



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA FÍSICA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

División de Estudios de Posgrado

**“PROPIEDADES ELECTROMAGNÉTICAS
DE NEUTRINOS Y VIOLACIÓN DE
LORENTZ”**

TESIS

Para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA FÍSICA

Presenta:

RICARDO DANIEL GALLARDO GARCÍA

Director de tesis:

**ASESOR: DR. EDUARDO SALVADOR TUTUTI
HERNÁNDEZ**

Morelia Michoacán, febrero de 2018

Agradecimientos

Primeramente agradezco a mi esposa Laura y a mi hijo Mateo por su apoyo en todo momento.

Muchas gracias Dr. Eduardo Salvador Tututi Hernández por el apoyo brindado, por sus orientaciones e indicaciones necesarias para llevar a cabo este trabajo de tesis. Además de sus enseñanzas y conocimientos que me transmitió a través de sus cursos y seminarios.

Por último, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por haberme otorgado una beca para llevar a cabo los estudios de maestría.

Índice general

1. Introducción	5
2. El Modelo Estándar	9
2.1. Modelo Estándar	9
3. Neutrinos	16
3.1. Detección de neutrinos	17
3.2. Neutrinos masivos	18
3.3. Oscilación de neutrinos	19
3.3.1. Caso de dos y tres neutrino	21
4. Violación de Lorentz	23
4.1. Covarianza de Lorentz	23
4.2. Modelo Estándar Extendido	24
5. Momento dipolar	30
5.1. Partículas puntuales	31
5.2. Estructura formal	32
6. Cálculo de los momentos dipolares en MSM con LV	35
6.1. Discusión	42

Resumen

De acuerdo al Modelo Estándar, los neutrinos son partículas elementales de espín un medio, sin carga y sin masa; es el compañero del doblete de su lepton cargado. Existen 3 diferentes tipos de neutrinos: el neutrino del electrón, del muón y del tau. Sin embargo, debido a las mediciones de Davis y colaboradores sobre el flujo de neutrinos solares que empezó a realizar a finales de los sesentas del siglo pasado, hoy sabemos que deben tener masa. Los neutrinos son importantes para explicar diferentes fenómenos como el proceso de decaimiento beta, o procesos termonucleares en la astrofísica y la cosmología o la nucleosíntesis en el universo temprano. Los neutrinos interactúan muy débilmente, es por ello que son difíciles de detectar.

En este trabajo de tesis de maestría, estudiamos propiedades electromagnéticas estáticas de los neutrinos, ya que a pesar de que son partículas neutras se pueden acoplar a campos electromagnéticos mediante su momento dipolar magnético. Nos centraremos en el proceso $\nu_i \rightarrow \nu_j + \gamma$, el cual sólo tiene sentido como un proceso de fluctuación cuántica. El cálculo que se realizará lo llevaremos a nivel de un rizo en el Modelo Estándar Mínimamente Extendido con violación CPT y Lorentz, de donde podremos extraer las contribuciones al momento dipolar eléctrico y momento dipolar magnético del neutrino.

Palabras clave: Neutrinos, Violación CPT y Lorentz, Momento Dipolar, Fluctuación Cuántica, Modelo Estándar Mínimamente Extendido

Abstract

According to the Standard Model, neutrinos are massless elementary particles, of half-integer spin, and electrically neutral; they are partners of the $SU(2)_L$ doublet of their corresponding charged leptons. There are 3 different types of neutrinos: the electronic neutrino the muonic and the tauonic ones. Nevertheless, due to the experiments performed by Davis and co-workers on solar neutrino fluxes since the late sixties of last century, nowadays, we know that neutrinos must be massive particles. Neutrinos are important particles for explaining different phenomena such as the beta decay process, or thermonuclear processes on astrophysics and cosmology or in nucleus-synthesis in the early universe. The neutrinos interact very weakly so it is very difficult to detect them.

In this master thesis we study static electromagnetic properties of neutrinos, even though they are neutral particles, can couple to electromagnetic fields due to their magnetic dipole moment. We will focus on the process: $\nu_i \longrightarrow \nu_j + \gamma$, this process only makes sense as a quantum fluctuation process. The calculation that will be realized will take at the one loop level in the Minimum Extended Standard Model with CPT and Lorentz violation, from which we can extract the contributions to the dipole moment of the neutrino.

Keywords: Neutrinos, CPT and Lorentz Violation, Dipolar Moment, Quantum Fluctuation, Minimum Extended Standard Model

Capítulo 1

Introducción

Una de las partículas elementales más enigmáticas que ha sido de interés desde que fue propuesta su existencia para explicar la conservación de la energía en el proceso de decaimiento beta en 1930 por Pauli, es el neutrino [1, 2]. Desde que fue inicialmente propuesta la existencia del neutrino, se intuía que esta partícula debería tener una masa muy pequeña o debería tener definitivamente una masa nula. De acuerdo al Modelo Estándar (ME) de las partículas elementales, el neutrino es un fermión de espín un medio, masa nula, sin carga eléctrica y es el compañero de doblete de su correspondiente leptón cargado. Dichos dobletes se transforman bajo el grupo de simetría débil $SU(2)_L$ y forman las tres diferentes familias de leptones que predice el ME, a saber: tipo electrón, tipo muon y tipo tau. Los leptones junto con las tres familias de quarks conforman la materia establecida por el ME. Las interacciones fuertes y electrodébiles entre la materia son mediadas por los bosones de norma. La otra interacción, que no es descrita por el ME, es la interacción gravitacional. Las interacciones fuertes son descritas mediante el grupo $SU(3)_C$, mientras que la interacción electrodébil queda descrita a través del grupo de simetría $SU(2) \times U(1)$.

Inspirado en una analogía con la electrodinámica cuántica, Fermi propuso en 1934 la teoría del decaimiento beta, conocida actualmente como la teoría de Fermi. En dicha propuesta Fermi establece que la interacción responsable del decaimiento beta debería ser mucho más débil que la interacción electromagnética. En la teoría de Fermi, se propone un acoplamiento a través de corrientes del tipo llamadas Vector-Axial (VA) que violan paridad. Desde entonces se han hecho diferentes propuestas para explicar la física relacionada con las interacciones débiles en general y sobre la física de neutrinos en par-

particular. Como por ejemplo el concepto de número leptónico el cual debería ser una cantidad conservada en las reacciones de partículas. Sin embargo, en la actualidad, debido al fenómeno de oscilación de neutrinos, queda claro que la conservación de este número leptónico debe cumplirse solo de manera global. Este mismo fenómeno de oscilación ha dejado de manifiesto que al menos uno de los tres diferentes tipos de neutrinos debe ser masivo.

De acuerdo con las mediciones experimentales de Davis¹ y colaboradores sobre el flujo de neutrinos solares [3] y posteriormente verificado por diferentes experimentos y en particular por los resultados de Superkamiokande² sobre la oscilación de neutrinos atmosféricos [4], se ha corroborado que los neutrinos deben ser masivos. No obstante, la búsqueda teórica del origen de las masas en los neutrinos aún continúa. En efecto, una de las tendencias actuales es que la física de neutrinos puede ayudar a entender nueva física más allá del modelo estándar.

Existen dos propuestas teóricas para describir a los neutrinos: una es la de Majorana en la que los neutrinos son sus propias antipartículas (llamados neutrinos de Majorana) y la otra es la de Dirac (los neutrinos correspondientes son los neutrinos de Dirac). La masa de los neutrinos es muy pequeña comparada con la masa de las otras partículas. La explicación de la pequeñez de las masas, o al menos una explicación razonable, está relacionada con una pequeña violación del número leptónico. Esto implicaría que la masa del neutrino estaría controlada por el término de masa de Majorana en vez del término de masa de Dirac. Si el neutrino es de tipo de Dirac no hay razón para que la masa de los neutrinos sea tan pequeña; solo ocurre así y no hay nueva física inmediata [1, 2].

Dentro del contexto de la astrofísica y la cosmología, los neutrinos son partículas que juegan o han jugado un papel relevante en la comprensión de la física que ocurre en estos escenarios. En el universo temprano, poco antes de los tres primeros minutos de que ocurrió la gran explosión, el universo estaba compuesto de luz, neutrinos y antineutrinos además de una pequeña cantidad de material nuclear y de una pequeña cantidad de electrones [5]. En los primeros instantes después de la gran explosión (en la cuál $t \ll 1\text{seg}$ y $T \gg 1\text{Mev}$) los neutrinos fueron relevantes en la nucleosíntesis. En el contexto astrofísico, se sabe que los neutrinos son producidos a muy alta

¹Dicho trabajo y los posteriores le valieron el Premio Nobel de Física en 2002 junto con R. Giacconi y M. Koshiba.

²El líder de la colaboración, Takaaki Kajita se hizo acreedor al Premio Nobel de Física en 2015 junto al canadiense Arthur B. McDonald.

temperatura y densidad. Los neutrinos tienen una trayectoria media libre muy grande, de tal forma que casi no interactúan con la materia. Este es el caso para los neutrinos que son producidos en el núcleo de una estrella, a menos que se tengan densidades suficientemente grandes de tal forma que excedan densidades del orden de $\rho \approx 10^{12}$ gr/cm³. Cuando ocurre que la densidad de la materia estelar es suficientemente grande, los fotones no satisfacen la relación de dispersión usual en el vacío, sino que se comportan como si tuvieran una masa, en estas circunstancias el fotón "masivo" puede decaer en par de neutrinos-antineutrino. Otra de las propiedades físicas interesantes de los neutrinos es en relación a sus propiedades electromagnéticas. En efecto, como ya habíamos mencionado, el neutrino es una partícula sin carga, por lo cual se puede acoplar a campos electromagnéticos solo mediante sus momentos dipolares eléctricos y magnéticos. Consecuentemente, el conocimiento de estos momentos resulta importante para el estudio de neutrinos que interactúan con estos campos, por ejemplo con campos magnéticos muy intensos como los que existen en las cercanías de una estrella supernova y que puede alterar la propagación de neutrinos que se generan en el centro de la estrella por reacciones de decaimiento inverso beta y que abandonan la misma.

Dentro del modelo estándar mínimamente extendido, en el cual se agregan neutrinos derechos al modelo estándar, las correcciones radiactivas inducen un momento dipolar μ_{ν_i} , dado por:

$$\mu_{\nu_i} = 3 \times 10^{-19} \mu_B \left(\frac{m_{\nu_i}}{1 \text{ eV}} \right),$$

donde $\mu_B = e/2m_e = 5.78 \times 10^{-5}$ eV/T⁻¹ es el magnetón de Bohr. Sin embargo, mediciones experimentales indirectas del momento dipolar magnético de neutrino imponen cotas superiores para los diferentes tipos de neutrinos³: $\mu_{\nu_e} < 10^{-10} \mu_B$. Esto resulta una cuestión interesante a ser clarificada. Para ello se han considerado diferentes modelos más allá del ME que involucran acoplamientos que se pueden ajustar para hacer consistentes con las cotas experimentales indirectas.

Anteriormente se creía que las interacciones entre las partículas eran invariantes bajo la transformación de paridad y todas los experimentos lo corroboraban además sonaba razonable que la naturaleza no se preocupaba si un sistema fuera zurdo o diestro, pero sorprendentemente, no resultó así. En el

³Ver por ejemplo [2] y referencias contenidas ahí mismo.

experimento realizado por C.S. Wu, sobre el decaimiento beta se demostró la no conservación de la paridad. Concretamente lo que resultó es la no conservación de la paridad para las interacciones débiles; posteriormente se propuso la invariancia de las interacciones débiles bajo la simetría de Conjugación de la carga y Paridad CP , sin embargo se terminó encontrando fenómenos que violan esta simetría de CP . Aunque esto son fenómenos bastante relevantes en el Modelo Estándar, resultan ser muy pequeños en magnitud. Lo cual los llevo a que el Modelo Estándar debe ser invariante bajo la simetría CPT , la cual además de ser invariante bajo la transformación simultánea de Conjugación Paridad debe también bajo Inversión Temporal, sin embargo, a partir de que los resultados de nuevas pruebas experimentales, no son totalmente exactas. El gran interés en teorías unificadas, las cuales han considerado la investigación de gravedad cuántica con desviaciones respecto a la simetría de Lorentz a la escala de Planck, hacen plausible el estudio de modelos en los que ésta simetría CPT , no se satisfaga cabalmente. Esto último nos da la posibilidad para estudiar el efecto que tiene la no conservación de la simetría CPT en los momentos dipolar eléctrico y magnético del neutrino.

El contenido de esta tesis se dividió en 6 capítulos. En el capítulo 1, se presenta una descripción general del Modelo Estándar enfatizando la teoría electrodébil. En el capítulo 2, se dará una reseña del neutrino y sus propiedades. En el capítulo 3, analizaremos la simetría CPT , además, se exponen las propiedades de la Extensión del Modelo Estándar y las implicaciones de la violación de CPT . En el capítulo 4, se dará una descripción del momento magnético y eléctrico para partículas puntuales así como con estructura. Para el capítulo 5, se realizará los cálculos explícitos analizando el decaimiento $\nu_i \rightarrow \nu_j + \gamma$, con ayuda de las reglas de Feynman, para obtener las propiedades eléctricas y magnéticas de los neutrinos. Finalmente en el capítulo 6, se presentan las conclusiones de la tesis.

Capítulo 2

El Modelo Estándar

Una de las preguntas que se ha formulado el hombre desde sus inicios o por lo menos desde hace aproximadamente unos 2500 años es ¿De qué están hechas las cosas? Los filósofos y científicos han tratado de responder esta pregunta. Demócrito y Leucipo, filósofos griegos, sugirieron que la materia esta hecha de partículas indivisibles a las que llamaron átomos, palabra griega que significa indivisible. Posteriormente se aclaró que los átomos, tales como fueron concebidos en su tiempo no son indivisibles. La existencia de espectros atómicos característicos indicó que los átomos tienen estructura. Posteriormente se fueron acumulando tanto ideas como pruebas experimentales acerca de la composición de la materia hasta llegar a lo que hoy llamamos Modelo Estándar (ME), un modelo aunque a pesar de ser muy exitoso, ya que ha sido muy preciso en numerosos resultados experimentales, no esta completo. Actualmente sabemos que el ME no puede ser una teoría final que describa a la materia y sus interacciones ya que, por ejemplo, no incluye a las cuatro fuerzas fundamentales (gravitación, electromagnética, débil y fuerte) de la naturaleza, faltando en ella la fuerza de gravedad, ni explica la masa de los neutrinos. Por ende, es inevitable estudiar modelos extendidos.

2.1. Modelo Estándar

El ME es una teoría cuántica de campos que esta basada en el grupo de simetría $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, la cual integra a la cromodinámica cuántica, desarrollada por Murray Gell-Mann y la teoría de Weinberg-Salam para interacciones electrodébiles.

Esta teoría describe la interacción mediante el intercambio de los correspondientes bosones mediadores de espín 1 (8 gluones y el fotón) y los bosones masivos (W^\pm y Z) para la interacción fuerte, electromagnética y débil respectivamente. Además de los mediadores de las interacciones, se tiene a las partículas que constituyen a la materia, tenemos a los quarks (up, down, strange, charm, bottom y top), los leptones (electrón, tau, muón, neutrino del electrón, neutrino del tau y neutrino del muón) y sus respectivas antipartículas. Los quarks aparecen en tres estados de color (rojo, azul y verde). La simetría de norma está espontáneamente rota requiriendo la introducción de un campo escalar, por lo cual algunas partículas adquieren masa, agregando nuestro última partícula fundamental el Higgs.

El Lagrangiano del ME esta descrito por:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_{HB} + \mathcal{L}_{Hf}, \quad (2.1)$$

donde

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a \cdot W_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} \cdot B^{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

Este describe la parte de la energía cinética y su auto-interacción de los bosones W^\pm, Z y γ . El segundo término

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_L = & \bar{L}\gamma^\mu(i\partial_\mu - g\frac{1}{2}\tau \cdot W_\mu - g'\frac{Y}{2}B_\mu)L \\ & + \bar{R}\gamma^\mu(i\partial_\mu - g'\frac{Y}{2}B_\mu)R, \end{aligned} \quad (2.3)$$

es la energía cinética de los leptones y quarks como también su interacción con los bosones de norma $W_\mu^{(1,2,3)}$ y B_μ . Por último los Lagrangianos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{HB} = & | (i\partial_\mu - g\frac{1}{2}\tau \cdot W_\mu - g'\frac{Y}{2}B_\mu)\phi |^2 - V(\phi), \\ \mathcal{L}_{Hf} = & - (G_1\bar{L}\phi R + G_2\bar{L}\phi_C R + h.c.), \end{aligned}$$

representan respectivamente el Lagrangiano de Higgs (de dicho Lagrangiano se extraen los términos que dan masa a los bosones W^\pm y Z) y el segundo Lagrangiano es el llamado Lagrangiano de Yukawa y provee las masas de los leptones y quarks a través de los acoplamientos con el bosón de Higgs [6, 7].

Teoría electrodébil

La interacción de los neutrinos esta descrita por la teoría electrodébil, la cual está basada en el grupo de simetría $SU(2) \otimes U(1)$, una de las principales características de esta teoría es que distingue entre estados de helicidad para leptones y quarks. El Lagrangiano (2.3) para la parte leptónica, donde $Y = -1$ para la primera componente y $Y = -1/2$ para la segunda componente que es la hipercarga, esta dado por:

$$\mathcal{L} = (\bar{\nu}_i \bar{l}_i)_L i \gamma^\mu (\partial_\mu + \frac{ig}{2} \vec{W}_\mu \cdot \vec{\tau} - \frac{ig'}{2} B_\mu)_L \begin{pmatrix} \nu_i \\ l_i \end{pmatrix}_L + \bar{l}_{iR} i (\partial_\mu - ig' B_\mu) l_{iR}, \quad (2.4)$$

donde $l = e, \tau, \mu$. La derivada covariante es:

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig}{2} \vec{W}_\mu \cdot \vec{\tau} - \frac{ig'}{2} B_\mu. \quad (2.5)$$

La componente izquierda se transforma como dobletes de isospín débil

$$\psi_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} : 2, \quad (2.6)$$

y la componente derecha se transforma como un singlete

$$\psi_R = l_R : \mathbf{1}.$$

Los leptones están agrupados en tres familias, la primera familia para los leptones es:

$$\begin{pmatrix} \nu_{e,L} \\ e_L \end{pmatrix} e_R,$$

segunda familia

$$\begin{pmatrix} \nu_{\mu,L} \\ \mu_L \end{pmatrix} \mu_R,$$

tercera familia

$$\begin{pmatrix} \nu_{\tau,L} \\ \tau_L \end{pmatrix} \tau_R,$$

donde ν_{iL} no tiene ni carga eléctrica, ni masa. Debido al teorema de Noether que establece que cualquier simetría tiene su correspondiente ley de conservación, en particular, para la simetría de $SU(2)_L$ está asociada a la conservación del isospín débil, T . La cantidad conservada para el grupo de simetría $U(1)_Y$

es la hipercarga, Y , la cual se relaciona con la carga eléctrica, Q , y con la tercera componente del isospín, T_3 , mediante la relación de Gell-Mann-Nishijima:

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}I. \quad (2.7)$$

Partículas mediadoras

A partir de los campos de norma electrodébil, el campo de los bosones cargados W_μ^\pm están definidas como

$$W_\mu^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \quad (2.8)$$

mientras que el bosón masivo neutro Z está dado por

$$Z_\mu \equiv \frac{gW_\mu^3 - g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad (2.9)$$

con masas M_W y M_Z respectivamente. Para el caso del fotón se tiene

$$A_\mu \equiv \frac{g'W_\mu^3 + gB_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (2.10)$$

Es usual definir al ángulo de Wienberg θ_W como

$$\theta_W = \frac{g'}{g}.$$

A fin de llevar a cabo los cálculos necesarios en este trabajo, es conveniente mencionar que los propagadores de los bosones W^+ , W^- y Z^0 , en el espacio de los momentos y tomando en cuenta que se está considerando la norma unitaria son:

$$\frac{-i[g_{\mu\nu} - q_\nu q_\mu/m^2]}{q^2 - m^2}, \quad (2.11)$$

mientras el propagador del fotón es:

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}. \quad (2.12)$$

Helicidad

Todas las partículas que forman la materia tienen un momento angular intrínseco: el espín. La helicidad es la proyección del espín sobre el vector momento definida como

$$h = \vec{P} \cdot \vec{\Sigma}, \quad (2.13)$$

donde

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Para obtener los valores propios de la helicidad, consideramos la ecuación

$$\begin{pmatrix} \hat{P} \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \hat{P} \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}.$$

Por lo cual $\lambda = 1$ para ψ_+ donde coinciden el sentido de movimiento con el sentido de giro del espín, se denomina helicidad positiva y $\lambda = -1$ para ψ_- donde el sentido de movimiento y el sentido de giro del espín son contrarios se denomina helicidad negativa.

En el marco de la mecánica cuántica relativista, un modelo que distingue dos componentes espinoriales o campos izquierdos y derechos se conoce como teoría quiral. La quiralidad es la propiedad que nos permite distinguir por medio de transformaciones de Lorentz, las componentes espinoriales izquierdas y derechas según la dirección del espín.

La matriz γ^5 está definida como

$$i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

con esta matriz podemos definir los proyectores quiralidad

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma^5}{2}, \psi_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}. \quad (2.16)$$

Un campo de Dirac, ψ , puede expresarse como la suma de su proyección izquierda más la proyección derecha

$$\psi = \psi_L + \psi_R. \quad (2.17)$$

La consecuencia de la interacción débil distingue los estados de helicidad.

Regla de Feynman $WW\gamma$

Para encontrar la regla de Feynman del vértice $WW\gamma$, partimos del Lagrangiano \mathcal{L}_B dado por (2.2), se extraen los términos de auto-interacción triple

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WW\gamma} = & -igc_W(W_{\mu\nu}^-W^{+\mu}Z^\nu - W^{-\mu}W_{\mu\nu}Z^\nu + W_\mu^-W_\nu^+Z^{\mu\nu}) \\ & +igs_W(W_{\mu\nu}^-W^{+\mu}A^\nu - W^{-\mu}W_{\mu\nu}A^\nu + W_\mu^-W_\nu^+F^{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde $c_W = \cos\theta_W$, $s_W = \sin\theta_W$ y

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu} &= (\partial_\mu W^\nu - \partial_\nu W^\mu), \\ F^{\mu\nu} &= (\partial_\mu A^\nu - \partial_\nu A^\mu), \\ Z^{\mu\nu} &= (\partial_\mu Z^\nu - \partial_\nu Z^\mu). \end{aligned}$$

Nos centraremos únicamente en el segundo término de la Ec. (2.18), el cual tiene los campos del vértice deseado. El primer paso consiste en ir del espacio de coordenadas al espacio de momentos. Reacomodamos los términos de manera que los tensores de segundo rango involucrados este a la derecha de la ecuación y sustituimos las expresiones explícitas de $W^{\mu\nu}$ y $F^{\mu\nu}$ para obtener

$$ig_\gamma[A_\mu W_-^\nu(\partial^\mu W^{+\nu} - \partial^\nu W^{+\mu}) - A_\mu W_+^\nu(\partial^\mu W^{-\nu} - \partial^\nu W^{-\mu}) + W_\mu^- W_\nu^+(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)],$$

donde

$$g_\gamma = gs_W.$$

Posteriormente recurrimos a las propiedades del tensor métrico para "subir" y "bajar" índices:

$$\begin{aligned} P^\alpha &= g^{\alpha\beta} P_\beta, \\ V^\mu &= \delta_\nu^\mu V_\nu. \end{aligned}$$

Obteniendo

$$\begin{aligned} ig_\gamma(\delta_\mu^\nu V_\nu[\delta_\nu^\beta W_\beta^- (\partial^\mu g^{\nu\alpha} W_\alpha^+ - \partial^\nu g^{\mu\alpha}) - \delta_\nu^\alpha W_\alpha^+ (\partial^\mu g^{\nu\beta} W_\beta^- - \partial^\nu g^{\mu\beta})] \\ - \delta_\mu^\beta W_\beta^- \delta_\nu^\alpha W_\alpha^+ (\partial^\mu g^{\nu\eta} A_\eta - \partial^\nu g^{\mu\eta} A_\eta)), \end{aligned}$$

realizando las operaciones correspondientes con el álgebra de Dirac para tener los términos $W_\alpha^+ W_\beta^- A_\eta$ del lado derecho y factorizamos

$$ig_\gamma[(\partial_+^\eta g^{\alpha\beta} - \partial_+^\beta g^{\alpha\eta}) - (\partial_-^\eta g^{\alpha\beta} - \partial_-^\beta g^{\alpha\eta}) - (\partial_0^\beta g^{\alpha\eta} - \partial_0^\alpha g^{\beta\eta})]W_\alpha^+ W_\beta^- A_\eta,$$

por último, cambiamos del espacio de configuración al espacio de momento, $\partial_\mu \rightarrow -ip_\mu$, obteniendo la regla de Feynman para el acoplamiento $WW\gamma$

$$ig_\gamma[(p_{+\eta}g_{\alpha\beta} - p_{+\beta}g_{\alpha\eta}) - (p_{-\eta}g_{\alpha\beta} - p_{-\alpha}g_{\beta\eta}) - (p_{0\beta}g_{\alpha\eta} - p_{0\alpha}g_{\beta\eta})], \quad (2.19)$$

con p_+ el momento del W^+ asignándole el índice α , p_- el momento del W^- con índice β y p_0 el del fotón con η . Los 3 momentos resultan ser entrantes.

Capítulo 3

Neutrinos

Al final del siglo XIX se descubrió la radioactividad, donde núcleos pesados se desintegraban emitiendo 3 tipos de partículas: α , β , γ . Siendo α los fotones, β un electrón que sale del nucleo radiactivo y γ núcleos de helio. Uno de estos procesos es precisamente el proceso β un decaimiento que se creía de dos cuerpos en donde un protón inicial decaía en un neutrón y emitía un electrón. Pero algo andaba mal, pues debido al principio de conservación de la energía, la energía antes y después de un proceso debe ser la misma. Sin embargo, esto no observaba al grado que los físicos se empezaron a preguntar si realmente era válido el principio de conservación de la energía. En un intento desesperado para rescatar el principio de conservación de la energía, en 1930, W. Pauli propuso la existencia de otra partícula, ésta tenía que tener características muy especiales, ante todo tenía que tener masa muy pequeña o definitivamente nula, Fermi propuso llamar a esta partícula neutrino.

La teoría que propuso Fermi para describir el decaimiento beta y que involucraba a esta nueva partícula no era de gran gusto para los físicos ni siquiera para el mismo Fermi. Esta nueva partícula era indetectable porque era neutra, extremadamente ligera y sin interacción fuerte. Sin embargo, actualmente, se ha podido comprobar la existencia de dicha partícula.

De acuerdo al ME, los leptones se encuentran agrupados en tres familias, es por ello que tiene tres sabores. Cada familia se caracteriza por los números leptónicos individuales L_α (número del electrón L_e , número del muón L_μ , número del taón L_τ) de modo que

$$L_\alpha(\nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \quad (3.1)$$

$$L_\alpha(\bar{\nu}_\beta) = -\delta_{\alpha\beta}. \quad (3.2)$$

Cabe mencionar que el campo del neutrino libre esta descrito por la Ec. de Dirac, sin el término de masa ya que este rompe la invariancia quiral. Así pues, el número leptónico para neutrinos debido a la masa y a la oscilación de los mismos, ya no se satisface de manera individual, pero se propone que se satisfaga de manera global.

3.1. Detección de neutrinos

A pesar de que los neutrinos son una de las partículas más numerosas es muy difícil de detectarlos, es por ello que los detectores tienen que tomar datos durante tiempos muy largos o crear detectores extremadamente grandes para poder detectar unas cuantas de ellas. Esto debido a que los neutrinos interactúan con la materia únicamente a través de la interacción débil.

Se han podido detectar neutrinos en la tierra en diferentes experimentos con diferentes energías. Los experimentos se pueden clasificar en la siguiente forma:

- *Neutrinos atmosféricos*: Son producidos en cascadas iniciadas por colisiones de rayos cósmicos con la atmósfera de la tierra. Algunos mesones, mayoritariamente piones y algunos kaones decaen en neutrinos del electrón, muónicos y anti-neutrinos. Los neutrinos de tipo electrón son mayoritariamente producidos por el decaimiento $\pi \rightarrow \mu\nu_\mu$ y luego por $\mu \rightarrow e\bar{\nu}_e\nu_\mu$
- *Neutrinos solares*: Son neutrinos de tipo electrón (ν_e) producidos por las reacciones termonucleares que generan la energía solar. Estas reacciones ocurren en dos cadenas principales: la cadena pp y el ciclo CNO. Ambas cadenas tienen respectivas reacciones en las cuales se producen ν_e ; ambas convergen en la fusión de protones en 4He $4p \rightarrow \text{He}^4 + 2e + 2\nu_e + \gamma$.
- *Neutrinos en reactores*: Por ejemplo, en el decaimiento de π^+ , producidos por el choque del haz de protones de 800 MeV con un blanco de agua, luego se producen piones cargados π^+ ; los cuales son detenidos en otro blanco decayendo en muones, éstos a su vez decaen en reposo en neutrinos.

3.2. Neutrinos masivos

Las masas de los neutrinos de Dirac pueden ser generadas mediante el mecanismo de Higgs, como el que le da masa a los quarks y a los leptones en el ME. Una extensión del ME que es necesario es introducir son las componentes derechas $\nu_{\alpha r}$ de los campos para los neutrinos ($\alpha = e, \mu, \tau$). En la mínima extensión del Modelo Estándar con tres campos de neutrinos derechos, el Lagrangiano de Yukawa es:

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} Y_{\alpha\beta}^{\ell} L_{\alpha L}^- \Phi \ell'_{\beta R} - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} Y_{\alpha\beta}^{\nu} L_{\alpha L}^- \tilde{\Phi} \nu'_{\beta R} + h.c. \quad (3.3)$$

donde Y^{ℓ} es a una nueva matriz compleja de Yukawa. El Lagrangiano unitaria de norma de Yukawa puede escribirse en forma matricial como

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \left(\frac{v + H}{\sqrt{2}} \right) (\bar{l}'_L Y^{\ell} l'_R + \bar{\nu}'_L Y^{\nu} \nu'_R) + h.c. \quad (3.4)$$

La nueva columna del neutrino derecho esta dada por:

$$\nu'_R = \begin{pmatrix} \nu'_{eR} \\ \nu'_{\mu R} \\ \nu'_{\tau R} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

La matriz Y^{ℓ} del leptón cargado de Yukawa puede diagonalizarse y la matriz Y^{ν} de neutrino de Yukawa puede diagonalizarse de manera similar

$$\begin{aligned} Y^{\nu} &= V_L^{\nu+} Y^{\nu} V_R^{\nu}, \\ Y_{kj}^{\nu} &= y_k^{\nu} \delta_{kj}, \\ &(k, j = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (3.6)$$

con y_k^{ν} real y positivo donde V_L^{ν} y V_R^{ν} son 2 matrices unitarias de 3×3 ($V_L^{\nu+} = (V_L^{\nu})^{-1}$ y $V_R^{\nu+} = (V_R^{\nu})^{-1}$) definimos las columnas de los leptones masivos cargados quirales y las comunas de los neutrinos quirales masivos

$$n_L = V_L^{l+} \nu'_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \\ \nu_{3L} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

$$n_R = V_R^{l+} \nu'_R = \begin{pmatrix} \nu_{1R} \\ \nu_{2R} \\ \nu_{3R} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

La diagonalización del Lagrangiano de Yukawa se puede leer como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{H,L} &= - \left(\frac{v+H}{\sqrt{2}} \right) (\bar{l}_L Y^l l_R + \bar{n}_L Y^\nu n_R) + h.c. \\ &= - \left(\frac{v+H}{\sqrt{2}} \right) \left(\sum_{\alpha=e,\mu,\tau} y_\alpha^l \bar{\ell}_{\alpha L} \ell_{\alpha R} + \sum_{k=1}^3 y_k^\nu \bar{\nu}_{kL} \nu_{kR} \right) + h.c.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Usando los campos cargados de Dirac de los leptones y los campos de los neutrinos de Dirac

$$\nu_k \equiv \nu_{kL} + \nu_{kR}, \quad (k = 1, 2, 3). \quad (3.10)$$

Finalmente tenemos la forma siguiente:

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \frac{y_\alpha^l v}{\sqrt{2}} \bar{l}_\alpha l_\alpha - \sum_{k=1}^3 \frac{y_k^\nu v}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_k \nu_k - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \frac{y_\alpha^l}{\sqrt{2}} \bar{l}_\alpha l_\alpha H - \sum_{k=1}^3 \frac{y_k^\nu v}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_k \nu_k H,$$

por lo tanto la masa de los neutrinos esta dada por:

$$m_k = \frac{y_k^\nu v}{\sqrt{2}}, \quad (k = 1, 2, 3).$$

3.3. Oscilación de neutrinos

Las oscilaciones de neutrinos $\nu_\alpha \rightleftharpoons \nu_\beta$ son transiciones periódicas de sabor las cuales implican que las diferencias de masas $m_{\nu_\alpha} - m_{\nu_\beta}$ no son todos cero y que números leptónicos no son conservados. Los autoestados de sabor $L_\alpha|\alpha\rangle$ no son autoestados del operador masa M sino que son superposiciones lineales de autoestados de masa lineales no degenerados $|\nu_i\rangle$ con

$$\langle \nu_i | M | \nu_j \rangle = m_i \delta_{ij}. \quad (3.11)$$

Los autoestados de sabor $(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$ y los autoestados de masa o autoestados físicos (ν_1, ν_2, ν_3) son relacionados por una transformación unitaria U llamada matriz de mezcla, la cual es análoga a la matriz de Cabbibo-Kobayashi-Maskawa, lo cual implica que al menos uno de los neutrinos tiene masa a diferencia del ME donde se describe a los neutrinos sin masa.

La matriz de mezcla U es unitaria, esto para garantizar valores correctos en el cálculo de la probabilidad de transición

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1. \quad (3.12)$$

Para el caso de las oscilaciones en el vacío, podemos escribir cualquier estado de sabor en general como

$$|\nu_l\rangle = \sum_j U_{lj} |\nu_j\rangle, \quad (3.13)$$

y

$$|\nu_i\rangle = \sum_l U_{il}^\dagger |\nu_l\rangle, \quad (3.14)$$

donde j corre sobre todos los estados propios de masa y l indica el estado de sabor.

Los neutrinos son partículas relativistas, los estados de los neutrinos masivos ν_i son autoestados de las masas m_i tienen el mismo momento p , pero diferentes energías

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \approx p + \frac{1}{2} \frac{m_i^2}{p} \approx E + \frac{1}{2} \frac{m_i^2}{E}, \quad (3.15)$$

donde $E = p$ es la energía de un neutrino sin masa y cuya aproximación es válida para neutrinos relativistas.

Si se crea un haz de neutrinos al tiempo $t = 0$, su evolución esta gobernada por la siguiente ecuación

$$|\nu_l(t)\rangle = \sum_\alpha e^{-iE_\alpha t} U_{l\alpha} |\nu_\alpha\rangle. \quad (3.16)$$

La probabilidad de encontrar el estado de sabor ν_l en este estado está dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_l\nu_l}(t) &= |\langle \nu_l | \nu_l(t) \rangle|^2 \\ &= \sum_{\alpha,\beta} |U_{l\alpha} U_{l\alpha}^* U_{l\beta}^* U_{l\beta}| \times \cos[(E_\alpha - E_\beta)t - \varphi_{l\alpha\beta}], \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde

$$\varphi_{l\alpha\beta} = \arg(U_{l\alpha} U_{l\alpha}^* U_{l\beta}^* U_{l\beta}).$$

Usando la aproximación $E_\alpha \gg m_\alpha$ como antes, podemos usar la Ec. (3.16) para escribir

$$\mathcal{P}_{\nu_l\nu_l}(t) = \sum_{\alpha,\beta} |U_{l\alpha} U_{l\alpha}^* U_{l\beta}^* U_{l\beta}| \times \cos\left[\frac{\Delta_{\alpha\beta}}{2E} x - \varphi_{l\alpha\beta}\right], \quad (3.18)$$

donde

$$\Delta_{\alpha\beta} = m_{\alpha}^2 - m_{\beta}^2. \quad (3.19)$$

La probabilidad de oscilación depende de dos parámetros, el ángulo de mezcla y la longitud de oscilación.

3.3.1. Caso de dos y tres neutrino

La matriz de mezcla para el caso de dos sabores es

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

por tanto, los estados de sabor ν_e y ν_l en combinación de los estados de masa son

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \cos \theta |\nu_1\rangle + \sin \theta |\nu_2\rangle, \\ |\nu_l\rangle &= -\sin \theta |\nu_1\rangle + \cos \theta |\nu_2\rangle, \end{aligned}$$

para los estados de masa

$$\begin{aligned} |\nu_1\rangle &= \cos \theta |\nu_e\rangle - \sin \theta |\nu_l\rangle, \\ |\nu_2\rangle &= \sin \theta |\nu_e\rangle + \cos \theta |\nu_l\rangle, \end{aligned}$$

donde las probabilidades de conversión son

$$\mathcal{P}_{\nu_e\nu_e}(t) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta E}{2}t\right), \quad (3.21)$$

$$\mathcal{P}_{\nu_e\nu_l}(t) = \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta E}{2}t\right), \quad (3.22)$$

dado que las probabilidades están normalizadas $\mathcal{P}_{\nu_e\nu_e}(t) + \mathcal{P}_{\nu_e\nu_l}(t) = 1$. También las podemos obtener las probabilidades en el espacio

$$\mathcal{P}_{\nu_e\nu_e}(t) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad (3.23)$$

$$\mathcal{P}_{\nu_e\nu_l}(t) = \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad (3.24)$$

donde L es la longitud de oscilación.

Para tres generaciones se tiene

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

donde la matriz U_{PMNS} se conoce como la matriz Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata. A diferencia del caso de dos generaciones donde $P_{\nu e \nu e} \gg \frac{1}{2}$, aquí podemos tener a $P_{\nu e \nu e}$ tan bajo como $\frac{1}{3}$. Esto puede ser consistente con las probabilidades de 2σ que se encuentran en los experimentos Homestake y Kamiokande [8].

Capítulo 4

Violación de Lorentz

4.1. Covarianza de Lorentz

Si tenemos coordenadas (x^ν) en el marco de referencia R , estas se pueden relacionar con coordenadas en el marco de referencia R' , denotadas con coordenadas x'^ν siempre y cuando R y R' se muevan relativamente a velocidad constante en estado de movimiento rectilíneo uniforme, matemáticamente se expresa

$$(x')^\nu = \sum_{\mu=0}^3 a_\mu^\nu x^\mu, \quad (4.1)$$

para que la métrica sea invariante pasa que

$$(dx')^\mu (dx')_\mu = dx^\mu dx_\mu,$$

por lo tanto

$$a_\nu^\mu a_\mu^\alpha = \delta_\nu^\alpha. \quad (4.2)$$

La ecuación (4.2) define la condición de ortogonalidad, esto implica que

$$[\det(a_\nu^\mu)]^2 = 1,$$

ó

$$\det(a_\nu^\mu) = \pm 1. \quad (4.3)$$

Observemos que el tensor a_ν^μ es muy diferente a la representación matricial (a_ν^μ) , las matrices con determinante +1 definen las transformaciones propias de Lorentz, por ende, las matrices con determinante -1 son las impropias. Las transformaciones propias de Lorentz se pueden obtener a partir de la

identidad, quien tiene como determinante 1, por lo que aplicaciones sucesivas de una transformación infinitesimal propia me lleva de forma continua a una transformación finita.

El teorema *CPT* establece que en toda teoría cuántica de campos local que presente covariancia de Lorentz y esté definida a través de un Hamiltoniano hermítico, es invariante bajo una transformación de *CPT*. Entre las transformaciones continuas están las translaciones, rotaciones y los boost; y en las transformaciones discretas están la paridad, la conjugación de carga y la inversión temporal.

- La paridad es una transformación discreta que invierte las coordenadas espaciales, denotada por la letra P

$$P\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r}). \quad (4.4)$$

P es un operador unitario, por lo que los valores propios sólo pueden ser $+1$ ó -1 , si el hamiltoniano de un sistema conmuta con el operador P , la paridad del sistema se conserva. Cada partícula elemental tiene asociada una paridad intrínseca. La paridad se conserva rigurosamente en las interacciones fuertes y electromagnética, pero no en las débiles.

- La operación conjugación de carga C invierte el signo de la carga eléctrica y del momento magnético de la partícula dejando el resto de coordenadas iguales, lo cual implica el intercambio de partícula por anti-partícula. Las interacciones fuertes y electromagnéticas son invariantes bajo C pero no las débiles.
- El operador inversión temporal T transforma un estado $|\psi(t)\rangle$ en $|\psi(-t)\rangle$. Si T es una buena simetría para cada proceso existe el proceso idéntico invertido temporalmente (principio de microreversibilidad), En las interacciones fuertes T es una buena simetría

4.2. Modelo Estándar Extendido

Uno de los principales pilares en los que se base el MS es sin duda la invariancia de Lorentz y *CPT*, entonces, ¿por qué violar la simetría *CPT* y/o Lorentz? Esto por el hecho de que recientes trabajos experimentales, en particular pruebas de alta precisión utilizando interferometría de kaón-neutro[9],

sugieren que las simetrías CPT y Lorentz no son totalmente exactas en la naturaleza, otra motivación es la esperanza de que posibles predicciones puedan servir como potencial de una señal a nivel de Planck.

Los mecanismo que dan como resultado que no se cumpla la simetría de CPT están basados en teorías unificadas a la escala de Planck en donde se puede causar una violación espontánea de CPT con la consiguiente rotura de la simetría de Lorentz parcial. El marco a utilizar es la Extensión al Modelo Estándar Mínimo $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ incluyendo condiciones de CPT -par y CPT -impar, de hecho, la violación de Lorentz/ CPT se puede escribir de manera independiente del modelo usando una teoría de campo efectiva. Además de las características deseables de la conservación del momento-energía, invariancia observador de Lorentz, cuantización convencional, hermiticidad, la microcausalidad y la obtención energías positivas, esta extensión del modelo estándar mantiene la invariancia de norma y la renormalizabilidad.

Nuestra finalidad es analizar el efecto que se induce cuando estas simetrías no se satisfacen en el momento dipolar eléctrico y magnético de los neutrinos. Para lograr esto extendemos el Modelo Estándar Mínimo añadiendo los términos que violan Lorentz los cuales podrían surgir de la ruptura espontánea de la simetría a una pero que preservan $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$, obteniendo en nuestro nuevo Lagrangiano

$$\mathcal{L}_{LV} = \mathcal{L}_{SM} + \mathcal{L}_N, \quad (4.5)$$

donde \mathcal{L}_{SM} es el Lagrangiano del MS y \mathcal{L}_N es el Lagrangiano que contiene los términos que violan CPT . En el sector fermiónico de la extensión del Modelo Estándar, la contribución al Lagrangiano se puede dividir en cuatro partes, si el término es CPT -par o CPT -impar; incluso si se trata de leptones o quarks

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{lepton}^{CPT-par} = & -\frac{1}{2}H_{\mu\nu}\bar{l}_A\sigma^{\mu\nu}l_B + i\frac{1}{2}C_{\mu\nu AB}\bar{l}_A\gamma^\mu\vec{D}_{\mu\nu}l_B \\ & + i\frac{1}{2}d_{\mu\nu AB}\bar{l}_A\gamma^5\gamma^\mu\vec{D}_{\mu\nu}l_B, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\mathcal{L}_{lepton}^{CPT-impar} = -(a_l)_{\mu AB}\bar{l}_A\gamma^\mu l_B - (b_l)_{\mu AB}\bar{l}_A\gamma^5\gamma^\mu l_B, \quad (4.7)$$

con

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu. \quad (4.8)$$

Los coeficientes $(a_l)_{\mu\nu AB}$ y $(b_l)_{\mu\nu AB}$ en la Ec. (4.7) son hermíticos y con dimensiones de masa, los coeficientes $(H_l)_{\mu\nu AB}$ son antisimétricos en los índices de espacio tiempo y tienen dimensiones de masa, y por último los coeficientes $(c_l)_{\mu\nu AB}$ y $(d_l)_{\mu\nu AB}$ son hermíticos y adimensionales[12].

Propagador leptónico en el MEM con violación CPT

Para calcular el propagador leptónico en el Modelo Estándar mínimamente extendido con violación de Lorentz (LV) partimos del Lagrangiano dado por:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + a_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + b_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi, \quad (4.9)$$

el cual está compuesto por el lagrangiano de Dirac más los 2 únicos términos que violan la simetría de Lorentz pero que preservan $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Aplicando la siguiente ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = 0, \quad (4.10)$$

al Lagrangiano (4.9) obtenemos las derivadas parciales

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi + a_\mu\gamma^\mu\psi + b_\mu\gamma^\mu\gamma_5\psi. \quad (4.12)$$

Al sustituir (4.11) y (4.12) en la ecuación (4.10) obtenemos la siguiente ecuación de movimiento

$$(i\not{\partial} + \not{a} + \not{b}\gamma_5 - m)\psi = 0, \quad (4.13)$$

que es la ecuación modificada de Dirac. Observe que se ha usado la definición $\not{p} \equiv p_\mu\gamma^\mu$.

Ahora hay que encontrar el operador inverso de la ecuación (4.13) y cambiar del espacio de coordenadas al espacio de momentos, que se logra intercambiando $i\not{\partial} \rightarrow \not{k}$, y por último multiplicarlo por una i global, obteniendo finalmente

$$\frac{i}{\not{k} + \not{a} + \not{b}\gamma_5 - m}. \quad (4.14)$$

Análogamente al caso del propagador fermiónico convencional del Modelo Estándar hay que llevar este término a una mejor forma

$$\frac{i}{\not{k} - m} \rightarrow \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2}, \quad (4.15)$$

por tanto, para logra esto hay que multiplicar por:

$$\frac{(\not{k} + \not{a} + \not{b}\gamma_5 + m)(\not{k} + \not{a} - \not{b}\gamma_5 + m)(\not{k} + \not{a} + \not{b}\gamma_5 - m)}{(\not{k} + \not{a} + \not{b}\gamma_5 + m)(\not{k} + \not{a} - \not{b}\gamma_5 + m)(\not{k} + \not{a} + \not{b}\gamma_5 - m)}, \quad (4.16)$$

en contraste con el propagador usual que se multiplicaba por $(\not{k}+m)/(\not{k}+m)$, sin embargo, este término será un poco más complicado por lo cual primero multiplicamos y dividiendo por $(\not{k}+\not{a}+\not{b}\gamma_5+m)$ a la ecuación (4.14) realizando las operaciones correspondientes nos da como resultado

$$\frac{i(\not{k} + \not{a} + \not{b}\gamma_5 + m)}{((k+a)^2 - m^2 - b^2) + 2[(\not{k} + \not{a})\not{b} - b \cdot (\not{k} + \not{a})]\gamma_5}, \quad (4.17)$$

observemos que

$$\begin{aligned} (\not{k} + \not{a})^2 &= (k+a)^2, \\ \{\gamma^5, \gamma^\mu\} &= 0, \\ (\gamma^5)^2 &= 1, \\ \not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} &= 2a \cdot b. \end{aligned}$$

Por último, volvemos a multiplicar y dividir ahora por $((k+a)^2 - m^2 - b^2) - 2[(\not{k} + \not{a})\not{b} - (k+a) \cdot b]\gamma_5$ a la ecuación (4.17). Realizando todas las operaciones pertinentes obtenemos finalmente el propagador

$$S = \frac{i(\not{k} + \not{b}\gamma_5 + \not{a} + m)[(k+a)^2 - m^2 - b^2 - 2((\not{k} + \not{a})\not{b} - (k+a) \cdot b)\gamma_5]}{[(k+a)^2 - m^2 - b^2]^2 + 4(b^2(k+a)^2 - (b \cdot (k+a))^2)}.$$

Reglas de Feynman

1. Líneas externas

Las partículas fermiónicas, sus antipartículas y los fotones entrantes se denotan por u, \bar{v} y ϵ^μ respectivamente mientras que sus partículas salientes se denotan \bar{u}, v y $\epsilon^{\mu*}$.

2. Propagadores

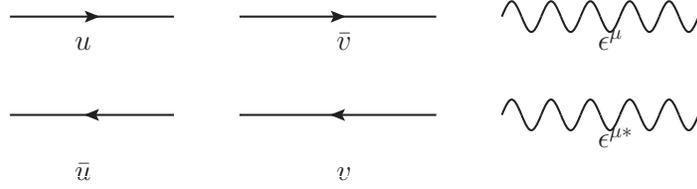


Figura 4.1:

a) Propagador del fermión u

$$S = \frac{i(\not{k} + b\gamma^5 + \not{a} + m)[(k+a)^2 - m^2 - b^2 - 2\{(\not{k} + \not{a})\not{b} - (k+a) \cdot b\}\gamma^5]}{((k+a)^2 - m^2 - b^2)^2 + 4[b^2(k+a)^2 - (b \cdot (k+a))^2]},$$

sin embargo, un caso particular es cuando tenemos $b = 0$ y $a \neq 0$ donde el propagador resulta ser

$$S = \frac{i(\not{k} + \not{a} + m)}{(k+a)^2 - m^2},$$

pero si $a = 0$ y $b \neq 0$ el propagador es:

$$S = \frac{i(\not{k} + b\gamma^5 + m)[k^2 - m^2 - b^2 - 2\{(\not{k})\not{b} - (k \cdot b)\}\gamma^5]}{(k^2 - m^2 - b^2)^2 + 4[b^2k^2 - (b \cdot k)^2]}.$$

b) Propagador del fotón

$$S = -\frac{ig^{\mu\nu}}{q^2}.$$

c) Propagador del bosón W^+ , W^- ó Z^0

$$S = \frac{i(-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M_m^2})}{k^2 - M_m^2}.$$

3. Ley de conservación

Se conserva el momento en cada vértice.

4. Integración

Por cada loop, hay que introducir un factor

$$\int \frac{d^D K}{(2\pi)^D},$$

donde D =dimensión.

5. Vértices

a) El factor de acoplamiento del vértice $ll\gamma$ es:



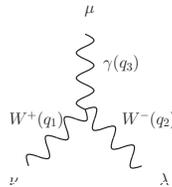
donde $-e$ es la carga del electrón.

b) Factor de acoplamiento del vértice $l\nu W$ es:



donde V_{ik} y A_{ik} son matrices unitarias.

c) Para el vértice $WW\gamma$ su factor de acoplamiento viene dado por:



$$\Lambda_{\nu\lambda\mu} = ie[g_{\nu\lambda}(q_1 - q_2)_\mu + g_{\lambda\mu}(q_2 - q_3)_\nu + g_{\mu\nu}(q_3 - q_1)_\lambda], \quad (4.18)$$

donde se tomó todos los momentos como entrantes, si cambiamos el momento entrante por un saliente se debe cambiar también la partícula por su antipartícula.

Capítulo 5

Momento dipolar

Un dipolo eléctrico es un par de cargas puntuales de igual magnitud y signos opuestos separadas por una distancia d . Un dipolo puntual no tiene carga neta y se caracteriza por su **momento dipolar**, denotado por $\vec{P} = q\vec{d}$, que es límite cuando \vec{d} tiende a cero y la carga tiende a infinito, donde q es la carga y \vec{d} la distancia.

$$\vec{P} = q\vec{d}. \quad (5.1)$$

El potencial φ producido por un dipolo está dado por la siguiente ecuación

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (5.2)$$

donde \vec{r} es el vector de posición en el cual se calcula el potencial y \vec{r}' es la ubicación de la carga $-q$, por tanto, $\vec{d} + \vec{r}'$ es la ubicación de la carga $+q$. Al colocar un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo, la fuerza eléctrica ejercida sobre la carga positiva seguirá una dirección, y la ejercida sobre la carga negativa seguirá otra. El par de torsión del campo eléctrico realiza trabajo sobre él, donde la energía potencial de un dipolo \vec{P} en un campo eléctrico es:

$$U = -\vec{P} \cdot \vec{E}. \quad (5.3)$$

El momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ es la cantidad que determina la fuerza y la torsión que el campo magnético ejerce sobre las corrientes eléctricas. El cual está dado como

$$|\vec{\mu}| = JS, \quad (5.4)$$

donde S es el área encerrado por donde circula la carga q , $J = qf$ es la corriente con frecuencia f . Análogamente al caso de dipolo eléctrico al colocar

una partícula con un momento dipolar magnético en un campo magnético \vec{B} , la dirección del momento dipolar de la misma tenderá a orientarse en la dirección del campo magnético y la energía de interacción del dipolo magnético con el campo magnético es:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (5.5)$$

5.1. Partículas puntuales

En la teoría electrodinámica cuántica (QED por sus siglas en inglés, Quantum Electro Dynamics) se deduce el Lagrangiano QED dado por:

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}[(\gamma^\mu(i\partial_\mu + eA_\mu) - m)] + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2\xi}(\partial \cdot A). \quad (5.6)$$

Podemos observar que el Lagrangiano para QED está compuesto por tres Lagrangianos: el Lagrangiano de ψ como si fuera una partícula libre de Dirac, el Lagrangiano “libre” del fotón y un tercer Lagrangiano que toma en cuenta la interacción:

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi, \quad (5.7)$$

$$\mathcal{L}_\gamma = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2\xi}(\partial \cdot A), \quad (5.8)$$

$$\mathcal{L}_{int} = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \quad (5.9)$$

Observemos que (5.9) es la Lagrangiano que describe fermiones puntuales pero, ¿Cómo tratar partículas no puntuales (fermiónicas) en interacción electromagnética? para ello nos valemos del siguiente Lagrangiano efectivo de interacción

$$\mathcal{L}_{eff}^{int} = g\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\psi, \quad (5.10)$$

donde podemos observar que al realizar los productos de $\sigma_{\mu\nu}$ con $F^{\mu\nu}$ y $\sigma_{\mu\nu}$ con $\gamma^5 F^{\mu\nu}$ obtenemos:

$$\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2i\vec{B} \cdot \vec{\Sigma}, \quad (5.11)$$

$$\sigma_{\mu\nu}\gamma^5 F^{\mu\nu} = -2i\vec{E} \cdot \vec{\Sigma}. \quad (5.12)$$

Comparando (5.11) con la energía potencial de un dipolo magnético Ec.(5.5) podemos deducir que

$$\vec{\mu} \propto \vec{\Sigma}.$$

5.2. Estructura formal

En términos generales y de acuerdo a la estructura general de Lorentz, la amplitud queda determinada por factores de forma dada por:

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M} = & \bar{\nu}_j(p_2)(A_1 p_1^\mu + A_2 p_2^\mu + A'_1 p_1^\mu \gamma^5 + A'_2 p_2^\mu \gamma^5 + A_0 \gamma^\mu \\
 & + B_0 \gamma^\mu \gamma^5 + C \sigma^{\mu\nu} q_\nu + D \sigma^{\mu\nu} q_\nu \gamma^5) \nu_i(p_1) \cdot \epsilon_\mu^*, \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

donde $A_0, B_0, A_1, A_2, C, D, A'_1, A'_2$ son los factores de forma que en general dependen solo de q^2 , y

$$\begin{aligned}
 P &= p_1 + p_2, \\
 q &= p_1 - p_2.
 \end{aligned}$$

Despejando p_1 y p_2 , obtenemos

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{1}{2}(P + q), \\
 p_2 &= \frac{1}{2}(P - q).
 \end{aligned}$$

Con esto, la amplitud \mathcal{M} queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M} = & \bar{\nu}_j \left(\frac{1}{2} A_1 (P^\mu + q^\mu) + \frac{1}{2} A_2 (P^\mu - q^\mu) + A_0 \gamma^\mu + B_0 \gamma^\mu \gamma^5 \right. \\
 & \left. + C \sigma^{\mu\nu} q_\nu + D \sigma^{\mu\nu} q_\nu \gamma^5 \right) \nu_i \cdot \epsilon_\mu^*, \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

sin embargo, sabemos por transversalidad en el fotón que

$$\vec{k} \cdot \vec{\epsilon} = 0,$$

en la norma de Lorentz esta dada por:

$$q^\mu \epsilon_\mu = 0,$$

donde $q^\mu(w, \vec{k})$. Quedando la amplitud en forma más simple

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M} = & \bar{\nu}_j \left(\frac{1}{2} (A_1 + A_2) P^\mu + \frac{1}{2} (A'_1 + A'_2) P^\mu \gamma^5 + A_0 \gamma^\mu + B_0 \gamma^\mu \gamma^5 \right. \\
 & \left. + C \sigma^{\mu\nu} q_\nu + D \sigma^{\mu\nu} q_\nu \gamma^5 \right) \nu_i \cdot \epsilon_\mu^*. \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

Ahora, usando las identidades generalizadas de Gordon

$$\bar{\nu}_j(p')(p' + p)^\mu u_i(p) = \bar{\nu}_j(p')[(m_i + m_j)\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu]u_i(p), \quad (5.16)$$

$$\bar{\nu}_j(p')(p'^\mu + p^\mu)\gamma^5 u_i(p) = \bar{\nu}_j(p')[(m_i - m_j)\gamma^\mu\gamma^5 - i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu\gamma^5]u_i(p), \quad (5.17)$$

obtenemos

$$\bar{\nu}_j(p')\gamma^\mu u_i(p) = \bar{\nu}_j(p')\left[\frac{1}{2m}(p' + p)^\mu - i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu\right]u_i(p), \quad (5.18)$$

y sustituyendo en la ecuación (5.15)

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M} = & \bar{\nu}_j\left(\frac{1}{2}(A_1 + A_2)[(m_i + m_j)\gamma^\mu + i\sigma^{\mu\nu}q_\nu] + \frac{1}{2}(A'_1 + A'_2)\right. \\ & \times [(m_i - m_j)\gamma^\mu\gamma^5 - i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu\gamma^5] + A_0\gamma^\mu + B_0\gamma^\mu\gamma^5 \\ & \left. + C\sigma^{\mu\nu}q_\nu + D\sigma^{\mu\nu}q_\nu\gamma^5\right)\nu_i \cdot \epsilon_\mu^*, \end{aligned} \quad (5.19)$$

factorizando

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M} = & \bar{\nu}_j(p_2)\left(\left(\frac{1}{2}(A_1 + A_2)(m_i + m_j) + A_0\right)\gamma^\mu\right. \\ & + \left(\frac{1}{2}(A'_1 + A'_2)(m_i - m_j) + B_0\right)\gamma^\mu\gamma^5 \\ & + \left(\frac{i}{2}(A_1 + A_2) + C\right)\sigma^{\mu\nu} \\ & \left. + \left(\frac{i}{2}(A'_1 + A'_2) + D\right)q^\nu\sigma^{\mu\nu}\gamma^5\right)\nu_i(p_1). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Pero los neutrinos son neutros, por tanto se debe cumplir que los factores de forma correspondientes a la carga eléctrica se deben anular

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(A_1 + A_2)(m_i + m_j) + A_0 &= 0, \\ \frac{1}{2}(A'_1 + A'_2)(m_i - m_j) + B_0 &= 0. \end{aligned}$$

Así, la amplitud para nuestro caso queda determinada por:

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M} = & \bar{\nu}_j(p_2)\left(\left(\frac{1}{2}(A_1 + A_2) - iC\right)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{2}(A'_1 + A'_2) - iD\right)i\sigma^{\mu\nu}\gamma^5 q_\nu\right)\nu_i(p_1), \end{aligned} \quad (5.21)$$

de acuerdo a la estructura analizada previamente, podemos identificar al factor correspondiente al tensor $\sigma^{\mu\nu}$ como el momento dipolar magnético y al factor del tensor $\sigma^{\mu\nu}\gamma^5$ como al momento dipolar eléctrico, respectivamente. Finalmente, cabe señalar que la amplitud en la Ec.(5.21) es la estructura general, que toma de dos o más rizados, para el caso de neutrinos (a nivel de un rizo), los factores de forma C y D se anulan, pudiendo expresar la amplitud como

$$-i\mathcal{M} = \bar{\nu}_j(p_2)(F(q^2) + G(q^2)\gamma^5)\sigma^{\mu\nu}q_\nu\nu_i(p_1)\epsilon_\mu^*, \quad (5.22)$$

de donde se puede determinar el momento dipolar magnético, μ_{ν_i} , y eléctrico d_{ν_i} del neutrino tipo i respectivamente, cuando se tiene que $i = j$

$$\begin{aligned} \mu_{\nu_i} &= F(0), \\ d_{\nu_i} &= G(0). \end{aligned}$$

Capítulo 6

Cálculo de los momentos dipolares en MEM con LV

En este capítulo, expondremos el cálculo de las contribuciones al vértice $\nu_i\nu_j\gamma$, mediante las reglas mostradas anteriormente a nivel de un lazo. Para la primera aportación nos guiaremos de la Fig. 6.1, donde calculamos la amplitud en sentido contrario a la dirección de momento para las partículas virtuales, en esta caso fijamos el cuadrimomento k del leptón que será la variable a integrarse y mediante la conservación de momento en cada vértice obtenemos los momentos de los bosones W's, los cuales son $k - p_1$ y $k - p_2$.

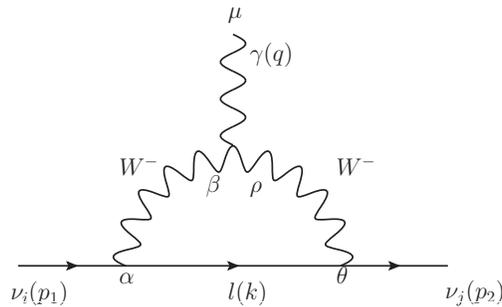


Figura 6.1: Primera contribución.

Debido a que el neutrino ν_i es la partícula entrante, el neutrino ν_j y el fotón son las partículas salientes son conocidos sus momentos: p_1 , p_2 y q respectivamente. Su relación queda determinada por:

$$q = p_1 - p_2.$$

Ahora podemos establecer las condiciones cinemáticas necesarias para el cálculo

$$\begin{aligned}
p_1^2 &= m_i^2, \\
p_2^2 &= m_j^2, \\
q^2 &= 0, \\
p_1 \cdot p_2 &= \frac{m_i^2 + m_j^2}{2},
\end{aligned} \tag{6.1}$$

donde m_i y m_j son las masas de los neutrinos. Nuestra finalidad es encontrar el momento magnético y eléctrico el cual se puede obtener a partir de la amplitud invariante, para nuestro primer diagrama está dada por:

$$-i\mathcal{M}_1 = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{u}_{\nu_j}(p_2)[-ie\Gamma_{\alpha 1}^\mu]u_{\nu_i}(p_1)\epsilon_\mu^*(q), \tag{6.2}$$

donde $\Gamma_{\alpha 1}^\mu$ es la contribución del primer loop

$$\begin{aligned}
-ie\Gamma_{\alpha 1}^\mu &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (ig_W\gamma^\theta(V_{j\alpha} + A_{j\alpha}\gamma^5)) \left(\frac{i(\not{k} + \not{a} + m_{l\alpha})}{(k+a)^2 - m_{l\alpha}^2} \right) \\
&\times (ig_W\gamma^\alpha(V_{i\alpha} + A_{i\alpha}\gamma^5)) \left(\frac{i(-g_{\alpha\beta} + \frac{1}{M_w^2}(k-p_1)_\alpha(k-p_1)_\beta)}{(k-p_1)^2 - M_w^2} \right) \\
&\times (-ie\Lambda^{\beta\rho\mu}) \left(\frac{i(-g_{\rho\theta} + \frac{1}{M_w^2}(k-p_2)_\rho(k-p_2)_\theta)}{(k-p_2)^2 - M_w^2} \right),
\end{aligned}$$

con

$$ie\Lambda^{\mu\rho\beta} = [g_{\beta\rho}(-2k + p_1 + p_2)_\mu + g_{\rho\mu}(k + p_1 - 2p_2)_\beta + g_{\mu\beta}(k - 2p_1 + p_2)_\rho],$$

para poder realizar esta integral es necesario expresar el vértice de mejor manera como:(en D -dimensiones)

$$-ie\Gamma_{\alpha 1}^\mu = \mu^{4-D}g_W^2e \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{F_1(k, P_1, P_2)}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}, \tag{6.3}$$

donde

$$\begin{aligned}
F_1 &= \gamma^\theta(V_{j\alpha} + A_{j\alpha}\gamma^5)(\not{k} + \not{a} + m_{l\alpha})\gamma^\alpha(V_{i\alpha} + A_{i\alpha}\gamma^5)(-g_{\alpha\beta} \\
&+ \frac{(k-p_1)_\alpha(k-p_1)_\beta}{M_W^2})(\Lambda^{\mu\rho\beta})(-g_{\rho\theta} + \frac{(k-p_2)_\rho(k-p_2)_\theta}{M_W^2}),
\end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= ((k+a)^2 - m_{l\alpha}), \\
\Delta_2 &= ((k-p_1)^2 - M_W^2), \\
\Delta_3 &= ((k-p_2)^2 - M_W^2).
\end{aligned}$$

Se ha introducido la constante con dimensiones de energía μ para mantener las mismas unidades en D dimensiones que en 4 dimensiones. Esta integral se puede calcular recurriendo a la parametrización de Feynman. Este método consiste en expresar el denominador de la siguiente forma

$$\frac{1}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3} = 2 \iiint_0^1 \frac{\delta(1-x-y-z)}{[x\Delta_1 + y\Delta_2 + z\Delta_3]^3}, \quad (6.5)$$

sustituyendo los valores de Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 en (6.5) y realizando las operaciones correspondientes podemos llevarla a la forma

$$\frac{1}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3} = 2 \iiint_0^1 \frac{\delta(1-x-y-z)}{[k^2 - 2P \cdot k - A^2]^3}, \quad (6.6)$$

donde

$$\begin{aligned}
P &= -ax + yp_1 + zp_2, \\
A_1^2 &= -xa^2 - ym_i^2 - zm_j^2 + xm_{ik}^2 - (y+z)M_w^2.
\end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (6.6) en (6.3) y haciendo el cambio de variable $k \rightarrow k + P$ (el cual es válido para integrales que convergen cuando se mantiene $D \neq 4$) podemos expresar el vértice como

$$\begin{aligned}
-ie\Gamma_{\alpha 1}^\mu &= 2\mu^{4-D} g_w^2 e \int_0^1 dx dy dz \delta(1-x-y-z) \\
&\times \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{F_1(k+P, p_1, p_2)}{[k^2 - M_1^2]^3}, \quad (6.7)
\end{aligned}$$

con

$$M_1^2 = P^2 + A_1^2. \quad (6.8)$$

Para facilitar los cálculos la integral triple la expresamos en una integral doble

$$-ie\Gamma_{\alpha 1}^\mu = 2\mu^{4-D} g_w^2 e \int_0^1 \int_0^{1-x} dx dy \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{F_1(k+P, p_1, p_2)}{[k^2 - M_1^2]^3}, \quad (6.9)$$

donde

$$g_W = \frac{g}{2\sqrt{2}}, \quad (6.10)$$

observe que la variable z a cambiado a $1 - x - y$.

Se realizará algo análogo para la segunda contribución (ver figura 6.2). Los cuadrimomentos para las partículas virtuales l, l', W^- son: $k, k - p_1 + p_2, k - p_1$ respectivamente.

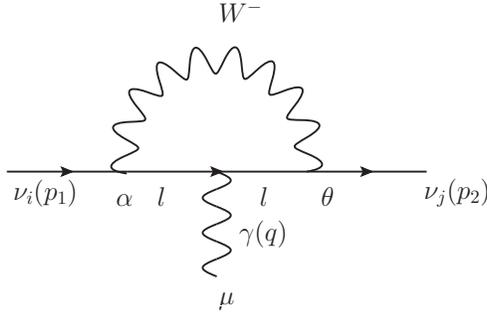


Figura 6.2: Segunda contribución.

Con ayuda de las reglas de Feynman calculamos la amplitud invariante para la segunda contribución

$$\begin{aligned} ie\Gamma_{\alpha 2}^{\mu} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (ig_W \gamma^{\theta} (V_{j\alpha} + A_{j\alpha} \gamma^5)) \left(\frac{i(\not{k} + \not{p}_2 - \not{p}_1 + \not{a} + m_{l\alpha})}{(k - p_2 - p_1 + a)^2 - m_{l\alpha}^2} \right) \\ &\times (-ie\gamma^{\mu}) \left(\frac{i(\not{k} + \not{a} + m_{l\alpha})}{(k + a)^2 - m_{l\alpha}^2} \right) (ig_W \gamma^{\alpha} (V_{i\alpha} + A_{i\alpha} \gamma^5)) \\ &\times \left(\frac{i(-g_{\alpha\theta} + \frac{1}{M_w^2} (k - p_1)_{\alpha} (k - p_1)_{\theta})}{(k - p_1)^2 - M_w^2} \right), \end{aligned} \quad (6.11)$$

la cual se puede expresar como

$$-ie\Gamma_{\alpha 2}^{\mu} = \mu^{4-D} g^2 e \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{F_2(k, p_1, p_2)}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}, \quad (6.12)$$

donde

$$F_2 = \gamma^\theta (V_{j\alpha} + A_{j\alpha} \gamma^5) (\not{k} + \not{p}_2 - \not{p}_1 + \not{a} + m_{l\alpha}) \gamma^\mu (\not{k} + \not{a} + m_{lk}) \gamma^\alpha (V_{iK} + A_{iK} \gamma^5) (-g_{\alpha\theta} + \frac{(k-p_1)_\alpha (k-p_1)_\theta}{M_W^2}), \quad (6.13)$$

$$\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 = ((k + p_2 - p_1 + a)^2 - m_{l\alpha}) ((k + a)^2 - m_{l\alpha}) ((k - p_1)^2 - M_W^2),$$

realizamos el cambio de variable $k \rightarrow k + P$ y recurriendo a la parametrización de Feynman podemos expresamos (6.12) de la siguiente manera

$$-ie\Gamma_{\alpha 2}^\mu = 2\mu^{4-D} g^2 e \int_0^1 dx dy dz \delta(1-x-y-z) \times \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{F_2(k + P', p_1, p_2)}{[k^2 - M_2^2]^3}, \quad (6.14)$$

donde

$$\begin{aligned} P' &= xp_1 - xp_2 - ax - ay + zp_1, \\ A_2^2 &= -m_i^2 z - M_w^2 z - (x+y)m_{lk}^2 - (p_1 a + ap_1)x + (p_2 a + ap_2)x \\ &\quad + a^2 x + a^2 y, \\ M_2^2 &= P'^2 + A_2^2. \end{aligned}$$

Por último, pasamos de la integral triple a una integral doble

$$-ie\Gamma_{\alpha 2}^\mu = 2\mu^{4-D} g^2 e \int_0^1 \int_0^{1-x} dx dy \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{F_2(k + P', p_1, p_2)}{[k^2 - M_2^2]^3}. \quad (6.15)$$

A fin de llevar a cabo los cálculos de las integrales sobre k tanto en la Ec.

(6.9) y (6.15), se recurre a los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[K^2 - M^2]^3} &= \frac{(-1)^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \frac{i\pi^{D/2}}{[-M^2]^{3-D/2}} \frac{1}{\Gamma(3)} [\Gamma(3 - D/2)], \\
\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu}{[K^2 - M^2]^3} &= 0, \\
\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu}{[K^2 - M^2]^3} &= \frac{(-1)^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \frac{i\pi^{D/2}}{[-M^2]^{3-D/2}} \frac{1}{\Gamma(3)} \left[\frac{D[-M^2]\Gamma(3 - 1 - D/2)}{2} \right], \\
\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2 k^\mu}{[K^2 - M^2]^3} &= 0, \\
\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2 k^\mu k^\nu}{[K^2 - M^2]^3} &= \frac{(-1)^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \frac{i\pi^{D/2}}{[-M^2]^{3-D/2}} \frac{1}{\Gamma(3)} \left[\frac{D}{2} [-M^2]^2 \Gamma(3 - 2 - D/2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{D^2}{4} [-M^2]^2 \Gamma(3 - 2 - D/2) \right],
\end{aligned}$$

donde $\Gamma(x)$ es la función Gamma, la cual es singular en $x = 0$. Hecho esto, para poder realizar las integrales sobre las variables x y y , para ello tomamos en cuenta que $M_W^2 \gg m_\tau^2, a^2$ esto implica que

$$\begin{aligned}
M_2^2 &\approx m^2(x + y) + M_W^2 z = m^2(x + y) + M_W^2(1 - x - y), \\
M_1^2 &\approx m^2 x + M_W^2(y + z) = m^2 x + M_W^2(1 - x).
\end{aligned}$$

Posteriormente, sumamos las 2 contribuciones y reurriendo al paquete de Mathematica Feyncalc [14], obtenemos:

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{M} &= \bar{u}_{\nu_j}(p_2)(A_0\gamma^\mu + A_1\gamma^\mu\gamma^5 + A_2a^\mu + A_3\gamma^5a^\mu + A_4\not{a}a^\mu + A_5\not{a}\gamma^5a^\mu \\
&\quad + A_6\not{P}^\mu + A_7\not{a}\gamma^5P^\mu + A_8i\sigma^{\mu\nu}q_\nu + A_9i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\gamma^5 + A_{10}i\sigma^{\mu\nu}a_\nu \\
&\quad + A_{11}i\sigma^{\mu\nu}a_\nu\gamma^5)u_{\nu_i}(p_1)\epsilon_\mu^*(q),
\end{aligned} \tag{6.16}$$

donde A_i^s son los llamados factores de forma. Con el fin de analizar el resultado, agrupamos términos en la ecuación (6.16) y sustituyendo $\frac{g^2}{8M_W^2}$ por $\frac{G_F}{\sqrt{2}}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{M} &= \bar{u}_{\nu_j}(p_2)(A_0\gamma^\mu(1 - \gamma^5) + A_2a^\mu + A_3\gamma^5a^\mu + A_4\not{a}a^\mu(1 - \gamma^5) \\
&\quad + A_6\not{P}^\mu(1 - \gamma^5) + A_8i\sigma^{\mu\nu}q_\nu + A_9i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\gamma^5 + A_{10}i\sigma^{\mu\nu}a_\nu \\
&\quad + A_{11}i\sigma^{\mu\nu}a_\nu\gamma^5)u_{\nu_i}(p_1)\epsilon_\mu^*(q),
\end{aligned} \tag{6.17}$$

donde los factores de forma son:

$$\begin{aligned}
A_0 &= -\frac{i4G_F M_W^2 e}{3\sqrt{2}\pi^2} \left(-\frac{13}{\epsilon} + \frac{(78\gamma + 21 \log(\frac{M_W^2}{4\pi\mu^2}) + 11)}{12} \right) \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} U_{i\alpha} U_{j\alpha} \\
A_1 &= \frac{i4G_F M_W^2 e}{3\sqrt{2}\pi^2} \left(-\frac{13}{\epsilon} + \frac{(78\gamma + 21 \log(\frac{M_W^2}{4\pi\mu^2}) + 11)}{12} \right) \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} U_{i\alpha} U_{j\alpha} \\
A_2 &= \frac{i2eG_F}{3\pi^2\sqrt{2}} (m_i + m_j) \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} U_{i\alpha} U_{j\alpha} \\
A_3 &= \frac{i2eG_F}{3\pi^2\sqrt{2}} (m_i - m_j) \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} U_{i\alpha} U_{j\alpha} \\
A_4 &= \frac{i4eG_F}{3\pi^2\sqrt{2}} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} U_{i\alpha} U_{j\alpha} \\
A_5 &= -\frac{i4eG_F}{3\pi^2\sqrt{2}} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} U_{i\alpha} U_{j\alpha} \\
A_6 &= \frac{ieG_F}{12\pi^2\sqrt{2}} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} U_{i\alpha} U_{j\alpha} \\
A_7 &= -\frac{ieG_F}{12\pi^2\sqrt{2}} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} U_{i\alpha} U_{j\alpha} \\
A_8 &= \frac{ieG_F}{8\pi^2\sqrt{2}} (m_i + m_j) \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} U_{i\alpha} U_{j\alpha} \\
A_9 &= \frac{ieG_F}{8\pi^2\sqrt{2}} (m_i - m_j) \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} U_{i\alpha} U_{j\alpha} \\
A_{10} &= \frac{ieG_F}{\pi^2\sqrt{2}} (m_i - m_j) \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} U_{i\alpha} U_{j\alpha} \\
A_{11} &= \frac{ieG_F}{\pi^2\sqrt{2}} (m_i + m_j) \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} U_{i\alpha} U_{j\alpha},
\end{aligned}$$

donde G_F es la constante de acoplamiento de Fermi con un valor de $1,16637(1) \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$ y γ es la constante de Euler-Mascheroni con un valor aproximado de 0,5772157. Se ha tomado en cuenta que $M_W \gg m_i, m_j$ y sólo se consideraron los términos dominantes.

6.1. Discusión

En la amplitud de transición obtenida (ver Ec. (6.17)), podemos observar que aparecen 6 nuevos factores de formas que involucran al tetravector, a^μ , que se introduce en la teoría. El primer término es divergente en $D = 4$ y que puede ser absorbido en el acoplamiento en el proceso de renormalización; el resto de los términos son finitos. Al tomar $a = 0$ se reduce al resultado del cálculo para el Modelo Estándar Mínimamente Extendido que en modo estático (al tomar $m_i = m_j$) el momento dipolar eléctrico resulta ser nulo, por tanto, solamente tendremos contribución del momento dipolar magnético.

Cuando se tiene el proceso de transición, $i \neq j$, los factores de forma son diferentes de cero y hay una contribución tanto al momento dipolar eléctrico como al dipolar magnético así como la contribución estilo momento dipolar magnético ($i\sigma^{\mu\nu}a_\nu$) y dipolar eléctrico ($i\sigma^{\mu\nu}a_\nu\gamma^5$) con la diferencia que tenemos a_ν en lugar de q_ν . Sin embargo, para el proceso estático A_3 , A_9 y A_{10} son cero por que dependen de la diferencia de la masa del neutrino entrante y saliente. Obteniendo la contribución al momento dipolar magnético y la contribución estilo momento dipolar eléctrico.

Notemos que las dimensiones del factor de forma A_8 coinciden con las dimensiones del momento dipolar μ . El término del momento dipolar magnético, $\bar{u}_{\nu_j}\sigma^{\mu\nu}q_\nu\bar{u}_{\nu_i}\epsilon_\mu$, el cual sólo puede ser obtenido como en un proceso de fluctuación cuántica proviene del siguiente Lagrangiano efectivo

$$\mathcal{L}_{DM} = \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu},$$

donde

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu),$$

$$A_\mu = A_0\epsilon_\mu e^{-iq\cdot x}.$$

Para el término del momento dipolar eléctrico, $\bar{u}_{\nu_j}\sigma^{\mu\nu}\gamma^5 q_\nu u_{\nu_i}\epsilon_\mu$, el Lagrangiano del cual proviene es

$$\mathcal{L}_{DE} = \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\gamma^5\psi F_{\mu\nu}.$$

Otro término interesante de analizar es, $\bar{u}_{\nu_j}u_{\nu_i}a^\mu\epsilon_\mu$, podemos inferir que el Lagrangiano efectivo del cual proviene es

$$\mathcal{L}_a = \bar{\psi}\psi a^\mu A_\mu. \quad (6.18)$$

Comparando la Ec.(6.18) con $m\bar{\psi}\psi$ podemos deducir que el tetravector, a^μ , es como un término de inercia del neutrino (cuando $i = j$) debido al acoplamiento del tetravector a_μ con el campo electromagnético externo.

Conclusiones

En este trabajo de tesis se ha realizado un estudio de las propiedades electromagnéticas de neutrinos en un contexto en donde se asume que no se satisface la simetría de Lorentz. Se calcularon las contribuciones a nivel de un rizo a la anomalía del momento dipolar magnético y las contribuciones al momento dipolar eléctrico dentro del contexto del Modelo Estándar Mínimamente Extendido añadiendo términos que violan la simetría CPT y/o Lorentz en el proceso $\nu_i \longrightarrow \nu_j + \gamma$.

Hemos obtenido que el término a_μ que se introduce en la teoría y que es CPT -impar da contribuciones interesantes a las propiedades electromagnéticas del neutrino, tales como que aquellas que pueden dar origen a la conversión de neutrinos. Considerando valores pequeños del parámetro en cuestión comparados con la masa del boson W , el momento dipolar magnético del neutrino ni el dipolar eléctrico dependen de a_μ . Esto nos indica que para que se pueda apreciar el efecto de violación de Lorentz en mediciones del momento dipolar del neutrino se requiere que el parámetro tenga un valor suficientemente grande y no tan pequeño como el que se ha considerado en este trabajo.

Además del termino correspondientes a los momentos dipolares eléctrico y magnético, obtuvimos otros términos que contribuyen al las propiedades electromagnéticas del neutrino, las cuales dependen lineal y cuadráticamente de a_μ . Cuando este parámetro es igual a cero, los resultados se reducen al caso usual, ya estudiado. Podemos destacar dos contribuciones lineales en el parámetro:

1. El término, $\bar{u}_{\nu_j} u_{\nu_i} a^\mu \epsilon_\mu$, el cual resulta como un término de masa en el Lagrangiano efectivo debido al acoplamiento de a con el campo electromagnético.
2. Obtuvimos términos tales como $\bar{u}_{\nu_j} i \sigma^{\mu\nu} a_\nu u_{\nu_i} \epsilon_\mu$ o $\bar{u}_{\nu_j} i \sigma^{\mu\nu} a_\nu \gamma^5 u_{\nu_i} \epsilon_\mu$ los

cuales son similares a los términos correspondientes a los momentos dipolares magnético y eléctrico respectivamente. Los cuales, sin embargo, a diferencia de lo que ocurre con los momentos dipolares, el correspondiente al momento dipolar magnético se anula cuando el estado inicial y final del neutrino es el mismo, y el correspondiente al del momento dipolar eléctrico se mantiene.

Para el trabajo que resta para el futuro cabe señalar que resulta interesante analizar el proceso $\nu_i \rightarrow \nu_j + \gamma$ para el caso del propagador del Modelo Estándar Mínimamente Extendido con violación CPT tomando $b \neq 0$ y $a = 0$. También, resulta importante considerar valores no tan pequeños del parámetro a .

Bibliografía

- [1] C. Gunti, C. W. Kim, *Fundamental of Neutrinos Physics and Astrophysics*, Oxford 2007.
- [2] M. Fukugita, T. Yanagida, *Physics of Neutrinos and Applications to Astrophysics*, Springer 2003.
- [3] R. Davis Jr., D. S. Harmer, K. C. Hoffman, *Phys. Rev. Lett* **20**, 1205 (1968).
- [4] Y. Fukuda et al. (Super-Kamiokande Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1562 (1998).
- [5] Steven Weinberg, *The first three minutes*, Basic books, *Perseus* 1993.
- [6] F. Halzen, and A.D. Martin, *Quarks and Leptons*, NY, Wiley 1984.
- [7] Griffiths David J. *Introduction to Elementary Particles*, Weinhein, Wiley 2008.
- [8] Luis G. Cabral-Rosetti, *Rev. Mex. de Fís.*, **48**, 367 (2002).
- [9] Don Colladay and V. Alan Kostelecky, *Phys. Rev.* **D 11**, 55 (1997).
- [10] Jeremi Bernstein, Malvin Ruderman and Gerald Feinberg, *Phys. Rev.* **132**,1227 (1963).
- [11] V. Alan Kostelecky y Neil Russell, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 11 (2011)
- [12] D. Colladay and V. Alan Kostelecky, *Phys. Rev.* **D 55**, 6770 (1997).
- [13] H. Novales-Sánchez, M. Salinas, J. J. Toscano, y O. Vázquez-Hernández, *Phys Rev.* **D 95**, 055016 (2017).

- [14] R. Mertig, M. Böhm, and A. Denner, *Comput. Phys. Commun.* **64**, 345 (1991).
- [15] R. N. Mohapatra *et. al.* *Phys. Rev. D* **11**, 566 (1975).