

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Maestría en Ciencias en Ingeniería Física
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas



Un modelo distinto al de Lotka Volterra para el atún rojo

Tesis

Alumno:

Eduardo González Pérez, Facultad de Biología

-

Grado académico a obtener: Maestro en Ciencias

Asesor:

Rafael González Campos, Doctor en Ciencias

Morelia, Mich.

Febrero del 2016

ÍNDICE

<i>CAPÍTULO</i>	<i>PÁGINA</i>
Un modelo distinto al de Lotka Volterra para el atún rojo	4
Variación fraccional	15
Interpretación del sistema de Lotka Volterra fraccional	22
El sistema de Lotka Volterra fraccional para el atún	23
Contraste de las conclusiones del presente artículo con un artículo referente	25
Anexos	27
Referencias	48
Demostración de la existencia y unicidad de la solución del sistema fraccional	50

Resumen

Un modelo tradicional que modela la interacción entre dos especies es el modelo de Lotka Volterra, es popular por su simpleza, y vaticina el desarrollo de las poblaciones que siguen ciclos periódicos. Este modelo no es entonces idóneo para modelar la relación humana-atún, toda vez que al menos la población humana no sigue una tendencia cíclica. El presente capítulo se inspiró en el modelo de Lotka Volterra, pero editado para evitar los patrones cíclicos y que persiga la tendencia del crecimiento humano observado en las últimas décadas. Está soportado por el uso de derivadas que usan la transformada de Fourier, y ésta a su vez es ejecutada con el efectivo código novedoso *XFT*. Es un modelo sencillo en su estructura, pero su sencillez no impide que pueda que considerar la interacción entre las dos especies y que controle la influencia de factores circunstanciales (disposición o no de otros alimentos en el hombre, eficacia en la labor de la pesca). Es entonces, un modelo en persigue el equilibrio entre lo sencillo y lo multidisciplinario. Los resultados de este modelo arrojan el fatal reporte de la extinción del atún en las próximas décadas.

Abstract

A traditional model that models the interaction between two species is the model Lotka Volterra, it is popular for its simplicity, and it anticipates the development of populations cycles. This model is not one to model the relationship between the man and the tunny fish, since at least the population human not follows a trend cyclic. We can use recent models using various equations systems supported by intensive technical computer and methods MCMC; but the complex structure of them require collaboration on members of different sciences. This model was inspired on Lotka Volterra model, but edited to avoid cyclics patterns. It was supported to the use of derivatives using transform Fourier, and it use the new code *XFT*. It is a simple model in its structure. The results of this model cast the fatal report of extinction on the tunny fish in the next decades.

Palabras clave:

Atún, *XFT*, *DFT*, diferintegrales fraccionarias, extinción de especies.

Un Modelo para la Población de Atún Rojo

Proyecto de Tesis, MCIF

Autor:

Eduardo González Pérez, Facultad de Biología, Universidad Michoacana.

Asesor:

Rafael G. Campos, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Michoacana.

1 Un modelo distinto al de Lotka Volterra para el atún rojo

Un tema toral actual en las ciencias humanas es la decadencia de los recursos alimentarios; unos de los recursos alimentarios principales son los recursos pesqueros, y entre ellos figura de forma importante el atún. Este artículo se ha abocado a pronosticar la evolución futura de una de las principales especies de atún: *Atlantic bluefin tuna* (*Thunnus thynnus*). El presente artículo gira en torno a un modelo matemático. Es común que los modelos matemáticos se formulen y ejecuten con fines de pronósticos. Y es posible pronosticar la evolución futura de las poblaciones. Esta población, como muchas otras, sigue patrones bastante peculiares. Modelar dicho patrón es casi siempre una tarea desafiante. Ese desafío crece si existen factores circunstanciales difíciles de controlar en la modelación, como lo es la interacción con otras especies, la existencia de recursos alimenticios limitados, variables ambientales a veces impredecibles que inciden en la población, etc. Modelar su desarrollo en el tiempo no sólo tiene fines conceptuales o simbólicos, sino es un intento que redituará en conclusiones útiles que inspiren y orienten en la formulación de programas de conservación y mantenimiento de tan valiosa especie. Las conclusiones del artículo deberán además, reforzar la alerta de la posible extinción de la especie. La conclusión más importante (subcapítulo 2.2), derivada de un modelo de Lotka Volterra modificado e implementado con diferintegrales fraccionarias y soportado con la técnica computacional XFT, será que en el año 2070 se tendrá un monto marginal de atún del 1% (promedio), y en 2094 la cantidad de atún tomará el valor de 0.5% (promedio), respecto de 1950 en ambos casos.

1.1 Premisas del modelo

Describamos la relación hombre-atún rojo en un contexto de relación depredador-presa. El crecimiento de la población humana siempre ha sido estudiado apoyándose en modelos que describan su evolución aunque sea aproximada. Ningún modelo ha podido describirla de forma satisfactoria para periodos mayores de diez años. Esta dificultad se explica si consideramos el riesgo de fenómenos sociales o naturales impredecibles tales como guerras, epidemias, terremotos, implementación inesperada de programas de natalidad intensivos, etc.

No obstante, un modelo aceptado por muchos, y que fungiría como una herramienta que pronostique de forma casi satisfactoria el crecimiento de la población humana es el modelo logístico, fue introducido por *Pierre Franois Verhulst* en 1838 y supone que la razón de crecimiento es proporcional tanto a la población misma como a la cantidad faltante para llegar a la máxima población sustentable. Escribiremos dicho modelo como

$$\frac{dy}{dt} = ry(1 - y/K)$$

En este modelo el número r se conoce como la razón o tasa de crecimiento intrínseco, y K es la capacidad sustentable, que es el máximo valor que puede tener y , que es la población o proporción humana. El valor de r depende sólo de la especie considerada, mientras que K depende tanto de la especie como del ambiente en donde se desarrolla ésta y es el máximo valor posible en ese ambiente. Advierta que, si el valor de y es muy pequeño comparado con K , entonces $1 - y/K$ es aproximadamente 1 y la ecuación logística es semejante a la ecuación clásica de *Malthus*. Por otro lado, si y se aproxima a K entonces $1 - y/K$ es aproximadamente 0 y esto haría que dy/dt es aproximadamente 0, y en consecuencia la población y sería casi constante. Es posible demostrar que en la ecuación logística la población y puede tomar valores de porcentajes o de proporciones (en relación a la población inicial). (*En Anexos*) Conviene usar cifras expresadas en términos de porcentajes o proporciones en el manejo de las ecuaciones diferenciales que se propongan, toda vez que cuando se especifique una condición inicial (el tamaño inicial de la población de atún) se puede asignar el valor de 100 % o de 1, en lugar de asignar un valor ordinario estándar, el cual es casi imposible de conocer. Utilizaremos el modelo logístico con capacidad sustentable $K = 20$ (20 veces la población mundial de 1950, unas 50 372 600 000 personas, si dicha cifra representara la tolerancia máxima en el globo terráqueo), este es un valor estándar para K y bastante sensato, más después incursionaremos brevemente en otros dos valores, disertaremos en torno a su más adecuado valor, y examinaremos las diferencias en torno a los pronósticos de la sobrevivencia del atún.

En relación a la ecuación que describa la variación del tamaño de la población del atún en el tiempo, usaremos una ecuación diferencial con la siguiente estructura:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta y^b x^a$$

Se propuso esa estructura porque se partió del supuesto que el cambio del número de presas ($\frac{dx}{dt}$) viene dado por su propio crecimiento natural (αx) menos una tasa de encuentros con depredadores, pero que a diferencia de la ecuación referida de Lotka Volterra, esta tasa no es proporcional al tamaño de la población humana multiplicada por el tamaño de la población de atún (βxy , término que denota la interacción o tasa de encuentro entre las dos especies), sino que es proporcional al producto de las dos poblaciones relativas elevadas a potencias no necesariamente enteras ($\beta y^b x^a$). El uso de potencias no necesariamente enteras permite mayor flexibilidad en la búsqueda de ecuaciones que simulen mejor la evolución de las poblaciones, pese a que dicho planteamiento esté fuera del cuadro tradicional del uso de exponentes enteros.

1.2 El modelo

Así pues, hemos propuesto el sistema de ecuaciones diferenciales:

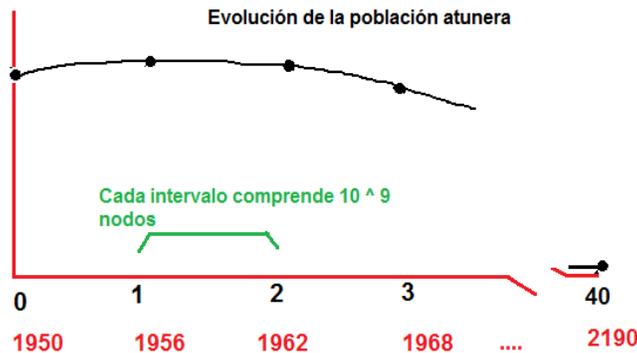
$$\frac{dy}{dt} = ry(1 - y/K) \quad (a)$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta y^b x^a \quad (b)$$

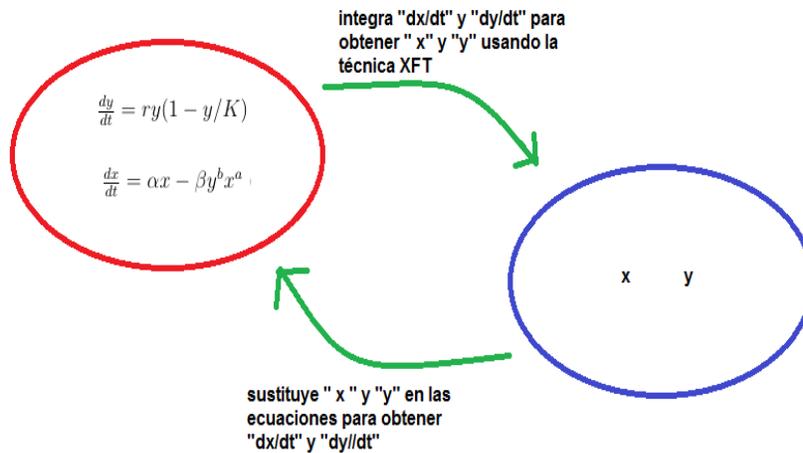
donde x es la población relativa de atún (respecto de su población inicial), y y es la población relativa humana (respecto de su población inicial). El sistema anterior es entonces un intento que regiría la evolución de las poblaciones humana y de atún y la interacción entre ambas. No se planteó entonces, el sistema de Lotka Volterra tradicional, por la razón suficiente de que sistema de Lotka Volterra arroja siempre soluciones periódicas para las dos poblaciones, lo que implicaría que la población humana adquiriera un mismo tamaño cada determinado periodo de tiempo, lo cual no corresponde con la realidad. El sistema anterior se resuelve en el presente artículo, usando el método de Picard (*Ver el Anexo para consultar el método*), y usando la técnica de diferintegración XFT fraccionaria (*Ver el Anexo para consultar el sustento teórico de dicha técnica*). Describamos más detalladamente este procedimiento:

1.3 Método de solución para las ecuaciones del modelo

Para encontrar los parámetros (coeficientes y exponentes) de las ecuaciones del presente modelo (y de los demás modelos de éste artículo) se procedió bajo el siguiente esquema: Se utilizaron 40 vectores para la variable tiempo t (y llamaremos intervalos a esos vectores), de longitud uno (1) cada uno. Cada vector (intervalo) representó 6 años cronológicos. Cada vector (intervalo) fué construido con n nodos ($n = 10^9$), obtenidos con transformaciones de escala de las n raíces del polinomio de Hermite de grado n . Así también se utilizaron 40 vectores (intervalos) para la variable x (población atunera), de longitud uno (1) cada uno. Cada vector (intervalo) representó la población en 6 años cronológicos. Y también se utilizaron 40 vectores (intervalos) para la variable y (población humana), de longitud uno (1) cada uno. Cada vector (intervalo) representó la población durante 6 años cronológicos. Véase la siguiente gráfica:

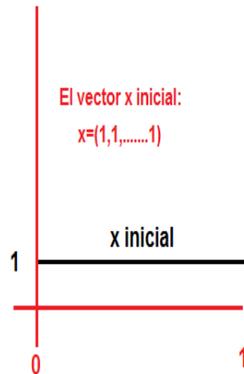


Los nodos de cada intervalo (vector) de x y y fungieron como vectores que son sujetos a los métodos de diferintegración *XFT*. (Ver el Anexo para consultar el sustento teórico de dicha técnica). Para cada intervalo (vector) se intentaron hasta 3500 iteraciones en el ciclo: “integración *XFT* del vector -substitución en las ecuaciones del sistema”. Véase la siguiente gráfica:



Conste que ese ciclo repetido varias veces (iteraciones) para x y para y , es en realidad el método de *Picard* usado de forma discrecional. (Ver el Anexo para consultar el sustento teórico del método de *Picard*). Así pues, el primer intervalo (vector) fué sujeto a ese ciclo; de alcanzarse ese tope máximo (3500 iteraciones) se reportaría el aviso de “No hay convergencia”. Por otro lado la secuencia de iteraciones estaba habilitada sólo cuando el máximo del absoluto del último vector obtenido y su anterior fuese mayor que 10^{-5} , pues en caso contrario suponía que se alcanzaba convergencia y se procedía al procesamiento del siguiente intervalo. Véase la siguiente gráfica:

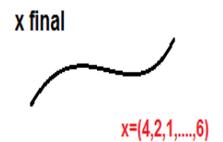
Primer intervalo



Después de procesarse varias veces en el ciclo:

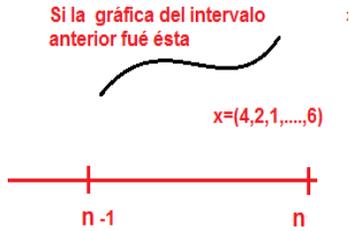


Se convierte en una solución numérica del sistema, cuya "gráfica" podría ser:



Los restantes intervalos (vectores) fueron sujetos al mismo ciclo; de alcanzarse ese tope máximo (3500 iteraciones) se reportaría el aviso de “No hay convergencia”. Así también, la secuencia de iteraciones estaba habilitada sólo cuando el máximo del absoluto del último vector obtenido y su anterior fuese mayor que 10^{-5} , pues en caso contrario suponía que se alcanzaba convergencia y se procedía al procesamiento del siguiente intervalo. Véase la siguiente gráfica:

Siguientes intervalos



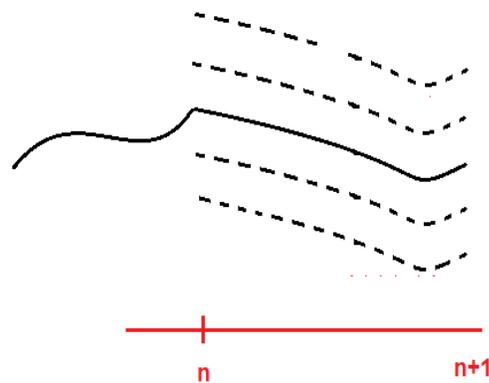
Después de procesarse varias veces en el ciclo:



Se convierte en una solución numérica del sistema, cuya "gráfica" podría ser:



Pero que se tiene que concatenar con la gráfica del intervalo anterior:

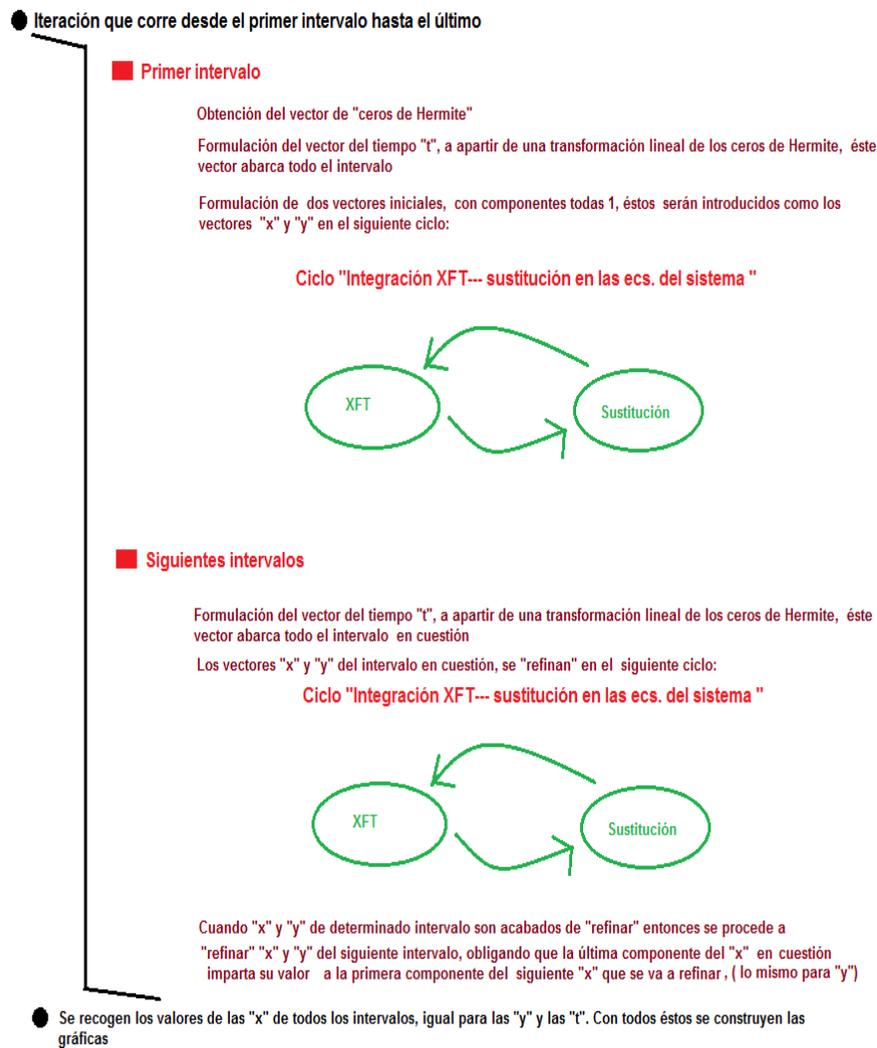


Se concatenaba (igualaba) el resultado del primer componente del vector que se sometería al método de *Picard*, con la última componente del entonces vector recién procesado del método de *Picard*; esta concatenación no es otra cosa sino la aplicación del problema del valor inicial (Ver el Anexo para consultar el sustento teórico del problema del valor inicial).

Se usó finalmente un vector externo al método de *Picard* y asociado a x , que iba acrecentándose en dimensión, pues iba recogiendo cada uno de los 40 distintos vectores x que se iban paulatinamente procesando en *Picard*. Igualmente se usó otro vector externo asociado a y y otro asociado a t . Con estos tres vectores externos se construyeron las gráficas, toda vez que los mismos recogen los resultados arrojados por el modelo.

1.4 Descripción esquemática del método de solución

El relato anterior del método de solución puede ser exhibido de forma más breve y esquemática en la siguiente imagen:



1.5 Ajuste del modelo a la situación real

Todo este ciclo se trabajó haciendo variar los exponentes y coeficientes de las ecuaciones del sistema hasta que el valor de x y de y coincidiera con los valores reportados por las estadísticas observables. Por ejemplo, en relación a la ecuación: $\frac{dy}{dt} = ry(1 - y/K)$, si consideramos que la población mundial en 1950 era de 2 518 630 000 y en el 2015 la

cifra alcanza los 7 502 560 981, y usando $K = 20$, se puede estimar el parámetro r de la ecuación (a); para ello se asignó distintos valores a r hasta hallar el valor que satisficiera la condición de que en el año 65 fuese $y=2.97$ (puesto que en ese año 2015 o año 65 la proporción de la población humana era 2.97 veces la población del año 1950 o año 0), y se halló que dicha ecuación es:

$$\frac{dy}{dt} = 0.14723y(1 - y/20)$$

donde es evidente que $r = 0.14723$. La estimación de los valores de los parámetros se refinó hasta obtener resultados para y que difirieran a lo mucho 5 milésimas respecto a 2.97. Resultó ser una tarea difícil dada la alta sensibilidad de los mismos ante cualquier pequeño cambio en cualquier componente de las ecuaciones. En torno a la información que rija la estimación de los cuatro parámetros de la ecuación (b) de nuestro modelo, nos apoyaremos, en primera instancia, en registros tabulados.

Registros tabulados se pueden consultar en un estudio publicado en 2011 en la revista científica PLoS ONE [1] donde se señala que de 1950 al 2008 la población de atún rojo adulto había disminuido un 67 % en el Atlántico Oriental. Contemplemos ese periodo de tiempo (58 años); conviene fijar al año 0 como 1950 y al año 58 como 2008. (Otra estimación similar se puede hacer para el atún del Atlántico Occidental). Esto dió pauta para trabajar la ecuación (b) asignando distintos valores a cada uno de sus cuatro parámetros, hasta hallar el conjunto de valores que satisficiera la condición de que en el año 58 fuese $x=0.33$ (puesto que en el año 58 ó 2008 la población del atún era apenas el 33 % de la población del año 1950 o año 0). y se halló que esa ecuación (b) viene a ser:

$$\frac{dx}{dt} = 0.2x - 0.168y^{1.2}x^{1.3} \quad (c)$$

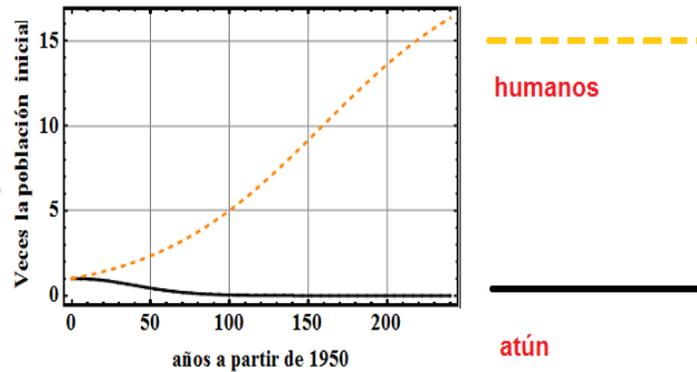
La búsqueda de valores de parámetros no estuvo exenta de dificultades, toda vez que varias veces el código no alcanzaba convergencia en la búsqueda de las soluciones, aún para ciertos valores que podrían parecer muy “buenos candidatos”.

1.6 Primeros resultados

La estimación de los valores de los parámetros se refinó hasta obtener resultados para x que difirieran a lo mucho 5 milésimas respecto a 0.33. Resultó ser una tarea difícil dada la alta sensibilidad de los mismos ante cualquier pequeño cambio en cualquier componente de las ecuaciones.

Proyectando este modelo al año 2070, la cantidad de atún tomará el valor de 1.5% de la cantidad inicial (1950), y en 2094 la cantidad de atún tomará el valor de 0.4%

aproximadamente de esa cantidad inicial. Estas estimaciones son parecidas a las que se arribarán en el subcapítulo 2.2 cuando se formulen los modelos de diferintegración fraccionaria. Más aún, estas mismas estimaciones no serían demasiado distintas de las reportadas por una revista científica, que hacen pensar del posible exterminio del atún en los tiempos venideros, como se verá en el capítulo 5. Este es un pronóstico de los tantos que se formulan en torno al escenario trágico que le espera a la humanidad en los contextos ambientales-sociales, al menos de que se tomen medidas emergentes radicales en la planificación alimentaria y en la conservación de los hábitats.



1.7 Justificación de este modelo

La estructura y los parámetros estimados de esta última ecuación deben de ser debidamente justificados en un contexto técnico - ecológico; para ello, nos inspiraremos en la interpretación de una ecuación similar en el modelo de Lotka Volterra tradicional, (toda vez que nuestro presente modelo supone tener las mismas premisas o presupuestos que el modelo Lotka Volterra tradicional en relación a la interacción presa-depredador-ambiente):

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y)$$

En esta ecuación se supone que las presas tienen suministro de comida ilimitado por tiempo indefinido, y se reproducen exponencialmente a menos que exista algún depredador. Este crecimiento exponencial está representado en la ecuación por el término αx . El término de la ecuación βxy viene a representar el encuentro de las dos especies y su interacción. Si β o δ son cero no existe interacción. Se puede entonces interpretar esta ecuación como el cambio del número de presas que viene dado por su propio crecimiento menos la tasa de encuentros con depredadores. Estas premisas son pues, réplicas de las premisas del modelo de Lotka Volterra tradicional, el cual estudiaremos (en su versión diferintegral fraccionaria) más adelante. Regresemos a la ecuación (c):

$$\frac{dx}{dt} = 0.2x - 0.168y^{1.2}x^{1.3}$$

y podemos argumentar lo siguiente: El cambio del número de presas ($\frac{dx}{dt}$) viene dado por su propio crecimiento natural ($0.2x$) menos una tasa de encuentros con depredadores, pero que a diferencia de la ecuación referida de Lotka Volterra, esta tasa no es proporcional al tamaño de la población humana multiplicada por el tamaño de la población de atún (βxy), sino que es proporcional al producto de las dos poblaciones relativas elevadas a potencias mayores que 1, ($0.168y^{1.2}x^{1.3}$). Las potencias mayores de 1 obedecen a que la tasa de encuentros aumenta de manera desproporcionada cuando aumentan aunque sea poca la población humana y/o de atún, toda vez que el crecimiento de la población humana demanda un consumo alimenticio que no es satisfecho debidamente por parte de la agricultura y la ganadera terrestres, y éste déficit alimenticio es compensado con creces por los alimentos procedentes del mar; más aún, un eventual crecimiento de la población de atún facilita su rápida localización y hace mucho más eficiente la capacidad de pesca; estos dos factores explican pues, los exponentes mayores de 1 de las variables x y y referidas antes.

1.8 Observaciones parciales

Un modelo tradicional que modela la interacción entre dos especies es el modelo de Lotka Volterra, es popular por su simpleza, y vaticina el desarrollo de las poblaciones que siguen ciclos periódicos. Este modelo no es entonces idóneo para modelar la relación humana-atún, toda vez que al menos la población humana no sigue una tendencia cíclica. Se puede recurrir a modelos sofisticados y recientes que utilizan sistemas de varias ecuaciones apoyados con técnicas intensivas del ordenador y métodos *MCMC*; pero la complejidad de las mismas exigen la colaboración de miembros de distintos perfiles de formación. El presente capítulo se inspiró en el modelo de Lotka Volterra, pero editado para evitar los patrones cíclicos y que persiga la tendencia del crecimiento humano observado en las últimas décadas. Está soportado por el uso de derivadas que usan la transformada de Fourier, y ésta a su vez es ejecutada con el efectivo código novedoso *XFT*, (*el sustento teórico del código XFT puede consultarse en el anexo*). Es un modelo sencillo en su estructura, pero su sencillez no impide que pueda que considerar la interacción entre las dos especies y que controle la influencia de factores circunstanciales (disposición o no de otros alimentos en el hombre, eficacia en la labor de la pesca). Es entonces, un modelo en persigue el equilibrio entre lo sencillo y lo multidisciplinario. Los resultados de este modelo arrojan el fatal reporte de la extinción del atún en las próximas décadas.

2 Variación fraccional

El sistema obtenido antes: $\frac{dy}{dt} = 0.14723y(1 - y/6)$ y $\frac{dx}{dt} = 0.2x - 0.168y^{1.2}x^{1.3}$, no es el único que permite hacer pronósticos futuros en torno a la eventual extinción del atún. Pero nos inspiraremos en él para plantear un sistema similar, pero que involucre derivadas fraccionales. Ese sistema similar persigue entonces el mismo fin: Pronosticar la evolución de la población del atún en las próximas décadas. En este sistema similar se plantearán ecuaciones que involucren fracciones no sólo en los exponentes sino también en el orden de derivación. Apelamos a la flexibilidad en torno a la elección de ecuaciones que simulen mejor los fenómenos físicos o biológicos, tras el intento de ir más lejos que el simple planeamiento de ecuaciones con exponentes enteros y ordenes de derivación enteros.

Se pueden hacer distintas formulaciones del orden de derivación fraccional, (usando la fórmula numérica (10), cuyo sustento analítico es (11), del *Anexo*); asignándose distintos valores equiespaciados tales como 0.1, 0.2, ..., 0.9, tales que interpolan los 2 tiempos (al menos) referidos.

2.1 Parámetros y ecuaciones

Se asignaron distintos valores al parámetro r de la ecuación $\frac{d^m y}{dt^m} = ry(1 - y/K)$, hasta obtener el valor de r que satisficiera la condición de que en el año 65 fuese $y=2.97$ (puesto que en ese año 2015 o año 65 la proporción de la población humana era 2.97 veces la población del año 1950 o año 0), y se halló que las ecuaciones fraccionales resultaron ser:

$$\frac{d^{0.10}y}{dt^{0.10}} = 0.10y(1 - y/20)$$

$$\frac{d^{0.20}y}{dt^{0.20}} = 0.0701y(1 - y/20)$$

$$\frac{d^{0.30}y}{dt^{0.30}} = 0.063y(1 - y/20)$$

$$\frac{d^{0.40}y}{dt^{0.40}} = 0.062y(1 - y/20)$$

$$\frac{d^{0.50}y}{dt^{0.50}} = 0.064y(1 - y/20)$$

$$\frac{d^{0.60}y}{dt^{0.60}} = 0.069y(1 - y/20)$$

$$\frac{d^{0.70}y}{dt^{0.70}} = 0.075y(1 - y/20)$$

$$\frac{d^{0.80}y}{dt^{0.80}} = 0.084y(1 - y/20)$$

$$\frac{d^{0.90}y}{dt^{0.90}} = 0.096y(1 - y/20)$$

Así también, se llevaron a cabo una serie de ensayos con el fin de estimar los parámetros en la ecuación $\frac{d^m x}{dt^m} = \alpha x - \beta y^b x^a$ hasta hallar el conjunto de valores de los parámetros que satisficiera la condición de que en el año 58 fuese $x=0.33$ (puesto que en el año 58 ó 2008 la población del atún era apenas el 33 % de la población del año 1950 o año 0). y se halló que esas ecuaciones fraccionales fueron:

$$\frac{d^{0.10}x}{dt^{0.10}} = 0.2x - 0.18y^{1.2}x^{1.3}$$

$$\frac{d^{0.20}x}{dt^{0.20}} = 0.2x - 0.158y^{1.2}x^{1.3}$$

$$\frac{d^{0.30}x}{dt^{0.30}} = 0.2x - 0.152y^{1.2}x^{1.3}$$

$$\frac{d^{0.40}x}{dt^{0.40}} = 0.2x - 0.152y^{1.2}x^{1.3}$$

$$\frac{d^{0.50}x}{dt^{0.50}} = 0.2x - 0.154y^{1.2}x^{1.3}$$

$$\frac{d^{0.60}x}{dt^{0.60}} = 0.2x - 0.156y^{1.2}x^{1.3}$$

$$\frac{d^{0.70}x}{dt^{0.70}} = 0.2x - 0.163y^{1.2}x^{1.3}$$

$$\frac{d^{0.80}x}{dt^{0.80}} = 0.2x - 0.168y^{1.2}x^{1.3}$$

$$\frac{d^{0.90}x}{dt^{0.90}} = 0.2x - 0.176y^{1.2}x^{1.3}$$

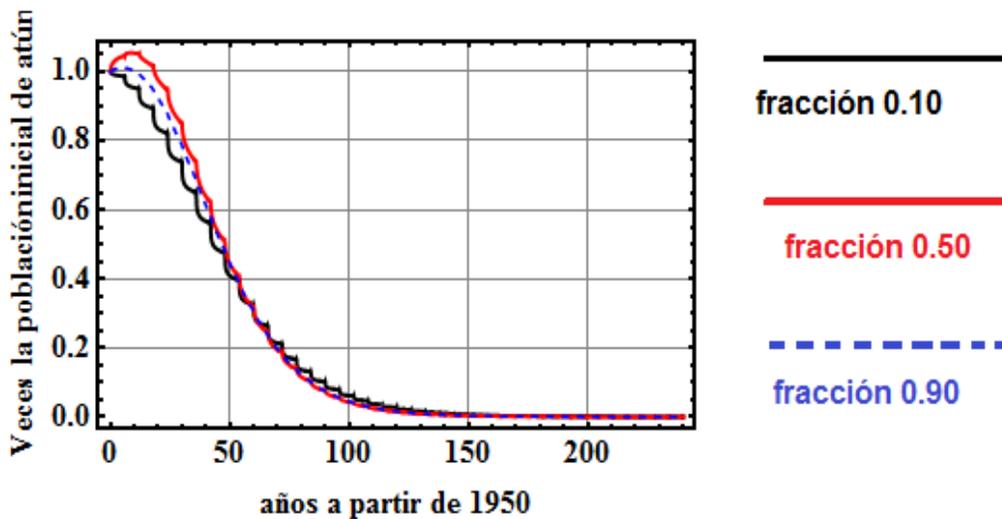
Considere que en $\frac{d^m x}{dt^m} = \alpha x - \beta y^b x^a$, el parámetro α se mantuvo invariable en esas ecuaciones. Este parámetro es una medida de la capacidad reproductiva, supone que se reproducen exponencialmente y se asocia también al crecimiento intrínseco (removiendo la mortalidad por cualquier causa del atún). Por otro lado, el parámetro que se hizo variar en cada ecuación, además del orden de integración, es el parámetro β , el cual mide el grado o nivel de encuentros entre los atunes y los humanos. Las anteriores ecuaciones

vienen a representar pues, una amplia gama de posibilidades en el grado de interacción entre esas 2 especies. Elegir la ecuación que mejor se ajusta a la realidad es un desafío que para dilucidarse implica el acceder a más información en torno a la evolución del tamaño de la población de atún, (conocer más de los 2 tiempos que se trabajaron en el presente escrito). Dicho escenario, daría lugar al manejo de técnicas tales como AIC (Arkaike Information Criterium) y BIC (Bayesian Information Criterium), que permiten elegir la ecuación que arroje mejores predicciones entre las existentes, o la ecuación correcta, con máxima probabilidad a posteriori. [2]

En torno a $\frac{d^m y}{dt^m} = ry(1 - y/K)$; las distintas derivadas fraccionales obtenidas pueden también competir tras la búsqueda de la que mejor se adecúe al crecimiento poblacional humano en la historia reciente, ello representa un desafío posible de superar. Observe que $\frac{d^m y}{dt^m} = ry(1 - y/K) = ry - ry^2/K$, entonces, el término positivo ry explica el crecimiento de la población y el término negativo ry^2/K explica el decrecimiento. Esto tiene implicaciones bastante significativas: el parámetro r viene a ser un índice intrínseco de natalidad humana, sin incluir los decesos, no estimable directamente de tablas, pues no es precisamente el índice de crecimiento anual ni sexenal (el cual incluye también los decesos), mientras que el término ry^2/K encierra todos los decesos, por cualquier causa de mortandad. No obstante, un hecho observado que nos permite tener relativa tranquilidad en torno a las diferencias en las conclusiones que pudieran derivarse de la diversa gama de fracciones de derivada tiene que ver con la no diferencia significativa entre las gráficas que se obtienen con esas distintas fracciones, excepto, quizá con la fracción 0.50.

2.2 Resultados

Nos permitimos exhibir la siguiente gráfica que maneja tres fracciones de derivación comunes en lo tocante al atún:

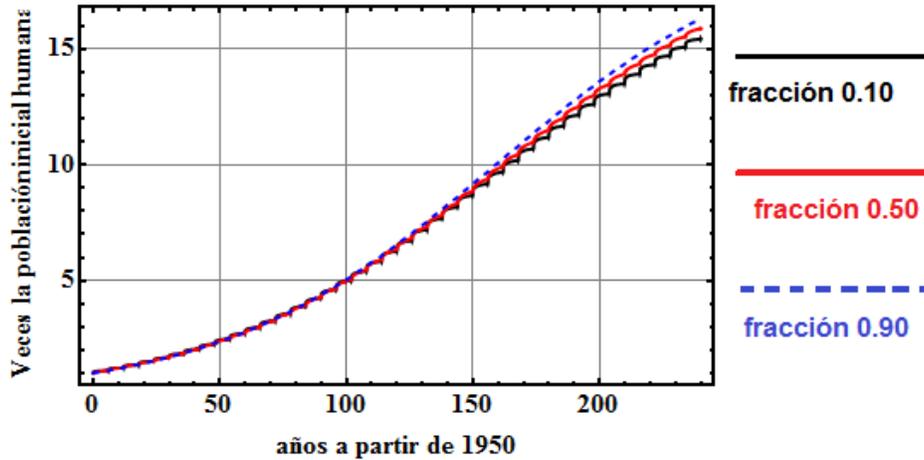


Esta gráfica, por sí sola, viene a ser una de las principales aportaciones del presente artículo, toda vez que, con un número previo de corridas (ensayos) que la perfeccionaron y que se cuantifican en decenas o centenas de veces; viene a exhibir, de forma expedita la evolución futura de la especie estudiada, haciendo uso del mecanismo más complejo de los usados aquí: las diferintegrales fraccionarias, auxiliadas con la técnica computacional *XFT*.

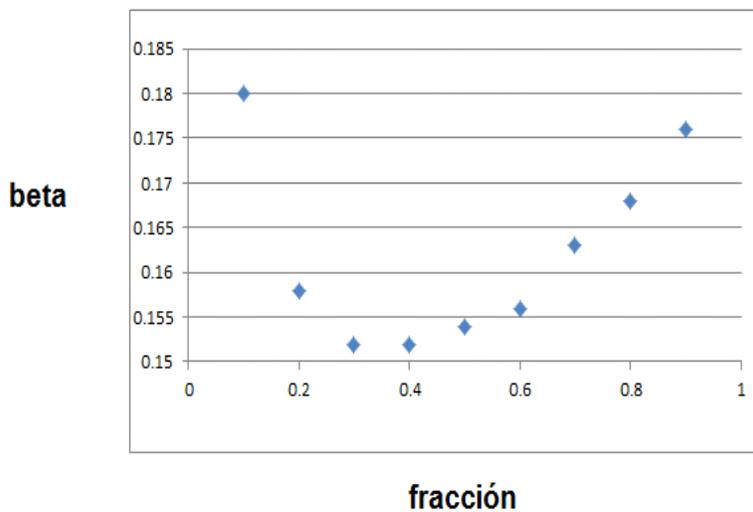
En torno a la lectura de la gráfica, se tiene que para la fracción 0.10, el modelo proyecta al año 2070 una cantidad de atún del monto del 2% de la cantidad inicial (1950), y en 2094 la cantidad de atún tomará el valor de 0.9% aproximadamente de esa cantidad inicial. En torno a la fracción 0.50, en el año 2070 la cantidad de atún tomará el valor de 1% de la cantidad inicial (1950), y en 2094 será 0.4% aproximadamente de esa cantidad inicial. Y en relación a la fracción 0.90, el modelo apuntalado al año 2070 determina que la cantidad de atún tomará el valor de 1% de la cantidad inicial (1950), y en 2094 la cantidad de atún será el 0.4% aproximadamente de la cantidad inicial. No deja de ser interesante el hecho de que las tres fracciones referidas arrojan pronósticos bastante similares entre sí. Estas conclusiones no serían demasiado distintas de las reportadas por una revista científica, que hacen pensar del posible exterminio del atún en los tiempos venideros, como se verá en el capítulo 5. Como se comentó antes, éstos son pronósticos en el ámbito ambiental-social, de los tantos que se formulan en torno al escenario trágico que le espera a la humanidad, al menos de que se implementen medidas emergentes radicales en la planificación alimentaria y en la conservación de los hábitats.

Es interesante observar el comportamiento atípico que se descubre en la anterior gráfica en torno a las distintas fracciones de derivación. De las tres fracciones contrastadas, la fracción intermedia en valor es 0.50; no obstante, su curva asociada es tal que no se posiciona de forma intermedia, pues en el extremo izquierdo de la gráfica se despliega más arriba, con una “joroba”, que las otras dos. Dicha “joroba” puede ser un síntoma que le

reste fuerza en una competencia que libre contra las demás fracciones en un contexto de la búsqueda de la derivada fraccional con un comportamiento más sensato o realista. El uso de las distintas fracciones de derivada parece también exhibir diferencias bastante tenues en lo que toca a la evolución de la población humana, según se observa en la siguiente gráfica:

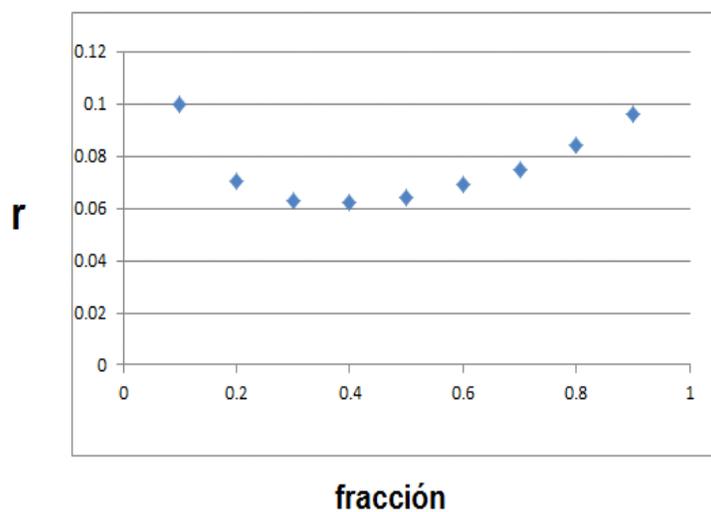


Por otro lado, es curioso observar la relación entre el orden de la derivada fraccional: 0.1, 0.2, ..., 0.9, y los valores correspondientes del parámetro β en $\frac{d^m x}{dt^m} = \alpha x - \beta y^b x^a$. El parámetro β es un indicador de cuan rápido disminuye el valor de la ecuación, pero, para que la solución de la ecuación pase por los 2 puntos “interpolados” (correspondientes al año 1960 y 2011), entonces se puede decir que el orden de la derivada fraccional “compensa” el valor de β , de forma tal que la gráfica siempre pase por los 2 puntos. Esto se puede describir de otra forma: El salto de 0.10 a 0.20 es, en términos de distancia, igual al salto de 0.50 a 0.60, e igual al salto de 0.90 a 1; pues en todos esos casos el salto es de 0.10, pero el salto de la derivada de orden 0.10 al orden 0.20, en términos del “rigor” de derivación es distinto al salto de derivada de orden 0.50 al orden 0.60, en términos del “rigor” de derivación, el cual es distinto a su vez, al salto de derivada de orden 0.90 al orden 1. Estas ideas se puede ilustrar con la siguiente gráfica:



La cual descubre las diferencias ya descritas, e inclusive descubre cierta “asimetría” entre los valores 0.1, 0.2, .., 0.9. Estas diferencias y esta asimetría son entonces, características de la deriva fraccional que valen la pena subrayarse.

En relación a $\frac{d^m y}{dt^m} = ry(1 - y/K)$, algo similar se presenta al contrastar r contra la fracción, aunque el comportamiento atípico se pueda quizás explicar por la potencia 2 de la y :



2.3 Observaciones de este modelo

El modelo usado en el presente capítulo se inspiró en el modelo de Lotka Volterra del capítulo anterior, pero involucrando la novedosa definición de la derivada fraccional, cuyo código computacional sigue estando soportado por el uso de derivadas que usan la transformada de Fourier, y ésta a su vez es ejecutada con el código novedoso *XFT*, (*el sustento teórico del código XFT puede consultarse en el anexo*). El uso de las derivadas fraccionales permiten ir más allá del prevaeciente paradigma que supone que todos los fenómenos naturales, económicos o sociales deban estar regidos con el manejo de derivadas (o integrales) de orden entero. Una ventaja analítica de la inclusión de la derivada fraccional en los modelos es conseguir una mayor flexibilidad en la búsqueda de las soluciones (mayores grados de libertad dicho en la jerga estadística), pues el orden fraccional: 0.10, 0.20, etc. se puede introducir como una nueva variable a estimar; pero ese exceso de flexibilidad debe ser compensado imponiendo más condiciones al sistema (más condiciones iniciales, más condiciones de frontera, variables forzadas a ser transformadas a constantes, etc.) La teoría que involucra el uso de diferintegrales fraccionarias estaría en una etapa de notorio desarrollo teórico y experimental.

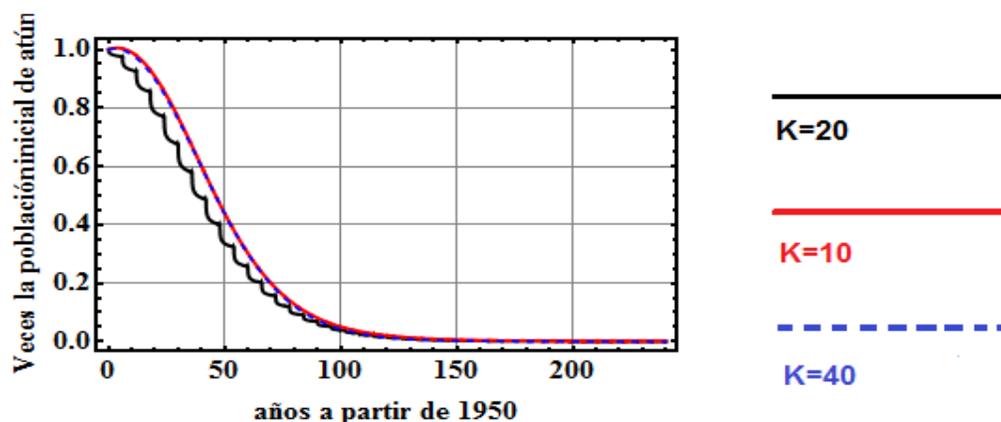
Los resultados de este modelo fraccionario, al igual que en modelo no fraccionario del capítulo anterior, arrojan el fatal reporte de la extinción del atún en las próximas décadas.

2.4 El valor de K , un dilema a considerar en nuestros pronósticos

Como se señaló anteriormente, el parámetro K usado en la ecuación (1) representa la capacidad sustentable, esto es, la tolerancia máxima de personas en el globo terráqueo. Más allá del valor que se le asignó, no hay consenso en torno a su valor entre los estudiosos de demografía. Por ejemplo, Brown examina cuidadosamente la probabilidad de que la capacidad del planeta para soportar la población humana esté entre 50 000 y 200 000 millones de personas [3]. También, se argumentó que si toda la tierra se dedicase al cultivo de alimentos de origen vegetal, excepto una fracción de 750 metros cuadrados por persona para usos urbanos, la capacidad poblacional de la tierra sería de 146 mil millones de personas [4]. Hay quienes, sobrevalorando factores tales como la producción de alimentos, la cantidad de agua disponible, la cantidad de radiación solar, etc. proponen otros distintos valores para K , y esos valores son disonantes unos con otros casi siempre. Para evitar entrar en la polémica de su valor más adecuado, usufructuaremos el valor asignado antes de $K = 20$ e incursionaremos, en la siguiente tabla, en otros dos valores: ($K = 10$ y $K = 40$), para contrastar los pronósticos que derivan de cada valor. No nos aferraremos a un sólo valor de K , toda vez que pueden emitirse voces para desacreditar ese valor a partir de argumentos que se sustenten en recientes investigaciones o en nuevas teorías.

<i>K</i> veces la población mundial en 1950, y sería la capacidad máxima de albergue en el planeta	año	Porcentaje restante del atún respecto del que había en 1950
K=20	2070	1.5 %
$\frac{dx}{dt}=0.2x-0.187y^{1.2} x^{1.3}$ $\frac{dy}{dt}=0.111y(1-y/20)$	2094	0.4 %
K=10	2070	2.0 %
$\frac{dx}{dt}=0.2x-0.184y^{1.2} x^{1.3}$ $\frac{dy}{dt}=0.124y(1-y/10)$	2094	0.7 %
K=40	2070	1.4 %
$\frac{dx}{dt}=0.2x-0.19y^{1.2} x^{1.3}$ $\frac{dy}{dt}=0.105y(1-y/40)$	2094	0.3 %

Afortunadamente, para esos tres valores de K , los pronósticos futuros no difieren de manera significativa, ni la evolución futura de esa población de atún, según la siguiente gráfica:



3 Interpretación del sistema de Lotka Volterra fraccional

El presente capítulo escueto es el antecedente teórico del próximo capítulo. Pues se describen las premisas y la estructura del sistema de Lotka Volterra fraccional, el cual se abordará en el siguiente; y las cuales, a su vez, se han inspirado del sistema de Lotka Volterra estándar (no fraccional).

La primera ecuación del sistema:

$$\frac{d^{0.50}x}{dt^{0.50}} = x(\alpha - \beta y)$$

supone que las presas tienen suministro de comida ilimitado por tiempo definido, y se reproducen a menos que exista algún depredador. Este crecimiento está representado en la ecuación por el término αx . El término de la ecuación βxy viene a representar el encuentro de las dos especies y su interacción. Si β o δ son cero no existe interacción.

Se puede interpretar la anterior ecuación como el cambio del número de presas que viene dado por su propio crecimiento menos la tasa de encuentros con depredadores.

En la segunda ecuación del sistema:

$$\frac{d^{0.50}y}{dt^{0.50}} = -y(\gamma - \delta x)$$

δxy representa el crecimiento de los depredadores, y γy representa la muerte natural de los depredadores; a más depredadores es necesario que el número de víctimas o presa aumente para mantener la población.

Se puede interpretar la anterior ecuación como el crecimiento de los depredadores por la caza de presas menos la muerte natural de éstos.

4 El sistema de Lotka Volterra fraccional para el atún

La relación entre el hombre y el atún rojo también puede concebirse en el contexto de las ecuaciones de Lotka Volterra (LV). Las soluciones del sistema de LV con derivadas enteras son siempre periódicas regulares (con el mismo periodo a lo largo del tiempo). Estas soluciones son entonces incongruentes con la evolución de la población de atún y sobretodo la humana, pues es natural suponer que la evolución de la población humana no es periódica regular. Afortunadamente, la inclusión de los sistema LV con derivadas fraccionales es una atractiva opción toda vez que las soluciones no son periódicas, y en el peor de los casos son periódicas pero no regulares. Nos permitimos el planteamiento entonces, del uso de un sistema de LV usando el orden de derivación más común y representativo: la fracción 0.5. Dicho sistema adquiere la estructura:

$$\frac{d^{0.50}x}{dt^{0.50}} = x(\alpha - \beta y)$$

$$\frac{d^{0.50}y}{dt^{0.50}} = -y(\gamma - \delta x)$$

Desarrollemos un procedimiento similar al de las secciones pasadas en la estimación de los cuatro parámetros involucrados en el sistema. Conviene entonces fijar al año 0 como 1950 y al año 58 como 2008. (Otra estimación similar se puede hacer para el atún del Atlántico Occidental). Esto dió pauta para asignar distintos valores a cada uno de sus cuatro parámetros, hasta hallar, que por un lado, el sistema satisficiera la condición de que en el año 58 fuese $x=0.33$ (puesto que en el año 58 ó 2008 la población del atún era apenas el 33 % de la población del año 1950 o año 0); y que por otro lado, también satisficieran la condición de que en el año 65 fuese $y=2.97$ (puesto que en ese año 2015 o año 65 la proporción de la población humana era 2.97 veces la población del año 1950 o año 0).

Procediendo de esta forma, el sistema resultó ser:

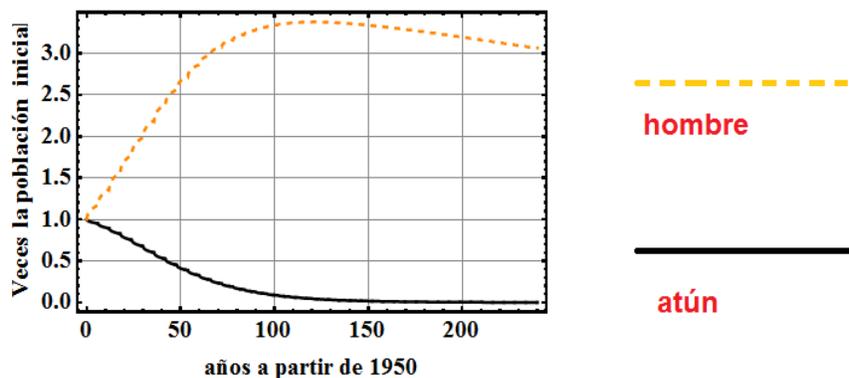
$$\frac{d^{0.50}x}{dt^{0.50}} = x(0.021 - 0.045y)$$

$$\frac{d^{0.50}y}{dt^{0.50}} = -y(0.004 - 0.1x)$$

La búsqueda de valores de parámetros no estuvo exenta de dificultades, toda vez que varias veces el código no alcanzaba convergencia en la búsqueda de las soluciones.

La estimación de los valores de los parámetros se refinó hasta hasta obtener resultados para x que difirieran a lo mucho 5 milésimas respecto a 0.33, y para y que difirieran también a lo mucho 5 milésimas respecto a 2.97. Resultó ser una tarea difícil dada la alta sensibilidad de los mismos ante cualquier pequeño cambio en cualquier componente de las ecuaciones.

Proyectando este modelo al año 2070, la cantidad de atún tomará el valor de 4.7% de la cantidad inicial (1950), y en 2094 la cantidad de atún tomará el valor de 2% de esa cantidad inicial.



Cabe señalar que la formulación de la ecuación de LV en la relación atún-hombre tiene un carácter más simbólico que realista, toda vez que el depredador (hombre) no depende exclusivamente de la existencia del atún (presa) para su subsistencia, por lo que no se satisface una premisa implícita de la relación depredador-presa en LV, la cual supone que el depredador depende exclusivamente de la presa para su subsistencia. Esto da pauta para concluir en el sentido de que la evolución de la población humana en el tiempo futuro inmediato no tiene que seguir el desarrollo que se exhibe en la gráfica anterior. No obstante, dado que el atún sí tiene como depredador importante y quizás principal, al hombre; nos induce a tomar con seriedad la evolución de la población del atún que vaticina la gráfica anterior, lo cual, en coincidencia con otras conclusiones del presente artículo, nos hace creer que el atún rojo se extinguirá, efectivamente, en las próximas décadas.

4.1 Observaciones parciales

El modelo usado en el presente capítulo se inspiró en el modelo de Lotka Volterra estándar, cuyo código computacional sigue estando soportado por el uso de la transformada de Fourier, y ésta a su vez es ejecutada con el código novedoso *XFT*, (*el sustento teórico del código XFT puede consultarse en el anexo*). Este modelo estándar- fraccional tiene un carácter más simbólico que realista, aunque el carácter no realista puede estar sujeto a discusión, pues existen argumentos que hacen suponer que puede ser más realista de lo que se imaginaba. Se comentó antes que no satisface a cabalidad algunas de las premisas del modelo Lotka Volterra (plena dependencia del depredador (hombre) respecto de la presa (atún) por ejemplo); pero la evolución en este modelo de ambas poblaciones: la del atún en decadencia fatal, y la del hombre aún en ascenso numérico pero sujeto a una futura decadencia a partir del 2070 aprox., son evoluciones que no distarían mucho de la realidad. En particular, la del hombre puede seguir esa propensión decadente en las próximas décadas, dada la escasez alimenticia, la contaminación y la destrucción de los hábitats.

Los resultados de este modelo fraccionario, al igual que los dos modelos anteriores, arrojan el fatal reporte de la extinción del atún en las próximas décadas.

5 Contraste de las conclusiones del presente artículo con un artículo referente.

El estudio publicado en 2011 en revista científica PLoS ONE [1], que exhibe un modelo matemático de gran complejidad y riqueza, inspirado en simulaciones MCMC; es un referente obligatorio para cualquier estudio que se aventure en pronósticos de la población de atún. Según dicho artículo, de continuar la tendencia del monto de pesca del año 2007;

esto es, 60 000 toneladas por año en la población de atún del Atlántico Oriental, (y 1750 toneladas para la población occidental, la cual no es considerada en nuestro artículo), entonces, en la población Atlántica Oriental, la relación de la biomasa en 2020 entre la biomasa del rendimiento máximo sustentable, será de 0.35 (en la Atlántico Occidental será de 0.36). Cabe señalar que el rendimiento máximo sustentable es el monto poblacional para el cual la pesca de individuos no afecta la continua reproducción y consecuente crecimiento de la población; en otras palabras, hay un excedente de individuos que pueden ser capturados porque el crecimiento de la población está en un momento robusto, debido al gran número de individuos que se reproducen [28]. Cuando se reporta un ratio de 0.35 de la relación de la biomasa en el 2020 entre la biomasa del rendimiento máximo sustentable, se interpreta entonces que la población, en el 2020, estará en una situación crítica de sobreexplotación al grado de condenarla al exterminio en un futuro.

Cabe decir que en dicho estudio se consideran las interacciones entre esas dos poblaciones, (separadas por el meridiano 45), a partir de estimaciones de la migración de los peces entre una y otra población. En nuestro artículo, en cambio, se consideró a la población del Oriente del Atlántico como una sola, sin interacción con la población Occidental.

ANEXOS

6 El método de solución numérica

Muchos problemas de valores a la frontera consisten de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y valores a la frontera en dos puntos. En los últimos años se han usado métodos de solución que han usado matrices cuando la derivada o integral está dada como combinación lineal de los valores de la función evaluada en los nodos.

La matriz de diferenciación usada para resolver la ecuación de *Schödinger*, que llamaremos después D , es diagonalizada por una matriz F que procede de una fórmula de cuadratura para la Fractional Fourier Transform; y recientemente, un nuevo algoritmo para calcular la transformada de Fourier ha sido creado y llamado *XFT*. La matriz D produce derivadas exactas para combinaciones lineales de funciones de Hermite, y por lo tanto, derivadas aproximadas para operaciones de $L^2(-\infty, \infty)$, usaremos la *XFT* para calcular operaciones de punto flotante en $O(n \log(n))$ de derivadas de funciones y usaremos la invertibilidad de D para obtener antiderivadas.

Consideremos N diferentes nodos complejos z_1, z_2, \dots, z_N y un polinomio $f_m(z)$ de grado $m \leq N - 1$. Entonces, los N valores de la derivada de $f_m(z)$ obtenidos de la interpolación de Hermite en el plano complejo evaluada en los nodos puede ser escrita de la forma [16], [23], [24]

$$f'_m(z_j) = \sum_{k=1}^N \mathcal{D}_{jk} f_m(z_k), \quad (1)$$

donde

$$\mathcal{D}_{jk} = \begin{cases} \sum_{l \neq j}^N \frac{1}{(z_j - z_l)}, & j = k, \\ \frac{P'(z_j)}{(z_j - z_k) P'(z_k)}, & j \neq k, \end{cases} \quad (2)$$

y $P(z) = \prod_{k=1}^N (z - z_k)$. Esto significa que \mathcal{D} es una matriz de diferenciación que da derivadas exactas en el espacio de polinomios de grado de al menos $N - 1$.

Ahora consideremos una función no nula $\gamma(z)$ en el intervalo considerado. La derivada de la función $u_m(z) = \gamma(z)f_m(z)$, evaluada en los nodos viene a ser

$$\begin{aligned} u'_m(z_j) &= \gamma(z_j) \left(f'_m(z_j) - \frac{\gamma'(z_j)}{\gamma(z_j)} f_m(z_j) \right) = \gamma(z_j) \left(\sum_{k=1}^N \mathcal{D}_{jk} - \frac{\gamma'(z_j)}{\gamma(z_j)} \right) f_m(z_k) \\ &= \sum_{k=1}^N D_{jk} u_m(z_k), \end{aligned} \quad (3)$$

donde los elementos D_{jk} , dados por

$$D_{jk} = \gamma(z_j) \left(\mathcal{D}_{jk} - \frac{\gamma'(z_j)}{\gamma(z_j)} \right) / \gamma(z_k), \quad (4)$$

definen la $N \times N$ matriz de diferenciación D la cual aporta derivadas exactas en el espacio generado por $u_m(z)$, $m = 0, 1, \dots, N-1$. Elijamos ahora la función real $e^{-x^2/2}$ como $\gamma(x)$. Ya que el sistema ortogonal $e^{-x^2/2}H_m(x)$ es cerrado en $L^2(-\infty, \infty)$, (4) genera una matriz para derivadas aproximadas en el espacio para esta elección de $\gamma(x)$. Ya que los elementos diagonales de D vienen a ser

$$D_{jj} = \sum_{l \neq j}^N \frac{1}{(x_j - x_l)} - \frac{\gamma'(x_j)}{\gamma(x_j)},$$

podemos seleccionar los ceros del N ésimo polinomio de Hermite $H_N(x)$, x_1, x_2, \dots, x_N , como nodos y aplicar las formulas electrostáticas para los ceros de los polinomios clásicos ortogonales [17] para obtener una matriz de diferenciación D con ceros en las entradas de la diagonal, i.e.,

$$D = GD_0G^{-1}, \quad (5)$$

donde G es la matriz diagonal cuyos elementos están dados por $e^{-x_j^2/2}H'_N(x_j)$, x_j es el j cero de $H_N(x)$,y

$$(D_0)_{jk} = \begin{cases} 0, & j = k, \\ \frac{1}{(x_j - x_k)}, & j \neq k. \end{cases} \quad (6)$$

En [18] es mostrado que

$$E^{-1}D_0E = iX,$$

donde X es la matriz diagonal cuyos elementos son los cero de Hermite x_j , $j = 1, 2, \dots, N$,y E es la matriz de elementos

$$E_{jk} = \frac{2^{N-1}(N-1)!}{N H_{N-1}(t_j)H_{N-1}(t_k)} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{i^n}{2^n n!} H_n(t_j)H_n(t_k). \quad (7)$$

Así, definiendo

$$F = GES, \quad (8)$$

donde $S_{jk} = (-1)^{j-1}\delta_{jk}$, $j, k = 1, 2, \dots, N$, tenemos que $F^{-1}DF = S^{-1}E^{-1}G^{-1}DGES = S^{-1}E^{-1}(G^{-1}DG)ES = S^{-1}E^{-1}(G^{-1}DG)ES = S^{-1}E^{-1}(D_0)ES = S^{-1}(E^{-1}D_0E)S = S^{-1}(iX)S = iX$. En resumen:

$$F^{-1}DF = iX, \quad (9)$$

y ya que $x_j \neq 0 \forall j$, para N par (pues en tal caso el 0 no formaría parte de los ceros de Hermite) obtenemos que $D = F(iX)F^{-1}$, y entonces $D^2 = F(iX)F^{-1}F(iX)F^{-1} =$

$F(iX)(F^{-1}F)(iX)F^{-1} = F(iX)(I)(iX)F^{-1} = F(iX)(iX)F^{-1} = F(iX)^2F^{-1}$, y en general:

$$D^q = F(iX)^q F^{-1}, \quad q \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

no obstante, la fórmula anterior es válida para q fraccionario y hasta complejo. El uso de D allana un camino para definir una novedosa expresión de diferintegrales fraccionarias. La ecuación (10) es la representación numérica de la derivada fraccional que usaremos en el proyecto. La forma continua de esta derivada está dada en términos de la transformada de Fourier de la forma siguiente:

$$1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-iwt}(iw)^q [\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} f(\tau) d\tau]] dw \quad (11)$$

Esta expresión es una derivada fraccional analítica y daremos una fórmula numérica en un capítulo posterior; se ha usado además como derivada fraccional en los artículos [25], [26] entre otros. Nos permitimos desarrollar la teoría anterior mediante casos numéricos utilizando el software *Mathematica*:

```

In[2]:= n es el número de nodos                                número de nodos, (son pocos)
In[3]:= n = 50;
In[4]:= a = NSolve[HermiteH[n, y] = 0, y];                    Halla las raíces del polinomio de Hermite de grado n
In[5]:= z = y /. a;                                           z es el vector conformado por esas raíces
In[6]:= Hn[x_] := HermiteH[n, x]                               El polinomio de Hermite de grado n es definido como Hn
In[7]:= Hderivada = Hn'[x];                                   Se define la derivada del polinomio anterior
In[8]:= Allanemos el camino para obtener D, que da derivadas aproximadas en el espacio e^{-x^2/2} * Hn[x],
para ello halleemos primero G, Ginversa y D0 :
In[8]:= G = Table[0, {k, n}, {j, n}];                          Se albergan espacios para una matriz n x n, es la matriz G
In[9]:= For[i = 1, i <= n, i++, G[[i, i]] = e^{-z[[i]]^2/2} Hn'[z[[i]]];] Se definen los elementos de la diagonal de G
In[10]:= Obtengamos la matriz D0
In[11]:= D0 = Table[0, {k, n}, {j, n}];                         Se albergan espacios para una matriz n x n, es la matriz D0
In[12]:= Do[D0[[j, i]] = 1 / (z[[j]] - z[[i]]), {i, 1, n}, {j, 1, i - 1}] Se definen los elementos de D0

```

```

In[13]:= Do[D0[[i, j]] = -D0[[j, i]], {i, 1, n}, {j, 1, i-1}] Se definen más elementos de la matriz Do

In[14]:= A continuación tenemos a  $\mathcal{D}$  que da derivadas aproximadas en el espacio  $e^{-x^2/2} \star \text{Hm}[x]$  :

In[14]:=  $\mathcal{D} = G.D0.Inverse[G];$  Se formula a D como  $D = (G)(Do)(G \text{ inversa})$ 

In[15]:= Consideremos la siguiente función 'fm' :

In[15]:=  $\text{fm}[z_] := (z^5 - 2 z^4 - z^2 + 4 z + 5);$  Un polinomio ordinario de grado menor que n-1

In[16]:= ahora definamos la siguiente función  $\gamma[x]$  y multipliquémosla por ese polinomio :

In[16]:=  $\gamma[x_] := e^{-x^2/2}$  La función exponencial clave de la teoría presente

In[17]:=  $\text{um}[z_] := \gamma[z] \star \text{fm}[z];$  El producto del polinomio por la función exponencial, se le llamará um

 $\mathcal{D}$  es una matriz que da derivadas aproximadas en el espacio  $e^{-x^2/2} \text{Hm}[z]$ , Probemos la eficacia de  $\mathcal{D}$ , para ello, multipliquemos  $\mathcal{D}$  por  $\text{um}[z]$  y veamos su aproximación a la derivada exacta de  $\text{um}[z]$ .

 $z$  evaluado en  $\text{um}[z]$  resulta ser : um evaluado en z ( en las raíces del polinomio de Hermite)

In[18]:=  $\text{um}[z];$ 

In[19]:= La derivada exacta de  $\text{um}[z]$  evaluada en x es :

In[19]:=  $\text{derivadaexactadeum} = \text{um}'[z];$  la derivada de um evaluada en z

```

```

In[20]:=  $\text{derivadainspiradaenXFT} = \mathcal{D}.\text{um}[z];$  matriz de diferenciación (D) operando en  $\text{um}(z)$ , esto es una construcción no refinada aún de la derivada XFT

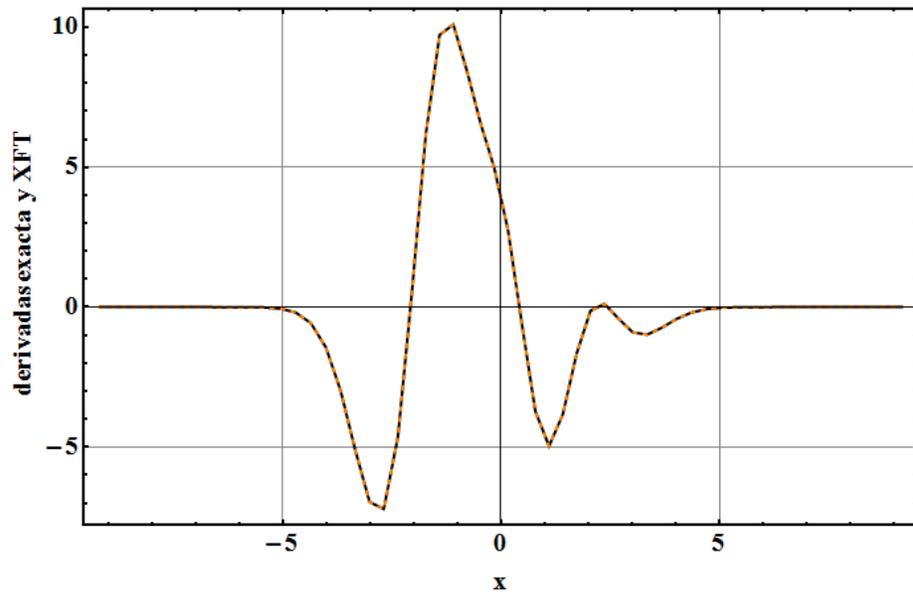
In[21]:= Las gráficas de ambos vectores, y su diferencia, siguen a continuación :

In[21]:=  $t1 = \text{Table}\{\{z[[k]], \text{derivadaexactadeum}[[k]]\}, \{k, 1, n\}\};$  tabla que alberga las raíces y las derivadas exactas evaluadas en esas raíces

In[22]:=  $t2 = \text{Table}\{\{z[[k]], \text{derivadainspiradaenXFT}[[k]]\}, \{k, 1, n\}\};$  tabla que alberga las raíces y la derivada XFT no refinada evaluada en las raíces

GraphicsRow[
  {ListLinePlot[{t1, t2}, Background -> White, PlotRange -> All, GridLines -> Automatic, Frame -> True,
    FrameStyle -> Directive[Thick, 20, Bold], código de los atributos de la siguiente gráfica
    PlotStyle -> {Directive[Thickness[0.01], Black, Thick], Directive[Thickness[0.01], Orange, Thick, Dashed]},
    GridLines -> Automatic, FrameLabel -> {"x", "derivadas exacta y XFT"}
  ]}
]

```



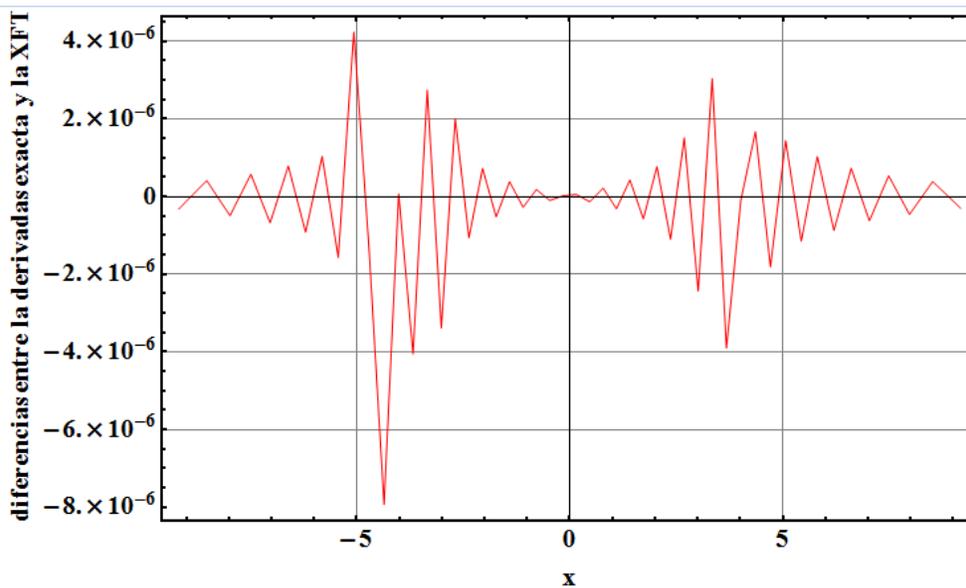
gráficas de la derivada XFT no refinada y de la derivada exacta evaluadas en las raíces, es notoria la semejanza entre ambas

```
t3 = Table[{z[[k]], derivadainspiradaenXFT[[k]] - derivadaexactadeum[[k]]}, {k, 1, n}];
```

tabla que alberga las raíces y las diferencias entre las derivadas exactas y las derivadas XFT no refinadas

```
GraphicsRow[
  {ListLinePlot[{t3}, Background -> White, PlotRange -> All, GridLines -> Automatic, Frame -> True,
    FrameStyle -> Directive[Thick, 20, Bold], PlotStyle -> {Directive[Thickness[0.000005], 20, Red]},
    GridLines -> Automatic, FrameLabel -> {"x", "diferencias entre la derivadas exacta y la XFT"}]
  ]]
```

código de los atributos de la siguiente gráfica



gráfica de las diferencias entre la derivada XFT no refinada y la derivada exacta, observe las diferencias tan minúsculas del orden de 10 a la -6

El siguiente es el código de la XFT para derivar :

código para derivar sustentado en la XFT

```
DXFT[f_, q_, frem_] :=
Module[{n, epsi, x, apar, S, Si, fs, fpq},
  n = Length[f]; (* If[OddQ[n], (Print["El número de puntos no es par"]; Break[]]; *)
  apar = 4./Pi; epsi = Pi/Sqrt[2 n]; x = Table[N[(k - n/2 - 1/2) epsi], {k, n}]; M = epsi * frem;
  S = Table[N[Exp[-i Pi (n-1) j / n]], {j, 0, n-1}]; Si = 1/S;
  fs = Si * f;
  fpq = S * Fourier[(I apar x)^q * InverseFourier[fs, FourierParameters -> {1, 1}], FourierParameters -> {1, 1}];
  M^q * fpq]
```

nes el número de nodos, ahora serán más nodos

el número de nodos será de 1000, es mucho más que anteriormente

```
n = 1000; q = 1;
frem = 3; apar = 4./Pi; epsi = Pi/Sqrt[2 n]; x = Table[N[(k - n/2 - 1/2) epsi], {k, n}]; M = epsi * frem;
γ[x_] := e-x2/2;
fm[z_] := (z5 - 2 z4 - z2 + 4 z + 5);
F[z_] := γ[z] * fm[z];
```

las mismas funciones involucradas en el ensayo anterior, esto es, cuando n= 50

```
fe = Table[F[x[[k]]/M], {k, n}]; fpe = Table[F'[x[[k]]/M], {k, n}];
fepar = (fe + Reverse[fe])/2; feimpar = (fe - Reverse[fe])/2;
```

se parte la función en sus componentes par e impar para después aplicar la derivada XFT refinada a cada componente

```
fpa = DXFT[Most[fepar], q, frem] + Most[DXFT[feimpar, q, frem]];
np = 10;
```

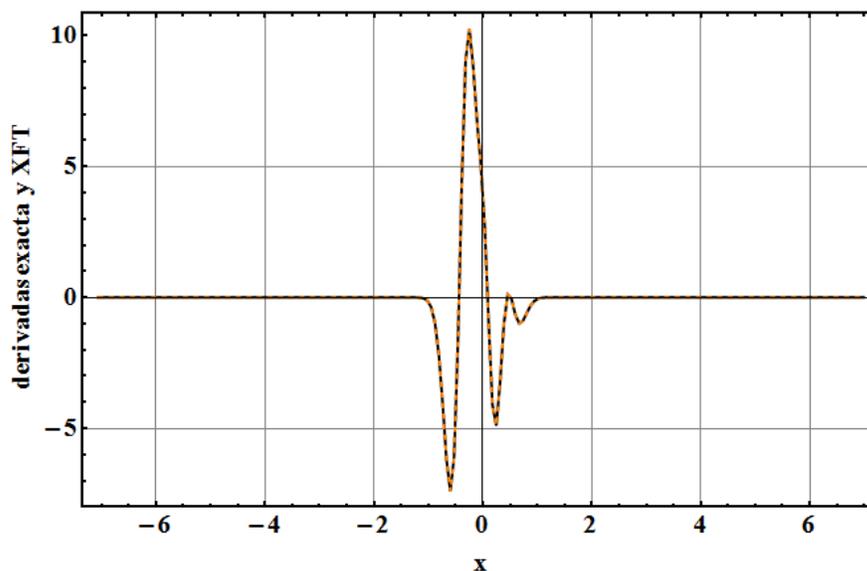
tabla que alberga las raíces y las derivadas exactas evaluadas en esas raíces

```
tre = Table[{x[[k]], Re[fpe[[k]]]}, {k, 400, 600}];
tra = Table[{x[[k]], Re[fpa[[k]]]}, {k, 400, 600}];
```

tabla que alberga la raíces y las derivadas XFT refinadas evaluadas en esas raíces

```
GraphicsRow[{
  ListLinePlot[{tre, tra}, Background -> White, PlotRange -> All, GridLines -> Automatic, Frame -> True,
  FrameStyle -> Directive[Thick, 20, Bold],
  PlotStyle -> {Directive[Thickness[0.01], Black, Thick], Directive[Thickness[0.01], Orange, Thick, Dashed]},
  GridLines -> Automatic, FrameLabel -> {"x", "derivadas exacta y XFT"}}]
```

código de atributos de la siguiente gráfica



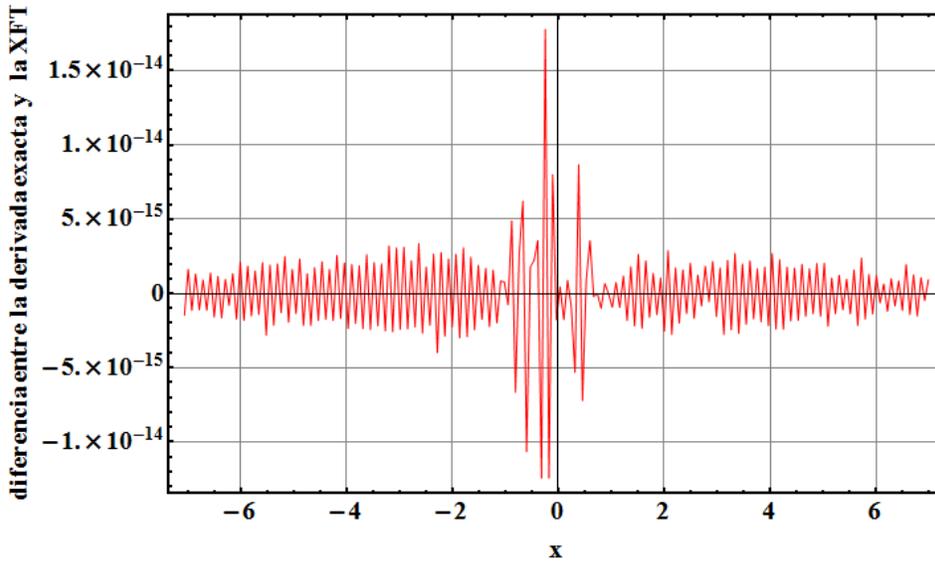
gráficas de la derivada XFT refinada y de la derivada exacta evaluadas en las raíces, es notoria la semejanza entre ambas

```

dif = Table[{x[[k]], Re[fpe[[k]] - Re[fpa[[k]]]}, {k, 400, 600}];
GraphicsRow[{
  ListLinePlot[{dif}, Background -> White, PlotRange -> All, GridLines -> Automatic, Frame -> True,
  FrameStyle -> Directive[Thick, 20, Black, Bold],
  FrameLabel -> {"x", "diferencia entre la derivada exacta y la XFT"},
  PlotStyle -> {Directive[Thickness[0.000005], 20, Red], GridLines -> Automatic}]]]

```

código de atributos de la siguiente gráfica



gráfica de las diferencias entre la derivada XFT refinada y la derivada exacta, observe las diferencias tan minúsculas del orden de 10 a la -14

7 Método deductivo de la XFT

Consideremos la familia de polinomios de Hermite $H_n(t)$ $n = 0, 1, 2, \dots$ que satisfacen la fórmula de recurrencia:

$$H_{n+1}(t) + 2nH_{n-1}(t) = 2tH_n(t) \quad (12)$$

con $H_{-1}(t) \equiv 0$. Como es mostrado en [8], de (12) se siguen las fórmulas de Christoffel-Darboux:

Si $x \neq y$ entonces

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!} = \frac{H_N(x)H_{N-1}(y) - H_{N-1}(x)H_N(y)}{2^N(N-1)!(x-y)} \quad (13)$$

Si $x = y$ entonces

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!} = \frac{H'_N(x)H_{N-1}(x) - H'_{N-1}(x)H_N(x)}{2^N(N-1)!} \quad (14)$$

Note que la ecuación de recurrencia (12) puede ser escrita de la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1/2 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_0(t) \\ H_1(t) \\ H_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} H_0(t) \\ H_1(t) \\ H_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (15)$$

Consideremos ahora el eigenproblema asociado con la submatriz principal de dimensión N de la expresión (15):

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta es una técnica general [9] [10] para obtener cuadraturas gaussianas de polinomios ortogonales: La ecuación de recurrencia es reescrita en forma matricial para obtener vectores ortonormales de \mathbb{R}^N cuyas entradas están dadas (en nuestro caso) en términos de los valores de $H_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, en los ceros de $H_N(x)$. Procedemos tomando una transformación de similaridad para simetrizar \mathcal{H} . Note que la matriz diagonal dada por:

$$S = \text{diag}\left\{1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2^{N-1}(N-1)!}}\right\} \quad (16)$$

genera la matriz simétrica:

$$H = \mathcal{H}S^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1/2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{1/2} & 0 & \sqrt{2/2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2/2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{\frac{N-1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{\frac{N-1}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación de recurrencia (12) y las fórmulas (13) y (14) pueden ser usadas para resolver el eigenproblema: $Hu_k = t_k u_k, k = 1, 2, \dots, N$ el cual es una versión finita de (15), Los eigenvalores t_k son los ceros de $H_N(t)$ y el k -ésimo eigenvector u_k está dado por:

$$c_k(s_1 H_0(t_k), s_2 H_1(t_k), s_3 H_2(t_k), \dots, s_N H_{N-1}(t_k))^T \quad (17)$$

donde s_1, s_2, \dots son los elementos diagonales de S y c_k es una constante de normalización que puede ser determinada por la condición $u_k^T u_k = 1$; i. e. de

$$c_k^2 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{H_n(t_k) H_n(t_k)}{2^n n!} = 1 \quad (18)$$

Ya que $H_N(t_k) = 0$ y $H'_N(t_k) = 2N H_{N-1}(t_k)$, el uso de (13) y (14) da lugar a:

$$c_k = \sqrt{\frac{2^{N-1}(N-1)!}{N} \frac{1}{|H_{N-1}(t_k)|}} = \sqrt{\frac{2^{N-1}(N-1)!}{N} \frac{(-1)^{N+k}}{H_{N-1}(t_k)}} \quad (19)$$

donde hemos usados el hecho de que $|H_{N-1}(t_k)| = (-1)^{N+k} H_{N-1}(t_k)$ Así los componentes de los vectores ortonormales $u_k, k = 1, 2, \dots, N$, son:

$$(u_k)_n = (-1)^{N+k} \sqrt{\frac{2^{N-n}(N-1)!}{N(n-1)!} \frac{H_{n-1}(t_k)}{H_{N-1}(t_k)}} \quad n = 1, \dots, N \quad (20)$$

Sea U una matriz ortogonal cuya k -ésima columna es u_k y sea $D(z)$ la matriz diagonal $S = \text{diag}\{1, z, z^2, \dots, z^{N-1}\}$ donde z es un número complejo. Ahora definamos la matriz

$$\mathcal{F}_z = \sqrt{2\pi} U^{-1} D(z) U \quad (21)$$

cuyas componentes están dadas por:

$$(\mathcal{F}_z)_{jk} = \sqrt{2\pi} \frac{(-1)^{j+k} 2^{N-1} (N-1)!}{N H_{N-1}(t_j) H_{N-1}(t_k)} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z^n}{2^n n!} H_n(t_j) H_n(t_k) \quad (22)$$

Esta es la matriz que representa el kernel de la transformada fraccional de Fourier en un espacio N -dimensional, como lo mostraremos después.

Veamos las formas asintóticas de las componentes de \mathcal{F}_z , Primeros notemos que la expresión asintótica de $H_N(t)$ en la región oscilatoria es (ecuación 8.22.8 de [8])

$$H_N(t) = \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N/2+1)} e^{t^2/2} (\cos(\sqrt{2N+1}t - \frac{N\pi}{2}) + O(N^{-1/2})) \quad (23)$$

Esto arroja a los ceros de $H_N(t)$ de forma aproximada:

$$t_k = \left(\frac{2k - N - 1}{\sqrt{2N}} \right) \frac{\pi}{2} \quad (24)$$

$k = 1, 2, \dots, N$, así el uso de (23) y (24) da:

$$H_{N-1}(t_k) \approx (-1)^{N+k} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(\frac{N+1}{2})} e^{t_k^2/2} \quad N \rightarrow \infty \quad (25)$$

Por tanto, para N lo suficientemente grande, (22) puede escribirse como

$$(\mathcal{F}_z)_{jk} \approx \sqrt{2\pi} \frac{2^{N-1} [\Gamma(\frac{N+1}{2})]^2}{\Gamma(N+1)} e^{-(t_j^2+t_k^2)/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n n!} H_n(t_j) H_n(t_k) \quad (26)$$

y finalmente, la fórmula de Stirlig's y Mehler's [11] da lugar al resultado:

$$(\mathcal{F}_z)_{jk} \approx \sqrt{\frac{2}{1-z^2}} e^{-\frac{(1+z^2)(t_j^2+t_k^2)-4t_j t_k z}{2(1-z^2)}} \Delta t_k \quad (27)$$

donde Δt_k es la diferencia entre dos consecutivos ceros asintóticos de Hermite, i. e. :

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k = \frac{\pi}{\sqrt{2N}}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (28)$$

definiendo t_0 y t_{N+1} como en (24), con $k = 0$ y $k = N - 1$ respectivamente . Consideremos ahora la función de valores complejos $g(t)$ definida para $t \in \mathbb{R}$ y formemos el vector

$$g = (g(t_1), g(t_2), \dots, g(t_N))^T \quad (29)$$

Por lo tanto, la multiplicación de la matriz Fz por el vector g resulta en el vector G con entradas :

$$G_j = \sum_{n=1}^N (\mathcal{F}_z)_{jk} g(t_k) \approx \sqrt{\frac{2}{1-z^2}} \sum_{n=1}^N e^{-\frac{(1+z^2)(t_j^2+t_k^2)-4t_j t_k z}{2(1-z^2)}} g(t_k) \Delta t_k \quad (30)$$

para $j = 1, 2, \dots, N$. Note que esta ecuación es una suma de Riemann para la integral:

$$\mathfrak{F}_z[g(t'), t] = \sqrt{\frac{2}{1-z^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(1+z^2)(t^2+t'^2)-4tt'z}{2(1-z^2)}} g(t') dt' \quad |z| < 1 \quad (31)$$

esto es,

$$\mathfrak{F}_z[g(t'), t_j] \approx \sum_{n=1}^N (\mathcal{F}_z)_{jk} g(t_k) \quad N \rightarrow \infty \quad (32)$$

Note que $\mathfrak{F}_z[g(t'), t_j]$ es la transformada de Fourier continua de $g(t')$ hasta una constante. Esto es, la matriz $\mathcal{F}z$ es la transformada de Fourier fraccional discreta. Debe notarse que esto es una discretización de la transformada de Fourier fraccional para un valor complejo z del disco unitario $|z| \leq 1$ y no sólo para z en su frontera, tal como usualmente se considera, y que el argumento φ de $z = re^{i\varphi}$ es real y no complejo como en algunas aplicaciones. En el caso de $z = \pm i$ viene a quedar:

$$F_{jk} \equiv (\mathcal{F}_{\pm i})_{jk} \approx e^{\pm it_j t_k} \Delta t_k \quad (33)$$

Así, tenemos una *DFT*. Esto ha sido previamente obtenido en [7], donde algunos ejemplos numéricos son dados, y esto se ha aplicado en el análisis de señales cerebrales. [13]

La *FFT* puede ser usada para obtener un algoritmo rápido para (32) como sigue. Ya que la matriz $\mathcal{F}z$ representa una cuadratura para la transformada de Fourier fraccional con tendencia a converger cuando un grande número de nodos son usados, consideremos la forma asintótica de (32), la cual puede ser expresada con más detalle como:

$$(\mathcal{F}_z^a)_{jk} = \sqrt{\frac{2}{1-z^2}} e^{-\mu t_j^2} e^{vt_j t_k} e^{-\mu t_k^2} \Delta t_k \quad (34)$$

donde hemos usado las definiciones:

$$\mu = \frac{1+z^2}{2(1-z^2)} \quad v = \frac{2z}{1-z^2} \quad (35)$$

Observe que hemos reemplazado el signo "≈" por el signo "=" en (37), redefiniendo $\mathcal{F}z$ en (39). Para distinguir la implementación $O(n \log(n))$ de la presente transformada fraccional discreta de otras importantes contribuciones, denotaremos ésta como la transformada de Fourier rápida extendida (*XFT*). Para mostrar las principales diferencias entre la *XFT* y la usual *FFT*, consideremos primero el caso de la transformada de Fourier estándar.

Como lo podemos notar de antes, el caso $z = i$ en (34) corresponde a una *DFT*

$$F_{jk} = \frac{\pi}{\sqrt{2N}} e^{i \frac{\pi^2}{2N} (j - \frac{N-1}{2})(k - \frac{N-1}{2})} \quad (36)$$

donde ahora $j, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, y hemos usado (24) y (28), Ya que $\sum_{k=1}^N F_{jk} g(t_k)$ es una cuadratura y por tanto una aproximación de

$$G(w_j) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iw_j t} g(t) dt \quad (37)$$

podemos usar la propiedad básica de la transformada de Fourier:

$$G(aw_j) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iaw_j t} g(t) dt \quad (38)$$

para reescribir (36) de la una forma más conveniente:

$$(F_a)_{jk} = \frac{\pi}{\sqrt{2N}} e^{ia\frac{\pi^2}{2N}(j-\frac{N-1}{2})(k-\frac{N-1}{2})} \quad (39)$$

en el entendido de que esta matriz sigue una escalada transformada de Fourier discreta. El parámetro de escala a puede ser usado para conectar la XFT con la forma estándar de la DFT . Si escogemos $a = \frac{4}{\pi}$ entonces (39) se puede reescribir como:

$$(F_{\frac{4}{\pi}})_{jk} = \frac{\pi e^{i\frac{\pi}{2}\frac{(N-1)^2}{N}}}{\sqrt{2N}} e^{-i\pi\frac{N-1}{N}j} e^{i\frac{2\pi}{N}jk} e^{-i\pi\frac{N-1}{N}k} \quad (40)$$

donde $j, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. En forma matricial, y definiendo $\tilde{F} \equiv F_{\frac{4}{\pi}}$ para simplificar la notación, la siguiente DFT , i.e. \tilde{F} , puede ser dada en términos de la usual DFT i.e. D_F como

$$\tilde{F} = \frac{\pi e^{i\frac{\pi}{2}\frac{(N-1)^2}{N}}}{\sqrt{2N}} S D_F S \quad (41)$$

donde S es la matriz diagonal cuyos elementos no cero son $e^{-i\pi\frac{N-1}{N}j}$ $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$ y $D_F(\cdot)$ puede ser calculada a través del algoritmo estándar de la FFT . *Nota: $M(\cdot)$ denota la multiplicación matricial de M por las matrices y/o vectores que se encuentren dentro de (\cdot) .* Por lo tanto, el costo computacional de $\tilde{F}(\cdot)$ es el mismo que el del algoritmo usado para calcular la FFT del vector $S(\cdot)$. Sin embargo, los resultados del presente método son mas precisos ya que éste procede de una fórmula de cuadratura convergente. La inversa de \tilde{F} es fácilmente obtenida:

$$(\tilde{F}^{-1})_{jk} = \frac{\sqrt{\frac{2}{N}}}{\pi} e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-\frac{N-1}{2})(k-\frac{N-1}{2})} \quad (42)$$

donde $j, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Ahora obtengamos una implementación discreta y rápida de la transformada de Fourier continua fraccional. La definición de la transformada fraccional dada por (31) es $\sqrt{2\pi}$ la dada en [5]. Esto debe ser tomado en cuenta para nuestros propósitos de comparación. Consideremos primeramente la transformada fraccional dada en (31):

$$G_z \equiv \mathfrak{F}_z[g(t'), t] = \sqrt{\frac{2}{1-z^2}} e^{-\mu t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{vtt'} e^{-\mu t'^2} g(t') dt' \quad (43)$$

El simple escalamiento:

$$G_z(at) = \sqrt{\frac{2}{1-z^2}} e^{-\mu a^2 t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{avt} e^{-\mu t'^2} g(t') dt' \quad (44)$$

y la discretización del kernel:

$$(\mathcal{F}_z^a)_{jk} = \sqrt{\frac{2}{1-z^2}} e^{-\mu a^2 t_j^2} e^{avt_j t_k} e^{-\mu t_k^2} \Delta t_k \quad (45)$$

nos permite implementar un algoritmo rápido para calcular la *XFT* en términos de la *FFT*. Esto puede hacerse escogiendo $a = \frac{i2(1-z^2)}{\pi z}$, porque entonces :

$$(\mathcal{F}_z^a)_{jk} = \sqrt{\frac{2}{1-z^2}} e^{-\mu a^2 t_j^2} (\tilde{F})_{jk} e^{-\mu t_k^2} \quad (46)$$

donde \tilde{F} dada por (41), es la *XFT* rápida para el caso de la transformada de Fourier rápida. Para simplificar la notación, sea $\tilde{\mathcal{F}}_z$ la $\mathcal{F}^{\frac{i2(1-z^2)}{\pi z}}$. Ya que $\sum_{k=1}^N (\tilde{\mathcal{F}}_z)_{jk} f(t_k)$ es una cuadratura de (44) con $a = \frac{i2(1-z^2)}{\pi z}$, $\tilde{\mathcal{F}}_z$ es una transformada de Fourier fraccional discreta rápida la cual aporta una aproximación de la función escalada $G_z(at)$ en los nodos t_k .

8 La importancia de la XFT

El rango de aplicaciones de la *Fourier transform* abarca un amplio espectro de campos del conocimiento. Típicas aplicaciones son las siguientes [22]:

Sistemas lineales: La transformada de la salida de un sistema lineal está dado por el producto de la función del sistema de transferencia y la transformada del signo de entrada.

Antenas El patrón del campo de una antena está dado por la transformada de la iluminación en curso.

Óptica Los sistemas ópticos tienen la propiedad de que la transformada se relaciona con la distribución de la amplitud de la luz y los planos focales de frente y de atrás del lente convergente.

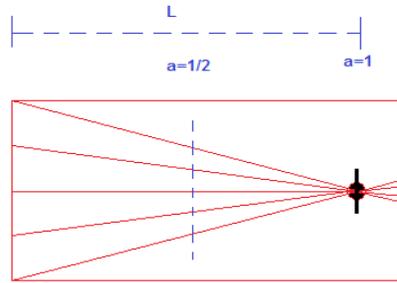
Procesos aleatorios El espectro de la potencia de la densidad de la potencia de un proceso aleatorio está dado por la transformada de la función de autocorrelación del proceso.

Probabilidad La función característica de una variable aleatoria está definida por la transformada de la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria.

Física cuántica El principio de incertidumbre de la teoría cuántica está fundamentalmente asociada con la transformada ya que el momento y la posición de la partícula están esencialmente relacionados con la transformada.

Problemas de valores en la frontera La solución de ecuaciones diferenciales parciales puede ser obtenido mediante la transformada.

Por otro lado, el requerimiento de la *fractional Fourier transform* descansa en la existencia abstracta de transformaciones "parciales" (fraccionales) tales que la sumas de los efectos de esas transformaciones "parciales", desplegadas una tras otra, equivalga al efecto de una unidad completa (u otra parcial) de la transformada "estándar". En símbolos: $F^a(F^b(g)) = F^{a+b}(g)$ donde a y b son fracciones y $a+b$ un entero o fracción inclusive. Una sencilla ilustración física que apunta a su existencia es la distribución de un campo $f(x, y)$ en un plano [22], que puede ser excitado en un plano paralelo, un campo de distribución que es la transformada 2 dimensional de $f(x, y)$. Por lo tanto, el campo de distribución en un plano intermedio es candidato de una transformada fraccional con $0 < a < 1$. La radiación difractada por una apertura en el primer plano escapa afuera, a la larga cercana a la transformada de Fourier en el plano en el infinito, una configuración que puede ser compactada por la inserción de una simple lente de longitud focal f detrás del plano xy , con lo cual la transformada aparecerá cerca del plano focal de la lente en $z = f$.



Otros ejemplos [22] de las aplicaciones de la *fractional Fourier transform* se tienen en la ecuación de *Schödinger* y otras ecuaciones diferenciales de segundo orden en una o más dimensiones, aplicaciones en fibras ópticas, en sistemas de procesamiento de información óptica. Se ha relacionado la transformada de Fourier fraccional con la rotación de la distribución de *Wigner* para aplicaciones en análisis de tiempo-frecuencia de signos. Se han derivado relaciones entre la difracción de espacio libre y la transformada fraccional. Se ha usado también la restauración de imágenes ópticas.

En todas éstas aplicaciones y campos, el algoritmo computacional para obtener transformadas de $O(n \log(n))$ en las últimas décadas ha sido la *FFT*. Pero como se vió en la última sección, la *XFT* conserva los beneficios de la *FFT*, pues en un sentido "la lleva en sus entrañas", recordemos la razón analítica de ello: el parámetro a siempre se eligió previamente de forma acertada con el fin de que el código que involucra la *FFT* apareciera en las distintas expresiones de la *XFT*, recordemos la fórmula (46) concerniente a la *XFT* no fraccional: $\tilde{F} = \frac{\pi e^{i\frac{\pi}{2}} (N-1)^2}{\sqrt{2N}} S D_F S$ donde D_F puede ser calculada mediante un algoritmo *FFT*, y la fórmula (51) concerniente a la *XFT* frac-

cional: $(\mathcal{F}_z^a)_{jk} = \sqrt{\frac{2}{1-z^2}} e^{-\mu a^2 t_j^2} (\tilde{F})_{jk} e^{-\mu t_k^2}$ donde \tilde{F} dada por (46), lleva el algoritmo *FFT* implícito. En ambos casos el costo computacional de la *XFT* es el mismo que el de la *FFT*. Más aún, la *XFT* lleva impresa un sello de mayor exactitud en el cálculo de las transformadas: en pruebas con varios tipos de funciones, incluidas funciones no periódicas y funciones singulares, la *XFT* arroja resultados más precisos que la *FFT*, toda vez que su formulación se inspiró en cuadraturas convergentes. Los alcances de la *XFT* se vislumbran prometedores en la obtención de transformadas no fraccionales y fraccionales. En las distintas vertientes del campo científico, la *XFT* se erige como una poderosa herramienta cuyas bondades pueden y deben aprovecharse al máximo.

9 Método de Picard

El método de aproximaciones sucesivas Picard es un método iterativo para obtener una solución a una ecuación diferencial. Si iniciamos con la ecuación diferencial ordinaria no lineal:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0 \quad (47)$$

y si integramos ambos lados de la ecuación para $x_0 \leq x \leq x_1$ tenemos:

$$y(x_1) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} dy = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x)) dx \quad (48)$$

y usando a t como la variable de integración en lugar de x y poniendo $x = x_1$ como el punto arbitrario final, tenemos:

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (49)$$

Sustituyendo una "partida" inicial de $y(x) = \phi_0(x)$ en el lado derecho de (54) tenemos:

$$\phi_1(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, \phi_0(t)) dt \quad (50)$$

En el fortuito caso de que $\phi_1(x) = \phi_0(x)$ habremos terminado, encontrando la solución, en el otro caso, haremos iteraciones:

$$\phi_{n+1}(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, \phi_n(t)) dt \quad (51)$$

Si no hay información extra, podemos escoger $\phi_0(x) = y_0$. En general [19], para un problema de Cauchy y dada la ecuación (52) con condición de entorno $y(x_0) = y_0$ se

puede asegurar la existencia y unicidad para la solución en el dominio $D : |x - x_0| < a$ y $|y - y_0| < b$, y es posible construir una solución de forma iterativa según la siguiente expresión:

$$y_n(x) = y_0 + \int f(t, y_{n-1}(t)) dt \quad (52)$$

donde y_0 se puede elegir arbitrariamente, lo usual es elegir $y_0 = y(x_0)$.

La convergencia de esta serie de funciones es demostrable en el intervalo $x_0 - h < x < x_0 + h$ donde $h = \min(a, \frac{b}{M})$ y donde $M = \max_{(x,y) \in D} |f(x, y)|$.

Ejemplo: Considere el problema de valores iniciales [21]:

$$y' = 2x(1 + y) \quad y(0) = 0 \quad (53)$$

Primero observemos que si $y = \phi(x)$ entonces la ecuación integral correspondiente es

$$\phi(x) = \int_0^x 2t(1 + \phi(t)) dt \quad (54)$$

Si la aproximación inicial es $\phi_0(x) = 0$ se deduce que

$$\phi_1(x) = \int_0^x 2t(1 + \phi_0(t)) dt = \int_0^x 2t dt = x^2 \quad (55)$$

De manera semejante

$$\phi_2(x) = \int_0^x 2t(1 + \phi_1(t)) dt = \int_0^x 2t(1 + t^2) dt = x^2 + \frac{x^4}{2} \quad (56)$$

y

$$\phi_3(x) = \int_0^x 2t(1 + \phi_2(t)) dt = \int_0^x 2t(1 + t^2 + \frac{t^4}{2}) dt = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2 * 3} \quad (57)$$

Mediante las ecuaciones (60), (61) y (62) se tiene que

$$\phi_n(x) = x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} \quad (58)$$

para cada $n \geq 1$, y este resultado puede establecerse por inducción matemática. Obviamente, la ecuación (63) es verdadera para $n = 1$, y ahora tenemos que demostrar que, si es válida para $n = k$, también lo es para $n = k + 1$. Tenemos

$$\phi_{k+1}(x) = \int_0^x 2t(1 + \phi_k(t)) dt = \int_0^x 2t(1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \dots + \frac{t^{2k}}{k!}) dt = x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2k+2}}{(k+1)!} \quad (59)$$

y de esta manera se completa la prueba inductiva. Con base a la ecuación (63) es obvio que $\phi_n(x)$ es la n -ésima suma parcial de la serie infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} \tag{60}$$

de aquí que $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x)$ existe, si y sólo si, la serie (65) converge. Aplicando la prueba de la razón, vemos que para cada x se tiene que $|\frac{x^{2k+2}k!}{(k+1)!x^{2k}}| = \frac{x^2}{k+1} \rightarrow 0$ conforme $k \rightarrow \infty$ por tanto, la serie (65) converge para toda x , y su suma $\phi(x)$ es el límite de la sucesión $\{\phi_n(x)\}$. Además, como la serie (65) es una serie de Taylor, puede derivarse o integrarse término a término, en tanto que x permanezca dentro del intervalo de convergencia que, este caso, es el eje x completo. Por tanto, podemos verificar por cálculo directo que $\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$ es una solución de la ecuación integral.

Vale la pena programar el método de Picard del presente ejemplo en algún software, digamos *Mathematica*, las siguientes imágenes arrojan una descripción ilustrativa del manejo de ese programa con miras a alcanzar la solución numérica y compararla con la solución analítica recién hallada:

```

In[1]= y = 0;
      phi1[x_] := Integrate[2 t (1 + y), {t, 0, x}]

In[3]= phi2[x_] := Integrate[2 t (1 + phi1[t]), {t, 0, x}]

In[4]= phi3[x_] := Integrate[2 t (1 + phi2[t]), {t, 0, x}]

In[5]= phi4[x_] := Integrate[2 t (1 + phi3[t]), {t, 0, x}]

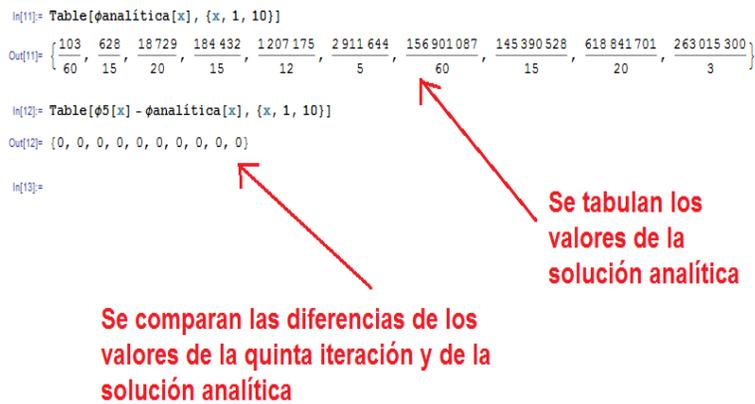
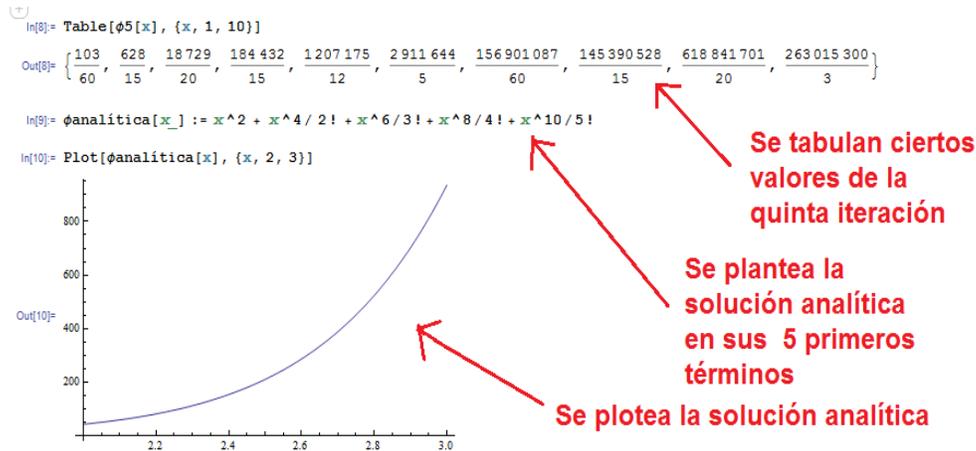
In[6]= phi5[x_] := Integrate[2 t (1 + phi4[t]), {t, 0, x}]

In[7]= Plot[phi5[x], {x, 2, 3}]

```

Se programan las primeras 5 iteraciones

Se plotea la quinta iteración, en un intervalo, digamos en [2,3]



10 El problema de valor inicial

Un problema de valor inicial o de Cauchy [27] consta de una ecuación diferencial de orden n y de n condiciones iniciales impuestas a la función desconocida y a sus $n - 1$ primeras derivadas en un valor de la variable independiente, es decir:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n-1)}) \quad (61)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad y^{(1)}(x_0) = y_1 \quad y^{(2)}(x_0) = y_2 \quad \dots \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)} \quad (62)$$

Un teorema importante [20] que garantiza la existencia y la unicidad de la solución de una ecuación de primer orden, es el teorema de Picard: Sea $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ tal que $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$. Si $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en \mathbb{R} , entonces existe un intervalo abierto I , centrado en x_0 y contenido en $[a, b]$, y una única función $y(x)$, definida en I , que satisface el problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0 \quad (63)$$

Las conclusiones establecidas [21] en el anterior teorema son suficientes para garantizar la existencia y unicidad del problema con valores iniciales (68), sin embargo puede ser difícil la determinación de la longitud del intervalo I . Es más, incluso, si f no satisface las hipótesis del teorema, aún es posible que exista una única solución. De hecho, la conclusión del teorema es válida si la hipótesis acerca de la continuidad de $\frac{\partial f}{\partial y}$ se reemplaza con otras condiciones más débiles. Más aún, la existencia de una solución, (pero no su unicidad) puede establecerse únicamente en base a la continuidad de f , sin recurrir a ninguna otra hipótesis.

Ejemplo. [21] Encontrar la solución de $y' = y^{\frac{1}{3}}$ $y(0) = 0$ para $x \geq 0$

Este problema se resuelve con el método de ecuaciones separables. Por ahora puede verificarse que la función

$$y = \phi(x) = \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}, \quad x \geq 0 \quad (64)$$

satisface las dos ecuaciones $y' = y^{\frac{1}{3}}$ y $y(0) = 0$. Por otra parte, la función

$$y = \psi(x) = 0 \quad (65)$$

también es una solución del problema con valores iniciales dado. Por lo tanto, este problema no tiene una solución única. El hecho de que tenga al menos 2 soluciones no contradice al teorema de existencia y unicidad, el cual garantiza la existencia de una única solución; toda vez que se transgredió una de sus premisas o condiciones, ya que:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (y^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} \quad (66)$$

y esta función no es continua en (x_0, y_0) , ni siquiera está definida ahí. No obstante, si (x_0, y_0) es cualquier punto que no está sobre el eje x , entonces existe una solución única de la ecuación diferencial $y' = y^{\frac{1}{3}}$ que pasa por (x_0, y_0) .

Otro teorema [21], que generaliza el anterior para varias funciones es el siguiente: Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x'_1 = F_1(t, x_1, \dots, x_n) \quad x'_2 = F_2(t, x_1, \dots, x_n) \quad \dots \quad x'_n = F_n(t, x_1, \dots, x_n) \quad (67)$$

Sujeto a las siguientes condiciones iniciales:

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \dots \quad x_n(t_0) = x_n^0 \quad (68)$$

donde t_0 es un valor especificado de t en $\alpha < t < \beta$ y x_1^0, \dots, x_n^0 son números prescritos. Las ecuaciones (61) y las condiciones iniciales (62) forman un problema de valores iniciales.

Suponga que cada una de las funciones F_1, \dots, F_n y cada una de las derivadas parciales $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_n}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$ son continuas en una región R del espacio $tx_1x_2\dots x_n$ que contiene al punto $(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Entonces existe un intervalo $|t - t_0| < h$ en el que existe una solución única $x_1 = \phi_1(t), \dots, \phi_n(t)$ del sistema de ecuaciones diferenciales (61), la cual también satisface las condiciones iniciales (62).

Note que el teorema nada dice acerca de las derivadas parciales de F con respecto a t , tampoco se especifica exactamente la longitud $2h$ del intervalo en donde existe la solución y, en algunos casos, puede ser muy corto, además, las condiciones dadas son suficientes, pero no necesarias, para asegurar la conclusión.

11 Deducción de la ecuación $\frac{dP}{dt} = rP(1 - P/K')$

Sea

$$y = y_o P \tag{69}$$

donde y es la población humana en cualquier tiempo, y_o la población inicial y P la proporción de la población humana en cualquier tiempo respecto a la población inicial. La ecuación logística tradicional es:

$$\frac{dy}{dt} = ry(1 - y/K) \tag{70}$$

Sustituyamos (74) en (75):

$$\frac{d(y_o P)}{dt} = ry_o P(1 - y_o P/K)$$

$$y_o \frac{dP}{dt} = ry_o P(1 - y_o P/K)$$

$$\frac{dP}{dt} = rP(1 - y_o P/K)$$

$$\frac{dP}{dt} = rP(1 - P/\frac{K}{y_o})$$

$$\frac{dP}{dt} = rP(1 - P/K')$$

Donde $K' = \frac{K}{y_o}$ es la que usaremos en lugar de K . Dado que K representa el cupo máximo en el planeta, y y_o es la población en 1950, entonces K' viene a ser cuantas veces es mayor K que esa población de 1950. Por tanto K' viene a admitir valores de tipo proporciones.

Por ejemplo, si la población mundial en 1950 era de 2 518 630 000, y usamos un valor de $K' = 20$, entonces $K = K'y_o = (20)(2 518 630 000) = 50 372 600 000$ personas. No

obstante, vale enfatizar que en el presente artículo, usaremos K en lugar de K' , esto quiere decir que cuando en el artículo se diga que $K = 20$, en realidad se quiere decir que $K' = 20$, o sea, que se está suponiendo que el cupo máximo del planeta es de 50 372 600 000 personas.

References

- [1] N.G. Taylor , M.K. McAllister, G.L. Lawson, T. Carruthers, B. A. Block. Atlantic Bluefin Tuna: A Novel Multistock Spatial Model for Assessing Population Biomass, (2011). <http://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0027693>
- [2] D. Peña. Análisis de Datos Multivariantes. Mc. Graw Hill (2002), 339-342, 370-371
- [3] H. Brown. The Challenge of Man's Future. (1967). <http://es.slideshare.net/Vigilantius/superpoblacin-3132950>
- [4] <http://www.liceus.com/cgi-bin/ac/pu/pobl10.asp>
- [5] V. Namias, The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics, J. Inst. Math. Appl., 25 (1980), pp. 241265.
- [6] R. G. Campos, A quadrature formula for the Hankel transform, Numer. Algorithms, 9 (1995), pp. 343354.
- [7] R. G. Campos and L. Z. Juárez, A discretization of the continuous Fourier transform, Nuovo Cimento B(11), 107 (1992), pp. 703711.
- [8] G. Szego, Orthogonal Polynomials, Colloquium Publications, AMS, Providence, RI, 1975.
- [9] G. H. Golub and J. H. Welsch, Calculation of Gauss quadrature rules, Math. Comp., 23 (1969), pp. 221230.
- [10] W. Gautschi, Orthogonal polynomials and quadrature, Electron. Trans. Numer. Anal., 9 (1999), pp. 6576.
- [11] A. Erdélyi, ed., Higher Transcendental Functions, Vols. I, II, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [12] P. Pellat-Finet and E. Fogret, Complex order fractional Fourier transforms and their use in diffraction theory. Application to optical resonators, Optics Comm., 258 (2006), pp. 103113.
- [13] S. Solís-Ortíz, R. G. Campos, J. Félix, and O. Obregón, Coincident frequencies and relative phases among brain activity and hormonal signals, Behav. Brain Funct., 5 (2009)
- [14] Campos R. G. A nonlocal equation for the wave function of the hermonic oscillator when the position spectrum is to be made discrete, Rev. Mex. Fis, 29, 217-236 (1983).
- [15] Campos R. G. The para-Bose oscillatot in a finite linear space, II Nuovo Cimento B100, 485-492 (1987)

- [16] F. Calogero. Lagrangian interpolation and differentiation. *Lett. Nuovo Cimento* 35, (1983), 273-278.
- [17] G. Szegő. *Orthogonal polynomials*. 4th. ed., American Mathematical Society, Providence-RI, (1975).
- [18] R. G. Campos, L.Z. Juárez. A discretization of the continuous Fourier transform. *Il Nuovo Cimento*, 107B, (1992), 703-711.
- [19] M.L.Krasnov, A.I.Kiseliov, G.I.Makrenko. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Editorial URSS. ISBN 5-354-01099-3.
- [20] D. G. Zill, M. R. Cullen. *Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera*. Cengage Learning.(2006).
- [21] W.E. Boyce, R. C. Diprima. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Editorial Limusa, (1978).
- [22] R.N.Bracewell. *The Fourier Transform and its Applications*. Mc. Graw Hill. Third Edition.
- [23] R. G. Campos, C. Meneses. Differentiation matrices for meromorphic functions. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*. No. 12, (2006), 121-132.
- [24] A. Markushevich. *Teoría de las funciones analíticas*. Editorial Mir, Moscú. Tomo 1. (1970), 464
- [25] R. G. Campos. Time-reversal breaking in fractional differential problems. *Eur. Phys. J. Plus* (2015)
- [26] R. G. Campos, R. G. Ruiz. Fast integration of one-dimensional boundary value problems. *International Journal of Modern Physics*. No. 11, (2013)
- [27] <https://sites.google.com/site/poliecuaciones2/leccin-03-problema-del-valor-inicial-teorema-de-picard>
- [28] Wikipedia. <https://en.wikipedia.org>

Demostración del teorema de la existencia y unicidad de la solución del sistema de ecuaciones fraccionarias del artículo

La siguiente demostración está inspirada en la demostración usual de la existencia y unicidad de la solución para problemas no fraccionarios [3]. Esta nueva demostración incorpora derivadas fraccionarias en las ecuaciones. Se ha publicado [1] una demostración de la existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial fraccionaria en torno a la definición de Riemann Liouville. En estas demostraciones es fundamental el manejo de la integración (fraccionaria) de una potencia de la variable independiente t . La definición fraccionaria de Riemann Liouville coincide con la definición fraccionaria determinada por la *XFT* cuando se manejan potencias de t cuando $t > 0$. Por lo tanto, se puede inferir que ya está establecida, en lo fundamental, la demostración de la existencia y unicidad de la solución del sistema de ecuaciones fraccionarias usadas en el artículo. No obstante, por razones de formalidad y completez, nos avocaremos a desarrollar la demostración que en particular nos atañe, siguiendo un procedimiento ajeno y distinto a la demostración asociada a Riemann Liouville.

Comencemos con ciertos antecedentes de la demostración.

Se demostrará que el sistema general

$$\frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = g(t, x(t), y(t))$$

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = f(t, x(t), y(t))$$

(A)

sujeta a $x(t_0) = x_0$, y $y(t_0) = y_0$ (B).

Y por consiguiente el sistema usado en el artículo

$$\frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = ry(1 - y/K)$$

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = px - qy^b x^a$$

tiene una solución en un intervalo I abierto para t y que esa solución es única.

Supongamos que las funciones $y(t)$ y $x(t)$ que satisfacen las ecs. (A) y (B) son conocidas. Entonces el segundo miembro de esas ecuaciones son unas funciones conocidas de t y además continuas y por lo tanto pueden ser integradas. Integrando las ecs. entre los límites t_0 y t y haciendo uso de las condiciones iniciales obtenemos

$$y(t) = y(t_0) + \alpha \int_{t_0}^t g(t, x(t), y(t)) dt$$

$$x(t) = x(t_0) + \alpha \int_{t_0}^t f(t, x(t), y(t)) dt$$

(C)

En vista de que las funciones $f(t, x(t), y(t))$ y $g(t, x(t), y(t))$ aparecen dentro de las integrales del anterior sistema, al sistema anterior se le puede llamar "sistema integral". Es posible demostrar que cualquier solución del sistema integral es también solución del sistema (A) y viceversa. Nuestra demostración girará en torno al sistema integral, considerando que la solución que se obtenga para éste, aplica también para el sistema (A). Nuestra estrategia partirá del manejo del método de aproximaciones sucesivas o de Picard. Definiremos una secuencia de funciones $x(t)$ y $y(t)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_0 &= x(t_0) \\ y_0 &= y(t_0) \\ x_1(t) &= x_0 + \alpha \int_{t_0}^t f[t, x_0(t), y_0(t)] dt \\ y_1(t) &= y_0 + \alpha \int_{t_0}^t g[t, x_0(t), y_0(t)] dt \\ x_2(t) &= x_0 + \alpha \int_{t_0}^t f[t, x_1(t), y_1(t)] dt \\ y_2(t) &= y_0 + \alpha \int_{t_0}^t g[t, x_1(t), y_1(t)] dt \\ \vdots & \\ \vdots & \end{aligned}$$

Supondremos, como premisas, que $f(t, x(t), y(t))$ y $g(t, x(t), y(t))$ son continuas en la región acotada y cerrada $|t - t_0| \leq s$, $|y(t) - y_0| \leq h$ y $|x(t) - x_0| \leq h$, y por lo tanto también están acotadas ahí. ($y(t)$ y $x(t)$ son continuas en los intervalos referidos). Esto implica que existen números positivos M' y M'' tales que $f(t, x(t), y(t)) \leq M'$ y $g(t, x(t), y(t)) \leq M''$ para $|t - t_0| \leq s$, $|y(t) - y_0| \leq h$ y $|x(t) - x_0| \leq h$. Designaremos como M al más grande de M' y M'' .

Comparando los números h , h/M , s , h^α , $(h/M)^\alpha$ y s^α ; y designando p como el más pequeño de ellos, consideremos de aquí en adelante la región D definida por $|t - t_0| \leq p^\frac{1}{\alpha}$, $|y(t) - y_0| \leq h$ y $|x(t) - x_0| \leq h$.

y estableceremos tres importantes lemas para la demostración del teorema.

Lema 1

Si $h : G \rightarrow R$ (donde $G \subset R^3$) es una función en D , diferenciablemente continua en su segunda y tercera derivada,¹ y las funciones $x(t)$ y $y(t)$ continuas en D , entonces existe una constante K tal que

$$| h(t, x_1(t), y_1(t)) - h(t, x_2(t), y_2(t)) | \leq K | y_1(t) - y_2(t) | \quad (1)$$

para $| t - t_0 | \leq p^{\frac{1}{\alpha}}$, $| y_1(t) - y_0 | \leq h$, $| x_1(t) - x_0 | \leq h$, $| y_2(t) - y_0 | \leq h$ y $| x_2(t) - x_0 | \leq h$.

Para probar el lema, nos apoyaremos en el teorema del valor medio [2] para después construir una generalización del mismo. El teorema del valor medio establece que si G es un subconjunto abierto de R^n y $h : G \rightarrow R$ una función continua; y los puntos u y v y el intervalo que los une están en G , entonces para cierto $c \in [0, 1]$ se tiene que

$$| h(v) - h(u) | \leq | \nabla h((1 - c)u + cv) | | v - u | \quad (2)$$

La generalización del este teorema es relativamente sencilla: Haciendo las sustituciones $v = (t, x_1(t), y_1(t))$ y $u = (t, x_2(t), y_2(t))$ en (2) se tiene que:

$$\begin{aligned} & | h[(t, x_1(t), y_1(t))] - h[(t, x_2(t), y_2(t))] | \leq \\ & | \nabla h[(1 - c)(t, x_2(t), y_2(t)) + c(t, x_1(t), y_1(t))] | | (t, x_1(t), y_1(t)) - (t, x_2(t), y_2(t)) | = \\ & | \nabla h[(1 - c)(t, x_2(t), y_2(t)) + c(t, x_1(t), y_1(t))] | | (0, x_1(t) - x_2(t), y_1(t) - y_2(t)) | \leq \\ & | \nabla h[(1 - c)(t, x_2(t), y_2(t)) + c(t, x_1(t), y_1(t))] | | x_1(t) - x_2(t) | | y_1(t) - y_2(t) | \end{aligned}$$

Haciendo $K = \text{Máx}\{ | \nabla h [(1 - c) (t, x_2(t), y_2(t)) + c(t, x_1(t), y_1(t))] | | x_1(t) - x_2(t) | \}$, (haciendo variar t en el intervalo $| t - t_0 | \leq p^{\frac{1}{\alpha}}$ para hallar ese máximo), se demuestra el lema. De forma similar, se puede probar que existe una constante K' tal que

$$| h(t, x_1(t), y_1(t)) - h(t, x_2(t), y_2(t)) | \leq K' | x_1(t) - x_2(t) | \quad (3)$$

Lema 2

Si $| t - t_0 | \leq p^{\frac{1}{\alpha}}$ y
 $x_n(t) = x_0 + {}_{\alpha} \int_{t_0}^t f[t, x_{n-1}(t), y_{n-1}(t)] dt \quad n = 1, 2, \dots$
 donde ${}_{\alpha} \int$ denota la integral fraccionaria de orden α , y además $n = 1, 2, \dots$, entonces $| x_n(t) - x_0 | \leq h$ y $| y_n(t) - y_0 | \leq h$, ($n = 0, 1, 2, \dots$).

La demostración es por inducción.

En primer lugar, si $t_0 \leq t \leq t_0 + p^{\frac{1}{\alpha}}$ entonces
 $| x_1(t) - x_0 | = | {}_{\alpha} \int_{t_0}^t f[t_0, x(t_0), y(t_0)] dt | \leq {}_{\alpha} \int_{t_0}^t | f[t_0, x(t_0), y(t_0)] | dt$

¹Estas condiciones se pueden enunciar en términos de las condiciones de Lipschitz, pero se redactan aquí de forma coloquial por respeto hacia el lector

$$\leq M_\alpha \int_{t_0}^t dt = M \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha \Big|_{t_0}^t = M \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha \Big|_{t_0}^t = M \frac{t^\alpha - t_0^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \leq M \frac{t^\alpha - t_0^\alpha}{\Gamma(1)} = M(t^\alpha - t_0^\alpha) \leq^2 M(t - t_0)^\alpha \leq M(p^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha = Mp \leq h$$

y de igual forma: $\left| y_1(t) - y_0 \right| = \left| \int_{t_0}^t g[t_0, x(t_0), y(t_0)] dt \right| \leq \int_{t_0}^t |g[t_0, x(t_0), y(t_0)]| dt \leq M_\alpha \int_{t_0}^t dt = M \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha \Big|_{t_0}^t = M \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha \Big|_{t_0}^t = M \frac{t^\alpha - t_0^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \leq M \frac{t^\alpha - t_0^\alpha}{\Gamma(1)} = M(t^\alpha - t_0^\alpha) \leq M(t - t_0)^\alpha \leq M(p^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha \leq Mp \leq h$

Ahora suponiendo que $|x_{n-1}(t) - x_0| \leq h$, $|y_{n-1}(t) - y_0| \leq h$, y $t_0 \leq t \leq t_0 + p^{\frac{1}{\alpha}}$ se deduce que $((t, x_{n-1}(t), y_{n-1}(t)))$ está en D , por lo que

$$|f[(t, x_{n-1}(t), y_{n-1}(t))]| \leq M, \text{ y por lo tanto}$$

$$\left| x_n(t) - x(t_0) \right| = \left| \int_{t_0}^t f[t, x_{n-1}(t), y_{n-1}(t)] dt \right| \leq \int_{t_0}^t |f[t, x_{n-1}(t), y_{n-1}(t)]| dt$$

$$\leq M_\alpha \int_{t_0}^t dt = M \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha \Big|_{t_0}^t = M \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha \Big|_{t_0}^t = M \frac{t^\alpha - t_0^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \leq M \frac{t^\alpha - t_0^\alpha}{\Gamma(1)} = M(t^\alpha - t_0^\alpha) \leq M(t - t_0)^\alpha \leq M(p^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha \leq Mp \leq h$$

y de igual forma

$$|y_n(t) - y_0| \leq h$$

Un proceso similar se puede hacer si $t_0 - p^{\frac{1}{\alpha}} \leq t \leq t_0$

Este resultado es importante porque demuestra que conforme son generadas las aproximaciones sucesivas, los puntos $[t, x_n(t), y_n(t)]$ caen en D .

Lema 3

Si $|t - t_0| \leq p^{\frac{1}{\alpha}}$ y $x_n(x)$ y $y_n(x)$ están definidas por las ecuaciones

$$x_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f[t, x_{n-1}(t), y_{n-1}(t)] dt$$

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t g[t, x_{n-1}(t), y_{n-1}(t)] dt$$

entonces

$$\left| g[(t, x_n(t), y_n(t))] \right| - \left| g[(t, x_{n-1}(t), y_{n-1}(t))] \right| \leq K |y_n(t) - y_{n-1}(t)| \quad (4)$$

Similarmente:

$$\left| f[(t, x_n(t), y_n(t))] \right| - \left| f[(t, x_{n-1}(t), y_{n-1}(t))] \right| \leq K |x_n(t) - x_{n-1}(t)|, n = 1, 2, \dots$$

² $t^\alpha - t_0^\alpha \leq (t - t_0)^\alpha$ si $\alpha = 0.5$, valor usado en la ecuaciones del artículo, y en general es válida la relación para las funciones denominadas Lipschitz

Por el lema 2, $|y_n(t) - y_0| \leq h$, y $|x_n(t) - x_0| \leq h$, (para toda n); de aquí los puntos $[t, x_{n-1}(t), y_{n-1}(t)]$, y $[t, x_n(t), y_n(t)]$ pertenecen a D , y la desigualdades (4) se deducen de la del lema 1.

Demostración

Ahora iniciaremos la demostración del teorema. Para establecer que las secuencias $x_n(t)$ y $y_n(t)$ convergen, estimaremos la diferencia entre aproximaciones sucesivas. (Lo que se hará de aquí en adelante en la demostración con $y(t)$ se puede hacer también paralelamente con $x(t)$). Supóngase primero que t está en el intervalo $(t_0, t_0 + p^{\frac{1}{\alpha}})$. Entonces como en la demostración del lema 2:

$$|y_1(t) - y_0| \leq M(t - t_0)^\alpha \quad (5)$$

De forma similar

$$\left| (y_2(t) - y_1(t)) - \int_{t_0}^t g[t, x_1(t), y_1(t)] - \int_{t_0}^t g[t, x_0(t), y_0(t)] dt \right| \leq \int_{t_0}^t |g[t, x_1(t), y_1(t)] - g[t, x_0(t), y_0(t)]| dt$$

Usando la ec. (4) para $n = 1$ tenemos que:

$$|y_2(t) - y_1(t)| \leq K \int_{t_0}^t |y_1(t) - y_0(t)| dt$$

La ec. (5) da:

$$|y_2(t) - y_1(t)| \leq KM_\alpha \int_{t_0}^t (t - t_0)^\alpha dt = \frac{KM\Gamma(\alpha+1)(t-t_0)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{KM\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} (t - t_0)^{2\alpha}$$

En la misma forma puede demostrarse que

$$|y_3(t) - y_2(t)| \leq \frac{K^2 M \Gamma(\alpha+1)(t-t_0)^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}$$

El carácter de estos resultados sugiere que se puede usar una demostración inductiva para establecer que

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq \frac{K^{n-1} M \Gamma(\alpha+1)(t-t_0)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} \quad (6)$$

para toda $n \geq 1$.

Para establecer este resultado suponemos que

$$|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \leq \frac{K^{n-2} M \Gamma(\alpha+1)(t-t_0)^{(n-1)\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha+1)} \quad (7)$$

Entonces :

$$\left| (y_n(t) - y_{n-1}(t)) - \int_{t_0}^t g[t, x_0(t), y_{n-1}(t)] - \int_{t_0}^t g[t, x_0(t), y_{n-2}(t)] dt \right| \leq \int_{t_0}^t |g[t, x_0(t), y_{n-1}(t)] - g[t, x_0(t), y_{n-2}(t)]| dt$$

Usando al ec. (4) obtenemos que :

$$| (y_n(t) - y_{n-1}(t)) | \leq K_\alpha \int_{t_0}^t | y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t) | dt$$

y se deduce de la ec. (7) que

$$| (y_n(t) - y_{n-1}(t)) | \leq \frac{KM\Gamma(\alpha+1)K^{n-2}}{\Gamma((n-1)\alpha+1)} \int_{t_0}^t | (t - t_0)^{(n-1)\alpha} | dt$$

y evaluando esta integral resulta en

$$| (y_n(t) - y_{n-1}(t)) | \leq \frac{MKK^{n-2}\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma((n-1)\alpha+1)} \frac{\Gamma((n-1)\alpha+1)}{\Gamma(n\alpha+1)} (t - t_0)^{n\alpha} = \frac{MK^{n-1}}{\Gamma(n\alpha+1)} (t - t_0)^{n\alpha}.$$

La ecuación (6) ha sido establecida para $t_0 \leq t \leq t_0 + p^{\frac{1}{\alpha}}$, la demostración para $t_0 - p^{\frac{1}{\alpha}} \leq t \leq t_0$ es similar. Así tenemos que para $| t - t_0 | \leq p^{\frac{1}{\alpha}} = p^2$ (pues $\alpha = 0.5$, valor usado en la ecuaciones del artículo).

$$| (y_n(t) - y_{n-1}(t)) | \leq \frac{MK^{n-1}\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n\alpha+1)} | t - t_0 |^{n\alpha} \leq \frac{MK^{n-1}\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n\alpha+1)} p^{2n\alpha} = \frac{MK^{n-1}\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n\alpha+1)} p^n \quad (8)$$

Al usar la ec. (8) para probar la convergencia de la secuencia de funciones $y_n(t)$ es conveniente considerar la serie infinita

$$y_0 + [y_1(t) - y_0] + [y_2(t) - y_1(t)] + \dots = y(t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [y_n(t) - y_{n-1}(t)] \quad (9)$$

Se observa fácilmente que la n -ésima suma parcial de esta serie es precisamente $y_n(t)$, es decir

$$y_n(t) = y_0 + \sum_{m=1}^n [y_m(t) - y_{m-1}(t)] \quad (10)$$

Por lo tanto la secuencia $y_n(t)$ converge si y sólo si la serie (9) es convergente. La convergencia de esa serie infinita puede ser establecida con el método de comparación. De la ec. (8)

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} | y_n(t) - y_{n-1}(t) | \leq y(t_0) + M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^{n-1} p^n}{\Gamma((n-1)\alpha+2)} \quad (11)$$

y se deduce que la serie del segundo miembro de la ec. (11) converge, (si hacemos $p < \frac{1}{K}$). Por lo tanto la serie del primer miembro de la ec. (11) también converge. Como consecuencia la serie (9) converge, al menos para $| t - t_0 | \leq p^{\frac{1}{\alpha}}$. Denotando la suma de la serie (9) por $y(t)$, se deduce de la ec. (10) que

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) \quad (12)$$

Además, la convergencia de la serie (9), y por lo tanto, de la secuencia del lema (3): $y_n(t) = y_0 + \alpha \int_{t_0}^t g[t, x_{n-1}(t), y_{n-1}(t)] dt$, es uniforme. Hablando vagamente, existe alguna razón mínima de convergencia para la secuencia, sobre todo en el intervalo. Dicho mejor, dado una pequeña $\epsilon > 0$ arbitraria, podemos determinar un entero N tal que para

cualquier t en el intervalo $|t - t_0| \leq p^{\frac{1}{\alpha}}$

$$|y(t) - y_n(t)| < \epsilon \quad (13)$$

Para toda $n > N$. Debido a la convergencia uniforme de $y(t)$, esta función es continua en $|t - t_0| \leq p^{\frac{1}{\alpha}}$.

Para cada t en el intervalo $|t - t_0| \leq p^{\frac{1}{\alpha}}$, el punto $[t, x(t), y(t)]$ pertenece a D . Esto se deduce del hecho de que $|y_n(t) - y_0| \leq h$ y $|x_n(t) - x_0| \leq h$ para cada n y para t en $|t - t_0| \leq p^{\frac{1}{\alpha}}$; la misma desigualdad debe ser satisfecha por $y(t) = \text{Lim}_{n \rightarrow \infty} y_n(t)$

A continuación demostraremos que $y(t)$ satisface la ec. integral (C). En virtud de que

$$y_n(t) = y_0 + \alpha \int_{t_0}^t g[t, x_{n-1}(t), y_{n-1}(t)] dt \quad (14)$$

se deduce de la ec. (12) que

$$y(t) = y_0 + \text{Lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha \int_{t_0}^t g[t, x_{n-1}(t), y_{n-1}(t)] dt \quad (15)$$

La pregunta central es cuándo el proceso límite puede ser intercambiado con la integral de la ecuación para obtener

$$y(t) = y_0 + \alpha \int_{t_0}^t g[t, \text{Lim}_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}(t), \text{Lim}_{n \rightarrow \infty} y_{n-1}(t)] dt = y_0 + \alpha \int_{t_0}^t g[t, x(t), y(t)] dt \quad (16)$$

La justificación de este intercambio es debida a la convergencia uniforme de $y_n(t)$ a $y(t)$ (y de $x_n(t)$ a $x(t)$) y por la continuidad de la función $g(t, x(t), y(t))$. Como la ecuación (16) es idéntica a la ecuación (C), se deduce que la función límite $y(t)$ también constituye una solución del problema valuado inicialmente de las ecuaciones (A) y (B). Esto completa la demostración de la existencia de una solución del problema original.

Podemos demostrar también que el problema tiene a lo más una solución; la solución por lo tanto, es única. Consideremos una segunda solución de una de las dos ecuaciones paramétricas de (A) y (B). Sin pérdida de generalidad sea $Y(t)$, (algo similar se puede hacer formulando a $X(t)$). Como $Y(t)$ es una solución del problema valuado inicialmente, existe un intervalo $t_0 - k \leq t \leq t_0 + k$, donde $k \leq p^{\frac{1}{\alpha}}$, en el cual

$$|Y(t) - y_0| \leq h \quad (17)$$

y en el cual $Y(t)$ también satisface la ecuación integral (C)

$$Y(t) = y_0 + \alpha \int_{t_0}^t g[t, x(t), Y(t)] dt \quad (18)$$

Considérese ahora la diferencia entre $Y(t)$ y las aproximaciones sucesivas que nos sirvieron para definir $y(t)$. Claramente para $t_0 \leq t \leq t_0 + k$

$$\begin{aligned} | (Y(t) - y_1(t)) | &= | {}_{\alpha} \int_{t_0}^t g[t, x(t), Y(t)] - {}_{\alpha} \int_{t_0}^t g[t, x_0(t), y_0(t)] dt | \leq \\ & {}_{\alpha} \int_{t_0}^t | g[t, x(t), Y(t)] - g[t, x_0(t), y_0(t)] | dt \leq K_{\alpha} \int_{t_0}^t | Y(t) - y_0(t) | dt \leq Kh_{\alpha} \int_{t_0}^t dt = \\ & Kh_{\alpha} \int_{t_0}^t dt = Kh_{\alpha} \int_{t_0}^t t^0 dt = Kh \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha} \Big|_{t_0}^t = Kh \frac{t^{\alpha} - t_0^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \leq Kh \frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned}$$

Nuevamente, usando una demostración inductiva, suponemos que

$$| (Y(t) - y_{n-1}(t)) | \leq \frac{K^{n-1} h (t-t_0)^{(n-1)\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha+1)}$$

Entonces

$$\begin{aligned} | (Y(t) - y_n(t)) | &= | {}_{\alpha} \int_{t_0}^t g[t, x(t), Y(t)] - {}_{\alpha} \int_{t_0}^t g[t, x(t), y_{n-1}(t)] dt | \leq \\ & {}_{\alpha} \int_{t_0}^t | g[t, x(t), Y(t)] - g[t, x(t), y_{n-1}(t)] | dt \leq K_{\alpha} \int_{t_0}^t | Y(t) - y_{n-1}(t) | dt \leq \\ & \frac{K K^{n-1} h}{\Gamma((n-1)\alpha+1)} \int_{t_0}^t (t-t_0)^{(n-1)\alpha} dt = \frac{K^n h \Gamma((n-1)\alpha+1)}{\Gamma((n-1)\alpha+1) \Gamma(n\alpha+1)} (t-t_0)^{n\alpha} = \frac{K^n h}{\Gamma(n\alpha+1)} (t-t_0)^{n\alpha} \end{aligned}$$

Un resultado similar se deduce para $t_0 - k \leq t \leq t_0$; esto es, en general, para $| t - t_0 | \leq k$

$$| (Y(t) - y_n(t)) | \leq \frac{K^n h}{\Gamma(n\alpha + 1)} | t - t_0 |^{n\alpha} \leq \frac{K^n h}{\Gamma(n\alpha + 1)} k^{n\alpha} \quad (19)$$

Como el segundo miembro de la ecuación (19) se aproxima a cero conforme crece n , la función $Y(t)$ debe ser igual a la función límite $y(t)$. Por lo tanto, la solución es única.

References

- [1] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, Volumen 198. Academic Press.
- [2] Wikipedia. <https://en.wikipedia.org>
- [3] W.E. Boyce, R. C. DiPrima. Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Editorial Limusa, (1978).