



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN  
NICOLÁS DE HIDALGO

***DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA  
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA***

“APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE  
BIFURCACIONES EN EL ANÁLISIS DE LAS  
OSCILACIONES NO-LINEALES PRODUCIDAS POR  
EL HORNO DE ARCO ELÉCTRICO DE CORRIENTE  
ALTERNA.”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN INGENIERÍA ELÉCTRICA  
OPCIÓN EN SISTEMAS ELÉCTRICOS.

PRESENTA

M. C. MIGUEL ANGEL GÓMEZ MTZ.

ASESOR

DR. J AURELIO MEDINA RIOS.

CO-ASESOR

DR. CLAUDIO R. FUERTE ESQUIVEL.

MORELIA, MICHOACÁN

OCTUBRE DEL 2005



---

# *Dedicatorias*

---

# *Agradecimientos*

---

## Resumen

En el presente trabajo de tesis, se realiza un estudio de análisis de estabilidad de oscilaciones no-lineales del horno de arco eléctrico de corriente alterna, observando la dinámica de operación de este al conectarse con un sistema de potencia utilizando la teoría de bifurcaciones. El análisis es realizado en el dominio del tiempo a través del cálculo de los valores característicos del sistema y un cuidadoso estudio de los diagramas de bifurcación y la estabilidad de los puntos de equilibrio. De igual manera, se analiza el efecto de la variación de los parámetros de bifurcación en el comportamiento de la dinámica del horno de arco eléctrico. El método utilizado permite una comprensión apropiada de las oscilaciones no-lineales producidas por el horno de arco eléctrico de corriente alterna. El análisis se realiza para sistemas monofásicos y trifásicos.

---

## **Abstract**

This contribution deals with the stability analysis of nonlinear oscillations produced by the alternating current arc furnace dynamic operation connected to a supply system using bifurcation theory. The analysis is carried-out in the time domain through the computation of the system eigenvalues and a careful study of the bifurcation diagrams and stability at the equilibrium points. The effect of the bifurcation parameter variation on the arc furnace dynamic behaviour is analyzed. The method allows an appropriate assessment of nonlinear oscillations produced by the alternating current Electric Arc Furnace. The analysis is carried-out for single-phase and three-phase systems.

*Index Terms* — Dynamic behaviour, bifurcations, eigenvalues, stability, nonlinear oscillations, alternating current Electric Arc Furnaces.

---

# Índice general

RESUMEN .....	III
ABSTRACT .....	IV
INDICE GENERAL.....	V
LISTA DE SIMBOLOS Y ABREVIACIONES.....	VII
LISTA DE FIGURAS .....	XII
LISTA DE TABLAS .....	XIV
LISTA DE PUBLICACIONES.....	XVI
<b>1 INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>1</b>
1.1 REVISIÓN DEL ESTADO DEL ARTE .....	1
1.2 MOTIVACIÓN.....	7
1.3 OBJETIVOS PRINCIPALES DE LA TESIS.....	11
1.4 RESUMEN DE LA TESIS.....	11
<b>2 LA TEORÍA DE BIFURCACIONES Y EL CAOS.....</b>	<b>13</b>
2.1 INTRODUCCIÓN .....	13
2.2 PUNTOS DE EQUILIBRO Y SU ESTABILIDAD. ....	17
2.3 CICLOS LÍMITE.....	20
2.4 PLANOS DE FASE Y FLUJO. ....	21
2.5 BIFURCACIONES.....	21
2.5.1 <i>Bifurcaciones Locales.....</i>	<i>24</i>
2.5.1.1 <i>Bifurcación Saddle-Node (SNB). ....</i>	<i>24</i>
2.5.1.2 <i>Bifurcación Transcritita (TCB). ....</i>	<i>26</i>
2.5.1.3 <i>Bifurcación de Horquilla “Pitchfork” (PFB). ....</i>	<i>27</i>
2.5.1.4 <i>Bifurcación Hopf (HB).....</i>	<i>30</i>
2.5.2 <i>Bifurcaciones Globales.....</i>	<i>32</i>
2.5.2.1 <i>Bifurcación de Doble de Ciclos (CFB). ....</i>	<i>32</i>
2.5.2.2 <i>Bifurcación de Periodo Infinito (IPB). ....</i>	<i>34</i>
2.5.2.3 <i>Homoclinica (HCB) o (BSKY). ....</i>	<i>35</i>
2.5.2.4 <i>Bifurcaciones de Toroide (TRB). ....</i>	<i>37</i>
2.5.2.5 <i>Bifurcaciones de Doble Periodo. (PDB).y Caos. ....</i>	<i>38</i>

---

<b>3</b>	<b>APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE BIFURCACIONES EN EL ANÁLISIS DE LAS OSCILACIONES NO-LINEALES PRODUCIDAS POR EL HORNO DE ARCO ELÉCTRICO DE CORRIENTE ALTERNA.</b> .....	<b>42</b>
3.1	INTRODUCCIÓN .....	42
3.2	MODELO DEL HORNO DE ARCO ELÉCTRICO DE CORRIENTE ALTERNA. ....	43
3.3	MODELO DEL SISTEMA DE POTENCIA-HORNO DE ARCO ELÉCTRICO. ....	44
3.4	CASOS DE ESTUDIO.....	46
3.5	BIFURCACIÓN DE DOBLE PERIODO.....	58
3.6	ATRACTORES EXTRAÑOS Y CAOS. ....	59
3.7	INCORPORACIÓN DE LA ECUACIÓN DE OSCILACIÓN DE LA MAQUINA SINCRONA EN EL CASO DE ESTUDIO. ....	68
3.8	ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD A CONDICIONES INICIALES. ....	82
<b>4</b>	<b>ANÁLISIS DE ESTABILIDAD EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA TRIFÁSICOS</b> .....	<b>87</b>
4.1	INTRODUCCIÓN .....	87
4.2	MODELO DEL SISTEMA DE POTENCIA TRIFÁSICO CON ACOPLAMIENTO DEL HORNO DE ARCO ELÉCTRICO. ....	88
4.3	MODELO DE LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN.....	89
4.4	CASOS DE ESTUDIO. ....	92
4.5	RESULTADOS DEL SISTEMA. ....	93
4.6	ENVOLVENTES Y ATRACTORES EXTRAÑOS. ....	99
<b>5</b>	<b>CONCLUSIONES, APORTACIONES Y TRABAJOS FUTUROS.</b> .....	<b>111</b>
5.1	CONCLUSIONES.....	111
5.2	APORTACIONES.....	113
5.3	TRABAJOS FUTUROS. ....	113
	<b>APÉNDICE A</b> .....	<b>115</b>
	<b>APÉNDICE B</b> .....	<b>118</b>
	<b>APÉNDICE C</b> .....	<b>120</b>
	<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	<b>124</b>

---

## Lista de Símbolos y Abreviaciones.

$X^*$	Puntos de equilibrio de un sistema dinámico
$\dot{x}(t) = f(x), x \in \mathbb{R}^n$	Sistema dinámico
$J = f_x(x^*)$	Sistema dinámico con un punto de equilibrio en $J$
$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$	Conjunto de ecuaciones diferenciables en el tiempo
$0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}_e)$	Conjunto de ecuaciones algebraicas no-lineales.
$\left[ \Delta \dot{\mathbf{x}} \right] = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\lambda}_e)} [\Delta \mathbf{x}]$	Series de Taylor aplicado a un sistema dinámico.
$\mathbf{v}$	Vector característico.
$\gamma$	Valor característico.
$P_e = (x_e, \lambda_e)$	Punto de equilibrio.
$\gamma(\lambda_b) = \alpha(\lambda_b) \pm j\omega(\lambda_b)$	Valores característicos imaginarios del Jacobiano.
$r$	Radio del arco eléctrico.
$n$	Variable relacionada con la temperatura del arco eléctrico y la longitud del mismo
$m$	Variable relacionada con el efecto de la temperatura en el arco eléctrico.
$K_1$	Constante de enfriamiento del arco eléctrico relacionada con la proporción derivativa.
$K_2$	Constante de enfriamiento del arco eléctrico relacionada con la energía interna del arco eléctrico.

---

$K_3$	Constante de enfriamiento del arco eléctrico relacionada con la proporción resistiva de la columna del arco eléctrico.
G	Generador ideal monofásico.
$T_S$	Transformador elevador.
$D_L$	Línea de transmisión monofásica.
C	Banco de capacitores.
$T_a$	Transformador acoplador del horno de arco eléctrico.
B	Electrodos del horno de arco eléctrico.
$L_H$	Inductancia equivalente a la reactancia de los cables de alimentación del horno, la inductancia del transformador acoplador y los electrodos del mismo.
R	Resistencia de la línea de transmisión.
$i$	Corriente en la línea.
$i_c$	Corriente en el banco de capacitores.
$i_h$	Corriente en el horno de arco eléctrico.
$v_g$	Voltaje del generador.
$\delta$	Ángulo del voltaje en el nodo de carga.
$T$	Periodo en segundos.
(SNB)	Bifurcación Punto de Silla (Saddle-Node Bifurcation).
(SPFB)	Bifurcación de Horquilla Supercrítica (Supercritical Pitchfork Bifurcation).
(TCB)	Bifurcación Transcrítica (Transcritical Bifurcation).
(SHB)	Bifurcación Hopo Supercrítica (Supercritical Hopf Bifurcation).

---

(UPFB)	Bifurcación de Horquilla Sub-crítica (Unstable Pitchfork Bifurcation).
(CFB)	Bifurcación de Doble de Ciclos (Cyclic Fold Bifurcation).
(UHB)	Bifurcación Hopo Sub-crítica (Unstable Hopf Bifurcation).
(HCB)	Bifurcación Homoclínica (Homoclinic Bifurcation).
(IPB)	Bifurcación de Periodo Infinito (Infinite Period Bifurcation).
(TRB)	Bifurcación de Toroide (Torus Bifurcation).
(BSKY)	Bifurcación Cielo Azul (Blue Sky Bifurcation = HCB).
(PDB)	Bifurcación de Doble Periodo (Period Doubling Bifurcation).
$\mu$	Exponente de Lyapunov.
XPPAUT	Software de simulación de sistemas dinámicos (X-Windows Phase Plane PlusAuto).
EDO	Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.
EDA	Sistema de ecuaciones diferencial-algebraico.
$\theta_m$	Ángulo mecánico del rotor medido con respecto al eje de referencia estacionario A del estator.
$\theta_0$	Valor inicial de $\theta_m$
$x$	Vector de variables de estado dinámicas.
$y(t)$	Vector de variables instantáneas o dinámicas.
$f$	Conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, reales, no-lineales, analíticas y continuas, representando la dinámica de los equipos eléctricos en el sistema.
$\lambda(t)$	Vector de parámetros del sistema que pueden variar de manera quasi-estática.

---

$X \cdot Y$	Espacio de estado.
$\lambda_e$	Valor específico del parámetro de bifurcación en el punto de equilibrio.
$g$	Conjunto de ecuaciones algebraicas reales, no lineales, analíticas y continuas, representando las relaciones voltaje-corriente en terminales de los elementos de transmisión en estado estacionario.
$(x_e(\lambda_e), y_e(\lambda_e), \lambda_e)$	Punto de equilibrio.
$\mathfrak{R}^n$	Espacio de estado o espacio de fase.

---

## Lista de Figuras

Figura 2.1.- Trayectoria en el plano de fases del a) péndulo simple y b) péndulo amortiguado.....	16
Figura 2.2.- Definición de estabilidad. ....	18
Figura 2.3.- Plano de Fase. ....	21
Figura 2.4.- Destrucción de los puntos de equilibrio. ....	25
Figura 2.5.- Intercambio de estabilidad entre los puntos de equilibrio. ....	26
Figura 2.6.- Diagrama de bifurcación Transcrítica. ....	27
Figura 2.7.- Creación de puntos fijos estables. ....	28
Figura 2.8.- Diagrama de bifurcación Pitchfork supercrítica. ....	29
Figura 2.9.- Diagrama de bifurcación Pitchfork subcrítica. ....	30
Figura 2.10.- Planos de fase de la bifurcación supercrítica. ....	32
Figura 2.11.- Planos de fase de la bifurcación de Doble de Ciclos. ....	33
Figura 2.12.- Diagrama de una bifurcación de doblez. ....	34
Figura 2.13.- Planos de fase de una bifurcación de periodo infinito. ....	35
Figura 2.14.- Planos de fase de una bifurcación homoclinica. ....	36
Figura 2.15.- Diagrama de una bifurcación Homoclinica. ....	37
Figura 2.16.- Bifurcación de toroide. ....	38
Figura 2.17.- Diagrama de bifurcación del sistema de Rössler. ....	39
Figura 2.18.- Atractor extraño del sistema de Lorenz. ....	41
Figura 3.1.- Estructura típica del sistema de alimentación y el horno de arco eléctrico de corriente alterna. ....	45
Figura 3.2.- Representación eléctrica del horno de arco eléctrico. ....	46
Figura 3.3.- Comportamiento en el tiempo de la corriente para el caso de estudio. ....	48
Figura 3.4.- Diagrama de bifurcación del modelo. ....	49
Figura 3.5.- Ciclo limite de la orbita periódica inestable. ....	51
Figura 3.6.- Comportamiento del voltaje en el capacitor en el tiempo en la BHI. ....	51
Figura 3.7.- Diagrama de fase en la zona inestable. ....	52
Figura 3.8.- Comportamiento periódico del sistema en la bifurcación Hopf. ....	53
Figura 3.9.- Comportamiento del voltaje en el capacitor y la corriente del horno para el caso inestable con $L=0.4503965 pu$ . ....	54
Figura 3.10.- Comportamiento del voltaje en el capacitor y la corriente del horno para el caso estable con $L=0.43039 pu$ . ....	54
Figura 3.11.- Comportamiento en el tiempo del voltaje en el capacitor. ....	56
Figura 3.12.- Plano de fase $V_c-I$ . ....	57
Figura 3.13.- Comportamiento del sistema para el caso inestable en una bifurcación de doble periodo. ....	58

---

Figura 3.14.-Respuesta en el tiempo para el estado estable.....	61
Figura 3.15.-Bifurcación Hopf. ....	62
Figura 3.16.-Bifurcaciones BHI y BHE. ....	62
Figura 3.17.-Magnitud del voltaje para la zona estable (BHE). ....	63
Figura 3.18.-Magnitud del voltaje en la zona inestable (BHI).....	64
Figura 3.19.-Plano de fase tridimensional. ....	64
Figura 3.20.-Atractor extraño. ....	65
Figura 3.21.-Diagrama de fase en a) dentro del atractor b) fuera del atractor. ....	67
Figura 3.22.-Comportamiento de tendencia estable del sistema en el ciclo limite del atractor extraño.....	67
Figura 3.23.-Comportamiento de la corriente vs tiempo. ....	68
Figura 3.24.-Comportamiento transitorio de la corriente vs tiempo.....	70
Figura 3.25.-Comportamiento transitorio de la corriente del horno vs tiempo.....	71
Figura 3.26.-Diagrama de bifurcación en estado estable. ....	72
Figura 3.27.-Diagrama de bifurcación en estado estable. ....	73
Figura 3.28.-Diagrama de bifurcación mostrando las regiones estables e inestables. ....	73
Figura 3.29.-Diagrama de bifurcación mostrando las bifurcaciones de doble periodo.....	74
Figura 3.30.-Ciclo limite del sistema en la bifurcación Hopf inestable.....	75
Figura 3.31.-Regiones de multiplicidad de estabilidad.....	76
Figura 3.32.-Plano de fase tridimensional del sistema en la zona de atracción 1. ....	76
Figura 3.33.-Comportamiento del $V_c$ en la zona de atracción 1. ....	77
Figura 3.34.-Comportamiento del $V_c$ en la zona de atracción 2.....	78
Figura 3.35.-Plano de fase del sistema en la zona de atracción 2. ....	78
Figura 3.36.-Comportamiento de $I_H$ en la zona de atracción 3. ....	80
Figura 3.37.-Ciclo limite del sistema en la bifurcación de doble periodo. ....	80
Figura 3.38.-Ciclo limite del sistema en la bifurcación de dobles periodos múltiples.....	81
Figura 3.39.-Atractor extraño. ....	82
Figura 3.40.-Comportamiento de las variables en el tiempo. ....	84
Figura 3.41.-Diagrama de bifurcación del sistema. ....	85
Figura 3.42.-Comportamiento del $V_c$ en el tiempo.....	86
Figura 4.1.-Representación eléctrica trifásica típica del horno de arco eléctrico de corriente alterna. ....	88
Figura 4.2.-Configuración geométrica de la línea de transmisión trifásica. ....	89
Figura 4.3.-Comportamiento en el tiempo de la corriente para el caso de estudio en cada una de las fases. ....	95
Figura 4.4.-Comportamiento en el tiempo de los voltajes del banco de capacitores para el caso de estudio en cada una de las fases a) $v_a$ ; b) $v_b$ ; c) $v_c$ . ....	96
Figura 4.5.-Comportamiento en el tiempo de las corrientes del horno en las fases.....	97

---

Figura 4.6.-Comportamiento en el tiempo de las longitudes de los arcos eléctricos del horno en cada fase. ....	98
Figura 4.7.-Diagrama de estabilidad del caso de estudio.....	99
Figura 4.8.-Comportamiento de la corriente en la fase <i>b</i> .....	100
Figura 4.9.- Gráfica del comportamiento de las corrientes en las fases <i>a</i> , <i>b</i> y <i>c</i> . ....	101
Figura 4.10.-Grafica del comportamiento del voltaje en al capacitor conectado en la fase <i>a</i> .....	102
Figura 4.11.-Grafica del comportamiento del voltaje en al capacitor conectado en la fase <i>b</i> .....	103
Figura 4.12.-Grafica del comportamiento del voltaje en al capacitor conectado en la fase <i>c</i> . ....	103
Figura 4.13.-Grafica del comportamiento de los voltajes simultáneos en las fases <i>a</i> , <i>b</i> y <i>c</i> . ....	104
Figura 4.14.-Grafica del comportamiento de la corriente del horno en la fase <i>a</i> .....	105
Figura 4.15.-Grafica del comportamiento de la corriente del horno en la fase <i>b</i> .....	106
Figura 4.16.-Grafica del comportamiento de la corriente del horno en la fase <i>c</i> . ....	106
Figura 4.17.-Grafica del comportamiento de las corrientes del horno en las fases <i>a</i> , <i>b</i> y <i>c</i> . ....	107
Figura 4.18.-Comportamiento del sistema en el diagrama de fase de la $I_a$ vs $I_b$ . ....	108
Figura 4.19.-Comportamiento del sistema en el diagrama de fase del $V_a$ vs $V_b$ . ....	109
Figura 4.20.-Comportamiento del sistema tridimensional.....	110

---

## Lista de Tablas

Tabla 1.1.- Diferentes investigaciones para modelar el horno de arco eléctrico..	12
Tabla 3.1.- Condiciones iniciales de los parámetros del sistema en pu...	15
Tabla 3.2.- Comportamiento de los valores característicos complejos conjugados en función de la variación del parámetro de bifurcación $L$ ...	15
Tabla 3.3.-Condiciones iniciales de los parámetros del sistema para los estados de estabilidad estables e inestables.....	15
Tabla 3.4.-Condiciones iniciales de los parámetros del sistema para los estados de estabilidad estables e inestables.....	15
Tabla 3.5.-Condiciones iniciales de los parámetros del sistema para los estados de estabilidad estables e inestables.....	15
Tabla 3.6.-Condiciones iniciales de los parámetros del sistema para los estados de estabilidad estable e inestable en pu. ....	15
Tabla 3.7.-Parámetros utilizados en el análisis del sistema en pu. ....	15
Tabla 3.8.-Comportamiento de los valores característicos complejos conjugados en función de la variación del parámetro de bifurcación $C$ .....	15
Tabla 3.9.-Parámetros utilizados en el análisis del sistema en pu. ....	15
Tabla 3.10.-Valores de los parámetros del sistema en estado estable en pu. ....	15
Tabla 3.11.-Valores de la Capacitancia en pu para las diferentes bifurcaciones..	15
Tabla 4.1.- Configuración de la línea de transmisión trifásica..	15
Tabla 4.2.- Condiciones iniciales de los parámetros del sistema en pu. ....	15

---

## Lista de Publicaciones.

### Publicaciones asociadas con el presente trabajo de tesis.

- A. Medina, M. A. Gómez-Martínez, C. R. Fuerte-Esquivel, “Application of Bifurcations Theory to Assess Nonlinear Oscillations Produced by AC Electric Arc Furnaces” IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 20, No. 2, Parte 1, Abril 2005, pp. 801-806.
- M. A. Gómez-Martínez, A. Medina, C. R. Fuerte-Esquivel.” Ac arc furnace stability analysis based on bifurcation theory” Admitido para su revisión y publicación en la revista IEE Proc. Generation, Transmission & Distribution
- A. Medina, M. A. Gómez-Martínez, C. R. Fuerte-Esquivel, “Application of Bifurcations Theory to Assess Nonlinear Oscillations Produced by AC Electric Arc Furnaces”, Power Engineering Society General Meeting, 2005. IEEE Junio 12-16, 2005 pp. 707-707
- A. Medina, M. A. Gómez-Martínez, C. R. Fuerte-Esquivel, “Evaluación de Estabilidad de Sistemas Eléctricos Incluyendo Hornos de Arco Eléctrico Aplicando Teoría de Bifurcaciones”, IEEE RVP ‘2004, Decimoséptima Reunión de Verano de Potencia, Aplicaciones Industriales y Exposición Industrial. Acapulco, México, Julio 11-17, 2004.
- M. A. Gómez-Martínez, A. Medina, C. R. Fuerte-Esquivel “Análisis de Estabilidad en Sistemas Eléctricos Basados en Teoría de Bifurcaciones.”, 1er Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica, Ixtapa-Zihuatanejo, Gro., Octubre 27 al 29, 2004

---

# 1 INTRODUCCIÓN.

## 1.1 REVISIÓN DEL ESTADO DEL ARTE

En general los sistemas de potencia eléctricos operan en un estado quasi-estático, en los que constantemente ocurren pequeños cambios en los parámetros del sistema. Sin embargo bajo ciertas condiciones de operación del sistema pequeñas variaciones en los valores de los parámetros del mismo producen cambios cualitativos significativos en las propiedades del sistema. En otras palabras producen cambios en la estabilidad original del sistema, en este contexto existe una opinión creciente con respecto a que la investigación de estos cambios en la estabilidad del sistema se debe de realizar por medio de la *teoría de la dinámica de sistemas* [Abed y Varaiya 1984]. Entre diversas teorías de análisis matemático, la *teoría de bifurcaciones* ha sido utilizada para determinar de manera cualitativa las inestabilidades que toman lugar en la dinámica de los sistemas [Hiskens 1995], así como los puntos de equilibrio anteriores a las inestabilidades del sistema [Ajjarapu y Lee 1992]; de tal forma que los cambios cualitativos que toman lugar en el sistema y que son producidos por pequeñas variaciones en los parámetros de este se denominan *bifurcaciones*.

Los valores de los parámetros en los cuales toma lugar la bifurcación son llamados *puntos de bifurcación*, la aplicación de esta teoría ha tenido un crecimiento importante en el análisis de sistemas de potencia que operan en regiones no-lineales, debido principalmente

---

a la incorporación de componentes no lineales a la red [Hiskens 1995][Ajarapu y Lee 1992].

La teoría de bifurcaciones en el análisis de estabilidad tomó gran relevancia en la década de los 80's [Koppel y Washburn 1982], esto permitió demostrar la presencia de movimientos caóticos con 2 grados de libertad; investigaciones posteriores con la aplicación de esta teoría se han orientado en el sentido del análisis sobre fenómenos tales como colapso de voltaje [Dobson y Chiang 1989], resonancia subsíncrona [Varghese *et al.* 1998], oscilaciones caóticas [Wang *et al.* 1994], oscilaciones por ferresonancia [Kieny 1991] y diseño de controladores no-lineales [Lee *et al.* 2001].

Además esta teoría se ha aplicado para evaluar el comportamiento de componentes no-lineales tales como motores de inducción [Rosehart y Cañizares 1999], modelos de carga [Cañizares 1995][Pai *et al.* 1995], cambiadores de taps en los transformadores [Pai *et al.* 1995], estabilizadores en sistemas de potencia [Vu y Liu, 1989], y compensadores estáticos de VARS [Vu y Liu, 1989],[Kasusky *et al.* 2003],[Mithulananthan *et al.* 2003]. Sin embargo el análisis de las oscilaciones no-lineales producidas por el horno de arco eléctrico de corriente alterna, no había sido abordado y a este se avoca la investigación presentada en esta tesis.

Recientemente, los progresos en el entendimiento de la dinámica no-lineal en sistemas autónomos, han mostrado que las llamadas bifurcaciones tal como lo es el caso de las bifurcaciones Hopf tienen su origen en el movimiento oscilatorio del sistema [Davison *et al.* 2003] y es aplicable a una gran variedad de sistemas. En [Verghese y Banerjee 2001] el comportamiento indeseable de la estabilidad oscilatoria ha sido reportado en sistemas, mecánicos, de control y circuitos eléctricos [Chen *et al.* 2001]. Y se ha observado que la relación de los ciclos límite de estas oscilaciones tiene usualmente una estabilidad local y pueden con en el tiempo coexistir en un comportamiento estable [Davison *et al.* 2003]. En [Venkatasubramanian *et al.* 1992] se realiza el análisis del comportamiento dinámico de un modelo rudimentario pero representativo del sistema de potencia cuando la ganancia de control de voltaje y la carga son variadas. En [Weijun y Venkatasubramanian 1995] se hace un análisis del fenómeno de las bifurcaciones locales y globales, producidas por la interacción dinámica entre el ángulo de voltaje y un modelo reducido del sistema de

---

potencia, en otra contribución [Li y Venkatasubramanian, 1995] realizan un estudio de las bifurcaciones Hopf en un sistema de potencia maquina bus infinito, en el cual se analiza la dinámica de la maquina sincronía conectada a un bus infinito. También en [Hill y Mareels 1990] se reporta un estudio de la estabilidad de los sistemas de potencia por medio de la estabilidad de los exponentes de Lyapunov.

Sin embargo en todos estos estudios no se había incorporado un modelo de simulación en el cual se incorporaran modelos específicos para cada componente del sistema eléctrico de potencia, recientemente se han hecho estudios en este sentido siendo reportados trabajos como los de [Wörnle *et al* 2005] en donde se analiza la dinámica de un circuito ferresonante usando técnicas de continuación y la teoría de bifurcaciones y se abarcan problemas como resonancia sub-armónica, oscilaciones quasi-periódicas y caos. En [Carpinelli *et al.* 2004] se analiza el problema de los hornos de arco eléctrico de corriente directa usando los atractores de Rössler, Chua y Lorenz y determina los parámetros de estos modelos mas adecuados para simular el comportamiento del horno, la distorsión armónica de la forma de onda del voltaje y las fluctuaciones son calculadas a partir de los datos de esta simulación. En [Angulo *et al* 2005] se presenta un método de control de ciclos límite en sistemas con amortiguamiento por medio de la teoría de bifurcaciones, el cual se realiza con un apropiado diseño de un sistema de control de interrupción y el control de los ciclos limite se realiza con las colisiones de los puntos de bifurcación, En [Watanabe *et al* 2004] se presenta un método numérico para el análisis de la estabilidad global en sistemas de potencia multimaquina con múltiples oscilaciones de potencia, para el análisis de estabilidad global producida por la inestabilidad de los ciclos limite se utiliza la teoría de bifurcaciones.

El horno de arco eléctrico de corriente alterna ha sido por demás identificado como una fuente de distorsión muy importante conectada al sistema eléctrico. Esto es debido principalmente a su comportamiento altamente no-lineal y a su potencia de operación. En el pasado estos dispositivos eran utilizados de manera esporádica, dado que económicamente resultaba incosteable mantenerlos operando constantemente, y su consumo de energía era poca o media en las pocas empresas donde estaban instalados; en ese momento estos dispositivos no representaban una fuente significativa de distorsión armónica.

---

Sin embargo, el aumento en las capacidades de fundición aunado a el incremento en la demanda de producción, convirtieron al horno de arco eléctrico de corriente alterna en una de las principales fuentes de distorsión armónica conectadas a la red. La necesidad de una predicción precisa en el proceso de fundición no-lineal, alentó el desarrollo de modelos más precisos que representaran el comportamiento del horno de arco eléctrico con diferentes grados de complejidad [Acha *et al.* 1990], la operación del horno presenta varios problemas que se manifiestan en la red eléctrica de la siguiente manera [Dungan 1980][Medina y García 1999].

- i) La inyección de armónicos e interarmónicos a la red.
- ii) Transitorios causados por la naturaleza aleatoria del proceso de fundición del metal.
- iii) Desbalance trifásico de corrientes y voltajes debido a la naturaleza aleatoria del arco eléctrico y corrosión de los electrodos en las tres fases.
- iv) Variaciones en las corrientes debido a los cambios rápidos de la longitud del arco.
- v) El fenómeno caótico también se observa en las corrientes del horno de arco eléctrico.

Los hornos de arco eléctrico de corriente alterna EAF (por sus siglas en inglés) se acoplan a fuentes de energía de corriente alterna en extra alta tensión (aproximadamente 115 KV) [Beites 1999]. El proceso de fundición usado en la fabricación de acero es por demás altamente no-lineal y aperiodico, lo cual convierten al horno de arco eléctrico de corriente alterna en una de las fuentes de distorsión armónica e interarmónica más potentes de la red [Acha *et al.* 1990][Girgis *et al.* 1995][Mayordomo *et al.* 1997]. Sin embargo, los métodos tradicionales no pueden describir con precisión la dinámica del horno de arco

---

eléctrico, aunque son de gran utilidad en la estimación de los niveles de producción de armónicos, interarmónicos, parpadeo y fluctuaciones de voltaje en el nodo de acoplamiento a la red en donde afectan la calidad de la energía, En uno de los primeros trabajos desarrollados para representar el comportamiento del horno de arco eléctrico, se simplifica la característica voltaje-corriente para representar la dinámica del horno de arco eléctrico [Dungan 1980], este modelo ha sido usado para el análisis de transitorios. En otra investigación se propone un modelo muy sencillo el cual consiste en una inductancia y una resistencia simple acopladas a un interruptor de corriente [Douglas *et al.* 1996], sin embargo, Actualmente estos modelos no son muy usados debido principalmente a que no incorporan la característica variante en el tiempo del horno de arco eléctrico.

Los modelos de fuente de corriente han sido utilizados en las investigaciones de los armónicos producidos por este dispositivo [Cox y Mirbod 1986]; este modelo ha sido utilizado para el diseño de filtros y la determinación de la distorsión de voltaje por las corrientes inyectadas al sistema. En otra contribución [Montanari *et al.* 1994] se desarrolla un modelo basado en una resistencia variante en el tiempo no-lineal, que representa tres condiciones de operación básicas: circuito abierto, corto circuito y grado de operación. En [Mayordomo *et al.* 1997] un modelo basado en el dominio de la frecuencia es utilizado para el análisis en estado estacionario en el cual el modelo del horno de arco eléctrico tiene dos modos de operación: continua y discontinua. En [O'Neill *et al.* 1998] se propone un modelo basado en la teoría de caos, el modelo desarrollado genera datos para la identificación de los parámetros y es utilizado para la planificación de la instalación de hornos de arco eléctrico y la estimación del impacto de esta operación. Un modelo controlador de voltaje en el dominio del tiempo basado en la reproducción teórica de la forma de onda del horno de arco eléctrico cuando es alimentado por una fuente senoidal es reportado en [Varadan. *et al.* 1996].

En [Acha *et al.* 1990][Medina y García 1999] el principio de conservación de la energía es utilizado para representar al horno de arco eléctrico por medio de ecuaciones diferenciales.

En base a lo anteriormente descrito, la Tabla 1.1 resume las diferentes investigaciones realizadas para representar, con distintos grados de detalle, la operación no-lineal del horno de arco eléctrico.

**Tabla 1.1.- Diferentes investigaciones para modelar el horno de arco eléctrico.**

<b>Investigaciones</b>		<b>Autor/Fecha.</b>	<b>Principales puntos del artículo.</b>
Modelo de resistencia no lineal,		Roger C. Dugan [1980]	Este modelo es muy simple, sin embargo no representa la característica no lineal del horno de arco eléctrico.
Modelo de fuente de corriente	Series de Fourier	M.D.Cox [1986]	Estos modelos representan fielmente la característica estocástica del horno, además, con el algoritmo caótico es posible cuantificar el grado de contaminación armónica, por lo cual es muy útil en la planeación de la instalación de los hornos.
	Teoría Caótica.	E. O'Neill-Carrillo [1998]	
Modelo de fuente de	Fuente de voltaje con armónicos empíricos.	Douglas Andrews [1996]	El modelo empírico, es muy sencillo, sin embargo no representan la característica estocástica del horno, por el

voltaje	Fuente de voltaje con amplitud modulada	Rafael Collantes [1997] H.M. Peterson [1740] D. Stade [1994]	contrario, el modelo de amplitud modulada, representa fielmente esta característica.
Modelos variantes en el tiempo	Fuente de voltaje variante	G.C. Montanari [1994]	Estos nuevos modelos representan la característica estocástica del sistema y pueden incluir tanto el modelo estático como el dinámico, para el caso de la resistencia variable.
	Resistencia variante	Srinivas Varadam [1996]	
Balance de energía.		E. Acha [1990] A. Medina [1999]	En este modelo la representación del horno basada en un conjunto de ecuaciones diferenciales se realiza en el dominio de la frecuencia o en el dominio del tiempo para obtener su estado estacionario en operación.

## 1.2 MOTIVACIÓN

La incorporación cada vez mayor de cargas altamente no lineales a la red eléctrica y la problemática inherente a este tipo de conexiones es por demás un tema de gran interés, sobre todo en el análisis del régimen permanente de circuitos eléctricos. En los últimos

---

años, una rama de la industria que ha estado incrementando su capacidad de producción son las empresas fundidoras de metal, en específico las acereras, las cuales han incrementado su capacidad de producción en un 80% en un lapso de 10 años aproximadamente. El principal elemento que utiliza esta industria son los hornos de arco eléctrico de corriente alterna, los cuales son unas de las cargas mas perturbantes que tiene la red eléctrica [King *et al.* 1994]. Entre los principales problemas que presentan los hornos de arco eléctrico de corriente alterna se encuentran: la producción de armónicos, tanto de intensidad como de tensión, desequilibrios, el parpadeo “flicker”, desbalances de corrientes y voltajes trifásicos, colapso de voltaje y condiciones de operación caóticas.

El análisis del horno de arco eléctrico de corriente alterna se ha llevado a cabo por medio de técnicas de análisis propias de los estudios de redes con cargas no lineales, en particular las técnicas en el dominio del tiempo [Varadan *et al.* 1996] y las técnicas en el dominio de la frecuencia [Acha *et al.* 1990]. Sin embargo, existen también métodos híbridos que tratan de conjugar las características de ambos métodos [Semlyen y Medina 1995], en cualquiera de estos casos se requiere la existencia de un modelo matemático que permita simular el comportamiento del horno de arco eléctrico bajo distintas condiciones de operación. La técnica utilizada determinará el grado de precisión obtenido a la hora de representar el horno y también condiciona el tipo de modelo a desarrollar. Dado que las ventajas de una y de otra técnica son complementarias, la elección de la técnica adecuada dependerá principalmente del caso de estudio en particular, el tipo de estudio a realizar y de los elementos del circuito que se esta considerando.

Los métodos en el dominio del tiempo han sido muy utilizados en el análisis de circuitos electrónicos [Varadan *et al.* 1996], esto debido a la relativa facilidad con que se pueden modelar muchos tipos de elementos no lineales, al utilizar estos métodos se plantea un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales que generalmente se resuelven por métodos de integración numérica. Los métodos más utilizados para plantear un sistema de ecuaciones diferenciales se basan en la formación en espacio de estados y en el análisis nodal con equivalentes Norton asociados a los elementos dinámicos respectivamente, El primero se ha utilizado principalmente en circuitos electrónicos y a sido descrito ampliamente por [Chua y Green 1976][Balabanian 1969][Kuh y Rohrer 1965], mientras

---

que el segundo ha sido utilizado principalmente en el análisis de fenómenos transitorios en los sistemas eléctricos de potencia y se utiliza en el simulador EMTP [BPA 1985]. De esta manera se simula el comportamiento del circuito a través del tiempo y se obtiene el régimen estable. Sin embargo la integración numérica de las ecuaciones diferenciales también presenta el inconveniente de que el tiempo de simulación puede ser considerable sobre esta problemática se habla en [Chua y Lin 1975]. Se han desarrollado técnicas de aceleración al estado estacionario que permiten su determinación sin necesidad de evaluar todo el periodo transitorio reduciéndose significativamente el tiempo de computo necesario para la obtención de la solución del estado estacionario periodico del sistema [Aprille 1972], [Colon 1972], [Grosz 1979], [Kakizaki 1985] y [Chua y Ushida 1972].

Por otra parte, el modelado de sistemas eléctricos con componentes dependientes de la frecuencia o representados mediante parámetros distribuidos, así como las especificaciones de potencia se torna generalmente difícil en el dominio del tiempo. Por esta razón para estudios en estado estacionario de redes de energía eléctrica se ha optado generalmente por métodos en el dominio de la frecuencia. La técnica mas conocida es la denominada “Balance Armónico”, en la que mediante la aplicación de la transformada de Fourier se convierten las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico del sistema en ecuaciones algebraicas linealizadas las cuales se resuelven por medio de métodos iterativos. En general las técnicas del dominio en la frecuencia se pueden tratar desde dos puntos de vista, aquellas que tratan las cargas no-lineales como inyecciones de corriente a la red, sin que exista interacción red-carga no lineal, y aquellas que resuelven en su totalidad las ecuaciones algebraicas no-lineales. [Xia y Heydt 1982],[Mayordomo 1986],[Medina y García 1999] son algunos ejemplo de la bibliografía referente a este tema.

Posteriormente surgieron técnicas híbridas, que básicamente consisten en separar la parte lineal del circuito y estudiarlo en el dominio de la frecuencia, y la parte no-lineal en el dominio del tiempo, ejemplo de esto se describen en [Semlyen y Medina 1995][Parker y Chua 1989]y [Guckenheimer y Holmes 1997].

Sin embargo, incluso las técnicas híbridas únicamente toman en cuenta el estado estacionario del sistema, sin abordar el tema de la inestabilidad de los sistemas, lo anterior debido principalmente a que las cargas altamente no-lineales no significaban un problema

---

para la red eléctrica puesto que su utilización había sido relativamente limitada, tal como en el caso de los hornos de arco eléctrico, los cuales desde su invención (mediados del siglo XIX) fueron considerados como dispositivos con un costo de fabricación elevado y una capacidad de producción baja [Apraiz 1978], por lo mismo su utilización fue esporádica y no eran una carga representativa de la red eléctrica. No obstante, a partir de 1962 se comenzaron a utilizar los llamados hornos de “Ultra Potencia” o UHP (Por sus siglas en inglés). Estos eran hornos de 50 a 150 toneladas de capacidad conectados a transformadores de potencia muy superiores a los utilizados hasta ese momento, con ellos se conseguía una producción diaria de hasta 12 coladas, en lugar de la 4 o 5 que se obtenían anteriormente, debido a esta eficiencia el horno se empieza a considerar como una alternativa competitiva en la producción de acero con los métodos clásicos. Este incremento en la producción, a la par de un mayor rendimiento, convierten al horno en una de las cargas no-lineales principales de la red, la cual presenta la gama de problemas mencionados previamente. Se requiere entonces el análisis de este tipo de sistemas por medio de técnicas que puedan representar el comportamiento inestable del sistema.

La teoría de bifurcaciones es una de las técnicas principales que se utilizan para realizar estudios de estabilidad en sistemas sujetos a oscilaciones no-lineales, analizando primeramente el sistema hasta encontrar un punto de equilibrio, a continuación se varían las magnitudes de las diferentes variables de estado del sistema con el fin de simular el sistema y determinar posibles inestabilidades que se encuentren con la variación de estas variables de estado. Lo anterior se logra observando los valores característicos del Jacobiano obtenido del sistema. La ventaja de esta técnica consiste en la determinación de las inestabilidades del sistema observando el comportamiento de los valores característicos del sistema, por lo que esta es una técnica cualitativa, esto reduce significativamente el tiempo de esfuerzo computacional y proporciona una herramienta cualitativa para resolver este problema.

A la par de esto se requiere modelar al generador por medio de un modelo más preciso y eficaz, el cual tenga la habilidad de interactuar con el sistema conformado por una línea de distribución, un banco de capacitores y el modelo del horno de arco eléctrico, para lograr una representación mas precisa de su comportamiento dinámico.

---

### 1.3 OBJETIVOS PRINCIPALES DE LA TESIS

Dentro de los objetivos principales del presente trabajo de tesis se encuentran los que se mencionan a continuación:

- En una etapa inicial incorporar el modelo del horno de arco eléctrico representado por una ecuación diferencial [Acha *et al.* 1990] a un sistema de potencia alimentado por un generador ideal.
- Analizar cualitativamente el comportamiento del horno de arco eléctrico de corriente alterna por medio de la teoría de bifurcaciones.
- Determinar las posibles oscilaciones y bifurcaciones que se producen con la interacción dinámica entre el sistema y el horno de arco eléctrico.
- Analizar el modelo del generador incluyendo las variables de inercia del mismo por medio de la teoría de bifurcaciones y determinar su comportamiento en el tiempo.
- Determinar las posibles oscilaciones y bifurcaciones que se producen con la dinámica del generador dependiendo de las condiciones iniciales del sistema.
- Incorporar un modelo trifásico de un sistema de potencia que alimente al horno de arco eléctrico, con el fin de analizar la dinámica de este con el modelo trifásico del horno de arco eléctrico y la estabilidad de todo el sistema.
- Analizar las posibles inestabilidades del sistema trifásico por medio de la teoría de bifurcaciones.

### 1.4 RESUMEN DE LA TESIS

El desarrollo del presente trabajo de tesis se llevara a cabo como se presenta a continuación.

---

En el Capitulo 1 se presenta una revisión del estado del arte, además de que se da una explicación sobre la motivación, los objetivos principales de la tesis y se da un breve resumen del desarrollo de cada uno de los capítulos que comprenden el presente trabajo de tesis.

En el Capitulo 2 se dará una explicación sobre la teoría de bifurcaciones, así como los conceptos generales y los principales impulsores de esta investigación.

En el Capitulo 3 se analiza el sistema eléctrico de potencia típico de alimentación de un horno de arco eléctrico de corriente alterna, bajo diferentes condiciones de operación, en su primera etapa el horno se conectara a un bus infinito, con el fin de observar las oscilaciones que produce la interacción de el horno de arco con los diferentes elementos que se encuentran conectados al sistema, y en una segunda etapa se analizara el sistema descrito incorporando un modelo del generador, en este caso la ecuación de oscilación de la maquina, estos dos estudios se realizaran de manera monofásica.

En el Capitulo 4 se presenta los resultados obtenidos al analizar el horno de arco eléctrico y los elementos del sistema de potencia trifásico. Se realizan estudios en las diferentes etapas de estabilidad del sistema tanto estado estable como inestable; en este modelo se toman en cuenta las inductancias mutuas y la influencia de las corrientes en cada una de las fases de la línea de transmisión trifásica, así como las conexiones trifásicas a cada uno de los ánodos del horno eléctrico de corriente alterna.

En el Capitulo 5 se dan las conclusiones generales aportaciones y trabajos futuros que se proponen.

---

## 2 LA TEORÍA DE BIFURCACIONES Y EL CAOS.

### 2.1 INTRODUCCIÓN

La física tal como la conocemos es algo relativamente reciente, tanto el conocimiento científico basado en el experimento riguroso, como la aplicación, también rigurosa, de la matemática a la física, sin embargo hubo algunos observadores e investigadores que tuvieron importantes contribuciones como por ejemplo: Galileo Galilei (1564-1642) que midió con todo el rigor que le fue posible e intentó explicar de un modo cuantitativo sus resultados sobre el movimiento de los cuerpos celestes en la naturaleza. Isaac Newton (1643-1727) que convirtió la física en geometría con su obra “Principios matemáticos de la filosofía natural”. La técnica fundamental de esta forma de conocimiento es el reduccionismo, en otras palabras, los fenómenos se despojan de los accesorios y se simplifican a lo que se piensa es la raíz del fenómeno y las ecuaciones que describen la naturaleza son en general ecuaciones diferenciales lineales, las cuales son perfectamente reversibles en el tiempo, esto llevó a Laplace (1749-1827) a afirmar que una mente que pudiera conocer en un instante dado todas las variables del universo conocería unívocamente el pasado y el presente del mismo. Sin embargo, ya en el siglo XIX, se

---

observó que existían casos en los que el método Newtoniano fallaba, incluso estrepitosamente, tal era el caso de los sistemas formados por conjuntos grandes de elementos o partículas, por ejemplo los gases. Para ellos, L. Boltzmann (1844-1906) y otros científicos crearon la mecánica estadística. Posteriormente el francés J. H. Poincaré (1854-1912) observó que los sistemas formados por un reducido número de elementos podían evolucionar de modo tal que progresivamente fuera haciéndose impredecible su comportamiento.

Para Poincaré los sistemas venían determinados por un conjunto de condiciones iniciales, sin embargo estas nunca se podrían conocer con precisión absoluta y en consecuencia poco a poco se iría perdiendo la memoria de las mismas y los sistemas se harían impredecibles. Posteriormente estas de Poincaré sobre la importancia de las condiciones iniciales en la dinámica de los sistemas quedaron algo olvidadas, sin embargo, hacia 1960, el meteorólogo americano Edward Lorenz se dedicaba a estudiar el comportamiento de la atmósfera, tratando de encontrar un conjunto de ecuaciones que permitiera predecir, a partir de variables sencillas y mediante simulaciones en computadoras, el comportamiento de grandes masas de aire, con lo cual poder hacer predicciones climatológicas.

Lorenz realizó distintas aproximaciones hasta que consiguió ajustar el modelo a la influencia de tres variables que expresan como cambian a lo largo del tiempo la velocidad y la temperatura del aire. El modelo se concretó en tres ecuaciones matemáticas, bastante simples, conocidas, hoy en día, como modelo de Lorenz, el cual es mostrado en la ecuación (2.1)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \lambda x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{2.1}$$

En este modelo, Lorenz observó que pequeñas diferencias en los datos de partida (algo aparentemente tan simple como utilizar 3 ó 4 decimales) llevaban a grandes diferencias en las predicciones del modelo. De tal forma que cualquier pequeña perturbación, o error, en las condiciones iniciales del sistema puede tener una gran influencia sobre el resultado final.

---

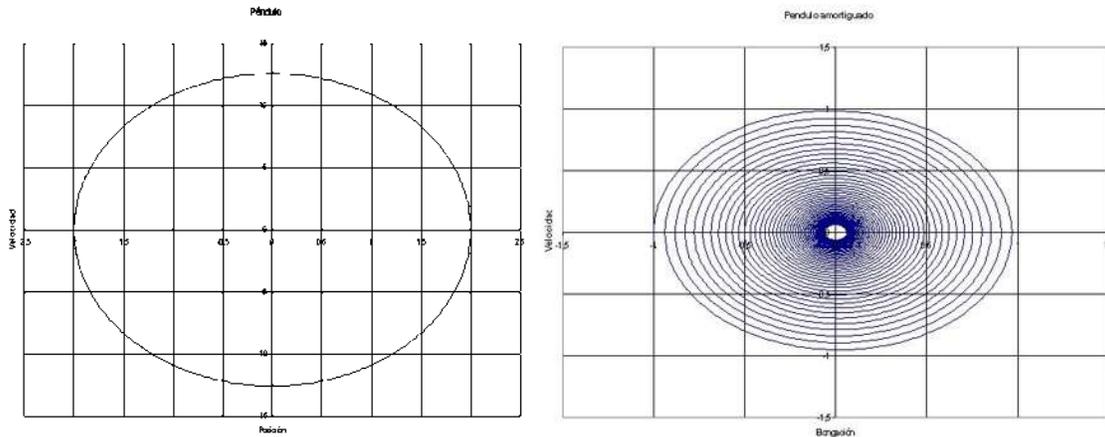
Por lo tanto se hacía muy difícil hacer predicciones climatológicas a largo plazo. Los datos empíricos que proporcionan las estaciones meteorológicas tienen errores inevitables, aunque sólo sea porque hay un número limitado de observatorios incapaces de cubrir todos los puntos de nuestro planeta. Esto hace que las predicciones se vayan desviando con respecto al comportamiento real del sistema.

Lorenz intentó explicar esta idea mediante un ejemplo hipotético. Sugirió que imaginásemos a un meteorólogo que hubiera conseguido hacer una predicción muy exacta del comportamiento de la atmósfera, mediante cálculos muy precisos y a partir de datos muy exactos. Podría encontrarse una predicción totalmente errónea por no haber tenido en cuenta el aleteo de una mariposa en el otro lado del planeta. Ese simple aleteo podría introducir perturbaciones en el sistema que llevaran a la predicción de una tormenta.

De aquí surgió el nombre de “*Efecto mariposa*” que, desde entonces, ha dado lugar a muchas variantes y recreaciones.

Se denomina, por tanto, efecto mariposa a la amplificación de errores que pueden aparecer en el comportamiento de un sistema complejo. En definitiva, el efecto mariposa es una de las características del comportamiento de un sistema caótico, en el que las variables cambian de forma compleja y errática, haciendo imposible hacer predicciones más allá de un determinado punto, que recibe el nombre de horizonte de predicciones.

El análisis de los sistemas caóticos se hace en el llamado plano de fases, un plano en el que están representadas todas las variables dinámicas del sistema. A cada instante de la evolución del sistema le corresponde un punto en este plano de fases, que forman las llamadas *trayectorias*. Por ejemplo, el plano de fases de un péndulo simple se representara en función de su posición y su velocidad, tal como lo muestra la Figura 2.1 (a) y un péndulo amortiguado se muestra en la Figura 2.1 (b)



2.1 a)

2.1 b)

Figura 2.1.-Trayectoria en el plano de fases del a) péndulo simple y b) péndulo amortiguado.

Estos planos de fases en general se aproximan cuanto se quiera a una determinada figura geométrica, denominada *atractor*.

En los sistemas no caóticos el atractor suele ser un punto, una circunferencia o un toroide. En los sistemas con caos, el atractor presenta una forma "extraña". El análisis del atractor es pues una indicación del carácter caótico del fenómeno.

Los orígenes de la teoría de sistemas dinámicos se formulan a finales del siglo XIX. Los componentes básicos de la teoría de multiplicidad de soluciones de ecuaciones de evolución no lineal fueron agrupados en tres áreas distintas: soluciones críticas, estabilidad, y estabilidad estructural. Estas formaron una rama de las matemáticas conocida como *Teoría de Bifurcaciones* propuesta por H. Poincare (1880) y Julia (1917), entre otros. El desarrollo de la teoría de bifurcaciones ha mejorado la comprensión de la existencia de múltiples soluciones en sistemas no lineales y de cómo el número y la estabilidad de dichas soluciones cambia cuando se varía algún parámetro.

La teoría de bifurcaciones es una de las herramientas más importantes en el análisis del comportamiento de los sistemas no lineales, debido principalmente a que puede identificar de forma cualitativa cambios y disturbios importantes en la dinámica del sistema, los cuales son producidos por pequeños cambios en las condiciones iniciales de sus parámetros. Estas

---

pequeñas variaciones producen cambios a su vez en la estabilidad del sistema, o en otras palabras la aparición o desaparición de soluciones estables o puntos de equilibrio.

Debido a la diversidad de sistemas no lineales que existen en forma natural, la teoría de bifurcaciones puede ser aplicada en una gran diversidad de problemas, sin embargo, en esta tesis se analizará en específico a los sistemas eléctricos de potencia en donde se observara la dinámica del sistema ante variaciones lentas en los parámetros del mismo.

Los sistemas no lineales pueden presentar diversos comportamientos, tales como: ciclos limite, movimiento quasi-periódico, colapso de voltaje e incluso caos. A continuación se da una breve explicación sobre los conceptos básicos de la teoría de bifurcaciones, los diferentes tipos de bifurcaciones, puntos de equilibrio, ciclos limite y caos.

## **2.2 PUNTOS DE EQUILIBRIO Y SU ESTABILIDAD.**

Tradicionalmente durante el problema de la dinámica transitoria y de estado estacionario se ha resuelto calculando las orbitas y trayectorias del sistema por medio de simulación numérica utilizando los métodos de fuerza bruta, sin embargo, la teoría de bifurcaciones permite conocer el comportamiento de las orbitas y trayectorias del sistema sin solucionar las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema. Lo anterior se logra al conocer el número y las posiciones de los puntos de equilibrio, así como su estabilidad.

Los puntos de equilibrio  $x^*$  de un sistema dinámico se obtienen de la solución de las ecuaciones de estado considerando que no existe ninguna dinámica en el sistema, es decir  $\dot{x} = 0$ , estos puntos también son llamados *puntos fijos*, puntos seguros, puntos constantes o soluciones de reposo. Los puntos de equilibrio representan la estabilidad del sistema.

La estabilidad del sistema puede ser obtenida determinando la estabilidad del punto de equilibrio de acuerdo al teorema de Lyapunov que se define a continuación [Kasusky, 2002].

---

**“Un punto de equilibrio  $x^*$  es estable si para cada vecindario  $V$  de  $x^*$  se tiene un vecindario  $V_1$  de  $x^*$  tal que para todo  $x_0 \in V_1$  la solución existe y cae dentro de  $V$  para todo el tiempo  $t > 0$ ”.**

La Figura 2.2 representa esto gráficamente,

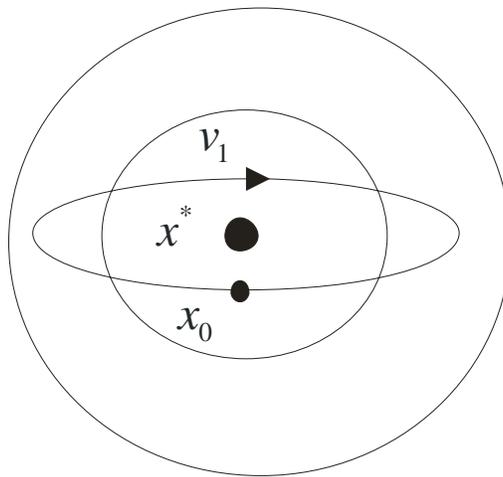


Figura 2.2.- Definición de estabilidad.

Por lo tanto un *punto de equilibrio* es asintóticamente estable cuando todas las trayectorias con  $x_0 \in V_1$  convergen a  $x^*$  conforme  $t \rightarrow \infty$ , en caso contrario es inestable. Desde el punto de vista de cálculo de estabilidad de puntos de equilibrio asociados a sistemas de gran escala, esta puede obtenerse mediante la aplicación de la teoría de valores característicos. La teoría de estabilidad se relaciona con la de valores característicos por el siguiente teorema de Lyapunov [Kuznetsov, 1998].

**“Considerando un sistema dinámico definido por  $\dot{x}(t) = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  donde  $f$  es diferenciable. Asumiendo además que el sistema tiene un punto de equilibrio  $x^*$ ; es**

---

**decir,  $f(x^*) = 0$ , y la matriz Jacobiana de  $f(x)$  evaluada en el punto de equilibrio es denotada por  $J$ ,  $J = f_x(x^*)$ , entonces  $x^*$  es estable si todos los valores característicos de  $J$  tienen parte real negativa.”**

Cuando todos los valores característicos de  $J$  tienen parte real diferente de cero, independientemente de los valores de sus partes imaginarias, el punto fijo asociado es llamado punto fijo hiperbólico. En caso de que al menos un valor característico tenga parte real cero, este punto fijo es llamado punto fijo no hiperbólico.

Por lo tanto si todos los valores característicos del Jacobiano del sistema tienen parte real negativa el punto de equilibrio es asintóticamente estable. Pero si al menos un valor característico tiene parte real positiva el sistema es inestable.

Para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio de un sistema no-lineal primero se linealiza el sistema alrededor de un punto de equilibrio, por medio de la aplicación de las series de Taylor. Los teoremas de Hartman-Grobman [Nayfhe y Balachandran 1995] y Shoshitaishvili [Kuznetsov 1998] permiten relacionar la estabilidad de los puntos fijos del sistema linealizado con la estabilidad de los puntos fijos del sistema no-lineal, y se aplican para puntos fijos hiperbólicos y no hiperbólicos respectivamente. De los cuales se deduce lo siguiente:

- El punto fijo de un sistema no-lineal es *estable* si el punto fijo del correspondiente sistema lineal es asintóticamente estable.
- El punto fijo de un sistema no-lineal es *inestable* si el punto fijo del correspondiente sistema lineal es asintóticamente inestable.
- La linealización no puede determinar la estabilidad de puntos fijos que tienen todos los valores característicos con parte real cero o puntos fijos con algunos valores característicos con parte real negativa y el resto de los valores característicos con parte real cero. En este último caso se deberán incluir más términos en la serie de expansión de Taylor.

---

Por lo tanto el teorema de Hartman-Grobman [Nayfhe y Balachandran 1995] determina que las trayectorias de un punto hiperbólico del sistema no-lineal son cualitativamente similares a las trayectorias en la vecindad del punto de equilibrio hiperbólico del punto de equilibrio lineal. Por lo tanto el comportamiento dinámico del sistema de equilibrio lineal es cualitativamente igual al del sistema no-lineal en la vecindad del punto de equilibrio hiperbólico.

## 2.3 CICLOS LÍMITE.

Un aspecto importante en los sistemas no-lineales es la existencia de soluciones periódicas que se caracterizan por estados variantes en el tiempo [Kasusky, 2002], por lo tanto, una *solución periódica* es una solución dinámica caracterizada por una frecuencia básica, ésta es llamada *ciclo límite* si no existen otras soluciones periódicas cercanas a ella. En otras palabras un ciclo límite es una solución periódica aislada y corresponde a una órbita periódica aislada en el espacio de fase. Los ciclos límite son inherentemente un fenómeno no lineal. En sistemas lineales pueden existir soluciones periódicas, pero con la característica que las órbitas cerradas no están aisladas. A este conjunto de soluciones se les llama centros.

La estabilidad de los ciclos límite es análoga a la de los puntos de equilibrio:

- Un ciclo límite es *asintóticamente estable* si todas las orbitas comenzando cerca de éste, alcanzan el ciclo límite conforme el tiempo se incrementa.
- Un ciclo límite es *asintóticamente inestable* si todas las orbitas comenzando cerca de éste, se alejan conforme el tiempo se incrementa.

---

## 2.4 PLANOS DE FASE Y FLUJO.

Un *plano de fase* es el conjunto de trayectorias que representan las soluciones de las ecuaciones de estado, en el cual se grafican los comportamientos transitorio y asintótico del sistema dinámico [Strogatz 2000]. Por lo tanto, es posible determinar el número y tipos de estado presente en el sistema conforme el tiempo se va incrementando. En la Figura. 2.3 se muestra un plano de fase que contiene la información principal de todo el sistema; los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , y  $E$  son los puntos de equilibrio del sistema, la orbita cerrada  $D$  corresponde a las soluciones periódicas o ciclos limite, para este caso está es una orbita estable debido a que las trayectorias cercanas tienden a esta orbita tanto por el interior como por el exterior del ciclo limite. Como puede observarse los puntos  $A$ ,  $B$ , y  $C$  son inestables y  $E$  es un punto estable por lo que se explicó anteriormente.

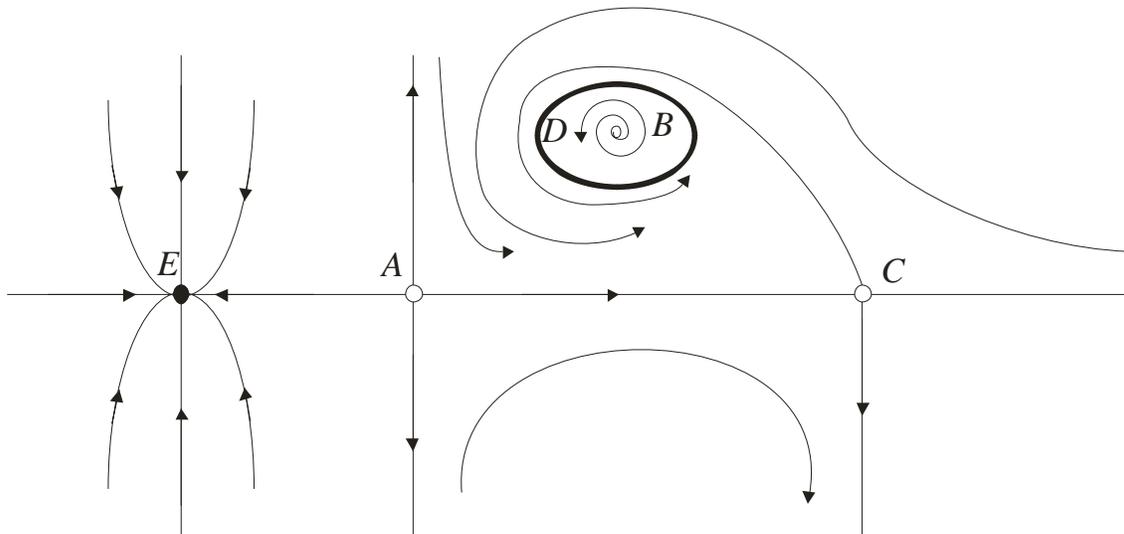


Figura 2.3.- Plano de Fase.

## 2.5 BIFURCACIONES.

---

Cuando los parámetros que determinan la dinámica de un sistema son variados en su magnitud, resultan en un sistema dinámico que se encuentra en función de los parámetros de control  $\lambda$  los cuales cambian de valor.

En este contexto, las bifurcaciones indican el cambio cualitativo de las características dinámicas de un sistema, tales como el número, tipo y estabilidad de puntos de equilibrio y orbitas periódicas conforme se varían uno o más parámetros de los que depende el sistema. Estos cambios cualitativos del sistema pueden ser clasificados en *bifurcaciones locales* y *globales* [Strogatz 2000], las cuales se refieren a los cambios de estabilidad que ocurren en el plano de fase en la vecindad del punto fijo o solución periódica del sistema y a la estabilidad periódica de estas soluciones respectivamente.

Los resultados obtenidos se muestran en un *diagrama de bifurcación*, el cual proporciona información de forma cualitativa sobre el comportamiento del sistema en las soluciones en estado estacionario (equilibrio), cuando los parámetros físicos del sistema son variados. En ciertos puntos (*puntos de bifurcación*), las variaciones infinitesimales en los parámetros del sistema pueden causar cambios cualitativos significativos en las soluciones de equilibrio. Más específicamente, la construcción de un *diagrama de bifurcación* consiste en los pasos siguientes [Hiskens 1995] [Ajjarapu 1992]:

1. Encontrar una solución en un punto de equilibrio.
2. A partir de esta solución obtener otras soluciones de equilibrio por medio de métodos de continuación [Strogatz 2000].
3. Determinar la estabilidad de cada solución.

Estos pasos se describen en detalle a continuación.

El análisis de estabilidad de sistemas basado en la aproximación de bifurcaciones requiere de un conjunto de ecuaciones diferenciales y/o algebraicas que contienen dos tipo de variables: de *estado* y *parámetros*.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) \tag{2.1}$$

---

Donde  $x \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de variables de estado dinámicas y  $\lambda \in \mathfrak{R}^k$  es el vector de parámetros del sistema el cual cambia de forma mínima, produciendo que el sistema se mueva de un punto de equilibrio a otro.

El inicio del análisis del modelo (2.1) del sistema de potencia es la identificación de los puntos de equilibrio, que definen las soluciones de equilibrio del sistema bajo análisis. Para un parámetro de inicio  $\lambda_e$ , el respectivo punto de equilibrio  $P_e = (x_e, \lambda_e)$  esta dado por los valores  $x_e = x(\lambda_e)$  y  $\lambda_e$  que satisfacen el conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales dado por:

$$0 = f(x, \lambda_e) \quad (2.2)$$

Una vez que la primera solución de equilibrio ha sido obtenida, es posible determinar como las soluciones de (2.2) varían con el incremento de los parámetros del sistema en pasos finitos a lo largo de una trayectoria específica [Strogatz 2000]. En cada paso, un nuevo punto de equilibrio se determina con la correspondiente solución de (2.2) basado en un método de continuación [Strogatz 2000]. Debido a que la solución de los puntos de equilibrio se obtuvo al resolver la Ecuación (2.2), esto implica que el sistema de potencia se encuentra en reposo. Sin embargo, esto no significa necesariamente que la solución representa una condición de estabilidad [Rosehart y Cañizares 1999] [Cañizares 1995]. La estabilidad del sistema se determina calculando la estabilidad de los puntos de equilibrio como se describe a continuación.

La estabilidad de un punto de equilibrio aislado,  $P_e = (x_e, \lambda_e)$ , que define la estabilidad del sistema de potencia, puede determinarse por la linealización de (2.1) y observando el comportamiento del valor característico resultante [Strogatz 2000]. Esta linealización se obtiene por medio de una aproximación de (2.1) aplicando la serie de expansión de Taylor de primer grado en las cercanías del punto de equilibrio en estudio. El sistema resultante es:

$$\left[ \Delta \dot{x} \right] = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{(x_e, \lambda_e)} \left[ \Delta x \right] \quad (2.3)$$

---

Donde el primer termino del lado derecho de la ecuación (2.3) es conocido como Jacobiano,  $J_x$ . Basado en el modelo linealizado, el comportamiento cualitativo puede ser determinado por el análisis de los valores característicos del sistema. A continuación se da una descripción mas detallada de cada una de estas bifurcaciones.

### ***2.5.1 Bifurcaciones Locales.***

En este tipo de bifurcaciones, el plano de fases antes y después de un punto de equilibrio no hiperbólico es cuantitativamente diferente. Las bifurcaciones pueden ser *estáticas* si en el punto de bifurcación solo convergen soluciones asociadas a puntos de equilibrio tales como las Saddle-Node, Pitchfork y transcritas, ó *dinámicas* si en el punto de bifurcación convergen soluciones asociadas a puntos de equilibrio y soluciones periodicas como en la Hopf [Strogatz 2000]. A continuación se describen cada una de estas.

#### ***2.5.1.1 Bifurcación Saddle-Node (SNB).***

En la Figura. 2.4 se muestra el proceso de aparición y desaparición de puntos de equilibrio conforme el parámetro de control  $\lambda$  es variado, lo cual es la característica de este tipo de bifurcaciones.

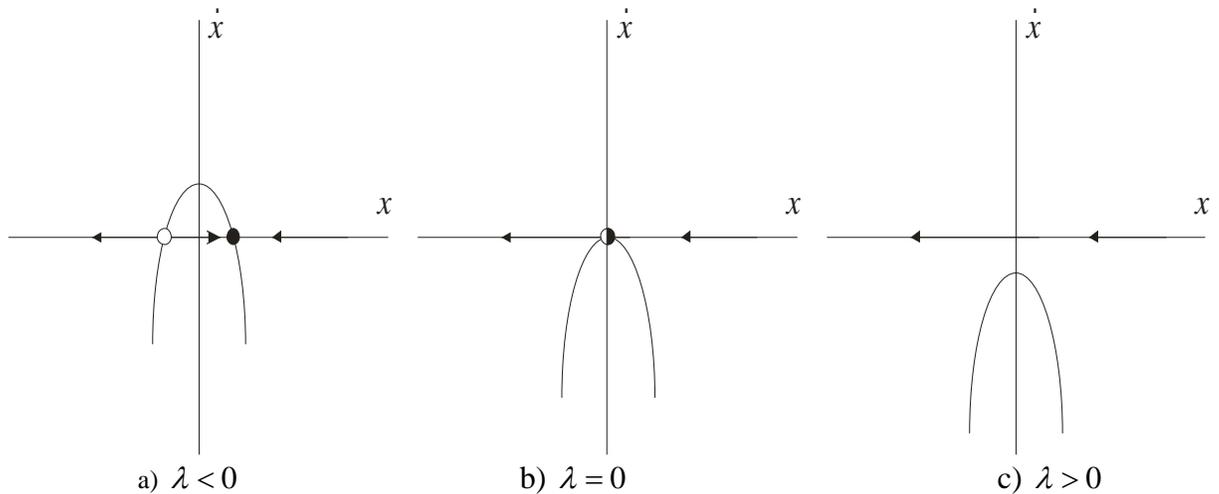


Figura 2.4.- Destrucción de los puntos de equilibrio.

Como se puede observar, cuando  $\lambda < 0$  (Figura 2.4 (a)) existe un punto de equilibrio estable y otro inestable. Cuando  $\lambda = 0$  (Figura 2.4 (b)) se tiene el punto de bifurcación Saddle-Node, esto debido a que los puntos de equilibrio estable e inestable chocan. Y si  $\lambda > 0$  (Figura 2.4 (c)) entonces no existen puntos de equilibrio.

Matemáticamente se dice que una bifurcación Saddle-Node existe si un punto de equilibrio  $P_e = (x_e, \lambda_e)$  cumple con las siguientes condiciones [Van Cutsem y Vournas, 1998],[Wang, 1996]:

- a)  $f(x^*, p) = 0$       Asegurar que la solución es un punto de equilibrio.
- b)  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*} = 0$       Asegurar que este punto de equilibrio es de tipo no hiperbólico.
- c)  $\frac{\partial f}{\partial p} \neq 0$       Asegurar que existe una función continua diferenciable  $\lambda = h(x)$  en el punto de bifurcación  $x_0^*, \lambda$ .
- d)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0$       Asegurar que el punto de equilibrio permanece de manera local en un lado de la línea  $\lambda = \lambda_0$ .

Los incisos *c* y *d* son conocidos como condiciones de transversalidad.

### 2.5.1.2 Bifurcación Transcritita (TCB).

Este tipo de bifurcaciones se caracterizan por un cambio en la estabilidad de los puntos de equilibrio conforme el parámetro de bifurcación es variado. La Figura. 2.5 muestra este tipo de bifurcación conforme se mueve el parámetro de bifurcación  $\lambda$ , en la Figura 2.5 (a) se puede observar que cuando  $\lambda < 0$  existen dos puntos de equilibrio, uno estable y otro inestable, sin embargo, en la Figura 2.5 (b) se observa que estos puntos de equilibrio colisionan y producen un solo punto de equilibrio en donde se tiene los dos estados de estabilidad, esto ocurre cuando  $\lambda = 0$ , y en la Figura 2.5 (c) se observa el caso para el cual  $\lambda > 0$  en el cual se puede observar que los puntos de equilibrio existentes en un inicio cambian su estabilidad.

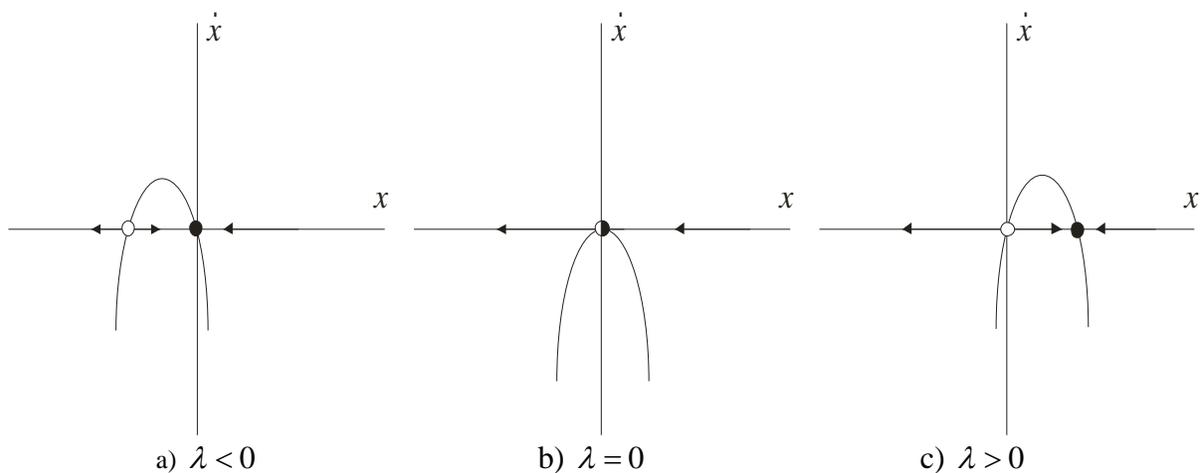


Figura 2.5.- Intercambio de estabilidad entre los puntos de equilibrio.

El diagrama de bifurcación típico de una bifurcación de este tipo se muestra en la Figura. 2.6 en la que se observa que cuando el parámetro de bifurcación  $\lambda$  es menor a cero existen 2 puntos de equilibrio, uno estable y uno inestable; en  $\lambda$  igual a cero convergen estos dos puntos y en  $\lambda$  mayor que cero se invierten los puntos de equilibrio.

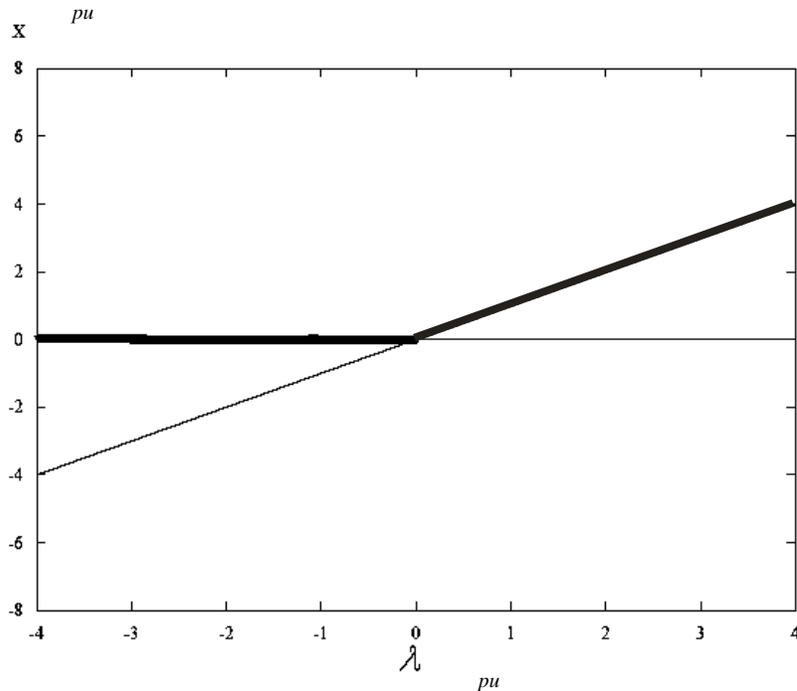


Figura 2.6.- Diagrama de bifurcación Transcrítica.

### 2.5.1.3 Bifurcación de Horquilla “Pitchfork” (PFB).

Este tipo de bifurcación se caracteriza por que los puntos de equilibrio tienden a desaparecer y aparecer en pares simétricos [Strogatz, 2000], esto es, el punto de equilibrio estable se vuelve inestable dando lugar al nacimiento de dos puntos de equilibrio estables. Llamadas supercrítica (SPFB) por sus siglas en ingles y la otra subcrítica (UPFB) por sus siglas en ingles y están asociadas a la aparición de puntos de equilibrio estables a partir de otro que se ha vuelto inestable.

La bifurcación supercrítica se caracteriza por la creación de dos puntos fijos estables a partir de otro que se ha vuelto inestable, esto es, cuando  $\lambda < 0$  existe solamente un punto de equilibrio estable y se mantiene aún cuando  $\lambda = 0$ , sin embargo, cuando  $\lambda > 0$  este punto se vuelve inestable y forma dos puntos de equilibrio estables de forma simétrica, lo anterior se puede observar en la Figura. 2.7

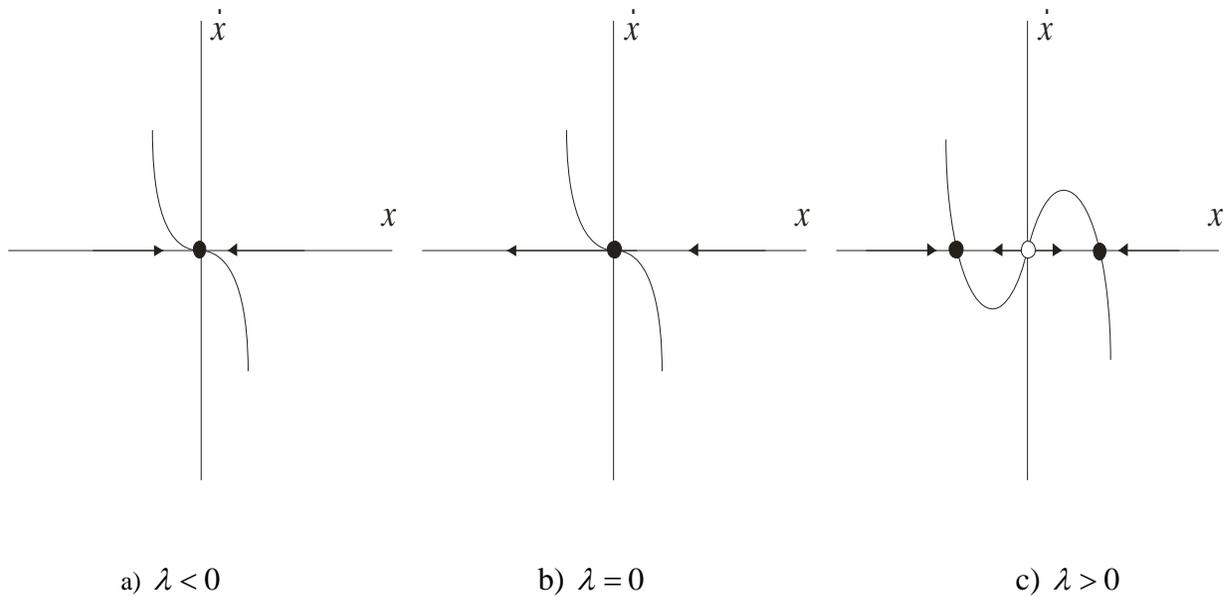


Figura 2.7.- Creación de puntos fijos estables.

La bifurcación supercrítica se caracteriza porque cuando el parámetro de bifurcación  $\lambda < 0$  (Figura 2.7 a) el sistema tiene un punto de equilibrio estable. Cuando  $\lambda$  tiene el valor de bifurcación (Figura 2.7 b) pueden ocurrir dos casos: el primero que el valor de  $\lambda$  se decremente, en tal caso, se crean dos ramas de puntos fijos inestables hasta alcanzar una bifurcación Saddle-Node. En el segundo caso, el valor de  $\lambda$  se incrementa y el sistema se vuelve periódicamente estable; Si se sigue incrementando  $\lambda$  (Figura 2.7 c) el sistema se mantendrá en la zona estable. Si por el contrario, se decrementa el valor de  $\lambda$ , entonces el sistema se mantiene periódico estable hasta alcanzar la bifurcación Saddle-Node; en este punto el sistema tiende a la estabilidad inicial, según se puede observar con mayor detalle en la Figura. 2.8

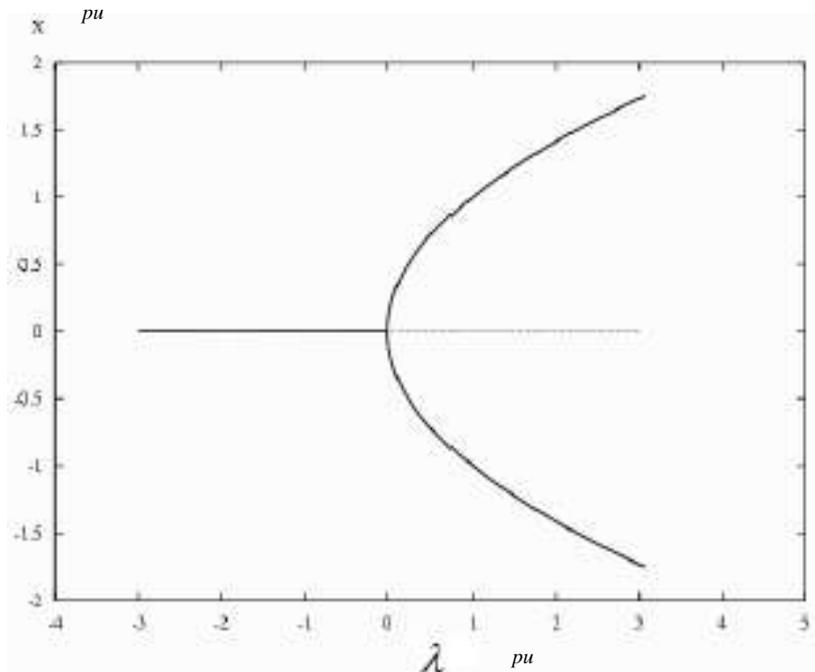


Figura 2.8.- Diagrama de bifurcación Pitchfork supercrítica.

La bifurcación Pitchfork subcrítica se muestra en la Figura 2.9 y la manera en que acontece se describe a continuación. Cuando el parámetro  $\lambda$  es menor que cero, el sistema tiene puntos de equilibrio estables. El sistema permanece estable hasta que  $\lambda$  alcanza el valor de bifurcación. Estando situado en este punto pueden ocurrir los siguientes casos: Si el valor de  $\lambda$  se decrementa se crean dos ramas de puntos fijos inestables hasta alcanzar una bifurcación Saddle-Node. Por el contrario, si el valor de  $\lambda$  se incrementa, el estado del sistema salta hasta uno de los dos puntos de equilibrio estables. Una vez situado el estado del sistema en alguno de estos dos puntos pasa lo siguiente: si el valor de  $\lambda$  se incrementa se tiene una rama de puntos de equilibrio estables; por el contrario, si este valor de  $\lambda$  se decrementa, se produce una rama de soluciones estables hasta llegar a la bifurcación Saddle-Node mencionada anteriormente. En esta bifurcación la solución del sistema saltará al punto fijo estable original. El comportamiento del sistema asociado a la bifurcación pitchfork subcrítica suele llamársele histéresis.

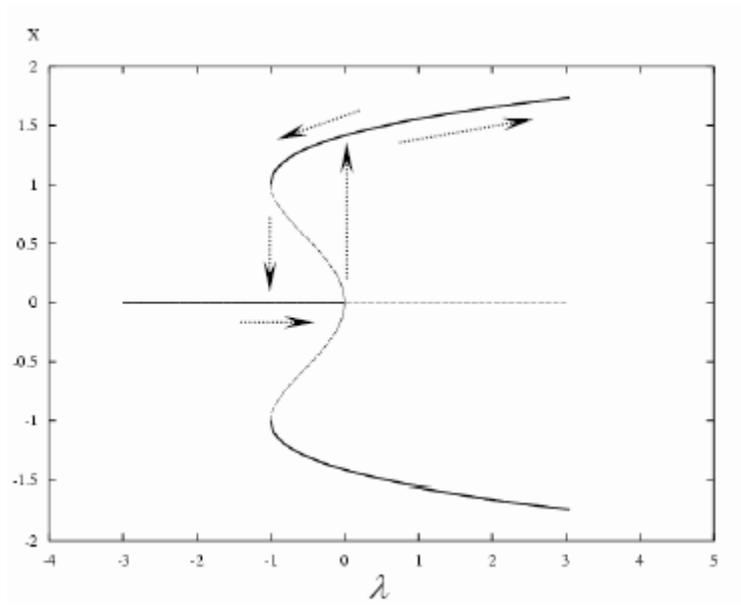


Figura 2.9.- Diagrama de bifurcación Pitchfork subcrítica.

Los dos tipos de bifurcaciones arriba mencionadas son también conocidas como trifurcación Pitchfork o bifurcación hacia adelante en el caso supercrítico y bifurcación hacia atrás en el caso subcrítico.

#### 2.5.1.4 Bifurcación Hopf (HB).

En este tipo de bifurcación la estabilidad no se caracteriza por la colisión de puntos fijos, sino que esta relacionado con los valores de los valores característicos del Jacobiano, lo cual es característica de los sistemas de más de una dimensión. Para que el sistema sea estable existen dos posibilidades; que los valores sean reales y negativos o que sean complejos conjugados con parte real negativa. En el caso de que el sistema es inestable, se tiene que un valor característico real o dos valores característicos complejos conjugados deben cruzar el eje imaginario hacia la parte derecha del plano complejo cuando el parámetro de bifurcación es variado. La bifurcación Hopf tiene lugar cuando dos valores característicos complejos cruzan simultáneamente el plano complejo.

Teniendo el sistema de ecuaciones diferenciales (ODEs) dado en (2.1) y teniendo un

---

punto de equilibrio en  $P_e = (x_e, \lambda_e)$ , una bifurcación Hopf existe cuando las siguientes dos condiciones se satisfacen [Wang, 1996]:

1. El Jacobiano tiene un simple par de valores característicos imaginarios en el punto de bifurcación:  $\gamma(\lambda_b) = \alpha(\lambda_b) \pm j\omega(\lambda_b)$ , entonces  $\alpha(\lambda_b) = 0$  y  $\omega(\lambda_b) > 0$

2. Se debe de cumplir la condición de transversalidad

$$\left. \frac{d \operatorname{Re}\{\gamma(\lambda)\}}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_b} = \left. \frac{d\alpha(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_b} \neq 0$$

En donde la primera condición determina al punto de equilibrio como no hiperbólico, y la segunda implica el cruce de los valores característicos conjugados complejos hacia el plano derecho del plano complejo y se le conoce como *condición de transversalidad*.

En este caso la bifurcación se comporta de tal manera que el punto de equilibrio da lugar a una órbita periódica cuando un parámetro del sistema se modifica, en la cual la oscilación permanecerá estable o inestable dependiendo de si es una bifurcación Hopf supercrítica (SHB) o subcrítica (UHB), respectivamente [Strogatz 2000],

Lo anterior ocurre cuando un ciclo del límite estable colisiona con un punto de equilibrio inestable; y a consecuencia de esto surge una órbita periódica para valores del parámetro en el cual el punto de equilibrio ha perdido la estabilidad. En este caso, las trayectorias convergen a una solución periódica de pequeña-amplitud [Strogatz 2000], la Figura. 2.10 ilustra este caso.

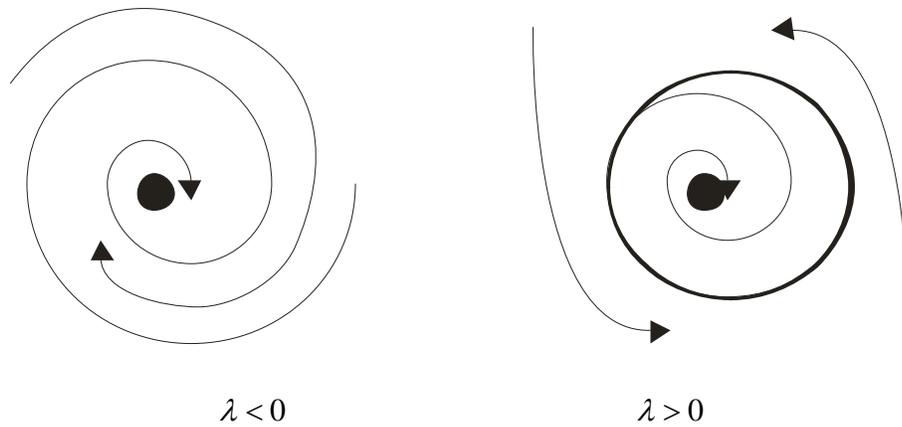


Figura 2.10.- Planos de fase de la bifurcación supercrítica.

## 2.5.2 Bifurcaciones Globales.

El concepto de bifurcaciones globales se refiere a aquellas en las cuales los ciclos límite son creados o destruidos [Kasusky, 2002]. Debido a esta definición este tipo de bifurcaciones son más difíciles de detectar porque abarcan una mayor área del plano de fase, a continuación se describen este tipo de bifurcaciones con mayor detalle.

### 2.5.2.1 Bifurcación de Doble de Ciclos (CFB).

En este tipo de bifurcación ocurre la destrucción de dos ciclos límite uno estable y otro inestable [Strogatz, 2000], el comportamiento se muestra en la Figura. 2.11 en la cual se puede observar que cuando el parámetro de bifurcación  $\lambda$  toma valores menores al valor crítico  $\lambda_c$  existe únicamente un punto fijo estable, esto corresponde a la Figura 2.11 a), cuando el parámetro toma el valor crítico se tiene un ciclo límite semi-estable lo cual se puede observar en la Figura 2.11 b) y en la Figura 2.11 c) se puede observar el caso para cuando el parámetro se encuentra en el rango de valores de  $0 < \lambda < \lambda_c$ , en tal caso el ciclo límite inestable da origen a dos ciclos límites uno estable y otro inestable.

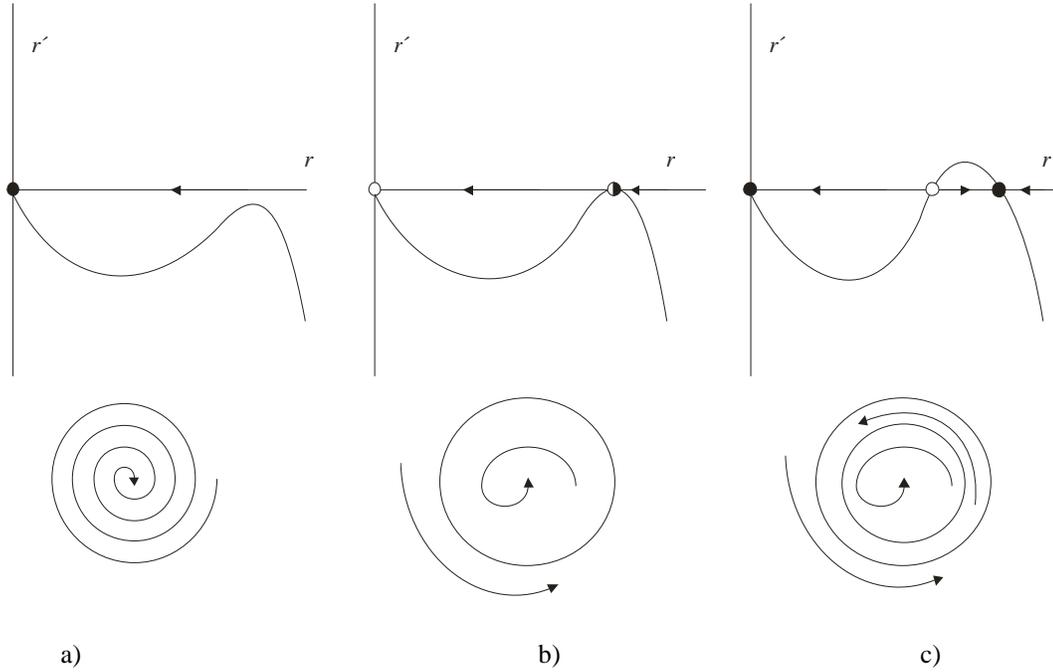


Figura 2.11.- Planos de fase de la bifurcación de Doble de Ciclos.

La Figura 2.12 muestra el diagrama de bifurcación de este tipo de bifurcaciones, los ciclos límites estables e inestables son representados en círculos rellenos y vacíos, y representan estados oscilatorios periódicos estables e inestables respectivamente.

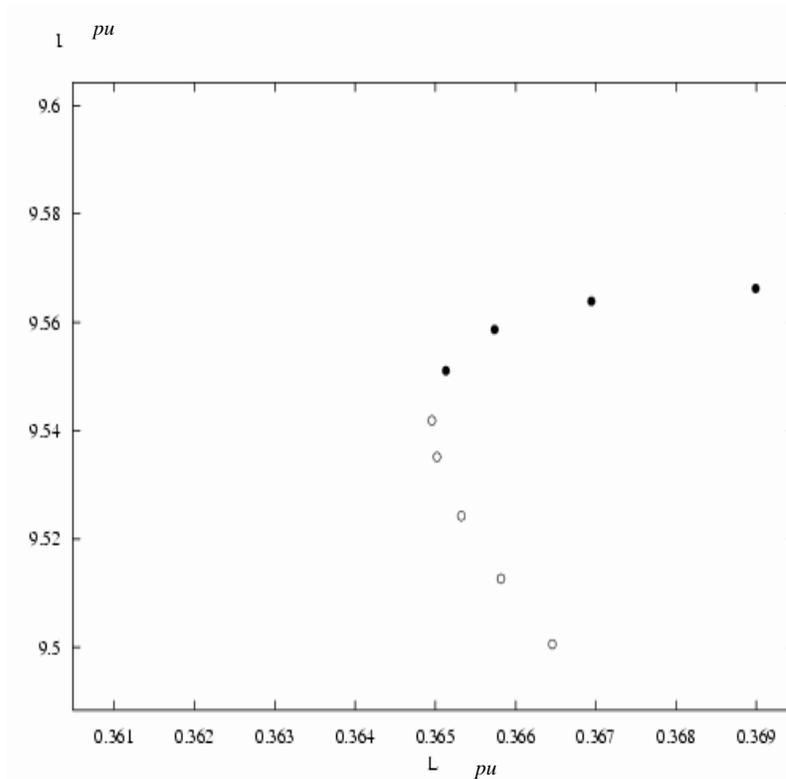


Figura 2.12.- Diagrama de una bifurcación de doblez.

### 2.5.2.2 Bifurcación de Periodo Infinito (IPB).

Esta bifurcación se presenta en sistemas que son la combinación de dos sistemas de una dimensión [Strogatz, 2000]. En la Figura. 2.13 se muestran los planos de fase cuando el parámetro de bifurcación es mayor que 1. En la figura 2.13 (a) se puede observar que todas las trayectorias, excepto el origen, alcanzan el ciclo límite conforme  $t \rightarrow \infty$ . Por otra parte en la Figura 2.13 (b) se observa el caso para cuando  $\lambda=1$ , en tal caso en la parte superior del ciclo límite se presenta un Saddle-Node, lo cual produce que cuando el sistema comience a oscilar, el periodo se haga infinito. Lo anterior sucede cuando el parámetro es  $\lambda < 1$  y cuando un punto fijo aparece en la parte superior del círculo, después de que el Saddle-Node se ha dividido en un Saddle y en un Nodo, como se muestra en el plano derecho. Dicho en otras palabras, un sistema que oscila de forma estable deja de oscilar cuando sufre esta bifurcación haciendo que el último periodo de oscilación sea de un periodo de tiempo infinito.

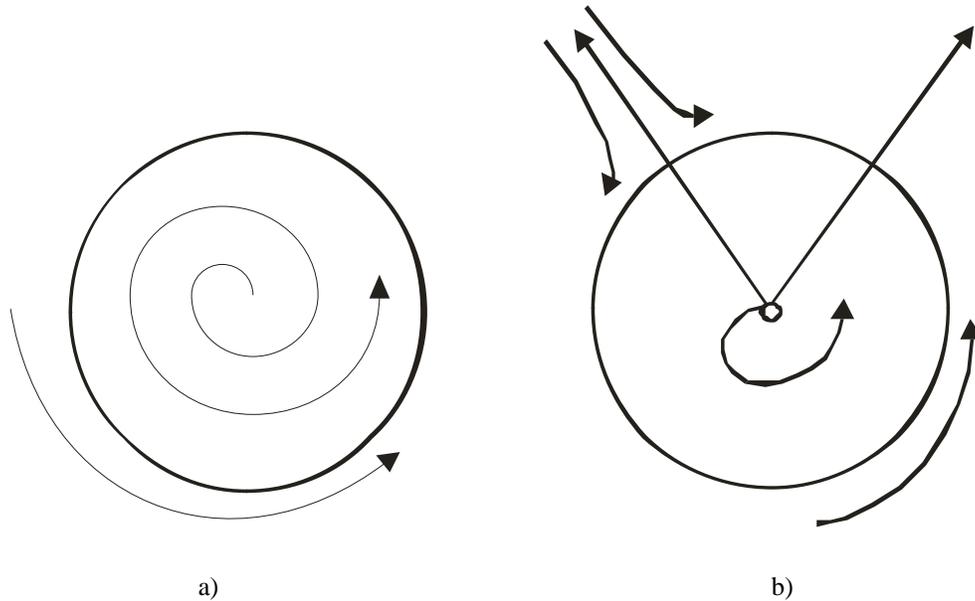


Figura 2.13.- Planos de fase de una bifurcación de periodo infinito.

### 2.5.2.3 *Homoclinica (HCB) o (BSKY).*

Esta bifurcación también es de periodo infinito y se le conoce como Saddle-Loop o Blue Sky Bifurcation (**BSKY**). En esta bifurcación lo que sucede es que un ciclo estable o inestable llega a tocar un punto Saddle o inestable, formando una órbita homoclínica [Strogatz, 2000].

La Figura. 2.14 muestra los planos de fase de esta bifurcación, usándose grupos o líneas invariantes para mostrar el comportamiento del sistema. Cuando el parámetro de bifurcación es menor al crítico  $\lambda < \lambda_c$ , una órbita estable pasa muy cerca de un punto fijo inestable o Saddle (Figura. 2.14 (a)). Cuando el parámetro se acerca al valor crítico la órbita se abulta (Figura. 2.14 (b)), y si el parámetro toma el valor del valor crítico,  $\lambda = \lambda_c$ , la órbita colisiona con el Saddle (Figura. 2.14 (c)) formándose una órbita homoclínica. Cuando el

parámetro es mayor que el valor crítico  $\lambda > \lambda_c$ , el ciclo límite estable es destruido (Figura. 2.14 d).

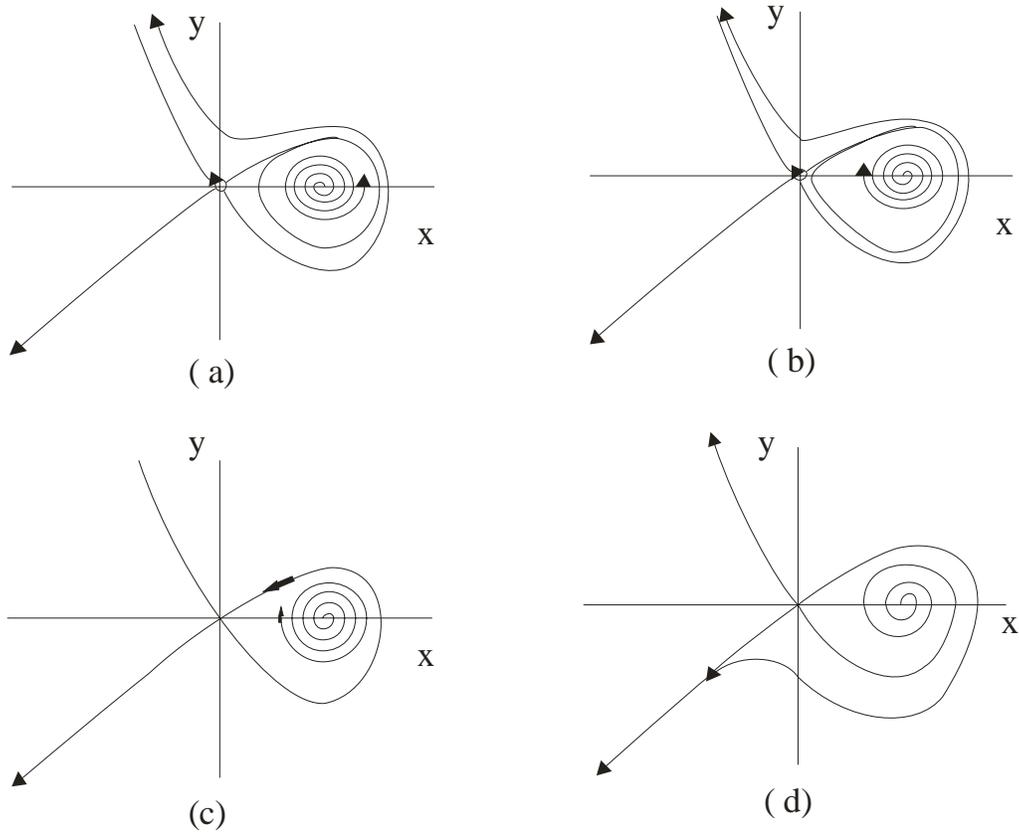


Figura 2.14.- Planos de fase de una bifurcación homoclinica.

Cuando desaparecen los ciclos límite estable e inestable, el fenómeno también es conocido como “Crisis limitada”. El diagrama de bifurcación de este tipo de bifurcación se muestra en la Figura. 2.15.

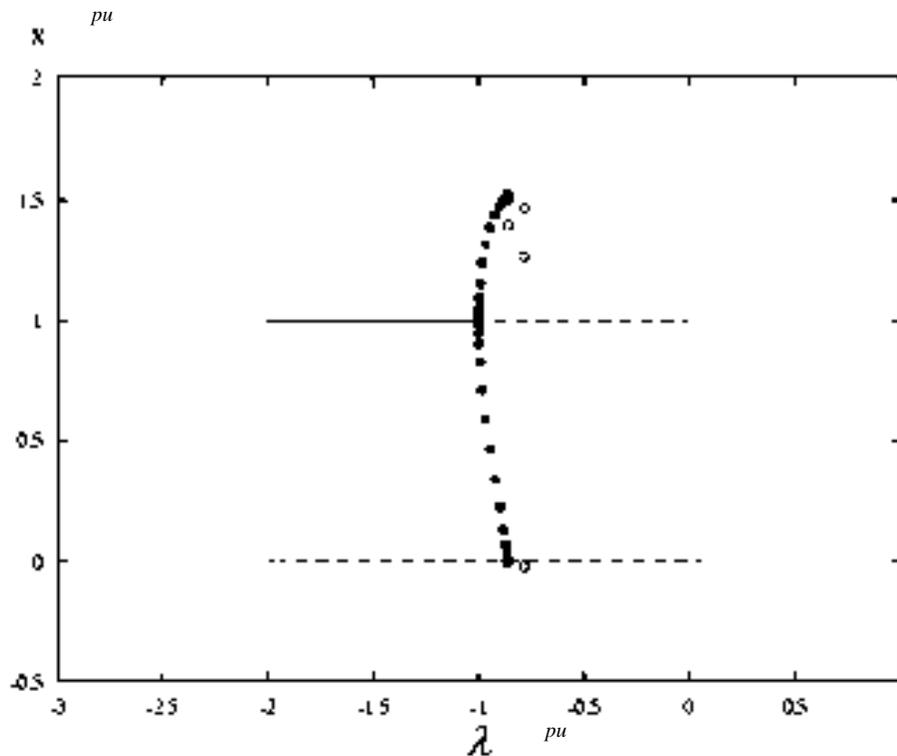


Figura 2.15.- Diagrama de una bifurcación Homoclínica.

#### 2.5.2.4 Bifurcaciones de Toroide (TRB).

Esta bifurcación es creada a partir de órbitas periódicas con la variación de parámetros. Por lo cual puede entenderse como una bifurcación Hopf de órbitas periódicas, en donde las variables del sistema experimentan una doble frecuencia y donde la primera órbita periódica es rodeada en forma de espiral por la segunda órbita periódica [Strogatz, 2000], como se muestra en la Figura. 2.16. Este fenómeno sólo puede presentarse en sistemas no lineales de dimensión mayor a dos y puede ser de dos tipos: *supercrítico* y *subcrítico* (atraído o repeliendo).

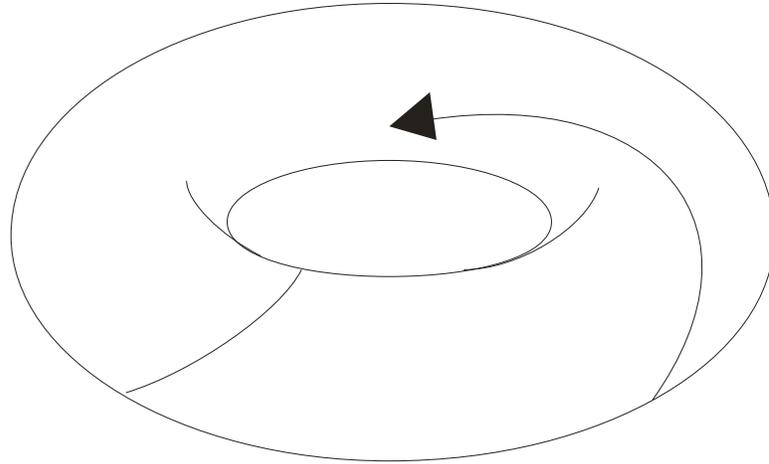


Figura 2.16.- Bifurcación de toroide.

### 2.5.2.5 Bifurcaciones de Doble Periodo. (PDB).y Caos.

En esta bifurcación se comienza por tener un ciclo límite estable en cierto valor del parámetro de bifurcación, este ciclo describe una órbita en un plano de fase. Cuando el parámetro es variado, las órbitas que recorren las variables de este sistema comienzan a dividirse en dos órbitas, sufriendo una bifurcación de doble periodo. El parámetro puede seguir variándose y el sistema puede sufrir otra bifurcación de doble periodo, esto es, de las dos órbitas creadas en la primera bifurcación, cada una se volverá a dividir en dos órbitas, teniendo un total de cuatro órbitas. Este fenómeno puede continuar formando más órbitas o trayectorias de operación en cascada en el sistema debido a la variación del parámetro de bifurcación.

En la Figura. 2.17 se muestra esta característica para el sistema de Rössler, el cual cuenta con solo una no linealidad como se observa en sus ecuaciones diferenciales (2.2).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + \alpha y \\ \dot{z} &= b + z(x - \lambda)\end{aligned}\tag{2.2}$$

El parámetro de bifurcación en este caso es la variable  $\lambda$ , que se ha variado desde  $\lambda=2.5$  en la Figura 2.17 (a),  $\lambda=4$  en la Figura 2.17 (b), hasta  $\lambda=5$  en la Figura 2.17 (c), presentándose el fenómeno de bifurcación de doble periodo de forma muy clara. Al plano de fase mostrado en la Figura 2.17 (c) correspondiente a este ultimo caso se le llama “*atractor extraño*”. En este punto de operación el comportamiento del sistema es totalmente aperiódico o caótico; esto es, las trayectorias de oscilación nunca se repiten.

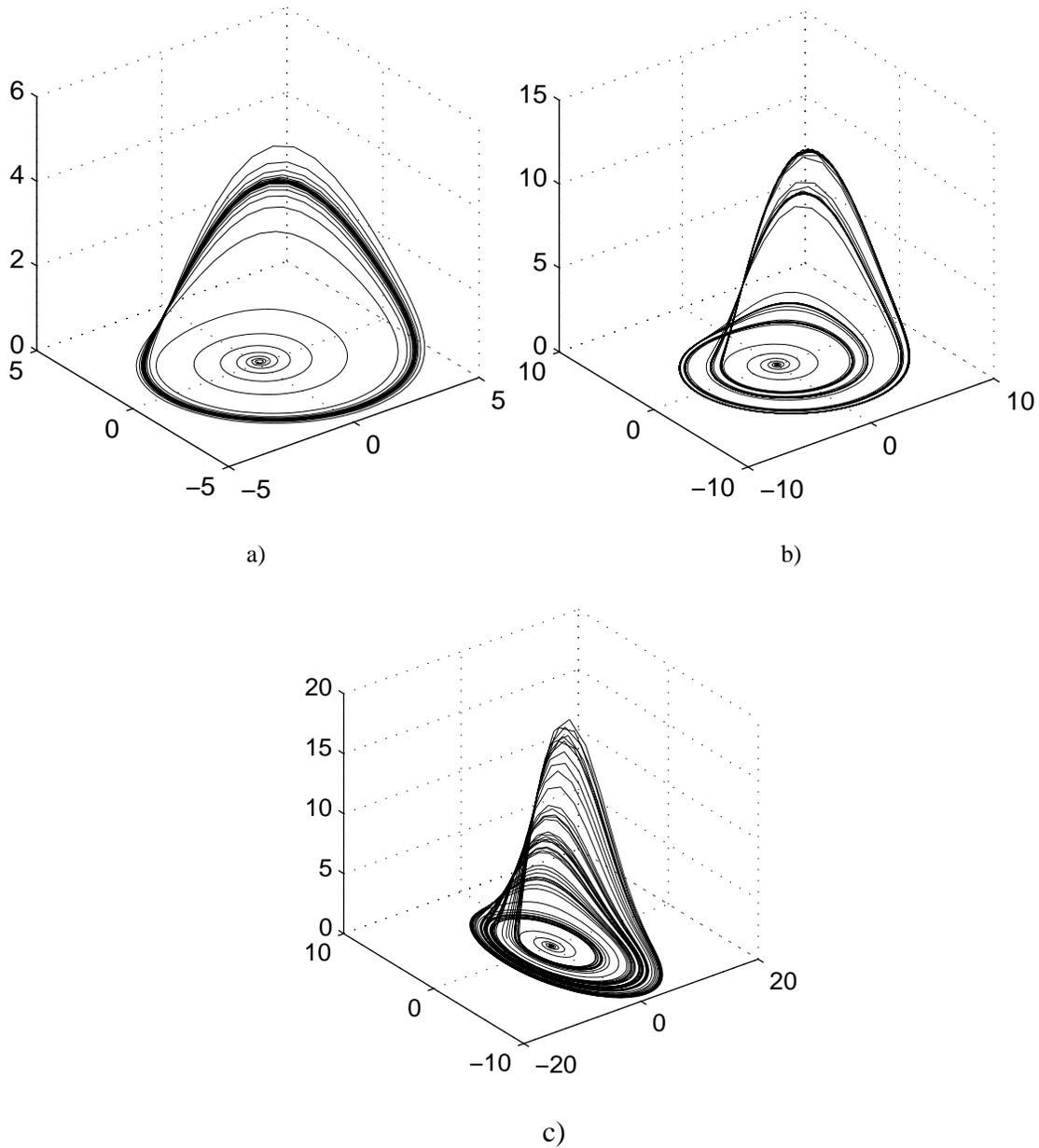


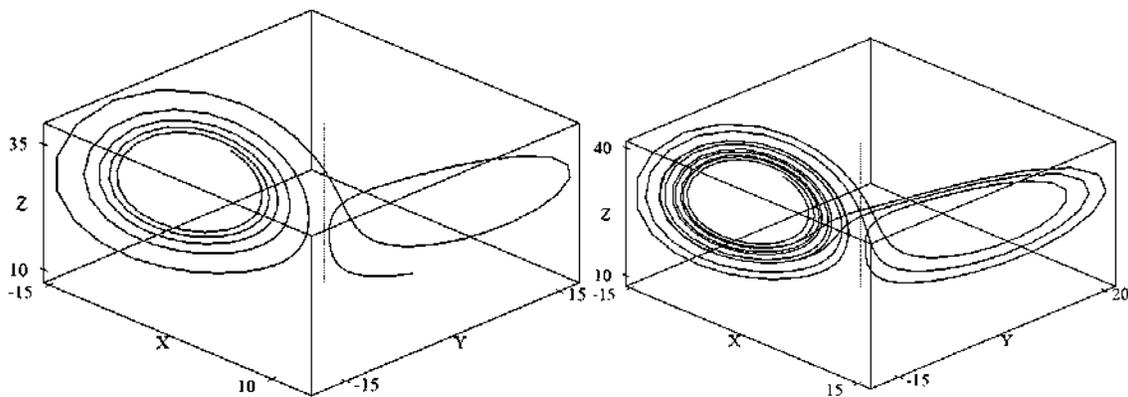
Figura 2.17.- Diagrama de bifurcación del sistema de Rössler.

---

En la Figura. 2.18, se muestra el atractor extraño en forma de mariposa obtenido al integrar las ecuaciones de Lorenz dadas en la Ecuación (2.1), las cuales tienen dos no linealidades.

En este atractor, la trayectoria siempre se encuentra oscilando entre las dos regiones que lo definen. Cuando el estado del sistema se encuentra en una de estas regiones, su dinámica recorre trayectorias en forma de espiral y repentinamente salta a la otra región del atractor. Este comportamiento se repite de la misma manera indefinidamente. Por lo tanto, a pesar de que la solución presenta cierta estructura geométrica, esta no se estabiliza en ninguna órbita periódica simple. En este caso, se dice que la solución es *caótica*.

No existe ninguna definición precisa para una solución caótica debido a que no puede ser representada por funciones matemáticas estándar. Sin embargo, una solución caótica es una solución aperiódica. Entonces, desde un punto de vista práctico, se puede definir al caos como un comportamiento de estado estacionario que no es una solución en equilibrio, o solución periódica o solución quasi-periódica.



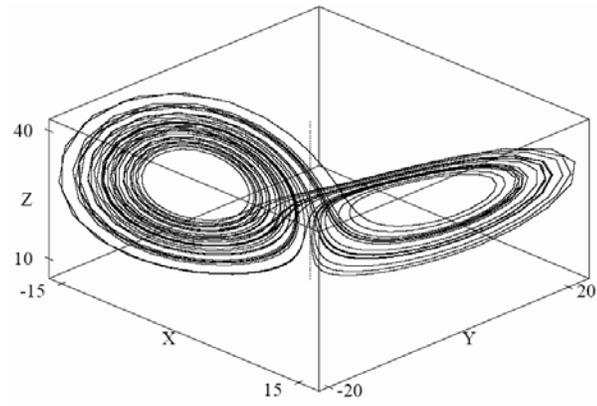


Figura 2.18.- Atractor extraño del sistema de Lorenz.

---

# **3 APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE BIFURCACIONES EN EL ANÁLISIS DE LAS OSCILACIONES NO-LINEALES PRODUCIDAS POR EL HORNO DE ARCO ELÉCTRICO DE CORRIENTE ALTERNA.**

## **3.1 INTRODUCCIÓN**

Con la finalidad de verificar la aplicabilidad de la teoría de bifurcaciones en el análisis de sistemas eléctricos de potencia, se analizó un sistema de potencia incluyendo elementos altamente no lineales, para observar los fenómenos no lineales que se presentan al interactuar estos elementos en los sistemas eléctricos de potencia. En este capítulo se muestran los resultados obtenidos al analizar por medio de la teoría de bifurcaciones un sistema de potencia en el cual se describe un modelo de sistema eléctrico incorporando elementos no lineales. En este caso en específico inicialmente se incorporó el horno de arco eléctrico utilizando uno de los modelos encontrado en la literatura abierta [Acha *et al.* 1990]. Se analiza la dinámica del sistema y el horno de arco eléctrico de corriente alterna,

---

incorporándose posteriormente la dinámica del generador que alimenta el sistema de potencia por medio de la ecuación de inercia del generador en forma monofásica.

### 3.2 MODELO DEL HORNO DE ARCO ELÉCTRICO DE CORRIENTE ALTERNA.

El horno de arco eléctrico es uno de los componentes de la red que introduce una gran cantidad de problemas de calidad de energía en el sistema, por lo tanto, debido a la característica no lineal de operación del horno de arco eléctrico, es por demás relevante un estudio de problemas de estabilidad que se pudieran presentar derivado de la interacción del horno de arco eléctrico con el sistema de potencia.

En este capítulo se utiliza un modelo dinámico del horno de arco eléctrico basado en el principio de conservación de la energía y el balance de potencia para el arco eléctrico mostrado en [Acha *et al.* 1990], este modelo se presenta en la Ecuación (3.1).

$$p_1 + p_2 = p_3 \quad (3.1)$$

Donde  $p_1$  representa la potencia transmitida en forma de calor al medio ambiente,  $p_2$  representa la potencia que incrementa la energía interna en el arco y la cual, por lo tanto afecta el radio del arco y  $p_3$  es la potencia total desarrollada en el arco y la potencia convertida en calor, este modelo se presenta en forma de una ecuación diferencial, la Ecuación (3.2) muestra este modelo de balance de potencia instantánea en el arco eléctrico.

$$K_1 r^n + K_2 r \frac{dr}{dt} = \frac{K_3}{r^{m+2}} i_H^2 \quad (3.2)$$

Donde  $r$  es el radio del arco eléctrico del horno,  $n$  es la variable relacionada con el

---

efecto de enfriamiento del arco (esta variable toma valores enteros entre 0 y 2, en donde  $n=0$  representa la independencia de la temperatura del arco con el radio del mismo,  $n=1$  representa que el ambiente alrededor del arco no es caliente y por lo tanto la temperatura depende de la longitud del arco y  $n=2$  representa que la longitud del arco es corta y entonces el área de enfriamiento es proporcional al área de sección transversal) y  $m$  es la variable inherente al efecto de la temperatura en el arco (esta variable toma valores enteros entre 0 y 2, donde  $m=0$  indica que la longitud del arco es grande y por lo tanto la temperatura es menos caliente, por el contrario si  $m=2$  indica que la longitud del arco es pequeña y por lo tanto la temperatura del arco es más caliente) [Acha *et al.* 1990]. Las constantes  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  representan el efecto de enfriamiento del arco y están relacionadas con la proporción derivativa, la energía interna del arco y la proporción resistiva de la columna del arco respectivamente, Además de estas constantes, otros parámetros del horno de arco eléctrico tienen un efecto directo en la convergencia a la estabilidad del sistema, la característica del arco  $v-i$  y los puntos de equilibrio de operación del sistema. De tal manera que los valores utilizados par las variables  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  determinan la operación nominal del horno de arco eléctrico.

En base a lo anterior el modelo presenta únicamente una variable de estado  $r$  lo cual indica que el efecto de enfriamiento del horno de arco eléctrico depende del radio del arco, esto propone que todos los factores externos que influyen en la temperatura interna del arco eléctrico son englobados en las variables  $n$  y  $m$ . Por ejemplo, si el ambiente alrededor del arco es caliente entonces  $n=0$ , si este no es el caso y la longitud del arco es grande entonces  $n=1$ , pero si la longitud del arco es corta, entonces el enfriamiento del arco eléctrico es proporcional a la sección transversal y por lo tanto  $n=2$ . De la misma manera los valores de 0,1 y 2 que toma la variable  $m$  reflejan el factor proporcional a la temperatura del arco, la cual es directamente proporcional a la longitud del mismo.

### **3.3 MODELO DEL SISTEMA DE POTENCIA-HORNO DE ARCO ELÉCTRICO.**

El sistema de potencia bajo estudio utiliza un modelo matemático unificado el cual representa al sistema de potencia y al horno de arco eléctrico mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales. La estructura típica del sistema de alimentación y el horno de arco eléctrico se muestra en la Figura. 3.1 [Acha *et al.* 1990][Dungan 1980], en el cual se modela un generador ideal  $G$  del lado primario del transformador elevador  $T_S$ .

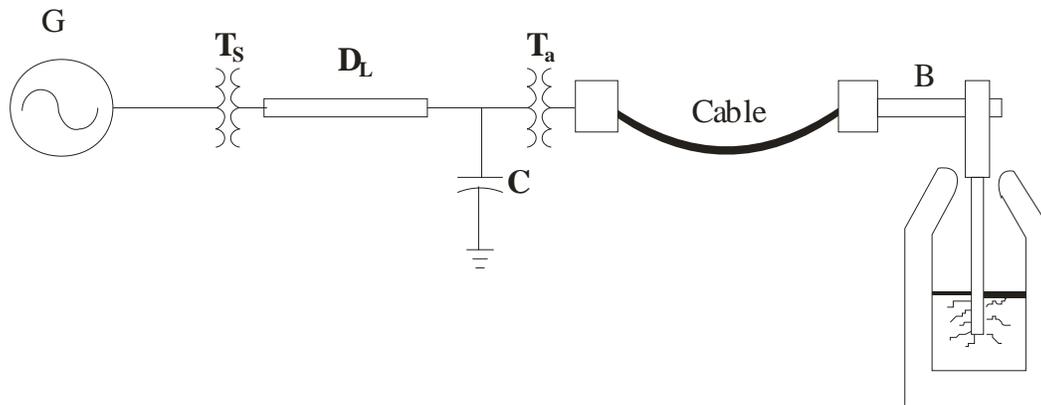


Figura 3.1.- Estructura típica del sistema de alimentación y el horno de arco eléctrico de corriente alterna.

En el lado secundario del transformador  $T_S$  se modela una línea de transmisión  $D_L$ , un banco de capacitores  $C$  con el propósito de corregir el factor de potencia,  $T_a$  representa el transformador acoplado al horno de arco eléctrico, y los electrodos del horno son representados por  $B$ .

El circuito eléctrico que representa la estructura del horno de arco eléctrico mostrado en la Figura 3.1 se ilustra en la Figura 3.2. Como se puede observar,  $R$  y  $L$  representan la resistencia y la reactancia propia del sistema de potencia, representado por el transformador de la subestación y la línea de distribución  $C$  representa un banco de capacitores en paralelo con el horno de arco eléctrico,  $L_H$  representa la inductancia equivalente a la reactancia de los cables flexibles de conexión, la inductancia del transformador del horno de arco eléctrico y los electrodos. Debe señalarse que los componentes utilizados para este primer caso de estudio se consideran ideales.

Con el fin de obtener un modelo matemático que represente de manera unificada el sistema de potencia y el horno de arco eléctrico, el modelo del horno dado en (3.1) se acopla con las ecuaciones del sistema.

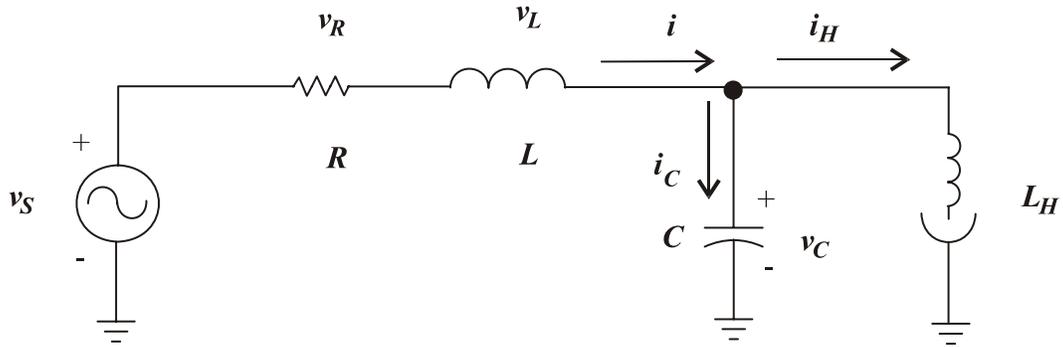


Figura 3.2.- Representación eléctrica del horno de arco eléctrico.

Esto último se obtiene mediante la correcta aplicación de las leyes de corriente y voltaje de Kirchhoff's y el análisis de mallas y nodos del circuito mostrado en la Figura. 3.2, según se detalla en el Apéndice A. El sistema de ecuaciones en espacio de estado resultante es.

$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{v}_c \\ \dot{i}_H \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 & -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_H} & -\frac{K_3 r^{-(m+2)}}{L_H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{K_3 r^{-(m+3)} i_H^2}{K_2} - \frac{K_1 r^{(n-1)}}{K_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v_c \\ i_H \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_S \quad (3.2)$$

### 3.4 CASOS DE ESTUDIO.

El sistema de prueba de la Figura 3.2 se ha utilizado para realizar diversas simulaciones analizando todos los casos posibles en los que puede operar el sistema. Se ha observado que en la mayoría de los casos el sistema se comporta con un cierto grado de

oscilación no llegando este a ser significativo. Sin embargo, en ciertos casos se presentó una interacción importante entre el modelo del horno de arco eléctrico y el sistema al variar ciertos parámetros de bifurcación del sistema.

A continuación se muestran los resultados obtenidos del análisis detallado de bifurcaciones aplicado al modelo presentado en (3.2). El software utilizado para realizar todo el análisis de las simulaciones es el paquete XPPAUTO50 [Doedel 1986]. El modelo del generador esta determinado por una fuente de voltaje ideal. El horno de arco eléctrico esta determinado por el modelo dinámico presentado en (3.1). Los valores de los parámetros asociados al sistema del caso de prueba están dados en *pu*, y se muestran en la Tabla 3.1.

TABLA 3.1  
*Condiciones iniciales de los parámetros del sistema en pu.*

Parámetros	Condiciones Iniciales.	Parámetros	Condiciones Iniciales.
$C$	0.1	$K_1$	0.08
$L$	0.1	$K_2$	0.005
$v_s$	1	$K_3$	3
$m$	1	$R$	0.1
$n$	2	$L_H$	0.1

Es importante hacer notar que cualquier variación en estos parámetros produce un punto diferente de equilibrio del sistema, lo cual conllevaría a resultados diferentes; en otras palabras, diferentes trayectorias de solución pueden dar lugar a diferentes condiciones de estabilidad presentes para el mismo caso de estudio. Estos parámetros corresponden al punto de equilibrio estable mostrado en la Figura 3.3, en donde se observa la evolución del

---

estado transitorio en el tiempo hasta que eventualmente llega al estado estacionario en  $t = 20$  segundos con una corriente  $i = 5.009987 pu$ .

Aplicando el procedimiento descrito en el capítulo anterior, primero se localiza un punto de equilibrio, posteriormente se linealiza el sistema alrededor de este punto y se varía la magnitud de los parámetros de bifurcación, en los cuales se intuye pudiese presentarse una bifurcación.

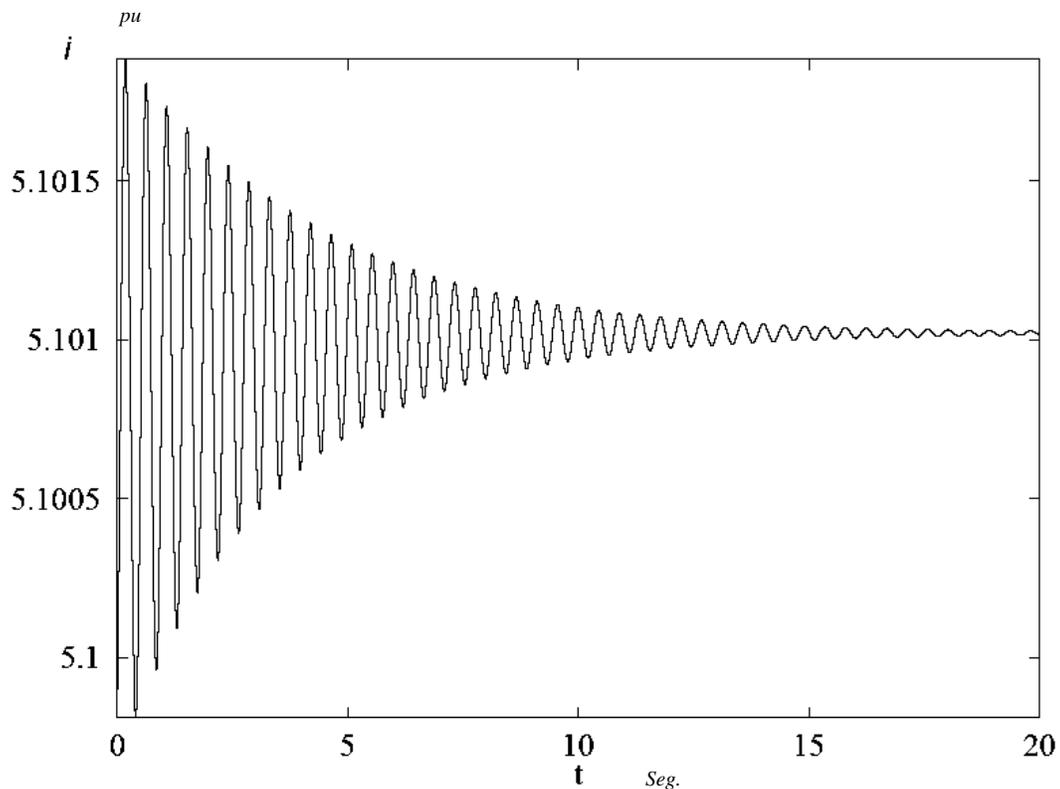


Figura 3.3.- Comportamiento en el tiempo de la corriente para el caso de estudio.

Durante cada variación del parámetro de bifurcación se monitorean los valores característicos del sistema. Siguiendo esta logística, se procedió a variar todos los parámetros de bifurcación posibles, en base a valores operativos del sistema. En la Figura 3.4 se muestra el diagrama de bifurcación propio del sistema analizado, que representa el comportamiento del sistema bajo análisis y una solución cualitativa del mismo al variar de manera quasi-estática la inductancia de la línea de transmisión  $L$ .

El diagrama muestra el comportamiento de la corriente  $I$  con respecto al parámetro de bifurcación  $L$ , el cual corresponde a la inductancia del sistema. Las líneas sólida y punteada

indican las trayectorias periódicas estable e inestable, respectivamente. En este mismo diagrama se pueden observar círculos vacíos y rellenos, los cuales indican las orbitas oscilatorias periódicas inestables y estables respectivamente.

De la Figura 3.4 se observa que al realizar el análisis dentro de la parte oscilatoria periódica, inicialmente el sistema opera en un estado oscilatorio periódico inestable, esto debido a que aparece una bifurcación Hopf inestable/sub-critica (BHI) en un valor de  $L=0.4405 pu$ .

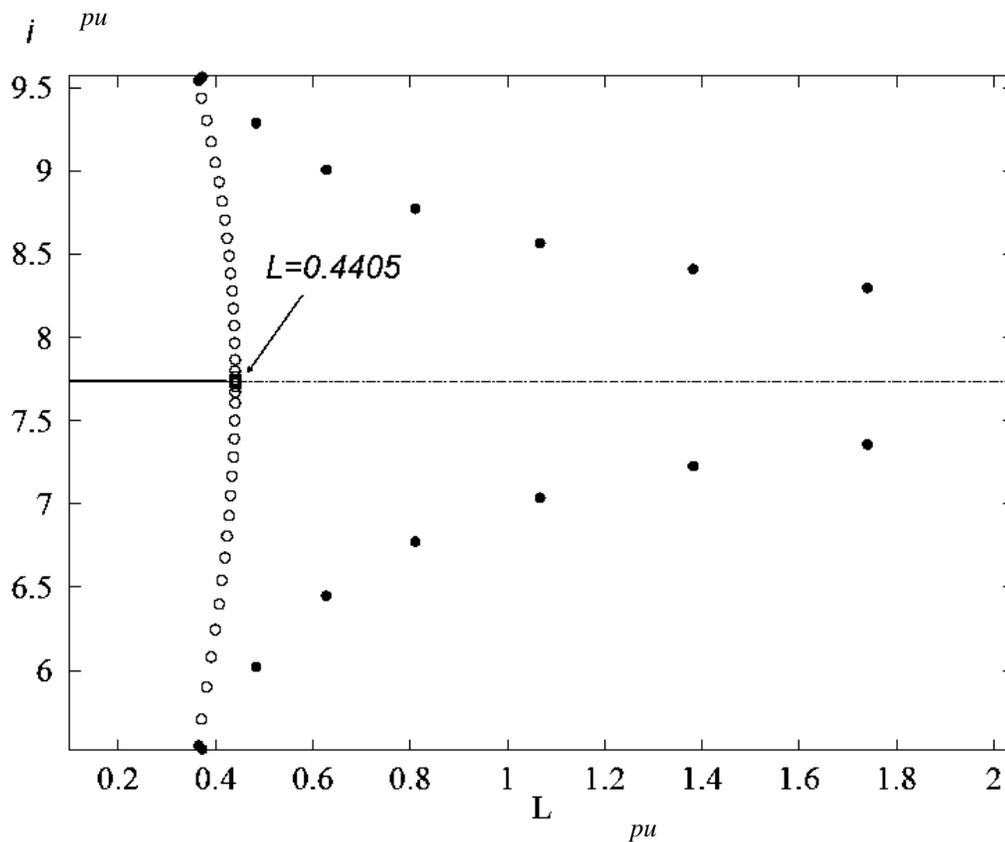


Figura 3.4.- Diagrama de bifurcación del modelo.

La Tabla 3.2 muestra el comportamiento de los valores característicos del sistema, es importante notar que conforme la inductancia se incrementa quasi-estáticamente, los valores característicos del sistema sufren una variación de tal manera que cuando la parte real de estos pasa del semi-eje negativo al semi-eje positivo, en ese instante aparece la bifurcación Hopf inestable.

La Figura 3.5 muestra el comportamiento del sistema cuando este se encuentra en la bifurcación Hopf. El sistema opera en un ciclo límite oscilatorio periódico en el diagrama de fase, el cual es sensible a cualquier variación en los parámetros del sistema.

TABLA 3.2

Comportamiento de los valores característicos complejos conjugados en función de la variación del parámetro de bifurcación  $L$ .

Valores Característicos Complejos		Inductancia $pu$
Parte Real	Parte imaginaria	
-0.01637	-11.410411	0.3263
-0.00949	-11.271323	0.3638
-0.00423	-11.156933	0.4012
0.00005	-11.057193	0.4405

La Figura. 3.6 muestra el comportamiento del voltaje en el capacitor en el tiempo cuando el sistema opera en la zona de la BHI, esto se debe a que cuando el sistema opera en esta zona, el mismo se encuentra bajo la influencia de un atractor inestable, por lo tanto tiende a seguir una dinámica inestable conforme el sistema opera en el tiempo, lo cual es una condición indeseable debido a la problemática que conlleva este estado tanto mecánica como eléctricamente, por ejemplo la operación de protecciones y frenos mecánicos de los generadores y la aparición de fenómenos tales como el parpadeo y los armónicos.

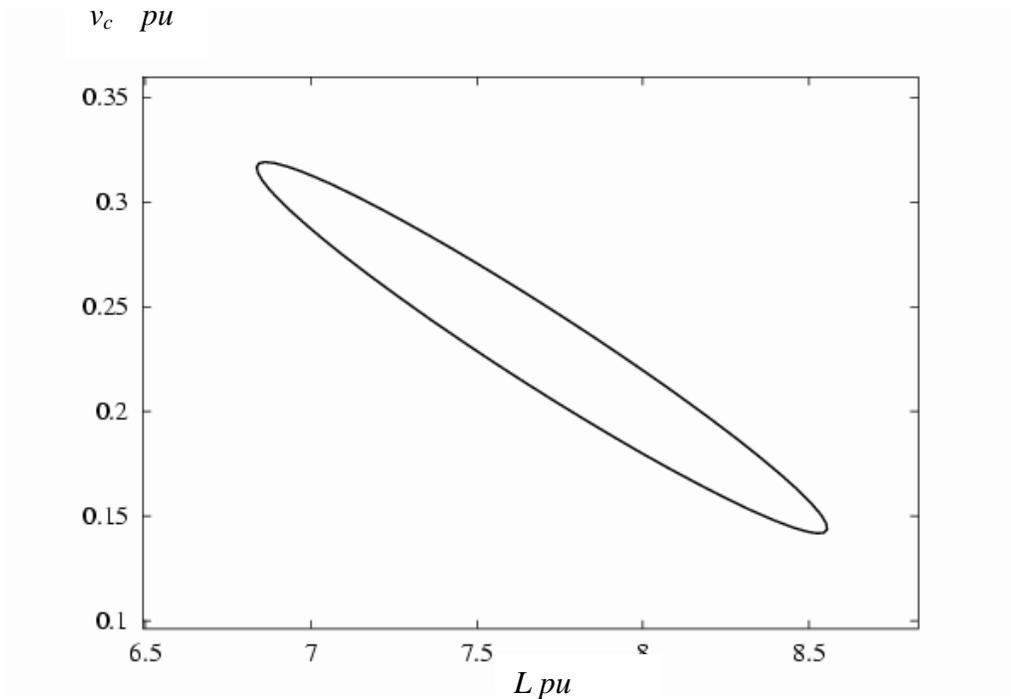


Figura 3.5.- Ciclo limite de la orbita periódica inestable.

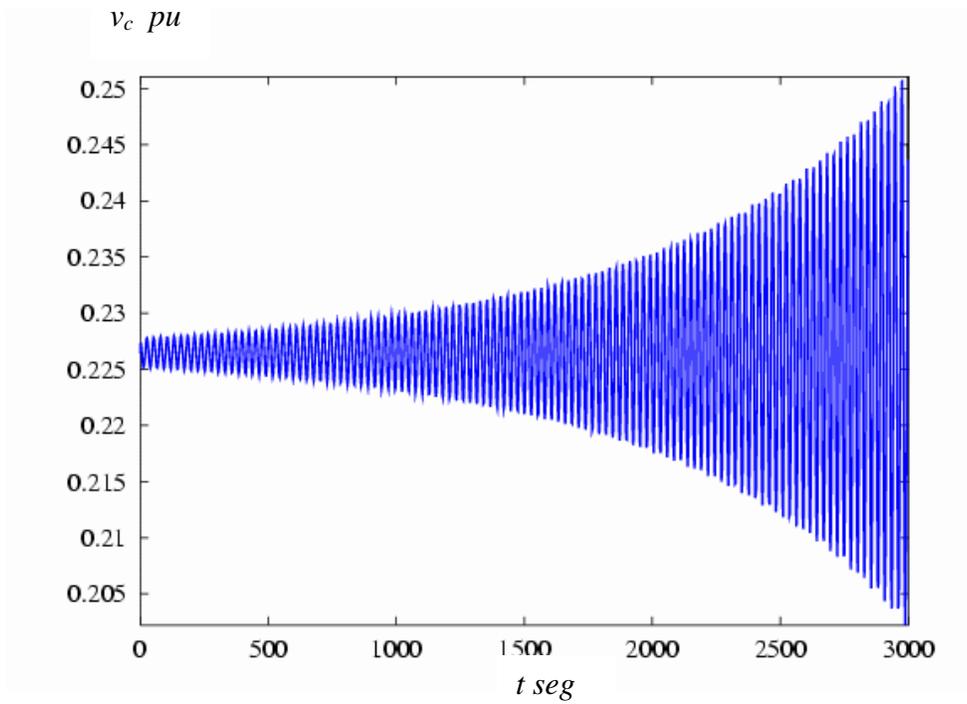


Figura 3.6.- Comportamiento del voltaje en el capacitor en el tiempo en la BHI.

La Figura. 3.7 muestra el comportamiento de este fenómeno en el diagrama de fase, como se puede observar, el sistema pasa de una condición de operación en la cual se encuentra en un ciclo límite oscilatorio estable a un estado operativo en el cual se empieza a incrementar y sobrepasa el ciclo límite.

Como se observa en el diagrama de bifurcación de la Figura 3.7, al ir evolucionando el parámetro de bifurcación, la bifurcación Hopf inestable se vuelve una bifurcación Hopf estable/supercrítica (BHE) en un valor de inductancia de  $L = 0.3649 pu$ . El algoritmo utilizado para obtener los valores característicos de la matriz de estado es el RG [Doedel, 2004], implementado en el software XPPAUTO50 [Doedel 1986].

Para un valor de inductancia de  $L < 0.4405 pu$ , el sistema se comporta de manera estable con una magnitud de corriente cercana a  $5 pu$ . Conforme  $L$  se va incrementando se presenta una Bifurcación Hopf inestable/subcrítica en el valor de  $L = 0.4405 pu$ .

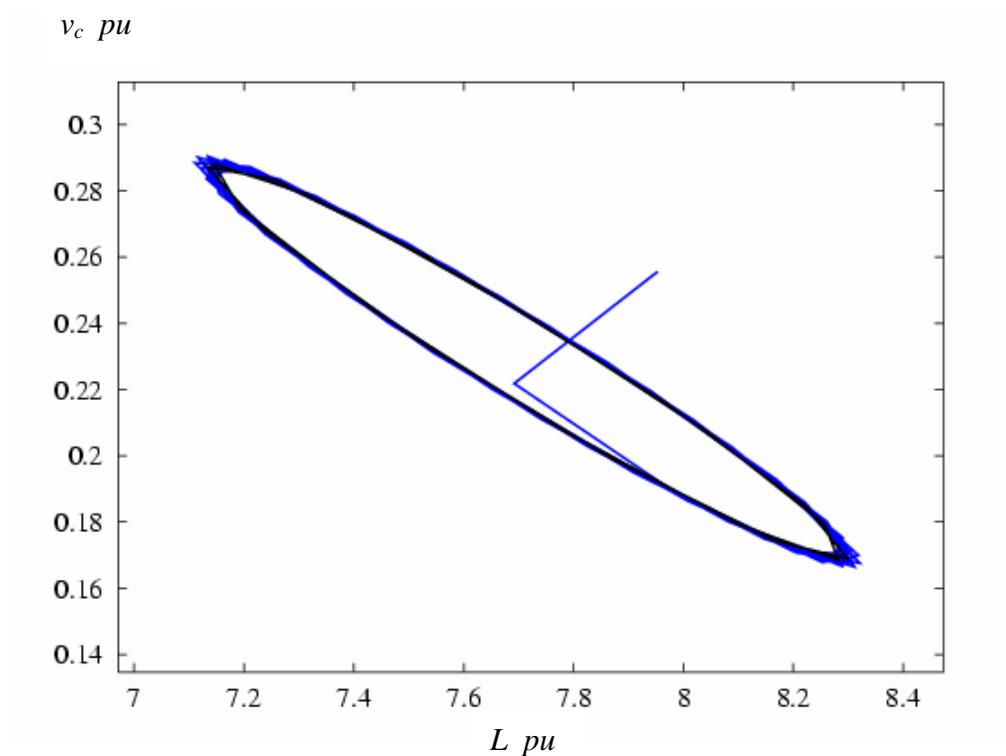


Figura 3.7.- Diagrama de fase en la zona inestable.

Una vez que ha ocurrido la bifurcación Hopf inestable, el sistema se perturba de manera quasi-estática con el fin de determinar el comportamiento del sistema en la fase periódica. En este estado, se puede observar que la más mínima perturbación en los

parámetros del sistema puede provocar un estado de estabilidad del sistema diferente al que se tiene actualmente, lo anterior se puede observar más claramente en la Figura 3.8.

Observece que el sistema, de operar en un estado oscilatorio periódico inestable (Zona 2 , BHI), transita a un estado oscilatorio estable (Zona 1, BHE), esto debido a la aparición de una bifurcación Hopf estable/Supercrítica, para un valor del parámetro de bifurcación de  $L = 0.3649 \text{ pu}$ . En este punto el sistema sigue una trayectoria periódica oscilatoria estable.

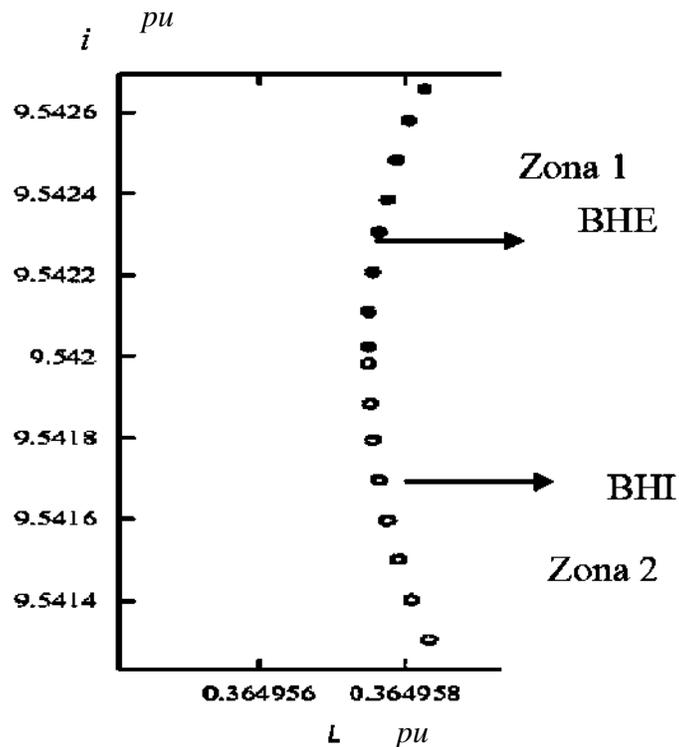


Figura 3.8.- Comportamiento periódico del sistema en la bifurcación Hopf.

El comportamiento físico en el tiempo de la corriente del horno de arco eléctrico y el voltaje en el banco de capacitores se pueden observar en las Figuras 3.9 y 3.10 para valores del parámetro de bifurcación de  $L = 0.4503965 \text{ pu}$  (BHI) y  $L = 0.4303964 \text{ pu}$  (BHE), respectivamente.

La Tabla 3.3 muestra los valores en por unidad de los parámetros para cada uno de estos casos.

---

Como se puede observar en estas figuras, la influencia de los atractores estables e inestables son determinantes en el comportamiento de los diversos parámetros del sistema, esto se puede apreciar dado que en cada una de las figuras se ve como el sistema tiende a la inestabilidad (Figura 3.9) o a la estabilidad (Figura 3.10) según sea el caso.

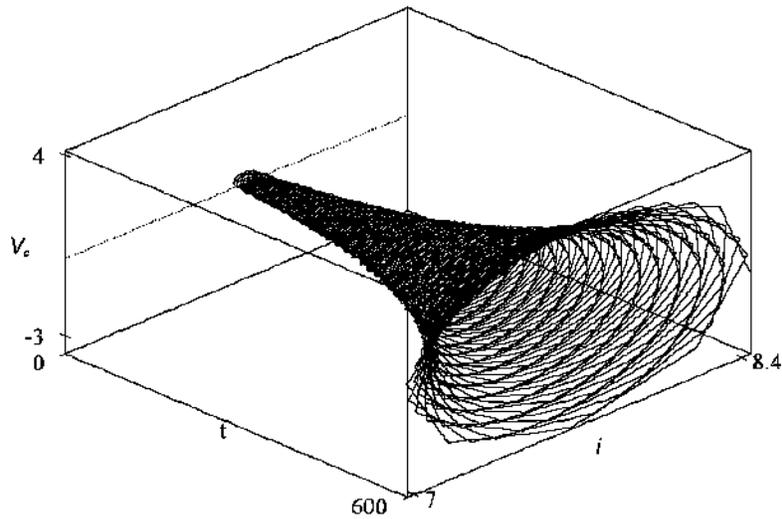


Figura 3.9.-Comportamiento del voltaje en el capacitor y la corriente del horno para el caso inestable con  $L=0.4503965 pu$ .

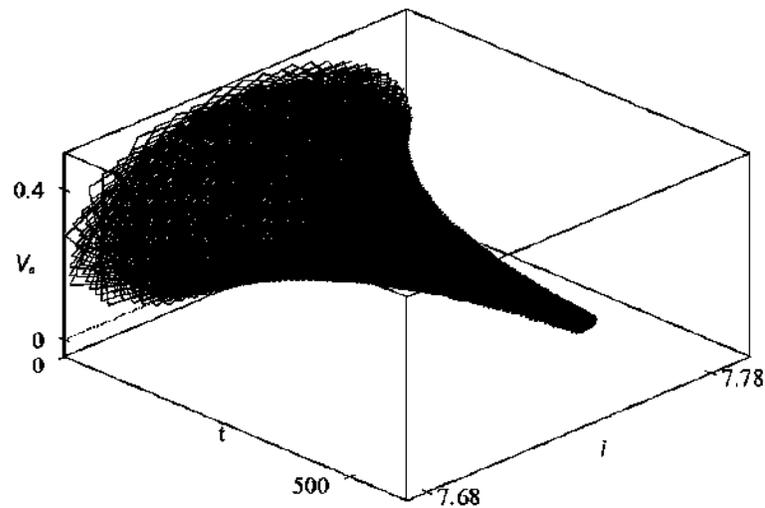


Figura 3.10.-Comportamiento del voltaje en el capacitor y la corriente del horno para el caso estable con  $L=0.43039 pu$ .

TABLA 3.3  
*Condiciones iniciales de los parámetros del sistema para los estados de estabilidad estables e inestables.*

Parámetros	Caso estable	Caso inestable
$i$	7.9253	7.9253
$v_c$	6.0357	6.0357
$i_h$	7.7742	7.7742
$r$	2.6419	2.6419
$C$	0.1	0.1
$L$	0.3695	0.3700
$v_s$	1	1
$m$	1	1
$n$	2	2
$K_1$	0.08	0.08
$K_2$	0.005	0.005
$K_3$	3	3
$R$	0.1	0.1
$L_H$	0.1	0.1

La Figura 3.9 muestra que después de la aparición de la bifurcación Hopf inestable, el punto de equilibrio se vuelve inestable, reflejándose en oscilaciones de mayor amplitud en el sistema. Esto refleja el hecho de que el sistema es atraído por la zona de operación inestable (Zona 2), provocando oscilaciones con una amplitud cada vez mayor conforme el sistema avanza en el tiempo.

---

Por otra parte, al analizar la Figura 3.10 se observa que si el sistema opera con condiciones iniciales cercanas al punto en donde se produce la Bifurcación Hopf estable, el sistema es atraído por la zona de operación estable (Zona 1), lo cual produce oscilaciones periódicas estables que tienden a la estabilidad en las variables de estado, por lo tanto, el sistema se comporta de manera opuesta al presentado en la Figura 3.9, en donde el sistema opera en estado inestable.

Sin embargo, si el sistema opera en una zona inestable, estas son condiciones de operación no deseadas en el sistema y pueden producir problemas graves al mismo tales como la aparición de armónicos, parpadeo y degradación en los aislamientos entre otros. Lo anterior se puede observar de manera gráfica en las Figuras 3.11 y 3.12, en las que se observa el comportamiento del voltaje cuando opera un tiempo prolongado en este modo. La Figura 3.11 muestra el comportamiento en el tiempo del voltaje y la Figura 3.12 muestra el plano de fase para este mismo comportamiento.

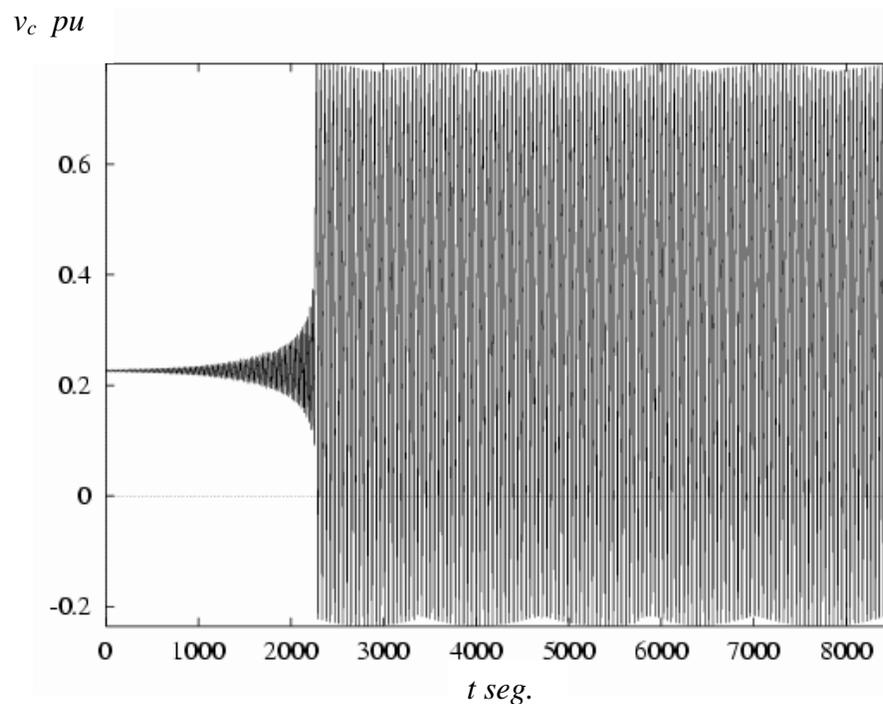


Figura 3.11.-Comportamiento en el tiempo del voltaje en el capacitor.

---

Exponer un tiempo prolongado al sistema en la zona de operación inestable, puede producir problemas como la aparición de doble ciclos limites, hasta problemas mayores como el fenómeno de colapso de voltaje.

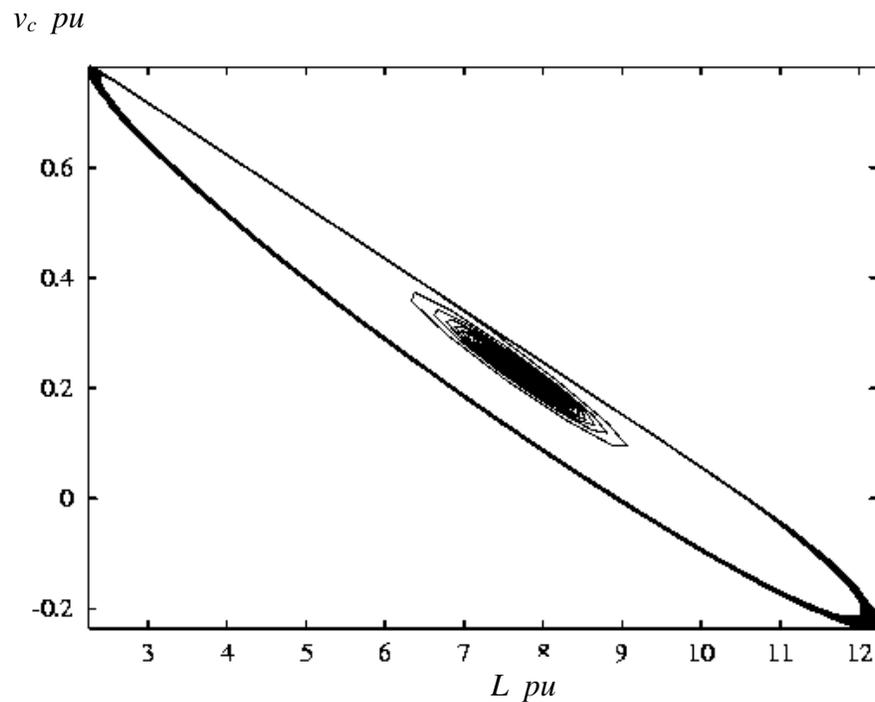


Figura 3.12.-Plano de fase  $V_c$ - $L$ .

En resumen, el sistema puede ser atraído por la zona estable, aún cuando se encuentre en una zona de operación inestable, esto da la posibilidad de controlar en cierta medida el sistema de potencia siempre y cuando se cumplan ciertas condiciones de operación. Por ejemplo que el sistema se encuentre en una zona de operación cercana a la influencia del atractor estable.

Ambos resultados sugieren que en el fenómeno de bifurcaciones Hopf ocurren oscilaciones de baja frecuencia en los sistemas eléctricos que tengan acoplados hornos de arco eléctrico. Estas oscilaciones son indeseables para el sistema eléctrico debido a que los equipos eléctricos acoplados son sometidos a esfuerzos que influyen directamente en el aislamiento de los mismos, además de la operación de protecciones y salidas del sistema por fallas inexistentes.

---

### 3.5 BIFURCACIÓN DE DOBLE PERIODO

Los ciclos límites que resultan de la transformación de las bifurcaciones Hopf en bifurcaciones de doble periodo son denominados *bifurcaciones de doble periodo* (BDP). Si este es el caso, el sistema opera bajo una nueva solución periódica, la cual tiene un doble ciclo límite, a diferencia del ciclo único del estado anterior. Este fenómeno, atrae al sistema a una solución no-periódica, lo cual es el antecedente de las orbitas de atractores extraños y caos. La Figura 3.13 muestra el comportamiento del sistema con un valor del parámetro de bifurcación de  $L=0.364957 pu$ , correspondiente al valor frontera entre la BHE y la BHI.

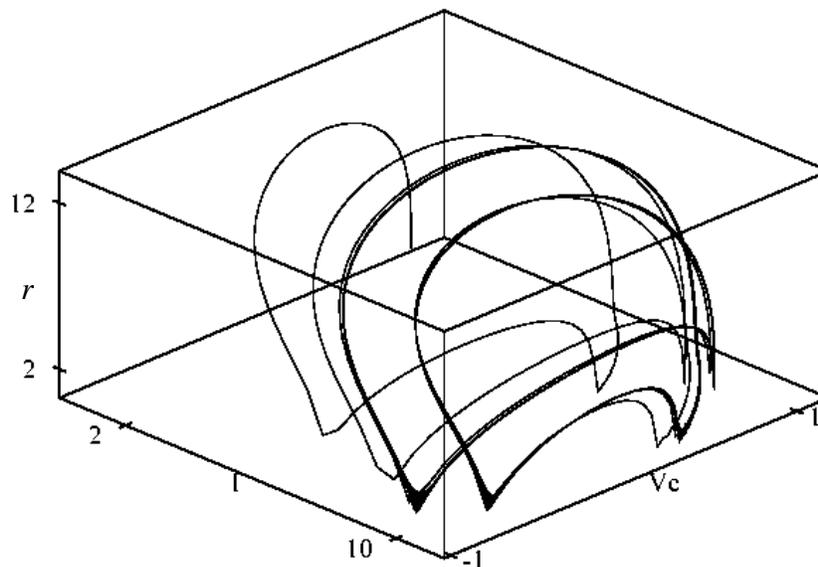


Figura 3.13.-Comportamiento del sistema para el caso inestable en una bifurcación de doble periodo.

En este caso, el sistema eventualmente tiende a operar en un estado de doble periodo. El ciclo limite obtenido es muy sensible y cualquier variación del parámetro de bifurcación resultará en un estado de operación estable o inestable para el sistema. Los parámetros del sistema para los cuales se presenta la BDP en el caso de estudio se muestran en la Tabla 3.4.

TABLA 3.4

*Condiciones iniciales de los parámetros del sistema para los estados de estabilidad estables e inestables.*

Parámetros	Valores para la BDP.	Parámetros	Valores para la BDP.
$i$	7.9253	$m$	1
$v_c$	6.0357	$n$	2
$i_h$	7.7742	$K_1$	0.08
$r$	2.6419	$K_2$	0.005
$C$	0.1	$K_3$	3
$L$	0.364957	$R$	0.1
$v_s$	1	$L_H$	0.1

### 3.6 ATRACTORES EXTRAÑOS Y CAOS.

Con el fin de verificar que los elementos altamente no-lineales pueden producir estados aperiodicos de operación del sistema eléctrico al cual estén acoplados, se consideraron condiciones iniciales extremas en el sistema que se encuentra bajo análisis para determinar con esto la existencia de atractores extraños y estados caóticos en el sistema de potencia producidos por el acoplamiento del horno de arco eléctrico. Los valores de los parámetros usados en la realización de este experimento se pueden observar en la Tabla 3.5.

TABLA 3.5

*Condiciones iniciales de los parametros del sistema para los estados de estabilidad estables e inestables.*

Parametros	Magnitudes en pu.
$C$	0.1
$L$	0.1
$R$	0.1
$L_H$	0.1
$v_S$	1
$m$	2
$n$	2
$K_1$	0.08
$K_2$	0.005
$K_3$	3

Es importante hacer notar los valores de los coeficientes de enfriamiento y temperatura  $n$  y  $m$  dado que si se tomaran magnitudes diferentes para estas variables se presentarían en el sistema condiciones diferentes de operación. Tomando en cuenta lo anterior, se construyó un archivo de datos con las ecuaciones diferenciales ordinarias mostradas en (3.2), el cual se analizó utilizando el paquete de análisis de bifurcación XPPAUTO50. El estado estacionario se obtuvo en el dominio del tiempo con un valor de corriente de  $i = 8.697 pu$ , como se puede observar en la Figura 3.14.

De la misma manera como se hizo en los casos anteriores, se realizó un análisis de sensibilidad al modificar diversos parámetros del sistema; esto con el fin de determinar posibles parámetros de bifurcación. Estos parámetros del sistema fueron analizados en

---

forma independiente, encontrándose una bifurcación Hopf cuando la inductancia del sistema toma el valor de  $L = 0.4607 pu$  tal y como se muestra en la Figura 3.15.

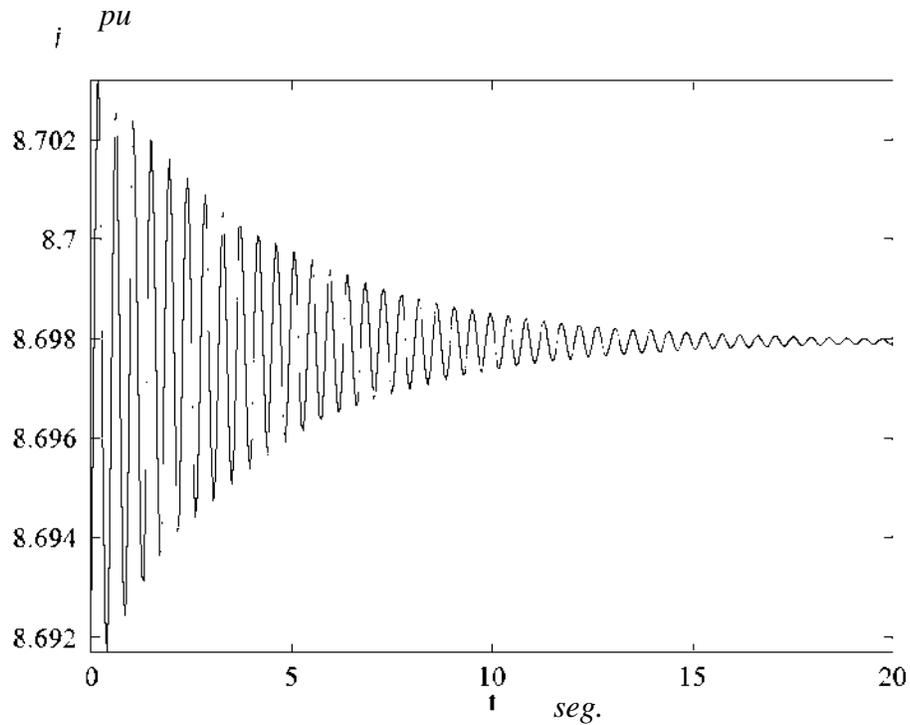


Figura 3.14.-Respuesta en el tiempo para el estado estable.

Cabe hacer énfasis en que el diagrama de bifurcación muestra las zonas estables e inestables del sistema, así como las zonas de operación periódicas estables e inestables del mismo.

Aparece una BHI y una BHE respectivamente, cuando la inductancia toma valores de  $L=0.325190$  y  $L=0.325191 pu$ . La Figura 3.16 muestra un acercamiento de esta zona de operación del sistema.

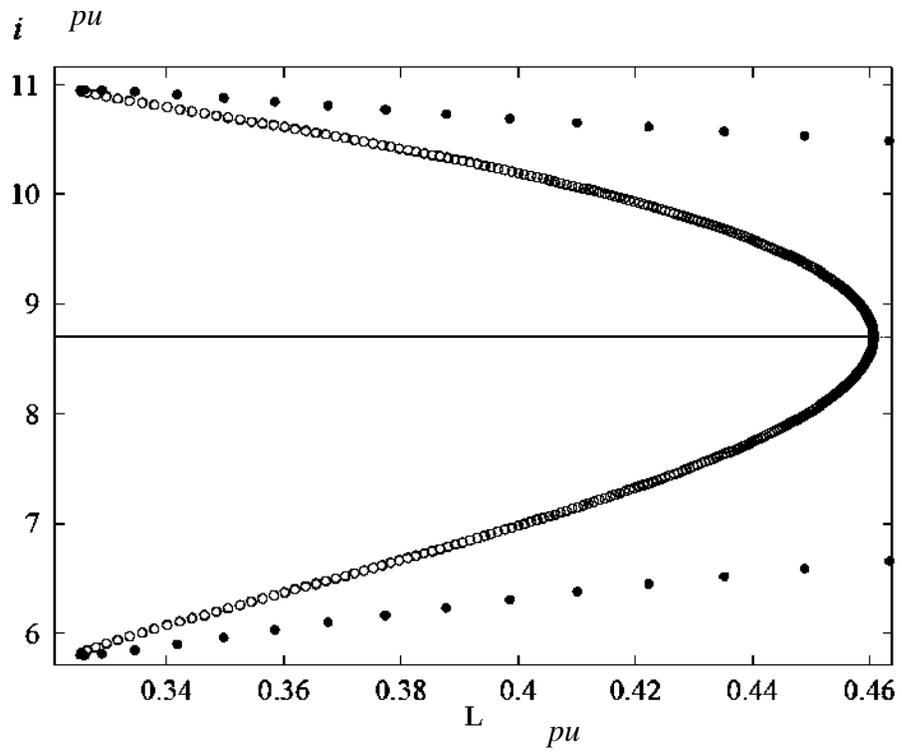


Figura 3.15.-Bifurcación Hopf.

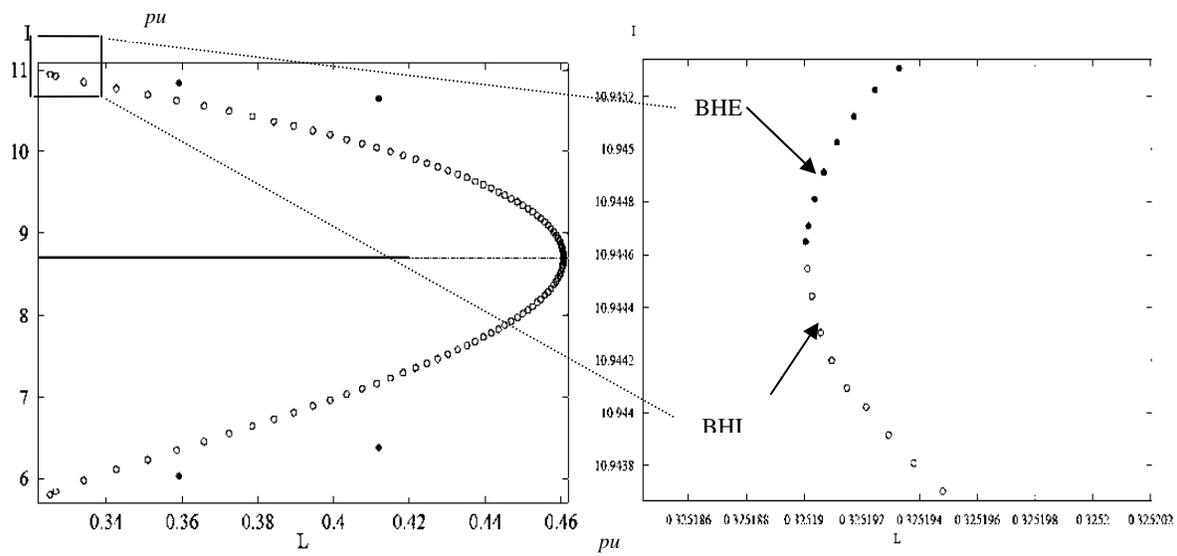


Figura 3.16.-Bifurcaciones BHI y BHE.

La más mínima variación en el parámetro de bifurcación del sistema produciría un cambio entre las zonas de operación, si el sistema opera en la zona 1 (BHI) cualquier punto

---

de operación en esta zona tendería a llevar al sistema a la inestabilidad, si este no fuese el caso y el sistema operará bajo la zona 2 (BHE) el sistema tendería a la estabilidad. Las Figuras 3.17 y 3.18 muestran el comportamiento del voltaje en el banco de capacitores del sistema cuando el sistema opera en cualquiera de estas zonas.

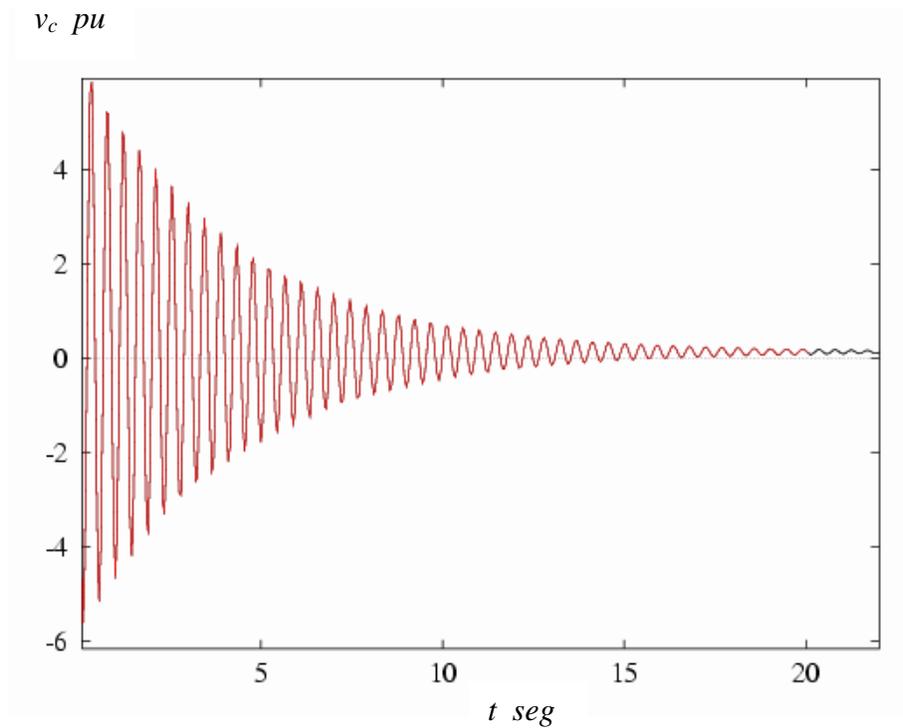


Figura 3.17.-Magnitud del voltaje para la zona estable (BHE).

En la Figura 3.19 se ilustra el comportamiento del sistema en el plano de fase tridimensional. Observándose que dependiendo de las condiciones iniciales, el sistema tiende hacia la estabilidad (línea roja) o inestabilidad (línea azul)

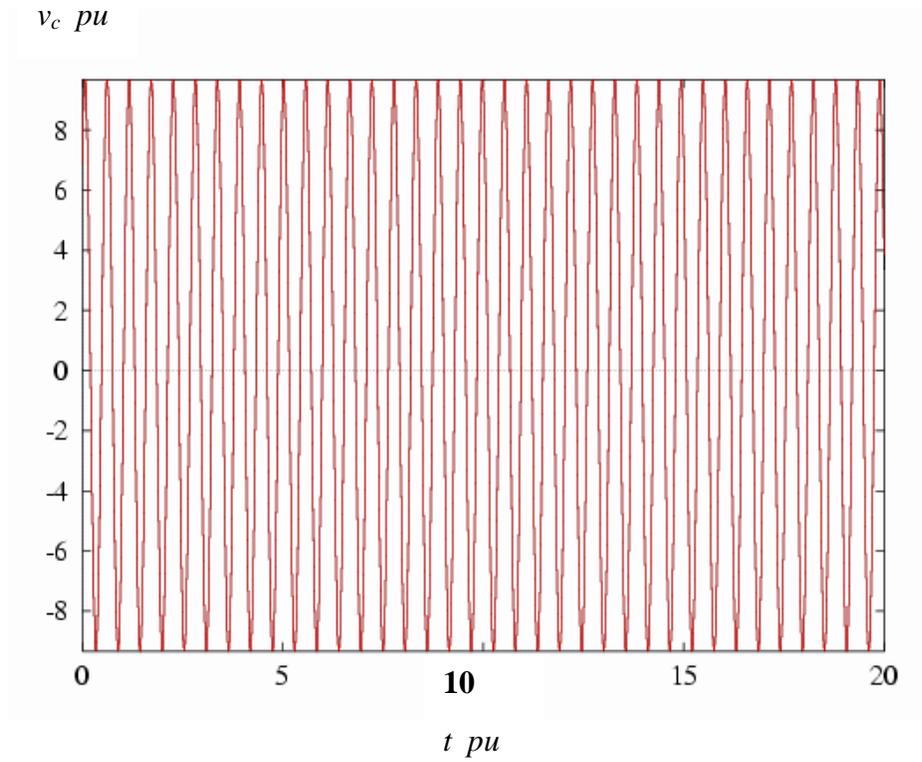


Figura 3.18.-Magnitud del voltaje en la zona inestable (BHI).

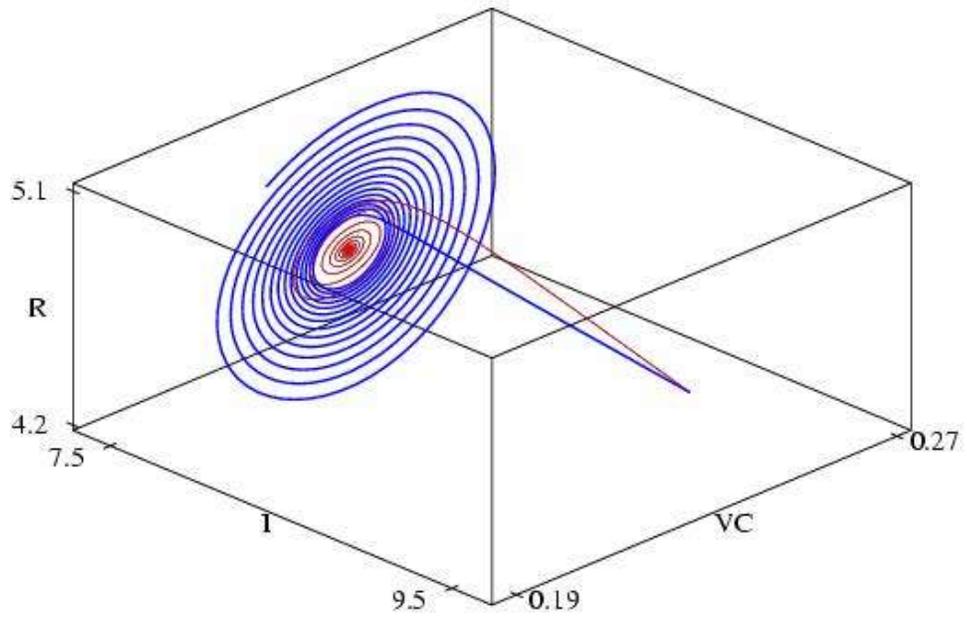


Figura 3.19.-Plano de fase tridimensional.

---

A continuación se procedió a detectar bifurcaciones del tipo BDP en los límites de las zonas de operación estables e inestables, que representan estados precedentes a la aparición de soluciones aperiódicas del sistema analizado, que a su vez, son el inicio del fenómeno conocido como *atractores extraños* y los cuales se pueden distinguir por su característica de tener una trayectoria envolvente irregular, encerrada en un ciclo límite.

La presencia de bifurcaciones Hopf inestables, Hopf estables, BDP y atractores extraños son indicativos de fenómenos que podrían resultar en orbitas periódicas caóticas. La Figura 3.20 muestra el atractor extraño encontrado en el análisis de estabilidad del sistema bajo estudio. Se debe principalmente a que algunas de las variables del sistema tienden a estabilizarse mientras que otras tienden a desestabilizarse, con lo cual no se obtiene un ciclo límite, los valores de los parámetros bajo los cuales se presenta este comportamiento se pueden observar en la Tabla 3.6.

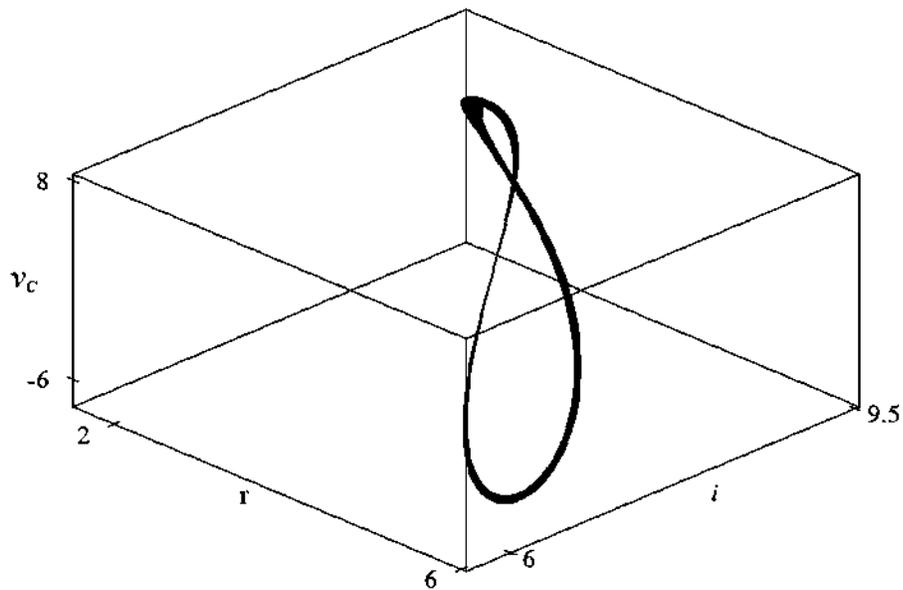


Figura 3.20.-Atractor extraño.

---

Una de las características principales que describen este comportamiento esta dada por las orbitas que presentan, en donde tiene lugar una atracción hacia un ciclo limite o varios ciclos limite. Los diagramas de fase de la Figura 3.21, muestran claramente las irregularidades del comportamiento del sistema.

TABLA 3.6

*Condiciones iniciales de los parametros del sistema para los estados de estabilidad estable e inestable en pu.*

Parámetros	Condiciones Iniciales
$C$	0.1
$L$	0.3251900570
$v_s$	1
$m$	2
$n$	2
$K_1$	0.08
$K_2$	0.005
$K_3$	3
$R_1$	0.1
$L_H$	0.1

En la Figura 3.21 (a) puede observarse que el atractor extraño tiende a estabilizarse en un ciclo límite y en la Figura 3.21 (b) se puede apreciar que si el sistema opera cerca del ciclo limite del atractor extraño, este es atraído hasta alcanzar eventualmente la órbita de oscilación del atractor extraño.

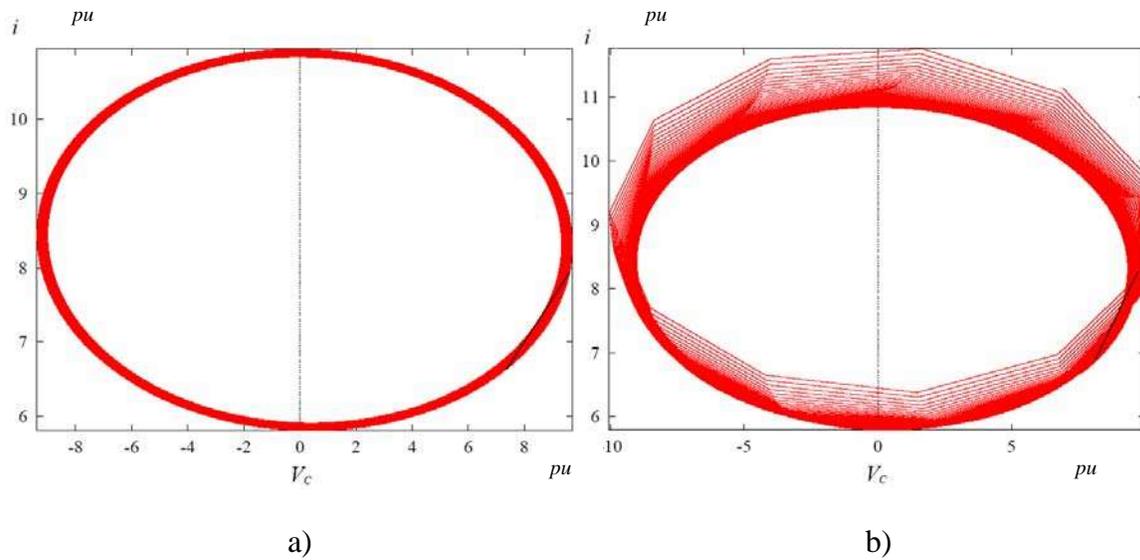


Figura 3.21.-Diagrama de fase en a) dentro del atractor b) fuera del atractor.

Sin embargo el resultado de esta investigación muestra que si el comportamiento del sistema en el atractor extraño tiene una variación menor en alguno de sus parámetros, por ejemplo  $i=10.04294675261069$  pu, el sistema tiende a la estabilidad, según se puede apreciar en la Figura 3.22, en donde se puede ver que el sistema pasa de estar bajo la influencia de un atractor extraño a la estabilidad del mismo.

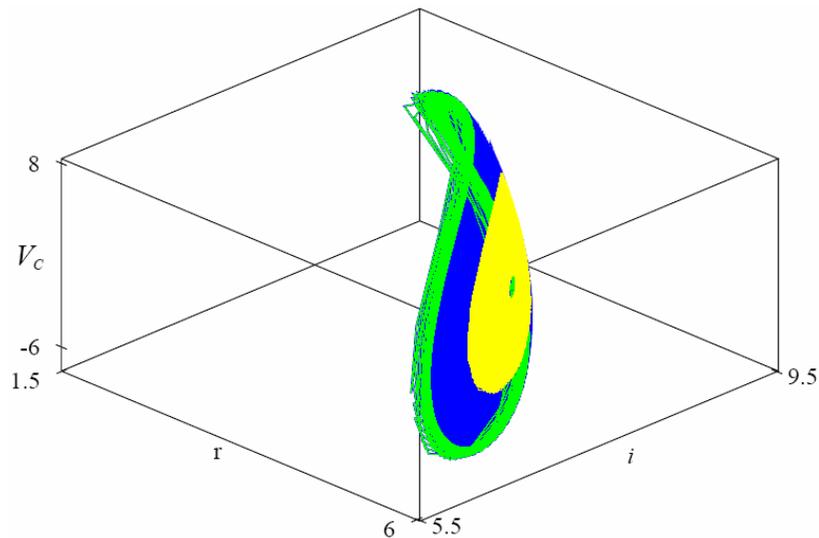


Figura 3.22.-Comportamiento de tendencia estable del sistema en el ciclo limite del atractor extraño.

---

En la Figura 3.23 se observa el comportamiento de la corriente en el tiempo, en la cual se aprecia que la corriente tiende a la estabilidad después de tener una fase aperiódica e inestable. El estado estacionario no mostrado se obtiene en 40 segundos.

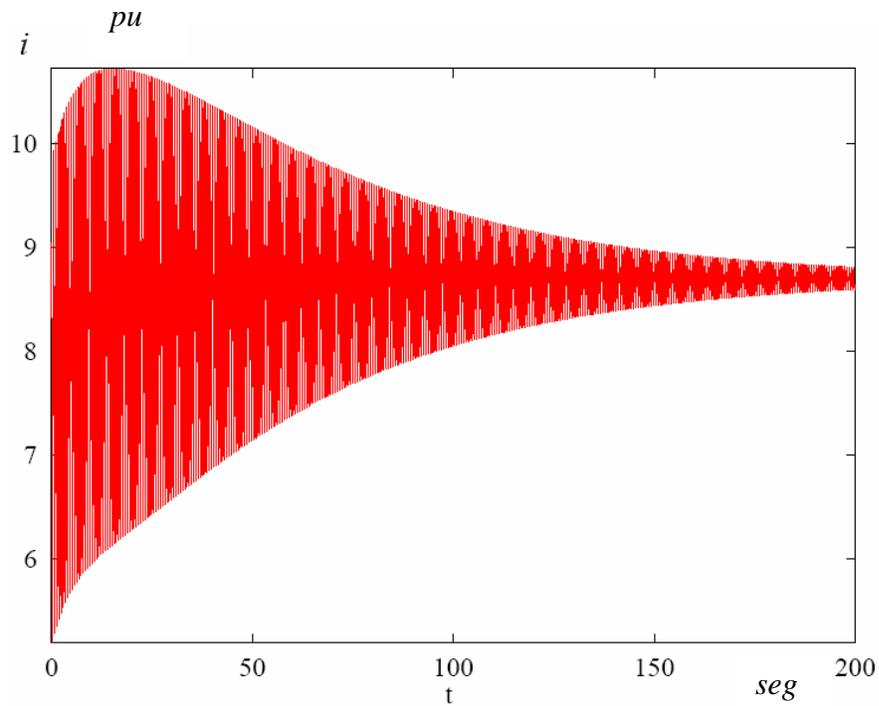


Figura 3.23.-Comportamiento de la corriente vs tiempo.

### 3.7 INCORPORACIÓN DE LA ECUACIÓN DE OSCILACIÓN DE LA MAQUINA SINCRONA EN EL CASO DE ESTUDIO.

Con el fin de evaluar el impacto de incluir un modelo del generador al cual se acople el sistema de estudio mostrado en la Figura 3.2, se realizaron las siguientes pruebas, con la metodología de construcción que se explica a continuación.

Inicialmente se sustituye el bus infinito al cual esta acoplado el sistema por el modelo de la maquina sincrona representada por una fuente ideal y su dinámica representada por la ecuación de oscilación de la misma. En el apéndice B muestra el desarrollo de este modelo y la incorporación del mismo en el sistema de estudio, de tal manera que el sistema de

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) y ecuaciones algebraicas que se actualizan simultáneamente se presentan en la Ecuación (3.3)

$$\begin{aligned}
 \dot{\delta}_m &= \omega \\
 \dot{\omega} &= \frac{P_m - D_m \omega + v_g E_m Y_m \sin(\delta - \delta_m - \theta_m) + E_m Y_m \sin \theta_m}{M} \\
 v_g &= i_H + \frac{E'_0 Y'_0 \sin(\partial + \theta'_0)}{Y'_0 \sin(\partial + \theta'_0)} \\
 \dot{i} &= \frac{v_g}{L} - i \frac{r}{L} - \frac{v_c}{L} \\
 \dot{v}_c &= \frac{i}{C} - \frac{i_H}{C} \\
 \dot{i}_H &= \frac{V_c}{L_H} - \frac{K_3 r^{-(m+2)}}{L_H} i_H \\
 \dot{r} &= \frac{K_3}{K_2} r^{-(m+3)} i_H^2 - \frac{K_1}{K_2} r^{(n-1)}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Como se puede observar el sistema cuenta con una ecuación algebraica  $v_g$ , la cual se estará actualizando iterativamente durante el desarrollo de la simulación; la variable de estado  $r$  representa la longitud del arco eléctrico,  $i$  representa la corriente que fluye por la línea de transmisión,  $v_c$  es el voltaje en el capacitor acoplado en paralelo con el horno de arco eléctrico e  $i_H$  representa la corriente que fluye a través del horno,  $\partial$  es el ángulo del voltaje en el nodo de carga.

Los parámetros restantes asociados al sistema del caso de prueba que se utilizaron en este experimento se listan en la Tabla 3.7

El horno de arco eléctrico esta determinado por el modelo dinámico presentado en la Ecuación (3.1). Cualquier variación en estos parámetros produce un diferente punto de equilibrio del sistema, lo cual conlleva a diferentes puntos de estabilidad del sistema. El análisis de bifurcación comienza al obtener un punto de equilibrio estable, el cual es mostrado en la Figura 3.24, en donde se observa la evolución del estado transitorio en el

tiempo hasta que eventualmente llega al estado estacionario en  $t = 25$  segundos con una corriente  $i = 0.82987 pu$ .

TABLA 3.7  
*Parámetros utilizados en el análisis del sistema en pu.*

Análisis de bifurcación de $C=0.1$ hasta $5 pu$ .			
$C=0.1$	$L=0.3$	$m=0$	$n=2$
$K_1=0.08$	$K_2=0.005$	$K_3=3.0$	$R_1=0.1$
$L_h=0.1$	$Y'_o=8$	$\theta'_o = -0.2094$	$E'_o=2.5$
	$\partial = 0.1066$		

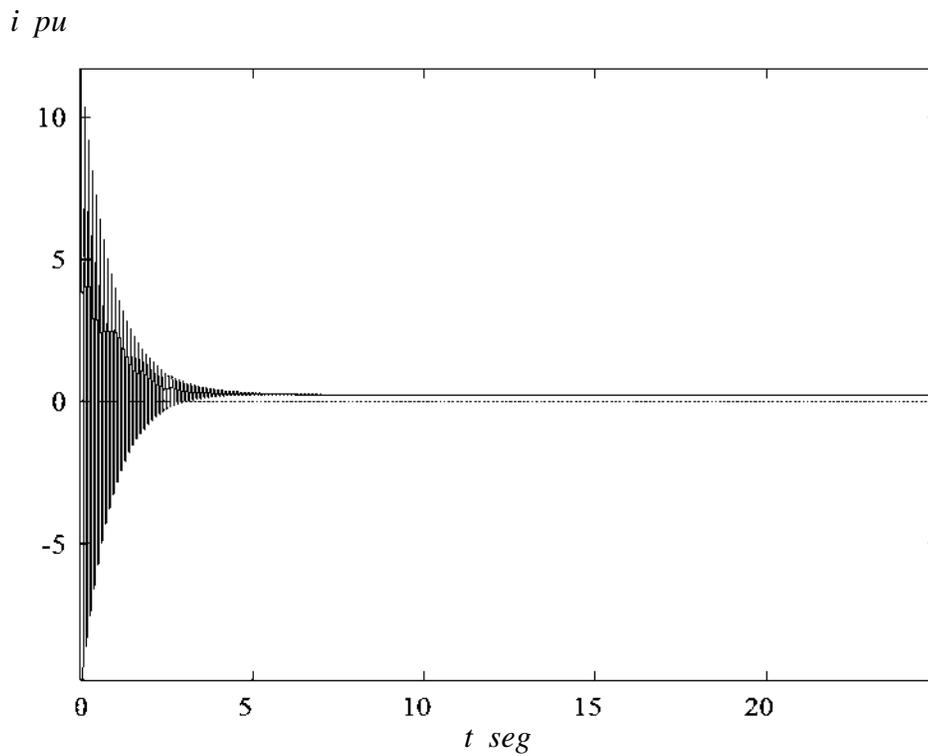


Figura 3.24.-Comportamiento transitorio de la corriente vs tiempo.

La evolución de la corriente del horno de arco eléctrico asociado al sistema se muestra en la Figura 3.25. Obsérvese de la figura, que el comportamiento de la corriente es altamente no lineal debido a la carga acoplada al sistema, que en este caso es el horno de arco eléctrico, el cual tiene una característica muy particular para el caso de prueba diseñado.

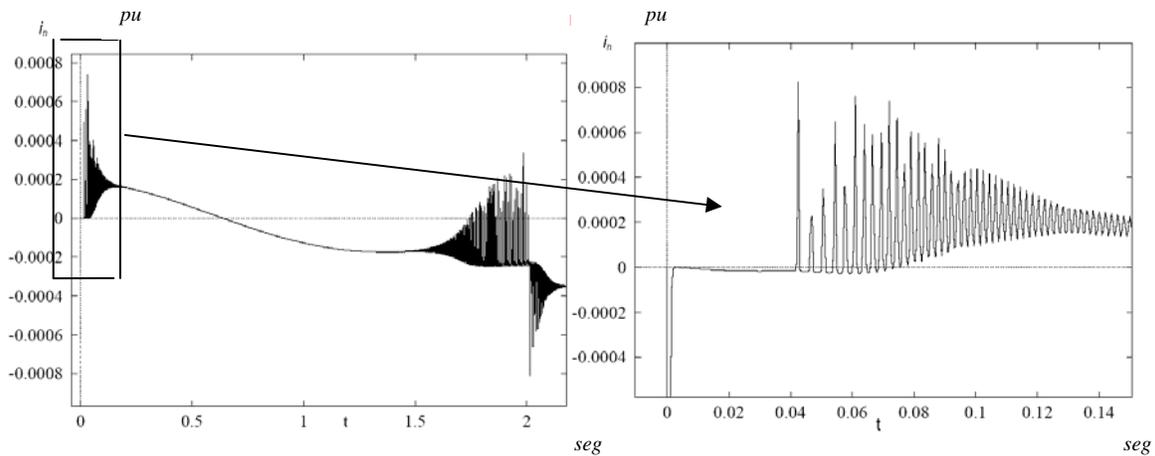


Figura 3.25.-Comportamiento transitorio de la corriente del horno vs tiempo.

Posteriormente, al obtener un punto de equilibrio estable, se determina el punto de operación inicial, el cual es el primer punto en el diagrama de bifurcación mostrado en la Figura 3.26. El parámetro de bifurcación que se comenzará a variar de manera cuasi-estática es la capacitancia. A partir de este punto si el parámetro de bifurcación (la capacitancia) se incrementa, el sistema se comporta en forma estable, representándose por la línea gruesa de la Figura 3.26 cuando el parámetro de bifurcación toma un valor de  $C=1.510 pu$ . El sistema comienza a obtener soluciones inestables, lo cual es representado por una línea más delgada en la misma Figura.

Obsérvese de la Figura 3.26, que el sistema presenta una bifurcación tipo Hopf en el valor de capacitancia de  $C=1.538 pu$ . Cuando el parámetro toma este valor se presenta una bifurcación Hopf inestable (BHI), debido a que en este punto comienza una rama de soluciones periódicas inestables, esto se puede observar en la Figura 3.27. En este punto si la capacitancia toma un valor inferior al de la bifurcación Hopf las soluciones periódicas son oscilatorias periódicas inestables (BHI), representadas por los círculos vacíos, sin

---

embargo, cuando el parámetro toma el valor  $C=0.1325 pu$ , se vuelven a presentar soluciones estables (BHE) y estas se representan por los círculos rellenos hasta que  $C=0.1785 pu$ . Después de este punto el sistema no tiene punto de equilibrio (BHI), esto se puede ver más claramente en la Figura 3.28

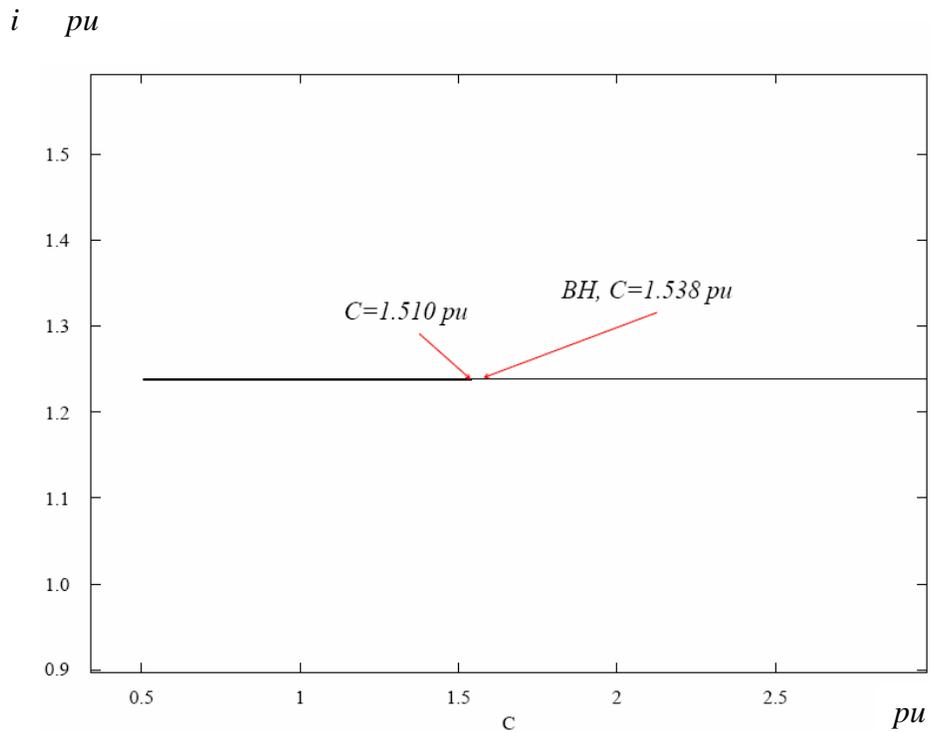


Figura 3.26.-Diagrama de bifurcación en estado estable.

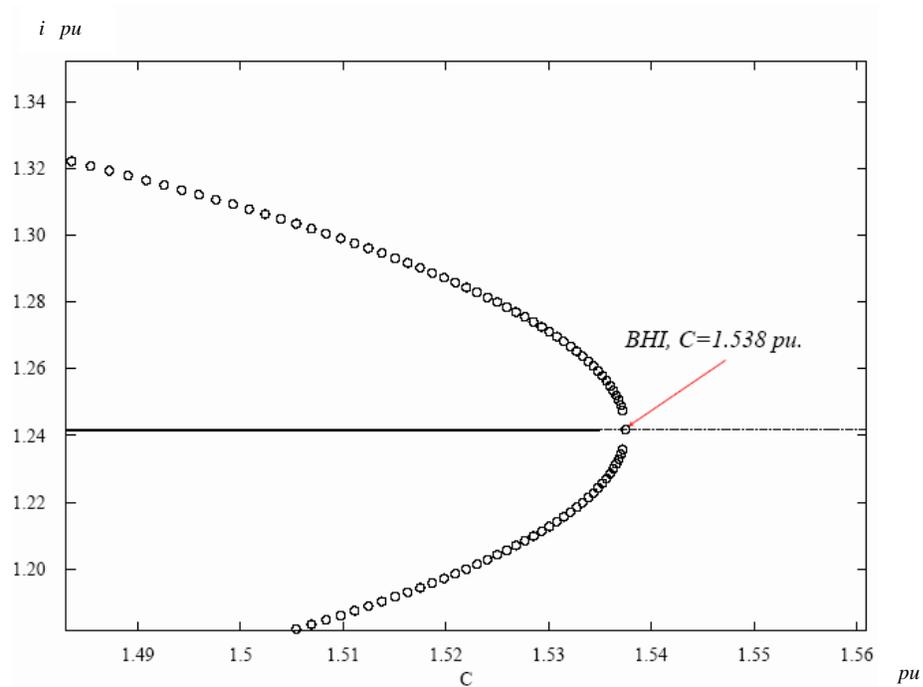


Figura 3.27.-Diagrama de bifurcación en estado estable.

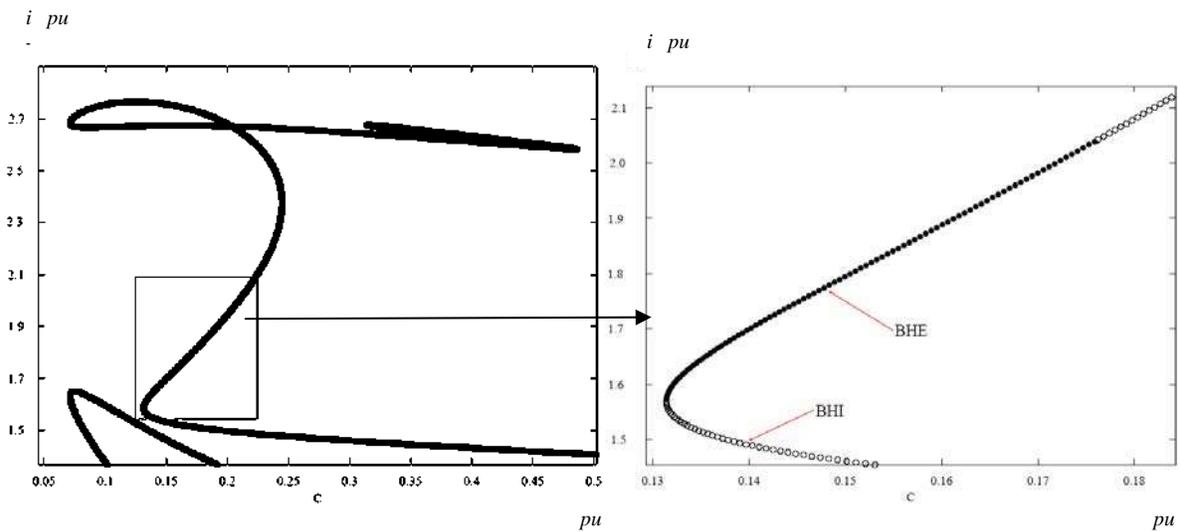


Figura 3.28.-Diagrama de bifurcación mostrando las regiones estables e inestables.

Cuando el sistema se encuentra en la parte oscilatoria periódica, se observa que se producen durante la evolución del comportamiento dinámico del sistema varias bifurcaciones de doble periodo (BDP) en las cuales el sistema pierde estabilidad, estas bifurcaciones se encuentran en los valores de  $C=0.176229 pu$ ,  $C=0.227616 pu$ , y  $C=0.08690 pu$ . la aparición de estas bifurcaciones se puede observar en la Figura 3.29.

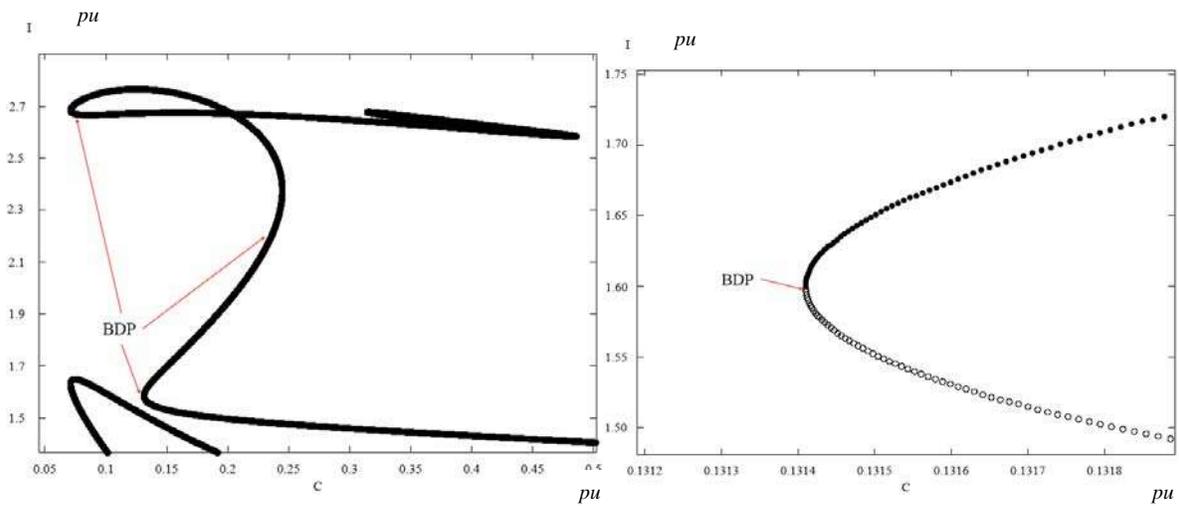


Figura 3.29.-Diagrama de bifurcación mostrando las bifurcaciones de doble periodo.

La Tabla 3.8 muestra el comportamiento de los valores característicos conforme el sistema se acerca a la bifurcación Hopf y al nacimiento de la misma.

TABLA 3.8

*Comportamiento de los valores característicos complejos conjugados en función de la variación del parámetro de bifurcación  $C$ .*

Valores Característicos Complejos		Capacitancia <i>En pu</i>
Parte Real	Parte imaginaria	
-6.534084	-1.562000	1.532
-1.003546	-1.562372	1.534
-0.000731	-1.795047	1.536
0.000731	-1.795047	1.538

La dinámica de las variables de estado del sistema se comportan de manera muy peculiar cuando se presentan las bifurcaciones, un ejemplo de esto es la dinámica que presentan cuando se tiene la bifurcación Hopf (BH), lo anterior se debe a que las variables de estar en valores estables, comienzan a oscilar y esta oscilación transcurre hasta alcanzar un ciclo limite; según se puede observar de la Figura 3.30.

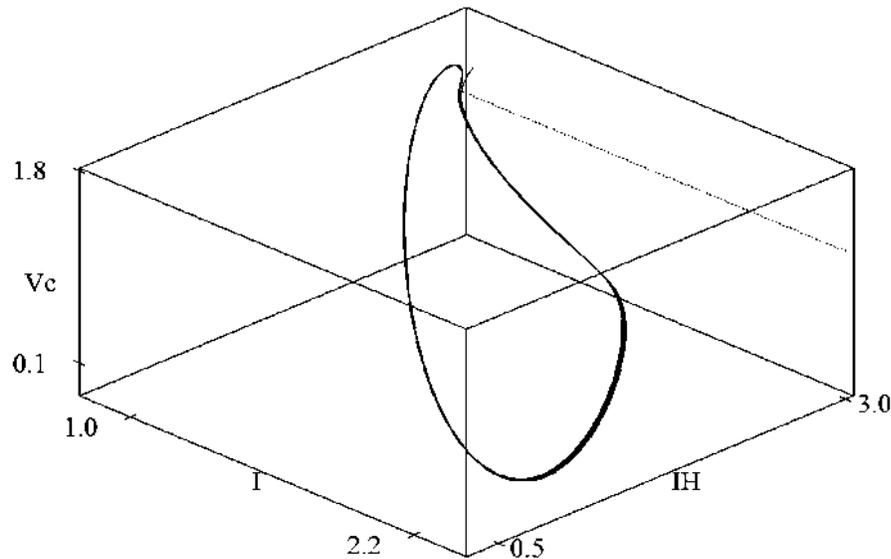


Figura 3.30.-Ciclo limite del sistema en la bifurcación Hopf inestable.

Es interesante hacer notar que analizando la evolución del sistema existen regiones de multiplicidad de estabilidad para ciertos valores que puede tomar el parámetro de bifurcación. Para explicar tal fenómeno se presenta la Figura 3.31 en donde existe una región de múltiple estabilidad comprendida entre  $C=0.1325 pu.$  y  $C=0.1785 pu.$  En esta región se encuentran 3 sub-regiones; si el sistema se encuentra en la región 1 el atractor que tiene la mayor influencia es el de la región estable por lo tanto si el sistema sufriera una perturbación en la cual este se encontrara operando en la región 1, los valores de las variables de estado del sistema, tenderían al punto de equilibrio, esto se puede observar de manera más clara en las Figuras 3.32 y 3.33. En la Figura 3.32 se puede observar como el sistema, inicialmente en un ciclo límite oscilatorio estable, es atraído por la influencia del atractor de la zona periódica estable, lo cual lleva al sistema a un punto de operación estable.

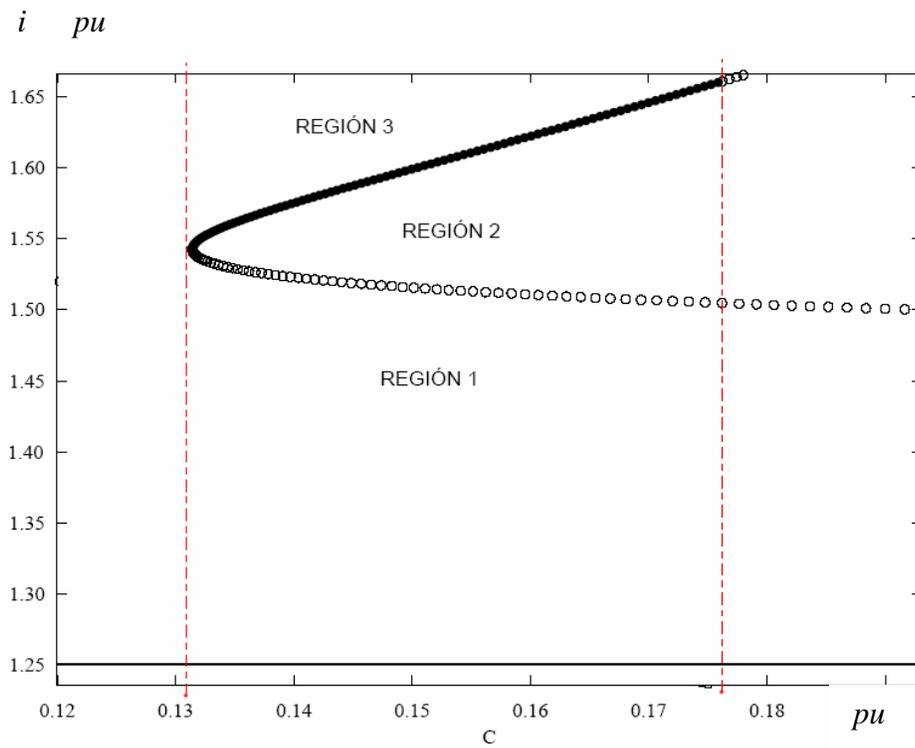


Figura 3.31.-Regiones de multiplicidad de estabilidad.

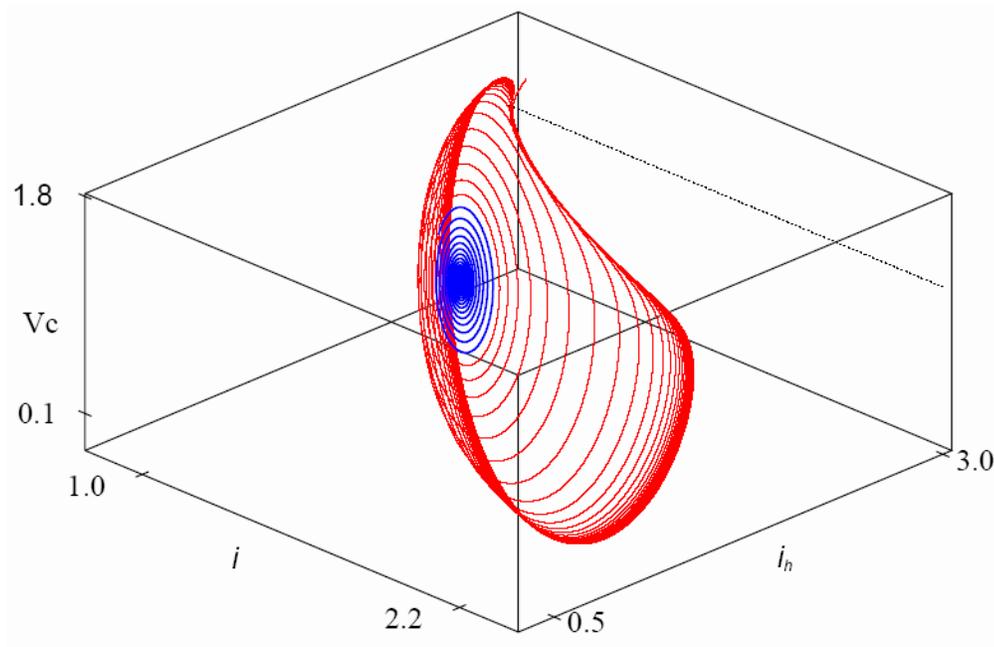


Figura 3.32.-Plano de fase tridimensional del sistema en la zona de atracción 1.

---

En la Figura 3.33 se puede observar el comportamiento del voltaje versus tiempo en el banco de capacitores atraído por la parte periódica estable.

Si este no fuese el caso y la perturbación llevara al sistema a operar en la zona de atracción 2, los valores tienden hacia los ciclos límites oscilatorios inestables, lo cual se puede apreciar en las Figuras 3.34 y 3.35. En la Figura 3.34 se puede observar como el voltaje es afectado por la zona de atracción inestable, lo cual lleva a oscilaciones cada vez de mayor magnitud.

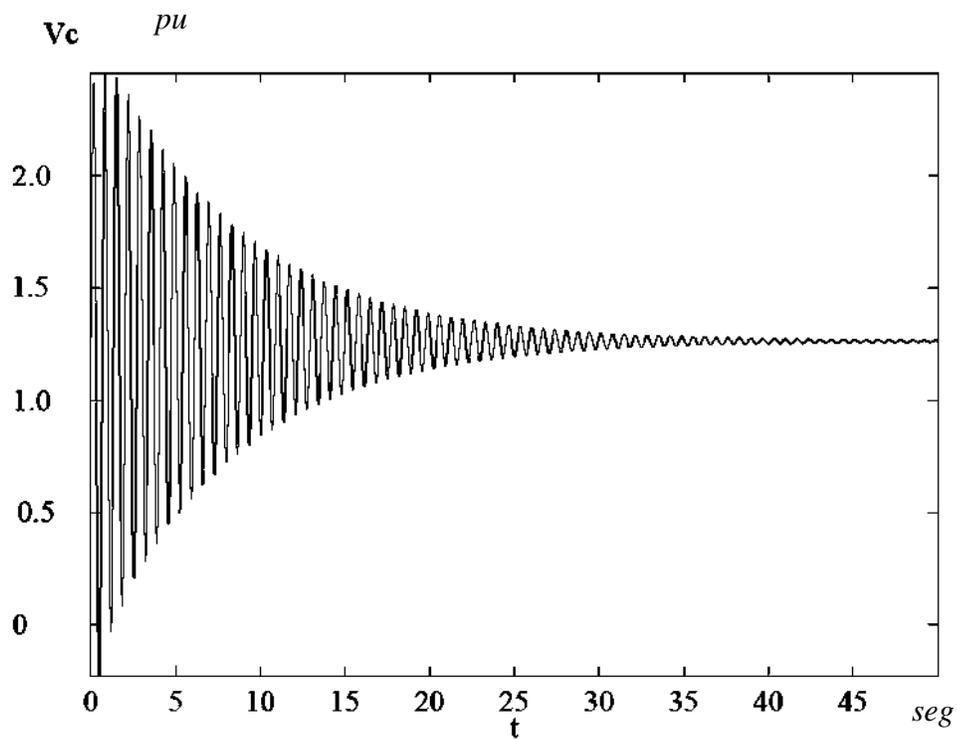


Figura 3.33.-Comportamiento del  $V_c$  en la zona de atracción 1.

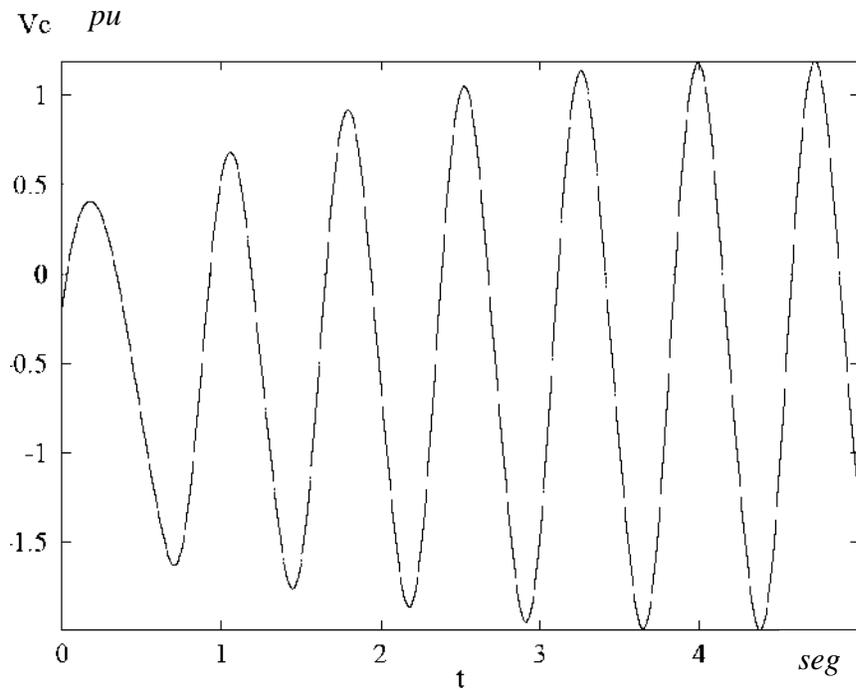


Figura 3.34.-Comportamiento del  $V_c$  en la zona de atracción 2.

En la Figura 3.35 se puede observar el comportamiento en el plano de fase del sistema y como este empieza a oscilar teniendo un a amplitud cada vez mayor en sus ciclos.

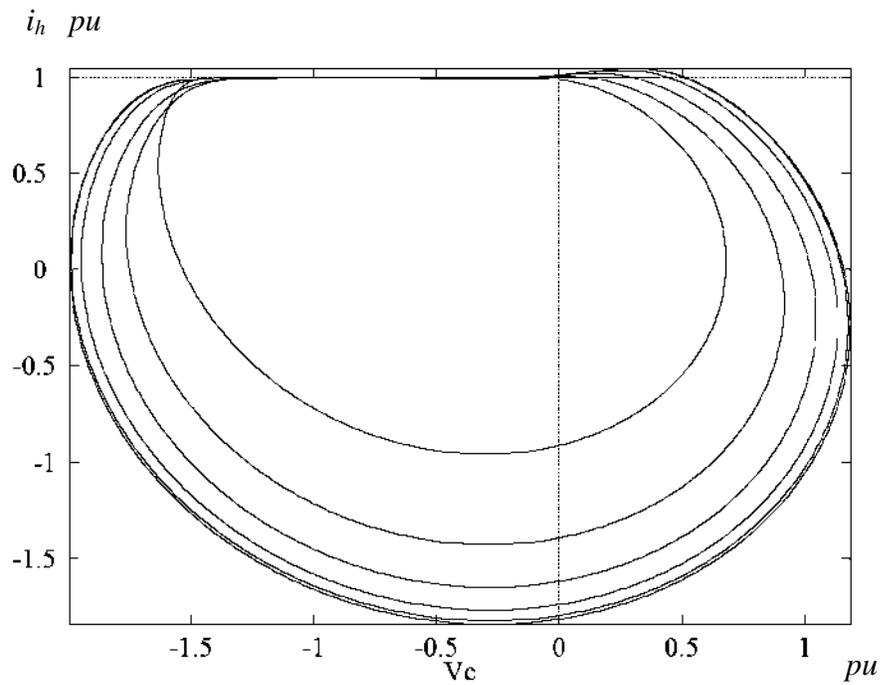


Figura 3.35.-Plano de fase del sistema en la zona de atracción 2.

---

Si ninguno de los dos casos anteriores se presentaran y el sistema operara en la zona de atracción 3, entonces el sistema es atraído por las soluciones periódicas estables, tal y como lo muestra la Figura 3.36.

Si el parámetro de bifurcación es incrementado por encima del valor de la bifurcación Hopf, el sistema entra en un estado oscilatorio inestable (BHI) y pueden presentarse otro tipo de bifurcaciones. En este caso en particular se presentaron varias bifurcaciones de doble periodo (BDP), en los valores de  $C=0.176229 pu$ ,  $C=0.227616 pu$ , y  $C=0.08690 pu$  el comportamiento del sistema en el valor de bifurcación de  $C=0.176229 pu$  se puede observar en la Figura 3.37, en la cual se observa claramente la aparición de doble ciclo limite en el estado de operación del sistema. En este caso en particular, estos ciclos límites se encuentran muy cercanos, sin embargo, se entrelazan y se separan conforme evoluciona su dinámica, por lo tanto el sistema pasa de un ciclo límite al otro.

Los dos ciclos limite ilustrados en la Figura 3.37, mostrados con mayor detalle en la ampliación presentada en la Figura 3.37 (b) determinan la operación particular del sistema para en este punto, si el parámetro de bifurcación se empieza a modificar de manera quasi-estática y a consecuencia de esto, el sistema comienza a experimentar bifurcaciones de doble periodo de manera periódica, se presenta una multiplicidad de bifurcaciones de doble periodo con lo cual la oscilación se distorsiona, según puede observarse en la Figura 3.38.

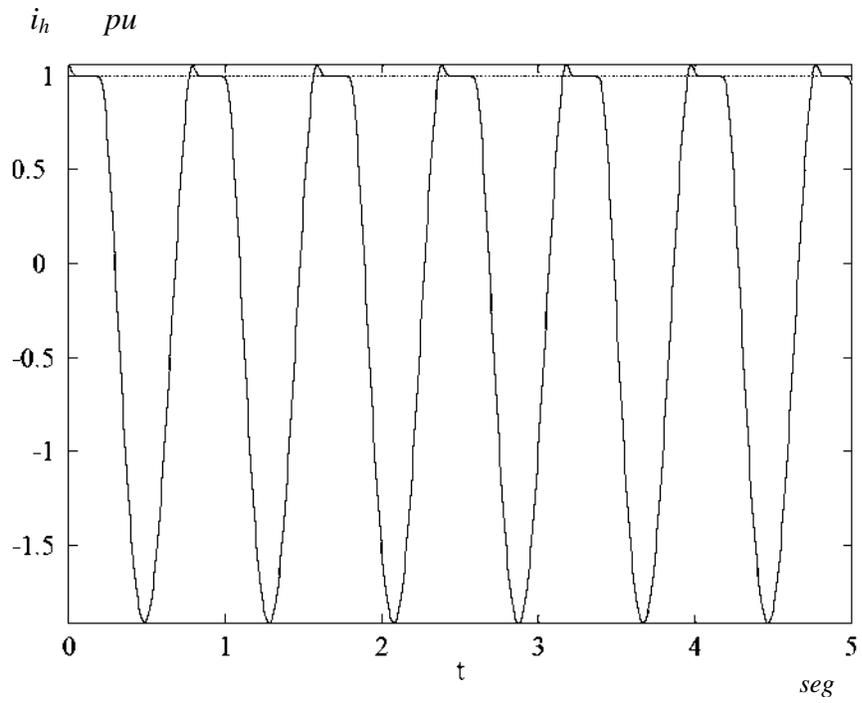


Figura 3.36.-Comportamiento de IH en la zona de atracción 3.

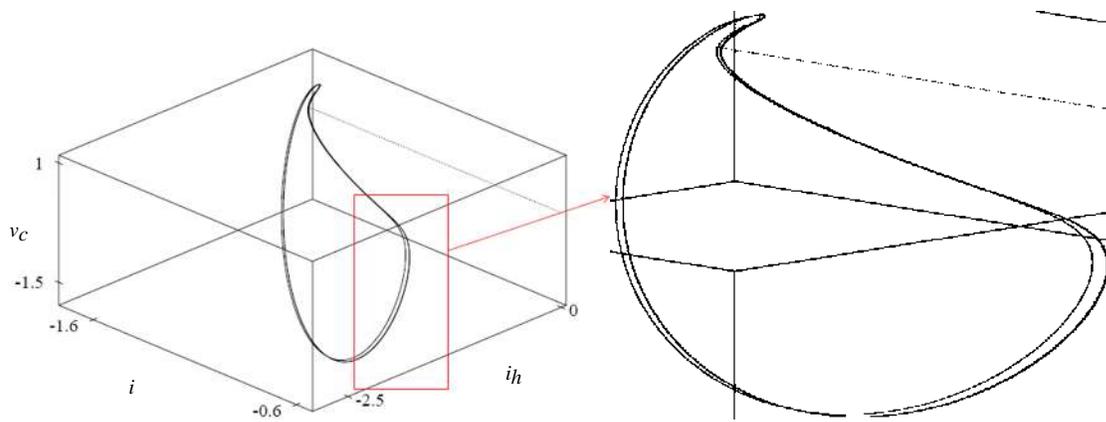


Figura 3.37.-Ciclo limite del sistema en la bifurcación de doble periodo.

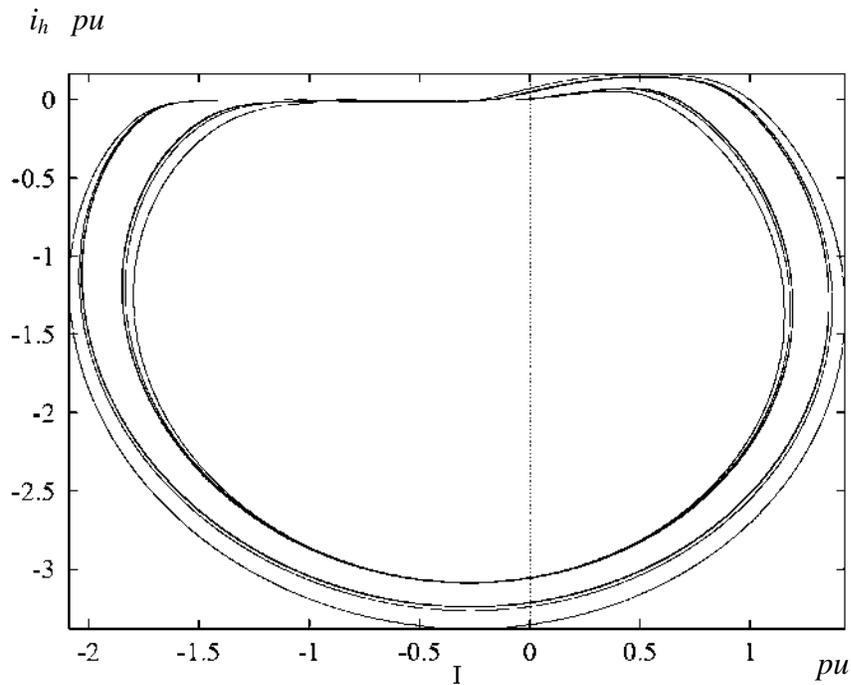


Figura 3.38.-Ciclo limite del sistema en la bifurcación de dobles periodos múltiples.

En este estado si el parámetro de bifurcación se incrementa en un valor  $C=0176229 \text{ pu}$  el sistema presenta oscilaciones de amplitud variable en un estado aperiódico; este estado dinámico del sistema es conocido como *caos*, y la trayectoria que describe el sistema se le denomina *atractor extraño*. Este fenómeno aparece cuando algunas variables se comportan de manera opuesta, mientras unas tienden a la estabilidad, otras a la inestabilidad, según puede observarse de la Figura 3.39.

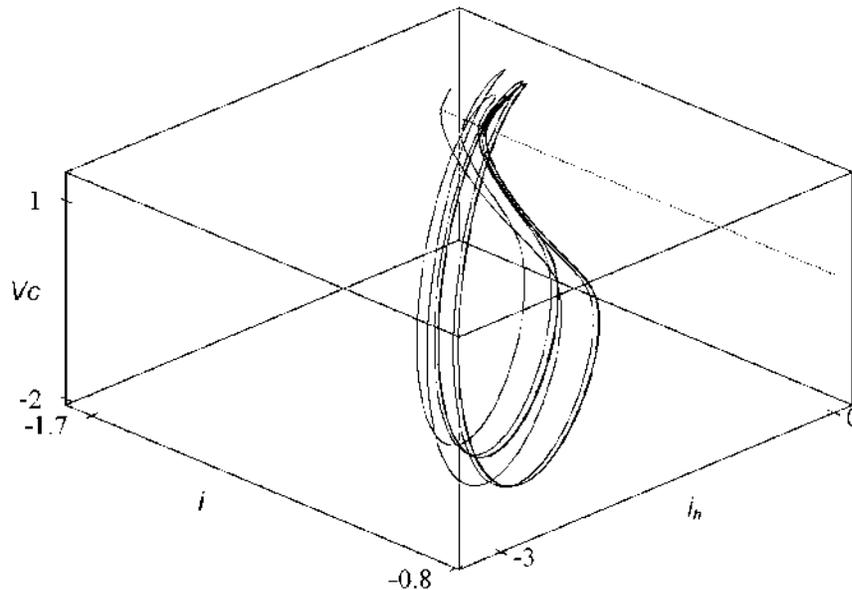


Figura 3.39.-Atractor extraño.

### 3.8 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD A CONDICIONES INICIALES.

Con el fin de comprobar la sensibilidad del sistema a las condiciones iniciales, tal y como lo postula la teoría de bifurcaciones, se diseñó un experimento en donde las condiciones iniciales del sistema difieren del analizado en el sub-tema 3.7, la Tabla 3.9 muestra las condiciones iniciales utilizadas en esta ocasión; el parámetro  $m$  tiene un valor de dos, lo cual indica que la longitud del arco es pequeña y por lo tanto la temperatura del arco es más caliente.

Inicialmente el sistema tiende a estabilizarse en los valores mostrados en la Tabla 3.10, La Figura 3.40 muestra el comportamiento en el tiempo de las variables de  $I$ ,  $V_c$  y  $I_h$  cuando alcanza el estado estacionario. En la Figura 3.40 se puede ver como todas las variables tienden al estado estable conforme son atraídos por un punto de equilibrio.

TABLA 3.9

*Parámetros utilizados en el análisis del sistema en pu.*

Análisis de bifurcación de $C=0.1$ hasta $2 pu$ .			
$C=0.1$	$L=0.3$	$m=2$	$n=2$
$K_1=0.08$	$K_2=0.005$	$K_3=3.0$	$R=0.1$
$Lh=0.1$	$Y'_o=8$	$\theta'_o = -0.2094$	$E'_o=2.5$
	$\partial = 0.1066$		

TABLA 3.10

*Valores de los parámetros del sistema en estado estable en pu.*

Parámetro	Valor
$I$	$1.42005308$
$V_c$	$0.23823133$
$I_h$	$1.42005308$
$r$	$2.0563956$

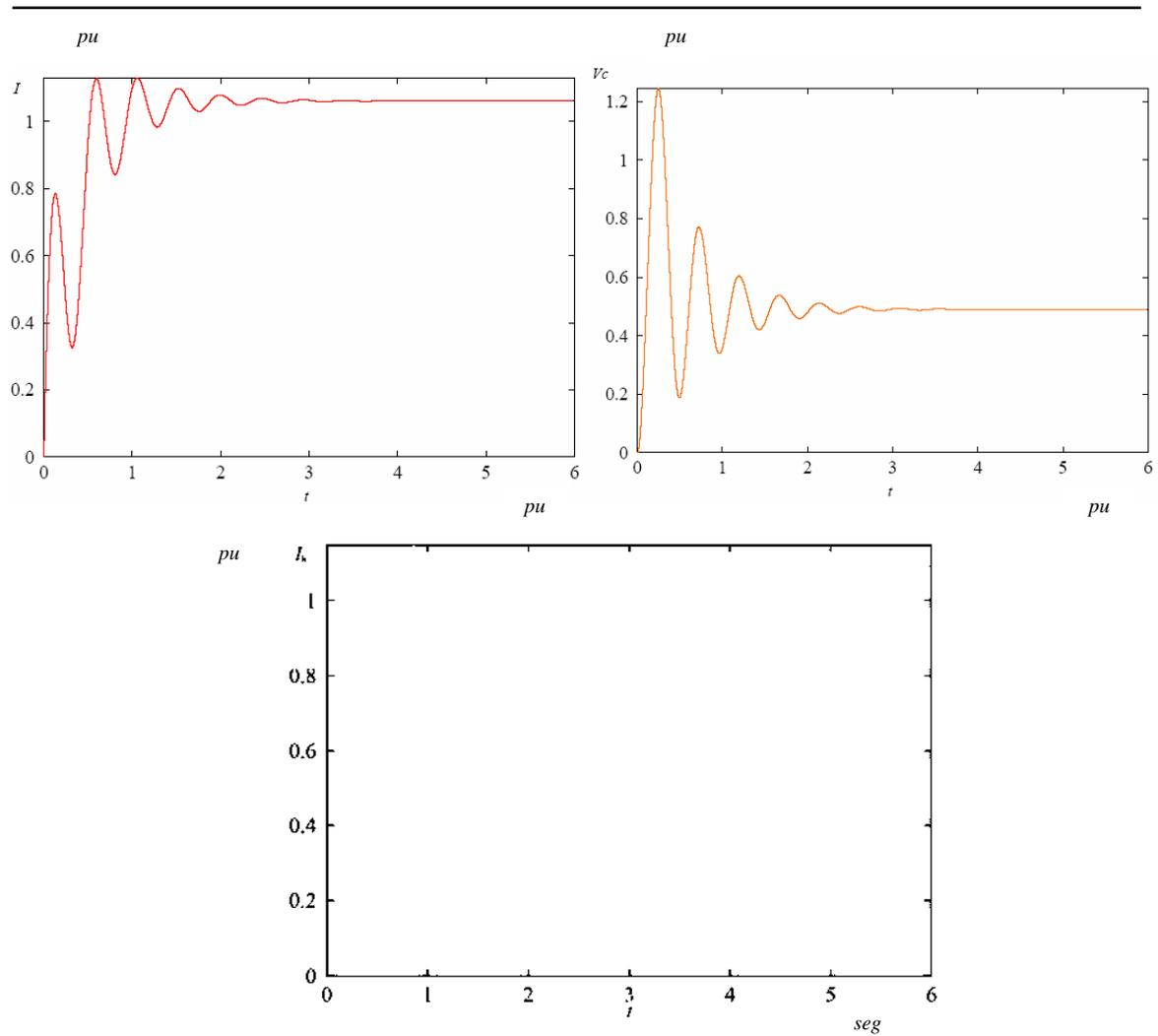


Figura 3.40.-Comportamiento de las variables en el tiempo.

Al estar el sistema operando en un estado estacionario, se varia de manera quasi-estática la capacitancia, lo cual produce la aparición de una bifurcación de tipo Hopf en un valor de  $C= 1.086 pu$ . La Figura 3.41 muestra esta bifurcación, se puede observar que en estas condiciones de operación la dinámica del sistema se comporta de una manera muy similar a la mostrada en el sub-tema 3.7, sin embargo el valor de capacitancia para el cual aparece la bifurcación cambia, ahora se presenta en un valor  $C= 1.086 pu$ . Cuando anteriormente se presento en  $C= 1.538 pu$ .

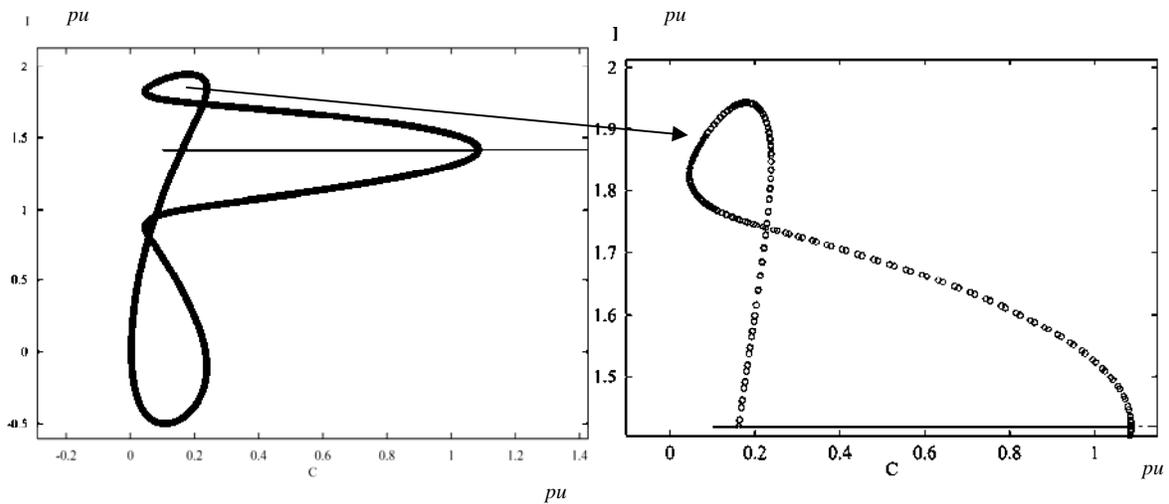


Figura 3.41.-Diagrama de bifurcación del sistema.

Se puede observar de manera muy clara en las Figuras 3.29 y 3.41 que dependiendo de las condiciones iniciales del sistema, los estados futuros del mismo pueden cambiar, lo cual impacta directamente en la estabilidad del sistema. La Tabla 3.11 muestra los valores a los cuales se encuentran las diferentes bifurcaciones de cada uno de los experimentos. Cabe mencionar que la diferencia entre el experimento A y el B es que en el A se tomó  $m=0$ , lo cual indica que la longitud del arco es grande y por lo tanto la temperatura es menos caliente, y en el experimento B  $m=2$ , lo que indica que la longitud del arco es pequeña y consecuentemente la temperatura del mismo es más caliente.

Como puede observarse de la Tabla 3.11, el hecho de cambiar las condiciones iniciales del sistema produce condiciones diferentes de estabilidad, por lo que los valores en los que ocurren las diferentes bifurcaciones cambian y en ocasiones pueden incluso aparecer bifurcaciones nuevas.

A manera de ejemplo la Figura 3.42 muestra el comportamiento del voltaje en el capacitor en el punto donde aparece la bifurcación de doble periodo  $C=0.08317 pu$ , como se puede apreciar el comportamiento del voltaje muestra una cierta peridicidad en la cual las frecuencias se repiten conforme evoluciona el sistema en el tiempo.

Tabla 3.11

*Valores de la Capacitancia en pu para las diferentes bifurcaciones.*

Bifurcaciones resultantes		
Bifurcaciones	Experimento A	Experimento B
<i>BH</i>	1.53801	1.08601
	0.17622	0.08317
<i>BDP</i>	0.22761	0.20301
	0.08690	0.20610
		0.07924

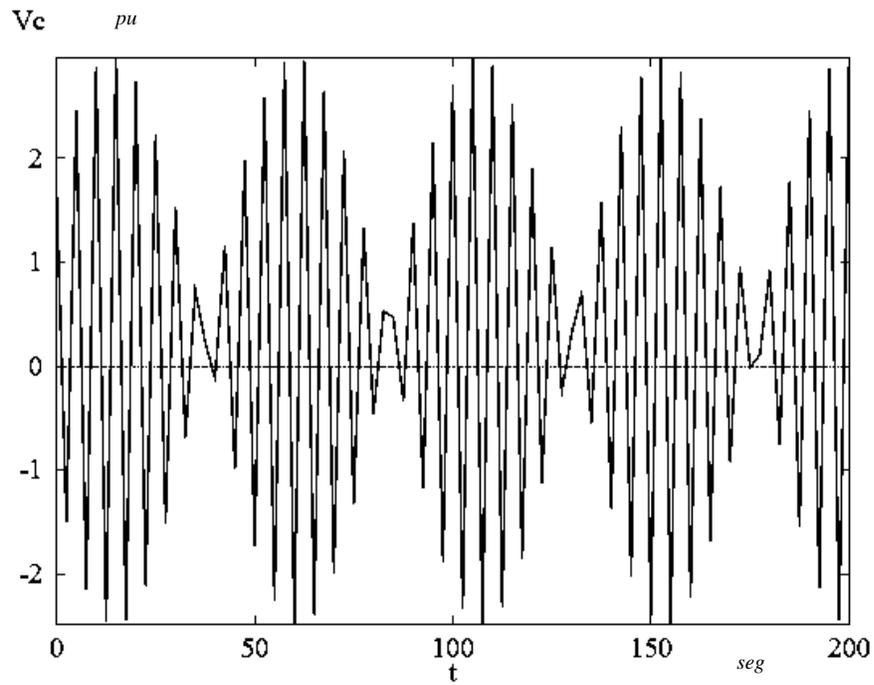


Figura 3.42.-Comportamiento del Vc en el tiempo.

---

## **4 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA TRIFÁSICOS.**

### **4.1 INTRODUCCIÓN**

El análisis de sistemas de potencia trifásicos es importante debido a que nos da una visión más clara del comportamiento dinámico de estos sistemas ante diferentes condiciones de operación, lo cual es de suma importancia en cuanto al análisis de estabilidad de los sistemas de potencia. Con el fin de realizar un análisis polifásico de sistemas de potencia se modeló un sistema de potencia trifásico típico de las conexiones eléctricas de una central siderurgica. Es importante mencionar que debido al grado de complejidad que presentan este tipo de estudios, el esfuerzo computacional que se requiere para poder obtener los resultados del experimento realizado es considerado, por lo que se realizo utilizando varias computadoras a la vez.

## 4.2 MODELO DEL SISTEMA DE POTENCIA TRIFÁSICO CON ACOPLAMIENTO DEL HORNO DE ARCO ELÉCTRICO.

El modelo trifásico que se utilizó en esta tesis es el mostrado en la Figura. 4.1, en el cual las variables  $v_a$ ,  $v_b$ , y  $v_c$  corresponden a los voltajes en las fases  $a$ ,  $b$  y  $c$  respectivamente, las variables  $i_a$ ,  $i_b$  y  $i_c$  representan a las corrientes por fases  $a$ ,  $b$  y  $c$ ; la inductancia de la línea de transmisión esta definida por el conjunto de variables que representan las resistencias e inductancias de cada uno de los conductores y están definidas como  $R_a$ ,  $L_a$ ,  $R_b$ ,  $L_b$  y  $R_c$ ,  $L_c$ ; las corrientes que alimentan al horno de arco eléctrico en cada una de las fases están definidas por las variables  $i_{ha}$ ,  $i_{hb}$  e  $i_{hc}$  respectivamente, el banco de capacitores monofasicos conectados en paralelo con el horno de arco eléctrico están representados con las variables  $C_a$ ,  $C_b$  y  $C_c$  respectivamente, las corrientes que alimentan a cada uno de estos capacitores por fase se determinan por medio de las variables  $i_{ca}$ ,  $i_{cb}$  e  $i_{cc}$ , el transformador acoplador entre el sistema de potencia y el horno de arco eléctrico se representa como un banco de transformadores monofasicos, conectados uno en cada fase y desacoplados mutuamente, por lo tanto esta condición se puede representar por medio de inductancias desacopladas mutuamente, el grupo de variables que representan estas inductancias en las fases  $a$ ,  $b$  y  $c$  están definidas por las variables  $L_{ha}$ ,  $L_{hb}$  y  $L_{hc}$ . El modelo matemático que se utilizo para representar el comportamiento del arco eléctrico es el mostrado en [Acha *et al.* 1990], el cual es acoplado a cada uno de los ánodos de la alimentación del horno de arco eléctrico.

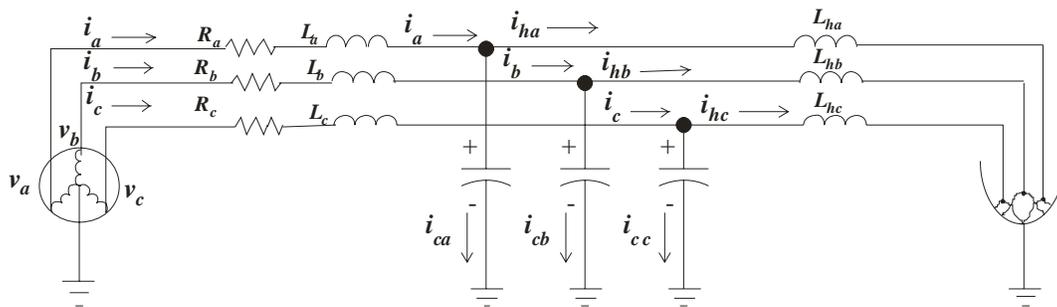


Figura 4.1.-Representación eléctrica trifásica típica del horno de arco eléctrico de corriente alterna.

---

### 4.3 MODELO DE LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN.

Con el fin de obtener un modelo matemático que represente el efecto trifásico de la línea de transmisión y que esta a su vez incluya las inductancias mutuas entre fases de la línea, se modela una línea de transmisión determinada en [Gross 1986]. La Figura. 4.2 muestra la configuración geométrica de esta línea de transmisión, la cual tiene las características mostradas en la Tabla 4.1,

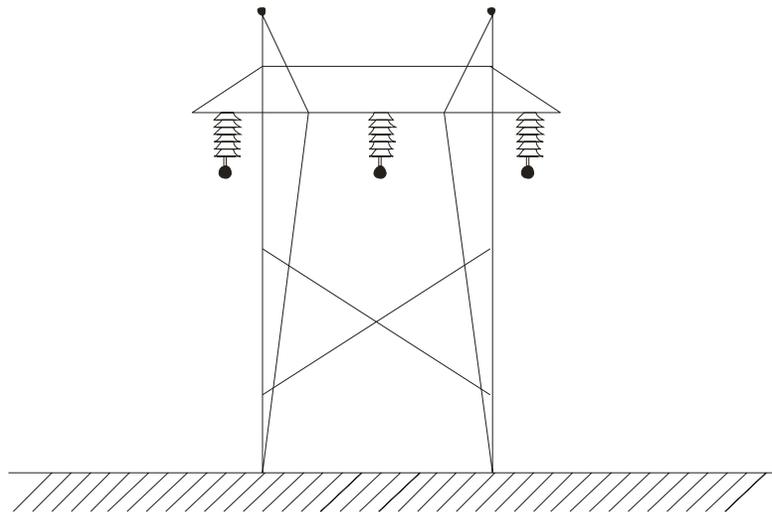


Figura 4.2.-Configuración geométrica de la línea de transmisión trifásica.

*Tabla 4.1.*

*Configuración de la línea de transmisión trifásica.*

Parámetro	Dimensión	Parámetro	Dimensión
Tipo de conductor	795 ACSR	Longitud	20 Km.

---

Radio	1.350 cm.	Nivel de voltaje	230 Kv.
Rmg	0.03283 cm.	Distancia entre fases	10 mts.
Resistencia de los conductores	$0.120 \frac{\Omega}{Km}$	Rango de corriente por fase	900 Amp.
Hilos por fase	1	Voltaje por fase	132.8 Kv
Hilos de guarda	2	Frecuencia del sistema	60 Hz.
No. de circuitos.	1	Resistividad de la tierra	$100 \frac{\Omega}{Km}$
Resistencia de los Hilos de guarda.	$3.75 \frac{\Omega}{Km}$	Altura de los conductores	20.1732mts.
Transposición de la línea	Completa	Altura de los hilos de guarda	29 mts.

---

Teniendo como base los datos de la Tabla 4.1, se utilizó el software PARLIN [Fuerte 1993] para obtener la matriz de impedancias siguiente:

$$Z = \begin{bmatrix} 2.07985 + J 9.47271 & 1.92906 + J 6.08902 & 1.88476 + J 5.06693 \\ 1.92609 + J 6.09091 & 2.13997 + J 9.43492 & 1.92906 + J 6.08902 \\ 1.88476 + J 5.06693 & 1.92906 + J 6.08902 & 2.07985 + J 9.47271 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

La Ecuación (4.1) representa la matriz de impedancias propias y mutuas de la línea, representada en forma simbólica como.

$$Z = R + X_L \quad (4.2)$$

---

La cual a su vez se puede descomponer en dos matrices que representan las resistencias y las inductancias de la línea de transmisión, es decir,

$$R = \begin{bmatrix} 2.07985 & 1.92906 & 1.88476 \\ 1.92609 & 2.13997 & 1.92906 \\ 1.88476 & 1.92906 & 2.07985 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$X_L = \begin{bmatrix} 9.47271 & 6.08902 & 5.06693 \\ 6.09091 & 9.43492 & 6.08902 \\ 5.06693 & 6.08902 & 9.47271 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

La matriz dada por (4.4) representa las impedancias inductivas propias y mutuas de cada una de las fases de la línea de transmisión. Sin embargo la representación del modelo de sistema de potencia a estudiar requiere la utilización de una matriz de inductancias y de resistencias propias y mutuas de la línea de transmisión. Esta matriz se obtiene a partir de (4.4), dando como resultado:

$$L = \frac{X_L}{w} = \begin{bmatrix} 0.025136 & 0.01622 & 0.01343 \\ 0.016291 & 0.02502 & 0.01610 \\ 0.013433 & 0.01622 & 0.02651 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Las ecuaciones (4.3) y (4.5) representan las ecuaciones de resistencias e inductancias propias y mutuas por fase, respectivamente.

---

## 4.4 CASOS DE ESTUDIO.

Con el fin de obtener un modelo matemático que represente de manera unificada el sistema de potencia y el horno de arco eléctrico en su modalidad trifásica, el modelo del horno dado en la Ecuación (3.1) se acopla a cada uno de los ánodos del horno, teniendo con esto las ecuaciones completas del sistema.

Esto último se obtiene mediante la correcta aplicación de las leyes de corriente y voltaje de Kirchhoff's y el análisis de mallas y nodos del circuito mostrado en la Figura 4.1, según se detalla en el Apéndice C. El sistema de ecuaciones en espacio de estado resultante es el mostrado en la Ecuación (4.6)

El sistema de prueba de la Figura 4.1 se ha utilizado para realizar diversas simulaciones, analizando el comportamiento del sistema en diversos casos posibles de operación. Se ha observado que debido a la naturaleza altamente no lineal del horno de arco eléctrico, en la mayoría de los casos el sistema se comporta de manera oscilatoria aperiódica.

Sin embargo, al realizar un estudio más minucioso se pudo observar que el impacto de las condiciones iniciales del sistema en el comportamiento dinámico del mismo es tan determinante que incluso el más mínimo cambio en estas afectan de manera significativa el mismo, siendo esta sensibilidad mucho mayor que la asociada con estudios monofásicos. Debido a esta característica del sistema bajo estudio, el análisis de estabilidad del mismo se vuelve más complejo conforme se analizan cada uno de los posibles parámetros de bifurcación. Sin embargo, se pudo encontrar un punto de equilibrio entre la interacción del horno de arco eléctrico y el sistema de potencia, a partir del cual el sistema se mantiene en estado estacionario, en este punto se procedió a variar los posibles parámetros de bifurcación para detectar los puntos en los cuales el sistema sufre cambios en la estabilidad del mismo.

$$\dot{i}_a = 20.3279 - 50.1249i_a - 31.1662i_b - 34.4308i_c - 70.7641v_{ca} + 37.1548v_{cb} + 13.2764v_{cc} \quad (4.6 \text{ a})$$

$$\dot{i}_b = 15.6323 - 24.8632i_a - 47.1212i_b - 25.4400i_c - 37.1055v_{ca} - 85.4054v_{cb} + 33.2676v_{cc} \quad (4.6 \text{ b})$$

$$\dot{i}_c = 18.2956 - 30.5946i_a - 28.3164i_b - 45.5962i_c + 13.2976v_{ca} + 33.2672v_{cb} - 69.8604v_{cc} \quad (4.6 \text{ c})$$

$$\dot{v}_{ca} = \frac{\dot{i}_a}{C_a} - \frac{\dot{i}_{ha}}{C_a} \quad (4.6 \text{ d})$$

$$\dot{v}_{cb} = \frac{\dot{i}_b}{C_b} - \frac{\dot{i}_{hb}}{C_b} \quad (4.6 \text{ e})$$

$$\dot{v}_{cc} = \frac{\dot{i}_c}{C_c} - \frac{\dot{i}_{hc}}{C_c} \quad (4.6 \text{ f})$$

$$\dot{i}_{ha} = \frac{v_{ca}}{L_{ha}} - K_3 r_a^{-(m+2)} \frac{\dot{i}_{ha}}{L_{ha}} \quad (4.6 \text{ g})$$

$$\dot{i}_{hb} = \frac{v_{cb}}{L_{hb}} - K_3 r_b^{-(m+2)} \frac{\dot{i}_{hb}}{L_{hb}} \quad (4.6 \text{ h})$$

$$\dot{i}_{hc} = \frac{v_{cc}}{L_{hc}} - K_3 r_c^{-(m+2)} \frac{\dot{i}_{hc}}{L_{hc}} \quad (4.6 \text{ i})$$

$$\dot{r}_a = \frac{k_3}{k_2} r_a^{-(m+3)} i_{ha}^2 - \frac{k_1}{k_2} r_a^{(n-1)} \quad (4.6 \text{ j})$$

$$\dot{r}_b = \frac{k_3}{k_2} r_b^{-(m+3)} i_{hb}^2 - \frac{k_1}{k_2} r_b^{(n-1)} \quad (4.6 \text{ k})$$

$$\dot{r}_c = \frac{k_3}{k_2} r_c^{-(m+3)} i_{hc}^2 - \frac{k_1}{k_2} r_c^{(n-1)} \quad (4.6 \text{ l})$$

$$(4.6 \text{ m})$$

## 4.5 RESULTADOS DEL SISTEMA.

A continuación se presentan los resultados obtenidos del análisis detallado de bifurcaciones aplicado al modelo presentado en (4.6), el cual se codifica en un archivo de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE). El software utilizado para realizar el análisis de las simulaciones es el paquete XPPAUTO50 [Doedel 1986]. El modelo del generador esta determinado por una fuente de voltaje ideal y el horno de arco eléctrico esta determinado por el modelo dinámico presentado en la Ecuación (3.1). Los valores de los parámetros asociados al sistema del caso de prueba están dados en *pu*, y se muestran en la Tabla 4.2.

Estos parámetros corresponden al punto de equilibrio estable mostrado en la Figura 4.3, en donde se observa la evolución del estado transitorio en el tiempo hasta que eventualmente llega al estado estacionario (no mostrado) en  $t = 20$  segundos con una corriente por fase de  $i_a = 1.21463 pu$  (Figura 4.3 (a)),  $i_b = 0.82549 pu$  (Figura 4.3 (b)) e  $i_c = 0.91254$  (Figura 4.3 (c))  $pu$  para las fases  $a$ ,  $b$  y  $c$ , respectivamente.

TABLA 4.2  
*Condiciones iniciales de los parámetros del sistema en pu.*

Parámetros	Condiciones Iniciales.
$C_a$	0.1
$C_b$	0.1
$C_c$	0.1
$L_{ha}$	0.1
$L_{hb}$	0.1
$L_{hc}$	0.1
$v_a$	$1^{0^\circ}$
$v_b$	$1^{120^\circ}$
$v_c$	$1^{-120^\circ}$
$m$	0
$n$	2
$K_1$	0.08
$K_2$	0.005
$K_3$	3

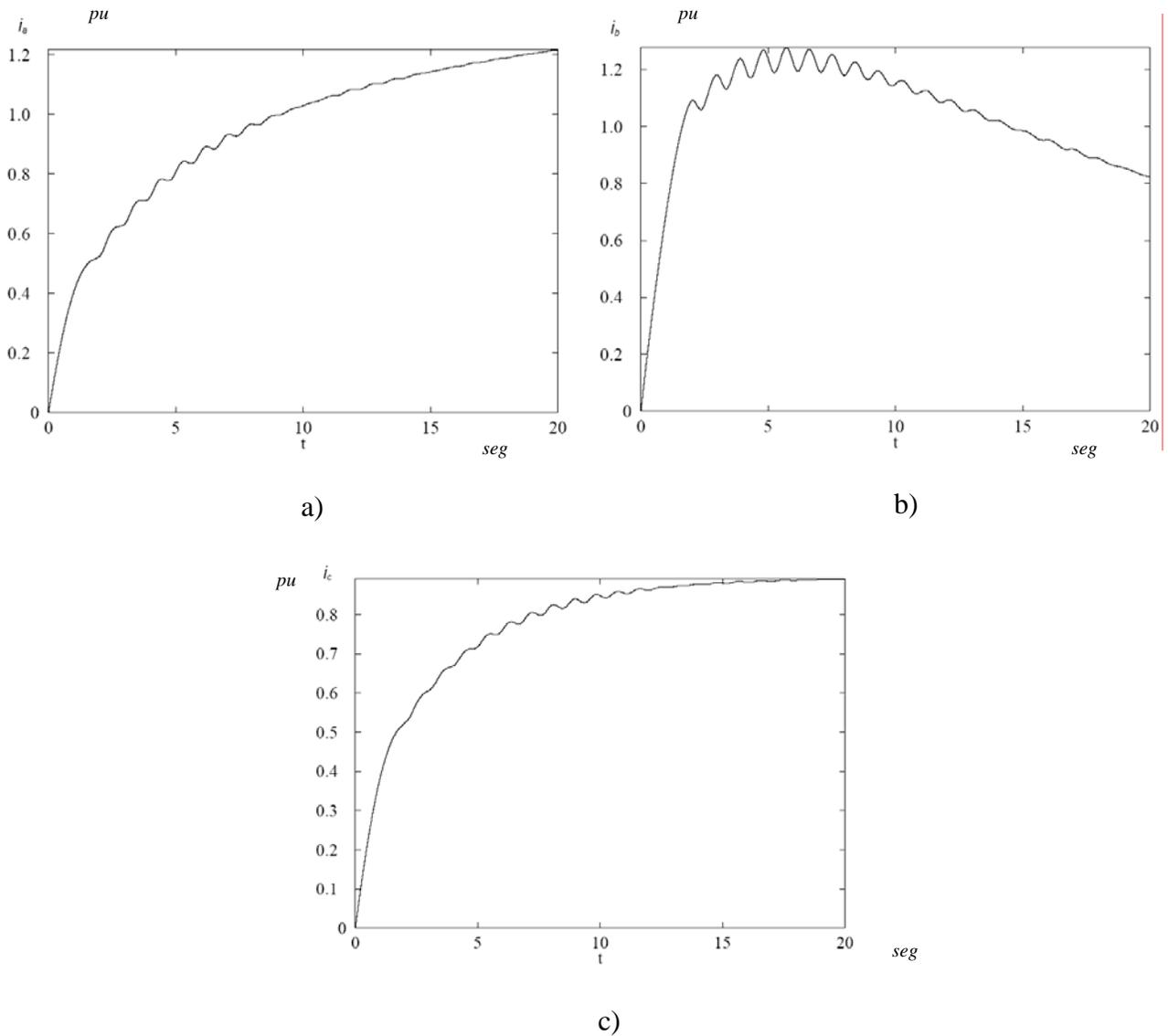


Figura 4.3.-Comportamiento en el tiempo de la corriente para el caso de estudio en cada una de las fases.

Se observa de la Figura 4.3 que las magnitudes de las corrientes en el sistema por fase tienden a tener un estado transitorio en el cual las magnitudes crecen, aunque el sistema alcanza eventualmente el estado estacionario (no mostrado). De la misma manera se aprecia que las demás variables tienden a su estado estacionario, en este contexto el comportamiento del voltaje en cada una de las fases y de los capacitores conectados en las fases  $a$ ,  $b$  y  $c$  se muestran en la Figura 4.4, en donde las magnitudes de los voltajes en estado estacionario son:  $v_{ca}=0.4899 pu$ ,  $v_{cb}=0.4998 pu$ . y  $v_{cc}=0.4899 pu$ .

Obsérvese de las Figuras 4.4 (a), 4.4 (b) y 4.4 (c) que los valores de los voltajes en cada una de las fases operan compensando la línea; en los primeros 10 segundos sufren un transitorio que es amortiguado y alcanzando eventualmente el estado estacionario.

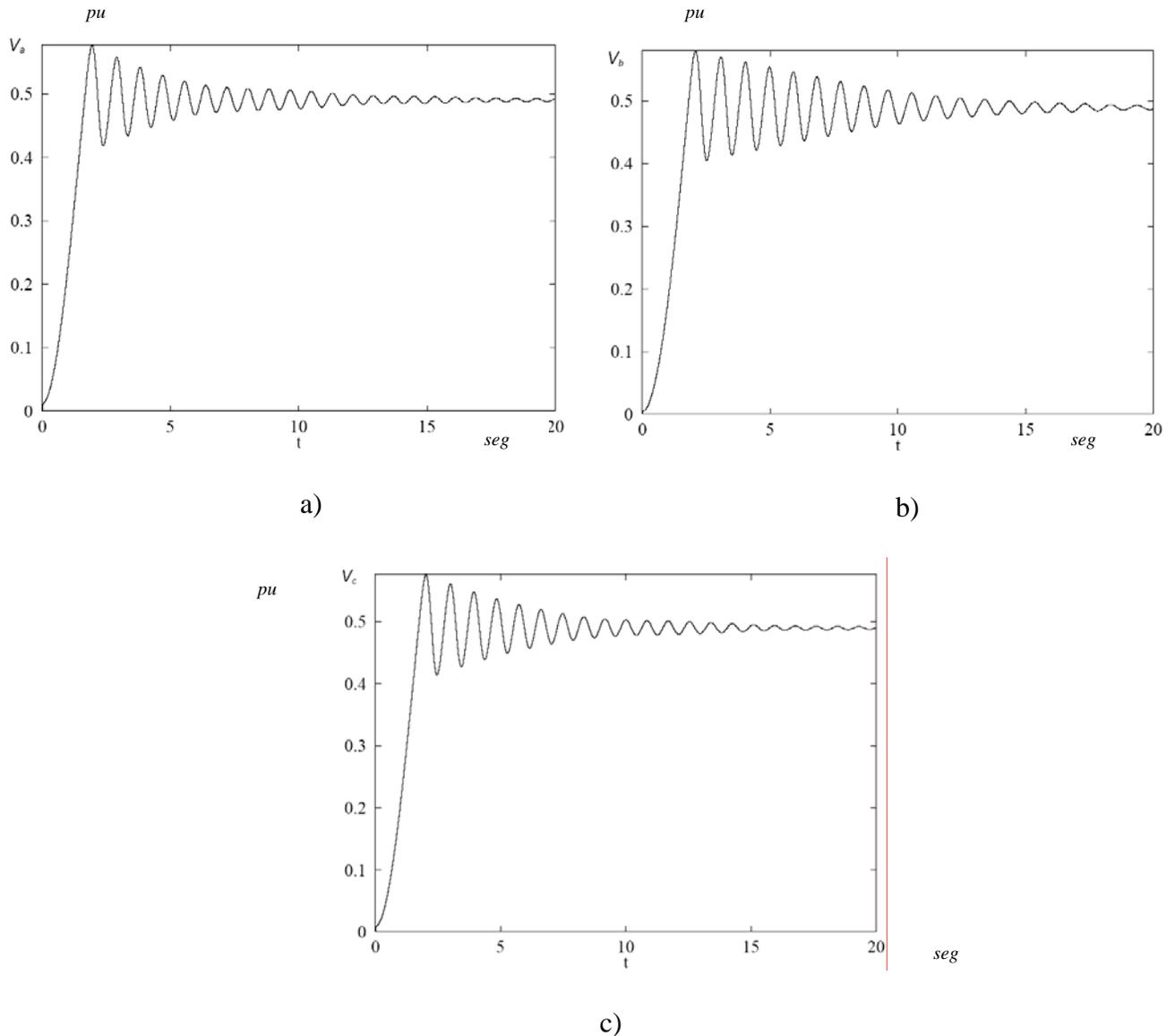


Figura 4.4.-Comportamiento en el tiempo de los voltajes del banco de capacitores para el caso de estudio en cada una de las fases a)  $v_a$ ; b)  $v_b$ ; c)  $v_c$ .

De la misma manera, la Figura 4.5 muestra el comportamiento de la corriente que alimenta al transformador acoplador y que a su vez conecta a cada uno de los ánodos del horno de arco eléctrico con el sistema, en la Figura 4.5 (a) se observa el comportamiento transitorio de la corriente en la fase  $a$  así como un acercamiento a los primeros instantes en

el tiempo del mismo, en la Figura 4.5 (b) se observa el comportamiento de la corriente en la fase *b* y en la Figura 4.5 (c) el de la fase *c*.

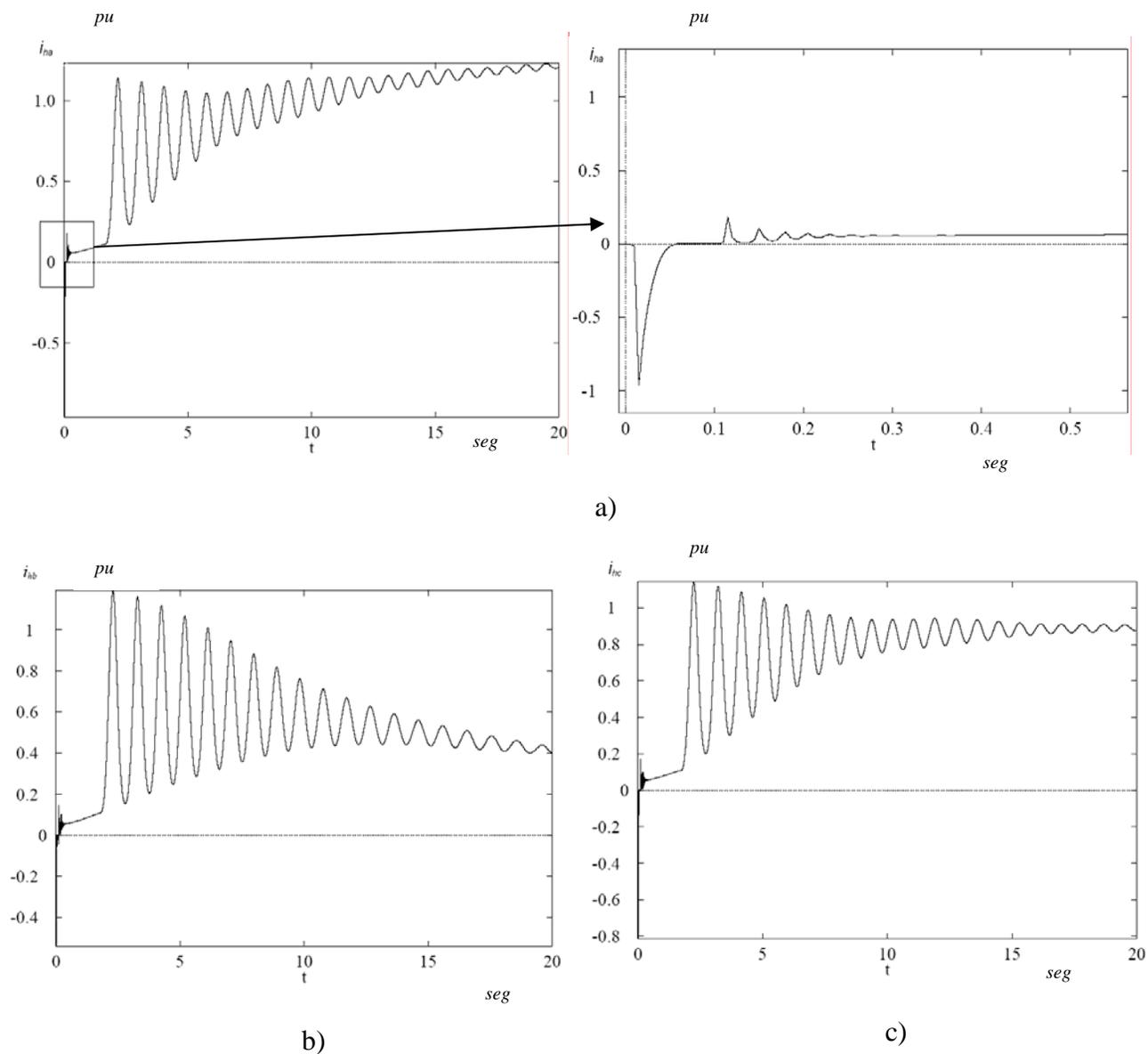


Figura 4.5.-Comportamiento en el tiempo de las corrientes del horno en las fases.

De la misma manera la Figura 4.6 muestra el comportamiento de la longitud del arco del horno de arco eléctrico hasta que este tiende a un punto estable, la Figura 4.6 (a), la Figura 4.6 (b) y la Figura 4.6 (c) se refieren a las fases *a*, *b* y *c* respectivamente.

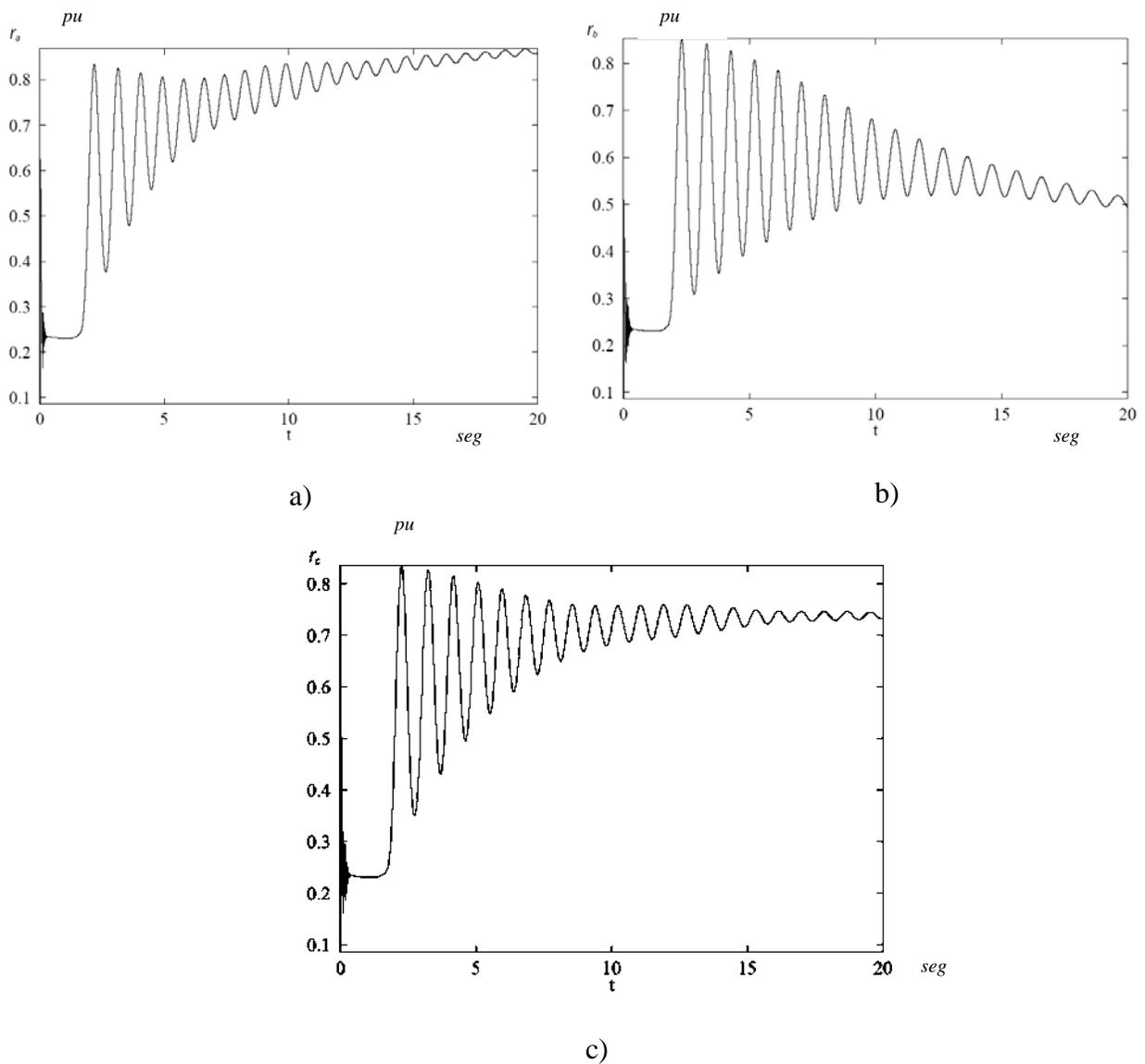


Figura 4.6.-Comportamiento en el tiempo de las longitudes de los arcos eléctricos del horno en cada fase.

A la par de esto se monitorean los valores característicos del sistema. Se procedió a variar diversos posibles parámetros de bifurcación, en base a valores operativos del sistema. En la Figura 4.7 se muestra el diagrama de estabilidad propio del sistema analizado, que representa el comportamiento del mismo bajo análisis y una solución cualitativa propia del sistema al variar de manera quasi-estática la inductancia  $L$  de la fase a.

El diagrama muestra el comportamiento de la corriente de fase  $I_a$  con respecto al

parámetro de bifurcación  $L_a$ , el cual corresponde a la inductancia de la línea de transmisión en la fase  $a$  del sistema. Las líneas sólida y punteada indican las trayectorias periódicas estable e inestable, respectivamente.

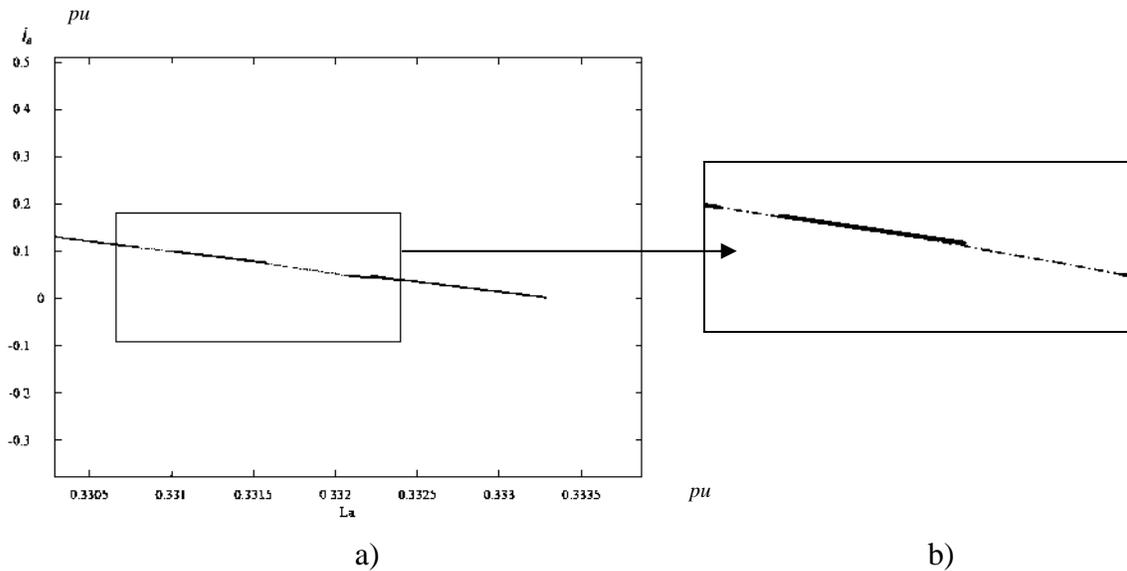


Figura 4.7.-Diagrama de estabilidad del caso de estudio.

Como se puede apreciar en la Figura 4.7 (a), el sistema se encuentra inicialmente en un punto estable, sin embargo conforme el parámetro de la inductancia de la fase  $a$  del sistema se ve perturbado, este cambia su condición de estabilidad, pasando de la estabilidad a la inestabilidad y volviendo a ella, lo anterior se puede apreciar mas a detalle en la Figura 4.7 (b), en donde la línea gruesa y continua representa la estabilidad del sistema, y la línea discontinua representa la condición de inestabilidad del sistema, esto provoca que el sistema tenga un lapso de inestabilidades muy altas, de las cuales es importante monitorear cada una de las variables que se ven afectadas con estos cambios de estado.

Los cambios de estabilidad se producen cuando la inductancia  $L_a$  toma los valores  $0.3311 pu.$ ,  $0.3317 pu.$ ,  $0.3321 pu.$  y  $0.3332 pu.$ , respectivamente.

## 4.6 ENVOLVENTES Y ATRACTORES EXTRAÑOS.

---

A continuación se muestran el comportamiento de algunas variables cuando el sistema se encuentra operando bajo diferentes condiciones de operación; estas condiciones se dan en los puntos en los cuales  $L_a$  toma los valores  $0.3311 pu$ ,  $0.3317 pu$ ,  $0.3321 pu$  y  $0.3332 pu$ , como se había mencionado anteriormente, en estos puntos ocurren los cambios de estabilidad, las corrientes en las fases es una de las variables que se ven afectadas por estos cambios, la Figura 4.8, muestra este comportamiento en la Fase  $b$ , específicamente cuando  $L_a = 0.3317 pu$ .

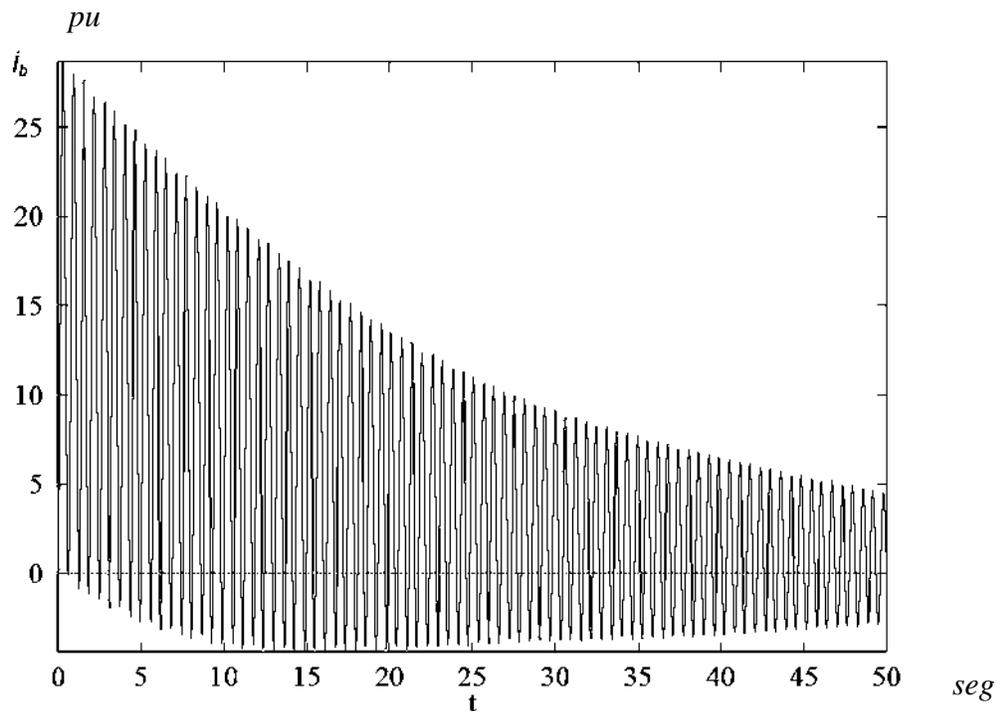


Figura 4.8.-Comportamiento de la corriente en la fase  $b$ .

Como se puede apreciar en la Figura 4.8, el comportamiento de la corriente es irregular y oscilatoria, sin embargo, esta tiende eventualmente a estabilizarse en un tiempo aproximado de 200 seg. (no mostrado) después de un comportamiento inicialmente transitorio.

La Figura 4.9 muestra el comportamiento de las corrientes en las tres fases  $a$ ,  $b$  y  $c$  en el mismo plano, en la cual se puede observar de manera mas clara como las tres variables de estado tienden a estabilizarse en el tiempo. La corriente  $I_a$  esta representada por la curva

---

de color rojo, la corriente  $I_b$  por la curva en color naranja y la corriente  $I_c$  por la curva en color negro. Es importante mencionar que estos resultados se presentaron cuando la inductancia de la fase  $a$  toma el siguiente valor,  $L_a=0.3310 pu$ .

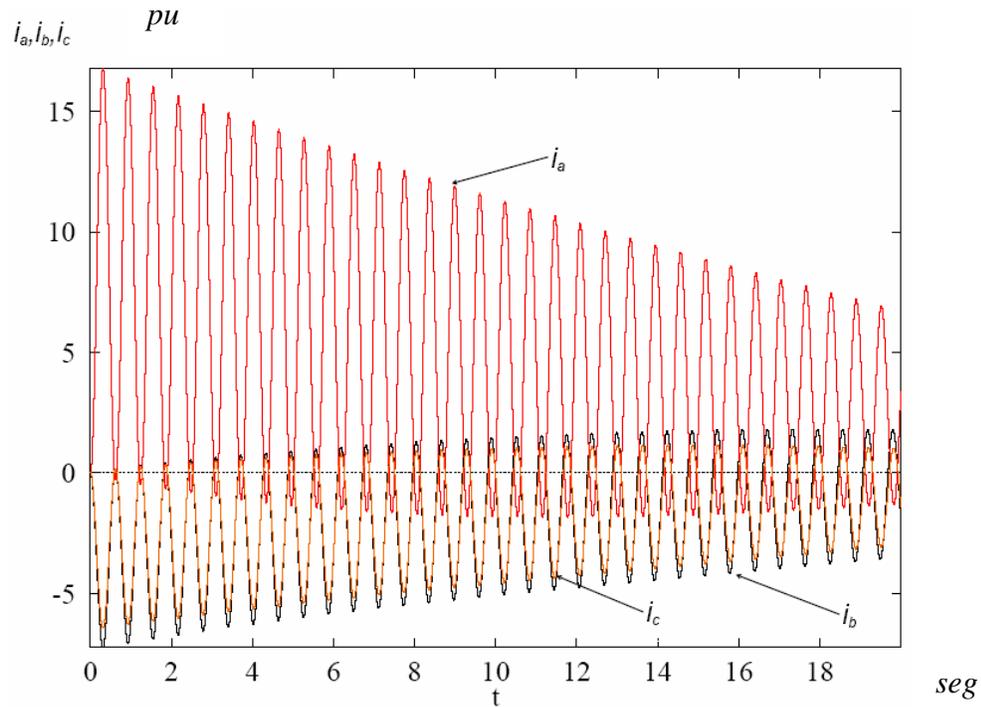


Figura 4.9.- Gráfica del comportamiento de las corrientes en las fases a, b y c.

De la misma manera, se observó el comportamiento de los voltajes en el banco de capacitores conectados en las fases  $a$ ,  $b$  y  $c$ , lo anterior se puede observar en las Figuras 4.10, 4.11 y 4.12 respectivamente.

Como se puede observar este tipo de comportamiento es muy irregular y da como resultado que el comportamiento de los voltajes se incremente demasiado. Sin embargo, los sistemas eléctricos cuentan con protecciones de sobrevoltaje y sobrecorriente, los cuales estando adecuadamente coordinados y calibrados pueden impedir que el sistema soporte

---

estos valores anormales de operación. Por ello es importante la correcta calibración y coordinación de estos sistemas de protección.

Sin embargo, es importante mencionar que al operar las protecciones, automáticamente se modifica la configuración del sistema de potencia, ya sea por que operó un interruptor sacando fuera de servicio a un transformador o a un capacitor compensador, o aisló una parte del sistema cambiando la configuración física de la red eléctrica, etc. Por lo que al cambiar estas condiciones varían los parámetros del sistema. Es importante volver a realizar un estudio de estabilidad para poder determinar si no quedó más debilitado el sistema poniendo en riesgo de inestabilidad a la parte del sistema restante, en este caso, el análisis de estabilidad aplicando la teoría de bifurcaciones es muy útil, porque permite conocer los puntos en los cuales el sistema cambia la condición de estabilidad.

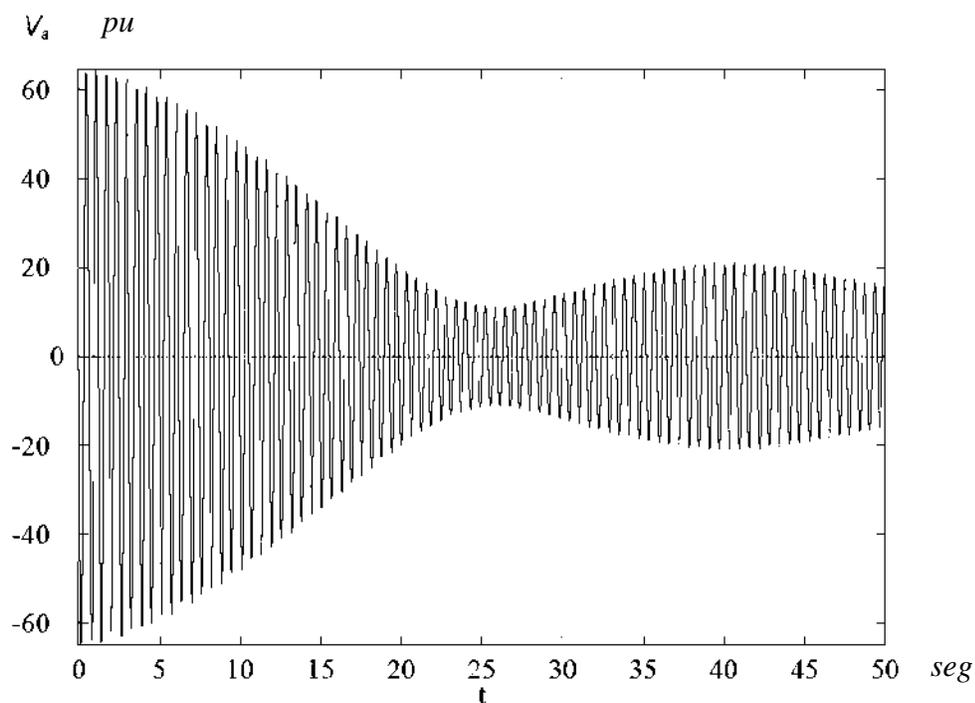


Figura 4.10.-Grafica del comportamiento del voltaje en al capacitor conectado en la fase  $a$ .

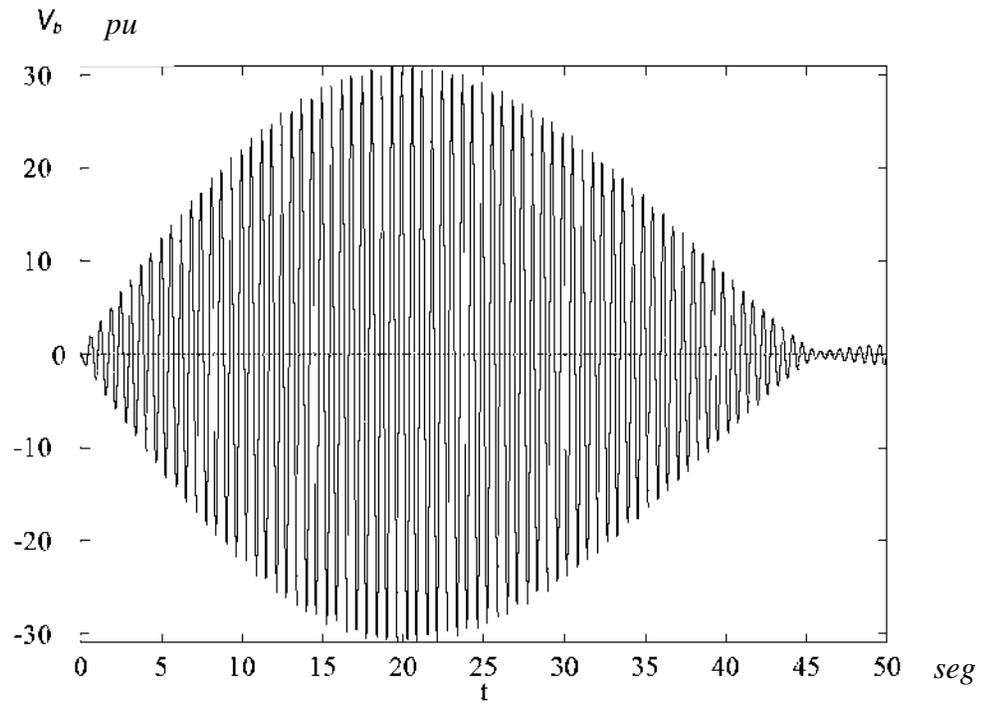


Figura 4.11.-Grafica del comportamiento del voltaje en al capacitor conectado en la fase  $b$ .

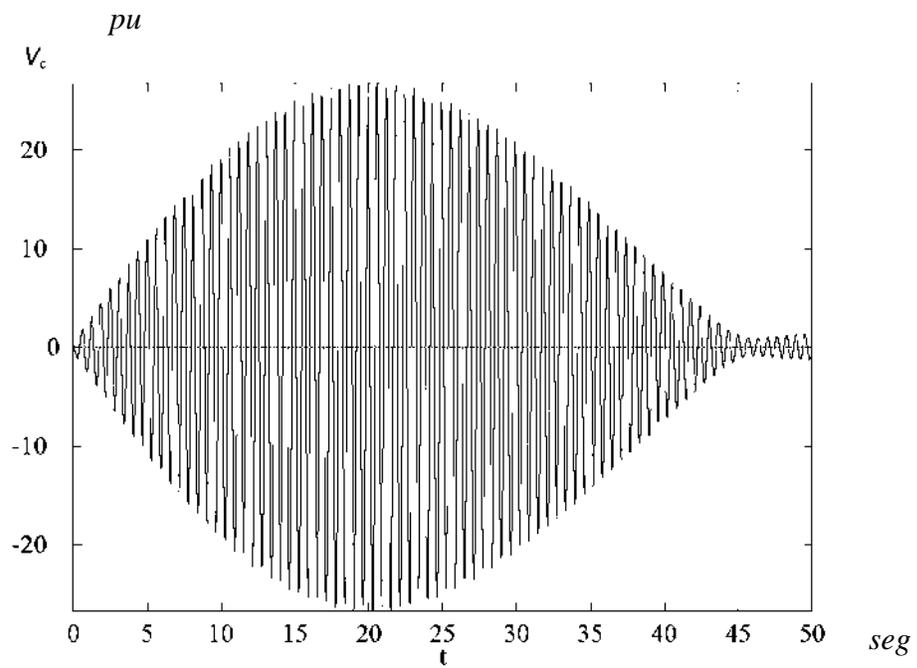


Figura 4.12.-Grafica del comportamiento del voltaje en al capacitor conectado en la fase  $c$ .

Este comportamiento en el cual el sistema pasa de un periodo inestable a uno oscilatorio estable, se puede observar mejor al observar el comportamiento de estas variables en el mismo espacio de estado. La Figura 4.13 muestra el comportamiento de los voltajes en cada una de las fases  $a$ ,  $b$  y  $c$  de forma simultánea en el tiempo.

De la misma manera se observo el comportamiento de los valores de las corrientes que alimentan a los ánodos del horno de arco eléctrico, las Figuras 4.14, 4.15 y 4.16 muestran dicho comportamiento. Al igual que en las variables de estado anteriores, estas presentan un comportamiento caótico, sin embargo al cambiar la inductancia del sistema tienden a un estado estable, es importante tener en cuenta que debido a que estas corrientes tienen un alto contenido armónico, la alimentación de estos hornos de arco eléctrico se da de manera aislada, tal y como se mostró en la Figura 4.1, de lo contrario afectaría de manera importante a los elementos conectados a la red eléctrica que alimenta al horno.

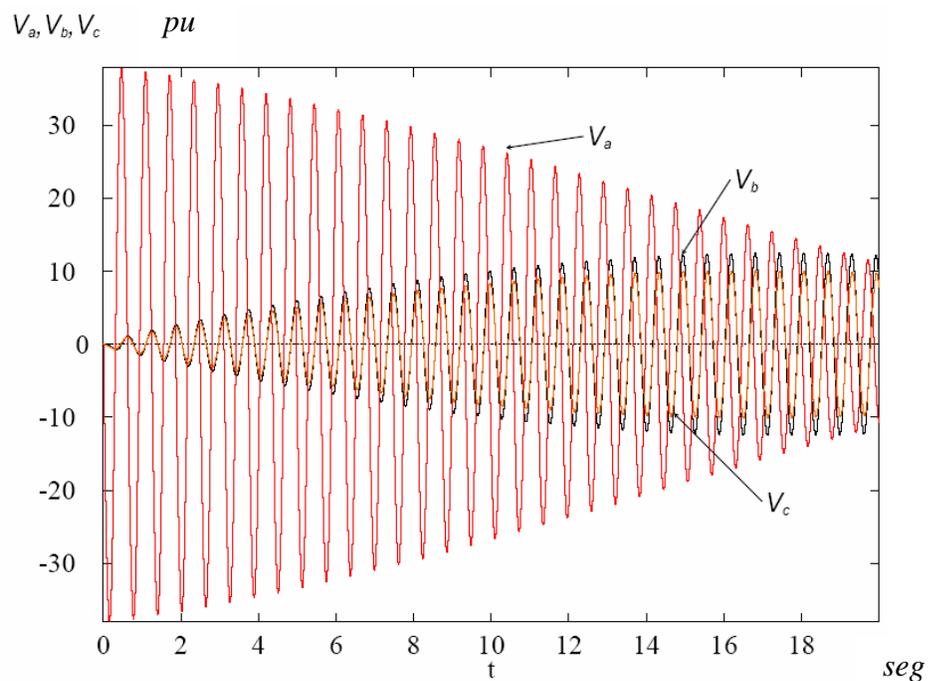


Figura 4.13.-Gráfica del comportamiento de los voltajes simultáneos en las fases  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

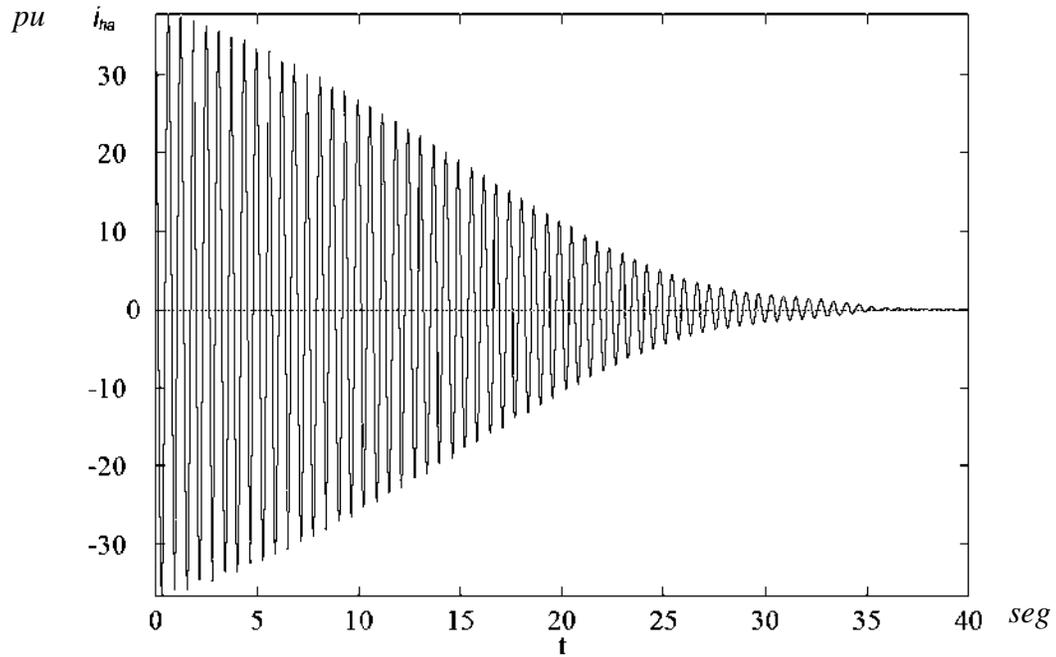


Figura 4.14.-Grafica del comportamiento de la corriente del horno en la fase  $a$ .

Es importante hacer notar que el comportamiento de las variables en la fase  $a$ , tienen un comportamiento diferente a las de las otras dos fases, esto se produce debido a que la perturbación se dio en el parámetro de bifurcación  $L_a$ , el cual corresponde a la inductancia de la fase  $a$  y como se menciono anteriormente debido a la complejidad del sistema trifásico, una pequeña variación en el parámetro de bifurcación se ve reflejada en oscilaciones de magnitud considerable.

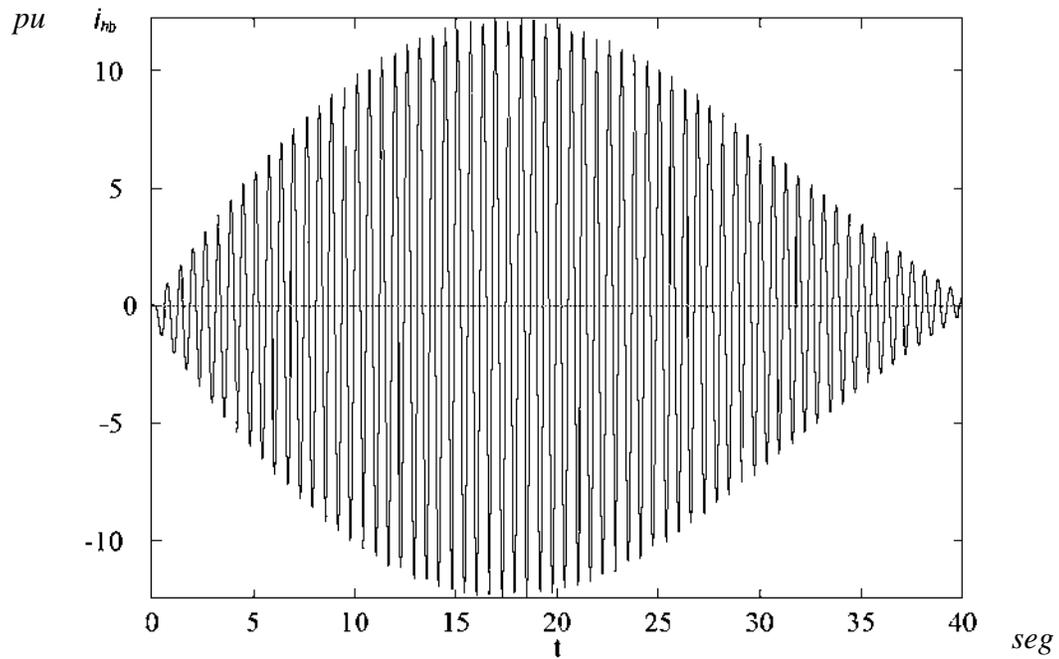


Figura 4.15.-Grafica del comportamiento de la corriente del horno en la fase  $b$ .

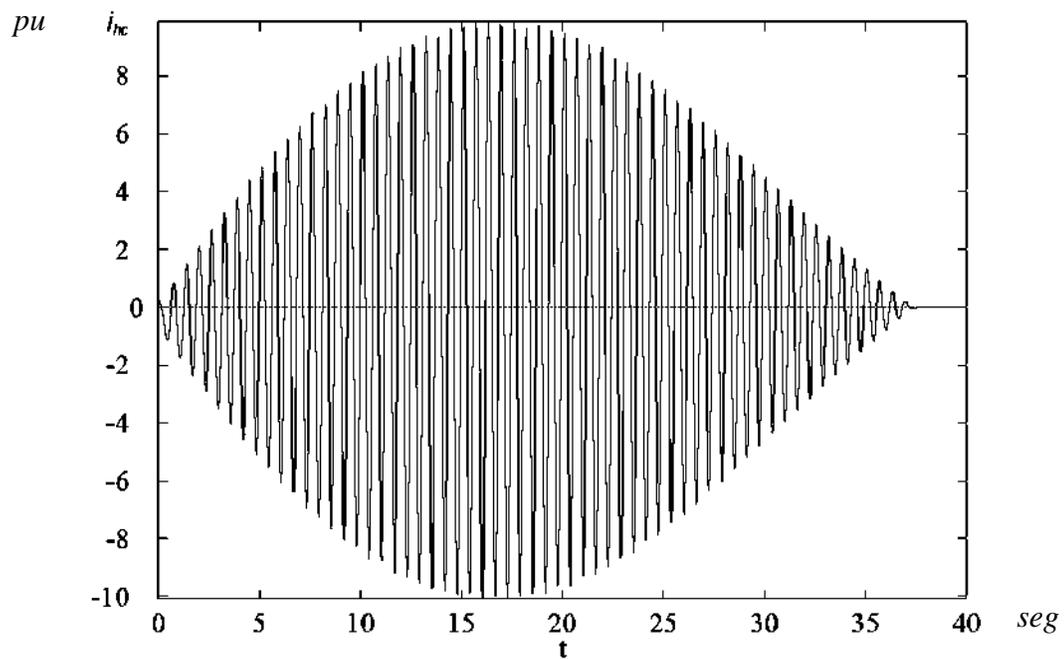


Figura 4.16.-Grafica del comportamiento de la corriente del horno en la fase  $c$ .

La Figura 4.17 muestra el comportamiento de estas mismas variables de estado en el tiempo de manera simultanea, presentándose de color rojo la corriente  $I_a$  del horno

conectada a la fase  $a$ , de color negro la corriente  $I_b$  del horno conectada a la fase  $b$  y de color naranja la corriente  $I_c$  del horno conectada a la fase  $c$ .

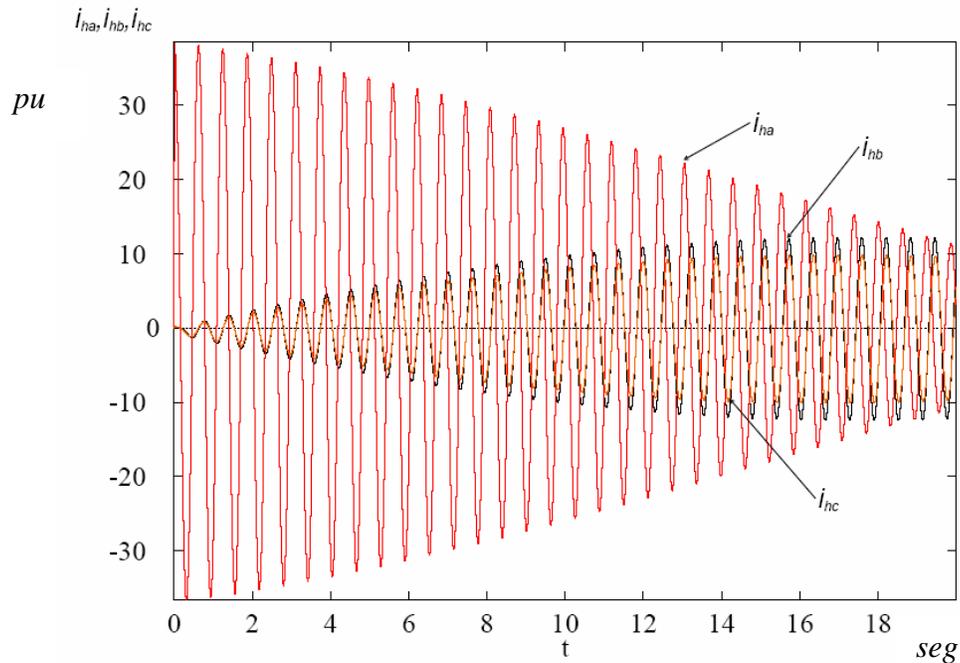


Figura 4.17.-Grafica del comportamiento de las corrientes del horno en las fases  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

Debido a las oscilaciones que presentan las variables de estado del sistema bajo análisis, el sistema eléctrico de potencia se ve sometido a esfuerzos eléctricos muy grandes, los cuales degradan los aislamientos de las maquinas, afectan la operación normal del sistema y producen comportamientos extraños, esto se puede ver de manera más clara en las graficas de las Figuras 4.18 y 4.19, en las cuales se representan los diagramas de fase entre las corrientes de las fases  $a$  y  $b$ , y los voltajes en los capacitores conectados a las mismas fases respectivamente, como puede observarse, el sistema debido a que se encuentra operando en un punto muy frágil, presenta envolventes extraños pasando de la estabilidad a la inestabilidad, y comportándose de manera oscilatoria, es importante mencionar que estos diagramas de fase representan la operación de estos sistemas únicamente para las condiciones dadas en las cuales se realizaron los experimentos, si alguna de estas condiciones cambiase, los diagramas y el comportamiento mismo de los sistemas sería diferente al mostrado.

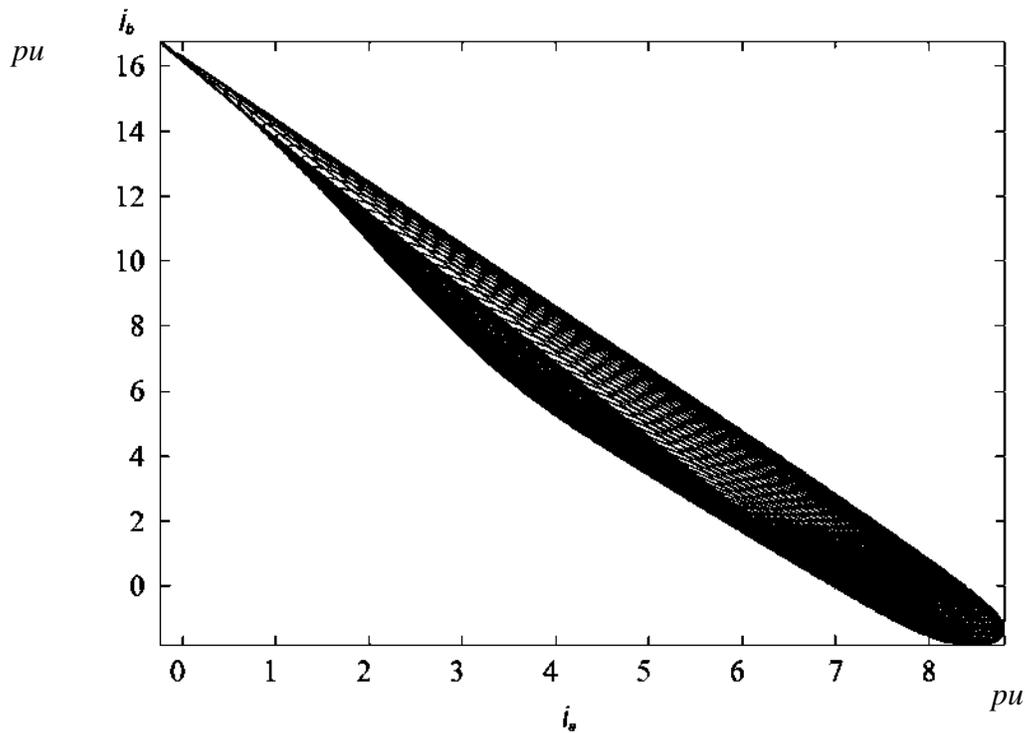


Figura 4.18.-Comportamiento del sistema en el diagrama de fase de la  $I_a$  vs  $I_b$ .

En la Figura 4.19 se puede apreciar el comportamiento presentado en la Figura 4.7, dado que el sistema empieza a oscilar en la variable del voltaje en la fase  $b$  y a tener cada vez una mayor amplitud, hasta alcanzar un máximo, sin embargo cuando la amplitud de la oscilación llega a este punto (Figura 4.19 (a)), este tiende a la estabilidad y la variable del voltaje en la fase  $a$  comienza a oscilar y a crecer hasta alcanzar un punto máximo (Figura 4.19 (b)), en este punto el sistema vuelve a oscilar en la variable del voltaje en la fase  $b$  pero con una menor amplitud, el sistema sigue esta dinámica hasta llegar al estado estacionario (Figura 4.19 (c)).

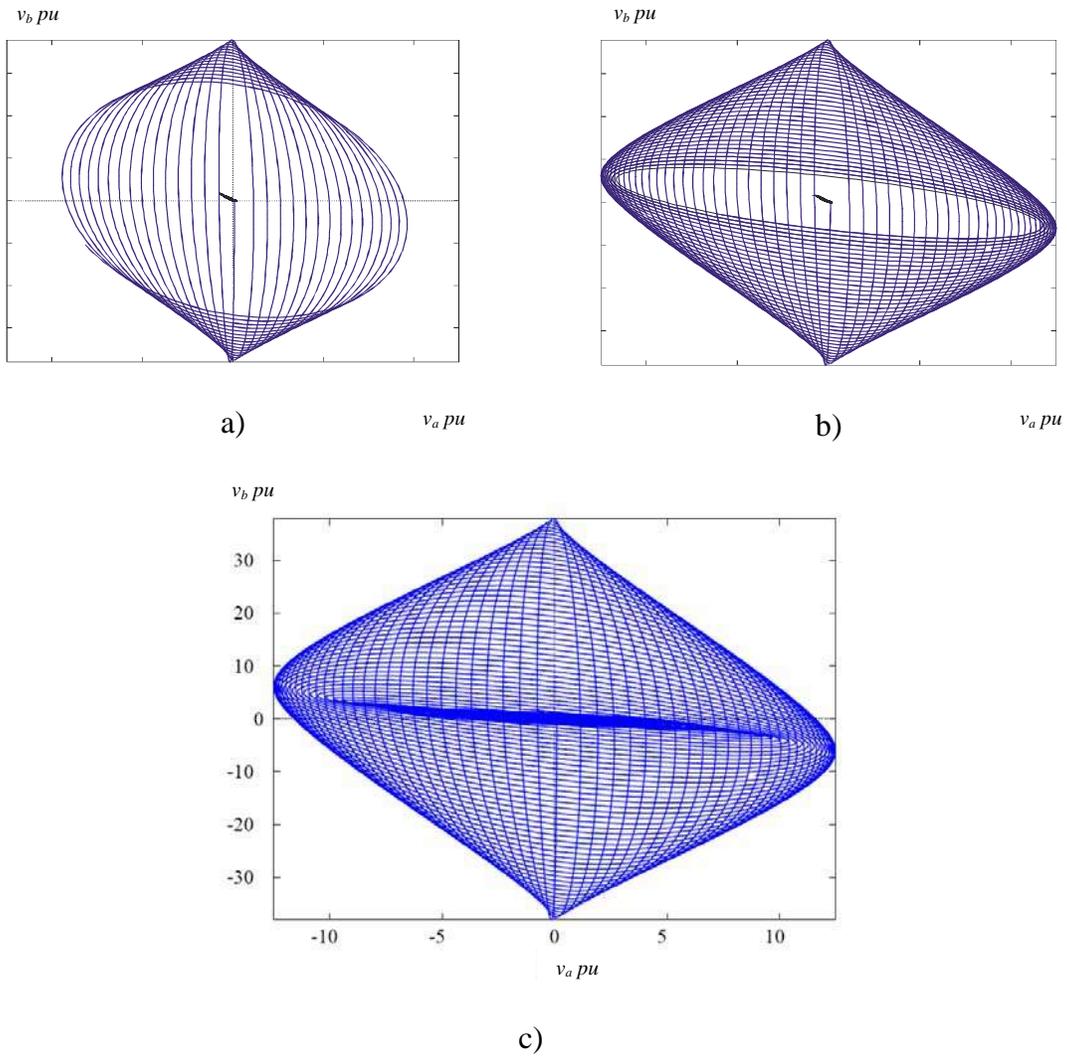


Figura 4.19.-Comportamiento del sistema en el diagrama de fase del  $v_a v_s v_b$ .

Este mismo comportamiento se muestra en la Figura 4.20, con la modificación que se presenta de forma tridimensional, para este caso en particular se puede observar que los ejes corresponden a las variables de estado  $i_a$ ,  $i_b$  e  $i_c$ , en los cuales se puede observar que la fase  $b$  es la que tiene los mayores niveles de oscilación, en esta misma grafica se observa un acercamiento de la envolvente extraña que presenta este sistema.

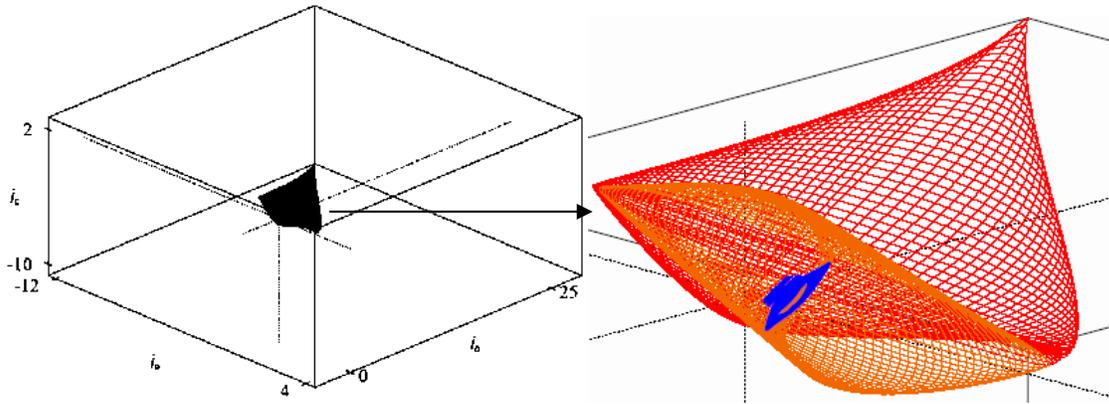


Figura 4.20.-Comportamiento del sistema tridimensional.

---

# 5 CONCLUSIONES, APORTACIONES Y TRABAJOS FUTUROS.

## 5.1 CONCLUSIONES.

El análisis de estabilidad del horno de arco eléctrico basado en la teoría de bifurcaciones presentada en esta tesis se realizó mediante una aproximación en espacio de estado que representa la dinámica en el dominio del tiempo del horno de arco eléctrico conectado a un sistema eléctrico que suministra energía al mismo.

Inicialmente el sistema bajo estudio, incorporó como elemento altamente no-lineal y perturbante a la red un modelo del horno de arco eléctrico basado en el balance de potencias instantáneas, y el generador se tomó de manera ideal, como una fuente de magnitud 1 *pu*. Empleando modelos monofásicos, se pudo observar que al variar de forma quasi-estática el parámetro de bifurcación, el sistema pasa de la estabilidad a la inestabilidad presentándose una bifurcación Hopf, la cual lleva al sistema a zonas de operación oscilatorias estables e inestables. Tradicionalmente, se requiere de un gran esfuerzo computacional para poder encontrar estas bifurcaciones, y debido a esto no se han presentado en la literatura abiertos comportamientos en las zonas oscilatorias, lo anterior debido principalmente a que se utilizan métodos convencionales de fuerza bruta.

---

Sin embargo la aplicación de la teoría de bifurcaciones como herramienta en el análisis de estabilidad de sistemas de potencia es novedosa y debido a que permite obtener una solución cualitativa del comportamiento del sistema, no se requiere un esfuerzo computacional para obtenerla no obstante la característica altamente no-lineal del horno de arco eléctrico resulta en procesamientos de datos considerables, aun y cuando se analice por medio de la teoría de bifurcaciones.

De manera puntual se dan las siguientes conclusiones:

- Inicialmente se consideró un sistema monofásico alimentado por una fuente ideal. Al realizar el análisis de este sistema se detectaron inestabilidades en régimen periódico, así como en estado oscilatorio. De este análisis se pudo determinar el importante efecto que producen las diferentes condiciones iniciales del mismo en la estabilidad del sistema.
- Se observó la dinámica del sistema monofásico y los cambios en la estabilidad del mismo al reemplazar la fuente de voltaje ideal por la ecuación de oscilación del generador, obteniéndose distintos puntos y regiones de estabilidad al incorporar un modelo más preciso de la fuente de alimentación.
- Del análisis de estabilidad de un sistema trifásico entre una fuente de voltaje trifásica ideal y una red de transmisión trifásica conectada a los nodos de un horno de arco eléctrico, se pudo determinar bajo que condiciones de operación el sistema trifásico cambia su condición de estabilidad a inestabilidad en un régimen periódico, identificando además el parámetro de bifurcación influyente en el sistema.
- Se pudo determinar las condiciones de operación bajo las que aparecen diferentes tipos de bifurcaciones en el sistema, tales como la Hopf y Sadle Node, así como atractores extraños en la estabilidad del sistema en el régimen oscilatorio inestable y

---

las condiciones bajo las cuales el sistema puede llegar a controlarse al entrar a un estado oscilatorio estable.

- Se determinaron las diferentes zonas de operación (estable e inestable), bajo las cuales el sistema eléctrico de potencia puede operar. Así como las zonas de influencia de las mismas.

## **5.2 APORTACIONES.**

De igual manera a las conclusiones se presentan las aportaciones que se obtienen del presente trabajo de tesis.

- En esta tesis se ha presentado un análisis detallado de estabilidad de sistemas eléctricos ante oscilaciones no lineales, con énfasis particular hacia hornos eléctricos de corriente alterna; una carga altamente no-lineal.
- Se ha demostrado que la teoría de bifurcaciones es una herramienta importante en el estudio de la estabilidad de los sistemas eléctricos, y tienen un impacto determinante en la operación y el diseño de los sistemas eléctricos de potencia.
- Se han presentado resultados de estabilidad en sistemas eléctricos de potencia trifásicos.

## **5.3 TRABAJOS FUTUROS.**

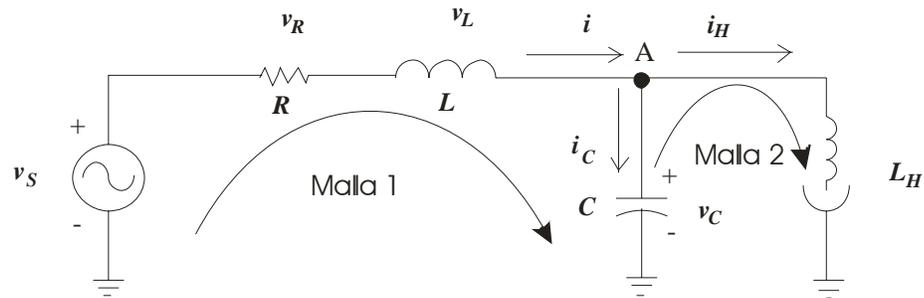
Tomando como referencia la investigación reportada en esta tesis, se propone proceder en las siguientes direcciones:

- 
- Reemplazar la fuente de voltaje ideal por alguno de los modelos del generador que existen en la literatura abierta, con el propósito de determinar de manera más detallada los posibles parámetros de bifurcación y diferentes zonas de operación en el análisis trifásico de oscilaciones no lineales producidas en el sistema de potencia incorporando hornos de arco eléctrico.
  - Determinar el modelo matemático que incorpore dispositivos flexibles de transmisión de corriente alterna en el sistema de potencia, con el propósito de realizar análisis de estabilidad de estos modelos y el sistema eléctrico de potencia utilizando la teoría de bifurcaciones.
  - Realizar el estudio del análisis de estabilidad de sistemas eléctricos de potencia por medio de la teoría de bifurcaciones tomando en cuenta la incorporación de otros elementos no-lineales, al igual que el horno de arco eléctrico, elementos perturbantes a la red y cuyo uso se ha generalizado, tal como los parques eólicos, generadores maremotrices, etc.
  - Realizar el análisis de sistemas eléctricos por medio de la teoría de bifurcaciones que incluyan enlaces de transmisión de corriente directa en alto voltaje en los sistemas de potencia y determinar bajo que ángulo de encendido y de extinción de los rectificadores y inversores respectivamente el sistema comienza a oscilar afectando la estabilidad del sistema.

---

## Apéndice A

El apéndice A muestra el análisis nodal y de leyes de Kirchoft, realizado para el desarrollo y la obtención del archivo ODE. El sistema de potencia esta constituido por un horno de arco eléctrico acoplado a una red eléctrica. El diagrama de conexión se muestra en la Figura A.1.



**Figura A.1.- Diagrama del horno de arco eléctrico acoplado a la red eléctrica.**

A continuación se realiza un análisis de este sistema con el fin de encontrar las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico del mismo.

Para la malla 1:

$$v_S = v_R + v_L + v_C \quad (1)$$

Sustituyendo el voltaje en cada elemento:

$$v_S = i_L R + L \frac{di_L}{dt} + v_C \quad (2)$$

---

$$v_S = i_L R + L \dot{i}_L + v_C \quad (3)$$

Despejando  $\dot{i}_L$  de la ecuación 3:

$$\dot{i}_L = \frac{v_S}{L} - i_L \frac{R}{L} - \frac{v_C}{L} \quad (4)$$

Analizando las corrientes en el nodo A:

$$i_L = i_H + i_C \quad (5)$$

Despejando  $i_C$  de la ecuación 5:

$$i_C = i_L - i_H \quad (6)$$

La corriente para el capacitor esta definida por:

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} \quad (7)$$

Despejando  $\dot{v}_C$  de la ecuación 7 :

$$\dot{v}_C = \frac{i_C}{C} \quad (8)$$

Sustituyendo la ecuación 6 en la ecuación 8 se obtiene:

$$\dot{v}_C = \frac{i_L}{C} - \frac{i_H}{C} \quad (9)$$

Para la malla 2:

$$v_C = v_{LH} + v_H \quad (10)$$

De [Acha *et al.* 1990] se obtiene:

$$v_H = K_3 r^{-(m+2)} i_H \quad (11)$$

Sustituyendo la ecuación 11 en la ecuación 10 se obtiene:

---


$$v_C = L_H \dot{i}_H + K_3 r^{-(m+2)} i_H \quad (12)$$

Despejando  $\dot{i}_H$  se obtiene:

$$\dot{i}_H = \frac{v_C}{L_H} - \frac{K_3 r^{-(m+2)}}{L_H} i_H \quad (13)$$

De [Acha *et al.* 1990] se obtiene:

$$\dot{r} = \frac{K_3}{K_2} r^{-(m+3)} i_H^2 - \frac{K_1}{K_2} r^{n-1} \quad (14)$$

El sistema de ecuaciones que representa la dinámica del horno de arco eléctrico se indica en la Tabla A.1.

**Tabla A.1.- Sistema de ODE's del sistema del horno de arco eléctrico.**

Ecuación	Número.
$\dot{i}_L = \frac{v_S}{L} - i_L \frac{R}{L} - \frac{v_C}{L}$	4
$\dot{v}_C = \frac{i_L}{C} - \frac{i_H}{C}$	9
$\dot{i}_H = \frac{v_C}{L_H} - \frac{K_3 r^{-(m+2)}}{L_H} i_H$	13
$\dot{r} = \frac{K_3}{K_2} r^{-(m+3)} i_H^2 - \frac{K_1}{K_2} r^{n-1}$	14

---

---

## Apéndice B

De manera general, el comportamiento dinámico del generador sincrónico puede representarse por medio de su ecuación de oscilación, es decir:

$$M \ddot{\delta}_m + d_m \dot{\omega} = P_m - P_e \quad (1)$$

Donde  $P_e$  es la potencia eléctrica que para este caso en particular es igual a la potencia consumida por los elementos del circuito.

$$P_e = P_{\text{linea}} + P_{\text{capacitor}} + P_{\text{transformador}} + P_{\text{horno}} \quad (2)$$

Sin embargo  $P_e$  es también la potencia eléctrica inyectada en ese nodo y por lo tanto.

$$P_e = \sum_{j=1}^n V_i V_j Y_{ij} \cos(\theta_{ij} - \delta_i - \delta_j) \quad (3)$$

Para este caso en particular:

$$P_e = -V_g E_0 Y_0' \sin(\delta + \theta_0') + V_g^2 (Y_0' \sin \theta_0') \quad (4)$$

Sustituyendo la ecuación 4 en la ecuación de corriente y voltaje se obtiene.

$$i_l = \frac{-V_g E_0 Y_0' \sin(\delta + \theta_0') + V_g^2 (Y_0' \sin \theta_0')}{V_g} \quad (5)$$

Simplificando:

---


$$i_l = -E_0 Y_0' \sin(\delta + \theta_0') + V_g (Y_0' \sin \theta_0') \quad (6)$$

Despejando el  $V_g$  de la ecuación se obtiene:

$$V_g = \frac{i_l + E_0 Y_0' \sin(\delta + \theta_0')}{Y_0' \sin \theta_0'} \quad (7)$$

De tal manera que sustituyendo la ecuación 7 en el sistema obtenido en el apéndice A, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y algebraicas:

**Tabla A.1.- Sistema de ODE's del sistema del horno de arco eléctrico.**

Ecuación	Número.
$\dot{\delta}_m = \omega$	
$\dot{\omega} = \frac{P_m - D_m \omega + v_g E_m Y_m \sin(\delta - \delta_m - \theta_m) + E_m Y_m \sin \theta_m}{M}$	
$v_g = i_H + \frac{E_0' Y_0' \sin(\delta + \theta_0')}{Y_0' \sin(\delta + \theta_0')}$	
$\dot{i} = \frac{v_g}{L} - i \frac{r}{L} - \frac{v_c}{L}$	
$\dot{v}_c = \frac{i}{C} - \frac{i_H}{C}$	
$\dot{i}_H = \frac{V_c}{L_H} - \frac{K_3 r^{-(m+2)}}{L_H} i_H$	
$\dot{r} = \frac{K_3}{K_2} r^{-(m+3)} i_H^2 - \frac{K_1}{K_2} r^{(n-1)}$	

---

## Apéndice C

Este apéndice muestra el desarrollo del modelo trifásico de un sistema eléctrico de potencia acoplado a un horno de arco eléctrico de corriente alterna, utilizado en el Capítulo 4. La Figura C.1 muestra el diagrama de conexión eléctrico.

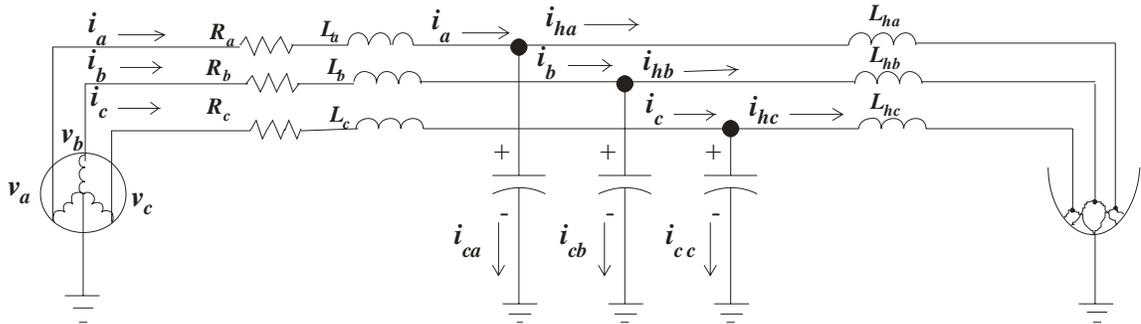


Figura C.1. Representación eléctrica trifásica típica del horno de arco eléctrico de corriente alterna.

Con el propósito de facilitar el desarrollo del sistema de ecuaciones de estado que representan al sistema eléctrico de la Figura C.1. Se realizará en principio el análisis monofásico para entender posteriormente el caso trifásico. La Figura C.2 ilustra la representación monofásica del sistema.

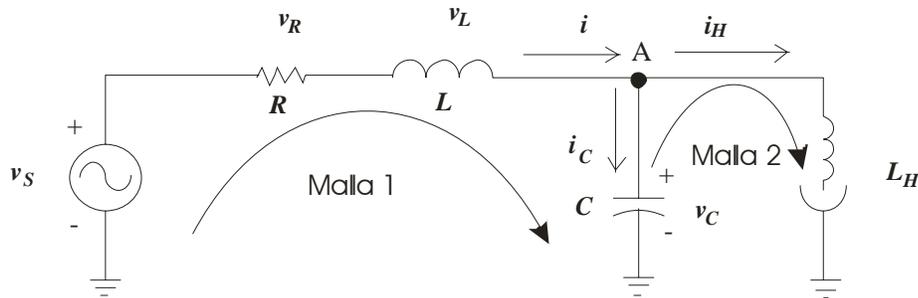


Figura C.2. Representación eléctrica monofásica del sistema eléctrico de la figura C.1.

A continuación se realiza el análisis mostrado en el Apéndice A, resultando en las ecuaciones mostradas en la Tabla C1.

Tabla C1.- Sistema de ODE's del sistema del horno de arco eléctrico.

Ecuación	Número.
$\dot{i}_L = \frac{v_s}{L} - i_L \frac{R}{L} - \frac{v_C}{L}$	1
$\dot{v}_C = \frac{i_L}{C} - \frac{i_H}{C}$	2
$\dot{i}_H = \frac{v_C}{L_H} - \frac{K_3 r^{-(m+2)}}{L_H} i_H$	3
$\dot{r} = \frac{K_3}{K_2} r^{-(m+3)} i_H^2 - \frac{K_1}{K_2} r^{n-1}$	4

Haciendo la extensión de la ecuación 1 a un sistema trifásico resulta en:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}'_a \\ \dot{i}'_b \\ \dot{i}'_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1^0 \\ 1^{\frac{2}{3}\pi} \\ 1^{\frac{4}{3}\pi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_{aa} & 0 & 0 \\ 0 & R_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & R_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_{ca} \\ V_{cb} \\ V_{cc} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Haciendo la extensión de la ecuación 2 a un sistema trifásico resulta en:

$$\begin{bmatrix} V'_{ca} \\ V'_{cb} \\ V'_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_a & 0 & 0 \\ 0 & C_b & 0 \\ 0 & 0 & C_c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_a & 0 & 0 \\ 0 & C_b & 0 \\ 0 & 0 & C_c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} i_{ha} \\ i_{hb} \\ i_{hc} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Haciendo la extensión de la ecuación 3 a un sistema trifásico resulta en:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}'_{ha} \\ \dot{i}'_{hb} \\ \dot{i}'_{hc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a & 0 & 0 \\ 0 & V_b & 0 \\ 0 & 0 & V_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{ha} \\ L_{hb} \\ L_{hc} \end{bmatrix}^{-1} - \begin{bmatrix} i_{ha} \\ i_{hb} \\ i_{hc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{ha} \\ L_{hb} \\ L_{hc} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_3 r_a^{-(m+2)} \\ K_3 r_b^{-(m+2)} \\ K_3 r_c^{-(m+2)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Haciendo la extensión de la ecuación 4 a un sistema trifásico resulta en:

$$\begin{aligned} \dot{r}_a &= \frac{k_3}{k_2} r_a^{-(m+3)} i_{ha}^2 - \frac{k_1}{k_2} r_a^{(n-1)} \\ \dot{r}_b &= \frac{k_3}{k_2} r_b^{-(m+3)} i_{hb}^2 - \frac{k_1}{k_2} r_b^{(n-1)} \\ \dot{r}_c &= \frac{k_3}{k_2} r_c^{-(m+3)} i_{hc}^2 - \frac{k_1}{k_2} r_c^{(n-1)} \end{aligned} \quad (8)$$

De tal manera que el sistemas de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema esta determinado por la ecuación 8.

$$\dot{i}_a = 20.3279 - 50.1249i_a - 31.1662i_b - 34.4308i_c - 70.7641v_a + 37.1548v_b + 13.2764v_c \quad (9)$$

$$\dot{i}_b = 15.6323 - 24.8632i_a - 47.1212i_b - 25.4400i_c - 37.1055v_a - 85.4054v_b + 33.2676v_c \quad (10)$$

$$\dot{i}_c = 18.2956 - 30.5946i_a - 28.3164i_b - 45.5962i_c + 13.2976v_a + 33.2672v_b - 69.8604v_c \quad (11)$$

$$\dot{v}_a = \frac{i_a}{C_a} - \frac{i_{ha}}{C_a} \quad (12)$$

$$\dot{v}_b = \frac{i_b}{C_b} - \frac{i_{hb}}{C_b} \quad (13)$$

$$\dot{v}_c = \frac{i_c}{C_c} - \frac{i_{hc}}{C_c} \quad (14)$$

$$\dot{i}_{ha} = \frac{v_a}{L_{ha}} - K_3 r_a^{-(m+2)} \frac{i_{ha}}{L_{ha}} \quad (15)$$

$$\dot{i}_{hb} = \frac{v_b}{L_{hb}} - K_3 r_b^{-(m+2)} \frac{i_{hb}}{L_{hb}} \quad (16)$$

$$\dot{i}_{hc} = \frac{v_c}{L_{hc}} - K_3 r_c^{-(m+2)} \frac{i_{hc}}{L_{hc}} \quad (17)$$

$$\dot{r}_a = \frac{k_3}{k_2} r_a^{-(m+3)} i_{ha}^2 - \frac{k_1}{k_2} r_a^{(n-1)} \quad (18)$$

$$\dot{r}_b = \frac{k_3}{k_2} r_b^{-(m+3)} i_{hb}^2 - \frac{k_1}{k_2} r_b^{(n-1)} \quad (19)$$

$$\dot{r}_c = \frac{k_3}{k_2} r_c^{-(m+3)} i_{hc}^2 - \frac{k_1}{k_2} r_c^{(n-1)} \quad (20)$$

$$\dot{r}_c = \frac{k_3}{k_2} r_c^{-(m+3)} i_{hc}^2 - \frac{k_1}{k_2} r_c^{(n-1)} \quad (21)$$

---

## Bibliografía.

[Abed y Varaiya 1984]

E. H. Abed y P. P. Varaiya, "Nonlinear oscillations in power systems," *International Journal of Electric Power and Energy Systems*, Vol.6, No.1, págs.37-43, Enero 1984.

[Acha *et al.* 1990]

E. Acha, A. Semlyen y N. Rajakovick, "A harmonic domain computational package for nonlinear problems and its Applications to Electric Arcs", *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 5, No. 3, págs. 1390-1397, Julio 1990.

[Ajjarapu y Lee 1992]

V. Ajjarapu y B. Lee, "Bifurcation theory and its application to nonlinear dynamical phenomena in an electrical power system", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 7, págs. 312-319, Febrero 1992.

[Angulo *et al.* 2005]

F. Angulo, M. di Bernardo, E. Fossas y G. Olivar, "Feedback control of limit cycles: A Switching control strategy based on nonsmooth bifurcation theory" *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. Vol. 52, No. 2, págs. 366-378, Febrero 2005.

[Apraiz, 1978]

T. J. Apraiz, "Fabricación de hierros, aceros y fundiciones". Tomo 2. Ed Urmo S.A., Bilbao, 1978.

[Aprille 1972]

T. J. Aprille. "Two computer algorithms for obtaining the periodic response of nonlinear circuits". Tesis doctoral, Universidad de Illinois at Urbana-Champaign. 1972.

---

[Balabanian 1969]

N. Balabanian, T. A. Bickart, S. Seshu. "Electrical Network Theory". John Wiley & Sons, New York, 1969.

[Bayley 1986]

E.M. Bayley "State Harmonic Analysis of Nonlinear Networks". Tesis doctoral, Stanford California, 1968.

[Beites 1999]

L. F. Beites "Modelado en el dominio de la frecuencia de hornos de arco de corriente alterna para la estimación de armónicos, fluctuaciones y desequilibrios". Tesis Doctoral E.T.S. de Ingenieros Industriales de Madrid, Junio 1999.

[BPA 1985]

Bonneville Power Administration (BPA). "Electromagnetic Transients Program (EMTP) Rule Book". Portland (Oregon), 1985.

[Cañizares 1995]

C. A. Cañizares, "On Bifurcations, voltage collapse and load modeling," *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 10, No. 1, págs. 512-522, Febrero 1995.

[Carpinelli *et al.* 2004]

G. Carpinelli, F. Iacovone, A. Russo y P. Varilone, "Chaos-Based modeling of DC arc furnace for power quality issues", *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 19 (4), págs. 1685-1690, 2004.

[Chen *et al.* 2001]

G. Chen, D. J. Hill y X.Yu, "Bifurcation control: theory and applications" New York: IEEE Press, 2001.

---

[Chua y Green 1976]

L.O. Chua y D.N. Green. "Graph-Theoretic properties of Dynamics Nonlinear Networks". *IEEE Transaction on Circuits and Systems*. Vol. CAS-23. Mayo 1976.

[Chua y Lin 1975]

L.O. Chua y P. M. Lin. "Computer-Aided analysis of electronics circuits". Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall. 1975.

[Chua y Ushida 1972]

L. O. Chua y A. Ushida. "Algorithms of computing almost periodic steady-state response of nonlinear systems to multiple input frequencies". *IEEE Transaction on Circuits and Systems*. Vol. CAS-28. Octubre 1981.

[Colon 1972]

F. R. Colon, "Fast periodic steady-state of large signal electronic circuits". Tesis doctoral, Universidad de Illinois at Urbana-Champaign. Mayo 1972.

[Cox y Mirbod. 1986]

M. D. Cox y A. Mirbod. "A New Static VAR Compensator for an Arc Furnace", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 1(3), págs. 110-120, 1986.

[Davison *et al.* 2003]

P. Davidson, M. Lowenberg y M. di Bernardo, "Experimental modeling and analysis of limit cycles in a dynamics wind tunnel rig." *J Aircraft*, págs. 776-785, 2003.

[Dobson y Chiang 1989]

I. Dobson y H. D. Chiang, "Towards a theory of voltage collapse in electric power systems," *Systems and Control Letters*, Vol. 13, págs. 253-262, 1989.

---

[Doedel 1986]

E. J. Doedel, "AUTO: Software for continuation and Bifurcation Problems in Ordinary Differential Equations.", Pasadena, CA: California Institute of technology, 1986.

[Doedel 2004]

E. J. Doedel, "Conversación privada", 2004.

[Dommel *et al.* 1986]

H. W. Dommel, A. Yan, S. Wei. "Harmonics from transformer saturation". *IEEE Transaction on Power Systems*. Vol. 1 No. 2., págs. 209-214. Abril 1986.

[Douglas *et al.* 1996]

A. Douglas, M. T. Bishop y J. F. Witte. "Harmonic Measurement, Analysis, and Power Factor Correction in a Moder Steel Manufacturing Facility", *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 32, No. 3, págs. 617-624, 1996.

[Dungan 1980]

R. C. Dungan, "Simulation of arc furnace power systems", *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol. 16, No. 6, págs 813-818 Nov/ Dic 1980.

[Girgis *et al.* 1995]

A.A. Girgis, J.W. Stephens y E.B. Makram "Measurement and Prediction of voltaje flicker magnitude and frecuency", *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 10, No. 3, págs. 1600-1605, Julio 1995.

[Grosz 1979]

F. B. Grosz. "Some Modifications to Newton's Method for the determination of the Steady-State response of nonlinear circuits". Tesis doctoral, University of Illinois at Urbana-Champaign. Octubre 1979.

---

[Guckenheimer y Holmes 1997]

J. Guckenheimer y P. Holmes, "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields", Springer-Verlag, NY, 1997.

[Hill y Mareels 1990]

D.J. Hill y I.M. Mareels "Stability theory for differential algebraic systems with application to power systems", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. Vol. 37, No. 11, págs. 294-302, Noviembre 1990.

[Hiskens 1995]

I. A. Hiskens, "Analysis tools for power systems-containing with nonlinearities," *Proceedings of the IEEE*, Vol. 83, No.11, págs. 1573-1587, Noviembre 1995.

[Kakizaki 1985]

M. Kakizaki, T. Sugawara. "A Modified Newton Method for the Steady-State analysis" *IEEE Transaction on Computer-Aided Design*. Vol. 4. Octubre 1985.

[Kasusky 2002]

Kasusky R. G. "Análisis de Inestabilidades en Sistemas Eléctricos de Potencia por Medio de la Teoría de Bifurcación". Tesis de maestría, Instituto Tecnológico de Morelia, Mich. México, 2002.

[Kasusky *et al.* 2003]

Kasusky, R.G.; Fuerte-Esquivel, C.R.; Torres-Lucio, D. "Assessment of the SVC's effect on nonlinear instabilities and voltage collapse in electric power systems", Power Engineering Society General Meeting, 2003, IEEE, Vol. 4, 13-17 Julio

[Kieny 1991]

C. Kieny, "Application of the bifurcation theory in studying and understanding the local behavior of a Ferroresonant electric power circuit," *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 6, No. 2, págs.866-872, Abril 1991.

---

[King *et al.* 1995]

P. King, T. Ochs, A. Hartman, “Chaotic Responses in Electric Arc Furnace”, *Journal of Applied physics*, Vol 7, No. 4, págs 2059-2065, Agosto de 1994.

[Koppel y Washburn 1982]

N. Koppel y R.B. Washburn, “Chaotic motions in the two-degree-of-freedom swing equations,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 29, págs. 738-746, Noviembre 1982.

[Kuh y Rohrer 1965]

E. S. Kuh, R. A. Rohrer, “The state variable approach to network analysis”. *Proceedings of the IEEE*. 1965.

[Kundert y Sangiovanni-Vicentelli 1986]

K. S. Kundert, A. Sangiovanni-Vicentelli. “Simulation of nonlinear circuits in the frequency domain”. *IEEE Transaction on Computer-Aided Design*. Vol. 5. Octubre 1986.

[Kuznetsov 1998]

Y. A. Kuznetsov. “Elements of applied bifurcation theory”, Second edition. Springer-Verlag. 1998.

[Lee *et al.* 2001]

S. H. Lee, J. K. Park y B. H. Lee, “A study on the nonlinear controller to prevent unstable Hopf bifurcation,” *IEEE Power Engineering Society Summer Meeting*, 2001, Vol. 2, págs. 978-982, Julio 2001.

[Li y Venkatasubramanian 1995]

J. Li y V. Venkatasubramanian “Study of Hopf bifurcations in a simple power system model”, *Conference Proceedings of the IEEE on decision and control*, Sydney, Australia, Vol. 39, págs. 664-669, Diciembre, 2000.

---

[Mayordomo 1986]

J. G. Mayordomo. “Análisis de los armónicos introducidos en las redes eléctricas por los convertidores estáticos de potencia”. Tesis Doctoral E.T.S. de Ingenieros Industriales de Madrid, Julio 1986.

[Mayordomo. *et al.* 1997]

J. G. Mayordomo, L. F. Beites, R. Asensi, M. Izzeddine, L. Zabala Y J. Amantegui. “A New Frequency Domain Arc Furnace Model fro iterative Harmonic Analysis”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 12, No. 4, págs. 1771-1778, Octubre 1997.

[Medina y García 1999]

A. Medina y N. Garcia, “Newton methods for the fast computation of the periodics steady state solutions of systems with nonlinear and time-varying components”, *Conference Proceedings of the IEEE PES Summer Meeting, Edmonton, Alberta, CANADA*, Vol. 2, págs. 664-669, Julio 18-22 1999.

[Mithulananthan *et al.* 2003]

N. Mithulananthan, C. A. Cañizares, J. Reeve, y G. J. Rogers, “Comparison of PSSS, SVC and STATCOM controllers for damping power system oscillations,” *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 18, No. 2, págs. 786-792, Mayo 2003.

[Montanari *et al.* 1994]

G.C. Montanari, M Loggini, A. Cavallini, L. Pitti y D. Zaninelli “Arc Furnace Model for the study of flicker compensation in electrical networks”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 9, No. 4, págs. 2026-2036, Octubre 1994.

[Nayfhe y Balachandran 1995]

A. H. Nayfhe, B. Balachandran. “Aplied nonlinear dynamics, analitical computacional and experimental methods” John Wiley & Sons, Inc. 1995.

---

[O'Neill *et al.* 1998]

E. C. O'Neill, G. T. Heydt, E. J. Kostelich, S. S. Venkata, A. Sundaram. "Nonlinear Deterministic Modeling of Highly Varying Loads", *IEEE PES S.M.*, Julio 15-20, 1998,

[Pai *et al.* 1995]

M. A. Pai, P. W. Sauer y B. C. Lesieutre, "Structural stability in power systems-effect of load models" *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 10, No. 2, pp. 609-615, Febrero 1995.

[Parker y Chua 1989]

T.S. Parker y L.O. Chua, "Practical numerical algorithms for chaotic systems", Springer-Verlag, NY, 1989.

[Rosehart y Cañizares 1999]

W. D. Rosehart y C. A. Cañizares, "Bifurcation analysis of various power system models," *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Vol. 21, No. 3, págs. 171-182, Marzo 1999.

[Semlyen *et al.* 1987]

A. Semlyen, E. y J Arrillaga, "Newton-Type Algorithms for the harmonics phasor analysis of nonlinear power circuits in periodical steady-state with special reference to magnetic non-linearities". *IEEE Winter Meeting*, 1987.

[Semlyen y Medina 1995]

A. Semlyen y A. Medina, "Computation of the Periodic Steady State in Systems with Nonlinear Components Using a Hybrid Time and Frequency Domain Methodology", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 10, No. 3, págs. 1498-1504, Agosto 1995.

---

[Strogatz 2000]

H. S. Strogatz, "Nonlinear dynamics and chaos", Cambridge Massachusetts. perseus publishing 2000.

[Task Force. 2004]

Task Force on Harmonics Modeling and Simulation, "Modeling Devices With Nonlinear Voltage-Current Characteristics For Harmonics Studies.", *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 19, No. 4, págs. 1802-1811. Octubre 2004.

[Van Cutsem y Vournas, 1998]

T. Van Cutsem, y C. Vournas, "Voltage Stability of Electric Power Systems", *Power Electronics and Power System Series.*, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[Varadan. *et al.* 1996]

S. Varadan, E. B. Makram, A. A. Girgis, "A New Time Domain Voltage Source Model For an Arc Furnace Using EMTP", *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 11, No. 3, págs. 1685-1690, 1996.

[Varghese *et al.* 1998]

M. Varghese, F.F. Wu, y P. Varaiya, "Bifurcations associated with sub-synchronous resonance," *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 13, No. 1, págs. 139-144, Febrero. 1998.

[Venkatasubramanian *et al.* 1992]

V. Venkatasubramanian, H Schättler y J Zaborszky "Voltage dynamics: Study of a generator with voltage control, transmission and matched MW load", *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 37, No. 11, págs. 294-302, Noviembre 1992.

[Verghese y Banerjee 2001]

G.Verghese y S. Banerjee "Nonlinear phenomena in power electronics". New York: IEEE Press, 2001.

---

[Vu y Liu 1989]

T. K. Vu y C. C. Liu, "Analysis of tap-changer dynamics and construction of voltage stability regions," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. Vol. 36, No. 4, págs. 575-590, Abril 1989.

[Wang *et al.* 1994]

H. O. Wang, E. H. Abed, y A. M. A. Hamdan, "Bifurcation, chaos and crisis in voltage collapse of a model power system," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. Vol. 41, No. 3, págs. 294-302, Marzo 1994.

[Wang, 1996]

Sheng Wang, "Bifurcation analysis of oscillations in electric power systems", Tesis doctoral, Arizona state University, 1996.

[Watanabe *et al* 2004]

M. Watanabe, Y Mitani y K. Tsuji, "A Numerical method to evaluate power system global stability", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 19, No. 4, págs. 1925-1934, 2004.

[Weijun y Venkatasubramanian 1995]

J. Weijun, V. Venkatasubramanian. "Dynamics of a minimal power system: Invariant tori and quasi-periodics motions", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. Vol. 42, No. 12, págs. 294-302, Diciembre 1995.

[Wörnle *et al.* 2005]

F. Wörnle, D. K. Harrison and C. Zhou. "Analysis of a Ferroresonant circuit using bifurcation theory and continuation techniques" *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 20, No. 1, págs. 1302-1313. Febrero 2005.

[Xia y Heydt 1982]

D. Xia y G.T. Heydt "Harmonic Power Flow Studies." Part I & II. *IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems*. Vol. PAS-101. pp 1257-1270. Junio 1982.

