



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

---

**RESPUESTA ÓPTICA DE GUÍAS DE ONDAS DE CRISTAL  
FOTÓNICO EN 1D USANDO MÉTODOS INTEGRALES**

---

**TESIS**

Para obtener el grado de

**MAESTRA EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

PRESENTA:

**MARÍA CLAUDIA GUILLÉN GALLEGOS**

ASESOR DE TESIS:

Doctor en Ciencias en Óptica  
**HÉCTOR I. PÉREZ AGUILAR**

CO-ASESOR DE TESIS:

Doctor en Ciencias en Óptica  
**ALBERTO MENDOZA SUÁREZ**

Morelia, Michoacán, Febrero de 2015

## RESUMEN

El presente trabajo de tesis centra su interés en el estudio teórico-numérico de la respuesta óptica de estructuras cristalinas como son las guías de ondas de cristal fotónico unidimensional (1D). Este sistema está formado por un arreglo por un arreglo de guías de ondas con perfil ondulado y periódico en una sola dirección. Para caracterizar este tipo de geometrías, se implementaron técnicas numéricas basadas en métodos integrales, las cuales han sido desarrolladas para el estudio de problemas físicos relacionados con sistemas que tienen periodicidad espacial. Presentamos resultados numéricos de la estructura de bandas de una guía de ondas de un cristal fotónico (1D) de longitud infinita y la respuesta óptica del mismo cristal fotónico truncado. Por ende, se utilizaron métodos integrales para determinar la estructura de bandas y el espectro de reflectancia que caracterizan la respuesta óptica de una guía de ondas periódica y ondulada con superficies de material conductor perfecto para polarización TE. Como parte de mi contribución de la tesis de investigación, a continuación, se presentan los resultados numéricos obtenidos para el mismo sistema considerado, pero ahora implementando la polarización TM tanto para superficies perfectamente conductoras como para superficies reales; en particular, superficies metálicas. Además, presentamos resultados para un sistema de 2 y 3 guías de ondas periódicas y onduladas perfectamente conductoras y metálicas bajo las mismas condiciones de los casos anteriores. Este tipo de sistemas permite ser otra alternativa de un cristal fotónico convencional en 1D, en donde la periodicidad se obtiene variando las propiedades ópticas del material en cada una de las direcciones transversales presentes.

**Palabras Clave:** (Cristal fotónico, Guía de ondas, Método integral).

## ABSTRACT

This thesis focuses its interest in the theoretical and numerical study of the optical response of crystal structures as are the waveguides dimensional photonic crystal (1D). This system consists of an arrangement for an array of waveguides with corrugated profile and periodic in one direction. To characterize this type of geometry, numerical techniques based on comprehensive approaches were implemented, which have been developed for the study of physical problems related to systems with spatial periodicity. Present numerical results of the band structure of a waveguide in a photonic crystal (1D) of infinite length and the optical response of the photonic crystal truncated. Therefore, comprehensive methods were used to determine the band structure and the reflectance spectrum characterizing the optical response of periodic guidance and wavy waves with perfect conductor material surfaces for TE polarization. As part of my contribution to the research thesis, then the numerical results obtained for the same system considered are presented, but now implementing the TM polarization for both perfectly conducting surfaces to real surfaces; in particular, metal surfaces. We also present results for a set of 2 and 3 regular and rolling guides and perfectly conducting metal under the same conditions of the above waves. Such systems can be a conventional alternative 1D photonic crystal, where the frequency is obtained by varying the optical properties of the material in each of the transverse directions which are present.

**Keywords:** (photonic crystal, waveguide, integral method).

# Dedicatoria

*A quien supo Darle un nuevo sentido a mi Vida...*

# Agradecimientos

*A todos los que han formado parte de mi vida, por un breve instante o de manera temporal... pues me han enseñado la nobleza, la bondad y el amor verdadero.*

*Porque cada uno de ustedes ha dejado una huella profunda en mí... estando siempre a mi lado en un destino hasta ahora incierto.*

*Simplemente quiero expresarles el más profundo agradecimiento... por ayudarme a descubrir día a día toda la sabiduría oculta dentro del alma humana.*

# Reconocimientos

El camino de mi vida se ha cruzado con el de innumerables personas, quienes sin duda me ayudaron a concretar mis estudios de posgrado.

Sin duda resultaría muy extensa la tarea de hacer mención a cada una de ellas, así que sólo haré reconocimiento en forma muy concisa a todas aquéllas que siguieron muy de cerca la realización de este trabajo así como a sus valiosas contribuciones.

*Al Dr. Héctor Pérez... guía profesional.*

*A los Drs. Alberto Mendoza y Rafael Campos... asesoría y oportuno seguimiento de investigación.*

*A Thalía Centeno, Adriana Rojas y Eduardo Pérez... agradable compañía en colaboración como grupo de trabajo.*

*A mis amigos, compañeros y colegas del posgrado... apoyo, ameno ambiente y largas charlas.*

*A mi familia... infinita tolerancia y solidaridad.*

*A David Contreras... cariño y amor incondicional así como soporte económico.*

*A Mónica Cedeño, Marisol López y Yenisei Ponce de León... valiosos consejos.*

*A los profesores de la maestría... confianza y superación personal.*

*Al personal de la facultad de fismat... comfortable estadía a lo largo de estos años.*

*Al CONACyT y la UMSNH... recurso económico de una beca.*

# Contenido

	Página
<b>Resumen</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>ii</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>iii</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>iv</b>
<b>Reconocimientos</b>	<b>v</b>
<b>Contenido</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>I. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>II. ESTRUCTURAS DE BANDAS EN GUÍAS DE ONDAS DE CRISTALES FOTÓNICOS</b>	<b>6</b>
II.1. Descripción del método integral . . . . .	6
II.1.1. Consideraciones preliminares . . . . .	7
II.1.2. Función de Green para la ecuación de Helmholtz . . . . .	9
II.1.3. Representación integral de la ecuación de Helmholtz . . . . .	10
II.1.4. Discretización de las integrales . . . . .	13
II.1.5. Elementos no diagonales . . . . .	15
II.1.6. Elementos diagonales . . . . .	16
II.2. Estructuras de bandas en una guía de ondas con superficies onduladas y periódicas . . . . .	19
II.2.1. Polarización TE . . . . .	20
II.2.2. Polarización TM . . . . .	21
<b>III. RESPUESTA ÓPTICA DE GUÍAS DE ONDAS DE CRISTALES FOTÓNICOS</b>	<b>23</b>
III.1. Descripción del método integral . . . . .	23
III.1.1. Consideraciones preliminares . . . . .	24
III.1.2. Los campos electromagnéticos . . . . .	25
III.2. Las funciones fuente . . . . .	27
III.2.1. Discretización de las ecuaciones integrales . . . . .	29
III.3. El Campo Incidente . . . . .	35
III.4. La Potencia Incidente . . . . .	37
III.5. El Campo Esparcido . . . . .	39

## Contenido (continuación)

	Página
III.6. La Potencia Esparcida . . . . .	41
III.6.1. Los coeficientes de reflexión y transmisión . . . . .	42
III.7. Respuesta óptica en una guía de ondas con superficies onduladas y periódicas para polarización TE . . . . .	43
<b>IV. RESPUESTA ÓPTICA DE GUÍAS DE ONDAS DE CRISTALES FOTÓNICOS REALES</b>	<b>47</b>
IV.1. Guía de ondas periódica y ondulada perfectamente conductora para polarización TM . . . . .	48
IV.2. Guía de ondas periódica y ondulada con superficies metálicas . . . . .	51
IV.3. Sistema de dos guías de ondas periódicas y onduladas perfectamente conductoras y metálicas . . . . .	55
IV.4. Sistema de tres guías de ondas periódicas y onduladas perfectamente conductoras y metálicas . . . . .	59
<b>V. CONCLUSIONES</b>	<b>64</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>66</b>

# Lista de Figuras

Figura	Página	
1	Descripción esquemática de la guía de ondas periódica por las superficies onduladas perfectamente conductoras. . . . .	7
2	Representación gráfica de las distintas configuraciones aplicables sobre las superficies onduladas en función de la diferencia de fase $\Delta\phi$ . . . . .	8
3	(a) Perfil de la celda unitaria ondulada con amplitud $A = 0.2b$ , siendo $b = 2$ y $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ . (b) Función determinante $D(k, \omega)$ para $k = 0$ y (c) $k = \frac{1}{2}$ .(d) Estructura de bandas de una guía de ondas periódica para la polarización TE. . . . .	20
4	(a) Perfil de la celda unitaria ondulada con amplitud $A = 0.2b$ , siendo $b = 2$ y $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ . (b) Función determinante $D(k, \omega)$ para $k = 0$ y (c) $k = \frac{1}{2}$ .(d) Estructura de bandas de una guía de ondas periódica para la polarización TM. . . . .	21
5	Descripción esquemática de una guía de ondas de ancho $b$ y longitud $d$ con superficies onduladas que es iluminada con un haz Gaussiano en la región 0 en el plano $x-y$ donde $\theta_0$ y $\theta_s$ representan los ángulos de incidencia y esparcimiento, respectivamente.. La región 0, representa el vacío. Las $M$ regiones distintas constituyen capas alternadas del material respecto a la región 0. . . . .	25
6	Esquema de una guía de onda de ancho $l$ y de espesor $d$ . La longitud del sistema es $L = 2l + b$ . Sobre el plano $x_3 = d$ , el semi ancho del módulo del haz gaussiano incidente es $g$ . Los ángulos de incidencia $\theta_0$ y esparcimiento $\theta_s$ (para reflexión y transmisión) están definidos como positivos en el sentido indicado en la figura. . . . .	35
7	(a) Perfil de la guía de ondas con superficies planas ( $A = 0.0$ ). (b) Estructura de bandas asociada a la guía de ondas de cristal fotónico. (c) Espectro de reflectancia $R$ como respuesta óptica de la guía de ondas al ser iluminada con un haz Gaussiano a incidencia normal bajo la polarización TE. (d) Transmitancia correspondiente. . . . .	44
8	(a) Perfil de la guía de ondas con superficies onduladas ( $A = 0.2b$ ). (b) Estructura de bandas asociada a la guía de ondas de cristal fotónico. (c) Espectro de reflectancia $R$ como respuesta óptica de la guía de ondas al ser iluminada con un haz Gaussiano a incidencia normal bajo la polarización TE. (d) Transmitancia correspondiente. . . . .	45

## Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página	
9	(a) Perfil de la guía de ondas con superficies planas ( $A = 0.0$ ). (b) Estructura de bandas asociada a la guía de ondas de cristal fotónico correspondiente. (c) Espectro de reflectancia $R$ como respuesta óptica de la guía de ondas al ser iluminada con un haz Gaussiano a incidencia normal bajo la polarización TM. (d) Balance de energía ( $R + T$ ). . . . .	49
10	. . . . .	51
11	(a) Perfil de la guía de ondas con superficies onduladas ( $A = 0.2b$ ). (b) Estructura de bandas asociada a la guía de ondas de cristal fotónico correspondiente. (c) Espectro de reflectancia $R$ como respuesta óptica de la guía de ondas al ser iluminada con un haz Gaussiano a incidencia normal bajo la polarización TM. (d) Balance de energía ( $R + T$ ). . . .	51
12	Espectro de la reflectancia $R$ como función de la frecuencia $\omega$ para el caso de una guía de ondas con superficies perfectamente conductoras con amplitud (a) $A = 0.0$ y (c) $A = 0.2b$ y con superficies metálicas de oro con amplitud (a) $A = 0.0$ y (c) $A = 0.2b$ bajo polarización TE. . . .	53
13	Espectro de la reflectancia $R$ como función de la frecuencia $\omega$ para el caso de una guía de ondas con superficies perfectamente conductoras con amplitud (a) $A = 0.0$ y (c) $A = 0.2b$ y con superficies metálicas de oro con amplitud (a) $A = 0.0$ y (c) $A = 0.2b$ bajo polarización TE. . . .	54
14	(a) Perfil representativo para el arreglo de 3 regiones con amplitud nula, $A = 0$ . Además, se incluye el caso (b) perfil ondulado con amplitud mínima $A = 0.2b$ y diferencia de fase $\Delta \phi = \pi/2$ . . . . .	56
15	Curvas representativas del espectro de reflectancia $R$ en función del valor de la frecuencia $w$ aplicables al caso de un sistema de 2 guías en CP empleando polarización TE, a incidencia normal; (a) amplitud nula, (c) $A_1 = 0.2b$ . Además, se incluye el caso del metal (Au) para el mismo arreglo con (b) $A_1 = 0$ , y (d) amplitud mínima. . . . .	57
16	Curvas representativas del espectro de reflectancia $R$ en función del valor de la frecuencia $w$ aplicables al caso de un sistema de 2 guías en CP empleando polarización TM, a incidencia normal (a) amplitud nula, (c) $A_1 = 0.2b$ . Además, se incluye el caso del metal (Au) para el mismo arreglo con (b) $A_1 = 0$ , y (d) amplitud mínima. . . . .	58

## Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
17	(a) Perfil representativo para el arreglo de 4 regiones con amplitud nula, $A = 0$ . Además, se incluye el caso (b) perfil ondulado con amplitud mínima $A = 0.2b$ y diferencia de fase $\Delta \phi = \pi/2$ . . . . .	60
18	Curvas representativas del espectro de reflectancia $R$ en función del valor de la frecuencia $w$ aplicables al caso de CP empleando polarización TE, tanto a incidencia normal para un sistema de 3 guías; (a) amplitud nula, (c) $A_1 = 0.2b$ . Además, se incluye el caso del metal (Au) con (b) $A_1 = 0$ , y (d) amplitud mínima. . . . .	61
19	Curvas representativas del espectro de reflectancia $R$ en función del valor de la frecuencia $w$ aplicables al caso de CP empleando polarización TM, a incidencia normal para un sistema de 3 guías; (a) amplitud nula, (c) $A_1 = 0.2b$ . Además, se incluye el caso del metal (Au) con (b) $A_1 = 0$ , y (d) amplitud mínima. . . . .	62

# Capítulo I

---

## INTRODUCCIÓN

---

Las ciencias e ingenierías siempre han sido parte fundamental en el desarrollo industrial y tecnológico del país. En años recientes, el advenimiento de la economía global obliga a preparar profesionistas para trabajar en un ambiente competitivo sin fronteras, donde se desarrollan innovaciones cada vez más espectaculares. No obstante, nunca debemos olvidar que cualquier avance científico que se genera, va en función de satisfacer, cómoda y eficazmente, alguna necesidad presente en nuestra vida cotidiana. Así, hemos redefinido nuestras exigencias, día a día, basándonos en una nueva filosofía de vida en la que “cada segundo, cuenta”. De ahí que, la enorme demanda de las comunicaciones internacionales por tecnologías cada vez más eficientes y de la más alta calidad está exigiendo del sector científico la implementación de dispositivos de vanguardia cada vez más novedosos, con base en la aplicación de elementos electrónicos y de diseño en la producción de medios cada vez más eficientes. Lo anterior, constituye un problema que limita, en gran medida, la capacidad y velocidad de la información que puede ser procesada en un determinado lapso de tiempo. Por ende, la tecnología actual basada en materiales del estado sólido está llegando al límite físico real, dentro del cual, ya no es viable aumentar la densidad de los componentes electrónicos presentes en los dis-

positivos que forman parte de nuestro peculiar estilo de vida, pero tampoco es factible continuar incrementando la rapidez de los mismos, sin alterar nuevamente, las dimensiones inherentemente asociadas.

Es por todo lo anterior, que el desarrollo de la microelectrónica constituye uno de los grandes dilemas del siglo XXI; de ahí que se propicie un nuevo auge basado en una revolución optoelectrónica. Como resultado de lo anterior, en el campo de las telecomunicaciones los conductores de cobre han sido substituidos por fibras ópticas para la transmisión de señales. En efecto, su uso posee un enorme potencial de satisfacer gran parte de las necesidades presentes en este medio, aunque por ahora la incompatibilidad con dispositivos de tipo electrónico limita en gran medida la eficiencia resultante. De ahí que entre tantas líneas de generación del conocimiento, las de las estructuras cristalinas periódicas tienen un empuje considerable actualmente en países desarrollados, por la tecnología tan innovadora que resulta de su estudio. Por consiguiente, la comunidad científica ha incursionado en la tarea de desarrollar nuevos enfoques basados en esta perspectiva particular, en un intento por consolidar con éxito una aplicación esencialmente fotónica. Dado el avance nanotecnológico reciente, la aplicación práctica de los llamados cristales fotónicos (CFs) ha tenido un gran interés científico en lo concerniente a la capacidad y la velocidad de la información que puede ser procesada en un determinado lapso de tiempo.

Los CFs se propusieron a finales de la década de los ochenta en un intento por establecer una solución tentativa al control de la emisión espontánea y de la localización de la luz (Yablonovitch, 1987; John, 1987). Sin embargo, sólo en los últimos años se han conseguido las primeras aplicaciones prácticas de elevado impacto tecnológico, como son los láseres de CFs o las guías de onda nanoestructuradas con bandas prohibidas (Foresi et al., 1997; Vlasov et al., 2001). Dichas estructuras poseen una modulación periódica

del índice de refracción, siendo su periodo del orden de la longitud de onda del campo electromagnético en el rango óptico. Tal disposición provoca un comportamiento de los fotones similar al de los electrones en la estructura cristalina de un semiconductor (Korvink y Greiner, 2002). Lo interesante de estos sistemas (i.e. los CFs) es que si el tamaño de las celdas es del orden de la longitud de onda de la luz, se pueden diseñar de tal modo que al ser iluminados con un haz, éste sea completamente reflejado. Ésta es una de las propiedades más relevantes de los CFs: tienen la posibilidad de presentar bandas prohibidas, produciendo efectos no observados en la óptica tradicional (Joannopoulos *et al.*, 2008; Sakoda, 2001). Otra propiedad interesante de los CFs, es que dentro de ellos se pueden construir canales (guías de ondas), a través de los cuales la luz puede viajar con pérdidas despreciablemente pequeñas permitiendo un control total de la propagación incidente. Fueron necesarias varias décadas de ardua investigación, antes de que se lograra la obtención de resultados sobresalientes que fuesen aplicables en innovaciones nanotecnológicas, tales como láseres de CFs, fibras ópticas microestructuradas, guías de ondas nanoestructuradas con bandas prohibidas, (Foresi *et al.*, 1997a,b), por mencionar algunos ejemplos notables. Cabe destacar que éste último resulta ser el tema principal de interés para guiarnos en la realización de este trabajo.

Los estudios relacionados con la modelación de cristales fotónicos, a pesar de los avances significativos en la actualidad, es un proyecto que aún se encuentra en vías de desarrollo. Existe una gran cantidad de problemas abiertos, entre los cuales podemos mencionar: modelar la respuesta óptica de superficies con estructura fractal; procesar señales ópticas en guías de onda que tienen integrados dispositivos tales como láseres, sensores, etc.; corregir errores y defectos en el proceso de fabricación de cristales fotónicos, entre otros. No obstante, el conocimiento referente a cristales fotónicos ha llegado

a un punto culminante en su investigación, gracias a recientes tecnologías de nanofabricación mediante las cuales se han obtenido las primeras aplicaciones prácticas del más elevado impacto tecnológico (Yablonovitch, 2009; Vlasov et al., 2005; Zhou y Biswas, 2008). Algunos de los estudios de la propagación de la luz en CFs se basan en métodos numéricos que se aplicaron primordialmente en física del estado sólido para analizar estructuras de bandas electrónicas (Kittel y McEuen, 1976). El más conocido es el método de expansión de ondas planas (Archuleta-García et al., 2007) que permite calcular las estructuras de bandas fotónicas de CF's de una manera rápida y versátil. Sin embargo, una de las desventajas de este método es que no se pueden tratar los CFs con materiales dispersivos y con geometrías complicadas.

En este sentido, considerando nuestro problema de interés, resulta por demás alentador la existencia de un precedente muy confiable en manos de un grupo de investigadores pertenecientes tanto a la FCFM-UMSNH así como de otras instituciones que ya tienen gran experiencia en el tema, el cual ha desarrollado técnicas numéricas que les han permitido modelar anteriormente este tipo de sistemas (Mendoza-Suárez *et al.*, 2006, 2007) y más aún, innovar el estudio de CFs integrados en guías de ondas cuya periodicidad se presenta en la geometría y no en las propiedades del material (Mendoza-Suárez *et al.*, 2011). Este tipo de regímenes que tiene características interesantes (Pérez-Aguilar *et al.*, 2013a,b), permite abordar una perspectiva más versátil para conceptualizar el desarrollo de los CFs dentro del ámbito experimental. Bajo este contexto, la teoría del método integral (Mendoza-Suárez *et al.*, 2011) presenta algunas ventajas como es la propagación de ondas electromagnéticas a través de sistemas con estructuras periódicas que tienen geometrías complicadas cuyos materiales pueden ser hasta metamateriales dispersivos. Cabe mencionar que, aunque en los últimos años han sido reportados avances teóricos de la propagación de ondas con polarización TE a través de guías de

onda de cristal fotónico con superficies perfectamente conductoras que rodean un medio vacío o metamaterial; lo anterior aún permite seguir investigando este tipo de sistemas. De ahí que el objetivo central de esta tesis es tratar de realizar algunas aportaciones adicionales en la dirección de estos temas que ya fueron tratados con polarización TE ((Mendoza-Suárez *et al.*, 2011),(Pérez-Aguilar *et al.*, 2013a,b)), pero ahora con un énfasis especial de la propagación de la luz con polarización TM. Además, se estudiaron sistemas de guías de onda periódicas y onduladas con materiales reales (i.e. materiales metálicos); para ambos casos de las polarizaciones TE y TM. Finalmente, en este trabajo se presenta una generalización de este sistema de CFs en 1D, pero con 2 y 3 guías de ondas periódicas y onduladas con superficies perfectamente conductoras y metálicas para ambas polarizaciones. Es necesario destacar que los resultados generados no han sido referidos en la literatura actual; por ende, sus implicaciones pudieran resultar ser la iniciativa de las guías de ondas de cristal fotónico bidimensionales.

### **Estructura de la tesis**

En el capítulo II se introduce la teoría básica del método integral para calcular las estructuras de bandas de las guías de ondas fotónicas periódicas y onduladas en 1D con longitud infinita. Asimismo, en el tercer capítulo se describe otro método integral para estudiar la respuesta óptica de guías de ondas de cristales fotónicos, con dimensión finita. El capítulo IV contiene los resultados numéricos derivados de los modelos teóricos presentados en los capítulos II y III. Primeramente se presenta el sistema formado para una sola guía de ondas perfectamente conductora para la polarización TM. Posteriormente, se muestran los resultados para una guía de ondas metálica tomando en cuenta ambas polarizaciones. Finalmente se trata la generalización de los sistemas ya indicados con 2 y 3 guías de ondas. En el capítulo V se hace mención de las conclusiones más sobresalientes de la investigación realizada.

## Capítulo II

---

# ESTRUCTURAS DE BANDAS EN GUÍAS DE ONDAS DE CRISTALES FOTÓNICOS

---

En este capítulo se describe una técnica rigurosa para calcular la estructura de bandas que es una propiedad importante de un cristal fotónico. La técnica se conoce como el método de la ecuación integral. Se presenta un planteamiento teórico que permite obtener una relación de dispersión de una guía de ondas de cristal fotónico unidimensional de longitud infinita. Además, se presentan los resultados equivalentes que ya han sido previamente publicados.

### II.1. Descripción del método integral

El método integral, de manera general, está basado en la solución de la ecuación integral (Mendoza-Suárez et al., 2006), la cual parte del segundo teorema integral de Green. Así es posible obtener un par de ecuaciones integrales acopladas que involucran, como incógnitas el modo del campo y su derivada normal evaluados en las fronteras o superficies involucradas. La discretización del sistema resulta en una ecuación matricial homogénea cuya solución determina las funciones fuente, con las que se puede calcular

las estructuras de bandas. Además, esta metodología implica ecuaciones independientes del tiempo y funciona a lo largo de los contornos de los límites de las geometrías que se manejan, lo cual presenta grandes ventajas en comparación con otros métodos, ya que sólo toma en cuenta un número finito de puntos de muestreo a lo largo de los contornos de la celda unitaria, permitiendo una menor cantidad de recursos computacionales. Una noción más general de toda la metodología involucrada puede analizarse a cabalidad a partir de la Ref. (Mendoza-Suárez *et al.*, 2011).

Proponemos como punto de partida la geometría de un cristal fotónico unidimensional (CF1D) con superficies periódicas y onduladas para calcular posteriormente las estructuras de bandas respectivas.

### II.1.1. Consideraciones preliminares

Consideremos una guía de ondas formada por dos superficies perfectamente conductoras, con perfiles ondulados y periódicos en una sola dirección. El medio existente entre ambas superficies es el vacío. Ver a continuación la Fig.1.

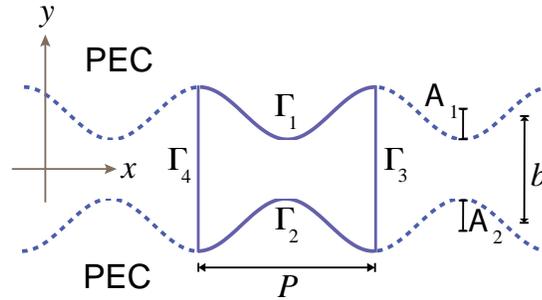


Figura 1. Descripción esquemática de la guía de ondas periódica por las superficies onduladas perfectamente conductoras.

Asimismo, supongamos que las superficies tienen asociado un periodo  $P$ , el ancho promedio del canal de la guía de ondas está descrito por  $b$  y los perfiles de las superficies

están representados por las funciones periódicas:

$$\frac{b}{2} + A_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{P}\right), \quad (\text{Perfil superior})$$

$$-\frac{b}{2} + A_2 \cos\left(\frac{2\pi x}{P} - \Delta\phi\right), \quad (\text{Perfil inferior})$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  representan las amplitudes promedio correspondientes y,  $\Delta\phi$  es la diferencia de fase entre ambas superficies, como se muestra en la Fig. 2. En el resto del trabajo de investigación vamos a considerar que  $A_1 = A_2 = A$ .

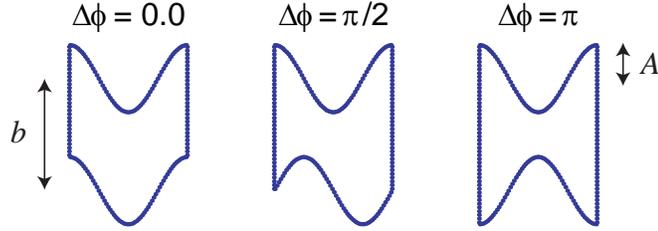


Figura 2. Representación gráfica de las distintas configuraciones aplicables sobre las superficies onduladas en función de la diferencia de fase  $\Delta\phi$ .

Para iniciar con la construcción del método integral, vamos a obtener la ecuación de onda con medios sin fuentes donde  $\rho = 0$  y  $\mathbf{J} = 0$ , ya que estamos considerando el vacío. Entonces las ecuaciones de Maxwell correspondientes son:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (4)$$

donde  $\epsilon_0$  es la constante dieléctrica y  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética en el vacío, respectivamente. Aplicando el operador rotacional sobre la Ec. (3) se tiene,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left( -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right), \quad (5)$$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}). \quad (6)$$

Luego, sustituyendo las expresiones dadas por las Ecs. (2) y (4) en la Ec. (6) obtenemos la ecuación de onda asociada al campo eléctrico,

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (7)$$

Siguiendo un procedimiento análogo, es posible deducir la ecuación que caracteriza al campo magnético:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (8)$$

tal que  $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$  donde  $c$  corresponde a la velocidad de onda en el vacío que se hace presente. De ahí que, considerando que los campos electromagnéticos poseen una dependencia armónica temporal,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (9)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (10)$$

se tiene que, las ecuaciones de onda resultantes se pueden expresar en la forma de la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (11)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0. \quad (12)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de la onda EM,  $c$  la velocidad de la luz y  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$  el vector de posición del punto de observación que es independiente de  $z$ .

### II.1.2. Función de Green para la ecuación de Helmholtz

Para determinar esencialmente la estructura de bandas del sistema original propuesto, es necesario encontrar la relación de dispersión  $\omega = \omega(k)$ . Con esto en mente podemos expresar los campos electromagnéticos anteriores en términos de la función  $\Psi$ . Considerando que  $j = 1 \dots n$  indica el medio  $j$  -ésimo:

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \Psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (13)$$

Hemos establecido la convención de que  $\Psi^j(\mathbf{r})$  satisface las condiciones de frontera y de periodicidad en la dirección  $x$  para cada polarización. Esta función  $\Psi(\mathbf{r})$  representa al campo eléctrico  $E_z$  en el caso de polarización TE y al campo magnético  $H_z$ , en el caso de polarización TM. Por ende, el teorema de Bloch puede aplicarse, dadas las condiciones de simetría y la forma de la ecuación diferencial anterior, obteniéndose la expresión:

$$\Psi(x - P, y) = \exp(-ikP) \Psi(x, y), \quad (14)$$

donde  $k$  es el vector de Bloch unidimensional. Debido a la geometría bidimensional, vamos a considerar una función de Green que permitirá resolver la ecuación de Helmholtz (Ec. (13)). Esta función de Green es

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (15)$$

donde  $H_0^{(1)}(\zeta)$  es la función de Hankel de primera clase y de orden cero y  $\mathbf{r}'$  representa el vector de integración.

### II.1.3. Representación integral de la ecuación de Helmholtz

Empleando el teorema fundamental de Green en la ecuación de Helmholtz, es posible referir las expresiones siguientes:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[ \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \Psi(\mathbf{r}) \right] = 0, \quad (16)$$

$$-\Psi(\mathbf{r}) \left[ \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (17)$$

Integrando sobre una superficie cerrada el resultado de sumar las Ecs. (16) y (17), se obtiene

$$\oint_S \left[ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r}) \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] da = 4\pi \oint_S \Psi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') da. \quad (18)$$

Cabe señalar que la superficie  $S$  está limitada por el contorno cerrado correspondiente  $\Gamma$ . Entonces, aplicando la representación característica del teorema de Green en su forma,

$$\oint_S [\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi] da = \oint_{\Gamma} [\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi] \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad (19)$$

y haciendo  $\psi = G$  y  $\phi = \Psi$  en el primer miembro de la Ec. (18) podemos reescribir la expresión general como:

$$\oint_{\Gamma} \left[ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r}) \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = 4\pi \oint_S \Psi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') da. \quad (20)$$

Luego, si la derivada normal está definida como  $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Psi(\mathbf{r})$ , siendo  $\hat{\mathbf{n}}$  el vector normal que va hacia afuera del contorno  $\Gamma$ . Además, es posible reescribir la integral de superficie (Ec. (20)) mediante el producto del campo por la función de Heaviside donde se considera que  $\theta(\mathbf{r}') = 1$  si  $\mathbf{r}'$  está dentro de la celda unitaria  $S$  y en el caso contrario,  $\theta(\mathbf{r}') = 0$ , de la siguiente forma:

$$\oint_{\Gamma} \left[ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} - \Psi(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}} \right] ds = 4\pi \Psi(\mathbf{r}') \theta(\mathbf{r}'). \quad (21)$$

A fin de no generar confusión, se hace necesario seguir con la convención de que  $\mathbf{r}$  representa el punto de observación que está infinitesimalmente separado del contorno  $\Gamma$  y por ende, nos permite ubicar siempre el lugar donde se mide el campo; de manera que sea  $\mathbf{r}'$  quien se desplaza sobre las superficies de la celda unitaria,  $ds'$  es el diferencial de longitud de arco y  $\mathbf{n}'$  es el vector normal hacia afuera de  $\Gamma$ . Por consiguiente, la geometría inicial del problema puede ser descrita por la representación de puntos a lo

largo del contorno  $\Gamma$  con coordenadas  $x(s')$ ,  $y(s')$  como funciones paramétricas de la longitud de arco  $s'$  y de sus respectivas derivadas hasta de segundo orden,  $x'(s')$ ,  $y'(s')$ ,  $x''(s')$  y  $y''(s')$  tal como se muestra en la Fig. 1. Entonces podemos intercambiar las variables  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$  en la Ec. (21),

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} \left[ G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} - \Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}'} \right] ds' = \Psi^j(\mathbf{r}) \theta(\mathbf{r}). \quad (22)$$

Para resolver numéricamente la Ec. (22), se divide el contorno  $\Gamma$  en cuatro segmentos  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  y  $\Gamma_4$  (como se indicó en la Fig. 1.) y se hace un muestreo  $x_n = x(s_n)$ ,  $y_n = y(s_n)$  a lo largo de cada curva. El número total de puntos es  $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$ , donde cada  $N_j$  para  $j = 1, 2, 3$  y  $4$  son los puntos correspondientes a lo largo de cada una de los segmentos, respectivamente. Es importante mencionar, que los puntos  $(x_n, y_n)$  sobre el contorno  $\Gamma_3$  deben ser los correspondientes a los de  $\Gamma_4$ ,  $(x_n - P, y_n)$ , por lo que  $N_3 = N_4$ . Además de estas consideraciones, se toma en cuenta la condición de frontera en las superficies perfectamente conductoras (curvas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ ). De esta manera, la Ec. (22) puede ser representada numéricamente en términos de un sistema homogéneo de  $N$  ecuaciones algebraicas dado por:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N_1} L_{mn(1)} \Phi_{n(1)} + \sum_{n=1}^{N_2} L_{mn(2)} \Phi_{n(2)} + \sum_{n=1}^{N_3} L_{mn(3)} \Phi_{n(3)} \\ & - \sum_{n=1}^{N_3} N_{mn(3)} \Psi_{n(3)} + \sum_{n=1}^{N_4} L_{mn(4)} \Phi_{n(4)} - \sum_{n=1}^{N_4} N_{mn(4)} \Psi_{n(4)} = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

donde  $m = 1, 2, \dots, N$ . En la Ec. (23) las funciones fuente  $\Psi_{n(j)}$  y  $\Phi_{n(j)}$  representan numéricamente el campo  $\Psi$  y su derivada normal  $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}'}$ ; además, los subíndices  $n(j)$  denotan el  $n$ -ésimo punto a lo largo del contorno  $\Gamma_j$ . Veamos cómo construir a detalle estos elementos.

### II.1.4. Discretización de las integrales

Considerando las integrales de línea anteriores cuya variable de integración es el parámetro de longitud de arco  $s$ , conviene expresar los integrandos dentro de los mismos términos y así obtener una representación paramétrica de los puntos que forman el perfil  $\Gamma_j$ . Sean  $(x(s), y(s))$  las formas paramétricas de las coordenadas cartesianas de un punto arbitrario y  $(x'(s), y'(s); x''(s), y''(s))$  sus derivadas de primer y segundo orden; asimismo, supondremos que dichas funciones son continuas por segmentos mínimos. De ahí que podemos distinguir dos integrales de contorno:

$$I_G(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} ds', \quad (24)$$

$$I_{\Psi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} \Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} ds'. \quad (25)$$

En búsqueda de una solución numérica, se efectúa una discretización sobre las Ecs. (24) y (25) dado que dichas integrales no se pueden resolver formalmente de manera exacta. Por ende, se divide el contorno  $\Gamma$  en  $n$  pequeños segmentos de longitud de arco  $\Delta s$ ; ello nos permite definir nuevos límites de integración:

$$I_G(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_n \int_{s_{n-\Delta s/2}}^{s_{n+\Delta s/2}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} ds', \quad (26)$$

$$I_{\Psi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_n \int_{s_{n-\Delta s/2}}^{s_{n+\Delta s/2}} \Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} ds'. \quad (27)$$

Hágase un muestreo fino para  $\Delta s$  suficientemente pequeño sobre las integrales Ecs. (26) y (27). Por tanto, las funciones  $\Psi$  y  $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}'}$  pueden ser extraídas del argumento por considerarse aproximadamente constantes.

$$I_G(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_n \Phi_n \int_{s_{n-\Delta s/2}}^{s_{n+\Delta s/2}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds', \quad (28)$$

$$I_{\Psi}(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_n \Psi_n \int_{s_{n-\Delta s/2}}^{s_{n+\Delta s/2}} \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} ds', \quad (29)$$

donde

$$\Phi_n = \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}'_n}, \quad (30)$$

$$\Psi_n = \Psi(\mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}'_n}. \quad (31)$$

Sobre el punto de observación  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m$  evaluamos las integrales de las Ecs. (28) y (29); por consiguiente, considerando que el subíndice  $m$  indica el punto de observación y el subíndice  $n$  el punto de integración, definimos los elementos de matriz en la forma,

$$L_{mn} = \frac{1}{4\pi} \int_{s_n-\Delta s/2}^{s_n+\Delta s/2} G(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}') ds', \quad (32)$$

$$N_{mn} = \frac{1}{4\pi} \int_{s_n-\Delta s/2}^{s_n+\Delta s/2} \frac{\partial G(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}')}{\partial n'} ds', \quad (33)$$

Dado que  $\Delta s$  es muy pequeño, podemos sustituir la Ec. (15) en las Ecs. (32) y (33); ello nos permite reescribir nuevamente:

$$L_{mn} \approx \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left( \left( \frac{\omega}{c} \right) |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n| \right) \Delta s, \quad (34)$$

$$N_{mn} \approx \frac{i}{4} \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \nabla' H_0^{(1)} \left( \left( \frac{\omega}{c} \right) |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n| \right) \Delta s. \quad (35)$$

Por consiguiente, en la Ec. (35)  $\hat{\mathbf{n}}_n$  es la normal al contorno  $\Gamma_j$  en el punto de integración  $\mathbf{r}'_n$  y está definida por  $\hat{\mathbf{n}}_n = n_x \hat{\mathbf{i}} + n_y \hat{\mathbf{j}}$ . Denominando  $\mathbf{R}_{mn} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n$  y  $u_n = k_j R_{mn} = k \sqrt{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2}$  y expresando  $\nabla' H_0^{(1)}(u)$  obtenemos a partir de la Ec. (35), la siguiente relación:

$$\hat{\mathbf{n}}_n \cdot \nabla' H_0^{(1)}(u_n) = \left[ n_x \frac{\partial(u_n)}{\partial x'_n} + n_y \frac{\partial(u_n)}{\partial y'_n} \right] \frac{dH_0^{(1)}(u_n)}{\partial u_n}. \quad (36)$$

Asimismo, se tiene que

$$\frac{dH_0^{(1)}(u_n)}{\partial u_n} = -H_1^{(1)}(u_n), \quad (37)$$

pero, además

$$\frac{\partial(u_n)}{\partial x'_n} = -k \frac{x_m - x'_n}{R_{mn}}, \quad (38)$$

$$\frac{\partial(u_n)}{\partial y'_n} = -k \frac{y_m - y'_n}{R_{mn}}. \quad (39)$$

Enfocándonos sobre la Ec. (36), sustituyendo el valor de  $u_n$  y las derivadas anteriores,

$$\hat{\mathbf{n}}_n \cdot \nabla' H_0^{(1)}(kR_{mn}) = k \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \frac{\mathbf{R}_{mn}}{R_{mn}} H_1^{(1)}(kR_{mn}). \quad (40)$$

De ahí que, las Ecs. (34) y (35) se transforman en:

$$L_{mn} \approx \frac{i}{4} \Delta s H_0^{(1)}(kR_{mn}), \quad (41)$$

$$N_{mn} \approx \frac{i}{4} k \Delta s \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \frac{\mathbf{R}_{mn}}{R_{mn}} H_1^{(1)}(kR_{mn}). \quad (42)$$

Analizando que toda función de Green posee una singularidad removible en  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ , ello nos permite que las integrales dadas en las Ecs.(32) y (33) pueden determinarse mediante un proceso límite:

$$L_{mn} = \frac{1}{4\pi} \lim_{\varsigma \rightarrow 0} \int_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} G(\mathbf{r}_m + \varsigma \hat{\mathbf{n}}_m, \mathbf{r}') ds', \quad (43)$$

$$N_{mn} = \frac{1}{4\pi} \lim_{\varsigma \rightarrow 0} \int_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} \frac{\partial G(\mathbf{r}_m + \varsigma \hat{\mathbf{n}}_m, \mathbf{r}')}{\partial n'} ds'. \quad (44)$$

### II.1.5. Elementos no diagonales

Los elementos no diagonales son aquellos elementos matriciales  $L_{mn}$  y  $N_{mn}$  tales que ( $m \neq n$ ), los cuales se localizan fuera de la diagonal principal. Estos elementos pueden intercambiarse independientemente del orden entre el límite y la integral. Por ende, puede aplicarse directamente el límite correspondiente dentro de la integral, tomando una aproximación rectangular sobre el intervalo de integración suficientemente pequeño, teniéndose que los elementos fuera de la diagonal son,

$$L_{mn} = \frac{i \Delta s}{4} H_0^{(1)}(kR_{mn}), \quad (45)$$

$$N_{mn} = \frac{i \Delta s}{4} k \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \frac{\mathbf{R}_{mn}}{R_{mn}} H_1^{(1)}(kR_{mn}). \quad (46)$$

### II.1.6. Elementos diagonales

Para los elementos matriciales  $L_{mn}$  y  $N_{mn}$  que conforman la diagonal principal ( $m = n$ ), se requiere un tratamiento especial ya que el integrando posee una singularidad en la función de Hankel. Sobre las Ecs. (43) y (44) se efectúa el cambio de variable,  $s = s' - s_n$ , cuyo diferencial es  $ds = ds'$ . Así,

$$L_{nn} = \frac{i}{4} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \int_{-\Delta s/2}^{\Delta s/2} H_0^{(1)}(k |\mathbf{r}_n + \zeta \hat{\mathbf{n}}_n - \mathbf{r}'(s + s_n)|) ds, \quad (47)$$

$$N_{nn} = \frac{i}{4} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \int_{-\Delta s/2}^{\Delta s/2} \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \nabla' H_0^{(1)}(k |\mathbf{r}_n + \zeta \hat{\mathbf{n}}_n - \mathbf{r}'(s + s_n)|) ds. \quad (48)$$

Luego, dentro de la pequeña vecindad  $\Delta s$  el elemento  $\mathbf{r}'(s + s_n)$  varía alrededor del punto  $s_n$ ; por lo que, utilizando una expansión en serie de Taylor:

$$\mathbf{r}'(s + s_n) = \mathbf{r}_n + \left. \frac{d\mathbf{r}'}{ds} \right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_n} s + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\mathbf{r}'}{ds^2} \right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_n} s^2 + \dots \quad (49)$$

De ahí que, podemos expresar el vector unitario tangente al contorno en el punto  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_n$ , así como la primera derivada del vector  $\hat{\mathbf{t}}'_n$  en la forma:

$$\hat{\mathbf{t}}_n = \left. \frac{d\mathbf{r}'}{ds} \right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_n}, \quad (50)$$

$$\hat{\mathbf{t}}'_n = \left. \frac{d^2\mathbf{r}'}{ds^2} \right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_n}. \quad (51)$$

Considerando nuevamente la Ec. (49), se puede reescribir el vector de integración  $\mathbf{r}'$  como:

$$\mathbf{r}'(s + s_n) = \mathbf{r}_n + \hat{\mathbf{t}}_n s + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{t}}'_n s^2 + \dots \quad (52)$$

Hasta términos de primer orden en la Ec. (52) y sustituyendo los resultados correspondientes en la Ec. (47),

$$L_{nn} = \frac{i}{4} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \int_{-\Delta s/2}^{\Delta s/2} H_0^{(1)}\left(k \left| \zeta \hat{\mathbf{n}}_n - \hat{\mathbf{t}}_n s \right| \right) ds. \quad (53)$$

Además, dado que

$$\left| \varsigma \widehat{\mathbf{n}}_n - \widehat{\mathbf{t}}_n s \right| = \sqrt{\left( \varsigma \widehat{\mathbf{n}}_n - \widehat{\mathbf{t}}_n s \right) \cdot \left( \varsigma \widehat{\mathbf{n}}_n - \widehat{\mathbf{t}}_n s \right)}, \quad (54)$$

podemos evaluar el límite de la Ec. (53), para pequeños argumentos de la función de Hankel de primera clase y de orden cero, donde  $\gamma$  es la constante de Euler.

$$L_{nm} = \frac{i}{4} \int_{-\Delta s/2}^{\Delta s/2} H_0^{(1)}(k|s|) ds, \quad (55)$$

siendo

$$H_0^{(1)}(x) \approx 1 - \frac{2}{i\pi} \ln(\gamma x). \quad (56)$$

Por tanto, al sustituir tal aproximación e integrar respectivamente, obtenemos los elementos de matriz deseados:

$$L_{nm} = \frac{i}{4} \Delta s H_0^{(1)}\left(k_j \frac{\Delta s}{2e}\right). \quad (57)$$

Mediante un razonamiento análogo, es posible calcular los elementos  $N_{nn}$  a partir de la Ec. (40) considerando el formalismo de la Ec. (52) para los primeros términos,

$$\widehat{\mathbf{n}}_n \cdot \nabla' H_0^{(1)}(k|\mathbf{r}_n + \varsigma \widehat{\mathbf{n}}_n - \mathbf{r}'(s + s_n)|) = k \frac{\varsigma - \frac{1}{2} \widehat{\mathbf{n}}_n \cdot \widehat{\mathbf{t}}_n' s^2}{|\varsigma^2 + s^2|} H_1^{(1)}(k|\varsigma^2 + s^2|). \quad (58)$$

Tomando el resultado anterior y aplicándolo en la Ec. (48):

$$N_{nn} = \frac{i}{4} k \lim_{\varsigma \rightarrow 0} \int_{-\Delta s/2}^{\Delta s/2} \frac{\varsigma - \frac{1}{2} \widehat{\mathbf{n}}_n \cdot \widehat{\mathbf{t}}_n' s^2}{|\varsigma^2 + s^2|} H_1^{(1)}(k|\varsigma^2 + s^2|) ds. \quad (59)$$

En el límite para pequeños argumentos, la función de Hankel de primera clase y de orden uno  $H_1^{(1)}(x)$  se aproxima como:

$$H_1^{(1)}(x) \simeq \frac{2}{i\pi} \frac{1}{x}. \quad (60)$$

Finalmente, sustituyendo  $p = \frac{1}{2} \widehat{\mathbf{n}}_n \cdot \widehat{\mathbf{t}}_n'$  en la Ec. (59):

$$N_{nn} = \frac{ik}{4} \lim_{\varsigma \rightarrow 0} \int_{-\Delta s/2}^{\Delta s/2} \frac{\varsigma - ps^2}{|\varsigma^2 + s^2|} \frac{2}{i\pi k |\varsigma^2 + s^2|} ds. \quad (61)$$

Al integrar, obtenemos los elementos de matriz que se buscan,

$$N_{nn} = \frac{1}{2} + \frac{\Delta s}{4\pi} \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \hat{\mathbf{t}}'_n. \quad (62)$$

Considerando las Ecs. (45), (46), (57) y (62) podemos reescribir los elementos  $L_{mn}$  y  $N_{mn}$  en la forma:

$$L_{mn} = i \frac{\Delta s}{4} H_0^{(1)} \left( \frac{\omega}{c} R_{mn} \right) (1 - \delta_{mn}) + i \frac{\Delta s}{4} H_0^{(1)} \left( \frac{\omega}{c} \frac{\Delta s}{2e} \right) \delta_{mn}, \quad (63)$$

$$N_{mn} = i \frac{\Delta s}{4} \frac{\omega}{c} H_1^{(1)} (k R_{mn}) \hat{\mathbf{n}}_n \frac{\mathbf{R}_{mn}}{R_{mn}} (1 - \delta_{mn}) + \left( \frac{1}{2} + \frac{\Delta s}{4\pi} \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \hat{\mathbf{t}}'_n \right) \delta_{mn}, \quad (64)$$

donde

$$R_{mn} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}, \quad (65)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_n \cdot \mathbf{R}_{mn} = -y'(s)(x_m - x_n) + x'(s)(y_m - y_n), \quad (66)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_n \cdot \hat{\mathbf{t}}'_n = x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s). \quad (67)$$

La función  $\delta_{mn}$  es la delta de Kronecker y  $\Delta s$  la longitud de arco entre dos puntos consecutivos de una curva dada. Asimismo, en las Ecs. (66) y (67) hemos definido  $x'_n = x''(s)|_{s=s_n}$ ,  $x''_n = x'''(s)|_{s=s_n}$ , y así sucesivamente. Cabe destacar que, por simplicidad, se ha omitido el índice de contorno ( $j$ ), pero debe entenderse que implícitamente  $n = n(j)$  aparece en las Ecs. (63-67).

Aplicando la Ec. (14), obtenemos las ecuaciones  $\Psi_n^{(4)} = \exp(-ikP) \Psi_n^{(3)}$  y  $\Phi_n^{(4)} = -\exp(-ikP) \Phi_n^{(3)}$ . El signo menos aparece en la última ecuación porque las normales correspondientes a  $\Gamma_3$  y  $\Gamma_4$  tienen sentidos opuestos. Con estas expresiones, se tiene que el sistema de ecuaciones propuesto originalmente por la (Ec. (23)) se reduce a:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N_1} L_{mn(1)} \Phi_{n(1)} + \sum_{n=1}^{N_2} L_{mn(2)} \Phi_{n(2)} + \sum_{n=1}^{N_3} [L_{mn(3)} - \exp(-ikP) L_{mn(4)}] \Phi_{n(3)} \\ - \sum_{n=1}^{N_3} N_{mn(3)} [L_{mn(3)} + \exp(-ikP) L_{mn(4)}] \Psi_{n(3)} = 0, \end{aligned} \quad (68)$$

con  $m = 1, 2, 3, \dots, N$ . La Ec. (68) constituye un sistema lineal de ecuaciones que tiene una matriz representativa,  $M_{mn}$ , que depende de la frecuencia  $\omega$  y del vector de Bloch  $k$ . Como este sistema de ecuaciones es homogéneo, una solución no trivial puede ser obtenida si el determinante es cero y además, se define la función:

$$D(k, \omega) = \ln(|\det(M)|). \quad (69)$$

Numéricamente esta función (Ec. (69)) presenta puntos mínimos locales que nos da la relación de dispersión  $\omega = \omega(k)$  para expresar la estructura de bandas que se desea obtener.

## II.2. Estructuras de bandas en una guía de ondas con superficies onduladas y periódicas

La metodología prevista anteriormente, ya ha sido reportada en diversos artículos de interés ((Mendoza-Suárez *et al.*, 2011),(Pérez-Aguilar *et al.*, 2013a,b)) pero sólo para el tipo de polarización TE y en el caso de polarización TM para superficies eléctricamente conductoras; aunado a lo anterior, los resultados que se muestran a continuación están respaldados sobre bases confiables.

## II.2.1. Polarización TE

Para ejemplificar numéricamente la descripción teórica propuesta con anterioridad, se muestra a continuación la estructura de bandas en términos de la frecuencia reducida  $\omega_r = \frac{P}{2\pi} \frac{\omega}{c}$  y  $k$  dentro de la primera zona de Brillouin  $-\frac{\pi}{P} \leq k \leq \frac{\pi}{P}$  para el caso representativas para el caso de superficies onduladas con una amplitud ( $A = 0.2b$ ), siendo  $b = 2.5$  para TE como se muestra en la Fig. 3(d). En este trabajo vamos a considerar que el periodo  $P = 2\pi$  y en la frecuencia normalizada  $\omega_r$  omitiremos el subíndice r. En la Fig. 3(a) se muestra el perfil de la celda unitaria y en las Figs. 3(b) y (c), se hace una distinción entre los resultados obtenidos de la función determinante, para  $k = 0$  y  $k = \frac{1}{2}$ .

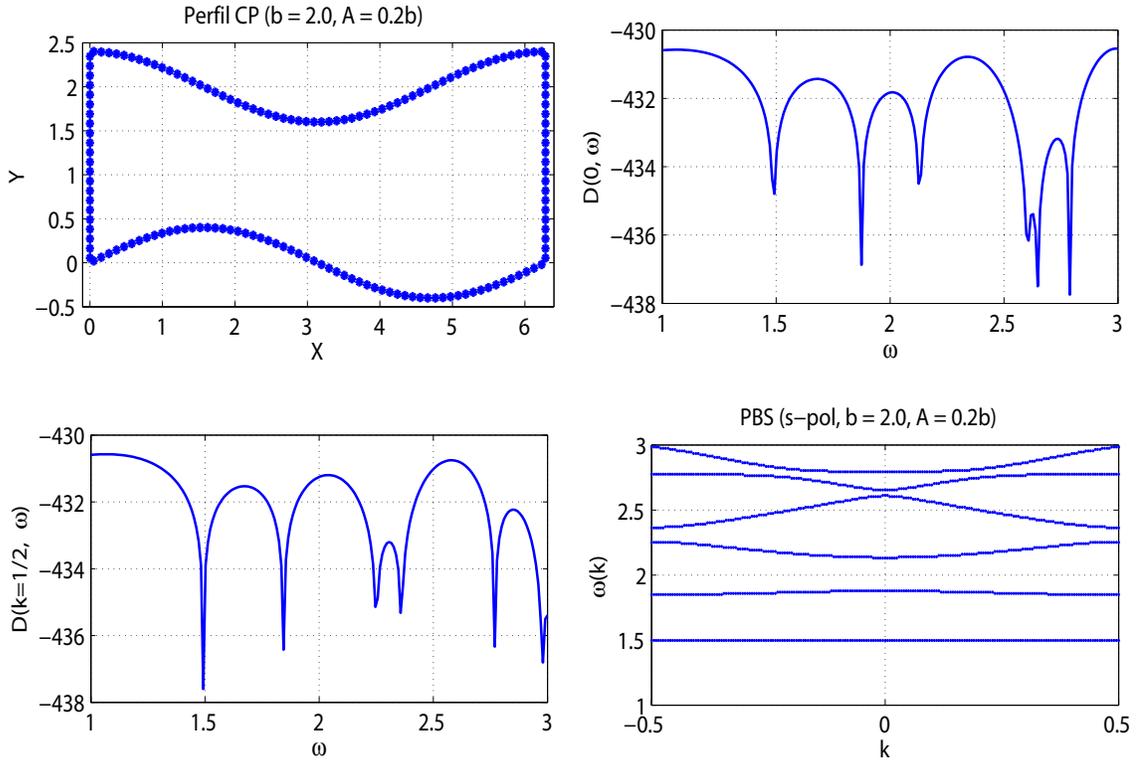


Figura 3. (a) Perfil de la celda unitaria ondulada con amplitud  $A = 0.2b$ , siendo  $b = 2$  y  $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ . (b) Función determinante  $D(k, \omega)$  para  $k = 0$  y (c)  $k = \frac{1}{2}$ . (d) Estructura de bandas de una guía de ondas periódica para la polarización TE.

## II.2.2. Polarización TM

Mediante un razonamiento, se muestran a continuación las zonas permitidas y prohibidas en las estructuras de bandas representativas, tomando como base parámetros idénticos al caso anterior a modo de establecer comparativos, pero considerando la polarización TM. Ver Fig. 4.

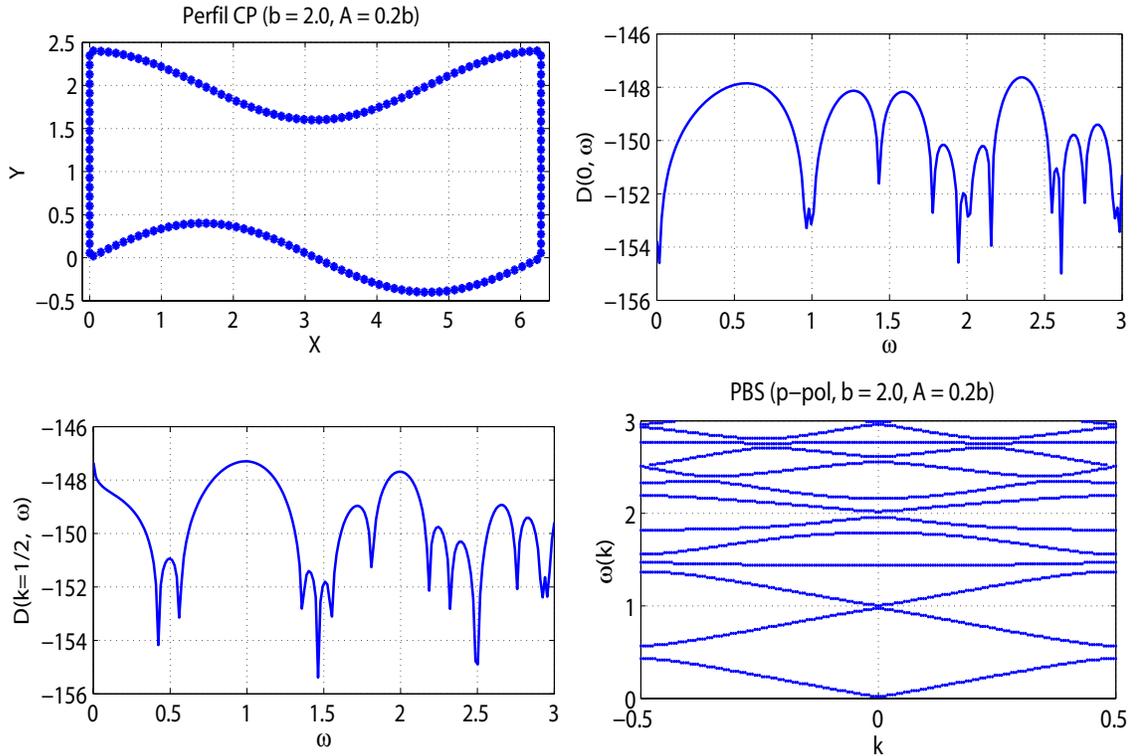


Figura 4. (a) Perfil de la celda unitaria ondulada con amplitud  $A = 0.2b$ , siendo  $b = 2$  y  $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ . (b) Función determinante  $D(k, \omega)$  para  $k = 0$  y (c)  $k = \frac{1}{2}$ . (d) Estructura de bandas de una guía de ondas periódica para la polarización TM.

Bajo la polarización TM la simulación muestra resultados análogos a la predicción teórica propuesta. Variando los parámetros, los resultados sobre la guía de ondas muestran un ensanchamiento (o estrechamiento) de las bandas que relaciona las posiciones de los mínimos locales representados a través de  $D(0, w)$ .

En teoría, un sistema idealizado de nuestro sistema propuesto de longitud infinita

unidireccional, que posee una relación de dispersión, similar en comparación a la de algunos cristales fotónicos conocidos, es una buena forma de comenzar a abordar el problema que nos interesa. No obstante, las guías de onda podemos analizar experimentalmente son de longitud finita. Por lo tanto, nos gustaría determinar si las diferencias en la estructura de bandas de la guía de onda ideal (de longitud infinita) aparecen en el caso de una guía de onda de longitud infinita. Cabe mencionar que, en la práctica, una guía de ondas de longitud finita puede ser considerada como un cristal fotónico truncado, cuando el número de periodos involucrados ha sido cuidadosamente elegido. Dicha región acotada es un punto de partida factible para analizar la existencia de bandas prohibidas presentes, modelando la reflectividad del sistema con un nuevo enfoque del método integral similar descrito anteriormente (Pérez-Aguilar *et al.*, 2009), el cual se analiza a continuación en el capítulo IV.

## Capítulo III

---

# RESPUESTA ÓPTICA DE GUÍAS DE ONDAS DE CRISTALES FOTÓNICOS

---

En este capítulo se describe de manera otra perspectiva del método de la Ecuación Integral aplicable a una regiones de dimensión finita para modelar la respuesta óptica de guías de ondas de cristales fotónicos a través de la interacción de la luz a través de una guía de ondas formada por dos superficies onduladas y periódicas perfectamente conductoras, mediante el espectro de reflectancia característico. Esta propiedad resulta ser fundamental para nosotros dada la importante correspondencia que mantiene con la estructura de bandas que se abordó en el capítulo anterior para el caso infinito. Por ende, se presenta un planteamiento teórico que permite obtener valores representativos de la propagación de un haz incidente sobre una guía de ondas de cristal fotónico unidimensional de longitud finita. Finalmente, se hace mención de resultados publicados en torno al tema.

### III.1. Descripción del método integral

Es importante recordar, que el método integral del capítulo II para guías de ondas periódicas y onduladas con longitud infinita, está desarrollado para medios conductores

perfectos y el vacío. Sin embargo, nuestro sistema propuesto que representa un arreglo unidimensional de guías de ondas con longitud finita, se desarrollará para un caso más general para poder tratar los CFs reales; en particular las guías de ondas de cristal fotónico con superficies metálicas. Además, este método integral permitirá modelar un sistema con varias guías de ondas tanto para superficies perfectamente conductoras como para superficies metálicas. Enseguida analizaremos el formalismo más a detalle.

### III.1.1. Consideraciones preliminares

La metodología para resolver el problema de la respuesta óptica de una estructura cristalina, formada por un arreglo unidimensional de guías de ondas con perfil ondulado y periódico, consiste en utilizar métodos integrales aplicables a sistemas con geometrías y propiedades físicas particulares, modelando como resultado la reflectancia del arreglo propuesto. Para ello se lleva a cabo una descripción esquemática de guías de ondas de ancho  $b$  y longitud  $d$  con superficies onduladas. Las  $M$  regiones distintas constituyen capas alternadas del material respecto a la región 0, caracterizada por el medio vacío. El sistema considerado es invariante en la dirección  $z$  y el plano de incidencia es el plano  $x-y$ . Para evitar efectos de borde, dada la longitud finita de las guías onduladas  $\Gamma_i$ , se procede a iluminar el arreglo con un haz gaussiano, en la región 0 (representada por vacío) donde  $\theta_0$  y  $\theta_s$  representan los ángulos de incidencia y esparcimiento, respectivamente, tal como muestra la Figura. 5 y cuya intersección con el plano del canal formado por el sistema tiene un semi-ancho  $g$ . Este parámetro  $g$  debe ser menor a la longitud total del sistema  $L = Ml + (M - 1)b$ , pero mayor que el ancho de la abertura del canal  $b$ .

Debido a la geometría, las ondas incidentes pueden clasificarse como Transversal

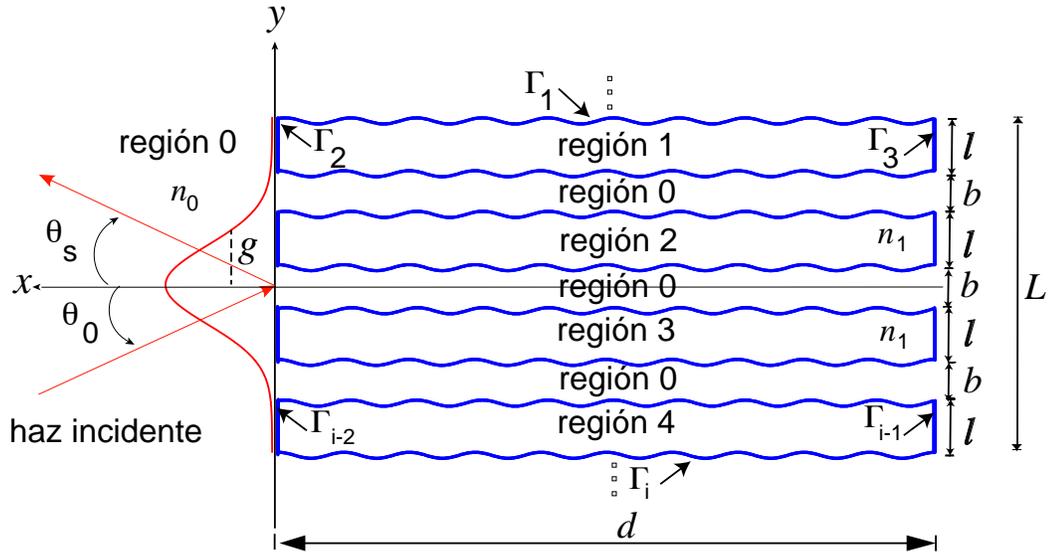


Figura 5. Descripción esquemática de una guía de ondas de ancho  $b$  y longitud  $d$  con superficies onduladas que es iluminada con un haz Gaussiano en la región 0 en el plano  $x$ - $y$  donde  $\theta_0$  y  $\theta_s$  representan los ángulos de incidencia y esparcimiento, respectivamente.. La región 0, representa el vacío. Las  $M$  regiones distintas constituyen capas alternadas del material respecto a la región 0.

Eléctrica (TE), conocida también como polarización s, en la que el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia [ $\mathbf{E} = (0, E_2, 0)$ ] o Transversal Magnética (TM), conocida también como polarización p, en la que el campo magnético es perpendicular al plano de incidencia [ $\mathbf{H} = (0, H_2, 0)$ ]. En el presente capítulo se analizará únicamente el caso de polarización TE dejándose el otro caso para mostrarse en el capítulo IV. Se describe ahora el método para calcular los campos y potencias esparcidas.

### III.1.2. Los campos electromagnéticos

Se considera que el sistema es iluminado por un haz de luz monocromático y que el plano de incidencia es el plano  $xy$ . El campo electromagnético total puede ser representado por

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = [0, \psi(\mathbf{r}), 0] \exp(-i\omega t),$$

donde  $\mathbf{r} = (x, y)$  y  $\psi(\mathbf{r})$  una función escalar que representa a  $E_2(x, y)$  (la segunda componente del campo eléctrico) para el caso de la polarización s y a  $H_2(x, y)$  (la segunda componente del campo magnético) para el caso de la polarización p. Las funciones  $\psi(x, y)$  satisfacen entonces las ecuaciones de Helmholtz en la región 0

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \psi^{(0)}(\mathbf{r}) = 0. \quad (70)$$

Dado que se busca la generalización de este problema para las regiones de  $j = 1$  hasta  $M$ , podemos referir la expresión anterior como

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \epsilon_j(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \right) \psi^{(j)}(\mathbf{r}) = 0. \quad (71)$$

Las condiciones de frontera que satisfacen los campos al cruzar la interfase son importantes en la formulación del problema. En particular, requerimos que las componentes tangenciales de los campos electromagnéticos al pasar de un medio a otro sean continuas. En consecuencia, las condiciones de frontera que satisfacen  $\psi^{(0)}(\mathbf{r})$  y  $\psi^{(j)}(\mathbf{r})$  en la superficie de los cuerpos son

$$\psi^{(0)}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_j} = \psi^{(j)}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_j}, \quad (72)$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \psi^{(0)}(\mathbf{r})}{\partial n_j} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_j} = \frac{1}{\epsilon_j(\omega)} \frac{\partial \psi^{(j)}(\vec{r})}{\partial n_j} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_j}, \quad (73)$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial n_j} = \left[ -\eta'_j(t_j) \frac{\partial}{\partial x} + \xi'_j(t_j) \frac{\partial}{\partial y} \right] \quad (74)$$

es el operador de la derivada normal (no normalizado) a lo largo del vector  $\mathbf{n}_j = [-\eta'_j(t_j), \xi'_j(t_j)]$  que apunta de la superficie del  $j$ -ésimo cuerpo hacia el medio 0.

### III.2. Las funciones fuente

Se consideran las funciones de Green,  $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  y  $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  como las soluciones propuestas para

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (75)$$

y

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \epsilon_j(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \right) G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (76)$$

respectivamente. La función  $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  es la función de Green para el vacío y satisface una condición de radiación, mientras que  $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  es para el interior del  $j$ -ésimo cuerpo y satisface una condición de absorción. En el desarrollo del trabajo se utilizan representaciones de estas funciones en términos de funciones de Hankel y en términos de su espectro angular (Maradudin *et al*, 1990). Las representaciones de estas funciones son

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)} \left( \frac{\omega}{c} [(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2} \right) \quad (77)$$

y

$$G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)} \left( n_j(\omega) \frac{\omega}{c} [(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2} \right), \quad (78)$$

donde  $H_0^{(1)}(z)$  es una función de Hankel de primera clase y de orden cero. Como punto de partida para la derivación de una expresión para el campo esparcido, se usa el segundo teorema integral de Green (Jackson 1999), que establece que

$$\int_V (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u) dv = \int_S \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds, \quad (79)$$

donde  $u(\mathbf{x})$  y  $v(\mathbf{x})$  son campos escalares arbitrarios definidos en un volumen  $V$  rodeado por una superficie cerrada  $S$ , y  $\partial/\partial n$  es la derivada normal a lo largo de la superficie dirigida hacia afuera del volumen  $V$ . Para la región 0, se hace la sustitución  $u = \psi^{(0)}(\mathbf{r})$  y  $v = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  en la Ec. (79). Además, usando las Ecs. (70), (75) y la condición de

frontera (Ec.(72)) se obtiene el campo  $\psi^{(0)}(\vec{r})$  de la siguiente manera

$$\psi^{(0)}(\mathbf{r}) = \psi_{inc}^{(0)}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[ \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, t'_j)}{\partial n_j} \psi^{(0)}(t'_j) - G_0(\mathbf{r}, t'_j) \frac{\partial \psi^{(0)}(\mathbf{r})}{\partial n_j}(t'_j) \right] dt'_j. \quad (80)$$

En esta expresión,  $\psi_{inc}^{(0)}(\mathbf{r})$  representa el campo incidente y la suma de integrales representa el campo esparcido. Para llegar a la Ec. (80) se ha usado el hecho de que el elemento de arco de la curva  $\Gamma_j$  está dado por  $ds_j = \phi_j(t_j)dt_j$ . Las funciones fuente  $\psi^{(0)}(t_j)$  y  $\chi^{(0)}(t_j)$  que representan los valores del campo y su derivada normal evaluadas sobre la superficie son expresadas como

$$\psi^{(0)}(t_j) = \psi^{(0)}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_j}, \quad (81)$$

$$\frac{\partial \psi^{(0)}(t_j)}{\partial n_j} = \frac{\partial \psi^{(0)}(\vec{r})}{\partial n_j} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_j}. \quad (82)$$

Similarmente, para la función de Green y su derivada normal se tiene que

$$G_0(\mathbf{r}, t_j) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_j}, \quad (83)$$

$$\frac{\partial G_0(\mathbf{r}, t_j)}{\partial n_j} = \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n_j} \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_j}. \quad (84)$$

Siguiendo los mismos pasos para la  $j$ -ésima región, donde  $u = \psi^{(j)}(\mathbf{r})$  y  $v = G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , el campo  $\psi^{(j)}(\mathbf{r})$  puede ser expresado como

$$\theta_j(\mathbf{r})\psi^{(j)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \left[ \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, t'_j)}{\partial n_j} \psi^{(j)}(t'_j) - G_j(\mathbf{r}, t'_j) \frac{\partial \psi^{(j)}(t'_j)}{\partial n_j} \right] dt'_j, \quad (85)$$

donde  $\theta_j(\vec{r})$  es uno para puntos dentro del medio  $j$  y cero para otro caso. Las Ecs. (80) y (85) forman un sistema de ecuaciones integrales con las que se puede obtener el campo total en el medio de incidencia y de esparcimiento. Para calcular el campo esparcido usando el segundo término del lado derecho de la Ec. (80), primero es necesario encontrar una forma de obtener las funciones fuente a partir de las ecuaciones integrales. Por ende, se hace una aproximación del punto de observación en la región

0 a la superficie de la región  $i$ . Por lo tanto, se obtienen las siguientes expresiones que corresponden a integrales acopladas

$$\psi^{(0)}(t_i) = \psi_{inc}^{(0)}(t_i) + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[ \frac{\partial G_0(t_i, t'_j)}{\partial n_j} \psi^{(0)}(t'_j) - G_0(t_i, t'_j) \frac{\partial \psi^{(0)}(t'_j)}{\partial n_j} \right] dt'_j, \quad (86)$$

$$0 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \left[ \frac{\partial G_j(t_i, t'_j)}{\partial n_j} \psi^{(0)}(t'_j) - \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0} G_j(t_i, t'_j) \frac{\partial \psi^{(0)}(t'_j)}{\partial n_j} \right] \delta_{ij} dt'_j, \quad (87)$$

donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

con  $i = 1$  hasta  $M$  y las expresiones  $\varepsilon_{0,j} = \varepsilon_{0,j}(\omega)$  para la polarización p y  $\varepsilon_{0,j} = 1$  para la polarización s.

### III.2.1. Discretización de las ecuaciones integrales

Las Ecs. (86) y (87) constituyen un conjunto de  $2M$  ecuaciones integrales inhomogéneas acopladas que pueden ser resueltas numéricamente para obtener los valores límite del campo  $\psi^{(0)}(t_j)$  y su derivada normal  $\partial\psi^{(0)}(t'_j)/\partial n_j$  sobre la superficie de los cuerpos esparcidos. Las Ecs. (86) y (87), pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$\psi^{(0)}(t_i) = \psi_{inc}^{(0)}(t_i) + \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[ \Psi_0(t_i, t'_j) \psi^{(0)}(t'_j) - \Phi_0(t_i, t'_j) \frac{\partial \psi^{(0)}(t'_j)}{\partial n_j} \right] dt'_j, \quad (88)$$

$$0 = - \int_{\Gamma_j} \left[ \Psi_j(t_i, t'_j) \psi^{(0)}(t'_j) - \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0} \Phi_j(t_i, t'_j) \frac{\partial \psi^{(0)}(t'_j)}{\partial n_j} \right] \delta_{ij} dt'_j, \quad (89)$$

donde

$$\begin{aligned} \Psi_j(t_i, t'_j) &= \frac{1}{4\pi} \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{\partial G_j(\vec{r}^+, \vec{r}')}{\partial n_j} \Big|_{\mathbf{r}^+ = \mathbf{r}_i + \nu \hat{\mathbf{n}}_i, \mathbf{r}' = [\xi_j(t_j), \eta_j(t_j)]} \\ &= \frac{1}{4\pi} \lim_{\nu \rightarrow 0} \left( -\eta'_j(t'_j) \frac{\partial}{\partial x'} + \xi'_j(t'_j) \frac{\partial}{\partial y'} \right) G_j(\mathbf{r}^+, \mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}^+ = \mathbf{r}_i + \nu \hat{\mathbf{n}}_i, \mathbf{r}' = [\xi_j(t_j), \eta_j(t_j)]} \\ &= \frac{i}{4} \left( n_j \frac{\omega}{c} \right)^2 \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{H_1^{(1)} \left( n_j \frac{\omega}{c} [\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2]^{1/2} \right)}{n_j \frac{\omega}{c} [\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2]^{1/2}} [-\xi_\nu \eta'_j(t'_j) + \eta_\nu \xi'_j(t'_j)] \end{aligned} \quad (90)$$

y

$$\begin{aligned}\Phi_j(t_i|t'_j) &= \frac{1}{4\pi} \lim_{\nu \rightarrow 0} G_j(r_i + \nu \widehat{\mathbf{n}}_i | \xi_j(t'_j), \eta_j(t'_j)) \\ &= \frac{i}{4} \lim_{\nu \rightarrow 0} H_0^{(1)}\left(n_j \frac{\omega}{c} [\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2]^{1/2}\right).\end{aligned}\quad (91)$$

En las expresiones anteriores se han definido

$$\xi_\nu = \xi_i(t_i) - \xi_j(t'_j) - \frac{\nu \eta'_i(t_i)}{\phi(t_i)}, \quad (92a)$$

$$\eta_\nu = \eta_i(t_i) - \eta_j(t'_j) + \frac{\nu \xi'_i(t_i)}{\phi(t_i)}, \quad (92b)$$

y  $\widehat{\mathbf{n}}_i = \widehat{\mathbf{n}}_i/\phi(t_i)$  es el vector normal unitario de  $\mathbf{r}_i = [\xi_i(t_i), \eta_i(t_i)]$ . Las funciones  $\Psi_0(t_i|t'_j)$  y  $\Phi_0(t_i|t'_j)$  se obtienen de las Ecs. (90) y (91) con  $n_j = 1$ , respectivamente.

Debido a que no es posible resolver de manera analítica el sistema de integrales acopladas, representadas por las Ecs. (88) y (89), recurrimos a un método numérico. Para esto es necesario convertir las expresiones antes citadas en formas matriciales, usando una aproximación de rectángulos para evaluar las integrales en intervalos pequeños. Considerando una longitud  $L_j = \int_{\Gamma_j} dt_j$  para el  $j$ -ésimo cuerpo definido por la curva  $\Gamma_j$ , la longitud total  $L_T$  de los contornos de los  $M$  cuerpos es

$$L_T = \sum_{j=1}^M L_j.$$

Para cada longitud  $L_j$ , se introduce un conjunto  $\{r_{j,n}\}$  de  $N_j$  puntos igualmente espaciados  $r_{j,n} = [\xi_j(t_{j,n}), \eta_j(t_{j,n})]$  con  $n = 1, 2, \dots, N_j$ . Los puntos de muestreo están dados por

$$t_{j,n} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \Delta t_{j,n} + L_{j-1}, \quad \text{con } j = 1, 2$$

donde  $L_0 = 0$  y  $\Delta t_{j,n} = t_{j,n} - t_{j,n-1}$  es la separación entre los puntos  $\{t_{j,n}\}$  para el  $j$ -ésimo cuerpo. De esta forma, la Ec. (88) puede ser reescrita como

$$\psi^{(0)}(t_i) = \psi_{inc}^{(0)}(t_i) + \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^{N_j} \int_{t_{j,n} - \Delta t_{j,n}/2}^{t_{j,n} + \Delta t_{j,n}/2} \left[ \Psi_0(t_i, t'_j) \psi^{(0)}(t'_j) - \Phi_0(t_i, t'_j) \frac{\partial \psi^{(0)}(t'_j)}{\partial n_j}(t'_j) \right] dt'_j. \quad (93)$$

Suponiendo que  $\psi^{(0)}(t_j)$  y  $\partial\psi^{(0)}(t_j)/\partial n_j$  son funciones de  $t_j$  que varían lentamente en cada intervalo  $(t_{j,n} - \Delta t_{j,n}/2, t_{j,n} + \Delta t_{j,n}/2)$ , la Ec. (93) se puede aproximar por

$$\begin{aligned} \psi^{(0)}(t_i) = & \psi_{inc}^{(0)}(t_i) + \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^{N_j} \left[ \psi^{(0)}(t_{j,n}) \int_{t_{j,n}-\Delta t_{j,n}/2}^{t_{j,n}+\Delta t_{j,n}/2} \Psi_0(t_i, t'_j) dt'_j \right. \\ & \left. - \frac{\partial\psi^{(0)}(t_j)}{\partial n_j}(t_{j,n}) \int_{t_{j,n}-\Delta t_{j,n}/2}^{t_{j,n}+\Delta t_{j,n}/2} \Phi_0(t_i, t'_j) dt'_j \right]. \end{aligned} \quad (94)$$

Ahora, evaluando  $t_i$  en posiciones discretas  $t_i = t_{i,m}$  se obtiene

$$\psi^{(0)}(t_{i,m}) = \psi_{inc}^{(0)}(t_{i,m}) + \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^{n_j} \left[ \Psi_{i,mn}^{(0)} \psi^{(0)}(t_{j,n}) - \Phi_{i,mn}^{(0)} \frac{\partial\psi^{(0)}(t_{j,n})}{\partial n_j} \right], \quad (95)$$

donde

$$\Psi_{i,mn}^{(0)} = \int_{t_{j,n}-\Delta t_{j,n}/2}^{t_{j,n}+\Delta t_{j,n}/2} \Psi_0(t_{i,m}, t'_j) dt'_j \quad (96)$$

y

$$\Phi_{i,mn}^{(0)} = \int_{t_{j,n}-\Delta t_{j,n}/2}^{t_{j,n}+\Delta t_{j,n}/2} \Phi_0(t_{i,m}, t'_j) dt'_j. \quad (97)$$

De la misma manera se convierte la Ec. (89) en

$$\sum_{n=1}^{N_j} \left[ \Psi_{mn}^{(j)} \psi^{(0)}(t_{j,n}) - \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0} \Phi_{mn}^{(j)} \frac{\partial\psi^{(0)}(t_{j,n})}{\partial n_j} \right] = 0, \quad (98)$$

donde

$$\Psi_{mn}^{(j)} = \int_{t_{j,n}-\Delta t_{j,n}/2}^{t_{j,n}+\Delta t_{j,n}/2} \Psi_j(t_{i,m}, t'_j) dt'_j \quad (99)$$

y

$$\Phi_{mn}^{(j)} = \int_{t_{j,n}-\Delta t_{j,n}/2}^{t_{j,n}+\Delta t_{j,n}/2} \Phi_j(t_{i,m}, t'_j) dt'_j. \quad (100)$$

Los elementos de las matrices  $\Psi_{mn}^{(j)}$  y  $\Phi_{mn}^{(j)}$  pueden ser determinados evaluando las integrales involucradas en las Ecs. (99) y (100), mientras que los elementos  $\Psi_{i,mn}^{(0)}$  y  $\Phi_{i,mn}^{(0)}$

se pueden obtener de esos resultados haciendo  $n_j = 1$ , respectivamente. Haciendo el cambio de variable  $t_j = t_{i,n} + u$  las Ecs. (99) y (100) se pueden escribir como

$$\Psi_{mn}^{(j)} = \int_{-\Delta t_{j,n}/2}^{\Delta t_{j,n}/2} \Psi_j(t_{i,m}|t_{i,n} + u) du, \quad (101)$$

$$\Phi_{mn}^{(j)} = \int_{-\Delta t_{j,n}/2}^{\Delta t_{j,n}/2} \Phi_j(t_{i,m}|t_{i,n} + u) du, \quad (102)$$

donde  $\Psi_j(t_i, t'_j)$  y  $\Phi_j(t_i, t'_j)$  están dadas por las Ecs. (90) y (91), respectivamente.

### Elementos de la matriz fuera de la diagonal

En los casos en que  $m \neq n$ , los integrandos de las Ecs. (101) y (102) no tienen singularidades para  $u$  en el rango de integración  $(-\Delta t_{j,n}/2, \Delta t_{j,n}/2)$ . Por lo tanto, a primer orden de  $\Delta t_{j,n}$  los elementos de las matrices  $\Psi_{mn}^{(j)}$  y  $\Phi_{mn}^{(j)}$  se pueden escribir en la forma

$$\begin{aligned} \Psi_{mn}^{(j)} &\approx \Psi_j(t_{i,m}, t_{i,n}) \Delta t_{j,n} \\ &= \frac{i \Delta t_{j,n} n_j^2 \omega^2 H_1^{(1)} \left( n_j \frac{\omega}{c} [(\xi_m - \xi_n)^2 + (\eta_m - \eta_n)^2]^{1/2} \right)}{4 n_j \frac{\omega}{c} [(\xi_m - \xi_n)^2 + (\eta_m - \eta_n)^2]^{1/2}} \\ &\quad \times [ -(\xi_m - \xi_n) \eta'_n + (\eta_m - \eta_n) \xi'_n ] \end{aligned} \quad (103)$$

y

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}^{(j)} &\approx \Phi_j(t_{i,m}, t_{i,n}) \Delta t_{j,n} \\ &= \frac{i \Delta t_{j,n} n_j \omega}{4 c} H_0^{(1)} \left( n_j \frac{\omega}{c} [(\xi_m - \xi_n)^2 + (\eta_m - \eta_n)^2]^{1/2} \right), \end{aligned} \quad (104)$$

donde se ha usado la notación  $\xi_n = \xi_n(t_{i,n})$ ,  $\xi'_n = \xi'_n(t_{i,n})$ ,  $\eta_n = \eta_n(t_{i,n})$ ,  $\eta'_n = \eta'_n(t_{i,n})$ ,  $\xi_m = \xi_m(t_{i,m})$  y  $\eta_m = \eta_m(t_{i,m})$ .

### Elementos de la matriz sobre la diagonal

Para evaluar los elementos de la diagonal,  $\Psi_{mm}^{(j)}$  y  $\Phi_{mm}^{(j)}$ , se requiere un tratamiento especial debido a las singularidades que se presentan en las funciones  $\Psi_j(t_i, t'_j)$  y  $\Phi_j(t_i, t'_j)$

cuando los argumentos coinciden. Para los elementos  $\Phi_{mm}^{(j)}$  se parte de las Ecs. (100) y (91)

$$\Phi_{mm}^{(j)} = \frac{i}{4} \lim_{\nu \rightarrow 0} \int_{t_{j,m} - \Delta t_{j,n}/2}^{t_{j,m} + \Delta t_{j,n}/2} H_0^{(1)} \left( n_j \frac{\omega}{c} \left\{ [\xi_m^{(\nu)}(t'_j)]^2 + [\eta_m^{(\nu)}(t'_j)]^2 \right\}^{1/2} \right) dt'_j, \quad (105)$$

donde se han definido

$$\xi_m^{(\nu)}(t'_j) = \xi_m - \xi_j(t'_j) - \nu \frac{\eta'_m}{\phi(t_m)}, \quad (106)$$

$$\eta_m^{(\nu)}(t'_j) = \eta_m - \eta_j(t'_j) + \nu \frac{\xi'_m}{\phi(t_m)}, \quad (107)$$

con la notación  $\xi'_m = \xi'_m(t_{i,m})$  y  $\eta'_m = \eta'_m(t_{i,m})$ . Haciendo el cambio de variable  $t'_j = t_{i,m} + u$  y un desarrollo de Taylor hasta segundo orden en  $u$ , la Ec. (105) se puede expresar como

$$\Phi_{mm}^{(j)} = \frac{i}{4} \lim_{\nu \rightarrow 0} 2 \int_0^{\Delta t_{j,n}/2} H_0^{(1)} \left( n_j \frac{\omega}{c} [\eta^2 + a_\nu^2 u^2]^{1/2} \right) du, \quad (108)$$

donde

$$a_\nu = \left[ \phi^2(t_m) + \frac{\nu}{\phi(t_m)} (\xi_m'' \eta'_m - \xi'_m \eta_m'') \right]^{1/2}. \quad (109)$$

Usando el desarrollo en serie de Taylor para la función de Hankel

$$H_0^{(1)}(z) = 1 + \frac{2i}{\pi} \ln \frac{\gamma z}{2} - \left( \frac{1}{2} + \frac{i \gamma z}{\pi 2e} \right) \frac{z^2}{2} + \dots, \quad (110)$$

donde  $\gamma = 1.781072$  es la constante de Euler y aplicando el límite cuando  $\nu \rightarrow 0$ , la Ec. (108) se puede aproximar como

$$\Phi_{mm}^{(j)} \approx \frac{i}{4} \left[ 1 + \frac{2i}{\pi} \ln \left( \frac{\gamma n_j \frac{\omega}{c} \phi(t_m) \Delta t_{j,m}/2}{2e} \right) \Delta t_{j,m} \right].$$

Aplicando nuevamente la Ec. (110), se puede escribir los elementos de la diagonal de la forma

$$\Phi_{mm}^{(j)} = \frac{i \Delta t_{j,m}}{4} H_0^{(1)} \left( \frac{n_j \frac{\omega}{c} \phi(t_m) \Delta t_{j,m}}{2e} \right). \quad (111)$$

Similarmente, para evaluar los elementos  $\Psi_{mm}^{(j)}$  se parte de las Ecs. (99) y (90)

$$\begin{aligned} \Psi_{mm}^{(j)} &= \frac{i}{4} n_j^2 \frac{\omega^2}{c^2} \lim_{\nu \rightarrow 0} \int_{t_{j,m} - \Delta t_{j,n}/2}^{t_{j,m} + \Delta t_{j,n}/2} \frac{H_1^{(1)} \left( n_j \frac{\omega}{c} \left[ \left( \xi_m^{(\nu)} \right)^2 + \left( \eta_m^{(\nu)} \right)^2 \right]^{1/2} \right)}{n_j \frac{\omega}{c} \left[ \left( \xi_m^{(\nu)} \right)^2 + \left( \eta_m^{(\nu)} \right)^2 \right]^{1/2}} \\ &\quad \times \left[ -\xi_m^{(\nu)} \eta_j' (t_j') + \eta_m^{(\nu)} \xi_j' (t_j') \right] dt_j'. \end{aligned} \quad (112)$$

Haciendo el cambio de variable  $t_j' = t_{i,m} + u$  y usando el resultado para valores pequeños de  $z$ :

$$\frac{H_1^{(1)}(z)}{z} = \left( \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \right) - \frac{2i}{\pi z^2} + \frac{i}{\pi} \ln \frac{\gamma z}{2e} + \dots, \quad (113)$$

la Ec. (112) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \Psi_{mm}^{(j)} &= \frac{i}{4} n_j^2 \frac{\omega^2}{c^2} \lim_{\nu \rightarrow 0} \int_{-\Delta t_{j,n}/2}^{\Delta t_{j,n}/2} [b_\nu u^2 + c_\nu u + \nu \phi(t_m)] \\ &\quad \times \left[ k_\nu + \frac{i}{2\pi} \ln \left( \frac{\nu^2}{a_\nu^2} + u^2 \right) - \frac{2i/\pi}{n_j^2 \frac{\omega^2}{c^2} a_\nu^2 \frac{\nu^2}{a_\nu^2} + u^2} \right] du, \end{aligned} \quad (114)$$

donde

$$\begin{aligned} b_\nu &= \frac{1}{2} \left[ (\xi_m' \eta_m'' - \xi_m'' \eta_m') + \frac{\nu}{\phi(t_m)} (\xi_m' \xi_m''' - \eta_m' \eta_m''') \right], \\ c_\nu &= \frac{\nu}{\phi(t_m)} [\xi_m' \xi_m'' - \eta_m' \eta_m''], \\ k_\nu &= \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} + \frac{i}{\pi} \ln \frac{\gamma}{2e} + \frac{i}{\pi} \ln \left( n_j \frac{\omega}{c} |a_\nu| \right), \end{aligned}$$

y se ha usado la notación  $\xi_m'' = \xi_m''(t_{i,m})$ ,  $\eta_m'' = \eta_m''(t_{i,m})$ ,  $\xi_m''' = \xi_m'''(t_{i,m})$  y  $\eta_m''' = \eta_m'''(t_{i,m})$ . Finalmente, aplicando el límite cuando  $\nu \rightarrow 0$  en la Ec. (114) se obtiene que

$$\Psi_{mm}^{(j)} = \frac{1}{2} + \frac{\Delta t_{j,m}}{4\pi \phi^2(t_m)} (\xi_m' \eta_m'' - \xi_m'' \eta_m'). \quad (115)$$

De esta manera, con las Ecs. (103), (104), (111) y (115), se obtienen los elementos de las matrices  $\Psi_{mn}^{(0,j)}$  y  $\Phi_{mn}^{(0,j)}$  para calcular las funciones fuente  $\psi^{(0)}(t_{j,n})$  y  $\partial \psi^{(0)}(t_{j,n}) / \partial n_j$  que aparecen en las Ecs. (86) y (87), respectivamente. Para cuerpos perfectamente

conductores el problema se simplifica considerablemente, debido a que una de las condiciones de frontera es cero. Es decir, para la polarización TE la función  $\psi^{(0)}(t_j) = 0$  y para la polarización TM la función  $\partial\psi^{(0)}(t_j)/\partial n_j = 0$ .

### III.3. El Campo Incidente

Para tratar el problema de la propagación de la luz a través de una guía de ondas con superficies onduladas y periódicas con el método previamente descrito es necesario hacer ciertas consideraciones. Como el tamaño del sistema debe ser finito, para evitar efectos de borde se utilizará como haz incidente un haz Gaussiano cuya intersección con el plano de la guía de ondas tiene un ancho  $g$ . Este parámetro debe ser más pequeño que la longitud total del sistema  $L = 2l + b$  y mucho más grande que el ancho de la abertura del canal (ver Fig. 6). Se requiere entonces una expresión matemática para

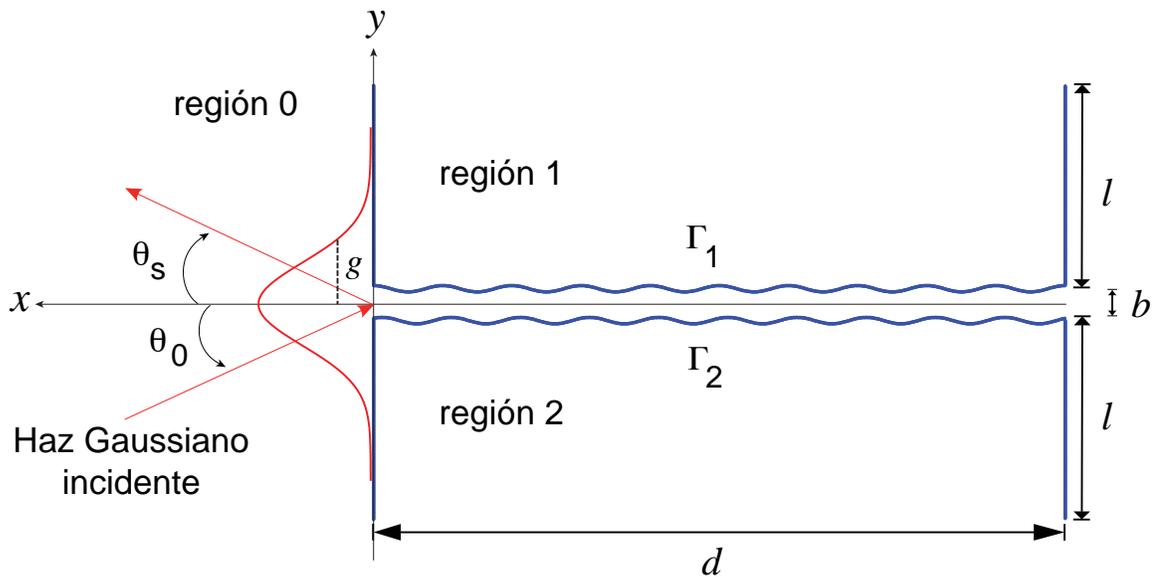


Figura 6. Esquema de una guía de onda de ancho  $l$  y de espesor  $d$ . La longitud del sistema es  $L = 2l + b$ . Sobre el plano  $x_3 = d$ , el semi ancho del módulo del haz gaussiano incidente es  $g$ . Los ángulos de incidencia  $\theta_0$  y esparcimiento  $\theta_s$  (para reflexión y transmisión) están definidos como positivos en el sentido indicado en la figura.

describir un haz de este tipo que sea solución de las ecuaciones de Maxwell. Para obtener dicha expresión, se propone una forma funcional del campo incidente en términos de su espectro angular  $A(q, k)$  de la siguiente manera

$$f(x, y) = \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} A(q, k) \exp\{iqx - i\alpha_0(q)y\} \frac{dq}{2\pi}, \quad (116)$$

donde  $\alpha_0(q) = [(n_0\omega/c)^2 - q^2]^{1/2}$ , con  $\Re \alpha_0(q) > 0$  y  $\Im \alpha_0(q) > 0$ . Por consiguiente, el campo incidente puede ser escrito como

$$\psi_{inc}^{(0)}(x, y) = \psi_0 f(x, y), \quad (117)$$

donde  $\psi_0$  es una constante con las unidades apropiadas. En nuestro caso, para un haz gaussiano se propone la función

$$A(q, k) = \sqrt{\pi}g \exp\{-g^2(q - k)^2/4 + i\alpha_0(q)d\}. \quad (118)$$

Sustituyendo la expresión dada por la Ec. (117) en la Ec. (118) y evaluando en  $y = d$

$$\psi_{inc}^{(0)}(x, d) = \psi_0 \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \sqrt{\pi}g \exp\{-g^2(q - k)^2/4\} \exp\{iqx\} \frac{dq}{2\pi}, \quad (119)$$

se obtiene el campo incidente sobre dicho plano, es decir,

$$\psi_{inc}^{(0)}(x, d) = \psi_0 \exp\{ikx\} \exp\{-x^2/g^2\}. \quad (120)$$

El parámetro  $k = n_0(\omega/c) \sin \theta_0$ , donde  $\theta_0$  representa el ángulo de incidencia. Esto muestra que sobre el plano  $y = d$  el campo incidente tiene una modulación gaussiana y una fase que es la de una onda plana con un ángulo de incidencia  $\theta_0$ . Es fácil obtener expresiones analíticas aproximadas para  $\psi_{inc}^{(0)}(x, y)$  cuando  $y \neq d$ . Sin embargo, para los cálculos numéricos es preferible evaluar este campo incidente por integración numérica de la Ec. (116) con base en el espectro angular dado por la Ec. (118).

### III.4. La Potencia Incidente

Para calcular el coeficiente de reflexión diferencial (DRC<sup>1</sup>), el cual representa la fracción de energía incidente sobre una superficie que es esparcida por unidad de ángulo, se necesita calcular el flujo incidente total y el flujo esparcido total. Para esto, se emplea el vector de Poynting  $\vec{S}$ , que proporciona la dirección y la magnitud del flujo de energía por unidad de tiempo. Empleando notación compleja se tiene que

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*. \quad (121)$$

La parte real de esta expresión proporciona una medida de la irradiancia, o flujo de energía promedio por unidad de tiempo. Para el caso de la polarización s, de la Ec. (121) se tiene que la componente del vector de Poynting a lo largo del eje  $y$  está dada por

$$S_2 = \frac{c}{8\pi} \Re\{-H_1^* E_3\}, \quad (122)$$

o bien, en términos del campo eléctrico,

$$S_2 = \frac{c^2}{8\pi\omega} \Re\left\{-iE_3 \frac{\partial E_2^*}{\partial x}\right\}. \quad (123)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para el caso de la polarización p, la componente del vector de Poynting es

$$S_2 = \frac{c^2}{8\pi\omega\epsilon} \Re\left\{-iH_3^* \frac{\partial H_3}{\partial x}\right\}. \quad (124)$$

Ahora, calculando la derivada del campo incidente (117)

$$\frac{\partial \psi_{inc}^{(0)}(x, y)}{\partial y} = \psi_0 \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} A(q, k)[-i\alpha_0(k)] \exp\{iqx - i\alpha_0(q)y\} \frac{dq}{2\pi}, \quad (125)$$

y haciendo una evaluación en  $y = d$  se obtiene

$$\left. \frac{\partial \psi_{inc}^{(0)}(x, y)}{\partial y} \right|_{y=d} = -i\psi_0 \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \alpha_0(q) \sqrt{\pi} g \exp\{-g^2(q-k)^2/4\} \exp\{iqx\} \frac{dq}{2\pi}. \quad (126)$$

---

<sup>1</sup>Por sus siglas en inglés, Differential Reflection Coefficient.

Hacemos notar que se ha supuesto que el haz que ilumina la guía de ondas es mucho más grande que la longitud de onda, es decir,  $(\omega/c)g \gg 1$ . En esta situación, la exponencial en el integrando es relativamente angosta y está centrada en  $q = k$ , de manera que se puede considerar que  $\alpha_0(q)$  es una constante sobre el rango en el cual el integrando es significativo. La expresión (126) entonces se puede escribir como

$$\left. \frac{\partial \psi_{inc}^{(0)}(x, y)}{\partial y} \right|_{y=d} = -i\alpha_0(k)\psi_0 \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \sqrt{\pi}g \exp\{-g^2(q-k)^2/4\} \exp\{iqx\} \frac{dq}{2\pi}, \quad (127)$$

o bien,

$$\left. \frac{\partial \psi_{inc}^{(0)}(x, y)}{\partial y} \right|_{y=d} = -i\alpha_0(k)\psi_{inc}^{(0)}(x, d). \quad (128)$$

Así, para la polarización TE se tiene que

$$\begin{aligned} |S_3|_{y=d} &= \left| \Re e \left\{ -\frac{ic^2}{8\pi\omega} \psi_{inc}^{(0)}(x, d) [i\alpha_0(k)\psi_{inc}^{(0)*}(x, d)] \right\} \right| \\ &= \frac{c^2}{8\pi\omega} \alpha_0(k) \left| \psi_{inc}^{(0)}(x, d) \right|^2, \end{aligned} \quad (129)$$

y para la polarización TM

$$\begin{aligned} |S_2|_{y=d} &= \left| \Re e \left\{ -\frac{ic^2}{8\pi\omega\epsilon} \psi_{inc}^{(0)*}(x, d) [-i\alpha_0(k)\psi_{inc}^{(0)}(x, d)] \right\} \right| \\ &= \frac{c^2}{8\pi\omega\epsilon} \alpha_0(k) \left| \psi_{inc}^{(0)}(x, d) \right|^2. \end{aligned} \quad (130)$$

De esta manera, en general se puede escribir la componente dos del vector de Poynting como

$$|S_2|_{y=d} = \frac{c^2}{8\pi\omega\epsilon} \alpha_0(k) \left| \psi_{inc}^{(0)}(x, d) \right|^2, \quad (131)$$

donde  $\epsilon \neq 1$  para la polarización TM, y  $\epsilon = 1$  para la polarización TE. Para obtener la potencia incidente es necesario integrar sobre un área. El haz está confinado a lo largo de  $x$  y, con límites de integración desde  $-L/2$  hasta  $L/2$ , se cubre el total de la región iluminada. En la dirección  $z$ , en la cual la guía de ondas y el haz son invariantes, se

integra sobre una longitud  $L_3$ . Entonces, se puede escribir la potencia incidente de la siguiente manera

$$\begin{aligned} P_{inc}(k) &= \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L_3/2}^{L_3/2} |S_3|_{y=d} dz \\ &= L_3 \frac{c^2}{8\pi\omega\varepsilon} \alpha_0(k) \int_{-L/2}^{L/2} \left| \psi_{inc}^{(0)}(x, d) \right|^2 dx, \end{aligned} \quad (132)$$

y como

$$\psi_{inc}^{(0)}(x, d) = \psi_0 \exp\{ikx\} \exp\{-x^2/g^2\},$$

la expresión se reduce a

$$\begin{aligned} P_{inc}(k) &= L_3 \frac{c^2}{8\pi\omega\varepsilon} \alpha_0(k) |\psi_0|^2 \int_{-L/2}^{L/2} \exp\{-2x^2/g^2\} dx \\ &= L_3 \frac{c^2}{8\pi\omega\varepsilon} \alpha_0(k) |\psi_0|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} g. \end{aligned} \quad (133)$$

Por consiguiente, la potencia incidente es

$$P_{inc}(k) = L_3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} g \alpha_0(k) \frac{c^2}{8\pi\varepsilon\omega} |\psi_0|^2. \quad (134)$$

### III.5. El Campo Esparcido

El campo esparcido está representado por el segundo término del lado derecho de la Ec. (86), de donde se puede obtener una expresión para los campos reflejado y transmitido en términos del espectro angular. Para esto, se usa una expansión en términos de ondas planas para la función de Green (Maradudin, *et al.*, 2001) definida como

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi i}{\alpha_0(q)} \exp\{iq(x-x') + i\alpha_0(q)|y-y'|\} dq. \quad (135)$$

Partiendo de las derivadas parciales de la función de Green

$$\frac{\partial}{\partial x'} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi q}{\alpha_0(q)} \exp\{iq(x-x') + i\alpha_0(q)|y-y'|\} dq \quad (136)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y'} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \pm \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \exp\{iq(x-x') + i\alpha_0(q)|y-y'|\} dq, \quad (137)$$

donde el signo + es para  $y > y'$  y el signo - para  $y < y'$ , se obtiene su derivada normal de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial n_j} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right|_{\mathbf{r}'=(\xi_j(t_j), \eta_j(t_j))} &= \left[ -\eta'_j(t_j) \frac{\partial}{\partial x'} + \xi'_j(t_j) \frac{\partial}{\partial y'} \right] G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}'=(\xi_j(t_j), \eta_j(t_j))} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{\alpha_0(q)} [-\eta'_j(t_j)q \pm \xi'_j(t_j)\alpha_0(q)] \\ &\quad \times \exp\{iq[x - \xi_j(t_j)] + i\alpha_0(q)|y - \eta_j(t_j)|\} dq. \end{aligned} \quad (138)$$

Definiendo  $\mathbf{Q} = (q, \pm\alpha_0(q))$ , la Ec. (138) se puede reescribir como

$$\frac{\partial}{\partial n_j} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{\alpha_0(q)} [n_j \cdot \mathbf{Q}] \exp\{iq[x - \xi_j(t_j)] + i\alpha_0(q)|y - \eta_j(t_j)|\} dq. \quad (139)$$

Sustituyendo la ecuación (139) en el segundo término del lado derecho de la Ec. (86), el campo esparcido se puede escribir como

$$\begin{aligned} \psi_{sc}^{(0)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[ \frac{2\pi i}{\alpha_0(q)} [-i\vec{n}_j \cdot \vec{Q}] \psi^{(0)}(t_j) - \frac{2\pi i}{\alpha_0(q)} \frac{\partial \psi^{(0)}(t_j)}{\partial n_j} \right] \\ &\quad \times \exp\{iq[x - \xi_j(t_j)] + i\alpha_0(q)|y - \eta_j(t_j)|\} dt_j dq. \end{aligned} \quad (140)$$

Volviendo a nuestra geometría, para el espacio  $y > d$ , de la Ec. (140) se tiene que el campo reflejado es

$$\psi_{sc}^{(0)+}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^+(q, k) \exp\{iqx + i\alpha_0(q)y\} dq, \quad (141a)$$

donde

$$S^+(q, k) = \frac{-i}{2\alpha_0(q)} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[ i n_j \cdot \mathbf{Q} \psi^{(0)}(t_j) + \frac{\partial \psi^{(0)}(t_j)}{\partial n_j} \right] \exp\{-iq\xi_j(t_j) - i\alpha_0(q)\eta_j(t_j)\} dt_j,$$

y para el espacio  $y < 0$ , el campo transmitido tiene la forma

$$\psi_{sc}^{(0)-}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^-(q|k) \exp\{iqx - i\alpha_0(q)y\} dq, \quad (141b)$$

con

$$S^-(q, k) = \frac{-i}{2\alpha_0(q)} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[ in_j \cdot \mathbf{Q}\psi^{(0)}(t_j) + \frac{\partial\psi^{(0)}(t_j)}{\partial n_j}(t_j) \right] \exp\{-iq\xi_j(t_j) + i\alpha_0(q)\eta_j(t_j)\} dt_j.$$

Por consiguiente el campo total, para la región  $y < 0$ , se puede escribir como

$$\psi_{tot}^{(0)-}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(q, k) + S^-(q, k)] \exp\{iqx - i\alpha_0(q)y\} dq, \quad (142a)$$

y para la región  $y > d$  de la forma

$$\psi_{tot}^{(0)+}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^+(q, k) \exp\{iqx + i\alpha_0(q)y\} dq, \quad (143)$$

donde

$$\begin{aligned} S^\pm(q, k) &= \frac{i}{2\alpha_0(q)} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left\{ i [q\eta'_j(t_j) \mp \alpha_0(q)\xi'_j(t_j)] \psi^{(0)}(t_j) - \frac{\partial\psi^{(0)}(t_j)}{\partial n_j} \right\} \\ &\quad \times \exp\{-i [q\xi_j(t_j) \pm \alpha_0(q)\eta_j(t_j)]\} dt_j \end{aligned} \quad (144)$$

representa el espectro angular del campo esparcido. Para el caso de transmisión  $[S^-(q, k)]$  y  $q < n_0(\omega/c)$ , las componentes del vector de onda son  $q = n_0(\omega/c) \sin \theta_t$  y  $\alpha_0(q) = n_0(\omega/c) \cos \theta_t$ , mientras que para el caso de reflexión  $[S^+(q, k)]$  y  $q < n_0(\omega/c)$ ,  $q = n_0(\omega/c) \sin \theta_r$  y  $\alpha_0(q) = n_0(\omega/c) \cos \theta_r$ , tal como puede referirse en la Fig. 5.

### III.6. La Potencia Esparcida

Para obtener la expresión para la potencia esparcida, en términos del espectro angular del campo esparcido, se sigue un procedimiento análogo al caso de la potencia incidente.

De las expresiones (123), (124), (141a) y (141b) para los campos esparcidos, se obtiene una expresión equivalente para la potencia esparcida

$$\begin{aligned}
P_{sc}^{\pm}(k) &= \pm L_3 \frac{c^2}{8\pi\omega\varepsilon} \int \Re\left\{ \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \left[ \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \alpha_0(q) S^{\pm}(q, k) S^{\pm*}(q', k) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \frac{1}{2\pi} \exp\{i(q - q')x \pm i[\alpha_0(q) - \alpha_0^*(q')]y\} dq'\right] dx \right\} \\
&= \pm L_3 \frac{c^2}{8\pi\omega\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \alpha_0(q) |S^{\pm}(q, k)|^2 dq. \tag{145}
\end{aligned}$$

Ahora, utilizando las Ecs. (134) y (145), el coeficiente de reflexión diferencial puede ser expresado como

$$\left( \frac{\partial R}{\partial k} \right) = \frac{P_{sc}^{\pm}(k)}{P_{inc}(k)} = \pm \frac{1}{\mathcal{F}(k)} \frac{1}{2\pi} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \alpha_0(q) |S^{\pm}(q, k)|^2 dq,$$

donde

$$\mathcal{F}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} g \alpha_0(k) |\psi_0|^2.$$

### III.6.1. Los coeficientes de reflexión y transmisión

Utilizando las Ecs. (142a), (143) y (144), se obtienen la Reflectancia y la Transmitancia para el caso de una guía de onda iluminada con un haz gaussiano

$$R(k) = \frac{P_{tot}^+(k)}{P_{inc}(k)} = \frac{1}{\mathcal{F}(k)} \frac{1}{2\pi} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \alpha_0(q) |S^+(q, k)|^2 dq \tag{146}$$

y

$$T(k) = \frac{P_{tot}^-(k)}{P_{inc}(k)} = \frac{1}{\mathcal{F}(k)} \frac{1}{2\pi} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \alpha_0(q) |A(q, k) + S^-(q, k)|^2 dq. \tag{147}$$

Es importante mencionar, que el campo incidente aparece en la Ec. (147) porque el campo total en la región 0 es el resultado de la interferencia entre los campos incidente y esparcido. Para el balance de energía se debe tener que  $R(k) + T(k) \leq 1$ , donde la igualdad se debe cumplir para el caso de conductores perfectos.

### III.7. Respuesta óptica en una guía de ondas con superficies onduladas y periódicas para polarización TE

Para ejemplificar la descripción teórica propuesta con anterioridad, se propuso modelar la propagación de ondas electromagnéticas a través de una guía de ondas fotónicas con superficies perfectamente conductoras. Considérese el caso de superficies planas ( $A = 0.0b$ ) para la polarización TE. En la Fig. 7(a) se muestra el perfil de la guía de ondas de longitud  $d = 16\pi$  (solamente de 8 periodos) y ancho  $b = 2.5$  (unidades arbitrarias). La longitud transversal de los bloques rectangulares que forma la guía se consideró de  $l = 100$  para evitar lo menos posible los efectos de borde (ver Fig. 6)); a pesar de que la iluminación se hizo con un haz Gaussiano a incidencia normal con semi ancho  $g = 20$ . Cada bloque fue muestreado con intervalos de longitud igualmente espaciados  $\Delta t = \lambda/20$  para la longitud de onda de iluminación  $\lambda$ . Los resultados numéricos de la intensidad reflejada  $R$  variando la frecuencia reducida de iluminación  $\omega$  en el intervalo de 1 a 3 para 200 valores. Además se presentan en la Fig. 7(c) y (d) la intensidad reflejada  $R$  y transmitida  $T$ , respectivamente. Los resultados muestran que el método integral da resultados confiables para el caso de la polarización TE; sin embargo, el error numérico es un factor que puede hacerse presente en las áreas de los bordes por efectos de difracción. Por ende, a raíz de los resultados del capítulo II, a fin de establecer una comparación con las estructuras de bandas de una guía de ondas de cristal fotónico de longitud infinita, hemos mostrado nuevamente la estructura de bandas correspondiente en la Fig. 7(b). La estructura de bandas corresponde al mismo intervalo de frecuencias como función del vector de onda de Bloch en la primera zona de Brillouin.

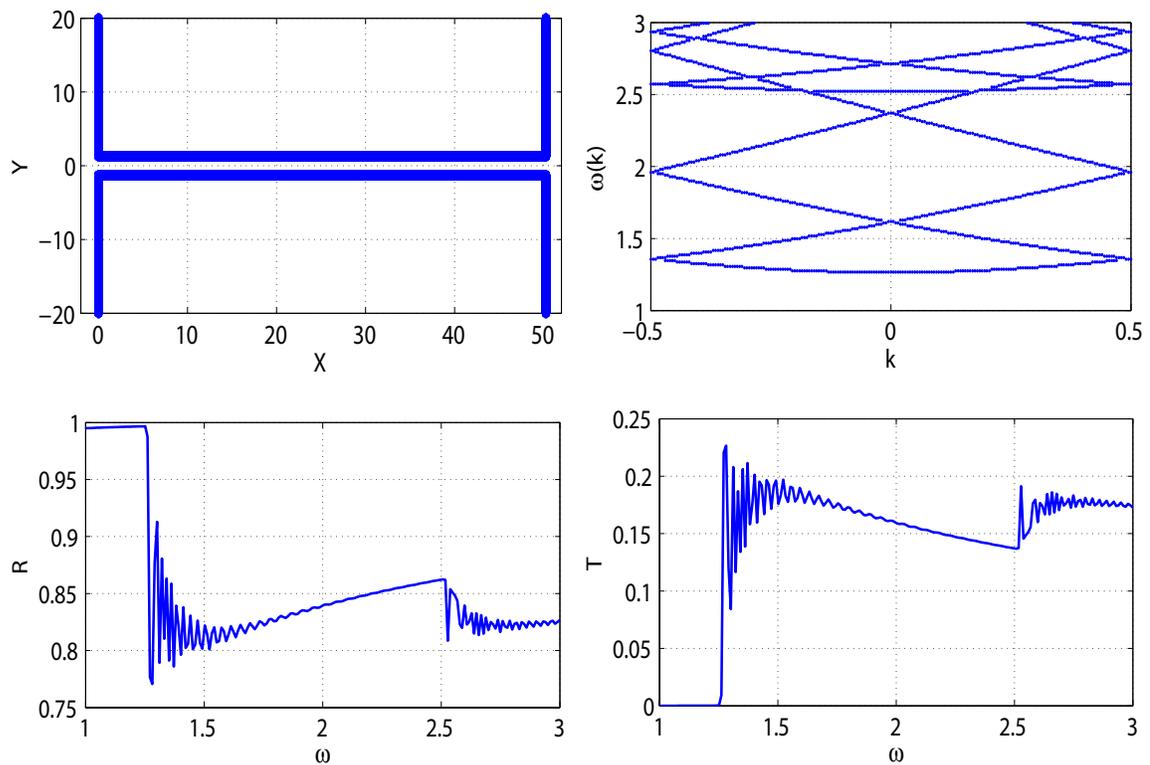


Figura 7. (a) Perfil de la guía de ondas con superficies planas ( $A = 0.0$ ). (b) Estructura de bandas asociada a la guía de ondas de cristal fotónico. (c) Espectro de reflectancia  $R$  como respuesta óptica de la guía de ondas al ser iluminada con un haz Gaussiano a incidencia normal bajo la polarización TE. (d) Transmitancia correspondiente.

Como sabemos, para el caso de una guía de ondas fotónicas con superficies planas no presenta bandas prohibidas, lo cual es consistente con el espectro de reflectancia mostrado en la Fig. 7(c). Las oscilaciones que se presentan para algunas frecuencias se deben aún por efectos de difracción en las áreas del borde, las cuales originan interferencias indeseadas en las propagaciones a través de la guía de ondas. A pesar de que el tamaño considerado en los bloques rectangulares fue grande, no fue posible aumentarlo según los requerimientos debido a la limitación de la capacidad de cómputo que se hizo presente. Ahora vamos a presentar los resultados para el caso de superficies onduladas y ver que también se obtienen cambios equivalentes.

Mediante un razonamiento análogo, se muestran a continuación en la Fig. 8(a) el

perfil de la guía de ondas con amplitud  $A = 0.2b$  y diferencia de fase  $\Delta\phi = \pi/2$  con los mismos parámetros que se consideraron en el caso anterior. La estructura de bandas correspondiente se presenta en la Fig. 8(b) y la reflectancia  $R$  así como la intensidad transmitida  $T$  de la respuesta óptica de la guía de ondas al ser iluminada con un haz Gaussiano a incidencia normal se muestra en la Fig. 8(c) y (d).

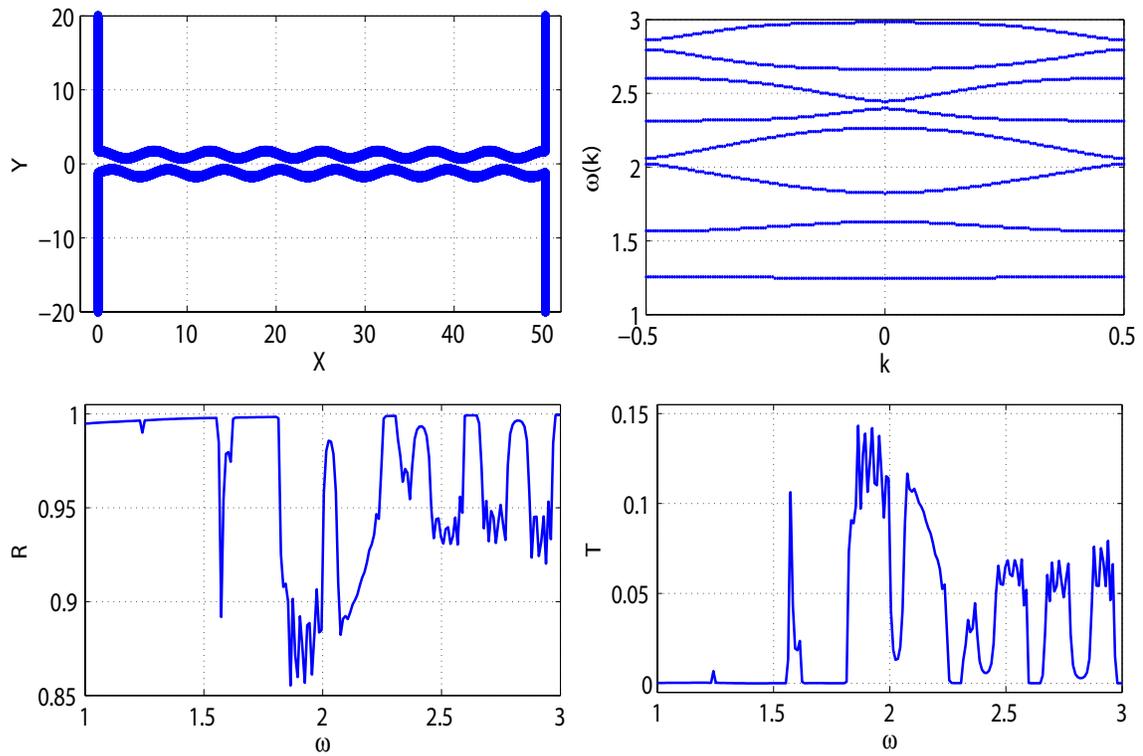


Figura 8. (a) Perfil de la guía de ondas con superficies onduladas ( $A = 0.2b$ ). (b) Estructura de bandas asociada a la guía de ondas de cristal fotónico. (c) Espectro de reflectancia  $R$  como respuesta óptica de la guía de ondas al ser iluminada con un haz Gaussiano a incidencia normal bajo la polarización TE. (d) Transmitancia correspondiente.

Hasta ahora, se ha hecho notorio que la variación de la amplitud y la diferencia de fase de las superficies onduladas (ver Fig. 8(a)) conduce a cambios notables en la estructura de bandas para la polarización TE. En la Fig. 8(b) se observan los cambios notables en la estructura de bandas con la presencia de bandas prohibidas angostas debido a la amplitud y diferencia de fase de las ondulaciones de las superficies. Estas

regiones de las bandas prohibidas completas, las podemos apreciar en el espectro de la reflectancia de la Fig. 8(c) para algunas regiones con una reflectancia bastante alta. Debido a la limitación del poder cómputo, se puede observar que se tienen pequeñas fluctuaciones (ver 8(d)) que impiden marcar bien las zonas de las bandas prohibidas. Sin embargo, estos resultados se pueden mejorar aumentando el tamaño del sistema y con una resolución más fina para las frecuencias más altas del intervalo considerado.

En teoría, un sistema idealizado con superficies perfectamente conductoras, es una buena forma de involucrarnos cada vez más en relación al problema que nos interesa. Sin embargo, en la práctica, una guía de ondas deberá ser diseñada con materiales reales en los procesos de producción . Dicha consideración resultará entonces un punto de partida factible para analizar la reflectividad del sistema con un método integral similar al ya descrito anteriormente pero enfocado en términos más realistas. Por tal motivo, es importante introducirnos en una adaptación del modelo teórico que considere dichas variantes; el proceso de generalización correspondiente se detalla a continuación en el capítulo IV.

## Capítulo IV

---

# RESPUESTA ÓPTICA DE GUÍAS DE ONDAS DE CRISTALES FOTÓNICOS REALES

---

En los capítulos II y III se presentaron los métodos integrales para determinar la estructura de bandas y el espectro de reflectancia que caracterizan la respuesta óptica de una guía de ondas periódica y ondulada con superficies de material conductor perfecto para polarización TE. Como parte de mi contribución de la tesis de investigación a continuación, se presentan los resultados numéricos obtenidos para el mismo sistema considerado, pero ahora considerando la polarización TM tanto para superficies perfectamente conductoras como para superficies reales; en particular, superficies metálicas. Además, se muestran los resultados para un sistema de 2 y 3 guías de ondas periódicas y onduladas perfectamente conductoras y metálicas bajo las mismas consideraciones de los casos anteriores.

## IV.1. Guía de ondas periódica y ondulada perfectamente conductora para polarización TM

Como un primer paso, para modelar nuestro problema de la propagación de ondas electromagnéticas a través de una guía de ondas fotónicas con superficies perfectamente conductoras, vamos a considerar el caso de superficies planas ( $A = 0.0b$ ) para la polarización TM. En la Fig. 9(a) se muestra el perfil de la guía de ondas de longitud  $d = 16\pi$  (solamente de 8 periodos) y ancho  $b = 2.5$  (unidades arbitrarias). La longitud transversal de los bloques rectangulares que forma la guía se consideró de  $l = 100$  para evitar lo menos posible los efectos de borde (ver Fig. 6); a pesar de que la iluminación se hizo con un haz Gaussiano a incidencia normal con semi ancho  $g = 20$ . Cada bloque fue muestreado con intervalos de longitud igualmente espaciados  $\Delta t = \lambda/20$  para la longitud de onda de iluminación  $\lambda$ . Los resultados numéricos de la intensidad reflejada  $R$  variando la frecuencia reducida de iluminación  $\omega$  en el intervalo de 0.001 a 3 para 200 valores se presentan en la Fig. 9(c). La elección de estos parámetros del cálculo está dentro de intervalos razonables; sin embargo para frecuencias cercanas a 0 (longitudes de onda muy grandes), se requiere el tamaño de los bloques rectangulares mucho más grande que el considerado. Por esta razón, solamente se muestra la curva a partir de  $\omega = 0.2$  para evitar la pérdida de visualización de la curva para el resto de los valores de la frecuencia. Para corroborar que los resultados numéricos son razonables, se muestra el balance de energía (intensidad reflejada  $R$  y transmitida  $T$ ) en la Fig. 9(d). Los resultados muestran que el método integral también da resultados confiables para el caso de la polarización TM; sin embargo, para ciertos casos el error numérico puede ser relevante como se presentarán en las siguientes secciones. Como se ha presentado en los resultados del capítulo III una comparación con las estructuras de bandas de una

guía de ondas de cristal fotónico de longitud infinita, hemos mostrado nuevamente la estructura de bandas correspondiente en la Fig. 9(b). La estructura de bandas corresponde al mismo intervalo de frecuencias como función del vector de onda de Bloch en la primera zona de Brillouin.

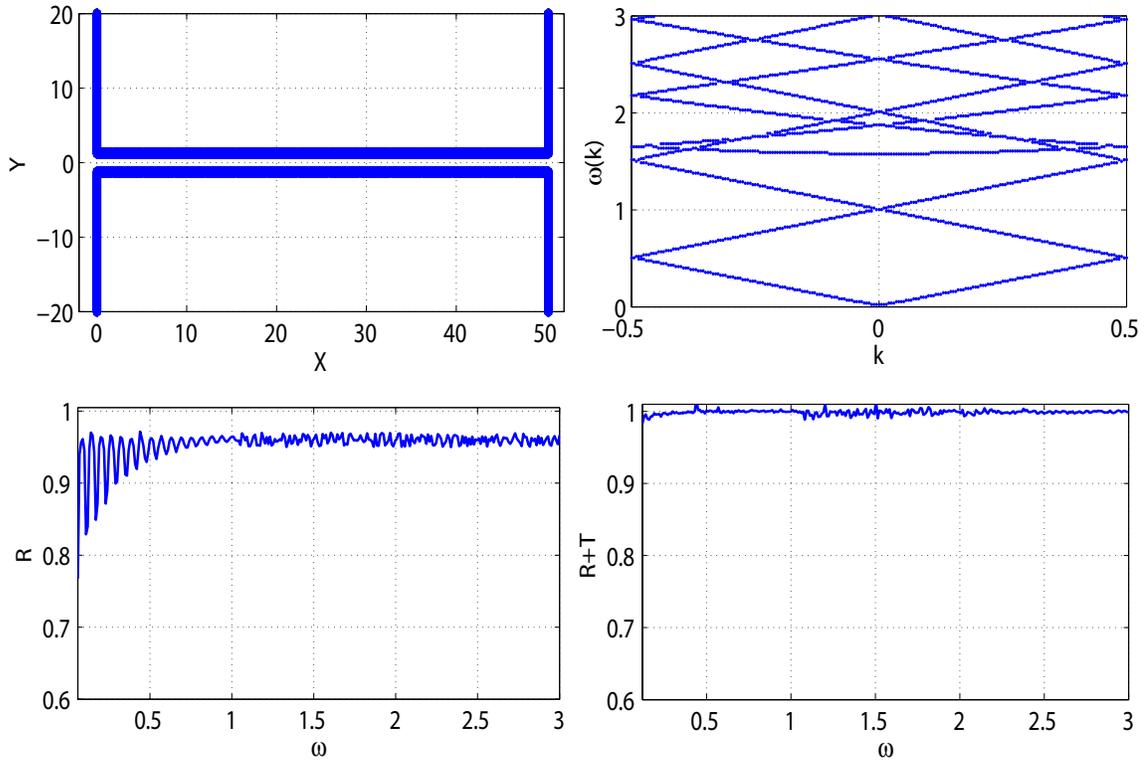


Figura 9. (a) Perfil de la guía de ondas con superficies planas ( $A = 0.0$ ). (b) Estructura de bandas asociada a la guía de ondas de cristal fotónico correspondiente. (c) Espectro de reflectancia  $R$  como respuesta óptica de la guía de ondas al ser iluminada con un haz Gaussiano a incidencia normal bajo la polarización TM. (d) Balance de energía ( $R + T$ ).

Como sabemos, para el caso de una guía de ondas fotónicas con superficies planas no presenta bandas prohibidas, lo cual es consistente con el espectro de reflectancia mostrado en la Fig. 9(c). Las oscilaciones que se presentan a bajas frecuencias se debe aún por efectos de borde, a pesar de que el tamaño de los bloques rectangulares fue grande, pero no fue posible aumentarlo debido a la limitación de la capacidad de cómputo.

En los capítulos II y III hemos visto que la variación de la amplitud y diferencia de fase de las superficies onduladas conduce a cambios notables en la estructura de bandas para la polarización TE. Ahora vamos a presentar los resultados para el caso de la polarización TM y ver que también se obtienen cambios equivalentes. En la Fig. 11(a) se muestra el perfil de la guía de ondas con amplitud  $A = 0.2b$  y diferencia de fase  $\Delta\phi = \pi/2$  con los mismos parámetros que se consideraron en el caso anterior. La estructura de bandas correspondiente se presenta en la Fig. 11(b) y la reflectancia  $R$  como respuesta óptica de la guía de ondas al ser iluminada con un haz Gaussiano a incidencia normal se muestra en la Fig. 11(c). De igual manera, en la Fig. 11(d) se muestra la curva de la conservación de energía ( $R + T$ ).

En la Fig. 11(b) se observan los cambios notables en la estructura de bandas con la presencia de bandas prohibidas angostas debido a la amplitud y diferencia de fase de las ondulaciones de las superficies. Estas regiones de las bandas prohibidas completas, las podemos apreciar en el espectro de la reflectancia de la Fig. 11(c) para algunas regiones con una reflectancia bastante alta. Debido a la limitación del poder cómputo, se puede observar que se tienen pequeñas fluctuaciones que impiden marcar bien las zonas de las bandas prohibidas. Sin embargo, estos resultados se pueden mejorar aumentando el tamaño del sistema y con una resolución más fina para las frecuencias más altas del intervalo considerado. Es notable mencionar que también los resultados son confiables para una guía de ondas con superficies onduladas bajo la polarización TM (ver Fig. 11(d)).

Figura 10.

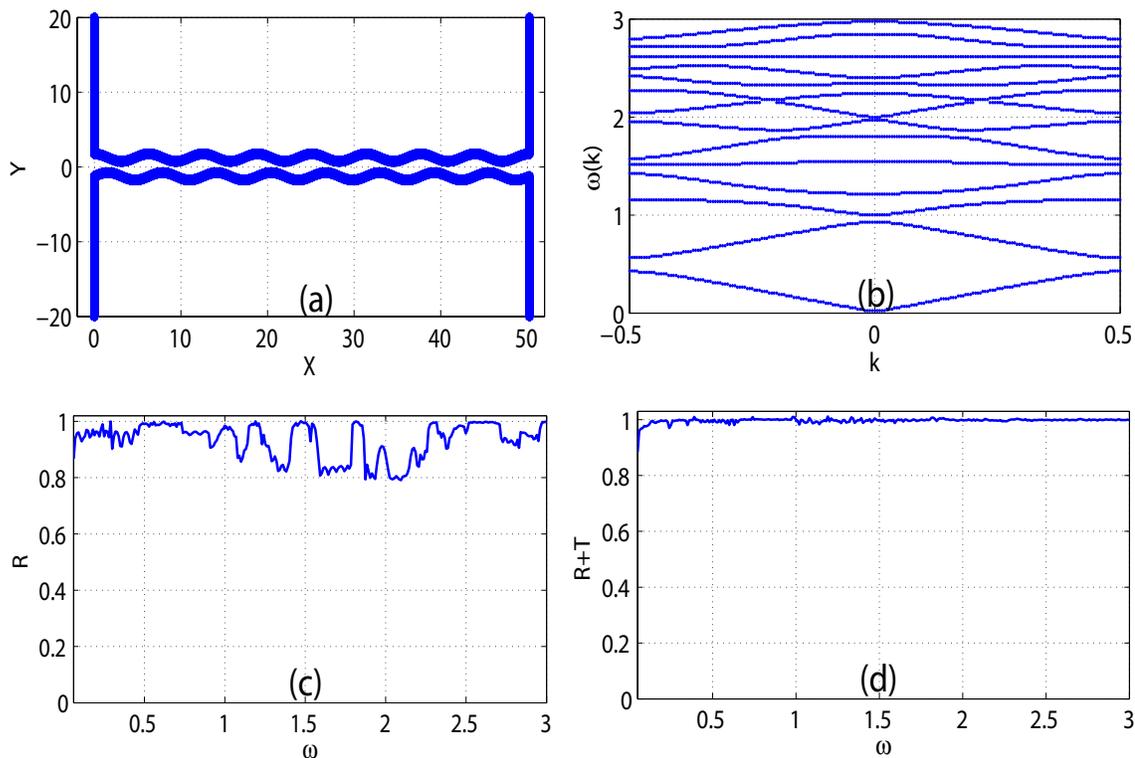


Figura 11. (a) Perfil de la guía de ondas con superficies onduladas ( $A = 0.2b$ ). (b) Estructura de bandas asociada a la guía de ondas de cristal fotónico correspondiente. (c) Espectro de reflectancia  $R$  como respuesta óptica de la guía de ondas al ser iluminada con un haz Gaussiano a incidencia normal bajo la polarización TM. (d) Balance de energía ( $R + T$ ).

## IV.2. Guía de ondas periódica y ondulada con superficies metálicas

En la sección anterior se consideró una guía de ondas de cristal fotónico ideal; es decir, con superficies perfectamente conductoras. Ahora vamos a considerar un sistema más realista para comparar los resultados con los del caso de conductor perfecto. Como punto de partida, se muestran los resultados para el caso de una guía de ondas con superficies planas y con superficies onduladas para la polarización TE. Los parámetros para modelar la guía de ondas metálica fueron los siguientes:  $d = 16\pi$ ,  $b = 2.5$ ,  $l = 100$ .

Para las superficies metálicas, en particular, se consideró el oro (Au) por ser un material altamente reflejante, cuyo índice de refracción es  $n = 0.272 + i7.07$  para la longitud de onda  $\lambda = 1.033$ . Sin embargo, se hicieron varias pruebas con diferentes tipos de metales e índices de refracción para diferentes longitudes de onda y se tuvo los mejores resultados para el oro con el muestreo  $\Delta t = \lambda/20$ . La iluminación se hizo con un haz Gaussiano a incidencia normal con semi ancho  $g = 20$ . En las Figs. 12(a) y (c) se presentan los mismos resultados numéricos de la intensidad reflejada  $R$  para superficies perfectamente conductoras (CPs) con amplitud  $A = 0$  y  $A = 0.2b$ , respectivamente. Similarmente, para el caso correspondiente de la guía de ondas metálicas, se muestra la reflectancia  $R$  en la Fig. 12(b) para superficies planas ( $A = 0.0$ ) y en la Fig. 12(d) para superficies onduladas con amplitud  $A = 0.2b$  y diferencia de fase  $\Delta\phi = \pi/2$ . Ambos espectros de la intensidad reflejada  $R$  se obtuvieron variando la frecuencia reducida de iluminación  $\omega$  en el intervalo de 1 a 3 para 200 valores.

Para el caso de la polarización TE, en las Fig. 11(b) y (d) se observa que el comportamiento de la intensidad reflejada para el caso metálico es muy similar al caso de un conductor perfecto. Esto nos muestra que para una guía de ondas metálica con superficies onduladas sigue siendo consistente con la posición de las bandas prohibidas. Ahora las secciones con la máxima intensidad reflejada es menor a 1 debido a la absorción que se presenta en el material real considerado. Sin embargo, la naturaleza de las regiones con la máxima reflectancia, para indicar las posiciones de las bandas prohibidas en el intervalo de frecuencia dado, no es afectado por las propiedades del metal.

En concordancia a lo establecido en la sección anterior, vamos a presentar a continuación los resultados para el caso de la polarización TM para el caso de una guía de ondas con superficies planas y, onduladas para constatar que también se obtienen cambios equivalentes. En las Figs. 13(a) y (c) se presentan resultados numéricos de la

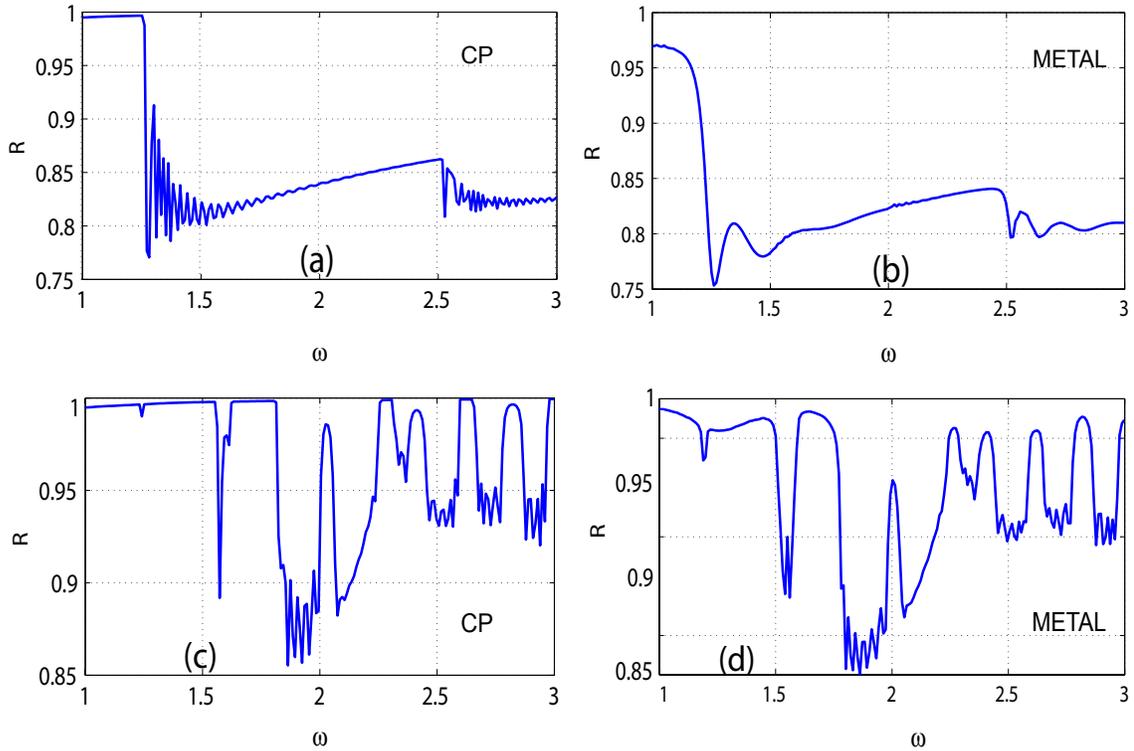


Figura 12. Espectro de la reflectancia  $R$  como función de la frecuencia  $\omega$  para el caso de una guía de ondas con superficies perfectamente conductoras con amplitud (a)  $A = 0.0$  y (c)  $A = 0.2b$  y con superficies metálicas de oro con amplitud (a)  $A = 0.0$  y (c)  $A = 0.2b$  bajo polarización TE.

intensidad reflejada  $R$  para superficies perfectamente conductoras (CPs) con amplitud  $A = 0$  y  $A = 0.2b$ , respectivamente. Del mismo modo, para el caso correspondiente de la guía de ondas metálicas, se muestra la reflectancia  $R$  en la Fig. 13(b) para superficies planas ( $A = 0.0$ ) y en la Fig. 13(d) para superficies onduladas con amplitud  $A = 0.2b$  y diferencia de fase  $\Delta\phi = \pi/2$ . Ambos espectros de la intensidad reflejada  $R$  se obtuvieron variando la frecuencia reducida de iluminación  $\omega$  en el intervalo de 1 a 3 para 200 valores distintos, preservando el resto de los parámetros que se fijaron inicialmente en forma inalterable. Ver Fig. 13.

En relación a la Fig. 13(a) y (c) no realizaremos alguna conclusión, dado que estos gráficos forman parte de las Figs. ?? y 11 (c). Cabe destacar la relevancia de los

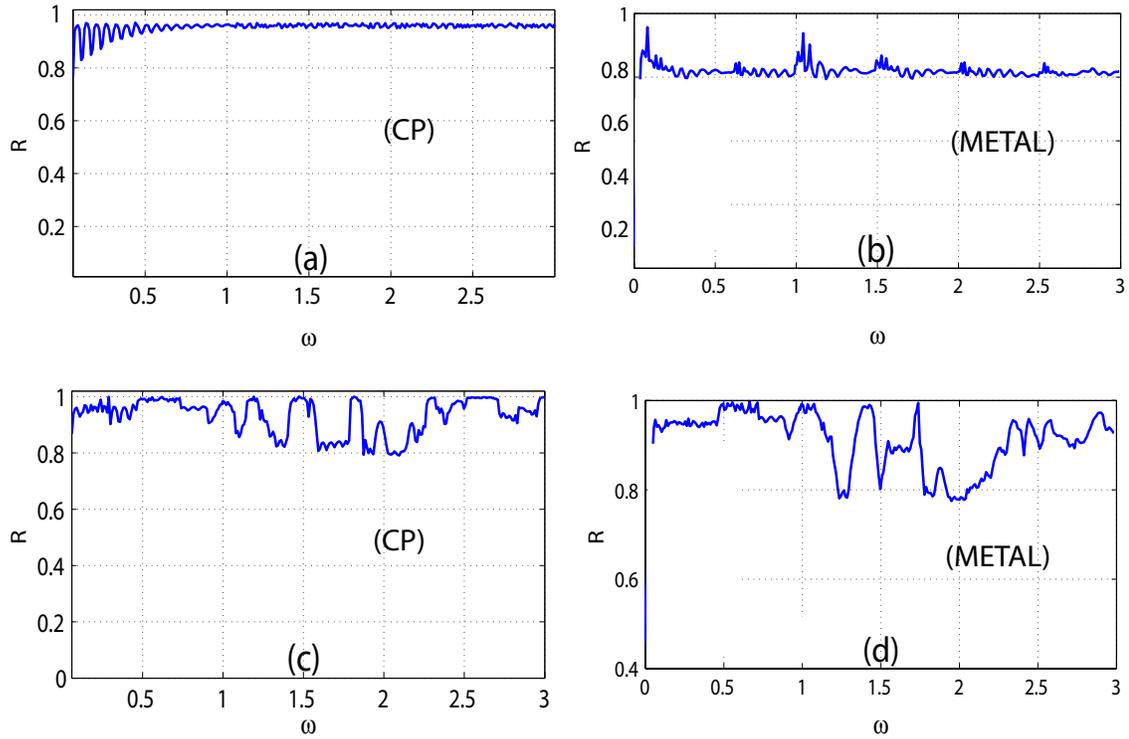


Figura 13. Espectro de la reflectancia  $R$  como función de la frecuencia  $\omega$  para el caso de una guía de ondas con superficies perfectamente conductoras con amplitud (a)  $A = 0.0$  y (c)  $A = 0.2b$  y con superficies metálicas de oro con amplitud (a)  $A = 0.0$  y (c)  $A = 0.2b$  bajo polarización TE.

incisos (b) y (d) en la 13 que relacionan el caso en una guía de ondas metálicas en polarización TM. En las Figs. 13(b) y (d) se observa que el comportamiento de la intensidad reflejada para el caso metálico corresponde de modo similar al caso de su contraparte en el medio conductor perfecto. Esto nos muestra que para una guía de ondas metálica con superficies onduladas sigue siendo relativamente consistente con la posición de las bandas prohibidas. Aunque siguen presentandose regiones donde la máxima intensidad reflejada es menor a 1 debido a la absorción que se presenta en el material real considerado, debe de tomarse en cuenta que las posiciones de las bandas prohibidas en el intervalo de frecuencia dado, no se ven afectadas severamente por las propiedades del metal. Más aún se ha podido establecer que las fluctuaciones

que impiden marcar bien las zonas de las bandas prohibidas mejoran gradualmente aumentando el tamaño del sistema, al reducir los indeseados efectos de borde para bajas frecuencias y con una resolución más fina para las frecuencias más altas del intervalo considerado. En este sentido, la limitación de la capacidad de cómputo es un factor determinante a tomar en cuenta, si se precisa de resultados más concluyentes en simulaciones futuras.

### **IV.3. Sistema de dos guías de ondas periódicas y onduladas perfectamente conductoras y metálicas**

Fundamentalmente, el poder caracterizar algunos de los aspectos de la respuesta óptica de un sistema unidimensional de guías de ondas periódicas representó un reto en lo concerniente al dilema de diseño que se hace presente; ello precisó en poder adaptar exitosamente los programas numéricos a nuestra disposición para reproducir bloques completos de guías con perfil ondulado y periódico en una sola dirección. Como ejemplo de un esquema generalizado para el caso finito, se han considerado dos sistemas independientes muy particulares (ver Fig.14), a los que se les hace incidir una iluminación de haz Gaussiano con polarización TE.

En la sección anterior se consideraron los casos de una guía de ondas de cristal fotónico con superficies tanto planas como onduladas para medios perfectamente conductores y metálicos. Ahora vamos a considerar un sistema más complejo consistente en dos guías en ambas polarizaciones TE y TM para comparar los resultados obtenidos con los del sistema de una guía simple. Los parámetros para modelar la guías de ondas

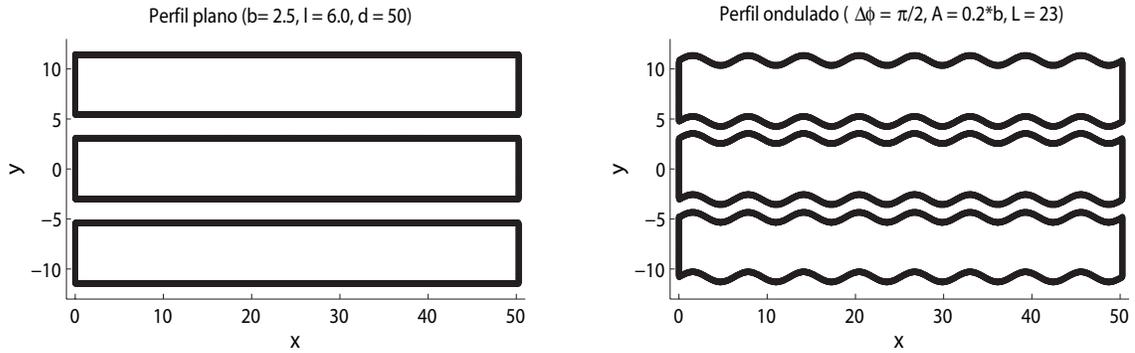


Figura 14. (a) Perfil representativo para el arreglo de 3 regiones con amplitud nula,  $A = 0$ . Además, se incluye el caso (b) perfil ondulado con amplitud mínima  $A = 0.2b$  y diferencia de fase  $\Delta \phi = \pi/2$ .

metálicas se mantienen inalterables para establecer los cambios que se hacen presentes en ambos escenarios teóricos de forma precisa.

En las Figs. 15(a) y (c) se presentan los mismos resultados numéricos de la intensidad reflejada  $R$  para superficies perfectamente conductoras (CPs) con amplitud  $A = 0$  y  $A = 0.2b$ , respectivamente para polarización TE. Similarmente, para el caso correspondiente del sistema de dos guías de ondas rodeados superior e inferiormente por contornos cerrados constituidos por el material metálico (Au), se muestra la reflectancia  $R$  en la Fig. 15(b) para superficies planas ( $A = 0.0$ ) y en la Fig. 15(d) para superficies onduladas con amplitud  $A = 0.2b$  y diferencia de fase  $\Delta \phi = \pi/2$ .

Para el caso de la polarización TE, en las Fig. 12 y 15(a) y (b) se observa que el comportamiento de la intensidad reflejada para el caso de superficies planas tanto para el conductor perfecto como el medio metálico, sigue una tendencia ciertamente consistente en los picos del espectro reflectante al generalizar el caso de una guía simple a considerar dos de ellas. Así que empleando la noción de equivalencia sobre los resultados de las secciones previas, esto nos da la pauta para establecer una transitividad sin tener un referéndum real con la posición de las bandas prohibidas originales. Aunque se obtienen aproximaciones relativamente aceptables a la tendencia que siguen cada una

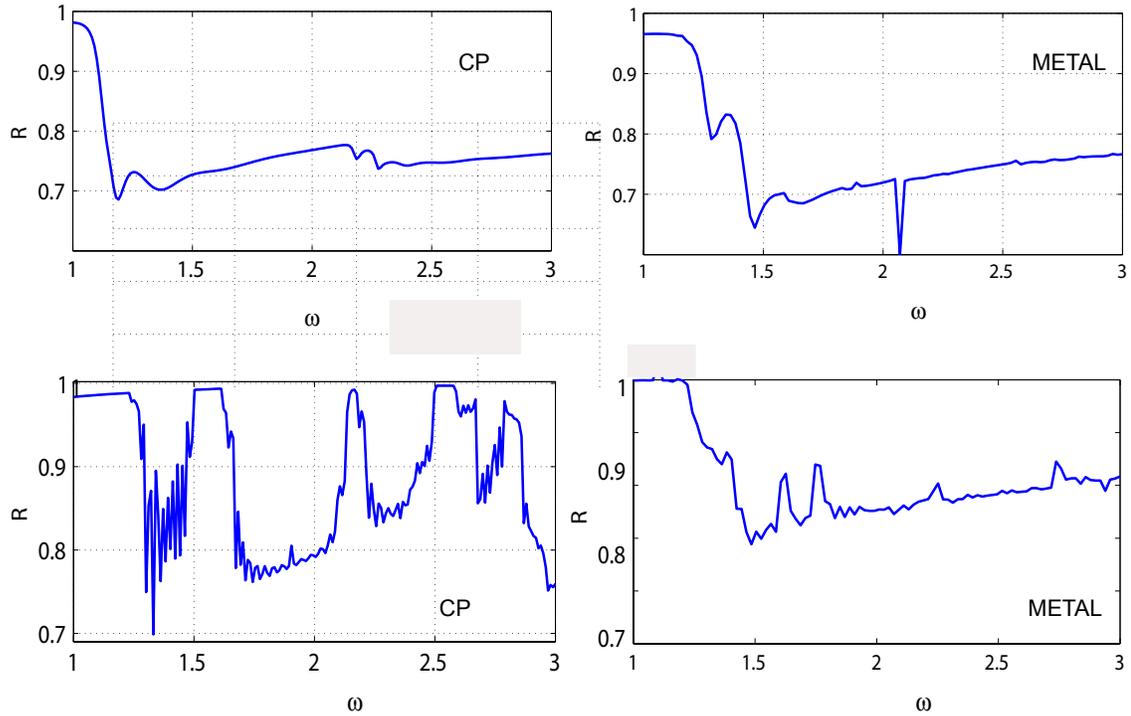


Figura 15. Curvas representativas del espectro de reflectancia  $R$  en función del valor de la frecuencia  $\omega$  aplicables al caso de un sistema de 2 guías en CP empleando polarización TE, a incidencia normal; (a) amplitud nula, (c)  $A_1 = 0.2b$ . Además, se incluye el caso del metal (Au) para el mismo arreglo con (b)  $A_1 = 0$ , y (d) amplitud mínima.

de las curvas, resulta por demás notorio los cambios que rigen las Fig. 12 y 15(c) y (d) en relación a las regiones de máxima reflectancia, y la correspondencia que presenta cada gráfico para el sistema en una guía simple respecto a su contraparte en el caso de 2 guías; no obstante, aún se hace presente un patrón innegable que persiste a pesar de las limitaciones y ello da la alternativa de continuar en la misma dirección para afianzar resultados más sólidos.

Similarmente, vamos a presentar a continuación los resultados para el caso de la polarización TM para el caso del sistema de dos guías de ondas con superficies planas y, onduladas para material conductor perfecto y metal. En las Figs. 16(a) y (c) se presentan resultados numéricos de la intensidad reflejada  $R$  para superficies perfectamente

conductoras (CPs) con amplitud  $A = 0$  y  $A = 0.2b$ , respectivamente. Del mismo modo, para el caso correspondiente de la guía de ondas metálicas, se muestra la reflectancia  $R$  en la Fig. 16(b) para superficies planas ( $A = 0.0$ ) y en la Fig. 16(d) para superficies onduladas con amplitud  $A = 0.2b$  y diferencia de fase  $\Delta\phi = \pi/2$ . Ver Fig. 16.

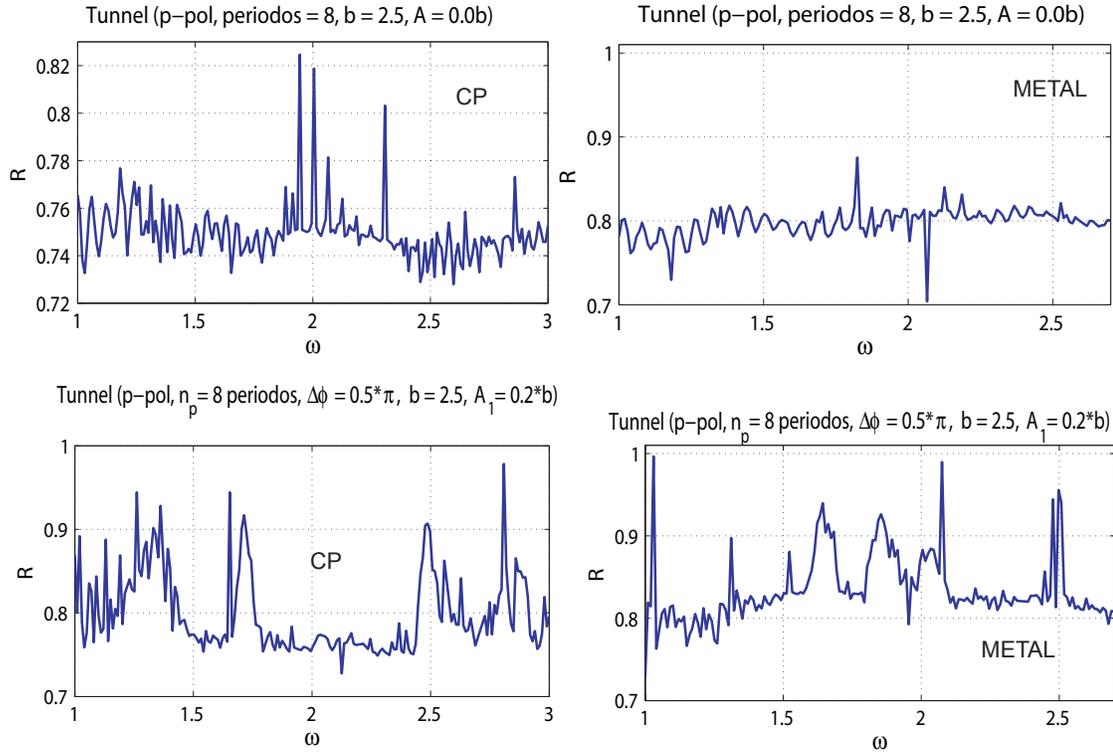


Figura 16. Curvas representativas del espectro de reflectancia  $R$  en función del valor de la frecuencia  $\omega$  aplicables al caso de un sistema de 2 guías en CP empleando polarización TM, a incidencia normal (a) amplitud nula, (c)  $A_1 = 0.2b$ . Además, se incluye el caso del metal (Au) para el mismo arreglo con (b)  $A_1 = 0$ , y (d) amplitud mínima.

Para el caso de la polarización TM, en las Fig. 16 y 13(a) y (b) se observa que el comportamiento de la intensidad reflejada para el caso de superficies planas tanto para el conductor perfecto como el medio metálico, sigue una tendencia ciertamente consistente en los picos del espectro reflectante al generalizar el caso de una guía simple a considerar dos de ellas. Más aún se ha podido establecer que las fluctuaciones que impiden marcar bien las zonas de las bandas prohibidas mejoran gradualmente aumentando

el tamaño del sistema, al reducir los indeseados efectos de borde para bajas frecuencias y con una resolución más fina para las frecuencias más altas del intervalo considerado; además, las curvas representativas nos permiten analizar el comportamiento, y determinar la concordancia que mantienen con los valores teóricos permitidos. Del mismo modo, los picos predominantes que rigen las Fig. 16 y 13(c) afianzaron nuestro interés a generalizar el sistema originalmente propuesto para un mayor número de guías involucradas, sobretodo en lo concerniente a los casos con ondulación mínima que proporcionan información más relevante respecto a las posiciones de los mismos.

#### **IV.4. Sistema de tres guías de ondas periódicas y onduladas perfectamente conductoras y metálicas**

Finalmente, presentamos la generalización del esquema de la sección anterior para el caso de un sistema de  $M = 4$  regiones, preservando condiciones análogas a las que se han seguido desde un comienzo a fin de establecer una comparación preliminar entre todos los resultados así obtenidos (ver Fig.17).

En la sección anterior se consideraron los casos de una guía de ondas de cristal fotónico con superficies tanto planas como onduladas para medios perfectamente conductores y metálicos en un sistema de dos guías. Ahora vamos a considerar un sistema más complejo consistente en tres guías en ambas polarizaciones TE y TM para comparar los resultados obtenidos con los del sistema anteriormente señalado. Los parámetros para modelar la guías de ondas metálicas se mantienen inalterables para establecer los cambios que se hacen presentes en ambos escenarios teóricos de forma precisa.

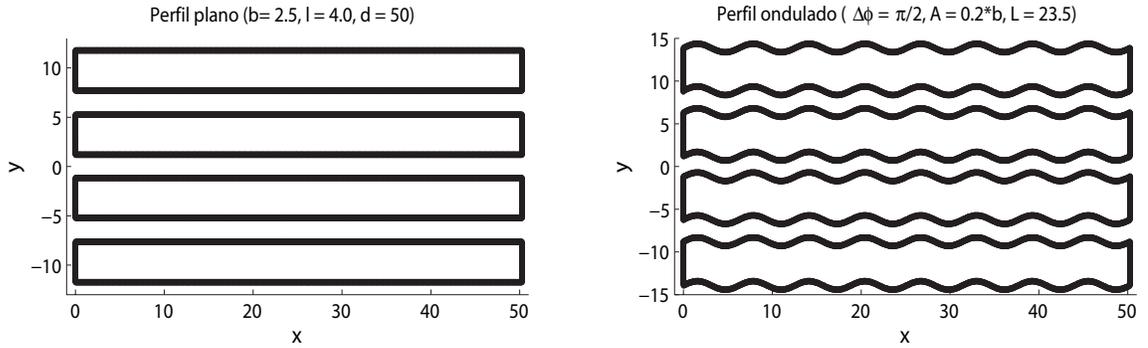


Figura 17. (a) Perfil representativo para el arreglo de 4 regiones con amplitud nula,  $A = 0$ . Además, se incluye el caso (b) perfil ondulado con amplitud mínima  $A = 0.2b$  y diferencia de fase  $\Delta\phi = \pi/2$ .

En las Figs. 18(a) y (c) se presentan los mismos resultados numéricos de la intensidad reflejada  $R$  para superficies perfectamente conductoras (CPs) con amplitud  $A = 0$  y  $A = 0.2b$ , respectivamente para polarización TE. Similarmente, para el caso correspondiente del sistema de tres guías de ondas rodeados superior e inferiormente por contornos cerrados constituidos por el material metálico (Au), se muestra la reflectancia  $R$  en la Fig. 18(b) para superficies planas ( $A = 0.0$ ) y en la Fig. 18(d) para superficies onduladas con amplitud  $A = 0.2b$ , y con diferencia de fase  $\Delta\phi = \pi/2$ .

Para el caso de la polarización TE, en las Fig. 15 y 18(a) y (b) se observa que el comportamiento de la intensidad reflejada para el caso de superficies planas tanto para el conductor perfecto como el medio metálico, sigue una tendencia ciertamente consistente en los picos del espectro reflectante al generalizar el caso de dos guías a considerar tres de ellas. Aunque se obtienen aproximaciones relativamente aceptables a la tendencia que siguen cada una de las curvas, incluso desde el caso de una guía sencilla. Aunque las fluctuaciones comienzan a ser más frecuentes, ello origina que se hagan presentes corrimientos inesperados en los picos predominantes y que cambie, en cierto grado, las posiciones de los mismos. En relación a las Fig. 15 y 18(c) y (d) en relación a las regiones de máxima reflectancia, y la correspondencia que presenta cada

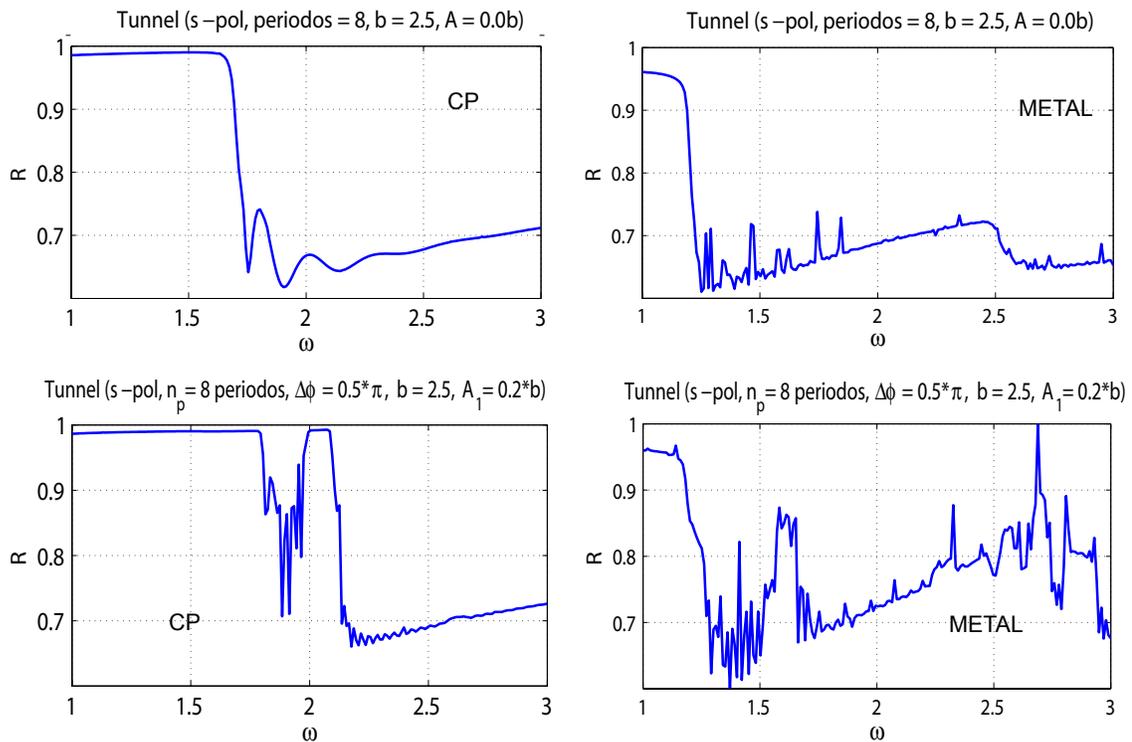


Figura 18. Curvas representativas del espectro de reflectancia  $R$  en función del valor de la frecuencia  $w$  aplicables al caso de CP empleando polarización TE, tanto a incidencia normal para un sistema de 3 guías; (a) amplitud nula, (c)  $A_1 = 0.2b$ . Además, se incluye el caso del metal (Au) con (b)  $A_1 = 0$ , y (d) amplitud mínima.

gráfico para el sistema desde una guía simple respecto a su contraparte en el caso de 2 guías y por transitividad, de éste último con el caso de 3 guías; no obstante, aún se hace presente un patrón innegable que persiste a pesar de las limitaciones y que, por cuestiones de tiempo, nos limita a emitir resultados aún más concluyentes.

Similarmente, vamos a presentar a continuación los resultados para el caso de la polarización TM para el caso del sistema de tres guías de ondas con superficies planas y, onduladas para material conductor perfecto y metal. En las Figs. 19(a) y (c) se presentan resultados numéricos de la intensidad reflejada  $R$  para superficies perfectamente conductoras (CPs) con amplitud  $A = 0$  y  $A = 0.2b$ , respectivamente. Del mismo modo, para el caso correspondiente de la guía de ondas metálicas, se muestra la reflectancia

$R$  en la Fig. 19(b) para superficies planas ( $A = 0.0$ ) y en la Fig. 19(d) para superficies onduladas con amplitud  $A = 0.2b$  y diferencia de fase  $\Delta\phi = \pi/2$ . Ver Fig. 19.

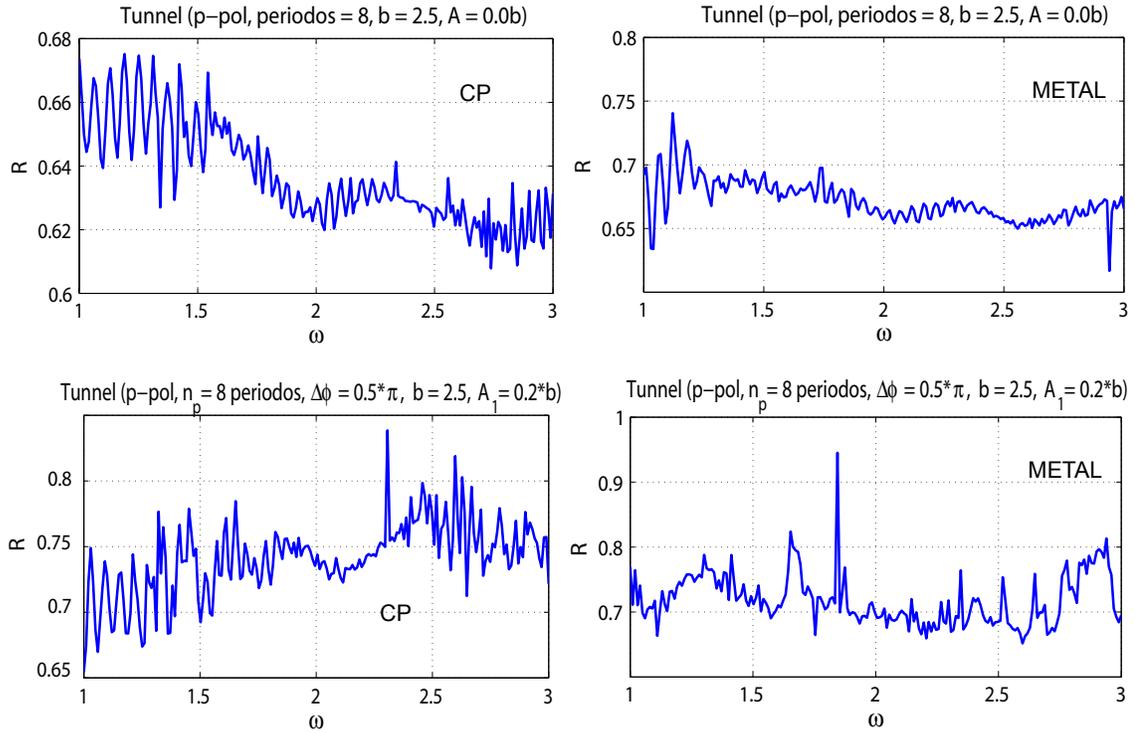


Figura 19. Curvas representativas del espectro de reflectancia  $R$  en función del valor de la frecuencia  $w$  aplicables al caso de CP empleando polarización TM, a incidencia normal para un sistema de 3 guías; (a) amplitud nula, (c)  $A_1 = 0.2b$ . Además, se incluye el caso del metal (Au) con (b)  $A_1 = 0$ , y (d) amplitud mínima.

Para el caso de la polarización TM, en las Fig. 16 y 19(a) y (b) se observa que el comportamiento de la intensidad reflejada para el caso de superficies planas tanto para el conductor perfecto como del medio metálico, sigue una tendencia ciertamente consistente en los picos del espectro reflectante al generalizar el caso de dos guías simples a considerar ahora tres de ellas. Más aún se ha podido establecer que las fluctuaciones que impiden marcar bien las zonas de las bandas prohibidas, estabilizan las soluciones en torno a un valor promedio y por ende, comienzan a vislumbrarse patrones más

definidos que mejoran gradualmente al ir aumentando el tamaño del sistema; por ende, ello implicaría reducir los indeseados efectos de borde para bajas frecuencias y con una resolución más fina para las frecuencias más altas del intervalo considerado; más aún, las curvas representativas aún mantienen concordancia con los valores teóricos permitidos para la conservación de la energía. En lo concerniente a las Fig. 16 y 19(c) pudieramos llegar a las mismas observaciones que se presentaron en la sección actual. No obstante, resulta difícil establecer una conclusión determinante en torno a todos los sistemas que implementaron el tipo de polarización TM, ya que no hay referendums en la literatura actual que aborden este tipo de geometrías; así que, por ahora sólo podemos afianzarnos a su veracidad, apoyándonos en la condición necesaria, aunque no suficiente de los valores límite que reporta el balance de energía en cada caso se cumplen; además de tener presente la idea de transitividad con la que hemos intentado entrelazar los resultados de las estructuras de bandas y su contraparte del espectro de reflectancia, sobre los casos de estructuras ideales, recurso que ha dado viabilidad en otros estudios publicados y que ha demostrado ser un eslabón confiable. Así, tomándola como punto de partida buscamos obtener indicativos que nos permitiesen incursionar en el ámbito de los materiales reales, aunque estamos conscientes de sus inherentes limitaciones prácticas.

## Capítulo V

---

### CONCLUSIONES

---

En el presente trabajo se ha mostrado un estudio teórico-numérico de la respuesta óptica de guías de ondas de cristal fotónico en 1D con superficies perfectamente conductoras y metálicas. A continuación se hace referencia a un breve resumen de los resultados obtenidos, y por consiguiente podemos enunciar las ideas clave a modo de conclusión.

Hemos aplicado un método de la ecuación integral para calcular la estructura de bandas de un cristal fotónico de longitud infinita en 1D. Estas estructuras fueron analizadas para los casos de la polarización del campo eléctrico transversal (TE) y del campo magnético transversal (TM). Dicha técnica tiene como punto de partida el segundo teorema integral de Green, permitiendo obtener consecuentemente un par de ecuaciones integrales que involucran, como incógnitas el modo del campo y su derivada normal evaluados en las fronteras o superficies involucradas. La discretización del sistema resulta en una ecuación matricial homogénea cuya solución determina las funciones fuente, con las que se pueden calcular las estructuras de bandas. La técnica numérica proporciona una enorme ventaja al considerar sólo puntos limitados de muestreo para reducir eficientemente los tiempos computacionales empleados.

De manera análoga, se aplicó una metodología similar para determinar la reflectancia

de un cristal fotónico de longitud finita en 1D. Similarmente se implementaron los casos de polarización TE y TM. Tomando como base las mismos precedentes aplicables ahora sobre una función de Green particular que funciona como la solución propuesta se llega a la obtención de un sistema de ecuaciones inhomogéneas acopladas, cuya discretización precisa de algunas consideraciones especiales inherentes de la geometría particular, para obtener el espectro de reflectancia característico.

Los resultados preliminares muestran, sobre los dos métodos descritos con anterioridad, que es posible establecer una correspondencia biunívoca que relaciona, los valores de la reflectancia con las regiones de las bandas prohibidas en la que se hacen presentes dichas estructuras; permitiendo así establecer un comparativo entre los casos de longitud infinita y finita, respectivamente.

Más aún, el corrimiento existente en las posiciones de las bandas del sistema al modificar los parámetros iniciales tales como la amplitud  $A$ , ancho de la guía  $b$  y diferencia de fase asociada  $\Delta\phi$ , a medida que éste se vuelve más complejo por el incremento del número de guías involucradas es un modo alternativo para manipular la propagación del haz . Por ende, las generalidades de este trabajo pueden ser el punto de partida para el diseño de un CF bidimensional y por consiguiente, un cuasicristal fotónico como trabajo futuro.

## Referencias

- Foresi, J. S., Villeneuve, P. R., Ferrera, J., Thoen, E. R., Steinmeyer, G. Fan, S., Joannopoulos, J. D., Kimerling, L. C., Smith, H. I., y Ippen, E. P. (1997a). Photonic-bandgap microcavities in optical waveguides. *Nature*, **390**(00): 143–145.
- Foresi, J. S., Villeneuve, P. R., Ferrera, J., Thoen, E. R., Steinmeyer, G. Fan, S., Joannopoulos, J. D., Kimerling, L. C., Smith, H. I., y Ippen, E. P. (1997b). Photonic-bandgap microcavities in optical waveguides. *Nature*, **390**(00): 143–145.
- Joannopoulos, J. D., Johnson, S. G., Winn, J. N., y Meade, R. D. (2008). Photonic crystals: Molding the flow of light. *Princeton University Press, New York*, **00**(00): 1–283.
- John, S. (1987). Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. *Phys. Rev. Lett.*, **58**(23): 2486–2489.
- Korvink, J. G. y Greiner, A. (2002). Chapter 2: "The Crystal Lattice System" in Semiconductors for Micro and Nanotechnology An Introduction for Engineers. *Wiley-VCH, Germany*, **00**(00): 27–93.
- Mendoza-Suárez, A., Villa-Villa, F., y Gaspar-Armenta, J. A. (2006). Numerical method based on the solution of integral equations for the calculation of the band structure and reflectance of one- and two dimensional photonic crystals. *J. Opt. Soc. Am. B*, **23**(10): 2249–2256.
- Mendoza-Suárez, A., Villa-Villa, F., y Gaspar-Armenta, J. A. (2007). Band structure of two-dimensional photonic crystals that include dispersive lefthanded materials and dielectrics in the unit cell. *J. Opt. Soc. Am. B*, **24**(12): 3091–3098.
- Mendoza-Suárez, A., Pérez-Aguilar, H., y Villa-Villa, F. (2011). Optical response of a perfect conductor waveguide that behaves as a photonic crystal. *Prog. Electromagn. Res.*, **121**: 433–452.
- Pérez-Aguilar, H., Méndez, E. R., Valencia, C., y Sánchez-Gil, J. A. (2009). On the transmission of diffuse light through thick slits. *J. Opt. Soc. Am. A*, **26**(4): 909–918.
- Pérez-Aguilar, H., Mendoza-Suárez, A., Tututi, E. S., y Herrera-González, I. F. (2013a). Disordered field patterns in a waveguide with periodic surfaces. *Prog. Electromagn. Res. B*, **48**: 329–346.
- Pérez-Aguilar, H., Mendoza-Suárez, A., Tututi, E. S., y Herrera-González, I. F. (2013b). Chaotic behavior of a quantum waveguide. *Physica B: Condensed matter*, **411**: 93–98.

Sakoda, K. (2001). Optical Properties of Photonic Crystals. *Springer-Verlag, Berlin Heidelberg*, **00**(00): 1–221.

Yablonovitch, E. (1987). Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Phys. Rev. Lett.*, **58**(20): 2059–2062.