



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
"MAT. LUIS MANUEL GUTIERREZ"

ANÁLISIS DE LA DINÁMICA ESTELAR EN EL MARCO
DE LA TEORÍA DE RASTALL

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

Maestro en Ingeniería Física

PRESENTA:

Juan José Rivas Ramírez

ASESOR:

Doctor en Ciencias (Matemáticas) Francisco Javier Domínguez-Mota

Co-ASESOR:

Doctor en Ciencias (Física) Joaquin Estevez Delgado



Morelia, Michoacán, Noviembre, 2020

Resumen

En el marco de teoría de gravitación de Rastall para una geometría estática y esféricamente simétrica, imponiendo la invarianza del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias asociadas a modelos estelares, mostramos que la ecuación de estado consistente con esta condición es $P = (\gamma - 1)c^2\rho$, donde P es la presión, ρ es la densidad, c es la velocidad de la luz y γ es el parámetro de estado. Este resultado matemático coincide con una de las ecuaciones de estado formuladas a partir de condiciones físicas para el que $\gamma \in (1, 2)$ [1]. Con esta ecuación de estado, presentamos el análisis del sistema dinámico, mostrando que existen dos puntos de equilibrio; un punto silla y un punto espiral, este último corresponde a una generalización de la solución de Misner-Zapolsky, que depende del parámetro de estado γ y el parámetro de Rastall λ .

De manera complementaria mostramos que para $\lambda \in [0, 1]$ y $\gamma(1, 2)$ existen regiones donde las condiciones de energías: Nula (NEC), Debil (WEC), Fuerte (SEC), Dominante (DEC), y la existencia de soluciones estables (espirales) no se tienen simultáneamente.

Palabras Clave: Cuasi-homología, Rastall, Frobenius, Estrellas, Gravitación.

Abstract

In the context of the Rastall theory of gravitation for a static spherically symmetric geometry, imposing the invariance of the system of the ordinary differential equations associated with stellar models, we show that the equation of state that is consistent with this condition is $P = (\gamma - 1)c^2\rho$, where P is the pressure, ρ is the density, c is the speed of light, and γ is the parameter of state. This mathematical result coincides with one of the formulated equations of state drawn from the physical conditions for which $\gamma \in (1, 2)$. With this equation of state, we present the analysis of the dynamic system, showing that the following exist: two equilibrium points, one saddle point, and one spiral point. The last one corresponds to a generalization of the Misner- Zapolsky solution, which depends on the parameter of state γ and the Rastall parameter λ .

We additionally show that, for $\lambda \in [0, 1]$ and $\gamma \in (1, 2)$, there are regions where the conditions of null (NEC), weak (WEC), strong (SEC), and dominant (DEC) energy conditions, along with the existence of stable solutions (spirals), cannot be found simultaneously.

Keywords: Quasihomologous, Rastall, Frobenius, Stars, Gravitation.

Índice general

Índice de figuras	VI
1. Introducción	1
2. Ecuaciones de estructura estelar	6
2.1. Modelo estelar Newtoniano	6
2.2. Ecuaciones de campo de Einstein	8
2.2.1. Tensor energía momento	10
2.3. Modelo estelar relativista	11
2.3.1. Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)	12
3. Curiosidades Matemáticas en sistemas dinámicos	18
3.1. Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Rastall	18
3.1.1. Ecuación de estado	20
3.1.2. Restricciones sobre el parámetro de Rastall	22
3.1.2.1. Condición de energía Nula (NEC)	23
3.1.2.2. Condición de energía débil (WEC)	23
3.1.2.3. Condición de energía fuerte (SEC)	24
3.1.2.4. Condición de energía dominante (DEC)	24
3.1.2.5. Intersección de las condiciones de energía	24
3.2. Familias homológicas	25
3.2.1. Ecuación de estado en la teoría de Rastall	26
4. Invariancia de escala y series de Frobenius generalizadas	30
4.1. Definiciones fundamentales	31
4.2. Transformaciones de ecuaciones invariantes de escala a ecuaciones autónomas	33
4.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias invariantes de escala de n -ésimo orden	35
4.3.1. Solución de fondo (Teorema 1)	35
4.3.2. Solución linealizada (Teorema 2)	35

4.3.3. Solución tipo Frobenius (Teorema 3)	38
4.4. Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias invariantes de escala de orden n	40
4.4.1. Solución linealizada (Teorema 5)	42
4.4.2. Solución tipo Frobenius (Teorema 6)	44
5. Resultados	46
5.1. Descripción cualitativa de estrellas en equilibrio en teoría Rastall	46
5.1.1. Puntos fijos del sistema dinámico	46
5.1.1.1. Solución especial de Misner-Zapolsky	49
5.1.2. Curvas Integrales del sistema dinámico	52
5.1.3. Puntos fijos del sistema dinámico	54
5.1.3.1. Análisis de los autovalores δ_{\pm}	56
5.1.3.2. Linealización sobre el origen	66
5.2. Implementación del formalismo de serie de Frobenius generalizada	66
5.2.1. Comportamiento de Fondo	66
5.2.2. Serie de Potencia alrededor del punto crítico $(0,0)$, en términos del radio	67
5.2.2.1. Desacople del Sistema	67
5.2.2.2. Expansión en serie	68
6. Conclusiones	69
A. Apéndice	70
A.1. Aspectos Fundamentales en Sistemas Dinámicos	70
A.2. Aspectos cualitativos del sistema RTOV	76
Bibliografía	86

Índice de figuras

3.1. Coeficientes $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, y $a_3(\lambda)$ de las cantidades efectivas (3.6). . . .	20
3.2. Condiciones de energía nula y débil.	22
3.3. Condiciones de energía fuerte y dominante.	23
3.4. Intersección de las condiciones de energía en términos de $\gamma = \omega + 1$. . .	25
5.1. Curvas integrales del sistema (5.1) en la región $m > 0$, $\mu > 0$ para $\lambda = 1$. Las soluciones físicamente relevantes son la de Misner-Zapolsky (representada por el centro de la espiral) y la solución que comienza en el origen, y forman espirales en el centro.	49
5.2. Solución especial de Misner-zapolsky.	50
5.3. Comparación entre las soluciones de Misner-Zapolsky fijando $\gamma = 7/5$ y Misner-Zapolsky-Rastall con el mismo valor de γ y un valor del parámetro de Rastall $\lambda = 3/5$	51
5.4. Curvas integrales para distintos valores de λ y γ tales que no violan las condiciones de energía.	53
5.5. Funciones g_1 y g_2 en la región $\lambda \in (0, 1)$, $\gamma \in (1, 2)$	54
5.6. Curvas de nivel del discriminante $\Delta(\lambda, \gamma)$ de los autovalores del sistema autónomo.	56
5.7. superficie $\Delta(\lambda, \gamma)$	57
5.8. Regiones donde el discriminante es negativo.	58
5.9. Región de los parámetros donde los autovalores son espirales estables. . .	59
5.10. Superposición de regiones: intersección de las condiciones de energía y el dominio donde se tienen espirales estables.	59
5.11. Sub-regiones de (5.10).	61
5.12. Dominio para los parámetros $\lambda - \gamma$ donde se tienen soluciones estables (espirales) y se cumplen las condiciones de energía.	64
5.13. Para valores $\lambda < 0$ y $\lambda > 1$, $\forall \gamma \in (1, 2)$ no se violan las condiciones de energía.	65
5.14. Para $\lambda < 0$ y $\lambda > 1$ se mantiene la condición $\Delta(\lambda, \gamma) < 0$, $\forall \gamma \in (1, 2)$. . .	65

A.1. Clasicación de equilibrios en sistemas no lineales. Cuadro extraído de [2]	75
A.2. Curvas integrales para distintos valores de γ correspondientes a $\lambda = 0.0$.	76
A.3. Curvas integrales para distintos valores de γ correspondientes a $\lambda = 0.1$.	77
A.4. Curvas integrales para distintos valores de γ correspondientes a $\lambda = 0.2$.	78
A.5. Curvas integrales para distintos valores de γ correspondientes a $\lambda = 0.3$.	79
A.6. Curvas integrales para distintos valores de γ correspondientes a $\lambda = 0.4$.	80
A.7. Curvas integrales para distintos valores de γ correspondientes a $\lambda = 0.6$.	81
A.8. Curvas integrales para distintos valores de γ correspondientes a $\lambda = 0.7$.	82
A.9. Curvas integrales para distintos valores de γ correspondientes a $\lambda = 0.8$.	83
A.10. Curvas integrales para distintos valores de γ correspondientes a $\lambda = 0.9$.	84
A.11. Curvas integrales para distintos valores de γ correspondientes a $\lambda = 1.0$.	85

Introducción

Los sistemas dinámicos aparecen al tratar de especificar mediante un modelo matemático procesos en los que es posible describir la dependencia en el tiempo de un punto en un espacio geométrico mediante la aplicación de una fórmula o “regla” [2]. Surgen, entonces, con naturalidad en todas las áreas de la ciencia, como pueden serlo la biología, economía, física o en contextos completamente teóricos como en el caso de los autómatas celulares o de figuras fractales en el plano complejo [3]. Esta extensión tan amplia permite incluir dentro de la definición de sistemas dinámicos fenómenos tan dispares como el movimiento en un sistema mecánico (como un péndulo, por ejemplo) o el número de individuos de una población de peces en un lago a través del tiempo; pasando inclusive por fenómenos astrofísicos como el que abordamos en este trabajo. La clave de este enfoque multifactorial, en el cual se intersectan diversas áreas científicas, se encuentra en el concepto de “estado” y “regla de evolución”: un sistema, en un instante de tiempo dado, se encuentra en algún estado posible, representado generalmente como un punto en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n . La regla de evolución del sistema es una regla fija (función) que determina el estado futuro de dicho punto.

El caso que abordamos en la presente tesis es aquel en el cual el espacio de estados es un subconjunto del plano \mathbb{R}^2 , y, en particular, cuando el sistema dinámico es definido por dos ecuaciones diferenciales autónomas de primer orden que modelizan la estructura interior de objetos compactos en el marco de gravedad de Rastall. Aunque la reducción al caso $n = 2$ pareciera una simplificación sustancial, en realidad no lo es: la teoría de sistemas dinámicos bidimensionales es fundamental en la generalización a más dimensiones.

Propiamente en el campo de la astronomía, una estrella compacta, a veces llamada objeto compacto, puede ser bien, una estrella enana blanca, una estrella de neutrones o un agujero negro. Los objetos compactos son la fase final de la evolución estelar y se puede referir a ellos como remanentes de estrellas [4]. Todas las especies de objetos

1. INTRODUCCIÓN

compactos difieren de las estrellas normales¹ en dos formas fundamentales [5, 6]:

1. Primero, ya que no consumen combustible nuclear, la presión térmica ya no evita que ocurra un colapso gravitacional, sino que se implementan otros mecanismos, así por ejemplo: **las enanas blancas** evitan el colapso debido a la presión de electrones degenerados, mientras **las estrellas de neutrones** mantienen el equilibrio debido mayormente a la presión de neutrones degenerados y **los agujeros negros en cambio**, son estrellas que han colapsado completamente, lo que significa que la estrella no halló algún método para soportar la gravedad que actúa hacia el centro de la estrella y por lo tanto colapsó a una singularidad.
2. La segunda característica distintiva de los objetos compactos es su tamaño extremadamente pequeño, de ahí su nombre. En comparación a las estrellas normales de masa similar, los objetos compactos tienen un radio mucho más pequeño y por lo tanto, campos gravitacionales mucho más fuertes.

La deducción de las ecuaciones de estructura estelar de la mecánica Newtoniana se pueden encontrar en [4, 5, 6], las cuales son:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dr} &= -\frac{GM\rho}{r^2} = -\frac{GM\epsilon}{r^2c^2}, \\ \frac{dM}{dr} &= 4\pi r^2\rho = \frac{4\pi r^2\epsilon}{c^2}.\end{aligned}$$

Donde $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$ es la constante gravitacional de Newton, $\rho = \rho(r)$ es la densidad de masa medida en kg/m^3 , $\epsilon = \epsilon(r)$ es la densidad de energía medida en J/m^3 , y $M = M(r)$ describe la masa total contenida en la esfera de radio r . En este contexto, se ha definido la densidad de energía en términos de la densidad de masa ρ de acuerdo a la famosa ecuación de la Relatividad Especial,

$$\epsilon(r) = c^2\rho(r).$$

Cabe mencionar que cuando se trabaja en coordenadas naturales $c = 1$, ρ y ϵ se vuelven indistinguibles. Para resolver el sistema Newtoniano para las función ρ y M se integra desde el origen $r = 0$ hasta el punto $r = R$, donde la presión es cero; este punto define el radio R de la estrella. Por otra parte, es necesario un valor inicial de la presión en $r = 0$, designemos por p_0 , y notemos que, la masa total de la estrella $M(R) = M$, dependerá de p_0 [6]. Para poder realizar la integración, también es necesario conocer la densidad

¹Una estrella es una esfera luminosa de plasma que mantiene su forma gracias a su propia gravedad, mientras esté fusionando hidrógeno diremos que permanece en la “secuencia principal”, y la clasificaremos como “normal” [4].

de energía $\epsilon(r)$ en términos de la presión $p(r)$, esta relación entre energía y presión se codifica en una Ecuación de estado (EoS.¹) para la materia que forma la estrella, por lo tanto, **gran parte del esfuerzo en resolver problemas de estructura estelar necesariamente se dirigen en desarrollar una EoS adecuada para cada problema en cuestión** [7].

La formulación Newtoniana funciona bien en regímenes donde la masa de la estrella no es tan grande que significativamente no “deforma” el espacio-tiempo, en consecuencia, integrando las ecuaciones del sistema Newtoniano funcionarán bien en los casos en que los efectos relativistas no sean importantes, como por ejemplo en el caso de algunas enanas blancas ² [8]. Sin embargo, en general, los objetos compactos resultan extremadamente masivos, la gravedad descrita por Newton resulta obsoleta para modelar el comportamiento de los parámetros estelares, por esta razón, habitualmente se realizan correcciones a las ecuaciones de estado para considerar los efectos de la curvatura del espacio-tiempo que provocan estos objetos. Las estrellas compactas se estudian mediante las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV), provenientes de la Relatividad General, estas ecuaciones TOV nos permiten calcular la presión como función del radio de un objeto isotrópico con simetría esférica que está en equilibrio gravitacional [9]. Para nuestro propósito simplemente indicamos las correcciones relativistas al sistema Newtoniano en términos de tres factores adicionales (adimensionales):

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\epsilon(r)M(r)}{c^2r^2} \left[1 + \frac{p(r)}{\epsilon(r)} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)c^2} \right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2r} \right]^{-1}.$$

Los primeros dos factores entre corchetes representan correcciones de Relatividad Especial, en cambio el último factor es una corrección de Relatividad General, la magnitud GM/c^2r determina si es importante o no considerar esta corrección. Hay que notar que los factores de corrección son todos definidos positivos; es como si la gravedad Newtoniana se volviera más intensa en cada r , en otras palabras, la Relatividad Especial y General fortalece la atracción de la gravedad [7].

Aunque la Relatividad General es predictiva en una amplia gama de situaciones, esta teoría de gravedad tiene algunas limitaciones, y todavía existen algunas preguntas que no han sido explicadas satisfactoriamente, ya sea en el contexto de la cosmología o en el contexto astrofísico, como por ejemplo, el problema de la materia oscura, el problema

¹Por sus siglas en inglés Equation of State

²Las estrellas enanas blancas fueron observadas por primera vez en 1844 por Friedrich Bessel (la misma persona que inventó las funciones especiales que llevan su nombre). Se dio cuenta de que la estrella brillante Sirius se tambaleaba de un lado a otro y luego dedujo que la estrella visible estaba siendo orbitada por algún objeto invisible. El objeto en sí se resolvió ópticamente unos 20 años después y, por lo tanto, se ganó el nombre de “enana blanca”. Desde entonces, se han observado (o detectado) otras numerosas estrellas enanas blancas (y las más pequeñas de color marrón).

1. INTRODUCCIÓN

de la energía oscura y la inflación temprana [10, 11]. Estas limitaciones han llevado a la propuesta de las llamadas teorías modificadas de la gravedad, que extienden la Relatividad General [12]. En la mayoría de teorías modificadas, la conservación covariante del tensor energía-momento es un ingrediente bien conocido que a través del teorema de simetría de Noether conduce a la conservación de algunas cantidades físicas [13]. Sin embargo, algunas teorías modificadas han propuesto que la condición de la conservación del tensor covariante de energía-momento puede ser relajada. A partir de estas ideas, P. Rastall en 1972 construyó una nueva teoría de la gravedad donde se cuestiona la ley de conservación habitual [14].

En la teoría de Rastall, la ley habitual de conservación del tensor de energía-momento no se cumple. En este modelo gravitacional, se considera un acoplamiento no mínimo de campos de materia a la geometría donde la divergencia de $T_{\mu\nu}$ es proporcional a $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \nabla_\nu R$. Sin embargo, la ley de conservación habitual se recupera en el espacio-tiempo plano [15, 16]. Esta propuesta tiene como argumento contundente el hecho de que la ley de conservación habitual sobre el tensor de energía-momento sólo se prueba en el espacio-tiempo plano o en un límite de campo gravitacional débil.

Se han desarrollado varios estudios con esta teoría, entre ellos:

- (I) Se ha reproducido una forma fenomenológica para distinguir las características de los efectos cuánticos en los sistemas gravitacionales [17, 18].
- (II) Se ha considerado una formulación clásica para la creación de partículas en cosmología [19].
- (III) Se han investigado características interesantes de los modelos cosmológicos [20].
- (IV) Se han estudiado algunas soluciones de agujeros negros giratorios y no giratorios [13].
- (V) Se han investigado las soluciones de agujero de gusano transitables.
- (VI) Se ha realizado una generalización de la teoría de Rastall para discutir la expansión cósmica acelerada.
- (VII) Se ha estudiado un colapso gravitacional de un fluido perfecto homogéneo [21], entre otros.

En investigaciones recientes se ha demostrado que la teoría Rastall proporciona una buena descripción para estrellas de Neutrones de radios cortos. [12]. Al estudiar las características físicas de objetos compactos, es habitual considerar que el contenido de materia dentro de la estrella se describe mediante una ecuación de estado de fluido

perfecto isotrópico, que posee componentes de presión tangencial y radial iguales. Con base a lo anterior estructuramos la tesis de la siguiente manera:

En el capítulo II hacemos una breve revisión de los elementos necesarios con los que se modelan los interiores estelares y sus distintos marcos de gravedad.

En capítulo III establecemos una de las dos contribuciones originales de este trabajo de grado; a partir de la imposición de cuasi-homologías obtenemos una ecuación de estado lineal asociada al sistema de TOV-Rastall que describe el comportamiento de una estrella modelada a partir de la suposición de que ésta es estática y esféricamente simétrica, descrita por un fluido perfecto como fuente de materia. Así mismo mediante un análisis en las condiciones de energía restringimos el valor del parámetro de Rastall al intervalo $0 \leq \lambda \leq 1$.

En el capítulo IV establecemos lo que asumiremos por: ecuaciones invariantes de escala, ecuaciones equidimensionales, ecuaciones autónomas y presentamos seis teoremas sobre sistemas invariantes de escala (serie de Frobenius generalizada) desarrollados por Matt Visser y colaboradores en [22].

En el capítulo V implementamos el formalismo propuesto por Visser en [22] a las ecuaciones TOV-Rastall con la ecuación de estado que inducimos en el capítulo IV. Transformamos las ecuaciones TOV-Rastall que son invariantes de escala a su forma autónoma asociada y ubicamos sus puntos fijos, estos puntos fijos nos conducen a una solución de fondo (solución particular de Misner-Zapolsky) que exhibe un comportamiento de ley de potencia. La segunda contribución original la presentamos en este capítulo; restringimos el dominio del parámetro proveniente de la función de estado al intersectar las regiones de las condiciones de energía y la región donde el punto fijo es espiral estable. Finalmente expandimos el sistema sobre sus puntos fijos emergiendo una ecuación diferencial autónoma linealizada, cuya solución exhibe un comportamiento diferente de la ley de potencia. Esto nos lleva a dos leyes de potencia independientes: una para el punto fijo de fondo y otra para las desviaciones linealizadas del punto fijo. Con estos elementos construimos la serie de potencias tipo Frobenius generalizada con exponentes que son múltiplos enteros de los exponentes que surgen en el problema linealizado. Esta serie tipo Frobenius se puede ver como una variante del teorema de expansión de Liapunov.

Finalmente en el capítulo VI establecemos nuestras conclusiones finales.

Ecuaciones de estructura estelar

2.1. Modelo estelar Newtoniano

En la construcción de un modelo no-relativista de la estructura interna de una estrella es necesario imponer las siguientes suposiciones [23]:

1. Aislamiento

Consideramos que una estrella está aislada si la distancia entre estrellas es mucho mayor que el radio estelar en cualquier fase de su vida.

2. Composición química uniforme inicial

Las capas superficiales de las estrellas son las menos afectadas por la evolución estelar, la cual ocurre principalmente en el núcleo de la estrella. Por lo tanto, las abundancias químicas en la superficie de la estrella son las más representativas de la composición química inicial.

3. Simetría esférica

La condición de autogravedad implica que las estrellas deben ser esféricas. Solamente hay desviaciones de la esfericidad debido a una rotación rápida de la estrella, o campos magnéticos muy fuertes. La suposición de simetría esférica quiere decir que las variaciones en las cantidades físicas, como son la densidad, la presión, la temperatura, etc, son radiales; es decir, estas cantidades son uniformes en una superficie esférica de radio r y podemos despreciar variaciones en las coordenadas angulares.

4. Masa

La masa matemáticamente se define como: $M(r) = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'$. La densidad de material estelar no es una constante sino disminuye con el radio desde el centro hacia afuera: las densidades en los núcleos de las estrellas son de orden $\rho_n = 100 \text{ gcm}^{-3}$, mientras que las densidades en la superficie son de orden $\rho_n = 10^{-6} \text{ gcm}^{-3}$.

5. Equilibrio hidrostático

El gradiente radial de la presión debe balancear la fuerza debido a la gravedad a todos puntos interiores de la estrella, porque al contrario la estrella se expande o se contrae. Esta condición de equilibrio se conoce como el *equilibrio hidrostático*. La ecuación de equilibrio hidrostático se puede escribir como [6, 23] :

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \quad \text{o, en coordenadas de masa} \quad \frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}.$$

6. Generación de energía

Se supone que la energía se genera en el centro de la estrella por las reacciones de fusión y es transportada hacia la superficie. El flujo de energía (energía por unidad tiempo) a través de una esfera de radio r es la luminosidad $L(r)$. La luminosidad total de la estrella, L_* , corresponde al valor en la superficie, $L_* = L(R_*)$. El gradiente de la luminosidad queda entonces expresado como:

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon,$$

donde ϵ es la tasa de generación de energía por unidad masa y es una función conocida de ρ , T y la composición química, que se obtiene de la física nuclear.

Efectos Relativistas

Los efectos relativistas serán importantes bajo tres condiciones:

- (I) Las velocidades de las partículas se acercan a la velocidad de la luz.
- (II) Las energías son comparables a la energía equivalente a la masa ($E = mc^2$).
- (III) Los campos gravitatorios son *fuertes*.

Los campos gravitacionales son fuertes cuando la energía potencial es equivalente a mc^2 . En estas condiciones $R = GM/c^2$. Generalmente, se consideran los campos gravitacionales suficientemente fuertes (que la teoría de Newton no aplica) cuando

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (2.1)$$

Se consideran a objetos con radios $R = R_g$ como relativistas, no solamente porque sus campos gravitacionales son fuertes, sino porque también sus campos gravitacionales pueden impartir velocidades relativistas a objetos que los rodean.

2.2. Ecuaciones de campo de Einstein

Einstein formuló las ecuaciones que gobiernan cómo el espacio-tiempo está siendo curvado por la materia y la energía. Éstas serán referidas como ecuaciones de campo de Einstein que se escriben convencionalmente como [24]:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}, \quad (2.2)$$

donde G es la constante gravitacional de Newton, $T_{\alpha\beta}$ es el tensor de energía-momento y $G_{\alpha\beta}$ es el tensor de Einstein definido como: $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$.

En total hay $4 \times 4 = 16$ ecuaciones, pero ya que $G_{\alpha\beta}$ y $T_{\alpha\beta}$ son simétricos el número de ecuaciones se reduce a 10 ecuaciones independientes [25]. Más aún, el tensor de Einstein satisface $G^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} = 0$ lo que reduce aún más el sistema, teniendo $10 - 4 = 6$ ecuaciones independientes. Otra forma útil de las ecuaciones de campo de Einstein se puede obtener si tomamos la traza en ambos lados de (2.2)

$$g^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} \right) = R - 2R = -R.$$

Ya que $g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} = 4$, si definimos $T \triangleq T^\alpha{}_\alpha = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$ se obtiene la relación

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4}T.$$

Esto nos permite escribir las ecuaciones de campo de Einstein en la forma equivalente [26]

$$R_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta} \right). \quad (2.3)$$

Las ecuaciones de campo de Einstein junto con las ecuaciones geodésicas, que gobiernan el movimiento de las partículas bajo influencia de un campo gravitacional, construyen el núcleo de la relatividad general. Cabe señalar que las ecuaciones de campo de Einstein no pueden derivarse de ningún principio subyacente por lo que el argumento más razonable de su generalidad es reproducir en el límite clásico la ecuación de Poisson. Para trabajar con las ecuaciones de Einstein esencialmente sólo necesitamos la *métrica* y la *conexión* con la cual se define el tensor de curvatura y el tensor de Ricci. Una forma general de una métrica g de espacio-tiempo en cuatro dimensiones viene dada por 10 funciones independientes $g_{ij} = g_{ji}$ de las coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3) [27]

$$g = \sum_{i,j=0}^3 g_{ij}(x^0, x^1, x^2, x^3) dx^i \otimes dx^j, \quad (2.4)$$

operacionalmente los símbolos de Christoffel se determinan a partir de las funciones g_{ij} por medio de las siguientes ecuaciones [27]

$$\Gamma_{ij}{}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^3 g^{km} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right). \quad (2.5)$$

donde g^{km} representa la matriz recíproca de g_{ij} , y los índices i, j, k corren de 0 a 3. El Símbolo $\Gamma_{ij}{}^k$ representa 64 funciones, sin embargo debido a la simetría en i, j , sólo 40 son independientes. El tensor de curvatura de Riemann se deriva de los símbolos de Christoffel de la siguiente manera

[27]

$$R_{ijk}{}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}{}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}{}^l}{\partial x^j} + \sum_{m=0}^3 \left(\Gamma_{im}{}^l \Gamma_{jk}{}^m - \Gamma_{jm}{}^l \Gamma_{ik}{}^m \right). \quad (2.6)$$

Mientras que el tensor de Ricci se calcula como [27]

$$\text{Ric}_{jk} = \sum_{i=0}^3 R_{ijk}{}^i. \quad (2.7)$$

Luego con (2.4, 2.5, 2.6, 2.7) construimos el tensor del lado izquierdo de (2.2), mientras que el tensor de energía-momento se construye de la información física del problema.

2.2.1. Tensor energía momento

La estructura de un fluido ideal, que no toma en cuenta el campo magnético y la frecuencia de rotación está contenido en el tensor de energía-momento [28]

$$T_{\mu\nu} = (P + c^2\rho)u_\mu v_\nu + Pg_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

donde P es la presión del fluido, $c^2\rho$ es la densidad de energía y u_μ es el cuadrivector de velocidad en su forma covariante.

En el marco de referencia estacionario del fluido, y en los alrededores del origen del marco de referencia estacionario se puede realizar un análisis no relativista. En este caso

$$u^\nu \mapsto (\mathbf{v}, c), \quad P/c^2\rho \mapsto 1.$$

La ecuación (2.8) se reduce a:

$$\begin{aligned} \bar{T}^{ij} &= P\delta^{ij} + \rho\bar{v}^i\bar{v}^j, \\ \bar{T}^{4i} &= \rho c\bar{v}^i, \\ \bar{T}^{44} &= \rho c^2, \end{aligned}$$

y la forma no-relativista de las leyes de conservación se describe así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \bar{T}^{ij} + \frac{\partial}{\partial ct} \bar{T}^{i4} &= 0; \text{ Segunda ley de Newton,} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \bar{T}^{ij} + \frac{\partial}{\partial ct} \bar{T}^{44} &= 0; \text{ Conservación de energía.} \end{aligned} \quad (2.9)$$

La primera ecuación en (2.9) es simplemente la ley de Newton para el fluido, que conlleva a la ecuación básica de la hidrodinámica. La segunda ecuación en (2.9) es la ecuación de continuidad para la densidad de energía ρc^2 , que puede ser expresada como la conservación de energía. Estas relaciones se pueden combinar para expresar la conservación energía-momento en el marco de referencia estacionario como la relación tensorial [29]:

$$\bar{T}^{\mu\nu}{}_{,\mu} = \bar{\nabla}_\nu \bar{T}^{\mu\nu} = 0.$$

Se utiliza una transformación de coordenadas (transformación de Lorentz) para volver al marco de referencia del laboratorio. Los índices contraídos no se transforman, por lo cual:

$$T^{\mu\nu}{}_{,\mu} = a^\mu{}_{\mu'} \bar{T}^{\mu'\nu}{}_{,\nu} = 0.$$

De este modo, la divergencia covariante es nuevamente igual a la divergencia ordinaria, y se puede aseverar que se conserva la energía-momento en el marco de referencia de laboratorio:

$$T^{\mu\nu}{}_{,\mu} = \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.10)$$

Finalmente la divergencia covariante puede expresarse de la siguiente manera:

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial q^\nu} \left(\sqrt{-g} T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} T^{\lambda\nu} \right). \quad (2.11)$$

2.3. Modelo estelar relativista

El trabajo fundamental de Oppenheimer aún proporciona la base fundamental para la mayoría de los modelos que requieren relatividad general para su representación. Sin embargo, no fue hasta el descubrimiento de las estrellas de neutrones que llevó a la construcción de modelos modernos que representan nuestra visión contemporánea de estos objetos compactos [30]. Para determinar el campo gravitacional dentro de una distribución astrofísica, se debe proporcionar información a través del tensor de energía-momento. Ignorando efectos termodinámicos como: conducción de calor y viscosidad. El tensor de fluido perfecto es una buena aproximación, más aún gran parte del progreso inicial en la relatividad general se hizo considerando métricas altamente simétricas que simplifican el tensor de Einstein.

En muchos aspectos, la construcción de modelos estelares para estrellas relativistas es más fácil que la de los modelos newtonianos [30]. Los motivos se pueden encontrar en las mismas condiciones que hacen que la consideración de la relatividad general sea importante. Así por ejemplo, cuando la gravedad compacta la materia, la relatividad general es necesaria para describir la métrica del espacio ocupado por la estrella. Todas las formas de generación de energía que pueden proporcionar oposición a la gravedad han cesado debido al alto grado de compactación. Además, la alta densidad conduce a ecuaciones de estado en las que la energía cinética del gas es relativamente poco importante para determinar el estado del gas. La presión está determinada por fuerzas inter-nucleares y, por lo tanto, depende sólo de la densidad. En cierto modo, la física del gas de baja densidad; que depende de su composición química y energía interna, es reemplazada por un entorno más simple donde la fenomenología se describe mediante las ecuaciones de la gravedad. La columna izquierda de la Tabla (2.1) sintetiza las ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden que modelizan el interior de una estrella en el marco de gravedad de Newton, mientras que en la columna derecha aparecen las ecuaciones TOV.

Tabla 2.1: Comparación de modelos estelares.

	Aproximación Newtoniana	Aproximación Relativista
Conservación de masa		
(a)	$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho$	$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho$
Equilibrio Hidrostático		
(b)	$\frac{d\Omega}{dr} = \frac{GM}{r^2}$	$\frac{d\Omega}{dr} = \frac{G}{r} \left(\frac{M + 4\pi r^3 P/c^2}{r - 2GM/c^2} \right)$
(c)	$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{d\Omega}{dr}$	$\frac{dP}{dr} = -\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) \frac{d\Omega}{dr}$
Conservación de Energía		
(d)	$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon$	$\epsilon = 0$
Ecuación de Estado		
(e)	$P = \frac{\rho k T}{\mu m_h}$	$P = P(\rho)$
(f)	$\frac{dT}{dr} = f(P, T, \rho)$	La ecuación de estado no depende de T
(g)	$\kappa = \kappa(P, T, \rho)$	κ es irrelevante si $\epsilon = 0$

2.3.1. Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)

Las propiedades estelares de cualquier objeto compacto dependen de la estructura interna de la estrella, que se describe mediante la ecuación de estado (EoS). Utilizando las ecuaciones de campo de Einstein, J. R. Oppenheimer y G. M. Volkoff [31] obtuvieron una ecuación diferencial utilizando el trabajo de R. C. Tolman [32] que describe la estructura estelar de un objeto compacto de material isotrópico en equilibrio hidrostático. Esta ecuación diferencial de primer orden es conocida como la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). En esta sección deduciremos las ecuaciones de estructura estelar como un estratagema para, mediante analogías construir las ecuaciones de Rastall-Tolman-Oppenheimer-Volkoff (RTOV) en el próximo capítulo.

Al describir el comportamiento del campo gravitacional de materia muy densa estática, no rotante, se suelen obtener una serie de condiciones que permiten describir esa distribución. Se comienza habitualmente describiendo la métrica para la simetría axial,

[29] que será representada de la siguiente manera:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B(r) \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

donde $A(r)$ y $B(r)$ son funciones que se determinan utilizando las condiciones de frontera.

Se puede relacionar la ecuación de campo de Einstein con el tensor de energía-momento de la siguiente forma:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci y R es la curvatura escalar a consecuencia de $R_{\mu\nu}$. Para calcular el tensor de Ricci se calculan primero los símbolos de Christoffel definidos en (2.5)

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(\partial_{\alpha}g_{\beta\mu} + \partial_{\beta}g_{\mu\alpha} - \partial_{\mu}g_{\alpha\beta}),$$

y el tensor de Ricci (2.7) dado por:

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta}^{\mu} = \partial\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - \partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^{\mu}\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} - \Gamma_{\nu\beta}^{\mu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\nu}$$

Haciendo el cálculo en Mathematica, las componentes no cero de los símbolos de Christoffel son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{A}}{2Ac} & \Gamma_{11}^0 &= \frac{\dot{B}}{2Ac} \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{B}}{2Bc} & \Gamma_{00}^1 &= \frac{\dot{A}}{2B} \\ \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{\dot{A}}{2A} & \Gamma_{11}^1 &= \frac{B'}{2B} \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{B} \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{r \sin^2 \theta}{B} \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta & & \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta & & \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde el punto significa derivada temporal y el apóstrofo se refiere a la derivada respecto al parámetro longitud.

2. ECUACIONES DE ESTRUCTURA ESTELAR

De la misma manera las componentes no cero del tensor de Ricci son:

$$R_{00} = -\frac{A'}{4b} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A''}{2B} + \frac{A'}{Br} - \frac{\ddot{B}}{2Bc^2} + \frac{\dot{B}}{4Bc^2} \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right),$$

$$R_{11} = \frac{A}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A''}{2A} + \frac{B'}{Br} - \frac{\ddot{B}}{2Ac^2} - \frac{\dot{B}}{4Ac^2} \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right),$$

$$R_{22} = -\frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{B} + 1,$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta,$$

$$R_{01} = R_{10} = \frac{\dot{B}}{Brc}.$$

Esto es todo lo que podemos llegar a generalizar en relación a un campo gravitacional esféricamente simétrico [33]. Para determinar A y B , es necesario recurrir a las ecuaciones de campo de Einstein, en específico, debemos especificar el tensor de energía-momento. Usando (2.8) y considerando $\dot{A} = \dot{B} = 0$ obtenemos las ecuaciones:

$$-\frac{B''}{2B} + \frac{1}{4} \left(\frac{B'}{B} \right) \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{A'}{A} \right) = \frac{\kappa}{2} (\rho c^2 - P) A \quad ; rr, \quad (2.15)$$

$$1 - \frac{1}{A} + \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) = \frac{\kappa}{2} (\rho c^2 - P) r^2 \quad ; \theta\theta, \quad (2.16)$$

$$\sin^2 \theta \left[1 - \frac{1}{A} + \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) \right] = \frac{\kappa}{2} (\rho c^2 - P) r^2 \quad ; \phi\phi, \quad (2.17)$$

$$\frac{B''}{2B} - \frac{1}{4} \left(\frac{B'}{B} \right) \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{B'}{A} \right) = \frac{\kappa}{2} (\rho c^2 + 3P) A \quad ; tt. \quad (2.18)$$

Se tienen tres ecuaciones acopladas, no lineales, de segundo orden con tres incógnitas $[A(r), B(r), \rho(r)]$. Se sabe que fuera de $\rho(r)$ estas ecuaciones tienen solución, es la métrica de Schwarzschild. Utilizando (2.10) y (2.11) se obtiene la ecuación:

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = g^{\mu\nu} \frac{\partial P}{\partial q^\nu} + \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial q^\nu} \left[\sqrt{-g} (P + \rho^2) \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} \right] + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu (P + \rho c^2) \frac{u^\lambda u^\nu}{c^2} \right). \quad (2.19)$$

Debido a que la cuatri-velocidad está definida como: $\frac{u^\mu}{c} = \left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{B(r)}}\right)$, el primer término dentro del paréntesis será cero. Luego para $\mu = r$ y utilizando los símbolos de Christoffel se obtiene:

$$\begin{aligned} g^{rr} \frac{dP}{dr} + \Gamma_{tt}^r (P + \rho c^2) \frac{u^t u^t}{c^2} &= 0, \\ \frac{1}{A} \frac{dP}{dr} + \frac{B'}{2A} (P + \rho c^2) \frac{1}{B} &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

de lo anterior obtenemos la ecuación:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{2} (P + \rho c^2) \frac{B'}{B}, \quad (2.21)$$

realizando la combinación $(rr)/2A + (tt)/2B + (\theta\theta)/r^2$ de las ecuaciones se obtiene la relación:

$$\frac{1}{r^2} + \frac{A'}{A^2 r} - \frac{1}{Ar^2} = \kappa \rho c^2.$$

Para obtener la función $A(r)$ de la métrica:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r}{A} \right) = 1 - \kappa \rho c^2 r^2. \quad (2.22)$$

Utilizando las condiciones de frontera $\frac{r}{A} = 0$ cuando $r = 0$, definiendo $M(r)$ y κ mediante:

$$\begin{aligned} M(r) &= \int_0^r 4\pi s^2 \rho(s) ds \\ \kappa &= \frac{8\pi G}{c^4}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

se obtiene la función $A(r)$

$$A(r) = \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right)^{-1}. \quad (2.24)$$

Derivando la función (2.24) y utilizando (2.21) en la ecuación $(\theta\theta)$ se obtiene la expresión para la función $P(r)$

2. ECUACIONES DE ESTRUCTURA ESTELAR

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\epsilon(r)M(r)}{c^2 r^2} \left[1 + \frac{P(r)}{\epsilon(r)} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{M(r)c^2} \right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right]^{-1}. \quad (2.25)$$

El límite Newtoniano se obtiene cuando $c^2 \mapsto \infty$, y la ecuación (2.25) se reduce a:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2},$$

que corresponde al modelo Newtoniano. Las ecuaciones de frontera que acompañan a las ecuaciones TOV son:

Tabla 2.2: Condiciones de Frontera para las ecuaciones TOV

- | | | |
|----|---------------------|------------------------|
| 1. | $\rho(0), A(0)$ | ; finito |
| 2. | $p(R), \rho(R) = 0$ | ; define la superficie |
| 3. | $p(r), \rho(r) = 0$ | ; $r > R$ |
| 4. | $B(\infty) = 0$ | ; límite newtoniano |

Las consecuencias de estas condiciones son:

- (I) Ya que la parte angular de la métrica está dado simplemente por las coordenadas esféricas, la circunferencia de las estrellas está dado por $2\pi R$ y el área de la superficie está dada por $4\pi R^2$. Esto provee una forma ambigua de determinar la coordenada R , el radio de la estrella.
- (II) La masa de la estrella está definida por (2.23)
- (III) Para obtener $B(r)$ se integra la ecuación (2.21) y se utiliza la condición cuatro de frontera de la Tabla (2.2) para obtener

$$\int_r^\infty d \ln B = -\ln B(r) = -2 \int_r^\infty \frac{dp}{p + \rho c^2}.$$

Despejando el diferencial de presión de la ecuación (2.25)

$$\frac{dp}{p + \rho c^2} = \frac{G}{c^2} \frac{dr}{r^3} \left[\frac{M + 4\pi r^3 p/c^2}{1 - 2GM/c^2 r} \right].$$

Considerando que la presión fuera de la estrella es 0, se obtiene la ecuación para

$B(r)$ fuera de la estrella

$$B(r) = \exp \left[-\frac{2G}{c^2} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} \frac{M}{1 - 2GM/c^2 r} \right]; r \leq R \quad (2.26)$$

$$= \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right), \quad (2.27)$$

donde hemos asumido que:

$$\frac{2GM}{c^2 R} = \frac{R_s}{R} < 1,$$

para que no existan singularidades en la integral (2.26). Aquí R_s se refiere al radio de Schwarzschild (2.1) que está definido como el radio de una esfera tal que, si toda su masa estuviera comprimida dentro de esa esfera, la velocidad de escape de la superficie de la esfera sería igual a la velocidad de la luz; esta desigualdad implica que el radio de Schwarzschild se encuentra dentro de la estrella.

Teniendo en cuenta que el valor de la masa se calcula mediante (2.23), tenemos finalmente las ecuaciones TOV [32, 34, 35] :

$$\text{TOV} = \begin{cases} \frac{dp}{dr} = -\frac{GM\rho c^2 \left(1 + \frac{P}{\rho}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{M}\right)}{r^2 \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)}, \\ \frac{dM}{dr} = 4\pi\rho r^2, \\ p(r) = p(\rho) : \text{ecuación de estado.} \end{cases} \quad (2.28)$$

Estas ecuaciones TOV son aplicables, donde los efectos relativistas son importantes.

Curiosidades Matemáticas en sistemas dinámicos

3.1. Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Rastall

La idea principal en la teoría de Rastall es la suposición de que: en el espacio-tiempo curvo se violan las leyes de conservación habituales utilizadas en Relatividad General [13]. Por lo tanto, debe haber una conexión entre la divergencia del tensor energía-momento y la curvatura del espacio-tiempo. De acuerdo con este *paradigma*, la divergencia del tensor energía-momento es proporcional al gradiente del escalar Ricci, y puede escribirse como [36]:

$$T_{;\mu}^{\mu\nu} = \frac{1-\lambda}{16\pi G} R^{;\nu}, \quad (3.1)$$

En la ecuación (3.1) λ es un **parámetro libre que codifica la desviación de la conservación** [13]. Cuando $\lambda = 1$ se recuperan las leyes tradicionales de conservación. La ecuación (3.1) es una forma fenomenológica de implementar la anomalía gravitacional debido a los efectos cuánticos [13]. Esto también afecta en las ecuaciones de campo, de acuerdo a la propuesta de Rastall, la ecuación (2.13), se escribe de la siguiente manera [36, 37, 38, 39]

$$R_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (3.2)$$

Nuestra motivación al trabajar en este marco de gravedad está relacionada con el hecho de que cualquier ley de conservación se prueba esencialmente en espacio-tiempo plano (donde $R = 0$). Por lo tanto, en el espacio-tiempo curvo pueden ocurrir algunas modificaciones de las leyes de conservación. Además, los efectos cuánticos en el espacio-tiempo curvo conducen a una modificación de las expresiones clásicas para el tensor de

energía-momento [40]. Antes de derivar las ecuaciones TOV en el marco Rastall hay que notar que las configuraciones de agujeros negros pueden representar potencialmente una ruta interesante de investigación para la gravedad Rastall.

Las ecuaciones (3.1) y (3.2) satisfacen las siguientes condiciones:

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad R = 0,$$

por lo tanto, la solución de Schwarzschild es una solución esperada de la ecuación de Rastall en el vacío. Por otra parte para el caso particular donde $\lambda = 1/2$, hay otra solución estática con simetría esférica en el vacío, que es inesperada, ésta solución se asemeja a la solución Schwarzschild De Sitter. En ese caso particular, no es necesario agregar una constante cosmológica a la formulación básica de la teoría de Rastall para generar dicha solución.

Las ecuaciones de Tolman Oppenheimer Volkoff para la versión de Rastall, la llamaremos por sus siglas RTOV. Desde ahora, estas ecuaciones las construimos de forma análoga como se dedujeron las ecuaciones TOV, esto es: aplicando la métrica (2.12) a la ecuación (3.2) se deducen las ecuaciones RTOV dadas por las ecuaciones [36, 38]

$$\frac{d\hat{P}}{dr} = -\frac{G\hat{M}\hat{\rho}}{r^2} \frac{\left(1 + \frac{\hat{P}}{\hat{\rho}}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 \hat{P}}{\hat{M}}\right)}{1 - \frac{2G\hat{M}}{r}}, \quad (3.3)$$

$$\frac{d\hat{M}}{dr} = 4\pi\hat{\rho}r^2, \quad (3.4)$$

donde se definieron nuevas cantidades efectivas con el acento circunflejo, las cuales están relacionadas con P y ρ mediante los mapeos:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\rho, p) &= a_1\rho + 3a_2P, \\ \hat{P}(\rho, p) &= a_2\rho + a_3P, \end{aligned} \quad (3.5)$$

siendo

$$a_1(\lambda) = \frac{1}{2} \left(\frac{3\lambda - 1}{2\lambda - 1} \right), \quad a_2(\lambda) = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda - 1}{2\lambda - 1} \right), \quad a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda + 1}{2\lambda - 1} \right). \quad (3.6)$$

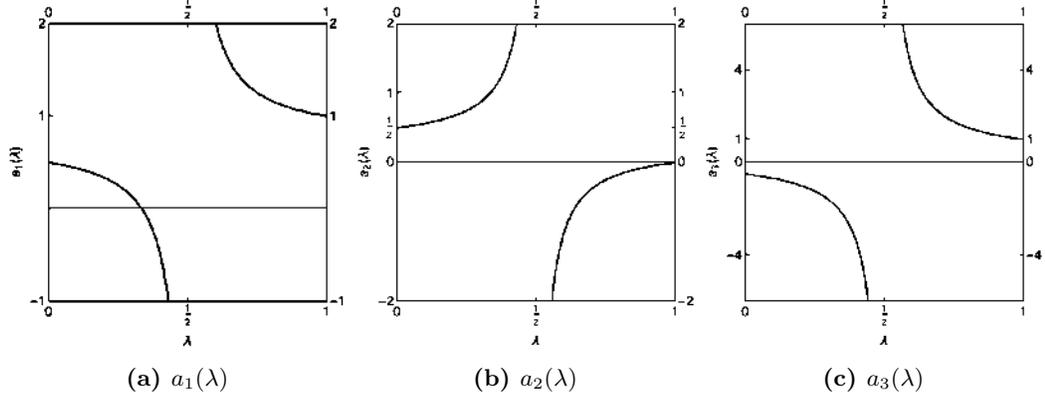


Figura 3.1: Coeficientes $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, y $a_3(\lambda)$ de las cantidades efectivas (3.6).

Vale la pena señalar que, en la notación anterior de cantidades efectivas, el campo y la divergencia de las ecuaciones del tensor de energía-momento se pueden escribir mediante

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G\hat{T}_{\mu\nu},$$

$$\hat{T}_{;\mu}^{\mu\nu} = 0,$$

donde el tensor de energía-momento efectivo \hat{T} viene dado por:

$$\hat{T} = \hat{P}g_{\mu\nu} + (\hat{\rho} + \hat{P})u_\mu u_\nu.$$

La condición de energía, entonces la podemos obtener la siguiente manera [41, 42]

$$\begin{aligned} \hat{\rho} + \hat{P} &\geq 0 && \text{NEC} \\ \hat{\rho} + \hat{P} &\geq 0, \quad \hat{\rho} \geq 0 && \text{WEC} \\ \hat{\rho} + 3\hat{P} &\geq 0, \quad \hat{P} \geq 0 && \text{SEC} \\ \hat{\rho} \pm \hat{P} &\geq 0, \quad \hat{\rho} \geq 0 && \text{DEC} . \end{aligned}$$

Aquí usamos los símbolos NEC, WEC, SEC y DEC para las condiciones de energía nula, débil, fuerte y dominante, respectivamente.

3.1.1. Ecuación de estado

Una ecuación de estado relaciona las variables que describen el estado de la materia cuando ésta se encuentra en equilibrio. Son útiles para describir las propiedades de

fluidos, mezclas de fluidos, sólidos y el interior de las estrellas. Para nuestros fines asumamos una ecuación de estado de tipo lineal, tal que introducimos el parámetro ω proveniente de la función de estado,

$$\omega = \frac{P}{\rho}. \quad (3.7)$$

De forma explícita, sustiyendo (3.6) en (3.5) tenemos

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \left(\frac{3\lambda - 1}{2\lambda - 1} \right) \rho + \frac{1}{2} \left(\frac{3\lambda - 3}{2\lambda - 1} \right) P, \quad (3.8)$$

$$\hat{P} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda - 1}{2\lambda - 1} \right) \rho + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda + 1}{2\lambda - 1} \right) P, \quad (3.9)$$

sumando las expresiones (3.8) y (3.9) se obtiene $\hat{\rho} + \hat{P} = \rho + P$, y siempre que $\rho \neq 0$ la condición de energía la podemos escribir en términos de los parámetros del sistema. Así para la condición de energía nula tenemos:

$$\rho + P \geq 0 \Rightarrow 1 + \frac{P}{\rho} \geq 0 \Rightarrow \omega \geq -1.$$

Rescribiendo la condición de energía en términos del parámetro de estado ω y el parámetro de Rastall λ obtenemos las desigualdades (3.10)-(3.13)

NEC

$$\omega \geq -1 \quad (3.10)$$

WEC

$$\begin{aligned} \omega &\geq -1 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3\lambda - 1}{2\lambda - 1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3\lambda - 3}{2\lambda - 1} \right) \omega &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

SEC

$$\begin{aligned} \omega &\geq -1 \\ \frac{3\lambda - 2}{2\lambda - 1} + \left(\frac{3\lambda}{2\lambda - 1} \right) \omega &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

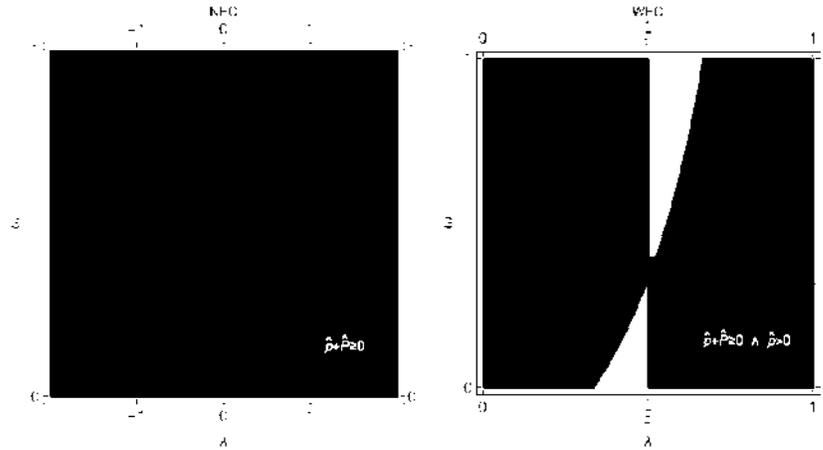
DEC

$$\begin{aligned}
 \omega &\geq -1 \\
 \frac{1}{2} \left(\frac{3\lambda - 1}{2\lambda - 1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3\lambda - 3}{2\lambda - 1} \right) w &\geq 0 \\
 \frac{\lambda}{2\lambda - 1} + \left(\frac{\lambda - 2}{2\lambda - 1} \right) w &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

En el siguiente apartado con base en las condiciones de energía haremos un análisis gráfico para restringir el dominio del parámetro de Rastall, luego, con las restricciones que encontremos, en el siguiente capítulo transformaremos el sistema RTOV a un sistema autónomo y buscaremos soluciones analíticas en serie de Frobenius generalizada justo para los valores de λ que sean físicamente aceptables.

Vale la pena señalar que, en principio pareciera que hemos perdido generalidad al momento de asumir una ecuación de estado lineal; sin embargo, ésta ecuación de estado la deduciremos en este mismo capítulo empleando homologías.

3.1.2. Restricciones sobre el parámetro de Rastall



(a) La condición de energía nula restringe el parámetro de Rastall. (b) Región de la condición de energía débil en la desigualdad del parámetro del estado w frente al parámetro de Rastall, λ .

Figura 3.2: Condiciones de energía nula y débil.

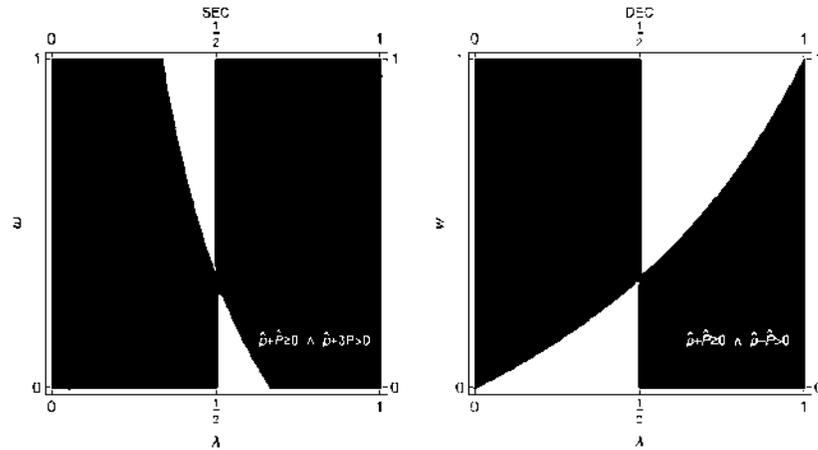
3.1.2.1. Condición de energía Nula (NEC)

La condición de energía nula no restringe el parámetro de Rastall, si $\hat{\rho} + \hat{P} = \rho + P$ la condición de energía nula se conserva, dicho de otra forma la cantidad $\hat{\rho} + \hat{P}$ no depende del parámetro de Rastall.

3.1.2.2. Condición de energía débil (WEC)

La región de la condición de energía débil en la desigualdad del parámetro de estado ω contra el parámetro de Rastall λ se muestra en la Figura (3.2). El área en color negro indica la región permitida por una condición de energía débil y fuera de dicha área indica la región prohibida por una condición de energía débil. Si comparamos con la ecuación de estado de la materia ultrarrelativista cuya ecuación de estado es lineal con el valor del parámetro $\omega = 1/3$ [1], todos los valores del parámetro de Rastall excepto $\lambda = 1/2$ se usarán en el cálculo porque no violan la condición de energía débil.

Por otro lado, para una ecuación de estado de la materia no relativista (por ejemplo, polvo frío), en cuyo caso el valor del parámetro de estado es cero, los valores para el parámetro de Rastall permitidos son $\lambda \geq 1/3$ y $\lambda > 1/2$. Finlmanete, al trabajar con materia estelar, siempre esperamos que la ecuación del parámetro de estado sea mayor que cero, porque esperamos que la presión y la densidad de energía sean siempre positivas. Entonces, en este caso, el rango de λ es $\lambda < 1/2$ y $\lambda > 1$ ya que este rango siempre esta en el área negra y no se viola la condición de energía débil.



(a) *Región de la condición de energía fuerte.*

(b) *DEC.*

Figura 3.3: Condiciones de energía fuerte y dominante.

3.1.2.3. Condición de energía fuerte (SEC)

La región de la condición de energía fuerte en la desigualdad del parámetro de estado ω contra el parámetro de Rastall λ se muestra en la Figura (3.3).

Al igual que con WEC (3.1.2.2), para la ecuación de estado de materia ultrarrelativista, se permiten todos los valores del parámetro de Rastall, excepto $\lambda = 1/2$. De lo contrario, si usamos una ecuación de estado de materia no relativista, los valores del parámetro de Rastall permitidos son $\lambda > 2/3$ y $\lambda < 1/2$ y para la energía oscura, el parámetro de Rastall permitido es $\lambda = 1/2$. Mientras que cuando tratamos con materia estelar, es mejor elegir $\lambda > 1/2$ y $\lambda < 0$ porque los valores para el parámetro de Rastall en este rango siempre están en el área permitida.

3.1.2.4. Condición de energía dominante (DEC)

La región de la condición de energía dominante en la desigualdad del parámetro de estado ω contra el parámetro de Rastall λ se muestra en la Figura (3.3).

Al igual que con las dos anteriores condiciones, para la ecuación de estado de materia ultrarrelativista, se permite $\lambda \in \mathbb{R} \neq 1/2$. De lo contrario, si usamos una ecuación de estado de materia no relativista, los valores del parámetro de Rastall permitidos son $\lambda \leq 0$ y $\lambda > 1/2$. Mientras que cuando tratamos con materia estelar, es mejor elegir $\lambda \geq 1$ y $\lambda \leq 0$ porque los valores del parámetro de Rastall en este rango siempre están en el área permitida.

3.1.2.5. Intersección de las condiciones de energía

De nuestro análisis gráfico sobre la condición de energía encontramos que, de acuerdo a la intersección de regiones mostradas en la Figura (3.4) los valores para el parámetro de Rastall en la región para la materia estelar son $\lambda \geq 0$ y $\lambda \leq 1$. Por otro lado, para la materia ultrarrelativista, la condición de energía no puede acotar el parámetro de Rastall excepto $\lambda = 1/2$.

El resto del capítulo lo dedicaremos en deducir una ecuación de estado de tipo lineal para el sistema RTOV, a diferencia de (3.7) seguiremos la forma habitual de escribir la ecuación de estado de la forma $P = (\gamma - 1)\rho$. Esta forma de escribir la ecuación de estado aparece en trabajos como [1] y [43] donde por consideraciones físicas el parámetro $\gamma \in (1, 2)$. Mostraremos que la ecuación de estado no depende del parámetro de Rastall λ y obtendremos las condiciones de invarianza del sistema RTOV.

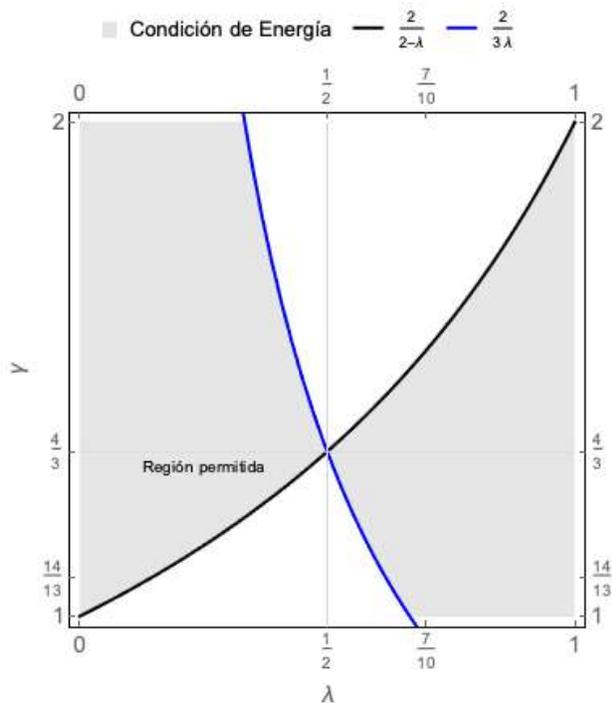


Figura 3.4: Intersección de las condiciones de energía en términos de $\gamma = \omega + 1$.

3.2. Familias homológicas

En las ecuaciones diferenciales, la teoría de grupos de Lie se emplea generalmente para investigar sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, en lugar de ordinarias. Esto ocurre porque un sistema genérico de ecuaciones diferenciales parciales siempre admite un grupo no trivial, mientras que en las ecuaciones diferenciales ordinarias esto no siempre ocurre. El problema del descubrimiento del grupo es equivalente al problema de integrar el sistema original [43].

Se puede demostrar [44] que el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{du^k}{dx} = f^k(x, \mathbf{u}) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

donde $\mathbf{u} = (u^1, u^2, \dots, u^n)$, es invariante bajo la acción del operador infinitesimal

$$X = \xi(x, \mathbf{u}) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \eta^k(x, \mathbf{u}) \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \right), \quad (3.14)$$

si y sólo si se satisfacen las ecuaciones:

$$\frac{\partial \eta^k}{\partial x} + f^j \frac{\partial \eta^k}{\partial u^j} - f^k \frac{\partial \xi}{\partial x} - f^k f^j \frac{\partial \xi}{\partial u^j} = \xi \frac{\partial f^k}{\partial x} + \eta^j \frac{\partial f^k}{\partial u^j}. \quad (3.15)$$

En el caso particular donde X genera transformaciones de la forma:

$$x \mapsto \bar{x}(x), \quad u^j \mapsto \bar{u}^j(u^j),$$

se conocen como transformaciones cuasi-homólogas y se requiere

$$\xi = \xi(x), \quad \eta^j = \eta^j(u^j).$$

En las transformaciones anteriores no se suma sobre j . En consecuencia, la ecuación (3.15) se expresa como [43]:

$$\frac{d}{du^k} \eta^k(u^k) - \frac{d}{dx} \xi(x) = X(\ln f^k). \quad (3.16)$$

La forma del lado izquierdo de la ecuación (3.16) tiene ciertas restricciones en el conjunto de posibles transformaciones cuasi-homológicas.

3.2.1. Ecuación de estado en la teoría de Rastall

En la sección anterior se derivó el sistema RTOV:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dr} &= \frac{\rho + P(\rho)}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \left(\frac{2M(\lambda - 1) + \left((\lambda + 1)P(\rho) + (\lambda - 1)\rho\right) \kappa r^3}{(\lambda + 1)P'(\rho) + (\lambda - 1)}, \right) \\ \frac{dM}{dr} &= \frac{1}{2} \left(\frac{3\lambda - 1}{2\lambda - 1} \rho + \frac{3\lambda - 3}{2\lambda - 1} P(\rho) \right) \kappa r^2, \end{aligned} \quad (3.17)$$

siendo $P'(\rho) = \frac{d}{d\rho} P(\rho)$. Consideremos

$$f^1(r, \rho, M) = \frac{d\rho}{dr}, \quad f^2(r, \rho) = \frac{dM}{dr},$$

con $n = 2$, $u^1 = \rho$ y $u^2 = M$. En nuestro caso el campo vectorial X descrito en (3.14)

es

$$X = \xi(r) \frac{\partial}{\partial r} + \eta^1(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} + \eta^2(M) \frac{\partial}{\partial M}.$$

donde $\xi(r)$, $\eta^1(\rho)$ y $\eta^2(M)$ son funciones a determinar. Aplicando la condición de existencia de transformaciones homológicas (3.16) al sistema (3.17) se obtienen las ecuaciones:

$$\frac{d\eta_1(\rho)}{d\rho} - \frac{d\xi(r)}{dr} = \xi(r) \frac{\partial}{\partial r} \ln f^1(r, \rho, M) + \eta^1(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \ln f^1(r, \rho, M) + \eta^2(M) \ln f^1(r, \rho, M), \quad (3.18)$$

$$\frac{d\eta^2(M)}{dM} - \frac{d\xi(r)}{dr} = \xi(r) \frac{\partial}{\partial r} \ln f^2(r, \rho) + \eta^1(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \ln f^2(r, \rho), \quad (3.19)$$

con las funciones f^1 y f^2 dadas por las relaciones (3.17). Luego de expresar las ecuaciones (3.18) y (3.19), comparando término a término, primeramente de la ecuación (3.19) obtenemos:

$$\frac{d\eta^2(M)}{dM} - \frac{d\xi(r)}{dr} = 2 \frac{\xi(r)}{r} + \frac{\eta^1(\rho)}{\rho}. \quad (3.20)$$

De la ecuación (3.20) se concluye que la derivada de la función η^2 debe ser constante

$$\frac{d\eta^2(M)}{dM} = a, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (3.21)$$

sustituyendo (3.21) en (3.20) obtenemos:

$$a - \frac{d\xi(r)}{dr} = 2 \frac{\xi(r)}{r} + \frac{\eta^1(\rho)}{\rho}, \quad (3.22)$$

de forma análoga, $\frac{\eta^1(\rho)}{\rho}$ debe ser constante, en virtud de esto tenemos $a - \eta^1(\rho)/\rho = 3b$ y en consecuencia (3.20) lo reescribimos como:

$$- \frac{d\xi(r)}{dr} + 3b = 2 \frac{\xi(r)}{r}. \quad (3.23)$$

Integrando la ecuación (3.21) encontramos η_2 , resolviendo la ecuación (3.23) encontramos ξ , de la reacción (3.22) obtenemos η_1 , y estas funciones deben ser compatibles con

(3.20). Lo que en resume nos da:

$$\xi(r) = \frac{br^3 + \sigma}{r^2}, \quad (3.24)$$

$$\eta_1(\rho) = \rho(a - 3b), \quad (3.25)$$

$$\eta_2(M) = aM + \alpha, \quad (3.26)$$

donde a , b , α y σ son constantes a determinar.

Regresando a la ecuación (3.18) y agrupando términos comunes de potencias de r se obtiene la relación

$$(a - 3b)\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\ln \left(\frac{\rho}{P'} \right) \right] = -2b. \quad (3.27)$$

Para que la relación (3.27) sea cierta debe cumplirse $a - 3b \neq 0 \implies a \neq 3b$. Integrando (3.27) se obtiene

$$P = A\rho^{2(a-2b)/(a-3b)} + B, \quad (3.28)$$

consideremos $n = (a - 3b)/(a - b)$ entonces (3.28) lo podemos reescribir como:

$$P = A\rho^{1+1/n} + B, \quad (3.29)$$

si $a = b$ la ecuación (3.28) adquiere la forma

$$P = A\rho + B. \quad (3.30)$$

Por consideraciones físicas se pide que la presión es cero cuando la densidad es cero, tal requisito físico implica $B = 0$. En consecuencia, el campo vectorial no trivial que es compatible con (3.18) y (3.19) corresponde a los valores de

$$a = b, \quad \sigma = \alpha = 0,$$

es decir

$$X = r \frac{\partial}{\partial r} - 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + M \frac{\partial}{\partial M}.$$

El operador X tiene dos invariantes independientes, en cada caso la transformación finita generada por X es un rescalamiento:

$$r \mapsto \alpha_1 r, \quad \rho \mapsto \alpha_2 \rho, \quad M \mapsto \alpha_3 M,$$

donde α_1 , α_2 y α_3 son constantes. En [43] se obtiene la ecuación de estado lineal haciendo $n \mapsto \infty$ en la ecuación (3.29), para nuestros fines observemos que la cantidad

ρr^2 es invariante, o que las ecuaciones RTOV son invariantes bajo las transformaciones

$$r \mapsto Ar, \quad \rho \mapsto A^{-2}\rho, \quad M \mapsto AM.$$

Resumiendo la ecuación de estado es de la forma

$$P(\rho) = (\gamma - 1)\rho, \quad (3.31)$$

donde γ es una constante que toma valores en el intervalo $1 \leq \gamma \leq 2$ [1, 45, 46]. Un comparativo con el caso de relatividad general muestra que la ecuación de estado y el campo vectorial son idénticos.

Sustituyendo la ecuación de estado lineal (3.31), el sistema RTOV se expresa mediante:

$$S = \begin{cases} \frac{d\rho}{dr} = \frac{\rho}{r - 2M} \left(\frac{2\gamma(2\lambda - 1)}{\gamma(\lambda + 1) - 2} M - \frac{\gamma\kappa r^3}{2} \rho \right), \\ \frac{dM}{dr} = \left(\frac{3\gamma\lambda - 3\gamma + 2}{4(2\lambda - 1)} \right) \kappa\rho r^2. \end{cases} \quad (3.32)$$

Consideremos las transformaciones

$$M(r) \mapsto rm(r), \quad \rho(r) \mapsto \frac{\mu(r)}{\kappa r^2}, \quad r \mapsto \exp t, \quad (3.33)$$

en consecuencia obtenemos:

$$\frac{dM}{dr} = m + r \frac{dm}{dr}, \quad \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{\kappa r^2} \frac{d\mu}{dr} - \frac{2\mu}{\kappa r^3}, \quad r \frac{d}{dr} = \frac{d}{dt}. \quad (3.34)$$

Sustituyendo (3.33) y (3.34) en (3.32) se obtiene el sistema equivalente:

$$S_1 = \begin{cases} \dot{m} = -m + \frac{3\gamma\lambda - 3\gamma + 2}{2(2\lambda - 1)} \mu, \\ \dot{\mu} = \frac{\mu}{1 - 2m} \left(2 - \gamma\mu + \frac{m(-8\gamma\lambda - 2\gamma + 8)}{\gamma\lambda + \gamma - 2} \right) \end{cases} \quad (3.35)$$

Con este resultado, en el siguiente capítulo nos enfocaremos al análisis de la dinámica del sistema, en principio haremos una exhaustiva descripción cualitativa de estrellas en equilibrio en el marco de gravedad de Rastall, y luego mediante el formalismo de serie de Frobenius generalizada daremos expresiones en serie de las soluciones de (3.35) mediante sus puntos fijos.

Invariancia de escala y series de Frobenius generalizadas

En este capítulo presentamos el formalismo propuesto por Visser para dar soluciones analíticas a una clase particular de ecuaciones diferenciales no lineales, el formalismo autónomo calcula la solución de fondo, las soluciones linealizadas y una clase de soluciones generalizadas similares a Frobenius para un sistema de ecuaciones diferenciales invariantes de escala. Esencialmente podemos decir que, primero se proyecta el modelo invariante de escala en sus formas equidimensionales y autónomas, se buscan sus puntos fijos, se obtienen soluciones de fondo de ley de potencias, y después de linealizar sobre estos puntos fijos, se encuentra una segunda solución linealizada, que proporciona una colección distinta de leyes de potencia que caracterizan las desviaciones del punto fijo. El formalismo de Visser demuestra que, genéricamente, habrá una región alrededor del punto fijo en la que la solución general completa, se puede representar como una serie de potencias generalizadas de tipo Frobenius con exponentes que son múltiplos enteros de los exponentes que surgen en el problema linealizado.

Si bien las discusiones sobre el sistema linealizado son comunes, y a menudo se puede encontrar una discusión sobre series de potencias con exponentes enteros, las series de potencias con exponentes irracionales (de hecho complejos) son mucho más raras en la literatura existente. De acuerdo a Visser la serie similar a Frobenius que se encuentra se puede ver como una variante del teorema de expansión de Liapunov que rara vez es discutido (que no debe confundirse con las funciones de Liapunov y los exponentes de Liapunov). Más adelante aplicaremos las ideas que desarrollaremos aquí a estrellas isotérmicas en el marco de gravedad de Rastall, y construimos dos series de potencia separadas con el radio de convergencia superpuesto; una para la presión y otra para la masa, más aún, nuestra contribución original consiste en que: el comportamiento de la solución de fondo permite dar una cota más fina para el parámetro de Rastall en relación a la que obtuvimos mediante criterios de energía.

4.1. Definiciones fundamentales

En estas secciones, examinamos las teorías de invariantes de escala y encontramos una ruta directa al comportamiento de ley de potencias.

Una **ecuación diferencial invariante de escala** es aquella ecuación que no cambia cuando x y y se reescalan. Siempre es posible transformar una ecuación invariante de escala en una ecuación equidimensional en x del mismo orden, por otra parte, siempre es posible transformar una ecuación equidimensional en x en una ecuación autónoma de orden inferior. Por lo tanto parte de nuestra primera tarea a desarrollar es transformar una ecuación invariante de escala en su ecuación autónoma asociada. En lo subsecuente entenderemos ecuación diferencial invariante de escala de la manera habitual, esto es; como aquella que permanece sin cambios bajo las transformaciones:

$$x \mapsto ax, \quad y(x) \mapsto a^p y(ax),$$

donde a y p son constantes [47]. La forma de determinar el valor de p es aplicar la transformación a la variable y luego ver qué valor de p deja la ecuación invariante, en el formalismo de Visser el valor de p se le llamará *condición de invarianza de escala*. Consideremos por ejemplo la ecuación de Thomas-Fermi,

$$y'' = y^{3/2} x^{-1/2},$$

Esta ecuación diferencial es invariante de escala ante la transformación:

$$x \mapsto ax, \quad y \mapsto a^{-3}y.$$

Un segundo ejemplo, las ecuaciones newtonianas para estrellas isotérmicas son:

$$P' = -\gamma^{-1} P m r^{-2} \quad m' = \gamma^{-1} 4\pi P r^2 m$$

donde γ es un parámetro de la ecuación de estado. Estas ecuaciones son invariante de escala bajo las transformaciones

$$r \mapsto ar, \quad P \mapsto a^{-2}P, \quad m \mapsto a^{+1}m.$$

Por otra parte las ecuaciones que permanecen invariantes bajo las transformaciones

$$x \mapsto bx, \quad y(x) \mapsto y(x),$$

donde b es una constante, las definiremos como **ecuaciones equidimensionales en**

x . De esta manera, las ecuaciones equidimensionales siempre se pueden ver como un caso particular de ecuaciones invariantes de escala correspondientes al valor particular $p = 0$ [48].

Consideremos por ejemplo la ecuación diferencial no lineal de segundo orden dada por:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} = 2y \frac{dy}{dx}, \quad (4.1)$$

reemplazando x por bx' en la ecuación (4.1) se obtiene

$$(bx') \frac{d^2 y}{d(bx')^2} = 2y \frac{dy}{d(bx')}, \quad (4.2)$$

como b es una constante, sale del operador y se obtiene:

$$x \frac{d^2 y}{d(x')^2} = 2y \frac{dy}{dx'}, \quad (4.3)$$

que es idéntica a la ecuación (4.1).

Por último definimos las **ecuaciones autónomas** como aquellas ecuaciones que permanecen invariantes bajo las transformaciones

$$x \mapsto x + c, \quad y(x) \mapsto y(x),$$

donde c es un tercer parámetro fijo pero arbitrario [47].

Una ecuación autónoma de n -ésimo orden siempre se puede reemplazar por una ecuación no autónoma de orden $(n - 1)$. La idea estándar es expresar $u = y'(x)$ como una función de y , entonces:

$$\begin{aligned} y'(x) &= u(y), \\ y''(x) &= \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = u'(y)u(y), \\ y'''(x) &= \frac{d}{dx} \left[u'(y)u(y) \right] = u(y)[u'(y)]^2 + [u(y)]^2 u''(y). \end{aligned}$$

Si una ecuación diferencial es invariante de escala, es de gran utilidad para determinar sus soluciones porque toda ecuación invariante de escala puede transformarse en ecua-

ciones que son equidimensionales en x , a través de la siguiente transformación [43, 47]:

$$y(x) = x^p \cdot \omega(x). \quad (4.4)$$

Otra deducción común, consiste en que: siempre se puede transformar ecuaciones equidimensionales en x en ecuaciones autónomas sustituyendo:

$$x = e^t \quad z(t) = \omega(x) \quad (4.5)$$

donde t es una nueva variable. Consideremos de nuevo la ecuación (4.1) de la cual sabemos que es equidimensional en x , si sustituimos $x = e^t$, la ecuación se transforma en

$$e^t e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) = 2y \left(e^{-t} \frac{dy}{dt} \right)$$

simplificando se obtiene $y_{tt} + y_t = 2yy_t$. Para simplificar la notación $y_{x(n)}$ denota la derivada n -ésima de y respecto a su variable dependiente. Esta última ecuación es autónoma y podemos reducir el orden aplicando la transformación $u(y) = y_t(t)$.

Las transformaciones (4.4) y (4.5) para convertir una ecuación invariante de escala a una ecuación autónoma es un caso derivado de los métodos de Lie [49], donde el operador infinitesimal está dada por

$$U = x \frac{\partial}{\partial x} + py \frac{\partial}{\partial y}.$$

Más aún, el método de ecuaciones homogéneas es un caso particular cuando $p = 1$ [49]. Cabe señalar también que las ecuaciones de Euler son invariantes de escala para cualquier valor del parámetro p esta observación nos será de utilidad al momento de presentar los Teoremas de Visser. Por último, en la literatura, a las ecuaciones invariantes de escala también se les conoce como ecuaciones isobáricas y en algunos textos ecuaciones homogéneas de Euler.

4.2. Transformaciones de ecuaciones invariantes de escala a ecuaciones autónomas

Consideremos una ecuación diferencial invariante de escala de n -ésimo orden en una sola variable dependiente

$$F \left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, \frac{d^n y(x)}{dx^n} \right) = 0, \quad (4.6)$$

donde los apóstrofes denotan derivación con respecto a x .

Sustituyendo (4.4) en (4.6) se tiene una ecuación equidimensional en x . Luego las derivadas de $y(x)$ se convierten en:

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} = \left(\frac{d}{dx} \right)^n [x^p \omega(x)] = \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{p!}{(p-j)!} x^{p-j} \omega^{(n-j)}(x). \quad (4.7)$$

Hay que notar que: la derivada j -ésima de $y(x)$ involucra sólo las derivadas j -ésimas de orden inferior de $\omega(x)$. Reescribiendo F , podemos definir una nueva función \tilde{F} de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \tilde{F} \left(x, \omega(x), \omega'(x), \dots, \frac{d^n \omega(x)}{dx^n} \right) = \\ & F \left(x, x^p \omega(x), px^{p-1} \omega(x) + x^p \omega'(x), \dots, \sum_{j=0}^n \frac{n! p!}{j!(n-j)!(p-j)! x^{p-j} \omega^{n-j}(x)} \right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

ya que F depende sólo de x , $\omega(x)$ y sus derivadas, la nueva ecuación diferencial $\tilde{F}(x, \omega(x)) = 0$ ahora es equidimensional en x . Aplicando (4.5) para transformar en una ecuación autónoma se tiene que las derivadas de z son:

$$\frac{d^n}{dx^n} = \left(e^{-t} \frac{d}{dt} \right)^n = e^{-nt} \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{d}{dt} - j \right). \quad (4.9)$$

El producto en la ecuación (4.9) implica un término de n -ésimo orden más derivadas de orden inferior (y no derivados de orden superior). Reescribiendo F podemos definir una nueva función \tilde{F} como:

$$\begin{aligned} & \tilde{F} \left(z(t), \dot{z}(t), \dots, \frac{d^n}{dt^n} z(t) \right) f(t) = \\ & \tilde{F} \left(\exp(t), z(t), \exp(-t) \dot{z}(t), \dots, \exp(-nt) \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{d}{dt} - j \right) z(t) \right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde los puntos denotan diferenciación respecto a t y $f(t)$ es una función arbitraria de la variable independiente t . La función $\tilde{F}(z)$ es ahora invariante ante translaciones, haciendo la sustitución $t \mapsto t + b$ cuando $z(t) \mapsto z(t + b)$ se obtiene la ecuación $\tilde{F}(x, \omega(x)) = 0$.

4.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias invariantes de escala de n -ésimo orden

4.3.1. Solución de fondo (Teorema 1)

Para construir la solución de fondo de una Ecuación Diferencial Ordinaria, debemos primero, encontrar los puntos fijos. Asumamos que \bar{F} tiene un punto fijo z_* tal que todas las derivadas de $z(t)$ se anulan en ese punto fijo

$$\bar{F}\left(z(t) = z_*, \frac{d^i z}{dt^i}\right) = \bar{F}(z_*, 0) = 0, \quad (4.11)$$

donde $i \in [1, n]$ denota cualquier número entero positivo en ese dominio. Por lo tanto, una solución a la ecuación diferencial $\bar{F}(z) = 0$ es $z = z_*$. En términos de la variable original se tiene que

$$y(x) = x^p z_* \quad \text{resuelve} \quad F(x, y(x)) = 0, \quad (4.12)$$

donde es claro que (4.12) tiene un comportamiento en ley de potencia. Sin embargo, no todas las ecuaciones invariantes de escala poseen puntos fijos. Una ecuación diferencial invariante de escala, cuya ecuación autónoma asociada no tiene puntos fijos, no tendrá soluciones de ley de potencia [47]. Lo anterior se sintetiza en el siguiente teorema [22]

Teorema 1 [SOLUCIÓN DE FONDO].

Cualquier ecuación diferencial ordinaria de primer orden que sea invariante de escala y cuya ecuación autónoma asociada posea un punto fijo tendrá una solución de fondo en forma de una ley de potencia dada por

$$y(x) = x^p z_*$$

con exponente p dado por la condición invariante de escala.

4.3.2. Solución linealizada (Teorema 2)

Linealicemos la ecuación autónoma estableciendo

$$z(t) = z_* + z_1(t) + \mathcal{O}(z(t)^2),$$

donde z_* es un punto fijo del sistema y z_1 es una pequeña perturbación cerca de z_* . Luego $\tilde{F}(z) = 0$ con $z = z(t)$ se reduce a:

$$\bar{F}(z(t)) = \bar{F}(z_*) + \bar{F}_1(z_1(t)) + \mathcal{O}(z(t)^2) = \bar{F}_1(z_1(t)) + \mathcal{O}(z(t)^2) = 0, \quad (4.13)$$

entonces, en la aproximación lineal se obtiene:

$$\bar{F}_1(z(t)) = 0.$$

Pero $\bar{F}_1(z_1(t))$ es una EDO que es tanto autónoma como lineal, y aún conserva su carácter de ecuación diferencial de n -ésimo orden. Que una EDO tenga la propiedad de ser lineal y autónoma son propiedades muy importantes que implica resolver una ecuación diferencial con coeficientes constantes; es decir, hay algún polinomio $P(\cdot)$ tal que la función $\bar{F}_1(z(t))$ cumple

$$\bar{F}_1(z_1(t)) = P\left(\frac{d}{dt}\right) z_1(t).$$

La técnica estandar para resolver ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes es proponer como solución a la función $z_1(t) = Ae^{\lambda t}$ [47, 48, 49, 50]. Luego, al sustituir la ecuación diferencial (4.6) se reduce a un polinomio de orden n , $P(\lambda) = 0$ que tiene como máximo, de acuerdo al Teorema Fundamental del álgebra, n soluciones distintas. Suponiendo por el momento que todas las raíces A_i son distintas, la solución general a la ecuación autónoma linealizada es

$$z_1(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t},$$

esto es:

$$z(t) = z_* + \sum_{i=1}^n A_i \exp(\lambda_i t) + \mathcal{O}(A^2)$$

, en términos de la variable original se tiene:

$$y(x) = x^p \left[z_* + \sum_{i=1}^n A_i x^{\lambda_i} + \mathcal{O}(A^2), \right]$$

cerca del punto fijo. Hay que notar la presencia de múltiples leyes de potencia, el prefijo x^p se rige directamente por la condición invariante de la escala, mientras que los exponentes subsidiarios surgen de la resolución de una ecuación polinómica basada en la aproximación linealizada. Lo anterior se sintetiza en el siguiente Teorema:

Teorema 2 [SOLUCIÓN LINEALIZADA].

Cualquier ecuación diferencial ordinaria de n -ésimo orden que sea invariante de escala y cuya ecuación autónoma asociada posea un punto fijo tendrá una solución linealizada que se puede expresar genéricamente en forma de una ley de potencia, en un vecindario que rodea el punto fijo mediante

$$y(x) = x^p \left[z_* + \sum_{i=1}^n A_i x^{\lambda_i} + \mathcal{O}(A^2) \right].$$

Se puede enunciar una regla general, para el caso que haya multiplicidad en las raíces del polinomio: dado que el exponente p surge en última instancia de las manipulaciones algebraicas que involucran las dimensiones físicas de las diversas cantidades presentes en la EDO, es de esperar que p sea un número racional, en consecuencia los exponentes λ'_i , que son soluciones de una ecuación polinómica, serán genéricamente irracionales. En el caso excepcional de que las raíces del polinomio $P(\lambda)$ no sean distintas, existen complicaciones técnicas adicionales. Sean m raíces distintas, y sea g_i con $i \in \exists[1, m]$ la multiplicidad de la i -ésima raíz, se tiene $\sum_i^m g_i = n$, con esto:

$$z_1(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{g_i-1} A_{ij} t^{i-1} \exp(\lambda_i t),$$

esto es

$$z(t) = z_* + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{g_i-1} A_{ij} t^{i-1} \exp(\lambda_i t) + \mathcal{O}(A^2),$$

en términos de la variable original [22]

$$y(x) = x^p \left[z_* + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{g_i-1} A_{ij} (\ln x)^{i-1} x^{i\lambda} + \mathcal{O}(A^2) \right]. \quad (4.14)$$

Evidenciando que los logaritmos pueden surgir de causas tan mundanas como una raíz repetida en una EDO autónoma linealizada. Una discusión más amplia se puede consultar en [22].

4.3.3. Solución tipo Frobenius (Teorema 3)

Más allá de la aproximación linealizada en la vecindad del punto fijo, sistemáticamente se puede escribir la expansión como

$$z(t) = z_* + \epsilon z_1(t) + \epsilon^2 z_2(t) + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

si $\epsilon \ll 1$, se tiene $\bar{F}(z(t)) = 0$, lo cual se reduce a:

$$\bar{F}(z(t)) = \bar{F}(z_*) + \epsilon \bar{F}_1(z_1(t)) + \epsilon^2 [\bar{F}_1(z_2(t)) + \bar{F}_2(z_1(t), z_1(t))] + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

donde $\bar{F}_2(z_1(t), z_1(t))$ representa la derivada funcional de segundo orden de $\bar{F}(z(t))$ alrededor del punto fijo, que será un operador diferencial cuadrático con coeficientes constantes. Esto implica por tanto [22]

$$\bar{F}_1(z_1(t)) = 0, \quad \text{y} \quad \bar{F}_1(z_2(t)) = -\bar{F}_2(z_1(t), z_1(t)),$$

esto es:

$$z_2 = -F_1^{-1}[F_2(z_1, z_1)].$$

Luego, sabemos que $z_1 = \sum_{i=1}^n A_i \exp(\lambda_i, t)$, entonces la función z_2 consiste en trozos de la forma $\exp([\lambda_i + \lambda_j]t)$, esto es:

$$z_2(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B(A_i, A_j) \exp([\lambda_i + \lambda_j]t),$$

con $B(A_i, A_j)$, siendo una función complicada del A_i que es deducible de la forma precisa de \bar{F}_1 y \bar{F}_2 .

Recolectando términos:

$$z = z_* + \sum_{i=1}^n A_i \exp(\lambda_i t) + \sum_{i=1}^{jn} \sum_{j=1}^n B(A_i, A_j) \exp([\lambda_i + \lambda_j]t) + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

En términos de la variable original $y(x)$,

$$y(x) = x^p \left[z_* + \sum_{i=1}^n A_i x^{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{jn} \sum_{j=1}^n B(A_i, A_j) x^{\lambda_i + \lambda_j} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right],$$

siendo $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ y $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, formamente se tiene [22]:

$$z(t) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n} A(\mathbf{m}) \exp\{\lambda \cdot \mathbf{m}\}.$$

Esta serie puede ser asintótica, en general no hacemos afirmaciones sobre la convergencia, aunque en casos específicos a menudo converge en una región abierta que rodea el punto fijo. Los coeficientes $A(\mathbf{m})$ ciertamente no son independientes sino que están relacionados entre sí a través de la ecuación diferencial subyacente.

Cerca del punto fijo nuestra ecuación se convierte, en términos de las variables originales $y(x)$ en:

$$y(x) = x^p \cdot \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n} A(\mathbf{m}) x^{\lambda \cdot \mathbf{m}}. \quad (4.15)$$

Este tipo de serie es similar a Frobenius en el sentido de que el prefactor x^p estará gobernado por la solución de fondo, mientras que los exponentes de la serie de potencia estarán dados por el problema linealizado. Lo anterior se sintetiza en el siguiente Teorema [22]:

Teorema 3 [SOLUCIÓN TIPO FROBENIUS].

Cualquier ecuación diferencial ordinaria de n -ésimo orden que sea invariante de escala y cuya ecuación autónoma asociada posea un punto fijo tendrá genéricamente una solución formal en forma de una serie de potencia tipo Frobenius (4.15) en un vecindario cercano al punto fijo .

Hay que mencionar que este Teorema se mantiene sólo si las raíces del problema linealizado son distintas. Para las raíces con multiplicidad, uno debería esperar que las series parecidas a Frobenius anteriores sean modificadas por varios términos logarítmicos. De hecho, según el teorema de expansión de Liapunov, los coeficientes $A(\mathbf{m})$ se convierten en polinomios en t , y por lo tanto polinomios en $\ln z$ en la expresión (4.14). La serie resultante es demasiado complicada para ser de uso inmediato. afortunadamente en nuestro trabajo no nos encontramos ante esta dificultad en las ecuaciones RTOV-autónomas.

4.4. Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias invariantes de escala de orden n

Los resultados de los Teoremas (1) a (3), pueden generalizarse a sistemas de \mathcal{N} ecuaciones diferenciales ordinarias de n -ésimo orden acopladas. En la generalización a sistemas habitualmente se tienen dos formas de trabajar [22, 47, 48] las cuales estriban en:

- (I) Utilizar el hecho de que un sistema acoplado de \mathcal{N} ecuaciones diferenciales de orden n siempre se puede reducir a un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales de primer orden $N = \mathcal{N} \cdot n$.
- (II) Usar el hecho de que un sistema acoplado de \mathcal{N} ecuaciones diferenciales de orden n genéricamente puede ser “desacoplado” al reducirse a una sola ecuación diferencial de orden $N = \mathcal{N} \cdot n$ en una de las variables dependientes, aunque no existe un algoritmo constructivo para hacerlo. En nuestro caso particular implementaremos esta ruta con $\mathcal{N} = 2$

Comencemos considerando la ecuación

$$[F] = 0,$$

donde $[F]$ es un vector columna de EDOs

$$[F] = \begin{pmatrix} F_1 \left(z_1, \dot{z}_1, \dots, z_2, \dot{z}_2, \dots, z_N, \dots, \frac{d^n z_N}{dt^n} \right) \\ F_2 \left(z_1, \dot{z}_1, \dots, z_2, \dot{z}_2, \dots, z_N, \dots, \frac{d^n z_N}{dt^n} \right) \\ \vdots \\ F_i \left(z_1, \dot{z}_1, \dots, z_2, \dot{z}_2, \dots, z_N, \dots, \frac{d^n z_N}{dt^n} \right) \end{pmatrix},$$

de forma análoga a la condición requerida para una ecuación invariante de escala; decimos que este sistema es invariante de escala sí, el sistema permanece sin cambios ante la transformación:

$$x \mapsto ax, \quad y \quad [Y(x)] \mapsto [A][Y(x)],$$

donde

$$[\mathring{A}] = \begin{pmatrix} a^{p_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a^{p_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a^{p_i} \end{pmatrix},$$

y $[Y(x)]$ es un vector columna de variables dependientes, con esto, la ecuación $[F] = 0$ permanece invariante. Es decir se han elegido nuestras variables dependientes $y_i(x) \dots y_N(x)$ de alguna manera conveniente para hacer que sus propiedades de transformación de escala sean simples e independientes entre sí, esto casi siempre ocurrirá automáticamente en sistemas de EDOs derivadas de un problema físico subyacente [22].

En la sección anterior mencionamos que cualquier ecuación diferencial de n -ésimo orden en una sola variable dependiente que sea invariante de escala se puede expresar en su forma asociada autónoma aplicando las sustituciones descritas en las ecuaciones (4.5). Por lo tanto, se transfiere que podemos hacer el mismo tipo de sustitución en cada ecuación del sistema. En consecuencia, podemos definir un nuevo vector columna \bar{F} de la siguiente manera:

$$[\bar{F}] = \begin{pmatrix} \bar{F}_1 \left(z_1, \dot{z}_1, \dots, z_2, \dot{z}_2, \dots, z_N, \dots, \frac{d^n z_N}{dt^n} \right) \\ \bar{F}_2 \left(z_1, \dot{z}_1, \dots, z_2, \dot{z}_2, \dots, z_N, \dots, \frac{d^n z_N}{dt^n} \right) \\ \vdots \\ \bar{F}_i \left(z_1, \dot{z}_1, \dots, z_2, \dot{z}_2, \dots, z_N, \dots, \frac{d^n z_N}{dt^n} \right) \end{pmatrix},$$

donde para cada $i \in [1, N]$, se tiene

$$y_i(x) = x^{p_i} \omega_i(x) = \exp(tp_i) z_i(t).$$

Del análisis anterior sabemos que cada ecuación en esta nueva ecuación vectorial $\bar{F} = 0$ es autónoma, y por lo tanto, todo el sistema es autónomo. Supongamos que este sistema autónomo tiene un punto fijo $[Z^*]$ tal que todas las derivadas de z con respecto a t en $[\bar{F}]$ se anulan en el punto fijo, es decir:

$$[Z^*] = \begin{pmatrix} z_1^* \\ z_1^* \\ \vdots \\ z_N^* \end{pmatrix},$$

esto es:

$$[Z(t)] = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_N(t) \end{pmatrix} = [Z^*] = \begin{pmatrix} z_1^* \\ z_1^* \\ \vdots \\ z_N^* \end{pmatrix},$$

una solución específica para el sistema de EDOs. Sustituyendo de nuevo obtenemos las siguientes ecuaciones para $[Y(x)]$:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_N(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{p_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x^{p_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x^{p_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^* \\ z_2^* \\ \vdots \\ z_N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^* x^{p_1} \\ z_2^* x^{p_2} \\ \vdots \\ z_N^* x^{p_N} \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Lo anterior se formula en el siguiente Teorema:

Teorema 4.

Cualquier sistema de ecuaciones diferenciales de n -ésimo orden que sea invariante de escala, y cuyo sistema asociado de ecuaciones autónomas posea un punto fijo, tendrá soluciones en forma de una colección de leyes de potencia (ecuación 4.16), con exponentes dados por la condición de invarianza de escala.

4.4.1. Solución linealizada (Teorema 5)

Si linealizamos el sistema de n -ésimo orden, entonces para cada \bar{F}_i obtendremos una ecuación diferencial lineal. Específicamente

$$z_i(t) = z_i^* + \epsilon z_{1,i}(t) + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

entonces

$$\bar{F}_i(z_j) = \bar{F}_i(z_j^*) + \sum_{j=1}^n \{\bar{F}_1\}_{ij}(z_{1,j}) + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

donde $\{\bar{F}_1\}_{ij}$ son operadores diferenciales lineales que conducen a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales autónomas

$$\sum_{j=1}^n \{\bar{F}_1\}_{ij}(z_{1,j}) = 0.$$

Esto implica que cada uno de los $\{\bar{F}_1\}_{ij}$ es un polinomio de coeficiente constante en d/dt

$$\{\bar{F}_1\}_{ij} = P_{ij} \left(\frac{d}{dt} \right).$$

Suponiendo una solución de la forma $z_{1,j}(t) = A_j e^{\lambda t}$ se tiene la ecuación vectorial:

$$\sum_{j=1}^n P_{ij}(\lambda) A_j = 0.$$

Hay una solución no trivial si y sólo si la matriz $P_{ij}(\lambda)$ es singular ($\det \{P_{ij}(\lambda)\} = 0$), en cuyo caso A_i se corresponde al vector propio singular. Dado que cada elemento de la matriz $P_{ij}(\lambda)$ es en sí mismo un polinomio de orden n , (donde n es el orden de las ecuaciones diferenciales individuales del sistema), el determinante es un polinomio de orden $N = \mathcal{N} \cdot n$ que tiene hasta N raíces. Asumamos que las raíces son distintas y llamemos a λ_α con $\alpha \in (1, N)$ al autovector corresponde $(A_\alpha)_i$. Mientras las raíces sean distintas, estos vectores propios, multiplicados por los exponenciales asociados, abarcarán el espacio de la solución y podemos escribir la solución general de nuestro sistema autónomo como [22]:

$$z_{1,i} = \sum_{\alpha=1}^N (A_\alpha)_i \exp(\lambda_\alpha t).$$

En términos de la ecuación original

$$y_i(x) = x^{p_i} \left\{ z_i^* + \sum_{\alpha=1}^N (A_\alpha)_i x^{\lambda_\alpha} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right\}. \quad (4.17)$$

Lo anterior se codifica en el siguiente Teorema:

Teorema 5.

Cualquier sistema de ecuaciones diferenciales de n -ésimo orden que sea invariante de escala y cuya ecuación autónoma asociada posea un punto fijo; genéricamente tendrá soluciones en forma de una colección de leyes de potencia (ecuación 4.17) en un vecindario cercano al punto fijo. Los prefactores $[x^P]$ se regirán por la solución de fondo, mientras que los λ_α viene dado por el problema linealizado.

De forma análoga como se discutió en el Teorema (2): si las raíces presentan multiplicidad, se puede construir una ecuación mucho más complicada que involucra logaritmos en x y por tanto no es aplicable el Teorema (5).

4.4.2. Solución tipo Frobenius (Teorema 6)

Podemos ir más allá de la aproximación linealizada en la vecindad del punto fijo y escribir

$$z_i = z_i^* + \epsilon z_{1,i} + \epsilon^2 z_{2,i} + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

entonces

$$\begin{aligned} F_i(z_j) &= F_i(z_j^*) + \epsilon \sum_{j=1}^n \{\bar{F}_1\}_{ij}(z_{1,j}) \\ &+ \epsilon^2 \left[\sum_{j=1}^N \{\bar{F}_1\}_{ij}(z_{2,j}) \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \{\bar{F}_2\}_{ijk}(z_{1,j}, z_{1,k}) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \end{aligned}$$

donde $\{\bar{F}_2\}_{ijk}(z_{1,j}, z_{1,k})$ representa la derivada funcional de segundo orden de $\{\bar{F}\}_i(\cdot)$ alrededor del punto fijo $[Z^*]$. Análogamente al Teorema (3) se obtiene [22]:

$$z_{2_i} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \{B(A_\alpha, A_\beta)\}_i \exp([\lambda_\alpha + \lambda_\beta]t).$$

Sustituyendo en la solución para $y_i(x)$ se obtiene una solución de la forma:

$$y_i(x) = x^{p_i} [z_i^*],$$

regresando a la variable original $y_i(x)$

$$y_i(x) = x^{p_i} \left[z_i^* + \sum_{\alpha=1}^N \{A_\alpha\}_i x^{\lambda_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \{B(A_\alpha, A_\beta)\}_i x^{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right],$$

de forma general, siendo $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ y $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, se tiene:

$$y_i(x) = x^{p_i} \cdot \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n} \{A(\mathbf{m})\}_i x^{\lambda \cdot \mathbf{m}}, \quad (4.18)$$

con lo cual se formula el siguiente Teorema:

Teorema 6.

Cualquier sistema de ecuaciones diferenciales de n -ésimo orden que sea invariante a escala y cuya ecuación autónoma asociada posea puntos fijos z_{i^} tendrá genéricamente una solución en forma de una serie de potencia tipo Frobenius (ecuación 4.18) en un vecindario cercano al punto fijo . Los prefactores x^{p_i} se regirán por la solución de fondo, mientras que los exponentes de la serie de potencia se darán por el problema linealizado.*

En analogía al Teorema (3), existe un requisito explícito de que los exponentes que surgen del problema linealizado sean distintos, de lo contrario (según el teorema de expansión de Liapunov) se encontrarán expresiones polinómicas desordenadas en $\log x$ [22].

Resultados

En este capítulo mostraremos que el sistema de ecuaciones diferenciales autónomas (5.2) asociadas al sistema RTOV, tiene dos puntos fijos (5.6, 5.7), daremos la solución especial de Misner-Zapolsky en teoría Rastall (5.10, 5.11), acotaremos el dominio del parámetro de Rastall λ para el cual se tenga dinámica espiral en el espacio fase (5.12) y no viole las condiciones de energía del Capítulo III. Finalmente implementaremos el formalismo de Frobenius generalizado para dar soluciones analíticas alrededor del origen.

5.1. Descripción cualitativa de estrellas en equilibrio en teoría Rastall

5.1.1. Puntos fijos del sistema dinámico

En la sección (3.2.1) se dedujo el sistema dinámico:

$$S_1 = \begin{cases} \dot{m} = \left(\frac{3\gamma(\lambda - 1) + 2}{2(2\lambda - 1)} \right) \mu - m \\ \dot{\mu} = \frac{\mu}{1 - 2m} \left[2 - \left(\frac{8 - 2\gamma(4\lambda + 1)}{2 - \gamma(\lambda + 1)} \right) m - \gamma\mu \right] \end{cases}. \quad (5.1)$$

Las ecuaciones (5.1) forman un sistema autónomo plano de ecuaciones diferenciales; la naturaleza de las soluciones se pueden analizar en el espacio fase.

De forma compacta, S_1 (5.1) lo podemos representar mediante:

$$S_1 = \begin{cases} \dot{m} = g_1(\lambda, \gamma)\mu - m \\ \dot{\mu} = \frac{\mu}{1 - 2m} \left(2 - g_2(\lambda, \gamma)m - \gamma\mu \right), \end{cases} \quad (5.2)$$

donde

$$g_1(\lambda, \gamma) = \frac{4 - 3\gamma}{4(2\lambda - 1)} + \frac{3\gamma}{4}, \quad g_2(\lambda, \gamma) = 8 - \frac{3\gamma - 4}{\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)\gamma - 1}. \quad (5.3)$$

Consideremos $\lambda = 1$ que corresponde al valor del parámetro de Rastall donde se recupera la RG, sustituyendo este valor en las funciones (5.3) se obtienen:

$$g_1(1, \gamma) = 1, \quad g_2(1, \gamma) = \frac{5\gamma - 4}{\gamma - 1}, \quad (5.4)$$

con lo que (5.1) se reduce al sistema dinámico (5.5) estudiado por Collins [43]

$$\text{Collins} = \begin{cases} \frac{dm}{dt} = \mu - m \\ \frac{d\mu}{dt} = \frac{\mu}{1 - 2m} \left[2 - \left(\frac{5\gamma - 4}{\gamma - 1} \right) m - \gamma\mu \right]. \end{cases} \quad (5.5)$$

Vemos que (5.5) es un caso particular de ponderación ($\lambda = 1$) en la presión y la masa con pesos igual a las funciones g_1 y g_2 , en consecuencia cualquier solución del sistema de Einstein se mapea en una solución del sistema de Rastall. Esta observación nos permitirá argumentar más adelante que al describir interiores estelares en teoría Rastall, se obtienen, en comparación con el marco de RG objetos compactos con mayor masa en menor radio. Con este señalamiento nuestro propósito ahora consiste en mostrar que la solución especial de Misner-Zapolsky se construye a partir de los puntos fijos del sistema (5.2).

Retomando nuestro análisis, los puntos fijos del sistema (5.2) son la solución de:

$$\dot{m} = \dot{\mu} = 0,$$

entonces: si $\frac{dm}{dr} = 0$ se tiene que $g_1\mu - m = 0$ de donde:

$$\tilde{m} = g_1\mu,$$

luego, si $\frac{d\mu}{dr} = 0$ se tiene que $\frac{\mu}{1 - 2m} = 0$ debe ser cero: de donde $\mu = m = 0$, o bien

5. RESULTADOS

se debe cumplir que $0 = 2 - g_2(g_1\mu) - \gamma\mu$, en consecuencia

$$\tilde{\mu} = \frac{2}{g_1g_2 + \gamma}.$$

Concluimos entonces que sistema RTOV (5.2) tiene dos puntos fijos: a saber $\mathbf{x}_1^* = (\mu_1^*, m_1^*) = (0, 0)$ y $\mathbf{x}_2^* = (\mu_2^*, m_2^*)$, de lo anterior tenemos:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} \mu_1^* \\ m_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} \mu_2^* \\ m_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1\mu \\ \frac{2}{g_1g_2 + \gamma} \end{pmatrix},$$

de forma explícita:

$$m_2^*(\lambda, \gamma) = \frac{1}{2} \left(\frac{(\gamma\lambda + \gamma - 2)(3\gamma\lambda - 3\gamma + 2)}{(7\lambda^2 - 4\lambda - 2)\gamma^2 + (2 - \lambda)4\gamma - 4} \right) \quad (5.6)$$

$$\mu_2^*(\lambda, \gamma) = 2 \left(\frac{2\lambda - 1}{3\gamma\lambda - 3\gamma + 2} \right) m_2^*. \quad (5.7)$$

Como hemos señalado: si $\lambda = 1$ el sistema se corresponde al marco relativista y el punto fijo \mathbf{x}_2 cuyas componentes son (5.6) y (5.7) toma la forma $\mathbf{x}_2^* \mapsto (\alpha, \alpha)$, donde

$$\alpha = \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma^2 + 4\gamma - 4}. \quad (5.8)$$

En este caso particular de $\lambda = 1$, \mathbf{x}_2^* , es un atractor cuando $t \mapsto \infty$. En consecuencia tiene asociado un comportamiento de inverso cuadrado (r^{-2}) para la presión [22]. Por otra parte \mathbf{x}_1^* es un punto silla del sistema al igual que ocurre en el caso Newtoniano y Relativista, este punto fijo se corresponde con un comportamiento cuadrático (r^2) tanto para la masa como para la presión en el centro de la estrella más un comportamiento irregular y sin interés físico para m que va como el inverso del radio $1/r$ [22]. (5.8) es el coeficiente en la solución especial de Misner y Zapolsky. En la Figura (5.1) mostramos el espacio fase del sistema RTOV con valores $\lambda = 1$, $\gamma = 3/2$.

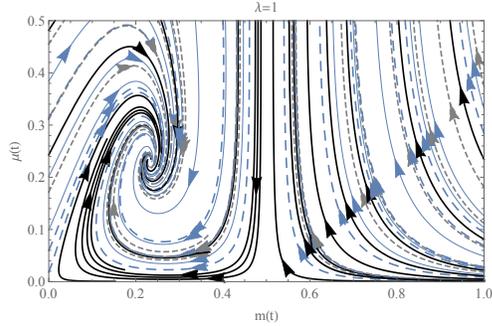


Figura 5.1: Curvas integrales del sistema (5.1) en la región $m > 0$, $\mu > 0$ para $\lambda = 1$. Las soluciones físicamente relevantes son la de Misner-Zapolsky (representada por el centro de la espiral) y la solución que comienza en el origen, y forman espirales en el centro.

5.1.1.1. Solución especial de Misner-Zapolsky

Para modelos calculados con ecuaciones de estado politrópica de la forma $P = kn^\gamma$; donde n es la densidad del número bariónico, k y γ constantes, se deduce mediante argumentos basados en física de partículas que: la ecuación de estado para un gas de temperatura cero es $P = (\gamma - 1)\rho$ [1]. En ésta línea nuestro trabajo resulta novedoso porque hemos inducido mediante homologías una ecuación de este tipo sin aludir a circunstancias físicas.

A densidades muy por encima de las densidades nucleares, no se tiene información empírica sobre el comportamiento de un gas bariónico degenerado, pero el caso $\gamma = 2$ representaría una presión extremadamente alta, ya que la velocidad del sonido, $(dp/d\rho)^{1/2}$, es igual a la velocidad de la luz para este valor de γ , con este argumento γ queda restringido al intervalo $\gamma \in (1, 2)$. La ecuación de estado de un gas ideal de Fermi tiene por ecuación de estado $P = \frac{1}{3}\rho$, es decir $\gamma = \frac{4}{3}$, notemos que para éste valor en las funciones (5.3) se tiene $g_1(\lambda, 4/3) = 1$ y en consecuencia la ecuación para la masa en las ecuaciones RTOV se reduce al caso de RG.

Misner-Zapolsky se dieron cuenta que con la excepción del denominador de Schwarzschild, $(1 - 2M/r)$ en la ecuación de la presión del sistema TOV, ésta es matemáticamente idéntica al problema del equilibrio hidrostático para una esfera de gas isotérmica clásica. Esta analogía ayuda a encontrar la solución

$$\rho = a/16\pi^2,$$

5. RESULTADOS

donde

$$a = \frac{8(\gamma - 1)}{(\gamma + 2)^2 - 8} \leq 1.$$

Esta solución tiene una densidad central infinita, ρ_c , por lo que podemos usarla como una solución asintótica, válida cuando $\rho_c \gg \min$.

Retomando nuestro análisis dinámico en la Figura (5.1) representamos la región físicamente relevante $m > 0$, $\mu > 0$. Las soluciones para las que $m > 1/2$ no son admisibles, ya que corresponden a estrellas que se encuentran completamente dentro de sus radios de Schwarzschild, como por ejemplo agujeros negros. Las soluciones para las cuales $0 < m < 1/2$ no son realistas ya que cruzan el eje μ en t finito.

Una solución aceptable se representa por el centro de la espiral, donde

$$\mu = m = \frac{\gamma - 1}{(\gamma + 2)^2 - 8},$$

entonces se tiene la solución:

$$\rho(r) = \left(\frac{1}{2\pi} \frac{\gamma - 1}{(\gamma + 2)^2 - 8} \right) \frac{1}{r^2}, \quad m(r) = \left(\frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 2)^2 - 8} \right) r \quad (5.9)$$

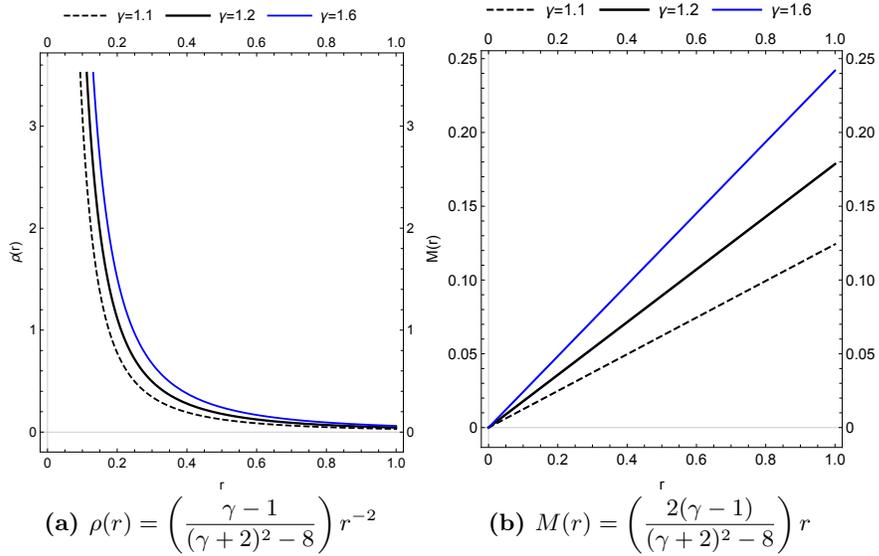


Figura 5.2: Solución especial de Misner-zapolsky.

(5.9) es la solución especial de Misner y Zapolsky para $\lambda = 1$. Esta solución es el análogo relativista de una solución especial descrita por Chandrasekhar para politopos en el marco Newtoniano con un índice n que satisface $3 < n \leq \infty$. Las soluciones físicamente relevantes de la Figura (5.1) comienza en el origen y se mueve en espiral hacia su centro, estas soluciones tienen la propiedad de que p es finito y distinto de cero en $r = 0$, mientras que la densidad disminuye aproximadamente con el cuadrado inverso del radio como en la solución de Misner-zapolsky.

De forma general, siguiendo la misma heurística que en RG tenemos que una solución del sistema RTOV es:

$$\rho(r) = \left(\frac{(\gamma\lambda + \gamma - 2)(3\gamma\lambda - 3\gamma + 2)}{(7\lambda^2 - 4\lambda - 2)\gamma^2 + (2 - \lambda)4\gamma - 4} \right) \frac{1}{2\pi r^2}, \quad (5.10)$$

$$m(r) = \left(\frac{2\lambda - 1}{3\gamma\lambda - 3\gamma + 2} \right) \left(\frac{(\gamma\lambda + \gamma - 2)(3\gamma\lambda - 3\gamma + 2)}{(7\lambda^2 - 4\lambda - 2)\gamma^2 + (2 - \lambda)4\gamma - 4} \right) r, \quad (5.11)$$

es claro que, cuando $\lambda = 1$ las funciones (5.11) y (5.10) se reducen a la solución de Misner-zapolsky. Notemos en principio que, si $\lambda = 3/5$, $\gamma = 7/5$ y comparamos con RG se obtiene la conclusión que la teoría Rastall permite la existencia de objetos compactos con mayor masa en el mismo radio en relación a la RG.

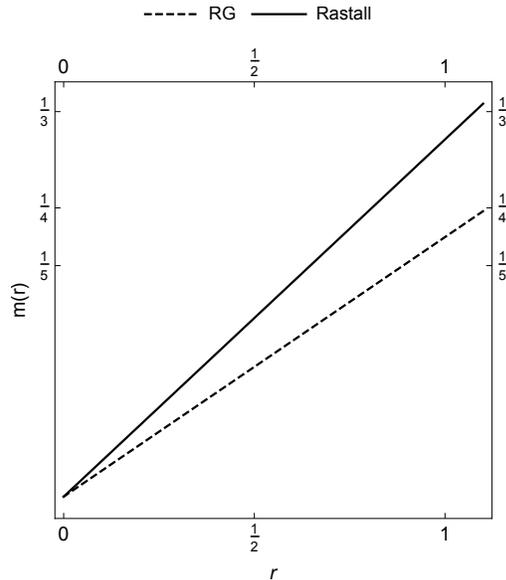


Figura 5.3: Comparación entre las soluciones de Misner-Zapolsky fijando $\gamma = 7/5$ y Misner-Zapolsky-Rastall con el mismo valor de γ y un valor del parámetro de Rastall $\lambda = 3/5$.

Sin embargo, no todo el dominio parametral $0 \leq \lambda \leq 1$, $1 < \gamma < 2$, genera este comportamiento, como hemos comentado al inicio del capítulo; no todas las soluciones son físicamente aceptables. Tenemos que restringir aún más el dominio de los parámetros restringiendo sólo valores que generen dinámica espiral, en el Apéndice (A.2) mostramos una película del comportamiento del sistema fijando distintos valores del parámetro de Rastall λ y haciendo variar el parámetro de estado γ ; esto con el propósito de estudiar cualitativamente el comportamiento del sistema. Más aún, en secciones próximas haremos un análisis de los autovalores del sistema para restringir los parámetros.

5.1.2. Curvas Integrales del sistema dinámico

En este apartado hacemos algunas observaciones del comportamiento cualitativo, fijamos valores del parámetro del sistema, y más adelante buscaremos condiciones generales en las cuales \mathbf{x}_2^* es un punto atractor.

‘Parámetro Rastall $\lambda \in (0, 1]$, parámetro EoS $\gamma \in (1, 2)$.

De la Figura (3.4) notamos que los valores (λ, γ) que no violan las condiciones de energía, son los mostrados en las siguientes curvas integrales. Para construir estas curvas hemos integrado el sistema mediante métodos de Runge-Kutta, sin embargo los que nos interesa estudiar es la cualidad espiral de la solución.

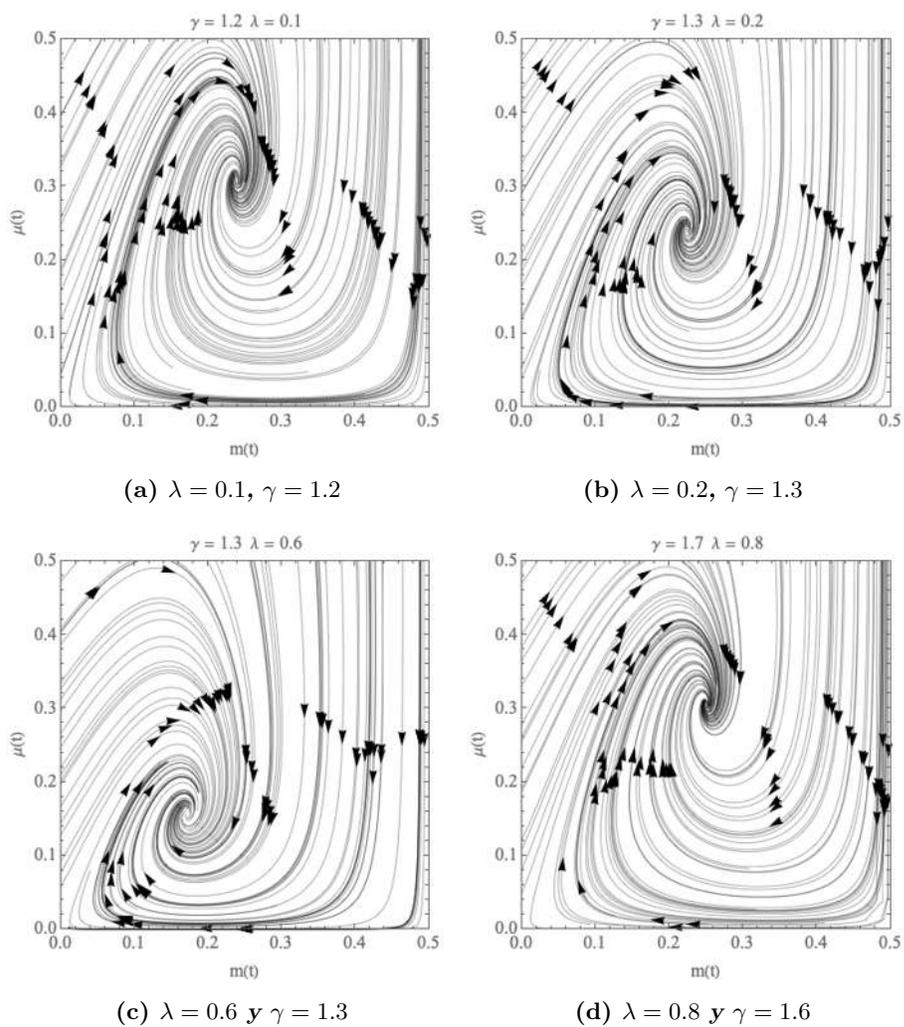


Figura 5.4: Curvas integrales para distintos valores de λ y γ tales que no violan las condiciones de energía.

5.1.3. Puntos fijos del sistema dinámico

Para implementar el formalismo de serie de Frobenius Generalizado planteamos la hipótesis que la presión y la masa tendrán una expansión en serie en forma de una ley de potencia iterada. Para determinar los exponentes de la potencia, analicemos cada punto fijo con más detalle. La matriz jacobiana asociada al sistema (5.1) esta dada por:

$$J = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

donde

$$A = \frac{\partial f_1}{\partial m}, \quad B = \frac{\partial f_1}{\partial \mu}, \quad C = \frac{\partial f_2}{\partial m}, \quad D = \frac{\partial f_2}{\partial \mu},$$

siendo

$$f_1(m, \mu) = g_1\mu - m \quad f_2(m, \mu) = \mu(1 - 2m)^{-1}(2 - g_2m - \gamma\mu).$$

Por completos presentamos las superficies asociadas a las funciones g_1 y g_2 .

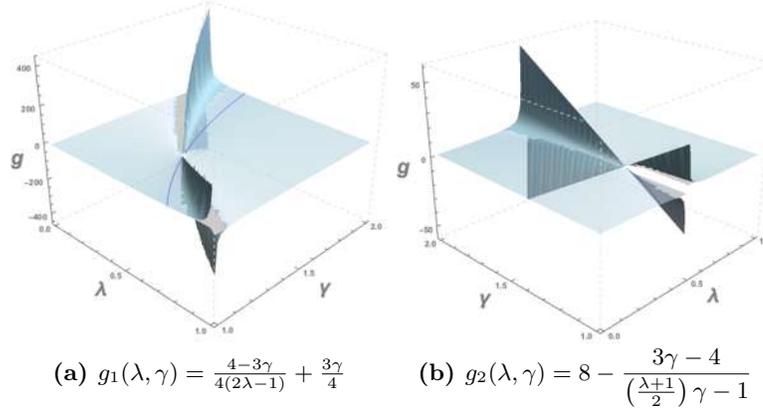


Figura 5.5: Funciones g_1 y g_2 en la región $\lambda \in (0, 1)$, $\gamma \in (1, 2)$.

Calculando se obtiene:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & g_1 \\ \frac{\mu}{(1-2m)^2}(4 - g_2 - 2\gamma\mu) & \frac{1}{1-2m}(2 - mg_2 - 2\gamma\mu) \end{pmatrix},$$

de forma explícita la matriz J toma la forma:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{2((\gamma\lambda + \gamma - 2)(\gamma\mu - 1) + m(4\gamma\lambda + \gamma - 4))}{(2m - 1)(\gamma\lambda + \gamma - 2)} & -\frac{2\gamma\mu(\lambda(\gamma\mu + 2) + (\gamma - 2)\mu - 1)}{(1 - 2m)^2(\gamma\lambda + \gamma - 2)} \\ \frac{3\gamma(\lambda - 1) + 2}{4\lambda - 2} & -1 \end{pmatrix},$$

con $m = m_2^* = g_1\mu$ y $\mu = \mu_2^* = \frac{2}{g_1g_2 + \gamma}$ (linealización sobre $\tilde{\mathbf{X}}_2$) se obtiene:

$$J \Big|_{\mathbf{x}_2^*} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{g_1}{2\gamma} \\ \frac{2g_2}{g_1(g_2 - 4) + \gamma} & \frac{g_1}{g_1(g_2 - 4) + \gamma} \end{pmatrix},$$

En consecuencia, linealizando sobre el punto fijo (m_2^*, μ_2^*) se tiene el siguiente sistema:

$$S_2^{lineal} = \begin{cases} \frac{d\hat{m}}{dt} = -A\hat{\mu} + B\hat{m}, \\ \frac{d\hat{\mu}}{dt} = C\hat{\mu} - \hat{m} \end{cases}$$

donde

$$A = \frac{2 - \gamma(\lambda + 1)}{\gamma(2\lambda - 1)}, \quad B = -\frac{2(4\gamma\lambda + \gamma - 4)}{\gamma^2(2\lambda - 1)}, \quad C = \frac{3\gamma(\lambda - 1) + 2}{4\lambda - 2},$$

\hat{m} y $\hat{\mu}$ son pequeñas perturbaciones. Por lo tanto, alrededor del punto estacionario las soluciones son de la forma:

$$\begin{pmatrix} m(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix} = \exp \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ C & -1 \end{bmatrix} (t - t_i) \right\} \begin{pmatrix} m(t_i) \\ \mu(t_i) \end{pmatrix},$$

Los exponentes de la ley de potencia están dados por los valores propios de esta matriz. Para construir el polinomio característico necesitamos información de la traza y del determinante:

$$\det J(\lambda, \gamma, \tilde{\mathbf{X}}_2) = \frac{2(\gamma + g_1g_2)}{\gamma + g_1(g_2 - 4)}, \quad \text{tr } J(\lambda, \gamma, \tilde{\mathbf{X}}_2) = \frac{2(g_1 + 1)}{\gamma + g_1g_2},$$

5. RESULTADOS

luego los autovalores asociados a la matriz son $J(\lambda, \gamma, \tilde{\mathbf{X}}_2)$

$$\delta(\lambda, \gamma)_{\pm} = -\frac{1}{2} \left(\frac{3\gamma \pm g_1 (g_2 - 4)}{\gamma + g_1 (g_2 - 4)} + \frac{\sqrt{\gamma^2 + 2\gamma g_1 (4 - 5g_2) - g_1^2 (g_2 - 4) (7g_2 + 4)}}{(\gamma + (g_2 - 4) g_1)} \right).$$

Entonces, las soluciones linealizadas se acercan exponencialmente al punto crítico en t cuando $\exp(\delta t) = r^{\delta}$.

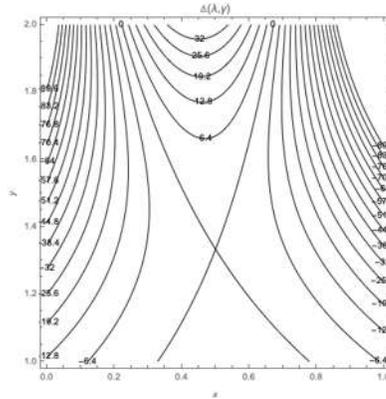
5.1.3.1. Análisis de los autovalores δ_{\pm}

Sea

$$\Delta(\lambda, \gamma) = \gamma^2 (-47\lambda^2 + 32\lambda + 16) + 4\gamma(5\lambda - 16) + 36, \quad (5.12)$$

el discriminante de los autovalores δ_{\pm} . De la Tabla (A.1) se tiene que:

- (I) Si $\Delta < 0$ entonces se tendrá que el punto fijo será una espiral estable.
- (II) Si $\Delta = 0$ se tendrán vectores propios inexistentes.
- (III) Si $\Delta > 0$ se tendrán que el punto fijo será un nodo inestable.



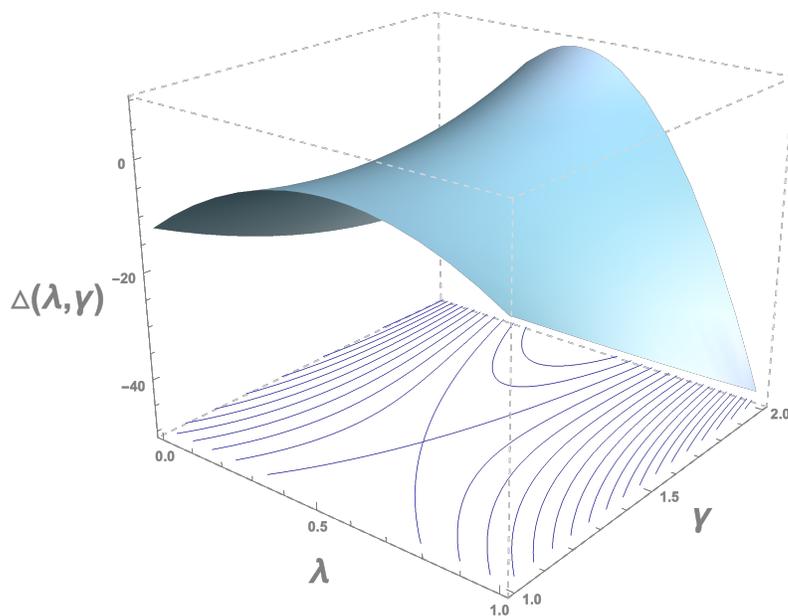
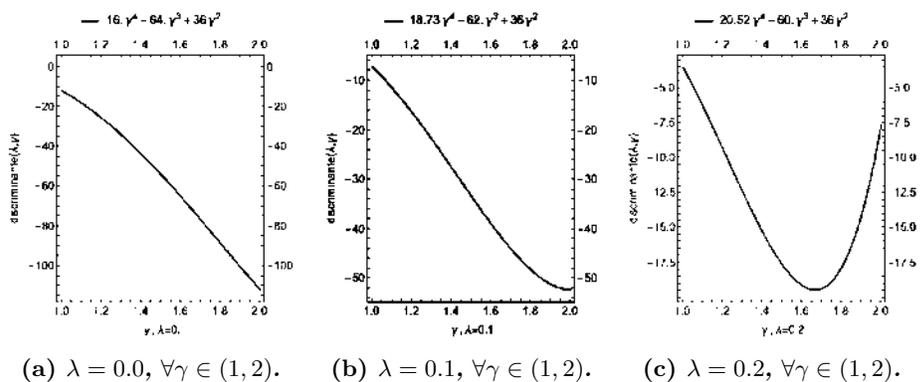


Figura 5.7: superficie $\Delta(\lambda, \gamma)$.

Los intervalos donde $\Delta(\lambda, \gamma) < 0$ (autovalores complejos) se muestran en la Figura (5.8)



5. RESULTADOS

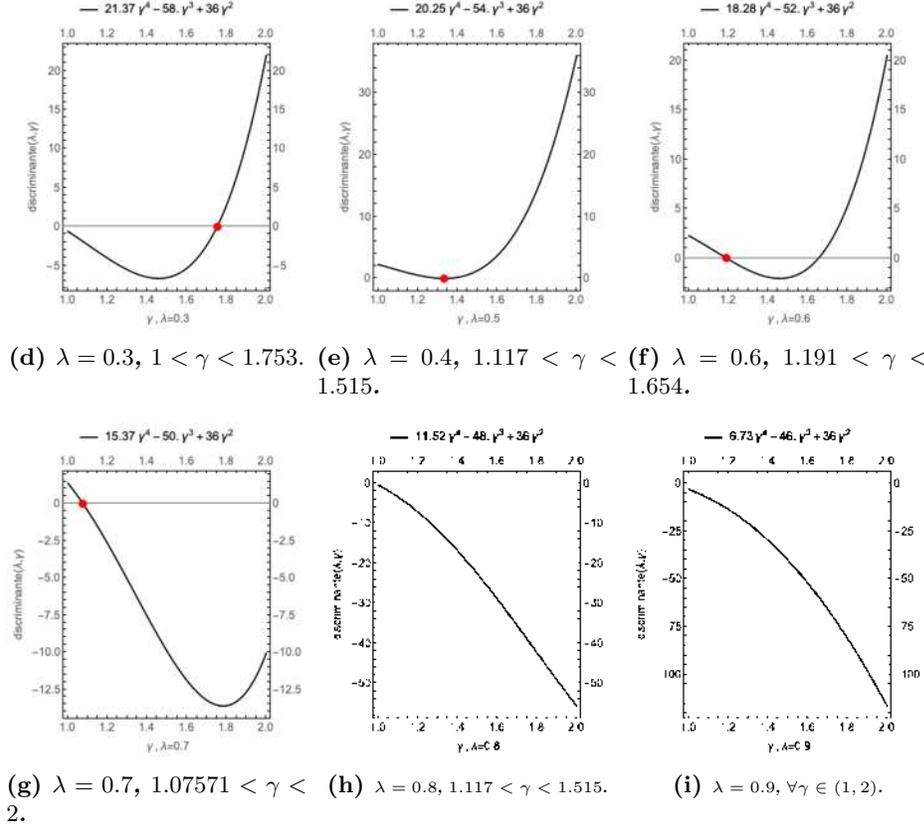


Figura 5.8: Regiones donde el discriminante es negativo.

Respecto a (5.1.3.1), para encontrar el contorno tal que $\Delta(\lambda, \gamma) < 0$, encontremos primero los valores propios que general vectores propios inexistentes, estos valores propios son generados mediante $\Delta(\lambda, \gamma) = 0$: resolviendo para λ se obtiene:

$$\gamma_{\pm}(\lambda) = 2 \left(\frac{5\lambda - 16}{47\lambda^2 - 32\lambda - 16} \pm \frac{4\sqrt{7}\sqrt{4\lambda^2 - 4\lambda + 1}}{47\lambda^2 - 32\lambda - 16} \right),$$

ya que asumimos $\lambda > 0$ la expresión anterior la reescribimos como:

$$\gamma_{\pm}(\lambda) = \frac{2(\pm 4\sqrt{7}|1 - 2\lambda| + 5\lambda - 16)}{47\left(\lambda - \frac{16}{47}\right)^2 - \frac{1008}{47}},$$

estas curvas se muestran en la Figura (5.9) que resume nuestro análisis, así los valores (λ, γ) dentro de la región azul generan dinámica espiral.

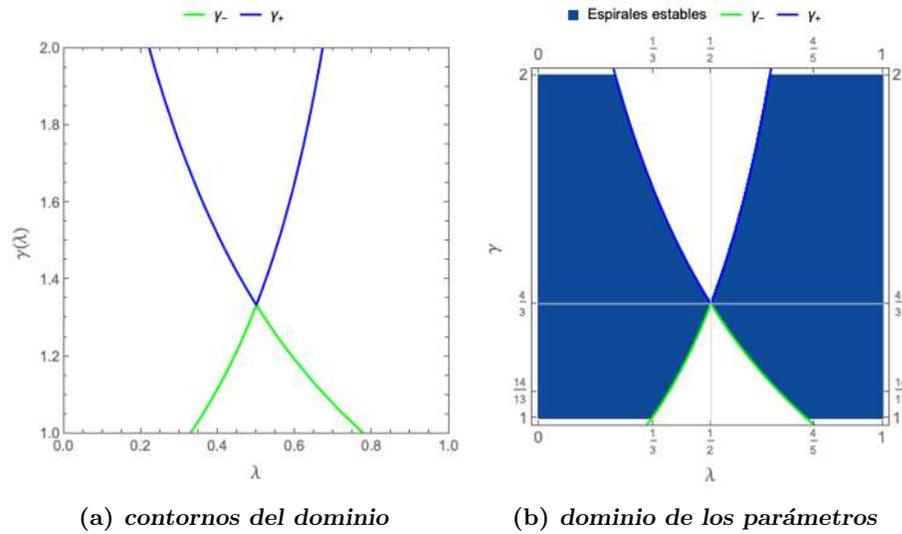


Figura 5.9: Región de los parámetros donde los autovalores son espirales estables.

Sin embargo, este dominio de los parámetros debe cumplir además las condiciones de energía descritas en el capítulo 2. Si superponemos ambas regiones obtenemos:

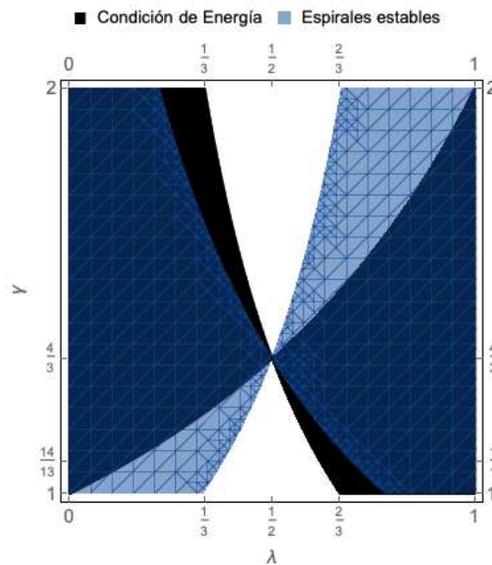


Figura 5.10: Superposición de regiones: intersección de las condiciones de energía y el dominio donde se tienen espirales estables.

5. RESULTADOS

llamemos

$$\gamma_1(\lambda) = \frac{32 - 10\lambda}{\frac{1008}{47} - 47 \left(\lambda - \frac{16}{47}\right)^2} - \frac{8\sqrt{7}|1 - 2\lambda|}{\frac{1008}{47} - 47 \left(\lambda - \frac{16}{47}\right)^2}, \quad (5.13)$$

$$\gamma_2(\lambda) = \frac{32 - 10\lambda}{\frac{1008}{47} - 47 \left(\lambda - \frac{16}{47}\right)^2} + \frac{8\sqrt{7}|1 - 2\lambda|}{\frac{1008}{47} - 47 \left(\lambda - \frac{16}{47}\right)^2}. \quad (5.14)$$

$$\gamma_3(\lambda) = \frac{2}{3\lambda}, \quad \gamma_4(\lambda) = \frac{2}{2 - \lambda}$$

De la figura (5.10) vemos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1/2} \gamma_1(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 1/2} \gamma_2(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 1/2} \gamma_3(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 1/2} \gamma_4(\lambda) = \frac{4}{3},$$

tomemos $(\lambda, \gamma) = \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$, como punto de referencia para analizar las siguientes regiones:

región 1 : $0 < \lambda < 1/2, \quad 1 < \gamma < 4/3,$

región 2 : $0 < \lambda < 1/2, \quad 4/3 < \gamma < 2,$

región 3 : $1/2 < \lambda < 1, \quad 1 < \gamma < 4/3,$

región 4 : $1/2 < \lambda < 1, \quad 4/3 < \gamma < 2.$

Distinguiremos cuatro casos en estas regiones:

- A1)** El conjunto para el cual los valores de los parámetros no se violen las condiciones de energía y se tenga un punto espiral.
- A2)** El conjunto para el cual se tenga dinámica espiral pero se violen las condiciones de energía.
- A3)** El conjunto donde se tengan condiciones de energía pero no dinámica espiral.
- A4)** El conjunto para el cual no se cumplen las condiciones de energía ni la condición de dinámica espiral.

5.1 Descripción cualitativa de estrellas en equilibrio en teoría Rastall

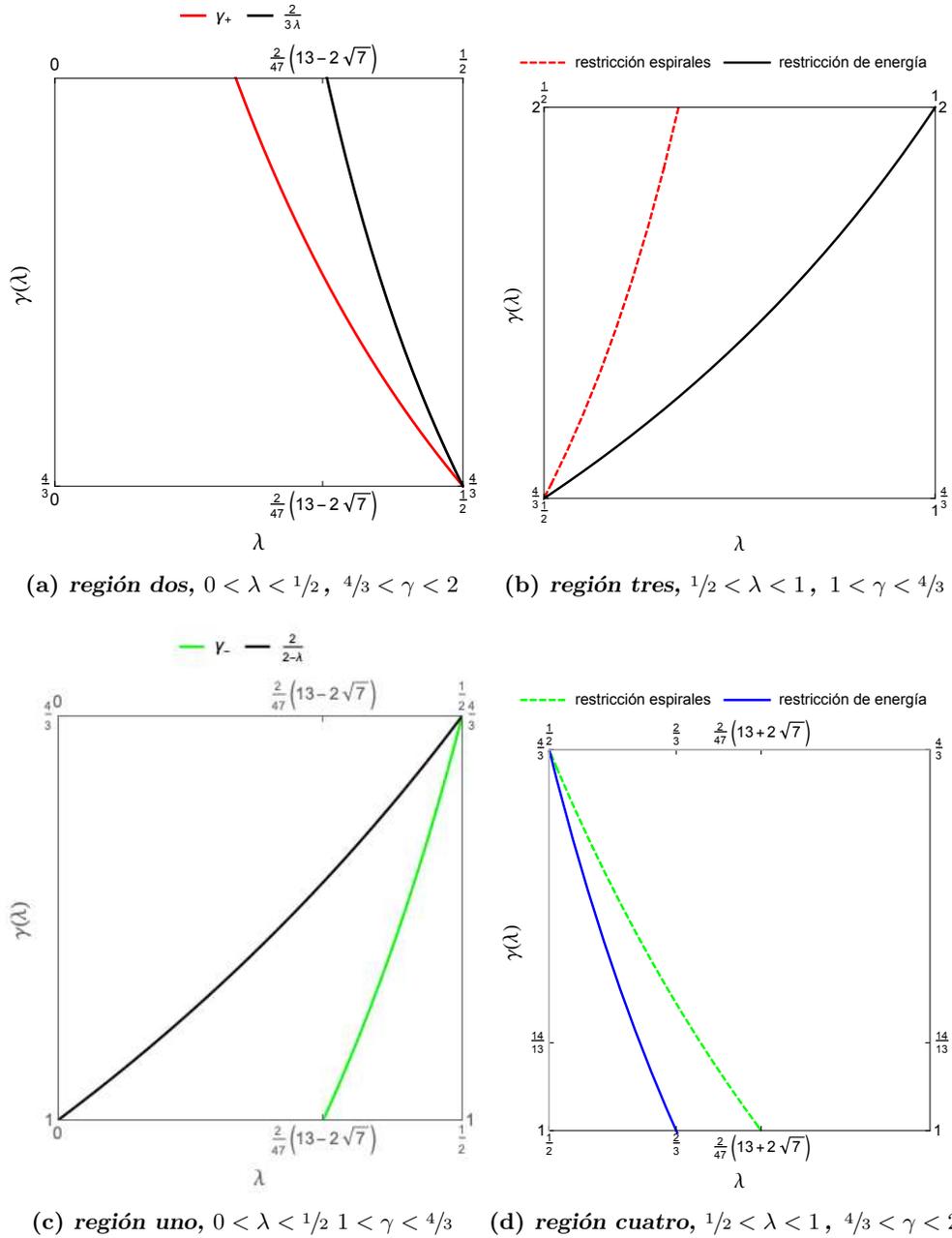


Figura 5.11: Sub-regiones de (5.10).

5. RESULTADOS

región uno

De la figura (5.11) se tiene lo siguiente:

A1) condición de energía y espirales estables

$$0 < \lambda < 1/2 \quad \frac{2}{2-\lambda} < \gamma < 4/3 \quad (5.15)$$

A2-A3) espirales estables que violan la condición de energía

$$0 < \lambda < \frac{2}{47} (13 - 2\sqrt{7})$$

$$\frac{32 - 10\lambda}{\frac{1008}{47} - 47 \left(\lambda - \frac{16}{47}\right)^2} - \frac{8\sqrt{7}|1 - 2\lambda|}{\frac{1008}{47} - 47 \left(\lambda - \frac{16}{47}\right)^2} < \gamma < \frac{2}{2-\lambda}$$

A4) región donde no se cumplen las condiciones de energía ni espirales estables

$$\frac{2}{47} (13 - 2\sqrt{7}) < \lambda < 1/2$$

región dos

De la figura (5.11) se tiene lo siguiente:

A1) condición de energía y espirales estables

$$0 < \lambda < 1/2, \quad 4/3 < \gamma < \frac{32 - 10\lambda}{\frac{1008}{47} - 47 \left(\lambda - \frac{16}{47}\right)^2} + \frac{8\sqrt{7}|1 - 2\lambda|}{\frac{1008}{47} - 47 \left(\lambda - \frac{16}{47}\right)^2} \quad (5.16)$$

A2-A3) se tienen condiciones de energía sin punto fijo espiral.

$$0 < \lambda < 1/2$$

$$\frac{32 - 10\lambda}{\frac{1008}{47} - 47 \left(\lambda - \frac{16}{47}\right)^2} + \frac{8\sqrt{7}|1 - 2\lambda|}{\frac{1008}{47} - 47 \left(\lambda - \frac{16}{47}\right)^2} < \gamma < \frac{2}{3\lambda}$$

A4) región donde no se cumplen las condiciones de energía ni espirales estables

$$0 < \lambda < 1/2, \quad \frac{2}{3\lambda} < \gamma$$

región tres

De la figura (5.11) se tiene lo siguiente:

A1) condición de energía y espirales estables en $\lambda \in (1/2, 1]$

$$\frac{32 - 10\lambda}{\frac{1008}{47} - 47 \left(\lambda - \frac{16}{47}\right)^2} - \frac{8\sqrt{7}|1 - 2\lambda|}{\frac{1008}{47} - 47 \left(\lambda - \frac{16}{47}\right)^2} < \gamma < \frac{4}{3} \quad (5.17)$$

A2-A3) se tienen condiciones de energía sin punto fijo espiral en $\frac{1}{2} < \lambda < 1$

$$\frac{2}{3\lambda} < \gamma < \frac{32 - 10\lambda}{\frac{1008}{47} - 47 \left(\lambda - \frac{16}{47}\right)^2} - \frac{8\sqrt{7}|1 - 2\lambda|}{\frac{1008}{47} - 47 \left(\lambda - \frac{16}{47}\right)^2}$$

A4) región donde no se cumplen las condiciones de energía ni espirales estables

$$1 < \gamma < \frac{2}{3\lambda}$$

región cuatro

De la figura (5.11) se tiene lo siguiente:

A1) condición de energía y espirales estables

$$\frac{1}{2} < \lambda < 1, \quad \frac{4}{3} < \gamma < \frac{2}{2 - \lambda} \quad (5.18)$$

A2-A3) se tienen condiciones de energía sin punto fijo espiral en $\frac{1}{2} < \lambda < 1$

$$\frac{2}{2 - \lambda} < \gamma < \frac{8\sqrt{7}|1 - 2\lambda|}{\frac{1008}{47} - 47 \left(\lambda - \frac{16}{47}\right)^2} + \frac{32 - 10\lambda}{\frac{1008}{47} - 47 \left(\lambda - \frac{16}{47}\right)^2}$$

A4) región donde no se cumplen las condiciones de energía ni espirales estables

$$\frac{8\sqrt{7}|1 - 2\lambda|}{\frac{1008}{47} - 47 \left(\lambda - \frac{16}{47}\right)^2} + \frac{32 - 10\lambda}{\frac{1008}{47} - 47 \left(\lambda - \frac{16}{47}\right)^2} < \gamma < 2$$

Considerando las regiones (5.15) a (5.18) se obtiene el dominio para los parámetros mostrado en la figura (5.12)

5. RESULTADOS

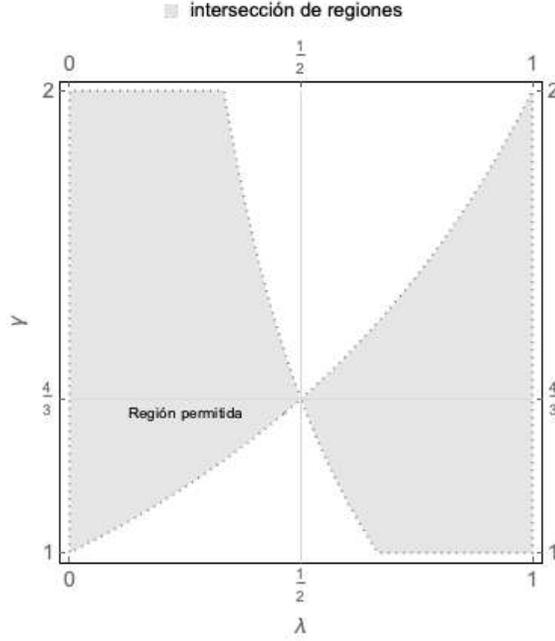


Figura 5.12: Dominio para los parámetros $\lambda-\gamma$ donde se tienen soluciones estables (espirales) y se cumplen las condiciones de energía.

Finalmente retomemos (5.12), el discriminante del autovalor está dado por la función:

$$\Delta(\lambda, \gamma) = \gamma^2 (-47\lambda^2 + 32\lambda + 16) + 4\gamma(5\lambda - 16) + 36,$$

como hemos señalado, para que el autovalor genere espirales estables en el espacio fase se debe cumplir $\Delta(\lambda, \gamma) < 0$, tomando el limite cuando λ es muy grande se tiene:

$$1 < \gamma < 2, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Delta(\lambda, \gamma) = -\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \Delta(\lambda, \gamma) = -\infty, \quad (5.19)$$

de (5.19), se tiene que para $\lambda < 0$ y $\lambda > 1$, se tendrá siempre que el autovalor es espiral estable ya que discriminante es negativo. Para el espacio fase se tiene la misma circunstancia análoga al análisis de la condición de energía, estas conclusiones se ponen de manifiesto en las Figuras (5.13) y (5.14).

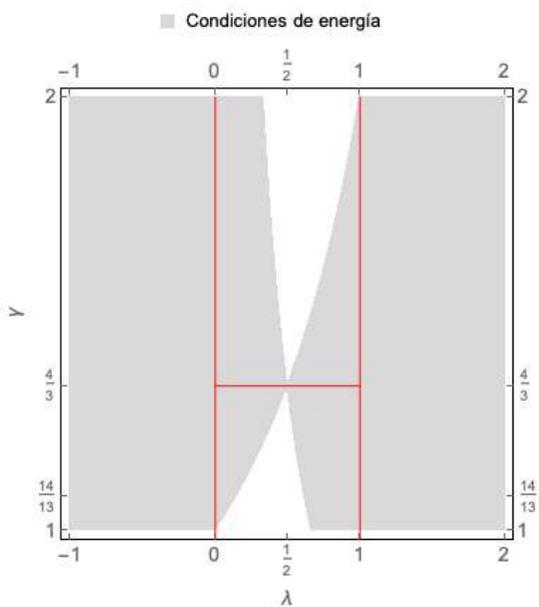


Figura 5.13: Para valores $\lambda < 0$ y $\lambda > 1$, $\forall \gamma \in (1, 2)$ no se violan las condiciones de energía.

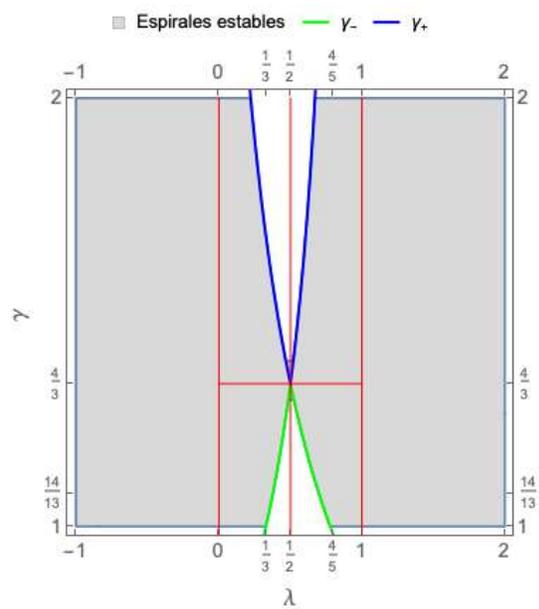


Figura 5.14: Para $\lambda < 0$ y $\lambda > 1$ se mantiene la condición $\Delta(\lambda, \gamma) < 0$, $\forall \gamma \in (1, 2)$.

5.1.3.2. Linealización sobre el origen

Analicemos ahora el punto fijo $\mathbf{x}_1^* = (0, 0)$, con $m = m_1^* = 0$ y $\mu = \mu_1^* = 0$ (linealización sobre el origen) se obtiene:

$$J(\lambda, \gamma, \tilde{\mathbf{X}}_1) = \begin{pmatrix} -1 & g_1(\lambda, \gamma) \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

de donde

$$\det J(\lambda, \gamma, \tilde{\mathbf{X}}_1) = -2 \quad \text{tr } J(\lambda, \gamma, \tilde{\mathbf{X}}_1) = 1,$$

luego el polinomio característico de $J(\lambda, \gamma, \tilde{\mathbf{X}}_1)$

$$P(\delta) = \delta^2 - \text{tr } J(\lambda, \gamma, \tilde{\mathbf{X}}_1)\delta - \det J(\lambda, \gamma, \tilde{\mathbf{X}}_1),$$

toma la forma

$$P(\delta) = (\delta - 2)(\delta + 1).$$

Los valores propios $\delta_1 = -1$ y $\delta_2 = 2$ son reales y distintos, y al ser $\delta_1 < 0 < \delta_2$ se tiene que el origen es un repulsor. Notemos que estos son los mismos valores propios encontrados para el punto fijo $(0, 0)$ en los análisis de los sistemas newtoniano y relativista.

5.2. Implementación del formalismo de serie de Frobenius generalizada

5.2.1. Comportamiento de Fondo

Resolver S_1 (5.1) es equivalente a buscar una única curva integral que emerge de $(0, 0)$ y termina en (m_2^*, μ_2^*) . Dado que el sistema S es invariante de escala y su sistema autónomo asociado S_1 tiene puntos fijos, podemos aplicar el Teorema (4.16) y verificar fácilmente que la solución de fondo para S es:

$$m(r) = C_1 r^{-2}, \quad \mu(r) = C_2 r,$$

donde C_1 y C_2 son constantes. Sustituyendo en S y resolviendo para las constantes, vemos que el punto fijo (α, α) corresponde a la solución con ley de potencia.

$$m = f_1(\lambda, \gamma), \quad \mu = f_2(\lambda, \gamma).$$

Finalmente la solución de fondo para el punto fijo $(0, 0)$ corresponde a la solución trivial $\mu = 0 = m$.

5.2.2. Serie de Potencia alrededor del punto crítico (0, 0), en términos del radio

Con base al Teorema (2) y nuestro argumento general para la existencia de un desarrollo en serie de Frobenius, asumamos las expansiones para μ y m de la forma:

$$\mu = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{mn} r^{m\delta_1 + n\delta_2}; \quad m = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} r^{m\delta_1 + n\delta_2}. \quad (5.20)$$

Se necesitan calcular los coeficientes b_n y a_n de las series; para encontrarlos, primero debemos desacoplar el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias definido en (5.1).

5.2.2.1. Desacople del Sistema

Del sistema S_1 , si $m \neq \frac{1}{2}$ la ecuación de la presión la reescribimos como:

$$(1 - 2m)\dot{\mu} = 2\mu - g_2 m \mu - \gamma \mu^2, \quad (5.21)$$

de la ecuación de la masa obtenemos

$$\mu = g_1^{-1}(m + \dot{m}), \quad (5.22)$$

diferenciando (5.22) y sustituyendo en (5.21) se tiene:

$$(1 - 2m)(\dot{m} + \ddot{m}) = 2(m + \dot{m}) - g_2 m(m + \dot{m}) - \frac{\gamma}{g_1}(m + \dot{m})^2,$$

desarrollando los productos del lado derecho:

$$\dot{m} + \ddot{m} - 2m(\dot{m} + \ddot{m}) = 2(m + \dot{m}) - g_2 m^2 - g_2 m \dot{m} - \frac{\gamma}{g_1} m^2 - \frac{2\gamma}{g_1} m \dot{m} - \frac{\gamma}{g_1} \dot{m}^2,$$

trasladando términos entre los miembros de la ecuación se tiene:

$$\ddot{m} - \dot{m} - 2m = 2m\dot{m} + 2m\ddot{m} - g_2 m^2 - g_2 m \dot{m} - \frac{\gamma}{g_1} m^2 - \frac{2\gamma}{g_1} m \dot{m} - \frac{\gamma}{g_1} \dot{m}^2. \quad (5.23)$$

El lado izquierdo de (5.23) es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

luego, agrupando el lado derecho:

$$2m\ddot{m} + \left(1 - \frac{g_2}{2} - \frac{\gamma}{g_1}\right) 2m\dot{m} - \left(g_2 + \frac{\gamma}{g_1}\right) m^2 - \frac{\gamma}{g_1} \dot{m}^2,$$

llamemos

5. RESULTADOS

$$g_3 = 1 - \frac{g_2}{2} - \frac{\gamma}{g_1}, \quad g_4 = -\left(g_2 + \frac{\gamma}{g_1}\right), \quad g_5 = -\frac{\gamma}{g_1}, \quad (5.24)$$

entonces el lado derecho lo podemos escribir como:

$$2m\ddot{m} + g_4m^2 + 2g_3m\dot{m} + g_5\dot{m}^2,$$

notemos que al derivar implícitamente:

$$\frac{d}{dt}m^2 = 2m\dot{m}, \quad \frac{d^2m^2}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(2m\frac{dm}{dt}\right) = 2(\dot{m}^2 + m\ddot{m}),$$

con esta observación, al desacoplar el sistema se obtiene la ecuación diferencial no lineal

$$\left(2 + \frac{d}{dt} - \frac{d^2}{dt^2}\right)m = \left(g_3 + \frac{g_4}{2}\frac{d}{dt} - \frac{d^2}{dt^2}\right)m^2 + g_5\left(\frac{dm}{dt}\right)^2. \quad (5.25)$$

5.2.2.2. Expansión en serie

Usaremos la ecuación (5.25) como se hace habitualmente en el método de Frobenius usual para obtener la recurrencia de los coeficientes. En (5.20) se tiene la solución propuesta:

$$m(r) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{mn} r^{j\delta_1 + n\delta_2}.$$

para el punto fijo $\tilde{\mathbf{x}}_1 = (0, 0)$ se encontró en secciones anteriores que los autovalores asociados al problema linealizado son $\delta_1 = -1$ y $\delta_2 = 2$, ya que $\delta_1 = -1$ no es físicamente aceptable, (ya que genera soluciones $1/r$) el análisis se restringe a la solución de la forma:

$$m(r) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{2n}, \quad (5.26)$$

sustituyendo (5.26) en (5.25) se llega a la relación de recurrencia

$$b_n = \frac{g_3 + \frac{g_4}{2}n - 2n^2}{(n-1)(2n+1)} \sum_{i=1}^{n-1} b_i b_{n-i} - \frac{\gamma}{g_1(n-1)(2n+1)} \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) b_i b_{n-i}. \quad (5.27)$$

Con esta relación de recursividad, tenemos una expresión para la ecuación (5.26) de $m(r)$ en forma de una serie de potencias cercana al punto fijo $\tilde{\mathbf{x}}_1 = (0, 0)$.

Conclusiones

En el marco de la teoría de Rastall, para la que el tensor de momento energía no satisface la condición de conservación covariante (i.e. $\nabla_\alpha T^\alpha_\beta = \lambda \nabla_\alpha R$) hemos mostrado que para un fluido perfecto contenido en una región del espacio tiempo estática y esféricamente simétrica la ecuación de estado que induce las homologías no se ve modificada por la no conservación del tensor de momento energía, por lo que sigue siendo lineal $P = (\gamma - 1)c^2\rho$ al igual que en el caso de Relatividad General [45]. Sin embargo, un análisis del sistema de ecuaciones diferenciales muestra que en la región donde $\lambda \in (0, 1)$ los valores de γ para los que existen espirales estables se ven restringidos, mientras que para otros valores de λ no hay restricciones de γ y se tiene espirales estables. La región de (λ, μ) para los que existen espirales estables, esquemáticamente es similar al que surge cuando se imponen las diferentes condiciones de energía [42], aunque no coinciden, ambos intervalos se obtuvieron de manera algebraica y gráficamente. Existen algunas preguntas que surgen como resultado de esta investigación como: ¿los valores de los parámetros de una ecuación de estado se ven restringidos en el intervalo de $\lambda \in (0, 1)$ o en un intervalo menor o mayor cuando se imponen las condiciones de energía o existencia de puntos espirales?, ¿Cuales son las dinámicas presentes para otras ecuaciones de estado en teoría de Rastall? ¿En otras teorías de gravitación, la ecuación de estado lineal es la única que surge a través de, las homologías? Estas son algunas de las preguntas que pueden ser abordadas en trabajos futuros.

Apéndice

A.1. Aspectos Fundamentales en Sistemas Dinámicos

Definición 1 [SISTEMA DINÁMICO PLANO].

Sean $T \subset \mathbb{R}$ un semigrupo aditivo. X un subconjunto de \mathbb{R}^2 y

$$\phi : T \times X \mapsto X : (t, x) \mapsto \phi^t(x)$$

una función. Un Sistema dinámico plano es una tupla (T, X, ϕ) que satisface las siguientes propiedades:

1. $\phi(0, x) = x$ para toda $x \in X$. Equivalentemente $\phi^0 := id_X$
2. $\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(s+t, x)$ para todo $x \in X$ y $s, t \in T$. Equivalentemente $\phi^s \circ \phi^t := \phi^{s+t}$

El conjunto T se llama espacio de tiempos. X es llamado espacio de estados (o de fase) y ϕ se conoce como operador de evolución.

De forma eurística se puede pensar en un operador de evolución ϕ como en una colección de funciones $\{\phi^t : X \mapsto X\}_t$, llamada también flujo, que “mueve” un punto x_0 por el estado de fases X a través de la curva $t \mapsto \phi^t(x_0)$

Un sistema dinámico se dice discreto si el espacio de tiempos T es discreto ($T \supset \mathbb{Z}$), en caso contrario, se dice continuo.

A menudo el operador de evolución ϕ no está definido en todo $T \times X$ sino en un subconjunto $U \subset T \times X$. En tal caso se pide que $\{0\} \times X \subset U$ y que las propiedades de la definición se

satisfagan siempre que (t, x) esté en U . Es decir, dado $x \in X$ existe un subconjunto de tiempo (usualmente un intervalo) $I_x := \{t \in T : (t, x) \in U\} \subset T$ tal que $\phi(t, x)$ está definida para todo $t \in I_x$.

En lo que sigue asumiremos que (T, X, ϕ) es un sistema dinámico.

Dado un $x_0 \in X$, un estado inicial, deseamos estudiar la geometría del conjunto de todos los posibles estados futuros y pasados del sistema dinámico, obtenidos a partir de x_0 haciendo uso del operador de evolución ϕ . Para tal fin introducimos el concepto de órbita.

Definición 2 [ÓRBITA].

La órbita (o trayectoria) positiva $\gamma_{x_0}^+$, órbita negativa $\gamma_{x_0}^-$ y órbita γ_{x_0} de x_0 (o a través de x_0) son subconjuntos del espacio de estados X , definidos por

$$\begin{aligned}\gamma_{x_0}^+ &:= \{\phi(t, x_0) : t \in I_{x_0}, t \geq 0\} = \{\phi^t(x_0)\}_{t \in I_{x_0}, t \geq 0} \\ \gamma_{x_0}^- &:= \{\phi^t(x_0)\}_{t \in I_{x_0}, t \leq 0} \\ \gamma_{x_0} &:= \gamma_{x_0}^+ \cup \gamma_{x_0}^- = \{\phi(t, x_0) : t \in I_{x_0}\} = \{\phi^t(x_0)\}_{t \in I_{x_0}}\end{aligned}$$

Una órbita que consiste de un solo punto se llama órbita constante.

Mientras que las órbitas de un sistema dinámico continuo son curvas en el espacio X parametrizadas por t y orientadas en la dirección de crecimiento, las de un sistema dinámico discreto son sucesiones de puntos $\cdot, f^{-1}(x_0), x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots$, indizadas por enteros.

Definición 3 [EQUILIBRIO].

Un punto $x \in X$ es un equilibrio (o punto fijo o punto crítico) si $\gamma_x = \{x\}$ (es decir $\phi^t(x) = x$ para todo $t \in T$)

La definición anterior implica que un sistema dinámico puesto en un equilibrio permanece allí por siempre. Recíprocamente, las órbitas constantes corresponden a equilibrios del sistema.

Definición 4 [ÓRBITA PERIÓDICA].

Una órbita periódica (o ciclo) O es una órbita no constante para la cual existe $t_0 \in T$ tal que $\phi^{t+t_0}(x_0) = \phi^t(x_0)$ para todo $t \in T$ y $x_0 \in O$.

El mínimo t_0 que satisface lo anterior se llama periodo de la órbita.

Esto es, si el sistema dinámico evoluciona desde un x_0 en un ciclo O , regresará exactamente a ese punto x_0 a las t_0 unidades del tiempo. Por tanto, una órbita periódica de un sistema continuo es una curva cerrada en espacio de fase.

Definición 5 [DIAGRAMA DE FASE].

Al dibujar la colección de todas las órbitas (con sus direcciones) obtenemos un diagrama de fase.

Definición 6 [EQUIVALENCIA TOPOLÓGICA].

Dos sistemas dinámicos planos son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo tal que h envía las órbitas del operador de evolución ϕ_1 en las órbitas ϕ_2 y preserva el sentido de avance del tiempo. Así pues, dos sistemas dinámicos topológicamente equivalentes comparten el mismo comportamiento y estructura cualitativa.

Definición 7 [SISTEMA DINÁMICO PLANO AUTÓNOMO].

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $x_1, x_2 : I \mapsto \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 en la variable t , a la que nos referiremos generalmente como el tiempo. Sean también

$$f_i : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto f_i(x_1, x_2)$$

$i \in \{1, 2\}$ funciones en dos variables. Llamamos sistema dinámico plano autónomo al par de ecuaciones diferenciales simultáneas de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

Si utilizamos notación vectorial podemos escribir $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ y $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ de modo que:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{A.1}$$

Una solución de la ecuación (A.1) está constituida, entonces, por un par de funciones diferenciables $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para todo $t \in I$. La gráfica de cualquier solución de (A.1) es una curva en el espacio tridimensional $(t, \mathbf{x}) = (t, x_1, x_2)$ que identificamos con un subconjunto de \mathbb{R}^3

Definición 8 [FUNCIÓN HOMOGENEA].

Se define una función homogénea de una variable a una función $f(x)$ con la siguiente propiedad

$$f(\lambda x) = g(\lambda)f(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \tag{A.2}$$

la cual nos da la forma más general de una función de una variable que es invariante por escala.

$$f(\lambda x) = \lambda^p f(x).$$

Dado que esta ecuación satisface para λ arbitrario, en particular podemos tomar $\lambda = 1/x$.

Si $B = f(1)$ tenemos que:

$$f(x) = Bx^P.$$

Definición 9 [PUNTO CRÍTICO HIPERBÓLICO].

Un punto crítico \mathbf{x} de un sistema plano $\dot{x} = f(x)$ es hiperbólico si la matriz jacobiana en ese punto $Df(\mathbf{x})$ es hiperbólico (tiene valores propios todos con parte real no nula).

Teorema 7 [CRITERIO DE ESTABILIDAD PARA SISTEMAS NO LINEALES].

Sea f de clase C^1 , $\dot{x} = f(x)$ un sistema plano y x^* un punto crítico del mismo.

- (i) Si todos los valores propios $Df(x^*)$ tiene parte real negativa, entonces x^* es un punto crítico asintóticamente estable (y por lo tanto, estable).

Teorema 8 [HARTMAN-GROBMAN].

Sea f de clase C^1 y \mathbf{x} un punto crítico hiperbólico del sistema plano $\dot{x} = f(x)$. Entonces hay una vecindad de \mathbf{x} en el cual $\dot{x} = f(x)$ es topológicamente equivalente a su linealización $\dot{x} = Df(\mathbf{x})x$.

El teorema (8) garantiza entonces que, para puntos críticos hiperbólicos el comportamiento del sistema no lineal cerca del punto es idéntico al del sistema lineal correspondiente y por tanto todas las nociones antes definidas coinciden. Para puntos críticos no hiperbólicos es necesario utilizar otras técnicas (o hallar las soluciones del sistema) para determinar el comportamiento. Dentro de estas técnicas se encuentra el método directo de Lyapunov que ataca el problema de la estabilidad directamente sobre la ecuación en cuestión en lugar de su linealización. Aunque esto pareciera muy adecuado, se requiere de ciertas funciones (conocidas como “funciones de Lyapunov”) cuya existencia no está garantizada y que, en general, no pueden construirse de manera metódica.

Combinando el Teorema (8) con el criterio de estabilidad del Teorema (7) se construye la Tabla (A.1) que clasifica los puntos de equilibrio de sistemas no lineales. Cabe mencionar que las definiciones anteriores (1 - 9) al igual que la Tabla (A.1) es un compendio recopilado principalmente de los trabajos [2, 3, 50] y de las notas del curso: *Dinámica no lineal y caos durante el ciclo 2018/2019* como materia curricular del programa de maestría.

Vlrs propios Df	Linealización		Sistema no lineal	
	Tipo	Estabilidad	Tipo	Estabilidad
<i>Equilibrios Hiperbólicos</i>				
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	nodo	I.	nodo	I.
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	nodo	A. E.	nodo	A. E.
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	punto silla	I.	punto silla	I.
$\lambda_{1,2} = a \pm ib, a > 0$	punto espiral	I.	punto espiral	I.
$\lambda_{1,2} = a \pm ib, a < 0$	punto espiral	A. E.	punto espiral	A. E.
<i>Equilibrios no Hiperbólicos</i>				
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	nodo propio/impropio	I.	nodo/punto espiral	I.
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	nodo propio/impropio	A. E.	nodo/punto espiral	A. E.
$\lambda_{1,2} = \pm ib$	centro	E.	centro/punto espiral	?

Figura A.1: Clasicación de equilibrios en sistemas no lineales. Cuadro extraído de [2]

En el Apéndice (A.2) integramos el sistema de forma numérica y mostramos una película a partir de una secuencia de fotogramas; hacemos un barrido del parámetro de Rastrall dentro del intervalo $0 < \lambda < 1$, con un paso de $1/10$, y para cada valor de λ barreos el parámetro de estado γ en el intervalo $1 < \gamma < 2$. Con esto evidenciamos de forma gráfica los valores para los cuales los parámetros del sistema λ y γ generan valores propios que no son espirales estables. Este análisis gráfico no nos permite distinguir aquellas regiones donde no se violan las condiciones de energía pero si nos ayuda al momento de extraer conclusiones del comportamiento cualitativo del sistema.

A.2. Aspectos cualitativos del sistema RTOV

Parámetro Rastall $\lambda = 0$, parámetro EoS $\gamma \in (1, 2)$.

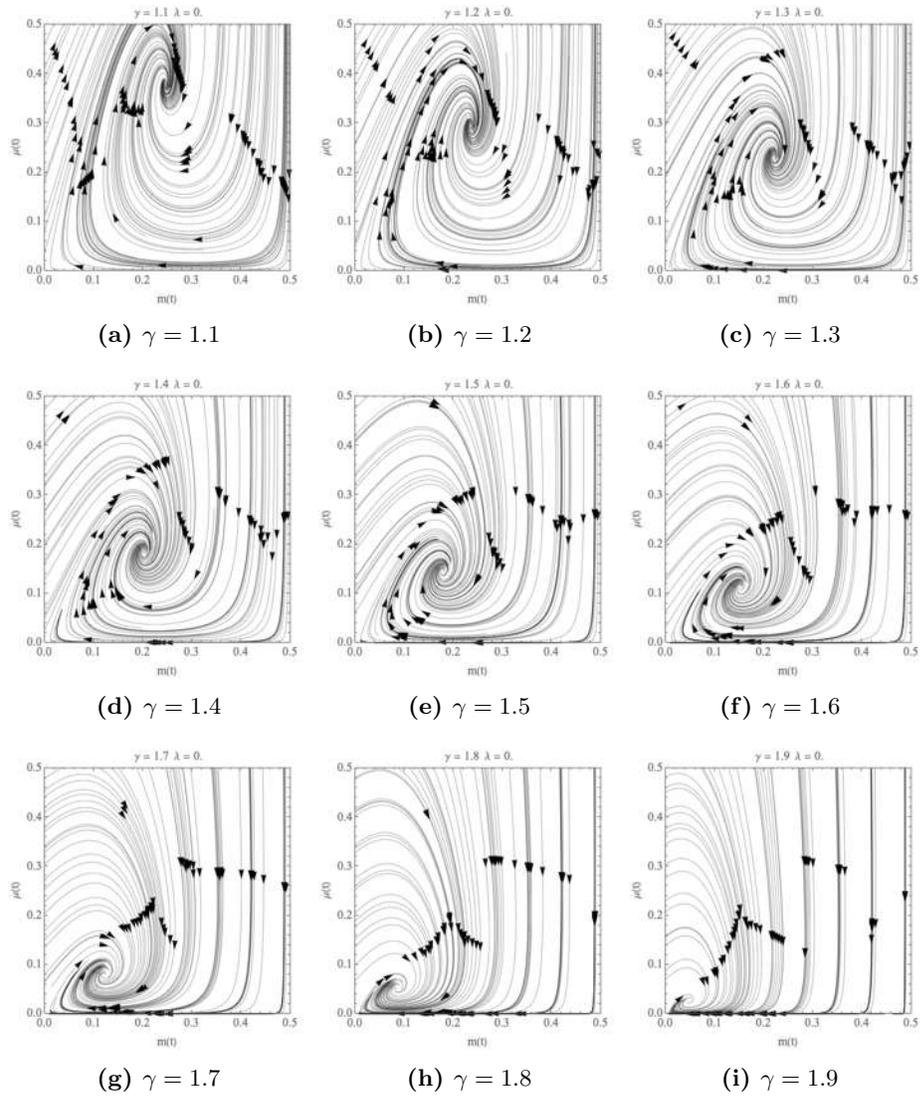


Figura A.2: Curvas integrales para distintos valores de γ correspondientes a $\lambda = 0.0$.

Parámetro Rastall $\lambda = 0.1$, parámetro EoS $\gamma \in (1, 2)$.

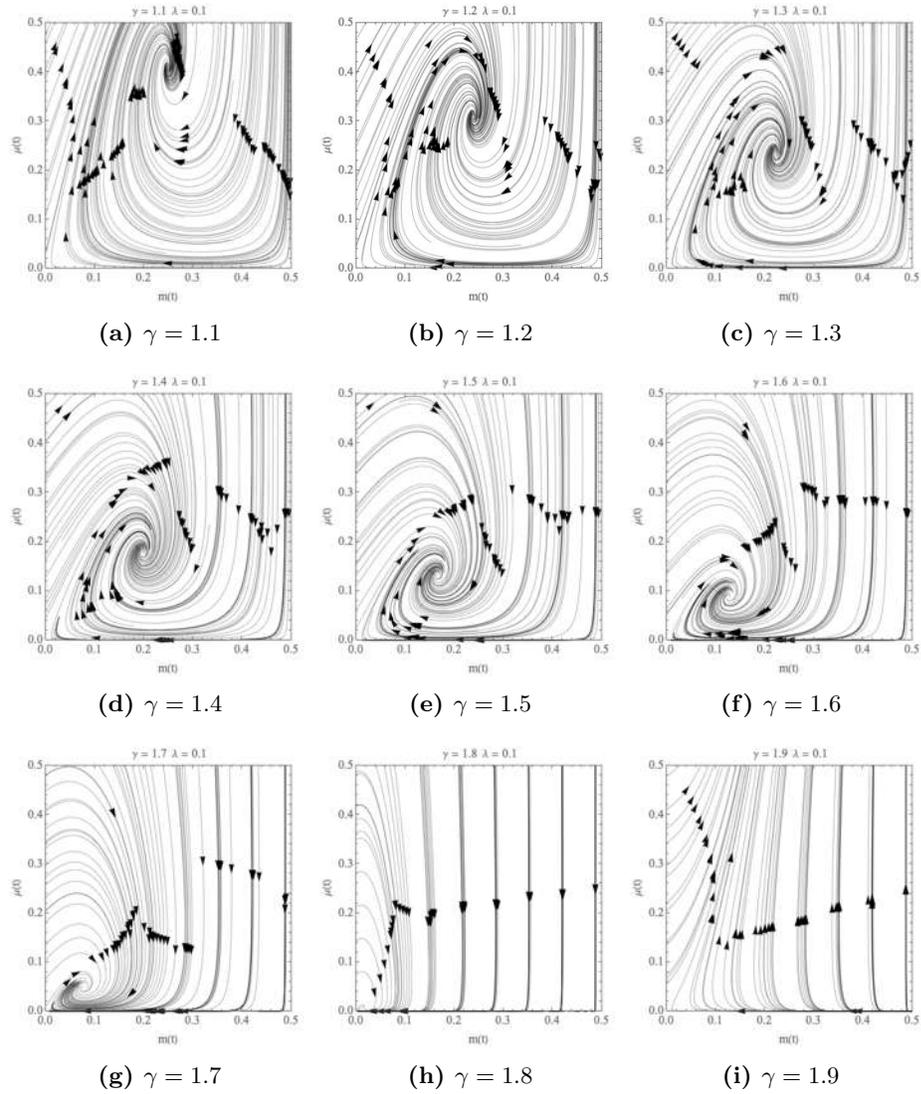


Figura A.3: Curvas integrales para distintos valores de γ correspondientes a $\lambda = 0.1$.

Parámetro Rastall $\lambda = 0.2$, parámetro EoS $\gamma \in (1, 2)$.

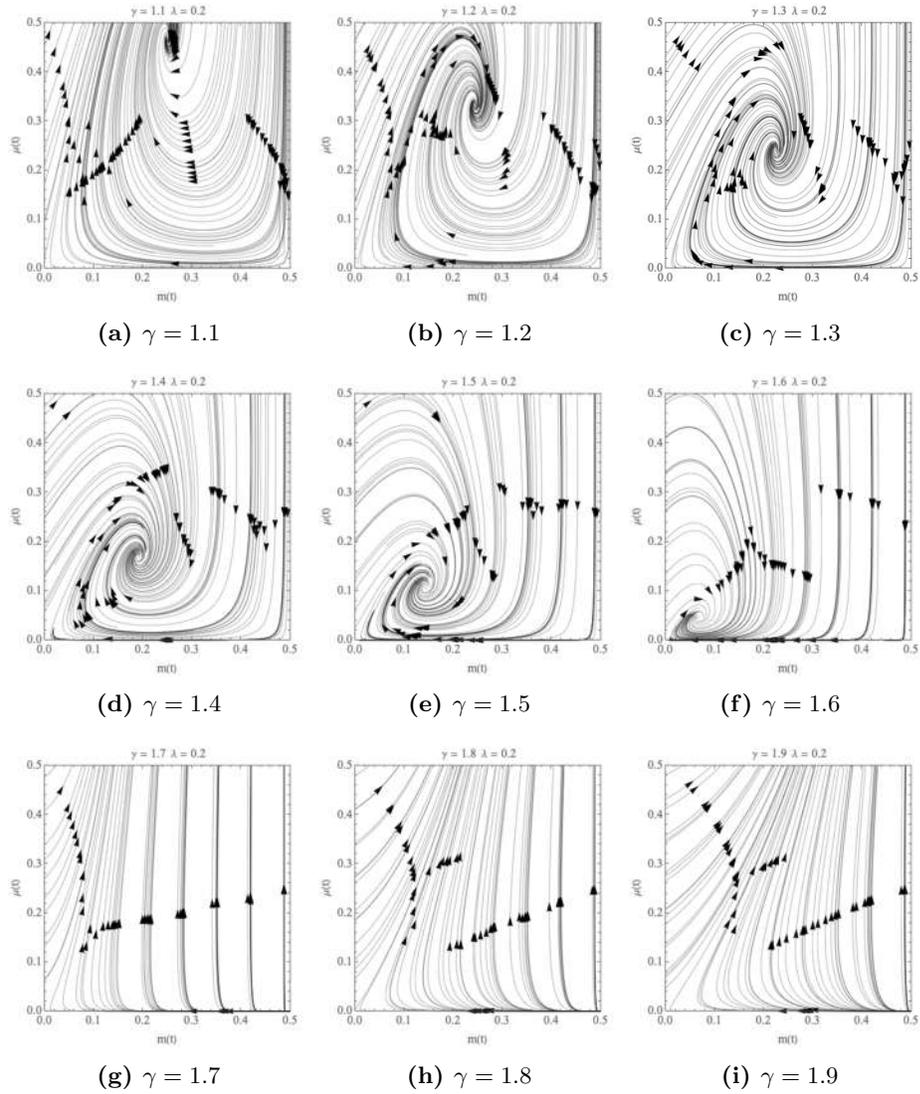


Figura A.4: Curvas integrales para distintos valores de γ correspondientes a $\lambda = 0.2$.

Parámetro Rastall $\lambda = 0.3$, parámetro EoS $\gamma \in (1, 2)$.

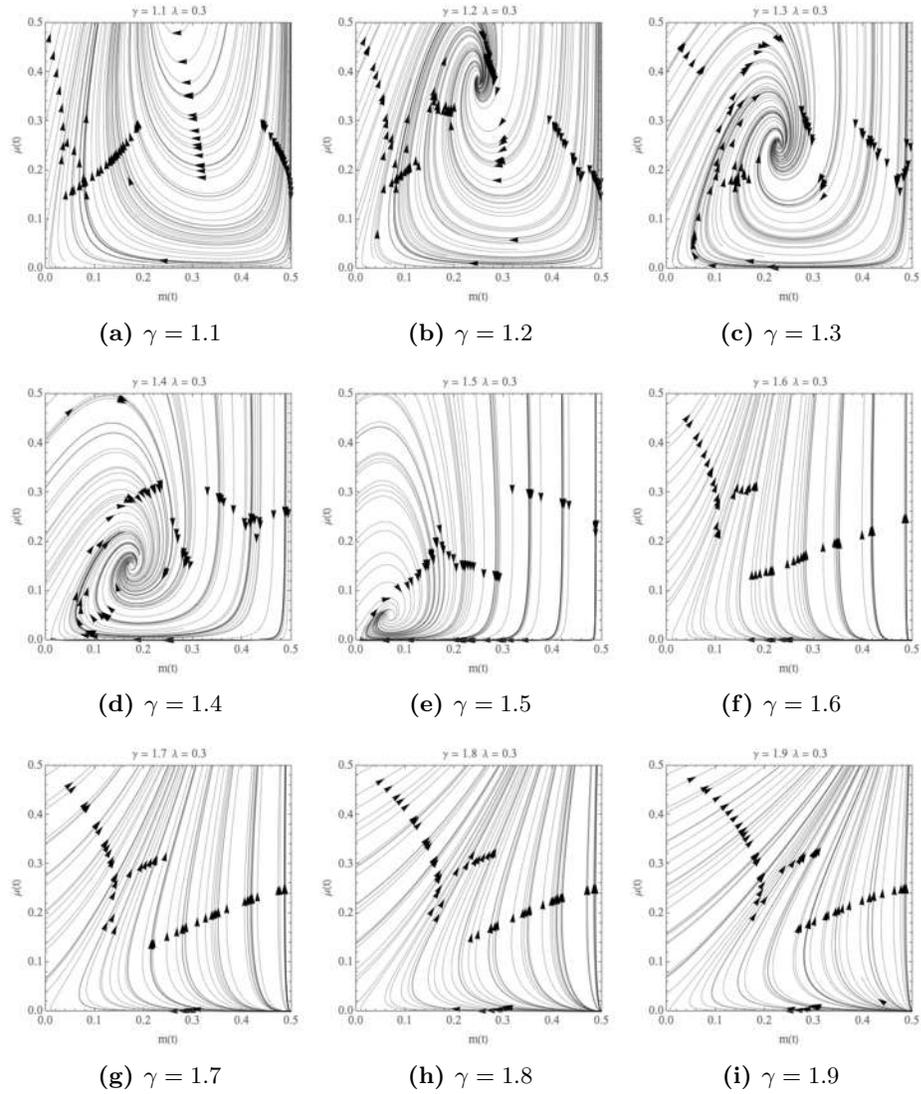


Figura A.5: Curvas integrales para distintos valores de γ correspondientes a $\lambda = 0.3$.

Parámetro Rastall $\lambda = 0.4$, parámetro EoS $\gamma \in (1, 2)$.

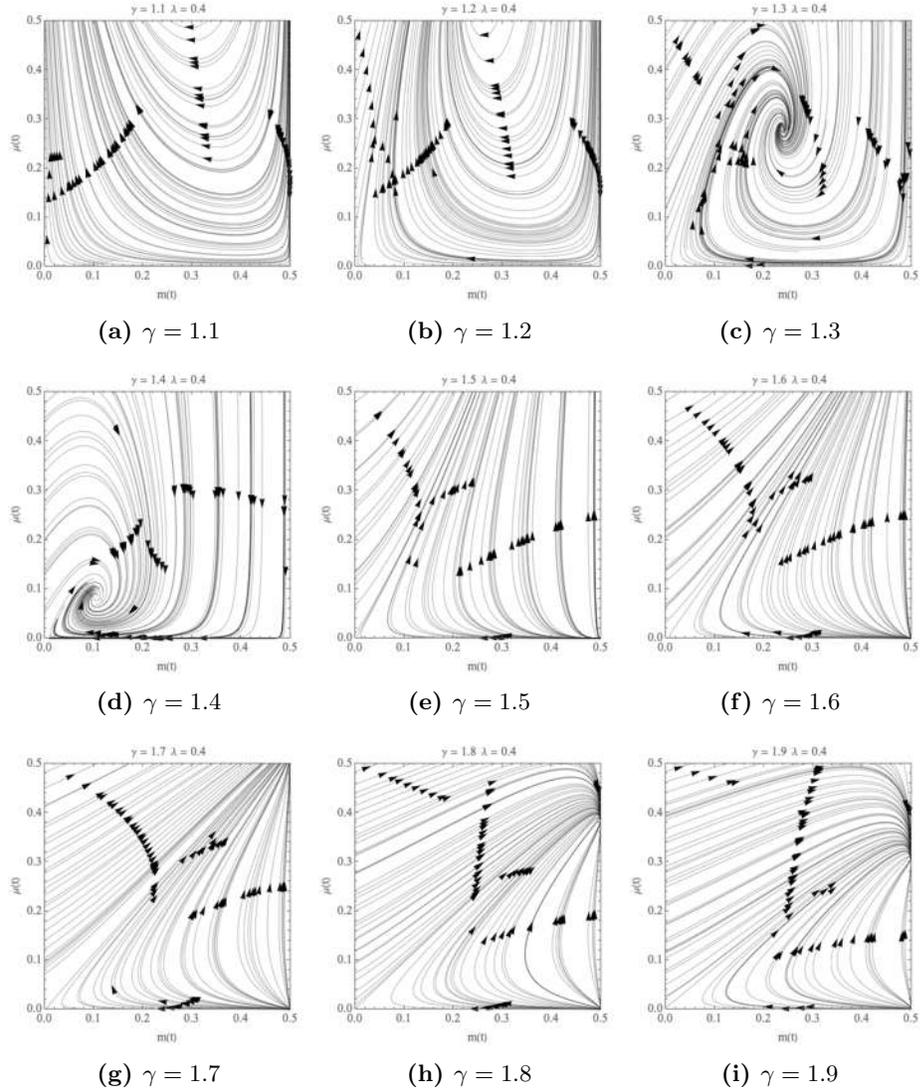


Figura A.6: Curvas integrales para distintos valores de γ correspondientes a $\lambda = 0.4$.

Parámetro Rastall $\lambda = 0.6$, parámetro EoS $\gamma \in (1, 2)$.

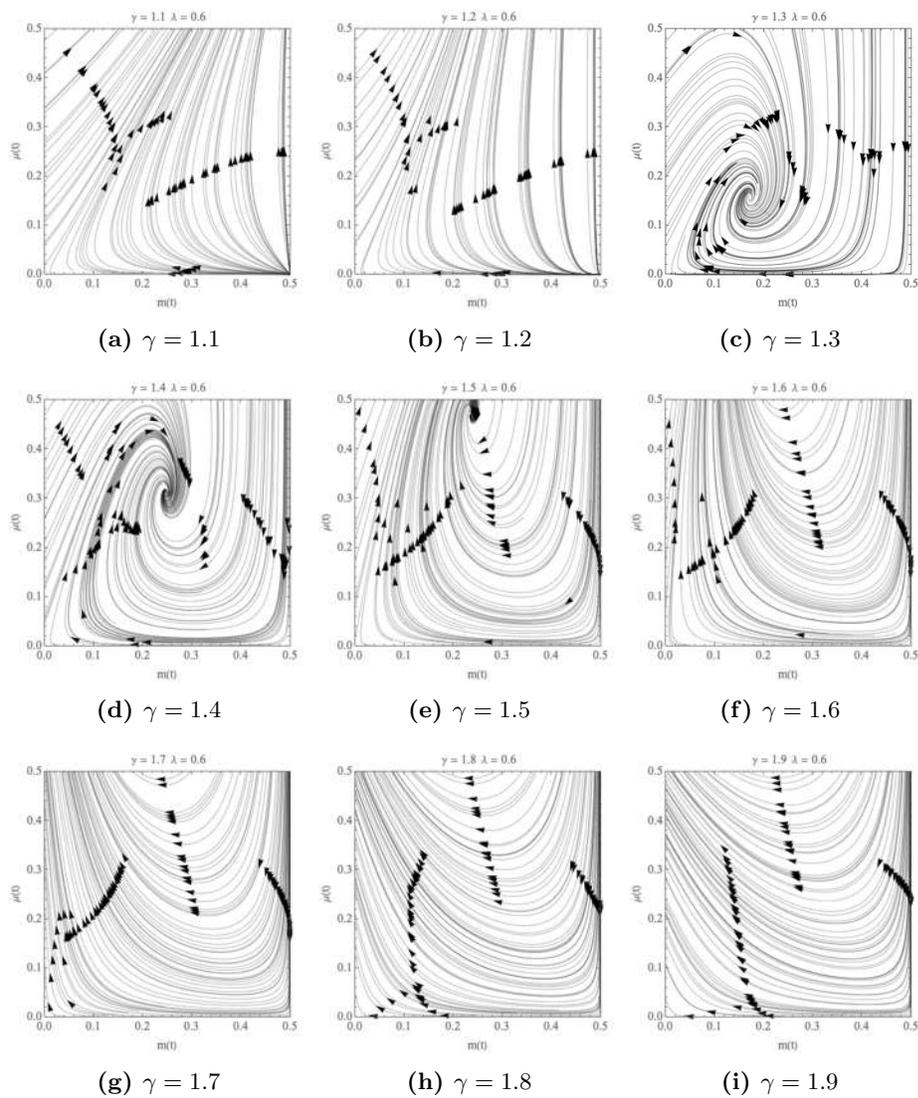


Figura A.7: Curvas integrales para distintos valores de γ correspondientes a $\lambda = 0.6$.

Parámetro Rastall $\lambda = 0.7$, parámetro EoS $\gamma \in (1, 2)$.

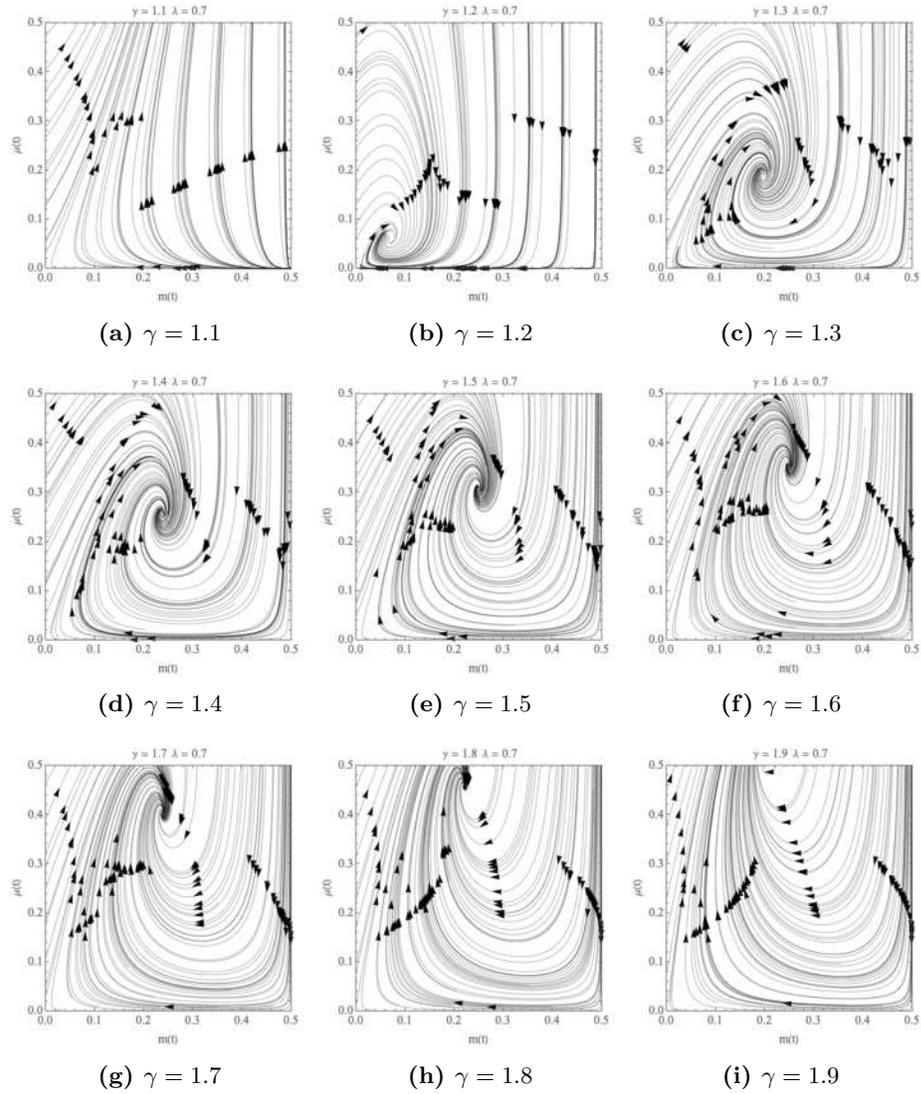


Figura A.8: Curvas integrales para distintos valores de γ correspondientes a $\lambda = 0.7$.

Parámetro Rastall $\lambda = 0.8$, parámetro EoS $\gamma \in (1, 2)$.

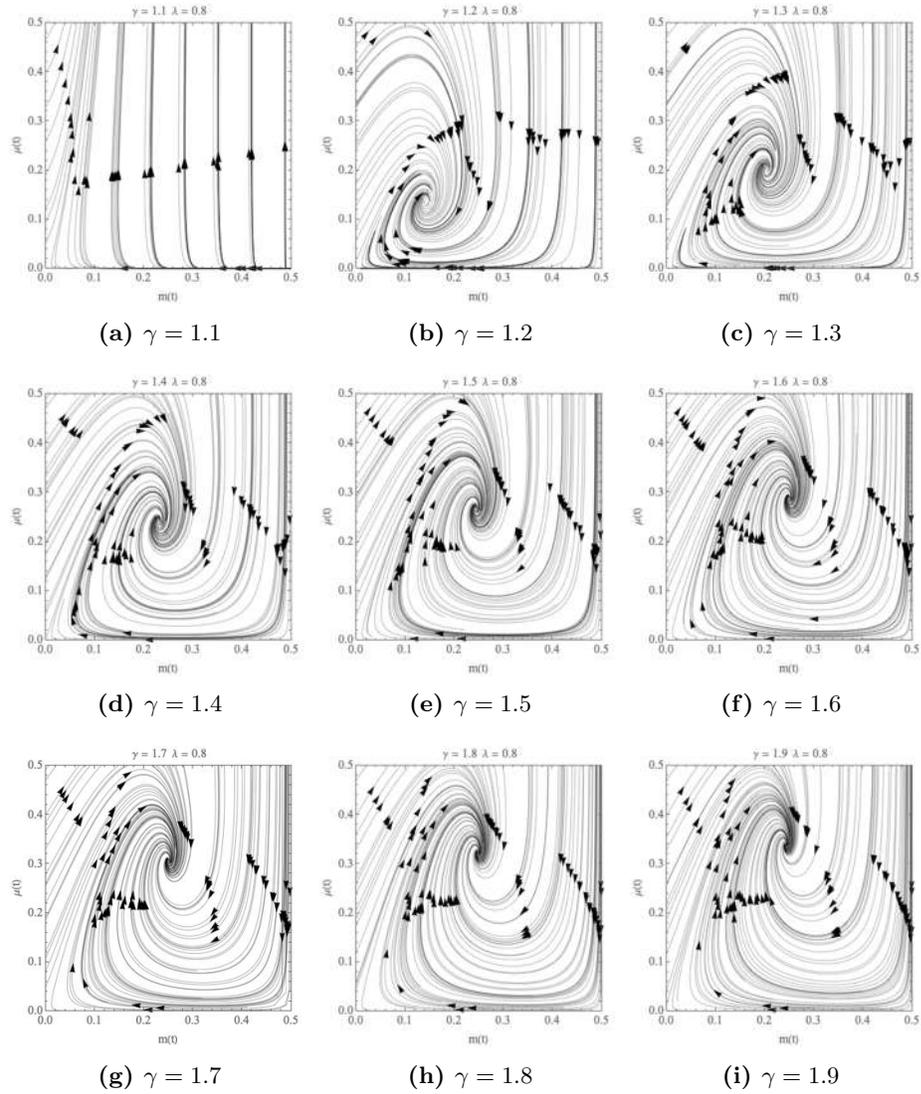


Figura A.9: Curvas integrales para distintos valores de γ correspondientes a $\lambda = 0.8$.

Parámetro Rastall $\lambda = 0.9$, parámetro EoS $\gamma \in (1, 2)$.

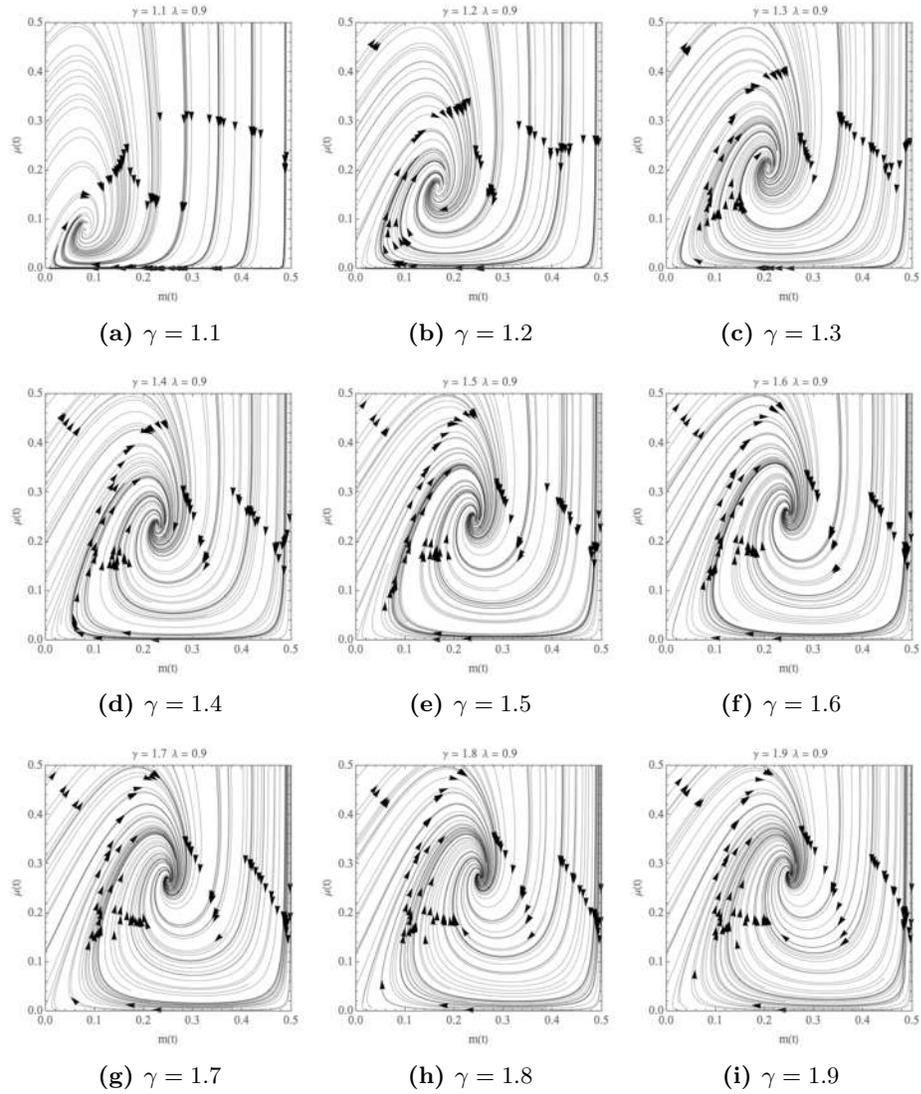


Figura A.10: Curvas integrales para distintos valores de γ correspondientes a $\lambda = 0.9$.

Parámetro Rastall $\lambda = 1$, parámetro EoS $\gamma \in (1, 2)$.

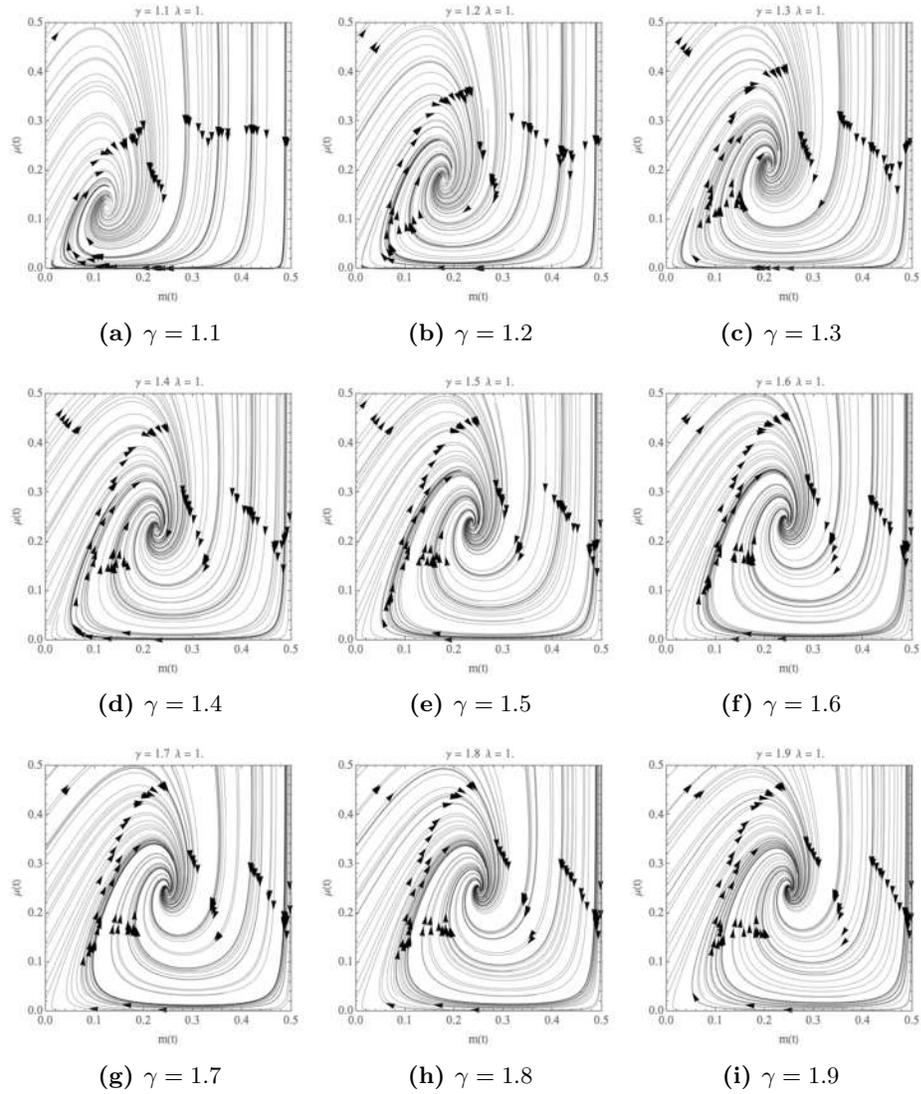


Figura A.11: Curvas integrales para distintos valores de γ correspondientes a $\lambda = 1.0$.

Bibliografía

- [1] C. W. Misner and H. S. Zepolsky. High-Density Behavior and Dynamical Stability of Neutron Star Models. *Phys. Rev. Lett.* 13, 122, (June):635–637, 1964. [ii](#), [23](#), [24](#), [29](#), [49](#)
- [2] J. A Torres-Henao. Sistemas dinámicos planos. Master’s thesis, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, 2013. [vii](#), [1](#), [74](#), [75](#)
- [3] H Strogatz Steven. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Westview press, 1994. [1](#), [74](#)
- [4] Dina Prialnik. *An introduction to the theory of stellar structure and evolution*. Cambridge University Press, 2000. [1](#), [2](#)
- [5] Kenneth R. Lang. *Essential Astrophysics*. Undergraduate Lecture Notes in Physics. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013. [2](#)
- [6] Rudolf Kippenhahn, Alfred Weigert, and Achim Weiss. *Stellar structure and evolution*. Springer, 1990. [2](#), [7](#)
- [7] Richard R. Silbar and Sanjay Reddy. Neutron stars for undergraduates. *American Journal of Physics*, 72(7):892–905, jul 2004. [3](#)
- [8] Steven E. Koonin. *Computational Physics*. CRC Press, mar 2018. [3](#)
- [9] González-Avilés, J. J. Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff para estrellas compactas, representación paramétrica e influencia de la constante cosmológica (tesis de grado). Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo , 2011. [3](#)
- [10] Thomas P. Sotiriou and Valerio Faraoni. $f(r)$ theories of gravity. *Reviews of Modern Physics*, 82(1):451–497, mar 2010. [4](#)
- [11] Miguel Aparicio Resco, Álvaro de la Cruz-Dombriz, Felipe J. Llanes Estrada, and Víctor Zapatero Castrillo. On neutron stars in $f(R)$ theories: small radii, large masses and large energy emitted in a merger. *Physics of the Dark Universe*, 13:147–161, sep 2016. [4](#)

-
- [12] Clésio E Mota, Luis CN Santos, Franciele M da Silva, Cesar V Flores, Tiago JN da Silva, and Débora P Menezes. Anisotropic compact stars in rastall-rainbow gravity. *arXiv*, 2019. [4](#)
- [13] Y. Heydarzade and F. Darabi. Black hole solutions surrounded by perfect fluid in Rastall theory. *Physics Letters B*, 771:365–373, aug 2017. [4](#), [18](#)
- [14] Peter Rastall. Generalization of the Einstein theory. *Physical Review D*, 6(12):3357–3359, 1972. [4](#)
- [15] W. A.G. De Moraes and A. F. Santos. Lagrangian formalism for Rastall theory of gravity and Gödel-type universe. *General Relativity and Gravitation*, 51(12), 2019. [4](#)
- [16] G. Abbas and M. R. Shahzad. Models of anisotropic compact stars in the Rastall theory of gravity. *Astrophysics and Space Science*, 364(3):50, mar 2019. [4](#)
- [17] Tomi Koivisto. A note on covariant conservation of energy-momentum in modified gravities. *Classical and Quantum Gravity*, 23(12):4289–4296, 2006. [4](#)
- [18] Olivier Minazzoli. Conservation laws in theories with universal gravity/matter coupling. *Physical Review D*, 88(2):027506, jul 2013. [4](#)
- [19] Carlos E. M. Batista, Mahamadou H. Daouda, Júlio C. Fabris, Oliver F. Piattella, and Davi C. Rodrigues. Rastall cosmology and the Λ CDM model. *Physical Review D*, 85(8):084008, apr 2012. [4](#)
- [20] G. F. Silva, O. F. Piattella, J. C. Fabris, L. Casarini, and T. O. Barbosa. Bouncing solutions in Rastall’s theory with a barotropic fluid. *Gravitation and Cosmology*, 19(3):156–162, jul 2013. [4](#)
- [21] A. H. Ziaie, H. Moradpour, and S. Ghaffari. Gravitational collapse in Rastall gravity. *Physics Letters B*, 793:276–280, jun 2019. [4](#)
- [22] Matt Visser and Nicolas Yunes. Power Laws, Scale Invariance and the Generalized Frobenius Series: Applications to Newtonian and TOV Stars Near Criticality. *International Journal of Modern Physics A*, 18(20):3433–3468, aug 2003. [5](#), [35](#), [37](#), [38](#), [39](#), [40](#), [41](#), [43](#), [44](#), [45](#), [48](#)
- [23] Arthur, S J. *Astrofísica Estelar*, 2012. Centro de Radioastronomía y Astrofísica, UNAM. [6](#), [7](#)
- [24] John C. Baez and Emory F. Bunn. The meaning of Einstein’s equation. *American Journal of Physics*, 73(7):644–652, jul 2005. [8](#)
-

BIBLIOGRAFÍA

- [25] Jonatan Nordebo. The reissner-nordström metric (tesis de grado). umea university, faculty of science and technology, 2016. [8](#)
- [26] José Socorro, Alfredo Macías, and Friedrich W. Hehl. Computer algebra in gravity: Reduce-Excalc programs for (non-) Riemannian space-times. I. *Computer Physics Communications*, 115(2-3):264–283, dec 1998. [8](#)
- [27] Christian Heinicke and Friedrich W Hehl. Computer algebra in gravity. *arXiv preprint gr-qc/0105094*, 2001. [9](#)
- [28] Gabino Estevez-Delgado, Joaquin Estevez-Delgado, Nadiezhda Montelongo García, and Modesto Pineda Duran. A perfect fluid model for compact stars. *Canadian Journal of Physics*, 97(9):988–993, 2019. [10](#)
- [29] A. K., Ramírez Pérez. Ecuaciones de estado para estrellas de neutrones (tesis de grado). Universidad de San Carlos de Guatemala , 2018. [10](#), [13](#)
- [30] George W. Collins. *Fundamentals of Stellar Astrophysics*. W H Freeman & Co, 1989. [11](#)
- [31] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff. On Massive Neutron Cores. *Physical Review*, 55(4):374–381, feb 1939. [12](#)
- [32] Richard C. Tolman. Static Solutions of Einstein’s Field Equations for Spheres of Fluid. *Physical Review*, 55(4):364–373, feb 1939. [12](#), [17](#)
- [33] Apisit Kinreewong, Petarpa Boonserm, and Tritos Ngampitipan. Solution Generating Theorems and Tolman-Oppenheimer-Volkov Equation for Perfect Fluid Spheres in Isotropic Coordinates. In *Proceedings of the 2016 International Conference on Applied Mathematics, Simulation and Modelling*, Paris, France, 2016. Atlantis Press. [14](#)
- [34] Luis Fernando Muñoz Martínez. *Estrellas de neutrones y propagación de neutrinos*. PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2011. [17](#)
- [35] M. Esculpi de la Fuente, M. Malaver. Un modelo de estrella anisótropa con densidad variable en relatividad general. *XXII Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones. Palma de Mallorca. España*, 2011. [17](#)
- [36] A. M. Oliveira, H. E.S. Velten, and J. C. Fabris. Nontrivial static, spherically symmetric vacuum solution in a nonconservative theory of gravity. *Physical Review D*, 93(12):1–5, 2016. [18](#), [19](#)
- [37] Clésio E Mota, Luis C N Santos, Guilherme Grams, Franciele M da Silva, and Débora P Menezes. Combined Rastall and rainbow theories of gravity with applications to neutron stars. *Physical Review D*, 100(2):24043, jul 2019. [18](#)

- [38] A. M. Oliveira, H. E. S. Velten, J. C. Fabris, and L. Casarini. Neutron stars in Rastall gravity. *Physical Review D*, 92(4):044020, aug 2015. [18](#), [19](#)
- [39] M. Zubair, Maham Lodhi, G. Abbas, and Mehwish Bari. Existence of realistic stellar objects in Rastall gravity with linear equation of state. *Canadian Journal of Physics*, 98(5):464–469, 2020. [18](#)
- [40] Sudan Hansraj, Ayan Banerjee, and Phongpichit Channuie. Impact of the Rastall parameter on perfect fluid spheres. *Annals of Physics*, 400:320–345, 2019. [19](#)
- [41] Carlos Barceló and Matt Visser. Twilight for the energy conditions? *International Journal of Modern Physics D*, 11(10):1553–1560, 2002. [20](#)
- [42] H. Maulana and A. Sulaksono. Energy condition in Rastall gravity theory. *Journal of Physics: Conference Series*, 1321(2), 2019. [20](#), [69](#)
- [43] C. B. Collins. Static stars: Some mathematical curiosities. *Journal of Mathematical Physics*, 18(7):1374–1377, 1976. [24](#), [25](#), [26](#), [28](#), [33](#), [47](#)
- [44] L V Ovsyannikov and Nail H Ibragimov. *Lectures on the Theory of Group Properties of Differential Equations*. world scientific / higher education press, china, jul 2013. [25](#)
- [45] C. B. Collins and J. M. Stewart. Qualitative Cosmology. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 153(4):419–434, sep 1971. [29](#), [69](#)
- [46] Y. C. Leung and C. G. Wang. Equation of State of Matter at Supernuclear Densities. *The Astrophysical Journal*, 181(1965):895, 1973. [29](#)
- [47] Ll. G. Chambers, Carl M. Bender, and Steven A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, volume 63. International Series in pure and Applied Mathematics, 1979. [31](#), [32](#), [33](#), [35](#), [36](#), [40](#)
- [48] Juan María Aguirregabiria Aguirre. *Ecuaciones diferenciales ordinarias para estudiantes de física*. Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco, 2009. [32](#), [36](#), [40](#)
- [49] Daniel Zwillinger. *Handbook of differential equations*, volume 1. Gulf Professional Publishing, 1998. [33](#), [36](#)
- [50] L. S. Pontriaguin. *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. 1973. [36](#), [74](#)