



UNIVERSIDAD MICHUACACA DE SAN  
NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

“EFECTOS DE VIOLACIÓN DE SIMETRÍA DE  
LORENTZ SOBRE LA PROPAGACIÓN DE  
NEUTRINOS”

TESIS

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA FÍSICA

PRESENTA:

PEDRO LUIS CÁSTULO CRUZ

ASESOR:

DR. EDUARDO SALVADOR TUTUTI HERNÁNDEZ

MORELIA, MICHUACÁN, AGOSTO 2018.





# Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia y amigos por apoyarme siempre.

A mis padres Máximina y José.

Agradezco a mi asesor Dr. Eduardo S. Tututi Hernández, por su esfuerzo, dedicación y atención para realizar este trabajo. Por su forma de trabajar, su paciencia y motivación se ha ganado mi admiración y confianza, gracias por todo profesor.

Además, quiero agradecer al posgrado en Ingeniería Física de la FCFM por el espacio que me brindó para el desarrollo de este trabajo.

También, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por haberme otorgado una beca para llevar a cabo los estudios de maestría.

Por último, también quisiera agradecer a los sinodales: Dr. Javier Montaña Domínguez, Dr. Fernando I. Ramírez Zavaleta y al Dr. Hector I. Pérez Aguilar.



# Resumen

De acuerdo al Modelo Estándar, los neutrinos son partículas elementales de espín un medio, sin masa, neutros e interaccionan débilmente; es el compañero del doblete de su leptón cargado. Los neutrinos toman un rol importante para explicar diferentes fenómenos como el proceso de decaimiento beta inverso. En este trabajo realizaremos un cálculo donde se ponen de manifiesto las propiedades electromagnéticas de los neutrinos, siendo estas partículas neutras que se pueden acoplar a campos electromagnéticos mediante su momento dipolar magnético. Concretamente trabajaremos en el proceso  $\nu_i \rightarrow \nu_j + \gamma$ , el cual sólo tiene sentido como un proceso de fluctuación cuántica. El cálculo que se realizará lo llevaremos a cabo a nivel de un lazo en el Modelo Estándar Mínimamente Extendido el cual incluye términos de masa para los neutrinos. Utilizando el Lagrangiano de corrientes cargadas  $CPT^{odd}$  donde se le añaden dos parámetros  $a^\mu$  y  $b^\mu$  que violan  $CPT$  y/o Lorentz, para determinar una expresión para las contribuciones a los momentos dipolar eléctrico y magnético del neutrino.

**Palabras clave:** Momento dipolar eléctrico y magnético, Violación de Lorentz, Violación  $CPT$ , Propiedades electromagnéticas, fluctuación cuántica.



# Abstract

According to the Standard Model, neutrinos are elementary particles, electrically neutral, massless of half spin and they interact weakly, they are also ,  $SU(2)_L$  doublet partner of a charged lepton. The neutrinos have an important role to explain different phenomena such as the inverse beta decay. In this work we carry out a calculation for the electromagnetic properties, even when these kind of particles are neutral they can couple to electromagnetic interactions through the dipolar moments. In specific we will be analyzing the process  $\nu_i \rightarrow \nu_j \gamma$ , which only makes sense at the loop level. The calculation is done within the Standard Model Minimally Extended context, which includes right handed neutrinos. By using the Lagrangian of charged currents  $CTP^{\text{odd}}$  at which it is added the four vector  $a^\mu$  and  $b^\mu$  that explicit break the Lorentz symmetry, we find general expressions for the dipole moments of the neutrinos.

**Keywords:** electrical and magnetic dipole moment, Lorentz violation,  $CPT$  violation, electromagnetic properties, quantum fluctuation.





*Dedicado a mi  
familia y amigos*



# Índice general

Agradecimientos . . . . .	iii
Resumen . . . . .	v
Abstract . . . . .	vii
<b>Índice general</b>	<b>xi</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Modelo Estándar</b>	<b>5</b>
2.1. Interacciones y partículas . . . . .	5
2.2. Teoría electrodébil . . . . .	6
<b>3. Simetría de <math>CPT</math></b>	<b>9</b>
3.1. Simetría e Interacción . . . . .	9
3.1.1. Simetría Local . . . . .	9
3.1.2. Rompimiento espontáneo de la simetría . . . . .	10
3.2. La simetría $C, P, T$ . . . . .	10
3.2.1. Campos de espín 1/2 (campo de Dirac) . . . . .	11
3.2.2. Simetría $CP$ . . . . .	15
3.2.3. Teorema $CPT$ . . . . .	15
3.3. Violación $CPT$ . . . . .	16
3.3.1. Extensión del modelo estándar infractora de Lorentz . . . . .	17
3.3.2. Violación de Lorentz y $CPT$ en neutrinos . . . . .	17
3.3.3. Simetrías continuas . . . . .	20
3.3.4. Extensión del SM . . . . .	21
<b>4. Neutrinos</b>	<b>25</b>
4.1. El Modelo Estándar y el neutrino . . . . .	25
4.2. Oscilación de Neutrinos . . . . .	25
4.3. Neutrinos masivos . . . . .	26
4.4. Definición matemática del campo de Dirac . . . . .	26
4.5. Propiedades electromagnéticas de los neutrinos . . . . .	27
4.5.1. Factores de forma de un neutrino de Dirac . . . . .	28

---

<b>5. Propiedades electromagnéticas de los neutrinos y violación de Lorentz</b>	<b>31</b>
5.1. Cálculo del propagador . . . . .	31
5.2. Cinemática del decaimiento radiativo . . . . .	32
5.3. Reglas de Feynman . . . . .	33
5.4. Estructura formal de la amplitud . . . . .	36
5.4.1. Cálculo de la amplitud . . . . .	38
5.5. Cálculo de los momentos dipolares en el MSM con Violación de Lorentz . . . . .	40
5.5.1. Caso $a = b = 0$ . . . . .	40
5.5.2. Caso $a \neq 0$ y $b = 0$ . . . . .	43
<b>6. Conclusiones y consideraciones finales</b>	<b>45</b>
<b>A.</b>	<b>47</b>
A.1. Identidad de Gordon . . . . .	47
A.2. Notación . . . . .	47
A.3. Cálculo de la amplitud de ambas contribuciones, caso general . . . . .	48
A.4. Casos . . . . .	60
A.4.1. Caso $a = b = 0$ . . . . .	60
A.4.2. Caso $a \neq 0$ y $b = 0$ . . . . .	63
A.4.3. Caso $a = 0$ y $b \neq 0$ . . . . .	66
A.4.4. Caso $a \simeq 0$ y $b \simeq 0$ . . . . .	77
<b>Bibliografía</b>	<b>79</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La existencia del neutrino fue propuesta en 1930 por Wolfgang Pauli, como una forma de explicar la pérdida de energía y momento lineal en el decaimiento beta  $n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ . Fue Fermi quien asignó el nombre de neutrino al ser el primero en formular la teoría que describía sus interacciones. En 1956 Clyde Cowen y Fredenck Reines [1] demostraron la existencia experimentalmente, en el llamado experimento del neutrino. En 1957 Pontecorvo propone el fenómeno de oscilación de los neutrinos entre los estados de sabor definido, en ese mismo año Leon Lederman, Melvin Schwartz y Jack Steinberger [2] descubren que existe más de un tipo de neutrino al detectar al neutrino muón  $\nu_\mu$ , y de 1974 a 1977 Martin Perl revela la existencia de un tercer leptón, lo cual hizo suponer que existe un tercer neutrino, el neutrino tauónico  $\nu_\tau$ , anunciado su descubrimiento en el año 2000.

Se observó que los neutrinos que proceden del sol, son principalmente el neutrino del electrón  $\nu_e$ , encontrándose que sólo llegaban 1/3 de los esperados, los 2/3 que faltaban habían oscilado a los otros sabores por lo cual no fueron detectados. Los neutrinos pueden pasar de un neutrino del electrón a un neutrino del muon  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ , y de un neutrino del electrón a un neutrino del tau  $\nu_e \rightarrow \nu_\tau$ , es decir cambiar de sabor, a este proceso se le conoce como oscilación de neutrinos [3]. Una de las razones principales de que los neutrinos oscilen es consecuencia de que estos sean masivos.

Una fuente donde podemos encontrar neutrinos son los producidos por los rayos cósmicos en las capas altas de la atmósfera, llamada neutrinos atmosféricos, y que su presencia es registrada por un detector subterráneo. En las supernovas, los neutrinos se generan de manera copiosa y las explosiones están acompañadas de emisiones de gran número de neutrinos. Los neutrinos del electrón son producidos en su mayoría por el decaimiento  $\pi \rightarrow \mu\nu_\mu$ , seguido por el decaimiento  $\mu \rightarrow e\nu_\mu\nu_e$  [4]. Otra fuente donde podemos encontrar neutrinos son las fuentes artificiales, como las centrales nucleares, que pueden llegar a generar unos  $5 \times 10^{20}$  anti-neutrinos y en menor medida los aceleradores de partículas.

Los neutrinos interactúan con la fuerza débil, donde se involucran los bosones  $W^\pm$  y  $Z^0$ , que

son los encargados de las interacciones, Los bosones  $Z^0$  y  $W^\pm$  son los que dan origen a las llamadas corrientes electrodébiles neutras y cargadas respectivamente. Los procesos débiles más importantes son: la dispersión elástica electrón-neutrino y el decaimiento beta inverso, en el primer proceso  $\bar{\nu}_e + e \rightarrow \bar{\nu}_e + e$ , se lleva a cabo mediante el intercambio de un bosón  $Z^0$  entre un electrón y un neutrino de cualquier familia, o mediante el intercambio de un bosón  $W^\pm$  entre el electrón y el neutrino del electrón. El segundo proceso  $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$ , es producido por el intercambio de bosón  $W^\pm$  entre el protón y el anti-neutrino [4].

Hoy en día sabemos que el Modelo Estándar (SM) de las interacciones fundamentales es una teoría que ha tenido mucho éxito ya que ha sido muy precisa en las predicciones de numerosos resultados experimentales, los cuales han sido analizados y comprobados mediante los colisionadores de partículas, sin embargo el SM no explica diversas cuestiones por ejemplo, ¿Cómo incorporar en el SM el proceso de otorgar masa al neutrino. Uno de los caminos a seguir consiste en estudiar los modelos extendidos. Es por ello que se piensa que el SM necesita ser extendido para poder explicar todos aquellos fenómenos que no estén descritos en el modelo. La extensión mínima posible al SM se obtiene agregando al modelo neutrinos derechos. Como resultado se obtienen neutrinos masivos.

Actualmente se sabe que las propiedades electromagnéticas de las partículas elementales caracterizadas por los factores de forma juegan un papel cada vez más importante en la física de partículas, algunas de estas propiedades están ya presentes en la acción clásica de la teoría, mientras que otras surgen por primera vez como una fluctuación cuántica de un lazo. Por ejemplo, los neutrinos son partículas de espín  $\frac{1}{2}$ , y aunque son eléctricamente neutras, desarrollan propiedades electromagnéticas a orden de un lazo [3], el neutrino es una partícula sin carga, por lo cual se puede acoplar a campos electromagnéticos solo mediante sus momentos dipolares eléctricos y/o magnéticos.

Otra propiedad electromagnética que se ha calculado para el neutrino dentro del contexto del SM, es el anapolo [5, 6]. La discusión de esta propiedad la vamos a dejar de lado y solo nos concentraremos en los momentos dipolares del neutrino.

En muchas extensiones del SM, que cuentan para masas y mezclas de neutrinos, los neutrinos adquieren propiedades electromagnéticas no triviales que permiten interacciones electromagnéticas directas de neutrinos con campos electromagnéticos y partículas cargadas o con partículas que tienen momentos magnéticos. Desafortunadamente, a pesar de los esfuerzos razonables en estudios de las propiedades electromagnéticas de los neutrinos, hasta ahora no hay confirmación experimental, ni de los estudios de los laboratorios terrestres ni de las observaciones astrofísicas, a favor de las características electromagnéticas de los neutrinos. El estudio de las propiedades electromagnéticas de los neutrinos fue mencionada por primera vez por Pauli [7].

En este trabajo se estudiarán algunas propiedades de neutrinos utilizando el Modelo Estándar Mínimamente Extendido (SMME) como una herramienta para estudiar las violaciones de

Lorentz con total independencia del modelo, siendo ésta una teoría de campos efectiva y una extensión del Modelo Estándar que incorpora efectos de violación de  $CPT$  y de Lorentz, es decir, el SME incluye operadores que violan la simetría, así como también operadores que la preservan. Cualquier violación de la simetría  $CPT$  implica el rompimiento de la simetría de Lorentz como veremos más adelante. Dentro del SMME, donde se introducen neutrinos derechos al SM, las correcciones radiactivas inducen un momento dipolar  $\mu_{\nu i}$ , dado por:

$$\mu_{\nu i} = 3 \times 10^{-19} \mu_B \left( \frac{m_{\nu i}}{1eV} \right)$$

donde  $\mu_B = e/2m_e = 5.78 \times 10^{-5} eV/T^{-1}$  es el magnetón de Bohr. Sin embargo, mediciones experimentales indirectas del momento dipolar magnético de neutrino imponen cotas superiores para los diferentes tipos de neutrinos [8]:  $\mu_{\nu e} < 10^{-10} \mu_B$ . Esto resulta una cuestión interesante a ser clarificada, para ello se han considerado diferentes modelos más allá del SM que involucran acoplamientos que se pueden ajustar. Para llevar a cabo el estudio de las propiedades electromagnéticas de neutrinos, recurrimos al llamado SME [9]. Para el caso de los fermiones la violación de la simetría  $CPT$  se parametriza mediante tetravectores  $a^\mu$  y  $b^\mu$ , los cuales guardan información del no cumplimiento de dicha simetría.

Uno de los motivos que nos llevo a realizar este trabajo es que podamos contar un expresión general para los momentos dipolar eléctrico y magnético de los neutrinos, que tenga información sobre la violación de simetría de Lorentz. En el SMME, además de términos de masa para los neutrinos, se incluye información sobre los tetravectores  $a^\mu$  y  $b^\mu$ . Otra motivación para llevar a cabo el análisis general, es la de contar con expresiones completas que incluyen la información sobre los tetra-vectores mencionados para un ulterior análisis numérico de los factores de forma resultantes.

El contenido de este trabajo se desarrollo de la siguiente manera. En el capítulo 1, se presenta una descripción general del neutrino y sus características, así como sus propiedades electromagnéticas. En este capítulo 2 hablaremos sobre el SM y la teoría electrodébil. Enseguida en el capítulo 3, hablaremos sobre la simetría  $CPT$ , describiendo la conjugación de carga  $C$ , paridad  $P$  e inversión temporal  $T$ , y las implicaciones de la violación de  $CPT$ . En el capítulo 4, se dará una descripción del neutrino, hablaeremos de su quiralidad. su interacción y que son parte del grupo  $SU(2)_L \times U_Y(1)$ . Posteriormente en el capítulo 5 hablaremos de las propiedades electromagnéticas de los neutrinos, así como los cálculos explícitos analizando el proceso  $\nu_i \rightarrow \nu_j + \gamma$ , esto con ayuda de las reglas de Feynman, para obtener las propiedades eléctricas y magnéticas de los neutrinos asi como obtener una expresión general para el momento dipolar eléctrico y momento magnético de los neutrinos en el contexto del Modelo Estándar Mínimamente Extendido que violan la simetría de Lorentz. Finalmente en el capítulo 6, se presentan las conclusiones y consideraciones finales.





# Capítulo 2

## Modelo Estándar

El Modelo Estándar ha sido construido en base a principios de simetría, los cuales tienen una conexión profunda con la física, en Física de partículas la teoría cuántica de campos explica satisfactoriamente el comportamiento de tres de las cuatro fuerzas existentes de la naturaleza, excepto la gravedad, así como la interacción entre las partículas de materia debida a estas fuerzas [10]. Las predicciones hechas por el SM han sido verificadas satisfactoriamente de forma experimental, dando como resultado la confiabilidad de la teoría. Sin embargo, a pesar del SM que puede explicar estos logros de forma concreta, el SM explican varias cuestiones importantes por lo que necesita ser extendida.

En el SM se afirma que la materia está compuesta por fermiones elementales que interactúan a través de campos, tales campos de interacción tienen asociadas partículas llamadas bosones de norma. El SM ha sido construido en base a principios de simetría. Las simetrías y el rompimiento de éstas juegan un rol importante en el SM. Actualmente se sabe que las propiedades electromagnéticas de las partículas elementales caracterizadas por los factores de forma juegan un papel importante en la física de partículas. Por ejemplo, los neutrinos son partículas de espín  $1/2$ , que aunque son eléctricamente neutras, desarrollan propiedades electromagnéticas a orden de un lazo [3, 7].

### 2.1. Interacciones y partículas

De las cuatro fuerzas que hasta ahora se han descubierto en la naturaleza (ver Tabla 2.1), la gravedad está excluida del SM por ser una interacción cuya intensidad es insignificante a nivel de la física de partículas, y no ha sido posible hasta ahora elaborar una teoría cuántica de la misma manera satisfactoria. En cuanto a la materia, en el SM los fermiones elementales tienen espín  $1/2$  y son de dos tipos: leptones y quarks (ver Tablas 2.2 y 2.3). Los leptones tienen interacción débil y si están cargados también sienten la interacción electromagnética, pero los quarks son sensibles a todas las fuerzas e interactúan con todos los campos del SM.

Campo de interacción	Bosón de norma
gravitacional	Gravitón $G$
Débil	$W^+, W^-, Z$
fuerte	Gluón $g$
Electromagnético	fotón $\gamma$

Tabla 2.1: Fuerzas

Leptón	Masa $MeV/c^2$	Tiempo de vida (s)	Carga eléctrica
Electrón $e^-$	0.5110	$\infty$	$-e$
Neutrino del electrón $\nu_e$	$< 3 \times 10^6$		0
Muon $\mu^-$	105.658	$2.197 \times 10^{-6}$	$-e$
Neutrino del muon $\nu_\mu$			0
Tau $\tau^-$	1.777	$(291.0 \pm 1.5) \times 10^{-15}$	$-e$
Neutrino del Tau $\nu_\tau$			0

Tabla 2.2: Familia de Leptones en el Modelo Estándar

Quarks	Carga eléctrica ( $e$ )	Masa ( $\times e^{-2}$ )
Up (u)	2/3	1.5 a 4 MeV
Down (d)	-1/3	4 a 8 MeV
Charmed (c)	2/3	1.15 a 1.35 GeV
Strange (s)	-1/3	80 a 130 MeV
Top (t)	2/3	169 a 174 GeV
Bottom (b)	-1/3	4.1 a 4.4 GeV

Tabla 2.3: Familia de Quarks en el Modelo Estándar

## 2.2. Teoría electrodébil

El modelo electrodébil es una teoría de campos de norma desarrollada por Glashow, Weinberg y Salam en los años sesenta del siglo anterior, la cual unifica la interacción débil y la interacción electromagnética. En esta teoría el movimiento de los fermiones es descrito mediante un lagrangiano de Dirac invariante de norma bajo el grupo  $SU(2) \times U(1)$ . Una de las características primordiales de dicho modelo es que la interacción electrodébil actúa sobre fermiones derechos e izquierdos de manera distinta, por lo que las corrientes cargadas de Yang-Mills incluyen solo fermiones izquierdos. Además, no se incluye a los neutrinos derechos dado que experimentalmente no se han observado, por este motivo los neutrinos

carecen de masa.

La interacción de los neutrinos esta descrita por la teoría electrodébil, la cual está basada en el grupo de simetría antes mencionado donde una de las principales características de esta teoría es que distingue entre estados de helicidad para leptones y quarks. El Lagrangiano (2.1) para la parte leptónica, donde la primera componente  $Y = -1$  y la segunda componente es la hipercarga  $Y = -1/2$ , que esta dado por:

$$\mathcal{L} = (\bar{\nu}_i \bar{l}_i)_L i \gamma^\mu \left( \partial_\mu + \frac{ig}{2} \vec{W}_\mu \cdot \vec{T} + \frac{ig'}{2} y_j B_\mu \right)_L \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} + \bar{l}_{iR} i \left( \partial_\mu - ig' B_\mu \right) l_{iR}, \quad (2.1)$$

donde  $T_i$  son los tres operadores de isospín que genera el grupo  $SU(2)$  ( $T = 0$ , para los singletes y  $T_i = \frac{1}{2} \tau_i$ , siendo  $\tau_i$  las tres matrices de Pauli, para los dobletes.),  $y_j$  está relacionada con la hipercarga débil, y  $\vec{\alpha}, \beta$  son fases arbitrarias. Para ello hemos introducido tres bosones vectoriales  $\vec{W}_\mu$ , uno por cada generador de  $SU(2)$ , y otro bosón vectorial más  $B_\mu$  para el grupo de rotaciones de fase  $U(1)$ ,  $l = e, \tau, \mu$ , y la derivada covariante  $D_\mu$  es:

$$D_\mu = + \frac{ig}{2} \vec{W}_\mu \cdot \vec{T} + \frac{ig'}{2} y_j B_\mu.$$

Las leyes de transformación infinitesimal de los campos gauge son

$$B_\mu \rightarrow B'_\mu = B_\mu - \frac{1}{g'} \partial(\delta\beta(x)),$$

$$\vec{W}_\mu \rightarrow \vec{W}'_\mu = \vec{W}_\mu - \frac{1}{g} \partial(\delta\beta(x)) - \delta\vec{\alpha}(x) \times \vec{W}_\mu.$$

(Las flechas indican vector en el espacio del isospín.)

Puesto que en los procesos de corrientes cargadas en interacciones débiles  $f_L$  y  $f_R$  se entremezclan, conviene introducir un doblete de  $SU(2)$  y dos singletes respectivamente. De esta forma, los campos fermiónicos izquierdos se agrupan en dobletes y los campos derechos en singletes del grupo  $SU(2)_L$ , con simetría de isospín débil, donde L (izquierdo) indica la simetría existente entre fermiones de distinta helicidad. Los campos fermiónicos entonces estarán dados de la siguiente forma:

Leptones:

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}, \quad e_R, \quad \mu_R, \quad \tau_R,$$

Quarks:

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}, \quad u_R, \quad d_R, \quad c_R, \quad s_R, \quad t_R, \quad b_R.$$

Donde  $\nu_{iL}$  con  $i = e, \mu, \tau$  no tiene ni carga eléctrica, ni masa. Debido al teorema de Noether que establece que cualquier simetría tiene su correspondiente ley de conservación, en particular, para la simetría de  $SU(2)_L$  está asociada a la conservación del isospín débil,  $T$ . La cantidad conservada para el grupo de simetría  $U(1)_Y$  es la hipercarga,  $Y$ , la cual se relaciona con la carga eléctrica,  $Q$ , y con la tercera componente del isospín,  $T_3$ , mediante la relación de Gell-Mann Nishijima:

$$Q = T_3 + \frac{Y_W}{2}.$$

Se suele llamar hipercarga débil a  $Y_W \equiv 2y$ , e isospín a  $T$ . En el modelo no se introducen términos con masa en el lagrangiano fermiónico a menos que se rompa explícitamente la simetría de norma. Por otro lado las fuerzas electromagnéticas y débil no pueden ser descritas por separado ya que actúan sobre los mismos campos fermiónicos, por ello el grupo de norma que describe la interacción electrodébil es  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , el cual es el mínimo grupo de norma posible que permite describir lo observado en la naturaleza.

# Capítulo 3

## Simetría de $CPT$

### 3.1. Simetría e Interacción

La simetría juega un rol muy importante en la comprensión de la física de partículas, comenzando con el grupo de simetría de Poincare de las transformaciones de espacio-tiempo, al grupo de invarianza  $SU(2)$  en física nuclear y el grupo de simetría  $SU(3)$  de Gell-Mann [11].

Hay dos tipos de simetrías para sistemas físicos.

1. **Simetría Global**

Donde la misma información de simetría se aplica a un campo en todos los puntos del espacio-tiempo.

2. **Simetría Local**

Donde las transformaciones de simetría en diferentes puntos del espacio-tiempo no estan relacionadas.

#### 3.1.1. Simetría Local

Su importancia se realizo hace mucho tiempo en conexión con la teoría electromagnética y es la piedra angular de la física de partículas modernas, las demandas de un sistema local son muy estrictas y sólo puede cumplirse siempre que se introduzcan en la teoría algunos campos nuevos de spín 1 que se llaman campos de Gauge. Estos campos indicados que se denotarán con  $A^\mu$ , tienen interacción con todos los campos que se transforman de forma no trivial bajo la simetría local y su intercambio da lugar a las fuerzas. En las interacciones gauge en el modelo estándar donde se analiza la ruptura espontánea de la simetría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , los bosones gauge de  $SU(2)_L$  se denotan por  $W_\mu^\pm, Z$ , mientras que el bosón gauge  $U(1)_Y$  se denota por  $B_\mu$ .

### 3.1.2. Rompimiento espontaneo de la simetría

La evolución temporal de un sistema depende de dos cosas

- i) El Hamiltoniano (o Lagrangiano),
- ii) La condición inicial.

En teoría cuántica de campos con simetrías, dos condiciones análogas determinan el modo de ser invariantes bajo las transformaciones de simetría, en segundo lugar se dice que el estado del vacío se valora en modo Wigner-Weyl. En este caso, se satisfacen las expectativas naturales tales como la igualdad de masas de partículas, la igualdad de elementos de la matriz  $S$  entre los estados físicos apropiados [11].

Fue descubierta alrededor de 1960 a través del trabajo de Nambu-Goldstone donde se menciona que un lagrangiano puede ser invariante bajo una transformación de simetría, pero en el estado del vacío puede no serlo, si la simetría es global el espectro de la teoría contiene una partícula sin masa conocida como el bosón de Nambu-Goldstone. Se realizó a través del trabajo de Higgs Kibble, Guralnik, Hasen, Brout and Englert [11], que menciona que si una simetría Gauge se rompe espontáneamente, no se produce ninguna partícula sin masa, más bien se crea el bosón Nambu-Goldstone.

## 3.2. La simetría $C, P, T$

El presente hablaremos sobre la violación de la simetría  $CPT$ , por lo que debemos de abordar que es lo que entendemos por  $CPT$ . En las teorías de campos locales es usual introducir una densidad Lagrangiana  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$ , donde  $\mathcal{L}_0$  es el denominado lagrangiano libre que describe una colección de partículas libres, no interactuantes, y  $\mathcal{L}_{int}$  es el lagrangiano de interacción que prescribe como interaccionan dichas partículas las unas con las otras. Como es usual la densidad lagrangiana es función de los campos y sus derivadas en un punto del espacio tiempo caracterizado por  $(\vec{x}, t)$

$$\mathcal{L}(\vec{x}, t) = \mathcal{L}(\phi_j(\vec{x}, t), \partial^\mu \phi_j(\vec{x}, t)). \quad (3.1)$$

La cantidad fundamental que nos va a interesar a la hora de describir las simetrías es la acción,  $S = \int d^4x \mathcal{L}(\vec{x}, t)$ . Si esta acción es invariante bajo una operación de simetría diremos que la simetría es una simetría buena, en caso contrario será una simetría rota [12].

En mecánica cuántica no relativista, las operaciones de inversión espacial  $P$  y conjugación de carga  $C$  se describen mediante operadores unitarios que actúan sobre los vectores estado de una partícula.

### 3.2.1. Campos de espín 1/2 (campo de Dirac)

El Lagrangiano de Dirac el cual describe la interacción de una partícula de espín 1/2 con el campo electromagnético, tiene la forma:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(t, r)[\gamma_\mu(i\partial^\mu - qA^\mu) - m]\psi(t, r), \quad (3.2)$$

donde  $\psi(t, r)$  es una función de onda formulada como espinores de cuatro componentes, y  $\gamma^\mu$  son las matrices de 4x4 de Dirac. La matriz  $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  al igual que  $\gamma^\mu$  son matrices que obedecen las relaciones de anticonmutación (álgebra de Clifford)  $[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2g^{\mu\nu}$ , siendo  $g^{\mu\nu}$  el tensor métrico definido por  $\text{diag}[-1,1,1,1]$ . Las matrices  $\gamma^\mu$  y  $\gamma^5$  en la representación de Dirac vienen dadas de la siguiente forma:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

donde  $\sigma^i$  son las matrices de Pauli, dadas por:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, se tiene que  $\gamma^5, \gamma^\mu = 0$  y  $\gamma^5\gamma^5 = 1$  donde los eigenvalores de  $\gamma^5$  se llaman quiralidad, que pueden tomar los valores  $\pm 1$ .

Los proyectores derechos e izquierdos (matrices de proyección de quiralidad) se introducen mediante

$$\gamma_{R(L)} \equiv \frac{1 \pm \gamma^5}{2}, \quad (3.3)$$

los cuales satisfacen las siguientes propiedades de matrices de proyección:

$$\begin{aligned} \gamma_R + \gamma_L &= 1, \\ \gamma_{L(R)}^2 &= \gamma_{L(R)}, \\ \gamma_R\gamma_L &= \gamma_L\gamma_R = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Por lo tanto, se pueden definir espinores izquierdos ( $L$ ) y derechos ( $R$ ) como

$$\begin{aligned} \psi_L &\equiv \gamma_L\psi, & \bar{\psi}_L &= \bar{\psi}\gamma_R, \\ \psi_R &\equiv \gamma_R\psi, & \bar{\psi}_R &= \bar{\psi}\gamma_L, \end{aligned} \quad (3.5)$$

que se conocen también como espinores de Weyl. En el límite de masa cero, los fermiones tienen quiralidad bien definida (+1 para  $\psi_R$  y -1 para  $\psi_L$ ).

## Paridad $P$

En física clásica la paridad o inversión espacial, generalmente llamada  $P$  se caracteriza por invertir las coordenadas espaciales  $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ . Esta transformación cambia el sentido a derechas del sistema de ejes. Un sistema diestro se convierte en zurdo bajo la operación de paridad. En el espacio de momentos la dirección de todos los momentos se invierte y el espín no se ve afectado por la paridad.

En mecánica cuántica al aplicar la operación de inversión temporal sobre el ket estado de una partícula con posición  $r$  se obtiene

$$P | r \rangle = \eta_P | -r \rangle, \quad (3.6)$$

donde  $\eta_P$  es la paridad intrínseca de la partícula, la cual depende la estructura interna de la partícula. En teoría de campos los campos libres se transforman de la siguiente manera bajo la operación paridad

- Campo escalar

$$\phi(\vec{x}, t) \rightarrow \phi(-\vec{x}, t), \quad (3.7)$$

- Campo pseudoescalar

$$P(\vec{x}, t) \rightarrow P(-\vec{x}, t), \quad (3.8)$$

- Espinor de Dirac

$$\psi(\vec{x}, t) \rightarrow \gamma_0 \psi(-\vec{x}, t), \quad (3.9)$$

- Campo vectorial

$$V_\mu(\vec{x}, t) \rightarrow V^\mu(-\vec{x}, t), \quad (3.10)$$

- Campo vectorial axial

$$A_\mu(\vec{x}, t) \rightarrow -A^\mu(-\vec{x}, t). \quad (3.11)$$

Es la interacción entre campos la que fija las paridades relativas de los diversos campos, puesto que  $P$  es una buena simetría ya que sino lo fuera no hay manera de elegir las fases de manera que  $\mathcal{L}(\vec{x}, t) \rightarrow \mathcal{L}(-\vec{x}, t)$ . A continuación mostramos las propiedades de transformación de los bilineales, estos bilineales son objetos fundamentales en física y aparecen frecuentemente, quarks y leptones se describen por espinores debido a su invarianza de Lorentz de los mismos en las formas bilineales.

- Escalar

$$\bar{\psi}_1 \psi_2 \rightarrow \bar{\psi}_1 \psi_2, \quad (3.12)$$



- Pseudoescalar

$$\bar{\psi}_1 \gamma^5 \psi_2 \rightarrow -\bar{\psi}_1 \gamma^5 \psi_2, \quad (3.13)$$

- Vector

$$\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_2 \rightarrow -\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_2, \quad (3.14)$$

- Axialvector

$$\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \gamma^5 \psi_2 \rightarrow -\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \gamma^5 \psi_2, \quad (3.15)$$

- Tensor

$$\bar{\psi}_1 \sigma_{\mu\nu} \psi_2 \rightarrow -\bar{\psi}_1 \sigma^{\mu\nu} \psi_2. \quad (3.16)$$

Donde  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son dos campos de Dirac no necesariamente iguales. Notemos que bajo paridad las coordenadas espaciales de todos los campos se invierten.  $P$  es un operador unitario, por lo que los valores propios sólo pueden ser  $+1$  ó  $-1$ , si el hamiltoniano de un sistema conmuta con el operador  $P$ , la paridad del sistema se conserva. Cada partícula elemental tiene asociada una paridad intrínseca por ejemplo las paridades del protón, el neutrón y el hiperón  $\Lambda$  son positivas. A pesar de no conservarse universalmente, la paridad es fundamental en física ya que es conservada en las interacciones electromagnéticas y fuertes, pero no en las débiles [12].

### Conjugación de carga $C$

A diferencia de  $P$  la conjugación de carga  $C$  no tiene un análogo en mecánica clásica. Esta simetría está relacionada con la existencia de una antipartícula para cada partícula. En teoría de campos relativista podemos asignar partículas con carga positiva y negativa a cada campo  $\phi$ . Es más, hay una transformación  $C$  que cambia  $\phi$  en  $\phi^+$ , que tiene cargas  $U(1)$  opuestas, entendiéndose por carga todo tipo y no sólo la eléctrica, por ejemplo el número leptónico y bariónico, tercer componente de isoespín, etc.... Es decir invierte el signo de la carga eléctrica y del momento magnético de la partícula dejando el resto de coordenadas iguales, lo cual implica el intercambio de partícula por antipartícula. Las interacciones fuertes y electromagnéticas son invariantes bajo  $C$  pero no las débiles [12]. Un sistema es invariante frente a la conjugación de carga si su hamiltoniano no se modifica bajo  $C$ . Veamos cual es la acción de  $C$  en los campos libres

- Campo escalar

$$\phi(\vec{x}) \rightarrow \phi(-\vec{x})^+, \quad (3.17)$$

- Espinor de Dirac

$$\psi(\vec{x}, t) \rightarrow C\bar{\psi}^T(\vec{x}, t), \quad (3.18)$$

$$\psi(\vec{x}, t) \rightarrow -\bar{\psi}^T(\vec{x}, t)C^{-1}, \quad (3.19)$$

- Campo vectorial

$$V_\mu(\vec{x}, t) \rightarrow -V_\mu^+(-\vec{x}, t), \quad (3.20)$$

- Campo vectorial axial

$$A_\mu(\vec{x}, t) \rightarrow A_\mu^+(-\vec{x}, t). \quad (3.21)$$

Veamos por ultimo las propiedades de transformación de los bilineales bajo  $C$

- Escalar

$$\bar{\psi}_1\psi_2 \rightarrow \bar{\psi}_2\psi_1, \quad (3.22)$$

- Pseudoescalar

$$\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_2 \rightarrow -\bar{\psi}_2\gamma^5\psi_1, \quad (3.23)$$

- Vector

$$\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2 \rightarrow -\bar{\psi}_2\gamma^\mu\psi_1, \quad (3.24)$$

- Axialvector

$$\bar{\psi}_1\gamma_\mu\gamma^5\psi_2 \rightarrow \bar{\psi}_2\gamma^\mu\gamma^5\psi_1, \quad (3.25)$$

- Tensor

$$\bar{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2 \rightarrow -\bar{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1. \quad (3.26)$$

### Inversión temporal $T$

El operador inversión temporal  $T$  tranforma un estado  $|\psi(t)\rangle$  en  $|\psi(-t)\rangle$ . Si  $T$  es una buena simetría para cada proceso existe el proceso idéntico invertido temporalmente (principio de microreversibilidad), En las interacciones fuertes  $T$  es una buena simetría, en el mundo microscópico la simetría de inversión temporal es invariante.

### 3.2.2. Simetría $CP$

Para espinores de Dirac  $\psi(t, r)$ , de acuerdo a las propiedades de transformación dadas en las expresiones (3.5), ésta se transforma bajo  $CP$  como

$$\begin{aligned} (CP)(\bar{\psi}_\alpha\psi_\beta)(CP)^\dagger &= e^{i\xi\psi}\gamma^0 C\bar{\psi}^T(t, -r), \\ (CP)\bar{\psi}(t, r)(CP)^\dagger &= -e^{-i\xi\psi}\psi^T(t, -r)C^{-1}\gamma^0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Reglas similares se obtienen para los espinores izquierdos y derechos. Para dos campos bilineales cualesquiera  $\psi_\alpha$  y  $\psi_\beta$ , estos se transforman bajo  $CP$  como

- Escalar

$$(CP)(\bar{\psi}_\alpha\psi_\beta)(CP)^\dagger = \bar{\psi}_\alpha\psi_\beta, \quad (3.28)$$

- Pseudoescalar

$$(CP)(\bar{\psi}_\alpha\gamma^5\psi_\beta)(CP)^\dagger = -\bar{\psi}_\beta\gamma^5\psi_\alpha, \quad (3.29)$$

- Vector

$$(CP)(\bar{\psi}_\alpha\gamma^\mu\psi_\beta)(CP)^\dagger = -\bar{\psi}_\beta\gamma_\mu\psi_\alpha, \quad (3.30)$$

- Vector axial

$$(CP)(\bar{\psi}_\alpha\gamma^\mu\gamma^5\psi_\beta)(CP)^\dagger = -\bar{\psi}_\beta\gamma_\mu\gamma^5\psi_\alpha. \quad (3.31)$$

Cabe mencionar que la lagrangiana que describe los campos libres  $(\psi, \phi)$  y su interacción con el campo electromagnético es invariante bajo la transformación  $CP$  [12].

### 3.2.3. Teorema $CPT$

La combinación de las tres simetrías,  $CPT$ , hasta ahora es consistente con las observaciones experimentales conocidas y existe un fuerte soporte teórico sobre el carácter fundamental de la simetría conjunta  $CPT$ . Esta simetría, conocida como el teorema  $CPT$  [10, 14], es un principio fundamental de las teorías de campo (teorías gobernadas por el grupo de Poincaré), que son la base de teorías exitosas como el SM. El teorema  $CPT$  afirma que una teoría cuántica de campos definida por una densidad lagrangiana  $L$  tal que

1. Es local, hermítica y covariante bajo transformaciones de Lorentz propias,
2. La teoría está cuantizada,

entonces dicha teoría es dejada invariante por la transformación *CPT*:

$$PCTL(x)T^{-1}C^{-1}P^{-1} = \mathcal{L}(x)$$

Entre las transformaciones continuas están las translaciones, rotaciones y los boost; y en las transformaciones discretas están la paridad, la conjugación de carga y la inversión temporal. Una de las consecuencias del teorema es que la validez de una de las invariancias *C*, *P* o *T* es equivalente a la validez del producto de los otros dos. Otra de las consecuencias de la simetría *CPT* es la igualdad entre la masa de la partícula y la de su antipartícula. Para partículas, inestables esta simetría implica que los tiempos de vida de la partícula y su antipartícula coinciden exactamente. También implica que la carga eléctrica que posee la antipartícula difiere de la que porta la partícula sólo en un signo, lo cual restringe fuertemente el resto de propiedades electromagnéticas de las partículas, como dipolos y multipolos de más altos ordenes. Se ha probado recientemente [10] que la violación de la simetría *CPT* implica la violación de la simetría de Lorentz, lo cual le confiere al teorema *CPT* un carácter fundamental, que, sin embargo, no tiene porque mantener su vigencia a escalas de distancias tan pequeñas como la escala de Planck.

### 3.3. Violación *CPT*

Kosteletsky [9] descubrieron ciertos mecanismos que rompen la simetría de Lorentz, los estudios sobre violaciones en las simetrías fundamentales de la física se han intensificado cada vez más en los últimos años, debido a la necesidad de tener una teoría sólida y consistente que describa estas violaciones. Es así que se propone la Extensión del Modelo Estándar (SME) como una herramienta para estudiar las violaciones de Lorentz con total independencia del modelo, siendo esta una teoría de campos efectiva y una extensión renormalizable del Modelo Estándar que incorpora efectos de violación de *CPT* y/o de Lorentz, es decir, el SME incluye operadores que violan la simetría *CPT* así como también operadores que la preservan. En esta teoría efectiva se introducen invariantes de norma. Cualquier violación de la simetría *CPT* implica el rompimiento de la simetría de Lorentz como se verá más adelante. Se dice que un sistema tiene una simetría determinada, cuando al someterse a una transformación sus propiedades permanecen inalteradas.

Usamos el marco para desarrollar una extensión violatoria de *CPT* al modelo estándar mínimo que podría servir como base para establecer límites cuantitativos de *CPT*. La violación de Lorentz y *CPT* es interesante en este contexto porque naturalmente genera oscilaciones de neutrinos y, además, conduce a modelos globales simples que describen todos los datos de neutrinos establecidos y anómalos [15]. En modelo se puede construir combinando todos los operadores infractores de Lorentz junto con los coeficientes de control para formar términos invariantes del observador en la densidad de Lagrange. Esta teoría es el SME . Un límite útil es la SME miminal, que restringe a los operadores a la dimensión masiva  $d \leq 4$  y es renormalizable en el espacio-tiempo de Minkowski. Dado que la violación de *CPT* en la teoría de campo efectiva viene con la violación de Lorentz.

### 3.3.1. Extensión del modelo estándar infractora de Lorentz

En el contexto de la teoría cuántica de campos convencional, presentamos una extensión general que viola Lorentz del modelo estándar mínimo  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  que incluye los términos  $CPT^{-even}$  y  $CPT^{-odd}$ . Se puede ver como el límite de baja energía de una teoría fundamental físicamente relevante con la dinámica covariante de Lorentz en la que se produce una violación espontánea de Lorentz. La teoría cuantizada es renormalizable y se esperan otras características deseables, como la microcausalidad, la positividad de la energía y la cancelación de anomalías habitual. La simetría espontánea que se rompe con el  $U(1)$  electromagnético se mantiene.

En esta sección, ampliamos el modelo estándar mínimo (MEM) agregando todos los posibles términos infractores de Lorentz que podrían surgir de la ruptura espontánea de la simetría en un nivel fundamental, pero que preservan la invariancia del indicador  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . El lagrangiano completo para la extensión del SM de Lorentz puede dividirse en una suma de términos.

### 3.3.2. Violación de Lorentz y $CPT$ en neutrinos

Se presenta un formalismo general para las violaciones de la simetría de Lorentz y  $CPT$  en el sector de los neutrinos. Se deriva el hamiltoniano efectivo para la propagación de neutrinos en presencia de violación de Lorentz y  $CPT$ , y se estudian sus propiedades. Entre las predicciones se encuentran los efectos dependientes de la dirección, incluida la mezcla de neutrino-antineutrino. Otras consecuencias de la violación de Lorentz y  $CPT$  involucran dependencias de energía no convencionales en longitudes de oscilación y ángulos de mezcla. Se desarrolla una variedad de modelos simples con y sin masas de neutrinos para ilustrar efectos físicos clave. Las sensibilidades alcanzables a los coeficientes para la violación de Lorentz en la SME se estiman para varios tipos de experimentos. Muchos experimentos tienen una sensibilidad potencial a los efectos suprimidos por Planck, comparable a las mejores pruebas en otros sectores. La falta de restricciones experimentales existentes, el amplio rango de espacio de coeficiente disponible y la variedad de efectos novedosos implican que algunos o quizás todos los datos existentes sobre las oscilaciones de neutrinos podrían deberse a la violación de Lorentz y  $CPT$  [16].

En este trabajo, estas violaciones pueden surgir a través de la ruptura de la simetría de Lorentz y quizás también del rompimiento de la simetría  $CPT$  [19]. Como se sabe que el SM proporciona una descripción exitosa de la mayoría de la física a bajas energías en comparación con la escala de Planck. La teoría del campo cuántico efectiva general construida a partir del SM y que permite la violación arbitraria de Lorentz independiente de la coordenada se denomina SME. Como la violación  $CPT$  implica la violación de Lorentz [7], esta teoría también permite la rotura general de  $CPT$ .

El lagrangiano de la SME consiste en el lagrangiano estándar SM complementado con todos

los términos posibles que se pueden construir con campos SM y que introduce violaciones de la simetría de Lorentz. Los términos adicionales tienen la forma de operadores infractores de Lorentz acoplados a coeficientes con índices de Lorentz, y podrían surgir en una variedad de formas. Un mecanismo genérico y elegante es la violación espontánea de Lorentz.

Aquí, exploramos el comportamiento de los neutrinos en presencia de Lorentz y la violación de *CPT* utilizando el marco SME. La propuesta original para la violación de Lorentz y *CPT* en neutrinos [16] ha sido seguida por varias investigaciones teóricas dentro del contexto del SME. No se ha realizado un estudio teórico exhaustivo sobre la violación de Lorentz y *CPT* en neutrinos. El presente trabajo llena parcialmente este vacío aplicando las ideas del SME a un sector de neutrinos general con todos los acoplamientos posibles de neutrinos zurdos y diestros. Nos concentramos principalmente en el operador que infringe Lorentz.

En las teorías realistas de campos efectivos, la violación de *CPT* va seguida de la infracción de Lorentz, por lo que la SME también describe la violación general de *CPT*. Un término que viola Lorentz en la densidad de Lagrange de la SME es la densidad escalar de un observador formada por la contratación de un operador infractor de Lorentz con un coeficiente de violación de Lorentz. Los operadores se pueden clasificar sistemáticamente usando su dimensión de masa  $d$ , apareciendo valores de  $d$  arbitrariamente grandes. La restricción de SME para incluir solo operadores infractores de Lorentz con  $d \leq 4$ , llamada SME mínima, es una teoría renormalizable en el espacio-tiempo de Minkowski.

La ruptura espontánea de *CPT* que surge en la teoría de cuerdas ha sido sugerida como una posible firma experimental observable en los sistemas de mesones neutros. Proporcionamos un marco teórico para el tratamiento de los efectos de baja energía de la violación espontánea de *CPT* y la consiguiente rotura parcial de Lorentz. El análisis está dentro del contexto de la mecánica cuántica relativista convencional y la teoría del campo cuántico en cuatro dimensiones. Usamos el marco para desarrollar una extensión violatoria de *CPT* al modelo estándar mínimo que podría servir como base para establecer límites cuantitativos de *CPT*.

Nuestro propósito es el estudio sobre el modelo estándar minimal que viola *CPT* y que proporciona una base teórica para establecer límites cuantitativos en la invarianza *CPT*. La idea es incorporar nociones de *CPT* espontáneo y ruptura de Lorentz, manteniendo la estructura y propiedades de gauge habituales, como la renormalizabilidad. Para lograr esto, primero establecemos un marco conceptual y un procedimiento para tratar la violación espontánea de *CPT* y Lorentz en el contexto de la teoría cuántica convencional.

En esta sección se propone una extensión que viola *CPT* del modelo estándar mínimo. Comenzamos nuestras consideraciones con un modelo simple dentro del cual se pueden examinar muchas de las características básicas de la violación espontánea de *CPT*. El modelo implica un solo campo masivo Dirac  $\psi(x)$  en cuatro dimensiones con densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}', \quad (3.32)$$

donde  $\mathcal{L}_0$  es el lagrangiano Dirac de campo libre habitual para un fermión  $\psi(x)$  de masa  $m$ , y donde  $\mathcal{L}'$  contiene términos adicionales que infringen  $CPT$  que se describirán a continuación. Para la presente discusión, seguimos un enfoque en el que se supone que las propiedades  $C, P, T$  y Lorentz de  $\psi$  se determinan convencionalmente mediante la teoría de campo libre  $\mathcal{L}_0$  y se usan para establecer las propiedades correspondientes de  $\mathcal{L}'$  [17]. Este método es intrínsecamente perturbador, lo cual es particularmente apropiado aquí ya que cualquier efecto que viola  $CPT$  debe ser pequeño.

Estamos interesados en posibles formas de  $\mathcal{L}'$  que podrían surgir como contribuciones efectivas de la violación espontánea de  $CPT$  en una teoría más completa. Según nuestro conocimiento, la teoría de cuerdas forma la única clase de teorías (de gauge) en cuatro o más dimensiones que son consistentes cuánticamente, invariantes de forma dinámica e invariantes, y se sabe que admiten un mecanismo explícito [18] para la violación espontánea de  $CPT$  desencadenada por interacciones en el lagrangiano. Sin embargo, para mantener el tratamiento lo más general posible, sólo suponemos que la violación espontánea de  $CPT$  surge de valores de expectativa distintos de cero adquiridos por uno o más tensores de Lorentz  $T_0$ , por lo que  $\mathcal{L}'$  se considera un lagrangiano cuatridimensional efectivo.

Sin embargo, cualquier término de ruptura de  $CPT$  que sea parte de una teoría efectiva cuatridimensional debe tener una dimensión de masa cuatro. En el lagrangiano efectivo, cada combinación de campos y derivadas de dimensión mayor que cuatro debe por lo tanto tener un factor de ponderación correspondiente de un poder negativo  $-k$  de al menos una escala de masa  $M$  que es grande en comparación con la escala  $m$  de la teoría efectiva.

Cada contribución a  $\mathcal{L}'$  puede descomponer como una combinación lineal de los 16 elementos básicos habituales del álgebra de matriz gamma. Solo el subconjunto de estos que producen bilineal viola  $CPT$  es de interés para nuestros propósitos actuales, y nos permiten proporcionar expresiones explícitas y relativamente simples para las posibles contribuciones que violan  $CPT$  a  $\mathcal{L}'$ .

Para el caso  $k = 0$  de interés aquí, encontramos dos tipos posibles de término que viola el  $CPT$

$$\mathcal{L}_a = a_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi, \quad \mathcal{L}_b = b_\mu \bar{\psi} \gamma^5 \gamma_\mu \psi. \quad (3.33)$$

Para completar, proporcionamos aquí también los términos que aparecen para el caso  $k = 1$ , donde encontramos tres tipos de contribuciones relevantes:

$$\mathcal{L}'_c = \frac{1}{2} i c^\alpha \bar{\psi} \vec{\partial}_\alpha \psi, \quad \mathcal{L}'_d = \frac{1}{2} d^\alpha \bar{\psi} \gamma^5 \vec{\partial}_\alpha \psi, \quad \mathcal{L}'_e = \frac{1}{2} i e^\alpha_{\mu\nu} \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \vec{\partial}_\alpha \psi, \quad (3.34)$$

donde  $A \vec{\partial}_\mu B \equiv A \partial_\mu B - (\partial_\mu A) B$ . En todas estas expresiones, las cantidades  $a_\mu, b_\mu, c^\alpha, d^\alpha$  y  $e^\alpha_{\mu\nu}$  deben ser reales como consecuencia de sus orígenes en la ruptura espontánea de la simetría

y de la presunta hermiticidad de la teoría subyacente. Son combinaciones de constantes de acoplamiento, expectativas de tensor, parámetros de masa y coeficientes que surgen de la descomposición de  $\Gamma$ .

De acuerdo con su interpretación como constantes de acoplamiento efectivas que surgen de un escenario con ruptura de simetría espontánea,  $a_\mu, b_\mu, c^\alpha, d^\alpha$  y  $e_{\mu\nu}^\alpha$  son invariantes bajo transformaciones de *CPT*. Junto con las propiedades de transformación de *CPT* estándar atribuidas a  $\psi$ , esta invarianza causa los términos en las ecu. (3.33) y (3.34) para romper *CPT* [19]. Como se discutió anteriormente, en el resto de esta sección nos limitamos en gran medida a las expresiones de la ecu. (3.33).

Permitiendo ambos tipos de término en la ecu. (3.33) aparecer en  $\mathcal{L}'$  produce un lagrangiano modelo de la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}i\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\partial}_\mu\psi - a_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - b^\mu\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (3.35)$$

El procedimiento variacional genera una ecuación de Dirac modificada:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - a^\mu\gamma^\mu - b^\mu\gamma^5\gamma^\mu - m)\psi = 0. \quad (3.36)$$

### 3.3.3. Simetrías continuas

Considere a continuación las simetrías continuas del modelo con lagrangiano (3.35). Para ser definitivos, comenzamos con un análisis en un marco inercial orientado dado en el que se supone que se han especificado los valores de las cantidades  $a_\mu$  y  $b_\mu$ . Los efectos de las rotaciones y los impulsos se consideran más adelante.

Los términos que violan el *CPT* en (3.35) no afectan la invariabilidad del indicador  $U(1)$  global usual, que ha conservado la corriente  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ . Por lo tanto, la carga se conserva en el modelo.

La distinción entre las transformaciones del observador y de la partícula es relevante para el presente modelo, donde los términos que violan *CPT* pueden considerarse como derivados de los campos de fondo constantes  $a_\mu$  y  $b_\mu$ .

Para las discusiones en las subsecciones anteriores, adoptamos un enfoque práctico para la definición de las transformaciones *CPT* y Lorentz. Implica tratar las propiedades *C, P, T* y Lorentz de  $\psi$  como definidas a través de la teoría de campo libre  $\mathcal{L}_0$  y luego usarlas para establecer las propiedades de simetría de  $\mathcal{L}'$ .

Considere primero un modelo que aparentemente viola *CPT* y Lorentz formado con  $a_\mu$  solo, definido en un marco inercial dado por el lagrangiano

$$\mathcal{L}[\psi] = \mathcal{L}_0[\psi] - \mathcal{L}'[\psi], \quad (3.37)$$



donde redefinimos el campo de  $\psi$  por una fase dependiente del espacio-tiempo.

Dentro de la mecánica cuántica relativista convencional, se considera que los estados de energía negativa están llenos, formando el mar de Dirac. Cuando un estado de energía negativa se excita a uno de energía positiva, deja un agujero que parece ser una partícula con energía, momento, giro y carga opuestos a la del estado de energía negativa. Sin embargo, en el presente modelo, cuando un estado de energía negativa que se mueve en un fondo que viola  $CPT$  con los parámetros  $a_\mu$  y  $b_\mu$  se excita a uno de energía positiva, deja un agujero que parece ser una partícula con valores opuestos como antes pero en movimiento en un fondo que viola el  $CPT$  con los parámetros  $-a_\mu$  y  $b_\mu$  en su lugar. Esto se debe a que el término  $\mathcal{L}'_a$  es impar bajo conjugación de carga. El mismo efecto puede verse explícitamente al construir la ecuación de carga-conjugación de Dirac para el modelo. Encontramos

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + a_\mu \gamma^\mu - b_\mu \gamma^5 \gamma^\mu - m)\psi^c = 0, \quad (3.38)$$

donde,  $\psi^c \equiv C\bar{\psi}^T$  y  $C$  es la matriz de conjugación de carga.

### 3.3.4. Extensión del SM

En esta parte, consideramos la posibilidad de generalizar el modelo estándar mínimo agregando términos que violen el  $CPT$ . Como la violación de  $CPT$  no se ha observado en la naturaleza, las constantes que infringen  $CPT$  que aparecen en una extensión del modelo estándar mínimo deben ser pequeñas. En lo que sigue, asumimos que estas constantes son singletes bajo el grupo de gauge, pero como antes se comportan bajo transformaciones de Lorentz de partículas como tensores con un número impar de índices de Lorentz.

La discusión en las secciones previas está limitada a los bilineales de fermiones con rotura de  $CPT$ . Sin embargo, otros tipos de términos que violan  $CPT$  en la lagrangian podrían originarse en principio a partir de la ruptura de simetría espontánea. Adoptamos aquí un enfoque general, investigando posibles extensiones que violan  $CPT$  para el modelo estándar mínimo, de modo que se mantenga la estructura de  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ .

Cualquier término lagrangiano debe formarse a partir de combinaciones de derivados covariantes y campos para leptones, quarks, bosones gauge y bosones de Higgs. Consideramos las primeras extensiones lagrangianas que violan  $CPT$  que implican fermiones. La inspección muestra que las únicas posibilidades que satisfacen los criterios anteriores son términos fermión-bilineales puros sin derivados [20]. En el contexto presente que involucra a muchos fermiones, el análisis dado en las secciones previas de tales términos requiere cierta generalización. Como la invarianza de  $SU(3)$  impide los acoplamientos de quark-lepton, podemos tratar los sectores de lepton y quark por separado, como de costumbre.

Considera el sector de leptones. Denoten los multipletes de leptón izquierda y la derecha por

$$L_A = \begin{pmatrix} \nu_A \\ l_A \end{pmatrix}_L, \quad R_A = (l_A)_R,$$

donde  $A = 1, 2, 3$  y  $l_A = (e, \mu, \tau)$ ,  $\nu_A \equiv (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$  con 3.3.

Entonces, el conjunto más general de leptones bilineales que violan  $CPT$  consistentes con la invariancia de gauge es

$$\mathcal{L}_{lepton}^{CPT} = -(a_L)_{\mu AB} \bar{L}_A \gamma^\mu L_B - (a_R)_{\mu AB} \bar{R}_A \gamma^\mu R_B. \quad (3.39)$$

Las matrices constantes de sabor y espacio  $a_{L,R}$  son hermitianas. La presencia del factor  $\gamma^\mu$  permite que aparezcan campos de solo una mano en un término dado mientras se mantiene la invarianza del indicador. Esto contrasta con los acoplamientos Yukawa convencionales, en los que aparecen campos de ambas manos y la invariancia está garantizada por la presencia del doblete de Higgs.

Después de la ruptura espontánea de la simetría, los autoestados de masa se construyen con transformaciones unitarias estándar

$$\nu_{LA} = (U_L^\nu)_{AB} \hat{\nu}_{LB}, \quad l_{LA} = (U_L^l)_{AB} \hat{l}_{LB}, \quad l_{RA} = (U_R^l)_{AB} \hat{l}_{RB}. \quad (3.40)$$

El término que viola el  $CPT$  en ecu (3.40) se convierte

$$\mathcal{L}_{lepton}^{CPT} = -(\hat{a}_{\nu L})_{\mu AB} \bar{\hat{\nu}}_{LA} \gamma^\mu \hat{\nu}_{LB} - (\hat{a}_{lL})_{\mu AB} \bar{\hat{l}}_{LA} \gamma^\mu \hat{l}_{LB} - (\hat{a}_{lR})_{\mu AB} \bar{\hat{l}}_{RA} \gamma^\mu \hat{l}_{RB}, \quad (3.41)$$

donde cada matriz de constantes  $\hat{a}_\mu$  se obtiene para la correspondiente  $a_\mu$  mediante rotación unitaria con la matriz correspondiente  $U$ :  $\hat{a}_\mu = U^\dagger a_\mu U$ .

La extensión general que viola  $CPT$  del sector de leptones del modelo estándar mínimo tiene la forma

$$\mathcal{L}_{lepton}^{CPT} = -(a_\nu)_{\mu AB} \bar{\nu}_A \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \gamma^\mu \nu_B - (a_l)_{\mu AB} \bar{l}_A \gamma^\mu l_B - (b_l)_{\mu AB} \bar{l}_{\mu AB} \bar{l}_A \gamma^5 \gamma^\mu l_B, \quad (3.42)$$

los coeficiente  $(a_l)_{\mu\nu AB}$  y  $(b_l)_{\mu\nu AB}$  son hermiticos y con dimensiones de masa, donde hemos usado la ecu. (3.3) para reemplazar los acoplamientos izquierdo y derecho con acoplamientos de vector vectorial y axial, y donde  $(a_\nu)_{\mu AA} = 0$ . Note que ecu. (3.42) incluye términos que rompen los números de leptones individuales, aunque el número total de leptones permanece conservado. Por lo tanto, las transiciones que cambian el sabor existen en principio, pero son inobservables si los acoplamientos que infringen  $CPT$  están suficientemente suprimidos

En esta sección, hemos desarrollado un marco para tratar el  $CPT$  espontáneo y la ruptura de Lorentz en el contexto de la teoría de campo efectiva convencional. Se supone que la acción subyacente es consistente y completamente  $CPT$  y Poincare invariante, con soluciones que muestran  $CPT$  espontáneo y ruptura de Lorentz. La teoría de campos de baja energía

---

efectiva entonces permanece invariante y covariante de traducción bajo cambios de marco inercial observador, pero viola  $CPT$  y rompe parcialmente la covarianza bajo aumentos de partículas.

Nuestro enfoque se ha centrado principalmente en los términos lagrangianos que implican fermiones bilineales que violan  $CPT$ , que son relevantes para experimentos que limitan la  $CPT$  en la interferometría de mesones. Hemos investigado la mecánica cuántica relativista y la teoría de campo cuántico de un modelo para un fermión de Dirac que implica una violación de  $CPT$ . El análisis sugiere que las teorías de campo efectivas con rotura espontánea de  $CPT$  tienen propiedades deseables como causalidad microscópica y renormalizabilidad. Las interacciones adicionales aparecen mínimamente afectadas por la violación de  $CPT$ , y los efectos se limitan en gran medida a las modificaciones en las líneas de fermión. Dentro del marco desarrollado, hemos construido una generalización violatoria de  $CPT$  del modelo estándar mínimo que podría usarse para establecer límites cuantitativos de  $CPT$  [21].

El SME describe la violación de  $CPT$  y/o de Lorentz como se ha dicho, y uno de los efectos de esta violación da origen a nuevos vértices, y no sólo eso, sino que también modifica los propagadores fermiónicos y las estructuras de las ecuaciones de movimiento. Aunque el SME tenga términos que violan  $CPT$  y Lorentz, sigue conservando ciertas propiedades propias de una teoría cuántica



# Capítulo 4

## Neutrinos

En esta sección hablaremos sobre los neutrinos y algunas de sus propiedades

### 4.1. El Modelo Estándar y el neutrino

Desde los primeros días de la física de partículas, llevo a muchas personas a sospechar que puede existir una simetría subyacente en la interacción débil que no se manifiesta en el espectro de masas de partículas que interactúan débilmente. De la naturaleza de la corriente cargada que conecta a dos partículas diferentes en la desintegraciones débiles observado a finales del los años cincuenta y principios de los sesenta, donde se sospecha que la simetría subyacente debe tener una parte de  $SU(2)$ . Glashow [22] propuso  $SU(2) \times U(1)$  como una posible simetría local de interacciones débiles. En 1964 Salam and Ward [22] uso este grupo de simetría para construir una teoría de electrones y muones. Luego Weinberg en 1967 and Salam [22] proponen la teoría de leptones que rompe espontáneamente  $SU(2) \times U(1)$  en la versión moderna, la extensión correcta de este modelo para incluir a los quarks se hizo en los años setenta usando la sugerencia anterior de Glashow, Iliopoulos and Mainini [11].

### 4.2. Oscilación de Neutrinos

En esta sección revisamos algunas propiedades del neutrino y la teoría detrás de la oscilación de neutrinos. Para un análisis más exhaustivo se recomienda revisar [18, 20, 23].

El campo del neutrino libre es un objeto de cuatro componentes, que satisface la ecuación de Dirac

$$\mathcal{L}(x) = (i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi(x) = 0. \quad (4.1)$$

En el SM los campos izquierdos y derecho se consideran campos fundamentales. Están dados por (3.3), donde  $\psi$  es el campo de Dirac usual y  $\psi_{L,R}$  son dos campos de 2 componentes denominados fermiones de Weyl. Los fermiones de Weyl son autoestados de la transformación

quiral  $\psi \rightarrow \gamma^5 \psi$ , con -1 y 1, respectivamente. En la teoría electrodébil de Fermi el neutrino interactúa con el electrón mediante el acoplo

$$\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L, \quad (4.2)$$

por tanto la interacción débil conserva quiralidad.

### 4.3. Neutrinos masivos

Uno de los objetivos principales de la física de partículas es la unificación de las interacciones fundamentales, esto proporciona una motivación extra para el neutrino masivo, ya que como sabemos muchos de los interesantes modelos de unificación predice la masa de los neutrinos en algún nivel [24]. Las preguntas teóricas no son sólo cómo se puede extender el Modelo Estándar para encontrar modelos con neutrinos masivos, sino también cómo se puede entender la pequeñez de las masas de los neutrinos en comparación con las masas de los fermiones cargados. Cabe mencionar que el modelo estándar sin neutrinos diestros tiene la ventaja deseable de que las cancelaciones de anomalías implica una cuantización de carga si sólo hay una familia de fermiones [22].

Si los neutrinos obtienen masa, no hay razón fundamental para la cual estos objetos describan partículas físicas con un valor propio de masa específico, en general estos estados de sabor  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ , serán superposiciones de los estados propios de masa [20]

$$\nu_{lL} = \sum_k^n U_{lk} \nu_k, \quad (4.3)$$

donde  $l = e, \mu, \tau$ ,  $U$  es una matriz unitaria de mezcla y  $k$  corre sobre los autoestados de masa, otras palabras, la masa de los eigenestados  $\nu_k$  son mezclas de los eigenestados de sabor para un determinado neutrino físico se puede acoplar a más de un leptón cargado a través de la corriente cargada [20].

### 4.4. Definición matemática del campo de Dirac

El operador  $\psi(x)$  puede ser escrito como:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left( \hat{f}_s(p) u_s(p) e^{-ip \cdot x} + \hat{f}_s^\dagger(p) v_s(p) e^{ip \cdot x} \right), \quad (4.4)$$

En términos del operador  $\hat{f}_s(p)$  que aniquila un sólo estado de partículas de momento  $p$  y componente de espín  $s$  en la dirección de momento, y el operador  $\hat{f}_s^\dagger(p)$  crea un estado

antipartícula. El espinor  $u_s(p)$  y  $v_s(p)$  son la solución de la onda plana de energía positiva y negativa respectivamente y satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned}(\gamma^\mu p_\mu - m)u_s(p) &= 0, \\(\gamma^\mu p_\mu + m)v_s(p) &= 0.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Donde  $\gamma^\mu$  son un conjunto de 4 matrices que satisfacen las relaciones

$$\gamma^\mu, \gamma^\nu = 2g^{\mu\nu},$$

y

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0.$$

El campo de espinor cambia según la regla

$$\psi'(x') = \exp\left(-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}W^{\mu\nu}\right)\psi(x),$$

donde

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu],$$

involucra al conmutador de los  $\gamma$  matrices de Dirac

$$\psi^*(x') = \exp\left(-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}^*W^{\mu\nu}\right)\psi^*(x).$$

## 4.5. Propiedades electromagnéticas de los neutrinos

Los neutrinos no tienen carga eléctrica, pero eso no significa que no tengan interacción electromagnética. Considere el ejemplo familiar de la electrodinámica cuántica, donde el momento magnético anómalo de un fermión es incluido por loops cuánticos. En el contexto de las teorías electrodébiles, los lazos cuánticos similares pueden inducir propiedades electromagnéticas del neutrino, esto es cierto, incluso en el modelo electrodébil del Modelo Estándar donde se induce el radio de carga para los neutrinos.

Para un solo neutrino uno puede definir hasta cuatro factores de forma electromagnética por ser una partícula de Dirac. Además, dado que los modelos de masa de neutrinos generalmente predicen neutrinos, uno puede tener proceso de carga de sabor tales como  $\mu \rightarrow e + \gamma$ , de manera similar, en el sector de los neutrinos, uno puede tener descomposición como  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_{\alpha'} + \gamma$ , donde  $\nu_\alpha$  y  $\nu_{\alpha'}$  son dos neutrinos diferentes, ha habido muchas sugerencias de que este proceso podría tener implicaciones cosmológicas importantes [24].

El lagrangiano de interacción básica de los fermiones está dado por

$$\mathcal{L}_{int} = eQ\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu,\tag{4.6}$$

donde  $e$  es la carga del positrón y  $Q$  es la carga de la partícula relevante en unidades de  $e$ .

### 4.5.1. Factores de forma de un neutrino de Dirac

Concentremos en un neutrino de Dirac, en este caso, tomando el elemento de la matriz  $\mathcal{L}_{eff}$  entre los estados de una partícula, obtenemos

$$\mathcal{L}_{eff} = \bar{\psi} O^\mu \psi A_\mu \equiv J^\mu(x) A_\mu(x), \quad (4.7)$$

donde la forma  $J^\mu$ , es el sujeto de nuestra discusión

$$\langle \mathbf{p}'; s' | J^\mu(0) | \mathbf{p}; s \rangle = \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \Gamma_\mu(p, p') u_s(\mathbf{p}).$$

La hermiticidad del lagrangino efectivo implica que  $\Gamma_\mu$  satisface

$$\Gamma_\mu(p, p') = \gamma_0 \Gamma_\mu^+(p', p) \gamma_0, \quad (4.8)$$

además, la conservación de la corriente electromagnética implica

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{p}'; s' | J^\mu(0) | \mathbf{p}; s \rangle, \\ &= i q^\mu \bar{u}(\mathbf{p}') \Gamma_\mu(p, p') u(\mathbf{p}), \end{aligned}$$

donde

$$q = p - p'.$$

Si bien está afirmación general sobre la invarianza de gauge electromagnético que es válido para cualquier fermión, para los términos neutrales como los neutrinos se puede obtener una condición más restringida de la identidad de Ward:

$$q^\mu \Gamma_\mu(p, p') = 0.$$

Sujeta a estas condiciones ahora podemos escribir la forma más general para  $\Gamma_\mu$  que también es consistente con la invarianza de Lorentz, [18,22]

$$\Gamma_\mu(p, p') = (q^2 \gamma^\mu - q^\mu \not{q}) [R(q^2) + r(q^2) \gamma_5 + \sigma_{\lambda\rho} q^\rho [D_\mu(q^2) + i D_E(q^2) \gamma_5]]$$

Cabe señalar que  $\Gamma_\mu$  depende sólo del vector  $q$ , y no de  $p + p'$ . Esto se debe al hecho de que todos los términos posibles involucran  $p + p'$  pueden convertirse en términos que implican  $q$  mediante el uso de la identidad de Gordon [A.1].

En segundo lugar, la condición de hermiticidad en la ecuación (5.1) implica que los factores de forma  $R$ ,  $r$ ,  $D_\mu$  y  $D_E$  son todos reales. En tercer lugar, los factores de forma son invariante de Lorentz, ya que  $p^2 = p'^2 = m_l^2$ , donde es la masa del fermión  $f$ , sólo hay una cantidad independiente, es decir  $q^2$ , es invariante de Lorentz. Los factores de forma dependen solo de  $q^2$ .



---

El significado físico de los factores de forma se entienden al considerar el límite no relativista, usando la forma explícita de las matrices de Dirac y la solución de la onda plana, vemos que el término  $D_\mu$  se reduce a  $D_\mu(0)\sigma \cdot \mathbf{B}$  en el límite relativista, donde  $\mathbf{B}$  es el campo magnético. Así,  $D_\mu(0)$  es el momento magnético de la partícula que denotamos por  $\lambda$ . En general  $D_\mu(q^2)$  se llama factor de forma magnético. De manera similar,  $D_E(q^2)$  es el factor de forma eléctrico, ya que  $d \equiv D_E(0)$  es el momento dipolar eléctrico. La cantidad  $R(q^2)$  se llama radio de carga, y  $r(q^2)$  es el radio de carga axial.



# Capítulo 5

## Propiedades electromagnéticas de los neutrinos y violación de Lorentz

Kostelecky [9] propone la Extensión del Modelo Estándar como una herramienta para estudiar las violaciones de Lorentz con total independencia del modelo, siendo esta una teoría de campos efectiva y una extensión del Modelo Estándar que incorpora efectos de violación de CPT y de Lorentz, es decir, la Extensión del Modelo Estándar incluye operadores que violan la simetría CPT así como también operadores que la preservan. En el contexto del Modelo Estándar Mínimamente Extendido donde es introducido un tetra-vector constante,  $b_\mu$  y  $a_\mu$ , responsable de la violación de CPT.

Introduciremos el principal objeto de estudio de esta sección, que es el propagador de Feynman, también conocido como amplitud de transición. El propagador es la amplitud de probabilidad de encontrar a una partícula en la posición  $P(x_0, t_0)$ , sabiendo que a un tiempo se encontraba en  $P(x, t)$ , esto es, el elemento de matriz del operador de evolución temporal entre estados de posición.

### 5.1. Cálculo del propagador

Estaremos trabajaremos en el Modelo Mínimamente Extendido en el que se viola la simetría de Lorentz, concretamente nos restringimos al Lagrangiano de tipo:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\not{\partial} - \not{b} + \not{a})\psi, \quad (5.1)$$

donde  $b_\mu$  y  $a_\mu$  son los parámetros que violan la simetría de Lorentz.

Ahora reescribiendo el Lagrangiano en la Ec. (5.1) como:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - m_l\bar{\psi}\psi + b_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi + a_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad (5.2)$$

haciendo uso de la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0, \quad (5.3)$$

tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} &= i\partial_\mu \gamma^\mu \psi - m_l \psi + b_\mu \gamma^\mu \gamma^5 \psi + a_\mu \gamma^\mu \psi, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} i\partial_\mu \gamma^\mu \psi - m_l \psi + b_\mu \gamma^\mu \gamma^5 \psi + a_\mu \gamma^\mu \psi &= 0, \\ (i\partial_\mu \gamma^\mu - m_l + b_\mu \gamma^\mu \gamma^5 + a_\mu \gamma^\mu) \psi &= 0, \\ (i\cancel{\partial} - m_l + \cancel{b}\gamma^5 + \cancel{a}) \psi &= 0. \end{aligned}$$

Pasando al espacio de momentos la Ec. (??) se expresa como

$$(\cancel{k} - m_l + \cancel{b}\gamma^5 + \cancel{a})u = 0. \quad (5.4)$$

Sabemos que el propagador es la inversa de la ecuación (5.4), de tal manera que el propagador para nuestros cálculos es:

$$S_{f1} = \frac{i(\cancel{k} + \cancel{a} + \gamma^5 \cancel{b} + m) [(a+k)^2 - b^2 - m^2 - 2[(\cancel{k} + \cancel{a})\cancel{b} - (a+k) \cdot b] \gamma^5]}{[(a+k)^2 - b^2 - m^2]^2 + 4[b^2(a+k)^2 - (b \cdot (a+k))^2]}. \quad (5.5)$$

## 5.2. Cinématica del decaimiento radiativo

Consideremos el proceso, en la teoría que viola simetría de Lorentz

$$\nu_i(p_1) \rightarrow \nu_j(p_2) + \gamma,$$

donde  $\nu_j$  es un neutrino más ligero.

Para neutrinos de Dirac, podemos escribir bajo los elementos de la matriz  $T$  del proceso como:

$$iT = \bar{u}^{p_2}(p') \Gamma_\mu u(p_1) \epsilon^{*\mu},$$

donde  $\epsilon^\mu$  es la polarización del fotón. La condición de Lorentz gauge es la siguiente

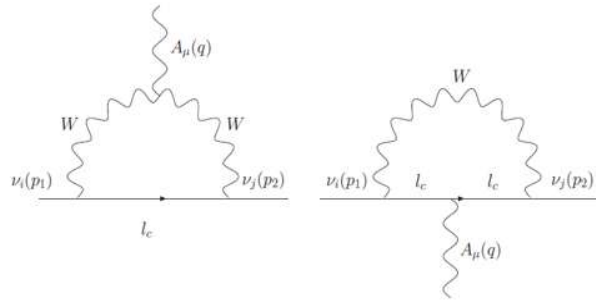
$$\epsilon^\mu q_\mu = 0.$$

Emplearemos la condición de capa de masa para las partículas reales externas y la conservación del tetra-momento, lo cual nos permite establecer lo siguiente:

- Para el fotón exterior se cumple  $q^2 = 0$  y para los neutrinos exteriores se tiene  $p_1^2 = m_1^2$ ,  $p_2^2 = m_2^2$  donde  $m_1$  y  $m_2$  es la masa del neutrino entrante y neutrino saliente respectivamente.
- Por conservación del cuadri-momento  $q = p_1 - p_2$ , por lo que  $(p_1 - p_2)^2 = p_1^2 - 2p_1 \cdot p_2 + p_2^2 = 0$ ,  $2p_1 \cdot p_2 = p_1^2 + p_2^2$ ,  $p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$ ,  $p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2)$ .
- Se tiene la condición de transversalidad para el cuadri-momento del fotón,  $q^\mu \epsilon_\mu(q) = (p_1 - p_2)^\mu \epsilon_\mu(q) = 0$ .

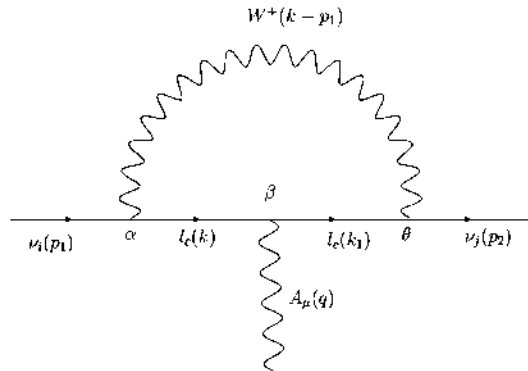
### 5.3. Reglas de Feynman

SEn la Fig. 5.1 se muestran los diagramas que contribuye a los momentos dipolar eléctrico y magnético del neutrino [26].



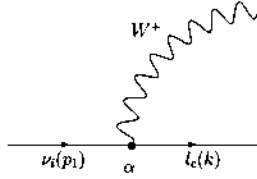
Gráfica 5.1: Diagrama de Feynman.

A fin de llevar a cabo el cálculo de los momentos dipolares, consideramos en primer lugar al segundo diagrama de la Fig. 5.1:



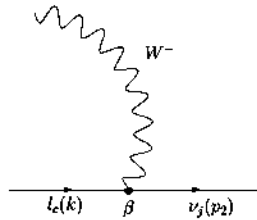
Gráfica 5.2: Diagrama de Feynman.

Es necesario considerar las reglas de Feynman que están involucradas en nuestro diagrama. Además de las usuales reglas de Feynman del Modelo Estándar, es necesario incluir las que corresponden al Modelo Estándar Mínimamente Extendido. Como se observa en el diagrama de Feynman, éste contiene dos tipos diferentes de vértices. La regla de Feynman para el primer vértice, el cual incluye un neutrino  $\nu_i$ , un leptón  $l_c(k)$ , y un bosón  $W^+$ , se presenta en la Fig. 5.3.



Gráfica 5.3: La regla de Feynman para el vértice  $\nu_i l_c W^+$ , esta dado por  $ig\gamma^\alpha(V_{ci} + A_{ci}\gamma^5)$ .

El tercer vértice, el cual incluye un un leptón  $l_c(k)$ , un bosón  $W^-$ , y un neutrino  $\nu_j$ , se presenta en la Fig. 5.4.



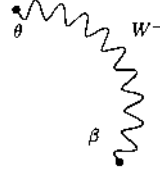
Gráfica 5.4: La regla de Feynman para el vértice  $\nu_j l_c W^-$ , esta dado por  $ig\gamma^\beta(V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger\gamma^5)$ .

El propagador  $W(k - p_1)$



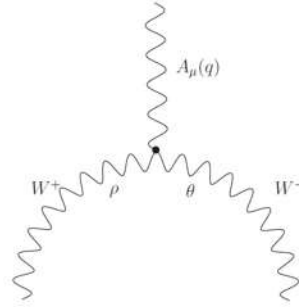
Gráfica 5.5: La regla de Feynman para el propagador  $W^+$  es  $\frac{-i}{(k-p_1)^2 - m_w^2} \left( g_{\alpha\beta} - \frac{(k-p_1)_\alpha (k-p_1)_\beta}{m_w^2} \right)$ .

y el propagador  $W(k - p_2)$  es



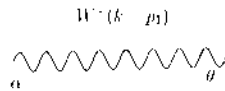
Gráfica 5.6: La regla de Feynman para el propagador  $W^-$  es  $\frac{-i}{(k-p_2)^2-m_w^2} \left( g_{\theta\beta} - \frac{(k-p_2)_\theta(k-p_2)_\beta}{m_w^2} \right)$ , aquí  $k$  es el tetra-momento que circula por la partícula.

La correspondiente regla de Feynman para el segundo vértice, que contiene un fotón, un bosón  $W^+$  y un bosón  $W^-$ , en el primer diagrama en Fig. 5.1.



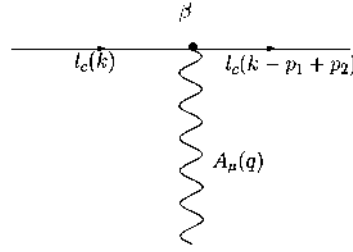
Gráfica 5.7: La regla de Feynman para el vértice  $A_\mu W^+ W^-$  es  $ie \left[ g^{\rho\mu}(k + p_2 - 2p_1)^\theta + g^{\theta\rho}(-2k + p_1 + p_2)^\mu + g^{\mu\theta}(k + p_1 - 2p_2)^\rho \right]$ , los momentos de  $W^+$  y  $A_\mu$  están saliendo y  $W^-$  está entrando.

El propagador del bosón viene dado por



Gráfica 5.8: La regla de Feynman para el vértice  $W^+$ , esta dado por  $\frac{-i}{(k-a-p_1)^2-m_w^2} \left( g_{\theta\alpha} - \frac{(k-a-p_1)_\theta(k-a-p_1)_\alpha}{m_w^2} \right)$ .

El tercer vértice, el cual incluye un un leptón  $l_c(k)$ , un fotón  $A_\mu$ , y un leptón  $l_c(k_1)$ , donde  $k_1 = p_2 - p_1 + k$  se presenta en la Figura 9.



Gráfica 5.9: La regla de Feynman para el vértice  $l_c(k)A_\mu l_c(k_1)$ , esta dado por  $-ie\gamma^\mu$ .

Finalmente, ya que tenemos un diagrama a nivel de un lazo, debemos integrar sobre el tetra-momento arbitrario  $k$  a lo largo de todo el espacio-tiempo. Entonces la regla de Feynman correspondiente para el lazo consiste en realizar la integración siguiente  $\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}$ . Con esto podemos comenzar a realizar el cálculo. Primero debemos determinar el tetra-momento que circula en las partículas del lazo, lo cual se logra por conservación del momento en cada vértice, después de elegir que la línea fermiónica del neutrino acarrea un tetra-momento  $k$ , tal como se observa en la Fig. 5.2.

## 5.4. Estructura formal de la amplitud

En términos generales y de acuerdo a la estructura general de Lorentz la amplitud es de la forma:

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M} = & \bar{\nu}_j(p_2) \left[ A_0 p_1^\mu + A_1 p_2^\mu + A_2 p_1^\mu \gamma^5 + A_3 p_2^\mu \gamma^5 + A_4 \gamma^\mu \right. \\
 & + A_5 \gamma^\mu \gamma^5 + A_6 \sigma^{\mu\nu} q_\nu + A_7 \sigma^{\mu\nu} q_\nu \gamma^5 + A_8 a^\mu + A_9 a^\mu \gamma^5 + A_{10} \sigma^{\mu\nu} a_\nu \\
 & \left. + A_{11} \sigma^{\mu\nu} a_\nu \gamma^5 + A_{12} b^\mu + A_{13} b^\mu \gamma^5 + A_{14} \sigma^{\mu\nu} b_\nu + A_{15} \sigma^{\mu\nu} b_\nu \gamma^5 \right] \nu_i(p_1) \epsilon_\mu^*,
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde  $A_i$  con  $i = 1, 2, \dots, 15$  son los factores de forma que en general dependen solo de  $q^2$ ,  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $q \cdot a$ ,  $q \cdot b$ .

$$\begin{aligned}
 P &= p_1 + p_2, \\
 q &= p_1 - p_2.
 \end{aligned}$$

Despejando  $p_1$  y  $p_2$

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{1}{2}(P + q), \\
 p_2 &= \frac{1}{2}(P - q).
 \end{aligned} \tag{5.7}$$



Sustituyendo (5.7) en (5.6)

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{M} = & \bar{\nu}_j(p_2) \left[ \frac{1}{2}A_0(P^\mu + q^\mu) + \frac{1}{2}A_1(P^\mu - q^\mu) + A_2(P^\mu + q^\mu)\gamma^5 + A_3(P^\mu - q^\mu)\gamma^5 \right. \\
& + A_4\gamma^\mu + A_5\gamma^\mu\gamma^5 + A_6\sigma^{\mu\nu}q_\nu + A_7\sigma^{\mu\nu}q_\nu\gamma^5 + A_8a^\mu + A_9a^\mu\gamma^5 + A_{10}\sigma^{\mu\nu}a_\nu \\
& \left. + A_{11}\sigma^{\mu\nu}a_\nu\gamma^5 + A_{12}b^\mu + A_{13}b^\mu\gamma^5 + A_{14}\sigma^{\mu\nu}b_\nu + A_{15}\sigma^{\mu\nu}b_\nu\gamma^5 \right] \nu_i(p_1)\epsilon_\mu^*,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

sin embargo sabemos por transversalidad en el fotón

$$\vec{k} \cdot \vec{\epsilon} = 0,$$

y en la norma de Lorentz

$$q^\mu \cdot \epsilon_\mu = 0,$$

donde  $q^\mu(w, \vec{k})$ .

Finalmente la amplitud es:

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{M} = & \bar{\nu}_j(p_2) \left[ \frac{1}{2}(A_0 + A_1)P^\mu + \frac{1}{2}(A_2 + A_3)P^\mu\gamma^5 + A_4\gamma^\mu \right. \\
& + A_5\gamma^\mu\gamma^5 + A_6\sigma^{\mu\nu}q_\nu + A_7\sigma^{\mu\nu}q_\nu\gamma^5 + A_8a^\mu + A_9a^\mu\gamma^5 + A_{10}\sigma^{\mu\nu}a_\nu \\
& \left. + A_{11}\sigma^{\mu\nu}a_\nu\gamma^5 + A_{12}b^\mu + A_{13}b^\mu\gamma^5 + A_{14}\sigma^{\mu\nu}b_\nu + A_{15}\sigma^{\mu\nu}b_\nu\gamma^5 \right] \nu_i(p_1)\epsilon_\mu^*,
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Ahora utilizando las identidades de Gordon en la ecuación anterior (ver apéndice A.1)

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{M} = & \bar{\nu}_j(p_2) \left[ \frac{1}{2}(A_0 + A_1)[(m_i + m_j)\gamma^\mu + \sigma^{\mu\nu}q_\nu] + \frac{1}{2}(A_2 + A_3)[(m_i - m_j)\gamma^\mu\gamma^5 - \sigma^{\mu\nu}q_\nu\gamma^5] \right. \\
& + A_4\gamma^\mu + A_5\gamma^\mu\gamma^5 + A_6\sigma^{\mu\nu}q_\nu + A_7\sigma^{\mu\nu}q_\nu\gamma^5 + A_8a^\mu + A_9a^\mu\gamma^5 + A_{10}\sigma^{\mu\nu}a_\nu \\
& \left. + A_{11}\sigma^{\mu\nu}a_\nu\gamma^5 + A_{12}b^\mu + A_{13}b^\mu\gamma^5 + A_{14}\sigma^{\mu\nu}b_\nu + A_{15}\sigma^{\mu\nu}b_\nu\gamma^5 \right] \nu_i(p_1)\epsilon_\mu^*,
\end{aligned} \tag{5.10}$$

factorizando tenemos

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{M} = & \bar{\nu}_j(p_2) \left[ \frac{1}{2} \left( (A_0 + A_1)(m_i + m_j) + A_4 \right) \gamma^\mu + \frac{1}{2} \left[ (A_2 + A_3)(m_i - m_j) + A_5 \right] \gamma^\mu \gamma^5 \right. \\
& + \left( \frac{i}{2}(A_0 + A_1) + A_6 \right) \sigma^{\mu\nu} + \left( \frac{i}{2}(A_2 + A_3) + A_7 \right) \sigma^{\mu\nu} \gamma^5 + A_8 a^\mu + A_9 a^\mu \gamma^5 + A_{10} \sigma^{\mu\nu} a_\nu \\
& \left. + A_{11} \sigma^{\mu\nu} a_\nu \gamma^5 + A_{12} b^\mu + A_{13} b^\mu \gamma^5 + A_{14} \sigma^{\mu\nu} b_\nu + A_{15} \sigma^{\mu\nu} b_\nu \gamma^5 \right] \nu_i(p_1) \epsilon_\mu^*.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Como los neutrinos son neutros, se debe cumplir que los factores de forma correspondientes a la carga eléctrica se deben anular

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(A_0 + A_1)(m_i + m_j) + A_4 &= 0, \\
\frac{1}{2}(A_2 + A_3)(m_i + m_j) + A_5 &= 0.
\end{aligned}$$

Así la amplitud para nuestro caso queda determinada por:

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{M} = & \bar{\nu}_j(p_2) \left[ \left( \frac{i}{2}(A_0 + A_1) + iA_6 \right) \sigma^{\mu\nu} + \left( \frac{i}{2}(A_2 + A_3) - iA_7 \right) \sigma^{\mu\nu} \gamma^5 + A_8 a^\mu + A_9 a^\mu \gamma^5 \right. \\
& \left. + A_{10} \sigma^{\mu\nu} a_\nu + A_{11} \sigma^{\mu\nu} a_\nu \gamma^5 + A_{12} b^\mu + A_{13} b^\mu \gamma^5 + A_{14} \sigma^{\mu\nu} b_\nu + A_{15} \sigma^{\mu\nu} b_\nu \gamma^5 \right] \nu_i(p_1) \epsilon_\mu^*,
\end{aligned} \tag{5.12}$$

de acuerdo a la estructura analizada previamente, podemos identificar al factor correspondiente al tensor  $\sigma^{\mu\nu}$  como el momento dipolar magnético y al factor del tensor  $\sigma^{\mu\nu} \gamma^5$  como al momento dipolar eléctrico, respectivamente. Finalmente, cabe señalar que la amplitud en la ecuación (5.12) es la estructura general.

### 5.4.1. Cálculo de la amplitud

Procedamos a obtener la amplitud, para ello consideramos el primer diagrama de la Fig. 5.2. Debemos recorrer las líneas del diagrama en sentido opuesto al flujo fermiónico e insertar por cada línea y vértice las reglas de Feynman descritas anteriormente. Procediendo de una manera análoga para el segundo diagrama de Feynman de la fig. 5.2.

La fórmula general de la amplitud esta dada por

$$-i\mathcal{M} = \sum_{c=e,\mu,\tau} \bar{u}_{\nu j}(p_2) \left[ -ie\Gamma_{\alpha_1}^\mu - ie\Gamma_{\alpha_2}^\mu \right] u_{\nu i}(p_1) \epsilon_\mu(q), \tag{5.13}$$

la amplitud de nuestro diagrama viene dado por:

$$-ie\Gamma_{\alpha_1}^\mu = \sum_{c=e,\mu,\tau} \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^2} \mathbf{T}, \tag{5.14}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} = & \left( ig\gamma^\beta (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5) \right) \\
& \times \left( \frac{i(\not{k} + \gamma^5 \not{b} + m_l) [k^2 - b^2 - m_l^2 - 2[\not{k}\not{b} - k \cdot b] \gamma^5]}{[k^2 - b^2 - m_l^2]^2 + 4[b^2 k^2 - (b \cdot k)^2]} \right) \\
& \times \left( ig\gamma^\alpha (V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \right) \left( \frac{-i}{(k - a - p_1)^2 - m_w^2} \left( g_{\alpha\beta} - \frac{(k - a - p_1)_\alpha (k - a - p_1)_\beta}{m_w^2} \right) \right) \\
& \times \left( ie (g^{\rho\mu} (k - a + p_2 - 2p_1)^\theta + g^{\theta\rho} (-2k + 2a + p_1 + p_2)^\mu + g^{\mu\theta} (k - a + p_1 - 2p_2)^\rho) \right) \\
& \times \left( \frac{-i}{(k - a - p_2)^2 - m_w^2} \left( g_{\theta\beta} - \frac{(k - a - p_2)_\theta (k - a - p_2)_\beta}{m_w^2} \right) \right).
\end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable  $k' \rightarrow k + a$ , donde el propagador es:

$$S_{f1} = \frac{i(\not{k} + \gamma^5 \not{b} + m) [k^2 - b^2 - m^2 - 2[\not{k}\not{b} - k \cdot b] \gamma^5]}{[k^2 - b^2 - m^2]^2 + 4[b^2 k^2 - (b \cdot k)^2]}. \tag{5.15}$$

Para fines de realizar de manera explícita los cálculos correspondientes, es conveniente definir el denominador

$$d1 = [(k - a - p_1)^2 - m_w^2] [(k - a - p_2)^2 - m_w^2] [(k^2 - b^2 - m_l^2)^2 + 4 [b^2 k^2 - (b \cdot k)^2]],$$

y el numerador  $N_1$ :

$$\begin{aligned} N_1 = & \gamma^\beta \left( V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5 \right) \\ & \times (\not{k} + \gamma^5 \not{b} + m_l) [k^2 - b^2 - m_l^2 - 2 [\not{k} \not{b} - k \cdot b] \gamma^5] \\ & \times \gamma^\alpha (V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) (g_{\alpha\rho} m_w^2 - (k - a - p_1)_\alpha (k - a - p_1)_\rho) \\ & \times (g^{\rho\mu} (k - a + p_2 - 2p_1)^\theta + g^{\theta\rho} (-2k + 2a + p_1 + p_2)^\mu + g^{\mu\theta} (k - a + p_2 - 2p_1)^\rho) \\ & \times (g_{\theta\beta} m_w^2 - (k - a - p_2)_\theta (k - a - p_2)_\beta). \end{aligned}$$

Similarmente, consideramos ahora el segundo diagrama de la Fig. 5.2. Primeramente notemos que tenemos dos propagadores fermionicos, en los cuales ya se está tomando en cuenta la cinemática, estos son:

$$S_{k1} = \frac{i (\not{k} + \not{p}_1 + \not{b} \gamma^5 + m_l) [(k + p_1)^2 - b^2 - m_l^2 - 2 [(\not{k} + \not{p}_1) \not{b} - (k + p_1) \cdot b] \gamma^5]}{[(k + p_1)^2 - b^2 - m_l^2]^2 + 4 [b^2 (k + p_1)^2 - (b \cdot (k + p_1))^2]},$$

y

$$S_{k2} = \frac{i (\not{k} + \not{p}_2 + \not{b} \gamma^5 + m_l) [(k + p_2)^2 - b^2 - m_l^2 - 2 [(\not{k} + \not{p}_2) \not{b} - (k + p_2) \cdot b] \gamma^5]}{[(k + p_2)^2 - b^2 - m_l^2]^2 + 4 [b^2 (k + p_2)^2 - (b \cdot (k + p_2))^2]}.$$

La amplitud del diagrama viene dado por:

$$-ie\Gamma_{\alpha_2}^\mu = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \mathbf{T}_1, \quad (5.16)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 = & \left( ig\gamma^\theta (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5) \right) (-ie) \\ & \times \frac{i (\not{k} + \not{p}_2 + \not{b} \gamma^5 + m_l) [(k + p_2)^2 - b^2 - m_l^2 - 2 [(\not{k} + \not{p}_2) \not{b} - (k + p_2) \cdot b] \gamma^5]}{[(k + p_2)^2 - b^2 - m_l^2]^2 + 4 [b^2 (k + p_2)^2 - (b \cdot (k + p_2))^2]} \\ & \times \frac{i (\not{k} + \not{p}_1 + \not{b} \gamma^5 + m_l) [(k + p_1)^2 - b^2 - m_l^2 - 2 [(\not{k} + \not{p}_1) \not{b} - (k + p_1) \cdot b] \gamma^5]}{[(k + p_1)^2 - b^2 - m_l^2]^2 + 4 [b^2 (k + p_1)^2 - (b \cdot (k + p_1))^2]} \gamma^\mu \\ & \times (ig\gamma^\alpha (V_{ci} + A_{ci} \gamma^5)) \left( \frac{-i}{(k - a)^2 - m_w^2} \left( g_{\theta\alpha} - \frac{(k - a)_\theta (k - a)_\alpha}{m_w^2} \right) \right). \end{aligned}$$

De igual forma definimos el denominador

$$\begin{aligned} d2 = & [(k - a)^2 - m_w^2] \left[ [(k + p_2)^2 - b^2 - m_l^2]^2 + 4 [b^2 (k + p_2)^2 - (b \cdot (k + p_2))^2] \right] \\ & \times \left[ [(k + p_1)^2 - b^2 - m_l^2]^2 + 4 [b^2 (k + p_1)^2 - (b \cdot (k + p_1))^2] \right], \end{aligned}$$

y el numerador  $N_2$ :

$$\begin{aligned}
N_2 = & \left( ig\gamma^\theta (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5) \right) \\
& \times i (\not{k} + \not{p}_2 + \not{b}\gamma^5 + m_l) \left[ (k + p_2)^2 - b^2 - m_l^2 - 2[(\not{k} + \not{p}_1)\not{b} - (k + p_2) \cdot b] \gamma^5 \right] \\
& \times i (\not{k} + \not{p}_2 + \not{b}\gamma^5 + m_l) \left[ (k + p_2)^2 - b^2 - m_l^2 - 2[(\not{k} + \not{p}_1)\not{b} - (k + p_2) \cdot b] \gamma^5 \right] \\
& \times (-ie\gamma^\mu) (ig\gamma^\alpha (V_{ci} + A_{ci}\gamma^5)) i (g_{\theta\alpha} - (k - a)_\theta (k - a)_\alpha).
\end{aligned}$$

Después de una ardua álgebra de Dirac, se obtienen expresiones generales y, a este nivel, engorrosas, pero de las cuales se puede extraer información. Las expresiones para los numeradores  $N_1$  y  $N_2$  se muestran en A.3. En el apéndice A.4 se muestran los casos particulares en el cual se toma que  $a = 0$  y  $b = 0$  o bien  $a \neq 0$  y  $b = 0$  o  $a = 0$  y  $b \neq 0$ .

## 5.5. Cálculo de los momentos dipolares en el MSM con Violación de Lorentz

Expondremos el cálculo de las aportaciones para el vértice  $\nu_i \nu_j \gamma$ , mediante las reglas mostradas anteriormente a nivel de un lazo, analizando los siguientes casos.

### 5.5.1. Caso $a = b = 0$

Como ya mencionamos anteriormente, de las expresiones generales en el apéndice A.3 ponemos  $a = b = 0$  y nos cercioramos que se reduce al caso conocido. Resulta conveniente analizar este caso de manera explicita. Notemos primero que el resultado para el primer diagrama de la Fig. 5.2 se puede expresar como

$$-ie\Gamma_{\alpha_1}^\mu = \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{N_1(k, p_1, p_2)}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}, \quad (5.17)$$

donde

$$\Delta_1 = [k^2 - m_l^2], \quad \Delta_2 = [(k - p_1)^2 - m_w^2], \quad \Delta_3 = [(k - p_2)^2 - m_w^2].$$

y  $N_1$  esta dado en A.4.

Se ha introducido la constante  $\mu$  con dimensiones de energía para mantener las mismas unidades en D dimensiones que en 4 dimensiones. Esta integral se puede calcular recurriendo a la parametrización de Feynman

$$\frac{1}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3} = 2 \int \int \int_0^1 \frac{\delta(1 - x - y - z)}{[x\Delta_1 + y\Delta_2 + z\Delta_3]^3}. \quad (5.18)$$

Realizando las operaciones correspondientes del denominador de la Ec. (5.18) la podemos llevar a la siguiente forma

$$\frac{1}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3} = 2 \int \int \int_0^1 \frac{\delta(1 - x - y - z)}{[k^2 - 2P \cdot k - M^2]^3}, \quad (5.19)$$

donde para la primera contribución tenemos

$$\begin{aligned} P_1 &= yp_1 + zp_2, \\ A_1^2 &= -yp_1^2 + xm_l^2 - zp_2^2 - (1-y)m_w^2, \\ M_1^2 &= P_1^2 + A_1^2. \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (5.19) en (5.17) y haciendo el cambio de variable  $k \rightarrow k + P_1$  (el cual es válido para integrales que divergen cuando se mantiene  $D \neq 4$ ) tenemos

$$-ie\Gamma_{\alpha_1}^\mu = 2\mu^{4-D}g_w^2e \int_0^1 dx dy dz \delta(1-x-y-z) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{N_1(k+P_1, p_1, p_2)}{[k^2 - M_1^2]^3}, \quad (5.20)$$

Para facilitar los cálculos la integral triple la expresamos en una integral doble

$$-ie\Gamma_{\alpha_1}^\mu = 2\mu^{4-D}g_w^2e \int_0^1 \int_0^{1-x} dx dy \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{N_1(k+P_1, p_1, p_2)}{[k^2 - M_1^2]^3}, \quad (5.21)$$

donde  $g_w = \frac{g}{2\sqrt{2}}$ , observe que la variable  $z$  a cambiado a  $1-x-y$ .

De igual forma para la segunda contribución tenemos

$$-ie\Gamma_{\alpha_2}^\mu = \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{N_2(k, p_1, p_2)}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}, \quad (5.22)$$

donde

$$\Delta_1 = [(k+p_2)^2 - m_l^2]^2, \quad \Delta_2 = [(k+p_1)^2 - m_l^2], \quad \Delta_3 = [k^2 - m_w^2],$$

y  $N_2$  está en A.3.1.

De manera análoga a la contribución anterior tenemos

$$\begin{aligned} P_2 &= xp_1 - xp_2 + zp_1, \\ A_2^2 &= -z(p_1^2 - m_w^2) - (x+y)m_l^2, \\ M_2^2 &= P_2^2 + A_2^2. \end{aligned}$$

Recurriendo la Ec. (5.19), la Ec. (5.22) se transforma, haciendo el cambio de variable  $k \rightarrow k + P_2$ , en

$$-ie\Gamma_{\alpha_2}^\mu = 2\mu^{4-D}g_w^2e \int_0^1 dx dy dz \delta(1-x-y-z) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{N_2(k+P_2, p_1, p_2)}{[k^2 - M_1^2]^3}, \quad (5.23)$$

y expresamos la integral triple en una integral doble, integrando sobre la variable  $z$

$$-ie\Gamma_{\alpha_2}^\mu = 2\mu^{4-D}g_w^2e \int_0^1 \int_0^{1-x} dx dy \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{N_2(k+P_2, p_1, p_2)}{[k^2 - M_2^2]^3}. \quad (5.24)$$

A fin de llevar a cabo los cálculos de las integrales sobre  $k$  tanto en las ecuaciones (5.21) y (5.24), se recurre a los siguientes resultados. En primer lugar notemos que las integrales con un número impar de momentos de integración se anulan por simetría en las variables de integración ( $k \rightarrow -k$ ). Quedando la siguiente lista de integrales a ser utilizadas en el cálculo.

$$\begin{aligned}
I_\mu &\equiv \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu}{[k^2 - M_i^2]^3} = 0, & I_\mu^2 &\equiv \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2 k^\mu}{[k^2 - M_i^2]^3} = 0 \\
I^2 &\equiv \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2}{[k^2 - M_i^2]^3}, & I^4 &\equiv \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^2}{[k^2 - M_i^2]^3}, \\
I_{\mu\nu}^2 &\equiv \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2 k^\mu k^\nu}{[k^2 - M_i^2]^3}, & I_0 &\equiv \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 - M_i^2]^3} \\
I_{\mu\nu\alpha\beta} &\equiv \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta}{[k^2 - M_i^2]^3}, & I_{\mu\nu} &\equiv \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - M_i^2]^3}.
\end{aligned}$$

Las integrales que son diferentes de cero se pueden calcular de acuerdo a las formulas generales en D-dimensiones [?]. Los resultados son los siguientes:

$$\begin{aligned}
I^2 &= \frac{i(4-\epsilon)}{64\pi^2} \left[ 1 + \frac{\epsilon}{2} \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{-M_i^2}\right) \right] \left(-\frac{2}{\epsilon} + \gamma\right), \\
I^4 &= \frac{-i[-M_i^2](4-\epsilon)(6-\epsilon)}{32\pi^2} \left[ 1 + \frac{\epsilon}{2} \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{-M_i^2}\right) \right] \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma\right), \\
I_{\mu\nu}^2 &= \frac{i[-M_i^2]}{32\pi^2} \left[ 1 + \frac{\epsilon}{2} \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{-M_i^2}\right) \right] \left[ \frac{(4-\epsilon)}{2} + \frac{(4-\epsilon)^2}{2} \right] \left(-1 - \frac{2}{\epsilon} + \gamma\right), \\
I_0 &= \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{[-M_i^2]} \left[ \frac{\mu^2}{[-M_i^2]} \right]^{\frac{\epsilon}{2}} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} + \gamma\right), \\
I_{\mu\nu} &= \frac{ig^{\mu\nu}}{64\pi^2} \left[ 1 + \frac{\epsilon}{2} \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{-M_i^2}\right) \right] \left(-\frac{2}{\epsilon} + \gamma\right), \\
I_{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{i[-M_i^2]}{128\pi^2} \left[ 1 + \frac{\epsilon}{2} \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{-M_i^2}\right) \right] \left(1 - \frac{1}{\epsilon} + \gamma\right) (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}).
\end{aligned}$$

Donde  $\epsilon = 4 - D$ . Ahora para poder realizar las integrales sobre las variables  $x$  y  $y$ , recurrimos al hecho de que  $m_W^2 \gg m_\tau$ , lo que implica que

$$\begin{aligned}
M_1 &\simeq -xm^2 - (1-x)m_w^2, \\
M_2 &\simeq -(x-1)m_l + m_w^2.
\end{aligned}$$

Posteriormente al sumar las amplitudes de las dos contribuciones

$$-i\mathcal{M} = \bar{u}_{\nu j}(p_2) \left[ A_0 \gamma^\mu (1 + \gamma^5) + i\sigma^{\mu\nu} q_\nu (A_1 + A_2 \gamma^5) \right] u_{\nu i}(p_1) \epsilon_\mu^*(q) \quad (5.25)$$

donde  $q = p_1 - p_2$  y

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{17em_w^2 G_F}{4\sqrt{2}\pi^2} \left[ -\frac{1}{\epsilon} + \frac{3\gamma - 3\text{Log}[4\pi\mu^2/m_w^2]}{192} \right], \\ A_1 &= \frac{eG_F}{8\sqrt{2}\pi^2} (m_i + m_j) \sum_{c=e,\mu,\tau} U_{ci} U_{cj}, \\ A_2 &= \frac{eG_F}{8\sqrt{2}\pi^2} (m_i - m_j) \sum_{c=e,\mu,\tau} U_{ci} U_{cj}. \end{aligned}$$

Donde  $\frac{g^2}{8m_w^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}$  y  $G_F$  es la constante de acoplamiento de Fermi con un valor de  $1,16637 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$  y  $\gamma$  es la constante de Euler-Mascheroni con un valor aproximado de 0,5772157. Recordemos que sólo se consideraron los términos dominantes. Este resultado coincide con los resultados previos para los correspondientes factores de forma.

### 5.5.2. Caso $a \neq 0$ y $b = 0$

Este caso fue analizado previamente en el trabajo de tesis de maestría de Ricardo Daniel Gallardo Garcá [30]. Vamos a expresar el vértice de nuestra contribución en D-dimensiones

$$-ie\Gamma_{\alpha_1}^\mu = \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{N_1(k, p_1, p_2)}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}, \quad (5.26)$$

donde

$$\Delta_1 = [(k+a)^2 - m_l^2], \quad \Delta_2 = [(k-p_1)^2 - m_w^2], \quad \Delta_3 = [(k-p_2)^2 - m_w^2].$$

y  $N_1$  en el apéndice A.3.2.

Se ha introducido la constante  $\mu$  con dimensiones de energía para mantener las mismas unidades en D dimensiones que en 4 dimensiones. Esta integral se puede calcular recurriendo a la parametrización de Feynman

$$\frac{1}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3} = 2 \int \int \int_0^1 \frac{\delta(1-x-y-z)}{[x\Delta_1 + y\Delta_2 + z\Delta_3]^3}, \quad (5.27)$$

realizando las operaciones correspondientes del denominador de la ecuación (5.27) la podemos llevar a la siguiente forma

$$\frac{1}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3} = 2 \int \int \int_0^1 \frac{\delta(1-x-y-z)}{[k^2 - 2P \cdot k - M^2]^3}, \quad (5.28)$$

donde para la primera contribución tenemos

$$\begin{aligned} P_3 &= yp_1 - ax + zp_2, \\ A_3^2 &= -xa^2 - yp_1^2 - zp_2^2 + xm_l^2 - (y+z)m_w^2, \\ M_3^2 &= P_3^2 + A_3^2, \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (5.28) en (5.26) y haciendo el cambio de variable  $k \rightarrow k + P_3$  (el cual es válido para integrales que divergen cuando se mantiene  $D \neq 4$ ) tenemos

$$-ie\Gamma_{\alpha_3}^\mu = 2\mu^{4-D}g_w^2e \int_0^1 dx dy dz \delta(1-x-y-z) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{N_1(k+P_3, p_1, p_2)}{[k^2 - M_3^2]^3}, \quad (5.29)$$

Para facilitar los cálculos la integral triple la expresamos en una integral doble

$$-ie\Gamma_{\alpha_3}^\mu = 2\mu^{4-D}g_w^2e \int_0^1 \int_0^{1-x} dx dy \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{N_1(k+P_3, p_1, p_2)}{[k^2 - M_3^2]^3}, \quad (5.30)$$

donde  $g_w = \frac{g}{2\sqrt{2}}$ , observe que la variable  $z$  a cambiado a  $1-x-y$ .

Para la segunda contribución tenemos

$$-ie\Gamma_{\alpha_4}^\mu = \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{N_2(k, p_1, p_2)}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}, \quad (5.31)$$

donde

$$\Delta_1 = [(k+p_2)^2 - m_l^2], \quad \Delta_2 = [(k+p_1)^2 - m_l^2], \quad \Delta_3 = [(k-a)^2 - m_w^2],$$

y  $N_2$  en el apéndice A.3.2.

De manera análoga a la contribución anterior tenemos

$$\begin{aligned} P_4 &= x(p_1 - p_2) - a(x+y) + zp_1, \\ A_4^2 &= -zp_1^2 - m_w^2 - (x+y)m_l^2 - 2(p_1 - p_2) \cdot ax + a^2(x+y), \\ M_4^2 &= P_4^2 + A_4^2. \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (5.28) en (5.31) y haciendo el cambio de variable  $k \rightarrow k + P_4$  tenemos

$$-ie\Gamma_{\alpha_4}^\mu = 2\mu^{4-D}g_w^2e \int_0^1 dx dy dz \delta(1-x-y-z) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{N_2(k+P_4, p_1, p_2)}{[k^2 - M_4^2]^3}, \quad (5.32)$$

y expresamos la integral triple en una integral doble

$$-ie\Gamma_{\alpha_4}^\mu = 2\mu^{4-D}g_w^2e \int_0^1 \int_0^{1-x} dx dy \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{N_2(k+P_4, p_1, p_2)}{[k^2 - M_4^2]^3}, \quad (5.33)$$

A fin de llevar a cabo los cálculos de las integrales sobre  $k$  tanto en las Ec. (5.30) y Ec. (5.33), se recurre a las integrales antes mencionadas. Lo que observamos es que obtenemos las mismas expresiones que se obtuvo en la ref[. Esto nos da también confianza en que las expresiones generales obtenidas son correctas.



# Capítulo 6

## Conclusiones y consideraciones finales

En esta tesis hemos obtenido expresiones generales para factores de forma que contribuyen a los momentos dipolar magnético y eléctrico de neutrinos en el contexto del Modelo Estándar Extendido.

A partir de la expresión general de la amplitud obtenida (ver A.4), y con el fin de corroborar el caso usual (en el que se presenta violación *CPT*) ponemos  $a^\mu = 0$  y  $b^\mu = 0$ , lo que obtenemos es los factores de forma usuales. Este resultado nos indica que las expresiones obtenidas en A.4 es correcta. Se observan los factores de forma  $A_0$  donde el primer término es divergente en  $D = 4$  y que es absorbido en el acoplamiento del proceso de renormalización; el resto de los términos  $A_1$  y  $A_2$  son finitos, estos factores de forma son los momentos dipolar eléctrico y magnético respectivamente. El resultado del cálculo para el Modelo Estándar Mínimamente Extendido, para el caso estático donde se tienen las masas iguales  $m_i = m_j$  el momento dipolar eléctrico  $i\sigma^{\mu\nu}\gamma^5$  resulta ser nulo, por que dependen de la diferencia de la masa del neutrino entrante y neutrino saliente, por lo tanto, únicamente tendremos contribución del momento dipolar magnético  $i\sigma^{\mu\nu}$  y que resulta ser el mismo que el del Modelo Estándar. Cuando en el proceso de transición tenemos que la masa del neutrino entrante es distinto al neutrino saliente  $m_i \neq m_j$ , el factor de forma  $A_3$  es diferentes de cero y existe contribución a los momento dipolar eléctrico.

El trabajo se realizó en el Modelo Estándar Extendido donde se llevo acabo el cálculo para la obtención de la amplitud de transición. A partir de los dos diagramas antes mencionados donde aparecen contribuciones de los momentos dipolares, se hizo un estudio donde se ponen de manifiesto las propiedades electromagnéticas de neutrinos. Se trabaja con el Lagrangiano de corrientes cargadas añadiendo dos parámetros  $a^\mu$  y  $b^\mu$  que violan simetría *CPT* y/o Lorentz en el proceso de transición  $\nu_i \rightarrow \nu_j + \gamma$ .

Se consideran valores pequeños de los parámetros  $a^\mu$  y  $b^\mu$  comparados con la masa del bosón  $W$ , se observa que para el caso cuando  $a \neq 0$  y  $b = 0$  los factores de forma ya mencionados agregando los siguientes factores de forma:  $i\sigma^{\mu\nu}a_\nu$  y  $i\sigma^{\mu\nu}a_\nu\gamma^5$  que corresponde al momento dipolar magnético y eléctrico respectivamente. De manera análoga se observa que para el caso cuando  $b \neq 0$  y  $a = 0$  los factores de forma ya mencionados agregando los siguientes facto-

res de forma:  $i\sigma^{\mu\nu}b_\nu$  y  $i\sigma^{\mu\nu}b_\nu\gamma^5$  que corresponde al momento dipolar magnético y eléctrico respectivamente.

Cabe mencionar que resulta interesante analizar el proceso  $\nu_i \rightarrow \nu_j + \gamma$  para obtener los momentos dipolares para el caso del propagador del Modelo Estándar Mínimamente Extendido con violación  $CPT$  cuando  $a \neq 0$  y  $b = 0$ ,  $b \neq 0$  y  $a = 0$ , y  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$ . También, resulta importante considerar valores no tan pequeños del parámetro  $a^\mu$  y  $b^\mu$ . Estos casos son para estudiar a futuro.

# Apéndice A

## A.1. Identidad de Gordon

$$\begin{aligned}\bar{u}(p_2)(p_1 + p_2)^\mu u(p_1) &= \bar{u}(p_2) [(m_i + m_j)\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu}(p_1 - p_2)_\nu] u(p_1), \\ \bar{u}(p_2)(p_1 + p_2)^\mu \gamma^5 u(p_1) &= \bar{u}(p_2) [(m_i - m_j)\gamma^\mu \gamma^5 - i\sigma^{\mu\nu}(p_1 - p_2)_\nu \gamma^5] u(p_1).\end{aligned}$$

## A.2. Notación

Las integrales resultantes en D-dimensiones que se obtienen son de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}I_\mu^{(1,2)} &\equiv \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu}{\Delta_{(1,2)}}, & I_\mu^{2(1,2)} &\equiv \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2 k^\mu}{\Delta_{(1,2)}}, \\ I_2^{(1,2)} &\equiv \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2}{\Delta_{(1,2)}}, & I_4^{(1,2)} &\equiv \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^2}{\Delta_{(1,2)}}, \\ I_{\mu\nu}^{2(1,2)} &\equiv \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2 k^\mu k^\nu}{\Delta_{(1,2)}}, & I_0^{(1,2)} &\equiv \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{\Delta_{(1,2)}}, \\ I_{\mu\nu\alpha\beta}^{(1,2)} &\equiv \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta}{\Delta_{(1,2)}}, & I_{\mu\nu}^{(1,2)} &\equiv \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu}{\Delta_{(1,2)}},\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \left[ (k^2 - m_l^2 - b^2)^2 - 4(b^2 k^2 - (b \cdot k)^2) \right] \left[ (k - p_1 - a)^2 - m_w^2 \right] \left[ (k - p_2 - a)^2 - m_w^2 \right], \\ \Delta_2 &= \left[ \left( (k + p_2)^2 - m_l^2 - b^2 \right)^2 - 4(b^2 (k + p_2)^2 - (b \cdot (k + p_2))^2) \right] \\ &\quad \times \left[ \left( (k + p_1)^2 - m_l^2 - b^2 \right)^2 - 4(b^2 (k + p_1)^2 - (b \cdot (k + p_1))^2) \right] \left[ (k - a)^2 - m_w^2 \right].\end{aligned}$$

### A.3. Cálculo de la amplitud de ambas contribuciones, caso general

Vamos a trabajar con el numerador  $N_1$ , el cual al realizar las operaciones correspondientes, tenemos que toma la forma siguiente.

$$\begin{aligned}
N_1 = & (k^2 - m_l^2 - b^2) \left[ (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5) (V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ \right. \right. \\
& \times (-k + a + p_1)^\mu \left[ 4m_w^2 [(k - p_2 - a) \cdot (k + b\gamma^5)] (\not{k} + \not{\phi}) \right. \\
& + (\not{b}\gamma^5 - \not{k}) \left[ 2m_w^2 \left( 2m_w^2 - m_j^2 - a^2 - k^2 - a \cdot p_2 + 2k \cdot (a + p_2) \right) - m_w^2 (\not{k} + \not{\phi}) (\not{k} - \not{\phi} - m_i) \right. \\
& - 2m_w^2 \left( 2k \cdot (p_2 - a) - m_i^2 - m_i (\not{k} - \not{\phi}) \right) + (\not{k} - \not{\phi}) (\not{k} - \not{\phi} + m_i) (k - p_2 - a)^2 \left. \right] \\
& + 2(\not{k} - \not{\phi} - m_i) \left[ \left( (k - p_2 - a) \cdot (k - p_2 - a) + m_w^2 \right) (p_2 \cdot (k + b\gamma^5)) \right. \\
& + (k - p_2 - a) \cdot (k - p_2 - a) - m_w^2 [(k - p_2 - a) \cdot (k + b\gamma^5)] \left. \right] \left. \right] \\
& + (k - a - p_2)^\mu \left[ 2[(k - p_2 - a) \cdot (k + b\gamma^5)] \left[ (\not{k} - \not{\phi} - m_i) [(k - p_1 - a) \cdot (k + p_1 - a - 2p_2)] \right. \right. \\
& - m_w^2 (\not{k} - \not{\phi} + m_i) \left. \right] \\
& + (k - p_1 - a) \cdot (k + p_1 - a - 2p_2) \left[ (\not{b}\gamma^5 - \not{k}) (\not{k} - \not{\phi}) + 2p_2 \cdot (b\gamma^5 + k) \right] (\not{k} - \not{\phi} - m_i) \\
& + m_w^2 \left[ (\not{b}\gamma^5 - \not{k}) \left[ (\not{k} - \not{\phi}) (\not{k} - \not{\phi} + m_i) + 2m_j^2 - 4p_2 \cdot (k - a) \right] \right. \\
& + 2p_2 \cdot (k + b\gamma^5) (m_i + 3(\not{k} - \not{\phi})) \left. \right] \\
& + 2m_w^2 (b^\mu \gamma^5 + k^\mu) \left[ 2m_w^2 (\not{k} - \not{\phi} + m_i) - \left( (k - p_1 - a) \cdot (k + p_1 - a - 2p_2) \right) (\not{k} - \not{\phi} - m_i) \right] \\
& + 2m_w^2 (\not{b}\gamma^5 - \not{k}) \left[ (k - a)^\mu \left( (k - p_1 - a) \cdot (k + p_1 - a - 2p_2) \right) - m_w^2 p_1^\mu \right] \\
& + m_w^2 \left[ (\not{b}\gamma^5 - \not{k}) \left[ m_w^2 m_i + 2(\not{k} - \not{\phi}) - \left( (k - p_2 - a) \cdot (k + p_2 - a - 2p_1) \right) (\not{k} - \not{\phi}) \right. \right. \\
& - \left. \left( (k - p_1 - a) \cdot (k + p_1 - a - 2p_2) \right) (\not{k} - \not{\phi} + m_i) \right] \\
& + 2m_w^2 \left( (k + b\gamma^5) \cdot (k - 2p_1 - a + 2p_2) \right) \\
& - 2 \left( (k - 2p_1 - a + p_2) \cdot (k - a - p_2) \right) \left( (k + b\gamma^5) \cdot (k - a) \right) \left. \right] \gamma^\mu \\
& + mm_j (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5) (V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ - (a + p_1 - k)^\mu \left[ m_w^2 (\not{k} - \not{\phi} - m_i) + \right. \right. \\
& + (\not{k} - \not{\phi} - m_i) \left[ \left( (k + p_2 - 2p_1 - a) \cdot (k - p_2 - a) \right) + 2 \left( (k - p_1 - a) \cdot (k + p_2 - a) \right) \right] \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( (k - p_1 - a) \cdot (k + p_1 - a - 2p_2) \right) \left[ m_w^2 \left( m_w^2 + \left( (k - p_2 - a) \cdot (k + p_2 - a - 2p_1) \right) \right) \gamma^\mu \right. \\
& \left. - (\not{k} - \not{\phi} - m_i) \right] \Big] \Big] \\
& + m(k^2 - m_l^2 - b^2) \left[ (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ (a + p_1 - k)^\mu \left[ \right. \right. \right. \\
& + 4m_w^2 \left( 1 - (2m_w^2 - a^2 - k^2 - 2k \cdot a) + (k + a) \cdot (p_1 + p_2) \right) \\
& - m_w^4 \left( 4p_1 \cdot (k + a) + 2(\not{k} - \not{\phi})m_i + (\not{k} - \not{\phi})(\not{k} - \not{\phi} - m_i) + 2m_i^2 \right) \\
& + \left[ \left( (k - p_2 - a) \cdot (k + p_2 - a - 2p_1) \right) + 2 \left( (k - p_1 - a) \cdot (k - p_2 - a) \right) \right] (\not{k} - \not{\phi})(\not{k} - \not{\phi} - m_i) \Big] \\
& + \left( (k - p_1 - a) \cdot (k + p_1 - a - 2p_2) \right) \\
& \times \left[ m_w^2 \left( 2m_i m_w^2 + (\not{k} - \not{\phi} - m_i) - \left( (k - p_2 - a) \cdot (k + p_2 - a - 2p_1) \right) (\not{k} - \not{\phi}) \right) \gamma^\mu \right. \\
& \left. + m_w^4 (\not{k} - \not{\phi} - 4p_1^\mu) + (k - p_2 - a)^\mu (\not{k} - \not{\phi})(\not{k} - \not{\phi} - m_i) \right] \Big] \\
& + m_j (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ -8m_w^4 (b^\mu \gamma^5 + k^\mu) \right. \\
& - (a + p_1 - k)^\mu \left[ (\not{b} \gamma^5 + \not{k})(\not{k} - \not{\phi} - m_i) \left( m_w^2 + (k - p_2 - a)^2 \right) \right. \\
& - (k - a - p_2)^\mu \left[ (\not{b} \gamma^5 + \not{k}) \left[ \left( (k - p_1 - a) \cdot (k + p_1 - a - 2p_2) \right) (\not{k} - \not{\phi} - m_i) \right. \right. \\
& \left. \left. + m_w^2 (m_i + 3(\not{k} - \not{\phi})) \right] - 4m_w^2 (k - a - p_2) \cdot (k + b \gamma^5) \right] \\
& \left. + m_w^2 (\not{b} \gamma^5 + \not{k}) \left[ \left( (k - p_2 - a) \cdot (k + p_2 - a - 2p_1) \right) - m_w^2 \right] \gamma^\mu \right] \\
& - 2mm_j (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ (a + p_1 - k)^\mu \left[ 4m_w^2 \gamma^5 [\not{b} k \cdot (k - p_2 - a) - \not{k} b \cdot (k - p_2 - a)] \right. \right. \\
& + \left[ m_w^2 - (k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a) \right] (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 \\
& - 2(k - p_1 - a) \cdot (k - p_2 - a) (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 (\not{k} + \not{b} \gamma^5) \Big] (\not{k} - \not{\phi} - m_i) \Big] \\
& + (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 [m_w^2 + (k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a)] \gamma^\mu \\
& + (k - p_1 - a) \cdot (k + p_1 - a - 2p_2) [(k - p_2 - a)^\mu (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5] (\not{k} - \not{\phi} - m_i) \Big] \\
& - 2m_j (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ 4\gamma^5 m_w^2 (\not{b} k^\mu - \not{k} b^\mu) + 2m_w^2 (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 \gamma^\mu \right. \\
& + (k - p_1 - a) \cdot (k + p_1 - a - 2p_2) (k - p_2 - a)^\mu (\not{k} + \not{b} \not{k}) (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 (\not{k} - \not{\phi} - m_i) \\
& - (\not{b} \not{k} + \not{k}) (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 [m_w^2 + (k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a)] \gamma^\mu \\
& \left. + 2m_w^2 (\not{k} + \not{b} \not{k}) (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 \gamma^\mu - 4m_w^4 k^\mu (k \cdot b \gamma^5 + b^2) - 4m_w^4 b^\mu (k \cdot b \gamma^5 + k^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (k - p_2 - a)^\mu \left[ -2(\not{k} - \not{k})(\not{a} - \not{k}) + 4m_w^2(k \cdot b\gamma^5 + b^2)k \cdot (k - p_2 - a) \right. \\
& + 4m_w^2(k \cdot b\gamma^5 + k^2)\gamma^5 b \cdot (k - p_2 - a) - (\not{k} - \not{k})(\not{k}\not{b} - k \cdot b)\gamma^5(\not{k} - \not{a} + m_i) \\
& \left. + 4\not{b}\gamma^5 k \cdot (k - p_2 - a) - 4\not{k}\gamma^5 b \cdot (k - p_2 - a) - (\not{k}\not{b} - k \cdot b)\gamma^5(3(\not{k} - \not{a}) + m_i) \right] \\
& + (a + p_1 - k)^\mu \left[ (\not{k} + \not{k})(\not{k}\not{b} - k \cdot b)\gamma^5 \left[ (\not{k} - \not{a} - m_i) [1 + (k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a)] \right. \right. \\
& \left. \left. + (\not{b}\gamma^5 + \not{k})(\not{k} - \not{a} - m_i)(k - p_1 - a) \cdot (k - p_2 - a) \right] \right. \\
& \left. - 4m_w^2(\not{k} - \not{a}) [k \cdot b\gamma^5 [(k - p_2 - a) \cdot (b\gamma^5 - k)] + k^2\gamma^5 b \cdot (k - p_2 - a) - b^2 k \cdot (k - p_2 - a)] \right] \\
& - 2(V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ (a + p_1 - k)^\mu \left[ 4m_w^4 [\not{b}\gamma^5 k^2 - \not{k}b^2 + k \cdot b\gamma^5(\not{b}\gamma^5 - \not{k})] \right. \right. \\
& + 4m_w^2(\not{k} - \not{a}) [k \cdot b\gamma^5 [(k - a - p_2) \cdot (b\gamma^5 - k)] + k^2\gamma^5 b \cdot (k - a - p_2) - b^2 k \cdot (k - a - p_2)] \\
& - 2(\not{k} - \not{a} - m_i) \left[ m_w^2 [k \cdot (k - a + p_2 - 2p_1)(k \cdot b\gamma^5 + b^2) - b \cdot (k - a + p_2 - 2p_1)(k \cdot b\gamma^5 + k^2)] \right. \\
& + (k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a) [b \cdot (k - p_2 - a)(k \cdot b\gamma^5 + k^2) - k \cdot (k - p_2 - a)(k \cdot b\gamma^5 + b^2)] \\
& + 2(k \cdot b\gamma^5 + b^2) [k \cdot (k - p_2 - a) [(k - p_1 - a) \cdot (k - p_2 - a)] - m_w^2 k \cdot (k - p_1 - a)] \\
& \left. + 2(k \cdot b\gamma^5 + k^2)\gamma^5 [b \cdot (k - p_2 - a) [(k - p_1 - a) \cdot (k - p_2 - a)] - m_w^2 b \cdot (k - p_1 - a)] \right] \\
& + (\not{k} - \not{k}) \left[ (\not{k}\not{b} - k \cdot b)\gamma^5 \left[ -(\not{k} - \not{a})(\not{k} - \not{a} - m_i) [(k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a) - m_w^2] \right. \right. \\
& - 4m_w^2 + (\not{k} - \not{p}_2 - \not{a})^2 + 2m_i^2 m_w^2 + 4m_w^2 p_1 \cdot (a - k) \\
& + 2m_w^2 m_i (\not{k} - \not{a}) + (\not{b}\gamma^5 - \not{k}) [2m_w^2 (\not{k} - \not{p}_1 - \not{a})^2 - 2(\not{k} - \not{a})(\not{k} - \not{a} - m_i)(k - p_1 - a) \cdot (k - p_2 - a)] \\
& \left. - 4(b \cdot p_2 \gamma^5 + k \cdot p_2)(\not{k} - \not{a} - m_i)(k - p_1 - a) \cdot (k - p_2 - a) \right] \\
& + (\not{k}b \cdot p_2 - \not{b}k \cdot p_2)\gamma^5 \left[ 4(\not{b}\gamma^5 - \not{k})(\not{k} - \not{a} - m_i)(k - p_1 - a) \cdot (k - p_2 - a) \right. \\
& \left. - (\not{k} - \not{a} - m_i) [1 + (k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a)] \right] \\
& - 2(\not{k}k \cdot p_2 - \not{k}b \cdot p_2 - k \cdot p_2)(\not{k}\not{b} - k \cdot b)\gamma^5 [(\not{k} - \not{a} - m_i) [1 + (k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a)] \\
& + 2(\not{b}\gamma^5 + \not{k})(\not{k} - \not{a} - m_i)(k - p_1 - a) \cdot (k - p_2 - a)] \\
& - 2(\not{b}k \cdot p_2 - \not{k}b \cdot p_2 - k \cdot p_2)(\not{k}\not{b} - k \cdot b)\gamma^5 [(k - p_2 - a)^\mu (\not{a} - \not{k} + m_i) \\
& - (m_w^2 + (k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a))\gamma^\mu] \\
& - (\not{b}\not{k} - \not{k})(\not{k}b \cdot p_2 - \not{b}k \cdot p_2)\gamma^5 [2(k - a - p_2)^\mu (\not{a} - \not{k} + m_i) \\
& + (3m_w^2 - (k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a))\gamma^\mu] \\
& - (\not{b}\not{k} - \not{k})(\not{k}\not{b} - k \cdot b)\gamma^5 \left[ 2m_w^2 m_i - 4m_w^2 (p_1 + p_2)^\mu + m_w^2 \gamma^\mu (\not{k} - \not{a} + m_i) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [m_w^2 - (k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a)](\not{k} - \not{\phi})\gamma^\mu \\
& + (k - p_2 - a)^\mu [2m_j^2 - 4p_2 \cdot (k - a) + (\not{k} - \not{\phi})(\not{k} - \not{\phi} + m_i)] \\
& + 2m_w^2 \left[ (k \cdot b\gamma^5 + k^2)\gamma^5 [m_w^2 b \cdot (k - a + p_2 - 2p_1) \right. \\
& - b \cdot (k - a - p_2) [(k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a)] \\
& - (k \cdot b\gamma^5 + b^2) [m_w^2 k \cdot (k - a + p_2 - 2p_1) - k \cdot (k - a - p_2) [(k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a)]] \left. \right] \gamma^\mu \\
& + [(k - p_1 - a) \cdot (k + p_1 - a - 2p_2)] \left[ (k - p_2 - a)^\mu \left[ 2(k \cdot b\gamma^5 + k^2)b \cdot (k - p_2 - a) \right. \right. \\
& - 2(k \cdot b\gamma^5 + b^2)k \cdot (k - p_2 - a) - 2(\not{k}b \cdot p_2 - \not{k}b \cdot p_2 - k \cdot p_2)(\not{k}\not{b} - k \cdot b)\gamma^5 \\
& + (\not{b}\not{k} - \not{k})[2\not{b}k \cdot p_2 + \not{k}\not{b} - k \cdot b - 2\not{k}b \cdot p_2] (\not{k} - \not{\phi})\gamma^5 \left. \right] \\
& + m_w^2 \left[ 2(k \cdot b\gamma^5 + b^2)k^\mu - 2(k \cdot b\gamma^5 + k^2)b^\mu + (\not{b}\not{k} - \not{k})(\not{k}\not{b} - k \cdot b)\gamma^5\gamma^\mu \right] (\not{k} - \not{\phi} - m_i) \\
& - 2m_w^2 (\not{k} - \not{\phi} + m_i) \left[ (k \cdot b\gamma^5 + b^2) [m_w^2 k^\mu - (k - p_2 - a)^\mu k \cdot (k - p_2 - a)] \right. \\
& + (k \cdot b\gamma^5 + k^2)\gamma^5 [m_w^2 b^\mu - (k - p_2 - a)^\mu b \cdot (k - p_2 - a)] \left. \right] \\
& - 2m(V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger\gamma^5)(V_{ci} + A_{ci}\gamma^5) \left[ (-k + p_1 + a)^\mu \right. \\
& \times \left[ 2 \left[ 2m_w^2\gamma^5 [\not{b}k \cdot (k - p_1 - a) - \not{k}b \cdot (k - p_1 - a)] \right. \right. \\
& + 2(k - p_1 - a) \cdot (k - p_2 - a)\gamma^5 [\not{k}b \cdot (k - p_2 - a) - \not{b}k \cdot (k - p_2 - a)] \\
& + (k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a) [\not{k}k \cdot (k - p_2 - a) - \not{b}k \cdot (k - p_2 - a)] \gamma^5 \left. \right] (\not{k} - \not{\phi} - m_i) \\
& - 4(k - p_1 - a) \cdot (k - p_2 - a)(\not{k}b \cdot p_2 - \not{b}k \cdot p_2)\gamma^5(\not{b}\gamma^5 + \not{k})(\not{k} - \not{\phi} - m_i) \\
& + 8m_w^4 k \cdot b\gamma^5 + 4m_w^2 [\not{b}k \cdot (k - p_2 - a) - \not{k}b \cdot (k - p_2 - a)]\gamma^5(\not{k} - \not{\phi}) \\
& + 8m_w^2\gamma^5 [k \cdot (k - p_2 - a)(b \cdot p_2) - k \cdot (k - p_2 - a)(k \cdot p_2)] \\
& - 2(\not{k}b \cdot p_2 - \not{b}k \cdot p_2)\gamma^5(\not{k} - \not{\phi} - m_i) [(k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a) - m_w^2] \\
& + (\not{k}\not{b} - b \cdot k)\gamma^5 \left[ 2m_w^2(\not{b}\gamma^5 - \not{k})(\not{k} - \not{p}_1 - \not{\phi})^2 + 4m_w^2 - (\not{k} - \not{p}_2 - \not{\phi})^2 \right. \\
& - 2(k - p_1 - a) \cdot (k - p_2 - a) [(\not{b}\gamma^5 - \not{k})(\not{k} - \not{\phi}) + (b \cdot p_2\gamma^5 + k \cdot p_2)] (\not{k} - \not{\phi} - m_i) \\
& + m_w^2 [2m_i^2 + 4p_1 \cdot (a - k) + 2(\not{k} - \not{\phi})m_i] \\
& \left. + (\not{k} - \not{\phi})(\not{k} - \not{\phi} - m_i) [m_w^2 + (k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a)] \right] \\
& + (k - p_1 - a) \cdot (k + p_1 - a - 2p_2) \left[ m_w^2 [2(k^\mu\not{b} + b^\mu\not{k}) - \not{k}\not{b} + k \cdot b]\gamma^5(\not{k} - \not{\phi} - m_i) \right. \\
& \left. + (k - p_2 - a)^\mu \left[ 2(\not{k}b \cdot p_2 - \not{b}k \cdot p_2) + (\not{k}\not{b} - k \cdot b)(\not{k} - \not{\phi}) \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\not{k}b \cdot (k - p_2 - a) - 2\not{k}b \cdot (k - p_2 - a) \Big] \gamma^5 (\not{k} - \not{a} - m_i) \Big] \\
& + (\not{k}b \cdot p_2 - \not{b}k \cdot p_2) \gamma^5 \left[ (k - p_2 - a)^\mu (m_i - 6(\not{k} - \not{a})) \right. \\
& + 2[m_w^2 - (k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a)] \gamma^\mu \Big] \\
& + (\not{k}\not{b} - k \cdot b) \gamma^5 \left[ 4m_w^2 (p_1 + p_2)^\mu - m_w^2 \gamma^\mu (\not{k} - \not{a} + 3m_i) - m_w^2 (\not{k} - \not{a}) \gamma^\mu \right. \\
& + (\not{k} - \not{a})(k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a) \gamma^\mu - (k - p_2 - a)^\mu [2m_j^2 + (\not{k} - \not{a})(\not{k} - \not{a} + m_i) \\
& + 4p_2 \cdot (k - a)] \Big] + 8m_w^2 b \cdot p_2 \gamma^5 [m_w^2 k^\mu - (k - p_2 - a)^\mu k \cdot (k - p_2 - a)] \\
& + 2m_w^2 \not{b} \gamma^5 \gamma^\mu \left[ m_w^2 k \cdot (k - a + p_2 - 2p_1) - (k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a) k \cdot (k - p_2 - a) \right] \\
& - 2m_w^2 \not{k} \gamma^5 \gamma^\mu \left[ m_w^2 b \cdot (k - a + p_2 - 2p_1) - (k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a) k \cdot (k - p_2 - a) \right] \\
& + 8m_w^2 k \cdot p_2 \gamma^5 [m_w^2 b^\mu - (k - p_2 - a)^\mu b \cdot (k - p_2 - a)] \\
& + 2m_w^2 \gamma^\mu \left[ \not{k} [m_w^2 b^\mu - (k - p_2 - a)^\mu b \cdot (k - p_2 - a)] \right. \\
& \left. - \not{b} [m_w^2 k^\mu - (k - p_2 - a)^\mu k \cdot (k - p_2 - a)] \right] (\not{k} - \not{a} + m_i) \Big] \\
& - 2mm_j (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5) (V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ (a + p_1 - k)^\mu \left[ 4m_w^2 \gamma^5 [\not{b}k \cdot (k - p_2 - a) - \not{k}b \cdot (k - p_2 - a)] \right. \right. \\
& + \left. \left. [m_w^2 - (k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a)] (\not{k}\not{b} - k \cdot b) \gamma^5 \right. \right. \\
& \left. \left. - 2(k - p_1 - a) \cdot (k - p_2 - a) (\not{k}\not{b} - k \cdot b) \gamma^5 (\not{k} + \not{b} \gamma^5) \right] (\not{k} - \not{a} - m_i) \right] \\
& + (\not{k}\not{b} - k \cdot b) \gamma^5 [m_w^2 + (k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a)] \gamma^\mu \\
& + (k - p_1 - a) \cdot (k + p_1 - a - 2p_2) [(k - p_2 - a)^\mu (\not{k}\not{b} - k \cdot b) \gamma^5] (\not{k} - \not{a} - m_i) \Big] \\
& - 2m_j (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5) (V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ 4\gamma^5 m_w^2 (\not{b}k^\mu - \not{k}b^\mu) + 2m_w^2 (\not{k}\not{b} - k \cdot b) \gamma^5 \gamma^\mu \right. \\
& + (k - p_1 - a) \cdot (k + p_1 - a - 2p_2) (k - p_2 - a)^\mu (\not{k} + \not{b}\not{k}) (\not{k}\not{b} - k \cdot b) \gamma^5 (\not{k} - \not{a} - m_i) \\
& - (\not{b}\not{k} + \not{k}) (\not{k}\not{b} - k \cdot b) \gamma^5 [m_w^2 + (k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a)] \gamma^\mu \\
& + 2m_w^2 (\not{k} + \not{b}\not{k}) (\not{k}\not{b} - k \cdot b) \gamma^5 \gamma^\mu - 4m_w^4 k^\mu (k \cdot b \gamma^5 + b^2) - 4m_w^4 b^\mu (k \cdot b \gamma^5 + k^2) \\
& + (k - p_2 - a)^\mu \left[ -2(\not{b}\not{k} - \not{k})(\not{a} - \not{k}) + 4m_w^2 (k \cdot b \gamma^5 + b^2) k \cdot (k - p_2 - a) \right. \\
& + 4m_w^2 (k \cdot b \gamma^5 + k^2) \gamma^5 b \cdot (k - p_2 - a) - (\not{k} - \not{b}\not{k}) (\not{k}\not{b} - k \cdot b) \gamma^5 (\not{k} - \not{a} + m_i) \\
& \left. + 4\not{b} \gamma^5 k \cdot (k - p_2 - a) - 4\not{k} \gamma^5 b \cdot (k - p_2 - a) - (\not{k}\not{b} - k \cdot b) \gamma^5 (3(\not{k} - \not{a}) + m_i) \right] \\
& + (a + p_1 - k)^\mu \left[ (\not{k} + \not{b}\not{k}) (\not{k}\not{b} - k \cdot b) \gamma^5 \left[ (\not{k} - \not{a} - m_i) [1 + (k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a)] \right. \right. \\
& \left. \left. + (\not{b} \gamma^5 + \not{k}) (\not{k} - \not{a} - m_i) (k - p_1 - a) \cdot (k - p_2 - a) \right] \right. \\
& \left. - 4m_w^2 (\not{k} - \not{a}) [k \cdot b \gamma^5 [(k - p_2 - a) \cdot (b \gamma^5 - k)] + k^2 \gamma^5 b \cdot (k - p_2 - a) - b^2 k \cdot (k - p_2 - a)] \right] \Big]
\end{aligned}$$



Vamos a trabajar con el numerador  $N_2$ , el cual al realizar las operaciones correspondientes, tenemos que toma la forma siguiente.

$$\begin{aligned}
N_2 = & [(k + p_2)^2 - b^2 - m^2][(k + p_1)^2 - b^2 - m^2] \left[ \right. \\
& + (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ + 4mm_w^2 + m^2(\not{k} - \not{\phi})^2 \right. \\
& + 2m(k + p_1 + b\gamma^5) \left( (\not{k} - \not{\phi})^2 - 4m_w^2 \right) + 4mm_w^2 p_2^\mu \\
& + 2m \left( (k + p_2 + b\gamma^5) \cdot (k - a) \right) \gamma^\mu (\not{k} - \not{\phi}) + 2mm_w^2 \gamma^\mu (\not{k} - \not{\psi} \gamma^5) \\
& + 2 \left( (k + p_2 - b\gamma^5) \cdot (k - a) \right) (\not{k} - \not{\psi} \gamma^5) (\not{k} - \not{\phi}) \\
& \left. - (\not{k} - \not{\psi} \gamma^5) (\not{k} + \not{\psi} \gamma^5 + m_i) [2m_w^2 + (\not{k} - \not{\phi})^2] \right] \\
& - m_j (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5) (V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \\
& \times \left[ (\not{k} + \not{\psi} \gamma^5 + m_i) (2m_w^2 + (\not{k} - \not{\phi})^2) - 2[(k + p_1 - b\gamma^5) \cdot (k - a)] (\not{k} - \not{\phi}) + 2mm_w^2 \gamma^\mu \right] \\
& + m_j (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5) (V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \\
& \times \left[ 2m_w^2 + mm_w^2 + 2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu [4m_w^2 - (\not{k} - \not{\phi})^2] - 2m_w^2 [2p_1^\mu + (\not{k} + \not{\psi} \gamma^5) \gamma^\mu] \right] \\
& + (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5) (V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ m(\not{k} + \not{\psi} \gamma^5 + m_i) [(\not{k} - \not{\phi})^2 - 4m_w^2] \right. \\
& + 2m_w^2 \left[ m_i + 2[k \cdot (p_1 + p_2) + b \cdot (p_2 - p_1) \gamma^5] \right] \gamma^\mu - 4m_w^2 (p_1 + p_2)^\mu \not{k} \\
& - 4m_w^2 (p_1 - p_2)^\mu \not{\psi} \gamma^5 - 4m_w^2 m p_2^\mu - 2m_i m_w^2 \gamma^\mu (\not{k} - \not{\psi} \gamma^5) \\
& + \left( (k + p_2 + b\gamma^5) \cdot (k - a) \right) \left[ p_1 \cdot (k - a) \gamma^\mu - 2(m_i + 2p_1^\mu) \gamma^\mu (\not{k} - \not{\phi}) \right] \\
& + (\not{k} - \not{\psi} \gamma^5) \left[ 2m_w^2 + mm_w^2 + 2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu [4m_w^2 - (\not{k} - \not{\phi})^2] \right. \\
& \left. - m(\not{k} - \not{\phi})^2 - 2[(k + p_2 + b\gamma^5)^\mu \cdot (k - a)] (\not{k} - \not{\phi}) - 2m_w^2 \gamma^\mu (\not{k} - \not{\psi} \gamma^5) \right] \\
& - 2 \left[ m(k + p_2 - b\gamma^5) \cdot (k - a) + 2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu \left( (k + p_2 - b\gamma^5) \cdot (k - a) \right) \right] (\not{k} - \not{\phi}) \left. \right] \\
& + [(k + p_2)^2 - b^2 - m^2] (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5) (V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) b \cdot (k + p_1) \left[ \right. \\
& + 4m_w^2 [(\not{k} + \not{p}_1 - \not{\psi} \gamma^5) \gamma^5 \gamma^\mu (\not{k} + \not{\psi} \gamma^5) - \gamma^5 (\not{k} - \not{\psi} \gamma^5 + m_i) - 2m(\not{k} + \not{\psi} \gamma^5 + m_i)] \\
& + 2(\not{k} - \not{\psi} \gamma^5) [4m_w^2 - (\not{k} - \not{\phi})^2] - 2mm_i \gamma^5 (\not{k} - \not{\phi})^2 + 4[(k + p_1 - b\gamma^5) \cdot (k - a)] \gamma^5 (\not{k} - \not{\phi}) \\
& + 4(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu [2m_w^2 \gamma^5 (\not{k} + \not{\psi} \gamma^5) - 2(k + p_2 + b\gamma^5) \cdot (k - a) \gamma^5 (\not{k} - \not{\phi}) \\
& \left. - (\not{k} - \not{\psi} \gamma^5) ((\not{k} - \not{\phi})^2 - 4m_w^2 \gamma^5) \right] \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [(k + p_2)^2 - b^2 - m^2](V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) b \cdot (k + p_1) \left[ \right. \\
& + 2\gamma^5[(\not{k} - \not{\phi})^2 - 2mm_w^2 \gamma^\mu (\not{k} + \not{\psi} \gamma^5)] - 8nm_w^2 (p_2^\mu \gamma^5 + m) \\
& - 4m_w^2 (\not{k} + \not{\psi} \gamma^5) \gamma^5 (\not{k} - \not{\psi} \gamma^5 + m_i) + 4(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu [(\not{k} - \not{\phi})^2 \gamma^5 - 4m_w^2] \\
& + 2(\not{k} + \not{\psi} \gamma^5) [(m_i - \not{k} - \not{\psi} \gamma^5) \gamma^5 (\not{k} - \not{\phi})^2 + 4m_w^2 (\not{k} + \not{\psi} \gamma^5 + m_i) \\
& - 2(k + p_1 - b\gamma^5) \cdot (k - a) \gamma^5 (\not{k} - \not{\phi})] + 4[(k + p_2 + b\gamma^5) \cdot (k - a)] (\not{k} - \not{\psi} \gamma^5 - m\gamma^\mu) \gamma^5 (\not{k} - \not{\phi}) \left. \right] \\
& + m_j [(k + p_2)^2 - b^2 - m^2](V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5) b \cdot (k + p_1) \left[ (V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ \right. \right. \\
& + 8m_w^2 (m + (k + p_1 - b\gamma^5)^\mu) + 4(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu (\not{k} - \not{\phi})^2 \gamma^5 \left. \right] \\
& - (V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ 2\gamma^5 [2m_w^2 (m\gamma^\mu + \not{k} - \not{\psi} \gamma^5 + m_i) - 2[(k + p_1 - b\gamma^5) \cdot (k - a)] (\not{k} - \not{\phi}) \right. \\
& + (\not{k} - \not{\phi})^2 (m_i - m)] + 2(\not{k} + \not{\psi} \gamma^5) \gamma^5 (\not{k} - \not{\phi})^2 \left. \right] \left. \right] \\
& + m_j [(k + p_2)^2 - b^2 - m^2](V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5) \left[ (V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ 4m_w^2 (\not{k} + \not{\psi} \gamma^5) \gamma^\mu (\not{k} \not{\psi} \gamma^5 + 2b \cdot p_1 \gamma^5) \right. \right. \\
& - 4m_w^2 \gamma^\mu (2k \cdot p_1 \not{\psi} - 2b \cdot p_1 \not{k} - \not{k} \not{\psi} m_i) \gamma^5 + 8m_w^2 b \cdot p_1 (2p_1^\mu \gamma^5 + \gamma^\mu m_i) \\
& + 8m_w^2 (k + p_1 + b\gamma^5)^\mu [2(2b \cdot p_1 - b\gamma^5 m_i) \gamma^5 + 2\not{k} \not{\psi} \gamma^5 - \not{\psi} \gamma^5 (\not{k} + m_i)] \\
& + 2(\not{k} - \not{\phi}) [2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu - m] [(2b \cdot p_1 - \not{\psi} m_i - \not{k} \not{\psi}) \gamma^5 (\not{k} - \not{\phi}) + 2p_1 \cdot (k - a) \not{\psi} \gamma^5] \\
& + 8m_w^2 \not{k} \not{\psi} \gamma^5 (m + p_1^\mu) \\
& + (V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ 8m_w^2 (2\gamma^5 - 1) (b \cdot p_1 \not{k} - k \cdot p_1 \not{\psi}) + 4m_w^2 \gamma^\mu \gamma^5 (m \not{k} \not{\psi} - 2b \cdot p_2) \right. \\
& + 4[(2b \cdot p_1 - \not{\psi} m_i) \gamma^5 (\not{k} - \not{\phi}) + 2p_1 \cdot (k - a) \not{\psi} \gamma^5] (k - a) \cdot (k - b\gamma^5) \\
& + 4\not{k} \not{\psi} \gamma^5 [8m_i m_w^2 + (\not{k} - \not{\phi}) (k - a) \cdot (k - b\gamma^5) - m_w^2 (\not{k} - \not{\psi} \gamma^5 + m_i)] \\
& + 4m_w^2 (\not{k} + \not{\psi} \gamma^5) [\not{k} \not{\psi} (2 - \gamma^5) - \not{\psi} \gamma^5 (\not{k} + m_i) - (2k \cdot p_1 + m_i^2) \gamma^5 \not{\psi} - (2b \cdot p_1 + \not{\psi} m_i) \gamma^5 (\not{k} + 1)] \\
& \left. \left. + 4m_i m_w^2 (-b^2 + (m_i \gamma^5 + \not{k}) \not{\psi}) \right] \right] \\
& + [(k + p_2)^2 - b^2 - m^2](V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5) \left[ (V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ 4mp_1 \cdot (k - a) [(2b \cdot p_1 - \not{\psi} m_i) \gamma^5 (\not{k} - \not{\phi}) \right. \right. \\
& + 2p_1 \cdot (k - a) \not{\psi} \gamma^5] - 4mm_w^2 [(b \cdot p_1) \gamma^5 (5(\not{k} + \not{\psi} \gamma^5) + 3m_i) + 2k \cdot p_1 \not{\psi} \gamma^5 \\
& + 2\not{\psi} \gamma^5 (k^2 + m_i^2) - 2b^2 m_i - b^2 + 2\not{\psi} \not{k} \not{\psi}] \\
& + 8m_w^2 m_i^2 \not{\psi} \gamma^5 + 4\not{k} \not{\psi} \gamma^5 [m_w^2 (\not{k} - \not{\psi} \gamma^5 + m_i) + mp_1 \cdot (k - a) (\not{k} - \not{\phi})] \\
& - 2m (\not{k} - \not{\phi}) \left[ (2b \cdot p_1 - \not{\psi} m_i) \gamma^5 (\not{k} - \not{\phi}) + 2p_1 \cdot (k - a) \not{\psi} \gamma^5 \right] (k^2 + m_i^2 + 2k \cdot p_1) \\
& + 2m (\not{k} + \not{\psi} \gamma^5) \left[ (\not{k} - \not{\phi}) [(\not{k} \not{\psi} \gamma^5 + 2b \cdot p_1 - \not{\psi} m_i) (\not{k} - \not{\phi}) + 2p_1 \cdot (k - a) \not{\psi} \gamma^5] - 4m_w^2 b \cdot (k - p_1) \gamma^5 \right] \\
& - 4m (k + p_1 - b\gamma^5) \cdot (k - a) \left[ [\not{k} \not{\psi} \gamma^5 + (2b \cdot p_1 - \not{\psi} m_i) \gamma^5] (\not{k} - \not{\phi}) + 2p_1 \cdot (k - a) \not{\psi} \gamma^5 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 4(k + p_2 + b\gamma^5) \cdot (k - a) \left[ [2p_1^\mu \not{k} + \gamma^\mu (2p_1 \cdot k + m_i^2)] \not{\psi} (k - \not{a}) \right. \\
& + (2p_1^\mu + \gamma^\mu \not{k}) [(2b \cdot p_1 - \not{\psi} m_i) \gamma^5 (k - \not{a}) - 2p_1 \cdot (k - a) \not{\psi} \gamma^5] \left. \right] \\
& - 2(\not{k} - \not{\psi} \gamma^5) \left[ (\not{k} \not{\psi} + 2b \cdot p_1 - \not{\psi} m_i) [m + (k + p_1 + b\gamma^5)] \gamma^5 (k - \not{a}) \right. \\
& + 2p_1 \cdot (k - a) \not{\psi} \gamma^5 [m + 2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu] \left. \right] \\
& + 8m_w^2 p_2^\mu \left[ 2m_i b \cdot p_1 (\gamma^5 + 1) - (\not{k} - \not{\psi} \gamma^5) \gamma^5 (\not{\psi} m_i + 2b \cdot p_1) \right] \\
& + 8m_w^2 p_1^\mu \left[ b^2 m_i + 2b \cdot p_2 \gamma^5 (\not{k} - m_i) - (\not{k} \not{\psi} + 2b \cdot p_1) \gamma^5 (k - \not{a}) \right. \\
& + \not{\psi} \gamma^5 [\not{k} m_i - 2k \cdot (p_1 + p_2) - 2p_1 \cdot (p_2 + b\gamma^5)] \left. \right] \\
& + 4m_w^2 \gamma^\mu \left[ 2b \cdot p_2 \gamma^5 [\not{k} (m_i + 1) + 2p_1 \cdot (p_2 - k) + m_i^2] \right. \\
& + [8m_i m_w^2 k \cdot p_2 - 2\not{k} (k \cdot (p_1 - p_2) - p_1 \cdot p_2 - b \cdot (p_1 + p_2) \gamma^5)] \not{\psi} \gamma^5 \\
& + [(m_i^2 - 2k \cdot p_1) \not{\psi} \gamma^5 - 2b \cdot p_1 \not{k}] (\not{k} + \not{\psi} \gamma^5) - 4b \cdot p_1 [p_2 \cdot (k + p_1 + b\gamma^5)] \gamma^5 \\
& + 4(k \cdot p_2) b \cdot p_1 \gamma^5 + \not{k} \not{\psi} \gamma^5 (\not{k} - \not{\psi} \gamma^5) m_i + 2(p_1 \cdot p_2) \not{\psi} \gamma^5 m_i \left. \right] \\
& + 8m_w^2 (k + p_1 + b\gamma^5)^\mu \left[ (\not{k} + \not{\psi} \gamma^5) [2(3k \cdot b - \not{\psi} \not{k}) \gamma^5 + 4b \cdot p_1 \gamma^5 + \not{\psi} \gamma^5 m_i] \right. \\
& + \not{\psi} \gamma^5 [(\not{k} - \not{\psi} \gamma^5) m_i + 2k \cdot (p_1 + p_2) + 2p_1 \cdot (p_2 + b\gamma^5)] + \not{k} - \not{k} \not{\psi} \gamma^5 \not{k} - 2(\not{k} + m_i) b \cdot p_2 \gamma^5 \left. \right] \\
& + (V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ - 8m m_w^2 p_2^\mu (2b \cdot p_1 \gamma^5 + \not{\psi} \gamma^5 m_i) + 16m_w^2 \not{k} \not{\psi} \gamma^5 p_2 \cdot (k + p_1 + b\gamma^5) \right. \\
& + 2(\not{k} - \not{a}) \left[ 2m(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu [(\not{k} \not{\psi} + 2b \cdot p_1 - \not{\psi} m_i) \gamma^5 (k - \not{a}) + 2p_1 \cdot (k - a) \not{\psi} \gamma^5] \right. \\
& + [m_w^2 \not{k} \not{\psi} + m^2 (2b \cdot p_1 - \not{\psi} m_i)] \gamma^5 (k - \not{a}) + 2m^2 p_1 \cdot (k - a) \not{\psi} \gamma^5 \left. \right] \\
& - 4m[(k + p_2 + b\gamma^5) \cdot (k - a)] \gamma^\mu \left[ (\not{k} \not{\psi} + 2b \cdot p_1 - \not{\psi} m_i) \gamma^5 (k - \not{a}) + 2p_1 \cdot (k - a) \not{\psi} \gamma^5 \right] \\
& + 8(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu \left[ (k + p_2 + b\gamma^5) \cdot (k - a) \left[ (\not{k} \not{\psi} + 2b \cdot p_1 - \not{\psi} m_i) \gamma^5 (k - \not{a}) - 2b \cdot p_1 p_1 \cdot (k - a) \not{\psi} \right] \right. \\
& + m m_w^2 [\not{\psi} \gamma^5 (2m_i + \not{k}) - 6b \cdot p_1 \gamma^5 + 3\not{k} \gamma^5 \not{\psi}] \left. \right] \\
& + 4m_w^2 \gamma^\mu \left[ m [(\not{k} \not{\psi} + 2b \cdot p_1) \gamma^5 (\not{k} + \not{\psi} \gamma^5) + 2\not{\psi} \gamma^5 (k \cdot (p_1 + p_2) + b \cdot p_1 \gamma^5 - 2(\not{k} - \not{\psi} \gamma^5) m_i) + b \cdot p_2 \gamma^5 \not{k}] \right. \\
& + m_w^2 [2p_1 \cdot p_2 \not{\psi} \gamma^5 + 2m m_i \gamma^5 - 4k \cdot p_1 b \cdot p_2 \gamma^5 + 2b \cdot p_2 (2p_1^\mu - m_i) \not{k} \gamma^5] \left. \right] \\
& + 2(\not{k} - \not{\psi} \gamma^5) \left[ 2\not{k} \not{\psi} \gamma^5 (k - \not{a}) [(k - a) \cdot (k - b\gamma^5)] - (\not{k} + \not{\psi} \gamma^5) (k - \not{a}) \not{k} \not{\psi} \right. \\
& + 2[2(k + p_1 - b\gamma^5) \cdot (k - a) + (\not{k} + \not{\psi} \gamma^5) (k - \not{a})] \not{\psi} \gamma^5 p_1 \cdot (k - a) \\
& + [2(k - a) \cdot (k - b\gamma^5) - (\not{k} + \not{\psi} \gamma^5) (k - \not{a})] (2b \cdot p_1 - \not{\psi} m_i) \gamma^5 (k - \not{a}) \\
& - 4m_w^2 b \cdot p_1 \gamma^5 [\not{k} (2 - \gamma^5) - 2m_i] + 4m_w^2 b \cdot p_2 \gamma^\mu \gamma^5 (m_i - \not{k}) \\
& - 2m_w^2 \not{k} \not{\psi} \gamma^5 (\not{k} - \not{\psi} \gamma^5 + 2m_i) + 2m_w^2 \not{\psi} \gamma^5 [m_i (2\not{k} - \not{\psi} \gamma^5 - m_i) - 3p_1 \cdot (2k + b\gamma^5)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2(\not{k} + \not{b}\gamma^5)[-(2 - m_w^2)\not{k}\not{b}\gamma^5 + \not{b}\gamma^5(m_i(1 - m_w^2) - m_w^2\not{k}) + 2b \cdot p_1\gamma^5]]] \\
& + [(k + p_1)^2 - b^2 - m^2](V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger\gamma^5)\left[(V_{ci} - A_{ci}\gamma^5)\left[2\not{k}\not{b}\gamma^5\left[4p_2^\mu(\not{k} - \not{b}\gamma^5 + m_i)\right.\right.\right. \\
& + 4p_1^\mu(\not{k} - \not{a})[(k - a) \cdot (k + p_2 + b\gamma^5)] + 2[2p_1^\mu + (\not{k} - \not{b}\gamma^5)\gamma^\mu - 4m_w^2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu](\not{k} + \not{b}\gamma^5) \\
& + \gamma^\mu[m^2(4m_w^2 + (\not{k} - \not{a})^2) - 2m_i(\not{b}\gamma^5 - \not{k}) - 4p_1 \cdot (k + b\gamma^5) - 4p_2 \cdot (k + p_1 + b\gamma^5) \\
& \left.\left.\left. - 2(2p_1 \cdot (k - a) - (\not{k} - \not{a})m_i)(k - a) \cdot (k + p_2 + b\gamma^5)\right]\right] \right] \\
& + 2(\not{k} - \not{b}\gamma^5)\left[\gamma^5\gamma^\mu\left[b \cdot (k + p_2)[2(\not{k} + \not{b}\gamma^5) - 2(\not{k} - \not{a})(k - a) \cdot (k + p_2 + b\gamma^5)]\right.\right. \\
& \left.\left. - 2m^2(\not{k} - \not{b}\gamma^5 + m_i)\right] + 2m_w^2(2mb \cdot p_2 - m_j^2\not{b})\right] \\
& + \gamma^5\left[b \cdot (k + p_2)\left[(\not{k} - \not{a})^2 - 4m_w^2[2p_1^\mu + (\not{k} + \not{b}\gamma^5 - m_i)\gamma^\mu - 2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu]\right]\right] \\
& - 2\not{b}\not{k}\left[(2p_1^\mu + \gamma^\mu m_i)(2\not{k} - \not{a}) + 4m_w^2p_2^\mu - 2m_w^2\not{k}(k + p_2 + b\gamma^5)^\mu - 2\gamma^\mu p_1 \cdot (k - a) + (\not{k} - \not{b}\gamma^5)\gamma^\mu\not{k}\right. \\
& \left.+ [2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu + (\not{k} - \not{b}\gamma^5)\gamma^\mu](\not{k} - \not{a})(k - a) \cdot (k + p_2)\right] \\
& + \not{k}\gamma^5\left[2\gamma^\mu(2b \cdot p_1 + \not{b}m_i + b \cdot (k - a)(\not{k} - \not{a})m_i) + 4b \cdot (k - a)[(\not{k} - \not{a})p_1^\mu - \gamma^\mu p_1 \cdot (k - a)]\right. \\
& \left.+ 4(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu[b \cdot (k - a)(\not{k} - \not{a}) - m_w^2\not{b}]\right] \\
& + 2\not{k}\not{b}\gamma^5\left[2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu[(\not{k} - \not{a})^2 - 2m_w^2] - [4m_w^2 + (\not{k} - \not{a})^2](\not{k} + \not{b}\gamma^5 + m_i)\gamma^\mu - 2p_1^\mu\right. \\
& \left.+ 2m_w^2\gamma^\mu(\not{k} - \not{b}\gamma^5 + m_i)\right] + 2\not{k}\not{b}(\not{k} - \not{b}\gamma^5)\gamma^\mu(\not{k} - \not{a})b \cdot (k - a) \\
& + \not{b}\gamma^5\gamma^\mu\left[4(\not{k} - \not{a})[(2 + m_j^2)(k - a) \cdot (k + p_1 - b\gamma^5) - m^2(k - a) \cdot (k + p_2)]\right. \\
& \left. - mm_w^2m_j^2 - 4m^2\not{k} + 4m_w^2(\not{k} - \not{b}\gamma^5 + m_i)(2p_2 \cdot (k + b\gamma^5) - m_j^2) - 8mm_w^2p_2 \cdot (k + b\gamma^5)\right] \\
& + 4m^2\not{k}\gamma^5\gamma^\mu[(\not{k} - \not{a})b \cdot (k - a) + m_w^2\not{b}] \\
& + \not{b}\gamma^5\left[8m_w^2[(\not{k} - \not{b}\gamma^5 + m_i)p_2^\mu - p_1 \cdot p_2\gamma^\mu] + 4m_j^2[(\not{k} + \not{b}\gamma^5 - m_i)\gamma^\mu - 2p_1^\mu]\right. \\
& + (k + p_1 + b\gamma^5)[8p_2 \cdot (k + b\gamma^5)((\not{k} - \not{a})^2 - 6m_w^2) + 4m_j^2(2m_w^2 + (\not{k} - \not{a})^2)] \\
& \left. - 2[4m_w^2 - (\not{k} - \not{a})^2][(2p_2 \cdot (k + b\gamma^5) + m_j^2)(2p_1^\mu + (\not{k} + \not{b}\gamma^5 - m_i)\gamma^\mu)\right] \\
& + \gamma^5\left[8p_2 \cdot (k + b\gamma^5)\left[(m_i - m^2(\not{k} - \not{b}\gamma^5))\gamma^\mu\not{b} - 2p_1^\mu\not{b} + 2\gamma^\mu b \cdot p_1\right.\right. \\
& \left.\left.+ b \cdot (k - a)[-2\gamma^\mu p_1 \cdot (k - a) + [2p_1^\mu + (\not{k} - \not{b}\gamma^5 + m_i)\gamma^\mu + 2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu](\not{k} - \not{a})\right]\right] \\
& - 8m_w^2b \cdot p_2(2p_1^\mu - \gamma^\mu m_i + \not{k} + \not{b}\gamma^5) + m_j^2(\not{k} - \not{a})(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu b \cdot (k - a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4m_j^2[2p_1^\mu \not{b} - \gamma^\mu(b \cdot p_1 + \not{b}m_i)] \\
& -2b \cdot (k + p_2) \left[ 4(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu [m_w^2(\not{k} + \not{b}\gamma^5) - \gamma^\mu] + 4p_2^\mu(\not{k} - \not{b}\gamma^5 + m_i) \right. \\
& + 8p_1^\mu[(\not{k} - \not{a})(k - a) \cdot (k + p_2 + b\gamma^5) + \not{k} - \not{b}\gamma^5] - \gamma^\mu[m^2[4m_w^2 + (\not{k} - \not{a})^2] \\
& + 2[2k \cdot p_1 + 2b \cdot p_1\gamma^5 - (\not{k} + \not{b}\gamma^5)m_i] + 2[2p_1 \cdot (k - a) - (\not{k} - \not{a})m_i](k - a) \cdot (k + p_2 + b\gamma^5)] \left. \right] \\
& + (V_{ci} + A_{ci}\gamma^5) \left[ \gamma^5 \left[ 4m(k + p_2 + b\gamma^5) \cdot (k - a)[(\not{k} - \not{a})^2 - 4m_w^2] \right. \right. \\
& - 2b \cdot (k + p_2)[(\not{k} - \not{a})^2 - 4m_w^2][(\not{k} + \not{b}\gamma^5 - m_i)\gamma^\mu + 2mp_1^\mu] + 16mm_w^2b \cdot p_2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu \\
& - 8mb \cdot (k + p_2)p_2^\mu + 4m_j^2b \cdot (k - a)[(2p_1^\mu - \gamma^\mu m_i)(\not{k} - \not{a}) - 2\gamma^\mu p_1 \cdot (k - a)] \left. \right] \\
& + \not{k}\not{b}\gamma^5 \left[ -4m\gamma^\mu(\not{b}\gamma^5 - \not{a})^2 + 2\not{k} - 8mp_2^\mu - 4mm_w^2\gamma^\mu(\not{k} - \not{b}\gamma^5 + m_i) \right. \\
& - 4m\gamma^\mu(\not{k} - \not{a})[(k - a) \cdot (2k + p_1 + p_2)] + 2m(4m_w^2 + (\not{k} - \not{a})^2)[(\not{k} + \not{b}\gamma^5 - m_i)\gamma^\mu \\
& + 2p_1^\mu + 2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu] \left. \right] \\
& + \not{k}\gamma^5 \left[ 8m(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu - 4m(\not{k} - \not{b}\gamma^5)\gamma^\mu[m_w^2 - m(\not{k} - \not{a})b \cdot (k - a)] \right. \\
& - 4mb \cdot (k - a)[2p_1^\mu(\not{k} - \not{a}) + \gamma^\mu(m_i - 2p_1 \cdot (k - a))] \left. \right] \\
& + \gamma^5\gamma^\mu \left[ mb \cdot (k + p_2) \left[ 4(\not{k} + \not{b}\gamma^5) - m_w^2(\not{k} - \not{b}\gamma^5 + m_i) \right. \right. \\
& + (\not{k} - \not{a})[(k - a) \cdot (2k + 4p_2 - 2p_1 + 2b\gamma^5)] \left. \right] - 4mb \cdot (k - a)(\not{k} - \not{a})[2p_2 \cdot (k + b\gamma^5) + m_j] \\
& - 4mm_w^2[2mb \cdot p_2 + \not{b}(m_j^2 + 2p_1 \cdot (k + b\gamma^5))] \left. \right] \\
& + \not{b}\gamma^5 \left[ 4m[2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu - (\not{k} - \not{b}\gamma^5)\gamma^\mu - 2p_1^\mu](\not{k} - \not{a})(k - a) \cdot (k + p_2) \right. \\
& + 2m\gamma^\mu \left[ (k - a) \cdot (k + p_2)(2p_1 \cdot (k - a) - m_i(\not{k} - \not{a})) - [4m_w^2 - (\not{k} - \not{a})^2](m_j^2 + p_2 \cdot (k + b\gamma^5)) \right] \\
& - 4m_w^2(\not{k} + \not{b}\gamma^5)\gamma^\mu[m_j^2 + p_2 \cdot (k + b\gamma^5)] + 4m_w^2(2p_1^\mu - \gamma^\mu m_i)[m_j^2 - p_2 \cdot (k + b\gamma^5)] \\
& - 4m \left[ m_w^2[p_2^\mu + \not{k}(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu] - m_j^2\gamma^\mu - (\not{k} - \not{b}\gamma^5)\gamma^\mu\not{k} - [2p_1^\mu\not{k} - \gamma^\mu(2k \cdot p_1 - \not{k}m_i)] \right] \left. \right] \\
& + (\not{k} - \not{b}\gamma^5) \left[ 8m_w^2b \cdot p_2\gamma^5[(\not{k} + \not{b}\gamma^5 - m_i)\gamma^\mu + 2p_1^\mu] - 4mm_w^2\not{k}\gamma^5\gamma^\mu\not{b} \right. \\
& + \left. \left[ (m_j - m\not{k})(\not{k} - \not{a})b \cdot (k - a) - m[4m_w^2 + (\not{k} - \not{a})^2](\not{k}\not{b} + b \cdot (k + p_2)) \right] 2\gamma^5\gamma^\mu \right. \\
& + \not{b}\gamma^5[8m_w^2\gamma^\mu(p_2 \cdot (k + p_1 + b\gamma^5)) + 4m\gamma^\mu\not{k} - 4m(\not{k} - \not{a})(k - a) \cdot (k + p_2) \\
& - 8m_w^2p_2^\mu(\not{k} - \not{b}\gamma^5 + m_i) - 4[(2p_1^\mu + \gamma^\mu m_i)(\not{k} - \not{a}) - 2p_1 \cdot (k - a)\gamma^\mu](k - a) \cdot (k + p_2)] \left. \right] \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + m_j[(k + p_1)^2 - b^2 - m^2](V_{cj}^+ - A_{cj}^+\gamma^5) \left[ (V_{c1} + A_{ci}\gamma^5) \left[ \not{b}\gamma^5 \left[ 4(\not{k} - \not{b}\gamma^5)\gamma^\mu(\not{k} + \not{b}\gamma^5) \right. \right. \right. \\
& + 8\not{b}\gamma^5 p_2^\mu(\not{k} - \not{b}\gamma^5 + m_i) + 4m_w^2[2\not{k}(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu + 2(p_2 + p_1)^\mu - \gamma^\mu m_i] \\
& + 4(\not{k} + \not{b}\gamma^5)[m_w^2 + 2p_1^\mu - 2mm_w^2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu] \\
& - 4(k - a) \cdot (k + p_2) \left[ [2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu + (\not{k} - \not{b}\gamma^5)\gamma^\mu - 4(2p_1^\mu - \gamma^\mu m_i)](\not{k} - \not{a}) \right. \\
& + 8p_1 \cdot (k - a)\gamma^\mu \left. \right] + (k - a) \cdot (k + p_2 + b\gamma^5) [8p_1 \cdot (k - a)\gamma^\mu + [8p_1^\mu + 4(\not{k} - \not{b}\gamma^5 - m_i)\gamma^\mu](\not{k} - \not{a})] \\
& + 8\gamma^\mu [8[p_1 \cdot (k - b\gamma^5) - (\not{k} - \not{b}\gamma^5)m_i + 4\not{k} - 2m^2(4m_w^2 + (\not{k} - \not{a})^2)] - p_2 \cdot (k + p_1 + b\gamma^5)] \left. \right] \\
& + (\not{k} + \not{b}\gamma^5) \left[ 4\gamma^5\gamma^\mu [2b \cdot (p_2 - p_1) - \not{b}m_i + b \cdot (k - a)(2p_1 \cdot (k - a) - m_i(\not{k} - \not{a})) \right. \\
& - 8\gamma^5 b \cdot (k - a)p_1^\mu(\not{k} - \not{a}) + 4\gamma^5(\not{k} - \not{b}\gamma^5)\gamma^\mu [m_w^2\not{b} - (\not{k} - \not{a})b \cdot (k - a)] \\
& + 4\not{b}\gamma^5\gamma^\mu [mm_w^2(1 - \not{k} + \not{b}\gamma^5 - m_i) - (\not{k} - \not{a})(k - a) \cdot (k + p_1 - b\gamma^5)] \\
& + 2[(\not{k} - \not{a})^2 + 4m_w^2][\not{b}\gamma^5]\not{b}\gamma^5 [2p_1^\mu + (\not{k} + \not{b}\gamma^5 - m_i)\gamma^\mu - b \cdot (k + p_2)\gamma^5\gamma^\mu] \left. \right] \\
& + \not{k}\not{b}\gamma^5 \left[ 4(k + p_1 + b\gamma^5)[4m_w^2 + (\not{k} - \not{a})^2] + 4 \right] - 2[4m_w^2 + (\not{k} - \not{a})^2](2p_1^\mu + (\not{k} + \not{b}\gamma^5 - m_i)\gamma^\mu) \\
& - 8(2p_1^\mu - \gamma^\mu m_i) - (\not{k} + \not{b}\gamma^5)\gamma^\mu + 4m_w^2\gamma^\mu(\not{k} - \not{b}\gamma^5 + m_i) + 4\gamma^\mu(\not{k} - \not{a})[(k - a) \cdot (k + p_1 - b\gamma^5)] \left. \right] \\
& + 4(\not{k} + \not{b}\gamma^5)(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu [\not{b}\gamma^5(4m_w^2 - (\not{k} - \not{a})^2) - 2\gamma^5(\not{k} - \not{a})b \cdot (k - a)] \\
& + \not{k}\gamma^5 \left[ 8b \cdot (k - a)(\not{k} - \not{a})[(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu + p_1^\mu] - 8p_1^\mu\not{b} + 4(\not{k} - \not{b}\gamma^5)\gamma^\mu [b \cdot (k - a)(\not{k} - \not{a}) - m_w^2\not{b}] \right. \\
& + 4\gamma^\mu [2b \cdot p_1 + \not{b}m_i + p_1 \cdot (k - a) - m_i(\not{k} - \not{a})] \left. \right] \\
& + \gamma^5\gamma^\mu \left[ 2b \cdot (k + p_2)[(\not{k} - \not{a})(k - a) \cdot (k + p_1 - b\gamma^5) - 2m_w^2(\not{k} - \not{b}\gamma^5 + m_i)] \right. \\
& + 4m_w^2[(\not{k} - \not{a})b \cdot (k - a) + m(2b \cdot p_2 + \not{b})] \left. \right] \\
& + \gamma^5 \left[ 4(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu [b \cdot (k + p_2)(2m_w^2 - (\not{k} - \not{a})^2) + 4m_w^2 b \cdot p_2] - 8b \cdot p_2(2p_1^\mu - \gamma^\mu m_i) \right. \\
& + 2b \cdot (k + p_2) \left[ 2(\not{k} + \not{b}\gamma^5 + m_i)\gamma^\mu - (2p_1^\mu - \gamma^\mu m_i)[4m_w^2 + (\not{k} - \not{a})^2] \right] \left. \right] \\
& + (V_{ci} - A_{ci}\gamma^5) \left[ \not{b}\gamma^5 \left[ 2m[4m_w^2 + (\not{k} - \not{a})^2](2p_1^\mu + (\not{k} + \not{b}\gamma^5 - m_i)\gamma^\mu) - 4m(\not{k} - \not{a})^2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu \right. \right. \\
& + 4\gamma^\mu [2p_1 \cdot k - m(\not{k} + \not{b}\gamma^5) - m_i\not{k} + 2m_w^2(p_2 \cdot (k + p_1 + b\gamma^5) + m^2)] \\
& - 8mp_2^\mu - 8p_1^\mu\not{k} - 4m\gamma^\mu(\not{k} - \not{a})[(k - a) \cdot (3k + 2p_2 + p_1) - m_w^2 b \cdot (k - a)] \left. \right] \\
& + \gamma^5 \left[ -4m \left[ m(\not{k} - \not{b}\gamma^5)\gamma^\mu (m_w^2\not{b} + (\not{k} - \not{a})b \cdot (k - a)) + m_w^2 [2p_1^\mu\not{b} - \gamma^\mu(2b \cdot p_1 - \not{b}m_i)] \right. \right. \\
& - 2b \cdot (k + p_2)\gamma^\mu [2 - 4m_w^2 - (\not{k} - \not{a})^2] - 8b \cdot p_2 [2m_w^2\gamma^\mu + (m - m_w^2(\not{k} + \not{b}\gamma^5 + m_i)\gamma^\mu)] \\
& - 4mb \cdot (k - a) \left[ [(2p_1^\mu + \gamma^\mu m_i) - 2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu](\not{k} - \not{a}) - 2\gamma^\mu p_1 \cdot (k - a) \right] \left. \right] \\
& + \not{k}\gamma^5 \left[ 2m\not{b}\gamma^\mu (4m_w^2 + (\not{k} - \not{a})^2 - 2) + 4m\gamma^\mu [(\not{k} - \not{a})b \cdot (k - a) - m\not{b}] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\not{k} + \not{b}\gamma^5) \left[ 4m\gamma^5\gamma^\mu [(\not{k} - \not{a})b \cdot (k - a) - m_w^2\not{b}] \right. \\
& + 2\not{b}\gamma^5 \left( 2m_w^2((\not{k} + \not{b}\gamma^5)\gamma^\mu + 2p_1^\mu) + \gamma^\mu [m(4m_w^2 + (\not{k} - \not{a})^2) - 2m_w^2m_i] \right) \left. \right] \\
& + (V_{c_j}^+ - A_{c_j}^+\gamma^5)(V_{c_1} - A_{c_1}\gamma^5) \left[ 8m_j\not{b} \left[ \gamma^\mu \left( 2b \cdot p_2(m_i - \not{k}) + (\not{k}\not{b} + 2b \cdot p_1)(\not{k} + \not{b}\gamma^5) + \not{b}[(\not{k} - \not{b}\gamma^5)m_i \right. \right. \right. \\
& - 2p_1 \cdot (k + b\gamma^5) - 2p_2 \cdot (k + p_1)] - (\not{k} + \not{b}\gamma^5) \\
& + m[(k - a) \cdot (k + p_2 + b\gamma^5)] [(\not{k}\not{b} + 2b \cdot p_1 + \not{b}m_i)(\not{k} - \not{a}) - 2p_1 \cdot (k - a)\not{b}] \\
& + 2m\not{b}[2p_1 \cdot (k - a) - (\not{k} - \not{a})m_i] + m^2(2b \cdot p_1 - \not{b}m_i)[4m_w^2 - (\not{k} - \not{a})^2] + 4mb \cdot p_1(\not{k} - \not{a}) \left. \right) \\
& - m^2[4m_w^2 - (\not{k} - \not{a})^2](2p_1^\mu + \not{k}\gamma^\mu\not{b}) - 2mp_1^\mu\not{b}(\not{k} - \not{a}) \\
& + m[\not{k}\not{b}\gamma^5\not{k}\gamma^\mu\not{b} - 2p_1^\mu b^2\gamma^5 - \not{b}\gamma^5\gamma^\mu(2b \cdot p_1 - \not{b}m_i)] - 2p_2^\mu \left. \right] \\
& + 16m_j\not{k} \left( m_w^2\not{b}[2p_1^\mu\not{b} - \gamma^\mu(2b \cdot p_1 - \not{b}m_i) + \not{k}\gamma^\mu\not{b}] - m_w^2b^2[(\not{k} - m_i)\gamma^\mu + 2p_1^\mu] \right. \\
& + (k + p_1)^\mu b \cdot (k - a)[2p_1 \cdot (k - a) + (\not{k} - \not{b}\gamma^5 - m_i)(\not{k} - \not{a}) \left. \right) \\
& + 8mm_j[(\not{k}\not{b} - b \cdot (k - p_2))\gamma^\mu - 2\not{b}p_2^\mu][2b \cdot p_1 + (m_i + \not{k})\not{b}] \\
& - 8m_j \left( 2\not{b}[\not{k}\not{b} + 2b \cdot (p_2 - p_1)]\not{k} - 4b^2[k \cdot (p_2 - p_1 + p_1 \cdot p_2)] \right. \\
& - [4m_w^2 - (\not{k} - \not{a})^2][\not{k}\not{b}(\not{k} - \not{b}\gamma^5) + 2b \cdot p_2\not{k} - (m_i^2 - 2k \cdot p_2)\not{b}][2p_1^\mu + \not{k}\gamma^\mu]\not{b} - \gamma^\mu(2b \cdot p_1 - \not{b}m_i) \left. \right) \\
& + 8mm_jm_w^2 \left[ 2[\not{b}(\not{k} - \not{b}\gamma^5) + \not{k}\not{b} + 2b \cdot p_2][(2p_1^\mu + \not{k}\gamma^\mu)\not{b} - \gamma^\mu(2b \cdot p_1 - \not{b}m_i)] \right. \\
& - (2\not{k} + \not{b}\gamma^5)\not{b}\gamma^\mu\not{k}(\not{k} + m_i) - 2[(\not{k} - \not{b}\gamma^5)\not{k} + m_i^2 + 2k \cdot p_1 + \not{b}\gamma^5m_i]\gamma^\mu - 2\not{b}\gamma^5p_1^\mu \\
& - 2b \cdot p_2(2b \cdot p_1 + \not{b}\not{k})\gamma^\mu - [2p_1^\mu b^2 - 2b \cdot p_1\not{b}\gamma^\mu + \not{b}\not{k}\gamma^\mu\not{b}]\not{k} \\
& - [2p_2^\mu(2b \cdot p_1 - \not{b}\not{k}) - 2b \cdot p_2\not{k}\gamma^\mu]\not{b} - 2\not{b}\gamma^\mu\not{b}[p_1 \cdot (k + p_2) + k \cdot p_2] \\
& - [2p_2^\mu b^2 - 2b \cdot p_2\gamma^\mu\not{b} - \not{b}\gamma^\mu(\not{b}\not{k} + 2b \cdot p_2)m_i] \left. \right] + 8mm_jm_w^2 \left[ \gamma^\mu b \cdot (k + p_1) \left( m[4m_w^2 - (\not{k} - \not{a})^2] \right. \right. \\
& + [(\not{k} + m_i - \not{b}\gamma^5)m_w^2 - (\not{k} - \not{a})(k - a) \cdot (k + p_1 - b\gamma^5)] \left. \right) - 2m_w^2b^2[2p_1^\mu + (\not{k} - m_i)\gamma^\mu] \\
& + 2(k + p_1)^\mu \left( m_w^2[2b \cdot p_1 - (\not{k} - \not{b}\gamma^5 - m_i)\not{b}] - m_w^2\not{b}(\not{k} - \not{b}\gamma^5 + m_i) \right. \\
& - [2p_1 \cdot (k - a) + (\not{k} - \not{b}\gamma^5 - m_i)(\not{k} - \not{a})]b \cdot (k - a) \left. \right) + 2m_w^2[\not{b}\not{k}\gamma^\mu\not{b} + 2p_1^\mu b^2 + \not{b}\gamma^\mu(2b \cdot p_1 + \not{b}m_i)] \\
& - 2m_w^2[2b \cdot p_1 + (\not{k} - m_i)\not{b}] + 2[\not{b}(\not{k} - \not{b}\gamma^5) + \not{k}\not{b} + 2b \cdot p_2]\gamma^\mu\not{b}(\not{k} - \not{a})[(k - a) \cdot (k + p_1)] \\
& - 2m\not{b}b \cdot (k - a)[(p_1^\mu\not{b} - \gamma^\mu b \cdot p_1)2(\not{k} - \not{a}) + \gamma^\mu\not{b}(2p_1 \cdot (k - a) - (\not{k} - \not{a})m_i)] \\
& + [4m_w^2 - (\not{k} - \not{a})^2][\not{b}(\not{k} - \not{b}\gamma^5) + \not{k}\not{b} + 2b \cdot p_2][(2p_1^\mu + \not{k}\gamma^\mu)\not{b} - \gamma^\mu(2b \cdot p_1 - \not{b}m_i)] \left. \right]
\end{aligned}$$

## A.4. Casos

### A.4.1. Caso $a = b = 0$

Para el diagrama uno tenemos

$$\begin{aligned}
N_1 = & (k^2 - m_l^2) \left[ (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ (-k + p_1)^\mu \left[ 4m_w^2 [(k - p_2) \cdot k] \not{k} \right. \right. \right. \\
& - \not{k} \left[ 2m_w^2 (2m_w^2 - m_j^2 - k^2 + 2k \cdot p_2) - m_w^2 \not{k} (\not{k} - m_i) \right. \\
& \left. \left. \left. - 2m_w^2 (2k \cdot p_2 - m_i^2 - m_i (\not{k})) + \not{k} (\not{k} + m_i) (k - p_2)^2 \right] \right] \right. \\
& + 2(\not{k} - m_i) \left[ \left( (k - p_2) \cdot (k - p_2) + m_w^2 \right) (p_2 \cdot k) + (k - p_2) \cdot (k - p_2) - m_w^2 [(k - p_2) \cdot k] \right] \\
& + (k - p_2)^\mu \left[ 2[(k - p_2) \cdot k] \left[ (\not{k} - m_i) [(k - p_1) \cdot (k + p_1 - 2p_2)] - m_w^2 (\not{k} + m_i) \right] \right. \\
& + (k - p_1) \cdot (k + p_1 - 2p_2) \left[ (-\not{k}) (\not{k}) + 2p_2 \cdot k \right] (\not{k} - m_i) \\
& + m_w^2 \left[ (-\not{k}) \left[ (\not{k}) (\not{k} + m_i) + 2m_j^2 - 4p_2 \cdot k \right] + 2p_2 \cdot k (m_i + 3\not{k}) \right] \\
& + 2m_w^2 k^\mu \left[ 2m_w^2 (\not{k} + m_i) - \left( (k - p_1) \cdot (k + p_1 - 2p_2) \right) (\not{k} - m_i) \right] \\
& - 2m_w^2 \not{k} \left[ (k - a)^\mu \left( (k - p_1) \cdot (k + p_1 - 2p_2) \right) - m_w^2 p_1^\mu \right] \\
& + m_w^2 \left[ -\not{k} \left[ m_w^2 m_i + 2\not{k} - \left( (k - p_2) \cdot (k + p_2 - 2p_1) \right) \not{k} \right. \right. \\
& \left. \left. - \left( (k - p_1) \cdot (k + p_1 - 2p_2) \right) (\not{k} + m_i) \right] + 2m_w^2 \left( k \cdot (k - 2p_1 + 2p_2) \right) \right. \\
& \left. - 2 \left( (k - 2p_1 + p_2) \cdot (k - p_2) \right) k^2 \right] \gamma^\mu \\
& + mm_j (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ - (p_1 - k)^\mu \left[ m_w^2 (\not{k} - m_i) + \right. \right. \\
& + (\not{k} - m_i) \left[ \left( (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2) \right) + 2 \left( (k - p_1) \cdot (k + p_2) \right) \right] \\
& \left. \left. + \left( (k - p_1) \cdot (k + p_1 - 2p_2) \right) \left[ m_w^2 \left( m_w^2 + \left( (k - p_2) \cdot (k + p_2 - 2p_1) \right) \right) \gamma^\mu - (\not{k} - m_i) \right] \right] \right] \\
& + m(k^2 - m_l^2) \left[ (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ (p_1 - k)^\mu \left[ \right. \right. \right. \\
& + 4m_w^2 \left( 1 - (2m_w^2 - k^2) + k \cdot (p_1 + p_2) \right) - m_w^4 \left( 4p_1 \cdot k + 2\not{k} m_i + \not{k} (\not{k} - m_i) + 2m_i^2 \right) \\
& + \left[ \left( (k - p_2) \cdot (k + p_2 - 2p_1) \right) + 2 \left( (k - p_1) \cdot (k - p_2) \right) \right] \not{k} (\not{k} - m_i) \\
& \left. \left. \left. + \left( (k - p_1) \cdot (k + p_1 - 2p_2) \right) \left[ m_w^2 \left( 2m_i m_w^2 + (\not{k} - m_i) - \left( (k - p_2) \cdot (k + p_2 - 2p_1) \right) \not{k} \right) \gamma^\mu \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + m_w^4 (\not{k} - 4p_1^\mu) + (k - p_2)^\mu \not{k} (\not{k} - m_i) \right] \right] \right]
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + m_j(V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger\gamma^5)(V_{ci} + A_{ci}\gamma^5) \left[ -8m_w^4 k^\mu - (p_1 - k)^\mu \left[ \not{k}(\not{k} - m_i) \left( m_w^2 + (k - p_2)^2 \right) \right] \right. \\
& - (k - p_2)^\mu \left[ \not{k} \left[ \left( (k - p_1) \cdot (k + p_1 - 2p_2) \right) (\not{k} - m_i) + m_w^2 (m_i + 3\not{k}) \right] - 4m_w^2 (k - p_2) \cdot k \right] \\
& + m_w^2 \not{k} \left[ \left( (k - p_2) \cdot (k + p_2 - 2p_1) \right) - m_w^2 \right] \gamma^\mu - 4k^2 \left. \right] \\
& - 2(V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger\gamma^5)(V_{ci} - A_{ci}\gamma^5)(p_1 - k)^\mu \left[ + 2\not{k}(\not{k} - m_i)(k - p_1) \cdot (k - p_2) \right] \\
& - 2m(V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger\gamma^5)(V_{ci} + A_{ci}\gamma^5) \left[ (-k + p_1)^\mu \right. \\
& \times \left[ 2 \left[ (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2) \not{k} k \cdot (k - p_2) \gamma^5 \right] (\not{k} - m_i) \right. \\
& + 8m_w^2 \gamma^5 [k \cdot (k - p_2)(b \cdot p_2) - k \cdot (k - p_2)(k \cdot p_2)] \left. \right] \\
& \left. - 2m_w^2 \not{k} \gamma^5 \gamma^\mu \left[ - (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2) k \cdot (k - p_2) \right] \right].
\end{aligned}$$

Para el segundo diagrama tenemos:

$$\begin{aligned}
N_2 = & [(k + p_2)^2 - m^2][(k + p_1)^2 - m^2] \left[ + (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger\gamma^5)(V_{ci} + A_{ci}\gamma^5) \left[ + 4mm_w^2 + m^2(\not{k})^2 \right. \right. \\
& + 2m(k + p_1) \left( k^2 - 4m_w^2 \right) + 4mm_w^2 p_2^\mu + 2m \left( (k + p_2) \cdot k \right) \gamma^\mu \not{k} + 2mm_w^2 \gamma^\mu \not{k} \\
& + 2 \left( (k + p_2) \cdot k \right) k^2 - \not{k}(\not{k} + m_i) [2m_w^2 + k^2] \left. \right] \\
& - m_j(V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger\gamma^5)(V_{ci} - A_{ci}\gamma^5) \left[ (\not{k} + m_i)(2m_w^2 + k^2) - 2[(k + p_1) \cdot k] \not{k} + 2mm_w^2 \gamma^\mu \right] \\
& + m_j(V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger\gamma^5)(V_{ci} + A_{ci}\gamma^5) \\
& \times \left[ 2m_w^2 + mm_w^2 + 2(k + p_1)^\mu [4m_w^2 - k^2] - 2m_w^2 [2p_1^\mu + (\not{k})\gamma^\mu] \right] \\
& + (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger\gamma^5)(V_{ci} - A_{ci}\gamma^5) \left[ m(\not{k} + m_i) [k^2 - 4m_w^2] \right. \\
& + 2m_w^2 \left[ m_i + 2[k \cdot (p_1 + p_2)] \right] \gamma^\mu - 4m_w^2 (p_1 + p_2)^\mu \not{k} - 4m_w^2 m p_2^\mu - 2m_i m_w^2 \gamma^\mu (\not{k}) \\
& + \left( (k + p_2) \cdot k \right) \left[ p_1 \cdot k \gamma^\mu - 2(m_i + 2p_1^\mu) \gamma^\mu \not{k} \right] \\
& + \not{k} \left[ 2m_w^2 + mm_w^2 + 2(k + p_1)^\mu [4m_w^2 - k^2] - m k^2 - 2[(k + p_2)^\mu \cdot k] \not{k} - 2m_w^2 \gamma^\mu \not{k} \right] \\
& \left. - 2 \left[ m(k + p_2) \cdot k + 2(k + p_1)^\mu \left( (k + p_2) \cdot k \right) \right] \not{k} \right].
\end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
& + [(k + p_2)^2 - m^2](V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) b \cdot (k + p_1) \left[ + 4m_w^2 [(\not{k} + \not{p}_1) \gamma^5 \gamma^\mu \not{k} - \gamma^5 (\not{k} + m_i) \right. \\
& - 2m(\not{k} + m_i)] + 2\not{k}[4m_w^2 - k^2] - 2mm_i \gamma^5 k^2 + 4[(k + p_1) \cdot k] \gamma^5 \not{k} \\
& \left. + 4(k + p_1)^\mu [2m_w^2 \gamma^5 (\not{k}) - 2(k + p_2) \cdot k \gamma^5 \not{k} - \not{k}(k^2 - 4m_w^2 \gamma^5)] \right].
\end{aligned}$$

### A.4.2. Caso $a \neq 0$ y $b = 0$

Para el diagrama uno tenemos

$$\begin{aligned}
N_1 = & (k^2 - m_l^2) \left[ (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ (-k + a + p_1)^\mu \left[ 4m_w^2 [(k - p_2 - a) \cdot k] (\not{k} + \not{\phi}) \right. \right. \right. \\
& - \not{k} \left[ 2m_w^2 \left( 2m_w^2 - m_j^2 - a^2 - k^2 - a \cdot p_2 + 2k \cdot (a + p_2) \right) - m_w^2 (\not{k} + \not{\phi}) (\not{k} - \not{\phi} - m_i) \right. \\
& \left. \left. - 2m_w^2 \left( 2k \cdot (p_2 - a) - m_i^2 - m_i (\not{k} - \not{\phi}) \right) + (\not{k} - \not{\phi}) (\not{k} - \not{\phi} + m_i) (k - p_2 - a)^2 \right] \right. \\
& \left. + 2(\not{k} - \not{\phi} - m_i) \left[ \left( (k - p_2 - a) \cdot (k - p_2 - a) + m_w^2 \right) p_2 \cdot k \right. \right. \\
& \left. \left. + (k - p_2 - a) \cdot (k - p_2 - a) - m_w^2 [(k - p_2 - a) \cdot k] \right] \right] \\
& + (k - a - p_2)^\mu \left[ 2[(k - p_2 - a) \cdot k] \left[ (\not{k} - \not{\phi} - m_i) [(k - p_1 - a) \cdot (k + p_1 - a - 2p_2) - m_w^2] \right] \right. \\
& \left. + (k - p_1 - a) \cdot (k + p_1 - a - 2p_2) \left[ -\not{k} (\not{k} - \not{\phi}) + 2p_2 \cdot k \right] (\not{k} - \not{\phi} - m_i) \right. \\
& \left. + m_w^2 \left[ -\not{k} \left[ (\not{k} - \not{\phi}) (\not{k} - \not{\phi} + m_i) + 2m_j^2 - 4p_2 \cdot (k - a) \right] + 2p_2 \cdot k (m_i + 3(\not{k} - \not{\phi})) \right] \right] \\
& + 2m_w^2 k^\mu \left[ 2m_w^2 (\not{k} - \not{\phi} + m_i) - \left( (k - p_1 - a) \cdot (k + p_1 - a - 2p_2) \right) (\not{k} - \not{\phi} - m_i) \right] \\
& - 2m_w^2 \not{k} \left[ (k - a)^\mu \left( (k - p_1 - a) \cdot (k + p_1 - a - 2p_2) \right) - m_w^2 p_1^\mu \right] \\
& + m_w^2 \left[ -\not{k} \left[ m_w^2 m_i + 2(\not{k} - \not{\phi}) - \left( (k - p_2 - a) \cdot (k + p_2 - a - 2p_1) \right) (\not{k} - \not{\phi}) \right. \right. \\
& \left. \left. - \left( (k - p_1 - a) \cdot (k + p_1 - a - 2p_2) \right) (\not{k} - \not{\phi} + m_i) \right] + 2m_w^2 \left( k \cdot (k - 2p_1 - a + 2p_2) \right) \right. \\
& \left. - 2 \left( (k - 2p_1 - a + p_2) \cdot (k - a - p_2) \right) \left( k \cdot (k - a) \right) \right] \gamma^\mu \\
& + mm_j (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ - (a + p_1 - k)^\mu \left[ m_w^2 (\not{k} - \not{\phi} - m_i) + \right. \right. \\
& \left. \left. + (\not{k} - \not{\phi} - m_i) \left[ \left( (k + p_2 - 2p_1 - a) \cdot (k - p_2 - a) \right) + 2 \left( (k - p_1 - a) \cdot (k + p_2 - a) \right) \right] \right. \right. \\
& \left. \left. + \left( (k - p_1 - a) \cdot (k + p_1 - a - 2p_2) \right) \left[ m_w^2 \left( m_w^2 + \left( (k - p_2 - a) \cdot (k + p_2 - a - 2p_1) \right) \right) \right] \gamma^\mu \right. \right. \\
& \left. \left. - (\not{k} - \not{\phi} - m_i) \right] \right] \\
& - 2m (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ (-k + p_1 + a)^\mu \right. \\
& \times \left[ 2 \left[ (k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a) [\not{k} k \cdot (k - p_2 - a)] \gamma^5 \right] (\not{k} - \not{\phi} - m_i) \right. \\
& \left. \left. - 8m_w^2 \gamma^5 [k \cdot (k - p_2 - a) (k \cdot p_2)] \right] \right. \\
& \left. + 2m_w^2 \not{k} \gamma^5 \gamma^\mu \left[ (k - a + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2 - a) k \cdot (k - p_2 - a) \right] \right] \\
& - 4m_j (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) (k - p_2 - a)^\mu \not{k} (\not{\phi} - \not{k})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + m(k^2 - m_l^2) \left[ (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ (a + p_1 - k)^\mu \left[ \right. \right. \right. \\
& + 4m_w^2 \left( 1 - (2m_w^2 - a^2 - k^2 - 2k \cdot a) + (k + a) \cdot (p_1 + p_2) \right) \\
& - m_w^4 \left( 4p_1 \cdot (k + a) + 2(\not{k} - \not{\phi})m_i + (\not{k} - \not{\phi})(\not{k} - \not{\phi} - m_i) + 2m_i^2 \right) \\
& + \left. \left. \left. \left[ \left( (k - p_2 - a) \cdot (k + p_2 - a - 2p_1) \right) + 2 \left( (k - p_1 - a) \cdot (k - p_2 - a) \right) \right] (\not{k} - \not{\phi})(\not{k} - \not{\phi} - m_i) \right] \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \left( (k - p_1 - a) \cdot (k + p_1 - a - 2p_2) \right) \right) \right. \right. \\
& \times \left[ m_w^2 \left( 2m_i m_w^2 + (\not{k} - \not{\phi} - m_i) - \left( (k - p_2 - a) \cdot (k + p_2 - a - 2p_1) \right) (\not{k} - \not{\phi}) \right) \gamma^\mu \right. \\
& + \left. \left. \left. m_w^4 (\not{k} - \not{\phi} - 4p_1^\mu) + (k - p_2 - a)^\mu (\not{k} - \not{\phi})(\not{k} - \not{\phi} - m_i) \right] \right] \right. \\
& + m_j (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ -8m_w^4 k^\mu - (a + p_1 - k)^\mu \left[ \not{k}(\not{k} - \not{\phi} - m_i) \left( m_w^2 + (k - p_2 - a)^2 \right) \right. \right. \\
& - (k - a - p_2)^\mu \left[ \not{k} \left[ \left( (k - p_1 - a) \cdot (k + p_1 - a - 2p_2) \right) (\not{k} - \not{\phi} - m_i) + m_w^2 (m_i + 3(\not{k} - \not{\phi})) \right] \right. \\
& - 4m_w^2 (k - a - p_2) \cdot k \left. \right] + m_w^2 (\not{k}) \left[ \left( (k - p_2 - a) \cdot (k + p_2 - a - 2p_1) \right) - m_w^2 \right] \gamma^\mu \left. \right. \\
& - 2m_j (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ 2(k - p_2 - a)^\mu \not{k}(\not{\phi} - \not{k}) + (a + p_1 - k)^\mu \left[ \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \not{k}(\not{k} - \not{\phi} - m_i)(k - p_1 - a) \cdot (k - p_2 - a) \right] \right] \right. \\
& - 2(V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ (a + p_1 - k)^\mu \left[ \right. \right. \\
& - \left. \left. \left. \not{k} \left[ 2\not{k}(\not{k} - \not{\phi} - m_i)(k - p_1 - a) \cdot (k - p_2 - a) \right] \right] \right] (\not{k} - \not{\phi} - m_i) \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_2 = & [(k + p_2)^2 - m^2][(k + p_1)^2 - m^2] \left[ (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ + 4mm_w^2 + m^2(\not{k} - \not{\phi})^2 \right. \right. \\
& + 2m(k + p_1) \left( (\not{k} - \not{\phi})^2 - 4m_w^2 \right) + 4mm_w^2 p_2^\mu + 2m \left( (k + p_2) \cdot (k - a) \right) \gamma^\mu (\not{k} - \not{\phi}) \\
& + 2mm_w^2 \gamma^\mu \not{k} + 2 \left( (k + p_2) \cdot (k - a) \right) \not{k} (\not{k} - \not{\phi}) - \not{k} (\not{k} + m_i) [2m_w^2 + (\not{k} - \not{\phi})^2] \left. \right] \\
& - m_j (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \\
& \times \left[ (\not{k} + m_i)(2m_w^2 + (\not{k} - \not{\phi})^2) - 2[(k + p_1) \cdot (k - a)](\not{k} - \not{\phi}) + 2mm_w^2 \gamma^\mu \right] \\
& + m_j (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \\
& \times \left[ 2m_w^2 + mm_w^2 + 2(k + p_1)^\mu [4m_w^2 - (\not{k} - \not{\phi})^2] - 2m_w^2 [2p_1^\mu + (\not{k}) \gamma^\mu] \right] \\
& + (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ m(\not{k} + m_i)[(\not{k} - \not{\phi})^2 - 4m_w^2] \right. \\
& + 2m_w^2 \left[ m_i + 2[k \cdot (p_1 + p_2)] \right] \gamma^\mu - 4m_w^2 (p_1 + p_2)^\mu \not{k} - 4m_w^2 m p_2^\mu - 2m_i m_w^2 \gamma^\mu \not{k} \\
& + \left( (k + p_2) \cdot (k - a) \right) \left[ p_1 \cdot (k - a) \gamma^\mu - 2(m_i + 2p_1^\mu) \gamma^\mu (\not{k} - \not{\phi}) \right] \\
& + \not{k} \left[ 2m_w^2 + mm_w^2 + 2(k + p_1)^\mu [4m_w^2 - (\not{k} - \not{\phi})^2] \right. \\
& - m(\not{k} - \not{\phi})^2 - 2[(k + p_2)^\mu \cdot (k - a)](\not{k} - \not{\phi}) - 2m_w^2 \gamma^\mu \not{k} \left. \right] \\
& - 2 \left[ m(k + p_2) \cdot (k - a) + 2(k + p_1)^\mu \left( (k + p_2) \cdot (k - a) \right) \right] (\not{k} - \not{\phi}) \left. \right] \\
& + [(k + p_2)^2 - m^2] (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) b \cdot (k + p_1) \left[ \right. \\
& + 4m_w^2 [(\not{k} + m_i) \gamma^5 \gamma^\mu \not{k} - \gamma^5 (\not{k} + m_i) - 2m(\not{k} + m_i)] \\
& + 2\not{k} [4m_w^2 - (\not{k} - \not{\phi})^2] - 2mm_i \gamma^5 (\not{k} - \not{\phi})^2 + 4[(k + p_1) \cdot (k - a)] \gamma^5 (\not{k} - \not{\phi}) \\
& + 4(k + p_1)^\mu [2m_w^2 \gamma^5 \not{k} - 2(k + p_2) \cdot (k - a) \gamma^5 (\not{k} - \not{\phi}) - \not{k} ((\not{k} - \not{\phi})^2 - 4m_w^2 \gamma^5)] \left. \right] \\
& + [(k + p_2)^2 - m^2] (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ 8m_w^2 (k + p_1)^\mu \not{k} \right] \\
& + (V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ \gamma^5 \left[ 4m(k + p_2) \cdot (k - a) [(\not{k} - \not{\phi})^2 - 4m_w^2] \right] \right. \\
& + \not{k} \gamma^5 \left[ [8m(k + p_1)^\mu - 4m \not{k} \gamma^\mu] m_w^2 \right] \left. \right] \\
& + m_j [(k + p_1)^2 - m^2] (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ \not{k} \gamma^5 \left[ 4\gamma^\mu [p_1 \cdot (k - a) - m_i (\not{k} - \not{\phi})] \right] \right] \\
& + (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) 8mm_j m_w^2 \left[ - 2[k^2 + m_i^2 + 2k \cdot p_1] \gamma^\mu \right].
\end{aligned}$$

### A.4.3. Caso $a = 0$ y $b \neq 0$

Para el diagrama uno tenemos

$$\begin{aligned}
N_1 = & (k^2 - m_l^2 - b^2) \left[ (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5) (V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ (-k + p_1)^\mu \left[ 4m_w^2 [(k - p_2) \cdot (k + b\gamma^5)] \not{k} \right. \right. \right. \\
& + (\not{b}\gamma^5 - \not{k}) \left[ 2m_w^2 (2m_w^2 - m_j^2 - k^2 + 2k \cdot p_2) - m_w^2 \not{k} (\not{k} - m_i) \right. \\
& \left. \left. - 2m_w^2 (2k \cdot (p_2) - m_i^2 - m_i \not{k}) + \not{k} (\not{k} + m_i) (k - p_2)^2 \right] \right. \\
& + 2(\not{k} - m_i) \left[ \left( (k - p_2) \cdot (k - p_2) + m_w^2 \right) (p_2 \cdot (k + b\gamma^5)) \right. \\
& \left. \left. + (k - p_2) \cdot (k - p_2) - m_w^2 [(k - p_2) \cdot (k + b\gamma^5)] \right] \right] \\
& + (k - p_2)^\mu \left[ 2[(k - p_2) \cdot (k + b\gamma^5)] \left[ (\not{k} - m_i) [(k - p_1) \cdot (k + p_1 - 2p_2)] - m_w^2 (\not{k} + m_i) \right] \right. \\
& + (k - p_1) \cdot (k + p_1 - 2p_2) \left[ (\not{b}\gamma^5 - \not{k}) \not{k} + 2p_2 \cdot (b\gamma^5 + k) \right] (\not{k} - m_i) \\
& \left. + m_w^2 \left[ (\not{b}\gamma^5 - \not{k}) \left[ \not{k} (\not{k} + m_i) + 2m_j^2 - 4p_2 \cdot k \right] + 2p_2 \cdot (k + b\gamma^5) (m_i + 3\not{k}) \right] \right] \\
& + 2m_w^2 (b^\mu \gamma^5 + k^\mu) \left[ 2m_w^2 (\not{k} + m_i) - \left( (k - p_1) \cdot (k + p_1 - 2p_2) \right) (\not{k} - m_i) \right] \\
& + 2m_w^2 (\not{b}\gamma^5 - \not{k}) \left[ k^\mu \left( (k - p_1) \cdot (k + p_1 - 2p_2) \right) - m_w^2 p_1^\mu \right] \\
& + m_w^2 \left[ (\not{b}\gamma^5 - \not{k}) \left[ m_w^2 m_i + 2\not{k} - \left( (k - p_2) \cdot (k + p_2 - 2p_1) \right) \not{k} \right. \right. \\
& \left. \left. - \left( (k - p_1) \cdot (k + p_1 - 2p_2) \right) (\not{k} + m_i) \right] + 2m_w^2 \left( (k + b\gamma^5) \cdot (k - 2p_1 + 2p_2) \right) \right. \\
& \left. - 2 \left( (k - 2p_1 + p_2) \cdot (k - p_2) \right) \left( (k + b\gamma^5) \cdot k \right) \right] \gamma^\mu \\
& + m m_j (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5) (V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ - (p_1 - k)^\mu \left[ m_w^2 (\not{k} - m_i) \right. \right. \\
& + (\not{k} - m_i) \left[ \left( (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2) \right) + 2 \left( (k - p_1) \cdot (k + p_2) \right) \right] \\
& \left. \left. + \left( (k - p_1) \cdot (k + p_1 - 2p_2) \right) \left[ m_w^2 \left( m_w^2 + \left( (k - p_2) \cdot (k + p_2 - 2p_1) \right) \right) \right] \gamma^\mu \right. \right. \\
& \left. \left. - (\not{k} - m_i) \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + m(k^2 - m_l^2 - b^2) \left[ (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ (p_1 - k)^\mu \left[ \right. \right. \right. \\
& + 4m_w^2 \left( 1 - (2m_w^2 - k^2) + k \cdot (p_1 + p_2) \right) - m_w^4 \left( 4p_1 \cdot k + 2k m_i + \not{k}(\not{k} - m_i) + 2m_i^2 \right) \\
& + \left[ \left( (k - p_2) \cdot (k + p_2 - 2p_1) \right) + 2 \left( (k - p_1) \cdot (k - p_2) \right) \right] (\not{k})(\not{k} - m_i) \left. \right] \\
& + \left( (k - p_1) \cdot (k + p_1 - 2p_2) \right) \left[ m_w^2 \left( 2m_i m_w^2 + (\not{k} - m_i) - \left( (k - p_2) \cdot (k + p_2 - 2p_1) \right) \not{k} \right) \gamma^\mu \right. \\
& + m_w^4 (\not{k} - 4p_1^\mu) + (k - p_2)^\mu \not{k} (\not{k} - m_i) \left. \right] + m_j (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ - 8m_w^4 (b^\mu \gamma^5 + k^\mu) \right. \\
& - (p_1 - k)^\mu \left[ (\not{b} \gamma^5 + \not{k})(\not{k} - m_i) \left( m_w^2 + (k - p_2)^2 \right) \right. \\
& - (k - p_2)^\mu \left[ (\not{b} \gamma^5 + \not{k}) \left[ \left( (k - p_1) \cdot (k + p_1 - 2p_2) \right) (\not{k} - m_i) \right. \right. \\
& + m_w^2 (m_i + 3\not{k}) \left. \right] - 4m_w^2 (k - p_2) \cdot (k + b \gamma^5) \left. \right] \\
& + m_w^2 (\not{b} \gamma^5 + \not{k}) \left[ \left( (k - p_2) \cdot (k + p_2 - 2p_1) \right) - m_w^2 \right] \gamma^\mu \left. \right] \\
& - 2mm_j (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ (p_1 - k)^\mu \left[ 4m_w^2 \gamma^5 [\not{b} k \cdot (k - p_2) - \not{k} b \cdot (k - p_2)] \right. \right. \\
& + \left[ m_w^2 - (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2) \right] (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 \\
& - 2(k - p_1) \cdot (k - p_2) (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 (\not{k} + \not{b} \gamma^5) \left. \right] (\not{k} - m_i) \\
& + (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 [m_w^2 + (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2)] \gamma^\mu \\
& + (k - p_1) \cdot (k + p_1 - 2p_2) [(k - p_2)^\mu (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5] (\not{k} - m_i) \left. \right] \\
& - 2m_j (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ 4\gamma^5 m_w^2 (\not{b} k^\mu - \not{k} b^\mu) + 2m_w^2 (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 \gamma^\mu \right. \\
& + (k - p_1) \cdot (k + p_1 - 2p_2) (k - p_2)^\mu (\not{k} + \not{b} \not{k}) (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 (\not{k} - m_i) \\
& - (\not{b} \not{k} + \not{k}) (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 [m_w^2 + (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2)] \gamma^\mu \\
& + 2m_w^2 (\not{k} + \not{b} \not{k}) (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 \gamma^\mu - 4m_w^4 k^\mu (k \cdot b \gamma^5 + b^2) - 4m_w^4 b^\mu (k \cdot b \gamma^5 + k^2) \\
& + (k - p_2)^\mu \left[ 2(\not{b} \not{k} - \not{k}) \not{k} + 4m_w^2 (k \cdot b \gamma^5 + b^2) k \cdot (k - p_2) \right. \\
& + 4m_w^2 (k \cdot b \gamma^5 + k^2) \gamma^5 b \cdot (k - p_2) - (\not{k} - \not{b} \not{k}) (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 (\not{k} + m_i) \\
& + 4\not{b} \gamma^5 k \cdot (k - p_2) - 4\not{k} \gamma^5 b \cdot (k - p_2) - (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 (3\not{k} + m_i) \left. \right] \\
& + (p_1 - k)^\mu \left[ (\not{k} + \not{b} \not{k}) (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 \left[ (\not{k} m_i) [1 + (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2)] \right. \right. \\
& + (\not{b} \gamma^5 + \not{k})(\not{k} - m_i)(k - p_1) \cdot (k - p_2) \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 4m_w^2 \not{k} [k \cdot b \gamma^5 [(k - p_2) \cdot (b \gamma^5 - k)] + k^2 \gamma^5 b \cdot (k - p_2) - b^2 k \cdot (k - p_2)] \Big] \\
& - 2(V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ (p_1 - k)^\mu \left[ 4m_w^4 [\not{b} \gamma^5 k^2 - \not{k} b^2 + k \cdot b \gamma^5 (\not{b} \gamma^5 - \not{k})] \right. \right. \\
& + 4m_w^2 (\not{k} - \not{a}) [k \cdot b \gamma^5 [(k - p_2) \cdot (b \gamma^5 - k)] + k^2 \gamma^5 b \cdot (k - p_2) - b^2 k \cdot (k - p_2)] \\
& - 2(\not{k} - m_i) \left[ m_w^2 [k \cdot (k + p_2 - 2p_1)(k \cdot b \gamma^5 + b^2) - b \cdot (k + p_2 - 2p_1)(k \cdot b \gamma^5 + k^2)] \right. \\
& + (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2) [b \cdot (k - p_2)(k \cdot b \gamma^5 + k^2) - k \cdot (k - p_2)(k \cdot b \gamma^5 + b^2)] \\
& + 2(k \cdot b \gamma^5 + b^2) [k \cdot (k - p_2) [(k - p_1) \cdot (k - p_2)] - m_w^2 k \cdot (k - p_1)] \\
& \left. \left. + 2(k \cdot b \gamma^5 + k^2) \gamma^5 [b \cdot (k - p_2) [(k - p_1) \cdot (k - p_2)] - m_w^2 b \cdot (k - p_1)] \right] \right] \\
& + (\not{b} \not{k} - \not{k}) \left[ (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 \left[ - \not{k} (\not{k} - m_i) [(k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2) - m_w^2] \right. \right. \\
& - 4m_w^2 + (\not{k} - \not{p}_2)^2 + 2m_i^2 m_w^2 + 4m_w^2 p_1 \cdot (a - k) \\
& + 2m_w^2 m_i \not{k} + (\not{b} \gamma^5 - \not{k}) [2m_w^2 (\not{k} - \not{p}_1)^2 - 2\not{k} (\not{k} - m_i) (k - p_1) \cdot (k - p_2) \\
& \left. \left. - 4(b \cdot p_2 \gamma^5 + k \cdot p_2) (\not{k} - m_i) (k - p_1) \cdot (k - p_2) \right] \right] \\
& + (\not{k} b \cdot p_2 - \not{b} k \cdot p_2) \gamma^5 \left[ 4(\not{b} \gamma^5 - \not{k}) (\not{k} - m_i) (k - p_1) \cdot (k - p_2) \right. \\
& \left. - (\not{k} - m_i) [1 + (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2)] \right] \Big] \\
& - 2(\not{b} k \cdot p_2 - \not{k} b \cdot p_2 - k \cdot p_2) (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 [(\not{k} - m_i) [1 + (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2)] \\
& + 2(\not{b} \gamma^5 + \not{k}) (\not{k} - m_i) (k - p_1) \cdot (k - p_2)] \Big] \\
& - 2(\not{b} k \cdot p_2 - \not{k} b \cdot p_2 - k \cdot p_2) (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 [(k - p_2)^\mu (-\not{k} + m_i) \\
& - (m_w^2 + (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2)) \gamma^\mu] \\
& - (\not{b} \not{k} - \not{k}) (\not{k} b \cdot p_2 - \not{b} k \cdot p_2) \gamma^5 [2(k - p_2)^\mu (-\not{k} + m_i) + (3m_w^2 - (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2)) \gamma^\mu] \\
& - (\not{b} \not{k} - \not{k}) (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 \left[ 2m_w^2 m_i - 4m_w^2 (p_1 + p_2)^\mu + m_w^2 \gamma^\mu (\not{k} + m_i) \right. \\
& \left. + [m_w^2 - (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2)] \not{k} \gamma^\mu + (k - p_2)^\mu [2m_w^2 - 4p_2 \cdot k + \not{k} (\not{k} + m_i)] \right] \\
& + 2m_w^2 \left[ (k \cdot b \gamma^5 + k^2) \gamma^5 [m_w^2 b \cdot (k - a + p_2 - 2p_1) - b \cdot (k - p_2) [(k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2)]] \right. \\
& \left. - (k \cdot b \gamma^5 + b^2) [m_w^2 k \cdot (k + p_2 - 2p_1) - k \cdot (k - p_2) [(k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2)]] \right] \gamma^\mu \\
& + [(k - p_1) \cdot (k + p_1 - 2p_2)] \left[ (k - p_2)^\mu \left[ 2(k \cdot b \gamma^5 + k^2) b \cdot (k - p_2) \right. \right. \\
& \left. \left. - 2(k \cdot b \gamma^5 + b^2) k \cdot (k - p_2) - 2(\not{b} k \cdot p_2 - \not{k} b \cdot p_2 - k \cdot p_2) (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 \right. \right. \\
& \left. \left. + (\not{b} \not{k} - \not{k}) [2\not{b} k \cdot p_2 + \not{k} \not{b} - k \cdot b - 2\not{k} b \cdot p_2] \not{k} \gamma^5 \right] \right]
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + m_w^2 \left[ 2(k \cdot b \gamma^5 + b^2) k^\mu - 2(k \cdot b \gamma^5 + k^2) b^\mu + (\not{k} \not{k} - \not{k})(\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 \gamma^\mu \right] (\not{k} - m_i) \\
& - 2m_w^2 (\not{k} + m_i) \left[ (k \cdot b \gamma^5 + b^2) [m_w^2 k^\mu - (k - p_2)^\mu k \cdot (k - p_2)] \right. \\
& \left. + (k \cdot b \gamma^5 + k^2) \gamma^5 [m_w^2 b^\mu - (k - p_2)^\mu b \cdot (k - p_2)] \right] \\
& - 2m(V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ (-k + p_1)^\mu \left[ 2 \left[ 2m_w^2 \gamma^5 [\not{k} k \cdot (k - p_1) - \not{k} b \cdot (k - p_1)] \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + 2(k - p_1) \cdot (k - p_2) \gamma^5 [\not{k} b \cdot (k - p_2) - \not{b} k \cdot (k - p_2)] \right] \right. \\
& \left. + (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2) [\not{k} k \cdot (k - p_2) - \not{b} k \cdot (k - p_2)] \gamma^5 \right] (\not{k} - m_i) \\
& - 4(k - p_1) \cdot (k - p_2) (\not{k} b \cdot p_2 - \not{b} k \cdot p_2) \gamma^5 (\not{b} \gamma^5 + \not{k})(\not{k} - m_i) \\
& + 8m_w^4 k \cdot b \gamma^5 + 4m_w^2 [\not{b} k \cdot (k - p_2) - \not{k} b \cdot (k - p_2)] \gamma^5 (\not{k} - \not{a}) \\
& + 8m_w^2 \gamma^5 [k \cdot (k - p_2)(b \cdot p_2) - k \cdot (k - p_2)(k \cdot p_2)] \\
& - 2(\not{k} b \cdot p_2 - \not{b} k \cdot p_2) \gamma^5 (\not{k} - m_i) [(k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2) - m_w^2] \\
& + (\not{k} \not{b} - b \cdot k) \gamma^5 \left[ 2m_w^2 (\not{b} \gamma^5 - \not{k})(\not{k} - \not{p}_1)^2 + 4m_w^2 - (\not{k} - \not{p}_2)^2 \right. \\
& \left. - 2(k - p_1) \cdot (k - p_2) [(\not{b} \gamma^5 - \not{k}) \not{k} + (b \cdot p_2 \gamma^5 + k \cdot p_2)] (\not{k} - m_i) \right] \\
& + m_w^2 [2m_i^2 + 4p_1 \cdot (a - k) + 2\not{k} m_i] + \not{k} (\not{k} - m_i) [m_w^2 + (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2)] \left. \right] \\
& + (k - p_1) \cdot (k + p_1 - 2p_2) \left[ m_w^2 [2(k^\mu \not{b} + b^\mu \not{k}) - \not{k} \not{b} + k \cdot b] \gamma^5 (\not{k} - m_i) \right. \\
& + (k - p_2)^\mu \left[ 2(\not{k} b \cdot p_2 - \not{b} k \cdot p_2) + (\not{k} \not{b} - k \cdot b)(\not{k}) \right. \\
& \left. + 2\not{b} k \cdot (k - p_2) - 2\not{k} b \cdot (k - p_2) \right] \gamma^5 (\not{k} - m_i) \left. \right] \\
& + (\not{k} b \cdot p_2 - \not{b} k \cdot p_2) \gamma^5 \left[ (k - p_2 - a)^\mu (m_i - 6\not{k}) + 2[m_w^2 - (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2)] \gamma^\mu \right] \\
& + (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 \left[ 4m_w^2 (p_1 + p_2)^\mu - m_w^2 \gamma^\mu (\not{k} + 3m_i) - m_w^2 \not{k} \gamma^\mu \right. \\
& + \not{k} (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2) \gamma^\mu - (k - p_2)^\mu [2m_j^2 + \not{k} (\not{k} + m_i) \\
& \left. + 4p_2 \cdot k] \right] + 8m_w^2 b \cdot p_2 \gamma^5 [m_w^2 k^\mu - (k - p_2)^\mu k \cdot (k - p_2)] \\
& + 2m_w^2 \not{b} \gamma^5 \gamma^\mu \left[ m_w^2 k \cdot (k + p_2 - 2p_1) - (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2) [k \cdot (k - p_2)] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2m_w^2 \not{k} \gamma^5 \gamma^\mu \left[ m_w^2 b \cdot (k + p_2 - 2p_1) - (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2) k \cdot (k - p_2) \right] \\
& + 8m_w^2 k \cdot p_2 \gamma^5 [m_w^2 b^\mu - (k - p_2)^\mu b \cdot (k - p_2)] + 2m_w^2 \gamma^\mu \left[ \not{k} [m_w^2 b^\mu - (k - p_2)^\mu b \cdot (k - p_2)] \right. \\
& \left. - \not{b} [m_w^2 k^\mu - (k - p_2)^\mu k \cdot (k - p_2)] \right] (\not{k} + m_i) \\
& - 2mm_j (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5) (V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ (p_1 - k)^\mu \left[ 4m_w^2 \gamma^5 [\not{b} k \cdot (k - p_2) - \not{k} b \cdot (k - p_2)] \right. \right. \\
& \left. \left. + [m_w^2 - (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2)] (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 \right. \right. \\
& \left. \left. - 2(k - p_1) \cdot (k - p_2) (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 (\not{k} + \not{b} \gamma^5) \right] (\not{k} - m_i) \right] \\
& + (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 [m_w^2 + (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2)] \gamma^\mu \\
& + (k - p_1) \cdot (k + p_1 - 2p_2) [(k - p_2)^\mu (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5] (\not{k} - m_i) \\
& - 2m_j (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5) (V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ 4\gamma^5 m_w^2 (\not{b} k^\mu - \not{k} b^\mu) + 2m_w^2 (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 \gamma^\mu \right. \\
& \left. + (k - p_1) \cdot (k + p_1 - 2p_2) (k - p_2)^\mu (\not{k} + \not{b} \not{k}) (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 (\not{k} - m_i) \right. \\
& \left. - (\not{b} \not{k} + \not{k}) (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 [m_w^2 + (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2)] \gamma^\mu \right. \\
& \left. + 2m_w^2 (\not{k} + \not{b} \not{k}) (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 \gamma^\mu - 4m_w^4 k^\mu (k \cdot b \gamma^5 + b^2) - 4m_w^4 b^\mu (k \cdot b \gamma^5 + k^2) \right. \\
& \left. + (k - p_2)^\mu \left[ 2(\not{b} \not{k} - \not{k}) \not{k} + 4m_w^2 (k \cdot b \gamma^5 + b^2) k \cdot (k - p_2) \right. \right. \\
& \left. \left. + 4m_w^2 (k \cdot b \gamma^5 + k^2) \gamma^5 b \cdot (k - p_2) - (\not{k} - \not{b} \not{k}) (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 (\not{k} + m_i) \right. \right. \\
& \left. \left. + 4\not{b} \gamma^5 k \cdot (k - p_2) - 4\not{k} \gamma^5 b \cdot (k - p_2) - (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 (3\not{k} + m_i) \right] \right. \\
& \left. + (p_1 - k)^\mu \left[ (\not{k} + \not{b} \not{k}) (\not{k} \not{b} - k \cdot b) \gamma^5 \left[ (\not{k} - m_i) [1 + (k + p_2 - 2p_1) \cdot (k - p_2)] \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + (\not{b} \gamma^5 + \not{k}) (\not{k} - m_i) (k - p_1) \cdot (k - p_2) \right] \right. \\
& \left. \left. - 4m_w^2 \not{k} [k \cdot b \gamma^5 [(k - p_2) \cdot (b \gamma^5 - k)] + k^2 \gamma^5 b \cdot (k - p_2) - b^2 k \cdot (k - p_2)] \right] \right].
\end{aligned}$$

Para el diagrama dos tenemos:

$$\begin{aligned}
N_2 = & [(k + p_2)^2 - b^2 - m^2][(k + p_1)^2 - b^2 - m^2] \left[ (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ \right. \right. \\
& + 4mm_w^2 + m^2(\not{k} - \not{a})^2 + 2m(k + p_1 + b\gamma^5)(k^2 - 4m_w^2) + 4mm_w^2 p_2^\mu \\
& + 2m \left( (k + p_2 + b\gamma^5) \cdot k \right) \gamma^\mu \not{k} + 2mm_w^2 \gamma^\mu (\not{k} - \not{b}\gamma^5) \\
& + 2 \left( (k + p_2 - b\gamma^5) \cdot k \right) (\not{k} - \not{b}\gamma^5) \not{k} - (\not{k} - \not{b}\gamma^5)(\not{k} + \not{b}\gamma^5 + m_i) [2m_w^2 + k^2] \left. \right] \\
& - m_j (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \\
& \times \left[ (\not{k} + \not{b}\gamma^5 + m_i)(2m_w^2 + k^2) - 2[(k + p_1 - b\gamma^5) \cdot k] \not{k} + 2mm_w^2 \gamma^\mu \right] \\
& + m_j (V_{cj}^\dagger + A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \\
& \times \left[ 2m_w^2 + mm_w^2 + 2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu [4m_w^2 - k^2] - 2m_w^2 [2p_1^\mu + (\not{k} + \not{b}\gamma^5) \gamma^\mu] \right] \\
& + (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ m(\not{k} + \not{b}\gamma^5 + m_i) [k^2 - 4m_w^2] \right. \\
& + 2m_w^2 \left[ m_i + 2[k \cdot (p_1 + p_2) + b \cdot (p_2 - p_1) \gamma^5] \right] \gamma^\mu - 4m_w^2 (p_1 + p_2)^\mu \not{k} \\
& - 4m_w^2 (p_1 - p_2)^\mu \not{b}\gamma^5 - 4m_w^2 m p_2^\mu - 2m_i m_w^2 \gamma^\mu (\not{k} - \not{b}\gamma^5) \\
& + \left( (k + p_2 + b\gamma^5) \cdot k \right) \left[ p_1 \cdot k \gamma^\mu - 2(m_i + 2p_1^\mu) \gamma^\mu \not{k} \right] \\
& + (\not{k} - \not{b}\gamma^5) \left[ 2m_w^2 + mm_w^2 + 2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu [4m_w^2 - k^2] \right. \\
& \left. - mk^2 - 2[(k + p_2 + b\gamma^5)^\mu \cdot k] \not{k} - 2m_w^2 \gamma^\mu (\not{k} - \not{b}\gamma^5) \right] \\
& \left. - 2 \left[ m(k + p_2 - b\gamma^5) \cdot k + 2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu \left( (k + p_2 - b\gamma^5) \cdot k \right) \right] \not{k} \right] \\
& + [(k + p_2)^2 - b^2 - m^2] (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) b \cdot (k + p_1) \left[ \right. \\
& + 4m_w^2 [(\not{k} + \not{p}_1 - \not{b}\gamma^5) \gamma^5 \gamma^\mu (\not{k} + \not{b}\gamma^5) - \gamma^5 (\not{k} - \not{b}\gamma^5 + m_i) - 2m(\not{k} + \not{b}\gamma^5 + m_i)] \\
& + 2(\not{k} - \not{b}\gamma^5) [4m_w^2 - k^2] - 2mm_i \gamma^5 k^2 + 4[(k + p_1 - b\gamma^5) \cdot k] \gamma^5 \not{k} \\
& + 4(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu [2m_w^2 \gamma^5 (\not{k} + \not{b}\gamma^5) - 2(k + p_2 + b\gamma^5) \cdot k \gamma^5 \not{k} \\
& \left. - (\not{k} - \not{b}\gamma^5)(k^2 - 4m_w^2 \gamma^5) \right] \\
& + [(k + p_2)^2 - b^2 - m^2] (V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5)(V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) b \cdot (k + p_1) \left[ \right. \\
& + 2\gamma^5 [k^2 - 2mm_w^2 \gamma^\mu (\not{k} + \not{b}\gamma^5)] - 8nm_w^2 (p_2^\mu \gamma^5 + m) \\
& - 4m_w^2 (\not{k} + \not{b}\gamma^5) \gamma^5 (\not{k} - \not{b}\gamma^5 + m_i) + 4(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu [k^2 \gamma^5 - 4m_w^2] \\
& + 2(\not{k} + \not{b}\gamma^5) [(m_i - \not{k} - \not{b}\gamma^5) \gamma^5 k^2 + 4m_w^2 (\not{k} + \not{b}\gamma^5 + m_i) \\
& \left. - 2(k + p_1 - b\gamma^5) \cdot k \gamma^5 \not{k}] + 4[(k + p_2 + b\gamma^5) \cdot k] (\not{k} - \not{b}\gamma^5 - m \gamma^\mu) \gamma^5 \not{k} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + m_j[(k + p_2)^2 - b^2 - m^2](V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5) b \cdot (k + p_1) \left[ (V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ \right. \right. \\
& + 8m_w^2(m + (k + p_1 - b\gamma^5)^\mu) + 4(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu k^2 \gamma^5 \left. \left. \right] \right. \\
& - (V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ 2\gamma^5 [2m_w^2(m\gamma^\mu + \not{k} - \not{b}\gamma^5 + m_i) - 2[(k + p_1 - b\gamma^5) \cdot k] \not{k} \right. \\
& + k^2(m_i - m)] + 2(\not{k} + \not{b}\gamma^5) \gamma^5 k^2 \left. \left. \right] \right] \\
& + m_j[(k + p_2)^2 - b^2 - m^2](V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5) \left[ (V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ 4m_w^2(\not{k} + \not{b}\gamma^5) \gamma^\mu (\not{k} \not{b} \gamma^5 + 2b \cdot p_1 \gamma^5) \right. \right. \\
& - 4m_w^2 \gamma^\mu (2k \cdot p_1 \not{b} - 2b \cdot p_1 \not{k} - \not{k} \not{b} m_i) \gamma^5 + 8m_w^2 b \cdot p_1 (2p_1^\mu \gamma^5 + \gamma^\mu m_i) \\
& + 8m_w^2 (k + p_1 + b\gamma^5)^\mu [2(2b \cdot p_1 - b\gamma^5 m_i) \gamma^5 + 2\not{k} \not{b} \gamma^5 - \not{b} \gamma^5 (\not{k} + m_i)] \\
& + 2\not{k} [2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu - m] [(2b \cdot p_1 - \not{b} m_i - \not{k} \not{b}) \gamma^5 \not{k} + 2p_1 \cdot k \not{b} \gamma^5] + 8m_w^2 \not{k} \not{b} \gamma^5 (m + p_1^\mu) \left. \left. \right] \right. \\
& + (V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ 8m_w^2 (2\gamma^5 - 1) (b \cdot p_1 \not{k} - k \cdot p_1 \not{b}) + 4m_w^2 \gamma^\mu \gamma^5 (m \not{k} \not{b} - 2b \cdot p_2) \right. \\
& + 4[(2b \cdot p_1 - \not{b} m_i) \gamma^5 \not{k} + 2p_1 \cdot k \not{b} \gamma^5] k \cdot (k - b\gamma^5) \\
& + 4\not{k} \not{b} \gamma^5 [8m_i m_w^2 + \not{k} k \cdot (k - b\gamma^5) - m_w^2 (\not{k} - \not{b}\gamma^5 + m_i)] \\
& + 4m_w^2 (\not{k} + \not{b}\gamma^5) [\not{k} \not{b} (2 - \gamma^5) - \not{b} \gamma^5 (\not{k} + m_i) - (2k \cdot p_1 + m_i^2) \gamma^5 \not{b} - (2b \cdot p_1 + \not{b} m_i) \gamma^5 (\not{k} + 1)] \\
& + 4m_i m_w^2 (-b^2 + (m_i \gamma^5 + \not{k}) \not{b}) \left. \left. \right] \right] \\
& + [(k + p_2)^2 - b^2 - m^2](V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5) \left[ (V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ 4mp_1 \cdot k [(2b \cdot p_1 - \not{b} m_i) \gamma^5 \not{k} \right. \right. \\
& + 2p_1 \cdot k \not{b} \gamma^5] - 4mm_w^2 [(b \cdot p_1) \gamma^5 (5(\not{k} + \not{b}\gamma^5) + 3m_i) + 2k \cdot p_1 \not{b} \gamma^5 \\
& + 2\not{b} \gamma^5 (k^2 + m_i^2) - 2b^2 m_i - b^2 + 2\not{b} \not{k} \not{b}] + 8m_w^2 m_i^2 \not{b} \gamma^5 + 4\not{k} \not{b} \gamma^5 [m_w^2 (\not{k} - \not{b}\gamma^5 + m_i) + mp_1 \cdot k \not{k}] \\
& - 2m \not{k} [(2b \cdot p_1 - \not{b} m_i) \gamma^5 \not{k} + 2p_1 \cdot (k - a) \not{b} \gamma^5] (k^2 + m_i^2 + 2k \cdot p_1) \\
& + 2m(\not{k} + \not{b}\gamma^5) \left[ \not{k} [(\not{k} \not{b} \gamma^5 + 2b \cdot p_1 - \not{b} m_i) \not{k} + 2p_1 \cdot k \not{b} \gamma^5] - 4m_w^2 b \cdot (k - p_1) \gamma^5 \right] \\
& - 4m(k + p_1 - b\gamma^5) \cdot k \left[ [\not{k} \not{b} \gamma^5 + (2b \cdot p_1 - \not{b} m_i) \gamma^5] \not{k} + 2p_1 \cdot k \not{b} \gamma^5 \right] \\
& - 4(k + p_2 + b\gamma^5) \cdot k \left[ [2p_1^\mu \not{k} + \gamma^\mu (2p_1 \cdot k + m_i^2)] \not{b} \not{k} \right. \\
& + (2p_1^\mu + \gamma^\mu \not{k}) [(2b \cdot p_1 - \not{b} m_i) \gamma^5 \not{k} - 2p_1 \cdot k \not{b} \gamma^5] \left. \right] \\
& - 2(\not{k} - \not{b}\gamma^5) \left[ (\not{k} \not{b} + 2b \cdot p_1 - \not{b} m_i) [m + (k + p_1 + b\gamma^5)] \gamma^5 \not{k} \right. \\
& + 2p_1 \cdot k \not{b} \gamma^5 [m + 2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu] \left. \right] \\
& + 8m_w^2 p_2^\mu \left[ 2m_i b \cdot p_1 (\gamma^5 + 1) - (\not{k} - \not{b}\gamma^5) \gamma^5 (\not{b} m_i + 2b \cdot p_1) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8m_w^2 p_1^\mu \left[ b^2 m_i + 2b \cdot p_2 \gamma^5 (\not{k} - m_i) - (\not{k} \not{b} + 2b \cdot p_1) \gamma^5 \not{k} \right. \\
& + \left. \not{b} \gamma^5 [\not{k} m_i - 2k \cdot (p_1 + p_2) - 2p_1 \cdot (p_2 + b \gamma^5)] \right] \\
& + 4m_w^2 \gamma^\mu \left[ 2b \cdot p_2 \gamma^5 [\not{k} (m_i + 1) + 2p_1 \cdot (p_2 - k) + m_i^2] \right. \\
& + [8m_i m_w^2 k \cdot p_2 - 2\not{k} (k \cdot (p_1 - p_2) - p_1 \cdot p_2 - b \cdot (p_1 + p_2) \gamma^5)] \not{b} \gamma^5 \\
& + [(m_i^2 - 2k \cdot p_1) \not{b} \gamma^5 - 2b \cdot p_1 \not{k}] (\not{k} + \not{b} \gamma^5) - 4b \cdot p_1 [p_2 \cdot (k + p_1 + b \gamma^5)] \gamma^5 \\
& + 4(k \cdot p_2) b \cdot p_1 \gamma^5 + \not{k} \not{b} \gamma^5 (\not{k} - \not{b} \gamma^5) m_i + 2(p_1 \cdot p_2) \not{b} \gamma^5 m_i \left. \right] \\
& + 8m_w^2 (k + p_1 + b \gamma^5)^\mu \left[ (\not{k} + \not{b} \gamma^5) [2(3k \cdot b - \not{b} \not{k}) \gamma^5 + 4b \cdot p_1 \gamma^5 + \not{b} \gamma^5 m_i] \right. \\
& + \left. \not{b} \gamma^5 [(\not{k} - \not{b} \gamma^5) m_i + 2k \cdot (p_1 + p_2) + 2p_1 \cdot (p_2 + b \gamma^5)] + \not{k} - \not{k} \not{b} \gamma^5 \not{k} - 2(\not{k} + m_i) b \cdot p_2 \gamma^5 \right] \\
& + (V_{ci} + A_{ci} \gamma^5) \left[ -8m m_w^2 p_2^\mu (2b \cdot p_1 \gamma^5 + \not{b} \gamma^5 m_i) + 16m_w^2 \not{k} \not{b} \gamma^5 p_2 \cdot (k + p_1 + b \gamma^5) \right. \\
& + 2(\not{k} - \not{a}) \left[ 2m(k + p_1 + b \gamma^5)^\mu [(\not{k} \not{b} + 2b \cdot p_1 - \not{b} m_i) \gamma^5 \not{k} + 2p_1 \cdot k \not{b} \gamma^5] \right. \\
& + \left. [m_w^2 \not{k} \not{b} + m^2 (2b \cdot p_1 - \not{b} m_i)] \gamma^5 \not{k} + 2m^2 p_1 \cdot k \not{b} \gamma^5 \right] \\
& - 4m[(k + p_2 + b \gamma^5) \cdot k] \gamma^\mu \left[ (\not{k} \not{b} + 2b \cdot p_1 - \not{b} m_i) \gamma^5 \not{k} + 2p_1 \cdot k \not{b} \gamma^5 \right] \\
& + 8(k + p_1 + b \gamma^5)^\mu \left[ (k + p_2 + b \gamma^5) \cdot k \left[ (\not{k} \not{b} + 2b \cdot p_1 - \not{b} m_i) \gamma^5 \not{k} - 2b \cdot p_1 p_1 \cdot k \not{b} \right] \right. \\
& + \left. m m_w^2 [\not{b} \gamma^5 (2m_i + \not{k}) - 6b \cdot p_1 \gamma^5 + 3\not{k} \gamma^5 \not{b}] \right] \\
& + 4m_w^2 \gamma^\mu \left[ m [(\not{k} \not{b} + 2b \cdot p_1) \gamma^5 (\not{k} + \not{b} \gamma^5) + 2\not{b} \gamma^5 (k \cdot (p_1 + p_2) + b \cdot p_1 \gamma^5 - 2(\not{k} - \not{b} \gamma^5) m_i)] \right. \\
& + \left. m b \cdot p_2 \gamma^5 \not{k} + m_w^2 [2p_1 \cdot p_2 \not{b} \gamma^5 + 2m m_i \gamma^5 - 4k \cdot p_1 b \cdot p_2 \gamma^5 + 2b \cdot p_2 (2p_1^\mu - m_i) \not{k} \gamma^5] \right] \\
& + 2(\not{k} - \not{b} \gamma^5) \left[ 2\not{k} \not{b} \gamma^5 \not{k} [k \cdot (k - b \gamma^5)] - (\not{k} + \not{b} \gamma^5) \not{k} \not{k} \not{b} \right. \\
& + 2[2(k + p_1 - b \gamma^5) \cdot k + (\not{k} + \not{b} \gamma^5) \not{k}] \not{b} \gamma^5 p_1 \cdot k \\
& + [2k \cdot (k - b \gamma^5) - (\not{k} + \not{b} \gamma^5) \not{k}] (2b \cdot p_1 - \not{b} m_i) \gamma^5 \not{k} \\
& - 4m_w^2 b \cdot p_1 \gamma^5 [\not{k} (2 - \gamma^5) - 2m_i] + 4m_w^2 b \cdot p_2 \gamma^\mu \gamma^5 (m_i - \not{k}) \\
& - 2m_w^2 \not{k} \not{b} \gamma^5 (\not{k} - \not{b} \gamma^5 + 2m_i) + 2m_w^2 \not{b} \gamma^5 [m_i (2\not{k} - \not{b} \gamma^5 - m_i) - 3p_1 \cdot (2k + b \gamma^5)] \\
& + 2(\not{k} + \not{b} \gamma^5) [-(2 - m_w^2) \not{k} \not{b} \gamma^5 + \not{b} \gamma^5 (m_i (1 - m_w^2) - m_w^2 \not{k}) + 2b \cdot p_1 \gamma^5] \left. \right] \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [(k + p_1)^2 - b^2 - m^2](V_{cj}^\dagger - A_{cj}^\dagger \gamma^5) \left[ (V_{ci} - A_{ci} \gamma^5) \left[ 2\cancel{k} \cancel{b} \gamma^5 \left[ 4p_2^\mu (\cancel{k} - \cancel{b} \gamma^5 + m_i) \right. \right. \right. \\
& + 4p_1^\mu (\cancel{k} - \cancel{a}) [k \cdot (k + p_2 + b\gamma^5)] + 2[2p_1^\mu + (\cancel{k} - \cancel{b} \gamma^5) \gamma^\mu - 4m_w^2 (k + p_1 + b\gamma^5)^\mu] (\cancel{k} + \cancel{b} \gamma^5) \\
& + \gamma^\mu [m^2 (4m_w^2 + k^2) - 2m_i (\cancel{b} \gamma^5 - \cancel{k}) - 4p_1 \cdot (k + b\gamma^5) - 4p_2 \cdot (k + p_1 + b\gamma^5) \\
& \left. \left. \left. - 2(2p_1 \cdot k - \cancel{k} m_i) k \cdot (k + p_2 + b\gamma^5) \right] \right] \right] \\
& + 2(\cancel{k} - \cancel{b} \gamma^5) \left[ \gamma^5 \gamma^\mu \left[ b \cdot (k + p_2) [2(\cancel{k} + \cancel{b} \gamma^5) - 2\cancel{k} k \cdot (k + p_2 + b\gamma^5) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - 2m^2 (\cancel{k} - \cancel{b} \gamma^5 + m_i) \right] + 2m_w^2 (2mb \cdot p_2 - m_j^2 \cancel{b}) \right] \\
& + \gamma^5 \left[ b \cdot (k + p_2) \left[ k^2 - 4m_w^2 [2p_1^\mu + (\cancel{k} + \cancel{b} \gamma^5 - m_i) \gamma^\mu - 2(k + p_1 + b\gamma^5)] \right] \right] \\
& - 2\cancel{b} \cancel{k} \left[ (2p_1^\mu + \gamma^\mu m_i) 2\cancel{k} + 4m_w^2 p_2^\mu - 2m_w^2 \cancel{k} (k + p_2 + b\gamma^5)^\mu - 2\gamma^\mu p_1 \cdot k + (\cancel{k} - \cancel{b} \gamma^5) \gamma^\mu \cancel{k} \right. \\
& \left. + [2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu + (\cancel{k} - \cancel{b} \gamma^5) \gamma^\mu] \cancel{k} k \cdot (k + p_2) \right] \\
& + \cancel{k} \gamma^5 \left[ 2\gamma^\mu (2b \cdot p_1 + \cancel{b} m_i + b \cdot k \cancel{k} m_i) + 4b \cdot k [\cancel{k} p_1^\mu - \gamma^\mu p_1 \cdot (k - a)] \right. \\
& \left. + 4(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu [b \cdot (k - a) (\cancel{k} - \cancel{a}) - m_w^2 \cancel{b}] \right] \\
& + 2\cancel{k} \cancel{b} \gamma^5 \left[ 2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu [(\cancel{k} - \cancel{a})^2 - 2m_w^2] - [4m_w^2 + k^2] ((\cancel{k} + \cancel{b} \gamma^5 + m_i) \gamma^\mu - 2p_1^\mu) \right. \\
& \left. + 2m_w^2 \gamma^\mu (\cancel{k} - \cancel{b} \gamma^5 + m_i) \right] + 2\cancel{k} \cancel{b} (\cancel{k} - \cancel{b} \gamma^5) \gamma^\mu \cancel{k} b \cdot k \\
& + \cancel{b} \gamma^5 \gamma^\mu \left[ 4(\cancel{k} - \cancel{a}) [(2 + m_j^2) k \cdot (k + p_1 - b\gamma^5) - m^2 k \cdot (k + p_2)] \right. \\
& \left. - mm_w^2 m_j^2 - 4m^2 \cancel{k} + 4m_w^2 (\cancel{k} - \cancel{b} \gamma^5 + m_i) (2p_2 \cdot (k + b\gamma^5) - m_j^2) - 8mm_w^2 p_2 \cdot (k + b\gamma^5) \right] \\
& + 4m^2 \cancel{k} \gamma^5 \gamma^\mu [\cancel{k} b \cdot k + m_w^2 \cancel{b}] \\
& + \cancel{b} \gamma^5 \left[ 8m_w^2 [(\cancel{k} - \cancel{b} \gamma^5 + m_i) p_2^\mu - p_1 \cdot p_2 \gamma^\mu] + 4m_j^2 [(\cancel{k} + \cancel{b} \gamma^5 - m_i) \gamma^\mu - 2p_1^\mu] \right. \\
& + (k + p_1 + b\gamma^5) [8p_2 \cdot (k + b\gamma^5) (k^2 - 6m_w^2) + 4m_j^2 (2m_w^2 + k^2)] \\
& \left. - 2[4m_w^2 - k^2] [(2p_2 \cdot (k + b\gamma^5) + m_j^2) (2p_1^\mu + (\cancel{k} + \cancel{b} \gamma^5 - m_i) \gamma^\mu)] \right] \\
& + \gamma^5 \left[ 8p_2 \cdot (k + b\gamma^5) \left[ (m_i - m^2 (\cancel{k} - \cancel{b} \gamma^5)) \gamma^\mu \cancel{b} - 2p_1^\mu \cancel{b} + 2\gamma^\mu b \cdot p_1 \right. \right. \\
& \left. \left. + b \cdot k [-2\gamma^\mu p_1 \cdot k + [2p_1^\mu + (\cancel{k} - \cancel{b} \gamma^5 + m_i) \gamma^\mu + 2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu] \cancel{k}] \right] \right. \\
& \left. - 8m_w^2 b \cdot p_2 (2p_1^\mu - \gamma^\mu m_i + \cancel{k} + \cancel{b} \gamma^5) + m_j^2 \cancel{k} (k + p_1 + b\gamma^5)^\mu b \cdot k \right. \\
& \left. - 4m_j^2 [2p_1^\mu \cancel{b} - \gamma^\mu (b \cdot p_1 + \cancel{b} m_i)] \right. \\
& \left. - 2b \cdot (k + p_2) \left[ 4(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu [m_w^2 (\cancel{k} + \cancel{b} \gamma^5) - \gamma^\mu] + 4p_2^\mu (\cancel{k} - \cancel{b} \gamma^5 + m_i) \right. \right. \\
& \left. \left. + 8p_1^\mu [\cancel{k} k \cdot (k + p_2 + b\gamma^5) + \cancel{k} - \cancel{b} \gamma^5] - \gamma^\mu [m^2 [4m_w^2 + k^2] \right. \right. \\
& \left. \left. + 2[2k \cdot p_1 + 2b \cdot p_1 \gamma^5 - (\cancel{k} + \cancel{b} \gamma^5) m_i] + 2[2p_1 \cdot k - \cancel{k} m_i] k \cdot (k + p_2 + b\gamma^5) \right] \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (V_{ci} + A_{ci}\gamma^5) \left[ \gamma^5 \left[ 4m(k + p_2 + b\gamma^5) \cdot k [k^2 - 4m_w^2] \right. \right. \\
& - 2b \cdot (k + p_2) [k^2 - 4m_w^2] [(\not{k} + \not{b}\gamma^5 - m_i)\gamma^\mu + 2mp_1^\mu] + 16mm_w^2 b \cdot p_2 (k + p_1 + b\gamma^5)^\mu \\
& - 8mb \cdot (k + p_2) p_2^\mu + 4m_j^2 b \cdot k [(2p_1^\mu - \gamma^\mu m_i)\not{k} - 2\gamma^\mu p_1 \cdot k] \left. \right] \\
& + \not{k}\not{b}\gamma^5 \left[ - 4m\gamma^\mu (\not{b}\gamma^5 - \not{a})^2 + 2\not{k} - 8mp_2^\mu - 4mm_w^2 \gamma^\mu (\not{k} - \not{b}\gamma^5 + m_i) \right. \\
& - 4m\gamma^\mu \not{k} [k \cdot (2k + p_1 + p_2)] + 2m(4m_w^2 + k^2) [(\not{k} + \not{b}\gamma^5 - m_i)\gamma^\mu + 2p_1^\mu + 2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu] \left. \right] \\
& + \not{k}\gamma^5 \left[ 8m(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu - 4m(\not{k} - \not{b}\gamma^5)\gamma^\mu [m_w^2 - m(\not{k} - \not{a})b \cdot k] \right. \\
& - 4mb \cdot k [2p_1^\mu \not{k} + \gamma^\mu (m_i - 2p_1 \cdot k)] + \gamma^5 \gamma^\mu [mb \cdot (k + p_2) [4(\not{k} + \not{b}\gamma^5) - m_w^2 (\not{k} - \not{b}\gamma^5 + m_i) \\
& + (\not{k} - \not{a}) [k \cdot (2k + 4p_2 - 2p_1 + 2b\gamma^5)]] - 4mb \cdot k \not{k} [2p_2 \cdot (k + b\gamma^5) + m_j] \\
& - 4mm_w^2 [2mb \cdot p_2 + \not{b}(m_j^2 + 2p_1 \cdot (k + b\gamma^5))] \left. \right] \\
& + \not{b}\gamma^5 \left[ 4m[2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu - (\not{k} - \not{b}\gamma^5)\gamma^\mu - 2p_1^\mu] \not{k} k \cdot (k + p_2) \right. \\
& + 2m\gamma^\mu [k \cdot (k + p_2)(2p_1 \cdot k - m_i \not{k}) - [4m_w^2 - k^2](m_j^2 + p_2 \cdot (k + b\gamma^5))] \\
& - 4m_w^2 (\not{k} + \not{b}\gamma^5)\gamma^\mu [m_j^2 + p_2 \cdot (k + b\gamma^5)] + 4m_w^2 (2p_1^\mu - \gamma^\mu m_i) [m_j^2 - p_2 \cdot (k + b\gamma^5)] \\
& - 4m \left[ m_w^2 [p_2^\mu + \not{k}(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu] - m_j^2 \gamma^\mu - (\not{k} - \not{b}\gamma^5)\gamma^\mu \not{k} - [2p_1^\mu \not{k} - \gamma^\mu (2k \cdot p_1 - \not{k}m_i)] \right] \left. \right] \\
& + (\not{k} - \not{b}\gamma^5) \left[ 8m_w^2 b \cdot p_2 \gamma^5 [(\not{k} + \not{b}\gamma^5 - m_i)\gamma^\mu + 2p_1^\mu] - 4mm_w^2 \not{k}\gamma^5 \gamma^\mu \not{b} \right. \\
& + \left. \left[ (m_j - m\not{k})\not{k} b \cdot k - m[4m_w^2 + k^2](\not{k}\not{b} + b \cdot (k + p_2)) \right] 2\gamma^5 \gamma^\mu \right. \\
& + \not{b}\gamma^5 [8m_w^2 \gamma^\mu (p_2 \cdot (k + p_1 + b\gamma^5)) + 4m\gamma^\mu \not{k} - 4m\not{k} k \cdot (k + p_2) \\
& - 8m_w^2 p_2^\mu (\not{k} - \not{b}\gamma^5 + m_i) - 4[(2p_1^\mu + \gamma^\mu m_i)\not{k} - 2p_1 \cdot k\gamma^\mu] k \cdot (k + p_2) \left. \right] \left. \right] \\
& + m_j [(k + p_1)^2 - b^2 - m^2] (V_{cj}^+ - A_{cj}^+ \gamma^5) \left[ (V_{c1} + A_{c1} \gamma^5) \left[ \not{b}\gamma^5 [4(\not{k} - \not{b}\gamma^5)\gamma^\mu (\not{k} + \not{b}\gamma^5) \right. \right. \\
& + 8\not{b}\gamma^5 p_2^\mu (\not{k} - \not{b}\gamma^5 + m_i) + 4m_w^2 [2\not{k}(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu + 2(p_2 + p_1)^\mu - \gamma^\mu m_i] \\
& + 4(\not{k} + \not{b}\gamma^5) [m_w^2 + 2p_1^\mu - 2mm_w^2 (k + p_1 + b\gamma^5)^\mu] \\
& - 4k \cdot (k + p_2) \left. \left[ [2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu + (\not{k} - \not{b}\gamma^5)\gamma^\mu - 4(2p_1^\mu - \gamma^\mu m_i)] \not{k} \right. \right. \\
& + 8p_1 \cdot k\gamma^\mu \left. \right] + k \cdot (k + p_2 + b\gamma^5) [8p_1 \cdot k\gamma^\mu + [8p_1^\mu + 4(\not{k} - \not{b}\gamma^5 - m_i)\gamma^\mu] \not{k} \\
& + 8\gamma^\mu [8p_1 \cdot (k - b\gamma^5) - (\not{k} - \not{b}\gamma^5)m_i + 4\not{k} - 2m^2(4m_w^2 + (\not{k} - \not{a})^2)] - p_2 \cdot (k + p_1 + b\gamma^5) \left. \right] \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\not{k} + \not{\psi}\gamma^5) \left[ 4\gamma^5\gamma^\mu [2b \cdot (p_2 - p_1) - \not{\psi}m_i + b \cdot k(2p_1 \cdot k - m_i\not{k}) \right. \\
& - 8\gamma^5 b \cdot k p_1^\mu \not{k} + 4\gamma^5 (\not{k} - \not{\psi}\gamma^5)\gamma^\mu [m_w^2 \not{\psi} - \not{k}b \cdot k] \\
& + 4\not{\psi}\gamma^5\gamma^\mu [mm_w^2(1 - \not{k} + \not{\psi}\gamma^5 - m_i) - \not{k}k \cdot (k + p_1 - b\gamma^5)] \\
& + 2[k^2 + 4m_w^2][\not{\psi}\gamma^5]\not{\psi}\gamma^5[2p_1^\mu + (\not{k} + \not{\psi}\gamma^5 - m_i)\gamma^\mu - b \cdot (k + p_2)\gamma^5\gamma^\mu] \\
& + \not{k}\not{\psi}\gamma^5 \left[ 4(k + p_1 + b\gamma^5)[4m_w^2 + k^2 + 4] - 2[4m_w^2 + k^2](2p_1^\mu + (\not{k} + \not{\psi}\gamma^5 - m_i)\gamma^\mu) \right. \\
& - 8(2p_1^\mu - \gamma^\mu m_i) - (\not{k} + \not{\psi}\gamma^5)\gamma^\mu + 4m_w^2\gamma^\mu(\not{k} - \not{\psi}\gamma^5 + m_i) + 4\gamma^\mu(\not{k} - \not{\psi})[k \cdot (k + p_1 - b\gamma^5)] \\
& + 4(\not{k} + \not{\psi}\gamma^5)(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu [\not{\psi}\gamma^5(4m_w^2 - k^2) - 2\gamma^5(\not{k} - \not{\psi})b \cdot k] \\
& + \not{k}\gamma^5 \left[ 8b \cdot k\not{k}[(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu + p_1^\mu] - 8p_1^\mu\not{\psi} + 4(\not{k} - \not{\psi}\gamma^5)\gamma^\mu [b \cdot k\not{k} - m_w^2\not{\psi}] \right. \\
& + 4\gamma^\mu [2b \cdot p_1 + \not{\psi}m_i + p_1 \cdot k - m_i\not{k}] \\
& + \gamma^5\gamma^\mu \left[ 2b \cdot (k + p_2)[\not{k}k \cdot (k + p_1 - b\gamma^5) - 2m_w^2(\not{k} - \not{\psi}\gamma^5 + m_i)] \right. \\
& + 4m_w^2[\not{k}b \cdot k + m(2b \cdot p_2 + \not{\psi})] \\
& + \gamma^5 \left[ 4(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu [b \cdot (k + p_2)(2m_w^2 - k^2) + 4m_w^2 b \cdot p_2] - 8b \cdot p_2(2p_1^\mu - \gamma^\mu m_i) \right. \\
& + 2b \cdot (k + p_2) \left[ 2(\not{k} + \not{\psi}\gamma^5 + m_i)\gamma^\mu - (2p_1^\mu - \gamma^\mu m_i)[4m_w^2 + k^2] \right] \left. \right] \\
& + (V_{ci} - A_{ci}\gamma^5) \left[ \not{\psi}\gamma^5 \left[ 2m[4m_w^2 + k^2](2p_1^\mu + (\not{k} + \not{\psi}\gamma^5 - m_i)\gamma^\mu) - 4mk^2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu \right. \right. \\
& + 4\gamma^\mu [2p_1 \cdot k - m(\not{k} + \not{\psi}\gamma^5) - m_i\not{k} + 2m_w^2(p_2 \cdot (k + p_1 + b\gamma^5) + m^2)] \\
& - 8mp_2^\mu - 8p_1^\mu\not{k} - 4m\gamma^\mu\not{k}[k \cdot (3k + 2p_2 + p_1) - m_w^2 b \cdot k] \\
& + \gamma^5 \left[ -4m \left[ m(\not{k} - \not{\psi}\gamma^5)\gamma^\mu (m_w^2\not{\psi} + \not{k}b \cdot k) + m_w^2[2p_1^\mu\not{\psi} - \gamma^\mu(2b \cdot p_1 - \not{\psi}m_i)] \right] \right. \\
& - 2b \cdot (k + p_2)\gamma^\mu [2 - 4m_w^2 - (\not{k} - \not{\psi})^2] - 8b \cdot p_2[2m_w^2 p_1^\mu + (m - m_w^2(\not{k} + \not{\psi}\gamma^5 + m_i)\gamma^\mu)] \\
& - 4mb \cdot k \left[ [(2p_1^\mu + \gamma^\mu m_i) - 2(k + p_1 + b\gamma^5)^\mu]\not{k} - 2\gamma^\mu p_1 \cdot k \right] \\
& + \not{k}\gamma^5 \left[ 2m\not{\psi}\gamma^\mu(4m_w^2 + k^2 - 2) + 4m\gamma^\mu[\not{k}b \cdot k - m\not{\psi}] \right. \\
& + (\not{k} + \not{\psi}\gamma^5) \left[ 4m\gamma^5\gamma^\mu[\not{k}b \cdot k - m_w^2\not{\psi}] \right. \\
& + 2\not{\psi}\gamma^5 \left( 2m_w^2((\not{k} + \not{\psi}\gamma^5)\gamma^\mu + 2p_1^\mu) + \gamma^\mu [m(4m_w^2 + k^2) - 2m_w^2 m_i] \right) \left. \right] \left. \right] \left. \right]
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + (V_{c_j}^+ - A_{c_j}^+ \gamma^5)(V_{c_1} - A_{c_1} \gamma^5) \left[ 8m_j \not{b} \left[ \gamma^\mu (2b \cdot p_2 (m_i - \not{k}) + (\not{k} \not{b} + 2b \cdot p_1)(\not{k} + \not{b} \gamma^5) \right. \right. \\
& + \not{b} [(\not{k} - \not{b} \gamma^5) m_i 2p_1 \cdot (k + b \gamma^5) - 2p_2 \cdot (k + p_1)] - (\not{k} + \not{b} \gamma^5) \\
& + m[k \cdot (k + p_2 + b \gamma^5)] [(\not{k} \not{b} + 2b \cdot p_1 + \not{b} m_i) \not{k} - 2p_1 \cdot k \not{b}] \\
& + 2m \not{b} [2p_1 \cdot k - \not{k} m_i] + m^2 (2b \cdot p_1 - \not{b} m_i) [4m_w^2 - k^2] + 4mb \cdot p_1 \not{k} \Big) \\
& - m^2 [4m_w^2 - k^2] (2p_1^\mu + \not{k} \gamma^\mu \not{b}) - 2mp_1^\mu \not{b} \not{k} \\
& + m[\not{k} \not{b} \gamma^5 \not{k} \gamma^\mu \not{b} - 2p_1^\mu b^2 \gamma^5 - \not{b} \gamma^5 \gamma^\mu (2b \cdot p_1 - \not{b} m_i)] - 2p_2^\mu \Big] \\
& + 16m_j \not{k} \left( m_w^2 \not{b} [2p_1^\mu \not{b} - \gamma^\mu (2b \cdot p_1 - \not{b} m_i) + \not{k} \gamma^\mu \not{b}] - m_w^2 b^2 [(\not{k} - m_i) \gamma^\mu + 2p_1^\mu] \right. \\
& + (k + p_1)^\mu b \cdot k [2p_1 \cdot k + (\not{k} - \not{b} \gamma^5 - m_i) \not{k}] \Big) \\
& + 8mm_j [(\not{k} \not{b} - b \cdot (k - p_2)) \gamma^\mu - 2\not{b} p_2^\mu] [2b \cdot p_1 + (m_i + \not{k}) \not{b}] \\
& - 8m_j \left( 2\not{b} [\not{k} \not{b} + 2b \cdot (p_2 - p_1)] \not{k} - 4b^2 [k \cdot (p_2 - p_1 + p_1 \cdot p_2)] \right. \\
& - [4m_w^2 - k^2] [\not{k} \not{b} (\not{k} - \not{b} \gamma^5) + 2b \cdot p_2 \not{k} - (m_i^2 - 2k \cdot p_2) \not{b}] [(2p_1^\mu + \not{k} \gamma^\mu) \not{b} - \gamma^\mu (2b \cdot p_1 - \not{b} m_i)] \Big) \\
& + 8mm_j m_w^2 \left[ 2[\not{b} (\not{k} - \not{b} \gamma^5) + \not{k} \not{b} + 2b \cdot p_2] [(2p_1^\mu + \not{k} \gamma^\mu) \not{b} - \gamma^\mu (2b \cdot p_1 - \not{b} m_i)] \right. \\
& - (2\not{k} + \not{b} \gamma^5) \not{b} \gamma^\mu \not{k} (\not{k} + m_i) - 2[(\not{k} - \not{b} \gamma^5) \not{k} + m_i^2 + 2k \cdot p_1 + \not{b} \gamma^5 m_i] \gamma^\mu - 2\not{b} \gamma^5 p_1^\mu \\
& - 2b \cdot p_2 (2b \cdot p_1 + \not{b} \not{k}) \gamma^\mu - [2p_1^\mu b^2 - 2b \cdot p_1 \not{b} \gamma^\mu + \not{b} \not{k} \gamma^\mu \not{b}] \not{k} \\
& - [2p_2^\mu (2b \cdot p_1 - \not{b} \not{k}) - 2b \cdot p_2 \not{k} \gamma^\mu] \not{b} - 2\not{b} \gamma^\mu \not{b} [p_1 \cdot (k + p_2) + k \cdot p_2] \\
& - [2p_2^\mu b^2 - 2b \cdot p_2 \gamma^\mu \not{b} - \not{b} \gamma^\mu (\not{b} \not{k} + 2b \cdot p_2) m_i] \Big] + 8mm_j m_w^2 \left[ \gamma^\mu b \cdot (k + p_1) \left( m[4m_w^2 - k^2] \right. \right. \\
& + [(\not{k} + m_i - \not{b} \gamma^5) m_w^2 - \not{k} k \cdot (k + p_1 - b \gamma^5)] \Big) - 2m_w^2 b^2 [2p_1^\mu + (\not{k} - m_i) \gamma^\mu] \\
& + 2(k + p_1)^\mu \left( m_w^2 [2b \cdot p_1 - (\not{k} - \not{b} \gamma^5 - m_i) \not{b}] - m_w^2 \not{b} (\not{k} - \not{b} \gamma^5 + m_i) \right. \\
& - [2p_1 \cdot k + (\not{k} - \not{b} \gamma^5 - m_i) \not{k}] b \cdot k \Big) + 2m_w^2 [\not{b} \not{k} \gamma^\mu \not{b} + 2p_1^\mu b^2 + \not{b} \gamma^\mu (2b \cdot p_1 + \not{b} m_i)] \\
& - 2m_w^2 [2b \cdot p_1 + (\not{k} - m_i) \not{b}] + 2[\not{b} (\not{k} - \not{b} \gamma^5) + \not{k} \not{b} + 2b \cdot p_2] \gamma^\mu \not{b} \not{k} [k \cdot (k + p_1)] \\
& - 2m \not{b} b \cdot k [(p_1^\mu \not{b} - \gamma^\mu b \cdot p_1) 2\not{k} + \gamma^\mu \not{b} (2p_1 \cdot k - \not{k} m_i)] \\
& \left. + [4m_w^2 - k^2] [\not{b} (\not{k} - \not{b} \gamma^5) + \not{k} \not{b} + 2b \cdot p_2] [(2p_1^\mu + \not{k} \gamma^\mu) \not{b} - \gamma^\mu (2b \cdot p_1 - \not{b} m_i)] \right].
\end{aligned}$$

#### A.4.4. Caso $a \simeq 0$ y $b \simeq 0$

Es un posible caso que se analizará en otro contexto.



# Bibliografía

- [1] C. L. COWAN, JR., F. REINES, F. B. HARRISON, H. W. KRUSE, AND A. D. MCGUIRE, *Science* **124**, 3212 pp. 103 - 104 (1956).
- [2] G. DANBY, J.M. GAILLARD, K. GOULIANOS, L.M. LEDERMAN, N. B. MISTRY, M. SCHWARTZ, J. STEINBERGER *Phys. Rev. Lett* **9**, pp. 36-44 (1962).
- [3] CARLO GIUNTI, ALEXANDER STUDENIKIN; *Neutrino electromagnetic properties*, Phys. Atom. Nucl. **72**, 2089-2125, 2009 [ArXiv, 18 Dec 2008].
- [4] FRANCIS HALZEN AND ALAN D. MARTIN; *Quarks and Leptons An Introductory Course in Modern Particle Physics* John Wiley 1984.
- [5] F. M. RENARD; , Nucl. Phys. **B 196**, 93 (1982); A. Barroso, F. Boudjema, J. Cole, and N. Dombey, Z. Phys. **C 28** 149 (1985); A. Barroso, P. Nogueira, and J. C. Romao, Z. Phys. **C 33**, 243 (1986).
- [6] K. J. F. GAEMERS AND G. J. GOUNARIS;; , Z. Phys. **C 1**, 259 (1979); K. Hagiwara, R. D. Peccei, D. Zeppenfeld, and K. Hikasa, Nucl. Phys. **B 282**, 253 (1987); F. Boudjema and C. Hamzaoui, Phys. Rev. **D 43**, 3748 (1991); J. M. Hernández, M. A. Pérez, G. Tavares-Velasco, and J. J. Toscano, Phys. Rev. **D 60**, 01304 (1999).
- [7] ALEXANDER I. STUDENIKIN; *Electromagnetic neutrino. a short review.*, Nuclear and Particle Physics Proceedings 273 – 275 (2016) 1711 – 1718.
- [8] M. FUKUGITA, T. YANAGIDA; *Physics of Neutrinos and Applications to Astrophysics*, Springer 2003.
- [9] D. COLLADAY, V. ALAN KOSTELECKY; *Lorentz violating extension of the standard model*. Phys. Rev. **D 58**, pág. 116002 (1998).
- [10] O. W. GREENBERG, CPT Violation Implies Violation of Lorentz Invariance, Phys. Rev.Lett. 89, 231602 (2002).
- [11] T. W. KIBBLE: PR 155 (1967) 1554, P. HIGGS: PL 12(1964) 132; PRL 13 (1964) 508); F. Englert, R. Brout: PRL 13 (1964) 321.

- 
- [12] JOSE I. ILLANA CALERO; *Propiedades electromagnéticas del boson W y el lepton  $\tau$  en procesos de dos fotones. Tesis doctoral 1995.*
- [13] H. NOVALES-SÁNCHEZ, M. SALINAS, J. J. TOSCANO, AND O. VÁZQUEZ-HERNÁNDEZ; *Electric dipole moments of charged leptons at one loop in the presence of massive neutrinos.* Phys. Rev. **D 95**, 055016 (2017).
- [14] D. HOOPER, D. MORGAN, AND E. WINSTANLEY, Phys. Rev. **D 72**, 065009 (2005).
- [15] V. ALAN KOSTELECKY; *CPT Violation and the Standard Model.* Phys. Rev. **D 55**, 6760 (1996).
- [16] V. ALAN KOSTELECKY, M. MEWES; . Phys. Rev. **D 70**, 031902 (2004).
- [17] R. G. SACHS; *The Physics of Time Reversal.* Theor. Phys. Suppl **D 70** (1986) 336, University of Chicago Press, Chicago, 1987.
- [18] V. ALAN KOSTELECKY AND R. POTTING; Nucl. Phys. **D 51** (1995) 3923.
- [19] V. ALAN KOSTELECKY, M. MEWES; . Phys. Rev. **D 69**, 016005 (2004).
- [20] M.C. GONZALEZ GARCIA, MICHELE MALTONI; *Phenomenology with massive neutrinos*, 175pp. arXiv:0704.1800 [hep-ph] (2007)
- [21] V. ALAN KOSTELECKY; *Perspectives on Lorentz and CPT Violation*, e-Print: arXiv:0802.0581 (2017).
- [22] G. S. GURALNICK, C. R. HAGEN, T. W. B. KIBBLE: PRL 13 (1964) 585, E. FERMI: Ricercha Scient 2 (1993) 12; Zph 88 (1934) 161.
- [23] S. M. BILENKY , C. GIUNTI, W. GRIMUS; *Prog. Part. Nucl Phys.* 43 1-86, (1999).
- [24] RABINDRA N. MOOHAPATRA PALASH B. PAL; *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics.* Tercera edición, 1990.
- [25] M. PEREZ VICTORIA, *Phys. Rev. Lett.* 83, 2518 (1999); *R. Jackiw and V. A. Kostelecky*, Phys. Rev. Lett. 82, 3572 (1999).
- [26] H. NOVALES-SANCHEZ, A. ROSADO, V. SANTIAGO-OLAN, AND J.J. TOSCANO, Effects of physics beyond the standard model on the neutrino charge radius: an efective Lagrangian approach, Phys. Rev. **D 78**, 073014 (2008), arXiv:0805.4177
- [27] M. S. DVORNIKOV, A. I. STUDENIKIN; *Electromagnetic Form Factors of a Massive Neutrino*, Volume **99**, Issue 2, pp 254 – 269, 2004.
- [28] E. C. G. SUDARSHAN, R. E MARSHAK: *in Proc. Padua-Venice conf. on mesons and recetly discovered particles (1957)*, R. P. Feynman, M. Gell-Mann: PR 109 (1958) 193.

- 
- [29] CARLO GIUNTIS; *A review on present status of neutrino mixings and oscillations; INFN, Sezione di Torino, Via P. Giuria 1, I-10125 Torino. Italy.*
- [30] MICHAEL E. PESKIN, DANIEL V. SCHROEDER; *An Introduction to Quantum Field Theory.* Perseus Books, 1951.
- [31] T. MORII, C.S. LIM, S.N. MUKHERJEE; *The Physics of the Standard Model and Beyond.* 2004.
- [32] N. CABBIBO: PRL 10 (1963) 531, M. KOBAYASHI, T. MASCKAWA; PRP 49 (1973) 652.
- [33] B. KAYSER: PR D30 (1954) 1023.