



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO Y UNIVERSIDAD
NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**



**Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UMSNH-UNAM**

Cúspides de 3-variedades hiperbólicas que son un círculo de toros ponchados

T E S I S

Que para obtener el grado de:
DOCTORA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Presenta:
YESENIA VILICAÑA MOLINA

Director de Tesis:
Dr. Jorge Luis López López

Morelia, Mich., diciembre de 2020

Cúspides de 3-variedades hiperbólicas que son un círculo de toros ponchados

Yesenia Villicaña Molina

Diciembre, 2020

Índice general

1. Resumen	1
2. Abstract	3
Agradecimientos	5
Introducción	7
Mi problema	8
Contenido	12
Notación	15
3. Preliminares	19
3.1. Cardinalidad de 3-variedades hiperbólicas no compactas de volumen finito	19
3.2. Triangulación de Farey	22
3.3. Caracterización de fibraciones M_φ hiperbólicas	24
3.4. Grupo fundamental de M_φ y de su toro cuspidal	28
3.4.1. Grupo fundamental de M_φ	28
3.4.2. Grupo fundamental del toro cuspidal	29
3.5. Representación en términos de trazas	31
3.6. Cuadriláteros plegados y tetraedros hiperbólicos	33
4. Transformaciones de Möbius: Cálculo elemental de toros cuspidales	39
4.1. Construcción de una descomposición por tetraedros de M_φ	39
4.1.1. Topología	39
4.1.2. Geometría	40
4.1.3. Características topológicas (de incidencia)	41
4.1.4. Características geométricas	42
4.2. Reescritura de mi problema y algunos ejemplos	44
4.3. Un algoritmo elemental con transformaciones de Möbius	53

4.4.	Avances en el caso particular: $L^M R^N$	58
4.5.	Puntos límite de toros cuspidales	73
4.5.1.	Cálculo de algunos puntos límite	75
5.	Trazas de representaciones: Cálculo de límites de toros cuspidales	83
5.1.	Usando sólo el grupo fundamental: Cálculo de toros cuspidales	83
5.2.	Usando trazas: Cálculo de toros cuspidales	84
5.3.	Avances en el caso particular: $L^M R^N$	99
5.4.	Puntos límite de toros cuspidales	103
A.	Matlab: Presentación de programas.	113
A.1.	Toro cuspidal triangulado asociado a palabras $L^M R^N$	113
A.2.	Puntos límite de toros cuspidales	115

Capítulo 1

Resumen

Toda 3-variedad hiperbólica que es un círculo de toros ponchados, se puede ver como

$$M_\varphi := \frac{T^* \times [0, 1]}{(x, 0) \sim (\varphi(x), 1)},$$

donde T^* denota al toro ponchado y φ es un homeomorfismo conjugado a una palabra que es un producto finito de matrices

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad L := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Todas estas 3-variedades son unicuspidales (tienen exactamente una cúspide), y toda cúspide está determinada geoméricamente por la clase de homotecia de un toro plano. En esta tesis estudiamos dichas clases de homotecia, a las cuales llamamos *toros cuspidales*.

Para esto, desarrollamos dos algoritmos para obtener ciertas ecuaciones que nos permiten conocer los toros cuspidales de dichas variedades a partir de sus palabras asociadas. Uno de ellos es muy elemental pues sólo usa conceptos básicos de geometría euclidiana. El otro algoritmo usa técnicas conocidas de trazas del grupo kleiniano Γ , donde \mathbb{H}^3/Γ es la variedad en cuestión. para ambos casos, obtenemos las ecuaciones explícitas para las palabras de la forma $L^M R^N$. Además, en esta tesis también estudiamos los puntos límite de toros cuspidales asociados a estas últimas palabras: $L^M R^N$.

Todo lo anterior lo implementamos en Matlab.

Palabras clave: Geometría hiperbólica, mapping torus, móduli de toros planos, grupo fundamental, campos de trazas,

Capítulo 2

Abstract

Every hyperbolic 3-manifold that is a circle of punctured torus, looks like

$$M_\varphi := \frac{T^* \times [0, 1]}{(x, 0) \sim (\varphi(x), 1)},$$

where T^* is the punctured torus and φ is conjugated to a word: a finite product of matrices

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad L := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

All these 3-manifolds are unicuspidal (they have exactly one cusp), and every cusp is geometrically determined by the homothety class of a flat torus. In this thesis we study these homothety classes, which we call *cuspidal tori*.

For this, we develop two algorithms to obtain certain equations that allow us to know the cuspidal tori of these manifolds from their associated words. One of them is very elemental because it only uses basic concepts of euclidean geometry. The other algorithm uses known trace techniques of the Kleinian group Γ , where \mathbb{H}^3/Γ is the manifold in question. For both cases, we obtain the explicit equations for the words of the form $L^M R^N$. Furthermore, in this thesis we also study the limit points of cuspidal tori associated with these last words: $L^M R^N$.

We implement everything in Matlab.

Agradecimientos

No creí que escribir esta página me llenara tanto de nostalgia y felicidad al mismo tiempo. El saber que estoy escribiendo mis agradecimientos, y que por ende, he concluido mi tesis, es algo que me llena de sentimientos de todo tipo, pero especialmente de felicidad. Aunque lo disfruté muchísimo, debo reconocer que el esfuerzo requerido para obtener el grado de Doctora en Ciencias Matemáticas es enorme. En este documento está plasmado todo mi trabajo y esfuerzo desde el 2016, y como es indispensable en cualquier trabajo duro, siempre hay mucho qué agradecer a todas esas personas que fueron parte del trayecto.

Sin lugar a dudas comienzo agradeciendo a mi asesor, Jorge Luis López López, quien fue mi guía en todo momento. Primeramente, le agradezco por aceptar asesorarme en este proyecto de doctorado, ya que sé que no fue una decisión fácil, y en verdad la valoro mucho. Es a él, a quien no sólo le debo su tiempo brindado durante el doctorado, sino durante todo mi proceso como matemática. Es él quien me enseñó las cosas que más me gustan de las matemáticas, las que me atraparon y me siguen atrapando. ¡Muchas gracias!

También, quiero agradecer a quien consideré todo el tiempo como mi coasesor, Alberto Verjovsky Solá. No es de sorprender, que siempre es muy emocionante escucharlo hablar de cualquier cosa de matemáticas. Así pues, le agradezco por todo su tiempo brindado (especialmente en mi estancia en Cuernavaca), por aceptar ser mi sinodal, y por estar abierto a discutir matemáticas en cualquier momento con esa carisma que lo caracteriza, y que hace amena cualquier situación, por riguroso que sea su razonamiento. Agregando a esto último, cabe mencionar que también estoy agradecida con Francisco González Acuña, quien junto con Alberto Verjovsky, nunca me negaron tiempo para platicar.

Continúo agradeciendo al resto de mis sinodales. A Juan Ahtziri González Lemus, que además de ser mi revisor, me gustaría agradecerle especialmente por sus clases que siempre fueron motivadoras y enriquecedoras. A Jesús Hernández Hernández, por todos sus comentarios en la tesis, y por todas sus recomendaciones y apoyo, no sólo en matemáticas, sino en el entorno social y burocrático que está implicado. A Mario Eudave Muñoz, por aceptar ser mi sinodal en esta tesis sin conocerme mucho, por leer mi tesis y por sus acertadas observaciones que sin duda me ayudaron a mejorar este trabajo.

También, agradezco a mi comité sinodal conformado por Elmar Wagner y Ferrán

Valdez, y al resto de mis profesores que me guiaron de alguna u otra forma por este bonito camino. En particular, y además de los antes mencionados, siempre estaré agradecida con Javier Muñoz Beltrán, María Luisa Pérez Seguí, Fernando Hernández Hernández, Pierre Michel Bayard y Jesús Muciño.

Gracias a Martha, María y Gasde por apoyarme en el sentido laboral, abriéndome puertas en la docencia y la divulgación, a la par de mi investigación en Matemáticas.

Gracias a mi familia por todo el apoyo que me han brindado sin importar las circunstancias. A mi mamá (mi Raquelita) y a mis hermanos (Mike, Esme y Edgar) por estar unidos, por ser un ejemplo a seguir y siempre motivarme. A mi papá, quien estoy segura de que está muy orgulloso de mí desde el cielo, y quien siempre será mi ángel a quien le dedique cada esfuerzo. A mi sobrina Nathalie y a mi ahijado Adrián, por ser niños llenos de amor, que siempre sacaron una sonrisa de mí, sin importar lo estresada que estaba. A mis cuñados (Mar y Talí), por ser parte de nuestra familia y ayudar a conservarla unida. A mi esposo (mi Lalito), por ser mi equipo, mi persona favorita, por aguantarme en mis momentos de estrés, por levantarme cuando quiero tirar la toalla. Simplemente, gracias por darme tu amor... ¡Te amo! Y también, gracias a mi nueva familia: a mis suegros (Lolita y Eduardo) y mis cuñadas (Mariana y Andrea). Gracias por siempre estar al pendiente de ambos.

Gracias también a todos mis amigos, quienes siempre supieron cómo sacarme una risa, por desestresarme, por divertirme, por escucharme... por estar. Gracias a mis amigos y amigas de antaño desde la secundaria, prepa y mis mil trabajos de adolescente, gracias por despejarme y sacarme de mi entorno matemático de vez en cuando. A mis queridos amigos y amigas del *cubo* que siempre agradeceré haber conocido, no sólo por los grandes amigos que se convirtieron, sino por jalarme con ustedes en su ñoñez. A todos ustedes, los admiro mucho como matemáticos, físicos y computólogos, y siempre han sido y serán una inspiración para mí. Gracias a mis colombianitas cariñosas con quienes pasé grandes momentos y buenos viajes académicos. Gracias a todos mis compis del CCM y de la reta de básquet, con quienes no sólo disfruté de buenas retas, sino de buenos viajes, buenas pláticas en el caldito, buenos chocolates en las poscáscaras y buenísimos mezcales siempre que se podía. A todos y todas ustedes, ¡mil gracias!

Finalmente, gracias a los administrativos y a todos los que forman parte del Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas (PCCM), a mis universidades UMSNH y UNAM por todo el apoyo que me brindaron. Gracias también al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca otorgada durante todos mis estudios de posgrado. Así mismo, esta investigación fue realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IA104620. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Introducción

*En la variedad está el gusto...
pero es su Geometría la que le da el sabor.*

Podemos pensar que una 3-variedad es la generalización de una curva y una superficie, a dimensión tres. Sin embargo, notemos que cuando pensamos en una curva, en realidad pensamos en una curva inmersa en un espacio de dimensión dos, es decir, pareciera que necesitamos dos dimensiones para imaginar un objeto de dimensión uno. Luego, cuando pensamos en superficies, estamos acostumbrados a pensarlas inmersas en un espacio de dimensión 3, es decir, pareciera que necesitamos tres dimensiones para imaginarnos un objeto de dimensión dos. Entonces, cuando pensamos en una 3-variedad, parecería que necesitamos de un espacio de dimensión cuatro, para poder imaginar estos objetos de dimensión tres... y vivimos en un espacio de dimensión tres. Esa es la primer razón que se nos ocurre, para notar que el estudio de 3-variedades es un área compleja de las Matemáticas. En realidad, aunque no podemos visualizar las 3-variedades de una manera tan natural para el humano, como visualizamos las curvas y superficies, sí podemos visualizarlas como el pegado abstracto de ciertos objetos tridimensionales, igual que como podemos pensar a un cilindro como un cuadrado, donde se pegan dos de sus lados opuestos; o como podemos pensar a una dona como un cuadrado donde se pegan ambas parejas de lados opuestos (ver cuadrado de la Figura 2.1).

Más aún, es en dimensión tres donde comienzan a haber ejemplos que hacen explotar tu cabeza y darte cuenta que tu intuición ganada en dimensión uno y dos a lo largo de la vida, no funciona siempre para dimensión tres. Es ahí donde es peligroso comenzar a estudiar 3-variedades, porque puedes terminar atrapado en ello. Más aún, cuando comienzas a estudiar su geometría, pareciera que es más fácil que en otras dimensiones (gracias al Teorema de Rigidez de Mostow), pero pronto te das cuenta que sigue siendo complejo.

Sin embargo, el hecho de ser complicadas y tener ejemplos extraños, las hace ser más interesantes. Al menos yo encuentro un gran reto en entender dichos objetos. Aunque a veces es complicado (como todo lo bueno) y quizás hasta hace sufrir un poco, se encuentra una gran satisfacción cuando logras entenderlas. Es por ello que en esta tesis acepté el reto de mi asesor, que aunque era un poco ambicioso, y no logré resolverlo por completo en

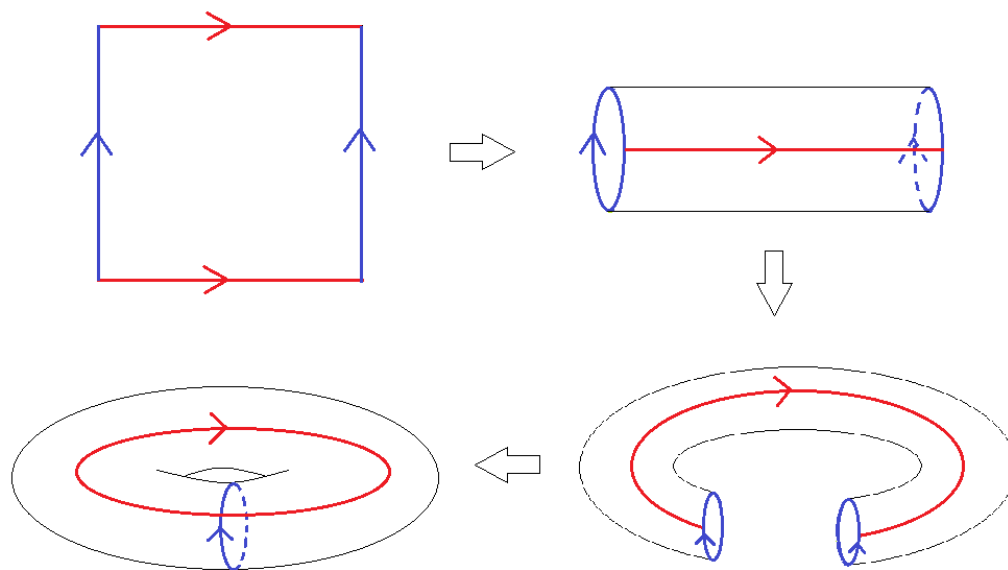


Figura 2.1

estos cuatro años, es para mí un gran gusto, contarles lo que sí pude entender y descifrar de la geometría de una familia notable de 3-variedades.

Mi problema

Es bien conocido que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ actúa en \mathbb{C} mediante transformaciones de Möbius. Sin embargo, resulta que esta acción se puede extender a $\mathbb{H}^3 := \{(z, t) : z \in \mathbb{C}, t > 0\}$, mediante

$$(z, t) \mapsto \begin{cases} \left(-\frac{\overline{z + d/c}}{c^2(|z + d/c|^2 + t^2)} + \frac{a}{c}, \frac{t}{|c|^2(|z + d/c|^2 + t^2)} \right) & \text{cuando } c \neq 0, \\ \left(\frac{a}{d}(z + b/a), \left| \frac{a}{d} \right| t \right) & \text{cuando } c = 0. \end{cases},$$

donde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}).$$

Decimos que M es una 3-variedad hiperbólica si se puede representar como un cociente $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$, donde Γ es un grupo kleiniano (un subgrupo discreto de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ sin elementos elípticos, es decir, sin transformaciones de Möbius con dos puntos fijos en los

cuales la derivada tiene norma unitaria). En particular, las variedades hiperbólicas con las que trabajamos son orientables.

Resulta que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ actúa por isometrías de una única (salvo un múltiplo escalar global) métrica en \mathbb{H}^3 , que se puede expresar como

$$ds^2 = \frac{|dz|^2 + dt^2}{t^2}. \quad (2.2)$$

Por lo tanto, una 3-variedad hiperbólica $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ hereda una geometría de \mathbb{H}^3 .

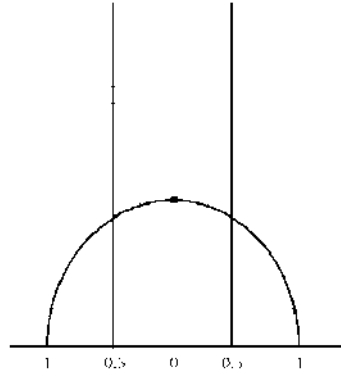
Por otro lado, existe una constante universal μ (conocida como la *constante de Margulis*) tal que para cualquier punto x en cualquier 3-variedad hiperbólica orientable M , se tiene que el conjunto de lazos basados en x , cuya longitud es menor que 2μ , generan en $\pi_1(M, x)$ un subgrupo abeliano de rango a lo más dos. En otras palabras, cada ε -bola (con $\varepsilon < \mu$) en M , es isométrica a una ε -bola en \mathbb{H}^3 ó se encuentra en una subvariedad hiperbólica con grupo fundamental \mathbb{Z} ó \mathbb{Z}^2 (ver [20] o secciones 4.1 y 4.5 de [34]). Dicha subvariedad consta de todos los puntos que poseen un lazo homotópicamente no nulo de longitud menor que 2μ , y es llamada *parte delgada de M* . Las componentes conexas de la parte delgada de M sólo pueden ser de tres tipos:

Vecindades tubulares de geodésicas pequeñas: Su grupo fundamental está generado por un elemento *loxodrómico*, es decir, un elemento conjugado a la transformación de Möbius $A(z) = \lambda^2 z$, con $|\lambda| > 1$. En esta situación, la geodésica es $\{(0, t) \in \mathbb{H}^3\}/\langle A \rangle$, y la componente conexa de la variedad delgada es de la forma $\{(z, t) \in \mathbb{H}^3 : |z| < ct\}/\langle A \rangle$, para algún $c > 0$, y es homeomorfa a un toro sólido.

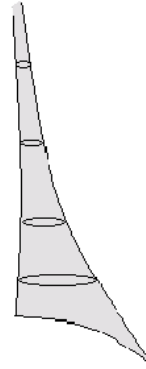
Cúspides de rango 1: Su grupo fundamental está generado por un elemento *parabólico*, es decir, un elemento conjugado a la transformación de Möbius $A(z) = z + 1$. En esta situación, la componente conexa de la variedad delgada es $\{(z, t) \in \mathbb{H}^3 \mid t > c\}/\langle A \rangle$, para algún $c > 0$, y es homeomorfa a $C \times \mathbb{R}$, donde C es cilindro infinito. Estos objetos tienen volumen infinito.

Cúspides de rango 2: Su grupo fundamental es conjugado al grupo generado por dos traslaciones en direcciones linealmente independientes, al cual denotamos como $\langle A, B \rangle$. En esta situación, la componente conexa de la variedad delgada es $\{(z, t) \in \mathbb{H}^3 \mid t > c\}/\langle A, B \rangle$, para algún $c > 0$, y es homeomorfa a $T \times \mathbb{R}$, donde T es un toro. Estos objetos tienen volumen finito.

Más aún, resulta que cualquier variedad hiperbólica se puede descomponer en su parte delgada y su complemento, llamado *parte gruesa de M* . Cuando la variedad es no compacta de volumen finito, su parte gruesa es una componente compacta con frontera, cuya frontera es unión ajena y finita de toros, y las componentes conexas de su parte delgada



(a) Región fundamental de la acción de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ en \mathbb{H}^2 .



(b) Cociente de la región fundamental de la acción de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ en \mathbb{H}^2 .

Figura 2.2

sólo pueden ser vecindades tubulares de geodésicas pequeñas o cúspides de rango 2.

Definición 1: Dada una cúspide de rango dos $\{(z, t) \in \mathbb{H}^3 \mid t > c\} / \langle A, B \rangle$ y $c' > c$, el toro $\{(z, c') \in \mathbb{H}^3\} / \langle A, B \rangle$ hereda de (2.2) una métrica plana $g_{c'}$. Además, para cualquier otra $c'' > c$, existe $\alpha > 0$ tal que $g_{c''} = \alpha g_{c'}$; es decir, los toros son homotéticos. A esta clase de homotecia de toros planos la llamamos *toro cuspidal* de la cúspide $\{(z, t) \in \mathbb{H}^3 \mid t > c\} / \langle A, B \rangle$. Dicho concepto es central en esta tesis.

El espacio de clases de homotecia de toros planos coincide con el espacio de retículas módulo rotación y dilatación, el cual resulta ser $\mathbb{H}^2 / \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$, donde $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ actúa en $\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ por transformaciones de Möbius. Una región fundamental de $\mathbb{H}^2 / \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ se puede ver en la Figura 2.2(a), en donde cada punto z se corresponde con la retícula $\langle 1, z \rangle$ (ver sección 2.3 de [2]).

Puesto que hay una cantidad numerable de 3-variedades hiperbólicas no compactas de volumen finito (como justificaremos más adelante en la Sección 3.1), y cada una de ellas tiene una cantidad finita de toros cuspidales, hay a lo más una cantidad numerable de toros cuspidales. Es decir, no toda clase de homotecia de toro plano es toro cuspidal. Por lo tanto, es interesante preguntarse cuáles son los toros cuspidales. Más aún, tiene sentido estudiar lo siguiente.

Problema General: *Estudiar los toros cuspidales de 3-variedades hiperbólicas con una sólo cúspide.*

En esta tesis, estudiaremos los toros cuspidales de cierta familia de 3-variedades que poseen una estructura adicional.

Mi Problema: *Estudiar los toros cuspidales de 3-variedades hiperbólicas que son un círculo de toros ponchados.*

Algunos avances que a mi juicio son significativos y que tienen que ver con problemas muy relacionados, son los siguientes:

- En [26], Nimershiem prueba que si un toro admite una descomposición por triángulos equiláteros, entonces su clase de homotecia es cuspidal. Procede de la siguiente forma: dado un toro descompuesto en triángulos equiláteros, construye una variedad hiperbólica con más de una cúspide, donde una de ellas es la clase de homotecia de dicho toro.
- En [27], Nimershiem estudia el problema en su versión topológica, pero en una dimensión mayor y con varias cúspides; prueba que toda 3-variedad plana admite una métrica plana cuya clase de homotecia aparece como una cúspide de una 4-variedad hiperbólica con varias cúspides.
- En [33], Reid y Long generalizan el resultado (topológico y multicuspidal) de [27] a cualquier dimensión.
- En [22], McReynolds prueba que las clases de homotecia de ciertas n -variedades planas construidas aritméticamente aparecen como cúspides de alguna $(n + 1)$ -variedad hiperbólica con más de una cúspide.
- En [17], Kolpakov y Martelli demuestran la existencia de una 4-variedad hiperbólica con una sola cúspide.
- El principal resultado de Guéritaud en [11], es la existencia de estructura hiperbólica en haces de toros ponchados y complementos de enlaces de dos puentes. En particular, él realiza un ejemplo numérico de toros cuspidales que sí influyó en nuestro trabajo. Sin embargo, nosotros presentamos un enfoque distinto, con el que logramos obtener sus ecuaciones para un caso un poco más general, el cual más adelante compararemos.
- Muy recientemente, Purcell y Dang probaron que el conjunto de toros que aparecen como cúspide de 3-variedades hiperbólicas con una sola cúspide, es denso en el espacio móduli de toros (ver [32]). Esto lo hacen analizando una familia particular de 3-variedades distinta a la que estudiaremos en este trabajo.

- En el último año de mi doctorado, nos dimos cuenta de la existencia de un documento (sin publicar) escrito por Helling muy relacionado con nuestro trabajo. Él trabaja con una familia particular de la familia de variedades que nosotros trabajamos. Aunque su trabajo no está centrado en obtener toros cuspidales, obtiene resultados muy parecidos a los nuestros, para ese caso particular. Dicho documento [13] sí influyó en el nuestro, aunque también presentamos enfoques de estudio distintos.

Contenido

- En el primer capítulo se encuentran algunos preliminares para los últimos dos capítulos. La mayoría de ellos son hechos conocidos, y sin embargo, no conocemos en la literatura ninguna prueba de algunos de ellos (o conocemos pruebas pero sin muchos detalles importantes), por lo que decidimos hacerlas. Para ser puntuales, las demostraciones originales de este capítulo, estarán indicadas con (*). Por otro lado, me gustaría resaltar dos resultados que considero de suma importancia para el desarrollo de esta tesis. El primero de ellos se encuentra en la Sección 3.3, donde se inicia caracterizando las 3-variedades que estudiaremos (ver (3.5)), mediante ciertos difeomorfismos del toro ponchado, y posteriormente, en la Proposición 3.9 caracterizamos dichos difeomorfismos mediante palabras formadas con las letras L y R , las cuales se identifican con matrices elementales (ver (5.15)). Esto último, es equivalente a descomponer una matriz de $SL_2(\mathbb{Z})$ con ciertas características, como producto de matrices elementales. El segundo resultado que considero importante se resume en la Figura 3.5, donde se muestra cómo podemos construir una serie de cuatro tetraedros hiperbólicos ideales a partir de una pareja de generadores del grupo fundamental del toro ponchado, y más aún, a partir de sus trazas. Estos tetraedros serán fundamentales en los siguientes dos capítulos.
- En el segundo capítulo, comenzamos presentando una descomposición por tetraedros de nuestras 3-variedades de estudio, la cual se le atribuye a Jørgensen. También, mostramos algunos ejemplos de toros cuspidales bien conocidos de las variedades asociadas a las palabras más cortas de L^s y R^s . Posteriormente, presentamos un algoritmo elemental para obtener el toro cuspidal asociado a cualquier palabra de L^s y R^s , mediante una solución de un sistema de ecuaciones. Básicamente, el algoritmo para obtener dicho sistema de ecuaciones es el siguiente:
 1. Asociamos a cada letra (L o R) un tetraedro hiperbólico ideal, el cual a su vez, tiene asociado cuatro triángulos euclidianos en su cúspide (ver Figura 3.4).
 2. Dada una palabra arbitraria de L^s y R^s , estudiamos cómo debe ser el pegado de los tetraedros asociados a cada una de sus letras, de tal manera que se construya la variedad asociada a dicha palabra (ver Figura 4.2).

3. Usando únicamente geometría elemental (semejanza de triángulos), construimos transformaciones de Möbius (ver (4.2)) que determinan las coordenadas de todos los vértices de la triangulación del toro cuspidal, en función de dos de ellos: $Q_{(1,0)}$ y $Q_{(1,1)}$.
4. Estudiando una de las traslaciones de dicha triangulación obtenemos las ecuaciones deseadas de las cuales una de sus soluciones deberán ser las coordenadas de los vértices $Q_{(1,0)}$ y $Q_{(1,1)}$.

Los resultados más relevantes que obtuvimos, se encuentran en las secciones 4.4 y 4.5, donde nos restringimos a estudiar las 3-variedades asociadas a palabras de la forma $L^M R^N$. Aquí nuestro sistema de ecuaciones es mucho más sencillo, y puede ser escrito en función de datos geométricos de la 3-variedad (ver Proposición 4.7). Dicho sistema es muy similar al sistema presentado por Guéritaud en [11], y sin embargo, nuestro sistema generaliza los casos donde puede aplicarse. Además, en el Teorema 4.6, presentamos características geométricas de la triangulación de estas 3-variedades, que a mi parecer son interesantes y bonitas. Finalmente, estudiamos los puntos de acumulación de las retículas de los toros cuspidales asociados a esta familia particular (ver Teorema 4.11 seguido de algunos ejemplos), obteniendo nuevamente una ecuación tal que una de sus soluciones determina el toro cuspidal límite que buscamos.

- En general, las trazas de los elementos de un grupo kleiniano Γ ya se han usado para estudiar la variedad \mathbb{H}^3/Γ (ver por ejemplo, capítulos 3, 4 y 5 de [18]). Más aún, ya se han usado en el caso particular que estamos estudiando, es decir, en variedades hiperbólicas que son un círculo de toros ponchados (ver por ejemplo, capítulos 8, 9 y 10 de [25]). En el capítulo 3, estudiamos nuestro problema desde ese enfoque. De manera análoga al capítulo anterior, obtenemos un algoritmo para construir un sistema de polinomios, donde a partir de una de sus raíces encontramos dichas trazas, y posteriormente, con dichas trazas obtenemos la triangulación de los toros cuspidales que estudiamos en el Capítulo 2 (ver Corolario 5.8). Luego, en la Sección 5.3, nos restringimos nuevamente al caso particular de variedades asociadas a palabras de la forma $L^M R^N$, para dar el sistema de polinomios explícito para este caso, así como el polinomio para obtener los puntos de acumulación de las retículas de los toros cuspidales asociados a esta familia particular (ver Teorema 5.13).

Notación

A continuación, presentamos la notación de algunos objetos matemáticos que consideramos relevantes en el desarrollo de esta tesis. La finalidad de este apartado, es tener la facilidad de recurrir a estas páginas cada que sea necesario, para recordar lo que denotan dichos objetos. El orden en el que a continuación se encuentran, es el orden en el que aparecen en el desarrollo de la tesis. Omitiremos, por ejemplo, la notación de elementos que sólo usamos en una demostración o como instrumento para desarrollar únicamente un resultado.

\mathbb{C}	el plano complejo.
$SL_2(X)$	el conjunto de matrices de 2×2 con entradas en X y determinante unitario.
$PSL_2(X)$	el cociente $SL_2(X)/\{\pm I\}$.
\mathbb{H}^n	el semiespacio superior $\{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$.
μ	la constante de Margulis.
$\pi_1(M, x)$	el grupo fundamental de M , basado en el punto x .
$Dif^+(X)$	el conjunto de difeomorfismos de X , que preservan orientación.
T	el toro cerrado.
T^*	el toro ponchado.
$M_{\geq \mu}$	la parte gruesa de M .
Λ	Función que a cada racional le asocia una clase de conjugación de $\pi_1(T^*)$.

φ	en esta tesis, se usa para denotar un elemento de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
$\widehat{\varphi}$	la transformación de Möbius asociada a la matriz φ .
M_φ	la 3-variedad definida como el cociente $\frac{T^* \times [0, 1]}{(x, 0) \sim (\varphi(x), 1)}$.
L, R	las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, respectivamente.
φ_*	isomorfismo de $\pi_1(T^*)$, inducido por φ .
α, β	generadores de $\pi_1(T^*)$.
ρ	representación de M_φ .
A, B	$\rho(\alpha)$ y $\rho(\beta)$, respectivamente.
x, y, z	trazas de A, B y AB , respectivamente.
R_π	la involución hiperelíptica $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{z} \\ z & 0 \end{pmatrix}$, que se corresponde con la rotación por π en T^* alrededor de su ponchadura.
$q_{(i,j)}, p_{(i,j)}$	j-ésimo vértice de la triangulación del cuadrilátero asociado a L^{m_i} y R^{n_i} , respectivamente, en la triangulación del toro cuspidal de M_φ con $\varphi = L^{m_1} R^{n_1} L^{m_2} R^{n_2} \dots L^{m_k} R^{n_k}$.
M, N	$m_1 + m_2 + \dots + m_k$ y $n_1 + n_2 + \dots + n_k$, respectivamente.
ϕ_j, ν_j, ζ_j	ángulos de plegado del j-ésimo tetraedro de la descomposición por triángulos de M_φ .
$\widehat{f}_{a_i}, \widehat{g}_{b_i}$	las funciones en \mathbb{C} definidas como $\widehat{f}_{a_i}(Q) = \frac{Q + a_i}{2Q + 1}$ y $\widehat{g}_{b_i}(P) = \frac{P - b_i}{-2P + 1}$.
$Q_{(i,j)}, P_{(i,j)}$	j-ésimo vértice de la triangulación del cuadrilátero aislado asociado a L^{m_i} y R^{n_i} , respectivamente, en la triangulación del toro cuspidal de M_φ con $\varphi = L^{m_1} R^{n_1} L^{m_2} R^{n_2} \dots L^{m_k} R^{n_k}$.
$\ell(\widehat{T})$	longitud de traslación compleja de una isometría loxodrómica $\widehat{T}(z) = ke^{i\theta}z$ definida como $\log(k) + i\theta$.
$\widehat{f}_a, \widehat{g}_b$	simplificación de notación para \widehat{f}_{a_1} y \widehat{g}_{b_1} en el caso $L^M R^N$.
Q_j, P_j	j-ésimo vértice de la triangulación del cuadrilátero aislado asociado a L^M y R^N , respectivamente, en la triangulación del toro cuspidal de M_φ con $\varphi = L^M R^N$.

- q_j, p_j j -ésimo vértice de la triangulación del cuadrilátero asociado a L^M y R^N , respectivamente, en la triangulación del toro cuspidal de M_φ con $\varphi = L^M R^N$.
- ℓ_f, ℓ_g simplificación de notación para $\ell(\widehat{f_a})$ y $\ell(\widehat{g_b})$, respectivamente.
- $x_{(i,j)}, y_{(i,j)}$ trazas asociadas a los vértices $p_{(i,j)}$ y $q_{(i,j)}$, respectivamente.
- $c_j(\omega)$ polinomios definidos recursivamente en \mathbb{C} , como $c_0(\omega) = 0$, $c_1(\omega) = \omega$ y $c_j(\omega) = \omega c_{j-1}(\omega) - c_{j-2}(\omega)$.
- x_j, y_j trazas asociadas a los vértices p_j y q_j , respectivamente.
- $[\alpha]$ la función piso (el entero menor más próximo a α).

Capítulo 3

Preliminares

3.1. Cardinalidad de 3-variedades hiperbólicas no compactas de volumen finito

El único lugar donde encontramos un bosquejo del siguiente Lema, fue en la página 55 de [6]. Sin embargo, omiten detalles importantes que no pudimos completar, y por lo tanto, decidimos presentar una demostración detallada aquí.

Lema 3.1. *$\text{Dif}^+(T^*)/\text{isotopía} = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, donde T^* es el toro ponchado y $\text{Dif}^+(T^*)$ es el conjunto de difeomorfismos de T^* que preservan orientación.*

Demostración. (*) Consideremos la función $F : \text{Dif}^+(T^*) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, que a cada difeomorfismo φ le asigna una matriz A_φ de la siguiente manera: Una vez fijada una cubierta $p : \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 \rightarrow T^*$, consideremos las curvas bicuspidales $\alpha := p(\tilde{\alpha})$ y $\beta := p(\tilde{\beta})$, donde $\tilde{\alpha}(t) = (t, 0)$ y $\tilde{\beta}(t) = (0, t)$, variando $t \in (0, 1)$ (aquí, decimos por ejemplo, que $\tilde{\alpha}$ es una curva que comienza en el origen y termina en el punto $(1, 0)$, aunque en realidad no toque dichos extremos). Luego, consideramos $\varphi(\alpha)$ y $\varphi(\beta)$ las curvas imágenes bajo φ , y sus levantamientos $\tilde{\varphi}(\alpha)$ y $\tilde{\varphi}(\beta)$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$, comenzando en el origen. Entonces, puesto que dichas curvas deben finalizar en coordenadas enteras (a, c) y (b, d) , respectivamente, la matriz asociada a φ será

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Además, puesto que cada curva bicuspidal en T^* determina una única clase de homotopía de curvas cerradas simples en T^* , tiene sentido hablar del número de intersección algebraico entre las curvas bicuspidales $\varphi(\alpha)$ y $\varphi(\beta)$ (pensando en el número de intersección algebraico de las clases que determinan), el cual resulta ser $ad - bc = 1$. Por lo tanto, como dicho número se preserva bajo difeomorfismos que preservan orientación, concluimos que la matriz que obtenemos es un elemento de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Ahora, una matriz $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, define una función lineal $\widetilde{\varphi}_A : \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$, que baja a una función $\varphi_A : T^* \rightarrow T^*$ con $\varphi_A \in \mathrm{Dif}^+(T^*)$ y $F(\varphi_A) = A$. Esto prueba que F es suprayectiva.

Luego, para verificar que F baja al cociente

$$\mathrm{Dif}^+(T^*)/\text{isotopía} \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \quad (3.2)$$

consideremos dos difeomorfismos isotópicos φ_1 y φ_2 . Por el Teorema de la monodromía (ver páginas 60 y 61 de [12]), los levantamientos de las imágenes de α bajo ambas funciones: $\widetilde{\varphi_1(\alpha)}$ y $\widetilde{\varphi_2(\alpha)}$, terminan en el mismo punto. Lo mismo sucede con la curva β , y por lo tanto definen la misma matriz: $A_{\varphi_1} = A_{\varphi_2}$.

Finalmente, para comprobar que la asignación (3.2) es inyectiva, veamos que el único elemento en su kernel es la clase de isotopía del difeomorfismo identidad. En efecto, consideremos φ difeomorfismo tal que $[\varphi] \mapsto I$. Para trabajar con el grupo fundamental, identifiquemos a cada curva bicuspidal con la clase de homotopía de una curva cerrada simple que no intersecta a dicha curva bicuspidal. Por el único Teorema que se prueba en [5], tenemos que $\varphi_*(\alpha)$ y $\varphi_*(\beta)$ son conjugadas a $\alpha^{m_1}\beta^{n_1} \cdots \alpha^{m_k}\beta^{n_k}$ y $\alpha^{a_1}\beta^{b_1} \cdots \alpha^{a_r}\beta^{b_r}$, respectivamente, donde existe n entero positivo y $\varepsilon = \pm 1$ tal que $m_1 = m_2 = \cdots = m_k = \varepsilon a_1 = \varepsilon a_2 = \cdots = \varepsilon a_r = 1$ y $\{n_1, n_2, \cdots, n_k, \varepsilon b_1, \varepsilon b_2, \cdots, \varepsilon b_r\} = \{n, n+1\}$, o simétricamente $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = \varepsilon b_1 = \varepsilon b_2 = \cdots = \varepsilon b_r = 1$ y $\{m_1, m_2, \cdots, m_k, \varepsilon a_1, \varepsilon a_2, \cdots, \varepsilon a_r\} = \{n, n+1\}$. Por otro lado, por construcción, sabemos que $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = 1 = b_1 + b_2 + \cdots + b_r$ y $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = 0 = a_1 + a_2 + \cdots + a_r$, y por lo tanto, en cualquiera de los dos casos obtenemos que $\varphi_*(\alpha) = \alpha$ y $\varphi_*(\beta) = \beta$. Por último, por el Teorema de Baer (ver Teorema 5.14.1 de [37]) tenemos que si φ es un difeomorfismo que induce la identidad en $\pi_1(T^*)$, entonces φ es isotópico a la identidad en T^* . \square

Corolario 3.2. *$\mathrm{Dif}^+(T)/\text{isotopía} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, donde T es el toro plano y $\mathrm{Dif}^+(T)$ es el conjunto de difeomorfismos de T que preservan orientación.*

Demostración. La prueba del Lema 3.1 se puede adaptar sin problemas a este caso, considerando \mathbb{R}^2 en lugar de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ como cubierta. Además, este resultado sí tiene varias pruebas detalladas en la literatura (ver por ejemplo, Teorema 2.5 de [6]). \square

Nuevamente, el siguiente resultado es conocido pero como no encontramos una demostración de ello en la literatura, decidimos presentar una aquí.

Proposición 3.3. *El conjunto de 3-variedades hiperbólicas no compactas de volumen finito es numerable.*

Demostración. (*) Como vimos en la Introducción, toda 3-variedad no compacta de volumen finito se puede descomponer en su parte gruesa y su parte delgada, donde su parte gruesa consta de una componente compacta con frontera (cuya frontera es unión ajena y

finita de toros) y su parte delgada consta de una cantidad finita de cúspides y una cantidad finita (posiblemente nula) de toros sólidos. Por lo tanto, cualquiera de estas 3-variedades se puede obtener de una 3-variedad compacta con frontera al agregar en cada componente frontera una de dos opciones: una cúspide o un toro sólido. Notemos que hay una única manera topológica de agregar una cúspide y hay una cantidad numerable de maneras topológicas de agregar un toro sólido; una por cada clase de isotopía de difeomorfismos del toro (ver Lema 3.1), ya que el pegado depende únicamente de la clase de isotopía de la función de pegado (ver Sección 2 del Capítulo 8 de [14]). En [4] se prueba que hay una cantidad numerable de 3-variedades compactas con frontera y por lo tanto hay una cantidad numerable de topologías de 3-variedades hiperbólicas no compactas de volumen finito. Puesto que el Teorema de Rigidez de Mostow (ver sección 3.13 de [19]), nos dice que la geometría de una 3-variedad con tales características está determinada por su topología, concluimos lo que deseamos. \square

Otra manera de probar que sólo hay una cantidad numerable de 3-variedades hiperbólicas no compactas de volumen finito, salvo homeomorfismo, sin recurrir a [4] (aunque sí recurrimos a un resultado más sencillo e intuitivo de [12]), es mediante el siguiente lema, cuya prueba es una adaptación del único Lema que se da en [24].

Lema 3.4. *Dado $V \in \mathbb{N}$, el conjunto de todas las posibles partes gruesas de una 3-variedad hiperbólica no compacta de volumen menor que V , salvo homotopía, es finito.*

Demostración. (*) Denotemos por $M_{\geq \mu}$ a la parte gruesa de M , donde μ es la constante de Margulis en dimensión 3. Como mencionamos en la Introducción, para cualquier $p \in M_{\geq \mu}$, se tiene que el conjunto $B_{\mu/4}(x) = \{x \in M : d_M(x, p) < \mu/4\}$ es isométrico (en particular homeomorfo) a una bola hiperbólica abierta de radio $\mu/4$ en \mathbb{H}^3 .

Consideremos $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset M_{\geq \mu}$ un conjunto de puntos tales que la distancia entre cualesquiera dos de ellos es mayor o igual que $\mu/2$, y por lo tanto, para cualesquiera $x_i, x_j \in X$ distintos, se tiene que $B_{\mu/4}(x_i) \cap B_{\mu/4}(x_j) = \emptyset$. Luego, notemos que el número k de puntos en X , está acotado superiormente por $\text{Volumen}(M)/\text{Volumen}(B_{\mu/4})$. Además, si tal X se toma maximal, entonces $B_{\mu/2}(x_1) \cup B_{\mu/2}(x_2) \cup \dots \cup B_{\mu/2}(x_k)$ cubre a $M_{\geq \mu}$, ya que si existiera $x \in M_{\geq \mu}$ que no estuviera cubierto, entonces para cualquier $x_i \in X$ se tendría que la intersección de $B_{\mu/4}(x)$ con $B_{\mu/4}(x_i)$ sería vacía, lo cual contradice la maximalidad de X .

Resulta ahora de manera intuitiva, que la topología de $M_{\geq \mu}$ está determinada por el patrón combinatorio de las intersecciones de $U_j := B_{\mu/2}(x_j) \cap M_{\geq \mu}$, y que hay un número finito de tales patrones. Esto se puede formalizar de la siguiente manera: para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, se tiene que $U_i \cap U_j$ es conexo, ya que de lo contrario, existiría un punto $x \in U_i \cap U_j \subset M_{\geq \mu}$ tal que $B_{\mu/4}(x)$ no sería homeomorfa a una bola de \mathbb{H}^3 , lo cual contradice la definición de parte gruesa de M . Finalmente, para cada n tal que $2 \leq n \leq k$, definimos el conjunto de las n intersecciones $I_n = \{(i_1, i_2, \dots, i_n) : U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \dots \cap U_{i_n} \neq \emptyset\}$.

\emptyset , con $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq k$. Como para cada n , la cardinalidad de I_n es finita, basta probar que $I_2 \cup I_3 \cup \dots \cup I_k$ define completamente la homotopía de $M_{\geq \mu}$, lo cual se sigue por el Corolario 4G.3 de [12]. \square

3.2. Triangulación de Farey

Definimos al *complejo de curvas de T^** , como una gráfica tal que:

- Sus vértices representan a las clases de homotopía libre de curvas cerradas simples (no se autointersectan) esenciales (no homotópicas a un punto ni a la ponchadura) y
- sus aristas unen aquellos vértices que representan clases de homotopía libre que contienen representantes que se intersectan en un solo punto (cualesquiera dos curvas cerradas esenciales no homotópicas en T^* se intersectan al menos una vez).

Por otro lado, decimos que $\alpha \in \pi_1(T^*)$ es *primitivo*, si existe $\beta \in \pi_1(T^*)$ de manera que $\langle \alpha, \beta \rangle = \pi_1(T^*)$. Además, en [28] se da la palabra exacta, módulo conjugación, de la primitiva correspondiente a la expresión abelianizada $a^p b^q$ (no la mencionamos aquí ya que no la necesitaremos en lo sucesivo). Por lo tanto, tenemos que a cada racional le corresponde una clase de conjugación de $\pi_1(T^*)$, y a esta función la nombraremos

$$\Lambda : \mathbb{Q} \rightarrow \frac{\pi_1(T^*)}{\text{conjugación}}. \quad (3.3)$$

Es conocido (no lo probaremos aquí pues tampoco lo usaremos) que $\pi_1(T^*)/\text{conjugación}$ está en biyección con el conjunto de clases de homotopía libre en T^* . Así, una manera concreta de visualizar al complejo de curvas de T^* , es mediante la *triangulación de Farey*, la cual es bien conocida (ver Figura 3.1) y será muy importante en la siguiente sección para obtener una caracterización de las 3-variedades M_φ en cuestión.

Regla de construcción de geodésicas de Farey: Dados dos elementos $(p/q, 0)$ y $(r/s, 0)$ en la frontera de \mathbb{H}^2 , con p, q, r y s números enteros (aquí, denotamos a ∞ como $\frac{1}{0}$ y a 0 como $\frac{0}{1}$) y $\text{mcd}(p, q) = 1 = \text{mcd}(r, s)$, trazamos la geodésica entre ellos si y sólo si $|ps - qr| = 1$. Cuando esto sucede decimos que $\frac{p}{q}$ está conectado con $\frac{r}{s}$, lo denotamos por $\frac{p}{q} \leftrightarrow \frac{r}{s}$ y a dicha geodésica la llamaremos *geodésica de Farey*.

Observación 3.5. Si $\frac{p}{q} \leftrightarrow \frac{r}{s}$, con $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$, entonces

$$\frac{p}{q} \leftrightarrow \frac{p+r}{q+s} \leftrightarrow \frac{r}{s}, \quad \text{con} \quad \frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}.$$

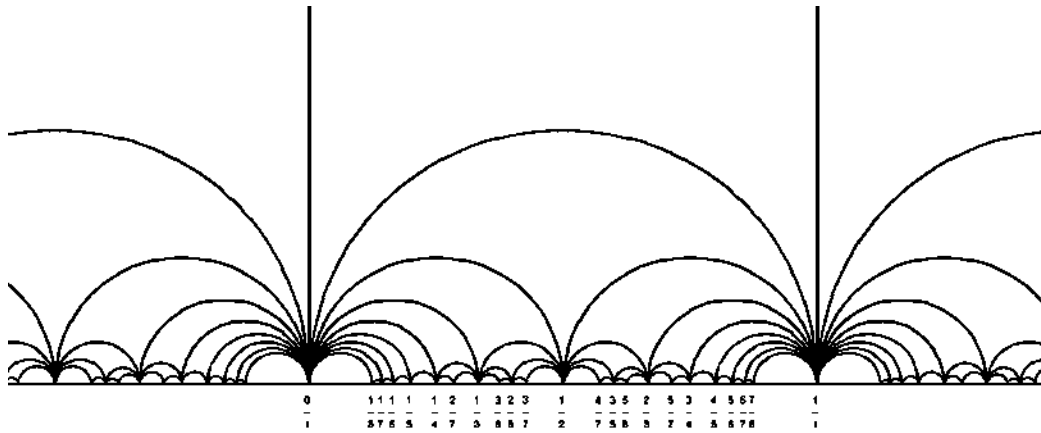


Figura 3.1: Triangulación de Farey

Demostración. Para esto, consideramos que cualquier $x \in \mathbb{R}$ es menor que ∞ , y observamos que

$$|p(q+s) - q(p+r)| = |ps - qr| = 1 = |sp - rq| = |s(p+r) - r(q+s)| \text{ y,}$$

$$\frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s} \Leftrightarrow p(q+s) < q(p+r) \text{ y } s(p+r) < r(q+s) \Leftrightarrow ps < qr \Leftrightarrow \frac{p}{q} < \frac{r}{s}.$$

□

Luego, le asociamos a cada difeomorfismo $\varphi \in \text{Dif}^+(T^*)$ una transformación de Möbius $\widehat{\varphi} \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ de la siguiente manera:

$$\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \widehat{\varphi}(z) = \frac{az+b}{cz+d}. \quad (3.4)$$

Observación 3.6. Dado $\varphi \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, tenemos que $\frac{p}{q} \leftrightarrow \frac{r}{s}$ si y sólo si $\widehat{\varphi}\left(\frac{p}{q}\right) \leftrightarrow \widehat{\varphi}\left(\frac{r}{s}\right)$.

Demostración. En efecto, si $\frac{p}{q} \leftrightarrow \frac{r}{s}$, entonces

$$\widehat{\varphi}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{ap+bq}{cp+dq} \quad \text{y} \quad \widehat{\varphi}\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{ar+bs}{cr+ds}$$

también están conectados, pues

$$(ap+bq)(cr+ds) - (cp+dq)(ar+bs) = (ad-bc)(ps-qr) = \pm 1.$$

Para probar la otra implicación, basta considerar φ^{-1} .

□

Finalmente, puesto que no encontramos una demostración concreta del siguiente lema, presentamos una muy natural usando la región fundamental de la acción de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ en \mathbb{H}^2 (ver Figura 2.2).

Lema 3.7. *La regla de construcción de geodésicas de Farey, forman una triangulación en \mathbb{H}^2 .*

A dicha triangulación la llamaremos *triangulación de Farey* y a sus triángulos los llamaremos *triángulos de Farey*.

Demostración. (*) Para probar este lema, basta verificar las siguientes afirmaciones:

1. Dado $z \in \mathbb{H}^2$, existe un triángulo de Farey que lo contiene.
2. Dos geodésicas de Farey no se pueden intersectar en el interior de \mathbb{H}^2 .

En efecto, para probar la primer afirmación, consideremos la región fundamental de la acción de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ en \mathbb{H}^2 mediante transformaciones de Möbius (ver Figura 2.2) y denotémosla por Ω . Entonces, existe $\varphi \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tal que $\widehat{\varphi}(z) \in \Omega$. Además, notemos que $\Omega \subset \Delta_1 \cup \Delta_2$, donde Δ_1 denota al triángulo de Farey cuyos vértices son $-1, 0$ e ∞ ; y Δ_2 denota al triángulo de Farey cuyos vértices son $0, 1$ e ∞ . Sin pérdida de generalidad, consideremos $\widehat{\varphi}(z) \in \Delta_1$ y por lo tanto, por la Observación 3.6, tenemos que los vértices $\widehat{\varphi}^{-1}(-1)$, $\widehat{\varphi}^{-1}(0)$ y $\widehat{\varphi}^{-1}(\infty)$ forman un triángulo de Farey que además contiene a z .

Finalmente, para probar la segunda afirmación, observemos que si $\frac{p}{q} \leftrightarrow \frac{r}{s}$, entonces

$$\widehat{\varphi}(z) = \frac{qz - p}{sz - r} \quad \text{es tal que} \quad \widehat{\varphi}\left(\frac{p}{q}\right) = 0, \quad \widehat{\varphi}\left(\frac{r}{s}\right) = \infty \quad \text{y} \quad \varphi \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

y por lo tanto basta verificar que no existe geodésica de Farey que intersecte a la geodésica vertical cuyos extremos son 0 e ∞ . En efecto, si existiera dicha geodésica, entonces existirían racionales $\frac{p}{q} < 0$ y $\frac{r}{s} > 0$ con $\frac{p}{q} \leftrightarrow \frac{r}{s}$. Sin pérdida de generalidad, consideremos que $p < 0$ y $q, r, s > 0$. Entonces ps y $-qr$ son ambos enteros negativos cuya suma es -1 , lo cual es una contradicción. \square

3.3. Caracterización de fibraciones M_φ hiperbólicas

Como vimos en la Introducción, la familia de 3-variedades con las que trabajaremos son las fibraciones hiperbólicas sobre el círculo con fibra el toro ponchado. Una de estas 3-variedades puede obtenerse a partir del producto $T^* \times [0, 1]$, identificando $(x, 0)$ con $(\varphi(x), 1)$ para todo $x \in T^*$, donde $\varphi \in \mathrm{Dif}^+(T^*)$ (ver Lema 3.1). Denotaremos a dicha 3-variedad por M_φ , es decir

$$M_\varphi := \frac{T^* \times [0, 1]}{(x, 0) \sim (\varphi(x), 1)}. \quad (3.5)$$

Además, si φ' pertenece a la misma clase de isotopía de φ ó φ^{-1} , entonces M_φ y $M_{\varphi'}$ son variedades homeomorfas. En particular, enfatizamos la siguiente observación que usaremos más adelante.

Observación 3.8. $\pi_1(M_\varphi) = \pi_1(M_{\varphi^{-1}})$.

Más aún, también concluimos que M_φ y $M_{\varphi'}$ son variedades homeomorfas, si φ' es conjugado de φ ó de φ^{-1} por un elemento de $SL_2(\mathbb{Z})$.

Por otro lado, uno de los resultados de Thurston en [35] (o alternativamente, por Jean-Pierre en [29]), prueba que M_φ es una 3-variedad hiperbólica si y sólo si los eigenvalores de $\varphi \in SL_2(\mathbb{Z})$ son reales distintos. Esto último es equivalente a pedir $|\text{tr}(\varphi)| > 2$, ya que

$$\lambda_{\pm} = \frac{\text{tr}(\varphi) \pm \sqrt{\text{tr}(\varphi)^2 - 4}}{2} \quad (3.6)$$

son los eigenvalores de φ . Más aún, podemos caracterizar a dichos difeomorfismos mediante palabras, como lo expresa la Proposición 3.9. Una prueba de este hecho se encuentra en [11]; pero decidimos reescribirla con algunos detalles que no se encuentran en [11].

Proposición 3.9. $\varphi \in SL_2(\mathbb{Z})$ tiene dos eigenvalores distintos si y sólo si existe $X \in SL_2(\mathbb{Z})$ tal que

$$X \varphi X^{-1} = \pm \begin{pmatrix} 1 & m_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n_2 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & m_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n_k & 1 \end{pmatrix}.$$

con $m_i, n_i \in \mathbb{Z}_+^*$. Además la parte del lado derecho es única salvo permutaciones cíclicas.

Demostración. \Leftarrow] Por la discusión previa, tenemos que φ tiene dos eigenvalores reales distintos si y sólo si $|\text{tr}(\varphi)| > 2$. En nuestro caso, notemos que cualquier producto no vacío de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & m_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n_i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + m_i n_i & m_i \\ n_i & 1 \end{pmatrix}$$

tiene traza al menos 2 ya que en cada entrada de la diagonal siempre aparece un 1 (sumado posiblemente con otros elementos positivos). Además, como la traza se preserva bajo conjugación, concluimos la prueba.

\Rightarrow] (*) Primero, notemos que como $\lambda_+ \lambda_- = 1$ (ver 3.6), entonces λ_+ y λ_- deben tener el mismo signo. Así, cuando ambos son positivos, tenemos que $a + d > 2$ y por lo tanto se corresponderá con el signo positivo del producto de matrices que deseamos probar; y cuando ambos son negativos, tenemos que $a + d < 2$, y por lo tanto se corresponderá con el signo negativo.

Ahora, asociamos a cada difeomorfismo $\varphi \in \text{Dif}^+(T^*)$, una transformación de Möbius $\widehat{\varphi}$ como se muestra en (3.4). Después, obtenemos que

$$z_{1,2} = \frac{a - d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} \quad (3.7)$$

son los dos puntos fijos de $\widehat{\varphi}$ (donde z_1 es el repulsor y z_2 es el atractor), y consideramos la geodésica C orientada de z_1 a z_2 . Observemos que z_1 y z_2 son números irracionales, ya que la raíz cuadrada de un entero (no cuadrado) siempre es irracional y la ecuación $(a+d)^2 - 4 = p^2$ no tiene solución entera para $p \neq 0$. Por lo tanto, tenemos que C cruza una cantidad infinita de triángulos de Farey, los cuales podemos enumerar como

$$\cdots T_{-2}, T_{-1}, T_0, T_1, T_2, \cdots \quad (3.8)$$

Luego, definimos las matrices

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad L := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

y a cada uno de los triángulos T_j le asociaremos una de las dos matrices definidas: R si la geodésica sale del triángulo por el lado derecho del lado por donde entró, y L si sale por su lado izquierdo. Así, a C le corresponde una palabra infinita

$$P = \cdots P_{-2} P_{-1} P_0 P_1 P_2 \cdots,$$

donde cada letra P_i es o bien R o bien L .

Aquí, gracias a que z_1 y z_2 son distintos, sabemos que P debe tener al menos una L y al menos una R , y por lo tanto podemos suponer que P_{-1} es R y P_0 es L .

Además, salvo conjugación, podemos suponer que T_0 es el triángulo cuyos vértices son $0, 1$ e ∞ . En efecto, la matriz de conjugación X del enunciado de la Proposición 3.9 será la asociada a la transformación de Möbius que preserva orientación que manda a los vértices del triángulo T_0 (introducido en 3.8) en el triángulo cuyos vértices son $0, 1$ e ∞ , de manera que la geodésica que comparten los triángulos T_{-1} y T_0 vaya a dar a la geodésica entre 0 e ∞ .

Por la Observación 3.6 y el hecho de que C queda invariante bajo $\widehat{\varphi}$, tenemos que el triángulo T_0 va a dar mediante $\widehat{\varphi}$ a otro triángulo T_n para algún n entero positivo y por lo tanto T_k irá a dar mediante $\widehat{\varphi}$ a T_{n+k} . Lo anterior nos lleva a que la palabra P es cíclica de orden n y por tanto definimos

$$\mathcal{P} := P_0 P_1 \cdots P_{n-1}, \quad (3.10)$$

la subpalabra de P que contiene a las n letras correspondientes a los triángulos

$$T_0, T_1, T_2, \cdots T_{n-1}. \quad (3.11)$$

Ahora, notemos que las matrices L y R definidas en (5.15), se corresponden con isometrías que mandan a T_0 en el triángulo de su izquierda y en el triángulo de su derecha, respectivamente. En lo siguiente, veremos que la isometría correspondiente con la matriz asociada a \mathcal{P} , manda a T_0 en T_n de manera que $\widehat{\mathcal{P}}$ y $\widehat{\varphi}$ serán isometrías de \mathbb{H}^2 que coinciden en tres puntos, y por lo tanto serán iguales.

En efecto, basta que probemos por inducción que la transformación de Möbius asociada a $P_0 P_1 \cdots P_{j-1}$ manda a T_0 en T_j .

B.I: $P_0(T_0) = T_1$, por construcción.

H.I: Supongamos que la afirmación es cierta para j y probémosla para $j + 1$.

En efecto, supongamos que los vértices de T_j son

$$\frac{p}{q}, \frac{p+r}{q+s} \text{ y } \frac{r}{s}, \quad \text{con} \quad \frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}.$$

Entonces, por hipótesis de inducción, $P_0 P_1 \cdots P_{j-1} = \begin{pmatrix} r & p \\ s & q \end{pmatrix}$. Luego

$$P_0 P_1 \cdots P_{j-1} L = \begin{pmatrix} r & p \\ s & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & r+p \\ s & s+q \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$P_0 P_1 \cdots P_{j-1} R = \begin{pmatrix} r & p \\ s & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r+p & p \\ s+q & q \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la transformación de Möbius asociada a $P_0 P_1 \cdots P_{j-1} P_j$, manda a los vértices de T_0 (los cuales son $0, 1$ e ∞) en

$$\frac{r+p}{s+q}, \frac{2r+p}{2s+q} \text{ y } \frac{r}{s}, \quad \text{donde} \quad \frac{r+p}{s+q} < \frac{2r+p}{2s+q} < \frac{r}{s}, \quad \text{ó}$$

$$\frac{p}{q}, \frac{r+2p}{s+2q} \text{ y } \frac{r+p}{s+q}, \quad \text{donde} \quad \frac{p}{q} < \frac{r+2p}{s+2q} < \frac{r+p}{s+q},$$

dependiendo de si $P_j = L$ ó $P_j = R$, respectivamente. Lo anterior prueba la inducción. \square

Lema 3.10. Si $\varphi \in SL_2(\mathbb{Z})$ es conjugada en $SL_2(\mathbb{Z})$ a $\pm L^{m_1} R^{n_1} L^{m_2} R^{n_2} \cdots L^{m_k} R^{n_k}$, entonces φ^{-1} es conjugada en $SL_2(\mathbb{Z})$ a $\pm L^{n_k} R^{m_k} \cdots L^{n_2} R^{m_2} L^{n_1} R^{m_1}$.

Demostración. Para esta prueba, estaremos recurriendo constantemente a los elementos introducidos en la demostración de la proposición anterior. Primero, observemos que $\widehat{\varphi}$ y $\widehat{\varphi}^{-1}$ tienen los mismos puntos fijos, y por lo tanto a φ y φ^{-1} se les asociará la misma geodésica (ver (3.7) y su discusión posterior). Sin embargo, puesto que el atractor de $\widehat{\varphi}$ es el repulsor de $\widehat{\varphi}^{-1}$, y el repulsor de $\widehat{\varphi}$ es el atractor de $\widehat{\varphi}^{-1}$, tenemos que la orientación de dichas geodésicas es distinta, y por lo tanto, el camino de triángulos asociado a φ^{-1} es el mismo que el asociado a φ pero recorrido al revés (ver (3.8)). De lo anterior, tenemos que si a un triángulo le asociamos mediante φ , una matriz R , entonces a dicho triángulo se le asociará mediante φ^{-1} una matriz L , con lo cual concluimos lo que se quiere.

Una manera más algebraica de probar esto, es observando que la matriz

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

cumple que $R^{-1} = YLY^{-1}$ y $L^{-1} = YRY^{-1}$. Así, si $\varphi = \pm XL^{m_1}R^{n_1} \dots L^{m_k}R^{n_k}X^{-1}$ para algún $X \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} &= \pm XR^{-n_k}L^{-m_k} \dots R^{-n_1}L^{-m_1}X^{-1} \\ &= \pm (XR^{-n_k}X^{-1})(XL^{-m_k}X^{-1}) \dots (XR^{-n_1}X^{-1})(XL^{-m_1}X^{-1}) \\ &= \pm XYL^{n_k}R^{m_k} \dots L^{n_1}R^{m_1}Y^{-1}X^{-1}. \end{aligned}$$

□

3.4. Grupo fundamental de M_φ y de su toro cuspidal

3.4.1. Grupo fundamental de M_φ

Denotemos por $\varphi_* : \pi_1(T^*) \rightarrow \pi_1(T^*)$ al isomorfismo inducido por $\varphi \in \mathrm{Dif}^+(T^*)$. Consideremos α y β generadores del grupo fundamental de la fibra T^* de M_φ , y δ una curva cerrada simple transversal a toda fibra, de manera que la intersección de δ con cada fibra sea de exactamente un punto. Luego, consideremos una vecindad tubular de la curva δ de manera que su restricción a cada fibra sea un abierto contraíble. A dicha vecindad la llamaremos V_{x_0} , donde x_0 es la intersección de δ y la fibra $T^* \times \{0\}$.

Ahora, consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} U &= T^* \times (0, 1), & V &= \frac{T^* \times \left(\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \right) \cup V_x}{(x, 0) \sim (\varphi(x), 1)}, \\ V_1 &= \frac{V_x}{(x, 0) \sim (\varphi(x), 1)}, & V_2 &= \frac{T^* \times \left(\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \right)}{(x, 0) \sim (\varphi(x), 1)}, \end{aligned}$$

con x en T^* o en V_{x_0} , según sea el caso. Ahora, puesto que $\pi_1(V_1, x_0) \simeq \mathbb{Z} \simeq \langle \delta \rangle$, $\pi_1(V_2, x_0) \simeq \pi_1(T^* \times \{0\}, x_0) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \simeq \langle \alpha, \beta \rangle$, $\pi_1(V_1 \cap V_2, x_0) \simeq \{0\}$ y $V = V_1 \cup V_2$, usamos el Teorema de Seifert-van Kampen y obtenemos que $\pi_1(V, x_0) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \simeq \langle \alpha, \beta, \delta \rangle$. Por otro lado, abusando un poco de notación, tenemos que $\pi_1(U) \simeq \pi_1(T^*, x_0) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \simeq \langle \alpha, \beta \rangle$, y además $U \cap V$ se puede retraer en $\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1$ con $\pi_1(\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1, x_0) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \simeq \langle \alpha, \beta, \delta\varphi_*(\alpha)\delta^{-1}, \delta\varphi_*(\beta)\delta^{-1} \rangle$.

Nuevamente podemos usar el Teorema de Seifert-van Kampen con los cálculos anteriores para concluir que

$$\pi_1(M_\varphi, x_0) = \langle \alpha, \beta, \delta : \delta\alpha\delta^{-1} = \varphi_*(\alpha), \delta\beta\delta^{-1} = \varphi_*(\beta) \rangle. \quad (3.12)$$

3.4.2. Grupo fundamental del toro cuspidal

Puesto que α y β son generadores de $\pi_1(T^*)$, su conmutador $[\alpha, \beta] := \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ representa un lazo simple que da una vuelta a la ponchadura de T^* . Luego, si consideramos en T^* una vecindad \mathcal{U} de la ponchadura (homeomorfa a un disco perforado), entonces $\mathcal{U} \times \mathbb{S}^1$ es la cúspide de la estructura hiperbólica de M_φ . Por lo tanto, $[\alpha, \beta]$ y δ (ver inicio de la sección anterior) se pueden ver como generadores del grupo fundamental del toro cuspidal de M_φ .

Más aún, si $\rho : \pi_1(M_\varphi) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ es la representación de M_φ , podemos conjugar todo de manera que el grupo fundamental del toro cuspidal esté generado por las traslaciones

$$\rho([\alpha, \beta]) = T_2 := \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \rho(\delta) = T_\tau := \begin{pmatrix} -1 & -\tau \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

lo cual se seguirá más adelante del Corolario 3.13 (que a su vez, se deducirá del Lema 3.11 y Lema 3.12 que presentaremos en esta sección).

Diremos que $X \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ es *elíptico*, si $\mathrm{tr}(X) \in (-2, 2)$; *parabólico*, si $\mathrm{tr}(X) = \pm 2$; ó *loxodrómico*, si $\mathrm{tr}(X) \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$. Esto también clasifica los puntos fijos de $X \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Para esto, denotamos por $\partial\mathbb{H}^3 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a la frontera al infinito de \mathbb{H}^3 , y decimos que X es elíptico si fija a una geodésica de \mathbb{H}^3 , es parabólico si fija sólo a un punto en $\partial(\mathbb{H}^3)$ y es loxodrómico si fija sólo a dos puntos en $\partial(\mathbb{H}^3)$. Recordemos que los grupos con los que trabajamos actúan libremente, y por lo tanto, no deben tener elementos elípticos.

Lema 3.11. *Si $ST = TS$ con $S, T \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ y $\langle S, T \rangle$ no tiene elementos elípticos, entonces los puntos fijos de S coinciden con los puntos fijos de T .*

Demostración. Si S y T son ambos parabólicos, podemos suponer que

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2-a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $ST = TS$, obtenemos que $c\beta = 0$, ya que

$$\begin{pmatrix} a & a\beta + b \\ c & c\beta + 2 - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \beta c & b + \beta(2 - a) \\ c & 2 - a \end{pmatrix}.$$

Puesto que $\beta \neq 0$, tenemos que $c = 0$, y por lo tanto $a(2 - a) = 1$ implica que $a = 1$. De lo anterior, concluimos que ∞ también es el punto fijo de S .

Si T es loxodrómico, podemos suponer que

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}.$$

Nuevamente, como $ST = TS$, obtenemos que

$$\begin{pmatrix} a\alpha & b\alpha^{-1} \\ c\alpha & d\alpha^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & b\alpha \\ c\alpha^{-1} & d\alpha^{-1} \end{pmatrix}.$$

En este caso tenemos que $\alpha \neq \alpha^{-1}$ y por lo tanto $b = 0 = c$. De lo anterior, concluimos que 0 e ∞ también son puntos fijos de S . \square

Lema 3.12. *Si S y T son loxodrómicos cuyos puntos fijos coinciden y tal que $ST = TS$, entonces $\langle S, T \rangle$ es cíclico ó no es discreto.*

Demostración. Por el Lema 3.11, S y T tienen los mismos puntos fijos, y por lo tanto podemos suponer que $\widehat{S}(z) = se^{i\alpha}z$ y $\widehat{T}(z) = te^{i\beta}z$.

Afirmación 1: Si $\langle se^{i\alpha}, te^{i\beta} \rangle := \{nse^{i\alpha} + mte^{i\beta} : n, m \in \mathbb{Z}\}$ es discreto, entonces $\langle s, t \rangle$ es discreto.

Para probar esto, procedamos por contradicción suponiendo que $\langle s, t \rangle$ no es discreto, y por lo tanto existe un punto de acumulación al cual llamaremos P . Luego, dado $\varepsilon > 0$, tenemos que $B_\varepsilon(P)$ tiene una infinidad de elementos de $\langle s, t \rangle$ y por lo tanto $A_{\varepsilon, P} := \{z \in \mathbb{C} : P - \varepsilon \leq |z| \leq P + \varepsilon\}$ tiene una infinidad de elementos de $\langle se^{i\alpha}, te^{i\beta} \rangle$. Como $A_{\varepsilon, P}$ es compacto, $\langle se^{i\alpha}, te^{i\beta} \rangle$ tiene un punto de acumulación en $A_{\varepsilon, P}$. Entonces existen $z_n \in \langle se^{i\alpha}, te^{i\beta} \rangle$ tales que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow z$ y esto implica que $(z_{n+1} z_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow z z^{-1} = 1$, lo cual contradice que $\langle se^{i\alpha}, te^{i\beta} \rangle$ es discreto. Lo cual prueba la Afirmación 1.

Ahora, sabemos que existen elementos mayores que 1 en $\langle s, t \rangle$, ya que cualquier $x \in \mathbb{R}^+$ cumple que $x \geq 1$ ó $x^{-1} > 1$. Denotemos por $r \in \langle s, t \rangle$ al elemento más pequeño mayor que 1 (como $\langle s, t \rangle$ es discreto, basta considerar el compacto $[t, t^{-1}]$, donde sin pérdida de generalidad $t < s < 1 < s^{-1} < t^{-1}$).

Afirmación 2: $\langle s, t \rangle = \langle r \rangle$.

En efecto, por construcción sabemos que $\langle r \rangle \subset \langle s, t \rangle$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe $u \in \langle s, t \rangle \setminus \langle r \rangle$ (sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $u > 1$; de lo contrario, consideremos u^{-1}) y consideremos $k \in \mathbb{Z}$ tal que $r^k < u < r^{k+1}$. Entonces, tenemos que $u^{-k} \in \langle s, t \rangle$ y $1 = r^{k-k} < u^{-k} < r^{k+1-k} = r$, lo cual contradice la elección de r , probando así la Afirmación 2.

Luego, si existieran dos elementos distintos $u, v \in \langle se^{i\alpha}, te^{i\beta} \rangle$, tales que $u = re^{i\gamma}$ y $v = re^{i\delta}$, entonces $uv^{-1} = e^{i(\gamma-\delta)}$ sería un elemento elíptico en $\langle se^{i\alpha}, te^{i\beta} \rangle$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, sólo hay un elemento $u \in \langle se^{i\alpha}, te^{i\beta} \rangle$ con norma r .

Afirmación 3: $\langle \widehat{U} \rangle = \langle \widehat{S}, \widehat{T} \rangle$ donde $\widehat{U}(z) = uz = re^{i\gamma}z$.

Para probar esto y concluir la demostración del Lema 12, nuevamente tenemos por construcción que $\langle \widehat{U} \rangle \subset \langle \widehat{S}, \widehat{T} \rangle$ y procedemos por contradicción para probar la otra contención. En efecto, supongamos que existe $W \in \langle \widehat{S}, \widehat{T} \rangle \setminus \langle \widehat{U} \rangle$. Entonces, $\widehat{W}(z) = r^n e^{i\vartheta}z$, con $n \in \mathbb{Z}$ y $\vartheta \neq n\gamma$, lo cual es una contradicción ya que tendríamos $\widehat{W}\widehat{U}^{-1} \in \langle \widehat{S}, \widehat{T} \rangle$ un elemento elíptico. □

Corolario 3.13. *Si $\langle S, T \rangle \leq PSL_2(\mathbb{C})$ es abeliano, discreto, no cíclico y sin elementos elípticos, entonces S y T son parabólicos (conjugados a traslaciones) con igual punto fijo.*

Demostración. Por el Lema 3.11, tenemos que S y T son parabólicos con el mismo punto fijo ó loxodrómicos con los mismos puntos fijos, y por el Lema 3.12 lo segundo no puede suceder ya que el grupo dejaría de ser discreto ó sería cíclico. □

3.5. Representación en términos de trazas

Consideremos $A = \rho(\alpha)$ y $B = \rho(\beta)$, donde como antes, α y β son generadores de $\pi_1(T^*)$ y $\rho : \pi_1(M_\varphi) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ es la representación del grupo fundamental de M_φ . Resulta que podemos escribir a A , B y AB en función de sus trazas como se observa en el Lema 3.14. Éste es un trabajo de Jørgensen en [16], pero nuevamente, decidimos escribir aquí una demostración de dicho lema ya que él no presenta muchos detalles.

Lema 3.14. *Si $A, B \in PSL_2(\mathbb{C})$ cumplen que su conmutador es parabólico y además $x = \text{tr}(A)$, $y = \text{tr}(B)$ y $z = \text{tr}(AB)$, entonces, módulo conjugación*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{xz - y}{z} & \frac{x}{z^2} \\ x & \frac{y}{z} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{yz - x}{z} & -\frac{y}{z^2} \\ -y & \frac{x}{z} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad AB = \begin{pmatrix} z & -\frac{1}{z} \\ z & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostración. (*) Como el conmutador es parabólico, podemos conjugar todo mediante una transformación que mande al punto fijo del conmutador en el punto al infinito, para obtener una traslación. Luego, toda traslación es conjugada a la traslación por uno mediante el elemento $\zeta \mapsto t\zeta + 1$. Por lo tanto, podemos suponer que $ABA^{-1}B^{-1} = T_2$, donde T_2 denota la traslación por dos.

Ahora, dadas las matrices

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} j & k \\ l & m \end{pmatrix},$$

también podemos suponer que $d = 0$, ya que basta conjugar las tres matrices para que la imagen de 0 bajo AB sea ∞ y $ABA^{-1}B^{-1}$ no cambie. En efecto, si inicialmente $c \neq 0$ podemos conjugar por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -d/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y si inicialmente $c = 0$, entonces $d \neq 0$ y por lo tanto podemos conjugar por la matriz

$$\begin{pmatrix} a/b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, como $(AB)B(AB)^{-1}B^{-1} = ABA^{-1}B^{-1} = T_2$, de la igualdad $(AB)B = T_2 B(AB)$, obtenemos las ecuaciones:

$$(1) \quad ae + bg = -ae - cf - 2ag - 2ch, \quad (3) \quad ce = -ag - ch,$$

$$(2) \quad af + bh = -be - 2bg, \quad (4) \quad cf = -bg.$$

Ahora, al sustituir las ecuaciones (3) y (4) en la ecuación (1), tenemos que $ae = ce$, y por lo tanto $a = c$ o $e = 0$. Trabajaremos ambos casos por separado.

CASO 1: $a = c$.

Como $\det(AB) = 1$, se tiene $b = -1/c = -1/a$ y por lo tanto

$$AB = \begin{pmatrix} a & -1/a \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

Además, las ecuaciones (3) y (4) se convierten en

$$(3^*) \quad e = -g - hc, \quad (4^*) \quad f = g/a^2,$$

mientras que la ecuación (2) depende de las demás. Por lo tanto, concluimos que

$$B = \begin{pmatrix} -g - h & g/a^2 \\ g & h \end{pmatrix}.$$

CASO 2: $e = 0$.

Nuevamente, como $\det(AB) = 1 = \det(B)$, tenemos que $b = -1/c$ y $f = -1/g$. Además, de la ecuación (4) deducimos que $g = \pm ic$, y por lo tanto

$$(2^*) \pm ia - h = \pm 2ic \quad \text{y} \quad (3^*) \mp ia = h.$$

Finalmente, sustituyendo (3*) en (2*), concluimos que $a = c$ y por lo tanto

$$AB = \begin{pmatrix} c & -1/c \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \pm i/c \\ \pm ic & \mp ic \end{pmatrix},$$

el cual es un caso particular del Caso 1 cuando $g = -h = \pm ia$.

Por lo anterior, basta considerar únicamente el caso general: el Caso 1, de donde obtuvimos que

$$AB = \begin{pmatrix} a & -\frac{1}{a} \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -g - h & \frac{g}{a^2} \\ g & h \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = (AB)B^{-1} = \begin{pmatrix} ah + \frac{g}{a} & \frac{h}{a} \\ ah & -\frac{g}{a} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Finalmente, si

$$x := \operatorname{tr}(A) = ah, \quad y := \operatorname{tr}(B) = -g \quad \text{y} \quad z := \operatorname{tr}(AB) = a,$$

sustituimos $a = z$, $g = -y$ y $h = \frac{x}{z}$ en (3.14) y obtenemos las expresiones deseadas. Notemos que no hay indeterminaciones, ya que z no puede ser cero, pues los únicos elementos con traza nula son los elípticos y AB no lo es. \square

Corolario 3.15. *Si $A, B \in \operatorname{PSL}_2(\mathbb{C})$ cumplen que su conmutador es parabólico y además $x = \operatorname{tr}(A)$, $y = \operatorname{tr}(B)$ y $z = \operatorname{tr}(AB)$, entonces, se tiene que*

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz. \quad (3.15)$$

A dicha identidad se le conoce como la identidad de Markoff.

Demostración. Basta hacer la multiplicación de las matrices A y B e igualarla con la matriz AB , usando las expresiones del Lema 3.14. Puesto que la traza es invariante bajo conjugación, se concluye lo que se quiere. \square

3.6. Cuadriláteros plegados y tetraedros hiperbólicos

Con la métrica vista en (2.2), resulta que las geodésicas en \mathbb{H}^3 son semicírculos (euclidianos) ortogonales a $\partial\mathbb{H}^3$ o rectas verticales; y los planos son semiesferas (euclidianas)

ortogonales a $\partial\mathbb{H}^3$ o planos verticales (ver sección 1.2 de [19]). Luego, un *polígono ideal* (o un *poliedro ideal*) es un polígono (o un poliedro) sin vértices.

Ahora, dados $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \partial\mathbb{H}^3$, llamaremos (u_1, u_2, u_3, u_4) al cuadrilátero ideal plegado cuyo pliegue está formado por la geodésica con extremos u_2 y u_4 , es decir, (u_1, u_2, u_3, u_4) es la unión de los triángulos ideales $\Delta(u_2, u_3, u_4)$ y $\Delta(u_4, u_1, u_2)$, mediante la geodésica (u_2, u_4) . De esta forma, observemos que (u_1, u_2, u_3, u_4) es igual que (u_3, u_4, u_1, u_2) pero distinto que (u_2, u_3, u_4, u_1) .

Resultará que una fibra de M_φ inmersa en \mathbb{H}^3 se ve como un toro ponchado que se obtiene al identificar los lados opuestos de un cuadrilátero ideal plegado (u_1, u_2, u_3, u_4) . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el vértice u_4 es ∞ y las aristas opuestas de dicho cuadrilátero están identificadas mediante A y B (ver Lema 3.14), de manera que $A(u_1) = \infty$, $A(u_2) = u_3$, $B(u_3) = \infty$ y $B(u_2) = u_1$; es decir, A envía a la geodésica dirigida que va de u_1 a u_2 en la geodésica dirigida que va de ∞ a u_3 ; y B envía a la geodésica dirigida que va de u_3 a u_2 en la geodésica dirigida que va de ∞ a u_1 (ver Figura 1.2; algo muy similar se encuentra en la Figura 3 de [3]). Entonces, salvo conjugación y usando el Lema 3.14, podemos escribir a los vértices del cuadrilátero en función de las trazas $x = \text{tr}(A)$, $y = \text{tr}(B)$ y $z = \text{tr}(AB)$, como

$$u_1 = A^{-1}(\infty) = -\frac{y}{xz}, \quad u_2 = A^{-1}B^{-1}(\infty) = 0 \quad \text{y} \quad u_3 = B^{-1}(\infty) = \frac{x}{yz}. \quad (3.16)$$

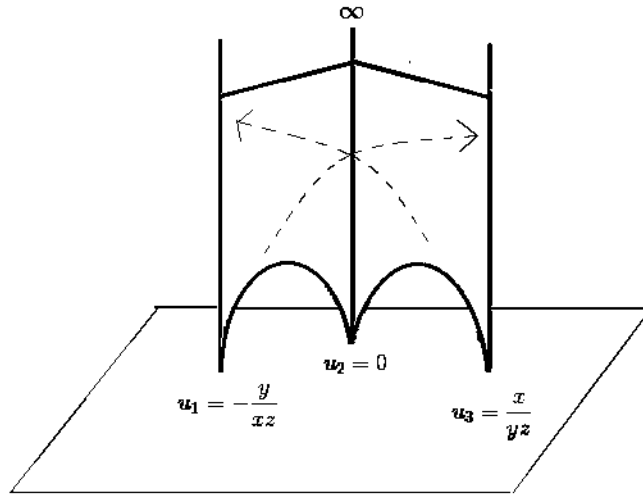


Figura 3.2: Toro ponchado: Cuadrilátero ideal plegado (u, v, w, ∞) con identificaciones.

Ahora, definimos un *tetraedro hiperbólico ideal* como la envolvente convexa en \mathbb{H}^3 de cuatro puntos en $\partial\mathbb{H}^3$, de manera que cualesquiera tres de estos cuatro puntos no sean

colineales, ni los cuatro puntos sean coplanares. Notemos que entonces, la frontera de un tetraedro hiperbólico ideal con vértices u_1, u_2, u_3, u_4 es la unión de los cuadriláteros plegados ideales (u_1, u_2, u_3, u_4) y (u_2, u_3, u_4, u_1) . Más aún, para nuestros intereses, consideraremos *tetraedros ideales identificados* (nos interesan porque $M_\varphi = \mathbb{H}^3/\pi_1(M_\varphi)$ se descompondrá en una cantidad finita de estos tetraedros), los cuales se obtienen de tetraedros hiperbólicos ideales al identificar las aristas del tetraedro de igual forma que se identifican los lados opuestos de sus cuadriláteros ideales plegados (ver Figura 3.3), cuando u_4 es ∞ . Notemos que la frontera de dicho tetraedro identificado tiene un sólo vértice ideal, cuatro aristas, y consiste de dos toros ponchados plegados que se pueden llevar uno en el otro mediante una isotopía, como lo veremos más adelante.

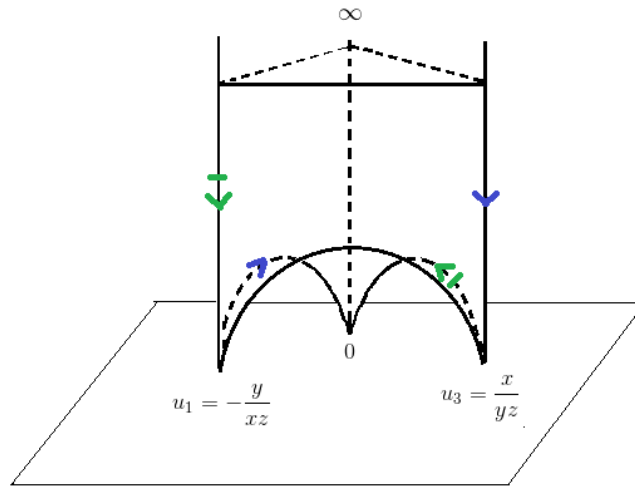


Figura 3.3: Tetraedro hiperbólico.

Notemos que en un tetraedro ideal identificado, podemos ver sus cuatro vértices como el punto al infinito ∞ : para esto, supongamos nuevamente que A y B son como en el Lema 3.14 y por lo tanto u_1, u_2 y u_3 son como en (3.16). Con lo anterior, basta enviar a u_1, u_2 y u_3 a ∞ mediante las transformaciones de Möbius asociadas a A, AB y B , respectivamente como lo muestra la Figura 3.4. Luego, haciendo los respectivos cálculos de sus vértices, obtenemos los complejos que presentamos en la Figura 3.5.

En particular, obtenemos que al enviar mediante AB al tetraedro con vértices $\infty, -\frac{y}{xz}, 0$ y $\frac{x}{yz}$, obtenemos un nuevo tetraedro cuyos vértices son $1, 1 + \frac{x}{yz}, \infty$, y $1 - \frac{y}{xz}$. En concreto, tenemos las siguientes observaciones.

Observación 3.16. El segundo tetraedro va a dar al cuarto tetraedro mediante la transformación asociada a AB , y además, el cuarto tetraedro es una traslación (como conjunto) del

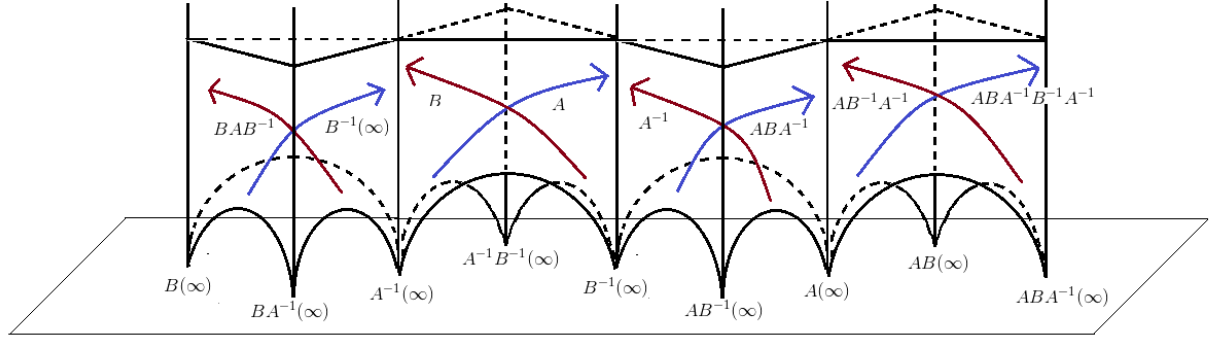


Figura 3.4: Cúspide de un tetraedro en ∞ .

segundo tetraedro (ver Figura 3.5 y contar de izquierda a derecha). Por lo tanto, al fijarnos en los cuatro triángulos que aparecen en la cúspide, tenemos que el cuarto triángulo es una traslación por uno del segundo, y el tercero es una traslación por uno del primero.

Observación 3.17. Con A y B como antes,

$$ABR_\pi = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = T_1, \quad \text{donde} \quad R_\pi = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{z} \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

es la involución hiperelíptica del cuadrilátero plegado $(-\frac{y}{xz}, 0, \frac{x}{yz}, \infty)$, la cual se corresponde con la rotación por π en T^* alrededor de su ponchadura. Además, R_π es una isometría de $\mathbb{H}^3/\langle A, B \rangle$.

Demostración. Para la igualdad $ABR_\pi = T_1$, basta hacer el cálculo con A, B y R_π como arriba. Luego, consideremos la transformación de Möbius \widehat{R}_π (ver (3.4)) y los vértices del toro ponchado como en la Figura 1.2, y notemos que

$$\widehat{R}_\pi(\infty) = 0, \quad \widehat{R}_\pi\left(\frac{x}{yz}\right) = -\frac{y}{xz}, \quad \widehat{R}_\pi(0) = \infty \quad \text{y} \quad \widehat{R}_\pi\left(-\frac{y}{xz}\right) = \frac{x}{yz};$$

es decir, R_π es la rotación que se quiere probar. Finalmente, para probar que R_π es una isometría de $\mathbb{H}^3/\langle A, B \rangle$, basta observar que $R_\pi A R_\pi^{-1} = A^{-1}$ y $R_\pi B R_\pi^{-1} = B^{-1}$, es decir, $R_\pi \Gamma_1 R_\pi^{-1} = \Gamma_1$ donde $\Gamma_1 = \langle A, B \rangle$. \square

Cabe resaltar que aunque la Observación 3.16 se prueba en la Figura 3.5, también se deduce directamente de la igualdad $ABR_\pi = T_1$ de la Observación 3.17, ya que R_π deja invariante al tetraedro de la Figura 3.3.

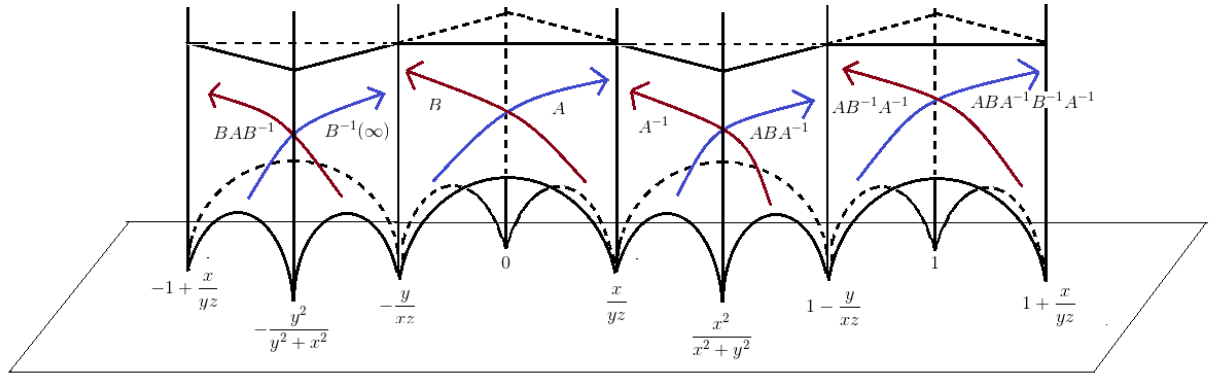


Figura 3.5: Cúspide de un tetraedro en ∞ ; cálculo de vértices.

Finalmente, observemos que todo conjunto de la forma $\{(z, c') \in \mathbb{H}^3 : z \in \mathbb{C}\}$, con $c' > 0$ constante suficientemente grande, intersecta a un tetraedro ideal (donde un vértice es ∞) en un triángulo euclidiano. Más aún, al identificar los cuatro vértices como un sólo punto al infinito, obtenemos cuatro triángulos (ver Figura 3.5), los cuales serán de gran importancia en nuestro trabajo.

Capítulo 4

Transformaciones de Möbius: Cálculo elemental de toros cuspidales

En este capítulo presentaremos un algoritmo para calcular los toros cuspidales de las variedades M_φ en cuestión (ver Sección 4.3). Aunque el algoritmo que presentaremos en el siguiente capítulo es más sencillo de implementar, decidimos este orden ya que el que presentamos aquí, se justifica de manera más sencilla mediante álgebra elemental y trigonometría elemental, lo cual no hemos visto en otros trabajos relacionados a mi Problema.

4.1. Construcción de una descomposición por tetraedros de M_φ

Existe una descomposición de las 3-variedades M_φ en tetraedros hiperbólicos ideales (y por lo tanto, una descomposición de los toros cuspidales en triángulos) la cual se le atribuye a Jørgensen (ver [7]), y nos ayuda a traducir mi Problema en encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones trigonométricas.

4.1.1. Topología

Recordemos que en la demostración de la Proposición 3.9, a partir de un homeomorfismo $\varphi \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, obtuvimos n triángulos de Farey a los cuales denotamos por T_0, T_1, \dots, T_{n-1} (ver (3.11)). Cada uno de estos triángulos se corresponde con un toro con una diagonal marcada, el cual está dado por las pendientes que corresponden a los tres números racionales que se encuentran en los vértices de dicho triángulo de Farey (con sus respectivas identificaciones). Ahora, notemos que cualesquiera dos triángulos de

Farey consecutivos T_i, T_{i+1} tienen en común una arista, y por lo tanto sus triangulaciones correspondientes sólo tendrán una pendiente distinta. De hecho, si T_i tiene vértices de la forma $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ y $\frac{p-r}{q-s}$, donde los primeros dos vértices son los que comparte con T_{i+1} , entonces el otro vértice de T_{i+1} será $\frac{p+r}{q+s}$ (ver Observación 3.5). Esto último nos dice que si a T_i le corresponde un toro con una diagonal marcada (dado al hacer los pegados correspondientes en el cuadrilátero truncado, que está acotado por dos rectas con pendiente $\frac{p}{q}$ y dos rectas con pendiente $\frac{r}{s}$, y además tiene una diagonal con pendiente $\frac{p-r}{q-s}$), entonces a T_{i+1} le corresponde el mismo toro pero con su otra diagonal marcada (recta con pendiente $\frac{p+r}{q+s}$). Por lo tanto, a cada pareja de triángulos de Farey consecutivos T_i, T_{i+1} , le asociamos un tetraedro con ciertas aristas identificadas, que se obtienen al sobreponer ambos cuadriláteros (con sus identificaciones marcadas) únicamente por sus aristas en común (su contorno), como lo podemos ver en la Figura 4.1. Luego, notemos que el tetraedro correspondiente a T_{i+1} y T_{i+2} tendrá en común dos caras con el tetraedro correspondiente a T_i y T_{i+1} , las cuales son los dos triángulos que se forman en el toro ponchado plegado correspondiente a T_{i+1} . Al pegar de esta forma todos los tetraedros construidos, basta pegar las dos caras restantes del primer tetraedro con las dos caras restantes del último tetraedro mediante $\widehat{\varphi}$ (notemos además en la Proposición 3.9, que $\widehat{\varphi}(T_0) = T_n$), para obtener M_φ , lo cual probaremos más adelante en la Proposición 4.2.

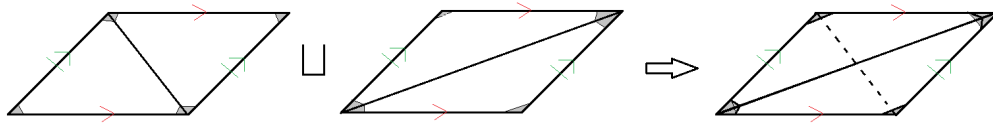


Figura 4.1: Tetraedro truncado formado por dos cuadriláteros truncados.

4.1.2. Geometría

Varios autores ([30], [1], [11], [10]) han observado que esta triangulación se puede realizar geoméricamente por tetraedros hiperbólicos ideales identificados, como los usados en la Sección 3.6. En concreto, cada pareja de triángulos de Farey consecutivos T_i y T_{i+1} coinciden en una arista, y por lo tanto determinan tres matrices correspondientes a las clases de conjugación de un par de generadores de $\pi_1(T^*)$ asociados a los extremos de dicha arista (ver (3.3)) y a la clase de conjugación de una concatenación de ambos generadores: A, B y AB (ver Lema 3.14). Con dichas tres matrices obtenemos un tetraedro como en la Figura 3.3. Más aún, una pareja de dichas matrices me define un toro ponchado plegado (dos caras del tetraedro en cuestión). Luego, notemos que dos de las matrices asociadas a T_{i+1} y T_{i+2} coinciden con dos de las tres matrices asociadas a T_i y T_{i+1} , lo cual determinará el pegado entre ambos tetraedros, es decir, pegamos mediante la identidad los

toros ponchados plegados correspondientes a las dos matrices que se encuentran en ambas ternas asociadas a T_i y T_{i+1} , y a T_{i+1} y T_{i+2} .

Ahora, observemos que al intersectar esta descomposición con el toro cuspidal de M_φ , cada tetraedro hiperbólico ideal aporta cuatro triángulos euclidianos (ver Figura 3.4) y por lo tanto dicho toro cuspidal está descompuesto en $4n$ triángulos. Esta descomposición tiene las siguientes características topológicas y geométricas.

4.1.3. Características topológicas (de incidencia)

1. Consideremos una palabra $L^{m_1} R^{n_1} L^{m_2} R^{n_2} \dots L^{m_k} R^{n_k}$ conjugada a φ , y denotemos por $M = m_1 + m_2 + \dots + m_k$ y $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ (con la notación del capítulo anterior, $n = M + N$).
2. Dibujamos una franja vertical delimitada por dos rectas verticales a las cuales dividimos en N y M segmentos, respectivamente. Notemos entonces que en una recta vertical hay $N + 1$ puntos marcados (extremos de segmentos) a los cuales denotaremos por

$$p_{(1,0)}, p_{(1,1)}, p_{(1,2)}, \dots, p_{(1,n_1)}, p_{(2,1)}, p_{(2,2)}, \dots, p_{(2,n_2)}, \dots, p_{(k,1)}, p_{(k,2)}, \dots, p_{(k,n_k)}$$

y en la otra recta hay M puntos marcados a los cuales denotaremos por

$$q_{(1,0)}, q_{(1,1)}, q_{(1,2)}, \dots, q_{(1,m_1)}, q_{(2,1)}, q_{(2,2)}, \dots, q_{(2,m_2)}, \dots, q_{(k,1)}, q_{(k,2)}, \dots, q_{(k,m_k)}$$

en orden de abajo para arriba (ver Figura 4.2).

3. Primero, unimos a $p_{(1,0)}$ con $q_{(1,0)}, q_{(1,1)}, \dots, q_{(1,m_1-1)}$ y $q_{(1,m_1)}$; y a $q_{(1,m_1)}$ con $p_{(1,1)}, p_{(1,2)}, \dots, p_{(1,n_1-1)}$ y $p_{(1,n_1)}$. Luego, para cada $i \in \{2, 3, \dots, k\}$, unimos a $p_{(i-1,n_{i-1})}$ con $q_{(i,j)}$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, m_i\}$; y a $q_{(i,m_i)}$ con $p_{(i,j)}$ para $j \in \{1, 2, \dots, n_i\}$.
4. Reflejamos todos los trazos anteriores respecto a la recta vertical derecha y obtenemos dos franjas trianguladas. Después reflejamos las dos franjas obtenidas respecto a la nueva recta vertical derecha para obtener cuatro franjas trianguladas. De esta manera obtendremos $4(N + M)$ triángulos ($N + M$ en cada una de las cuatro franjas).
5. Numeramos los triángulos de cada franja como sigue: ponemos un 1 en el primer o segundo triángulo de la parte inferior de cada franja (según se a el caso), como se muestra en la Figura 4.2, y luego numeramos cada franja (de abajo hacia arriba) en orden $1, 2, \dots, N + M$. Notemos que los triángulos de hasta arriba de la segunda y cuarta franja tendrán la etiqueta $N + M - 1$, así que finalmente pondremos la etiqueta $N + M$ en los triángulos de hasta abajo de dichas franjas. De tal manera, para cada $i \in \{1, 2, \dots, N + M\}$, hay cuatro triángulos con esa etiqueta, los cuales son los triángulos correspondientes a un tetraedro ideal.

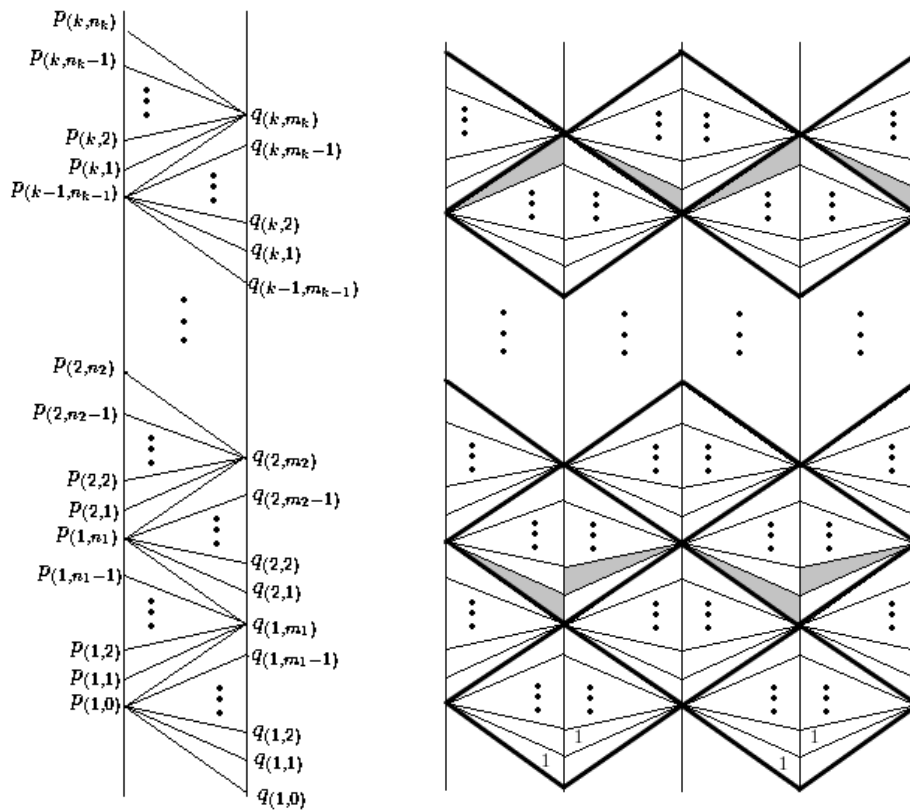


Figura 4.2

4.1.4. Características geométricas

1. Los triángulos son euclidianos; la suma de los ángulos de todo triángulo es π (ver Figura 3.3, recordando que toda superficie a altura constante hereda una métrica euclidiana).
2. No hay puntos cónicos; la suma de los ángulos alrededor de un vértice es 2π . Esto es necesario para que al rededor de cada arista, haya geometría hiperbólica.
3. Los cuatro triángulos asociados a un tetraedro ideal (triángulos con la misma etiqueta; por ejemplo, ver los triángulos sombreados en la Figura 4.2), deben ser semejantes. Esto se debe a que los ángulos diédricos de aristas opuestas en un tetraedro ideal son iguales, ya que dados cualesquiera cuatro puntos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$, las permutaciones de subíndices (12)(34), (13)(24) y (14)(23) se pueden realizar por

transformaciones de Möbius (ver Sección 2.5 de [15]). Así, los ángulos de dichos cuatro triángulos, se verán como los de la Figura 4.3.

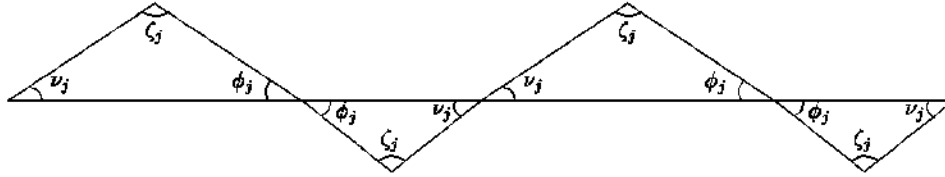


Figura 4.3: Ángulos de los cuatro triángulos que aporta el tetraedro j -ésimo a la cúspide.

4. En cada conjunto de cuatro triángulos con la misma etiqueta, el triángulo de la primer franja es congruente con su respectivo de la tercer franja, mientras que el de la segunda franja es congruente con el de la cuarta. Este hecho es consecuencia directa de la Observación 3.16 y la Figura 3.5. Esta congruencia de triángulos se traduce en una traslación $z + 1$ la cual manda todos los triángulos de la primer franja en todos los triángulos de la tercer franja, y por lo tanto los de la segunda en los de la cuarta.

5. La descomposición por triángulos es invariante bajo dos traslaciones $z \mapsto z + a$ y $z \mapsto z + 1$, (con $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$). Un representante del toro cuspidal se puede visualizar como la clase de homotecia del cociente $\mathbb{C}/\langle 2, a \rangle$. En concreto, en el caso $\widehat{\varphi} = L^{m_1} R^{n_1} L^{m_2} R^{n_2} \dots L^{m_k} R^{n_k}$, tenemos que $a = p_{(k, n_k)} - p_{(1, 0)}$ y en el caso $-\widehat{\varphi}$, tenemos que $a = p_{(k, n_k)} - p_{(1, 0)} + 1$. Veamos que esto último es una consecuencia de la Observación 3.17. En efecto, φ es un homeomorfismo de T^* mediante el cual se pegarán dos de las caras del primer tetraedro (las cuales forman un toro ponchado plegado) con dos de las caras del último tetraedro de la construcción (las cuales forman otro toro ponchado plegado). Luego, como vimos en la Observación 3.17, R_π se corresponde con la rotación por π en T^* alrededor de su ponchadura, lo cual es equivalente a pensar en $-Id_{T^*}$, y por lo tanto, $-\varphi$ hará lo que hacía φ seguido de R_π . Esto, a nivel de la cúspide, se traduce en la traslación por uno que se prueba en la Observación 3.17 y se explica en la Figura 3.5.

4.2. Reescritura de mi problema y algunos ejemplos

Dada una palabra $\pm L^{m_1} R^{n_1} L^{m_2} R^{n_2} \dots L^{m_k} R^{n_k}$, existe una única descomposición por tetraedros de su respectiva 3-variedad, que cumple las características topológicas y geométricas anteriores (ver [31]). Por lo tanto, podemos reducir mi Problema de la siguiente forma.

Reducción de Mi Problema: *Dada una palabra $\pm L^{m_1} R^{n_1} L^{m_2} R^{n_2} \dots L^{m_k} R^{n_k}$, mi problema consiste en encontrar una descomposición por triángulos del toro cuspidal que cumpla las características topológicas y geométricas de la sección anterior. El toro cuspidal estará dado por la retícula $\langle 2, a \rangle$ (ver Característica geométrica 5).*

Notemos que al resolver este problema, no sólo encontramos los toros cuspidales, sino que podemos construir la descomposición por tetraedros ideales de M_φ a partir de la descomposición por triángulos del toro cuspidal, y por lo tanto la geometría de la 3-variedad hiperbólica. Esto es importante pues los resultados conocidos solamente establecen la existencia de la realización geométrica de M_φ , sin construirla explícitamente. Por ejemplo, Guéritaud [11] usa la existencia de un máximo para una función cóncava (que resulta ser la función volumen).

Proposición 4.1. *Si el toro cuspidal de M_φ con $\varphi = \pm L^{m_1} R^{n_1} L^{m_2} R^{n_2} \dots L^{m_k} R^{n_k}$ tiene asociada la retícula $\langle 2, x + iy \rangle$, entonces a los toros cuspidales de $M_{\varphi^{-1}}$ y M_ψ , con $\psi = \pm L^{n_1} R^{m_2} L^{n_2} \dots R^{m_k} L^{n_k} R^{m_1}$, se les asocia la retícula $\langle 2, -x + iy \rangle$.*

Demostración. Comenzaremos con el toro cuspidal de M_ψ . Para esto, consideremos la triangulación geométrica del toro cuspidal de M_φ con φ como en el enunciado y llamémosla \mathcal{T} . Luego, consideremos la triangulación formada por hacer una reflexión de \mathcal{T} respecto una recta vertical (ver segunda triangulación de la Figura 4.4). Notemos que esta nueva triangulación no es la de M_φ , ya que el triángulo de la primer franja es semejante con el triángulo de abajo de su reflejado en la segunda franja, en lugar de ser semejante con el triángulo de arriba de su reflejado en la segunda franja. Sin embargo, por la Característica geométrica 5, tenemos dos traslaciones: una “vertical” y una horizontal. Así, podemos cortar la primer franja y pegársela a la cuarta franja mediante la traslación horizontal (como lo muestra la tercer triangulación de la Figura 4.4, de tal manera que la segunda franja se convierta en la primera, la tercera en la segunda, la cuarta en la tercera y la primera en la cuarta), y luego cortar los m_1 triángulos de hasta abajo, junto con sus reflejados en las otras tres franjas, y pegarlos hasta arriba mediante la traslación vertical (como lo muestra la cuarta triangulación de la Figura 4.4). Con esto, obtenemos una triangulación con todas las características topológicas y geométricas de M_ψ con ψ como en el enunciado.

Ahora, para el caso $M_{\varphi^{-1}}$, basta hacer una reflexión de \mathcal{T} respecto una recta horizontal, y luego cortar la primer franja y pegársela a la cuarta franja mediante la traslación hori-

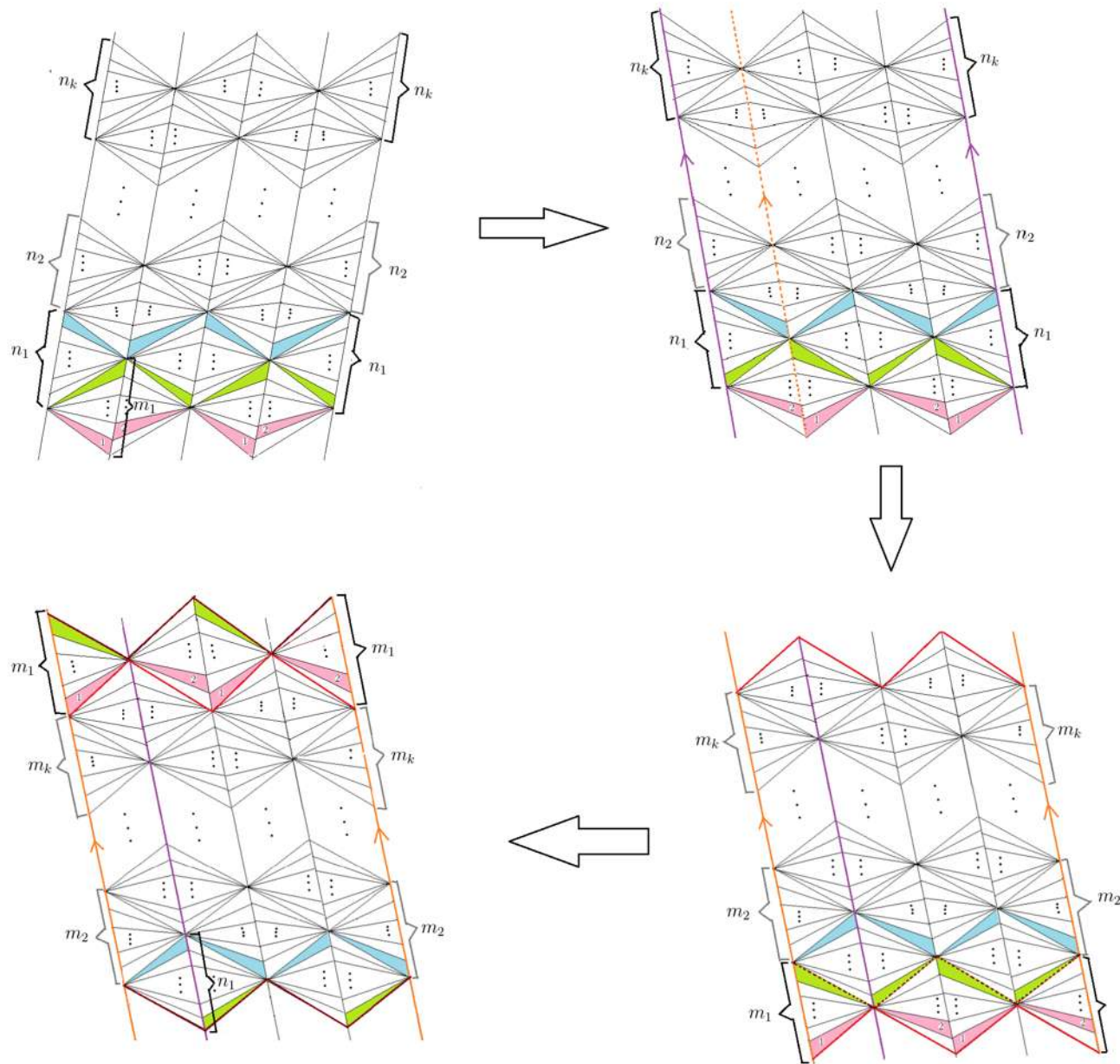


Figura 4.4

zonal, de manera análoga al caso de M_ψ . Así, obtenemos nuevamente una triangulación con todas las características topológicas y geométricas de $M_{\varphi^{-1}}$, con φ^{-1} como en el Lema 3.10. \square

Con lo anterior, concluimos que a dos palabras distintas se les puede asociar el mismo toro cuspidal. Por ejemplo, en la Proposición 4.1, podemos ver que el toro cuspidal de la variedad $M_{\varphi^{-1}}$ coincide con el toro cuspidal de la variedad M_ψ , (donde φ y ψ están definidas en la misma proposición). Aunque no hemos probado ningún resultado que nos diga que M_ψ y $M_{\varphi^{-1}}$ sean variedades distintas (módulo isometría), resulta que dos variedades no isométricas sí pueden tener el mismo toro cuspidal, como lo veremos más adelante en el segundo punto de Observaciones 4.4.

Por otro lado, notemos que a partir de la Observación 3.8, concluimos que M_φ y $M_{\varphi^{-1}}$ son variedades isométricas (Teorema de Rigidez de Mostow), y por lo tanto, uno podría pensar que el toro cuspidal de ambas variedades debería ser el mismo, lo cual contradice la Proposición 4.1. Lo que sucede en este caso es que podemos obtener dos variedades isométricas mediante una isometría que invierte orientación, y por lo tanto, sus respectivos toros cuspidales también serían isométricos mediante una isometría que invierte orientación, es decir, sus toros cuspidales serían distintos puntos en el móduli de toros (ver una región fundamental en la Figura 2.2).

Para lo siguiente, consideraremos la notación de ángulos de la Figura 4.3. Más aún, en la Figura 4.2 hay cuatro posibles acomodos de triángulos, los cuales presentamos en la Figura 4.5, cada uno con su respectiva notación.

Proposición 4.2. *La variedad obtenida al pegar tetraedros como se muestra en la Subsección 4.1.1, está fibrada por toros ponchados.*

Notemos que con esta proposición, se prueba que la 3-variedad resultante es la 3-variedad M_φ en cuestión.

Demostración. Primero notemos que cada uno de dichos tetraedros está foliado por toros ponchados. En efecto, todos los cuadriláteros con los cuales se forman los toros ponchados al hacer el respectivo cociente, tienen en común cuatro de las seis aristas del tetraedro (ver aristas azules de la Figura 4.6). Las otras dos aristas son los pliegues de los dos toros plegados que se encuentran en la frontera de dicho tetraedro (ver arista roja en el primer tetraedro y arista verde en el tercer tetraedro de la Figura 4.6). Además, cualquier otro cuadrilátero se ve como el del tetraedro de en medio de la Figura 4.6.

Luego, veamos que al estar foliado cada tetraedro, podemos fibrar toda la 3-variedad. Para esto veamos que alrededor de cualquier arista; es decir, donde están las singularidades, podemos deshacer dicha singularidad. Para deshacerla, basta considerar su intersección con el toro cuspidal, ya que la foliación en una vecindad tubular de una arista se ve como una extensión de la foliación en el toro cuspidal mediante un producto. En efecto,

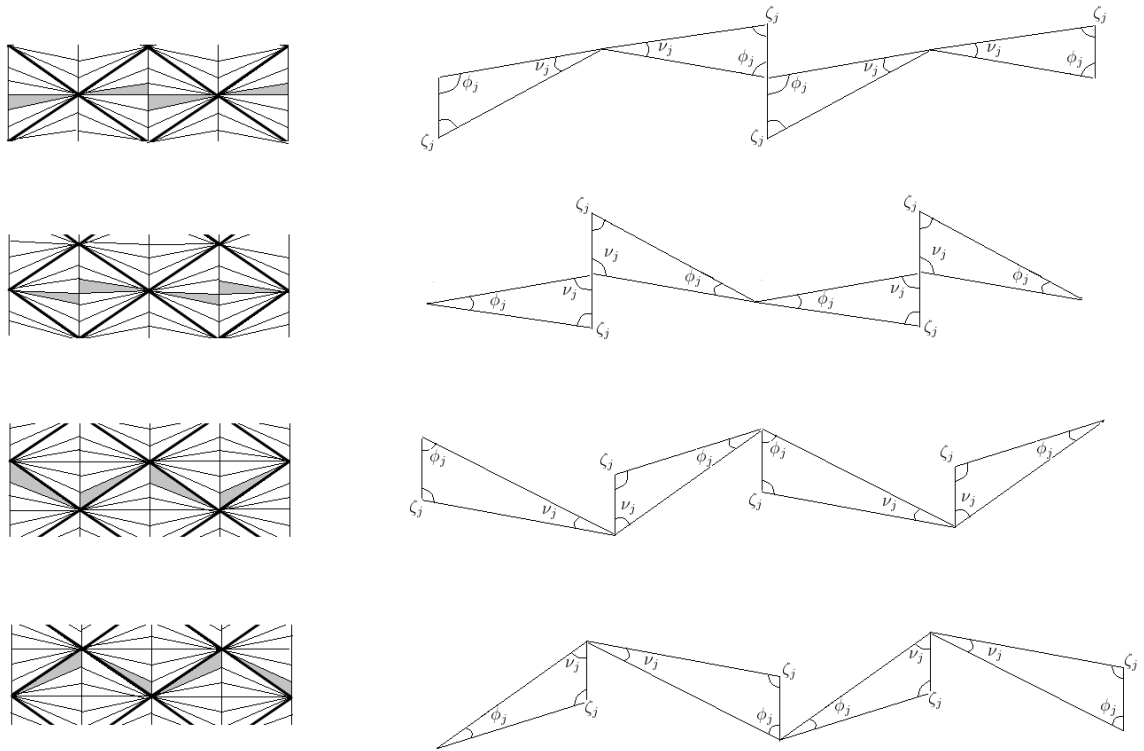


Figura 4.5: Notación para los ángulos del j -ésimo tetraedro (caso por caso).

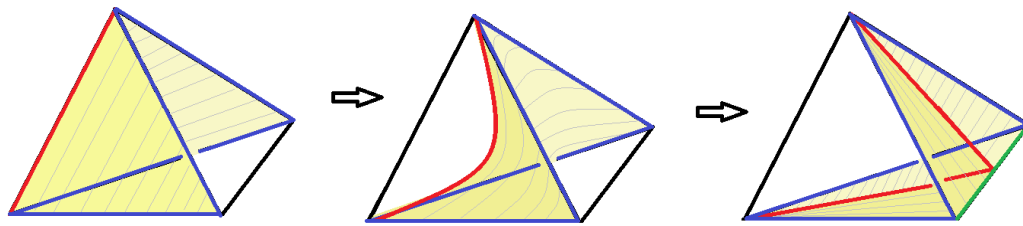


Figura 4.6: Foliación de un tetraedro por toros.

con la notación de la Figura 4.5, podemos notar que en la triangulación del toro cuspidal, todo vértice tiene exactamente dos ángulos adyacentes ζ_i y ζ_j , los cuales corresponden a los pliegues de los dos toros plegados que se encuentran en la frontera de un tetraedro; y el resto de los ángulos son o bien todos de la forma ν_k o bien todos de la forma ϕ_k (escritos por parejas), variando k . En cualquiera de los dos casos, estos últimos corresponden

a los ángulos de las aristas que tienen en común todos los toros dentro de un tetraedro (ver Figura 4.7). Después, notemos que la foliación en un ángulo ν_k o ϕ_k se ve como un libro abierto (ver Figura 4.8(a)), mientras que la foliación en un ángulo ζ_i se ve como en la Figura 4.8(b), y por lo tanto, podemos suavizar para obtener una foliación como en la Figura 4.9. \square

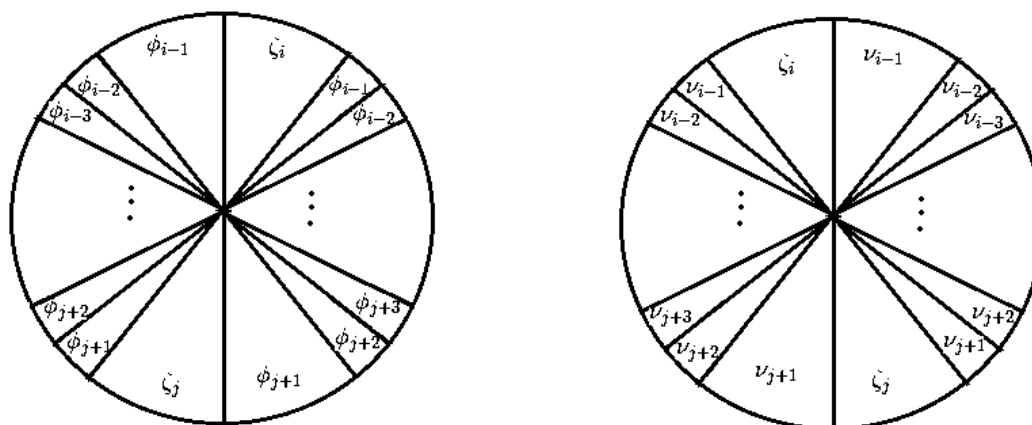
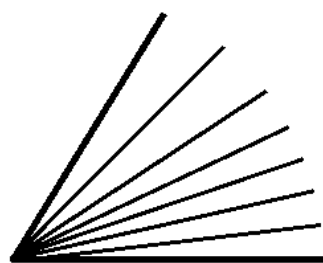


Figura 4.7: Ángulos adyacentes a un vértice.

Ejemplos 4.3.



(a) En un ángulo ζ_k .



(b) En un ángulo ν_k o ϕ_k

Figura 4.8

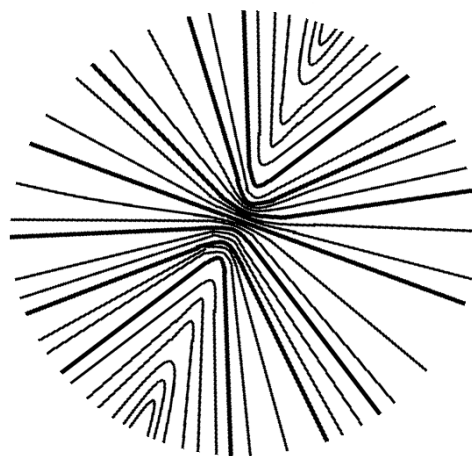


Figura 4.9: Foliación suave al rededor de un vértice.

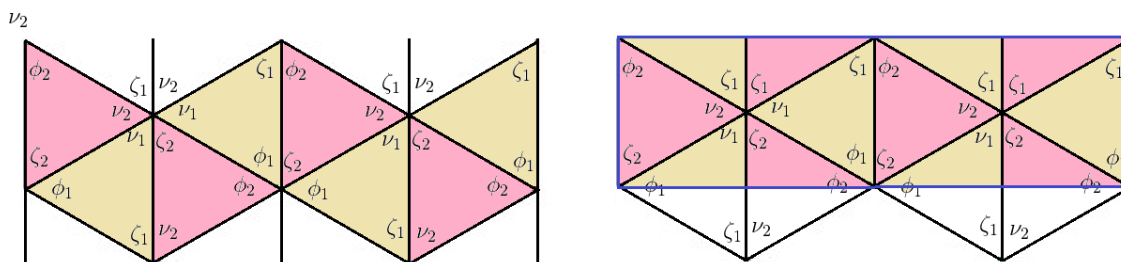


Figura 4.10: Toro cuspidal asociado a LR .

1. Los toros cuspidales asociados a los homomorfismos LR y $L^2 R^2$ son muy sencillos de resolver usando las características topológicas y geométricas, ya que al proponer los cuatro triángulos asociados a cada tetraedro congruentes entre sí (en otros casos, sólo son semejantes), obtenemos una solución. En efecto, en el primer caso, obtenemos un toro cuspidal formado por 8 triángulos equiláteros (ver Figura 4.10) y la retícula de dicho toro es $\langle 2, \frac{i}{\sqrt{3}} \rangle$ (notemos que su representante en la región fundamental presentada en la Figura 2.2 es $2\sqrt{3}i$ ya que $\langle 2, \frac{i}{\sqrt{3}} \rangle = \langle 1, 2\sqrt{3}i \rangle$, módulo multiplicación por un escalar complejo). Además, M_φ es una variedad bien conocida: el complemento del Nudo Figura-8 (ver capítulo 8 de [8]). En el segundo caso, obtenemos un toro cuspidal formado por 16 triángulos rectángulos isósceles (ver Figura 4.11), el cual tiene como retícula a $\langle 2, i \rangle$ (notemos aquí, que $2i$ es su representante en la región fundamental de la Figura 2.2, ya que $\langle 2, i \rangle = \langle 1, 2i \rangle$,

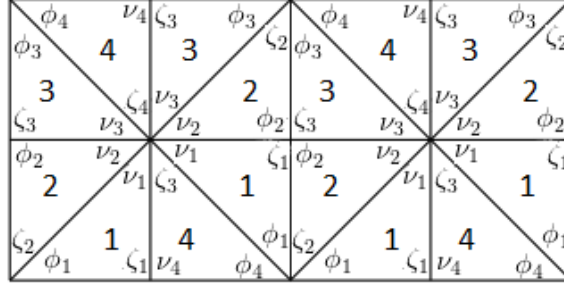


Figura 4.11: Toro cuspidal asociado a $L^2 R^2$.

nuevamente, módulo multiplicación por un escalar complejo).

2. Un caso un poco más complicado, donde los triángulos de cada tetraedro no son congruentes, es el correspondiente al difeomorfismo LR^2 (para lo siguiente, consideremos la Figura 4.12(a)). En efecto, por un lado tenemos tres ecuaciones que resultan de las tres distintas sumas de ángulos en cada triángulo

$$\phi_i + \nu_i + \zeta_i = \pi \quad \text{para } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Luego, puesto que la suma de los ángulos alrededor de cada vértice es 2π , tenemos las ecuaciones

$$2\nu_1 + 2\nu_2 + 2\nu_3 + \zeta_1 + \zeta_3 = 2\pi, \quad 2\phi_1 + 2\phi_3 + 2\zeta_2 = 2\pi \quad \text{y} \quad 2\phi_2 + \zeta_1 + \zeta_3 = 2\pi.$$

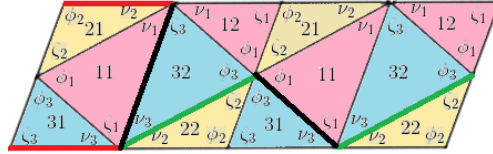
Al considerar la traslación vertical de la Característica geométrica 5 y la traslación horizontal de la Característica geométrica 4, obtenemos que los dos segmentos verdes de la Figura 4.12(a) son paralelos, al igual que los dos segmentos rojos de la misma figura. Por lo tanto, obtenemos las ecuaciones

$$\zeta_2 + \phi_3 = \zeta_1 + \nu_3 \quad \text{y} \quad \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \zeta_1 = \pi.$$

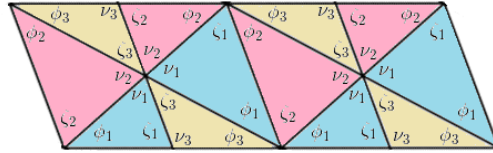
Resolviendo el sistema de las ocho ecuaciones anteriores, podemos escribir a todas las variables en función de ϕ_1 y ϕ_2 como sigue:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_1, & \phi_2 &= \phi_2, & \phi_3 &= \phi_1, \\ \nu_1 &= \phi_2 - \phi_1, & \nu_2 &= 2\phi_1 - \phi_2, & \nu_3 &= \phi_2 - \phi_1, \\ \zeta_1 &= \pi - \phi_2, & \zeta_2 &= \pi - 2\phi_1, & \zeta_3 &= \pi - \phi_2. \end{aligned}$$

De lo anterior, tenemos que $\phi_3 + \phi_1 + \zeta_2 = \pi$. Luego, además de que los dos segmentos rojos son paralelos, también tienen la misma longitud. Entonces, la unión



(a) Toro cuspidal asociado a LR^2 .



(b) Toro cuspidal asociado a L^2R .

Figura 4.12

de los triángulos 31, 11 y 21 forman un paralelogramo, y por lo tanto $v_2 + v_1 = \zeta_3$. Al sustituir los valores de v_2 , v_1 y ζ_3 en función de ϕ_1 y ϕ_2 en la última ecuación, obtenemos que $\phi_1 = \pi - \phi_2$, y así, podemos escribir a todas las variables en función de ϕ_2 como sigue:

$$\begin{array}{lll}
 \phi_1 = \pi - \phi_2, & \phi_2 = \phi_2, & \phi_3 = \pi - \phi_2, \\
 v_1 = 2\phi_2 - \pi, & v_2 = 2\pi - 3\phi_2, & v_3 = 2\phi_2 - \pi, \\
 \zeta_1 = \pi - \phi_2, & \zeta_2 = 2\phi_2 - \pi, & \zeta_3 = \pi - \phi_2.
 \end{array}$$

Por otro lado, notemos que los triángulos $i1$ e $i2$ corresponden al i -ésimo tetraedro de la construcción, y por lo tanto son semejantes. Luego, denotamos por \overline{rs}_{ij} al lado del triángulo ij cuyos vértices corresponden a los ángulos r_i y s_i . Con la notación anterior, y usando Ley de senos en los triángulos que comparten un vértice con

valencia mínima (por simplicidad), tenemos que

$$\begin{aligned}
\overline{\phi v_{21}} &= \frac{\sin \zeta_2}{\sin v_2} \overline{\phi \zeta_{21}} = \frac{\sin \zeta_2}{\sin v_2} \overline{\zeta \phi_{12}} \\
&= \frac{\sin \zeta_2}{\sin v_2} \frac{\sin v_1}{\sin \phi_1} \overline{\zeta v_{12}} = \frac{\sin \zeta_2}{\sin v_2} \frac{\sin v_1}{\sin \phi_1} \overline{\phi v_{22}} \\
&= \frac{\sin^2 \zeta_2}{\sin^2 v_2} \frac{\sin v_1}{\sin \phi_1} \overline{\phi \zeta_{22}} = \frac{\sin^2 \zeta_2}{\sin^2 v_2} \frac{\sin v_1}{\sin \phi_1} \overline{\zeta \phi_{31}} \\
&= \frac{\sin^2 \zeta_2}{\sin^2 v_2} \frac{\sin v_1}{\sin \phi_1} \frac{\sin v_3}{\sin \phi_3} \overline{\zeta v_{31}} = \frac{\sin^2 \zeta_2}{\sin^2 v_2} \frac{\sin v_1}{\sin \phi_1} \frac{\sin v_3}{\sin \phi_3} \overline{\phi v_{21}},
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$1 = \frac{\sin^2 \zeta_2}{\sin^2 v_2} \frac{\sin v_1}{\sin \phi_1} \frac{\sin v_3}{\sin \phi_3} = \frac{\sin^4(2\phi_2 - \pi)}{\sin^2(2\pi - 3\phi_2) \sin^2(\pi - \phi_2)},$$

de lo que podemos concluir que $\tan^2 \phi_2 = 7$. Con esto último, encontramos todos los ángulos ϕ_i , v_i y ζ_i y por lo tanto obtenemos su toro cuspidal formado por 12 triángulos, cuya retícula es $\langle 2, \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{4} \rangle$ (notemos nuevamente, que su representante en la región de la Figura 2.2 es $\sqrt{7}i$).

Observaciones 4.4. Para las siguientes observaciones, consideraremos las retículas asociadas a toros cuspidales $\langle 2, z \rangle$, las cuales fueron obtenidas mediante la descomposición estudiada.

1. Si $\langle 2, z \rangle$ es la retícula asociada al toro cuspidal correspondiente al difeomorfismo $\pm L^{m_1} R^{n_1} L^{m_2} R^{n_2} \dots L^{m_k} R^{n_k}$, entonces la retícula asociada al toro cuspidal correspondiente al difeomorfismo

$$\pm L^{m_1} R^{n_1} L^{m_2} R^{n_2} \dots L^{m_k} R^{n_k} L^{m_1} R^{n_1} L^{m_2} R^{n_2} \dots L^{m_k} R^{n_k} \quad (4.1)$$

es $\langle 2, 2z \rangle$. Más general, $\langle 2, nz \rangle$ es la retícula asociada al toro cuspidal correspondiente a la palabra repetida n veces. Con esto y los ejemplos anteriores, obtenemos una infinidad de ejemplos de toros cuspidales.

En efecto, puesto que el plano euclidiano es cubierta del toro plano, tenemos que una descomposición por triángulos del toro debe subir a una triangulación del plano. Por lo tanto, la triangulación del plano referente a una palabra coincide con la triangulación del plano correspondiente a dicha palabra repetida n veces.

2. *Un toro puede aparecer como cúspide de dos 3-variedades M_{φ_1} y M_{φ_2} no isométricas, incluso con palabras correspondientes a φ_1 y φ_2 , de distinta longitud.*

Como vimos en Ejemplos 4.3, al difeomorfismo $\varphi = L^2R^2$ le corresponde el toro con retícula $\langle 2, i \rangle$. Luego, por la observación anterior, tenemos que al difeomorfismo $\varphi^4 = (L^2R^2)^4$ le corresponde el toro con retícula $\langle 2, 4i \rangle$. Ambas retículas representan la misma clase de homotecia del toro plano, pero las variedades M_φ y M_{φ^4} no son isométricas, ya que por el punto anterior, el volumen de M_{φ^4} es 4 veces el volumen de M_φ .

Notemos que el resto de los ejemplos son más complicados de resolver únicamente con las características topológicas y geométricas de la descomposición por triángulos. En general, usando este método para una variedad cuyo difeomorfismo asociado es una palabra de longitud $N + M$, tenemos $3(N + M)$ variables (ángulos), y $2(N + M)$ ecuaciones lineales que se obtienen de manera sencilla de las primeras dos características geométricas (la descomposición por triángulos tiene $N + M$ triángulos, salvo semejanza, y $N + M$ vértices descritos de manera distinta combinatoriamente). Luego, tenemos 2 ecuaciones (ya no tan fáciles de obtener) al suponer las dos traslaciones que forman el toro cuspidal. Finalmente, por experiencia, podemos obtener $N + M$ ecuaciones trigonométricas (nuevamente, una por cada vértice, como en el ejemplo LR^2), las cuales forman un sistema complicado de resolver, incluso para una computadora. Por lo anterior, no es viable continuar con este método.

4.3. Un algoritmo elemental con transformaciones de Möbius

Consideremos el homeomorfismo $\pm L^{m_1} R^{n_1} L^{m_2} R^{n_2} \dots L^{m_k} R^{n_k}$ y la descomposición por triángulos del toro cuspidal de su 3-variedad correspondiente. A continuación, presentaremos un algoritmo para obtener dicha descomposición en términos de la solución de un sistema de dos ecuaciones.

1. *Dividimos dicha descomposición en dos copias de $2k$ cuadriláteros como se muestran en la Figura 4.2 (ver cuadriláteros remarcados). A cada elemento L^{m_i} o R^{n_i} , le corresponde de manera natural dos de estos cuadriláteros, los cuales deben ser congruentes gracias a la Característica geométrica 4 de la descomposición del toro cuspidal.*
2. *Todos los cuadriláteros tienen una diagonal paralela al eje real y de longitud 1. Esto también se debe a la Característica geométrica 4 de la descomposición del toro cuspidal.*
3. *Notación para cada cuadrilátero con pestañas.*

Para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, consideremos la sucesión de números complejos $(Q_{(i,j)})_{j=0}^{m_i+1}$

de manera que al trazar los segmentos entre $Q_{(i,j)}$ y $Q_{(i,j+1)}$, para $j \in \{0, 1, 2, \dots, m_i\}$; entre cada $Q_{(i,j)}$ y $\frac{1}{2}$, para $j \in \{0, 1, 2, \dots, m_i + 1\}$; y entre cada $Q_{(i,j)}$ y $-\frac{1}{2}$, para $j \in \{0, 1, 2, \dots, m_i\}$, se formen los triángulos de una traslación del cuadrilátero correspondiente a la palabra L^{m_i} . De manera análoga, hacemos esto para los cuadriláteros (con pestaña) correspondientes a las palabras R^{n_i} , mediante sucesiones $(P_{(i,j)})_{j=0}^{n_i+1}$ (ver Figura 4.13).

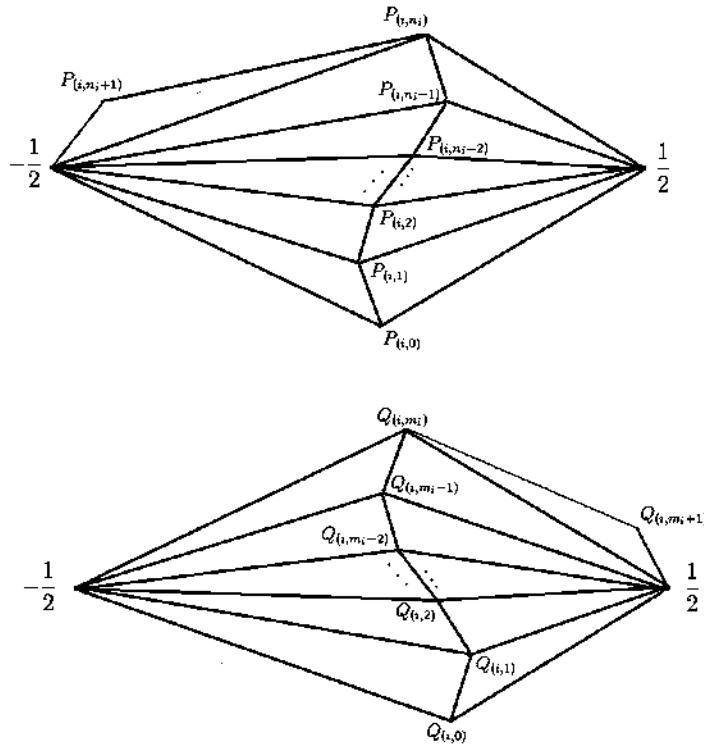


Figura 4.13

4. *Expresión recursiva a partir de los primeros dos términos de cada cuadrilátero.*
 Podemos escribir las sucesiones de manera recursiva como $Q_{(i,j)} = \widehat{f}_{a_i} \circ^j(Q_{(i,0)})$ y $P_{(i,j)} = \widehat{g}_{b_i} \circ^j(P_{(i,0)})$, donde

$$\widehat{f}_{a_i}(Q) = \frac{Q + a_i}{2Q + 1}, \quad \text{y} \quad \widehat{g}_{b_i}(P) = \frac{P - b_i}{-2P + 1}, \quad (4.2)$$

con $a_i = 2Q_{(i,1)}Q_{(i,0)} - Q_{(i,0)} + Q_{(i,1)}$ y $b_i = 2P_{(i,1)}P_{(i,0)} + P_{(i,0)} - P_{(i,1)}$.

Demostración. En los cuadriláteros correspondientes a L^{m_i} , usaremos las semejanzas de sus triángulos (ver la tercer característica geométrica de descomposición); es decir, para cada i , necesitamos que los triángulos $\Delta(-\frac{1}{2}, Q_{(i,j-1)}, Q_{(i,j)})$ y $\Delta(\frac{1}{2}, Q_{(i,j+1)}, Q_{(i,j)})$ sean semejantes. Entonces

$$Q_{(i,j+1)} = \frac{2Q_{(i,j)} + 2Q_{(i,j-1)}Q_{(i,j)} - Q_{(i,j-1)}}{2Q_{(i,j)} + 1}. \quad (4.3)$$

La ecuación (4.3) es una expresión de $Q_{(i,j+1)}$ que depende de los dos términos anteriores, pero también es posible dar una que sólo depende del término anterior y de a_i (con a_i como arriba). En efecto, probaremos por inducción sobre j que

$$Q_{(i,j+1)} = \frac{Q_{(i,j)} + a_i}{2Q_{(i,j)} + 1}. \quad (4.4)$$

B.I: Está dada por la ecuación (4.3) para $j = 0$.

H.I: Supongamos cierta la afirmación para j .

Demostración para $j + 1$: Como la ecuación (4.4) es cierta para j , podemos despejar $Q_{(i,j-1)}$ de la misma y obtener

$$Q_{(i,j-1)} = \frac{Q_{(i,j)} - a_i}{1 - 2Q_{(i,j)}},$$

la cual sustituimos en (4.3) para obtener lo que se quiere.

De manera análoga, construimos los cuadriláteros correspondientes a las palabras de la forma R^{m_i} . En este caso, para cada i , los triángulos $\Delta(-\frac{1}{2}, P_{(i,j+1)}, P_{(i,j)})$ y $\Delta(\frac{1}{2}, P_{(i,j-1)}, P_{(i,j)})$ son semejantes, y procedemos igual que en el caso anterior.

Finalmente, puesto que la ecuación (4.2) es equivalente a escribir $Q_{(i,j+1)} = \widehat{f}_{a_i}(Q_{(i,j)})$, concluimos que $Q_{(i,j)} = \widehat{f}_{a_i}^{\circ j}(Q_{(i,0)})$, y de manera análoga que $P_{(i,j)} = \widehat{g}_{b_i}^{\circ j}(P_{(i,0)})$. \square

5. Podemos escribir a $Q_{(i,j)}$ como función no recursiva de los complejos $Q_{(i,0)}$ y $Q_{(i,1)}$, y a $P_{(i,j)}$ como función no recursiva de los complejos $P_{(i,0)}$ y $P_{(i,1)}$ como sigue:

$$Q_{(i,j)} = \sqrt{\frac{a_i}{2}} \frac{\left[(1 + \sqrt{2a_i})^j + (1 - \sqrt{2a_i})^j \right] Q_{(i,0)} + \sqrt{\frac{a_i}{2}} \left[(1 + \sqrt{2a_i})^j - (1 - \sqrt{2a_i})^j \right] Q_{(i,1)}}{\left[(1 + \sqrt{2a_i})^j - (1 - \sqrt{2a_i})^j \right] Q_{(i,0)} + \sqrt{\frac{a_i}{2}} \left[(1 + \sqrt{2a_i})^j + (1 - \sqrt{2a_i})^j \right] Q_{(i,1)}}$$

$$P_{(i,j)} = \frac{\sqrt{\frac{b_i}{2}} \left[(1 - \sqrt{2b_i})^j + (1 + \sqrt{2b_i})^j \right] P_{(i,0)} + \sqrt{\frac{b_i}{2}} \left[(1 - \sqrt{2b_i})^j - (1 + \sqrt{2b_i})^j \right]}{\left[(1 - \sqrt{2b_i})^j - (1 + \sqrt{2b_i})^j \right] P_{(i,0)} + \sqrt{\frac{b_i}{2}} \left[(1 - \sqrt{2b_i})^j + (1 + \sqrt{2b_i})^j \right]}.$$

La demostración de ambas expresiones son inducciones rutinarias sobre j .

6. *Podemos escribir a cualquier elemento de cualquier cuadrilátero en función de $Q_{(1,0)}$ y $Q_{(1,1)}$.*

Para esto, basta escribir a $P_{(i,0)}$ y $P_{(i,1)}$ en función de $Q_{(i,m_i)}$ y $Q_{(i,m_i+1)}$; y a $Q_{(i+1,0)}$ y $Q_{(i+1,1)}$ en función de $P_{(i,n_i)}$ y $P_{(i,n_i+1)}$.

En efecto, observemos que para poder realizar el pegado de los cuadriláteros, necesitamos que algunas parejas de vectores coincidan (ver Figura 4.14). Primero observemos los lados de los cuadriláteros, y notemos que el vector $P_{(i,0)} + 1/2$ debe coincidir con el vector $1/2 - Q_{(i,m_i)}$ y el vector $Q_{(i+1,0)} - 1/2$ debe coincidir con el vector $-1/2 - P_{(i,n_i)}$. Por lo tanto, concluimos

$$P_{(i,0)} = -Q_{(i,m_i)} \quad \text{y} \quad Q_{(i+1,0)} = -P_{(i,n_i)}. \quad (4.5)$$

Luego, también tenemos que el resto de los vectores de las “pestañas” en la Figura 4.14 deben coincidir, es decir

$$P_{(i,1)} - P_{(i,0)} = Q_{(i,m_i+1)} - 1/2 \quad \text{y} \quad Q_{(i+1,1)} - Q_{(i+1,0)} = P_{(i,n_i+1)} + 1/2. \quad (4.6)$$

Al sustituir las ecuaciones (4.5) en las ecuaciones (4.6), obtenemos

$$P_{(i,1)} = Q_{(i,m_i+1)} - 1/2 - Q_{(i,m_i)} \quad \text{y} \quad Q_{(i+1,1)} = P_{(i,n_i+1)} + 1/2 - P_{(i,n_i)}. \quad (4.7)$$

7. Finalmente, al hacer $Q_{(k+1,0)} := Q_{(1,0)}$ y $Q_{(k+1,1)} := Q_{(1,1)}$, obtenemos el sistema de ecuaciones racionales

$$Q_{(1,0)} = -P_{(k,n_k)} \quad \text{y} \quad Q_{(1,1)} = P_{(k,n_k+1)} + 1/2 - P_{(k,n_k)},$$

que también puede ser escrito como

$$Q_{(1,0)} = -P_{(k,n_k)} \quad \text{y} \quad Q_{(1,1)} = P_{(k,n_k+1)} + 1/2 + Q_{(1,0)}.$$

Observación 4.5. *Traslación de cuadriláteros.* Con el algoritmo anterior, construimos cuadriláteros con dos vértices opuestos en $-1/2$ y $1/2$; es decir, construimos los cuadriláteros de la Figura 4.2, pero ajenos. Con lo anterior es suficiente para obtener el sistema de ecuaciones deseado, pero para conseguir la realización geométrica de la Figura 4.2

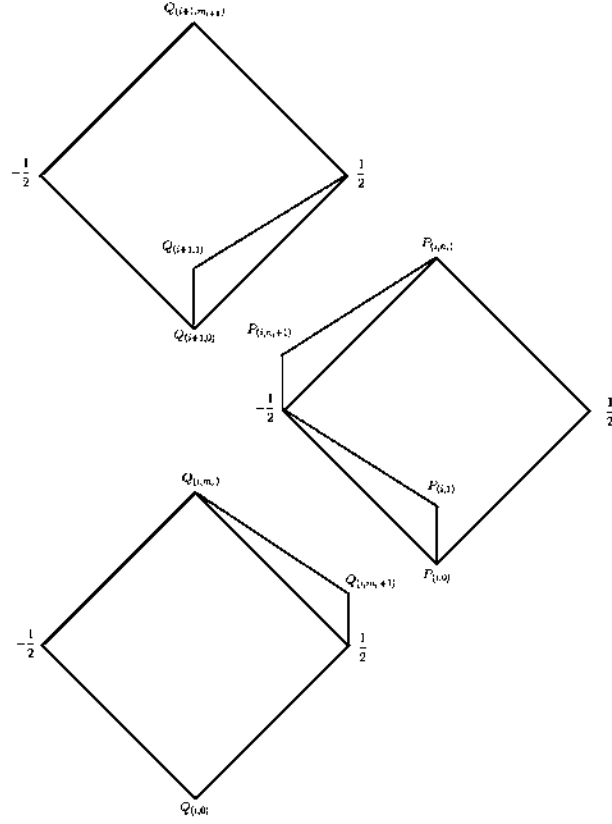


Figura 4.14

completa, basta trasladar cada cuadrilátero a su posición correcta. Para esto, denotaremos por $q_{(i,j)}$ y $p_{(i,j)}$ a los trasladados de $Q_{(i,j)}$ y $P_{(i,j)}$, respectivamente. Entonces

$$q_{(i,j)} := \begin{cases} Q_{(i,j)} & \text{si } i = 1 \text{ y } j \in \{0, 1, 2, \dots, m_1\}, \\ Q_{(i,j)} - Q_{(i,0)} + q_{(i-1, m_{i-1})} & \text{si } i \in \{2, 3, \dots, k\} \text{ y } j \in \{0, 1, 2, \dots, m_i\}, \end{cases}$$

$$p_{(i,j)} := \begin{cases} P_{(i,j)} - P_{(i,0)} - \frac{1}{2} & \text{si } i = 1 \text{ y } j \in \{0, 1, 2, \dots, n_1\}, \\ P_{(i,j)} - P_{(i,0)} + p_{(i-1, n_{i-1})} & \text{si } i \in \{2, 3, \dots, k\} \text{ y } j \in \{0, 1, 2, \dots, n_i\}. \end{cases}$$

4.4. Avances en el caso particular: $L^M R^N$

Aquí nos concentraremos en las palabras de la forma

$$L^M R^N = \begin{pmatrix} 1 & M \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + MN & M \\ N & 1 \end{pmatrix}.$$

Daremos expresiones de nuestro sistema de ecuaciones en función de nuevas variables que hablan de la geometría de la 3-variedad. Usando esto, mencionaremos algunas características geométricas de dichos toros cuspidales en este caso particular, y con ellas, mejoraremos el grado (a la mitad) de las ecuaciones del algoritmo anterior. En el caso en el que M y N son pares, daremos la expresión explícita de un sólo polinomio.

En efecto, en la sección anterior, dada la palabra $L^{m_1} R^{n_1} L^{m_2} R^{n_2} \dots L^{m_k} R^{n_k}$, obtuvimos al toro cuspidal como el pegado de $4k$ cuadriláteros; dos cuadriláteros congruentes entre sí por cada L^{m_i} , y dos cuadriláteros congruentes entre sí por cada R^{n_i} , con $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Además, cada uno de estos cuadriláteros se componían por $2m_i$ ó $2n_i$ triángulos, según sea el caso. Restringiendo el algoritmo mencionado para el caso particular $L^M R^N$, obtenemos únicamente cuatro cuadriláteros: dos correspondientes a L^M y dos correspondientes a R^N , compuestos por $2M$ y $2N$ triángulos, respectivamente. Para el resto de la sección, consideraremos la notación de la Figura 4.15, la cual se obtiene al olvidar la primer coordenada del subíndice de cada $Q_{(i,j)}$ y de cada $P_{(i,j)}$, las cuales son irrelevantes ya que sólo hay un cuadrilátero (con su copia) para cada caso. Además, también olvidaremos el subíndice i en a_i y b_i , definidas previamente.

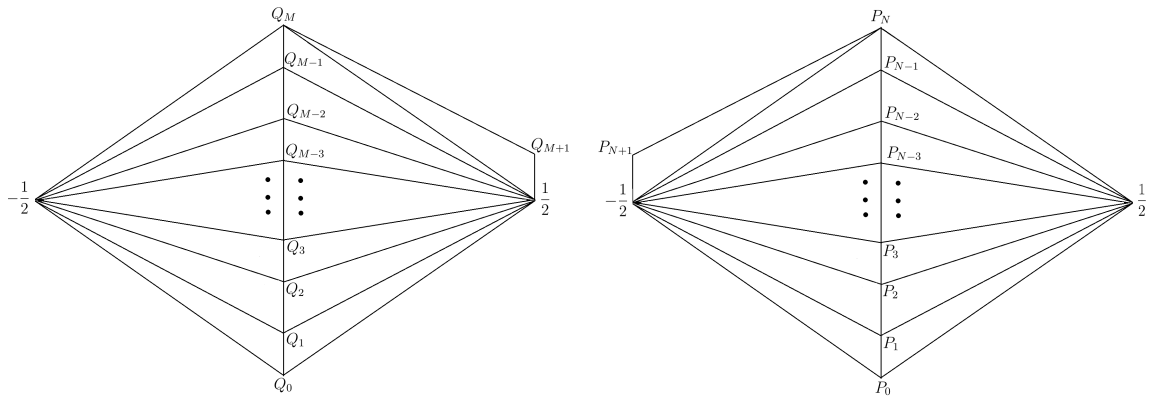


Figura 4.15

Ahora, notemos que f_a manda la geodésica dirigida que va de $-1/2$ a Q_i en la geodésica dirigida que va de ∞ a Q_{i+1} (para cualquier $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$), y de manera análoga,

tenemos que g_a manda la geodésica dirigida que va de $1/2$ a P_i en la geodésica dirigida que va de ∞ a P_{i+1} (para cualquier $i \in \{0, 1, \dots, M-1\}$). Por lo tanto, al considerar los cuadriláteros ideales plegados $(-1/2, Q_i, Q_{i+1}, \infty)$ y $(1/2, P_i, P_{i+1}, \infty)$, respectivamente, tenemos que f_a y g_b son elementos de $\pi_1(T^*)$.

De lo anterior, concluimos que

$$f_a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-2a}} & \frac{a}{\sqrt{1-2a}} \\ \frac{2}{\sqrt{1-2a}} & \frac{1}{\sqrt{1-2a}} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad g_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-2b}} & -\frac{b}{\sqrt{1-2b}} \\ -\frac{2}{\sqrt{1-2b}} & \frac{1}{\sqrt{1-2b}} \end{pmatrix}$$

son, salvo conjugación del grupo kleiniano $\pi_1(M_\varphi)$, elementos del grupo $\pi_1(M_\varphi)$. Más aún, ambas son isometrías loxodrómicas (ver Página 9) de M_φ .

Por otro lado, como toda isometría loxodrómica es conjugada a una isometría $\widehat{T}(z) = ke^{i\theta}z$ con $|k| \neq 1$, definimos la *longitud de traslación compleja* de una isometría loxodrómica \widehat{T} , como

$$\ell(\widehat{T}) = \log(k) + i\theta. \quad (4.8)$$

Es decir, $\ell(\widehat{T})$ es el único elemento de $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ que satisface que

- $\text{Re}(\ell(\widehat{T})) > 0$ es la longitud de traslación a lo largo del eje de \widehat{T} (donde el eje de \widehat{T} es la geodésica en \mathbb{H}^3 que conecta sus dos puntos fijos) e,
- $\text{Im}(\ell(\widehat{T}))$ es el ángulo de rotación de \widehat{T} a lo largo del eje de \widehat{T} .

Luego, usando (4.8), tenemos que

$$\begin{aligned} 2 \cosh\left(\frac{\ell(\widehat{T})}{2}\right) &= e^{\ell(\widehat{T})/2} + e^{-\ell(\widehat{T})/2} = e^{\log(\sqrt{k})} e^{i\theta/2} + e^{\log(1/\sqrt{k})} e^{-i\theta/2} \\ &= \sqrt{k} e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2} / \sqrt{k} = \pm \text{tr}(T), \end{aligned}$$

es decir, $\ell(\widehat{T}) \in \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ está caracterizado por

$$\pm \text{tr}(T) = 2 \cosh\left(\frac{\ell(\widehat{T})}{2}\right), \quad \text{con } \text{Re}(\ell(\widehat{T})) > 0. \quad (4.9)$$

Por simplicidad de notación, denotaremos por ℓ_f y ℓ_g , a $\ell(\widehat{f}_a)$ y $\ell(\widehat{g}_b)$, respectivamente. Así, al considerar la ecuación (4.9) para la isometría \widehat{f}_a y la misma ecuación para la isometría \widehat{g}_b , y luego despejar a y b de ambas ecuaciones, obtenemos

$$a = \frac{1}{2} \tanh^2\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \quad \text{y} \quad b = \frac{1}{2} \tanh^2\left(\frac{\ell_g}{2}\right).$$

Escritura de Q_j y P_j como funciones no recursivas.

Para esto, haremos los cambios de variable

$$Q_0 = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \tanh\left(\frac{u \ell_f}{2}\right) \quad \text{y} \quad P_0 = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_g}{2}\right) \tanh\left(\frac{v \ell_g}{2}\right), \quad (4.10)$$

con $u, v \in \mathbb{C}$ nuevas variables, y probaremos por inducción que

$$Q_j = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \tanh\left(\frac{(u+j)\ell_f}{2}\right) \quad \text{y} \quad P_j = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_g}{2}\right) \tanh\left(\frac{(v-j)\ell_g}{2}\right), \quad (4.11)$$

y más aún, probaremos que podemos escribir a Q_j únicamente en función de Q_0 y ℓ_f , y a P_j en función de P_0 y ℓ_g , como

$$Q_j = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \frac{2Q_0 + \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \tanh\left(\frac{j\ell_f}{2}\right)}{2Q_0 \tanh\left(\frac{j\ell_f}{2}\right) + \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right)}, \quad (4.12)$$

$$P_j = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_g}{2}\right) \frac{2Q_0 - \tanh\left(\frac{\ell_g}{2}\right) \tanh\left(\frac{j\ell_g}{2}\right)}{-2Q_0 \tanh\left(\frac{j\ell_g}{2}\right) + \tanh\left(\frac{\ell_g}{2}\right)}. \quad (4.13)$$

Demostración. Probaremos por inducción la primer ecuación de 4.10. En efecto, para $j = 1$, tenemos

$$\widehat{f}_a(Q_0) = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \frac{\tanh\left(\frac{u \ell_f}{2}\right) + \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right)}{\tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \tanh\left(\frac{u \ell_f}{2}\right) + 1} = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \tanh\left(\frac{(u+1)\ell_f}{2}\right),$$

$$\widehat{g}_b(P_0) = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_g}{2}\right) \frac{\tanh\left(\frac{v \ell_g}{2}\right) - \tanh\left(\frac{\ell_g}{2}\right)}{-\tanh\left(\frac{\ell_g}{2}\right) \tanh\left(\frac{v \ell_g}{2}\right) + 1} = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_g}{2}\right) \tanh\left(\frac{(v-1)\ell_g}{2}\right),$$

donde las últimas igualdades de cada renglón se siguen de la identidad

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)}. \quad (4.14)$$

Luego, si suponemos que la ecuación es cierta para j , entonces

$$\begin{aligned}
Q_{j+1} = \widehat{f}_a(Q_j) &= \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \frac{\tanh\left(\frac{(u+j)\ell_f}{2}\right) + \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right)}{\tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \tanh\left(\frac{(u+j)\ell_f}{2}\right) + 1} \\
&= \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \tanh\left(\frac{(u+j+1)\ell_f}{2}\right), \quad y \\
P_{j+1} = \widehat{g}_b(P_j) &= \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_g}{2}\right) \frac{\tanh\left(\frac{(v-j)\ell_g}{2}\right) - \tanh\left(\frac{\ell_g}{2}\right)}{-\tanh\left(\frac{\ell_g}{2}\right) \tanh\left(\frac{(v-j)\ell_g}{2}\right) + 1} \\
&= \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_g}{2}\right) \tanh\left(\frac{(v-(j+1))\ell_g}{2}\right),
\end{aligned}$$

donde las últimas igualdades se siguen nuevamente de (4.14).

Luego, para probar (4.12) y (4.13), basta usar las fórmulas que acabamos de probar. A continuación probaremos (4.12) (la prueba de (4.13) se hace análoga).

$$\begin{aligned}
Q_j &= \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \tanh\left(\frac{(u+j)\ell_f}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \frac{\tanh\left(\frac{u\ell_f}{2}\right) + \tanh\left(\frac{j\ell_f}{2}\right)}{\tanh\left(\frac{u\ell_f}{2}\right) \tanh\left(\frac{j\ell_f}{2}\right) + 1} \\
&= \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \frac{\tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \tanh\left(\frac{u\ell_f}{2}\right) + \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \tanh\left(\frac{j\ell_f}{2}\right)}{\tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \tanh\left(\frac{u\ell_f}{2}\right) \tanh\left(\frac{j\ell_f}{2}\right) + \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \frac{2Q_0 + \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \tanh\left(\frac{j\ell_f}{2}\right)}{2Q_0 \tanh\left(\frac{j\ell_f}{2}\right) + \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.6. *Los toros cuspidales asociados a productos de la forma $L^M R^N$ se pueden ver como el pegado de cuatro paralelogramos congruentes, los cuales están triangulados de igual forma por parejas (dos de ellos están triangulados por $2M$ triángulos y los otros dos por $2N$), donde además, dichas triangulaciones son centralmente simétricas.*

Demostración. Primero probaremos que los cuadriláteros son paralelogramos congruentes.

$$Q_1 - Q_0 = \frac{1}{2} + P_{N+1} \quad \text{ver primera ecuación de (4.6),}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Q_0 + a}{2Q_0 + 1} - Q_0 = \frac{1}{2} + \frac{P_N - b}{1 - 2P_N} \quad \text{ver ecuaciones (4.2),}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a - 2Q_0^2}{2Q_0 + 1} = \frac{\frac{1}{2} - b}{1 - 2P_N}$$

$$\Leftrightarrow a - 2Q_0^2 = \frac{1}{2} - b \quad \text{ver ecuación (4.5).}$$

$$\Leftrightarrow Q_0^2 = \frac{a + b - \frac{1}{2}}{2}.$$

Y de manera similar,

$$P_1 - P_0 = Q_{M+1} - \frac{1}{2} \quad \text{ver segunda ecuación de (4.6),}$$

$$\Leftrightarrow \frac{P_0 - b}{-2P_0 + 1} - P_0 = \frac{Q_M + a}{2Q_M + 1} - \frac{1}{2} \quad \text{ver ecuación (4.2),}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-b + 2P_0^2}{-2P_0 + 1} = \frac{a - \frac{1}{2}}{2Q_M + 1}$$

$$\Leftrightarrow -b + 2P_0^2 = a - \frac{1}{2} \quad \text{ver ecuación (4.5).}$$

$$\Leftrightarrow P_0^2 = \frac{a + b - \frac{1}{2}}{2}.$$

De lo anterior, tenemos que $Q_0^2 = P_0^2$, y usando (4.5), obtenemos que

$$P_N^2 = Q_0^2 = P_0^2 = Q_M^2,$$

y finalmente, por la manera en que construimos P_i y Q_i , concluimos que

$$-Q_M = Q_0 = P_0 = -P_N, \quad (4.15)$$

lo cual es equivalente a decir que ambos cuadriláteros son paralelogramos congruentes.

Ahora, para probar que ambos paralelogramos son centralmente simétricos, basta probar que $Q_j = -Q_{M-j}$ para todo $j \in \{0, 1, 2, \dots, M\}$ y $P_j = -P_{N-j}$ para todo $j \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$. Para esto, primero observemos que con lo que hemos probado hasta el momento, es posible deducir el valor de las variables u y v que introdujimos en (4.10). En efecto, como $Q_0 = -Q_M$, tenemos

$$\tanh\left(\frac{u \ell_f}{2}\right) = -\tanh\left(\frac{u+M}{2} \ell_f\right),$$

y por lo tanto

$$u = -\frac{M}{2} + \frac{\pi i s}{\ell_f}, \quad \text{para algún } s \in \mathbb{Z}, \quad (4.16)$$

ya que $\tanh \alpha = \tanh \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + \pi i s$, para algún $s \in \mathbb{Z}$. De manera análoga, partiendo de $P_0 = -P_N$, concluimos que

$$v = \frac{N}{2} + \frac{\pi i t}{\ell_g}, \quad \text{para algún } t \in \mathbb{Z}. \quad (4.17)$$

Entonces

$$\begin{aligned} Q_{M-j} &= \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \tanh\left(\frac{-M/2 + M - j}{2} \ell_f + \frac{\pi i s}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \tanh\left(\frac{-M/2 + j}{2} \ell_f - \frac{\pi i s}{2}\right) = -Q_j \quad \text{y} \\ P_{N-j} &= \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_g}{2}\right) \tanh\left(\frac{N/2 - N + j}{2} \ell_g + \frac{\pi i t}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_g}{2}\right) \tanh\left(\frac{N/2 - j}{2} \ell_g - \frac{\pi i t}{2}\right) = -P_j. \end{aligned}$$

□

Usando las ecuaciones (4.16) y (4.17) para $t = 0 = s$, tenemos que las ecuaciones (4.11) se convierten en

$$Q_j = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \tanh\left(-\frac{M \ell_f}{4} + \frac{j \ell_f}{2}\right) \quad \text{y} \quad P_j = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_g}{2}\right) \tanh\left(\frac{N \ell_g}{4} - \frac{j \ell_g}{2}\right). \quad (4.18)$$

Los casos $s \neq 0$ o $t \neq 0$, son muy similares, pues tendremos

$$Q_j = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \coth\left(-\frac{M\ell_f}{4} + \frac{j\ell_f}{2}\right) \text{ y/o } P_j = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_g}{2}\right) \coth\left(\frac{N\ell_g}{4} - \frac{j\ell_g}{2}\right), \quad (4.19)$$

según sea el caso. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, sólo consideraremos las ecuaciones (4.18) para lo siguiente.

Proposición 4.7. *Podemos escribir el sistema de ecuaciones (4.6), en función de ℓ_f y ℓ_g como sigue.*

*Sistema de ecuaciones para el caso $L^M R^N$
en función de las longitudes ℓ_f y ℓ_g .*

$$\begin{aligned} \cosh^2\left(\frac{N\ell_g}{4}\right) &= \tanh^2\left(\frac{\ell_g}{2}\right) \cosh^2\left(\frac{\ell_f}{2}\right), \\ \cosh^2\left(\frac{M\ell_f}{4}\right) &= \tanh^2\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \cosh^2\left(\frac{\ell_g}{2}\right). \end{aligned}$$

Este último sistema de ecuaciones puede compararse con el propuesto en [11] (basta hacer los cambios de variables $\ell_f = -2ib$ y $\ell_g = 2ib'$ para obtener los cuadrados de las ecuaciones que aparecen en [11]), donde el autor, Guéritaud, sólo demuestra que existe solución para casos donde M y N son suficientemente grandes. Él trabaja principalmente con los ángulos de la descomposición por triángulos del toro cuspidal, y con dichas ideas, no nos fue posible completar la prueba para cualquier caso $L^M R^N$. Sin embargo, con nuestra propuesta (transformaciones de Möbius) podemos deducirla de la siguiente manera.

Demostración. Sustituimos las ecuaciones de (4.18) en la primer ecuación de (4.6), y obtenemos

$$\frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_g}{2}\right) \left(\tanh\left(-\frac{N\ell_g}{4} + \frac{\ell_g}{2}\right) - \tanh\left(-\frac{N\ell_g}{4}\right) \right) = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \tanh\left(\frac{M\ell_f}{4} - \frac{\ell_f}{2}\right) - \frac{1}{2}.$$

Ahora, usando la identidad (4.14) en ambos lados de la igualdad (donde aparece una expresión de la forma $\tanh(x+y)$) y haciendo álgebra elemental, obtenemos

$$\tanh^2\left(\frac{\ell_g}{2}\right) \frac{\tanh^2\left(\frac{N\ell_g}{4}\right) - 1}{1 - \tanh\left(\frac{\ell_g}{2}\right) \tanh\left(\frac{N\ell_g}{4}\right)} = \frac{\tanh^2\left(\frac{\ell_f}{2}\right) - 1}{1 + \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \tanh\left(\frac{M\ell_f}{4}\right)}.$$

Luego, observemos que los denominadores de cada lado de la última igualdad son iguales, ya que $P_0 = Q_M$ (ver ecuación (4.15)). Entonces

$$\tanh^2\left(\frac{\ell_g}{2}\right)\left(\tanh^2\left(\frac{N\ell_g}{4}\right) - 1\right) = \tanh^2\left(\frac{\ell_f}{2}\right) - 1.$$

Finalmente, usando la identidad $1 - \tanh^2(x) = 1/\cosh^2(x)$, obtenemos la primer ecuación que se quiere demostrar.

Haciendo lo análogo, comenzando con la segunda ecuación de (4.6), obtenemos la segunda ecuación que se quiere probar. □

Lema 4.8. *La retícula asociada al toro cuspidal de la 3-variedad M_φ , con $\varphi = L^M R^N$ es $\langle 2, \tau \rangle$, con*

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\ell_f}{2}\right)} - \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\ell_g}{2}\right)}}$$

Demostración. Notemos que

$$\tau = Q_M - Q_0 = -2Q_0 = -\tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right)\tanh\left(\frac{u\ell_f}{2}\right) = \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right)\tanh\left(\frac{M\ell_f}{4}\right),$$

donde la segunda igualdad es verdadera por (4.15), la tercera por (4.10), y la cuarta se obtiene al considerar $s = 0$ en (4.16). Luego,

$$\tanh\left(\frac{M\ell_f}{4}\right) = \sqrt{\frac{\sinh^2\left(\frac{M\ell_f}{4}\right)}{\cosh^2\left(\frac{M\ell_f}{4}\right)}} = \sqrt{\frac{\cosh^2\left(\frac{M\ell_f}{4}\right) - 1}{\cosh^2\left(\frac{M\ell_f}{4}\right)}} = \sqrt{\frac{\tanh^2\left(\frac{\ell_f}{2}\right)\cosh^2\left(\frac{\ell_g}{2}\right) - 1}{\tanh^2\left(\frac{\ell_f}{2}\right)\cosh^2\left(\frac{\ell_g}{2}\right)}},$$

donde las primeras dos igualdades se obtienen al usar identidades conocidas

$$\tanh(x) = \sinh(x)/\cosh(x) \quad \text{y} \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \quad (4.20)$$

y la última igualdad se debe a la segunda ecuación de la Proposición 4.7. Por lo tanto, concluimos que

$$\tau = \sqrt{\frac{\tanh^2\left(\frac{\ell_f}{2}\right)\cosh^2\left(\frac{\ell_g}{2}\right) - 1}{\cosh^2\left(\frac{\ell_g}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{\sinh^2\left(\frac{\ell_f}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\ell_f}{2}\right)} - \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\ell_g}{2}\right)}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\ell_f}{2}\right)} - \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\ell_g}{2}\right)}},$$

usando nuevamente las identidades (4.20) en la segunda y tercer igualdad. □

Usando las variables del algoritmo anterior.

En la sección anterior (ver paso 5 del algoritmo), encontramos otra forma no recursiva de escribir a todos los vértices de la triangulación en función las variables $Q_{1,0}$ y a . No escribimos la forma explícita de los sistemas de ecuaciones a resolver (ver paso 8), ya que no logramos escribirlos de manera compacta. Sin embargo, nuevamente, al considerar el caso $L^M R^N$, sí será posible escribir de manera explícita nuestro sistema de ecuaciones en función de Q_0 y Q_1 .

Para esto, primero, podemos reescribir las ecuaciones obtenidas en el paso 5 del algoritmo de la Sección 4.3, para este caso particular $L^M R^N$, como

$$Q_M = \frac{\sqrt{\frac{a}{2}} \left[(1 + \sqrt{2a})^M + (1 - \sqrt{2a})^M \right] Q_0 + \sqrt{\frac{a}{2}} \left[(1 + \sqrt{2a})^M - (1 - \sqrt{2a})^M \right]}{\left[(1 + \sqrt{2a})^M - (1 - \sqrt{2a})^M \right] Q_0 + \sqrt{\frac{a}{2}} \left[(1 + \sqrt{2a})^M + (1 - \sqrt{2a})^M \right]},$$

$$P_N = \frac{\sqrt{\frac{b}{2}} \left[(1 - \sqrt{2b})^N + (1 + \sqrt{2b})^N \right] P_0 + \sqrt{\frac{b}{2}} \left[(1 - \sqrt{2b})^N - (1 + \sqrt{2b})^N \right]}{\left[(1 - \sqrt{2b})^N - (1 + \sqrt{2b})^N \right] P_0 + \sqrt{\frac{b}{2}} \left[(1 - \sqrt{2b})^N + (1 + \sqrt{2b})^N \right]},$$

donde $a = 2Q_1 Q_0 - Q_0 + Q_1$ y $b = 2P_1 P_0 + P_0 - P_1$.

Ahora, al sustituir la ecuación (4.3) para $j = M$, en la primer ecuación de (4.7), tenemos que

$$P_1 = \frac{Q_{M-1} Q_M - \frac{1}{2} Q_{M-1} - Q_M^2 - \frac{1}{4}}{Q_M + \frac{1}{2}}.$$

Luego, por el Teorema 4.6, tenemos que $Q_M = -Q_0$ y $Q_{M-1} = -Q_1$. Por lo tanto, concluimos que

$$P_1 = \frac{Q_1 Q_0 + \frac{1}{2} Q_1 - Q_0^2 - \frac{1}{4}}{-Q_0 + \frac{1}{2}}.$$

Con esto, podemos escribir dos ecuaciones racionales (cocientes de polinomios) con dos

incógnitas como sigue.

Sistema de ecuaciones para el caso $L^M R^N$ en función de Q_0 y Q_1 .

$$-Q_0 = \frac{\sqrt{\frac{a}{2}} \left[(1 + \sqrt{2a})^M + (1 - \sqrt{2a})^M \right] Q_0 + \sqrt{\frac{a}{2}} \left[(1 + \sqrt{2a})^M - (1 - \sqrt{2a})^M \right]}{\left[(1 + \sqrt{2a})^M - (1 - \sqrt{2a})^M \right] Q_0 + \sqrt{\frac{a}{2}} \left[(1 + \sqrt{2a})^M + (1 - \sqrt{2a})^M \right]}$$

$$-Q_0 = \frac{\sqrt{\frac{b}{2}} \left[(1 - \sqrt{2b})^N + (1 + \sqrt{2b})^N \right] Q_0 + \sqrt{\frac{b}{2}} \left[(1 - \sqrt{2b})^N - (1 + \sqrt{2b})^N \right]}{\left[(1 - \sqrt{2b})^N - (1 + \sqrt{2b})^N \right] Q_0 + \sqrt{\frac{b}{2}} \left[(1 - \sqrt{2b})^N + (1 + \sqrt{2b})^N \right]}$$

donde $a = 2Q_1 Q_0 - Q_0 + Q_1$ y $b = 2Q_0^2 - 2Q_1 Q_0 - Q_1 + Q_0 + \frac{1}{2}$.

Partiendo del centro de los paralelogramos:

Ahora, usando nuevamente el hecho de que ambos paralelogramos son centralmente simétricos, podemos optimizar el grado de los polinomios. En efecto, si $M = 2m$ (o $N = 2n$) es par, entonces $Q_m = 0$ (o $P_n = 0$); y si $M = 2m + 1$ (o $N = 2n + 1$) es impar, entonces $Q_{m+1} = -Q_m$ (o $P_{n+1} = -P_n$). Así, siguiendo el mismo algoritmo, pero ajustando la notación, partiendo del centro de los paralelogramos (ver Figura 4.16), podemos obtener dos polinomios en dos variables, de la mitad del grado de los anteriores. Sin embargo, su escritura depende de la paridad de M y N , así que nos restringiremos a estudiar el caso en el que ambos son pares. De hecho, en este caso logramos obtener una sola ecuación racional en una variable, como se muestra a continuación.

Ecuación polinomial para el caso $L^{2m} R^{2n}$.

$$\frac{\sqrt{2Q_1} \left[(1 + \sqrt{2Q_1})^m - (1 - \sqrt{2Q_1})^m \right]}{2 \left[(1 + \sqrt{2Q_1})^m + (1 - \sqrt{2Q_1})^m \right]} = \frac{\sqrt{-2P_1} \left[(1 - \sqrt{-2P_1})^n - (1 + \sqrt{-2P_1})^n \right]}{2 \left[(1 - \sqrt{-2P_1})^n + (1 + \sqrt{-2P_1})^n \right]}$$

donde $P_1 = Q_1 - 2 \left(\frac{\sqrt{2Q_1} \left[(1 + \sqrt{2Q_1})^m - (1 - \sqrt{2Q_1})^m \right]}{2 \left[(1 + \sqrt{2Q_1})^m + (1 - \sqrt{2Q_1})^m \right]} \right)^2 + 1/2$.

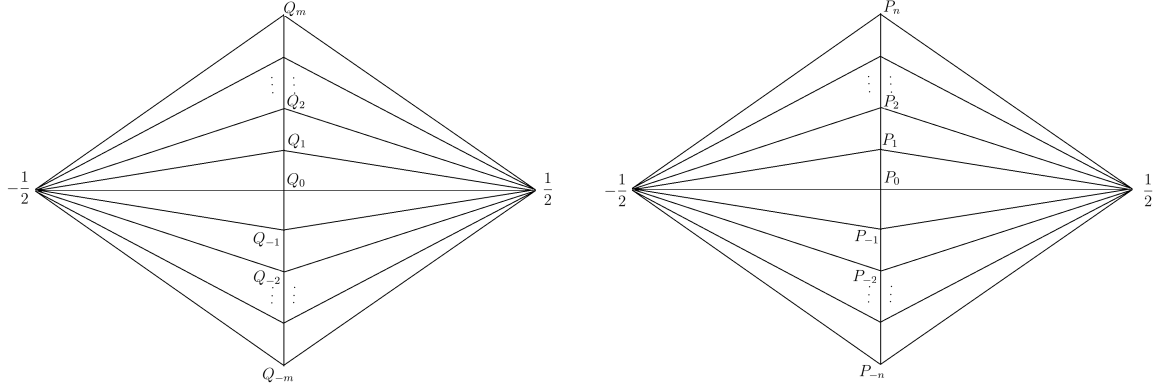


Figura 4.16

Demostración. Como $M = 2m$, por el Teorema 4.6, tenemos que $Q_0 = 0$ y $Q_{-k} = -Q_k$ para $k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Haciendo el caso particular de las ecuaciones de la sección anterior, tenemos

$$Q_m = \frac{\sqrt{2Q_1} \left[(1 + \sqrt{2Q_1})^m - (1 - \sqrt{2Q_1})^m \right]}{2 \left[(1 + \sqrt{2Q_1})^m + (1 - \sqrt{2Q_1})^m \right]},$$

$$P_n = \frac{\sqrt{-2P_1} \left[(1 - \sqrt{-2P_1})^n - (1 + \sqrt{-2P_1})^n \right]}{2 \left[(1 - \sqrt{-2P_1})^n + (1 + \sqrt{-2P_1})^n \right]}.$$

Luego, como ambos paralelogramos son congruentes, sabemos que $Q_m = P_n$. Además, de (4.2), tenemos que

$$Q_{m+1} = \frac{Q_m + Q_1}{2Q_m + 1} \quad \text{y} \quad P_n = \frac{P_{n-1} + P_1}{-2P_{n-1} + 1},$$

y por lo tanto

$$Q_{m+1} = \frac{Q_m + Q_1}{2Q_m + 1} \quad \text{y} \quad P_{n-1} = \frac{P_n - P_1}{2P_n + 1}. \quad (4.21)$$

Finalmente, sustituyendo $P_n = Q_m$ y (4.21) en

$$Q_{m+1} - \frac{1}{2} = P_n - P_{n-1} \quad (4.22)$$

(la cual es un caso particular de usar la simetría en la primer ecuación de (4.6)), conclui-

mos que $P_1 = Q_1 - 2Q_m^2 + 1/2$, el cual puede ser escrito en función de Q_1 como

$$P_1 = Q_1 - 2 \left(\frac{\sqrt{2Q_1} \left[(1 + \sqrt{2Q_1})^m - (1 - \sqrt{2Q_1})^m \right]}{2 \left[(1 + \sqrt{2Q_1})^m + (1 - \sqrt{2Q_1})^m \right]} \right)^2 + 1/2.$$

Por lo tanto, concluimos lo que se quería probar. \square

Enseguida, presentamos algunos polinomios para casos particulares.

Caso particular: Ecuación polinomial para el caso L^2R^{2n} .

$$2Q_1 [(1 - X)^n + (1 + X)^n] = X [(1 - X)^n - (1 + X)^n],$$

$$\text{donde} \quad X = \sqrt{-2Q_1 + 4Q_1^2 - 1}.$$

Caso particular: Ecuación polinomial para el caso L^4R^{2n} .

$$4Q_1 [(1 - X)^n + (1 + X)^n] = (1 + 2Q_1)X [(1 - X)^n - (1 + X)^n],$$

$$\text{donde} \quad X = \sqrt{\frac{-(1 - 2Q_1)^2}{1 + 2Q_1}}.$$

Notemos que con los algoritmos anteriores, obtenemos sistemas de una o dos ecuaciones, de manera que con una de sus soluciones podemos obtener la realización geométrica de los toros cuspidales que buscamos. Sin embargo, no sabemos cuál es la solución que funciona. A continuación, presentamos un lema que nos ayuda a deshacernos de algunas raíces inservibles, aunque cabe aclarar, que es una cota muy amplia que sigue involucrando muchas raíces (con experimentos computacionales, notamos que se deshace aproximadamente de la mitad de las raíces).

Lema 4.9. Para toda $j \in \{1, 2, \dots, M - 1\}$, se tiene que $|Q_j| < \frac{1}{2}$.

Demostración. Para cada $j \in \{1, 2, \dots, M - 1\}$, denotamos por α_j y β_j a los ángulos $\angle(-\frac{1}{2}, Q_j, Q_{j-1})$, y $\angle(\frac{1}{2}, Q_j, Q_{j-1})$, respectivamente. Notemos que para poder obtener Q_j sin que se traslape con los triángulos que construimos usando Q_1, Q_2, \dots, Q_{j-1} , necesitamos que $2\alpha_j + \beta_j > \pi$ (ver Figura 4.17), y por lo tanto, concluimos que

$$2\alpha_M + \beta_M < \pi \quad \text{y} \quad 2\alpha_j + \beta_j > \pi \quad \text{si} \quad j \in \{1, 2, \dots, M - 1\}.$$

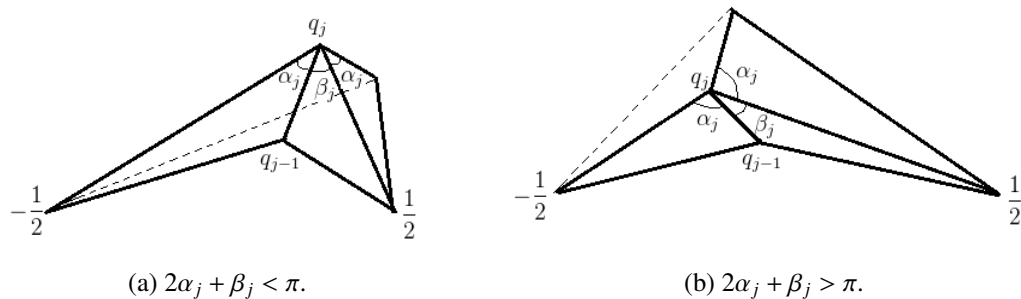


Figura 4.17

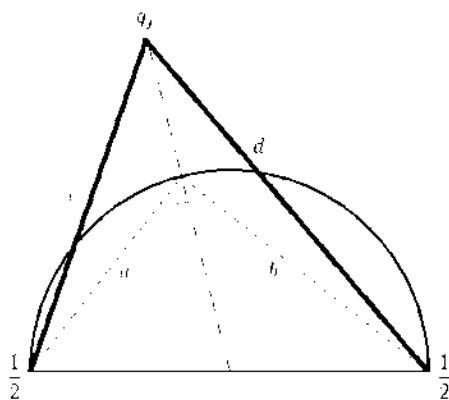
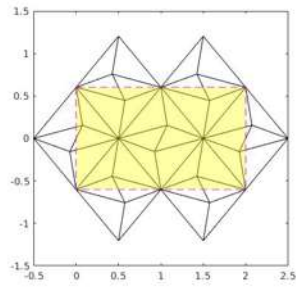


Figura 4.18

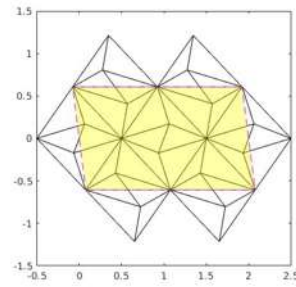
Para concluir la demostración, probaremos que si $|Q_j| \geq \frac{1}{2}$, entonces $2\alpha_j + \beta_j < \pi$, lo cual no puede suceder. En efecto, si $|Q_j| = \frac{1}{2}$, entonces $\alpha_j + \beta_j = \frac{\pi}{2}$ con $0 < \alpha_j, \beta_j < \frac{\pi}{2}$, y por lo tanto $2\alpha_j + \beta_j < \pi$. Luego, si $|Q_j| > \frac{1}{2}$, entonces $c > a$ y $d > b$, con $c = |Q_j + \frac{1}{2}|$, $d = |Q_j - \frac{1}{2}|$ y a, b construidos como en la Figura 4.18. Luego $a^2 + b^2 = 1 = c^2 + d^2 - cd \cos(\alpha_j + \beta_j)$ y por lo tanto $\cos(\alpha_j + \beta_j) > 0$; es decir, $\alpha_j + \beta_j < \frac{\pi}{2}$. Nuevamente, como $0 < \alpha_j, \beta_j < \frac{\pi}{2}$, concluimos que $\alpha_j + \beta_j < \frac{\pi}{2}$.

□

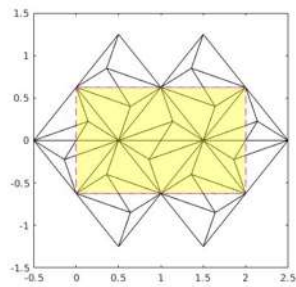
Algunos ejemplos: Finalmente, presentamos las realizaciones geométricas de algunos toros cuspidales asociados a palabras de la forma $L^M R^N$. Dichos toros fueron construidos con los algoritmos presentados en este capítulo.



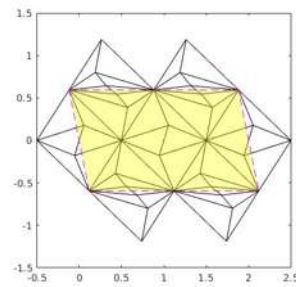
(a) L^3R^3 .



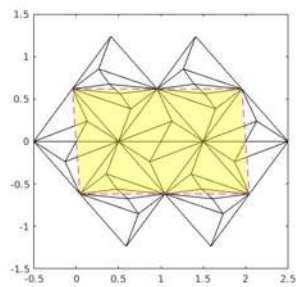
(b) L^4R^3 .



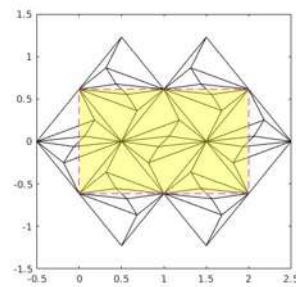
(c) L^4R^4 .



(d) L^5R^3 .

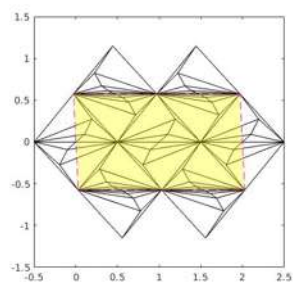


(e) L^5R^4 .

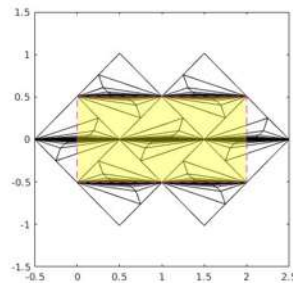


(f) L^5R^5 .

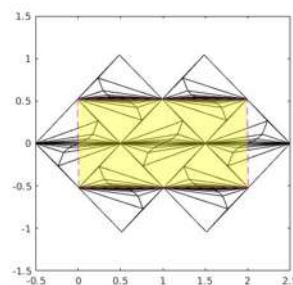
Figura 4.19: Los siguientes ejemplos más sencillos.



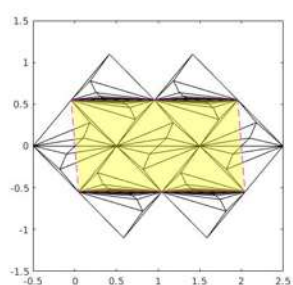
(a) $L^9 R^6$.



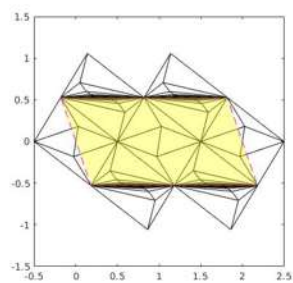
(b) $L^{23} R^{31}$.



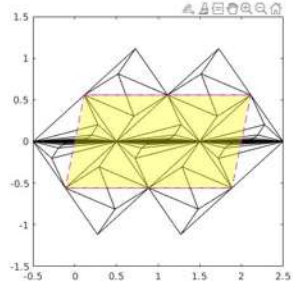
(c) $L^{31} R^{11}$.



(d) $L^{63} R^6$.



(e) $L^{81} R^3$.



(f) $L^4 R^{120}$.

Figura 4.20: Otros ejemplos con M y N más grandes.

4.5. Puntos límite de toros cuspidales

El propósito de esta sección es obtener a qué toros se están acercando algunas familias de toros cuspidales asociados a palabras de la forma $L^M R^N$.

En la Observación 3 (que se encuentra después del enunciado del Teorema del Pivote) de [23], se prueba que

$$\frac{c_1}{M^2} \leq \operatorname{Re}(\ell_f) \leq \frac{c_2}{M^2}, \quad \frac{\widehat{c}_1}{N^2} \leq \operatorname{Re}(\ell_g) \leq \frac{\widehat{c}_2}{N^2},$$

$$\left| M - \frac{2\pi}{\operatorname{Im}(\ell_f)} \right| \leq c_3 \quad \text{y} \quad \left| N - \frac{2\pi}{\operatorname{Im}(\ell_g)} \right| \leq \widehat{c}_3,$$

para algunas constantes c_j , y \widehat{c}_j independientes de M y N , de donde se deduce de manera directa que

$$\ell_f \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad M \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad \ell_g \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad N \rightarrow \infty. \quad (4.23)$$

Con lo anterior y con el Lema 4.8, resulta ser muy fácil encontrar puntos límite de algunas familias de retículas asociadas a toros cuspidales. Para esto, estudiaremos las convergencias de dichas retículas, mediante la métrica de Hausdorff. De hecho, un primer corolario de esto y del primer punto de Observaciones 4.4 es el siguiente.

Corolario 4.10. *Las retículas de los toros cuspidales asociados a las palabras $L^M R^N$, convergen a la retícula $\langle 2, i \rangle$, cuando $M, N \rightarrow \infty$. Más aún, dado $k \in \mathbb{Z}^+$, las retículas de los toros cuspidales asociados a las palabras $(L^M R^N)^k$, convergen a la retícula $\langle 2, ki \rangle$, cuando $M, N \rightarrow \infty$.*

Es importante hacer notar que las 3-variedades correspondientes a familias de palabras, no tienen por qué converger a una 3-variedad que fibra sobre el círculo con fibra el toro ponchado. Lo único que sabemos, es que en caso de converger a una 3-variedad, las cúspides convergen a una de las cúspides de dicha 3-variedad (posiblemente con más de una cúspide).

A continuación, estudiaremos los puntos de acumulación de las familias de retículas de toros cuspidales asociados a palabras $L^M R^N$. Para esto, fijaremos M , y veremos a dónde convergen estas retículas, cuando N tiende a ∞ . Una vez que resolvamos esto, el caso N fijo está dado por la Proposición 4.1.

Teorema 4.11. *La familia de las retículas de toros cuspidales asociados a palabras $L^M R^N$, con M fijo, se acumulan en la retícula $\langle 2, i/x \rangle$, donde $x = \cosh(\ell_f/2)$ es raíz de la ecuación*

$$\frac{(x^2 - 1)(T_M(x) - 1)}{T_M(x) + 1} = -1, \quad (4.24)$$

y T_M es el polinomio de Chebyshev de primer tipo. Más aún, x es raíz de $(x-1)W_m(x) \pm iV_m(x)$ cuando $M = 2m+1$ es impar, y x es raíz de $(x^2-1)U_{m-1}(x) \pm iT_m(x)$ cuando $M = 2m$ es par, donde, $U_m(x)$, $V_m(x)$ y $W_m(x)$ son polinomios de Chebyshev de segundo, tercer y cuarto tipo, respectivamente.

En lo anterior, es bien conocido que los polinomios de Chebyshev de primer, segundo, tercer y cuarto tipo, pueden definirse como

$$T_M(\cosh(\phi)) = \cosh(M\phi), \quad U_m(\cosh(\phi)) = \frac{\sinh((m+1)\phi)}{\sinh(\phi)},$$

$$V_m(\cosh(\phi)) = \frac{\cosh\left(\frac{(2m+1)\phi}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\phi}{2}\right)}, \quad \text{y} \quad W_m(\cosh(\phi)) = \frac{\sinh\left(\frac{(2m+1)\phi}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\phi}{2}\right)},$$

respectivamente (ver [21]).

Demostración. Al usar (4.23) en el Lema 4.8, tenemos que la retícula asociada a la palabra $L^M R^N$, converge a la retícula $\langle 2, \tau \rangle$, donde $\tau = i / \cosh(\ell_f/2)$; es decir

$$\tau = \frac{i}{x}, \quad (4.25)$$

cuando $N \rightarrow \infty$. Además, en la demostración de dicho lema, vimos que en general,

$$\tau = \tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \sqrt{\frac{\cosh\left(\frac{M\ell_f}{2}\right) - 1}{\cosh\left(\frac{M\ell_f}{2}\right) + 1}}.$$

Luego, como

$$\tanh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh^2\left(\frac{\ell_f}{2}\right) - 1}{\cosh^2\left(\frac{\ell_f}{2}\right)}},$$

podemos hacer $x = \cosh(\ell_f/2)$ como en el enunciado del teorema, para obtener $T_M(x) = \cosh(M\ell_f/2)$, y por lo tanto

$$\tau = \sqrt{\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) \left(\frac{T_M(x)-1}{T_M(x)+1}\right)}. \quad (4.26)$$

Así, al igualar (4.25) y (4.26), usando que $x \neq 0$ (ver (4.9)), obtenemos la ecuación (4.24), que se quería probar.

Ahora, para probar cada ecuación según su paridad, basta probar que

$$\frac{(x^2 - 1)(T_M(x) - 1)}{T_M(x) + 1} = \begin{cases} \frac{(x - 1)^2(W_m(x))^2}{(V_m(x))^2} & \text{si } M = 2m + 1, \\ \frac{(x^2 - 1)^2(U_{m-1}(x))^2}{(T_m(x))^2} & \text{si } M = 2m. \end{cases}$$

En las demostraciones de ambos casos, únicamente usaremos las definiciones de polinomios de Chebyshev antes mencionadas y las identidades $\cosh^2(\phi) - \sinh^2(\phi) = 1$ y $\cosh(2\phi) = 2 \cosh^2(\phi) - 1$.

Caso $M = 2m + 1$:

$$\begin{aligned} \frac{(x - 1)(W_m(x))^2}{(V_m(x))^2} &= \frac{\left(\cosh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) - 1\right) \sinh^2\left(\frac{(2m+1)\ell_f}{4}\right) \cosh^2\left(\frac{\ell_f}{4}\right)}{\sinh^2\left(\frac{\ell_f}{4}\right) \cosh^2\left(\frac{(2m+1)\ell_f}{4}\right)} \\ &= \frac{2\left(\cosh\left(\frac{(2m+1)\ell_f}{2}\right) - 1\right) \cosh^2\left(\frac{\ell_f}{4}\right)}{\cosh\left(\frac{(2m+1)\ell_f}{2}\right) + 1} \\ &= \frac{\left(\cosh\left(\frac{(2m+1)\ell_f}{2}\right) - 1\right) \left(\cosh\left(\frac{\ell_f}{2}\right) + 1\right)}{\cosh\left(\frac{(2m+1)\ell_f}{2}\right) + 1} \\ &= \frac{(x + 1)(T_{2m+1}(x) - 1)}{T_{2m+1}(x) + 1}. \end{aligned}$$

Caso $M = 2m$:

$$\frac{(x^2 - 1)(U_{m-1}(x))^2}{(T_m(x))^2} = \frac{\left(\cosh^2\left(\frac{\ell_f}{2}\right) - 1\right) \sinh^2\left(\frac{m\ell_f}{2}\right)}{\sinh^2\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \cosh^2\left(\frac{m\ell_f}{2}\right)} = \frac{\cosh(m\ell_f) - 1}{\cosh(m\ell_f) + 1} = \frac{T_{2m}(x) - 1}{T_{2m}(x) + 1}.$$

□

4.5.1. Cálculo de algunos puntos límite

Calcularemos algunos ejemplos de convergencias de retículas, usando el Teorema 4.11. Para mayor facilidad, consideraremos la definición recursiva de polinomios de Chebyshev, la cual está dada por

$$\begin{array}{llll} T_0 = 1, & U_0 = 1, & V_0 = 1, & W_0 = 1, \\ T_1 = x, & U_1 = 2x, & V_1 = 2x - 1, & W_1 = 2x + 1, \end{array}$$

y para todo $k > 1$,

$$P_{k+1}(x) = 2xP_k(x) - P_{k-1}(x), \quad (4.27)$$

donde $P \in \{T, U, V, W\}$; es decir, (4.27) funciona en cualquier caso de familias de polinomios (ver [21]).

Ejemplos:

1. Las retículas de toros cuspidales correspondientes a palabras LR^N , con $N \in \mathbb{N}$, se acumulan en la retícula $\langle 2, i \rangle$.

Demostración. En este caso el polinomio del cual x es raíz, se ve como $x - 1 \pm i$. Por lo tanto las posibles soluciones son $x = 1 + i$ y $x = 1 - i$. En ambos casos, la retícula $\langle 2, i/x \rangle$, es $\langle 2, i \rangle$, módulo dilatación y rotación. \square

2. Las retículas de toros cuspidales correspondientes a palabras L^2R^N , con $N \in \mathbb{N}$, se acumulan en la retícula $\langle 2, 2\sqrt{3}i \rangle$.

Demostración. En este caso el polinomio del cual x es raíz, se ve como $x^2 \mp ix - 1 = 0$. Por lo tanto $x = -i \mp \sqrt{3}$ ó $x = i \mp \sqrt{3}$. En las cuatro posibilidades, la retícula $\langle 2, i/x \rangle$ es $\langle 1, \sqrt{3}i \rangle$, módulo dilatación y rotación. \square

3. Las retículas de toros cuspidales correspondientes a palabras L^3R^N , con $N \in \mathbb{N}$, se acumulan en la retícula $\left\langle 2, \frac{4i}{1 + 2i + \sqrt{5 - 4i}} \right\rangle$.

Demostración. En este caso el polinomio es $x^2 + (\pm 2i - 1)x + (\mp 2i - 2)$, cuyas raíces son

$$\frac{1 + 2i - \sqrt{5 - 4i}}{4} \approx -0.3469 + 0.7093i, \quad \frac{1 - 2i - \sqrt{5 + 4i}}{4} \approx -0.3469 - 0.7093i,$$

$$\frac{1 + 2i + \sqrt{5 - 4i}}{4} \approx 0.8469 + 0.2906i \quad \text{y} \quad \frac{1 - 2i + \sqrt{5 + 4i}}{4} \approx 0.8469 - 0.2906i.$$

Luego, tenemos que $\frac{i}{x}$ es

$$\frac{4i}{1 + 2i - \sqrt{5 - 4i}} \approx 1.1375 - 0.5563i, \quad \frac{4i}{1 - 2i - \sqrt{5 + 4i}} \approx -1.1375 - 0.5563i,$$

$$\frac{4i}{1 + 2i + \sqrt{5 - 4i}} \approx 0.3624 + 1.0563i \quad \text{ó} \quad \frac{4i}{1 - 2i + \sqrt{5 + 4i}} \approx -0.3624 + 1.0563i,$$

según sea el caso.

Resolviendo algunos casos numéricos para N grande (ver por ejemplo, solución numérica del toro cuspidal asociado a la palabra L^3R^{100} en la Figura 4.21), concluimos que la retícula límite es la que se quería probar.

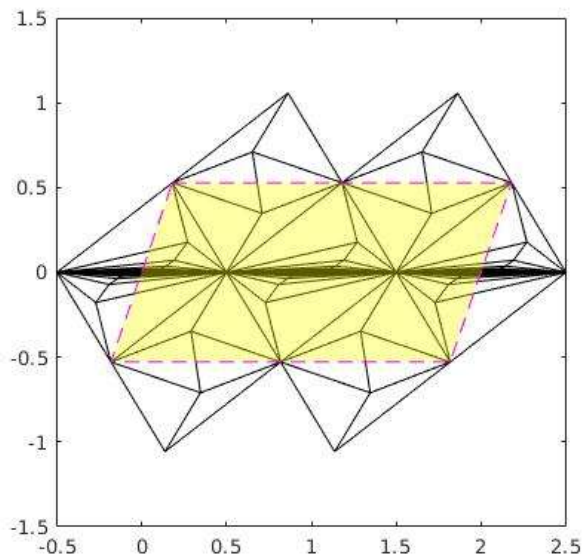


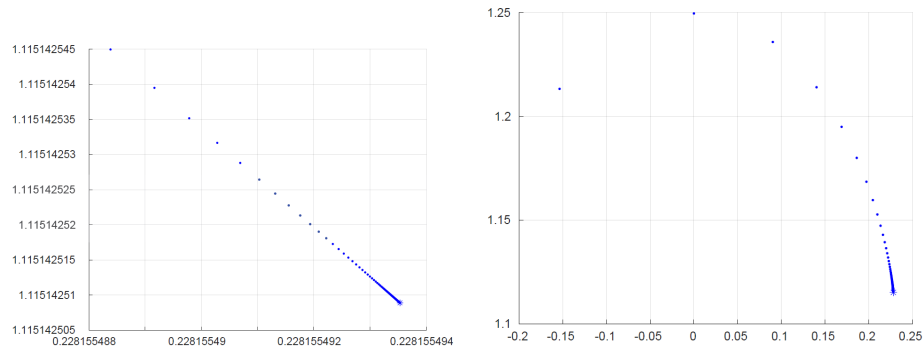
Figura 4.21: Toro cuspidal asociado a la palabra L^3R^{100} , cuya retícula aproximada es $\langle 2, 0.362388 + 1.056899i \rangle$.

□

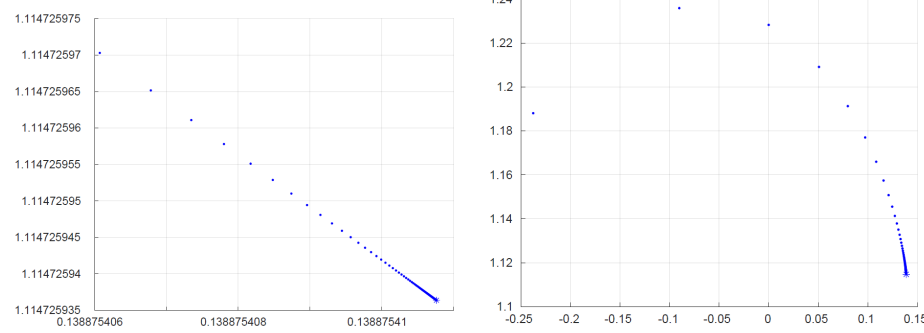
A continuación, presentamos otros tres ejemplos en la Figura 4.22 y tres ejemplos en la Figura 4.23, los cuales resolvimos numéricamente. En cada una de estas figuras, fijamos M (con $M \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$) y graficamos los valores resultantes de $\tau = i/x$ mediante puntos (recordemos que $\langle 2, \tau \rangle$ denota la retícula de un toro cuspidal), para algunos valores grandes de N (la de la izquierda se graficó con $N = 10^4 + 10^3n$ variando n entre 1 y 100; y la de la derecha, variando N entre 3 y 100). En todas estas figuras, los límites están representados mediante asteriscos.

La Figura 4.24 es una ilustración de la clausura del espacio de toros cuspidales de 3-variedades asociadas a palabras R^ML^N . Nuevamente, cada punto de esta figura representa un $\tau = i/x$, y cada asterisco representa un punto límite del conjunto que consiste de todos los τ . Marcamos con el mismo color a todos los τ asociados a una familia $\{R^nL^m : m \in \mathbb{N}\}$ junto con su punto límite correspondiente. Estos puntos límite se encuentran en

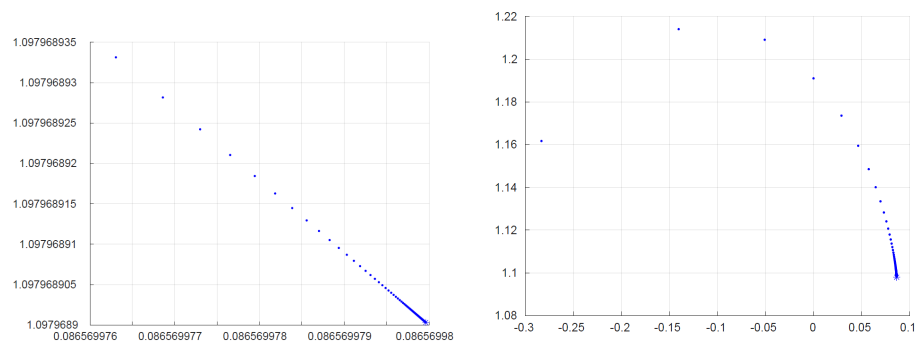
el semiplano derecho. Los puntos límite de familias $\{R^m L^n : m \in \mathbb{N}\}$ se encuentran en el semiplano izquierdo, pero estos no están marcados. La simetría mostrada en la Figura 4.24 se debe a la Proposición 4.1.



(a) $L^4 R^N$

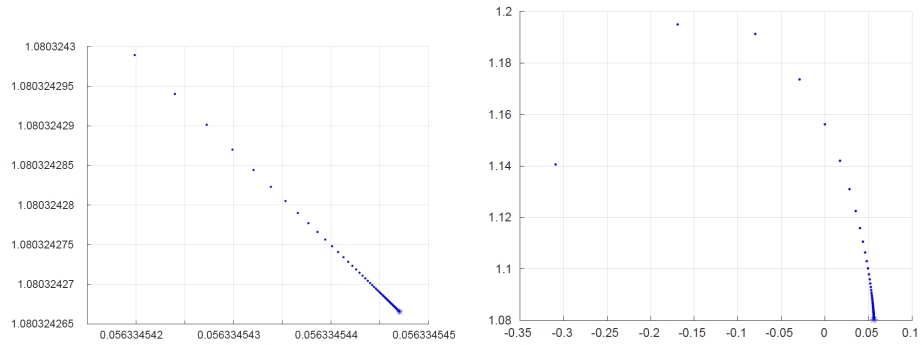


(b) $L^5 R^N$

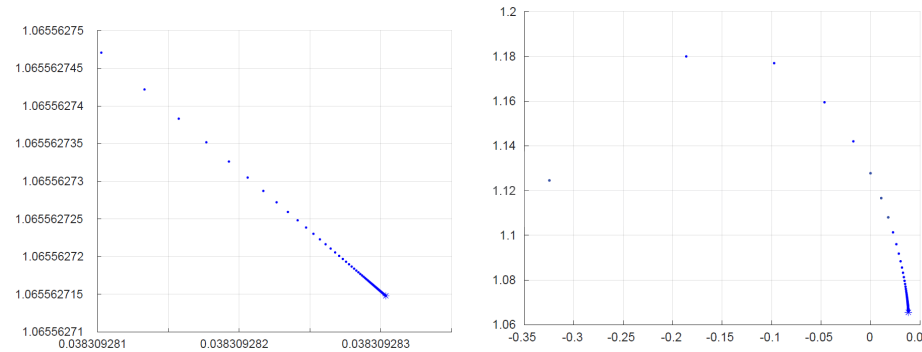


(c) $L^6 R^N$

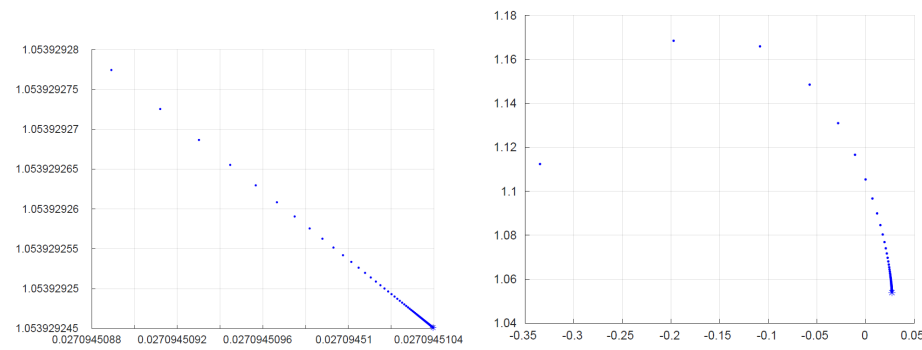
Figura 4.22: Ejemplos numéricos de convergencias de toros cuspidales asociados a palabras $L^M R^N$, cuando N tiende a ∞ y M permanece fijo.



(a) $L^7 R^N$



(b) $L^8 R^N$



(c) $L^9 R^N$

Figura 4.23: Ejemplos numéricos de convergencias de toros cuspidales asociados a palabras $L^M R^N$, cuando N tiende a ∞ y M permanece fijo.

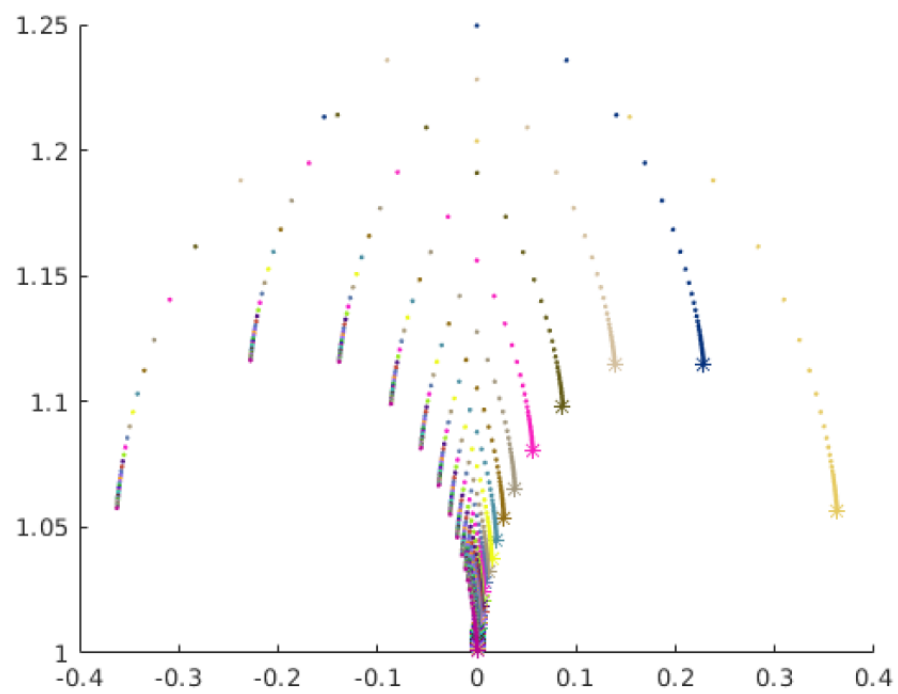


Figura 4.24: Puntos límite del conjunto de retículas asociadas a palabras $L^M R^N$.

Capítulo 5

Trazas de representaciones: Cálculo de límites de toros cuspidales

5.1. Usando sólo el grupo fundamental: Cálculo de toros cuspidales

Como vimos en la Sección 3.4, podemos escribir a $\pi_1(M_\varphi)$ como un producto semi-directo (3.12), y por lo tanto, si $\rho(\delta) = T_\tau$, $\rho(\alpha) = A$ y $\rho(\beta) = B$, entonces tenemos dos igualdades de matrices

$$T_\tau A T_\tau^{-1} = P_1(A, B) \quad \text{y} \quad T_\tau B T_\tau^{-1} = P_2(A, B), \quad (5.1)$$

donde $P_1(A, B) = \rho(\varphi_*(\alpha))$ y $P_2(A, B) = \rho(\varphi_*(\beta))$ son palabras en $\langle A, B \rangle$. Más aún, podemos escribir a A y B (y por lo tanto a $P_1(A, B)$ y $P_2(A, B)$) en términos de 3 variables complejas x , y , y z (ver Lema 3.14). Además, usando que la traza es invariante bajo conjugación, tenemos que

$$x = \text{tr}(A) = \text{tr}(P_1(A, B)) = p_1(x, y, z) \quad \text{y} \quad y = \text{tr}(B) = \text{tr}(P_2(A, B)) = p_2(x, y, z), \quad (5.2)$$

donde $p_1(x, y, z)$ y $p_2(x, y, z)$ denotan polinomios con coeficientes enteros. Por lo tanto, con (5.2) y la identidad de Markoff (3.15), obtenemos un sistema de tres ecuaciones polinomiales con tres incógnitas: x , y y z .

Además, a partir de (5.1), podemos escribir a τ (ver (3.13)) en función de x y y , y por lo tanto podemos obtener al toro cuspidal $\langle 2, \tau \rangle$.

La dificultad de lo anterior, radica en encontrar las palabras $P_1(A, B)$ y $P_2(A, B)$. En efecto, si

$$\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

entonces $P_1(A, B)$ es una palabra que contiene a veces la letra A y c veces la letra B ; mientras que $P_2(A, B)$ es una palabra que contiene b veces la letra A y d veces la letra B , de la manera más distribuida posible, como se ve en [5]. Sin embargo, hay una ambigüedad en cuanto al final de la palabra; por ejemplo, una de las familias más sencillas de estudiar (y que ya ha sido estudiada por Helling en [13]) es la familia de las variedades M_{φ_M} con

$$\varphi_M = RL^M = \begin{pmatrix} 1 & M \\ 1 & M + 1. \end{pmatrix}.$$

Aquí, debe suceder que

$$T_\tau AT_\tau^{-1} = AB \quad \text{y} \quad T_\tau BT_\tau^{-1} = (BA)^m B,$$

ya que en cualquier otro caso, ocurre una contradicción. Por ejemplo, por la primer ecuación de (5.2), obtenemos que $x = z$, pero en el caso $T_\tau AT_\tau^{-1} = BA$, al igualar dichas matrices obtenemos que $x = -z$, lo cual es una contradicción pues no puede haber trazas nulas, ya que AB no puede ser elíptico.

Lo anterior prueba que sí es importante la manera de escribir las palabras $P_1(A, B)$ y $P_2(A, B)$, y sin embargo, hay una manera de evitarlo usando sólo las trazas de las palabras. De hecho, en la ecuación (21) de [13] se enuncia una palabra incorrecta para dar una representación de $\pi_1(M_{\varphi_M})$, pero esta no altera sus resultados, pues en el fondo trabaja sólo con las trazas de las representaciones, al igual que lo haremos en la siguiente sección.

5.2. Usando trazas: Cálculo de toros cuspidales

Como ya mencionamos en la Introducción, las trazas de los elementos de un grupo kleiniano Γ ya se han usado para estudiar la variedad \mathbb{H}^3/Γ y en particular, para estudiar variedades hiperbólicas que son un círculo de toros ponchados. En esta sección estudiaremos el problema desde este enfoque.

Como vimos en la Sección 3.2 (ver también [9]), a cada número racional le corresponde una clase de conjugación en $\pi_1(T^*)$ mediante una función $\Lambda : \mathbb{Q} \rightarrow \pi_1(T^*)/\text{conjugación}$ (ver (3.3)). Luego, a cada elemento de $\pi_1(T^*)/\text{conjugación}$ le corresponde una clase de conjugación de matrices en $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ mediante su representación $\rho : \pi_1(M_\varphi) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ (usando implícitamente la inclusión $i_* : \pi_1(T^*) \hookrightarrow \pi_1(M_\varphi)$) y bajando al cociente en el dominio y contradominio de ρ , lo cual puede hacerse ya que ρ es un homomorfismo de grupos y por lo tanto preserva conjugación. Más aún, tenemos las siguientes correspondencias:

- Cada arista de la triangulación de Farey está en correspondencia con dos números racionales (sus extremos) que a su vez se identifican con una pareja de clases de conjugación de $\pi_1(T^*)$, donde dos de sus representantes generan $\pi_1(T^*)$, y por lo

tanto obtenemos las clases de conjugación de dos matrices A y B , donde A y B son como en el Lema 3.14.

- Cada triángulo de Farey está en correspondencia con tres números racionales (sus vértices) que a su vez se identifican con tres clases de conjugación de $\pi_1(T^*)$ (donde por el punto anterior, con cualesquiera dos de ellos se genera $\pi_1(T^*)$) y por lo tanto con las clases de conjugación de tres matrices A , B y AB como en el Lema 3.14, ya que en un triángulo de Farey, los racionales correspondientes a sus vértices son de la forma

$$\frac{p}{q}, \quad \frac{r}{s} \quad \text{y} \quad \frac{p+r}{q+s}$$

(ver Observación 3.5).

- Por el punto anterior, a cada triángulo de Farey le asociamos tres números $x, y, z \in \mathbb{C}$, que corresponden a las trazas de A , B y AB , respectivamente. Notemos que la única ambigüedad es la del signo (más de esto en el siguiente párrafo) pues la traza se preserva bajo conjugación. Además, a dos triángulos de Farey adyacentes (triángulos que tienen una arista en común), les corresponden cuatro números complejos $x, y, z, w \in \mathbb{C}$ como en la Figura 5.1, de manera que

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz \quad \text{y} \quad z + w = xy, \quad (5.3)$$

donde la primer ecuación es la identidad de Markoff, justificada en el Corolario 3.15, y la segunda ecuación se obtiene al resolver la identidad de Markoff como una ecuación cuadrática pensando a z como la variable, y obteniendo como solución a las raíces z y w .

Con los puntos anteriores, obtenemos una asociación $tr \circ \rho \circ \Lambda : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}$, la cuál se conoce como una *función de Markoff* ya que cumple (5.3). Cabe resaltar que en realidad hay cuatro funciones de Markoff asociadas a una representación, ya que nuevamente existe una ambigüedad en los signos de las trazas de los elementos de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$. Sin embargo, nosotros usaremos los valores de las funciones de Markoff en cocientes de la forma

$$\frac{\text{tr}(AB)}{\text{tr}(A) \text{tr}(B)} \quad \text{ó} \quad \frac{\text{tr}(AB^{-1})}{\text{tr}(A) \text{tr}(B)}, \quad (5.4)$$

(donde A, B, AB y AB^{-1} son las matrices asociadas a dos triángulos de Farey adyacentes, mediante $\rho \circ \Lambda$, como en la Figura 5.1) y en dichos cocientes no existirá tal ambigüedad, ya que dada una función de Markoff, en las otras tres sólo se cambia el signo de un número par de trazas en cada triángulo. En efecto, al fijar los signos de $\text{tr}(A)$ y de $\text{tr}(B)$ veamos qué pasa al modificarlos. Si le cambiamos el signo a $\text{tr}(A)$ y a $\text{tr}(B)$, entonces $\text{tr}(AB)$ y $\text{tr}(AB^{-1})$ conservarán su signo; y si le cambiamos el signo sólo a $\text{tr}(A)$ ó sólo a $\text{tr}(B)$,

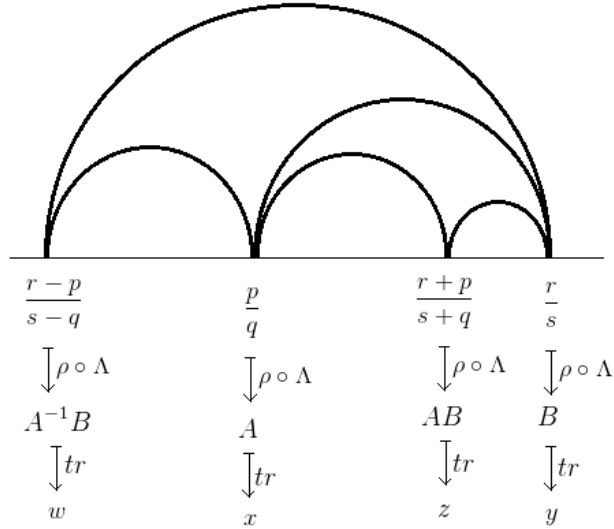


Figura 5.1: Triángulos de Farey adyacentes.

entonces $\text{tr}(AB)$ y $\text{tr}(AB^{-1})$ cambiarán de signo. De lo que concluimos que los cocientes de la forma (5.4) siempre conservarán su signo sin importar los cambios que haga en los signos de $\text{tr}(A)$ o $\text{tr}(B)$.

Lema 5.1. *Se puede escribir la traza asociada a cualquier racional, en función de las tres trazas asociadas a un triángulo de Farey fijo.*

Demostración. Consideremos un camino de triángulos de Farey

$$T_0 T_1 T_2 \cdots T_{n-1} T_n \tag{5.5}$$

(donde cualesquiera dos triángulos consecutivos se intersecten en una arista), de tal manera que el primer triángulo, T_1 , sea el triángulo fijo mencionado en el Lema y el último triángulo, T_n , sea un triángulo que contiene al racional del cual queremos conocer su traza asociada. Usando la ecuación $z + w = xy$ (vista en (5.3)) en los vértices de los triángulos de dicho camino (recorriéndolos en orden) podemos obtener la traza buscada. \square

Como vimos antes, las relaciones en el grupo fundamental de M_φ (ver (3.12)) se traducen en una periodicidad de la función de Markoff (ver (5.2)). Luego, por el lema anterior, podemos escribir a p_1 y p_2 (ver 5.2) en función de x y y (notemos que así, encontramos p_1 y p_2 antes de encontrar $P_1(A, B)$ y $P_2(A, B)$). Ahora, describiremos el algoritmo mencionado en la prueba del Lema 5.1 de forma concreta.

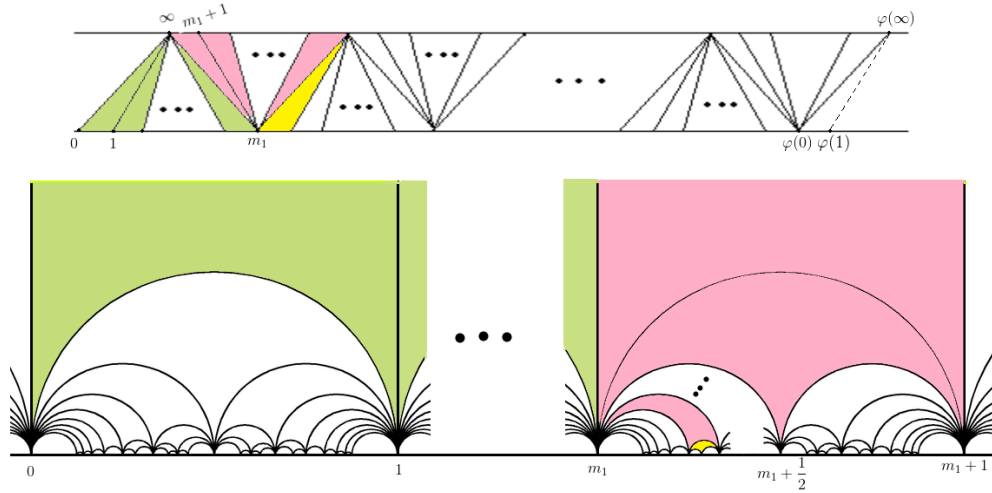


Figura 5.2

Un algoritmo recursivo para obtener los polinomios deseados:

Consideremos el camino finito de triángulos (5.5) (que coincidirá con la notación de (3.8) y (3.11)), en el cual, como vimos en la demostración de la Proposición 3.9, T_0 denota al triángulo cuyos vértices son -1 , 0 y 1 , y la combinatoria del resto de los triángulos es la misma que la que ya habíamos estudiado en la parte izquierda de la Figura 4.2 (lo cual podemos observar en la Figura 5.2). Entonces, podemos encontrar las trazas correspondientes a $\varphi(\infty)$, $\varphi(0)$ y $\varphi(1)$, usando la segunda ecuación de Markoff como se muestra a continuación.

Observación 5.2. Considerando la notación de la Figura 5.3 para nombrar a las trazas correspondientes a los vértices de nuestra triangulación, podemos usar la segunda ecuación de trazas para obtener lo siguiente:

$$y_{(i,j)} = \begin{cases} y_{(i-1,m_{i-1})} & \text{si } i \in \{2, 3, \dots, k\} \text{ y } j = 0, \\ y_{(i,0)} x_{(i-1,n_{i-1})} - x_{(i-1,n_{i-1}-1)} & \text{si } i \in \{2, 3, \dots, k\} \text{ y } j = 1, \\ x_{(i,0)} y_{(i,j-1)} - y_{(i,j-2)} & \text{si } i \in \{1, 2, \dots, k\} \text{ y } j \in \{2, 3, \dots, m_i\}, \end{cases}$$

$$x_{(i,j)} = \begin{cases} x_{(i-1,n_{i-1})} & \text{si } i \in \{2, 3, \dots, k\} \text{ y } j = 0, \\ x_{(i,0)} y_{(i,m_i)} - y_{(i,m_i-1)} & \text{si } i \in \{2, 3, \dots, k\} \text{ y } j = 1, \\ y_{(i,m_i)} x_{(i,j-1)} - x_{(i,j-2)} & \text{si } i \in \{1, 2, \dots, k\} \text{ y } j \in \{2, 3, \dots, n_i\}, \end{cases}$$

usando la recursión sobre j , para i fijo, en orden ascendente de i , y calculando primero las $y_{(i,*)}$ y después las $x_{(i,*)}$.

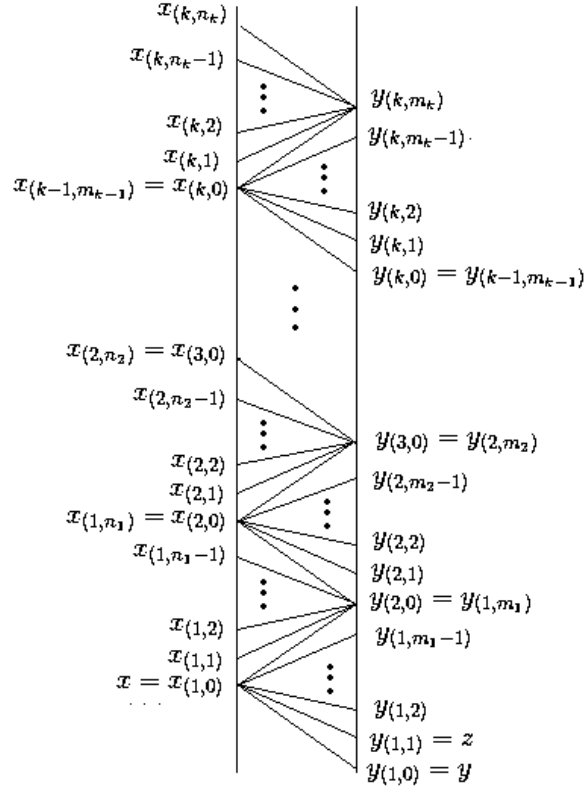


Figura 5.3

Luego, para cada i fija, podemos reescribir lo anterior mediante polinomios de Chebyshev, como lo haremos en el Lema 5.3. La ventaja de esto, es que estos polinomios ya han sido bien estudiados incluso de manera no recursiva.

Lema 5.3. *Al fijar $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, podemos escribir todos los $y_{(i,j)}$, con $j \in \{2, 3, \dots, m_i\}$, en función de $x_{(i,0)}$, $y_{(i,0)}$ y $y_{(i,1)}$ como*

$$y_{(i,j)} = y_{(i,1)} c_j(x_{(i,0)}) - y_{(i,0)} c_{j-1}(x_{(i,0)}), \quad (5.6)$$

donde $c_0(\omega) = 0$, $c_1(\omega) = 1$ y $c_j(\omega) = \omega c_{j-1}(\omega) - c_{j-2}(\omega)$. De manera análoga, al fijar $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, podemos escribir todos los $x_{(i,j)}$, con $j \in \{2, 3, \dots, n_i\}$, en función de $x_{(i,0)}$, $x_{(i,1)}$ y $y_{(i,m_i)} = y_{(i+1,0)}$ como,

$$x_{(i,j)} = x_{(i,1)} c_j(y_{(i+1,0)}) - x_{(i,0)} c_{j-1}(y_{(i+1,0)}). \quad (5.7)$$

Demostración. Probaremos (5.6) y (5.7) por recursión sobre j para $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ fijo.

B.I: Haremos los casos $j = 2$ y $j = 3$, para cualquier $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ fijo, donde la primer igualdad en cada caso la obtuvimos de la Observación 5.2 y el resto es álgebra elemental.

$j = 2$:

$$\begin{aligned} y_{(i,2)} &= x_{(i,0)} y_{(i,1)} - y_{(i,0)} = y_{(i,1)} c_2(x_{(i,0)}) - y_{(i,0)} c_1(x_{(i,0)}), \\ x_{(i,2)} &= y_{(i,m_i)} x_{(i,1)} - x_{(i,0)} = x_{(i,1)} c_2(y_{(i,m_i)}) - x_{(i,0)} c_1(y_{(i,m_i)}). \end{aligned}$$

$j = 3$:

$$\begin{aligned} y_{(i,3)} &= x_{(i,0)} y_{(i,2)} - y_{(i,1)} & x_{(i,3)} &= y_{(i,m_i)} x_{(i,2)} - x_{(i,1)} \\ &= x_{(i,0)} [x_{(i,0)} y_{(i,1)} - y_{(i,0)}] - y_{(i,1)} & &= y_{(i,m_i)} [y_{(i,m_i)} x_{(i,1)} - x_{(i,0)}] - x_{(i,1)} \\ &= y_{(i,1)} [x_{(i,0)}^2 - 1] - y_{(i,0)} [x_{(i,0)}] & &= x_{(i,1)} [y_{(i,m_i)}^2 - 1] - x_{(i,0)} [y_{(i,m_i)}] \\ &= y_{(i,1)} c_3(x_{(i,0)}) - y_{(i,0)} c_2(x_{(i,0)}), & &= x_{(i,1)} c_3(y_{(i,m_i)}) - y_{(i,0)} c_2(x_{(i,0)}). \end{aligned}$$

H.I: Supongamos que la afirmación es cierta para $j - 1$ y j .

Prueba para $j + 1$:

$$\begin{aligned} y_{(i,j+1)} &= x_{(i,0)} y_{(i,j)} - y_{(i,j-1)} \\ &= x_{(i,0)} [y_{(i,1)} c_j(x_{(i,0)}) - y_{(i,0)} c_{j-1}(x_{(i,0)})] - [y_{(i,1)} c_{j-1}(x_{(i,0)}) - y_{(i,0)} c_{j-2}(x_{(i,0)})] \\ &= y_{(i,1)} [x_{(i,0)} c_j(x_{(i,0)}) - c_{j-1}(x_{(i,0)})] - y_{(i,0)} [x_{(i,0)} c_{j-1}(x_{(i,0)}) - c_{j-2}(x_{(i,0)})] \\ &= y_{(i,1)} c_{j+1}(x_{(i,0)}) - y_{(i,0)} c_j(x_{(i,0)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{(i,j+1)} &= y_{(i,m_i)} x_{(i,j)} - x_{(i,j-1)} \\ &= y_{(i,m_i)} [x_{(i,1)} c_j(y_{(i+1,0)}) - x_{(i,0)} c_{j-1}(y_{(i+1,0)})] - [x_{(i,1)} c_{j-1}(y_{(i+1,0)}) - x_{(i,0)} c_{j-2}(y_{(i+1,0)})] \\ &= x_{(i,1)} [y_{(i,m_i)} c_j(y_{(i+1,0)}) - c_{j-1}(y_{(i+1,0)})] - x_{(i,0)} [y_{(i,m_i)} c_{j-1}(y_{(i+1,0)}) - c_{j-2}(y_{(i+1,0)})] \\ &= x_{(i,1)} [y_{(i+1,0)} c_j(y_{(i+1,0)}) - c_{j-1}(y_{(i+1,0)})] - x_{(i,0)} [y_{(i+1,0)} c_{j-1}(y_{(i+1,0)}) - c_{j-2}(y_{(i+1,0)})] \\ &= x_{(i,1)} c_{j+1}(y_{(i+1,0)}) - x_{(i,0)} c_j(y_{(i+1,0)}). \end{aligned}$$

□

Lema 5.4. Si $c_0(\omega) = 0$, $c_1(\omega) = 1$ y $c_j(\omega) = \omega c_{j-1}(\omega) - c_{j-2}(\omega)$, como en el Lema 5.3, entonces

$$c_n(\omega) = \frac{(\omega + \sqrt{\omega^2 - 4})^n - (\omega - \sqrt{\omega^2 - 4})^n}{2^n \sqrt{\omega^2 - 4}}. \quad (5.8)$$

Este lema se encuentra (sin prueba) en [36]. De hecho, los polinomios mencionados en él, se relacionan con los *Polinomios de Chebyshev de segundo tipo* como $c_n(\omega) = U_{n-1}(\omega/2)$ para todo $n > 0$. Estos polinomios han sido muy estudiados y se definen recursivamente como $U_0(\omega) = 1$, $U_1(\omega) = 2\omega$ y $U_{n+1}(\omega) = 2\omega U_n(\omega) - U_{n-1}(\omega)$, como ya lo habíamos mencionado en la Sección 4.5.

Demostración. Procedemos por inducción.

B.I:

$$\begin{aligned}
 c_2(\omega) &= \omega = \frac{4\omega\sqrt{\omega^2-4}}{4\sqrt{\omega^2-4}} = \frac{(\omega + \sqrt{\omega^2-4})^2 - (\omega - \sqrt{\omega^2-4})^2}{2^2\sqrt{\omega^2-4}}, \\
 c_3(\omega) &= \omega^2 - 1 = \frac{8(\omega^2-1)\sqrt{\omega^2-4}}{8\sqrt{\omega^2-4}} = \frac{2(3\omega^2 + (\omega^2-4))\sqrt{\omega^2-4}}{2^3\sqrt{\omega^2-4}} \\
 &= \frac{6\omega^2\sqrt{\omega^2-4} + 2(\sqrt{\omega^2-4})^3}{2^3\sqrt{\omega^2-4}} = \frac{(\omega + \sqrt{\omega^2-4})^3 - (\omega - \sqrt{\omega^2-4})^3}{2^3\sqrt{\omega^2-4}}.
 \end{aligned}$$

H.I: Supongamos que la afirmación es cierta para $\{1, 2, \dots, n\}$.

Demostración para $n + 1$:

$$\begin{aligned}
 c_{n+1} &= \omega c_n - c_{n-1} \\
 &= \omega \frac{(\omega + \sqrt{\omega^2-4})^n - (\omega - \sqrt{\omega^2-4})^n}{2^n\sqrt{\omega^2-4}} - \frac{(\omega + \sqrt{\omega^2-4})^{n-1} - (\omega - \sqrt{\omega^2-4})^{n-1}}{2^{n-1}\sqrt{\omega^2-4}} \\
 &= \frac{2\omega(\omega + \sqrt{\omega^2-4})^n - 2\omega(\omega - \sqrt{\omega^2-4})^n}{2^{n+1}\sqrt{\omega^2-4}} - \frac{4(\omega + \sqrt{\omega^2-4})^{n-1} - 4(\omega - \sqrt{\omega^2-4})^{n-1}}{2^{n+1}\sqrt{\omega^2-4}} \\
 &= \frac{2\omega(\omega + \sqrt{\omega^2-4})(\omega + \sqrt{\omega^2-4})^{n-1} - 2\omega(\omega - \sqrt{\omega^2-4})(\omega - \sqrt{\omega^2-4})^{n-1}}{2^{n+1}\sqrt{\omega^2-4}} \\
 &\quad - \frac{4(\omega + \sqrt{\omega^2-4})^{n-1} - 4(\omega - \sqrt{\omega^2-4})^{n-1}}{2^{n+1}\sqrt{\omega^2-4}} \\
 &= \frac{(2\omega^2 + 2\omega\sqrt{\omega^2-4} - 4)(\omega + \sqrt{\omega^2-4})^{n-1} - (2\omega^2 - 2\omega\sqrt{\omega^2-4} - 4)(\omega - \sqrt{\omega^2-4})^{n-1}}{2^{n+1}\sqrt{\omega^2-4}} \\
 &= \frac{(\omega + \sqrt{\omega^2-4})^2(\omega + \sqrt{\omega^2-4})^{n-1} - (\omega - \sqrt{\omega^2-4})^2(\omega - \sqrt{\omega^2-4})^{n-1}}{2^{n+1}\sqrt{\omega^2-4}} \\
 &= \frac{(\omega + \sqrt{\omega^2-4})^{n+1} - (\omega - \sqrt{\omega^2-4})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{\omega^2-4}}.
 \end{aligned}$$

□

Corolario 5.5. *Podemos escribir a cualquier $x_{(i,j)}$ y $y_{(i,j)}$ en términos de $x := x_{(1,0)}$, $y := y_{(1,0)}$ y $z := y_{(1,1)}$. En particular, podemos escribir a $y_{(k,m_k)}$ y a $x_{(k,m_k)}$ en términos de x , y y z . Así, obtenemos un sistema de tres polinomios en tres variables a partir de $y_{(k,m_k)} = y$, $x_{(k,n_k)} = x$ y la identidad de Markoff $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$.*

Notemos que es posible optimizar el algoritmo para obtener polinomios de grado menor. En efecto, si comenzamos con ternas de complejos x , y , z , y x , y , $xy - z$ en el inicio y en el final de la franja con la que trabajamos (ver Figura 5.4) y seguimos el algoritmo que planteamos en el Lema 5.3 hacia el centro de la franja triangulada (desde dos direcciones: de abajo hacia el centro y de arriba hacia el centro), podemos obtener dos igualdades de polinomios en dicho centro en lugar de dos igualdades de polinomios en la parte superior de la franja.

Nuevamente, resaltemos que este algoritmo tampoco nos dice cuál es la raíz correcta de nuestro sistema de polinomios. Sin embargo, una vez que la conocemos, podemos encontrar a dichas descomposiciones de la siguiente forma.

Descomposición en términos de una raíz del polinomio:

Lema 5.6. *Las trazas codifican la triangulación del toro cuspidal. Cada arista de la triangulación del toro cuspidal (visto como vector en la Figura 4.2) se puede escribir como el vector asociado a un cociente de trazas de la forma (5.4), donde $A = \rho(\alpha)$ y $B = \rho(\beta)$, con α y β cierta pareja de generadores de $\pi_1(T^*)$.*

Cabe resaltar que esto ya lo había observado Jørgensen (ver Sección 4 de [16]) para uno de los cuatro triángulos que aporta un tetraedro (ver el segundo triángulo, contando de izquierda a derecha, de la Figura 3.5). Aquí, lo porbaremos para los cuatro triángulos que aporta un tetraedro. Posteriormente, en el Corolario 5.8, diremos de manera explícita cuáles son las trazas de dichos cocientes para cada una de las aristas de la triangulación de M_φ que estamos estudiando.

Demostración. Lo anterior se puede obtener de manera directa de la Figura 3.4. En concreto, tenemos una conexión importante: a cada triángulo de Farey, le corresponde una pareja de clases de conjugación de matrices A y B , las cuales generan $\pi_1(T^*)$. Luego, a esta pareja de clases le corresponde un tetraedro hiperbólico plegado (ver Sección 3.6), el cual aporta 4 triángulos euclidianos en la cúspide, donde los vértices de dichos triángulos se pueden escribir en función de las trazas de A , B y AB (ver Figura 3.4). Finalmente, podemos obtener los lados de la triangulación (vistos como vectores) haciendo sus respectivas restas. Para esto, basta calcular los lados de los triángulos correspondientes a los dos tetraedros de la izquierda en la Figura 3.5, ya que como los otros dos triángulos son

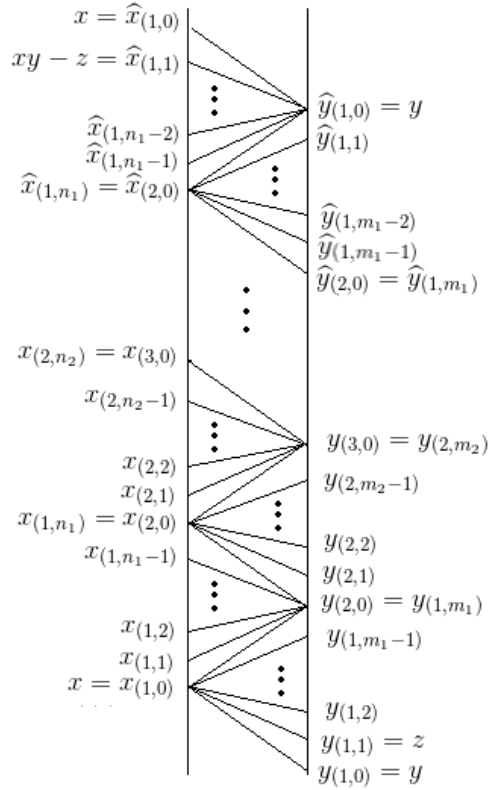


Figura 5.4: Algoritmo óptimo.

sus trasladados, les corresponden los mismos vectores. En efecto, como los grupos con los que trabajamos no tienen elementos elípticos, tenemos $x, y, z \neq 0$, y por lo tanto, (5.3) es equivalente a

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{z}{xy} + \frac{w}{xy} = 1.$$

Entonces obtenemos de manera directa que

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} = 1 - \frac{z}{xy} = \frac{w}{xy} \quad \text{y} \quad -\frac{x}{yz} - \frac{y}{xz} = \frac{z}{xy}.$$

Luego, usando nuevamente (5.3), tenemos que

$$-\frac{y}{xz} + \frac{y^2}{y^2 + x^2} = -\frac{y}{xz} + \frac{y^2}{z(xy - z)} = \frac{y}{x(xy - z)} = \frac{y}{xw},$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} -\frac{y^2}{y^2 + x^2} + 1 - \frac{x}{yz} &= -\frac{y}{x(xy - z)} - \frac{y}{xz} + 1 - \frac{x}{yz} = -\frac{y}{x(xy - z)} + \frac{z}{xy} \\ &= \frac{-y^2 + z(xy - z)}{xy(xy - z)} = \frac{x}{y(xy - z)} = \frac{x}{yw}. \end{aligned}$$

Lo anterior se resume en la Figura 5.5. □

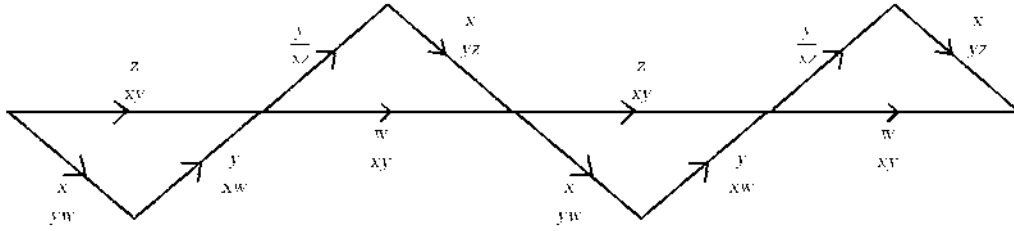


Figura 5.5: Lados en función de trazas.

Notación 5.7. De acuerdo a la sección anterior, la tercer línea vertical de la Figura 4.2 está particionada de igual forma que la primera; de hecho, es su reflejado (combinatorio) respecto la segunda. Así, por simplicidad de notación, al vértice reflejado del vértice correspondiente a $p_{(i,j)}$, lo denotaremos por $p'_{(i,j)}$.

En concreto, bajo la notación anterior, el Lema 5.6 se traduce en lo siguiente:

Corolario 5.8. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, m_i\}$, tenemos que

$$q_{(i,j+1)} - q_{(i,j)} = \frac{x_{(i,0)}}{y_{(i,j+1)}y_{(i,j)}}, \quad q_{(i,j)} - p_{(i,0)} = \frac{y_{(i,j+1)}}{x_{(i,0)}y_{(i,j)}} \quad y \quad p'_{(i,0)} - q_{(i,j)} = \frac{y_{(i,j-1)}}{x_{(i,0)}y_{(i,j)}};$$

y para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, n_i\}$, tenemos que

$$p_{(i,j)} - p_{(i,j+1)} = \frac{y_{(i,m_i)}}{x_{(i,j)}x_{(i,j+1)}}, \quad q_{(i,m_i)} - p_{(i,j)} = \frac{x_{(i,j+1)}}{x_{(i,j)}y_{(i,m_i)}} \quad y \quad p'_{(i,j)} - q_{(i,m_i)} = \frac{x_{(i,j-1)}}{x_{(i,j)}y_{(i,m_i)}}.$$

Demostración. Para probar esto, basta aplicar el Lema anterior a los cuatro tipos combinatorios de tetraedros que se muestran en la Figura 5.6. En cada caso de dicha figura, usamos la notación de las trazas: x , y , z y w , que se resume en la Figura 5.5. Luego, podemos verificar que se pegan de manera adecuada los seis posibles casos: $I \rightarrow I$, $II \rightarrow II$,

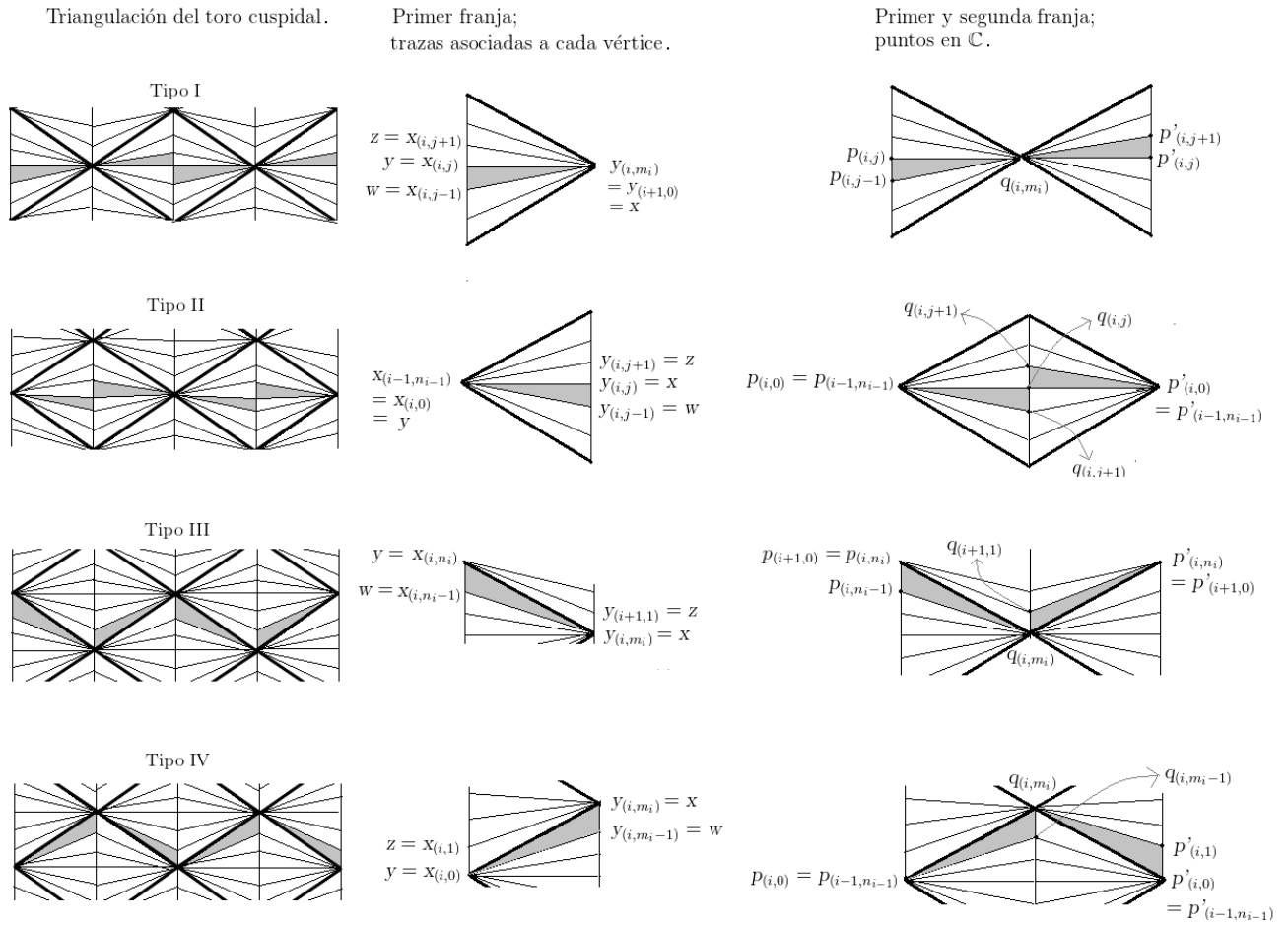


Figura 5.6

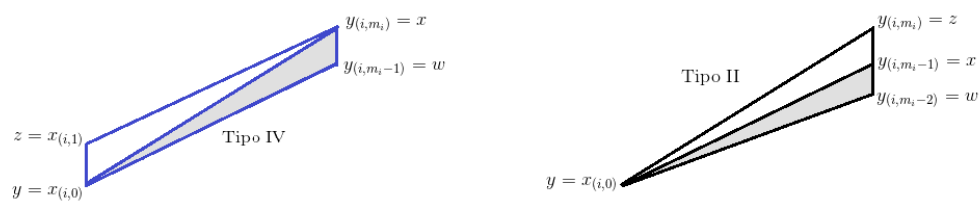


Figura 5.7

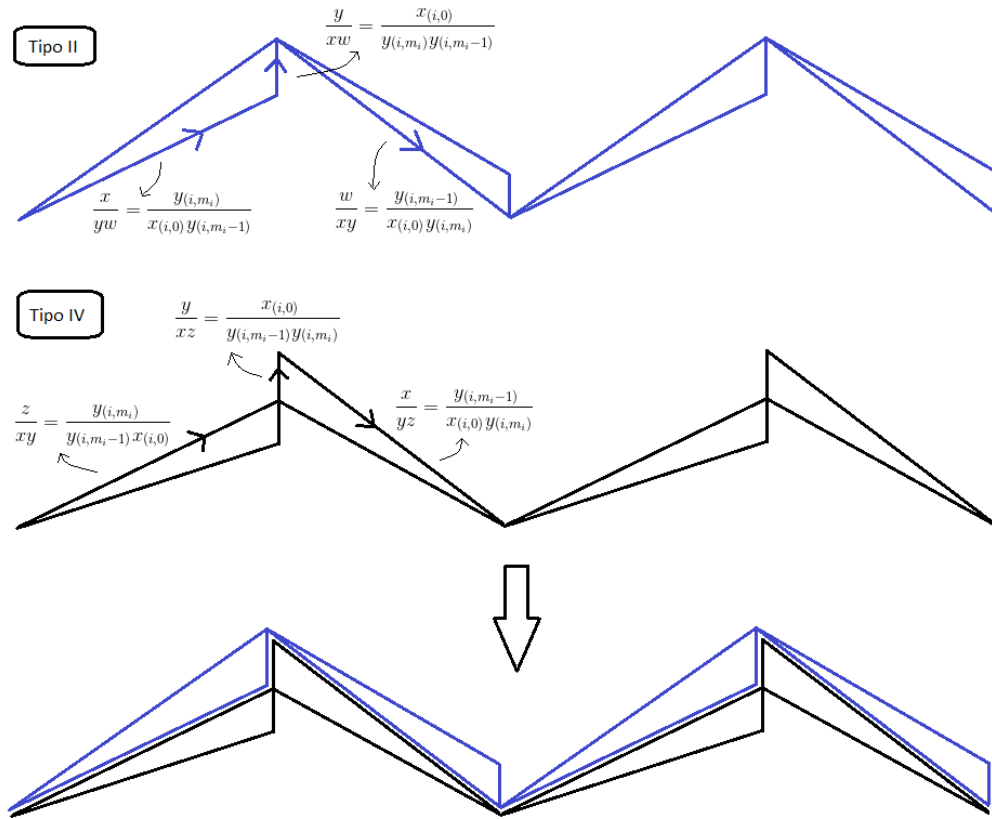


Figura 5.8: Caso $II \rightarrow IV$

$III \rightarrow II$, $I \rightarrow III$, $IV \rightarrow I$ y $II \rightarrow IV$, donde $X \rightarrow Y$ denota el caso donde la tira combinatoria tipo Y se coloca arriba de la tira combinatoria tipo X . Por ejemplo, mediante la Figura 5.7 y la Figura 5.8, comprobamos que el pegado del caso $II \rightarrow IV$ se pega de manera adecuada, es decir, en los seis lados donde se pega el tipo II con el tipo IV , los vectores coinciden (lo verificamos sólo para tres de sus lados, ya que los otros tres son una traslación de estos). \square

Aunque todas las aristas se pueden ver como los cocientes que presentamos en el lema anterior, observemos que es suficiente con calcular las aristas de la primer franja, ya que sabemos que la suma de z/xy y w/xy siempre es 1, y por lo tanto, podemos escribir las aristas de la segunda franja en función de las aristas de la primera (ver Figura 5.5).

Concluiremos esta sección presentando un ejemplo resuelto mediante este algoritmo. Cabe resaltar que todos los ejemplos de toros cuspidales de alguna variedad M_ρ , que co-

nocemos en la literatura, se corresponden con palabras de la forma $L^M R^N$. Por lo anterior, decidimos presentar aquí el ejemplo más sencillo que no es de esta forma (y que tampoco es una potencia de alguno de los que mencionamos) usando nuestro algoritmo.

Ejemplo 5.9. Toro cuspidal de M_φ con $\varphi = L^2 RLR$.

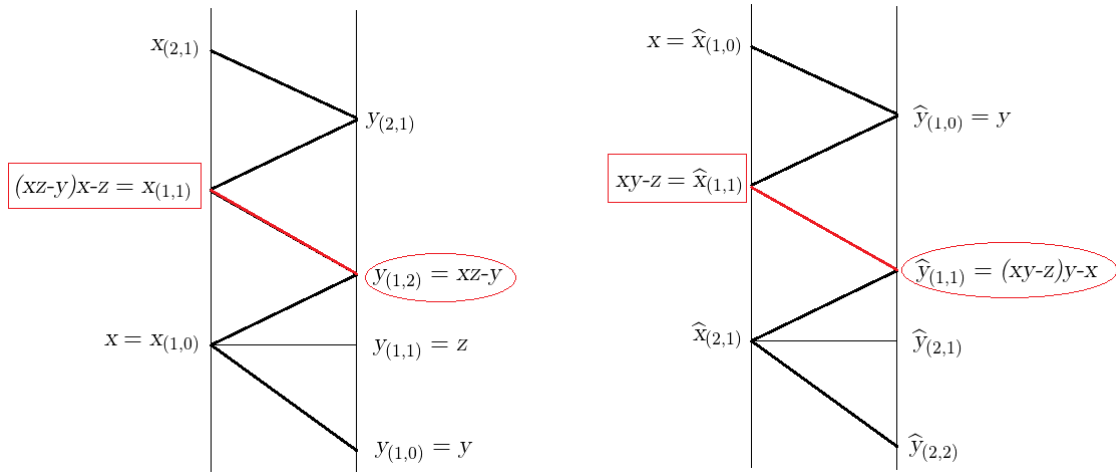


Figura 5.9

Procederemos con el algoritmo optimizado que mencionamos en el párrafo posterior al Corolario 5.5. Comenzando desde abajo, tenemos que

$$x_{(1,0)} = x, \quad y_{(1,0)} = y, \quad y_{(1,1)} = z, \quad y_{(1,2)} = xz - y \quad \text{y} \quad x_{(1,1)} = x^2z - xy - z;$$

mientras que comenzando desde arriba tenemos que

$$\hat{x}_{(1,0)} = x, \quad \hat{y}_{(1,0)} = y, \quad \hat{x}_{(1,1)} = xy - z, \quad \text{y} \quad \hat{y}_{(1,1)} = xy^2 - yz - x$$

(ver Figura 5.9). Luego, igualando $x_{(1,1)}$ con $\hat{x}_{(1,1)}$, $y_{(1,2)}$ con $\hat{y}_{(1,1)}$, y usando la identidad de Markoff para el triángulo de hasta abajo, obtenemos el sistema de ecuaciones

- (1) $x^2z = 2xy$,
- (2) $xy^2 - yz - xz + y - x = 0$,
- (3) $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$.

En este caso, podemos escribir todo en términos de z , lo cual es conveniente pues simplifica las posibles soluciones de nuestro sistema. En efecto, usamos que $x \neq 0$, para obtener

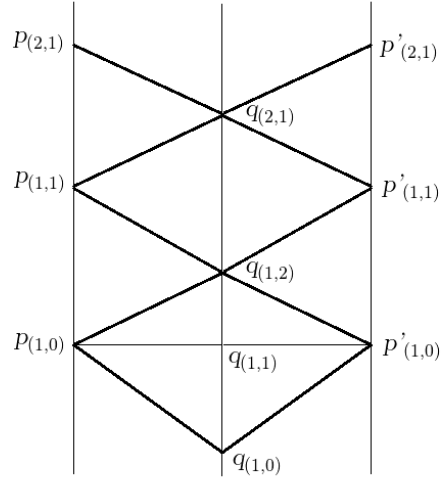


Figura 5.10

a partir de (1), $y = xz/2$. Luego, al sustituir esta última ecuación en (2) y (3), tenemos que

$$x^2 = \frac{4z^2}{z^2 - 4} \quad \text{y} \quad x^2 = \frac{2z^2 + 2z + 4}{z^2},$$

y por lo tanto,

$$z^4 - z^3 + 2z^2 + 4z + 8 = 0. \quad (5.9)$$

Esta última es una ecuación polinomial, cuyas raíces (aproximaciones computacionales) son $z \approx -0.846446 \pm 0.95037i$ y $z \approx 1.3465 \pm 1.7681i$.

Por otro lado, usando el Corolario 5.8 tenemos que

$$\begin{aligned} q_{(1,1)} - p_{(1,0)} &= \frac{y_{(1,2)}}{x_{(1,0)}y_{(1,1)}} = \frac{xz - y}{xz}, & p'_{(1,0)} - q_{(1,1)} &= \frac{y_{(1,0)}}{x_{(1,0)}y_{(1,1)}} = \frac{y}{xz}, \\ q_{(1,1)} - q_{(1,0)} &= \frac{x_{(1,0)}}{y_{(1,1)}y_{(1,1)}} = \frac{x}{yz}, & p_{(1,1)} - p_{(2,1)} &= \frac{y_{(2,1)}}{x_{(2,0)}x_{(2,1)}} = \frac{y}{x(xy - z)}, \\ q_{(1,2)} - q_{(1,1)} &= \frac{x_{(1,0)}}{y_{(1,2)}x_{(1,1)}} = \frac{x}{z(xz - y)}, & p_{(1,0)} - p_{(1,1)} &= \frac{y_{(1,2)}}{x_{(1,0)}x_{(1,1)}} = \frac{xz - y}{x(xy - z)}, \\ q_{(2,1)} - q_{(2,0)} &= \frac{x_{(2,0)}}{y_{(2,1)}y_{(2,0)}} = \frac{xy - z}{y(xz - y)}. \end{aligned}$$

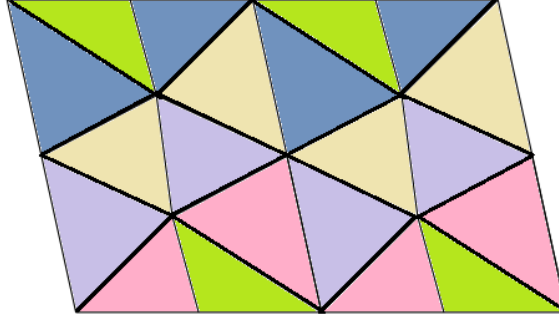


Figura 5.11: Toro cuspidal de L^2RLR .

Notemos que la ecuación (1) de nuestro sistema de ecuaciones es equivalente a la ecuación $xz - y = y$ (donde nuevamente $x \neq 0$), y por lo tanto

$$p_{(1,1)} - p_{(2,1)} = p_{(1,0)} - p_{(1,1)} \quad \text{y} \quad q_{(1,1)} - q_{(1,0)} = q_{(1,2)} - q_{(1,1)}.$$

Ahora, haciendo los cálculos respectivos podemos escribir todo en función de z como sigue:

$$\begin{aligned} q_{(1,1)} - p_{(1,0)} &= \frac{1}{2} = p'_{(1,0)} - q_{(1,1)}, \\ p_{(1,1)} - p_{(2,1)} &= \frac{2}{z^2} = p_{(1,0)} - p_{(1,1)}, \\ q_{(1,1)} - q_{(1,0)} &= \frac{z^2}{2(z+2)} = q_{(1,2)} - q_{(1,1)}, \\ q_{(2,1)} - q_{(2,0)} &= \frac{z^2 + 4}{z^3}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Finalmente, sustituyendo las soluciones de (5.9) en lo anterior, obtenemos distintas configuraciones de triángulos. Sin embargo, en tres de ellas se sobreponen dichos triángulos, por lo que la configuración correcta del toro cuspidal se construye a partir de la solución $z \approx 1.3465 - 1.7681i$ (ver Figura 5.11).

Observación 5.10. Nuestro sistema de ecuaciones (1), (2) y (3) tiene 8 posibles soluciones, cuyas aproximaciones se presentan en el Cuadro 5.1. Sin embargo, obtenemos las mismas soluciones en ciertas parejas de ellas, por lo que al escribir todo en términos de z (en este caso), eliminamos las soluciones múltiples.

j	x_j	y_j	z_j
1	$-1.02825 + 0.622237 i$	$0.730863 + 0.225257 i$	$-0.846461 - 0.950366 i$
2	$1.02825 - 0.622237 i$	$-0.730863 - 0.225257 i$	$-0.846461 - 0.950366 i$
3	$-1.02825 - 0.622237 i$	$0.730863 - 0.225257 i$	$-0.846461 + 0.950366 i$
4	$1.02825 + 0.622237 i$	$-0.730863 + 0.225257 i$	$-0.846461 + 0.950366 i$
5	$-1.59672 + 0.468662 i$	$-1.48929 - 1.09608 i$	$1.34646 + 1.76812 i$
6	$1.59672 - 0.468662 i$	$1.48929 + 1.09608 i$	$1.34646 + 1.76812 i$
7	$-1.59672 - 0.468662 i$	$-1.48929 + 1.09608 i$	$1.34646 - 1.76812 i$
8	$1.59672 + 0.468662 i$	$1.48929 - 1.09608 i$	$1.34646 - 1.76812 i$

Cuadro 5.1: Aproximaciones de soluciones para el sistema de ecuaciones (1), (2) y (3).

5.3. Avances en el caso particular: $L^M R^N$

Puesto que todas las familias con las que trabajaremos en esta sección, serán de la forma $L^M R^N$, continuaremos con la notación de la Sección 4.4, donde nos olvidábamos del subíndice i en todos los términos (ya que sólo trabajamos con $i = 1$).

Usando trazas, también podemos demostrar el Teorema 4.6. Ésta es una demostración más compacta, pero cabe resaltar que es mucho más técnica que la que presentamos anteriormente, donde únicamente usamos álgebra y geometría elemental.

Demostración. Para lo siguiente consideremos la Figura 5.12, la cual es un caso particular de las Figuras 4.2 y 5.3 (simplificando notación). Aquí, tenemos que $y_0 = y = y_M$, $x_0 = x = x_N$ y $y_1 = z$. Por la identidad de Markoff, tenemos que $\{y_{M-1}, x_1\} = \{z, xy - z\}$ y por lo tanto tenemos dos casos. Si $y_{M-1} = xy - z$ y $x_1 = z$, por el Corolario 5.8 tenemos que

$$q_0 - p_0 = \frac{y_1}{x_0 y_0} = \frac{z}{xy} = \frac{x_1}{x_0 y_M} = q_M - p_0,$$

lo cual es una contradicción (ver Figura 5.12(a)). Por lo tanto, $y_{M-1} = z$ y $x_1 = xy - z$. Lo anterior prueba que todos los cuadriláteros son centralmente simétricos (ver Corolario 5.8). Finalmente, para probar que ambos cuadriláteros (y sus respectivas copias) son paralelogramos congruentes, observemos que $q_0 - p_0 = q_M - p_N$, por la traslación vertical de la Característica geométrica 4, y además,

$$q_0 - p_0 = \frac{y_1}{x_0 y_0} = \frac{z}{xy} = \frac{y_{M-1}}{x_0 y_M} = p'_0 - q_M$$

(ver Figura 5.13). □

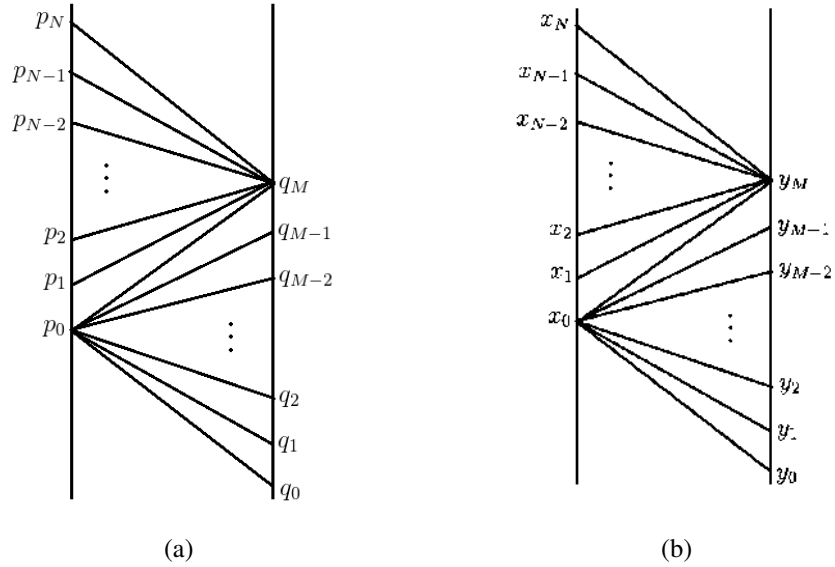


Figura 5.12

Ahora, para este caso particular, podemos escribir las ecuaciones del Corolario 5.5, mediante

$$y_M = y_0, \quad x_N = x_0, \quad x_0^2 + y_0^2 + y_1^2 = x_0 y_0 y_1. \quad (5.11)$$

Luego, observemos que en la demostración del Teorema 4.6 que probamos arriba (ver Página 99), dedujimos que también hay una simetría en las trazas, la cual se ve como

$$x_j = x_{N-j} \quad y \quad y_j = y_{M-j}. \quad (5.12)$$

En particular, $y_M = y_0$, $y_{M-1} = y_1$ y por lo tanto $x_1 = x_0 y_0 - y_1$. Así, usando lo anterior en las ecuaciones (5.6) y (5.7), obtenemos

Caso particular: Ecuaciones polinomiales para el caso $L^M R^N$.

$$y_0 = y_1 c_M(x_0) - y_0 c_{M-1}(x_0),$$

$$x_0 = (x_0 y_0 - y_1) c_N(y_0) - x_0 c_{N-1}(y_0),$$

$$x_0^2 + y_0^2 + y_1^2 = x_0 y_0 y_1.$$

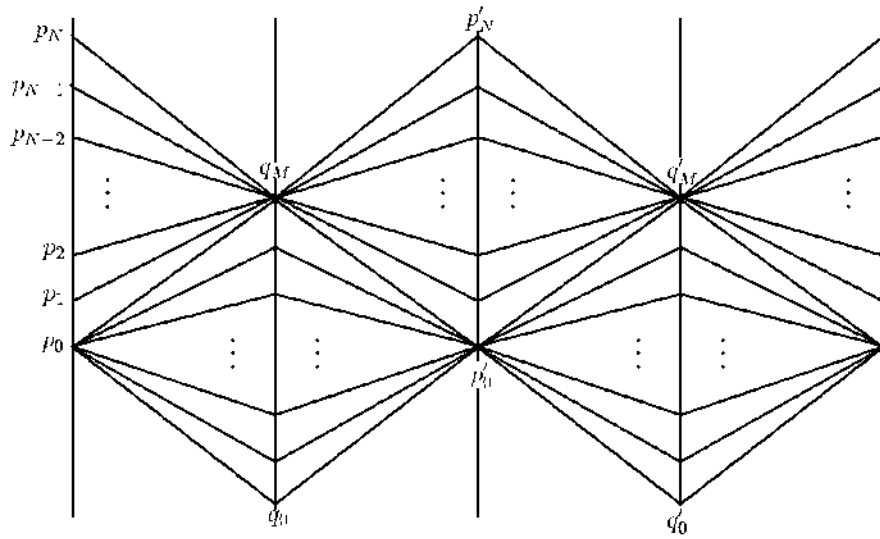


Figura 5.13

Sin embargo, al igual que en el capítulo anterior, cuando $M \neq 1 \neq N$, usando de manera más fuerte, en este caso, la simetría de trazas (5.12), podemos reducir el grado de las primeras dos ecuaciones de (5.11) a la mitad, como

$$y_{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor - 1} + y_{\lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor} = x_0 y_{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor},$$

$$x_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1} + x_{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} = y_0 x_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor},$$

$$x_0^2 + y_0^2 + y_1^2 = x_0 y_0 y_1,$$

donde $\lfloor * \rfloor$ denota la función piso, es decir, el entero menor o igual que $*$. Por lo tanto, al sustituir nuevamente, las ecuaciones (5.6) y (5.7), en el sistema anterior, obtenemos el

siguiente sistema de ecuaciones, el cual optimiza el grado de los polinomios.

Caso particular: Ecuaciones polinomiales (de grado optimizado) para el caso $L^M R^N$.

$$\begin{aligned} y_1 \left(c_{\lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor}(x_0) - c_{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor+1}(x_0) \right) &= y_0 \left(c_{\lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor-1}(x_0) - c_{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor}(x_0) \right), \\ x_0 \left(c_{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor+1}(y_0) - c_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor+2}(y_0) \right) &= y_1 \left(c_{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}(y_0) - c_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor+1}(y_0) \right), \\ x_0^2 + y_0^2 + y_1^2 &= x_0 y_0 y_1. \end{aligned}$$

Finalmente, al igual que con el algoritmo del capítulo anterior, es sencillo pensar en el caso particular $L^2 R^N$, el cual se reduce a encontrar la solución de la siguiente ecuación.

Caso particular: Ecuación polinomial (de grado optimizado) para el caso $L^2 R^N$.

$$\left(y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 16} \right) \left[c_{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor+1}(y_0) - c_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor+2}(y_0) \right] = 4 \left[c_{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}(y_0) - c_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor+1}(y_0) \right].$$

Lema 5.11. *La retícula del toro cuspidal asociado al producto $L^M R^N$ es*

$$\left\langle 2, \frac{2x_1}{x_0 y_0} - 1 \right\rangle,$$

con x_0 , x_1 y y_0 trazas asociadas a los vértices correspondientes en la Figura 5.12(b).

Demostración.

$$\begin{aligned} \langle 2, q_M - q_0 \rangle &= \langle 2, 2q_M \rangle && \text{por ser paralelogramo,} \\ &= \langle 2, 2(q_M + \frac{1}{2}) - 1 \rangle \\ &= \langle 2, 2(q_M - p_0) - 1 \rangle \\ &= \langle 2, \frac{2x_1}{x_0 y_M} - 1 \rangle && \text{por el Corolario 5.8,} \\ &= \langle 2, \frac{2x_1}{x_0 y_0} - 1 \rangle && \text{por ser centralmente simétricos.} \end{aligned}$$

□

Usando la identidad de Markoff, podemos verificar que este resultado es equivalente al Lema 4.8.

5.4. Puntos límite de toros cuspidales

Observemos que debido a la ecuación (4.9), todos los resultados obtenidos en la Sección 4.5 se adaptan de manera sencilla e inmediata con nuestra notación de trazas. En concreto, basta hacer el cambio de variables $x = 2x_0$ y $y = 2y_0$, donde $x = \cosh(\ell_f/2)$ como se enunció en el Teorema 4.11, y $y = \cosh(\ell_g/2)$. Sin embargo, aquí decidimos presentar otra prueba del Corolario 4.10 y de un teorema equivalente al Teorema 4.11 (para el caso N fijo) usando solamente la herramienta de trazas, que aunque no es una técnica elemental, como la que presentamos en el capítulo anterior, cuando se entiende es muy amigable y produce demostraciones sencillas.

Observación 5.12. $x_0 \rightarrow 2$ cuando $M \rightarrow \infty$, y $y_0 \rightarrow 2$ cuando $N \rightarrow \infty$.

Por la ecuación (4.9), tenemos que $x \rightarrow 2$ si y sólo si $\ell_f \rightarrow 0$, y $y \rightarrow 2$ si y sólo si $\ell_g \rightarrow 0$. Por lo tanto, esta observación se sigue de manera directa de lo anterior y de (4.23).

Demostración. (Corolario 4.10). Para lo siguiente, consideraremos la Figura 5.12(b). Por la observación anterior, sabemos que $x_N = x_0 \rightarrow 2$ cuando $M \rightarrow \infty$, y $y_M = y_0 \rightarrow 2$ cuando $N \rightarrow \infty$. Entonces, al aplicar la identidad de Markoff al triángulo cuyas trazas asociadas a sus vértices son x_0, y_M y x_1 , obtenemos que

$$x_1 = \frac{x_0 y_M \pm \sqrt{x_0^2 y_M^2 - 4(x_0^2 + y_M^2)}}{2} \quad (5.13)$$

y por lo tanto $x_1 \rightarrow 2 \pm 2i$, cuando $x_0, y_M = y_0 \rightarrow 2$. Entonces

$$\lim_{(x_0, y_0) \rightarrow (2, 2)} \frac{2x_1}{x_0 y_0} - 1 = 1 \pm i - 1 = \pm i,$$

y finalmente, usando el Lema 5.11, concluimos que la retícula límite de nuestra familia es $\langle 2, i \rangle$.

Finalmente, y de manera análoga a la demostración del capítulo anterior, por el primer punto de Observaciones 4.4 y por el Lema 4.10, las retículas de los toros cuspidales correspondientes a las palabras $(L^M R^N)^k$, con $k \in \mathbb{Z}^+$ fijo, convergen a la retícula $\langle 1, ki/2 \rangle$, cuando $M, N \rightarrow \infty$. □

Luego, usando el algoritmo basado en trazas de la sección anterior, podemos obtener otra versión del Teorema 4.11 en función de los polinomios $c_j(\omega)$ con los que trabajamos en la sección anterior. Aquí, por facilidad de operaciones, obtendremos el Teorema para el caso N fijo.

Teorema 5.13. *La familia de las retículas de toros cuspidales asociados a palabras $L^M R^N$, con N fijo, se acumulan en la retícula $\langle 2, 2i/y_0 \rangle$, donde y_0 es raíz del polinomio $[-y(y \pm 2i) + 4]c_n(y) \pm 2ic_{n-1}(y)$, cuando $N = 2n$ es par; o y_0 es raíz del polinomio $[y \pm 2i - 2]c_{n+1}(y) + [y \mp 2i - 2]c_n(y)$, cuando $N = 2n + 1$ es impar.*

Para demostrar este teorema, nuevamente elaboraremos un algoritmo para encontrar los puntos límite a donde convergen las familias de retículas mencionadas.

Demostración. Nuevamente, por la identidad de Markoff, se cumple (5.13), y por lo tanto $x_1 \rightarrow y_0 \pm 2i$, cuando $x_0 \rightarrow 2$. Luego, tenemos que

$$\lim_{x_0 \rightarrow 2} \frac{2x_1}{x_0 y_0} - 1 = \pm \frac{2i}{y_0},$$

y por lo tanto, por el Lema 5.11, la retícula límite de nuestro caso es $\langle 2, \pm 2i/y_0 \rangle$. Como ambos signos definen la misma retícula, nos podemos olvidar del signo negativo.

Ahora, el resto de la demostración la dividiremos en dos partes: el caso par y el caso impar. Comencemos con el caso par, $N = 2n$. Aquí, por la ecuación (5.12), tenemos que $x_{n-1} = x_{n+1}$. Entonces las ecuaciones de Markoff para los triángulos centrales se traducen en

$$2x_{n-1} = x_n y_0 \quad \text{y} \quad x_0^2 + x_1^2 + y_0^2 = x_0 x_1 y_0. \quad (5.14)$$

De la segunda ecuación de (5.14), y de la ecuación (5.7), obtenemos que cuando $x_0 \rightarrow 2$,

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow y_0 \pm 2i, \\ x_n &\rightarrow (y_0 \pm 2i)c_n(y_0) - 2c_{n-1}(y_0), \\ x_{n+1} &\rightarrow (y_0 \pm 2i)c_{n+1}(y_0) - 2c_n(y_0). \end{aligned}$$

Entonces, cuando $x_0 \rightarrow 2$, la primer ecuación de (5.14) se traduce en

$$y_0[(y_0 \pm 2i)c_n(y_0) - 2c_{n-1}(y_0)] = 2[(y_0 \pm 2i)c_{n+1}(y_0) - 2c_n(y_0)].$$

Finalmente, usando la definición recursiva de $c_n(y_0)$, la cual definimos en el Lema 5.3 como $c_{n+1}(y_0) = y_0 c_n(y_0) - c_{n-1}(y_0)$, obtenemos

$$[-y_0(y_0 \pm 2i) + 4]c_n(y_0) \pm 2ic_{n-1}(y_0) = 0.$$

Por otro lado, el caso impar $N = 2n + 1$, es muy similar al caso par, pero en este caso, la simetría nos dice que $x_n = x_{n+1}$. Así que nuevamente, usando la ecuación (5.14) y la definición recursiva de $c_n(y_0)$, concluimos lo que se quiere en el enunciado del teorema. \square

Conclusiones

Cualquier 3-variedad hiperbólica M_φ que es un círculo de toros ponchados, está determinada por su monodromía φ , la cual es conjugada por un elemento de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ a un producto $\pm L^{m_1} R^{n_1} L^{m_2} R^{n_2} \dots L^{m_k} R^{n_k}$, donde

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad L := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Además, M_φ es unicuspidal, y su cúspide se ve como el producto de un toro plano con un intervalo. Así que a cada M_φ se le asocia una clase de homotopía de un toro plano.

Luego, si φ es conjugada a $\pm L^{m_1} R^{n_1} L^{m_2} R^{n_2} \dots L^{m_k} R^{n_k}$, vimos una descomposición de M_φ (que se le atribuye a Jørgensen) en $M + N$ tetraedros (donde $M = m_1 + m_2 + \dots + m_k$ y $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$), la cual implicó una descomposición de su toro cuspidal en $4(M + N)$ elementos. Utilizando dicha descomposición, presentamos dos algoritmos para obtener ecuaciones que nos permiten determinar dichos toros cuspidales; uno de ellos fue a través de la construcción de $2k$ transformaciones de Möbius que sólo usaron geometría elemental y el otro usó técnicas de trazas ya usadas por otros autores.

En el caso particular en el que φ es conjugada a $L^M R^N$, obtuvimos los siguientes resultados.

1. Su toro cuspidal asociado está formado por el pegado de cuatro paralelogramos congruentes, los cuales están triangulados de igual forma por parejas, y estas triangulaciones son centralmente simétricas (ver Teorema 4.6). Esto no sucede en el caso general.

2.

$$\cosh^2\left(\frac{N\ell_g}{4}\right) = \tanh^2\left(\frac{\ell_g}{2}\right) \cosh^2\left(\frac{\ell_f}{2}\right),$$

$$\cosh^2\left(\frac{M\ell_f}{4}\right) = \tanh^2\left(\frac{\ell_f}{2}\right) \cosh^2\left(\frac{\ell_g}{2}\right).$$

Monodromía	\vec{v}	τ
LR	$\frac{i}{\sqrt{3}}$	$2\sqrt{3}i$
L^2R^2	i	$2i$
LR^2	$\frac{1 \pm \sqrt{7}i}{4}$	$\sqrt{7}i$
L^2RLR	$-0.215299 + 0.780698i$	$0.656558 + 2.38075i$

Cuadro 5.2

define un sistema de ecuaciones, donde ℓ_f y ℓ_g son longitudes complejas asociadas a sus dos transformaciones de Möbius antes construidas. Además, también obtuvimos otros sistemas de ecuaciones en el que sólo intervienen los vértices de la triangulación, vistos como elementos en \mathbb{C} (ver primer cuadro de la página 67). Otro sistema de ecuaciones para este caso (usando el método de trazas) se puede ver en el primer cuadro de la página 102.

3. En el Cuadro 5.2, presentamos los resultados obtenidos de algunos ejemplos, donde el toro cuspidal obtenido mediante nuestra triangulación canónica se obtiene mediante las traslaciones $z \mapsto z + 2$ y $z \mapsto z + \vec{v}$, y además, τ es su representante en la región fundamental del móduli de toros planos de la Figura 2.2(a).

Los primeros tres ejemplos son conocidos, y aquí presentamos una construcción sin el uso de nuestros algoritmos. El último ejemplo (el cual es una aproximación) no lo hemos visto antes en la literatura y lo construimos de forma sencilla usando nuestro algoritmo de trazas.

Finalmente, con la ayuda de Matlab y usando nuestro algoritmo de transformaciones de Möbius, obtuvimos más ejemplos, los cuales se presentaron en las Figuras 4.19 y 4.20.

4. Mediante ambas herramientas (transformaciones de Möbius y trazas), estudiamos los puntos de acumulación de los toros cuspidales de esta familia particular. En concreto, obtuvimos ecuaciones donde una de sus soluciones define el límite de los

Familia	τ_0
\mathcal{F}_1	i
\mathcal{F}_2	$\sqrt{3}i$
\mathcal{F}_3	$\frac{4i}{1 + 2i + \sqrt{5 - 4i}}$

Cuadro 5.3

toros cuspidales asociados a las monodromías $L^M R^N$, fijando M (o N) y dejando tender N (o M) a ∞ .

- Obtuvimos ejemplos de límites de toros cuspidales los cuales mostramos en el Cuadro 5.3, donde $\mathcal{F}_M = \{L^M R^N : N \in \mathbb{N}\}$, y $\langle 1, \tau_0 \rangle$ es la retícula correspondiente al toro límite de todos los toros cuspidales asociados a los elementos de la familia \mathcal{F}_M . Además, usando nuevamente Matlab, en las Figuras 4.22 y 4.23 presentamos los toros límite asociados a las familias $\mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5, \mathcal{F}_6, \mathcal{F}_7, \mathcal{F}_8$ y \mathcal{F}_9 .

Finalmente, en la Figura 4.24, graficamos con puntos todos los toros cuspidales (se grafica τ donde $\langle 1, \tau \rangle$ es la retícula del toro cuspidal) asociados a palabras de la forma $L^M R^N$ y mediante asteriscos sus puntos límite.

Bibliografía

- [1] H. Akiyoshi, *On the Ford domains of once-punctured torus groups*, Hyperbolic spaces and related topics RIMS, Kyoto, Kokyuroku, vol. 1104, 1999, pp. 109–121.
- [2] T.M. Apostol, *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, volume 41 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1990.
- [3] B.H. Bowditch, *A variation of Mcshane’s identity for once-punctured torus bundles*, Topology **36** (1997), no. 2, 325 – 334.
- [4] J. Cheeger, J.M. Kister, *Counting topological manifolds*, Topol. **9** (1970), 149–151.
- [5] M. Cohen, W. Metzler and A. Zimmermann, *What does a basis of $F(a,b)$ look like?*, Math. Ann. (1981), 435–441.
- [6] B. Farb, D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, Princeton University Press, 2012.
- [7] W. Floyd, A. Hatcher, *Incompressible surfaces in punctured-torus bundles*, Topology and its applications **13** (1982), 263–282.
- [8] G.K. Francis, *A topological picturebook*, Springer-Verlag, 1987.
- [9] W.M. Goldman, *Trace coordinates on Fricke spaces of some simple hyperbolic surfaces*, Department of Mathematics University of Maryland College Park, 2009.
- [10] F. Guéritaud, *Hyperbolic geometry and canonical triangulations in dimension three*, Ph.D. thesis, L’Université de Paris, 2006.
- [11] ———, *On canonical triangulations of once-punctured torus bundles and two-bridge link complements*, Geom. Topol. **10** (2006), no. 3, 1239–1284.
- [12] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2001.
- [13] H. Helling, *The trace field of a series of hyperbolic manifolds*, Preprint 99-072, SBF 343, Bielefeld, 1999.

- [14] M.W. Hirsch, *Differential topology*, Graduate texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1997.
- [15] G.A. Jones, D. Singerman, *Complex functions: An algebraic and geometric viewpoint*, Cambridge University Press, 1987.
- [16] T. Jørgensen, *On pairs of once-punctured tori*, Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds (Y. Komori, V. Markovic and C. Series, eds.), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 299, Cambridge University Press, 2003, pp. 183–207.
- [17] B. Kolpakov, A. Martelli, *Hyperbolic four-manifolds with one cusp*, *Geom. Funct. Anal.* (2013), 1903–1933.
- [18] C. Maclachlan, A.W. Reid, *The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds*, *Grad Texts Math.*, vol. 219, Springer-Verlag, 2003.
- [19] A. Marden, *Outer circles: An introduction to hyperbolic 3-manifolds*, Cambridge University Press, 2007.
- [20] G. Margulis, D. Kazhdan, *A proof of Selberg’s hypothesis*, *Math. Sbornik (N.S.)* **75** (1969), 163–168.
- [21] J.C. Mason, D.C. Handscomb, *Chebyshev polynomials*, Chapman Hall, CRC Press, 2003.
- [22] D.B. McReynolds, *Arithmetic cusps shapes are dense*, *Geom. Dedicata* **129** (2007), 47–55.
- [23] Y.N. Minsky, *The classification of punctured-torus groups*, **149** (1999), 559–626.
- [24] D. Mumford, *A remark on Mahler’s compactness theorem*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **28** (1971), 289–294.
- [25] D. Mumford, C. Series and D. Wright, *Indra’s pearls: The vision of Felix Klein*, Cambridge University Press, 2002.
- [26] B. Nimershiem, *Isometry classes of flat 2-tori appearing as cusps of hyperbolic 3-manifolds are dense in the moduli space of torus*, *Proceedings of Low-Dimensional Topology* (K. Johannson, ed.), International Press, Cambridge M.A., 1994, pp. 133–142.
- [27] ———, *All flat three-manifolds appear as cusps of hyperbolic four-manifolds*, *Topol. Appl.* **90** (1998), 109–133.

- [28] R.P. Osborne, H. Zieschang, *Primitives in the free group on two generators*, *Inventiones mathematicae* **63** (1981), 17–24.
- [29] J. Otal, *The hyperbolization theorem for fibered 3-manifolds*, vol. 9, Amer. Math. Soc., 1996.
- [30] J.R. Parker, *Tetrahedral decomposition of punctured torus bundles*, Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds (Y. Komori, V. Markovic and C. Series, eds.), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 299, Cambridge University Press, 2003, pp. 275–291.
- [31] M. Pescini, *Straightening cell decompositions of cusped hyperbolic 3-manifolds*, **9** (1998), 101–109.
- [32] J.S. Purcell, V. Dang, *Cusp shape and tunnel number*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **147** (2019), 1351–1366.
- [33] A.W. Reid, D.D. Long, *All flat manifolds are cusps of hyperbolic orbifolds*, *Algebr. Geom. Topol.* **2** (2002), 285–296.
- [34] W. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology*, Princeton University Press, 1997.
- [35] ———, *Hyperbolic structures on 3-manifolds, II: surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle*, *arXiv:math/9801045*, 1998.
- [36] N. Vasil’ev, A. Zelevinskii, *Chebyshev polynomials and recurrence relations*, *Kvant Selecta: Algebra and Analysis, II* (S. Tabachnikov, ed.), Math. World, vol. 15, Amer. Math. Soc., 1999, pp. 51–61.
- [37] H. Zieschang, E. Vogt and H. Coldewey, *Surfaces and planar discontinuous groups*, *Lectures notes in Mathematics*, Springer-Verlag, 1980.

Apéndice A

Matlab: Presentación de programas.

En este apéndice, presentaremos los programas empleados para obtener muchas de las imágenes presentadas en esta tesis.

A.1. Toro cuspidal triangulado asociado a palabras $L^M R^N$

Recordemos que las ecuaciones de Guéritaud (ver [11]), son equivalentes a las que obtuvimos en la Proposición 4.7, como lo verificamos de forma sencilla en la misma. Por otro lado, de todas las soluciones de ambos sistemas de ecuaciones, Matlab arroja la más sencilla (vista desde cierto aspecto de Métodos numéricos, que aún no entiendo pero me encuentro estudiando). Por tal razón, en el primer programa que presentamos, decidimos usar las ecuaciones de Gueritaud, ya que con ellas, resulta que obtenemos justo la solución que forma la triangulación del toro cuspidal con las características geométricas requeridas.

Después de obtener dichas soluciones, adaptamos el resto de los cálculos que hicimos en la Sección 4.4 para finalmente obtener los dibujos de los toros cuspidales triangulados, asociados a palabras $L^M R^N$ que presentamos en las Figuras 4.19 y 4.20. Para esto, basta cambiar los valores de M y N al inicio de dicho programa (para M, N enteros mayores a 2), y se arrojará en cuestión de segundos la figura de su respectivo toro triangulado.

```
1 clear all
2 syms z w
3 %No funciona cuando alguno de los dos es 1, ni en algunos
   casos donde alguno de los dos es 2
4 M=5
5 N=3
6 f1=sinh(z)+j*tanh((pi*j-2*z)/N)*cosh((pi*j-2*w)/M);
7 f2=sinh(w)-j*tanh((pi*j-2*w)/M)*cosh((pi*j-2*z)/N);
8 [p,P]= solve(f1,f2,z,w)
```

```

9
10 %l es \ell_f
11 l = -(3.14159265359*j - 2*p) / N
12 %L es \ell_g
13 L = (3.14159265359*j - 2*P) / M
14
15 %t es \tau
16 t = tanh(1) * tanh(N * l / 2)
17
18 Q1 = []; Q2 = []; Q3 = []; P1 = []; P2 = []; P3 = []; P4 = [];
19
20 for n = 0:N
21     Q1(end+1) = (1/2) * tanh(1) * tanh((-N/2 + n) * l);
22     Q2(end+1) = Q1(n+1) + 1;
23     Q3(end+1) = Q1(n+1) + 2;
24 end
25 moduli = 2 * Q1(N+1)
26
27 for n = 0:M
28     P1(end+1) = (1/2) * tanh(L) * tanh((M/2 - n) * L) + 1/2 - (1/2) * tanh(
29         L) * tanh((M/2) * L);
30     P2(end+1) = P1(n+1) + 1;
31     P3(end+1) = P1(n+1) - t;
32     P4(end+1) = P3(n+1) + 1;
33 end
34
35 plot(Q1, 'k')
36 set(gca, 'units', 'centimeters')
37 daspect([1 1 1])
38
39 hold on
40 plot(Q2, 'k'), plot(Q3, 'k'), plot(P1, 'k'), plot(P2, 'k'),
41     plot(P3, 'k'), plot(P4, 'k')
42
43 for n = 1:N+1
44     plot([-1/2, real(Q1(n)), 1/2], [0, imag(Q1(n)), 0], 'k')
45     plot([1/2, real(Q1(n)+1), 3/2], [0, imag(Q1(n)), 0], 'k')
46     plot([3/2, real(Q1(n)+2), 5/2], [0, imag(Q1(n)), 0], 'k')
47 end

```



```

47 for n=1:M+1
48     plot ([1/2*t , P1(n) , 1+1/2*t] , 'k')
49     plot ([1/2*t+1 , P2(n) , 2+1/2*t] , 'k')
50     plot ([-1/2*t , P3(n) , 1-1/2*t] , 'k')
51     plot ([-1/2*t+1 , P4(n) , -1/2*t+2] , 'k')
52 end
53
54 x1=double(real(-1/2*t));
55 x2=double(real(1/2*t));
56 x3=double(real(1/2*t+2));
57 x4=double(real(-1/2*t+2));
58 y1=double(imag(-1/2*t));
59 y2=double(imag(1/2*t));
60 y3=double(imag(1/2*t+2));
61 y4=double(imag(-1/2*t+2));
62
63 pgon = polyshape([x1 x2 x3 x4],[y1 y2 y3 y4]);
64 h=plot(pgon , 'FaceColor','y')
65 h.LineStyle = '--';
66 h.EdgeColor = 'm';
67 hold off

```

A.2. Puntos límite de toros cuspidales

En esta sección presentamos un pequeño código para obtener las Figuras 4.22 y 4.23. Como ya explicamos antes, fijamos M (o N) y graficamos la solución de $q_M \in \mathbb{C}$, para varios valores grandes de M (o N), donde $\langle 1, q_M \rangle$ es la retícula del toro cuspidal asociado a la palabra $L^M R^N$.

```

1 clear all
2 syms z w
3
4 % Ciclo que fija M y mueve N
5 hold on
6     for n=2:49
7         M=50
8         N=10^4+1000*n
9
10        f1=sin(z)-j*tan((pi-2*z)/N)*cos((pi-2*w)/M);

```

```

11         f2=sin(w)+j*tan((pi-2*w)/M)*cos((pi-2*z)/N);
12         [a,A]= solve(f1,f2,z,w);
13
14         B=(3.1416-2*A)/M;
15         t=(tan(B)*tan(M*B/2))
16         plot(t/2, '. ')
17         grid
18     end
19
20     % Encerrar en una vecindad el punto limite
21     plot(t/2, 'o')
22
23 hold off

```