)(\partial V) = \omega\left(\partial\left(\iota_{ij}^{(3)}(V)\right)\right) = 0;$$

donde V es una 3-cadena $V \in S_3(Sd|C_i|, h_i)$. Por otro lado, $\iota_{ij}^{(2)}$ (envía cadenas cerradas en cadenas cerradas y bordes de 3-cadenas en bordes de 3-cadenas), por lo tanto induce una aplicación en homología

$$\iota_{ij}^{(2)} : H_2(Sd|C_i|) \rightarrow H_2(Sd|C_j|).$$

Como $h_j^{-1} \circ h_i : Sd|C_i| \rightarrow Sd|C_j|$ es un homeomorfismo, entonces $\iota_{ij}^{(2)}$ es un isomorfismo.

De acuerdo a la proposición 3.3, dada una 2-cocadena cerrada $\omega : S_2(Sd|C_j|^2, h_j) \rightarrow \mathbb{R}$ que induce la aplicación ω nula en 2-homología $0 \in H^2(Sd|C_j|^2, \mathbb{R})$ entonces también es nula $\pi_{ji}(\omega) \in H_2(Sd|C_i|)$. Por lo tanto la restricción de aplicación lineal $\pi_{ji}|_{\Omega_j^0}$ tiene imagen contenida en Ω_i^0 . Es decir, está bien definida la aplicación lineal inducida

$$\pi_{ji} : \Omega_j^0 \rightarrow \Omega_i^0. \quad (3.10)$$

Tomemos clases de cohomología $\mathbf{e}_j \in H^2(Sd|C_j|, \mathbb{R})$, tales que son compatibles,

$$(\iota_{ij}^{(2)})^* \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j,$$

y las cuales corresponden a la clase de Euler $\mathbf{e} \in H^2(M, \mathbb{R})$ Entonces tendremos las aplicaciones afines correspondientes

$$\pi_{ji} : \Omega_j^{\mathbf{e}_j} \rightarrow \Omega_i^{\mathbf{e}_i}.$$

Consideremos ahora inclusiones en de los 1-esqueletos

$$\lambda_{ij} : Sd^{(1)}|C_i| \rightarrow Sd^{(1)}|C_j|.$$

Se tienen inclusiones en las k -cadenas

$$\lambda_{ij}^{(k)} : S_k(Sd^{(1)}|C_i|) \rightarrow S_k(Sd^{(1)}|C_j|) \quad (3.11)$$

dadas por

$$\lambda_{ij}^{(k)}(\tau_i^r) = \sum_{l=1}^{N_{k,j}} \delta_r(\tau_j^l) \cdot \tau_j^l, \quad k = 0, 1.$$

donde $Sd^{(1)}|C_i|^k = \{\tau_i^1, \dots, \tau_i^{N_{k,i}}\}$, y

$$\delta_r(\tau_j^l) := \begin{cases} 1, & \text{si } \tau_j^l \subset \tau_i^r \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que los bordes de 2-cadenas son nulos por lo que $\lambda_{ij}^{(k)}$ es nula para $k \geq 2$, y además,

$$\lambda_{ij}^{(0)} \circ \partial = \partial \circ \lambda_{ij}^{(1)}.$$

Por lo tanto, definen aplicaciones en homología

$$\lambda_{ij}^{(1)} : H_1(Sd|C_i|^{(1)}) \rightarrow H_1(Sd|C_j|^{(1)}).$$

Podemos considerar la inclusión de complejos simpliciales

$$\bar{h}_i : Sd|C_i|^{(1)} \rightarrow h_i(Sd|C_i|)$$

dadas por inclusiones de k -simplejos $\bar{h}_i(\tau) = h_i(\tau) \in (Sd|C_i|^k, h_i)$ para cada $\tau \in (Sd|C_i|^{(1)})^k \subset (Sd|C_i|)^k$, con $k = 0, 1$. Por lo tanto se tiene el siguiente resultado:

Lema 3.12. *Se tienen diagramas conmutativos*

$$\begin{array}{ccccc} \ker(\overline{h_i})_* & \longrightarrow & H_1(Sd|C_i|^{(1)}) & \xrightarrow{(\overline{h_i})_*} & H_1(Sd|C_i|) \\ \downarrow \lambda_{ij}^{(1)} & & \downarrow \lambda_{ij}^{(1)} & & \downarrow \iota_{ij}^{(1)} \\ \ker(\overline{h_j})_* & \longrightarrow & H_1(Sd|C_j|^{(1)}) & \xrightarrow{(\overline{h_j})_*} & H_1(Sd|C_j|) \end{array}$$

Demostración. Se tiene el diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} S_1(Sd|C_i|^{(1)}) & \xrightarrow{h_i} & S_1(Sd|C_i|, h_i) \\ \downarrow \lambda_{ij}^{(1)} & & \downarrow \iota_{ij}^{(1)} \\ S_1(Sd|C_j|^{(1)}) & \xrightarrow{h_j} & S_1(Sd|C_j|, h_j) \end{array}$$

Como vimos anteriormente, el homeomorfismo $h_j^{-1} \circ h_i : Sd|C_i| \rightarrow Sd|C_j|$ induce el isomorfismo

$$\iota_{ij}^{(1)} : H_1(Sd|C_i|) \rightarrow H_1(Sd|C_j|)$$

, de hecho se tienen isomorfismos

$$H_1(Sd|C_i|) \simeq H_1(Sd|C_j|) \simeq H_1(M).$$

Por lo tanto $\lambda_{ij}^{(1)}(\ker(\overline{h_i})_*) \subset \ker(\overline{h_j})_*$. □

Al dualizar y recordando el isomorfismo descrito en 3.9, se tiene el siguiente resultado

Lema 3.13. *Se tienen aplicaciones lineales*

$$\begin{array}{ccccc} \Omega_i^0 & \longleftarrow & \text{hom}(H_1(Sd|C_i|^{(1)}), \mathbb{R}) & \xleftarrow{(\overline{h_i})_*} & \text{hom}(H_1(M), \mathbb{R}) \\ \uparrow \pi_{ji} & & \uparrow (\lambda_{ij}^{(1)})^* & & \uparrow (\iota_{ij}^{(1)})^* \\ \Omega_j^0 & \longleftarrow & \text{hom}(H_1(Sd|C_j|^{(1)}), \mathbb{R}) & \xleftarrow{(\overline{h_j})_*} & \text{hom}(H_1(M), \mathbb{R}) \end{array}$$

Demostración. Notemos que $\ker(\overline{h_i})_* = \ker(h_i)_*$. Entonces basta mostrar la conmutatividad de los diagramas

$$\begin{array}{ccc} \Omega_i^0 & \longleftrightarrow & \text{hom}(\ker(h_i)_*, \mathbb{R}) \\ \uparrow \pi_{ji} & & \uparrow (\lambda_{ij}^{(1)})^* \\ \Omega_j^0 & \longleftrightarrow & \text{hom}(\ker(h_j)_*, \mathbb{R}) \end{array}$$

Recordemos el isomorfismo $\Omega_j^0 \leftrightarrow \text{hom}(\ker(h_j)_*, \mathbb{R})$. Consideremos un $\omega \in \Omega_j^0$ y una 1-cadena cerrada $\tau \in S_1(Sd|C_j|^{(1)})$ cuya clase de homología pertenece a $\ker(h_j)_*$; entonces τ es el borde ∂U_j de una 2-cadena, $U_j \in S_2(Sd|C_j|)$. Definimos $\varphi \in \text{hom}(\ker(h_i)_*, \mathbb{R})$, como $\varphi(\tau) = \omega(U_j)$.

Para una 1-cadena $\tau' \in \ker(h_i)_* \subset S_1(Sd|C_i|^{(1)})$, existe una 2-cadena $U_i \in S_2(Sd|C_i|)$ tal que $\tau' = \partial U_i$. De donde,

$$\left((\lambda_{ij}^{(1)})^* \varphi \right) (\tau') = \varphi \left(\lambda_{ij}^{(1)} \circ \partial(U_i) \right) = \varphi \left(\partial \circ \iota_{ij}^{(2)}(U_i) \right) = \omega \left(\iota_{ij}^{(2)}(U_i) \right) = (\pi_{ji}(\omega))(U_i).$$

En esta última ecuación hemos empleado el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} S_1(Sd|C_i|^{(1)}) & \xrightarrow{\lambda_{ij}^{(1)}} & S_1(Sd|C_j|^{(1)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_1(Sd|C_i|) & \xrightarrow{\iota_{ij}^{(1)}} & S_1(Sd|C_j|) \end{array}$$

donde consideramos las inclusiones del 1-esqueleto $Sd|C_a|^{(1)}$ en el complejo simplicial $Sd|C_a|$, para $a = i, j$. \square

Usando las escisiones referidas en el teorema 3.11, se puede probar el siguiente resultado.

Teorema Principal 3.14. *Se tiene la aplicación continua de límites proyectivos*

$$\mathbf{e} : \underline{\Omega} \times \mathbb{R}^{b_1} \rightarrow \underline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_*}. \quad (3.12)$$

Demostración. Consideramos la escisión

$$\text{hom}(\ker(h_i)_*, \mathbb{R}) \oplus \text{hom}(H_1(Sd|C_i|), \mathbb{R}) \simeq \text{hom}\left(H_1(Sd|C_i|^{(1)}), \mathbb{R}\right);$$

Al considerar la escisión a dos escalas distintas, se tienen los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}(\ker(h_i)_*, \mathbb{R}) \oplus \text{hom}(H_1(Sd|C_i|), \mathbb{R}) & \longleftrightarrow & \text{hom}(H_1(Sd|C_i|^{(1)}), \mathbb{R}) \\ \uparrow (\lambda_{ij}^{(1)})^* \oplus (\iota_{ij}^{(1)})^* & & \uparrow (\lambda_{ij}^{(1)})^* \\ \text{hom}(\ker(h_j)_*, \mathbb{R}) \oplus \text{hom}(H_1(Sd|C_j|), \mathbb{R}) & \longleftrightarrow & \text{hom}(H_1(Sd|C_j|^{(1)}), \mathbb{R}). \end{array} \quad (3.13)$$

Recordemos el primer grupo de homología $H_1(Sd|C_i|^{(1)})$ es el abelianizado del grupo fundamental $\pi_1(Sd|C_i|^{(1)}, \star) \simeq \mathcal{P}_{C_i, \star}$. Además recordemos que $\ker(h_i)_* \leftrightarrow \Omega_i$, y que $H_1(Sd|C_i|^{(1)}) \simeq H_1(M)$. Entonces los diagramas (3.13) a su vez dan lugar a diagramas conmutativos de aplicaciones continuas

$$\begin{array}{ccc} \Omega_i \times \text{hom}(H_1(M), \mathbb{R}) & \longleftrightarrow & \text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, \mathbb{R}) \\ \uparrow \pi_{ji} \times \text{id} & & \uparrow (\lambda_{ij}^{(1)})^* \\ \Omega_j \times \text{hom}(H_1(M), \mathbb{R}) & \longleftrightarrow & \text{hom}(\mathcal{P}_{C_j, \star}, \mathbb{R}) \end{array}$$

Por otro lado, al considerar las exponenciales, obtenemos los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\exp 2\pi\sqrt{-1}} & \text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, U(1)) \\ \uparrow (\lambda_{ij}^{(1)})^* & & \uparrow (\lambda_{ij}^{(1)})^* \\ \text{hom}(\mathcal{P}_{C_j, \star}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\exp 2\pi\sqrt{-1}} & \text{hom}(\mathcal{P}_{C_j, \star}, U(1)). \end{array}$$

Consideremos los diagramas

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, U(1)) & \longleftrightarrow & \mathrm{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, U(1)) \\ (\lambda_{ij}^{(1)})^* \uparrow & & \uparrow \pi_{ji} \\ \mathrm{hom}(\mathcal{P}_{C_j, \star}, U(1)) & \longleftrightarrow & \mathrm{hom}(\mathcal{P}_{C_j, \star}, U(1)) \end{array} \quad (3.14)$$

donde $\pi_{ji} = \mathrm{hom}(\mathrm{enc}_{ij}, U(1))$ son las aplicaciones de engrosamiento de holonomías, dadas en la definición 2.17.

Recordemos el isomorfismo

$$\mathcal{P}_{C_i, \star} \simeq \pi_1(Sd|C_i|^{(1)}, \star).$$

Según el lema 2.25, conmutan los diagramas

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{C_i, \star} & \xrightarrow{\mathrm{enc}_{ij}} & \mathcal{P}_{C_j, \star} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \pi_1(Sd|C_i|^{(1)}, \star) & \xrightarrow{\pi_1(\lambda_{ij}, \star)} & \pi_1(Sd|C_j|^{(1)}, \star) \end{array}$$

Es decir, las inclusiones

$$\mathrm{enc}_{ij} : \pi_1(Sd|C_i|^{(1)}, \star) \rightarrow \pi_1(Sd|C_j|^{(1)}, \star)$$

corresponden a

$$\mathrm{enc}_{ij} = \pi_1(\lambda_{ij}, \star),$$

las inclusiones inducidas en grupos fundamentales por las inclusiones continuas $\lambda_{ij} : Sd|C_i|^{(1)} \rightarrow Sd|C_j|^{(1)}$; pues Por lo tanto, las inclusiones en los grupos abelianizados

$$\overline{\mathrm{enc}_{ij}} : H_1(Sd|C_i|^{(1)}) \rightarrow H_1(Sd|C_j|^{(1)})$$

coinciden con las aplicaciones $\overline{\mathrm{enc}_{ij}}$, inducidas en homología por las mismas aplicaciones continuas λ_{ij} . Es decir,

$$\overline{\mathrm{enc}_{ij}} = (\lambda_{ij}^{(1)})_*.$$

Por lo tanto, al dualizar empleando el funtor $\mathrm{hom}(\cdot, U(1))$, se tiene que los diagramas (3.14) conmutan.

Finalmente podemos afirmar que conmutan los diagramas

$$\begin{array}{ccc} \Omega_i \times \mathbb{R}^{b_1} & \xrightarrow{\epsilon_i} & \mathrm{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, U(1)) \\ \pi_{ji} \times \mathrm{id} \uparrow & & \uparrow \pi_{ji} \\ \Omega_j \times \mathbb{R}^{b_1} & \xrightarrow{\epsilon_j} & \mathrm{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, U(1)) \end{array}$$

Por lo tanto está bien definida la aplicación continua en los límites proyectivos

$$\epsilon : \varprojlim \Omega \times \mathbb{R}^{b_1} \rightarrow \varprojlim \mathcal{A}/\mathcal{G}_\star.$$

□

3.6. Curvatura y holonomía de conexiones suaves

Consideremos un haz principal (p, E, M) con fibra $U(1)$ y clase de Euler $\mathbf{e} \in H^2(M, \mathbb{R})$. En esta sección describiremos las relaciones entre los espacios de conexiones suaves módulo gauge $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$, en un haz principal de fibra $U(1)$ y el espacio afín $\underline{\Omega}$. También describiremos la relación con las conexiones generalizadas $\text{hom}(\mathcal{P}_*, U(1))$.

Lema 3.15. 1. Se tiene una aplicación $\text{Curv} : \mathcal{A}/\mathcal{G}_* \rightarrow \underline{\Omega}$, inducida por aplicaciones

$$\text{Curv}_i : \mathcal{A}/\mathcal{G}_* \rightarrow \Omega_i.$$

2. Si dos conexiones $\varphi, \varphi' \in \mathcal{A}$, definen la misma forma de curvatura, es decir, $F^A = F^{A'}$, entonces,

$$\text{Curv}(\varphi) = \text{Curv}(\varphi').$$

Demostración. Se construye utilizando la curvatura usual F^A de una conexión φ . Explícitamente se tiene que para la escala C_i ,

$$\text{Curv}_i(\varphi)(\sigma) := \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} F^A, \quad \sigma \in (Sd|C_i|^2, h_i) \quad (3.15)$$

donde empleamos la 2-forma de curvatura F^A . Como los 2-simplejos en $(Sd|C_i|^2, h_i)$ se descomponen como unión de 2-simplejos en $(Sd|C_j|, h_j)$;

$$\int_{\sigma} F^A = \sum_{l=1}^{N_{2,j}} \delta_l(\sigma) \cdot \int_{\sigma_j^l} F^A, \quad \sigma \in (Sd|C_i|^2, h_i),$$

donde δ_l se definió en (3.3). Entonces conmutan los diagramas

$$\begin{array}{ccc} \Omega_i & \xleftarrow{\pi_{ji}} & \Omega_j \\ & \swarrow \text{Curv}_i & \searrow \text{Curv}_j \\ & \mathcal{A} & \end{array}$$

lo cual permite definir la aplicación $\text{Curv} : \mathcal{A} \rightarrow \underline{\Omega}$.

Para la segunda parte, ver [DZ] teorema 7. Supongamos que $\varphi \neq \varphi'$, con formas de curvatura respectivas $F^A \neq F^{A'}$. Consideremos un abierto $V \subset M$ tal que $F_x^A \neq F_x^{A'}$, para todo $x \in V$. Supongamos que $x \in V$ es un vértice de $Sd|C_i|$ para alguna escala $(|C_i|, \phi_i; Sd|C_i|, h_i)$. Por la condición de h_i es un homeomorfismo, el conjunto de vectores tangentes al 1-esqueleto $h_i(Sd|C_i|^{(1)})$, genera el espacio tangente $T_x M$. Por lo tanto

$$\left| F_x^A(v \wedge v') - F_x^{A'}(v \wedge v') \right| = \varepsilon > 0$$

para un par de vectores $v, v' \in T_x M$ tangentes a $h_i(Sd|C_i|^{(1)})$ en x . Por la condición de refinamiento de 2.4, existe una escala suficientemente fina $j \geq i$ tal que

$$\left(F_y^A - F_y^{A'} \right) (v \wedge v') > \varepsilon$$

para todo $y \in \sigma$ y para vectores independientes v, v' tangentes una 2-cadena $\sigma \in h_j(Sd|C_j|^{(2)})$. Por lo tanto,

$$\int_{\sigma} (F^A - F^{A'}) \neq 0.$$

□

OBSERVACIÓN. Notemos que $\text{Curv}(\varphi)$ coincide con la discretización de la 2-forma de curvatura F^A , es decir

$$\omega_i = \text{Curv}_i(\varphi) = \frac{1}{2\pi} F_d^A$$

utilizando el complejo simplicial $Sd|C_i|$ según la terminología de las sección 1.4.

Teorema Principal 3.16. 1. *La aplicación*

$$\tilde{\text{Curv}}: \mathcal{A}/\mathcal{G}_{\star} \longrightarrow \underline{\Omega} \times U(1)^{b_1} \quad (3.16)$$

$$[\varphi] \longmapsto (\text{Curv}(\varphi); \text{hol}_{\varphi}(\alpha^1), \dots, \text{hol}_{\varphi}(\alpha^{b_1}))$$

es inyectiva. La holonomía de la conexión φ , hol_{φ} , ver (1.10), es evaluada en los generadores libres $\alpha^1, \dots, \alpha^{b_1}$, de $H_1(M) = \mathbb{Z}^{b_1} \oplus T$.

2. Consideremos una rama del logaritmo $\log = \ln \frac{-\sqrt{-1}}{2\pi} : U(1)^{b_1} \rightarrow \mathbb{R}^{b_1}$. Entonces conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \underline{\Omega} \times U(1)^{b_1} & \xrightarrow{\text{id} \times \log} & \underline{\Omega} \times \mathbb{R}^{b_1} \\ \tilde{\text{Curv}} \uparrow & & \downarrow \epsilon \\ \mathcal{A}/\mathcal{G}_{\star} & \xrightarrow{\beta \circ \text{hol}} & \underline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_{\star}} \end{array} \quad (3.17)$$

donde $\text{hol} : \mathcal{A}/\mathcal{G}_{\star} \rightarrow \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_{\star}}$ se definió en (1.10), y $\beta : \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_{\star}} \rightarrow \underline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_{\star}}$ de definió en el teorema 2.20.

Demostración. Se conoce el teorema 1.18. Según este resultado una clase $[\varphi] \in \mathcal{A}/\mathcal{G}_{\star}$ está completamente determinada por la 2-forma de curvatura F^A y por la holonomía a lo largo de $\alpha_1, \dots, \alpha_{b_1}$, generadores fijos de la parte libre de $H_1(M)$. Por la parte 2 del lema 3.15 se tiene la inyectividad de la primera parte.

Para la segunda parte consideramos a escala C_i la aplicación

$$\left(\mathbf{e}_i \circ \log \circ \tilde{\text{Curv}}([\varphi]) \right) (\alpha_k) = \text{hol}_{\varphi}(\alpha_k), \quad k = 1, \dots, b_1;$$

$$\left(\mathbf{e}_i \circ \tilde{\text{Curv}}([\varphi]) \right) (\gamma_k^i) = \exp \left(2\pi\sqrt{-1} \text{Curv}_i([\varphi])(\sigma^k) \right), \quad k = 1, \dots, N_{2,i}.$$

Recordemos que el grupo $\mathcal{P}_{C_i, \star}$ tiene un subconjunto de generadores $\gamma_t^{\sigma^k}$ descritos en (2.18) y en la proposición 2.28. Recordemos que en una escala fija $(|C_i|, \phi_i; Sd|C_i|, T_i)$, cada generador $\gamma_t^{\sigma^k}$

se asocia con el borde $\partial\sigma_i^k$, de tal manera que la holonomía a lo largo de $\gamma_t^{\sigma_i^k}$ es la exponencial de la curvatura complexificada en σ_i^k , es decir.

$$\begin{aligned} (\beta_i \circ hol([\varphi]))(\gamma_t^{\sigma_i^k}) &= hol_{\varphi}(bar_i(\gamma_t^{\sigma_i^k})) = \exp\left(2\pi\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{\sigma_i^k} F^A\right) = \\ &= \exp\left(2\pi\sqrt{-1}Curv_i(\varphi)(\sigma_i^k)\right) = \left(\epsilon_i \circ \tilde{Curv}([\varphi])\right)(\gamma_t^{\sigma_i^k}). \end{aligned}$$

Se procede análogamente con los generadores $\alpha_1, \dots, \alpha_{b_1}$. Al considerar diferentes escalas conmutan los diagramas respectivos

$$\begin{array}{ccc} \Omega_i \times \mathbb{R}^{b_1} & \xrightarrow{e_i} & \text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, U(1)) \\ \text{id} \times \log \circ \text{Curv}_i \nearrow & & \uparrow \beta_i \circ hol \\ \mathcal{A}/\mathcal{G}_{\star} & \xrightarrow{\pi_{ji}} & \text{hom}(\mathcal{P}_{C_j, \star}, U(1)) \\ \text{id} \times \log \circ \text{Curv}_j \searrow & & \uparrow \pi_{ji} \\ \Omega_j \times \mathbb{R}^{b_1} & \xrightarrow{e_j} & \text{hom}(\mathcal{P}_{C_j, \star}, U(1)) \end{array}$$

Pasando al límite proyectivo se tiene el resultado.

Resta verificar que en los elementos de torsión $\gamma \in T \subset H_1(M)$, $\gamma + \dots + \gamma = s\gamma = 0$, la holonomía es constante. Esto es cierto porque el espacio de 1-formas de conexión φ es conexo por trayectorias: Tomemos una trayectoria φ_t , tal que $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = \varphi$, por ser hol_{φ_t} un homomorfismo para todo $t \in [0, 1]$, entonces tendremos que $hol_{\varphi}(\gamma)^s = 1$. Es decir, $hol_{\varphi_t}(\gamma)$ es una raíz s de la unidad para todo $t \in [0, 1]$. Por otro lado, la asignación del intervalo $[0, 1]$ en el círculo $U(1)$, $t \mapsto hol_{\varphi_t}(\gamma)$, es continua. Además $\zeta_0 = hol_{\varphi_0}(\gamma)$ también es una raíz de la unidad. Como el conjunto de raíces s de la unidad es discreto, entonces $hol_{\varphi_t}(\gamma)$ necesariamente es ζ_0 , y $hol_{\varphi}(\gamma) = hol_{\varphi_1}(\gamma) = \zeta_0$. \square

Capítulo 4

Medidas gaussianas

En el capítulo anterior a partir de una sucesión de escalas \mathcal{E} , definidas en 2.4, construimos el espacio afín $\underline{\Omega}$, según la definición 3.4. Dicho espacio se obtiene como límite proyectivo de espacios afines Ω_i , que consisten en 2–cocadenas cerradas de clase de cohomología correspondiente a la clase de Euler $\mathbf{e} \in H^2(M, \mathbb{R})$, del haz principal en consideración.

$\underline{\Omega}$ extiende el espacio de 2–formas de curvatura F^A de conexiones módulo gauge $[\varphi^A] \in \mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ y tiene la ventaja de que en él es posible construir medidas a partir de medidas cilíndricas.

En este punto introducimos el tercer ingrediente de nuestra construcción, a saber, una métrica riemanniana \mathbf{g} en M , la cuál permite definir una medida de probabilidad gaussiana ρ , centrada en cualquier punto ω^0 del espacio afín $\underline{\Omega}$.

4.1. Espacios vectoriales topológicos

Consideraremos topologías en los espacios vectoriales y afines $\underline{\Omega}$, $\underline{\Omega}^0$, \underline{V} . Referencias básicas para los conceptos utilizados son por ejemplo [Da], [Sc], [Ko], [DFL], [DS].

El espacio $\underline{\Omega}^0$, ver proposición 3.3, es un espacio vectorial topológico con la topología proyectiva inducida por el producto $\prod_i \Omega_i^0$. Para ver propiedades de espacios vectoriales topológicos que son límite proyectivo, ver por ejemplo [Sc]. En particular se conocen las propiedades:

Lema 4.1. $\underline{\Omega}^0$ es localmente convexo y Hausdorff.

NOTACIÓN. Dado un espacio vectorial topológico E , denotamos su dual algebraico como

$$E^* := \text{hom}(E, \mathbb{R}),$$

y su dual topológico como E' , $E' \subset E^*$. En particular denotemos Ω_i^* el dual algebraico de Ω_i^0 ,

$$\Omega_i^* := \text{hom}(\Omega_i^0, \mathbb{R}),$$

En este espacio consideramos la topología *–débil que hace las evaluaciones continuas.

Definición 4.2. Al considerar las aplicaciones lineales inyectivas $\pi_{ji} : \Omega_j^0 \rightarrow \Omega_i^0$, definidas en (3.10), tenemos aplicaciones continuas

$$\pi_{ij}^* : \Omega_i^* \rightarrow \Omega_j^*. \tag{4.1}$$

Con el correspondiente límite inyectivo de espacios topológicos,

$$\underline{\Omega}^* := \varinjlim_{\pi^*} \Omega_i^*. \quad (4.2)$$

Recordemos que los elementos de $\varinjlim_{\pi^*} \Omega_i^*$, son clases de equivalencia en $\cup \Omega_i^*$. Denotamos la clase de equivalencia de $f_i \in \Omega_i^*$ como

$$\pi_i^*(f_i) = [f_i] \in \underline{\Omega}^*.$$

Al considerar la proyección $\pi_i : \underline{\Omega}^0 \rightarrow \Omega_i^0$. Se tienen las inclusiones lineales $\pi_i^* : \Omega_i^* \rightarrow (\underline{\Omega}^0)^*$. Estas inclusiones inducen la inclusión

$$\pi^* : \underline{\Omega}^* \rightarrow \left(\varprojlim \Omega_i^0 \right)^*,$$

la cual induce una estructura de espacio vectorial en $\underline{\Omega}^*$.

El conjunto $\underline{\Omega}^*$ es un espacio vectorial y tiene a lo más tres topologías las cuales en general son diferentes:

1. La topología más fina tal que las inclusiones $\pi_i^* : \Omega_i^* \rightarrow \underline{\Omega}^*$ son continuas (la topología usual de límites inyectivos de espacios vectoriales).
2. La topología más fina compatible con la estructuras de espacio vectorial que hace de $\underline{\Omega}^*$ un espacio vectorial topológico (la suma le hace grupo topológico abeliano y producto por escalar es una aplicación continua), y que también hace las inclusiones π_i^* continuas.
3. La topología más fina localmente convexa que hace que las inclusiones π_i^* sean continuas y tal que $\underline{\Omega}^*$ sea espacio vectorial topológico.

En nuestro caso las tres topologías coinciden.

Proposición 4.3 (Corolario 3.4 y ejemplo 3.5 [G1]). *Si $\Omega_i^*, i \in \mathbb{N}$ es una familia numerable de espacios de dimensión finita con inclusiones $\pi_{ij}^* : \Omega_i^* \rightarrow \Omega_j^*, i \leq j$, lineales, entonces la topología del límite inyectivo $\varinjlim \Omega_i^*$ de espacios topológicos, también es la más fina compatible con la estructura de espacio vectorial y también es la más fina que es localmente convexa.*

Los abiertos de esta topología son los conjuntos $A \subset \underline{\Omega}^*$ tales que $(\pi_i^*)^{-1}(A) \subset \Omega_i^*$ es un abierto para toda $i \in \mathbb{N}$.

Ahora consideremos la aplicación continua

$$\pi^{**} : \left(\left(\varprojlim \Omega_i^0 \right)^* \right)^* \rightarrow \left(\varinjlim \Omega_i^* \right)^*$$

y la evaluación

$$ev : \varprojlim \Omega_i^0 \rightarrow \left(\left(\varprojlim \Omega_i^0 \right)^* \right)^*.$$

Con esto construimos la aplicación lineal continua

$$\pi^{**} \circ ev : \varprojlim \Omega_i^0 \rightarrow \left(\varinjlim \Omega_i^* \right)^*.$$

Por otro lado, la inclusión $\pi_i^* : \Omega_i^* \rightarrow \underline{\Omega}^*$ induce, $\pi_i^{**} : \underline{\Omega}^{**} \rightarrow (\Omega_i^*)^*$, y en el límite proyectivo

$$\pi^{**} : \underline{\Omega}^{**} \rightarrow \varprojlim (\Omega_i^*)^*.$$

Como Ω_i^0 es de dimensión finita Ω_i^0 con la topología débil es isomorfo a $(\Omega_i^*)^*$. Por lo tanto $\pi_i^{**} : \underline{\Omega}^{**} \rightarrow \Omega_i^0$, induce

$$\pi^{**} : \left(\underline{\Omega}^* \right)^* \rightarrow \underline{\Omega}^0.$$

El cual tiene como función inversa $\pi^{**} \circ ev$. Con esto se prueba el siguiente lema.

Lema 4.4 ([Sc], pág. 140). *Consideremos el límite proyectivo $\underline{\Omega}^0$ con la topología proyectiva y el dual algebraico $\left(\underline{\Omega}^* \right)^*$, con la topología $*$ -débil. Se tiene un isomorfismo de espacios vectoriales que es continuo:*

$$\pi^{**} : \left(\underline{\Omega}^* \right)^* \rightarrow \underline{\Omega}^0.$$

Además es un isomorfismo de espacios vectoriales topológicos.

4.2. Medidas gaussianas para formas de área

El interés principal en esta sección será definir medidas de probabilidad gaussianas ρ en $\underline{\Omega}^0$, asociadas a una métrica riemanniana g en M .

Definición 4.5. Consideremos el espacio vectorial real de 2-cadenas $V_i = \{\omega : (Sd|C_i|^2, h_i) \rightarrow \mathbb{R}\}$, el cual contiene al espacio afín Ω_i . Definamos la base independiente

$$F_{\sigma_i^1}, \dots, F_{\sigma_i^{N_{2,i}}} \in V_i^*,$$

definidas como la evaluación de la 2-cadena en cada simplejo $\sigma_i^k \in \{\sigma_i^1, \dots, \sigma_i^{N_{2,i}}\} = (Sd|C_i|^2, h_i)$,

$$F_{\sigma_i^k}(\omega) := \omega(\sigma_i^k), \quad \omega \in V_i. \quad (4.3)$$

La restricción de estas funciones al subespacio afín $\Omega_i \subset V_i$, dan lugar a funciones *afines*

$$F_{\sigma_i^k} : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}.$$

Por otro lado las funciones lineales correspondientes con dominio Ω_i^0 , son $\check{F}_{\sigma_i^k} \in \Omega_i^*$,

$$\check{F}_{\sigma_i^k} \left(\overrightarrow{\omega^0 \omega} \right) := F_{\sigma_i^k}(\omega) - F_{\sigma_i^k}(\omega^0), \quad \overrightarrow{\omega^0 \omega} \in \Omega_i^0. \quad (4.4)$$

Notemos que V_i^* es isomorfo al espacio de 2-cadenas con coeficientes reales

$$V_i^* \simeq S_2(Sd|C_i|) \otimes \mathbb{R} \quad (4.5)$$

y que existen inclusiones lineales $\pi_{ij}^* : V_i^* \rightarrow V_j^*$ definidas por

$$\pi_{ij}^* \left(F_{\sigma_i^k} \right) = \sum_{l=1}^{N_{2,j}} \delta_l(\sigma_i^k) \cdot F_{\sigma_j^l}, \quad (4.6)$$

donde

$$\iota_{ij}^{(2)}(\sigma_i^k) = \sum_{l=1}^{N_{2,j}} \delta_l(\sigma_k^i) \cdot \sigma_j^l \in S^2(Sd|C_j|);$$

y según (3.3),

$$\delta_l(\sigma_k^i) = \begin{cases} 1, & \sigma_j^l \subset \sigma_i^k \\ 0. & \end{cases}$$

Notemos que si identificamos V_i^* con las 2–cadenas reales $S_2(Sd|C_i|) \otimes \mathbb{R}$ tendremos que π_{ij}^* coincide con la inclusión $\iota_{ij}^{(2)}$ definida en (3.2).

Sea $N_i \subset V_i^*$ el subespacio generado por los vectores provenientes de 2–cadenas cerradas:

$$N_i := \left\{ r_1 F_{\sigma_i^1} + \cdots + r_{N_{2,i}} F_{\sigma_i^{N_{2,i}}} \in V_i^* \mid \partial \left(\sum_{k=1}^{N_{2,i}} r_j \sigma_i^k \right) = 0, r_k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Usando el isomorfismo (4.5) tendremos la sucesiones exactas cortas isomorfas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N_i & \longrightarrow & V_i^* & \xrightarrow{\vartheta_i} & \Omega_i^* & \longrightarrow & 0; \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (\ker \partial) \otimes \mathbb{R} & \longrightarrow & S_2(Sd|C_i|) \otimes \mathbb{R} & \longrightarrow & (S_2(Sd|C_i|)/\ker \partial) \otimes \mathbb{R} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde $\vartheta_i(F_{\sigma_i^k})(\omega) = F_{\sigma_i^k}(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega_i^0$.

Consideraremos a partir de ahora una estructura métrica adicional sobre M , dada por una métrica riemanniana \mathbf{g} . Nos interesa introducir porque nos permite para todas las escalas medir longitudes, áreas, volúmenes de aristas, 2–simplejos y 3–simplejos $\sigma \in Sd C_i$ respectivamente, mediante las integrales

$$\mu_i^k(\sigma) := \int_{\psi(\sigma)} \sqrt{|\det((\psi_\sigma^{-1})^* \phi_i^* \mathbf{g})|} \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

donde $|\sigma|$ es un k –simplejo que tiene coordenadas $\psi_\sigma : |\sigma| \rightarrow \mathbb{R}^k$, y donde $(\psi_\sigma^{-1})^* \phi_i^* \mathbf{g}$ es la forma bilineal inducida en el espacio tangente de \mathbb{R}^k (recordemos que un ejercicio de rutina prueba que el valor de la integral no depende del sistema de las coordenadas elegidas ψ_σ). Las funciones

$$\mu_i^k : Sd C_i^k \rightarrow \mathbb{R}^+$$

son tales que si σ es un k –simplejo a escala gruesa, $\sigma \in Sd C_i^k$, que se descompone en escalas finas como

$$\sigma = \sigma^1 \cup \cdots \cup \sigma^r, \quad \sigma^l \in Sd C_j^k;$$

entonces

$$\mu_i^k(\sigma) = \mu_j^k(\sigma^1) + \cdots + \mu_j^k(\sigma^r).$$

Denotamos $\text{area} := \mu_i^2$.

Lema 4.6. *Dada una forma de área en M , asociada a una métrica riemanniana, \mathbf{g} , existe:*

1. Una forma bilineal positiva definida \mathcal{Q} en \underline{V}^* .
2. Una inclusión $g : \underline{\Omega}^* \rightarrow \underline{V}^* := \varinjlim V_i^*$.
3. Una forma bilineal positiva definida $g^* \mathcal{Q}$ en $\underline{\Omega}^*$ asociada a la inclusión g .

Demostración. De manera explícita podemos construir una forma bilineal \mathcal{Q}_i en V_i^* . Para ello consideremos el área positiva

$$a_{i,k} = \left| \text{area} \left(\sigma_i^k \right) \right|, \quad (Sd |C_i|^2, h_i) = \left\{ \sigma_i^1, \dots, \sigma_i^{N_{2,i}} \right\},$$

donde estamos considerando todos los 2–simplejos orientados.

Consideramos la forma bilineal positiva definida en V_i^* , con la base $F_{\sigma_i^1}, \dots, F_{\sigma_i^{N_{2,i}}}$, por la matriz diagonal positiva definida,

$$\mathcal{Q}_i := \begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{i,N_{2,i}} \end{pmatrix}, \quad \|\cdot\|_{\mathcal{Q}_i}^2 := \mathcal{Q}_i(\cdot, \cdot). \quad (4.7)$$

Al considerar una escala fija $(|C_i|, \phi_i; Sd |C_i|^2, T_i)$ y escalas más finas, $j \geq i$, se puede probar la siguiente relación

$$a_{i,k} = \sum_{l=1}^{N_{2,j}} \delta_l(\sigma_i^k) \cdot a_{j,l},$$

Donde cada 2–simplejo a escala gruesa, $\sigma_i^k \in (Sd |C_i|^2, h_i)$ se descompone 2–cadena a escala fina

$$\iota_{ij}^{(2)}(\sigma_i^k) = \sum_{l=1}^{N_{2,j}} \delta_l(\sigma_i^k) \cdot \sigma_j^l, \quad \sigma_j^l \in (Sd |C_j|^2, h_j).$$

Los coeficientes $\delta_l(\sigma_i^k)$ se definen en (3.3). Se verifica entonces que las inclusiones π_{ij}^* son isometrías,

$$\left\| \pi_{ij}^* \left(F_{\sigma_i^k} \right) \right\|_{\mathcal{Q}_j} = \left\| F_{\sigma_i^k} \right\|_{\mathcal{Q}_i}, \quad F_{\sigma_i^k} \in V_i^*.$$

Por lo tanto está bien definida una forma bilineal positivo definida en $\varinjlim V_i^*$. Esto prueba la primera parte.

Para la segunda parte, como $\iota_{ij}^k \circ \partial = \partial \circ \iota_{ij}^{(k+1)}$, se tiene que $\pi_{ij}^*(N_i) \subset N_j$, por lo tanto $\pi_{ij}^* : V_i \rightarrow V_j$ induce una aplicación dual de $\pi_{ji} : \Omega_j^0 \rightarrow \Omega_i^0$,

$$\pi_{ij}^* : \Omega_i^* \rightarrow \Omega_j^*.$$

Además se tienen los diagramas conmutativos,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N_i & \longrightarrow & V_i^* & \xrightarrow{\vartheta_i} & \Omega_i^* \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \pi_{ji}^* & & \downarrow \pi_{ji}^* & & \downarrow \pi_{ji}^* \\ 0 & \longrightarrow & N_j & \longrightarrow & V_j^* & \xrightarrow{\vartheta_j} & \Omega_j^* \longrightarrow 0 \end{array}$$

Así podemos obtener aplicaciones en el cociente $V_i^*/N_i \rightarrow V_j^*/N_j$, y diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} V_i^*/N_i & \xrightarrow{\overline{\pi_{ij}^*}} & V_j^*/N_j \\ \uparrow \overline{\vartheta_i} & & \uparrow \overline{\vartheta_j} \\ \Omega_i^* & \xrightarrow{\pi_{ij}^*} & \Omega_j^* \end{array}$$

donde $\overline{\vartheta_i} : V_i^*/N_i \rightarrow \Omega_i^*$ es el isomorfismo inducido por la aplicación $\vartheta_i : V_i^* \rightarrow \Omega_i^*$ dada por la evaluación cuyo núcleo es N_i .

Consideramos el isomorfismo

$$\alpha_i : V_i^*/N_i \rightarrow N_i^\perp$$

está especificado por

$$\alpha_i \left(\sum_{k=1}^{N_{2,i}} a_k F_{\sigma_i^k} + N_i \right) = \text{Proy}_{N_i^\perp} \left(\sum_{k=1}^{N_{2,i}} a_k F_{\sigma_i^k} \right), \quad \sum_{k=1}^{N_{2,i}} a_k F_{\sigma_i^k} \in V_i^*,$$

donde $\text{Proy}_{N_i^\perp} : V_i \rightarrow N_i^\perp$ consiste en tomar la proyección ortogonal respecto a \mathcal{Q}_i ; y donde $N_i^\perp \subset V_i^*$ es el complemento ortogonal de N_i . Con esto definimos las inclusiones

$$g_i = \alpha_i \circ \overline{\vartheta_i}^{-1} : \Omega_i^* \rightarrow V_i^*.$$

Afirmamos que

$$\pi_{ij}^*(N_i) = \pi_{ij}^*(V_i^*) \cap N_j. \quad (4.8)$$

Para la inclusión $\pi_{ij}^*(N_i) \subset \pi_{ij}^*(V_i^*) \cap N_j$, consideremos una 2-cadena cerrada $\sum_{k=1}^{N_{2,i}} a_k \sigma_i^k \in S_2(\text{Sd}|C_i|, h_i)$, $\partial \sum_{k=1}^{N_{2,i}} a_k \sigma_i^k = 0$. Entonces la 2-cadena

$$\iota_{ij}^{(2)} \left(\sum_{k=1}^{N_{2,i}} a_k \sigma_i^k \right) = \sum_{l=1}^{N_{2,j}} b_l \sigma_j^l \in S_2(\text{Sd}|C_j|, h_j),$$

es cerrada ya que

$$\partial \left(\iota_{ij}^{(2)} \left(\sum_{k=1}^{N_{2,i}} a_k \sigma_i^k \right) \right) = \iota_{ij}^{(1)} \circ \partial \left(\sum_{k=1}^{N_{2,i}} a_k \sigma_i^k \right) = \iota_{ij}^{(1)}(0) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\pi_{ij}^* \left(\sum_{k=1}^{N_{2,i}} a_k F_{\sigma_i^k} \right) = \sum_{l=1}^{N_{2,j}} b_l F_{\sigma_j^l},$$

donde $\partial \left(\sum_{l=1}^{N_{2,j}} b_l \sigma_j^l \right) = 0$.

Recíprocamente, para la inclusión $\pi_{ij}^*(V_i^*) \cap N_j \subset \pi_{ij}^*(N_i)$, consideremos $\sum_{l=1}^{N_{2,j}} b_l F_{\sigma_j^l} \in \pi_{ij}^*(V_i^*)$, el cuál tiene asociada una 2-cadena cerrada $\sum_{l=1}^{N_{2,j}} b_l \sigma_j^l$. Entonces existe una 2-cadena $\sum_{k=1}^{N_{2,i}} a_k \sigma_i^k \in S_2(Sd|C_i|, h_i)$, tal que

$$\iota_{ij}^{(2)} \left(\sum_{k=1}^{N_{2,i}} a_k \sigma_i^k \right) = \sum_{l=1}^{N_{2,j}} b_l \sigma_j^l.$$

Entonces se tiene que

$$\iota_{ij}^{(1)} \circ \partial \left(\sum_{k=1}^{N_{2,i}} a_k \sigma_i^k \right) = \partial \circ \iota_{ij}^{(2)} \left(\sum_{k=1}^{N_{2,i}} a_k \sigma_i^k \right) = \partial \left(\sum_{l=1}^{N_{2,j}} b_l \sigma_j^l \right) = 0.$$

Como $\iota_{ij}^{(\cdot)}$ son inclusiones, $\partial \left(\sum_{k=1}^{N_{2,i}} a_k \sigma_i^k \right) = 0$ y por lo tanto $\sum_{k=1}^{N_{2,i}} a_k \sigma_i^k \in N_i$. Esto prueba 4.8. Notemos que

$$N_j = \pi_{ij}^*(V_i^*) \cap N_j \oplus \pi_{ij}^*(V_i^*)^\perp \cap N_j = \pi_{ij}^*(N_i) \oplus \pi_{ij}^*(V_i^*)^\perp \cap N_j. \quad (4.9)$$

La aplicación π_{ij}^* es una que envía vectores ortogonales en vectores ortogonales. Si $\mathcal{Q}_i(v, u) = 0$ para todo $u \in N_i$, entonces

$$\mathcal{Q}_j(\pi_{ij}^*(v), \pi_{ij}^*(u)) = 0.$$

También si $u' \in \pi_{ij}^*(V_i^*)^\perp \cap N_j$, entonces $\mathcal{Q}_j(\pi_{ij}^*(v), u') = 0$. Por lo tanto, gracias a (4.9)

$$\pi_{ij}^*(N_i^\perp) \subset N_j^\perp$$

Entonces conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_i^* & \xrightarrow{\pi_{ij}^*} & V_j^* \\ \uparrow & & \uparrow \\ N_i^\perp & \xrightarrow{\pi_{ij}^*} & N_j^\perp \\ \alpha_i \uparrow & & \alpha_j \uparrow \\ V_i^*/N_i & \xrightarrow{\overline{\pi_{ij}^*}} & V_j^*/N_j \\ \downarrow \vartheta_i & & \downarrow \vartheta_j \\ \Omega_i^* & \xrightarrow{\pi_{ij}^*} & \Omega_j^* \end{array}$$

Consideremos un $v \in N_i^\perp$, entonces $\pi_{ij}^*(v) \in N_j^\perp$. Recordemos que la aplicación $\alpha_i : V_i^*/N_i \rightarrow N_i^\perp$ consiste en tomar la proyección ortogonal de un vector en V_i , que sea representante de la clase correspondiente en V_i^*/N_i . Entonces conmutan los diagramas

$$\begin{array}{ccc} V_i^* & \xrightarrow{\pi_{ij}^*} & V_j^* \\ g_i \uparrow & & g_j \uparrow \\ \Omega_i^* & \xrightarrow{\pi_{ij}^*} & \Omega_j^* \end{array} \quad (4.10)$$

Por lo tanto se tiene la inclusión

$$g : \underline{\Omega}^* \rightarrow \varinjlim V_i^*.$$

Así que \mathcal{Q}_i induce formas bilineales $g_i^* \mathcal{Q}_i$ en Ω_i^* , para las cuales las aplicaciones lineales $\pi_{ij}^* : \Omega_i^* \rightarrow \Omega_j^*$, $i < j$ son isometrías. Obtendremos entonces una forma bilineal positiva definida $g^* \mathcal{Q}$ en $\underline{\Omega}^*$. □

4.3. Medidas cilíndricas

En esta sección definiremos lo que son medidas cilíndricas en espacios topológicos construidos como límites proyectivos. Nuestra finalidad será describir medidas gaussianas cilíndricas, las cuales a su vez darán lugar a medidas numerablemente aditivas en $\underline{\Omega}^0$. Para la conveniencia del lector, referencias básicas serán [Gr2], [St], [Bi], [Da], [DFL].

Definición 4.7. Consideremos un espacio vectorial topológico E y un subespacio de dimensión finita F del dual topológico E' . La σ -álgebra de conjuntos F -cilíndricos, \mathcal{C}_F , es la σ -álgebra generada por la colección de conjuntos de la forma

$$\{f^{-1}(B) \mid B \subset \mathbb{R} \text{ es boreliano, } f \in F\}.$$

Sea $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in I}$, una colección de subespacios finitos de E' , con un orden parcial en \mathcal{F} , dado por la inclusión, $F_i \rightarrow F_j$. Definimos un orden parcial \prec en I como $i \prec j$ si $F_i \subset F_j$. Se define el álgebra de conjuntos \mathcal{F} -cilíndricos, como la unión de todas las σ -álgebras F_i -cilíndricas

$$\mathcal{C}_{\mathcal{F}} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{C}_{F_i}.$$

La compatibilidad con las inclusiones asegura que esta unión en efecto es un álgebra.

Una **medida cilíndrica** ρ en E , respecto a \mathcal{F} , será una función finitamente aditiva, no negativa en el álgebra de conjuntos \mathcal{F} -cilíndricos,

$$\rho : \mathcal{C}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Se tienen los espacios

$$E_F := E / \{\omega \in E \mid f(\omega) = 0, f \in F\}.$$

los cuales tienen aplicaciones, $\pi_{ji} : E_{F_j} \rightarrow E_{F_i}$, inducidas por las inclusiones $F_i \subset F_j$, para $i \prec j$.

Lema 4.8 ([Da], lema I.3.1). *Una colección ρ_i de medidas borelianas en E_{F_i} , compatibles, $(\pi_{ji})_* \rho_j = \rho_i$, define una medida cilíndrica en E respecto a \mathcal{F} .*

Una medida cilíndrica ρ en E no siempre hará de E un espacio de medida. Sin embargo ρ define una función finitamente aditiva, en la σ -álgebra de los borelianos del espacio vectorial topológico que se obtiene como el límite proyectivo,

$$\underline{E} := \varprojlim_i E_{F_i}.$$

Podemos considerar

$$E = \varprojlim \Omega^0 \simeq \left(\varprojlim \Omega^* \right)^*, \quad E' = E^* = \left(\varprojlim \Omega^0 \right)^* = \varprojlim \Omega^*, \quad \mathcal{F} = \{ \pi_i^*(\Omega_i^*) \}_{i \in \mathbb{N}}.$$

entonces por definición

$$E_{\Omega_i^*} = \varprojlim \{ \omega \in \varprojlim \Omega^0 \mid f(\pi_i(\omega)) = 0, \text{ para todo } f \in \Omega_i^* \}.$$

Como las funciones lineales $f \in \Omega_i^*$ separan puntos, si $f(\pi_i(\omega)) = 0$, para todo $f \in \Omega_i^*$, entonces $\pi_i(\omega) = 0$, es decir,

$$E_{\Omega_i^*} = \varprojlim \Omega^0 / \pi_i^{-1}(0).$$

Además se tiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \pi_i^{-1}(0) \rightarrow \varprojlim \Omega^0 \rightarrow \Omega_i^0 \rightarrow 0.$$

Por lo tanto se tiene el isomorfismo

$$E_{\Omega_i^*} \simeq \Omega_i^0.$$

Además, Si $\omega \in \pi_j^{-1}(0)$, entonces $\omega \in \pi_i^{-1}(0)$, es decir, $\pi_j^{-1}(0) \subset \pi_i^{-1}(0)$. De donde se obtienen aplicaciones

$$\pi_{ji} : E_{\Omega_j^*} \rightarrow E_{\Omega_i^*},$$

y diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} E_{\Omega_j^*} & \xrightarrow{\pi_{ji}} & E_{\Omega_i^*} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \Omega_j^0 & \xrightarrow{\pi_{ji}} & \Omega_i^0 \end{array}$$

Finalmente se tiene el isomorfismo de límites proyectivos

$$\varprojlim E_{\Omega_i^*} \simeq \varprojlim \Omega^0 = E \tag{4.11}$$

Lema 4.9. *Sea \mathcal{B}^* el álgebra boreliana débil de $\varprojlim \Omega^0$. Entonces*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \mathcal{B}^*.$$

donde $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ es la σ -álgebra de los cilíndricos $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$.

Demostración. Dado que según el lema 4.4, los abiertos de la topología débil son los mismos que los de la topología producto, se sigue que el álgebra de cilíndricos coincide con el álgebra de borelianos y por tanto $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$. □

Corolario 4.10. *Toda función lineal real, $f : \varprojlim \Omega^0 \rightarrow \mathbb{R}$ es medible respecto a la σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$.*

Demostración. El corolario es otra manera de decir que la sigma álgebra $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ coincide con la sigma álgebra \mathcal{B}^* . Esta última σ -álgebra tiene como medibles los generados por los abiertos usando funciones lineales. □

4.4. Medidas gaussianas en espacios topológicos

Para que una medida cilíndrica defina una función numerablemente aditiva y en efecto defina una medida en el límite proyectivo $\varprojlim_i E_{F_i}$, es necesario verificar el teorema de Kolmogorov, ver [Da] sección 1.3, [St], el teorema de Prohokorov [Bi] sección 5, [Sk] pág. 49.

Teorema 4.11 (Kolmogorov). [Corolario I.3.5 [Da]] Sea B un conjunto arbitrario y sea \mathcal{G} el conjunto de todos los subconjuntos finitos no vacíos de B con el orden parcial inducido por la inclusión. Para cada $F \in \mathcal{G}$ de cardinalidad $|F|$, sea $\mathbb{R}^{|F|}$ un espacio euclidiano con la σ -álgebra, \mathcal{B}_F de borelianos en $\mathbb{R}^{|F|}$.

Para cada $F \in \mathcal{G}$, sea μ_F una medida de probabilidad en $(\mathbb{R}^{|F|}, \mathcal{B}_F)$, y supongamos que dichas medidas de probabilidad son consistentes, es decir, para $F = \{\omega_1, \dots, \omega_{|F|}\}$, $F' = \{\omega'_1, \dots, \omega'_{|F'|}\} \in \mathcal{G}$ con $F \subset F'$, se tiene

$$\mu_{F'}(p_{F'F}^{-1}(E)) = \mu_F(E),$$

donde $p_{F'F} : \mathbb{R}^{|F'|} \rightarrow \mathbb{R}^{|F|}$ es la proyección $p_{F'F}(x_{\omega'_1}, \dots, x_{\omega'_{|F'|}}) = (x_{\omega_1}, \dots, x_{\omega_{|F|}})$.

Sea $\Gamma = \prod_{\omega \in B} \mathbb{R}_\omega$ con la σ -álgebra $\mathcal{B}_\mathcal{G} = \prod_{\omega \in B} \mathcal{B}_\omega$, donde \mathcal{B}_ω son los borelianos en el factor \mathbb{R}_ω . Entonces hay una única medida de probabilidad μ en Γ tal que se satisface la siguiente condición

$$\mu(p_F^{-1}(E)) = \mu_F(E)$$

donde $p_F : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^{|F|}$ es la proyección $p_F((x_\omega)_{\omega \in X}) = (x_{\omega_1}, \dots, x_{\omega_{|F|}})$.

Esta versión del teorema de Kolmogorov nos resultara útil para definir medidas en $\underline{\Omega}$ a partir de medidas cilíndricas. Primero recordemos que la transformada de Fourier de una medida μ en \mathbb{R}^n , se define como

$$\mathcal{F}\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\sqrt{-1}f(\omega)) d\mu,$$

$\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ tiene dominio y codominio en el espacio de distribuciones temperadas $f \in \mathcal{S}'$, que es el dual del espacio \mathcal{S} de las funciones que decaen rápidamente en Ω_i , ver definiciones por ejemplo en [Ru]. En particular para una medida gaussiana ρ en \mathbb{R}^n la transformada de Fourier de una función lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es

$$\mathcal{F}\rho(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\sqrt{-1}f(\omega)) d\rho = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{Q}(f, f)\right),$$

donde \mathcal{Q} es una forma bilineal positivo definida llamada la **covarianza** de la gaussiana.

Lema 4.12. Supongamos que $\pi_{j_i} : \Omega_j^0 \rightarrow \Omega_i^0$ es una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita. Sean ρ_i, ρ_j medidas gaussianas centradas en Ω_i^0, Ω_j^0 respectivamente con formas de covarianza \mathcal{Q}_i y \mathcal{Q}_j . La aplicación dual $\pi_{i_j}^* : \Omega_j^* \rightarrow \Omega_i^*$ es una isometría con los productos internos definidos por \mathcal{Q}_i y \mathcal{Q}_j , si y sólo si $(\pi_{j_i})_*\rho_j = \rho_i$.

Para la demostración ver por ejemplo, [Ga] proposición III.59 y proposición III.64, también [Su] teorema 3.1. Usando el lema 4.12 y el teorema de Kolmogorov se sigue el siguiente

Teorema Principal 4.13. *Una familia de medidas de probabilidad, ρ_i en Ω_i , que satisfacen $(\pi_{ji})_* \rho_j = \rho_i$, para cualesquiera $i < j$, definen una medida de probabilidad, ρ , en $\underline{\Omega}^0$.*

En particular consideremos una colección de formas bilineales positivo definidas \mathcal{Q}_i en Ω_i^ definidas en el lema 4.6, con la colección de gaussianas asociadas ρ_i cuyas transformadas de Fourier son:*

$$\int_{\Omega_i} \exp(\sqrt{-1}f(\omega)) d\rho_i = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_i(f, f)\right), \quad f \in \Omega_i^*.$$

Si $\pi_{ji}^ : \Omega_i^* \rightarrow \Omega_j^*$ son isometrías con respecto a \mathcal{Q}_i y \mathcal{Q}_j , entonces existe una medida de probabilidad ρ en $\underline{\Omega}^0$, definida por las gaussianas ρ_i .*

Demostración. Debido a que $\pi_{ij}^* : \Omega_i^* \rightarrow \Omega_j^*$ son isometrías se tiene que las gaussianas ρ_i son compatibles con el engrosamiento, es decir, $(\pi_{ji})_* \rho_j = \rho_i$ por lo tanto definen una medida cilíndrica ρ en $\underline{\Omega}^0$ tal como se vio en el lema 4.8.

Verifiquemos que se satisfacen las condiciones del teorema de Kolmogorov, 4.11, y que la medida cilíndrica

$$\rho : \mathcal{C}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{F} = \{\Omega_i^*\}_{i \in \mathbb{N}},$$

define una medida numerablemente aditiva en la σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \mathcal{B}^*$ de borelianos de $\underline{\Omega}^0$.

Por inducción es posible construir una base de Hamel de $\underline{\Omega}^0$,

$$B = \{\omega_{i,k} \mid k = 1, \dots, \dim \Omega_i^0; i \in \mathbb{N}\}$$

tal que $\pi_i(\omega_{i,1}), \dots, \pi_i(\omega_{i,n_i})$, es una base de Ω_i^0 , con $n_i = \dim \Omega_i^0$, y tal que $\pi_{ji}(\pi_j(\omega_{j,k})) = \omega_{i,k}$, $k = 1, \dots, n_i$; y $\pi_{ji}(\pi_j(\omega_{j,k})) = 0$, para $k = n_i + 1, \dots, n_j$. Consideramos \mathcal{G} la colección de todos los subconjuntos finitos de B , y para cada $F \in \mathcal{G}$ consideramos el subespacio vectorial generado por los vectores de $F = \{\omega_{i_1, k_1}, \dots, \omega_{i_n, k_n}\}$,

$$\{x_1 \omega_{i_1, k_1} + \dots + x_n \omega_{i_n, k_n} \mid x_k \in \mathbb{R}\} \leftrightarrow \mathbb{R}^{|F|} = \{(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Entonces existen proyecciones $p_{F', F} : \mathbb{R}^{|F'|} \rightarrow \mathbb{R}^{|F|}$ cuando $F \subset F'$. Para

$$F_i := \{\omega_{i,1}, \dots, \omega_{i,|F_i|}\},$$

se tiene $\mathbb{R}^{|F_i|} \simeq \Omega_i^0$, y conmutan los diagramas

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{|F_j|} & \xrightarrow{p_{F_j, F_i}} & \mathbb{R}^{|F_i|} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \Omega_j^0 & \xrightarrow{\pi_{ji}} & \Omega_i^0. \end{array}$$

Supongamos que $\{i_1 \leq \dots \leq i_n\}$ es una secuencia, entonces existe una proyección

$$p_{F_{i_n}, F} : \Omega_{i_n}^0 \rightarrow \mathbb{R}^{|F|}, \quad p_{F_{i_n}, F} \left(\sum_{k=1}^{|F_{i_n}|} x_k \pi_{i_n}(\omega_{i_n, k}) \right) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_{|F|}}),$$

donde $F = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_{|F|}}\}$.

Al considerar las medidas de probabilidad $\rho_F := (p_{F_{i_n}, F})_* \rho_{i_n}$, tendremos una colección de medidas de probabilidad consistentes. Así se verifican todas las condiciones del teorema de Kolmogorov 4.11, y por lo tanto existe una única medida de probabilidad ρ en $\Gamma = \prod_{\omega \in B} \mathbb{R}_\omega$.

Además se tienen los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma & \\ & \swarrow p_{F_i} & \downarrow p_{F_j} \\ \Omega_i^0 & \xleftarrow{\pi_{j_i}} & \Omega_j^0 \end{array}$$

y también

$$\begin{array}{ccc} & \Omega^0 & \\ & \swarrow \pi_{F'} & \downarrow \pi_F \\ \mathbb{R}^{|F|} & \xleftarrow{p_{F', F}} & \mathbb{R}^{|F'|} \end{array}$$

donde $\pi_F = p_{F_i, F} \circ \pi_{i_n}$. Por lo tanto, el límite proyectivo de espacios euclidianos Ω^0 es homeomorfo a Γ y ρ es una medida de probabilidad para los borelianos euclidianos \mathcal{B}_g . En particular también es una medida de probabilidad para la σ -álgebra de la topología débil \mathcal{B}^* . \square

Definición 4.14 (ver [Ya] pág. 151). Consideremos un espacio vectorial topológico E tal que su dual algebraico E^* con la topología $*$ -débil es localmente convexo y Hausdorff. Una medida ρ de probabilidad en E^* , con σ -álgebra los borelianos de la topología $*$ -débil, \mathcal{B}^* , se llama **gaussiana** si para toda función lineal $f \in E$, $f_*\rho$ es una medida gaussiana en \mathbb{R} , denotamos su media con $\mathbb{E}(f)$ y su varianza $\mathbb{V}(f)$. Se llamará **centrada** si $\mathbb{E}(f) = 0$ para todo f .

Teorema 4.15 (Teorema 8.1 [Ya]). *Para una medida ρ en E^* para la σ -álgebra \mathcal{B}^* , son equivalentes:*

1. Para toda $f \in E$, $f_*\rho$ es una gaussiana 1-dimensional, es decir, ρ es una medida gaussiana en E^* .
2. Existe un producto interno $\mathcal{Q}(\cdot, \cdot)$ en E tal que la función característica o transformada de Fourier evaluada en $f \in E$, es

$$\mathcal{F}\rho(f) = \int_{E^*} \exp(\sqrt{-1}f(\omega)) d\rho(\omega) = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{Q}(f, f)\right).$$

En consecuencia basta definir una forma bilineal postivo definida \mathcal{Q} en $\underline{\Omega}^*$, como en el teorema 4.13, para poder definir una medida de probabilidad gaussiana centrada en $\underline{\Omega}^0$.

4.5. Isometría de las normas $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$ y L^2 para funciones lineales.

Lema 4.16. *Sea \mathcal{Q} la forma bilineal en $\underline{\Omega}^*$ definida en el lema 4.6 a partir de una forma de área en M y sea ρ la gaussiana correspondiente definida en el teorema 4.13. Existe una isometría lineal \mathcal{I} ,*

$$\underline{\Omega}^* \xrightarrow{\mathcal{I}} L^2\left(\underline{\Omega}^0, \rho\right),$$

donde ρ es la medida gaussiana descrita en el teorema 4.13.

Demostración. \mathcal{I} resulta ser el límite inyectivo de

$$\mathcal{I}_i : \Omega_i^* \rightarrow L^1\left(\underline{\Omega}^0, \rho\right),$$

definidas por $[\mathcal{I}_i(f_i)](\omega) = f_i(\pi_i(\omega))$, para cada $f \in \Omega_i^*$, tomando $\omega \in \underline{\Omega}^0$.

Haciendo cálculos

$$\|\mathcal{I}_i(f_i)\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega_i} [f_i(\omega_i)]^2 d\rho_i(\omega_i),$$

El producto interno en Ω_i^* , $\langle f_i, f_i \rangle_{\mathcal{Q}_i} = \mathcal{Q}_i(f_i, f_i)$, induce un producto interno en Ω_i^0 . Consideremos $\omega_{f_i} \in \Omega_i^0$ tal que $f_i(\omega_{f_i}) = 1$ y $f'_i(\omega_{f_i}) = 0$ para f'_i ortogonal a f_i . Y consideremos en seguida una descomposición ortogonal de Ω_i^0 como $\mathbb{R} \cdot \omega_{f_i} \times \mathbb{R}^{n_i-1}$, $n_i = \dim \Omega_i$. Entonces

$$\|\mathcal{I}_i(f_i)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}\omega_{f_i} \times \mathbb{R}^{n_i-1} \subset \Omega_i^0} [f_i(\omega_i)]^2 d\rho_1(r) \otimes d\rho_{n_i-1}$$

Donde descomponemos la gaussiana $d\rho_i$ en $\Omega_i^0 = \mathbb{R}^{n_i}$, como producto de gaussianas $d\rho_1 \otimes d\rho_{n_i-1}$ en \mathbb{R} y \mathbb{R}^{n_i-1} , respectivamente. Luego usando el teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \|\mathcal{I}_i(f_i)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}\omega_{f_i}} [f_i(\omega_i)]^2 d\rho_1 \int_{\mathbb{R}^{n_i-1}} d\rho_{n_i-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}\omega_{f_i}} [f_i(r\omega_{f_i})]^2 d\rho_1(r) \\ &= \int_{\mathbb{R}} r^2 d\rho_1(r) \\ &= \mathcal{Q}_i(f_i, f_i) \\ &= \|f_i\|_{\mathcal{Q}_i}^2. \end{aligned}$$

En la igualdad $\int_{\mathbb{R}} r^2 d\rho_1(r) = \mathcal{Q}_i(f_i, f_i)$ utilizamos que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}kx} d\rho_1(x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}kx} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = e^{-k^2\sigma^2/2}$$

donde $\sigma = \mathcal{Q}_i(f_i, f_i)$.

Por otro lado se verifica la conmutación de los diagramas

$$\begin{array}{ccc} \Omega_i^* & & \\ \downarrow \pi_{ij}^* & \searrow \mathcal{I}_i & \\ & & L^2\left(\underline{\Omega}^0, \rho\right) \\ \Omega_j^* & \nearrow \mathcal{I}_j & \end{array}$$

Como la colección $\{\mathcal{I}_i\}$ preserva la norma del producto interno, también lo hace \mathcal{I} . \square

Definición 4.17. El espacio de Hilbert

$$\mathcal{H}_\rho \subset L^2\left(\underline{\Omega}^0, \rho\right)$$

consiste de la cerradura de las funciones lineales contenidas $\underline{\Omega}^*$, como elementos de $L^2\left(\underline{\Omega}^0, \rho\right)$.

Mientras que toda $f \in \underline{\Omega}^*$ define una función lineal medible definida en todo $\underline{\Omega}^0$, en general las funciones lineales en el espacio extendido \mathcal{H}_ρ están definidas *para casi todo* $\omega \in \underline{\Omega}^0$. Ver por ejemplo (9.6) en [Ya].

Capítulo 5

Evaluación de la curvatura

En el capítulo anterior hemos descrito un espacio afín $\underline{\Omega}$ y hemos descrito medidas de probabilidad gaussianas ρ en $\underline{\Omega}$. Dichas medidas están centradas en ω^0 , están asociadas a una forma de área en M .

En este capítulo abordaremos los siguientes objetivos:

1. Definiremos para cada superficie lineal a pedazos $U \subset M$ una función afín F_U definida casi dondequiera en $\underline{\Omega}$ la cual extiende la noción de evaluación de las 2-formas de curvatura F^A de conexiones suaves φ en U , es decir,

$$F_U(\text{Curv}[\varphi]) = \frac{1}{2\pi} \int_U F^A.$$

2. Usaremos dicha función afín para construir un operador multiplicativo \widehat{F}_U en el espacio de Hilbert $L^2(\underline{\Omega}, \rho)$.
3. Mostraremos que la representación de la curvatura definida mediante este operador y espacio de Hilbert es independiente de la elección de escalas \mathcal{E} .

5.1. Curvatura en superficies simpliciales

Comenzamos con la siguiente definición.

Consideremos una sucesión \mathcal{E} de escalas $\{(|C_i|, \phi_i; Sd|C_i|, T_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$, como en la definición 2.4. Recordemos que $(|C_i|, \phi_i)$ son estructuras lineales a pedazos en M , ver definición 1.10, las cuales son isomorfas para cualquier $i \in \mathbb{N}$. Recordemos también que cada escala \mathcal{E}_i tiene asociada una descomposición celular C_i de M , ver proposición 2.2.

Definición 5.1. Consideremos una escala fija $(|C_i|, \phi_i; Sd|C_i|, T_i)$ y un 2-poliedro P_U orientable, con borde. Supongamos que la aplicación continua

$$H_U : P_U \rightarrow M,$$

es tal que $\phi_i^{-1} \circ H_U : P_U \rightarrow |C_i|$ es una aplicación lineal a pedazos entre poliedros, según la definición 1.4. Entonces diremos que su imagen

$$U := H_U(P_U) \subset M,$$

es una **superficie lineal a pedazos** de M .

En particular, si U es una superficie cerrada orientable con borde formada por 2-simplejos del 2-esqueleto de la triangulación baricéntrica,

$$U \subset h_i \left(Sd|C_i|^{(2)} \right) \subset M, U = \cup_{k=1}^n \sigma^k, \sigma^k \in (Sd|C_i|^2, h_i)$$

Entonces diremos que U es una **superficie simplicial**. Dicha superficie U tiene asociada una cadena simplicial

$$\sum_{k=1}^n \sigma^k, \text{ para algunos } \sigma^k \in (Sd|C_i|^2, h_i).$$

Además el borde ∂U está contenido en la imagen del 1-esqueleto, $h_i(Sd|C_i|^{(1)})$.

Recordemos las funciones lineales $F_{\sigma_i^k} : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}$, definidas en 4.3.

Lema 5.2. *Si $U \subset M$ es una superficie simplicial que es unión (finita) de 2-simplejos $\sigma_{i_0}^k \in (Sd|C_{i_0}|^2, h_{i_0})$, en alguna escala, $(|C_{i_0}|, \phi_{i_0}; Sd|C_{i_0}|, T_{i_0})$, para $\omega \in \underline{\Omega}$, sea $\pi_{i_0}(\omega) = \omega_{i_0}$. Consideremos las funciones afines, $F_{U, i_0} : \Omega_{i_0} \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$F_{U, i_0}(\omega_{i_0}) := \sum_{k=1}^n F_{\sigma_{i_0}^k}(\omega_{i_0}). \quad (5.1)$$

donde $U = \cup_{k=1}^n \sigma_{i_0}^k$ tiene asociada la cadena simplicial $\sum_{k=1}^n \sigma_{i_0}^k$ a escala $(|C_{i_0}|, \phi_{i_0}; Sd|C_{i_0}|, T_{i_0})$. Entonces:

1. Para una escala más fina $j \geq i_0$ se tiene que

$$F_{U, i_0}(\omega_{i_0}) = F_{U, j}(\omega_j)$$

2. Existe una función afín

$$F_U : \underline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}.$$

tal que

$$F_U = F_{U, j} \circ \pi_j : \underline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.2)$$

para $j \geq i_0$.

Demostración. Sea $\sum_{k=1}^n \sigma_i^k$ la cadena asociada a U a escala i . Por la hipótesis de refinamiento a una escala más fina $j > i$, cada σ_i^k se descompone como una cadena $\sigma_i^k = \sum_{l=1}^{n_k} \sigma_{j, k}^l$ a escala j . De esta manera

$$\sum_{k=1}^n \sigma_i^k = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{n_k} \sigma_{j, k}^l = \sum_{r=1}^m \sigma_j^r$$

donde $\sum_{r=1}^m \sigma_j^r$ es la cadena a escala j asociada a U . Es decir

$$\sum_{k=1}^n F_{\sigma_i^k} = \sum_{r=1}^m F_{\sigma_j^r}.$$

Esto prueba la primera parte ya que para índices $j \geq i$, se tienen los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{i_0} & \xleftarrow{\pi_{ji}} & \Omega_j \\ F_{U,i_0} \downarrow & \swarrow F_{U,j} & \\ \mathbb{R} & & \end{array}$$

Para la segunda parte definimos

$$F_U := F_{U,i_0} \circ \pi_{i_0} : \underline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}.$$

□

5.2. Aproximación simplicial de superficies lineales a pedazos

Consideremos una escala fija $(|C_i|, \phi_i; Sd|C_i|, T_i)$ y una superficie lineal a pedazos $U \subset M$. Según la definición 1.4, para definir la aplicación lineal a pedazos $H_U : P_U \rightarrow U \subset M$, se tienen complejos simpliciales $|K_U|$, y $|K'|$ los cuales son triangulaciones rectilíneas de P_U y $|C_i|$ respectivamente, con el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} P_U & \xrightarrow{H_U} & M \xrightarrow{\phi_i^{-1}} |C_i|, \\ \uparrow & & \uparrow \\ |K_U| & \xrightarrow{\eta} & |K'| \end{array} \quad (5.3)$$

donde $\eta : |K_U| \rightarrow |K'|$ es una aplicación simplicial. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $|K'|$ es una subtriangulación de la triangulación baricéntrica $Sd|C_i|$ dada en la definición 1.3. Es decir, que la inclusión de la triangulación rectilínea $|K'| \rightarrow |C_i|$, se obtiene de una subtriangulación $|K'| \rightarrow Sd|C_i|$ compuesta con la subtriangulación rectilínea $T_i : Sd|C_i| \rightarrow |C_i|$. Es decir que se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} P_U & \xrightarrow{H_U} & M & \xrightarrow{\phi_i^{-1}} & |C_i| \xleftarrow{T_i} Sd|C_i|, \\ \uparrow & & & & \nearrow \\ |K_U| & \xrightarrow{\eta} & |K'| & & \end{array}$$

Por la proposición 2.2 la imagen $U = H_U(P_U)$ está cubierta por una cantidad finita de células $c_k \in C_i$,

$$U \subset c_1 \sqcup \cdots \sqcup c_n, \text{ con } c_k \in C_i.$$

Supongamos que es una colección minimal en el sentido de que si quitamos una célula deja de ser cubierta. Por esta propiedad es una cubierta única.

Consideremos simplejo $|\sigma| \subset |K_U|$, entonces $\eta(|\sigma|)$ es un simplejo de $|K'|$ que está contenido en un polígono ρ de $|C_i|$. Consideremos una célula $c \in C_i$ tal que $\phi_i^{-1}(c) \cap \eta(|\sigma|) \neq \emptyset$. Notemos que la cerradura

$$\tau = \overline{\phi_i^{-1}(c)}$$

es una cara del polítopo $\rho \subset |C_i|$ con interior

$$e = \text{int } \tau = \phi_i^{-1}(c).$$

El lema 5.3 nos será de utilidad para probar la proposición 5.4.

Lema 5.3. *Sea $\eta : |K_1| \rightarrow |K_2|$ una aplicación simplicial y sea $|\sigma'| \subset |K_2|$ un simplejo.*

$$\overline{\eta^{-1}(e)} = \eta^{-1}(\bar{e})$$

para la célula $e = \text{int } |\sigma'|$.

Demostración. Por continuidad se tiene

$$\overline{\eta^{-1}(e)} \subset \eta^{-1}(\bar{e})$$

Bajo una aplicación afín $\theta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, la imagen inversa de un semiespacio abierto L es un semiespacio abierto $\theta^{-1}(L)$, por lo tanto $\overline{\theta^{-1}(L)} = \theta^{-1}(\bar{L})$.

Al considerar el simplejo $|\sigma'| = \bar{e}$ tendremos que $\text{int } |\sigma'|$ se corresponde en coordenadas baricéntricas $\phi_{\sigma'}$, con intersección de semiespacios abiertos $L_1 \cap \dots \cap L_{n+1} \subset \mathbb{R}^n$. Consideremos un simplejo $|\sigma| \subset |K_1|$ que interseca la imagen inversa $\eta^{-1}(|\sigma'|)$, entonces $\eta^{-1}(\text{int } |\sigma'|) \cap |\sigma|$ se corresponde en coordenadas baricéntricas con una intersección de semiespacios abiertos:

$$\begin{array}{ccc} \eta^{-1}(\text{int } |\sigma'|) \cap |\sigma| & \xrightarrow{\eta} & \text{int } |\sigma'| \\ \downarrow \phi_{\sigma} & & \downarrow \phi_{\sigma'} \\ \theta^{-1}(L_1) \cap \dots \cap \theta^{-1}(L_n) & \xrightarrow{\theta} & L_1 \cap \dots \cap L_{n+1} \end{array}$$

con $\theta = \phi_{\sigma'} \circ \eta \circ \phi_{\sigma}^{-1}$. Por lo tanto

$$\overline{\phi_{\sigma}(\eta^{-1}(\text{int } |\sigma'|)) \cap |\sigma|} = \overline{\theta^{-1}(L_1) \cap \dots \cap \theta^{-1}(L_n)} = \theta^{-1}(\bar{L}_1) \cap \dots \cap \theta^{-1}(\bar{L}_n) = \theta^{-1}(\bar{L}_1 \cap \dots \cap \bar{L}_{n+1})$$

es decir

$$\eta \left(\overline{\phi_{\sigma}(\eta^{-1}(\text{int } |\sigma'|)) \cap |\sigma|} \right) = \phi_{\sigma'}^{-1}(\bar{L}_1) \cap \dots \cap \phi_{\sigma'}^{-1}(\bar{L}_{n+1}) = |\sigma''| \subset |\sigma'|$$

donde $|\sigma''| \subset |\sigma'|$ es un subsimplejo. Esto prueba que

$$\eta \left(\overline{\eta^{-1}(e)} \right) \subset \bar{e}$$

es un subsimplejo que interseca el interior e por lo tanto coinciden, es decir

$$\eta \left(\overline{\eta^{-1}(e)} \right) = \bar{e}.$$

□

Proposición 5.4. *La cerradura*

$$\overline{\eta^{-1}(e \cap \eta(|\sigma|))} \subset |K_U|, e = \phi_i^{-1}(c),$$

es un subcomplejo simplicial.

Demostración. Gracias a que $|K'|$ es una triangulación rectilínea del poliedro $|C_i|$, podemos afirmar que

$$\overline{e \cap \eta(|\sigma|)} \subset \tau \cap \eta(|\sigma|) \subset |K'|$$

es un simplejo. Por lo tanto,

$$\eta^{-1} \left(\overline{e \cap \eta(|\sigma|)} \right) \subset |K_U|$$

es un subcomplejo simplicial. Por el lema 5.3

$$\overline{\eta^{-1}(e \cap \eta(|\sigma|))} = \eta^{-1} \left(\overline{e \cap \eta(|\sigma|)} \right) \subset |K_U|.$$

Es un subcomplejo simplicial. □

Notemos que

$$H_U(|\sigma|) \cap c \subset \bar{c}$$

es un compacto conexo y

$$H_U^{-1}(H_U(|\sigma|) \cap c) \subset P_U,$$

se corresponde con el conexo

$$\eta^{-1}(\phi_i^{-1}(c) \cap \eta(|\sigma|)) \subset |K_U|.$$

Como $\phi_i^{-1}(U) = \eta(|K_U|)$ consta de simplejos de $|K'|$ entonces $\phi_i^{-1}(\bar{c} \cap U)$ consta de simplejos. Por lo tanto $\eta^{-1}(\phi_i^{-1}(c))$ consta de una unión finita y disjunta de conexos $J_k(c) \subset |K_U|$, $k = 1, \dots, n$, cuyas cerraduras

$$\overline{J_k(c)}$$

son subcomplejos de $|K_U|$, con dimensión $\dim \overline{J_k(c)}$ que puede ser 0, 1 ó 2. Es decir,

$$\eta^{-1}(\phi_i^{-1}(c)) = J_1(c) \sqcup \dots \sqcup J_n(c) \subset |K_U|, \quad \overline{\eta^{-1}(\phi_i^{-1}(c))} = \overline{J_1(c)} \cup \dots \cup \overline{J_n(c)} \subset |K_U|.$$

Consideremos dos células no necesariamente distintas $c, c' \in C_i$, decimos que dos conexos $J_k(c), J_m(c')$ son *adyacentes* si

$$\overline{J_k(c)} \cap J_m(c') \neq \emptyset, \quad \text{ó} \quad J_k(c) \cap \overline{J_m(c')} \neq \emptyset.$$

Proposición 5.5. $J_k(c), J_m(c')$ son *adyacentes* si y sólo si $J_m(c') \subset \overline{J_k(c)}$, ó $J_k(c) \subset \overline{J_m(c')}$.

Demostración. Supongamos que $J_k(c), J_m(c')$ son adyacentes, con $\overline{J_k(c)} \cap J_m(c') \neq \emptyset$, Consideremos un simplejo $|\sigma'| \subset |K'| \subset |C_i|$ tal que $\text{int } |\sigma'| \subset \phi_i^{-1}(c')$, y

$$\eta^{-1}(\text{int } |\sigma'|) = \text{int } \eta^{-1}(|\sigma'|) \subset J_m(c').$$

Como $c' \subset \bar{c}$, entonces $\text{int } |\sigma'| \subset \phi_i^{-1}(c') \subset \phi_i^{-1}(\bar{c})$, de donde

$$\text{int } \eta^{-1}(|\sigma'|) \subset \overline{\eta^{-1}(\phi_i^{-1}(c))}.$$

Es decir, $\text{int } \eta^{-1}(|\sigma'|) \subset \overline{J_k(c)}$, como $J_m(c')$ es una unión de interiores de simplejos $\text{int } \eta^{-1}(|\sigma'|)$, entonces $J_m(c') \subset \overline{J_k(c)}$.

La afirmación recíproca es inmediata. □

Consideremos dos puntos $x, y \in \eta^{-1}(\phi_i^{-1}(c))$ con $x \in J_a(c)$ y $y \in J_b(c)$, decimos que son c -equivalentes si existe una secuencia de conexos

$$J_a(c) = J_{k_1}(c_{l_1}), \dots, J_{k_r}(c_{l_r}) = J_b(c).$$

Tales que:

1. $J_{k_i}(c_{l_i}), J_{k_{i+1}}(c_{l_{i+1}})$ son adyacentes para $i = 1, \dots, r - 1$,
2. $c_{l_1}, \dots, c_{l_r} \subset \bar{c}$.

Se puede verificar que ésta es una relación de equivalencia en $\eta^{-1}(\phi_i^{-1}(c))$. También se puede definir una clase de equivalencia análoga en $\eta^{-1}(\overline{\phi_i^{-1}(c)}) = \overline{\eta^{-1}(\phi_i^{-1}(c))}$. Denotamos las clases de equivalencia en c como M_ν , $\nu = 1, \dots, n$. Entonces tendremos la descomposición

$$\eta^{-1}(\phi_i^{-1}(c)) = M_1 \sqcup \dots \sqcup M_m \subset |K_U|, \quad (5.4)$$

Al considerar las cerraduras tendremos

$$\eta^{-1}(\overline{\phi_i^{-1}(c)}) = \overline{M_1} \cup \dots \cup \overline{M_m} \subset |K_U|.$$

$\overline{M_\nu} \subset |K_U|$ son subcomplejos. En efecto, por la propiedad 2 de la proposición 5.5, se tiene que que $\overline{M_\nu}$ es unión de cerraduras $\overline{J_k(c_l)} \subset \bar{c}$, por lo tanto unión de simplejos. Al considerar las componentes conexas N_ν del complejo $\overline{M_1} \cup \dots \cup \overline{M_m}$, tendremos

$$\eta^{-1}(\overline{\phi_i^{-1}(c)}) = \overline{\eta^{-1}(\phi_i^{-1}(c))} = N_1 \sqcup \dots \sqcup N_m \subset |K_U|.$$

Esto prueba la siguiente afirmación.

Proposición 5.6. *En la descomposición (5.4), las clases N_ν son complejos simpliciales conexos $|K_\nu(c)| \subset \bar{c}$, disjuntos por pares, $|K_\nu(c)| \cap |K_\mu(c)| = \emptyset$, $\nu \neq \mu$. Por lo tanto se tiene la descomposición en subcomplejos simpliciales conexos*

$$\eta^{-1}(\overline{\phi_i^{-1}(c)}) = |K_1(c)| \sqcup \dots \sqcup |K_m(c)|. \quad (5.5)$$

Resumiendo tendremos el siguiente corolario.

Corolario 5.7. *Se tienen subcomplejos simpliciales $|K_\nu(c)|$ tales que*

$$|K_U| = \eta^{-1}(U) = \bigcup_{c \cap U \neq \emptyset} \bigsqcup_{s=1}^m |K_s(c)|. \quad (5.6)$$

De tal manera que si $\eta(x) \in U \cap \phi_i^{-1}(c)$ para una célula $c \in C_i$, con $x \in |K_\nu(c)|$, entonces $|K_\nu(c)| \subset |K_U|$ es el subcomplejo conexo maximal que contiene a $\eta(x)$ cuya imagen $\eta(|K_\nu(c)|)$, está contenida en el polígono $\phi_i^{-1}(\bar{c})$.

Consideremos todas las células $c \in C_i$ que intersectan $U \subset M$ y definamos el conjunto de vértices

$$A_U^0 := \{K_\nu(c) \mid c \cap U \neq \emptyset, \nu = 1, \dots, m\};$$

definamos también el conjunto de aristas como

$$A_U^1 := \{(K_\nu(c), K_{\nu'}(c')) \mid |K_\nu(c)| \subset |K_{\nu'}(c')|, \dim K_\nu(c) < \dim K_{\nu'}(c')\},$$

y el conjunto de 2–simplejos como

$$A_U^2 := \{(K_{\nu_0}(c_0), K_{\nu_1}(c_1), K_{\nu_2}(c_2)) \mid |K_{\nu_i}(c_i)| \subset |K_{\nu_j}(c_j)| \neq \emptyset, j > i, \dim K_{\nu_i}(c_i) = i\},$$

Los conjuntos A_U^0, A_U^1, A_U^2 de vértices, aristas y 2–simplejos respectivamente definen un 2–simplejo abstracto A_U .

Notemos que cada vértice $z \in |K_U|$ está contenido en una célula c y en una clase de equivalencia M_μ asociada a una única componente conexa $|K_\nu(c)|$, con $z \in |K_\nu(c)|$. Es decir, cada vértice $z \in |K_U|$ tiene asociado un único subcomplejo $|K_\nu(c)|$.

Lema 5.8. *Consideremos dos vértices $z, z' \in |K_U|$ con $z \in |K_\nu(c)|, z' \in |K_{\nu'}(c')|$, los cuales son extremos de una arista $e \subset |K_U|$. Si la triangulación $|K'|$, en (5.3), es subtriangulación de la triangulación baricéntrica $Sd|C_i|$, ver definición 1.3, entonces*

1. ó bien

$$|K_\nu(c)| \subset |K_{\nu'}(c')|,$$

ó bien

$$|K_{\nu'}(c')| \subset |K_\nu(c)|.$$

2. Si $|K_\nu(c)| = |K_{\nu'}(c')|$, entonces $c = c'$.

3. Si $|K_\nu(c)| \subsetneq |K_{\nu'}(c')|$ entonces $c \subset \bar{c}'$ y por lo tanto c, c' son células adyacentes.

Demostración. Los vértices $y = \eta(z), y' = \eta(z') \in |K'|$ están contenidos en un simplejo de $|K'|$ contenido en un simplejo $|\sigma| \subset Sd|C_i|$ de la triangulación baricéntrica. Para el simplejo $|\sigma|$ sus vértices x_{c_0}, \dots, x_{c_k} son baricentros de células c_0, c_1, \dots, c_k , con $\dim c_n < \dim c_m$, para $n < m$. Según la construcción de la proposición 1.2, estas células son adyacentes por parejas, más precisamente se tiene $c_n \subset \bar{c}_m$ para $n < m$.

Por lo tanto podemos suponer que $H_U(z) \in c, H_U(z') \in c'$ con c, c' células adyacentes, $c \subset \bar{c}'$. Supongamos que $z \in |K_\nu(c)|$ y $z' \in |K_{\nu'}(c')|$. Recordemos que $|K_\nu(c)|$ es el máximo subsimplejo conexo que contiene z y cuya imagen está contenida en $\bar{c} \subset \bar{c}'$. Entonces $|K_\nu(c)| \subset |K_{\nu'}(c')|$. Esto prueba la primera afirmación.

La segunda afirmación se sigue de $c \subset \bar{c}', c' \subset \bar{c}$ implican que $c = c'$.

La tercera afirmación se sigue de la primera considerando puntos $z \in H_U^{-1}(c), z' \in H_U^{-1}(c')$. \square

Definimos la aplicación simplicial en las realizaciones geométricas

$$t_U : |A_U| \rightarrow Sd|C_i|$$

mediante las aplicaciones simpliciales en los complejos simpliciales abstractos, de la siguiente manera:

1. Para cada vértice $K_s(c) \in A_U^0$ definimos

$$t_U(K_\nu(c)) := x_c,$$

donde $x_c \in Sd C_i$ es tal que $\phi_i(x_c)$, es el baricentro de la célula $c \in C_i$.

2. Para las aristas $(K_\nu(c), K_{\nu'}(c')) \in A_U^1$ se tiene

$$t_U(K_\nu(c), K_{\nu'}(c')) := (x_c, x_{c'}).$$

La pareja $(x_c, x_{c'})$ es en efecto una arista de $Sd C_i$, baste notar que según el lema 5.8, $|K_\nu(c)| \not\subseteq |K_{\nu'}(c')|$ implica $c \subset \bar{c}'$ y por lo tanto c, c' son células adyacentes.

3. Para los 2–simplejos $(K_{\nu_0}(c_0), K_{\nu_1}(c_1), K_{\nu_2}(c_2)) \in A_U^2$, se define,

$$t_U(K_{\nu_0}(c_0), K_{\nu_1}(c_1), K_{\nu_2}(c_2)) := (x_{c_0}, x_{c_1}, x_{c_2}).$$

La terna $(x_{c_0}, x_{c_1}, x_{c_2})$ es en efecto un 2–simplejo de $Sd C_i$, ya que $|K_{\nu_k}(c_k)| \not\subseteq |K_{\nu_l}(c_l)|$, $k < l$ implica $c_k \subset \bar{c}_l$ para $k < l$, es decir c_k, c_l son adyacentes y (x_{c_k}, x_{c_l}) es una arista.

Definición 5.9. Dada la superficie lineal a pedazos U , con inmersión lineal a pedazos $H_U : P_U \rightarrow M$, decimos que el 2–complejo simplicial $|A_U|$ junto con la aplicación continua

$$h_i \circ t_U = \phi_i \circ T_i \circ t_U : |A_U| \rightarrow M,$$

es la **superficie de aproximación simplicial de U a escala** $(|C_i|, \phi_i; Sd |C_i|, T_i)$. Denotamos la imagen por

$$U_i := h_i \circ t_U (|A_U|).$$

Definición 5.10. Adicionalmente podemos definir una aplicación simplicial

$$f : |K_U| \rightarrow |A_U|,$$

en los complejos simpliciales abstractos de la siguiente manera:

1. Para los vértices $z \in |K_U|$ contenidos en el subcomplejo $|K_\nu(c)| \subset |K_U|$ de la descomposición (5.6),

$$f(z) := K_\nu(c) \in A_U^0.$$

2. Para las aristas $e = (z, z') \in K_U^1$, por el lema 5.8 se tiene $K_\nu(c) \subset K_{\nu'}(c')$ ó $K_{\nu'}(c') \subset K_\nu(c)$; donde $K_\nu(c)$ es la componente que corresponde al vértice z y $K_{\nu'}(c')$ es la componente correspondiente a z' . Tenemos dos casos:

- a) Caso $K_\nu(c) = K_{\nu'}(c')$. Entonces definimos:

$$f(e) = f(z, z') := f(z) = f(z') = K_\nu(c) = K_{\nu'}(c'),$$

es decir la arista e se colapsa al vértice $K_\nu(c)$.

b) Caso $K_\nu(c) \subsetneq K_{\nu'}(c')$. Entonces

$$f(e) = f(z, z') := (K_\nu(c), K_{\nu'}(c')).$$

Se verifica inmediatamente que $(K_\nu(c), K_{\nu'}(c'))$ es en efecto una arista de A_U .

3. Para los 2-simplejos $(z_0, z_1, z_2) \in K_U^2$, se tiene $z_k \in K_{\nu_k}(c_k)$, con los siguientes casos:

a) Caso $K_{\nu_0}(c_0) \subsetneq K_{\nu_1}(c_1) \subsetneq K_{\nu_2}(c_2)$, con $\dim K_{\nu_k}(c_k) = k$. Aquí se puede definir:

$$f(z_0, z_1, z_2) := (K_{\nu_0}(c_0), K_{\nu_1}(c_1), K_{\nu_2}(c_2)).$$

Por el lema se tiene que

b) Caso $K_{\nu_0}(c_0) \subsetneq K_{\nu_1}(c_1) = K_{\nu_2}(c_2)$. Entonces

$$f(z_0, z_1, z_2) := (f(z_0), f(z_1, z_2)) = (K_{\nu_0}(c_0), K_{\nu_1}(c_1));$$

es decir, el 2-simplejo se colapsa en una arista.

c) Caso $K_{\nu_0}(c_0) = K_{\nu_1}(c_1) \subsetneq K_{\nu_2}(c_2)$. Entonces

$$f(z_0, z_1, z_2) := (f(z_0, z_1), f(z_2)) = (K_{\nu_0}(c_0), K_{\nu_2}(c_2));$$

es decir, el 2-simplejo se colapsa en una arista.

d) Caso $K_{\nu_0}(c_0) = K_{\nu_1}(c_1) = K_{\nu_2}(c_2)$. Entonces definimos

$$f(z_0, z_1, z_2) := f(z_0) = f(z_1) = f(z_2) = K_{\nu_0}(c_0)$$

es decir el 2-simplejo se colapsa a un vértice

Teorema 5.11. *Una superficie lineal a pedazos U es homotópica a U_i , su superficie de aproximación simplicial a escala $(|C_i|, \phi_i; Sd|C_i|, T_i)$. Es decir, existe una homotopía $H : [0, 1] \times |K_U| \rightarrow M$, y una aplicación simplicial*

$$f : |K_U| \rightarrow |A_U|,$$

tales que

$$H(0, \cdot) = H_U : |K_U| \rightarrow M,$$

y también conmuta el diagrama,

$$\begin{array}{ccc} |K_U| & \xrightarrow{H(1, \cdot)} & M \\ \downarrow f & & \uparrow \phi_i \circ T_i \\ |A_U| & \xrightarrow{t_U} & Sd|C_i| \end{array}$$

Demostración. Consideremos un polígono $\rho \subset |C_i|$ y un simplejo $|\sigma| \subset H_U^{-1}(\phi_i(\rho))$. Consideremos una célula c con cerradura $\bar{c} = \phi_i(\rho)$ y su baricentro $\phi_i(x_c) \in c$, correspondiente a un vértice $x_c \in Sd|C_i|$.

Consideramos las coordenadas baricéntricas $\phi_\sigma : |\sigma| \rightarrow \mathbb{R}^n$, del simplejo $|\sigma| \subset |K_U|$ y las coordenadas afines ϕ_ρ del polígono $\rho \subset |C_i|$, tal que $H_U(|\sigma|) \subset \phi_i(\rho)$. Las coordenadas ϕ_ρ se definen como

$$\phi_\rho = \eta_{|C_i|}^{-1} |_\rho : \rho \rightarrow \tau \subset \mathbb{R}^k$$

donde $\eta_{|C_i|} : \sqcup_i \tau_i \rightarrow |C_i|$ define el poliedro $|C_i|$ a partir de los polítopos τ_i , ver definición 1.1.

Consideremos las aplicaciones

$$G_\rho^\sigma(0, \cdot) := \phi_i^{-1} \circ H_U|_{|\sigma|}$$

tales que la composición

$$\begin{array}{ccc} |\sigma| & \xrightarrow{\phi_i^{-1} \circ H_U|_{|\sigma|}} & \rho \\ \phi_\sigma^{-1} \uparrow & & \downarrow \phi_\rho \\ \Delta^3 = \phi_\sigma(|\sigma|) \subset \mathbb{R}^3 & \dashrightarrow & \tau = \phi_\rho(\rho) \subset \mathbb{R}^k \end{array}$$

entre el 2-simplejo canónico $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ y el polítopo $\tau \subset \mathbb{R}^k$, es una aplicación afín.

La idea es perturbar estas funciones de forma afín, para definir la homotopía. Para cada vértice $z \in |\sigma| \subset |K_U|$ contenido en $H_U^{-1}(c)$, definimos

$$G_\rho^\sigma(t, z) := \phi_\rho^{-1} [t\phi_\rho(x_c) + (1-t)\phi_\rho(\phi_i^{-1} \circ H_U(z))] \in \rho \subset |C_i|, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

Notemos que en particular como $\phi_\rho(x_c)$, $\phi_\rho(\phi_i^{-1} \circ H_U(z))$, son dos puntos del polítopo τ , por convexidad se tiene que

$$t\phi_\rho(x_c) + (1-t)\phi_\rho(\phi_i^{-1} \circ H_U(z)) \in \tau$$

y esta bien definida $G_\rho^\sigma(t, z)$.

De esta manera, para cada $t \in [0, 1]$ fijo, se puede definir la aplicación afín $G_\rho^\sigma(t, \cdot) : |\sigma|^{(0)} \rightarrow \rho$ la cual extiende a una aplicación afín

$$G_\rho^\sigma(t, \cdot) : |\sigma| \rightarrow \rho.$$

Supongamos que tenemos un $H_U(|\sigma|) \subset \rho \cap \rho' \neq \emptyset$. Entonces tenemos aplicaciones afines $f_{\tau, \tau'} : \tau \rightarrow \tau'$, tales que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \rho \cap \rho' & \\ \swarrow \phi_\rho & & \searrow \phi_{\rho'} \\ \tau \subset \mathbb{R}^k & \xrightarrow{f_{\tau, \tau'}} & \tau' \subset \mathbb{R}^{k'} \end{array}$$

De donde

$$\begin{aligned} G_{\rho'}^\sigma(t, z) &= \phi_{\rho'}^{-1} [t\phi_{\rho'}(x_c) + (1-t)\phi_{\rho'}(\phi_i^{-1} \circ H_U(z))] = \\ &= (f_{\tau, \tau'} \circ \phi_\rho)^{-1} [t(f_{\tau, \tau'} \circ \phi_\rho)(x_c) + (1-t)(f_{\tau, \tau'} \circ \phi_\rho)(\phi_i^{-1} \circ H_U(z))] = \\ &= \phi_\rho^{-1} \circ f_{\tau, \tau'}^{-1} [t f_{\tau, \tau'}(\phi_\rho(x_c)) + (1-t) f_{\tau, \tau'}(\phi_\rho(\phi_i^{-1} \circ H_U(z)))] = \end{aligned}$$

Como $f_{\tau, \tau'}$ es una aplicación afín, tenemos

$$\begin{aligned} G_{\rho'}^\sigma(t, z) &= \phi_\rho^{-1} \circ f_{\tau, \tau'}^{-1} \circ f_{\tau, \tau'} [t(\phi_\rho(x_c)) + (1-t)(\phi_\rho(\phi_i^{-1} \circ H_U(z)))] = \\ &= \phi_\rho^{-1} [t\phi_\rho(x_c) + (1-t)\phi_\rho(\phi_i^{-1} \circ H_U(z))]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene $G_\rho^\sigma(t, \cdot) = G_{\rho'}^\sigma(t, \cdot)$. Consideranod todos los simplejos $|\sigma \subset |K_U|$, se puede definir una homotopía afín

$$G : [0, 1] \times |K_U| \rightarrow Sd|C_i|.$$

Notemos que $G(0, \cdot) = \phi_i^{-1} \circ H_U : |K_U| \rightarrow Sd|C_i|$.

Ahora consideramos una aplicación simplicial f y verifiquemos que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} |K_U| & & \\ \downarrow f & \searrow G(1, \cdot) & \\ |A_U| & \xrightarrow{t_U} & Sd|C_i| \end{array} \quad (5.7)$$

En efecto, notemos que $G(1, z) = x_c$. Además se tiene la identificación de vértices,

$$t_U \circ f(z_k) = t_U(K_{\nu_k}(c_k)) = (x_{c_k}) \in SdC_i^0, \quad k = 0, 1, 2;$$

de aristas,

$$t_U \circ f(z_k, z_l) = t_U(K_{\nu_k}(c_k), K_{\nu_l}(c_l)) = (x_{c_k}, x_{c_l}) \in SdC_i^1, \quad k \neq l;$$

y de 2-simplejos,

$$t_U \circ f(z_0, z_1, z_2) = t_U(K_{\nu_0}(c_0), K_{\nu_1}(c_1), K_{\nu_2}(c_2)) = (x_{c_0}, x_{c_1}, x_{c_2}) \in SdC_i^2.$$

Esto permite concluir la conmutación del diagrama (5.7).

Finalmente si definimos $H(t, x) := \phi_i \circ G(t, x)$ entonces tenemos la homotopía deseada. \square

Ver también el teorema de aproximación simplicial, ver [Ha].

5.3. Aproximación simplicial de trayectorias lineales a pedazos

Tomemos una trayectoria $l : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\phi_i^{-1} \circ l : [0, 1] \rightarrow |C_i|$ es lineal a pedazos, consideremos $[0, 1]$ con una partición como un 1-complejo simplicial, entonces se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{\phi_i^{-1} \circ l} & |C_i| \\ \uparrow & & \uparrow \\ |K_l| & \xrightarrow{\eta} & |K'| \end{array} \quad (5.8)$$

donde $|K'|$ es subtriangulación de $Sd|C_i|$ y $|K_l| = [0, 1]$ es subtriangulación de $[0, 1]$ es decir, consta del intervalo $[0, 1]$ provisto de un refinamiento $\{z_0 < z_1 < \dots < z_r\}$, de la partición original. La trayectoria $\eta : [0, 1] \rightarrow |K'|$ es simplicial. Denotamos la imagen de la trayectoria por

$$\mathbf{1} := l[0, 1] \subset M.$$

Tendremos el siguiente corolario cuya demostración es ibidem la demostración del corolario 5.7 con $|K_l|$ en lugar de $|K_U|$, es decir, consideramos la partición $\{z_0 < z_1 < \dots < z_r\} \subset [0, 1]$ de $[0, 1]$ en lugar de $|K_U|$:

$$|K_l|^0 = \{z_0 < z_1 < \dots < z_r\}, \quad |K_l|^1 = \{[z_k, z_{k+1}] \mid k = 0, \dots, r-1\}$$

Corolario 5.12. *Se tienen subcomplejos simpliciales $I_\nu(c) \subset [0, 1]$ tales que*

$$[0, 1] = \bigcup_{c \cap \mathbf{1} \neq \emptyset} \bigsqcup_{\nu=1}^m I_\nu(c). \quad (5.9)$$

De hecho $I_\nu(c) \subset [0, 1]$ son intervalos cerrados, tales que para cada célula $c \in C_i$, y para cada $x \in I_\nu(c)$, $I_\nu(c) \subset [0, 1]$ es el intervalo (cerrado) maximal que contiene a x cuya imagen $l(I_\nu(c))$, está contenida en el polígono \bar{c} .

Notemos que

$$L_\nu(c) = l^{-1}(l(I_\nu(c)) \cap c)$$

Forman una colección de intervalos disjuntos (no necesariamente cerrados), tales que para cada $x \in L_\nu(c)$, $L_\nu(c) \subset [0, 1]$ es el intervalo maximal cuya imagen $l(L_\nu(c))$ está contenido en una célula $c \in C_i$. Además $[0, 1] = \cup_{\nu,c} L_\nu(c)$. Ordenando estos intervalos, tendremos una sucesión de intervalos (no necesariamente cerrados) consecutivos tales que

$$I_0 < I_1 < \dots < I_n \quad (5.10)$$

y $[0, 1] = I_0 \sqcup \dots \sqcup I_n$, tal como se vio en la definición 2.6. Por tratarse de una trayectoria cerrada $l(I_0) \cup l(I_n)$ es el 1-subcomplejo maximal contenido en la célula c_0 que contiene al punto base $l(0) = l(1)$.

Definamos el conjunto de vértices

$$A_l^0 := \{I_\nu(c) \mid c \cap \mathbf{1} \neq \emptyset, \};$$

al de la trayectoria. Como es una trayectoria cerrada identificamos los dos intervalos $I_\nu(c)$ de la forma $[0, b]$, $[a, 1]$. Definamos también el conjunto de aristas como

$$A_l^1 := \{(I_\nu(c), I_{\nu'}(c')) \mid I_\nu(c) \not\subset I_{\nu'}(c')\}.$$

donde identificamos los dos intervalos que contienen el punto inicial y fin

Ibidem a la demostración del lema 5.8, cada vértice $z_k \in \{z_0, \dots, z_r\}$ tiene asociado un único intervalo $I_\nu(c)$. También se repite ibidem tiene la demostración de aquel lema para probar la siguiente afirmación.

Lema 5.13. *Consideremos dos vértices $z, z' \in \{z_0, \dots, z_n\}$ con $z \in I_\nu(c)$, $z' \in I_{\nu'}(c')$, los cuales son extremos de una arista $[z, z'] \subset [0, 1]$. Si la triangulación $|K'|$, en (5.8), es subtriangulación de la triangulación baricéntrica $Sd|C_i|$, ver definición 1.3, entonces*

1. ó bien

$$I_\nu(c) \subset I_{\nu'}(c'),$$

ó bien

$$I_{\nu'}(c') \subset I_\nu(c).$$

2. Si $I_\nu(c) = I_{\nu'}(c')$, entonces $c = c'$.

3. Si $I_\nu(c) \not\subset I_{\nu'}(c')$ entonces $c \subset \bar{c}'$ y por lo tanto c, c' son células adyacentes.

Notemos que como $l(0) = l(1)$, entonces

$$A_l^0 = \{I_1, \dots, I_n\}$$

ya que se identifica I_0 con I_n , y también

$$A_l^1 = \{(I_n, I_1)\} \cup \{(I_k, I_{k+1}) \mid k = 1, \dots, n-1\}.$$

ya que para cada $I_\nu(c) \subsetneq I_{\nu'}(c')$, empleando los intervalos consecutivos (5.10) se tiene una única pareja de intervalos

$$I_k = l^{-1}(I_\nu(c) \cap c), \quad I_{k+1} = l^{-1}(c' \cap I_{\nu'}(c'))$$

ó

$$I_{k+1} = l^{-1}(I_\nu(c) \cap c), \quad I_k = l^{-1}(c' \cap I_{\nu'}(c'))$$

con $\overline{I_k} \cap I_{k+1} \neq \emptyset$ ó $I_k \cap \overline{I_{k+1}} \neq \emptyset$.

Por lo tanto, la realización geométrica $|A_l|$, es un 1-simplejo homeomorfo a un círculo.

Definimos la aplicación simplicial en las realizaciones geométricas

$$l'_i : |A_l| \rightarrow Sd|C_i|$$

mediante las aplicaciones simpliciales en los complejos simpliciales abstractos, $A_l, Sd C_i$, de la siguiente manera:

1. Para cada vértice $I_\nu(c) \in A_l^0$ definimos

$$l'_i(I_\nu(c)) := x_c,$$

donde $\phi_i(x_c)$, es el baricentro de la célula $c \in C_i$.

2. Para las aristas $(I_\nu(c), I_{\nu'}(c')) \in A_l^1$ se tiene

$$l'_i(I_\nu(c), I_{\nu'}(c')) := (x_c, x_{c'}).$$

La pareja $(x_c, x_{c'})$ es en efecto una arista de $Sd C_i$, baste notar que según el lema 5.8, $|I_\nu(c)| \subsetneq |I_{\nu'}(c')|$ implica $c \subset \overline{c'}$ y por lo tanto c, c' son células adyacentes.

Definición 5.14. Adicionalmente podemos definir una aplicación simplicial como en 5.10,

$$f_l : [0, 1] \rightarrow |A_l|,$$

en los complejos simpliciales abstractos de la siguiente manera:

1. Para los vértices $z \in |K_l|^0 = \{z_0 < \dots < z_r\}$ contenidos en el intervalo $I_\nu(c) \subset [0, 1]$ de la descomposición (5.9),

$$f_l(z) := I_\nu(c) \in A_l^0.$$

2. Para las aristas (intervalos) $e = [z, z']$, por el lema 5.13 se tiene $I_\nu(c) \subset I_{\nu'}(c')$ ó $I_{\nu'}(c') \subset I_\nu(c)$; donde $I_\nu(c)$ es la componente que corresponde al vértice z y $I_{\nu'}(c')$ es la componente correspondiente a z' . Tenemos dos casos:

a) Caso $I_\nu(c) = I_{\nu'}(c')$. Entonces definimos:

$$f_l(e) = f_l(z, z') := f_l(z) = f_l(z') = I_\nu(c) = I_{\nu'}(c'),$$

es decir la arista e se colapsa al vértice $I_\nu(c)$.

b) Caso $I_\nu(c) \subsetneq I_{\nu'}(c')$. Entonces

$$f_l(e) = f_l(z, z') := (I_\nu(c), I_{\nu'}(c')).$$

Se verifica inmediatamente que $(I_\nu(c), I_{\nu'}(c'))$ es en efecto una arista de A_l .

Definición 5.15. Definimos la **trayectoria de aproximación simplicial** l_i como

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{l_i} & M \\ \downarrow f_l & & \uparrow \phi_i \circ T_i \\ |A_l| & \xrightarrow{l'_i} & Sd|C_i| \end{array}$$

La demostración del teorema 5.11 se puede adoptar ibidem, para probar el siguiente

Teorema 5.16. *Una trayectoria lineal a pedazos l es homotópica a su trayectoria de aproximación simplicial l_i , con escala $(|C_i|, \phi_i; Sd|C_i|, T_i)$. Es decir, existe una homotopía $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$, y una aplicación simplicial*

$$f_l : [0, 1] \rightarrow |A_l|,$$

tales que

$$H(0, \cdot) = l : [0, 1] \rightarrow M,$$

y también conmuta el diagrama,

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{H(1, \cdot)} & M \\ \downarrow f_l & & \uparrow \phi_i \circ T_i \\ |A_l| & \xrightarrow{l'_i} & Sd|C_i| \end{array}$$

Ver también el teorema de aproximación simplicial, ver [Ha].

La siguiente afirmación muestra la correspondencia entre los bordes de aproximaciones simpliciales y las aproximaciones simpliciales de los bordes.

Corolario 5.17. *Consideremos una superficie lineal a pedazos U con superficie de aproximación simplicial U_i , sea $l : [0, 1] \rightarrow M$ una trayectoria cerrada tal que $\phi_i \circ l$ es lineal a pedazos, con imagen $\mathbf{1} \subset \partial U$, que se corresponde con una componente de ∂U . Sea $l_i : [0, 1] \rightarrow M$ la trayectoria de aproximación simplicial. Entonces su imagen $\mathbf{1}_i$ es una componente conexa de*

$$\partial(U_i) := \phi_i \circ t_U(\partial A_U) \subset M$$

Así podemos escribir

$$(\partial U)_i = \partial(U_i). \tag{5.11}$$

Demostración. Consideremos la homotopía dada en el teorema 5.11

$$\begin{array}{ccc} |K_U| & \xrightarrow{H(1,\cdot)} & M \\ \downarrow f & & \uparrow \phi_i \circ T_i \\ |A_U| & \xrightarrow{t_U} & Sd|C_i| \end{array}$$

tal que $H(0, \cdot) = H_U : |K_U| \rightarrow M$. Como f es simplicial $f(\partial\sigma) = \partial f(\sigma)$, por lo tanto $f(\partial|K_U|) \subset \partial|A_U|$, con el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \partial|K_U| & \xrightarrow{H(1,\cdot)} & M \\ f|\partial|K_U| \downarrow & & \uparrow \phi_i \circ T_i \\ \partial|A_U| & \xrightarrow{t_U} & Sd|C_i| \end{array}$$

Como cada $H_U^{-1}(l(I_\nu(c))) \subset |K_\nu(c)| \subset |K_U|$, entonces por construcción de los complejos simpliciales abstractos se tiene $|A_l| \subset |A_U|$. Notemos que $|A_l| \subset \partial|A_U| \subset |A_U|$ por lo que podemos escribir el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{l_i} & M \\ & \searrow f_i & \downarrow f|\partial|K_U| \\ & & \partial|K_U| \xrightarrow{H(1,\cdot)} \\ & & \uparrow \phi_i \circ T_i \\ & & M \\ & \swarrow f_i & \downarrow f|\partial|K_U| \\ & & \partial|A_U| \xrightarrow{t_U} \\ & & Sd|C_i| \\ & \uparrow l'_i & \\ & & |A_l| \end{array}$$

Por lo que

$$\mathbf{l}_i = l_i[0, 1] = \phi_i \circ t_U \circ f_i[0, 1]$$

es una componente de $\partial(U_i)$. □

5.4. Regularidad de las escalas respecto la métrica

Ahora recordemos el espacio afín $\underline{\Omega}$ referido en la proposición 3.5 y el espacio de Hilbert $L^2(\underline{\Omega}, \rho)$ asociado a una medida gaussiana ρ descrita en el teorema 4.13.

Esta sección describe una condición técnica necesaria en dimensión superior, sobre la sucesión de escalas \mathcal{E}^e y la métrica riemanniana en M que permiten establecer la convergencia

$$F_U = \lim_{i \rightarrow \infty} F_{U_i}, \tag{5.12}$$

en $L^2(\underline{\Omega}, \rho)$, donde U_{C_i} son las aproximaciones simpliciales de U y donde $F_{U_i} : \underline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por (5.2)

Consideraremos a partir de ahora una estructura métrica adicional sobre M , dada por una métrica riemanniana \mathbf{g} . Nos interesa introducir porque nos permite para todas las escalas medir longitudes, áreas, volúmenes de aristas, 2-simplejos y 3-simplejos $\sigma \in SdC_i$ respectivamente, mediante las integrales

$$\mu_i^k(\sigma) := \int_{\psi(\sigma)} \sqrt{|\det((\psi_\sigma^{-1})^* \phi_i^* \mathbf{g})|} \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

donde $|\sigma|$ es un k -simplejo que tiene coordenadas $\psi_\sigma : |\sigma| \rightarrow \mathbb{R}^k$, $k = 1, 2, 3$, y donde $(\psi_\sigma^{-1})^* \phi_i^* \mathbf{g}$ es la forma bilineal inducida en el espacio tangente de \mathbb{R}^k (recordemos que un ejercicio de rutina prueba que el valor de la integral no depende del sistema de las coordenadas elegidas ψ_σ). Las funciones

$$\mu_i^k : SdC_i^k \rightarrow \mathbb{R}^+$$

son tales que si σ es un k -simplejo a escala gruesa, $\sigma \in SdC_i^k$, que se descompone en escalas finas como

$$\sigma = \sigma^1 \cup \cdots \cup \sigma^r, \quad \sigma^l \in SdC_j^k;$$

entonces

$$\mu_i^k(\sigma) = \mu_j^k(\sigma^1) + \cdots + \mu_j^k(\sigma^r).$$

Denotamos $\text{long} := \mu_i^1$, $\text{area} := \mu_i^2$, $\text{vol} := \mu_i^3$.

Para la métrica riemannian supondremos la siguiente hipótesis de regularidad:

Definición 5.18. Diremos que una colección de escalas $\mathcal{E} = \{(|C_i|, \phi_i; Sd|C_i|, T_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ constituye una sucesión de escalas **regular respecto a una métrica riemanniana \mathbf{g}** en M , si para toda trayectoria cerrada lineal a pedazos $l : [0, 1] \rightarrow M$, y para toda $\varepsilon > 0$ con aproximaciones simpliciales l_i a escala $(|C_i|, \phi_i; Sd|C_i|, T_i)$, existe una escala suficientemente fina $(|C_{i_0}|, \phi_{i_0}; Sd|C_{i_0}|, T_{i_0})$, tal que:

1. Existe escala más fina $(|C_j|, \phi_j; Sd|C_j|, T_j)$, $j \geq i_0$, hay una superficie simplicial $S_{i_0j} \subset h_j(Sd|C_j|^{(2)})$ con bordes simpliciales

$$\partial S_{i_0j} = \mathbf{l}_{i_0} - \mathbf{l}_j,$$

correspondientes a las imágenes de las trayectorias cerradas $l_{i_0}, l_j : [0, 1] \rightarrow M$, que son las aproximaciones simpliciales de \mathbf{l} ; tal que

$$\text{area}(S_{i_0j}) < \varepsilon.$$

2. Existe una superficie lineal a pedazos $S_{i_0} \subset M$ con borde (lineal a pedazos)

$$\partial S_{i_0} = \mathbf{l} - \mathbf{l}_{i_0}$$

y área

$$\text{area}(S_{i_0}) < \varepsilon.$$

La condición de regularidad de las escalas será relevante en el caso $\dim M = N > 2$. La condición 1 será utilizada en el teorema 5.19 para probar que la sucesión (5.12) es de Cauchy. La condición 2 será utilizada en el teorema 5.22 para probar que el límite $F_U = \lim_{i \rightarrow \infty} F_{U_i}$ efectivamente extiende la evaluación de la curvatura en conexiones suaves $F_U(\text{Curv}(\varphi)) = \int_U F^A$.

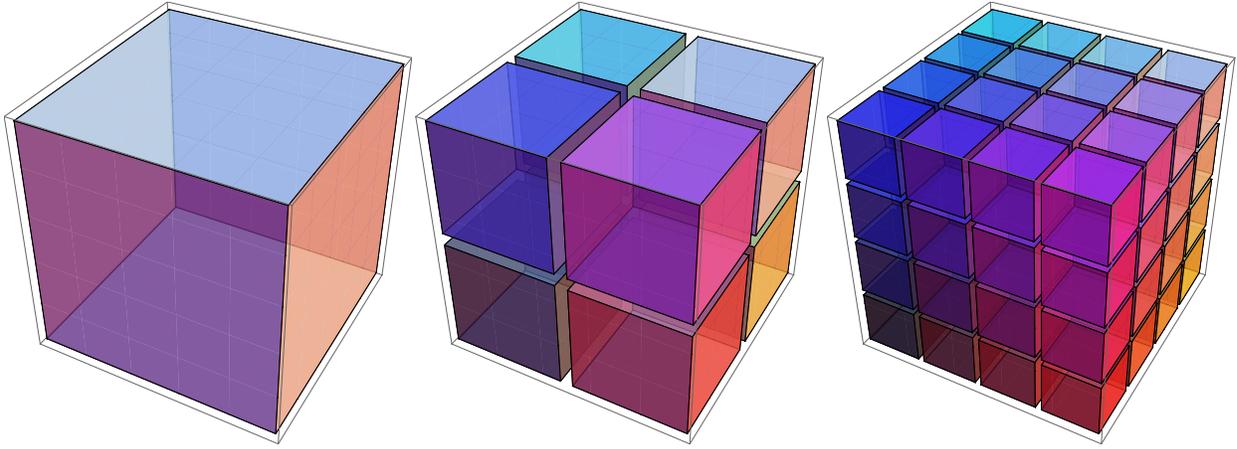


Figura 5.1: Descomposiciones celulares C_0, C_1, C_2 de $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$

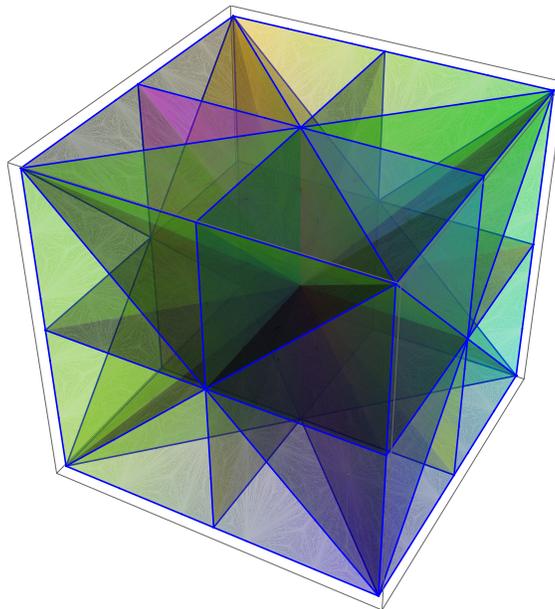


Figura 5.2: Triangulación baricéntrica $Sd|C_0|$ de $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$

Ejemplo Consideremos $M = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$, con la métrica riemanniana plana g . Consideramos C_0 la descomposición celular que consiste en tomar el cubo $(0, 1)^d$ con la longitud de sus lados igual a $2L_0$, como única 3-célula. Las descomposiciones celulares subsecuentes C_i , $i = 1, 2, \dots$ consisten en subdividir el cubo original en 2^{3i} "cubitos" isométricos de lado $2L_i$, donde $L_i = L_0/2^i$ (ver figura 5.1). Las triangulaciones baricéntricas $Sd|C_i|$ consisten en tomar el baricentro geométrico de cada cubo, cara y arista, y considerar las triangulaciones rectilíneas (ver figura 5.2 para observar la triangulación baricéntrica $Sd|C_0|$). Todo 3-simplejo $\Delta \in (Sd|C_i|^3, h_i)$, se descompone en 8 simplejos a escala más fina, los cuales tienen el mismo volumen y son isométricos, de donde,

$$\text{vol}(\Delta) = 2^3 \cdot \text{vol}(\Delta'), \quad (5.13)$$

con $\Delta' \in (Sd|C_{i+1}^3, h_{i+1})$. Todos los 3-simplejos a cada escala tienen el mismo volumen y son todos isométricos entre sí.

Consideramos la imagen $l := l([0, 1]) \subset M$ de una trayectoria lineal a pedazos $l : [0, 1] \rightarrow M$. Recordemos también que según lo discutido en el lema 2.5, existe una descomposición en intervalos adyacentes disjuntos de $[0, 1]$, I_j , $j = 1, \dots, n$ tales que $\sqcup_{j=1}^n I_j = [0, 1]$, tal que para todo $x \in I_k$, el intervalo I_k es el intervalo maximal conteniendo x y tal que $l(I_k)$ está contenido en alguna célula $c_k \in C$.

l consta de una cantidad finita N de segmentos rectilíneos $l = l_1 \cdot \dots \cdot l_N$; con $\text{long}(l) = \text{long}(l_1) + \dots + \text{long}(l_N)$. Como $D_i \rightarrow 0$, entonces existe un escala suficientemente fina $|C_{i_0}|$ tal que

$$\min\{\text{long}(l_s)\} > \sqrt{3}L_{i_0} =: D_i \geq \text{diam } c \quad (5.14)$$

Es decir, $l|_{I_k}$ consta de a lo más 2 segmentos rectilíneos en una célula $c \in C_i$, cada uno de longitud a lo más D_i .

Consideremos un segmento rectilíneo l_s , sea l_{s,i_0} su aproximación simplicial a escala C_{i_0} . Como l_{s,i_0} interseca a cada célula c_k en un segmento rectilíneo, entonces tendremos la descomposición

$$l_{s,i_0} = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_r,$$

donde τ_k , $k = 1, \dots, r$ son trayectorias contenidas en células $c \in C_{i_0}$, cuyo trazo corresponde con 1-simplejos en $(Sd|C_{i_0}|^1, h_{i_0})$. Sea m_k la proyección ortogonal de τ_k sobre l_{s,i_0} .

Como la colección de 1-simplejos τ_k , $k = 1, \dots, r$, de $(Sd|C_i|^1, h_i)$ tiene una cantidad finita de pendientes y longitudes posibles respecto a l_{s,i_0} , entonces existe la mínima longitud, $\min\{\text{long}(m_k) \mid k = 1, \dots, r\} > 0$; y también el máximo que no depende de la escala,

$$M_s := \max \left\{ \frac{\text{long}(\tau_1)}{\text{long}(m_1)}, \dots, \frac{\text{long}(\tau_r)}{\text{long}(m_r)} \right\}.$$

Para la longitud de l_{s,i_0} se tiene,

$$\text{long}(l_{s,i_0}) = \sum_{k=1}^r \text{long}(\tau_k) \leq M_s \cdot \sum_{k=1}^r \text{long}(m_k).$$

Además se tiene que

$$\left| \left(\sum_{k=1}^r \text{long}(m_k) \right) - \text{long}(l_s) \right| < 2D_i$$

Como $D_i \rightarrow 0$, para una escala suficientemente fina se tiene:

$$\left| \left(\sum_{k=1}^r \text{long}(m_k) \right) - \text{long}(l_s) \right| < \varepsilon/3NM, \quad (5.15)$$

donde $M = \max_s \{M_s\}$.

Procediendo de manera análoga con los demás segmentos rectilíneos l_s , $s = 1, \dots, N$, que conforman l y sus aproximaciones simpliciales, tendremos

$$\begin{aligned} |\text{long}(l) - \text{long}(l_{i_0})| &\leq \left| \sum_{s=1}^N \text{long}(l_s) - \text{long}(l_{s,i_0}) \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{s=1}^N \left[\text{long}(l_s) - \left(\sum_{k=1}^r \text{long}(m_k) \right) \right] + \sum_{s=1}^N \left[\left(\sum_{k=1}^r \text{long}(m_k) \right) - \text{long}(l_{s,i_0}) \right] \right| \\ &\leq \varepsilon/3 + (M+1) \sum_{s=1}^N \left(\sum_{k=1}^r \text{long}(m_k) \right) \leq \varepsilon/3 + (M+1) \left[\sum_{s=1}^N \text{long}(l_s) + \varepsilon/3M \right] \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|\text{long}(l) - \text{long}(l_{i_0})| \leq \varepsilon/3 + (M+1)\text{long}(l) + \varepsilon(M+1)/3M;$$

es decir, existe una constante $K_l > 0$, tal que

$$\text{long}(l_i) \leq K_l \cdot \text{long}(l). \quad (5.16)$$

Ahora consideremos la intersección de $l|_{\bar{I}_k}$ con las caras de la célula c , $\dim c \geq 1$ que contiene $l|_{I_k}$. $l|_{I_k} \cdot l|_{\bar{I}_k}$ consta de a lo más dos segmentos rectilíneos l^1, l^2 que intersectan ∂c e a lo más dos caras. La intersección l^3 de la aproximación simplicial l_i con c , pasa por los dos baricentros de esas dos caras. Al agregar segmentos rectilíneos l', l'' que unen estas intersecciones sobre las caras, es posible formar una trayectoria cerrada poligonal en el espacio (pentagonal o hexagonal)

$$l^c = l^1 \cdot l^2 \cdot l' \cdot l^3 \cdot l''$$

contraíble en \bar{c} , ver figura 5.3.

Es posible considerar un poliedro formado por tres triángulos, $S_c \subset \bar{c}$ con borde l^c ; tendremos $l \cap \bar{c}, l_{i_0} \cap \bar{c} \subset \partial S_c$. Definimos

$$S_{i_0} = \cup_{c \cap l \neq \emptyset} S_c$$

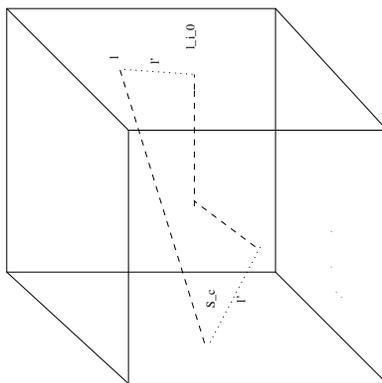
como la unión de los poliedros S_c considerando todas las células que intersectan l . S_c consta de 5 ó 6 triángulos de diámetro a lo más D_i , y con alguno de sus lados en l o en l_{i_0} . Consideremos la ecuación (5.16), el área de S_c está acotada por

$$\text{area}(S_{i_0}) \leq (\text{long}(l) + \text{long}(l_{i_0})) \cdot D_{i_0}/2 \leq \text{long}(l) \cdot (1 + K_l)D_{i_0}/2$$

donde D_{i_0} es el máximo diámetro de los simplejos de dimensión máxima $\Delta \in SdC_i^3$.

Como $D_{i_0} \rightarrow 0$ cuando $i_0 \rightarrow \infty$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe una escala i_0 suficientemente fina, tal que

$$\text{area}(S_{i_0}) < \varepsilon. \quad (5.17)$$

Figura 5.3: Poliedro S_c

Esto prueba la segunda parte de la afirmación.

Para probar la primera afirmación consideremos la superficie lineal a pedazos S_{i_0} con una parametrización $H_{S_i} : |K_{S_{i_0}}| \rightarrow S_{i_0}$, donde $|K_{i_0}|$ es un complejo simplicial. Según la demostración de la proposición 5.6, existen $|K_s(c)| \subset |K_{S_{i_0}}|$ subcomplejos tales que $H_{S_{i_0}}(|K_s(c)|) \subset S_{i_0}$ es el máximo subcomplejo conexo contenido en \bar{c} , $\dim c \geq 2$, es decir

$$S_c = H_{S_{i_0}}(|K_s(c)|).$$

Consideremos un 2-simplejo $|\sigma| \subset |K_s(c)|$ con imagen $\sigma = H_{S_{i_0}}(|\sigma|) \subset S_{i_0}$. Tomemos la aproximación simplicial $\sigma_j \subset h_j(Sd|C_j|^{(2)})$, a escala $(|C_j|, \phi_j; Sd|C_j|, T_j)$ de σ . Denotemos los 2-simplejos de σ_j , como $\sigma'_1, \dots, \sigma'_r \subset (Sd|C_j|^2, h_j)$. Sea t_k la proyección ortogonal de σ'_k en (el plano determinado por) σ . Como existe un número finito de orientaciones de los 2-simplejos σ'_k en el espacio y una cantidad finita de áreas distintas a escala fija de éstos simplejos, entonces existe un mínimo de $\{\text{area}(t_k), | k = 1, \dots, r\}$ y también un máximo

$$A_\sigma := \max \left\{ \frac{\text{area}(\sigma'_1)}{\text{area}(t_1)}, \dots, \frac{\text{area}(\sigma'_r)}{\text{area}(t_r)} \right\}$$

Por lo tanto, si consideramos la aproximación simplicial $S_{i_0,j}$ de S_{i_0} tendremos que

$$\text{area}(S_{i_0,j}) = \sum_{\sigma \subset S_{i_0}} \sum_{k=1}^r \text{area}(\sigma'_k) \leq \sum_{\sigma \subset S_{i_0,j}} A_\sigma \cdot \sum_{k=1}^r \text{area}(t_k)$$

Por otro lado, como $\sigma, \cup_k t_k$ son polígonos planos contenidos en una célula cúbica c de diámetro D_i , entonces

$$\left| \text{area}(\sigma) - \sum_{k=1}^r \text{area}(t_k) \right| \leq D_i^2$$

De donde

$$\text{area}(S_{i_0,j}) \leq \sum_{\sigma \subset S_{i_0}} A_\sigma (\text{area}(\sigma) + D_i^2) \leq A_{S_{i_0}} \cdot (\text{area}(S_{i_0}) + N_{S_{i_0}} \cdot D_i^2);$$

donde definimos las constantes $A_{S_{i_0}} := \max\{A_\sigma \mid \sigma \subset S_{i_0}\}$, y $N_{S_{i_0}} := |\{\sigma \mid \sigma \subset S_{i_0}\}|$ la cardinalidad de los simplejos $\sigma \in (Sd|C_{i_0}|^2, h_{i_0})$, de S_{i_0} . Como $D_i^2/\text{area}(\sigma)$ está acotada por una constante, entonces $N_{S_{i_0}} \cdot D_i^2$ está acotada por $\text{area}(S_{i_0})$.

Por lo tanto, igual que deducimos la cota (5.16) para las longitudes, podemos deducir una desigualdad correspondiente para las áreas

$$\text{area}(S_{i_0j}) \leq L_{S_{i_0}} \cdot \text{area}(S_{i_0}). \quad (5.18)$$

para cierta constante $L_{S_{i_0}} > 0$.

Usando $\varepsilon = \varepsilon'/L_{S_{i_0}}$, en la cota (5.17) podemos concluir que para toda $\varepsilon' > 0$ existe una escala suficientemente fina $(|C_{i_0}|, \phi_{i_0}; Sd|C_{i_0}|, T_{i_0})$, tal que

$$\text{area}(S_{i_0j}) < \varepsilon'$$

para toda $j > i_0$.

5.5. Curvatura en superficies lineales a pedazos

Como mencionamos la regularidad es una condición técnica sobre la elección de escalas \mathcal{E} que garantiza la convergencia (5.12). Dicha convergencia será necesaria para poder obtener una función afín F_U (en algún dominio adecuado), la cual generalice la noción de evaluación de la 2-forma de curvatura F^A en una superficie lineal a pedazos $U \subset M$.

Teorema Principal 5.19. *Sea $U \subset M$ una superficie lineal a pedazos encajada en M , sean U_i las aproximaciones simpliciales según la definición 5.9. Si la elección de escalas \mathcal{E} es regular respecto a la métrica riemanniana \mathfrak{g} en M , según la definición 5.18, entonces la sucesión de funciones afines*

$$F_{U_i} := F_{U_i, i} \circ \pi_i : \underline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

dadas por (5.2), constituye una sucesión de Cauchy en $L^2(\underline{\Omega}, \rho)$. Por lo tanto existe el límite

$$F_U := \lim_{i \rightarrow \infty} F_{U_i} \in L^2(\underline{\Omega}, \rho).$$

Demostración. En lugar de funciones afines consideremos las funciones lineales

$$\check{F}_{U_i, i}(\overrightarrow{\omega^0 \omega}) = F_{U_i, i}(\omega) - F_{U_i, i}(\omega_i^0), \quad \overrightarrow{\omega^0 \omega} = \omega - \omega_i^0 \in \Omega_i^0.$$

Notemos que

$$\pi_{ij}^*(\check{F}_{U_i, i}) - \check{F}_{U_j, j} = \sum_{k=1}^n \check{F}_{\sigma_j^k}$$

donde $\sum_{k=1}^n \check{F}_{\sigma_j^k}$ es una cadena simplicial con coeficientes unitarios la cual representa una superficie simplicial

$$S_{ij} = \cup_{k=1}^n \sigma_j^k, \quad \sigma_j^k \in (Sd|C_j|^2, h_j)$$

Además recordemos que la norma L^2 de funciones lineales se corresponde con la norma $g^*\mathcal{Q}$ en $\underline{\Omega}^*$, inducida mediante la inclusión $g : \underline{\Omega}^* \rightarrow \varinjlim \mathbf{V}^*$ definida en (4.10). Dicha correspondencia se obtiene mediante mediante la isometría (4.16),

$$\begin{aligned} \|\pi_i^*(\check{F}_{U_i,i}) - \pi_j^*(\check{F}_{U_j,j})\|_{g^*\mathcal{Q}} &= \|\pi_{ij}^*(\check{F}_{U_i}) - \check{F}_{U_j}\|_{g_j^*\mathcal{Q}_j} = \\ \|g_j(\pi_{ij}^*(\check{F}_{U_i})) - g_j(\check{F}_{U_j})\|_{\mathcal{Q}_j} &\leq \|\pi_{ij}^*(\check{F}_{U_i}) - \check{F}_{U_j}\|_{\mathcal{Q}_j} = \left\| \sum_{k=1}^n \check{F}_{\sigma_j^k} \right\|_{\mathcal{Q}_j} \leq |\text{area}(S_{ij})|. \end{aligned}$$

Suponiendo que las escalas son regulares respecto a una métrica riemanniana en M , existe una escala $(|C_i|, \phi_i; Sd|C_i|, T_i)$ suficientemente fina tal que para escalas más finas existe una superficie simplicial S_{ij} , $j \geq i$, tal que,

$$\text{area}(S_{ij}) < \varepsilon.$$

□

Notemos que mientras que F_{U_i} son funciones afines con dominio $\underline{\Omega}$, el límite F_U está definida casi dondequiera en $\underline{\Omega}$ según la medida gaussiana ρ . Además como $1 \in L^2(\underline{\Omega}, \rho)$, entonces F_{U_i} están en $L^1(\underline{\Omega}, \rho)$, ver Teorem 3.8 [Ru2]. Además F_{U_i} convergen en L^1 a F_U , por lo tanto $F_U \in L^1(\underline{\Omega}, \rho)$.

En particular F_U es una función medible, por lo tanto define un operador multiplicativo cerrado y densamente definido en $L^2(\underline{\Omega}, \rho)$, ver [Tha] capítulo IV ejemplo 1.

Definición 5.20. Se define el operador *multiplicativo*, \widehat{F}_U en $L^2(\underline{\Omega}, \rho)$, como

$$\left(\widehat{F}_U\psi\right)(\omega) := F_U(\omega) \cdot \psi(\omega), \quad \omega \in \Omega_\rho. \quad (5.19)$$

Aquí $\Omega_\rho \subset \underline{\Omega}$ es el soporte de ρ .

Como cualquier operador multiplicativo en un espacio de medida, se verifica que es un operador cerrado y densamente definido en un dominio $\text{dom } \widehat{F}_U \subset L^2(\underline{\Omega}, \rho)$.

Definición 5.21. Para cada $\psi \in \text{dom } \widehat{F}_U \subset L^2(\underline{\Omega}, \rho)$, en un dominio adecuado el **valor esperado de la curvatura en el estado** ψ , para el boreliano $U \subset M$, se define como

$$\left\langle \widehat{F}_U \right\rangle_\psi := \left\langle \psi, \widehat{F}_U\psi \right\rangle_\rho, \quad \|\psi\|_\rho = 1,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ es el producto interno en el espacio de Hilbert $L^2(\underline{\Omega}^0, \rho)$.

Teorema Principal 5.22. Sea $\varphi^0 \in \mathcal{A}$ una conexión fija de un haz principal sobre M con número de Euler $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}$. Sea ρ una medida de probabilidad en $\underline{\Omega}$, centrada en

$$\omega^0 = \text{Curv}(\varphi^0),$$

ver definición de Curv en (3.15). Sea ρ la medida de probabilidad gaussiana en $\underline{\Omega}$, según el teorema 4.13.

Entonces para cada región lineal apedazos $U \subset M$, existe un operador multiplicativo \widehat{F}_U en $L^2(\underline{\Omega}, \rho)$, tal que el valor esperado en el vacío (o el estado cíclico de la representación), $\psi_\rho = 1$ es

$$\langle \widehat{F}_U \rangle_{\psi_\rho} = \int_{\underline{\Omega}} F_U(\omega) d\rho(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_U F^{A_0} = F_U(\omega^0)$$

donde F^{A_0} es la 2-forma de curvatura asociada a la conexión suave $\varphi^{A_0} \in \mathcal{A}$, tal que $\text{Curv}(\varphi^{A_0}) = \omega^0 \in \underline{\Omega}$, es el centro de la gaussiana ρ .

Demostración. Basta considerar la función afín $F_U : \Omega_\rho \rightarrow \mathbb{R}$, definida casi dondequiera en $\underline{\Omega}$ que ya hemos descrito en el lema 5.19. Como todo operador multiplicativo tiene dominio denso. Por tratarse de una función afín, le corresponde una función lineal \check{F}_U definida casi dondequiera en el espacio vectorial $\underline{\Omega}^0$, con la correspondencia

$$\check{F}_U(\overrightarrow{\omega^0 \omega}) = F_U(\omega) - F_U(\omega^0), \quad \overrightarrow{\omega^0 \omega} = \omega - \omega^0 \in \varprojlim V'_i,$$

recordemos la definición 4.5 de los espacios V_i . Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\Omega}} F_U(\omega) d\rho(\omega) &= \int_{\underline{\Omega}^0} \check{F}_U(\overrightarrow{\omega^0 \omega}) + F_U(\omega^0) d\rho(\overrightarrow{\omega^0 \omega}) = \\ &= \int_{\underline{\Omega}^0} \check{F}_U(\overrightarrow{\omega^0 \omega}) d\rho(\overrightarrow{\omega^0 \omega}) + F_U(\omega^0). \end{aligned}$$

Como la gaussiana está centrada en el origen de $\underline{\Omega}^0$ que corresponde ω^0 en $\underline{\Omega}$ tenemos

$$\int_{\underline{\Omega}^0} \check{F}_U(\overrightarrow{\omega^0 \omega}) d\rho(\overrightarrow{\omega^0 \omega}) = 0.$$

Por lo tanto

$$\int_{\underline{\Omega}} F_U(\omega) d\rho(\omega) = F_U(\omega^0).$$

La afirmación $\frac{1}{2\pi} \int_U F^{A_0} = F_U(\omega^0)$ se sigue de

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \int_{U_i} F^{A_0} - \int_U F^{A_0} \right| \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \text{area}(S_{i_0}) \cdot M_{A_0} = 0;$$

donde S_{i_0} se definió en 5.18; y donde por compacidad existe la constante $M_{A_0} := \sup_{u,v} F^{A_0}(u \wedge v)$, con u, v vectores tangentes con $|u \wedge v| = 1$. \square

5.6. Independencia de la representación

En el teorema 5.22 hemos construido una representación de la evaluación de la curvatura en una región lineal a pedazos $U \subset M$, como un operador multiplicativo \widehat{F}_U en el espacio de Hilbert $L^2(\underline{\Omega}, \rho)$. Nuestro objetivo en esta sección es mostrar que la representación depende exclusivamente de la estructura de la variedad lineal a pedazos y no de la elección de escalas \mathcal{E} .

Consideremos dos sucesiones de escalas

$$\mathcal{E}_1 = \{(|C_{i,1}|, \phi_{i,1}; Sd|C_{i,1}|, T_{i,1})\}_{i \in \mathbb{N}}, \quad \mathcal{E}_2 = \{(|C_{i,2}|, \phi_{i,2}; Sd|C_{i,2}|, T_{i,2})\}_{i \in \mathbb{N}},$$

que satisfacen las condiciones 2.4. Denotemos los límites proyectivos que inducen por

$$\underline{\Omega}_{\mathcal{E}_1}, \quad \underline{\Omega}_{\mathcal{E}_2}; \quad \text{respectivamente.}$$

Adicionalmente supongamos que las estructuras lineales a pedazos inducidas por las dos escalas son isomorfas. Recordemos que según la proposición 1.9, para la pareja de estructuras lineales a pedazos, $h_{0,1} : Sd|C_{0,1}| \rightarrow M$, $h_{0,2} : Sd|C_{0,2}| \rightarrow M$, existe una subtriangulación común $|L_0|$. Así obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & |L_0| & \\ r_{0,1} \swarrow & \vdots & \searrow r_{0,2} \\ Sd|C_{0,1}| & & Sd|C_{0,2}| \\ h_{0,1} \searrow & \downarrow \Psi & \swarrow g_0^{-1} \circ h_{0,2} \\ & M & \end{array}$$

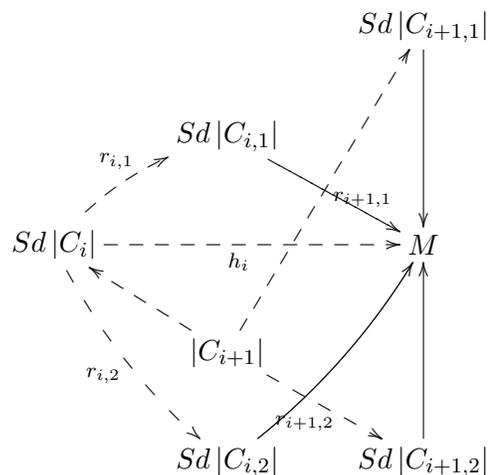
Donde denotamos g_0 como el homeomorfismo $h_{0,2} \circ r_{0,2} \circ r_{0,1}^{-1} \circ h_{0,1}^{-1}$. Se verifica que $|L_0|, Sd|C_{0,1}|, Sd|C_{0,2}|$ son poliedros isomorfos.

Procediendo de manera análoga a cada escala $(|C_i|, \phi_i; Sd|C_i|, T_i)$, se obtienen complejos simpliciales $|L_i|$ que son subtriangulaciones de $Sd|C_{i,1}|, Sd|C_{i,2}|$.

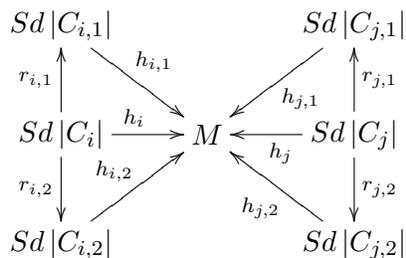
$$\begin{array}{ccc} & |L_i| & \\ r_{i,1} \swarrow & \vdots & \searrow r_{i,2} \\ Sd|C_{i,1}| & & Sd|C_{i,2}| \\ h_{i,1} \searrow & \downarrow \Psi & \swarrow g_i^{-1} \circ h_{i,2} \\ & M & \end{array}$$

Consideremos el complejo simplicial $|C_0| := |L_0|$ y la estructura lineal a pedazos $(|C_0|, h_0)$ con homeomorfismo $h_0 : |L_0| \rightarrow M$ dado por $g_0^{-1} \circ h_{0,2} \circ r_{0,2} = h_{0,1} \circ r_{0,1}$. Consideremos un complejo simplicial $|C_1|$ que es una triangulación que sea refinamiento común de $Sd|C_0|$ y de $|L_1|$. Inductivamente se define $|C_{i+1}|$ como subtriangulación de $Sd|C_i|$ y de $|L_i|$. De esta manera

obtenemos los diagramas



de esta manera obtenemos una sucesión de escalas $\{(|C_i|, \phi_i; Sd|C_i|, T_i)\}$. La sucesión de escalas $\mathcal{E} = \{(|C_i|, \phi_i; Sd|C_i|, T_i)\}$ es refinamiento de ambas escalas. Es decir, se tienen diagramas conmutativos de homeomorfismos y homeomorfismos afines



Recordemos las aplicaciones ι_{ij} , y los diagramas conmutativos (3.5)

$$\begin{array}{ccc} S_k(Sd|C_i|, h_i) & \xrightarrow{\iota_{ij}^{(k)}} & S_k(Sd|C_j|, h_j) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ S_{k-1}(Sd|C_i|, h_i) & \xrightarrow{\iota_{ij}^{(k-1)}} & S_{k-1}(Sd|C_j|, h_j) \end{array}$$

Como todo 2-simplejos $\sigma \in (Sd|C_{i,a}|^2, h_{i,a})$, $a = 1, 2$, se descompone como 2-cadena $(r_{i,1})_*(\sigma) \in S_2(Sd|C_i|, h_i)$; se tienen diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} S_2(Sd|C_{i,1}|, h_{i,1}) & \xrightarrow{\iota_{ij}^{(2)}} & S_2(Sd|C_{j,1}|, h_{j,1}) \\ \downarrow (r_{i,1})_* & & \downarrow (r_{j,1})_* \\ S_2(Sd|C_i|, h_i) & \xrightarrow{\iota_{ij}^{(2)}} & S_2(Sd|C_j|, h_j) \\ (r_{i,2})_* \uparrow & & (r_{j,2})_* \uparrow \\ S_2(Sd|C_{i,2}|, h_{i,2}) & \xrightarrow{\iota_{ij}^{(2)}} & S_2(Sd|C_{j,2}|, h_{j,2}) \end{array}$$

es decir, en las cocadenas se tiene

$$\begin{array}{ccc}
 \text{hom}(S_2(Sd|C_{i,1}|, h_{i,1}), \mathbb{R}) & \xleftarrow{\pi_{ij,1}} & \text{hom}(S_2(Sd|C_{j,1}|, h_{j,1}), \mathbb{R}) \\
 (r_{i,1})^* \uparrow & & (r_{j,1})^* \uparrow \\
 \text{hom}(S_2(Sd|C_i|, h_i), \mathbb{R}) & \xleftarrow{\pi_{ij}} & \text{hom}(S_2(Sd|C_j|, h_j), \mathbb{R}) \\
 (r_{i,2})^* \downarrow & & (r_{j,2})^* \downarrow \\
 \text{hom}(S_2(Sd|C_{i,2}|, h_{i,2}), \mathbb{R}) & \xleftarrow{\pi_{ij,2}} & \text{hom}(S_2(Sd|C_{j,2}|, h_{j,2}), \mathbb{R})
 \end{array}$$

Por ser $SD|C_i|$ un refinamiento de $Sd|C_{i,a}|$, $a = 1, 2$, se tiene que para una 2-cadena cerrada $\partial S = 0$ se tiene $\partial((r_{i,1})_*(S)) = (r_{i,a})_*(\partial S) = 0$, es decir, $(r_{i,a})^*(\omega)(S) = \omega((r_{i,a})_*(S)) = 0$. Por lo tanto $(r_{i,a})^*$ define aplicaciones lineales

$$(r_{i,a})^* : \frac{S_2(Sd|C_{i,a}|, h_{i,a})}{\partial(S_3(Sd|C_{i,a}|, h_{i,a}))} \rightarrow \frac{S_2(Sd|C_i|, h_i)}{\partial(S_3(Sd|C_i|, h_i))}, \quad a = 1, 2$$

y también

$$(r_{i,a})^* : H_2(Sd|C_j|) \rightarrow H_2(Sd|C_i|).$$

Por tratarse de aplicaciones lineales, si $\omega = 0 \in H^2(Sd|C_i|, \mathbb{R})$, entonces $(r_{i,a})^*(\omega) = 0 \in H^2(Sd|C_{i,a}|, \mathbb{R})$. Por lo tanto $(r_{i,a})^*(\Omega_i^0) \subset \Omega_{i,a}^0$; según la definición 3.1.

Se tienen diagramas conmutativos similares para los espacios afines $\Omega_{i,a}$ es decir,

$$\begin{array}{ccc}
 & \Omega_{i,1} & \xleftarrow{\pi_{ji,1}} \Omega_{j,1} \\
 & \varpi_{i,1} \nearrow & \varpi_{j,1} \nearrow \\
 \Omega_i & \xleftarrow{\pi_{ji}} \Omega_j & \\
 \varpi_{i,2} \searrow & & \varpi_{j,2} \searrow \\
 & \Omega_{i,2} & \xleftarrow{\pi_{ji,2}} \Omega_{j,2}
 \end{array} \tag{5.20}$$

donde $\varpi_{i,a} := (r_{i,a})^*$. De esta manera se tienen aplicaciones sobreyectivas de límites proyectivos

$$\begin{array}{ccc}
 & \varprojlim \Omega_{\mathcal{E}_1} & \\
 \varpi_1 \nearrow & & \\
 \varprojlim \Omega & & \\
 \varpi_2 \searrow & & \\
 & \varprojlim \Omega_{\mathcal{E}_2} &
 \end{array} \tag{5.21}$$

Consideremos las cerraduras

$$\mathcal{H}_{\rho^1} = \overline{\left(\varprojlim \Omega_{\mathcal{E}_1}^*, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^1} \right)}, \quad \mathcal{H}_{\rho^2} = \overline{\left(\varprojlim \Omega_{\mathcal{E}_2}^*, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^2} \right)}, \quad \mathcal{H}_{\rho} = \overline{\left(\varprojlim \Omega_{\mathcal{E}}^*, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}} \right)},$$

de las normas $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^1}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$, respectivamente, inducidas por una misma forma de área en M según (4.7). Donde $\varprojlim \Omega_{\mathcal{E}_a}^*$ es el límite inyectivo construido usando la sucesión \mathcal{E}_a , $a = 1, 2$.

Recordemos que según la definición 4.17, el espacio \mathcal{H}_ρ consiste de la cerradura de las funciones lineales contenidas $\underline{\Omega}^*$, como elementos de $L^2(\underline{\Omega}^0, \rho)$. Es posible describir para cada $f \in \underline{\Omega}$

$$\mathcal{I}(f)(\omega)$$

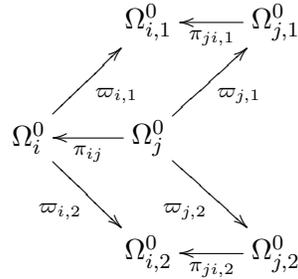
para todo $\omega \in \underline{\Omega}$. Según el lema 4.16, la inclusión $\mathcal{H}_\rho \rightarrow L^2(\underline{\Omega}^0, \rho)$, está definida para cada $f \in \mathcal{H}_\rho$,

$$\mathcal{I}(f)(\omega)$$

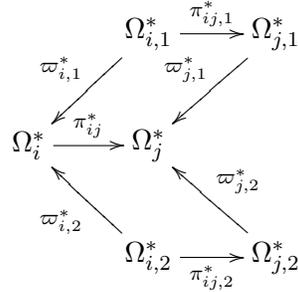
para casi todo $\omega \in \underline{\Omega}^0$, ver [Ya] enseguida de (9.6).

Lema 5.23. *Existe un isomorfismo de espacios de Hilbert $\mathcal{H}_{\rho^1} \simeq \mathcal{H}_{\rho^2}$.*

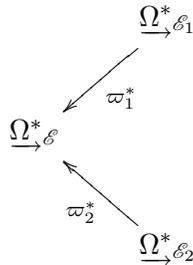
Demostración. Consideremos el diagrama conmutativo de aplicaciones lineales de espacios vectoriales de dimensión finita,



inducido por el diagrama (5.20) para espacios y aplicaciones afines. Al considerar las normas $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}_i^1}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}_i^2}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}_i}$ en $\Omega_{i,1}^*$, $\Omega_{i,2}^*$ y Ω_i^* respectivamente tendremos diagramas conmutativos de inclusiones isométricas



los cuales inducen las inclusiones isométricas



dichas inclusiones isométricas se pueden extender a inclusiones isométricas

$$\varpi_1^* : \mathcal{H}_{\rho^1} \rightarrow \mathcal{H}_\rho, \quad \varpi_2^* : \mathcal{H}_{\rho^2} \rightarrow \mathcal{H}_\rho.$$

Para verificar la sobreyectividad de estas últimas inclusiones isométricas mostremos que todo vector en el denso $f \in \underline{\Omega}_{\mathcal{E}}^*$ está en la imagen $\varpi_a^* \left(\underline{\Omega}_{\mathcal{E}_a}^* \right)$.

Recordemos que Ω_i^* está generado por las clases de funciones lineales $\check{F}_\sigma : \Omega_i^0 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas a partir de las funciones afines $F_\sigma : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}$, $F_\sigma(\omega) = \omega(\sigma)$, recorriendo los dos simplejos $\sigma \in (Sd|C_i|^2, h_i)$. Consideramos un 2-simplejo $\sigma \in (Sd|C_i|^2, h_i)$ como región simplicial $U = \sigma$ para la cual definimos aproximaciones simpliciales $U_{j,2} \subset h_{j,2}(Sd|C_{j,2}|^{(2)})$. Entonces tenemos la función afín $F_{U_{j,2}}$. De acuerdo al lema 5.19, existe el límite

$$F_{\sigma,2} := \lim_{j \rightarrow \infty} F_{U_{j,2}} \in \mathcal{H}_{\rho^2}.$$

Por otro lado, al tomar límites en los espacios de Hilbert $\mathcal{H}_{\rho^1}, \mathcal{H}_{\rho^2}$, se tiene

$$\varpi_1^* (\check{F}_\sigma) = \varpi_2^* (\check{F}_{\sigma,2}).$$

Procediendo análogamente con las escalas \mathcal{E}_2 , se tiene una función afín $\check{F}_{\sigma,2} \in \mathcal{H}_{\rho^2}$, con $\varpi_2^* (\check{F}_{\sigma,2}) = \check{F}_\sigma$. De esta manera se define una inclusión isométrica $(\varpi_2^*)^{-1} \circ \varpi_1^* : \mathcal{H}_{\rho^1} \rightarrow \mathcal{H}_{\rho^2}$. Por simetría, ahora considerando los 2-simplejos $\sigma \in (Sd|C_{j,2}|^2, h_{j,2})$ y aproximándolos con superficies simpliciales $U_{i,1}$ de las escalas \mathcal{E}_1 se tiene la inversa

$$(\varpi_1^*)^{-1} \circ \varpi_2^* : \mathcal{H}_{\rho^2} \rightarrow \mathcal{H}_{\rho^1}.$$

□

Lema 5.24. 1. Consideremos las medidas de probabilidad gaussianas ρ, ρ^1, ρ^2 inducidas en $\underline{\Omega}, \underline{\Omega}_{\mathcal{E}_1}, \underline{\Omega}_{\mathcal{E}_2}$ por una forma de área en M . Entonces $(\varpi_a)_* \rho = \rho^a$.

2. Si $\Omega_\rho, \Omega_{\rho^a} \subset \underline{\Omega}_{\mathcal{E}_a}$ son los soportes de ρ y ρ^a , $a = 1, 2$, respectivamente, entonces la restricción $\varpi_a : \Omega_\rho \rightarrow \Omega_{\rho^a}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. La afirmación 1 se sigue del hecho de la conmutación del diagrama y de que $\varpi_1^* : \underline{\Omega}_{\mathcal{E}_1}^* \rightarrow \underline{\Omega}_{\mathcal{E}}^*$, y $\varpi_2^* : \underline{\Omega}_{\mathcal{E}_2}^* \rightarrow \underline{\Omega}_{\mathcal{E}}^*$, son isometrías con la forma bilineal de covarianza $\mathcal{Q}^1, \mathcal{Q}^2, \mathcal{Q}$. Ver por ejemplo teorema 3.1 [Su], y su versión finito dimensional en el lema 4.12.

Recordemos que se tienen los siguientes diagramas de inclusiones isométricas de espacios de Hilbert,

$$\begin{array}{ccc}
 & L^2 \left(\underline{\Omega}_{\mathcal{E}_1}, \rho^1 \right) \xleftarrow{\mathcal{I}_1} \mathcal{H}_{\rho^1} & \\
 & \swarrow \varpi_1^* & \searrow \varpi_1^* \\
 L^2 \left(\underline{\Omega}_{\mathcal{E}}, \rho \right) & \xleftarrow{\mathcal{I}} \mathcal{H}_\rho & \\
 & \swarrow \varpi_2^* & \searrow \varpi_2^* \\
 & L^2 \left(\underline{\Omega}_{\mathcal{E}_2}, \rho^2 \right) \xleftarrow{\mathcal{I}_2} \mathcal{H}_{\rho^2} &
 \end{array} \tag{5.22}$$

donde según el lema 4.16, las aplicaciones lineales $\mathcal{I}, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ son inclusiones isométricas de espacios de Hilbert, es decir

$$\|\mathcal{I}_a(\cdot)\|_{\rho^a} = \|\cdot\|_{\mathcal{Q}^a}, \quad a = 1, 2.$$

El diagrama (5.22) es conmutativo pues $\varpi_{i,1}^* : \Omega_{i,1} \rightarrow \Omega_i^*$ coincide con la aplicación $\varpi_{i,1}^*(f) = f \circ \varpi_{i,1}$.

Para probar la segunda afirmación, consideramos el subespacio

$$I(\mathcal{H}_\rho) = \mathcal{I} \circ \varpi_1^*(\mathcal{H}_{\rho^1}) \subset L^2\left(\underline{\Omega}_{\mathcal{E}}^0, \rho\right),$$

consta de la cerradura (definida casi dondequiera) de las funciones lineales dadas por $\underline{\Omega}_{\mathcal{E}}^*$, ver [Ya] (9.6) y (12.2). Dichas funciones lineales en $\mathcal{I}(\mathcal{H}_\rho)$ están definidas casi dondequiera en el soporte $\Omega_\rho \subset \underline{\Omega}_{\mathcal{E}}^0$.

Entonces si consideramos los subespacios vectoriales soportes de las medidas gaussianas $\Omega_\rho \subset \underline{\Omega}_{\mathcal{E}}^0$, $\Omega_{\rho^a} \subset \underline{\Omega}_{\mathcal{E}_a}$, $\varpi_1 : \Omega_\rho \rightarrow \Omega_{\rho^1}$ debe ser inyectiva casi dondequiera (ya es sobreyectiva casi dondequiera por la afirmación 1).

Supongamos que existe un subespacio $L \subset \Omega_\rho$ tal que $L \subset \ker \varpi_1$, y $\dim L = 1$. Sea $f : \Omega_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ una función lineal continua tal que $f(v) = 1$ para algún $v \in L$. Entonces la transformada de Fourier o función característica de ρ evaluada en f es

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{Q}(f, f)\right) \neq 0$$

es decir, $f \in \mathcal{H}_\rho - \{0\}$. Pero f no pertenece a la imagen $\varpi_1^*(\mathcal{H}_{\rho^1}) \subset \mathcal{H}_\rho$, pues todos los elementos $g \in \varpi_1^*(\mathcal{H}_{\rho^1})$ satisfacen $g(v) = 0$.

Esto significaría que $\varpi_1^* : \mathcal{H}_{\rho^1} \rightarrow \mathcal{H}_\rho$ no es sobreyectiva lo que contradice el lema 5.23. \square

Corolario 5.25. *El isomorfismo $(\varpi_2^*)^{-1} \circ \varpi_1^* : \mathcal{H}_{\rho^1} \rightarrow \mathcal{H}_{\rho^2}$ del lema 5.23, extiende a un isomorfismo*

$$\mathcal{V} : L^2\left(\underline{\Omega}_{\mathcal{E}_1}, \rho^1\right) \rightarrow L^2\left(\underline{\Omega}_{\mathcal{E}_2}, \rho^2\right).$$

Teorema Principal 5.26. *Sean $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ dos elecciones de sucesiones de escalas en M , sea \mathcal{E} una elección como en (5.21); sean ρ^1, ρ^2, ρ medidas de probabilidad gaussianas en $\underline{\Omega}_{\mathcal{E}_1}, \underline{\Omega}_{\mathcal{E}_2}, \underline{\Omega}_{\mathcal{E}}$, respectivamente, inducidas por la misma forma de área asociada a una métrica riemanniana \mathbf{g} en M . Entonces:*

1. *Existe un isomorfismo de espacios de Hilbert*

$$\mathcal{V} : L^2\left(\underline{\Omega}_{\mathcal{E}_1}, \rho^1\right) \rightarrow L^2\left(\underline{\Omega}_{\mathcal{E}_2}, \rho^2\right).$$

2. *Se tiene la conjugación de los operadores de curvatura en un boreliano \widehat{F}_U^1 en $L^2\left(\underline{\Omega}_{\mathcal{E}_1}, \rho^1\right)$, y la representación \widehat{F}_U^2 en $L^2\left(\underline{\Omega}_{\mathcal{E}_2}, \rho^2\right)$,*

$$\widehat{F}_U^1 = \mathcal{V}^{-1} \circ \widehat{F}_U^2 \circ \mathcal{V}.$$

3. *La representación del flujo de curvatura en un boreliano \widehat{F}_U en $L^2\left(\underline{\Omega}_{\mathcal{E}_1}, \rho^1\right)$, tiene los mismos valores esperados que la representación \widehat{F}_U^2 en $L^2\left(\underline{\Omega}_{\mathcal{E}_2}, \rho^2\right)$, es decir,*

$$\left\langle \widehat{F}_U^1 \right\rangle_\psi = \left\langle \widehat{F}_U^2 \right\rangle_{\mathcal{V}(\psi)}.$$

Demostración. La primera afirmación se sigue de definir $\mathcal{V} := (\varpi_2^*)^{-1} \circ \varpi_1^*$.

Probemos la afirmación 3. Consideremos los límites

$$F_U^1 = \lim_{i_1 \rightarrow \infty} F_{U_{i_1,1}}, F_U^2 = \lim_{i_2 \rightarrow \infty} F_{U_{i_2,2}}, F_U = \lim_{i \rightarrow \infty} F_{U_i}$$

como funciones afines definidas casi dondequiera en $\underline{\Omega}_{\mathcal{E}_1}$, $\underline{\Omega}_{\mathcal{E}_2}$, y $\underline{\Omega}_{\mathcal{E}}$ respectivamente.

Por otro lado, por la condición de refinamiento, la sucesión $F_{U_j} \circ \varpi_1$ se corresponde con una subsucesión de la sucesión $F_{U_{i_1}}$ en \mathcal{H}_{ρ^1} entonces

$$F_U^1 \circ \varpi_1 = \lim_{i_1 \rightarrow \infty} F_{U_{i_1,1}} \circ \varpi_1 = \lim_{i \rightarrow \infty} F_{U_i} = F_U.$$

Análogamente se prueba que $F_U^2 \circ \varpi_2 = F_U$. Es decir $(\varpi_a^*)^{-1} \widehat{F}_U \circ \varpi_a^* = \widehat{F}_U^a$, $a = 1, 2$.

Por tanto, $F_U^2 \circ \varpi_2 = F_U^1 \circ \varpi_1$, y

$$\begin{aligned} \mathcal{V} \circ \widehat{F}_U^1 &= (\varpi_2^*)^{-1} \circ \varpi_1^* \circ \widehat{F}_U^1 = (\varpi_2^*)^{-1} \circ \varpi_1^* \circ (\varpi_1^*)^{-1} \widehat{F}_U \circ \varpi_1^* = \\ &= (\varpi_2^*)^{-1} \circ \widehat{F}_U \circ \varpi_1^* = (\varpi_2^*)^{-1} \circ \varpi_2^* \circ \widehat{F}_U^2 \circ (\varpi_2^*)^{-1} \circ \varpi_1^* = \widehat{F}_U^2 \circ \mathcal{V}. \end{aligned}$$

La última afirmación es consecuencia inmediata. □

5.7. Apéndice: El soporte de la gaussiana en el caso $\dim M = 2$

En esta sección es describir con más detalle cual es el soporte, $\Omega_\rho \subset \underline{\Omega}$ de la medida gaussiana descrita en el capítulo anterior en el caso de una superficie M . En este caso $n_i + 1 = N_{2,i}$ es el número de 2-simplejos $(Sd|C_i|^2, h_i) = \{\sigma_i^1, \dots, \sigma_i^{n_i+1}\}$, y el espacio $\partial S_3(Sd|C_i|^2, h_i)$, es de dimensión 1, generado por $\sigma_i^1 + \dots + \sigma_i^{n_i+1}$. Por lo tanto $\dim \Omega_i^0 = n_i$.

Definición 5.27. Dado $\omega^0 \in \underline{\Omega}$, tal que $\sup_i \left\{ \sum_{k=1}^{n_i+1} |\omega_i^0(\sigma_k^i)| \right\} < \infty$, donde $\pi_i(\omega^0) = \omega_i^0$, se define el espacio normado

$$\Omega_{va} := \left\{ \vec{\omega} \in \underline{\Omega}^0 \mid \|\vec{\omega}\| < \infty \right\} \subset \underline{\Omega}^0,$$

donde la **norma de variación** se define como

$$\|\vec{\omega}\| := \sup_i \left\{ \|\vec{\omega}_i\|_i \right\} = \sup_i \left\{ \sum_{k=1}^{n_i+1} \left| F_{\sigma_k^i}(\omega_i) - F_{\sigma_k^i}(\omega_i^0) \right| \right\}$$

Aquí simplificamos la notación escribiendo $\vec{\omega} = \overrightarrow{\omega^0 \omega}$.

Teorema 5.28. Sea ρ la medida gaussiana descrita en 4.13 en el espacio afín $\underline{\Omega}$ centrada en ω^0 . El soporte Ω_ρ de la media gaussiana está contenido en $\Omega_{va} \subset \underline{\Omega}^0$.

Proof of theorem 5.28. De acuerdo a [Gr] para probar que Ω_{va} contiene el soporte de ρ , es necesario probar que la norma $\|\cdot\|$ es medible, es decir para $\varepsilon > 0$ existe una escala, tal que

$$\rho\left(\left\{\vec{\omega} \in \underline{\Omega}^0 \mid \|\pi_i(\vec{\omega})\|_i > \varepsilon\right\}\right) = \rho_i(\{\vec{\omega}_i \in \Omega_i \mid \|\omega_i\|_i > \varepsilon\}) < \varepsilon.$$

Consideremos la densidad de la gaussiana $\rho_i = (\pi_i)_*\rho$, que tiene la forma

$$d\rho_i = \frac{\sqrt{|\mathcal{Q}_i^{-1}|}}{(\sqrt{2\pi})^{n_i}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_i^{-1}(\vec{\omega}, \vec{\omega})\right) d\text{Leb}, \quad n_i = \dim \Omega_i^0. \quad (5.23)$$

donde elegimos una medida de Lebesgue conveniente Leb , en Ω_i^0 de tal manera que

$$\sqrt{|\mathcal{Q}_i^{-1}|} := \frac{d\text{Leb}_{\mathcal{Q}_i^{-1}}}{d\text{Leb}}. \quad (5.24)$$

donde $\text{Leb}_{\mathcal{Q}_i^{-1}}$ es la medida usual de Lebesgue asociada al producto interno $\mathcal{Q}_i^{-1}(\cdot, \cdot)$ en Ω_i^0 es dual al producto interno \mathcal{Q}_i in Ω_i^* .

Entonces tendremos

$$k_i \|\cdot\|'_i \leq \|\cdot\|_{\mathcal{Q}_i} \leq K_i \|\cdot\|'_i, \quad (5.25)$$

donde

$$K_i := a_{\text{máx},i}, \quad k_i := a_{\text{mín},i}$$

con $a_{\text{máx},i}, a_{\text{mín},i}$ son las áreas máximas y mínimas de 2-simplejos en $(\text{Sd}|\Delta_i|^2, \phi_i)$. Por lo tanto tenemos

$$k_i \|\cdot\|_{\mathcal{Q}_i^{-1}} \leq \|\cdot\|_i \leq K_i \|\cdot\|_{\mathcal{Q}_i^{-1}}. \quad (5.26)$$

Luego entonces, para la medida de Lebesgue Leb que le da medida 1 al cubo \mathcal{Q}_i^{-1} -ortogonal con aristas de longitud 1 respecto a la norma $\|\cdot\|_i$, tendremos

$$\sqrt{|\mathcal{Q}_i^{-1}|} \leq k_i^{-n_i},$$

De esta manera tendremos la siguiente cota para la densidad

$$d\rho_i \leq \frac{1}{(\sqrt{2\pi}k_i)^{n_i}} \exp\left(-\frac{\|\vec{\omega}\|_i^2}{2K_i^2}\right) d\text{Leb}. \quad (5.27)$$

Recordemos que Ω_i^0 es un subespacio de codimensión 1 de $\mathbb{R}^{n_i+1} = \mathbf{V}_i$. La norma $\|\cdot\|_i$ en Ω_i^0 es inducida por la norma $\sum_{k=1}^{n_i+1} |F_{\sigma_i^k}(\cdot)|$ en \mathbb{R}^{n_i+1} . El borde de la bola de radio $r > 0$ para esta norma consiste de 2^{n_i+1} simplejos de dimensión n_i y aristas de longitud $\sqrt{2}r$. Por lo tanto la bola de radio $r > 0$ en la norma inducida de Ω_i^0 , tiene un borde que consiste de $2^{n_i} - 2$ simplejos $\sigma_r \subset \Omega_i^0$ de dimensión $n_i - 1$ y aristas de longitud $\sqrt{2}r/2 = r/\sqrt{2}$, con respecto a la norma $\|\cdot\|_i$.

Descomponemos la integral $\rho_i(\{\vec{\omega}_i \in \Omega_i \mid \|\vec{\omega}_i\|_i > \varepsilon\})$ en $2^{n_i} - 2$ en integrales de la forma $\int_{[\varepsilon, \infty) \times \sigma_r} d\rho_i$. Cada uno de los simplejos σ_r tiene medida de Lebesgue Leb ,

$$\frac{(r/\sqrt{2})^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \sqrt{\frac{n_i}{2^{n_i-1}}}.$$

Por lo tanto tenemos,

$$\begin{aligned} & \rho_i(\{\vec{\omega}_i \in \Omega_i^0 \mid \|\vec{\omega}_i\|_i > \varepsilon\}) \leq \\ & \leq (2^{n_i} - 2) \cdot \frac{1}{(\sqrt{2\pi k_i})^{n_i}} \cdot \frac{1}{(n_i - 1)!} \sqrt{\frac{n_i}{2^{n_i-1}}} \cdot \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^{n_i-1} \exp\left(-\frac{r^2}{2K_i^2}\right) dr \\ & \leq \sqrt{2} \left(\frac{K_i}{k_i} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{n_i} \cdot \frac{n_i^{1/2}}{(n_i - 1)!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma(\varepsilon^2/2K_i^2, n_i/2 - 1), \end{aligned}$$

donde

$$\Gamma(x, s) = \int_x^{\infty} \tau^{s-1} e^{-\tau} d\tau \leq x^{s-1} e^{-x}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \rho_i(\vec{\omega}_i \in \Omega_i^0 \mid \|\vec{\omega}_i\|_i > \varepsilon) & \leq \sqrt{2} \left(\frac{K_i}{k_i} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{n_i} \cdot \frac{n_i^{1/2}}{(n_i - 1)!} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon^2}{2K_i^2}\right)^{n_i/2-1} e^{-\varepsilon^2/2K_i^2} \leq \\ & \leq \sqrt{2} K_i^2 \cdot \frac{1}{(k_i \sqrt{\pi})^{n_i}} \cdot \frac{n_i^{1/2}}{(n_i - 1)!} \varepsilon^{n_i-2} e^{-\varepsilon^2/2K_i^2}. \end{aligned}$$

Además, ya que $k_i < 1$, se tiene,

$$\rho_i(\vec{\omega}_i \in \Omega_i^0 \mid \|\vec{\omega}_i\|_i > \varepsilon) \leq \rho_i(\vec{\omega}_i \in \Omega_i^0 \mid \|\vec{\omega}_i\|_i > k_i \varepsilon).$$

Entonces

$$\rho_i(\vec{\omega}_i \in \Omega_i^0 \mid \|\vec{\omega}_i\|_i > \varepsilon) \leq \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}^{n_i/2}} \cdot \frac{n_i^{1/2}}{(n_i - 1)!} \cdot \varepsilon^{n_i-2} \cdot \frac{e^{-\varepsilon^2 k_i^2 / 2K_i^2}}{K_i^2 / k_i^2} \quad (5.28)$$

Notemos que $e^{-\varepsilon^2 k_i^2 / 2K_i^2} / K_i^2 / k_i^2$ permanece acotado, cuando $i \rightarrow \infty$. Por otro lado, mientras $i \rightarrow \infty$ tenemos $n_i \rightarrow \infty$. Resumiendo tendremos que cuando $i \rightarrow \infty$ tenemos

$$\rho_i(\{\vec{\omega}_i \in \Omega_i^0 \mid \|\vec{\omega}_i\|_i > \varepsilon\}) \rightarrow 0.$$

Y esta es la condición requerida al inicio de la prueba. \square

Lema 5.29. Ω_{va} es un espacio normado completo y reflexivo.

Demostración. Completez: Se verifica que $\|\pi_i(\vec{\omega})\|_i \leq \|\vec{\omega}\|$ por lo tanto una sucesión de Cauchy $\vec{\omega}^1, \dots, \vec{\omega}^n, \dots \in \Omega_{va}$, da lugar a una sucesión de Cauchy

$$\pi_i(\vec{\omega}^1), \dots, \pi_i(\vec{\omega}^n), \dots \in \Omega_i^0.$$

Como Ω_i^0 es un espacio vectorial normado de dimensión finita, es completo, por lo tanto, esta última sucesión converge a un $\vec{\omega}_i \in \Omega_i^0$. se verifica que $\pi_{j_i}(\vec{\omega}_j) = \vec{\omega}_i$. Por lo tanto existe $\vec{\omega} \in \Omega_{va}$ tal que $\pi_i(\vec{\omega}) = \vec{\omega}_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{\omega}^n - \vec{\omega}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_i \|\pi_i(\vec{\omega}^n) - \pi_i(\vec{\omega})\| =$$

$$= \sup_i \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_i(\omega^{\vec{n}}) - \pi_i(\vec{\omega}) \right\| = 0$$

Reflexividad: Denotamos Ω'_i como el dual topológico de Ω_i^0 con la norma de variación $\|\cdot\|_i$. Notemos que existen inclusiones naturales $\pi'_i : \Omega'_i \rightarrow \Omega'_{va}$ por lo que se tiene una inclusión lineal

$$\pi' : \varinjlim \Omega'_i \rightarrow \Omega'_{va},$$

El límite directo $\varinjlim \Omega'_i = \varinjlim \Omega'_i$ es además es un espacio vectorial normado con la norma de Ω'_{va} .

Se verifica que π'_i es una isometría con las normas duales consideradas. Entonces al tomar el dual, y usando que Ω_i^0 es reflexivo (es de dimensión finita), se tendrán las proyecciones lineales:

$$\pi''_i : (\Omega'_{va})' \rightarrow \Omega_i^0$$

Las cuales inducen

$$\pi'' : (\Omega'_{va})' \rightarrow \varprojlim \Omega_i^0.$$

Además se tiene la evaluación

$$ev : \Omega_{va} \rightarrow (\Omega'_{va})',$$

la cual verifica los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{va} & \xrightarrow{ev} & (\Omega'_{va})' \\ & \searrow \pi_i & \downarrow \pi'_i \\ & & \Omega_i^0 \end{array}$$

y por lo tanto

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{va} & \xrightarrow{ev} & (\Omega'_{va})' \\ & \searrow & \downarrow \pi'' \\ & & \varprojlim \Omega_i^0 \end{array}$$

donde $\Omega_{va} \hookrightarrow \varprojlim \Omega_i^0$ es la inclusión. Esto verifica que $\pi'' [(\Omega'_{va})'] \subset \varprojlim \Omega_i^0$, está de hecho contenida en Ω_{va} . Como $\varinjlim \Omega'_i \subset \Omega'_{va}$ entonces $(\Omega'_{va})' \subset (\Omega'_{va})^*$. Por lo tanto,

$$(\Omega'_{va})' \subset (\Omega'_i)^* = (\Omega_i^0)^* \simeq \varprojlim \Omega_i^0.$$

Donde Ω'_i el dual topológico es isomorfo como espacio vectorial al dual algebraico Ω_i^* por tratarse de espacios de dimensión finita. Lo mismo ocurre con los límites directos $\varinjlim \Omega'_i \simeq \Omega_i^*$. Al tomar π'' compuesta con el isomorfismo lineal $\varprojlim \Omega_i^0 \rightarrow (\Omega'_i)^*$, tendremos

$$(\Omega'_{va})' \simeq \Omega_{va}.$$

□

Con estos posibles resultados es posible aplicar la teoría de espacios abstractos de Wiener en nuestro contexto, ver la definición de dichos espacios en [St].

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. Resumen de resultados

Estudiamos conexiones en haces principales sobre variedades compactas M en el caso abeliano.

La tesis que sustenta nuestro trabajo es que es posible dar una noción de escala (capítulo 2), de tal manera que un punto de un espacio de configuraciones, Ω_i , a cada escala $(|C_i|, \phi_i; Sd|C_i|, T_i)$, corresponde a la colección de los valores de las integrales de la curvatura a través de la colección de superficies definidas para dicha escala. También llamamos dichas integrales, "flujos" a través de la superficie. Los flujos son por decreto, las observables básicas. Además, al incluir las superficies de una escala C_i en las superficies a escala C_j , se pueden obtener flujos a escalas gruesas, a partir de escalas finas; de esta manera podemos definir submersiones de "engrosamiento" $\pi_{ji} : \Omega_j \rightarrow \Omega_i$, (2.12). A fin de construir una teoría cuántica nos interesa representar las observables asociadas a los flujos F_{U_i} en superficies simpliciales $U_i \subset M$, ver (5.1), y también los flujos F_U , en superficies lineales a pedazos, $U \subset M$. El conjunto que nos permite describir puntos de configuración a todas las posibles escalas es el límite proyectivo

$$\underline{\Omega} = \varprojlim \Omega_i$$

En un espacio topológico de dimensión infinita $\underline{\Omega}$ no es posible definir medidas invariantes de traslación a manera a de las medidas de Lebesgue en \mathbb{R}^n . Por otro lado, las medidas gaussianas en $\underline{\Omega}$, consisten en medidas gaussianas a cada escala en Ω_i compatibles con el engrosamiento $\pi_{j,i}$. Hay medidas gaussianas ρ en $\underline{\Omega}$ que pueden construirse explícitamente a partir de formas de área en la variedad base (ver sección 4.2). Resultan medidas idóneas para representar los flujos de curvatura (ver teorema 5.22).

La terna formada por el espacio de configuraciones, $\underline{\Omega}$, las variables asociadas a los flujos en superficies, F_U , y las medidas gaussianas que permiten su representación, ρ , constituyen una "estructura cinemática" dentro de nuestro trabajo que se enmarca en las teorías cuánticas de campos de gauge abelianos. La representación de los flujos como operadores multiplicativos en el espacio de Hilbert $L^2(\underline{\Omega}, \rho)$ considera la curvatura como una 2-forma distribucional, ver sección 5.1. Dichas representaciones no dependen de la elección de escalas.

Mientras que en la cuantización de lazos se considera un punto del espacio de configuración como una colección de holonomías, para nosotros, consiste en flujos de curvatura a través de

superficies. A diferencia de la cuantización a la lazos y de las teorías de gauge en la red, en nuestro contexto no se pierde información acerca de la topología del haz en cuestión. Por ejemplo en el espacio de configuraciones $\underline{\Omega}$ está bien definida la noción de clase de Euler del haz, mientras que en $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}_\star}$ no es posible definirla.

6.2. Problemas no resueltos

Caso no abeliano Se podrían explorar las dificultades para construir el formalismo que hicimos para $G = U(1)$ al caso de un grupo no abeliano y obtener representaciones de la curvatura. En este caso podemos considerar también el espacio de conexiones C_i -planas $\text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, G)$. Buscaríamos un espacio afín de configuraciones Ω_i obtenido a partir de una potencia del álgebra de Lie y de restricciones dadas por las identidades de Bianchi. Se puede exhibir también una aplicación $\Omega_i \rightarrow \text{hom}(\mathcal{P}_{C_i, \star}, G)$.

Estados no gaussianos Nos preguntamos si es posible describir otras medidas de probabilidad en $\underline{\Omega}$ que no sean gaussianas, que tengan las mismas propiedades que necesitamos para representar la curvatura y que correspondan a modelos físicos. Un ejemplo sencillo son las medidas de Dirac.

Bibliografía

- [AB] C. ALIPRANTIS, K. BORDER, *Infinite Dimensional Analysis*, Studies in Economic Theory 4, Springer-Verlag, 1994
- [AK] L. AMBROSI, B. KIRCHEIN, *Currents in metric spaces*. preprint ESI **849** (2000)
- [Ar] V. ARNOLD, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, GTM Springer, 1998.
- [AL] A. ASHTEKAR, J. LEWANDOWSKI, *Projective techniques and functional integration for gauge theories*, J. Math. Phys. **36**, 2170 (1995)
- [ALMMT] ASHTEKAR, A., LEWANDOWSKI J., MAROLF, D., MOURAO, J., THIEMANN, T. *SU(N) Quantum Yang–Mills theory in two dimensions: A complete solution* J. Math. Phys. **38**, 5453 (1997)
- [AMMT] ASHTEKAR, A., MAROLF, D., MOURAO, J., THIEMANN, T. *Constructing Hamiltonian quantum theories from path integrals in a diffeomorphism-invariant context*, Class. Quantum Grav. **17** (2000) 4919–4940
- [Ba] BAEZ, J. *Spin Network States in Gauge Theory*, arXiv:gr-qc/9411007
- [BSZ] BAEZ, J., SEGAL, I., ZHOU, A. *Introduction to Algebraic and Constructive Quantum Field Theory*. Princeton Univ. Press, 1992
- [Ba1] BARRET, J. *Holonomy and Gravity*, Imperial TP/84-85/18 (1985) 1-8
- [Ba2] BARRET, J. *Holonomy and path structures in GR an YM theory*, Int. J. Theor. Phys. **30** no. 9 (1990) 1171-1215
- [Ba3] BARRET, J. *The geometry of classical Regge calculus*, Class. Quant. Grav. **4** (1987) 1565-1576
- [Be] BECK, A. *et. al. Probability in Banach spaces*, LNM **526** Springer-Verlag, 1975
- [Bi] BILINGSLEY, P. *Convergence of Probability Measures*. John Wiley Sons. 1999
- [Bl] BLEECKER, D. *Gauge Theory and Variational Principles*. Addison-Wesley GAPA series A, 1981
- [BK] BUDZYNSKI, R., KONDRACKI, W. *On the existence of the functional measure for 2D Yang-Mills theory*, Banach Center Publ. **39** (1997) 225-229

- [BY] BOISSINAT, J-D., YVINEC, M. *Algorithmic Geometry*, Cambridge Univ. Press, 2005.
- [CD] CHOQUET- BRUHAT, DE-WITT MORETTE, C. *Analysis, Manifolds and Physics. Part I: Basics*. North-Holland, Elsevier, 1977
- [CRSS] COMBE, PH., RODRÍGUEZ, S., SIRUGUE, M., SIRUGUE-COLLIN, M. *High Temperature Behaviour of Quantum Mechanical Thermal Function*, Publ RIMS Kyoto Univ., **19** (1983) 355-365
- [Cr] CREUTZ, M. *Quarks, gluons and lattices*. Cambridge Mon. on Math. Phys. 1999
- [Da] DAO-XING XIA *Measure and Integration Theory on Infinite- Dimensional Spaces*. Academic Press, 1972
- [DFL] DUDLEY, R., FELDMAN, J., LE CAM, L. *On seminorms and probabilities, and abstract Wiener spaces*, Ann. of Math. (2) **93** (1971) 390-408
- [DLM] DESBRUN, M., LEOK M., MARSDEN, J. *Discrete Poincaré lemma*, Applied Numerical Mathematics **53** (2005) 231 -248
- [DNF] DUBROVIN, B., NOVIKOV, S., FOMENKO, A. *Geometría Moderna. Métodos de la Teoría de Homologías*, MIR, 1987.
- [Dr1] DRIVER, B. K. *Convergence of the four dimensional $U(1)$ lattice gauge theory to its continuum limit*, Ph. D. Thesis Cornell University, 1986
- [Dr2] DRIVER, B. K. *Convergence of the $U(1)_4$ Lattice Gauge Theory to its Continuum Limit*, Commun. Math. Phys. **110** (1978) 479-501
- [Dr3] DRIVER, B. K. *Analysis of Wiener Measure on path and loop groups*, Contemp. Math. A.M.S. **317** (2003) 57-85
- [DS] DIEUDONNE, J., SCHWARTZ, L. *La dualité dans les espaces F et LF* , Ann. de l'Inst. Fourier **1** (1949) 61-101
- [Du] DUDLEY, R. *Random linear functionals*, Trans. Amer. Math. Soc. **13** (1969) 1-24
- [DZ] DÍAZ - MARÍN, H, ZAPATA, J.A. *Curvature function and coarse graining*, J. Math. Phys. **51** no. 12 (2010) 122307 20 pp.
- [DZ2] DÍAZ - MARÍN, H, ZAPATA, J.A. *Effective theories of connections and curvature: abelian case*, arXiv:1101.3829v1 [hep-th]
- [Fa] FALCONER, K. *Fractal Geometry*, 2nd ed. Wiley, 2003
- [Fe] FEDERER, *Geometric Measure Theory*, Springer, 1960
- [FK] FARKAS, H.M., KRA, I. *Riemann Surfaces*. Springer, 1980
- [Fl1] FLEISCHHACK, C. *Parallel transports in webs*, Math. Nachr. **263/64** (2004) 83-102

- [Fl2] FLEISCHHACK, C. *Stratification of the generalized Gauge orbit space*, Comm. Math. Phys. **214** no. 3 (2000), 607-649
- [Fr] FREIDEL, L., KRASNOV, K. *Spin-Foam Models and Classical Action Principle* arXiv:hep-th/9807092
- [dFdM] DE FARIA, E., DE MELO, W. *Mathematical Aspects of Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 2010.
- [Ga] GARCÍA ÁLVAREZ, M. A. *Introducción a la teoría de la probabilidad. Segundo Curso*. F.C.E. México, 2000
- [Ge] GETOOR, R. *On characteristic functions of Banach space valued random variables*, Pacific J. Math. **7** (1957) 885-896
- [Gl] GLOCKNER, H. *Direct limit Lie groups and manifolds*, J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ) **43-1** (2003) 1–26
- [GJ] GLIMM, J., JAFFE, A. *Quantum Physics*. 2a ed. Springer-Verlag, 1987
- [Gr] GROSS, L. *Convergence of $U(1)$ lattice gauge theory to its continuum limit*, Comm. Math. Phys. **92** (1983) 137-162
- [Gr2] GROSS, L. *Measurable functions on Hilbert space*, Trans. Amer. Math. Soc. **105** (1962), 372-390
- [GS] GUSTAFSON, S., SIGAL, I. *Mathematical Concepts of Quantum Mechanics*, Springer-Verlag 2003
- [Ha] HATCHER, A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002
- [HL] HIRSCH, F., LACOMBE, G. *Elements of Functional Analysis*. GTM 192, Springer-Verlag, 1999
- [KS] KIRBY, R., SIEBENMANN, L. *Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations*, Annals of Math. Studies Princeton University press, 1977
- [Ki] KIRILLOV, A. *Elements of the Theory of Representations*. Springer, 1976
- [K] KING, *The $U(1)$ Higgs Model I. The Continuum Limit*, Commun. Math. Phys. **102** (1986) 649-677
- [KF] KOLMOGOROV, A., FOMÍN, S. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, MIR, 1975
- [Ko] KÖTE, G. *Topological Vector Spaces I*, Springer Grund. Math. Wiss. **159**, 1983.
- [KP] KRANTZ, S., PARKS, H. *Geometric Integration Theory*, Cornerstones. Birkhäuser Boston, 2008
- [Ku] KUCUK, A. *The fundamental group of an oriented surface of genus n with k boundary surfaces*, Applied Mathematics and Computation **160** (2005) 141–145

- [LOST] LEWANDOWSKI, ET. AL. *Uniqueness of diffeomorphism invariant states on holonomy-flux algebras*, arXiv:gr-qc/0504147
- [La] LANDSMAN, N. *Mathematical Topics Between Classical and Quantum Mechanics*. SMM, Springer, 1998
- [Le] LEWANDOWSKI, J. *Group loops and holonomy maps*, Class. Quantum Grav. **10** (1993) 879-904
- [Li] LICKORISH, W. *Piecewise manifolds and CERF theory*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, **2** (1997) 375-387
- [LL] LANDAU, L., LIFSHITZ, E. *Curso abreviado de Física Teórica. vol.1 Mecánica y Electrodinámica*, MIR, 2a. ed., 1979
- [Ma] MARSDEN, J. *Lectures on Mechanics*. London Math. Soc. LNS **174** Cambridge Univ. Press, 1993
- [Md] MAUDER, C. *Algebraic Topology*, Dover, 1996
- [Mc] MCINTOSH, A. *Representation of Bilinear Forms in Hilbert Space by Linear Operators*, Transactions of the AMS, **131**, No. 2 (1968) 365-377
- [Mi] MILNOR, J. *Construction of universal bundles I*, Ann. of Math. no. 2 **63** (1956) 272-284
- [MM] MONTVAY, I., MUNSTER, G. *Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge Monogr. Math. Phys., 1994
- [MM1] MAROLF, D., MOURAO, J. *On the support of the Ashtekar-Lewandowski measure*, arXiv:hep-th/9403112
- [MMZ] MARTÍNEZ, J., MENESES, C., ZAPATA, J. A. *Geometry of C-flat connections, coarse graining and the continuum limit*, J. Math. Phys. **46** (2005) no. 10, 102301 16 pp
- [Mo] MOURIER, E. *Éléments aléatoires dans un espace de Banach*, Ann. I.H.P. **13** 3 (1953) 161-244
- [Moo] MOORE, J. *Lectures on Seiberg-Witten Invariants*, Springer LNM **1629**, 1996
- [MOWZ] MANRIQUEZ, E., OECKL, R., WEBER, A., ZAPATA, J. *Loop quantization as a continuum limit*. Class. Quantum Grav. **23** (2006), no. 10, 3393-3403
- [N] NABER, G. *Topology, Geometry and gauge fields*. T.A.M. **25** Springer, 1997
- [ORS] ORITI, D., ROVELLI, C., SPEZIALE, S. *Spinfoam 2D quantum gravity and discrete bundles*, Class. Quantum Grav. **22** (2005) 85-108
- [Pe] PETRUNIN, A. *Polyhedral approximations of Riemannian manifolds*, Turk. J. Math. **27** (2003) 173-187
- [Ru] RUDIN, W. *Functional analysis*. McGraw-Hill, 1973

- [Ru2] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*, W. McGraw-Hill, 1970
- [Rs] RUSHING, B. *Topological embeddings*. Academic Press, 1973
- [Sa] SATO, H. *Banach support of a probability measure in a locally convex space*, en [Be]
- [Sc] SCHAEFER, H. *Topological vector spaces*. 2a. ed. GTM 3, Springer-Verlag, 1999
- [SO] SATO, H., OKAZAKI, Y. *Separabilities of a Gaussian Radón measure*, Ann. Inst. H. P. 3 **9** (1975) 287-298
- [Sk] A.V. SKOROKHOD. *Basic Principles and Applications of Probability Theory*. Springer-Verlag, 2005
- [So] SORKIN, R. *The electromagnetic field on a simplicial net*, J. Math Phys., **16** no. 12 (1975) 2432-2440
- [Sp] SPIVAK, M. *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. II, 3a. ed., Publish or Perish, 1999
- [St] STROOCK, D. *Probability Theory* Cambridge, 1995
- [Su] SUDAKOV, V. *Gaussian measures. A brief survey*. Notas del "Workshop di Teoria della Misura e Analisi Reale", 1993
- [Tha] THATER, J. *Operadores auto-adjuntos e equações diferenciais parciais*, CNPq Projeto Euclides, 1987
- [Th] THIEMANN, T. *Introduction to modern canonical quantum general relativity*. [arXiv:gr-qc/0110034](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0110034).
- [Um] UMEMURA, Y. *Measures on infinite dimensional vector spaces*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A **1** (1964) 1-47
- [Va] VAKHANIA, N. *The topological support of gaussian measure in Banach space*, Nagoya Math. J. **57** (1975) 59-63
- [Va1] VARADARAJAN, M. *Photons from quantized electric flux representations*, Phys. Rev D, **64** 104003(9) 2001
- [Va2] VARADARAJAN, M. *Fock representations from $U(1)$ holonomy algebras*, Phys. Rev. D **61** 104001(13) 2000
- [Ve1] VELHINHO, J. *The Quantum configuration Space of Loop Quantum Cosmology*, [arXiv: \[gr-qc\] 0704.2397v1](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0704.2397v1)
- [Ve2] VELHINHO, J. *Invariance properties of induced Fock measures for $U(1)$ holonomies*, [arXiv:math-ph/0107002](https://arxiv.org/abs/math-ph/0107002)
- [Wi] WILSON, K. *The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem*, Rev. Modern Physics **47** no. 4 (1975) 773-840

- [Ya] YAMASAKI, Y. *Measures on infinite dimensional spaces*, series in pure math. **5** World Scientific, 1985
- [Ze] ZEIDLER, *Quantum Field Theory I, II*. Springer, 2007