UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICO-MATEMÁTICAS
"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

"PROBLEMAS Y FORMAS DE INSTRUCCIÓN QUE FOMENTAN EL APRENDIZAJE DE LOS ESTUDIANTES DE BACHILLERATO"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA:
LUIS MIGUEL CARREÓN SILVA

ASESOR:
DR. ARMANDO SEPÚLVEDA LÓPEZ

MORELIA MICHOACÁN, AGOSTO DE 2016.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, Claudia y Paola, principales motores de mi vida.

A mis profesores de maestría, especialmente al Dr. Armando por las enseñanzas brindadas.

A mis padres y hermanos, por su apoyo incondicional.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

Tradicionalmente el aprendizaje de las matemáticas en el nivel bachillerato es memorístico y rutinario. Se enfoca principalmente en el manejo de técnicas, algoritmos y fórmulas para resolver ejercicios y problemas rutinarios que se olvidan con el paso del tiempo al no ser usados.

En este contexto, se analizan algunos aspectos que ha tenido el desarrollo de la resolución de problemas en la educación matemática y algunas de las acciones cruciales que conducen a la solución de los mismos. Se documenta el trabajo realizado por estudiantes de bachillerato cuando se enfrentaron a un conjunto de problemas o tareas que involucran diferentes métodos de solución, en un escenario de instrucción basado en resolución de problemas y el aprendizaje cooperativo.

Durante su implementación, los estudiantes trabajaron en pequeños grupos, presentaron y defendieron sus ideas en la clase completa y revisaron sus intentos de solución como resultado de críticas y opiniones que se dieron durante sus presentaciones y discusiones en clase; esto permitió ir comprendiendo las ideas fundamentales asociadas con la solución y, eventualmente, resolvieron las tareas.

En esta tesis se desarrolla una forma de trabajo en el salón de clases que difiere de las cátedra tradicional al enseñar matemáticas. De esta manera los estudiantes pueden acercarse a las actividades propias del desarrollo de las matemáticas mediante la resolución de problemas. Actividades como la imaginación, el pensamiento matemático, la discusión de ideas, el uso de estrategias heurísticas, la argumentación, la interacción con sus compañeros, entre otras.

Palabras clave: resolución de problemas, trabajo cooperativo, tareas, heurísticas, forma de instrucción.

ABSTRACT

Traditionally learning of mathematics at high school level is rote and routine. It focuses mainly on management techniques, algorithms and formulas to solve exercises and routine problems that are forgotten because not being used.

In this thesis some aspects related to the development of the problem solving in mathematics education are analyzed as well as some of the crucial actions that lead to their solutions. It is reported the work carried out by high school students when they confronted a set of problems or task that involving diferent methods of solution in an instructional environment focused on the problem solving. During the research an implementation, the students worked in small groups, presented their ideas to the hole group and defended them, and they revised their own attempts of solution as a result of the critics and opinions that ocurred trough ttheir presentations and discussions in class; this allowed to go understand the fundamental ideas assosiated with the solution and eventually solved tasks.

This thesis presents a diferent scenario in math class, where students can approach the activities involved with the development of mathematics, such as imagination, mathematical thinking, discussing ideas, using heuristic strategies, problem solving, argumentation, interaction with peers, among others.

CAPITULO 1

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Introducción

Un problema latente en las escuelas de bachillerato en nuestro sistema educativo, es el bajo nivel de conocimientos adquiridos por los estudiantes, en términos de lo que saben hacer por sí mismos y del nivel de entendimiento que tienen de los conceptos. Debido a las formas de instrucción que frecuentemente aluden a procesos memorísticos que no son significativos para los estudiantes. Un justo equilibrio entre el manejo procedimental (procedimientos operativos) y comprensión de las ideas matemáticas se ha identificado por Ausubel et al. (1983) como aprendizaje significativo. De este tipo de aprendizaje depende la preparación que tendrá para tener éxito en sus estudios posteriores, en caso de continuar.

Tradicionalmente, el aprendizaje de los estudiantes es de carácter memorístico y rutinario; la instrucción se limita a abordar situaciones repetitivas donde se privilegia el manejo de técnicas, algoritmos y fórmulas para resolver ejercicios y problemas rutinarios (Polya, 1945). Sin embargo, cuando la situación involucra algunas variantes o previamente hay que realizar algún trazo, un cambio de variable, etc., es común que los estudiantes ya no sean capaces de resolver la situación y no ven cómo utilizar los procedimientos eficientemente, mismos que supuestamente tienen ya dominado; cometen errores operativos o los aplican sin criterio. Más aún, son incapaces de justificar (o justifican mal) el uso de técnicas y argumentar la validez de las mismas.

En este contexto Schoenfeld (1992) afirma que el aprendizaje adquirido por los estudiantes ha sido rutinario t memorístico, ya que no estuvieron inmersos en procesos de resolución de problemas, que proporcionan un estado ideal para ejercitar la mente y adquirir un entendimiento profundo de los conceptos matemáticos. Así lo ha declarado, desde 1980, el Consejo de Profesores de Matemáticas (NCTM por sus siglas en ingles) y lo reitera en su propuesta curricular denominada *Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares* (NCTM, 2000).

Cada que sea posible, la instrucción debe involucrar a los estudiantes en procesos de resolución de problemas, articulando el contenido matemático con una serie de procesos de pensamiento a lo largo de la educación escolar incluso el nivel bachillerato.

Polya (1945) intentó ayudar a sus estudiantes a que aprendieran matemáticas mediante la resolución de problemas, bajo la suposición de que cada vez que el estudiante se involucra en este proceso, está realizando prácticas cercanas a las que practica un matemático cuando realiza su trabajo y, en consecuencia, puede adquirir los conocimientos matemáticos de manera diferente al aprendizaje tradicional (del cual se abunda más adelante).

La resolución de problemas es la línea de desarrollo que mayor impulso le ha proveído a la educación matemática de tal manera que el NCTM (2000) considera que la resolución de problemas debería ser el centro en el aprendizaje de las matemáticas:

1. La resolución de problemas es el corazón y la esencia misma de las matemáticas.

2. La resolución de problemas es una de las formas básicas de investigación, particularmente en matemáticas.

3. Estudiamos matemáticas por que nos proporcionan herramientas potentes para resolver problemas.

La resolución de problemas se nutre de los aspectos esenciales del quehacer matemático, es decir, los problemas y las acciones típicas del pensamiento que ocurre durante el proceso de resolución.

Sin embargo, la mayoría de los estudiantes de los distintos niveles escolares ven a la matemática como una ciencia exacta que no da cabida al error, donde se aprenden métodos y algoritmos. ”Es una disciplina fría o austera que da poco espacio al juicio y a la creatividad” (Santos, 2007, p. 47). Esta forma de ver a las matemáticas se deriva principalmente de la concepción que los profesores tienen acerca de la disciplina. Schoenfeld (1992) afirma que las creencias mostradas por los estudiantes acerca de las matemáticas se desarrollan del tipo de instrucción recibida en el salón de clases. Estas ideas acerca de las matemáticas y el significado de su aprendizaje se adquiere mediante años de observar, escuchar y practicar actividades que se presentan en el salón de clases. Es común encontrar profesores de matemáticas que sostienen esta visión, ya que durante su formación y ejercicio docente han practicado esta concepción.

Los estudiantes se enfrenta a esta visión desde la educación básica, fomentándose en ellos una concepción errónea de lo que son las matemáticas , privilegiando el aprendizaje memorístico, la mecanización; que no promueve el estudio de los contenidos a través de la resolución de problemas, donde los conceptos y procesos de pensamiento pudieran complementarse para permitir el desarrollo de otro tipo de habilidades.

En este sentido, la resolución de problemas implica una forma diferente de ver a las matemáticas, tanto del profesor como del estudiante, donde la creatividad, el descubrimiento, el desarrollo de estrategias y habilidades, así como la comunicación y justificación de resultados, ocupan un lugar importante en la formación de los estudiantes.

La resolución de problemas recobra entonces la esencia misma de las matemáticas; es la base del pensamiento matemático y la forma más conveniente de aprender los conceptos, métodos y algoritmos.

Ya desde la antigüedad, las culturas de los babilonios y los egipcios, por ejemplo, usaban las matemáticas, que ellos mismos habían desarrollado, para resolver problemas y satisfacer las necesidades de su sociedad. Esto muestra la utilidad que la disciplina puede llegar a tener a partir del conocimiento matemático en el ámbito extra escolar.

1.2 Planteamiento del problema

En su propuesta para resolver problemas de matemáticas, Polya (1945), distingue cuatro pasos en el proceso: Comprensión del problema; Diseño de un plan de solución; Ejecución del plan; y Revisión retrospectiva. Sin embargo, el hecho de que se sigan al pie de la letra estos pasos, no garantiza que se encuentre la solución de un problema, pues intervienen otros factores como la experiencia, el monitoreo, el control, y la aplicación de estrategias heurísticas de manera adecuadas. Por esta razón, Polya acompañó a su método con una serie de preguntas relacionadas con dichas estrategias.

El término *heurística* tiene que ver con la invención y el descubrimiento de las cosas; es decir, dado un problema uno puede apoyarse en una estrategia heurística para generar o descubrir pistas para la solución. Según la *Real Academia Española*, manera de buscar la solución de un problema mediante métodos no rigurosos, como por tanteo, reglas empíricas, etc.

Por ejemplo, una estrategia descrita por Polya es la de considerar casos particulares?; por lo que en un problema que involucre el análisis de las raíces de polinomios, es conveniente pensar en los casos donde los polinomios sean fácilmente factorizables. Según Santos (1992, pg. 30, 70), Polya afirma que las estrategias y preguntas que un experto matemático se hace al resolver un problema, podían ser modeladas por un maestro en el salón de clase y que éstas son un componente fundamental en la resolución de problemas.

Ahora bien, es importante que la implementación de procesos de resolución de problemas considere el tipo de problemas que deben utilizarse para promover un aprendizaje significativo en los estudiantes. En este contexto, Schoenfeld en *Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum* (1999, 2000) y el NCTM (2000), mencionan que los problemas que se les plantean a los estudiantes deberán contemplar contenidos fundamentales del currículo escolar, ser atractivos y fáciles de entender para los estudiantes, que les permitan expresar y demostrar lo que saben; y además, también se busca que estos problemas sirvan como parámetro para conocer fortalezas y debilidades, que permitan evaluar diferentes caminos de solución y propicien la interacción con otros estudiantes.

De ahí la importancia de investigar y analizar el comportamiento de estudiantes, en este caso de nivel bachillerato, en el proceso de resolución de problemas para observar la manera en que aplican estrategias y usan los recursos matemáticos; así como también analizar las características y potencial de los problemas que se les plantean.

Con esto se pretende que los estudiantes sean conscientes de sus esfuerzos cuando desarrollan procesos de resolución de problemas en aras de un cambio en la forma de pensar y en la forma de ver las matemáticas.

Con base en estas consideraciones se plantea nuestro problema de investigación:

¿Qué tipo de problemas involucran a los estudiantes de bachillerato en procesos de resolución de problemas, y en qué consisten los intentos iniciales, intermedios y en una etapa final, por atacar y resolver los problemas?

Conocer el tipo de problemas y procesos que los estudiantes siguen en sus intentos por resolverlos, nos dará una perspectiva de cómo se pudiera implementar la resolución de problemas en algunas sesiones en el salón de clases. Tendríamos una base para hacer propuestas concretas sobre la implementación de procesos de resolución de problemas, además, las formas de trabajo que se pudieran adoptar para tal fin, de tal manera que permitan a los estudiantes aprender los conceptos matemáticos relevantes de manera significativa y desarrollar habilidades y formas de pensar consistentes con el quehacer matemático.

1.3 Preguntas de investigación

Nos interesa documentar el cambio en las formas de pensar de los estudiantes cuando se enfrentan a problemas de matemáticas escolares, que involucran diferentes formas de solución, por medio de una forma particular de instrucción basada en la resolución de problemas. En este sentido se plantean las siguientes preguntas para el desarrollo de la investigación:

1. ¿Qué características deben tener los problemas que se proponen a los estudiantes para promover un aprendizaje significativo, no rutinario?

2. ¿Qué conocimientos matemáticos previos requieren los estudiantes para enfrentarse a los problemas propuestos?

3. ¿En qué consisten los intentos de solución de los estudiantes, qué estrategias y recursos matemáticos usan?

4. ¿Qué formas de instrucción favorecen el aprendizaje de los estudiantes?

5. ¿Cuál es el papel del profesor durante la aplicación de los problemas, en un ambiente de resolución de problemas?

6. ¿Hubo cambios en las formas de atacar y resolver los problemas después de la implementación de la forma de instrucción?

1.4 Objetivos y Metas

Objetivo General:

1. Evaluar el potencial de las actividades de aprendizaje utilizadas para propiciar procesos de resolución de problemas en el salón de clases.

Objetivos Particulares:

- Hacer los ajustes y adaptaciones necesarias a algunas de las tareas contenidas en los Paquetes de Evaluación Balanceada (Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum, 1999, 2000), para aplicarlas en el nivel medio superior de nuestro sistema educativo.

- Aplicar las actividades de aprendizaje mediante una forma de instrucción que combina el trabajo cooperativo con el individual, cuyo fundamento se encuentra en la teoría del aprendizaje cooperativo de Hagelgans et al. (1995).
- Analizar el proceso que siguen los estudiantes al intentar resolver problemas y documentar, en forma detallada, el trabajo de tres pequeños grupos; así como destacar los aspectos relevantes en la discusión y/o comportamiento en el proceso de solución.
- Establecer si las actividades ayudaron a motivar la búsqueda de la solución o soluciones, y la externalización de las ideas por parte de los estudiantes.

Metas:

1. Seleccionar y, en su caso, adaptar cinco de las tareas contenidas en los paquetes de evaluación balanceada (Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum, 1999, 2000) y aplicarlas a un grupo escolar de bachillerato de la escuela preparatoria, Ing. Pascual Ortíz Rubio de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
2. Dar a conocer los resultados de la implementación en al menos dos foros nacionales.

CAPITULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1 Introducción

Dentro de los Principios y Estándares para las matemáticas escolares (NCTM, 2000) encontramos recomendaciones que se basan en la convicción de que los estudiantes pueden aprender matemáticas de manera significativa (con comprensión); es decir, comprender conceptos y procesos matemáticos importantes. También ofrece argumentos sobre la importancia de este tipo de aprendizaje y describe formas para lograrlo. En este contexto, los principios de este proyecto curricular, describe las características particulares de una educación matemática de calidad, y determinan la filosofía de la educación matemática a la que se aspira, mientras que los estándares describen los contenidos y procesos de pensamiento matemáticos que deberían desarrollar los estudiantes.

Dentro del documento se describen seis principios:

1. Igualdad. La excelencia en la educación matemática requiere igualdad; altas expectativas en el aprendizaje y fuerte apoyo para todos los estudiantes.

2. Currículo. El currículo es algo más que una colección de actividades. Debe ser coherente, estar centrado en matemáticas importantes y estar articulado a través de los diferentes niveles escolares.

3. Enseñanza. Para que la enseñanza sea efectiva, se requiere conocer lo que los alumnos saben, lo que necesitan aprender y, posteriormente estimularlos y apoyarlos para que lo aprendan bien.

4. Aprendizaje. Los estudiantes deben aprender las matemáticas comprendiéndolas, y construir activamente los conocimientos a partir de la experiencia y de los conocimientos previos.

5. Evaluación. La evaluación no debe ser un obstáculo para el aprendizaje de los estudiantes. La evaluación debe apoyar el aprendizaje de matemáticas importantes y proporcionar información útil a profesores y alumnos.

6. Tecnología. La tecnología es esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y potencia el aprendizaje.

Además, se establecen diez estándares fundamentales, dentro de los cuales la resolución de problemas es uno de ellos.

> La resolución de problemas no solo forma parte del objetivo de aprender matemáticas, sino también es una forma de aprenderlas. Es parte integral de todo aprendizaje de las matemáticas, por lo que no debería verse como una parte aislada de la disciplina. (NCTM, 2000, p.267)

La resolución de problemas es parte fundamental del desarrollo de la matemática, los estudiantes que aprenden matemáticas de manera tradicional se quedan en el estudio de métodos y algoritmos, lo cual refleja una forma de pensar inconsistente con la disciplina, ya que si los estudiantes no se involucran en procesos de resolución de problemas sus conocimientos de la disciplina serán de carácter memorístico y rutinario.

Para Polya (1945) y Schoenfeld (1985) la experiencia de los estudiantes con las matemáticas debe ser consistente con la forma de hacer matemáticas y, en este sentido, la resolución de problemas es la piedra angular que permite involucrar a los estudiantes en esas prácticas.

Stanic y Kilpatrick (1989) afirman que "la resolución de problemas no es valiosa por que hace a uno mejor resolutor de problemas, sino por el valor que tiene en sí mismo", lo cual nos lleva a concebir la noción de la resolución de problemas como una habilidad.

Así, esta línea de investigación en educación matemática, se ha desarrollado desde un punto de vista consistente con el quehacer de un matemático profesional, es decir; consistente con la disciplina.

Las investigaciones relevantes en este campo sugieren, entre otras cosas, un estudio de las estrategias de solución y de los propios problemas, de tal manera que una parte importante en la investigación es el de llevar a la práctica y observar grupos de estudiantes involucrados en procesos de resolución de problemas, observando: su comportamiento en el proceso de solución, las estrategias usadas, los conocimientos matemáticos previos usados, los resultados de la interacción con otros.

Así mismo, también es importante el diseño y evaluación de los problemas o tareas; los contenidos matemáticos del currículo que se involucran, el tiempo de trabajo estipulado para actuar en el problema, observar dificultades de los estudiantes para entenderlos, que las características del problema y su presentación permitan a los estudiantes expresar lo que saben, usar estrategias de solución, reflexionar acerca de la solución o soluciones; para finalmente evaluar si en efecto los problemas fueron aprovechados por los estudiantes.

En este sentido, para el desarrollo de este trabajo, se propone un marco teórico basado en cuatro ejes, siendo el de resolución de problemas el eje central, cuyas ideas originales se deben a Polya (1945). La resolución de problemas (Orígenes y desarrollo), las estrategias heurísticas y sus aportes complementarios, el aprendizaje cooperativo en el salón de clases y los paquetes de evaluación balanceada (Balanced assessment Package for the mathematics curriculum, 1999; Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum, 2000) y las características de los problemas planteados en el mismo.

Después de los primeros intentos por implementar las ideas de Polya, se determinó que las estrategias heurísticas, por sí solas, no aseguran que los estudiantes puedan llegar a la solución, que existen además otros elementos que deben de tomarse en cuenta. Schoenfeld (1992) distingue cuatro dimensiones en el proceso de solución: estrategias cognitivas; estrategias metacognitivas; recursos previos (conocimiento matemático) y; el sistema de creencias. Incluso con base en sus observaciones e investigaciones, Schoenfeld cree que las estrategias heurísticas de Polya no pueden ser aplicadas por los estudiantes de manera descriptiva, deben de ser más bien prescriptivas; y debe involucrarse a los estudiantes en la resolución de muchos y variados problemas.

También distingue, con base en su experiencia, otras formas de caracterizar el proceso de resolución de problemas.

En relación a la implementación de problemas en grupos escolares, que promuevan un aprendizaje alejado de cuestiones memorísticas y rutinarias, se han puesto las esperanzas en el llamado Aprendizaje Cooperativo de Hagelgans et al. (1995).

> Dentro de las formas alternativas de aprendizaje que se han sugerido, es frecuente la forma del estudio en pequeños grupos. A menudo la forma de instrucción en pequeños grupos es llamada aprendizaje cooperativo ... cuando se habla de aprendizaje cooperativo, todos los siguientes componentes deben de estar presentes: una cantidad significativa del trabajo del curso debe ser desarrollado en grupos cooperativos; debe existir un espíritu positivo de pertenencia al grupo; los miembros del equipo comparten sentimiento de responsabilidad mutua; los miembros del grupo son permanentes y estables; el trabajo en grupo se incluye dentro del proceso de evaluación.
>
> (p. 8,11)

El trabajo de Hagelgans y otros, se enmarca en la idea de la interacción social y en la teoría de Piaget (1977) sobre los procesos de abstracción reflexiva que, Simon (1995) identifica como los procesos naturales que se interiorizan cuando el sujeto tiene contacto con el objeto de aprendizaje.

Hagelgans et al. (1995) describen una serie de observaciones realizadas por profesores que trabajaron con pequeños grupos de aprendizaje cooperativo. Desde la formación de los grupos, hasta los procesos de resolución de problemas, pasando por la interacción, los problemas inherentes de los grupos y la evaluación, pretende una discusión de algunas cuestiones de la teoría del aprendizaje que pueden ayudar tanto a los estudiantes como a los profesores a optimizar los beneficios del aprendizaje cooperativo.

Finalmente, desde el punto de vista teórico, también se establece el tipo de problemas convenientes para la aplicación de tareas o problemas para la discusión en pequeños grupos de aprendizaje cooperativo, en el contexto de la resolución de problemas.

Desde que el NCTM (1980), estableció que la resolución de problemas debería ser el centro para el aprendizaje de matemáticas, se han desarrollado trabajos acerca de los problemas o tareas que sería deseable que el profesor planteara en el aula a sus estudiantes con el objeto de involucrarlos en procesos de resolución de problemas.

Por ejemplo Lesh et al. (2000), propone una serie de elementos característicos para que un problema o tarea sea considerado como una “actividad reveladora del pensamiento”; es decir, cuáles son las características que deberían cumplir las actividades diseñadas con el propósito de favorecer a los procesos de resolución de problemas dentro del salón de clases. Describen y definen algunas actividades reveladoras del pensamiento, sus potenciales y sugerencias para su aplicación; y las confusiones que la gente tiene para la aplicación de tales actividades en la enseñanza.

En Balanced assessment Package for the mathematics curriculum (1999); Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum (2000) se desarrolla un trabajo acerca de la caracterización de los problemas útiles en procesos de aprendizaje con base en los procesos de resolución de problemas, para ello toman en cuenta investigaciones y observaciones previas.

2.2 La Resolución de Problemas

Uno de los principales retos en educación matemática, es la implementación de procesos de resolución de problemas en el aula, en cursos habituales del currículo escolar.

Las ideas iniciales de Polya (1945), tienden a caracterizar al ser humano:

> Resolver problemas significa encontrar una forma de salir de una dificultad, alcanzar una meta que no pudo ser alcanzada inmediatamente. Resolver problemas es el logro específico de la inteligencia, y la inteligencia es el regalo específico de dios: resolver problemas puede ser considerado como la actividad humana más característica. (p. 5)

Pero, ¿qué significa la palabra problema? Al respecto existen diversos esfuerzos por definir y delimitar el concepto de problema en matemáticas.

Santos (2007) menciona que la palabra problema es relativa, tiene que ver con el esfuerzo que una persona dedica a la resolución de un problema. "El hecho de que exista un problema no es una propiedad inherente de la tarea matemática, la palabra está ligada a la relación o interacción entre el individuo y esa tarea". (p. 48)

Schoenfeld (1985) menciona que el término problema se refiere a una tarea que es difícil para la persona que intenta realizarla. La palabra problema es una demanda de lo que no se tiene respuesta inmediata, entonces representa una oportunidad de razonar, reflexionar, tomar decisiones, poner en juego el conocimiento matemático y estrategias en la búsqueda de la solución.

Polya (1945) detectó dificultades en sus estudiantes a la hora de resolver un problema o demostrar algún hecho. Comenzó a interesarse, precisamente, por las formas en las que los estudiantes pudieran apoyarse para resolver problemas. Desarrolló una serie de pasos con la idea inicial de que los profesores guiaran al estudiante, por medio de algunas preguntas (p. 19):

1. Comprensión de problema: Las preguntas en este paso están enfocadas a que el estudiante entienda el problema, lo analice desde el punto de vista de la incógnita y de lo que conoce según el enunciado del problema. Preguntas como ¿cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición o condiciones? ¿Es la condición o condiciones suficientes para

determinar la incógnita?

2. Diseño de un plan de solución: En este paso Polya sugiere preguntas enfocadas, más que nada, en los siguientes aspectos; análisis de problemas semejantes o relacionados, previamente resueltos: ¿se ha encontrado con un problema semejante? ¿Conoce un problema relacionado con este? ¿Podría usarlo? ¿Podría usar su resultado o su método? En relación a las definiciones y/o teoremas que permitan encontrar un plan de solución: ¿podría enunciar o plantear el problema de otra forma? También destaca el hecho de que uno podría plantearse problemas más accesibles análogos al original, con el objetivo de explotar y aplicar la forma en que se llega a su solución al problema original: ¿podría imaginarse un problema más particular? ¿Más general? ¿Puede resolver una parte del problema? La idea es concebir un plan eficaz para encontrar la relación o relaciones entre lo desconocido y los datos.

3. Ejecución del plan de solución: Aquí, Polya resalta la importancia de la demostración en el proceso de resolución. Ya que al ejecutar el plan nos enfrentaremos a una serie de pasos que tenemos que eslabonar para llegar a una solución; éstos deben seguir un orden y, lo más importante, deben ser verdaderos: ¿puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

4. Revisión retrospectiva: Consiste en reflexionar y revisar lo que se hizo en los pasos anteriores, la verificación del resultado y el razonamiento. Se aborda la cuestión de si pudiera haber una forma diferente de resolver el problema, y si la solución de este nos ayuda en la resolución de otros.

Polya intentaba adaptar los procesos a sus estudiantes, que él, como matemático, seguía en el proceso de resolver un problema. Al respecto, Santos (1992, pp. 30, 70) comenta que Polya creía que las estrategias y preguntas que un experto matemático se hace al resolver un problema, podían ser modeladas por un maestro en el salón de clase, las cuales son un componente fundamental en la resolución de problemas.

Además, también destaca el papel del profesor, como guía, que sepa dar a los estudiantes pistas específicas que los motiven a la búsqueda de la solución, y no dárselas.

> El estudiante debe adquirir en su trabajo personal la más amplia experiencia posible, pero si se le deja solo frente a su problema, sin ayuda alguna o casi ninguna, puede que no progrese... El maestro debe ayudarle, pero no mucho ni demasiado poco, de tal suerte que le deje asumir una parte razonable del trabajo... Para tal fin el maestro debe ayudarle discretamente, sin imponérselo. (Polya, 1945, p. 25)

Por otra parte, Polya menciona que hay dos objetivos fundamentales en el momento de plantear o sugerir a los estudiantes las preguntas de la lista: ayudar a los estudiantes a resolver problemas y desarrollar la habilidad en el alumno para que sea capaz de resolver problemas posteriormente por sí solo. “Estos dos objetivos están estrechamente relacionados, puesto que si se le ayuda al estudiante a resolver un problema de esta manera, entonces se estarán desarrollando estas habilidades”. Polya (1945, p.27)

Son dos las características que se destacan en las preguntas de las etapas anteriores, el sentido común y la generalidad. La primera característica, ayuda a que el estudiante se familiarice con las preguntas y que por ser muy naturales se les podían ocurrir, incluso. La segunda ayuda a que los estudiantes sigan un camino general, lo cual implica mucho trabajo por hacer.

2.3 Las Estrategias Heurísticas

Polya sugiere implementación de estrategias, llamadas heurísticas, en la resolución de problemas en el salón de clases. Es importante mencionar que algunas de estas estrategias están implícitas en las preguntas de la sección anterior; sin embargo, en esta sección pretendemos abordarlas a manera de clasificación con objeto de visualizarlas en el contexto de este trabajo.

La palabra "heurística" tenía un significado exclusivo para una ciencia, según Polya (1945) mal definida, que tenía por objeto el estudio de las reglas y métodos del descubrimiento y de la invención. En términos adaptables la palabra trata de comprender los procesos mentales útiles en el proceso de la resolución de problemas.

Schoenfeld (1980a) define una ***estrategia heurística*** como una sugerencia general o técnica la cual ayuda a quien intenta resolver un problema a entenderlo o a resolverlo.

Una estrategia heurística tiene que ver con la invención, la generación de conocimiento a través de una acción física o mental, que facilita, ayuda, da luz o resuelve una situación.

A continuación se presenta una lista de estrategias heurísticas:

Realizar trazos, dibujar esquemas que ayuden a identificar incógnita y datos. La *"construcción" de figuras* es una estrategia que puede ayudar de manera considerable. Su uso no se restringe a problemas de geometría, donde su aplicación es natural, pero puede será aplicada a otras áreas de las matemáticas u otras ciencias cuando se requiere representar una idea, parte del problema o el problema mismo de manera gráfica.

Examinar casos especiales, con el objeto de ilustrar el problema, explorar el rango de posibilidades, sobre todo en los casos límite, y encontrar patrones; la toma de *casos particulares* es una de las estrategias más naturales a la hora de resolver problemas, las cuales pueden ser de tipo secuencial o de tipo inductivo. "Se refiere a que de una situación planteada podamos ser capaces de resolver casos particulares, para luego aprovechar su método o su solución en el problema original. La examinación de casos extremos es útil en esta estrategia" Polya (1945, p. 138).

Considerar problemas equivalentes previamente resueltos. Se buscan problemas familiares o que involucren la(s) misma(s) incógnita(s), para tratar de resolver un problema relacionado más sencillo; puede intentarse replantear el problema cambiando de perspectiva o de notación, estudiar si el problema se puede abordar por contradicción y asumir la solución y determinar las propiedades que debe tener, etc.

El uso de *problemas auxiliares* como un medio para llegar a la solución del problema original, es otra estrategia útil en la resolución de problemas, "es conveniente pensar, estudiar o incluso resolver problemas que nos ayuden a encontrar la solución de problema original" Polya (1945, p. 153). La idea de subordinación está dentro de esta estrategia, si esperamos que el problema auxiliar ayude debemos considerar problemas claros, concisos y subordinados. También conviene *Considerar pequeñas variación al problema*, descomponer el problema en sub-metas y abordarlas, hacer que las condiciones del problema sean más flexibles o descomponer el problema y trabajarlo caso por caso. *Considerar modificaciones más amplias*, examinar problemas análogos de menor complejidad, explorar el comportamiento de una condición o una variable, dejando fijas las otras. Explotar los métodos de solución o la solución que tengan una forma similar a la del original.

La *analogía,* según Polya (1945, p. 57-58), es un tipo de similitud entre dos o más objetos. Los objetos semejantes concuerdan entre sí, en algunos aspectos, mientras que los objetos análogos lo hacen en ciertas relaciones entre sus elementos respectivos. La analogía entre dos sistemas u objetos, consiste en la comunidad de sus relaciones. La analogía que existe entre un paralelogramo rectangular y un paralelepípedo rectangular, por ejemplo, debido a que las relaciones de los lados existentes en el paralelogramo son semejantes a las relaciones entre las caras en el paralelepípedo. La analogía forma parte de nuestra manera de ver las cosas y de nuestra expresión. En el habla popular es difícil encontrar cierto grado de precisión que requiere para su anexo en matemáticas; sin embargo, es importante tenerlo en cuenta para el descubrimiento de soluciones a problemas. La analogía de un problema nuevo con otro antes resuelto, o más sencillo de resolver, es una estrategia importante para descubrir el camino de solución o la solución. Polya habla en esta parte de la inferencia por analogía; es decir, la solución de un problema análogo más sencillo nos proporciona elementos para hacer una hipótesis acerca de la solución del problema original.

Habiendo establecido aspectos fundamentales de las estrategias heurísticas, entonces ¿podemos ejercitar a alumnos novatos para resolver problemas como lo hacen un experto?

Schoenfeld (1980b) se plantea esta pregunta, luego de probar que evidentemente los novatos abordan un problema de manera muy diferente de cómo lo hace un experto.

> Mi respuesta es un provisional “si”. Creo que es posible dar un curso en el cual se puede enseñar al estudiante a resolver una amplia variedad de problemas... mejor y más eficientes de lo que ellos creerían... Podemos proveer a los estudiantes con una estructura razonable para resolver problemas de manera eficiente y podemos, de hecho, demostrar esa mejora. (p. 795)

Schoenfeld (1980b) afirma que conocer tales estrategias no es suficiente para resolver un problema, habrá ocasiones en las que en un problema se puedan usar varias estrategias y el estudiante tendrá que saber seleccionarla, además de saber cuándo y dónde usarla.

Así pues, la manera en que los estudiantes aplican las estrategias heurísticas planteadas por Polya, depende de la instrucción que reciban con base en estas afirmaciones y con base al diseño de una didáctica plenamente basada en la resolución de problemas.

Otros obstáculos que no aseguran el éxito en los estudiantes para resolver problemas son: la actitud y visión que se tenga de las matemáticas, el conocimiento de los conceptos matemáticos, eficacia para estimar y hacer operaciones, etc. Schoenfeld intentó, mucho tiempo después de que se establecieran las ideas de Polya, responder a este tipo de cuestiones con base en sus investigaciones enfocadas al uso de estrategias en el salón de clase y con el diseño de actividades que cumplen con ciertos requisitos para desarrollar formas de instrucción basada en la resolución de problemas.

2.4 Aportes Complementarios al Método de Polya

Sin duda, quien más ha contribuido a la implementación y desarrollo de la resolución de problemas es Alan Schoenfeld, quien incorpora la dimensión cognitiva y, por su contacto con estudiantes y profesores de matemáticas, recaba evidencia que le permite concluir que la resolución de problemas va más allá de conocer las estrategias heurísticas, que se deben analizar otras cuestiones que también tienen cabida en el proceso de resolver problemas.

> A pesar de las brillantes ideas de Polya, los métodos sugeridos en sus libros no funcionan muy bien; cuando los maestros y educadores matemáticos intentaron enseñar la resolución de problemas usando los métodos de Polya, los resultados no fueron los mejores… las estrategias de Polya son muy generales y para que puedan ser usadas, es necesario caracterizarlas con suficiente detalle; esto servirá como una guía para implementarlas. Schoenfeld (1987, pp. 17-18)

Es decir, los resultados en la enseñanza de estas estrategias a estudiantes de matemáticas, no fue alentadora; estas sugerencias deberían tener un carácter prescriptivo si se quiere aplicar a este nivel.

Schoenfeld (1987) observa que las estrategias de Polya son muy generales; es decir, las caracterizaciones de Polya son etiquetas bajo las cuales están contenidas familias de estrategias relacionadas. Así, una estrategia heurística origina otras sub-estrategias que se aplican en forma diferente, dependiendo de la estructura del problema. Para su uso en la enseñanza, Schoenfeld (1992) recomienda ejercitar cada estrategia general en diferentes problemas, de manera que se evidencie el uso de las estrategias particulares.

Schoenfeld (1980a, p. 12) asegura que bajo ciertas circunstancias apropiadas, muchos estudiantes pueden aprender a usar heurísticas, dando como resultado un mejoramiento demostrable en el proceso de resolución de problemas. Ellos deben aprender al menos: 1) cómo seleccionar las estrategias apropiadas y 2) cómo aplicarlas. Sin embargo, las estrategias heurísticas no pueden ser presentadas a los estudiantes de manera retórica, informativa o como sugerencias para ayudar a resolver problemas, puesto que varias estrategias no contienen suficiente información sobre cómo ser utilizadas por los estudiantes.

Schoenfeld se refiere a la generalidad de las estrategias de Polya. Es decir, cuando atacamos problemas diferentes donde es factible usar la misma heurística de los casos particulares, por ejemplo, es probable que no se aplique de la misma manera en todos, puede ser que la estrategia sea muy particular para cada uno. Así entonces, la instrucción debe ser más que descriptiva, debe enfocarse en la resolución de una amplia variedad de problemas en donde los estudiantes aprendan cómo y cuándo aplicar estrategias de manera satisfactoria. En resumen, la instrucción en el aprendizaje de las estrategias heurísticas en la resolución de problemas debe ser más bien prescriptiva.

Schoenfeld (1987) sugiere que para entender cómo los estudiantes intentan resolver problemas es necesario discutirlos en diferentes contextos, pero también hay que considerar diferentes categorías o dimensiones que influyen en el proceso de resolución de problemas. Por ejemplo, Santos (2007, p.53) menciona que "las heurísticas son estrategias que pueden ayudar a avanzar o a resolver el problema... sin embargo, conocer estas estrategias no garantiza saber cuándo y cómo usarlas".

Se distinguen cuatro dimensiones que influye en el proceso de la resolución de problemas. Dominio del conocimiento o recursos, estrategias cognitivas o métodos heurísticos, las estrategias metacognitivas y los sistemas de creencias.

El dominio del conocimiento se refiere al conocimiento que el estudiante tiene de las matemáticas, hechos matemáticos, definiciones, conceptos, teoremas, incluso procedimientos y algoritmos. Las estrategias cognitivas, son las discutidas en el capítulo anterior, al menos las más usuales. Las estrategias metacognitivas es una especie de auto monitoreo de los procesos que se llevan a cabo en el proceso de resolución, la reflexión acerca de los caminos que tomamos o que estamos intentando tomar. Finalmente, los sistemas de creencias, se refiere a las creencias que se tienen sobre las matemáticas en general y sobre la resolución de problemas, tanto de estudiantes como de profesores.

Los sistemas de creencias son importantes, influyen directamente en las actitudes de los estudiantes en una clase de matemáticas, particularmente en actividades donde se promueva la resolución de problemas. Garofalo (1989) identifica algunas creencias de los estudiantes acerca de las matemáticas.

- casi todos los problemas matemáticos pueden ser resueltos por la aplicación directa de hechos, reglas, fórmulas, y procedimientos mostrados por el profesor o dados en el libro de texto,

- los ejercicios de matemáticos del libro de texto pueden ser y deben ser resueltos por los métodos presentados en el libro de texto,
- las matemáticas son importantes y vale la pena conocerlas solamente porque son evaluadas,
- las matemáticas son creadas solamente por un genio matemático; otros solo intentan aprender lo que es manejable y;
- los problemas matemáticos tienen solo una respuesta correcta, y tales respuestas se obtienen usando algoritmos paso por paso.

Dentro de nuestra experiencia, una actitud generada por las creencias que Garofalo menciona, es que el estudiante justifica sus respuestas preguntando al profesor, si el profesor acepta la respuesta el estudiante asume que es correcta. En general la gran mayoría de los estudiantes de bachillerato asumen que las afirmaciones y procedimientos que el profesor muestra en la clase son correctos, se aceptan por el solo hecho de que el profesor lo menciona, sin reflexionar y preguntarse por qué son válidos tales procesos. Actualmente los libros y la información que se encuentra en medios electrónicos, son también muy ponderados por los estudiantes. La educación tradicional ha dejado estas formas de actuar en la mayoría de los estudiantes; es decir, los estudiantes no sienten la confianza para argumentar y/o justificar sus propios métodos, procesos o formas de actuar en clases de matemáticas. Por otra parte, los profesores no motivan a los estudiantes para que así suceda. Se ve al profesor como el único responsable para que los estudiantes desarrollen entendimiento y califiquen, de alguna manera, los resultados de los ejercicios que se proponen. Cuando el profesor indica o promueve un método para resolver cierta cuestión matemática, los estudiantes esperan que este método funcione para cualquier ejercicio de esta índole, aunque no se cumpla siempre. Las formas de instrucción tradicionales promueven poco la argumentación y justificación de los estudiantes, hacia las tareas o ejercicios de aprendizaje, procedimientos y métodos propuestos por el libro o el profesor.

Schoenfeld (1992) documenta también algunas creencias de los estudiantes acerca de lo que significa aprender matemática.

- Si se pide un punto de vista acerca de un problema o cuestión matemática, es suficiente opinar al respecto. Es decir, las pruebas formales o justificaciones matemáticas no son necesarias a menos que explícitamente se requieran.

- Todos los problemas matemáticos pueden ser resueltos en 10 minutos o menos, si uno entiende el contenido. Es decir, el estudiante abandona el problema si no lo resuelve en ese periodo.

- Sólo los genios son capaces de descubrir, crear y entender matemáticas. Es decir los estudiantes toman las matemáticas pasivamente y memorizan relaciones sin esperanza de algún entendimiento.

- Las matemáticas formales y las demostraciones no tienen nada que ver con el desarrollo del descubrimiento del desarrollo de las matemáticas. Como consecuencia, los resultados de las matemáticas formales se ignoran cuando se les pide a los estudiantes trabajar en problemas de construcción o descubrimiento.

Un rasgo que se destaca en estas creencias documentadas por Schoenfeld son las ideas de los estudiantes acerca de la justificación y validación de los resultados de las tareas que los estudiantes resuelven. Cuando los estudiantes se interesan por un problema, solo piensan en resolverlo de manera correcta, luego verán si lo que hicieron está bien o está mal cuando el profesor entregue el problema calificado.

Sin embargo, Schoenfeld (1985) identifica contradicciones en tales creencias, en ocasiones los estudiantes piensan: “las matemáticas son mucha memorización”, pero por otro lado, “las matemáticas son una disciplina creativa y útil en la cual se aprende a pensar”.

Ciertamente entre los estudiantes de bachillerato (en particular) no hay una idea única que clasifique o defina a las matemáticas. Cada estudiante desarrolla sus propias creencias de acuerdo a las experiencias que han vivido dentro del salón de clases. Esto hace que un estudiante puede haber experimentado incluso varias formas de ver las matemáticas, por lo tanto varios de ellos caen en estas contradicciones. Esto es especialmente un resultado de las creencias de los profesores hacia las matemáticas -las cuales pudieron haberse desarrollado en la última etapa de su formación- que influyen en las actitudes y creencias de los estudiantes. Por ejemplo, un estudiante el cual toda su vida académica matemática estuvo ligada a profesores que conciben las matemáticas como una ciencia exacta en la que se debe practicar una serie de ejercicios con procedimientos definidos para aprenderla, entonces su idea acerca de las matemáticas será muy pragmática, sin cabida para la creatividad o la reflexión.

Así, los procesos de resolución de problemas y las prácticas del aprendizaje cooperativo pretenden, además de otras cosas, favorecer en los estudiantes el desarrollo de actitudes y creencias más cercanas y consistentes con el quehacer de la disciplina; es decir, con las creencias que un matemático profesional tiene de su práctica diaria.

De esta manera, para Schoenfeld (1992) el reto en la instrucción matemática es generar condiciones de aprendizaje donde se promuevan actividades, hábitos y actitudes consistentes con la práctica real de la disciplina.

> . . . Para desarrollar los hábitos apropiados y la disposición de interpretación y de encontrar sentido a las ideas matemáticas y el desarrollo de modelos apropiados de pensamiento matemático, la comunidad de práctica en donde los estudiantes aprenden matemáticas debe soportar y desarrollar las formas de pensar de la práctica matemática. Esto es, el salón de clase deben ser comunidades en la cual el encontrar sentido a las ideas debe ser lo que se espera que los estudiantes practiquen. (p. 345)

En este contexto, resulta relevante que los estudiantes adquieran una forma de pensar propia del método inquisitivo. Postman y Weingartner (1969) sostienen que:

> El conocimiento se produce en respuesta a preguntas. . . Una vez que (el estudiante) ha aprendido a cómo preguntar –preguntas relevantes, apropiadas y sustanciosas– el estudiante ha aprendido cómo aprender y ya nadie lo puede detener en el camino de seguir aprendiendo lo que necesite y quiera conocer. (p. 23)

2.5 Trabajo Cooperativo en el Salón de Clases

Uno de nuestros objetivos es trabajar en pequeños grupos para promover el aprendizaje cooperativo en el contexto de la resolución de problemas y tomar algunas aportaciones y aproximaciones enmarcadas en esta teoría, con el fin de emplear formas de instrucción que favorezcan el aprendizaje y que, a su vez, contribuya en el proceso de resolución de problemas.

Hagelgans et al. (1995) comentan que en una clase tradicional de matemáticas, se promueve la memorización y la aplicación de algoritmos para resolver ejercicios de cálculo, lo cual, tiende a dejar aprendizaje procedimental y memorístico, opuesto al aprendizaje racional y significativo. Una forma alternativa de aprendizaje es que los estudiantes resuelvan problemas en pequeños grupos, que con una cierta metodología y fundamentos teóricos, se espera que se propicie el aprendizaje cooperativo. Ya que no cualquier trabajo en pequeños grupos produce este tipo de aprendizaje. A menudo la forma de instrucción en pequeños grupos es llamada aprendizaje cooperativo.

Las bases sustanciales de la teoría del aprendizaje cooperativo se encuentran en el constructivismo, básicamente en las ideas de Piaget (Hagelgans et al., 1995):

> Desde el punto de vista de Piaget el individuo construye su conocimiento a través de la interacción con su ambiente. Aunque la interacción social, la cual es parte del ambiente, puede enriquecer el desarrollo de un individuo, este no puede cambiar el curso de este desarrollo en una forma esencial. (p. 19)

De acuerdo con Piaget y Inhelder (1969), el desarrollo intelectual de un individuo está influida por la madurez, la experiencia, la interacción social y el equilibrio, lo cual concluyó de sus observaciones y trabajos con niños. La construcción de varios tipos de imágenes mentales es posible en un estado específico del desarrollo integral de una persona. La madurez determina si es posible o no la construcción de estructuras mentales, específicas en un momento particular.

Piaget distingue dos tipos de experiencias a nivel elemental: experiencias físicas y experiencias lógico-matemáticas. Cuando los niños crecen, llegan a ser capaces de pensar deductivamente y ser consientes de la abstracción o construcción mental, llamada **abstracción reflexiva**, ambos basados en los dos tipos de experiencias.

La abstracción reflexiva se refiere al final de un proceso desencadenado cuando el estudiante se encuentra con un conflicto en la estructura de su conocimiento, una perturbación que impide que el nuevo conocimiento se "acomode". Al respectoVon Glasersfeld (1995) comenta:

> La teoría del aprendizaje que emerge del trabajo de Piaget puede ser resumida diciendo que un cambio y un aprendizaje cognitivo en una dirección específica toma lugar cuando un esquema, en lugar de producir el resultado esperado, deja una perturbación, y la perturbación, a su vez, una acomodación que mantiene o restablece el equilibrio. (p. 68)

Tal perturbación se conoce como "conflicto cognitivo", una situación en donde los estudiantes no saben qué hacer, pues tal evento no se ajusta a sus concepciones. Simon et al. (2004) afirma que la idea básica del conflicto cognitivo es desencadenar el aprendizaje.

Las experiencias físicas consisten en actuar sobre objetos, manipularlos. Los niños juegan con las cosas para transformarlas e interactuar con ellas usando todos sus sentidos, tacto, vista, gusto, olfato y oído. Para ellos, el juego es su forma de pensar. Los niños obtienen conocimiento empírico acerca de los objetos que manipulan por medio de reflexiones sobre los resultados de sus acciones.

No todo el conocimiento es obtenido directamente desde la simple acción con los objetos en sí mismo; esto es, mientras que el conocimiento físico viene de acciones sobre objetos, el conocimiento lógico-matemático tiene como su fuente la coordinación general de estas acciones.

Los seres humanos aprenden también desde su experiencia y no solamente porque alguien les hable acerca de algo. Piaget enfatizó que la interacción social y la transmisión son insuficientes por sí misma. De hecho, en el proceso de la interacción social, los individuos contribuyen tanto como reciben. Aún en las interacciones donde un individuo aparece más pasivo, no hay acción social sin asimilación activa. Esto es, cuando un estudiante está cabeceando a punto del sueño en el fondo del salón de clase, aunque si el profesor está dando una clase dinámica, no hay interacción social, y esto no genera transmisión de conocimiento. Por otro lado, en una discusión en un grupo pequeño, incluso si un estudiante está hablando más que los otros miembros del grupo que escuchan pasivamente, están involucrados en una interacción social.

Cuando un individuo se enfrenta con situaciones que requieren nuevas construcciones mentales, la tendencia es ajustar estas nuevas ideas a las estructuras mentales ya existentes; es decir, asimilar el nuevo conocimiento. Si esto no funciona, habrá un desequilibrio en las experiencias individuales. Los cambios deben ser hechos por acomodación de estas nuevas experiencias. El equilibrio es el mecanismo interno que regula el proceso de asimilación y acomodación.

Piaget (2001) postuló la abstracción reflexiva como el proceso mediante el cual estructuras mentales de alto nivel podrían ser desarrolladas desde estructuras de más bajo nivel, y las describió en dos fases: Fase de proyección, en la cual las acciones en un nivel llegan a ser objetos de reflexión en la siguiente fase; y Fase de reflexión, en la cual se lleva a cabo una reorganización. En otras palabras es un proceso por el cual concepciones nuevas y más avanzadas se desarrollan de concepciones existentes. La abstracción reflexiva no es necesariamente un proceso consciente.

Una de las características de los procesos de abstracción reflexiva que son observables en la práctica cotidiana de un profesor es el de introducir al estudiante hacia una concepto desde un punto de vista empírico e intuitivo, de tal manera que el estudiante reconozca la necesidad de establecer nuevas concepciones o se enfrente al conflicto cognitivo.

En los trabajos de Hagelgans et al. (1995), la definición de aprendizaje cooperativo es el resultado de un esquema que concibe varias características, es decir, un grupo que es llamado”Grupo de aprendizaje cooperativo” debe tener las siguientes características.

1. Cantidad significativa del trabajo en grupo: El curso o clase que esté dentro del esquema del aprendizaje cooperativo, debe de tener una estructura que involucre a los estudiantes en interacciones que reflejen una cantidad significativa de trabajo en grupo, de tal manera que sientan la necesidad de comunicar ideas de manera regular. Tal comunicación incluye la reflexión de las ideas matemáticas y discusión de los diferentes acercamientos para resolver

problemas. En el intento de comunicar estas ideas al grupo, cada integrante deben tener claros sus pensamientos acerca del problema o el concepto. Esta discusión debe ocurrir de manera regular y a un nivel suficiente para que los estudiantes reconozcan sus propios errores (de cálculo y de razonamiento matemático). Con esto se espera que los estudiantes desarrollen un espíritu de pertenencia al grupo.

2. Responsabilidad mutua entre los miembros del grupo: Se espera que cada miembro sea responsable para con los otros. Las actividades se diseñan para que el espíritu del grupo permee en cada faceta del curso; algunas de estas actividades se diseñan para que los miembros se beneficien cuando todos trabajan. Algunas actividades se diseñan para que el conocimiento del grupo se enriquezca con respecto al conocimiento individual. La responsabilidad implica que si un miembro del grupo no se desempeña adecuadamente, frecuentemente esto afecta al grupo completo, pero si su desempeño es bueno todo el grupo se beneficia.

3. Grupos estables: Es esencial y necesario para el espíritu grupal que el grupo sea permanente durante todo el curso, para todo el semestre o para una parte importante de él. Aprender a trabajar juntos, aprender a cómo usar esa interacción para aprender matemáticas es un proceso que se logra con el conocimiento de los integrantes entre el grupo; eso lleva tiempo.

4. Evaluación del trabajo en grupo: Puesto que se cree que los estudiantes aprenden mejor cuando trabajan en pequeños grupos, que de manera individual, debe emprenderse un proceso de evaluación.

Se espera que cada pequeño grupo se conforme con estudiantes de distintos niveles de desempeño y que se permita la comunicación con sus integrantes y con otros grupos

Las investigaciones y la experiencia sugieren que los estudiantes que participan en clases donde se aplica el aprendizaje cooperativo, pueden desarrollar actitudes positivas hacia ellos mismos y hacia las matemáticas. Wimbish (1993) observó cambios en las actitudes de los estudiantes en un salón de clases de matemáticas. Estudiantes que al principio dudaban de sus habilidades, al final del curso pensaron que lo estaban haciendo tan bien como sus otros compañeros de equipo. Los estudiantes de forma individual expresaron un fuerte sentido por ayudarse a ellos mismos o a otros. Después de participar en esta forma de aprendizaje cooperativo, los estudiantes fueron más sensibles a evaluar sus ideas y más sensibles para explorar nuevas y mejores formas para resolver problemas.

Wimbish observó también que algunas viejas actitudes persistieron después de un semestre de trabajo en grupos de aprendizaje cooperativo. Para muchos estudiantes la memorización de fórmulas se mantiene como la esencia de las matemáticas, y hubo una fuerte tendencia a ligar el entendimiento con la memorización. Por otro lado, los estudiantes expresaron que habían intentado explicar un concepto a otros miembros de su grupo, evaluando el entendimiento de un concepto y practicando para mejorar sus habilidades usando una computadora fuera de clase.

En los estudios preliminares de un curso de dos semestres de Cálculo para estudiantes de ciencias sociales y de la vida, Schwingendorf y Wimbish (1994) reportaron otros cambios en las actitudes de los estudiantes; mostraron una actitud más positiva hacia las matemáticas y a su habilidad para resolver problemas. Mostraron una sensibilidad para hablar acerca de hacer matemáticas como una aproximación colaborativa para resolver problemas. Estos estudiantes fueron menos dependientes de un profesor como la única fuente de conocimiento y ampliaron su trabajo en forma de aprendizaje cooperativo.

Cuando en un salón de clases los estudiantes trabajan en pequeños grupos con el fin de lograr un objetivo en común, se espera que se pongan en juego varios aspectos importantes como: la comunicación entre el grupo, la reflexión de las ideas aportadas y, sobre todo, una discusión que los lleve a concluir acerca del problema en cuestión. Esto conduce a que los estudiantes construyan activamente su propio conocimiento.

El trabajo cooperativo en pequeños grupos conlleva problemas inherentes debido a la heterogeneidad de grupos de estudiantes. Los problemas de tipo social son una dificultad importante en aspectos del trabajo cooperativo, esto proviene que no se puede desligar el aspecto educacional con el aspecto social. Hagelgans et al. (1995) nos comenta las experiencias de un asistente de laboratorio:

> Pensando en mis observaciones, creo que es una combinación de aspectos sociales y académicos los que afectan de manera efectiva a los grupos. Grupos que son socialmente compatibles parecen trabajar bien juntos si es que ellos también tienen una actitud positiva hacia la clase. Grupos en los cuales llevan una ventaja académica no funcionan tan bien hasta que llegan a ser socialmente compatibles. Antes de ser amigos, trabajan mejor solos que en grupo. (p. 72)

Según Hagelgans, una de las dificultades de estudiantes y profesores en el trabajo de grupos de aprendizaje cooperativo es saber cómo comenzar el análisis. Comenzar y vencer una situación aparentemente remediable puede ser el mayor problema para los principiantes y, a veces, también para los expertos.

Dentro de las observaciones de Wimbish (1993), se encuentra una pareja de estudiantes que usa una técnica llamada “conversación estructurada”. Esta técnica es una forma del método heurística de Polya para resolver problemas (Polya, 1945), combinada con preguntas que guían el desarrollo de cada etapa de la resolución del problema.

La técnica de la conversación estructurada se basa en el método de Polya y combina la estructura de cuatro pasos con una serie de preguntas que conllevan al entendimiento del problema. Esencialmente, el primer paso que propone Polya (1945) es entender el problema y sugiere una serie de preguntas, por ejemplo: ¿cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición o condiciones? ¿Es la condición o condiciones suficientes para determinar la incógnita?

Esto sin duda es importante en una sesión en donde los estudiantes trabajan en grupos de aprendizaje cooperativo en un ambiente de resolución de problemas. El inicio de una conversación estructurada, puede augurar el éxito o el fracaso en una actividad que involucre el trabajo cooperativo. En caso de no darse, es una dificultad a la que se enfrenta el grupo y en el que pocas veces los estudiantes tienen conciencia.

Hagelgans et al. (*Ibíd.*) Proponen formas de cómo conformar pequeños grupos de aprendizaje cooperativo. Se sugiere que los grupos sean heterogéneos y estén formados por tres o cuatro estudiantes. En un grupo heterogéneo las experiencias de los estudiantes implican, al menos supuestamente, diferentes puntos de vista. El número de estudiantes de un grupo afecta en la eficiencia y productividad de los grupos. De acuerdo con Hagelgans et al. (*Ibíd.*), cuatro estudiantes eventualmente pueden separarse en dos subgrupos de dos estudiantes cada uno y luego regresar al grupo completo; pares de estudiantes pueden fácilmente trabajar en un cálculo; los pares pueden trabajar en habilidades orientadas a ensayar actividades; grupos heterogéneos de cuatro permiten una adecuada combinación de los talentos individuales y fuentes tan buenas como la posibilidad de balancear el género (dos hombres y dos mujeres); un grupo de cuatro puede sostenerse por sí mismo si un estudiante se "aparta del grupo"; un grupo de cuatro encamina de manera más efectiva el trabajo, la conversación estructurada, y los pensamientos reflexivos.

Se recomiendan que los instructores distribuyan el talento, pericia, y varias características sociales representadas en el salón de clase para formar grupos heterogéneos. Mientras los estudiantes deben ser compatibles y capaces de trabajar juntos fuera del salón de clases, se ha observado que las conversaciones acerca de los problemas son los más ricos y los más productivos posibles si los grupos representan una amplia base de experiencias de vida como sea posible.

Una de las sugerencias destacables es que los grupos pueden ser formados por los propios estudiantes, eligiendo compañeros con los que tengan cierta afinidad e incluso cierta amistad. Se ha llegado a observar que los estudiantes se sienten cómodos y motivados cuando los integrantes del grupo son sus amigos o son estudiantes con quien comparten mucho tiempo en horas extra-clase.

Sepúlveda y Santos (2006) desarrollan e implementan una forma de instrucción consistente con las ideas del aprendizaje cooperativo, previamente mencionadas, y lo articulan con las ideas del aprendizaje de las matemáticas mediante la resolución de problemas, usando principalmente actividades de los paquetes de evaluación balanceada (Balanced Assesment Package for the Mathematics Curriculum, 1999; 2000).

La forma particular de instrucción propuesta por Sepúlveda y Santos (2006, p. 1394) consta de las siguientes etapas.

Actividad previa: El profesor da al grupo una breve introducción a la tarea, con el propósito de ubicar a los estudiantes en contextos similares a la actividad; destacando la importancia que representa su participación en el desarrollo de la sesión.

Trabajo en equipos: Se organiza en equipos de tres, en donde cada grupo haya estudiantes con distintos niveles de desempeño, de tal forma que tengan posibilidad de interactuar entre ellos y los demás equipos. Al concluir el periodo asignado al trabajo por equipos, cada uno entrega su reporte.

Presentaciones: Cada equipo presenta a toda la clase su solución a la tarea, permitiendo que los miembros de los demás equipos pregunten libremente a quienes exponen.

Discusión colectiva: El profesor promueve la discusión colectiva entre los estudiantes, con la idea de analizar los diferentes métodos de solución que cada grupo presenta y, cuando sea necesario realiza una sistematización de las ideas e identifica posibles extensiones al problema.

Trabajo individual: A partir de la discusión colectiva, los estudiantes vuelven a la tarea y aplican los nuevos entendimientos que se generaron como producto de la interacción, abordando individualmente la tarea.

2.6 Paquetes de Evaluación Balanceada

¿Qué tipo de tareas involucran a los estudiantes en procesos de resolución de problemas y promueven un aprendizaje con entendimiento? ¿Qué características tienen los problemas que favorecen una dinámica de resolución de problemas en pequeños grupos de aprendizaje cooperativo?

Al respecto, se han desarrollado una serie de trabajos que tienen como fundamento la filosofía de la resolución de problemas.

En los años de 1999 y 2000, un grupo de trabajo encabezado por Alan Schoenfeld, desarrollaron una serie de actividades enmarcadas en el Proyecto Paquetes de Evaluación Balanceada para el Currículo de Matemáticas (Balanced assessment Package for the mathematics curriculum (1999); Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum (2000), 1999; 2000), como una respuesta a la demanda planteada por el NCTM (1995) en los estándares para la evaluación de las Matemáticas Escolares. Con una nueva concepción de lo que es la evaluación, se pretende evaluar el desempeño matemático de los estudiantes de nivel medio superior de Norte América. Estas actividades hacen énfasis en los contenidos matemáticos y en los procesos de resolución de problemas, lo cual refleja, claramente, la visión contemporánea de los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares (NCTM, 2000, p. 262), cuyo principio de evaluación es: "La evaluación debe apoyar el aprendizaje de matemáticas importantes y proporcionar información útil tanto a los profesores como a los estudiantes."

Así, en los Paquetes de Evaluación Balanceada (Balanced assessment Package for the mathematics curriculum, 1999; Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum, 2000), se describen las características del significado de la evaluación y de su diseño utilizado.

> El diseño de evaluación debe: enfocarse en procesos e ideas importantes de la disciplina, en este caso, de las matemáticas escolares; proveer a los estudiantes la oportunidad de demostrar lo que saben y lo que pueden hacer; ser balanceado respecto al currículo del NCTM; funcionar como instrucción para estudiantes y profesores; y servir como parámetro para conocer las debilidades y puntos fuertes de los estudiantes. (p. vi)

La evaluación balanceada, tiene que ver con los aspectos situados en la cita anterior. Es decir, una evaluación que solo se enfoca en los cálculos no es balanceada, de la misma manera, una que se enfoca en patrones, o funciones excluyendo la geometría. La importancia de entenderlo como un balance respecto a estos contenidos, tiene que ver con la forma y el desarrollo del pensamiento matemático, y a las ideas plasmadas en el NCTM (2000).

Los Paquetes de Evaluación Balanceada (Balanced assessment Package for the mathematics curriculum, 1999; Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum, 2000), están organizados en torno a cuatro dimensiones: el contenido matemático; los procesos matemáticos; el tipo de tareas; y los contextos y circunstancias.

El contenido matemático se refiere a la inclusión de; números y cantidades; patrones, funciones y funciones; geometría, formas y espacio; manejo de datos, estadística y probabilidad; matemáticas discretas, entre otras cosas.

Los procesos matemáticos se refieren a las fases de la resolución de problemas, el razonamiento, por ejemplo, la modelación, formulación, transformación y manipulación, inferencia y capacidad de concluir, probar y evaluar. Además de la comunicación para reportar y poner a juicio prueba o resultados.

En cuanto al tipo de tareas, deben ser no rutinarias, problemas un tanto abiertos, que den cabida a una o más soluciones, con diferentes tipos de metas en las soluciones; es decir, puramente matemáticas o aplicaciones ilustrativas de matemáticas.

Finalmente, las circunstancias de la ejecución. Tiene que ver con la duración de las tareas, las formas de expresión o presentación, las formas de trabajo, y los modos de responsabilidad de los estudiantes.

Los Paquetes de Evaluación Balanceada contienen cerca de 30 tareas o problemas, en cada problema o tarea se da la información y descripción acerca de las matemáticas inmersas, procesos y conceptos, manejo de la evaluación y algunas respuestas típicas de los estudiantes. Además, se describe cada tarea, se enlistan los requerimientos matemáticos y conocimientos matemáticos previos, deseables en los estudiantes, para atacarla, los elementos esenciales del proceso y las condiciones en las que se resolverá.

Algunos aspectos importantes de las tareas contenidas en los paquetes, son: están planteadas de una manera que resulten mas o menos atractivas para los estudiantes, la mayoría se pueden abordar con diferentes acercamientos, algunas no tienen solución única y están planteadas en contextos reales, de diferente naturaleza. De esta manera se promueve en los estudiantes tres aspectos importantes establecidos en los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del NCTM (2000): que la tareas motiven a los estudiantes a expresar lo que saben; que los aliente a estar dispuestos a investigar lo que desconocen por medio de la discusión y el intercambio de experiencias; y que permitan recuperar los procesos de pensamiento empleados en sus intentos de solución.

Llama la atención, una pequeña guía incluida en los paquetes, explica y da sugerencias de de cómo usar los paquetes, explica acerca de las diferentes situaciones en las que se pueden usar, en las que destacan; su implementación en el proceso formal de evaluación bajo ciertas condiciones controladas; incluir tareas en algún punto del currículo; y para enriquecer clases de enseñanza en resolución de problemas.

A partir del 2003, se han estado implementando en México algunas de las tareas de los Paquetes de Evaluación Balanceada (Balanced assessment Package for the mathematics curriculum, 1999; Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum, 2000), para valorar su potencial y promover procesos de resolución de problemas, a través de grupos de aprendizaje cooperativo (Sepúlveda y Santos, 2006), quienes proponen una forma particular de instrucción descrita en el apartado anterior.

Por su parte Lesh et al. (2000) desarrollaron las llamadas actividades reveladoras del pensamiento, las cuales están diseñadas para que los estudiantes revelen los procesos de pensamiento que exhiben en su resolución:

> Las actividades reveladoras del pensamiento son a su vez actividades que implican la modelación matemática, la descripción, explicaciones y construcciones que los estudiantes generan mientras trabajan en ellas directamente, revela el hecho de cómo están interpretando las situaciones matemáticas que encuentran por medio de la manera en que estas están siendo matematizadas o interpretadas... Las actividades propuestas cuestionan a los estudiantes para que expliquen el razonamiento usado en sus soluciones de tal manera que revelen de forma efectiva el entendimiento que han tenido con base en los objetivos de la instrucción tradicional. Se pretende que los estudiantes desarrollen, por ellos mismos, una interpretación matemática explícita de la situación. (p. 593, 594)

Con esto se espera que cuando los estudiantes resuelvan este tipo de actividades revelen explícitamente el desarrollo de constructos o modelos conceptuales utilizadas.

Lesh et al. (2000) propone seis principios para la elaboración de actividades reveladoras del pensamiento:

1. Principio de la construcción de modelos. Las actividades deben servir para detectar los sistemas conceptuales que usan los estudiantes para construir o interpretar sistemas interesantes. Un modelo se caracteriza, principalmente, porque se usa un sistema para describir otro. Si se quiere que los estudiantes matematicen situaciones y lo logran, crean como producto un modelo en el cual una variedad concreta de sistemas de representación (por ejemplo: figuras; mapas; tablas; gráficas; ecuaciones) son necesarios con el objetivo de describir las relaciones, operaciones y patrones que forman parte del modelo básico que se quiere ilustrar. Para satisfacer el principio de construcción del modelo, una pregunta principal es: ¿la tarea pone a los estudiantes en situaciones donde ellos reconocen la necesidad de desarrollar un modelo por medio de interpretación de lo dado, metas, y posibles procesos de solución,

en una situación compleja de resolución de problemas?

2. Principio de la realidad, llamado también principio de significatividad. Es importante para los estudiantes el hecho de intentar tomar sentido a la situación basada en extensiones de su propio conocimiento y experiencia personal. Los desarrolladores del currículo tienen una forma de evaluar si este principio se satisface: ¿Esto podría suceder en una situación de la vida real?

3. Principio de auto-evaluación. Un sistema conceptual involucra también la selección, el refinamiento y la elaboración. ¿El enunciado del problema sugiere un criterio apropiado para evaluar la utilidad de soluciones alternativas? ¿Está claro el propósito? (qué, cuándo, por qué, donde, para quién) ¿Los estudiantes son capaces de juzgar por ellos mismos cuándo sus respuestas requieren de mejoras, refinamientos o extensiones para algún propósito dado? ¿Reconocerán cuando han terminado? o Los estudiantes necesitarán continuamente preguntar al profesor: "es suficiente con esto"? Este principio se aplica en el proceso de resolución de un problema en pequeños grupos: los estudiantes comienzan con diferentes ideas; luego, para progresar, el equipo necesita detectar deficiencias en sus formas de pensamiento, comparar ideas alternativas y seleccionar las que son más y menos útiles, integrar las fortalezas y minimizar las debilidades de las formas alternativas de pensamiento, extender o refinar las interpretaciones más prometedoras y evaluar las adaptaciones hechas.

4. Principio de la construcción de la documentación. Se plantea la pregunta: ¿Responder a la pregunta requerirá que los estudiantes revelen explícitamente su pensamiento al abordar la situación mediante la revelación de los datos, metas, posibles caminos de solución que toman en cuenta?, En particular, estas actividades ¿proveerán a los estudiantes una pista que pueda ser examinada para determinar que con qué y acerca de qué tipo de sistemas estuvo pensando el estudiante? La importancia de este principio radica en que fomenta la auto

reflexión. No es fácil para el estudiante ir más allá de su pensar; es decir, pensar acerca del propio pensamiento. Al respecto, Lesh et al. (2000) nos indica.

> Para facilitar la reflexión, una efectiva actividad reveladora del pensamiento debe encaminar a los estudiantes a exteriorizar sus procesos de pensamiento, tanto como sea posible. Un camino natural en que los estudiantes pueden exteriorizar sus formas de pensar, es el trabajo en grupos donde procesos de planear, monitorear y evaluar deben ser llevados a cabo explícitamente. Un método más efectivo es enfocarse en actividades en las cuales los productos que los estudiantes crean requieran ser divulgados automáticamente, acerca de qué tipo de objetos matemáticos, relaciones, operaciones y patrones están pensando. (p. 626)

Por ello es importante la justificación de los resultados de los estudiantes como un complemento de las ideas. Si los estudiantes son capaces de esto, evaluar la calidad de los resultados implica evaluar la calidad de los razonamientos matemáticos usados para obtener el resultado final.

5. Principio de compartibilidad y reusabilidad. ¿El modelo que se está desarrollando es útil solamente para la persona que lo desarrolla y aplicable solamente a la situación particular presentada en el problema, o provee una forma de pensar que es compartible, transportable, fácilmente modificable, y reusable? Los estudiantes que se enfrentan con la necesidad de ir más allá del desarrollo de herramientas personales a desarrollar formas generales de pensamiento.

6. Principio del prototipo efectivo. ¿La solución provee un prototipo útil para interpretar otra situación? Después de tiempo de haber resuelto un problema, ¿el estudiante piensa en él cuando se enfrenta a otra situación estructuralmente similar?

Las actividades reveladoras del pensamiento pretenden dar información más allá de los meros objetivos de instrucción, o del comportamiento del estudiante en la resolución de actividades que los libros de enseñanza tradicional proponen. Las actividades propuestas cuestionan a los estudiantes para que expliquen el razonamiento usado en sus soluciones, de tal manera que revelen de forma efectiva el entendimiento que han tenido con base en los objetivos de la instrucción tradicional. Se pretende que los estudiantes desarrollen, por ellos mismos, una interpretación matemática explícita de la situación; los estudiantes deben matematizar situaciones, lo que quiere decir, hacer descripciones simbólicas de situaciones significativas.

CAPITULO 3

METODOLOGÍA

Para llevar a cabo la aplicación, la descripción y el análisis de las ideas y procesos usados por los estudiantes en una dinámica basada en la resolución de problemas se pretende: establecer previamente: las tareas a aplicar, la forma de trabajo a desarrollar durante la aplicación, la recopilación de información basada en los tipos de evidencias que se utilizarán en el proceso y la descripción y análisis cualitativo de la información. Nos interesa especialmente investigar acerca del potencial de algunas de las tareas de aprendizaje planteadas o reformuladas del Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum (1999; 2000), las cuales reflejan la visión de los Principios y Estándares del NCTM (2000), que sugieren la importancia de que los estudiantes construyan sus conocimientos matemáticos al resolver distintos tipos de problemas que les motiven a expresar lo que saben e impliquen contenidos fundamentales del currículo.

Analizamos también los procesos de resolución que exhiben los estudiantes en cuanto a sus formas de pensar, el uso de los recursos, el uso de estrategias, y los diferentes caminos de solución.

Las actividades que fueron usadas para este propósito son: diseño de una escalera; tareas, televisión y sueño; diseño de una casa de campaña y la revista. Son tareas planteadas en los Paquetes de Evaluación Balanceada (Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum, 1999; 2000) fueron traducidas previamente y adaptadas para los estudiantes. Conversión de las unidades de medida y uso de términos adecuados a sus nivel de estudios.

Como forma de instrucción principal se usará la desarrollada por Sepúlveda y Santos (2006), cuyos principios básicos, como ya se mencionó anteriormente, se centran en las ideas del trabajo cooperativo en pequeños grupos de Hagelgans et al. (1995).

El estudio se llevó a cabo en la preparatoria "Ing. Pascual Ortíz Rubio" de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en dos momentos diferentes: uno en el mes de mayo y otro en el mes de diciembre del año 2010.

En el mes de mayo se aplicaron cinco actividades a estudiantes de segundo semestre de la preparatoria, de las cuales dos de ellas fueron pruebas piloto, que funcionaron como actividades previas a las que se pretendían aplicar para el estudio. Posteriormente, en diciembre, se aplicaron tres actividades a un grupo de primer semestre, realizándose dos pruebas piloto en forma de actividades previas.

En ambos momentos del estudio, los grupos estaban constituidos aproximadamente por treinta estudiantes, de los cuales se eligió un subgrupo de quince. Apoyados por el profesor titular de matemáticas en ambas materias, el M.C. Ignacio Morales González, cuya presencia y dedicación en sus grupos favorecieron el buen desarrollo de las actividades aplicadas.

De común acuerdo con el profesor Ignacio, se seleccionaron a quince estudiantes de un grupo numeroso de alrededor de 40, con el único fin de generar una ambiente que propiciara la toma de evidencias. También se tomaron en cuenta algunos aspectos, aunque no fueron totalmente decisivos tratamos de no involucrar otras variables como la indisciplina.

1. la conducta general mostrada durante el transcurso del semestre,

2. la actitud hacia las labores de la clase,

3. la participación en clase,

4. la comunicación con otros compañeros en el contexto académico, y

5. el número de tareas entregadas.

El estudio se llevó a cabo básicamente en tres fases: revisión de las tareas a aplicar, la experimentación y, el análisis de los resultados.

Revisión de las tareas a aplicar: en esta fase los problemas que serán usados para la aplicación se eligen y se reformulan, se resuelven intentando establecer los conocimientos matemáticos que se deben tener para abordarlos; los posibles caminos de solución y; las estrategias que se pueden tomar en un momento dado para avanzar o bien para resolverlos. Una parte importante en esta fase es la determinación de la forma de trabajo durante la aplicación de los problemas o tareas. Las fases del trabajo serán guiadas y monitoreadas por el profesor aplicador, en este caso el titular de esta tesis, y serán mencionadas al inicio de la sesión de las actividades, a los estudiantes.

La aplicación se hará con base en una forma de trabajo en el salón de clase sistematizada por Sepúlveda y Santos (2006), cuyo fundamento teórico está basado en el trabajo cooperativo (Hagelgans et al., 1995), que integra la resolución de problemas con el trabajo en pequeños grupos y el trabajo individual, lo cual favorece, en conjunto con el tipo de tareas, la externalización de las ideas en el proceso de resolución de problemas. Distinguimos una etapa de aplicación que conlleva una actividad previa, trabajo en pequeños grupos, presentaciones, discusión colectiva, trabajo individual, y si es necesario, una fase de entrevista.

Estos aspectos característicos favorecen el trabajo en pequeños grupos al igual que la comunicación y la discusión de las ideas matemáticas dentro de una comunidad de manera colectiva.

Actividad previa. El profesor da al grupo una breve introducción a la tarea, con el propósito de ubicar a los estudiantes en contextos similares a la actividad; destacando la importancia que representa su participación en el desarrollo de la sesión.

Trabajo en equipos. Se organiza en equipos de tres, en donde cada grupo haya estudiantes con distintos niveles de desempeño, de tal forma que tengan posibilidad de interactuar entre ellos y los demás equipos. Al concluir el periodo asignado al trabajo por equipos, cada uno entrega su reporte.

Presentaciones. Cada equipo presenta a toda la clase su solución a la tarea, permitiendo que los miembros de los demás equipos pregunten libremente a quienes exponen.

Discusión colectiva. El profesor promueve la discusión colectiva entre los estudiantes, con la idea de analizar los diferentes métodos de solución que cada grupo presenta y, cuando sea necesario realiza una sistematización de las ideas e identifica posibles extensiones al problema.

Trabajo individual. A partir de la discusión colectiva, los estudiantes vuelven a la tarea y aplican los nuevos entendimientos que se generaron como producto de la interacción, abordando individualmente la tarea.

Si es necesario se lleva a cabo una etapa de entrevistas, en donde los estudiantes que se distingieron por sugerir ideas relevantes de tal manera que se profundice en la situación.

La fase de análisis de los resultados se llevará a cabo principalmente con base en tres formas de evidencia, hojas de trabajo, videograbaciones y audio grabaciones. La observación en el aula, en donde el profesor aplicador observa la forma de trabajo de los diferentes equipos de tal manera que se distinga el camino que cada equipo está siguiendo en la resolución de la tarea, reforzará y guiará el análisis de las evidencias:

- La audio-grabación y la vídeo grabación será valiosa en el proceso, puesto que se espera que los estudiantes externalicen sus ideas, razonamientos y estrategias en el proceso de resolución, lo cual aporta información, obviamente importante, para el análisis. A cada equipo se le coloca una grabadora de audio en una zona donde se pueda captar perfectamente sus voces. Un asistente grabará vídeo de las sesiones completas enfocándose principalmente en los equipos en donde se perciban discusiones internas relevantes y en las presentaciones de cada grupo. Aunque no lo pareciera, ambas evidencias son complementarias, de tal manera que la videograbación puede dar más información acerca del desarrollo de las ideas en cada uno de los equipos ya sea dentro de la interacción oral o escrita en las hojas de trabajo.
- Otra de las evidencias son las respuestas en las hojas de trabajo, las cuales dan información acerca de: las formas de solución, las herramientas matemáticas usadas, el razonamiento lógico matemático que usan en el proceso y la interpretación de las soluciones matemáticas.

El papel del profesor se basa en el proceso en la observación y la mediación de las discusiones y, eventualmente, la sistematización de los procesos y/o las ideas matemáticas propuestas por los estudiantes. El profesor debe ser un guía, debe dirigir, optar por una actitud de motivador realizando preguntas a los estudiantes, y respondiendo solo las preguntas planteadas de tal manera que el problema no pierda el reto que lo caracteriza.

CAPITULO 4

PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1 Introducción

La investigación es de carácter cualitativo. Nos interesa describir y analizar los procesos de resolución de problemas y la efectividad de las tareas en los contextos descritos anteriormente.

Este capítulo contiene la descripción y análisis del trabajo que los estudiantes desarrollaron en el trabajo en pequeños grupos de aprendizaje cooperativo. Nos enfocamos principalmente en los acercamientos iniciales por resolver los problemas, los conflictos intermedios, las formas o estrategias usadas para superarlos, la discusión dentro de los pequeños grupos y en el grupo completo, la interacción de los equipos con el profesor y sus respuestas individuales.

Se analizan estas descripciones para establecer las características y aspectos relevantes de las actividades según el NCTM (2000), y el proyecto Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum, (1999; 2000). Se analizará la viabilidad de las actividades en temas concretos en el currículo de matemáticas, en una sesión de resolución de problemas.

Este capítulo se divide en cuatro subcapítulos básicos. El nombre de los subcapítulos coincide con el nombre de cada actividad que se aplicó durante la investigación.

El primer grupo a quienes se les aplicaron las primeras tres actividades, estuvo constituido por cinco equipos de tres estudiantes:

1. Equipo 1: Galilea, Mariana y Christian.
2. Equipo 2: Jessica, Liliana y Eliseo.
3. Equipo 3: Erick Iván, Josué, Zyanya (en quehaceres, televisión y sueño) y José Luis (en diseño de una escalera y diseño de casa de campaña).
4. Equipo 4: Héctor, Joaquín y José de Jesús.
5. Equipo 5: Erika, Daniela y Julio.

En otro momento, el grupo cambió y los integrantes del para la actividad llamada “la revista”, fueron:

1. Equipo 1: Claudia, Fabiola y Andrea.
2. Equipo 2: Denis, Vanesa y Hugo.
3. Equipo 3: Ana, Laura y Libertad.

4. Equipo 4: Karla, Abisaí y Adán.

5. Equipo 5: Adrián, Luis y Juan.

4.2 Quehaceres, televisión y dormir

Esta es una tarea corta en donde intervienen conceptos matemáticos como las gráficas de dispersión y el concepto de correlación.

Se les pide a los estudiantes analizar datos en una gráfica de dispersión dada, con el objetivo de crear otras, una situación en donde hay una relación entre dos cantidades, y una situación en donde no existe relación.

Como conocimientos previos los estudiantes deberían de conocer el análisis de datos básico así como la interpretación gráfica de una relación, incluyendo gráficas que muestran correlación positiva y gráficas que indican la no correlación de las cantidades dadas.

La actividad es la siguiente: Ana está realizando una encuesta en donde pregunta a un grupo de adolescentes cuanto tiempo pasaron haciendo sus quehaceres y cuanto tiempo viendo la televisión, por la tarde.

Se muestran enseguida los resultados en la gráfica de dispersión

1. ¿Cuál de los cuatro puntos A, B, C o D representan cada uno de las siguientes oraciones? Escribe una letra enseguida de cada oración.

2. Inventa una oración que represente el cuarto punto (el punto restante).

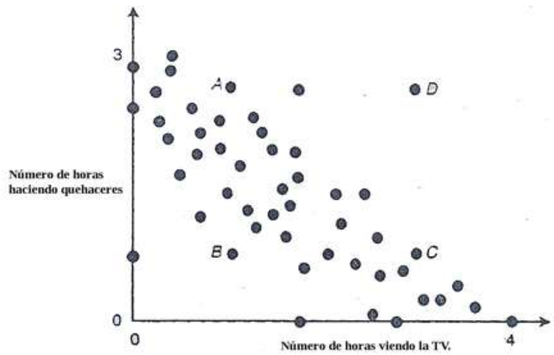


Figura 4.1: Resultados de la entrevista

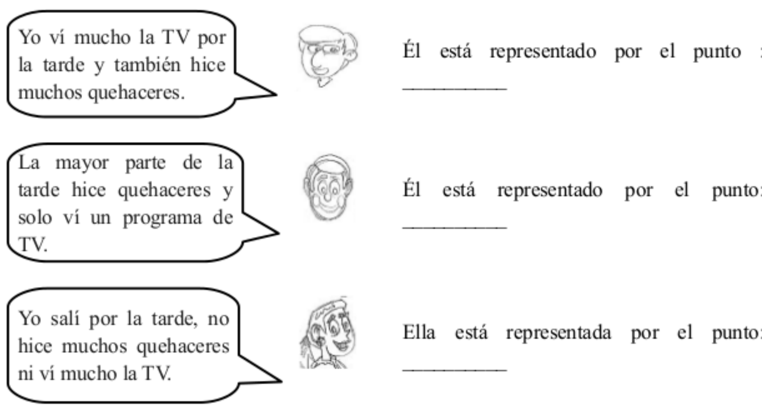


Figura 4.2: Enunciados de algunos entrevistados

3. ¿Qué nos dice la gráfica acerca de la relación entre el tiempo para ver televisión y el tiempo para hacer quehaceres?

4. Ana también hace una gráfica de dispersión para cada una de las siguientes situaciones.

   a. Los estudiantes con más edad pasan más tiempo haciendo quehaceres que los estudiantes más jóvenes.

   b. No hay relación entre el tiempo en que los estudiantes pasan viendo la televisión y el tiempo en que duermen. (En los ejes de abajo, muestra como pueden ser las gráficas de dispersión para estos dos casos).

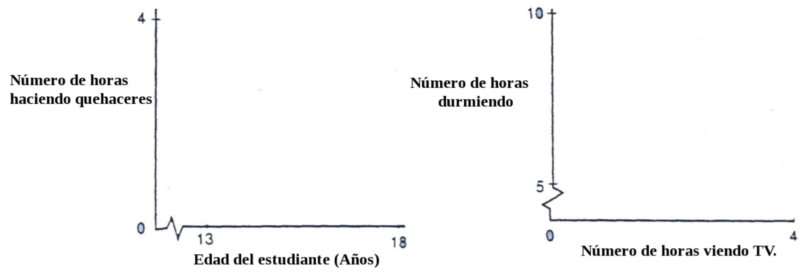


Figura 4.3: Gráficas para completar

4.2.1 Respuestas de los equipos

En esta actividad el equipo 1, estuvo integrado por Christian, Galilea y Mariana. En el proceso de resolución de la tarea, dos de sus integrantes (Christian y Galilea) tuvieron bastante comunicación, expresaron sus ideas y trataron de aclarar puntos o conceptos específicos, como el de relación, y la conexión entre los puntos dispersos o los puntos con cierta tendencia. Curiosamente una integrante (Mariana) permanecía la mayor parte en silencio tratando de entender lo que sus compañeros hablaban, anotando las respuestas y haciendo cálculos en la calculadora, es decir, su participación fue más activa en aspectos técnicos, no tanto o casi nada en los procesos de reflexión o de crítica a las ideas de sus compañeros.

Hagelgans et al. (1995) en base a sus experiencias comentan que cuando en un grupo de tres integrantes, uno se aleja, el rendimiento del grupo disminuye. Esto se refleja probablemente en el tiempo que tardaron algunos equipos para contestar la tarea, e incluso al final al no lograr establecer una idea más específica y más clara del concepto de relación.

En el equipo uno, una parte importante de la tarea, en términos de las ideas y formas de solución, fueron propuestas por Galilea y Christian Establecieron una descripción de la gráfica, con lo cual se puede inferir que entendieron el significado de la gráfica y supieron interpretarla de manera correcta en el contexto real. Conforme avanzaron, tuvieron la necesidad de entender el concepto

Figura 4.4: Discusión del problema por equipos

de relación, para contestar la parte final de la tarea. Esta discusión les llevó una buena parte del tiempo.

Galilea propone, al inicio, la idea de entender una relación como una “equivalencia”, una conexión entre los puntos. Este primer punto de vista desencadenó una reflexión por parte de Christian, quien propone la idea de una relación como una tendencia lineal, lo cual, como sabemos. Podemos establecer que estos estudiantes se enfrentaron con un conflicto cognitivo, entender el concepto de relación matemática para aplicarlo al contexto real, esto desencadenó una reflexión tanto interna (individual) como externa (dentro del equipo), intentaron asimilar sus ideas sobre el concepto de relación con respecto a lo que sabían hasta ese momento, sin embargo no llegaron a una definición que les satisficiera a ambos durante la etapa de interacción en pequeños grupos.

La tarea inicialmente no se complicó, rápidamente todos los equipos se dieron cuenta de la representación en la gráfica de dispersión y en la primera pregunta no fue difícil darse cuenta que los puntos más cercanos al eje vertical habían visto por poco tiempo la Tv, y viceversa. Así mismo, con los puntos respecto al eje horizontal. En la siguiente figura se muestra la respuesta a la pregunta 1 por parte del equipo 2. Todos los equipos contestaron de la misma manera.

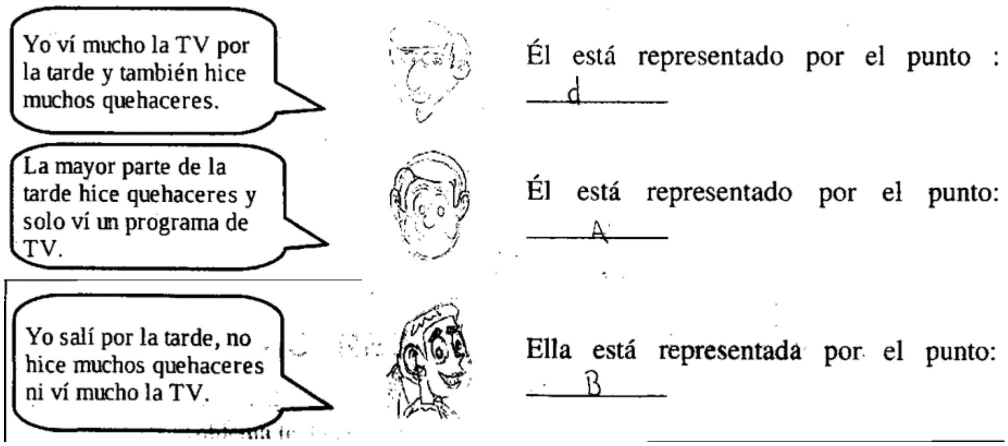


Figura 4.5: Respuesta del equipo 2 a la primera pregunta

En la segunda pregunta rápidamente pudieron encontrar una oración, todos los equipos coincidieron con esta respuesta, aunque no todos redactaron de la misma manera.

"Hice poco quehacer y vi mucho la televisión" (Equipos 3 y 5)

"La mayor parte de la tarde vi la Tv y realicé poco quehacer" (Equipos 1, 2 y 4)

La tercera pregunta (¿Qué nos dice la gráfica acerca de la relación entre el tiempo para ver televisión y el tiempo para hacer quehaceres?) representó un reto mayor para los equipos, ante las dudas de los equipo 1 y 4, el profesor aplicador profundiza un poco más, enfocándose a que entendieran la pregunta, es decir, les cuestionó acerca de si hay relación entre las horas que pasan las personas realizando estas actividades y como era esta relación. Exceptuando a los equipos 1, 2 y 5, los demás contestaron esta pregunta con una descripción de la gráfica. Por ejemplo, el equipo 4 contestó:

> *"Muchas personas hacen muchos quehaceres y ven poca Tv, y otras ven mucha Tv y hacen pocos quehaceres. Existe un mínimo número de personas que hacen las mismas horas haciendo quehaceres que ver Tv"*

El equipo 2 contestó:

> *"No hay relación entre ambos tiempos, ya que unos pasan más tiempo haciendo quehaceres y otros viendo la Tv"*

Mientras que el equipo 1 contestó que "hay una relación de igualdad", pero no supieron argumentar y justificar esta afirmación. Probablemente, aunque nunca la expresaron, tuvieron una idea muy parecida a la del equipo 1, conformado por Galilea, Mariana y Christian. Quienes desde el momento en que el profesor se acercó para consultar dudas acerca de la pregunta, mostraron la necesidad de entender la palabra relación.

Galilea llama la atención del equipo y les hace ver su punto de vista con los siguientes comentarios:

> *GALILEA: Es que mira... un par de personas hace mas quehacer que ver la televisión y otro tanto ve más la televisión que hacer quehacer, ahora, hay gente que hace mucho que hacer y ve mucha televisión y hay otra que está ni ve mucha televisión ni hace mucho que hacer está, en los puntos medios, hay una equivalencia entre estos dos...*

> *CHRISTIAN: Ya te entendí... ¿una equivalencia?, pero como lo puedes explicar mejor.*

Posiblemente la tendencia lineal de los datos es lo que Galilea describe como una "equivalencia", su compañero (Christian) no entiende muy bien.

Pareciera que Galilea estaba tomando en cuenta solo algunos puntos muy específicos de la gráfica para dar esta explicación tan general, por lo que el profesor aplicador les comenta que pueden tomar en cuenta todos los puntos no solo algunos. Christian hace notar que la mayoría (de los puntos) están a la mitad. Galilea insiste en que la relación es una "equivalencia" pero no sabe definir ni delimitar exactamente lo que quiere decir, además, el equipo no llegan a un acuerdo, dejan la pregunta y pasan a la siguiente.

El equipo 1, no llega a un acuerdo, Galilea no sabe explicar ni argumentar sus ideas con Christian, mientras que Mariana no aporta nada, solo escucha e intenta entender lo que sus compañeros dicen. El tiempo los apresura y la indeterminación los hace pasar a la última cuestión, sin embargo, de nueva cuenta se enfrentan con la misma necesidad de entender el concepto de relación, aún así, intentan contestar.

Recordemos que la última pregunta tiene que ver con las tendencias edad-tiempo haciendo quehacer y tiempo de ver Tv-tiempo de sueño, en términos de una oración, los estudiantes tienen que representar gráficamente los puntos o encuestados que llevaron a las afirmaciones.

En el equipo 1, Christian sugiere que la gráfica del primer inciso tiene que tener tendencia a crecer conforme los jóvenes tienen más edad. Christian dice que la relación la entiende como si los puntos estuvieran alineados.

Para el inciso a; Christian sugiere que cuando más tiempo pasa debe haber más puntos hacia arriba en la gráfica, pero también hace notar, considerando la gráfica, que piensa que algunos jóvenes de más edad también hacen poco quehacer, es decir, mientras los jóvenes tengan más edad hay mayor número que pasa más tiempo haciendo quehacer.

Para el inciso b; en esta parte después de analizar un punto de la gráfica inicial, en la que según

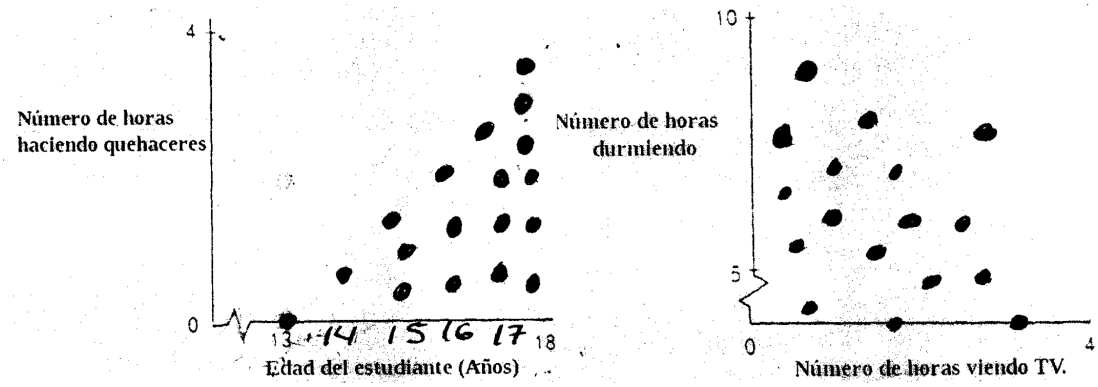


Figura 4.6: Gráficas de dispersión del equipo 1

Christian ese punto no tiene relación con los demás (el punto D al parecer), de tal manera que Galilea pregunta:

GALILEA: ¿Cómo puedes demostrar que no hay relación?

CHRISTIAN: Poniendo puntitos por donde quiera. (Véase la Figura 4.6.)

En ese momento se dan cuenta de que uno de los puntos de la gráfica que realizaron en el inciso anterior estaba mal colocado, porque Christian cambia de opinión y ahora afirma que si hay relación, entonces el primer punto correspondiente a un joven de 13 años, debe estar sobre el eje horizontal pues no hace quehacer.

Regresan de nuevo al inciso a:

GALILEA: Por eso es lo que te digo estaba bien como yo la tenía.

CHRISTIAN: Una línea.

GALILEA: Sí, una línea... Yo lo que entiendo con el concepto de relación es que hay una equivalencia, ¿no crees?

Silencio...

CHRISTIAN: Una relación más bien es una línea, ¿qué opinas? ... es que no me explicas.

Galilea no le sabe explicar muy bien lo que entiende y sin embargo pasan de nuevo al inciso b.

Al pasar el profesor aplicador para observar, el equipo expresa que no entiende bien el concepto de "relación", el aplicador motiva a que den una explicación o una definición, de tal manera que Galilea insiste que *"hay una equivalencia, una conexión entre los puntos… "*. El tiempo no alcanzó para que ellos pudieran establecer otras ideas.

El equipo 3, mostró un procedimiento diferente. En el primer inciso, dividieron sus ejes coordenados en dos partes, una parte inferior y una parte superior, pusieron algunos puntos en la parte inferior mas cargados hacia la izquierda y en la parte superior puntos cargados más hacia la derecha. Sin embargo, en el segundo inciso, muestran la misma tendencia que el anterior, como se muestra en la figura 4.7. A cada parte le asocian un inciso, lo cual indica que confundieron las variables en ambos casos y que no tenían una idea de la no correlación.

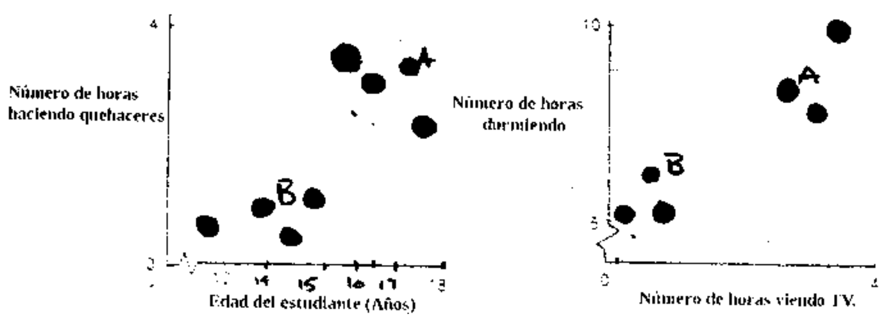


Figura 4.7: Gráficas de dispersión del equipo 3

Por otra parte, el equipo 4 y 5, dibujan, en el primer inciso, una tendencia lineal con pendiente positiva que parte del origen. El equipo 4, dibuja una línea recta como tal, mientras que el equipo

4 dibuja algunos puntos en tendencia lineal. Y muestran la no relación con puntos al azar en la gráfica del segundo inciso, ver figuras 4.8 y 4.9.

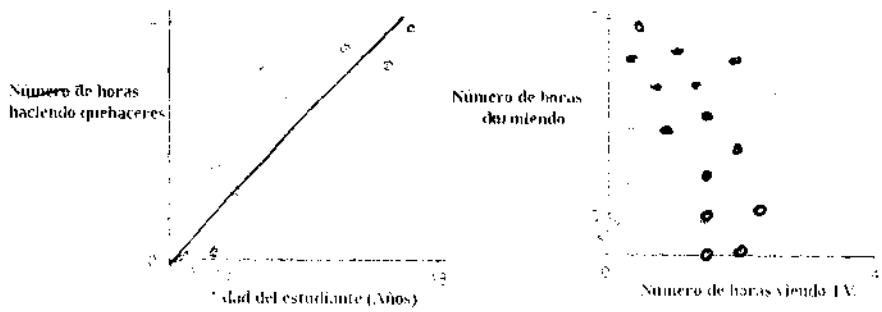


Figura 4.8: Gráficas de dispersión del equipo 4

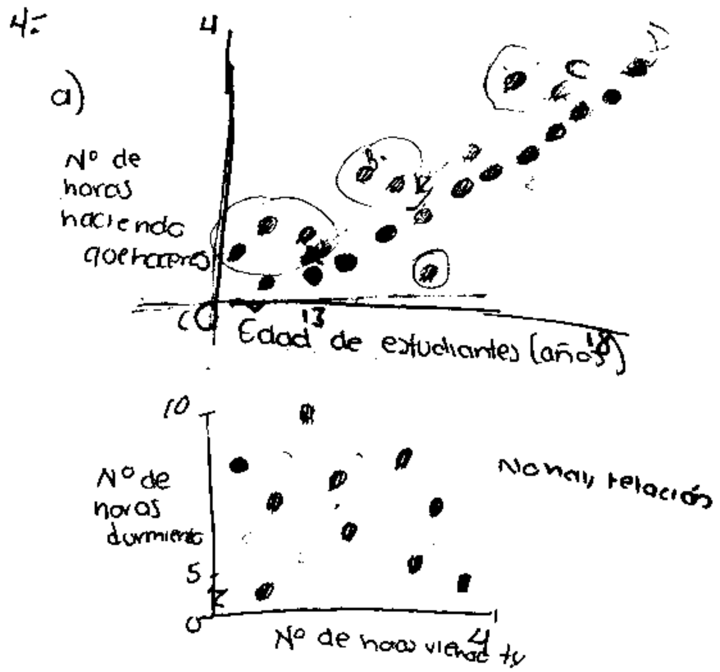


Figura 4.9: Gráficas de dispersión del equipo 5

4.2.2 Discusión colectiva

La discusión se enfocó básicamente en dos cuestiones, en las gráficas de la pregunta 4, y en las ideas acerca del concepto de relación.

Figura 4.10: Discusión colectiva

El equipo 1, expone sus ideas por medio de Galilea quien dibuja sus gráficas de dispersión de la pregunta 4 (ver figura 4.6), entonces Jéssica le pregunta:

Jessica: A ver en la primera (gráfica). Dice que mientras más grande, mas quehacer, pero ahí estas señalando que entre más grande menos quehacer.

Galilea: Sí.

Jessica: Y los de hasta abajo (los puntos), ¿qué hacen ahí? Porque estás señalando que hay personas que son mayores y que hacen menos quehaceres.

Zyanya: Aquí se refiere a que entre más edad, mas quehaceres haces, y por así decirlo, aquí tenemos de 18 años y aquí de 13 (señala las marcas en el eje horizontal) y estás *poniendo los puntos en la edad mayor (dirigiéndose a Galilea), que están realizando menores quehaceres.*

Christian: (Defiende sus resultados) También hay en el máximo.

Galilea: Pero ahí no dice que todos los mayores hacen más quehaceres, solo dice que la mayoría.

Jessica: Dice que los estudiantes con más edad.

Galilea: Pero no que todos, bueno no todos.

Erick: No, sí está bien.

Zyanya: Ah ya entendí, ya entendí.

Galilea y Christian defendieron su gráfica argumentando que ciertamente no todos, pero había estudiantes en su gráfica que tienen más edad y que también pasaban menos tiempo haciendo quehaceres, incluso en su gráfica (figura 4.6) Christian argumenta que también hay estudiantes con más edad que pasan más tiempo haciendo quehaceres.

Zyanya y Erick, del equipo 2, se convencen pero Jessica no está tan convencida, aunque no replicó nada más. Más adelante, cuando Jessica expone sus resultados muestra la siguientes gráficas para la pregunta 4.

Lo cual explica, un poco la inconformidad de Jessica, quien dibuja una tendencia completamente lineal en su primera gráfica, según ella, siguiendo lo que dice la afirmación del enunciado 4b.

Cuando Erick pasa a exponer los resultados del equipo 3, José lo interroga para la pregunta 3, que contestaron que no había relación. Erick no supo que contestar. El profesor insiste en que, al menos, platiquen algo de lo que pensaron para decir que “no hay relación”. Erick comenta e inicia la discusión.

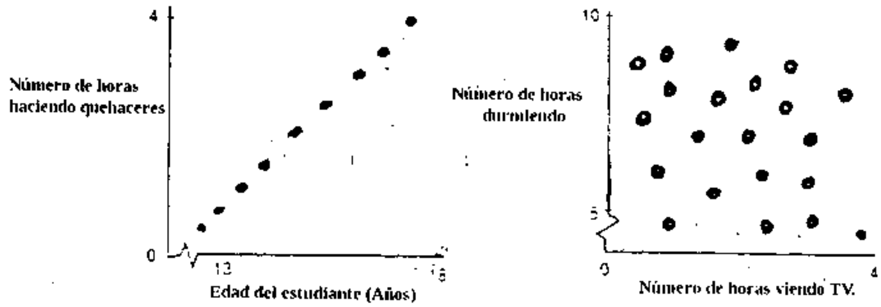


Figura 4.11: Gráficas de dispersión del equipo 2

Erick: Bueno, sí hay relación sería, duerme mucho y ve poca televisión; y si no hay relación sería, ve mucha televisión y duerme mucho y viceversa.

Jessica: No está preguntando si hay relación entre dormir y ver la televisión, está preguntando si hay relación entre hacer quehacer y ver la televisión.

El profesor, sabiendo que el equipo 1 ha discutido mucho el concepto, le pregunta a Galilea.

Profesor: Tú ¿por qué dices que no hay relación?

Galilea: No hay relación, porque no hay una equivalencia o sea los puntos están dispersos como el mismo nombre de la gráfica dice.

Profesor: ¿Están dispersos estos datos, estos puntos? (señala la gráfica original del problema)

Galilea: Sí.

Profesor: ¿Cómo están estos datos? (segunda gráfica del equipo 1, ver figura4.6)

Julio: Dispersos.

Profesor: ¿Y estos? (primera gráfica del equipo 1, figura 4.6)

Jessica: En orden ascendente.

Profesor: ¿Entonces estos? (gráfica original del problema)

José: Esos están como línea.

Jessica: No, están dispersos.

Profesor: A ver, entonces a qué conclusión llegamos.

El profesor, les cuestiona acerca de la tendencia de las gráficas que ellos encontraron y las compara con la gráfica de los equipos en la pregunta 4. La idea de la mayoría, en particular de equipo 1, es que los datos están dispersos en la gráfica original, que hay algunos puntos que se salen de la tendencia, esto les indica que los putos están dispersos. Podemos verificar esta justificación en el último diálogo entre Zyanya, Jessica y Galilea, en donde Zyanya no convence con su argumento, Galilea y Jessica siguen más o menos el mismo punto de vista.

Zyanya: Pongámoslo así, dividimos la tabla a la mitad (gráfica original) así, abajo hay más personas que hacen poco quehacer y mucho la televisión, mucho la Tv y poco quehacer. Por eso yo, según e Iván (Erick), decimos que sí hay relación conforme a esta tabla. Ese es mi punto de vista.

Jessica: No existe una relación, porque el punto D está fuera de la relación que ella está haciendo, entonces ya no quedaría.

Galilea: No, es que prácticamente para evitarte problemas quieres dividir la tabla, pero no, tienes que contar todo junto.

Jessica: El punto D aparte, se está saliendo de tus cuentas.

Zyanya: . . . Ay, bueno ya.

4.2.3 Análisis de las respuestas a la tarea

El equipo 1, fue uno de los equipos más activos, en cuanto a la discusión y la reflexión de las ideas propuestas. Durante la discusión en el proceso de solución, los estudiantes de este equipo mostraron tres características esenciales del aprendizaje cooperativo: la comunicación de las ideas individuales; la reflexión de las ideas y; la discusión. Sin embargo, la ausencia de uno de sus integrantes se hizo importante al terminar la actividad, presionados con el tiempo.

A pesar de esto lograron alcanzar una discusión y llegar a un acuerdo en cuanto al concepto específico de “relación entre dos variables”. Christian y Galilea explicaron de manera muy intuitiva en el equipo lo que entendían por “equivalencia” y “línea”, respectivamente. Por lo tanto no hubo argumentos para sustentar las ideas de cada uno, y no hubo una conclusión justificada. En la discusión colectiva, Galilea argumentó que no puede haber relación porque hay dispersión. Aunque, Jessica dice que hubo puntos fuera de la nube del centro.

Si uno se pregunta, ¿En qué pensaba Galilea cuando dice que una relación es una equivalencia? Podemos pensar que ella se refería, tal vez, a la dependencia entre los datos.

Una relación en estadística indica el grado de dependencia entre dos variables, la dependencia puede ser funcional. El coeficiente de correlación entre dos variables nos indica que tan fuerte es la dependencia. En el problema se muestra la gráfica de datos con tendencia a decrecer en forma lineal, podemos decir que se trata de una dependencia lineal de los datos, incluso podemos ajustar una línea que modele el comportamiento de las variables, con respecto al coeficiente de correlación, puesto que los datos no están muy dispersos.

En este sentido el término de equivalencia usado por Galilea para describir la relación entre ambas variables, no es una idea tan alejada al concepto de relación. Tal vez Galilea intenta hacer notar que existe una dependencia entre los datos, una dependencia de algún tipo, probablemente no sabe qué tipo, pero sabe que hay una dependencia, pero no sabe expresarlo para que su compañero entienda.

Si esta idea se complementa con la idea de Christian, quien usa el término "línea" para describir la relación, podemos inferir que a lo que se refería el equipo uno es que existe una dependencia lineal en estos datos. Sin embargo, no saben expresar estas ideas con mayor claridad, por lo que no pudieron llegar a un acuerdo.

Esto se refleja en la respuesta ilustrada en la figura 4.6, en la cual los estudiantes no encontraron la forma de representar la dependencia lineal creciente, de mejor manera.

El equipo 2, tuvo en Jéssica una líder que intentaba reflexionar y discutir algunas ideas, pero sin argumentos para convencer a su equipo, fue muy importante para que el equipo lograra terminar la actividad. Supieron hacer de forma correcta la interpretación de los datos, incluso realizaron las gráficas de dispersión de manera adecuada intentando trazar la tendencia de los datos según el enunciado, sin embargo, tuvieron problemas para entender el concepto de relación y expresarlo en forma verbal, lo cual se observa en la pregunta 3, en la que contestaron que no-relación en la gráfica inicial de la actividad. Ya en la discusión colectiva Jessica, al parecer entendió un poco más lo que entendían los demás acerca de una relación, y tomó su postura.

Los equipos 4 y 5, no discutieron el concepto de relación, se mostraron más pragmáticos y se enfocaron en solo responder. Aunque, se observa que sus respuestas tienen sentido, no hay más evidencias de que entendieron o entienden el concepto de la relación, fueron guiados por las preguntas y fueron muy descriptivos, lo cual ayudó solo a una buena interpretación de los datos.

En cuanto a la tarea aunada al trabajo en pequeños grupos, resultó una combinación importante para que la mayoría practicara su habilidad para interpretar datos, reflexionara acerca de la relación entre dos variables, y sobretodo discutiera sus ideas, se obligara un poco a buscar argumentos para convencer a sus compañeros. Creemos que esta actividad podría ser enriquecedora para acercar a estudiantes de bachillerato al estudio de la estadística descriptiva básica y al estudio de la correlación. La discusión colectiva mostró un gran avance en cuanto a las ideas iniciales de los estudiantes en sus equipos y pudieron debatir sus ideas acerca del concepto de relación intentando argumentar eficazmente sus ideas.

4.3 Diseño de una escalera

Es una tarea larga en donde intervienen fuertemente el concepto de pendiente aplicado al contexto de una escalera, además el manejo o al menos la noción de desigualdades es fundamental para la resolución de este problema.

El principal objetivo es diseñar una escalera que cumpla con ciertas normas, determinando cuantos escalones son requeridos y cuales deben de ser sus medidas.

Durante el proceso de solución el estudiante debe establecer ciertas suposiciones, por ejemplo, el número de escalones o si se desea, el tamaño de la huella, que lo lleven a resultados lógicos dentro del contexto.

El problema se les presentó a los estudiantes como en el siguiente párrafo.

Diseñar una escalera que tenga una elevación total de 335 cm., y que tome en cuenta las normas del diseño que se muestran en la parte de abajo de la página.

Comunica y escribe claramente las suposiciones que tomaste para establecer tu diseño:

¿Cuántos escalones tiene tu diseño, y cuál es el tamaño de la pisada (o huella) y elevación (o contrahuella) de cada escalón?

Incluye tus cálculos. Muestra como tomaste en cuenta cada una de las normas.

Normas para diseño de escaleras: La pendiente de la escalera debe estar entre 0.55 y 0.85. El doble de la elevación mas el recorrido del escalón, debe estar entre y 63.6 cm y 60.9 cm, y no debe haber escalones irregulares, cada escalón debe ser del mismo tamaño.

Algunos términos usados: Pisada o huella: Parte horizontal de un escalón. Elevación o contrahuella: Parte vertical de un escalón. Pendiente: Medida de la inclinación de la escalera, se encuentra dividiendo la longitud de la elevación entre la longitud de la pisada.

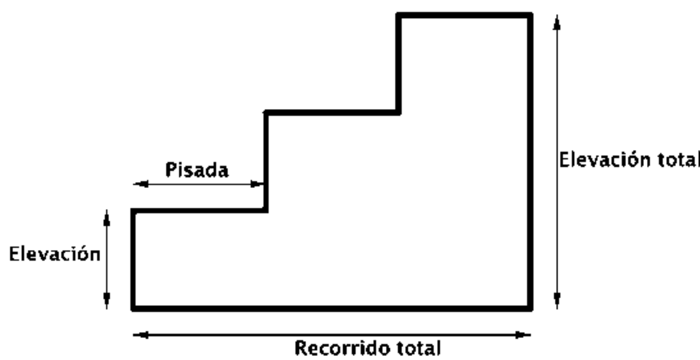


Figura 4.12: Variables del problema

4.3.1 Respuestas de los equipos

Al inicio del trabajo en equipos, todos los grupos presentaron problemas para entender lo que significaba el concepto de pendiente. El profesor participó acercándolos hacia el concepto como una medida de la inclinación de la escalera. Incluso en el equipo 1, Galilea expresa que mientras la

Figura 4.13: Discusión por equipos

pendiente se acerque a 1, la inclinación se acerca a un ángulo recto, lo cual es erróneo, sin embargo parten de esa idea.

De nueva cuenta el equipo 1, fue uno de los más activos en esta actividad en cuanto a la comunicación de sus ideas y reflexiones. Tuvieron dos acercamientos a su solución: la primera, propuesto por Galilea en donde establecían la huella y la elevación de tal manera que se cumpliera la segunda norma y continuaban sus cálculos para obtener la medida de la elevación y la pisada de cada escalón; la otra, propuesta por Christian donde proponen un número de escalones y que divida la elevación total para así obtener la elevación de cada escalón, luego aplicar la segunda norma para encontrar la pisada.

Ni los intentos con el método de Galilea, ni los intentos con el método de Christian fueron fructíferos. El método de Galilea fracasó al malinterpretar la segunda norma del diseño de escaleras, a saber, el doble de la elevación más el recorrido, tomaron el doble como una mitad. Esto pudo haber pasado por algún descuido o por mala interpretación del enunciado, recordemos que la transformación de los enunciados en expresiones algebraicas (matematización) representa, generalmente, un gran dificultad para la muchos de los estudiantes.

Después de una inspección personal, Galilea toma la palabra en el equipo.

> *Galilea: Debemos comenzar por dividir las dos cantidades en las que deben estar el doble de la elevación más el recorrido... La pisada va a medir* $2/3$ *y la elevación* $1/3$*... Y ese* $1/3$ *entre* 2 *para sacar el doble.*
>
> *Christian: Pero es que debe de cumplir con esta norma (elevación total* 335*cm)... Mira, dividimos el total* 335 *de escalones y que no te excedas entre un número aproximado* 60.9 *y* 63.6 *de medida... Dividí* 335*, que es la elevación total entre un número aproximado de escalones que yo pensé (5 escalones), me sale* 67.67 *estos dos números (norma* 2*) que es lo que nos está pidiendo ¿no?*

Galilea dice que el 67 no está entre los números pedidos. Intentan con otro número de escalones y se confunden al no encontrar una división cuyo resultado esté entre estos dos números. Y Galilea afirma que lo que ella está haciendo está bien a lo que Christian reclama que no entiende o no sabe si es correcto lo que ella hace. Entonces Galilea intenta explicar de nuevo, y comienza a hacer cálculos en los cuales llega a que deben ser poco mas de 30 escalones. Divide $63,3/21.1$ y luego dice que eso debe medir la elevación de cada escalón pero, luego divide entre 2 lo cual no argumenta. Luego Christian le pregunta que cuántos escalones salen con esa medida y como $21,2/2 = 10,6$, entonces salen más de 30 escalones. Siguen intentando con más números entre estas dos cantidades procediendo de la misma manera.

En resumen, las ideas de Galilea están planteadas de la siguiente manera: Si p es la longitud de la pisada y e es la es la longitud de la elevación, de cada escalón, entonces:

$$2e+p=x=2(\frac{1}{6}x)+\frac{2}{3}x$$

Donde $60.9 \geq x \geq 63.6$

De esto, y la argumentación de Galilea se sigue que:

$e=1/6x$; $p=\frac{2}{3}x$.

Observe que si elegimos un valor de x que cumpla la condición obtenemos con esto valores para e y para p automáticamente haciendo las operaciones. Luego a petición de Christian multiplican el número de escalones por la elevación de cada escalón, donde el número de escalones en propuesto por él mismo. Este número debe ser o debe acercarse mucho a 335 cm.

En otro intento Christian sugiere dividir $335/n$, para calcular la elevación, y dice que n es un número de escalones supuesto por él, a saber 32, luego este resultado se multiplica por 2. Luego multiplican por 2 de nuevo para calcular el recorrido, sin embargo no argumentan este procedimiento final. Luego observan que la suma está entre la norma y lo reportan de manera austera.

Al calcular la pendiente de su diseño se dan cuenta que es muy poco, 0.25, a lo cual explica Christian "tenemos un error... se ve así como que bien hacia abajo", a lo que Galilea expresa que necesitan intentar con otro número de escalones.

No muy convencidos de lo que habían hecho continuaron con otro intento en donde suponían $x=63.6$ y lo dividían entre 2 para obtener la pisada, dividiendo entre dos, suponiendo que era una de tres partes, obtienen la elevación ($p=31.8$, $e=15.9$), así obtienen una pendiente 0.5 en 21 escalones aproximadamente. Esto fue un acercamiento final en el cual los estudiantes no llegaron a resolverlo del todo solo obtuvieron la longitud de la pisa y la longitud de la elevación para obtener la pendiente. Cabe destacar que incluso ellos confundieron las divisiones por dos que hicieron.

La estrategia usada por Galilea tiene una dificultad extra en comparación con el método usado por Christian, cuando Galilea propone una elevación para un escalón individual, no se asegura que al realizar el cálculo del número de escalones dará como resultado un número entero, y así no se viole la tercera norma del diseño de la escalera.

El equipo 2 primeramente, discute un poco acerca de la inclinación de la escalera y el concepto de pendiente, el profesor aplicador apoya un poco a los estudiantes tratando de explicar el concepto de manera básica y ejemplifica, les indica que la pendiente mide la inclinación de una recta. Luego ellos tratan de explicarse como pudiera estar la escalera, y una compañera lo entiende como sigue "(pendiente) la medida de la inclinación de la escalera, que tan parada o acostada está".

En su primer acercamiento, Jéssica supone que en la expresión $2e+p$ hay tres partes iguales en las cuales la elevación es una tercera parte y la longitud de la pisada es otra tercera parte, lo que hace es tomar 60.9 y dividirlo por tres para obtener la elevación del escalón (20.3 cm), por lo tanto la longitud de la pisada es 20.3 cm. Eliseo comenta que la elevación debe ser más chica que la pisada, Jéssica le pregunta el por qué, el profesor aplicador interviene y no llegan a argumentar esa idea.

Jéssica reflexiona acerca de este cálculo y concluye diciendo.

> *Jessica:* 20.3 *no puede ser porque al dividir* 20.3 *entre* 20.3 *ya no nos da la pendiente que nos pide... dividir la elevación* 335 *entre el número de escalones.*
>
> *Liliana: No puedes dividirlo porque no nos dan el dato para hacerlo...*
>
> *Jéssica: Podemos suponer un número (para el número de escalones). (Comienza con* 5 *y Jéssica se da cuenta de que* 67 *es mucho para la altura de cada escalón).*

El equipo 2, no pudo terminar la tarea, solo dieron un valor aproximado para las medidas de cada escalón.

En lo que respecta al equipo 3, Erick comienza sugiriendo que se saque la elevación tomando una medida que esté entre los números dados en la segunda norma del diseño, a lo cual lo multiplica por dos confundiendo esa norma, que implica una relación y no una medida, con la elevación. Nunca argumentó sus cálculos.

José interviene y propone una idea que rápidamente es aceptada por Erick. Él dice que tienen una elevación total de 335 cm. Y que tienen que dividirlo entre el número de escalones que quieren que tenga su diseño para luego, para encontrar la elevación que cada escalón debe tener. En un primer intento escoge, 15 escalones, así:

$$335/15 = 22.3$$

es la elevación de cada escalón, esto a sugerencia de Erick lo multiplican por 2 (44.6).

Después de una discusión acerca de la relación entre elevación y pisada deciden que deben tomar en cuenta mas escalones. José sugiere ahora 20 escalones, haciendo los cálculos, la elevación de cada escalón es de 16.75 cm, José remarca en decir que la pisada será más grande, ahora toman un número entre 60.9 y 63.6 para restarla al doble de la elevación obtenida anteriormente. Eligen 62 cm:

$$62 - 33.5 = 27.5cm.$$

Se da cuenta José que es muy corta la pisada y les dice que habrá que tomar más escalones, Erick le dice que van bien, "hay que hacer una pisada que nos dé". José contesta y le dice que hay que tomar más escalones para que la pisada sea mayor porque la pisada es muy chica.

Eligen ahora 25 escalones: $335/25 = 13.4$

El doble es 26.8, y ahora eligen: $63 - 6.8 = 36.2$

> *José: Ya sería más larga... yo diría que está bien*
>
> *Erick: Sería mucho escalón.*

José confunde el símbolo que representa el doble y lo pone como al cuadrado, sin embargo al estar haciendo las operaciones las hace de manera adecuada multiplicando por 2.

Finalmente, comprobaron que la elevación total sea 335 multiplicando la elevación de cada escalón por el número de escalones.

Erick retoma el cálculo $335/25$, la pendiente con los cálculos previos obteniendo ($13.4/36.2 = 0.3$), José se da cuenta de que no cumple la norma del diseño.

> *José: estamos mal, porque la pendiente debe estar entre* 0.55 *y* $0.85\ldots$ *entonces hay que hacer más larga la elevación.*

José está un tanto confundido y piensa que dejando la pisada de 29 cm podría quedar. Sin embargo Erick insiste que deben tener menos escalones, José dice que lo pueden dejar en 20, por lo que haciendo los cálculos:

$$335/20 = 16.75$$

y

$$16.79/29.5$$

.

Josué hace el cálculo restando: $63-(16.75)=0.56$

Lo cual cumple con las normas del diseño, así la elevación es 16.75 cm, la pisada de 29.5 y el doble de la elevación más el recorrido 63 cm, el recorrido total 590 cm, está dentro del rango.

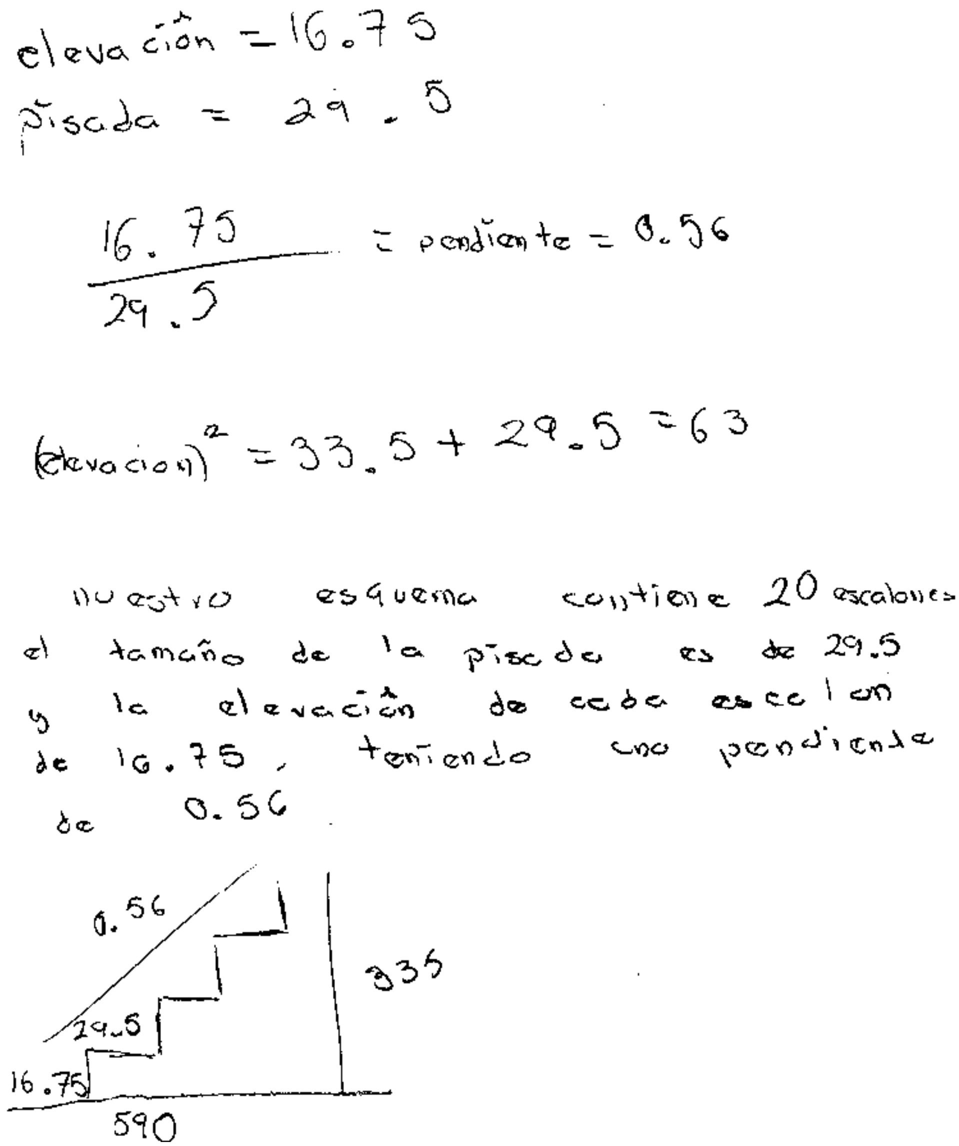
El equipo 4 comienza con un acercamiento intuitivo.

> *José: ¿cuánto creen que mida un escalón? (Se refiere a un escalón de construcciones reales)*
>
> *Arturo: Como* 1 *m. de largo y de alto como* 50 *cm., ¿No?*
>
> *Héctor: Puede ser posible.*

Comienzan tratando de encontrar, intuitivamente, la medida de la pisada y la elevación que den una pendiente que esté dentro de las normas, usan; para la elevación 17 cm.; y para la pisada 28.5 cm. Calculando la pendiente con estos datos es, 0.59, que está dentro de las normas, además observan que la otra norma también debe cumplir es decir 2 veces la elevación mas la pisada que les da un total de 62.5 cm. Lo cual está dentro de las normas también.

José se da cuenta de que si dividen la altura total de la escalera entre la elevación de cada escalón pueden obtener el número de escalones.

> *José: ¿Qué no para sacar la altura tienes que dividir este número entre la elevación*



elevación = 16.75

pisada = 29.5

$$\frac{16.75}{29.5} = \text{pendiente} = 0.56$$

$$(\text{elevacion})^2 = 33.5 + 29.5 = 63$$

nuestro esquema contiene 20 escalones el tamaño de la pisada es de 29.5 y la elevación de cada escalon de 16.75, teniendo una pendiente de 0.56

Figura 4.14: Resultados del equipo 3

para ver cuántos escalones van a salir? Tiene que salir un número natural, sin fracción.

Sin embargo, no está bien convencido, para lo cual, buscan que el profesor les ayude a decidir si este método es correcto. El profesor les pide tomar esos cálculos y verificar las normas del diseño.

Hacen el cálculo y les resulta 19.7 escalones. José se da cuenta de que no es un número entero.

> *José: … Los escalones deben ser* 19 *o algo así que no pueden tener decimales.*
>
> *Héctor: ¿Por qué?*
>
> *José: Para que todos los escalones queden a la misma elevación y la misma pisada y no queden unos más grandes que otros.*
>
> *Arturo: ¿Y por qué entre* 17*? ¿Por qué no* 19 *u otro?*
>
> *José:* $17/28.5$ *te da* 0.59 *y es lo que te pide la pendiente... y la otra norma es esta, el doble de la elevación... lo interrumpe*
>
> *Arturo: Ya, ya, ya le entendí entonces para que te salga la elevación y el recorrido del escalón debes de poner otros para que te dé entre esto (el número de escalones sea entero), porque tu pusiste* 28.5.

José explica nuevamente la división que hizo al principio.

Después de un largo silencio, el profesor aplicador les invita a seguir en su idea, y a escribir sus resultados. José se da cuenta de que cambiado un poco la elevación y la pisada sale un resultado más razonable, y busca un número que le de tal resultado. Les explica:

> *Mira si pones* $17.63*2 = 35.26+28 = 63.26$ *que está entre esos dos números... y después pa' sacar la pendiente divide* $17.63/28 = 0.62$ *y ¿no está entre estos números? y luego lo que dice ira, no debe haber escalones irregulares cada escalón debe ser del mismo tamaño, y si divides los* 335 *fíjate...* 335 *entre la elevación* 17.63 *y fíjate cuánto nos da,* 19 *escalones (19.001, por milésimas) casi perfectos... yo digo que es así.*

Sin embargo, tienden a dudar de sus resultados y esperan que el profesor aplicador valide sus resultados. Cabe mencionar que otros equipos también buscaban en el profesor aplicador la validación de sus resultados, como el equipo 5.

El equipo 5, estuvo más participativo en esta actividad, les llamó más la atención y establecieron una buena comunicación. Después de una lectura al enunciado del problema, Daniela propone el siguiente cálculo.

> *Si dividiéramos el número de la elevación (*335*) entre la distancia que hay entre estos y estos eso nos da un número exacto que es el número de escalones.*

Daniela, quien funge como la líder del equipo, cambia el enfoque e intenta dar valores a la huella y a la elevación para cada escalón, de manera intuitiva. Deciden que 30 cm. para la huella y 15 cm., para la elevación, resultado de una reflexión acerca de una escalera en el mundo real y tomando en cuenta la pisada promedio de una persona.

En la siguiente conversación los integrantes del grupo realizan cálculos innecesarios e injustificados.

> *Israel: ¿Cuántos escalones?*
>
> *Daniela: [Duda un poco]... que sean* 24.
>
> *Erika:* $30 * 15 = 450$*,* $450 * 24 = 10800$*, es la altura?*

El profesor les ayuda a entender la segunda de las normas para el diseño y enseguida Daniela calcula erróneamente $(30+30)$ y dice "sí, está bien" a lo que después se arrepiente y asegura que deben de ser mas.

Erika interrumpe: *Mira este* 30 *que lo multiplicáramos* 11.5*,* 345 *entonces le tenemos que quitar* 10.

Erika sigue intentando multiplicar el 30 y entonces les dice que intentan multiplicar ($29.5 * 11.3 = 335.61$).

Erika intenta encontrar una combinación entre el número de escalones y su elevación para que al multiplicar ambas medidas, el resultado es la elevación total de la escalera. Ella está consciente de eso, pero no sabe expresar con claridad y sus compañeros no entienden lo que hace.

> *Erika: Mira es que si sale, pero me sobra esto, vamos a encontrar otro número, porque multipliqué:* $29.7 * 11.3$*, y ya nos dio esto (*335.61*)*
>
> *Daniela: ¿Y eso qué?... y por qué se te ocurrió eso?*
>
> *Erika: No sé*
>
> *Daniela: Y ¿eso donde iría?*

Luego intentan encontrar un par de números que les den la elevación total de la escalera. Daniela se da cuenta que deben doblar la elevación que proponen: $29.7 + 29.7 = 58.4$, y debe sumar también 11.3, Daniela dice que excede los límites para esa condición. Y se ocupan en calcular, desesperadamente, la combinación que les dé.

Se observa claramente que los primeros intentos no son muy claros para los estudiantes del equipo, las operaciones que estuvieron exhibiendo no fueron razonadas y además confundieron el número de escalones con la elevación de cada escalón. Tuvieron problemas para entender el enunciado de la segunda norma del diseño y no existen justificaciones sólidas para seguir los argumentos que iniciaron sus acercamientos.

Después Daniela sugiere cambiar de nuevo el enfoque de tal manera que se tome ahora la pendiente de la escalera. Ahora buscan dos número que divididos les den una pendiente que esté dentro de la norma, y después de algunos cálculos, por ensayo y error, llegan a que 20.3 y 40.6 son los números que cumplen tal condición, los multiplican para saber la elevación según Erika.

El profesor les motiva a que lean cuidadosamente y entiendan de nuevo el problema. Además los invita a explicar lo que han hecho. Les cuestiona acerca de la multiplicación, a lo que Israel intenta explicar que debe ser más bien sumado. El profesor les pregunta de tal manera que los guía:

> *Profesor: ¿Pero por qué multiplican?*
>
> *Daniela: Primero nada más para encontrar la altura y los números de escalones.*
>
> *Profesor: Si, pero, ¿Por qué multiplicaron* $20.3*40.6$*? ... Pero a ver esto por esto (*$20.3*40.6$*) pues es el área de esta parte (área transversal del escalón), y ¿eso qué tiene que ver con el diseño?*
>
> *Israel: Nada*
>
> *Profesor: Entonces ¿por qué multiplicaron?*
>
> *Daniela: No sabemos qué hacer.*
>
> *Israel: Entonces se suman, ¿no?*
>
> *Profesor: ¿Para qué?*
>
> *Israel: Para llegar al número de escalones, y saber cuántos números hasta llegar al número de la altura.*
>
> *Profesor: ¿Si?, y ¿luego?*
>
> *Israel: Para dividir esto entre...*
>
> *Profesor: Primero ¿quiénes se suman?*

Israel: $15+30$... *Hasta llegar a* 335

*Profesor: Pero esto (*30 *cm.) no tiene nada que ver con la altura o ¿sí?, no influye en la altura, ¿qué influye nada más?*

Israel: 15

Profesor: ¿Cuántas veces, cuántas veces lo va a perjudicar?

Erika: 22.3

Se quedan pensando y el profesor se retira, después de un silencio largo Daniela sugiere que se busque un número que divida a 335 dando como resultado un entero, sin embargo no encuentran alguno por ensayo y error.

Los cuestionamientos del profesor les ayudan a entender las variables del problema. Los últimos acercamientos no fueron productivos puesto que estuvieron presionados con el tiempo.

4.3.2 Discusión colectiva

El profesor cuestionó a todos los expositores, para que justificaran sus procedimientos y resultados. Al final, profesor pregunta si realmente podrían ser medidas de escaleras reales, para de alguna manera, evaluar los trabajos de los estudiantes.

De esta manera, los diseños de algunos equipos no fueron lo suficientemente consistentes o no cumplían con las normas del diseño para convencer a los demás estudiantes. Como el equipo 1, que expuso una escalera con una pendiente de 0.25 y una pisada de longitud de casi 50 cm.

En esta etapa, realmente no hubo preguntas relevantes por parte de los estudiantes, solo evaluaban las condiciones que los equipos presentaban y concluían si era un buen diseño, si cumplía las condiciones o si era viable la construcción del diseño. El profesor fue clave para que los estudiantes argumentaran acerca de sus resultados y justificaran sus procedimientos y estrategias usadas. Ordenó las ideas de los equipos cuando fue necesario y resumió cada uno de los diseños para que los demás pudieran apreciar y evaluarlo de mejor manera.

4.3.3 Análisis de los resultados de los equipos

Durante el desarrollo de esta actividad, observamos más comunicación entre los equipos, a la mayoría, la actividad se les facilitó, aunque tuvieron que entender primero el concepto de pendiente para comenzar a tomar decisiones en el procedimiento. Hubo muy buena comunicación en los equipos 1, 3 y 4, lo cual les ayudó a proponer un diseño razonable.

Llama la atención que los equipos 4 y 5, preguntaran insistentemente al profesor aplicador, por la certeza de sus procedimientos y resultados. Creemos que muchos estudiantes, producto de la educación tradicional, tienden a tener este comportamiento, siempre tratando de validar sus resultados a través de un algo o alguien que demuestre cierto conocimiento del tema, el libro o el profesor. Esto nos lleva, de nueva cuenta, a que los estudiantes no han desarrollado, o lo han hecho muy poco, la habilidad para argumentar, y/o justificar procedimientos y resultados que sean coherentes con las situaciones que se les plantean, y aún teniendo las buenas razones para creer en sus resultados, insisten en tener una figura que los valide, como en el caso de José del equipo 4, quien explica su proceder y sus resultados a los miembros de su equipo y además da algunos argumentos válidos.

Esta actividad, tiene esta propiedad, que permite que los estudiantes generen un procedimiento y lleguen al resultado usando conceptos básicos, usando un pensamiento cotidiano y de sentido común para hacer suposiciones que les lleven a resultados razonables, y además que se involucren en la justificación de los procedimientos y soluciones.

Otra parte a destacar de esta actividad, es que todos los equipos, encontraron una buena comunicación en el trabajo por equipos, aunque no todos llegaron a un diseño, si planearon un procedimiento en base a la comunicación y reflexión de sus ideas, en casos concretos como los equipos 1,3 y 4, los procedimientos y resultados fueron diferentes, pero sus diseños estuvieron dentro de lo razonable.

La actividad motivó al trabajo por parte de los estudiantes, se involucraron de inmediato con la actividad y a pesar de que sólo llegaron a diseños particulares sin generalizar, la actividad despertó su interés.

4.4 Diseño de una casa de campaña

En esta tarea los estudiantes, deben de proponer un diseño para una casa de campaña, partiendo de dos lonas rectangulares, debe cumplir ciertas normas de acuerdo al tipo de personas que la ocuparán. Las suposiciones juegan un papel importante, desde el tipo de personas, su talla y su equipaje. En algún momento en el proceso se usa el teorema de Pitágoras para calcular ciertos lados de un triángulo rectángulo que les ayudará a avanzar para la solución del problema.

La tarea consiste en realizar cálculos acerca de las medidas pertinentes de una casa de campaña, relacionando y justificando cada una de ellas, en base a algunas condiciones limitantes en el diseño.

El problema consiste en diseñar una casa de campaña como la que se muestra a continuación.

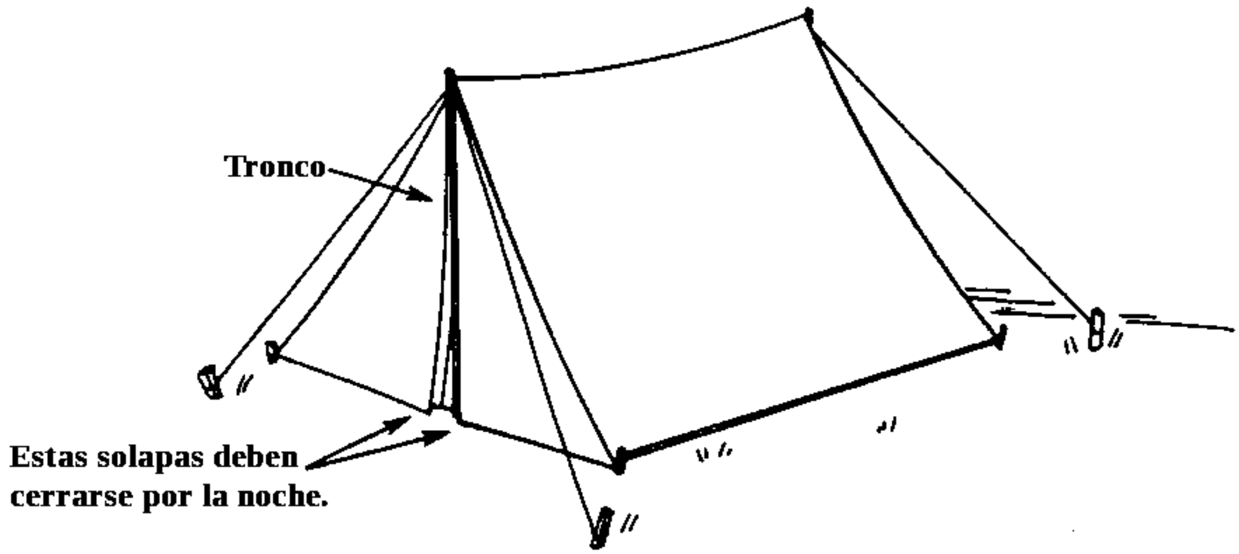


Figura 4.15: Casa de campaña

El diseño debe satisfacer las siguientes condiciones:

- Debe ser lo suficientemente grande de tal manera que dos adultos puedan dormir ahí, sin problemas (con todo y su equipaje).
- Debe ser lo suficientemente grande para moverse dentro, mientras se esté de rodillas.
- La parte inferior de la casa de campaña está hecha de plástico grueso, en forma rectangular.
- Los lados inclinados y los extremos estarán hechos de una sola pieza grande de lona. (Debería ser posible cortar la lona de tal manera que los dos extremos no necesiten ser cocidos con los lados inclinados. Debe ser posible cerrar las solapas de los extremos).
- Dos troncos verticales y algunas cuerdas, atadas a unas estacas, sujetarán la casa completa.

1. Estima las dimensiones relevantes de un adulto promedio y anótalas.

2. Estima las dimensiones de un plástico grueso rectangular que será usado como base. Estima la longitud necesaria de los troncos verticales. Explica y escribe la forma en que obtuviste estas medidas.

3. Muestra mediante un dibujo, cómo cortarás la lona. Escribe todas las medidas claramente. Calcula cualquier longitud o ángulo que necesites para el diseño; explica y escribe cómo encontraste estas medidas.

El equipo uno, integrado por Christian, Galilea y Mariana, realizaron las siguientes suposiciones acerca de algunas medidas.

En el primer cuestionamiento los integrantes sugieren 1.70 m para la altura de un adulto promedio, lo cual es lógico pensar. Sin embargo, ellos no tomaron en cuenta el ancho promedio del adulto, Christian pregunta que si de rodillas, y entonces Galilea explica que aunque se esté de rodillas la cabeza del adulto pegará en la parte superior de la lona, justo antes de que llegue a la altura máxima de la casa, por lo que ella sugiere quitarle unos 15 o 20 cm. a la altura promedio del adulto. Entonces, sugiere 1.60 m de altura, *"es por lo regular lo que miden las casas de campaña, por que en algunas cabes hasta parado"*.

Primero comienzan con la base de su diseño. Contemplan el equipaje y la altura de las personas, de largo 1.80 m., y el equipaje lo consideran a lo ancho, 1.50 m., y luego reconsideran 2 m., de largo para la base.

La longitud de los troncos verticales, Christian sugiere lo mismo de altura, 1.60 m.

En la tercera pregunta nos encontramos con las características especiales que va a tener el diseño de este equipo.

Galilea sugiere desarmar la casa (de manera esquemática) de tal forma que se pueda observar en un plano los cortes que va a tener. Ella propone que se desarme como una ”pirámide”.

Galilea: Primero son...

Christian: ¿No dice de... qué forma tiene la lona?

Mariana: Rectangular.

Galilea: Estoy mintiendo así no es... no dice que forma pero es obvio.

Christian: Según yo... dice que la va a recortar ¿no?, pero como se va a recortar.

Galilea: ¿Qué es eso?

Mariana: Es que no tiene picos, la lona no tiene picos, se supone que en cuanto bajas esta de aquí, esto hace que se jale, por eso es que cuelgan estas rectas.

Christian: Y las debes de cortar ¿no?

Mariana: A la mitad solamente, o sea cortarle un extremo por aquí y ya. O bueno si lo está tomando así aquí dobla, aquí se dobla, o sea aquí va el palito. Pero se supone que entonces de aquí vamos a jalar un hilo, ¿no?

Christian: Nada más dice que la cosan de aquí más no que la cosan de acá.

Mariana trata de explicar que no deben de cortarse los extremos con los lados inclinados, y están tratando de entender en donde debería de cortarse la lona. Galilea interviene y dice:

Galilea: Ya sé, mira... Podríamos decir que es un rectángulo y que está acostado.

Christian: Y luego como doblas, o sea las partes que cortaste se doblan hacia abajo.

Galilea: Porque ese ángulo debe ser de 90 grados para que alcancen a... juntarse.

Luego comienzan a ”desarmar la figura” de tal manera que hacen un esquema bidimensional de como quedaría la lona al cortarla, junto con la parte rectangular que servirá como piso de la casa.

Determinan algunas medidas de su modelo y hacen un borrador para ubicarse.

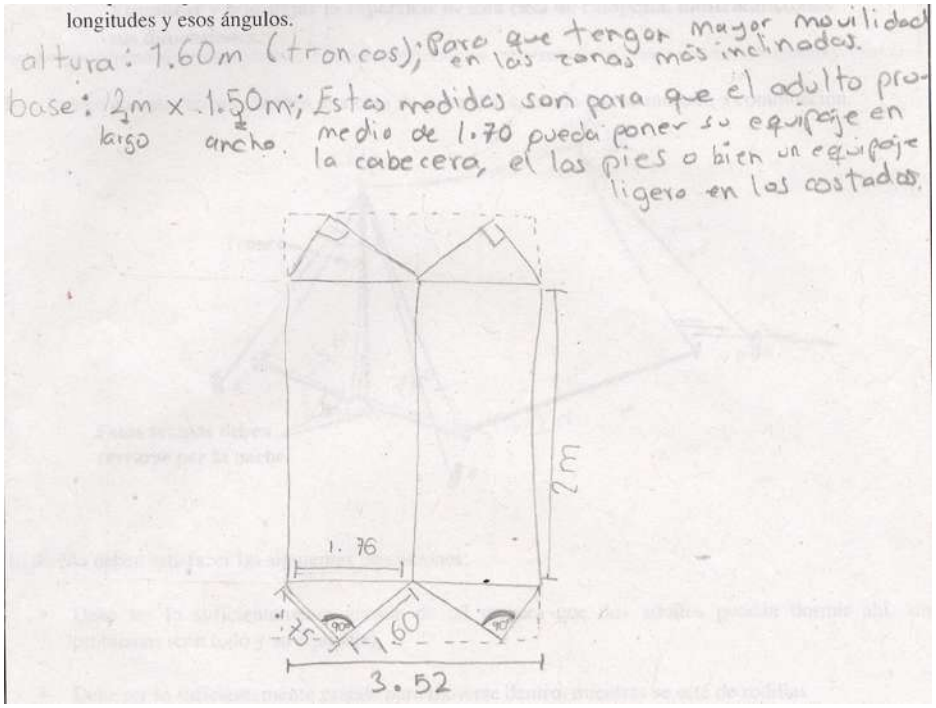


Figura 4.16: Resultados reportados por el equipo 1

Podemos observar que sus ideas acerca de la forma tridimensional de la casa son correctas, aplicando el Teorema de Pitágoras para determinar las medidas de una de las solapas.

Para el equipo 2, un hombre en promedio tiene una altura de 1.75. Y en base a esto toma la decisión de que las dimensiones de la base de la casita son $2m \times 1.80m$ y $l.80m$ para la longitud de los troncos. La discusión fue la siguiente:

Jessica: Sí, ahorita lo que tenemos que encontrar es la base, o sea, a lo largo que debe medir. Por eso digo que 1.75

Liliana: Mmm, 1.80

Jessica: Pero ¿para que quepan sus cosas?

Liliana: Hay que hacerlo más ancho, entonces ahí si vamos a multiplicar tal vez lo que...

Jessica: Aquí sería más o menos 2 *metros ¿no?*

Liliana: Donde van a poner las cosas ¿en los pies, en la cabeza, en un lado o en el otro?

Jessica: lo que te dice es que puedan dormir ahí y sin problema con todo y su equipaje y que debe tener espacio suficiente para moverse dentro de rodillas.

...

Jessica: Aquí sería por donde estarían ¿no? 1 *m sería.*

Liliana: No, está muy chiquito.

Jessica: 1.80

Liliana: Pues sí.

Jessica: La casa tendría como base 2 *metros por* 1.80*.*

Jessica: sería 1.80 *de longitud del tronco.*

Jessica: Y levantando ya la casa, aquí sería 1 metro 80*,* 2 *metros y a lo largo* 1.80*, cabrían bien.*

Para contestar las últimas preguntas, acerca de los cortes y las características generales de la casita, tienen que recortar una gran lona rectangular y modelarla para obtener su diseño. En esta parte, se dan cuenta de que deben comenzar con un rectángulo.

> *Jessica: ¿Entonces mediante un dibujo como cortarías la lona?... Tenemos que cortarla de manera que esto no sea cosible. Un poco sería así.*
>
> *Liliana: Pues como está en el dibujo podemos hacerla así, a ver préstame tu cuaderno... a ver con una hoja.*
>
> *Eliseo: ¿Cómo ves la lona de largo? medirá unos* 3 *metros ¿no? Ponle de largo 3 metros para que sea uno y medio de un lado y uno y medio del otro...*
>
> *Liliana: Mas bien tendríamos que tener la suma de los lados que mide la casa y de aquí... estaría aquí.*
>
> *Eliseo: supongamos que este es el ancho de la lona no, todo pues, esta tendríamos que doblarla a la mitad y así quedaría ya nada mas los lados...*

Ellos pretenden tomar medidas arbitrarias para la lona que hará las veces de techo de su diseño. A lo largo de su discusión, se dan cuenta que deben tomar en cuenta las medidas de la base, previamente discutidas. Y finalmente llegan a un diseño muy diferente a los demás, el cual, con un bosquejo en base a una hoja para modelar y un dibujo, discuten de la siguiente manera:

> *Jessica: tenemos que ver, sacar primero, lo de la base que es 2 por* 1.80 *y ahora esto de aquel lado, acá también habría* 1.80 *y allá* 2*. Entonces* 1.80 *más* 1.80 *serían* 3.6*, lo que mediría todo esto (la arista más alta de la casa de campaña)* 3.6. . .
>
> *Jessica:* 2 *metros aquí, ahora* 1.80*, la mitad de* 1.80*, serían* 90*,* 0.90 *serían* 2 *metros* 90 *centímetros de esta... Para ver cuánto mide todo, el perímetro como sería?, es* 2.90 *más* 3.6 *más* 2.90 *más* 3.6
>
> *Liliana:* 28
>
> *Jessica: Igual a* 300.1 *sería lo que daría todo. Esto es lo que mediría en total.*

Liliana: Y ¿de cuánto lo dejaste entonces, de 1.80*?*

Jessica: Sí.

El equipo no se dio cuenta de que las solapas y los troncos deben ser coplanarios, para después buscar el objetivo de encontrar las medidas de las solapas que hubiera sido las únicas medidas faltantes.

Se observó que el equipo, no entendió por completo la visión tridimensional del diseño, les hizo falta más imaginación y tal vez, un poco mas de perseverancia en los cálculos, ya que los últimos minutos de la etapa de equipos, los dedicaron a intentar diseños con una hoja de papel a prueba y error. Su acercamiento se quedó en un intento intuitivo que no cumplió las condiciones ni tuvo las características deseadas.

Los resultados del equipo 3, fueron muy diferentes. Suponen una altura promedio de 1.72 m y las dimensiones de la base de su diseño $1.5m \times 2.10m$.

Josué: a ver la medida en sí de lo largo pues diríamos que sería acá porque, como de 1.80 *¿no?*

Luis: Pero si miden 1.70*... Es que* 10 *centímetros pues es algo "así", más bien...*

Josué: Como 2 metros ¿no?

Luis: Los 2 metros

Josué: Ahora de lo ancho.

Luis: De lo ancho, cuánto mide uno

Josué: Son las dos personas y aparte con las maletas, dice.

Erick: ¿1 metro qué tanto es?

Luis: Sí, como que aquí hay que ponerle como 2 metros y medio ¿no?

Josué: Sí

Erick: 2.10

Josué: Y de lo ancho ¿cuánto le pondríamos?

Erick: ¿metro... metro y medio le ponemos?

Josué: Sí ¿no? porque dos personas con la maleta y aparte para que se puedan mover.

Josué: Y ahora la altura.

Erick: Supón que mides tu como ¿uno cincuenta? pero cuanto le ponemos.

Luis: ¿Metro y medio?

Josué: ¿Igual que lo ancho también? sale pues. Pero ponle de altura o así porque si no se van a revolver las medidas.

Josué: 2 metros 10 de largo, metro y medio de ancho y metro y medio de largo.

Más adelanta Luis y Josué se dan cuenta de que las pestañas deben ser triangulares.

Josué: Ah, y ahora para que se cierren las...

Luis: abajo, debe ser un corte intermedio, debe de medir... setenta y... punto 75 (la medida de las pestañas de las solapas).

Josué: Sí.

Luis: La longitud de los troncos... espérame, la lona debe ser rectangular primero, para después cortarla, entonces para cerrar las solapas, debes de cortar de aquí.

Josué: Ándale, para adentro, tipo triángulo.

Luis: Entonces esta parte se doblaría y aquí también se dobla y ya queda y al momento de pararla...

Analizan los dobleces que debe llevar su diseño bidimensional para poder encontrar la altura de los troncos verticales que sostendrán la casa de campaña. Una discusión de las ideas de Josué acerca de cómo obtener la altura deseada de la casa de campaña, lleva a un planteamiento interesante, pero que le falta un poco de sentido matemático.

Luis: Yo lo que quiero sacar es la medida de la lona, la lona mide tres metros, la pongas así o la pongas así mide metro y medio de cada lado.

Josué: Pero la altura no va a medir metro y medio.

Luis: La altura quedaría más larga.

Erick: Es lo que te estamos diciendo.

Erick: Entonces debe de medir más de metro y medio. Unos dos. Porque al momento de pararla es un ángulo ¿de qué? 90, de 45 grados.

Josué: Yo diría que 6 metros de ancho… porque así se pude hacer bien para que quede metro y medio de altura.

Luis: Pues sí.

Erick: Vamos a intentarle con dos metros a ver...

Josué: Que no va a quedar...

Luis: Entonces tú crees que esto mide cuatro metros. Yo diría que esto tres metros y medio.

Josué: Yo también, yo diría que 3 metros y tres metros (6 metros de ancho).

Mas adelante, Erick se entera de lo que Josué intenta explicar y entonces cree tener una idea para establecer la altura de la casita.

> *Erick: Al pararla esto mide tres metros, sigue midiendo tres metros, pero yo lo que me refiero es del piso a la punta ya va a medir mas, por que mas, porque este ángulo son* $45°$ *o sea* 90 *es esto la mitad* 45*, entonces a* 45*, entonces esto está así si estos son tres metros, la mitad de tres.*
>
> *Josué: Uno y medio.*
>
> *Erick: Ah ya le entendí, entonces si... es que yo lo sumaba.*
>
> *Luis: Sí, entonces, esto mide tres metros y aquí dos, entonces ya nomas nos falta sacar la medida de la lona de estas partecitas, las extensiones pues.*

Según Luis, las pestañas, que son triángulos rectángulos, deben tener como base $0.75m$ cada una para que al sumar les dé precisamente el ancho de la base de su casita, es decir $1.5m$. Pero al momento de preguntarse por la medida de la hipotenusa de ese triángulo.

> *Luis: Lo que quiero saber es la medida de esta, también debe medir metro y medio?*
>
> *Josué: No*
>
> *Luis: Sí, porque es altura (la hipotenusa del triángulo que se les forma en las pestañas)*
>
> *Josué: Ah sí, es cierto.*
>
> *Josué: Ya acabamos.*

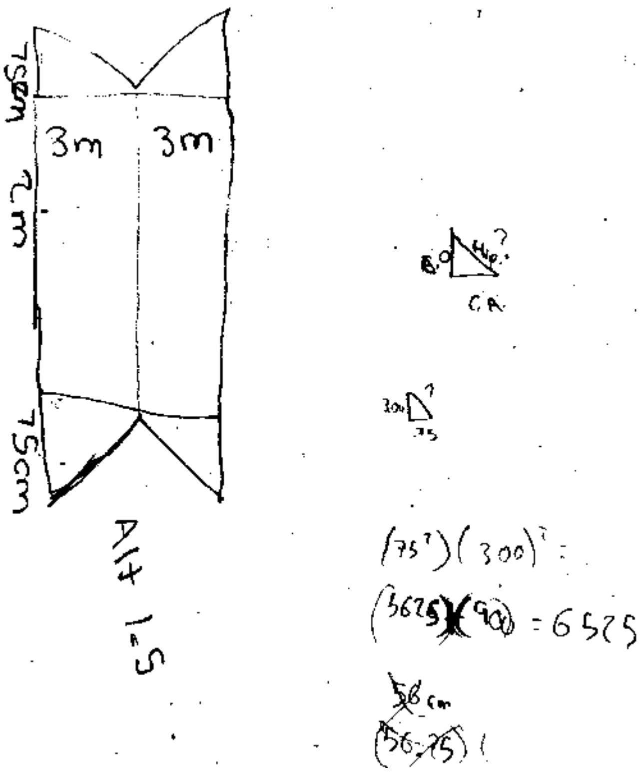


Figura 4.17: Resultados reportados por el equipo 3

Luis: Yo diría que debe de medir más eso.

Josué: ¿Por qué si es la altura?

Erick: Es que si mide uno y medio.

Josué: También si pones mas mediría, sobraría lona.

Luis: Sí, habíamos dicho, pero si esta parte mide metro y medio (la altura) ¿cómo esta parte (la hipotenusa) va a medir metro y medio también?

Después de una discusión larga acerca de cómo obtener esa medida, en donde los estudiantes no se dan cuenta del sentido geométrico que tiene la pestaña, piden ayuda al profesor quien les pregunta acerca del Teorema de Pitágoras y los triángulos rectángulos.

Erick dibuja el triángulo y distingue las medidas de los catetos ($3m$ y $75cm$) y comenta.

Erick: Entonces para sacar eso no se si se suma o se multiplica.

Josué: Se multiplica.

Erick: Aquí si se multiplicaba y luego entre dos.

Josué: No me acuerdo.

-Llaman al profesor-

Erick: Usted sabe lo de hipotenusa, ¿aquí se multiplicaba el cateto opuesto entre esto para sacar la hipotenusa?

Profesor: Tú ¿qué piensas?

Erick: no me acuerdo.

Profesor: ... ¿No saben el teorema de Pitágoras?

Erick: Es lo que no nos acordamos... Pues yo pienso que es así, se multiplicaba cateto opuesto más cateto adyacente entre dos.

Josué: Pero pues daría mucho ya.

Profesor: ¿Para qué quieren saber eso?

Erick: Para saber cuánto mide de aquí a aquí (la altura del triángulo rectángulo que simula la pestaña).

-El profesor aplicador les dice el teorema-

Josué: 56.25 *metros*

*Luis: Yo digo que ya te equivocaste en algo, porque no te diste cuenta que estos eran centímetros (*75*) y que estos (*3*) eran metros.*

Josué: Oh sí. O sea que hay que convertir centímetros a metros.

Luis: La suma de esto son 65.25*.*

Erick: Al cuadrado porque es la hipotenusa, 65.25 *por* 65.25*.*

Josué: Ahora divídelo entre cien. 65.25*, o sea que ahí está.*

Erick: Entonces ¡ya está!

Hay tres sucesos trascendentes en este último procedimiento. Primero, Erick usa la estrategia de hacer un esquema con los datos, pasando el problema a un cálculo matemático, que en este caso es el Teorema de Pitágoras; segundo, ninguno de los integrantes conoce el Teorema, sin embargo intentan hacer cálculos inútiles, injustificados e irracionales y; tercero, se equivocan al hacer el ajuste en la conversión, en los cálculos y al tratar de entender el significado de el resultado (ver figura 4.17).

En la parte final, solo se enfocaron en encontrar un resultado y no en darle sentido, en el contexto real.

El equipo 4 supone que la estatura promedio de un adulto es de $1.75m$, y la base de la casa de campaña, tendría $1.40m \times 1.80m$.

Arturo: Mira si 1.25 *están de rodillas, ponle* 1.30*,* 1.30 *por...*

Joaquín: Por 1.80

José: Sí, o 1.75

Joaquín: 1.30 *por uno*

Se acerca el profesor.

Arturo: Estamos en la pregunta dos... 1.80 *porque, más o menos* 1.80 *¿verdad?*

Profesor: ¿por qué?

Arturo: Porque debe caber de rodillas adentro de la esa (casa) y si miden 1.75 *miden* 1.25 *de rodillas, pues* 1.30 *para que alcance a caber las altitud. Y acostados van a medir* 1.75*, por eso le pusimos* 1.80 *para que quepan acostados*

Profesor: ¿Y el equipaje?

Arturo: Los cinco centímetros

José: ah no…

Arturo: Nos faltó el equipaje, 2 metros para que sobre, ¿a los lados no le pusimos nada verdad?

José, les explica acerca del dato que les hace falta.

José: Es que el plástico es el que va abajo, y entonces tiene que ser de largo, haz de cuenta así en cuadro.

Arturo: ¿Entonces ahorita no estábamos midiendo la altura?

Joaquín: ¿De largo cuánto miden ellos?

Arturo: 1.75.

José: ¿Y de ancho? Ya tenemos lo largo solo falta lo ancho ¿cuánto puede medir?

Joaquín: Sí, es 1.75.

Arturo: Sí, por 1.80*. Es que no va a caber el equipaje.*

José: El equipaje no va, no va así en lo largo, si no va así a lo ancho.

Arturo: Ellos se van a acostar así y el equipaje va a ir a los lados aquí... ¿Entonces cuánto es?

Arturo y José proponen que sea $1.40m$ de ancho de la base, y $1.30m$ para la altura de la casa de campaña.

En la última parte, ellos toman un dibujo parecido al que se muestra en la figura 4.18, que fue el resultado final. Lo que hacen es medir $70cm$ en el lado recto de cada pestaña y dejar $1.30m$ para la altura, que propusieron previamente. Esto es, con ayuda de las medidas de su base y su altura, determinaron las medidas de las pestañas de la casa, sin importar la longitud de la hipotenusa de estas pestañas. Algo que los otros equipos no hicieron, siempre intentaban calcular esa hipotenusa para calcular luego la altura del triángulo o no llegaban a esa parte.

El equipo no se preguntó si es posible construir un triángulo rectángulo cuya base sea 0.7 y altura 1.3, que cumpliera esas condiciones, es decir, su hipotenusa es parte de la mitad del lado de un rectángulo, lo cual es verdad, pero hubiera sido interesante que averiguaran. Quizá la limitante de no saber tópicos concretos de Geometría les llevó a dejar inconclusa esta situación.

El equipo 5, tomó como la altura promedio de una persona $1.70m$, además calculan el ancho promedio de $40cm$. pues pretenden encontrar el ancho de la base que albergará a dos personas y su equipaje. Por lo que su base rectangular es $2m \times 1.20m$. Se puede verificar en la siguiente discusión.

Daniela: Miren ya les dije lo que tienen que ser la medida, pon tu 2 metros porque uno setenta de lo que mide (Julio interrumpe)

Julio: Uno noventa.

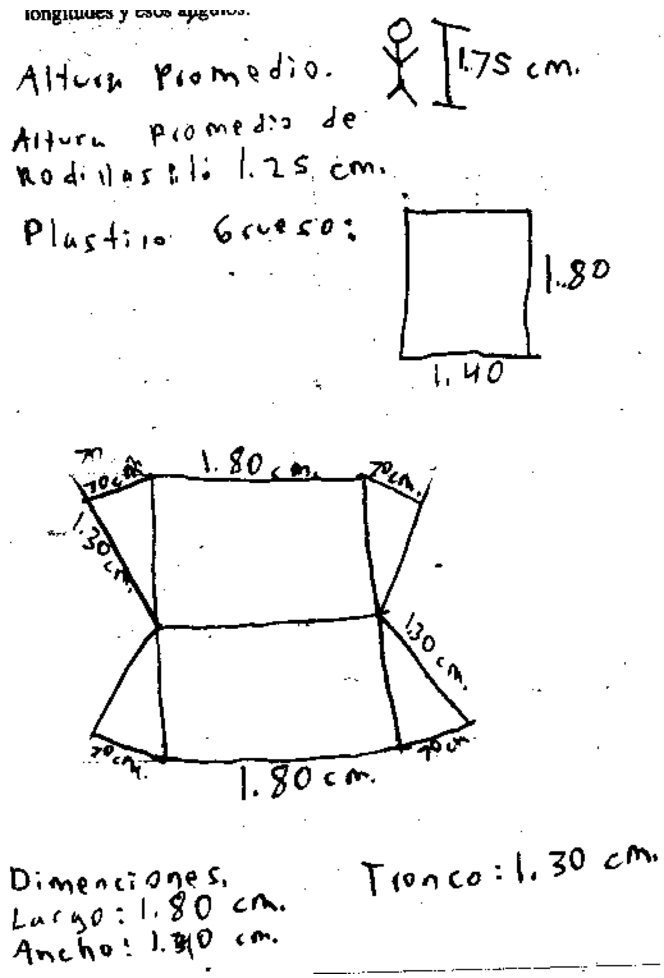


Figura 4.18: Resultados reportados por el equipo 4.

Erika: Sí 1.90

Daniela: ... Y 20 *cm de…*

Julio: Sí, de equipaje.

Daniela: Ok, anota.

Erika: Sí, porque un equipaje... no pero un equipaje mide como esto ¿no? (señala una medida)

Daniela: Es que depende que tal si era un hombre y una mujer y llevan más, bueno *equis.*

Erika: Pero 20 *cm no son de aquí a aquí.*

Daniela: Es menos.

Erika: Ahí está, ¿crees que de ese tamaño sea el equipaje?

Daniela: No, tendría que ser 2 metros (para la medida del largo del rectángulo base), 2 metros que...

Erika: No, estaría bien con 2 metros ya.

Daniela: ¿Sí, segura?

Erika: Sí

Daniela: Bueno.

Daniela: Tiene que ser rectangular... aquí mide 2 metros y acá tiene que ser menor para que cumpla las condiciones del rectángulo... De aquí a acá mide dos metros y de aquí a acá digamos ¿cuánto mide? Menos no, tiene que ser menos.

Julio: $1m$ 20

Daniela: ¿Sí?

Erika: No, menos ¿no?... si como uno veinte... Sí porque fíjate para que quepan las dos personas así a lo ancho... No, a ver… (Duda)

Daniela: A ver tú cuánto mides así (de ancho)...

Erika: 30 *y* 30, 60*, sí con* $1m$ 20*.*

Daniela: Estos dos cumple condiciones de rectángulo

Para la parte final de la actividad el equipo 5 reconoció algunos detalles para construcción del techo de su casa de campaña. Las pestañas que simularán las puertas, deberían coincidir con la altura de la casa, además las pestañas deben cortarse con cierto ángulo de inclinación que no supieron encontrar, y trataron de forzar las medidas de las pestañas rectangulares, de manera que se ajustaran las medidas previamente propuestas para la base de la casa.

Erika: Pero de esta lona, de esta tienes que sacar los picos (solapas).

Julio: ¿Y qué estoy haciendo?...

Daniela: ...cuáles picos, en qué momento usamos ese término de picos.

Erika: Pero se nos tiene que cerrar.

Julio: El chiste es ponerlo al revés... Ay tan fácil vamos a la comer y vemos las casitas...

Erika: (Manipulando el papel) Es que tiene que ser así, para que aquí tenga sus aberturas que se puedan abrir.

Daniela: Sí... a mira es que queda realmente un cuadrado.

Erika: No, es que necesitamos aquí quitarle esto (Un exceso de área que de alguna manera lograr los triángulos que forman las solapas)

En este momento el equipo se da cuenta del corte que deben hacer. Pero Julio intenta imponer sus ideas. Y finalmente lo que hacen es intentar hacer el diseño doblando y cortando un pedazo de papel, lo cual les llevó mucho tiempo.

Julio: No Erika, entiende que no.

Erika: Como van a cerrar, y mira si le cortas esto...

Julio: Hay que cortarle aquí nada más.

Erika: A ver, vamos a examinar el dibujo. Desdóblalo.

Daniela: Si de hecho sí. A ver, se acurdan ¿cómo estaban los lados del juego geométrico que tu armabas que tenían como pestañas de más? yo digo que debe ser algo así mira...

Erika: Sí, como un prisma cuadrangular digo rectangular.

Daniela: ¿Cómo una prisma? A ver hazlo

Erika: Pues así como este... Hay que ver como se arma esto.

En otro momento después el profesor les cuestiona acerca de los ángulos y las medidas de las puertas que tiene su diseño. El tiempo no les permite determinar todas las medidas de su diseño.

El equipo 5, nunca tomó en cuenta que su casa de campaña, debe tener más o menos la altura de los troncos verticales, lo cual influye en la medida de las solapas, es decir la altura del triángulo rectángulo.

En la última parte del proceso, Julio se encuentra desesperado y ausente de la discusión final, incluso distrae a sus compañeras con bromas y plática fuera de contexto.

El punto de vista muy intuitivo, con intentos a prueba y error, y la ausencia de uno de los miembros del equipo, fueron clave para que el equipo se desmotivara y no lograra desarrollar sus ideas y su diseño conforme a las condiciones. Por parte de ellos nunca hubo una monitorización de sus procesos y procedimientos.

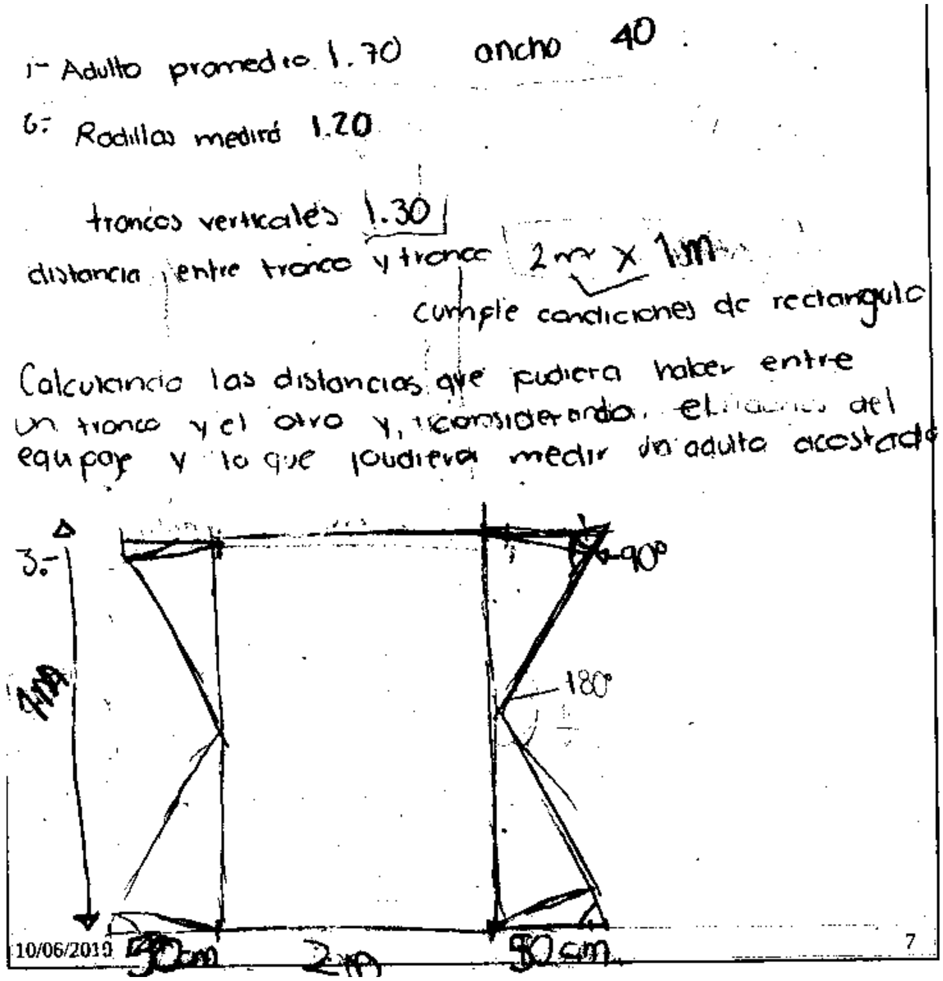


Figura 4.19: Resultados reportados por el equipo 5.

4.4.1 Discusión colectiva

La discusión más relevante en esta actividad se da cuando Jéssica, expone los resultados del equipo 2, quienes cometieron un error que Galilea señala. Cabe mencionar que previamente, el equipo de Galilea expuso de manera muy detallada sus procedimientos, sobretodo el uso del Teorema de Pitágoras para calcular la medida que deben tener las solapas o pestañas que formaran las puertas de la casa de campaña (figura 4.16).

Profesor: ¿Cuánto mide este lado? (el supuesto lado recto de la solapa).

Jessica: Sería 1.80*, por que al momento de que se cierra queda igual que el tronco.*

Profesor: Segura.

Galilea: No, porque entonces ya no embonaría. O sea, al momento de que se abra la casa, sobra un pedazo.

Profesor: Bueno pues eso fue lo que hicieron. (Dirigiéndose a Jessica) ¿Sí viste cual fue tu error? O sea, pensar que estos lados son iguales (formando un triángulo isósceles para las solapas), lo cual no es cierto, por el Teorema de Pitágoras...

Jessica: Ok.

Algunos otros errores similares detectados por los estudiantes, fueron en el equipo 5 y el equipo 3, quienes no tomaron en cuenta la longitud del tronco para calcular las medidas del triángulo que formaba las solapas del diseño.

Nuevamente el profesor motivó a los expositores a justificar sus procedimientos y evaluar sus cálculos. Algunas cuestiones fueron apoyadas en comentarios de los oyentes como Galilea en el ejemplo anterior. Los estudiantes no tuvieron preguntas para sus compañeros expositores, lo cual llevó a solo diálogos entre profesor y expositor.

4.4.2 Análisis de resultados

El pensamiento, discusión y resultados acerca de las tallas y medidas promedio de las personas fue razonable. La discusión en cuanto a las idea de matematizar el problema estuvo presente en los equipos, excepto en los equipos 2 y 5 cuyos acercamientos fueron más bien intuitivos e injustifica-

Figura 4.20: Presentación de resultados y discusión colectiva

dos. Destaca el simple pero acertado punto de vista y procedimiento del equipo 4, quienes en base a las solapas (o puertas) construyeron su techo y todo fue muy fluido después. Mientras que los enfoques muy parecidos de los equipos 1 y 3, se centran en el teorema de Pitágoras para encontrar sus medidas.

Se observa que la matematización (abstracción) de las ideas concretas, es una situación complicada para la mayoría de los equipos, y en esta actividad les resultó muy fácil decantarse por el punto de vista de la imaginación en tres dimensiones, prueba y error y el razonamiento intuitivo.

La actividad fue de fácil comprensión, además de que ya habían trabajado con diseños previamente con la actividad, *diseño de una escalera*. Resultó en varios puntos de vista para su resolución. Les dio la oportunidad de pensar acerca de algunas suposiciones claves, extraídas del contexto real, para avanzar y les permitió aplicar a dos de los tres equipos trigonometría básica y el Teorema de Pitágoras para encontrar un diseño adecuado. Es indudable que las discusiones y reflexiones que desencadenó, están acentuadas en las partes de las suposiciones y en la última parte de los cálculos de las medidas de un triángulo para encontrar los cortes deseados.

Fue importante también la oportunidad de imaginar figuras geométricas en tres dimensiones, el pensamiento espacial y la conexión con el pensamiento bidimensional. Establecieron estrategias relacionadas a este tipo de pensamiento, por ejemplo, hacer figuras, recortar y moldear un bosquejo de modelo a escala, y descomponer el problema en partes, donde cada parte estuviera relacionada con la solución de la anterior.

4.5 La revista

Esta es una actividad corta que motiva a los estudiantes a determinar un modelo sencillo en el cual se relacionen ventas y ganancias de un producto, una revista en este caso.

Dentro de las actividades se destaca un contenido matemático importante en la formación matemática de los estudiantes a nivel medio superior, y en algunos casos a nivel superior, tal es el caso de la función. Se aborda la función desde dos tipos de representación: tabla y gráfica discreta. A continuación se maximiza la función para determinar cuál es el máximo beneficio de acuerdo a los costos de producción y venta.

La actividad les permite a los estudiantes: Interpretar una gráfica, identificar los precios que maximicen los beneficios, y determinar los beneficios dados los ingresos por ventas y costos.

El problema se enuncia como sigue:

Un grupo de estudiantes decidieron que podían ganar dinero escribiendo y vendiendo una revista. Sus maestros les permitieron usar una computadora y una fotocopiadora; además, les facilitaron hojas de papel y tinta de manera gratuita.

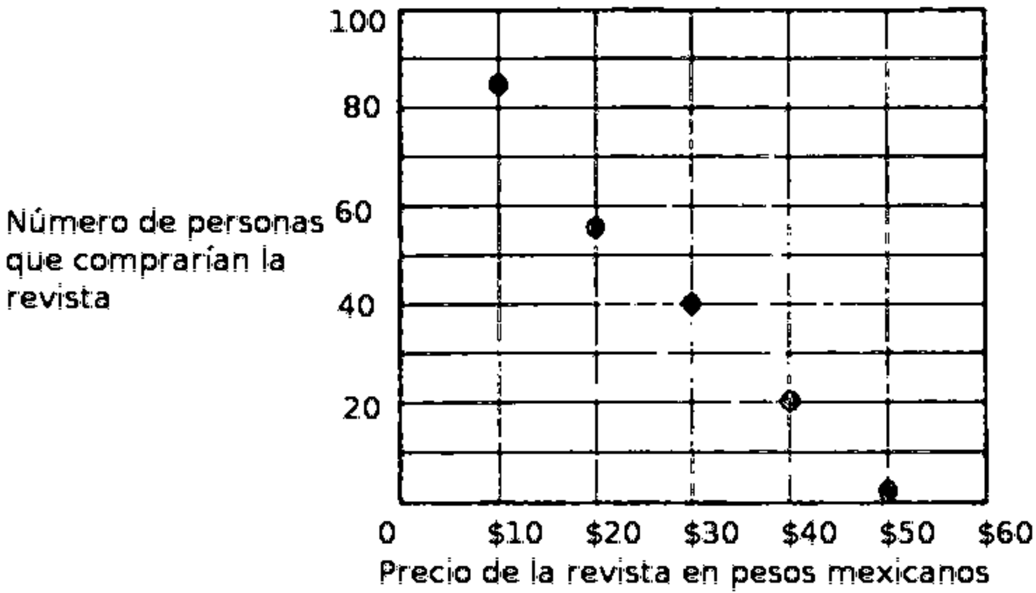


Figura 4.21: Datos obtenidos de la encuesta de Ana.

Comienzan produciendo una copia de su revista y se la muestran a 100 estudiantes de su escuela, escogidos al azar, y les preguntan:

¿Comprarías esta revista si costara \$10.00, \$20.00, \$30.00, \$40.00, \$50.00?

Los resultados de la encuesta se resumen en la gráfica mostrada en el lado derecho (un estudiante podía elegir más de un precio).

Contesta las siguientes preguntas de forma clara y ordenada, mostrando tus operaciones y resultados:

1. Describe cuidadosamente que es lo que muestra la gráfica.

2. Hay cerca de 1500 estudiantes en la escuela. ¿Cuántas revistas se venderían si el precio fuera

de $40.00? ¿Cuánto dinero dejaría esta venta?

3. ¿En cuánto se debe vender la revista para lograr obtener la mayor ganancia posible?

4. Si venden la revista a este precio, ¿cuánto dinero obtendrían?

Después de un tiempo, su revista tuvo gran éxito. Sus maestros deciden que deben pagar algo por el costo de producción: "Desde hoy, les cobraremos $5 por la producción de cada revista. Esto incluye el pago por el papel, impresiones, fotocopias y encuadernación"

- Supóngase que el precio de venta fue $40, como en la pregunta 2. ¿Cuál fue la ganancia obtenida por los estudiantes, considerando los costos de producción?

En esta actividad se estima que los estudiantes deben tener conocimientos previos acerca del concepto de relación entre dos variables, interpretación de una gráfica discreta, y los conceptos de razones y proporciones. Tales conceptos están relacionados con el concepto de función.

Dentro de las soluciones los estudiantes aplicaron la regla de tres simple que llevaron a estimaciones de ganancia dependiendo del costo de insumos y mano de obra. La mayoría de los estudiantes se centraron en las ganancias, y la base importante dentro de la estimación fueron los resultados de una encuesta en donde se presenta la proporción de estudiantes que eligieron precios acordes al contenido de la revista.

Los estudiantes estuvieron dispuestos a participar en una dinámica en pequeños grupos de aprendizaje cooperativo.

4.5.1 Resultados de los equipos

El equipo 1, intenta entender la gráfica para responder al primer cuestionamiento:

> *Claudia: ¿Qué es lo que tenemos que poner aquí? (en la pregunta 1), la cantidad de personas que comprarían la revista a un determinado costo ¿no?*
>
> *Profesor: Sí pero ¿qué más? ¿Hay más personas que quieren comprar la revista a bajo precio o a precio alto? ¿Qué significan ahí los puntos?*
>
> *Fabiola: Primero es una gráfica.*
>
> *Andrea: Una gráfica lineal, sí es lineal.*
>
> *Fabiola: No, porque no coinciden los puntos.*
>
> *Andrea: Pero están haciendo una línea, sí, es una gráfica lineal.*
>
> *Claudia: Sí es lineal ¿no?*
>
> *Andrea: Es que no preguntan qué tipo de gráfica es.*

Claudia lee la pregunta de nuevo y deciden describir la gráfica de manera cualitativa.

> *Fabiola: Que los estudiantes prefieren comprar la revista a...*
>
> *Claudia: Que los estudiantes prefieren comprar la revista a bajo costo la mayoría de ellos.*

Durante la segunda pregunta, el equipo, se confunde un poco acerca de la proporción de los estudiantes que comprarían la revista, en donde se les aclara que cada estudiante de la encuesta podía responder más de un precio.

Los equipos 2, 3, 4 y 5 contestan de manera muy similar a esta misma pregunta, pero desde un punto de vista descriptivo. Para lo cual no necesitaron motivar una discusión. Por ejemplo el equipo 1 respondió: *El número de alumnos que comprarían la revista dependiendo de su precio.*

En esta respuesta, podemos observar que el equipo describe superficialmente la gráfica, no es relevante para su interpretación, los puntos.

Para contestar la pregunta 2, el número de revistas que se venderían si su precio fuera 40 pesos. Solo el equipo 1, usó el razonamiento por porcentajes:

> *Claudia: ¡Ah ok!, a ver* $85+55+40+20+1$ *(cuenta las respuestas de la encuesta)...*
>
> *Andrea: 201 (total de respuestas en la entrevista), entonces digamos que cada persona...*
>
> *Fabiola: Eligió dos (opciones de la encuesta).*
>
> *Fabiola: Y una eligió tres (opciones de la encuesta).*

De esta manera, Claudia comienza a analizar las proporciones de la siguiente manera:

> *Claudia: A ver, ¿*40 *alumnos de* 201*?* 20 *de* 201 *alumnos, no,* 20 *de cada* 100 *alumnos votaron por esta (por el precio de* 40*).*
>
> *Andrea: O sea el* 20%*. Sí, ¿no?, sácale a* 1500 *el* 20%
>
> *Fabiola:* 300...
>
> *Claudia: ¿Cuánto dinero dejaría esta venta?*
>
> *Fabiola:* $300*40$*,* 12000 *pesos.*

En este momento han resuelto el problema, porque simplemente aplican este procedimiento en los cálculos posteriores.

El enfoque es diferente en los demás equipos, aunque también muy cercano al procedimiento anterior. Los equipos 2 y 3, prácticamente usaron el mismo proceso, se basa en que 20 de cada 100 estudiantes comprarían la revista en 40 pesos, por lo que $20 * 15$ es la parte del total de estudiantes que comprarían la revista en 40 pesos. En los diálogos del equipo 2, se verifica el procedimiento.

Hugo: Por eso sería 40 *por* 1500*.*

Denis, quien ha entendido la pregunta, desmiente esta afirmación y les explica.

Denis: Pero eso sería lo que se recaudó de la venta... más bien sería, basándose en la gráfica, si de 100 *personas,* 20 *la compran a* 40*, de* 1500 *personas ¿cuántas la comprarían a* 40*?*

Hugo: A ver ¿cómo?

Denis: ¿Cuántas veces de 100 *hay en* 1500*?*

*Vanesa: ¿cuánto? ¿*100 *entre* 1500*?*

Denis: ¿$1500/100$*?*

Vanesa: A 15*.*

Denis: A ver, digamos que hagamos grupitos de cien de donde iniciamos, cien, cien, cien, cien, hasta contar las 1500*, de esas* 1500 *vamos a poner 20, 20, 20, 20, y de ahí vamos a contar el total de alumnos que la van a comprar.*

Hugo: $15 * 20$*.*

Vanesa: 300*.*

Denis: 300 *personas comprarían, entonces ¿cuánto dinero les va a dejar?*

A continuación proceden a hacer el cálculo de las ganancias.

El equipo 5, usa otra idea, también muy similar a las anteriores, pero con una ligera diferencia, es decir, si de cada 100 comprarían 20 la revista en $40, entonces de cada 150 la comprarían 30.

> *Luis: Entonces dijimos que de cada 100 alumnos…*
>
> *Juan: 20 la compran.*
>
> *Luis: Entonces por lógica cada 50 alumnos, este, serían diez las que compran.*
>
> *Adrián: Pero ahí porque pusiste 50.*
>
> *Luis: para haber sumado, por ejemplo supongamos que..., bueno supón que ganan 1500 en las 150 no, si son 150 alumnos, este serían 10 más 20 sería de 30 no, igual 30, y aquí te está pidiendo 1500, ya nada mas aquí serían 300.*
>
> *Adrián: Ah sí, ya.*
>
> *Luis: De cada 1000 alumnos, 200 compran, de cada 500, 100 la van a comprar al precio de* $40…
>
> *Luis: Ahora cuánto dinero dejaría esta venta... (Inciso b de la pregunta 1).*
>
> *Juan: Si son 40, 40 por 300.*
>
> *Adrián: Sería multiplicar.*
>
> *Luis: Serían 12000 pesos.*
>
> *Adrián: Sí.*
>
> *Luis: entonces se venderían 300 revistas y 12000 pesos (ganancias).*

En la tercera pregunta, todos los equipos calcularon las ganancias para cada precio viable, nadie hizo interpolación solo usando los puntos de la gráfica, y luego determinar cual deja mayor ganancia.

El equipo 1, quienes ya anteriormente han mostrado un proceso muy simple, aplican la regla de tres para calcular todas las posibles ventas de la revista, para después decidir cuál es la que dejaría una mayor ganancia. Véase la Figura 4.22.

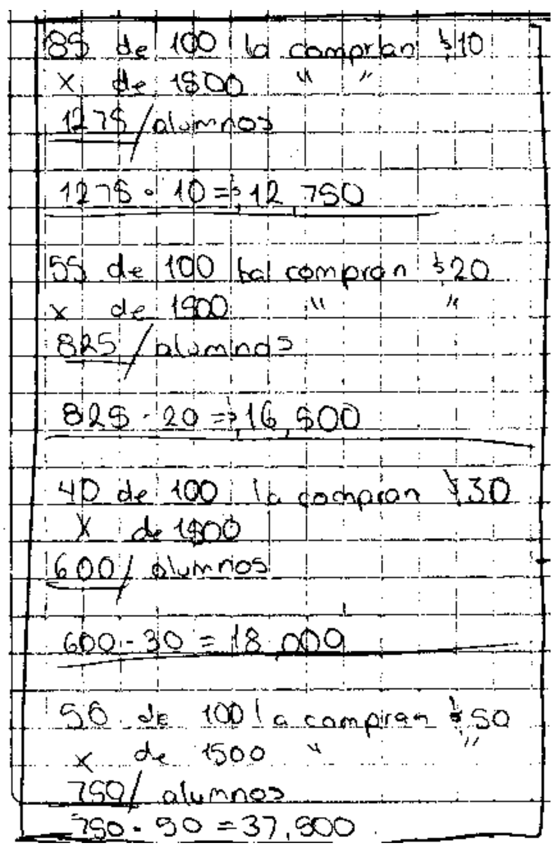


Figura 4.22: Cálculos realizados por el equipo 1.

En la figura anterior observamos un error por parte de Claudia, al afirmar que 50 de cada 100 alumnos compran la revista en $50. Nadie se da cuenta. Anteriormente, ya habían acordado, por lo que se veía en la gráfica que solo uno o dos de los encuestados compraría la revista en $50. Un error de atención, probablemente.

El equipo 2 se confunde en el proceso, pero Hugo revisa el proceder en la pregunta anterior y proceden de manera análoga para responder.

Hugo: Pero es que es por lógica, o sea, si los dan más caros pero menos personas, menos venden, y entre más barato las dan más venden.

Vanesa: La de 40 pesos, 20 personas.

Denis: Siendo que la de 10 pesos te salen 1085.

Vanesa: Entonces a 10 pesos sacaría más.

...

Denis: ah ya... o sea ya, de 100 personas, ¿cuánto ganan en 100 personas? multiplicando por 85, ponemos 15 veces el precio y ya nos van a dar cuánto ganan con 10 pesos... de 85 por 10 que son las 85 personas de 100, 850, ahora lo sumas, multiplicas por 15 para que te den las 1500 personas, serían...

Hugo: Pero no te van a dar las 1500 personas, porque lo estás poniendo en 85.

Denis: pero no estoy diciendo, ah ya me hice bolas la verdad.

Vanesa: Es que no aquí 1500 por 10, que son 10 pesos.

Denis: No porque no todas las 1500 personas te la están comprando a 10 pesos. Nada más 85 personas de 100 te la están comprando.

Hugo: Entonces 85 por ¿cuántos sienes son? por 15, te la comprarían 1275 personas, por 10, lo que saldrían de todo sería 12750.

Denis: y digamos que tiene mayor ganancia por que ya le están ganando 750 más que a la revista de 40 pesos...

Hugo: Entonces a ver espérenme, hay que sacarlas todas hay que anotarlas.

Vanesa y Hugo establecen un método que les funcionará para calcular las ganancias. En la siguiente Figura podemos observar su respuesta.

1R = El numero de personas que comprarían la revista dependiendo de su precio.

2R = 300 revista

si de cada 100, 20 personas las compran a $40.0 de 1500 personas la comprarían a $40.00 basandonos graficamente

$1500 \div 100 = 15$

$15 \times 20 = 300$

BR = 12,000

$\underbrace{300}_{\text{personas (revistas)}} \times \underbrace{40}_{\text{precio (\$)}} = 12{,}000$

3R = Con el valor de $20 pesos

58 personas de 100 lo multiplicamos por 15

$58 \times 15 = 870$

$870 \times 20 = 17400$

Figura 4.23: Cálculos realizados por el equipo 2.

En lo que respecta a los equipos 3 y 5, simplifican el cálculo de cada posible venta, usando la idea de solo tomar el número de revistas ofrecidas a 100 estudiantes, no importa el número de posibles revistas vendidas a 1500 estudiantes. Esto se observa en la discusión del equipo 5.

Luis: Pues tampoco hay que excedernos en mucho por que...

Juan: Por que mira si son 50, nos la comprarían unos 5 personas, de 10 si pero también está muy "bara" (barato) de 10 pesos. Pero de 20 como que también baja mucho ¿no?

Luis: A ver.

Juan: Por que mira son como 85 personas y acá son 20 que compran como 55.

Adrian: Tú ponle 55.

Luis: A ver son 85 personas por 10, entonces 850. Juan: Y acá son 55 por 20...

Luis: 1100 Juan: Sale más, y a ver 80 por 40, 1200. Sí, 1200.

Juan: Y 40 por 20, 800.

Luis: Si.

Juan: Entonces ya, entonces sería por 30. ...

Juan: Pero en cuántas ganancias obtendrían, yo estoy diciendo el precio. Entonces serían, 15 pesos.

Luis: No, 600 por 30, sale 18000 Adrián: ¿18000?

Para contestar la última pregunta, restan la ganancia de la venta de revistas a 40 pesos, que previamente habían calculado, a la cantidad que deberían pagar por gastos de producción (1500 pesos por 300 revistas). Todos los equipos excepto el equipo 4, el cual no pudo terminar la actividad, realizaron un proceso similar. Por ejemplo el equipo 2 usa este método, aplicado también por el equipo 5.

Denis: ¿Cuánto ganamos a 40 pesos la revista?

Vanesa: 1200.

Hugo: Sería 300 revistas y le vas a quitar 5 pesos, sería 300 por 5.

Denis: No porque a 300 revistas cada una le vas a restar 5, 300 por 5... salen 1500.

Hugo: Si la vendieron en 40 pesos, de cada revista le tienen que quitar 5 pesos, o sea que le quedarían 35 por revista, o sea que hay que multiplicar 35 por 300, en vez de 40.

Vanesa: 1500, ah o sea que ellos lo que perderían serían 1500...

Denis: Ah pues ganamos 12000 ¿verdad? Serían 12000 menos 1500.

Vanesa: 300 por 5, sería 12000 menos 1500 de lo obtenido, y serían 10500 que sería lo que nos dices [dirigiéndose a Hugo] 35 por 300.

4.5.2 Discusión colectiva

El equipo 2 comienza la exposición y la discusión, acerca de la pregunta 2 inciso b. Denis, afirma que la revistas que se vendieran a 20 pesos obtendrían la mayor ganancia.

Profesor: ¿Cómo eligieron los 20 pesos?

Denis: En que la gráfica dice, porque primero lo hicimos, dijimos, por lógica si a 10 pesos compran más la revista van a ganar más, e hicimos la operación con esa idea. Pero, ya después nos salió que qué tal si intentamos con otra cantidad. Pro 40 ya lo habíamos hecho y fue que usamos el precio de 20 pesos, e hicimos la operación y fue que nos dimos cuenta que ganaban más vendiéndolas a 20 pesos que a 10.

Laura: ¿Que no se supone que tenías que… en base a la gráfica tenías que sacar de todos los precios, los resultados de todas las gráficas, para luego saber cuál era más?

Denis: Pero lo hicimos.

Laura: Pero no hicieron eso, porque nosotros nos salió mas, nos salió que en 30.

Adrián: A nosotros, de este resultado, nos salió de 30 pesos, porque en la gráfica sale más ganancia.

Denis se da cuenta de que sus resultados, no fueron comparados con la ganancia de otros precios, por lo que acepta que sus resultados son incorrectos. El equipo 1, quienes expusieron también, muestra un proceso más limpio y mejor justificado, excepto por el precio de mayor ganancia.

Profesor: Entonces ¿cuál fue el precio de mayor ganancia?

Claudia: Fue el de 50 pesos…

Profesor: Pero ¿Por qué sacaron el 50% *de 1500?*

Claudia: Porque…

Profesor: O sea que, a 50 pesos, ¿50 de cada 100 personas comprarían la revista?

Claudia: No, aquí era 1 (señalando el 50%*), a ver…*

Profesor: Entonces 1% de 1500, es 15, por 50, 750 pesos.

Claudia: Entonces, ya. Entonces el de mayor ganancia es el de 30 pesos, y la ganancia es de 18, 000 pesos.

El papel del profesor fue relevante, pues los estudiantes no tuvieron muchas dudas ni preguntas. Una vez más, el profesor motivó a que los expositores explicar los procedimientos y tomar decisiones acerca de los valores que calcularon.

Figura 4.24: Preguntas en la presentación de resultados

4.5.3 Análisis de los resultados

La mayoría de los estudiantes expresaron que la actividad se les había facilitado. Juan del equipo 5, al terminar la actividad les comenta a sus compañeros, con gran sorpresa "¡bien fácil!". Realmente no hubo muchos procedimientos fuera de lo esperado, los estudiantes no intentaron interpolar los datos, es decir, tomar un precio que no fuera usado en la encuesta y que razonablemente esté dentro de la tendencia, para calcular la ganancia máxima.

Con respecto a la actividad, les permitió usar la aritmética básica y el estudio de las proporciones para aplicarlos en el contexto de las finanzas, aunque de manera básica. Les indujo a interpretar datos de una gráfica y calcular aspectos relevantes de ella. La actividad también permitió un gran desarrollo en cuanto a sus ideas, reflexiones y un buen flujo de interacción en equipo y de manera grupal. Excepto el equipo 4, los estudiantes tuvieron una comunicación efectiva para proponer procedimientos que resultaron motivantes. La actividad los enganchó para adentrarse a la tarea con mucha decisión y motivación. Tal vez la sencillez con la que los estudiantes tomaron la actividad, fue un factor clave para este comportamiento.

CAPITULO 5

CONCLUSIONES

Consideramos que, en general, la metas planteadas en esta tesis se han cumplido; se aplicaron cuatro tareas o actividades, extraídas y adaptadas, de los Paquetes de evaluación Balanceada, proyecto dirigido por Schoenfeld (Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum, 1999 y 2000), a estudiantes de nivel bachillerato del Estado de Michoacán, México, y se documentaron sus potencialidades.

Con el objeto de establecer las conclusiones de la investigación, comparemos nuestras hipótesis, fundamentos teóricos y los resultados obtenidos; para ello, recordemos las preguntas de investigación planteadas al inicio:

1. ¿Qué características deben tener los problemas que se proponen a los estudiantes para promover un aprendizaje significativo?
2. ¿Qué conocimientos matemáticos previos requieren los estudiantes para enfrentarse a los problemas propuestos?

3. ¿En qué consisten los intentos de solución de los estudiantes, en cuanto al uso de estrategias y recursos matemáticos?

4. ¿Qué formas de instrucción favorecen el aprendizaje de los estudiantes?

5. ¿Cuál es el papel del profesor durante la aplicación de los problemas, en un ambiente de resolución de problemas?

6. ¿Qué cambios hubo en las formas de atacar y resolver los problemas después de la implementación de la forma particular de instrucción propuesta?

En el desarrollo del Capítulo 3, existe la evidencia de acercamientos individuales más completos que cuando trabajaron inicialmente en pequeños grupos, resultado de la interacción en los equipos y en la discusión colectiva (Hagelgans et al., 1995); lo cual podría parecer lógico; sin embargo, esto no estaba documentado para estas tareas en el sistema educativo mexicano.

En la tarea ”Quehaceres, televisión y dormir”, la mayoría de los estudiantes dedicaron un tiempo importante en el entendimiento del enunciado de la tarea y la gráfica de dispersión dada, ya que relacionar un enunciado con una gráfica de puntos es una práctica que poco se promueve en sus estudios anteriores; a pesar de ello, la tarea logró captar la atención de los estudiantes [Pregunta de investigación 1].

Los equipos realizaron un trabajo descriptivo en este problema; es decir, contestaron las preguntas con base en la descripción y observación de la gráfica. El Equipo 1, intentó establecer su solución a partir de lo que para ellos es una ”relación” entre los datos de la gráfica. Es decir, intentaron partir de una definición que consideraran correcta para el significado de relación. Sus intentos pasaron por ideas relacionadas con expresiones como ”equivalencia” o ”igualdad” entre las variables; se llevaron mucho tiempo en ello. Sin embargo, en la discusión colectiva establecieron y estuvieron de acuerdo con otros equipos, particular con el Equipo 4 (que no se preocupó por el concepto de relación), que la no relación de los datos implicaba una nube de puntos dispersa, sin ninguna tendencia, en la gráfica [Preguntas 3 y 4].

Al final, cuando atacan individualmente la tarea, la mayoría de los estudiantes la resuelven correctamente. Recordemos que en la última pregunta de la tarea, se les muestran dos situaciones, una en la que existe una correlación positiva entre los datos y otra en donde no hay relación. La mayoría, hace una gráfica en donde representan exactamente el patrón de relación lineal para la primera situación y puntos disperso en la segunda. Esto nos indica que la comprensión de la idea de relación que tenían en la discusión por equipos, cambió durante la discusión colectiva, hacia el final de la sesión. Aunque no existe una evidencia puntual, un momento en donde se exprese la idea de ”relación” de forma clara por algún estudiante. Creemos, por las evidencias, que todo apunta a una evolución de ideas y comprensiones durante la discusión colectiva, inicialmente basada en el trabajo previo, el trabajo por equipos (Hagelgans et al., 1995; Lesh et al., 2000) [Preguntas 4 y 6].

Esto parece indicar la existencia inicial de conocimientos fragmentados y parcialmente correctos de los estudiantes, que evolucionaron como consecuencia de la interacción en el aula (NCTM, 2000; Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum, 2000).

Esta actividad permitió a los estudiantes, reflexionar, compartir, refinar y establecer ideas y entendimiento acerca de la relación estadística en una muestra de datos, un tema incluido en el programa de matemáticas en el bachillerato en México [Pregunta 1]. Los conocimientos matemáticos previos, básicamente son la ubicación de puntos en un plano cartesiano, que en gran medida, no fue problema para los estudiantes [Pregunta 2].

Esta tarea cumple con sus objetivos, establecidos al principio, que son: analizar datos en una gráfica de dispersión e investigar correlaciones positivas, negativas y cero; además, junto con el vídeo, su diseño permitió documentar los intentos de solución de los estudiantes. La forma de instrucción, fue importante para que los estudiantes desarrollaran una idea más o menos clara del concepto de relación, y terminaran la tarea adecuadamente.

La segunda tarea, ”Diseño de una escalera”, se desarrolló en una dinámica de mayor comunicación en la etapa por equipos, en donde se establecieron diversos diseños a partir de dos estrategias, principalmente: Primera. Dada la altura de la escalera, eligieron un valor para el número de escalones y encontraron la elevación de cada uno; y Segunda. Dada la altura eligieron un valor para la elevación de cada escalón y encontraron el número de escalones [Pregunta 1].

Lo interesante fue que los equipos que usaron el segundo método, fueron más intuitivos, apegándose un poco a la idea de una escalera real para, de esta manera, ajustar la elevación y pisada según las normas establecida para el diseño. Estos equipos eligieron valores hipotéticos para el número de escalones, lo cual resulto conflictivo pues procedieron por prueba y error para encontrar un número entero. Por ejemplo, el Equipo 4, no pudo obtener un número entero para el número de escalones, por lo que decidieron redondear para ajustar las medidas.

Esto indica que hubo entendimientos iniciales que llevaron a desarrollar diferentes planes de solución, algunos correctos y otros no, pues tres de los cinco equipos pudieron llegar a soluciones que se ajustaban al diseño con base en dos situaciones determinantes: la buena comunicación dentro de los equipos y el profundo nivel de entendimiento del problema. Creemos que el contexto de la actividad fue clave para estimular la comunicación, ya que todos están familiarizados con escaleras. Recordemos que esta es una de las características importantes que deben reunir las tareas (Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum, 1999; 2000). Además, uno de los principios de la Actividades Reveladoras del Pensamiento (Lesh et al., 2000), se refiere al Principio de la realidad, donde establece que los estudiantes toman sentido de una situación basada en sus experiencias, en este caso las escaleras [Pregunta 1].

En cuanto a los conocimientos previos, el concepto de pendiente es importante. Dentro de la tarea se establece la pendiente como la razón entre elevación y pisada, pero fue relevante la participación del profesor para establecer, como idea inicial, la pendiente como la medida de la inclinación de la escalera; eso contribuyó al desarrollo de la actividad [Pregunta 2].

Por último, en la etapa individual los estudiantes contestaron prácticamente de la misma manera que en su equipo, esto indica que durante la discusión colectiva hubo poca retroalimentación, no hubo un cambio en la manera de pensar. Los estudiantes que habían resuelto la tarea en el trabajo por equipos, no vieron la razón para cambiar sus soluciones y entendimientos en la discusión colectiva, pues ellos ya lo habían interiorizado y comprendido previamente. Otros estudiantes, que no habían tenido tanto éxito en el trabajo en equipo, parece ser que en la discusión colectiva sus ideas no lograron encajar con la diversidad de soluciones.

Con base en las evidencias, esta actividad fue detonadora de la comunicación entre los equipos, motivó a los estudiantes a establecer y expresar sus ideas acerca de la tarea. La tarea motivó a los estudiantes a expresar lo que saben, se plantearon las formas para resolver la actividad, probaron y regresaron para lograrlo por medio de la discusión en equipos (NCTM, 2000).

Consideramos que la actividad ”Diseño de una casa de campaña”, involucra un problema no rutinario, ya que implica pasar de un modelo plano, en dos dimensiones, a un modelo en tres dimensiones, lo cual resultó complicado para algunos equipos. Sin embargo, esto permitió mayor comunicación y posibilidad de expresar ideas primordiales acerca del modelo. Aún así, solo dos equipos establecieron diseños de acuerdo a sus cálculos y reflexiones.

La tarea se complicó en el momento de pasar de la lona bidimensional a la construcción en el espacio. Hay evidencia de que tres de los equipos tomaron medidas incorrectas y confundieron partes importantes del diseño, al pasar al modelo espacial.

A pesar de que la relación espacial la vivimos día con día, al parecer en el Sistema educativo mexicano no se fomenta el desarrollo de la imaginación espacial y cuando se enfrentan a una situación en donde se debe interiorizar esta idea, resulta difícil encontrar relaciones entre las variables involucradas; esto se muestra en la mayoría de los estudiantes en este problema; se perciben deficiencias en el manejo de figuras geométricas y la relación (transición) entre el espacio y el plano. Definitivamente, se debe prestar mayor atención a la geometría bidimensional y espacial en las matemáticas en el nivel escolar básico.

Una parte crucial en el desarrollo del diseño, fue el uso del teorema de Pitágoras, que ayuda en la transición del diseño en su representación plana y el diseño espacial. Solo dos equipos lograron detectar la necesidad del teorema, pero no recordaban la relación. Esto muestra una deficiencia en el uso recursos matemáticos que, quizás en su momento, no comprendieron en su aprendizaje previo, solo lo memorizaron. Hay evidencias que refuerzan esta idea. Los estudiantes del equipo 3, vieron la necesidad de utilizar el teorema de Pitágoras, sin embargo, no recordaban la relación e intentaron con diferentes "relaciones" o "fórmulas" durante el proceso. Esto se evidenció en expresiones como "...pues yo pienso que es así, se multiplicaba cateto opuesto por cateto adyacente entre dos", después de que el profesor les indicó que se trataba del teorema de Pitágoras, ellos manifestaron no recordarlo. El profesor intervino para recordarlo después de que ellos habían identificado la necesidad de encontrar la relación [Pregunta 5].

Esto muestra dos situaciones concretas: el manejo superficial y tradicional (memorístico) del conocimiento matemático y la importancia del papel del profesor en una forma de instrucción basada en el aprendizaje cooperativo. La actividad da la oportunidad de que los estudiantes apliquen su conocimiento matemático, el profesor da tiempo al estudiante de discutir y reflexionar ideas, estrategias de solución, y eventualmente adviertan el uso de conocimientos previos. Si no es así, el profesor interviene para guiar a los estudiantes, en este caso a recordar el teorema de Pitágoras.

Durante la discusión colectiva otros equipos estuvieron de acuerdo en el uso del teorema y decidieron usarlo para resolver la tarea en la etapa final individual. Particularmente en esta tarea resultó importante el uso de conocimientos matemáticos relevantes y concretos, que se encuentran en programas de matemáticas del nivel básico y medio superior, que son la geometría y la trigonometría. La cual es una propiedad de diseño de la tarea, ser balanceada respecto al currículo (Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum, 1999; 2000) y en este caso coincide con el currículo del sistema educativo en México.

También son relevantes otras característica de la actividad, mencionadas por Lesh et al. (2000), que son: cumple con el principio de construcción del modelo, los estudiantes usan la geometría básica plana, para interpretar y entender un modelo particular geométrico en el espacio. Además, el principio de realidad, el principio de auto-evaluación (los estudiantes realizaron un modelo de papel para probar la veracidad de las soluciones), y como se muestra en la tarea también permitió documentar los intentos de solución [Preguntas 1].

La tarea denominada "La revista", resultó ser una tarea más sencilla para los estudiantes, la mayoría la resolvió en la actividad por equipos, siguiendo la forma de instrucción planteada por Sepúlveda y Santos (2006) lo cual resalta, una vez más, la importancia del trabajo en pequeños grupos para promover el trabajo cooperativo [Pregunta 1].

Como se comenta en el análisis de respuestas en el Capítulo 3, no hubo una idea encaminada a la interpolación, para el cálculo del valor de la máxima ganancia. Solo se enfocaron en los datos expuestos en la gráfica original. Una pregunta interesante que probablemente hubiera motivado un pensamiento más profundo acerca de los datos es: de acuerdo a la tendencia de la gráfica ¿cuántos estudiantes comprarían la revista a $30?

De nuevo el Principio de realidad, de Lesh et al. (2000), juega un papel importante en el desarrollo de la actividad, los estudiantes familiarizados con conocimientos básicos de economía y con la habilidad para aplicar la regla de tres simple, terminaron la actividad y estuvieron seguros en sus resultados. No todos, los equipos mostraron soltura en la aplicación de estos conocimientos, equipo como el 4, no mostraron avances importantes en la tarea, incluso después de la discusión colectiva, no mostraron entendimientos claros en la tarea.

En el caso del Equipo 4, es necesario comentar lo que Hagelgans et al. (1995) advierten, si en un equipo de tres personas, una se aleja –no participa, permanece antipática, no tiene una actitud de cooperar– difícilmente se lograran buenos resultados en su trabajo. Comento esto porque en este caso Adán, uno de los integrantes, tuvo estas mismas características durante el desarrollo del trabajo por equipos. En la tarea individual existe evidencia de ello, los integrantes del Equipo 4, solo contestaron dos de las cuatro preguntas de la tarea.

De manera general, concluimos que no todos los estudiantes mostraron los mismos niveles de entendimiento en las diferentes tareas, incluso, a pesar de que estuvieron en el mismo equipo. La mayoría de los estudiantes que participaron, lograron que sus niveles de entendimiento evolucionaran para adquirir una comprensión más fuerte y sofisticada, apoyados en la discusión colectiva y en el trabajo en equipos [Pregunta 4].

Existen algunos episodios, en donde algunos conocimientos previos de los estudiantes, no están bien establecidos. Es decir, los estudiantes muestran deficiencias para aplicar los conocimientos, entender fórmulas (ejemplo, teorema de Pitágoras), asociar una situación textual con una relación matemática, en general, matematizar. Parece ser que los estudiantes están siendo instruidos para memorizar y no para entender y aplicar. En base a formas de instrucción que no promueven un aprendizaje significativo, que nada tienen que ver con los problemas que viven o vivirán en diferentes ámbitos. En cambio, las prácticas puestas a investigación en este trabajo, muestran evidencias que pueden ser prometedoras en un ambiente de aprendizaje similar al de una comunidad, que es consistente con la idea del pensamiento matemático, la resolución de problemas y el trabajo cooperativo en el aula [Pregunta 6].

Creemos que, a pesar de que la educación matemática tradicional, no promueve estas prácticas, es necesario darle estructura a un conocimiento previo que permita al estudiante involucrarse en la resolución de problemas. Es decir, tal vez la educación tradicional, ya se encarga de establecer un conocimiento previo de los contenidos, pero se debe complementar con formas de instrucción que promuevan otro tipo de habilidades, permitiendo una formación en matemáticas básica, más integral.

ANEXO A

Tareas aplicadas a los estudiantes

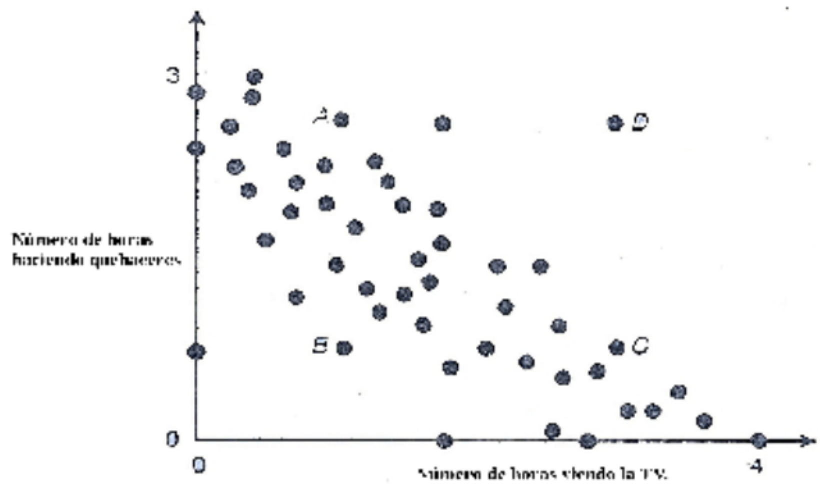
Problema 2

QUEHACERES, TELEVISIÓN Y DORMIR.

Equipo No.:__________

Este problema te da la oportunidad de:
Analizar datos en una gráfica de dispersión.
Investigar correlaciones positivas, negativas y cero.

Ana está realizando una encuesta en donde pregunta a un grupo de adolescentes cuanto tiempo pasan haciendo sus quehaceres y cuanto viendo la televisión, por las tardes.
Se muestran enseguida los resultados en la gráfica de dispersión:



1.- ¿Cuál de los cuatro puntos A, B, C o D representan cada uno de las siguientes oraciones? Escribe una letra enseguida de cada oración.

Yo ví mucho la TV por las tarde y también hice muchos quehaceres.

Él está representado por el punto : __________

La mayor parte de la tarde hice quehaceres y solo ví un programa de TV.

Él está representado por el punto: __________

21/05/10 3

Figura A.1: Hoja de actividad: Quehaceres, televisión y dormir.

Problema 2

Yo salí por la tarde, no hice mucho quehacer ni ví mucho la TV.

Ella está representada por el punto: __________

2.- Inventa una oración que represente el cuarto punto (el punto restante).

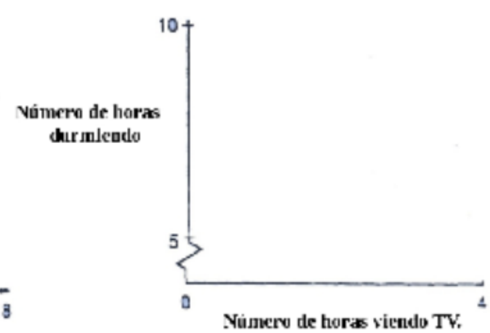
3.- ¿Que nos dice la gráfica a cerca de la relación entre el tiempo de ver televisión y el tiempo de hacer quehaceres?

4.- Ana también hace una gráfica de dispersión donde se muestra que:

a) Los estudiantes con más edad pasan más tiempo haciendo quehaceres que los estudiantes más jóvenes.

b) No hay relación entre el tiempo en que los estudiantes pasan viendo la televisión y el tiempo en que duermen.

En los ejes de abajo, muestra como pueden ser las gráficas de dispersión para estos dos casos.



21/05/10 4

Figura A.2: Continuación: Quehaceres, televisión y dormir.

Problema 3

DISEÑO DE UNA ESCALERA

Equipo No.:_________.   Nombre:_______________________________.

Este problema te da la oportunidad de:
Diseñar una escalera que cumpla con ciertas normas.
Usar el concepto de pendiente en una situación práctica.

Diseñar una escalera que tenga una elevación total de 335 cm., y que tome en cuenta las normas del diseño que se muestran en la parte de abajo de la página.

Comunica y escribe claramente las decisión que tomaste para establecer tu diseño: ¿Cuántos escalones tiene tu diseño, y cuál es el tamaño de la pisada (o huella) y elevación (o contrahuella) de cada escalón?
Incluye tus cálculos.
Muestra como tomaste en cuenta cada una de las normas.

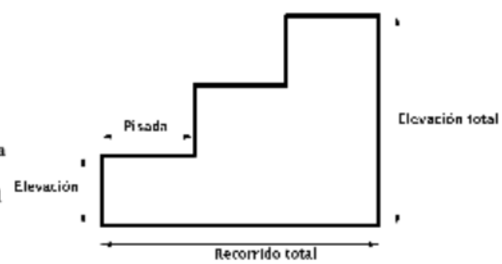
Normas para diseño de escaleras:

La pendiente de la escalera debe estar entre 0.55 y 0.85.
El doble de la elevación mas el recorrido del escalón, debe estar entre 60.9 y 63.6 cm.
No debe haber escalones irregulares, cada escalón debe ser del mismo tamaño.

Algunos términos usados:

- Pisada o huella: Parte horizontal de un escalón.
- Elevación o contrahuella: Parte vertical de un escalón.
- Pendiente: Medida de la inclinación de la escalera, se encuentra dividiendo la longitud de la elevación entre la longitud de la pisada.

$$Pendiente = \frac{elevación}{pisada}$$



27/05/2010 4

Figura A.3: Hoja de actividad: Diseño de una escalera.

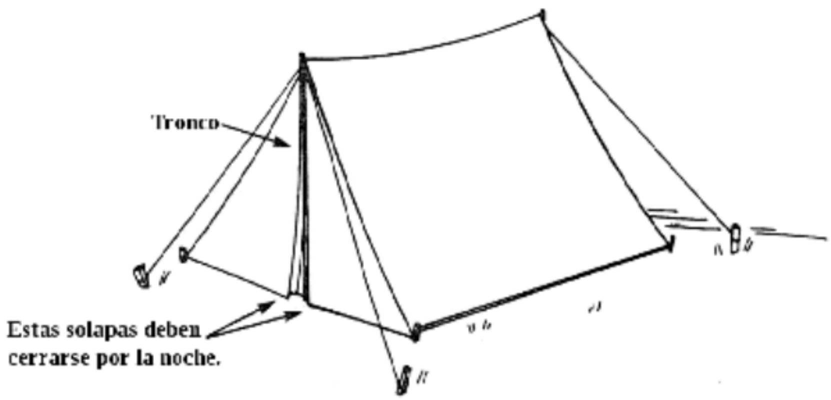
Problema 5

DISEÑO DE UNA CASA DE CAMPAÑA

Equipo No.:_________. Nombre:_______________________________________.

Este problema te da la oportunidad de:
Estimar las dimensiones de un adulto.
Visualizar y bosquejar la superficie de una casa de campaña, mostrando todas sus dimensiones.

Este trabajo consiste en que diseñes una casa de campaña, como la que se muestra a continuación.



El diseño deben satisfacer las siguientes condiciones:

- Debe ser lo suficientemente grande de tal manera que dos adultos puedan dormir ahí, sin problemas (con todo y su equipaje).
- Debe ser lo suficientemente grande para moverse dentro, mientras se esté de rodillas.
- La parte inferior de la casa de campaña está hecha de plástico grueso, en forma rectangular.
- Los lados inclinados y los dos extremos estarán hechos de una sola pieza grande de lona. (Debería ser posible cortar la lona de tal manera que los dos extremos no necesiten ser cocidos con los lados inclinados. Debe ser posible cerrar las solapas de los extremos.)
- Dos troncos verticales y algunas cuerdas, atadas a unas estacas, sujetarán la casa completa.

10/06/2010 6

Figura A.4: Hoja de actividad: Diseño de una casa de campaña.

Problema 5

1. Estima las dimensiones relevantes de un adulto promedio y anótalas en esta hoja.

2. Estima las dimensiones de un plástico grueso rectangular que será usado como base. Estima la longitud necesaria de los troncos verticales. Explica y escribe la forma en que obtuviste estas medidas.

3. Muestra mediante un dibujo, cómo cortarás la lona. Escribe todas las medidas claramente. Calcula cualquier longitud o ángulo que necesites para el diseño; explica y escribe cómo encontraste esas longitudes y esos ángulos.

10/06/2010 7

Figura A.5: Continuación: Diseño de una casa de campaña.

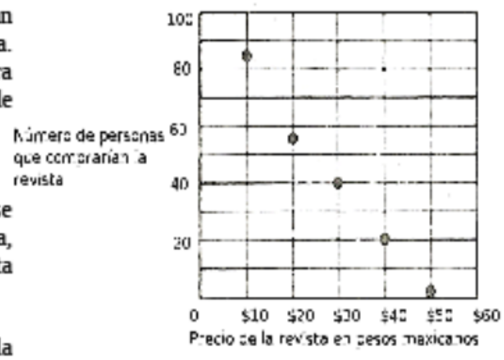
Problema 4

LA REVISTA

Equipo No.:_________. Nombre:_____________________________________.

Este problema te da la oportunidad de:
Interpretar una gráfica.
Identificar precios que maximicen los beneficios.
Determinar los beneficios, dados los ingresos por ventas y costos.

Un grupo de estudiantes decidieron que podían ganar dinero escribiendo y vendiendo una revista. Sus maestros les permitieron usar una computadora y una fotocopiadora; además, les facilitaron hojas de papel y tinta de manera gratuita.



Comienzan produciendo una copia de su revista y se la muestran a 100 estudiantes de su escuela, escogidos al azar, y les preguntan: ¿Comprarías esta revista si costara $10, $20, $30, $40, $50?

Los resultados de la encuesta se resumen en la gráfica mostrada en el lado derecho (un estudiante podía elegir más de un precio).

Contesta las siguientes preguntas de forma clara y ordenada, mostrando tus operaciones y resultados:

1. Describe cuidadosamente que es lo que muestra la gráfica.

2. a) Hay cerca de 1500 estudiantes en la escuela. ¿Cuántas revistas se venderían si el precio fuera de $40? , b) ¿Cuánto dinero dejaría esta venta?

3. a) ¿En cuánto se debe vender la revista para lograr obtener la mayor ganancia posible?, b) Si venden la revista a este precio, ¿cuánto dinero obtendrían?

Después de un tiempo, su revista tuvo gran éxito. Sus maestros deciden que deben pagar algo por el costo de producción: "Desde hoy, les cobraremos $5 por la producción de cada revista. Esto incluye el pago por el papel, impresiones, fotocopias y encuadernación"

4. Supóngase que el precio de venta fue $40, como en la pregunta 2. ¿Cuál fue la ganancia obtenida por los estudiantes, considerando los costos de producción?

23/11/2010 5

Figura A.6: Hoja de actividad: La revista.

ANEXO B

Transcripciones relevantes de audio

B.1 Quehaceres, televisión y dormir

Los integrantes de cada equipo, durante los primeros tres problemas, fueron:

- Equipo 1: Galilea, Mariana y Christian.
- Equipo 2: Jessica, Liliana y Eliseo.
- Equipo 3: Zyanya (Luis), Erick y Josué.
- Equipo 4: Arturo, Joaquín y José.
- Equipo 5: Daniela, Erika y Julio

Y en el último problema, La revista, los integrantes fueron:

- Equipo 1: Claudia, Fabiola y Andrea.
- Equipo 2: Denis, Vanesa y Hugo.
- Equipo 3: Ana, Laura y Libertad.

- Equipo 4 :Karla, Abisaí y Adán.
- Equipo 5: Adrián, Luis y Juan

B.1.1 Equipo 1

La tarea inicialmente no se complicó, rápidamente se dieron cuenta de la representación de la gráfica de dispersión. En la primera pregunta no fue difícil darse cuenta de que los puntos más cercanos al eje vertical habían visto por poco tiempo la TV y viceversa. En la segunda pregunta rápidamente pudieron encontrar una oración.

La pregunta siguiente representó un reto mayor para el equipo, ante la duda el profesor aplicador profundiza un poco mas enfocándose a que el equipo entendiera la pregunta, Galilea llama la atención del equipo y les hace ver su punto de vista con los siguientes comentarios:

Galilea: Es que mira . . . un par de personas hace mas quehacer que ver la televisión y otro tanto ve más la televisión que hacer quehacer, ahora hay gente que hace mucho que hacer y ve mucha televisión y hay otra que está ni ve mucha televisión ni hace mucho que hacer está los puntos medios, hay una equivalencia entre estos dos ...

Christian: Ya te entendí, ¿una equivalencia? pero como lo puedes explicar mejor.

Pareciera como que estaban tomando solo algunos puntos muy específicos de la gráfica para dar esta explicación tan general, por lo que el aplicador les comenta que pueden tomar en cuenta todos los puntos no solo algunos. Christian comenta que todos están a la mitad, después de algunos comentarios alrededor de que hay una equivalencia, pasan a la siguiente pregunta.

Galilea no entiende en la siguiente pregunta lo que se quiere decir con relación, Christian sugiere que la gráfica del primer inciso tiene que tener tendencia a crecer conforme los jóvenes tienen más edad. Christian dice que la relación la entiende como si los puntos estuvieran alineados.

Para el inciso a; Christian sugiere que cuando más tiempo pasa debe haber más puntos hacia arriba en la gráfica, pero también hace notar, considerando la gráfica, que piensa que algunos jóvenes de más edad también hacen poco quehacer, es decir, mientras los jóvenes tengan más edad hay mayor número que pasa más tiempo haciendo quehacer.

Para el inciso b; en esta parte después de analizar un punto de la gráfica inicial, en la que según Christian ese punto no tiene relación con los demás (el punto D al parecer), de tal manera que Galilea pregunta

Galilea: ¿Cómo puedes demostrar que no hay relación?

Christian: Poniéndole puntitos por donde quiera

En ese momento se dan cuenta de que uno de los puntos de la gráfica que realizaron en el inciso anterior estaba mal colocado , porque Christian cambia de opinión y ahora afirma que si hay relación el primer punto correspondiente a un joven de 13 años debe estar sobre el eje horizontal pues no hace quehacer.

Regresan de nuevo al inciso a;

Galilea: “Por eso es lo que te digo estaba bien como yo la tenía.”

Christian: "Una línea."

Galilea: "Si una línea... Yo lo que entiendo con el concepto de relación es que hay una equivalencia, ¿no crees?"

Christian: Silencio... "Una relación más bien es una línea, ¿qué opinas? ... es que no me explicas"

Galilea no le sabe explicar muy bien lo que entiende y sin embargo pasan de nuevo al inciso b.

Luego al pasar el aplicador para observar, el equipo muestra su que no entiende el concepto de relación, el aplicador motiva a que den una explicación o una definición, de tal manera que galilea insiste que hay una equivalencia, una conexión entre los puntos.

B.1.2 Equipo 2

Tampoco tuvieron problemas para encontrar los puntos que correspondían a cada joven. En el primer joven, Liliana hace saber que no hay un desequilibrio, vio mucho tiempo la TV, pero también paso mucho tiempo haciendo quehaceres.

La segunda pregunta Eliseo y Liliana inventa una oración que al final de cuentas es la misma, Jéssica la resume: "La mayor parte de la tarde vi la tv y no hice muchos quehaceres."

En la tercera pregunta, Liliana propone que la gráfica nos indica que tanto tiempo vemos tv y que tanto hacemos quehaceres.

Al pasar a la última pregunta el inciso a; el aplicador explica un poco más lo que se pregunta,

Liliana: "Pues entonces el punto que está hacia la derecha debe de estar más arriba por que es el que hace mas actividades, ¿no?"

Después de analizar un poco Jéssica vuelve a la pregunta anterior, en donde se cuestiona acerca de la relación entre tiempo de ver tv y tiempo de quehaceres, y dice:

Jessica: "No existe ninguna relación entre las personas pasan tiempo haciendo quehaceres y otras viendo la tv.

Finalmente la ponen como: No hay relación entre ambos tiempos ya que unos pasan más tiempo haciendo quehaceres y otros viendo la tv.

B.1.3 Equipo 3

No tuvieron problemas para interpretar los enunciados de cada joven en la primera pregunta.

En la segunda pregunta, Erick sugiere la siguiente oración: "Solo hice un quehacer y vi mucho la tv."

Sin embargo Josué propone.

Josué: Hice poco quehacer y vi mucho la tv.

Lo cual fue aceptado y es cierto en la hoja de respuestas.

La tercera pregunta opina Erick, "cuánto tiempo le dedicaron a los quehaceres y a la tv."

En el inciso a de la última pregunta; dividieron sus ejes coordenados en dos partes una parte inferior y una parte superior, pusieron algunos puntos en la parte inferior más cargados hacia la izquierda y en la parte superior puntos cargados más hacia la izquierda.

B.1.4 Equipo 4

No tuvieron problemas para contestar la primera pregunta, después trataban de ver en la segunda pregunta el enunciado.

En la tercera pregunta estuvieron intentando dar una explicación a la gráfica diciendo que había un balance entre las dos situaciones que se graficaban. Tratando de ver cuántos jóvenes ven tv y cuantos hacen quehaceres. En un primer intento los estudiantes discuten acerca de la interpretación de algunos puntos, interviniendo el aplicador para decirles que deberían tomar en cuenta todos los puntos, a manera de recomendación.

Después de poco tiempo pasan a la última pregunta:

Observan que en la primera gráfica los puntos más a la izquierda deben ir más arriba, y cuanto más a la derecha más abajo se deben de colocar los puntos. Un poco después de que colocan los puntos José les dice e insiste que pongan una línea, y lo señala de manera que les explica algo como lo que les decían, sin embargo los otros dos integrantes no acceden a esta, pero José sigue insistiendo en que deben poner la línea, con pendiente positiva, otros de los integrantes pregunta que si sale desde cero y sin cuidado la ponen de manera que comience en ese punto.

En la segunda gráfica, José les sugiere que los puntos deben ir "donde caigan".

Retomando la tercera pregunta, Arturo sugiere que hay un balance, hay muchos que hacen quehaceres y ven poco la televisión pero hay también muchos que ven mucho la televisión y hacen pocos quehaceres. Joaquín observa que existen otros pocos que ven tv y quehaceres más o menos la misma cantidad de tiempo.

B.1.5 Equipo 5

No tuvieron problemas para establecer las repuestas de la primera pregunta, al parecer Julio no entiende y Erika le explica que los puntos están acomodados de tal manera que se ve el número de horas viendo tv y el número de horas haciendo quehaceres.

Pasan a la última pregunta después de una pequeña plática acerca de la tercera pregunta que no lleva a nada, decían que había el mismo número de personas que hacían muchos quehacer.

En el inciso a, Daniela sugirió que se optara por una tendencia creciente de puntos conforme la edad aumentaba.

Para el inciso b, Daniela dice que "igual no así como que los puntos dispersos", y dice Erika "que todos por donde quiera, ¿no? Así yo me imagino".

B.2 Diseño de una escalera

B.2.1 Equipo 1

Hubo problemas inicialmente en entender lo que es la pendiente de la escalera incluso, después de una explicación por parte del profesor aplicador, Galilea piensa que entre más la pendiente se acerque a 1 la inclinación se acerca a un ángulo recto, lo cual es erróneo, sin embargo parten de esa idea.

Galilea toma la iniciativa diciendo que lo deben comenzar por dividir las dos cantidades en las que debe estar el doble de la elevación más el recorrido. Y dice

Galilea: "La pisada va a medir 2/3 y la elevación 1/3... Y ese 1/3 entre 2 para sacar el doble".

Y continua con sus cálculos, luego Christian la interrumpe para decir:

Christian: "Pero es que debe de cumplir con esta norma... mira... dividimos el total 335 entre un número aproximado de escalones y que no te excedas entre 60.9 y 63.6 de medida".

Galilea no entiende y Christian le intenta explicar:

Christian: "Dividí 335, que es la elevación total entre un número aproximado de escalones que yo pensé, me sale 67, 67 está entre estos dos números, que es lo que nos está pidiendo, ¿no?".

Galilea dice que el 67 no está entre los dos números pedidos. Intentan con otro número de escalones y se confunden al no encontrar una división cuyo resultado esté entre estos dos números. Y Galilea afirma que lo que ella está haciendo está bien a lo que Christian reclama que no entiende o no sabe si es correcto lo que ella hace. Entonces Galilea intenta explicar de nuevo, y comienza a hacer cálculos en los cuales llega a que deben ser poco mas de 30 escalones. Divide 63.6/3=21.2 y luego dice que eso debe medir la elevación de cada escalón pero luego divide entre 2 lo cual no argumenta, sin embargo luego Christian pregunta que cuántos escalones salen con esa medida y como 21.2/2=10.6 entonces salen más de 30 escalones. Siguen intentando con más números entre estas dos cantidades procediendo de la misma manera.

En otro intento Christian sugiere dividir 335/n, para calcular la elevación, y dice que n es un número de escalones supuesto por él, a saber 32, luego este resultado se multiplica por 2. Luego multiplican por 2 de nuevo para calcular el recorrido, sin embargo no argumentan este procedimiento final. Luego observan que la suma está entre la norma y lo reportan de manera austera.

Al calcular la pendiente de su diseño se dan cuenta que es muy poco, 0.25, a lo cual explica Christian "tenemos un error... se ve así como que bien hacia abajo", a lo que Galilea expresa que necesitan intenta

No muy convencidos de lo que habían hecho continuaron con otro intento en donde suponían x=63.6 y lo dividían entre 2 para obtener la pisada, dividiendo entre dos, suponiendo que era una de tres partes, obtienen la elevación (p=31.8, e=15.9), así obtienen una pendiente 0.5 en 21 escalones aproximadamente. Esto fue un acercamiento final en el cual los estudiantes no llegaron a resolverlo del todo solo obtuvieron la longitud de la pisa y la longitud de la elevación para obtener la pendiente. Cabe destacar que incluso ellos confundieron las divisiones por dos que hicieron.

B.2.2 Equipo 2

Primeramente el equipo discute un poco acerca de la inclinación de la escalera y el concepto de pendiente, el aplicador apoya un poco a los estudiantes tratando de explicar el concepto de manera superficial y ejemplifica. Luego ellos tratan de explicarse como pudiera estar la escalera, y una compañera lo entiende como sigue "(pendiente) la medida de la inclinación de la escalera, que tan parada o acostada está"

En su primer acercamiento, Jessica supone que en la ecuación 2e+p hay tres partes iguales en las cuales la elevación es una tercera parte y la longitud de la pisada es otra tercera parte, lo que hace es tomar 60.9 y dividirlo por tres para obtener la elevación del escalón (20.3 cm.), por lo tanto la longitud de la pisada es 20.3 cm. A lo que Eliseo comenta que la elevación debe ser más chica que la pisada, Jessica le pregunta el por qué, el profesor aplicador interviene y no llegan a concluir esa duda.

Jessica reflexiona acerca de este cálculo y concluye diciendo "20.3 no puede ser porque al dividir 20.3 entre 20.3 ya no nos da la pendiente que nos pide".

Jessica balbucea algo como "dividir la elevación 335 entre el número de escalones", y Liliana le comenta que no puede dividirlo porque no les dan el dato para hacerlo, a lo que Jessica responde con que pueden suponer un número. Comienzan con 5 y Jessica se da cuenta de que 67 es mucho para la altura de cada escalón.

Sin embargo el tiempo termina y no pudieron avanzar más.

B.2.3 Equipo 3

Tuvieron problemas para entender lo que la pendiente les quería decir, la inclinación fue lo más atinado que ellos pudieron acercarse al concepto de pendiente luego de una explicación del aplicador.

Erick, uno de los integrantes de este equipo comienza sugiriendo, mas no da un argumento, que se saque la elevación tomando una medida que esté entre los números dados en la segunda norma del diseño, a lo cual lo multiplica por dos confundiendo esa norma, que implica una relación y no una medida, con la elevación. Luego, Luis interviene un poco para decir su idea la cual es aceptada rápidamente por Erick. Él dice que tienen una elevación total de 335 cm. Y que tienen que dividirlo entre el número de escalones que quieren que tenga su diseño, en un primer intento escoge, 15 escalones 335/15= 22.3 es la elevación de cada escalón, esto a sugerencia de Erick lo multiplican por 2 (44.6), después de una discusión acerca de la relación entre elevación y pisada deciden que deben tomar en cuenta mas escalones a lo que Luis sugiere ahora 20 escalones haciendo los cálculos la elevación de cada escalón es de 16.75 cm., Luis remarca en decir que la pisada será más grande, ahora toman un número entre 60.9 y 63.6 para restarla al doble de la elevación obtenida anteriormente. Escogen 62 cm., 62-33.5 =27.5 cm.

Luis se da cuenta que es muy poca distancia de pisada y les dice que hay que tomar más escalones, Erick le dice que va bien: "hay que hacer una pisada que nos dé". Luis contesta y le dice que hay que tomar más escalones para que la pisada sea mayor porque la pisada es muy chica. Entonces escogen ahora 25 escalones, 335/25=13.4 el doble 26.8, y ahora escogen 63-26.8=36.2, a lo que Luis dice "ya sería más larga... yo diría que está bien" y Erick reclama: "Sería mucho escalón". Luis confunde el símbolo que representa el doble y lo pone como al cuadrado, sin embargo al estar haciendo las operaciones las hace de manera adecuada multiplicando por 2. Luego corroboran que la elevación total sea 335 multiplicando la elevación de cada escalón por el número de escalones.

Luego Erick retoma el cálculo 335

7 la pendiente con los cálculos previos obteniendo (13.4/36.2= 0.3), y Luis les dice “estamos mal, porque la pendiente debe estar entre 0.55 y 0.85” y el mismo Luis sugiere “entonces hay que hacer más larga la elevación”, pero pensando un poco se arrepiente de lo que dijo.

Luis está un tanto confundido y piensa que dejando la pisada de 29 cm podría quedar. Sin embargo Erick insiste que deben tener menos escalones, Luis dice que lo pueden dejar en 20, por lo que haciendo los cálculos (335/20=16.75 /29.5 (Josué hace el cálculo restando 63- 2(16.75))=0.56) lo cual cumple con las normas del diseño, así la elevación es 16.75 cm., la pisada de 29.5 y el doble de la elevación más el recorrido 63 cm., el recorrido total 590 cm., está dentro del rango.

B.2.4 Equipo 4

Ellos comienzan con un acercamiento intuitivo José pregunta “¿cuánto creen que mida un escalón?” Arturo contesta “como un metro de largo y de alto como 50 cm, ¿No?”, Joaquín les comenta que puede ser posible.

Tienen conflicto en entender que es la pendiente, el profesor profundiza un poco más en los términos usados.

Comienzan tratando de encontrar, intuitivamente, la medida de la pisada y la elevación que den una pendiente que esté dentro de las normas, usan; para la elevación 17 cm.; y para la pisada 28.5 cm. Calculando la pendiente 0.59 que está dentro de las normas, además observan que la otra norma también debe cumplir es decir 2 veces la elevación mas la pisada que les da un total de 62.5 cm. Lo cual está dentro de las normas también.

Luego, José se da cuenta de que si dividen la altura total de la escalera entre la elevación de cada escalón pueden obtener el número de escalones. “¿que no pa’ sacar la altura tienes que dividir este número entre la elevación para ver cuántos escalones van a salir?, tiene que salir un número natural, sin fracción”. Sin embargo no lo tienen bien claro para lo cual buscan una respuesta afirmativa por parte del profesor. Hacen el cálculo y les sale 19.7, sin embargo José se da cuenta de que no es natural y le dice que los escalones deben ser 19 o algo así que no pueden tener decimales, Joaquín le pregunta por qué y José contesta “para que todos los escalones queden a la misma elevación y la misma pisada y no queden unos más grandes que otros”. En eso alguien comenta “y que por qué entre 17, por que no 19 u otro” y surge la duda de donde salió 17, Joaquín les explica que “17/28.5 te da 0.59 y es lo que te pide la pendiente ... y la otra norma es esta, el doble de la elevación ...” lo interrumpe Arturo “ya, ya, ya le entendí entonces para que te salga la elevación y el recorrido del escalón debes de poner otros para que te dé entre esto (el número de escalones sea entero), porque tu pusiste 28.5”, aquí José les vuelve a explicar la división que hizo al principio.

Después de un largo silencio, el aplicador les invita a seguir en su idea, y a escribir sus resultados. José se da cuenta de que cambiado un poco la elevación y la pisada sale un resultado más razonable, y busca un número que le de tal resultado. Les explica: “Mira si pones 17.63*2=35.26+28=63.26 que está entre esos dos números... y después pa’ sacar la pendiente divide 17.63/28= 0.62 y ¿no está entre estos números? ... y luego lo que dice ira, no debe haber escalones irregulares cada escalón debe ser del mismo tamaño, y si divides los 335 fíjate... 335/ la elevación 17.63 y fíjate cuánto nos da, 19 escalones (19.001, por milésimas) casi perfectos... yo digo que es así” Sin embargo tienden a dudar de sus resultados y llaman y esperan que el profesor aplicador les acepte sus resultados.

B.2.5 Equipo 5

Después de una lectura al enunciado del problema, Daniela propone el siguiente cálculo.

Daniela: "Si dividiéramos el número de la elevación (335) entre la distancia que hay entre estos y estos eso nos da () un número exacto que es el número de escalones."

Erika intenta entender como representar la segunda condición. El profesor pasa a explicar o dar idea al equipo del concepto de pendiente.

Daniela cambia el enfoque e intenta dar valores a la huella y a la elevación para cada escalón, de manera intuitiva. Deciden que 30 cm. para la huella y 15 cm., para la elevación.

Luego, Julio pregunta que cuántos escalones, Daniela duda y dice que sean 24,

Entonces hacen los siguientes cálculos sin justificar: 30*15=450, 450*24=10800, ¿es la altura?

El profesor les ayuda a entender la segunda de las normas para el diseño y enseguida Daniela calcula erróneamente (30+30) y dice "si está bien" a lo que después se arrepiente y asegura que deben de ser mas.

Erika interrumpe y dice

Erika: Mira este 30 que lo multiplicáramos 11.5, 345 entonces le tenemos que quitar 10.

Erika sigue intentando multiplicar el 30 y entonces les dice que intentan multiplicar (29.5*11.3=335.61), de alguna manera Erika intenta encontrar una combinación entre el número de escalones y su elevación para que el resultado sea la elevación total de la escalera. Sin embrago hacia los cuestionamientos de su compañera Daniela ella le responde que no sabe:

Erika: Mira es que si sale pero me sobra esto, vamos a encontrar otro número, porque multipliqué 29.7*11.3, y ya nos dio esto (335.61)

Daniela: ¿Y eso qué? ... a que n... y ¿por qué se te ocurrió eso?

Erika: No sé

Daniela: Y ¿eso donde iría?

Luego intentan encontrar él para de números que les den la elevación total de la escalera.

Enseguida Daniela se da cuenta que deben doblar la elevación que proponen 29.7+29.7=58.4, y debe sumar también 11.3, Daniela dice que excede los límites para esa condición. Y se ocupan en calcular desesperadamente la combinación que les dé

Se observa claramente que los primeros intentos no son muy claros para los estudiantes de este equipo, las operaciones que estuvieron exhibiendo no fueron razonadas y además confundieron el número de escalones con la elevación de cada escalón. Tuvieron problemas para entender el enunciado de la segunda norma del diseño y no existen justificaciones sólidas para seguir los argumentos que iniciaron sus acercamientos.

Después Daniela sugiere cambiar de nuevo el enfoque de tal manera que se tome ahora la pendiente de la escalera. Ahora buscan dos número que divididos les den una pendiente que esté dentro de la norma, y después de algunos cálculos, por ensayo y error, llegan a que 20.3 y 40.6 son los números que cumplen tal condición, los multiplican para saber la elevación según Erika.

Luego el profesor les motiva a que lo entiendan bien y que lo lean cuidadosamente. Además los invita a explicar lo que han hecho. Les cuestiona acerca de la multiplicación, a lo que Israel intenta explicar que debe ser más bien sumado. El profesor les pregunta de tal manera que los guía:

Profesor: ¿Pero por qué multiplican?

Daniela: Primero nada más para encontrar la altura y el número de escalones

Profesor: Si, pero, ¿Por qué multiplicaron 20.3*40.6? ... Pero a ver esto por esto (20.3*40.6) pues es el área de esta parte (área transversal del escalón), y ¿eso que tiene que ver con el diseño?"

Julio: Nada.

Profesor: Entonces ¿por qué multiplicaron?

Daniela: No sabemos qué hacer.

Julio: Entonces se suman, ¿no?

Profesor: ¿Para qué?

Julio: Para llegar al número de escalones, y saber cuántos números hasta llegar al número de la altura"

Profesor: ¿Si?, y ¿luego?

Julio: Para dividir esto entre...

Profesor: Primero, primero, ¿quiénes se suman?

Julio: 15+30 hasta llegar a 335

Profesor: Pero esto (30 cm.) no tiene nada que ver con la altura o ¿sí? no perjudica a la altura, ¿quién perjudica nada mas?

Julio: 15

Profesor: ¿Cuántas veces, cuántas veces lo va a perjudicar?

Erika: 22.3

Se quedan pensando y el profesor se retira, después de un silencio largo Daniela sugiere que se busque un número que divida a 335 dando como resultado un entero, sin embargo no encuentran alguno por ensayo y error.

B.3 Diseño de una casa de campaña

B.3.1 Equipo 1

En el primer cuestiona miento los integrantes sugieren 1.70 m., lo cual es lógico pensar sin embargo ellos no tomaron en cuenta el ancho promedio del adulto, Christian pregunta que si de rodillas, y entonces Galilea explica que aunque se esté de rodillas la cabeza del adulto pegará en la parte superior de la lona, justo antes de que llegue al extremo, por lo que ella sugiere quitarle unos 15 o 20 cm. a la altura promedio del adulto. Luego dice que 1.60 de altura para la casa estaría bien, “es por lo regular lo que miden las casas de campaña, por que en algunas cabes hasta parado”.

Entonces se queda en 1.60 m.

Primero comienzan con la base, contemplan el equipaje y la altura de las personas, de largo 1.80 m., y lo del equipaje lo consideran a lo ancho, 1.50 m., y luego reconsideran 2 m., de largo para la base.

Luego la longitud de los troncos verticales, Christian dice que lo mismo de altura, 1.60 m.

En la tercera pregunta nos encontramos con las características especiales que va a tener el diseño de este equipo.

Galilea sugiere desarmar la casa (de manera esquemática) de tal manera que se pueda observar en un plano los cortes que va a tener. Ella propone que se desarme “como una pirámide”.

Galilea: Primero son...

Christian: ¿No dice de que... qué forma tiene la lona?

Mariana: Rectangular

Galilea: Estoy mintiendo así no es... no dice que forma pero es obvio

Christian: Según yo... dice que la va a recortar ¿no?, pero como se va a recortar

Galilea: ¿Qué es eso?

Mariana: Es que no tiene picos, la lona no tiene picos, se supone que en cuanto bajas esta de aquí, esto hace que se jale, por eso es que cuelgan estas rectas

Christian: Y las debes de cortar ¿no?

Mariana: A la mitad solamente, o sea cortarle un extremo por aquí y ya. O bueno si lo está tomando así aquí dobla, aquí se dobla, o sea aquí va el palito. Pero se supone que entonces de aquí vamos a jalar un hilo, ¿no?

Christian: Nada más dice que la cosan de aquí mas no que la cosan de acá.

Mariana trata de explicar que no deben de cortarse los extremos con los lados inclinados, y están tratando de entender en donde debería de cortarse la lona.

Galilea interviene y dice:

Galilea: Ya se mira.... Podríamos decir que es un rectángulo y que está acostado.

Christian: Y luego como doblas, o sea las partes que cortaste se doblan hacia abajo.

Galilea: Por qué ese ángulo debe ser de 90° para que alcancen a... juntarse.

Luego, comienzan a descomponer la figura, de tal manera que hacen un esquema bidimensional de como quedaría la lona al cortarla, junto con la parte rectangular que servirá como piso de la casa.

Determinan algunas medidas de su modelo y hacen un borrador para ubicarse.

B.3.2 Equipo 2

Jessica lee el problema, y al final lee la primera cuestión acerca de las dimensiones de un adulto promedio.

Jessica: ¿Las dimensiones de un adulto promedio?

Eliseo: Uno ochenta y...

Jessica: Como uno setenta y cinco ¿no?

Liliana: Según yo (y menciona algo de las modelos) que tenían que ser de uno sesenta y cinco.

Eliseo: Uno sesenta y cinco ¿no?

Jessica: No, uno setenta y cinco.

Jessica, lee la segunda cuestión acerca de las dimensiones que debe tener la base y los soportes de la casa.

Jessica: 1.75 por 2, 3.5 metros. Y para que pueda moverse bien ¿podemos agregarle otro metro?

Liliana: si.

Jessica: Esto puede ser la... la altura ¿no? mira los 3.5 metros.

Liliana: y es cuadrada ¿no?

Jessica: y esto sería la base, entonces hemm,

Liliana: pues yo creo que van a dormir hacia allá, y cuando se quieran levantar de... cuando quieran estar de rodillas sería como la mitad ¿no?

Jessica: Bueno, podemos decir, sí la mitad para que quede espacio para sus...

...

Jessica: a ver 1.5 y son dos...

Liliana: ¿1.70 y 1.75?

Jessica: no eso no dice, es que aquí es donde van a caber, tienen que caber aquí.

Eliseo: dos personas

Jessica: Sí. Entonces serían 4.5 ¿no?

Liliana: ¿ah 4.5 metros? ¿Por los dos?

Jessica: 1.5 por 2, no...

Liliana: Es lo mismo, suponiendo que los dos midieran lo mismo 1.75, es el mismo espacio, no tenemos por qué duplicarlo o sea ahí.

Jessica: Sí, ahorita lo que tenemos que encontrar es la base, o sea a lo largo que debe medir. Por eso digo que 1.75.

Liliana: mmm 1.80

Jessica: ¿pero para que quepan sus cosas?

Liliana: hay que hacerlo más ancho, entonces ahí si vamos a multiplicar tal vez lo que...

Jessica: Aquí sería más o menos 2 metros ¿no?

Liliana: Donde van a poner las cosas, ¿en los pies, en la cabeza en un lado o en el otro?

Jessica: lo que te dice es que puedan dormir ahí y sin problema con todo y su equipaje y que debe tener espacio suficiente para moverse dentro de rodillas.

. . .

Jessica: Aquí sería por donde estarían ¿no? 1 metro sería.

Liliana: No, está muy chiquito.

Eliseo: Para 1 metro tendría que entrar uno agachado.

Jessica: Lo que resta para los dos metros, 25, 1.25.

Eliseo: No

Jessica: 1.75

Eliseo: Más o menos, para que no entren tan agachados pues porque depende, los más altos se agachan por..., 1.80 para que...

Jessica: 1.80

Liliana: Pues sí.

Jessica: La casa tendría como base 2 metros por 1.80.

. . .

Jessica: Sería 1.80 de longitud del tronco.

Jessica: Y levantando ya la casa, aquí sería 1 metro 80, 2 metros y a lo largo 1.80, cabrían bien.

Jessica lee la tercera pregunta.

Eliseo: Lo de lo ancho no puede ser también 2 metros, para que quepan también a lo ancho.

Jessica: No, tiene que ser rectangular.

Jessica: ¿Entonces mediante un dibujo como cortarías la lona?... Tenemos que cortarla de manera que esto no sea cosible. Un poco sería así.

Liliana: Pues como está en el dibujo podemos hacerla así, a ver préstame tu cuaderno... a ver con una hoja.

Eliseo: ¿Cómo ves la lona de largo? medirá unos 3 metros ¿no? Ponle de largo 3 metros para que sea 1 y medio de un lado y 1 y medio del otro...

Liliana: Más bien tendríamos que tener la suma de los lados que mide la casa y de aquí. . . estaría aquí.

Eliseo: supongamos que este es el ancho de la lona no, todo pues la lona, esta tendríamos que doblarla a la mitad. Y así quedaría ya nada más los lados. . .

Eliseo y Liliana están tratando de hacer un bosquejo de la casa con ayuda de una hoja de papel doblando.

Jessica: tenemos que ver, sacar primero, lo de la base que es 2 por 1.80 y ahora esto de aquel lado, acá también habría 1.80 y allá 2. Entonces 1.80 más 1.80 serían 3.6, lo que mediría todo esto (la arista más alta de la casa de campaña). 3.6.

Jessica: 2 metros aquí, ahora 1.80, la mitad de 1.80, serían 90, 0.90 serían 2 metros 90 centímetros de esta. . . Para ver cuánto mide todo, el perímetro ¿cómo sería?, es 2.90 más 3.6 más 2.90 más 3.6

Liliana: 28

Jessica: igual a 300.1 sería lo que daría todo. Esto es lo que mediría en total.

Liliana: y ¿de cuánto lo dejaste entonces, de 1.80?

Jessica: Sí.

El equipo se mantiene realizando bosquejos con hojas de papel pero no han llegado a completar la respuesta de la pregunta 3.

Como podemos observar el equipo 2 no tuvo la necesidad de calcular la altura su diseño ni ángulos, ni una otra medida.

B.3.3 Equipo 3

Erick lee cuidadosamente el enunciado del problema.

Erick: Un adulto promedio de 1.70 a 1.72.

Josué: Tiene que caber un adulto no acostado y tiene que caber sus maletas sin que los moleste y aparte tiene que cerrar la (”tapa”).

...

Luis: Esta parte de la lona tendría que ser como mmm, así, no al revés. Sí para que al momento de pararla, esta se pueda cerrar esta. Debe estar más ancha por que los adultos deben estar acostados.

Erick: ¿Entonces como quedaría?

Luis: La lona extendida debe tener más o menos esta forma, ¿no?

Josué: Sí. Ah no, va a ser al revés.

Intentan entender que forma debe tener la lona en dos dimensiones, para formar la casa.

Luis: Ahora las medidas deberían de ser.

Josué: A ver la medida en sí de lo largo pues diríamos que sería acá porque, como de 1.80 ¿no?

Luis: Pero si miden 1.70... es que 10 centímetros pues es algo ”así”, más bien...

Josué: Como 2 metros ¿no?

Luis: Los 2 metros

Josué: Ahora de lo ancho.

Luis: De lo ancho, cuánto mide uno

Josué: Son las dos personas y aparte con las maletas, dice.

Erick: ¿1 metro que tanto es?

Luis: Sí, como que aquí hay que ponerle como 2 metros y medio ¿no?

Josué: Sí.

Erick: 2.10

Josué: Y de lo ancho ¿cuánto le pondríamos?

...

Erick: ¿Metro... metro y medio le ponemos?

Josué: Sí ¿no?, porque dos personas con la maleta y aparte para que se puedan mover.

Josué: Y ahora la altura.

Erick: Supón que mides tu como ¿1 50? pero cuanto le ponemos.

Luis: ¿Metro y medio?

Josué: ¿Igual que lo ancho también? sale pues. Pero ponle de altura o así porque si no se van a revolver las medidas.

Josué: 2 metros 10 de largo, metro y medio de ancho y metro y medio de largo.

Explican al profesor

Josué: De ancho para que quepan las dos personas, un metro y medio.

Luis: Le ponemos metro y medio para que quepan las maletas, 50 centímetros para cada quien y 50 centímetros para las maletas.

Erick: Y se le dio 1.50 de altura para cumplir esto, que dice: lo suficientemente grande para sin que moleste.

Josué: Ah y ahora para que se cierren las...

Luis: Abajo, debe ser un corte intermedio, debe de medir... setenta y... punto 75 y punto 75. (La medida de las pestañas de las solapas)

Josué: Sí.

Luis: La longitud de los troncos... espérame, la lona debe ser rectangular primero, para después cortarla, entonces para cerrar las solapas, entonces debes de cortar de aquí.

Josué: Ándale para adentro, tipo triángulo.

Luis: Entonces esta parte se doblaría y aquí también se dobla y ya queda y al momento de pararla...

Josué: Serían más de 2 metros ¿no?

Luis: Al momento de pararla esto se dobla.

Los estudiantes analizan los dobleces que debe llevar su diseño bidimensional para poder encontrar la altura de los troncos verticales que sostendrán la casa de campaña.

Erick: Sí, es así.

Luis: Entonces, ¿pero cuáles serían las medidas?

Josué: Entonces como muestro las medidas, ¿cómo cortarías? nomas dice que como lo cortarías.

Luis lee la cuestión 2.

Luis: Entonces el plástico debe medir 2 metros por 1.5, si. Esas son las medidas del plástico

Josué: Dice que saquemos las medidas.

Luis: SÍ, las medidas del plástico, del que queda abajo, entonces el plástico mide 2 por uno y medio.

...

Josué: De altura mide uno y medio y estas tapan hasta abajo.

Luis: Cada una uno y medio pero esta no mide los dos metros de aquí, esta debería medir entonces ¿dos metros?

Josué: O sea metro y medio y también acá y también del otro lado.

Luis: No porque fíjate, si mide un metro y medio de aquí a aquí y un metro y medio de aquí a acá, entonces ya no mide los dos metros, mide tres metros.

Josué: Por eso yo nomas estoy contando lo que mide aquí mas esto mas los dos metros de aquí por que dijimos que de aquí a aquí, sin contar las partes de aquí...te estoy diciendo que mediría así sin doblarla y sin nada mediría 5 metros.

Luis: Entonces la ponemos en tres metros.

Erick: Pues sí.

Luis: Pero ya tres metros de largo ya es mucho.

Josué: Yo digo que es así.

Luis: Porque esta parte no puede medir un metro y medio.

Erick: Mira que es lo ¿qué quieres saber? Como medirías un plano, sería un rectangular, 5 por 3. porque por tres porque aquí es uno y medio y uno y medio y de este lado son tres metros ya, y entonces de aquí nos dan dos metros más metro y medio y metro y medio son 5, entonces son 5 por 3. O a ¿qué te refieres?

Luis: Yo digo que si... porque estoy tomando metro y medio pero con la lona ya parada. Ah si la lona acostada debe de medir tres metros.

Erick: 5 por 3.

Luis: Si la lona así mide tres metros, si la para así metro y medio.

Josué: No puede medir metro y medio...

Luis: El lado

Erick: si fuera metro y medio sería así,

Luis: por eso, tres metros aquí y la paras, la divides entre dos.

Josué: es lo que te estoy diciendo si lo divides a la altura metro y medio va a quedar así, precisamente la lona doblada no se va a poder abrir.

Luis: esta es la lona y la vas a partir de aquí y de aquí mide tres metros.

Josué: la haces de uno y medio y uno y medio no se va a poder abrir, pero no sabes si de metro y medio como la vas a abrir.

Erick: ¿qué es lo que quieren sacar? nomas díganme.

Josué: lo que mide el largo y lo ancho no.

Luis: esta parte de aquí.

Erick: y esa cuánto mide.

Luis: yo digo que metro y medio por que mira, la lona debe de medir tres metros para que al ponerla en su lugar, porque mira, de aquí son tres metros y de aquí a acá son metro y medio. Así y así sigue siendo metro y medio.

Erick: no es metro y medio.

Luis: A poco di que la lona se extiende.

Erick: es que mira, aquí son tres metros, entonces tu al ponerla así (parada) dices que un metro y medio pero no porque no está perfectamente esto así (no encaja perfectamente en el piso).

Josué: es si quieres que la altura sea un metro y medio, se va a quedar así.

Luis: yo lo que quiero sacar es la medida de la lona, la lona mide tres metros, la pongas así o la pongas así mide metro y medio de cada lado.

Josué: pero la altura no va a medir metro y medio.

Luis: la altura quedaría más larga.

Erick: es lo que te estamos diciendo.

Erick: entonces debe de medir más de metro y medio. Unos dos. ¿Por qué al momento de pararla es un ángulo de qué? 90. de 45 grados.

Josué: yo diría que 6 metros de ancho

Erick: 45 por 2 son 90 centímetros.

Josué: yo diría que 6 metros mediría de ancho para que, por que si se pude hacer bien para que quede metro y medio de altura.

Luis: Pues sí.

Erick: vamos a intentarle con dos metros a ver...

Josué: que no va a quedar...

Luis: entonces tú crees que esto mide cuatro metros. Yo diría que esto tres metros y medio

Josué: yo también, yo diría que 3 metros y tres metros (6 metros de ancho).

. . .

Josué: yo lo que te estoy diciendo es lo que va a medir la lona de lado a lado, sin doblarla.

Erick: ah sin doblarla.

Josué: es lo que estamos sacando.

Erick: pero al momento de armarla ya no va a quedar... lo único que me refiero no sé si es lo que están es que esto mide 1 y medio entonces son tres metros y entonces al hacer esto no sigue midiendo de aquí acá uno y medio. Ya no mide uno y medio de aquí al piso a la punta ya no mide uno y medio.

. . .

Josué: y si la lona de ancho mediría 6 metros.

Luis: pero luego la altura.

Erick: la altura te da, a ver ya serían 30 y 30 no, entonces son 90 45 90 6 metros entonces son 3 metros, no va a quedar.

Josué: de altura como dices que va a quedar tres metros.

Erick: bueno háganlo pues, yo me refiero pues a una cosa y ustedes a otra.

Erick: al pararla esto mide tres metros, sigue midiendo tres metros, pero yo lo que me refiero es del piso a la punta ya va a medir mas, por que mas, porque este ángulo son 45 ° o sea 90 es esto la mitad 45, entonces a 45, entonces esto está así si estos son tres metros, la mitad de tres

Josué: uno y medio.

Erick: ah ya le entendí, entonces si... es que yo lo sumaba.

Luis: si, entonces, esto mide tres metros y aquí dos, entonces ya nomas nos falta sacar la medida de la lona de estas partecitas, las extensiones pues.

Luis: vamos 75 centímetros, estas cosas van a medir 75 centímetros.

Josué: ¿de dónde van a medir 75 centímetros?

Luis: de aquí mira

Josué: por eso pero si tiene que estar un metro y medio y 75 centímetros ahí.

Luis: 75 y 75

Erick: de aquí a aquí son 75

Luis: y del otro lado también.

Erick: pero para que esté cerrada... aquí dice estas deben estar cerradas, estamos midiendo de aquí a aquí.

Luis: por eso se le va a cortar esto.

Erick: esas partes se le van a cortar.

Josué: pero lo que yo te digo que si mide 7.5 es esta parte o lo de aquí.

Erick: esto

Josué: si.

Luis: lo que quiero saber es la medida de esta, ¿también debe medir metro y medio?

Josué: no

Luis: si porque es altura (la hipotenusa del triángulo que se les forma en las pestañas)

Josué: ah sí es cierto.

Josué: ya acabamos.

Luis: yo diría que debe de medir más eso.

Josué: Porque si es la altura.

Erick: es que si mide uno y medio.

Josué: también si pones mas mediría, sobraría lona.

Luis: Si habíamos dicho pero, si esta parte mide metro y medio (la hipotenusa) como esta parte va a medir metro y medio también.

...

Erick: tres metros y medio mide de aquí a aquí, si

Josué: si son tres metros y medio pero...

Erick: ¿cuánto mide esto? ()

Luis: metro y medio

Erick: y ¿por esto?

Luis: es lo que quiero sacar.

Erick: ah entonces esa es la incógnita... entonces aquí son tres metros y aquí .75.

Erick: como se hacía esto, ¿se multiplicaban?

Luis: es que simplemente la altura no sería de metro y medio, la altura sería menor en todo caso.

Intentan entender como quedaría si pararan su diseño.

El profesor interrumpe y les pregunta:

Profesor: como le hacen para que aquí mida 1 30?

Erick: 1 50.

Profesor: 1 50.

Erick: porque de aquí a aquí son 30 centímetros no. entonces aquí son 90° entonces al abrirla entonces son 45°

Profesor: y si esto mide 1.50 ¿cuánto mide de aquí a aquí? (la extensión de su diseño que simula las puertas del diseño)

Luis: 75

Profesor: ¿como saben?

Erick: es lo que estamos midiendo de diseño. Para que cumpla.

Profesor: y si esto mide 75 ¿cuánto mide la altura?

Erick: 1 50, son 90° no, entonces 45° es la mitad entonces... en 45° debe ser un metro y medio. ¿Sí me explico?

Profesor: entonces pongan ahí esa explicación.

...

Intentan dibujar su diseño completo.

Luego intentan ver cuánto vale la hipotenusa del triángulo. Erick dibuja el triángulo distingue las medidas de los catetos (3m y 75 cm) y comenta.

Erick: entonces para sacar eso no se si se suma o se multiplica.

Josué: se multiplica.

Erick: aquí si se multiplicaba y luego entre dos.

Josué: no me acuerdo.

Llaman al profesor.

Erick: usted sabe lo de hipotenusa, aquí ¿se multiplicaba el cateto opuesto entre esto para sacar la hipotenusa?

Profesor: tú qué piensas.

Erick: no me acuerdo.

Profesor: este... ¿no sabe el teorema de Pitágoras?

Erick: es lo que no nos acordamos.

Erick: pues yo pienso que es así, se multiplicaba cateto opuesto más cateto adyacente entre dos.

Josué: pero pues daría mucho ya.

Profesor: ¿para qué quieren saber eso?

Erick: para saber cuánto mide de aquí a aquí.

El profesor les dice el teorema para que avancen. Y lo realizan, pero no cuidan las unidades de un cateto que está en centímetros.

Josué: 56.25 metros

Luis: Yo digo que ya te equivocaste en algo, porque no te diste cuenta que estos eran centímetros (75) y que estos (3) eran metros.

Josué: Oh sí. O sea que hay que convertir centímetros a metros.

Luis: La suma de esto son 6525.

Erick: Al cuadrado porque es la hipotenusa, 6525 por 6525.

Josué: Ahora divídelo entre cien.

. . .

Josué: 65.25 o sea que ahí está.

Erick: Entonces ya está.

Luis: Entonces ¿cuánto mide esto? (la altura de la casa)

Erick: Ya se cuánto mide, mide 1 y medio. Porque uno y medio por que al cerrarlos nos da uno y medio. Y es uno y medio entonces de todo abierto o cerrado es uno y medio.

Luis: Y ya parada.

Josué: Por eso uno y medio.

Luego lo corroboran escribiendo sus respuestas sobre su diseño.

B.3.4 Equipo 4

El equipo lee la actividad.

José: Empiézale pues amigo... estima las dimensiones de un adulto.

Arturo: 1.70 1.80

José: Y así a ver yo mido 1 75

Joaquín: Un adulto no un niño.

José: Tu ¿cuánto mides?

Arturo: No sé.

Joaquín: 1 80 yo mido.

José: 1 75.

...

Arturo: ¿Y de rodillas?

Joaquín: La mitad de 70

José: 35.5

Arturo: No.

...

José: Bueno pues, 1.20.

Joaquín: A ver mídete con la regla Pepe.

José: Mídete tú.

...

Arturo: ¿De rodillas cuánto me dijeron?

José: 1 22.

Arturo: Te estaba diciendo que cuánto media hasta la rodilla

José: 50

...

Segunda pregunta.

Arturo: Mira si 1 25 están de rodillas, ponle 1.30, 1.30 por...

Joaquín: Por 1.80

José: SÍ o 1.75

Joaquín: 1.30 por 1.

Se acerca el profesor

Arturo: Estamos en la pregunta dos... 1.80 porque, más o menos 1.80 ¿verdad?

Profesor: ¿Por qué?

Arturo: Porque debe caber de rodillas adentro de la esa (casa) y si

Miden 1.75 miden 1.25 de rodillas, pues 1.30 para que alcance a caber la altitud. Y acostados van a medir 1.75, por eso le pusimos 1.80, para que quepan acostados

Profesor: ¿Y el equipaje?

Arturo: Los cinco centímetros

José: Ah no, ”neta”.

Arturo: Nos faltó el equipaje, 2 metros para que sobre, ¿a los lados?

No le pusimos nada ¿verdad?

Profesor: ... Lean otra vez las condiciones para que vean que es lo que se ocupa.

Arturo lee la pregunta de nuevo.

Arturo: De aquí a acá mide 1.35, la altura mide 1.35, entonces en lo ancho debe de caber el equipaje, 2 metros por que aquí mide 1.35, quedan 25 cm para el equipaje...

Arturo: Sí, dos metros ¿no? para que

José: Es que el plástico es el que va abajo, y entonces tiene que ser de largo, haz de cuenta así en cuadro.

Arturo: ¿Entonces ahorita no estábamos midiendo la altura?

Joaquín: ¿De largo cuánto miden ellos?

Arturo: 1.75

José: ¿Y de ancho? ya tenemos lo largo solo falta lo ancho ¿cuánto puede medir?

Joaquín: Sí, es 1.75.

Arturo: Sí, por 1.80.

Arturo: Es que no va a caber el equipaje.

José: El equipaje no va, no va así en lo largo, si no va así a lo ancho.

Arturo: Ellos se van a acostar así y el equipaje va a ir a los lados aquí. . . ¿Entonces cuánto es?

. . .

Arturo: entonces lo de 1.30 es lo que está a lo largo aquí (la longitud del tronco), se supone que ya estamos midiendo todo.

José: Por eso mira de aquí a aquí es lo 1.30, de aquí a aquí es 1.80. Luego de aquí a aquí ¿cuánto?

José: Es que yo siento que si tiene lo de aquí ¿no? 1.20

Arturo: Le pongo 1.20

. . .

Arturo: Entonces aquí es 1.30 (ancho de la base) ¿verdad? también... 1.30 ¿no? o 1.50

Joaquín: 1.50 pa’ no errarle.

José: ¿El tronco es esto Arturo?

Arturo: No ves que aquí dice tronco.

El profesor se acerca a explicar cómo está la figura los troncos.

Arturo: Entonces se supone que lo del tronco debe de estar hincado porque aquí dice que debe de estar hincado.

[Esta grabación solo duró 18 minutos, las baterías de la grabadora se agotaron]

B.3.5 Equipo 5

Daniela lee la actividad y enseguida comenta:

Daniela: Ay, no le entiendo.

Lee nuevamente las condiciones del diseño.

Daniela: Es que no tiene que ser tan alta, pero si tiene que ser grande, ¿no?

Erika: Sí.

Daniela lee ahora la primera pregunta.

Daniela: Un adulto promedio como 1.70 ¿no?

Erika: Sí.

Daniela rápidamente sugiere esta medida como la medida promedio de un adulto y sus compañeros aceptan. Luego, pasa a la segunda cuestión, que es estimar las dimensiones del rectángulo base.

Daniela: Entonces las dimensiones del rectángulo, dice que tiene que ser suficientemente grande, y ya me estoy poniendo nerviosa... Debe ser suficientemente amplio... como para estar de rodillas ¿cuánto medirá? una persona.

Julio: 1.20, 1.10.

Daniela: ¿Cuánto miden tus piernas?

Julio: Como un metro.

Daniela: Ay no.

Erika: No es cierto mira, de aquí a allá son como 50 cm.

Daniela: No tenemos una regla

Daniela: Pon tu unos 50 centímetros, ¿sí?

Erika: Sí.

Daniela: Digamos cuando estén de rodillas...

Erika: Como 1 20.

Daniela: ...Medirá como 1 20... Entonces la esta vertical (tronco vertical) pon tu que le pongamos que mida 1 30. ¿Te parece? O sea para que haya como un despiste o es mucho.

Erika: Sí, 1.30 está bien.

Daniela sugiere otra cantidad 1.35 y lo pone a votación quedando 1 30. Pasan a las medidas de la base rectangular.

Daniela: . . . Lo que se tendría que ver, cuánto espacio hay de aquí a acá, cuánto espacio le puedes poner entre uno y otro (entre cada tronco)

Erika: Pues sería como 1.80 ¿no?

Julio: ¿Cuánto sería aquí?

Daniela: Eh… 1.30

Erika: 1.80 estaría bien para que cuando se duerman...

Erika insiste.

Erika: Entonces sería como 1.80 ¿no? para que quepan bien los dos dormidos.

Daniela: Aha, porque es que dice con todo y su equipaje.

Erika: Ah no, entonces sería mas

Daniela: No si, por que acostados miden 1.70...

Julio: ¿Y 10 cm mide el equipaje?

Daniela: No, entonces tiene que ser más

Julio: Como 1.85.

Daniela: Si porque 1.70 es lo que ocupan cuando están dormidos.

Julio: Como dos metros es de aquí a la banca.

Daniela: Miren ya les dije lo que tienen que hacer la medida, pon tu 2 metros porque 1.70 de lo que mide (Julio interrumpe)

Julio: 1.90

Erika: Sí, 1.90

Daniela: … Y 20 cm de

Julio: Sí, de equipaje.

Daniela: Ok, anota.

Erika: Sí, por qué un equipaje... no pero un equipaje mide como esto ¿no? (señala una medida)

Daniela: Es que depende que tal si era un hombre y una mujer y llevan más, bueno equis.

Erika: Pero 20 cm no son de aquí a aquí.

Daniela: Es menos

Erika: Ahí está, ¿crees que de ese tamaño sea el equipaje?

Daniela: No, tendría que ser 2 metros (para la medida del largo del rectángulo base), 2 metros que...

Erika: No estaría bien con 2 metros ya.

Daniela: ¿Sí, segura?

Erika: Sí

Daniela: Bueno.

Daniela: Tiene que ser rectangular... aquí mide 2 metros y acá tiene que ser menor para que cumpla las condiciones del rectángulo... De aquí a acá mide dos metros y de aquí a acá digamos ¿cuánto mide? Menos no, tiene que ser menos.

Julio: 1.20

Daniela: ¿Sí?

Erika: No, menos ¿no?... si como 1.20... Sí porque fíjate para que quepan las dos personas así a lo ancho... No a ver (Duda)

Daniela: A ver tú ¿cuánto mides así?...

Erika: 30 y 30, 60, sí con 1.20.

Daniela: Estos dos cumplen condiciones de rectángulo

A continuación escriben sus resultados. En eso Erika interrumpe.

Erika: Oye pero aquí dice, las dimensiones de un plástico grueso rectangular que será tomado como base

Daniela: Por eso esa es nuestra base.

Erika: ¿Cuál es?

Daniela: Pues esta la base, la base donde te acuestas.

Erika: ¿Estas?

Daniela: Sí

Erika: Pero esto va junto o separado, esto es separado de esto (la base de la casita).

Daniela: Sí, porque el plástico…

Erika: O sea, ¿no es una sola lona?

Daniela: No, mira, por que dice ”la parte inferior de la casa de campaña…”

Le preguntan al profesor para estar seguros que son dos figuras separadas, luego le comentan las medidas de la base rectangular.

Erika: 2m por 1.20

Daniela: ¡Aha! yo digo, o quizá no se si sea mucho 1.20

Erika: O 1 metro, por que los dos metros está bien para el equipaje...

Daniela: Como nos ves ¿Mal?

Profesor: Pues sigan

Erika sigue leyendo las condiciones para entender un poco más el problema. Daniela lee la tercera cuestión.

Daniela: A ver hay una lona que está así.

Daniela le pide a Julio que corte un pedazo de una hoja para poder guiarse en los cortes.

Erika: Entonces necesitamos cortarla para que esto quede así...

Daniela: O sea cortarle literalmente, para que no nos toque cocer.

Erika: La podemos tener como un rombo. Para que al cortarla la podríamos cortar... no, porque ya no quedaría.

El equipo se confunde, no entiende bien y regresan a leer el enunciado para tener claro el cuestionamiento.

Julio: ¡Ay! es bien fácil, pones el cuadrado así y le pones las cositas esas que cierran aquí.

...

Erika: Pero no tiene que ser la misma lona.

Julio: Por eso, esta va a cerrar aquí.

Erika: Pero de esta lona, de esta tienes que sacar los picos (solapas).

Julio: ¿Y qué estoy haciendo?...

Daniela: ...¿Cuáles picos? ¿En qué momento usamos ese término de picos?

Erika: Pero se nos tiene que cerrar.

Julio: El chiste es ponerlo al revés... Ay tan fácil vamos a la comer y vemos las casitas...

Erika: (Manipulando el papel) Es que tiene que ser así, para que aquí tenga sus aberturas que se puedan abrir.

Daniela: Sí... a mira es que queda realmente un cuadrado.

Erika: No, es que necesitamos aquí quitarle esto (Un exceso de área que de alguna manera lograr los triángulos que forman las solapas)

En este momento el equipo se da cuenta del corte que deben hacer. Pero Julio intenta imponer sus ideas.

Julio: No Erika, entiende que no.

Erika: Como van a cerrar, y mira si le cortas esto...

Julio: Hay que cortarle aquí nada más.

Erika: A ver, vamos a examinar el dibujo. Desdóblalo.

Daniela: Si de hecho sí. A ver, se acurdan ¿cómo estaban los lados del juego geométrico que tu armabas que tenían como pestañas de más? yo digo que debe ser algo así mira...

Erika: Sí, como un prisma cuadrangular digo rectangular.

Daniela: ¿Cómo una prisma? A ver hazlo

Erika: Pues así como este... Hay que ver como se arma esto.

Daniela les explica paso a paso como pudiera cortarse un rectángulo para encontrar la forma pedida, pero se confunden cuando llegan a establecer los ángulos en las solapa. El profesor va con este equipo para ver su avance. Daniela y Erika explican su diseño.

Daniela: Cortar la lona desde un principio en forma de así.

Erika: es que no

Profesor: Mira ya le corté aquí, entonces cuando cierre ya no va a haber puerta.

Daniela: Ah ya... O no cortar, ¿doblarlo nada más?

Erika: Deja lo intentamos hacer y ahorita te hablamos.

Lo que hacen es recortar el exceso para verificar que las solapas tengan los ángulos necesarios.

Erika: Así mira Luis... Bueno pero así que quedara y pues ya cerraría de aquí, así con todos sus lados y ya cerraría.

Profesor: Y ¿Sí cierra?

Erika: Pues necesitaríamos hacerla pues bien, para que aquí cerrara y todo.

Profesor: Hay que calcular las medidas y todo.

En otro momento después el profesor les cuestiona acerca de los ángulos y las medidas de las puertas que tiene su diseño. El tiempo no les permite determinar todas las medidas de su diseño.

El equipo 5, nunca tomó en cuenta que su casa de campaña, debe tener más o menos la altura de los troncos verticales, lo cual se tiene que influir en la medida de las solapas, es decir la altura del triángulo rectángulo.

En la última parte del proceso, Julio se encuentra desesperado y ausente de la discusión final, incluso distrae a sus compañeras con bromas y plática fuera de contexto.

B.4 La revista

B.4.1 Equipo 1

Comienzan con una pregunta al profesor...

Claudia: ¿Qué es lo que tenemos que poner aquí? (en la pregunta 1),

La cantidad de personas que comprarían la revista a un determinado costo ¿no?

Profesor: Sí pero ¿qué más? ¿Hay más personas que quieren comprar la revista a bajo precio o a precio alto? ¿Qué significan ahí los puntos?

...

Fabiola: Primero es una gráfica

Andrea: Una gráfica lineal, si sí es lineal.

Fabiola: No porque no coinciden los puntos.

Andrea: Pero están haciendo una línea, sí es una gráfica lineal.

Claudia: Sí es lineal ¿no?

Andrea: Es que no preguntan qué tipo de gráfica es.

Claudia lee la pregunta de nuevo y deciden describir la gráfica de manera cualitativa

Fabiola: Que los estudiantes prefieren comprar la revista a...

Claudia: que los estudiantes prefieren comprar la revista a bajo costo la mayoría de ellos.

Andrea: Ningún estudiante la compraría en 50 pesos, o sea...

Fabiola: Ni en Díez la compraría yo.

Claudia enseguida lee la pregunta dos.

Andrea: pero no creo que todos compren.

Entran en confusión y piden ayuda al profesor.

Andrea: ¿La gráfica si está bien? es que aquí dice que se le muestra a cien estudiantes de la escuela, y entonces aquí dice que los resultados de la encuesta se muestran en la gráfica... ya sumándolos a todos te tiene que dar un total de 100 alumnos ¿no?,

Profesor: Sí. . .

Andrea: Y aquí pues ya da más porque aquí, simplemente, aquí son 85 y aquí son 55 más o menos ahí ya son 140.

Profesor: Pero aquí dice también, un estudiante podía elegir más de un precio.

Andrea: Ah es cierto

Claudia: ¡Ah ok!, a ver 85+ 55+40+20+1. . .

Andrea: 201, entonces digamos que cada persona. . .

Fabiola: Eligió dos.

Fabiola: Y una eligió tres.

Claudia lee la pregunta y dice

Claudia: A ver 40 alumnos de 201? 20 de 201 alumnos, no, 20 de 100 alumnos votaron por esta (por el precio de 40).

Andrea: O sea el 20%. Si no, sácale a 1500 el 20%.

Fabiola: 300, 1500 menos el 20, menos 300.

Fabiola: No, 1200, son 300 pesos era lo que te estaba diciendo.

Claudia: ¿Cómo? No, es que dice que cuántas revistas se venderían si el precio fuera de 40. Si se venden 20 revistas en 100 alumnos, en 100 alumnos son 20 en 200 son 40, en 300 60, simplemente 2 por 4 8, 2 por 400. . .

Claudia: 20 de cada 100 la compran en 40 pesos.

Claudia le comenta al profesor lo que han hecho y le pregunta:

Claudia: Por cada 100 alumnos 20 la compran en 40 pesos, entonces por cada 1500... Es una regla de tres ¿no? sí se aplica la regla de tres, es que es lo que no recuerdo, pero este por este entre este.

Ella misma se responde.

Andrea: Entonces 1500, no, es lo que tú (Fabiola) habías dicho no.

Claudia: ¿Cuánto dinero dejaría esta venta?

Fabiola: 300*40= 12000 pesos.

Claudia lee la pregunta tres

Claudia: Yo digo que en 10 pesos ¿no? porque así venderían más. Porque tomando en cuenta que son igual los mismos 1500 estudiantes, aquí es casi el...

Andrea: Hay que sacar las de todas no, a ver cuál te deja más.

Fabiola: Voy a hacer las de todos y ya le ponen los valores con lápiz en un lado.

Realizan el cálculo para punto de la gráfica, para encontrar el punto en el que la ganancia ha sido mayor.

Claudia: Entonces, ¿Cómo sacamos esta? (pregunta 2) Ah ya, hicimos una regla de tres.

Continúan aplicando la regla de tres para calcular las ganancias en cada caso.

Cuando llegan al precio de venta de 50 pesos, se equivocan pues Claudia afirma que 50 de cada 100 compran la revista a 50 pesos. Antes habían acordado que solo 1 estudiante de la encuesta.

Para contestar la última pregunta restan la ganancia de la venta de revistas a 40 pesos, es decir 12000 pesos de ganancia, a la cantidad que los alumnos del problema deberían de pagar por gastos de producción (15000 pesos por 300 revistas).

B.4.2 Equipo 2

Denis Lee la hoja completa.

Vanesa lee, también, el problema y expresa que es fácil.

Denis: Vamos a hacerlo por orden, hay que contestar la pregunta 1.

Vanesa: Pues una estadística graficando el número de revistas...

Denis: El número de alumnos que comprarían la revista dependiendo de su precio.

-Denis Lee la pregunta 2.

Hugo: Serían 60,000.

...

Denis: Pregunta cuantas revistas comprarían, no cuanto ganarían.

Hugo: Por eso sería 40 por 1500.

Denis: No porque eso sería para ¿cuánto dinero dejaría esta venta?

Vanesa: ¿Por qué?

Hugo: De una revista son 40 pesos, o sea, es lo que vale una revista.

Vanesa: Una revista es una persona $1500 * 40$ pesos.

Denis: Pero eso sería lo que se recaudó de la venta,... más bien sería, basándose en la gráfica, si de 100 personas, 20 la compran a 40, de 1500 personas cuántas la comprarían a 40.

Hugo: A ver como

Denis: Cuántas veces de 100 hay en 1500.

Vanesa: ¿Cuánto? 100 entre 1500?

Denis: 1500/100

Vanesa: A 15.

Denis: A ver digamos que hagamos grupitos de cien de donde iniciamos, cien, cien, cien, cien, hasta contar las 1500, de esas 1500 vamos a poner 20, 20, 20, 20, y de ahí vamos a contar el total de alumnos que la van a comprar.

Hugo: 15*20

Vanesa: 300

Denis: 300 personas comprarían, entonces ¿cuánto dinero les va a dejar?

Hugo: Sí costara 40 pesos, pero eso yo no lo entiendo, porque o sea, la pregunta es cuántas revistas venderían.

Vanesa lee a Hugo de nuevo la pregunta 2.

Hugo: Pues 1500

Denis: No porque nos estamos basando en la gráfica, no todos te la van a comprar a 40 por que la gráfica te está diciendo que no todos. Porque si fueran 40,

Hugo: Pero ¿dice que nos basemos en la gráfica?

Denis: Pues si nos basamos en la gráfica, en total 300 revistas...

Llaman al profesor y le dicen:

Denis: Lo que pasa es que aquí la pregunta se nos hizo como muy tonta, porque dice que hay cerca de 1500 estudiantes y pues cada uno compra su revista entonces serían 1500 revistas, pero lo que yo digo es que no todos los estudiantes te van a comprar la revista a ese precio por que...

Vanesa: Solo 20 en la gráfica.

Denis: Sí, de cien personas 20 la compran a 40 pesos, entonces lo que estamos haciendo es sacar este, digamos este, cuántas veces cabe 100 en 1500 que serían 15 veces y luego eso multiplicarlo por el número de personas que te lo van a comprar que serían 300...

Profesor: Ok, ellos se basaron en esto para vender su revista (en la gráfica)...

Profesor: Mira, ustedes ya vieron esto no, que de cien personas 20 la compran en cuarenta pesos, entonces si fueran a vender a 1500... o sea ellos se están viendo a futuro no, todavía no lo hacen, vamos a ver cuánto podemos ganar.

Denis: Sería como una aproximación, aha si.

Vanesa: ahora entonces ¿hay que sacar aproximadamente a 1500 personas?

Denis: ¿Cuántas personas la comprarían a 40?

Profesor: Ahora si están bien o están mal, sus compañeros lo van a juzgar (en la exposición colectiva), ustedes también júzguenlo.

Denis: Entonces si está bien (lo que había expuesto antes a sus compañeros)...

Vanesa: Es que miren, ya comprendí aquí, de cada 100 personas.

Denis: De cada 100, 20 te la compran

Vanesa: Entonces de cada cien, 20 40 60 80... 300, Y a entendieron mi punto

Hugo: La respuesta sería 300 revistas.

Entonces redactan la respuesta. Denis lee la tercera pregunta.

Hugo: Bueno el mayor precio es el de 60

Denis: Pero esa nadie la compra, lo que más compran

Vanesa: La mayor parte de personas a 10 pesos.

Denis: Pero ni siquiera es el total, nada mas el 85% de las personas la comprarían a 10 pesos.

Vanesa: Entonces aquí ¿qué hago?

Hugo: 85 de 100, sería 1500/85.

Vanesa: 17.64

Hugo: 17.64*10

Vanesa: 176.4 no es que se octavo no, no es concreto y ya no.

Vanesa: En sí, si nos regresamos a 40 pesos nos salen 12000,

Denis: De 20 pesos cuantos saldrían.

Denis: Cuántas personas lo comprarían a 20, como 58.

Vanesa: 1500/58 *20 517.24

Hugo: Ya me confundí.

...

Hugo: Pero es que es por lógica, o sea, si los dan más caros pero menos personas, menos venden, y entre más barato las dan más venden

Vanesa: La de 40 pesos, 20 personas

Denis: Siendo que la de 10 pesos te sale 1085

Vanesa: Entonces a 10 pesos sacaría más.

Vanesa lee el inciso b de la tercera pregunta

Hugo: 15 000 pesos. Aproximadamente porque o sea

Hugo: Sería 85*10 es lo que sacarían... eso sería por cien personas sacarían 850.

Denis: Como sacamos este resultado (de la pregunta 1), 1500/100 y luego eso multiplicarlo por 40 ahí está, hay que hacerle lo mismo.

Hugo: Entonces sería 1500 entre cuanto. Entre 85? y eso por 10, no, no coinciden saldrían 176.

Denis: Es que no puede ser 176.

Hugo: Es que mira. 10*85 vendiéndolo ¿cuánto sacan?

Denis: Ah ya, ya... o sea ya, de 100 personas cuánto ganan en 100 personas multiplicando por 85, ponemos 15 veces el precio y ya nos van a dar cuánto ganan con 10 pesos.

Denis: De 85 por 10 que son las 85 personas de 100 850, ahora lo sumas, multiplicas por 15 para que te den las 1500 personas, serían

Hugo: Pero no te van a dar las 1500 personas, porque lo estás poniendo en 85

Denis: Pero no estoy diciendo ah ya me hice bolas la verdad.

Vanesa: Es que no aquí 1500 por 10, que son 10 pesos.

Denis: No porque no todas las 1500 personas te la están comprando a 10 pesos. Nada más 85 personas de 100 te la están comprando.

Hugo: Entonces 85 por ¿cuántos sienes son? por 15, te la comprarían 1275 personas, por 10, lo que saldrían de todo sería 12750.

Denis: Y digamos que tiene mayor ganancia por que ya le están ganando 750 más que a la revista de 40 pesos.

Hugo: Entonces está bien.

Vanesa: Entonces con qué precio se ganaría más, con el de 10.

Denis: Y por qué, porque al precio de 10 pesos es como más justo comprar la revista.

Vanesa: Oigan, pero es que no hemos hecho lo demás, ¿sí me entienden? es que de, digamos que de, cuántas personas la compran a 20? cuántas personas lo compran a 40?

Denis: De 20 pesos cuántas personas lo compran, 58.

Hugo: Sería 58 por 15.

Vanesa: No 580 y luego por 15. Serían 58 personas por 20 1160 por 15. 17400, gana más.

Hugo: Entonces a ver espérense, hay que sacarlas todas hay que anotarlas.

Realizan los cálculos correspondientes a cada punto de la gráfica. Denis lee la pregunta 4.

Denise: Cuánto ganamos a 40 pesos la revista.

Vanesa: 1200

Denis: Ahora pongamos...

Hugo: Sería 300 revistas y le vas a quitar 5 pesos, sería 300 por 5

Denis: No porque a 300 revistas cada una le vas a restar 5, 300 por 5 pones... salen 1500

Hugo: Si la vendieron en 40 pesos, de cada revista le tienen que quitar 5 pesos o sea que le quedarían 35 por revista, o sea que hay que multiplicar 35 por 300 en vez de 40.

Vanesa: 1500, ah o sea que ellos lo que perderían serían 1500, lo que habíamos sacado 10500 menos...

Denis: Ah pues ganamos 12000 ¿verdad? serían 12000 menos 1500

Hugo: Por que mira si damos la revista a 40 pesos...

Vanesa: 300 por 5, sería 12000 menos 1500 de lo obtenido y serían 10500 que sería lo que nos dices 35 por 300.

Redactan su respuesta.

B.4.3 Equipo 3

El profesor les ayuda a entender el problema, se enfocan en que los estudiantes votantes son cien pero podían elegir más de un precio.

Se enfocan en tratar de entender la gráfica.

Libertad: 20 estudiantes comprarían la revista

Ana: 20 comprarían la revista a 40 pesos, entonces se multiplicaría, 20*100*15.

Libertad: Se venderían 300 revistas.

Libertad: Lee la pregunta 2

Ana: Cuánto dinero ahora si vamos a multiplicar.

Libertad: Cada 100, 20 comprarían la revista a 40 pesos.

Laura: 300 alumnos comprarían la revista, pero cuántas revistas comprarían.

Ana: Pues 300 jijiji

Ana: Ahora multiplica 300 por 40.

Libertad: 12000.

Libertad lee la tercera pregunta.

Libertad: Pues en 50.

Ana: No espérense, es que es una pregunta de lógica, por decir tenemos que sacar de todo la cifra de aquí. Porque te están diciendo que tienes que contestar, las repuestas a base de esta gráfica, o sea de donde compres más, mayor va a ser la cantidad, aunque esté más barata la revista.

Laura: Entonces la respuesta sería 10 pesos.

Libertad: Mira si la venden en 10 pesos la comprarían 85, 85 por 10 serían 850.

Laura: 850 y ahora esto hay que multiplicarlo por...

Libertad: Sí, la venden a 10 pesos, comprarían 85 alumnos, si el precio los alumnos salen 850 la ganancia, si la venden a 10 pesos. Luego si la vendieran a 20 porque serán 58 ¿no? sería 1160 a 20.

Libertad hace los cálculos para cada una.

Es preciso explicar que este método es más sencillo pues solo implican las 100 personas que votaron. Y contestan el inciso a de la pregunta 3. Para el inciso b, Libertad les indica que por cada 100 personas, 30 comprarían la revista en 40 pesos. Y para calcular la cantidad generada por los 1500 alumnos, entonces deberán multiplicar 40 por 15. Laura no entiende, pues cree que los 1500 alumnos comprarían la revista a 40 pesos.

Libertad: ¿Cuánto es 600 por 30? 18000

Ana: ¿Por qué 18000?

Libertad: Son 600 alumnos los que van a comprar la revista.

Ana: Esa es la ganancia.

Libertad lee la última pregunta.

Libertad: Ahí las cuentas se tienen que hacer con los 1500 alumnos, ¿no?

Laura: Ahora sí.

Libertad: Son 40, como en la pregunta dos, 300 alumnos comprarían la revista a 40 de 1500... Entonces sería 40 por 300.

Ana: 12000

Libertad: Serían 12000 menos, a ver…entonces luego cada revista le va a quitar 5 pesos. Entonces si le quitan a cada revista 5 pesos. 300 revistas se van a vender entonces…Les quitarían 1500 no.

Ana: Entonces serían 12000 menos 1500, y eso es en total 10 500 que eso sería la ganancia total menos lo de la impresión ¿no?

Libertad: Sí.

B.4.4 Equipo 4

Abisaí y Karla intentan dar una oración para la pregunta uno. Finalmente Karla convence a Abisaí de la respuesta que se muestra en sus hojas. Karla lee la pregunta dos.

Abisaí: 40 por 1500…A ver espérame.

Karla: No sale el número…

…

Abisaí: Ayúdame.

Karla: ¿Qué hiciste? dice que 40 por 1500.

Abisaí: Nos sale mucho.

Karla vuelve a leer el problema.

Karla: Ah ya, con la calculadora de aquí. 40 por 1500…60 000

Abisaí: Ay no.

Karla: Sí, ¿no? por que…

Abisaí: A mí me sale 85 000.

Karla: A ver ¿por qué?

…

Abisaí: No, es que está mal.

Karla: Ah pues ya ponle, 60 y ¿cuánto?

Abisaí: 800.

Karla enseguida lee la pregunta 3.

Karla: Sí ¿no? dice que hasta cincuenta pesos, cuanto se debe vender la revista para obtener la mayor ganancia. A 50.

Karla lee la otra parte del problema para ver cuánto dinero obtendrían al vender la revista a ese precio ($50)

Abisaí: Si la venden en 50 pesos, obtendrían 175.

Karla: Pero espérame don 1500 estudiantes por 50.

Abisaí: Oh si es cierto esta está mal (pregunta 2).

...

Karla: Por qué, a ya hombre así déjalo.

Abisaí: Si el precio fuera de 40, serían de las 40 revistas.

Karla: Ay no vas a sumar 1500 veces 40, nada más 40 por 1500 y ya. (Para la pregunta 2)

Pasan a la otra pregunta.

Abisaí: Espérame por 10 a ver cuánto sale...

Karla: Que es la de 50.

...

Abisaí: ¿Qué hice?

Karla: 1500 por 50...75.

El equipo 4, no está convencido de sus respuestas, y en eso un integrante del equipo 5 (Luis) les pregunta acerca de sus resultados.

Luis(Equipo 5): Que les salió en la primera

Karla: 60 000, 40 por 1500.

Luis(Equipo 5): ¿Por qué 40?

Karla no sabe explicar y llama enseguida al profesor.

El profesor Ignaciano les comenta que deben razonar acerca de las preguntas que se están plateando y que no solo se vallan al algoritmo matemático que se realiza. Y le pide a Adán que intente integrarse más a la comunicación del grupo. EL profesor aplicador también les cuestiona acerca de la primera pregunta, pues solo dan respuesta al inciso b y no se sabe cuántos estudiantes compran la revista a este precio ($40).

Karla: Pues 20... Son 20, ve la gráfica.

Abisaí: Ponle ahí entonces.

Karla lee la pregunta 4.

Karla: Subiría $5, serían 45.

Abisaí: 45 por 1500.

Karla: 67500

Abisaí pregunta a Juan, integrante del equipo 5, si es que ya terminaron la última pregunta. Juan afirma que sí y Abisaí le pregunta por la respuesta, Juan le comente que su resultado fue 10, 500.

Abisaí: ¿Pero por qué 10 500?

Karla: Yo creo lo hicieron por otro.

Abisaí: Por 10 pesos ay que hacerlos.

...

Abisaí: Es que yo digo que no es todo.

...

Los integrantes de este equipo no pudieron interactuar de forma integral, Adán estaba muy alejado en términos de la integración, mientras que Abisaí y Karla nunca tuvieron los argumentos suficientes para convencerse de sus resultados. Un poco antes de finalizar la actividad el profesor aplicador les hace la observación de la gráfica y los detalles que se debieron analizar, por ejemplo, que de cada 100 alumnos 20 comprarían la revista en $40.

Entonces Abisaí cree haber entendido.

Abisaí: Sí, mira, son 20 revistas por 40.

Karla: Son 800 pesos. . .

Entonces tachan la respuesta antigua que habían puesto en la pregunta uno.

B.4.5 Equipo 5

Luis: Entonces dijimos que de cada 100 alumnos

Juan: 20 la compran.

Luis: Entonces por lógica cada 50 alumnos, este, serían diez las que compran.

Adrián: Pero ahí porque pusiste 50

Luis: Para haber sumado, por ejemplo supongamos que. . . , bueno supón que ganan 1500 en las 150 no, si son 150 alumnos, este serían 10 más 20 sería de 30 no, igual 30, y aquí te está pidiendo 1500, ya nada mas aquí serían 300.

Adrián: Ah sí, ya.

Luis: De cada 1000 alumnos, 200 compran, de cada 500, 100 la van a comprar al precio de 40.

Juan lee la pregunta uno, observando

Juan: Muestra el número de alumnos en los precios ¿no?, de las revistas

Luis: Más bien el número de alumnos que compran revistas a un determinado precio. . . Ahora cuánto dinero dejaría esta venta... (Inciso b de la pregunta 1).

Juan: Sí, son 40, 40 por 300.

Adrián: Sería multiplicar.

Luis: Serían 12000 pesos.

Adrián: Sí.

Luis: Entonces se venderían 300 revistas y 12000 pesos.

Luis lee la pregunta 3.

Luis: Pues tampoco hay que excedernos en mucho por que. . .

Juan: Por que mira si son 50, nos la comprarían unos 5 personas, de 10, sí, pero también está muy ”bara” de 10 pesos. Pero de 20 como que también baja mucho ¿no?

Luis: A ver. . .

Juan: Por que mira son como 85 personas y acá son 20 que compran como 55.

Adrián: Tú ponle 55.

Luis: A ver son 85 personas por 10, entonces 850.

Juan: Y acá son 55 por 20…

Luis: 1100

Juan: Sale más, y a ver 80 por 40, 1200

Luis: Sí, 1200

Juan: Y 40 por 20, 800.

Luis: Sí.

Juan: Entonces ya, entonces sería por 30

Luis: A ver 50 por 5, serían 250, no. Entonces sería 30 pesos.

Pasan al inciso b.

Juan: 1200 por cada 100.

Adrián: Tu nomas ponle, de 100 alumnos 40 la comprarían a 30 pesos.

Juan: Un 40% la comprarían en 30, entonces ya no agarraríamos la de 1500 ¿alumnos? o ¿verdad?

…

Juan lee la pregunta 4.

Adrián: ¿40 por 25?

Juan: 40 por 20. Son 800.

Adrián: ¿Por 20?

Juan: Bueno pongámosle que 35 ya.

Adrián: ¿Por qué?

Juan: Por menos los 5 pesos que le están quitando.

Adrián: 25 ¿no? le están quitando.

Juan: 5 por cada revista.

Adrián: Ah

Juan: Entonces pongamos 35 por 20.

Luis: 700.

Juan: 700 ¿Sería la ganancia?

Adrián: Y ¿cuánto ganaban antes? antes ganaban 12000 ¿no?

Juan: No, por 40, 800, perderían 100.

Luis: Sí, 700.

Luis: A 40 pesos le restamos 5 pesos, 35 por 20.

Adrián llama al profesor por que ya han terminado, sin embargo el profesor les motiva a contestar el hecho de que no hayan encontrado las ganancias totales dentro de una escuela de 1500 alumnos. Entonces se dan cuenta de que les falta calcular ganancias en la pregunta 3 y 4.

Juan: Entonces pongamos que son 30, por los 1200.

Luis: A ver, si son 1500 serían 30. Si de 100 alumnos 40 los compran, entonces de 50, los compran 20 ¿no?, 60. Entonces serían 600. 600 de 1500 alumnos las comprarían en 30.

Juan: Pero en cuántas ganancias obtendrían, yo estoy diciendo el precio. Entonces serían, 15 pesos.

Luis: No, 600 por 30, sale 18000

Adrián: ¿18000?

Luis: Se supone que estos son todos ¿no?, los 1500

Juan: SÍ ya, cuántas ganancias obtendrían, ya está corregido.

...

Juan: Entonces abajo también sería lo mismo, ¿no? en la última.

Luis: ¿Cuál última?

Luis: De 40 la compran...

Juan: 20, la mitad de 20, serían 300.

Juan: 700 era lo que ganarían pero de 100 alumnos, entonces ahora de 1500.

Juan: Pero espérame, entonces esto sería por 35 pesos.

Luis: 300 por 35, 10500 de cada 1500. Ahí está.

Juan: ¡Bien fácil!

BIBLIOGRAFÍA

Ausubel, D., Novack, J., y Hanesian, H. (1983). Psicología educativa, ed. *Trillas: México*.

Balanced assessment Package for the mathematics curriculum (1999). *High School Assessment Package 1*. White Plains, N.Y. : Dale Seymour Publication.

Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum (2000). *High School Assessment Package 2*. White Plains, N.Y. : Dale Seymour Publication.

Garofalo, J. (1989). Beliefs and their influence on mathematical performance. *The Mathematics Teacher*, pages 502–505.

Hagelgans, R., Barbara E, N., Schwingendorf, K., Vidakovic, D., Dubinsky, E., Shahin, M., y Wimbish Jr, G. (1995). A practical guide to cooperative learning in collegiate mathematics. *MAA Notes*, 37.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., y Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. *Handbook of research design in mathematics and science education*, pages 591–645.

NCTM (1980). *An agenda for action: recommendations for school mathematics of the l980s*. National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (1995). *Professional standars for teaching mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*, volume 1. National Council of Teachers of Mathematics.

Piaget, J. (1977). Studies on reflective abstraction (rl campbell, ed. & trans.).

Piaget, J. (2001). *La representación del mundo en el niño*. Ediciones Morata.

Piaget, J. y Inhelder, B. (1969). *The psychology of the child*. Basic Books.

Polya, G. (1945). How to solve it: A new aspect of mathematical model.

Postman, N. y Weingartner, C. (1969). Teaching asa subversive activity. *New York: DelacortePress*.

Santos, L. M. (1992). Resolución de problemas. el trabajo de alan schoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Educación Matemática*, 4(2).

Santos, L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. Trillas.

Schoenfeld, A. H. (1980a). Heuristics in the classroom. *Problem solving in school mathematics*, pages 9–22.

Schoenfeld, A. H. (1980b). Teaching problem-solving skills. *American Mathematical Monthly*, pages 794–805.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. ERIC.

Schoenfeld, A. H. (1987). *Cognitive science and mathematics education*. Psychology Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pages 334–370.

Schwingendorf, K. y Wimbish, G. J. (1994). Attitudinal changesof calculus students using computer enhanced cooperative learning. *Paper presented at the Joint Mathematics Meetings of the American Mathematical Society and the Mathematical Association of America, Cincinnati. OH*, pages 305–329.

Sepúlveda, A. y Santos, L. M. (2006). Desarrollo de episodios de comprensión matemática. *Investigación*, 11(31):1389–1422.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for research in mathematics education*, pages 114–145.

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K., y Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for research in mathematics education*, pages 305–329.

Stanic, G. y Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. *The teaching and assessing of mathematical problem solving*, 3:1–22.

Von Glasersfeld, E. (1995). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning. Studies in Mathematics Education Series: 6.* ERIC.

Wimbish, G. J. (1993). *Identification and classification of attitudes of nonspecialist undergraduate mathematics students that might affect collegiate cooperative learning procedures*.