UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

Diseño de algoritmos para crear ambientes computacionales dinámicos para el aprendizaje de la Geometría Analítica

TESIS

Que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias en Educación Matemática

Presenta:
CHRISTIAN MORALES ONTIVEROS

Directora de tesis:
Dra. María de Lourdes Guerrero Magaña

Morelia, Michoacán, Febrero de 2008

ÍNDICE

		Página
RESUMEN		**1**
CAPÍTULO l. Planteamiento del problema		**3**
I. 1.	Introducción	3
I. 2.	El problema de investigación	5
I. 3.	Objetivos de la investigación	7
I. 4.	Preguntas de investigación	8
I. 5.	Metodología	10
CAPÍTULO II. Marco teórico		**12**
II. 1.	Introducción	12
II. 2.	Fundamentos metodológicos para el diseño de software educativo	13
II. 3.	La enseñanza de la geometría analítica en el bachillerato	19
II. 4.	Distintas formas de representar los objetos matemáticos, un aspecto fundamental en el aprendizaje de las matemáticas	23
II. 5.	Uso de la tecnología en educación matemática	26
II. 6.	La tecnología como herramienta matemáticas versus la tecnología como herramienta didáctica	29
CAPÍTULO III. Las cónicas		**31**
III. 1.	Introducción	31
III. 2.	Antecedentes históricos	32
III. 3.	Diferentes concepciones de las curvas cónicas	35
III. 4.	Diferentes tipos de ecuaciones	41
	Ecuaciones rectangulares para la parábola	41
	Ecuaciones rectangulares para la elipse	43
	Ecuaciones rectangulares para la hipérbola	44
	Ecuaciones en coordenadas polares	45
	Ecuaciones paramétricas	47
III. 5.	Construcción geométrica de las cónicas	50
	Construcción de la parábola como lugar geométrico	51
CAPÍTULO IV. Resultados		53
IV. 1.	Introducción	53
IV. 2.	Objetivos iniciales	53
IV. 3.	Modelo de aprendizaje	54
IV. 4.	Estrategias Computacionales y diseño de algoritmos	57
IV. 5.	Implementación de los algoritmos	83
IV. 6.	Respuestas a las preguntas de investigación	89
IV. 7.	Diseño e implementación de actividades para la evaluación técnica	92
CAPÍTULO V. Conclusiones		103
Bibliografía consultada		**105**
Anexo 1. Actividades		**108**
Anexo 2. Programa del curso		**118**

RESUMEN

La Geometría Analítica es una de las asignaturas del tronco común en la mayoría de los bachilleratos de nuestro país; En ella confluyen ideas geométricas, numéricas y simbólicas integradas en conceptos matemáticos fundamentales cuyo entendimiento puede favorecerse con la exploración y análisis de propiedades y relaciones entre objetos matemáticos, a través de sus representaciones.

Cuando los estudiantes tienen la oportunidad de interactuar con objetos matemáticos, tanto geométricos y simbólicos como numéricos, su aprendizaje se transforma en un proceso investigativo, en el que la exploración, el descubrimiento y el planteamiento de conjeturas juegan un papel tan importante como el de aprender a aplicar reglas y hacer demostraciones formales de proposiciones dadas por el profesor.

La computadora es una de las mejores herramientas para tratar de concebir ambientes de investigación matemática para los estudiantes. La tecnología computacional nos permite trabajar con gráficas y símbolos de manera dinámica e interactiva; sin embargo, para que ésta pueda transformarse en una herramienta de aprendizaje, necesitamos generar algoritmos eficientes que le permitan realizar con precisión todas las tareas requeridas para relacionar y efectuar acciones sobre los objetos matemáticos en sus diferentes representaciones semióticas.

En este documento presentamos los resultados de un trabajo de investigación encaminado al desarrollo de algoritmos eficientes para graficar e interactuar dinámicamente y de manera directa con las gráficas de las cónicas y otras curvas. Dichos algoritmos se han implementado en un software con actividades de prueba dirigidas a estudiantes que cursan Geometría Analítica.

Este trabajo se realiza bajo la visión de buscar mejores alternativas de enseñanza para la Geometría Analítica del bachillerato. Se delinea la problemática general que se presenta en el diseño de algoritmos eficientes. Se presenta la metodología que permitió obtener un software que muestra la calidad de los algoritmos producidos, implementado en un lenguaje de programación modular. Se presentan también los resultados de la evaluación técnica de los algoritmos, y de las actividades que fueron diseñadas y aplicadas a un grupo de estudiantes de bachillerato para llevar a cabo dicha prueba técnica.

CAPÍTULO l
Planteamiento del problema

I. 1. Introducción

La importancia social, cultural y económica que actualmente se ha dado a los medios de comunicación genera en la población la necesidad de contar con la preparación adecuada para recibir gran cantidad de información y ser capaz de interpretarla y analizarla en términos cuantitativos; las computadoras son, hoy en día, las herramientas de trabajo y consulta en este proceso.

El incremento en el uso de los medios tecnológicos en general y de la computadora en la educación matemática en particular, ha ayudado a que las matemáticas, como una de las disciplinas extremadamente ligadas al desarrollo tecnológico, sean un área importante de estudio. Ya no es solo la aritmética básica el conjunto de herramientas matemáticas que un individuo requiere para desempeñarse para resolver los problemas que le permitirán desempeñarse bien en la sociedad o en su vida laboral. Este conjunto de herramientas matemáticas se ha extendido a la geometría y el álgebra como lo reflejan las diferentes propuestas de reforma a la educación básica y la inclusión de la tecnología (SEP, 2006); como parte de los estudios básicos de todo ciudadano. Así, aquellas personas con un entendimiento apropiado de ellas, podrán tener mejores oportunidades de tomar decisiones acertadas y de resolver el tipo de problemas que se están presentando en una sociedad tecnológica, aspirando a un mejor desarrollo en su campo laboral.

Por lo anterior y otras razones, el aprendizaje de las matemáticas es uno de los objetivos principales de la educación básica (incluyendo el bachillerato). Su enseñanza requiere de procesos y recursos didácticos que promuevan el aprendizaje de diferentes conceptos. En este sentido, es importante que en las aulas se haga uso de recursos y herramientas que han mostrado favorecer el aprendizaje de las matemáticas.

Particularmente, la tecnología y el software con fines educativos han resultado ser herramientas útiles para el estudio de diferentes áreas de las matemáticas, fundamentalmente aquellas que tienen una íntima relación con aspectos visuales y de representación.

La tecnología puede brindar múltiples experiencias a los estudiantes en tareas y procesos de carácter experimental como son: ensayar, reconfigurar, conjeturar, y descubrir; lo cual permite que puedan adentrarse en procesos de resolución de problemas matemáticos, desarrollando actividades semejantes a las de los matemáticos (Thomas & Holton, 2003).

El propósito es que el aprendizaje de los contenidos planteados en el currículo sea motivado por un trabajo activo y dinámico por parte de los estudiantes. En particular, la asignatura de Geometría Analítica del bachillerato de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, incluye contenidos temáticos (ver anexo 1) que pueden ser explorados utilizando recursos tecnológicos específicos.

En el curso de Geometría Analítica, se incluye el estudio de la recta y las cónicas en sus diferentes representaciones y es, precisamente, la conversión entre diferentes representaciones uno de los procesos principales que se plantean en esta área. Así, se espera que los estudiantes aprendan a graficar las ecuaciones de las cónicas; esto es, realizar una conversión de un registro simbólico a uno gráfico, de acuerdo con la teoría de Duval (1993); y aprendan a reconocerlas a partir de la identificación de características específicas o a relacionar una gráfica específica con una ecuación.

Las diferentes formas de representar un concepto y las formas en que podemos transitar de una representación a otra, deben ser promovidas mediante experiencias de aprendizaje que ayuden a los estudiantes a conectar y entender los conceptos. En particular, la representación gráfica de las cónicas y la posibilidad de realizar tratamientos de manera directa en este registro, ayuda a la mejor compresión de los conceptos y favorece el desarrollo de habilidades visuales (Hitt, 1998).

La inclusión de la tecnología computacional en el proceso de enseñanza aprendizaje requiere del uso de software especializado, tanto en aspectos didácticos como en aspectos computacionales (Clements & Battista, 2000).

Un diseño efectivo de software educativo debe estar basado en modelos de aprendizaje que puedan ser articulados en un ambiente tecnológico. Además, su implementación debe estar libre de errores computacionales; los cuales con frecuencia están asociados a las limitaciones de las computadoras para realizar algunos procesos matemáticos.

Por tal motivo, el desarrollo de un software efectivo para la enseñanza debe considerar diversos elementos de carácter educativo y de tipo computacional; así mismo, debe someterse a diferentes fases de evaluación, tanto en términos de su funcionamiento como en el sentido educativo específico para lo que fue diseñado.

En este trabajo se expone el diseño de algoritmos computacionalmente eficientes para el desarrollo de software que permita realizar tratamientos en el registro gráfico; así como, tratamientos y conversiones entre distintas representaciones. Estos algoritmos se prueban técnicamente mediante varias actividades computacionales cuyo objetivo es favorecer el entendimiento de conceptos matemáticos propios de la Geometría Analítica, tratando de estimular el desarrollo de habilidades de visualización mediante la interacción activa con representaciones dinámicas.

I. 2. El problema de investigación

El programa oficial del curso de Matemáticas IV, aprobado en 2001 por la Coordinación General del Bachillerato de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, incluye el estudio de la Geometría Analítica. Uno de sus objetivos es promover el desarrollo de competencias para:

- Plantear y resolver problemas relacionados con circunferencias, parábolas, elipses e hipérbolas.
- Graficar ecuaciones en el plano cartesiano.
- Plantear diferentes clases de ecuaciones.
- Distinguir las diferentes curvas en el plano cartesiano, a partir de la discusión de la ecuación general de segundo grado.

Para ello, propone una serie de lineamientos didácticos que pueden ser aplicados por los profesores en su práctica cotidiana. Entre ellos, se recomienda

> "*Desarrollar el curso de modo que se tomen en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes con el fin de generar un aprendizaje significativo*", y "*Vincular los*

conceptos teóricos con experiencias cotidianas y plantear problemas recreativos, con el objeto de eliminar el perjuicio de que las matemáticas son áridas y difíciles" (CGB, 2001, Pág. 3).

Bajo esta perspectiva, es necesario contar con actividades de aprendizaje con las cuales los estudiantes se vean motivados a participar activamente en la construcción de sus propios conocimientos.

Las actividades en las que los estudiantes tienen la posibilidad de interactuar de manera directa con los objetos matemáticos, representados mediante objetos computacionales, han mostrado tener un gran potencial, tanto para motivarlos hacia el estudio de las matemáticas (Ferrara, Pratt & Robutti, 2006) como para cambiar su visión (Thomas & Holton, 2003) acerca de lo que es la disciplina: una actividad en la que se vale la exploración, el uso de múltiples procedimientos y formas de expresión, de cantidades aproximadas o exactas; también se vale la imprecisión, el ensayo y error, entre muchos otros procesos que se caracterizan por involucrar procesos informales en la resolución de problemas matemáticos.

Por tanto, la presente investigación asume como problema de Investigación:

La necesidad de implementar actividades basadas en el uso de la computadora, en un software de Geometría Analítica que permita diseñar e implementar actividades para el entendimiento de conceptos e ideas asociadas con la Geometría Analítica, como:

- *La identificación de variantes e invariantes en los elementos que conforman una construcción geométrica;*
- *La localización y medición de objetos geométricos en un plano.*
- *La relación entre los objetos de la geometría euclidiana y aquellos de la geometría analítica;*
- *La idea de lugar geométrico; y*
- *El estudio de las curvas cónicas en sus diferentes representaciones.*

I. 3. Objetivos de la investigación

Las computadoras pueden ser herramientas importantes para la enseñanza de las matemáticas (Roschelle & Jackiw, 2000). Además de ayudarnos con los procesos de cálculo, generan imágenes visuales que facilitan la organización de ideas y el análisis de datos, nos permiten trabajar de forma simultánea con múltiples representaciones y desarrollar habilidades de visualización esenciales en muchos procesos matemáticos. Cuando las herramientas tecnológicas están disponibles, los estudiantes pueden enfocar su atención en procesos de toma de decisiones, reflexión, razonamiento y resolución de problemas (NCTM, 2000, Pág. 24).

Así, el desarrollo de este trabajo de investigación tiene como objetivo fundamental, el diseño de algoritmos eficientes para la construcción de un software dinámico para promover conceptos de geometría analítica. Así mismo, otro objetivo es la implementación de estos algoritmos en un software interactivo y dinámico que incluya algunas actividades de Geometría Analítica que permitan hacer una evaluación técnica de los algoritmos por parte de un grupo de estudiantes.

Específicamente, los objetivos particulares de la presente investigación son:

- Diseñar algoritmos eficientes para la interacción dinámica con las curvas cónicas y otros objetos geométricos, como puntos, segmentos y rectas.
- Implementar dichos algoritmos en un paquete de Geometría Analítica dinámica integrando actividades de aprendizaje que incluyan aspectos gráficos, simbólicos y numéricos.
- La tecnología ha mostrado ser un medio motivador para la enseñanza de las matemáticas, así, otro objetivo es promover el interés de los estudiantes por el estudio de la Geometría Analítica en un ambiente tecnológico.

El software posee las siguientes características principales:

- Libre de errores computacionales, lo que permite un manejo dinámico eficiente sobre los objetos geométricos.
- De fácil manejo, para que los estudiantes puedan utilizarlo de manera autónoma.
- Que incluya problemas y ejercicios que puedan ser almacenados e impresos.

- Que los estudiantes tengan la oportunidad de interactuar directamente con los objetos, para que, mediante su propia experiencia, exploren, descubran, comparen y conjeturen.

En la actualidad existen diversos paquetes de software educativo para apoyar la enseñanza de la geometría. Así mismo, una variedad de sistemas de cómputo simbólicos (CAS, por sus siglas en inglés) que pueden ser utilizados para analizar las propiedades de las curvas cónicas, en especial, y de otras en general.

La forma de trabajo incorporada en el software de geometría dinámica, rompió con los sistemas estáticos de enseñanza en los que, una sola figura debía ser representante de toda una estructura o conjunto de objetos con una propiedad común. Ahora es posible visualizar todo el conjunto y descubrir cuáles son, precisamente, esas propiedades variantes e invariantes.

Si bien estos sistemas proporcionan un micromundo (Hoyles, C, & Noss, R, 2003) en el que los estudiantes pueden experimentar gran cantidad de situaciones, no fueron diseñados para utilizarse como una herramienta de aprendizaje autónoma. Esto es, se requiere actividades o tareas adicionales que dirijan el aprendizaje hacia los objetivos curriculares.

Por otro lado, ni las herramientas que nos proporciona el software de geometría dinámica en el mercado, ni aquellas que se han incorporado a los CAS, nos permiten realizar una acción que consideramos esencial en el estudio de la geometría analítica: la interacción dinámica directa con las gráficas de las cónicas. Esto implica que debemos poder manipular una gráfica, sin tener que recurrir a los parámetros de su representación simbólica o a su construcción geométrica en el sentido de la geometría euclidiana.

I. 4. Preguntas de investigación

Como consecuencia natural de los objetivos anteriores, nuestras preguntas de investigación son las siguientes:

1. **¿Qué características de los objetos matemáticos, en especial de las cónicas, y sus relaciones son fundamentales para construir algoritmos eficientes para el tratamiento gráfico de dichos objetos?**

Consideramos ésta como una pregunta fundamental en el desarrollo de software educativo, ya que, para poder implementar en un sistema computacional una ruta de aprendizaje, es necesario contar con algoritmos eficientes que no provoquen errores que desvíen la atención de los usuarios hacia objetivos diferentes de los planteados en el modelo de aprendizaje. Por tanto, para responder a esta pregunta se analizaron las características de los objetos matemáticos con los que se pretendía trabajar y se buscarón de ellos formas de expresión que permitieran evitar errores computacionales y procesos extensos de cálculo.

2. **¿Qué potencial ofrece el software para promover el desarrollo de ideas matemáticas de la geometría analítica?**

De acuerdo a la propuesta metodológica que se utilizó para dirigir esta investigación, una tarea fundamental para el diseño de cualquier software educativo es identificar los propósitos que se pretende favorecer con el uso del software.

En este sentido, consideramos que ésta es una pregunta fundamental, para cuya respuesta se requiere hacer un análisis y selección de actividades y tareas basadas en los contenidos curriculares del curso de Geometría Analítica, que permitan lograr aquellos propósitos fundamentales del curso, en los que la tecnología puede jugar un papel importante.

Por tanto, para responder a esta pregunta se realizó un análisis documental de investigaciones relacionadas con el tema bajo estudio, para generar una ruta de aprendizaje que pueda ser base del diseño de software. Ésta incluyo: el contenido matemático, las ideas fundamentales de la Geometría Analítica y las estrategias e ideas intuitivas usadas para resolver problemas, reportados en la literatura.

3. ¿Qué actividades pueden ayudar a la evaluación de los algoritmos diseñados para el tratamiento de los objetos gráficos requeridos para favorecer las ideas fundamentales de la Geometría Analítica?

Con base en el análisis documental de investigaciones relacionadas con la Geometría Analítica y la revisión de los contenidos curriculares y objetivos de aprendizaje del curso de Geometría Analítica del bachillerato de la Universidad Michoacana, se diseñaron actividades de prueba para incorporarlas en un software, utilizando los algoritmos de construcción y tratamiento de objetos matemáticos gráficos. También se consideraron aspectos relativos a:

A) La percepción visual del ambiente de trabajo;

B) Herramientas a utilizar y su funcionamiento; y

C) Formas de representación que pueden ser promovidas con el software de prueba.

4. ¿Qué dificultades, técnicas y de coherencia entre acciones y objetos se presentaron en el software durante su evaluación?

El software diseñado fue sometido a evaluación en una primera fase de exploración libre. Posteriormente, fue evaluado en una sesión de clase piloto mediante un experimento que permitiera analizar si satisface los propósitos sugeridos. Para, en su caso, rediseñar e implementar aquellas acciones y objetos que resultase necesario.

I. 5. Metodología

Con el fin de dar respuesta a las preguntas de investigación y alcanzar los objetivos señalados, se utilizó como base la metodología sugerida por Clements y Battista (2000) para el diseño de software educativo. Si bien esta metodología es de carácter cíclico, en el sentido de que implica un proceso continuo de evaluación y rediseño del software en construcción, en el presente trabajo se tomó en cuenta solamente la primera etapa cíclica de construcción, correspondiente a las siguientes fases:

1. Identificar los propósitos iniciales que se persiguen con el desarrollo del software. Entre ellos, la identificación del área de las matemáticas a desarrollar, la actividad matemática que realizan los estudiantes en esa área, los contenidos que se sugieren en diferentes propuestas curriculares y los propósitos que se persigue lograr.

2. Construcción de un modelo de aprendizaje de los estudiantes en el área de las matemáticas a desarrollar. En esta fase se recopilan y analizan los resultados de diferentes investigaciones con relación al aprendizaje de los conceptos del área; entre ellos, se deberán identificar diferentes concepciones, estrategias e ideas intuitivas utilizadas para resolver problemas.

3. Creación de un diseño inicial tanto del software como de las actividades de aprendizaje. En esta etapa se desarrolla el diseño del software tomando como base los propósitos y los resultados de la investigación descritos en las fases anteriores. Se implementa un prototipo del mismo y se desarrollan actividades basadas en el software. Aunque las propuestas incluyen el uso de lápiz y papel, en nuestro caso las actividades se incorporan en el mismo software, además de dar opciones para que otras puedan ser diseñadas por otros profesores.

4. Evaluación de los componentes del prototipo. En esta etapa de evaluación se prueban los componentes con un número reducido de estudiantes. Se trata de evaluar si los estudiantes son capaces de controlar las herramientas del software, y si pueden interpretar y entender las actividades que se les piden.

Además la metodología sugiere que el software debe someterse a otras etapas de evaluación, relacionadas con los modelos de aprendizaje de los estudiantes y el currículo del área que se pretende desarrollar. Por las características de este trabajo, estas etapas de evaluación serán omitidas, ya que requieren de periodos largos de tiempo.

CAPÍTULO II
Marco teórico

II. 1. Introducción

Este capítulo contiene la revisión de literatura relevante para el presente trabajo, incluyendo algunos resultados de investigación publicados que están relacionados con el uso y diseño de software para la educación matemática.

La primera sección comprende una revisión del marco metodológico utilizado como base para el diseño y desarrollo de los algoritmos y del software objeto del trabajo.

Utilizando como base este modelo, la segunda sección incluye un análisis de resultados de investigación relacionados con la enseñanza de la geometría en general, y la Geometría Analítica en particular, tema del presente estudio, en el nivel bachillerato. Incluye también una descripción del plan de estudios del curso de Geometría Analítica del bachillerato de la Universidad Michoacana; medio escolar donde se pretende implementar los algoritmos implementados en el software propuesto en este trabajo, identificando aquellos aspectos curriculares en donde resultaría importante el uso de la tecnología.

En la tercera sección se incluye una descripción de lo que se entenderá por representación matemática y la definición de los elementos básicos relacionados con el uso de representaciones de acuerdo con la teoría de Duval (1993, 1995, 2004).

En la última sección se incluyen diferentes resultados de investigación relacionados con las ventajas y desventajas que se han presentado al usar la tecnología computacional para el aprendizaje de las matemáticas, tanto a nivel teórico como de implementación de dicha herramienta.

II. 2. Fundamentos metodológicos para el diseño de software educativo

No hay duda de que la tecnología puede tener un impacto importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, la mayoría de las veces las industrias encargadas de producir y diseñar software educativo no cuentan con los elementos didácticos que les permitan producir software educativo efectivo (Clements & Battista, 2000), en el sentido tanto pedagógico como computacional. En este apartado, se incluye el modelo metodológico propuesto por Clements y Battista (2000) que guió el desarrollo del presente trabajo, relativo a la integración de los resultados de la investigación en educación matemática en el desarrollo de software que pueda ayudar a aprovechar el potencial de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

El diseño e implementación de software comercial generalmente pasa por una serie de etapas de diseño, construcción y prueba, que tienen como meta el generar productos eficientes y útiles para tareas que pueden ser muy específicas o más generales. En la mayoría de estos casos, es raro que se realicen ensayos con los usuarios finales para probar la utilidad real de los productos; el tipo de pruebas realizadas son de carácter técnico y consisten en tratar de detectar errores o posibles caídas de los sistemas de cómputo (los cuales conllevan a considerar a un software como de baja calidad). En ocasiones se cuenta con una prueba formativa mínima mediante los productos "beta"; sin embargo, este proceso generalmente lleva a cambios mínimos en los productos debido a que se dispone de un tiempo y recursos limitados, llevando a dichas pruebas a ser de carácter acumulativo en lugar de formativo (Schauble, 1990).

La mayoría de las investigaciones relacionadas con el diseño de software en la educación, han utilizado diseños cuantitativos en los que el aprendizaje se mide a través de resultados estadísticos arrojados por la calificación "correcto" o "incorrecto" producida por los software. Son pocos los que se rediseñan y reconfiguran como resultado de una investigación profunda con relación a su verdadero potencial educativo.

Por otro lado, es importante que el diseño de software se fundamente sobre una base teórica que incluya tanto enfoques de aprendizaje como aquellos relacionados con la construcción de algoritmos eficientes.

El diseño de software educativo debe tener un fundamento teórico explicito y empírico; además, debe interactuar con el desarrollo de la teoría y la investigación – con el fin de alcanzar el ideal de examinar una teoría a través del software. Para que pueda contribuir al desarrollo de la educación matemática, tanto en el ámbito de la práctica educativa como en el desarrollo teórico y de investigación, el diseño e implementación de software educativo debe tomar en cuenta ciertas consideraciones y proceder en diferentes etapas que permitan aprovechar el potencial de la computadora para apoyar a la educación matemática.

La enseñanza y el aprendizaje a través de ambientes tecnológicos interactivos requiere un examen de los productos y procesos de aprendizaje, así como una variedad de transacciones sociales relevantes, lo cual es un proceso complejo que necesita del uso de múltiples metodologías (Clements & Sarama 1995; Thompson, 1992).

El modelo y diseño metodológico utilizado implica fases recursivas y lineales. Se comienza con el bosquejo de valores iniciales y objetivos educativos, y finaliza con una etapa de implementación en los salones de clase. Enseguida se describen con precisión estas etapas.

Fase 1. Bosquejo de los objetivos iniciales

Ésta fase consiste en identificar una problemática en el campo de las matemáticas; tomando en consideración que dicha situación, debe contribuir significativamente en la formación matemática de los estudiantes y así mismo, debe favorecer el desarrollo de la investigación y la teoría.

Se recomienda analizar diferentes propuestas de la reforma educativa, así como aspectos socioculturales y técnicos, ya que se espera que los usuarios finales sean estudiantes que puedan participar en investigaciones de campo.

Esta es una de las fases más importantes en el proceso de desarrollo de software educativo, ya que puede hacer la diferencia entre un software tecnocentrista, producto de un diseño en el que la computadora juega el papel principal, en contraposición al software que toma en cuenta aspectos relativos a la cultura de la clase, a las actividades curriculares y a los procesos de aprendizaje del contenido matemático.

El resultado de esta fase metodológica, consiste en la descripción de la problemática que será objeto de estudio para ayudar a los estudiantes a aprender procesos y conceptos matemáticos importantes, independientemente si se usa o no un ambiente tecnológico (Lehrer, 1995, citado por Clements & Battista, 2000).

Fase 2. Construcción de un modelo explícito del conocimiento y aprendizaje de los estudiantes, en el ámbito de los objetivos de la fase 1

Este paso consiste en construir un modelo de aprendizaje para los estudiantes, que sea suficientemente explícito para describir el proceso de construcción de los conceptos matemáticos. El modelo puede ser obtenido de resultados de investigaciones anteriores, aunque no se ajuste del todo a las necesidades del diseño del software. En este caso, es conveniente desarrollar y utilizar algunos métodos complementarios de información como, entrevistas clínicas y observaciones de trabajo de campo que permitan valorar el conocimiento matemático, las ideas y estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver problemas. Es conveniente propiciar un ambiente relajado en el que los estudiantes puedan expresar lo que están pensando.

Así mismo, si el uso del software requiere de la utilización de actividades adicionales en lápiz y papel, éstas también deberán ser evaluadas respecto a la conveniencia de los problemas propuestos. Los modelos mentales de los estudiantes, documentados por el investigador, deben guiar el diseño de las actividades.

El resultado final de esta fase debe ser un modelo hipotético explícito del aprendizaje de los estudiantes sobre los contenidos matemáticos involucrados. El uso constante de este modelo nos permitirá conectar con las siguientes fases.

Fase 3: Crear un diseño inicial del software y de las actividades

Corresponde a esta fase el diseño del software que puede estar basado en diferentes enfoques e incluir:

- La construcción de sistemas basados en micromundos o ambientes de aprendizaje interactivos basados en el uso de computadoras (Papert, 1982); es decir, dominios en los que los estudiantes pueden explorar y aprender simultáneamente (Holyes & Noss, 2003).
- Diseño de herramientas cognitivas; es decir, generar programas que permitan utilizar a la computadora como un instrumento para facilitar el desarrollo de tipos específicos de procesos cognitivos (Jonassen, 1996).
- Generación de simulación de fenómenos.
- Construcción de lenguajes de programación y especializaciones de los mismos.
- Escritura de componentes modulares que puedan representar cualquiera de estos tipos.

Con base en el modelo de aprendizaje generado en la fase 2, se diseña un primer modelo para describir los objetos que podrían constituir el ambiente del software y las acciones que pueden realizarse con ellos, tratando de reflejar la actividad de los estudiantes. El diseño también describe la forma en que se accede a las acciones.

El diseño basado en objetos y acciones obliga al desarrollador a que se enfoque en acciones y procedimientos explícitos, que sean significativos para el estudiante. Estas características reflejan el beneficio atribuido al modelo de la ciencia cognitiva de cómo es que piensan los humanos; no permitiendo que las "cajas negras" oculten las debilidades en la teoría.

Durante la planeación de los objetos y acciones se debe considerar también el potencial de la computadora, ya que estos elementos estarán directamente ligados a las características propias del sistema de cómputo. Por ejemplo, las acciones sobre los objetos podrán ser dinámicas e interactivas si se cuenta con las herramientas físicas para poder interaccionar con ellas; o, si se dispone de dispositivos de almacenamiento, es posible almacenar y recuperar posteriormente las acciones que los estudiantes efectúan sobre los objetos.

Fase 4 Evaluar los componentes del software

Durante esta fase, se prueban técnicamente los componentes del software mediante la aplicación de actividades a un grupo pequeño de estudiantes y se realizan las observaciones pertinentes. Las preguntas que deberían responderse en esta fase son: ¿Los estudiantes son capaces de tomar el control del software? ¿Cómo interpretan y entienden el diseño de la pantalla, de los objetos y las acciones? El objetivo es entender el significado que los estudiantes dan a los objetos y acciones que se han creado para tratar de promover su aprendizaje.

Si no se cuenta con un prototipo del sistema, en esta fase se pueden usar actividades en lápiz y papel o material físico. También podría usarse algún otro software que permita crear prototipos rápidamente a partir de un lenguaje de programación de bajo nivel.

En esta fase es importante que exista un equipo de trabajo que incluya programadores, educadores matemáticos y diseñadores gráficos en comunicación constante. Clements y Battista (2000) señalan que, con base en su experiencia en el desarrollo de software educativo de matemáticas, este acercamiento tiene muchas ventajas para el desarrollo de software que apoye también a la investigación.

Fase 5. Evaluar el prototipo con respecto al currículo

En esta fase se continúa con la evaluación del software en su versión prototipo. El objetivo es evaluar si las características del ambiente computacional diseñado corresponden a los modelos de pensamiento de los estudiantes, a través de sus acciones sobre los objetos y su actividad matemática. A falta de esta correspondencia se deberá reformular ya sea el modelo mental o la forma en que se instancia dicho modelo a través del software.

También se evalúan aspectos pedagógicos poniendo atención en las interpretaciones que dan los estudiantes a la retroalimentación que les proporciona el software. En este sentido, puede ser útil un experimento de enseñanza con un grupo pequeño de estudiantes. Generalmente una exploración libre del software precede a la introducción de actividades. Esta información servirá para construir modelos más refinados además de contar con datos empíricos que apoyen la realización de investigaciones con respecto a la interacción de los estudiantes con la computadora.

Fase 6. Realizar un estudio piloto en el salón de clase

Esta fase tiene el objetivo de analizar si las actividades propuestas con el software tienen sentido para los estudiantes. Para ello se pueden realizar experimentos de enseñanza, primero con uno o dos alumnos en un ambiente naturalista y luego con un salón de clase normal. Se requiere realizar observaciones de campo y video grabaciones con el fin de poder examinar cómo actúan los estudiantes para inferir sus interpretaciones y su aprendizaje.

Fase 7. Realizar un estudio de campo en múltiples salones de clase

Esta fase consiste en realizar estudios de campo con diferentes profesores que no hayan sido parte del desarrollo del proyecto. Se desea saber si el software y sus materiales de soporte son suficientemente flexibles para tolerar múltiples situaciones, diferentes modelos de instrucción y diferentes formas de administración. También se trata de determinar el sentido que tienen varios materiales curriculares tanto para los maestros como para los estudiantes. Los métodos de investigación propicios para esta fase son estudios etnográficos.

Esta fase es una de las más extensas ya que se los estudiantes deben interactuar con los materiales y el software durante largos periodos de tiempo.

Junto con las fases anteriores, ésta proporciona un enfoque detallado para obtener apoyo de los usuarios y datos importantes para la investigación.

Fases 8. Revisar, refinar y reconceptualizar el software

En esta etapa se realizan los cambios globales como resultado de la información que proporcionan las fases anteriores. Si bien se espera que el software sea revisado y sufra adecuaciones conforme se avanza en las fases anteriores, en ésta se espera una adecuación global.

Fase 9. Patentar y hacer público el software producido

El publicar y distribuir el software es una tarea que Clements y Battista (2000) incluyen como parte del proceso, ya que mucho del software educativo que se produce no se hace público lo cual causa daño, tanto al campo del desarrollo curricular y uso de tecnología como a la investigación.

La tecnología y su uso en la educación y en la vida diaria están cambiando rápidamente. El diseño de software, las preguntas de investigación y las metodologías asociadas deben ser sensibles a las nuevas posibilidades. Si bien, la metodología de diseño descrita hace énfasis en una visión constructivista para el desarrollo de software educativo, pueden considerarse modificaciones cuando se desea producir algún tipo de software en especial. Sin embargo, la base de los objetivos y procedimientos deberían ser muy similares.

En el desarrollo de este software, se han incluido las cuatro primeras fases propuestas por Clements y Battista (2000), ya que el diseño se ha restringido, por cuestiones de tiempo, a una fase piloto. Posteriormente, se espera continuar con el desarrollo de las fases restantes del modelo metodológico.

II. 3. La enseñanza de la Geometría Analítica en el bachillerato

La geometría es considerada como una herramienta para el entendimiento (ICMI, 2001), ya que tal vez es la parte de las matemáticas más intuitiva, concreta y ligada a la realidad. Así mismo, la geometría como una disciplina, se apoya en un proceso extenso de formalización, el cual se ha venido desarrollando por más de 2000 años en niveles crecientes de rigor, abstracción y generalidad.

En años recientes la geometría ha sido estimulada ampliamente por nuevas ideas y recursos tecnológicos que nos proporcionan enormes posibilidades para trabajar en ambientes gráficos y visuales, los cuales han mostrado ser recursos de comunicación eficientes en diferentes aspectos de nuestra vida.

La geometría incluye una diversidad de aspectos que van de la identificación de formas al entendimiento de la axiomática formal como base de demostración en matemáticas; así, su enseñanza puede iniciar en una edad temprana y continuar en formas apropiadas a través de todo el currículo matemático. Esta situación ha generado diferentes opiniones (ICMI, 2001), a veces divergentes, con relación a los propósitos, contenidos y métodos para su enseñanza en los diferentes niveles escolares.

Otra posible causa de esta divergencia es el hecho de que aún los conceptos básicos de la geometría deben ser reconsiderados en diferentes etapas de la enseñanza. Por ejemplo, según el modelo de Van Hiele (Crowley,1987) el aprendizaje de la geometría pasa por niveles de pensamiento que están asociados a la edad de los estudiantes. De acuerdo con esta teoría, el estudio de las figuras geométricas comienza en los primeros años de edad, cuando éstas se describen por su apariencia y relación con los objetos familiares del entorno del niño. En una segunda etapa, los niños pueden llegar a establecer propiedades de las figuras, experimentar con ellas; sin embargo, aún no es posible su clasificación a partir de éstas. Así, en el tercer nivel los estudiantes comienzan a generalizar propiedades y por tanto, a clasificar a las figuras según sus propiedades. Reconocen cómo unas propiedades se derivan de otras, estableciendo relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones.

Esta teoría del aprendizaje evidencia el hecho de que los conceptos geométricos deben ser reconsiderados en diferentes etapas de la enseñanza. Desde sus aspectos descriptivos perceptivos hasta sus aspectos axiomático deductivos.

Así mismo, el papel que juegan las demostraciones y la función de la geometría de apoyar explícitamente el aprendizaje del razonamiento deductivo, además del aprendizaje de los conceptos propios del área, hace que su enseñanza no sea una tarea fácil.

Por otro lado, en la actualidad la geometría incluye una diversidad de puntos de vista que pueden tener diferentes implicaciones didácticas (ICMI, 2001), algunas de éstas implican, ver a la geometría como:

- la ciencia del espacio. Es decir, como una herramienta para describir y medir figuras y, en este sentido tenemos: la geometría euclidiana, geometría descriptiva y proyectiva, así mismo, la topología o las geometrías no euclidianas y combinatorias.
- un método para generar representaciones visuales de conceptos y procesos de otras áreas de las matemáticas y otras ciencias; por ejemplo la teoría de gráficas,

los diagramas de diversas clases, los histogramas y las gráficas de aproximación;

- una manera de pensar y entender; esto es, vista como una teoría formal;
- una herramienta para la enseñanza del razonamiento deductivo;
- una herramienta para aplicaciones, tanto tradicionales como innovadoras. Estas últimas incluyen, entre otras: gráficas por computadora, procesamiento y manipulación de imágenes, reconocimiento de patrones, robótica, e investigación de operaciones.

Si bien los anteriores puntos de vista hacen una categorización de los conceptos geométricos según su uso u objetivo, otra forma de categorizar puede darse en términos de los objetos que usamos para su enseñanza; es decir, es posible pensar en modelos de enseñanza que hagan énfasis en las propiedades dinámicas y estáticas de los objetos geométricos (Zubieta et al., 2005), o que enfaticen el uso de transformaciones geométricas como la simetría, rotación y traslación (NCTM, 2000).

Los cambios curriculares generados por las diferentes reformas educativas a nivel nacional, han influido considerablemente en los cursos de geometría. Por ejemplo, en el período de 1960 a 1980, el "movimiento de las matemáticas modernas" contribuyó al declive de la geometría y los aspectos visuales, favoreciendo en su lugar el simbolismo matemático como la teoría de conjuntos, la lógica y el estudio de estructuras abstractas. En especial, todos aquellos conceptos y nociones de la geometría que no encajaban en la teoría de los espacios lineales como, el estudio de las secciones cónicas y de otras curvas notables, fueron temas a los que se daba poco o ningún énfasis.

En años más recientes se ha retornado hacia contenidos matemáticos incluidos en el currículo anterior (movimiento de reforma identificado por la frase "*back to basics*"), ahora con un énfasis en el desarrollo de actividades de planteamiento y resolución de problemas (SEP, 2006). Si bien, este intento no ha resultado ser del todo exitoso, sí favoreció el desarrollo de temas de geometría en los que los estudiantes tienen la oportunidad ahora de tomar una parte activa en el desarrollo de su conocimiento matemático (ICMI, 2001), particularmente en temas relacionados con la geometría analítica como el estudio de diferentes clases de curvas y las ideas de lugar geométrico.

Actualmente hay una creciente tendencia a nivel internacional hacia la enseñanza de los métodos analíticos de la Geometría Analítica, presentando a niveles escolares tempranos los modelos algebraicos para las situaciones geométricas y viceversa. Sin embargo, mediante una breve introducción a estos métodos, los estudiantes "*son empujados repentinamente a un mundo de cálculos y símbolos en los que se rompen las ligas entre las situaciones geométricas y sus modelos algebraicos y con frecuencia son omitidas las interpretaciones geométricas de los cálculos numéricos*" (ICMI, 2001). Dos preguntas que resultan consecuentemente son: ¿a qué edad y nivel escolar debiera iniciarse la enseñanza de la Geometría Analítica?, y ¿cuáles actividades, métodos y marcos de trabajo pueden usarse para restablecer enlaces entre las representaciones algebraicas y las geométricas?

Usualmente el estudio de la Geometría Analítica se incluye en el nivel bachillerato, después de haber cursado temas propios del álgebra y de la geometría euclidiana, pretendiendo que la Geometría Analítica tenga como objetivo implícito el de establecer relaciones sobre esta base de conocimientos, en estas áreas previamente estudiadas. Sin embargo, sus contenidos están parcialmente desligados de dicho objetivo. Por ejemplo, el contenido del curso de Geometría Analítica del bachillerato de la Universidad Michoacana incluye los siguientes tópicos:

- La Circunferencia
- La Parábola
- La elipse
- La hipérbola
- La gráfica de una ecuación y lugares geométricos

Los cuatro primeros temas, que corresponden a las cuatro primeras unidades del curso, se estudian de manera semejante: Se da su definición, las condiciones para determinar la curva, sus ecuaciones generales, la determinación de sus aspectos básicos (centro, vértices, semiejes, etc.) y ejercicios de transformación de ecuaciones y trazado de gráficas.

Si bien parecería que en la quinta unidad se incluye el estudio de los lugares geométricos, de acuerdo al desglose del contenido, solamente se tratan algunos aspectos de la graficación de funciones y de la ecuación de segundo grado.

De aquí se puede observar que si bien es necesario tener un dominio en el campo del álgebra, la geometría euclidiana ha quedado relegada ya que no se trata ningún aspecto relacionado con ésta.

II. 4. Distintas formas de representar los objetos matemáticos, un aspecto fundamental en el aprendizaje de las matemáticas

El término *representación* es un término que ha adquirido relevancia en la literatura en educación matemática cuando se habla del uso de la tecnología y software educativo. Entenderemos como representación todos aquellos esquemas internos Dreyfus (1991) y externos Duval (1995) que permiten que un sujeto interaccione con los conceptos matemáticos, ya sea para entenderlos o para expresarlos. Esta interpretación también está de acuerdo con Goldin y Kaput (1996) quienes señalan que una representación es una configuración de algún tipo que interacciona con su representado; es decir, una representación y lo que representa se influyen mutuamente, sin ser ésta una relación fija o unidireccional. Duval (1995) la considera un elemento fundamental para acceder a los objetos matemáticos, ya que el uso de varias de ellas de manera simultánea, propicia un mejor entendimiento de los conceptos.

Duval (1993) señala que cada una de las diferentes formas en que puede representarse un objeto matemático proporciona diferente información acerca del mismo y, por tanto, el tener presentes varias de ellas de manera simultánea, permite tener un mejor entendimiento de él. Así mismo, las diferentes acciones que se pueden realizar sobre una representación influyen en nuestro entendimiento de los conceptos matemáticos.

Cuando se realiza un cambio de una representación a otra; es decir, cuando se realiza una conversión entre representaciones (Duval, 1993), se conecta y expande la cantidad de información que tenemos del objeto. Así mismo, cuando realizamos tratamientos sobre una representación, modificando algunas condiciones del objeto representado, se puede observar los invariantes y variaciones en los elementos característicos los objetos, lo que puede llevar al planteamiento y verificación de conjeturas, y a trabajar en una matemática más experimental.

Duval (1995) señala al respecto:

> *Un aprendizaje específicamente centrado en el cambio y coordinación de los diferentes registros de representación semiótica, produce efectos espectaculares sobre las macrotareas de producción y de comprensión* (Pág. 46).

Para él, las representaciones semióticas son sólo el medio del que dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales. El pensamiento matemático está estrechamente ligado al desarrollo de simbolismos para representar los objetos y sus relaciones. Así, la diversidad de sistemas semióticos incrementa la capacidad cognitiva del sujeto y, por ende, sus representaciones mentales.

Esta movilización simultánea es familiar en las actividades matemáticas, pero no es sencilla para todos los alumnos. Éstos deben tener oportunidades de interactuar con los objetos realizando tratamientos en una misma representación y conversiones entre representaciones, para propiciar un aprendizaje significativo y duradero (Carpenter & Lehrer, 1999).

Cuando incorporamos un medio tecnológico al proceso de enseñanza aprendizaje, el tipo de representaciones simultáneas accesible mediante una computadora, permite mirar a ésta como una herramienta representacional, en la que los objetos se vuelven tangibles, comparadas con las representaciones en un medio tradicional, como el lápiz y papel o el pizarrón. La computadora actúa como un mecanismo intermedio, entre lo concreto y lo abstracto. Si bien, no tenemos objetos físicos, ésta nos permite interaccionar dinámicamente con los objetos representados en su pantalla, para modificarlos y manipularlos de manera similar a como lo haríamos con objetos concretos.

Por ejemplo, el área de polígonos regulares es un concepto que se estudia a partir del quinto año de primaria, mediante la deducción de la fórmula $A = \dfrac{P \times a}{2}$, donde P es el perímetro de la figura y a la apotema de la misma. Para ello el polígono se descompone en tantos triángulos como lados tenga.

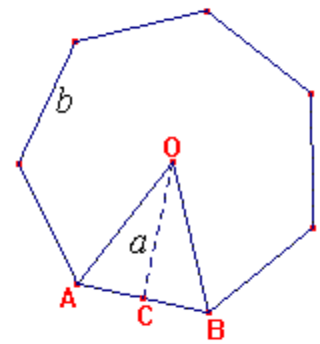


Figura II.1. Área de polígonos regulares

Podemos utilizar esta fórmula con $a = 5$ y P = 7×6; es decir:

$$A = \frac{(7 \times 6) \times 5}{2} = 105,$$

lo que equivaldría al cálculo del área de un heptágono de lado 6 y apotema 5.

Sin ir más allá de la fórmula, es posible que no nos demos cuenta que dicha “figura” no puede ser construida. Así mismo, la construcción geométrica de un heptágono con esas características y sin el uso de una herramienta computacional, es una tarea compleja fuera del ámbito de estudio de la geometría del quinto grado de primaria. En este ejemplo, el uso de la tecnología actúa como un mecanismo mediador que permite trabajar con el objeto geométrico como si fuera un objeto físico, que se puede manipular con el fin descubrir la imposibilidad de la construcción de la figura de la que supuestamente se ha calculado su área.

Resumiendo, varios fenómenos importantes en el proceso de aprendizaje, relacionados con la teoría de representaciones semióticas, propuesta por Duval (1995) son:

- En matemáticas, las representaciones semióticas no solo son indespensables para fines de comunicación, sino también son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma.
- El aprendizaje de las matemáticas se acompaña siempre de creación y desarrollo de sistemas semióticos nuevos, que al inicio están muy relacionados con el lenguaje natural, pero que van evolucionando a un sistema simbólico asociado con el desarrollo del pensamiento matemático.

– Por lo anterior, las representaciones mentales y las representaciones semióticas no pueden oponerse como dominios totalmente diferentes. El desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones semióticas; de la misma manera que las imágenes mentales son una interiorización de los perceptos (Gray & Tall, 1994).

II. 5. Uso de la tecnología en educación matemática

En años recientes la tecnología y en particular las computadoras, han convertido algunas de nuestras actividades tradicionales en obsoletas mientras que emergen otras nuevas. En particular, en geometría, el uso de la tecnología marcó una clara diferencia entre el dibujo tradicional y la construcción de relaciones geométricas. Las computadoras también han hecho posible la construcción de micro mundos y entornos de aprendizaje virtuales que están en una etapa intermedia entre lo concreto y lo abstracto, aún cuando la práctica escolar ha sido sólo secundariamente influida por estas innovaciones.

Cuando hablamos de la tecnología, también tenemos que considerar el hecho de que la geometría está profundamente involucrada tanto en la habilidad de usar herramientas tecnológicas apropiadamente, en la interpretación y entendimiento del significado de las imágenes producidas, como en el diseño y construcción de software; en especial de software educativo.

Por ejemplo, un software específico puede ayudar a tener un entendimiento más profundo de las estructuras geométricas, como es el caso de la presentación dinámica de objetos geométricos; pero también es cierto que en el diseño de software educativo influye de manera determinante en el conocimiento geométrico.

La computadora como herramienta de aprendizaje puede favorecer diferentes aspectos de la enseñanza; por ejemplo, cuando se requieren hacer cálculos repetitivos o graficar conjuntos de datos, la potencia de cálculo de una computadora nos permite acelerar este proceso. Para la computadora esta etapa es trivial, en el sentido de que solo ayuda a obtener resultados más rápidamente. La computadora actúa como un amplificador (Dreyfus, 1994).

En otras etapas del proceso educativo, la computadora actúa como reorganizadora del conocimiento (Pea, 1985) ya que cambia la forma de aprendemos; accedemos al conocimiento de manera experimental identificando y descubriendo relaciones o analizando y coordinando la información que nos proporcionan diferentes formas de representación, incluyendo características cualitativas y cuantitativas de los objetos con los que estamos interactuando.

Como herramienta, la computadora nos permite ver diferentes ángulos que no se ven en la forma tradicional. En este caso, los alumnos pueden desarrollar y ver dinámicamente el proceso de incorporación, repetir la función, observar secuencias numéricas, interactuar con diferentes representaciones a la vez, analizar los cambios que se producen en unas cuando se modifican otras. Muchos de estos aspectos dinámicos pueden ser descritos en términos cualitativos y no en términos cuantitativos. También puede cambiar la calidad de los objetos matemáticos y los procesos de las experiencias de aprendizaje; así la computadora puede convertirse en una herramienta cognitiva para el aprendizaje de las matemáticas.

El diseño de software requiere la toma de decisiones respecto a algunas de las siguientes cuestiones: el tipo y presentación de las gráficas a usar; la forma de despliegue de la información numérica y gráfica; las relaciones entre cualesquiera dos o más representaciones. Sin embargo, en la mayoría del software disponible algunas de estas opciones solo son accesibles para el usuario que tiene una preparación anticipada con el uso de software. Esta preparación regularmente requiere del uso de tiempo que es fundamental en el currículo escolar. Así, la tecnología puede presentar ventajas pero también ciertas desventajas para el aprendizaje.

Así mismo, el software puede tener aspectos favorables desde el punto de vista didáctico; sin embargo, si éste ha sido desarrollado para un propósito diferente, puede carecer de muchas características que son esenciales. Así pues, las computadoras como herramienta, introducen nuevas oportunidades en la educación matemática, pero también nuevas problemáticas que deben resolverse.

Una de las oportunidades citadas con mayor frecuencia es su potencia para usar múltiples representaciones, las cuales son fundamentales para la comprensión de algunos conceptos matemáticos. La idea es usar varias representaciones a la vez, de tal manera que cada una de ellas haga énfasis en aspectos diferentes de los conceptos, lo cual ayuda a los estudiantes a conectar aspectos correspondientes a diferentes representaciones y entender mejor los conceptos matemáticos.

Entonces una de las ventajas de la tecnología computacional, es aumentar el potencial del uso de las representaciones incluso sin, necesariamente, conectar varias de ellas. Por ejemplo, por un lado las representaciones gráficas y diagramáticas han recibido especial atención por los investigadores debido a que se han identificado propiedades de estas representaciones que son superiores en el sentido de la información que proporcionan con respecto al concepto representado (véase por ejemplo, Koedinger, 1992). Estas propiedades son de dos tipos: estructural e imprevista. La primera se refiere a la colocación espacial de la información en un diagrama y la segunda se refiere al potencial perceptivo para descubrir las relaciones que no habían podido ser apreciadas usando otra representación.

Por otro lado, las representaciones gráficas en la pantalla de la computadora muestran relaciones directas involucradas en los objetos matemáticos; así mismo, la observación de los cambios resultantes en estas relaciones. Debido a que en la computadora, las acciones pueden ser repetidas libremente, es posible apreciar estos cambios las veces que sea necesario y así generar conclusiones basadas en información retroactiva dada por el programa.

Una oportunidad adicional para la educación matemática del uso de la herramienta computacional, es permitir hacer "cálculo trivial" tal como la evaluación de una función y el repetir el cálculo de la misma función con algún parámetro adicional o el cálculo de una tabla de valores de dicha función, etc. La idea es que los estudiantes operen en un nivel conceptual más elevado. En otras palabras, que puedan concentrarse en las operaciones que están dirigidas a ser el foco de atención y puedan dejar a la computadora las operaciones que no son tan importantes. Por ejemplo, cuando están aprendiendo manipulación algebraica, pueden dejar las operaciones numéricas a la computadora. Esto ayuda a los estudiantes a corregir e integrarse al currículo de matemáticas sin necesidad de primero cubrir todas sus dificultades de comprensión (Hillel, Lee, Laborde, & Linchevski, 1992).

Si bien la computadora parece ser una herramienta, amplificadora y cognitiva importante para tratar algunos conceptos matemáticos, aún hay preguntas importantes que deben ser contestadas. Por ejemplo, si usamos la tecnología como herramienta que permita a los estudiantes hacer cálculos numéricos con mayor facilidad, cuando están aprendiendo las técnicas de derivación e integración en el curso de Cálculo, ¿cómo les advertimos que en las computadoras (o calculadoras) se pueden evaluar derivadas e integrales? o mejor dicho, ¿deberíamos impedir el uso de las computadoras para esos casos?

Aún no hay una respuesta aceptada para algunas preguntas relativas al uso de la tecnología (Thomas & Holton, 2003) en el proceso educativo; pero, los desarrolladores del currículo siguen trabajando y los maestros continúan enseñando; ambos tienen que tomar decisiones al respecto.

En este contexto, Dreyfus (1994) señala que la investigación alrededor del uso de la tecnología en la educación matemática ha aportado dos posibles opciones para su incorporación en el currículo escolar:

1. Desarrollar materiales apropiados para el uso de CAS e investigar los efectos.
2. Diseñar herramientas específicas en la computadora para el uso en temas educativos.

Resumiendo, las herramientas computacionales ofrecen potencial para contribuir al proceso de aprendizaje, no sólo como amplificadores (ahorro de tiempo) sino también como un reorganizador mental, ya que las ideas matemáticas se atacan desde un punto de vista diferente, lo que cambia son los procesos cognitivos.

II. 6. La tecnología como herramienta matemáticas versus la tecnología como herramienta didáctica

Pareciera que existe una dicotomía entre las herramientas matemáticas y herramientas didácticas. Las herramientas matemáticas como los CAS y las hojas de cálculo se construyeron para adaptarse a la estructura y lógica en el contenido del área. Respetan el sentido lógico (pero no necesariamente el psicológico) y la estructura es inherente al área del contenido matemático. Son aplicables en una gran variedad de situaciones que no se limitan a ser educativas. En este tipo de herramientas, la transferencia conceptual, en general, es débil; es decir, no tendrá en cuenta ninguna de las dificultades conceptuales surgidas por el estudiante quien se enfrenta con la construcción de una imagen mental. Así, el uso de estas herramientas en la educación, requiere de la creación de actividades de aprendizaje que favorezcan el desarrollo conceptual y guíen al estudiante en el uso de la herramienta.

Por otro lado, una herramienta didáctica, es aquella que se diseña específicamente para adaptar un concepto a un elemento del currículo. En conjunto, estas herramientas didácticas locales pueden conformar una vía factible de entrada de la tecnología en el aula de matemáticas.

Para que una herramienta didáctica proporcione al estudiante la posibilidad de descubrir el comportamiento de los objetos matemáticos en el área que está investigando, debe permitir la creación de objetos y transformaciones adicionales (Thompson, 1992). De ello surgen las preguntas: ¿Qué acciones del sistema de cómputo están a la disposición de los estudiantes?, ¿son éstas suficientemente flexibles para tener en cuenta la creatividad matemática por parte de los estudiantes?, ¿son lo suficientemente específicas y útiles?, ¿qué tan bien diseñadas están, desde el punto de vista didáctico?

Lo anterior sugiere que, en términos de la eficiencia didáctica, existen ventajas al crear herramientas didácticas personalizadas ya que pueden estar hechas a la medida para dar exactamente el "ideal" didáctico de manera transparente.

CAPÍTULO III
Las cónicas

III. 1. **Introducción**

Las cónicas pueden tratarse desde varios puntos de vista. Por ejemplo, como los lugres geométricos de todos los puntos del plano para los que la razón de distancias a una recta fija y un punto fijo es una constante. También pueden definirse como las curvas de intersección de un cono con un plano; o como las curvas cuyas ecuaciones son cuadráticas.

Estas diferentes visiones surgen en la historia debido a la forma en que se conceptualizan estas curvas, por lo que una revisión histórica del desarrollo de las cónicas resulta importante para tratar de entender significados que pueden ser asignados por los estudiantes a los conceptos involucrados; tema de la siguiente sección de este capítulo.

Estas concepciones de las cónicas están relacionadas con las diferentes formas en que pueden ser representadas; de esta forma los tratamientos y conversiones que podamos hacer con ellas y entre ellas, proporcionan un marco de trabajo para favorecer el entendimiento de diferentes conceptos relacionados con su estudio, por lo que, en la tercera sección del presente capítulo se incluye una revisión minuciosa de las cónicas en estos tres diferentes tratamientos.

Con la revisión y el análisis de las secciones descritas, la última sección de este capítulo incluye una propuesta de actividades para favorecer el entendimiento de conceptos y relaciones entre éstos, desde el punto de vista de las cónicas, como lugar geométrico y ecuación de un lugar geométrico, relaciones parámetros y gráficas de parábolas, circunferencias, elipses e hipérbolas, entre otras.

III. 2. **Antecedentes históricos**

Las curvas cónicas fueron estudiadas desde la antigüedad por filósofos de la vieja Grecia entre los años 600 a. C, y 300 a. C. Según Proclo (411 a. C. – 485 a. C.) uno de los primeros filósofos en estudiar las secciones cónicas fue Menecmo (~320 a. C.), quien mostró que éstas se pueden obtener cortando un cono con planos no paralelos a su base. Menecmo fue alumno de Eudoxio (408 a. C. – 355 a. C.) y tutor de Alejandro el Grande.

Se creé que encontró algunas propiedades de las secciones cónicas, como las asíntotas de la hipérbola aunque no existe ningún documento que lo asegure. Así mismo, de la evidencia recientemente descubierta (1970), en la traducción al árabe del documento de Diocles "*On burning mirrors*", se ha concluido que los nombres de 'parábola' e 'hipérbola' atribuidos previamente a Apolonio, de hecho habían sido utilizados con anterioridad y se piensa que bien pudieron ser introducidos por Menecmo.

Menecmo descubrió las secciones cónicas como consecuencia del su trabajo en la resolución de uno de los tres problemas clásicos de la geometría griega: la duplicación del cubo. Mediante la obtención de dos medias proporcionales entre dos segmentos construyó un camino para resolver el problema de la duplicación del cubo. Una posible forma de solución se describe a continuación:

Dados a y b se quiere obtener dos medias proporcionales x, y entre ellos. Esto es:

$$a : x = x : y = y : b$$

Por tanto, la proporción $a : x = x : y$ implica que $x^2 = ay$. Y de forma análoga, como $a : x = y : b$ entonces $xy = ab$.

x y y se pueden ver como la intersección de la parábola $x^2 = ay$ y la hipérbola $xy = ab$, como puede observarse en la figura III.1.

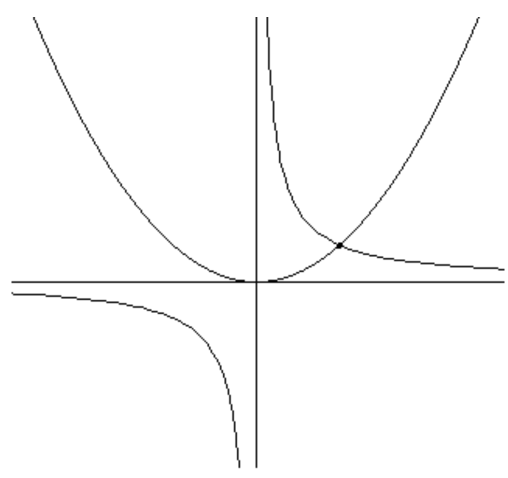


Figura III.1. Estrategia de Menecmo para la solución del problema de la duplicación del cubo

Menecmo introduce estas curvas (equiláteras) como secciones de un cono circular recto por un plano perpendicular a un generatriz.

Por eso la parábola fue llamada sección de cono rectángulo (es decir, sección de un cono cuyo ángulo de apertura es recto, cortado por un plano perpendicular a una generatriz). La elipse era la sección de cono acutángulo y la hipérbola (hasta Aplonio, solo se consideró una rama de ella) la sección de cono obtusángulo.

Si bien Menecmo no explica cómo resolvió el problema, al entrar en juego la parábola y la hipérbola en el procedimiento anterior, se piensa que utilizó medios mecánicos para la construcción de las curvas (O'Connor & Robertson, 1999).

En el mismo siglo, Euclides (~325 a. C. – ~265 a. C.) escribió cuatro libros sobre las secciones cónicas ninguno de los cuales se conserva. Según Pappus (290 d. C. – ~350 d. C.) Aristeo (370 a. C. – ~300 a. C.) trabajó las cónicas y las llamó: sección del cono rectángulo, sección del cono acutángulo y sección del cono obtusángulo (parábola, elipse e hipérbola, respectivamente). Pero, al igual que ocurre con los cuatro libros de Euclides, no se conservan documentos de esos trabajos.

El primer tratado escrito que se conserva sobre las secciones cónicas se debe a Apolonio de Perga (262 a. C. – 190 a. C.). En sus ocho libros Apolonio estudia las propiedades geométricas de las secciones cónicas en 487 proposiciones. Apolonio hace un tratamiento que se asemeja más al utilizado en la geometría analítica, por lo que sus resultados sobrevivieron sin cambios hasta la época de Fermat (1601 - 1665) y de Descartes (1596 – 1650).

Fermat y Descartes retomaron el problema de las cónicas como casos particulares de un estudio mucho más general: …"*el estudio de la naturaleza y propiedades de las curvas, y el método para examinarlas está, me parece, tan lejos del tratamiento de la geometría ordinaria como tan lejos está la forma retórica de Ciceron del a, b, c de los niños*" (Descartes, citado por Kline M, 1972).

Si bien Fermat y Descartes son considerados como los inventores de la geometría con coordenadas (ó geometría analítica), ésta surge de una necesidad imperante en su tiempo, usar métodos cuantitativos para el tratamiento de las curvas (Kline, 1972). Sus contribuciones se fundamentan en ideas y tratamientos diferentes. Por un lado, una idea reside, esencialmente, en el reconocimiento de que una ecuación con dos incógnitas $F(x, y) = 0$ puede considerarse como una curva plana con respecto a un sistema de coordenadas. El estudio analítico de Descartes ofrece un aspecto puramente algebraico y se sirve de las ecuaciones de las cónicas para deducir propiedades referentes a las curvas y a su construcción geométrica. Por otro lado, Fermat deduce las ecuaciones de la recta, la circunferencia y todas las secciones cónicas, a partir de sus condiciones geométricas.

El significado actual de las cónicas es el resultado de un proceso largo de desarrollo de conceptos y procesos matemáticos, de formas de representar, de la solución de algunos problemas, de reglas y sistemas de control que hemos heredado en diferentes periodos de la historia. Este hecho tiene consecuencias importantes en el plano didáctico para construir significados en el aula de lo que son las cónicas (Bartolini, 2005). En la tabla III.1 se muestra un resumen cronológico sobre los trabajos alrededor de las cónicas desde la antigüedad hasta el siglo XIX.

Tabla III.1 Cronología de trabajos sobre las cónicas (Bongiovani, 2002)

Desarrollo cronológico de las cónicas

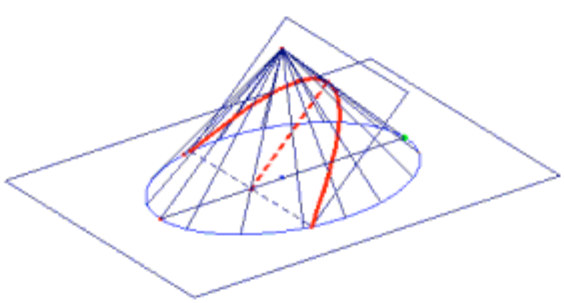
600 a. C. 500 1500 1600 1700 1800 1900

Griegos	Árabes	Siglo XVI	Siglo XVII	Siglo XVIII	Siglo XIX
Menecmo	Traducción de las obras de Apolonio al árabe		Kepler	L'hopital	Brianchon
Euclides	Frères Banu Musa	Werner	Cavallieri	Euler	Quetelet
Arquímedes	Thabit Ibn Queea	Maurollico	Fermat	R. Simon	Dandelin
Apolonio	Ibrahim Sinan	Guidobaldo del monte	Descartes	Boscovitch	Poncelet
Diocles	Al-Sijzi		Schoolen	Hugo Hamilton	Chasles
Pappus	Al-Quhi		Desarges		Stelner
Serenus	Ilin Sahi		Pascal		
Eutoclus	Al-Haytham		Mydorge		
Anthemius	Omar Khayyam		Grégorie de Saint Vincent		
	Al-Tusi		John Wallis		
	Al-Kashi		Jan de Witt		
			Philippe de la Hire		
			Newton		

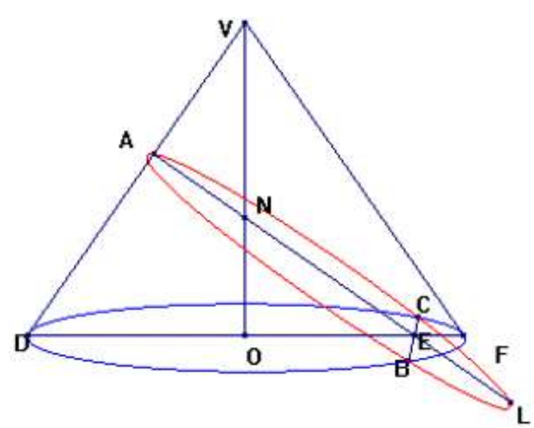
III. 3. Diferentes concepciones de las curvas cónicas

Como se puede observar en la tabla III.1, el estudio de las cónicas se remonta hacia épocas anteriores a la cultura griega y, a través de todos estos años, estas curvas han sido caracterizadas de diversas formas. En esta sección incluimos diferentes concepciones que han llevado a caracterizaciones asociadas a su estudio escolar.

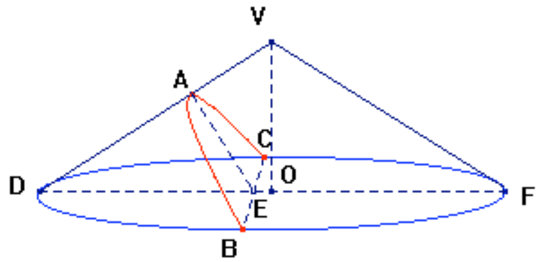
Si bien el estudio profundo de las cónicas se debe a diferentes filósofos griegos como Apolonio, antes se habían identificado las definiciones de parábola, elipse e hipérbola, de acuerdo a la relación que guardan con el cono; así, la parábola se define como la sección del cono rectángulo cortado por un plano perpendicular a una generatriz (véase la figura III.2a). La elipse como el corte de un cono acutángulo por medio de un plano perpendicular a una generatriz (véase la figura III.2b); y, la hipérbola como aquella sección de un cono obtusángulo, cortado por un plano perpendicular a una generatriz (ver figura III.2c). Observe que en estas concepciones, las cónicas surgen como cortes de un único cono y no de uno de dos hojas. De esta forma, la hipérbola contiene una sola rama.



a) El cono rectángulo y un plano perpendicular a su generatriz produce una parábola



b) La intersección de un cono acutángulo y un plano perpendicular a su generatriz produce una elipse



c) La intersección de un cono obtusángulo y un plano perpendicular a su generatriz produce una (rama de la) hipérbola

Figura III.2. Concepción de las cónicas previa a Apolonio

Por su parte, Apolonio descubre que no es necesario trabajar en tres tipos distintos de conos; presenta las tres curvas cónicas como la intersección de un cono circular oblicuo de dos hojas seccionado por un plano (Figura III.3). Si el plano es paralelo a la generatriz se obtiene la parábola; si el plano no es perpendicular al eje e interseca a dos generatrices (o su prolongación) se obtiene la elipse; y si el plano es paralelo al eje del cono, se obtiene la hipérbola con sus dos ramas.

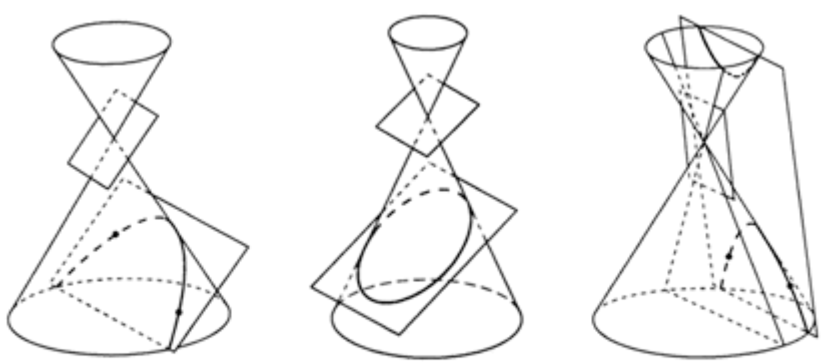


Figura III.3. Las cónicas de acuerdo con Apolonio

La concepción de Apolonio acerca de las cónicas subsistió hasta el siglo XVII, es a partir de los trabajos de Descartes y Fermat que las cónicas empiezan a estudiarse analíticamente, cuando establecen relaciones entre estas curvas y ecuaciones cuadráticas.

Las ecuaciones de la forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

corresponden a curvas cónicas, excepto en el caso de las rectas (por tanto, a, b y c no pueden ser todas iguales a cero). De manera más precisa:

Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación corresponde a una parábola;

Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación corresponde a una elipse;

Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación corresponde a una hipérbola;

Una primera forma de obtener una relación entre las curvas cónicas y las ecuaciones cuadráticas resulta de la perspectiva de los lugares geométricos.

Dada una recta L y un punto F fuera de L, una cónica es el lugar geométrico de los puntos P, tales que la razón entre las distancias $d(P,F)$ y $d(P,L)$ es una constante; esto es:

$$\frac{d(P,F)}{d(P,L)} = e \qquad (1)$$

A la constate e se le llama *excentricidad* de la cónica y toma valores en rangos diferentes dependiendo del tipo de cónica de que se trate. A la recta L se le llama directriz y al punto F, foco de la cónica.

Esta definición caracteriza a las cónicas geométricamente; es decir, mediante una construcción geométrica que define ciertas regularidades en la posición de un punto en función de la posición de otro.

Por ejemplo, supongamos que la directriz es la recta vertical $x = k$ y el foco F tiene coordenadas (x_1, y_1) (figura III.4).

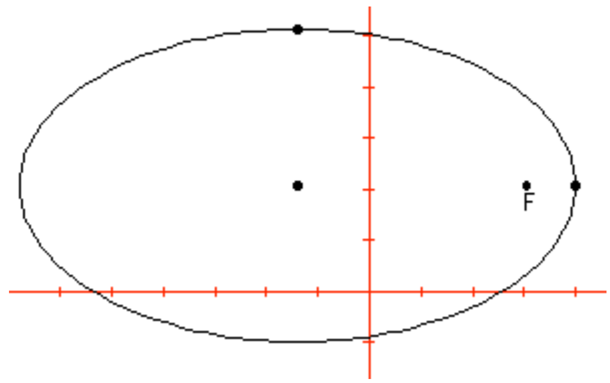


Figura III.4. Una cónica como lugar geométrico

En este caso, $d(P,F)=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$ y $d(P,L)=|x-k|$. Por tanto,

$$\frac{d(P,F)}{d(P,L)}=\frac{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}{|x-k|}=e$$

elevando al cuadrado y despejando:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=e^2(x-k)^2$$

$$(1-e^2)x^2-2x(x_1+e^2k)+y^2-2yy_1+x_1^2+y_1^2-e^2k^2=0$$

que se transforma en

$$ax^2+by^2-2cx-2dy+f=0$$

al hacer

$$a=1-e^2;\ b=1;\ c=x_1+ke^2;\ d=y_1;\text{ y, }\ f=x_1^2+y_1^2-k^2e^2$$

De manera análoga, si la directriz es horizontal, la ecuación de la cónica será:

$$ax^2+by^2-2cx-2dy+f=0$$

con

$$a = 1\,;\; b = 1 - e^2\,;\; c = x_1\,;\; d = y_1 + ke^2\,;\; \text{y,}\;\; f = x_1^2 + y_1^2 - k^2e^2$$

Otos estudios han extendido el análisis de las curvas cónicas y su relación con otras curvas y superficies. Por ejemplo, algunos teoremas importantes de la geometría tridimensional y la geometría proyectiva. Como, el teorema de Pascal (1623-1662) que relaciona las cónicas con un “hexagram” (figura III.5); o la esfera de Dandelin (1794-1947) que permite relacionar propiedades de las cónicas con una esfera inscrita en un cono (ver figura III.6).

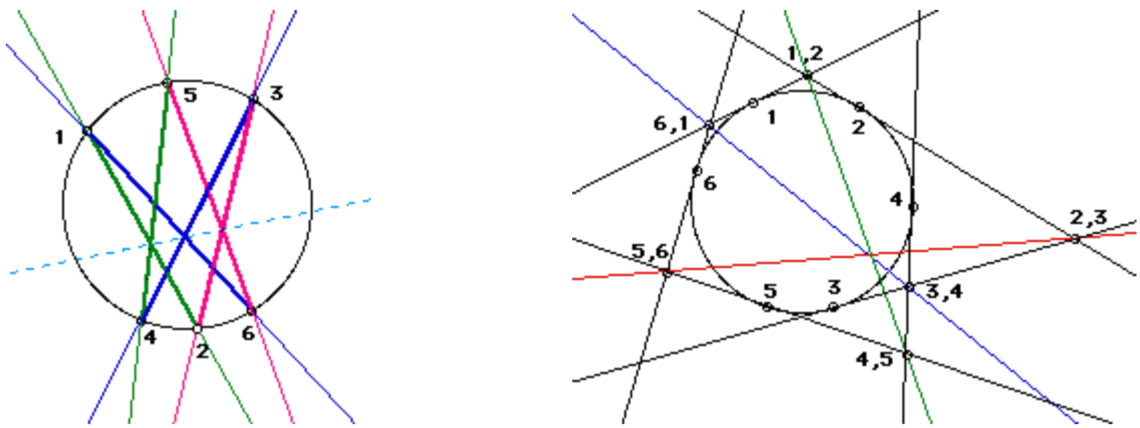
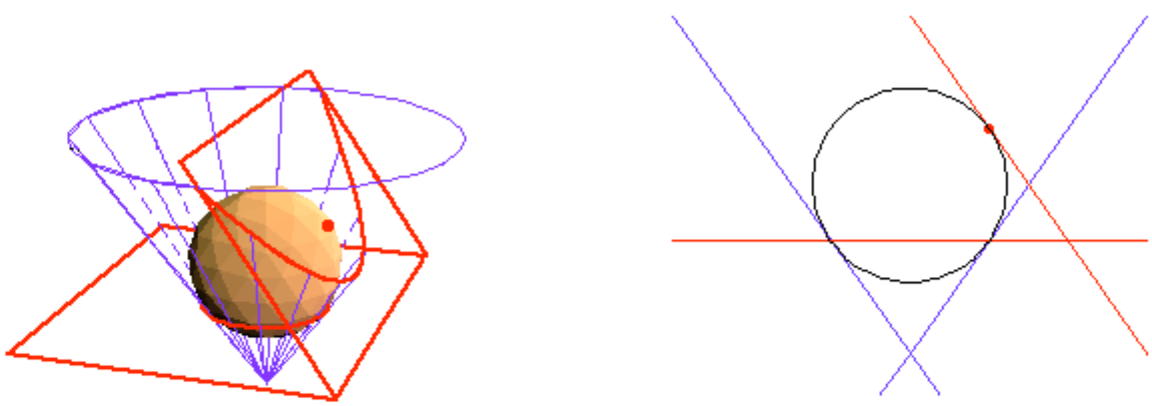


Figura III.5. Teorema de Pascal



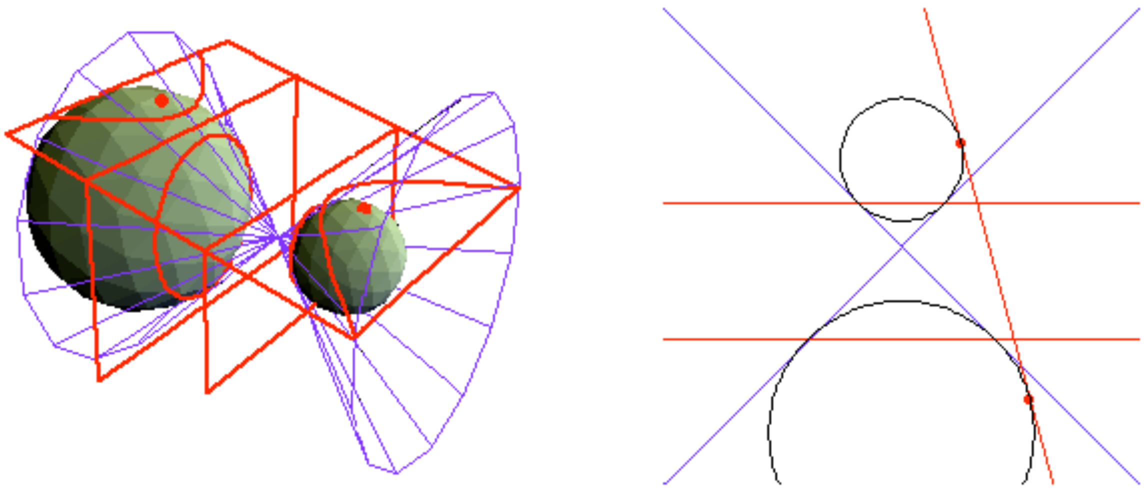


Figura III.6. La esfera de Dandelin y las cónicas

La manera más común de definir las cónicas en los cursos de Geometría Analítica, es a través de lugares geométricos, uno para cada una de las curvas. Así, la parábola se define como el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de una recta fija en el plano y un punto fijo del plano no perteneciente a la recta. Por su parte, la elipse se define como el lugar geométrico de todos los puntos cuyas distancias a dos puntos fijos tienen suma constante; y la hipérbola como el lugar geométrico de los puntos en plano cuyas distancias a dos puntos fijos tienen diferencia constante.

Si bien estas formas de definir a cada una de las cónicas se derivan de la definición geométrica dada en (1), la mayoría de las veces no se aclara este hecho. Como puede observarse en la discusión del programa del curso de Geometría Analítica del bachillerato de la Universidad Michoacana, incluida en la sección 2 del capítulo II, en el estudio de las cónicas solo se hace énfasis en las expresiones analíticas y la relación que éstas guardan con las curvas en términos de sus parámetros.

Sin embargo, una parte esencial para desarrollar el entendimiento de las cónicas es comprender la equivalencia entre todas estas formas de ver a las curvas, tenerlas disponibles y ser capaz de elegir una u otra, a conveniencia, para poder transferir las propiedades de un modelo a otro.

III. 4. Diferentes tipos de ecuaciones

La descripción geométricas de las cónicas asociada a un sistema de referencia permite generar diferentes expresiones analíticas; entre ellas, las ecuaciones canónicas y ecuaciones generales en un sistema rectangular; ecuaciones polares y un conjunto de ecuaciones paramétricas. Particularmente, el sistema de coordenadas polares permite determinar una expresión analítica unificadora para todas las cónicas, la cual es útil para determinar algunas condiciones particulares de las curvas. En esta sección se describen las formas de expresar a las cónicas, en términos de sus ecuaciones canónicas.

Ecuaciones rectangulares para la parábola

La parábola es la curva definida por todos los puntos del plano que satisfacen la relación (1), con $e = 1$; es decir, $\frac{d(P,F)}{d(P,L)} = 1$. Si la directriz L es paralela a uno de los ejes coordenados y el foco F se localiza en el origen, la ecuación de la parábola se obtiene de la siguiente forma.

Supongamos que la directriz L es paralela al eje x, a una distancia del origen igual que la distancia del origen al foco F que se encuentra sobre el eje y, en $F(0, \alpha)$, como se muestra en la figura III.7.

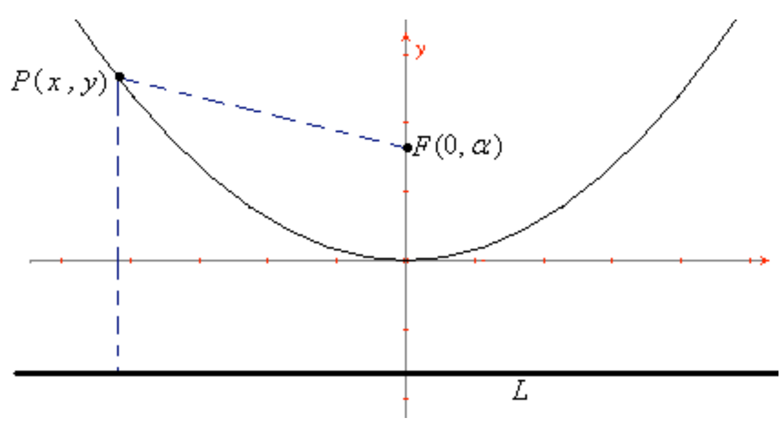


Figura III.7. Directriz paralela al eje x, cuya distancia al foco F es 2α.

Entonces, la distancia $d(P,F)$ es

$$d(P,F)=\sqrt{x^2+(y-\alpha)^2}$$

La distancia $d(P,L)$ es:

$$d(P,L)=|\alpha+y|$$

Por lo que, de la ecuación (1), con $e = 1$ se tiene:

$$\sqrt{x^2+(y-\alpha)^2}=|\alpha+y|$$

Por tanto

$$x^2+(y-\alpha)^2=(\alpha+y)^2$$

Desarrollando y simplificando, obtenemos la ecuación canónica de la parábola:

$$y=\frac{1}{4\alpha}x^2$$

Esta parábola tiene su vértice en el origen (a la misma distancia del foco que de la directriz); y como las traslaciones no afectan su forma, al aplicar esta transformación, moviendo el vértice al punto $V(h, k)$, la ecuación de la curva será:

$$(y-k)=\frac{1}{4\alpha}(x-h)^2$$

Procediendo de manera análoga, se obtiene la ecuación de una parábola cuya directriz es paralela al eje y:

$$(x-h)=\frac{1}{4\beta}(y-k)^2$$

En este caso, las coordenadas del foco son $F(h+\beta, k)$ y la directriz es la recta $x = -\beta$.

Ecuaciones rectangulares para la elipse

Para obtener la ecuación de una elipse, supongamos primeramente que la directriz L es el eje y, y que el foco tiene coordenadas $F(\alpha, 0)$ (figura III.8).

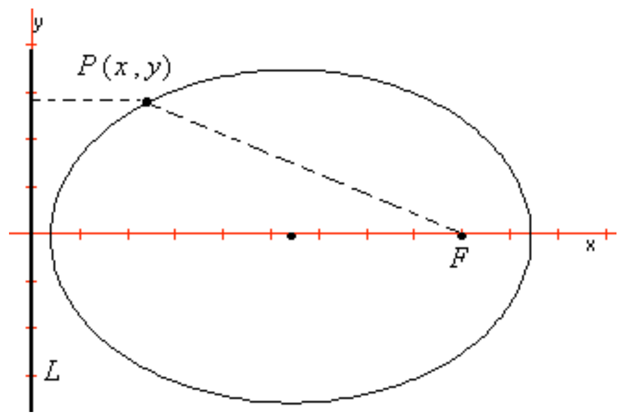


Figura III.8. Eje y como directriz de la elipse y foco en $F(\alpha, 0)$

De acuerdo con (1),

$$\frac{\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}}{|x|} = e \text{ para } 0 < e < 1$$

Entonces:

$$(x-\alpha)^2 + y^2 = e^2x^2$$

que después de realizar algunos cálculos queda como:

$$\frac{\left(x-\frac{\alpha}{1-e^2}\right)^2}{\frac{\alpha^2e^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{\alpha^2e^2}{(1-e^2)}} = 1$$

Si llamamos $h = \frac{\alpha}{1-e^2}$; $a = \frac{e}{1-e^2}\alpha$ y $\beta = \frac{e^2}{1-e^2}\alpha^2$, podemos observar que como $0 < e < 1$, $1-e^2 > 0$, entonces β es una cantidad positiva que puede expresarse como $\beta = b^2$. Así, la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La elipse tiene dos ejes de simetría. Primeramente podemos observar que si en su ecuación se sustituye *y* por *–y*, ésta no se altera y, por tanto, la curva es simétrica respecto al ejes *x*. Asimismo, si se sustituye *x – h* por *h – x*, la ecuación permanece inalterada; esto es, la recta *x* = *h* es otra recta de simetría. El punto de coordenadas *C'*(*h*, 0) es el centro de la elipse.

Debido a estas simetrías, se considera que la elipse tiene un foco adicional *F'*, simétrico con respecto a la recta *x* = *h*. Dicho foco tendrá entonces coordenadas F'(*h* – α, 0).

Así, trasladando el centro de la elipse a un punto de coordenadas *C*(*h*, *k*), obtenemos la ecuación canónica de la elipse en coordenadas cartesianas.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Ecuaciones rectangulares para la hipérbola

El caso de la hipérbola es semejante al de la elipse, solamente que deberemos considerar un valor de la excentricidad mayor que la unidad. Por tanto, considerando nuevamente a la directriz *L* como el eje *y*, y el foco en *F*(α, 0), a partir de (1) tenemos:

$$\frac{\left(x - \frac{\alpha}{1-e^2}\right)^2}{\frac{\alpha^2 e^2}{\left(1-e^2\right)^2}} + \frac{y^2}{\frac{\alpha^2 e^2}{\left(1-e^2\right)}} = 1$$

De donde tenemos nuevamente $h = \dfrac{\alpha}{1-e^2}$; $a = \dfrac{e}{1-e^2}\alpha$ y $\beta = \dfrac{e^2}{1-e^2}\alpha^2$. Como ahora $e > 1$, se tiene que $1 - e^2 < 0$. Por lo que β es una cantidad negativa; digamos que es $\beta = -b^2$; por tanto, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Al igual que la elipse, se tienen condiciones de simetría que permiten trasladar a la hipérbola a partir de su centro *C'*(*h*, 0), para obtener su ecuación con centro en *C*(*h*, *k*):

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

La elipse y la hipérbola tienen propiedades de simetría que resultan importantes para transitar entre diferentes representaciones. Por ejemplo, en la elipse, la simetría permite determinar el tamaño de los semiejes *a* y *b*, por la posición de los vértices y el hecho de que la suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a los focos es el doble del semieje mayor.

Ecuaciones en coordenadas polares

Las coordenadas polares son especialmente útiles en las cónicas, ya que permiten establecer una ecuación unificadora para ellas.

Si consideramos a la directriz perpendicular al eje polar a una distancia *p* del polo, y el foco *F* sobre éste (figura III.9), tenemos:

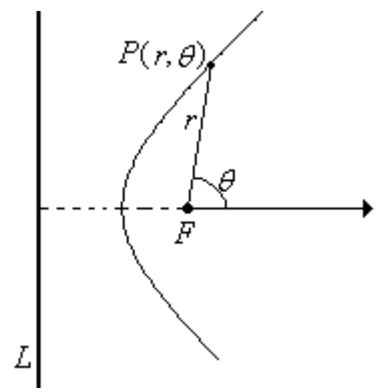


Figura III.9. Las cónicas en coordenadas polares

$$d(P,F) = r \text{ ; y, } d(P,L) = p + r\cos\theta$$

Por tanto, partiendo de la definición general, dada por (1), tenemos

$$\frac{d(P,F)}{d(P,L)} = \frac{r}{p + r\cos\theta} = e$$

de donde obtenemos

$$r = e(p + r\cos\theta)$$

y, despejando r

$$r = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}$$

De forma análoga a esta ecuación se pueden determinar otras, a partir de condiciones iniciales distintas de la cónica correspondiente:

$$r = \frac{ep}{1 \pm e\cos\theta}, \quad \text{y} \quad r = \frac{ep}{1 \pm e\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

Ecuaciones paramétricas

Un último conjunto de ecuaciones que nos interesa analizar es el que corresponde a ecuaciones paramétricas de las cónicas. En este caso, se definirán parejas de ecuaciones de la forma $x = f(t)$ y $y = g(t)$ para cada tipo de curva.

La determinación de esta pareja de funciones no es única; es decir, a una misma curva se pueden asociar diferentes parejas de ecuaciones paramétricas; sin embargo, es usual hablar de una pareja específica para cada curva.

Por ejemplo, la circunferencia puede expresarse mediante el conjunto de ecuaciones paramétricas,

$$x = r\cos t\,; \qquad\qquad y = r\,\mathrm{sen}\,t$$

Donde el parámetro t, corresponde al ángulo mostrado en la figura III.10. Por tanto, $0 \le t \le 2\pi$.

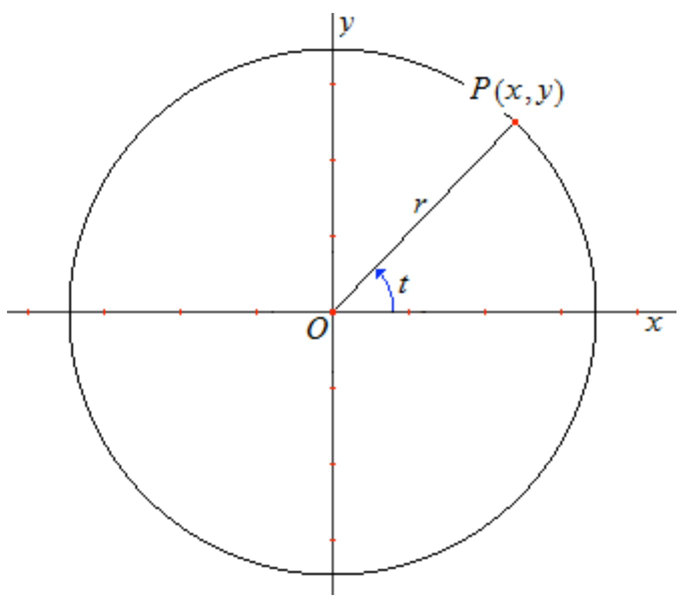


Figura III.10. El parámetro en las ecuaciones paramétricas de la circunferencia

Para obtener la ecuación cartesiana a partir de una pareja de ecuaciones paramétricas, es necesario eliminar el parámetro. En el caso de la circunferencia, esto sucede si observamos que

$$x^2 = r^2 \cos^2 t; \qquad y^2 = r^2 \operatorname{sen}^2 t$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \left(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t\right); \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

como se esperaba: la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio *r*.

Este proceso de transformación puede servir como estrategia para determinar una pareja de ecuaciones paramétricas para la elipse y la hipérbola.

Si las ecuaciones $x = r\cos t$; y, $y = r\operatorname{sen} t$ nos llevan a $x^2 + y^2 = r^2$, entonces, las ecuaciones

$$x = a\cos t; \qquad y = b\operatorname{sen} t$$

nos llevan a la ecuación canónica de la elipse;

$$\frac{x}{a} = \cos t; \qquad \frac{y}{b} = \operatorname{sen} t$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Así, las ecuaciones,

$$x = h + a\cos t; \qquad y = k + b\operatorname{sen} t \quad \text{con} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

forman una pareja de ecuaciones paramétricas de la elipse cuya ecuación cartesiana es

$$\left(\frac{x-h}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-k}{b}\right)^2 = 1$$

De manera análoga, para la hipérbola cuya ecuación cartesiana es $\left(\frac{x-h}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-k}{b}\right)^2 = 1$, tenemos una pareja de ecuaciones paramétricas de la forma:

$$x = h + a\sec t; \qquad y = k + b\tan t \quad \text{con} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Para la parábola, es común utilizar una pareja de ecuaciones paramétricas de la forma

$$x = h + t; \qquad y = k + at^2 \quad \text{con} \quad -\infty \leq t \leq \infty$$

ó

$$x = h + bt^2; \qquad y = k + t \quad \text{con} \quad -\infty \leq t \leq \infty$$

Con las que la eliminación del parámetro nos lleva a

$$y - k = a(x - h)^2, \qquad \text{ó} \qquad x - h = b(y - k)^2$$

También se incluyen en esta sección una pareja de ecuaciones paramétricas para la recta, ya que será de gran utilidad para el diseño de los algoritmos de graficación. Se usará un acercamiento de tipo vectorial para la determinación de $x = f(t)$ y $y = g(t)$.

Observemos entonces que para una recta l:

1. Si $Q(x_o, y_o)$ es cualquier punto de la recta, entonces existe t_0 para el cual $x_0 = f(t_o)$ y $y_0 = g(t_o)$.

2. Si $\vec{v}$ es un vector paralelo a l, entonces $\vec{v}$ y l tienen la misma inclinación.

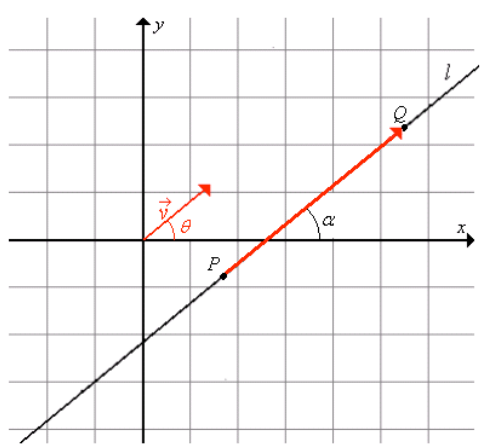


Figura III.11. Recta l paralela a $\vec{v}$

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de l y $\vec{v} = \langle v_x, v_y \rangle$ un vector de posición paralelo a l, entonces:

$$\vec{PQ} \text{ es paralelo a } \vec{v} \quad \text{y} \quad \theta = \alpha.$$

$$\vec{PQ} = t\left(\vec{v}\right), \text{ donde } t \text{ es una constante}$$

y

$$\langle x - x_0,\ y - y_0 \rangle = t \langle v_x,\ v_y \rangle$$

de donde

$$x = x_0 + t\,v_x\,; \quad y = y_0 + t\,v_y$$

que corresponden a una pareja de ecuaciones paramétricas de la recta l, donde el parámetro $t \in (-\infty,\ \infty)$.

III. 5. Construcciones geométricas de las cónicas

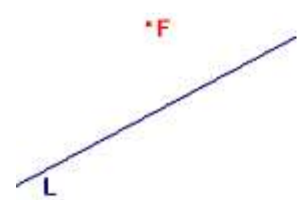
Cuando se trabaja en los ambientes dinámicos interactivos, la geometría pasa de ser estática y figurativa a dinámica y constructiva. Es decir, ya no es necesario apoyarnos de una sola figura para representar una idea o conjetura; podemos contar con una construcción geométrica genuina para explorar relaciones entre objetos y observar, analizar y extraer conjeturas a partir de la forma en que varían algunos elementos mientras otros permanecen constantes. En forma general, los problemas de geometría se tornan en situaciones de exploración y planteamiento de conjeturas.

Actualmente algunas propuestas de enseñanza de la geometría analítica (Zubieta et al., 2005) ya incorporan la geometría dinámica como actividad con la que, por un lado, se incorpora la tecnología a la enseñanza de las matemáticas y, por otro, puede brindar a los estudiantes un ambiente de trabajo más cercano a la labor cotidiana de un matemático, en la que la actividad no solo consiste en aplicar fórmulas o desarrollar expresiones algebraicas, sino también en la exploración, en la experimentación de nuevas ideas, y búsqueda de soluciones, entre otras actividades relacionadas con el quehacer matemático.

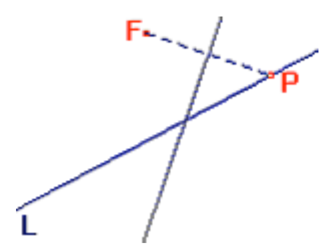
En estos ambientes es posible realizar construcciones geométricas de las cónicas, tanto en su enfoque de los lugares geométricos como en el de ecuaciones cuadráticas. Como ejemplo, enseguida se incluye una construcción geométrica de la parábola en el ambiente de la geometría dinámica; éste tipo de construcción se tomará como referencia para el diseño de actividades a incluir en el software.

Construcción de la parábola como lugar geométrico

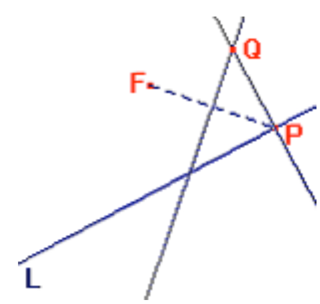
– Trazar la directriz L, y el foco *F*, fuera de *L*



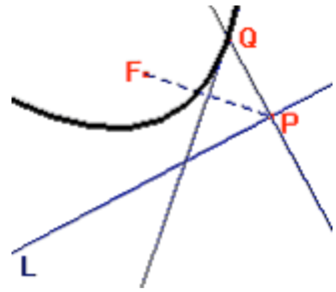
– Trazar *P* sobre la directriz. Y la mediatriz del segmento *FP*. (La mediatriz puede ser trazada aún cuando no se trace el segmento previamente).



– Trazar la perpendicular a *L* que pasa por *P*, y denotar con *Q* al punto de intersección de la mediatriz y esta recta.



– Construir el lugar geométrico de Q en términos de P.



En la construcción anterior se puede observar que un elemento importante es la determinación del triángulo isósceles *FQP*, con el fin de asegurar la igualdad de distancias:

$$d(F, Q) = d(Q, P) \equiv d(Q, L)$$

CAPÍTULO IV
Resultados

IV. 1. Introducción

En esta sección se describen los resultados del trabajo. Primeramente, se identifican los objetivos iniciales que, de acuerdo con la metodología utilizada, marcan el punto de inicio del diseño de algoritmos efectivos para la construcción de software educativo.

En la segunda parte se establece el modelo de aprendizaje que guió el desarrollo de las demás etapas de construcción del software. Para ello, se recurrió a bibliografía relacionada con reportes de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría y Geometría Analítica, así como al programa de estudios del curso.

En la tercera parte se incluyen algunos aspectos relativos a la forma en que se estructuraron los algoritmos de graficación que permitieran soportar las acciones a ejecutar sobre los objetos geométricos.

En las dos últimas partes se describe el diseño de cuatro actividades y su implementación con un grupo de estudiantes. Dicha aplicación tiene el objetivo de servir como prueba técnica del sistema.

Es importante mencionar que, para los fines del presente trabajo, se ha seguido la metodología sugerida por Clements y Battista (2000) hasta una etapa acorde con los tiempos de realización del presente trabajo.

IV. 2. Objetivos iniciales

La incorporación de software a la educación matemática ofrece un impulso para ampliar y mejorar las estrategias exploratorias, el descubrimiento de relaciones y planteamiento de conjeturas. En particular, las posibilidades que brindan los programas basados en la interacción y dinamismo de objetos matemáticos mediante la herramienta de arrastre posibilita la formulación y verificación de conjeturas o la construcción de contraejemplos que permiten el rechazo/modificación de las mismas.

En este sentido, consideramos que el uso del software de geometría dinámica está siendo un recurso muy importante en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría; en la Geometría Analítica también puede ser de esencial utilidad para el proceso de exploración, planteamiento y validación de conjeturas mediante la interacción con los objetos.

Si bien los objetos de la Geometría Euclidiana, en términos de la interacción dinámica que puede realizarse sobre ellos, presentan características más nobles que los objetos de la Geometría Analítica es importante poder interactuar directamente con ellos en diferentes formas, no solamente a través de su representación simbólica.

De esta forma, el objetivo inicial para el diseño de algoritmos dinámicos efectivos es:

Trabajar con los objetos estudiados en la geometría analítica en forma dinámica. Estos objetos, de acuerdo con el programa de estudios son: la recta, la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola.

El caso de la recta y la circunferencia han sido trabajados extensamente en software de geometría dinámica; en ellos, es posible interactuar dinámicamente utilizando dos tipos distintos de transformación: para la recta, el desplazamiento y el giro con base en un punto origen; para la circunferencia, desplazamiento por medio del centro y cambio del radio utilizando un punto frontera. Sin embargo, el caso de las cónicas es un tanto más complejo ya que, en términos gráficos, hay muchas otras variables que deben ser controladas. Por ello, requieren de la construcción de algoritmos específicos que además sean eficientes.

IV. 3. Modelo de aprendizaje

Una de las mejores potencialidades del software educativo es su capacidad para representar y permitir la interacción con los objetos matemáticos y, como se mencionó en el apartado anterior, estas características de la tecnología permiten ampliar y mejorar las estrategias exploratorias, el descubrimiento de relaciones y el planteamiento de conjeturas. En este sentido, consideramos que el software de geometría dinámica ofrece una excelente oportunidad para que los estudiantes trabajen en la Geometría Analítica mediante un enfoque constructivista, en el que su actividad sea más acorde con la investigación en matemáticas. Se espera que en ciertas situaciones, las actividades con el software se apoyen en hojas de trabajo que puedan ayudar al estudiante a ir más allá de la exploración y planteamiento de conjeturas.

Así, los procesos cognitivos que se espera que desarrollen los estudiantes son: la visualización, la construcción y el razonamiento (Duval, 1998).

La visualización

Los procesos cognitivos de *visualización* están relacionados con la representación espacial para ilustrar una proposición geométrica, para explorar situaciones complejas o para la verificación subjetiva. No se trata sólo de ilustrar las relaciones geométricas sino también de transferir los "*objetos, conceptos, fenómenos, proceso y sus representaciones a algún tipo de representación visual y viceversa. Esto incluye también la transferencia de un tipo de representación visual a otra*" (Hershkowitz et al., 1996, p. 163).

La transferencia de figuras a imágenes mentales y viceversa es una de las formas de aprehender conceptos matemáticos. Duval (1998) señala que "*la identificación visual de estas figuras se basa en leyes de organización perceptiva, y éstas se pueden usar para representar objetos reales u objetos matemáticos*" (p. 39). Para que una figura pueda representar a un objeto matemático debe satisfacer dos requisitos:

- *Ser una configuración* o un conjunto de figuras relacionadas entre sí (condición visual); y
- Estar conectada a una proposición que deja fijas algunas propiedades representadas por la figura (hipótesis). Esta conexión permite establecer una relación entre las matemáticas y la figura (condición de la prueba).

Duval señala que estos dos requisitos de la figura permiten definir dos tipos de aprehensión: la aprehensión perceptual y la discursiva. La primera está relacionada con la identificación de figuras y construcciones que pueden verse como representaciones cuando se construyen utilizando alguna herramienta. La segunda como la asociación entre figuras y proposiciones matemáticas que determinan al objeto representado.

El razonamiento

Con relación a los procesos perceptivo y discursivo identificados por Duval (1998), se pueden identificar también diferentes tipos de razonamiento: discursivo natural y discursivo teórico. El primero como aquella forma de comunicación natural y espontánea para argumentar, describir o explicar un cierto hecho; ésta puede ser verbal o escrita y puede incluir tanto aspectos del lenguaje como formas figurales de expresión. El segundo caracterizado mediante la deducción lógica formal, en la que a partir de axiomas, proposiciones y teoremas, se demuestran otros utilizando las reglas lógico deductivas. Particularmente, el razonamiento está relacionado con los procesos discursivos que permiten extender el conocimiento matemático mediante la demostración y la explicación. Además los procesos de razonamiento son considerados hoy en día como todas aquellas acciones que realizan los estudiantes para convencerse y convencer a otros de sus resultados (Harel & Sowder, 1998).

La construcción

El proceso de construcción permite generar modelos en los que las acciones sobre una representación externa y los resultados observados en ésta, se relacionan con los objetos matemáticos que son representados y reconfigurados.

En particular, la construcción puede servir como un medio para explicar las acciones de los estudiantes cuando resuelven problemas, conectando los procesos de visualización y razonamiento. Es por ello que su papel es fundamental para la investigación de los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Las acciones sobre los objetos son mecanismos que pueden ayudar a revelar las regularidades en los elementos particulares y llevar a la abstracción de propiedades y relaciones apropiadas para producir una regla general.

IV. 4. Estrategias computacionales y diseño de algoritmos

Una de las etapas más importante en el diseño de software educativo es el diseño de los algoritmos esenciales de graficación y manipulación dinámica con la curva. Así mismo, se deben identificar las mejores estrategias de graficación, de tal forma que el software no llegue a colapsar debido a aspectos relacionados con la precisión y definición de los objetos. En este apartado se describe la organización general del sistema y la forma en que se han estructurado los algoritmos de graficación y manipulación dinámica.

En principio, se han considerado algunas características generales que permitan que el software bajo diseño pueda crecer y adaptarse dinámicamente a las necesidades cambiantes de un programa de estudios. Este objetivo requiere de la construcción de un sistema modular bien organizado, por lo que se ha considerado incluir los siguientes elementos:

- Un *módulo de rutinas básicas* de graficación: punto, segmento, recta, circunferencia, elipse, hipérbola y parábola.
- Una *sección de actividades y ejercicios implementada en el software*, que incluya elementos de ayuda tanto textuales como gráficos para los estudiantes.
- Una *sección de referencia rápida* con las ecuaciones y fórmulas útiles en la geometría analítica, incluyendo aspectos del álgebra, la geometría euclidiana, la trigonometría y la geometría analítica.

Un elemento fundamental en todo sistema informático es el *módulo de ayuda*; éste incluirá las instrucciones necesarias para el manejo adecuado del software.

La parte central está compuesta por sub módulos que permiten interactuar con facilidad y comodidad con los elementos del sistema. Así, se cuenta con módulos específicos para cada uno de los elementos que consideramos fundamentales en el estudio de la geometría analítica. Éstos se muestran en la figura IV.1.

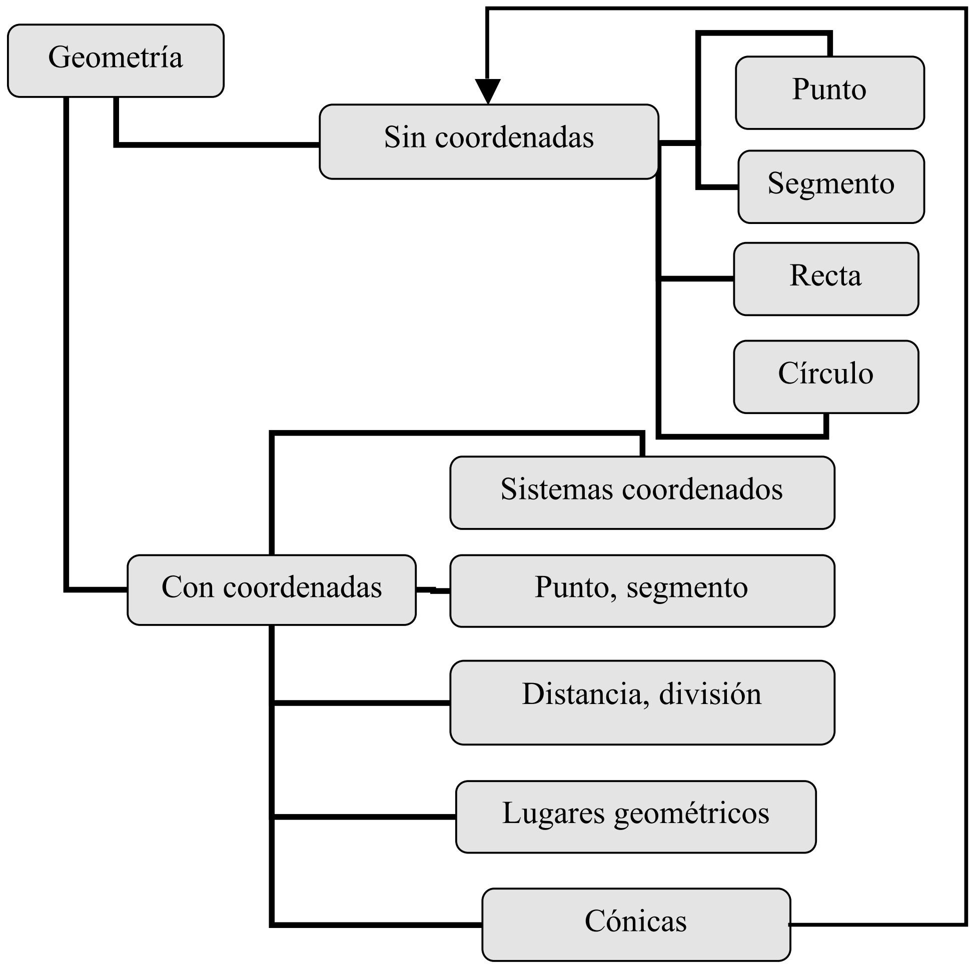


Figura IV.1. Diseño modular del software.

Como puede observarse, la interrelación entre los objetos básicos permite generar construcciones geométricas básicas para producir lugares geométricos de muchas curvas, incluyendo las cónicas.

El trazo de figuras geométricas en un sistema computacional, se basa en rutinas de dibujo como son el punto, el segmento y el círculo, con base en el sistema de coordenadas rectangulares de la pantalla de la computadora, cuya unidad de medida es el píxel. Esto representa una restricción en las rutinas de dibujo, ya que las imágenes deben ser generadas a través de las características propias de cada píxel (color y posición).

Debido a que la tecnología computacional incluye un sistema de coordenadas propio, podemos mostrar al usuario una geometría sin coordenadas utilizando las rutinas predefinidas (puntos, segmentos y círculos).

Por ejemplo, en un ambiente de trabajo Visual, la rutina de dibujo de una circunferencia es una función que tiene parámetros de entrada y con la que obtenemos como salida una circunferencia con ciertas características. Esta función se expresa como:

*objeto.*__Circle__ [Step] **(***x, y***),** *radio,* [*color, inicio, fin, aspecto*]

en donde:

Parte	**Descripción**
Objeto	Es el elemento del programa en el cual se aplica la función; es decir en el cual se dibujará la circunferencia.
Step	Especifica si el centro de la circunferencia se refiere a las coordenadas actuales especificadas por las propiedades del *objeto*. Es opcional, por lo que se expresa entre corchetes.
(*x*, *y***)**	Son las coordenadas del centro de la circunferencia.
radio	Es el radio de la circunferencia.
color	Es opcional e identifica el color en que se dibujará la circunferencia.
inicio, *fin*	Son opcionales e indican los valores inicial y final de un arco sobre la circunferencia, expresados en radianes.
aspecto	El aspecto es una variable opcional que se refiere al tipo de figura a dibujar, una circunferencia o un arco de la misma.

De esta forma, las imágenes de la computadora deben ser generadas mediante rutinas de dibujo apoyadas en estos objetos gráficos básicos: puntos, segmentos, circunferencias en un sistema de coordenadas cartesianas.

Por ejemplo, si queremos que un programa de computadora muestre la gráfica de una función $y = f(x)$, deberemos diseñar un algoritmo que permita realizar dicha tarea en la pantalla con base en los elementos gráficos básicos. Dicho algoritmo es un plan expresado como una secuencia de acciones precisas que nos llevan al objetivo final; en este caso, una gráfica en la pantalla de la computadora, construida posiblemente mediante un conjunto de pequeños segmentos que unan de manera consecutiva, una serie de puntos sobre la curva, de tal forma que mientras más segmentos tengamos mejor será la aproximación a la curva deseada (ver figura IV.2).

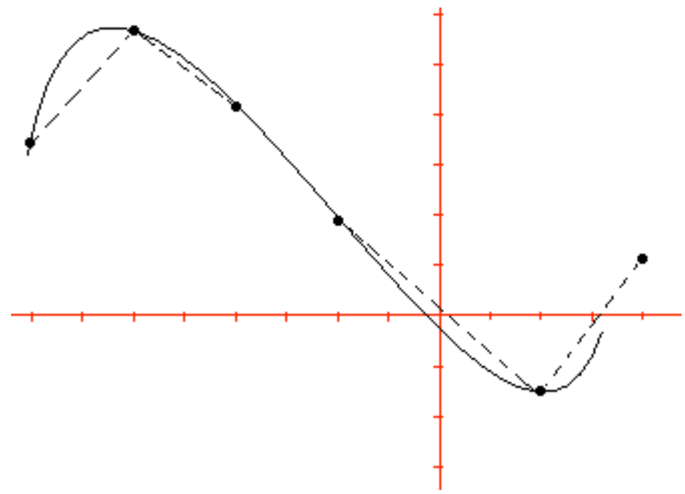


Figura IV.2. Polilínea semejando una curva

El algoritmo puede ser tan general, como para permitirnos graficar cualquier tipo de curva; pero debe incluir las restricciones específicas asociadas a los dominios de definición de las curvas. Por ejemplo, en el recuadro siguiente se muestra un algoritmo básico de graficación de funciones:

Procedimiento Graficar (*objeto*, *f(x)*, x_1, x_2)

{Grafica la función *f* en el *objeto* de entrada desde x_1 hasta x_2}

$x\_ant = x_1$

$y\_ant = f(x_1)$

Para $x = x_1$ **hasta** x_2 **con un incremento de** 0.1

  y = $f(x)$

  objeto.Line (x_ant, y_ant)-(x, y)

  $x\_ant = x$

  $y\_ant = y$

Los elementos de entrada son el objeto donde se graficará la función, la función misma y un intervalo de graficación. Esta función de graficación no puede identificar si el intervalo de graficación $[x_1, x_2]$ es válido para $f(x)$; esto queda fuera de su control, es el programador quien tiene el control de decisión sobre la coherencia entre el intervalo de graficación y la función de entrada. Así mismo, el algoritmo anterior no valida el *paso* o incremento con el que se dibujan los pequeños segmentos que conforman la gráfica; en este caso se ha tomando como incremento el valor de 0.1; sin embargo, si el intervalo de graficación dado por $[x_1, x_2]$, es de orden semejante, digamos [0, 0.5], la gráfica pretendida se visualizará como una curva rectificada cuya percepción difiere de aquella que se espera mostrar (ver figura IV.3).

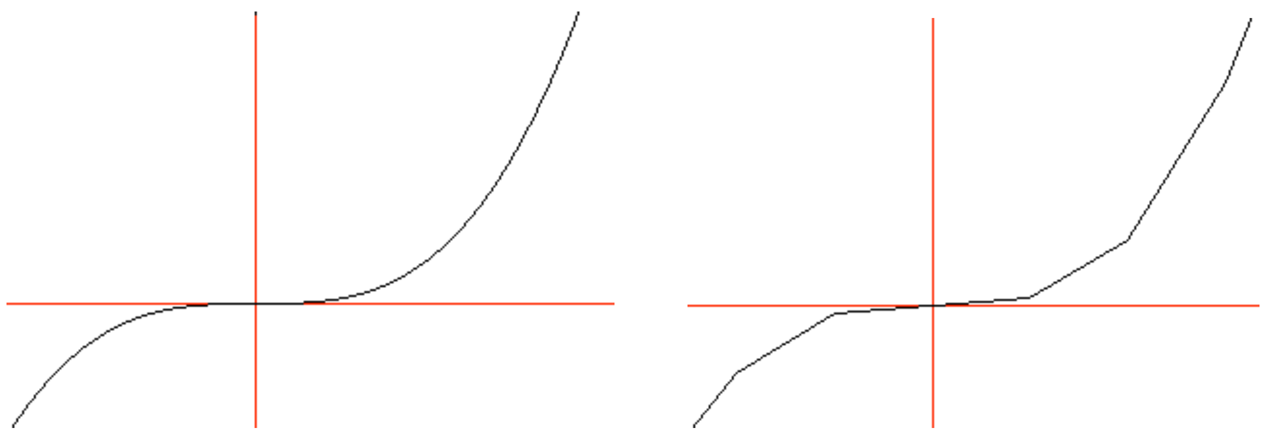


Figura IV.3. Graficación de la curva de $y = x^3$ en intervalos diferentes.

Un mejor algoritmo es aquel que toma en cuenta estas características de las gráficas y sus propiedades específicas, ya sea porque se auxilie de otras rutinas que permitan establecer las condiciones de graficación o que por sí misma establezca dichas condiciones. En este sentido, en parte, es que nos referimos a la eficiencia de un algoritmo computacional. Debemos buscar las mejores estrategias de diseño, tanto en términos de las restricciones que puede presentar una función en particular como en términos de las capacidades de la tecnología para representar gráficas en la pantalla.

El software dinámico requiere que el usuario pueda interactuar con los objetos de manera directa; es decir, si el objeto es una gráfica debemos poder manipularla sin necesidad de recurrir a representaciones intermedias para hacer cambios en ella. La interacción dinámica con curvas requiere de estrategias computacionales que permitan la modificación de sus parámetros de manera ‘continua’. Hemos distinguido tres tipos de estrategias necesarias para dar dinamismo a las curvas: 1) estrategias de graficación; 2) estrategias de detección de una curva previamente graficada; y 3) estrategias de interacción. Enseguida se describe cada una de ellas.

Graficación dinámica de la recta

La recta parecería ser uno de los casos más simples en la construcción de un algoritmo de graficación dinámico ya que, teniendo al segmento como figura básica, un proceso de graficación para rectas puede basarse directamente en el procedimiento *line* de los lenguajes de programación, mostrando un segmento cuya longitud abarque toda la pantalla de la computadora.

Por ejemplo, para la recta cuya ecuación es $y = 3x + 5$ podemos graficar un segmento con punto inicial en (0, 5) y punto final en (p, s), donde p es el ancho de pantalla y $s = \max\{3p + 5, q\}$, donde q es la medida del alto de pantalla.

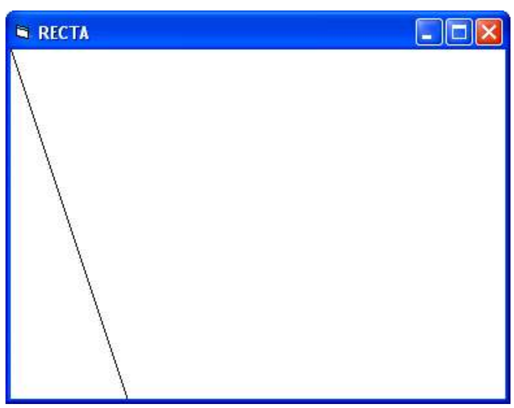


Figura IV.4. Gráfica de la recta $y = 3x + 5$ en la pantalla de la computadora. Observe que el origen del sistema de coordenadas de la pantalla está en la esquina superior izquierda de la misma.

Debido a que los algoritmos bajo diseño tienen la intención de ayudar a producir software efectivo para el aprendizaje de conceptos de Geometría Analítica, es necesario poder trazar rectas de la forma $ax + by + c = 0$; es decir, rectas que no necesariamente están asociadas a la forma funcional general $y = ax + b$, que las restringe a ser solo casos particulares (rectas cuya inclinación es distinta de $\pi / 2$). Debemos poder producir rectas verticales al igual que rectas horizontales o inclinadas en cualquier otra dirección, lo cual implica diseñar un algoritmo computacional que nos permita realizar estas acciones.

La ecuación usual de la recta, llamada recta punto-pendiente, $y = mx + b$ incluye como parámetro a la pendiente *m*, que generalmente se obtiene de la relación

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

donde Δy es la diferencia entre las coordenadas en *y* de dos puntos de la recta y Δx la diferencia entre las coordenadas en *x*, respectivamente.

Como puede observarse en la fórmula para el cálculo de la pendiente, si la diferencia Δx es cero (o muy pequeña en valor absoluto) la computadora regresa un "error" por la imposibilidad de realizar una división por cero o, en su caso, una cantidad errónea debido al orden de precisión con que la computadora es capaz de realizar cálculos aritméticos.

Este tipo de errores generalmente se denominan "errores de máquina"; es decir, errores producidos por el uso en la computadora de valores muy pequeños o muy grandes, divisiones por cero, intentos de cálculo de raíces cuadradas de números negativos, etc.

Lo que necesitamos entonces es diseñar un algoritmo para la recta con los que podamos evitar este tipo de problemas. Como se vio en el capítulo anterior, esto es posible cuando se usa una pareja de ecuaciones paramétricas para la recta:

$$x = x_0 + t\,v_x\,; \quad y = y_0 + t\,v_y$$

ya que en este caso, la intervención de la pendiente de la recta en las ecuaciones no es directa.

Por ejemplo, la pareja de ecuaciones

$$x = 5 - 3t\,; \qquad y = 2 + t$$

definen una recta que pasa por el punto $(5,2)$ y es paralela al vector $\vec{v} = \langle -3, 1 \rangle$.

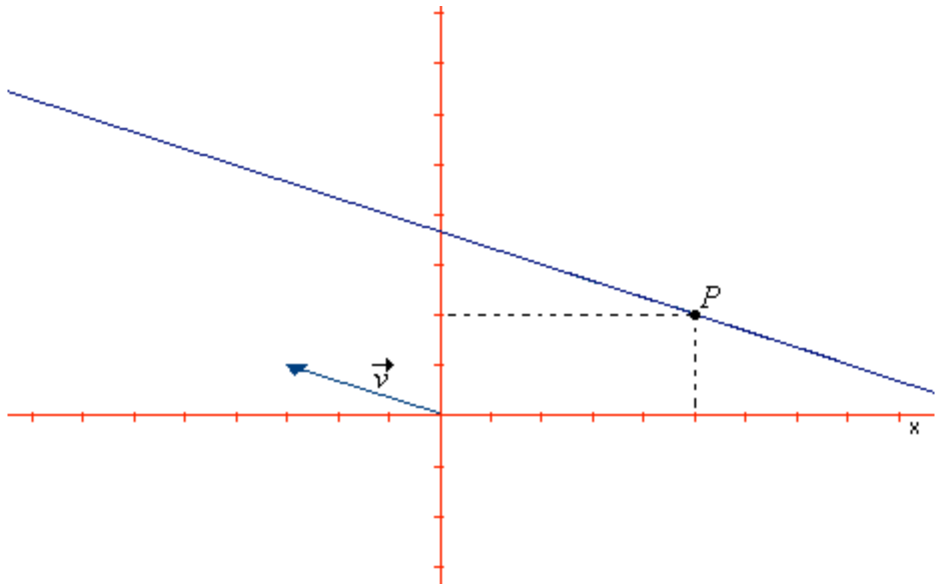


Figura IV.5. Gráfica de la recta dad por $x = 5 - 3t$, $y = 2 + t$ y su vector de dirección.

Así mismo, el conjunto de ecuaciones

$$x = 3; \quad y = 5 + t$$

definen una recta que pasa por $(3,\ 5)$ y es paralela al vector $\vec{v} = \langle 0, 1\rangle$; es decir definen, sin restricción alguna, una recta paralela al eje y (recta vertical) que pasa por $x = 3$ (figura IV.6).

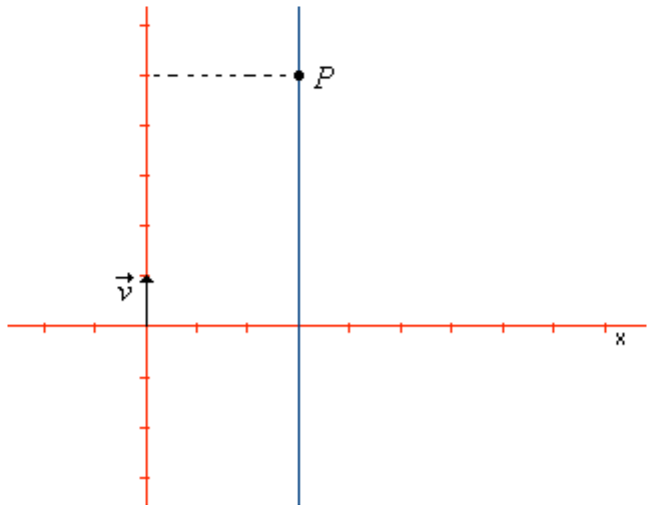


Figura IV.6. Gráfica de la recta dad por $x = 3$, $y = 5 + t$ y su vector de dirección.

En general, el conjunto de ecuaciones $x = x_0 + t\,v_x \quad y = y_0 + t\,v_y$ para $t \in (-\infty, \infty)$, define una recta en el plano *x-y* que puede graficarse sin tener que restringir sus variables y parámetros y, por consiguiente, tampoco el tipo de rectas a graficar.

Esta parametrización de la recta permite que el algoritmo de graficación de rectas sea eficiente en el sentido de que asegura la ausencia de errores de máquina; lo que a su vez, permite generar algoritmos eficaces para que el estudiante pueda interactuar dinámicamente y sin restricciones con los objetos geométricos en pantalla.

Con estas ideas, el algoritmo de graficación de rectas es:

Dados $P(x_0, y_0)$, $\vec{v} = \langle v_x, v_y \rangle$, $t = \min$, $t = \max$ y ε

Calcular:

$$x_1 = x_0 + v_x(\min); \quad x_2 = x_0 + v_x(\max)$$

$$y_1 = y_0 + v_y(\min); \quad y_2 = y_0 + v_y(\max)$$

Trazar segmento de (x_1, y_1) a (x_2, y_2)

Trazar circunferencia con centro en (x_1, y_1) y radio ε

Para lograr interactuar con la recta trazada mediante el algoritmo anterior, requerimos también de algoritmos para la detección de la recta y la manipulación de la misma. Obsérvese que el algoritmo de graficación de la recta incluye la gráfica de una pequeña circunferencia, en las coordenadas (x_1, y_1). Este "punto" servirá de base para la manipulación de la recta, de tal forma que podamos trasladarla y girarla alrededor de él.

Detectar a la recta que se ha trazado en la pantalla implica estar probando en cada momento si las coordenadas del puntero del ratón satisfacen, de manera aproximada, al conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta, o coinciden con las coordenadas $P(x_1, y_1)$. De suceder el primer caso, la recta será detectada para girar alrededor del punto *P*; de suceder lo segundo la recta será detectada para ser trasladada a otra posición de pantalla. En el software, estas dos formas de detección se han diferenciado utilizando cursores distintos para cada caso (ver figura IV.7).

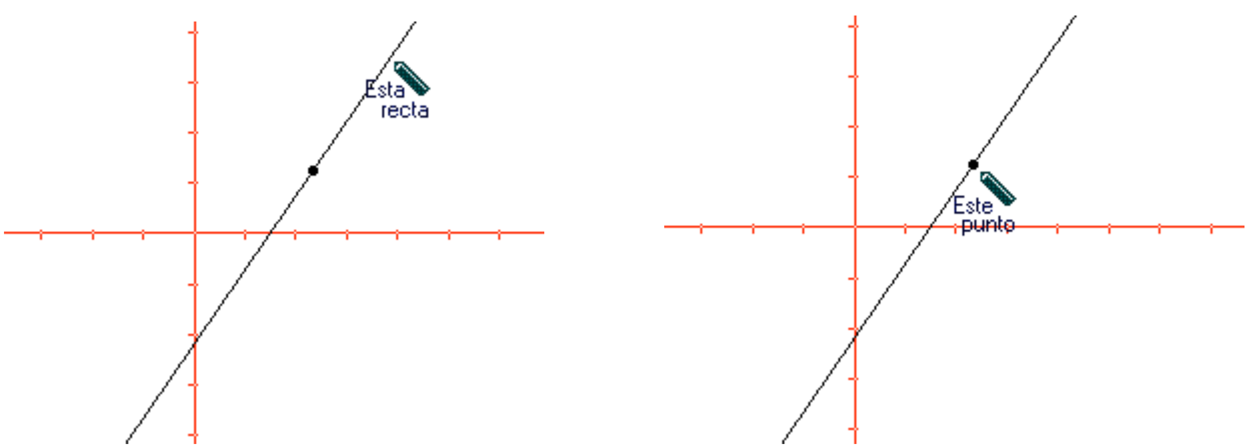


Figura IV.7. Dos formas de detección para la recta

Como se ha mencionado, una forma de detectar si el puntero del ratón se encuentra en un momento dado cerca de la recta que se ha trazado en la pantalla es probar continuamente si se satisfacen las ecuaciones paramétricas. Sin embargo, esta prueba implica que cada fracción de segundo en la que se captura la posición del ratón, la computadora deberá hacer las siguientes operaciones:

Dadas las coordenadas del puntero del ratón (x_r, y_r) y un incremento $\varepsilon(escala)$

Calcular:

$$t_r = \frac{x_r - x_0}{v_x}$$

$$y_1 = y_0 + t_t v_y$$

Si $|y_r - y_1| < \varepsilon$ se ha detectado la recta para girarla

En caso contrario, si $|y_r - y_0| < \varepsilon$ y $|x_r - x_0| < \varepsilon$ se ha detectado la recta para trasladarla

Como puede observarse, además de las operaciones que se debe realizar, pueden ocurrir errores de máquina si $v_x \approx 0$, lo que ocasionaría un colapso del sistema.

Una mejor estrategia para la detección es calcular la distancia del punto $Q(x_r, y_r)$, correspondiente a las coordenadas del puntero del ratón, a la recta que se ha trazado previamente. Si dicha distancia es menor que un *ε*, que depende de la escala utilizada en ese momento, consideramos que se está suficientemente cerca de la recta como para declarar su detección.

Para calcular la distancia de un punto a una recta hemos utilizado la ecuación vectorial:

$$d = \frac{v_y(x_0 - x_r) + v_x(y_r - y_0)}{\left|\vec{v}\right|}$$

De esta forma, el algoritmo para la detección de la recta se ha planteado como:

Dadas las coordenadas del puntero del ratón (x_r, y_r) y un incremento ε

Calcular:

$$d = \frac{v_y(x_0 - x_r) + v_x(y_r - y_0)}{\left|\vec{v}\right|}$$

Si $d < \varepsilon$ se ha detectado la recta para girarla.

En caso contrario, si $\left|y_r - y_0\right| < \varepsilon$ y $\left|x_r - x_0\right| < \varepsilon$ se ha detectado la recta para trasladarla

En el caso de la manipulación o movimiento de la recta una vez que ha sido detectada, se requiere de un procedimiento que permita generar una nueva recta con las condiciones de modificación dadas por el ratón. Esto es, si la recta fue detectada a partir del punto *P*, el movimiento de la misma consistirá en un desplazamiento a la nueva posición marcada por el ratón. Si la detección de la recta implica algún punto diferente de la misma, el movimiento será de rotación sobre *P*.

En el primer caso (traslación), las ecuaciones de la nueva recta se obtienen cambiando las coordenadas del punto $P(x_0, y_0)$ que las define; esto es:

$$\text{La nueva } x_0 \text{ es } x_r\text{: } x_0 \leftarrow x_r$$

$$\text{La nueva } y_0 \text{ es } y_r\text{: } y_0 \leftarrow y_r$$

En el caso del giro sobre *P*, lo que cambiará será la dirección de la recta y por tanto la dirección de su vector de dirección $\vec{v} = \langle v_x, v_y \rangle$ (figura IV.8):

$$v_x \leftarrow x_r - x_0$$

$$v_y \leftarrow y_r - y_0$$

Con estos nuevos parámetros se procede a la graficación de la nueva recta (figura IV.9).

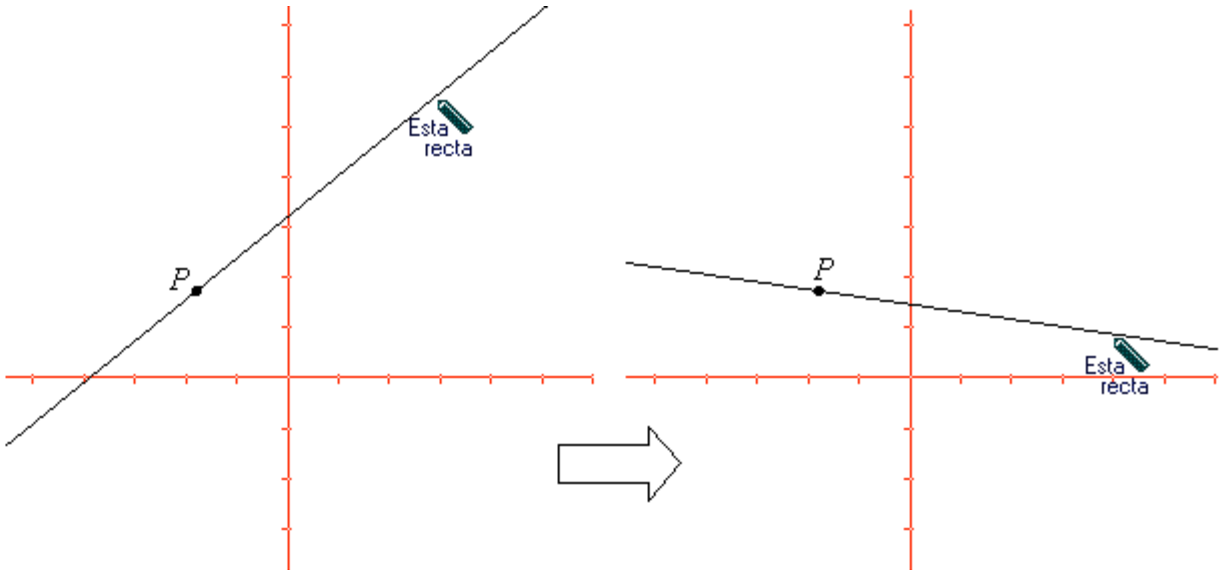


Figura IV.8. Rotación de la recta sobre *P*

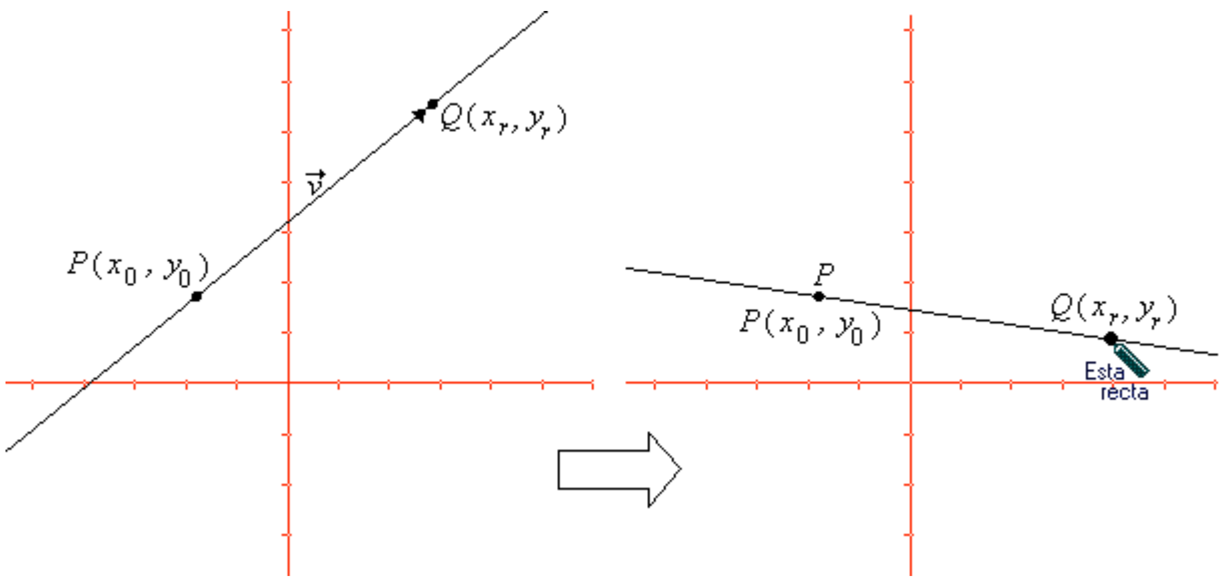


Figura IV.9. Determinación de la nueva recta a partir de una rotación sobre *P*

Al igual que en el caso de la recta, las cuervas cónicas expresadas mediante sus ecuaciones cartesianas usuales, pueden presentar restricciones en cuanto a la determinación de algunos parámetros, debido a la forma en que éstos intervienen en la ecuación por lo que se debieron generar estrategias para evitar estas dificultades.

Graficación dinámica de la circunferencia

Para una circunferencia centrada en el origen y radio r tenemos una ecuación cartesiana de la forma: $x^2 + y^2 = r^2$ que, en la interacción dinámica con la curva, con el fin de realizar algún tratamiento sobre ella, no presenta dificultades que puedan llevar a errores de máquina, semejantes a los descritos previamente para el caso de la recta.

La pareja de ecuaciones paramétricas para la circunferencia anterior,

$$x = r\cos t\,; \quad y = r\,\mathrm{sen}\,t$$

tampoco produce errores de máquina que restrinja su uso en la computadora con fines de graficación. Así mismo, como los lenguajes de programación nos proporcionan una rutina prediseñada para la graficación de circunferencias, para este caso contamos con tres formas distintas de trabajo que nos pueden producir algoritmos de graficación, por lo que queda a criterio propio la elección de una u otras para producir un algoritmo de trazado de circunferencias.

Por otro lado, en el proceso de interacción con este objeto, se requiere determinar parámetros específicos de la curva a partir de las coordenadas del ratón en cualquier instante. Por ejemplo si quisiéramos modificar 'continuamente' el radio r de la circunferencia, las ecuaciones paramétricas nos llevarían a primero tener que obtener el parámetro $t = t_0$ a partir de una de las ecuaciones (ya que lo que conocemos es x_r y y_r) y luego el radio correspondiente a partir de la otra:

$$t_r = \mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{y_r}{r}\right);\ r = \frac{x_r}{\cos t_r}$$

donde x_r y y_r son las coordenadas del puntero del ratón.

En este caso, la división para el cálculo de r puede llevarnos a la producción de errores de máquina que harían que el sistema que se está diseñando fracase.

Entonces para la circunferencia, usar la ecuación cartesiana es una mejor opción ya que, dados x y y se puede obtener r sin dificultades:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Obsérvese también que en el caso de una circunferencia cuyo centro se encuentre fuera del origen del sistema de coordenadas, la situación anterior no solamente cambia debido al cambio en las ecuaciones (cartesiana o paramétricas), también cambia por el hecho de que deben tomarse en cuenta dos nuevos parámetros posibles de modificación en la interacción dinámica con el objeto: las coordenadas del centro. Su modificación requiere poder calcularlas con base en las coordenadas x_r y y_r del ratón. Así, si se usa la ecuación cartesiana

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

debemos, a partir de ella, poder calcular *h* y *k* sin alterar el valor del radio.

Como puede observarse, la modificación del centro de la circunferencia solamente implica una traslación de la curva,

$$x_n = x + h; \qquad y_n = y + k$$

lo que puede lograrse sin dificultad haciendo $h = x_r$ y $k = y_r$ (ver figura IV.10).

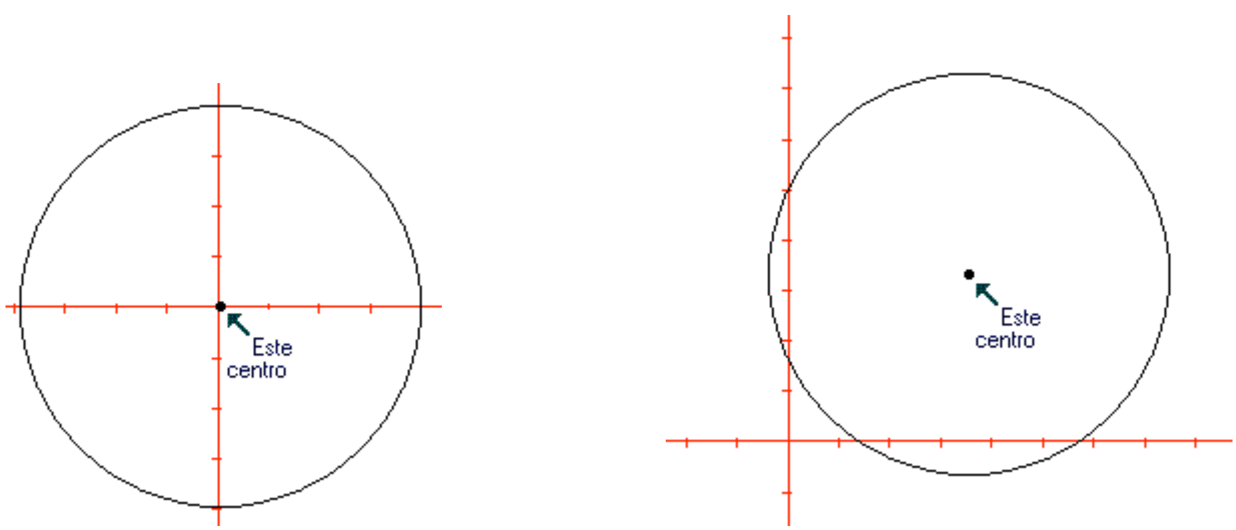


Figura IV.10. Traslación de la circunferencia a partir de su centro.

Como hemos señalado, el cambio en el radio implica utilizar la ecuación

$$r = \sqrt{\left(x_r - h\right)^2 + \left(y_r - k\right)^2}$$

para calcular el nuevo radio.

Al igual que en el caso de la recta, el proceso de detección de la circunferencia puede llevarse a cabo probando en cada momento si las coordenadas del ratón satisfacen la ecuación de la circunferencia; sin embargo, este procedimiento resulta lento si consideramos que en cada captura del movimiento del ratón (cada microsegundo) se deberá realizar esta prueba, junto con otras más si se da el caso de tener varias curvas en pantalla a la vez. Una estrategia más económica, en términos del procesamiento, es comparar la distancia del centro al punto definido por el ratón, con el radio de la circunferencia:

$$d = \sqrt{\left(x_r - h\right)^2 + \left(y_r - k\right)^2}$$

Entonces, si $|d - r| < \varepsilon$ consideramos que se ha detectado la circunferencia para modificar su radio (ver figura IV.11).

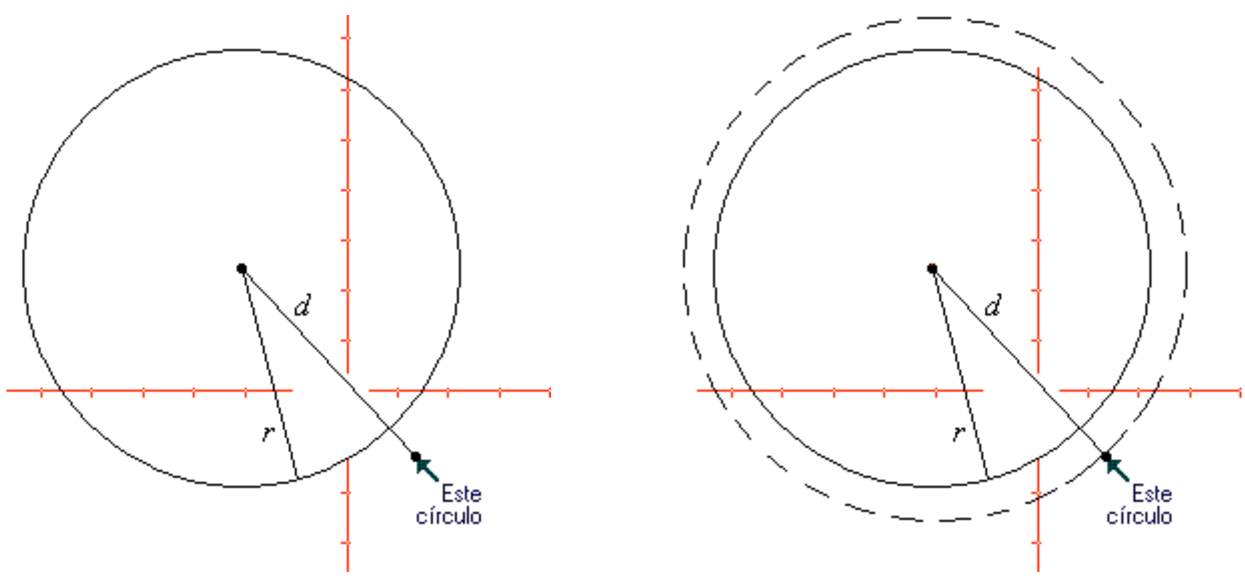


Figura IV.11. Detección de puntos sobre la circunferencia.

Al igual que el caso de la recta, la detección del centro (para trasladar a la circunferencia), se realiza comparando las coordenadas del ratón con las del centro de la circunferencia (ver figura IV.12).

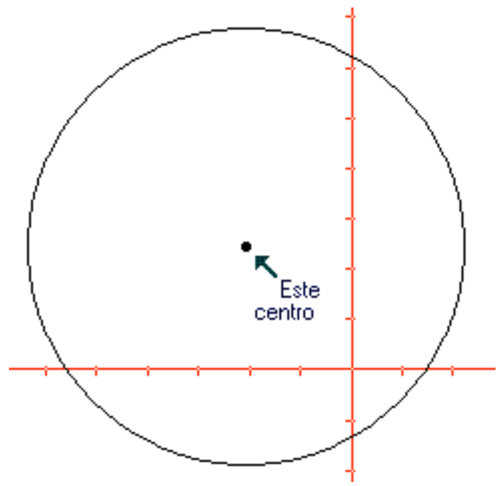


Figura IV.12. Detección del centro de la circunferencia para su traslado

Graficación dinámica de la elipse

En el caso de la elipse, comenzaremos nuevamente su descripción utilizando una elipse centrada en el origen, ya que al igual que en el caso de la circunferencia, la modificación de su centro implica solamente un desplazamiento de la curva sobre el plano.

La ecuación cartesiana usual de una elipse con centro en el origen, con semieje en *x* igual a *a* y semieje en *y* igual a *b*, es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Para poder construir un algoritmo de graficación basado en esta ecuación, debemos expresarla como

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{1 - a^2 x^2}$$

que, como se puede observar, podría ocasionar un error de máquina al ser $a \approx 0$.

Nuevamente, el uso de un conjunto de ecuaciones paramétricas,

$$x = a\cos t\,; \qquad y = b\,\text{sen}\,t\,,\ \text{para}\ t \in [0,\ 2\pi]$$

puede ayudar a resolver esta situación, ya que la obtención de los valores de x y y (a partir de t), no requiere de operaciones que puedan llegar a producir dificultades de cálculo. Así, el algoritmo de graficación de la elipse se ha planteado como:

Hacer $t = 0$, $x_0 = h + a$, $y_0 = k$

Mientras $t \leq 2\pi$, hacer

$x_1 = h + a\cos t$

$y_1 = k + b\,\text{sen}\,t$

Grafica una línea de $(x_0,\ y_0)$ a $(x_1,\ y_1)$

$t \leftarrow t + \Delta t$

$x_0 \leftarrow x_1$

$y_0 \leftarrow y_1$

Sin embargo, al igual que para la circunferencia, esta pareja de ecuaciones no ayudan cuando se trata de modificar los parámetros asociados a la ecuación (necesario para realizar la interacción dinámica con la curva). Si, por ejemplo, quisiéramos determinar el parámetro a, a partir de las coordenadas x_r y y_r del ratón, se tiene la necesidad de primero obtener t de la segunda ecuación paramétrica,

$$t_0 = \text{sen}^{-1}\left(\frac{y_r}{b}\right),$$

y luego obtener a a partir de la primera ecuación:

$$a = \frac{x_r}{\cos t_0}.$$

Si $b = 0$; o si $\left|\dfrac{y_r}{b}\right| \nleq 1$, o si $t_0 = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, para $n = \pm 1, \pm 2, \cdots$, nuevamente se tendrán dificultades con el algoritmo de graficación.

En el caso de la elipse, además de utilizar un conjunto de ecuaciones paramétricas para graficar la curva, se han utilizado algunas propiedades así como su definición geométrica en los procesos de detección y manipulación de la curva.

La definición de la elipse: "*El lugar geométrico de todos los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es una constante*", puede expresarse analíticamente como.

$$d(F_1, P) + d(F_2, P) = k$$

donde, F_1, F_2 son los focos y P un punto sobre la elipse.

Para una elipse con centro en el origen y semieje mayor sobre x (ver figura IV.13), se tiene que $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$. En este caso, la ecuación anterior nos lleva a:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = k$$

Análogamente, si el semieje mayor esta en la dirección de y,

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} + \sqrt{x^2 + (y-c)^2} = k$$

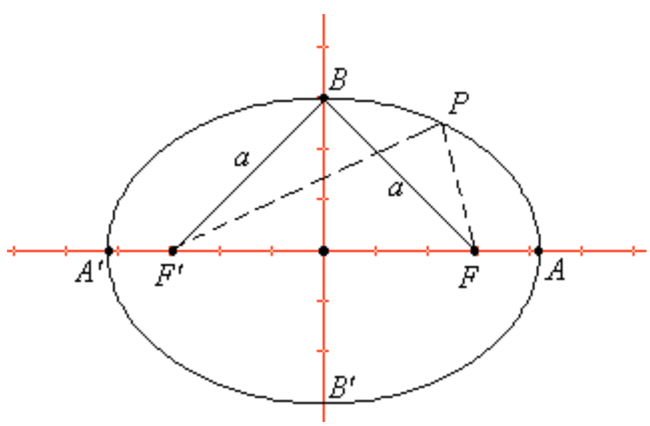


Figura IV.13. Elipse centrada en el origen con semieje mayor sobre el eje x.

Si las intersecciones *A* y *A'* de la elipse con el eje *x* tienen coordenadas $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ respectivamente, entonces la medida del semieje mayor es $2a$:

$$F'A = 2c + FA$$

$$F'A + FA = 2c + 2FA = 2(c + FA) = 2a$$

Así mismo, como:

$$F'B + FB = 2a$$

y como *B* es un punto de la elipse, se tiene que $k = 2a$. Por tanto,

$$\sqrt{x^2 + (y + c)^2} + \sqrt{x^2 + (y - c)^2} = 2a$$

y

$$a = \frac{\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2}}{2}$$

Como puede observarse, el cálculo de este parámetro a partir de la ecuación anterior, no presenta dificultades. Así mismo, como el semieje menor b satisface $b < a$, su cálculo a partir de la ecuación

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

tampoco presenta problemas de cálculo aritmético.

Las ecuaciones anteriores han sido utilizadas para modificar los parámetros *a* y *b* en las ecuaciones paramétricas de la elipse en el proceso de manipulación de la curva.

Por otro lado, se han utilizado cuatro diferentes formas de detección de la curva:

1) detección del centro (análogo al caso de la circunferencia y la recta);
2) detección del punto que define el semieje en *x* a través de la detección de un punto y, por tanto, análogo al caso 1);

3) detección del punto que define el semieje en y a través de la detección de un punto y, por tanto, análogo al caso 1); y,

4) detección de cualquier otro punto de la elipse, lo que permite ampliarla o reducirla proporcionalmente.

Para la detección de la curva definida en 4), se ha utilizado una estrategia que fue sugerida por la utilizada en la circunferencia (como la diferencia $|d - r| < \varepsilon$ en la figura IV.11). Solo que en el caso de la elipse, las cantidades que se comparan corresponden a la suma de distancias a los focos y el doble del semieje mayor; esto es, se usa la definición de la elipse como estrategia de detección de la curva:

Si $\left|\sqrt{x^2 + (y+c)^2} + \sqrt{x^2 + (y-c)^2} - 2a\right| < \varepsilon$, se considera que se ha detectado a la curva.

Esta ecuación implica el cálculo de las coordenadas de los focos, lo que a su vez implica determinar cuál es el semieje mayor de la elipse. Por ello, el algoritmo de detección de la curva se ha planteado como:

Si $a^2 > b^2$ entonces eje_max = $|a|$: eje_min = $|b|$,

en caso contrario eje_max = $|b|$: eje_min = $|a|$

$$\text{foco} = \sqrt{\text{eje\_max}^2 - \text{eje\_min}^2}$$

$$\text{d} = \sqrt{\left[(x_r - x_1 + \text{foco})^2 + (y_r - y_1)^2\right]} + \sqrt{\left[(x_r - x_1 - \text{foco})^2 + (y_r - y_1)^2\right]}$$

Si $|d - 2\,\text{eje\_max}| < \varepsilon$ se ha detectado a la curva.

Graficación dinámica de la hipérbola

En el caso de la hipérbola, la ecuación canónica es semejante a la de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Sin embargo, las ecuaciones paramétricas difieren en el tipo de funciones trigonométricas que involucran y, por tanto, en el dominio de definición de las mismas:

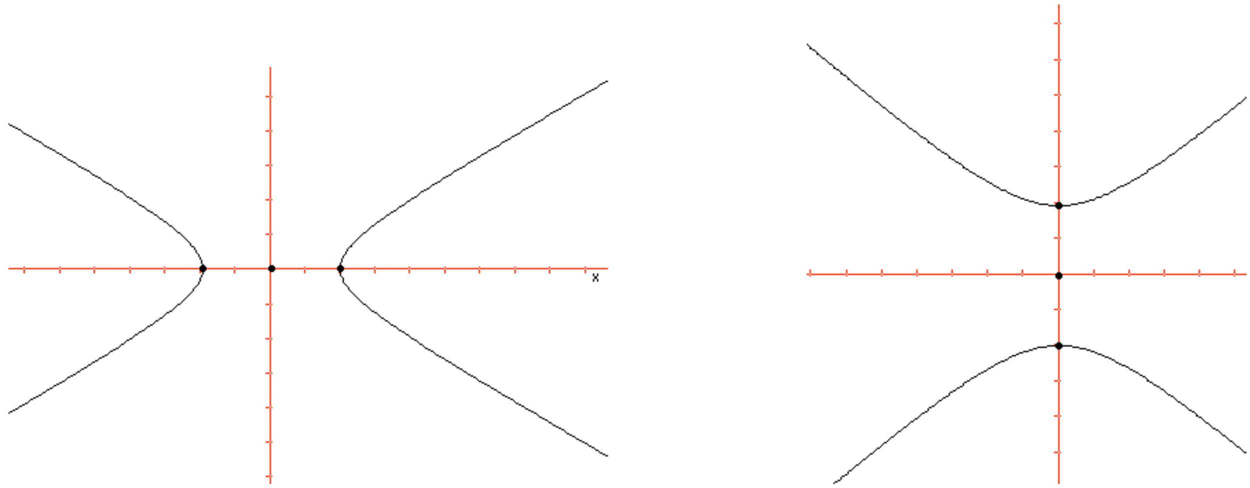
$$x = a \sec t\,; \qquad y = b \tan t \quad \text{para} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(IV.1)}$$

y

$$x = a \tan t\,; \qquad y = b \sec t \quad \text{para} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad \text{(IV.2)}$$

Por tanto, en este caso también, hemos recurrido a las ecuaciones paramétricas, la definición geométrica de la hipérbola y a algunas propiedades que se derivan de ella para construir un algoritmo de graficación que permita interactuar dinámicamente con la figura sin ocasionar errores de máquina.

La gráfica de la hipérbola se ha separado en dos casos: 1) cuando ésta tiene sus focos sobre el eje *x*; y, 2) cuando los focos están sobre el eje *y*. (ver figura IV.14). Éstas se refieren, respectivamente, a las ecuaciones IV.1 y IV.2.



a) Hipérbola horizontal b) Hipérbola vertical

Figura IV.14. Dos tipos de hipérbolas

La hipérbola horizontal se grafica mediante las ecuaciones paramétricas,

$$x = h + a\sec t; \qquad y = k + b\tan t \text{ en el intervalo } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Así mismo, se han identificado tres diferentes opciones de detección y movimiento que permiten la variación de las coordenadas del centro, la apertura de la curva, y la posición de los vértices con respecto al centro de la hipérbola.

La detección del centro determina la traslación de la curva a diferentes posiciones de la pantalla. Ésta, al igual que en el caso de la circunferencia y la elipse, consiste en un cambio de la forma

$$x_n = x + h; \qquad y_n = y + k$$

lo que puede lograrse sin dificultad haciendo $h = x_r$ y $k = y_r$ (ver figura IV.15), donde (x_r, y_r) son las coordenadas del puntero del ratón.

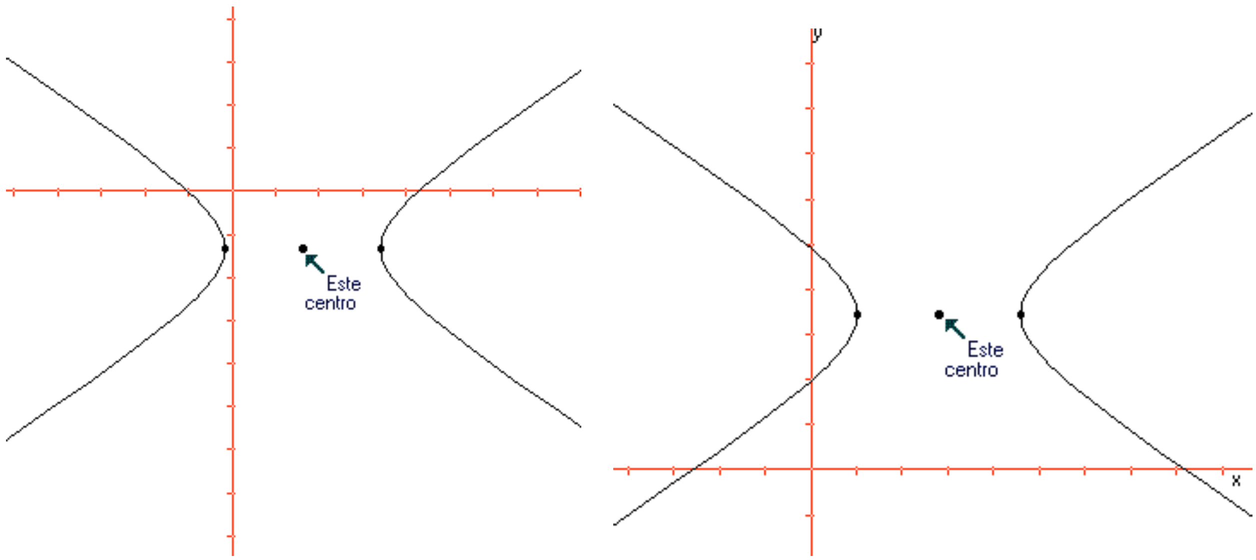


Figura IV.15. El movimiento del centro de la hipérbola permite el traslado de la misma

La modificación de los vértices *A*, *A'* de la hipérbola (ver figura IV.16), implica la modificación del parámetro *a*, ya que su definición geométrica: "*el lugar geométrico de todos los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos es constante*" implica que la distancia de un vértice al orto es 2*a*: $AA' = 2a$.

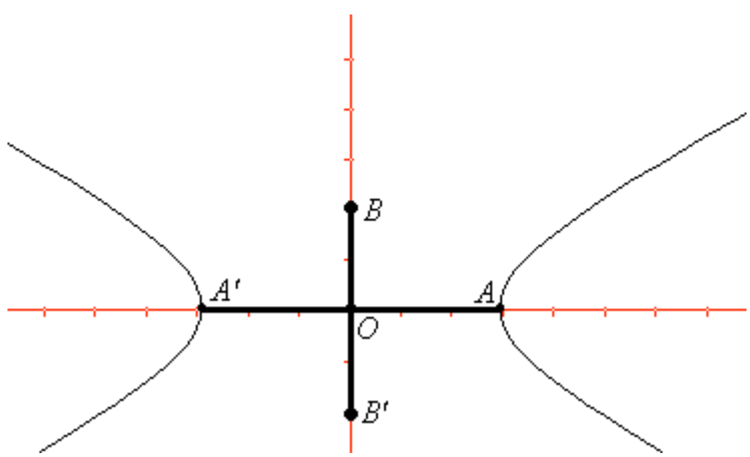


Figura IV.16. Modificación del parámetro *a*: *AA'* = 2*a*

De esta forma, el cambio del parámetro se obtiene mediante $a = x_r - h$, donde x_r es la coordenada en *x* del puntero del ratón.

La modificación del parámetro b permite modificar la forma de la curva. Para realizar este cambio se ha utilizado la ecuación cartesiana:

$$b = \frac{a(y-k)}{\sqrt{(x-h)^2 - a^2}}$$

Como puede observarse, esta ecuación pude producir un error si $(x-h)^2 \leq a^2$. Error que hasta el momento no ha podido ser eliminado más allá del condicionamiento de los valores de x.

Graficación dinámica de la parábola

Para una parábola vertical con vértice en el origen del sistema de coordenadas, tenemos una ecuación cartesiana de la forma $y = \frac{1}{2p}x^2$ que, al igual que las otras cónicas, al momento de una interacción dinámica para realizar alguna tratamiento sobre ella, parece producir errores de máquina si en algún momento $p \approx 0$.

Para esta clase de curvas también se pueden generar parejas de ecuaciones paramétricas:

De:

$$y - k = \frac{1}{2p}(x-h)^2$$

A:

$$x = 2pt + h$$

$$y = 2pt^2 + k$$

donde $t \in [-\infty, \infty]$ es el parámetro.

Nuevamente, en el proceso de interacción con el objeto, se requiere determinar cualquiera de los elementos que componen al conjunto de ecuaciones paramétricas a partir de las coordenadas dadas por la posición del ratón. Por ejemplo si se quiere modificar 'continuamente' el valor de p, se deberá despejar t de una de las ecuaciones paramétricas:

$$t_0 = \frac{x_r - h}{2p}$$

y sustituir en la otra:

$$p = \frac{y_r - k}{2t_0^2}$$

donde (x_r, y_r) son las coordenadas del puntero del ratón.

Para evitar este tratamiento, en el proceso de cálculo de p, es más útil pensar en dos tipos de transformaciones para la parábola vertical: 1) Traslación de la curva usando su vértice; y, 2) modificación de su forma variando el parámetro w de la ecuación cartesiana $y - k = w(x - h)^2$.

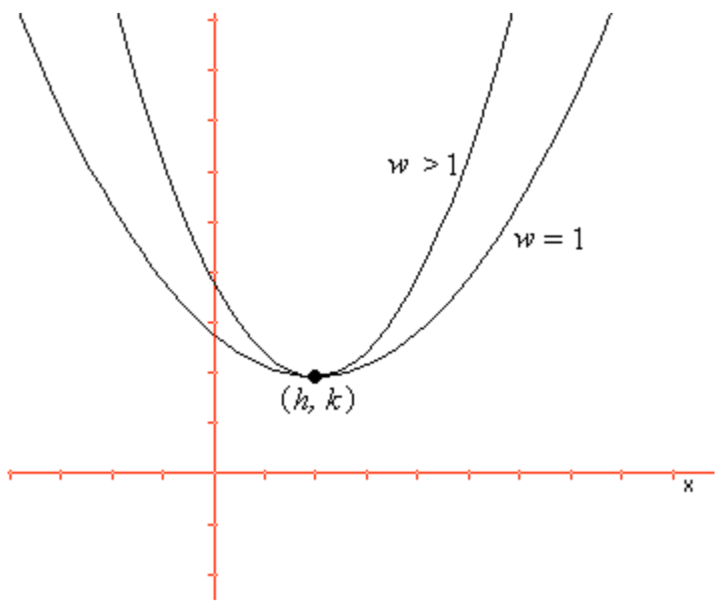


Figura IV.17. Modificación del parámetro w

De esta manera el algoritmo asegura la ausencia de errores de máquina ya que si $x_r \approx h$ se toma la decisión de modificar las coordenadas del vértice (h, k); mientras que si $x_r - h \neq 0$, w se puede calcular de $w = \frac{y_r - k}{(x_r - h)^2}$.

IV. 5. Implementación de los algoritmos

Los algoritmos descritos en la sección anterior han sido implementados en una plataforma de trabajo de Windows, ya que ésta proporciona un ambiente amigable en el que es posible la programación de aplicaciones gráficas interactivas.

Si bien es necesario conocer las herramientas que proporciona Windows para la creación de paquetes de software basados en él, también es cierto que Windows se hace cargo de gran parte del trabajo de comunicación con el procesador mediante funciones especiales preelaboradas que pueden ser usadas por el programador de manera directa. Así, el trabajo principal de creación de software recae en el diseño del ambiente de trabajo, el diseño de los algoritmos y la identificación de las bibliotecas útiles para la implementación de dichos algoritmos y creación del ambiente.

Para la implementación se ha utilizado el lenguaje de programación Visual Basic en su versión 6.0, debido a las características siguientes:

- Es una herramienta de desarrollo rápida y productiva para el manejo de gráficos interactivos;
- Permite el enlace con otros procesos, lo que facilita su empaquetado y distribución;
- Contiene componentes integrados dentro del lenguaje que reduce el uso de librerías y controles externos;
- Incorpora componentes compatibles con Microsoft Office;
- Contiene componentes para el enlace con Internet;
- Permite el enlace con archivos de ayuda construidos con las propias herramientas de Microsoft Visual Studio 6.0.

La estructura de la programación en este ambiente de trabajo se establece mediante módulos de diferentes tipos:

- módulos de código, en los que se sugiere se implementen los algoritmos generales que pueden ser utilizados en cualquier otro módulo;

– módulos de ventanas, que generalmente incluyen el código específico de cada una de las ventanas que integran el sistema;

– módulos de recursos, que agrupan a todos aquellos recursos adicionales que son útiles para el sistema como: cursores, imágenes, iconos, etc.

En el presente caso, se han utilizado los módulos que se muestran el la figura IV.18, que incluyen: Una ventana en la que se ha diseñado una calculadora; una ventana de Acerca de …; una ventana principal enlazada con una ventana de múltiples documentos; un módulo de algoritmos de graficación e interacción; y un archivo de recursos.

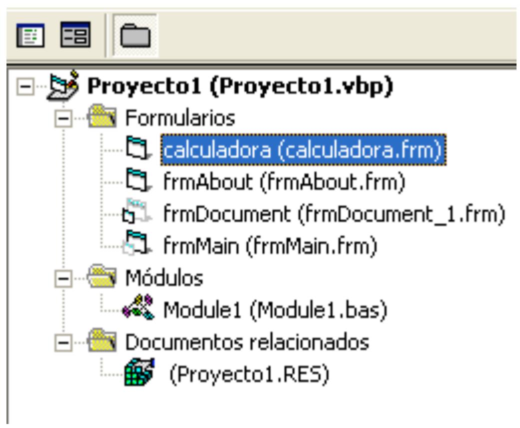


Figura IV.18. Componentes del sistema

En general, el diseño modular del software incluye una ventana principal denominada interfaz de múltiples documentos (MDI por sus siglas en inglés) que puede desplegar múltiples ventanas de manera simultánea (ver figura IV.19).

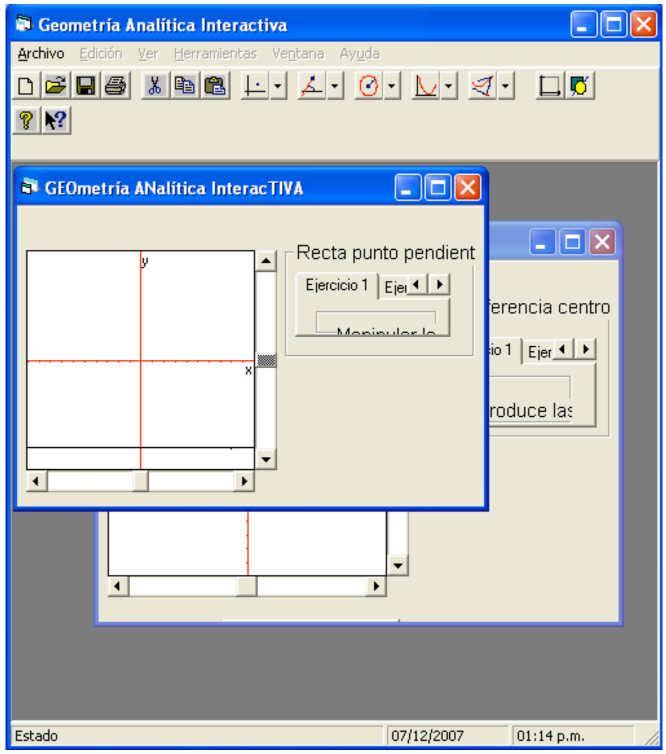


Figura IV.19. Interfaz MDI y ventanas desplegables

La ventana principal (MDI), incluye un menú y una barra de herramientas que permite acceder a las diferentes opciones del sistema. El Menú incluye las opciones usuales de los programas diseñados en el ambiente Windows (Archivo, Edición, Ver, etc.).

En la barra de herramientas se han integrado las opciones para el manejo del sistema. Los primeros botones (de izquierda a derecha, en la figura IV.19), son los usuales de los programas Windows y, a partir del octavo se muestran las herramientas propias del sistema.

El octavo botón, , es un botón desplegable en el que se han agrupado las actividades relacionadas con los puntos y segmentos (ver figura IV.20).

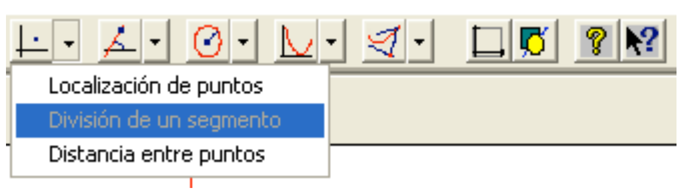


Figura IV.20. Opciones del botón “punto”

En la figura IV.21 puede observarse que al cambiar la elección del botón (a "Distancia entre puntos"), cambia el icono del botón. Esta característica de los botones desplegables que se han diseñado, permite saber cuál es la opción que se tiene activa en el botón en un momento dado.

Figura IV.21. Cambio en el icono del botón al cambiar la elección del mismo.

Los demás botones desplegables: 9 (rectas), 10 (circunferencias), 11 (cónicas) y 12 (lugares geométricos) funcionan de manera análoga para cada una de las opciones que representan.

Los dos botones que le siguen incluyen herramientas para el manejo de la ventana gráfica y uso de elementos geométricos adicionales (ver figuras IV.22 y IV.23).

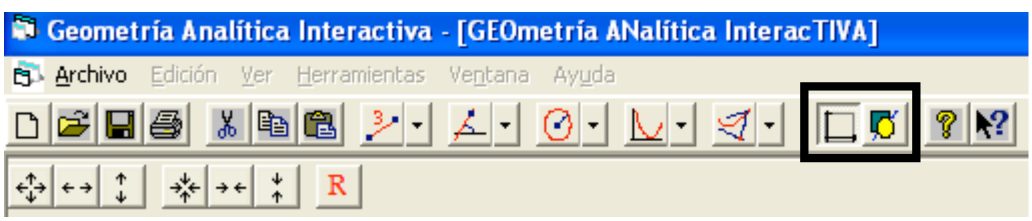


Figura IV.22. Despliegue de controles de manejo de la ventana gráfica

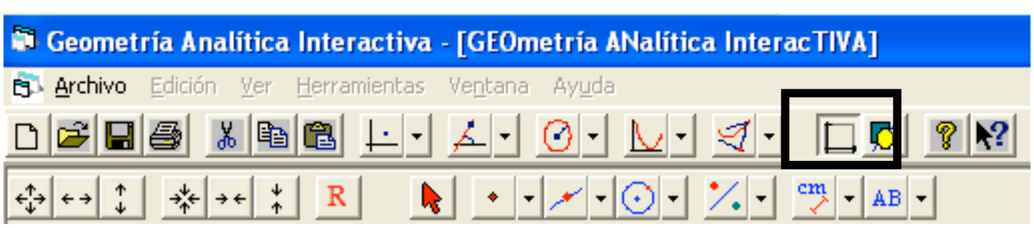


Figura IV.23. Despliegue de controles de geometría interactiva

Cuando se activa alguno de los botones de construcción de la barra de herramientas (botones centrales), el sistema despliega una ventana que incluye los aspectos indicados por el botón. Por ejemplo, la opción de circunferencia, despliega la ventana principal que incluye un área gráfica y una carpeta de ejercicios. El usuario puede interactuar dinámicamente con la circunferencia (desplazarla a través de su centro y cambiar su radio). Los ejercicios se ligan de manera automática a la circunferencia que ha resultado de la interacción.

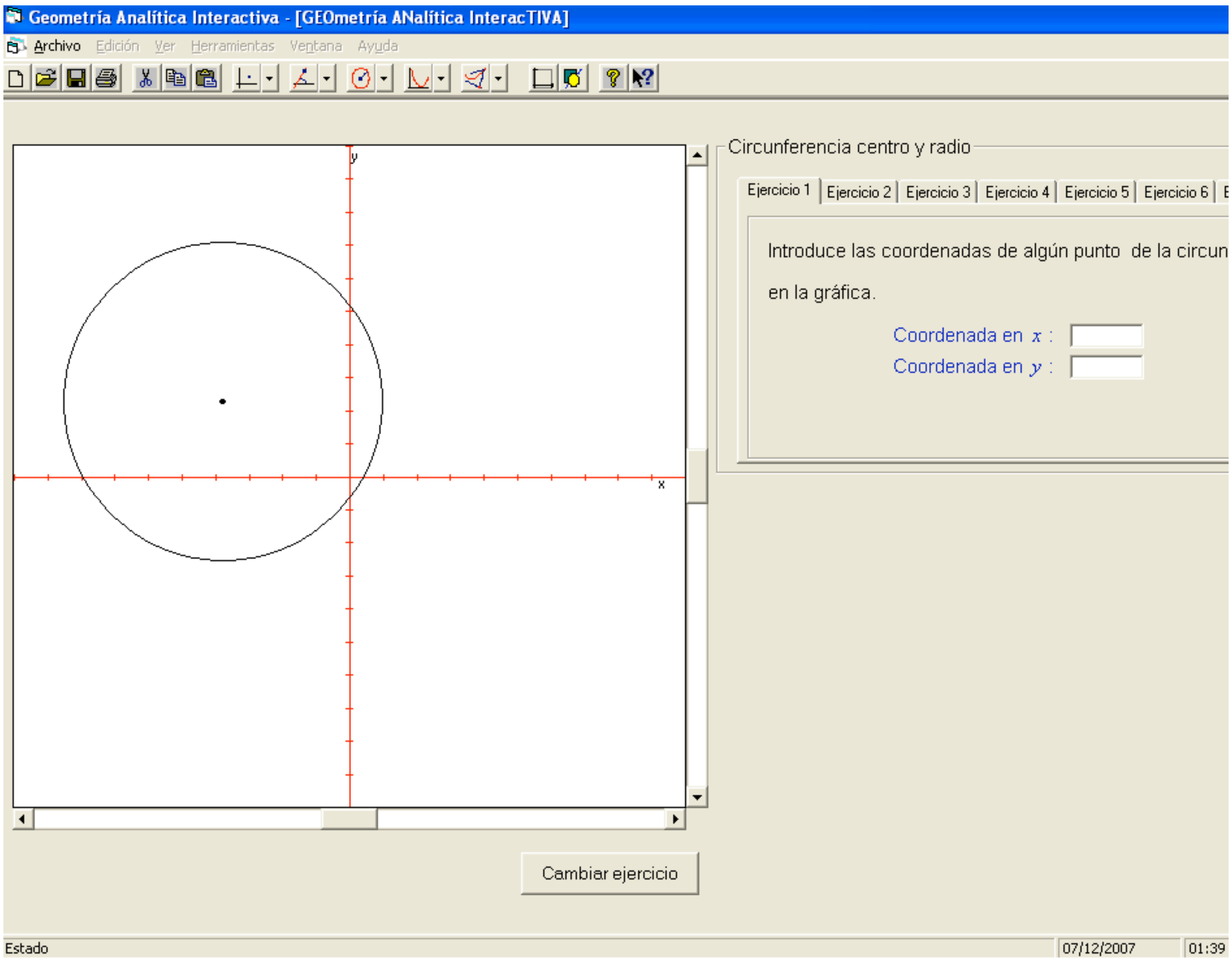


Figura IV.24. Despliegue de la ventana a partir del botón “Circunferencia”

En el caso de la elipse, la interacción con los objetos gráficos incluye cuatro diferentes formas de interactuar con la curva: el centro (desplazamiento), el punto a la izquierda de al figura (manipulación del semieje en *x*), el punto superior de la figura (manipulación del semieje en *y*), y la selección de cualquier otro punto de la elipse (manipulación de la curva).

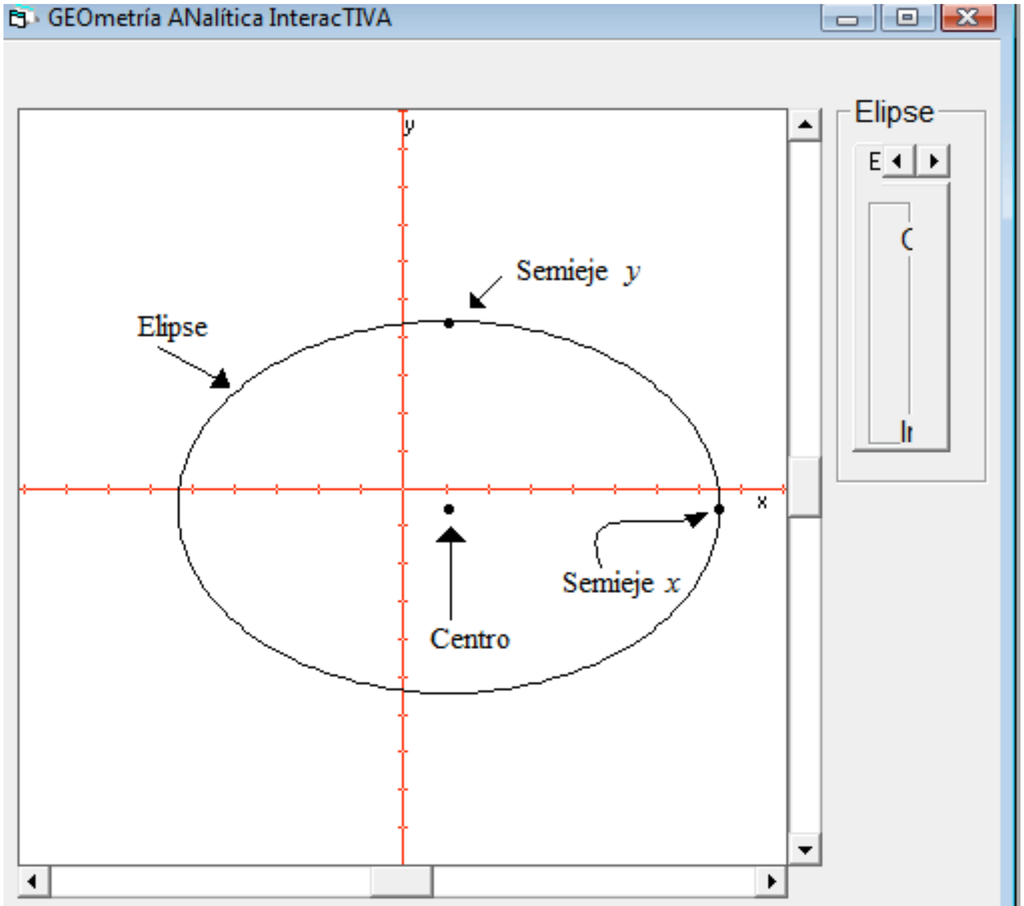


Figura IV.25. Diferentes formas de interactuar con la elipse

En la versión actual del software se han desarrollado algunos ejercicios de práctica que, al combinarse con actividades en hojas de trabajo en lápiz y papel, pueden apoyar el desarrollo del aprendizaje de los estudiantes.

En particular, la elipse incluye cinco tipos de ejercicios diferentes:

1) Manipulación de la curva y posicionamiento de puntos en el sistema de coordenadas;

2) Colocación y medición de los semiejes de la elipse;

3) Localización de uno de los focos dado el otro;

4) Uso de la definición geométrica como una de las propiedades de la elipse (la suma de las distancias de los focos a cualquier punto de la elipse es constante);

5) Relación entre la representación gráfica y simbólica de la elipse.

Estos tipos agrupan un conjunto amplio de ejercicios que pueden ser realizados en el sistema ya que, al presionar el botón “cambiar ejercicio” que aparece en la parte inferior de la ventana de gráficos, puede generarse una nueva instancia del tipo de ejercicio que se haya seleccionado en la carpeta de ejercicios (ver figura IV.26).

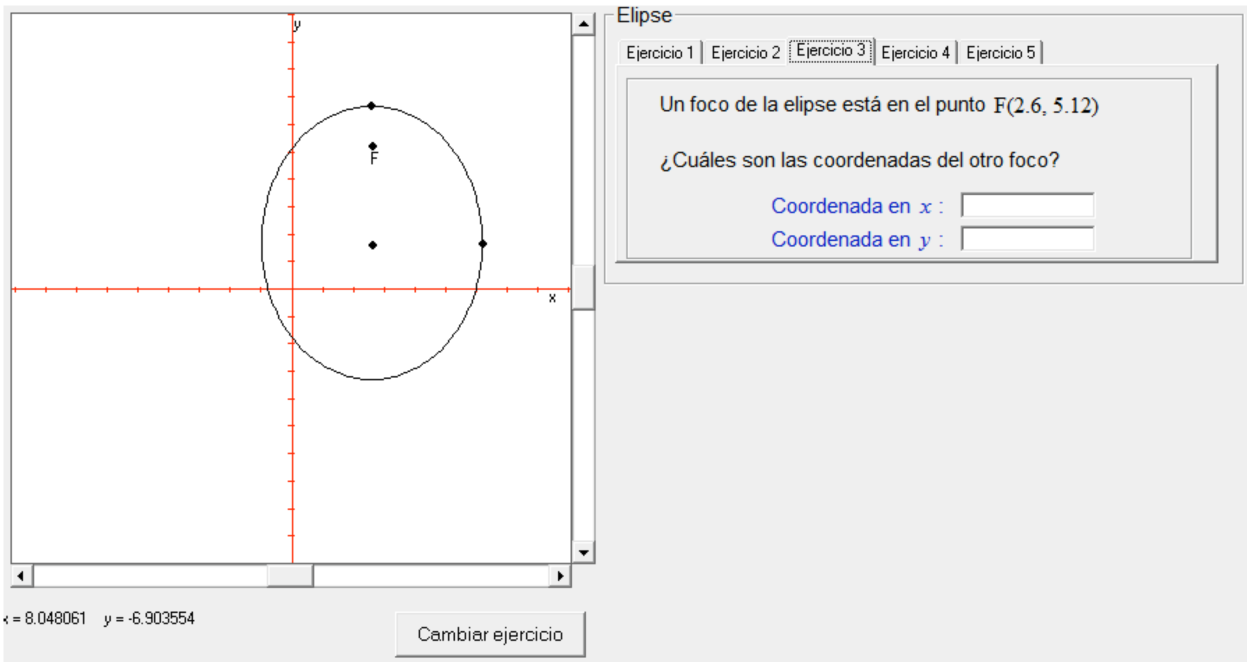


Figura IV.26. Diferentes ejercicios para la elipse

IV. 6. Respuestas a las preguntas de investigación

En esta sección se trata de responder a las preguntas de investigación planteadas en el primer capítulo del trabajo.

La primera pregunta, relativa a las características de los objetos matemáticos que hacen posible la construcción de algoritmos para el tratamiento dinámico de las representaciones gráficas de las cónicas, la hemos considerado fundamental, ya que son precisamente las propiedades de las cónicas las que nos han permitido construir algoritmos de graficación eficientes para casi todas las curvas, como hemos expresado en la sección IV.4. Para la construcción de buenas herramientas de software computacional, es necesario conocer cuáles son los recursos que pueden ayudar a mejorar la capacidad de manejo de la computadora.

También se mencionó que, aunque en términos matemáticos se cuenta con varias opciones para la construcción de los algoritmos de graficación, no todos son útiles para los procesos que deben realizarse en la computadora.

La segunda pregunta se refiere al potencial que ofrece el software para promover el desarrollo de ideas matemáticas relacionadas con la geometría analítica.

En este sentido, hemos considerado que es precisamente en las áreas como la geometría y la Geometría Analítica que el software dinámico puede apoyar el aprendizaje, ya que proporciona nuevas formas de acceder y entender los conceptos matemáticos. Hemos expresado que la computadora y el software dinámico son un medio para pasar de lo concreto a lo abstracto. Los ambientes que pueden ser diseñados permiten una interacción con los objetos, de tal forma que se tiene contacto activo con ellos, si bien no de la misma forma en que se interactúa con los materiales concretos, sí de una forma semejante.

En el software en el que se han implementado los algoritmos objeto de este trabajo de investigación, se han incluido los temas del currículo de Geometría Analítica del bachillerato de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo que, como puede observarse en el anexo 2, enfatizan el estudio de las cónicas.

Si bien, el software que se presenta permite explorar otras ideas, como la localización de puntos en el plano o la distancia entre puntos, éstos no forman parte del programa de estudio mencionado.

Así mismo, el software y sus algoritmos de base han preparado el terreno para estudiar uno de los conceptos que consideramos es fundamental en la geometría analítica: el concepto de lugar geométrico. Aún cuando esta etapa no ha sido implementada en la versión actual del software, su estructura interna y externa está preparada para la implementación de actividades que favorezcan la idea de lugar geométrico en sus aspectos puramente geométricos (sin coordenadas), simbólicos (con coordenadas) y las relaciones entre ambos (ver figuras IV. 27 y IV. 28) .

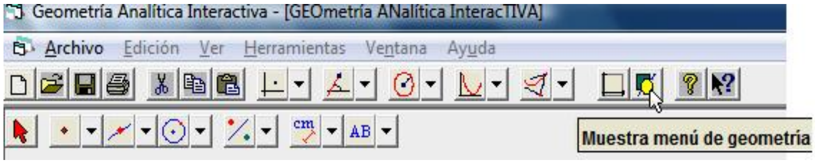


Figura IV. 27. Opción de geometría de la barra de herramientas principal

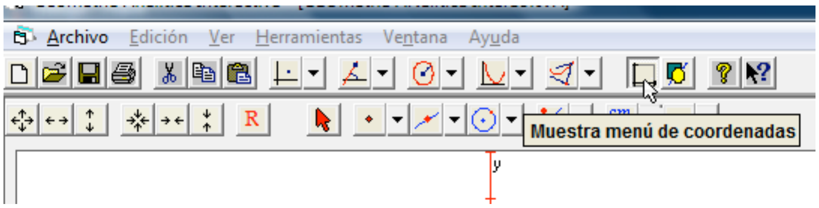


Figura IV. 28. Opción de trabajo con coordenada de la barra de herramientas principal

La respuesta a la tercera pregunta, que tiene que ver con las actividades diseñadas para la prueba de los algoritmos, se basó solamente en actividades para la elipse.

Debido a las restricciones de tiempo, se diseñaron cuatro actividades en lápiz y papel para la prueba técnica. Si bien esta etapa consiste en una evaluación técnica del sistema, para detectar fallas en el mismo, se ha aprovechado para evaluar también la forma en que los estudiantes pueden utilizar el sistema como apoyo a su aprendizaje. En la siguiente sección de este capítulo se describe dicha experiencia así como las dificultades a las que se enfrentaron los estudiantes cuando usaron el software.

IV. 7. Diseño e implementación de actividades de evaluación técnica

Con base en los objetivos planteados, se llevó a cabo una de las fases de nuestra metodología (Clements & Batista, 1992) que consiste en hacer una prueba del software desarrollado. Con un grupo de 20 alumnos de 4to semestre del tronco común del bachillerato y 10 equipos de cómputo (instalándose el software desarrollado, que denominaremos "Geodan"), los estudiantes trabajaron por parejas y se les entregó una hoja de trabajo por equipo, los cuales fueron identificados por equipo A,B, etc.

El grupo se encontraba estudiando el tema de la elipse y en una sesión ordinaria de clase se realizó la experimentación. Los estudiantes participantes fueron los que habían asistido regularmente a clase y tuvieron la libertad de elegir a su compañero de equipo. Se inició con una explicación breve del funcionamiento de Geodan, mediante actividades relacionadas con la elipse, con la intención de que los estudiantes practicaran la manera de interactuar con los objetos matemáticos. Además, se hizo énfasis en el propósito de someter a prueba técnica los algoritmos del software. En cada una de las actividad se describió, paso a paso, lo que los estudiantes tenían que hacer; sin embargo, lo primero que hizo la mayoría de los estudiantes fue interactuar con el software sin poner atención a las instrucciones.

En la primer actividad, relacionada con el ejercicio 1 de Geodan, se hace énfasis en la manipulación de la gráfica de la elipse usando el ratón de la computadora. En ésta, el uso de los términos 'semieje mayor' y 'semieje menor' causaron problema a algunos estudiantes.

Uno de los integrantes de un equipo dijo: "*El maestro nos ha enseñado los ejes, pero el semieje no, pero yo creo que el semieje mayor, es el que se ve más grande y el semieje menor más chico, a ver escríbele 5 en mayor y 3 en menor*". Este extracto del diálogo de los alumnos, recogido mediante una video filmación, permite observar que los estudiantes no tienen problemas con la manipulación de los objetos de la pantalla y, aún más, éstos les permiten descubrir propiedades que habían sido identificadas previamente con otro lenguaje o que les eran desconocidas.

En esta actividad además se les preguntó: ***¿Cómo* obtuviste *las medidas de los semiejes?, ¿será lo mismo si la elipse no tiene su centro en el origen?*** Las respuestas dadas por los equipos de estudiantes se resumen en la tabla IV.7-1.

Tabla IV.7-1. Respuesta de los equipos a las preguntas planteadas en la primer actividad

Equipos	*¿Cómo obtuviste las medidas de los semiejes?*	*¿Será lo mismo si la elipse no tiene su centro en el origen?*
A	Poniendo su centro en (0,0)	No
B	Colocando la elipse en medio	Si se necesita ponerlo en el centro, si no seria difícil medirlo
C	Midiendo la elipse total y de ahí tomamos solamente la mitad	Si se puede poniéndolo en otro punto.
D	Midiendo la distancia que hay del origen al radio	No es lo mismo
E	Medimos las coordenadas y las multiplicamos por 2	No seria lo mismo si no tuviera su centro en el origen

Otro de los problemas que tuvieron los estudiantes en esta actividad, fue identificar las coordenadas de puntos específicos. Un estudiante del equipo D, le dice a su compañero "*ya entendí, de un lado son los positivos y del otro lado los negativos, de la misma manera hacia arriba positivos y hacia abajo negativos*". La Tabla IV.7-2 muestra las respuestas de los estudiantes; cuando se les pide identificar un punto cualquiera de la elipse que tienen en la gráfica (también se incluye la medida de los semiejes). Como puede observarse, solo dos equipos (A y C) dan una respuesta correcta, ya que para una elipse con centro en el origen, y las medidas de los semiejes dados, solamente estos casos coinciden.

Tabla IV.7-2

Equipos	**Semieje mayor**	**Semieje menor**	**Punto de la elipse**	
			Coordenada en *x*	**Coordenada en *y***
A	5	3	3	0
B	8	4	8	4
C	6	2	6	0
D	5	4	5.0	4.0
E	4	2	1	2

Uno de los objetivos de Geodan es facilitar a los estudiantes la identificación de las coordenadas (*x, y*) de un punto. Con el análisis de las video filmaciones y las respuestas de los estudiantes vemos que "Geodan" sí les ayuda a ubicarlas, aunque por otro lado algunos alumnos esperaban a que el software les informara si estaban en lo correcto o no.

Con la intención de que reafirmaran sus conocimientos sobre los semiejes y rectificaran algunas de sus respuestas se les preguntó:

¿Los semiejes de la elipse cambian de tamaño si mueves su centro a otra posición? Escribe un párrafo completo que exprese esta última característica propia de la elipse

Estas fueron algunas sus respuestas:

Tabla IV.7-3

Equipos	Respuesta	Párrafo
A	No	No sirvió para comprender y hacer figuras
B	No	Que no es redonda por lo tanto el valor de los semiejes no cambia, según como esté acomodada, si fuera un círculo no importaría la posición.
C	No	
D	No	No, por que si se mueve el elipse hacia otro lado se mueve toda la elipse y nunca cambia las medidas a menos que se modifique el tamaño de la elipse
E	No	Si, mueves el centro a otra posición se mueve la figura completa y no se distorsiona ni afectamos sus medidas, solo su posición y sus coordenadas.

Estas respuestas reflejan que los estudiantes pudieron identificar una propiedad importante de la translación: la invariancia en las medidas.

Para esta primera actividad era importante que los estudiantes se dieran cuenta de cómo Geodan les permite, de manera dinámica, entender que el semieje mayor es la mitad del radio más grande y el semieje menor es la mitad del radio más pequeño, así como también identificar las coordenadas (x, y). Para indagar sobre estas cuestiones, se les pidió que respondieran a la siguiente instrucción:

Escribe lo que consideres que es más significativo de esta actividad, incluyendo los problemas que se pudieron haber presentado durante el desarrollo de la actividad.

Tabla IV.7-4

Equipos	Respuesta
A	Que es más fácil encontrar las coordenadas
B	Que podemos saber cualquier punto de la elipse, las coordenadas así como los ejes.
C	
D	Lo más significativo es cómo puedes medir el radio, diámetro y sus coordenadas
E	Facilita las cosas parra dibujar una gráfica y ahorrar tiempo y trabajo

El análisis de las video filmaciones y estas respuestas nos permite afirmar que se logro cumplir con el objetivo de la actividad número uno.

El objetivo de la segunda actividad con lápiz y papel es hacer énfasis en la relación entre una gráfica y una ecuación cartesiana, identificando en ambos los semiejes de la elipse. Así, a diferencia del caso anterior, ahora la pantalla muestra la ecuación de la elipse graficada. Esta actividad está relacionada con el ejercicio 2 de Geodan, del cual también se pueden generar múltiples instancias a través del botón “Cambiar ejercicio”. En este ejercicio, se pide a los estudiantes que coloquen la elipse en el punto señalado por Geodan para describir las mismas características de la curva que se pedía en el ejercicio 1.

Desde el punto de vista de la programación y diseño del software se puede hacer que la ecuación canónica mostrada en la parte inferior izquierda varié si el objeto matemático se esta moviendo, con la consecuencia didáctico de que se limitaría a copiar sin analizar el resultado.

La siguiente imagen muestra el contenido del ejercicio 2 que presenta "Geodan"

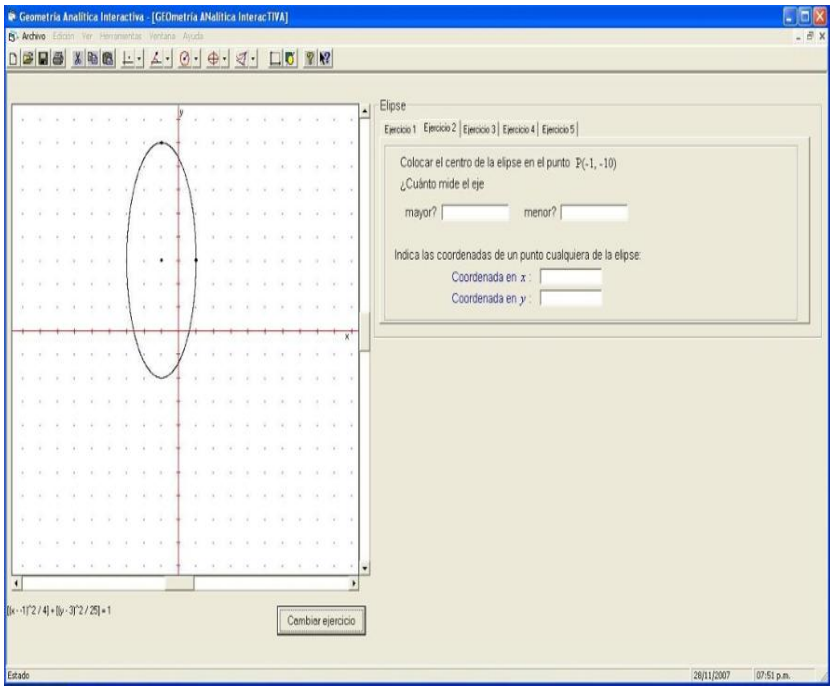


Figura IV. 29. Ejercicio 2 implementado en el software

A los estudiantes se les hizo la siguiente pregunta:

¿Qué cambia en la pantalla, cuando se presiona el botón Cambiar ejercicio de debajo de la gráfica?

La tabla IV.7-5 contiene las respuestas de los quipos

Tabla IV.7-5

Equipos	*P*(*x*, *y*)	*Ecuación*	*Semieje mayor*	*Semieje menor*	*Punto de la elipse*	
					Coordenada en x	*Coordenada en y*
A	(4,2)	[(x-4)^2/64]+[(y-2)^2/25]=1	8	5	8	2
B	(6,3)	[(x-6)^2/16]+[(y-3)^2/4]=1	4	2	4	4
C	(8,4)	[(x-8)^2/25]+[(y-4)^2/4]=1	5	2	13	4
D	(6,12)	[(x-10)^2/36]+[(y-4)^2/100]=1	10	6	6	10
E	(0,7)	[(x-0)^2/100]+[(y-7)^2/4]=1	10	2	10	7

Además, se dio la siguiente instrucción:

Busca relaciones entre los números que aparecen en la ecuación y los valores de los semiejes. Descríbelas.

Tabla IV.7-6

Equipos	**Respuesta**
A	En la ecuación salen las coordenadas
B	Como que los números que están dividiendo en la ecuación son los que me dan en los semiejes, pero multiplicados por él mismo.
C	En la ecuación aparecen las coordenadas de *x* y de *y*
D	Coinciden algunos números
E	En la ecuación aparecen las coordenadas de *x* y de *y*, respectivamente

Como podemos observar en las respuestas de las tablas *IV.7*-5, los equipos A y B tienen mal las coordenadas del punto sobre la elipse; sin embargo, el equipo A se da cuenta que al mover el objeto al punto *P(4, 2)* la ecuación en su forma canónica debe incluir las coordenadas del punto *P* como se ve en la tabla *IV.7-6.* El equipo B es el único que se da cuenta que los valores de los semiejes forman parte de la ecuación y que están elevados al cuadrado; el error que cometieron fue con respecto a las coordenadas de un punto cualesquiera en la elipse. La video filmación de este episodio muestra que esto se derivó de no tener la elipse en el origen. Por otro lado, ahora queda claro cuál es el valor de los semiejes; los resultados mostrados en la tabla *IV.7-5*, concuerdan con la ecuación canónica escrita por los estudiantes.

Los equipos C, D, E también se dan cuenta de que los valores del punto *P* se ven reflejados en la ecuación canónica de la elipse, aunque en su respuesta solo mencionan que aparecen "coordenadas" sin mencionar que esas "coordenadas" son las del punto *P*. Quizás no encontraron la manera de escribir esto aunque sí se estaban dando cuenta de lo que pasaba con el punto *P,* esto lo afirmamos por que las coordenadas del punto cualesquiera de la elipse son correctos (tabla *IV.7-5)*.

En la misma actividad se les mencionó que podían utilizar la calculadora de Windows, si querían comprobar sus resultados de las coordenadas. Algunos, como el equipo E, sí la utilizaron.

También se les pidió que escribieran lo que consideraran más significativo de esta actividad y estas fueron sus respuestas:

Tabla IV.7-7

Equipos	Respuestas
A	
B	
C	
D	Sabes hacer la ecuación para encontrar todo.
E	Es muy efectivo para conocer las ecuaciones y facilita el trabajo.

Los equipos A, B, y C no contestaron. La respuesta de los equipos D y E concuerda con lo que escribieron la tabla *IV.7-5* y *IV.7-6*. En este sentido, "Geodan" y la actividad 2 cumplieron con los objetivos esperados.

La tercer actividad consiste en utilizar el ejercicio 3 de "Geodan", que tiene como objetivo encontrar un foco de la elipse dado el otro, interactuando con la elipse ya sea modificando sus semiejes y centro. En la parte inferior izquierda de "Geodan" se muestran las coordenadas x y y, respectivamente. Esta actividad requiere un nivel de pensamiento más elevado por parte de los estudiantes, para observar si son capaces de responder adecuadamente con solo interpretar lo que observaban en la pantalla de de la computador y así, dar las coordenadas del otro foco.

La siguiente imagen muestra el contenido del ejercicio 3 que presenta “Geodan”

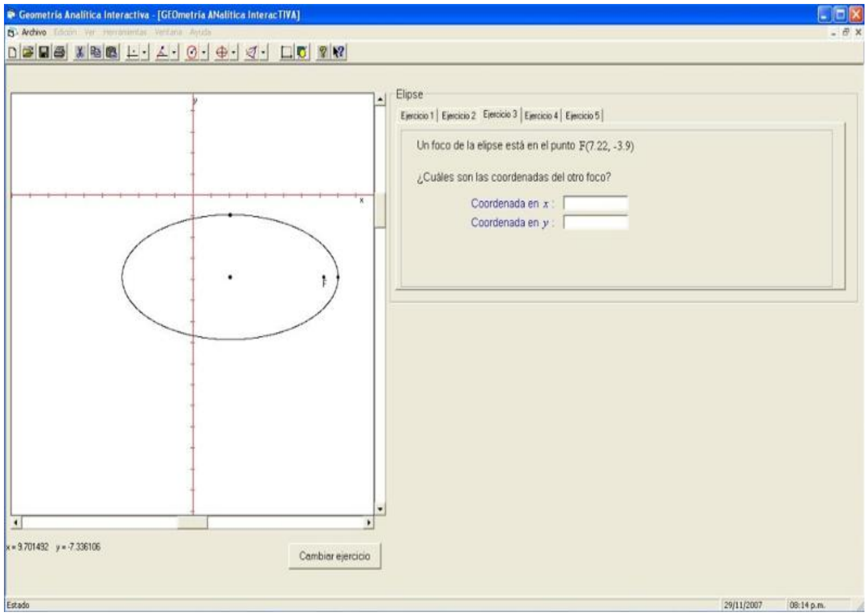


Figura IV. 30. Ejercicio 3 de Geodan

En la hoja de trabajo se pidió a los estudiantes que realizaran diferentes desplazamientos de la curva, que registraran y dibujaran esa representación sobre la hoja de trabajo con el propósito de ver cuál representación utilizaron y, así mismo, observar si las coordenadas de los focos fueron correctas. Solo dos equipos hicieron estas representaciones sin responder las preguntas planteadas. Las únicas respuestas se muestran en la tabla IV.7-8.

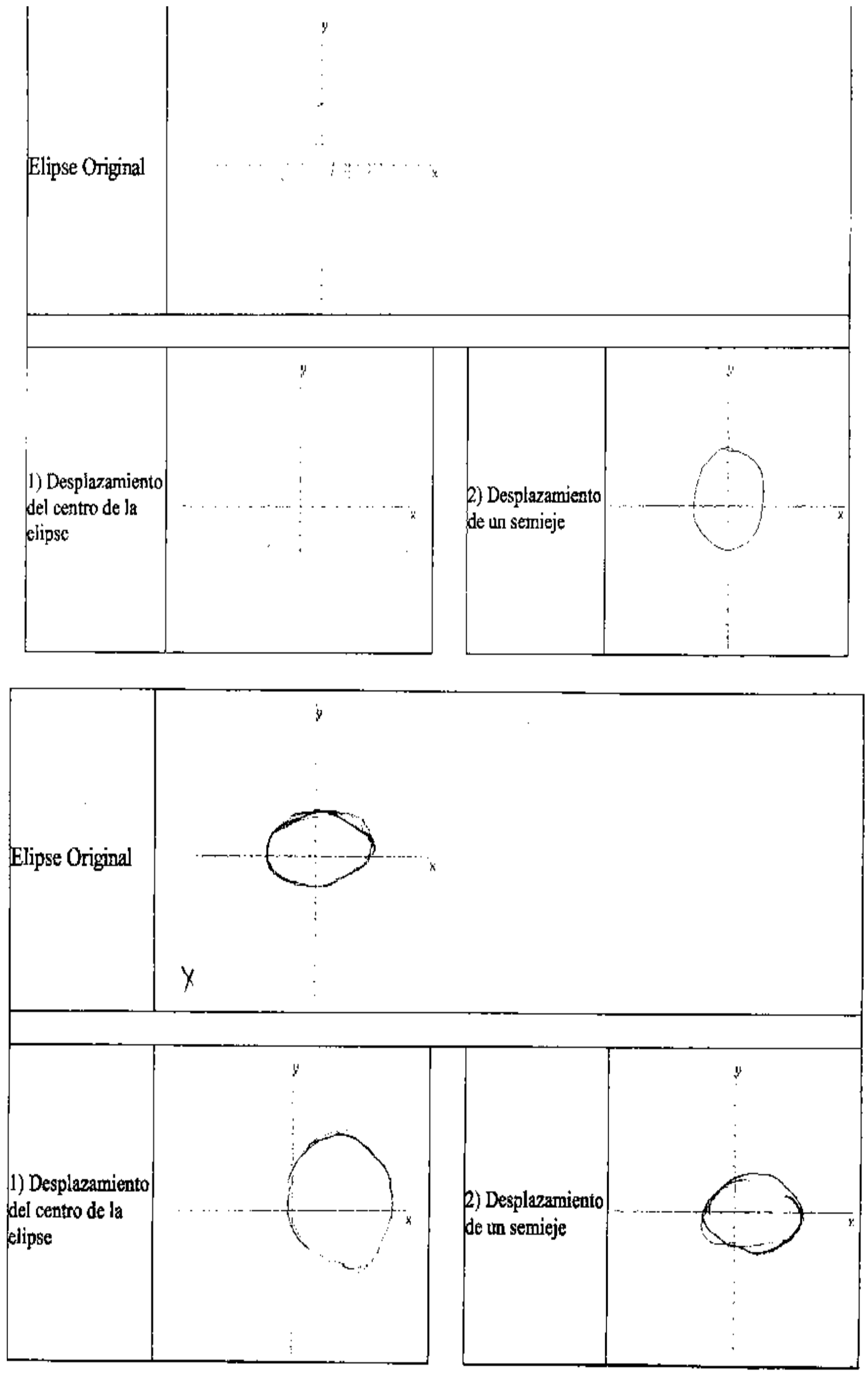


Figura IV. 31. Representaciones de los equipos C y E, respectivamente

Con respecto a los focos de la elipse se preguntó lo siguiente:

Manipula una elipse usando diferentes formas, de tal manera que puedas hacer coincidir el foco con el centro de la misma. ¿Cuáles son las coordenadas del Foco?, ¿Cuáles las del otro foco?

Tabla IV.7-8

Equipos	***Primer Foco***	***Segundo Foco***
A	*x= 6.63758, y=8.40801*	*x=7.799329 y=0.0169781*
B	*x=1.6863, y=3.65189*	*x=-1.6863, y=3.65189*
C		
D		
E		

Como podemos apreciar en la *Tabla IV.7-7*, los equipos C, D y E no respondieron. La respuesta del equipo A evidentemente está mal; la respuesta del equipo B es correcta, pero no sabemos cuál es la representación que estaban reproduciendo en la pantalla. De las video filmaciones observamos que los integrantes del equipo D se dan cuenta que hay un foco de la elipse con una coordenada negativa, pero les causa confusión que tenga la misma coordenada en *y*; sin embargo, en la hoja de trabajo no escribieron esto. Se les hicieron otras preguntas relacionadas con los focos; desafortunadamente las respuestas de los equipos no tienen sentido.

En la misma actividad se pidió a los estudiantes que hicieran dos diferentes representaciones, con ciertas características especiales, sobre la elipse. Las siguientes imágenes muestran las pantallas de estas representaciones, recalcando que todos los equipos hicieron la representación 8, pero no la 7, salvo el equipo B.

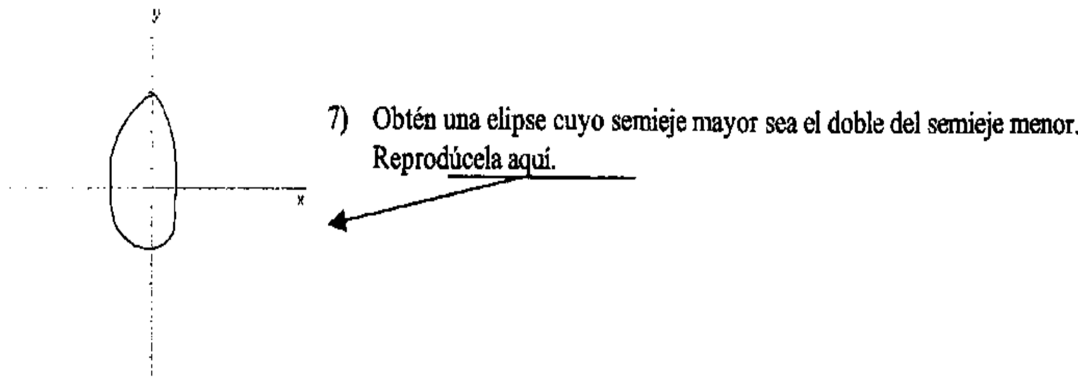


Figura IV. 32. Representación 7 equipo A

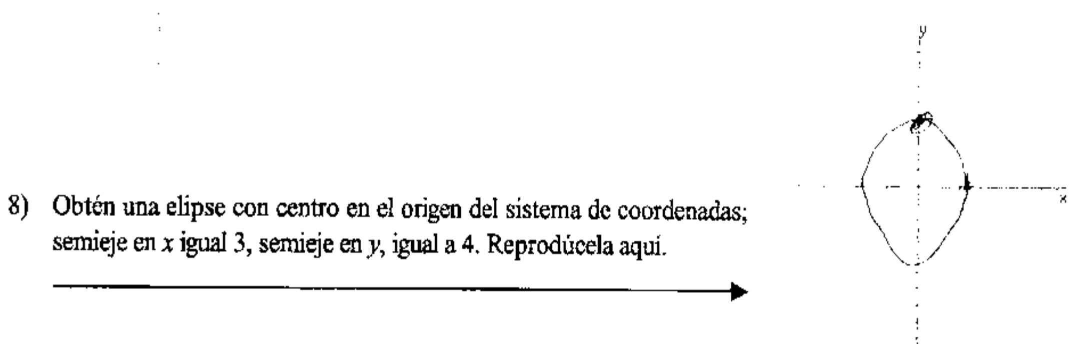


Figura IV. 33. Representación 8 todos los equipos

De manera general, de las video filmaciones observamos un fácil manejo de los estudiantes de Geodan, desde los dispositivos de entrada de la computadora; no les es complicado aprender a interactuar con él ya que la interfaz es bastante intuitiva. Sin embargo, existen dificultades al momento de interactuar con el puntero del Mouse y el objeto matemático, sobre todo al modificar su tamaño, ya que el borde del objeto es bastante delgado. Por otra parte, la interpretación visual de los datos de Geodan por los estudiantes parece estar de acuerdo con los conceptos matemáticos que entienden ya que no necesitaron de una explicación de ningún símbolo. Esto es un estímulo didáctico para el programador, ya que se busca que el software diseñado sea claro y contribuya al entendimiento matemático de los estudiantes.

CAPÍTULO V
Conclusiones

La tecnología computacional es parte de nuestra vida cotidiana; su introducción en la enseñanza está modificando la forma de enseñar y aprender matemáticas, ya que su manejo adecuado puede convertirla en una herramienta de aprendizaje que potencia las posibilidades de adquisición de los conocimientos, a través de acercamientos intuitivos, de visualización y del manejo simultáneo de distintas representaciones de los objetos matemáticos.

La incorporación del sistema coordenado cartesiano hizo posible la conjunción de ideas geométricas y aritmético algebraicas que culminaron en la conformación de la Geometría Analítica, siendo la noción de lugar geométrico uno de sus conceptos fundamentales. La adquisición de este conocimiento por parte de los estudiantes implica, necesariamente, el entendimiento de ideas y nociones relacionadas como: coordenada, punto, ecuación, gráfica, tabulación, lugar geométrico, variación; el uso de la tecnología a través del software educativo proporciona un acercamiento que favorece el desarrollo de la visualización e intuición, elementos esenciales en la adquisición de conceptos y el aprendizaje de las matemáticas.

Además, las deficiencias de los estudiantes en el dominio de los prerrequisitos del curso de Geometría Analítica; pueden ser subsanadas mediante el uso del software diseñado en este trabajo junto a los demás elementos que proporciona la tecnología. El papel del profesor debe ser el de facilitar el uso del software y respaldar el desarrollo de las actividades para lograr el entendimiento de la correspondencia entre las representaciones geométricas y algebraicas, que le permitan confirmar su aprendizaje.

Como se ha mostrado en este trabajo, es posible diseñar un software cuyas actividades y manejo vaya de acuerdo con los contenidos de los programas escolares. La interacción del estudiante con la computadora, a través del software dinámico, posibilita un aprendizaje significativo, que vaya más allá de la adquisición de reglas y procedimientos, lo cual permite un reforzamiento de los conocimientos anteriores y la adquisición de nuevos conocimientos.

Para lograr lo anterior, el programador debe conocer ampliamente la problemática del salón de clases y diseñar ambientes gráficos de fácil manejo y una implementación responsable por parte del profesor de Geometría Analítica.

Elaborar prototipos basados en software ya existentes agiliza el logro de objetivos, pero la introducción de objetos dinámicos requiere de algoritmos eficientes, libre de errores matemáticos y computacionales.

Por último, poner a prueba los prototipos, en sus ambientes reales, nos acerca más al logro de los objetivos esperados.

Referencias

Bartolini, B. M. (2005) The meaning of conics: historical and didactical dimensions. En: Kilpatrick, Hoyles, Skovsmose y Valero (Eds.) *Meaning in mathematics education* (pp. 40 – 60). Springer USA.

Bongiovani, V. (2002): *Les caractérisation des coniques avec Cabri-géomètre en formation continue d'enseignants: étude d'une séquence d'activités et Conception d'un hyper document interactif*. Université Joseph Fourier, Sciences Technologie Médecine.

Carpenter, T., Lehrer, R. (1999) Teaching and Learning Mathematics with Understanding. En: Elizabeth Fennema y Thomas Romberg (Eds.). *Mathematics Classrooms that Promote Understanding* (pp. 19-32). NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

CGB (2001). *Programa de Matemáticas IV*. Coordinación General del Bachillerato de la UMSNH, Morelia, Mich., México. Disponible en: http://www.prepamorelos.umich.mx/. Consultado el 8 de noviembre de 2006.

Clements D., Battista, M. (2000). Designing effective software. En: Anthony E. Kelly y Richard A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 761-776). NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Clements, D. y Sarama, J. (1995). Design of a Logo environment for elementary geometry. *Journal of Mathematical Behavior* 14:381-398.

Crowley, M.L. (1987) The Van Hiele model of development of geometric thought. En: Mary M. Lindquist (Ed.) *Learning and teaching geometry*, K12, 1987 Yearbook, NCTM., Reston, Virginia, pp. 1-16.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En: David Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T. (1994). The role of cognitive tools in mathematics education. En: R. Boehler, W. Schilz, R. Straber, B Wnkelmann (Eds.). *Didactic of mathematics as a scientific discipline* (pp. 201-211). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1993) Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En: Fernando Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II.* Editorial Iberoamericana, p.p 173-201. Traducción del documento original publicado por Université Louis Pasteur de Strasbourg, France.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En: C. Mammana y V. Villani (Eds.) *Perspectives on the teaching of the geometry for 21st century* (pp. 37 – 51). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999). Questioning argumentation. *International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof*. Disponible en www.lettredelaprueve.it. Consultado del 23 de junio de 2006.

Ferrara, F., Pratt, D., y Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. Ideas discussed at PME over the last 30 years. En: A. Gutierrez y P. Boero (Eds.) *Handbook of Research on Psychology of Mathematics Education: Past, present and future*. (pp. 237 – 273), Sense Publishers.

Gary, E. y Tall, D. (1994) Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic, *Journal for Research in Mathematics Education* 252, 116-141.

Goldin, G., Kaput, J. (1996) A Joint Perspective on the Idea of Representation in Learning and Doing Mathematics. En: Leslie P. Steffe, Pearla Nesher, Paul Cobb, Gerald A. Goldin, y Brian Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 397-430). NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Harel, G., Sowder, L. (1998) Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. En: A.Schoenfeld, J. Kaput, y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education III* (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in geometry. En: C. Mammana y V. Villani (Eds.) *Perspective on the teaching of the geometry for the 21st century* (pp. 29-37). Dordrecht Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hillel, J., Lee, C., Laborde, y Linchevski (1992) Basic Functions Through the Lens of Computer Algebra Systems. *Journal of Mathematical Behavior* 11, pp. 119 – 158.

Hitt, F. (1998) Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum, *Revista de Educación Matemática*, Vol. 10, México.

Hoyles, C, y Noss, R. (2003) Microworlds: the next generation. En: Eugenio Filloy (Ed.) *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*. CINVESTAV-IPN, México, pp. 112-120.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press, NY, USA.

Koedinger, K.(1992). Emergent properties and structural constraints: advantages of diagrammatic representations for reasoning and learning. En: N. H. Narayanam (ed.), *28 JOHN S. GERO Workshop Notes---AAAI Spring Symposium on Reasoning with Diagrammatic Representations*, (pp. 154-149) Stanford University, Palo Alto.

NCTM (2000) *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA: Author. Duval, R. (1999) *Representation, vision and visualization: Cognitive function in mathematical thinking.* Basic issues for learning. XXI Annual Meeting PME-NA.

O'Connor J. J. and Robertson E. F. (1999). *Menaechmus.* MacTutor History of Mathematics. Disponible en: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk. School of Mathematics and Statistics. University of St. Andrews, Scotland . Consultado el 31 de agosto de 2007.

Papert, S. (1982) *Desafío a la mente. Computadoras y educación*. Buenos Aires, Galápago.

Pea, R. (1985). Beyond amplification: Using the computer to reorganize mental functioning. *Educational Psychologist* 20, 167-182.

Roschelle, J., y Jackiw, N. (2000) Technology design as educational research: interweaving imagination, inquiry and impact. En: Anthony E. Kelly y Richard A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 761-776). NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Schauble, L. (1990) Belief revision in children: The role of prior experience and strategies for generating evidence. *Journal of experimental chills psychology: Human perception and performance*, 11, 443-456.

SEP (2006). *Reforma de la Educación Secundaria. Fundamentación Curricular. Matemáticas.* Dirección General de Desarrollo Curricular, de la Subsecretaría de Educación Básica, Secretaría de Educación Pública, México.

Thomas, M., y Holton, D. (2003) Technology as a tool for teaching undergraduate mathematics. En: Alan Bishop, M.A. Clements, Christine Keitel, Jeremy Kilpatrick y Frederick Leung (Eds.) *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 351-394) Kluwer Academic Publishers.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En: D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). New York: Macmillian.

Zubieta, G., Pluvinage, F., Mejía, H., y Cuevas C. (2005) *Geometría analítica dinámica*. Oxford, México.

ANEXO 1

Actividades diseñadas para la evaluación del ambiente de trabajo del software

Introducción

Para estudiar Geometría Analítica, se requiere tener cerca papel, lápiz e instrumentos de dibujo, ya que es importante contar con varias formas de expresar los conceptos e ideas que se estudian en esta área de las matemáticas.

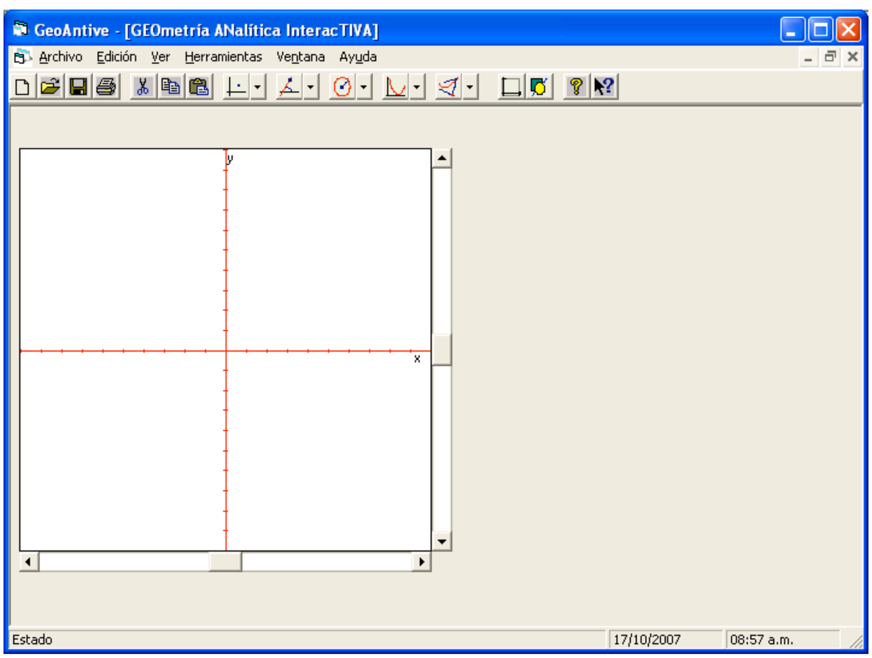
En algunas ocasiones, podemos usar programas de cómputo para que nos ayuden a estudiar la Geometría Analítica. Así, por ejemplo, en lugar de recurrir a los instrumentos de dibujo, podemos utilizar a un paquete de cómputo que nos permita representar gráficamente una idea o concepto. Además de sustituir a los instrumentos de dibujo, algunos paquetes de software nos permiten interactuar directamente con las figuras y ver qué les sucede si cambiamos algunos de sus elementos.

Uno de estos programas es Geodan. En él, el cuaderno se sustituye por la pantalla de la computadora, y los instrumentos de dibujo por el ratón, el teclado y los botones que aparecen en la pantalla.

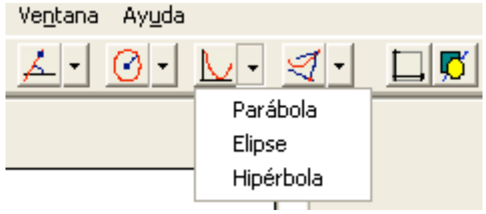
Puesta en marcha del programa

El programa "Geodan" arranca usando el icono que está en el *Escritorio de la PC*. (Si no encuentras el icono, puedes acceder al programa usando el menú de inicio de Windows).

Una vez arrancado el programa aparecerá una pantalla como la siguiente que incluye la barra de botones con los que puedes interactuar, una ventana de graficación y un área limpia que se activará después:



Algunos botones forman parte de un menú desplegable que, al colocar la flecha del ratón sobre alguno de ellos comprobarás cómo se abren distintos menús y cómo cambia el aspecto del botón cuando seleccionas cualquiera de las opciones que aparecen. Por ejemplo, si seleccionas la opción ***Cónicas***; es decir, el botón , la forma del mismo quedará como muestra la siguiente figura:



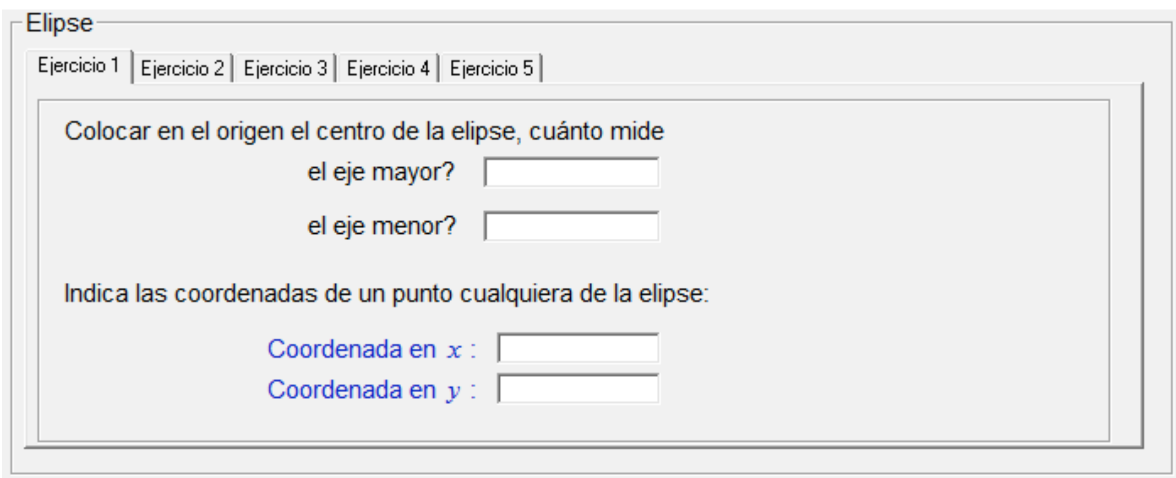
Al elegir, Elipse del menú que se ha desplegado, el aspecto del botón cambia a .

Los botones de la barra de herramientas realizan diferentes acciones; sin embargo, en esta ocasión, solamente vamos a probar la parte correspondiente a la elipse, por lo cual sólo se dispondrá de este botón.

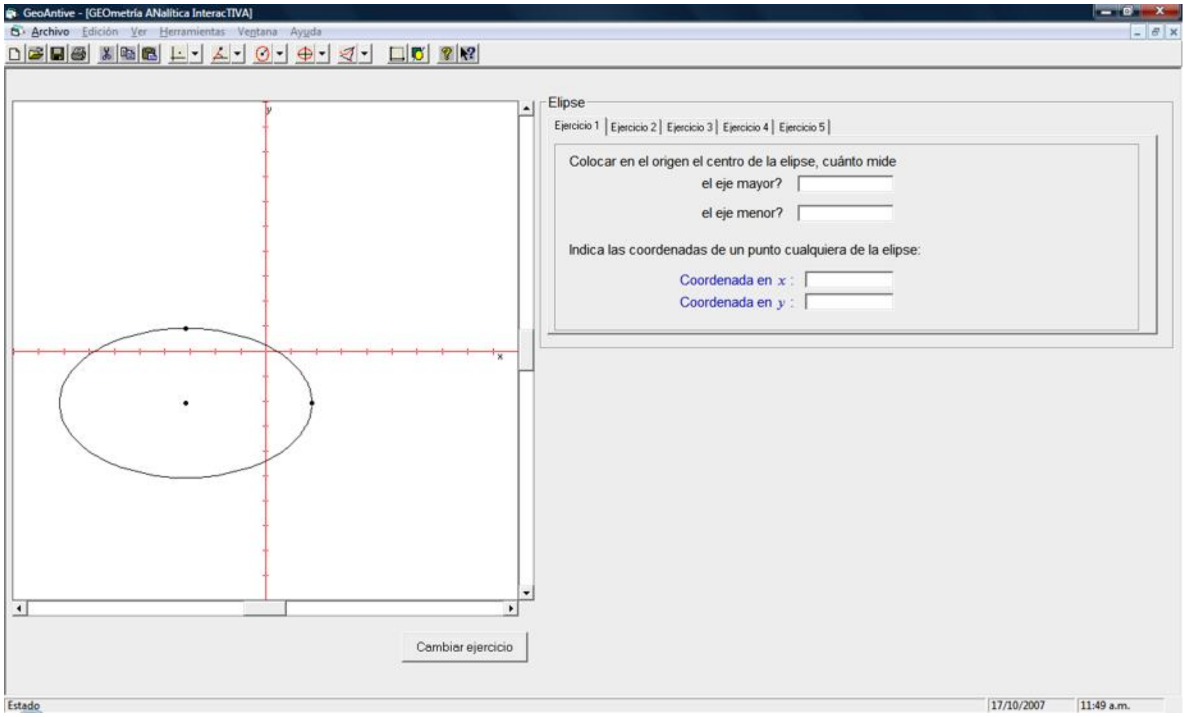
Para salir de l programa, puede utilizar los botones usuales de Windows o la opción ***Salir*** del menú Archivo.

Actividad 1. Interacción dinámica con el centro de la elipse y localización. Parte 1

Para que veas las cosas que puedes hacer con este programa observa la pantalla que se muestra al seleccionar la opción ***Elipse*** del botón de Cónicas. Ésta incluye una carpeta con diferentes ejercicios previamente diseñados.

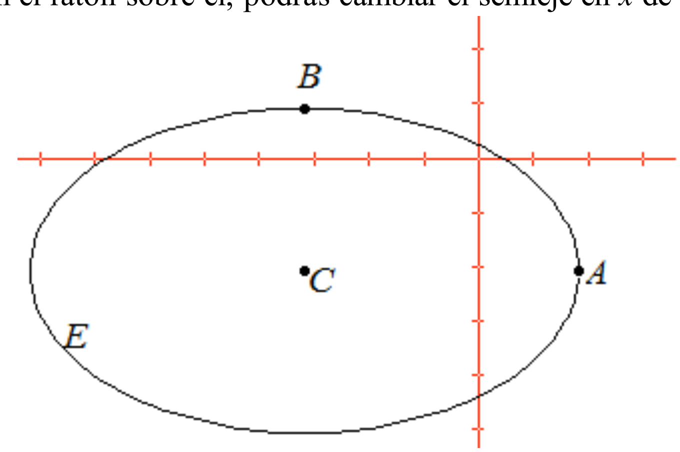


El primero de ellos te ayudará a interactuar con la gráfica de la elipse que se construyó en la ventana que tiene los ejes coordenados.



Observa que cuando pasas el ratón por encima de la elipse, ésta cambia de forma. Hay cuatro diferentes casos que se están detectando, y hemos utilizado algunas letras en la figura de al lado para explicarlos:

1) Si seleccionas el punto A, haciendo clic con el ratón sobre él, podrás cambiar el semieje en x de la elipse, para hacerla más redonda o más achatada.
2) Si seleccionas el punto B, se podrá alargar o encoger verticalmente.
3) Si seleccionas C, el centro de la elipse, podrás desplazarla a otra posición de la pantalla.
4) Si seleccionas cualquier otro punto de la elipse, representado con E en la figura, podrás hacerla más grande o más pequeña, de manera proporcional.



En la ***hoja*** de ***trabajo*** siguiente, escribe los resultados que vas obteniendo al manipular la gráfica de la elipse, usando solo el ejercicio 1 de la carpeta de ejercicios. Utiliza el botón “Cambiar ejercicio”, que se encuentra en la parte inferior de la gráfica para generar otra instancia del ejercicio 1.

HOJA DE TRABAJO NO. 1

Escribe en la tabla los resultados que vas obteniendo al manipular la gráfica de la elipse, usando solo el ejercicio 1 de la carpeta de ejercicios.

Utiliza el botón Cambiar ejercicio, que se encuentra en la parte inferior de la gráfica para generar otra instancia del ejercicio 1.

1) Conjunto de instancias correspondientes al ejercicio 1

Instancia	Semieje mayor	Semieje menor	Punto de la elipse	
			Coordenada en x	Coordenada en y
1				
2				
3				
4				
5				

2) ¿Cómo obtuviste las medidas de los semiejes?, ¿será lo mismo si la elipse no tiene su centro en el origen?

3) ¿Los semiejes de la elipse cambian de tamaño si mueves su centro a otra posición? ______

Escribe un párrafo completo que exprese esta última característica propia de la elipse:

4) ¿Qué pasa con otras curvas? Por ejemplo, ¿cambia el radio de la circunferencia cuando su centro se mueve a otra posición?

5) ¿Cómo obtuviste las coordenadas de un punto de la elipse?

6) ¿Sería igual si no se tuviera el texto de debajo de la gráfica? ¿Si fuera así, cómo lo harías?

7) Escribe lo que consideres que es más significativo de esta actividad, incluyendo los problemas que se pudieron haber presentado durante el desarrollo de la actividad.

Actividad 2. Interacción dinámica con el centro de la elipse y localización. Parte 2

El siguiente grupo de ejercicios (Ejercicio 2 de la carpeta de ejercicios), te permitirá ser un experto en la determinación de los semiejes de la elipse y la localización de sus puntos en el plano. También tendrás la oportunidad de interactuar con la gráfica de la elipse.

Observa que debajo de la ventana de gráficas ya no cuentas con las coordenadas de la posición del ratón; pero en su lugar, tienes la ecuación canónica de la elipse.

HOJA DE TRABAJO NO. 2

1) ¿Qué cambios puedes observar en la pantalla de este nuevo conjunto de ejercicios, con respecto al caso anterior?

2) ¿Qué cambia en la pantalla, cuando se presiona el botón ***Cambiar ejercicio*** de debajo de la gráfica?

Utiliza el botón ***Cambiar ejercicio***, que se encuentra en la parte inferior de la gráfica para generar cinco instancias del ejercicio 2 y regístralas en la siguiente tabla.

Conjunto de instancias correspondientes al ejercicio 2

Instancia	$P(x, y)$	Ecuación	Semieje mayor	Semieje menor	Punto de la elipse	
					Coordenada en x	Coordenada en y
1						
2						
3						
4						
5						

3) ¿Ahora cómo obtuviste las medidas de los semiejes? En particular, ¿Tuviste que hacer algunas operaciones, cuáles?

4) ¿Busca relaciones entre los números que aparecen en la ecuación y los valores de los semiejes? Descríbelas.

5) Usa una calculadora (puede ser la calculadora de Windows) para comprobar los resultados de las dos últimas columnas. Si el punto de la elipse es correcto, cuando sustituyes los valores de x y y en la ecuación el resultado te debe dar igual a uno. Califica tú mismo tus resultados.

6) Nuevamente escribe lo que consideres que es más significativo de esta actividad, incluyendo los problemas que se pudieron haber presentado durante el desarrollo de la actividad.

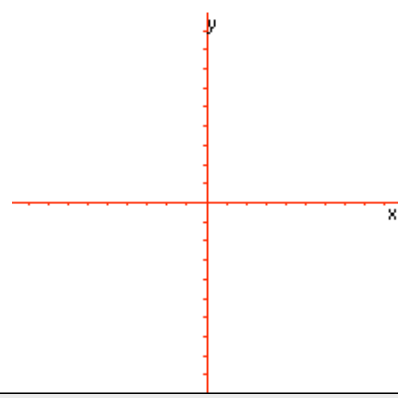
Actividad 3. Determinación de un foco de la elipse

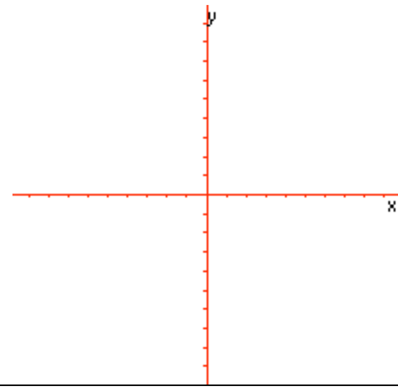
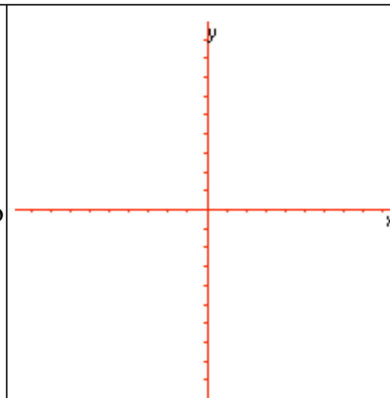
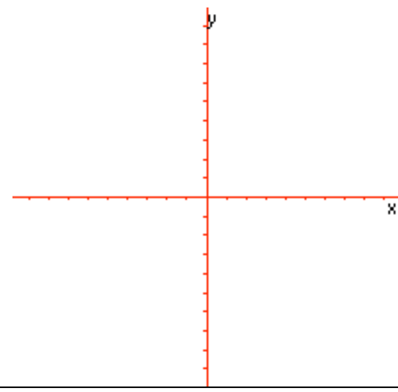
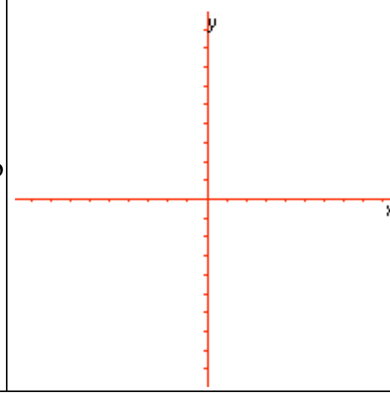
En la siguiente hoja de trabajo, utiliza el Ejercicio 3 de la carpeta de ejercicios del software “Geodan”, en el que se pide localizar un foco de la elipse en diferentes casos. Así mismo, podrás interactuar con la gráfica modificando sus semiejes y centro de la elipse y analizando diferentes situaciones que se presentan relacionadas con los focos de la elipse.

Observa que debajo de la ventana de gráficas se especifican nuevamente las coordenadas de la posición del ratón.

HOJA DE TRABAJO NO. 3

1) Recuerda que hay varias formas de manipular la gráfica de la elipse que se presenta: Del centro, de los puntos indicados sobre la curva y desde cualquier otro punto de la curva. Cada una de ellas produce efectos diferentes sobre la elipse. Realiza diferentes desplazamientos de la curva y registra tus resultados en la tabla siguiente. Reproduce la gráfica de la pantalla en el sistema que se muestra.

Elipse Original	

1) Desplazamiento del centro de la elipse		2) Desplazamiento de un semieje	
3) Desplazamiento del otro semieje		4) Desplazamiento de cualquier punto adicional de la elipse	

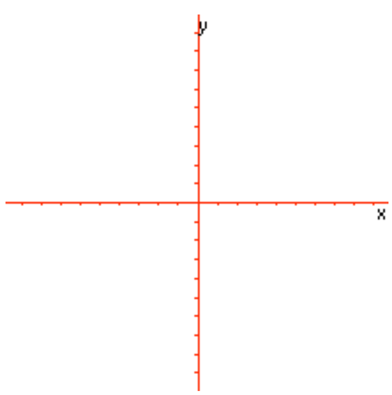
2) Manipula una elipse usando diferentes formas, de tal manera que puedas hacer coincidir el foco con el centro de la misma. ¿Cuáles son las coordenadas del Foco?, ¿cuáles las del otro foco?

3) ¿Cuánto mide el semieje mayor de la elipse del ejercicio 2? ¿cuánto el semieje menor?

4) ¿Esta elipse es una circunferencia. Si es así, ¿cuál es su radio?

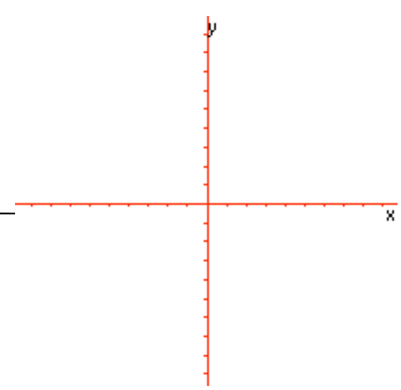
5) Si el semieje mayor está en la dirección del eje *y*, ¿cómo es la coordenada en *x* de los focos?

6) Si el semieje mayor está en la dirección del eje *y*, y el centro de la elipse está en el eje *x*, ¿cómo es la coordenada en *x* de los focos?, ¿cómo es la coordenada en *y* de los focos?



7) Obtén una elipse cuyo semieje mayor sea el doble del semieje menor. Reprodúcela aquí.

8) Obtén una elipse con centro



en el origen del sistema de coordenadas; semieje en x igual 3, semieje en y, igual a 4. Reprodúcela aquí.

9) Manipula la elipse anterior a través de un punto cualquiera de su perímetro (distinto a los marcados), y agrándala para que su semieje en x sea igual a 5, ¿Cuánto vale ahora su semieje en y? ¿Cuánto aumentó el valor del semieje en y? Si aumentas el semieje en x una cantidad w, ¿el semieje en y aumenta lo mismo? Explica tu respuesta y menciona bajo qué condiciones sucede esto.

10) Escribe lo que consideres que es más significativo de esta actividad, incluyendo los problemas que se pudieron haber presentado durante su desarrollo.

Gracias por tu apoyo en la evaluación del software

ANEXO 2

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

COORDINACIÓN GENERAL DEL BACHILLERATO

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS IV

CUARTO SEMESTRE

UBICACIÓN DE LA ASIGNATURA:
TRONCO COMÚN

HORAS SEMANALES	**4**
HORAS TOTALES	64
CLAVE	**4B**

Morelia, Mich., Noviembre de 2001

MATEMÁTICAS IV

INTRODUCCIÓN

El curso de matemáticas IV está enfocado al estudio de la geometría analítica. Mediante la discusión de ecuaciones algebraicas susceptibles de ser graficadas en un plano cartesiano del programa, por lo que es factible considerar los puntos de congruencia entre álgebra, trigonometría y geometría euclidiana.

PROPÓSITOS GENERALES

Los propósitos generales de está asignatura son que el alumno:

- Comprenda el concepto de lugar geométrico.
- Interprete geométricamente diversas ecuaciones algebraicas.
- Reconozca las transformaciones asociadas con la traslación y rotación de ejes,
- Identifique las aportaciones de los matemáticos, en diferentes momentos de la historia, a la geometría y a la discusión de las ecuaciones.

COMPETENCIAS

Al término de este curso, el alumno estará capacitado para:

- Plantear y resolver problemas relacionados con circunferencias, parábolas, elipses e hipérbolas.
- Graficar en el plano cartesiano todo genero de ecuaciones.
- Plantear ecuaciones de todo género.
- Distinguir las diferentes curvas en el plano cartesiano, a partir de la discusión de la ecuación general de segundo grado.

UBICACIÓN CURRICULAR

La asignatura de Matemáticas IV está ubicada en el cuarto semestre del plan de estudios. Pertenece al núcleo de formación básica y al campo de conocimiento matemático. Está vinculada con Matemáticas III y mantiene relación con las materias de Matemáticas del plan de estudios y con Física y Química.

LINEAMIENTOS DIDÁCTICOS

Los lineamientos didácticos que se sugieren son los siguientes:

- Desarrollar el curso de modo que se tomen en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes con el fin de generar un aprendizaje significativo.
- Vincular los conceptos teóricos con experiencias cotidianas y plantear problemas recreativos, con el objeto de eliminar el perjuicio de que las matemáticas son áridas y difíciles.
- Incluir comentarios históricos dando preferencia a lo anecdótico sobre lo historiográfico. No será imprescindible la evaluación de estos conocimientos.
- Realizar números ejercicios, bajo la supervisión del profesor, a fin de desarrollar la habilidad de interpretar la discusión algebraica en gráficas sobre el plano cartesiano.

EVALUACIÓN

La evaluación del aprendizaje se define como el proceso por el cual se analiza y se valora el logro de las competencias planteadas en esta asignatura. De ahí que las estrategias de evaluación se aplicaran desde el inicio hasta el final del curso, de tal forma que sus resultados permitan, por un lado retroalimentar a profesores y alumnos acerca de las deficiencias de la enseñanza y de los progresos del aprendizaje y por otro, asignar una calificación al alumno que acredite o no el cumplimiento de las competencias establecidas para el curso.

En este sentido, se recomienda llevar a cabo tres tipos de evaluación:

- La diagnostica.
- La formativa.
- La sumaria.

La evaluación diagnóstica se aplica al inicio del curso y tiene por objeto determinar si los alumnos poseen los conocimientos necesarios para el aprendizaje de los contenidos programáticos. Es importante destacar que los resultados de este tipo de evaluación no impactan de ninguna manera la calificación que se otorgue al alumno, al final del proceso.

La evaluación formativa se lleva a cabo durante el curso y tiene como propósito detectar deficiencias en el aprendizaje y en la enseñanza, valorando el progreso de los alumnos. Para tal efecto, se sugiere la aplicación de un examen parcial al finalizar cada unidad. Las calificaciones parciales se otorgarán considerando los resultados de los exámenes, así como la valoración que se haga de las siguientes actividades:

- Presentación de reportes de investigaciones bibliográficas.
- Presentación de ejercicios y problemas resueltos.
- Participación en exposiciones.

La evaluación sumaria tiene como finalidad determinar el grado de dominio de las competencias, al término del curso, por lo que se recomienda, en este caso, la aplicación de un examen final.

La calificación del curso se determinará con base en el promedio de los resultados de las evaluaciones parciales y del examen final.

MATEMÁTICAS IV
(GEOMETRÍA ANALÍTICA)

DESARROLLO DE LOS BLOQUES.

UNIDAD I. LA CIRCUNFERENCIA

OBJETIVO: En este bloque se buscara que el alumno realice el estudio de la geometría analítica, por medio de la deducción de las ecuaciones de la circunferencia y sus aplicaciones a la solución de problemas de corte euclidiano y de lugares geométricos.

HORAS ESTIMADAS PARA EL DESARROLLO DE LA UNIDAD.	**12 HORAS.**

TEMAS	**ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE**
1. LA CIRCUNFERENCIA. 1.1. Definición. 1.2. Condiciones necesarias y suficientes para determinar una circunferencia. (centro y radio). 1.3. Ecuación de una circunferencia. 1.3.1. Centro en el origen de coordenadas. 1.3.2. Centro en un punto cualquiera. 1.4. Ecuación general. 1.4.1. Discusión. Determinar los dos elementos. 1.5. Ejercicios. 1.5.1. Encontrar la ecuación de una circunferencia, conociendo los elementos de esta. 1.5.2. Trazar la gráfica, dada su ecuación.	▪ Consulta bibliográfica del tema. ▪ Elaboración de un glosario de términos. ▪ Resolución de ejercicios y problemas tipo resueltos por el profesor en clase, por el alumno en clase y casa. ▪ Revisión continúa del cuaderno de trabajo y glosario de términos.

MATEMÁTICAS IV
(GEOMETRÍA ANALÍTICA)

UNIDAD II. LA PARÁBOLA

OBJETIVO:
En este bloque se buscara introducir al su estudio de la geometría analítica, por medio de la deducción de las ecuaciones de la parábola y sus aplicaciones a la solución de problemas de corte euclidiano y de lugares geométricos.

HORAS ESTIMADAS PARA EL DESARROLLO DE LA UNIDAD. **12 HORAS.**

TEMAS	ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE
2. LA PARÁBOLA. 2.1. Definición. 2.2. Ecuaciones de la parábola. 2.2.1. Vértice en el origen. 2.2.2. Vértice en cualquier punto del plano. (con ejes horizontales ó verticales). 2.3. Ecuación general. 2.3.1. Discusión. Determinar sus elementos. 2.4. Ejercicios. 2.4.1. Encontrar la ecuación de la parábola, conocidos los elementos de ésta. 2.4.2. Trazar la gráfica, dada su ecuación.	▪ Consulta bibliográfica del tema. ▪ Elaboración de un glosario de términos. ▪ Resolución de ejercicios y problemas tipo resueltos por el profesor en clase, por el alumno en clase y casa. ▪ Revisión continúa del cuaderno de trabajo y glosario de términos.

MATEMÁTICAS IV
(GEOMETRÍA ANALÍTICA)

UNIDAD III. LA ELIPSE.

OBJETIVO:

En este bloque se buscara que el alumno afirme su estudio de la geometría analítica, por medio de la deducción de las ecuaciones de la elipse y sus aplicaciones a la solución de problemas de corte euclidiano y de lugares geométricos.

HORAS ESTIMADAS PARA EL DESARROLLO DE LA UNIDAD. **12 HORAS.**

TEMAS	**ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE**
3. LA ELIPSE. 3.1. Definición. 3.2. Ecuación de la elipse. 3.2.1. Centro en el origen. 3.2.2. Centro en un punto cualquiera del plano (con ejes horizontales ó verticales). 3.3. Ecuación general. 3.3.1. Discusión. Determinar sus elementos. 3.4. Ejercicios. 3.4.1. Encontrar la ecuación de la elipse, conocidos todos los elementos de está. 3.4.2. Trazar la gráfica, dada su ecuación.	▪ Consulta bibliográfica del tema. ▪ Elaboración de glosario de términos. ▪ Resolución de ejercicios y problemas tipo resueltos por el profesor en clase, por el alumno en clase y casa. ▪ Revisión continúa del cuaderno de trabajo y glosario de términos.

MATEMÁTICAS IV
(GEOMETRÍA ANALÍTICA)

UNIDAD IV. LA HIPÉRBOLA.

OBJETIVO:
En este bloque se buscara que el alumno ejercite su estudio de la geometría analítica, por medio de la deducción de las ecuaciones de la hipérbola y sus aplicaciones a la solución de problemas de corte euclidiano y de lugares geométricos.

HORAS ESTIMADAS PARA EL DESARROLLO DE LA UNIDAD. **12 HORAS.**

TEMAS	**ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE**
4. LA HIPÉRBOLA. 4.1. Definición. 4.2. Ecuación de la hipérbola. 4.2.1. Centro en el origen. 4.2.2. Centro en un punto cualquiera del plano (con ejes horizontales ó verticales). 4.3. Ecuación general. 4.3.1. Discusión. Determinar sus elementos. 4.4. Ejercicios. 4.4.1. Encontrar la ecuación de la hipérbola, conocidos todos los elementos de está. 4.4.2. Trazar la gráfica, dada su ecuación.	▪ Consulta bibliográfica del tema. ▪ Elaboración de glosario de términos. ▪ Resolución de ejercicios y problemas tipo resueltos por el profesor en clase, por el alumno en clase y casa sobre. ▪ Revisión continúa del cuaderno de trabajo y glosario de términos.

MATEMÁTICAS IV
(GEOMETRÍA ANALÍTICA)

UNIDAD V. GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN Y LUGARES GEOMÉTRICOS.

OBJETIVO: Se buscará que el alumno complemente su estudio en el trazo de una gráfica de una ecuación. Así como encontrar la ecuación de un lugar geométrico e introducirlos a la traslación y rotación de ejes.

HORAS ESTIMADAS PARA EL DESARROLLO DE LA UNIDAD.	**16 HORAS.**

TEMAS	**ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE**
5. GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN Y LUGARES GEOMÉTRICOS. 5.1. Gráfica de una ecuación mediante tabulación. 5.2. Gráfica de una ecuación a través de: 5.2.1. Intersección de los ejes. 5.2.2. Simetría. 5.2.3. Extensión. 5.2.4. Asíntotas. 5.3. Ecuaciones de lugares geométricos. 5.4. Ecuación general de segundo grado. 5.4.1. Traslación de los ejes de segundo grado. 5.4.2. Rotación de los ejes coordenados.	▪ Consulta bibliográfica del tema. ▪ Elaboración de glosario de términos. ▪ Resolución de ejercicios y problemas tipo resueltos por el profesor en clase, por el alumno en clase y casa. ▪ Revisión continúa del cuaderno de trabajo y glosario de términos.

MATEMÁTICAS IV
(GEOMETRÍA ANALÍTICA)

BIBLIOGRAFÍA

- Guerra Tejada Manuel. “GEOMETRIA ANALITICA”. Editorial Mc Graw Hill, México, 1995.
- Guzmán Herrera Abelardo. “CIEN PROBLEMAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA”. Editorial Publicaciones Cultural, México.
- Kindle Joseph. “GEOMETRÍA ANALÍTICA”. Editorial Mc Graw Hill, México, 1995.
- Lehmann Charles. “GEOMETRÍA ANALÍTICA”. Editorial Limusa, México, 1982.
- Ortiz Campos Francisco José. “MATEMATICAS 4 GEOMETRIA ANALITICA”. Editorial Publicaciones Cultural, México, 1996.
- Steen Frederick H. y Ballou Donald H. “GEOMETRÍA ANALÍTICA”. Editorial Publicaciones Cultural, México, 1993.
- De la Borbolla Francisco J. “GEOMETRÍA ANALÍTICA”. Editorial Esfinge, México, 1996.
- Fuller Gordon. “GEOMETRÍA ANALÍTICA”. Editorial CECSA, México, 1992.
- Riddle Douglas F. “GEOMETRÍA ANALÍTICA”. Editorial Thomson, México, 1996.
- Fleming Walter y Varberg dale. “ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA”. Editorial Prentice Hall Hispanoamericana, México, 1992.