



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS  
DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

TESIS:

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD Y CIENCIA DE  
DATOS DE UN CONCRETO DE ALTA  
DURABILIDAD Y ALTO DESEMPEÑO EN  
INFRAESTRUCTURA

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
*Doctor en Ciencias en Ingeniería Física*

PRESENTA:

**José Alberto Guzmán Torres**

ASESORES:

**Dr. en Cs. Mat. Francisco Javier Domínguez Mota**

**Dra. en Cs. Elia Mercedes Alonso Guzmán**

Agosto, 2020    Morelia, Michoacán

Análisis de sensibilidad y ciencia de datos de un concreto de  
alta durabilidad y alto desempeño en infraestructura

**José Alberto Guzmán Torres**

jaguzman@umich.mx

5 de agosto de 2020

## Agradecimientos

Este trabajo se lo dedico a toda mi familia, en especial a mi hermano Mario que siempre creyó en que podía terminar este proyecto incluso antes de comenzarlo y que nos acompaña en cada paso que damos.

A mi hijo Maximiliano y a mi hija Mar que han sido la luz que ha iluminado mi vida.

A mi esposa Marisol que ha cuidado de nuestra familia de manera extraordinaria y que me ha apoyado en todos los proyectos que he realizado.

A mis padres Alberto y Celia que siempre han estado conmigo y me enseñaron el valor del estudio y la preparación.

A mi hermano Angel y su esposa Lili por brindar el apoyo a mi familia.

Al Dr Fancisco Javier Dominguez Mota por forzarme a ser mejor estudiante, investigador, enseñarme cómo sobresalir en las actividades académicas y por sus valiosos consejos que me ayudaron a lograr concluir esta investigación. Le agradezco su confianza y amistad.

Al Dr José Gerardo Tinoco le agradezco sus consejos y comentarios que me ayudaron a desenvolver mejor mi trabajo académico.

A mis compañeros de generación Gerardo Tinoco, Salvador Lucas, Sergio, Marco y Pedro Castulo les agradezco el tiempo y el conocimiento que pudimos compartir durante el tiempo que nos embarcamos en este viaje.

A la Dra Elia Mercedes y al Dr Wilfrido Martínez por impulsarme a alcanzar nuevas metas y objetivos, mostrandome el camino que se debe tomar para la preparación.

A todas las personas que de alguna manera intervinieron para lograr este proyecto les doy las gracias.

Gracias a Dios por permitirme llegar a este punto de mi vida y lograr este trabajo tan importante en mi profesión.



---

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>3</b>
<b>Prefacio</b>	<b>15</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>17</b>
1.1. Motivación. . . . .	17
1.1.1. Estructuras de concreto que conforman las vías terrestres. . . . .	19
1.1.2. Problemática actual. . . . .	21
1.1.3. Materiales que constituyen el concreto. . . . .	22
1.1.4. Fundamentos del concreto. . . . .	25
1.2. Tema en estudio. . . . .	27
1.2.1. Proceso de caracterización, muestreo y diseño. . . . .	28
1.2.2. Dosificación de las mezclas. . . . .	30
1.2.3. Pruebas y resultados. . . . .	31
<b>2. Elemento finito</b>	<b>35</b>
2.1. El Método de Elemento Finito . . . . .	35
2.1.1. Introducción . . . . .	35
2.1.2. Pasos generales para el análisis de elementos finitos. . . . .	39
2.2. El elemento resorte . . . . .	40
2.2.1. Ejemplo 1 . . . . .	41
2.2.2. Ejemplo 2 . . . . .	44
2.2.3. Ejemplo 3 . . . . .	48
2.3. El elemento barra. . . . .	51
2.3.1. Ejemplo 4 . . . . .	52
2.4. Elementos Isoparamétricos. . . . .	55
2.4.1. Elemento Cuadrilátero Bilineal. . . . .	55

2.4.2.	Funciones de Forma . . . . .	55
2.4.3.	Matriz de rigidez del elemento cuadrilátero bidimensional (1 grado de libertad) . . . . .	58
2.5.	El elemento Viga . . . . .	61
2.5.1.	Cálculo de la matriz de rigidez del elemento viga . . . . .	62
2.5.2.	Ejemplo 5 . . . . .	68
<b>3.</b>	<b>MEF en elementos de concreto</b>	<b>71</b>
3.1.	Análisis y modelos de Vigas . . . . .	71
3.1.1.	Descripción de la prueba de flexión . . . . .	72
3.2.	Análisis del modelo elástico isotrópico . . . . .	79
3.2.1.	Formulación . . . . .	79
3.2.2.	Prueba de compresión simple . . . . .	82
3.3.	Problema inverso para elasticidad en 1d . . . . .	87
3.3.1.	Ejemplo 6. . . . .	90
<b>4.</b>	<b>Ciencia de datos</b>	<b>97</b>
4.1.	Machine Learning y tipos de modelado . . . . .	97
4.2.	Datos artificiales . . . . .	101
4.2.1.	Matrices de correlación. . . . .	104
4.3.	Evaluación de los modelos y métricas de evaluación . . . . .	112
4.3.1.	Train/test Split . . . . .	112
4.4.	Análisis de la mezcla con adiciones . . . . .	116
4.4.1.	Regresión lineal . . . . .	116
4.4.2.	Regresión Multivariable Gradiente descendiente . . . . .	124
4.4.3.	SVR (Support Vector Regression) . . . . .	126
4.4.4.	Árboles de regresión (Decision Tree Regressor) . . . . .	134
4.5.	Análisis de la mezcla control . . . . .	138
4.5.1.	Regresión lineal. Gradiente de descenso . . . . .	142
4.5.2.	SVR (Support Vector Regression) . . . . .	144
4.5.3.	Árboles de regresión . . . . .	148
4.6.	Variables ficticias (Variables Dummy) . . . . .	151
4.6.1.	Selección de características relevantes . . . . .	155
4.7.	Algoritmos de agrupamiento . . . . .	161
4.7.1.	$K$ -Means . . . . .	161
4.7.2.	$K$ -NN ( $K$ neighborhood near) . . . . .	162

<b>5. Conclusiones</b>	<b>167</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>170</b>



---

# Índice de figuras

1.1. Pavimentos rígidos en buenas condiciones, parque turístico la Zarcita, Zacapu Michoacán. . . . .	19
1.2. Obras de drenaje de concreto <i>cunetas</i> . . . . .	20
1.3. Puentes “ <i>Fuente Angélica del Valle</i> ”. . . . .	21
1.4. Pavimentos rígidos deteriorados. . . . .	21
1.5. Primer plano de agregado fino y agregado grueso. . . . .	22
2.1. Tipos de elementos finitos. . . . .	37
2.2. Elemento resorte. . . . .	40
2.3. Sistema de resorte de 2 elementos. . . . .	41
2.4. Sistema de resorte de 6 elementos. . . . .	44
2.5. Sistema de 2 resortes con empotramiento en los extremos. . . . .	48
2.6. Elemento barra. . . . .	52
2.7. Estructura de 2 barras empotradas. . . . .	52
2.8. Elemento cuadrilátero bilineal en coordenadas físicas (Coordenadas globales). . . . .	55
2.9. Elemento cuadrilátero bilineal en coordenadas naturales (Espacio computacional). . . . .	56
2.10. El elemento Viga. . . . .	61
2.11. Funciones Hermite. . . . .	62
2.12. Sistema con empotramiento y apoyo fijo. . . . .	68
3.1. Instrumentación de la prueba de flexión con carga el tercio claro de la viga. . . . .	72
3.2. Malla idealizada. . . . .	74
3.3. Solución numérica a 60 días. . . . .	76
3.4. Solución numérica a 90 días. . . . .	77
3.5. Solución numérica a 120 días. . . . .	77
3.6. Solución numérica para ambas mezclas a 180 días. . . . .	78

3.7. Malla en espacio $R^3$ . . . . .	78
3.8. Cilindros de concreto elaborados en laboratorio y prueba a compresión simple	82
3.9. Discretización del cilindro de concreto. . . . .	84
3.10. Elemento a 40 días. a) Antes de la carga b) Después de la carga. . . . .	84
3.11. Elemento a 60 días. a) Antes de la carga b) Después de la carga. . . . .	85
3.12. Elemento a 90 días. a) Antes de la carga b) Después de la carga. . . . .	85
3.13. Elemento a 120 días. a) Antes de la carga b) Después de la carga. . . . .	85
3.14. Elemento a 40 días con adiciones. a) Antes de la carga b) Después de la carga.	86
3.15. Elemento a 60 días con adiciones. a) Antes de la carga b) Después de la carga.	86
3.16. Elemento a 90 días con adiciones. a) Antes de la carga b) Después de la carga.	87
3.17. Elemento a 120 días con adiciones. a) Antes de la carga b) Después de la carga. . . . .	87
3.18. Elemento barra unidimensional . . . . .	88
3.19. Figura del ejemplo 4. . . . .	88
3.20. Barra sometida a elongación. . . . .	90
4.1. Diagrama de conceptos en ciencia de datos. . . . .	100
4.2. Tareas de un Pipeline de M.L. . . . .	100
4.3. Conjunto de datos. . . . .	101
4.4. Distorsiones a los datos originales. . . . .	102
4.5. Diferencia de Distorsión en datos. . . . .	103
4.6. Datos artificiales. . . . .	104
4.7. Matriz de correlación de datos originales. . . . .	105
4.8. Matriz de correlación de datos artificiales. . . . .	106
4.9. Estadística descriptiva de los datos artificiales. . . . .	108
4.10. Distribución de los datos de todas las variables. . . . .	109
4.11. Distribución de los datos de las pruebas de laboratorio. . . . .	110
4.12. Distribución de los datos de las variables Dummy. . . . .	111
4.13. Desempeño de la validación cruzada. . . . .	115
4.14. Desempeño de la Regresión lineal con $Ft$ y $Re$ como atributos. . . . .	118
4.15. División de entrenamiento y prueba en la Regresión lineal con $Ft$ y $Re$ como atributos. . . . .	119
4.16. Desempeño de la $CV$ en la regresión lineal con $Ft$ y $Re$ como atributos. . .	120
4.17. Diagrama para el problema de regresión. . . . .	122
4.18. Aproximación con Gradiente de descenso. . . . .	122
4.19. Tazón de error del gradiente de descenso. . . . .	123

4.20. Aproximación al mínimo global con Gradiente de descenso. . . . .	123
4.21. Numero de iteraciones necesarias para la convergencia en el gradiente descendiente. . . . .	124
4.22. Representación de 3 variables en el espacio. . . . .	125
4.23. Hiperplano que representa la aproximación del modelo multivariable en el espacio. . . . .	125
4.24. Hiperplano que generaliza el conjunto de datos. . . . .	125
4.25. Numero de iteraciones necesarias. . . . .	126
4.26. Tazón de error del gradiente de descenso. . . . .	126
4.27. Desempeño de la SVM. . . . .	128
4.28. Desempeño del <i>SVR</i> . . . . .	130
4.29. División del conjunto de datos en los <i>SVR</i> con kernel <i>RBF</i> . . . . .	131
4.30. División del conjunto de datos en los <i>SVR</i> con kernel lineal. . . . .	131
4.31. División del conjunto de datos en los <i>SVR</i> con kernel polinomial. . . . .	132
4.32. División del conjunto de datos en los <i>SVR</i> con kernel sigmoid. . . . .	132
4.33. Desempeño de la <i>CV</i> . a) $k = 1$ b) $k = 2$ c) $k = 3$ d) $k = 4$ e) $k = 5$ f) $k = 6$ g) $k = 7$ . . . . .	133
4.34. Desempeño final del modelo de regresión <i>SVR</i> con <i>Ft</i> y <i>Re</i> como atributos. . . . .	134
4.35. Desempeño del modelo de árbol de regresión (“ <i>Fundamentos y construcción de modelos de predicción con Machine Learning, Anáhuac</i> ”). . . . .	136
4.36. Diagrama del modelo de árbol de regresión (“ <i>Fundamentos y construcción de modelos de predicción con Machine Learning, Anáhuac</i> ”). . . . .	136
4.37. Desempeño del modelo de árbol de regresión. . . . .	137
4.38. Cross validation en la técnica de arboles de regresión. . . . .	137
4.39. Modelo final del árbol de regresión. . . . .	138
4.40. Árbol de decisión para predecir la <i>Re</i> en función del <i>Ft</i> . . . . .	138
4.41. Matriz de correlación para el conjunto de datos artificiales de la mezcla control. . . . .	139
4.42. Distribución de los datos de las pruebas de laboratorio caso mezcla control. . . . .	140
4.43. Distribución de los datos de las variables Dummy caso mezcla control. . . . .	141
4.44. División de datos en entrenamiento y prueba para la Regresión lineal con <i>Re</i> y <i>FR</i> como atributos. . . . .	142
4.45. Desempeño de la <i>CV</i> en la regresión lineal con <i>Re</i> y <i>FR</i> como atributos. a) $k = 1$ b) $k = 2$ c) $k = 3$ . . . . .	143
4.46. Desempeño del modelo final de regresión lineal con <i>Re</i> y <i>FR</i> como atributos. . . . .	144
4.47. Desempeño de la <i>SVR</i> con la mezcla control. . . . .	144

4.48. Splits en la Regresión SVR Kernel <i>RBF</i> . . . . .	145
4.49. Splits en la Regresión SVR Kernel lineal. . . . .	145
4.50. Splits en la Regresión SVR Kernel polinomial. . . . .	145
4.51. Desempeño de la CV. a) $k = 1$ b) $k = 2$ c) $k = 3$ d) $k = 4$ e) $k = 5$ f) $k = 6$ g) $k = 7$ h) $k = 8$ . . . . .	146
4.52. Desempeño final del modelo de regresión SVR con <i>Ft</i> y <i>Re</i> como atributos.	147
4.53. Diagrama del modelo de arbol de regresión. . . . .	148
4.54. Desempeño de la CV en arboles de regresión. a) $k = 1$ b) $k = 2$ c) $k = 3$ d) $k = 4$ e) $k = 5$ f) $k = 6$ g) $k = 7$ h) $k = 8$ . . . . .	149
4.55. Desempeño final del modelo de árbol de regresión. . . . .	150
4.56. Árbol de decisión para predecir la <i>Re</i> en función del <i>FR</i> . . . . .	151
4.57. Variables analizadas . . . . .	152
4.58. Variables Dummy. . . . .	153
4.59. Diagrama del forward selection. . . . .	156
4.60. Diagrama del backward selection . . . . .	157
4.61. Variables Dummy sin la primera variable de cada grupo. . . . .	157
4.62. Undersampling vs Oversampling. . . . .	159
4.63. Conjunto de mejores variables obtenido del filtrado de envoltura. . . . .	159
4.64. Diagrama ROC de las “mejores” variables para predecir una alta durabilidad	160
4.65. Conjunto de datos artificiales usado para el <i>K</i> -NN. . . . .	163
4.66. Histograma de la prueba de <i>VPU</i> . . . . .	164
4.67. Diagrama de la certeza del modelo para diferentes números de vecinos . . .	165

---

# Índice de tablas

1.1. Propiedades físicas de los agregados utilizados en las mezclas de concreto. . .	29
1.2. Características de la mezcla control. . . . .	29
1.3. Características de la mezcla con adiciones. . . . .	30
1.4. Pruebas físicas elaboradas al concreto. . . . .	31
1.5. Resultados de las pruebas para la mezcla control. . . . .	32
1.6. Resultados de las pruebas para la mezcla con adiciones. . . . .	32
1.7. Resistividad del concreto y su riesgo a la corrosión. . . . .	33
2.1. Conectividad de los elementos (Ejemplo 1). . . . .	41
2.2. Conectividad de los elementos (Ejemplo 2). . . . .	45
2.3. Tipo de fuerzas actuantes en el sistema. . . . .	48
2.4. Conectividad de los elementos (Ejemplo 3). . . . .	49
2.5. Tipo de fuerzas. . . . .	51
2.6. Conectividad de los elementos para la Figura (2.7) . . . . .	52
2.7. Tipo de fuerzas. . . . .	55
2.8. Conectividad de los elementos (Ejemplo 5). . . . .	69
3.1. $MR$ de la mezcla control a diferentes edades. . . . .	75
3.2. $MR$ de la mezcla con adiciones a diferentes edades. . . . .	75
3.3. Promedio de los valores de $MR$ para cada mezcla. . . . .	76
3.4. Promedio de los valores de $w$ para cada mezcla a diferentes edades. . . . .	83
3.5. Discretización de la barra en 5 elementos . . . . .	91
4.1. $R^2$ en los pliegues de la validación cruzada. . . . .	120
4.2. Aproximaciones de $R^2$ en los pliegues del cross-validation. . . . .	134
4.3. $R^2$ para Cross validation en arboles de regresión. . . . .	137

4.4. $R^2$ para los conjuntos de entrenamiento y prueba para cada pliegue en regresión lineal. . . . .	143
4.5. $R^2$ para los conjuntos de entrenamiento y prueba para cada pliegue en <i>RBF</i> .147	
4.6. $R^2$ para Cross validation en arboles de regresión . . . . .	150
4.7. Tipos de variables . . . . .	152
4.8. Tipos de datos de las variables dummy. . . . .	154
4.9. Anova test. . . . .	161
4.10. Tipos de datos en variables seleccionadas. . . . .	164

## Resumen

La presente investigación realiza un análisis numérico profundo del desempeño de un concreto de alto desempeño, demostrando aseveraciones de las cuales no se tenía conocimiento. La importancia del análisis de materiales como el concreto es detallada en el primer capítulo de la presente investigación. Es importante realizar análisis con detalle de este tipo de materiales para entender su comportamiento y realizar diseños de mezclas adecuados que permitan obtener los mejores desempeños del material puesto en obra.

La presente investigación pretende ajustar análisis de elementos finitos con el objetivo de modelar deformaciones, las cuales son consecuencia de la aplicación de cargas, entender los parámetros que son involucrados en estos fenómenos y poder realizar predicciones de las deformaciones que sufre o sufrirá un elemento bajo la acción de una carga.

La investigación de materiales ha evolucionado de manera constante y actualmente se han desarrollado herramientas de avanzada que permiten establecer relaciones entre los atributos o características de las materiales que no es posible apreciar a simple vista, y que realizar de manera manual resulta una tarea complicada e ineficiente, estas herramientas permiten establecer modelos de comportamiento y de predicción de valores basándose en inteligencia artificial.

Este estudio emplea técnicas de *Machine Learning* con el objetivo de obtener relaciones importantes en las pruebas a las que fueron sometidas las mezclas de concreto, establecer modelos predictivos que permitan generalizar el desempeño del material, proponer técnicas de análisis eficientes que permitan cuantificar el comportamiento de las mezclas y realizar pronósticos de desempeño para futuras investigaciones, con un costo computacional eficiente. Se tiene conocimiento de la relación que existe entre las pruebas destructivas y no destructivas en el concreto, aunque realmente no se conoce el grado de correlación que existe entre ellas, si es cuantificable, y cuales son la pruebas que mantienen mayor relación. Por lo tanto éste tipo de estudios brinda información relevante y de gran trascendencia para investigaciones y análisis profundos en materiales de construcción.

**Palabras clave:** Concreto; Elementos finitos; Regresión; Machine Learning; Algoritmos.

### Abstract

The present research carries out a deep numerical analysis of the behavior of high-performance concrete, demonstrating assertions of which there was no knowledge. The importance of the analysis of materials such as concrete is detailed in the first chapter of this research. It is important to carry out a detailed analysis of this type of material to understand its behavior and to make adequate mixture designs that allow the best performance of the material placed in the construction site.

The present study pretends to adjust finite element analysis with the objective of modeling deformations, which are a consequence of the application of stress, to understand the parameters that are included in these phenomena and to be able to make predictions of the deformations that an element suffers or will suffer under the action of stress.

Materials research has constantly evolved and currently advanced tools have been developed that allow relationships to be established between the attributes or characteristics of the materials that cannot be seen with the naked eye, and which to do manually is a complicated and inefficient task. These tools allow performance models and value predictions to be established based on artificial intelligence.

This study uses techniques of *Machine Learning* to get important relationships in the tests to which the concrete mixtures were tested, establishing predictive models that allow the generalization of the material's performance, proposing efficient analysis techniques that allow the quantification of the mixtures' behavior and making performance forecasts for future research, with an efficient computational cost. The relationship between destructive and non-destructive tests in concrete is known, although the degree of correlation between them, if quantifiable, and which tests have the greatest relationship, is not known. Therefore, this type of study provides relevant information of great importance for in-depth research and analysis of construction materials.

---

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación.

En la actualidad el concreto se convirtió en el material óptimo para la construcción gracias a sus ventajas como son: su facilidad de moldeo e incombustibilidad, además de poseer una resistencia fija previamente sin requerir una mano de obra especializada y sin exigir gastos adicionales para su conservación [1]. Todas estas bondades lo hicieron situarse muy por encima de otros materiales como las rocas naturales, la madera o el acero. Sin embargo, el concreto por sí mismo, solo podría emplearse en grandes estructuras de gravedad como presas o vastos macizos de cimentación. De este modo, surge un nuevo aliado del concreto: el acero de refuerzo. La consecución es el concreto reforzado: un material capaz de soportar esfuerzos normales, de flexión, de cortante y/o torsión. En este contexto, el versátil material permitió la incursión en innovadores procedimientos constructivos a base de losas y vigas apoyadas en columnas o en muros de carga posibilitando la disminución y optimización de las secciones de los diferentes elementos con un mejor aprovechamiento de los espacios interiores, además de ser sumamente resistentes y estables. Tales beneficios provocaron una rápida aceptación entre los grandes constructores, quienes fueron transformando el aspecto de las ciudades constituyendo el nacimiento de la arquitectura moderna. Anteriormente, se llegó a pensar que el concreto reforzado con su apariencia sólida y homogénea tenía una durabilidad ilimitada. Sin embargo, tal aseveración se ha cuestionado recientemente debido a que el concreto una vez endurecido presenta una serie de heterogeneidades en su micro-estructura que forman fases sólidas y porosidades haciéndolo susceptible a sufrir ataques de agentes agresivos del entorno. Esta situación favorece a que el periodo de vida útil de las estructuras de concreto reforzado se vea reducido en su interacción con el me-

dio. En este sentido, en la actualidad se ha observado un incremento en agrietamientos y delaminaciones de elementos de concreto reforzado relacionados con la corrosión del acero de refuerzo [2]. Existen diferentes factores que afectan el desempeño del concreto como lo es el proceso de carbonatación, éste se presenta generalmente en ambientes urbanos densamente poblados donde el uso excesivo del automóvil, la quema de combustibles fósiles y la destrucción de bosques enteros incrementan vertiginosamente los niveles de  $CO_2$  en la atmósfera, que en combinación con la humedad reaccionan con los productos de la pasta de cemento hidratado disminuyendo su alcalinidad, ocasionando la pérdida de pasividad en el acero y acelerando el proceso de corrosión. Independientemente de las causas, cuando el acero de refuerzo se corroe se disminuye su sección transversal y al mismo tiempo la herrumbre que se produce alrededor del material propicia aumentos de volumen que se traducen en tensiones que provocan agrietamientos, además de disminuir la adherencia y la resistencia del material. En general, los factores principales que influyen en el desarrollo del proceso de corrosión en el acero de refuerzo del concreto pueden ser:

- Factores que dependen directamente de la calidad del concreto: la relación  $A/C$ , la cantidad y tipo de cemento usado, Características de los agregados y su proporción, uso de aditivos, la compactación, el curado, la porosidad y permeabilidad, entre otros.
- Factores que dependen del uso de la estructura, como son: solicitaciones accidentales o diferentes a las calculadas originalmente, cambio de uso.
- Factores dependientes del entorno de servicio: temperatura, humedad relativa, contaminación ambiental, vientos dominantes, etc.

Todos estos factores en forma aislada o combinada resultan en una estructura de concreto reforzado con mayor o menor durabilidad. Con respecto a esto, recientemente se han llevado a cabo estudios estadísticos en los que se señalan como responsables de los daños a elementos de concreto a [3]:

- Los defectos de la calidad de los materiales en un 16.2 %.
- Errores en la ejecución de la obra en un 38.5 %.
- Errores de diseño en un 45.3 %.

Algunos otros estudios, elevan al 30 % la calidad de los materiales como factor decisivo para la reducción de la durabilidad. A nivel mundial, esta situación ha ocasionado grandes pérdidas económicas estimadas entre el 2 y el 5 % del PIB de cada país [4].

### 1.1.1. Estructuras de concreto que conforman las vías terrestres.

**Pavimentos rígidos.** Se define como pavimento al conjunto de capas de materiales seleccionados que reciben en forma directa las cargas del tránsito y las transmiten a las capas inferiores, distribuyéndolas con uniformidad. Este conjunto de capas proporciona también la superficie de rodamiento, en donde se debe tener una operación rápida y cómoda. De acuerdo con las teorías de esfuerzos y las medidas de campo que se realizan, los materiales con que se construyen los pavimentos deben tener la calidad suficiente para resistir, debido a esto, las capas localizadas a mayor profundidad pueden ser de menor calidad, en relación con el nivel de esfuerzos que recibirán, aunque el pavimento también transmite los esfuerzos a las capas inferiores y los distribuye de manera conveniente, con el fin de que estas los resistan. La calidad y los espesores de las capas del pavimento deben estar íntimamente relacionados con los materiales de las capas inferiores; es decir tanto los esfuerzos debido al tránsito como la calidad de las terracerías influyen en la estructuración del pavimento. Así, con estos 2 parámetros el ingeniero debe estructurar el pavimento; para hacer esto, usará los materiales regionales y con ellos resolverá diferentes problemas que se le presenten, en la forma más económica posible. Como se ha indicado, el pavimento proporciona la superficie de rodamiento para que los vehículos transiten con “rapidez” y “comodidad”. Estas dos últimas cualidades se colocan entre comillas porque son relativas y dependen principalmente del tipo de camino. La superficie de rodamiento de un pavimento rígido es proporcionada por losas de concreto, las cuales distribuyen las cargas de los vehículos hacia las capas inferiores por medio de toda la superficie de la losa y de las adyacentes, que trabajan en conjunto con la que recibe directamente todas las cargas. Este tipo de pavimento no puede plegarse a las deformaciones de las capas inferiores sin que se presente la falla estructural. Aunque en teoría las losas de concreto pueden colocarse en forma directa sobre la subrasante, es necesario construir una capa de sub-base para evitar que los finos sean bombeados hacia la superficie de rodamiento al pasar los vehículos, lo cual puede provocar fallas de esquina o de orilla en la losa.



Figura 1.1: Pavimentos rígidos en buenas condiciones, parque turístico la Zarcita, Zacapu Michoacán.

**Drenaje en vías terrestres.** Uno de los elementos que causa mayores problemas a los caminos es el agua, pues en general disminuye la resistencia de los suelos, presentándose así fallas en terraplenes, cortes y superficies de rodamiento. Lo anterior obliga a construir el drenaje de tal forma que el agua se aleja a la mayor brevedad posible de la obra. En consecuencia, podría decirse que un buen drenaje es el alma de los caminos. El drenaje artificial se clasifica en superficial y subterráneo, dependiendo de si el agua escurre o no por las capas de la corteza terrestre. El drenaje superficial se considera longitudinal o transversal, según la posición que las obras guarden con respecto al eje del camino. El drenaje longitudinal tiene por objeto captar los escurrimientos para evitar que lleguen al camino o permanezcan en él, causando desperfectos. En éste tipo de infraestructura se encuentran las las cunetas, contracunetas, bordillos y canales de encauzamiento. Se llaman de drenaje longitudinal porque se sitúan más o menos paralelos al eje del camino. Los materiales más utilizados para construir el drenaje de los caminos son los convencionales, es decir concreto hidráulico, mampostería, lamina de acero y morteros de cal y cemento [5].



Figura 1.2: Obras de drenaje de concreto *cunetas*.

**Puentes.** Un puente es una construcción que permite salvar un accidente geográfico como un río, un cañón, un valle, un camino, una vía férrea, un cuerpo de agua o cualquier otro obstáculo físico. El diseño de cada puente varía dependiendo de su función y la naturaleza del terreno sobre el que se construye. Su proyecto y su cálculo pertenecen a la ingeniería estructural, siendo numerosos los tipos de diseños que se han aplicado a lo largo de la historia, influidos por los materiales disponibles, las técnicas desarrolladas y las consideraciones económicas, entre otros factores. Al momento de analizar el diseño de un puente, la calidad del suelo o roca donde habrá de apoyarse y el régimen del río por encima del que cruza son de suma importancia para garantizar la vida del mismo.



Figura 1.3: Puentes “Fuente Angélica del Valle”.

### 1.1.2. Problemática actual.

Actualmente la infraestructura existente de concreto presenta diferentes problemáticas que requiere análisis, revisión y mantenimiento. Por lo tanto la necesidad de diseñar de manera correcta un concreto es un objetivo apremiante. Los caminos y carreteras son la principal infraestructura en las vías terrestres ya que son la principal fuente de comunicación que hay para el desarrollo de una región, estado o país, ya que por estas vías de comunicación se realizan las exportaciones e importaciones de producto que contribuyen al crecimiento económico de una zona en particular, por lo que es necesario el mantener en óptimas condiciones estas vías de comunicación, actualmente existen varias carreteras de concreto hidráulico, las cuales han demostrado ser altamente competitivas con el asfalto, pero se debe tener un buen control de calidad y un buen diseño del concreto para que estas vías de comunicación se comporten de manera adecuada, así mismo evitando costos de mantenimiento y de reparación que en muchos casos son excesivos y no siempre cumplen con el fin de reparar bien la infraestructura, además de que se llegan a perder cuantiosas cantidades de dinero para los inversionistas ya que se ven en la necesidad de pagar multas federales por el mal comportamiento de la infraestructura construida, se necesita un experto en patología de concretos y un buen diseño que ayude a mitigar o a erradicar estos problemas.



Figura 1.4: Pavimentos rígidos deteriorados.

La corrosión en las estructuras de concreto armado es uno de los problemas más co-

munes que existen, pero pese a su cotidianidad estos problemas no deberían de suceder con tanta facilidad, por lo tanto es necesario realizar un diseño adecuado del concreto y una colocación supervisada por profesionales y en caso de existir ya el problema hacer una adecuada reparación. La mayoría de estos problemas se dan en columnas de concreto y estas son utilizadas en un sinfín de infraestructura como lo son en puentes y muelles, lo cual nos produce un gran costo de mantenimiento impidiendo así el poder crear nuevas vialidades ya que un gran presupuesto es destinado para las reparaciones y mantenimiento.

### 1.1.3. Materiales que constituyen el concreto.

#### Agregados pétreos.

La importancia del uso del tipo y de la calidad correcta del agregado no se puede subestimar. Los agregados fino y grueso ocupan cerca del 60 % al 75 % del volumen del concreto e influyen fuertemente en las propiedades tanto en estado fresco como endurecido, en las proporciones de la mezcla y en la economía del concreto. Los agregados naturales para concreto son una mezcla de roca y minerales. Mineral es una sustancia sólida natural con una estructura interna ordenada y una composición química que varía dentro de límites estrechos. Las rocas, que se clasifican según su origen en ígneas, sedimentarias o metamórficas, generalmente se componen en varios minerales. Por ejemplo, el granito contiene cuarzo, feldespato, mica y otros pocos minerales, la mayoría de las calizas consiste en calcita, dolomita y pequeñas cantidades de cuarzo, feldespato y arcilla. El intemperismo y la erosión de las rocas producen partículas de piedra, grava, arena, limo y arcilla [6].



Figura 1.5: Primer plano de agregado fino y agregado grueso.

Las características físicas y químicas básicas del agregado, en general, no pueden alterarse por el procesamiento, aunque las cantidades de ciertas partículas dañinas pueden reducirse. Las características del agregado que pueden controlarse incluyen granulometría, contenido de agua, limpieza, remoción de partículas anormalmente ligeras y, en algún grado, la forma de las partículas. Los factores económicos determinan por lo regular el grado

en que puede ser dirigido el procesamiento para producir el mejor arreglo entre las propiedades deseables del agregado y la economía. La medida en que deben aplicarse al agregado los criterios de exactitud en las especificaciones depende de cuán crítico sea el uso final al que pretenda servir el concreto. Para el concreto comercial ordinario, rara vez es necesario especificar la más alta calidad o el más rígido control. Por otro lado, si se espera que el concreto mantenga altos esfuerzos o que sirva en un medio severo, entonces se recomienda de manera especial mantener la alta calidad y un control cuidadoso [6].

### **Cemento.**

La palabra concreto a menudo se utiliza para describir muchos materiales usados en la industria de la construcción. Un mal entendido muy común es que el concreto es el mismo que el cemento. El concreto es una mezcla de cemento, agregado (fino y grueso) y agua. El cemento es una mezcla de conchas, piedra caliza, arcilla, sílice, mármol, esquistos, arena, bauxita y mineral de hierro componentes que son molidos, mezclados, fundidos y triturados hasta hacerlos polvo. El cemento actúa como agente de adherencia en el concreto cuando se le mezcla con agua. El agregado es un material duro, granular, como la grava que se mezcla con el cemento para proporcionar estructura y resistencia al concreto. El concreto se entrega en el sitio de la construcción en estado flexible. El concreto puede moldearse en casi cualquier forma, es económico, es fácil de elaborar y de usar, a prueba de fuego y hermético. En la actualidad, aproximadamente 15 millones de toneladas de cemento Portland se usan para aplicaciones residenciales en los Estados Unidos. Estacionamientos, pisos de sótano, muros, banquetas y cimentaciones son aplicaciones comunes residenciales del concreto. Vialidades, edificios y puentes son aplicaciones comunes comerciales del concreto [7]. Los cementos mexicanos se especifican según la norma [8]. De acuerdo con esta norma, hay seis tipos básicos de cementos.

- CPO – cemento portland ordinario, el cual puede tener hasta 5 % de adición de materiales tales como escoria, puzolanas, humo de sílice o caliza.
- CPP – cemento portland puzolánico, que posee del 6 % al 50 % de material puzolánico, con relación a la masa total del cemento.
- CPEG – cemento portland con escoria de alto horno, el cual tiene del 6 % al 60 % de escoria.
- CPC – cemento portland compuesto, se compone de Clinker, yeso y dos o más adiciones.

- CMS – cemento portland con humo de sílice, que recibe del 1
- CEG – cemento con escoria de alto horno, el cual tiene una cantidad de escoria que varía del 61 % al 80 %.

Los cementos se designan por uno de los 6 tipos de cementos, seguido por la clase de resistencia y por la característica especial. Por ejemplo, un cemento portland puzolánico de clase resistente 30R, de baja reactividad álcali-agregado y bajo calor de hidratación, se designaría como CPP 30R BRA/BCH.

### **Polímeros.**

Los polímeros son macromoléculas (generalmente orgánicas) formadas por la unión de moléculas más pequeñas llamadas monómeros. El almidón, la celulosa, la seda y el ADN son ejemplos de polímeros naturales, entre los más comunes de estos y entre los polímeros sintéticos encontramos el nailon, el polietileno y la baquelita. Para esta investigación se estudió el efecto de un almidón comercial incorporado a un cemento comercial. La restauración y mantenimiento de edificios históricos ha sido destacada como vía para la protección del medio-ambiente además de como salvaguarda del Patrimonio Cultural. Para el éxito de un proceso de restauración resulta crítica la elección de un mortero de reparación adecuado, dado que la compatibilidad entre los materiales originales y los nuevos es de especial importancia [9].

Se han realizado trabajos de investigación previos enfocados hacia el efecto de almidones y sus derivados en materiales con base cemento, ya que aquellos pueden actuar como aditivos modificadores de la reología. Estos aditivos han actuado como espesantes y como reductores de agua. El uso de almidones como reductores de agua podría ser de especial interés, dado que son biodegradables y pueden ser incorporados en las mezclas en lugar de condensados de formaldehido-sulfonato de naftaleno (FDN) o plastificantes tipo policarboxilato (PC). La adición de almidones contribuiría, por lo tanto, a reducir los problemas medioambientales. En relación con el mecanismo de acción de los aditivos, se han publicado diversos factores que afectan a la influencia que un polímero ejerce sobre una mezcla, como:

- El tipo y propiedades de conglomerante.
- La cantidad de agua de amasado.
- El proceso de amasado.

- Los procedimientos experimentales.
- La presencia y propiedades de aditivos.

Todos estos factores apuntan hacia la dificultad en predecir el comportamiento de los almidones. El peso molecular de un almidón concreto o de alguno de sus derivados parece ser determinante para su comportamiento. Polímeros de alto peso molecular tienden a aglomerarse y a producir un efecto espesante en los morteros, mientras que derivados de bajo peso molecular pueden ser fácilmente adsorbidos sobre la superficie de las partículas de conglomerante, dando lugar a repulsiones estéricas (esto es, un efecto dispersante) que conduce a viscosidades más bajas. Teniendo como base la similitud entre almidones y derivados celulósicos se han dilucidado y ensayado diversos efectos de los almidones, tales como:

- a) Comportamiento espesante, que permite la utilización de almidones como aditivos mejoradores de la viscosidad.
- b) Estrechamente relacionado con ello, un efecto retenedor de agua, debido a que estos aditivos son capaces de fijar agua en su estructura, reduciendo la cantidad de agua libre en la mezcla y produciendo un incremento en la viscosidad.
- c) Capacidad retardadora del fraguado, si bien el mecanismo de acción de este proceso hasta el momento no se ha aclarado completamente.
- d) Un efecto dispersante sobre las partículas de cemento, comportamiento como plastificante. En ese sentido, se han señalado muchas ventajas relativas al uso de éteres de almidón como reductores de agua (en lugar de FDN o plastificantes tipo policarboxilato): reducción de problemas medioambientales, acción reductora de agua más intensa ya que el principal mecanismo de dispersión es una fuerte repulsión estérica, y mejores propiedades reológicas de las pastas de cemento [10].

#### 1.1.4. Fundamentos del concreto.

##### **Relación agua/cemento.**

Para cualquier grupo de materiales y condiciones de curado, la calidad del concreto endurecido es fuertemente influenciada por la cantidad de agua usada con relación a la cantidad de cemento. Cuando grandes cantidades de agua son innecesariamente empleadas, ellas diluyen la pasta de cemento (la cola o pegamento del concreto). Las ventajas de la disminución de la cantidad de agua son:

- Aumento de la resistencia a la compresión (resistencia en compresión) y de la resistencia a flexión.

- Disminución de la permeabilidad, entonces disminución de la absorción y aumento de la estanquidad (hermeticidad).
- Aumento de la resistencia a la intemperie.
- Mejor unión entre concreto y armadura.
- Reducción de la contracción (retracción, encogimiento) y de la fisuración (agrietamiento, fisuramiento).
- Menores cambios de volumen causado por el humedad y el secado.

Menores cantidades de agua de mezcla (mezclado) resultan en mezclas más rígidas (secas); pero, con vibración, aún las mezclas más rígidas pueden ser fácilmente colocadas. Por lo tanto, la consolidación por vibración permite una mejoría de la calidad del concreto [6].

### **Tipos de concreto.**

Con base en su peso unitario, el concreto se puede clasificar en tres grandes categorías. El concreto que contiene arena natural y grava o agregados de roca triturada, que pesa aproximadamente  $2,400 \text{ kg/m}^3$ , es conocido como concreto de peso normal y es el concreto más comúnmente utilizado para propósitos estructurales. Para aplicaciones en donde se desea una relación más alta de resistencia contra peso; es posible reducir el peso unitario del concreto usando ciertos agregados naturales o piropcesados que tienen una densidad de masa más baja. El término concreto ligero se utiliza para un concreto que pesa menos de  $1,800 \text{ kg/m}^3$ . Por otra parte, el concreto pesado, que se utiliza por ejemplo para escudos contra radiación, es un concreto producido con agregados de alta densidad y pesa en general más de  $3,200 \text{ kg/m}^3$ .

La clasificación por resistencia del concreto, que prevalece en Europa y en muchos otros países, es en tres categorías generales:

1. Concreto de baja resistencia: menos de 20 MPa ( $204 \text{ kgf/cm}^2$ ) de resistencia a la compresión.
2. Concreto de resistencia moderada: de 20 a 40 MPa ( $204$  a  $408 \text{ kgf/cm}^2$ ) de resistencia a la compresión.
3. Concreto de alta resistencia: más de 40 MPa ( $408 \text{ kgf/cm}^2$ ) de resistencia a la compresión. El concreto de resistencia moderada es un concreto ordinario o normal, que se utiliza en la mayor parte de los trabajos estructurales. El concreto de alta resistencia se utiliza para aplicaciones especiales.

### **Aditivos para concreto.**

Un aditivo es un material distinto del agua, los agregados o el cemento hidráulico, que se utiliza como ingrediente del mortero o concreto, y que se añade a la mezcla inmediatamente antes o después del mezclado [11]. El uso de aditivos cumple con diversos objetivos que pueden ser los siguientes: modificar a conveniencia las propiedades del concreto en estado fresco, influir en beneficio de algunas características y/o propiedades del concreto endurecido y beneficios de costo [12]. Para obtener las máximas ventajas en el uso de aditivos, es conveniente tener precauciones con su uso, ya que este tipo de productos puede afectar una o más propiedades del concreto, o bien contribuir a la aparición de efectos indeseables en el mismo. Por estas razones, es importante realizar las verificaciones de calidad antes de utilizarlos, ya que existen situaciones que esta evaluación se convierte en una práctica vital, como son los siguientes casos:

tipos especiales de cemento donde esta especificada la combinación de dos o más aditivos en una mezcla, o cuando la mezcla y colocación del concreto se realizan en condiciones de temperatura por encima o debajo de las temperaturas recomendadas para la fabricación de concreto [6].

Las razones principales para el uso de aditivos son:

- Reducción del costo de la construcción de concreto.
- Obtención de ciertas propiedades en el concreto de manera más efectiva que otras.
- Manutención de la calidad del concreto durante las etapas de mezclado, transporte, colado (colocación) y curado en condiciones de clima adverso.
- Superación de ciertas emergencias durante las operaciones de mezclado, transporte, colocación y curado.

A pesar de estas consideraciones, se debe observar que ningún aditivo de cualquier tipo o de cualquier cantidad se le puede considerar como un sustituto de las buenas prácticas de construcción. La eficiencia de un aditivo depende de factores tales como: tipo, marca y cantidad del material cementante; contenido de agua; forma, granulometría y proporción de los agregados; tipo de mezclado y temperatura del concreto [13].

## **1.2. Tema en estudio.**

En la presente investigación se realiza el análisis de sensibilidad de datos y el análisis de ciencia de datos de dos mezclas de concreto, la primera, es un concreto con un valor de

relación  $A/C$  de 0.35 con la adición de un fluidificante que permita mejorar la trabajabilidad y la inclusión de un aditivo orgánico natural que permita mejorar la respuesta de la estructura interna del concreto ante esfuerzos de expansión y contracción, la segunda es una mezcla de concreto convencional llamada mezcla control, con un valor de relación  $A/C$  igual a 0.4116, la cual servirá para generar valores de referencia, ésta mezcla no incluye ninguna adición.

El presente trabajo menciona información acerca de la caracterización del material en estado endurecido (roca artificial) el cual fue elaborado con un cemento portland compuesto de clasificación 40R CPC (Cemento Portland compuesto con 40 MPa de resistencia rápida), acorde a [8]. Agregados gruesos de origen de material triturado y agregados finos obtenidos del banco Joyitas ubicado en la ciudad de Morelia fueron usados, además de agua potable y las adiciones correspondientes. Este material se caracterizó a edades tardías, obteniendo datos como lo son compresión Simple ( $F'c$ ), tensión indirecta ( $Ft$ ), esfuerzo de flexión ( $MR$ ), resistencia al congelamiento, velocidad de pulso ultrasónico ( $VPU$ ), resistividad eléctrica ( $Re$ ), frecuencias de resonancia ( $FR$ ), y carbonatación. La adición de un geopolímero orgánico se utilizó en un 2% en base al peso del cemento utilizado para realizar la mezcla, ya que el estado del arte revela que es el mejor porcentaje con el que trabaja esta adición bajo condiciones normales de mezclado. La adición del fluidificante fue usado bajo las recomendaciones del proveedor y la mezcla de concreto fue diseñada por el método del ACI (American Concrete Institute).

### 1.2.1. Proceso de caracterización, muestreo y diseño.

Los materiales pétreos empleados en la presente investigación, son materiales de la región, el agregado pétreo fino, es decir la arena se obtuvo del banco de arena Joyitas de la ciudad de Morelia en el estado de Michoacán de Ocampo, México, uno de los factores para la elección de los bancos de materiales a emplear es la alta demanda que éstos bancos tienen ya que proveen a la mayoría de las construcciones en la ciudad de Morelia y sus alrededores.

Se recolectaron los agregados finos (arenas) y gruesos (gravas). Las pruebas se llevaron a cabo en el Laboratorio de materiales de la Facultad de Ingeniería Civil bajo condiciones controladas, donde se secaron, cuartearon y caracterizaron macroscópicamente. Todas las pruebas estándar se realizaron por quintuplicado, los valores mostrados son el promedio de 5 pruebas, y no hubo variaciones superiores al 10 por ciento [14]. La experimentación consistió en el proceso de caracterización de los agregados finos y gruesos, el cemento utilizado fue un CPC 40 R, que según [15], es un cemento Portland con 40 MPa de resistencia a la

compresión simple, donde obtener las características físicas y mecánicas eran el principal objetivo para realizar el diseño de las mezclas, además la obtención de datos fue bajo condiciones estrictamente controladas de laboratorio. Las pruebas a los agregados realizadas se muestran en la Tabla (1.1).

Agregado	Propiedades físicas	Media de las propiedades físicas
Agregados finos (Arenas)	% de absorción	2.71
	Densidad (g/ml)	2.55
	Gravedad específica aparente ( $g/cm^3$ )	1.42
	% de humedad superficial	0.19
	Malla que pasa la # 200	5.45
Agregados gruesos (Gravas)	% de absorción	3.40
	Densidad (g/ml)	2.80
	Gravedad específica aparente ( $g/cm^3$ )	1.51
	% de humedad superficial	1.82

Tabla 1.1: Propiedades físicas de los agregados utilizados en las mezclas de concreto.

En la Tabla (1.2) y (1.3) se muestran las características de las mezclas en estudio, la mezcla control y la mezcla con las adiciones respectivamente.

Material	Descripción	
Cemento		CEM II 40R CPC
Agregado fino	Geometría	Volcánico
	% malla 8 mm	12.35
	% malla 16 mm	28.72
	% malla 30 mm	31.03
	% malla 50 mm	12.66
	% malla 100 mm	7.28
	Charola	7.95
Agregado grueso	Geometría	Triturado
	Tamaño máximo	19.05 mm
Masa volumétrica	Unidad ( $kg/m^3$ )	1435
Agua	Unidad ( $kg/m^3$ )	205
Aire	% de aire incluido	2
Concreto	$f'c$ ( $kgf/cm^2$ )	350
	relación a/c	0.4116
Revenimiento	8 (cm)	
Aditivos	—	

Tabla 1.2: Características de la mezcla control.

Material	Descripción	
Cement		CEM II 40R CPC
Agregado fino	Geometría	Volcánico
	% malla 8 mm	12.35
	% malla 16 mm	28.72
	% malla 30 mm	31.03
	% malla 50 mm	12.66
	% malla 100 mm	7.28
Agregado grueso	Charola	7.95
	Geometría	Triturado
	Tamaño máximo	19.05 mm
	Masa volumétrica ( $kg/m^3$ )	1435
Agua	Unidad ( $kg/m^3$ )	205
Aire	% de aire incluido	2
Concreto	$f'c$ ( $kgf/cm^2$ )	350
relación a/c	0.35	
Revenimiento	8 (cm)	
Aditivos	Polímero orgánico natural y fluidificante	

Tabla 1.3: Características de la mezcla con adiciones.

### 1.2.2. Dosificación de las mezclas.

La dosificación de los materiales para el concreto se estableció con el fin de lograr:

- Trabajabilidad y consistencia que permiten colocar fácilmente el concreto dentro de los moldes, bajo las condiciones de colocación que vayan a emplearse, sin segregación ni exudación excesiva.
- Resistencia a exposiciones especiales.
- Conformidad con los requisitos del ensayo de resistencia.

La relación agua/material cementante seleccionada fue lo suficientemente baja, con el objetivo de incrementar el  $F'c$  y cumplir con criterios de durabilidad. El reglamento no incluye disposiciones sobre condiciones de exposición especialmente severas, tales como la exposición a ácidos o altas temperaturas, ni sobre consideraciones estéticas, tales como acabado de superficies. Estos puntos están fuera del alcance de este trabajo y deben estar específicamente cubiertos en las especificaciones del proyecto.

Los componentes y la dosificación del concreto deben seleccionarse de manera que puedan cumplir con los requisitos mínimos establecidos por el reglamento y con los requisitos adicionales de los documentos contractuales. El método del *ACI* es un método de diseño de

mezclas de concreto normal que se basa en las propiedades físicas de los materiales como lo son: la densidad, masa volumétrica seca y suelta, masa volumétrica seca y varillada, % de absorción, % de humedad actual, módulo de finura, y tamaño máximo del agregado, estas propiedades son utilizadas para obtener la cantidad necesaria del concreto por unidad de volumen para un concreto de peso normal. Este procedimiento tiene en consideración los requisitos para la facilidad de colocación, la cohesión, fuerza y durabilidad. El presente trabajo utilizó el método del volumen absoluto, el cual es adecuado para el concreto de peso pesado, además, de que el método de volúmenes absolutos tiene buena aceptación [16].

El cálculo de las cantidades de material se realizó para cilindros de 10 cm de diámetro y 20 cm de altura respetando la relación ancho-espesor 1:2, con una mezcla sin aire incluido, un revenimiento de proyecto de 8 cm y un  $F'c$  de proyecto de  $350 \text{ Kg}/\text{cm}^2$ , además, se elaboraron especímenes prismáticos de un área de 15 cm x 15 cm y una longitud de 60 cm, dos relaciones agua/cemento fueron consideradas, la primera, de un valor de 0.42 para la mezcla del grupo control, la segunda, considera un valor de 0.35 y corresponde a la mezcla con las adiciones.

### 1.2.3. Pruebas y resultados.

En la Tabla (1.4) se muestran las pruebas realizadas a los especímenes de concreto.

Pruebas no destructivas	Pruebas destructivas
Resistividad eléctrica $Re$	Resistencia al esfuerzo de compresión simple $F'c$
Velocidad de pulso ultrasónico $VPU$	Resistencia a esfuerzos de tensión indirecta $Ft$
Frecuencias de Resonancia $FR$	Resistencia a esfuerzos de Flexión $MR$
Profundidad de Carbonatación	Resistencia al congelamiento

Tabla 1.4: Pruebas físicas elaboradas al concreto.

En la Tabla (1.5) se muestran los resultados de cada una de las pruebas realizadas a la mezcla control.

Edad	VPU	CALIDAD DEL CONCRETO	Re	CRITERIO DE EVALUACIÓN	FR	Ft	MR	F'c
40 días	3008	Alta	4.3197	Riesgo moderado		20.21		341.228198
40 días	2989	Alta	4.7124	Riesgo moderado		22.12		356.507073
40 días	3215	Alta	4.3197	Riesgo moderado		20.78		356.507073
40 días	3290	Alta	3.927	Riesgo moderado				341.228198
40 días	2990	Alta	4.3197	Riesgo moderado				356.507073
60 días	3200	Alta	7.4613	Riesgo moderado	3384	23.3034668	53.07	359.57558
60 días	3141	Alta	7.0686	Riesgo moderado	3395	22.956509	55.33	351.312255
60 días	3183	Alta	5.8905	Riesgo moderado		22.3071568		381.984596
60 días	3133	Alta	6.2832	Riesgo moderado				359.371862
60 días	3157.89	Alta	7.0686	Riesgo moderado				355.106509
90 días	3537	Alta	8.05035	Riesgo moderado	3395	24.0419457	53.87	365.661665
90 días	3529	Alta	8.05035	Riesgo moderado	3398	23.8159457	58.13	366.285552
90 días	3537	Alta	8.05035	Riesgo moderado		24.0642274		369.239468
90 días	3571	Alta	7.854	Riesgo moderado				359.970284
90 días	3512	Alta	8.44305	Riesgo moderado				418.157331
120 días	3361	Alta	9.0321	Riesgo moderado	3398	25.4297768	54.9333333	419.086796
120 días	3347	Alta	9.0321	Riesgo moderado	3396	25.4329599	59.0933333	422.728261
120 días	3354	Alta	9.4248	Riesgo moderado		25.4966219		418.959472
120 días	3389	Alta	8.83575	Riesgo moderado				418.972205
120 días	3368	Alta	8.83575	Riesgo moderado				420.80567
180 días					3399		57.6266667	
180 días					3398		59.6	

Tabla 1.5: Resultados de las pruebas para la mezcla control.

En la Tabla (1.6) los resultados de la mezcla con las adiciones es mostrada.

Edad	VPU	CALIDAD DEL CONCRETO	Re	CRITERIO DE EVALUACIÓN	FR	Ft	MR	F'c
40 días	4121	Durable	8.6394	Alto riesgo		32.69042531		444.742573
40 días	4065	Durable	8.83575	Alto riesgo		32.37211542		464.987082
40 días	4134	Durable	9.0321	Alto riesgo		32.53127037		467.406237
40 días	4208	Durable	9.22845	Alto riesgo				426.789895
40 días	3921	Alta	9.0321	Alto riesgo				453.782574
60 días	4236	Durable	10.6029	Riesgo moderado	3228	36.73296087	61.08	479.502013
60 días	4283	Durable	9.0321	Alto riesgo	3221	32.7222563	59.70666667	525.720608
60 días	4213	Durable	9.62115	Alto riesgo		37.05127075		441.43215
60 días	4262	Durable	10.28874	Riesgo moderado				522.410185
60 días	4236	Durable	10.6029	Riesgo moderado				503.693564
90 días	4431	Durable	11.3883	Riesgo moderado	3250	38.26084832	75.89333333	505.221451
90 días	4370	Durable	12.1737	Riesgo moderado	3270	38.22901733	82.46666667	528.394411
90 días	4330	Durable	11.3883	Riesgo moderado		38.26084832		510.861903
90 días	4355	Durable	10.9956	Riesgo moderado				538.580327
90 días	4380	Durable	10.6029	Riesgo moderado				514.643424
120 días	4335	Durable	13.3518	Riesgo moderado	3350	49.75501831	78.53333333	557.070735
120 días	4317	Durable	14.1372	Riesgo moderado	3290	53.76572288	80.13333333	568.081816
120 días	4399	Durable	13.3518	Riesgo moderado		52.60707489		518.284457
120 días	4301	Durable	12.5664	Riesgo moderado				506.59772
120 días	4384	Durable	14.5299	Riesgo moderado				560.388284
180 días					3390		80.13333333	
180 días					3402		82.4	

Tabla 1.6: Resultados de las pruebas para la mezcla con adiciones.

La prueba de  $Re$  en el concreto está relacionada con las principales etapas de la vida útil de una estructura: el período de inicio de la penetración del cloruro y el período de propagación de la tasa de corrosión. La resistividad del concreto está relacionada con

la susceptibilidad a la penetración del cloruro. Dentro de una estructura, los puntos de baja resistividad indican dónde será más rápida la penetración del cloruro. Se pueden adoptar medidas de protección en concordancia con [17]. La medición de  $Re$  es un método alternativo y potencialmente útil para vigilar el estado de humedad del concreto in situ, además del valor intrínseco para el proceso de corrosión. [18]. Se espera que esta prueba en el concreto sea principalmente una función del grado de saturación de agua en un concreto determinado. Sin embargo, la resistividad también depende de la temperatura y de la composición del agua de los poros. [19]. Para la toma de lecturas el concreto debe estar limpio y libre de contaminación por aceite y otros contaminantes. Antes de tomar medidas, la superficie puede ser humedecida ligeramente para mejorar el contacto. Las esponjas y los tapones de madera deben mantenerse húmedos, lo que puede requerir una humectación frecuente ya que el concreto puede absorber la solución humectante. Las mediciones deben realizarse en zonas representativas con respecto a:

- Composición del concreto.
- Exposición expuesta o protegida, orientación a los vientos predominantes.
- Importancia del elemento estructural.

Dentro de cada área, deben tomarse suficientes medidas para obtener un conjunto representativo de datos, esto incluye el promedio de resistividad y su variación. En la Tabla (1.7) los indicadores de corrosión son mostrados [20].

Tabla 1.7: Resistividad del concreto y su riesgo a la corrosión.

<b>Resistividad del concreto</b>	<b>Riesgo a la corrosión</b>
<100	Alto
100-500	Moderado
500-1000	Bajo
>1000	Despreciable

Tanto la resistencia a la compresión como a la tensión son necesarias en el diseño de las estructuras. La prueba de  $Ft$  es importante para las estructuras de concreto no reforzado como la construcción de una presa bajo la excitación de un sismo [21]. Otras estructuras como las losas de pavimento y la pista de aterrizaje de un aeródromo, que se diseñan en base a la resistencia a la flexión, están sujetas a fuerzas de tensión. Por lo tanto, en el diseño de estas estructuras, el valor de  $Ft$  es más importante que la resistencia a la compresión de la [22].

Los resultados que se obtuvieron fueron los esperados, ya que la mezcla que contenía las adiciones presento mejores resultados, ante el esfuerzo de flexión se observo la mezcla con adiciones se mostró superior en un 38.66% contra el grupo control, en la mezcla con adiciones obtuvo un 23.22% en relación con el  $F'c$  de diseño que fue de  $350 \text{ kgf/cm}^2$ , además de que a los 180 días de prueba se obtuvo un máximo esfuerzo de  $MR$  de  $81.27 \text{ kgf/cm}^2$ . Con el grupo control apenas se obtuvo un 16.74% del  $F'c$  de diseño y un  $MR$  de  $56.47 \text{ kgf/cm}^2$ .

El desempeño de la mezcla con adiciones indica que es posible mejorar las características físicas y mecánicas de un concreto, sin embargo, es necesario realizar el análisis de la sensibilidad de los datos obtenidos en las pruebas anteriores que proporcione un respaldo de los datos obtenidos. Para este fin existen diferentes tipos de análisis y enfoques que ayudan a dar certeza a la información obtenida, así como generar nueva información que ayude a encontrar relaciones entre las variables, generar modelos y establecer medidas cuantitativas para generar predicciones, es decir, un análisis profundo de la información que ayude a detectar patrones y presentar posibles escenarios de su comportamiento en un futuro, además de poder establecer datos históricos que ayuden en determinado momento a la generación de nueva información. Las herramientas utilizadas para el desarrollo en ésta investigación, es el método de elemento finito y técnicas de análisis de información de datos como lo son técnicas de Inteligencia Artificial, ingeniería de datos, análisis de datos, analítica de datos, ciencia de datos y machine learning o también conocido como aprendizaje automático.

---

## Capítulo 2

# Elemento finito

### 2.1. El Método de Elemento Finito

#### 2.1.1. Introducción

El método de elemento finito, es un conjunto de técnicas que nos aproxima a un sistema continuo, ésto como un conjunto de elementos discretos. De ésta forma las ecuaciones diferenciales que definen el medio continuo se transforman en un conjunto de ecuaciones relativas a un número finito de variables; las cuales deberán satisfacer las condiciones de equilibrio y compatibilidad. Una peculiaridad en el método es, aparte de la solución del sistema de ecuaciones escogido, la habilidad de que las ecuaciones representen las condiciones designadas, tales como: complicaciones en la geometría, cargas, propiedades físicas y químicas de los materiales, dinámica de las estructuras entre otras. En éste método la continuidad es reemplazada por una idealización estructuralmente equivalente, compuesta por sistemas discretos a los cuales llamaremos elementos finitos, y estarán conectados a través de un número finito de nodos.

El método de elemento finito fue aplicado primeramente a problemas de esfuerzo y deformación en el plano, usando elementos triangulares y rectangulares en placas curvas. El rápido avance del método del elemento finito es en la actualidad notorio; éste había tenido un desarrollo insignificante en el campo práctico hasta antes de 1955, de ahí a la fecha su campo de actividad ha ido en aumento en el análisis numérico de problemas físicos y matemáticos aplicados a un amplio rango de problemas de análisis estructural, transferencia de calor, flujo de fluidos, fenómenos de ondas, etc. Por lo tanto podríamos decir que el Método del Elemento Finito (MEF) inicia como tal en los años 50's, del presente siglo, junto con la aparición de los computadores digitales. Su aplicación se fue extendiendo de

tal forma que el interés en su desarrollo se incrementó hasta hoy en día con la creación de grandes programas computacionales que facilitan los análisis. Existen tres áreas principales donde el MEF es aplicado,

- dentro de problemas de estado estacionario o análisis de equilibrio,
  
- problemas de eigenvalores que son una extensión de los anteriores pero involucran el cálculo de las características fundamentales del cuerpo o sistema examinado,
  
- problemas trascendentes o de propagación donde aparecen funciones que dependen del tiempo.

Dentro de la mecánica estructural el análisis de sistemas complejos limita la potencialidad humana, por lo cuál el hombre se ve obligado a recurrir al MEF para solucionar problemas de este tipo. Por lo tanto éste método consiste, a grandes rasgos, en discretizar un sistema continuo (sea pieza o estructura) en un número finito de elementos a los cuales se les darán todas las características mecánicas del sistema, es decir, se les asignarán las propiedades de los materiales que componen dicho sistema. Los elementos se componen de nodos en sus extremos o vértices según sea el caso, los cuales relacionan los elementos entre sí. En estos nodos y/o elementos se establecerán las condiciones de frontera y de carga para el análisis y serán los que sufran los desplazamientos que representan la deformación del sistema. Las condiciones de frontera representan las restricciones que tiene el sistema en su movimiento, ya sean desplazamientos, empotramientos, apoyos, giros, etc., y las condiciones de carga representan las fuerzas externas que están actuando en la estructura, tales como fuerzas puntuales, cargas distribuidas, momentos, etc. Con estas condiciones se simula la situación a la cuál está sometido el sistema. Teniendo hecho el modelado y sus condiciones, conociendo la posición de los nodos, cargas y restricciones, se hace uso de las Ecuaciones Constitutivas las cuales relacionan los esfuerzos con las deformaciones que tiene la estructura y a partir de éstas se obtienen otros valores de interés, como desplazamientos, cortantes, momentos, etc. Existen diferentes tipos de elementos los cuáles pueden ser como lo muestra la Figura (2.1):

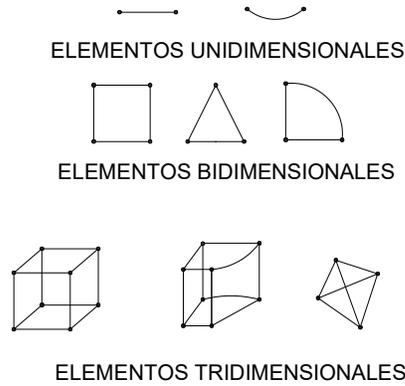


Figura 2.1: Tipos de elementos finitos.

Dentro de la metodología de elementos finitos existen técnicas de aproximación como los métodos de residual ponderado, estos métodos son útiles para obtener soluciones aproximadas a una ecuación diferencial gobernante, por lo tanto, el problema que se elija resolver estará dado por una ecuación diferencial, la cual deberá representar de manera adecuada el fenómeno en estudio. En orden de explicar los métodos, se considera la siguiente ecuación diferencial.

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} - u = -x, 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, \text{ and } u(1) = 0 \end{cases}$$

El primer paso en los métodos de residual ponderado es asumir una función de prueba la cual contiene coeficientes desconocidos para ser determinados más adelante. Un ejemplo de una función de prueba es,  $\tilde{u} = ax(1-x)$  para la ecuación anterior. Aquí  $\tilde{u}$  denota una aproximación a la solución la cual usualmente es diferente a la solución exacta. La función de prueba es elegida aquí como la que satisface las condiciones de frontera (i. e.,  $\tilde{u}(0) = 0$  y  $\tilde{u}(1) = 0$ ), y esto tiene un coeficiente  $a$  que tiene que ser determinado.

En general, la aproximación de una solución aproximada depende propiamente de la función de prueba seleccionada. Sin embargo, una forma simple de una función de prueba es seleccionada para éste ejemplo con el objetivo de mostrar el proceso básico de los métodos de residual ponderado. Una vez que una función de prueba es seleccionada, el residual es calculado mediante la sustitución de la función de prueba dentro de la ecuación diferencial. Esto es el residual  $R$  y está dado por

$$R = \frac{d^2 u}{dx^2} - \tilde{u} + x = -2a - ax(1-x) + x. \quad (2.1)$$

Porque  $\tilde{u}$  es diferente de la solución exacta, el residual no varía por todos los valores de  $x$  dentro del dominio. El siguiente paso es determinar la constante desconocida  $a$  como es la función de prueba elegida que mejor aproxime la solución exacta. Para este fin, una función de prueba  $w$  (o gobernante) es seleccionada y el promedio ponderado del residual sobre el dominio del problema es establecido en cero. Esto es,

$$I = \int_0^1 w R dx = \int_0^1 w \left( \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x \right) dx \quad (2.2)$$

$$= \int_0^1 w(-2a - ax(1-x) + x) dx = 0. \quad (2.3)$$

El siguiente paso es decidir la función de prueba. La solución aproximada resultante difiere dependiendo de la función de prueba. Los métodos de residual ponderado pueden ser clasificados basados en la función de prueba. Algunos de los métodos de residual ponderado son los siguientes.

1. Método de colocación. La función delta de Dirac,  $\delta(x - x_i)$  es usada como función de prueba, donde el punto de ejemplo  $x_i$  debe estar dentro del dominio,  $0 < x_i < 1$ . En otras palabras,

$$w = \delta(x - x_i) \quad (2.4)$$

Dado  $x_i=0.5$  y sustituyendo en la función de prueba dentro del residual ponderado, se encuentra que  $a=0.2222$  y la solución aproximada es  $\tilde{u} = 0.2222x(1-x)$ .

2. Mínimos cuadrados. La función de prueba es determinada por el residual como

$$w = \frac{dR}{da} \quad (2.5)$$

Aplicando esta ecuación a la ecuación de  $R$  se tiene que  $w = -2 - x(1-x)$ . Sustituyendo para la función de prueba resulta que  $a = 0.2305$  y entonces  $\tilde{u} = 0.2305x(1-x)$ .

3. Método de Galerkin. Para el método de Galerkin, la función de prueba viene de la función elegida. Esto es

$$w = \frac{d\tilde{u}}{da} \quad (2.6)$$

Para la presente función de prueba,  $w = x(1-x)$ . Aplicando esta función de prueba a la ecuación  $R$  se tiene que  $a = 0.2722x(1-x)$ .

Los análisis referidos a elementos finitos de este trabajo se basan en el método de Galerkin,

ya que este método puede producir una matriz simétrica bajo ciertas condiciones, cuestión que es muy útil para resolverse computacionalmente. Para explicar los elementos finitos, el punto de partida inicial es un problema de dimensión uno, pero la ciencia computacional y la ingeniería no se basa en formulas de dimensión 1, estos se basan en modelos más complejos y en problemas no lineales multidimensionales y nuestro enfoque deberá ser basado en la solución de estos casos.

El elemento finito para la ecuación diferencial mostrada en el ejemplo anterior tiene tres pasos.

1. Ver el problema en la forma  $A^T C A u = f$ , en aplicaciones fundamentales.
2. Introducir funciones de prueba  $\nu(x)$ , que conducen a la forma débil de la ecuación.
3. Introducir funciones de prueba que producen ecuaciones de elemento finito  $KU = F$ .

La matriz de rigidez  $K$  deberá ser simétrica definida positiva. Por lo tanto  $K$  además tiene la forma  $A^T C A$  con  $A =$  primera derivada reemplazada por  $A =$  primera diferencia. El ensamblaje de esta matriz de rigidez es el paso crucial en la ejecución del método de elemento finito. Entonces  $KU = F$  es normalmente resulta por eliminación.

Una de las aplicaciones que se le ha dado a éste método, es dentro de la Ingeniería Civil como un auxiliar en el análisis estático y dinámico de las estructuras, como lo son vigas, placas de acero y marcos, donde podemos conocer deflexiones, desplazamientos, reacciones y momentos. Debido a la importancia de las estructuras y la complejidad que llevaría el realizar un análisis a detalle de estos elementos, el usar el método de elemento finito es una herramienta importante y de enorme trascendencia. El método de elementos finitos es un procedimiento numérico para resolver problemas de ingeniería. Si pudiéramos describir de manera general los pasos a seguir para realizar un análisis de elementos finitos para resolver problemas, podríamos escribirlos como sigue.

### 2.1.2. Pasos generales para el análisis de elementos finitos.

1. Discretizar el dominio. Este paso implica subdividir el dominio en elementos y nodos. Para sistemas discretos como vigas y marcos, el sistema ya está discretizado y este paso es innecesario. En este caso, las respuestas obtenidas son exactas. Sin embargo, para sistemas continuos como placas y proyectiles, este paso se vuelve muy importante y las respuestas obtenidas son solo aproximadas. En este caso, la precisión de la solución depende de la discretización utilizada.

2. Escribir las matrices de rigidez del elemento. Las ecuaciones de rigidez del elemento deben escribirse para cada elemento del dominio.
3. Estructura de la matriz de rigidez global. Este análisis utiliza el enfoque de rigidez directa.
4. Aplicar las condiciones de frontera. Como lo son soportes, cargas y desplazamientos aplicados.
5. Resolver las ecuaciones. Esto se hará dividiendo la matriz de rigidez global y luego resolviendo las ecuaciones resultantes usando la eliminación Gaussiana.
6. Post-procesamiento. Para obtener información adicional como las reacciones, el elemento, fuerzas y tensiones [23].

Para entender el análisis con el MEF y su configuración se analizan algunos elementos importantes como lo es el elemento resorte.

## 2.2. El elemento resorte

El elemento resorte es un elemento finito unidimensional donde coinciden las coordenadas locales y globales, éste elemento es el elemento finito más simple. Cada elemento resorte tiene 2 nodos como se muestra en la Figura (2.2)

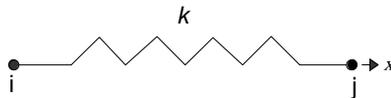


Figura 2.2: Elemento resorte.

Este elemento tiene 2 grados de libertad, uno en cada nodo por lo que la matriz de rigidez  $k$  es de tamaño  $2 \times 2$  y está dada por

$$k = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

donde  $k$  es la matriz de rigidez.

La matriz de rigidez global  $K$  se obtiene ensamblando las matrices de rigideces del elemento  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ). Una vez obtenida  $K$  se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$[K]\{U\} = \{F\}. \quad (2.8)$$

donde

$U \Rightarrow$  Es el vector de desplazamientos nodal global.

$F \Rightarrow$  Es el vector de fuerzas nodal global.

Con el objetivo de mostrar el desempeño del elemento resorte, así como la configuración del sistema se muestran los siguientes ejemplos.

### 2.2.1. Ejemplo 1

Considerando el sistema de resortes de 2 elementos mostrado en la Figura (2.3), y dadas las siguientes condiciones al sistema  $k_1 = 150 \frac{kN}{m}$ ,  $k_2 = 250 \frac{kN}{m}$ , y  $P = 15 \text{ kN}$  determinar:

1. La matriz de rigidez global para el sistema.
2. Los desplazamientos en los nodos no 2 y no 3.
3. La reacción en el nodo 1.

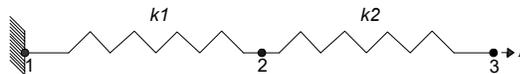


Figura 2.3: Sistema de resorte de 2 elementos.

Se comienza con la discretización del dominio, en la Figura (2.3) se observa que el sistema ya está discretizado. El dominio se subdivide en 2 elementos y 3 nodos. La Tabla (2.1) muestra la conectividad de los elementos para éste ejemplo

No del elemento	Nodo i	Nodo j
1	1	2
2	2	3

Tabla 2.1: Conectividad de los elementos (Ejemplo 1).

El siguiente paso es identificar las matrices de rigidez de cada elemento, para éste caso se tienen 2 elementos los cuales están representados por  $k_1$  y  $k_2$  además de que cada elemento contiene 2 nodos por lo que el tamaño de cada matriz es de  $2 \times 2$ .

$$k_1 = \begin{bmatrix} 150 & -150 \\ -150 & 150 \end{bmatrix} \quad k_2 = \begin{bmatrix} 250 & -250 \\ -250 & 250 \end{bmatrix}$$

Una vez identificadas las matrices de rigideces se realiza el proceso de ensamblaje de la matriz de rigidez global ( $K$ ), para éste caso el sistema de resortes tiene 3 nodos por lo que el tamaño de la matriz de rigidez global será de  $3 \times 3$ . Configurando la expresión anterior primero configuramos una matriz de ceros de tamaño  $3 \times 3$ .

>>zeros(3)

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Haciendo el ensamblaje de  $k_1$  se tiene que

$$K = \begin{bmatrix} 150 & -150 & 0 \\ -150 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y ensamblando  $k_2$ ,  $K$  queda como

$$K = \begin{bmatrix} 150 & -150 & 0 \\ -150 & 400 & -250 \\ 0 & -250 & 250 \end{bmatrix}$$

ahora el sistema de ecuaciones (2.8) queda de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} 150 & -150 & 0 \\ -150 & 400 & -250 \\ 0 & -250 & 250 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

Aplicando las condiciones de frontera para este problema, el diagrama de la Figura (2.3) muestra que  $u_1 = 0$  por ser condición de empotramiento,  $f_2 = 0$  ya que no existe carga en el nodo 2 y  $f_3 = 15 \text{ kN}$  el cual es un valor conocido.

$$\begin{bmatrix} 150 & -150 & 0 \\ -150 & 400 & -250 \\ 0 & -250 & 250 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ 0 \\ 15 \end{Bmatrix}$$

Para resolver el sistema anterior es necesario dividir la matriz de rigidez global en un subsistema más pequeño i. e., se elimina para este caso la primer fila y la primer columna debido al cero de la posición (1,1) del vector  $U$ .

$$\begin{bmatrix} 150 & -150 & 0 \\ -150 & 400 & -250 \\ 0 & -250 & 250 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u2 \\ u3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1 \\ 0 \\ 15 \end{Bmatrix}$$

quedando un sistema de 2 x 2, el cual es posible resolver por eliminación Gaussiana

$$\begin{bmatrix} 400 & -250 \\ -250 & 250 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u2 \\ u3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 15 \end{Bmatrix}$$

y de esta manera el subsistema queda expresado como

$$[k]\{u\} = \{f\} \tag{2.9}$$

donde el sistema es representado por

$$\begin{aligned} 400u2 - 250u3 &= 0 \\ -250u2 + 250u3 &= 15 \end{aligned}$$

resolviendo el sistema anterior se encuentra el vector  $u$

$$u = \begin{Bmatrix} u2 \\ u3 \end{Bmatrix} \Rightarrow u = \begin{Bmatrix} 0.1000 \\ 0.1600 \end{Bmatrix}$$

ahora sustituyendo  $u2$  y  $u3$  en el sistema global se observa que

$$\begin{bmatrix} 150 & -150 & 0 \\ -150 & 400 & -250 \\ 0 & -250 & 250 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.1000 \\ 0.1600 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1 \\ f2 \\ f3 \end{Bmatrix}$$

por lo que nuestro sistema final está expresado por  $F = K * U$ , donde

$$F = \begin{bmatrix} 150 & -150 & 0 \\ -150 & 400 & -250 \\ 0 & -250 & 250 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.1000 \\ 0.1600 \end{Bmatrix}$$

obteniendo que el vector  $F$  queda como  $\begin{Bmatrix} f1 \\ f2 \\ f3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -15 \\ 0 \\ 15 \end{Bmatrix}$

∴ la reacción en el nodo 1 es una fuerza de 15  $kN$  hacia la izquierda, comprobando que la sumatoria de fuerzas es igual a cero considerando que es un sistema en equilibrio ( $\Sigma F = 0$ ).

### Resumen de resultados

$$1. K = \begin{bmatrix} 150 & -150 & 0 \\ -150 & 400 & -250 \\ 0 & -250 & 250 \end{bmatrix}, 2. u = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow u = \begin{Bmatrix} 0.1000 \\ 0.1600 \end{Bmatrix}, 3. f_1 = -15kN$$

### 2.2.2. Ejemplo 2

Considerando el sistema de resortes compuesto por 6 muelles mostrado en la Figura (2.4). Dado  $k = 120 \frac{kN}{m}$ , y  $P = 20 kN$  es necesario determinar:

1. La matriz de rigidez global para el sistema.
2. Los desplazamientos en los nodos 3, 4 y 5.
3. Las reacciones en los nodos 1 y 2.

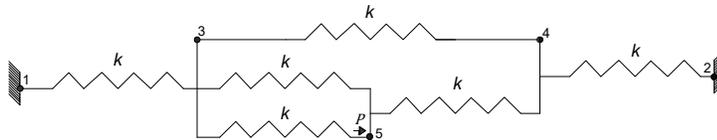


Figura 2.4: Sistema de resorte de 6 elementos.

Se observa que el problema se encuentra discretizado, por lo que el dominio se divide en 6 elementos y 5 nodos. La distribución de los elementos se muestra en la Tabla (2.2).

No elementos	Nodo i	Nodo j
1	1	3
2	3	4
3	3	5
4	3	5
5	5	4
6	4	2

Tabla 2.2: Conectividad de los elementos (Ejemplo 2).

Escribiendo las matrices de rigidez de cada elemento, donde el tamaño de cada una de las matrices es de  $2 \times 2$ , dadas por  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$  se tienen las siguientes  $k$

$$k_1 = \begin{bmatrix} 120 & -120 \\ -120 & 120 \end{bmatrix} \quad k_2 = \begin{bmatrix} 120 & -120 \\ -120 & 120 \end{bmatrix} \quad k_3 = \begin{bmatrix} 120 & -120 \\ -120 & 120 \end{bmatrix}$$

$$k_4 = \begin{bmatrix} 120 & -120 \\ -120 & 120 \end{bmatrix} \quad k_5 = \begin{bmatrix} 120 & -120 \\ -120 & 120 \end{bmatrix} \quad k_6 = \begin{bmatrix} 120 & -120 \\ -120 & 120 \end{bmatrix}.$$

Se realiza el ensamblaje de la matriz de rigidez global  $K$  la cuál será de tamaño  $5 \times 5$  debido a que se tiene un número de 5 nodos en el elemento resorte, el tamaño de  $k$  también puede ser calculado considerando el no. de elementos totales del sistema menos uno i. e; tamaño de  $K = \text{no. de elementos} - 1$ , generando una matriz de ceros para este caso y realizando el ensamblaje con  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$  de acuerdo a la tabla de conectividades se encuentra que

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} 120 & 0 & -120 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & -120 & 0 \\ -120 & 0 & 480 & -120 & -240 \\ 0 & -120 & -120 & 360 & -120 \\ 0 & 0 & -240 & -120 & 360 \end{bmatrix}$$

donde  $K$  es la matriz de rigidez global.

Ahora reescribiendo el sistema (2.8) se observa

$$\begin{bmatrix} 120 & 0 & -120 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & -120 & 0 \\ -120 & 0 & 480 & -120 & -240 \\ 0 & -120 & -120 & 360 & -120 \\ 0 & 0 & -240 & -120 & 360 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix}$$

y aplicando las condiciones de contorno o valores de frontera de  $u1 = 0, u2 = 0, u3 = u3, u4 = u4, u5 = u5, f1 = f1, f2 = f2, f3 = 0, f4 = 0, f5 = 20$  obteniendo

$$\begin{bmatrix} 120 & 0 & -120 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & -120 & 0 \\ -120 & 0 & 480 & -120 & -240 \\ 0 & -120 & -120 & 360 & -120 \\ 0 & 0 & -240 & -120 & 360 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1 \\ f2 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

dividiendo el sistema anterior, y eliminando las primeras 2 filas y las 2 primeras columnas se encuentra el siguiente subsistema

$$\begin{bmatrix} 480 & -120 & -240 \\ -120 & 360 & -120 \\ -240 & -120 & 360 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u3 \\ u4 \\ u5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 480u2 - 120u3 - 240u5 &= 0 \\ -120u2 + 360u3 - 120u5 &= 0 \\ -240u2 - 120u3 + 360u5 &= 20 \end{aligned}$$

el cual se resuelve por eliminación Gaussiana obteniendo los desplazamientos siguientes.

$$\begin{Bmatrix} u3 \\ u4 \\ u5 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0.0897 \\ 0.0769 \\ 0.1410 \end{Bmatrix}$$

Una vez calculados los desplazamientos desconocidos los sustituimos en el sistema global

$$\begin{bmatrix} 120 & 0 & -120 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & -120 & 0 \\ -120 & 0 & 480 & -120 & -240 \\ 0 & -120 & -120 & 360 & -120 \\ 0 & 0 & -240 & -120 & 360 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0897 \\ 0.0769 \\ 0.1410 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1 \\ f2 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

y reescribiendo el sistema de la forma  $F = K * U$  esto queda como

$$F = \begin{bmatrix} 120 & 0 & -120 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & -120 & 0 \\ -120 & 0 & 480 & -120 & -240 \\ 0 & -120 & -120 & 360 & -120 \\ 0 & 0 & -240 & -120 & 360 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0897 \\ 0.0769 \\ 0.1410 \end{Bmatrix}$$

obteniendo que el vector  $F$  queda como 
$$\begin{Bmatrix} f1 \\ f2 \\ f3 \\ f4 \\ f5 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -10.7692 \\ -9.2308 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

$\therefore$  la reacción del nodo 1 es una fuerza de  $-10.7692 \text{ kN}$  hacia la izquierda, la reacción en del nodo 2 es  $-9.2308$  hacia la izquierda y la reacción en el nodo 5 es de  $20$  hacia la derecha. Comprobando la sumatoria de fuerzas, ésta es igual a cero considerando que es un sistema en equilibrio ( $\Sigma F = 0$ ).

### Resumen de resultados

$$1. K = \begin{bmatrix} 120 & 0 & -120 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & -120 & 0 \\ -120 & 0 & 480 & -120 & -240 \\ 0 & -120 & -120 & 360 & -120 \\ 0 & 0 & -240 & -120 & 360 \end{bmatrix}, 2. u = \begin{Bmatrix} u3 \\ u4 \\ u5 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0.0897 \\ 0.0769 \\ 0.1410 \end{Bmatrix},$$

$$3. f1 = -10.7692 \text{ kN}, f2 = -9.2308.$$

En caso de buscar la fuerza para cada resorte se tendría que multiplicar cada una de las matrices de rigidez local por cada una de las posiciones correspondientes del vector de desplazamientos,

$$\begin{bmatrix} 120 & 0 & -120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -120 & 0 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0897 \\ 0.0769 \\ 0.1410 \end{Bmatrix} \Rightarrow f1 = \begin{bmatrix} 120 & -120 \\ -120 & 120 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0897 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore f1 = \begin{Bmatrix} -10.7692 \\ 10.7692 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & -120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -120 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0897 \\ 0.0769 \\ 0.1410 \end{Bmatrix} \Rightarrow f2 = \begin{bmatrix} 120 & -120 \\ -120 & 120 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0769 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore f_2 = \begin{Bmatrix} 1.5385 \\ -1.5385 \end{Bmatrix}$$

y así de manera análoga para cada uno de los resortes se tiene que las fuerzas restantes son,

$$f_3 = \begin{Bmatrix} -6.1538 \\ 6.1538 \end{Bmatrix}, f_4 = \begin{Bmatrix} -6.1538 \\ 6.1538 \end{Bmatrix}, f_5 = \begin{Bmatrix} 7.6923 \\ -7.6923 \end{Bmatrix}, f_6 = \begin{Bmatrix} 9.2308 \\ -9.2308 \end{Bmatrix}$$

por lo tanto la fuerza de cada resorte queda como se muestra en la Tabla (2.3)

No de elementos	Fuerza	Tipo
1	10.7692	Tensión
2	1.5385	Compresión
3	6.1538	Tensión
4	6.1538	Tensión
5	7.6923	Compresión
6	9.2308	Compresión

Tabla 2.3: Tipo de fuerzas actuantes en el sistema.

### 2.2.3. Ejemplo 3

Considerando el sistema de resortes compuesto por 2 elementos mostrado en la Figura (2.5). Dado  $k_1 = 200 \frac{kN}{m}$ ,  $k_2 = 250 \frac{kN}{m}$ , y  $P = 10 \text{ kN}$  se determina:

1. La matriz de rigidez global para el sistema.
2. Los desplazamientos del nodo no 2.
3. Reacciones en los nodos 1 y 3.
4. La fuerza para cada resorte.

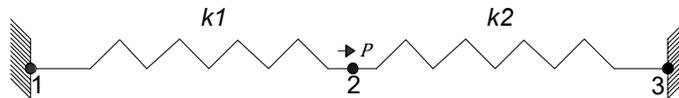


Figura 2.5: Sistema de 2 resortes con empotramiento en los extremos.

En la Figura (2.5) se observa que el sistema está discretizado. El dominio se subdivide en 2 elementos y 3 nodos, por lo que la Tabla (2.4) muestra la conectividad de los elementos para éste problema

No del elemento	Nodo i	Nodo j
1	1	2
2	2	3

Tabla 2.4: Conectividad de los elementos (Ejemplo 3).

Identificando las matrices de rigidez de cada elemento, para éste caso se observa que 2 elementos forman el sistema  $k_1$  y  $k_2$ , además de que cada elemento contiene 2 nodos por lo que el tamaño de cada matriz es de 2 x 2.

$$k_1 = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix}, k_2 = \begin{bmatrix} 250 & -250 \\ -250 & 250 \end{bmatrix}$$

Realizando el ensamblaje de la matriz de rigidez global, se observa que para éste caso el sistema de resortes tiene 3 nodos por lo que el tamaño de la matriz de rigidez global será de 3 x 3. Primero se configura una matriz de ceros de tamaño 3 x 3.

>>zeros(3)

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizando el ensamblaje de  $k_1$

$$K = \begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 \\ -200 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y enseguida se ensambla  $k_2$

$$K = \begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 \\ -200 & 450 & -250 \\ 0 & -250 & 250 \end{bmatrix}$$

por lo tanto el sistema de ecuaciones (2.8) queda de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 \\ -200 & 450 & -250 \\ 0 & -250 & 250 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

aplicando las condiciones de frontera, que para este problema son  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = u_2$ ,  $u_3 = 0$ ,  $f_1 = f_1$ ,  $P = 10kN = f_2$ ,  $f_3 = f_3$ .

$$\begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 \\ -200 & 450 & -250 \\ 0 & -250 & 250 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ 10 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

Para dar solución al sistema, es necesario dividir la matriz de rigidez global en un subsistema más pequeño i. e.; eliminar para este caso la primer fila con la primer columna debido al cero de la posición (1,1) del vector  $U$  y eliminando la ultima fila con la ultima columna debido al cero de la posición (3,1) del vector  $U$ .

$$\begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 \\ -200 & 450 & -250 \\ 0 & -250 & 250 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ 10 \\ 15 \end{Bmatrix}$$

quedando la siguiente expresión,

$$450u_2 = 10 \Rightarrow u_2 = 10/450 \Rightarrow u_2 = 0.0222.$$

El post-procesamiento de la información se trabaja con la matriz de rigidez global  $K$  y el vector  $U$  donde es posible calcular  $F$

$$\begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 \\ -200 & 450 & -250 \\ 0 & -250 & 250 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0222 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

por lo que nuestro sistema final está expresado por  $F = K * U$

$$F = \begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 \\ -200 & 450 & -250 \\ 0 & -250 & 250 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0222 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

obteniendo que el vector  $F$  queda como

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -4.44 \\ 10 \\ -5.556 \end{Bmatrix}$$

$\therefore$  la reacción para el nodo 1 es una fuerza de  $-4.44 \text{ kN}$  hacia la izquierda, la reacción en el nodo 2 es de  $10 \text{ kN}$  hacia la derecha y la reacción para el nodo 3 es de  $-5.556 \text{ kN}$  hacia la izquierda y se comprueba que  $\Sigma F = 0$ .

Ahora calculamos la fuerza en cada resorte

$$F = \begin{Bmatrix} f1 \\ f2 \end{Bmatrix} \Rightarrow f1 = k1 * u1 \Rightarrow f1 = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0222 \end{Bmatrix} \Rightarrow f1 = \begin{Bmatrix} -4.44 \\ 4.44 \end{Bmatrix}$$

$$F = \begin{Bmatrix} f1 \\ f2 \end{Bmatrix} \Rightarrow f2 = k2 * u2 \Rightarrow f2 = \begin{bmatrix} 250 & -250 \\ -250 & 250 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0.0222 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow f1 = \begin{Bmatrix} -5.556 \\ 5.556 \end{Bmatrix}$$

### Resumen de resultados

$$1. K = \begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 \\ -200 & 450 & -250 \\ 0 & -250 & 250 \end{bmatrix}, 2. u2 = 0.0222, 3. f1 = -4.44, f2 = -5.556, 4.$$

No elemento	Fuerza	Tipo
1	4.44	Tensión
2	5.55	Compresión

Tabla 2.5: Tipo de fuerzas.

### 2.3. El elemento barra.

El elemento lineal de barra es un elemento finito de una sola dimensión donde las coordenadas locales y globales coinciden. Este es caracterizado por funciones de forma lineales y es idéntico al elemento resorte excepto que la rigidez de la barra no está dada directamente. El elemento lineal tiene un modulo de elasticidad  $E$ , un área de la sección  $A$ , y una longitud  $L$ . Cada elemento barra lineal tiene 2 nodos como se muestra en la Figura (2.6). En este caso la matriz de rigidez está dada por

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ \frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

La matriz de rigidez para el elemento lineal barra es similar al elemento resorte, pero reemplaza cada entrada por la expresión  $EA/L$ . El elemento barra solo tiene 2 grados de libertad, uno en cada nodo como se muestra en la Figura (2.6). La matriz de rigidez global  $K$  se obtiene ensamblando las matrices de rigideces del elemento  $k_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ . Una vez obtenida  $K$  el sistema de ecuaciones está dado por (2.8).

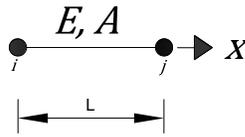


Figura 2.6: Elemento barra.

### 2.3.1. Ejemplo 4

Considerando la estructura compuesta por 2 barras lineales como se muestra en la Figura (2.7) y dado un valor de  $E=210 \text{ Gpa}$ ,  $A = 0.0003\text{m}^2$ ,  $P=10 \text{ kN}$  se determina,

1. La matriz de rigidez global para el sistema.
2. El desplazamiento en el nodo 2.
3. Las reacciones en los nodos 1 y 3.
4. La fuerza en cada barra.

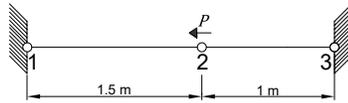


Figura 2.7: Estructura de 2 barras empotradas.

Este problema ya está discretizado. El dominio se subdivide en 2 elementos y 3 nodos. Las unidades usadas en están en  $kN$  y metros. La Tabla (2.6) muestra la conectividad de los elementos para éste problema.

No del elemento	Nodo i	Nodo j
1	1	2
2	2	3

Tabla 2.6: Conectividad de los elementos para la Figura (2.7)

Las matrices de rigidez  $k_1$  y  $k_2$  son obtenidas de cada elemento a partir de (2.10), para éste caso 2 elementos forman el sistema  $k_1$  y  $k_2$ , además de que cada elemento contiene dos nodos por lo que el tamaño de cada matriz es de  $2 \times 2$ .

$$k1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad k2 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo valores

$$k1 = \begin{bmatrix} 420000 & -420000 \\ -420000 & 420000 \end{bmatrix} \quad k2 = \begin{bmatrix} 630000 & -630000 \\ -630000 & 630000 \end{bmatrix}$$

Ya que la estructura tiene 3 nodos el tamaño de la matriz de rigidez global será de 3 x 3, y ahora configuramos una matriz de ceros de tamaño 3 x 3.

>>zeros(3)

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Haciendo el ensamblaje de  $k1$  se tiene que

$$K = \begin{bmatrix} 420000 & -420000 & 0 \\ -420000 & 420000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y enseguida ensamblamos  $k2$  quedando  $K$  como

$$K = \begin{bmatrix} 420000 & -420000 & 0 \\ -420000 & 1050000 & -630000 \\ 0 & -630000 & 630000 \end{bmatrix}$$

ahora el sistema de ecuaciones (2.8) queda de la siguiente manera

$$K = \begin{bmatrix} 420000 & -420000 & 0 \\ -420000 & 1050000 & -630000 \\ 0 & -630000 & 630000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1 \\ f2 \\ f3 \end{Bmatrix}$$

aplicando las condiciones de frontera para este problema como lo es que  $u1 = 0$ ,  $u2 = u2$ ,  $u3 = 0$ ,  $f1 = f1$ ,  $P = 10kN = f2$ ,  $f3 = f3$ .

$$K = \begin{bmatrix} 420000 & -420000 & 0 \\ -420000 & 1050000 & -630000 \\ 0 & -630000 & 630000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u2 \\ 0.002 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1 \\ -10 \\ f3 \end{Bmatrix}$$

Para resolver el sistema se debe dividir la matriz de rigidez global en un subsistema más pequeño i. e.; eliminamos para este caso la primer fila con la primer columna debido al cero de la posición (1,1) del vector  $U$  obteniendo

$$1050000 * u2 + (-630000 * 0.002) = -10$$

quedando,

$$u2 = 0.0012m$$

ahora con la matriz de rigidez global  $K$  y el vector  $U$  encontramos a  $F$

$$\begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 \\ -200 & 450 & -250 \\ 0 & -250 & 250 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0222 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1 \\ f2 \\ f3 \end{Bmatrix}$$

por lo que nuestro sistema final está expresado por  $F = K * U$

$$F = \begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 \\ -200 & 450 & -250 \\ 0 & -250 & 250 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0222 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

obteniendo que el vector  $F$  queda como  $\begin{Bmatrix} f1 \\ f2 \\ f3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -4.44 \\ 10 \\ -5.556 \end{Bmatrix}$

∴ la reacción para el nodo 1 es una fuerza de  $-4.44kN$  hacia la izquierda, la reacción en el nodo 2 es de  $10kN$  hacia la derecha y la reacción en el nodo 3 es de  $-5.556 KN$  hacia la izquierda.

Ahora calculando la fuerza para cada resorte

$$F = \begin{Bmatrix} f1 \\ f2 \end{Bmatrix} \Rightarrow f1 = k1 * u1 \Rightarrow f1 = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.0222 \end{Bmatrix} \Rightarrow f1 = \begin{Bmatrix} -4.44 \\ 4.44 \end{Bmatrix}$$

$$F = \begin{Bmatrix} f1 \\ f2 \end{Bmatrix} \Rightarrow f2 = k2 * u2 \Rightarrow f2 = \begin{bmatrix} 250 & -250 \\ -250 & 250 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0.0222 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow f1 = \begin{Bmatrix} -5.556 \\ 5.556 \end{Bmatrix}$$

Resumen de resultados

1.  $K = \begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 \\ -200 & 450 & -250 \\ 0 & -250 & 250 \end{bmatrix}$ , 2.  $u2 = 0.0222$ , 3.  $f1 = -4.44$ ,  $f2 = -5.556$ ,
- 4.

No elemento	Fuerza	Tipo
1	4.44	Tensión
2	5.55	Compresión

Tabla 2.7: Tipo de fuerzas.

## 2.4. Elementos Isoparamétricos.

### 2.4.1. Elemento Cuadrilátero Bilineal.

El elemento cuadrilátero bilineal es un elemento finito bidimensional con coordenadas locales y coordenadas globales. Se caracteriza por tener funciones de forma lineal en cada una de las direcciones  $x$  y  $y$ . Este elemento se puede usar para problemas de tensión plana o deformación plana en elasticidad, así como problemas opuestos a la tensión, como lo son problemas de compresión. Es una generalización del elemento rectangular de 4 nodos. El elemento cuadrilátero es también conocido como un elemento finito superficial, y al igual que otros elementos finitos se define mediante funciones de forma con respecto a sus coordenadas intrínsecas. Una de las características de éste elemento es que puede soportar fuerzas en su propio plano  $F_x$  y  $F_y$ , pero al igual que el elemento finito bidimensional articulado no puede transmitir los momentos puntuales aplicados en sus nodos, por lo que no puede ser sometido a momentos externos. Este tipo de elemento finito tiene un nodo en cada esquina, por lo que al ser cuadrilátero posee cuatro nodos, los cuales tienen cada uno dos grados de libertad (los desplazamientos en el plano).

### 2.4.2. Funciones de Forma

Cada elemento cuadrilátero bilineal tiene cuatro nodos, con dos grados de libertad en el plano en cada nodo, como se muestra en la Figura (2.8).

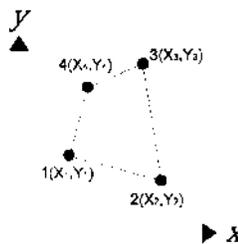


Figura 2.8: Elemento cuadrilátero bilineal en coordenadas físicas (Coordenadas globales).

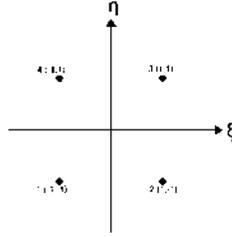


Figura 2.9: Elemento cuadrilátero bilineal en coordenadas naturales (Espacio computacional).

Es importante mencionar que todo elemento isoparamétrico requiere una transformación entre las coordenadas físicas y las naturales. Las coordenadas globales de los cuatro nodos se indican con  $(X1, Y1)$ ,  $(X2, Y2)$ ,  $(X3, Y3)$ ,  $(X4, Y4)$ . El orden de los nodos para cada elemento es importante. Cada nodo debe enumerarse en sentido contrario a las agujas del reloj a partir de cualquier nodo. El área de cada elemento debe ser positiva [23]. Definiendo las funciones de forma para el elemento isoparamétrico bilineal se tiene que

$$\begin{aligned}
 H_1 \rightarrow H_1(\xi, \eta) &= A(\xi - 1)(\eta - 1) \\
 H_2 \rightarrow H_2(\xi, \eta) &= A(\xi + 1)(\eta - 1) \\
 H_3 \rightarrow H_3(\xi, \eta) &= A(\xi + 1)(\eta + 1) \\
 H_4 \rightarrow H_4(\xi, \eta) &= A(\xi - 1)(\eta + 1)
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ahora imponiendo a 1 en el nodo 1 se tiene lo siguiente:

$$1 = (\xi - 1)(\eta - 1) \rightarrow 1 = A(1 - 1)(-1 - 1)1 = (-2)(-2) \rightarrow A = \frac{1}{4}$$

por lo tanto nuestras funciones de forma quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 H_1 &= A(\xi - 1)(\eta - 1) \\
 H_2 &= A(\xi + 1)(\eta - 1) \\
 H_3 &= A(\xi + 1)(\eta + 1) \\
 H_4 &= A(\xi - 1)(\eta + 1)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

en donde la expresión puede ser expresada de manera general como

$$H_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 - \eta_i \eta) \tag{2.13}$$

estas funciones de forma están definidas en términos del dominio natural normalizado (*i.e.*  $-1 \leq \xi \leq 1$  y  $-1 \leq \eta \leq 1$ ).

Para el cálculo de las derivadas cartesianas y de las integrales de volumen que intervienen en la formulación de elementos finitos, es útil conocer la matriz Jacobiana de la transformación del espacio cartesiano al espacio isoparamétrico. Dicha transformación se expresa como

$$x = x(\xi, \eta) \text{ and } y = y(\xi, \eta)$$

por lo que es necesario calcular

$$\frac{\partial H_i(\xi, \eta)}{\partial x} \text{ and } \frac{\partial H_i(\xi, \eta)}{\partial y}.$$

Para calcular estas derivadas, podemos usar la regla de la cadena, para cuestiones generales se usa

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.14)$$

reescribiendo las expresiones anteriores en forma de matriz se tiene lo siguiente

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

en donde esta expresión se usará para obtener la matriz de rigidez del elemento finito cuadrilátero bidimensional. Aquí, las derivadas mostradas en el lado derecho como vector columna es llamada como derivadas locales y el vector columna ubicado en el lado izquierdo es llamado vector de derivadas globales, además la matriz cuadrada en ésta expresión es llamada matriz inversa Jacobiana para el dominio de 2 dimensiones.

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

### 2.4.3. Matriz de rigidez del elemento cuadrilátero bidimensional (1 grado de libertad)

Ahora las derivadas cartesianas de las funciones de forma se calculan a partir de la inversa de la matriz Jacobiana y de las derivadas de las funciones de forma respecto de las coordenadas naturales.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial \xi}$$

$$\begin{aligned} x &= H_1(\xi, \eta)x_1 + \dots + H_4(\xi, \eta)x_4 \\ y &= H_1(\xi, \eta)y_1 + \dots + H_4(\xi, \eta)y_4 \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{\partial H_1}{\partial \xi}x_1 + \frac{\partial H_2}{\partial \xi}x_2 + \frac{\partial H_3}{\partial \xi}x_3 + \frac{\partial H_4}{\partial \xi}x_4 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{\partial H_1}{\partial \eta}x_1 + \frac{\partial H_2}{\partial \eta}x_2 + \frac{\partial H_3}{\partial \eta}x_3 + \frac{\partial H_4}{\partial \eta}x_4 \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{\partial H_1}{\partial \xi}y_1 + \frac{\partial H_2}{\partial \xi}y_2 + \frac{\partial H_3}{\partial \xi}y_3 + \frac{\partial H_4}{\partial \xi}y_4 \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{\partial H_1}{\partial \eta}y_1 + \frac{\partial H_2}{\partial \eta}y_2 + \frac{\partial H_3}{\partial \eta}y_3 + \frac{\partial H_4}{\partial \eta}y_4 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Calculando  $\frac{\partial H_i}{\partial \xi}$  y  $\frac{\partial H_i}{\partial \eta}$  para encontrar las correspondientes posiciones  $J_{11}, J_{12}, J_{21}, J_{22}$  de la matriz Jacobiana y recordando que:

$$\begin{aligned} H_1 &= A(\xi - 1)(\eta - 1) \\ H_2 &= A(\xi + 1)(\eta - 1) \\ H_3 &= A(\xi + 1)(\eta + 1) \\ H_4 &= A(\xi - 1)(\eta + 1) \end{aligned} \quad (2.20)$$

entonces se tiene

$$\frac{\partial H_1}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(\eta - 1), \quad \frac{\partial H_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 - \eta), \quad \frac{\partial H_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(\eta + 1), \quad \frac{\partial H_4}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(\eta + 1) \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(\xi - 1), \frac{\partial H_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(\xi + 1), \frac{\partial H_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(\xi + 1), \frac{\partial H_4}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 - \xi) \quad (2.22)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{1}{4}((\eta - 1)x_1 + (1 - \eta)x_2 + (\eta + 1)x_3 - (\eta + 1)x_4) \\ J_{12} &= \frac{1}{4}((\xi - 1)x_1 - (\xi + 1)x_2 + (\xi + 1)x_3 + (1 - \xi)x_4) \\ J_{21} &= \frac{1}{4}((\eta - 1)y_1 + (1 - \eta)y_2 + (\eta + 1)y_3 - (\eta + 1)y_4) \\ J_{23} &= \frac{1}{4}((\xi - 1)y_1 - (\xi + 1)y_2 + (\xi + 1)y_3 + (1 - \xi)y_4) \end{aligned} \quad (2.23)$$

ordenando términos y sustituyendo en la matriz Jacobiana se tiene que las expresiones correspondientes a las funciones de forma de éste elemento, la matriz Jacobiana queda de la siguiente forma

$$J = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (\eta - 1)x_1 + (1 - \eta)x_2 + (\eta + 1)x_3 - (\eta + 1)x_4 & (\xi - 1)x_1 + (\xi + 1)x_2 + (\xi + 1)x_3 + (1 - \xi)x_4 \\ (\eta - 1)y_1 + (1 - \eta)y_2 + (\eta + 1)y_3 - (\eta + 1)y_4 & (\xi - 1)y_1 + (\xi + 1)y_2 + (\xi + 1)y_3 + (1 - \xi)y_4 \end{bmatrix}$$

en donde al realizar operaciones se obtiene

$$\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 2(-\eta + 1) & 2(\eta - \xi) & 2(\xi - 1) \\ 2(\eta - 1) & 0 & 2(\xi + 1) & 2(-\eta - \xi) \\ 2(\xi - \eta) & 2(-\xi - 1) & 0 & 2(\eta + 1) \\ 2(1 - \xi) & 2(\xi + \eta) & 2(-\eta - 1) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

se observa que los elementos de la diagonal principal son los mismos elementos y simplificando la expresión anterior se tiene

$$\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & (-\eta + 1) & (\eta - \xi) & (\xi - 1) \\ (\eta - 1) & 0 & (\xi + 1) & (-\eta - \xi) \\ (\xi - \eta) & (-\xi - 1) & 0 & (\eta + 1) \\ (1 - \xi) & (\xi + \eta) & (-\eta - 1) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

en donde finalmente se expresa el Jacobiano como sigue

$$J = \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{Bmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & (-\eta + 1) & (\eta - \xi) & (\xi - 1) \\ (\eta - 1) & 0 & (\xi + 1) & (-\eta - \xi) \\ (\xi - \eta) & (-\xi - 1) & 0 & (\eta + 1) \\ (1 - \xi) & (\xi + \eta) & (-\eta - 1) & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}. \quad (2.26)$$

Una vez calculado el Jacobiano, se aplica éste elemento isoparamétrico bilineal para la ecuación de Laplace, la cual se denota por

$$\int \int_{-1}^1 \left( \left( \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \omega \cdot v \right) |J| d\xi d\eta \quad (2.27)$$

donde  $w$  es la función de prueba, quedando para las funciones de forma como sigue

$$\int \int_{-1}^1 \left( \left( \frac{\partial H_i}{\partial \xi} + \frac{\partial H_i}{\partial \eta} \right) \cdot \left( \frac{\partial H_i}{\partial \xi} + \frac{\partial H_i}{\partial \eta} \right) + \omega \cdot v \right) |J| d\xi d\eta \quad (2.28)$$

donde obtendremos un arreglo de tamaño 4 x 4 con las siguientes entradas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

quedando

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \left( \frac{\partial H_1}{\partial \xi} + \frac{\partial H_1}{\partial \eta} \right) \cdot \left( \frac{\partial H_1}{\partial \xi} + \frac{\partial H_1}{\partial \eta} \right), a_{12} = \left( \frac{\partial H_1}{\partial \xi} + \frac{\partial H_1}{\partial \eta} \right) \cdot \left( \frac{\partial H_2}{\partial \xi} + \frac{\partial H_2}{\partial \eta} \right), \\
 a_{13} &= \left( \frac{\partial H_1}{\partial \xi} + \frac{\partial H_1}{\partial \eta} \right) \cdot \left( \frac{\partial H_3}{\partial \xi} + \frac{\partial H_3}{\partial \eta} \right), a_{14} = \left( \frac{\partial H_1}{\partial \xi} + \frac{\partial H_1}{\partial \eta} \right) \cdot \left( \frac{\partial H_4}{\partial \xi} + \frac{\partial H_4}{\partial \eta} \right), \\
 a_{21} &= a_{12}, a_{22} = \left( \frac{\partial H_2}{\partial \xi} + \frac{\partial H_2}{\partial \eta} \right) \cdot \left( \frac{\partial H_2}{\partial \xi} + \frac{\partial H_2}{\partial \eta} \right), \\
 a_{23} &= \left( \frac{\partial H_2}{\partial \xi} + \frac{\partial H_2}{\partial \eta} \right) \cdot \left( \frac{\partial H_3}{\partial \xi} + \frac{\partial H_3}{\partial \eta} \right), a_{24} = \left( \frac{\partial H_2}{\partial \xi} + \frac{\partial H_2}{\partial \eta} \right) \cdot \left( \frac{\partial H_4}{\partial \xi} + \frac{\partial H_4}{\partial \eta} \right), \\
 a_{31} &= a_{13}, a_{32} = a_{23}, a_{33} = \left( \frac{\partial H_3}{\partial \xi} + \frac{\partial H_3}{\partial \eta} \right) \cdot \left( \frac{\partial H_3}{\partial \xi} + \frac{\partial H_3}{\partial \eta} \right), \\
 a_{34} &= \left( \frac{\partial H_3}{\partial \xi} + \frac{\partial H_3}{\partial \eta} \right) \cdot \left( \frac{\partial H_4}{\partial \xi} + \frac{\partial H_4}{\partial \eta} \right), a_{41} = a_{14}, a_{42} = a_{24}, a_{43} = a_{34}, \\
 a_{44} &= \left( \frac{\partial H_4}{\partial \xi} + \frac{\partial H_4}{\partial \eta} \right) \cdot \left( \frac{\partial H_4}{\partial \xi} + \frac{\partial H_4}{\partial \eta} \right)
 \end{aligned}$$

## 2.5. El elemento Viga

El elemento viga es un elemento finito bidimensional en donde se hace coincidir las coordenadas locales con las coordenadas globales. Se caracteriza por tener funciones de forma lineal en algunos casos.

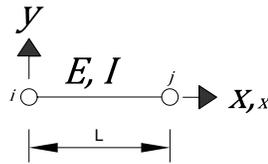


Figura 2.10: El elemento Viga.

El elemento viga considera un módulo de elasticidad  $E$ , un momento de inercia  $I$  y una longitud  $L$  donde  $L$  representa la longitud del elemento. Cada elemento de viga tiene 2 nodos (que en este caso son dos grados de libertad) y se supone que es horizontal. Uno de los pasos importantes antes de emplear el elemento finito para el elemento viga es encontrar la matriz de rigidez para el elemento viga. Esto comienza por resolver la ecuación diferencial

de flexión en viga de Euler-Bernoulli, la cual está dada por

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = q(x, t) \quad (2.30)$$

donde  $u(x, t)$  es el desplazamiento transversal de la viga,  $\rho$  es la densidad de masa por volumen,  $EI$  es la rigidez de la viga,  $q(x, t)$  es la carga externa aplicada a la viga, y  $(x, t)$  indican tiempo y ejes espaciales a lo largo de los ejes de la viga respectivamente. Aplicando uno de los métodos de residual ponderado, el método de Galerkin, se resuelve la ecuación (2.30) para desarrollar la formulación de elemento finito y las correspondientes ecuaciones matriciales con las que se pueden encontrar los desplazamientos generados en las vigas. El promedio residual ponderado es

$$I = \int_0^L \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - q \right) \omega \partial x = 0, \quad (2.31)$$

donde  $L$  es la longitud de la viga y  $\omega$  es la función de prueba. La forma débil de la ecuación (2.31) es obtenida empleando la identidad de Green en el segundo término de la ecuación.

### 2.5.1. Cálculo de la matriz de rigidez del elemento viga

Para dar solución a la matriz de rigidez es necesario realizar el análisis isoparamétrico de las funciones de forma Hermite. Las funciones de forma Hermite están dadas por el diagrama (2.11),

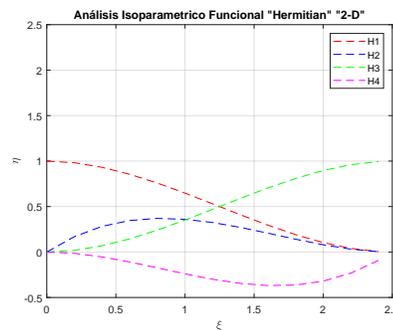


Figura 2.11: Funciones Hermite.

donde se tienen 4 funciones. Haciendo el análisis isoparamétrico computacional se tiene

$$\begin{aligned}
 H_1 \rightarrow H_1(\xi) &= 1 - \frac{3\xi^2}{L^2} + \frac{2\xi^3}{L^3} \\
 H_2 \rightarrow H_2(\xi) &= \xi - \frac{2\xi^2}{L} + \frac{\xi^3}{L^2} \\
 H_3 \rightarrow H_3(\xi) &= \frac{3\xi^2}{L^2} - \frac{2\xi^3}{L^3} \\
 H_4 \rightarrow H_4(\xi) &= -\frac{\xi^2}{L} + \frac{\xi^3}{L^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

ahora definiendo  $x$  y  $u$  se tiene que

$$\begin{aligned}
 x &= H_1(\xi)x_1 + H_2(\xi)\theta_1 + H_3(\xi)x_2 + H_4(\xi)\theta_2 \\
 u &= H_1(\xi)u_1 + H_2(\xi)\theta_1 + H_3(\xi)u_2 + H_4(\xi)\theta_2
 \end{aligned}
 \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial H_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} u_1 + \frac{\partial H_2}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \theta_1 + \frac{\partial H_3}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} u_2 + \frac{\partial H_4}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \theta_2
 \tag{2.34}$$

por lo tanto hay que calcular

$$\frac{\partial H_1}{\partial \xi}, \frac{\partial H_2}{\partial \xi}, \frac{\partial H_3}{\partial \xi}, \frac{\partial H_4}{\partial \xi}$$

quedando

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H_1}{\partial \xi} &= \frac{6\xi^2}{L^3} - \frac{6\xi}{L^2} \\
 \frac{\partial H_2}{\partial \xi} &= 1 - \frac{4\xi^2}{L} + \frac{3\xi^2}{L^2} \\
 \frac{\partial H_3}{\partial \xi} &= \frac{6\xi}{L^2} - \frac{6\xi^2}{L^3} \\
 \frac{\partial H_4}{\partial \xi} &= -\frac{2\xi}{L} + \frac{3\xi^2}{L^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.35}$$

ahora calculando

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \xi}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{\partial H_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial H_2}{\partial \xi} \theta_1 + \frac{\partial H_3}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial H_4}{\partial \xi} \theta_2 \\ \frac{dx}{d\xi} &= \frac{dH_1}{d\xi} x_1 + \frac{dH_3}{d\xi} x_2 \\ \frac{dx}{d\xi} &= \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L}.\end{aligned}$$

Separando los desplazamientos de los giros se tiene que los desplazamientos están dados por

$$u = H_1(\xi)u_1 + \varnothing_1(\xi)\frac{\partial u_1}{\partial x} + H_2(\xi)u_2 + \varnothing_2(\xi)\frac{\partial u_2}{\partial x}$$

y los giros o momentos por

$$v = H_1(\xi)v_1 + \varnothing_1(\xi)\theta_1 + H_2(\xi)v_2 + \varnothing_2(\xi)\theta_2$$

por lo que

$$u(x) = H_1(x)u_1 + H_2(x)\theta_2 + H_3(x)u_2 + H_4(x)\theta_2.$$

Se tiene que

$$[B] = \{H_1'' H_2'' H_3'' H_4''\} \quad (2.36)$$

y recordando que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = q(x)$$

usando el método de residuos ponderados con  $u$  como función de ponderación e integrando dos veces por partes se encuentra la forma débil

$$I = \int_0^L u \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - q(x) \right) \partial x = 0 \quad (2.37)$$

$$I = \int_0^L \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \partial x - v q(x) \partial x \right) + v \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \Big|_0^L - \left( \frac{\partial u}{\partial x} EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \Big|_0^L = 0 \quad (2.38)$$

ahora

$$M = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ y } V = -\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Rightarrow V = -\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} EI$$

escribiendo  $w$  por  $u$  donde  $w$  es la función de prueba se tiene que

$$I = \int_0^L \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = \int_0^L w q(x) \partial x + w V|_0^L + \frac{\partial w}{\partial x} M|_0^L \quad (2.39)$$

donde

$$M = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ and } V = -\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

Para resolver la integral por partes es necesario que  $u''$  y  $w''$  existan, luego  $u'$  y  $w'$  deben ser por lo menos continuas. Problemas donde la formulación requiere que las derivadas primeras de la variable sean continuas en todo el dominio (y por lo tanto entre elementos) se denominan continuidad  $C'$ . Aquellos donde sólo se requiere que la variable sea continua se denominan de continuidad  $C'$ . En este caso la continuidad  $C'$  resulta de la hipótesis de las secciones planas y que de dicha sección se mantiene normal al eje deformado. Esta hipótesis expresa el campo de desplazamientos normales a la sección transversal de los puntos fuera del eje baricéntrico proporcionales a la distancia del mismo y al giro de la sección. Es así entonces como se usa la aproximación de Galerkin para las funciones de prueba [24]. Calculando la segunda derivada de  $u$  respecto a  $x$  dos veces (curvatura del eje medio) teniendo que

$$u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \text{ ya que } u' = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow u' = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial H_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} u_1 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial H_2}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \theta_1 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial H_3}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} u_2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial H_4}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \theta_2 \right)$$

por lo tanto

$$u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = H_1'' + H_2'' + H_3'' + H_4''$$

similarmente para la función de peso

$$w'' = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = H_1'' + H_2'' + H_3'' + H_4''$$

y llamando a  $[B] = \{H_1'' + H_2'' + H_3'' + H_4''\}$  se tiene que

$$[B]\{u\} = [H_1'' + H_2'' + H_3'' + H_4''] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

entonces recordando la forma débil, se tiene que  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = [B]$  y por lo tanto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = [B] = [H_1'' + H_2'' + H_3'' + H_4''].$$

Si  $u = H_1(\xi)u_1 + H_2(\xi)\theta_1 + H_3(\xi)u_2 + H_4(\xi)\theta_2$

y

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial H_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} u_1 + \frac{\partial H_2}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \theta_1 + \dots$$

pero la ecuación (2.30) requiere una segunda derivada, entonces calculamos la segunda derivada

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 H_1}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} u_1 + \frac{\partial^2 H_2}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \theta_1 + \dots$$

y si

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{L}$$

entonces

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{4}{L^2} \text{ y } \partial x = \frac{L}{2} \partial \xi$$

por lo tanto

$$H_1'' \Rightarrow \frac{2\partial H_1}{\xi} = \frac{12\partial \xi}{L^3} - \frac{6}{L^2}$$

$$H_2'' \Rightarrow \frac{2\partial H_2}{\xi} = \frac{6\partial \xi}{L^2} - \frac{4}{L}$$

$$H_3'' \Rightarrow \frac{2\partial H_3}{\xi} = \frac{6}{L^2} - \frac{12\xi}{L^3}$$

$$H_4'' \Rightarrow \frac{2\partial H_4}{\xi} = \frac{6\xi}{L^2} - \frac{2}{L}$$

entonces se tiene que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = [H_1'' H_2'' H_3'' H_4''] \text{ y } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = [H_1'' H_2'' H_3'' H_4''] \text{ si } [B] = [H_1'' H_2'' H_3'' H_4'']$$

entonces reescribiendo la integral

$$\int_0^L [B]^T EI [B] dx \Rightarrow \int_0^L [B]^T EI [B] \frac{L^2}{4} d\xi \Rightarrow K = \int_0^L [B]^T(\xi) EI [B](\xi) \frac{L^2}{4} d\xi$$

Si  $u = H_1(\xi)u_1 + H_2(\xi)\theta_1 + H_3(\xi)u_2 + H_4(\xi)\theta_2$

entonces

$$\bar{u} = [H_1'' + H_2'' + H_3'' + H_4''] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{array} \right\}$$

$$\int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx \Rightarrow \int_0^L [B]^T(\xi) EI [B](\xi) \frac{L^2}{4} d\xi \quad (2.40)$$

$$\int_0^L \begin{bmatrix} H_1'' \\ H_2'' \\ H_3'' \\ H_4'' \end{bmatrix} EI [H_1'' H_2'' H_3'' H_4''] \frac{L^2}{4} d\xi \quad (2.41)$$

por lo tanto

$$[K] = EI \int_0^L \begin{bmatrix} H_1''(x) \\ H_2''(x) \\ H_3''(x) \\ H_4''(x) \end{bmatrix} EI [H_1''(x) H_2''(x) H_3''(x) H_4''(x)] \frac{L^2}{4} d\xi \quad (2.42)$$

$$\int_0^L \begin{bmatrix} H_1''(x)H_1''(x) & H_1''(x)H_2''(x) & H_1''(x)H_3''(x) & H_1''(x)H_4''(x) \\ H_2''(x)H_1''(x) & H_2''(x)H_2''(x) & H_2''(x)H_3''(x) & H_2''(x)H_4''(x) \\ H_3''(x)H_1''(x) & H_3''(x)H_2''(x) & H_3''(x)H_3''(x) & H_3''(x)H_4''(x) \\ H_4''(x)H_1''(x) & H_4''(x)H_2''(x) & H_4''(x)H_3''(x) & H_4''(x)H_4''(x) \end{bmatrix} \frac{4}{L^2} \quad (2.43)$$

calculando los dos primeros términos se tiene

$$a_{11} = \frac{4 \left( \frac{12\xi}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right)^2}{L^2} = \frac{12}{L^3}$$

$$a_{12} = \frac{4 \left( \frac{12\xi}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) \left( \frac{6\xi}{L^2} - \frac{4}{L} \right)}{L^2} = \frac{6}{L^2}$$

y de manera análoga se resuelven las demás posiciones de la matriz resultando la siguiente matriz de rigidez

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

la cual es conocida como la matriz de rigidez del elemento viga. Como se vio el elemento viga es un elemento finito bidimensional donde coinciden las coordenadas locales y globales, y se caracteriza por funciones de forma lineal. El elemento viga tiene 4 grados de libertad, 2 en cada nodo (un desplazamiento transversal y una rotación). El desplazamiento es positivo si apunta hacia arriba y la rotación es positiva si es hacia la izquierda. Para una estructura con  $n$  nodos la matriz de rigidez global  $K$  será de tamaño  $2n \times 2n$  (ya que tendremos 2 grados de libertad en cada nodo).

### 2.5.2. Ejemplo 5

Considerando la viga que se muestra en la Figura (2.12), dado  $E=210 \text{ Gpa}$ ,  $I = 60 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ ,  $P=20 \text{ kN}$ , y  $L = 2 \text{ m}$  es necesario determinar:

1. La matriz de rigidez global para la estructura.
2. El desplazamiento vertical en el nodo 2.
3. Las rotaciones en los nodos 2 y 3.
4. Las reacciones en los nodos 1 y 3.

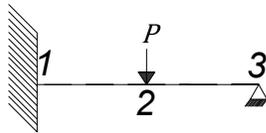


Figura 2.12: Sistema con empotramiento y apoyo fijo.

Se coloca un nodo en la ubicación de la fuerza concentrada para poder determinar las cantidades requeridas en ese punto.

No elementos	Nodo i	Nodo j
1	1	2
2	2	3

Tabla 2.8: Conectividad de los elementos (Ejemplo 5).

Sustituyendo valores de  $E, I$ , y  $L$  en el sistema (2.44) se tienen las siguientes  $k_1$  y  $k_2$

$$k_1 = \begin{bmatrix} 18900 & 18900 & 18900 & -18900 \\ 18900 & 25200 & -18900 & 12600 \\ -18900 & -18900 & 18900 & -18900 \\ 18900 & 12600 & -18900 & 25200 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} 18900 & 18900 & -18900 & 18900 \\ 18900 & 25200 & -18900 & 12600 \\ -18900 & -18900 & 18900 & -18900 \\ 18900 & 12600 & -18900 & 25200 \end{bmatrix}$$

en el ensamblado de la matriz de rigidez se considera que el elemento viga esta dado por  $2n \times 2n$ , por lo tanto con 2 elementos se tienen 3 nodos y  $n = 3$  quedando el orden de la matriz de  $6 \times 6$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde  $K$  es la matriz de rigidez global.

$$K = \begin{bmatrix} 18900 & 18900 & -18900 & 18900 & 0 & 0 \\ 18900 & 25200 & -18900 & 12600 & 0 & 0 \\ -18900 & -18900 & 37800 & 0 & -18900 & 18900 \\ 18900 & 12600 & 0 & 50400 & -18900 & 12600 \\ 0 & 0 & -18900 & -18900 & 18900 & -18900 \\ 0 & 0 & 18900 & 12600 & -18900 & 25200 \end{bmatrix}$$

Aplicando condiciones de contorno se tiene

$$\begin{Bmatrix} u1 \\ \theta1 \\ u2 \\ \theta2 \\ u3 \\ \theta3 \end{Bmatrix} y \begin{Bmatrix} F1y \\ M1 \\ F2y \\ M2 \\ F3y \\ M3 \end{Bmatrix}$$

$u1 = 0, \theta1 = 0, u2 = u2, \theta2 = \theta2, u3 = 0, \theta3 = \theta3$  y  $F1 = F1, M1 = M1, -P, F3 = F3$ ,  
Ahora reescribiendo el sistema (2.8) queda

$$K = \begin{bmatrix} 18900 & 18900 & -18900 & 18900 & 0 & 0 \\ 18900 & 25200 & -18900 & 12600 & 0 & 0 \\ -18900 & -18900 & 37800 & 0 & -18900 & 18900 \\ 18900 & 12600 & 0 & 50400 & -18900 & 12600 \\ 0 & 0 & -18900 & -18900 & 18900 & -18900 \\ 0 & 0 & 18900 & 12600 & -18900 & 25200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u2 \\ \theta2 \\ 0 \\ \theta3 \end{Bmatrix} y \begin{Bmatrix} F1 \\ M1 \\ -P \\ 0 \\ F3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

dividiendo el sistema anterior, y reduciéndolo se encuentra el siguiente subsistema

$$\begin{bmatrix} 37800 & 0 & 18900 \\ 0 & 50400 & 12600 \\ 18900 & 12600 & 25200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u2 \\ \theta2 \\ \theta3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

el cual se resuelve por eliminación Gaussiana obteniendo.

$$u = 1.0e^{-03} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.9259 \\ -0.1984 \\ 0 \\ 0.7937 \end{Bmatrix} y F = \begin{Bmatrix} 13.75 \\ 15 \\ -20 \\ 0 \\ 6.25 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resumen de resultados

1.-

$$K = \begin{bmatrix} 18900 & 18900 & -18900 & 18900 & 0 & 0 \\ 18900 & 25200 & -18900 & 12600 & 0 & 0 \\ -18900 & -18900 & 37800 & 0 & -18900 & 18900 \\ 18900 & 12600 & 0 & 50400 & -18900 & 12600 \\ 0 & 0 & -18900 & -18900 & 18900 & -18900 \\ 0 & 0 & 18900 & 12600 & -18900 & 25200 \end{bmatrix}$$

2.- -0.9259, 3.- Rotación nodo 2 y 3=0, 4. Reacción en el nodo 1= 13.75  $kN$ , reacción en el nodo 3= 6.25  $kN$ .

---

## Capítulo 3

# MEF en elementos de concreto

### 3.1. Análisis y modelos de Vigas

En ésta sección se desarrolla el análisis de las muestras de concreto basadas en el MEF, comenzando por la prueba de flexión, donde se analizan principalmente las deformaciones generadas a partir de la aplicación de una carga. Éste análisis captura las deformaciones que se generan en elementos prismáticos al ser sometidos a la prueba de flexión.

Una de las características fundamentales en el diseño de pavimentos rígidos es el módulo de ruptura, cuyo valor se obtiene experimentalmente mediante una prueba de flexión e indica la carga máxima que puede soportar una viga de concreto. Se propone una implementación numérica para obtener las deformaciones consecuentes a la aplicación de una carga, la cual es considerada como la carga máxima que soportó el elemento en la prueba de laboratorio [25]. En la actualidad los laboratorios de materiales se encargan de comprobar el control de calidad de los mismos, y son un factor importante para este tipo de materiales, formando parte de la toma de decisiones acerca de la aplicación de un producto, es decir, si se cambia o modifica algún material, y por esta razón el área de la resistencia de materiales tiene presencia en las obras civiles. Normalmente, uno de los ensayos destructivos más solicitados es el ensayo de compresión simple, en el cual, para determinar los valores de  $F'_c$  (ensayo a compresión simple) es el objetivo. Otras pruebas importantes son el  $MR$  (módulo de ruptura) y el método de prueba de la resistencia a la tensión  $Ft$ . La prueba de flexión en el concreto se aplica a los especímenes prismáticos o rectangulares para obtener los valores del módulo de ruptura. Se requiere un análisis exhaustivo de los resultados del ensayo debido a la importancia de estos parámetros en el diseño de pavimentos rígidos [26]. La obtención de las deformaciones que se generan en este tipo de elementos no es una tarea sencilla,

ya que requiere de una instrumentación adecuada para medir un pequeño desplazamiento que se produce en un lapso corto de tiempo previo a una fractura frágil. Por lo tanto, es necesario implementar un método eficiente para obtener información precisa, por esta razón un análisis numérico como el que proporciona el análisis de elementos finitos puede ser útil para calcular las deformaciones generadas por la carga aplicada [27]. El análisis de elementos finitos requiere discretizar la estructura haciendo un análisis completo del comportamiento de la estructura [28]. El modelado es esencial para estudiar los procesos fundamentales que se producen en los materiales para predecir el comportamiento real en las estructuras de hormigón y utilizar ambos para mejorar el diseño [29]. Además, los métodos numéricos junto con los resultados de laboratorio son fundamentales para mejorar este tipo de análisis. En esta parte de la investigación se usaron elementos prismáticos, diferenciados en 2 grupos, el primero es un grupo control en el los especímenes no cuentan con ningún aditivo. El segundo grupo contiene los especímenes a los cuales se les agregaron un polímero y un fluidificante.

### 3.1.1. Descripción de la prueba de flexión

El método de prueba estándar Americano C 78-00 [30] establece el método de prueba para la determinación de la resistencia a la flexión del concreto, utilizando la técnica de carga de tercer punto. Cuando se utilizan muestras moldeadas, se gira la muestra de prueba sobre su lado en cuanto a su posición como moldeada y se centra en los bloques de soporte. Cuando se utilicen probetas aserradas, se coloca la probeta de forma que la cara de tensión corresponda a la parte superior o inferior de la probeta tal y como se ha cortado del material de origen. La Figura (3.1) muestra la descripción de los elementos involucrados en la prueba de flexión.

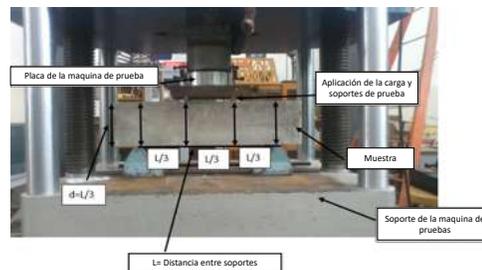


Figura 3.1: Instrumentación de la prueba de flexión con carga el tercio claro de la viga.

La prueba de flexión determina valores importantes que caracterizan al concreto, como

lo es el módulo de ruptura, que viene dado por la ecuación (3.1)

$$MR = \frac{P L}{b d^2}, \quad (3.1)$$

donde,  $MR$  es el módulo de ruptura en  $kpa$ ,  $P$  es la carga máxima aplicada en  $kg$ ,  $L$  es la distancia entre soportes en  $cm$ ,  $b$  es el ancho promedio del espécimen en  $cm$ ,  $d$  es el espesor promedio en  $cm$ . Los parámetros que intervienen en la ecuación (3.1) pueden obtenerse mediante métodos directos de medición en el espécimen con la excepción de  $P$ ; el valor de  $P$  es la carga máxima obtenida por la prueba. La información que puede obtenerse de esta prueba suele limitarse a la instrumentación disponible, y hacer el post-procesamiento resulta complicado, ya que sólo se mide el módulo de ruptura. Uno de los objetivos de esta investigación es proporcionar una herramienta para el post-procesamiento utilizando los valores de desplazamiento en el ensayo; estas deformaciones son muy difíciles de calcular en la práctica debido a su costo. El uso de otros instrumentos como los micrómetros no es práctico porque la falla ocurre de manera frágil (es decir, sucede muy rápidamente), y el micrómetro puede dañarse cuando se produce la falla, lo que hace que las lecturas sean casi imposibles de tomar. Otro problema es el hecho de que las deformaciones se localizan en un rango mínimo ( $\sim 10^{-4}m$ ). Esta es una de las razones principales para utilizar el análisis de elementos finitos que puede resolver este problema y ayudar a obtener suficiente información sobre una prueba que sólo proporciona escasa información y que permite generar el diagrama de esfuerzo-deformación para tener una visión general del comportamiento del elemento en el estudio.

Como se vio en el capítulo anterior, se utilizan elementos finitos bilineales bidimensionales para la ecuación de viga de Euler-Bernoulli, para producir una coincidencia de las coordenadas locales y globales. Esta metodología se caracteriza por la existencia de polinomios adecuados por piezas y, el problema analizado es adecuado para estas condiciones. La matriz de rigidez para un elemento  $e$  fue calculada en el capítulo anterior. La deformación de una viga no debe tener pendiente continua así como una desviación continua en dos elementos vecinos. Para satisfacer este requisito de continuidad cada nodo tiene tanto la deflexión,  $v$  y la pendiente  $\theta_i$  como variables nodales. En este caso, dos elementos de viga vecinos cualesquiera tienen una deflexión y pendiente comunes en el punto nodal compartido. La ecuación de viga de Euler Bernoulli se basa en la suposición de que el plano normal al eje neutro antes de la deformación sigue siendo normal al eje neutro después de la deformación. Esta suposición denota  $\theta = \partial v / \partial x$ . El siguiente pseudoalgoritmo muestra los pasos cruciales para resolver el sistema antes mencionado, y en la Figura (3.2) se muestra la idealización de la malla con el análisis de elementos finitos.

---

**Algorithm 1** Solución al sistema de la ecuación de viga.

---

comment:  $U$  is the displacements vector.

comment:  $K$  is the global stiffness matrix.

comment:  $F$  is the forces vector.;

comment:  $E, I, L, P$  are characteristics and discretization of materials.

comment:  $n$  is the number of nodes that consider in the analysis.

**Input:**  $E, I, L, n, P$

for  $i:=1$  to  $n$

$K=\text{assembly}(K, k, i, i + 1)$

Output  $K$

$U=K \setminus F$

Print  $U$

---

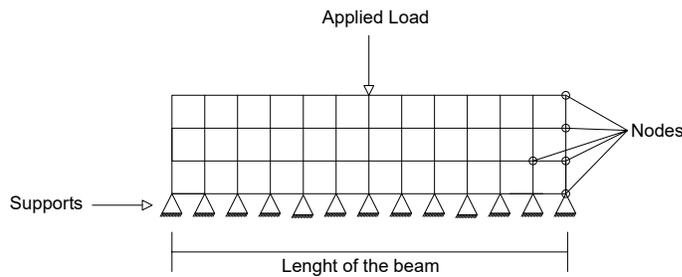


Figura 3.2: Malla idealizada.

La metodología del MEF es importante para el análisis de tendencias en diferentes materiales [31]. A partir de la prueba de flexión, la información obtenida se usa como datos de entrada en el análisis del MEF. Normalmente este método requiere una gran cantidad de operaciones [32], pero en este trabajo se propone un algoritmo que resuelve este problema de manera eficiente. Uno de los principales problemas de este tipo de análisis es la sensibilidad y precisión de los resultados, que dependen del número de nodos que discretizan la estructura del sistema. Este algoritmo permite introducir valores que equivalen a características como el momento de inercia, la carga máxima, que se obtiene en la prueba de resistencia a la flexión, la longitud del elemento, en este caso la longitud de la viga, el número de nodos que discretizaron el sistema y si es posible el módulo de elasticidad. La

mencionada discretización fue implementada en *MATLAB* 2020a [33] usando una computadora personal (Windows 10 Home, procesador Intel (R) Core(TM) i7-8750H CPU @ 2.20GHz 2.21GHz RAM: 24 GB).

### Resultados de la prueba de flexión

A continuación se muestran los resultados de la prueba de flexión de las mezclas en estudio, estos resultados pueden observarse en la Tabla (3.1) para la mezcla control y en la Tabla (3.2) se observan los resultados para la mezcla con adiciones.

Edad	$MR$
60 días	53.07
	55.33
90 días	53.87
	58.13
120 días	54.93
	59.09
180 días	57.62
	59.6

Tabla 3.1:  $MR$  de la mezcla control a diferentes edades.

Edad	$MR$
60 días	61.08
	59.70
90 días	75.89
	82.46
120 días	78.53
	80.13
180 días	80.13
	82.40

Tabla 3.2:  $MR$  de la mezcla con adiciones a diferentes edades.

En favor de la simplicidad se toman los promedios de cada una de las edades de prueba, y este será el valor gobernante para cada prueba de  $MR$ .

Edad	MR promedio mezcla control	MR promedio mezcla con adiciones
60 días	54.20	60.39
90 días	56	79.18
120 días	57.01	79.33
180 días	58.61	81.26

Tabla 3.3: Promedio de los valores de MR para cada mezcla.

Los valores que se consideran para ingresar en el modelo son calculados previamente, el valor de  $E$  se calcula en base a la prueba de  $FR$  la cual ayuda a obtener el módulo de elasticidad dinámico, el valor de  $I$  que corresponde al momento de inercia es calculado en función de la sección transversal del elemento, el valor de  $n$  corresponde al número de nodos en que se discretiza el sistema, para este caso de manera aleatoria se considera un valor de 101 nodos, valor que denota la precisión del modelo y la eficiencia del algoritmo para hacer análisis a micro escala, para este caso con el valor de 101 nodos se dice que se obtienen deformaciones a cada 0.4455 cm, i.e., deformaciones a cada 4.455 milímetros, valores que no podrían ser calculados con ningún equipo de laboratorio. Para la construcción de la gráfica (3.3) se consideraron los siguientes valores de entrada.

$E = 385543.22$ ,  $I = 60e - 6$ ,  $L = 0.45$ ,  $n = 25$ ,  $P = 4065kg \Rightarrow$  Mezcla control.

$E = 384972.59$ ,  $I = 60e - 6$ ,  $L = 0.45$ ,  $n = 25$ ,  $P = 4529.50kg \Rightarrow$  Mezcla con adiciones.

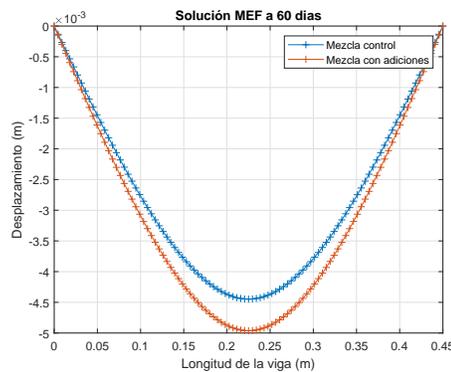


Figura 3.3: Solución numérica a 60 días.

Para la gráfica (3.4) se consideraron los siguientes valores

$E = 385543.22$ ,  $I = 60e - 6$ ,  $L = 0.45$ ,  $n = 25$ ,  $P = 4200kg \Rightarrow$  Mezcla control.

$E = 384972.59$ ,  $I = 60e - 6$ ,  $L = 0.45$ ,  $n = 25$ ,  $P = 5938.5kg \Rightarrow$  Mezcla con adiciones.

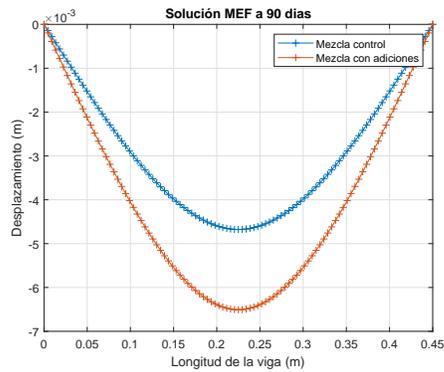


Figura 3.4: Solución numérica a 90 días.

La Figura (3.5) muestra la solución a los 120 días

$E = 385543.22$ ,  $I = 60e - 6$ ,  $L = 0.45$ ,  $n = 25$ ,  $P = 4276kg \Rightarrow$  Mezcla control.

$E = 384972.59$ ,  $I = 60e - 6$ ,  $L = 0.45$ ,  $n = 25$ ,  $P = 5950kg \Rightarrow$  Mezcla con adiciones.

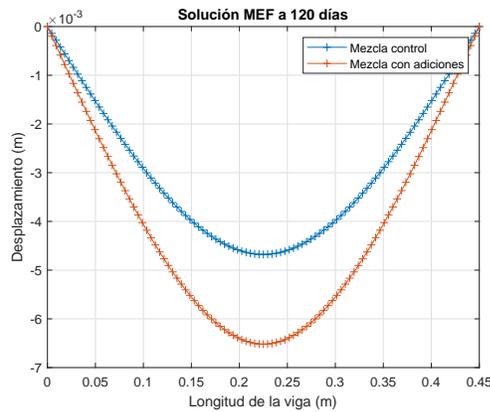


Figura 3.5: Solución numérica a 120 días.

La figura (3.6) considera los siguientes valores.

$E = 385543.22$ ,  $I = 60e - 6$ ,  $L = 0.45$ ,  $n = 25$ ,  $P = 4396kg \Rightarrow$  Mezcla control.

$E = 384972.59$ ,  $I = 60e - 6$ ,  $L = 0.45$ ,  $n = 25$ ,  $P = 6095kg \Rightarrow$  Mezcla con adiciones.

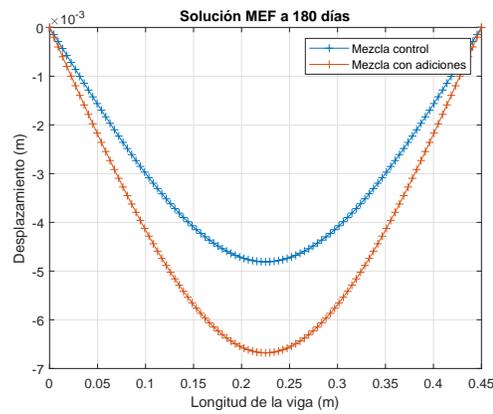


Figura 3.6: Solución numérica para ambas mezclas a 180 días.

La figura (3.7) muestra las deformaciones generadas en un espacio tridimensional, este tipo de visualización ayuda a entender mejor como se deforma un elemento al ser sometido a la prueba de flexión.

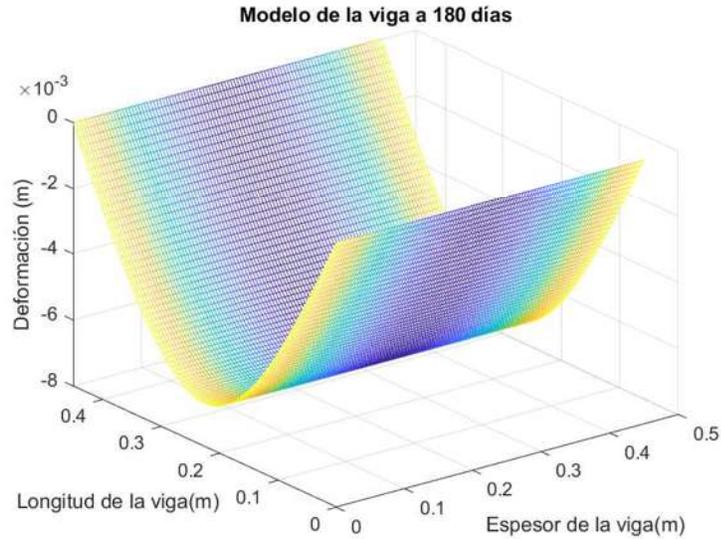


Figura 3.7: Malla en espacio  $R^3$ .

La construcción de los gráficos anteriores considera el caso cuasi-estático, en el que las pruebas se comparan a diferentes edades, el tiempo no se considera como un factor que

influya directamente en el cálculo de las deformaciones. A este procedimiento se le conoce como cálculo por lotes. En el cálculo por lotes se consideran los datos que están en una etapa y se comparan con los datos que están en otra etapa. En este caso, las edades de prueba son consideradas como las diferentes etapas.

Las deformaciones fueron calculadas usando el análisis de elementos finitos, para la construcción de los diagramas anteriores se usaron todos los datos obtenidos en las respectivas soluciones numéricas. Se observa que la resistencia aumenta a medida que incrementa el tiempo concluyendo que las deformaciones tienen una conexión directa con la carga aplicada. Es observado que en cada uno de los casos la deformación es mayor en la mezcla que contiene las adiciones, es decir además de soportar una carga mayor, tienen la capacidad de soportar mayores deformaciones.

## 3.2. Análisis del modelo elástico isotrópico

### 3.2.1. Formulación

Uno de los modelos más usados es el modelo visco-elástico en el espacio tiempo. Este modelo representa de manera adecuada el comportamiento del concreto en diversas pruebas. Es conocido que el comportamiento del concreto depende del tiempo y está relacionada con su microestructura altamente heterogénea. Es posible que se pueda hacer una predicción del comportamiento mecánico en función del tiempo, por lo que es necesario una representación adecuada de la microestructura.

Las ecuaciones de elasticidad isotrópica que se analizan están dadas por:

$$-\nabla \cdot \sigma = f \text{ en } \Omega \quad (3.2)$$

$$(3.3)$$

donde

$$\sigma = 2\mu\epsilon + \lambda \text{tr}(\epsilon) \quad (3.4)$$

$$\epsilon = \frac{1}{2}(\nabla_u + \nabla_u^t). \quad (3.5)$$

Con el objeto de encontrar una matriz de rigidez para el modelo elástico isotrópico se resuelve el problema

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad (3.6)$$

Este es un problema de tracción, y para tratar este tipo de problemas se ponen 3 restricciones que eliminen los grados de libertad, y su espacio de solución es

$$\hat{V} = \left\{ v \in (H^1(\Omega))^2 \mid \int_{\Omega} u_1 = \int_{\Omega} u_2 = 0, \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = 0 \right\}, \quad (3.7)$$

entonces la forma variacional del problema de tracción puede ser encontrada.

$$\int_{\Omega} \sigma_u \cdot \varepsilon_u = \ell(u) \quad \forall u \in \hat{V} \quad (3.8)$$

Se resuelve la ecuación anterior y se realiza un análisis isoparamétrico por el método de elementos finitos, donde se encuentran funciones de forma para un cilindro de concreto, y además, se trabaja con una implementación propia la cual ayuda a calcular los desplazamientos horizontales y verticales del elemento. Para este caso las ecuaciones de forma están dadas por

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{y1(\xi - 1) + y2(-1 - \xi) + y3(1 + \xi) + y4(1 - \xi)}{4} \\ H_2 &= \frac{(y1(n - 1) + y2(1 - n) + y3(1 + n) + y4(-1 - n))}{4} \\ H_3 &= \frac{x1(n - 1) + x2(1 - n) + x3(1 + n) + x4(-1 - n)}{4} \\ H_4 &= \frac{x1(\xi - 1) + x2(-1 - \xi) + x3(1 + \xi) + x4(1 - \xi)}{4} \end{aligned} \quad (3.9)$$

ahora se tiene que

$$[B] = \{H_1'' H_2'' H_3'' H_4''\} \quad (3.10)$$

$$B1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} a * (n - 1) - b * (\xi - 1) & 0 \\ 0 & c * (\xi - 1) - d * (n - 1) \\ c * (\xi - 1) - d * (n - 1) & a * (n - 1) - b * (\xi - 1) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$B2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} a * (1 - n) - b * (-1 - \xi) & 0 \\ 0 & c * (-1 - \xi) - d * (1 - n) \\ c * (-1 - \xi) - d * (1 - n) & a * (1 - n) - b * (-1 - \xi) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$B3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} a * (n + 1) - b * (\xi + 1) & 0 \\ 0 & c * (\xi + 1) - d * (n + 1) \\ c * (\xi + 1) - d * (n + 1) & a * (n + 1) - b * (\xi + 1) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$B4 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} a * (-1 - n) - b * (1 - \xi) & 0 \\ 0 & c * (1 - \xi) - d * (-1 - n) \\ c * (1 - \xi) - d * (-1 - n) & a * (-1 - n) - b * (1 - \xi) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

quedando

$$\begin{bmatrix} n/1120 - 1/1120 & 0 \\ 0 & \xi/1120 - 1/1120 \\ \xi/1120 - 1/1120 & n/1120 - 1/1120 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\begin{bmatrix} n/1120 - 1/1120 & 0 \\ 0 & -\xi/1120 - 1/1120 \\ -\xi/1120 - 1/1120 & 1/1120 - n/1120 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\begin{bmatrix} n/1120 + 1/1120 & 0 \\ 0 & \xi/1120 + 1/1120 \\ \xi/1120 + 1/1120 - 1/1120 & n/1120 + 1/1120 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\begin{bmatrix} -n/1120 - 1/1120 & 0 \\ 0 & 1/1120 - \xi/1120 \\ 1/1120 - \xi/1120 & -n/1120 - 1/1120 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

ahora se define a JJ como

$$JJ = \begin{bmatrix} 0 & 1 - n & n - \xi & \xi - 1 \\ n - 1 & 0 & \xi + 1 & -\xi - n \\ \xi - n & -\xi - 1 & 0 & n + 1 \\ 1 - \xi & \xi + n & -n - 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

y el Jacobiano queda de la forma

$$J = \begin{Bmatrix} x1 & x2 & x3 & x4 \end{Bmatrix} J J \frac{1}{8} \begin{Bmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \\ y4 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

de manera análoga se obtiene la matriz de rigidez (3.21) como se vio en el cálculo de la matriz de rigidez de la viga.

$$K = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

### 3.2.2. Prueba de compresión simple

La prueba de compresión simple realizada en el laboratorio está basada en la norma NMX-C-083-ONNCCE-2002 o su equivalente de acuerdo con la norma ASTM C 39-01, donde el objetivo es conocer el esfuerzo de ruptura por compresión en una muestra representativa del concreto usado en la obra para comparar su resistencia y saber si es equivalente a la resistencia de proyecto.

La prueba de compresión simple se refiere a que se aplicara una carga axial concéntrica al cilindro de concreto.



Figura 3.8: Cilindros de concreto elaborados en laboratorio y prueba a compresión simple

Para este análisis es importante mencionar los parámetros que son necesarios introducir en el modelo, primero establecemos las dimensiones del elemento que en este caso se utilizan las de cilindros de 10 cm de base por 20 cm de altura por lo tanto se considera una distancia  $L = 0.10$  y una  $h = 0.20$ . Un parámetro adicional que considera este modelo es la relación

de Poisson, los valores que se emplean en el cálculo del módulo de Poisson corresponden a la zona elástica sugerida para el módulo de elasticidad, por esta razón generalmente se determinan ambos en una misma prueba. Los valores del módulo o relación de Poisson varia entre 0.15 y 0.20, pero la mayoría de los investigadores están de acuerdo en que este parámetro no es muy consistente y es posible observar valores fuera del intervalo mencionado, estos valores están en función de varios factores como lo pueden ser los mismos componentes del concreto. Para este caso la relación de Poisson considerada es de 0.17 y el valor de las cargas  $w$  tendrá los valores de las cargas obtenidas en la prueba de compresión simple. Para los siguientes análisis se considerara un valor de  $n = 15$ , es decir, 15 nodos que discretizan el dominio, esto en favor de la simplicidad. El parámetro  $E$  se considera igual que en el elemento viga,  $E = 385543.22$  para la mezcla control y  $E = 384972.59$  para la mezcla con adiciones. La Tabla (3.4) muestra los resultados de los promedios de cada una de las fechas a la que fueron sometidas las muestras al esfuerzo de compresión simple.

Edad	$w$ promedio mezcla control	$w$ promedio mezcla con adiciones
40 días	27520	35464
60 días	28389.8	38842
90 días	29520.2	40804.6
120 días	32995.4	42575.2

Tabla 3.4: Promedio de los valores de  $w$  para cada mezcla a diferentes edades.

### Resultados del modelado de cilindros

La Figura (3.9) muestra la malla que se utilizó para discretizar los elementos, donde es posible apreciar que la malla es discretizada en 25 nodos a lo largo de la base del cilindro y 50 nodos discretizan la altura del elemento, quedando un total de 25 x 50 nodos que equivalen a 1250 nodos distribuidos de manera uniforme en el área del cilindro.

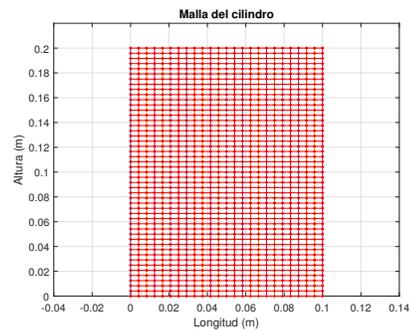


Figura 3.9: Discretización del cilindro de concreto.

En la Figura (3.10) se muestra el resultado de las deformaciones en el cilindro después de ser aplicada la carga uniaxial. Los datos de ésta prueba son: edad de prueba 60 días, carga máxima  $w=27520$ , relación de Poisson  $\nu=0.17$ , módulo de elasticidad  $E = 385543.22$ .

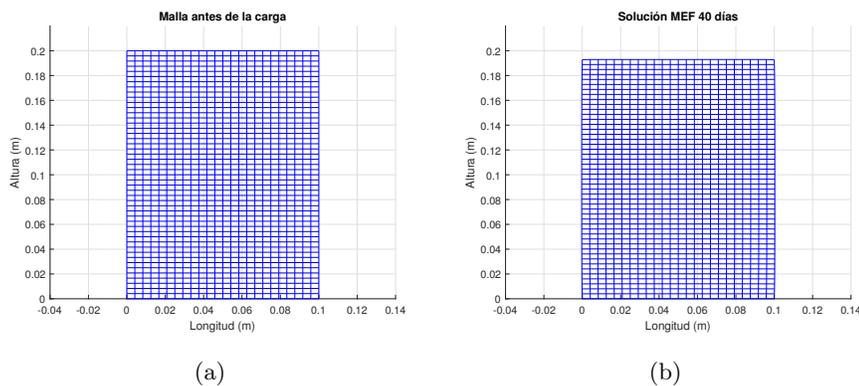


Figura 3.10: Elemento a 40 días. a) Antes de la carga b) Después de la carga.

Los diagramas fueron construidos con el promedio de cada una de las edades de prueba contenidos en la tabla (3.4) En la Figura (3.10) se observa que la deformación es casi imperceptible, para el caso del siguiente resultado **la carga se multiplica por 10** donde la deformación es “exagerada” con el fin de apreciarla para ambos ejes.

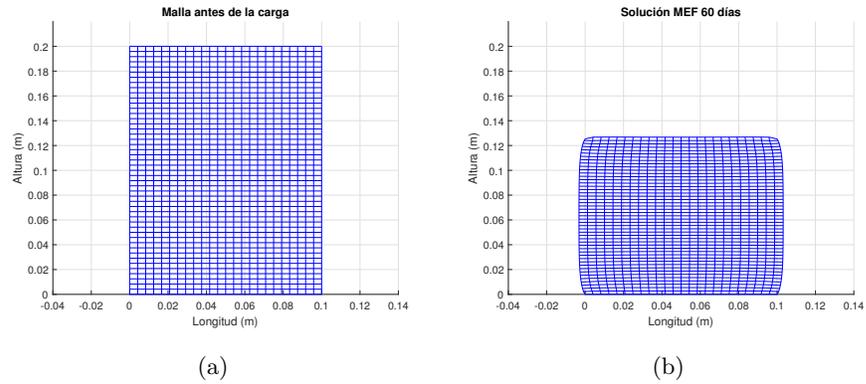


Figura 3.11: Elemento a 60 días. a) Antes de la carga b) Después de la carga.

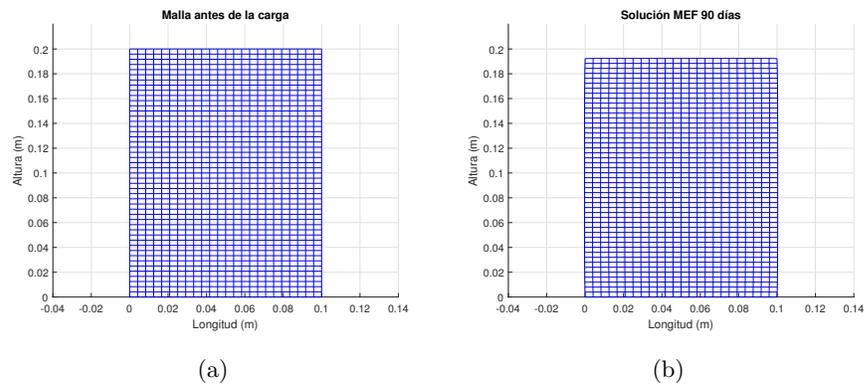


Figura 3.12: Elemento a 90 días. a) Antes de la carga b) Después de la carga.

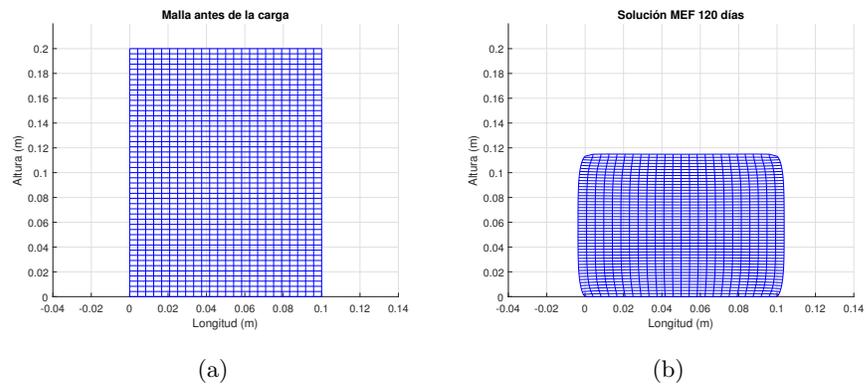


Figura 3.13: Elemento a 120 días. a) Antes de la carga b) Después de la carga.

Enseguida se muestra el resultado de las deformaciones en los cilindros con las adiciones considerando un valor de  $E = 384972.59$  para todas las pruebas y las cargas respectivas para cada edad mostradas en la Tabla (3.4), de la misma manera se considera una relación de Poisson de  $\nu=0.17$ .

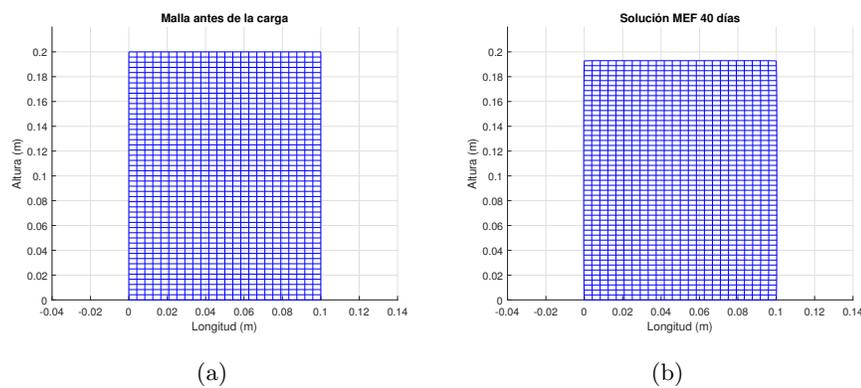


Figura 3.14: Elemento a 40 días con adiciones. a) Antes de la carga b) Después de la carga.

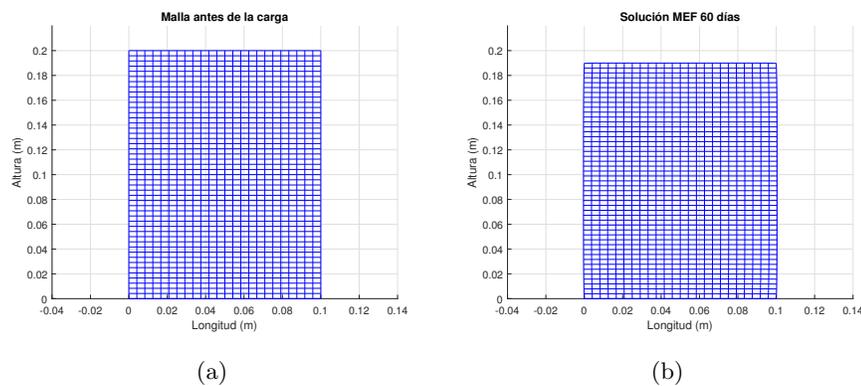


Figura 3.15: Elemento a 60 días con adiciones. a) Antes de la carga b) Después de la carga.

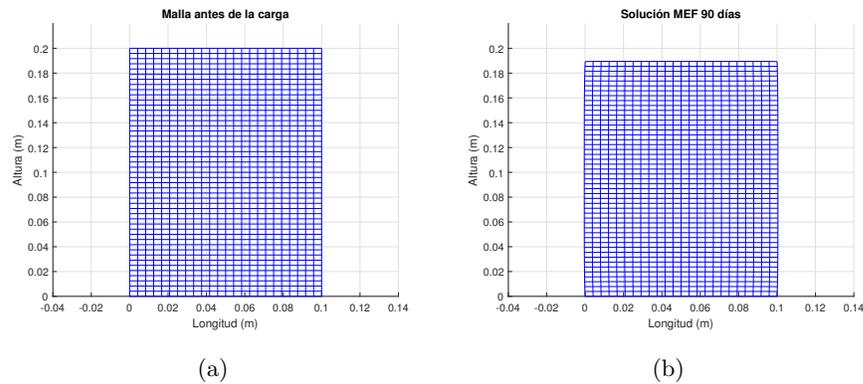


Figura 3.16: Elemento a 90 días con adiciones. a) Antes de la carga b) Después de la carga.

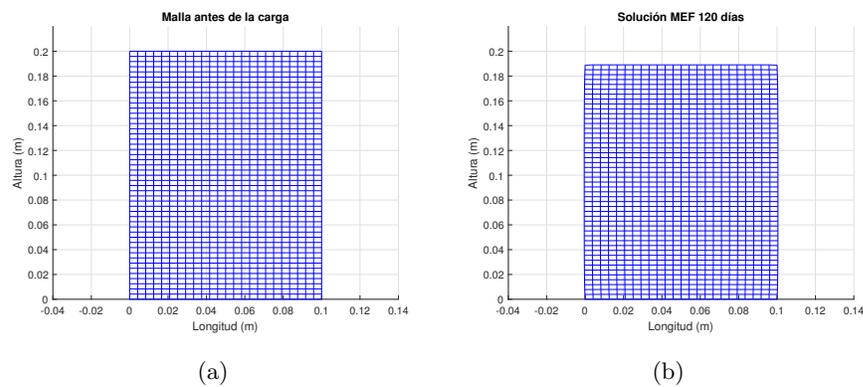


Figura 3.17: Elemento a 120 días con adiciones. a) Antes de la carga b) Después de la carga.

### 3.3. Problema inverso para elasticidad en 1d

El análisis de los problemas inversos es uno de los problemas mas relevantes en la solución de problemas de Ingeniería. En ésta sección se hace el análisis del problema de elasticidad en 1d. Para mostrar la metodología a seguir para resolver el problema inverso es comenzando con un ejercicio en donde la dificultad sea la menor posible, para entender el concepto de la solución de este tipo de problemas y el análisis de una dimensión puede servir para este caso. Recordando que el elemento barra es un elemento unidimensional donde las coordenadas locales y globales coinciden es ideal para ser analizado. Este elemento se caracteriza por tener funciones de forma lineales como lo puede ser el elemento resorte

excepto que la rigidez de la barra no está dada directamente. El elemento barra se muestra en la Figura (3.18)

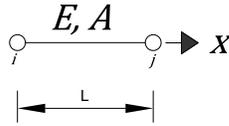


Figura 3.18: Elemento barra unidimensional

y para este caso la matriz de rigidez está dada por

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

donde  $E$  es igual al módulo de elasticidad,  $A$  es el área de la sección de la barra y  $L$  es la longitud de la misma. Ahora bien se resuelve un ejercicio en donde el objetivo sea encontrar el módulo de elasticidad  $E$ , partiendo de información como lo son los resultados obtenidos del problema directo. Se tiene la siguiente viga doblemente empotrada

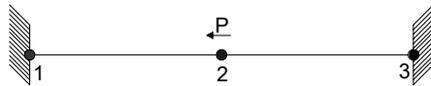
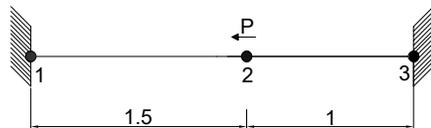


Figura 3.19: Figura del ejemplo 4.

Calculando el módulo de elasticidad si  $A = 0.003$ ,  $L_1 = 1.5m$ ,  $L_2 = 1m$ , y por el problema directo sabemos que  $E = 210e^6$  se tiene que de la Figura (3.19) queda como



además partiendo del sistema (3.22) y sustituyendo los datos se observa que  $K$  está dada por

$$\begin{bmatrix} 420000 & -420000 & 0 \\ -420000 & 1050000 & -630000 \\ 0 & -630000 & 630000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

ahora escribiendo el sistema en su forma canónica se tiene lo siguiente

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} + \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

entonces partiendo de la idea anterior se obtienen las posibles constantes  $E$ ,  $A$  y  $L$  para obtener

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

donde se representa la matriz de rigidez como  $[K]$ , el vector de desplazamientos como  $\{U\}$  y el vector de fuerzas como  $\{F\}$ , quedando nuestra expresión como:

$$\frac{EA}{L}[K]\{U\} = \{F\} \quad (3.23)$$

multiplicando  $[K] * \{U\}$  de la ecuación (3.23) se tiene que el sistema queda como sigue

$$\frac{EA}{L} \begin{Bmatrix} U_1 - U_2 \\ -U_1 + U_2 - U_3 \\ -U_2 + U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

y reescribiendo la expresión anterior

$$E \begin{Bmatrix} U_1 - U_2 \\ -U_1 + U_2 - U_3 \\ -U_2 + U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{F_1 L}{A} \\ \frac{F_2 L}{A} \\ \frac{F_3 L}{A} \end{Bmatrix}$$

que es igual a

$$E * [KU] = \{F_i \frac{L}{A}\}$$

y así despejando a  $E$  se obtiene la expresión del módulo de elasticidad dada por

$$E = KU \setminus \{F_i \frac{L}{A}\} \quad (3.24)$$

y la expresión anterior es la solución al problema inverso del módulo de elasticidad bajo las condiciones dadas.

### 3.3.1. Ejemplo 6.

Dando solución a otro problema, se resuelve en primer lugar el problema directo y enseguida su problema inverso. Considerando la siguiente barra donde se toma en cuenta la masa propia del elemento, un área constante uniforme y una carga  $P$  como se muestra en la siguiente Figura

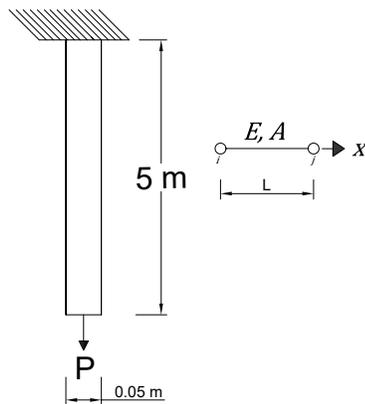
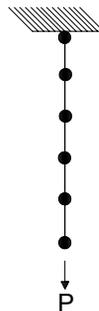


Figura 3.20: Barra sometida a elongación.

Se discretiza el dominio en 5 elementos o 6 nodos.



Se tienen 5 elementos ya que se está discretizando el dominio en 6 nodos, es importante recordar que esto se puede hacer para un número de  $n$  nodos, para éste caso en favor de la simplicidad se eligen 6 nodos.  $\therefore n = 6$  y el no. de elementos =  $n - 1$ ,  $\therefore$  el numero de elementos es igual a 5.

# Elementos	# Nodo i	# Nodo j
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	5	6

Tabla 3.5: Discretización de la barra en 5 elementos

Se considera un módulo de elasticidad  $E = 210e6 \text{ Gpa}$ , un área de  $A = 0.25m^2$ , una longitud  $L = 5m$  y un peso propio de  $P = 18 \text{ kn}$ . Utilizando el método de elemento finito se realiza el ensamblaje de las matrices de rigideces, y el sistema queda de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} 525 & -525 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -525 & 1050 & -525 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -525 & 1050 & -525 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -525 & 1050 & -525 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -525 & 1050 & -525 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -525 & -525 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U2 \\ U3 \\ U4 \\ U5 \\ U6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -18 \end{Bmatrix}$$

se reescribe el sistema ya que la primer fila junto con la primer columna son eliminadas,

$$\begin{bmatrix} -525 & 1050 & -525 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -525 & 1050 & -525 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -525 & 1050 & -525 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -525 & 1050 & -525 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -525 & -525 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U2 \\ U3 \\ U4 \\ U5 \\ U6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -18 \end{Bmatrix}$$

y se resuelve el sistema por eliminación Gaussiana encontrando los valores de  $U2, U3, U4, U5$  y  $U6$  quedando

$1 * 10^{-5} * \{U2 = -0.0343, U3 = -0.0686, U4 = -0.1029, U5 = -0.1371, U6 = -0.1714\}$  y ahora es posible encontrar a  $F1$

$$\begin{bmatrix} 525 & -525 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -525 & 1050 & -525 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -525 & 1050 & -525 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -525 & 1050 & -525 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -525 & 1050 & -525 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -525 & -525 \end{bmatrix} 1 * 10^{-5} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.0343 \\ -0.0686 \\ -0.1029 \\ -0.1371 \\ -0.1714 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -18 \end{Bmatrix}$$

y se encuentra que  $F1 = 18$ .

Ahora el problema directo para éste ejemplo está completo ya que fueron encontrados los desplazamientos generados por la acción de la carga. Enseguida se resuelve el problema inverso partiendo de los desplazamientos y de las cargas obtenidas anteriormente. Se sabe que la matriz de rigidez para el elemento unidimensional está dada por la ecuación (3.22) y que al realizar el ensamblaje para la matriz de rigidez global  $K$  ésta queda como

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

sustituyendo a  $K$  en la ecuación (3.23) se concluye que el sistema está dado por

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U1 \\ U2 \\ U3 \\ U4 \\ U5 \\ U6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \\ F4 \\ F5 \\ F6 \end{Bmatrix}$$

reescribiendo la expresión anterior se obtiene

$$\frac{EA}{L} [K] \{U\} = \{F\}$$

y calculando  $[K]\{U\}$ , se tiene

$$\begin{Bmatrix} U1 - U2 \\ -U1 + 2U2 - U3 \\ -U2 + 2U3 - U4 \\ -U3 + 2U4 - U5 \\ -U4 + 2U5 - U6 \\ -U5 + U6 \end{Bmatrix}$$

por lo que el sistema queda como

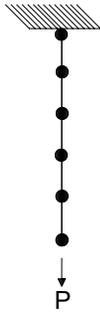
$$\frac{EA}{L} \begin{pmatrix} U_1 - U_2 \\ -U_1 + 2U_2 - U_3 \\ -U_2 + 2U_3 - U_4 \\ -U_3 + 2U_4 - U_5 \\ -U_4 + 2U_5 - U_6 \\ -U_5 + U_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix}$$

Ahora se despeja  $E$  quedando

$$E \begin{pmatrix} U_1 - U_2 \\ -U_1 + 2U_2 - U_3 \\ -U_2 + 2U_3 - U_4 \\ -U_3 + 2U_4 - U_5 \\ -U_4 + 2U_5 - U_6 \\ -U_5 + U_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_1 * L}{F_2 * L} \\ \frac{F_2 * L}{F_3 * L} \\ \frac{F_3 * L}{F_4 * L} \\ \frac{F_4 * L}{F_5 * L} \\ \frac{F_5 * L}{F_6 * L} \\ \frac{F_6 * L}{A} \end{pmatrix}$$

Obteniendo de nuevo la ecuación  $E = KU \setminus \{F_i \frac{L}{A}\}$ , que es la ecuación (3.24) la cuál se obtuvo y definiremos como ecuación del módulo de elasticidad para el problema inverso.

Ahora en base a los datos del problema directo es posible calcular el módulo de elasticidad considerando la barra de la Figura (3.20) donde por operación directa se sabe que el área  $A = 0.25m^2$  y la barra está sujeta a elongación por su propio peso  $P = 18 kn$  dividida en 6 nodos con los siguientes desplazamientos y cargas en cada nodo.



$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 * 10^{-5} \begin{pmatrix} 0 \\ -0.0343 \\ -0.0686 \\ -0.1029 \\ -0.1371 \\ -0.1714 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix}$$

entonces los valores de de  $U1, U2, U3, U4, U5$  y  $U6$  son

$1 * 10^{-5}\{U1 = 0, U2 = -0.0343, U3 = -0.0686, U4 = -0.1029, U5 = -0.1371, U6 = -0.1714\}$ , y resolviendo el sistema se tiene que

$$U = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.0343 \\ -0.0686 \\ -0.1029 \\ -0.1371 \\ -0.1714 \end{Bmatrix}, \{KU\} = \begin{Bmatrix} 0.3429 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.3429 \end{Bmatrix}, \{F_i\} \frac{L}{A} = \begin{Bmatrix} 0.3429 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.3429 \end{Bmatrix}$$

y por lo tanto al resolver la ecuación (3.24) se concluye que el módulo de elasticidad  $E = 210000000 \rightarrow E = 210e^6$ , por lo que éste es el módulo de elasticidad para esos desplazamientos y cargas, por lo que al verificar el valor inicial del módulo de elasticidad del problema directo se concluye que ambos son iguales.

Una vez resuelto el problema anterior se observa que no se consideraron valores de frontera i.e; que no fueron consideradas condiciones iniciales o valores de frontera en el lado derecho de la ecuación. De cierta forma es necesario considerar el valor de  $C$  de la ecuación  $C \frac{\partial \rho(x)}{\partial x}$ , en donde éste valor se va a ver reflejado en el lado derecho de la ecuación

$$[K]\{U\} = \{F\}$$

i.e; en el vector de cargas, sabiendo que es necesario involucrar en cada nodo la densidad  $\rho$  y la acción de la gravedad  $g$ .

Por lo tanto se necesita introducir la gravedad y la densidad en el vector de cargas.

Donde  $\rho =$  Carga o densidad del material y  $g =$  Gravedad. Se sabe que el vector de cargas tiene 6 elementos

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

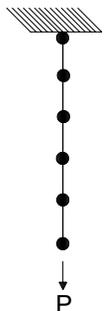
pero por cuestión de empotramiento el primer elemento se retira, para pasar a tener solamente 5 elementos.

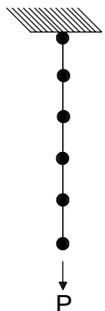


y nuestra expresión general para el módulo de elasticidad queda como

$$E = \{KU_i\} \setminus \left\{F_i \rho g \frac{L}{A}\right\}. \quad (3.25)$$

Retomando el ejemplo anterior pero ahora aplicando las condiciones de frontera se tiene que el cálculo del módulo queda de la siguiente forma




  
 $\downarrow$ 
  
 P

$$\begin{Bmatrix} U1 \\ U2 \\ U3 \\ U4 \\ U5 \\ U6 \end{Bmatrix} \Rightarrow 1 * 10^{-4} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.0336 \\ -0.0605 \\ -0.0807 \\ -0.0942 \\ -0.1009 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F1 = 176.58 \\ F2 = -35.316 \\ F3 = -35.316 \\ F4 = -35.316 \\ F5 = -35.316 \\ F6 = -35.316 \end{Bmatrix}$$

dados los desplazamientos anteriores y las cargas anteriores en cada nodo es posible encontrar el módulo por la ecuación (3.25).

Quedando que  $E = 2.10e^8 \Rightarrow E = 210000000$   $\therefore$  éste es el módulo de elasticidad para esos desplazamientos y cargas.

La información obtenida con el método de elemento finito ayuda a entender mejor el comportamiento de las muestras analizadas, sin embargo es necesario apoyarse en herramientas que ayuden a reforzar la información generada en las secciones anteriores, una herramienta importante para esta tarea es la Ciencia de datos, disciplina que permite realizar análisis con mayor profundidad en los cálculos ya realizados.

---

## Capítulo 4

# Ciencia de datos

El modelado de datos nos ayuda a describir comportamientos que suceden en la realidad utilizando ecuaciones matemáticas. Lo anterior se logra a partir de la observación de las relaciones causa y efecto entre dos o más variables. Desde la invención del plano cartesiano, el ser humano ha utilizado esta herramienta para visualizar fenómenos en la naturaleza mediante el modelado de datos, lo que ha llevado a un avance tecnológico y científico, además de otorgarnos la capacidad de predecir y controlar eventos.

### 4.1. Machine Learning y tipos de modelado

Machine Learning es un campo que nació de la IA, y ha crecido por el uso de la web y de la automatización, lo que implica que se tienen más datos que nunca. Hay una gran demanda de personas que analicen datos y el aprendizaje electrónico. Arthur Samuel(1959) pionero Americano en el campo de la computación gaming e IA definió el aprendizaje automático (Machine Learning) como el campo de estudio que le da a los ordenadores la habilidad de aprender algo sobre lo que no han sido explícitamente programados mientras estaba en IBM. Se debe tener conocimiento del tipo de datos con los que se trabaja, esto ayudará a elegir el algoritmo de aprendizaje que corresponda con nuestro objetivo. Los modelos de Machine Learning (*ML*) son diversos, pero efectivos una vez que se identifica cuál es el que mejor se ajusta a nuestra base de datos. Existen diferentes tipos de aprendizaje para realizar clasificaciones, agrupamientos y regresiones. Recordando que dependiendo de nuestra base de datos es el problema de *ML* que se utiliza para realizar predicciones. Un buen comienzo es preguntarse, ¿Cómo sabemos si nuestros modelos son representativos?. Construir modelos de datos también implica evaluar qué tan buenos son, y es en dónde el tema de la selección de las métricas de error se toma en consideración.

**Tipos de algoritmos de aprendizaje:**

⇒ Supervisados.

⇒ Sin supervisión.

⇒ De refuerzo.

**Algoritmos de aprendizaje supervisado.**

El lenguaje supervisado se encarga de observar y dirigir la supervisión de una tarea específica, también se refiere al hecho de que le damos al algoritmo un conjunto de datos donde se dan las “*respuestas correctas*”. A esto también se le denomina “*problema de regresión*”. Regresión se refiere al hecho de que tratamos de predecir el tipo de atributo valuado de forma continua. En este sentido se puede decir que las características  $\approx$  atributos. Dentro del aprendizaje supervisado podemos tener los siguientes tipos de algoritmos:

⇒ **Regresión.** Donde el proceso de regresión es un proceso de predicción de un valor continuo.

⇒ **Clasificación.** En éste proceso se predice una categoría o una clase.

**Algoritmos de aprendizaje no supervisado.**

En este tipo de algoritmos la idea principal es dejar que el algoritmo trabaje por su cuenta y descubra información, información que tal vez no es visible al ojo humano. Las principales técnicas de algoritmos para el lenguaje no supervisado son:

⇒ Reducción de dimensión. Esta técnica disminuye o reduce la cantidad de variables que no ayudan al desempeño de los algoritmos, dejando solo las más relevantes.

⇒ Density Estimation. Explora los datos y encuentra alguna estructura interna.

⇒ Clustering. Es el método mas usado en este tipo de lenguaje y ayuda a agrupar conjuntos dentro del conjunto de datos con una finalidad específica. El lenguaje no supervisado cuenta con menos métodos de evaluación para los modelos.

**Algoritmos de aprendizaje de refuerzo.**

En este tipo de algoritmos se introduce un sistema de recompensas, aquí se busca minimizar el error y maximizar la función objetivo, es decir un algoritmo biobjetivo.

**Diferencias importantes**

En la actualidad se escuchan varios términos que hacen referencia al *ML* y algunas ciencias afines por lo que es importante mencionar algunas diferencias importantes dentro de los términos utilizados como lo son, inteligencia artificial, *ML* y deep learning.

- **Inteligencia Artificial.** Ciencia que faculta a los ordenadores para imitar la inteligencia humana, como la toma de decisiones, el procesamiento de textos y la percepción visual. La Inteligencia Artificial es un campo más amplio (es decir, el gran paraguas)

que contiene varias ramas como el Machine Learning, la robótica y la visión por ordenador, además trata de hacer las computadoras más inteligentes para imitar funciones cognitivas e incluye proceso de lenguaje.

- **Machine Learning.** Rama de la IA que permite a las máquinas mejorar en una tarea determinada con la experiencia, todas éstas técnicas se clasifican como técnicas de IA. El Machine Learning es una rama de la Inteligencia Artificial que permite a las máquinas mejorar en una tarea determinada con la experiencia. Es importante señalar que todas las técnicas de Machine Learning se clasifican como técnicas de Inteligencia Artificial. Sin embargo, no toda la Inteligencia Artificial puede contar como Machine Learning ya que algunos motores básicos basados en reglas pueden ser clasificados como IA pero no aprenden de la experiencia por lo que no pertenecen a la categoría de Machine Learning pero también cubre la parte estadística de la IA.
- **Deep Learning.** El Aprendizaje Profundo o Deep Learning es una rama especializada del Machine Learning que se basa en el entrenamiento de Redes Neuronales Artificiales Profundas (ANNs) usando un gran conjunto de datos como imágenes o textos. Las ANN son modelos de procesamiento de información inspirados en el cerebro humano. El cerebro humano consiste en miles de millones de neuronas que se comunican entre sí mediante señales eléctricas y químicas y permiten a los humanos ver, sentir y tomar decisiones. Las ANN funcionan imitando matemáticamente al cerebro humano y conectando múltiples neuronas “artificiales” de forma multicapa. Cuantas más capas ocultas se añaden a la red, más profunda se vuelve la red. Lo que diferencia el Deep Learning de las técnicas de Machine Learning es su capacidad para extraer características automáticamente.

Diferencias entre los procesos del Machine Learning y el Deep Learning.

- **Proceso de Machine Learning:** (1) seleccionar el modelo a entrenar, (2) realizar la extracción de características manualmente.
- **Proceso de Deep Learning:** (1) Seleccionar la arquitectura de la red, (2) las características se extraen automáticamente alimentando los datos de entrenamiento (como imágenes) junto con la clase objetivo (etiqueta).

Estas disciplinas y su orden de análisis se representan en la Figura (4.1)

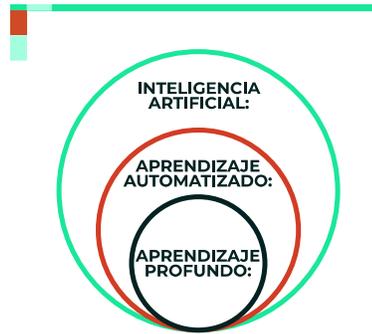


Figura 4.1: Diagrama de conceptos en ciencia de datos.

Los problemas de *ML* deberían seguir las tareas de un *pipeline* como el que se muestra en la Figura (4.2)

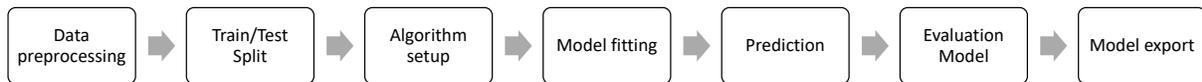


Figura 4.2: Tareas de un Pipeline de M.L.

Este trabajo aborda el análisis de los datos del estudio de la caracterización de diferentes mezclas de concreto, mezclas que fueron analizadas y mencionadas anteriormente por el método de elementos finitos. Como prioridad se tiene en primer lugar el conjunto de datos de la mezcla con adiciones. Es necesario que la información se represente de manera homogénea en un solo conjunto de datos, de esta forma es posible realizar el preprocesamiento adecuado de la información. La forma resumida del conjunto de datos de la mezcla con el polímero se muestra en la Figura (4.3).

	Edad	VPU	Compresión	Resistividad	Tensión	Módulo de Ruptura	Frecuencia de Resonancia	CRITERIO DE EVALUACIÓN	CALIDAD DEL CONCRETO
0	40 días	4121.0	444.742573	8.63940	32.690425	NaN	NaN	ALTO RIESGO	DURABLE
1	40 días	4065.0	464.987082	8.83575	32.372115	NaN	NaN	ALTO RIESGO	DURABLE
2	40 días	4134.0	467.406237	9.03210	32.531270	NaN	NaN	ALTO RIESGO	DURABLE
3	40 días	4208.0	426.789895	9.22845	NaN	NaN	NaN	ALTO RIESGO	DURABLE
4	40 días	3921.0	453.782574	9.03210	NaN	NaN	NaN	ALTO RIESGO	ALTA
5	60 días	4236.0	479.502012	10.60290	36.732961	61.080000	3228.0	RIESGO MODERADO	DURABLE
6	60 días	4283.0	525.720608	9.03210	32.722256	59.706667	3221.0	ALTO RIESGO	DURABLE
7	60 días	4213.0	441.432150	9.62115	37.051271	NaN	NaN	ALTO RIESGO	DURABLE
8	60 días	4262.0	522.410185	10.28874	NaN	NaN	NaN	RIESGO MODERADO	DURABLE
9	60 días	4236.0	503.693564	10.60290	NaN	NaN	NaN	RIESGO MODERADO	DURABLE
10	90 días	4431.0	505.221451	11.38830	38.260848	75.693333	3250.0	RIESGO MODERADO	DURABLE
11	90 días	4370.0	528.394411	12.17370	38.229017	82.466667	3270.0	RIESGO MODERADO	DURABLE
12	90 días	4330.0	510.861902	11.38830	38.260848	NaN	NaN	RIESGO MODERADO	DURABLE
13	90 días	4355.0	538.580327	10.99580	NaN	NaN	NaN	RIESGO MODERADO	DURABLE
14	90 días	4380.0	514.643424	10.60290	NaN	NaN	NaN	RIESGO MODERADO	DURABLE
15	120 días	4335.0	557.070735	13.35180	49.755018	78.533333	3350.0	RIESGO MODERADO	DURABLE
16	120 días	4317.0	568.081816	14.13720	53.765723	80.133333	3290.0	RIESGO MODERADO	DURABLE
17	120 días	4399.0	518.284457	13.35180	52.607075	NaN	NaN	RIESGO MODERADO	DURABLE
18	120 días	4301.0	506.597719	12.56640	NaN	NaN	NaN	RIESGO MODERADO	DURABLE
19	120 días	4384.0	560.388284	14.52990	NaN	NaN	NaN	RIESGO MODERADO	DURABLE
20	180 días	NaN	NaN	NaN	NaN	80.133333	3390.0	NaN	NaN

Figura 4.3: Conjunto de datos.

Se observa que el conjunto de datos anterior no cuenta con la información suficiente para realizar un análisis con Machine Learning debido a que la cantidad de datos es escasa para poder generar modelos confiables, y en algunas de las columnas no se cuenta con todos los valores, esto se re representa con la nomenclatura de *NaN* (Not at number). En este estudio para poder realizar un análisis con *ML*, se propone usar un proceso de Ingeniería de datos (Data Engineering), el cuál considera la generación de datos artificiales a partir de los datos originales con la intención de tener una mayor cantidad de datos y que el modelo pueda ser evaluado para calcular su precisión [34]. Parte de la Ingeniería de datos consiste en crear valores artificiales aleatorios a partir de las que ya se tiene considerando el cuidado de la distribución de los datos, en éste caso la distribución normal o Gaussiana es considerada para la generación de los datos.

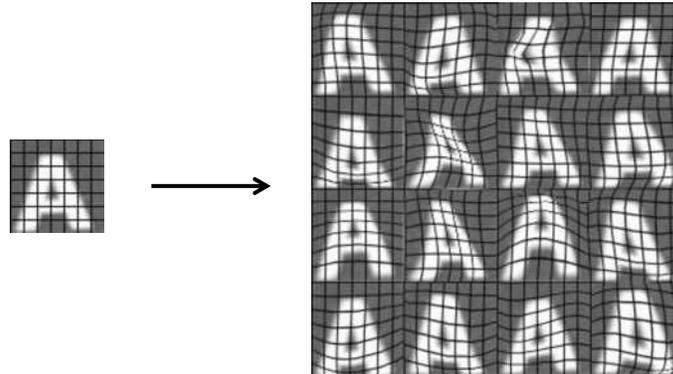
## 4.2. Datos artificiales

### Getting lots of data: Artificial data synthesis.

Esta teoría es respaldada por uno de los pilares de la IA moderna *Andrew Ng*, y consiste

en generar o insertar distorsión o también conocida como ruido al conjunto de datos y al conjunto de entrenamiento, lo cual se representa en la Figura (4.4).

### Synthesizing data by introducing distortions



[Adam Coates and Tao Wang]

Andrew Ng

Figura 4.4: Distorsiones a los datos originales.

En este trabajo, se considera un conjunto de datos aleatorios generados por una distribución normal, la distribución normal, también llamada la distribución Gaussiana, es la más común ya que representa muchos fenómenos reales: económicos, naturales, sociales y otros. Algunos ejemplos bien conocidos de fenómenos reales con una distribución normal son los siguientes:

- El tamaño del tejido vivo (longitud, altura, peso).
- La longitud de los apéndices inertes (pelo, uñas, dientes) de los especímenes biológicos.
- Diferentes medidas fisiológicas (por ejemplo, la presión sanguínea), etc.

La función normal de distribución acumulativa no tiene una expresión de forma cerrada y su representación más común es la función de densidad de probabilidad *PDF* dada por la ecuación (4.1)

$$PDF(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.1)$$

El parámetro  $\sigma$  define la forma de la distribución [35], para este caso, se consideran valores de  $\mu = 0$  y  $\sigma = 1$  debido a que estos valores son estándar en la generación de valores aleatorios. Otro punto de vista, al generar datos aleatorios artificiales a partir de los existentes es

considerar la atención a la distribución de los datos, en este caso se considera la distribución normal, esta generación de datos necesita considerar aspectos como los siguientes:

- La distorsión introducida debería de representar el tipo de ruido o distorsiones en el conjunto de pruebas.
- Usualmente no ayuda agregar valores puramente aleatorios sin sentido a tu conjunto de datos.
- La distorsión introducida ayuda a identificar un fenómeno conocido como *Anomalies in data* (Anomalías en los datos), estas condiciones de aleatoriedad se pueden representar en la Figura (4.5).

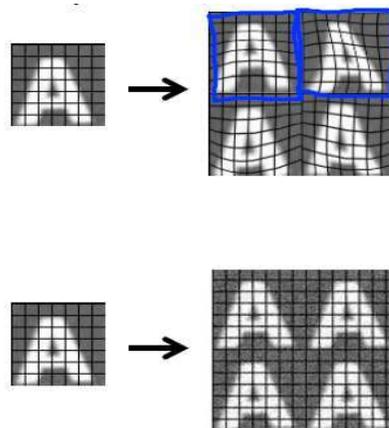


Figura 4.5: Diferencia de Distorsión en datos.

A partir de la generación de datos aleatorios se obtiene el nuevo conjunto de datos, el cuál se muestra de manera compacta en la Figura (4.6).

	VPU	F'c	Re	Ft	MR	FR	Dummy_1	Dummy_2	Dummy_3	Dummy_4	Dummy_5
0	4067.81476	450.95679	8.73249	32.57587	53.13710	3386.87718	385000000000	<a href="#">2798101.031</a>	<a href="#">23746558.66</a>	<a href="#">38734906.00</a>	210067.0813
1	4107.69508	452.20446	8.66518	32.47546	53.88388	3394.50324	398000000000	2801666.495	<a href="#">23512169.97</a>	39011824.48	214365.7761
2	4104.62347	460.66833	8.82235	32.54283	54.93941	3389.27880	405000000000	<a href="#">2846605.618</a>	<a href="#">23868835.05</a>	40295810.63	214327.2529
3	4119.87556	447.76253	8.65355	32.39747	54.65719	3394.39802	393000000000	<a href="#">2838629.745</a>	<a href="#">23254634.15</a>	<a href="#">39232475.78</a>	213175.6220
4	4083.14752	448.44319	8.82006	32.61184	53.26665	3391.78180	380000000000	2892181.914	<a href="#">24348815.35</a>	39770213.07	207601.7282
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
185	4328.42363	529.90847	13.46803	52.98482	58.46969	3398.11900	391000000000	<a href="#">6413080.399</a>	58121508.50	<a href="#">64138117.00</a>	170304.6654
186	4334.07811	517.98901	13.94023	52.93353	58.27747	3398.29768	362000000000	7047136.859	<a href="#">62637246.35</a>	68960831.54	161045.0351
187	4381.96646	509.15050	13.87941	53.33628	58.07867	3398.34389	359000000000	<a href="#">7264968.389</a>	<a href="#">63688855.69</a>	69351743.92	160747.4968
188	4311.51191	514.52552	13.28750	53.75468	59.48489	3398.77874	370000000000	<a href="#">6378796.931</a>	<a href="#">55174584.65</a>	61058155.45	166952.6177
189	4360.53919	560.26544	12.96570	53.75838	59.13366	3398.29503	480000000000	5705304.097	54055210.83	<a href="#">59460170.83</a>	188424.7983

190 rows × 11 columns

```
1 datos.shape
(190, 11)
```

Figura 4.6: Datos artificiales.

Se observa que el tamaño del conjunto de datos de la Figura (4.3) es de un máximo de 20 observaciones y que el nuevo conjunto de datos representado en la Figura (4.6) tiene un número de 190 observaciones, cantidad necesaria para poder generar modelos confiables con la información obtenida.

Es importante saber que atributos o características deben de ser utilizadas para la generación de los modelos, ya que no todas las variables están relacionadas y el intentar hacer modelos seleccionando las variables que no son adecuadas y que además no tienen una relación directa, puede llegar a ser una inversión de tiempo mal empleada, para evitar este tipo de errores es necesario generar una matriz de correlación de las variables.

#### 4.2.1. Matrices de correlación.

La correlación determina la relación o dependencia que existe entre dos variables que intervienen en una distribución bidimensional. Esta correlación determina si los cambios en una de las variables influyen en los cambios de otra, en caso de que esto suceda, se dice que las variables están correlacionadas o que hay una correlación entre ellas. La matriz de correlación es una matriz cuadrada simétrica semidefinida positiva y calcula el valor de  $r$  el cual es igual a la suma de los productos de cada pareja de datos y dividido por el producto del número de datos por la desviación estándar de cada variable o serie de datos,

además incluye la estadística descriptiva multivariable del conjunto de datos. La correlación es cualquier asociación estadística al grado en que dos variables están relacionadas linealmente.

Los componentes clave de un de valor correlación se pueden enunciar como:

- Los valores de correlación oscilan entre -1 y 1.
- Magnitud. La magnitud de los valores indica que cuanto mayor sea la magnitud mayor es la correlación.
- Signo. Si el signo es negativo, hay una correlación inversa. Si es positivo hay una correlación regular.

El coeficiente de correlación  $r$  está dado por la ecuación (4.2).

$$r = \frac{\prod_{i=1} x_i y_i}{\prod (x_i y_i) S_x S_y} \quad (4.2)$$

Se realiza el cálculo del coeficiente de correlación para cada una de las variables, y se hace un acomodo matricial, el cuál se representa con el mapa de calor que se muestra en la Figura (4.7).

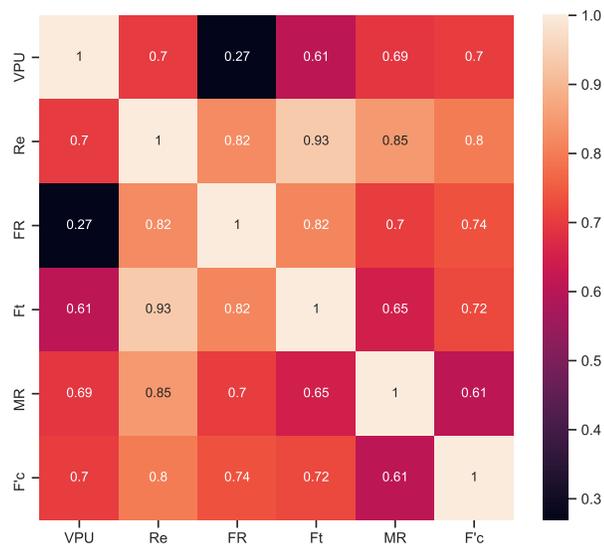


Figura 4.7: Matriz de correlación de datos originales.

La Figura (4.8) muestra la matriz de correlación y su representación en un mapa de calor para los valores artificiales generados a partir de la labor de Ingeniería de datos.

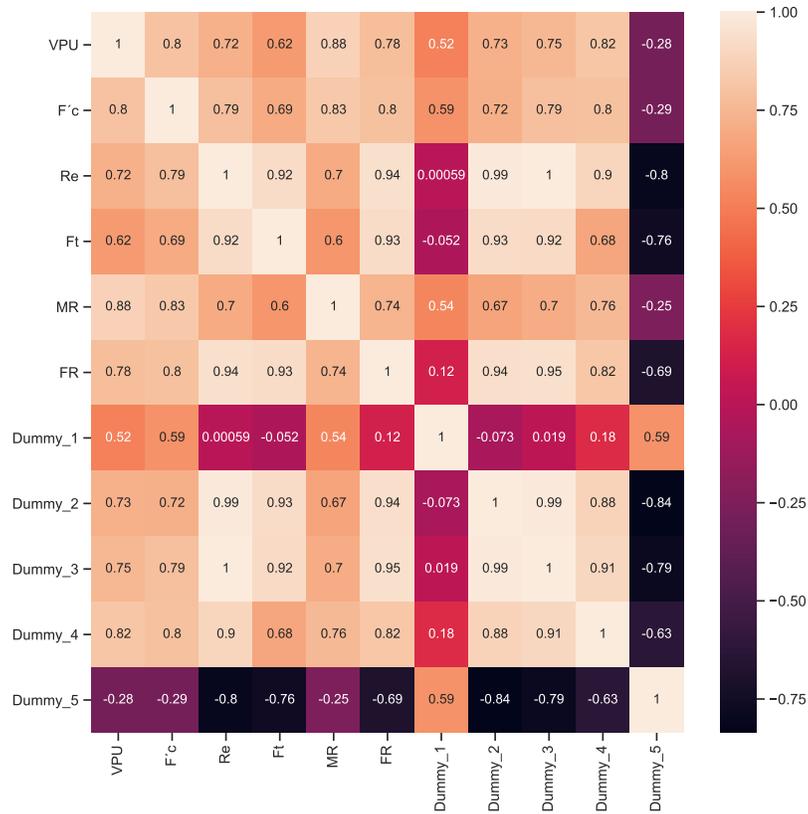


Figura 4.8: Matriz de correlación de datos artificiales.

Se realiza la comparación de las matrices de correlación de las Figuras (4.7) y (4.8), donde se observa que la cantidad de atributos creció debido a la generación de algunas variables nuevas como lo son las variables *Dummy*, las cuales se describirán más adelante. Otro aspecto importante que se observa es la consistencia y falta de consistencia de algunos de los datos en las variables o atributos, i.e., si se observa por ejemplo el atributo F'c (Esfuerzo a compresión simple) contra la VPU (Velocidad de pulso ultrasónico) en la Figura (4.7) es de 0.7, este valor se compara con la matriz de la Figura (4.8) el cual tiene un valor de 0.8, la diferencia es del 10% del valor porcentual, para fines de análisis de datos ésta

prueba denota una alerta ya que pueden existir anomalías en el conjunto de datos referente a esta prueba en particular además de evidenciar inconsistencia en los datos obtenidos por esta prueba. Por el contrario en otro tipo de prueba como lo es la prueba de Ft (Esfuerzo a tensión) comparada de igual manera con la prueba de VPU de la Figura (4.7) es de 0.61, y en la matriz de la Figura (4.8) el valor es de 0.62, la diferencia es del 1 %, valor que indica certeza y consistencia en los datos artificiales generados.

A partir de este punto se realiza el análisis del conjunto de datos artificiales una vez que fue mencionada su justificación y eficiencia para el análisis de los datos. Dentro del procesamiento de los datos es de profundo interés conocer datos de estadística descriptiva del conjunto de datos los cuales se muestran en la Figura (4.9), donde es posible apreciar valores mínimos, máximos, media aritmética, desviación estándar y percentiles del conjunto de datos, además es posible conocer la distribución de los datos para cada uno de los atributos con los que se trabaja, los cuales se muestran en la Figura (4.10).

	VPU	F°c	Re	Ft	MR	FR	Dummy_1	Dummy_2	Dummy_3	Dummy_4	Dummy_5
count	190.000000	190.000000	190.000000	190.000000	190.000000	190.000000	1.900000e+02	1.900000e+02	1.900000e+02	1.900000e+02	190.000000
mean	<u>4264.224693</u>	502.916771	10.936772	39.412581	56.487207	<u>3395.485157</u>	4.254105e+11	4.416562e+06	3.959909e+07	5.583114e+07	198552.117685
std	119.192041	35.096254	1.674835	7.432631	1.807145	3.818397	4.620039e+10	1.310147e+06	1.278387e+07	1.068857e+07	17652.804366
min	<u>3938.437570</u>	429.765250	8.653550	32.376280	53.122610	<u>3384.231760</u>	3.150000e+11	2.798101e+06	2.303193e+07	3.873491e+07	160747.496800
25%	4208.418895	470.660053	9.294900	33.223845	54.895167	<u>3395.000000</u>	3.900000e+11	3.238196e+06	2.739730e+07	4.505045e+07	187480.280550
50%	4306.684495	511.253565	10.752240	37.675790	56.417855	<u>3396.939410</u>	4.275000e+11	4.169097e+06	3.839883e+07	5.755168e+07	200361.448050
75%	<u>4362.102370</u>	523.601698	11.958642	42.094055	58.074468	<u>3398.000000</u>	4.550000e+11	5.277422e+06	4.812049e+07	6.466327e+07	211453.760425
max	<u>4420.494150</u>	567.398800	14.258110	53.758380	59.587610	<u>3398.985450</u>	5.460000e+11	7.380434e+06	6.704280e+07	7.436750e+07	244712.043100

Figura 4.9: Estadística descriptiva de los datos artificiales.

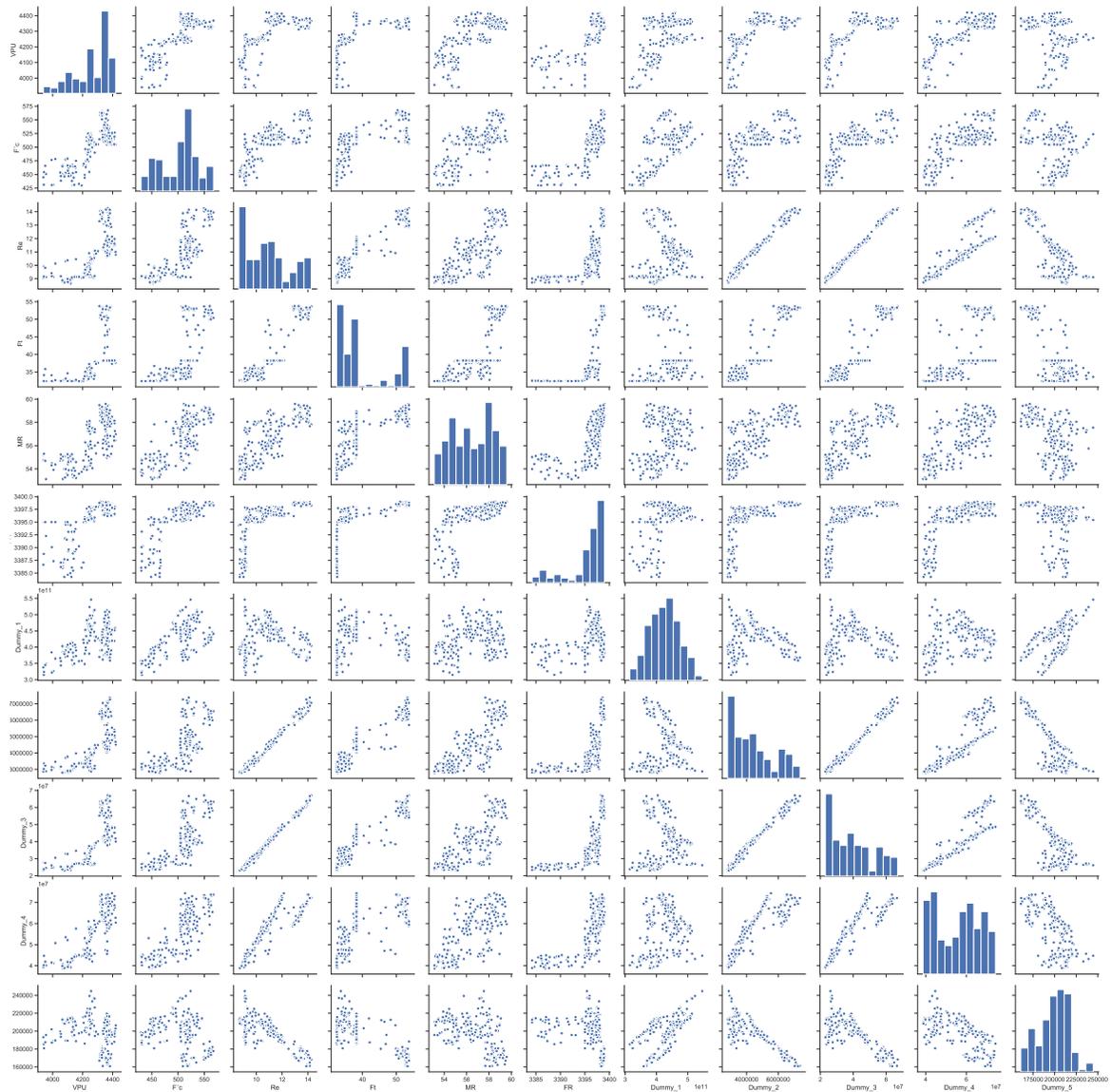


Figura 4.10: Distribución de los datos de todas las variables.

La Figura (4.11) muestra la distribución de los datos de las características obtenidas en laboratorio, estas características son las pruebas a las que fueron sometidas las mezclas, donde  $VPV$  indica la velocidad de pulso ultrasónico,  $F'c$  es el esfuerzo a compresión simple,  $Re$  indica la resistividad eléctrica,  $Ft$  es la resistencia al esfuerzo de tensión,  $MR$  es el módulo de ruptura o esfuerzo a flexión y  $FR$  indica la frecuencia de resonancia. La Figura (4.12) muestra la distribución para las variables *Dummy*, variables que fueron creadas a

partir de la Ingeniería de datos.

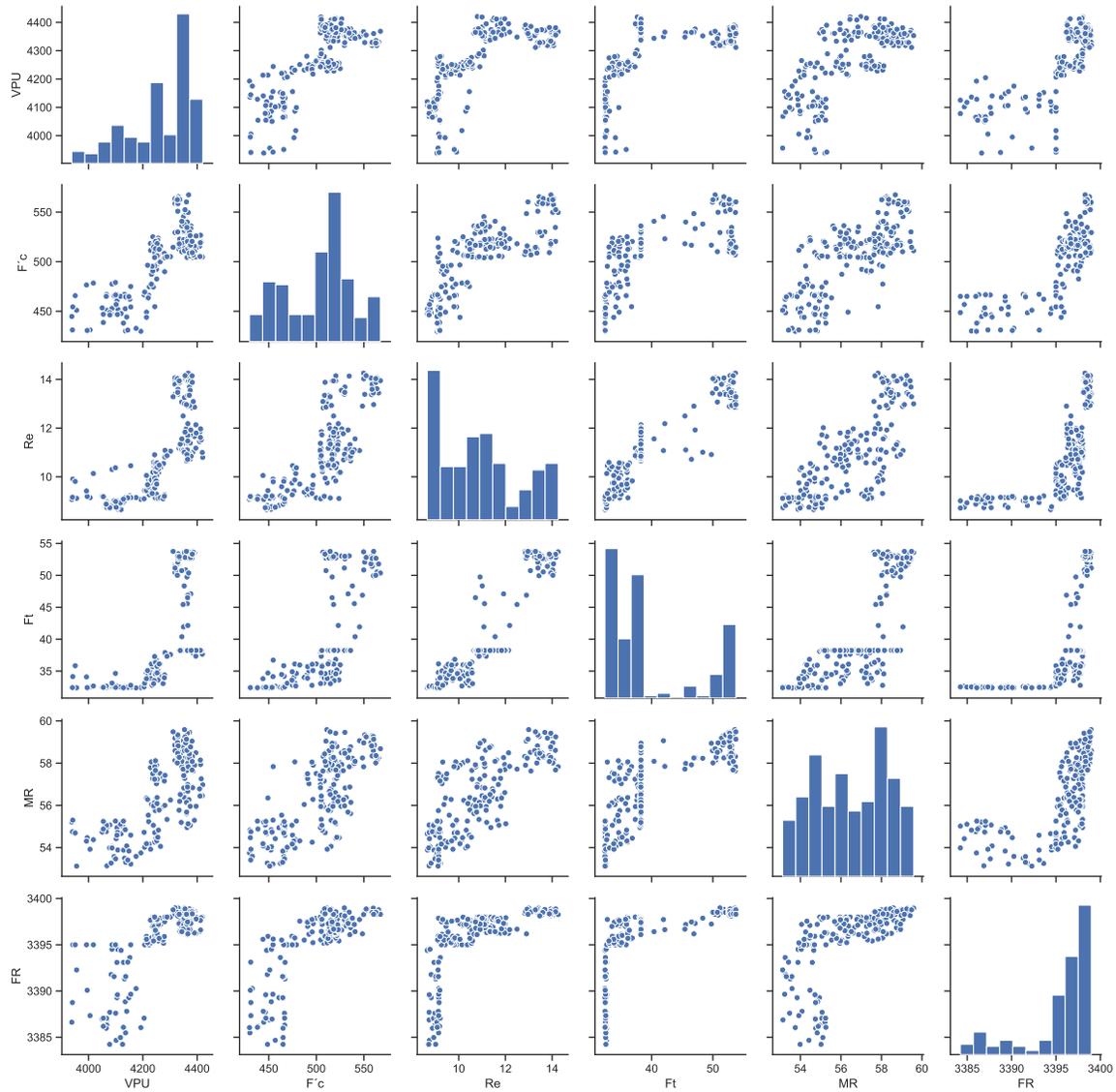


Figura 4.11: Distribución de los datos de las pruebas de laboratorio.

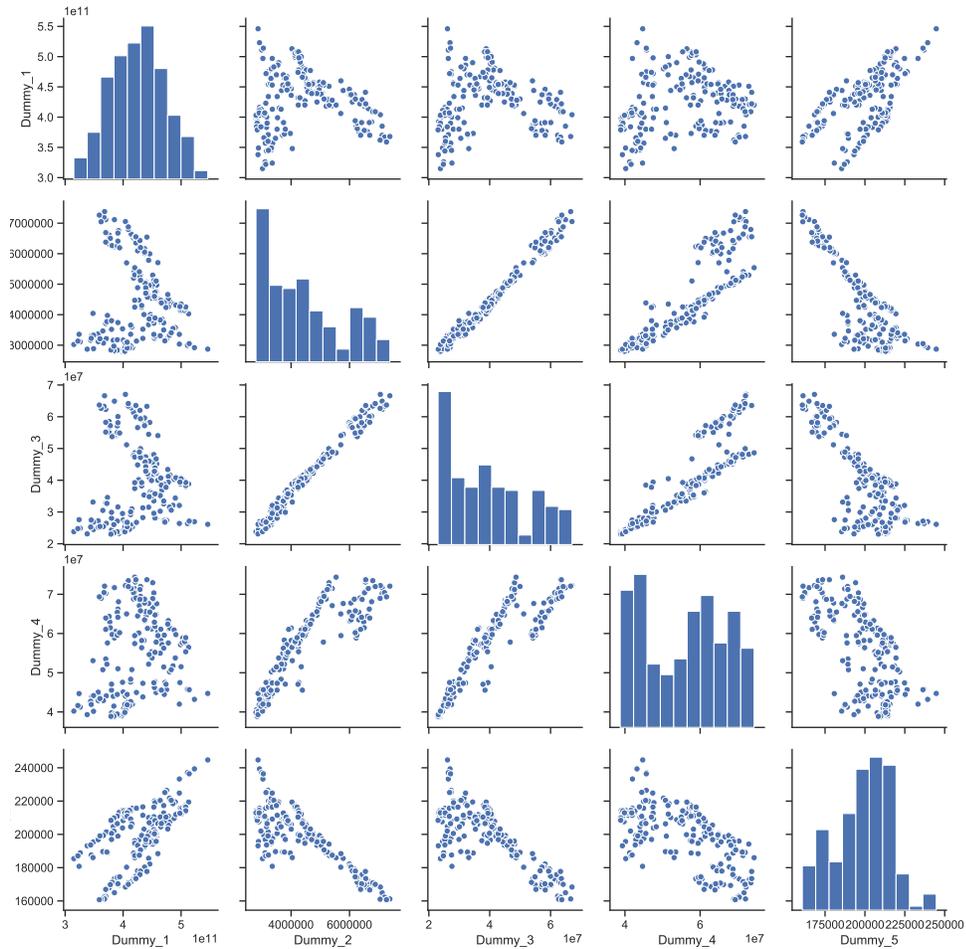


Figura 4.12: Distribución de los datos de las variables Dummy.

Con la distribución de los datos se puede estimar que tipo de relaciones existen entre las variables. De acuerdo con el mapa de calor de la Figura (4.8) las variables en base a las mejores relaciones en orden de mayor valor y en forma decreciente sin considerar las variables dummy son:

- Relación  $FR$  con  $Re$  con un valor de 0.94
- Relación  $FR$  con  $Ft$  con un valor de 0.93
- Relación  $Ft$  con  $Re$  con un valor de 0.92
- Relación  $MR$  con  $VPU$  con un valor de 0.88
- Relación  $F'c$  con  $MR$  con un valor de 0.83

- Relación  $F'c$  con  $VPU$  con un valor de 0.80
- Relación  $F'c$  con  $Re$  con un valor de 0.79
- Relación  $FR$  con  $F'c$  con un valor de 0.78

## 4.3. Evaluación de los modelos y métricas de evaluación

### 4.3.1. Train/test Split

El objetivo de la regresión es crear un modelo para predecir con precisión un caso desconocido, con este fin, se tiene que realizar una evaluación de regresión después de crear el modelo. Es posible discutir dos tipos de enfoques de evaluación que puedan ser utilizados para lograr el objetivo de describirlos. Estos enfoques son: el entrenamiento y la prueba en el mismo dataset, y la división de *Train/test Split*.

Al considerar los modelos de evaluación, es evidente que se necesita elegir el que dará resultados más precisos, así que, la pregunta es, ¿Cómo podemos calcular la precisión del modelo? es decir, cuánto podemos confiar en este modelo para la predicción de una muestra desconocida, utilizando un determinado dataset y habiendo construido un modelo como la regresión lineal. Una de las soluciones consiste en seleccionar una parte de nuestro dataset para la realización de pruebas. Por ejemplo, suponiendo que se tienen 10 registros en nuestro dataset, y se usa todo el dataset para el entrenamiento, y se construye un modelo usando este conjunto de entrenamiento, ahora, se selecciona una pequeña porción del dataset, pero sin sus etiquetas, a éste conjunto, se le denomina un conjunto de pruebas, que es el que tiene las etiquetas, pero las etiquetas no son utilizadas para la predicción. Las etiquetas se denominan “valores reales” del conjunto de pruebas, ahora, se pasa el conjunto de características de la parte de prueba al modelo construido, y se predicen los valores de destino, por último, se comparan los valores pronosticados por el modelo con los valores reales de la prueba establecida, ésto indica que tan preciso es actualmente el modelo.

Hay diferentes métricas para informar de la precisión del modelo, pero la mayoría de ellos trabajan generalmente, basado en la similitud de los valores pronosticados y reales. El error del modelo es calculado como la diferencia promedio entre los valores predicho y los reales para todas las filas, Podemos escribir este error como la siguiente ecuación.

$$Error = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |y_i - \hat{y}_j| \quad (4.3)$$

Entonces, el primer enfoque de evaluación mencionado es el más simple: formar y probar en el “mismo” dataset. Esencialmente, el nombre de este enfoque lo dice todo, se forma el modelo en todo el dataset, luego se prueba utilizando una parte del mismo dataset. En un sentido general, cuando se prueba con un dataset en el que se conoce el valor objetivo para cada dato puntual, es capaz de obtener un porcentaje de predicciones exactas para el modelo. Este enfoque de evaluación probablemente tendría una alta “precisión de formación” y una baja “precisión fuera de la muestra”, ya que el modelo conoce todos los data points de prueba de la formación.

La precisión de la formación es el porcentaje de predicciones correctas que hace el modelo cuando se utiliza el dataset de prueba. Sin embargo, una alta precisión en la formación no es necesariamente algo bueno. Por ejemplo, tener una alta precisión de formación puede dar como resultado un ‘sobreajuste’ de los datos o también conocido como “overfitting”, esto significa que el modelo está demasiado formado en el dataset, que puede capturar el ruido y puede producir un modelo no generalizado. La precisión fuera de la muestra es el porcentaje de las predicciones correctas en las que el modelo realiza sobre datos en los que NO ha sido formado el modelo. Hacer una “formación y prueba” en el mismo dataset probablemente tendrá una precisión baja fuera de la muestra debido a la probabilidad de estar en sobreajuste, es importante que los modelos tengan una precisión alta, fuera de la muestra, porque el propósito de los modelos es, por supuesto, hacer predicciones correctas sobre datos desconocidos.

Train/test split implica la división del dataset en conjuntos de formación y prueba respectivamente, que son mutuamente excluyentes, después de lo cual, se forman con el conjunto de formación y se prueba con el conjunto de pruebas, esto proporcionará una evaluación más precisa sobre la precisión de fuera de la muestra, ya que la prueba del dataset NO forma parte del dataset que se ha utilizado para formar los datos y esto es más realista para los problemas del mundo real. Dado que estos datos no se han utilizado para formar el modelo, el modelo no tiene conocimiento del resultado de estos datos, así que, en esencia, es realmente una prueba fuera de la muestra.

### **Cross validation**

Cuando se evalúan diferentes ajustes (“hiperparámetros”) para los estimadores, como el ajuste de  $C$  que debe ser ajustado manualmente para un *SVM*, todavía existe el riesgo de sobreajustar el conjunto de pruebas porque los parámetros pueden ser ajustados hasta que el estimador tenga un rendimiento óptimo. De esta manera, el conocimiento sobre el conjunto de pruebas puede “filtrarse” en el modelo y las métricas de evaluación ya

no informan sobre el rendimiento de la generalización. Para resolver este problema, otra parte del conjunto de datos puede presentarse como el llamado “conjunto de validación”, el entrenamiento procede en el conjunto de entrenamiento, después de lo cual se hace la evaluación en el conjunto de validación, y cuando el experimento parece tener éxito, se puede hacer la evaluación final en el conjunto de pruebas. Sin embargo, al dividir los datos disponibles en tres conjuntos, se reduce drásticamente el número de muestras que pueden utilizarse para el aprendizaje del modelo, y los resultados pueden depender de una elección aleatoria particular para el par de conjuntos (de entrenamiento, de validación). Existen métodos como el proceso de Cross validation que facilitan algoritmos automatizados por la misma computadora para seleccionar mejor los datos que formarán parte de nuestros conjuntos de entrenamiento y prueba; de esta manera se garantizará una distinción más precisa.

Por lo tanto una alternativa al método de división de datos, es la llamada validación cruzada o Cross-validation (*CV*). Con esta técnica en lugar de realizar un split, se generan múltiples cortes pero en tiempos diferidos. Una forma sencilla de verlo, es imaginar que son múltiples cortes de entrenamiento y prueba. Las métricas de evaluación son usadas para explicar el rendimiento de un modelo. Como se mencionó, básicamente, se pueden comparar los valores actuales y predecir los valores a calcular la precisión de un modelo de regresión. Aprender los parámetros de una función de predicción y probarla con los mismos datos es un error metodológico: un modelo que sólo repitiera las etiquetas de las muestras que acaba de ver tendría un puntaje perfecto pero no podría predecir nada útil con datos aún no vistos. Esta situación se llama sobreajuste. Para evitarla, es una práctica común cuando se realiza un experimento de aprendizaje de una máquina (supervisado) para mantener parte de los datos disponibles como un conjunto de pruebas  $X_{test}$ ,  $Y_{test}$ . Nótese que la palabra “experimento” no pretende denotar solamente un uso académico, porque incluso en los entornos comerciales el aprendizaje automático suele comenzar de forma experimental [36]. Un conjunto de pruebas debe mantenerse para la evaluación final, pero el conjunto de validación ya no es necesario cuando se hace el *CV*. En el enfoque básico, llamado  $k - fold CV$ , el conjunto de entrenamiento se divide en  $k$  conjuntos más pequeños (otros enfoques se describen a continuación, pero generalmente siguen los mismos principios). Para cada uno de los  $k$  “pliegues” se sigue el procedimiento mostrado en la Figura (4.13):

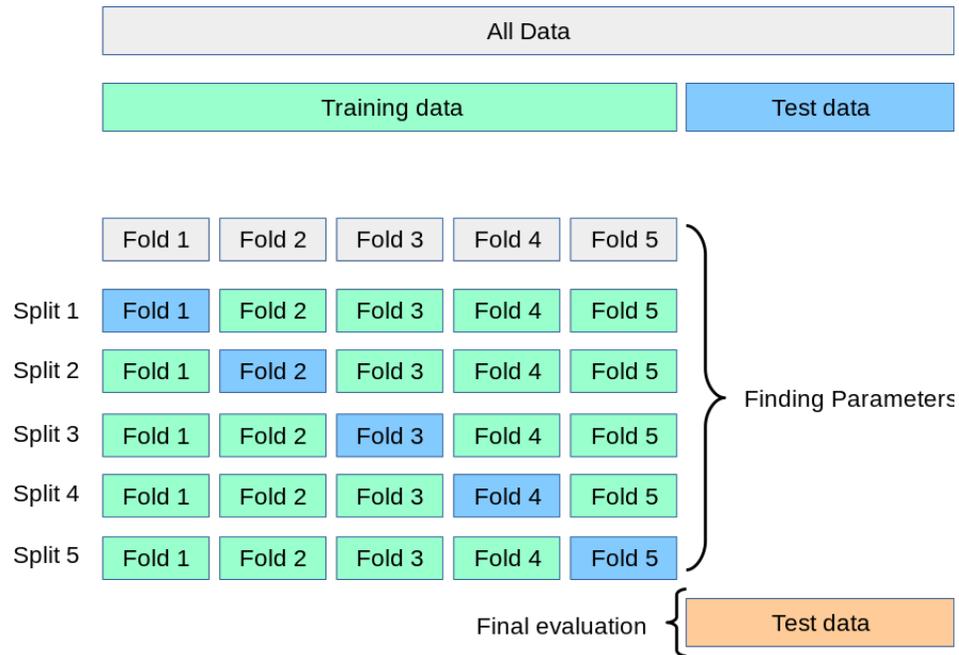


Figura 4.13: Desempeño de la validación cruzada.

- Se entrena un modelo utilizando los pliegues como datos de entrenamiento.
- El modelo resultante se valida en la parte restante de los datos (es decir, se utiliza como conjunto de pruebas para calcular una medida de rendimiento como la precisión).

La medida del rendimiento comunicada por la validación cruzada de los pliegues  $k$  es entonces el promedio de los valores computados en el bucle. Este enfoque puede ser costoso desde el punto de vista computacional, pero no desperdicia demasiados datos (como ocurre cuando se fija un conjunto de validación arbitraria), lo que constituye una gran ventaja en problemas como la inferencia inversa, en los que el número de muestras es muy reducido. Las métricas de evaluación proporcionan un papel fundamental en el desarrollo de un modelo, ya que proporciona una percepción con respecto a las áreas que requieren mejoras, pero antes se tiene que definir lo que realmente es un error. En el contexto de la regresión, el error del modelo es la diferencia entre los datos puntuales y la línea de tendencia generada por el algoritmo. Dado que hay múltiples data points, un error puede ser determinado de múltiples maneras.

- Mean absolute error (MAE) es la media del valor absoluto de los errores. Mean absolute error es la medida más fácil de entender, ya que es sólo el error promedio.

- Media Squared Error (MSE) es la media del error al cuadrado, y es más popular que Mean absolute error porque el enfoque se orienta más hacia grandes errores. Esto se debe a que el término al cuadrado aumenta exponencialmente los errores más grandes en comparación con los más pequeños.
- Root Mean Squared Error (RMSE) es la raíz cuadrada de el error del cuadrado medio. Esta es una de las métricas más populares de las métricas de evaluación porque Root Mean Squared Error es interpretable en las mismas unidades como el vector de respuesta (o unidades “y”) haciéndolo fácil de correlacionar la información.
- Relative Absolute Error (RAE), también conocido como la suma residual de cuadrado, donde la barra de  $y$  es un valor medio de  $y$ , toma el error absoluto total y la normaliza dividiendo por el error absoluto total del predictor simple.
- Relative Squared Error (RSE) es muy similar a “Relative absolute error”, pero es ampliamente adoptado por la comunidad de data science, como es usado para calcular R-squared.
- R-squared ( $R^2$ ) no es un error, si no, una métrica popular para la precisión de su modelo. Representa qué tan cerca los valores de los datos se encuentran en la línea de regresión ajustada. Cuanto más alto sea el  $R^2$ , mejor encaja el modelo a los datos. Cada una de estas métricas se puede utilizar para cuantificar la predicción. La elección de la métrica depende completamente del tipo de modelo, el tipo de datos y el dominio del conocimiento.

## 4.4. Análisis de la mezcla con adiciones

Se realiza la implementación de algoritmos de *ML* a la relación *Ft* con *Re* ya que es la mejor relación existente en la mezcla con adiciones con un valor de  $r = 0.92$ . Se comienza con la mezcla que contiene adiciones debido a que es de interés el conocer el desempeño de mezclas de concreto modificadas.

### 4.4.1. Regresión lineal

La regresión lineal es uno de los muchos métodos que son usados para realizar predicciones con bases de datos. Es conocido que una línea recta se puede escribir de muchas

formas; en esta ocasión se utiliza la forma “ordenada al origen”, es decir,

$$y = mx + b. \quad (4.4)$$

La ecuación (4.4) describe una recta con pendiente  $m$  y ordenada al origen  $b$ . La gráfica de esta ecuación da como resultado una recta, y es muy útil tanto para ampliar nuestra perspectiva de algún fenómeno, como predecir comportamientos. Este método implica suponer que alguna función de la recta de forma (4.4) es la representación más adecuada de la distribución de los datos en un diagrama de dispersión. En un mundo ideal, todos los puntos del diagrama de dispersión se alinearían en una sola línea recta perfecta sin la necesidad de encontrar la recta que resume los datos ya que solo bastaría con unir dichos puntos, sin embargo, la realidad no es así, típicamente en los conjuntos de datos de los diagramas de dispersión se puede trazar más de una línea recta y cada una de estas líneas dará un ajuste diferente al conjunto de datos, se trata entonces de encontrar la línea recta que brinde el mayor ajuste. Uno de los puntos clave en la regresión lineal es que nuestro valor dependiente debe ser continuo y no puede ser un valor discreto. Uno de los principales objetivos de la regresión lineal es minimizar la ecuación de  $MSE$  (Mean squared error) la cual está dada por la ecuación (4.5).

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (4.5)$$

Existen algunos enfoques de optimizar estos problemas como lo puede ser:

- Enfoque de optimización que se basa en mínimos cuadrados. Es eficiente en operaciones donde el número de observaciones es menor a 10,000 y requiere operaciones de Álgebra lineal.
- Enfoque de Aprendizaje automático. Utiliza el gradiente de descenso (“Gradient descent”).

El procedimiento para generar la regresión lineal utilizando el enfoque de ajuste de mínimos cuadrados inicia al calcular la media aritmética y la varianza tanto de los valores de  $x$  como los valores de  $y$ . Por lo que se construye una tabla donde se calculan los valores cuadrados de ambas variables y se calcula la sumatoria de cada columna. A continuación se enumeran las ecuaciones que se utilizan para calcular la media aritmética (promedio) y las varianzas,

de igual forma se enumeran las ecuaciones con las que se puede determinar la pendiente  $m$  y la ordenada al origen de la recta, es decir el punto  $y$  donde la recta toca al eje  $y$ .

$$\bar{x} = \frac{\sum x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (4.6)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \quad (4.7)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum x_i^2 - n(\bar{x})^2}{n - 1} \quad (4.8)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum y_i^2 - n(\bar{y})^2}{n - 1} \quad (4.9)$$

$$m = \frac{\sum x_i y_i - n(\bar{x})(\bar{y})}{\sigma_x^2(n - 1)} \quad (4.10)$$

$$b = \bar{y} - m\bar{x} \quad (4.11)$$

### Relación $Ft$ con $Re$ , Regresión lineal

La Figura (4.14) muestra la regresión lineal para el conjunto de datos artificiales considerando la  $Ft$  y la  $Re$  como principales atributos. El valor de  $R^2$  computado es:  $R^2=0.8539$ .

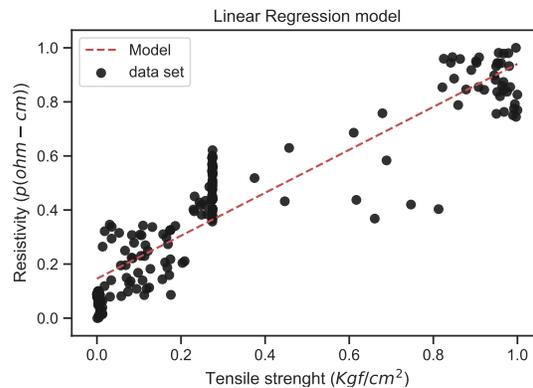


Figura 4.14: Desempeño de la Regresión lineal con  $Ft$  y  $Re$  como atributos.

Enseguida se realiza un split en los datos donde se considera un 70% para el conjunto de entrenamiento y un 30% para el conjunto de prueba, éste criterio es muy común en ciencia de datos y el resultado de ésta división se observa en la Figura (4.15).

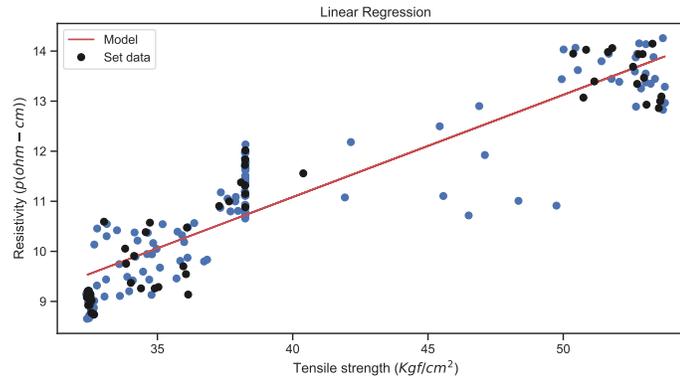


Figura 4.15: División de entrenamiento y prueba en la Regresión lineal con  $Ft$  y  $Re$  como atributos.

Los valores de  $R^2$  computados para ésta distribución son:

Conjunto de entrenamiento  $R^2=0.8306$

Conjunto de prueba  $R^2=0.8921$ .

En algunas situaciones existen problemas de dimensionalidad entre los datos por lo que es necesario estandarizar los datos mediante procesos de normalización, escalamiento y transformaciones. En éste caso un proceso de escalado fue realizado al conjunto de datos, con la intención de disminuir la variación de los errores y eliminar problemas de mal condicionamiento. La normalización es el proceso de escalar muestras individuales para tener una norma unitaria. Este proceso puede ser útil si se planea utilizar una forma cuadrática como el producto punto o cualquier otro núcleo para cuantificar la similitud de cualquier par de muestras. Esta suposición es la base del Modelo de Espacio Vectorial que se utiliza a menudo en contextos de clasificación de textos y de agrupamiento. Se prueba el método de validación cruzada para el modelo de la regresión lineal usando los datos escalados los cuales se muestran en la Figura (4.16), la elección del número de pliegues esta en función del tamaño del conjunto de datos y la precisión que se pueda obtener en los grupos entrenamiento y prueba, en algunos casos subir el número de pliegues puede ayudar a mejorar la precisión pero en otros casos no genera buenos resultados y esto se ve afectado en la precisión. Para este caso se escogió un numero de 3 pliegues, es decir  $K = 3$ .

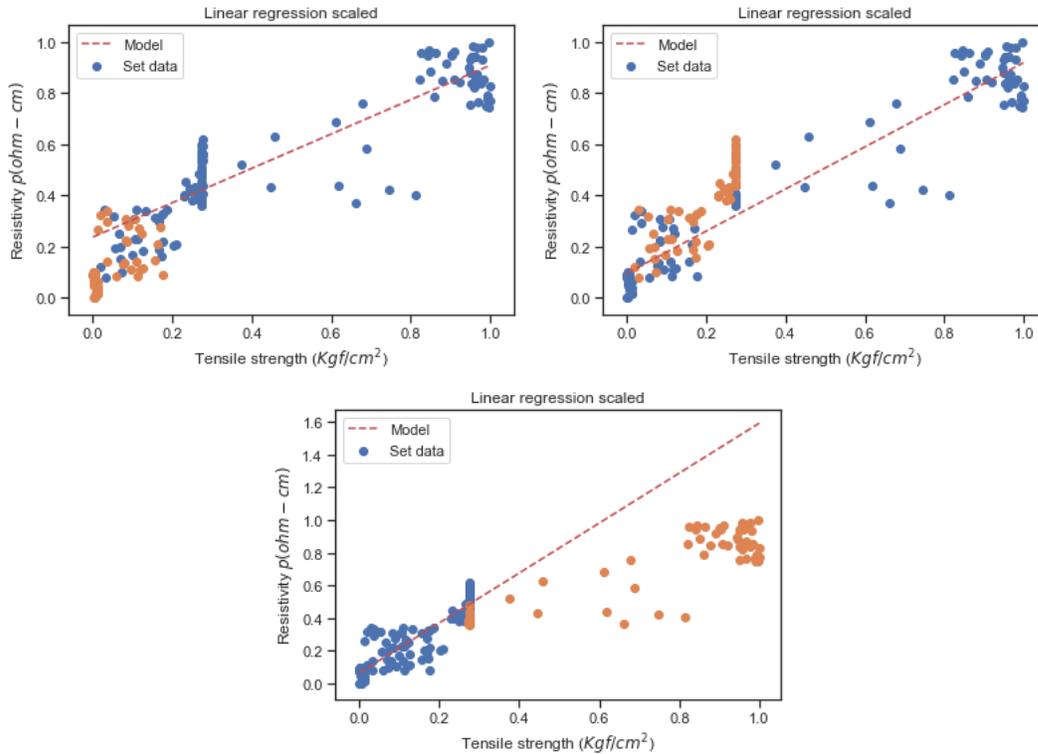


Figura 4.16: Desempeño de la  $CV$  en la regresión lineal con  $Ft$  y  $Re$  como atributos.

La tabla (4.1) muestra los valores de  $R^2$  para los conjuntos de entrenamiento y prueba. En este ejemplo se observa que la cantidad de pliegues no es suficiente para obtener una buena validación entre los datos, ya que los primeros 2 pliegues concentran una gran cantidad de datos del lado izquierdo, mientras que el tercer pliegue concentra los datos del lado derecho. Además se observa que el valor de  $R^2$  para el conjunto de prueba da una aproximación alejada del valor óptimo que es  $|1|$ . Para este caso es necesario alternar el número de divisiones.

<b>K-fold</b>	$R^2$ <b>Train</b>	$R^2$ <b>Test</b>
1	0.814	-2.540
2	0.920	-0.144
3	0.807	-4.950
Promedio	0.8469	-2.5447

Tabla 4.1:  $R^2$  en los pliegues de la validación cruzada.

**Relación *Ft* con *Re*, Gradiente de descenso (Gradient descent).**

Este tipo de problema es conocido en *ML* como un problema de tipo supervisado, donde se tiene un conjunto de datos y se busca encontrar y trazar una línea recta en función de los datos. Cuando se menciona que es supervisado también se refiere al hecho de que se proporciona al algoritmo un conjunto de datos donde se colocan las variables estocásticas, a esto también se le denomina un problema de regresión. En donde se trata de predecir el tipo de atributo valuado de forma continua. Se debe identificar si el problema es de clasificación o de regresión, para el caso que se está analizando el problema es de regresión, ya que se trata de predecir resultados dentro de una salida continua. Ajustando el modelo lineal al presente problema se utilizará la siguiente notación.

- $m \Rightarrow$  Denota el no de ejemplos de entrenamiento.
- $X$ 's  $\Rightarrow$  Variables de entrada/funciones.
- $y$ 's  $\Rightarrow$  Variables de salida/objetivos.
- $(X^{(i)}, y^{(i)}) \Rightarrow$  Ejemplo de entrenamiento específico.
- $h \Rightarrow$  Es nuestra función de hipótesis.
- $\theta_i$ 's  $\Rightarrow$  Parametros del modelo.

La función de costo o también llamada función de hipótesis para el caso donde solo se tiene un atributo o una característica esta dada por

$$h_{\theta}(x) = \theta_0 + \theta_1 x. \quad (4.12)$$

En la regresión lineal se quiere resolver un problema de minimización y se trata de minimizar la diferencia cuadrática entre el resultado de la ecuación de hipótesis y el valor real. Se busca minimizar  $\theta_0$  and  $\theta_1$  con

$$\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (h_{\theta}(X^{(i)}) - y^{(i)})^2 \quad (4.13)$$

$\therefore$  se tiene

$$J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (h_{\theta}(X^{(i)}) - y^{(i)})^2 \quad (4.14)$$

donde  $J(\theta_0, \theta_1)$  es la función de costo o también conocido como el residual. La Figura (4.17) muestra el diagrama que describe un problema de aprendizaje supervisado.

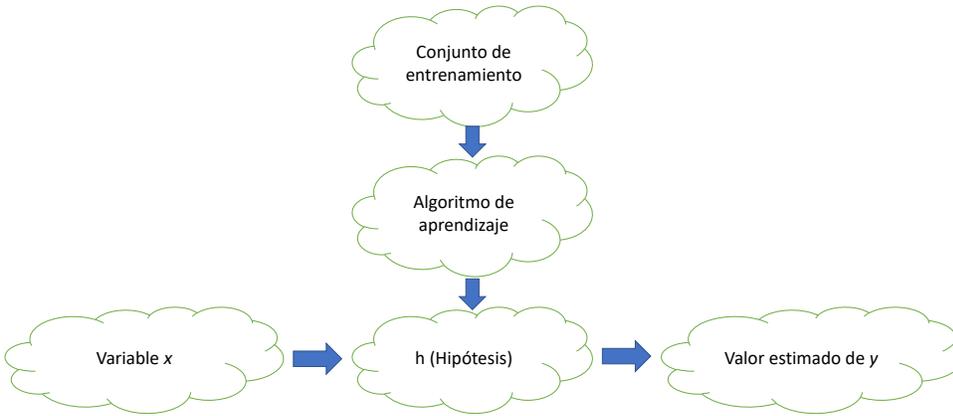


Figura 4.17: Diagrama para el problema de regresión.

En esta sección se analiza la relación del  $Ft$  con la  $Re$  utilizando el gradiente descendente con el enfoque lineal. En la Figura (4.18) se muestra la regresión por el método del gradiente descendente, usando datos de entrada de  $\alpha = 0.9 \Rightarrow$  debido a que éste valor funciona bien con el desempeño del modelo, No. de iteraciones = 150,  $\theta_0 = 0$  y  $\theta_1 = 0$ .

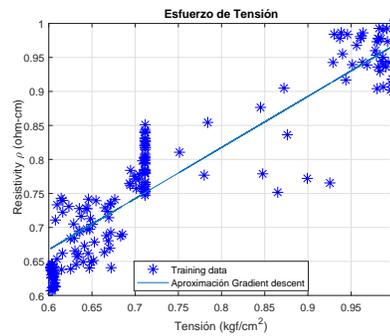


Figura 4.18: Aproximación con Gradiente de descenso.

La Figura (4.19) muestra la gráfica del error que genera en el método del gradiente descendente y en la Figura (4.20) se observa la gráfica de contorno, ésta muestra que el método converge al punto más bajo de la superficie, es decir, existe convergencia con el mínimo global de la función.

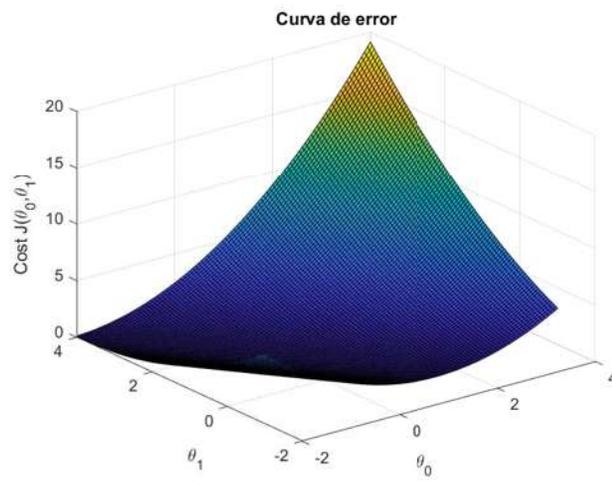


Figura 4.19: Tazón de error del gradiente de descenso.

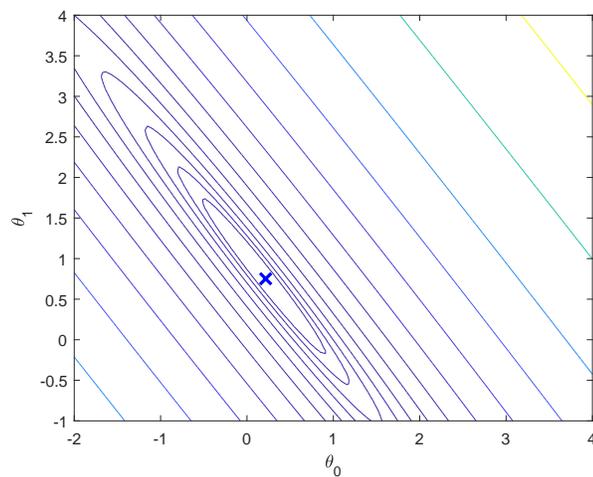


Figura 4.20: Aproximación al mínimo global con Gradiente de descenso.

Es importante definir el número de iteraciones que son necesarias para lograr la convergencia del método, y la Figura (4.21) muestra el número de iteraciones necesarias para lograr dicha convergencia.



Figura 4.21: Numero de iteraciones necesarias para la convergencia en el gradiente descendente.

#### 4.4.2. Regresión Multivariable Gradiente descendente

La regresión lineal es una buena técnica para entender cómo es que las matemáticas nos ayudan a realizar predicciones. Existen otras regresiones, como la múltiple o multivariable, que nos permite considerar más variables con el fin de mejorar los modelos de predicción. Sin embargo, hay ocasiones en las cuales nuestro conjunto de datos posee comportamientos que se podrían modelar mejor con una función polinomial. La regresión multivariable es considerada también como una regresión no lineal, éste método ayuda a modelar una relación no lineal entre la variable dependiente y un conjunto de variables independientes. Es importante saber si la relación es lineal o no, para eso se calcula el coeficiente de determinación entre las variables independientes y dependientes, y si para todas las variables es 0.7 o superior existirá una tendencia lineal.

De acuerdo con la matriz de correlaciones mostrada en la Figura (4.8) la relación que existe entre la prueba de  $F'c$  y la prueba de  $VPU$  es de  $r = 0.8$ , y el valor de  $r$  para la relación entre la prueba de  $F'c$  y la prueba de  $Re$  es de  $r = 0.79$ , por lo tanto se consideraran estas variables para una regresión múltiple multivariable lineal. En la Figura (4.22) se muestra la representación gráfica de las 3 variables mencionadas anteriormente. Enseguida la Figura (4.23) muestra el hiperplano producto de la aproximación por el gradiente de descenso y su desempeño.

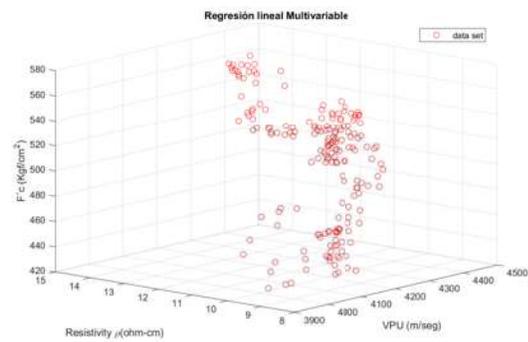


Figura 4.22: Representación de 3 variables en el espacio.

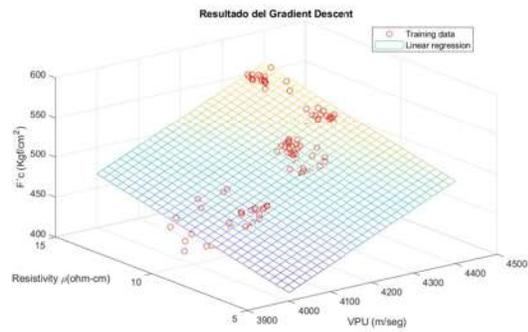


Figura 4.23: Hiperplano que representa la aproximación del modelo multivariable en el espacio.

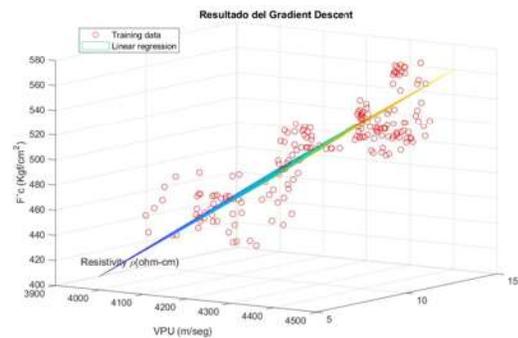


Figura 4.24: Hiperplano que generaliza el conjunto de datos.

La Figura (4.25) muestra la gráfica de convergencia para el gradiente de descenso en la

regresión multivariable y la Figura (4.26) muestra su respectivo tazón de error.

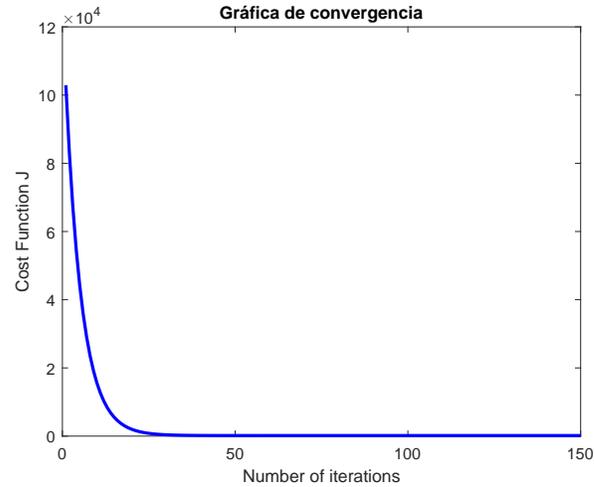


Figura 4.25: Numero de iteraciones necesarias.

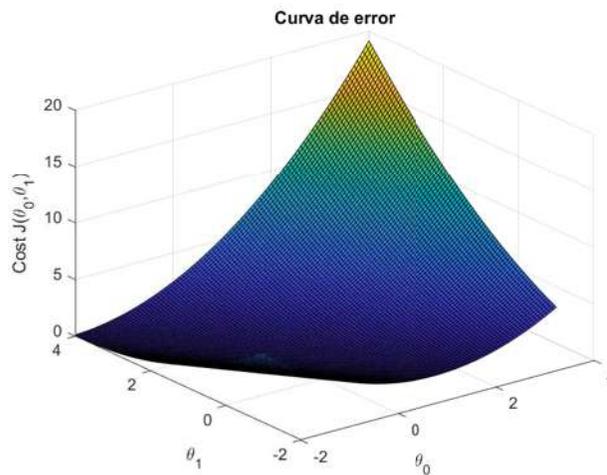


Figura 4.26: Tazón de error del gradiente de descenso.

### 4.4.3. SVR (Support Vector Regression)

#### Relación $Ft$ con $Re$ . Análisis con SVR

Existen técnicas de regresión en el como lo son las maquinas de soporte vectorial, las cuales están basadas en las maquinas de soporte para clasificación. En ésta sección es uti-

lizada la SVM (Support Vector Machine) como técnica de regresión, la cual establece la relación entre variables definidas, la base de SVM ha sido desarrollada por [37]. Recientemente, se ha utilizado para resolver la estimación de la regresión no lineal y la predicción de las series de tiempo introduciendo la función de pérdida insentiva ( $\epsilon$ ) de exactitud [38]. Como una breve introducción sobre cómo construir una SVM para un problema de regresión puede ser encontrada en las publicaciones de [39],[40],[41],[42].

Las máquinas de soporte vectorial (SVM) son un conjunto de métodos de aprendizaje supervisado que se utilizan para la clasificación, regresión y detección de valores atípicos. Las ventajas de éste método son

- Efectivo en espacios de altas dimensiones.
- Resulta efectivo en casos donde el número de dimensiones es mayor que el número de muestras.
- Utiliza un subconjunto de puntos de entrenamiento en la función de decisión (llamados vectores de apoyo), por lo que también es eficiente en la memoria.
- Es versátil ya que se pueden especificar diferentes kernels para la función de decisión o de costo. Se proporcionan kernels comunes, pero también es posible especificar kernels personalizados.

El método de la maquina de soporte vectorial puede extenderse para resolver problemas de regresión. Este método se llama regresión de soporte vectorial (SVR). El modelo producido por la clasificación de los vectores de apoyo depende sólo de un subconjunto de los datos de entrenamiento, porque la función de costo para construir el modelo no se preocupa por los puntos de entrenamiento que se encuentran más allá del margen. Análogamente, el modelo producido por la regresión de soporte vectorial depende sólo de un subconjunto de los datos de entrenamiento, porque la función de costo para construir el modelo ignora cualquier dato de capacitación cercano a la predicción del modelo.

Una máquina de soporte vectorial construye un hiperplano o conjunto de hiperplanos en un espacio dimensional alto o infinito, que puede utilizarse para la clasificación, la regresión u otras tareas. Intuitivamente, se logra una buena separación mediante el hiperplano que tiene la mayor distancia a los puntos de datos de entrenamiento más cercanos de cualquier clase (el llamado margen funcional), ya que en general cuanto mayor sea el margen menor será el error de generalización del clasificador [36].

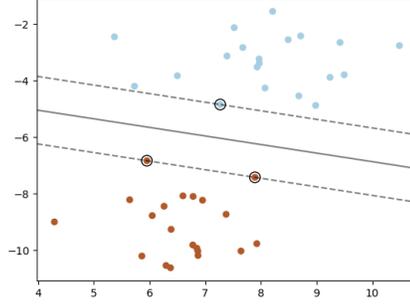


Figura 4.27: Desempeño de la SVM.

Dado un conjunto de vectores de entrenamiento  $x_i \in \mathbb{R}^p$ ,  $i=1, \dots, n$ , y un vector  $y \in \mathbb{R}^n$  la *SVR* resuelve el siguiente problema principal

$$\min_{w,b,\zeta,\zeta^*} \frac{1}{2} w^T w + C \sum_{i=1}^n (\zeta_i + \zeta_i^*) \quad (4.15)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} y_i - w^T \phi(x_i) - b &\leq \varepsilon + \zeta_i, \\ w^T \phi(x_i) + b - y_i &\leq \varepsilon + \zeta_i^*, \\ \zeta_i, \zeta_i^* &\geq 0, i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.16)$$

representado como

$$\min_{\alpha,\alpha^*} \frac{1}{2} (\alpha - \alpha^*)^T Q (\alpha - \alpha^*) + \varepsilon e^T (\alpha + \alpha^*) - y^T (\alpha - \alpha^*) \quad (4.17)$$

sujeto a

$$e^T (\alpha - \alpha^*) = 0 \quad (4.18)$$

$$0 \leq \alpha_i, \alpha_i^* \leq C, i = 1, \dots, n \quad (4.19)$$

donde  $e$  es el vector unitario,  $C > 0$  es el limite superior,  $Q$  es una matriz semidefinida positiva de tamaño  $n$  por  $n$ ,  $Q_{ij} \equiv K(x_i, x_j) = \phi(x_i)^T \phi(x_j)$  es el kernel. Aquí los vectores están implícitamente mapeados dentro de un gran espacio dimensional por la función  $\phi$

[43]. La función de decisión es:

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^*) K(x_i, x) + \rho \quad (4.20)$$

Los métodos de evaluación de los modelos consisten en realizar un train-test split del conjunto de datos, para el conjunto de entrenamiento se considera el 70% de los datos y para el conjunto de prueba el 30%. La métrica que mide la precisión en cada uno de los modelos generados es el  $R^2$ . Se probaron tres diferentes kernel para la *SVR*, el kernel *RBF* (Radial Basis function), el kernel lineal (linear Kernel), y el kernel polynomial (polynomial Kernel), para éste último kernel el orden 3 es considerado para evitar problemas de sobreajuste (overfitting). Por lo que algunos principales kernel usados en los *SVR* son

- Kernel lineal:  $\langle x, x' \rangle$
- Kernel polynomial:  $(\gamma \langle x, x' \rangle + r)^d$ .  $d$  está especificado para la palabra clave *degree*, por un *coef0*.
- Kernel *RBF*:  $\exp(-\gamma \|x - x'\|^2)$ .  $\gamma$  está especificado para la palabra clave *gamma*, la cual debe ser más grande que 0.
- Kernel Sigmoid:  $\tanh(\gamma \langle x, x' \rangle + r)$ , donde  $r$  está especificado para un hiperparámetro llamado *coef0*.

Ya se ha mencionado la descripción breve del desempeño lineal y polinomial por lo que ahora se describirá brevemente el objetivo de un kernel *RBF* **Kernel RBF**

El kernel de función de base radial (también conocido como kernel exponencial cuadrado), es un kernel estacionario. También se conoce como el kernel “exponencial cuadrado”. Está parametrizado por un parámetro de escala de longitud  $length\_scale > 0$ , que puede ser un escalar (variante isotrópica del kernel) o un vector con el mismo número de dimensiones que las entradas  $X$  (variante anisotrópica del kernel). El kernel viene dado por:

$$k(x_i, x_j) = e^{\left( \frac{-d}{2} \left( \frac{x_i}{length\_scale}, \frac{x_j}{length\_scale} \right)^2 \right)} \quad (4.21)$$

### Hiperparámetros del Kernel *RBF*

Cuando se entrena una SVM con el kernel de la función de base radial (*RBF*), se deben considerar dos hiperparámetros:  $C$  y  $\gamma$ . El hiperparámetro  $C$ , común a todos los kernels SVM, compensa la clasificación errónea de los ejemplos de entrenamiento con la simplicidad de la superficie de decisión. Una  $C$  baja hace que la superficie de decisión sea lisa,

mientras que una  $C$  alta tiene como objetivo clasificar correctamente todos los ejemplos de entrenamiento. La  $\gamma$  define cuánta influencia tiene un solo ejemplo de entrenamiento. Cuanto mayor es el valor de gamma, más cerca deben estar otros ejemplos para que se vean afectados. La elección correcta de  $C$  y  $\gamma$  es fundamental para el rendimiento del SVM. Intuitivamente, el parámetro  $\gamma$  define hasta dónde llega la influencia de un solo ejemplo de entrenamiento, con valores bajos que significan “lejos” y valores altos que significan “cerca”. Los parámetros  $\gamma$  pueden verse como el inverso del radio de influencia de las muestras seleccionadas por el modelo como vectores de apoyo. El parámetro  $C$  permite compensar la correcta clasificación de los ejemplos de formación con la maximización del margen de la función de decisión. Para valores mayores de  $C$ , se aceptará un margen menor si la función de decisión es mejor para clasificar correctamente todos los puntos de formación. Un valor de  $C$  más bajo fomentará un margen más grande, por lo tanto una función de decisión más simple, a costa de la precisión de la formación. En otras palabras,  $C$  se comporta como un parámetro de regularización en el SVM. Mientras que los modelos SVM utilizan  $C$  como parámetro de regularización, la mayoría de los demás estimadores utilizan alfa ( $\alpha$ ). La equivalencia exacta entre la cantidad de regularización de dos modelos depende de la función objetiva exacta optimizada por el modelo. Por ejemplo, cuando el estimador utilizado es para un modelo de regresión lineal, la relación entre ellos se da como

$$C = \frac{1}{\alpha} \quad (4.22)$$

La Figura (4.28) muestra la regresión con el kernel  $RBF$  sin la normalización de los datos.

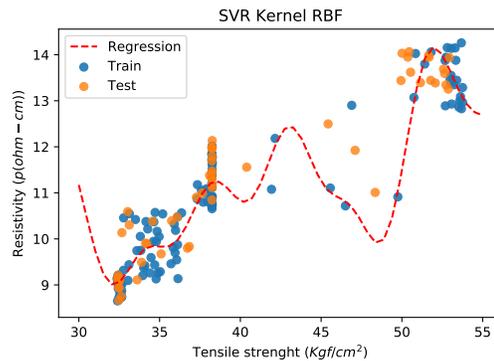


Figura 4.28: Desempeño del  $SVR$ .

Conjunto de entrenamiento  $R^2=0.9233$ , conjunto de prueba  $R^2=0.7912$ .

A partir de este punto se considera que la división de datos para todos los modelos en el presente trabajo se considera de 70% para el conjunto de entrenamiento y 30% para el conjunto de prueba. Una vez realizada la normalización de los datos se verifica de nuevo la aproximación del kernel *RBF* el cual se observa en la Figura (4.29).

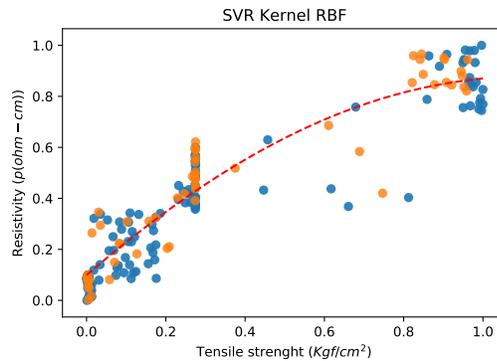


Figura 4.29: División del conjunto de datos en los *SVR* con kernel *RBF*.

Conjunto de entrenamiento  $R^2 = 0.8844$ , conjunto de prueba  $R^2 = 0.8832$ .

La Figura (4.29) muestra que una vez normalizados los datos el comportamiento de la línea de regresión es más uniforme comparada con la figura (4.28) que presenta mayores distorsiones en su trayectoria. Por ésta razón es recomendable realizar una normalización en los datos.

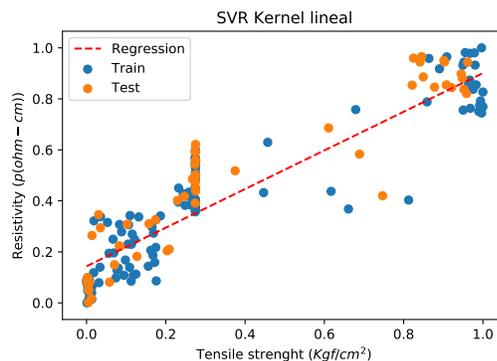


Figura 4.30: División del conjunto de datos en los *SVR* con kernel lineal.

Conjunto de entrenamiento  $R^2 = 0.8546$ , conjunto de prueba  $R^2 = 0.8266$ .

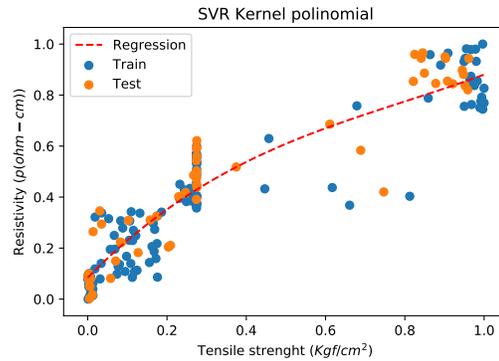


Figura 4.31: División del conjunto de datos en los *SVR* con kernel polinomial.

Conjunto de entrenamiento  $R^2 = 0.8908$ , conjunto de prueba  $R^2 = 0.8819$ .

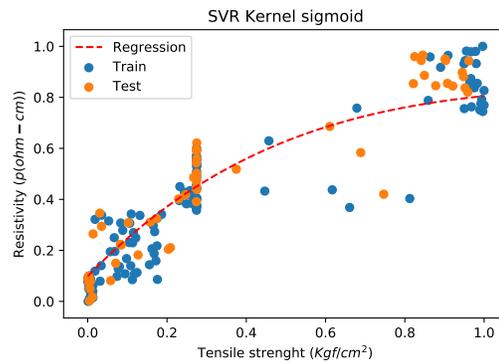


Figura 4.32: División del conjunto de datos en los *SVR* con kernel sigmoid.

Conjunto de entrenamiento  $R^2 = 0.8768$ , conjunto de prueba  $R^2 = 0.8704$ .

Para el conjunto de datos que se está analizando se observa que el kernel más homogéneo es el kernel *RBF*, donde se aprecia que los valores de aproximación de los conjuntos de entrenamiento y prueba tienen los valores más cercanos entre ellos, es decir la diferencia porcentual es la menor. Por esta razón se elige el kernel *RBF* para proceder con el proceso de validación, el cuál está basado en el método del cross-validation. La Figura (4.33) contiene las validaciones cruzadas para el kernel *RBF*, éste proceso computa 7 pliegues en el conjunto de datos.

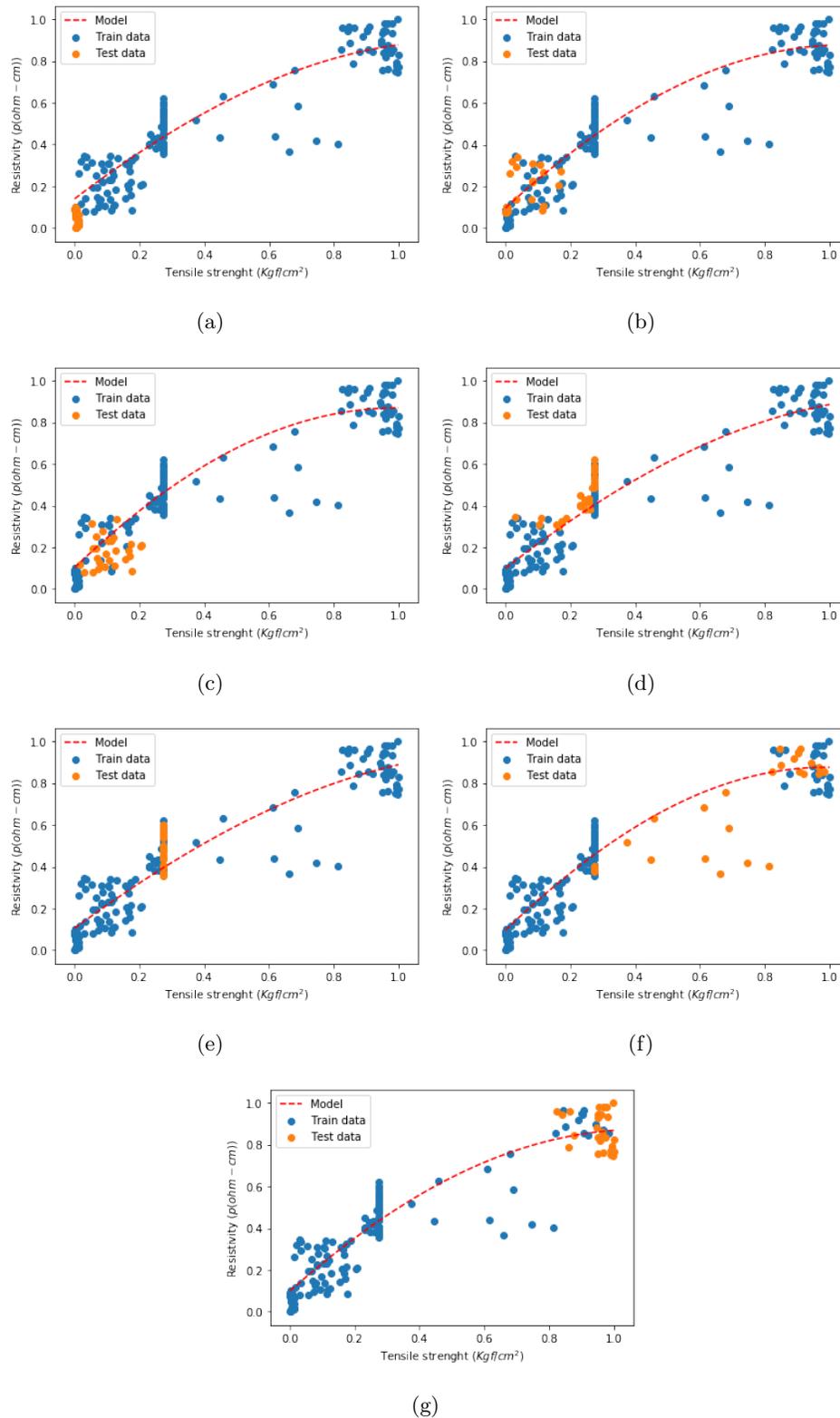


Figura 4.33: Desempeño de la CV. a)  $k = 1$  b)  $k = 2$  c)  $k = 3$  d)  $k = 4$  e)  $k = 5$  f)  $k = 6$  g)  $k = 7$ .

La tabla (4.2) contiene los resultados de la aproximación en los conjuntos de entrenamiento y prueba para cada uno de los pliegues del cross-validation.

K-fold	$R^2$ Train	$R^2$ Test
1	0.857	-10.620
2	0.885	-0.126
3	0.893	-1.862
1	0.899	-0.249
2	0.898	-1.283
3	0.911	-0.424
1	0.829	-0.109
Promedio	0.8817	-1.9390

Tabla 4.2: Aproximaciones de  $R^2$  en los pliegues del cross-validation.

Una vez entrenado el modelo y validado, es necesario construir el modelo final con todos los datos disponibles. La figura (4.34) muestra el ajuste del modelo una vez que fue entrenado.

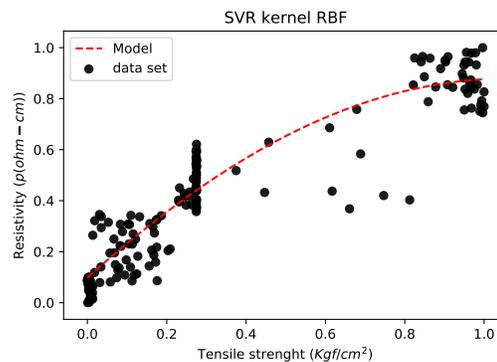


Figura 4.34: Desempeño final del modelo de regresión *SVR* con  $F_t$  y  $R_e$  como atributos.

Aproximación final del modelo  $R^2=0.8862$ .

#### 4.4.4. Árboles de regresión (Decision Tree Regressor)

En esta sección se utiliza una técnica de regresión denominada como árboles de regresión, en contraste con las técnicas clásicas de regresión para las cuales la relación entre la respuesta y los predictores está pre-especificada y la prueba se realiza para probar o

desaprobar la relación, los árboles de regresión no asumen tal relación. Las reglas se construyen dividiendo recursivamente los datos en grupos sucesivamente más pequeños [44]. Los árboles de regresión son métodos predictivos basados en la segmentación en donde el conjunto de datos se divide en diferentes categorías y a los datos que estén dentro de cada intervalo se les asigna directamente un valor establecido en lugar de una etiqueta perteneciente a la categoría donde este ubicado el dato lo cual es la principal diferencia con respecto a su contraparte los árboles de clasificación. El árbol de decisión se utiliza para ajustar una curva sinusoidal con adición de observación ruidosa. Como resultado, aprende regresiones lineales locales que se aproximan a la curva sinusoidal. Podemos ver que si la profundidad máxima del árbol (controlada por el hiperparámetro *max\_depth*) se establece demasiado alta, los árboles de decisión aprenden detalles demasiado finos de los datos de formación y aprenden del ruido, es decir, se sobreajustan.

El árbol de decisiones es una herramienta de toma de decisiones que utiliza una estructura de árbol similar a un diagrama de flujo o es un modelo de decisiones y todos sus posibles resultados. El algoritmo de árbol de decisión pertenece a la categoría de los algoritmos de aprendizaje supervisado. Funciona tanto para variables de salida continuas como categóricas.

#### **Parametros del árbol de regresión.**

Los criterios admitidos en este método son *MSE* para el error cuadrático medio, que es igual a la reducción de la varianza como criterio de selección de características y minimiza la pérdida de *L2* utilizando la media de cada nodo terminal, “*friedman\_mse*”, que utiliza el error cuadrático medio con la puntuación de mejora de Friedman para las posibles decisiones, y *MAE* para el error absoluto medio, que minimiza la pérdida de *L1* utilizando la mediana de cada nodo terminal. La máxima profundidad del árbol (*depth\_max*). Si no hay ninguna, entonces los nodos se expanden hasta que todas las hojas sean puras o hasta que todas las hojas contengan menos de el mínimo de muestras y muestras divididas.

El procedimiento para generar un árbol de regresión empieza partiendo la totalidad del intervalo de los datos de la variable independiente  $x$  en diferentes intervalos pequeños, su desempeño se muestra en la Figura (4.35).

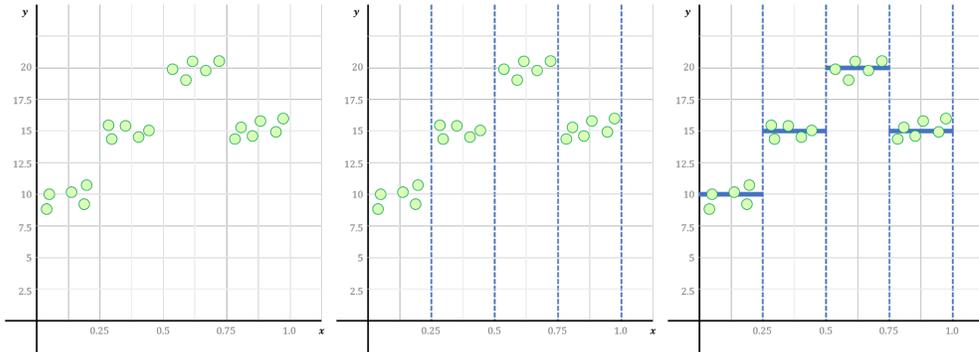


Figura 4.35: Desempeño del modelo de árbol de regresión (*“Fundamentos y construcción de modelos de predicción con Machine Learning, Anáhuac”*).

Y por lo tanto, los intervalos quedan divididos como sigue

Intervalo 1:  $0 \leq x < 0.25$

Intervalo 2:  $0.25 \leq x < 0.5$

Intervalo 3:  $0.5 \leq x < 0.75$

Intervalo 4:  $0.75 \leq x \leq 1.0$

Posterior a las observaciones realizadas se puede construir un conjunto de reglas basadas en el valor de  $x$  que tiene la variable y representarlas en forma de un diagrama como se muestra a continuación

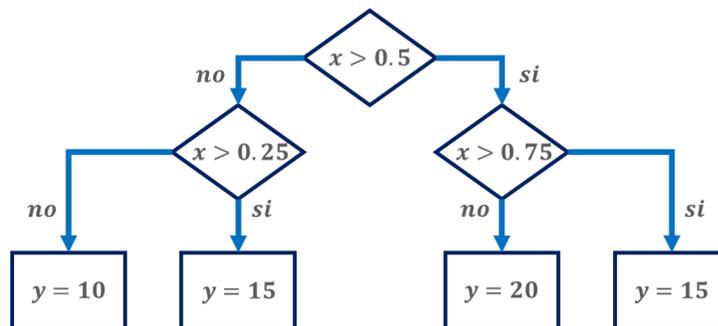


Figura 4.36: Diagrama del modelo de árbol de regresión (*“Fundamentos y construcción de modelos de predicción con Machine Learning, Anáhuac”*).

A éste diagrama se le conoce como árbol de regresión y se utiliza para asignarle un valor numérico a una entrada  $x$  de la cuál no se conocía su valor de salida.

### Relación $Ft$ con $Re$ . Árbol de regresión.

La Figura (4.37) muestra el modelo usando la técnica de árbol de regresión para la prueba de  $Re$  y  $Ft$ .

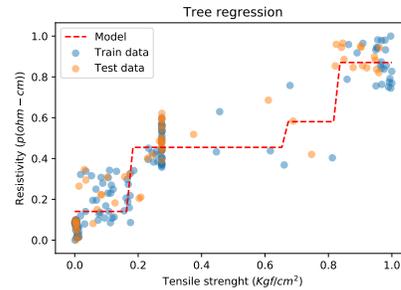


Figura 4.37: Desempeño del modelo de árbol de regresión.

Conjunto de entrenamiento  $R^2 = 0.9014$ .

Conjunto de prueba  $R^2 = 0.8384$ .

El algoritmo de arboles de regresión puede ser validado por el proceso de  $CV$ . La Figura (4.38) muestra la validación cruzada para éste modelo.

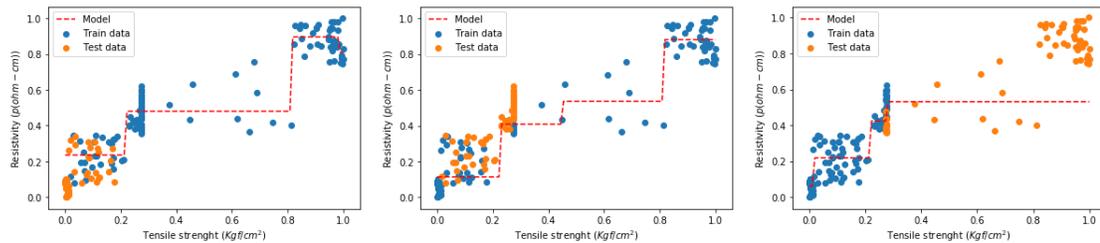


Figura 4.38: Cross validation en la técnica de arboles de regresión.

K-fold	$R^2$ Train	$R^2$ Test
1	0.900	-1.884
2	0.941	0.268
3	0.891	-0.733
Promedio	0.9105	-0.7830

Tabla 4.3:  $R^2$  para Cross validation en arboles de regresión.

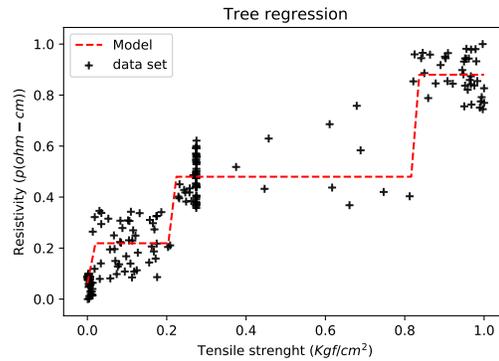


Figura 4.39: Modelo final del árbol de regresión.

La aproximación final del modelo es de  $R^2=0.9255$ , y la Figura (4.40) muestra el árbol de decisión del modelo en su versión normalizada.

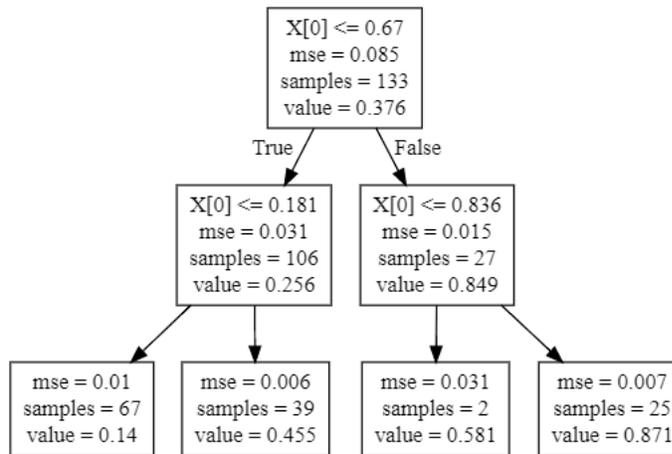


Figura 4.40: Árbol de decisión para predecir la  $Re$  en función del  $Ft$ .

## 4.5. Análisis de la mezcla control

Para la mezcla control se implementaran algoritmos de  $ML$ , pero primero debe conocerse las relaciones que existen entre los atributos de éste conjunto de datos. En la Figura (4.41) se muestra la representación en mapa de calor de la matriz de correlación para el conjunto de datos artificiales de la mezcla control y en la Figura (4.42) se muestra la distribución de los datos.



Figura 4.41: Matriz de correlación para el conjunto de datos artificiales de la mezcla control.

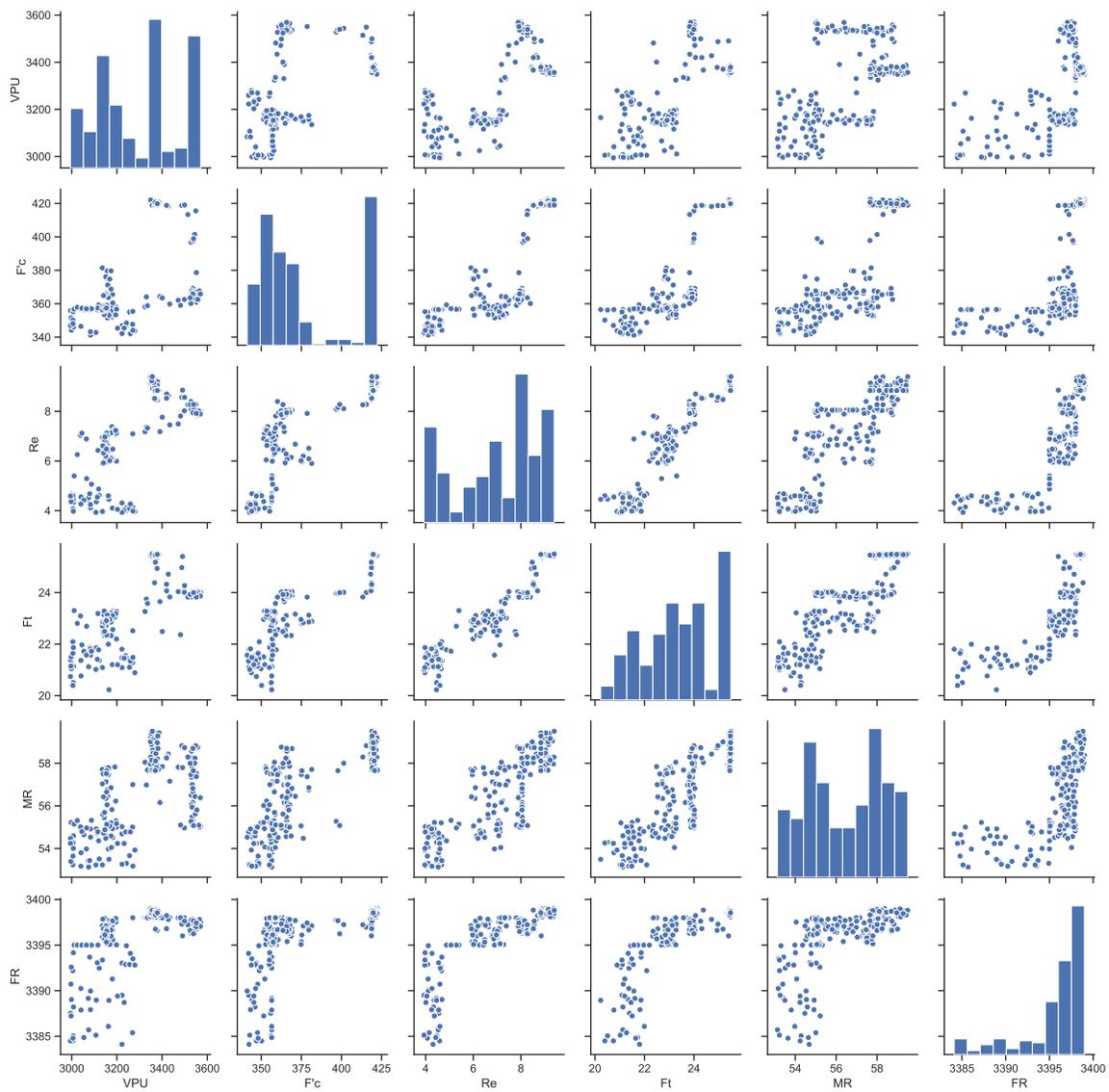


Figura 4.42: Distribución de los datos de las pruebas de laboratorio caso mezcla control.

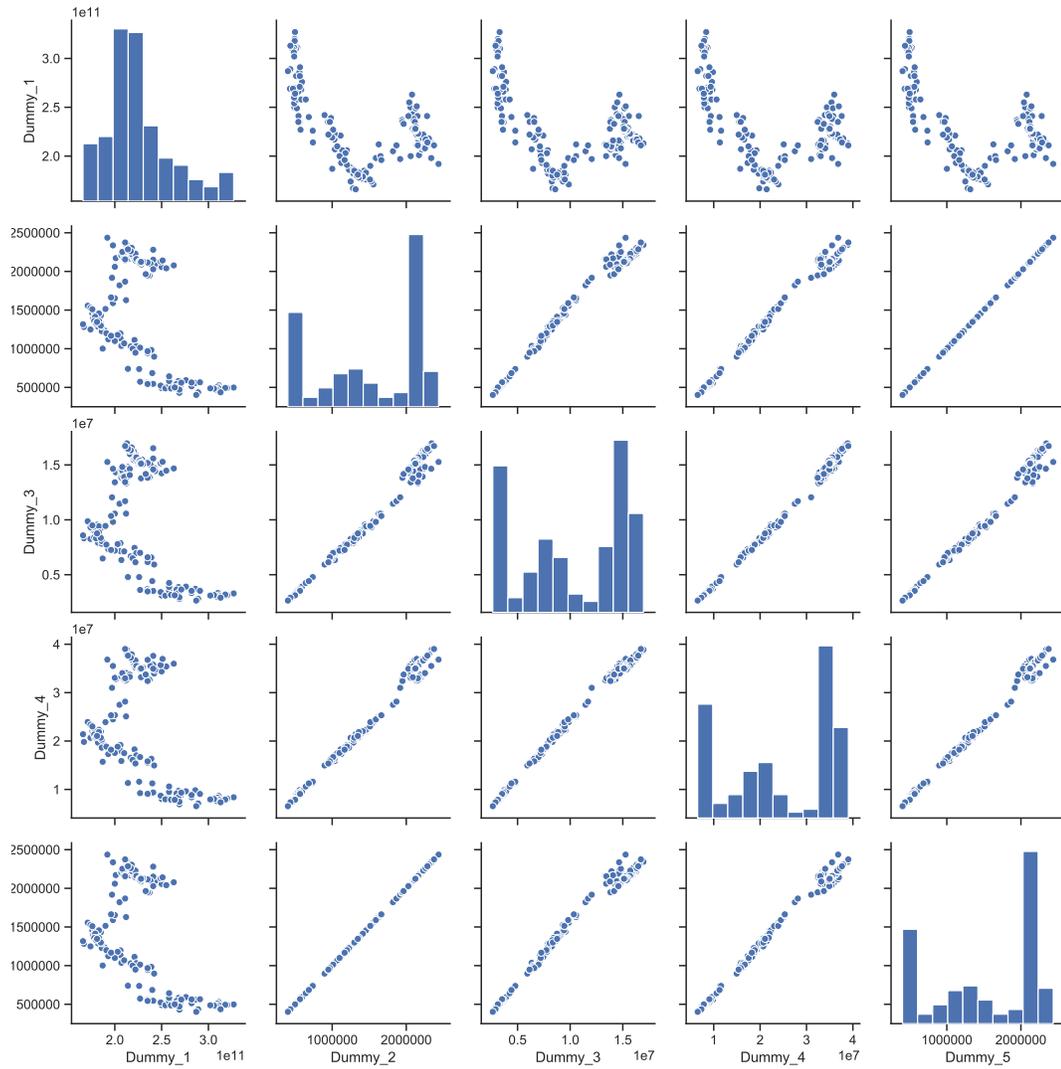


Figura 4.43: Distribución de los datos de las variables Dummy caso mezcla control.

Una vez más se observa que la relación más alta existente en este conjunto de datos es la relación entre la prueba de  $Re$  y  $Ft$ , para casos medianamente buenos puede ser considerada la relación entre la prueba de  $FR$  y la  $Re$  por lo que se implementaran algoritmos de  $ML$  a ésta relación para verificar las aproximaciones de los algoritmos de predicción en condiciones no optimas, comenzando por el gradiente de descenso.

### 4.5.1. Regresión lineal. Gradiente de descenso

En el siguiente segmento se muestran los resultados del análisis realizado para la regresión lineal considerando el enfoque del gradiente de descenso. Se comienza con la división de datos en entrenamiento y prueba.

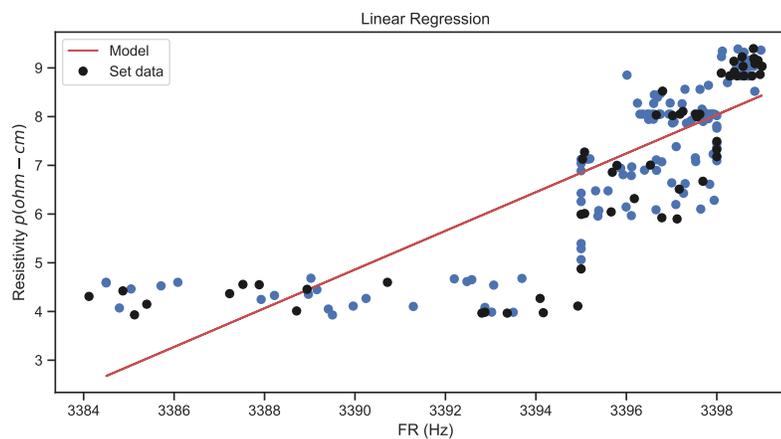


Figura 4.44: División de datos en entrenamiento y prueba para la Regresión lineal con  $Re$  y  $FR$  como atributos.

Conjunto de entrenamiento  $R^2 = 0.6947$ , conjunto de prueba  $R^2 = 0.6634$ .

Se procede con el proceso de cross-validation para la validación del conjunto de datos.

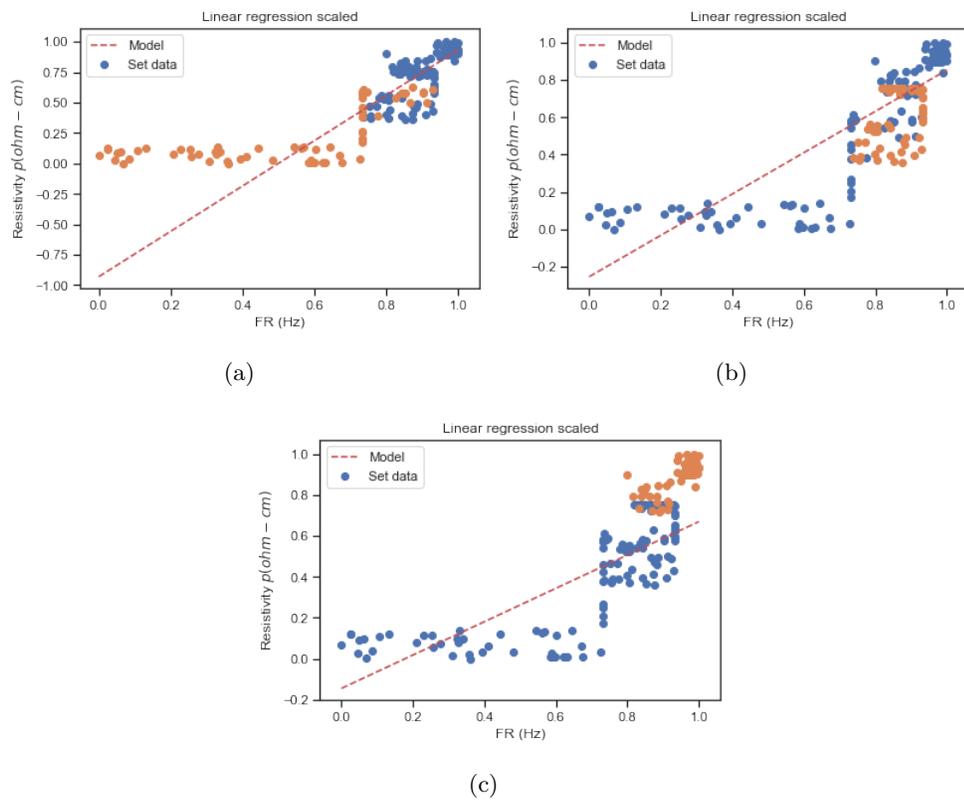


Figura 4.45: Desempeño de la  $CV$  en la regresión lineal con  $Re$  y  $FR$  como atributos. a)  $k = 1$  b)  $k = 2$  c)  $k = 3$ .

<b>K-fold</b>	$R^2$ Train	$R^2$ Test
1	0.492	-2.786
2	0.740	-0.214
3	0.627	-11.826
Promedio	0.6195	-4.9418

Tabla 4.4:  $R^2$  para los conjuntos de entrenamiento y prueba para cada pliegue en regresión lineal.

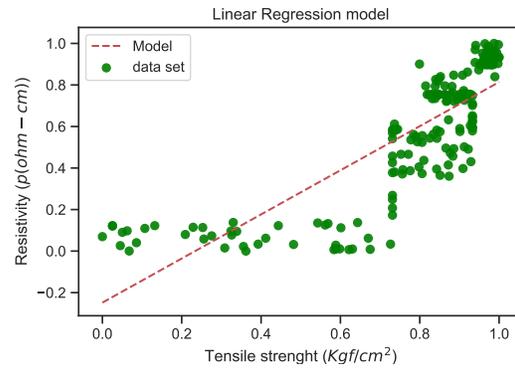


Figura 4.46: Desempeño del modelo final de regresión lineal con  $Re$  y  $FR$  como atributos.

$$R^2 = 0.6866$$

#### 4.5.2. SVR (Support Vector Regression)

La Figura (4.47) muestra la regresión con el kernel  $RBF$  sin la normalización de los datos.

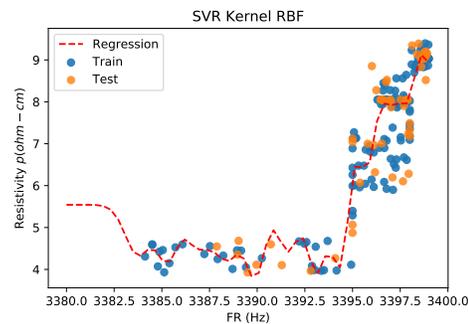


Figura 4.47: Desempeño de la  $SVR$  con la mezcla control.

Conjunto de entrenamiento  $R^2 = 0.8804$ , conjunto de prueba  $R^2 = 0.8357$ .

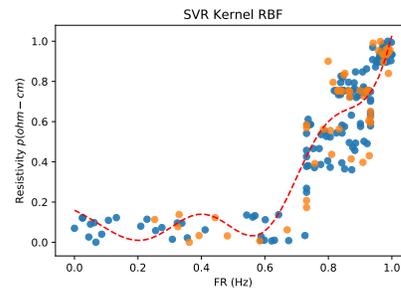


Figura 4.48: Splits en la Regresión *SVR* Kernel *RBF*.  
 Conjunto de entrenamiento  $R^2=0.8641$ , conjunto de prueba  $R^2=0.8223$ .

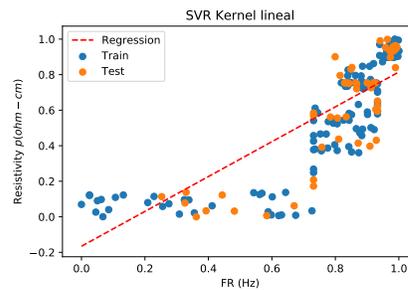


Figura 4.49: Splits en la Regresión *SVR* Kernel lineal.  
 Conjunto de entrenamiento  $R^2=0.6777$ , conjunto de prueba  $R^2=0.6676$ .

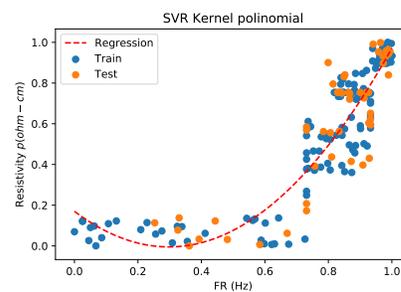


Figura 4.50: Splits en la Regresión *SVR* Kernel polinomial.  
 Conjunto de entrenamiento  $R^2=0.8471$ , conjunto de prueba  $R^2=0.7629$ .

La Figura (4.51) muestra las validaciones cruzadas para el kernel *RBF* ya que fue el que obtuvo mejor comportamiento en los modelos generados, para ésta regresión un número de 7 validaciones fueron computadas.

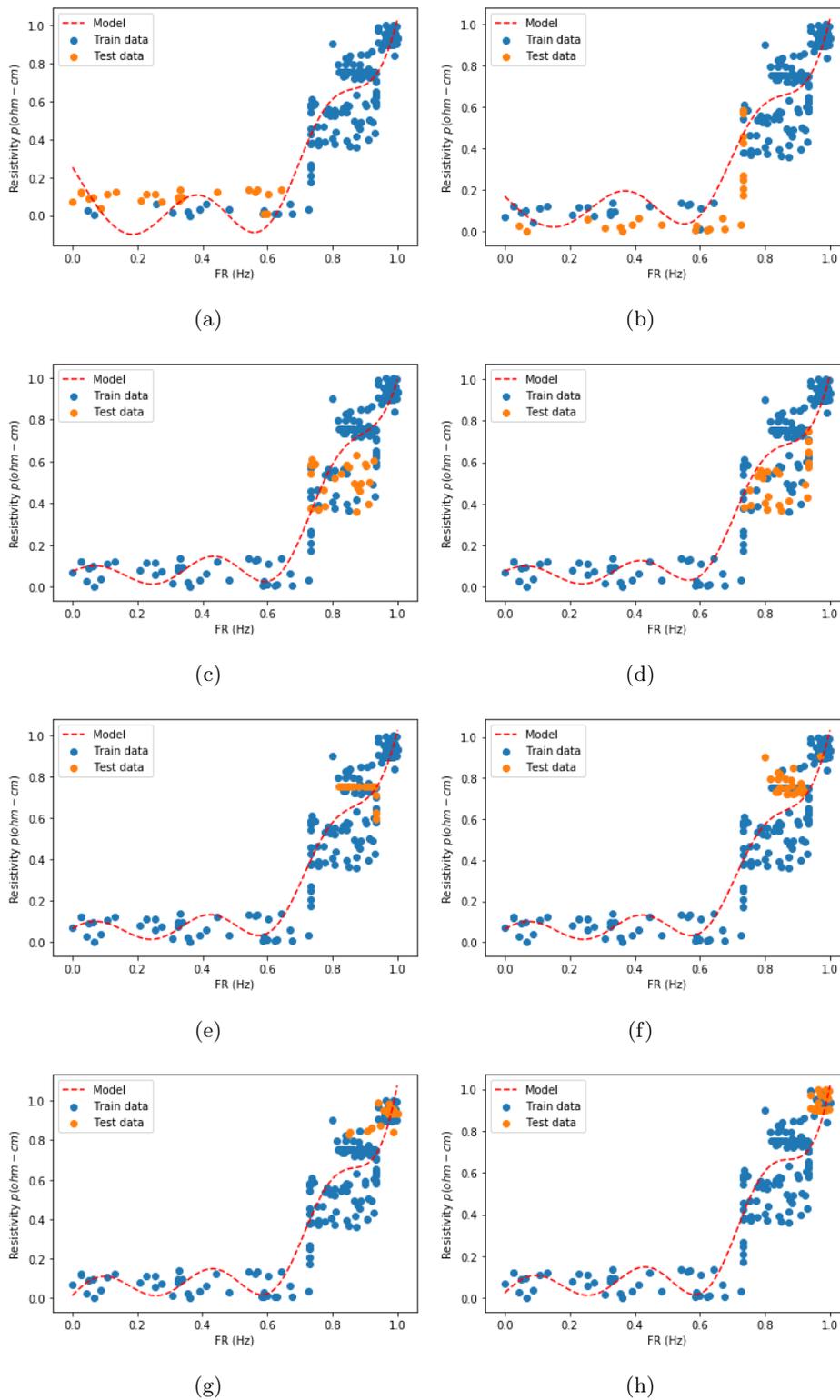


Figura 4.51: Desempeño de la  $CV$ . a)  $k = 1$  b)  $k = 2$  c)  $k = 3$  d)  $k = 4$  e)  $k = 5$  f)  $k = 6$  g)  $k = 7$  h)  $k = 8$ .

K-fold	$R^2$ Train	$R^2$ Test
1	0.793	-11.768
2	0.825	0.116
3	0.898	-4.454
1	0.899	-1.598
2	0.864	-3.300
3	0.871	-5.871
1	0.846	-5.319
1	0.840	-8.968
Promedio	0.8532	-5.1452

Tabla 4.5:  $R^2$  para los conjuntos de entrenamiento y prueba para cada pliegue en *RBF*.

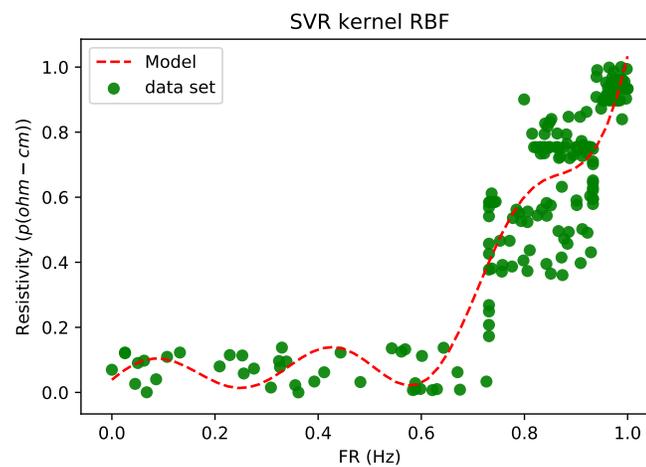


Figura 4.52: Desempeño final del modelo de regresión *SVR* con  $Ft$  y  $Re$  como atributos. La aproximación final es de  $R^2=0.8863$

Se puede concluir que aunque la relación inicial no ha sido tan fuerte entre las variables analizadas existen modelos con la capacidad de encontrar un patrón de una manera óptima y generar modelos predictivos satisfactorios.

### 4.5.3. Árboles de regresión

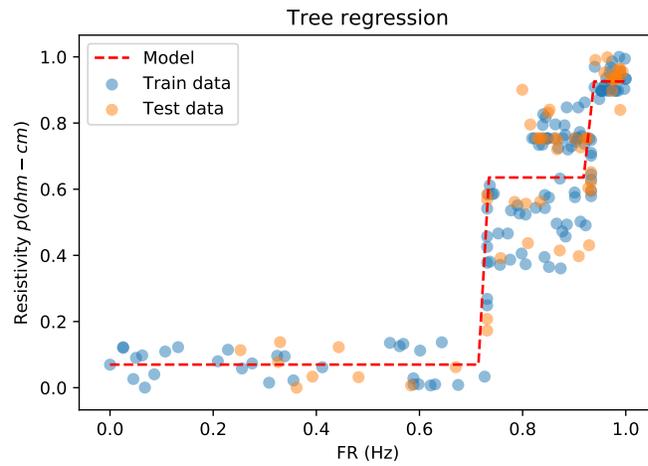


Figura 4.53: Diagrama del modelo de arbol de regresión.

Conjunto de entrenamiento  $R^2= 0.8808$ .

Conjunto de prueba  $R^2=0.8551$ .

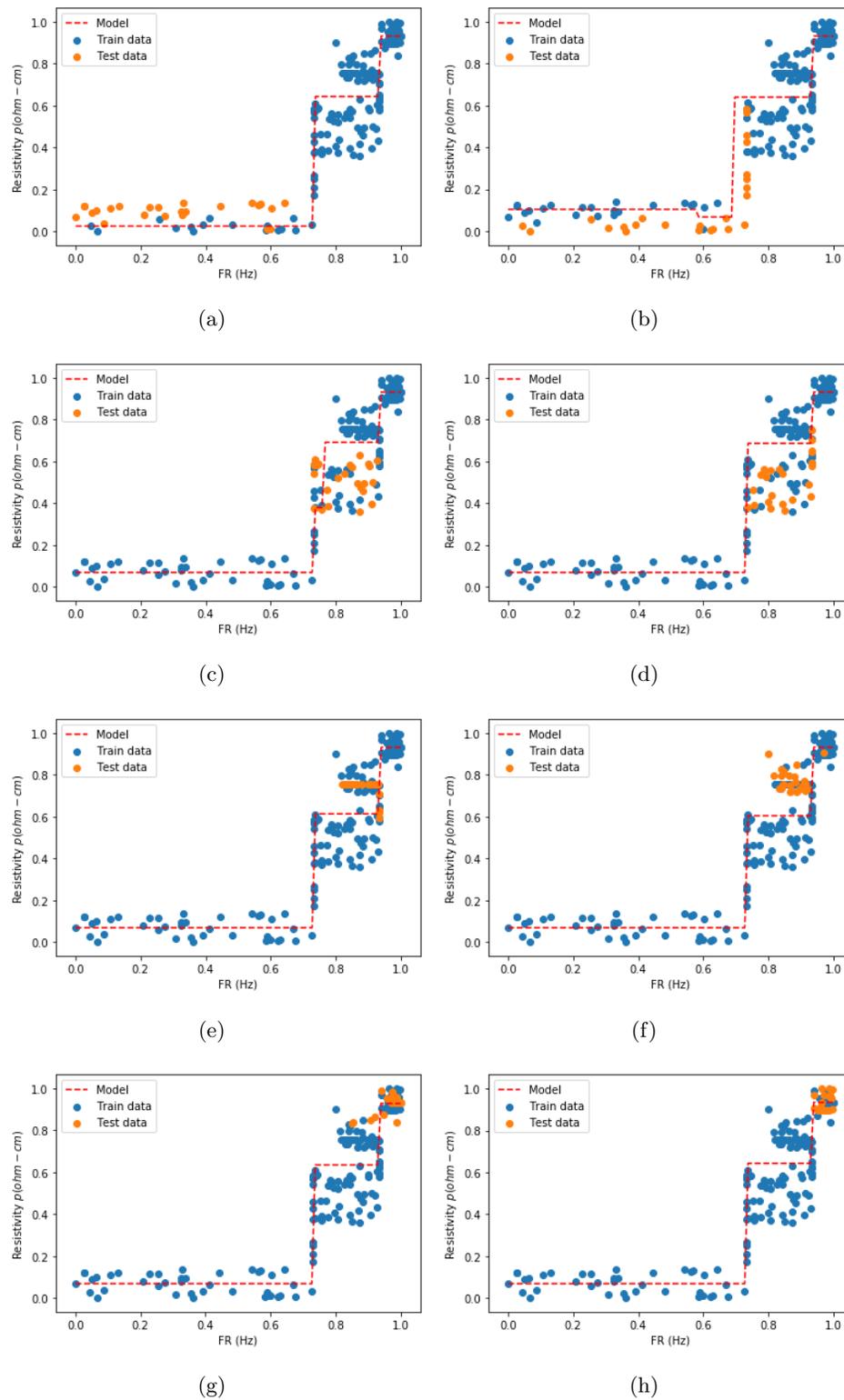


Figura 4.54: Desempeño de la  $CV$  en arboles de regresión. a)  $k = 1$  b)  $k = 2$  c)  $k = 3$  d)  $k = 4$  e)  $k = 5$  f)  $k = 6$  g)  $k = 7$  h)  $k = 8$ .

K-fold	$R^2$ Train	$R^2$ Test
1	0.820	-4.127
2	0.832	-0.500
3	0.919	-4.228
1	0.917	-2.652
2	0.888	-6.816
3	0.897	-9.395
1	0.862	-3.147
1	0.851	-0.024
Promedio	0.8730	-3.8611

Tabla 4.6:  $R^2$  para Cross validation en arboles de regresión

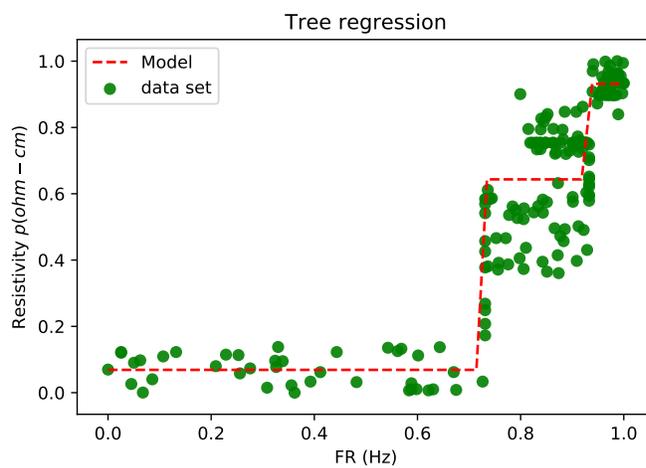


Figura 4.55: Desempeño final del modelo de árbol de regresión.

La aproximación final es de 0.8753.

La Figura (4.56) muestra el árbol de decisión del modelo en su versión normalizada.

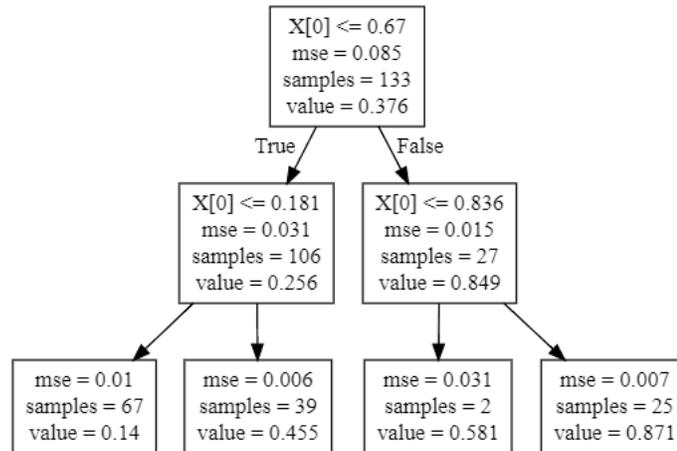


Figura 4.56: Árbol de decisión para predecir la *Re* en función del *FR*.

## 4.6. Variables ficticias (Variables Dummy)

Cuando se construyen modelos predictivos los métodos usados asumen que los datos son cuantitativos o con valor numérico aunque en realidad los datos pueden venir en forma categórica, por ejemplo, estado civil, genero, entre otros. El científico de datos debe transformar los datos categóricos a numéricos para permitir a los algoritmos manejarlos fácilmente, recordemos que los modelos representan una función matemática. Para resolver esta situación se tiene un concepto llamado variables ficticias o variables Dummy. Una variable Dummy es una variable artificial que representa una variable categórica de dos o más categorías. En este proceso una categoría que se encuentra mostrada en una columna se desagrupa y se generan 2 columnas, si es el caso. Entonces, para cada uno de estos está agregando una columna nueva. Aquí hay que tener mucho cuidado, porque hay una especie de trampa, o problema al utilizar todas las columnas, la trampa de las variables ficticias es un escenario en el cual dos o más variables independientes son multicolineales, es decir, con una de las variables se puede predecir la otra. La consecuencia de utilizar estas variables es que el modelo no puede utilizar correctamente esta información, si lo queremos ver de una manera simple es como que si se contrarrestaran una con la otra. Afortunadamente hay una forma de arreglar esto, y esto es quitando una de las variables recién creadas, por ejemplo, considerando un problema de estado civil donde se tienen tres tipos: el divorciado, el casado o el soltero. Entonces, la forma de arreglarlo sería nada más agregando dos, por ejemplo, se puede quitar divorciado y nada más quedaría casado o soltero. Suponiendo que hay un usuario que no tiene ninguno de estos dos elementos, que tiene un cero en la

columna casado y cero en la columna soltero, entonces, se puede intuir que en realidad ese usuario debe estar divorciado porque la ausencia de información en este caso también es información. A continuación se muestra el encabezado del conjunto de datos artificiales que proviene de la mezcla con adiciones con el fin de observar como está conformado en cada una de sus columnas.

	VPU	F'c	Re	Ft	MR	FR	EDAD DE PRUEBA	CRITERIO DE EVALUACIÓN Re	CRITERIO DE EVALUACIÓN VPU	% DE RESISTENCIA COMPRESIÓN	RESULTADO
0	4067.814756	450.956790	8.732488	32.575873	53.137102	<a href="#">3386.877179</a>	40 días	ALTO RIESGO	DURABLE	128.844797	SI CUMPLE
1	4107.695082	452.204461	8.665177	32.475459	53.883876	<a href="#">3394.503241</a>	40 días	ALTO RIESGO	DURABLE	129.201274	SI CUMPLE
2	4104.623473	460.668327	8.822354	32.542833	54.939407	<a href="#">3389.278795</a>	40 días	ALTO RIESGO	DURABLE	131.619522	SI CUMPLE
3	<a href="#">4119.875559</a>	447.762528	8.653547	32.397472	54.657192	<a href="#">3394.398015</a>	40 días	ALTO RIESGO	DURABLE	127.932151	SI CUMPLE
4	4083.147522	448.443189	8.820058	32.611839	53.266651	<a href="#">3391.781796</a>	40 días	ALTO RIESGO	DURABLE	128.126626	SI CUMPLE

1	datos.shape
---	-------------

(190, 11)

Figura 4.57: Variables analizadas

El tamaño de éste conjunto de datos es de 190 x 11, i.e., 190 filas y 11 columnas. Se observa que no todas las variables o atributos son numéricos, para verificar esta afirmación se busca el tipo de datos de cada columna los cuales se muestran en la siguiente Tabla

Variable	data type
VPU	<i>float64</i>
F'c	<i>float64</i>
Re	<i>float64</i>
Ft	<i>float64</i>
MR	<i>float64</i>
FR	<i>float64</i>
EDAD DE PRUEBA	<i>object</i>
CRITERIO DE EVALUACIÓN Re	<i>object</i>
CRITERIO DE EVALUACIÓN VPU	<i>object</i>
% DE RESISTENCIA COMPRESIÓN	<i>float64</i>
RESULTADO	<i>object</i>

Tabla 4.7: Tipos de variables

Donde los elementos *float64* corresponden a elementos flotantes que contienen números decimales, los tipos *object* corresponden a variables categóricas y son las variables adecuadas para ser transformadas en variables Dummy. Ahora se preparan los datos generando

variables Dummy para representar las columnas que tengan variables donde existan dos o más categorías diferentes y que no sean numéricas, quedando de la siguiente forma.

	VPU	Fc	Re	Ft	MR	FR	% DE RESISTENCIA COMPRESIÓN	EDAD DE PRUEBA_120 días	EDAD DE PRUEBA_40 días	EDAD DE PRUEBA_60 días	EDAD DE PRUEBA_90 días	CRITERIO DE EVALUACIÓN Re ALTO RIESGO
0	4067.814756	450.956790	8.732488	32.575873	53.137102	<a href="#">3386.877179</a>	128.844797	0	1	0	0	1
1	4107.695082	452.204461	8.665177	32.475459	53.883876	<a href="#">3394.503241</a>	129.201274	0	1	0	0	1
2	4104.623473	460.668327	8.822354	32.542833	54.939407	<a href="#">3389.278795</a>	131.619522	0	1	0	0	1
3	<a href="#">4119.875559</a>	447.762528	8.653547	32.397472	54.657192	<a href="#">3394.398015</a>	127.932151	0	1	0	0	1
4	4083.147522	448.443189	8.820058	32.611839	53.266651	<a href="#">3391.781796</a>	128.126626	0	1	0	0	1

CRITERIO DE EVALUACIÓN Re RIESGO MODERADO	CRITERIO DE EVALUACIÓN VPU_ALTA	CRITERIO DE EVALUACIÓN VPU_DURABLE	RESULTADO SI CUMPLE
0	0	1	1
0	0	1	1
0	0	1	1
0	0	1	1
0	0	1	1

Figura 4.58: Variables Dummy.

Se observa que ahora el tamaño del nuevo conjunto de datos es de 190 x 18, i.e., 7 columnas más comparada con los datos anteriores, éstas 5 columnas nuevas corresponden a las variables nuevas que surgen de las categorías que tenía cada una de las columnas con el tipo de datos *object*. Ahora si se visualiza de nuevo el tipo de datos para éste conjunto de información se ve que todos los datos son de tipo numérico ya que el tipo *unit8* es un tipo de datos entero numérico, y los nuevos tipos de datos se muestran en la siguiente Tabla.

Variable	data type
VPU	<i>float64</i>
F'c	<i>float64</i>
Re	<i>float64</i>
Ft	<i>float64</i>
MR	<i>float64</i>
FR	<i>float64</i>
PORCENTAJE DE RESISTENCIA COMPRESIÓN	<i>float64</i>
EDAD DE PRUEBA 120 días	<i>uint8</i>
EDAD DE PRUEBA 40 días	<i>uint8</i>
EDAD DE PRUEBA 60 días	<i>uint8</i>
EDAD DE PRUEBA 90 días	<i>uint8</i>
CRITERIO DE EVALUACIÓN Re ALTO RIESGO	<i>uint8</i>
CRITERIO DE EVALUACIÓN Re RIESGO MODERADO	<i>uint8</i>
CRITERIO DE EVALUACIÓN VPU ALTA	<i>uint8</i>
CRITERIO DE EVALUACIÓN VPU DURABLE	<i>uint8</i>
RESULTADO SI CUMPLE	<i>uint8</i>

Tabla 4.8: Tipos de datos de las variables dummy.

Una vez que se trabaja con las variables categóricas y se generan variables nuevas como lo son las variables dummy, es posible realizar otro tipo de análisis con *ML*, considerando problemas de clasificación o problemas de regresión donde las variables dummy son variables importantes para el desarrollo de éste tipo de algoritmos y así buscar alguna aproximación adecuada, ya que éstas variables pueden brindar información adicional para conseguir modelos mejor ajustados. Básicamente el proceso de seleccionar variables o características más relevantes de un conjunto de datos se puede hacer de las siguientes tres formas:

- Métodos de filtrado: Son aquellos que utilizan medidas estadísticas para ordenar las variables por su significancia, éstas utilizan medidas estadísticas para poder determinar qué variables son buenas o qué variables son malas, de esta forma podemos tomar las variables que son buenas y utilizarlas para nuestro modelo.
- Métodos de envoltura: Son aquellos que utilizan modelos predictivos par determinar la calidad de las variables seleccionadas no a través de una medida estadística sino a través de modelos predictivos, también conocidas como Wrapping.

- Los métodos integrados, son aquellos que se incorporan al proceso de selección o de entrenamiento, en el modelo predictivo. Este método se aplicó en los árboles de decisión. Los árboles de decisión iban tomando decisiones binarias “sí” o “no”, dependiendo de una variable. Las variables que fueron seleccionadas en el proceso de construir el árbol fueron seleccionadas a través de un método integrado que es el árbol de decisiones.

Hasta el momento la selección de variables se realizó por el método del coeficiente de determinación que es un método de filtrado, pero como se mencionó existen otros métodos como lo es el método de envoltura o método de wrapping para la selección de las mejores variables, el proceso de éste método se menciona brevemente en la siguiente sección.

#### 4.6.1. Selección de características relevantes

Cuando un conjunto de datos tiene demasiadas características, algunas características pueden ser irrelevantes para la variable independiente. Entonces, se utiliza la selección de características para eliminar cualquier tipo de características innecesarias, irrelevantes o redundantes del conjunto de datos.

Las características irrelevantes no ayudarán a mejorar la precisión del modelo, en realidad podrían reducir la precisión de este, por lo que no es de interés conservarlas en el modelo de aprendizaje automático. Una vez ya tratadas las variables categóricas, queda un conjunto de datos con 18 variables. Seguramente algunas de ellas son completamente irrelevantes, es decir, no aportan nada o casi nada a los modelos predictivos. Estas variables irrelevantes pueden dar problemas a las estimaciones calculadas. Además, las variables irrelevantes:

- Desperdician memoria RAM.
- Actúan como ruido.
- Aumentan el tiempo de entrenamiento.

Una solución a este problema es la selección de características relevantes. Que es básicamente el proceso de seleccionar las variables o características más relevantes de un conjunto de datos.

#### Métodos de envoltura (Wrapping)

Los métodos de envoltura generalmente se realizan de una manera similar a prueba y error, y de una manera iterativa, es decir, se está probando constantemente con modelos

nuevos si funcionan o no funcionan, esto lo hace incorporando o quitando variables en cada uno de los ciclos de prueba y error, a esto se le conoce como una selección paso a paso o step ways. Generalmente hay una confusión a la hora de manejar estos métodos y se confunden mucho con un problema de reducción de dimensionalidad. Aunque ambas técnicas buscan reducir el número de características de forma de que utilizamos menos variables, lo que hace la reducción de la dimensionalidad es que transforma el conjunto completo de datos. En este caso, la selección del método por envoltura, lo que hace es eliminar información de nuestro conjunto de datos y de esa forma se reduce. Para poder hacer métodos de envoltura existen dos formas principales. La primera de ellas es la selección hacia adelante (forward selection), dónde su proceso se muestra en el siguiente diagrama.

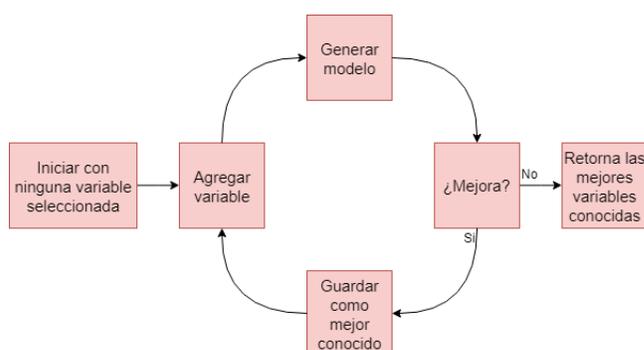


Figura 4.59: Diagrama del forward selection.

Primero se inicia con una variable, se selecciona una variable al azar y se construye un modelo predictivo y luego lo se evalúa. Una vez que se tiene un modelo de una variable se procede a agregar una segunda variable, se genera el modelo y se verifica: éste nuevo modelo es mejor al anterior? Si sí es mejor se considera que esa variable es relevante porque aportó al problema. Entonces, se guarda como el nuevo mejor conocido. Se irá agregando otra variable, y se genera un nuevo modelo y si ese modelo mejora al que se tenía, al que era el conocido como el mejor, se vuelve a reemplazar, efectivamente agregando una nueva variable. Este proceso se va a ir repitiendo hasta que el nuevo modelo ya no mejora, es decir, ya encontramos las mejores variables conocidas, al menos bajo esta técnica.

El backward selection es algo muy parecido pero al revés: parte de un modelo que tiene todas las variables y va eliminando variable por variable hasta que deje de mejorar. Ambos tienen su aplicabilidad y ambos son muy importantes. Hay una tercer técnica que es cuando se hace forward selection, o se empieza a agregar variables hacia adelante, y luego si ya no mejora se procede a quitar variables, este proceso se muestra en el siguiente diagrama.

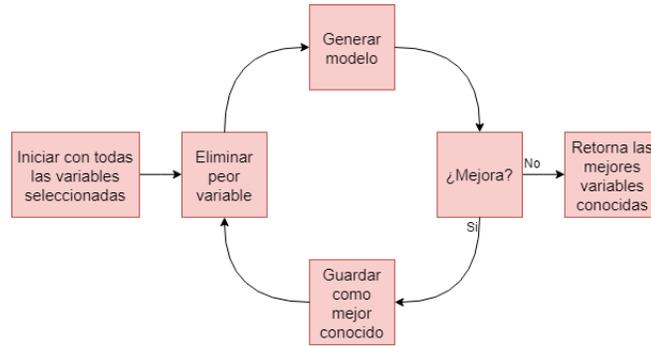


Figura 4.60: Diagrama del backward selection

Todos estos métodos son muy importantes y se utilizan en diferentes software. Es importante recordar que para acelerar un poco el entrenamiento lo que se hace es, escalar los datos. Los datos se escalan con el fin de que estén en un rango entre 0 y 1.

**Trampa de las variables ficticias.**

La trampa de las variables ficticias es un escenario en el cual dos o mas variables independientes son multicolineales, en términos más sencillos, es cuando con una variable se puede predecir la o las otras. La consecuencia de utilizar variables multicolineales es que el modelo generado no pueda utilizar correctamente esa información. Para evitar caer en la trampa de la variable ficticia, una regla de dedo es utilizar una variable ficticia menos que el número de categorías. Eliminando la primera de las variables se tiene

	VPU	Fc	Re	Ft	MR	FR	% DE RESISTENCIA COMPRESIÓN	y_VPU	y_Resistividad	EDAD DE PRUEBA_40 días	EDAD DE PRUEBA_60 días	EDAD DE PRUEBA_90 días
0	4067.814756	450.956790	8.732488	32.575873	53.137102	<a href="#">3386.877179</a>	128.844797	0	0	1	0	0
1	4107.695082	452.204461	8.665177	32.475459	53.883876	<a href="#">3394.503241</a>	129.201274	0	0	1	0	0
2	4104.623473	460.668327	8.822354	32.542833	54.939407	<a href="#">3389.278795</a>	131.619522	0	0	1	0	0
3	<a href="#">4119.875559</a>	447.762528	8.653547	32.397472	54.657192	<a href="#">3394.398015</a>	127.932151	0	0	1	0	0
4	4083.147522	448.443189	8.820058	32.611839	53.266651	<a href="#">3391.781796</a>	128.126626	0	0	1	0	0

CRITERIO DE EVALUACIÓN Re RIESGO MODERADO	CRITERIO DE EVALUACIÓN VPU_DURABLE
0	1
0	1
0	1
0	1
0	1

Figura 4.61: Variables Dummy sin la primera variable de cada grupo.

## Curvas ROC

Curva de Característica Operativa del Receptor, o Curve The Receiver Operating Characteristic Curve, mejor conocida como ROC, es un método adicional para medir la calidad de un modelo de clasificación binario. Esta curva permitirá identificar la relación entre la sensibilidad del modelo para diagnosticar los resultados positivos y las falsas alarmas. El área bajo esta curva nos da información sobre el desempeño del modelo, entre mayor sea el área mejor el modelo. Para graficarlo se contrasta el TPR contra FPR para cada probabilidad de predicción:

### Recall o true positive rate (TPR)

Porcentaje de casos positivos correctamente clasificados (Si y era Si)

$$TPR = \frac{TP}{TP + FN} \quad (4.23)$$

### Fall-out o false positive rate (FPR)

Porcentaje de casos negativos incorrectamente clasificados (Si y era No)

$$FPR = \frac{FP}{FP + TN} \quad (4.24)$$

Después se calcula el área bajo la curva, y entre más área mejor el modelo. Ahora mediante el proceso de envoltura se realiza el proceso de calcular cuales son las mejores variables para calcular 2 posibles salidas.

La aplicación de estas técnicas para el presente trabajo es primeramente en el problema de regresión donde nuestro interés es generar un modelo que permita conocer cuales son las características que ayudan a pronosticar la durabilidad bajo los criterios de la prueba de velocidad de pulso ultrasónico, y segundo, generar un modelo que pronostique el riesgo de corrosión de un concreto bajo el criterio de la prueba de *Re* trabajando la mezcla que contiene las adiciones.

Una vez realizado el pre-procesamiento de datos se recomienda ampliamente equilibrar las diferentes clases del conjunto de datos, i.e., que las condiciones positivas y negativas sean iguales, ya que de lo contrario se estaría engañando al algoritmo ya que la proporción de los datos no es la misma. Para este análisis existen métodos para el empatamiento de datos como lo es la técnica de **Resampling**.

### Undersampling vs Oversampling.

El submuestreo consiste en eliminar registros aleatorios de la clase mayoritaria, lo que

puede causar pérdida de información. Mientras que el sobremuestreo es duplicar registros aleatorios de la clase minoritaria, lo que puede causar un sobreajuste.

El desempeño de este proceso se muestra en la siguiente Figura.

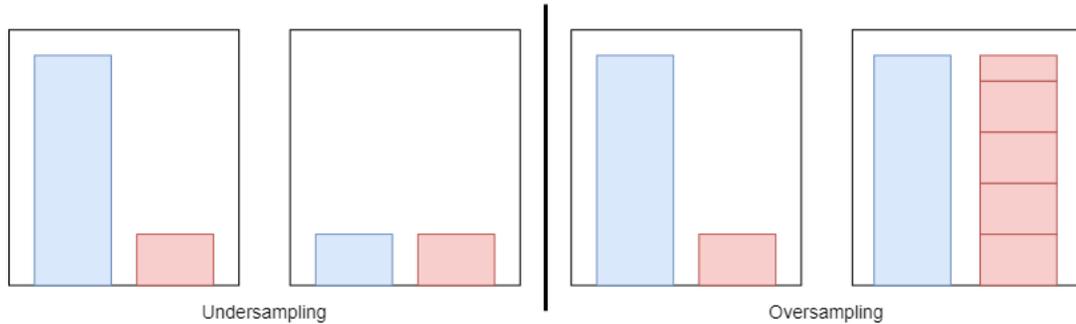


Figura 4.62: Undersampling vs Oversampling.

La técnica de undersampling, busca equilibrar los “sí” y los “no” en el conjunto de datos. En este proceso se toma una muestra, ¿de qué tamaño? del tamaño del conjunto de datos “sí”. Una vez realizado esto esta muestra se une con ella misma para poder tener un conjunto de datos ya completo, apoyándose con alguna función de concatenación. Ahora con este nuevo conjunto de datos mediante la regresión logística se obtienen las mejores variables para calcular la variable objetivo, que en este caso es el pronóstico de la durabilidad bajo los criterios de la prueba de velocidad de pulso ultrasónico. Para este caso se obtuvieron las primeras 7 características más importantes para que a partir de ellas se pueda discretizar cuales son las mejores. En la siguiente figura se aprecian las mejores variables para la predicción del criterio de durabilidad calculadas por medio de una regresión logística.

	VPU	Re y Resistividad	EDAD DE PRUEBA_40 días	EDAD DE PRUEBA_60 días	CRITERIO DE EVALUACIÓN Re_RIESGO MODERADO	CRITERIO DE EVALUACIÓN VPU_DURABLE
175	<a href="#">4365.672001</a>	13.344583	1.0	0.0	0.0	1.0
32	<a href="#">3938.437565</a>	9.069208	0.0	1.0	0.0	0.0
159	<a href="#">4330.056421</a>	13.445089	1.0	0.0	0.0	1.0
39	3995.102678	9.195172	0.0	1.0	0.0	0.0
41	<a href="#">3941.865884</a>	9.907987	0.0	1.0	0.0	0.0

Figura 4.63: Conjunto de mejores variables obtenido del filtrado de envoltura.

Quedando en el siguiente orden, por orden de importancia

1. EDAD DE PRUEBA 40 días

2. CRITERIO DE EVALUACIÓN VPU DURABLE
3. CRITERIO DE EVALUACIÓN Re RIESGO MODERADO
4. y\_Resistividad
5. VPU
6. Re
7. EDAD DE PRUEBA 90 días

Como se ve en la numeración anterior las primeras variables, brindan la información de cuáles son las variables más relevantes, seleccionando 2 primeras variables, es posible generar la siguiente curva ROC.

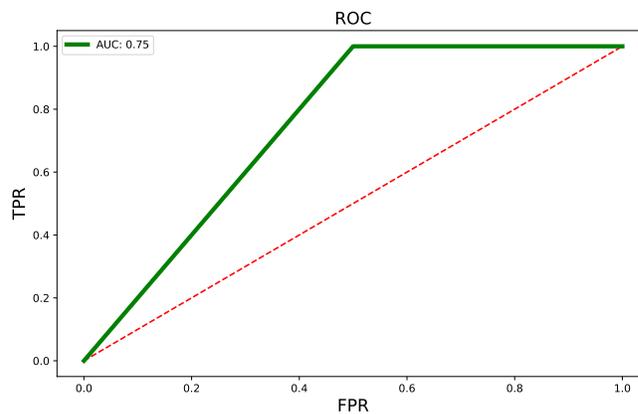


Figura 4.64: Diagrama ROC de las “mejores” variables para predecir una alta durabilidad

Con el fin de establecer métricas para la evaluación de las curvas ROC, se establece la regla de dedo para un área bajo la curva en una curva ROC, y los intervalos son los siguientes:

- [0.5]: Equivalente a aleatorio.
- [0.5, 0.6): Test malo.
- [0.6, 0.75): Test regular.
- [0.75, 0.9): Test bueno.

- $[0.9, 0.95)$ : Test muy bueno.
- $[0.95, 1)$ : Muy bueno para ser cierto.

Obteniendo una precisión de 0.6. El análisis del ANOVA test se muestra en la siguiente tabla, el cuál nos permite ver los scores obtenidos en la regresión logística.

•	Precisión	Recall	F1-Score	Support
0.0	1.00	0.50	0.67	4
1.0	0.33	1.00	0.5	1
Accuracy	•	•	0.60	5
Macro Average	0.67	0.75	0.58	5
Weighted Average	0.87	0.60	0.63	5

Tabla 4.9: Anova test.

## 4.7. Algoritmos de agrupamiento

Existen algoritmos que permiten agrupar los datos basándose en similitudes, este tipo de algoritmos son de tipo no supervisados, generalmente se usan para la inspección de datos o detección de ruido en los datos.

### 4.7.1. *K*-Means

El algoritmo de *K*-Means es un algoritmo de clustering basado en centroides que agrupa diversos elementos en  $k$  grupos basándose en la similitud de las características de los elementos. El agrupamiento se realiza a través de un proceso iterativo donde en cada una de sus repeticiones se pretende minimizar la suma del cuadrado de las distancias entre cada uno de los objetos y el centroide de su grupo o clúster. El algoritmo consta de tres pasos

1. Asignación inicial de los centroides.
2. Creación de los conjuntos tomando en cuenta que elementos están más cerca a cada centroide.
3. Actualización de los centroides.

Los pasos 2 y 3 se repetirán hasta que los centroides no se muevan o que se muevan debajo de un umbral definido por el investigador. Incluso es posible parar el procedimiento definiendo desde el principio un número máximo de repeticiones.

### 4.7.2. $K$ -NN ( $K$ neighborhod near)

Este algoritmo trabaja como un problema de clasificación, es decir, dado el conjunto de datos, con las etiquetas predefinidas, es necesario construir un modelo que se utilizará para predecir la clase de un caso nuevo o desconocido, donde el objetivo es construir un clasificador. El algoritmo del vecino más próximo es un algoritmo de clasificación que toma una cantidad de puntos marcados y los utiliza para aprender a etiquetar otros puntos. Este algoritmo clasifica los casos basados en su similitud con otros casos. En los vecinos más próximos, los puntos de datos que están cerca entre sí se dicen que son “vecinos”. El algoritmo se basa en este paradigma: “Casos similares con las mismas etiquetas de clase están cerca el uno al otro.” Por lo tanto, la distancia entre dos casos es una medida de su disimilitud, existen diferentes maneras de calcular la similitud, o viceversa, la distancia o la la disimilitud de dos puntos de datos, por ejemplo, esto se puede realizar utilizando la distancia Euclidiana.

En un problema de clasificación, el algoritmo del vecino más próximo funciona de la siguiente forma

- Elegir un valor para  $K$ .
- Calcular la distancia desde el nuevo caso (exclusión de cada uno de los casos del conjunto de datos).
- Buscar las “ $K$ ” observaciones en los training data que son “más próximos” al punto de datos desconocido.
- Predecir la respuesta del punto de datos desconocido utilizando el valor de respuesta más popular de los vecinos más próximos.

Hay dos partes en este algoritmo que pueden ser un poco confusas, en primer lugar, cómo seleccionar la  $K$  correcta; y la segunda, cómo calcular la similaridad entre los casos. Como se ha mencionado, la  $K$  en el vecino más próximo, es el número de vecinos más próximos a examinar y éste se supone que debe ser especificado por el usuario, donde la incógnita es, ¿Cómo se elige la  $K$  correcta?. Un valor bajo de  $K$  causa un modelo muy complejo, lo que podría resultar en un exceso de ajuste del modelo, esto significa que el proceso de predicción no se generaliza lo suficiente como para ser utilizado para casos fuera de la muestra. Los datos de fuera de la muestra son datos que están fuera del conjunto de datos utilizado para entrenar el modelo, en otras palabras, no se puede confiar en que sea utilizado para la predicción de muestras desconocidas. Es importante recordar que el exceso de ajuste es malo, ya que queremos un modelo general que funcione para cualquier dato, no sólo

los datos utilizados para el entrenamiento. La respuesta a la pregunta planteada puede ser elegir un valor de  $K = 1$ , y luego usar la parte de entrenamiento para modelar, y calcular la precisión de la predicción utilizando todos los ejemplos en el conjunto de pruebas, después repetir este proceso, incrementando el valor de  $K$ , y ver cuál de los  $K$  construye el mejor el modelo.

El análisis del vecino más próximo también se puede utilizar para calcular valores para un objetivo continuo, en esta situación, se utiliza el valor de objetivo promedio o promedio de los vecinos más próximos para obtener el valor predicho para el nuevo caso, por ejemplo, suponiendo que está prediciendo el precio de un inicio basado en su conjunto de características, tales como el número de habitaciones, metros cuadrados de construcción, el año en que fue construido, etc, entonces, se puede encontrar fácilmente las tres casas vecinas más cercanas, por supuesto, no sólo en base a la distancia, pero también basado en todos los atributos, y luego predecir el precio de la casa, como el promedio de los vecinos.

A continuación usando el método de  $K$ -NN se construye un modelo que nos permita establecer el criterio de evaluación en función de la prueba de  $VPU$ , ésta variable es una variable categórica, ahora, trabajando con el siguiente conjunto de datos

	VPU	Fc	Re	Ft	MR	FR	EDAD DE PRUEBA	CRITERIO DE EVALUACIÓN Re	CRITERIO DE EVALUACIÓN VPU	% DE RESISTENCIA COMPRESIÓN	RESULTADO
0	4067.814756	450.956790	8.732488	32.575873	53.137102	<a href="#">3386.877179</a>	40 días	ALTO RIESGO	DURABLE	128.844797	SI CUMPLE
1	4107.695082	452.204461	8.665177	32.475459	53.883876	<a href="#">3394.503241</a>	40 días	ALTO RIESGO	DURABLE	129.201274	SI CUMPLE
2	4104.623473	460.668327	8.822354	32.542833	54.939407	<a href="#">3389.278795</a>	40 días	ALTO RIESGO	DURABLE	131.619522	SI CUMPLE
3	<a href="#">4119.875559</a>	447.762528	8.653547	32.397472	54.657192	<a href="#">3394.398015</a>	40 días	ALTO RIESGO	DURABLE	127.932151	SI CUMPLE
4	4083.147522	448.443189	8.820058	32.611839	53.266651	<a href="#">3391.781796</a>	40 días	ALTO RIESGO	DURABLE	128.126626	SI CUMPLE

1	datos.shape
---	-------------

(190, 11)

Figura 4.65: Conjunto de datos artificiales usado para el  $K$ -NN.

Donde el objetivo es encontrar un modelo que ayude a clasificar un resultado en función de la columna o atributo llamado CRITERIO DE EVALUACIÓN  $VPU$ . Teniendo la siguiente clasificación de los tipos de datos del conjunto de datos anterior.

Variable	data type
VPU	<i>float64</i>
F'c	<i>float64</i>
Re	<i>float64</i>
<i>Ft</i>	<i>float64</i>
MR	<i>float64</i>
FR	<i>float64</i>
EDAD DE PRUEBA	<i>object</i>
CRITERIO DE EVALUACIÓN Re	<i>object</i>
CRITERIO DE EVALUACIÓN VPU	<i>object</i>
% DE RESISTENCIA COMPRESIÓN	<i>float64</i>
RESULTADO	<i>object</i>

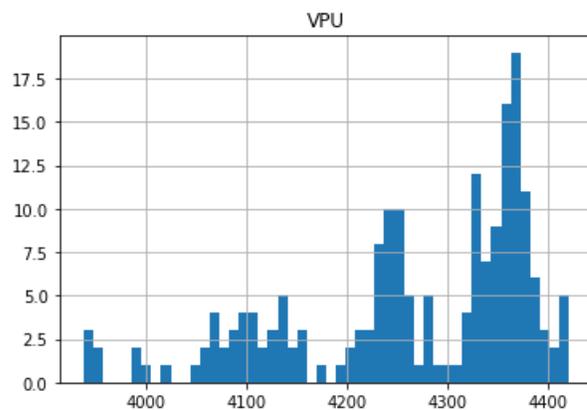
Tabla 4.10: Tipos de datos en variables seleccionadas.

Haciendo uso de herramientas de inspección se observa cuántos datos de la clase perteneciente al atributo CRITERIO DE EVALUACIÓN *VPU*, teniendo lo siguiente

DURABLE 183.

ALTA 7.

Explorando la característica de la prueba de *VPU* que es la que produce la clasificación de nuestro objetivo tenemos el siguiente histograma, los histogramas ayudan a ver el comportamiento de los datos y su distribución.

Figura 4.66: Histograma de la prueba de *VPU*.

Enseguida elegimos el conjunto de características  $x$  las cuales van a predecir el valor de  $y$ , en este caso  $x$  estará dado por:

$$x = \begin{bmatrix} F'c & Re & Ft & MR & FR \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

y el valor objetivo de  $y$  será

$$y = \text{Criterio de evaluación } VPU$$

Se realiza un proceso de normalización de los datos, una división de datos usando la técnica train-test split considerando un 80 % para el conjunto de entrenamiento y un 20 % para el conjunto de pruebas, en éste caso se prueba para un valor de  $k = 4$  y evaluamos la certeza teniendo los siguientes resultados:

Certeza del conjunto de entrenamiento = 0.9802.

Certeza del conjunto de prueba = 0.9473.

Para asegurarnos del valor de  $k$  se realiza el cálculo de diferentes  $K$  los cuales se representan en la siguiente Figura

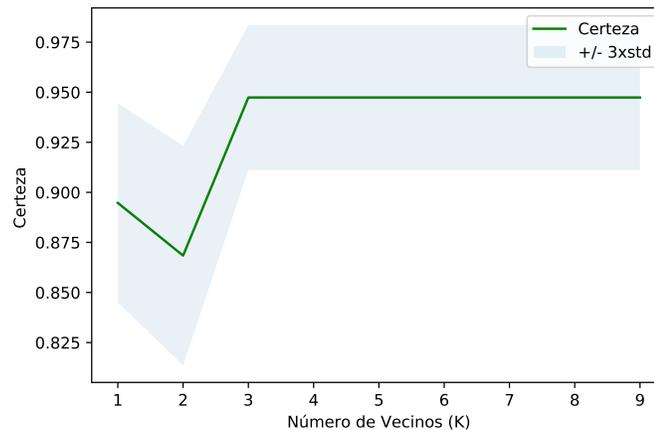


Figura 4.67: Diagrama de la certeza del modelo para diferentes números de vecinos

Por lo tanto es posible predecir si el concreto tiene una alta durabilidad sin la necesidad de hacer la prueba de  $VPU$  basándose en el algoritmo de  $K$ -NN.



---

## Capítulo 5

# Conclusiones

El método de elemento finito discretiza de manera importante el dominio de las vigas y los cilindros de concreto analizados, se pudo observar que la mezcla con adiciones soporta mayor deformación en las vigas de concreto. En realidad las deformaciones que sufren este tipo de estructuras es casi imperceptible a la vista, por lo que la metodología del elemento finito es adecuada para hacer análisis a micro escala. Una de las principales ventajas es el análisis minucioso que se puede hacer en una sección, pero al mismo tiempo la precisión del análisis requiere tiempos de computo más prolongados o lo que es mejor, un ordenador con un buen hardware que permita disminuir el tiempo de espera entre cada operación. Si bien la cantidad de tiempo es alta para realizar un análisis exhaustivo en algunas ocasiones esta opción no es imprescindible ya que con discretizaciones no tan detalladas podría ser suficiente para representar el comportamiento del problema. Una de los objetivos importantes de ésta técnica es obtener la matriz de rigidez, es necesario conocer la ecuación diferencial que representa de manera adecuada el problema que se está analizando y en función de ella obtener la matriz de rigidez. Una clara ventaja de éste metodo es que una vez que se ha encontrado la matriz de rigidez del problema, esta puede ser usada de manera repetida para diferentes condiciones, cambiando solo las condiciones de frontera del problema y generar nueva información. En la actualidad estos problemas han sido abordados de manera importante, de tal forma que existen modelos para representar la mayoría de los problemas existentes, por lo que solo hay que prestar cuidado en el sistema a elegir y una vez realizado esto seleccionar la manera más adecuada de resolver el problema. El método de Galerkin fue una de las opciones que se eligió para abordar estos problemas, debido a que al final trabaja con matrices simétricas, las cuales son muy útiles al momento de resolver problemas de la forma  $KU = F$ .

Hoy en día el análisis y solución de este tipo de problemas es posible gracias al avance

computacional que se tiene. Una de las ciencias que tomó gran impulso gracias a esto fue la ciencia de datos. El desarrollo de esta tecnología permitió a las técnicas de Inteligencia artificial, Machine Learning y Deep Learning crecer de manera importante en sus implementaciones. Este trabajo realiza un análisis profundo de las relaciones e interacciones que tienen las diversas pruebas de un concreto y su comportamiento entre ellas. Para realizar éste tipo de análisis es necesario usar metodologías como las ya mencionadas, ya que éstas nos brindan información que sin ellas no sería posible encontrar o tal vez tendría un costo bastante alto. Por está razón es importante conocer el proceso o el pipeline de un problema de Machine Learning. Todas las tareas de estos procesos son de igual importancia, desde la generación adecuada de la información adecuada y del tipo de variables que maneja el conjunto de datos a ser analizado. Existen variables que pueden ser numéricas y variables que pueden ser categóricas, en este caso se tienen los dos tipos. Para obtener las correlaciones que existen entre ellas, esto solo es posible con las variables que son numéricas, por lo que si se quisiera considerar las variables categóricas sería importante hacer un mapeo de variables con alguna metodología como lo puede ser la metodología binaria o one-hot. Los algoritmos se pueden clasificar en función de su estructura, la clasificación general que se tiene son problemas supervisados, no supervisados y de refuerzo. En este trabajo se abordan problemas supervisados y no supervisados. Además se explora una de las herramientas de la ciencia de datos, que corresponde a la generación de variables artificiales. Esta técnica es útil para este problema debido a que no se cuenta con información suficiente para generar modelos confiables y realizar análisis profundo, otra razón importante para la disponibilidad suficiente de información es la validación de los modelos. Los modelos deben pasar por 3 etapas, entrenamiento, validación y prueba. En algunas ocasiones el proceso de validación es sustituido por una técnica llamada *k-fold* de cross validation, ésta técnica es útil para conjunto de datos pequeños en donde es necesario conservar la mayor cantidad de datos para entrenamiento y prueba. No existe regla escrita para la división del conjunto de datos pero la mayoría de los autores concuerdan en una relación 80-20 o 70-30. Estas relaciones pueden ser divididas en entrenamiento, validación y prueba o solo entrenamiento y prueba, esto dependerá de la cantidad de información con la que se cuente. Existen diversos algoritmos para abordar un problema, en este caso el uso de los algoritmos para problemas de regresión depende del tipo de distribución que se tenga, si bien existen métodos avanzados no convencionales para analizar problemas complejos como las redes neuronales, los problemas de regresión pueden ser más eficientes en algunos casos ya que requieren menor cantidad de iteraciones e implementaciones más sencillas de realizar. La técnicas de Machine Learning son herramientas poderosas que ayudan a

generar modelos eficientes en un amplio campo de la investigación pero es importante recordar que su aproximación depende en gran medida de la interpretación de los datos que contiene el modelo y de las consideraciones que se hayan tenido par su formulación. Si bien los modelos se entrenan y se validan para tener buenas aproximaciones, estos factores dependen del científico de datos saber discretizar algunas variables y factores que puedan afectar el modelo, como lo puede ser el problema del sobre-entrenamiento (overfitting), o el sub-entrenamiento (underfitting). Si se tiene problema de underfitting quiere decir que nuestro modelo no ha captado la lógica del problema y que su aproximación queda muy por debajo de lo esperado mientras que el problema de overfitting, el cuál es un problema muy común en ciencia de datos ocurre cuando nuestro conjunto de información ha sido entrenado tan bien que pierde la perspectiva del problema analizado.

Es importante mencionar que con tan poca información no es posible generar modelos confiables, y que al subir la complejidad de un modelo podemos estar reduciendo su capacidad de predicción, por lo que debemos manejar el ruido en las variables cuidadosamente.

La presente investigación logró realizar ajustes mediante el análisis de elementos finitos de manera satisfactoria, donde fue posible cuantificar y modelar las deformaciones que se generan en especímenes cilíndricos y prismáticos de concreto bajo la acción de esfuerzos de compresión y flexión respectivamente. Estas deformaciones ayudan a entender de mejor manera el comportamiento del concreto bajo ciertas cargas y es posible modelar su desempeño. En este estudio fue posible estimar las relaciones que existen entre los atributos de las mezclas de concreto, establecer modelos predictivos, implementar técnicas de inteligencia artificial para aumentar la cantidad de datos a ser analizada y poder generar modelos confiables que representen a una población de datos, además, de encontrar que existe una fuerte correlación entre la prueba destructiva de esfuerzo a tensión y la prueba no destructiva de resistividad eléctrica, la cuál permite generar modelos de predicción para obtener ambos atributos. Por lo tanto es posible cuantificar todos los parámetros descritos anteriormente y permitir realizar estudios con enfoque computacional para diseñar mezclas de concreto de manera eficiente, considerando como prioridad la información que brindan las pruebas de laboratorio.

*Los datos tienen una historia que contarnos, lo importante es saber interpretar la historia y sacar provecho de ella (Andrew Ng).*



---

# Bibliografía

- [1] HZ Lopez-Calvo, P Montes-Garcia, EM Alonso-Guzmán, W Martinez-Molina, TW Bremner, and MDA Thomas. Effects of corrosion inhibiting admixtures and supplementary cementitious materials combinations on the strength and certain durability properties of hpc. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 44(11):918–926, 2017.
- [2] Andrés Torres Acosta and M Martinez Madrid. Diseño de estructuras de concreto con criterios de durabilidad. *Publicación técnica*, (181), 2001.
- [3] MIGUEL ANGEL Sanjuán Barbudo and PEDRO Castro Borges. *Acción de los agentes químicos y físicos sobre el concreto*, volume 4. IMCYC, 2001.
- [4] Arq Carlos Mauricio Bedoya Montoya, Katia Luis García, Vivian Elena Parnás, Marifeli Batlle Avilés, María Luisa Rivada Vázquez, Guere Oussouboure, MSc Ing Roberto Delgado Victore, Debora Acosta Alvarez, MSc Reynier Moll Martínez, and Grace González Guerra. *Revista de arquitectura e ingeniería*.
- [5] Olivera Bustamante Fernando. Estructuración de vías terrestres. *Editorial Continental. México*, 2000.
- [6] Steven H Kosmatka, Beatrix Kerkhoff, William C Panarese, and Jussara Tanesi. Diseño y control de mezclas de concreto, portland cement association, skokie, illinois. *EE. UU*, 2004.
- [7] Steven H Kosmatka, William C Panarese, and Manuel Santiago Bringas. *Diseño y control de mezclas de concreto*. Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto, 1992.
- [8] Secretaría de Economía. Nmx-c-414-onncce-2014. industria de la construcción-cementantes hidráulicos-especificaciones y métodos de ensayo. *Diario Oficial de la Federación*, pages 5–5, 2014.

- [9] Y Sébaabi, RM Dheilly, and M Quéneudec. A study of the viscosity of lime–cement paste: influence of the physico-chemical characteristics of lime. *Construction and Building Materials*, 18(9):653–660, 2004.
- [10] José Ignacio Alvarez, Javier Lanás, and Ana Izaguirre. Effect of a biodegradable natural polymer on the properties of hardened lime-based mortars. 2011.
- [11] C ASTM. C 125-1995., annual book of astm standards 1995. vol. 04.02. *Concrete And Aggregate*.
- [12] A Del Valle Moreno, JA Guzmán Torres, EM Alonso Guzmán, W Martínez Molina, AA Torres Acosta, J Terán Guillén, MA Montes Zea, AI Torres Murillo, and M Martínez Madrid. Solicitaciones mecánicas y estáticas a concreto hidráulico simple elaborado con agregados pétreos redondeados y adicionados con fibras deshidratadas de cactus opuntia. *Publicación Técnica*, (448), 2015.
- [13] W Martínez-Molina, AA Torres-Acosta, EM Alonso-Guzmán, HL Chávez-García, H Hernández-Barrios, C Lara-Gómez, W Martínez-Alonso, JT Pérez-Quiroz, JA Bedolla-Arroyo, and FM González-Valdéz. Concreto reciclado: una revisión. *Revista ALCONPAT*, 5(3):235–248, 2015.
- [14] C ASTM. 702-98, standard practice for reducing samples of aggregate to testing size. *ASTM Annual Book of ASTM Standards*, 4, 2003.
- [15] SC ONNCCE. Nmx-c-414-onncce-2004, 2004.
- [16] JA Guzmán Torres. *Concreto de alta durabilidad y alto desempeño en infraestructura*. PhD thesis, Tesis de Maestría, Fac. Ing. Civil Universidad Michoacana de San Nicolás de . . . , 2014.
- [17] Rob B Polder. Test methods for on site measurement of resistivity of concrete—a rilem tc-154 technical recommendation. *Construction and building materials*, 15(2-3):125–131, 2001.
- [18] JG Cabrera and P Ghoddoussi. Influence of fly ash on the resistivity and rate of corrosion of reinforced concrete. *Special Publication*, 145:229–244, 1994.
- [19] William Elkey and Erik J Sellevold. Electrical resistivity of concrete. 1995.
- [20] R Cigna, C Andrade, U Nürnberger, R Polder, E Weydert, and E Seitz. Corrosion and protection of metals in contact with concrete. In *COST Action*, 1997.

- 
- [21] Jerome M Raphael. Tensile strength of concrete. In *Journal Proceedings*, volume 81, pages 158–165, 1984.
- [22] Muhammad Fauzi Mohd Zain, HB Mahmud, Ade Ilham, and M Faizal. Prediction of splitting tensile strength of high-performance concrete. *Cement and Concrete Research*, 32(8):1251–1258, 2002.
- [23] Peter I Kattan. *MATLAB guide to finite elements: an interactive approach*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [24] Young W Kwon and Hyochoong Bang. *The finite element method using MATLAB*. CRC press, 2018.
- [25] Siamak Ghadimi and Seyed Sina Kourehli. Multi cracks detection in euler-bernoulli beam subjected to a moving mass based on acceleration responses. *Inverse Problems in Science and Engineering*, pages 1–21, 2018.
- [26] Fernando Olivera Bustamante. *Estructuración de vías terrestres: vías terrestres y pavimentos*. Compañía Editorial Continental, 2002.
- [27] A Ariaei, S Ziaei-Rad, and M Ghayour. Vibration analysis of beams with open and breathing cracks subjected to moving masses. *Journal of sound and vibration*, 326(3-5):709–724, 2009.
- [28] Arturo O Cifuentes. Dynamic response of a beam excited by a moving mass. *Finite Elements in Analysis and Design*, 5(3):237–246, 1989.
- [29] Lanru Jing and JA Hudson. Numerical methods in rock mechanics. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 39(4):409–427, 2002.
- [30] C ASTM. 78-00,“. *Standard Test Method for Flexural Strength of Concrete (Using Simple Beam with Third-Point Loading)*,” American Society for Testing and Materials, 2000.
- [31] Ali Nour, Bruno Massicotte, Emre Yildiz, and Viacheslav Koval. Finite element modeling of concrete structures reinforced with internal and external fibre-reinforced polymers. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 34(3):340–354, 2007.
- [32] Michael Cohen, Agostino Monteleone, and Stanislav Potapenko. Finite element analysis of intermediate crack debonding in fibre reinforced polymer strengthened reinforced concrete beams. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 45(10):840–851, 2018.

- 
- [33] Lowell. *MATLAB. Matlab user manual*. MA: Mathwork Inc., 2018.
- [34] Rajat Raina, Alexis Battle, Honglak Lee, Benjamin Packer, and Andrew Y Ng. Self-taught learning: transfer learning from unlabeled data. In *Proceedings of the 24th international conference on Machine learning*, pages 759–766, 2007.
- [35] Laura Igual and Santi Seguí. Introduction to data science. In *Introduction to Data Science*, pages 1–4. Springer, 2017.
- [36] F. Pedregosa, G. Varoquaux, A. Gramfort, V. Michel, B. Thirion, O. Grisel, M. Blondel, P. Prettenhofer, R. Weiss, V. Dubourg, J. Vanderplas, A. Passos, D. Cournapeau, M. Brucher, M. Perrot, and E. Duchesnay. Scikit-learn: Machine learning in Python. *Journal of Machine Learning Research*, 12:2825–2830, 2011.
- [37] Vladimir N Vapnik. An overview of statistical learning theory. *IEEE transactions on neural networks*, 10(5):988–999, 1999.
- [38] Sayan Mukherjee, Edgar Osuna, and Federico Girosi. Nonlinear prediction of chaotic time series using support vector machines. In *Neural Networks for Signal Processing VII. Proceedings of the 1997 IEEE Signal Processing Society Workshop*, pages 511–520. IEEE, 1997.
- [39] Corinna Cortes and Vladimir Vapnik. Support-vector networks. *Machine learning*, 20(3):273–297, 1995.
- [40] JA Gualtieri, Samir R Chettri, RF Crompt, and LF Johnson. Support vector machine classifiers as applied to aviris data. In *Proc. Eighth JPL Airborne Geoscience Workshop*, 1999.
- [41] Bernhard E Boser, Isabelle M Guyon, and Vladimir N Vapnik. A training algorithm for optimal margin classifiers. In *Proceedings of the fifth annual workshop on Computational learning theory*, pages 144–152, 1992.
- [42] Vladimir Vapnik. *The nature of statistical learning theory*. Springer science & business media, 2013.
- [43] Alex J Smola and Bernhard Schölkopf. A tutorial on support vector regression. *Statistics and computing*, 14(3):199–222, 2004.
- [44] Anantha M Prasad, Louis R Iverson, and Andy Liaw. Newer classification and regression tree techniques: bagging and random forests for ecological prediction. *Ecosystems*, 9(2):181–199, 2006.