UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Desarrollo del sentido numérico de las fracciones en alumnos de primaria

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Maestra en Educación Matemática

PRESENTA:

Ivonne de Regules Silva

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Armando Sepúlveda López

MORELIA, MICHOACÁN, NOVIEMBRE DE 2016.

A mi profesor Armando, a quien conocí

A través de la Geometría de Euclides.

Índice

Resumen: En este trabajo se aborda la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones numéricas en la Escuela Primaria. Se presentan los resultados de una investigación de carácter cualitativo, realizada con alumnos de Quinto año de Primaria del Instituto Jefferson de Morelia, apegados al proyecto "Rational Number Projet", diseñado en Norte América. Se implementaron las actividades propuestas en ese proyecto, mediante la implementación de la metodología de "Grupos de Aprendizaje Cooperativo" de Hagelgans et al. (1995), y se analizan las respuestas de los alumnos en el marco de las teorías constructivistas que privilegian el uso de materiales concretos para el aprendizaje de las fracciones. Todo ello, en el contexto de que quien elaboró este trabajo de tesis fungió como la maestra del grupo escolar seleccionado.

Abstract: The purpose of this research is to identify the problems involved in the teaching and learning of number fractions at primary level. We present the results of an investigation carried out with fifth grade primary pupils at the *Instituto Jefferson de Morelia*, using the "Rational Number Project", a series of lessons designed in the USA. The methodology used in this study was based on Hagelgans' "Cooperative Learning Groups" (1995). Students´ responses were analyzed in the framework of constructivist theories which support the use of concrete materials for the learning of fractions. The author of this study was also the teacher of the group of students that participated in the research.

Palabras clave: Fracciones numéricas, Enseñanza, Investigación cualitativa, Aprendizaje cooperativo, Comprensión.

Capítulo I

Problema de investigación

1.1 Introducción

Es innegable que los números racionales están presentes en nuestra vida cotidiana. Debemos comprenderlos para poder seguir recetas, calcular descuentos, realizar cambios monetarios, valorar cuál es el producto más económico, leer mapas, interpretar planos, preparar presupuestos, hacer inversiones, analizar estadísticas deportivas, leer la sección financiera, por mencionar algunas acciones.

A pesar de tantas aplicaciones, en el ámbito de la educación es común escuchar a alumnos de diferentes niveles escolares expresar que no les gusta trabajar con fracciones, o que no entienden el procedimiento o, inclusive, se rehúsan a resolver operaciones que contengan fracciones. Éste es uno de los temas que conduce a muchos alumnos a pensar que no entienden ni les gustan las matemáticas.

Durante cinco años los alumnos pugnan por comprender esta nueva categoría de números y, a partir del segundo grado de secundaria, adicionalmente se enfrentan a problemas algebraicos que contienen operaciones con fracciones; sin embargo, la mayoría de las veces piden que se les proporcione un procedimiento que deben memorizar, utilizan la calculadora para encontrar el resultado y no se preocupan por entender el proceso que los llevó a la solución.

Las fracciones, sus representaciones y sus operaciones son temas fundamentales dentro de la educación matemática que ha dado origen a toda una gama de investigaciones durante ya varios años y, sin embargo, las dificultades de su enseñanza y aprendizaje se evidencian dentro de las aulas. Como consecuencia, los estudiantes siguen ingresando a las universidades sin una conceptualización clara de lo que es una fracción, ni de los algoritmos para operar con ellas; además presentan dificultades para identificar las relaciones que existen entre las fracciones comunes y sus otras representaciones, como son decimales, porcentajes, escalas, proporcionalidad, etc.

¿Cuáles son las ideas centrales que definen el dominio de los números racionales? ¿Qué comprensiones deben construir los alumnos? ¿Cómo es que un estudiante empieza a comprender los números racionales? Veamos a través de los ojos de un alumno que se enfrenta por primera vez a las fracciones. Hasta segundo grado de primaria todo su trabajo formal aritmético se centra en el sistema de números enteros. Probablemente pueda resolver competentemente problemas aritméticos y encuentre conexiones entre su trabajo matemático y situaciones de su vida cotidiana. Sin embargo en esta nueva fase de su aprendizaje, en tercer grado de primaria, que implica la introducción de los números racionales, va a encontrar nuevos conceptos, nuevos símbolos que deberá aprender y comprender, nuevas relaciones, nuevas representaciones–digamos que toda una nueva red de conocimientos. Este nuevo sistema no funciona de la misma forma ni con las mismas reglas que los números enteros; anteriormente todo su trabajo numérico comprendía relaciones aditivas, ahora se encuentra con un sistema que presenta relaciones multiplicativas. Comprender esta nueva red de conocimientos puede llegar a ser muy retador, a pesar de que el alumno haya sido exitoso en matemáticas hasta ahora. Al igual que los números enteros, encontrará que las fracciones se pueden relacionar con su vida cotidiana, pero a diferencia de aquéllos, las operaciones que involucran a los números racionales pueden parecer menos intuitivas y que se contraponen con ideas previas (por ejemplo que el producto siempre es mayor que sus factores), y por lo tanto más difíciles de aprender.

Uno de los primeros retos que el alumno enfrenta es comprender que una fracción se puede representar de diferentes formas. Hasta ahora su experiencia con los símbolos y sus referentes ha sido mucho más sencilla. Un número–por ejemplo, ocho–se representa exclusivamente por un numeral, 8. Ahora el alumno tendrá que aprender que una fracción se puede expresar de diferentes maneras: como fracción común, decimal y porcentaje. Para complicarlo aún más, tendrá que comprender que una cantidad fraccionaria tiene un infinito número de equivalencias, ya que una fracción como un medio se puede representar por

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{3}{6}, \frac{5}{10}, 0.5, 0.50 \text{ , etc.}$$

El reto no sólo consiste en comprender todas estas nuevas formas y símbolos, sino también se espera que su trabajo con ellos sea fluido y eficiente.

Otra idea más que representa un reto para nuestro alumno es el hecho de que un solo número racional puede tener significados conceptuales distintos, conocidos como sub-constructos. Esto puede resultar aún más confuso. ¿Qué significa *significados conceptuales distintos?* Para ilustrarlo, tomemos como ejemplo una fracción sencilla como $\frac{2}{3}$. Un significado de esta fracción es la relación *parte–entero* que describe una situación en la que hay 2 de 3 partes iguales. Otra interpretación de la fracción $\frac{2}{3}$ es como *cociente*: la fracción implica una división, repartir 2 panes entre 3 personas. Adicionalmente está el sub-constructo de *razón* en el que se indica que hay 2 niños por cada 3 niñas. También se puede estar hablando de *medidas*, en el que la fracción es una cantidad fija que se utiliza repetidamente para determinar una distancia, por ejemplo $\frac{2}{3}$ de metro = $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ de metro. Por otra parte, está también la interpretación de número racional como *operador multiplicador*, que funciona como una operación para reducir o amplificar el tamaño de otra cantidad (por ejemplo, la fotografía se redujo $\frac{2}{3}$ de su tamaño original).

Para lograr coordinar todas estas interpretaciones se requiere de una comprensión profunda de los conceptos y de la forma en la que se inter-relacionan. Básicamente en este nuevo sistema de numeración, el alumno deberá construir nuevos significados para los números y sus operaciones, deberá cambiar de su pensamiento aditivo a un pensamiento de relaciones multiplicativas.

Para ilustrar este cambio consideremos otro modelo: continuemos con la fracción que ha servido de ejemplo, $\frac{2}{3}$. Las experiencias previas de nuestro alumno lo pueden llevar a concluir que el 2 y el 3 son dos números que definen cantidades diferentes. Su conocimiento de los números enteros lo conducen a pensar que son dos números consecutivos, que por lo tanto su diferencia es 1, un pensamiento completamente aditivo. Pero lograr interpretar $\frac{2}{3}$ como un número, número racional, en lugar de tomar el 2 y el 3 como números independientes, implica que el alumno comprende la fracción como la representación de una cantidad definida por una relación multiplicativa. De pronto, los números ya no son tan sencillos. En el contexto de las fracciones, el 2 y el 3 (en la forma $\frac{2}{3}$) representan una cantidad que se encuentra entre 0 y 1. No es de extrañar que esta metamorfosis numérica tenga a los alumnos muy confundidos.

¿Cómo ayudar a los alumnos a lograr la transición hacia el complejo mundo de las fracciones en el que existe una relación entre los números 2 y 3 que los hace menores que 1? Es evidente que es en la enseñanza en donde nos debemos enfocar. La complejidad de los racionales –sus diferentes significados y representaciones, el reto de comparar cantidades a través de las diferentes representaciones, la unidad que no está definida y puede tomar diferentes modalidades– nos dan indicios de que el alumno debe ser un partícipe activo en su desarrollo del concepto de número racional y evitar basarse en un conjunto de reglas memorizadas para la manipulación simbólica.

Las formas geométricas son modelos muy comunes utilizados en el aprendizaje de las fracciones, llámese pastel, pizza o pay. Para muchas personas la imagen de una fracción está intrínsecamente relacionada con el dibujo de un círculo dividido en partes iguales y parcialmente sombreado. Una práctica tradicional consiste en pedir a los alumnos que cuenten el número de partes en el entero y después el número de partes sombreadas. Las cantidades resultantes se utilizan como base para nombrar y representar simbólicamente la fracción. El alumno aprende que el número de arriba, o numerador, siempre indica el número de partes que están sombreadas, y que el número de abajo, o denominador, indica el número de partes que hay en total. Posteriormente, y sin mucho más preámbulo, se utiliza el mismo tipo de ilustraciones y se procede a trabajar operaciones 'sencillas' de suma y resta: dos piezas de $\frac{1}{4}$ sombreadas (la mitad del círculo) + 1 pieza de $\frac{1}{4}$ sombreada (otra parte del círculo) = 3 piezas de $\frac{1}{4}$ sombreadas ó $\frac{3}{4}$ (Figura 1.1).

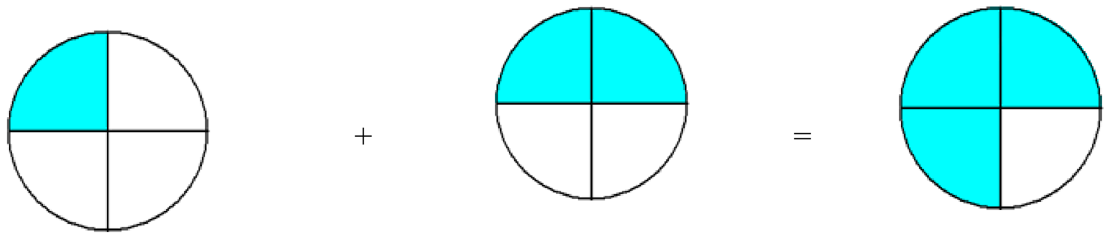


Figura 1.1. Suma de fracciones.

Desde la perspectiva psicológica esta estrategia es aparentemente pertinente ya que toma en cuenta los conocimientos previos de los alumnos: evidentemente hasta ahora han trabajado con situaciones de conteo y, adicionalmente, sus experiencias cotidianas no obstaculizan el que puedan partir un pastel en partes iguales. Así que la idea de contar partes iguales de un entero se puede considerar que está dentro del ámbito de sus conocimientos.

Desde el punto de vista matemático, la estrategia también es muy clara: promueve la comprensión de un aspecto en particular del número racional –la forma en la que los números racionales indican las partes del entero. Este sub-constructo parte-entero es una de las interpretaciones básicas de los racionales. Sin embargo, el enfoque propuesto está relacionado con un pensamiento *aditivo*, el cual refuerza el concepto que precisamente los alumnos deben cambiar para lograr dominar el trabajo con fracciones. Se corre el peligro de que los niños perciban cada parte del entero como objetos discretos. Las cuatro piezas en las que se dividió el pastel son precisamente cuatro piezas. Aunque es factible que la representación haga evidente las *relaciones proporcionales* inherentes en los números –la parte sombreada como parte del entero– no es extraño que el alumno extraiga de la situación una *relación aditiva*, dadas sus experiencias previas con los números enteros.

Si paralelamente hacemos una revisión del uso cotidiano que se da a las fracciones con objeto de comprender los contextos en los que los alumnos las utilizan, uno se encuentra con un limitado número de casos, como son mitades, tercios, cuartos, octavos y si acaso doceavos-como en el caso de las horas. En ocasiones se les presentan en situaciones de reparto –para repartirse un chocolate entre varios compañeros–, pero rara vez se encuentran escenarios en las que tengan que sumar o restarlas. Al parecer la multiplicación tiene mayores aplicaciones, como por ejemplo dentro de la repostería –al calcular los ingredientes que se requieren para mayor o menor cantidad de lo que una receta indica–; pero la división está prácticamente ausente del contexto cotidiano. Los ejemplos tradicionales de los libros de texto de nivel básico que piden al alumno que sume rebanadas de pizza o pastel son, en realidad, poco útiles y demasiado artificiales; sabemos que ninguna pizza está dividida en séptimos o en onceavos y, al comerse una rebanada, nadie se preocupa por sumar las fracciones que se ha comido ni cuánta pizza sobró. Así, no es de extrañar que la suma y resta de fracciones no sea una actividad con la que los alumnos estén familiarizados fuera del contexto de la escuela y, por lo tanto, no es una actividad de la que obtengan un conocimiento que sea resultado de la práctica.

Un factor adicional que dificulta la comprensión de las fracciones y afecta la forma en la que se representan son las grandes diferencias matemáticas entre éstas y los números enteros. Las fracciones son infinitamente divisibles, mientras que los enteros tienen un número finito de divisores. Las fracciones no incluyen la relación antecesor, sucesor; ninguna fracción va inmediatamente antes o después que otra, y entre dos fracciones cualesquiera existe un infinito número de fracciones (propiedad de densidad), lo que contribuye a que sea imposible contarlas directamente, en contraposición con uno de los procesos iniciales, básicos que los niños aprenden acerca de los números enteros. La magnitud de las fracciones no es consistente con el tamaño de sus componentes; entre los enteros 8 es mayor que 5, pero una fracción con denominador 8 puede ser mayor o menor que otra con denominador 5. Cuando un alumno no tiene claridad sobre estas diferencias o no ha comprendido a profundidad las cualidades que distinguen a las fracciones, le resulta razonable transferir las propiedades de los números enteros a las fracciones, fenómeno que se ha denominado *whole number bias (parcialidad por los números enteros)* (Gelman, 1991; Ni & Zhou, 2005).

Surgen muchas interrogantes al tratar de comprender la problemática que engloba la enseñanza de las fracciones: ¿A partir de qué momento los alumnos empiezan a tener problemas para entenderlas? ¿Se deberá a la manera en la que los maestros del nivel elemental las enseñan? ¿Será que los maestros de primaria no las entienden bien y sólo se limitan a repetir como fueron enseñados? ¿No todos los alumnos tienen la capacidad de entenderlas? ¿Habrá un método de enseñanza que logre que todos los alumnos las comprendan? ¿Cómo evitar que después de años de trabajar con fracciones los estudiantes tengan concepciones erróneas del tema?

A pesar de la preocupación que este tipo de cuestionamientos genera en investigadores en educación matemática y de las investigaciones realizadas en la enseñanza de las fracciones, aún no existen respuestas contundentes, posiblemente debido a la complejidad del tema y a la multiplicidad de los factores involucrados.

Se pueden encontrar, en documentos oficiales, afirmaciones claras acerca de los propósitos de la enseñanza de las matemáticas en relación a este tema:

> Que los alumnos enfrenten situaciones didácticas significativas que les permitan comprender y manejar fracciones en distintos contextos y con diversos significados, […] así como resolver problemas sencillos de suma y resta de fracciones asociados a [medición, reparto, razón y cociente]. (SEP, 1998, p 10.).

El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM [por sus siglas en inglés], 2000) establece que los alumnos, entre 12 y 15 años de edad, deben lograr una comprensión profunda de las fracciones, así como tener la habilidad de utilizarlas de manera competente en la resolución de problemas. Adicionalmente Kieren (1994, p.389) afirma: "…La comprensión de los números enteros se construye a lo largo de varios años; ahora debemos reflexionar acerca de cómo se desarrolla la comprensión de los números racionales y cómo podemos fomentarla." ¿Qué características debe tener una enseñanza que cumpla con estos objetivos? Un grupo de investigadores en educación matemática, Cramer, K., Behr, M., Post T., Lesh, R., (1997) desarrollaron el Proyecto de Números Racionales (RNP, por sus siglas en inglés) en el que describen una serie de lecciones cuya intención es desarrollar en los alumnos la comprensión del concepto de fracción, de orden, de equivalencia e introducir las operaciones de suma y resta de manera intuitiva.

Para la elaboración del presente trabajo se eligió precisamente la secuencia didáctica del RNP con la intención de promover la comprensión, el razonamiento y el desarrollo de estrategias en alumnos de sexto grado de primaria, con la finalidad de fomentar la flexibilidad requerida, la comprensión conceptual y la habilidad computacional en el uso de fracciones (NCTM, 2000).

El desarrollo del presente trabajo consiste en implementar y documentar la aplicación de la secuencia didáctica del RNP en el sistema educativo mexicano, con la intención de abordar el siguiente problema de investigación.

1.2 Problema de Investigación

¿En qué medida la implementación de la "secuencia didáctica del RNP" contribuye en el desarrollo y la comprensión del concepto de fracción?

El estudio pretende mostrar que la aplicación de la secuencia didáctica aquí propuesta contribuye a la comprensión del concepto de fracción en un grupo de alumnos de 6º año de primaria. La secuencia didáctica consiste de experiencias con diferentes materiales concretos: círculos de colores divididos en fracciones, tiras de papel para hacer doblados y fichas; uso del lenguaje simbólico tanto oral como escrito, dibujos y la aplicación de fracciones en contexto para resolver problemas.

1.3 Objetivo general

Se pretende investigar de manera cualitativa el impacto que una secuencia didáctica–que incluye trabajar el concepto de fracción, el orden de fracciones, la equivalencia y la suma y la resta de fracciones–tiene en la comprensión de las fracciones en 19 alumnos de sexto año de primaria del Instituto Jefferson de Morelia.

1.4 Preguntas que guían la investigación.

Como ya se señaló, la comprensión del concepto de fracción y la operatividad correspondiente marcaron la pauta para el desarrollo del presente trabajo. Éste generó el planteamiento de las siguientes preguntas:

¿En qué formas contribuye el uso del material concreto sugerido en la comprensión de las fracciones por el alumno?

¿Qué estrategias utilizan las estudiantes para desarrollar las actividades propuestas?

¿Cómo lograr que los alumnos hagan la transición del material concreto a la representación simbólica formal?

¿Cómo lograr que los alumnos hagan generalizaciones sobre los procedimientos y logren utilizarlos en situaciones desconocidas? Por ejemplo si los alumnos aprendieron a sumar fracciones utilizando los círculos, viendo que deben reemplazar las piezas con otras de un solo tamaño ¿cómo lograr que transfieran este procedimiento a problemas simbólicos?

¿Pueden extrapolar a fracciones con denominadores para los cuales no tienen una referencia concreta (24avos, por ejemplo)?

La principal finalidad de la presente investigación es obtener algunos argumentos que den respuesta a las cuestiones arriba mencionadas los cuales permitan entrever sugerencias para mejorar la actual práctica escolar en relación a la enseñanza de fracciones.

Capítulo II

Marco Teórico

2.1 Introducción

Son muchas las ideas matemáticas que se relacionan con el pensamiento proporcional, entre las que se encuentran las fracciones, los números decimales, los porcentajes y las razones. De acuerdo con Lamon (1999, p. 8), dicho razonamiento se puede definir como "la habilidad de reconocer, pensar acerca de, transformar, comparar, explicar, plantear conjeturas, representar y simbolizar *relaciones".* En este contexto, Lamon afirma que "se estima que más del 50% de la población adulta no posee un razonamiento proporcional" (*Ibíd*. p.5), lo que nos conduce a reflexionar acerca de qué tan eficiente es el trabajo que se está llevando a cabo en las escuelas alrededor de este tema. En el currículo escolar oficial de la Secretaría de Educación Pública, la enseñanza de fracciones se inicia a partir del tercer año de primaria y continúa a lo largo de la educación básica hasta segundo año de secundaria; de este grado en adelante se da por hecho que los alumnos pueden realizar operaciones algebraicas con fracciones.

Un objetivo que plantea el NCTM (2000) es que los alumnos de entre sexto de primaria y segundo de secundaria (grados 6 a 8) utilicen fracciones, decimales y porcentaje con flexibilidad para resolver problemas; que realicen comparaciones entre las fracciones y puedan ubicarlas en la recta numérica, que comprendan el significado y los efectos de las operaciones, y que logren desarrollar y analizar los algoritmos de sus operaciones. Asimismo, determina el objetivo de que los estudiantes sean capaces de analizar las ventajas y desventajas de las diferentes representaciones; por ejemplo, saber que el 20% de una cantidad se puede utilizar para un descuento; que en ocasiones las fracciones como 5/20 se utilizan para representar probabilidades; que 15/100 es la forma correcta de representar 15 centavos.

En la práctica, los maestros de diferentes niveles escolares reconocen que los alumnos no manejan las fracciones y sus distintas representaciones con flexibilidad y confianza, lo cual significa que la forma en la que se aborda el tema de números racionales en las escuelas no está dando los resultados deseados. Es evidente que se requiere de una propuesta que marque un cambio en la enseñanza de las fracciones. (Lamon, 1999, p. 4).

Mercer (1995, p. 46) asevera que la educación debe centrase en tres aspectos fundamentales: conocimientos, lenguaje y resolución de problemas; esto es, que una función de las instituciones educativas es pugnar por que el alumno desarrolle su capacidad de aplicar los conocimientos y de utilizar el lenguaje para analizar y resolver problemas. En relación al conocimiento sobre los números racionales, Lamon (1999, p. 4) afirma que el maestro debe proporcionar a los estudiantes la oportunidad de construir una base sólida del concepto de fracción, que sea flexible y les permita establecer conexiones. Flores (2006) sugiere que los alumnos deben conocer las diferentes interpretaciones y representaciones de los números racionales. Al respecto, Lamon (1999) establece que concentrarse solamente en la relación tradicional parte–entero que se promueve mediante ejercicios en los que se pide a los alumnos que coloreen una parte de una figura geométrica, es una forma pobre de enseñar los números racionales que conduce a dificultades en su comprensión. Su propuesta enfatiza la importancia de hacer una distinción entre la idea de un cambio absoluto y uno relativo. Éste último, que da lugar al pensamiento relativo, es de vital importancia para la comprensión de las fracciones. Es muy diferente hablar del número de rebanadas de una pizza, un problema de conteo, a hablar de cuánta pizza en relación al entero, ejemplo de pensamiento relativo. Para Lamon, es conveniente que cuando los maestros diseñen actividades proporcionen experiencias que permitan al alumno construir la relación entre el tamaño y el número de piezas, en las que tengan la necesidad de comparar fracciones en relación a la misma unidad, que les permitan comprender el significado de fracción, que los impulsen a explorar la relación entre fracciones equivalentes y su representación. De acuerdo a Kieren (1976; citado por Behr, *et al.*, 1992) el constructo de número racional comprende: fracciones, fracciones decimales, clases de equivalencia, números de la forma p/q en donde p y q son enteros y q≠0, operadores multiplicativos y elementos de un campo de cocientes, ordenado e infinito. Ohlsson (1987; citado en Behr, *et al.*, 1992) sugiere que el símbolo de la forma x/y denota cuatro constructos matemáticos: función cociente, número racional, vector binario y una clase especial de funciones compuestas. Para cuestiones prácticas se tomará el punto de vista de Flores (2006), quien establece que es importante acercar a los alumnos a) al concepto de cociente, visto desde el contexto de repartir, por ejemplo, siete enteros entre cuatro personas; b) como medida, por ejemplo 7/4 de taza, tan utilizado en la repostería; c) como razón o pensamiento proporcional, por ejemplo al representar que hay siete hombres por cada cuatro mujeres; d) como relación de función, presente en el campo de la arquitectura o de la fotografía: factor de reducción y de ampliación. Presentar todas estas opciones proporciona experiencias enriquecedoras a los alumnos que les permitirá desarrollar un conocimiento de los racionales más estructurado y útil (Flores, 2006). Huinker (2002) complementa la idea de Flores y propone que los alumnos también deben desarrollar la habilidad de componer y descomponer fracciones, así como aplicar las propiedades de las operaciones.

En algunas investigaciones permea una preocupación por otro factor involucrado en la enseñanza de los racionales: el tiempo. Por un lado los maestros frecuentemente comentan que no hay suficiente tiempo para usar materiales y, aún cuando se utilizan, por lo general se pasa al lenguaje simbólico muy pronto (Cramer, 2002). Además, los alumnos de primaria y secundaria dedican poco tiempo a analizar y resolver problemas relacionados con racionales (Sowder y Schappelle, 1995). Asimismo, con frecuencia los alumnos no recuerdan sus experiencias con fracciones desarrolladas en años anteriores (Groff, 1966), lo que da cuenta de un aprendizaje superficial y/o memorístico, carente de significado y de experiencias valiosas.

Debido a la complejidad que gira alrededor de las ideas relacionadas con el razonamiento proporcional, el proceso de aprendizaje requiere tiempo. En su propuesta, Bruner (1996, p. 39) introduce la noción del currículo en espiral, que consiste en comenzar la enseñanza de un tema de manera intuitiva, a un nivel que le sea familiar al alumno, para después volver a él, a un nivel más estructurado y formal. Dicho movimiento en espiral continúa hasta lograr que el alumno domine el tema en cuestión. Esta propuesta se basa en la idea de que el conocimiento se puede construir a diferentes niveles de abstracción o complejidad.

La enseñanza en la que se da una breve introducción de las ideas básicas y procede a desarrollar los algoritmos de las operaciones, no proporciona al alumno el tiempo que requiere para la construcción de ideas importantes (Lamon, 1999), obstaculizando la posibilidad de desarrollar la comprensión proporcional.

Posiblemente si desde sus inicios, alrededor de tercero de primaria, se aborda el tema de las fracciones con un mayor énfasis en la comprensión, dando tiempo para asimilar conceptos y relaciones, sin la premura de llegar a las operaciones, los alumnos no se encontrarían con tantos obstáculos y podrían apropiarse de las fracciones para su aplicación en los niveles posteriores.

2.2 Estudios cognitivos centrados en el aprendizaje de las matemáticas

Por años se ha discutido la distinción que existe en la enseñanza de las matemáticas entre el conocimiento conceptual y el procedimental. Los especialistas se preguntan cómo es que los alumnos aprenden matemáticas y, por consiguiente, cuál es la mejor manera de enseñarles. Existen desacuerdos acerca de si dar mayor importancia al desarrollo de habilidades operatorias, a la comprensión, o a ambas; por consiguiente, también existe la discusión acerca de la relación que existe entre conceptos y procedimientos.

Será útil hacer una pausa y analizar la distinción que existe entre el conocimiento conceptual y el procedimental en el aprendizaje de las matemáticas. Aunque también es importante tener en cuenta que no todo el conocimiento se puede clasificar como uno u otro, ya que hay conocimientos que son tanto procedimentales como conceptuales, mientras otros parece que no pertenecen a ninguna de las dos categorías (Hiebert, 1992, p.78). Sin embargo, a partir de la distinción de ambos tipos de conocimiento, hacer un análisis de ésta puede ayudar a esclarecer algunos aspectos del proceso de aprendizaje y tener una mejor visión de los obstáculos con los que se enfrentan los alumnos en el estudio de las matemáticas. A continuación se hará referencia al trabajo que Hiebert (1986, pp. 77-81) desarrolló en este contexto.

Conocimiento conceptual. Se refiere al conocimiento rico en relaciones. Se le puede visualizar como una red interconectada de conocimiento, una red en la que se otorga la misma importancia tanto a las piezas de información como a las relaciones que las unen. Toda información forma parte de una red; una unidad de conocimiento conceptual no puede ser una pieza de información aislada; por definición se le considera conocimiento conceptual solamente si se reconoce su relación con otras unidades de información. Así, el conocimiento conceptual se desarrolla al construir relaciones entre unidades de información, proceso que se logra de dos maneras: a) a través de relacionar dos unidades de información previamente almacenadas en la memoria, esto es, al encontrar la relación entre dos ideas anteriormente aisladas, lo cual constituye la base del aprendizaje por descubrimiento (Bruner, 1961) y trae como resultado una reorganización cognitiva y un incremento en el conocimiento conceptual. La segunda opción es conectar información previamente adquirida con conocimiento recién adquirido, proceso que Davis (1984) describe como 'comprensión', y que Ausubel (1967) denomina 'aprendizaje significativo'.

Como una anécdota que ejemplifica esto, se puede citar a uno de los alumnos que participaron en el Taller de Fracciones, experimentación alrededor de la cual se centra esta tesis. Al trabajar con fracciones que son equivalentes a un medio, analizando la relación entre numerador y denominador, Edsson comentó: "Ah, ahora entiendo por qué la maestra de segundo me insistía tanto en que me aprendiera las series". Al parecer hace una conexión entre su trabajo de cuatro años antes con el actual, e incrementa así su conocimiento conceptual. Piaget (1952, citado en Wadsworth, B. (1991)) lo describiría como "asimilación […] o integración de nuevos elementos perceptuales, motores o conceptuales a los esquemas o patrones de conducta existentes", de donde resulta que el material nuevo pasa a formar parte del conocimiento previo.

Conocimiento Procedimental. Son dos las acepciones que se pueden identificar en este tipo de conocimiento: por un lado el lenguaje formal, simbólico, de las matemáticas y por otro los algoritmos o reglas que permiten llevar a cabo tareas matemáticas. La primera se refiere a la familiarización con los símbolos que se utilizan para representar ideas matemáticas y el conocimiento de la sintaxis aceptada para escribirlos (por ejemplo 3+8=11 es una sintaxis aceptada, mientras que 8+=5 no es sintácticamente correcto). Simplemente conocer los símbolos y su sintaxis implica un conocimiento superficial de las matemáticas, no un conocimiento de su significado. En cuanto a la segunda acepción se refiere a las reglas, algoritmos o procedimientos que se utilizan para resolver tareas matemáticas. Son las instrucciones que nos prescriben cómo se resuelven las diferentes situaciones, y que deben ejecutarse de manera linear con una secuencia predeterminada. Los procedimientos están organizados de manera jerárquica de tal forma que un procedimiento puede incluir otros sub-procedimientos.

Partimos de estas definiciones y aclaraciones para hacer un análisis de la relación que existe entre el conocimiento conceptual y el procedimental; así como la noción del aprendizaje significativo versus el aprendizaje memorístico.

Si concebimos que el significado se obtiene a través de encontrar relaciones entre unidades de conocimiento y que, como se describió anteriormente, el conocimiento conceptual está ligado al aprendizaje significativo, entonces al aprender los procedimientos de manera significativa se estarán relacionando con el conocimiento conceptual.

Quizás, otra experiencia del Taller sobre fracciones pueda ser un ejemplo de este tipo de relación: se pidió a los alumnos encontrar el patrón que existe entre una fracción impropia y su equivalente en fracción mixta. Al realizar diferentes cambios entre una y otra, un alumno encontró que al dividir el numerador entre el denominador el cociente que obtiene es la parte entera, que el residuo es el numerador de la fracción mixta y que el divisor es el denominador. Al descubrirlo comentó: "Sí es cierto, ya me acordé que esta fórmula nos la enseñaron el año pasado". Al parecer, anteriormente aprendió un procedimiento que no lograba recordar –por ser conocimiento procedimental aislado– y, al hacer la conexión con su investigación, se adueña del procedimiento y establece la relación con su conocimiento conceptual.

Por otro lado, Hiebert (*ibíd.*) sostiene que, el aprendizaje memorístico produce un conocimiento exento de relaciones que está ligado al contexto en el que se aprende; es decir, no es fácil establecer relaciones de transferencia hacia otros contextos u otras situaciones. Es una práctica común aprenderse los procedimientos de manera memorística, sólo es cuestión de aprenderse una secuencia predeterminada de pasos y seguirlos cada vez que la situación lo requiera; así, es fácil llegar a la conclusión que las matemáticas son un conjunto de procedimientos que uno debe memorizar. Esta noción se fortalece con el tipo de instrucción que generalmente se lleva a cabo en las escuelas.

No obstante, es inevitable hacer conexiones entre conocimiento conceptual y procedimental; ninguno de los dos puede existir como un sistema independiente. Aunque los procedimientos sí se pueden aprender de forma memorística sin que haya comprensión, es difícil imaginar conceptos que no estén relacionados con procedimientos; ya que los procedimientos traducen el conocimiento conceptual en algo observable. Sin los procedimientos como una forma de aproximarse a, y actuar sobre, el conocimiento, éste no tendría ningún significado.

Se puede afirmar que el conocimiento matemático se conforma de relaciones significativas y fundamentales entre el conocimiento conceptual y el procedimental. Los alumnos que no hacen conexiones entre los conceptos y los procedimientos matemáticos presentan muchas carencias: se les dificulta la resolución de problemas o pueden encontrar una respuesta sin realmente comprender lo que están haciendo. Establecer relaciones entre ambos tipos de conocimiento contribuye a desarrollar una base matemática sólida: le da significado a los símbolos, contribuye a la memorización (almacenamiento y recuperación) y al manejo correcto de los procedimientos.

Si el conocimiento de los conceptos, símbolos, procedimientos matemáticos y las relaciones que existen entre ellos es imprescindible para desarrollar la competencia matemática, ¿por qué estas relaciones no se construyen? ¿Cuáles son los factores que inhiben el desarrollo y el descubrimiento de las relaciones entre el conocimiento conceptual y el procedimental? Hiebert refiere tres factores que, desde su perspectiva, pudieran contribuir a que un alumno no logre establecer las relaciones entre las unidades de conocimiento, a saber: a) Puede ser el resultado de falta de conocimientos fundamentales. No es posible construir relaciones si el conocimiento no existe. Por ejemplo, Silver (1986, citado en Hiebert, J. (1986)) argumenta que el error, tan frecuente en muchos alumnos, de sumar numeradores y denominadores para la suma de fracciones se debe a una base conceptual incompleta o errónea más que a una disociación entre el conocimiento conceptual y el procedimental. Es necesario tener una base de conocimientos sólida para poder establecer relaciones. Las deficiencias en conceptos y/o procedimientos pueden explicar la falta de conexiones o de que éstas sean débiles. b) Como segunda causa, Hiebert refiere las dificultades para decodificar relaciones. Es común que algunas relaciones que son evidentes para los adultos, los niños pequeños tienden a pasarlas por alto o les resulta difícil decodificarlas. c) Una tercera instancia es la tendencia a "poner" el conocimiento en compartimentos. El conocimiento adquirido en un contexto inicialmente estará ligado a las características de dicho contexto, lo que impide que se observen las similitudes entre el conocimiento recién adquirido y el conocimiento previo almacenado en la memoria. El alumno que adquiere un conocimiento que está ligado a un contexto no busca relaciones fuera del contexto inmediato. En las diferentes áreas de las matemáticas y, en específico en el área de fracciones (decimales, porcentajes, escala, razones), los alumnos adquieren conocimientos en un contexto y los almacenan en compartimentos separados, independientes unos de otros. Quizá un factor importante sea la forma en la que está organizado el currículo escolar: en temas independientes entre sí, que se enseñan sin ninguna referencia a los otros. Pongamos un ejemplo: durante su educación primaria el alumno entra en contacto con el lenguaje simbólico de las matemáticas. Si cuenta con un sistema de referencia conceptual sólido es posible que logre conectar éste con los símbolos aprendidos, en cuyo caso estará desarrollando una herramienta poderosa para comunicar matemáticas. Si, por otro lado, el enfoque está en el trabajo procedimental –característico de la enseñanza tradicional– haciendo a un lado el conocimiento conceptual, entonces los símbolos le resultarán marcas incomprensibles en el papel, separados del concepto que representan, y los verá como un objeto más que debe memorizar y tratar de aplicar en situaciones que no tiene muy claras. La introducción de nuevos símbolos va seguida de reglas para manipular éstos; los alumnos ejecutan los algoritmos de manera mecánica sin que se dé lugar a la reflexión, al análisis de lo que se está trabajando. Dichas reglas estarán ligadas a los símbolos, no al conocimiento conceptual que las sustenta. Cuando llegan a cuarto grado de primaria, los alumnos ya cuentan con un extenso repertorio de reglas para manipular símbolos, mientras su conocimiento conceptual va quedando relegado. La instrucción cada vez se enfoca con mayor intensidad en el conocimiento procedimental. Así, desde un punto de vista procedimental, no parece extraño sumar los numeradores y sumar los denominadores de las fracciones comunes; aunque conceptualmente, evidentemente, esto no tiene ningún sentido.

A pesar de que en ocasiones (o con frecuencia) las reglas procedimentales que se aprenden los alumnos sufren variaciones, cambios o alteraciones por errores de memoria, el conocimiento procedimental los lleva más allá de su nivel de comprensión conceptual. Las reglas memorizadas los llevan a obtener respuestas correctas de problemas que realmente no comprenden. Como ejemplo se puede mencionar el caso de la multiplicación y división de fracciones. Procedimentalmente son operaciones sencillas, siempre y cuando el alumno recuerde cuándo es que "se multiplica cruzado". Son pocos los alumnos y, quizás también habría que incluir a profesores, quienes llegan a comprender la razón detrás de dichos procedimientos. Menos aún los que se cuestionan, o inclusive llegan a notar, que el producto es menor que los dos multiplicandos o el cociente es mayor que el dividiendo y divisor, contrario a lo que sucede con las mismas operaciones en los números enteros.

Hiebert (*Ibíd.*) afirma que los procedimientos que no están ligados al conocimiento conceptual se deterioran con facilidad y no son factibles de reconstruirse; se podrán recordar parcialmente, combinar con otros procedimientos de formas que no son correctas – caso muy común es el de aplicar el procedimiento de la multiplicación a la suma de fracciones, o también aplicar las reglas para ordenar números enteros a los decimales. Efectivamente, las habilidades procedimentales hacen más eficiente la resolución de problemas; sin embargo, se requiere desarrollar el conocimiento conceptual para proporcionarles estabilidad y soporte a los procedimientos.

A través de la historia psicólogos y educadores han reconocido la importancia de encontrar la relación entre el conocimiento conceptual y el procedimental. Si se logra comprender cómo se adquieren estos conocimientos y el papel que juegan en el desempeño en matemáticas, se podrá dar un paso hacia encontrar una solución a los problemas de aprendizaje que los alumnos enfrentan en matemáticas.

Lo anterior proporciona bases para aclarar aspectos de la siempre presente discusión: comprensión versus dominio algorítmico de las fracciones. Tradicionalmente éstas se enseñan de una manera simbólica, procedimental y algorítmica. Al parecer los maestros llevan prisa por decirles a sus alumnos cómo llevar a cabo los procedimientos sin darles tiempo a que establezcan bases sólidas. Según el NCTM (2000), cuando se memorizan los procedimientos sin que entre en juego la comprensión, éstos se olvidan o se recuerdan erróneamente; y agrega que, para que haya fluidez en el trabajo con los racionales se requiere que haya un balance entre la comprensión conceptual y la habilidad computacional. Es decir, es importante que los alumnos comprendan los conceptos y el razonamiento detrás de las operaciones, pero igualmente importante es que tengan fluidez con los algoritmos, ya que la falta de fluidez puede inhibir u obstaculizar el proceso de resolución de problemas.

Para que el alumno logre una comprensión cualitativa de las fracciones es necesaria una instrucción que enfatice el significado así como el desarrollo de los conceptos y relaciones entre fracciones, antes de proceder a las operaciones (Bezuk, 1989). Flores (2006) argumenta que antes de tratar de abordar el trabajo formal con símbolos y algoritmos, el currículo se debe centrar en el desarrollo del aprendizaje conceptual; y Huinker (2002) enfatiza que, para lograr un sentido sólido de las operaciones con fracciones, es fundamental que los estudiantes primero comprendan su significado, que le encuentren sentido a los símbolos y al lenguaje formal requerido. Un proceso meramente memorístico es poco eficiente y puede llegar a deteriorarse, conduciendo al alumno a cometer errores y no darse cuenta de ello. Los alumnos que desarrollan un conocimiento sólido de las fracciones y hacen conexiones en diferentes situaciones, podrán desarrollar estrategias para realizar operaciones y trabajar con situaciones–problema de manera significativa (Huinker, 2002). Así, se puede afirmar que hacer énfasis en la comprensión es tan importante como favorecer el dominio de los algoritmos con racionales.

Habiendo planteado y discutido la relación entre el conocimiento conceptual y el procedimental se puede ahora replantear la interrogante y preguntar qué va primero: ayudar a los alumnos a desarrollar procedimientos utilizando símbolos o ayudarlos a reconocer las relaciones entre ellos. La mayoría de las teorías apuntan a la construcción del significado de los símbolos y relaciones matemáticas previo a la práctica de las reglas de ejecución (Goldin, 1987; Hiebert, 1988; Kaput, 1987). Las evidencias sugieren que una vez que el alumno ha adquirido una serie de reglas procedimentales para el trabajo simbólico se rehúsa con mayor facilidad a establecer conexiones entre las reglas y otras representaciones que podrían ayudar a darle significado. En otras palabras, una vez que el alumno se aprende un algoritmo, para encontrar fracciones equivalentes –por mencionar un ejemplo– (multiplicar numerador y denominador por un mismo número), mostrará resistencia a utilizar material concreto para tratar de comprender el procedimiento. Por lo tanto, será importante hacer énfasis en la comprensión previo a la memorización del trabajo algorítmico. Esto concierne a las estrategias del profesor en cuanto a que tendrá que diseñar la enseñanza para que primeramente se favorezca que el alumno construya representaciones internas de los procedimientos que le ayuden a conformar sus redes conceptuales antes de enfocarse en la práctica de los procedimientos. Aún queda por definir cómo es que se debe diseñar dicha instrucción. Evidentemente, los conceptos y procedimientos no deben enseñarse como piezas de información aisladas, pero no está claro cuáles son las conexiones en las que debe hacerse énfasis, ni qué tipo de enseñanza es más eficiente para promover la construcción de conexiones. Una forma de hacer que los alumnos tomen conciencia de las conexiones es a través de la comunicación, animándolos a que reflexionen sobre su trabajo matemático, a que comuniquen sus estrategias, a que participen en discusiones grupales en las que se les dé la oportunidad de describir y explicar las conexiones que descubren.

2.3 El uso de materiales concretos en la enseñanza de fracciones

De acuerdo a Hiebert (1992), una forma de lograr que los alumnos construyan conexiones entre su conocimiento informal y las representaciones simbólicas formales es a través del uso de representaciones concretas. Para este enfoque es necesario utilizar el material adecuado que permita al alumno visualizar el procedimiento o algoritmo en cuestión reflejado en el material elegido. Por ejemplo, en términos generales se puede afirmar que los alumnos cuentan con un conocimiento informal de las fracciones equivalentes pues pueden visualizar que media naranja es lo mismo que dos cuartos de naranja. Si este conocimiento empírico se traslada a los círculos de colores, podrán visualizar la misma equivalencia y muchas otras más. Será cuestión de hacerlos reflexionar sobre este aspecto importante de las fracciones, guiarlos a que encuentren el patrón que se repite, para que ellos mismos encuentren el procedimiento simbólico para encontrar equivalencia entre fracciones.

El uso de material concreto no es una idea que haya surgido recientemente. Bezuk (1989) argumentó que para que un alumno pueda comprender el aspecto cuantitativo de las fracciones, es importante que tenga experiencias concretas; con materiales como son el uso de las regletas de Cuisenaire, bloques de Dienes, círculos divididos, doblado de papel, cuentas, fichas u otro material similar. Cramer (2002) observó en un estudio que los alumnos que utilizaron material concreto desarrollaron un sentido numérico de las fracciones, conceptualizaron el tamaño de las fracciones con diferentes denominadores, fueron capaces de ordenar fracciones, lograron dar una estimación razonable a la suma de fracciones y fueron capaces de verbalizar su razonamiento. Flores (2006) sugiere que, aunque el uso del material manipulable sea significativo, de igual importancia es el trabajo con representaciones pictóricas, orales, simbólicas y del mundo real. Scaptura (2007) propone que se desarrollen modelos visuales para que los alumnos puedan comprender las formas equivalentes de los números racionales y descubran la relación que existe entre fracciones, decimales y porcentaje. Behr, *et al.* (1992) recomiendan el uso de una variedad de materiales concretos para desarrollar el concepto de fracción, que les permita desprenderse de las características como color, forma, tamaño y así logren abstraer el concepto en sí. Su propuesta incluye: a) modelar fracciones y nombrarlas; b) generar fracciones equivalentes; c) realizar actividades que involucren el concepto de unidad; y d) ordenar fracciones.

Mercer (1995) señala que una evidencia de que el alumno ha comprendido un concepto o un procedimiento es que pueda explicarlo; también manifiesta que una de las metas más importantes de la educación, es desarrollar la capacidad de comunicación de los estudiantes a través del uso del lenguaje en sus diferentes formas. Es decir, es fundamental que los alumnos aprendan a comunicar sus ideas. Por ello, en Matemáticas, es necesario hacer énfasis en promover que los alumnos expresen sus ideas en palabras, expliquen sus procedimientos matemáticos y los compartan con sus compañeros y su entorno, tanto de manera oral como escrita. La clase de matemáticas debe ser un lugar para hablar de matemáticas, ya que la comunicación es esencial para el aprendizaje y para el desarrollo de la comprensión matemática (Vygotsky 1994). La interacción ayuda a los alumnos a clarificar sus ideas, a recibir retroalimentación, a escuchar otros puntos de vista y otras formas de resolución. Así, cuando los alumnos aprenden a explicar y justificar su pensamiento, robustecen su conocimiento y desarrollan significados matemáticos. Conforme aprenden a utilizar el lenguaje matemático, trasforman la manera de entender los conceptos, incorporándolos a su red de conexiones. De ahí que una responsabilidad importante del profesor sea crear oportunidades, contextos y situaciones de aprendizaje que involucren activamente a los alumnos y propicien el desarrollo de su capacidad de comunicar sus ideas.

La educación matemática juega un papel importante en la construcción de significados. Sin embargo, un profesor o un alumno no pueden transmitir su conocimiento a otra persona (Sierpinska, 1998). Las ideas no se pueden transmitir directamente porque, aunque los alumnos tienen la habilidad de memorizar definiciones, procedimientos y algoritmos, dicha memorización no permite que establezcan conexiones con sus experiencias previas

(Bartolini, Bussi, 1998). El significado se hace evidente en el discurso. Para elaborar el significado los niños combinan palabras y frases que han escuchado, con su propio lenguaje e ideas. Así se espera, con optimismo, que los alumnos puedan hacer generalizaciones que los ayuden a construir su conocimiento conceptual.

Vygotsky (1962) sostuvo que conforme los niños aprenden a utilizar palabras nuevas van internalizando su significado. Sustentó que el desarrollo del significado de las palabras en el niño es un proceso que cumple dos funciones: el primero es a nivel social, cuando entra en contacto con la palabra y después a nivel individual, cuando logra la generalización. Conforme los niños empiezan a utilizar e internalizar palabras nuevas en presencia de otra persona con mayor conocimiento, se encuentran en lo que Vygotsky llama la zona de desarrollo próximo (ZPD, por sus siglas en inglés) para nuevos aprendizajes. La ZPD es el lugar de aprendizaje en algún punto entre la comprensión real del niño y su comprensión en potencia (Vygotsky, 1978). Estando en la ZPD los niños pueden trabajar ahora de manera colaborativa lo que podrán hacer en el futuro de manera individual.

Bruner (1986) aporta que el concepto de Vygotsky de la ZPD sugiere que el profesor puede participar en la construcción del conocimiento de los alumnos al proporcionarles información precisa que deben asimilar al conocimiento que ya poseen, guiándolos gradualmente de lo familiar a lo desconocido. Al involucrar cuidadosamente a los alumnos en actividades bien diseñadas, el profesor puede crear una ZPD de tal forma que cada alumno pueda desarrollar su comprensión de los conceptos.

Analizar la forma en la que se piensan y comunican ideas implica reflexionar en la forma en la que éstas se representan. Para pensarlas se requiere de una representación interna, no observable, ya que el pensamiento es una actividad mental, individual. Para comunicar las ideas se requiere de una representación externa que puede tomar la forma de lenguaje oral, simbólico, de dibujos u objetos físicos.

A continuación se presenta una recapitulación que parte de la premisa expuesta por Hiebert (1992) en la que explica que existe una relación entre las representaciones internas y externas, y que además existen conexiones entre las representaciones internas; esto es, que al construir relaciones entre las representaciones externas a la vez se estimula la construcción de relaciones entre las representaciones internas. El tipo o forma de representación externa con la que el alumno interactúa es determinante en la forma como la representa internamente. Un alumno que interactúa con objetos físicos tendrá representaciones internas diferentes al niño que interactúa con símbolos. Una forma de lograr que un niño haga conexiones entre las representaciones externas es hacer énfasis en las semejanzas y las diferencias que existen entre éstas; por ejemplo para la enseñanza de fracciones el uso de círculos, rectángulos, fichas, símbolos, dibujos, etc. Estas experiencias lo conducirán a una mejor comprensión de las matemáticas. Pero, ¿qué es una *mejor comprensión*? Hiebert (1992, p. 67) la define en términos de la forma en la que la información se representa y se estructura:

> Una idea o un procedimiento matemático se comprende si su representación mental forma parte de la red interna de representaciones, si está ligado a una red existente de muchas conexiones. El grado de comprensión lo determina la fuerza de las conexiones.

Un ejemplo que permite mostrar semejanzas y diferencias entre representaciones externas puede ser el siguiente: un alumno trabaja fracciones utilizando los círculos divididos, dibujos y notación simbólica. Si designa el círculo completo como la unidad, puede ir dando valores a las piezas de diferentes tamaños, dibujarlas y establecer correspondencia con la notación escrita pertinente. Así tiene la oportunidad de establecer conexiones entre las tres formas de representación. Se presupone que el alumno cuenta con información y experiencias previas respecto al tamaño de la pieza: a mayor cantidad de piezas en las que se divide, menor es el tamaño de la porción; y en cuanto a equivalencias: habrá notado al partir una naranja en mitades y después en cuartos, que dos cuartos es lo mismo que una mitad; esto es, es posible que cuente con una red interna con la que puede conectar su representación mental de los círculos y los dibujos. Si, a la vez, los símbolos se conectan a la representación de los círculos, entonces quedarán relacionados con las múltiples asociaciones que el alumno tiene en su red de fracciones. Al trabajar con el material concreto, por ejemplo nuevamente los círculos, es factible que el alumno llegue a la suma de fracciones juntando piezas del mismo color. Si hace la conexión en su red interna de representaciones entre la acción con los círculos y la acción con los símbolos, la suma de fracciones simbólicamente le implicará que debe sumar fracciones con el mismo denominador. Sin embargo, dichas conexiones no son fáciles de establecer, se requiere un esfuerzo consciente de las acciones. Al favorecer que el alumno piense y comunique sus ideas sobre las semejanzas y diferencias entre los círculos y la notación escrita se refuerza la construcción de las relaciones entre las representaciones. De igual manera, fomentar que analice y comunique sus ideas de las semejanzas y diferencias entre los procedimientos le permitirá construir una red mental coherente, rica en relaciones.

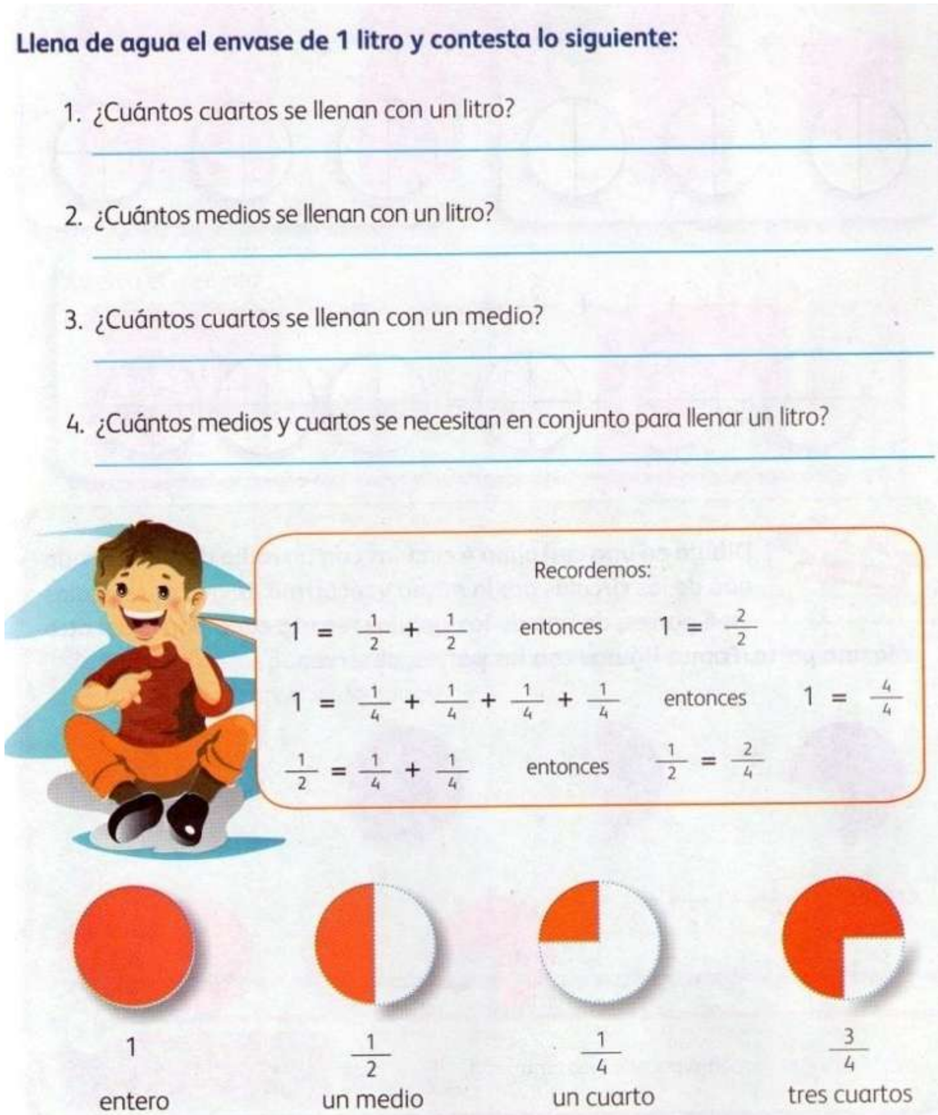
Con base en esta visión de comprensión, se puede proceder a describir el proceso que conduce a ella. Las redes de representaciones mentales se van enriqueciendo gradualmente y se van construyendo a medida que la nueva información se conecta con las redes existentes, o según se construyen nuevas relaciones entre la información que anteriormente se encontraba desligada. La comprensión crece conforme crecen y se organizan las redes. Por lo tanto, no se puede hablar de que un alumno no comprende o sí comprende, la comprensión no es un fenómeno de todo o nada. Conforme las redes crecen y conforme las relaciones se fortalecen con experiencias que las sustentan, la comprensión incrementa. Se puede tratar de dilucidar hasta dónde comprende el alumno para poder saber qué experiencias le hacen falta que le ayuden a mejorar o complementar su red de representaciones internas. El proceso de reorganizar redes y de conjuntar nuevas representaciones a redes existentes depende de las redes que fueron creadas previamente. Las experiencias anteriores crean redes mentales que el alumno utiliza como referencia para interpretar y comprender nuevas experiencias e información. Las personas constantemente tratan de comprender y pensar acerca de lo nuevo en términos de lo que ya saben. O sea que "las redes existentes influyen en las relaciones que están en construcción, ayudando a dar forma a nuevas redes" (Hiebert, 1992. p. 70).

La notación escrita en matemáticas juega un papel importante en las experiencias escolares de los niños, forma un sistema de representación primario dentro de su práctica como alumnos. A continuación se analizará de qué forma adquiere significado. El significado de la notación escrita se puede desarrollar de la misma manera en la que se desarrolla la comprensión de cualquier otra forma de representación –haciendo conexiones entre las otras formas de representación o estableciendo conexiones dentro de la representación en sí. Cuando los símbolos escritos se conectan con otras formas de representación –como material concreto, dibujos, lenguaje oral–, se interpreta que el significado se originó en las redes previamente creadas de estas formas. La presencia de otras formas de representación, como los objetos físicos, no necesariamente otorga significado a los símbolos. Es necesario que el alumno haga la conexión entre su representación mental de los símbolos escritos y la representación mental del material concreto. La comprensión que surge de la conexión entre uno y otro no es tan directa, ya que el material concreto es en sí una representación de relaciones y cantidades matemáticas. La utilidad de los materiales concretos como referentes del lenguaje simbólico depende de qué tan acertadamente éstos manifiestan relaciones matemáticas y con qué facilidad se encuentran conexiones con los símbolos escritos.

La discusión acerca de la comprensión matemática adquiere significado cuando se le enfoca en las consecuencias que tiene para el aprendizaje. Desde la aparición de las teorías constructivistas del aprendizaje se planteó como buena práctica que los alumnos construyan su conocimiento matemático en lugar de recibirlo como un producto terminado de un libro o de un profesor. Con este enfoque, el alumno crea sus propias representaciones internas de su interacción con el mundo y construye su red de representaciones. Un ingrediente crucial en este proceso de construcción es la capacidad inventora del alumno. El alumno constantemente crea o inventa formas de lidiar con el mundo que lo rodea. En la escuela depende de las estrategias que "inventa" para resolver los problemas que se le presentan. Si se fomenta su poder de inventiva desde un principio, conectándolo con su red de representaciones ricas en asociaciones, su poder inventivo podrá operar sobre éstas, incrementando así su comprensión y generando nuevas comprensiones. Conforme las redes crecen, se lograrán estructurar mejor e incrementarán el poder de inventiva. Así, unos se retroalimentan de los otros formando un ciclo de crecimiento inventor y de comprensión. Queda entonces claro que se debe hacer un gran énfasis en propiciar la construcción de relaciones y en desarrollar el potencial de inventiva en los alumnos en lugar de animarlos a convertirse en sobresalientes ejecutores de procedimientos.

El conocimiento rico en conexiones se puede recordar mejor que uno aislado, ya que existe una red bien estructurada detrás del conocimiento la cual permite el acceso a éste por diferentes caminos. Además, se puede aplicar a una variedad de situaciones debido precisamente a sus conexiones. En otras palabras, dicho conocimiento tiene la cualidad de ser transferible. Ahora bien, la transferencia es un ingrediente esencial para ser competente en matemáticas, ya que los problemas nuevos requieren que se utilicen estrategias previamente aprendidas, pero no necesariamente en el contexto o la forma en la que fueron aprendidas. Sería imposible ser competente si se requiriera una estrategia diferente para cada problema que se quisiera resolver. La transferencia es imprescindible puesto que para resolver problemas se requiere previamente haber resuelto otros similares.

El que los alumnos no logren hacer conexiones es resultado del estilo de enseñanza habiéndoseles impuesto restricciones en lugar de abrirles oportunidades de descubrimiento. Los alumnos construyen sus representaciones utilizando el material y la información con la que interactúan. La riqueza del material y de la información influye en la riqueza de sus representaciones internas. Si la actividad matemática a la que están expuestos es restrictiva, sus representaciones internas se verán restringidas y, como consecuencia, las redes que construyan estarán limitadas. Les será complicado establecer conexiones y crear redes ricas en asociaciones. Posiblemente traten de buscar significado en estas redes limitadas con resultados deficientes, simplemente porque el significado en matemáticas se logra relacionando ideas, hechos y procedimientos en una variedad de situaciones. Como una muestra de la actividad matemática que puede conducir a representaciones internas restringidas presentamos un ejemplo (Figura 2.1) de la forma en la que el tema de fracciones se presenta a los alumnos, tomado del documento Planes de Estudios. Educación Básica. Primaria (SEP, 2009).



Llena de agua el envase de 1 litro y contesta lo siguiente:

1. ¿Cuántos cuartos se llenan con un litro?
2. ¿Cuántos medios se llenan con un litro?
3. ¿Cuántos cuartos se llenan con un medio?
4. ¿Cuántos medios y cuartos se necesitan en conjunto para llenar un litro?

Recordemos:

$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ entonces $1 = \frac{2}{2}$

$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ entonces $1 = \frac{4}{4}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ entonces $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
entero	un medio	un cuarto	tres cuartos

Figura 2.1. Forma en la que se presenta el tema de fracciones a los alumnos.

A partir de cuarto grado, las fracciones comunes se incluyen en el subtema "Números fraccionarios", mientras que las fracciones decimales están dentro del subtema "Números decimales". Una alternativa más adecuada sería el presentar las fracciones decimales como un ejemplo más de las fracciones comunes que, además de representarse con numerador y denominador, tienen una forma alternativa de representación utilizando el punto decimal. Desde el momento en el que el conocimiento se divide en compartimentos, la posibilidad de encontrar relaciones se obstaculiza y el alumno se ve imposibilitado de establecer conexiones. Su red estará tan restringida que no le permitirá lidiar adecuadamente con una amplia variedad de situaciones más adelante, como sería la aplicación a porcentajes.

La situación se ve agravada por el hecho de que en la escuela, los problemas se presentan como dibujos, acompañados de símbolos escritos en un cuaderno de trabajo. La ilustración que se presenta (Fig. 2.1) fue tomada de un libro para el alumno de 3er grado de primaria. Las instrucciones piden al alumno que consiga tres envases de cartón de un litro y que los recorte: uno a la mitad, y a ese se le llama un medio. El segundo envase a la mitad y otra vez a la mitad y a ese se le llama un cuarto. Posteriormente se les pide que contesten las preguntas que se presentan en la hoja. Cabe mencionar que esta lección constituye la introducción al tema de fracciones. Es la primera vez que el niño está en contacto con un sistema de numeración muy diferente al que ha estado acostumbrado.

Evidentemente se toma por hecho que el alumno comprende perfectamente la simbología, que comprende el concepto de fracción, el de equivalencia y que es capaz de llevar a cabo operaciones con fracciones. Con este ejemplo, ¿es de asombrarse que los alumnos tengan tantas deficiencias y tanto rechazo a las fracciones? Estos problemas, si acaso, fomentan el pensamiento simbólico y no promueven que se establezcan conexiones con otras representaciones, así las redes internas de símbolos que se forman quedan desconectadas de las demás representaciones y de los otros conocimientos.

Tanto la SEP (1998) como el NCTM (2000) sugieren que se motive a los alumnos a reflexionar, a comunicar sus procedimientos, a hacer comparaciones, a criticar las estrategias propias y de los demás, a justificar su trabajo, a validar y rectificar sus resultados, inmersos en un ambiente de trabajo colaborativo. Pero, por el solo hecho de ponerlos a trabajar en equipos no se garantiza que sepan hacer el trabajo ni que tengan nociones de lo que implica trabajar en colaboración. Si se requiere que los alumnos trabajen colaborativamente, el maestro tendrá la responsabilidad de enseñarlos a colaborar para que tengan una idea clara de lo que se espera de ellos. Es esencial ofrecer una serie de condiciones favorables que propicien la comunicación entre ellos; por ejemplo que la discusión sea indispensable para resolver la tarea, que la actividad propicie la colaboración en lugar de la competencia, que los participantes comprendan el propósito de la actividad, que las reglas sean claras y fomenten el intercambio de ideas y la participación activa de todos los involucrados (Mercer, 1989). Una referencia que vale la pena tomar en cuenta es la investigación realizada por Azmitia y Montgomery (1993, en Mercer, 1989) en la que encontraron que cuando los alumnos trabajan en parejas con un amigo, logran un razonamiento explícito más complejo y tienen más éxito en resolver problemas que cuando trabajan con 'compañeros' solamente. Lo que implica que la práctica de hacer equipos al azar resulta de poca utilidad, si se quieren obtener buenos resultados.

Ahora bien, si se pretende que la enseñanza esté orientada hacia lograr que los alumnos tengan una mejor comprensión de los números racionales y sean más exitosos en las operaciones con ellos, se sugiere que se pospongan las operaciones con fracciones a nivel simbólico hasta 6º grado de primaria, dedicándose en 4º y 5º a desarrollar conceptos de orden y equivalencia (Bezuk, 1989). La propuesta implica que en un inicio el maestro se centre en promover que los alumnos comprendan y representen fracciones en contexto y que vean las fracciones como parte de un entero o como parte de una colección. Más adelante se podrá introducir la idea de que una fracción es una división, para que posteriormente el alumno consolide su concepto de fracción como número. El NCTM (2000) recomienda presentar una variedad de experiencias en las que el alumno se percate que los números se pueden representar de varias formas, como ¼ = 0.25 = 25%. Para lograr que los estudiantes tengan una idea cuantitativa de la fracción es recomendable realizar actividades que impliquen ordenar fracciones con igual denominador o numerador, decidir si una fracción es mayor o menor a ½, obtener equivalencias del ½ y otras familias de fracciones –procurando que el numerador no exceda a 12–, describir con palabras antes de pasar al uso de la simbología, hacer estimaciones y practicar la reflexión que los lleve a decidir si la respuesta obtenida es razonable (Bezuk, 1989). Conjuntamente se sugiere seleccionar situaciones problemáticas que puedan ser resueltas utilizando diferentes procedimientos (SEP, 1998). De acuerdo a Scaptura (2007) el maestro debe jugar un papel activo y ofrecer a los alumnos experiencias relevantes que los ayuden a mejorar su compresión informal y los impulsen a elaborar una red más formal de conceptos y procedimientos. Puede reforzar el trabajo de las operaciones con fracciones haciendo énfasis en las conexiones con situaciones reales, en el lenguaje oral de los alumnos, en propiciar el uso de representaciones pictóricas y simbólicas (Huinker, 2002).

El Consejo Nacional de Investigación ([NRC por sus siglas en inglés], citado por Scaptura, 2001) establece que los números racionales presentan un reto para los estudiantes ya que son pocas las experiencias en esta área que se les presentan en contextos fuera de la escuela. Representan también un reto para el maestro que se esfuerza por contextualizar y hacer significativo el trabajo en el aula. Además son números que representan mayor grado de complejidad que los enteros, tanto por la variedad de representaciones como por la diversidad de formas en las que se utilizan. Gran parte del trabajo con números enteros no es transferible al contexto de las fracciones, lo cual implica para el estudiante aprender un nuevo sistema de números que debe organizar, conceptualizar y operar.

2.4 El Proyecto de Número Racional

Con el propósito de aterrizar estas ideas acerca del desarrollo del tema de fracciones con estudiantes de sexto año de primaria, se realizará una experiencia apegada al Rational Number Project (Behr, *et al.* 1997) que será la base experimental de esta tesis. Cuatro profesionistas de la educación matemática, Merlyn Behr, Kathleen Cramer, Richard Lesh y Thomas Post iniciaron investigaciones al respecto desde 1979 enfocándose en comprender cómo los alumnos aprenden fracciones, razones, decimales y el concepto de proporcionalidad. Como resultado de varios años de investigación, diseñaron una propuesta para la enseñanza de fracciones a nivel primaria con el propósito de que los alumnos logren una comprensión conceptual profunda de las fracciones. Su propuesta, a la que llamaron Rational Number Project (Proyecto de Número Racional, RNP de ahora en adelante), está diseñada como una alternativa a la secuencia de contenidos relacionados con las fracciones que se encuentran en los libros de texto para alumnos en los últimos tres años de educación primaria y los dos primeros de secundaria (grados 4 a 8 en el sistema de educación de EUA). La serie de lecciones que proponen fueron piloteadas con más de 1600 alumnos en los EUA; los alumnos que participaron en el RNP mostraron un desempeño significativamente mejor que los alumnos que utilizaron el libro de texto tradicional (RNP, Level 1). Los alumnos del RNP mostraron un pensamiento conceptual, mientras que el de los alumnos que trabajaron con el libro de texto era más procedimental.

Los autores afirman que los alumnos requieren extensos periodos en los que sean expuestos al uso de material concreto para lograr desarrollar el concepto de fracción, de orden y de equivalencia, necesarios para que posteriormente su trabajo con operaciones con fracciones sea significativo; fundamentos consistentes con las metas del NCTM (2000): la enseñanza de fracciones debe promover la comprensión y representación de fracciones en contexto, el desarrollo del sentido numérico a través del uso de una variedad de modelos concretos para representar fracciones, así como la habilidad de hacer transferencias entre las diferentes representaciones; y de la SEP (2009, p.76): "se espera que los alumnos utilicen de manera flexible el cálculo mental, la estimación de resultados y las operaciones escritas con números […] fraccionarios y decimales, para resolver problemas aditivos […].

El material del RNP Nivel 1, desarrolla los siguientes temas: a) modelo parte-entero de las fracciones, b) el concepto de unidad, c) conceptos de orden y equivalencia, y d) suma y resta de fracciones con materiales concretos. Los materiales que propone se utilicen son círculos de colores fraccionados, doblado de papel y fichas. El programa consiste de una serie de lecciones en las que el alumno continuamente tiene acceso al material concreto. Su mayor énfasis está en el desarrollo del sentido cuantitativo de las fracciones; como consecuencia el alumno adquiere una idea del tamaño relativo de las fracciones y puede dar respuestas estimativas muy precisas sin tener que recurrir a procedimientos memorizados.

Lesh tomó la idea de Bruner, acerca de las diferentes formas en las que se pueden representar fracciones y diseñó el siguiente diagrama (ver Diagrama 2.2). Los autores del RNP afirman que las ideas matemáticas acerca de las fracciones se pueden representar de las cinco maneras que ilustra el diagrama y plantea se hagan constantes referencias a las relaciones que existen entre las distintas representaciones, basándose en la idea de que los alumnos aprenden mejor cuando se les da la oportunidad de explorar ideas desde diferentes perspectivas y hacer conexiones entre las diferentes representaciones.

Concretamente, citamos algunos ejemplos: se pide al alumno que dibuje la representación de $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ (transferencia de símbolos a dibujos); o, que muestre $\frac{2}{3}$ utilizando sus círculos habiéndolo representado con rectángulos (traslación de símbolos a dibujos y después dentro de la misma representación pictórica). Una vez que el niño haya primero interpretado y después comprendido el concepto es que será capaz de hacer las transferencias. La comprensión e interpretación, apoyados en el diagrama de Lesh, son procesos cognitivos necesarios que permiten a los alumnos involucrarse, discutir, utilizar modelos concretos, pensar acerca de su pensamiento; quehaceres que no se encuentran con frecuencia en la enseñanza de las matemáticas (Behr, Cramer, Lesh, Post, 1997).

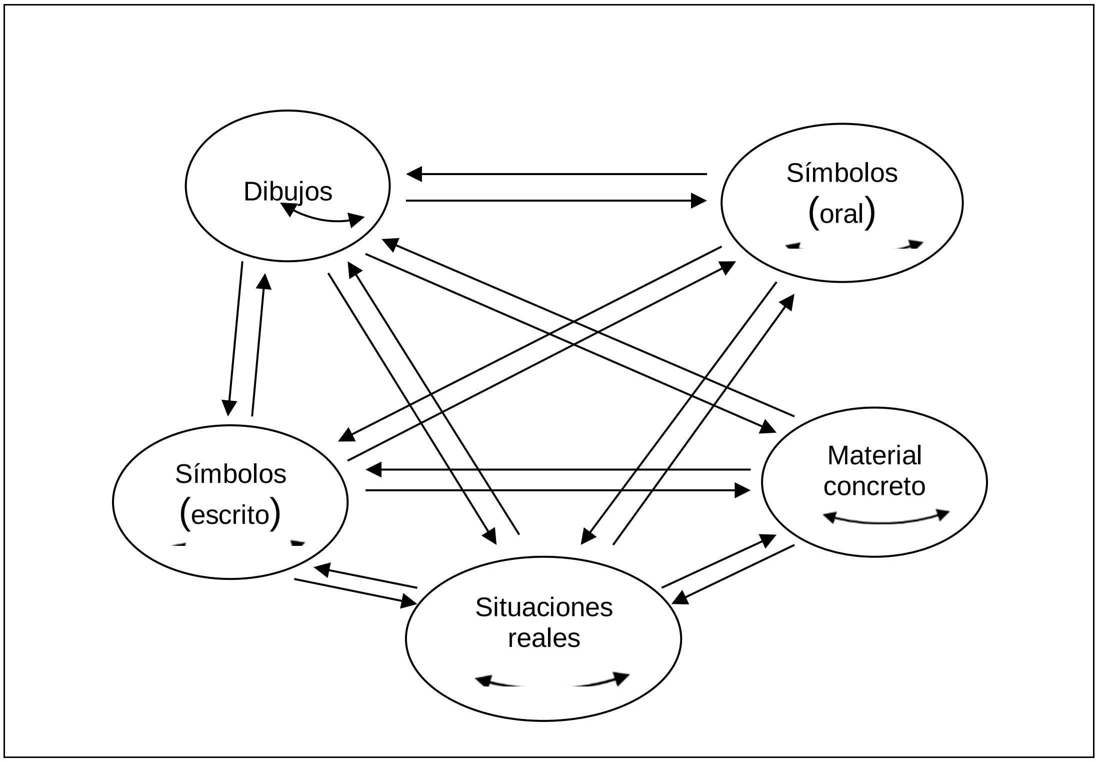


Diagrama 2.2. Representaciones de fracciones, según Lesh.

Las lecciones del RNP posponen el desarrollo de los algoritmos de las operaciones con fracciones hasta el momento en el que el alumno haya desarrollado la comprensión del concepto de fracción. Las lecciones se enfocan en propiciar la comprensión de las operaciones con fracciones utilizando material concreto y situaciones cotidianas. Una característica importante es que en todo momento se hace énfasis en las estimaciones. En palabras de sus autores: "These lessons are for teachers who know from their own experience with children that there must be a better way to teach fractions!!!" (Estas lecciones son para profesores que se han dado cuenta, desde su experiencia docente con niños, que debe haber una mejor manera de enseñar fracciones)

Claramente existe la necesidad de que haya un cambio en la forma como se enseñan las fracciones a nivel básico. Debido a su complejidad, se requiere que los maestros dediquen más tiempo a promover el desarrollo de una comprensión sólida de las fracciones en sus alumnos. También es conveniente que haya un cambio en el enfoque de la enseñanza: hacer mayor énfasis en la comprensión conceptual de las fracciones por parte de los alumnos para de ahí proseguir con el desarrollo de los algoritmos de sus operaciones.

Capítulo III
Metodología

3.1 Introducción

¿Qué sucede cuando a un grupo de alumnos de sexto grado de primaria, acostumbrados a trabajar con fracciones de manera algorítmica y procedimental, se les presenta la oportunidad de utilizar material concreto para el estudio de las fracciones con un enfoque conceptual? ¿Tendrá alguna influencia en su *comprensión* de las fracciones?

En esta tesis se reporta una investigación de carácter cualitativo, enfocada en la enseñanza y aprendizaje de las fracciones. La organización de las actividades, su aplicación, la observación del trabajo, la realización de encuestas y el análisis de los resultados, estuvieron a cargo de quien realiza este trabajo; profesora de matemáticas quien durante los últimos cuatro o cinco años ha trabajado con alumnos de sexto grado de primaria.

La investigación se llevó a cabo con un grupo de alumnos en cuyo historial escolar se reflejaban dificultades en la comprensión del tema; su participación en el proyecto fue de carácter voluntario. Las sesiones se realizaron en horario extra-escolar, utilizando las actividades y los materiales sugeridos por el RNP. Se monitoreó el avance por medio de observaciones y video grabaciones del trabajo en clase; grabaciones de entrevistas individuales; así como evaluaciones escritas para verificar si al final del periodo se había logrado una mejor comprensión conceptual del tema.

El estudio se desarrolló utilizando como base la secuencia de actividades contenidas en el documento Proyecto de Número Racional: Lecciones con Fracciones para los Años Intermedios. Nivel 1 [RNP por sus siglas en inglés] (Lesh, 1980). Este proyecto cuenta con patrocinio de la National Science Foundation desde 1979; y ha publicado más de 80 artículos en su sitio de Internet (RNP, 2001) a través del cual ha divulgado investigaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de fracciones con alumnos de cuarto y quinto grados de primaria. Dicho proyecto se basa en las siguientes premisas: a) los alumnos pueden aprender y comprender las fracciones a través del trabajo con diferentes modelos de materiales concretos; b) el material concreto es sólo un componente en la adquisición de conceptos; de igual importancia son las representaciones verbales, pictóricas, simbólicas y de la vida cotidiana; c) se debe dar a los alumnos la oportunidad de compartir sus ideas matemáticas con sus compañeros y su profesor; d) la enseñanza debe enfocarse en el desarrollo conceptual antes de pasar al trabajo más formal con símbolos y procedimientos. (Cramer, K., Post, T., delMas, R., 2002, pág. 113)

El RNP surgió de una serie de experiencias docentes diseñadas para documentar el razonamiento de los alumnos al interactuar con sus ideas preconcebidas sobre las fracciones. Fue diseñado tomando en cuenta las sugerencias de los *Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares* del NCTM (2000) en donde se establece que la enseñanza de fracciones se debe abordar a partir de la comprensión del concepto, el análisis de las relaciones entre ellas y el desarrollo del concepto de orden y equivalencia, previo a la introducción de los algoritmos de las operaciones.

Debido a que se ha visto que los alumnos tienen dificultades para relacionar las diferentes representaciones de las fracciones, el NCTM sugiere se utilicen diferentes modelos concretos, diagramas, símbolos y situaciones de la vida real, haciendo constante énfasis en las relaciones entre éstos. El documento del NCTM afirma que si se logra una base firme del concepto de fracción en los alumnos de 3º a 5º de primaria se evita que en el 6° grado, e inclusive en la secundaria, se tenga que dedicar tiempo a corregir concepciones erróneas y dificultades en los procedimientos (*ibíd*. p. 35)

De acuerdo con los autores del RNP, la secuencia didáctica que plantean ayuda a los alumnos a desarrollar su sentido numérico, ya que fue diseñada para propiciar el desarrollo del concepto de fracción y de su orden y equivalencia. Ellos aseveran que, a través del trabajo con círculos de colores, fichas y doblado de papel, se pretende que los alumnos logren las metas establecidas por el NCTM (*ibíd*., p. 214) para la enseñanza de fracciones:

> Todos los estudiantes deberán:
>
> Trabajar con distintos tipos de fracciones;
> Comparar y ordenar fracciones […] con eficacia, y tener la habilidad de ubicarlas aproximadamente en la recta numérica;
> Comprender el significado y los efectos de las operaciones aritméticas con fracciones;

Al trabajar con fracciones, que tengan oportunidad de reflexionar con su propia forma de pensar empleando lenguaje informal para que le encuentren sentido al sistema simbólico formal.

Aplicar sus ideas sobre las fracciones a situaciones reales;

Tener oportunidad de hacer conexiones entre diferentes formas de representar las fracciones: en el mundo real, con modelos concretos, dibujos y símbolos.

La secuencia de actividades elegida se centra en los siguientes aspectos: trabajo con diferentes modelos concretos de fracciones que representan parte de un entero; adquirir flexibilidad en el concepto de unidad; comprender los conceptos de orden y equivalencia; desarrollar la habilidad de sumar y restar fracciones partiendo de lo concreto y, gradualmente, transferirlo a las otras formas de representación hasta llegar al lenguaje simbólico. El RNP no propone que los alumnos desarrollen procedimientos simbólicos para ordenar fracciones, ni encontrar fracciones equivalentes y realizar operaciones con ellas; su principal propósito en el Nivel 1 es que los alumnos desarrollen un sentido cuantitativo de las fracciones. Como un ejemplo de esta distinción se puede mencionar que durante la clase video grabada se preguntó a los alumnos cuál sería la fracción mayor si se compara un medio y dos quintos. Un alumno contestó: "…cinco no tiene mitad, pero si se pasa, por ejemplo, tres quintos es mayor que la mitad, [entonces] dos quintos son menos de la mitad y un medio es la mitad, entonces el medio es mayor". Dicho alumno tuvo la habilidad de razonar el problema al visualizar el tamaño relativo de las fracciones, sin tener que auxiliarse del pensamiento procedimental lo que al parecer es indicio de un pensamiento más conceptual.

3.2 Procedimiento empleado en la investigación.

3.2.1 Examen diagnóstico

El primer acercamiento al trabajo de investigación consistió en elaborar un examen diagnóstico que reflejara las ideas preconcebidas de los alumnos. Este instrumento (ver Anexo 1) se diseñó para valorar los siguientes aspectos:

- Concepto de que una fracción indica que un entero está dividido en partes de igual tamaño.
- Trabajo con fracciones no unitarias.
- Las fracciones como parte de un conjunto de objetos.
- Habilidad para ubicar fracciones en una recta numérica.
- Comprensión cualitativa de las fracciones.
- Manejo de equivalencias.
- Habilidad para la suma y resta de fracciones con igual y diferente denominador; con fracciones propias y mixtas.
- Manejo de la equivalencia entre fracciones y decimales.

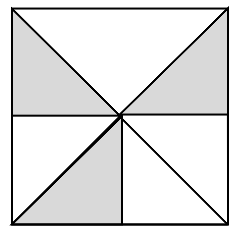
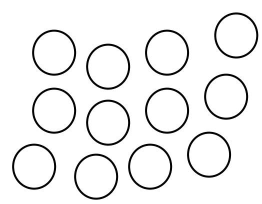
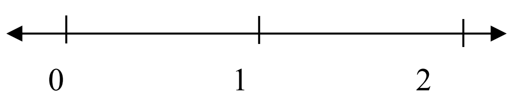
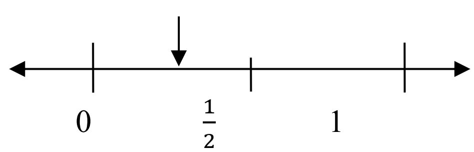
Con objeto de calibrar el instrumento se realizó un estudio piloto con un grupo de tres alumnos. Las modificaciones realizadas consistieron en estandarizar la forma en la que se presentaban escritas las fracciones para que éstas estuvieran siempre en forma vertical. Una vez aplicado el piloto, el instrumento se aplicó a dos grupos de alumnos de 6º grado de primaria para identificar las áreas en las que presentaban mayores dificultades y poder así determinar la secuencia de actividades. A continuación se presenta el examen que se aplicó.

Examen Diagnóstico de Fracciones.

Nombre ____

Fecha _________________________________ Edad __________

Instrucciones: Resuelve este ejercicio con cuidado, tu trabajo es muy valioso para una investigación que estoy realizando. Te pido que no borres tus anotaciones y operaciones. Si te equivocas, sólo tacha y continúa.

1. En el siguiente rectángulo colorea lo que para ti representa $\frac{3}{4}$ 	2. Escribe qué parte de la siguiente figura está sombreada:  Respuesta: ______________________
3. Haz un dibujo en el que ilustres $\frac{3}{5}$	4. Colorea $\frac{2}{3}$ del grupo de canicas. 
5. Pon una flecha en la recta numérica en donde tú crees que vaya la fracción $\frac{6}{7}$ 	6. ¿Aproximadamente qué fracción indica la flecha en la recta?  Respuesta _____________
7. ¿Cuál de las siguientes fracciones representa una parte mayor? Enciérrala en un círculo. $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{3}$	8. Escribe una fracción que sea mayor que $\frac{1}{4}$ y menor que $\frac{1}{2}$ ______________

9. Escribe en el cuadrito el número que falta para que las fracciones sean equivalentes. $\frac{}{4} = \frac{15}{12}$	10. Escribe en el cuadrito el número que falta para que las fracciones sean equivalentes. $\frac{2}{5} = \frac{4}{}$
11. Escribe en el cuadrito el número que falta para que las fracciones sean equivalentes. $\frac{5}{} = \frac{10}{16}$	12. Suma las siguientes fracciones $\frac{1}{8} + \frac{5}{8} =$ ________
13. Resta las siguientes fracciones: $\frac{5}{6} - \frac{3}{6} =$ _______	14. Suma las siguientes fracciones $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} =$ __________
15. Suma las siguientes fracciones $2\frac{1}{4} + 1\frac{1}{5} =$ __________	16. Escribe la siguiente fracción en decimal $\frac{3}{5} =$ _____________
17. Escribe el siguiente número decimal en forma de fracción 0.8 = ______________	18. Simplifica la fracción $\frac{12}{15} =$ _____________
19. Escribe con números: Tres octavos ________________	20. Escribe con letra: $\frac{2}{5}$ ________________________

Comentarios sobre el examen. Es importante resaltar que las preguntas no se prestaron a la subjetividad a la hora de evaluarlas ya que su respuesta era precisa, con excepción del reactivo número 6, que involucraba la recta numérica, para la cual se tuvo que optar por elegir un rango adecuado: las respuestas entre 1/3 y 1/6 se tomaron como correctas; cualquier otra fracción fuera de dicho rango, se tomó como incorrecta.

Con respecto al trabajo de los alumnos, destacan algunos datos: de los 49 exámenes aplicados, la respuesta de 31 alumnos a la Pregunta 2 fue que la parte sombreada es 3/7, lo que da cuenta que más de la mitad de los alumnos sólo se basan en el número de partes en las que se dividió el entero, sin pensar en el tamaño de las partes.

La Tabla 3.1 contiene los reactivos que involucran operaciones con fracciones (12 al 15) y un análisis del trabajo de los alumnos.

Tabla 3.1. Respuestas de los estudiantes en operaciones con fracciones

La pregunta	Se trata de:	Número de alumnos	Cómo lo resolvieron
12	Sumar fracciones con igual denominador	11	Sumaron numerador y denominador
13	Restar fracciones con igual denominador	8	Restaron numerador y denominador
14	Sumar fracciones con diferente denominador	25	Sumaron numerador y denominador
15	Sumar fracciones mixtas con diferente denominador	19	Sumaron enteros y aparte numerador y denominador

Lo anterior indica que, en lo que se refiere a la suma y resta de fracciones, los alumnos aplican diferentes estrategias al trabajar con denominadores iguales que al enfrentarse a operar con denominadores diferentes.

La Tabla 3.2 presenta los resultados de los exámenes aplicados los días 16 y 17 de diciembre del 2009, a alumnos de 6° de primaria. La numeración vertical corresponde a los alumnos ordenados a partir del que tuvo menos errores al de mayor número de errores. La numeración horizontal corresponde a los reactivos, ordenados de izquierda a derecha, del que resultó más fácil al más difícil. La (x) significa que el alumno se equivocó al responder la pregunta correspondiente. Se decidió tomar en cuenta los errores, por sobre los aciertos, ya que sentaron el precedente para la elección de la secuencia de actividades.

Tabla 3.2. Examen diagnóstico de fracciones

	1	19	20	3	8	12	13	4	7	6	10	9	11	5	2	17	18	16	14	15	total errores
1																	x		x	x	3
2														x					x	x	3
3					x											x		x	x	x	5
4															x	x		x	x	x	5
5															x	x	x	x	x	x	6
6															x	x	x	x	x	x	6
7														x	x	x		x	x	x	6
8											x		x	x	x		x		x	x	7
9												x			x	x	x	x	x	x	7
10								x					x	x			x	x	x	x	7
11							x				x	x			x		x	x		x	7
12		x							x		x				x	x		x	x	x	8
13				x	x									x	x	x	x	x	x	x	9
14				x		x	x		x						x	x		x	x	x	9
15								x		x				x	x	x	x	x	x	x	9
16											x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	10
17								x	x	x			x		x	x	x	x	x	x	10
18										x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	10
19								x	x		x	x	x	x	x	x	x	x			10
20						x		x	x		x	x		x		x	x	x	x	x	11
21										x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	11
22									x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	11

23	x				x		x				x	x	x			x	x	x	x	x	11
24					x	x	x				x		x	x	x	x	x	x	x	x	12
25					x			x	x			x	x	x	x	x	x	x	x	x	12
26		x	x		x					x			x	x	x	x	x	x	x	x	12
27						x	x				x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	12
28				x			x		x	x			x	x	x	x	x	x	x	x	12
29						x	x		x	x		x		x	x	x	x	x	x	x	12
30									x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	12
31						x	x	x	x		x	x			x	x	x	x	x	x	12
32						x	x			x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	13
33					x			x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	13
34					x	x	x				x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	13
35								x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	13
36					x			x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	13
37			x		x			x	x		x	x	x		x	x	x	x	x	x	13
38					x	x	x	x		x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	14
39				x		x	x			x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	14
40		x	x	x	x	x	x					x	x		x	x	x	x	x	x	14
41		x	x						x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	14
42				x	x			x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	14
43						x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	15
44					x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	15
45	x					x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	15
46		x	x			x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	17

47				x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	17
48	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	18
49	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	19
	4	7	7	9	16	18	19	20	21	24	30	31	32	34	43	43	43	45	47	48	

Número de alumnos que respondieron erróneamente

3.2.2 Conformación del grupo

Tomando como base los resultados del examen diagnóstico, así como el historial académico de los alumnos, se extendió una invitación a los 19 candidatos que presentaron un mayor número de errores en el examen y a quienes habían manifestado dificultades en el área de matemáticas en general. La invitación consistió en hablar con ellos personalmente, así como comunicarla a sus padres por vía telefónica y, en algunos casos, de manera personal. Tanto los padres como los mismos alumnos estuvieron de acuerdo en que participaran en el Taller de Fracciones. Así, éste dio inicio el lunes 8 de febrero de 2010, con el compromiso de reunirse tres veces por semana en un horario extraescolar por un periodo de tres meses.

3.2.3 Aprendizaje cooperativo.

Aunque cada estudiante tenía su propio material, durante las sesiones del Taller se procuró la discusión entre los estudiantes y el intercambio libre de experiencias, buscando propiciar (por parejas) un tipo de aprendizaje que Hagelgans, *et al*. (1995) ha denominado Aprendizaje cooperativo.

El Aprendizaje cooperativo es el resultado en el aprendizaje de los estudiantes cuando, al trabajar en pequeños grupos, discuten e intercambian experiencias en la resolución de problemas y realizan actos de auto reflexión, incorporando los nuevos conocimientos a través de procesos de abstracción reflexiva (Piaget, 1980; citado en Simon *et al*., 2004). Así, los estudiantes estarán en posición de adquirir la comprensión de conceptos, procedimientos y técnicas implicados en la tarea. Una de las pretensiones de que los estudiantes trabajen en pequeños grupos es promover la integración de grupos de aprendizaje cooperativo, en un contexto en el que los estudiantes deben construir de manera activa su conocimiento. Hagelgans, (*Ibid*. 1995) establece que: “en el aprendizaje cooperativo, el aprender es un proceso de continua interacción”.

Sin embargo, el solo hecho de realizar el trabajo en grupos no garantiza por sí mismo, el que se dé un aprendizaje cooperativo, se requiere de directrices para obtener los resultados deseados (Skemp, 1987, citado por Hagelgans, *et al*. 1995). Si en los pequeños grupos no se da la discusión, el intercambio de experiencias y la auto reflexión, no habrá aprendizaje cooperativo; ello puede ocurrir por diversos factores: los estudiantes no están acostumbrados al trabajo colectivo, al debate de ideas y a defender sus puntos de vista, o bien la tarea que se les presenta por resolver está fuera del alcance de los estudiantes. La interacción de los estudiantes “entre iguales” es el motor que propicia la adquisición de nuevos conocimientos a través de procesos de abstracción reflexiva de Piaget, descritos por Simon (1995). Además, es necesario tomar en cuenta las creencias y actitudes de los estudiantes, con relación a lo que significa para cada uno de ellos el aprender matemáticas.

3.2.4 El Taller

La Tabla 3.3 presenta la secuencia de actividades utilizada con los alumnos, el material disponible y el propósito particular de cada lección.

Tabla 3.3. Secuencia de actividades

Lección	Material	Propósito
1	Círculos de colores	Familiarización con colores y sus relaciones.
2	Círculos de colores	Nombrar diferentes fracciones, oralmente y por escrito, con palabras y símbolos.
3	Tiras de papel	Nombrar diferentes fracciones, oralmente y por escrito, comparando el material con las Círculos de colores.
4	Círculos de colores	Reflexionar sobre la idea de que a mayor número de partes éstas son más pequeñas.
5	Tiras de papel	Reforzar la idea de que a mayor número de partes éstas son más pequeñas.
6	Círculos de colores	Explorar la equivalencia de fracciones.
7	Tiras de papel	Reforzar la equivalencia de fracciones.
8	Círculos de colores	Ordenar dos fracciones al compararlas con ½.
9	Recta numérica	Reforzar el ordenar dos fracciones al compararlas con ½.
10	Fichas de colores	Representar fracciones con material discreto.
11	Fichas de colores	Reforzar el trabajo anterior. Determinar la cantidad de fichas que pueden utilizarse como unidad para modelar diferentes fracciones.
12	Fichas de colores	Determinar las fracciones que se pueden modelar con diferentes conjuntos de fichas.
13	Fichas de colores	Explorar fracciones equivalentes.
14	Círculos de colores	Fortalecer el concepto de fracción al reconstruir la unidad dada una fracción.
15	Círculos de colores	Explorar fracciones mayores al entero, nombrarlas como fracciones mixtas e impropias.
16		Analizar la relación numérica que existe entre numerador y denominador de fracciones equivalentes a ½. Utilizar dichos patrones para determinar si una fracción es menor, mayor o igual a ½.
17	Círculos de colores	Explorar la suma de fracciones a través de estimar si la respuesta es mayor o menor a ½.
18	Círculos de colores	Explorar la suma de fracciones con respuestas exactas.
19	Círculos de colores	Explorar la resta de fracciones.
20	Círculos de colores	Reforzar la resta de fracciones.
21	Círculos de colores	Sumar y restar fracciones de forma significativa.

La secuencia didáctica está basada en su totalidad en la propuesta del RNP; la única modificación que se hizo fue que algunas lecciones duraron más de una sesión. Como desde un principio se había establecido que el Taller duraría 30 sesiones, se logró trabajar hasta la lección no. 21. Durante el desarrollo del Taller, se dio la oportunidad a los participantes de explorar el concepto de fracción, el de orden y equivalencia, así como la suma y resta de fracciones mediante el uso de círculos de colores divididos, fichas, doblado de papel, dibujos, problemas así como su representación simbólica. Constantemente se les exhortó a que encontraran las relaciones entre las diferentes representaciones y que transfirieran sus hallazgos de una a otra representación. Utilizaron símbolos principalmente para registrar sus observaciones, y los resultados de las discusiones y descubrimientos derivados del uso del material, como muestra la Figura 3.1.

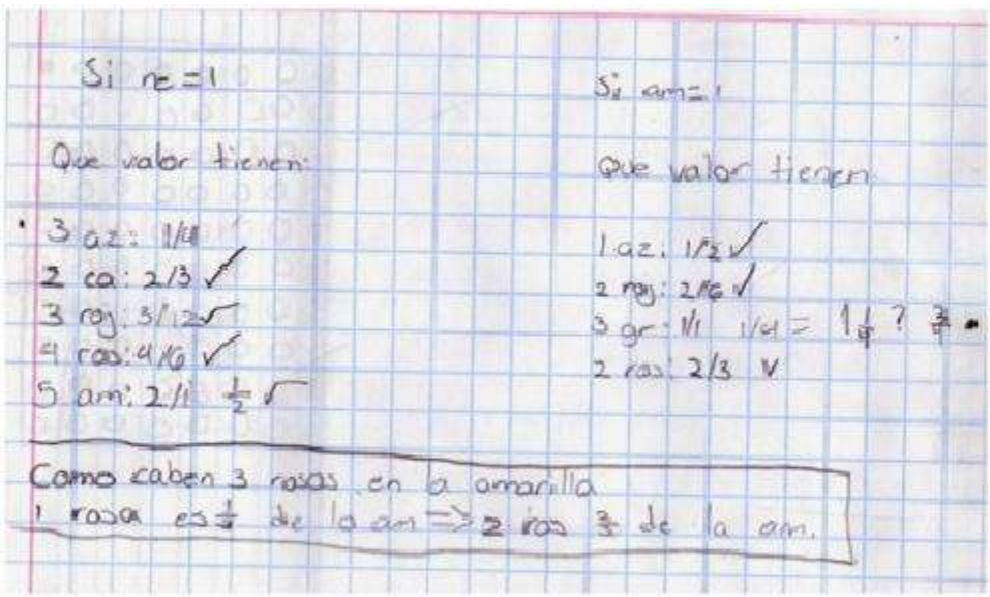


Figura 3.1. Uso de notación simbólica para registrar sus observaciones.

Como actividad adicional de carácter recreativo, pero también de aplicación del uso de fracciones, se llevaron a cabo dos sesiones de repostería. Previo a la experiencia, durante una sesión del Taller, se analizó la receta con la que se iba a trabajar para asegurarse que los alumnos comprendían bien la terminología y las medidas utilizadas: tazas, cucharadas y fracciones de éstas. Durante la sesión de elaboración de galletas, se hizo énfasis en las relaciones entre las medidas: dos cuartos igual a media taza, cómo calcular las cantidades que se requieren en más de una receta, para media receta, etc. En una sesión posterior se hizo referencia a la fracción como elemento multiplicador, por ejemplo: ¿Cuántas galletas había en dos tercios de charola si en ella caben 24 galletas?, o sea $\frac{2}{3} \times 24 =$? La actividad resultó exitosa en cuanto a que ayudó a involucrar a los alumnos y les dio un sentido de utilidad y aplicación al trabajo que estaban realizando, como se muestra en la Figura 3.2.

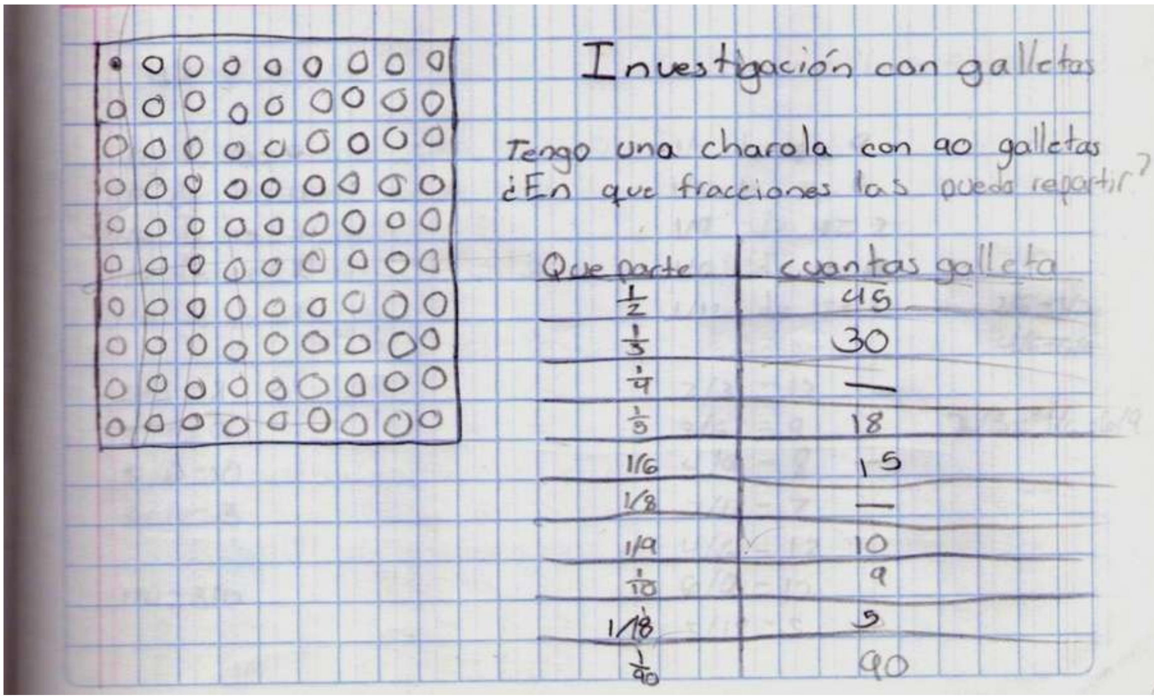


Figura 3.2. Registro de actividad relacionada con la experiencia de repostería.

Durante la mayoría de las sesiones se realizaron registros de comentarios y conclusiones expresadas por los participantes, así como aspectos que debían retomarse ya que daban cuenta de algunas comprensiones erróneas, las cuales serán analizadas en el Capítulo IV, relativo al análisis de datos. En el Anexo 1 aparece una transcripción de dichos registros.

Para complementar y evaluar los resultados del Taller, se realizaron entrevistas individuales a tres participantes elegidos al azar y una sesión de video grabación, de aproximadamente una hora, con la participación de cuatro voluntarios. Las transcripciones de los diálogos, tanto de las entrevistas como de la videograbación, se encuentran en los Anexos 2 y 3, respectivamente.

Capítulo IV
Análisis de Datos

En el presente capítulo se realizará una relatoría y análisis de las experiencias en el Taller así como de los resultados de las entrevistas finales, con objeto de hacer una reflexión en torno a algunas de las preguntas que se plantearon al inicio del trabajo. Otras de las preguntas, de carácter más general, se abordarán en el capítulo siguiente.

4.1 Sesiones de trabajo en el Taller

La primera sesión consistió en el establecimiento de las reglas y la elaboración de material (recortado de las pizzas de colores). Se acordó con los estudiantes que la asistencia a las sesiones sería obligatoria, que se evitarían dentro de lo posible las pláticas ajenas o no relacionadas con el tema en cuestión; y que los alumnos preguntarían todo lo necesario para no quedarse con dudas. También se les invitó a que constantemente expresaran sus ideas de manera oral, tanto para compartirlas con los demás como para procurar internalizar su significado (Vygotsky, 1962).

A partir de la segunda sesión se comenzó con el trabajo de las lecciones que se especifican en el Capítulo III –para conocer a detalle el contenido y estructura de cada lección se puede consultar el RNP Nivel 1 (1997) (Ver Anexo 4 y 5). La familiarización con el material consistió en observar sus piezas, tratar de relacionar los colores con el número de piezas que forman el entero, así como encontrar relaciones entre ellas (el Anexo 5 ilustra la relación entre los colores de los círculos y la fracción que representan); por ejemplo, que dos piezas azules son lo mismo que tres rosas o que una amarilla; éstas son actividades que van de acuerdo con la propuesta de Lamon (1999). En esta sesión se registraron los siguientes comentarios (JP = Juan Pablo):

JP: Mientras más grande (el denominador) más pequeñas son las piezas [de donde se infiere la idea de que en fracciones unitarias, a mayor el denominador menor la pieza, un concepto importante dentro de la enseñanza de las fracciones.] Posteriormente Rick comentó:

Ricky: Acabo de descubrir algo chido: grises (octavos) con verdes (quinceavos) no se llevan; o falta o sobra [nótese que da una explicación personal de que no hay equivalencia entre estas fracciones].

La observación es significativa pues da cuenta de que, desde el inicio del trabajo y sin que se les pida, los alumnos visualizan fácilmente fracciones equivalentes y no equivalentes utilizando material concreto.

Posteriormente se procedió a realizar trabajo encaminado a que los alumnos comprendieran el concepto de la flexibilidad de la unidad, dando el valor de unidad a las diferentes piezas. Durante el desarrollo de estas sesiones, Adal se dio cuenta de algunas relaciones numéricas, verificó con algunos ejemplos e hizo una generalización,

Adal: la mitad es dos veces el número, por ejemplo la mitad de 1/3 es el 6 [uno pudiera pensar que quiso decir dos veces el denominador, o sea 1/6].

Ante esta respuesta, con objeto de explorar su dominio de las representaciones simbólicas se le preguntó ¿cómo se escribe "un cuarto"?

Adal: 4 sobre 1.

Como en este momento aún no se abordaba la notación escrita, solamente se hizo una anotación para retomarlo en sesiones posteriores. Al continuar con las exploraciones, Aitana hizo otro descubrimiento importante, que logró comunicar de una manera muy matemática,

Aitana: ¼ es la mitad de la mitad [incursionando, sin darse cuenta, en el ámbito de la multiplicación de fracciones].

Al hacer una pausa y pedirles que reflexionaran sobre los conceptos que ya habían quedado claros, algunos alumnos comentaron lo siguiente,

Monse: No siempre el entero es un círculo completo.

Adal: No todas las fracciones se llevan.

Dany: O sea que no siempre se pueden utilizar algunas piezas para completar otras.

Miri: entonces si el rojo cabe 5 veces en el café se dice que el rojo es $\frac{1}{5}$ del café.

Los comentarios anteriores dan indicios de que los alumnos se están enfocando en conocimiento conceptual más que en el procedimental (Hiebert 1992). El comentario de Monse se refiere específicamente a la flexibilidad del entero; idea que se complementa con el siguiente diálogo, donde E= entrevistador:

E: Díganme, si comparo un medio y un tercio, ¿cuál es mayor?

Edsson: Un medio.

E: Entonces díganme ¿en qué situación puedo decir que un tercio es mayor que un medio?

JP: Si el entero de un tercio es más grande que el entero de un medio.

E: ¿Me pueden dar un ejemplo?

Edsson: Sí, un medio de la amarilla es la azul, un tercio de la negra es la café, la café es más grande que la azul.

Estos alumnos muestran un claro dominio en el manejo de sus círculos de colores.

Durante la sexta sesión se pidió a los alumnos que encontraran las diferentes formas en las que podían representar $\frac{1}{2}$. Explorando con sus círculos, Sagar descubrió fracciones equivalentes, y comentó,

Sagar: Me di cuenta que $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, (esto parece evidenciar que el concepto de fracciones equivalentes se puede comprender fácilmente utilizando material concreto).

Nuevamente haciendo un trabajo mental numérico,

Adal: no puedo obtener novenos del medio porque 9 no tiene mitad.

Y posteriormente generaliza que los números impares no tienen mitad. Los alumnos que no tenían facilidad para encontrar la mitad de un número les fue difícil comprender este concepto, especialmente al trabajar con números mayores a treinta. En relación a este aspecto, pudiera ser pertinente hacer notar la importancia de enfatizar, en grados anteriores, las características de los números (pares, impares, primos, etc.), así como las relaciones que existen entre ellos (doble, mitad, múltiplo, divisor, etc.). Estas bases podrían facilitar el trabajo y la compresión de las fracciones.

En el transcurso de la cuarta semana Melissa se acercó espontáneamente y comentó,

Meli: pensando el fin de semana me di cuenta que $\frac{4}{8}$ de pizza es lo mismo que $\frac{1}{2}$ de pizza. Qué interesante.

Al parecer hizo conexiones entre el trabajo del Taller y el contexto real de su casa lo cual, si recordamos el diagrama de representaciones de fracciones según Lesh, entra dentro del ámbito de las "situaciones reales".

Durante las diferentes sesiones se observaron algunas diferencias en la forma de trabajar de los alumnos; por ejemplo, Sebastián P. se apoyaba siempre en sus círculos, para hacer inferencias tenía que ver concretamente el material. Por otro lado, Adal y Sebas no eran muy afectos a utilizar el material, se basaban mucho en su razonamiento numérico. Esto pudiera indicar que los alumnos utilizan diferentes estrategias para dar sus respuestas dependiendo de su grado de comprensión y de que, quizás, se encuentran en diferentes etapas de desarrollo.

Gradualmente, la dificultad del trabajo fue aumentando. En una ocasión se les presentaron en el pizarrón unos rectángulos con una fracción sombreada y se les dio la indicación que representaran la misma fracción utilizando sus círculos, con la finalidad de que hicieran una transferencia entre una representación pictórica y el material concreto. Fue una actividad muy retadora; sin embargo respondieron con entusiasmo, lograron completar la tarea y al final pidieron resolver más ejemplos. Esta tarea reflejó flexibilidad por parte de los alumnos para cambiar de una forma de representación a otra, así como la posibilidad de hacer generalizaciones y darse cuenta de que lo que funciona para una representación también funciona para otras. Recordemos que Hiebert (1992) enfatiza que la transferencia es un ingrediente esencial para ser competente en matemáticas.

En el transcurso de la sexta semana se trabajó el concepto de fracciones equivalentes apoyándose en tiras de papel y dibujos. Al estar trabajando, Ricky: observé que si multiplicas numerador y denominador por 2 obtengo una fracción equivalente.

Al preguntársele qué sucedía con la equivalencia $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$,

Ricky: es por 4 arriba y abajo. O sea que la de arriba y la de abajo siempre van a ser igual. [si se multiplica el numerador y el denominador por la misma cantidad se obtienen fracciones equivalentes].

Aquí Ricky, en palabras de Hiebert (1992), pudiera estar construyendo su conocimiento matemático en lugar de recibirlo como producto terminado de un libro o de un profesor.

Antes de que comenzara una clase, Aitana, Monse y Paulina estuvieron comentando cómo repartirse una torta,

Aitana: A mí me toca $\frac{1}{2}$ y a ustedes $\frac{1}{4}$ a cada una,

en esta ocasión haciendo suma de fracciones con diferente denominador para completar un entero, en situaciones cotidianas. Nótese cómo surgió de manera natural el uso de fracciones equivalentes para realizar una suma con fracciones cuyos denominadores son diferentes. En ningún momento se les ocurrió sumar numeradores y denominadores.

El trabajo de la séptima semana consistió en sugerir estrategias para comparar dos fracciones. Behr (*et al.*,1983) sugiere cuatro estrategias para decidir cuál es la mayor de dos fracciones: al comparar fracciones con igual numerador, con igual denominador, utilizar la propiedad transitiva y ver cuánto falta para llegar al entero; las cuales no dependen de estrategias algorítmicas sino más bien de que el estudiante visualice el problema. Una de las estrategias que utilizaron algunos alumnos fue utilizando la propiedad transitiva, al tomar al $\frac{1}{2}$ como punto de referencia:

Dany: por ejemplo ves $\frac{1}{4}$, como $\frac{2}{4}$ es igual a $\frac{1}{2}$ entonces $\frac{3}{4}$ es mayor que $\frac{1}{2}$.

Monse: $\frac{3}{4}$ es mayor que $\frac{1}{2}$, porque como $\frac{2}{4}$ es igual a $\frac{1}{2}$ entonces $\frac{3}{4}$ tiene que ser mayor. [Aparentemente repite las palabras de Dany, sin embargo estuvieron trabajando de manera independiente y estaban sentadas alejadas la una de la otra, de tal forma que no escuchaban lo que la otra decía.]

Ricky: A mí me sirvió dibujarlas.

En cambio, Sebastián utiliza la estrategia de ver cuánto le falta a la fracción para llegar al entero:

S. Paz: te fijas en el de arriba para ver cuánto le falta para llegar al entero. Si falta más de un medio entonces es menor que $\frac{1}{2}$.

JP reconoce las fracciones que tienen igual denominador:

JP: $\frac{4}{8}$ y $\frac{5}{8}$ es por lógica, 5 es mayor que 4 y las piezas son del mismo tamaño.

Adal: aquí puedes aplicar lo que hemos visto en las otras clases.

De aquí se infiere que los alumnos empezaban a utilizar sus conocimientos de fracciones equivalentes ($\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$), y es evidente que les quedó claro que el denominador indica el tamaño de la pieza y que también pudieron reconocer el número de piezas que forman el entero utilizando el denominador. Su constante referencia a los círculos de colores pudiera indicar que éstos han sido material fundamental para su comprensión de los conceptos en cuestión: orden, equivalencia y flexibilidad del entero. Como afirman Behr y colaboradores (1997) es muy importante exponer a los alumnos a extensos periodos de manejo del material concreto para lograr desarrollar el pensamiento conceptual.

Hubo una interrupción en el Taller puesto que se atravesaron las vacaciones de Semana Santa. Al reanudar, se trabajó con corcholatas, con objeto de proporcionarles experiencias con conjuntos de objetos. Se repartieron 12 corcholatas a cada uno de los participantes para que las dividieran equitativamente entre diferentes partes (medios, tercios, cuartos y sextos). Conforme trabajaban comentaron,

Ricky: Si tengo 12 y lo reparto en 3 partes iguales dan 4, que es lo que se comió Guillermo [un tercio de 12 es 4]

Aitana: Si son 6 grupos y tienen 2 dulces cada uno, Sergio se comió 2 grupos, entonces se comió 4 dulces [dos sextos de 12 es 4]

S. Paz: $\frac{1}{3}$ es múltiplo de $\frac{2}{6}$, o equivalente.

Miri: Hoy aprendí a hacer grupitos [refiriéndose a agrupar objetos en fracciones].

Regina: Se trató de buscar diferentes resultados que sea lo mismo.

Aitana: Y de saber utilizar bien el entero.

En la sesión subsiguiente se les pidió que mostraran diferentes formas de ilustrar un tercio. Melissa, muy decidida, pasa al pizarrón, toma un plumón,

Meli: Puedo poner por ejemplo 12 corcholatas y hacer 3 equipos. No, pero quiero un número más grande. Ya sé, tengo 15 corcholatas, hago 3 grupos de 5 y coloreo 5 [lo dibuja].

Monse: ¡Ah! Ya sé, es la tercera parte de cualquier número [haciendo una generalización].

Para la décima semana se planteó la equivalencia entre fracción impropia y mixta.
Se partió de la suposición de que sería un tema que ya dominaban y que les parecerían actividades muy fáciles. Sin embargo hubo confusión al presentarles un entero y un cuarto ya que recurrieron al concepto de flexibilidad del entero: que la unidad puede ser tanto el entero canónico (es decir, una figura que se visualiza como un entero, una figura completa) como una parte de él, como una figura que aparente ser más que un entero. Al ver un círculo y un cuarto no creyeron que representaba efectivamente eso: $1\frac{1}{4}$, más bien pensaron que toda la ilustración representaba el entero. Regina en particular estuvo muy confundida, al parecer le incomodó tener el numerador mayor que el denominador, comentó: "No me gusta que el de arriba sea más grande que el de abajo". Fueron varios los participantes que comentaron que esas fracciones "no existían" o eran "imposibles". Pareciera que su experiencia previa había girado solamente alrededor de fracciones propias. En esta parte se trabajó en los conceptos de fracción impropia y fracción mixta; en la siguiente sesión al parecer se logró una clarificación respecto al significado de éstas.

Posteriormente se procedió al trabajo con las operaciones. En primera instancia se les pidió hicieran aproximaciones a la suma utilizando el medio y el entero como puntos de referencia. Muchos de ellos recurrieron a sus círculos, mostrando todavía un pensamiento concreto. Adal recurrió directamente al uso de fracciones equivalentes y daba el resultado exacto, sin preocuparse por hacer una estimación. Sin embargo destacan los siguientes comentarios,

Sagar: Voy a sumar $\frac{1}{8}$ más $\frac{9}{10}$, como a $\frac{9}{10}$ le falta $\frac{1}{10}$ para ser el entero y $\frac{1}{8}$ es mayor que $\frac{1}{10}$ entonces la suma va a ser mayor a 1.

Aitana: Si quiero sumar $\frac{1}{3}$ más $\frac{3}{4}$, a $\frac{3}{4}$ le falta $\frac{1}{4}$ para ser un entero, como $\frac{1}{3}$ es mayor que $\frac{1}{4}$ entonces la suma va a ser mayor a 1. Para $\frac{1}{3}$ más $\frac{2}{6}$, veo que son equivalentes, entonces la suma es $\frac{4}{6}$, como $\frac{1}{2}$ es igual a $\frac{3}{6}$ entonces $\frac{4}{6}$ es mayor que $\frac{1}{2}$.

Claramente hay un trabajo conceptual en los diálogos anteriores, los alumnos no recurren a procedimientos memorizados y mecánicos, más bien utilizan su comprensión de lo que una fracción representa, relacionan lo que saben de ellas y logran un trabajo que les confiere significado. Están "descubriendo" el procedimiento para realizar operaciones con fracciones sin que nadie se los haya enseñado.

4.2 Sesiones de entrevistas

Al terminar las sesiones del Taller, y con objeto de recolectar información acerca de algunos resultados obtenidos de éste, se llevaron a cabo entrevistas semi-estructuradas de dos tipos: por un lado, una sesión de filmación con cuatro de los participantes y por otro, grabaciones de audio de entrevistas individuales con otros de los participantes (Ver Anexos 2 y 3). Se eligió este tipo de entrevista porque proporciona información referencial explícita sobre las ideas adquiridas durante el Taller y la forma como los participantes interpretaron dichas ideas; además permite dar seguimiento a líneas de pensamiento que resulten interesantes o que no hayan quedado claras.

Dichas sesiones aportaron material valioso que permiten abordar aspectos de las preguntas que dieron origen a la presente investigación. Una de las interrogantes que se planteó fue ¿En qué formas contribuye el uso del material concreto sugerido en la comprensión de las fracciones del alumno? Consideremos el siguiente fragmento como un ejemplo (E= Entrevistador, JP= Juan Pablo)

E: ¿Si la amarilla es el entero, qué parte es la café? (La amarilla representa $\frac{1}{2}$ círculo negro, y la café representa $\frac{1}{3}$ del círculo completo).

Edsson: Ay, se pasa de la mitad

E: Muy bien

Fer: Es dos cuartos, no es dos doceavos

JP: No, espérate

Fer: Son cuatro doceavos

JP: Es que ve (toma una pieza amarilla y una café)

Tavo: Es como una rosa [muestra la parte que le falta para completar la amarilla], es un tercio.

Fer: Dos tercios

Tavo: Sí, le falta un tercio, entonces son dos tercios

Aquí, es evidente que los alumnos tienen un buen dominio de su material. Visualizar qué fracción representa una pieza en relación con una parte de un círculo no es tarea fácil. Sin embargo, aportando todos sus ideas, fueron capaces de re-definir la pieza café en términos de otras más pequeñas, observar qué parte le faltaba para completar la pieza definida como el entero (o sea la amarilla) y encontrar la fracción representada, un razonamiento que pudiera resultar complicado si no hubieran tenido la referencia del modelo concreto. Lo que nos lleva a afirmar que el material concreto fue un elemento valioso para que los alumnos lograran una comprensión conceptual de las fracciones.

El siguiente diálogo es otro ejemplo de la forma en la que manejaron sus círculos de colores (E= Entrevistador, JP= Juan Pablo)

E: ¿Y la pieza verde es un quinto de qué?

Fer: De un tercio

Edsson: De una café

E: ¿Me pueden explicar por qué lo dicen?

Fer: Por lógica

E: ¿Pero cuál es la lógica que usaste?

Fer: Si a los quinceavos los dividimos entre tres… (Voltea a ver a JP)

JP: Yo lo hice mentalmente agarré los quinceavos, y si son tercios, vi que caben cinco porque son cinco, cinco y cinco, o sea que caben cinco en cada tercera parte, que es la café [aunque realmente él estaba trabajando con fichas, muestra la transición que hace entre ambas representaciones].

E: Entonces, concluyendo, la verde es la quinta parte de la café.

Se pueden apreciar dos aspectos importantes, dignos de resaltar. Por un lado los alumnos nuevamente demuestran un dominio conceptual claro de lo que representan las fracciones y sus equivalencias; con seguridad saben que los quintos, tercios y quinceavos tienen una relación de equivalencia que les permitió encontrar la respuesta. Por otro lado, también se evidencia que hacen transferencias entre diferentes representaciones: el trabajo con círculos, con fichas y con símbolos; uno de los objetivos establecidos por el RNP así como una habilidad que enfatiza el NCTM.

Si en un principio, en el periodo de familiarización con el material concreto, encontraron necesario manipular las piezas para conocer sus características (tamaño, color) y las relaciones entre ellas, hacia el final del Taller tenían una representación mental muy clara de los diferentes círculos y fueron capaces de encontrar respuestas con sólo imaginar el problema que se planteaba, como en el diálogo anterior en el que JP dice: “Yo lo hice mentalmente”.

Otra de las interrogantes que se planteó como parte de esta investigación es: ¿Pueden extrapolar a fracciones con denominadores para los cuales no tienen una referencia concreta? De la siguiente discusión puede deducirse que los alumnos aún dependen en gran medida de sus círculos de colores.

E: Siete octavos más doce treceavos ¿cuánto me da más o menos? [los alumnos no contaban con treceavos en sus círculos].

JP: A más de un entero.

Edsson: Más de un entero y menos de un entero y medio.

E: ¿Menos del entero y medio?

Edsson: Sí, no se va a pasar del entero y medio.

JP: ¿Cuál es el octavo?

Tavo: El gris

Fer: Va a ser más del entero pero menos que el entero y medio porque…

JP: Van a ser justo un entero.

E: No son tercios, eh? Son doce treceavos.

JP: Por eso… ¡Ah! doce, yo entendí dos, entonces sí va a ser más.

Edsson: Un poquito, es como uno y medio.

E: Pero ¿por qué?

Tavo: Es como esto, mira miss (muestra un círculo negro y una pieza verde) y un pedacito más.

Aquí se interrumpió la discusión y se les proporcionó una operación que pudieran relacionar con sus círculos, pidiéndoles que sumaran tres octavos más cinco doceavos, para lo cual presentaron el siguiente razonamiento:

JP: Da casi un entero.

Edsson: Da casi menos de un entero.

JP explica:

JP: Los doceavos son casi la mitad. Porque los doceavos, la mitad son seis y los octavos la mitad es cuatro entonces estás sumando menos de la mitad con menos de la mitad, da casi el entero.

Lo interesante es que demostraron la habilidad de imaginar aproximadamente cuál sería el resultado cuando se les presentaron fracciones para las cuales tenían referencia en sus círculos. Sus explicaciones muestran un razonamiento conceptual, sin embargo no pudieron imaginar que doce treceavos son casi el entero, al igual que siete octavos, posiblemente por no contar con una referencia concreta para la primera fracción. Por lo tanto, se puede concluir que los alumnos no fueron capaces de imaginar fracciones con denominadores diferentes a los que habían trabajado.

¿Qué estrategias utilizan los estudiantes para desarrollar las actividades propuestas? Al analizar los diálogos de la sesión de filmación encontramos que los alumnos utilizan una variedad de estrategias. En el caso del trabajo con restas utilizando fracciones conocidas, dieron explicaciones lógicas que reflejan una comprensión conceptual más que un pensamiento procedimental de la operación:

E: ¿Cuál es la diferencia entre un medio y dos quintos?

Fer: Un décimo, porque el décimo es la mitad del quinto y si ponemos tres quintos se pasa [saca tres piezas naranja, luego se queda con dos] y si le ponemos un morado [lo pone con las naranja] da igual al medio [lo muestra a la cámara].

E: Y entre un medio y cinco sextos, ¿cuál es la diferencia?

Tavo: Son más grandes cinco sextos.

E: ¿Y por cuánto se pasa?

Tavo: Por dos rosas se pasa

JP: Se pasa por dos sextos, porque tres sextos es la mitad.

Su estrategia fue recurrir tanto a proporcionar una estimación como a su conocimiento de las fracciones equivalentes para dar una respuesta exacta. En otras ocasiones también recurrían al trabajo concreto utilizando sus círculos:

E: ¿Si a ocho novenos le quito siete octavos? ¿Como qué me da de resultado?

[Fer saca sus piezas blancas y grises]

Edsson: Va a ser como un cuarto… menos de un cuarto.

E: Va a ser una pieza muy pequeñita.

Fer: Espera Miss, [toma un noveno y un octavo y los compara, lo muestra] mira lo poquito que le sobra.

Un aspecto interesante es la transferencia que lograron entre las distintas representaciones. Los alumnos resuelven el siguiente ejemplo, que es también una suma de fracciones, pasando de tazas a círculos y a representación numérica:

E: Muy bien. Ahora, en una receta de galletas se utiliza un cuarto de taza de harina en otra receta se utilizan dos tercios de taza de harina. ¿Cuánto se utiliza en total? Si quieren se las escribo [escribe en el pizarrón]. Quiero que me digan en total ¿cuánta harina se necesita? […]

Fer: [Saca sus piezas cafés y una azul, las acomoda, cuenta algo] Son once doceavos.

Edsson: Yo, yo, yo, son doce quinceavos

JP: no, son doce doceavos

E: ¿Una taza entera?

JP: Sí, no, no…

JP: Sí son once doceavos Miss.

Fer: Son once doceavos Edsson.

Edsson: [Les da la espalda a sus compañeros para evitar que vean lo que está haciendo, acomoda sus piezas verdes] Son catorce quinceavos.

E: Estás haciendo una buena aproximación. A ver Fer, ¿de dónde sacaste que son once doceavos?

Fer: Mira, un cuarto son tres doceavos, tres rojas, y a dos cafés le caben ocho por lo tanto simplemente sumamos las cantidades y salen once doceavos.

El tipo de problemas en los que se debe reconstruir el entero si se conoce una parte de él o si se conoce más del entero, son situaciones que pocas veces se les presenta a los alumnos y, por consiguiente, les resulta de gran dificultad; sin embargo éste es uno de los aspectos que el RNP enfatiza. Para determinar el nivel de comprensión en situaciones de este tipo, se preguntó lo siguiente:

E: Tomás hizo una torre de cubitos, OK? Utilizó 6 cubos y eso es la quinta parte de la torre. ¿Me puedes decir de qué tamaño era la torre? ¿Y cómo encontraste la respuesta?

Aitana: ¿Cuánto era el entero?

E: Es lo que me tienes que decir tú.

Aitana: Ah sí. Por eso. ¿Cuánto era el entero? El entero era 30 porque si yo divido 30 entre 6 me da 5, entonces ahí sé que lo divido en 5 grupitos y cada uno va a tener 6 y si escojo 1 pues escogí 1/5.

A su manera Aitana fue capaz de resolver la situación propuesta, aunque no fue muy precisa en la forma de comunicar su razonamiento. En cambio, el siguiente intercambio refleja más seguridad en la comunicación de ideas matemáticas:

E: [...] A ver ahora, una niña está construyendo torres con bloquecitos, si quieren lo pueden representar con sus corcholatas. Hizo una torre y un tercio con doce bloques…

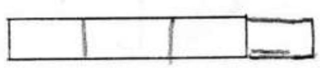
Tavo: O sea una torre es como un entero.

E: Sí, quiero que me digan cuántos bloques tiene cada torre y por qué.

JP. Usa 9 bloques para cada torre porque si hizo una torre y un tercio quiere decir que usó lo de una torre y una tercera parte de otra torre. Si los doce bloques que utilizó lo dividimos en cuatro nos sale a tres cada uno, o sea que son tres para cada tercio, entonces una torre son tres por tres bloques, o sea nueve.

Y para reforzar la misma idea ahora por escrito, la Figura 4.1 muestra cómo JP resolvió el problema que se le planteó. Tratando de inferir desde su razonamiento, se puede afirmar que JP comprendió que, como el dibujo representaba $\frac{3}{4}$, él necesitaba agregar una cuarta parte más; que tenía que poder visualizar $\frac{1}{4}$ y por eso debía partir el dibujo en tres partes iguales y agregar una parte más. Su comunicación fue más clara.

La siguiente figura representa ¾ partes de una tira completa. Dibuja la tira completa.
Explica cómo lo resolviste.



"Si representa $\frac{3}{4}$ quiere decir que falta $\frac{1}{4}$, así que lo dividí en tres [partes iguales] y una de las partes la medí y se la agregué para que fueran $\frac{4}{4}$." JP

Figura 4.1. JP explica cómo reconstruye el entero

En ambos ejemplos se destaca que JP tuvo una idea mental clara de la parte representada y logró completar las tareas con éxito.

Con objeto de abordar otro de los objetivos del RNP, en el que se subraya el hacer conscientes a los alumnos de la relación entre las diferentes representaciones, al entrevistar a una alumna se le preguntó:

E: ¿En qué se parece el modelo de corcholatas con el modelo de círculos? ¿Cómo se parecen esas dos representaciones?

Aitana: En que puedo usar el mismo método

E: ¿En qué son diferentes los dos modelos?

Aitana: En que en [las corcholatas] son todos separados, se puede quitar y poner y en los círculos no, tengo un entero y tengo que ir poniendo de pieza en pieza.

Al detenernos a analizar los estilos diferentes que JP y Aitana mostraron para comunicar sus razonamientos en el ejemplo arriba mencionado, se cae en cuenta que tanto maestros como alumnos utilizan el lenguaje de diferentes maneras para comunicar su trabajo matemático, por ejemplo utilizan lenguaje oral cotidiano, lenguaje simbólico, representaciones visuales, y lenguaje matemático. Pirie (1998) comenta que todas estas formas son válidas y que deben estar presentes en el salón de clases.

Como resultado del trabajo en el Taller, existen otras evidencias de algunos de estos aspectos de comunicación. El lenguaje cotidiano se refiere al lenguaje que un alumno utiliza en un contexto diario, como lo utilizó cuando Adal comenta que 'no todas las fracciones se llevan', refiriéndose a que no hay equivalencias entre todas. Cuando la maestra les proporcionó la nomenclatura matemática en lugar de su lenguaje cotidiano, es decir que no todas las fracciones tienen equivalencias con todas, los alumnos se esforzaron por utilizarla en sus explicaciones. Las representaciones visuales como formas de comunicación no verbal también estuvieron presentes, los alumnos representaron los círculos y las corcholatas haciendo dibujos de éstos, como lo muestra la Figura 4.2.

El compartir ideas ayudó a los alumnos a aclarar su razonamiento; el verbalizar o dibujar les dio un sentido más concreto a las representaciones que tenían en su mente. Por ejemplo, Ricky constantemente decía "ya me hice bolas", y demostraba que le costaba mucho trabajo comunicar sus ideas oralmente y por escrito. En otra ocasión Aitana estuvo explicando a Ana algunas ideas. Al terminar comentó: "se siente muy bien poder explicarle a otros y que te entiendan".

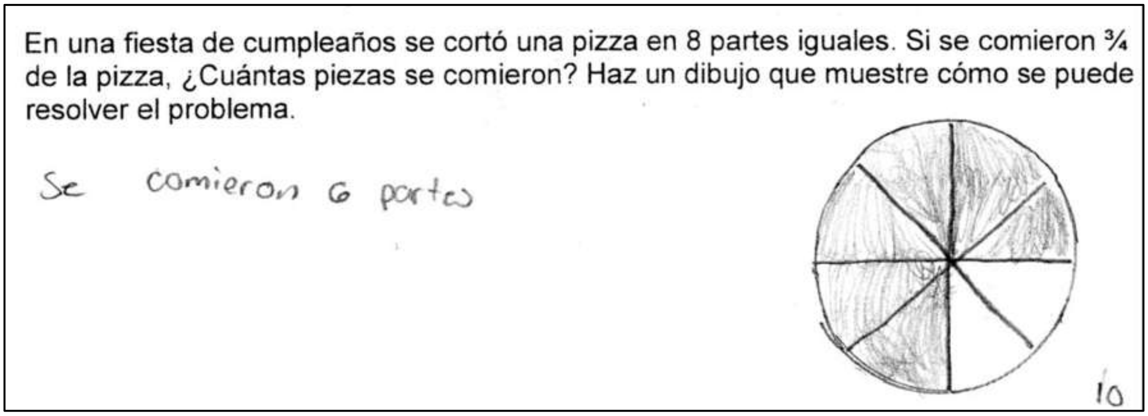


Figura 4.2. JP utiliza un dibujo para comunicar su razonamiento.

Esta afirmación hace evidente que los alumnos comprenden mejor cuando tratan de explicar a otro lo que están pensando (NCTM, 2000); adicionalmente les da un sentido de seguridad y bienestar el hacerse conscientes que ya comprendieron. Por esta razón se insistió constantemente en que justificaran las afirmaciones que hacían, que expresaran oralmente y por escrito –tanto en palabras como en lenguaje simbólico– lo que querían comunicar y, de ser posible, también ayudaran a otros a entender las cuestiones que no les habían quedado claras.

Así dio por terminado el Taller de Fracciones. Parece pertinente incluir aquí una serie de comentarios que surgieron durante la sesión final en la que se evaluó el trabajo de todas las sesiones:

- Me gustaron las matemáticas.
- Fue divertido.
- Aprendí más que en las clases de la mañana.
- Aprendí cosas nuevas.
- Tenías ventaja en la mañana con los que no estaban en el taller.
- Me ayudó a comprender muchas cosas.
- Me sirvió mucho.
- Me distraigo más en las clases de la mañana que en el Taller.
- Me ayudó a que me gustaran las matemáticas.

- Me ayudó a resolver problemas por mi cuenta.
- Me do confianza.
- Participaba.
- Pregunté lo que no entendía.
- Mi actitud fue positiva.
- Ya no le tengo miedo a las fracciones.
- Estuve con mis amigos.
- Me gustaría seguir con el taller.
- Las matemáticas siempre nos van a ayudar en la vida.
- Las fracciones, a cualquier parte donde vayas te van a ayudar, sobre todo entenderlas.
- Que fueran más clases, porque fue muy poquito tiempo.
- Aparte de que aprendimos mucho, es divertido.

Un corolario que evidencia la presente investigación es la importancia de que el profesor domine el tema que quiere abordar con sus alumnos. Para que un profesor pueda crear situaciones-problema, guiar las discusiones y propiciar oportunidades de aprendizaje con sus alumnos es crucial que tenga un conocimiento conceptual y procedimental de las matemáticas (Hiebert, 1992). Esto es, para que un profesor pueda reflexionar acerca del aprendizaje matemático de sus alumnos, se necesita que comprenda los contenidos que va a enseñar, que le permitan plantear preguntas y guiar a sus alumnos hacia la comprensión de conceptos y procedimientos. De esta manera, los alumnos estarán en la posibilidad de robustecer sus conocimientos y tener una comprensión con significado de las matemáticas.

Capítulo V

Conclusiones

No hay duda de que la enseñanza de las fracciones es uno de los temas de mayor trascendencia en la escuela primaria; por un lado, es la base fundamental de casi todas las áreas de las matemáticas y, por el otro, su estudio y aprendizaje representan dificultades insuperables para una buena parte de la población. Por ello algunos profesores de matemáticas buscan estrategias de enseñanza que permitan obtener mejores resultados en el aprendizaje y que contribuyan a que los alumnos adquieran una comprensión profunda de los conceptos fundamentales de este tema.

Tradicionalmente, la enseñanza de las matemáticas en general, y por lo tanto de las fracciones en particular, se ha caracterizado por estar primordialmente orientada hacia lo simbólico y procedimental. La premura que se tiene por enseñar a los alumnos a ejecutar procedimientos, quizás obligados por las necesidades prácticas de la vida cotidiana, representa un obstáculo para que puedan ellos construir cimientos sólidos en relación al sentido cualitativo y cuantitativo de las fracciones. Las presiones, tanto de las instancias oficiales como de las institucionales, "por cubrir el programa", y de la acreditación de exámenes, son algunos de los factores que inducen a los profesores a recurrir a la enseñanza de los algoritmos en lugar de dedicarle más tiempo al trabajo previo que conduce a la comprensión conceptual.

Las fracciones representan para los niños un nuevo sistema de símbolos, reglas y relaciones. Lograr una profunda comprensión toma tiempo y les demanda, en una situación ideal, su participación activa en actividades didácticas que les permitan familiarizarse con ellas. El empleo de material concreto es un ingrediente importante para lograr su comprensión.

Las lecciones del RNP presentan al niño modelos concretos de las fracciones y le proporcionan oportunidades para que comunique sus ideas. Los materiales propuestos por el RNP, utilizados en la presente investigación, enfatizan las relaciones entre las cinco formas de representación de las fracciones, según el modelo de Lesh (1997), es decir modelos concretos, representación verbal, representación pictórica, representación simbólica y situaciones de la vida cotidiana. Las ideas matemáticas que se trabajaron en el Taller se abordaron desde estas cinco formas, poniendo especial atención al trabajo con modelos concretos y a las diferencias y similitudes entre ellos. Así al presentar a un alumno, por ejemplo, $\frac{3}{4}$ de un círculo, se le pedía que lo representara usando corcholatas y dibujos y que explicara las semejanzas y diferencias que encontraba entre ambas representaciones.

El propósito de esta investigación fue determinar el impacto que tendría la secuencia de actividades propuesta por el RNP al trabajar con un grupo de alumnos de sexto grado de primaria. Ahora cabe preguntar: ¿Qué cambios hubo en los alumnos en relación a su comprensión de fracciones? ¿En qué formas contribuyó el uso del material concreto sugerido para que el alumno lograra un mejor manejo de las fracciones?

Se puede afirmar, con base en los resultados del Taller, que los alumnos desarrollaron una comprensión conceptual de las fracciones a través del trabajo con círculos, corcholatas, con doblado de papel; al elaborar galletas, al hacer dibujos, al comunicar sus ideas verbalmente y con notación simbólica. Pero, ¿cómo asegurar que desarrollaron cierta *comprensión conceptual*? Hubo evidencias claras de que su trabajo era conceptual y no procedimental al no tratar de recurrir a reglas memorizadas o sacadas de un libro, sino más bien basar sus deducciones en un análisis de sus observaciones, e inclusive llegar al punto de modificar concepciones erróneas previas. Aprendieron a través de un proceso activo que consistió en conocer y manejar el material suministrado. Utilizaron sus círculos constantemente como una referencia concreta de su pensamiento y de las relaciones que fueron encontrando. Esto permite entrever que una referencia concreta es primordial para que el alumno desarrolle sus ideas y que el trabajo con material concreto debe anteceder a las abstracciones. Los alumnos aprendieron también a seleccionar y transformar su información previa para crear hipótesis y aportar explicaciones. Constantemente hicieron referencia a lo visto con anterioridad para hacer afirmaciones, esto es, basaron sus descubrimientos en los aprendizajes de las lecciones precedentes, lo que permite afirmar sobre la importancia de contar con una referencia conceptual sólida para el desarrollo de nuevos descubrimientos, referencia que se logra a través de un manejo constante de representaciones concretas. Asimismo se podría afirmar, como lo dice Bruner, que aprendieron a través de aportar explicaciones y organizar la información recién adquirida (Bruner, 1966). Además aplicaron sus descubrimientos a situaciones cotidianas y utilizaron estrategias que ellos dedujeron.

La comprensión y reinterpretación del concepto de fracción son procesos cognitivos que también se evidencian como resultado del trabajo en el Taller; procesos que se hicieron tangibles en las transferencias que los alumnos lograron entre las representaciones; en el hecho de lograr mostrar un concepto –por ejemplo fracciones equivalentes– desde cierta representación para después mostrarlo desde otra representación u otra modalidad de la misma representación. Es decir, trabajaron con los círculos, comprendieron los conceptos involucrados, hicieron la transferencia a corcholatas y posteriormente a símbolos escritos, para culminar con una explicación de su razonamiento.

En relación a las estrategias que los alumnos utilizaron para desarrollar las actividades propuestas se observó que, conforme trabajaron con problemas más complejos, los alumnos recurrieron con mayor frecuencia a sus círculos, inclusive cuando los problemas planteados se referían a representaciones distintas a éstos. Cabe hacer énfasis en la importancia de permitir a los alumnos utilizar materiales concretos así como promover el trabajo con múltiples representaciones, con la finalidad de que puedan desarrollar sus ideas iniciales sobre las fracciones y logren así construir una base sólida del concepto de fracción, que sea flexible y les permita establecer conexiones. (Lamon 1999, p. 4).

Al abordar el tema de las operaciones, se observaron testimonios evidentes de que los alumnos tenían claro que para realizar una operación de suma o resta las fracciones debían tener el mismo denominador, y que en caso de que éstos fueran diferentes requerían realizar cambios poder obtener una respuesta. A través del uso de los círculos dedujeron el procedimiento, sin que hubiera necesidad de enseñarles una 'regla'. Sin embargo, al sumar o restar fracciones los alumnos no lograron establecer una conexión entre la acción con los círculos y su acción correspondiente en los símbolos. De ahí que no lograran llegar a un aprendizaje procedimental, más por falta de tiempo que por su complejidad. Se presume que sería necesario dar a los alumnos más oportunidades de pensar y hablar sobre las semejanzas y diferencias entre la notación escrita y los círculos para que pudieran construir relaciones entre las representaciones. Consecuentemente, se puede afirmar que el uso de material concreto proporciona a los alumnos una idea clara del significado de las operaciones de suma y resta de fracciones y les da elementos para comprender por qué se requiere de un denominador común y por qué son tan importantes las fracciones equivalentes; pero para lograr esto es necesario proporcionar múltiples oportunidades de reflexión alrededor de este tema para que logren llegar a los algoritmos de manera fluida. Se puede afirmar que la evidencia del Taller apunta hacia una construcción del significado, hacia el desarrollo de un conocimiento conceptual que, de acuerdo a las investigaciones, constituye la base del desarrollo del conocimiento procedimental.

Las oportunidades que se les presentaron durante el Taller, el constante contacto con los materiales, el cuestionarlos sobre las ideas que proporcionaban, fueron la base para que los alumnos desarrollaran su creatividad y generaran representaciones mentales con muchas asociaciones que, a su vez, vincularon a su red de conocimiento. A lo largo del Taller se dieron diferentes instancias en las que los alumnos descubrieron ideas importantes sobre orden y equivalencia como resultado del trabajo previo. De esta manera, la creación de sus estrategias incrementó su comprensión y a su vez dio lugar a nuevos conocimientos. Como Hiebert afirma, conforme las redes crecen adquieren una estructura más organizada y coherente e incrementan el potencial de crear. De ahí la importancia de hacer mayor énfasis en la construcción de redes de conocimiento en lugar de animar a los alumnos a convertirse en excelentes ejecutores de procedimientos.

Un análisis global de los resultados del Taller revela que los alumnos desarrollaron una mejor comprensión de (1) el concepto de fracción, según lo indica su habilidad de dar explicaciones bien fundamentadas; (2) el concepto de magnitud de las fracciones, ya que pudieron comparar y ordenar números de este tipo; (3) el significado y el papel que juegan las fracciones equivalentes en la suma y resta de fracciones; además de adquirir seguridad y fluidez en su habilidad para enfrentarse al trabajo con fracciones en general.

A raíz de este trabajo de investigación se puede afirmar que es posible darle un giro a la enseñanza de fracciones y abordarla desde un punto de vista conceptual, tal como lo establecen el NCTM (2000) y la SEP (2009), en lugar de la orientación procedimental que generalmente se pone en práctica en los salones de clase. El NCTM declara que los grados de 3º a 5º son fundamentales para el desarrollo de un marco conceptual sólido del trabajo con los números racionales. Dicho marco conforma los cimientos para que el alumno evolucione hacia la fluidez en las operaciones con fracciones, la cual se consolida en 6º grado de primaria y 1º de secundaria. Los profesores que trabajan con alumnos de 3º a 5º de primaria podrán lograr metas orientadas al desarrollo conceptual, si se animan a utilizar una secuencia didáctica que proporcione a los alumnos experiencias de aprendizaje, en las que se utilicen una diversidad de materiales concretos así como una variedad de representaciones. Podrán constatar que los alumnos pueden construir una comprensión profunda del concepto de fracción y disfrutar el proceso.

Ha llegado el momento de redefinir los objetivos de la enseñanza de fracciones en la escuela primaria; momento de leer con detenimiento el marco conceptual establecido en los documentos publicados por la Secretaría de Educación Pública y el NCTM para reestructurar el trabajo en el aula; momento de hacer a un lado la enseñanza centrada en reglas para enfocarse en propiciar en los alumnos el desarrollo del concepto de fracción. Es momento de fomentar y abrir oportunidades para que los alumnos descubran, inventen y sean creativos. Está en las manos del profesor el tener alumnos que se sientan capaces de *hacer matemáticas,* de construir sus propias representaciones, de relacionar ideas, de comprender conceptos importantes arraigados en los números racionales.

Es difícil cuantificar el aprendizaje del grupo de alumnos que participó en la experiencia del Taller de Fracciones, sólo el tiempo podrá evidenciar si los aprendizajes que vivieron resultaron significativos en su construcción del concepto de fracción. Un hecho innegable es que se comenzó con un grupo de alumnos con muchas dudas acerca de sus habilidades matemáticas, con inseguridad para participar, sin la posibilidad de responder a la mayoría de las preguntas de un examen de fracciones. Al término se observa un grupo diferente de alumnos con mucha seguridad, contentos de haber participado en la experiencia, seguros de que las fracciones no son tan difíciles como se imaginaban y con la certeza de que si no saben resolver alguna cuestión se puede preguntar sin temor a ser juzgados. Estos aprendizajes bien valen la pena el tiempo invertido.

Conviene remarcar que durante las sesiones del Taller, aunque no había una instrucción explícita, fue inevitable que algunos de los estudiantes trabajaran en pequeños grupos de dos, intercambiaran experiencias y participaran en la discusión colectiva promovida por la profesora, produciéndose beneficios en el aprendizaje de los estudiantes que Hagelgans *et al.* (1995) ha identificado como aprendizaje cooperativo.

Referencias

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational Number, Ratio And Proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). NY: Macmillan Publishing.

Bezuk, N., & Cramer, K. (1989). Teaching about fractions: What, when, and how? In P. Trafton (Ed.), *New directions for elementary school mathematics: 1989 yearbook* (pp. 156-167). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bruner, J. (1996). *The Culture of Education*. Harvard University Press, USA.

Cramer, K., Behr, M., Post T., Lesh, R., (1997) *Rational Number Project: Fraction Lessons for the Middle Grades - Level 1*, (Proyecto de Número Racional. Lecciones con Fracciones para los Años Intermedios. Nivel 1) Kendall/Hunt Publishing Co., Dubuque Iowa.

Cramer, K., Behr, M., Post T., Lesh, R. (1997). *Rational Number Project: Fraction Lessons for the Middle Grades - Level 2* (Proyecto de Número Racional. Lecciones con Fracciones para los Años Intermedios. Nivel 2) Kendall/Hunt Publishing Co., Dubuque Iowa.

Cramer, K., & Henry, A. (2002). Using manipulative models to build number sense for addition of fractions. In B. Litwiller (Ed.), *Making sense of fractions, ratio and proportions: NCTM 2002 yearbook*, (pp. 41 – 48). Reston, Va: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics, 1989. (Address: 1906 Association Drive, Reston, VA 20091.

Flores, A, Samson, J, Yanik, H.B. (2006). *Quotient and Measurement Interpretation of Rational Numbers.* In Teaching Children Mathematics, Volume 13, Number 1, pp 34 – 39. August 2006. NCTM, Reston Va.: NCTM.

Hagelgans, N. L., Reyolds, B. E., Schwingendorf, K., Vidakovic, D., Dubinsky, E., Shahin, M., Wimbish Jr. G. J. (Eds.). (1995). *A Practical Guide to Cooperative Learning in Collegiate Mathematics*. Mathematical Association of America. NW, Washington, DC. MAA Notes Number 37.

Hiebert, J. and Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The case of Mathematics. (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.*

Hiebert, J. C. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En D. Grouws, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (págs. 65-97). New York: Macmillan

Huinker, D. *Examining Dimensions of Fraction Operation Sense.* In B. Litwiller (Ed), NCTM 2002 Yearbook: Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions (pp 72 – 78). Reston, Va: NCTM.

Kieren, T.E. (1994). Multiple views of multiplicative structure. In G. Harel and J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 387-397). Albany, NY: State University of New York Press.

Lamon, S. (1999). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding. Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers.* Lawrence Erlbaum Associates, Inc. U.S.A.

Mercer, N. (1995). *The Guided Construction of Knowledge. Talk Amongst Teachers and Learners.* Multilingual Matters Ltd. U.S.A.

Naiser, E., Wright, W., Capraro, R. (2004). *Teaching Fractions: Strategies used for Teaching Fractions to Middle Grade Students.* In Journal of Research in Childhood Education, Vol 18, No.3, pp. 179 – 184. Association for Childhood Education International. U.S.A.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 2000. *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Va. NCTM.

Pirie, S.E.B. (1998) Crossing the gulf between thought and symbol: Language as (slippery) stepping stones. In H. Steinbring, M.G. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), Language and communication in the mathematics classroom (pp. 7-29). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Scaptura, C., Suh, J., Mahaffey, G. *Masterpieces to Mathematics: Using Art to Teach Fraction, Decimal and Percent Equivalents.* In Mathematics Teaching in the Middle School, Volume 13, Number 1 pp. 24 – 28. NCTM

Secretaría de Educación Pública, 1995. *La Enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Primaria. Lecturas.* Programa Nacional de Actualización Permanente. México, D.F.

Secretaría de Educación Pública, 1998. *Libro para el Maestro. Matemáticas. Sexto Grado.* México, D.F.

Vygotsky, L. (1978). Interaction between learning and development. Readings on the development of children, 23(3), 34-41.

ANEXOS

Anexo 1

Registro de los comentarios de los alumnos durante el Taller.

Feb. 9 Familiarización con el material.

JP – Mientras más grande (el denominador) más pequeñas son las piezas.

Rick – Acabo de descubrir algo chido: grises con verdes no se llevan, o falta o sobra (para explicar que no hay equivalencia entre octavos y quinceavos.)

Feb. 11 Flexibilidad de la unidad

Adal – la mitad es dos veces el número, por ejemplo la mitad de 1/3 es el de 6 (1/6)

Pregunto: ¿Cómo se escribe un cuarto? Adal – 4 sobre 1.

Aitana: ¼ es la mitad de la mitad.

Feb. 15 Ideas que han obtenido

Monse – No siempre el entero es un círculo completo

Adal – No todas las fracciones se llevan

Dany – O sea que no siempre se pueden utilizar algunas piezas para completar otras.

Miranda – entonces si el rojo cabe 5 veces en el café se dice que el rojo es 1/5 del café.

JP – Qué más miss, yo ya soy un experto en esto.

Feb. 18.

Sagar – me di cuenta que ¼ = 3/12

Adal – No puedo obtener novenos del medio porque 9 no tiene mitad.

Feb. 23

Adal – para mostrar 2/3 multiplico 3x3 que es el número de partes en el que quiero dividir la fracción, y sólo tomo 2 de ellas.

Mar. 1

Melissa – pensando el fin de semana me di cuenta que 4/8 de pizza es lo mismo que ½ de pizza. Qué interesante.

Monse – las fracciones son partes iguales.

Rick – para encontrar la mitad de un medio tienes que multiplicar por 2 y te da ¼.

Adal – para encontrar fracciones tienes que saber cuál es tu entero.

Ricky – entre más partes, más pequeña es la parte.

Mar 2.

Sebastián Pedraza se apoya mucho en sus círculos, realmente no infiere, todo lo tiene que ver concretamente. Por otro lado, Adal y Sebastián de la Paz no son muy afectos a utilizar el material.

Ricky constantemente dice "ya me hice bolas", le cuesta mucho trabajo comunicar sus ideas oralmente y por escrito.

Mar 11.

Aitana hoy estuvo explicando a Ana algunas ideas. Al terminar me comentó: "se siente muy bien poder explicarle a otros y que te entiendan".

Dibujé algunos rectángulos en el pizarrón y ellos debían representar lo mismo con sus círculos. Fue una actividad muy retadora, sin embargo al final lograron hacerlo con facilidad. Al final pidieron que les pusiera más ejemplos.

Mar. 16

Ricky – observé que si multiplicas numerador y denominador por 2 obtengo una fracción equivalente. (Yo ¿y qué sucede con2/3 = 8/12?) es por 4 arriba y abajo. O sea que la de arriba y la de abajo siempre van a ser igual.

Mar. 18

Aitana, Monse y Paulina estuvieron platicando antes de la clase: "A mí me toca ½ y a ustedes ¼ a cada una (hablando de repartirse una torta)

Mar. 22

Platicando sobre sus estrategias de cómo comparar dos fracciones.

Dany – por ejemplo ves ¼, como 2/4 = ½ entonces ¾ > ½.

Ricky – A mí me sirvió dibujarlas.

Adal – te fijas en el de abajo que es tu entero.

Sebastián de la Paz – te fijas en el de arriba para ver cuánto le falta para llegar al entero. Si falta más de un medio entonces es menor que ½.

Ricky – ya encontré cómo saber si son iguales. Si está en la tabla entonces son iguales (refiriéndose sólo al numerador. Al verificar nos dimos cuenta que la regla no funcionó.)

JP – 4/8 y 5/8 es por lógica, 5>4 y las piezas son del mismo tamaño.

Adal – aquí puedes aplicar lo que hemos visto en las otras clases.

Monse ¾ > ½ porque como 2/4 = ½ entonces ¾ tiene que ser mayor.

Abr. 15

Utilizando ya material discreto

Ricky – si tengo 12 y lo reparto en 3 partes iguales dan 4, que es lo que se comió Guillermo.

Aitana – Si son 6 grupos y tienen 2 dulces cada uno, Sergio se comió 2 grupos, entonces se comió 4 dulces.

Sebastián de la Paz – 1/3 es múltiplo de 2/6, o equivalente.

Ricky – 5/4 = 1 ¼ = 2 ½ (multiplicando también los enteros. Después tuvimos una discusión para aclarar este concepto erróneo)

Miranda – hoy aprendí a hacer grupitos (refiriéndose a agrupar objetos en fracciones).

Regina – se trató de buscar diferentes resultados que sea lo mismo.

Aitana – saber utilizar bien el entero.

Abr. 19

Les pedí que mostraran diferentes formas de ilustrar 1/3.

Melissa – (muy decidida pasa al pizarrón, toma el plumón) ¿Puedo poner por ejemplo 12 corcholatas y hacer 3 equipos? No, pero quiero un número más grande. Ya sé, tengo 15 corcholatas, hago 3 grupos de 5 y coloreo 5 (lo dibuja)

Monse – Ah! Es la tercera parte.

Abr. 20

Introducción a la equivalencia entre fracción impropia y mixta.

Pensé que era un tema que ya dominaban y que serían actividades muy fáciles, sin embargo creo que les confundió el hecho de que cada figura era un entero, tal vez pensaron que toda la ilustración era el entero y sólo tenían que contar en el número de partes que estaba dividido.

Regina en particular estuvo muy confundida, siento que le molesta tener un numerador mayor que un denominador. Es necesario que practiquemos más esto. Posiblemente la próxima sesión darles las fracciones y pedirles que las modelen con sus fracciones y después con dibujos.

Abr. 21

Hoy en la clase de la mañana, Ricky preguntó "Cuando sumas fracciones, ¿entonces sólo sumas los numeradores? Lo que da cuenta de que aún no tiene claro el concepto de fracción. Puede que la semana que faltó por enfermedad le haya hecho falta.

Abr. 22

Hoy vimos fracciones que representan ½, analizando la relación de que el numerador es la mitad del denominador. El concepto lo entendieron, pero par algunos se les dificultó establecer cuál es la mitad de algunas cantidades mayores a 20 o de números impares. Aquí se ve la necesidad de conocer más a fondo las relaciones que existen entre los números (medio, doble, tercio, triple, etc.).

Me he dado cuenta que algunos de los participantes empiezan a rezagarse a comparación de otros. Platicando con Carlos, me cuestiono si llegaron a su máxima capacidad, si la parte abstracta no la van a entender o si se les da un seguimiento más personal aún podemos lograrlo.

Anexo 2

Entrevistas

Entrevista 1: Aitana

(Se puso nerviosa a la hora de usar el micrófono, pero éste era necesario de lo contrario no hubiéramos captado los diálogos.)

Bueno, entonces Aitana te voy a hacer unas preguntas relacionadas con nuestro trabajo que hemos hecho en el taller de fracciones. Lo que más me interesa saber es qué es lo que estás pensando para poder este… a la hora que me des una respuesta trata de explicar lo más que puedas. ¿De acuerdo? No te voy a calificar así que si está mal no hay ningún problema. ¿Estás lista?

Con los círculos de colores me puedes mostrar la fracción 3/5?
OK me puedes explicar cómo sabes que eso muestra 3/5?

Porque son 3 y el entero tiene 5 piezas si yo quito 2 son 3/5, le faltan 2 para ser el entero.

OK, usando círculos otra vez me puedes volver a mostrar 3/5 pero ahora con otro color.

¿Las verdes son de 15 no?

Sí

¿Cómo decidiste eso?

Porque 3 por 5 da 15. Entonces si pongo 3 piezas de 15 en cada fracción, me da 5/5, 5/3,

¿Te da qué?

5/3

Observa qué me estás diciendo

3/5

OK en qué se parecen las dos representaciones, las de la verde con las naranjas

En que son de la tabla del 5

Y en que son diferentes las dos representaciones?

En que una se usan más fichas y en la otra no.

Bueno ahora vamos a usar corcholatas. Te doy 15 fichas y quiero que con ellas también me muestres 3/5.

OK ¿me puedes explicar cómo pensaste al resolver este problema?

Pues si mi entero son 15 ahora es al revés tuve que dividir los 15 en grupitos de 5----------------------- entonces señalé 3 grupitos que me da lo mismo que 9.

A ver hiciste grupitos de 5?

No hice 5 grupos con 3 fichas cada uno

Entonces cuantas fichas son 3/5 de 15

9

Bueno ahora tú escoge otra cantidad de corcholatas para que puedas mostrar 3/5

OK

Cuántas corcholatas estás usando?

10

Y cómo elegiste esa cantidad

Porque es múltiplo de 5 y lo puedo dividir en 5 grupos.

En qué se parece el que uses corcholatas con el que uses círculos? ¿Cómo se parecen esas dos representaciones?

En que puedo usar el mismo método ------------------------

En qué son diferentes los dos modelos?

En que en uno son separados todo, se puede quitar y poner y en los círculos no, tengo un entero y tengo que ir poniendo de pieza en pieza.

OK Bueno ahora te voy a mostrar tarjetitas con dos fracciones y quiero que me digas si una es mayor o si son iguales y por qué.

1/5 y 1/6 es mayor 1/5 por que es una pieza más grande que 1/6 porque entre menor sea la fracción mayor será la pieza entonces es mayor la pieza de 1/5 que la de 1/6.

Y de estas dos fracciones me puedes decir si una es mayor que la otra o si son =

Es mayor 4/9, no, sí porque me está diciendo que tengo el mismo denominador en cada fracción entonces así yo puedo elegir mediante el numerador cuál es mayor porque el nueve me señala que son 9 piezas y yo cogí cuatro y en la otra cogí 3 y es mayor 4 que 3.

A ver te voy a dar unos problemitas, si quieres ahí tienes papel y lápiz para que apuntes y no se te olvide. Jaime y Laura los dos tienen una pizza del mismo tamaño la pizza de Jaime está partida en 8 partes = y la de Laura está partida en 6 partes =. Jaime se comió 5 de sus rebanadas y Laura se comió 2 de sus rebanadas. Quiero que me digas quien se comió más o si comieron lo mismo y porque. Y que me explique cómo encontraste la respuesta. ¿

No pueden ser equivalentes porque no se puede dividir entre las mismas partes cada uno y es mayor 8/5, no 5/8 > 6/12, no 2/6 porque a pesar de que son > las piezas de 6 comió más Jaime, comió más piezas, solamente con que lo pienses sabes que es mayor.

¿Cómo lo piensas, qué te imaginas?

Pues el círculo y las piezas que se comió cada uno -------------

A ver otro problema. Marco y Memo tienen una bolsita de M&M cada uno y las dos bolsitas tiene la misma cantidad de M&M. Marco se comió 2/3 de su bolsa y Memo se comió ¾ de su bolsa. Otra vez quiero que me digas si se comieron lo mismo o uno se comió más que el otro y explica por qué.

Comió más Guillermo porque si él por así decirlo separó sus M&M en 4 grupos y se comió 3 y le quedó un grupo pequeño en cambio Marco lo dividió en 3 y se comió 2 y le quedó un grupo mayor, con más M&M que a Marco.

Bueno ahora vamos a utilizar los cubitos estos. Tomás hizo una torre de cubitos, OK? Utilizó 6 cubos y eso es la quinta parte de la torre. ¿Me puedes decir de qué tamaño era la torre? ¿Y cómo encontraste la respuesta?

¿Cuánto era el entero?

Es lo que me tienes que decir tú.

A sí. Por eso. ¿Cuánto era el entero? El entero era 30 porque si yo divido 30 entre 6 me da 5 entonces ahí sé que lo divido en 5 grupitos y cada un o va a tener 6 y si escojo 1 pues escogí 1/5 .

OK ahora fíjate, otra vez Tomás hizo otra torre, utilizó 8 cubos pero esos 8 cubos representan 2/3 partes de la torre. ¿Me puedes decir cuántos cubos tenía su torre completa?

La torre medía 12 porque si me estás diciendo que yo tengo con 8 2/3 entonces uno es ¼ uno tiene 4 entonces es un tercio 4 ------------------------ porque me está diciendo que cada grupito son de 3 grupitos.

Entrevista 2: Sagar.

Me podrías mostrar 3/5 utilizando los círculos y me puedes explicar cómo sabes que esos son 3/5. ¿Cómo supiste que no eran las piezas rosas?
Me di cuenta porque pues las rosas, vi la mitad y eran sextos. Y luego los comparé y me di cuenta que eran los naranjas.

¿Cómo puedes asegurarme que eso representa 3/5?
Porque 3/5 no tiene mitad, es una fracción… porque 5 no tiene mitad más que 2.5 y 2.5 no es un número normal., bueno entero. Me doy cuenta de ello porque acá tengo 2 y no hay mitad.

Usando círculos otra vez me puedes volver a mostrar 3/5 pero ahora con otro color.
¿Cómo se diría eso?
Se diría seis décimos porque se puede multiplicar… si se multiplica por dos es 10 que son 6 décimos.

¿En qué se parecen los dos modelos, de los quintos y los décimos?
Bueno la figura no se relaciona así, lo que se relaciona son los números porque 10 es múltiplo de 5, 5 x 2 obviamente me da 10

¿Cómo dirías que son diferentes los dos modelos?
Las piezas. Las piezas son más pequeñas.

Ahora guarda los circulitos y utilizando las fichas, tienes que usar todas las corcholatas, ¿me puedes mostrar 3/5 con las corcholatas? Y cuáles son 3/5?
Tenemos un grupito de 5 ¿no? y luego le quitas dos y ya son 3/5. De 5 que teníamos antes ahora son tres.

A ver Sagar en cuántas partes dividiste tu entero?
Pero un entero son todo esto o sea tres grupos de 5, de 5 que había antes.

OK, utilizando otra cantidad de corcholatas podrías mostrarme 3/5?
¿Por qué crees que te cuesta más trabajo trabajar con corcholatas?
Particularmente porque tengo que hacer grupos y en los grupos confundo el denominador y el numerador. Así que ahí hay algo que me sale mal.

Te voy a enseñar a hora 2 fracciones quiero que me digas si son = o si una es mayor y por qué.
Yo diría que la de 1/5 es mayor porque la pieza es más grande que la de 1/6 así que pero aunque son más piezas las de sexto 1/5 es mayor.

¿3/9 o 4/9 es mayor y porqué?
Aquí sí cambia la cosa un poco porque 3/9 como son por el mismo denominador, 4 es más grande que 3.

A ver te voy a dar unos problemitas, si quieres ahí tienes papel y lápiz para que apuntes y no se te olvide. Jaime y Laura los dos tienen una pizza del mismo tamaño la pizza de Jaime está dividida en 8 partes = y la de Laura está dividida en 6 partes =. ¿NO quieres ir anotando para que no se te olvide? Jaime se comió 5 de sus rebanadas y Laura se comió 2 de sus rebanadas. Quiero que me digas quien se comió más o si comieron lo mismo y porque.

Este yo digo que Laura comió menos que… no es cierto, que Jaime comió más que Laura porque Laura sus piezas eran de 6 más grandes aunque solo se haya comido 2 Laura ella se comió más que Jaime porque Jaime se comió 5 pero piezas pequeñas.

A ver otro problema. Marco y Memo tienen una bolsita de M&M cada uno y las dos bolsitas tiene la misma cantidad de M&M. Marco se comió 2/3 de su bolsa y Memo se comió ¾ de su bolsa. Se comieron lo mismo o uno se comió más que el otro y explica por qué.

Pues yo digo que se comieron lo mismo porque a cada uno le falta una porción para que sea el entero.
¿Y las porciones son del mismo tamaño Sagar?
No. me acabo de dar cuenta de que Memo se comió menos que… Jaime porque, que Marco porque este son tercios y como ya dije antes la cantidad es menor entonces la pieza es más grande.

Bien ahora vamos a utilizar estos cubitos. Tomás hizo una torre de cubitos, OK? Utilizó 4 cubos y armó la quinta parte de la torre. ¿Me puedes decir de qué tamaño era la torre?

¿Con cuántos cubos? Pues 20, porque 4 x 5 son 20

OK ahora fijate, otra vez Tomás hizo otra torre, utilizó 8 cubos pero esos 8 cubos representan 2/3 partes de la torre. ¿Me puedes decir cuántos cubos tenía su torre completa? ¿No?

Aunque, este, creo a la torre le falta 1/3 para ser el entero, pero yo creo que sería sólo, así ¿no? creo que ese sería el entero. Pero estos son 2/3 así que 4 x 4, 12, 4 x 3, 12.

Bien, muchas gracias, eso sería todo.

Entrevista 3: Sebastián P.

Me podrías mostrar 3/5 utilizando los círculos y me puedes explicar cómo sabes que esos son 3/5

S. Este porque las piezas son… no sé. Tres eh... qué te diré. Las tres quintas partes de un círculo y ya. Fue lo que se me vino a la mente cuando dices tres quintos, tres pedazos de pastel.

Usando círculos otra vez me puedes volver a mostrar 3/5 pero ahora con otro color.
¿Esos son 3/5? Dime cómo sabes que esos son 3/5.

Porque tengo que, bueno… porque se ven del mismo tamaño de la otra figura y pues porque cada pedazo de la figura es del mismo tamaño de los quintos.

O sea lo importante es que sean figuras del mismo tamaño?

Sí

Ahora guarda los circulitos y utilizando las fichas, tienes que usar todas las corcholatas, ¿me puedes mostrar 3/5 con las corcholatas? Y cuáles son 3/5?
¿Cómo se llama cada una de estas partes?

Tercios

¿Porqué tercios?

Porque están divididas en tres grupos, no, sí en tres grupos, cinco grupos de 3 fichas.
Así serían 3/5.

OK ahora usando otra vez corcholatas, tú decide cuántas, enséñame otra manera de mostrar 3/5.
En lugar de 3 en cada grupito cuántos podrías tener?

No encuentro otra forma de hallar 3/5.

¿En qué crees que se parezca el uso de corcholatas con los círculos?

En que los 2 equivale lo mismo, es lo mismo

¿En qué son diferentes las corcholatas y los círculos?

Pues que este que no sé, es lo mismo.

Te voy a enseñar a hora 2 fracciones quiero que me digas si son = o si una es mayor y por qué.

1/6 > 1/5 porque cuando el numerador el de arriba es mayor tienes que encontrar cuál pieza es mayor el de abajo y ya.

¿Cuál sería mayor de estas dos?

Un sexto porque este por ejemplo si tienes este seis amigos y un pastel tienes que calcular cuántas rebanadas y de qué tamaño le vas a dar a cada uno.

¿le toca más si son seis a que si son 5?

No (se ríe) es > 1/5

Muy bien, y de estas otras dos entre 3/9 y 4/9?

3/9 sí pues igual como también tienes que calcular cuántos pedazos llevan y cuántos le tienes que dar a cada uno.

A ver te voy a dar unos problemitas, si quieres ahí tienes papel y lápiz para que apuntes y no se te olvide. Jaime y Laura los dos tienen una pizza del mismo tamaño la pizza de Jaime está partida en 8 partes = y la de Laura está partida en 6 partes =. Jaime se comió 5 de sus rebanadas y Laura se comió 2 de sus rebanadas. Quiero que me digas quien se comió más o si comieron lo mismo y porque. ¿Te lo digo otra vez? (Repito el problema)

Pues yo pienso que Jaime se comió más porque la de él tenía + piezas que la de Laura y este si tenían del mismo tamaño pero Jaime tenía 8 a Jaime le quedaron más piezas, no es cierto a Laura le quedaron más piezas que a Laura.

A ver otro problema. Marco y Memo tienen una bolsita de M&M cada uno y las dos bolsitas tiene la misma cantidad de M&M. Marco se comió 2/3 de su bolsa y Memo se comió ¾ de su bolsa. Se comieron lo mismo o uno se comió más que el otro y explica por qué.

Este se comieron la misma parte si la misma parte de su bolsa de M&M porque si Memo se comió ¾ Y Memo 2/3 pues se comió lo mismo porque Marco se comió la segunda tercera parte de su bolsa que es ya casi toda y deja la penúltima parte y Memo igual.

¿Y as partes de ellos dos son iguales?

Yo digo que no que la de memo es más grande. Sí es lo mismo.

Bien ahora vamos a utilizar estos cubitos. Tomás hizo una torre de cubitos, OK? Utilizó 4 cubos y eso es la quinta parte de la torre. ¿Me puedes decir de qué tamaño era la torre.

Era grande, porque si vas poniendo de 4 en 4 -- y ya puedes saber de qué tamaño era la torre.

¿Puedes decir cuántos cubitos tenía la torre?

20, 24, 20 cubitos tenía la torre porque este lo encontré este imaginándolo y también me lo imaginé que iba poniendo 4 piezas por piso, haz de cuenta----------

¿Cuántos pisos tenía la torre?

Tenía 6 pisos. Sí, sí

OK ahora fijate, otra vez Tomás hizo otra torre, utilizó 8 cubos pero esos 8 cubos representan 2/3 partes de la torre. ¿Me puedes decir cuántos cubos tenía su torre completa?

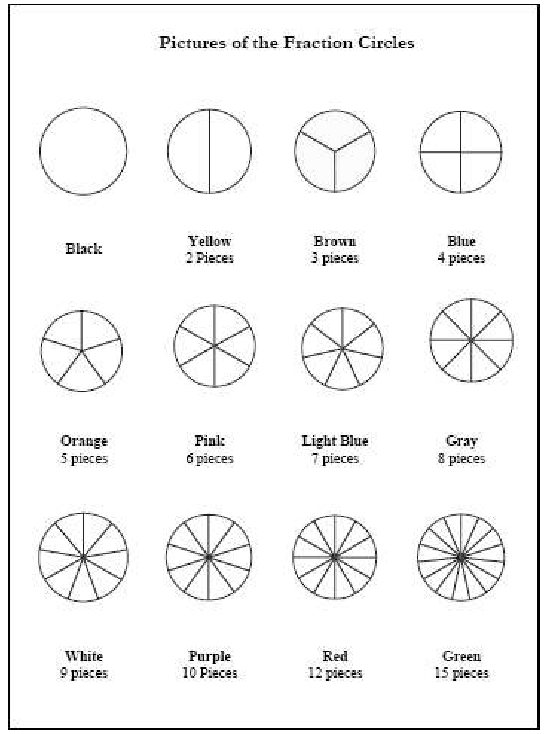
19 porque él utilizó más cubitos al hacer la torre porque... bueno es lo mismo que el otro pero él tomó más que la otra persona.

Eso sería todo muchas gracias.

Anexo 3

Transcripción de la sesión de filmación

Los alumnos están acomodados viendo al frente, cada uno cuenta con un conjunto de corcholatas y sus círculos de colores (la relación entre colores y número de piezas se muestra en la figura). Al momento de entregarles las corcholatas empiezan a jugar con ellas, JP y Fer las acomodan en filas.



E: OK vamos a comenzar. Quiero que, de diferentes maneras, me muestren un medio, de lo que quieran.

Fer: listo (divide su acomodo aproximadamente a la mitad, aunque no las cuenta),

E: ¿es exactamente un medio, seguro?

JP: este es un medio (tiene 4 corcholatas divididas en dos grupos de dos)

E: ¿cuál es un medio? ¿Un medio de qué? Primero deben definir cuál es el entero.

JP: este es el entero (4 corcholatas) y este es el medio (2 corcholatas)

E: Bien, ¿quién más? Con diferentes materiales, también utilicen sus círculos.

JP: ¡Ah! ¿También con los círculos?

E: Claro.

Tavo: Un medio es la amarilla

Fer: (saca su pieza amarilla) Esta es un medio

E: ¿es un medio de qué?

Tavo: del entero

E: ¿Cuál es el entero?

Edsson: El entero es el círculo (muestra el círculo negro)

JP: También este es un medio (muestra dos piezas azules) si el círculo es el entero

E: Muy bien, ¿algún otro?

JP: (observa tres piezas azules) ¿Cuál será el medio de tres cuartos?

Tavo: tres rosas es un medio

E: ¿de qué?

Tavo: del negro

E: OK, tres rosas es un medio del negro, sí. ¿Qué más?

E: a ver ¿cuál es un medio de tres azules?

JP ¿Cuál cabe dos veces en el azul?

Tavo: las grises

JP: a entonces tres grises es la mitad, un medio de tres azules.

Edsson: Miss ay sí, pues tres tercios es el entero

E: ¿el entero? Pero yo estoy pidiendo mitad

Edsson: Ah, mitad

E: ¿cuál sería la mitad de la café?

Edsson: la mitad de la café va a ser la rosa

E: OK, ¿cómo se llama la rosa?

Edsson: eh, un sexto

E: entonces cómo digo: un sexto es ¿qué?

Edsson: un sexto es la mitad del tercio

E: muy bien, a ver, enséñenme dos tercios de lo que sea. Me dicen el entero y me dicen cuáles son dos tercios.

Edsson: estos son dos tercios (muestra dos cafés)

E: ¿Cuál es el entero?

Edsson: el negro

E: OK entonces el negro es el entero, dos cafés son dos tercios

JP: este es el entero (con corcholatas, muestra seis), estas son dos tercios (separa 4).

E: Muy bien

Fer: dos tercios pues qué fácil (se pone a utilizar sus corcholatas)

E: recuerden que necesitan comunicarlo

JP: matemáticamente

E: …y oralmente, para que esto todo lo pueda yo transcribir.

E ¿otros dos tercios? Ya me enseñó JP con corcholatas, ya me enseñó Edsson con las cafés, ¿qué otro?

JP: esto, este es el entero (muestra 3 blancas), y esto son dos tercios (separa 2 blancas). Cualquiera puede ser dos tercios.

Edsson: También podrían ser cuatro rosas.

E: Son dos tercios ¿de qué?

Edsson: dos tercios de… de… ay no sé, ya me hice bolas.

Fer: ocho doceavos

E: (dirigiéndose a Edsson) O sea eso (2 cafés) es lo mismo que 4 rosas. Son dos tercios del círculo negro

Edsson: entonces 2 cafés son dos tercios del círculo negro y 4 rosas son dos tercios del círculo negro.

E: OK

Fer: ocho doceavos

E: ¿Ocho doceavos? ¿Cuál es tu entero? Necesitas decirme cuál es tu entero.

Fer: doce doceavos.

E: OK

E: Ahora muéstrenme tres cuartos

Fer: tres azules

E: tres azules es tres cuartos ¿de qué?

Edsson: de un entero

E: pero es que me tienen que definir el entero

Tavo: del negro. Ya lo estoy enseñando a la cámara (muestra su círculo negro)

E: del negro, claro

JP: este es el entero (muestra 8 corcholatas) y ¿qué fracción pediste?

E: tres cuartos

JP: estas son tres cuartos (muestra 6 corcholatas)

E: ¿Algo más, tres cuartos, en rojas?

JP: este es el entero (muestra cuatro rojas) y estas son tres cuartos (muestra 3 rojas)

E: bien, ya JP encontró una forma muy fácil. ¿Cómo le haces?

JP: si son, por ejemplo cuartos tomo las que se puedan dividir entre cuatro y nada más agarro tres de esas.

E: Tres de esas partes. O sea si cuatro rojas es el entero, tres rojas son tres cuartos.

JP: O de cualquier color

E: ¿Nada más? Muy bien, ahora ustedes me tienen que decir cuál es entero. Si yo les digo el amarillo es un medio, ¿cuál es el entero?

Fer: el entero es un negro.

E: Bien, si les digo que el rosa es un medio, ¿cuál es el entero?

Tavo: el café

E: ¿cómo sabemos que el café es el entero?

Tavo: porque vemos cuántas rosas caben en el café, son dos rosas

E: si les digo que el rosa es un medio, ¿cuál es el entero?

F: el rojo (muestra una pieza roja)

E: Y si les digo que el azul es un medio

Edsson: de un amarillo

E: entonces el entero es el amarillo. Bien, ahora vamos a pensar, el amarillo es el entero, ¿qué parte es la roja?

JP, F: (piensan sin utilizar el material) al unísono es un sexto.

E: ¿por qué?

F: porque tres rojas equivalen al azul y dos azules es igual al amarillo.

E: Seguimos con el amarillo como entero, ¿qué parte es el azul?

Tavo: un medio

E: ¿Y qué parte es el morado?

Edsson: ¿del amarillo?

E: sí

Tavo: un quinto, porque cabe cinco veces.

E: ¿qué parte es la rosa?

Tavo: ¿la rosa? Un tercio

E: ¿y qué parte es la café?

Edsson: Ay, se pasa de la mitad

E: Muy bien

F: es dos cuartos, no es dos doceavos

JP: No, espérate

F: son cuatro doceavos

JP: es que ve (toma una pieza amarilla y una café)

Tavo: es como una rosa (mostrando la parte que le falta para completar la amarilla), es un tercio

F: dos tercios

Tavo: sí, le falta un tercio, entonces son dos tercios

E: Ahora vamos a pensar que tenemos 24 galletas, ¿se acuerdan cuando hicimos las galletas, en la charola? 24 galletas es el entero, si quieren las pueden representar con sus fichas

(Pasan un rato contando sus fichas, se equivocan, vuelven a empezar. Fer las acomoda en 8 x 3,)

Edsson: ¿veinticuatro?

F: sí Edsson

E: díganme 12 galletas ¿qué parte son del entero?

Edsson: es la mitad

E: ¿Cómo sabemos?

Edsson: porque es la mitad de 24

E: Ocho galletas ¿qué parte representan? (Fer y Octavio observan sus fichas)

Edsson: un…

JP: un… ¿cuarto?

Edsson: un sexto, no (voltea a ver a sus compañeros)

JP: no, espera ¿ocho galletas? Un cuarto

E: ¿pueden dividirlas en cuatro grupos de ocho?

F: es un tercio

E: ¿por qué un tercio?

JP: son ocho, dieciséis, veinticuatro

E: muy bien, tres partes iguales de ocho cada una. ¿El seis qué parte es? (JP observa sus fichas, Fer las suyas, Tavo: las de JP y Edsson me observa a mí)

F: un cuarto, aquí están (muestra cuatro grupos de seis fichas)

E: ¿un cuarto?

F: Puedo hacer cuatro de seis

E: ¿y cuatro galletas?

JP: un octavo

E: ¿puedo hacer ocho grupos de cuatro?

F: (afirma) es un sexto, porque si un sexto es un cuarto…

E: ¿un sexto es un cuarto?

F: eeh, digo si seis galletas son un cuarto entonces cuatro galletas son un sexto.

E: (voltea a ver a Edsson) Necesitas dividirlas de cuatro en cuatro. Ahí las tienes formadas

Edsson: son seis filas de cuatro galletas. Sí, es un sexto.

E: ¿una galleta qué parte es?

Tavo: Un veinticuatroavo

E: ¿y cinco galletas?

Edsson: No hay ninguna fracción. No, no puede porque son 24 y no es múltiplo de 5.

JP: No, no se puede porque son cinco, diez, quince, veinte, veinticinco

Tavo: es como lo que hemos visto (en las clases de la mañana), los números y sus factores.

E: Sí, pero ¿ya saben una galleta a cuánto equivale?

Edsson: Un veinticuatroavo

E: ¿Y cinco galletas?

Tavo: cinco veinticuatroavos

JP: Pues sí

E: Estaba fácil. ¿Y diez galletas?

Edsson: diez veinticuatroavos

E: ¿Y veintiocho galletas?

Edsson: Ay miss eso no se puede.

E: ¿No se puede?

Fer: claro que sí, son 28 veinticuatroavos

JP: o simplemente un entero cuatro veinticuatroavos

E: Claro. A ver, ahora tienen 30 galletas como el entero.

Edsson: ¿cuántas dijiste?

E: Treinta, o sea hay que agregar cinco.

Edsson: espera miss, déjame que las acomode

E: ahora, cinco galletas ¿qué parte es?

Edsson: pues cinco treintavos

Fer: un tercio

JP ¿un tercio Fer?

E: ¿puedo hacer tres grupitos de 5?

JP: o también un sexto

E: cinco treintavos o también un sexto, que son qué, ¿cómo se llaman esas dos fracciones?

JP: equivalentes

E: ¿seis galletas?

JP: (riendo) pues seis treintavos

E: ¿o? ¿Fracción equivalente?

JP: un quinto

E: ¿Quince galletas?

JP: un medio

E: muy bien, ¿dos galletas?

JP: dos treintavos

E: ¿o?

JP: dos quinceavos, digo un quinceavo

E: ¿Ocho galletas?

Edsson: ocho treintavos

E: ¿y veinte galletas?

Tavo: veinte treintavos.

E: ¿hay alguna otra forma en lugar de veinte treintavos?

JP: dos tercios

E: Díganme un medio y un tercio, si los comparo ¿cuál es mayor?

Edsson: un medio

E: entonces díganme ¿en qué situación puedo decir que un tercio es mayor que un medio?

JP: si el entero de un tercio es más grande que el entero de un medio.

E: ¿Me pueden dar un ejemplo?

Edsson: sí, un medio de la amarilla es la azul, un tercio de la negra es la café, la café es más grande que la azul.

E: OK, ahora díganme, la pieza roja es la cuarta parte de ¿qué?

Tavo: (lo piensa, no ve sus círculos) ¡del café!

Fer: del café (muestra una pieza café)

Tavo: yo lo dije primero

E: La gris es la sexta parte ¿de qué?

JP: ¿Qué fracción es la gris?

Fer: de tres cuartos

E: (a JP) la gris es el octavo. (Se dirige a Fer) La gris es la sexta parte de tres cuartos.

E: ¿Y la verde es un quinto de qué?

Tavo: del entero

Edsson: No, no, es un quinto de la naranja.

Fer: no, de un tercio

Tavo: ¿qué dijiste, de un medio?

Edsson: de un café

E: ¿me pueden explicar por qué lo dicen?

Fer: por lógica

E: ¿Pero cuál es la lógica que usaste?

Fer: si a los quinceavos los dividimos entre tres… (voltea a ver a JP)

JP: yo lo hice mentalmente agarré los quinceavos, y si son tercios vi que caben cinco porque son cinco, cinco y cinco, o sea que caben cinco en cada tercera parte, que es la café (aunque realmente él estaba trabajando con fichas, muestra la transición que hace entre ambas representaciones).

E: Entonces, concluyendo, la verde es la quina parte de la café.

Fer: eso es lo que estaba pensando

E: Y JP lo pudo explicar. Ahora, la pieza rosa es la cuarta parte, entonces díganme la café ¿qué parte es?

Fer: es un medio

Edsson: es la tercera parte

JP: es la tercera parte. No, no es cierto

Fer: ES UN MEDIO

E: ¿por qué?

JP: Ah sí es un medio (con sus dedos) porque son dos, cuatro, seis, son seis… porque el café es un tercio y las rojas son seis entonces …

E: a ver muéstrenmelo.

Fer: (interrumpe) ¿Por qué? Porque dos sextos caben en una café

Edsson: Aparte la rosa es la mitad de la café.

E: Sí pero les dije que la rosa es un cuarto ¿Cuál será el entero primero? (Edsson trae en la mano sus piezas). La rosa es un cuarto ¿de qué?

Edsson: un cuarto de dos cafés

E: OK, entonces dos cafés es tu entero. Por lo tanto una café ¿qué parte es?

Edsson: aja, entonces la café es la mitad.

Fer: (en secreto a JP) Ya ves, te lo dije.

E: Bien. Sigue siendo la rosa un cuarto, díganme la roja ¿qué parte es?

JP: (confirma) ¿Sigue siendo la rosa un cuarto?

E: Sí

Edsson: Cabe tres veces la roja en el…

Fer: es un octavo, porque es la mitad del sexto.

E: ¿Es un octavo porque es la mitad de un sexto?

Fer: Porque hay cuatro sextos y la roja es la mitad de la rosa

E: Ah, o sea la roja cabría ocho veces en el entero. ¿En qué es lo primero que tienen que pensar? ¿Qué es lo primero que tienen que encontrar?

Fer: El entero

E: Cual es el entero y luego ver cuántas veces cabe. ¿Y la blanca? Si la rosa es un cuarto, ¿la blanca qué es?

JP: (para sí mismo) ¿La blanca es un décimo?

Fer: es un sexto miss, estoy casi seguro que es un sexto.

Edsson: Sí, es un sexto, porque cabe seis veces en los dos cafés.

Fer: porque tres por tres son nueve y los blancos son los novenos.

JP: no estoy muy seguro porque la miss pone una cara de que no está convencida

E: a ver explíquenme otra vez lo que piensan

Edsson: que (la blanca) cabe tres veces en un café, pero como son dos cafés entonces son seis. Entonces la blanca es un sexto.

E: Ok ahora díganme qué pieza es mayor, un cuarto o un tercio y díganme por qué.

Edsson: un tercio, porque el tercio es la tercera parte del entero (muestra su pieza café) y el cuarto es la cuarta parte del entero (muestra la azul)

E: JP, ¿Tú qué dirías?

JP: porque a un cuarto le faltan tres para ser el entero y a un tercio le faltan dos pero los cuartos son más chicos que los tercios, los tercios son más grandes y le faltan dos y… ya me hice bolas. Pero sé que un tercio es mayor.

Fer: porque los tercios se dividen en fracciones más grandes y los cuarto son más pequeños, por lo tanto una café es más grande que una azul.

E: Díganme cuál es mayor, ¿un medio o dos quintos?

JP: un medio porque…

Edsson: ¿cuáles son los quintos miss?

E: los naranjas

Edsson: a no, dos quintos

JP: Yo digo que un medio, porque dos quintos son menos que la mitad y un medio es la mitad, entonces el medio es mayor.

E: ¿Cómo sabemos que dos quintos es menos que la mitad?

JP: Porque cinco no tiene mitad, pero si se pasa por ejemplo tres quintos es mayor que la mitad y dos quintos es menor.

E: ¿Cuál es mayor, dos cuartos o cinco sextos y por qué?

JP: cinco sextos, porque sólo les falta un sexto para llegar (al entero) y en cambio a los cuartos le faltan dos.

Fer: sí le falta la mitad.

E: ¿Y un medio o cinco sextos?

Edsson: ¿Cuál?

E: un medio o cinco sextos

Tavo: cinco sextos, porque sólo le faltaría uno para llegar al entero.

JP: es lo mismo que la de antes

E: pues sí, un medio es lo mismo que dos cuartos ¿verdad? Ahora díganme cuál es la diferencia entre un cuarto y un tercio ¿Saben lo que significa diferencia?

Tavo: sí es la resta

E: OK, entonces… Si al grande le resto el chico, ¿cuánto me da?

Fer: (utiliza sus piezas café y azul y ve que la diferencia es la roja) Le falta un doceavo

E: ¿Cómo lo sabes? ¿Porque lo viste? Bien, y ¿entre un medio y dos quintos? ¿Cuánto le falta?

Edsson: ¿Para qué?

E: Al chico cuánto le falta para ser igual al grande?

Fer: Un décimo, porque el décimo es la mitad del quinto y si ponemos tres quintos se pasa (saca tres piezas naranja, luego se queda con dos) y si le ponemos un morado (lo pone con las naranja) da igual al medio (lo muestra a la cámara)

E: Y entre un medio y cinco sextos, ¿cuál es la diferencia?

Fer: uy, mucho Miss.

Tavo: son más grandes cinco sextos

E: ¿Y por cuánto se pasa?

Tavo: Por dos rosas se pasa

JP: se pasa por dos sextos, porque tres sextos es la mitad.

E: Díganme si aproximadamente está cerca de un medio, de un entero, de dos enteros… Siete octavos más doce treceavos ¿Cuánto me da más o menos?

JP: A más de un entero

Edsson: Más de un entero y menos de un entero y medio

E: ¿Menos del entero y medio?

Edsson: Sí, no se va a pasar del entero y medio

JP: ¿Cuál es el octavo?

Tavo: El gris

Fer: Va a ser más del entero pero menos que el entero y medio porque.

JP: Van a ser justo un entero.

E: No son tercios, eh? Son doce treceavos.

JP: Por eso… Ah doce, yo entendí dos, entonces sí va a ser más

Edsson: Un poquito, es como uno y medio.

E: Pero ¿por qué?

Tavo: Es como esto, mira miss (muestra un círculo negro y una pieza verde) y un pedacito más.

E: Bueno voy a ponérselas que le entiendan, once doceavos más siete octavos.

Fer: se pasa por… se aproxima a dos enteros

E: ¿por qué?

Fer: Porque le faltan sólo un doceavo y un octavo para completar el entero.

E: Siete octavos a ¿qué es casi igual?

JP: A un entero

E: Siete octavos está muy cerca del entero ¿Y once doceavos?

TAVO: Pues también es casi el entero

E: Entonces si los sumamos me dan casi dos enteros. OK, tres octavos más cinco doceavos

Edsson: ¿Cuáles eran los octavos, Miss?

E: Los grises

JP: Da casi un entero

Edsson: Da casi menos de un entero

JP: Los doceavos son casi la mitad. Porque los doceavos, la mitad son seis y los octavos la mitad es cuatro entonces estás sumando menos de la mitad con menos de la mitad, da casi el entero.

E: ¿Si a ocho novenos le quito siete octavos? ¿Cómo qué me da de resultado?

(Fer saca sus piezas blancas y grises)

Edsson: Va a ser como un cuarto… menos de un cuarto.

E: Va a ser una pieza muy pequeñita.

Fer: espera Miss, (toma un noveno y un octavo y los compara, lo muestra) mira lo poquito que le sobra.

E: Quiero que me ordenen de mayor a menor un quinto, un tercio y un cuarto, explicando por qué. (Levantan la mano Fer, JP, Edsson). A ver Edsson ¿cuál es la mayor?

Edsson: la mayor es un tercio, luego un cuarto y luego un quinto.

E: ¿Cómo sabes?

Edsson: Porque un tercio es la café y es un tercio del entero (toma una café), el cuarto es un poquito menos que la café (toma la pieza azul) y el quinto que es la naranja es un poco menos que la azul (sobrepone las tres piezas y muestra sus tamaños).

Tavo: Yo sé

E: A ver ¿Tú cómo lo dirías?

Tavo: Porque los tercios están divididos en menos partes y por lo tanto las piezas son más grandes.

E: Muy bien

Edsson: otra, otra, otra.

E: ¿Cuál será mayor, cuatro treintaicincoavos o cuatro veintinueveavos?

Fer: Yo creo que los veintinueveavos, porque la pieza es mayor porque está dividida en menos fracciones.

Edsson: y la cantidad de piezas es la misma, por el número de arriba.

E: A ver comparen estas dos fracciones (escribe en el pizarrón tres séptimos y ocho doceavos).

Edsson: es mayor tres séptimos. A ver Miss, los séptimos ¿cuáles eran?

E: No tenemos séptimos.

Edsson: Ah, entonces así. Porque los séptimos son más grandes… no, van a ser ocho doceavos, ¿verdad?

E: No sé, quiero que ustedes me convenzan a mí cuál es el mayor.

JP: Ocho doceavos, porque la mitad serían seis doceavos y con el séptimo es igual que con el quinto si baja de su "mitad" tres séptimos no es la mitad ni se acerca entonces ocho doceavos es mayor porque se pasa de la mitad.

E: ¿Entre seis novenos y cuatro sextos?

Edsson: Cuatro sextos es mayor porque…, no van a ser seis novenos, porque los novenos, ay yo sé qué es. Es decir a cuatro sextos le faltan dos para llegar al entero y a seis novenos le faltan tres que hace mayor la cantidad.

E: A uno le faltan dos sextos y al otro le faltan tres novenos. No me has convencido de cuál es mayor. (Tavo: consulta algo con JP) ¿Tú sabes Tavo:?

Tavo: Estaba dudando, pero ya vi que no. No, es que me estaba equivocando.

JP: es igual porque…

Tavo: Eso es lo que yo estaba pensando, que son iguales

JP: Si lo transformamos a fracciones equivalentes serían dieciochoavos, doce dieciochoavos darían los sextos y los seis novenos también darían lo mismo, por eso es lo mismo.

E: ¿o?

JP: si en lugar de multiplicar divido me dan dos tercios los dos.

Tavo: Cuando e dije que me estaba equivocando es porque pensaba que eran iguales.

E: Pues hay que tener seguridad Tavo. A ver ahora una niña que se llama Tina está construyendo torres con bloquecitos, si quieren lo pueden representar con sus corcholatas. Hizo una torre y un tercio con doce bloques…

Tavo: O sea una torre es como un entero.

E: sí, quiero que me digan cuántos bloques tiene cada torre y por qué.

JP. Usa 9 bloques para cada torre porque si hizo una torre y un tercio quiere decir que usó lo de una torre y una tercera parte de otra torre. Si los doce bloques que utilizó lo dividimos en cuatro nos sale a tres cada uno, o sea que son tres para cada tercio, entonces una torre son tres por tres bloques, o sea nueve.

E: Muy bien. Ahora, en una receta de galletas se utiliza un cuarto de taza de harina en otra receta se utilizan dos tercios de taza de harina. ¿Cuánto se utiliza en total? Si quieren se las escribo (lo escribe en el pizarrón). Quiero que me digan en total ¿cuánta harina se necesita? Si quieren háganlo con círculos…

JP: Yo necesito escribirlo.

E: Pues escríbelo.

JP: Es que no tengo mi libreta, las tienes tú. (Hace algunas operaciones mentales viendo al pizarrón) Es que ya perdí la cuenta.

Fer: (Saca sus piezas cafés y una azul, las acomoda, cuenta algo) Son once doceavos.

Edsson: Yo, yo, yo, son doce quinceavos

JP: no, son doce doceavos

E: ¿Una taza entera?

JP: Sí, no, no…

JP: Sí son once doceavos Miss.

Fer: Son once doceavos Edsson.

Edsson: (Les da la espalda a sus compañeros para evitar que vean lo que está haciendo, acomoda sus piezas verdes) Son catorce quinceavos.

E: Estás haciendo una buena aproximación. A ver Fer, ¿de dónde sacaste que son once doceavos?

Fer: Mira, un cuarto son tres doceavos, tres rojas, y a dos cafés le caben ocho por lo tanto simplemente sumamos las cantidades y salen once doceavos.

Edsson: no Miss, son catorce quinceavos

E: pero la azul no la puedes cambiar a verdes, parece que sí, pero no es exacto. Porque los cuartos no se pueden cambiar a quinceavos. Sí se pueden cambiar a dieciseisavos

Edsson: Pero sí caben , Miss.

E: Es una diferencia mínima Edsson. Sí pudiera ser una muy buena aproximación, pero once doceavos es una respuesta exacta. ¿Sí?

Edsson: OK

E: A ver, una resta ¿si a ocho novenos le quito un tercio?

JP: ¿Ocho novenos? Pues quedan cinco novenos, porque los novenos son tres en un tercio, entonces ocho menos tres me da cinco novenos.

Edsson: Sí, si es cierto.

E: Bueno ya terminamos ahí la parte matemática. Ahora vamos a discutir las preguntas de reflexión que les hice ayer. Quiero que me diga cada uno ¿Cuál fue su actitud a lo largo de todo el Taller?

Edsson: A la vez buena y un poco distraído. Bueno, no sé la opinión de mis compañeros.

E: No, cada quien su opinión.

Fer: Yo pienso que mi conducta en el Taller fue buena.

E: ¿Y tu actitud? Porque yo no dije conducta, dije actitud. ¿Qué querrá decir actitud?

JP: Este, cómo te portaste.

E: No, eso es conducta.

Tavo: Como feliz…

Edsson: ¿Cómo trabajaste?

E: Cómo trabajaste…

Tavo: Si estuviste feliz

E: Eso es más bien un estado de ánimo. Yo puedo venir y ser relajiento y sin embargo tener una actitud de siempre querer aprender

Edsson: A lo mejor no quisiste aprender tanto porque no querías venir. A mí sí me dio mucho gusto venir. Muchas gracias por aceptarme.

E: A ver JP actitud.

JP: Pues primero estaba bien, luego me puse muy hablador y luego ya regresé a lo normal.

Tavo: Pues yo creo que bien, pero a veces me distraía, con Edsson.

E: ¿Qué fue lo que más les gustó, además de hacer galletas?

Edsson: Los patrones, los que habíamos hecho en la libreta. [Refiriéndose a la forma en la que descubrieron se puede detectar cuando una fracción es equivalente a ½, es decir que el numerador es la mitad del denominador].

Fer: A mí la suma y resta de fracciones.

E: ¿Te gustó la suma y resta? Eso me da mucho gusto.

JP: A mí todo.

E: ¿Tavo:?

Tavo: Todo.

E: ¿todo te gustó?

Tavo: Sí.

E: ¿Lo que menos les gustó?

Fer: Que no tuvimos actividades al aire libre, nos mantiene encerrados.

E: O sea que les hubiera gustado jugar.

Fer: Más que jugar es ir afuera.

E: O sea estar en otro ambiente.

Fer: Sí porque aquí me siento encerrado.

E: O sea que les hubiera gustado trabajar en la cafetería.

Tavo: Miss, y que no trajimos tacos al pastor.

E: El problema de hacer afuera el trabajo es que no tendríamos pizarrón y ya ven que a veces se necesita.

Fer: Ah, sí

E: ¿En qué creen que les ayudó el Taller?

Edsson: Yo, en los próximos exámenes que vienen.

E: O sea, te va a ayudar

Edsson: Aja, sí

E: Esperemos. ¿En qué más creen que les ayudó?

JP: Más que me ayudó creo que, como dijo Edsson, me va a ayudar porque mis primos cuando iba a su casa los veía ahí que su mamá trabajando todos desesperados porque no le entendían.

Tavo: Me va a ayudar también en la vida

E: ¿En la vida? ¿Para qué?

Edsson: Las matemáticas siempre nos van a ayudar en la vida.

E: Por lo menos en la vida escolar

Edsson: Las fracciones, a cualquier parte donde vayas te van a ayudar, sobre todo las fracciones, entenderlas.

E: ¿Qué otras sugerencias darían para mejorar el Taller? Ya me dijeron que salir

JP: Que fueran más clases, porque fue muy poquito tiempo.

Tavo: Que nos des el próximo año, Miss.

E: ¿Recomendarían este Taller?

Todos: Sí

Fer: Porque aparte de que aprendimos mucho es divertido

Edsson: A la vez sí y a la vez no. Sí porque nos has enseñado mucho. No porque a la hora que… ya saben la razón. Pues porque a la hora de hacer galletas pues nos tocarían menos.

E: Les tocarían menos galletas si fueran a hacer galletas a la casa. OK. ¿Algo más que quieran agregar?

Todos: No

Anexo 4

Ejemplo de una lección

Rational Number Project

Lección 1 **Hoja para el maestro**

Panorama General

La lección está diseñada para que los alumnos exploren las pizzas y se familiaricen con sus colores y relaciones.

Materiales

• Pizzas para alumnos y maestra

Actividades.

1. Al inicio de la lección se pide a los alumnos que utilicen sus círculos para contestar :
   a) ¿Cuántas piezas azules se necesitan para cubrir el círculo negro?
   b) ¿Cuál es mayor, 1 pieza café o 1 pieza gris?
   c) ¿Cuántas piezas rosa se necesitan para cubrir 1 amarilla?
   d) ¿Cuántas piezas café se necesitan para cubrir la negra?
   e) ¿Qué es mayor, 1 café o 2rojas?
   f) ¿Cuántas piezas moradas se necesitan para cubrir 1 amarilla?
   g) ¿Cuántas piezas azul oscuro hay?
   h) ¿Y azul claras?
2. Se les pide que continúen explorando con sus círculos y contesten la Hoja 1.
3. Finalizar la lección trabajando con la Transparencia 1. La figura de la izquierda representa la parte del círculo que debe cubrirse. El alumno debe elegir cuáles piezas de las que están a la derecha se necesitan para cubrir la figura; éstas no tiene que ser del mismo color.
4. Se anima a los alumnos a que primero den una estimación y después la comprueben con sus círculos.

Comentarios.

1. Los alumnos necesitan jugar con los círculos antes de desarrollar un lenguaje formal para describir las relaciones entre las piezas.
2. La Hoja 1 del alumno se puede trabajar de diferentes formas:
   - Los alumnos la resuelven individualmente y después comparan sus respuestas con un compañero.
   - Se trabaja por parejas
   - Se empieza con todo el grupo, después cada alumno trabaja individualmente.
3. A los alumnos que terminan primero, se les pide que inventen sus propios problemas y los registren en la parte de atrás de la hoja o en el pizarrón para que los resuelvan otros.
4. Para motivar a los alumnos a que den una estimación, enfatizar la idea de presentar **hipótesis**. Registrar sus estimaciones, comprobarlas.

Anexo 5

Material del taller: círculos