POSGRADO CONJUNTO EN
CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM-UMSNH

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO - UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

Ideales de Baire

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Presenta:
Jean Brandon Ramírez Chávez

Director de Tesina:
Dr. Fernando Hernández Hernández
FCFM UMSNH

Morelia, Michoacán, Junio del 2020

A mis padres por su apoyo incondicional

Agradecimientos

Agradezco enormemente a Fer, mi amigo y tutor de quien sólo he recibido apoyo y cosas buenas, por haberme guiado en la elaboración de este trabajo y en toda mi maestría, agradezco también a Reynaldo por haber revisado esta tesina y por sus acertados comentarios.

Agradezco profundamente a mis padres, por su apoyo de siempre, por sus palabras, por estar para mi siempre que lo necesite.

Agradezco por supuesto a todos mis amigos, cuya presencia y compañía hacen mas llevadera esta vida.

Agradezco a CONACYT por el apoyo económico brindado.

Índice

Resumen

Estudiamos ideales $\mathcal{I}$ sobre $\mathbb{N}$ con la siguiente propiedad: Dado cualquier espacio métrico completo X, si $\{X_I : I \in \mathcal{I}\}$ es una familia de subespacios nunca densos de X que cumplen que $X_A \subseteq X_B$ cuando $A \subseteq B$, entonces $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} X_A \neq X$. Se dan caracterizaciones de cuando un ideal cumple tal propiedad. Nos auxiliamos de clasificar ideales bajo el orden de Tukey pues dicho orden preserva la propiedad deseada. Al final se discute una propiedad similar pero cubriendo ahora con subconjuntos compactos en lugar de nunca densos, exhibiendo un ideal con esta propiedad. Cabe destacar que todo este trabajo esta basado en el artículo de A. Avilés, *et. al.* ([1]).

Palabras clave: Analítico, Espacio Polaco, Familia casi ajena, Torres, Orden de Tukey.

Abstract

We study ideals on $\mathbb{N}$ with the next property: Given any complete metric space X, if $\{X_I : I \in \mathcal{I}\}$ is a family of nowhere dense subespaces of X such that $X_A \subseteq X_B$ whenever $A \subseteq B$, then $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} X_A \neq X$. We give some characterizations of when such property is satisfied. We use the Tukey order for classifying ideals since the above property is preserved by this order. At the end we discusse a similar property but covering with compact subespaces instead of nowhere dense. We show an ideal with this new property. This work is based on the article of A. Avilés, *et. al.*([1]).

1. Introduccion

La notación usada es totalmente estándar.

Definición 1.1. Una familia $\mathcal{I}$ de subconjuntos de $\mathbb{N}$ es un *ideal* si cumple lo siguiente:

(1) $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$,

(2) si $B \in \mathcal{I}$ y $A \subseteq B$ entonces $A \in \mathcal{I}$ y

(3) si A y B son elementos de $\mathcal{I}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$.

Observe que un ideal $\mathcal{I}$ puede verse como un orden poniendo:

$$A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

para A y B elementos de $\mathcal{I}$.
Se define $\mathrm{cof}(\mathcal{I})$ como el mínimo tamaño de una base para $\mathcal{I}$, es decir una familia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$ tal que para todo $I \in \mathcal{I}$ existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $I \subseteq B$. Se dice que $\mathcal{I}$ es *numerablemente generado* si $\mathrm{cof}(\mathcal{I}) \leq \omega$.

Una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ es un *filtro* si $\mathcal{F}^* = \{\mathbb{N} \setminus A : A \in \mathcal{F}\}$ es un ideal y se define $cof(\mathcal{F}) = cof(\mathcal{F}^*)$.

Dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un espacio topológico X, decimos que es $\mathcal{F}$-convergente a $x \in X$ si para cada vecindad abierta V de x el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$ es un elemento de $\mathcal{F}$ y se denota como $x = \lim_{n,\mathcal{F}} x_n$. Dado un espacio de Banach E una sucesión $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una $\mathcal{F}$-base si para cada $x \in E$ existe una única sucesión de escalares $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$x = \lim_{n,\mathcal{F}} \Sigma_{i=1}^{n} a_i e_i. \tag{1}$$

Un caso particular es cuando $\mathcal{F}$ es el filtro de subconjuntos cofinitos de $\mathbb{N}$ y se dice que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder, en tal caso es sabido que las funciones $e_n^*(x) = a_n$ para x como en (1) son lineales y continuas, pero en el caso general dada una $\mathcal{F}$-base no se sabe cuando tales funciones e_n^* son continuas; T. Kochanek en [4] demostró que si $cof(\mathcal{F}) < \mathfrak{p}$ entonces la respuesta es afirmativa.
Dada una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ se dice que cumple la *propiedad de la intersección finita fuerte* si para todo $\sigma \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ se tiene que $\bigcap \sigma$ es infinito; se dice que $\mathcal{A}$ tiene *pseudointersección* si existe $B \subseteq \omega$ tal que para todo $A \in \mathcal{A}$ se tiene que $A \setminus B$ es finito. Se define $\mathfrak{p}$ como el mínimo cardinal κ tal que existe familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ de tamaño κ con la propiedad de la intersección finita fuerte pero sin pseudointersección.
En la prueba de Kochanek un paso clave es que para $\mathcal{I} = \mathcal{F}^*$ se cumple:

$\boxtimes$ Dado cualquier espacio métrico completo X y $\{X_A : A \in \mathcal{I}\}$ cualquier familia de subconjuntos magros de X que cumple que $X_A \subseteq X_B$ siempre que $A \subseteq B$ entonces

$$\bigcup \{X_A : A \in \mathcal{I}\} \neq X.$$

Si un ideal $\mathcal{I}$ cumple que $\mathrm{cof}(\mathcal{I}) < \mathfrak{p}$ entonces cumple $\boxtimes$ pues si tiene una base $\mathcal{B}$ de tamaño menor que $\mathfrak{p}$ entonces $\bigcup\{X_A : A \in \mathcal{I}\} = \bigcup\{X_A : A \in \mathcal{B}\}$ que es de nuevo un subespacio magro por [3], más aún la implicación de regreso también es cierta asumiendo que $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$; recuerde que $\mathfrak{c} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |2^{\mathbb{N}}|$.

Proposición 1.2. Dado $\mathcal{I}$ ideal sobre $\mathbb{N}$ si tiene base de cardinalidad menor que $\mathfrak{p}$ entonces cumple $\boxtimes$, si $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ entonces la otra implicación es cierta

Demostración. Falta probar la implicación de regreso, suponga entonces que $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ y que $\mathcal{I}$ no tiene base de cardinalidad menor que $\mathfrak{p}$, construya entonces una base $\{I_\alpha : \alpha < \mathfrak{p}\}$ con la propiedad de que para cada $\gamma < \mathfrak{p}$, I_γ no está en el ideal generado por $\{I_\alpha : \alpha < \gamma\}$. Para cada I en $\mathcal{I}$ sea $g(I)$ el mínimo ordinal γ tal que I esta en el ideal generado por $\{I_\alpha : \alpha < \gamma\}$. Enumere ahora los elementos de $\mathbb{R}$ como $\{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{p}\}$ y defina para cada $I \in \mathcal{I}$ el conjunto $\mathbb{R}_I = \{x_\alpha : \alpha \leq g(I)\}$, este es un conjunto magro (unión de menos que $\mathfrak{p}$ magros es magro), además $\mathbb{R}_A \subseteq \mathbb{R}_B$ cuando $A \subseteq B$ y cada x_α es elemento de $\mathbb{R}_{I_\alpha}$ y así $\bigcup_{I\in\mathcal{I}} \mathbb{R}_I = \mathcal{I}$ y por tanto $\mathcal{I}$ no cumple $\boxtimes$. $\square$

Nosotros trabajaremos con una condición similar a $\boxtimes$, solo cambiaremos conjuntos magros por nunca densos y a lo largo de este trabajo daremos algunas condiciones bajo las cuales un ideal no es de Baire y algunas caracterizaciones de cuando un ideal no es de Baire para ciertas clases de espacios topológicos.

2. Ideales de Baire

Definición 2.1. Dado $\mathcal{I}$ ideal sobre $\mathbb{N}$ y X un espacio topológico, decimos que $\mathcal{I}$ es un ideal de Baire para X si para toda función

$$F : \mathcal{I} \to nwd(X)$$

$\subseteq$-monótona, se cumple que

$$\bigcup\{F(I) : I \in \mathcal{I}\} \neq X.$$

Si $\mathcal{I}$ cumple dicha propiedad para todo espacio métrico completo decimos solamente que $\mathcal{I}$ es un ideal de Baire.

Hablaremos también de ordenes de Baire, intercambiando solamente '$\subseteq$' por '$\leq$' en donde sea necesario. O incluso podemos pensar que no es estrictamente necesario que el ideal tenga como conjunto base a $\mathbb{N}$.
Una ligera modificación de la definición anterior y con la cual también trabajaremos es la siguiente:

Definición 2.2. Dado $\mathcal{I}$ ideal sobre $\mathbb{N}$ y X un espacio métrico completo, decimos que $\mathcal{I}$ es un ideal de Baire* para X si para toda función

$$F : \mathcal{I} \to nwd(X)$$

$\subseteq$-monótona y tal que para todos A, B elementos de $\mathcal{I}$ si $A \subseteq^* B$ entonces $F(A) \subseteq \overline{F(B)}$, se cumple que

$$\bigcup\{F(I) : I \in \mathcal{I}\} \neq X.$$

De igual forma si un ideal es de Baire* para todo espacio X métrico completo solamente diremos que es de Baire*.

Observación 2.3. Baire implica Baire*

De [3] es claro que si $\mathcal{I}$ tiene base de cardinalidad menor que $\mathfrak{p}$ entonces es de Baire (y por tanto también Baire*) pero no es claro cuando la inversa se cumple, incluso bajo axioma de Mártin.

Observación 2.4. Si $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ son ideales sobre $\mathbb{N}$ tales que $\mathcal{J}$ es de Baire para X y existe función

$$g : \mathcal{J} \to \mathcal{I}$$

monótona y cofinal entonces también $\mathcal{I}$ es de Baire para X.

Demostración. Sea $F : \mathcal{I} \to nwd(X)$ monótona, defina

$$F^* : \mathcal{J} \to nwd(X)$$

como $F^*(A) = F(g(A))$. Si A y B son elementos de $\mathcal{J}$ tales que $A \subseteq B$ entonces por ser g función monótona se cumple que $g(A) \subseteq g(B)$ y por ser F función monótona se cumple que $F^*(A) = F(g(A)) \subseteq F(g(B)) = F^*(B)$, así F^* es monótona y tenemos entonces que

$$\bigcup_{J \in \mathcal{J}} F^*(J) \neq X.$$

Tome ahora $A \in \mathcal{I}$, por ser $g[\mathcal{J}]$ cofinal en $\mathcal{I}$ existe $B \in \mathcal{J}$ tal que $A \subseteq g(B)$ y por tanto $F(A) \subseteq F(g(B)) = F^*(B)$ y así

$$\bigcup_{I \in \mathcal{I}} F(I) \subseteq \bigcup_{J \in \mathcal{J}} F^*(J) \neq X.$$

Así $\mathcal{I}$ es de Baire para X. $\square$

Definición 2.5 (Orden de Tukey)**.** Dados dos órdenes $(X, \leq_X), (Y, \leq_Y)$, decimos que X está abajo según Tukey de Y, denotado como $(X, \leq_X) \leq_T (Y, \leq_Y)$, si existe función $f : X \to Y$ tal que para toda familia $A \subseteq Y$ $\leq_Y$-acotada se tiene que $f^{-1}[A]$ es $\leq_X$-acotada. Si se cumple que $(X, \leq_X) \leq_T (Y, \leq_Y)$ y $(Y, \leq_Y) \leq_T (X, \leq_X)$ decimos entonces que ámbos órdenes son Tukey equivalentes y lo denotamos como $(X, \leq_X) \equiv_T (Y, \leq_Y)$.

Definición 2.6. Dados dos órdenes $(X, \leq_X), (Y, \leq_Y)$ y una función $f : X \to Y$, decimos que f es cofinal si para todo $A \subseteq X$ cofinal, su imagen $f[A]$ también es cofinal en Y.

Observación 2.7. Sean $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ son ideales sobre $\mathbb{N}$ tales que $\mathcal{I} \leq_T \mathcal{J}$ y sea $f : \mathcal{I} \to \mathcal{J}$ testigo de ello, entonces existe función monótona y cofinal $f^* : \mathcal{J} \to \mathcal{I}$.

Demostración. Para cada $J \in \mathcal{J}$, la familia $f^{-1}[\mathcal{P}(J)]$ es acotada por algún $I \in \mathcal{I}$ y por tanto se cumple que $I_J = \bigcup f^{-1}[\mathcal{P}(J)] \in \mathcal{I}$, defina entonces $f^* : \mathcal{J} \to \mathcal{I}$ como $f^*(J) = I_J$; veamos que f^* cumple lo requerido. Sea $\mathcal{J}'$ cofinal en $\mathcal{J}$ y tome $I \in \mathcal{I}$, existe $J \in \mathcal{J}'$ tal que $f(I) \subseteq J$ entonces $I \subseteq f^*(J)$, así $f^*[\mathcal{J}']$ es cofinal en $\mathcal{I}$. Sean ahora $j \subseteq J \in \mathcal{J}$, entonces $\mathcal{P}(j) \subseteq \mathcal{P}(J)$ y por tanto $I_j = f^{-1}[\mathcal{P}(j)] \subseteq \mathcal{P}(J) = I_J$, entonces f^* es monótona. □

Corolario 2.8. Si $\mathcal{I} \leq_T \mathcal{J}$ entonces $cof(\mathcal{I}) \leq cof(\mathcal{J})$.

Corolario 2.9. Si $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ son ideales sobre $\mathbb{N}$ tales que $\mathcal{J}$ es de Baire para X y $\mathcal{I} \leq_T \mathcal{J}$ entonces $\mathcal{I}$ es de Baire para X.

Lema 2.10. Sean $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ ideales sobre $\mathbb{N}$, si $\mathcal{J}$ es cofinal en $\mathcal{I}$ entonces $\mathcal{I} \equiv_T \mathcal{J}$.

Demostración. Sea $i : \mathcal{J} \to \mathcal{I}$ la función de inclusión y $X \subseteq \mathcal{I}$ acotado por I, como $\mathcal{J}$ es cofinal existe $J \supseteq I$ elemento de $\mathcal{J}$ tal que $i^{-1}[X] \subseteq J$. Ahora para cada $I \in \mathcal{I}$ sea $f(I)$ un elemento en $\mathcal{J}$ tal que $I \subseteq f(I)$, si $X \subseteq \mathcal{J}$ acotado por J, entonces dicho J también acota a $f^{-1}[X]$. □

Definición 2.11. Dado $\mathcal{I}$ ideal sobre $\mathbb{N}$ se define

$$\mathcal{I}^{<\omega} = \{A \subseteq fin : (\exists I \in \mathcal{I})(\forall a \in A)\ a \cap I \neq \emptyset\}.$$

Observación 2.12. $\mathcal{I} \equiv_T \mathcal{I}^{<\omega}$.

Demostración. Defina, para cada $I \in \mathcal{I}$,

$$I^{<\omega} = \{A \subseteq fin : (\forall a \in A)\ I \cap A \neq \emptyset\}.$$

Observe que para $I, J \in \mathcal{I}$

$$I \subseteq J \Leftrightarrow I^{<\omega} \subseteq J^{<\omega}$$

pues si $I^{<\omega} \subseteq J^{<\omega}$ entonces $\{\{i\} : i \in I\} \subseteq I^{<\omega} \subseteq J^{<\omega}$, es decir, para cada $i \in I$, $\{i\} \cap J \neq \emptyset$ y por tanto $i \in J$, la otra implicación es obvia. Además el conjunto $\{I^{<\omega} : I \in \mathcal{I}\}$ es cofinal en $\mathcal{I}^{<\omega}$ pues para cada $A \in \mathcal{I}^{<\omega}$ existe por definición un $I \in \mathcal{I}$ que testifica tal hecho, dicho I cumple que $I^{<\omega} \supseteq A$. Tenemos entonces que $\mathcal{I}$ es cofinal en $\mathcal{I}^{<\omega}$ via $I \longleftrightarrow I^{<\omega}$ y por tanto son equivalentes según Tukey. □

Corolario 2.13. $\mathcal{I}$ es de Baire si y sólo si $\mathcal{I}^{<\omega}$ lo es.

Proposición 2.14 (Avilés, *et. al.* [1])**.** Dado $\mathcal{I}$ ideal sobre $\mathbb{N}$, $\mathcal{I}$ es numerablemente generado si y sólo si es ideal de Baire para todo espacio topológico X que es de segunda categoría en si mismo.

Demostración. La implicación de ida es clara pues si $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ es base de $\mathcal{I}$ entonces para cualquier función $f : \mathcal{I} \to nwd(X)$ se cumple que

$$\bigcup_{I \in \mathcal{I}} f(I) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(I_n) \neq X$$

dado que X no puede ser unión numerable de subespacios nunca densos. Para la otra implicacíon suponga que $\mathcal{I}$ no es numerablemente generado y considere a $X = \mathcal{I}$ como espacio topológico con la topología generada tomando como cerrados los conjuntos $\emptyset$ y

$$X_A = \{I \in \mathcal{I} : I \subseteq A\}$$

para $A \in \mathcal{I}$.

Se cumple que para cada $A \in \mathcal{I}$ el subespacio cerrado X_A es nunca denso pues de lo contrario algún abierto básico estaría contenido, es decir, $X \setminus X_B \subseteq X_A$, lo cual nos diría que $X = X_A \cup X_B$, lo cual es una contradicción pues estamos suponiendo que $\mathcal{I}$ no es numerablemente generado, de hecho, con el mismo argumento es fácil ver que para cualquier sucesión numerable $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{I}$ se tiene que $X \neq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_{A_n}$, también observe que cualquier subespacio nunca denso esta contenido en algún X_A, considere pues $Y \subseteq X$ nunca denso, existe $A \in \mathcal{I}$ tal que $X \setminus X_A \subseteq X \setminus \bar{Y}$ y por lo tanto $Y \subseteq \bar{Y} \subseteq X_A$. De lo anterior es fácil observar que X es de segunda categoría en si mismo. Finalmente es claro que para todo A en $\mathcal{I}$, $A \in X_A$ y

$$\bigcup_{A \in \mathcal{I}} X_A = X,$$

por tanto $\mathcal{I}$ no es de Baire para X. □

3. Caracterizaciones de los ideales de Baire

Definición 3.1. Diremos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ es *hereditaria* si $A \subseteq B \in \mathcal{A}$ entonces $A \in \mathcal{A}$. Diremos que $\mathcal{A}$ es *hereditaria** si $A \subseteq^* B$ implica que $A \in \mathcal{A}$.

Teorema 3.2. Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre $\mathbb{N}$ y D un espacio discreto infinito de cardinalidad κ, los siguientes son equivalentes:

(1) $\mathcal{I}$ es ideal de Baire* para todo espacio métrico completo X con $w(X) \leq \kappa$.

(2) $\mathcal{I}$ es de Baire* para $D^{\mathbb{N}}$.

(3) Dada $f : D^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathcal{I})$ monótona y tal que para todo $s \in D^{<\mathbb{N}}$:

 (i) $f(s)$ es hereditaria*,

 (ii) $\mathcal{I} = \bigcup_{t \succeq s} f(t)$.

 Entonces existe $\sigma \in D^{\mathbb{N}}$ tal que $\mathcal{I} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(\sigma \restriction k)$.

(4) Dada $f : D^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathcal{I})$ monótona y tal que para todo $s \in D^{<\mathbb{N}}$:

(i) $f(s)$ es hereditaria*,

(ii) $\bigcup_{d\in D} f(s^\frown d) = \mathcal{I}$,

(iii) $\bigcap_{d\in D} f(s^\frown d) = f(s)$.

Entonces existe $\sigma \in D^{\mathbb{N}}$ tal que $\mathcal{I} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f(\sigma \restriction k)$.

Demostración. La implicación (1) $\Rightarrow$ (2) es clara, también lo es (3) $\Rightarrow$ (4) pues una función como en (4) cumple las condiciones de (3). Probemos (2)$\Rightarrow$(3); considere $f : D^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathcal{I})$ que cumple (i) y (ii) de (3) y defina

$$F : \mathcal{I} \to nwd(D^{\mathbb{N}})$$

como

$$F(A) = \{\sigma \in D^{\mathbb{N}} : (\forall k \in \mathbb{N})\ A \notin f(\sigma \restriction k)\}.$$

Para ver que $F(A)$ es nunca denso, observe primero que tal subespacio es cerrado; si $\sigma \in D^{\mathbb{N}} \setminus F(A)$ entonces existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $A \in f(\sigma \restriction k)$ y como f es monótona entonces $U_{\sigma\restriction k} \subseteq D^{\mathbb{N}} \setminus F(A)$. Aquí para $s \in D^{<\mathbb{N}}$, U_s denota al conjunto

$$\{\sigma \in D^{\mathbb{N}} : \sigma \succeq s\}.$$

Observe ahora que para todo $s \in D^{<\mathbb{N}}$ $U_s \nsubseteq F(A)$ pues por (ii) de (3) existe $t \succeq s$ tal que $A \in f(t)$ y entonces $U_t \subseteq U_s \setminus F(A)$. Ahora note que si $A, B \in \mathcal{I}$ son tales que $A \subseteq^* B$, tome σ en $F(A)$. Si existiera un k natural tal que $B \in f(\sigma \restriction k)$ entonces por ser $f(\sigma \restriction k)$ hereditaria* se tendria que $A \in f(\sigma \restriction k)$ y por tanto $\sigma \notin F(A)$, lo cual es una contradicción. Lo anterior también demuestra que F es $\subseteq$-monótona.

Por hipótesis $\mathcal{I}$ es de Baire* para $D^{\mathbb{N}}$, existe entonces $\sigma \in D^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{A\in\mathcal{I}} F(A)$. Entonces para todo $A \in \mathcal{I}$, $\sigma \notin F(A)$ y entonces $A \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f(\sigma \restriction k)$, por lo tanto

$$\mathcal{I} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f(\sigma \restriction k).$$

Falta ver que (4)$\Rightarrow$(1). Sea X espacio métrico completo con $w(X) \leq \kappa = |D|$ y sea $\{W_d : d \in D\}$ base de abiertos para X, repita elementos de ser necesario. Construya

* $V_\emptyset = X$,
* $V_{(d)} = W_d$ para $d \in D$.

Suponga definido V_s, los elementos $V_{s^\frown x}$ para $x \in D$ serán aquellos W_d que cumplan

(I) $\overline{W_d} \subseteq V_s$ y

(II) $diam(W_d) \leq diam(V_s)/2$. De nuevo repita elementos de ser necesario.

Observe que por la construcción hecha a cada $\sigma \in D^{\mathbb{N}}$ le corresponde un único punto $p_\alpha \in X$ tal que $\{p_\alpha\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} V_{\sigma\restriction k}$, esto pues X es completo, posiblemente ramas distintas determinen el mismo punto y para cada $x \in X$ existe σ tal que $p_\alpha = x$. También podemos observar que $V_s = \{p_\sigma : \sigma \succeq s\}$.

Considere entonces $F : \mathcal{I} \to nwd(X)$ $\subseteq$-monótona y tal que si $A \subseteq^* B$ entonces $F(A) \subseteq \overline{F(B)}$. Defina $f : D^{<\mathbb{N}} \to \wp(\mathcal{I})$ como

$$f(s) = \{A \in \mathcal{I} : \overline{F(A)} \cap V_s = \emptyset\}.$$

Es fácil observar que f es $\subseteq$-monótona pues si $t \succeq s$ entonces $V_t \subseteq V_s$ y por lo tanto $f(s) \subseteq f(t)$. Para todo $s \in D^{<\mathbb{N}}$ $f(s)$ es hereditaria* pues si $B \subseteq^* A \in f(s)$ entonces

$$\overline{F(B)} \cap V_s \subseteq \overline{F(A)} \cap V_s = \emptyset$$

y por tanto $B \in f(s)$. Falta ver que f cumple (ii) y (iii) de (4), para lo primero fije $s \in D^{<\mathbb{N}}$ y $A \in \mathcal{I}$, observe que existe $d \in D$ tal que

$$\overline{W_d} \subseteq V_s \setminus \overline{F(A)}$$

y $diam(\overline{W_d}) \leq diam(V_s)/2$. Tal W_d corresponde a algún $V_{s^\frown x}$, entonces $A \in f(s^\frown x)$, esto prueba (ii). Ahora, es claro que para toda d en D, $f(s) \subseteq f(s^\frown d)$ y por tanto $f(s) \subseteq \bigcap_{d \in D} f(s^\frown d)$; falta demostrar entonces la otra contención para corroborar la condición (iii). Fije $s \in D^{<\mathbb{N}}$ y $A \notin f(s)$, veamos que $A \notin \bigcap_{d \in D} f(s^\frown d)$. Existe $\sigma \succeq s$ tal que que $p_\alpha \in F(A) \cap V_s$. Si k es tal que $s = \sigma \restriction k$ note entonces que $V_{\sigma \restriction k+1} = V_{s^\frown \sigma(k+1)}$ que también contiene a p_α, es decir, $\overline{F(A)} \cap V_{s^\frown \sigma(k+1)} \neq \emptyset$ y por tanto $A \notin f(\sigma \restriction k+1)$. Con esto probamos que se cumple (iii). Entonces por hipótesis existe $\sigma \in D^{\mathbb{N}}$ tal que $\mathcal{I} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(\sigma \restriction k)$, o sea, para todo $A \in \mathcal{I}$ existe k tal que $A \in f(\sigma \restriction k)$, es decir, $\overline{F(A)} \cap V_{\sigma \restriction k} = \emptyset$, esto implica que $p_\alpha \notin F(A)$ para todo $A \in \mathcal{I}$. □

Lo anterior es una muy ligera modificación del siguiente Teorema demostrado en [1] que dice exactamente lo mismo (y su prueba casi igual) para la condición Baire.

Teorema 3.3. Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre $\mathbb{N}$ y D un espacio discreto infinito de cardinalidad κ, los siguientes son equivalentes:

(1) $\mathcal{I}$ es ideal de Baire para todo espacio métrico completo X con $w(X) \leq \kappa$.

(2) $\mathcal{I}$ es de Baire para $D^{\mathbb{N}}$.

(3) Dada $f : D^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathcal{I})$ monótona y tal que para todo $s \in D^{<\mathbb{N}}$:

  (i) $f(s)$ es hereditaria,

  (ii) $\mathcal{I} = \bigcup_{t \succeq s} f(t)$.

  Entonces existe $\sigma \in D^{\mathbb{N}}$ tal que $\mathcal{I} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(\sigma \restriction k)$.

(4) Dada $f : D^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathcal{I})$ monótona y tal que para todo $s \in D^{<\mathbb{N}}$:

  (i) $f(s)$ es hereditaria,

(ii) $\bigcup_{d\in D} f(s^\frown d) = \mathcal{I}$,

(iii) $\bigcap_{d\in D} f(s^\frown d) = f(s)$.

Entonces existe $\sigma \in D^{\mathbb{N}}$ tal que $\mathcal{I} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f(\sigma \upharpoonright k)$.

Note que para el Teorema 3.3 se puede perfectamente replicar el enunciado para un órden parcial cualquiera, no así para el Teorema 3.2 pues no en todo orden tendrá sentido hablar de casi-contención.

Proposición 3.4 (Avilés, *et. al.* [1]). Sea $\mathcal{I}$ ideal sobre $\mathbb{N}$. Las siguientes son equivalentes

(1) $\mathcal{I}$ es ideal de Baire para todo espacio polaco.

(2) $\mathcal{I}$ es ideal de Baire para el espacio $2^{\mathbb{N}}$.

(3) Dada $f : 2^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathcal{I})$ monótona y tal que $\forall s \in 2^{<\mathbb{N}}$:

(i) $f(s)$ es hereditaria,

(ii) $\bigcup_{t\succeq s} f(t) = \mathcal{I}$.

Entonces existe $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$ tal que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f(\sigma \upharpoonright k) = \mathcal{I}$.

Demostración. (1)⇒(2) es obvia y (2)⇒(3) es igual que en el Teorema 3.2, demostremos (3)⇒(1). Dado que un espacio polaco es un espacio métrico completo con base numerable, nos ayudaremos del teorema anterior sustituyendo D por ω. Sea $f : \omega^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathcal{I})$ monótona y tal que, para toda $s \in \omega^{<\mathbb{N}}$,

(1) $f(s)$ es hereditaria,

(2) $\bigcup_{t\succeq s} f(t) = \mathcal{I}$.

Nuestro objetivo es, de dicha f, obtener otra función de $2^{<\mathbb{N}}$ en $\mathcal{P}(\mathcal{I})$ que cumpla las condiciones de (3) de este Corolario. Queremos definir primero una función $\psi : 2^{<\mathbb{N}} \to \omega^{<\mathbb{N}}$. Cada $s \in 2^{<\mathbb{N}}$ puede ser escrito como $s = (0^{n_1}, 1, ..., 1, 0^{n_2}, 1, ..., 1, 0^{n_{k+1}})$, donde $0^0 = \emptyset$ y si $k > 0$, $0^k = (0, ..., 0)$ (k veces). Defina entonces $\psi(s) = (n_1, ..., n_k)$ con la convención de que $\psi(0^k) = \emptyset$ para todo $k \geq 0$. Observe que ψ es monótona y suprayectiva. Sea $g : 2^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathcal{I})$ definida como

$$g(s) = f(\psi(s)).$$

Tal función g es monótona pues ψ y f lo son, para cada s, $g(s)$ es hereditaria pues f lo es, $\bigcup_{t\succeq s} g(t)$ pues si $s \in 2^{<\mathbb{N}}$ y $A \in \mathcal{I}$ existe $l \succeq \psi(s)$ tal que $A \in f(l)$ y existe $t \succeq s$ tal que $\psi(s) = l$.

Entonces por hipótesis existe $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$ tal que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} g(\sigma \upharpoonright k) = \mathcal{I}$. Existen dos posibilidades:

1.- Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo k mayor o igual que k_0 $\sigma(k) = 0$,y por lo tanto $\psi(\sigma \upharpoonright k) = \psi(\sigma \upharpoonright k_0)$, de esto se concluye que $f(\psi(\sigma \upharpoonright k_0)) = g(\sigma \upharpoonright k_0) = \mathcal{I}$.

2.- $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f(\psi(\sigma \upharpoonright k)) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} g(\sigma \upharpoonright k) = \mathcal{I}$. $\square$

Los siguientes resultados nos dicen que para comprobar que un ideal es de Baire para todo espacio métrico completo (sin importar su peso) es suficiente considerar $|D| = \mathfrak{c}$.

Proposición 3.5. Sea X un espacio métrico de cardinalidad mayor que $\mathfrak{c}$ y $\{D_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ una familia de subespacios cerrados nunca densos de X (no vacíos por supuesto), Entonces existe Ω subespacio cerrado de X con $|\Omega| \leq \mathfrak{c}$ y tal que para todo $\alpha < \mathfrak{c}$, $D_\alpha \cap \Omega \neq \emptyset$ y pertenece a $nwd(\Omega)$.

Demostración. Construiremos por inducción una sucesión $\{\Omega_n : n < \omega\}$ de subespacios de X. Inicie con Ω_0 un subespacio de X con $|\Omega_0| \leq \mathfrak{c}$ y tal que para todo α $\Omega_0 \cap D_\alpha \neq \emptyset$, por ejemplo tomando un punto de cada D_α, suponga construido Ω_n. Como cada D_α es nunca denso en X, para cada $p \in \Omega_n \cap D_\alpha$ tome $\{y_k^{p,\alpha} : k \in \mathbb{N}\}$ sucesión en $X \setminus D_\alpha$ que converge a p. Defina entonces

$$\Omega_{n+1} = \Omega_n \cup \{y_k^{p,\alpha} : p \in \Omega_n \cap D_\alpha, \alpha < \mathfrak{c}, k \in \mathbb{N}\}.$$

Defina $\Omega = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n}$, note que iniciamos con un subespacio de cardinalidad menor o igual que $\mathfrak{c}$ y en cada paso agregamos a lo más una cantidad $\mathfrak{c}$ de nuevos puntos, por tanto $|\Omega| \leq \mathfrak{c}$ y es cerrado por definición. Falta probar que para cada α $\Omega \cap D_\alpha$ es nunca denso en Ω, fije pues un α y tome U abierto (de X) con $\Omega \cap U \neq \emptyset$. Existe n_0 tal que $U \cap \Omega_{n_0} \neq \emptyset$ y por lo tanto existen p y $y_k^{p,\alpha}$ en $U \cap \Omega_{n_0+1} \setminus D_\alpha$ y entonces $U \cap \Omega$ no puede estar contenido en $D_\alpha \cap \Omega$. $\square$

Corolario 3.6. Sea $\mathcal{I}$ ideal sobre $\mathbb{N}$. Entonces $\mathcal{I}$ es ideal de Baire (para todo espacio métrico completo) si es de Baire para $D^{\mathbb{N}}$ con D espacio discreto de cardinalidad $\mathfrak{c}$.

Demostración. Sea X espacio métrico completo, si $|X| \leq \mathfrak{c}$ entonces claramente $w(X) \leq \mathfrak{c}$ y por el Teorema 3.3, $\mathcal{I}$ es de Baire para X. Suponga entonces que X tiene cardinalidad estrictamente mayor que $\mathfrak{c}$ y sea $F : \mathcal{I} \to nwd(X)$ una función monótona, note que $\{\overline{F(A)} : A \in \mathcal{I}\}$ es una familia de subespacios cerrados nunca densos de X y de a lo mas $\mathfrak{c}$ elementos, entonces la Proposición anterior nos da un subespacio Ω de cardinalidad menor o igual que $\mathfrak{c}$ que intersecta a cada $\overline{F(A)}$ y podemos definir entonces $g : \mathcal{I} \to nwd(\Omega)$ como $g(A) = \Omega \cap \overline{F(A)}$, dicha g es monótona pues F lo es. Entonces $\bigcup_{A\in\mathcal{I}} g(A) \neq \Omega$, esto nos dice que $\bigcup_{A\in\mathcal{I}} F(A) \neq X$. $\square$

Definición 3.7. Dados dos órdenes $(X, \leq_X)$, $(Y, \leq_Y)$ se define el orden $(X\times Y, \leq_{X\times Y})$ como sigue:

$$(x_1, y_1) \leq_{X\times Y} (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq_X x_2 \ \wedge \ y_1 \leq_Y y_2.$$

Observación 3.8. Si κ es un cardinal que cumple $cof(\kappa) = \kappa$, L un orden lineal de tamaño κ entonces el orden $L \times \omega$ es un orden de Baire para todo espacio métrico completo X con $w(X) < \kappa$.

Demostración. Sea D espacio discreto de tamaño $w(X)$ y sea

$$f : D^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(L)$$

una función monótona y tal que para todo $s \in D^{<\mathbb{N}}$:

(i) $f(s)$ hereditaria y

(ii) $L = \bigcup_{t \succeq s} f(t)$.

Construiremos sucesiones $\langle s_n : n \in \omega \rangle$ y $\langle k_n : n \in \omega \rangle$ de la siguiente forma:

Por (i) tenemos que $L = \bigcup\{f(s) : s \in D^{<\mathbb{N}}\}$ y además tenemos que $|D^{<\mathbb{N}}| < |L \times \omega| = \kappa$ por lo tanto existe $s_0 \in D^{<\mathbb{N}}$ tal que

$$|f(s_0)| = \kappa,$$

entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(s_0)$ contiene un subconjunto de tamaño κ (cofinal) de $L \times \{k_0\}$, por ser f monótona y por (ii) se concluye que $f(s_0) \supseteq \{(i,n) : i \in L, \;\; n \leq k_0\}$.

Suponga construido s_n y por tanto también k_n, tome

$$l_n = L \times \omega \setminus (L \times k_n + 1),$$

por (ii)

$$l_n \subseteq \bigcup\{f(s) : s \succeq s_n\},$$

por lo tanto existe s_{n+1} tal que

$$|f(s_{n+1})| = \kappa,$$

entonces existe $k_{n+1} \in \mathbb{N}$ tal que $f(s_{n+1})$ contiene un subconjunto de tamaño κ (cofinal) de $L \times \{k_{n+1}\}$, por ser f monótona y por (ii) se concluye que $f(s_{n+1}) \supseteq \{(i,n) : i \in L \;\; n \leq k_{n+1}\}$.

Basta definir $\sigma = \bigcup_{n \in \omega} s_n$, dicha σ cumple que

$$L \times \omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(\sigma \restriction k)$$

y por lo tanto $L \times \omega$ es de Baire para X. □

Corolario 3.9. Todo orden lineal de tamaño κ con $cof(\kappa) = \kappa$ es de Baire para todo espacio métrico completo con $w(X) < \kappa$.

4. Ideales Analíticos

Básicamente se demuestra que los ideales analíticos no son de Baire (para todo espacio métrico completo). Recuerde que un subespacio A de un espacio polaco es *analítico* si es imagen contínua de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y un ideal es analítico si visto como subespacio del espacio polaco $2^{\mathbb{N}}$ lo es.

Proposición 4.1. Sea $\mathcal{I}$ ideal sobre $\mathbb{N}$ que es analítico y no numerablemente generado. Entonces $\mathcal{I}$ no es de Baire.

Demostración. Sea $g : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ función continua con $Im(g) = \mathcal{I}$. Sean $U_s = \{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \sigma \succeq s\}$, $\mathcal{N}(\mathcal{I})$ el conjunto de subideales de $\mathcal{I}$ que son numerablemente generados y

$$X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup \{U_s : (\exists I \in \mathcal{N}(\mathcal{I}))\ g[U_s] \subseteq I\}.$$

X es no vacío pues $g[\mathbb{N}^{\mathbb{N}}] = g[U_\emptyset] = \mathcal{I}$ no es numerablemente generado. Note además que X es cerrado en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ pues los conjuntos U_s son abiertos, por lo tanto X es un espacio Polaco. Considere la función $F : \mathcal{I} \to nwd(X)$ definida como

$$F(A) = \{\sigma \in X : g(\sigma) \subseteq A\}.$$

Tal función es claramente monótona, hace falta ver que esta bien definida. Fije $A \in \mathcal{I}$ y U_s abierto (de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) que intersecta a X, esto quiere decir que $g[U_s]$ es no numerablemente generado pues de lo contrario U_s estaría contenido en el complemento de X, entonces existe $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ que extiende a s tal que $g(\sigma) \notin \wp(A)$ (el subideal de $\mathcal{I}$ generado por A), o sea, $g(\sigma) \nsubseteq A$. Existe entonces m un número natural que es elemento de $g(\sigma)$ pero no de A, por la continuidad de g existe $t \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ que extiende a s y tal que para todo $\tau \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ con $\tau \succeq t$ $g(\tau) \cap \{1, ..., m\} = g(\sigma) \cap \{1, ..., m\}$ y por lo tanto $U_t \subseteq F(A) \setminus U_s$, así $F(A) \in nwd(X)$. Note que para todo $\sigma \in X$ $\sigma \in F(g(\sigma))$. Entonces es claro que $\bigcup_{A \in \mathcal{I}} F(A) = X$, así $\mathcal{I}$ no es de Baire. $\square$

No tenemos claro si la Proposición anterior sigue siendo válida para la condición Baire*.

Pregunta 4.2. ¿Existe un ideal $\mathcal{I}$ analítico de Baire* para el espacio $2^{\mathbb{N}}$?

5. P-Ideales

Recuerde que un ideal se dice *P-ideal* si para toda sucesión numerable $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{I}$ existe un $A \in \mathcal{I}$ tal que $A_n \setminus A$ es finito, para toda n.

Observación 5.1. Un P-ideal es no numerablemente generado si y sólo si para todo A en $\mathcal{I}$ existe B en $\mathcal{I}$ tal que $B \setminus A$ no es finito.

Demostración. Suponga que existe un A tal que para todo B distinto de A se tiene que $B \setminus A$ es finito, entonces $\{B \cup A : A \in fin\}$ generan a $\mathcal{I}$. Ahora, si $\mathcal{I}$ fuera numerablemnte generado por $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces por ser P-ideal existe A tal que para toda n $A \setminus A_n$ es finito, entonces para tal elemento no existe B (distinto de A) que cumpla que $B \setminus A$ sea infinito. $\square$

La observación anterior motiva la siguiente definición.

Definición 5.2. Sean $\mathcal{I}, \mathcal{I}_0$ ideales sobre $\mathbb{N}$. Decimos que $\mathcal{I}$ es un P($\mathcal{I}_0$)-ideal si cumple:

(1) Para toda sucesión $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{I}$ existe $A \in \mathcal{I}$ tal que $A_n \setminus A \in \mathcal{I}_0$, para toda n.

(2) Para toda $A \in \mathcal{I}$ existe $B \in \mathcal{I}$ tal que $B \setminus A \notin \mathcal{I}_0$.

Cuando tenemos ideales sobre $\mathbb{N}$, existen procesos muy comunes para generar, a partir de ellos, otros ideales también sobre conjuntos numerables, por ejemplo la *suma ajena*:

Definición 5.3. Dados $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ ideales sobre $\mathbb{N}$ se define $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ como la familia de todos los conjuntos $A \subseteq \mathbb{N} \times \{0, 1\}$ tales que:

$A^0 = \{n \in \mathbb{N} : (n, 0) \in A\} \in \mathcal{I}$ y

$A^1 = \{n \in \mathbb{N} : (n, 1) \in A\} \in \mathcal{J}$.

Empleamos esta definición para exhibir que existen P($\mathcal{I}_0$)-ideales que no son P(fin)-ideales.

Sean $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ ideales sobre $\mathbb{N}$ siendo $\mathcal{I}$ un P-ideal no numerablemente generado, defina $\mathcal{I}' = \mathcal{I} \oplus\ fin$ y $\mathcal{J}' = fin \oplus \mathcal{J}$. Veamos que $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ es un P($\mathcal{J}'$)-ideal. Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ sucesión de elementos de $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$, entonces por ser $\mathcal{I}$ un P-ideal, existe $A \in \mathcal{I}$ tal que $A_n^0 \setminus A \in fin$, para toda n. Entonces para toda n

$$A_n \setminus (A \times \{0\}) \subseteq ((A_n^0 \setminus A) \times \{0\}) \cup (A_n^1 \times \{1\}) \in \mathcal{J}'.$$

Ahora, dado $A \in \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$,como $\mathcal{I}$ es no numerablemente generado existe $B \in \mathcal{I}$ tal que $B \setminus A^0 \notin fin$ entonces $(B \times \{0\}) \setminus A \notin \mathcal{J}'$. Lo anterior demuestra que $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ es un P($\mathcal{J}$')-ideal.

Recuerde que

$$l^\infty = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (\exists \epsilon > 0)\ (\forall n \in \mathbb{N})\ |x(n)| < \epsilon\}$$

es un espacio de Banach con $\|x\| = \text{ínf}\{\epsilon > 0 : (\forall n \in \mathbb{N})\ |x(n)| < \epsilon\}$.

Para $\mathcal{I}_0$ un ideal sobre $\mathbb{N}$ defina

$$c_0(\mathcal{I}_0) = \{x \in l^\infty : (\forall \epsilon > 0)\ \{n : |x(n)| \geq \epsilon\} \in \mathcal{I}_0\}$$

Es fácil ver que $c_0(\mathcal{I}_0)$ es un subespacio cerrado de l^∞, tome $x \notin c_0(\mathcal{I}_0)$, entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que el conjunto $\{n : |x(n)| \geq \epsilon\}$ no está en $\mathcal{I}_0$, entonces el abierto

$$\{y \in l^\infty : \|x(n) - y(n)\| < \frac{\epsilon}{2}\}$$

está fuera de $c_0(\mathcal{I}_0)$.

Proposición 5.4. Sean $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_0$ ideales sobre $\mathbb{N}$ tales que $\mathcal{I}$ es un $P(\mathcal{I}_0)$-ideal, entonces $\mathcal{I}$ no es un ideal de Baire para algún espacio métrico completo.

Demostración. Considere el espacio $E = l^\infty/c_0(\mathcal{I}_0)$ y para $A \in \mathcal{I}$ considere

$$F_A = \{[x] : 0 \leq x \leq \chi_A\},$$

aquí χ_A denota la función característica de A y

$$x \leq y \ \Leftrightarrow (\forall n)\ x(n) \leq y(n).$$

Note que $x \in F_A$ si para todo $\epsilon > 0$ se tiene que

$$\{n \in A : x(n) > 1 + \epsilon\} \cup \{n \in A : x(n) < -\epsilon\} \cup \{n \in \mathbb{N} \setminus A : |x(n)| > \epsilon\} \in \mathcal{I}_0,$$

de esto es fácil ver que F_A es cerrado en E.
Se deduce lo siguiente:

(1) Si $A, B \in \mathcal{I}$ entonces $A \setminus B \in \mathcal{I}_0$ si y sólo si $F_A \subseteq F_B$.
Suponga que $A \setminus B \in \mathcal{I}_0$ y $x \in F_A$, defina $y \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ como $y(n) = -x(n)$ para $n \in A \setminus B$ y $y(n) = 0$ en otro caso. Es claro que $y \in c_0(\mathcal{I}_0)$ y $[x] = [x + y] \in F_B$. Ahora si $F_A \subseteq F_B$ entonces $\chi_A \in F_B$ y por lo tanto

$$A \setminus B \subseteq \{n \in \mathbb{N} \setminus B : \chi(n) > \frac{\epsilon}{2}\} \in \mathcal{I}_0.$$

(2) Para toda $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}$ existe un $B \in \mathcal{I}$ tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{A_n} \subseteq F_B$.
Por la Definición [5.2] para $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe $B \in \mathcal{I}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $A_n \setminus B \in \mathcal{I}_0$ y por (1) $F_{A_n} \subseteq F_B$ y entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{A_n} \subseteq F_B$.

(3) Sea $A \in \mathcal{I}$, existe $B \in \mathcal{I}$ tal que F_A es nunca denso en F_B. Por la Definición [5.2] para A existe $B \in \mathcal{I}$ tal que $B \setminus A \notin \mathcal{I}_0$, pensemos que $A \subseteq B$ y por tanto $F_A \subseteq F_B$. Para ver que F_A es nunca denso en F_B tome $0 \leq x \leq \chi_A$ y V un abierto en E que contenga a $[x]$. Fije $0 < \delta < 1$ y defina $y = x + \delta\chi_{B\setminus A}$, se satisface que $\|x - y\| \leq \delta$. Tome δ suficientemente pequeño para que $y \in V$, se tiene también que $y \notin F_A$ pues $B \setminus A \subseteq \{n \in \mathbb{N} : |y(n)| > \frac{\delta}{2}\}$ pero $y \in F_B$ pues $0 \leq y \leq \chi_B$ entonces $y \in (V \cap F_B) \setminus F_A$.

Para finalizar defina $X = \bigcup_{A\in\mathcal{I}} F_A \subseteq E$, dicho espacio es cerrado por (2) pues si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es una sucesión convergente, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $A_n \in \mathcal{I}$ con $x_n \in F_{A_n}$, por (2) existe $B \in \mathcal{I}$ tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{A_n} \subseteq B$ y por lo tanto la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F_B$ y converge en F_B y por lo tanto en X pues F_B es subespacio cerrado. Claramente para la función

$$F : \mathcal{I} \to nwd(X)$$

definida como $F(A) = F_A$, se tiene que $X = \bigcup_{A\in\mathcal{I}} F(A)$. Por lo tanto $\mathcal{I}$ no es de Baire para X. □

La Proposición anterior también es válida para la condición Baire*.

También a partir de ideales sobre $\mathbb{N}$ dados, se construye el *producto de Fubini*:

Definición 5.5. Dados $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ ideales sobre $\mathbb{N}$ se define

$$\mathcal{I} \otimes \mathcal{J} = \{A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \{i : (A)_i \notin \mathcal{J}\} \in \mathcal{I}\}$$

donde $(A)_i = \{j : (i, j) \in A\}$.

Observación 5.6. Para todos $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ ideales sobre $\mathbb{N}$ se cumple que $\mathcal{I} \otimes \mathcal{J}$ no es un P-ideal.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina

$$A_n = \{n\} \times \mathbb{N},$$

es claro que para cada n, $A_n \in \mathcal{I} \otimes \mathcal{J}$, entonces para $\langle A_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ no existe A tal que para toda n, $A_n \setminus A$ sea finito. $\square$

Proposición 5.7. Sean $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ ideales sobre $\mathbb{N}$, se cumple que $\mathcal{I} \leq_T \mathcal{I} \otimes \mathcal{J}$.

Demostración. Defina $f : \mathcal{I} \to \mathcal{I} \otimes \mathcal{J}$ como

$$f(I) = I \times \mathbb{N},$$

claramente $f(I) \in \mathcal{I} \otimes \mathcal{J}$, sea $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{I} \otimes \mathcal{J}$ acotado por $A \in \mathcal{I} \otimes \mathcal{J}$, para tal A existe $I_A = \{i : (A)_i \notin \mathcal{J}\} \in \mathcal{I}$ que testifica dicha pertenencia entonces $f^{-1}[\mathcal{X}]$ es acotado por I_A. $\square$

Corolario 5.8. Si $\mathcal{I} \otimes \mathcal{I}$ es de Baire (para algún espacio X) entonces también lo es $\mathcal{I}$.

Observación 5.9. El recíproco del corolario anterior es falso pues el ideal fin es de Baire, pues es numerablemente generado pero el ideal $fin \otimes fin$ no lo es pues es analítico, de hecho Borel. O sea no es de Baire para el espacio $2^{\mathbb{N}}$.

Dado un ideal $\mathcal{I}$ sobre $\mathbb{N}$ se define su ideal *ortogonal* como la familia de todos aquellos conjuntos $A \subseteq \mathbb{N}$ tales que para todo $B \in \mathcal{I}$, $A \cap B \in fin$, un ideal se dice *alto* si su ideal ortogonal es igual a fin o equivalentemente si para todo $A \notin fin$ existe $B \in \mathcal{I} \setminus fin$ tal que $B \subseteq A$. Lo anterior motiva la siguiente

Definición 5.10. Dados dos ideales $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_0$ sobre $\mathbb{N}$ se define el ideal ortogonal de $\mathcal{I}$ con respecto a $\mathcal{I}_0$ como

$$\mathcal{I}^{\perp \mathcal{I}_0} = \{A \subseteq \mathbb{N} : (\forall B \in \mathcal{I})\ A \cap B \in \mathcal{I}_0\}.$$

Además diremos que $\mathcal{I}$ es $\mathcal{I}_0$-alto si $\mathcal{I}^{\perp \mathcal{I}_0} = \mathcal{I}_0$ o equivalentemente para todo $A \notin \mathcal{I}_0$ existe $B \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_0$ tal que $B \subseteq A$.

Proposición 5.11. Sean $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_0$, $\mathcal{J}$ ideales sobre $\mathbb{N}$ tales que $\mathcal{I}$ es un P($\mathcal{I}_0$)-ideal $\mathcal{I}_0$-alto e $\mathcal{I} \cup \mathcal{I}_0 \subseteq \mathcal{J}$ entonces $\mathcal{J}$ no es un ideal de Baire.

Demostración. Así como se hizo en la Proposición 5.4 pongamos $E = l^\infty / c_0(\mathcal{I}_0)$ y para $C \in \mathcal{I}$ considere $F_C = \{[x] : 0 \le x \le \chi_C\}$. Defina la función $F : \mathcal{J} \to nwd(E)$ como

$$F(A) = \bigcup \{F_C : C \subseteq A,\ C \in \mathcal{I}\}.$$

Dado que $\bigcup \{F_A : A \in \mathcal{J}\} = \{F_C : C \in \mathcal{I}\} = X$ era un espacio métrico completo (recuerde esto de 5.4) sólo nos resta ver que F esté bien definida. Fije $A \in \mathcal{J}$, como $\mathbb{N} \setminus A \notin J \supseteq \mathcal{I}_0$ y por ser $\mathcal{I}$ un ideal $\mathcal{I}_0$-alto existe $B \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_0$ tal que $B \subseteq \mathbb{N} \setminus A$, podemos entondes repetir el argumento (3) de 5.4 para ver que $F(A)$ es nunca denso en $F(A \cup B)$ y por tanto en X. $\square$

Corolario 5.12. Si $\mathcal{I}$ es un P-ideal alto entonces cualquier otro ideal $\mathcal{J}$ que contenga a $\mathcal{I}$ no es un ideal de Baire.

Torres

Definición 5.13. Una familia $\mathcal{T} = \{T_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ se llama una *torre* si se cumple que para todo $\alpha < \beta < \kappa$ entonces $T_\alpha \subseteq^* T_\beta$ y $T_\beta \setminus T_\alpha$ es infinito. Si además para todo $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito coinfinito no se cumple que para todo $\alpha < \kappa$, $T_\alpha \subseteq^* X$ diremos que $\mathcal{T}$ es una *torre maximal*.
Para una torre $\mathcal{T}$ se define el ideal generado por esta como

$$\mathcal{I}(\mathcal{T}) = \{A \subseteq \mathbb{N} : (\exists \alpha)\ A \subseteq^* T_\alpha\}$$

Se define

$$\mathfrak{t} = \min\{\kappa : \text{existe torre maximal de tamaño } \kappa\},$$

se cumple $\omega_1 \le \mathfrak{t}$ y es un resultado reciente de Milliaris y Shelah [6] que $\mathfrak{p} = \mathfrak{t}$.
Es claro que el ideal generado por una torre es un P-ideal pues cualquier sucesión numerable es acotada en $\mathfrak{t}$.

Proposición 5.14. Sea $\mathcal{T}$ una torre maximal con $|\mathcal{T}| = \kappa$ y $cof(\kappa) = \kappa$, sea D un espacio discreto con $|D| < \kappa$ entonces $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathcal{T})$ es un ideal de Baire* para $D^{\mathbb{N}}$.

Demostración. Sea $f : D^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathcal{I})$ monótona y tal que para toda $s \in D^{<\mathbb{N}}$

(i) $f(s)$ es hereditaria*,

(ii) $\mathcal{I} = \bigcup_{t \succeq s} f(t)$

se cumple entonces que $\mathcal{T} \subseteq \bigcup_{s \in D^{<\mathbb{N}}} f(s)$ y por lo tanto existe s_0 tal que $|f(s_0) \cap \mathcal{T}| = \kappa$, por lo tanto $\{\alpha : T_\alpha \in f(s_0)\}$ debe ser una sucesión cofinal en κ, por ser $f(s_0)$ hereditaria* es fácil ver que $\mathcal{I} \subseteq f(s_0)$. $\square$

Pregunta 5.15. ¿Existe D tal que $\mathcal{I}(\mathcal{T})$ sea Baire para $D^{\mathbb{N}}$?.

6. Familias casi ajenas

En esta sección exploramos algunas propiedades de ciertos ordenes que corresponden a familias casi ajenas, no necesariamente maximales. Estas son un caso interesante pues de [7] sabemos que las familias casi ajenas maximales no son analíticas, además veremos que para todo ideal $\mathcal{I}_0$ cualquier familia casi ajena no genera un $P(\mathcal{I}_0)$-ideal.

Definición 6.1. Una familia $\mathcal{A} \subseteq [\mathbb{N}]^\omega$ se llama una *familia casi ajena* si para todos A, B miembros distintos de $\mathcal{A}$ se tiene que $A \cap B$ es finito. Diremos que $\mathcal{A}$ es maximal si es $\subseteq$-maximal.

Existen familias casi ajenas de cardinalidad $\mathfrak{c}$.

Dada una familia casi ajena $\mathcal{A}$ se define el ideal generado por esta como:

$$\mathcal{I}(\mathcal{A}) = \{A \subseteq \mathbb{N} : (\exists B \in [\mathcal{A}]^{<\omega}) \ \ A \subseteq^* \bigcup B\}.$$

Proposición 6.2. Sean $\mathcal{I}_0$ un ideal sobre $\mathbb{N}$ y $\mathcal{A}$ una familia casi ajena infinita, entonces el ideal generado por $\mathcal{A}$ no es un $P(\mathcal{I}_0)$-ideal.

Demostración. Suponga que $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ es un $P(\mathcal{I}_0)$-ideal y fije $A \in \mathcal{A}$, tome sucesión $\langle B_n : n \in \mathbb{N}\rangle \subseteq \mathcal{A} \setminus \{A\}$ y para m y n distintos B_m y B_n son distintos. Defina ahora $A_0 = A$,...,$A_{n+1} = A_n \cup B_n$, para la sucesión $\langle A_n : n \in \omega\rangle$ existe $C \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$ tal que para toda n, $A_n \setminus C \in \mathcal{I}_0$, pongamos sin pérdida de generalidad $C = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ (para toda $i \leq n$, $C_i \in \mathcal{A}$). Existe A_{n_0} elemento de $\langle A_n : n \in \omega\rangle$ distinto de cada C_i, se cumple

$$A_{n_0} \setminus C = A_{n_0} \setminus ((A_{n_0} \cap C_1) \cup \cdots \cup (A_{n_0} \cap C_n));$$

pero para cada $i \leq n$, $A_{n_0} \cap C_i$ es finito; por lo tanto A_{n_0} es elemento de $\mathcal{I}_0$ y como $A \subseteq A_{n_0}$, también A es elemento de $\mathcal{I}_0$, concluimos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}_0$ y entonces $\mathcal{I}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{I}_0$, lo cual contradice la Definición 5.2. $\square$

Observación 6.3. Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre $\mathbb{N}$ se cumple que $\mathcal{I} \leq_T [\mathfrak{c}]^{<\omega}$.

Demostración. Sea $f : \mathcal{I} \to [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ cualquier función inyectiva, note que cualquier subconjunto X $\subseteq$-acotado en $[\mathfrak{c}]^{<\omega}$ debe ser finito, como f es inyectiva entonces tambien $f^{-1}[X]$ es $\subseteq$-acotado en $\mathcal{I}$. $\square$

Proposición 6.4. Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre $\mathbb{N}$, se cumple que $\mathcal{I} \equiv_T [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ si y sólo si existe $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{I}$ de cardinalidad $\mathfrak{c}$ tal que para todo subconjunto infinito $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ se tiene que $\bigcup \mathcal{Y} \notin \mathcal{I}$.

Demostración. Suponga que $[\mathfrak{c}]^{<\omega} \leq_T \mathcal{I}$, entonces existe función Tukey

$$f : [\mathfrak{c}]^{<\omega} \to \mathcal{I},$$

si pasa que $|Im(f)| < \mathfrak{c}$ entonces existe $\mathcal{Y} \subseteq [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ de tamaño $\mathfrak{c}$ y $I \in \mathcal{I}$ tal que $f[\mathcal{Y}] = \{I\}$ y así $f^{-1}[I] = \mathcal{Y}$ el cual no es $\subseteq$-acotado en $[\mathfrak{c}]^{<\omega}$ y por lo tanto f no es función Tukey. Entonces pues suponga $|Im(f)| = \mathfrak{c}$ y tome $\mathcal{X} = Im(f)$. Note que si para algún subconjunto infinito $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ se tiene que $\bigcup \mathcal{Y} \in \mathcal{I}$ (es decir, $\mathcal{Y}$ es $\subseteq$-acotado) entonces $f^{-1}[\mathcal{Y}]$ sería también $\subseteq$-acotado pero esto no es posible pues $f^{-1}[\mathcal{Y}]$ es infinito, así $\bigcup \mathcal{Y} \notin \mathcal{I}$. Suponga ahora que existe $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{I}$ de tamaño $\mathfrak{c}$ tal que para todo $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ infinito se tiene que $\bigcup \mathcal{Y} \notin \mathcal{I}$, sea

$$f : [\mathfrak{c}]^{<\omega} \to \mathcal{X} \subseteq \mathcal{I}$$

cualquier función inyectiva. Si $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ es $\subseteq$-acotado entonces es finito y por lo tanto $f^{-1}[\mathcal{Y}] \subseteq [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ también es finito y por lo tanto $\subseteq$-acotado, entonces f es función Tukey y concluimos que $[\mathfrak{c}]^{<\omega} \equiv_T \mathcal{I}$. □

Teorema 6.5. Existe un ideal $\mathcal{I}$ sobre $\mathbb{N}$ que es Tukey-maximal, es decir $\mathcal{I} \equiv_T [\mathfrak{c}]^{<\omega}$.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena de cardinalidad $\mathfrak{c}$, tome $\mathcal{X} = \mathcal{A}$ en $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ y aplique la proposición anterior. □

Ya del teorema anterior se puede concluir que el ideal generado por una familia casi ajena $\mathcal{A}$ de cardinalidad $\mathfrak{c}$ (o el orden $[\mathfrak{c}]^{<\omega}$) no es de Baire para cualquier espacio Polaco, pues se cumple en particular que $fin \otimes fin \leq_T \mathcal{I}(\mathcal{A})$. Se muestra a continuación una (otra) prueba específica de que $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ no es *Baire** (por lo tanto, tampoco Baire) para el espacio $2^{\mathbb{N}}$.

Proposición 6.6. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena de cardinalidad $\mathfrak{c}$ entonces $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ no es un ideal *Baire** para el espacio $2^{\mathbb{N}}$.

Demostración. Ponga $\mathcal{A} = \{A_\sigma : \sigma \in 2^{\mathbb{N}}\}$ y defina

$$f : 2^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathcal{I}(\mathcal{A}))$$

como

$$f(s) = \{A \subseteq \mathbb{N} : (\exists \sigma_1, \cdots, \sigma_n \in 2^{\mathbb{N}})\ (\forall i \leq n)\ (\sigma_i \not\succeq s)\ A \subseteq^* \bigcup_{i \leq n} A_{\sigma_i}\},$$

veamos que f cumple las condiciones del Teorema 3.2. Si $t \succeq s$ y $A \in f(s)$ entonces $A \subseteq^* \bigcup_{i \leq n} A_{\sigma_i}$ para ciertos σ_i tales que $\sigma_i \not\succeq s$, pero entonces también $\sigma_i \not\succeq t$ y por tanto $A \in f(t)$ y f es monótona. Fije ahora $s \in 2^{<\mathbb{N}}$, es claro por la definición de $f(s)$ que es hereditario*, ahora fije $A \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$, suponga $A \subseteq^* \bigcup_{i \leq n} A_{\sigma_i}$ y $\sigma_i \not\succeq s$, basta con encontrar $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$ que extienda a s y para toda i, $\sigma_i \neq \sigma$, tome entonces $t \in 2^{<\mathbb{N}}$ con $t \succeq s$ y tal que $\sigma \succeq t$, lo anterior puede hacerse pues solo se tiene que 'evitar' una cantidad finita de ramas. Así $A \in f(t)$ y por tanto $\mathcal{I}(\mathcal{A}) = \bigcup_{t \succeq s} f(t)$. Note ahora que para toda $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$ no se cumplirá que $\mathcal{I}(\mathcal{A}) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(\sigma \upharpoonright k)$ pues para toda k, $A_\sigma \notin f(\sigma \upharpoonright k)$. □

Nota 6.7. Observe que para todo κ, $cof([\kappa]^{<\omega}) = \kappa$, entonces por [3] si $\kappa < \mathfrak{p} = \mathfrak{t}$ entonces $[\kappa]^{<\omega}$ es un orden de Baire (para todo espacio métrico completo).

Pregunta 6.8. ¿Es $[\mathfrak{t}]^{<\omega}$ un orden de Baire?

7. Cubriendo con subconjuntos compactos

En el espacio $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ se cumple que todo subespacio compacto es nunca denso, verificaremos que existen ideales (analíticos) que son de Baire pero restringiendonos a subespacios compactos.

Para un espacio topológico se define

$$\mathcal{K}(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es compacto}\}.$$

Dado un conjunto parcialmente ordenado $(D, \leq)$ decimos que $A \subseteq D$ es *débilmente acotado* si cada subconjunto infinito de A contiene un subconjunto infinito acotado.

Proposición 7.1. Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre $\mathbb{N}$, $f : \mathcal{I} \to \mathcal{K}(X)$ una función monótona y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$ débilmente acotado, entonces $\bigcup\{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$ es secuencialmente compacto.

Demostración. Antes recuerde que un espacio se dice secuencialmente compacto si toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de términos en el espacio tiene subsucesión convergente.

Sea entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión infinita en $\bigcup\{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$, para cada n elija $B_n \in \mathcal{B}$ tal que $x_n \in f(B_n)$, por hipótesis para $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe subsucesión $(B_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ acotado por un elemento A en $\mathcal{I}$. Dado que f es monótona $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ está contenida en $f(A)$ y como este es compacto dicha subsucesión tiene punto de acumulación en $f(A)$ y por lo tanto en $\bigcup\{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$. $\square$

Corolario 7.2. Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre $\mathbb{N}$ que es unión numerable de subconjuntos débilmente acotados, digamos $\mathcal{I} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$, sea $f : \mathcal{I} \to \mathcal{K}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$, entonces

$$\bigcup\{f(A) : A \in \mathcal{I}\} \neq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

Demostración. Por la Proposición anterior para cada n el conjunto $\bigcup\{f(A) : A \in \mathcal{B}_n\}$ es secuencialmente compacto, de hecho compacto pues $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es un espacio métrico, además

$$\bigcup\{f(A) : A \in \mathcal{I}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{f(A) : A \in \mathcal{B}_n\},$$

pero $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ no puede ser unión numerable de subespacios compactos, entonces se cumple lo que queriamos. $\square$

Existen ideales que son unión numerable que subconjuntos débilmente acotados y que no son numerablemente generados, se exhibe uno a continuación.

Una función $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ es una *submedida* si cumple que

- $\varphi(\emptyset) = 0$,
- $(\forall n \in \mathbb{N})\ \varphi(\{n\}) < \infty$,
- $(\forall A, B \subseteq \mathbb{N})\ A \subseteq B \Rightarrow \varphi(A) \leq \varphi(B)$ y

- $\varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + \varphi(B)$.

Una submedida φ es *semicontinua por abajo* o *lsc-submedida* si para cada $A \subseteq \mathbb{N}$, $\varphi(A) = \lim_{n\to\infty} \varphi(A \cap n)$. Además, si $\varphi(\mathbb{N}) = \infty$ se definen

$$Fin(\varphi) = \{X \subseteq \mathbb{N} : \varphi(X) < \infty\}$$

y

$$Exh(\varphi) = \{X \subseteq \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} \varphi(X \setminus n) = 0\}.$$

Ambos son ideales y se tienen los siguientes teoremas de Mazur y Solecki ([8]).
Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre $\mathbb{N}$,

Teorema 7.3 (Mazur)**.** $\mathcal{I}$ es un F_σ-ideal si y sólo si existe una lsc-submedida φ tal que $\mathcal{I} = Fin(\varphi)$.

Teorema 7.4 (Solecki)**.** $\mathcal{I}$ es un P-ideal analítico si y sólo si existe una lsc-submedida φ tal que $\mathcal{I} = Exh(\varphi)$.

Por definición siempre se cumple que $Exh(\varphi) \subseteq Fin(\varphi)$.
Considere la función $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ definida como

$$\varphi(A) = \inf\{c > 0 : (\forall n \geq 2)\ |A \cap \{1, \cdots, 2^n\}| \leq n^c\},$$

convenimos que $\varphi(A) = +\infty$ si dicho ínfimo no existe.
Esta es una lsc-submedida y por tanto el ideal

$$\mathcal{I}_\varphi = \{A \subseteq \mathbb{N} : \varphi(A) < +\infty\} = Fin(\varphi)$$

es un ideal F_σ. Se define también para $c > 0$

$$\mathcal{I}_\varphi(c) = \{A \subseteq \mathbb{N} : \varphi(A) < c\}.$$

El anterior es débimente acotado y se cumple que

$$\mathcal{I}_\varphi = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_\varphi(n),$$

por lo tanto $\mathcal{I}_\varphi$ cumple lo requerido.
Los detalles acerca del ideal anterior pueden consultarse en [5].

Referencias

[1] A. Avilés, et. al., *Baire theorem for ideals of sets*, J. Math. Anal. Appl. 445 (2017) 1221-1231.

[2] N. Dobrinen y S. Todorcevic, *Tukey types of ultrafilters*, Volume 55, Number 3, (2011) 907-951.

[3] D. H. Fremlin, *Consequences of Martin's Axiom*, Cambridge University Press, 1984.

[4] T. Kochanek, *$\mathcal{F}$-basis with brackets and with individual brackets in Banach spaces*, Studia Math. 211 (3) (2012)259-268.

[5] A. Louveau y B.Velickovic, *Analytic ideals and cofinal types*, Ann. Pure Appl. Logic 99(1-3) (1999) 171-195.

[6] Malliaris, Maryanthe y Saharon Shelah, *Cofinality spectrum theorems in model theory, set theory and general topology.* Journal of the American Mathematical Society, 29.1 (2016) 237-297.

[7] A. R. Mathias, *Happy families*, Ann. Math. Logic 12(1) (1977) 59-111.

[8] K. Mazur, *A modification of Louveau and Velickovic's construction for F_σ-ideals.* Proceedings of the American Mathematical Society. Volume 128, Number 5, 1475-1479.

[9] D. Milovich, *Tukey classes of ultrafilters on ω*, Topology Proc. 32 (2008), 351-362.