



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
"LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ"

TESIS

"MODELACIÓN DE TRANSPORTE HIDRÁULICO DE
PARTÍCULAS SÓLIDAS A TRAVÉS DE LÍNEAS DE TUBERÍA"

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA FÍSICA

QUE PRESENTA:

MIGUEL ÁNGEL CÓRDOVA FAJARDO

ASESOR:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)
FRANCISCO JAVIER DOMÍNGUEZ MOTA

MORELIA, MICHOACÁN

FEBRERO 2015



ÍNDICE

RESUMEN	III
ABSTRACT	III
Descripción del problema.	IV
Capítulo 1 Antecedentes.....	1
1.1 El Hierro en la Naturaleza.....	1
1.2 Flujo con cama estacionaria.....	7
1.3 Flujo con cama deslizante.	8
1.4 Suspensión mantenida en turbulencia.....	8
1.5 Flujo simétrico en alta velocidad.....	9
1.6 Fuerza de arrastre.	9
1.7 Velocidades de transición.	12
1.7.1 Velocidades transicionales V_1 y V_2	13
1.7.2 Velocidad transicional V_3 o velocidad para mínimo gradiente de presión.	13
1.7.3 Velocidad entre el flujo heterogéneo y pseudohomogéneo, V_4	15
Capítulo 2 Marco teórico.	16
2.1 Volumen promedio	18
2.2 Relaciones constitutivas.....	23
2.3 Modelo de mezcla.....	26
2.4 Ecuación de continuidad para la mezcla.....	26
2.5 Ecuación de momento para la mezcla.	27
2.6 Ecuación de continuidad para una fase.	28
2.7 Velocidad de difusión.....	28
2.8 Aproximaciones prácticas.	30
2.8.1 Viscosidad de la fase dispersa.....	30
2.8.2 Transferencia de momento interfacial.....	31
2.8.3 Presión del sólido	31
2.9 Algoritmos del resolvidor implícito dependiente del tiempo	32
Capítulo 3 Resultados.....	35
3.1 Características generales.....	35

3.2 Cálculos con las ecuaciones experimentales.....	36
3.3 Modelación.....	37
3.3.1 Pre-pocesado.....	38
3.3.2 Procesado.....	46
3.3.3 Post-procesado.....	49
3.3.4 Densidad de la mezcla.....	50
3.3.5 Volumen fraccional de la fase dispersa.....	56
3.3.6 Velocidad de la mezcla.....	62
Conclusiones.....	69
Apéndices.....	72
Apéndice A. Teorema de Transporte de Reynolds.....	72
Apéndice B. Volumen promedio.....	77
Volumen promedio de la operación Gradiente.....	79
Volumen promedio de la derivada temporal.....	83
Bibliografía.....	86

RESUMEN

El flujo multifase se presenta en una gran cantidad de procesos industriales, de ahí la importancia por su estudio. El presente trabajo se enfoca en establecer un modelo para el transporte hidráulico de partículas sólidas a través de líneas de tubería en la área de minería, en el proceso de envío desde la mina hasta la planta siderúrgica, para lo cual se establecen las ecuaciones que rigen el fenómeno las cuales se reducirán a las ecuaciones de Navier – Stokes que se utilizan para modelar un flujo de una sola fase por medio del modelo de mezcla. Con el apoyo del software COMSOL Ver. 4.4, se construirá la geometría, el mallado y la compilación de las ecuaciones, estudiaremos los parámetros de la velocidad y densidad de la mezcla así como el volumen fraccional de la fase dispersa con la intención de detectar zonas críticas o apariciones de camas deslizantes que son potenciales situaciones de bloqueo de la tubería acorde a los cálculos experimentales y observaciones de operación reportados.

Palabras clave: flujo multifase, Dinámica de fluido computacional, modelo de mezcla.

ABSTRACT

Multiphase flow describes a wide range of industrial processes, due to this fact, it is of the greatest importance to study it. This thesis focuses on the development of a model to describe of hydraulic transport of solid particles thru pipelines in mining and extraction activities pumping the material from the extraction site to the processing plant. The Averaged Navier-Stokes equation are used in order to describe this phenomenon as a one-phase fluid mixture model. The pipeline geometry, the gridding and the numerical solution are calculated with the aid of Comsol 4.4. Fluid velocity, mixture density and fractional volume of the discrete phase are considered to avoid the growth of moving beds which could cause pipeline blocking; finally, a comparison of the calculated values and the experimental values reported in literature is included.

Keywords: Multiphase flow, Computational fluid dynamics, mixer model.

Descripción del problema.

El problema que se estudiará en esta tesis será el de establecer un modelo para un sistema de tubería de una longitud de 30 km, que será alimentado con una mezcla compuesta por agua y partículas sólidas (mineral de hierro) y que permitirá el transporte de material a través de la tubería de manera eficiente. La selección de éste problema se hizo en base a la importancia económica del mismo en el ámbito local de nuestro estado. Con respecto a la producción de hierro en 2012, considerando pellets y extracción, sumó 22.9 millones de toneladas, 11.6% superior a 2011. La extracción representó el 65% del volumen obtenido, el 35% restante es de pellets. Los principales entidades federativas productoras de hierro durante 2012 fueron en orden de importancia **Michoacán (27.2%)**, Coahuila (21.3%), Colima (19%), Jalisco (9.23%), Sonora (8.8%), Durango (5.2%) y Chihuahua (4.5%) que en conjunto cubren el 95.1% del total de la producción nacional de hierro [1].

El fenómeno que nos interesa está descrito por varios parámetros, observemos, por ejemplo, que al tener variaciones de la densidad de la mezcla en la alimentación del sistema [2], si no se realizan los ajustes pertinentes de velocidad del equipo de bombeo en el momento, para el caso de un aumento de densidad, se podría provocar que la velocidad del sistema se encuentre por debajo de una velocidad crítica¹, presentándose la acumulación de material y, en consecuencia, el posible taponamiento de la línea de tubería. En caso de una disminución de la densidad de entrada, la velocidad del sistema se encontrará por encima de la velocidad crítica, por lo que no existe riesgo de acumulación de material debido a un incremento en la turbulencia del sistema, provocando un desgaste prematuro del sistema de tubería y desperdicio de energía del sistema de bombeo.

Para la obtención del modelo, utilizaremos algunos de los parámetros establecidos del sistema, principalmente el diámetro, la longitud y la rugosidad de la tubería, la densidad de las partículas sólidas y la fase líquida.

¹ Velocidad por debajo de la cual las partículas sólidas suspendidas en la mezcla, comienzan a precipitarse en el fondo de tubo y forman un cama.

Es de destacar que se han desarrollado algoritmos para resolver problemas prácticos en los que se relacionan flujos de una sola fase, gobernados por la ecuación de Navier – Stokes; los avances en la capacidad de procesar un gran número de información, permiten resolver problemas complejos con relativa rapidez, sin embargo, el aumento de la complejidad de un problema, se refleja con un aumento en el costo computacional para el cálculo de su solución, de tal manera que es necesario limitar el modelo a ciertas consideraciones o condiciones.

El objetivo general del presente trabajo es realizar un modelo del sistema de transporte hidráulico de partículas sólidas por medio de tuberías, identificando el efecto de las variables y parámetros que influyen en el funcionamiento, relacionando la densidad de entrada con la velocidad crítica, empleando para el efecto los parámetros fijos del sistema.

Los objetivos particulares son los siguientes

- ✓ Obtener un modelo del sistema de transporte hidráulico.
- ✓ Identificar los valores de parámetros del sistema para modelar con condiciones de velocidad por debajo y por arriba de la velocidad crítica.
- ✓ Validar el modelo bajo restricciones.

El presente estudio nos permitirá relacionar la densidad de entrada de la hidromezcla con la velocidad crítica, tomando en cuenta las características del sistema de tubería (longitud, diámetro, accesorios, material del que está hecho) con la finalidad de controlar la velocidad del sistema de bombeo y con ello evitar que se provoquen fallas en el sistema por taponamiento o fuga de hidromezcla al medio ambiente por ruptura de tubería.

El monitoreo del parámetro de la densidad de la hidromezcla que es alimentada al sistema, evitará gasto de energía y desgaste en el sistema de tubería. Se espera que la modelación nos permita detectar zonas críticas, de mayor desgaste o posible acumulación de material, aumentar la estabilidad y confiabilidad del sistema, evitando paros no contemplados del sistema.

Capítulo 1 Antecedentes.

1.1 El Hierro en la Naturaleza

El hierro es el metal pesado muy abundante en la superficie de la tierra. Debido a la facilidad con la cual reacciona, es raro encontrarlo en la forma de hierro puro. Debido a la facilidad de reaccionar con el oxígeno, el hierro se encuentra en la naturaleza en forma de minerales, compuestos principalmente por los óxidos.

De estos minerales, los más usados por la industrial para la extracción de este metal son:

- La hematita es un óxido (Fe_2O_3) el cual, cuando es puro, contiene el 70% de hierro, sin embargo, varía generalmente entre 40 y el 60%.
- La limonita ($\text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot \text{H}_2\text{O}$) es otro óxido, pero contiene cantidades variables de agua y se deriva de la alteración de otros minerales ferrosos; su contenido de metal varía a partir de un depósito a otro pero no sobrepasa generalmente el 50%.
- La magnetita es un óxido (Fe_3O_4) y es el mineral que contiene la mayor cantidad de hierro, en su forma pura puede contener 72.4%.
- La siderita es un carbonato (FeCO_3) que en su estado puro contiene el 48.3%, de hierro, pero es raramente usada en la producción del hierro y del acero.

Para extraer el hierro metálico de estos minerales, es necesario separar el oxígeno, que se encuentra combinado con el hierro, que forma los óxidos, así como la parte principal de las impurezas que están presentes en el mineral.

Con respecto a la extracción en Michoacán, en el Municipio de Lázaro Cárdenas los minerales observados que constituyen la mineralización son: magnetita, hematita, especularita, pirita (FeS_2) y calcopirita (CuFeS_2). El principal mineral de mena es la magnetita llegando a constituir un porcentaje alto dentro de los minerales de mena. La hematita es el segundo mineral en orden de importancia. La especularita sólo se presenta en fracturas muy pequeñas dentro de la magnetita y a veces dentro de la roca encajonante. La pirita se encuentra en pequeños porcentajes diseminada dentro de la mena; en ocasiones se presenta, en cubos bien desarrollados y en forma irregular; la calcopirita se encuentra

asociada a la pirita y se manifiesta en pequeñas vetillas dentro o cerca de ella. La ley promedio es de 61.03% Fe, 8.67% SiO₂, 0.18% P y 0.04% S.

Se entiende por ley al contenido de un elemento valioso en una unidad de peso de la roca. La ley mineral es el promedio de peso equivalente de la sustancia mineral o del compuesto químico, referido a una unidad de peso o de medidas, es decir es una medida cuantitativa de lo que existe aprovechable en la roca al momento de extraerlo, es decir un porcentaje de lo que realmente va a dejar ganancia o rentabilidad en su extracción.

Alternativamente ley es el parámetro que expresa la calidad de un mineral, un concentrado, o cualquier producto que contenga especies metálicas. Normalmente la ley se expresa en porcentajes cuando se trata de metales básicos Onzas por tonelada corta (oz/TC) u onzas por tonelada métrica (oz/TM) o gr/TM cuando se trata de oro, plata u otro metal precioso. Es importante recordar que la ley expresa la cantidad de un metal (%Cu, oz Ag/tc) [3].

Sólo en raras ocasiones un mineral puede utilizarse o comercializarse tal y como sale de la explotación minera. Lo normal es que el mineral de mina sufra un proceso con el objeto de:

- Enriquecerlo, aumentando su contenido en el metal objeto de la explotación.
- Clasificarlo por tamaños, de acuerdo con las exigencias y necesidades del proceso o mercado.
- Conseguir una separación diferencial de distintos productos, cuando el tipo de minerales de partida y las condiciones comerciales lo aconsejen.

Los procesos de tratamiento a que puede someterse un mineral son muy variados, pasando desde los más simples, como son la trituración y clasificación, a los más complicados como flotación o separación magnética.

En el Municipio de Aquila, a 5 km en línea recta al norte del poblado del mismo nombre se ha detectado mineralización de fierro en el Cerro de los Tenamxtles, la cual es catalogada como pirometasomática y ocurre en el contacto de un intrusivo diorítico con calizas del Cretácico. Los cuerpos minerales tienen formas más o menos tabulares. La mena está constituida por magnetita y hematita. Un

muestreo superficial arrojó 67 % de fierro con 0.2 % de azufre, sin embargo, se cree que a profundidad el fierro pudiera bajar hasta 59 % y el azufre estar entre 1 y 3 %.

En la mina de Aquila el yacimiento consta de 7 cuerpos reconocidos; el más extenso, de mayores reservas y en explotación actualmente, es el denominado Cuerpo Principal, y presenta una porción superior de 10 a 20 m de espesor de composición predominantemente hematítica, encajonada en el contacto entre granito y caliza. Una muestra en su análisis minerográfico, reportó hematita con 60 % Fe, limonita con 20 % y pirita con 20 %. La porción más profunda se hace paulatinamente más magnetítica. La mineralogía de esta última está constituida principalmente por magnetita en 70 % y presencia moderada de cuarzo. La zona hematítica superior presenta contenidos de 60 – 65 % de fierro total, mientras que en la zona magnetítica inferior estos valores oscilan entre 50 – 55 %. La presencia de azufre y sílice no sobrepasa el 3 – 4 %. Las muestras de concentrados obtenidos presentaron leyes promedio de: Fe = 69.13 %, P = 0.01 %, SiO₂ = 2.3 %, constituidos en mayor proporción por magnetita (Fe₂O₃).

En la figura 1.1 describe las etapas que son parte del procesamiento del mineral para su transformación en materia prima, a continuación se describen las que son de nuestro interés.

Extracción

La explotación del mineral se realiza por el método de minado a cielo abierto. Para desprender el mineral es necesario primeramente barrenar en los puntos seleccionados para colocar los explosivos y posteriormente realizar el tumbe por medio de voladuras, el rezagado se efectúa por medio de trascabos, el llenado de camiones se hace por medio de palas mecánicas, los camiones transportan el mineral a la planta de trituración.

Trituración

El mineral de hierro después de ser extraído entra a la trituradora primaria en trozos con un tamaño aproximadamente de 40 pulgadas y sale a un tamaño máximo de 8 pulgadas, en esta etapa se realiza una preconcentración y la ley del producto obtenido se encuentra en un rango de 20 a 55 % de fierro.

En la trituración secundaria el mineral se reduce a un tamaño máximo de 2.5 pulgadas y se lleva a cabo una homogenización de la que se obtiene un producto con una ley que oscila entre 35 y 40 % de fierro. La trituración terciaria da como resultado un tamaño máximo de $\frac{3}{4}$ de pulgada y una ley de mineral de 36 a 40% de fierro, el cual se transporta por medio de bandas al siguiente proceso.

Concentración

El producto de la trituración es transportado a la planta concentradora, en donde el material estéril es eliminado para incrementar la ley hasta un 66% de fierro. Este proceso se realiza por vía húmeda mediante la adición de agua, obteniéndose al final del proceso el concentrado en forma de lodos. En esta etapa se realiza una molienda a 16 mallas con molino de barras y después ocurre una separación magnética primaria para separar estériles; posteriormente se realiza la segunda molienda a 325 mallas con molino de bolas y después una separación secundaria para continuar con la eliminación de estériles y hacer un lavado por medio de tanques agitadores para homogenizar la pulpa de mineral de fierro y bombearla a través de un ferroaducto hasta la planta peletizadora dentro del complejo siderúrgico. Después de llevar a cabo el proceso de molienda el desecho es enviado a la presa de jales. [1]

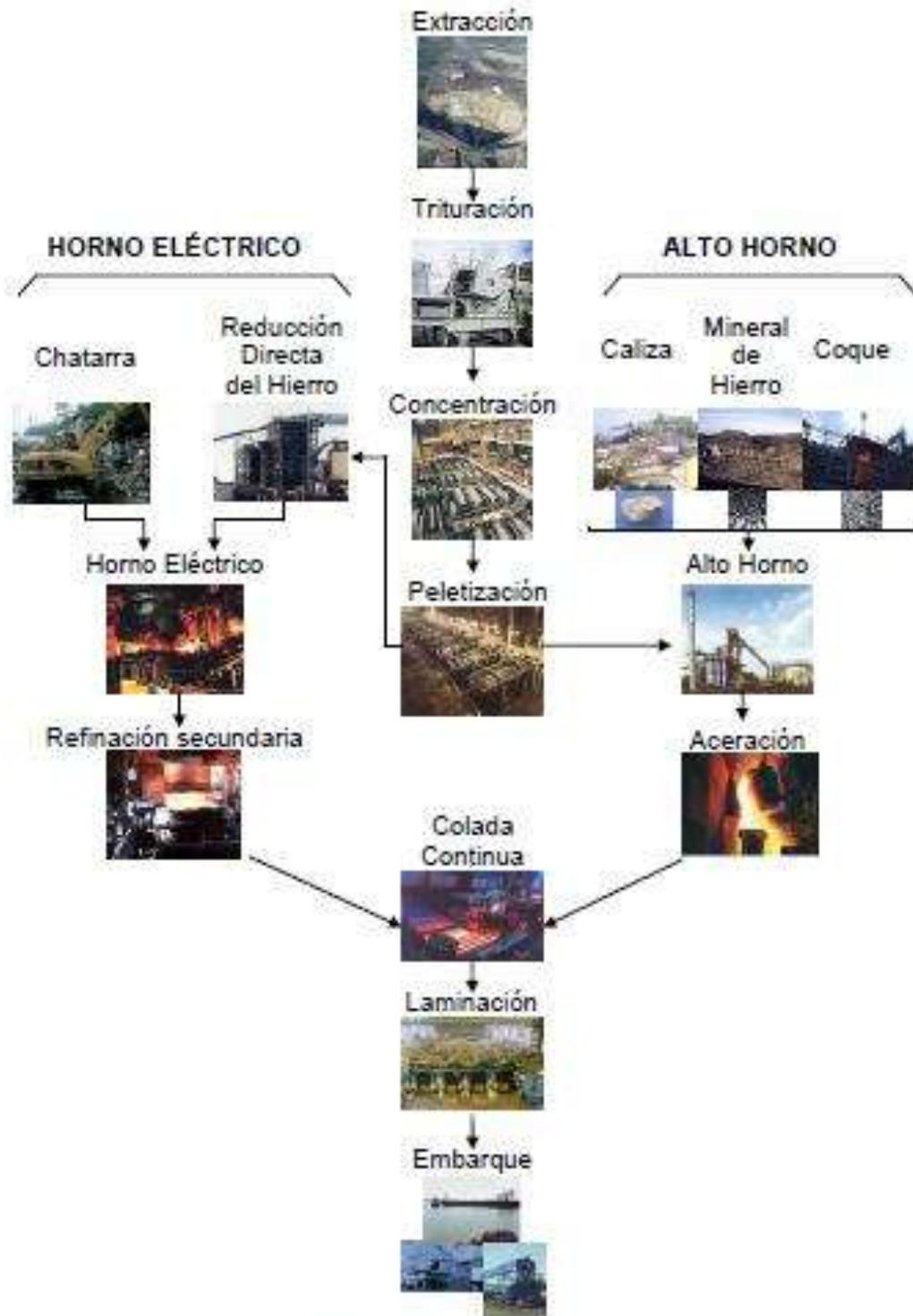


Figura 1.1 Proceso de extracción y refinamiento del mineral para la obtención de acero.

Ante la importancia económica de la actividad minera, dos escuelas establecieron las bases del moderno transporte hidráulico, SOGREAH en Francia y la British Hydro-mechanic Research Association del Reino Unido. Empezando en 1952, Durand y Condolios del SOGREAH publicaron estudios de flujo de arena y grava en tubería de 900 mm (35.5 pulgadas) de diámetro.

Basados en partículas de gravedad específica de 2.65, ellos propusieron dividir los flujos de lodo en tubería horizontal dentro de 4 categorías basadas en el tamaño promedio de la partícula como los siguientes:

- Suspensiones homogéneas para partículas menores de 40 μm (malla 325).
- Suspensiones mantenidas por turbulencia para partículas de 40 μm (malla 325) hasta 0.15 mm (malla 100).
- Suspensión con saltación para partículas entre 0.15 mm (malla 100) y 1.5 mm (malla 11).
- Saltación para partículas mayores a 1.5 mm (malla 11).

Esta clasificación inicial fue refinada los siguientes 18 años por Newitt (1955), Ellis y Round (1963), Thomas (1964), Shen (1970), y Wicks (1971) [4] [5]. Debido a la interrelación entre el tamaño de las partículas y la velocidad crítica y terminal, la clasificación original propuesta por Durand fue modificada a cuatro regímenes de flujo, basados en el flujo de las partículas y su tamaño. Los cuatro principales regímenes, que se muestran en la figura 1.2, que se presentan en un tubo horizontal son:

1. Flujo con cama estacionaria.
2. Flujo con cama deslizante y saltación (con o sin suspensión).
3. Mezcla homogénea con todos los sólidos suspendidos.
4. Mezcla pseudohomogénea u homogénea con todos los sólidos en suspensión.

A continuación se describen los flujos mencionados anteriormente

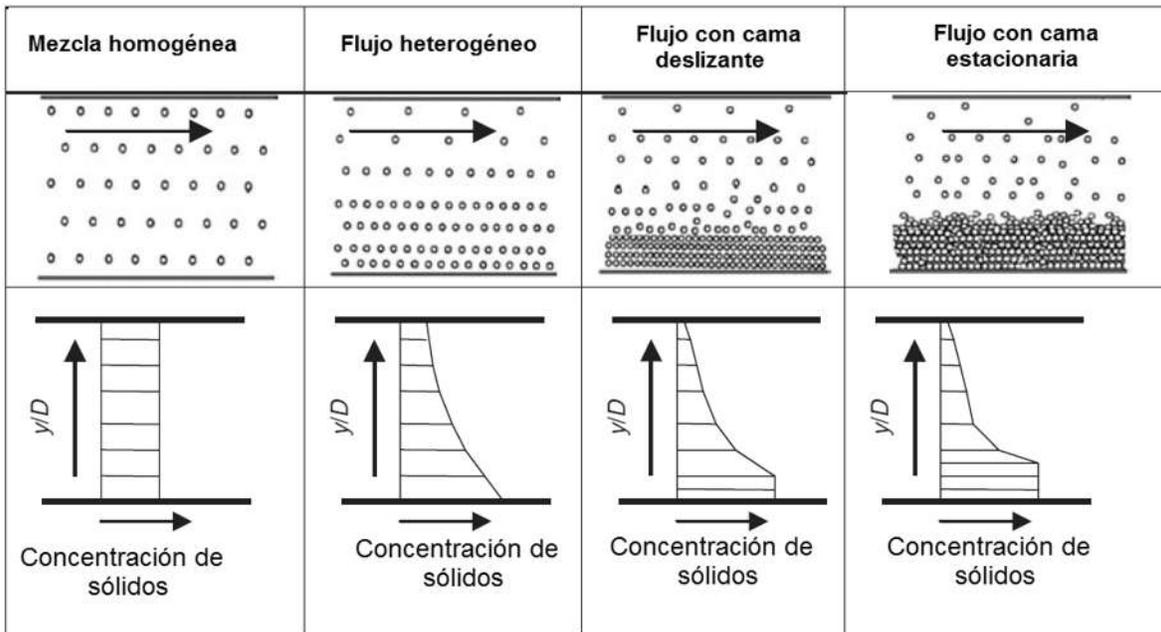


Figura 1.2 Perfiles de distribución de partículas y concentración de sólidos en un tubo para diferentes regímenes de flujo de lodo.

1.2 Flujo con cama estacionaria.

Cuando la velocidad del flujo es lenta, se forma una cama. El fluido sobre la cama trata de mover los sólidos por arrastre, que tienden a rodar y precipitarse. Las partículas con baja velocidad crítica se comportan como una suspensión asimétrica, mientras que las partículas gruesas forman la cama. A medida que la velocidad disminuye aún más, la presión para mantener el flujo se vuelve bastante alta y, finalmente, la tubería se bloqueará.

El flujo de saltación y la suspensión asimétrica ocurre sobre la velocidad de bloqueo. Esto significa que las partículas gruesas se levantan mientras que las partículas más finas continúan moviéndose. La saltación eventualmente puede llegar a bloquear el tubo. Esto puede llegar a provocar varios problemas, tales como golpe de ariete, desgaste y congelamiento en climas fríos.

La mayoría de las especificaciones de ingeniería requieren que la tubería debe estar diseñada para funcionar a velocidades más altas que los asociados con la saltación.

1.3 Flujo con cama deslizante.

Cuando la velocidad del flujo es baja y hay un gran número de partículas gruesas, la cama se mueve como las dunas en el desierto. Las partículas son arrastradas por el movimiento del fluido sobre la cama. En consecuencia, las capas superiores de la cama se mueven más rápido que las capas inferiores en un tubo horizontal. Si la mezcla está compuesta de un amplio rango de partículas con diferentes tamaños y velocidades críticas, la cama estará compuesta con las partículas con la velocidad de depositación más alta. Las partículas con velocidad de depositación moderada se mantendrán en una suspensión asimétrica, con mayor concentración de partículas en la parte media del tubo, mientras que las partículas con la velocidad de depositación más baja, se moverán en una suspensión simétrica.

1.4 Suspensión mantenida en turbulencia.

Con el incremento de la velocidad del flujo, la turbulencia es suficiente para elevar más partículas sólidas. Todas las partículas se mueven en un modelo asimétrico con las más gruesas en el fondo del tubo horizontal cubierto con capas sobrepuestas de partículas de tamaño medio y fino. Algunas partículas pueden chocar con el fondo del tubo y rebotar. El desgaste del fondo del tubo debe ser tomado en cuenta en el programa de mantenimiento y la tubería debe ser rotada en los intervalos sugeridos para mantener el desgaste uniforme de las paredes internas.

Aunque el flujo es no simétrico, desde el punto de vista de consumo de potencia, este régimen puede ser el más económico para el transporte de ciertos sólidos. Wilson (1991) llama a todos los flujos por debajo de V_3 flujos totalmente estratificados y a todos los flujos por arriba de V_3 flujos totalmente suspendidos. La transición desde totalmente estratificados a totalmente suspendidos es considerada por este autor como bastante compleja y puede ser representada por curvas de Sigmoid u Ogee. La transición ocurre sobre un rango de velocidad y no en una transición abrupta en un determinado valor de velocidad.

1.5 Flujo simétrico en alta velocidad

En velocidades que exceden los 3.3 m/s (10 ft/s), todos los sólidos pueden moverse en un arreglo simétrico (pero no necesariamente uniformemente). En ocasiones este flujo es llamado pseudohomogéneo por su simetría alrededor del eje del tubo [6].

Una definición de partículas finas y gruesas fue expuesta por Govier y Aziz (1972), quienes propusieron lo siguiente:

- Partículas ultrafinas: $d_p < 10 \mu\text{m}$ (malla 1250), donde las fuerzas gravitacionales son despreciables.
- Partículas finas: $10 \mu\text{m} < d_p < 100 \mu\text{m}$ (malla 1250 $< d_p <$ malla 140), usualmente se transportan totalmente suspendidas pero son sujetas a gradientes de concentración y fuerza de gravitación.
- Partículas de tamaño medio: $100 \mu\text{m} < d_p < 1000 \mu\text{m}$ (malla 140 $< d_p <$ malla 15), se mueven con un depósito en el fondo del tubo y con un gradiente de concentración.
- Partículas gruesas: $1000 \mu\text{m} < d_p < 10,000 \mu\text{m}$ (0.039 in $< d_p <$ 0.394 in), raramente están totalmente suspendidas y forman depósitos en el fondo del tubo.
- Partículas extra gruesas: son más grandes que 10 mm (0.4 in), estas partículas son transportadas como cama deslizante en el fondo del tubo, en la cual d_p es definido como el diámetro de la partícula.

1.6 Fuerza de arrastre.

La resistencia de la partícula al movimiento es llamada fuerza de arrastre. La magnitud de la fuerza de arrastre ejercida un cuerpo que se mueve en un líquido depende de la velocidad relativa al medio (V), la viscosidad (μ) y la densidad del medio (ρ), la forma y el área de la partícula (A). La fuerza de arrastre siempre actúa en dirección opuesta a la velocidad de la partícula y se expresa como

$$F_D = \frac{C_D A \rho V^2}{2}$$

donde C_D es el coeficiente de arrastre; el cual depende de la forma y velocidad de la partícula y viscosidad del medio. El número de Reynolds de la partícula, es el

número adimensional muy útil para caracterizar de la velocidad sobre el coeficiente de arrastre. Dentro de éste contexto, el número de Reynolds es la razón de la fuerza inercial de la partícula con la fuerza viscosa, dentro de una escala de longitud de la partícula, el cual se define como

$$Re_p = \frac{\rho V_t d_p}{\mu} \quad (1.1)$$

donde V_t es la velocidad terminal de la partícula la cual se darán detalles más adelante. Se identifican tres regímenes para el coeficiente de arrastre en un flujo alrededor de una esfera:

Régimen laminar ($Re_p < 1$), los efectos de inercia son despreciables comparados con efectos de las fuerzas viscosas, el coeficiente para partículas esféricas puede ser expresado como

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \quad (1.2)$$

también conocido como el régimen de Stokes.

Régimen intermedio ($1 < Re_p < 1000$), cuando los efectos de la inercia no pueden ser despreciados, el coeficiente de arrastre no puede ser establecido teóricamente y su aproximación debe ser desarrollada con correlaciones, como se muestra en la tabla 1.

Régimen turbulento ($Re_p > 1000$), cuando el flujo es turbulento, el coeficiente de arrastre es aproximadamente constante, independiente de la velocidad o Re . El coeficiente de una partícula esférica en un flujo turbulento (conocido como el régimen de Newton) es $C_D \cong 0.44$. En $Re_p \sim 2 \times 10^5$ el coeficiente de arrastre decae abruptamente debido a separación de la capa límite en forma de vórtices, reduciendo la fricción sobre la partícula.

El movimiento uniforme de una partícula a través de un fluido es el resultado de la acción de dos grupos de fuerzas. Una fuerza externa tal como la gravedad, flotación, fuerzas magnéticas o eléctricas y la resistencia del fluido al movimiento de la partícula. La velocidad terminal V_t de una partícula es la velocidad constante que se alcanza cuando todas las fuerzas que se ejercen sobre ella, están en equilibrio [7].

Para el cálculo de la velocidad terminal V_t , para un régimen laminar se establece la siguiente ecuación:

$$V_t = \frac{(\rho_d - \rho_c)gd_p^2}{18\mu} \quad (1.3)$$

para un régimen turbulento, se establece la siguiente ecuación:

$$V_t = 1.75 \sqrt{\frac{gd_p(\rho_d - \rho_c)}{\rho_c}} \quad (1.4)$$

La velocidad para partículas esféricas en el régimen intermedio o transitorio se puede establecer la siguiente forma [7]:

$$V_t = \left[\frac{4(\rho_d - \rho_c)gd_p}{3\rho_c C_D} \right]^{1/2} \quad (1.5)$$

Govier y Aziz (1972) reportan que Allen (1900) dedujo la siguiente ecuación para un rango de $1 < Re_p < 1000$:

$$V_t = 0.2 \left[\frac{(\rho_d - \rho_c)g}{\rho_c} \right]^{0.72} \frac{d_p^{1.18}}{(\mu_{mez}/\rho_d)^{0.45}} \quad (1.6)$$

Tabla 1.1 Correlaciones para el coeficiente de arrastre C_D

Referencia	Rango	Correlación
Clift (1978)	$0.01 \leq Re_p \leq 260$	$C_D = \frac{24}{Re_p} [1 + 0.1315Re_p^{0.82-0.05w}]$ (1.7)
	$260 \leq Re_p \leq 1500$	$\log C_D = 1.6435 - 1.1242w + 0.1558w^2$ donde $w = \log Re_p$ (1.8)
Flemmer y Banks (1986)	$Re_p < 8.6 \times 10^4$	$C_D = \frac{24}{Re_p} 10^E$ (1.9) donde $E = 0.261Re_p^{0.369} - 0.105Re_p^{0.431} - \frac{0.124}{1 + (\log Re_p)^2}$
Turton y Levenspiel (1986)	$Re_p < 2.6 \times 10^5$	$C_D = \frac{24}{Re_p} (1 + 0.173Re_p^{0.657})$ $+ \frac{0.413}{1 + 16300Re_p^{-1.09}}$ (1.10)
Brown y Lawler (2003)	$Re_p < 2 \times 10^5$	$C_D = \frac{24}{Re_p} (1 + 0.15Re_p^{0.681}) + \frac{0.407}{1 + (8710/Re_p)}$ (1.11)

No existe una expresión universal válida para el coeficiente de arrastre [8]. En la implementación del modelo Gidaspow, C_d se calcula usando la relación de Schiller – Naumann

$$C_d = \begin{cases} \frac{24}{Re_p} (1 + 0.15Re_p^{0.687}), & Re_p < 1000 \\ 0.44, & Re_p > 1000 \end{cases} \quad (1.12)$$

1.7 Velocidades de transición.

Los cuatro regímenes de velocidad descritos anteriormente pueden ser representados en una gráfica de gradiente de presión contra la velocidad promedio de la mezcla como se muestra en la figura 1.3. Las velocidades de transición son definidas como:

- V_1 : Velocidad en o sobre la cual la cama en el fondo del tubo es estacionaria. En la parte superior de la cama algunas partículas sólidas pueden moverse por saltación o suspensión.
- V_2 : Velocidad en o sobre la cual la mezcla fluye como una mezcla asimétrica, con partículas gruesas formando una cama deslizante.
- V_3 o V_D : Velocidad en o sobre la cual todas las partículas se mueven como una suspensión asimétrica y debajo de la cual los sólidos empiezan a sedimentarse y formar una cama deslizante.
- V_4 : Velocidad en o sobre la cual todos los sólidos se mueven como una suspensión simétrica.

V_3 es efectivamente la velocidad de depositación, frecuentemente llamada en varias referencias como la velocidad de Durand para partículas de tamaño grueso uniforme. Ya no se recomienda que se denomine velocidad de Durand, en pruebas de los últimos 20 años han dado lugar a nuevas ecuaciones empíricas que incluyen los efectos del tamaño de partícula y la composición de la mezcla. La magnitud de la velocidad depende de la concentración volumétrica [9].

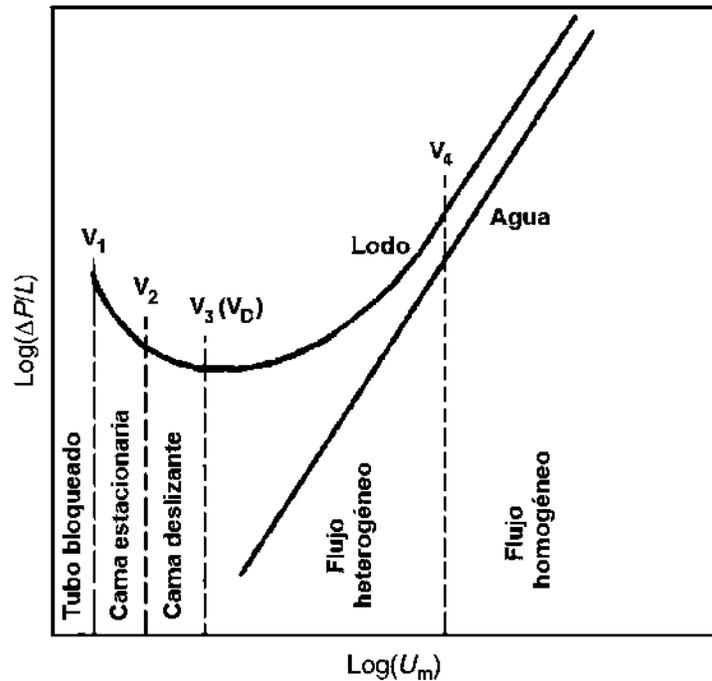


Figura 1.3 Velocidades de transición

1.7.1 Velocidades transicionales V_1 y V_2 .

La velocidad V_1 no es utilizada para la operación de los sistemas de tubería de lodo. Esta es de interés para instrumentación y monitoreo para el arranque.

La velocidad V_2 está determinada desde las medidas de presión del gradiente de presión. El objetivo de esta prueba es determinar el espesor de la cama y la razón de estratificación.

1.7.2 Velocidad transicional V_3 o velocidad para mínimo gradiente de presión.

La velocidad V_3 es importante debido a que es la velocidad en la que se presenta un menor gradiente de presión. Se comienza a manifestar el asentamiento de partículas sólidas, frecuentemente se refiere como la velocidad de depositación.

Durand y Condolois (1952) establecieron la siguiente ecuación experimental para arena y grava de tamaño uniforme:

$$V_D = V_3 = F_L \{2gD_i [(\rho_d - \rho_c)/\rho_c]\}^{1/2} \quad (1.13)$$

donde

F_L = factor de Durand basado en tamaño de grano y la concentración volumétrica.

V_3 = velocidad de transición crítica entre el flujo con cama deslizante y heterogéneo.

D_i = diámetro interno de la tubería (m).

g = aceleración debida a la gravedad (9.81 m/s).

ρ_d = densidad de los sólidos en la mezcla (kg/m³)

ρ_c = densidad del líquido transportador.

El factor de Durand F_L es representado en una gráfica para una o limitadas partículas, debido a que esta ecuación fue establecida para arena y grava.

Debido a la gran importancia de los sistemas de transporte hidráulico de partículas, se comenzó realizar aproximaciones para mezclas con otras variedades de partículas, las cuales se obtuvieron de medidas en el campo. Se establecieron cálculos indirectos a partir de cubicaciones de material y de mediciones rápidas de concentración para establecer una estimación de varios parámetros, entre ellos la velocidad V_3 y V_4 , con el objetivo de ayudar en un prediseño de sistemas de este tipo o un diseño rápido de modificaciones del sistema [10].

El factor de Durand fue considerado como conservador al aplicarse a otro tipo de mezclas, pues no consideraba que el comportamiento de la mezcla para diferentes condiciones, en función de las características de concentración, densidad, granulometría, velocidad y otros factores que puedan estar presentes.

En un esfuerzo por representar una mayor variedad de concentraciones, Wasp (1970) propuso incluir la razón entre el diámetro de la partícula y el diámetro de la tubería, también modifico el Factor de Durand, estableciendo lo siguiente

$$V_3 = F'_L \left[2gD_i \frac{\rho_d - \rho_c}{\rho_c} \right]^{1/2} \left[\frac{d_p}{D_i} \right]^{1/6} \quad (1.14)$$

Schiller y Herbich (1991) proponen la siguiente ecuación para el factor de Durand

$$F_L = \{(1.3C_v^{0.125})[1 - e^{-6.9d_{50}}]\} \quad (1.15)$$

donde d_{50} (mm) es la abertura de la malla que pasa el 50 % de las partículas.

Una aproximación que toma en cuenta la viscosidad y la densidad de las partículas, fue propuesta por Gillies (1999), desarrollada para el número de Froude F_r en función del número de Arquímedes

$$A_r = d_p^3 \rho_c (\rho_d - \rho_c) g \frac{4}{3\mu_L^2} \quad (1.16)$$

Para el cálculo del número de Froude, Gilles desarrolló la siguiente ecuación

$$F_r = aA_r^b \quad (1.17)$$

donde

$$F_r = F_L\sqrt{2} \quad (1.18)$$

Para $A_r > 540$, $a = 1.78$, $b = -0.019$

$160 < A_r < 540$, $a = 1.19$, $b = 0.045$

$80 < A_r < 160$, $a = 0.197$, $b = 0.4$

para $A_r < 80$ Wilson y Judge (1976) se puede aplicar la ecuación, la cual se expresa el número de Froude como

$$F_r = \sqrt{2} \left\{ 2 + 0.30 \log_{10} \left(\frac{d_p}{D_i C_D} \right) \right\}$$

Es necesario tratar de resolver un problema usando diferentes ecuaciones y el uso del sentido común cuando se obtienen valores similares [4] [11].

Los modelos para la estimación de velocidad límite en general sobre evalúan el valor que desde el punto de vista industrial interesa, lo que los hace conservadores para el diseño [12].

Newitt (1955) prefiere expresar la velocidad V_3 en términos de la velocidad terminal de las partículas como:

$$V_3 = 17V_t \quad (1.19)$$

1.7.3 Velocidad entre el flujo heterogéneo y pseudohomogéneo, V_4 .

Para el flujo pseudohomogéneo, Newitt (1955) expresa la velocidad para partículas inmersas en un fluido en términos de la velocidad terminal de las partículas como

$$V_4 = (1800gD_iV_t)^{1/3} \quad (1.20)$$

Govier y Aziz (1972) analizaron el trabajo de Spells (1955) sobre partículas sólidas con diámetro $80 \mu m < d_p < 800 \mu m$, derivando la siguiente ecuación

$$V_4 = 134C_D^{0.816}D_i^{0.633}V_t^{1.63} \quad (1.21)$$

esta ecuación fue establecida en sistema de unidad USCS con el diámetro expresado en pies, la velocidad en pies por segundo y $C_D = 0.44$.

Capítulo 2 Marco teórico.

Un fluido multifase está formado de dos o más componentes distintos o “fases”, las cuales pueden ser fluidos o sólidos y su mezcla tienen las características de un fluido. Naturalmente la dinámica de flujos multifase es absolutamente diferente a flujos de una fase. El marco teórico de flujos de una fase está bien establecido (el eje de la teoría se basa en la ecuación de Navier – Stokes) y aparentemente solo el problema práctico que permanece sin resolver es respecto a la turbulencia, o más general, problemas asociados con estabilidad de flujo, aunque en términos de la modelación se requiere de una discretización adecuada.

Mientras es relativamente sencillo establecer las ecuaciones de la conservación de masa, momento y energía para una mezcla arbitraria, generalmente la contraparte de la ecuación de Navier – Stokes para flujos multifase no es posible establecerla. Una alternativa razonable es utilizar un procedimiento de promedios, con el cual es posible derivar un conjunto de “ecuaciones de flujo multifase” el cual en principio describe correctamente la dinámica de algunos sistemas multifase y están sujetos a algunas suposiciones. Este conjunto de ecuaciones, invariablemente incluye más incógnitas que ecuaciones independientes, creando un sistema sin solución. Para complementar este conjunto de ecuaciones, se necesitan las relaciones constitutivas y las características del material [13].

En la modelación de tales flujos, pueden tomarse algunas alternativas. El método usado más frecuente es tratar la mezcla multicomponente, como un fluido simple con propiedades reológicas que pueden depender de la concentración local. Esta aproximación puede usarse en casos donde la velocidad de las fases son relativamente iguales y cuando los efectos de las interacciones entre las fases puedan ser adecuadamente descritas por medio de las variables reológicas tales como la viscosidad. La ventaja de esos modelos homogéneos es que la solución numérica puede intentarse utilizando algoritmos convencionales de fluidos de una fase y programas comerciales efectivos.

Por su parte los modelos para flujos multifase han sido desarrollados principalmente siguiendo dos diferentes aproximaciones: Euleriana y Lagrangiana. Dentro de la aproximación Euleriana todas las fases son tratadas formalmente

como fluidos que obedecen las ecuaciones de movimiento de una sola fase en el nivel mesoscópico (en la escala de las partículas suspendidas) con condiciones específicas de frontera apropiadas en las fronteras de la fase. Las ecuaciones del flujo macroscópico son derivadas desde esas ecuaciones mesoscópicas usando un procedimiento de promedio. Independientemente del método usado, el procedimiento de promedio conduce a las ecuaciones de la misma forma genérica, a saber la forma de las ecuaciones de fase originales con algunos términos extras. Estos términos extras incluyen las interacciones (cambio de masa, momento, etc.) en las fronteras de la fase y términos análogos al tensor de esfuerzos de Reynolds en las ecuaciones de flujo turbulento de una sola fase.

La ventaja del método Euleriano es que en principio puede ser aplicado a cualquier sistema multifase, indistintamente del número y naturaleza de las fases; sin embargo, esto nos conduce a un conjunto de ecuaciones de flujo complicadas. En algunos casos, es posible usar una formulación simplificada llamada “modelo de mezcla” (o modelo algebraico de deslizamiento) que puede ser aplicado a una suspensión relativamente homogénea de una o más especies dispersas que seguirán estrechamente el movimiento del fluido transportador continuo. El modelo de mezcla incluye las ecuaciones de continuidad y momento para la mezcla y las ecuaciones de continuidad para las fases dispersas. Las velocidades de deslizamiento entre la fase continua y las fases dispersas son deducidas desde una aproximación algebraica de las ecuaciones de balance. Esto reduce considerablemente el esfuerzo computacional, especialmente cuando son consideradas varias fases dispersas [14].

Otra aproximación es el llamado Método Lagrangiano el cual es principalmente restringido a partículas suspendidas. En esta aproximación solo la fase líquida se considera como continua mientras que el movimiento de la fase discontinua de partículas es obtenida por integración de la ecuación de movimiento individual de las partículas a lo largo de sus trayectorias (en aplicaciones prácticas una “partícula” puede representar una simple partícula física o un grupo de partículas).

La simulación numérica de flujo utilizando un modelo multifase completo es impráctico para una suspensión que posee una amplia distribución de tamaño o densidad de partícula. Se realizan varias aproximaciones para simplificar el costo computacional. En la más sencilla aproximación, la suspensión se representa por un sistema homogéneo de una fase y la influencia de las partículas es tomada en cuenta dentro de los valores de las propiedades físicas. La naturaleza multifase del flujo, sin embargo, no puede ser despreciada cuando los gradientes de concentración son grandes y las fases dispersas alteran el comportamiento hidrodinámico o cuando la distribución de las partículas son estudiadas [15].

La aproximación más útil y popular para describir la dinámica de un fluido es la aproximación Euleriana, donde el estado del flujo es descrito por las propiedades de los elementos del fluido en el tiempo que pasan por un determinado punto en el espacio [14].

2.1 Volumen promedio

Derivaremos enseguida las ecuaciones de flujo multifase usando el método de volumen promedio. El método de volumen promedio provee de una interpretación intuitiva y sencilla de la dinámica y las interacciones que implica. Se basa en el supuesto de la existencia de una escala de longitud L_c tal que $l \ll L_c \ll L$, donde L es la escala “macroscópica” del sistema y l es la escala “mesoscópica”. La escala mesoscópica es asociada con la distribución de las fases dentro de la mezcla

Se asume de la existencia de un volumen infinitesimal de dimensión ε , tal que ε no solo es mucho más pequeño que la distancia típica sobre la cual las propiedades del flujo varían significativamente pero tampoco es mucho más grande que el tamaño de los elementos de la fase individual (la fase dispersa, gotas, burbujas o partículas). La primera condición es necesaria para la definición de las derivadas de las propiedades del flujo dentro del campo de flujo. La segunda es necesaria para que cada volumen promedio (de volumen ε^3) contenga muestras representativas de los componentes o fases.

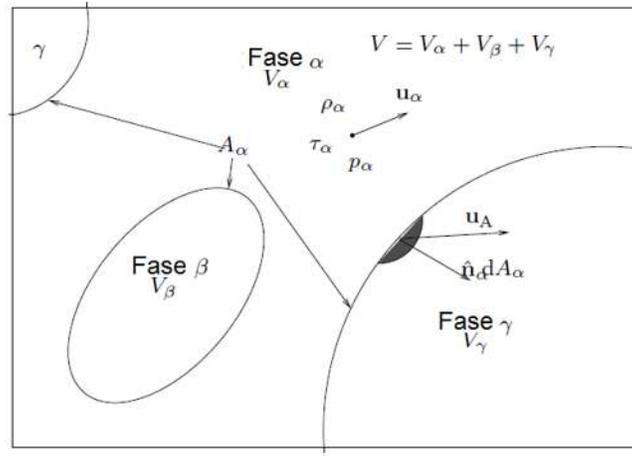


Figura 2.1. Fases dentro del volumen promedio.

Consideremos un volumen promedio representativo $V \sim L_c^3$ el cual contiene distintos dominios para cada fase de tal manera que $V = \sum_{\alpha} V_{\alpha}$ donde V_{α} es el volumen ocupado por la fase α dentro de V . Suponemos que para cada fase α las ecuaciones de conservación de masa y momento son válidas para cualquier punto interno de V_{α} , teniendo,

$$\frac{\partial \rho_{\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{\alpha} u_{\alpha}) = 0 \quad (2.1)$$

y

$$\frac{\partial(\rho_{\alpha} u_{\alpha})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{\alpha} u_{\alpha} u_{\alpha}) = -\nabla p_{\alpha} + \nabla \cdot \tau_{\alpha} + F_{\alpha} \quad (2.2)$$

donde

ρ_{α} = densidad de la fase pura α

u_{α} = velocidad de flujo

p_{α} = presión

τ_{α} = tensor de deformación

F_{α} = fuerza externa.

Hay que tener presente que el concepto de presión no es usual para un material sólido. Es preferible para los sólidos usar el tensor de deformación total $\sigma_{\alpha} = -p_{\alpha} \mathbb{I} + \tau_{\alpha}$, donde $-\nabla p_{\alpha} + \nabla \cdot \tau_{\alpha} = \nabla \cdot \sigma_{\alpha}$. La ecuación de energía es necesaria solo en presencia de transferencia de calor.

Las ecuaciones de masa y momento para la fase α están sujetas a las siguientes condiciones de frontera en la interfase $A_{\alpha\gamma}$ entre la fase α y otra fase γ dentro del volumen V como se muestra en la figura 2.1.

$$\rho_{\alpha}(u_{\alpha} - u_A) \cdot \hat{n}_{\alpha} + \rho_{\gamma}(u_{\gamma} - u_A) \cdot \hat{n}_{\gamma} = 0 \quad (2.3)$$

$$\rho_{\alpha}u_{\alpha}(u_{\alpha} - u_A) \cdot \hat{n}_{\alpha} + \rho_{\gamma}u_{\gamma}(u_{\gamma} - u_A) \cdot \hat{n}_{\gamma} = \sigma_{\alpha} \cdot \hat{n}_{\alpha} + \sigma_{\gamma} \cdot \hat{n}_{\gamma} - \nabla_A \sigma_{\alpha\gamma} + \frac{2\sigma_{\alpha\gamma}}{|R_A|} \hat{R}_A \quad (2.4)$$

donde

\hat{n}_{α} = vector normal unitario de la fase α

u_A = velocidad de la interfase

$$\hat{R}_A = R_A / |R_A|$$

R_A = vector de radio de curvatura de la interfase

$\sigma_{\alpha\gamma}$ = tensión superficial de la interfase

$\nabla_A = \nabla - \hat{R}_A \cdot \nabla$ = operador gradiente superficial.

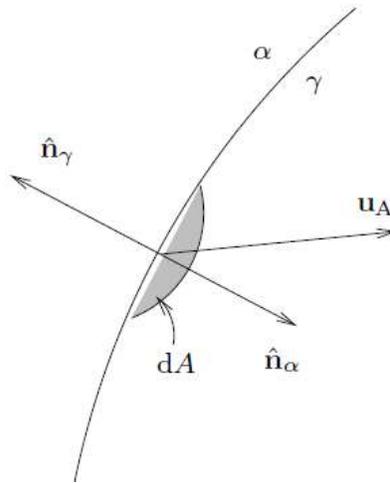


Figura 2.2. Condiciones de interfase.

En nuestro problema, la interfase A_{α} tiene contornos complicados que dependen del tiempo. De lo anterior, se observa que no es posible usar las condiciones de frontera y resolver las ecuaciones de momento y masa de manera sencilla. Ante la imposibilidad de controlar el contorno y forma de las partículas y debido al poco

efecto sobre las variables macroscópicas a estudiar, es la razón principal por la que se recurre a ecuaciones de promedio.

Para una cantidad q_α (escalar, vectorial o tensorial) en una fase α definimos los siguientes promedios.

$$\langle q_\alpha \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_\alpha} q_\alpha dV \quad (2.5)$$

$$\tilde{q}_\alpha = \frac{1}{V_\alpha} \int_{V_\alpha} q_\alpha dV = \frac{1}{\phi_\alpha} \langle q_\alpha \rangle \quad (2.6)$$

$$\bar{q}_\alpha = \frac{\int_{V_\alpha} \rho_\alpha q_\alpha dV}{\int_{V_\alpha} \rho_\alpha dV} = \frac{\langle \rho_\alpha q_\alpha \rangle}{\phi_\alpha \bar{\rho}_\alpha} \quad (2.7)$$

donde

$$\phi_\alpha = V_\alpha / V \quad (2.8)$$

Es el volumen fraccional de la fase α y está sujeta a la restricción

$$\sum_\alpha \phi_\alpha = 1 \quad (2.9)$$

Estas cantidades definidas son el promedio parcial, promedio intrínseco o de fase y el de Favré o promedio de masa ponderado de q_α , respectivamente.

Para propósitos posteriores, se debe definir la función característica de fase Θ_α de la siguiente manera:

$$\Theta_\alpha(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in \text{fase } \alpha \text{ en el tiempo } t \\ 0, & \text{en cualquier otra parte.} \end{cases} \quad (2.10)$$

En esta función es posible ver que $\langle \Theta_\alpha \rangle = \phi_\alpha$ y que

$$\frac{1}{V} \int_{A_\alpha} \hat{n}_\alpha dA = -\nabla \phi_\alpha \quad (2.11)$$

Aplicando promedios parciales en las Ecs. (2.1) y (2.2) se obtiene lo siguiente.

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho_\alpha \rangle + \nabla \cdot \langle \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \rangle = \Gamma_\alpha \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \rangle + \nabla \cdot \langle \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha \rangle = -\nabla \langle p_\alpha \rangle + \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\tau}_\alpha \rangle + \langle F_\alpha \rangle + M_\alpha \quad (2.13)$$

donde las llamadas “integrales de transferencia” Γ_α y M_α están definidas como

$$\Gamma_\alpha = -\frac{1}{V} \int_{A_\alpha} \rho_\alpha (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_A) \cdot \hat{n}_\alpha dA \quad (2.14)$$

$$M_\alpha = \frac{1}{V} \int_{A_\alpha} (-p_\alpha \mathbb{I} + \tau_\alpha) \cdot \hat{n}_\alpha dA - \frac{1}{V} \int_{A_\alpha} \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_A) \cdot \hat{n}_\alpha dA \quad (2.15)$$

Observamos que las ecuaciones de flujo no están en una forma adecuada para solucionarlas. Las propiedades de cada fase aún no están especificadas en este punto. Las integrales de transferencias, que incluyen las interacciones (transferencia de masa y momento) entre las fases, aún están dadas en términos de las integrales de las cantidades mesoscópicas desconocidas de las fronteras de la fase. Incluso dadas por conocidas las relaciones constitutivas, se tienen más variables independientes que ecuaciones en cada fase. Para reducir el número de incógnitas, debemos expresar los promedios de esos productos en términos de promedio de productos adecuados. Esto genera varias alternativas, con lo que puede variar ligeramente los resultados. Aquí podremos usar el promedio de Favré para la velocidad y en función de la conveniencia, un promedio parcial o intrínseco para la densidad y la presión.

Definimos la velocidad de fluctuación $\delta \mathbf{u}_\alpha$ como

$$\mathbf{u}_\alpha = \bar{\mathbf{u}}_\alpha + \delta \mathbf{u}_\alpha \quad (2.16)$$

Ahora podemos reescribir los productos de las ecuaciones de conservación de la siguiente manera

$$\langle \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \rangle = \langle \rho_\alpha \rangle \bar{\mathbf{u}}_\alpha = \phi_\alpha \tilde{\rho}_\alpha \bar{\mathbf{u}}_\alpha \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \langle \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha \rangle &= \langle \rho_\alpha \rangle \bar{\mathbf{u}}_\alpha \bar{\mathbf{u}}_\alpha + \langle \rho_\alpha \delta \mathbf{u}_\alpha \delta \mathbf{u}_\alpha \rangle = \\ &= \phi_\alpha \tilde{\rho}_\alpha \bar{\mathbf{u}}_\alpha \bar{\mathbf{u}}_\alpha + \langle \rho_\alpha \delta \mathbf{u}_\alpha \delta \mathbf{u}_\alpha \rangle \end{aligned} \quad (2.18)$$

Las ecuaciones de conservación promedio adquieren la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \phi_\alpha \tilde{\rho}_\alpha \rangle + \nabla \cdot \langle \phi_\alpha \tilde{\rho}_\alpha \bar{\mathbf{u}}_\alpha \rangle = \Gamma_\alpha \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi_\alpha \tilde{\rho}_\alpha \bar{\mathbf{u}}_\alpha \rangle + \nabla \cdot \langle \phi_\alpha \tilde{\rho}_\alpha \bar{\mathbf{u}}_\alpha \bar{\mathbf{u}}_\alpha \rangle = \\ -\nabla \langle \phi_\alpha \tilde{\rho}_\alpha \rangle + \nabla \cdot \langle \tau_\alpha \rangle + \phi_\alpha \tilde{F}_\alpha + M_\alpha + \nabla \cdot \langle \tau_{\delta\alpha} \rangle \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde

$$\langle \tau_{\delta\alpha} \rangle = -\langle \rho_\alpha \delta \mathbf{u}_\alpha \delta \mathbf{u}_\alpha \rangle \quad (2.21)$$

este tensor, en ocasiones, es llamado pseudotensor turbulento de deformación análogo al tensor de Reynolds de turbulencia para el flujo de una fase, el cual

contiene los flujos de momento que surgen de las fluctuaciones de turbulencia del flujo mesoscópico y las turbulencias de la velocidad de la fase α debido a la presencia de otras fases. En consecuencia, el tensor $\langle \tau_{\delta\alpha} \rangle$ no necesariamente desaparece aunque el flujo mesoscópico este en el régimen laminar.

Integrando las condiciones de frontera mesoscopicas de las Ecs. (2.3) y (2.4) sobre la interfase $A_{\delta\alpha}$, sumando sobre α y γ y usando las Ecs. (2.14) y (2.15), encontramos que:

$$\sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} = 0 \quad (2.22)$$

$$\sum_{\alpha} M_{\alpha} = -\frac{1}{2V} \sum_{\alpha \neq \gamma} \int_{A_{\alpha\gamma}} (-\nabla_A \sigma_{\alpha\gamma} + \frac{2\sigma_{\alpha\gamma}}{|R_A|} \hat{R}_A) dA \quad (2.23)$$

La Ec. (2.22) nos asegura la conservación total de masa de la mezcla, mientras la Ec. (2.23) da los efectos superficiales tales como “capilaridad” por diferencias de presión entre las fases.

2.2 Relaciones constitutivas.

Las Ecs. (2.19) y (2.20) son, en principio, las ecuaciones exactas para las cantidades promedio, no contienen, de momento, mucha información para describir la dinámica del sistema, esta información debe ser proveída por un conjunto de relaciones constitutivas las cuales especifican las propiedades materiales de cada fase, las interacciones entre las diferentes fases y el (seudo)tensor turbulento de cada fase con la presencia de otra fase [16].

Estas relaciones finalmente hacen el conjunto de ecuaciones en una forma cerrada donde la solución es posible. Las incógnitas que aparecen en las Ecs. (2.19) y (2.20), tales como las integrales de transferencia y los términos de tensión que todavía contienen cantidades mesoscópicas, pueden ser remplazadas por nuevos términos los cuales:

- Dependen solo de las cantidades promedio dinámicas.
- Tienen el mismo contenido físico, forma tensorial y dimensiones que los términos originales.
- Tienen las mismas propiedades de simetría como los términos originales (isotropía, marco indiferente, etc.).

- Incluye los efectos de todos los procesos físicos o mecanismos que son considerados importantes en el sistema a ser descrito.

Normalmente, las relaciones constitutivas están dadas en la forma donde esos nuevos términos incluyen parámetros libres los cuales deberán ser definidos experimentalmente, en otras ocasiones pueden ser derivadas desde las propiedades de la mezcla o desde las propiedades de la fase pura. Por ejemplo, la incompresibilidad de la fase pura α implica la relación constitutiva $\tilde{\rho}_\alpha = \text{constante}$. Quizás el término más intrincado para ser correlacionado a las cantidades promedios con las relaciones constitutivas es el tensor $\langle \tau_{\delta\alpha} \rangle$ dado en la Ec. (2.21). Éste contiene la transferencia de momento dentro de la fase α el cual surge por la turbulencia de la fase α y por las fluctuaciones de velocidad debido a la presencia de otras fases y la cual está presente también en el caso del flujo laminar en la escala mesoscópica. Es evidente que inferir relaciones constitutivas realistas al tensor $\langle \tau_{\delta\alpha} \rangle$ es un problema considerable. Esto puede, sin embargo, intentarse solucionarse con modelos generales de flujo de una sola fase.

El problema que nos interesa tiene las siguientes características: consideremos un sistema multifase de partículas sólidas suspendidas en un líquido Newtoniano. Denotamos la fase líquida continua por el subíndice f y la fase dispersa por el subíndice d . Asumimos que ambas fases son incompresibles, que la suspensión es no reactiva, que no existe la transferencia de masa entre las dos fases, la tensión superficial entre la fase sólida y líquida es despreciable y no existe transferencia de calor entre las fases y su contorno. Las densidades $\tilde{\rho}_f$ y $\tilde{\rho}_d$ son constantes y además

$$\Gamma_f = \Gamma_d = 0 \quad (2.24)$$

$$M_f + M_d = 0 \quad (2.25)$$

Al aplicar la presente teoría hidrodinámica a tales situaciones multicomponentes, debemos derivar las ecuaciones de la dinámica multifase. En principio, se pueden escribir la conservación de masa, momento y energía para cada componente en cada fase. Ya que todos los componentes en una fase dada están usualmente a la misma temperatura y la difusión puede ser despreciada como una primera

aproximación, solo necesitamos considerar el balance de masa en cada fase. Si despreciamos la difusión, entonces cada componente dentro de la fase se mueve con la velocidad de la fase.

La integral de transferencia de momento puede ser escrita como

$$M \equiv M_f = -M_d = \frac{1}{V} \int_{A_f} (-p_f \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_f) \cdot \hat{\mathbf{n}}_f dA = -\frac{1}{V} \int_A (-p_f \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_f) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (2.26)$$

donde $A = A_f = A_d$ y $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_d = -\hat{\mathbf{n}}_f$. Se introduce la fluctuación de la presión del fluido con $\delta p_f = p_f - \tilde{p}_f$ y, usando la Ec. (2.11), la integral de transferencia de momento se puede escribir de la forma

$$M = \tilde{p}_f \nabla \phi + D \quad (2.27)$$

donde

$$D = -\frac{1}{V} \int_A (-p_f \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_f) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (2.28)$$

y $\phi = \phi_f$. Las ecuaciones promedio de flujo se pueden escribir entonces en la forma final como

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \bar{\mathbf{u}}_f) = 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-\phi) \bar{\mathbf{u}}_d) = 0 \quad (2.30)$$

$$\tilde{\rho}_f \left[\frac{\partial}{\partial t} (\phi \bar{\mathbf{u}}_f) + \nabla \cdot (\phi \bar{\mathbf{u}}_f \bar{\mathbf{u}}_f) \right] = -\phi \nabla \tilde{p}_f + \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\tau}_f \rangle + \mathbf{D} + \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\tau}_{\delta f} \rangle + \phi \tilde{\mathbf{F}}_f \quad (2.31)$$

$$\tilde{\rho}_d \left[\frac{\partial}{\partial t} ((1-\phi) \bar{\mathbf{u}}_d) + \nabla \cdot ((1-\phi) \bar{\mathbf{u}}_d \bar{\mathbf{u}}_d) \right] = -\mathbf{D} + \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\tau}_{\delta d} \rangle + (1-\phi) \tilde{\mathbf{F}}_d + \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\sigma}_d \rangle - \tilde{p}_f \nabla \phi \quad (2.32)$$

donde $\langle \boldsymbol{\tau}_f \rangle$ es el tensor promedio viscoso del fluido y $\langle \boldsymbol{\sigma}_d \rangle$ es el tensor promedio de deformación total de la fase dispersa.

2.3 Modelo de mezcla.

El modelo de mezcla (o modelo de deslizamiento algebraico) es una formulación simplificada de las ecuaciones de flujo multifase. Consideramos una suspensión de una fase dispersa (partículas, gotas o burbujas) en un fluido continuo (líquido o gas). Si la fase dispersa sigue de cerca el movimiento del fluido (partículas pequeñas), parece natural escribir las ecuaciones de balance de la mezcla de las fases dispersa y continua y tomar en cuenta el movimiento relativo de las fases como una corrección. El modelo de mezcla consiste entonces de las ecuaciones de continuidad y momento para la mezcla y la ecuación de continuidad para la fase dispersa. La velocidad de deslizamiento entre las fases dispersa y continua está tomada en cuenta introduciendo los correspondientes términos de convección en las ecuaciones de continuidad.

La esencia del modelo de mezcla es que solo un conjunto de las componentes de velocidad se resuelve desde las ecuaciones diferenciales de la conservación de momento. Las velocidades de la fase dispersa se infieren desde la aproximación del balance de ecuaciones algebraicas. Esto reduce el esfuerzo computacional considerablemente, en especial cuando se consideran varias fases dispersas.

2.4 Ecuación de continuidad para la mezcla.

A partir de la Ec. (2.19) de continuidad para la fase α , sumando sobre todas las fases obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha=1}^n (\phi_{\alpha} \tilde{\rho}_{\alpha}) + \nabla \cdot \sum_{\alpha=1}^n (\phi_{\alpha} \tilde{\rho}_{\alpha} \bar{\mathbf{u}}_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^n \Gamma_{\alpha} \quad (2.33)$$

El lado derecho de la Ec. (2.33) se anula debido a la conservación de la masa total, Ec. (2.22), y obtenemos la ecuación de continuidad para la mezcla

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m) + \nabla \cdot (\rho_m \bar{\mathbf{u}}_m) = 0 \quad (2.34)$$

Observamos que esta ecuación tiene la misma forma de la ecuación de continuidad para el flujo de una sola fase.

La densidad y velocidad de la mezcla se definen en función de las fases como

$$\rho_m = \sum_{\alpha=1}^n \phi_{\alpha} \tilde{\rho}_{\alpha} \quad (2.35)$$

$$\bar{u}_m = \frac{1}{\rho_m} \sum_{\alpha=1}^n \phi_{\alpha} \tilde{\rho}_{\alpha} \bar{u}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha} \bar{u}_{\alpha} \quad (2.36)$$

La velocidad de la mezcla \bar{u}_m representa la velocidad del centro de masa. Nótese que ρ_m varía aunque las componentes de las densidades son constantes. La fracción de masa de la fase α se define como

$$c_{\alpha} = \frac{\phi_{\alpha} \tilde{\rho}_{\alpha}}{\rho_m} \quad (2.37)$$

2.5 Ecuación de momento para la mezcla.

La ecuación de momento para la mezcla se deduce desde la suma de las ecuaciones de momento sobre todas las fases.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha=1}^n \phi_{\alpha} \tilde{\rho}_{\alpha} \bar{u}_{\alpha} + \nabla \cdot \sum_{\alpha=1}^n \phi_{\alpha} \tilde{\rho}_{\alpha} \bar{u}_{\alpha} \bar{u}_{\alpha} = \\ - \sum_{\alpha=1}^n \nabla(\phi_{\alpha} \tilde{\rho}_{\alpha}) + \nabla \cdot \sum_{\alpha=1}^n \phi_{\alpha} (\tilde{\tau}_{\alpha} + \tilde{\tau}_{\delta\alpha}) \\ + \sum_{\alpha=1}^n \phi_{\alpha} \tilde{\mathbf{F}}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{M}_{\alpha} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Los términos de tensión han sido escritos en términos de promedios intrínsecos. Usando las definiciones de la densidad ρ_m y velocidad \bar{u}_m de la mezcla, el segundo término de la ecuación anterior puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sum_{\alpha=1}^n \phi_{\alpha} \tilde{\rho}_{\alpha} \bar{u}_{\alpha} \bar{u}_{\alpha} = \\ \nabla \cdot (\rho_m \bar{u}_m \bar{u}_m) + \nabla \cdot \sum_{\alpha=1}^n \phi_{\alpha} \tilde{\rho}_{\alpha} \bar{u}_{m\alpha} \bar{u}_{m\alpha} \end{aligned} \quad (2.39)$$

donde $\bar{u}_{m\alpha}$ es la velocidad de difusión, que se entiende como la velocidad de la fase α en relación al centro de la masa de la mezcla

$$\bar{u}_{m\alpha} = \bar{u}_{\alpha} - \bar{u}_m \quad (2.40)$$

En términos de las variables de la mezcla, la ecuación de momento toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_m \bar{u}_m) + \nabla \cdot (\rho_m \bar{u}_m \bar{u}_m) = -\nabla p_m + \nabla \cdot (\langle \tau_m \rangle + \langle \tau_{\delta m} \rangle) + \nabla \cdot \langle \tau_{Dm} \rangle \\ + F_m + M_m \end{aligned} \quad (2.41)$$

Los tres tensores están definidos como

$$\begin{aligned}\langle \tau_m \rangle &= - \sum_{\alpha=1}^n \phi_\alpha \tilde{\tau}_\alpha \\ \langle \tau_{\delta m} \rangle &= - \sum_{\alpha=1}^n \phi_\alpha \langle \tilde{\rho}_\alpha \delta u_\alpha \delta u_\alpha \rangle \\ \langle \tau_{Dm} \rangle &= - \sum_{\alpha=1}^n \phi_\alpha \tilde{\rho}_\alpha \bar{u}_{m\alpha} \bar{u}_{m\alpha}\end{aligned}$$

y representan el promedio del tensor viscoso, tensor turbulento y el tensor de difusión debido al deslizamiento de la fase, respectivamente. La presión de la mezcla es definida por la relación

$$p_m = \sum_{\alpha=1}^n \phi_\alpha \tilde{p}_\alpha \quad (2.42)$$

En la práctica, las presiones de fase son generalmente iguales a $\tilde{p}_\alpha = p_m$. El último término del lado derecho M_m , comprende solo la influencia de la tensión de la fuerza superficial sobre la mezcla y depende de la geometría de la interface. El término adicional $\nabla \cdot \tau_{Dm}$, comparado con la ecuación de momento de una sola fase, es el tensor de difusión que representa la transferencia de momento debido a los movimientos relativos.

2.6 Ecuación de continuidad para una fase.

Usando la velocidad de difusión para eliminar la velocidad de fase en la ecuación de continuidad nos da

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_\alpha \tilde{\rho}_\alpha) + \nabla \cdot (\phi_\alpha \tilde{\rho}_\alpha \bar{u}_m) = \Gamma_\alpha - \nabla \cdot (\phi_\alpha \tilde{\rho}_\alpha \bar{u}_{m\alpha}) \quad (2.43)$$

Si las densidades de las fases son constantes y no ocurren cambios de fase, la ecuación de continuidad se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_\alpha) + \nabla \cdot (\phi_\alpha \bar{u}_m) = -\nabla \cdot (\phi_\alpha \bar{u}_{m\alpha}) \quad (2.44)$$

El término del lado derecho representa la difusión de las partículas debido al deslizamiento de fase.

2.7 Velocidad de difusión.

En el modelo de mezcla, la ecuación de momento para la fase dispersa no está resuelta de forma explícita y por lo tanto se debe derivar un modelo para las

velocidades de difusión. La ecuación de balance para calcular la velocidad relativa se obtiene con la combinación de las ecuaciones de momento de la fase dispersa y de la mezcla. Consideremos una fase de partícula dispersa p , por simplicidad. Usando la ecuación para M_p y la ecuación de continuidad, la ecuación de momento de la fase dispersa p se reescribe como sigue (aquí la gravedad se considera como fuerza externa)

$$\begin{aligned} \phi_p \tilde{\rho}_p \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_p + \phi_p \tilde{\rho}_p (\bar{u}_p \cdot \nabla) \bar{u}_p = & -\phi_p \nabla(\tilde{p}_p) + \nabla \cdot [\phi_p (\tilde{\tau}_p + \tilde{\tau}_{\delta p})] \\ & + \phi_p \tilde{\rho}_p g + D_p \end{aligned} \quad (2.45)$$

La correspondiente ecuación para la mezcla es

$$\begin{aligned} \rho_m \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_m + \rho_m (\bar{u}_m \cdot \nabla) \bar{u}_m = \\ -\nabla p_m + \nabla \cdot (\tau_m + \tau_{\delta m} + \tau_{Dm}) + \rho_m g \end{aligned} \quad (2.46)$$

se han despreciado las fuerzas de tensión superficial y por lo tanto $M_m = 0$. Suponiendo que las presiones de las fases son iguales $p_m = \tilde{p}_p$, se elimina el gradiente de presión y como resultado obtenemos una ecuación para D_p

$$\begin{aligned} D_p = & \phi_p \left(\tilde{\rho}_p \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_{mp} + (\tilde{\rho}_p - \rho_m) \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_m \right) \\ & + \phi_p [\tilde{\rho}_p (\bar{u}_p \cdot \nabla) \bar{u}_p - \rho_m (\bar{u}_m \cdot \nabla) \bar{u}_m] \\ & - \nabla \cdot [\phi_p (\tilde{\tau}_p + \tilde{\tau}_{\delta p})] + \phi_p \nabla \cdot (\tau_m + \tau_{\delta m} + \tau_{Dm}) \\ & - \phi_p (\tilde{\rho}_p - \rho_m) g \end{aligned} \quad (2.47)$$

En la anterior ecuación se utilizó la definición de la velocidad de difusión \bar{u}_{mp} . Aplicando la aproximación del equilibrio local, se descarta el primer término que contiene la derivada temporal de \bar{u}_{mp} . Para el segundo término, se aproxima por medio de $(\bar{u}_p \cdot \nabla) \bar{u}_p \approx (\bar{u}_m \cdot \nabla) \bar{u}_m$.

Los tensores viscosos y de difusión se omiten ya que son muy pequeños comparados con los demás términos. Todos los efectos turbulentos no son considerados, en este caso la ecuación final simplificada para D_p es

$$D_p = \phi_p (\tilde{\rho}_p - \rho_m) \left[g - (\bar{u}_m \cdot \nabla) \bar{u}_m - \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_m \right] \quad (2.48)$$

Ya que D_p es una función de la velocidad de deslizamiento $\bar{u}_p - \bar{u}_c = \bar{u}_{cp} = u_{des} - \frac{D_{md}}{(1-c_p)\phi_p} \nabla \phi_p$, donde D_{md} es el coeficiente de dispersión turbulento (m^2/s), debido a remolinos turbulentos (vale cero cuando no se considera turbulencia). Por lo que la Ec. (2.48) es una formula algebraica para velocidad de difusión

$$\bar{u}_{mp} = (1 - c_p) \bar{u}_{cp}$$

El modelo de mezcla consiste de las Ecs. (2.34), (2.41), (2.43) y (2.48) junto con las ecuaciones constitutivas para los tensores viscosos.

2.8 Aproximaciones prácticas.

Para la confiabilidad del modelo en referencia a varios parámetros del material, que no están especificados en las ecuaciones constitutivas, están determinadas por medidas independientes en condiciones semejantes reportadas experimentalmente.

2.8.1 Viscosidad de la fase dispersa

En los modelos empíricos y analíticos, la viscosidad dinámica de una mezcla de dos fases ha sido desarrollada como una función de la fracción volumétrica. Usando una expresión para la viscosidad de la mezcla, la interfaz del **modelo Euler – Euler, flujo laminar** recupera la viscosidad de la fase dispersa usando la siguiente relación lineal propuesta por Enwald (1996) [8]

$$\mu_m = \phi_c \mu_c + \phi_d \mu_d \quad (2.49)$$

Una viscosidad simple para la mezcla que cubre todo el rango de concentración de partículas es el modelo tipo Krieger:

$$\mu_m = \mu_c \left(1 - \frac{\phi_d}{\phi_{d,max}} \right)^{-2.5\phi_{d,max}} \quad (2.50)$$

donde $\phi_{d,max}$ es el límite máximo de envoltura, que es predeterminado como 0.62 para partícula sólidas. La ecuación anterior puede aplicarse cuando $\mu_c \ll \mu_d$.

2.8.2 Transferencia de momento interfacial

En las ecuaciones, F_m denota la transferencia de momento interfacial, que es la fuerza que ejerce una fase sobre otra fase. Consideremos una partícula, gota o burbuja en el flujo de un fluido, que es afectada por un número de fuerzas, por ejemplo, fuerzas de arrastre, la suma de fuerzas de masa y fuerzas de elevación. Usualmente la fuerza más importante es la fuerza de arrastre, especialmente en fluidos con una alta concentración de sólidos dispersos y por lo tanto esta fuerza predefinida se incluye en el modelo Euler – Euler. La fuerza de arrastre sumada a la ecuación de momento está definida como:

$$\mathbf{F}_{arr,c} = -\mathbf{F}_{arr,d} = \beta \mathbf{u}_{des} \quad (2.51)$$

donde β es el coeficiente de fuerza de arrastre y la velocidad de deslizamiento se define como:

$$\mathbf{u}_{des} = \mathbf{u}_d - \mathbf{u}_c \quad (2.52)$$

La fuerza de arrastre sobre la fase dispersa es igual a la que actúa sobre la fase continua pero opera en la dirección contraria [17].

2.8.3 Presión del sólido

Para una mezcla fluido – sólido, es necesario un modelo para la presión del sólido, p_s . La presión del sólido modela la interacción de partículas debida a la colisión y fricción entre las partículas [17] [18]. El modelo de presión del sólido usa un gradiente de difusión $\nabla p_s = -G(\phi_c)\nabla\phi_c$ donde la función empírica G es dada por

$$G(\phi_c) = 10^{B_1\phi_c+B_2} \quad (2.53)$$

Los modelos predefinidos disponibles son los de Gidaspow y Ettehadieh,

$$G(\phi_c) = 10^{-8.7\phi_c+5.43} \quad (2.54)$$

Ettehadieh,

$$G(\phi_c) = 10^{-10.46\phi_c+6.577} \quad (2.55)$$

y Gidaspow

$$G(\phi_c) = 10^{-10.5\phi_c+9.0} \quad (2.56)$$

2.9 Algoritmos del resolvidor implícito dependiente del tiempo

Ya que se han establecido las ecuaciones de momento y continuidad, con sus respectivas ecuaciones constitutivas, es necesario implementar el algoritmo para la modelación, como se mencionó anteriormente, establecimos el Modelo de mezcla, con el objetivo de simplificar las condiciones de nuestro problema y considerarlo como si fuese un fluido de una fase y utilizar software especializado comercial para la solución. Nos apoyamos en el software COMSOL Versión 4.4, el cual incluye resolvidores implícitos del tiempo, en los que la discretización de elemento finito del PDE dependiente del tiempo es del tipo

$$0 = L(U, \dot{U}, \ddot{U}, t) - N_F(U, t)\Lambda \quad (2.57)$$

$$0 = M(U, t) \quad (2.58)$$

la cual es frecuente referirse como el *Método de Líneas (MOL, Method of Lines)*. Antes de resolver este sistema, se requiere eliminar los multiplicadores de Lagrange Λ . Si las restricciones $0=M$ es lineal e independiente del tiempo y si la restricción de la fuerza Jacobiana N_F es constante entonces también se deben eliminar las restricciones desde el sistema. De otro modo, mantener las restricciones conduce a un sistema diferencial – algebraico.

En COMSOL, los resolvidores *IDA (Implicit Differential – Algebraic)* y *generalized – a* están disponibles para resolver sistemas de ODE (Ordinary Differential Equation) o DAE (Differential – Algebraic Equation).

IDA fue creado en el laboratorio Nacional de Lawrence Livermore y es una implementación modernizada del resolvidor de DAE, DASK, el cual usa Métodos de diferenciación hacia atrás con tamaño de paso variable (BDF).

Generalized - α es un método implícito de segundo orden con un parámetro α o ρ_∞ ($0 \leq \rho_\infty \leq 1$) para el control del amortiguamiento de altas frecuencias. Con $\rho_\infty=1$, el método no tiene amortiguamiento numérico. Para problemas lineales esto corresponde a la regla del punto medio. $\rho_\infty=0$ da el máximo amortiguamiento numérico; para problemas lineales las frecuencias más altas se anulan entonces en un paso. El método en un principio fue desarrollado para ecuaciones de segundo grado en mecánica estructural y más tarde extendido a sistemas de primer orden empleando reducción de orden.

Para esquemas implícitos de paso temporal, un resolvidor no lineal se utiliza para actualizar los valores de las variables en cada paso en el tiempo. El resolvidor no lineal utilizado ésta controlado por el resolvidor para nodos acoplados o segregados. Estos subnodos proveen control del proceso de solución no lineal: es posible seleccionar la tolerancia no lineal, el factor de amortiguamiento, que tan frecuente se actualiza el Jacobiano y otras configuraciones tales que el algoritmo resuelve el sistema no lineal más eficientemente.

Para el resolvidor BDF (IDAS) hay otras alternativas disponibles, empleando un resolvidor preconstruido. Esté resolvidor se utiliza cuando todos los nodos totalmente acoplados y segregados están inactivos. En éste caso está controlado por el resolvidor de los nodos activos [19].

La linealización sobre el sistema usando una iteración tipo Newton es:

$$E\ddot{V} + D\dot{V} + KV = L - N_F\Lambda \quad (2.59)$$

$$NV = M \quad (2.60)$$

donde $K = -\partial L / \partial U$ es la matriz de rigidez, $D = -\partial L / \partial \dot{U}$ es la matriz de amortiguamiento y $E = -\partial L / \partial \ddot{U}$ es la matriz de masa. Cuando $E=0$, D es frecuentemente llamada matriz de masa.

Cuando se usa IDA para problemas con derivadas temporales de segundo orden ($E \neq 0$), se introducen variables extras internamente de tal manera que es posible formar un sistema de derivadas temporales de primer orden. El vector de variables extras, U_v , se emplea con la ecuación extra

$$\dot{U} = U_v \quad (2.61)$$

donde U es el vector de las variables originales. Este procedimiento expande el sistema original de ODE o DAE al doble de su tamaño original, pero el sistema linealizado es reducido al tamaño original con la matriz $E + \sigma D + \sigma^2 K$, donde σ es un escalar inversamente proporcional al paso temporal. Configuración de la tolerancia absoluta para el resolvidor dependiente del tiempo.

Sea U el vector solución correspondiente a la solución en un determinado tiempo, y sea E el estimado del error (local) de U durante esté instante. Para el método, el paso se acepta

$$\left(\frac{1}{M} \sum_j \frac{1}{N_j} \sum_j \left(\frac{|E_i U_i|}{A_{us,i} + R|U_i|} \right)^2 \right)^{1/2} < 1 \quad (2.62)$$

donde $A_{us,i}$ es la tolerancia absoluta sin graduar para DOF i , R es la tolerancia relativa, M es el número de campos y N_j es el número de grados de libertad en el campo j . Los números $A_{us,i}$ son calculados desde una conversión del valor de entrada \mathbf{A}_k para la correspondiente variable dependiente k . Para los grados de libertad para las funciones de forma de Lagrange o para ODEs esos valores son los mismos como se introdujeron (esto es $A_{us,i} = \mathbf{A}_k$) [19].

A diferencia de un libro de mecánica de fluidos convencional, en esta área existe una gran variedad de términos semejantes para la descripción del fenómeno, por lo cual la necesidad de demasiados términos, bajo la suposición de fluidos newtonianos, no existe un marco general que abarque el fenómeno de fluidos multifase, por lo que nos limitamos a fórmulas experimentales para ciertas condiciones válidas.

Capítulo 3 Resultados.

3.1 Características generales.

En la hidráulica que estudia el comportamiento de los fluidos multifase, las leyes que la rigen no están totalmente establecidas ante la imposibilidad de definir de una manera sencilla el cambio de la geometría de las fases con el tiempo, por lo que su análisis precisa del apoyo de datos experimentales y de operación. En esta sección estableceremos los parámetros de operación de nuestro problema a modelar. Tomaremos de referencia, lo más próximo posible dada la importancia y cercanía local, el ferroaducto que se localiza en la mina del complejo siderúrgico de las Truchas, ubicado en la Ciudad de Lázaro Cárdenas, Michoacán, el cual cuenta con una longitud de 27 km y tiene un diámetro de 0.273 m (10.8 pulgadas) con capacidad del sistema de 1.5 millones de toneladas al año de concentrado de mineral [20]. Para el transporte de magnetita se recomienda una concentración de la mezcla entre 60 – 65 % en peso y 23 – 27 % en volumen mientras la granulometría el tamaño máximo es de 150 micras o malla 100 [21].

Tabla 3.1 Datos iniciales del sistema de transporte hidráulico de partículas sólidas.

Concepto	Símbolo	Valor	Unidades
Diámetro interno tubería	D_i	0.27	m
Densidad fase dispersa	ρ_d	4900	Kg/m ³
Densidad fase continua	ρ_c	1000	Kg/m ³
Concentración volumétrica fase dispersa	ϕ_d	0.27	-
Diámetro de partícula o diámetro de malla	d_p d_{50}	0.149	mm
Viscosidad dinámica del agua a 27 °C	μ_L	0.000852	Kg/m*s
Longitud de tubería	l	540	M

3.2 Cálculos con las ecuaciones experimentales.

Aplicando las ecuaciones experimentales para establecer un estimado de los parámetros de nuestra mezcla, comenzaremos con la Ec. (2.50) para la cual

$$\mu_m = 0.002067 \text{ Kg/m} \cdot \text{s} \quad (3.1)$$

con la que calcularemos la Ec. (1.6),

$$V_t = 0.06217 \text{ m/s} \quad (3.2)$$

debemos a calcular el número de Reynolds de la partícula con la Ec. (1.1) para verificar el régimen en el que se desarrolla nuestro problema, para la cual resulta $Re_p = 22$, que según lo establecido se encuentra en el *Régimen intermedio* ($1 < Re_p < 1000$).

En el cálculo de las velocidades V_3 , compararemos las Ecs. (1.13) y (1.19), con las respectivas modificaciones del factor de Durand. Para el cálculo de F_L utilizamos la Ec. (1.15)

$$F_L = \{(1.3C_v^{0.125})[1 - e^{-6.9d_{50}}]\} = \{(1.3(0.27)^{0.125})[1 - e^{-6.9 \cdot 0.14}]\} = 0.70894291 \quad (3.3)$$

aplicando el factor de Durand calculado a la Ec. (1.13) nos da el valor de

$$V_D = V_3 = F_L \left\{ 2gD_i \left[\frac{\rho_d - \rho_c}{\rho_c} \right] \right\}^{1/2} \\ = 0.70894291 \{ 2g(0.27)[(4900 - 1000)/1000] \}^{1/2} = 3.22 \text{ m/s} \quad (3.4)$$

ahora calcularemos el factor de Durand F_L por medio del número de Arquímedes A_r aplicando la Ec. (1.16)

$$A_r = \left(\frac{0.149}{1000} \right)^3 1000(4900 - 1000)g \frac{4}{3(0.000852)^2} = 232.46 \quad (3.5)$$

para lo cual $160 < A_r < 540$, $a = 1.19$, $b = 0.045$, que son los parámetros que se aplicaran en el cálculo del número de Froude, Ec. (1.17)

$$F_r = 1.19(232.46)^{0.045} = 1.52066237 \quad (3.6)$$

por ultimo obtenemos F_L a partir de la Ec. (1.18)

$$F_L = \frac{1.52066237}{\sqrt{2}} = 1.07527068 \quad (3.7)$$

que se aplicara en el cálculo de V_3 con la Ec. (1.13) obteniendo

$$V_3 = 1.07527068\{2g(0.27)[(4900 - 1000)/1000]\}^{1/2} = 4.887 \text{ m/s} \quad (3.8)$$

mientras que Newitt (1955) calcula V_3 en términos de la velocidad terminal V_t , Ec. (1.19)

$$V_3 = 17(0.06217885) = 1.05704 \text{ m/s} \quad (3.9)$$

Para el cálculo de la velocidad V_4 , aplicamos la Ec. (1.20)

$$V_4 = (1800 * g * 0.27 * 0.06217)^{1/3} = 6.580 \text{ m/s} \quad (3.10)$$

En el cálculo de la densidad de la mezcla, usamos la Ec. (2.35) la cual resulta

$$\rho_m = \sum_{\alpha=1}^n \phi_{\alpha} \tilde{\rho}_{\alpha} = 0.27 \cdot 4900 + (1 - 0.27) \cdot 1000 = 2053 \text{ Kg/m}^3 \quad (3.11)$$

en tanto que para el cálculo de la fracción de masa de la fase dispersa, aplicamos la Ec. (2.37)

$$c_{\alpha} = \frac{\phi_{\alpha} \tilde{\rho}_{\alpha}}{\rho_m} = \frac{0.27 \cdot 4900}{2053} = 0.644 \quad (3.12)$$

lo cual se encuentra dentro de lo recomendado para el porcentaje de la concentración en peso de la mezcla.

3.3 Modelación.

Los cálculos anteriores son una referencia de las condiciones en las que opera el sistema a partir de los reportes experimentales y recomendaciones técnicas. Es preciso diseñar las condiciones que se deberá llevar para implementar la modelación del sistema de transporte hidráulico de partículas sólidas, nos apoyaremos en COMSOL 4.4 que forma parte la mecánica de fluidos computacional, la cual consiste principalmente en resolver las ecuaciones diferenciales y/o algebraicas que gobierna el fenómeno en estudio, mediante técnicas y algoritmos numéricos [19]. En general, una simulación mediante Técnicas de mecánica de flujos computacional consta de 3 etapas:

1) Pre-procesado

- Generación de la geometría.
- Generación de la malla.

2) Procesado

- Definición de las zonas donde se impondrán las condiciones de borde (en este caso entrada, paredes y salida).
- Configuración de las condiciones de borde y condiciones en que se modelará.
- Configuración de las variables propias del modelo físico implementado en el procesador (por ejemplo valor y dirección de la aceleración de gravedad g).
- Asignación de las condiciones de control de la simulación (número de iteraciones, convergencia, paso de tiempo).

3) Post-proceso

- Generación de imágenes y resultados.

3.3.1 Pre-pocesado.

El programa COMSOL Ver. 4.4 donde se modelará el problema, supone distintos métodos para flujos bifásicos. Los modelos de aproximación del programa se clasifican en: modelo de aproximación Euler – Euler y modelos de aproximación Euler – Lagrangiano. El modelo de aproximación Euler-Euler es más general que el Euler – Lagrangiano y no está tan limitado en el tipo de morfología.

El modelo de aproximación Euler – Euler tiene las siguientes características:

Se suponen dos fases a partir de interpenetración continua, es decir, estas dos fases estarán presentes en todo el dominio del flujo. En general, el enfoque Euleriano – Euleriano, las ecuaciones se resuelven en base a fracciones de volumen y campos de variable de cada fase. La fase dispersa Euleriana se caracteriza por representar un solo diámetro. Se implementa el modelo de mezcla el cual se basa en el enfoque Euler – Euler.

Se dibuja la geometría del tramo recto de tubería con COMSOL, en orden de metros, medida que se define dependiendo del tiempo que demoren las

simulaciones y el número de casos que se exponga. Por simplicidad en el modelado, dado que contamos con recursos computacionales limitados, se optó por una geometría 2D, representado la tubería por un rectángulo para la cual se redujo la longitud a 20 metros para cuestiones de pruebas y se considera que no existe transferencia de calor.

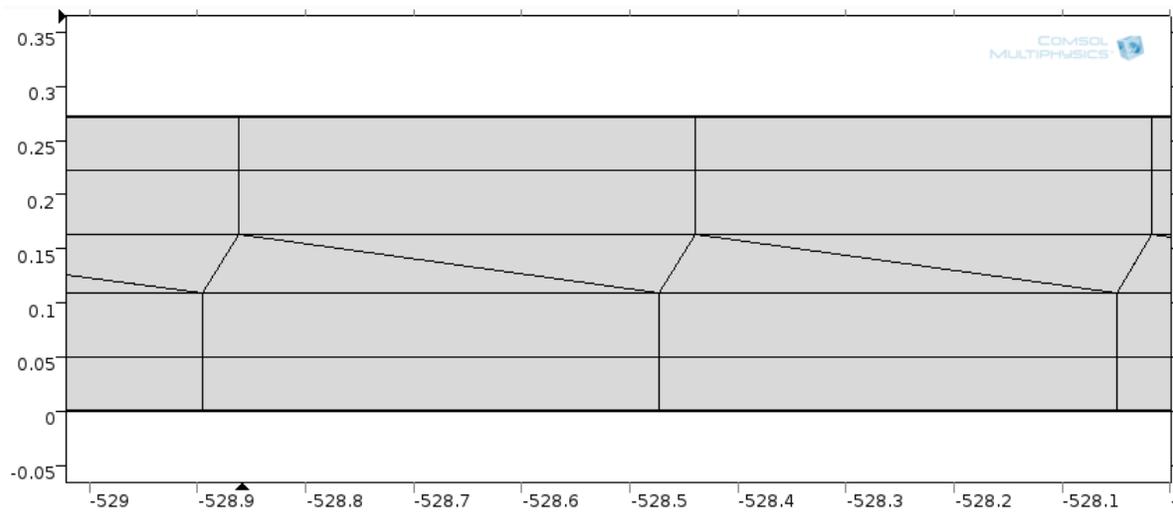


Figura 3.1 Mallado extremadamente grueso.

Conforme al estudio de la bibliografía en modelaciones multifase, las cuales presentan características físicas muy parecidas a las de este trabajo, se escoge el modelo de mezcla, ya que este modelo se ajusta más a las particularidades de la pulpa. La fase continua corresponde al agua y la fase dispersa corresponde a las partículas sólidas de material. El mallado es una de las partes más importantes de la modelación, ya que ésta será la encargada de captar las variables y sus valores que se requiere analizar, en particular en este trabajo la concentración y velocidad de la mezcla.

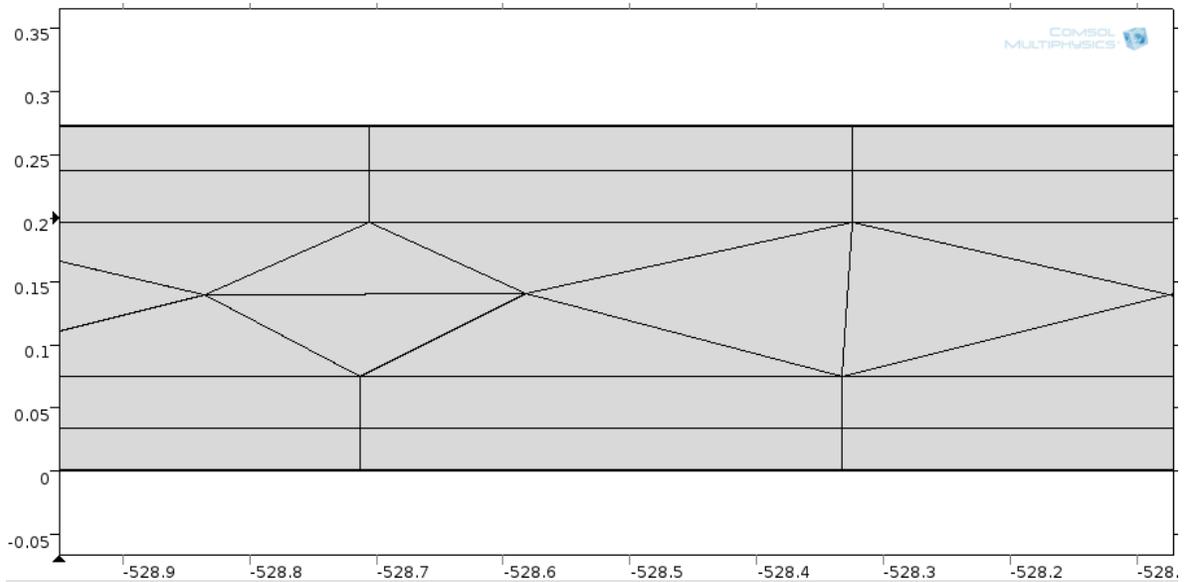


Figura 3.2 Mallado extremadamente fino.

La geometría que se adapta a nuestros requerimientos es relativamente sencilla, ya que no existen contornos o formas complejas, por lo que se utilizan rectángulos para la generación de la geometría, aún con lo anterior, la longitud de la tubería a modelar es demasiada grande con respecto al diámetro de la misma.

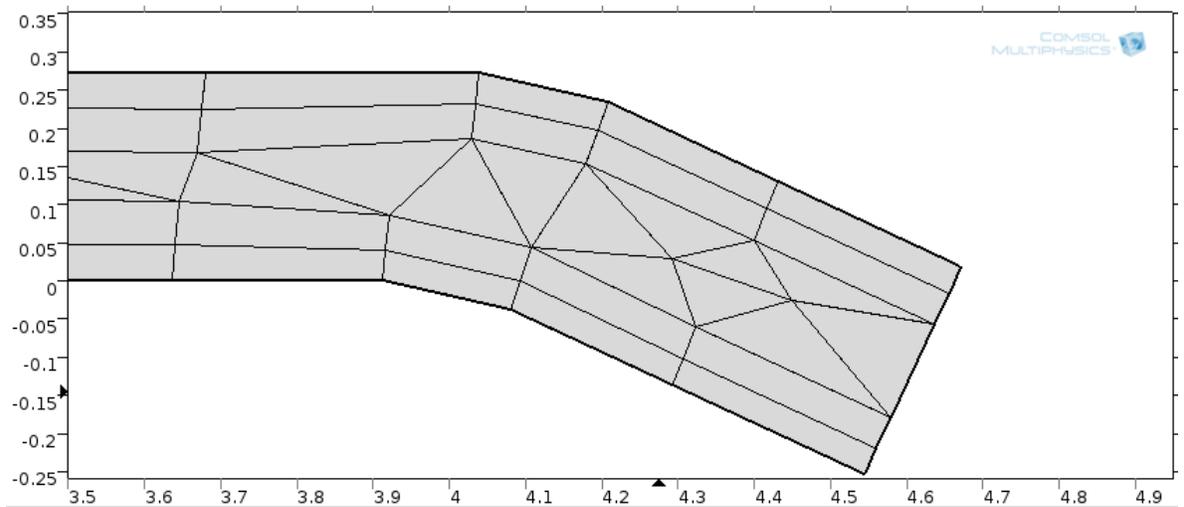


Figura 3.3 Detalle de mallado extremadamente grueso en salida de la tubería.

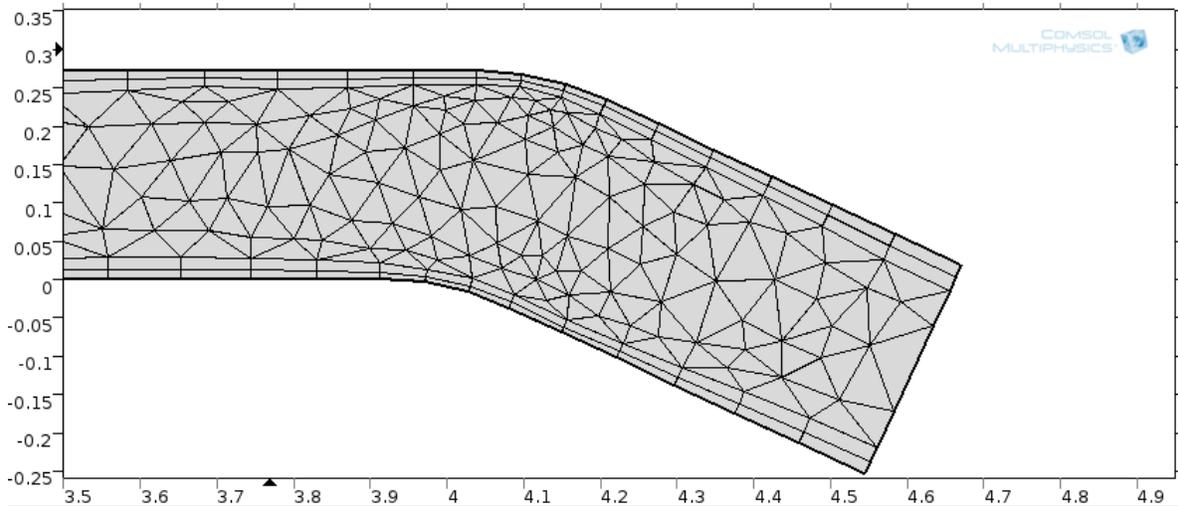


Figura 3.4 Detalle de mallado extremadamente fino en salida de tubería.

Luego de tener la geometría de lo que se desea modelar y el método de aproximación que se usa, se simula con el modelo de mezcla para flujos multifase, debiendo escogerse primeramente la malla más apropiada, sin tomar en cuenta la relación de aspecto entre el diámetro y la longitud de la tubería, se empezó a considerar un mallado extremadamente grueso como se muestra en las figuras 3.1 y 3.3, con el objetivo de tener pocos elementos y disminuir con ello el costo computacional.

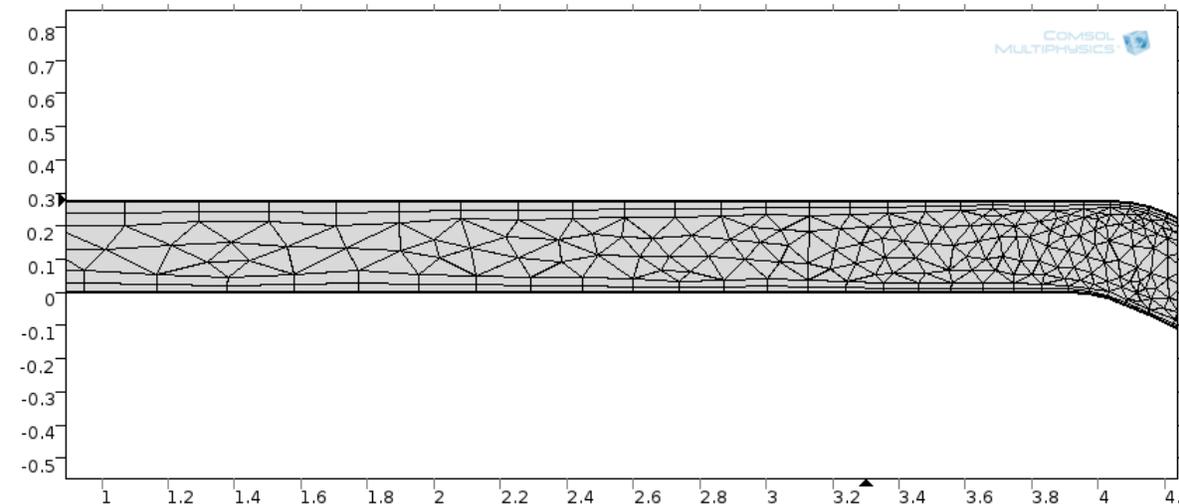


Figura 3.5 Detalle de mallado extremadamente fino.

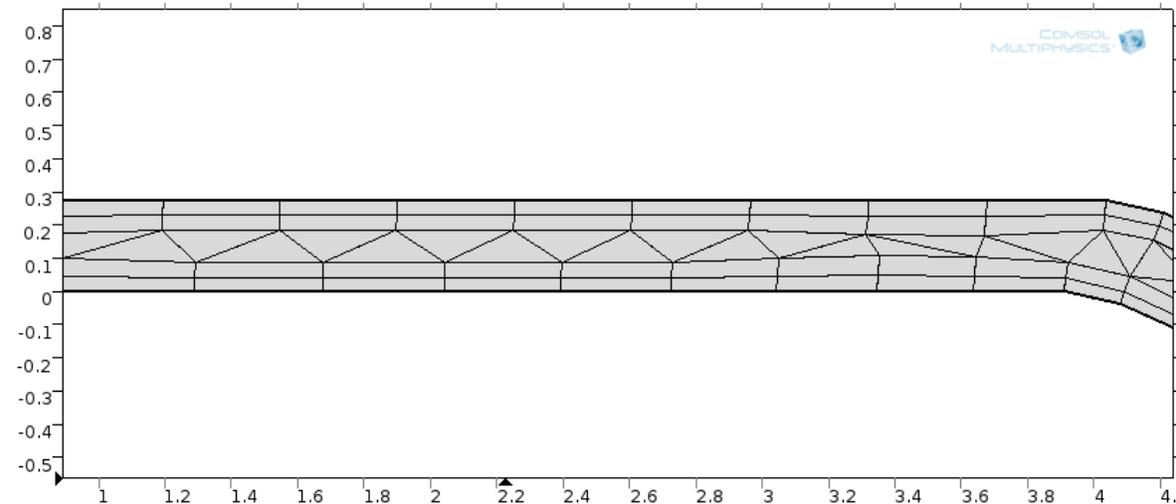


Figura 3.6 Detalle de mallado extremadamente grueso.

Los resultados que se obtuvieron con un mallado de elementos extremadamente gruesos fueron deficientes y mientras que el desempeño de la velocidad del algoritmo fue demasiado lento. No se logró captar los efectos en las variables macroscópicas sujetas a observación. En algunos casos, era de baja calidad los elementos del mallado que provocaban errores de volcado de memoria e inestabilidad del algoritmo debido a singularidades, a pesar de tener contornos muy regulares en la geometría como se muestra en la figura 3.6 en comparación de la figura 3.5.

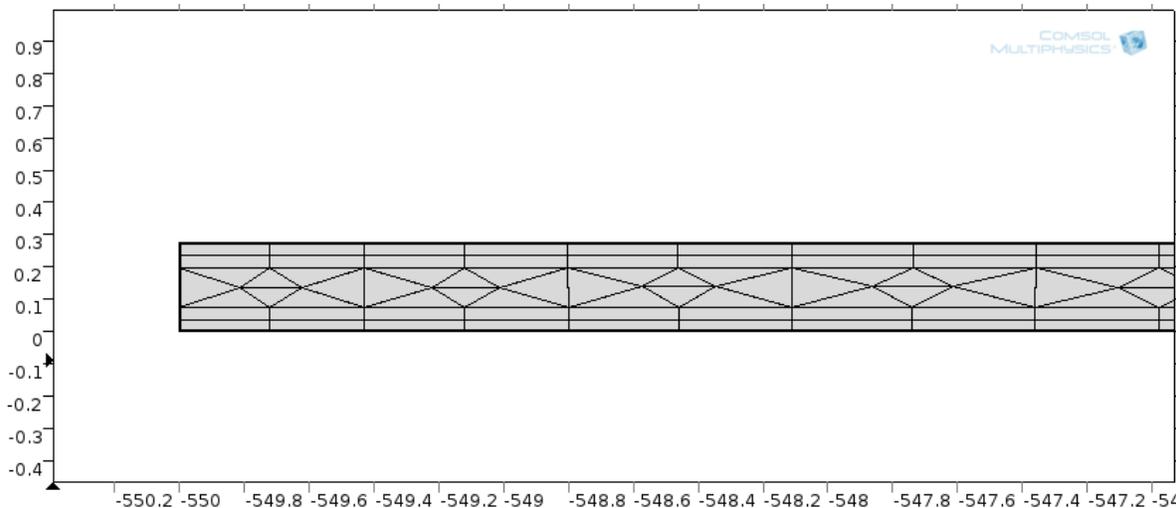


Figura 3.7 Detalle de mallado extremadamente fino en entrada de tubería.

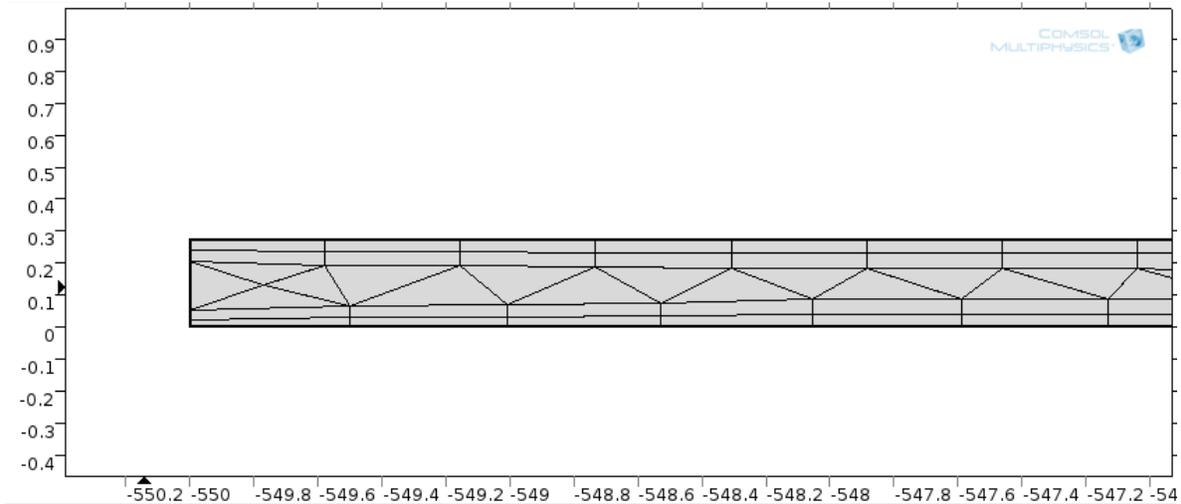


Figura 3.8 Detalle de mallado extremadamente grueso en entrada de tubería.

Esto se atribuye a que el modelo transcurre en un régimen transitorio, por lo que en ciertas zonas se presentan algunas turbulencias, las cuales no podían ser captadas debido a la baja calidad de los elementos, aumentando con ello el consumo de recursos computacionales. La fineza de la malla se va aumentando en forma gradual, de modo de comparar los resultados para finalmente escoger una malla que garantice una mayor resolución en el resultado. Conforme se refina el mallado aumenta la calidad de los elementos de malla como se muestra en la figura 3.4 y 3.13, se observa una mejoría en el desempeño y mayor estabilidad del algoritmo al desarrollarse con mayor rapidez y los resultados obtienen una mayor precisión, los datos estadísticos de los elementos del mallado extremadamente fino se muestra en la tabla 3.2.

Tabla 3.2 Datos estadísticos del mallado.

MESH STATISTICS

Property	Value
Minimum element quality	0.05664
Average element quality	0.25
Triangular elements	5014
Quadrilateral elements	5924
Edge elements	2974
Vertex elements	8

Con la geometría establecida, podemos observar que la calidad promedio de elementos es del 0.25, en las figuras 3.9 y 3.13 se aprecian la calidad de elementos de mallado cercanos a 1 en la zona donde se encuentran los contornos menos regulares y la posibilidad de presencia de fenómenos de turbulencia.

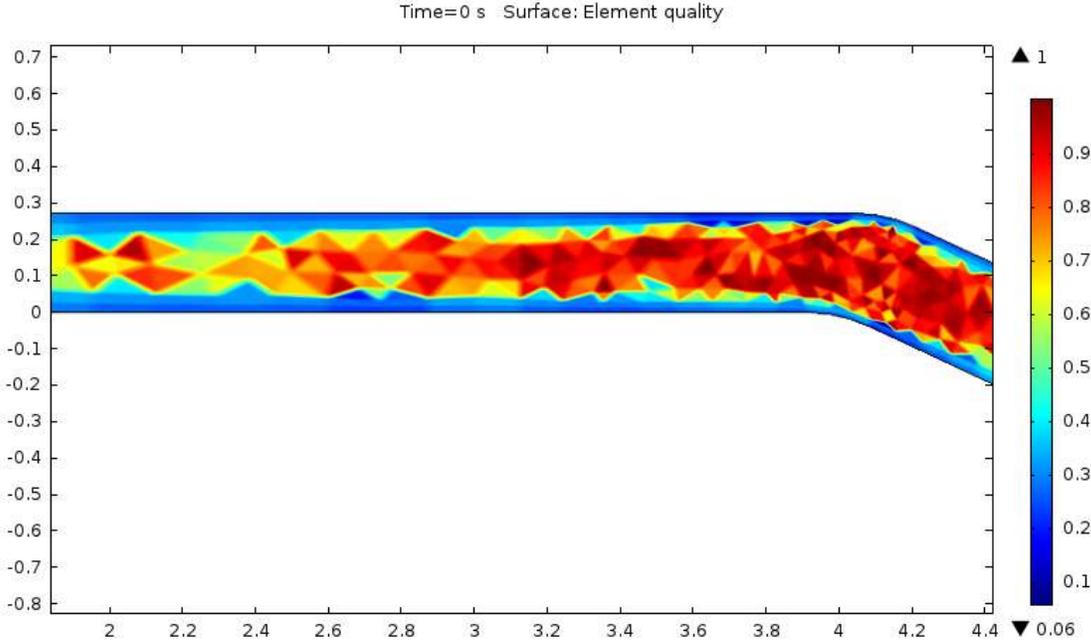


Figura 3.9 Calidad de elementos de mallado cercanos a 1 en salida de la tubería.

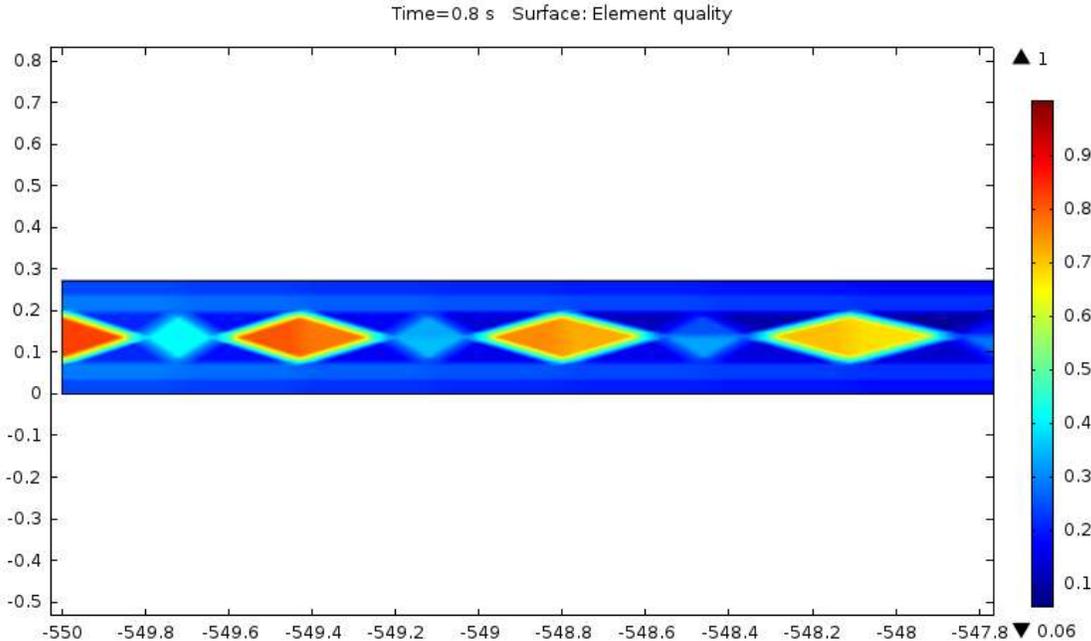


Figura 3.10 Detalle de calidad de elementos de mallado en la entrada de tubería

En la parte media de la tubería se aprecia la calidad de elemento de mallado más baja como se muestra en la figura 3.11 en tanto que en la entrada de la tubería se aprecia un aumento de la calidad como se muestra en la figura 3.10 la cual disminuye conforme se avanza en la tubería (figura 3.12) y vuelve a incrementarse al acercarse a la salida de la tubería.

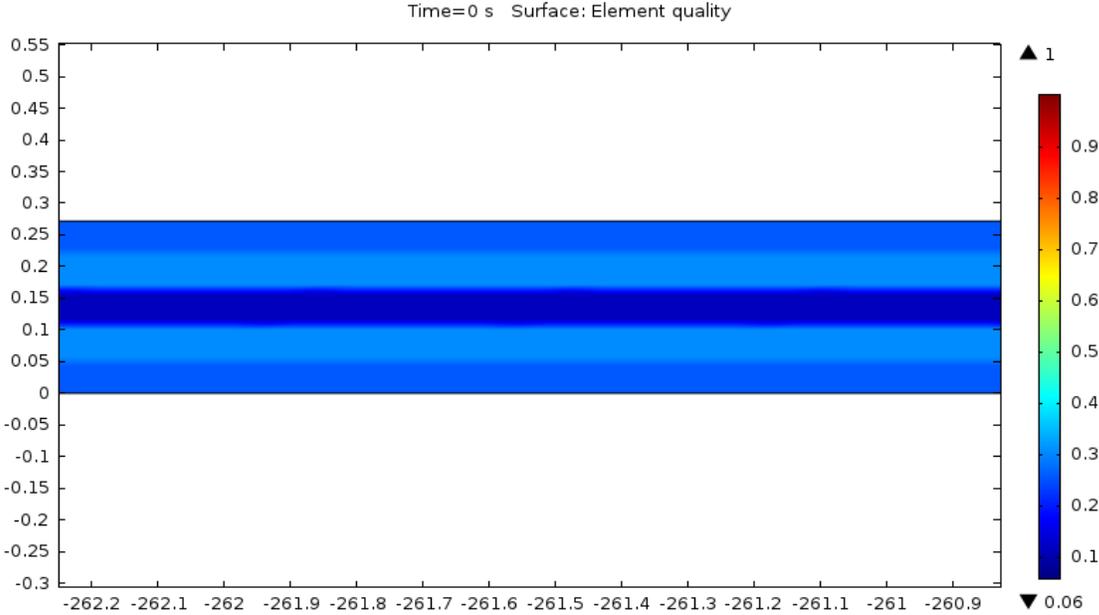


Figura 3.11 Calidad de elementos de mallado en la parte media de la tubería.

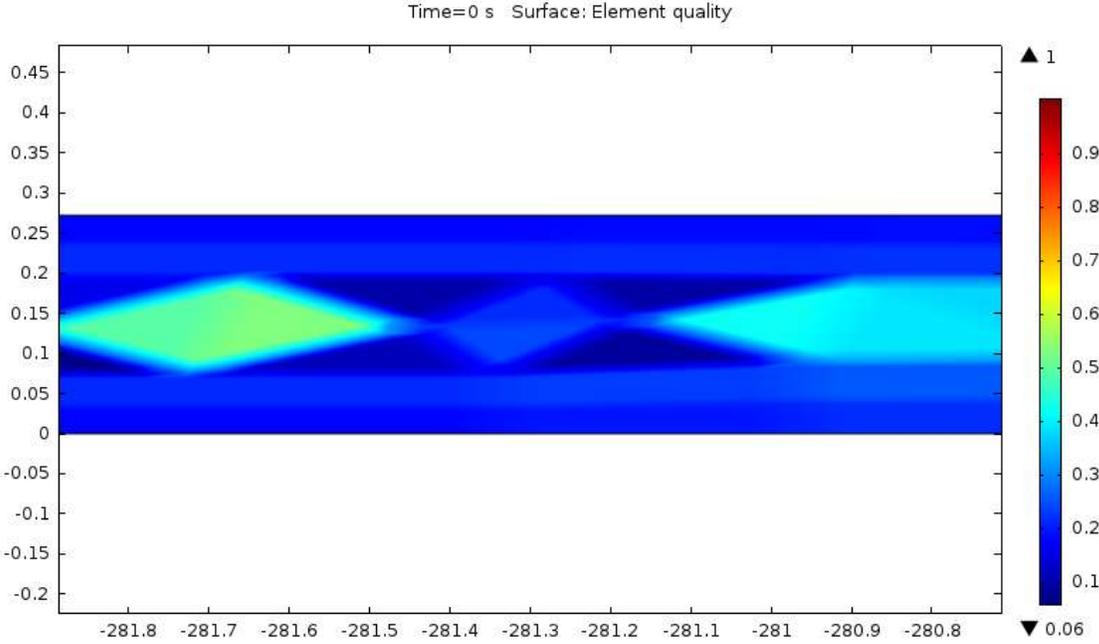


Figura 3.12 Disminución de la calidad del mallado en la tubería.

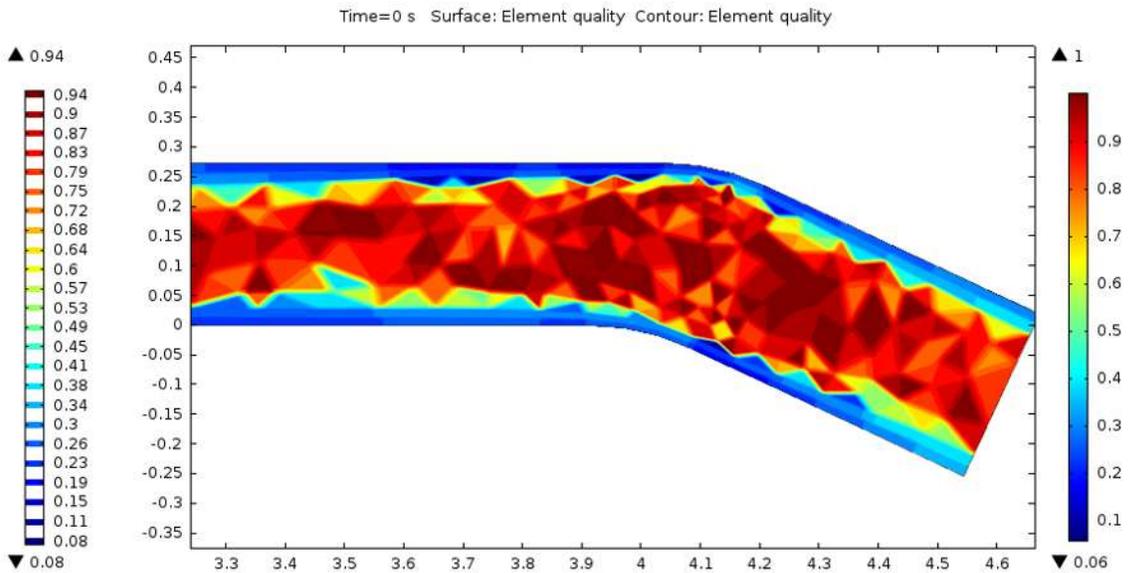


Figura 3.13 Detalle de la calidad de elementos de mallado cercanos a 1 en la salida de la tubería.

3.3.2 Procesado

En este momento, se procede a establecer que contornos tendrán la función de entrada, salida y paredes así como definir las condiciones con las que operaran.

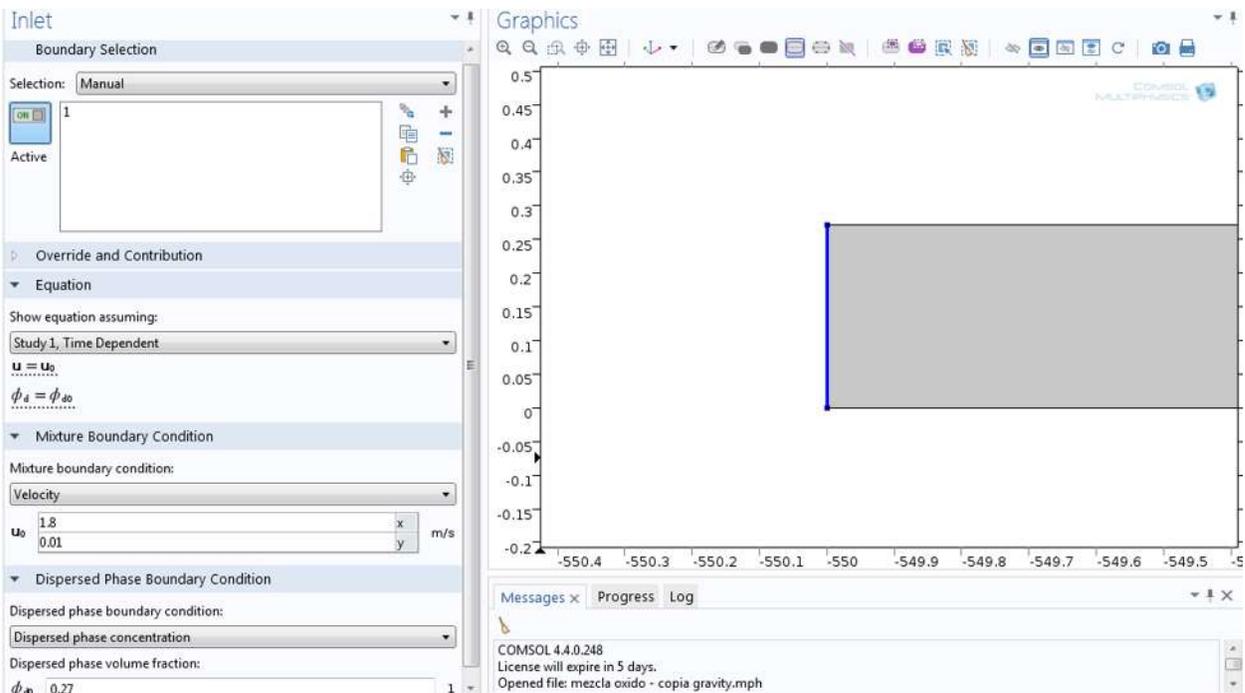


Figura 3.14 Configuración del contorno de la entrada de tubería.

Para las condiciones que operan en la arista que funciona como entrada física de la tubería como se muestra en la figura 3.14, se establece una condición tipo Dirichlet [14], con valor de 1.8 m/s en la componente x y de 0.01 m/s en la componente y, mientras que la concentración volumétrica con la que es suministrada la mezcla es de 0.27 como se recomienda para su operación.

En la figura 3.15 se establecen las condiciones de los contornos que operaran como paredes, se configura una condición de no deslizamiento con la intención de simular la rugosidad de la tubería y la condición de no existencia de flujo a través de dichos contornos dado que no existe filtraciones en las paredes de la tubería y se ha establecido la no transferencia de calor desde la mezcla hacia el medio que envuelve la tubería y viceversa.

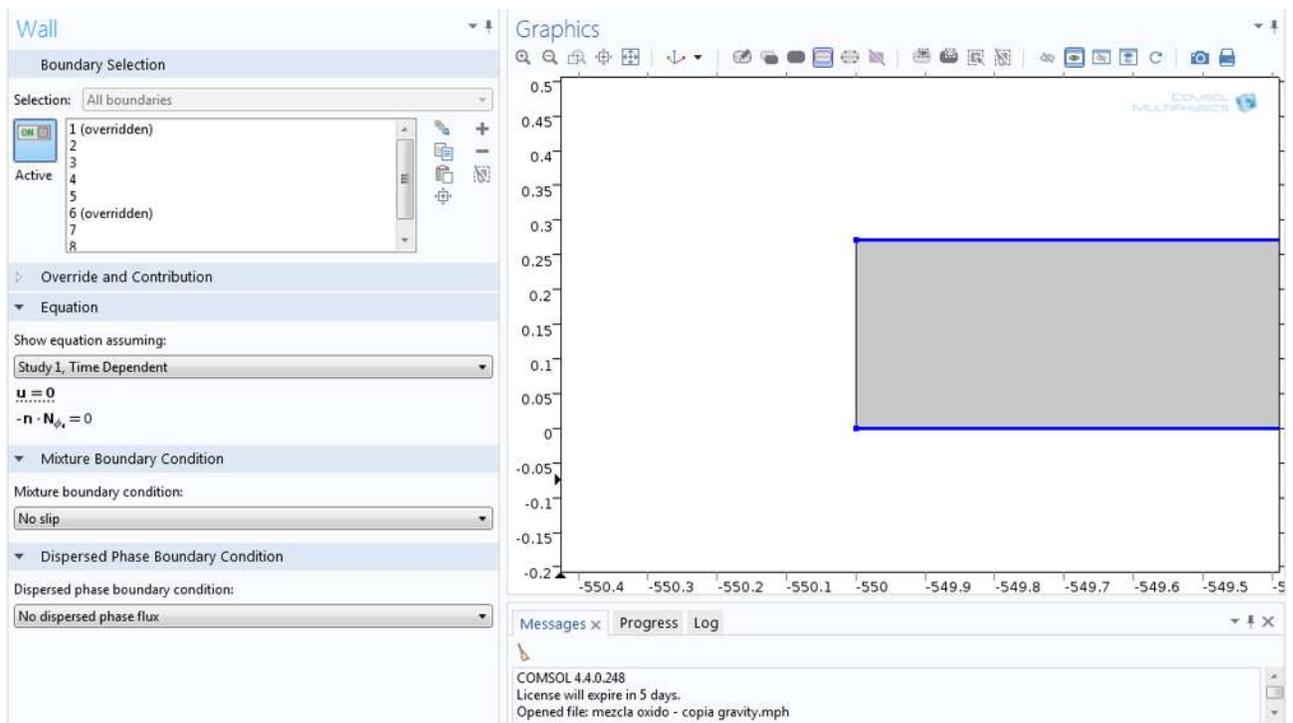


Figura 3.15 Configuración de los contornos que funcionan como paredes.

En el contorno que se designó como salida, la componente de la velocidad en dirección normal de la frontera permanece sin cambios estableciendo una condición de frontera tipo Neumann y para satisfacer la continuidad de la tensión, las fuerzas viscosas a lo largo de la frontera son tomadas como cero [14], con lo que no existe los efectos viscosos que a diferencia, por ejemplo, de las

condiciones de frontera en las paredes, donde existe los efectos viscosos, en la salida si existe un flujo a través del contorno (figura 3.16).

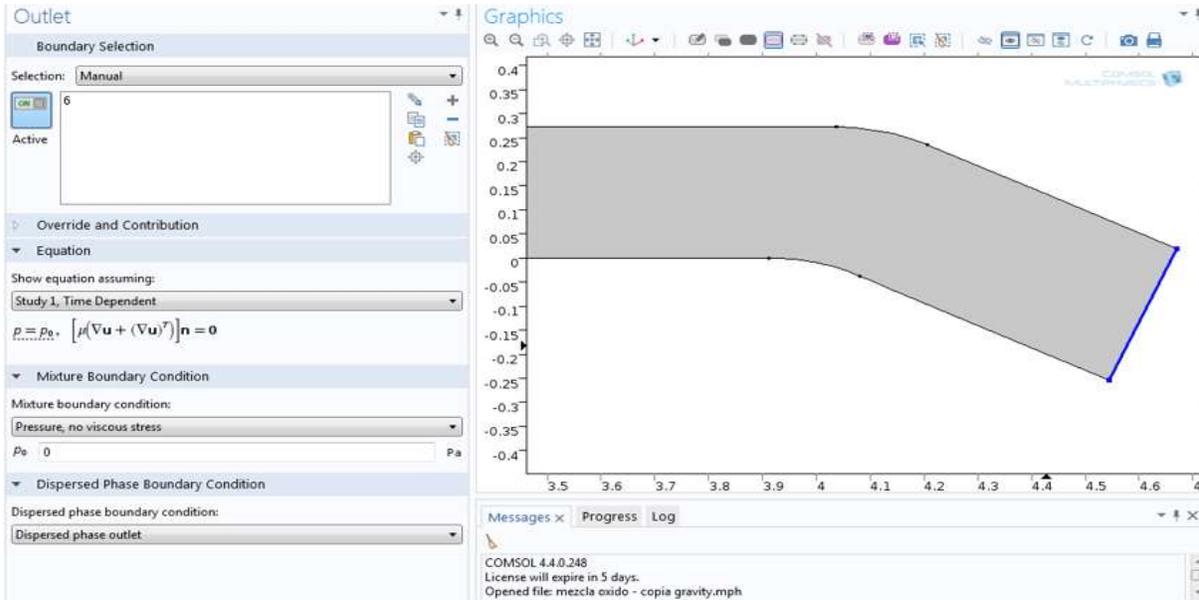


Figura 3.16 Configuración de la salida de la tubería.

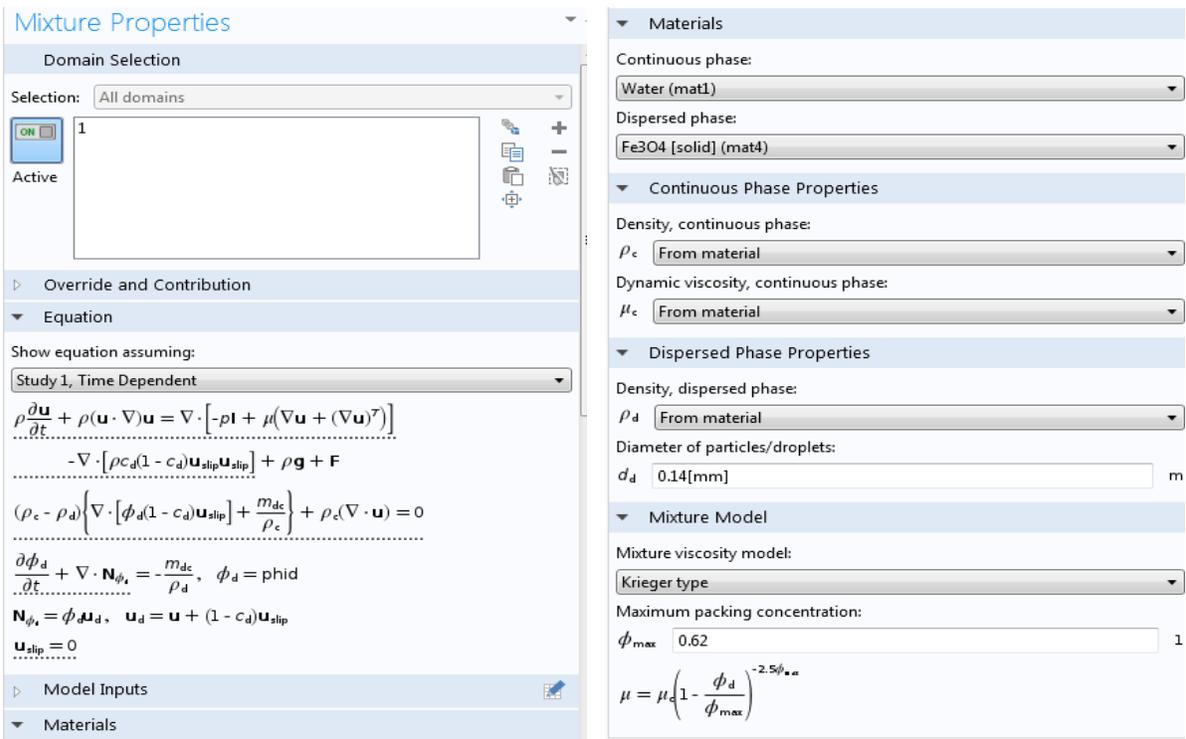


Figura 3.17 Configuración de las propiedades de la mezcla.

Es preciso establecer las propiedades de la mezcla, en la cual se designa para la fase continua al agua y como fase dispersa a la magnetita (Fe_3O_4) con partículas esféricas sólidas de diámetro 0.14 mm.

Para finalizar esta etapa, se configura el resolvidor dependiente del tiempo estableciendo el inicio, el paso y final temporal, así como las tolerancias como se muestra en la figura 3.18. Teniendo como paso temporal de 0.8 segundos y un tiempo final de 1700 segundos.

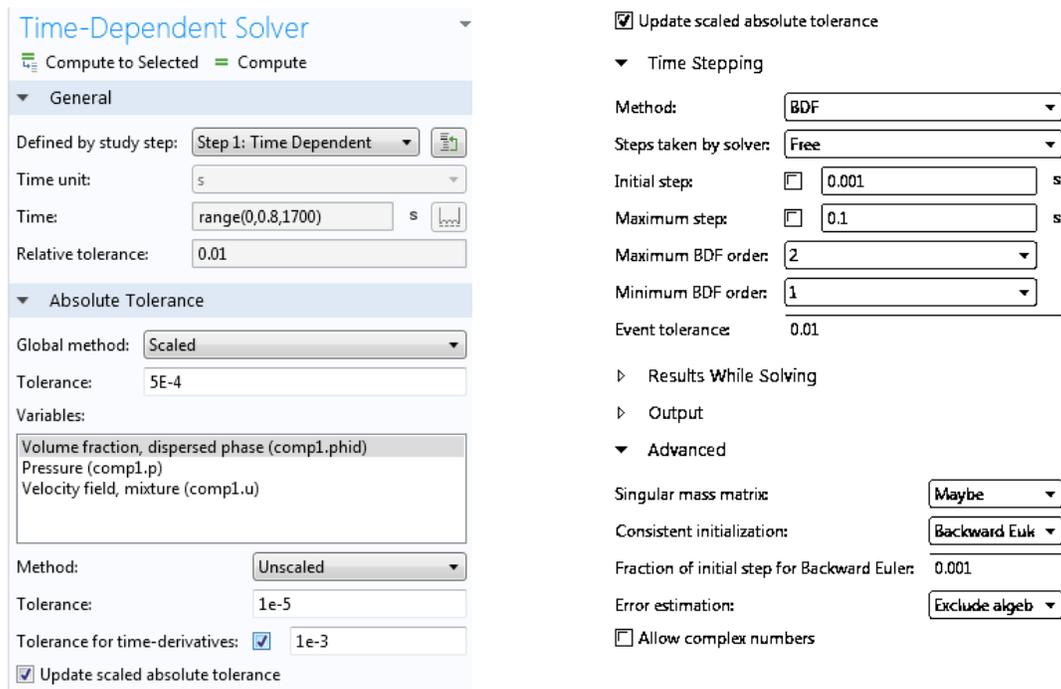


Figura 3.18 Configuración del resolvidor dependiente del tiempo.

3.3.3 Post-procesado.

El proceso definitivo para la generación de resultados finales, tuvo una duración de aproximadamente 6 días de compilación con el equipo disponible, el cual era una lap top marca Acer modelo Aspire 5741 – 5577 con un procesador Intel i3 350M y 4 Gb de memoria Ram. Se realizaron diversas pruebas para determinar los parámetros idóneos que se ajustaran a nuestro fenómeno a modelar, uno de los ajustes fue el mallado, primero se compiló el modelo con un mallado extremadamente grueso, observándose un desempeño muy bajo, ralentizando el algoritmo, aumentando el consumo de recursos computacionales y errores de memoria. Se continúa realizando pruebas refinando los elementos del mallado,

observándose un gradual aumento en el desempeño del algoritmo, hasta llegar a un mallado extremadamente fino, el cual nos brinda una mayor resolución en los resultados, una mayor estabilidad y desempeño del algoritmo. A continuación se presentan los resultados de las variables analizadas en tres puntos de la tubería en distintos momentos del fenómeno.

3.3.4 Densidad de la mezcla.

En una posición cercana a la entrada, a los 11.2 segundos de bombeada la mezcla se detecta presencia de la variación de densidad de la mezcla (figura 3.19), se manifiestan efectos tipo flujo anular (figura 3.20).

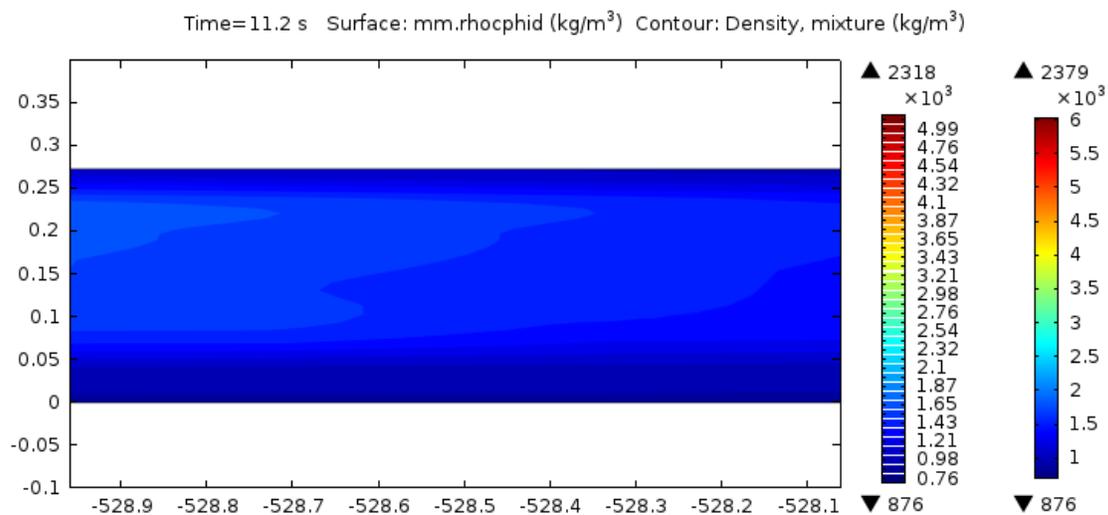


Figura 3.19 Densidad de la mezcla tiempo 11.2 s.

transcurridos 61.6 segundos comienza aparecer una estratificación en la parte inferior de la tubería, hay una estratificación con un espesor de aproximadamente 2 cm con una densidad de 4000 kg/m³ en la parte inferior mientras que en la parte superior ronda entre 2500 y 2100 kg/m³ (figura 3.21)

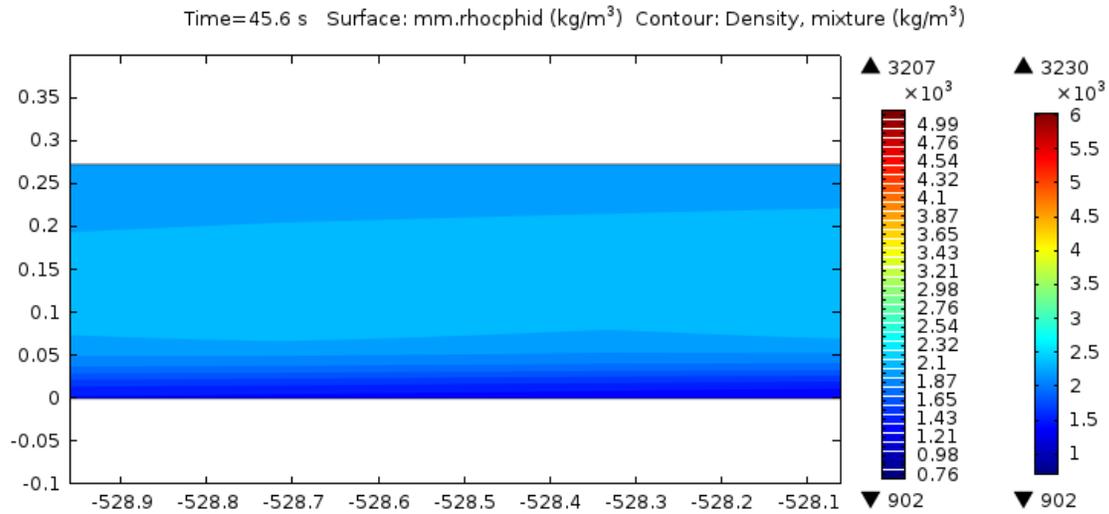


Figura 3.20 Densidad de la mezcla tiempo 45.6 s.

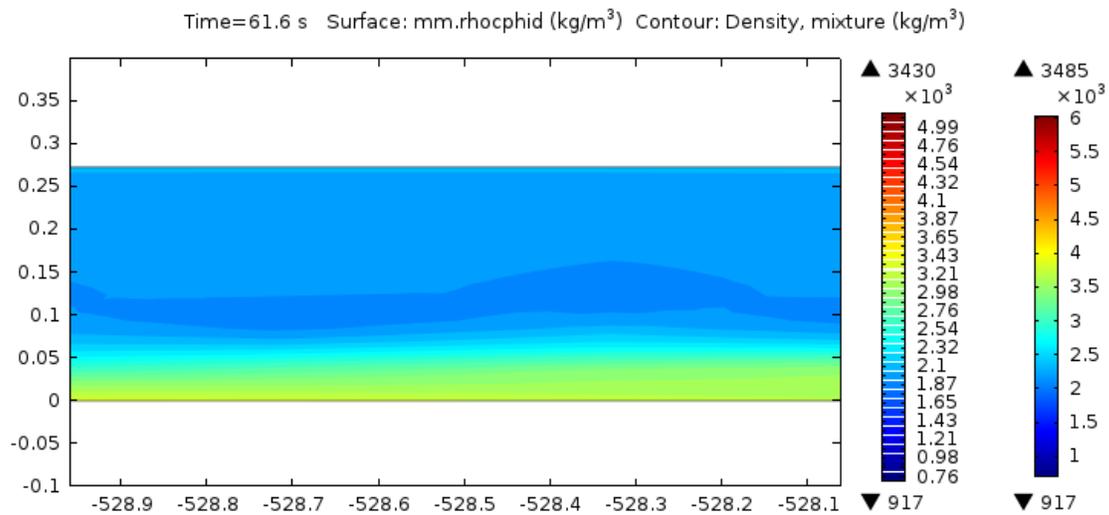


Figura 3.21 Se inicia a estratificar la mezcla.

en el tiempo de 167 segundos deja de estratificarse y comienza a presentar esporádicas fluctuaciones con ligera estratificación con variaciones entre 2100 y 2700 kg/m³ (figura 3.22).

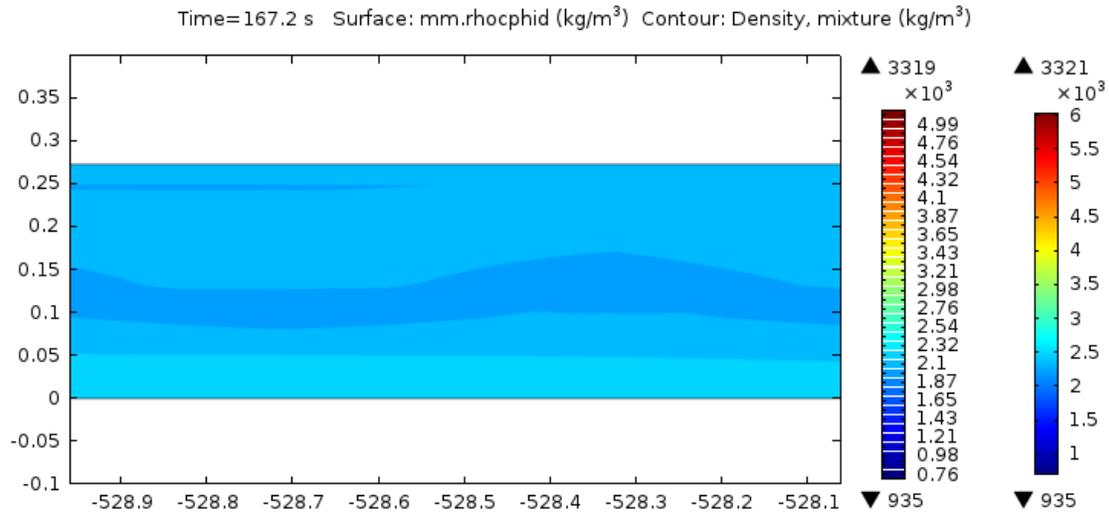


Figura 3.22 Fluctuaciones esporádicas.

transcurridos 320 segundos se homogeniza la mezcla a un valor de 2320 kg/m³ aproximadamente, con lo cual se mantiene así hasta el final del fenómeno.

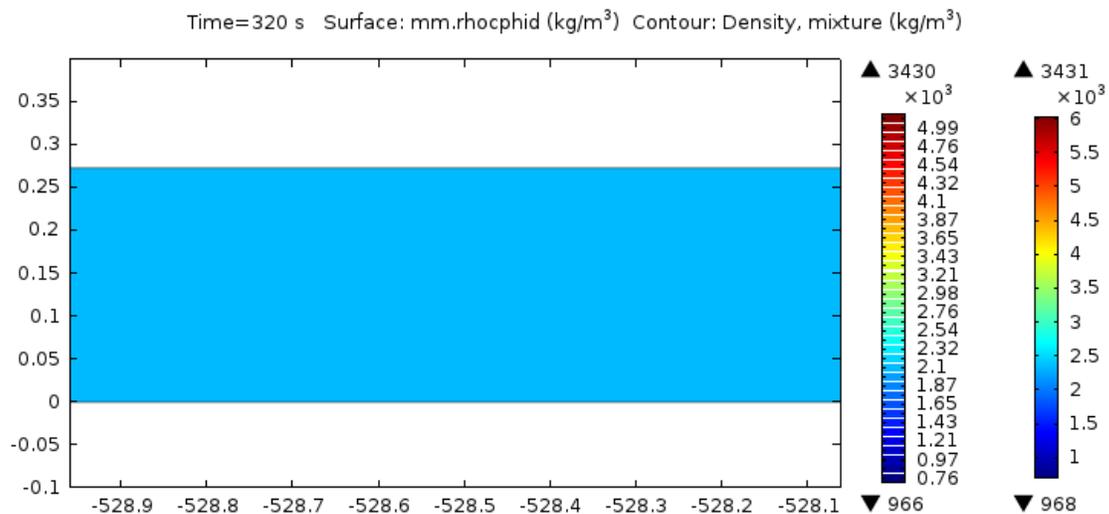


Figura 3.23 Mezcla homogenizada.

En la posición media de la tubería, transcurridos 145 segundos de bombeada la mezcla se comienza a percibir los efectos de la mezcla en forma de flujo anular (figura 3.24).

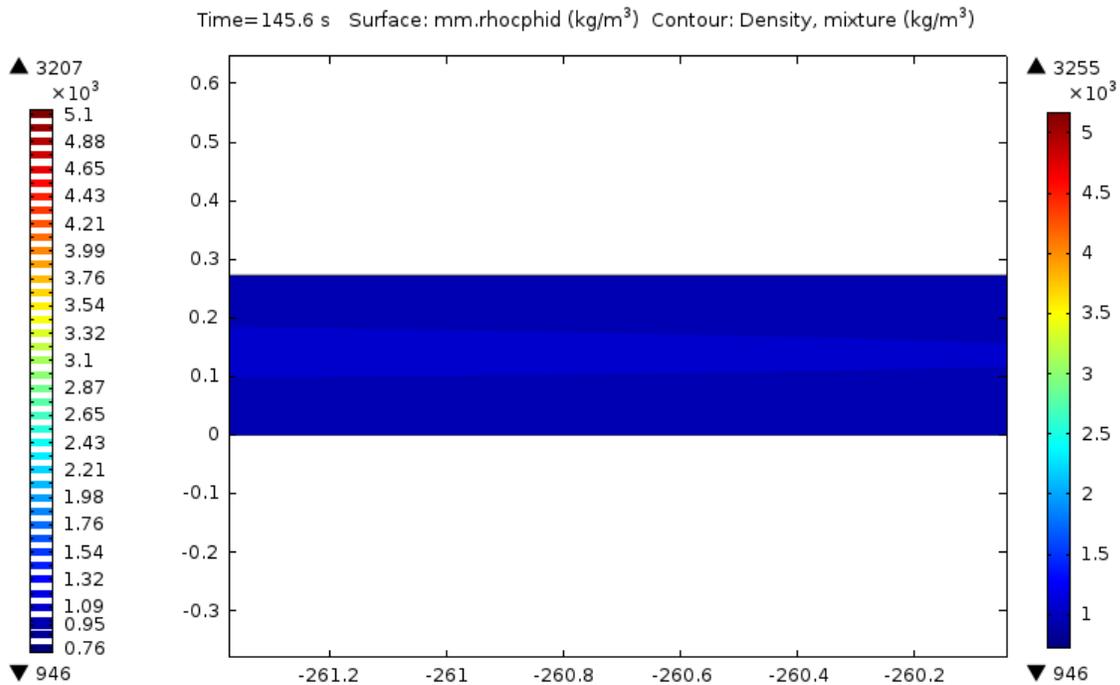


Figura 3.24 Efectos de la densidad de la mezcla.

Se observan ligeras estratificaciones durante la mayor parte del tiempo con un flujo heterogéneo, no es tan pronunciado el gradiente de densidad que rondan entre 2500 y 2000 Kg/m³ (figura 3.25 y 3.26)

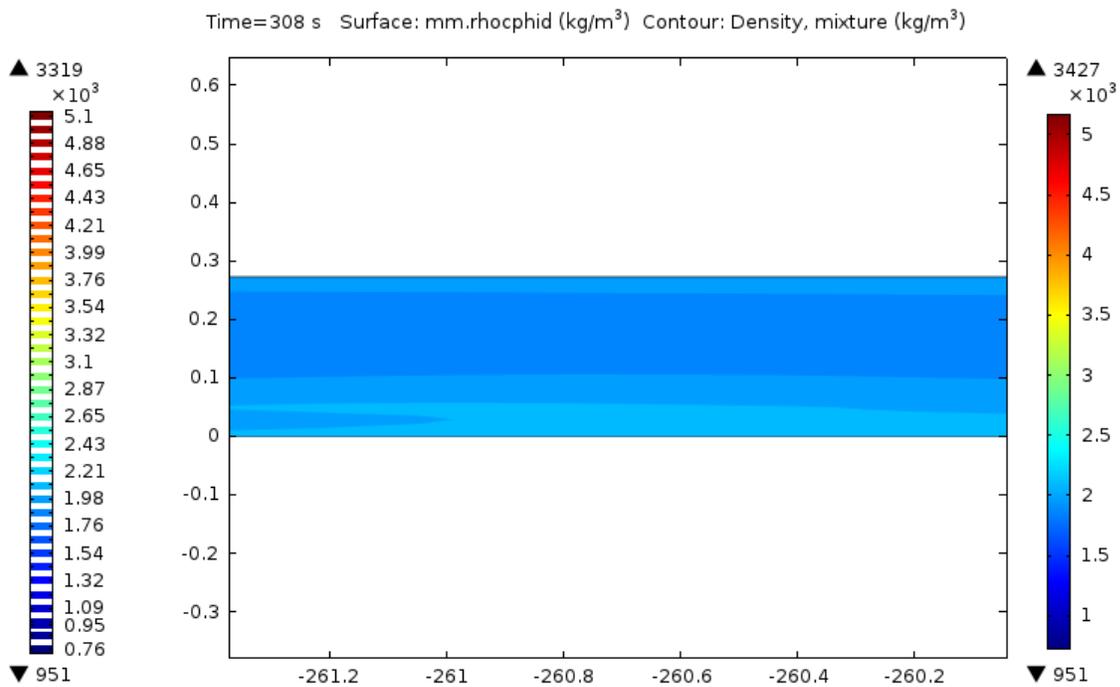


Figura 3.25 Flujo heterogéneo de la densidad de la mezcla.

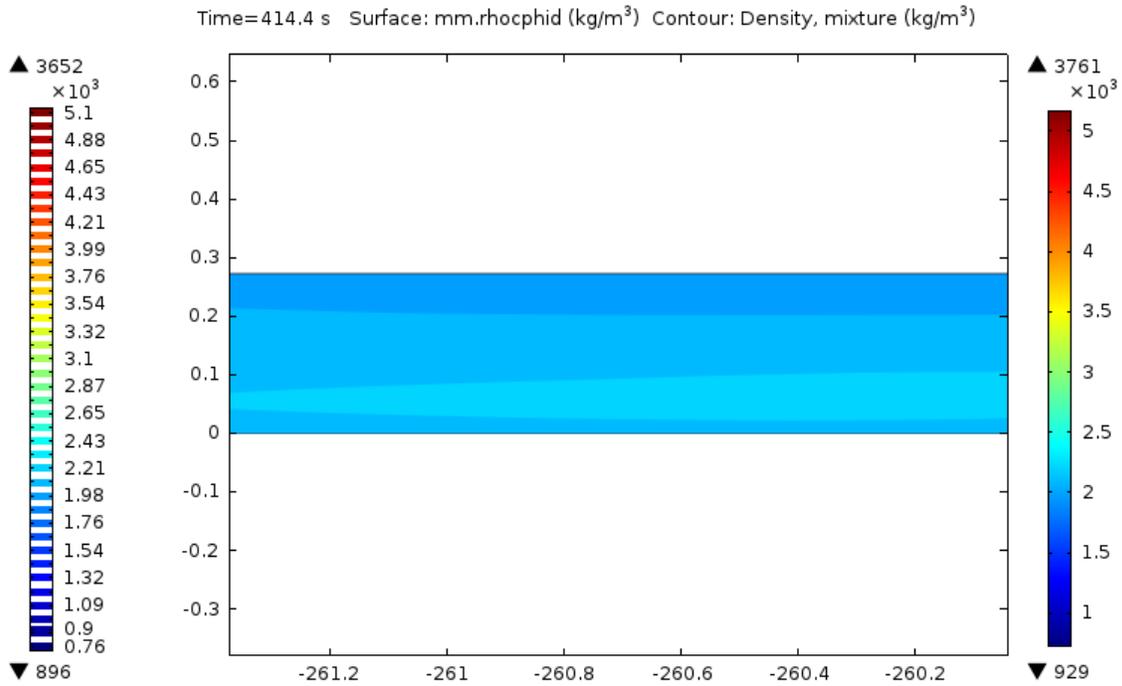


Figura 3.26 Estratificación de la densidad de la mezcla.

En la salida de tubería, transcurridos 320 segundos de bombeada la mezcla se comienza a percibir los efectos de la mezcla (figura 3.27).

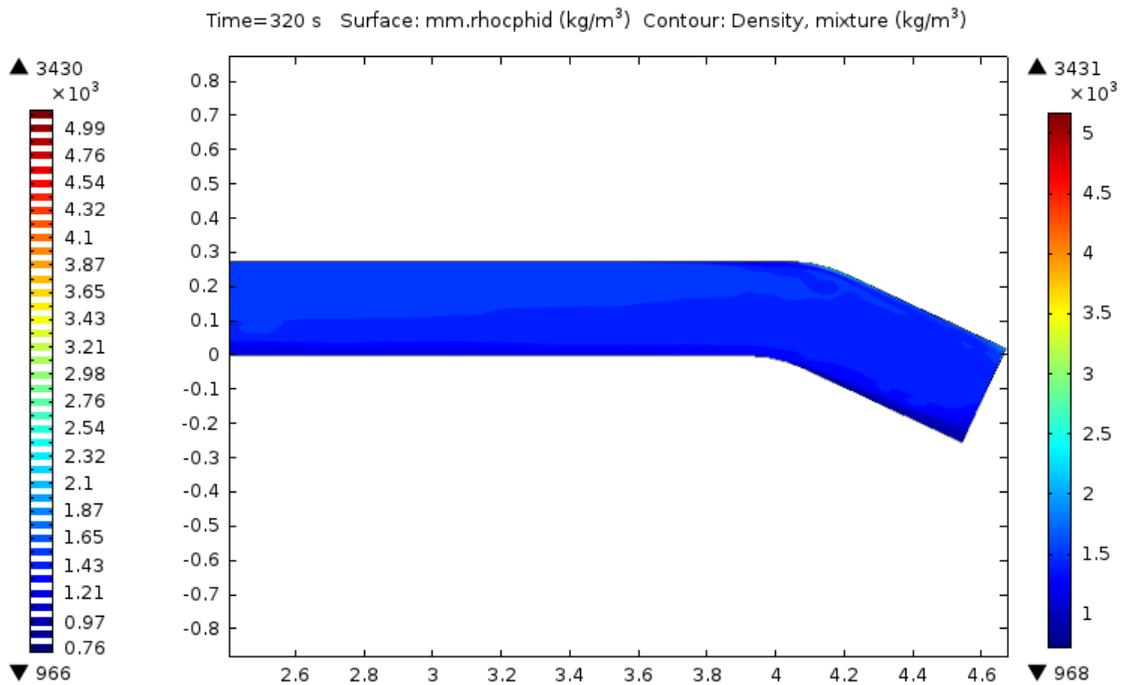


Figura 3.27 Llegada de la mezcla a salida.

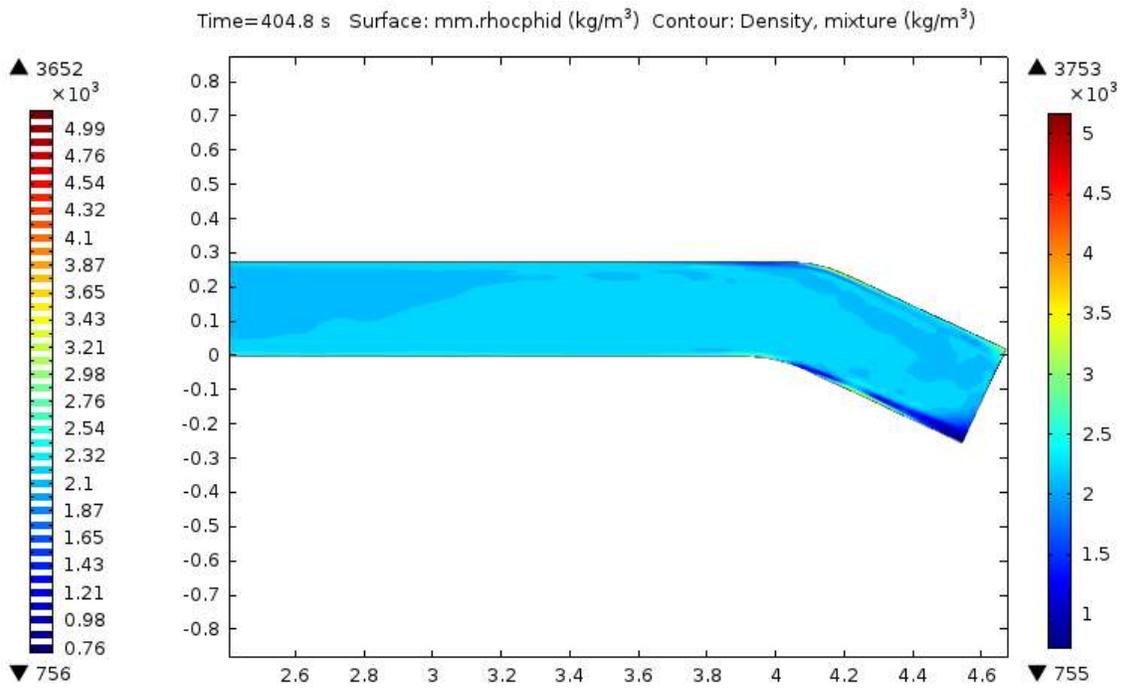


Figura 3.28 Fluctuaciones de densidad.

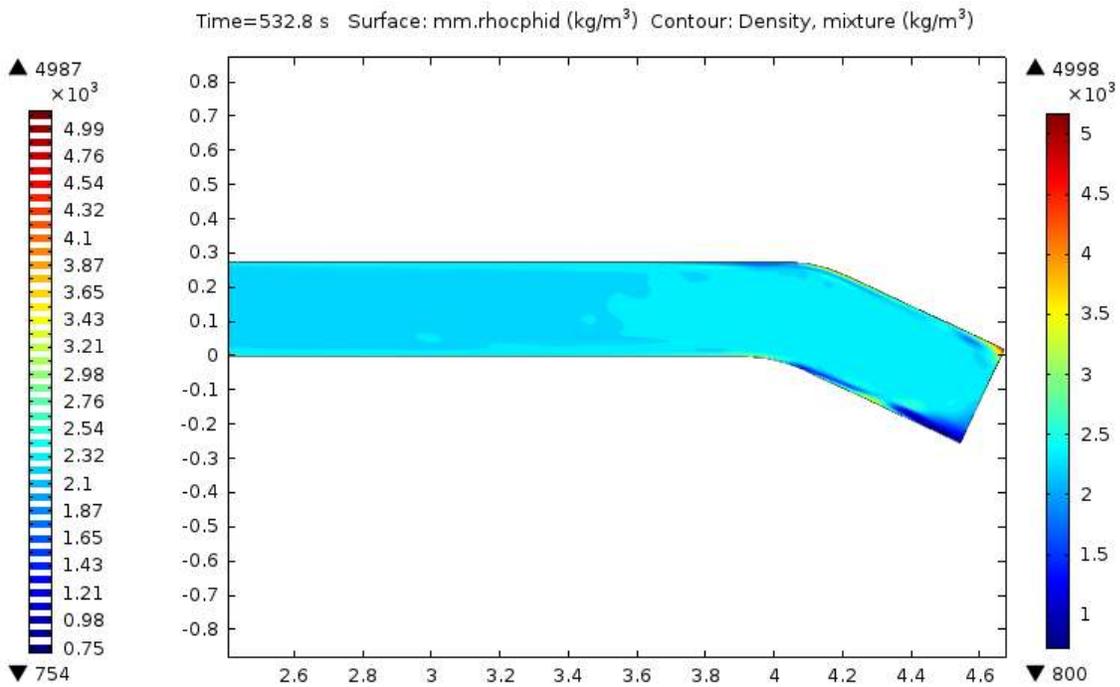


Figura 3.29 Se mantienen fluctuaciones.

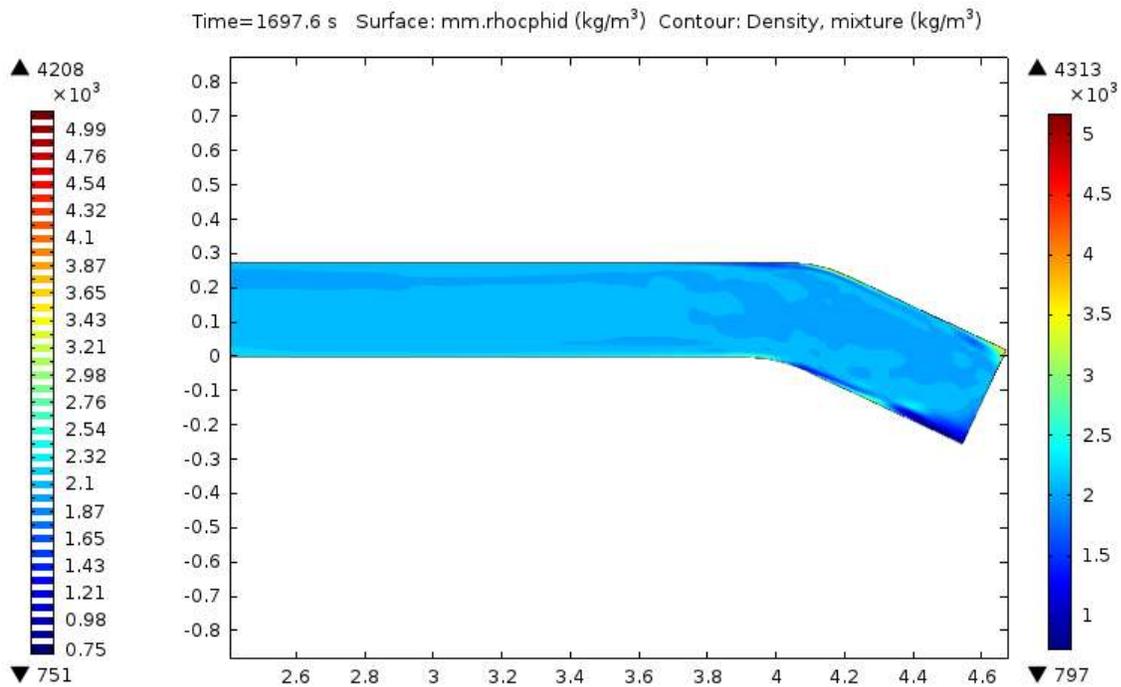


Figura 3.30 Presentación de ligeras estratificaciones.

En el transcurso del tiempo se observa que se presentan fluctuaciones en la densidad de la mezcla y ligeras estratificaciones hasta finalizar la simulación (figuras 3.29 y 3.30).

3.3.5 Volumen fraccional de la fase dispersa.

En una posición cercana a la entrada, se tomaran los mismos instantes que se usaron con la densidad, a los 11.2 segundos de bombeada la mezcla se detecta la presencia de la mezcla con un volumen fraccional máximo de 0.3 aproximadamente (figura 3.31).

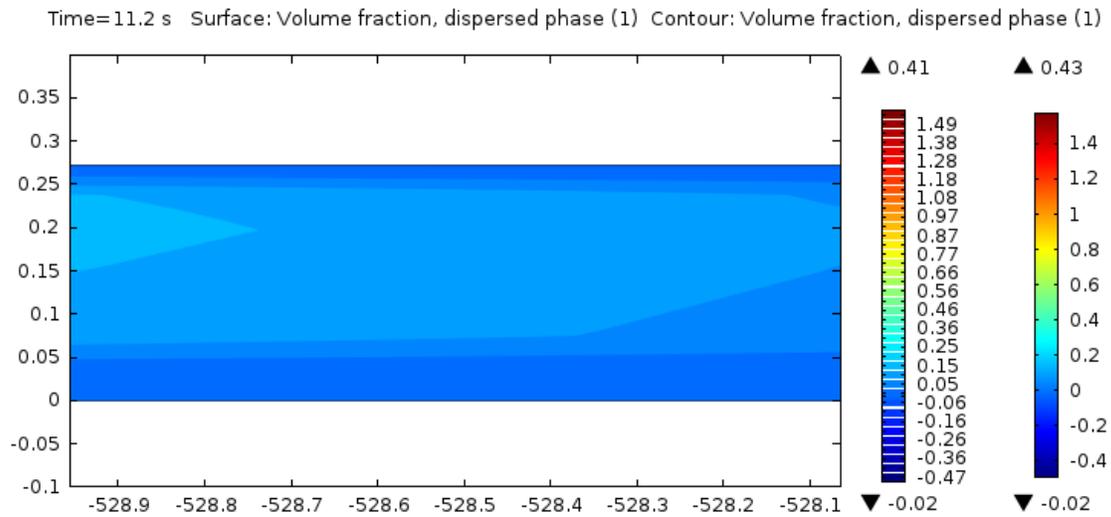


Figura 3.31 Llegada de la mezcla.

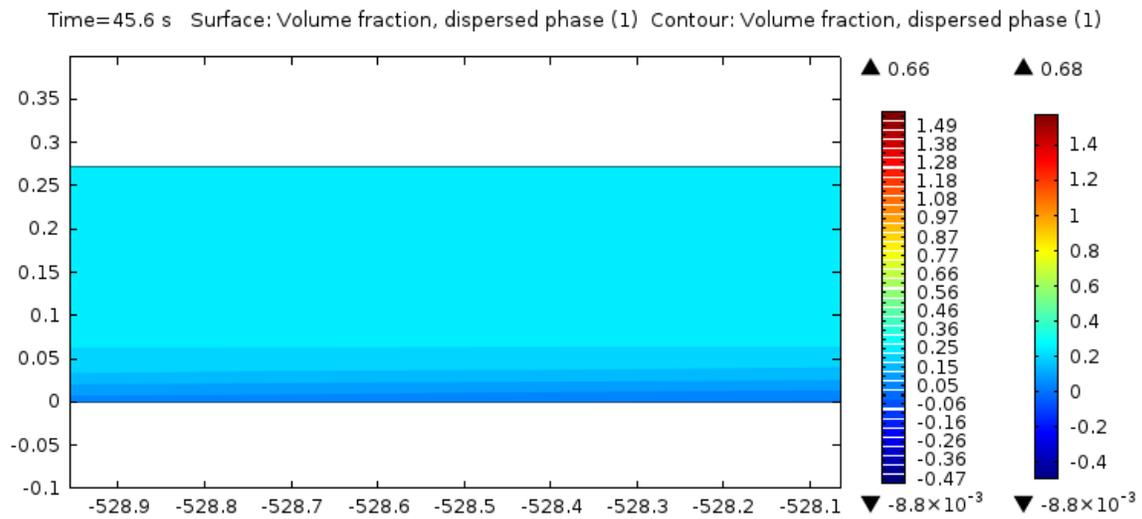


Figura 3.32 Inicio de homogenización.

En el tiempo de 45.6 s se observa que inicia a homogenizarse (figura 3.32), en tanto que a los 61.6 s se observa una estratificación (figura 3.33).

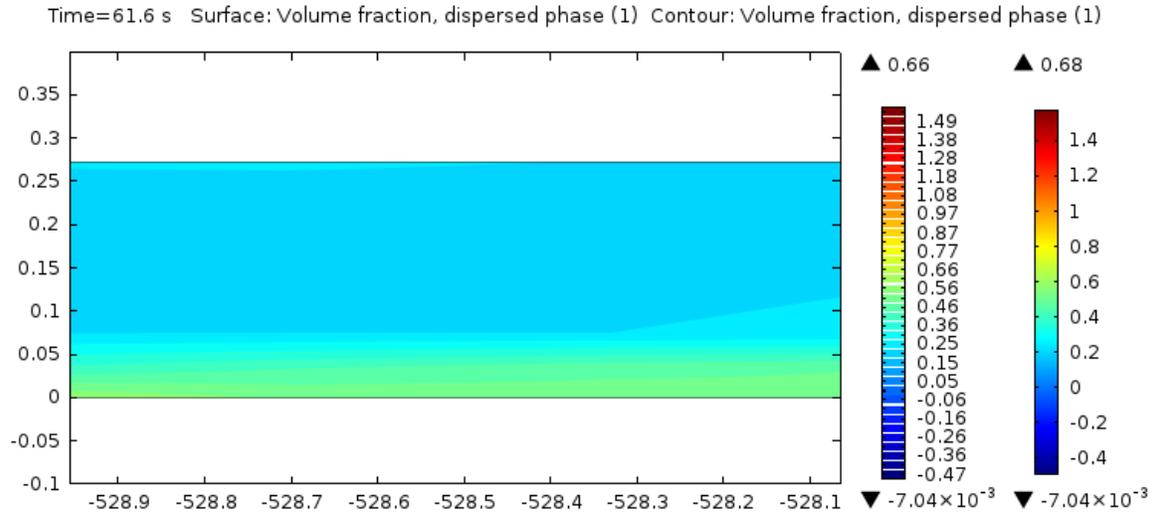


Figura 3.33 Flujo heterogéneo de la mezcla.

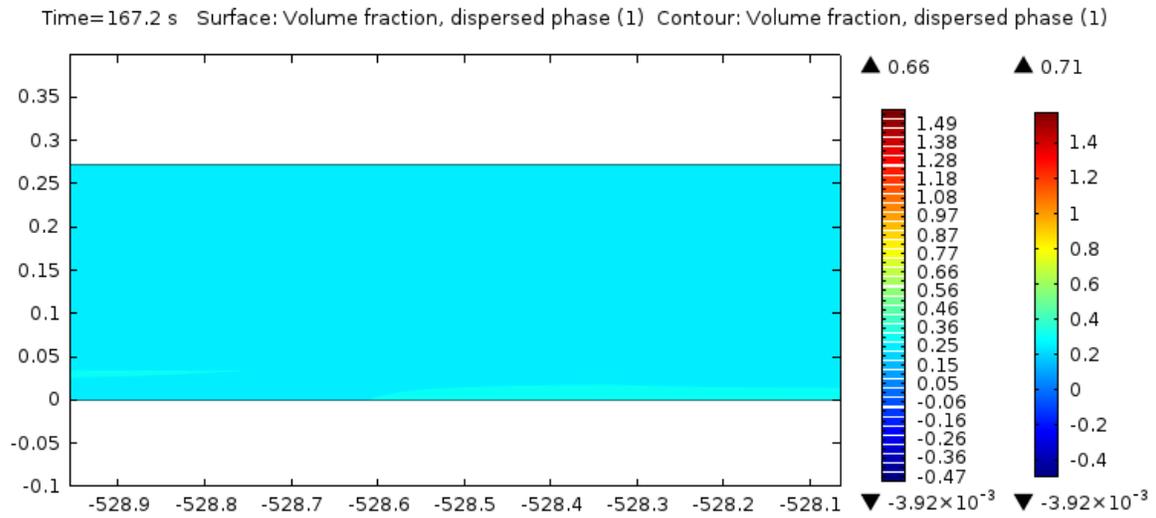


Figura 3.34 Ligeras fluctuaciones.

Con el paso del tiempo se observa muy pocas fluctuaciones (figura 3.34) hasta llegar a homogenizarse por completo a un volumen de 0.27 (figura 3.35).

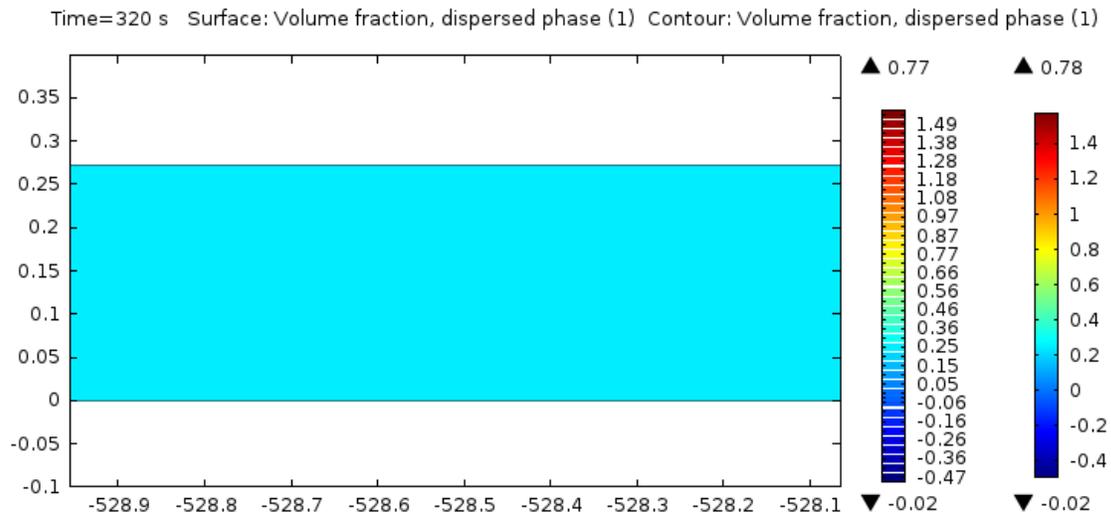


Figura 3.35 Mezcla homogenizada completamente.

En la posición media de la tubería, a los 148.8 s se inicia el registro de la presencia de la mezcla (figura 3.36)

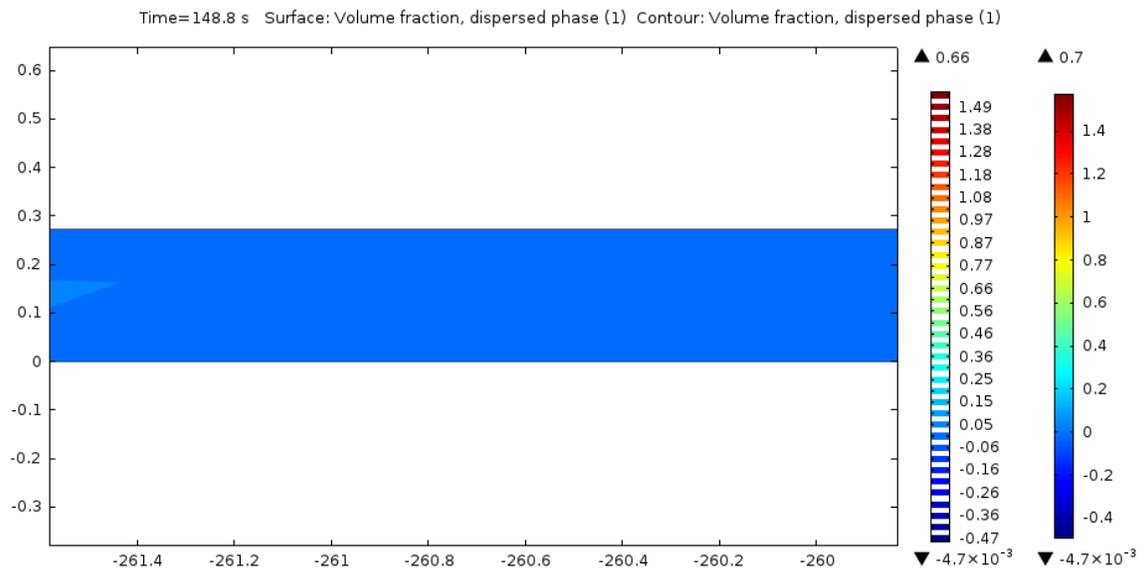


Figura 3.36 Llegada de la mezcla.

En el transcurso del tiempo, se estratifica (figura 3.37) hasta llegar a homogenizarse pasados los 414.4 s (figura 3.38).

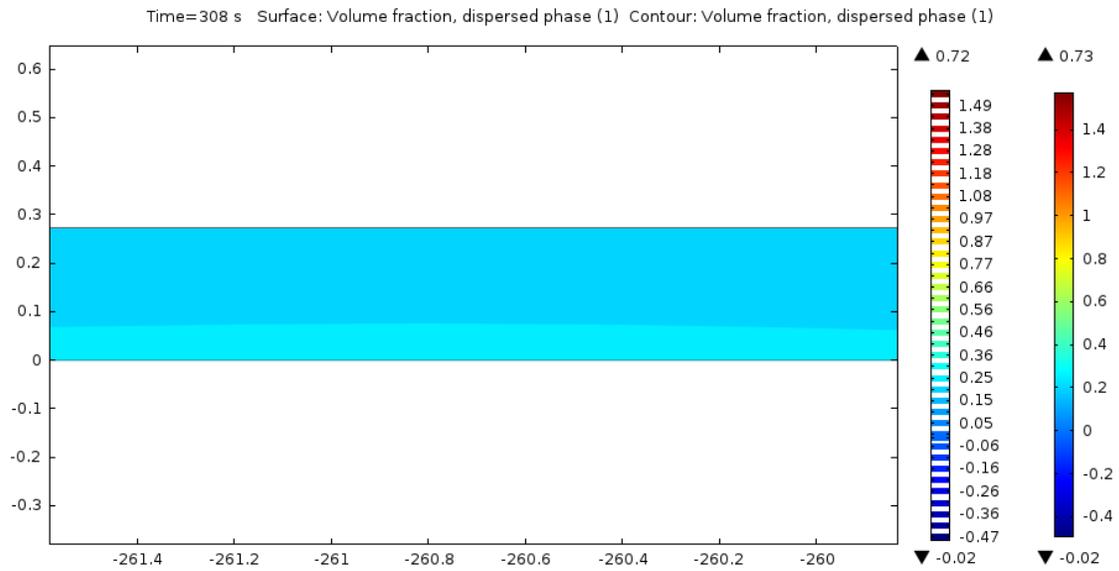


Figura 3.37 Estratificación de la mezcla.

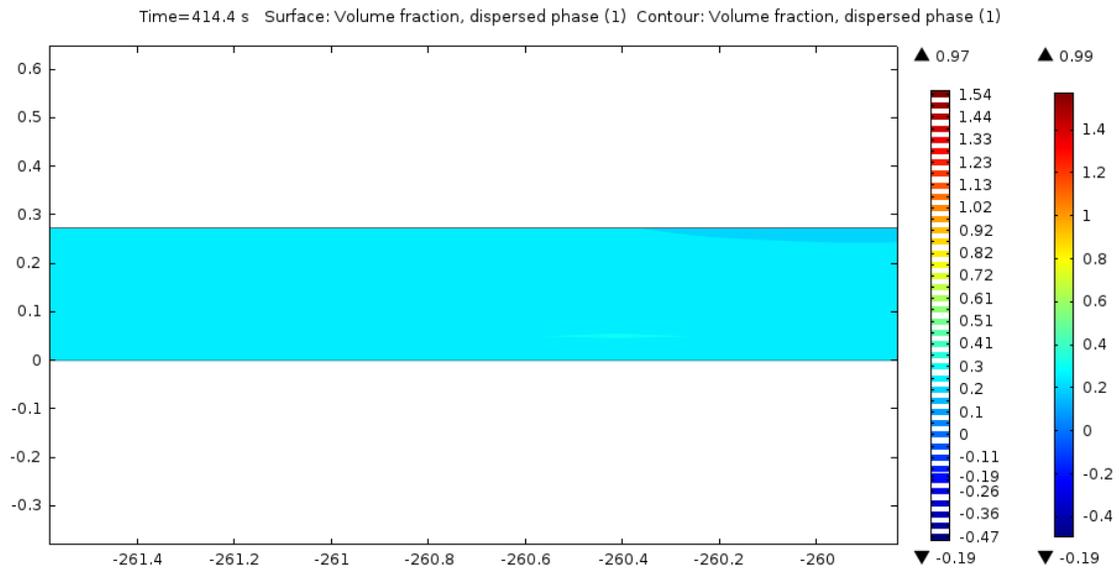


Figura 3.38 Homogenización de la mezcla.

En la salida de la tubería, al transcurrir 320 segundos, inicia la presencia de la mezcla (figura 3.39)

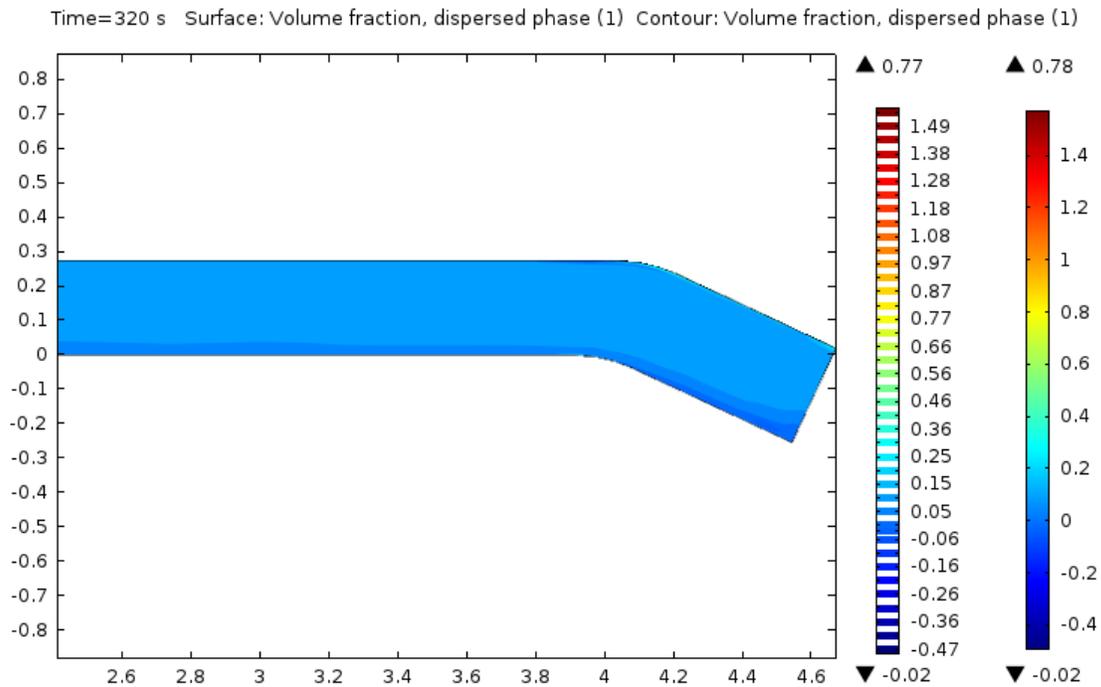


Figura 3.39 Llegada de la mezcla a la salida de tubería.

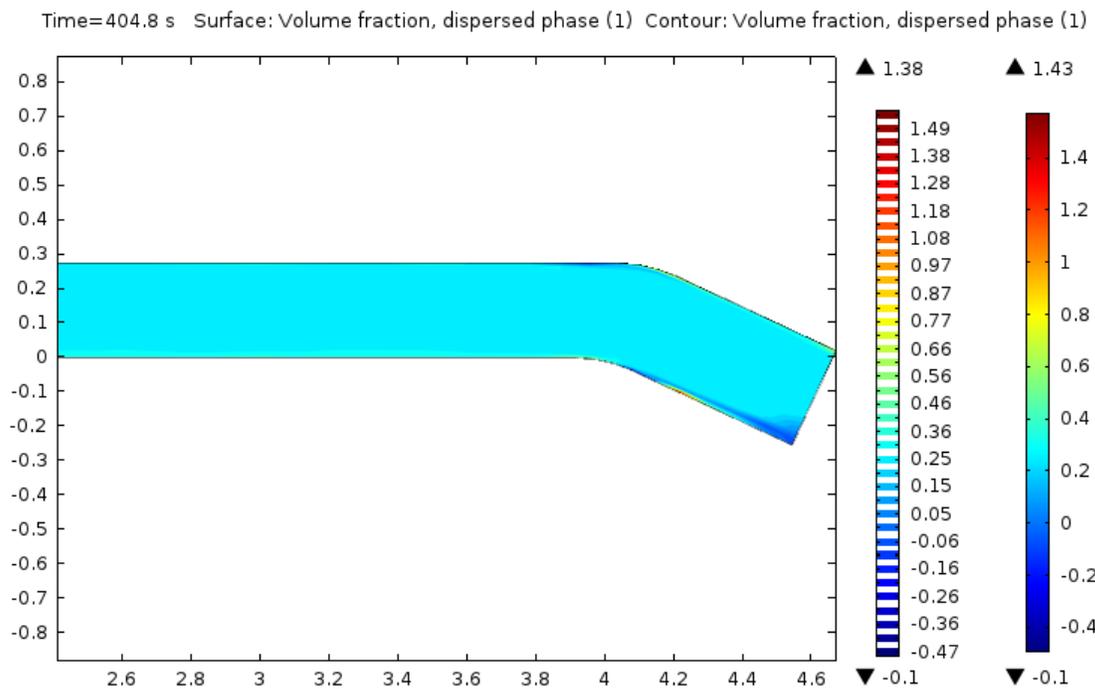


Figura 3.40 Homogenización de la mezcla.

Al paso del tiempo, el flujo se homogeniza a un valor de 0.27 aproximadamente, no se observan fluctuaciones ni estratificaciones (figuras 3.40 y 3.41).

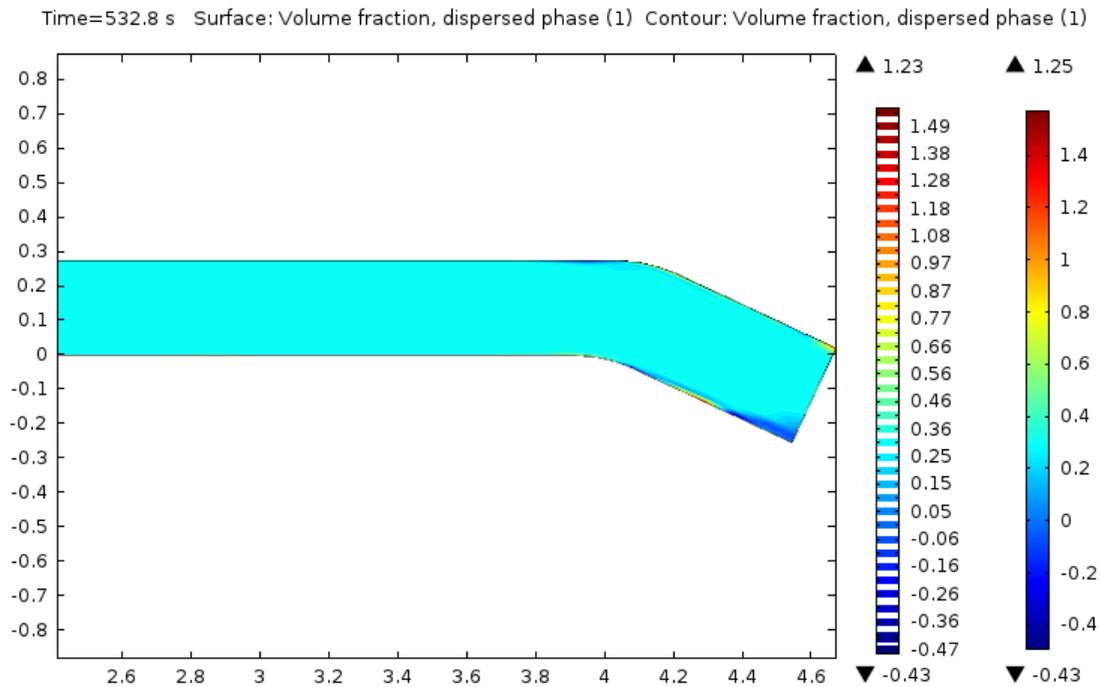


Figura 3.41 No existen fluctuaciones ni estratificación de la mezcla.

3.3.6 Velocidad de la mezcla

En la posición cercana a la entrada de la tubería, en presencia de la mezcla, se detectan variaciones de velocidad con valor promedio de 1.8 m/s (figura 3.42).

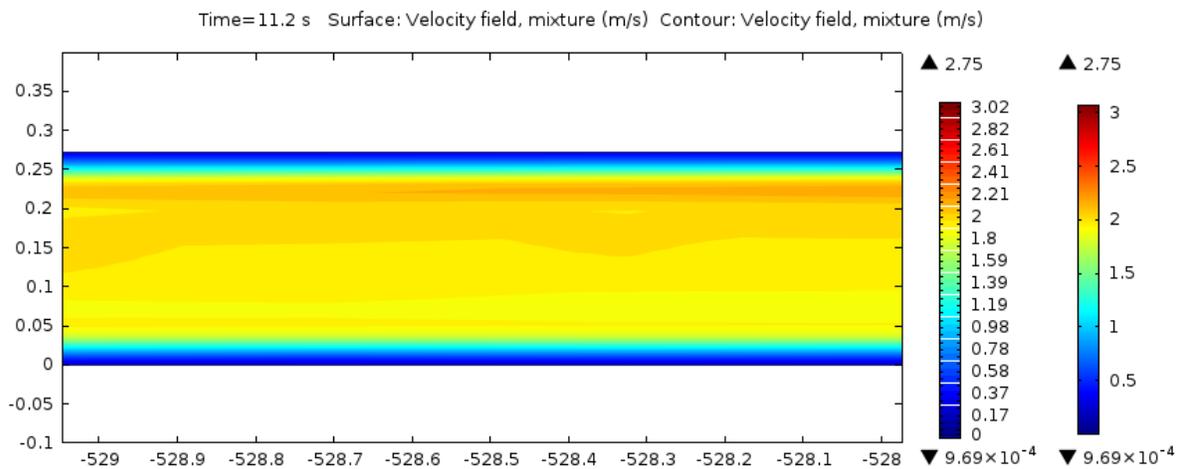


Figura 3.42 Velocidad al llegar la mezcla.

Conforme fluye la mezcla, el perfil de velocidades se comienza a estratificar, observándose velocidad cero en las paredes, más pronunciada en la parte inferior de la tubería y una mayor velocidad en la parte superior de la tubería (figuras 3.43 y 3.44).

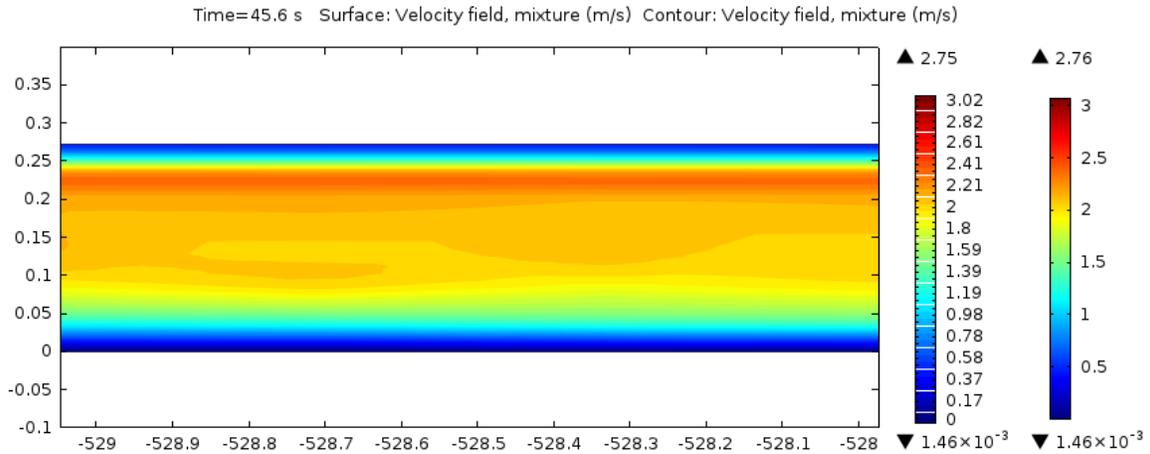


Figura 3.43 Estratificación del perfil de velocidades.

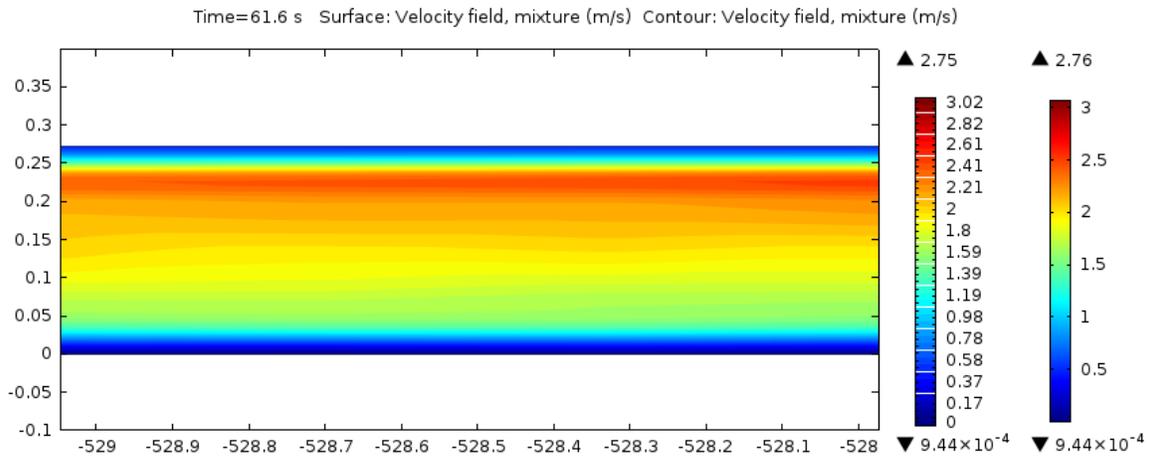


Figura 3.44 Estratificación del perfil de velocidades.

A los 167.2 s, la velocidad se estabiliza con un mayor valor cercano a la parte superior de la tubería, permaneciendo así en la mayor parte del fenómeno (figura 3.45 y 3.46).

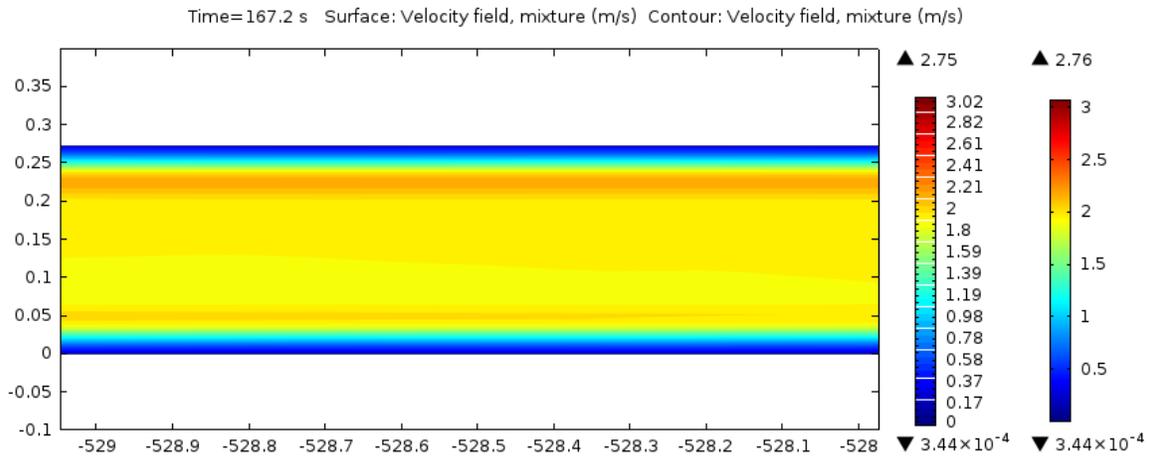


Figura 3.45 Homogenización del perfil de velocidades con mayor velocidad en la parte superior.

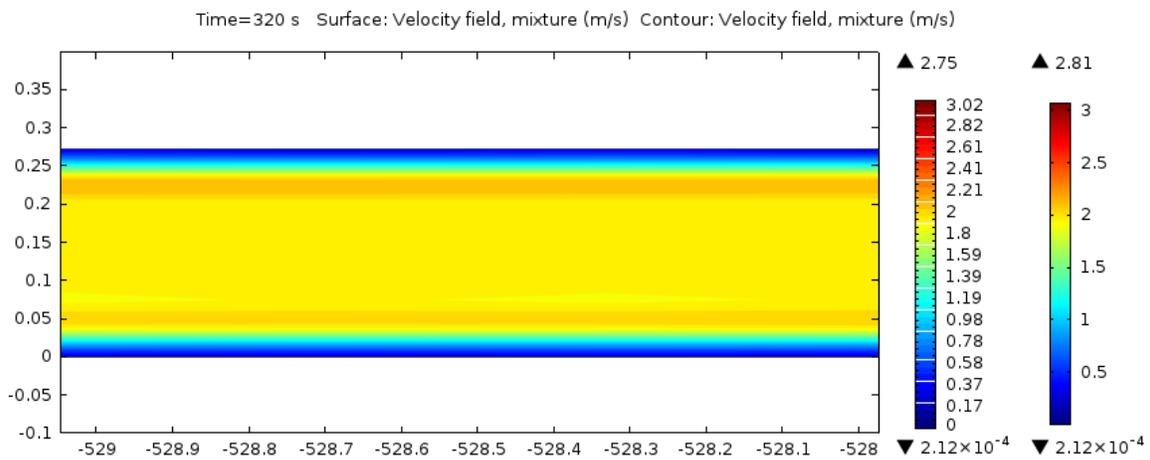


Figura 3.46 Estabilización del perfil de velocidades.

En la posición media de la tubería, a la llegada de la mezcla, se observa un perfil de velocidades simétrico con respecto al eje de la tubería (figura 3.47)

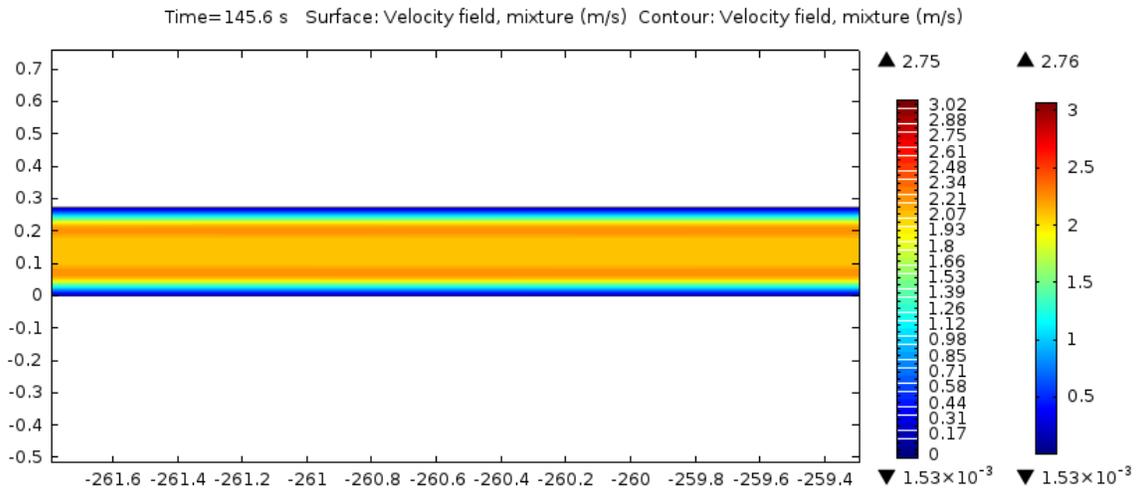


Figura 3.47 Perfil de velocidades a la llegada de la mezcla.

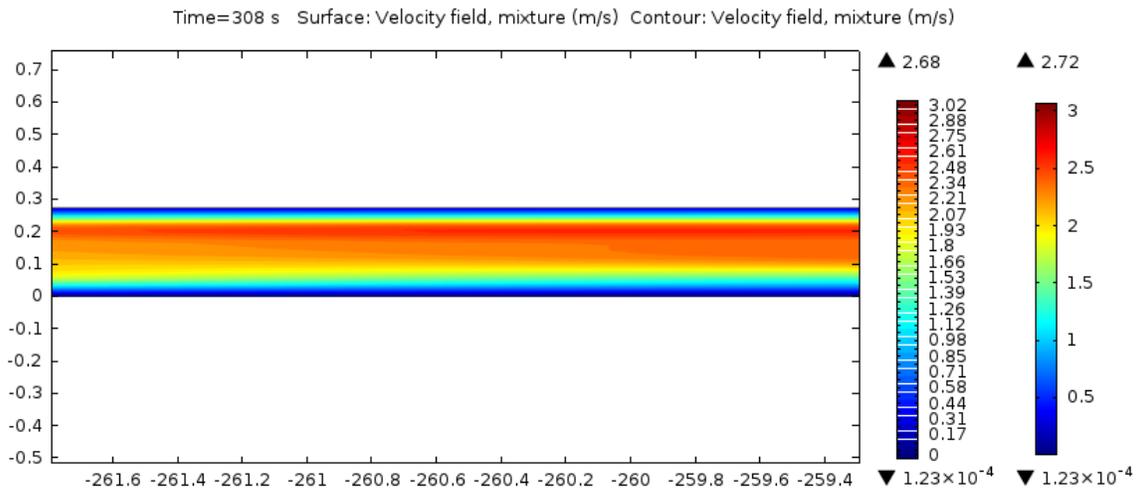


Figura 3.48 Estratificación del perfil de velocidades.

Al paso del tiempo, el perfil de velocidades tiende a estratificarse manteniéndose así la mayor parte del fenómeno (figura 3.48 y 3.49).

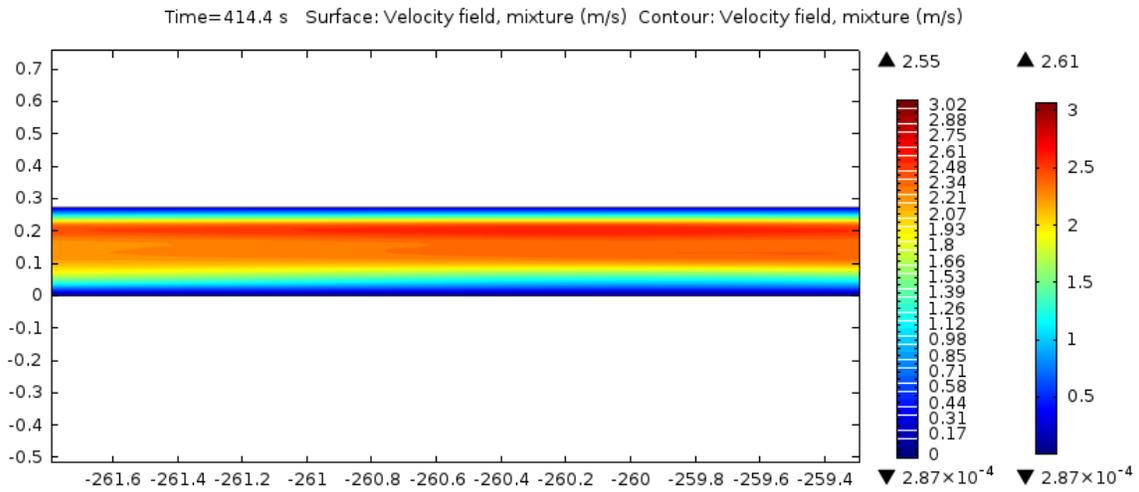


Figura 3.49 La estratificación del perfil de velocidades se mantiene la mayor parte del fenómeno.

En la salida de la tubería, el perfil de velocidades se mantiene muy estable con muy ligeros cambios y valores promedio de 1.7 m/s como se muestran en las figuras 3.50, 3.51, 3.52 y 3.53 tomadas en diferentes momentos.

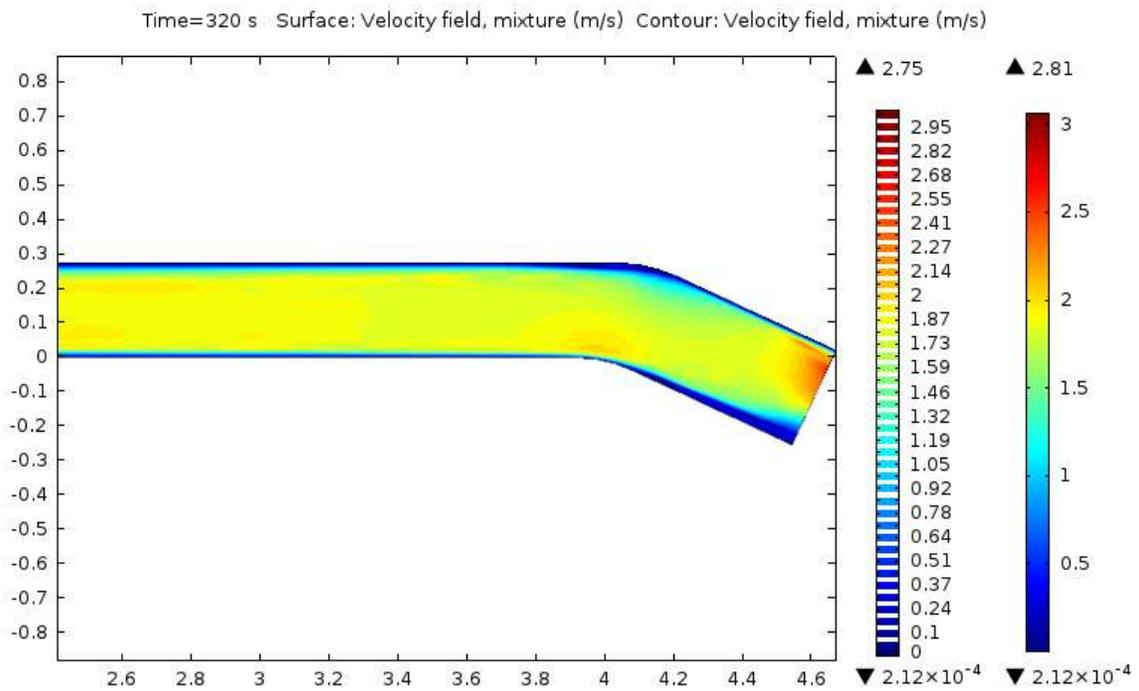


Figura 3.50 Perfil de velocidades a la llegada de la mezcla.

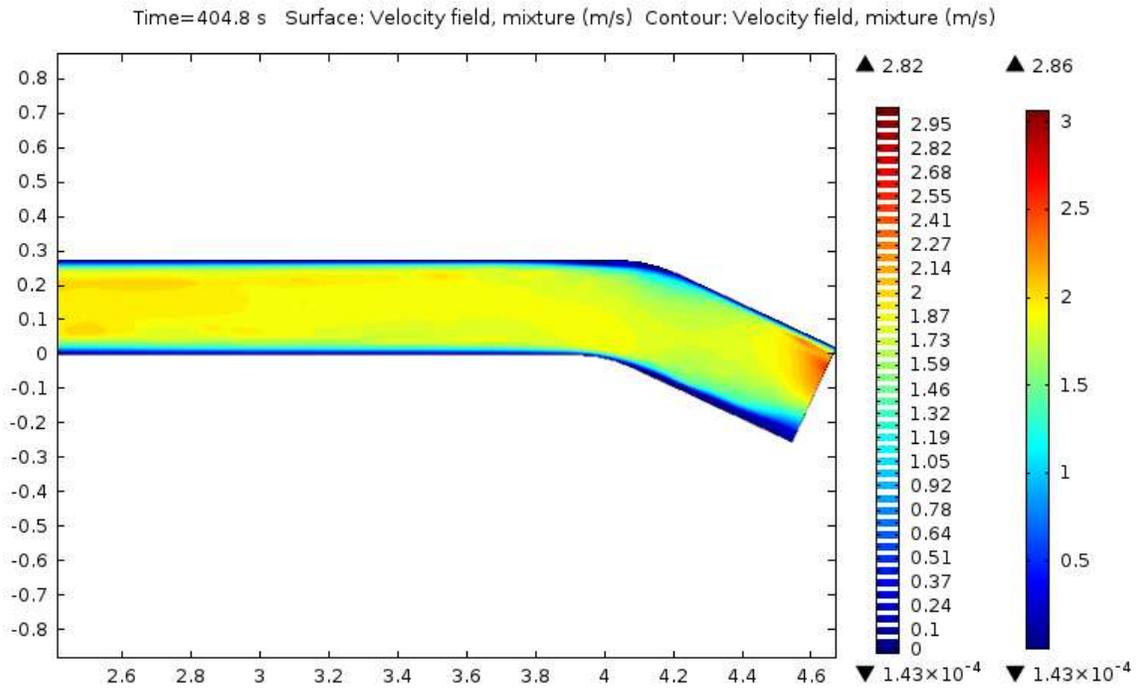


Figura 3.51 Se mantiene relativamente constante el perfil de velocidades.

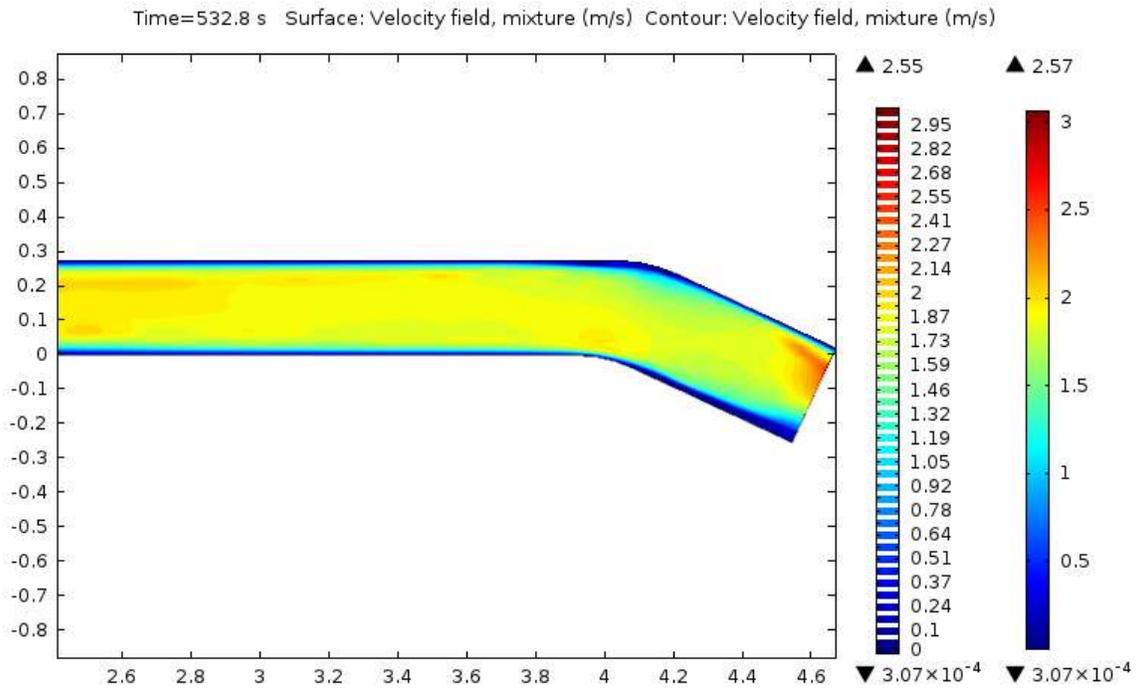


Figura 3.52 Perfil de velocidad constante.

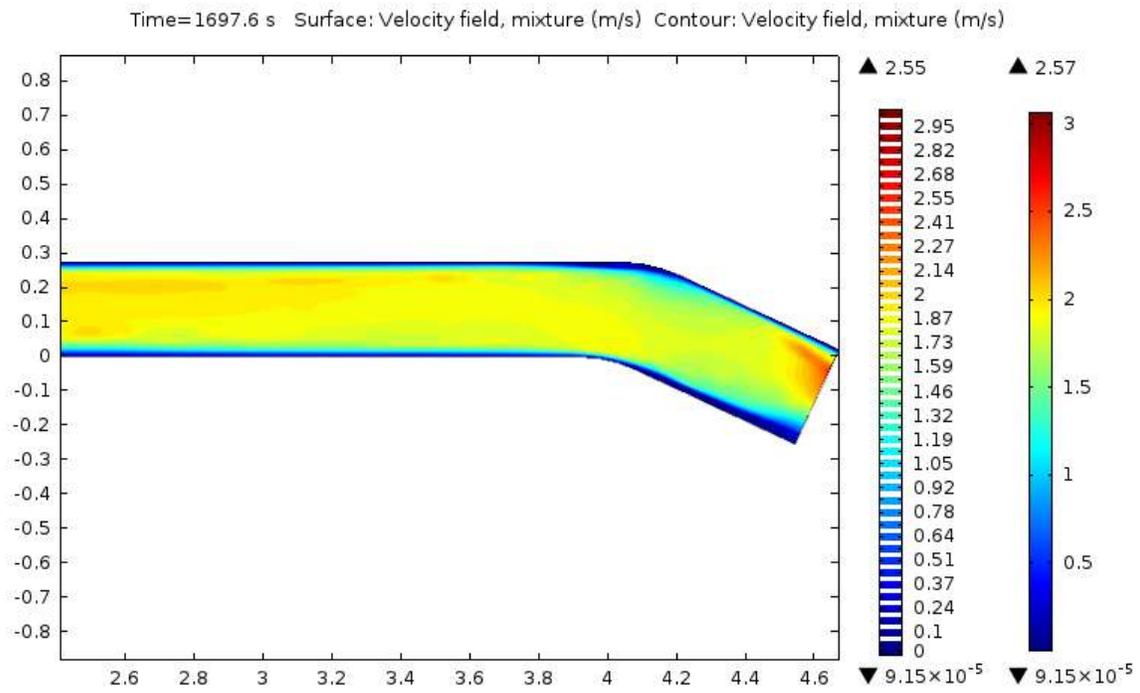


Figura 3.53 Perfil de velocidades heterogéneo.

Conclusiones.

El desarrollo de este trabajo, dada la complejidad del flujo multifase y el gran número de procesos en los que se presenta en la industria [5], es uno de los motivos para la realización de este trabajo, en el que fue establecido un modelo del sistema de transporte hidráulico de partículas sólidas, a partir de bibliografía especializada.

Con respecto a los objetivos particulares que fueron planteados al inicio de esta tesis, podremos decir lo siguiente:

- ✓ *Obtener un modelo del sistema de transporte hidráulico.* Se hizo una búsqueda bibliográfica del flujo multifase, eligiéndose el modelo de mezcla, con lo cual se estableció las ecuaciones que lo rigen, en tanto que el software cuyas características se apega a nuestras necesidades y recursos computacionales es COMSOL Versión 4.4.
- ✓ *Identificar los valores de parámetros del sistema para modelar con condiciones de velocidad por debajo y por arriba de la velocidad crítica.* Se llevó a cabo la modelación con la velocidad de operación y la concentración volumétrica recomendada para este tipo de sistemas. Una de las restricciones que se tuvo fue la limitación de los recursos computacionales, ya que cada prueba de ajuste de mallado y parámetros del modelo implica una inversión de tiempo por lo que fue necesario la simplificación de varias condiciones, como es la no transferencia de calor, así como reducir la longitud de la tubería y el control de la forma y tamaño uniforme de las partículas sólidas.
- ✓ *Validar el modelo bajo restricciones.* Se realizaron las estimaciones para la velocidad crítica a partir de las ecuaciones establecidas reportadas en la bibliografía. Con los resultados obtenidos en la modelación se pueden contrastar con los estimados y los recomendados para la operación del sistema. Lo que se observa es que los valores estimados para la velocidad crítica, la mayoría de ellos están sobrevalorados, como se observa en los

resultados de las Ecs. (3.4) y (3.8), salvo el resultado de la Ec. (3.9), que se encuentra por abajo de la velocidad de operación recomendada, tal variación se atribuye a las condiciones controladas en las que fueron obtenidas y un factor de seguridad para cuestión de diseño de los sistemas, en tanto que las recomendaciones de operación, son datos empíricos obtenidos de los sistemas que se encuentran con bastante tiempo funcionando, a los cuales se apegaron los resultados de la modelación. En nuestra modelación se observaron zonas y lapsos de tiempo, en la que la mezcla se comportaba como un flujo heterogéneo, como se ve en las figuras 3.21, 3.33 y 3.44, en la que al existir una mayor densidad de la mezcla en el fondo de la tubería se veía reflejado en un mayor volumen fraccional así como una mayor velocidad del flujo en la parte superior de la tubería debido a la baja densidad de la mezcla presente en esta zona. Conforme pasa el tiempo, el sistema tiende a homogenizarse en sus parámetros observados, ya que se estableció un sistema homogéneo como parte de la simplificación del modelo.

La simplificación de varios parámetros facilitó la modelación, obteniéndose resultados semejantes a los reportados en la parte experimental y operacional [12] con apariciones de camas deslizantes esporádicas, con el costo de la pérdida de los efectos de transferencia de calor y la interferencia de los accesorios de la tubería al flujo de la mezcla.

En la industria de la región solo se limitan a monitorear los parámetros del sistema de transporte hidráulico de partículas sólidas o mejor conocido como “ferroducto” y apegarse a las condiciones de operación recomendadas y a las experiencias adquiridas en su operación [21] [2], la importancia de un estudio como el planteado en este trabajo, daría un mejor enfoque y mayor comprensión del flujo multifase, con lo cual se podrá estimar zonas en las cuales se podrían acumular material o estudiar los problemas que se presenten, ello implica una inversión por parte de la industria que consistiría en la adquisición de recursos computacionales para una estimación pronta a partir de la modelación del sistema y la capacitación de personal con un perfil enfocado a la investigación. Todo lo anterior por un

beneficio de continuidad y una operación segura del ferroaducto con la implementación de sistemas de monitoreo en zonas específicas del sistema y lazos de retroalimentación de operación.

Este trabajo de tesis me ha mostrado el contraste que existe entre el enfoque técnico y el análisis formal del flujo multifase, de los cuales es necesario dominar ambos en mayor grado para el desarrollo transversal de la solución.

Apéndices

Apéndice A. Teorema de Transporte de Reynolds

La segunda ley de Newton y la primera ley de la Termodinámica son bien conocidas para un elemento de fluido de masa constante moviéndose a través de un campo de flujo. Aplicar estas leyes a elementos del fluido identificables es la aproximación Lagrangiana de la mecánica de fluidos. Sin embargo, la más útil y popular aproximación para describir el estado dinámico y térmico de un fluido es la aproximación Euleriana. En éste caso el estado del flujo es descrito por las propiedades de los elementos del fluido en el tiempo que pasan por un punto dado (ventana) en el espacio. El Teorema de Transporte de Reynolds proporciona una relación entre las aproximaciones Lagrangiana y la Euleriana.

Lo fundamental del Teorema de Transporte de Reynolds es la descripción matemática del flujo de masa de un fluido. Considere un elemento de área ΔS de superficie S en la figura A.1 a través de la cual el fluido pasa con velocidad w_i respecto a la superficie. El flujo másico está dado por

$$\Delta \dot{M} = \rho w_i n_i \Delta S \quad (\text{A.1})$$

Donde n_i es un vector normal unitario al elemento de área. Para una superficie cerrada como se muestra en la figura A.1, el vector unitario tiene un sentido positivo si apunta hacia afuera del volumen encerrado. Por consiguiente el producto punto en la Ec. (A.1) representa el flujo *desde el volumen de control* o el flujo de masa. Integrando el flujo de masa sobre toda la superficie del volumen da el flujo neto de masa desde el volumen de control.

$$\dot{M} = \int_S \rho w_i n_i dS \quad (A.2)$$

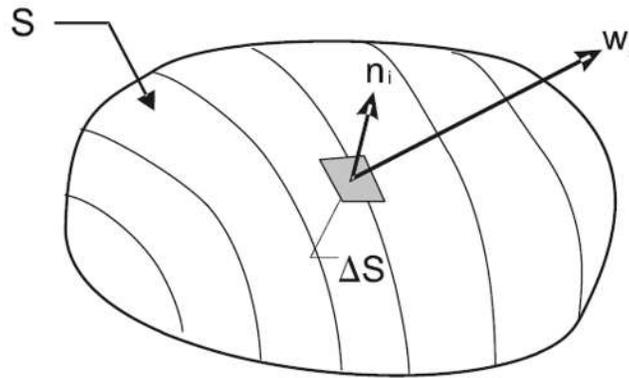


Figura A.1 Vector de velocidad del fluido y vector unitario normal en un elemento de superficie.

El mismo enfoque puede ser usado para determinar el flujo neto de otras cantidades tales como energía o momento. Si B es la propiedad extensiva de un fluido y β es la correspondiente propiedad intensiva, entonces el flujo neto de la propiedad B desde el volumen es

$$\dot{B} = \int_S \rho \beta w_i n_i dS \quad (A.3)$$

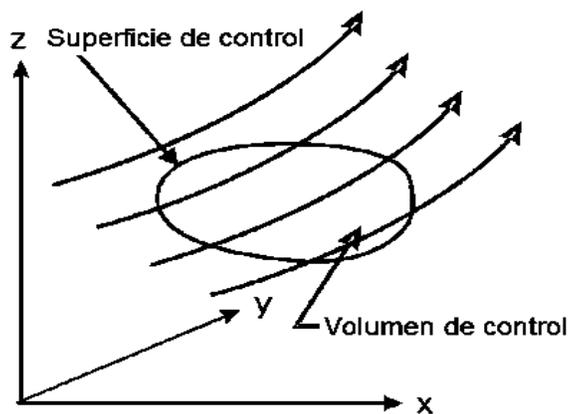


Figura A.2 Líneas de corriente pasando a través el volumen de control en el espacio.

Consideremos un volumen arbitrario en el espacio a través del cual el fluido puede pasar como se muestra la Figura A.2. Éste volumen es el volumen de

control (vc) encerrado por la superficie de control (sc). Puede moverse a través del espacio, rotar o cambiar de tamaño. Ahora consideremos un elemento de masa el cual se mueve a través del volumen de control como se muestra en la figura A.3. Éste elemento de fluido será referenciado como el sistema. En el tiempo t las fronteras del sistema son la superficie de control. En éste tiempo la masa del sistema es la masa dentro del volumen de control. En el tiempo $t + \delta t$ el sistema se mueve fuera del volumen de control. La masa del sistema la cual tiene a la izquierda el volumen es δM_{out} mientras que la masa que ha entrado al volumen es δM_{in} . La cantidad de propiedad B asociada con la masa (sistema) la cual tiene a la izquierda el volumen es δB_{out} mientras la correspondiente cantidad de B que ha entrado al volumen es δB_{in} .

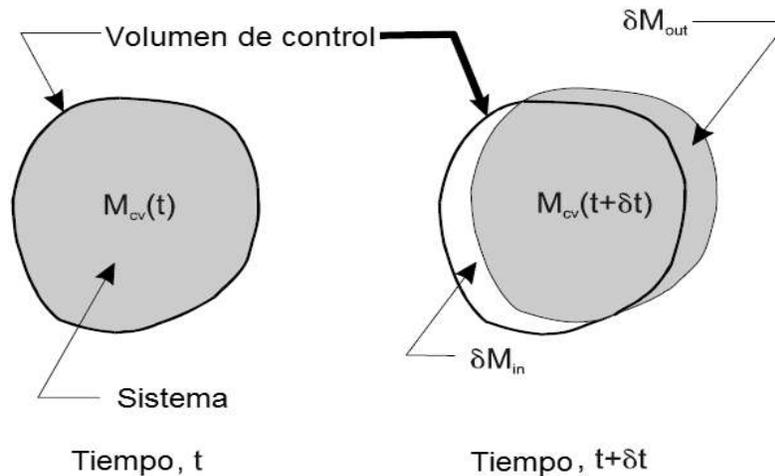


Figura A.3 Sistema moviéndose a través de un volumen de control en dos tiempos sucesivos.

Por definición la razón de cambio de la propiedad B del sistema está dada por

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_{sys}(t + \delta t) - B_{sys}(t)}{\delta t} \quad (A.4)$$

La cantidad de B del sistema en el tiempo t corresponde a la cantidad de B dentro del volumen de control en el tiempo t porque en éste instante el sistema está completamente rodeado por la superficie de control. Tal que

$$B_{sys}(t) = B_{vc}(t) \quad (A.5)$$

En el tiempo $t + \delta t$ algo de masa ha salido mientras que más masa ha entrado al volumen de control. La masa del sistema ahora consiste de la masa que ha salido más la masa dentro del volumen de control menos la masa que ha entrado. De tal manera que el valor de la propiedad B del sistema en el tiempo $t + \delta t$ es

$$B_{sys}(t + \delta t) = \delta B_{out} + B_{vc}(t + \delta t) - \delta B_{in} \quad (A.6)$$

Sustituyendo las expresiones para B_{sys} en t y $t + \delta t$ dentro de la Ec. (A.4) y reordenando

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{B_{vc}(t+\delta t) - B_{vc}(t)}{\delta t} + \frac{\delta B_{out}}{\delta t} - \frac{\delta B_{in}}{\delta t} \right] \quad (A.7)$$

Los primeros dos términos son simplemente la razón de cambio de la propiedad B en el volumen de control, que es,

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{B_{vc}(t+\delta t) - B_{vc}(t)}{\delta t} \right] = \frac{dB_{vc}}{dt} \quad (A.8)$$

La cantidad de B dentro del volumen de control es obtenido por la integración del producto correspondiente a la propiedad intensiva β y la densidad del fluido sobre el volumen de control. De forma que

$$\frac{dB_{vc}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{vc} \rho \beta dV \quad (A.9)$$

Los otros dos términos representan el flujo neto de masa de B que sale del volumen de control o, en otras palabras, la salida de flujo neto de la propiedad B a través de la superficie de control. Por consiguiente

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\delta B_{out}}{\delta t} - \frac{\delta B_{in}}{\delta t} \right] = \int_{sc} \rho \beta w_i n_i dS \quad (A.10)$$

Se debe de hacer énfasis que la velocidad w_i esta medida con respecto a la superficie de control porque la integral es el flujo de la propiedad a través de la superficie de control.

Finalmente llegamos al Teorema de Transporte de Reynolds

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{vc} \rho\beta dV + \int_{sc} \rho\beta w_i n_i dS \quad (A.11)$$

Por consiguiente la razón de cambio de B en el sistema es igual a la razón de cambio de B dentro del volumen de control más el flujo neto de salida de B a través de la superficie de control. No hay restricciones sobre el volumen de control, pudiéndose trasladarse, acelerarse, rotar o cambiar de tamaño y el Teorema de Transporte de Reynolds permanece aplicable.

Un corolario del teorema de Transporte de Reynolds puede ser obtenido aplicando la regla de Leibnitz para la diferenciación de una integral, el cual es

$$\frac{d}{dt} \int_{X_1(t)}^{X_2(t)} f(x, t) dx = \int_{X_1(t)}^{X_2(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f(X_1, t) \frac{dX_1}{dt} - f(X_2, t) \frac{dX_2}{dt} \quad (A.12)$$

Donde X_1 y X_2 son los límites espaciales de la integración.

Se puede notar que el integrando ha sido cambiado a una derivada parcial de la función con respecto al tiempo y que las derivadas de los límites, X_1 y X_2 , son tomados respecto al tiempo. La derivada temporal de los límites corresponde a la velocidad en la cual las fronteras se mueven.

Apéndice B. Volumen promedio

El manejo de una mezcla de gotas o partículas, es impráctico resolver las propiedades del fluido en todos los puntos de la mezcla. Por lo que se considera las propiedades promedio dentro de un volumen que contiene algunas partículas. Por ejemplo, el concepto de densidad volumétrica como la masa de la fase por unidad de volumen de la mezcla es una propiedad promedio. Se busca una aproximación formal para expresar las leyes de conservación para la fase continua en términos de las propiedades promedio.

Consideremos una mezcla de fluido y partículas contenidas dentro del volumen esférico que se muestra en la figura B.1. El volumen promedio (V) está compuesto del volumen de la fase continua (V_c) y el volumen ocupado por la fase (V_d). El volumen tiene que ser lo suficientemente grande de tal manera que un pequeño incremento en volumen no afecte significativamente el valor del promedio. El volumen tiene que ser pequeño comparado con las dimensiones del sistema o no sería posible escribir las ecuaciones diferenciales para las leyes de conservación.

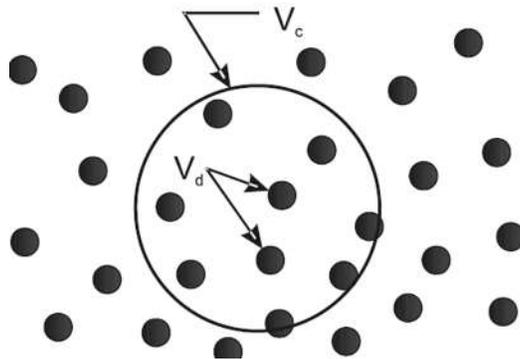


Figura B.1 Partículas dentro del volumen promedio.

Basados sobre el volumen en el que los promedios son tomados, hay dos tipos de promedios a considerar. Sea B alguna propiedad de la fase continua. La *fase promedio* de B es el promedio sobre el volumen de la fase continua y está definida como

$$\langle B \rangle = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} B dV \quad (\text{B.1})$$

Si B fuera la densidad de la fase continua, ρ_c , entonces $\langle \rho_c \rangle$ es el promedio de la densidad material de la fase continúa dentro del volumen. Obviamente, si la densidad de la fase continúa permanece constante entonces $\langle \rho_c \rangle = \rho_c$.

El promedio volumétrico de la propiedad local B está dada por

$$\bar{B} = \frac{1}{V} \int_{V_c} B dV \quad (\text{B.2})$$

Una vez más, si B es la densidad de la fase continua, el volumen promedio local de la densidad es

$$\bar{\rho}_c = \frac{1}{V} \int_{V_c} \rho_c dV \quad (\text{B.3})$$

La ecuación para el volumen promedio local de la densidad puede ser reescrito como

$$\bar{\rho}_c = \frac{V_c}{V} \frac{1}{V_c} \int_{V_c} \rho_c dV \quad (\text{B.4})$$

La razón V_c/V es la fracción volumétrica, ϕ , del fluido con la que se relación entre el promedio de la fase y la densidad promedio local de la fase continua está dada por

$$\bar{\rho}_c = \phi \langle \rho_c \rangle \quad (\text{B.5})$$

Una relación más formal para considerar el tamaño mínimo del volumen promedio es posible ahora. Si el volumen promedio es desplazado sobre una distancia correspondiente a una dimensión linear del volumen ($\sim V^{1/3}$), entonces las propiedades promedio de la fase no cambiaran. Esto implica que $\langle \bar{B} \rangle = \bar{B}$.

Volumen promedio de la operación Gradiente.

Todas las leyes de conservación para el flujo de fluidos involucran un término gradiente. La forma del promedio de las ecuaciones de conservación sobre los promedios volumétricos requiere una relación para el volumen promedio local del gradiente. El volumen promedio del gradiente sobre la fase continua es definida como

$$\frac{\overline{\partial B}}{\partial x_i} = \frac{1}{V} \int_{V_c} \frac{\partial B}{\partial x_i} dV \quad (\text{B.6})$$

Los siguientes desarrollos son válidos para algunos flujos dispersos los cuales consisten de partículas (porosas o sólidas) o burbujas. Por simplicidad, la palabra “partícula” se usara para ambas.

Considere el volumen promedio que contiene partículas como se muestra en la figura B.2. Algunas de las partículas están completamente dentro del volumen, mientras otras (partículas de la frontera) han sido interceptadas por la superficie que encierra el volumen. La porción de superficie que cruza la fase continua es designada como S_c mientras que las superficies que intercepta las partículas es S_s . La superficie completa del volumen de control S , es igual a $S = S_c + S_s$.

La superficie que envuelven las partículas completamente dentro del volumen es S_e mientras que la superficie de las partículas de la frontera, que se encuentra dentro del volumen de control es S_d , es $S_d = S_b + S_e$.

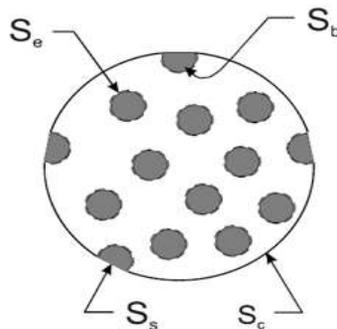


Figura B.2 Definición de superficies.

Consideremos un volumen promedio el cual se mueve a través de un campo de partículas como se muestra la figura B.3. El centro del volumen promedio está localizado por el vector $C_i(s)$ donde s es un parámetro. El vector $R_i(s)$ se extiende desde el centro al contorno del volumen definido por las superficies S_c y S_b . El vector $R_i(s)$ se muestra en la figura que termina en una superficie S_b , que es la superficie interior de una partícula que pertenece a la frontera. Se asume que el centro del volumen está desplazado a una nueva posición dada por $C_i(s + \delta s)$ mostrada por la línea punteada sobre la figura. Durante el desplazamiento los elementos de la fase dispersa permanecen mezclándose mientras los vectores R_i y p_i como se muestra.

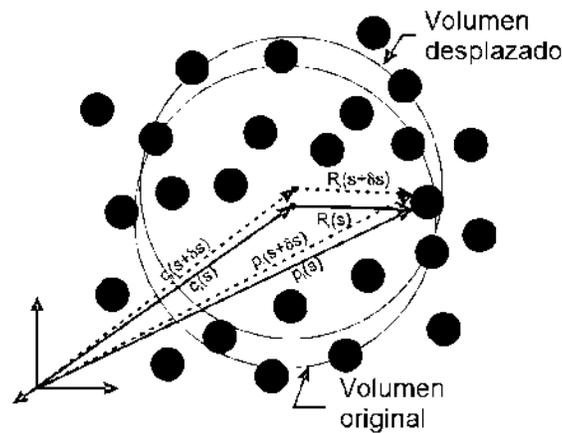


Figura B.3 Volumen promedio desplazado.

Los detalles de los desplazamientos vectoriales se muestran en la figura B.4. Como el volumen está desplazado, los vectores R_i y p_i se mueven a lo largo de la superficie de la partícula de manera que el vector p_i se incrementa por una cantidad δp_i la cual es tangente a la superficie de la partícula. En el límite donde $\delta s \rightarrow 0$

$$\lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta p_i}{\delta s} = \frac{dp_i}{ds} \quad (\text{B. 7})$$

el cual es un vector tangente a la superficie. Esto aplica a todas las superficies de las partículas S_d .

El cambio dentro del volumen promedio de B puede ser determinado por la aplicación de la Regla de Leibnitz para la derivada de una integral. La derivada de una integral de B sobre V_c con respecto a s puede expresarse como

$$\frac{d}{ds} \int_{V_c} B dV = \int_{V_c} \frac{\partial B}{\partial s} dV + \int_{S_c+S_d} B \frac{dp_i}{ds} \eta_i dS \quad (\text{B.8})$$

Donde η_i es un vector unitario normal hacia afuera del volumen promedio. En este caso, el vector η_i puede ser direccionado hacia dentro de las partículas sobre la superficie S_d .

La propiedad B es una función explícita del tiempo y la posición solamente y no es una función del parámetro s por lo que

$$\frac{\delta B}{\delta s} = 0 \quad (\text{B.9})$$

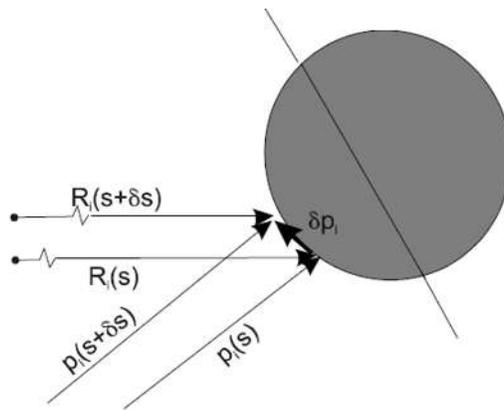


Figura B.4 Detalles de los desplazamientos vectoriales en las partículas de la vecindad.

También, sobre las superficies S_d , el producto punto del vector dp_i/ds y η_i es cero debido a que dp_i/ds es tangente a lo largo de las superficies S_d . Por lo que la derivada con respecto a s de la integral de B sobre el volumen de la fase continua se reduce a

$$\frac{d}{ds} \int_{V_c} B dV = \int_{S_c} B \frac{dp_i}{ds} \eta_i dS \quad (\text{B.10})$$

La trayectoria del centro del volumen de control está dada por la función vectorial $c_i(s)$. La coordenada de un punto general sobre la superficie del volumen promedio, $p_i(s)$, es la suma vectorial del centro y el radio R_i ,

$$p_i(s) = c_i(s) + R_i(s) \quad (\text{B.11})$$

El cambio de $p_i(s)$ con s sobre las superficies S_c es obtenido desde

$$\frac{dp_i}{ds} = \frac{dc_i}{ds} \quad (\text{B.12})$$

el vector R_i es constante sobre esta superficie cuando el volumen está desplazado; es decir, el volumen promedio ni se deforma ni rota. Debido a que $\frac{dc_i}{ds}$ no es función de la posición sobre la superficie S_c , la integral de la Ec.

(B.10) se convierte

$$\int_{S_c} B \frac{dp_i}{ds} \eta_i dS = \frac{dc_i}{ds} \int_{S_c} B \eta_i dS. \quad (\text{B.13})$$

También, la derivada con respecto a s puede ser escrita usando la regla de la cadena como

$$\frac{d}{ds} = \frac{dc_i}{ds} \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (\text{B.14})$$

Finalmente, la Ec. (B.8) puede expresarse como

$$\frac{dc_i}{ds} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{V_c} B dV - \int_{S_c} B \eta_i dS \right) = 0 \quad (\text{B.15})$$

Como $\frac{dc_i}{ds}$ no es cero,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{V_c} B dV = \int_{S_c} B \eta_i dS \quad (\text{B.16})$$

Aplicando la transformación de Green a la definición del volumen promedio local del gradiente nos permite escribir

$$\int_{V_c} \frac{\partial B}{\partial x_i} dV = \int_{S_c+S_d} B \eta_i dS \quad (\text{B.17})$$

Donde S_d es la superficie de todas las partículas dentro del volumen promedio incluyendo la superficie interior de aquellos elementos interceptados por la superficie del volumen promedio. Usando la Ec. (B.15) para la integral de superficie sobre S_c resulta en

$$\frac{1}{V} \int_{V_c} \frac{\partial B}{\partial x_i} dV = \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{V_c} B dV + \frac{1}{V} \int_{S_d} B \eta_i dS \quad (\text{B.18})$$

o

$$\overline{\frac{\partial B}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial x_i} + \frac{1}{V} \int_{S_d} B \eta_i dS \quad (\text{B.19})$$

el cuál es el teorema de volumen promedio para el gradiente. El vector unitario normal η_i está definido como hacia afuera desde la fase continua y hacia adentro para la fase dispersa. Es más conveniente usar un vector unitario normal con dirección hacia afuera desde la fase dispersa designada como n_i ($n_i = -\eta_i$) con el cual cambia el teorema del volumen promedio a

$$\overline{\frac{\partial B}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial x_i} - \frac{1}{V} \int_{S_d} B n_i dS \quad (\text{B.20})$$

Se nota que el volumen promedio del gradiente es el gradiente del volumen promedio más un término adicional el cual envuelve la integral de B sobre la interfaz entre las fases dispersa y continua. La propiedad B puede ser un campo escalar, vectorial o un tensor de segundo orden.

Volumen promedio de la derivada temporal.

Anteriormente consideramos un volumen promedio que encierra las partículas. La fase continua está encerrada por la superficie de la fase continua S_c , y las

superficies adjuntas de la fase dispersa S_d . Aplicando el corolario del teorema de Leibnitz para derivadas parciales se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} B dV = \int_{V_c} \frac{\partial B}{\partial t} dV + \int_{S_c+S_d} B \frac{\partial p_i}{\partial t} \eta_i dS \quad (\text{B.21})$$

Donde p_i es el vector que representa la superficie que encierra la fase continua y η_i es el vector normal unitario hacia afuera desde las superficies (y dentro de las partículas). Aquí no hay cambio de la superficie S_c con el tiempo por lo que

$$\int_{S_e} B \frac{\partial p_i}{\partial t} \eta_i dS = 0 \quad (\text{B.22})$$

Se asume que las partículas son esféricas como se muestra en la figura B.5.

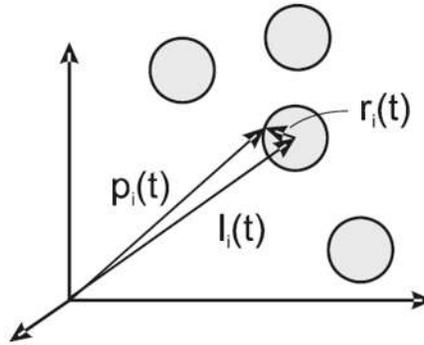


Figura B.5 Vectores de localización superficial del elemento i de la fase dispersa.

La superficie de cada partícula puede ser descrita como

$$p_i(t) = l_i(t) + r(t)\eta_i \quad (\text{B.23})$$

donde l_i es la posición del centro de la partícula, r es el radio y η_i es el vector normal unitario hacia fuera de la superficie del elemento. La derivada parcial de p_i con respecto al tiempo es

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = v_i + \dot{r}\eta_i + \epsilon_{ijk}\omega_j r\eta_k \quad (\text{B.24})$$

donde v_i es la velocidad y el vector ω_j es el rotacional de la partícula. Así, la derivada del volumen promedio se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} B dV = \int_{V_c} \frac{\partial B}{\partial t} dV + \int_{S_d} B (v_i + \dot{r}\eta_i + \epsilon_{ijk}\omega_j r n_k) \eta_i dS \quad (\text{B.25})$$

Sobre la superficie de la partícula $n_i = -\eta_i$ y

$$\epsilon_{ijk}\omega_j r \eta_k n_i = -\epsilon_{ijk}\omega_j r n_k n_i = 0 \quad (\text{B.26})$$

Así, el volumen promedio de la derivada temporal está dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} &= \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{S_d} B (v_i + \dot{r}\eta_i) \eta_i dS \\ &= \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{S_d} B (v_i \eta_i + \dot{r}) dS \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Remplazando η_i con $-n_i$ la forma final para el volumen promedio de la derivada temporal

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{S_d} B (v_i n_i + \dot{r}) dS \quad (\text{B.28})$$

Esto completa la formulación de las ecuaciones para el volumen promedio. Se aplicarán estas ecuaciones para el desarrollo de las formas de volumen promedio para las ecuaciones de continuidad, momento y energía para las mezclas fluido – partícula.

Bibliografía

- [1] Secretaría de Economía, «Perfil de mercado del Hierro - Acero,» Coordinación General de Minería, Dirección General de Desarrollo Minero, México, 2013.
- [2] S. L. Soo, Instrumentation for fluid-particle flow, New York, U.S.A: Noyes Publications, 1999.
- [3] Estudios Mineros del Perú S.A.C, "Manual de minería," Estudios Mineros del Perú S.A.C, Lima, Perú, 2013.
- [4] B. E. Abulnaga, Slurry Systems Handbook, McGraw - Hill, 2002.
- [5] M. Kataja, Multiphase flows in process industry, Helsinki, Finlandia: Valtion Teknillinen Tutkimuskeskus, 2005.
- [6] J. P. Brill and H. D. Beggs, Two Phase flow in pipes, 1991.
- [7] S. M. Peker, Solid - liquid two phase flow, Holanda: Elsevier, 2008.
- [8] COMSOL, "The mixture model equations," COMSOL 4.4, 2014.
- [9] M. R. C.A. Shook, SLURRY FLOW, principles and practice, Butterworth—Heinemann, 1991.
- [10] Warman International Ltd, Warman slurry pumping handbook, Australia: Warman International Ltd, 2000.
- [11] C. E. Brennen, Fundamentals of Multiphase Flow, California, 2003.
- [12] A. E. Velasco, "Hidráulica de pulpas de relaves en contornos cerrados," Universidad de Chile, Santiago, Chile, 1985.
- [13] A. J. S. K. Kai Hiltunen, Multiphase Flow Dynamics, Theory and numerics., Finlandia: VTT, 2009.
- [14] G. H. Y. J. Tu, Computational techniques for multi-phase flows, Oxford, Reino Unido: Butterworth-Heinemann, 2010.
- [15] M. M. & V. Taivassalo, On the mixture model for multiphase flow, Finlandia: Valtion Teknillinen Tutkimuskeskus, 1996.

- [16] B. v. Wachem and A. Almstedt, "Methods for multiphase computational fluid dynamics," *Chemical Engineering Journal*, no. 96, pp. 81-98, 2003.
- [17] COMSOL, "The Euler - Euler model equations," COMSOL 4.4, 2014.
- [18] D. Gidaspow, *Multiphase flow and fluidization. Continuum and kinetic theory descriptions*, Chicago, Illinois: Academic Press, 1994.
- [19] COMSOL, "About the Time - dependent solver," COMSOL 4.4, 2014.
- [20] B. E. A. Jacobs, *Design of slurry transport systems*, Inglaterra: Elsevier applied science, 2005.
- [21] Instituto Tecnológico Geominero de España, *Manual de arranque, carga y transporte en minería a cielo abierto*, Madrid: Secretaria general de la energía y recursos minerales, 1995.
- [22] A. Prosperetti and G. Tryggvason, *Computational Methods for Multiphase Flow*, Cambridge University Press, 2007.
- [23] C. T. Crowe, *Multiphase Flow Handbook*, Estados Unidos: Taylor & Francis Group, LLC, 2006.
- [24] M. Ishii and T. Hibiki, *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*, IN, USA: Springer Science, 2011.
- [25] C. T. Crowe, J. D. Schwarzkopf, M. Sommerfeld and Y. Tsuji, *Multiphase Flows with Droplets and Particles*, USA: Taylor & Francis Group, 2012.
- [26] J. Capecelatro and O. Desjardins, "Eulerian-Lagrangian modeling of turbulent liquid-solid slurries in horizontal pipes," *International Journal of Multiphase Flow*, 2013.
- [27] COMSOL, "Slip velocity models," COMSOL 4.4, 2014.
- [28] H. Hu, "Direct simulation of flows of solid-liquid mixtures," *International Journal Multiphase Flow*, vol. 22, no. 2, pp. 335-352, 1996.