



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**ANÁLISIS, MODELADO Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS
CONMUTADOS BAJO EL ENFOQUE DEL DOMINIO FÍSICO**

**TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**PRESENTA
NOÉ VILLA VILLASEÑOR**

**DIRECTOR DE TESIS
DR. EN INGENIERIA ELECTRICA GILBERTO GONZÁLEZ ÁVALOS**

**CO DIRECTOR DE TESIS
DR. EN INGENIERIA ELECTRICA J. JESUS RICO MELGOZA**

MORELIA, MICHOACÁN, FEBRERO 2014



En Memoria de Emilio Villa Reyes

Agradecimientos.

Entre los resultados de este proyecto de investigación, se publicaron tres artículos en conferencias internacionales. Presenté personalmente dos de ellos. Quiero expresamente agradecer el apoyo económico parcial, recibido para tales fines. Este apoyo fue gentilmente canalizado por el Dr. Gilberto González Avalos, mi supervisor de tesis; el Dr. Aurelio Medina Ríos, Director de la División de Estudios de Posgrado de esta Facultad de Ingeniería Eléctrica; y el Dr. Leonardo Romero Muñoz, Director de la Facultad de Ingeniería Eléctrica.

Quiero también agradecer al pueblo de México y al CONACYT por el soporte económico brindado a través de la beca de manutención durante todo el periodo que comprendió este trabajo de investigación.

Noé Villa Villaseñor.

Índice general

Índice de figuras	VI
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.1.1. Modelado de sistemas conmutados	1
1.1.2. ¿Por qué utilizar bond graphs?	2
1.1.3. Modelado con grafos	5
1.2. Objetivos	6
1.3. Contribución de la Tesis	6
1.4. Organización de la Tesis	7
2. Revisión de trabajo previo y estado del arte	8
2.1. Introducción	8
2.2. Modelado y simulación de sistemas conmutados, algunos enfoques	8
2.2.1. Modelado analítico de estructura variable	9
2.2.2. Modelado mediante circuitos promedio	11
2.2.3. Modelado mediante variables de estado promediadas	13
2.2.4. Modelado mediante técnicas discretas	15
2.2.5. Modelado mediante sustitución de Interruptores	16
2.2.6. Modelado mediante control de corriente inyectada	16
2.2.7. Modelado mediante circuito equivalente de corriente inyectada	17
2.2.8. Modelado mediante variables complementarias	19
2.2.9. Modelado discreto promediado	20
2.2.10. Modelado discreto de señal grande	21
2.2.11. Modelado de señal grande	22
2.2.12. Modelado promedio de señal grande	23
2.2.13. Modelado mediante función de transferencia de tiempo variable	24
2.2.14. Modelado con serie de Volterra	25
2.2.15. Modelado con series de Fourier	25
2.3. Modelado de sistemas conmutados en bond graph, enfoques actuales	27
2.3.1. Modelado de estructura variable	27

2.3.2.	Modelado mediante uniones de potencia conmutadas	28
2.3.3.	Modelado mediante resistencia variable	29
2.3.4.	Modelado mediante transformador de módulo controlado	30
2.3.5.	Modelado mediante fuentes nulas	30
2.3.6.	Modelado promedio desde el bond graph	31
2.4.	Antecedentes de modelado de sistemas conmutados mediante teoría de grafos	31
2.4.1.	Matriz topológica principal	31
2.4.2.	Identificación de redes conmutadas de orden cero	33
2.5.	Conclusiones	35
3.	Arboles y Teoría de Grafos: una alternativa para tratar con elementos no lineales	37
3.1.	Introducción	37
3.2.	Modelado mediante técnicas elementales de análisis de circuitos	38
3.3.	Modelado mediante grafos y árboles	41
3.4.	Conclusiones	45
4.	Identificación de un árbol en un bond graph	46
4.1.	Introducción	46
4.2.	El criterio de adyacencia	47
4.3.	La relación entre cutsets, loopsets y las trayectorias causales	53
4.4.	Procedimiento para determinar los modelos matemáticos	55
4.5.	Conclusiones	57
5.	Otros dispositivos de conmutación electrónicos	58
5.1.	Introducción	58
5.2.	Transistor bipolar	59
5.3.	Tiristor	61
5.3.1.	Comparativo del modelo de Tiristor propuesto contra un tiristor convencional	63
5.4.	Triac	68
5.5.	Conclusiones	71
6.	Ejemplos de aplicación	72
6.1.	Introducción	72
6.2.	Circuito elemental	72
6.3.	Rectificador monofásico de onda completa	77
6.4.	Rectificador monofásico de onda completa tipo puente	82
6.5.	Rectificador Trifásico	89
6.6.	Convertidor Buck	98
6.7.	Rectificador monofásico controlado	105

6.8. Conclusiones	111
7. Conclusiones generales	112
A. La unión p-n y la ecuación de Shockley	114
B. Definiciones básicas de Árboles	117
C. Solucionadores numéricos	120
C.1. Fórmulas de diferenciación hacia atrás contra Fórmulas de diferenciación numérica	121
C.2. El solucionador ode15s	122
C.3. El solucionador ode23s	122
C.4. Otros solucionadores	123
C.5. Propiedades de tiempo de simulación	123
C.6. El solucionador NDSolve de Mathematica	124
D. Programas de ejemplos de aplicación	126
E. Publicaciones	132
E.1. Artículo de conferencia 1	132
E.2. Artículo de conferencia 2	141
E.3. Artículo de conferencia 3	148
Bibliografía	155

Índice de figuras

2.1. Convertidor conmutado step down.	10
2.2. Primera estructura de circuito.	10
2.3. Segunda estructura de circuito.	11
2.4. Convertidor boost.	11
2.5. Convertidor boost con célula de conmutación modelada mediante fuentes controladas.	12
2.6. Circuito promedio del convertidor boost.	12
2.7. Circuito convertidor conmutado.	13
2.8. Convertidor conmutado con dispositivos de conmutación sustituidos por fuentes promedio.	14
2.9. Sistema equivalente linealizado.	14
2.10. Diagrama de bloques de la secuencia de conmutación.	15
2.11. Convertidor con control de corriente inyectada.	17
2.12. Convertidor boost.	18
2.13. Circuito lineal equivalente de pequeña señal y baja frecuencia del convertidor boost de la figura 2.12.	18
2.14. Circuito lineal equivalente reemplazando las fuentes dependientes por un transformador.	19
2.15. Modelo de circuito canónico discreto-promedio.	21
2.16. Convertidor Boost con realimentación lineal de estados	22
2.17. Convertidor Buck.	23
2.18. Circuito equivalente del circuito de la figura 2.17.	24
2.19. Convertidor conmutado.	25
2.20. Unión-0 conmutada y unión-1 conmutada.	28
2.21. El enfoque de resistencia variable.	29
2.22. El enfoque de transformador con módulo controlado.	30
2.23. El enfoque de modelado de fuentes nulas.	31
2.24. Convertidor Buck Boost.	32
2.25. Arbol del convertidor Buck Boost.	32
2.26. Convertidor Boost.	34
2.27. Convertidor Buck.	34

2.28. Convertidor Buck-Boost.	35
3.1. Circuito eléctrico puramente resistivo.	38
3.2. Circuito resistivo con numeración de nodos asignada.	39
3.3. Grafo lineal del circuito de la figura 3.1.	41
3.4. Arbol y dos cutsets seleccionados.	42
3.5. Circuito puramente resistivo conteniendo un resistor no lineal (diodo).	44
4.1. Un sencillo circuito con tres elementos en serie.	47
4.2. Un árbol posible del circuito de la figura 4.1.	48
4.3. Bond graph equivalente al modelo de la figura 4.2.	48
4.4. Los otros dos posibles árboles del circuito de la figura 4.1, junto con los respectivos bond graphs.	49
4.5. El criterio de adyacencia ilustrado: Los tres posibles árboles del circuito de la figura 4.1 y los respectivos bond graphs sobrepuestos.	50
4.6. Tres elementos de circuito conectados en paralelo.	51
4.7. Los tres posibles árboles de una conexión en paralelo, junto con los bond graphs respectivos.	52
5.1. Modelo Ebers-Moll de un BJT	59
5.2. Modelo simplificado de Ebers-Moll de un transistor NPN.	60
5.3. Bond graph del modelo Ebers-Moll simplificado del BJT NPN.	60
5.4. Disposición de uniones pn en un tiristor.	61
5.5. El símbolo de un tiristor y su representación mediante dos BJT.	61
5.6. Modelos simplificados de Ebers-Moll para los dos tipos de BJT.	62
5.7. Tiristor formado con dos equivalentes simplificados Ebers-Moll de BJT.	62
5.8. Modelo del tiristor basado en diodos semiconductores.	63
5.9. Bond graph de un tiristor modelado mediante diodos y fuentes controladas.	64
5.10. Circuito rectificador controlado de media onda a simular en PSPICE.	64
5.11. Curvas de salida del rectificador de media onda controlado.	65
5.12. Rectificador controlado de media onda, con tiristor modelado mediante el esquema propuesto.	66
5.13. Curvas de voltajes del rectificador de media onda controlado, obtenidas mediante simulación en PSPICE.	67
5.14. El símbolo de un triac.	68
5.15. Un Triac modelado mediante dos tiristores en antiparalelo.	68
5.16. Dos tiristores modelados con diodos y fuentes de corriente controladas.	69
5.17. Triac modelado mediante diodos y fuentes de corriente controladas.	69
5.18. Bond graph de un triac modelado con diodos y fuentes controladas.	70
6.1. Un circuito elemental.	73
6.2. Un árbol del circuito de la figura 6.1.	73
6.3. Bond graph del circuito de la figura 6.1.	73

6.4. Bond graph con bonds de árbol engrosados.	74
6.5. Un rectificador de onda completa con carga puramente resistiva.	77
6.6. Bond graph del rectificador de onda completa.	77
6.7. Formas de onda de entrada y de salida del rectificador monofásico de onda completa.	80
6.8. Circuito rectificador de onda completa simulado en PSPICE.	80
6.9. Curvas de los voltajes en simulación de PSPICE.	81
6.10. Rectificador de onda completa tipo puente con carga RC.	82
6.11. Bond graph del rectificador de onda completa tipo puente con carga RC.	83
6.12. Curvas de voltaje del rectificador de puente completo tipo puente, obtenidas mediante Matlab.	87
6.13. Circuito rectificador de onda completa tipo puente simulado en PSPICE.	88
6.14. Curvas de voltajes en el circuito simulado en PSPICE.	88
6.15. Circuito rectificador trifásico con carga RC.	89
6.16. Bond graph del circuito rectificador trifásico.	90
6.17. Voltajes de línea y voltaje de salida en el rectificador trifásico con entradas balanceadas.	93
6.18. Corrientes de fase del rectificador trifásico balanceado.	94
6.19. Circuito rectificador trifásico con carga RC simulado en PSPICE.	95
6.20. Curvas de voltajes en Matlab, ante entrada de voltaje desbalanceada.	95
6.21. Curvas de voltaje del rectificador trifásico simulado mediante PSPICE.	96
6.22. Curvas de voltaje en la simulación del rectificador desbalanceado en PSPICE.	97
6.23. Convertidor Buck.	98
6.24. Convertidor Buck con un BJT como dispositivo de conmutación, que a su vez es implementado con el modelo Ebers-Moll.	98
6.25. Bond graph del convertidor Buck.	99
6.26. Voltaje de salida del convertidor Buck, con simulación corrida en Matlab.	102
6.27. Circuito convertidor Buck simulado en PSPICE.	103
6.28. Curva de voltaje de salida obtenida mediante simulación de PSPICE.	104
6.29. Circuito rectificador controlado de media onda.	105
6.30. Circuito rectificador controlado de media onda con tiristor implementado mediante el modelo propuesto.	106
6.31. Bond graph del rectificador controlado de media onda.	106
6.32. Voltaje en el capacitor del circuito rectificador monofásico controlado.	110
A.1. Curva $v-i$ característica del diodo, obtenida al graficar la ecuación (A.3).	116
B.1. Grafo lineal.	117
B.2. Arbol 1.	118
B.3. Arbol 2.	118
B.4. Arbol 3.	118
B.5. Arbol 4.	118

RESUMEN

En este trabajo de investigación se analizan sistemas conmutados. Los interruptores se modelan empleando el diodo de Shockley como pieza fundamental. El empleo de este modelo involucra la generación de ecuaciones no lineales.

Se presenta una metodología novedosa para la formulación de las ecuaciones descriptivas de sistemas conmutados. Esta formulación emplea las técnicas de árboles inherentes a la teoría de grafos. Además, se realiza una mezcla con el análisis causal propio de los bond graphs. El resultado es una técnica capaz de producir modelos matemáticos de los circuitos convertidores de electrónica de potencia mostrados en la sección de aplicaciones. Se presenta un rectificador de onda completa tipo puente, un convertidor buck un rectificador trifásico y un rectificador monofásico controlado. Los modelos matemáticos son ecuaciones de estado, que debido a la naturaleza de los sistemas estudiados, son álgebra diferenciales (DAE).

Al emplear el modelo de Shockley como pieza fundamental, se construyen los modelos de otros dispositivos de conmutación. De esta manera, se realiza un análisis del transistor de unión bipolar, el tiristor y el triac.

Se realiza la implementación de las metodologías propuestas mediante el modelado y la simulación de algunos circuitos convertidores propios de la electrónica de potencia. Para ello, se selecciona en cada caso el convertidor de interés. Se construye enseguida su bond graph y después se aplica la metodología sugerida para derivar las ecuaciones descriptivas. En última instancia, se realiza la simulación mediante la solución numérica de las ecuaciones, empleando para ello Matlab y su juego ODE de solucionadores, así como Mathematica y NDSolve.

PALABRAS CLAVE:

Sistemas conmutados, bond graphs, árboles, diodo exponencial, DAE.

ABSTRACT

In this research Project, switching systems are analysed. Switches are modeled by employing the Shockley model as fundamental piece. The employment of this model involves the rising of non-linear equations.

A novel methodology for the derivation of the descriptive equations of switching systems is presented. This formulation uses the techniques of trees that appear in graph theory. Also, a mix with the causal analysis of bond graphs is performed. The result is a technique capable of producing mathematical models of the converter circuits shown in the applications section. The presented systems are a full wave bridge rectifier, a buck step down converter, a three phase rectifier and a controlled single phase rectifier. The mathematical models are state equations, that are differential algebraic equations (DAE), due to the nature of the studied systems.

When employing the Shockley model as fundamental part, models of other switch devices are built. In this way, an analysis of the bipolar juncture transistor, the thyristor and the triac is done.

An implementation of the proposed methodologies through the modeling and simulation of some converter circuits of power electronics is also performed. In order to do this, the wanted converter is selected. Then, the bond graph model is built and the suggested methodology to derive the descriptive equations is employed. In the last instance, the simulation through numeric solution is performed, using the Matlab program and its ODE set, as well as Mathematica and NDSolve.

KEY WORDS:

Switching systems, bond graphs, trees, exponential diode, DAE.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

1.1.1. Modelado de sistemas conmutados

Si se considera el problema del control de máquinas eléctricas, ya sean de corriente directa, síncronas, asíncronas, o especiales, se puede observar la utilidad de los convertidores conmutados de electrónica de potencia. Esto se debe a que los valores de operación de las variables eléctricas de la máquina, son diferentes en muchos casos a los valores de la fuente de suministro de energía. La amplitud, la frecuencia y el número de fases pueden requerir de manipulación para poder adecuarse a los requerimientos propios de cada caso. Además de las máquinas eléctricas, los circuitos conmutados son empleados en otros numerosos campos de aplicación, tales como generadores de calentamiento por inducción [1], etapas de corrección de factor de potencia [2], dispositivos FACT [3], por mencionar algo aparte de las populares fuentes conmutadas [4].

Los circuitos en conmutación son un tema muy estudiado en la electrónica de potencia, y aún cuando esta disciplina es el campo maestro de los sistemas conmutados, estos también aparecen en otras diversas áreas de la tecnología. A los dispositivos de conmutación se les encuentra por ejemplo, en sistemas mecánicos, en forma de embragues, ó en sis-

temas hidráulicos, en forma de controles con válvulas solenoide. Numerosos esquemas de modelado de dichos sistemas están disponibles en la literatura actual. Pese a este notable avance en el área, existen aún problemas por resolver en los convertidores actuales, por ejemplo, los dispositivos de conmutación presentan pérdidas, que reducen la eficiencia de los convertidores. Las pérdidas además, ocurren porque los dispositivos de conmutación disipan potencia durante la conmutación. Si la cantidad de potencia disipada es demasiada, se puede ocasionar la destrucción del propio dispositivo de conmutación, así como de otros componentes dentro del sistema. El fenómeno de disipación de potencia ocurre incluso en esquemas de conmutación suave, ya sea que se trate de conmutación a corriente cero, ó conmutación a voltaje cero [5]. Las pérdidas ocurren en mucho mayor grado en los esquemas de conmutación dura. Por otra parte, algunos métodos de modelado de sistemas de conmutación actuales, introducen simplificaciones, que ocasionan pérdida de información en tiempos de simulación. Entre más información se tenga, mejor será el experimento. Sería valiosa una simulación que prediga de manera exacta el comportamiento de un sistema, antes de su implementación física. Si bien esto es prácticamente irrealizable, debido a factores no controlables presentes en el medio ambiente real, las computadoras actuales pueden auxiliar en el proceso de obtener simulaciones cuyo comportamiento sea muy similar al del sistema real en cuestión.

Definitivamente vale la pena continuar realizando investigación sobre posibles alternativas para el modelado de estos sistemas en conmutación. Investigar al respecto es justamente lo que se hace en el presente trabajo.

1.1.2. ¿Por qué utilizar bond graphs?

La frase “dominio físico”, que aparece en el título de este trabajo, es una adaptación sugerida al español para los bond graphs. Ello se debe a que los bond graphs permiten el modelado y simulación de varios “dominios físicos”. En lo sucesivo, sin embargo, el término en inglés “bond graph” es el que será utilizado, ya que se considera conveniente mantenerlo sin cambio para referirse a uno de los aspectos claves de este trabajo de

investigación.

México es un país con un marcado retraso en muchos sectores, si se le compara con los líderes mundiales. El desarrollo tecnológico no es la excepción. Una de las muchas pruebas que existen de ello es el hecho de que la metodología de los bond graphs es prácticamente desconocida en nuestro país. Tras varios años de dedicación a la investigación y práctica de esta disciplina, así como de convivir con ingenieros e investigadores que trabajan en otras especialidades, se puede decir que los bond graphs pasan desapercibidos por la gran mayoría de científicos y tecnólogos que laboran en México, y que seguramente, algunos de ellos podrían beneficiarse con su aplicación. Sin embargo, esta situación no es universal, y de hecho existen numerosos países (casi todos ellos potencias tecnológicas), en donde los bond graphs no son sólo una curiosa y abstracta teoría. En esos países, los bond graphs están ayudando realmente a resolver complejos problemas de ingeniería.

Considérese a la ingeniería eléctrica, la cual es sumamente importante estos días. En el mundo actual, sin embargo, la ingeniería eléctrica por sí sola, no tendría gran sentido, ya que una multitud de puntos de aplicación de la energía ocurren en otros dominios físicos, tales como el mecánico, el térmico, el químico, el luminoso, etc. Por otra parte, la energía eléctrica por lo general no nace como tal. Siempre se le obtiene indirectamente en donde la fuente de energía primaria vive en otro dominio, llámese nuclear, hidro-estático, térmico, luminoso, etc. Si se hace énfasis en la necesidad de convertir la energía desde/hacia el dominio eléctrico, entonces la gran relevancia de los bond graphs empieza lenta y sostenidamente a emerger.

Por otra parte, la ingeniería mecatrónica es un área de la tecnología que ha tenido un importante desarrollo en los últimos años. Esta interesante disciplina une a la ingeniería mecánica, la ingeniería electrónica y con esta a los circuitos conmutados, la ingeniería de control y la ingeniería informática. La ingeniería mecatrónica se dirige hacia el análisis, modelado, simulación y diseño de sistemas físicos que involucran por lo general sistemas multi-dominio. Los bond graphs son una excelente herramienta de actualidad en la ingeniería mecatrónica, tal como se puede corroborar con la nutrida publicación de artículos

técnicos en el área [6], [7], [8].

La demanda de energía ha tenido una tendencia a la alza. El sector industrial requiere de mayores cantidades de energía para solventar sus procesos. Lo mismo ocurre con la población en general, en la que dos fenómenos ocurren: primero, el consumo personal se está incrementando, debido a la creciente disponibilidad de numerosos equipos eléctricos y electrónicos domésticos; segundo, la misma población se está incrementando. Todos estos factores requieren de la generación de más y más energía. Es bien sabido de donde proviene actualmente la gran mayoría de esta energía: depósitos fósiles, que serían una excelente fuente, de no ser por el efecto de la emisión de gases y la contaminación que derivan en el conocido problema del cambio climático. Este grave problema del cambio climático ha dado origen a un urgente replanteamiento acerca del modo en el que la energía es generada y convertida en el mundo industrializado de hoy. Por todas partes los investigadores están trabajando contra reloj en como eficientar el empleo de las energías, volviendo inevitablemente la atención hacia las llamadas energías limpias. De nuevo, las fuentes de energía limpias no proveen directamente energía eléctrica, sino que se trata de energía solar, energía aeromotriz, energía mareomotriz, energía geotérmica, etc. Nuevamente, la conversión de energía entre diferentes dominios físicos cobra relevancia. La técnica de los bond graphs es, de nuevo, una excelente opción a la hora de modelar estos sistemas multi-dominio, ya sea en sistemas cuya fuente de energía es la solar [9], [10], [11], la geotérmica [12], [13], la eólica, e incluso la undimotriz [14], [15].

El mundo industrializado de hoy encara numerosos retos. Actualmente la movilidad de las personas sigue dependiendo de la quema de combustibles fósiles. La inmensa mayoría de los vehículos automotores a nivel mundial, basan su movilidad en la poco limpia combustión de gasolina. Importantes pasos se están dando con la finalidad de abatir este problema, siendo el desarrollo de vehículos eléctricos e híbridos uno de los temas en que más énfasis se ha puesto. Con la finalidad de desarrollar vehículos más eficientes, los ingenieros hacen uso de las tecnologías que se tienen a la mano. De entre las cuales conviene resaltar el empleo de los bond graphs, que encuentran en el terreno de los vehículos híbri-

dos y eléctricos, un excelente campo de aplicación. Los bond graphs se están usando en esta área no solo de manera teórica, sino que se les aplica en forma práctica y bajo el patrocinio de grandes compañías automotrices [16], [17], [18].

1.1.3. Modelado con grafos

La teoría de grafos goza de gran aceptación en diversos círculos de la ciencia y la tecnología [19] [20]. La teoría de grafos está sólidamente basada en convincentes argumentos matemáticos. Pero no es sólo la solvencia matemática la que le brinda tal aceptación, sino la amplia variedad de aplicaciones, que se sirven de ella para resolver problemas del mundo real.

Mención aparte merece el extenso uso que en ingeniería eléctrica se hace de la teoría de árboles, una especialidad de la teoría de grafos, y es que la teoría de árboles tiene un nexo directo con los circuitos eléctricos. En teoría de árboles se lleva al terreno matemático la topología de dichos circuitos. Existe un aspecto sumamente relevante que justifica esta estrecha relación: en un árbol, las propiedades espaciales del correspondiente circuito eléctrico se preservan. Esta situación no ocurre en otros métodos de modelado. Aunado a esto, en los métodos de los árboles, se minimiza el conjunto principal de ecuaciones simultáneas que se deben resolver [20]. Los motivos mencionados son razones suficientes para hacer uso de la teoría de grafos y sus árboles en el presente trabajo de investigación. Hay sin embargo, una razón más: el método de los árboles resulta ser el más adecuado para obtener las ecuaciones algebro-diferenciales, características de los circuitos eléctricos tratados en este trabajo de investigación. Los árboles permiten manejar satisfactoriamente las relaciones no lineales de los diodos como elementos resistivos que se usan en este trabajo.

1.2. Objetivos

En este documento se presentan de manera conjunta algunas técnicas existentes para el modelado y simulación de convertidores conmutados. Además, se propone un enfoque diferente de solución para la misma problemática inherente a dichos convertidores conmutados. Para llevar a cabo la propuesta de nueva solución, se deben emplear dos partes en el proceso, primero, en la parte analítica, se estudia la efectividad del formalismo de los bond graphs en conjunción con las técnicas de los grafos para determinar las ecuaciones de estado. Segundo, en la parte de simulación, se debe hacer uso de solucionadores numéricos para resolver las ecuaciones álgebra diferenciales de los convertidores bajo estudio.

1.3. Contribución de la Tesis

El presente proyecto de investigación impacta en el área de la simulación y el modelado de sistemas físicos en general, y como caso particular, enfoca a los sistemas en conmutación. El impacto se hace tangible mediante dos resultados principales:

- Tomando como base una mezcla de la técnica de árboles de la teoría de grafos, y las trayectorias causales propias de los bond graphs, se establece una nueva metodología para la formulación de sistemas de ecuaciones diferenciales y álgebra diferenciales de sistemas físicos. La técnica de árboles ofrece numerosas ventajas a ingenieros eléctricos en la solución de circuitos. Este trabajo de investigación permite llevar dichas ventajas de los árboles a otras áreas de la física, mediante los bond graphs, que como es sabido, permiten modelar sistemas de otros dominios físicos. La metodología se hace útil mediante un procedimiento propuesto, que permite la derivación de ecuaciones incluso álgebra-diferenciales de sistemas que puedan ser modelados mediante un bond graph.
- Se muestra como el empleo del modelo de Shockley del diodo puede servir de base para la representación de varios dispositivos de conmutación más complejos, los

cuales suelen ser la parte más complicada cuando se modelan sistemas conmutados. En particular se presenta un nuevo modelo del tiristor modelado mediante diodos.

1.4. Organización de la Tesis

El trabajo esta organizado de la siguiente manera:

En el capítulo 2, a modo de revisión del estado del arte, se realiza un resumen de algunos esquemas de modelado de sistemas conmutados empleados en la actualidad. Se revisan tanto esquemas tradicionales propios de la ingeniería eléctrica, como los relacionados con la metodología de los bond graphs. . En el capítulo 3 se explica por qué es necesario utilizar la teoría de árboles para modelar convertidores que se basan en el diodo de unión P-N como dispositivo principal de conmutación. En el capítulo 4 se presenta uno de los principales resultados de la investigación: Los fundamentos de la metodología de los árboles trabajando en una nueva conjunción con el análisis causal propio de los bond graphs, todo ello para fines de modelar satisfactoriamente los convertidores de interés. En el capítulo 5 se presenta otro resultado de interés: el empleo del diodo de unión P-N como la base de otros dispositivos de conmutación controlados. En el capítulo 6 se prueban los métodos propuestos mediante la solución de algunos ejemplos típicos. En el capítulo 7 se presentan algunos comentarios finales y conclusiones. En el apéndice A se revisa el modelo del dispositivo que sirve de base para modelar los convertidores presentados en este trabajo. Este dispositivo es el diodo de unión P-N. En el apéndice B se resumen las definiciones básicas de teoría de árboles que son requeridas durante el desarrollo de las ideas principales en el trabajo de investigación. En el apéndice C se revisan brevemente las principales herramientas empleadas para la solución numérica de las ecuaciones algebrao diferenciales propias de los convertidores bajo estudio: el juego de solucionadores ODE de Matlab y el solucionador NDSolve de Mathematica. Finalmente, en el apéndice D se anexan las publicaciones derivadas del proyecto de tesis.

Capítulo 2

Revisión de trabajo previo y estado del arte

2.1. Introducción

Existen dentro del área de los circuitos conmutados de electrónica de potencia numerosos esquemas de modelado. Aquí se realiza una presentación de algunos de ellos, lo que permite tener un panorama de opciones diferentes a la metodología que se propone. Se presentan tanto métodos que no emplean bond graphs, como los que si lo hacen. Las técnicas que se han empleado para modelar los sistemas conmutados son muy variadas y abordan distintos enfoques, que van desde el relativamente simple modelado lineal de estructura variable, hasta enfoques complejos como

2.2. Modelado y simulación de sistemas conmutados, algunos enfoques

¿Cómo se puede modelar un sistema conmutado?. La respuesta la han escrito numerosos investigadores, provenientes de las más variadas áreas, quienes han modelado los

sistemas conmutados, empleando diversos enfoques. De hecho se ha propuesto tal variedad de métodos de modelado, que resulta difícil encontrar un patrón válido de clasificación. A continuación se listan algunos esquemas de modelado que se utilizan en la actualidad.

2.2.1. Modelado analítico de estructura variable

La teoría clásica de análisis de circuitos lineales es muy completa. Analizar un circuito lineal hoy en día es una tarea bien definida, con numerosas herramientas de análisis, con resultados predecibles, y con otras ventajas. La popularidad y relativa facilidad del análisis de los circuitos lineales son sin duda las principales motivaciones del enfoque de estructura variable que se le puede dar a los sistemas conmutados. Este enfoque goza de gran popularidad y ha sido uno de los más empleados en las últimas décadas. En este esquema, los dispositivos de conmutación son simplemente modelados como circuitos abiertos, o como corto circuitos, en función de su estado de apagado ó encendido, respectivamente [21]. Dependiendo del estado de dichos dispositivos de conmutación, es evidente que la forma del circuito completo se transforma. El funcionamiento de estos sistemas se caracteriza por un cambio cíclico de topologías, las señales de control provocan el encendido y/o apagado de los dispositivos de conmutación. Esta secuencia cíclica de encendidos y apagados da lugar, a un número diferente de estructuras de circuito, dependiendo del modo en el que esté operando el mismo. De hecho, en general, si el circuito cuenta con un sólo interruptor controlado y la operación es en modo continuo, entonces se tendrán dos estructuras de circuito diferentes. Si el mismo circuito opera en modo discontinuo, entonces se tendrán tres estructuras diferentes. Si el número de interruptores controlados aumenta, entonces lo hace también la cantidad de circuitos equivalentes. En general, para el modo continuo de operación, si un convertidor tiene n interruptores controlados, entonces se pueden llegar a tener 2^n estructuras de circuito diferentes. La forma típica de modelado matemático consiste en generar 2^n juegos de ecuaciones, que pueden ser incluso álgebra-diferenciales, donde cada conjunto describe el comportamiento de una estructura de circuito particular [21].

Como ejemplo de este enfoque, considérese el convertidor buck de la figura 2.1.

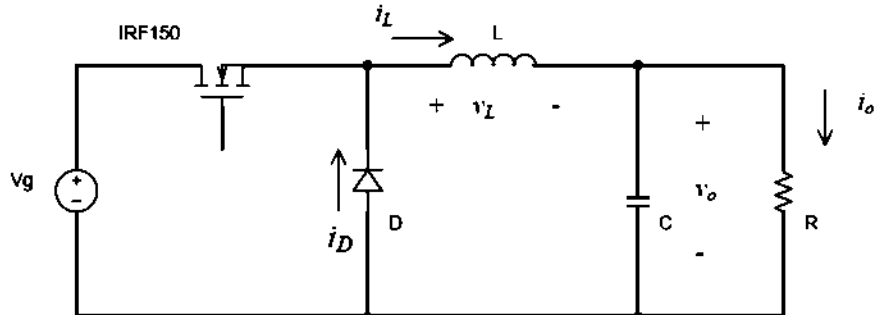


Figura 2.1: Convertidor conmutado step down.

El circuito consta de dos interruptores. El mosfet canal n es el interruptor controlado S_1 , mientras que el diodo es un interruptor S_2 conmutado naturalmente. Si se considera que el convertidor opera en modo continuo, entonces, en la figura 2.2 se muestra la primera estructura de circuito que emerge cuando S_1 se encuentra encendido y S_2 se encuentra apagado.

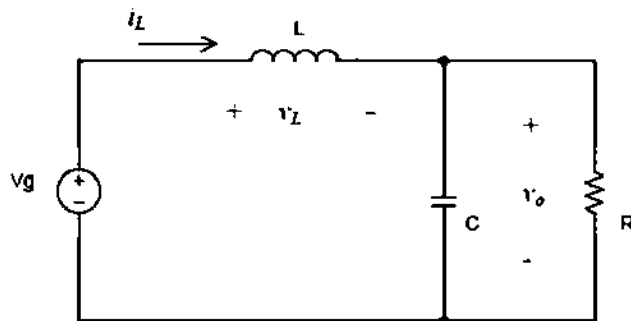


Figura 2.2: Primera estructura de circuito.

En un momento dado, S_1 se apaga, y de manera natural, S_2 entra en conducción, por lo que el circuito se modifica, de acuerdo a la figura 2.3

Los circuitos de las figuras 2.2 y 2.3 se pueden analizar, durante los intervalos de tiempo

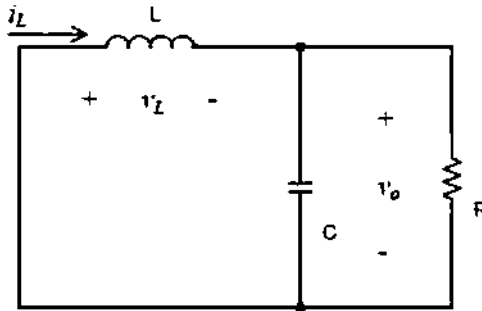


Figura 2.3: Segunda estructura de circuito.

de interés, mediante técnicas de análisis de circuitos lineales. Las ecuaciones obtenidas se pueden resolver ya sea de forma analítica, o bien mediante la ayuda de algún procesador numérico.

2.2.2. Modelado mediante circuitos promedio

Este método es analítico y trata de buscar un circuito “promedio” entre los distintos circuitos equivalentes propios del enfoque de estructura variable [22].

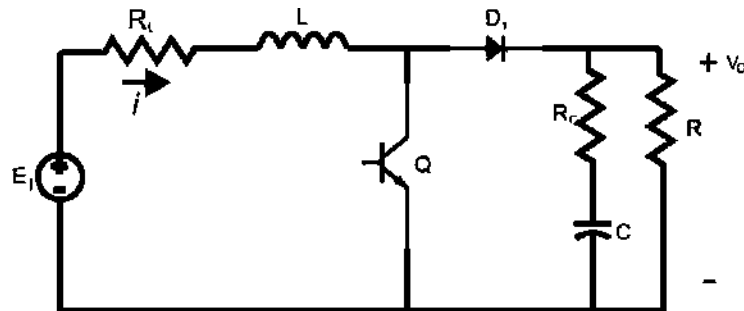


Figura 2.4: Convertidor boost.

El método se basa en los valores promedio, despreciando los valores instantáneos en las variables eléctricas. Además, se realiza una sustitución de fuentes controladas. Este método llega a un circuito equivalente que involucra componentes lineales, cuyo valor

depende de una variable de control que típicamente es el ciclo de trabajo. En la figura 2.4 se observa un convertidor boost, en el que además de los elementos típicos se modelan las resistencias del inductor y del capacitor.

Se llega a un equivalente con fuentes controladas en función de los valores promedio y el ciclo de trabajo.

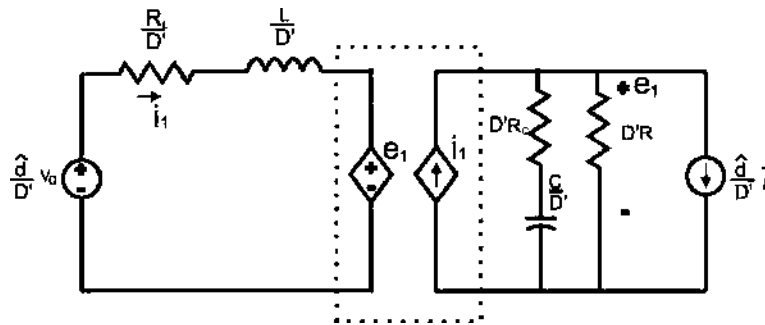


Figura 2.5: Convertidor boost con célula de conmutación modelada mediante fuentes controladas.

En el convertidor de la figura 2.5 se ha sustituido el subcircuito de conmutación por un arreglo de fuentes controladas y se han afectado los valores de los componentes por un factor $\frac{1}{D}$, en donde D es el ciclo de trabajo de la señal PWM y D' es el complemento de D . Las cantidades con el signo de intercalación $\hat{}$ representan valores con una ligera perturbación añadida.

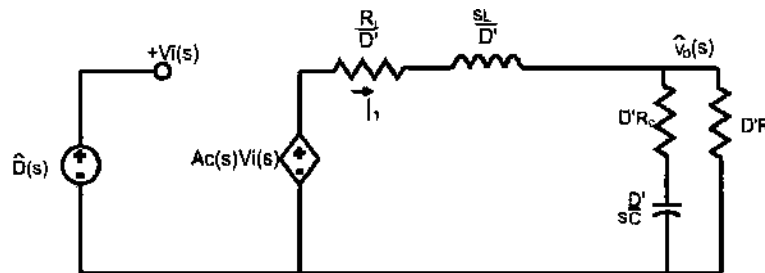


Figura 2.6: Circuito promedio del convertidor boost.

Como un paso adicional de esta técnica, se llega a un circuito con componentes lineales,

cuyo valor es función del ciclo de trabajo. Esto puede apreciarse de manera gráfica en la figura 2.6. El circuito de la figura 2.6 posee componentes que ya se encuentran en el dominio de la frecuencia, y por lo tanto se le pueden aplicar las técnicas de análisis típicas de los circuitos lineales.

2.2.3. Modelado mediante variables de estado promediadas

El modelado mediante promedios es una técnica para realizar el análisis y la simulación de circuitos eléctricos con dispositivos de conmutación [23], [24]. Principalmente enfocada hacia convertidores de electrónica de potencia, esta técnica requiere localizar primeramente los elementos componentes del subsistema de conmutación. A modo de ejemplo, considérese el circuito convertidor mostrado en la figura 2.7, en el que se ha enmarcado el sub circuito de conmutación, algunas veces llamado *célula de conmutación*.

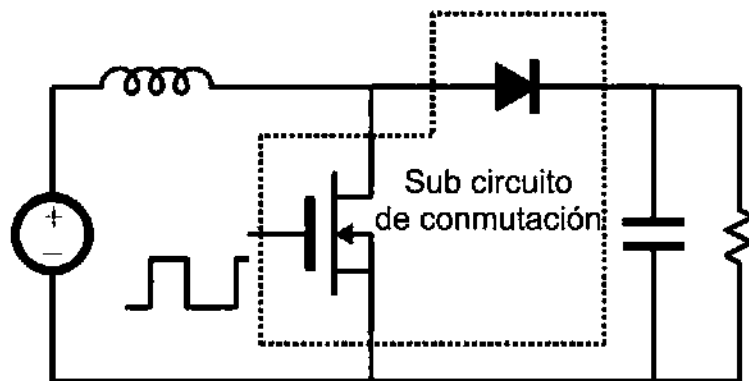


Figura 2.7: Circuito convertidor conmutado.

Normalmente los componentes del subcircuito de conmutación tienen un comportamiento altamente no lineal. La técnica requiere entonces, que se modele al subcircuito de conmutación mediante fuentes controladas. Los convertidores conmutados, por la naturaleza de su construcción, pueden operar ya sea en modo continuo, o en modo discontinuo. Una vez que se determina el modo de operación del convertidor, en esta metodología es normal que se desprecien los valores instantáneos y se consideren solamente los valores

promedio (de ahí el nombre de la propia metodología). En la figura 2.8 se ha sustituido el subcircuito de conmutación por su equivalente en fuentes controladas promedio. d representa el ciclo de trabajo.

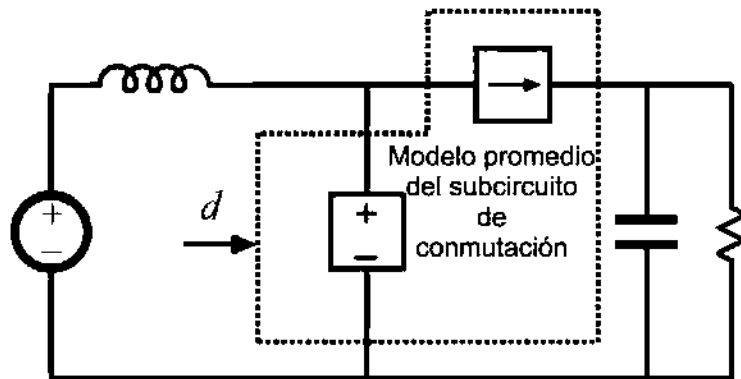


Figura 2.8: Convertidor conmutado con dispositivos de conmutación sustituidos por fuentes promedio.

Una vez que el subcircuito de conmutación se ha sustituido, el sistema completo puede adecuarse para su simulación.

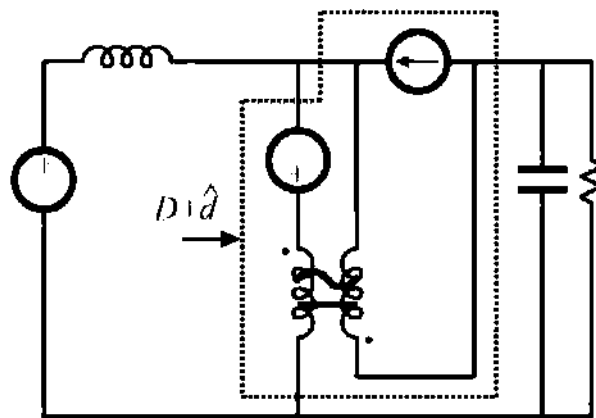


Figura 2.9: Sistema equivalente linealizado.

Se puede realizar una linealización del sistema equivalente, a fin de realizar cálculos mediante teoría de sistemas lineales. En la figura 2.9 se muestra el sistema linealizado.

2.2.4. Modelado mediante técnicas discretas

Este método describe el comportamiento de convertidores conmutados [25], [26], [27]. Se basa en la descripción del circuito en el espacio de estados, modelando los elementos de conmutación bajo el esquema de estructura variable, obteniéndose las ecuaciones diferenciales no lineales. El modelo resultante suele ser complejo y para abatir parcialmente esa complejidad, se linealiza el sistema resultante alrededor de un punto de operación del convertidor. El sistema resultante es discretizado y simulado ciclo a ciclo, y se utiliza la técnica de emplear las condiciones finales del ciclo n , como las condiciones iniciales del ciclo $n + 1$.

Si se considera el ciclo $t \in [nT, (n + 1)T]$, en la figura 2.10 se muestra el diagrama de bloques de la etapa de potencia de un convertidor PWM, operando en modo continuo de conducción.

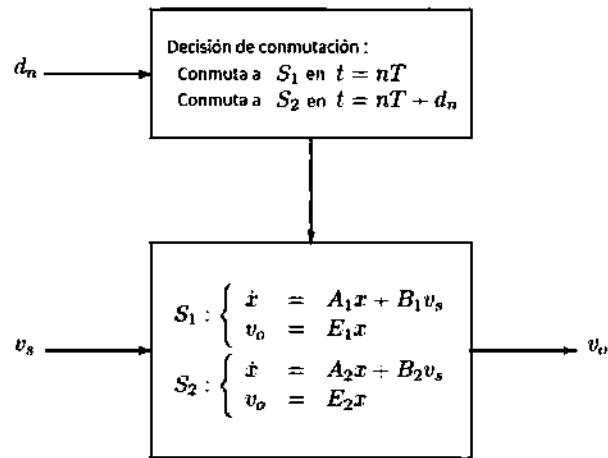


Figura 2.10: Diagrama de bloques de la secuencia de conmutación.

En la figura 2.10 $d_n \in \mathbb{R}$ es el instante de conmutación dentro del ciclo y es empleado como la variable de control; $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{N \times 1}$, $E_1, E_2 \in \mathbb{R}^{1 \times N}$ son matrices constantes, T es el periodo de conmutación constante (inverso de la frecuencia de conmutación f_s), y $v_s, v_o \in \mathbb{R}$ son los voltajes de la fuente y de la salida, respectivamente.

2.2.5. Modelado mediante sustitución de Interruptores

Este método de modelado se basa en la sustitución de los interruptores (controlados y no controlados) por fuentes de voltaje controladas a su vez por el subcircuito de control y por el estado del sistema [28]. Desde este punto de vista, si el interruptor está conduciendo, es reemplazado por una fuente de voltaje de valor cero, por la que puede fluir cualquier corriente. Por otra parte, si el interruptor se encuentra abierto, se sustituye por una fuente de voltaje cuyo valor debe ser la suma de los otros voltajes alrededor de la malla en la que se encuentra, de modo que el flujo de corriente través suyo sea de cero.

Otra manera similar de modelado es aquella en la que se sustituyen los interruptores por resistores controlados por voltaje. Estos dispositivos cambian su valor de resistencia entre valores extremos cercanos a cero y a infinito, en función del voltaje de control aplicado [29].

Otro esquema de sustitución es en el que se reemplazan a los interruptores por un arreglo de una fuente de corriente en paralelo con la serie de un inductor, un resistor y una fuente de voltaje [30]. Este arreglo permite matemáticamente llegar a una matriz cuyos valores son invariantes. Evidentemente se requieren más variables de estado, por lo que el orden del sistema aumenta. Aún así, el modelo resultante es de la simplicidad suficiente para ser tratado por algún solucionador en computadora, tal como PSPICE.

2.2.6. Modelado mediante control de corriente inyectada

En este método se divide al circuito convertidor en dos partes, en donde la primera tiene la función de “inyectar” corriente a la segunda, que funciona como filtro de salida y carga al mismo tiempo [31]. Linealizando alrededor de un punto de operación, el modelo matemático que se obtiene está formado por ecuaciones diferenciales similares a las obtenidas por el método de variables de estado promediadas. Si se considera el circuito de la figura 2.11, la célula de conmutación se representa como una caja cerrada.

En la figura 2.11, se pueden observar cinco cantidades en los puertos, el voltaje y la

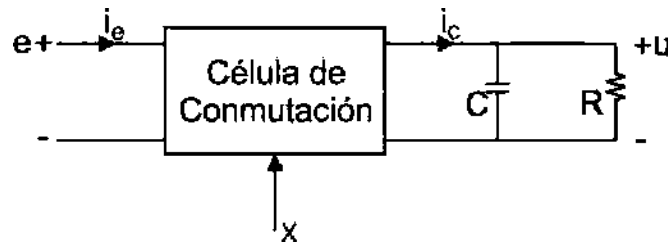


Figura 2.11: Convertidor con control de corriente inyectada.

corriente de entrada, e , i_e , el voltaje y la corriente de salida u , i_C y una quinta cantidad x , que es la cantidad controlada. Esta cantidad controlada puede ser cualquier parámetro controlable en la célula, que pueda ser capaz de influir en la transferencia de energía de la célula. Se asume que los valores promedio de la corriente de entrada (ó absorbida) i_e y la corriente de salida (ó inyectada) i_C pueden ser expresados como función del valor promedio de la cantidad controlada x y los valores promedio de los voltajes de entrada y salida de la célula. Estas funciones se definen mediante las relaciones

$$i_e = i_e(x, u, e)$$

$$i_C = i_C(x, u, e)$$

2.2.7. Modelado mediante circuito equivalente de corriente inyectada

En este método se descompone al circuito convertidor en dos partes, una de las cuales es el circuito de salida, conformado por un resistor y un capacitor. La otra parte es el resto del circuito, que se encarga de “inyectar” corriente al circuito de salida [32]. Los interruptores se consideran ideales [33]. Este enfoque de modelado mezcla la técnica de la corriente inyectada, con la metodología de modelado promediado que emplea un circuito electrónico equivalente para modelar la célula de conmutación. Este enfoque mantiene las ventajas de ambos métodos. Se identifican dos partes principales en el convertidor completo: una parte lineal que es la carga R-C y otra parte no lineal que es la célula de

conmutación en conjunto con el inductor. Los resultados del modelo pueden ser empleados directamente en una computadora con software como PSPICE. En los circuitos que aparecen a continuación, se consideran las siguientes notaciones: $d1Ts$ es el intervalo en el que el transistor está encendido y el diodo apagado; $d2Ts$ es el intervalo en el que el transistor está apagado y el diodo encendido. $d1 + d2 = 1$; $Ts = \frac{1}{f_s}$ es el periodo de conmutación. Las entradas independientes son el voltaje de entrada v_g y el ciclo de trabajo d . La parte no lineal del circuito inyecta una corriente i a la parte lineal. Las cantidades en mayúsculas se usan para identificar valores de estado estacionario, mientras que las cantidades con el símbolo de intercalación $\hat{}$ se usan para pequeñas perturbaciones. Considérese el convertidor Boost de la figura 2.12.

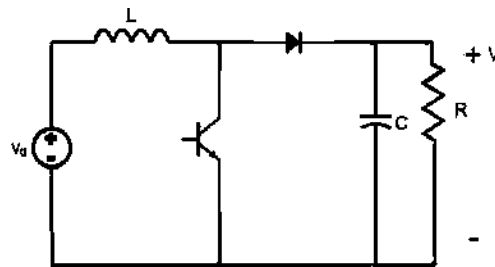


Figura 2.12: Convertidor boost.

Si se considera que el convertidor de la figura 2.12 está trabajando en modo continuo, el circuito puede ser sustituido por el de la figura 2.13.

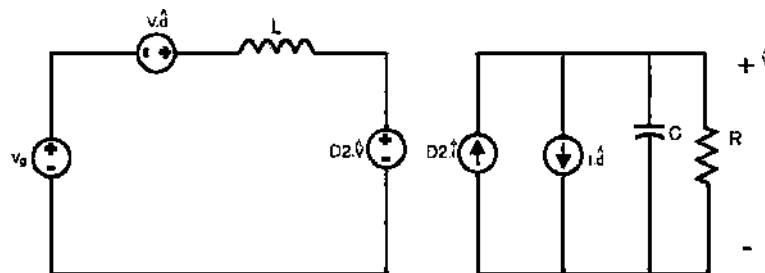


Figura 2.13: Circuito lineal equivalente de pequeña señal y baja frecuencia del convertidor boost de la figura 2.12.

Si en el circuito de la figura 2.13 se reemplazan las fuentes dependientes de voltaje y corriente por un transformador equivalente, se llega al circuito de la figura 2.14.

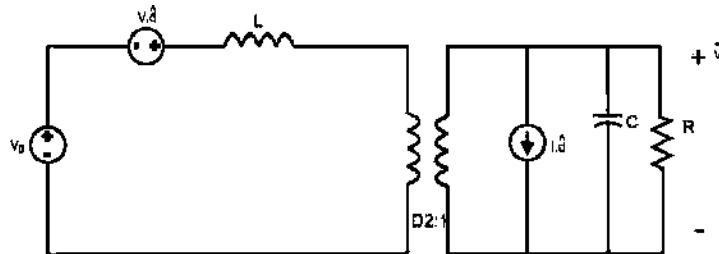


Figura 2.14: Circuito lineal equivalente reemplazando las fuentes dependientes por un transformador.

El método considera que en operación de estado estacionario, la corriente de fin de un periodo es la misma que la del inicio del siguiente. Entonces se hace un análisis estático con esa consideración. Se realiza además un análisis dinámico en el que se linealizan las corrientes respecto al punto de operación estático.

2.2.8. Modelado mediante variables complementarias

Es un método de modelado en el que se tratan a los circuitos conmutados como sistemas lineales, a los que se les añaden los diodos y los interruptores, que se modelan como ideales. Al realizar este modelo ideal de los interruptores, cada uno de ellos por definición se encuentra sometido, ya sea a voltaje cero, a corriente cero, o a ambos cero. Por esa razón, al par de variables voltaje-corriente $(i_i(t), v_i(t))$, puede llamarse “par complementario” [34]. Matemáticamente se tiene que si una de las variables complementarias es cero, la otra puede tomar valores típicamente positivos, por lo que se tiene:

$$0 \leq i_i(t) \perp v_i(t) \geq 0 \quad (2.1)$$

En donde $i_i(t) \perp v_i(t)$ implica que el producto $i_i(t) v_i(t)$ es cero en cualquier instante.

Si se consideran las restricciones de equilibrio de la forma (2.1) propias de los dispositivos de conmutación ideales, se obtiene un grupo de desigualdades, que en conjunto con las

ecuaciones diferenciales características de la parte lineal del convertidor, matemáticamente se llega a una formulación, que puede ser resuelta mediante técnicas relacionadas con el problema de complementariedad lineal (PCL). El PCL es un problema de optimización que puede ser resuelto mediante técnicas de programación lineal [35].

2.2.9. Modelado discreto promediado

Este método utiliza una mezcla del modelado promediado con el muestreo discreto para obtener un sistema promedio entre los diferentes estados de operación del convertidor [36], [37]. La descripción discreta de un sistema se emplea cuando se busca una linealización de estructura variable. Este enfoque es capaz de describir adecuadamente cualquier sistema no lineal multi estructura mediante un modelo de tiempo discreto; sin embargo, las expresiones obtenidas son complejas. Por otra parte, la técnica promedio realiza muchas simplificaciones que redundan en modelos más simples de manejar, aunque con una desventaja: la exactitud del modelo degenera rápidamente conforme la frecuencia de interés aproxima a un medio de la frecuencia de conmutación de los convertidores. Como en la mayoría de métodos promedio, se asumen interruptores ideales. Se parte del sistema de estructura variable

$$\begin{aligned}\dot{X} &= A_1X + B_1U \\ V_o &= C_1X\end{aligned}$$

cuando el interruptor principal se encuentra encendido, y

$$\begin{aligned}\dot{X} &= A_2X + B_2U \\ V_o &= C_2X\end{aligned}$$

cuando se encuentra apagado. En [37] Se puede revisar el procedimiento para obtener el modelo discreto

$$X = (dA_1 + d'A_2)X + (dB_1 + d'B_2)U$$

donde d es el ciclo de trabajo y d' es el complemento del ciclo de trabajo. En la figura 2.15 se muestra el modelo canónico de un convertidor, que bien puede ser Buck, Boost ó Buck-Boost.

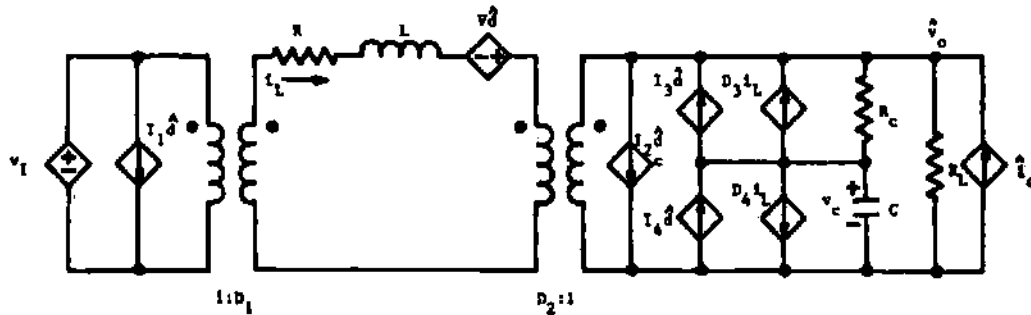


Figura 2.15: Modelo de circuito canónico discreto-promedio.

En la figura 2.15 se puede observar que la diferencia entre el modelo promedio y el modelo promedio discreto son las cuatro fuentes controladas adicionales I_3 , I_4 , D_3 y D_4 , usadas para modular a la resistencia en serie del capacitor. Los valores con el símbolo de intercalación $\hat{}$ indican cantidades de perturbación.

2.2.10. Modelado discreto de señal grande

En este método se emplea un análisis discreto para presentar los planos de fase de las variables del convertidor [4]. Después se obtiene un modelo de variables de estado, el cual se linealiza mediante una aproximación de Euler. El modelo obtenido permite realizar análisis en el rango de frecuencias (mucho) menores que la de conmutación. Al igual que en la mayoría de los métodos El método se basa en la localización de puntos de equilibrio en los que

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n$$

con estados discretos ligeramente perturbados \hat{x} , que mediante diferenciación de Euler hacia adelante es equivalente a

$$\dot{\hat{x}} = 0$$

en el caso continuo.

El método considera además no linealidades típicas en señal grande, tal como el efecto de la saturación. Si un punto de equilibrio cae en el área de no-saturación, se dice que es *real*, en cambio, si el punto de equilibrio cae en el área de saturación, se dice que es *virtual*. El método permite obtener ventajas respecto del modelado en señal pequeña, que si bien es muy efectivo ante variaciones pequeñas en el punto de operación estudiado, puede presentar serias deficiencias si las variaciones se hacen mayores.

2.2.11. Modelado de señal grande

Este método se basa en una formulación no lineal discreta para análisis de señal grande de convertidores conmutados [38]. El método parte de clasificar las variables de estado de acuerdo a su dinámica.

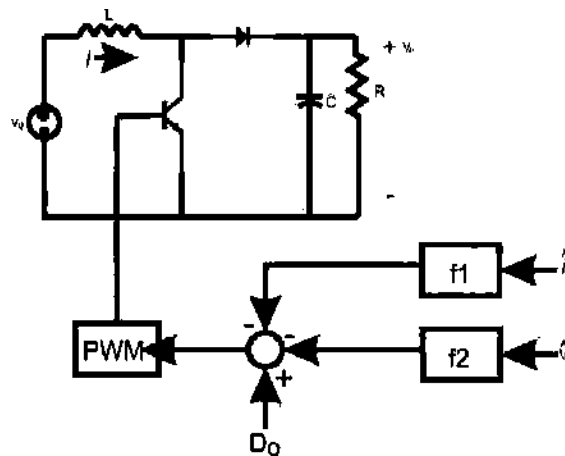


Figura 2.16: Convertidor Boost con realimentación lineal de estados

Se separan (matemáticamente) los estados lentos y los estados rápidos. Se resuelve

para los estados rápidos, considerando que los estados lentos se mantienen constantes durante las transiciones de conmutación. El método se basa en topología variable, ya que dependiendo del estado de los interruptores (considerados ideales), las ecuaciones descriptivas cambian. Se emplea un programa especializado para simular cada convertidor. El programa puede ser escrito mediante algún lenguaje de programación típico. Se plantea un esquema de control mediante retroalimentación lineal de los dos estados típicos de los convertidores: la corriente en el inductor y el voltaje a la salida, de acuerdo a como se muestra en la figura 2.16.

2.2.12. Modelado promedio de señal grande

En este método, la célula de conmutación básica es modelada por fuentes controladas [39]. El interruptor controlado se sustituye por una fuente de corriente, mientras que el interruptor no controlado se modela mediante una fuente de voltaje. Se obtiene así un circuito equivalente, con propiedades análogas al sistema original. El modelo sustituto se puede simular adecuadamente en algún solucionador numérico, como SPICE. Considérese por ejemplo, el convertidor Buck de la figura 2.17.

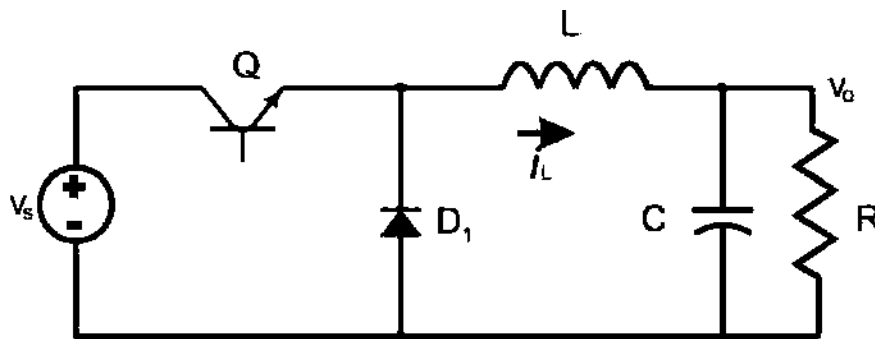


Figura 2.17: Convertidor Buck.

Al realizar las sustituciones mencionadas en el circuito de la figura 2.17, se obtiene el circuito equivalente de la figura 2.18, en la que α representa el ciclo de trabajo.

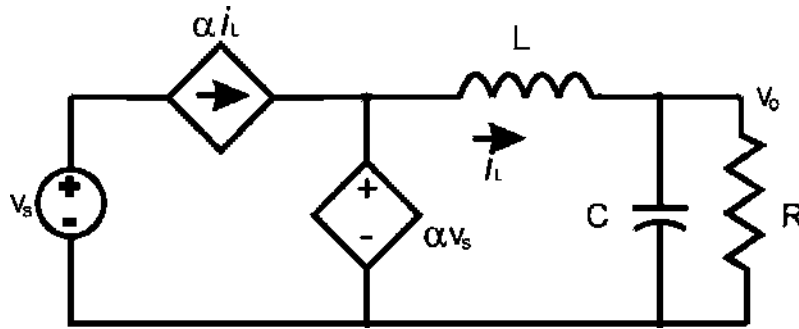


Figura 2.18: Circuito equivalente del circuito de la figura 2.17.

2.2.13. Modelado mediante función de transferencia de tiempo variable

En este método se aprovecha una técnica de promediado de frecuencias, basada en las funciones de tiempo variante de Zadeh y series de Fourier [40]. Al igual que en la mayoría de los métodos, se asumen interruptores ideales y estructura variable. Se parte de las ecuaciones de tiempo variable

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + b(t)V_g \\ y(t) &= c^T(t)x(t) + d(t)V_g\end{aligned}$$

donde A, b, c y d son constantes a tramos. La naturaleza de estructura variable queda expresada cuando se considera el i -ésimo modelo, correspondiente al i -ésimo subintervalo mediante

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_i x(t) + b_i V_g \\ y(t) &= c_i^T x(t) + d_i V_g\end{aligned}$$

El estado se aproxima mediante una componente de corriente directa $X(t)$ y una componente de perturbación de primer orden $\hat{x}(t)$ mediante

$$x(t) = X(t) + \hat{x}(t)$$

El método se basa en análisis de frecuencia, por lo que se debe transformar la función del tiempo al dominio de la frecuencia mediante una función $H(j\omega, t)$. Una vez transformada la función, se pueden realizar los análisis de frecuencia típicos.

2.2.14. Modelado con serie de Volterra

Las series de Volterra permiten tratar convertidores con control PWM, como el representado mediante el diagrama de bloques en la figura 2.19 [41].

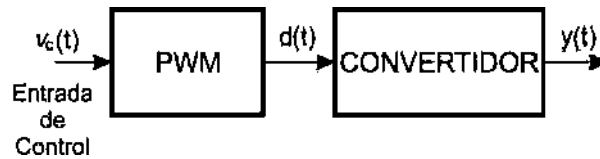


Figura 2.19: Convertidor conmutado.

El método se basa en la posibilidad de descomponer a la salida $y(t)$ como función de una entrada $u(t)$ mediante series de Volterra de la forma:

$$\begin{aligned}
 y(t) = & h_0 + \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) u(t - \tau) d\tau + \\
 & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\
 & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) u(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots
 \end{aligned}$$

en donde la función $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ es llamada el kernel de Volterra de n-ésimo orden. Por la naturaleza del método, el análisis principal se realiza en el dominio de la frecuencia.

2.2.15. Modelado con series de Fourier

Con este método, se modela un convertidor en términos de variables de estado y se discretiza [42]. Entonces se introducen ciclos de perturbación y de conmutación, obteniéndose

un modelo que es solucionado mediante series de Fourier. Si se considera un convertidor conmutado con dos entradas, una de control y otra de voltaje de línea, y una salida, el voltaje a controlar, entonces se puede expresar:

$$v_l = V_l + \hat{v}_l = V_l + v_{lm} \cos \omega t = V_l + v_{lm} \cos 2\pi ft$$

donde $v_l(t)$ es el voltaje de entrada (línea) del convertidor, V_l su valor de estado estacionario, y \hat{v}_l es una perturbación de pequeña señal. La componente fundamental de frecuencia f en el voltaje de salida es:

$$\hat{v} = v_{ml} \cos(2\pi ft + \varphi_l)$$

con amplitud v_{ml} y fase φ_l . La relación de entrada a salida en el dominio de la frecuencia, considerando entrada de control constante se da mediante

$$F_l(j\omega) = \frac{v_{ml} e^{j\varphi_l}}{v_{lm}} \quad (2.2)$$

De manera similar, ante la entrada de control se tiene:

$$v_c = V_c + \hat{v}_c = V_c + v_{cm} \cos \omega t = V_c + v_{cm} \cos 2\pi ft$$

con componente fundamental de frecuencia f en la salida:

$$\hat{v} = v_{mc} \cos(2\pi ft + \varphi_c)$$

con amplitud v_{mc} y fase φ_c . La relación de entrada a salida en el dominio de la frecuencia, considerando entrada de línea constante se da mediante:

$$F_c(j\omega) = \frac{v_{mc} e^{j\varphi_c}}{v_{cm}} \quad (2.3)$$

En general,

$$\begin{aligned} \hat{v} &= v_m \cos(\omega t + \varphi) \\ &\triangleq v_{m1} \cos \omega t + v_{m2} \sin \omega t \end{aligned}$$

donde v_m puede ser v_{ml} ó v_{mc} y φ puede ser φ_l ó φ_c . v_{m1} y v_{m2} se expresan mediante:

$$v_{m1} = \frac{2}{T_x} \int_0^{T_x} v(t) \cos \omega \tau d\tau$$

$$v_{m2} = \frac{2}{T_x} \int_0^{T_x} v(t) \sin \omega \tau d\tau$$

y con algunas manipulaciones trigonométricas se tiene que:

$$v_m e^{j\varphi} = \frac{2}{T_x} \int_0^{T_x} v(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

de donde los valores de v_m y φ se calculan mediante:

$$v_m = 2 \left| \frac{1}{T_x} \int_0^{T_x} v(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right|$$

$$\varphi = \arg \left\{ \frac{1}{T_x} \int_0^{T_x} v(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\}$$

En el método, las ecuaciones mostradas arriba se discretizan para adecuarlas a su implementación en un programa de computadora.

2.3. Modelado de sistemas conmutados en bond graph, enfoques actuales

Siendo el modelado en bond graph una técnica tan multidisciplinaria, evidentemente los sistemas en conmutación ya han sido abordados con este enfoque. Diversas metodologías se pueden encontrar en la literatura. En este capítulo se presentan algunos enfoques empleados en los bond graphs.

2.3.1. Modelado de estructura variable

De manera evidente, la selección más cómoda para analizar un sistema conmutado mediante bond graphs es también asumiendo el enfoque de estructura variable [43]. Este enfoque se basa en la utilización de interruptores modelados de manera ideal. El cambio

de estado de un interruptor provoca un cambio local de causalidad, que afecta a todo el bond graph. De esta manera, a cada modo se asocia un bond graph distinto, y por consiguiente, un conjunto de ecuaciones de estado y de restricciones propias. La solución suele realizarse de la manera típica, resolviendo cada modo y empleando las condiciones finales, como condiciones iniciales del modo siguiente.

2.3.2. Modelado mediante uniones de potencia conmutadas

En este esquema de modelado, presentado en [44] se hace uso de bond graphs con uniones-0 y uniones-1 *conmutadas*, que se pueden considerar como una generalización de las uniones-0 y uniones-1 estándar. Dicha generalización consiste en el caso de la unión-0, en que ésta puede aceptar más de un trazo causal adyacente, que impone el esfuerzo. En una unión-0 estándar, esto es imposible. La clave consiste en que en un determinado instante de tiempo, el esfuerzo es fijado sólo por uno de los bonds cuyo trazo causal es adyacente a la unión conmutada. El resto de los bonds con trazo causal adyacente, es considerado como de esfuerzo cero, en ese particular instante. En la figura 2.20 se observan los dos tipos de uniones de potencia conmutadas.

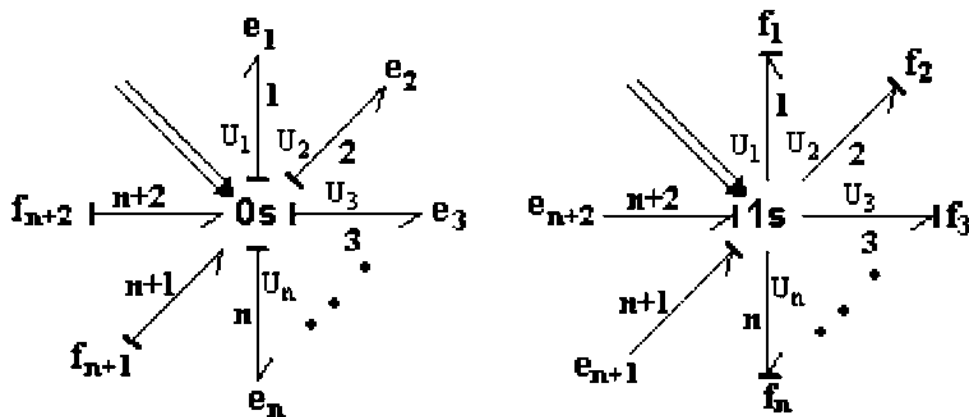


Figura 2.20: Unión-0 conmutada y unión-1 conmutada.

De manera análoga, la unión-1 conmutada permite el mismo tipo de "causalidad

flexible", aunque en términos reales, la física sigue siendo válida, pues la unión es sometida a un esquema de control tal que en cada instante de tiempo sólo uno de los bonds en aparente conflicto impone la variable dominante. El esquema de control de las uniones conmutadas suele implementarse en el mismo software en que se está modelando el sistema de interés.

2.3.3. Modelado mediante resistencia variable

Este esquema de modelado fue presentado en el contexto de los bond graphs en [45], aunque resulta evidente que puede emplearse en el análisis de circuitos eléctricos tradicional. El aspecto clave aquí consiste en modelar el dispositivo de conmutación mediante un resistor de magnitud variable. Para el estado de encendido del dispositivo el resistor toma un valor cercano a cero, mientras que para el estado de apagado, el resistor toma un valor elevado. La asignación de esos valores cambiantes se realiza típicamente en el programa de simulación en que se trata el sistema de interés. El método es útil al trabajar con modelos de sistemas lineales. En la figura 2.21 se muestra la representación de este enfoque.

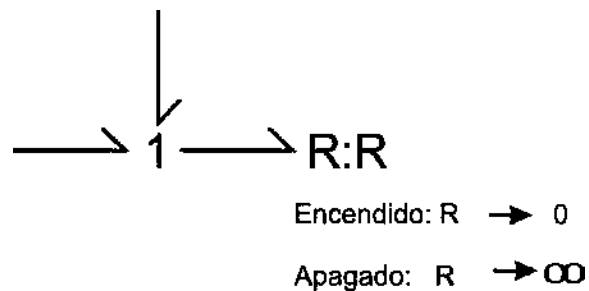


Figura 2.21: El enfoque de resistencia variable.

2.3.4. Modelado mediante transformador de módulo controlado

Otra forma empleada para modelar sistemas conmutados como bond graphs consiste en sustituir los interruptores con transformadores de módulo variable [46]. Con este enfoque, los interruptores son modelados como ideales, toda vez que el módulo del transformador suele ser cambiado entre 0 y 1, dependiendo de la lógica de control del sistema. Dicha lógica de control puede aplicarse tanto para interruptores conmutados a voluntad, externamente, como para los que conmutan de forma natural. Para estos últimos, el estado (módulo) del transformador se determina por las condiciones previas de voltaje y del propio módulo. El método permite tratar adecuadamente modelos de sistemas lineales. En la figura 2.22 se muestra la representación en bond graph para este enfoque.

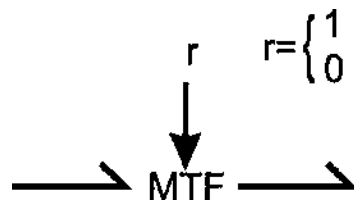


Figura 2.22: El enfoque de transformador con módulo controlado.

2.3.5. Modelado mediante fuentes nulas

Un enfoque muy utilizado para modelar los interruptores es su sustitución por una fuente nula [47], [48], [49], [50]. El tipo de la fuente depende del estado del interruptor. De esta manera, si el interruptor está abierto, se sustituye por una fuente de flujo, y si se encuentra cerrado, entonces se sustituye por una fuente de esfuerzo. Mediante este enfoque se obtienen las ventajas de simplicidad de análisis, ya que los sistemas equivalentes son lineales y se les pueden aplicar toda la gama de herramientas disponibles para los mismos. En la figura 2.23 se muestra la representación gráfica del enfoque.

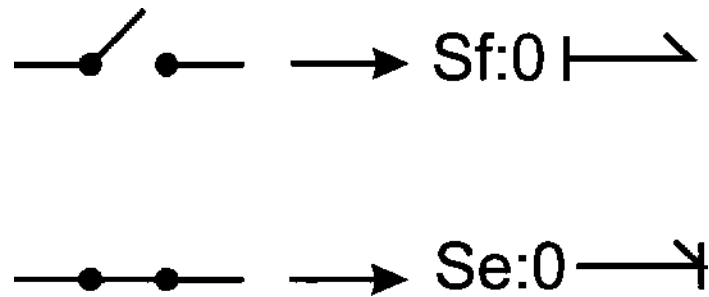


Figura 2.23: El enfoque de modelado de fuentes nulas.

2.3.6. Modelado promedio desde el bond graph

En este esquema de modelado, se obtiene un sistema promedio del convertidor, pero a diferencia de las metodologías clásicas, se hace uso de los bond graphs como herramienta de análisis [51]. Los bond graphs exhiben en esta metodología una de sus características más potentes: el análisis de causalidad. De hecho en [52] se desarrolla un modelo promedio incluyendo no linealidades típicas de los semiconductores reales, mediante los bond graphs, mostrando éstos una buena eficiencia para ese fin.

2.4. Antecedentes de modelado de sistemas conmutados mediante teoría de grafos

Los sistemas conmutados se han modelado también desde el enfoque de la teoría de grafos y los árboles. En las siguientes sub secciones se revisan algunas ideas al respecto existentes.

2.4.1. Matriz topológica principal

En [53] se considera -entre otros- al convertidor buck-boost de la figura 2.24

El grafo y un árbol del convertidor se muestran en la figura 2.25

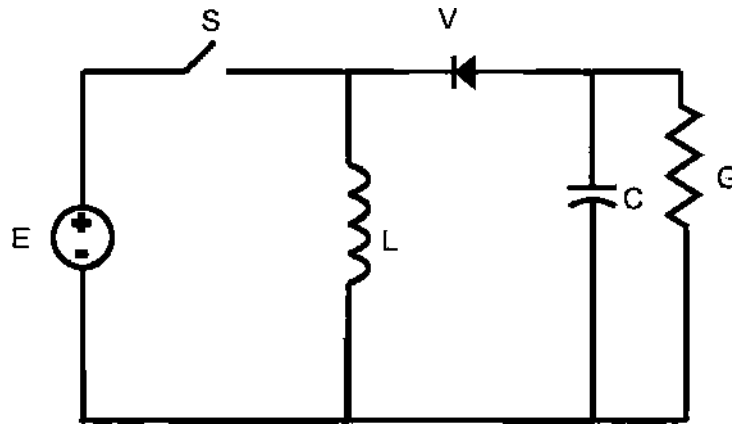


Figura 2.24: Convertidor Buck Boost.

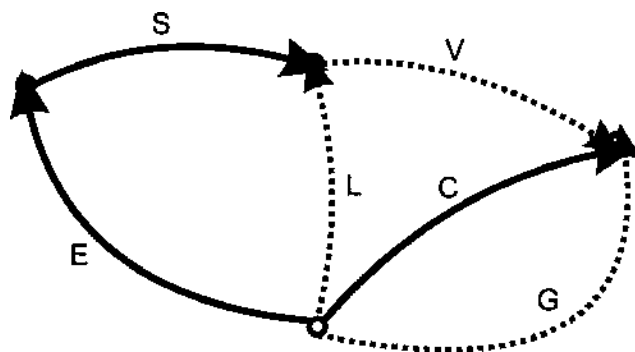


Figura 2.25: Arbol del convertidor Buck Boost.

El método se basa en el acomodo de lo que el autor denomina Matriz de nodos independientes, matriz de lazos independientes y matriz topológica principal. Para el árbol de la figura 2.25, la matriz de lazos independientes esta dada de acuerdo a:

L	V	G	S	C	E
1			1		1
	1		1	-1	1
		1		-1	

La matriz de nodos independientes se escribe como:

L	V	G	S	C	E
1	-1		1		
	1	1		1	
1	-1				1

La estructura de la matriz topológica principal se forma a partir de las otras dos matrices, girando la matriz de nodos independientes en sentido horario y haciéndola empatar con la matriz de lazos principales. De esta manera, la matriz topológica principal es:

	S	C	E	
L	1		1	1
V	1	1	1	2
G		1		3
	1	2	3	

En [53] se revisa como obtener la matriz topológica principal para diferentes tipos de convertidores, no solo de CD, sino de otros tipos, y la referencia se centra sólo en la generación de dicha matriz.

2.4.2. Identificación de redes conmutadas de orden cero

En [2] se aborda el problema de la corrección del factor de potencia para convertidores conmutados. Se propone un método para adecuar la entrada del convertidor a lo que el autor denomina impedancia de orden cero, que es una impedancia en donde el defasamiento de corriente respecto del voltaje no existe, con el consecuente factor de potencia unitario deseado. Para aplicar el método es necesario identificar cutsets y loopsets especiales en

los convertidores. En especial, se requiere que para que un convertidor tenga impedancia de entrada de orden cero, no existan loopsets fundamentales entre la fuente de entrada y la red R-C de salida. Esto se visualiza mejor en las siguientes figuras.

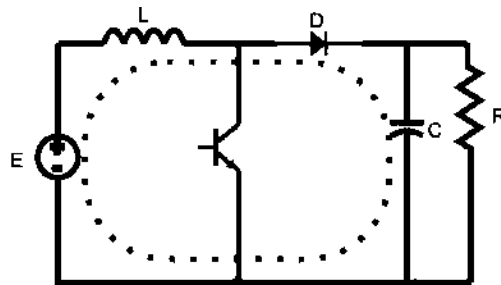


Figura 2.26: Convertidor Boost.

En la figura 2.26 se muestra un convertidor Boost y se observa que existe un loopset fundamental que pasa por la entrada y la salida en al menos un sub intervalo de conmutación. Por tanto, dicho convertidor no mantiene una impedancia de entrada de orden cero, de acuerdo al criterio explicado.

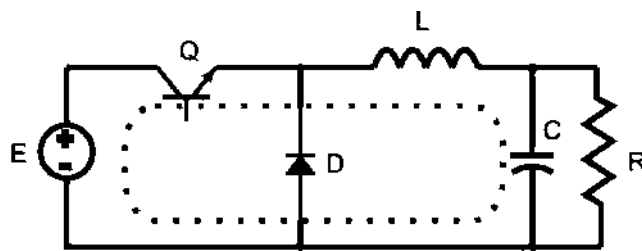


Figura 2.27: Convertidor Buck.

En la figura 2.27 se muestra un convertidor Boost, en el que se aprecia que también existe un loopset fundamental que pasa por la entrada y por la salida, lo que hace que el convertidor tenga una impedancia de entrada que no es de orden cero.

En la figura 2.28 se muestra un convertidor Buck-Boost, y se observa que no exhibe ningún loopset que involucre tanto a la entrada como a la salida.

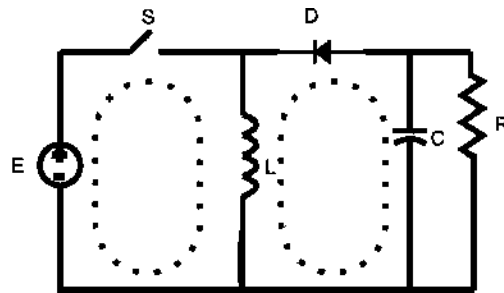


Figura 2.28: Convertidor Buck-Boost.

En [2] se revisa como realizar la corrección del factor de potencia en convertidores con impedancia de entrada de orden cero, y como modificar convertidores que no tienen dicha impedancia, para conseguir que la tengan, mediante la adición de diodos.

Los dos enfoques recién revisados constituyen aplicaciones de la teoría de grafos en los convertidores conmutados. En el primer enfoque se hace uso de los árboles para identificar una matriz topológica principal, cuya forma permite determinar el tipo de convertidor que se está manejando. El segundo enfoque hace uso del concepto de loopset para determinar la existencia de impedancias de entrada de orden cero, y así aplicar correcciones en el factor de potencia de cada convertidor.

2.5. Conclusiones

Después de revisar los diferentes enfoques con que se pueden abordar los sistemas conmutados, es de notar que son muchos los existentes. Existen enfoques simples que realizan el análisis dentro del terreno de los sistemas lineales, así como enfoques más complicados, que permiten analizar a los sistemas conmutados tanto en el dominio del tiempo como en el caso de la ecuación de estado de tiempo variable, así como en el dominio de la frecuencia, como en el caso de las series de Volterra y Fourier.

Se revisa también el enfoque de los sistemas conmutados abordados desde los bond graphs. Existen diversos enfoques que parten de los bond graphs y que permiten realizar

el análisis de los sistemas conmutados en ese dominio. Los bond graphs suelen ser herramientas relativamente simples, así que los enfoques con que se abordan los sistemas conmutados no resultan ser demasiado complejos. Ni las fuentes nulas, ni las resistencias variables, ni los transformadores de módulo cambiante revisten un esfuerzo excesivo por parte del analista para poder comprenderlos. La simplicidad es sin duda, una de las propiedades de los bond graphs que quizá le han ayudado a destacar como herramienta de análisis.

Capítulo 3

Arboles y Teoría de Grafos: una alternativa para tratar con elementos no lineales

3.1. Introducción

Las metodologías de análisis de Kirchhoff y las de mallas y nodos de Maxwell, son excelentes herramientas para determinar el conjunto de ecuaciones que rigen a un circuito eléctrico puramente resistivo, así como lo es la matriz de admitancias de nodo. Las metodologías de Maxwell de hecho, son también excelentes herramientas para determinar las ecuaciones de estado relativas a un circuito conteniendo elementos lineales almacenadores de energía. Ya en el territorio de los grafos, la matriz de incidencia nodo-rama es una herramienta que resulta excelente para modelar sistemas eléctricos lineales. Sin embargo, todas estas metodologías presentan problemas en mayor o menor grado cuando se trata de determinar el conjunto de ecuaciones que rigen a un circuito eléctrico que presenta cierto tipo de no-linealidades. En particular, determinar las ecuaciones de un circuito que contiene al menos un diodo, modelado con la ecuación de Shockley (A.3) puede ser

una tarea desafiante, tal como se comprobó de manera práctica en los primeros pasos que se dieron durante este trabajo de investigación. Tras ensayar con diferentes metodologías, como las revisadas en este capítulo, se encontró a la teoría de grafos y en particular a los árboles, como una de las metodologías mejor adecuadas para procesar matemáticamente los circuitos eléctricos de interés.

3.2. Modelado mediante técnicas elementales de análisis de circuitos

A fin de mostrar la problemática con algunas técnicas comunes de análisis de circuitos, considérese el circuito eléctrico de la figura.3.1.

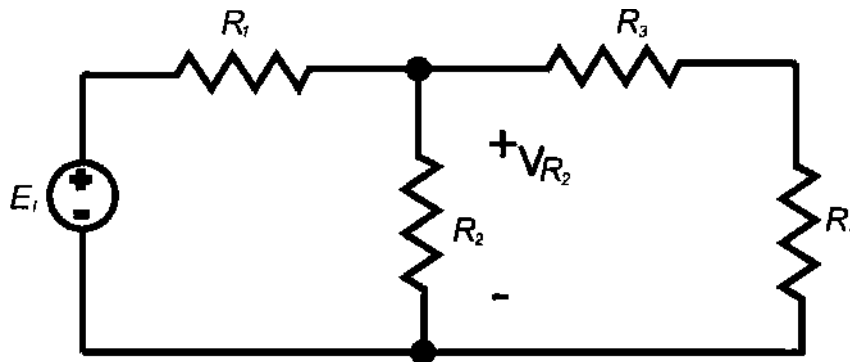


Figura 3.1: Circuito eléctrico puramente resistivo.

En la figura 3.1 se muestra un circuito eléctrico puramente resistivo. Aquí, los resistores están modelados de acuerdo la ley de Ohm (lineal). Si se realiza la reducción del circuito, las resistencias R_2 , R_3 y R_4 pueden ser sustituidas por una resistencia equivalente de valor

$$R_{EQ1} = \frac{R_2 (R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} \quad (3.1)$$

Ante esta consideración, si la variable de interés es el voltaje en R_2 , con polaridad positiva

en el extremo superior, al aplicar la regla de división de voltaje, el resultado es inmediato

$$V_{R_2} = \frac{E_i R_2 (R_3 + R_4)}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4)} \quad (3.2)$$

Ahora se analiza el circuito de la figura 3.1 mediante la técnica del análisis de nodos de Maxwell. En la figura 3.2, al circuito de la figura 3.1 se le han asignado los voltajes de

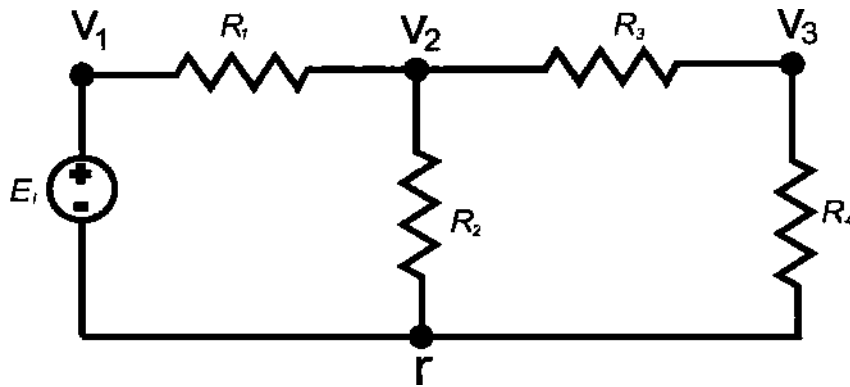


Figura 3.2: Circuito resistivo con numeración de nodos asignada.

nodo. La matriz de admitancias de nodo está dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} \\ 0 & \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

si se considera la respuesta forzada, el sistema completo se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} \\ 0 & \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Para resolver el sistema (3.4), se observa que $v_1 = E_i$, y la reducción de orden es inmediata, de acuerdo a:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} \\ \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{E_i}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Se resuelve el sistema (3.5) mediante la regla de Cramer, considerando el determinante del sistema como:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} \\ \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \end{vmatrix}$$

ó bien:

$$\Delta = \frac{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)}{R_1 R_2 R_3 R_4}$$

En este ejemplo, el voltaje de interés es el del resistor R_2 , es decir, v_2 , de modo que solo se calcula el determinante auxiliar Δ_2 , el cual está dado por:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\frac{E_i}{R_1} & \frac{1}{R_3} \\ 0 & -\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \frac{E_i(R_3 + R_4)}{R_1 R_3 R_4}$$

Continuando con la aplicación de la regla de Cramer, se tiene que el voltaje v_2 está dado por

$$v_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{E_i R_2 (R_3 + R_4)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_4}$$

que como era de esperarse, es el mismo (3.2).

Nota 1 Los dos enfoques recién vistos para obtener la expresión matemática de la variable de interés v_{R_2} son sumamente conocidos en el área de la teoría clásica de circuitos y no presentan mayor problema al tratar con elementos resistivos lineales. Pero, ¿qué ocurre al incorporar elementos no lineales?, por ejemplo, si se consideran resistores (diodos) cuya relación $V - I$ sea la relación de Shockley (A.3). En el caso de resistores lineales, al considerar la técnica de reducción de circuitos, esta permite calcular una resistencia equivalente en (3.1), basándose en la propiedad de que dos resistencias en serie pueden ser sustituidas por una resistencia cuyo valor es la suma de las dos resistencias originales. Además, dos resistencias en paralelo pueden ser sustituidas por una resistencia cuyo valor es igual al producto de las originales, dividido por la suma de ambas. Pero, ¿cuál es la resistencia equivalente de una resistencia lineal en serie ó en paralelo con una resistencia

modelada mediante (A.3)? Mediante la metodología de reducción de circuitos no es posible determinar esos valores, y por lo tanto no es posible reducir el circuito, lo que impide llegar a una representación matemática sencilla. Ahora bien, ¿que ocurre con la metodología del análisis de nodos?. La matriz de admitancias de nodo (3.3) se puede formar gracias nuevamente a que los elementos resistivos son lineales, y a que las relaciones de voltajes y corrientes obedecen a la ley de Ohm. Sin embargo, al incluir elementos resistivos con la relación no lineal (A.3), no es posible obtener una representación matricial de la forma (3.3), y por lo tanto tampoco se puede llegar a una representación matemática satisfactoria con este enfoque.

3.3. Modelado mediante grafos y árboles

Considérese ahora nuevamente el circuito de la figura 3.1. La resistencia R_3 es un diodo con la relación (A.4). Por las razones ya mencionadas, no es posible establecer las representaciones matemáticas (ecuaciones) mediante las dos técnicas revisadas con anterioridad. Se realizará entonces el procedimiento de obtener las ecuaciones mediante otra metodología: los árboles y el análisis generalizado de nodos.

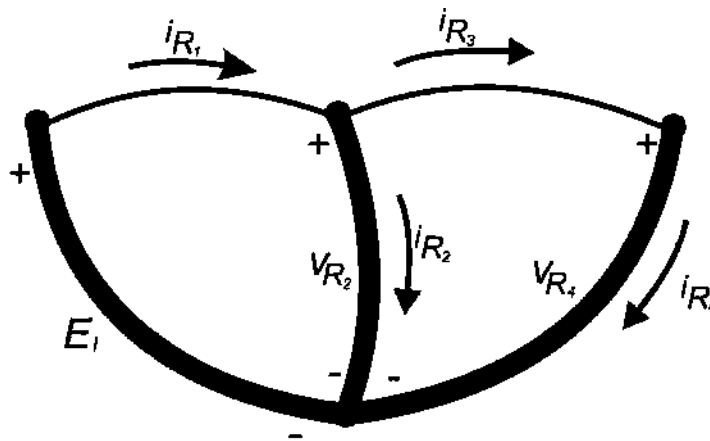


Figura 3.3: Grafo lineal del circuito de la figura 3.1.

En la figura 3.3, se ha dibujado un grafo del circuito de la figura 3.1. Un posible árbol se ha delineado en la forma acostumbrada de dibujar las ramas con líneas más gruesas. Considerando los voltajes en las ramas del árbol, se observa que dos de ellas son incógnitas (los voltajes en R_2 y R_4). Además, si se considera un análisis generalizado de nodos, se observa que el grafo tiene 4 nodos, aunque la fuente de voltaje constituye un super nodo, por lo que el número de nodos a considerar es $n = 3$. El análisis generalizado de nodos permite anticipar que al aplicar la Ley de Corrientes de Kirchhoff en $n - 1$ nodos, es decir, en 2 nodos, se obtendrán las dos ecuaciones (las únicas necesarias) para resolver el sistema completo. En la figura 3.4 se muestra el mismo grafo de la figura 3.3, en donde se han

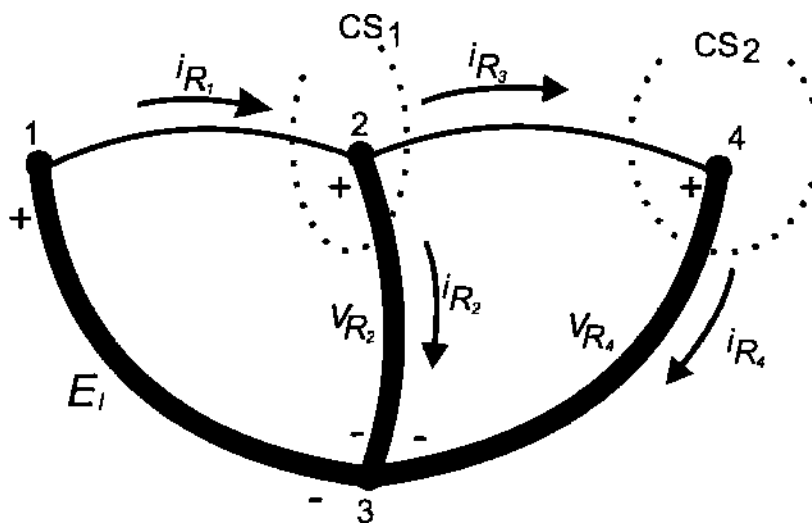


Figura 3.4: Árbol y dos cutsets seleccionados.

enumerado los nodos. Se muestran también los cutsets fundamentales que se emplean para la aplicación de la Ley de Corrientes de Kirchhoff. Para aplicar matemáticamente el análisis generalizado de nodos, las corrientes de eslabón se escriben en función de las ramas del árbol de acuerdo a:

$$i_{R_1} = \frac{1}{R_1} E_i - \frac{1}{R_1} v_{R_2} \quad (3.6)$$

e

$$i_{R_3} = \frac{1}{R_3}v_{R_2} - \frac{1}{R_3}v_{R_4} \quad (3.7)$$

Si se aplica la Ley de corrientes de kirchhoff en el cutset CS_1 , se tiene:

$$i_{R_1} - i_{R_2} - i_{R_3} = 0 \quad (3.8)$$

Ahora bien, en este caso en particular, la corriente i_{R_2} puede escribirse como función del voltaje en su propia rama, obedeciendo a la ley de Ohm si el resistor R_2 es lineal, de acuerdo a

$$i_{R_2} = \frac{1}{R_2}v_{R_2} \quad (3.9)$$

de modo que sustituyendo (3.6), (3.7) y (3.9) en (3.8), se tiene:

$$\frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1R_2R_3}v_{R_2} - \frac{1}{R_3}v_{R_4} = \frac{1}{R_1}E_i$$

que como era de esperarse, resulta ser la misma primera ecuación del sistema (3.5). Nótese una de las ventajas del método de árboles: se ha omitido la reducción de orden, llegando en un sólo paso a esta ecuación que forma parte del conjunto mínimo necesario. La otra ecuación se obtiene realizando un análisis en el cutset CS_2 , de acuerdo a:

$$i_{R_3} - i_{R_4} = 0 \quad (3.10)$$

En este caso se puede escribir la corriente en R_4 como función de su propio voltaje de rama, de acuerdo a:

$$i_{R_4} = \frac{1}{R_4}v_{R_4} \quad (3.11)$$

entonces, sustituyendo (3.7) y (3.11) en (3.10), se tiene:

$$\frac{1}{R_3}v_{R_2} - \frac{R_3 + R_4}{R_3R_4}v_{R_4} = 0 \quad (3.12)$$

que coincide con la segunda ecuación del sistema reducido (3.5). Evidentemente la solución del sistema llevará al mismo resultado del método previamente analizado.

Ahora bien, si se revisa la nota 1, se habla de la dificultad ó imposibilidad de los métodos anteriores para modelar matemáticamente sistemas que contengan elementos no

lineales, y en particular, los descritos mediante (A.3), pero, ¿qué ocurre con este método de los árboles?. Considérese nuevamente la figura 3.4 y supóngase que el elemento R_1 es un diodo, representado matemáticamente mediante (A.3), con el ánodo conectado al nodo 1 y el cátodo conectado al nodo 2, según se muestra en la figura 3.5.

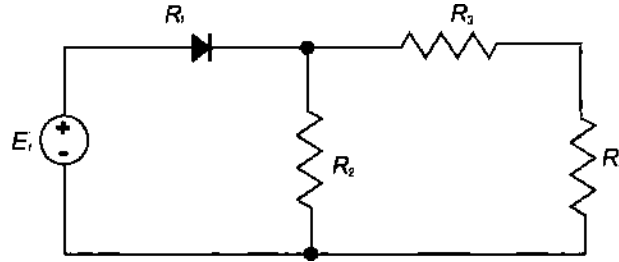


Figura 3.5: Circuito puramente resistivo conteniendo un resistor no lineal (diodo).

Mediante un análisis generalizado de nodos, si se aplica la ley de corrientes de Kirchhoff en el cutset CS_1 de la figura 3.4 se tiene:

$$i_{R_1} - i_{R_2} - i_{R_3} = 0$$

las corrientes i_{R_2} e i_{R_3} se escriben de acuerdo a (3.9) y (3.7), respectivamente, pero ¿qué ocurre con i_{R_1} ?. La respuesta es simple, se escribe directamente mediante (A.3), de acuerdo a:

$$i_{R_1} = I_S (e^{\Lambda v_{R_1}} - 1) \quad (3.13)$$

El voltaje v_{R_1} se calcula como función de los voltajes de rama del árbol como

$$v_{R_1} = E_i - v_{R_2}$$

por lo que (3.13) puede escribirse como:

$$i_{R_1} = I_S \left(e^{\Lambda(E_i - v_{R_2})} - 1 \right)$$

y la ecuación del cutset CS_1 está dada por

$$I_S \left(e^{\Lambda(E_i - v_{R_2})} - 1 \right) - \frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3} v_{R_2} - \frac{1}{R_3} v_{R_4} = 0 \quad (3.14)$$

Un análisis sobre el cutset CS_2 permite establecer la Ley de corrientes de Kirchhoff de acuerdo a (3.10). Al no estar involucrada la corriente del diodo, las demás variables quedan de la misma manera que en el caso lineal y la ecuación de cutset es la misma (3.12). Si se despeja v_{R_4} de (3.12), se tiene:

$$v_{R_4} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} v_{R_2} \quad (3.15)$$

sustituyendo (3.15) en (3.14) se obtiene la ecuación final, dada por:

$$I_S \left(e^{\Lambda(E_i - v_{R_2})} - 1 \right) - \frac{(R_2 + R_3)(R_3 + R_4) + R_2 R_4}{R_2 R_3 (R_3 + R_4)} v_{R_2} = 0 \quad (3.16)$$

La ecuación (3.16) es una función implícita (no lineal) de una sola variable, que a su vez es el modelo matemático simplificado del circuito del la figura 3.5. Evidentemente, se trata de una ecuación no lineal, que presenta sus propias dificultades para solucionar y simular. Sin embargo, el propósito del desarrollo recién expuesto, es mostrar como la metodología de grafos permite tratar con elementos no lineales a la hora de determinar el modelo matemático.

3.4. Conclusiones

Después de revisar algunas técnicas elementales de análisis de para modelar circuitos que contengan elementos con una relación $v - i$ no lineal, se encuentra que presentan dificultades para la obtención de la ecuación de estado. Por otra parte, se encuentra que la teoría de árboles permite el manejo adecuado de esos dispositivos con relación $v - i$ no lineales, obteniéndose la ecuación de estado sin mayor problema, pese a la existencia de dichas relaciones no lineales. La teoría de árboles es una buena opción para obtener el modelo matemático de circuitos que contienen elementos con relaciones $v - i$ no lineales. Sin embargo, este trabajo de investigación está encaminado a figurar en el terreno de los bond graphs, ¿cómo se pueden mezclar estas metodologías?. En el siguiente capítulo se presenta un nuevo enfoque que aborda esta interrogante.

Capítulo 4

Identificación de un árbol en un bond graph

4.1. Introducción

En este punto es conveniente resaltar algunos conceptos importantes:

- 1.- En capítulos posteriores se verá que la ecuación no lineal de Shockley (A.3) puede ser empleada en el modelado no sólo del diodo, sino de varios dispositivos de conmutación de electrónica de potencia.
- 2.- La teoría de grafos y los árboles son uno de los métodos más adecuados, para el manejo de circuitos eléctricos, conteniendo diodos (y otros elementos no lineales) modelados por su relación $v - i$ no lineal, en particular en el caso del diodo, esto permite el uso de la ecuación de Shockley.
- 3.- Dada la gran versatilidad y potencial de los bond graphs, es de interés manejar en este campo alternativas distintas para modelar a los circuitos eléctricos con elementos de conmutación.

¿Cómo es posible aplicar la metodología de la teoría de grafos y los árboles en un bond graph?. La respuesta ilustrada en las siguientes secciones, constituye uno de los principales resultados obtenidos en el presente trabajo de investigación.

4.2. El criterio de adyacencia

Considérese la conexión serie de tres elementos de circuito, tal como aparece en la figura 4.1.

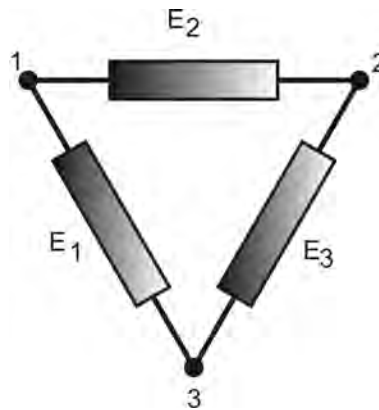


Figura 4.1: Un sencillo circuito con tres elementos en serie.

En la figura 4.2 aparece uno de los tres posibles árboles para el circuito de la figura 4.1.

Se han establecido las polaridades de los voltajes, así como los sentidos de flujo de las corrientes. La relación del voltaje del eslabón e_2 como combinación de los voltajes de rama e_1 y e_3 está dado por:

$$e_2 = -e_1 - e_3 \quad (4.1)$$

Si en el circuito de la figura 4.1 se considera al nodo 3 como nodo de referencia, empleando el método de construcción de un bond graph a partir del circuito [43], y realizando las simplificaciones posibles, se obtiene el bond graph de la figura 4.3.

La causalidad está debidamente asignada. Realizando un análisis correspondiente a la unión 1, se tiene que en el bond cuyo trazo causal apunta hacia el elemento X_2 el esfuerzo está dado por:

$$e_2 = -e_1 - e_3 \quad (4.2)$$

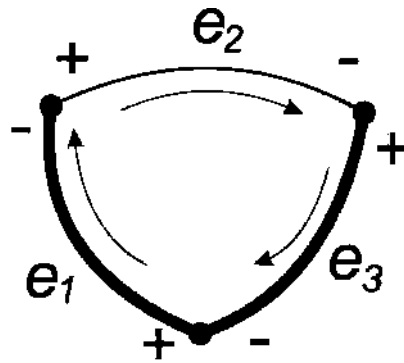


Figura 4.2: Un árbol posible del circuito de la figura 4.1.

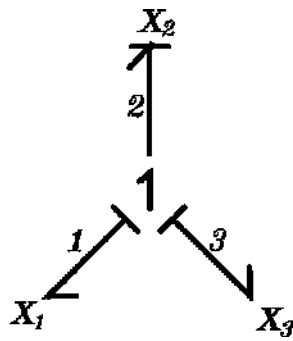


Figura 4.3: Bond graph equivalente al modelo de la figura 4.2.

Es de resaltar que (4.1) y (4.2) son exactamente iguales. Más aún, en la figura 4.4, se muestran los otros dos posibles árboles en conjunto con los otros dos modos posibles de asignación de causalidad.

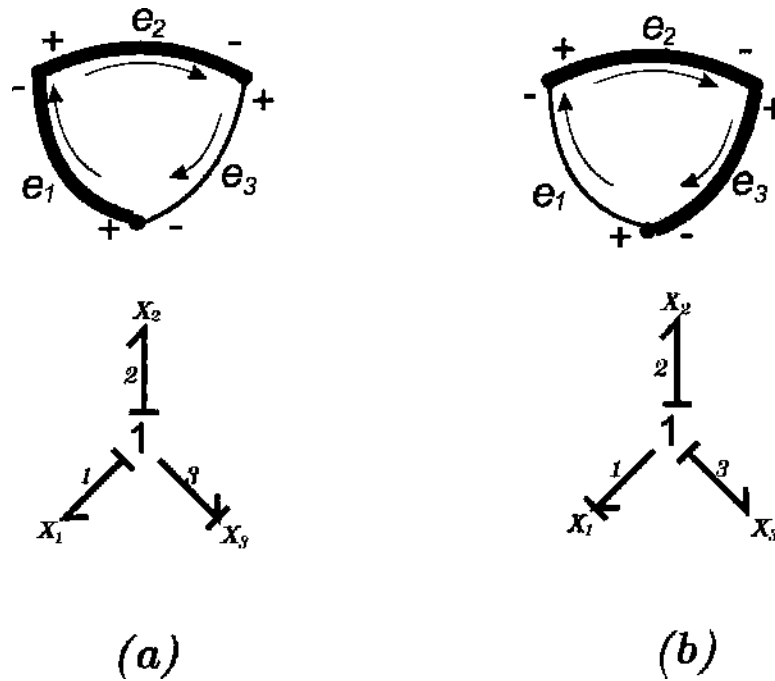


Figura 4.4: Los otros dos posibles árboles del circuito de la figura 4.1, junto con los respectivos bond graphs.

En ambos casos es notable la equivalencia del voltaje de eslabón, escrito como función de los voltajes de rama y el esfuerzo en el bond cuyo trazo causal apunta hacia el elemento (en dirección opuesta a la unión), de acuerdo a

$$e_3 = -e_2 - e_1$$

para el caso (a), y a

$$e_1 = -e_3 - e_2$$

para el caso (b).

Se puede percibir que existe una relación entre el acomodo del árbol en el grafo y el acomodo de los trazos causales en el bond graph. En la figura 4.5 se observan los

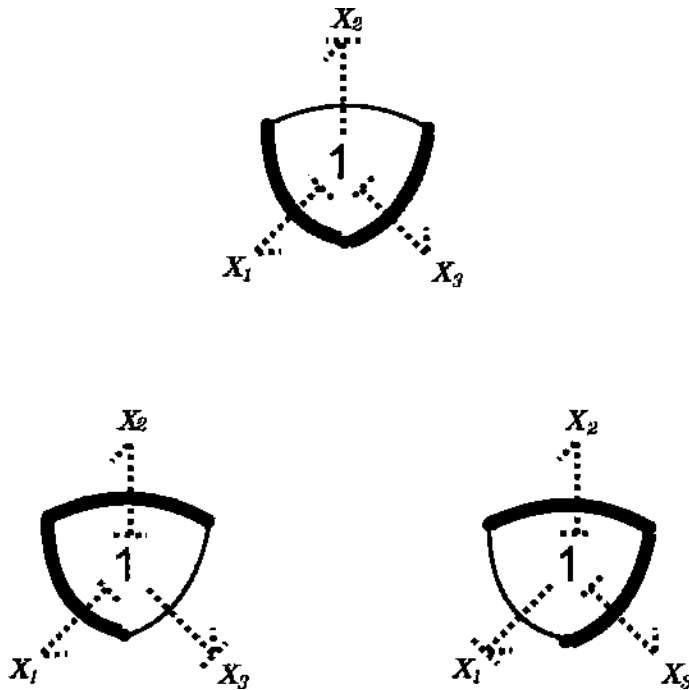


Figura 4.5: El criterio de adyacencia ilustrado: Los tres posibles árboles del circuito de la figura 4.1 y los respectivos bond graphs sobrepuestos.

tres posibles árboles y los bond graphs equivalentes, acomodados convenientemente para hacer notar la analogía.

En una conexión en serie, sólo un elemento puede ser eslabón, y de manera equivalente, sólo un bond puede tener el trazo causal orientado en dirección opuesta a la unión en el bond graph respectivo.

El caso de la conexión en paralelo resulta menos evidente, sin embargo, también existe una equivalencia similar. Considérese el circuito de la figura 4.6.

En la figura 4.7 se muestran los 3 árboles posibles para la conexión en paralelo, junto con los respectivos bond graphs con causalidad asignada. Los bond graphs fueron construídos considerando el nodo 2 de la figura 4.6 como nodo de referencia y realizando las simplificaciones posibles.

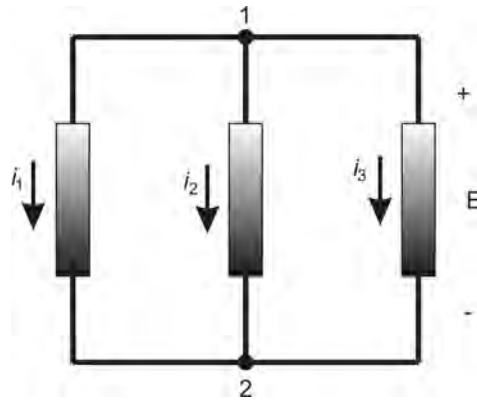


Figura 4.6: Tres elementos de circuito conectados en paralelo.

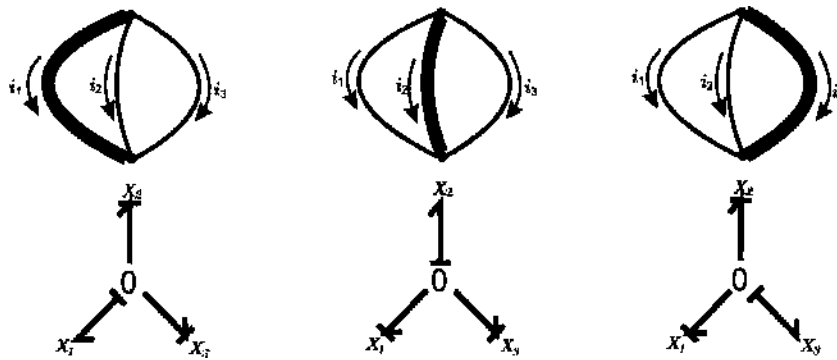


Figura 4.7: Los tres posibles árboles de una conexión en paralelo, junto con los bond graphs respectivos.

En la figura 4.7, las relaciones de corrientes son, en el mismo orden, como:

$$i_1 = -i_2 - i_3 \quad (4.3)$$

$$i_2 = -i_1 - i_3 \quad (4.4)$$

$$i_3 = -i_1 - i_2 \quad (4.5)$$

Las relaciones de los flujos en los respectivos bond graphs son las mismas que en (4.3), (4.4) y (4.5), pero considerando flujos f en lugar de corrientes i . En una conexión en paralelo, sólo un elemento del circuito puede ser rama del árbol, y de manera equivalente, sólo un bond puede tener orientado el trazo causal hacia la unión en el bond graph respectivo. Es posible generalizar estas propiedades a circuitos mixtos, es decir, que contengan conexiones en serie y en paralelo, tal como ocurre en cualquier circuito de aplicación real. Existe así una evidente relación entre un árbol y un bond graph con causalidad completa. Los siguientes conceptos permiten establecer formalmente esta relación.

Existen dos tipos de bonds, de acuerdo a su ubicación en el bond graph. Se dice que los bonds son *internos*, si sólo sirven para conectar uniones 0 y/o 1, sin tocar elementos externos de puerto-1 [43]. Por otra parte, si los bonds tocan uniones y elementos externos de puerto-1 de los campos de almacenamiento, disipativo, y/o fuentes, entonces se dice que esos bonds son *externos*.

Una vez que se recuerdan los conceptos, se pueden establecer las siguientes definiciones:

Definición 1 *Un bond externo con causalidad asignada, cuyo trazo causal se encuentra orientado hacia la unión, se dice ser adyacente a la unión ó unión-adyacente.*

Definición 2 *Un bond externo con causalidad asignada, cuyo trazo causal se encuentra orientado hacia el elemento, se dice ser adyacente al elemento ó elemento-adyacente.*

Ya que se han definido los conceptos previos, es posible establecer el criterio de adyacencia, que permite identificar un árbol en un bond graph.

Criterio 1 *En un modelo en bond graph, con causalidad completa asignada, cada elemento de puerto-1, cuyo trazo causal es unión-adyacente, determina una rama del árbol*

respectivo, que se obtendría al modelar el mismo sistema mediante grafos. Además, cada elemento de puerto-1, cuyo trazo causal es elemento-adyacente determina un eslabón del coárbol respectivo. El conjunto de todos los elementos de puerto-1 que satisfacen estas propiedades permite formar un modelo completo árbol-coárbol.

Este criterio es básico en la metodología seguida para derivar las ecuaciones (modelos matemáticos) de los sistemas de interés. Sin embargo, identificar un árbol en un bond graph es sólo un primer paso, es necesario además, poder deducir las ecuaciones de manera similar a como se deducen en un grafo cuyo árbol ha sido identificado. Para ello se hace uso de otro resultado obtenido, el cual es expuesto en la siguiente sección. En el apéndice B se resumen las definiciones básicas de teoría de árboles que son empleadas en la siguiente sección. Una revisión más completa de grafos se puede realizar en [19].

4.3. La relación entre cutsets, loopsets y las trayectorias causales

Los conceptos de grafos que se utilizan en esta sección se resumen en el apéndice B. En [19] se puede realizar una consulta bastante completa sobre el tema.

El criterio de adyacencia permite identificar un árbol en un bond graph. Por otra parte, en un grafo en el que algún árbol ha sido plenamente identificado, la deducción del conjunto -mínimo- de ecuaciones se puede realizar mediante el análisis generalizado de nodos, aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff en los $a - b - 1$ cutsets fundamentales, considerando un grafo con a nodos y b supernodos. Además, para obtener ecuaciones de estado en términos de voltajes de inductor, se aplica la ley de voltajes de Kirchhoff en cada loopset fundamental del que el inductor en cuestión sea un eslabón. ¿Qué relación existe entre los cutsets fundamentales, los loopsets fundamentales y un bond graph?. La respuesta recae en una de las características más importantes de los bond graphs: las Trayectorias Causales.

Aquí es necesario recordar dos propiedades encontradas en la teoría de árboles, que si bien son obvias, se hacen necesarias en la metodología que esta siendo presentada.

Propiedad 1 *Un cutset fundamental por definición, “corta” solamente a una rama del árbol y a c eslabones del coárbol.*

Mientras que, de manera análoga,

Propiedad 2 *Un loopset fundamental “pasa por” solamente un eslabón y d ramas del árbol.*

La propiedad 1 habla de un importante aspecto, que manejado a conveniencia, puede facilitar el camino en el bond graph. Se corta una sola rama del árbol en cada cutset fundamental. En total se cortan $a - b - 1$ ramas del árbol, de hecho, esas ramas nunca corresponden a fuentes de voltaje, puesto que éstas suponen un supernodo. Entonces en el bond graph se pueden identificar las $a - b - 1$ ramas (elementos de puerto-1), que son todas aquellas que no son fuentes de esfuerzo, a fin de aplicar el análisis generalizado de nodos.

En un bond graph cuyo árbol se ha identificado mediante el criterio de adyacencia, es natural esperar, por la orientación de los trazos causales, que existan algunas trayectorias causales directas entre elementos en el árbol y en el coárbol, más aún, existe una equivalencia directa entre el número de esas trayectorias causales y los números c y d de las Propiedades 1 y 2. El siguiente grupo de proposiciones supone que se ha empleado el criterio de adyacencia para establecer el árbol en el bond graph.

Proposición 1 *Dado un bond graph B y un grafo G , ambos modelos del mismo sistema, si se selecciona un árbol A_G y un coárbol C_G en G . Entonces, se puede seleccionar un conjunto de bonds como árbol A_B y otro conjunto de bonds como coárbol C_B en B , de modo tal que exista una correspondencia uno a uno en los elementos de $A_G \cup C_G$ y $A_B \cup C_B$.*

Proposición 2 *Dado un bond graph B y un grafo G , ambos modelos del mismo sistema, con árboles y coárboles A_B, C_B y A_G, C_G , respectivamente, si el cutset fundamental CS_i corta a la rama i en A_G , entonces existe una relación uno a uno de esta rama con el elemento de árbol de puerto-1 e_i en A_B*

Proposición 3 *Dado un bond graph B y un grafo G , ambos modelos del mismo sistema, con árboles y coárboles A_B, C_B y A_G, C_G , respectivamente, si el cutset fundamental CS_i corta a la rama i y a c eslabones en G , entonces el elemento de árbol de puerto-1 e_i en A_B sostendrá trayectorias causales directas con al menos c elementos de coárbol de puerto-1 en C_B .*

Proposición 4 *Dado un bond graph B y un grafo G , ambos modelos del mismo sistema, con árboles y coárboles A_B, C_B y A_G, C_G , respectivamente, si el loopset fundamental LS_j pasa por el eslabón j y por d ramas del árbol en G , entonces el elemento de coárbol de puerto-1 e_j en C_B sostendrá trayectorias causales directas con al menos d elementos de árbol de puerto 1 en A_B .*

Las proposiciones expuestas constituyen el fundamento de la metodología empleada para determinar los modelos matemáticos de modelos en bond graph, utilizando el enfoque de la teoría de árboles. En la siguiente sección se desarrolla el procedimiento que permite realizar tales acciones.

4.4. Procedimiento para determinar los modelos matemáticos

Esta sección está dedicada a la presentación de uno de los principales resultados del presente trabajo de investigación. El siguiente procedimiento permite formular las ecuaciones que matemáticamente describen a un sistema dado, ya sean ecuaciones algebraicas, ecuaciones diferenciales ó ecuaciones álgebra-diferenciales. Para este fin, se parte del bond

graph del sistema en cuestión y se explota la metodología de los árboles mediante los criterios expuestos en la sección anterior.

Procedimiento 1 *Determinación de modelos matemáticos.*

1. Dado un bond graph acausal, asignar causalidad (preferida integral) correcta y completa.
2. Determinar las ramas del árbol y los eslabones del coárbol, de acuerdo al criterio de adyacencia.
3. Seleccionar el conjunto EPA de todos los esfuerzos de fuentes de esfuerzo y elementos capacitivos como variables de esfuerzo principales de árbol $\{epa_h\}$. Si existen elementos resistivos en el árbol, seleccionar el conjunto EAA de todos los esfuerzos respectivos como variables de esfuerzo auxiliares de árbol $\{eaa_i\}$.
4. Seleccionar el conjunto FC de todos los flujos en las fuentes de flujo y elementos inductivos en el coárbol como variables de flujo clave $\{fc_j\}$. Si existen elementos resistivos en el coárbol, seleccionar el conjunto FN de todos esos flujos como variables de flujo no clave $\{fn_k\}$.
5. Formar ecuaciones auxiliares, por medio de la correspondiente relación constitutiva, escribir cada fn_k como función de todos los elementos de EPA y EAA con los que mantiene trayectorias causales directas.
6. Por medio de la correspondiente relación constitutiva, escribir cada eaa_i como una función de todas las variables de FC (o de FN) con las que mantiene trayectorias causales directas. Ver nota 2.
7. Escribir la ecuación de estado determinando cada flujo de variable capacitiva en el árbol como una función de los flujos en el coárbol con los que mantiene una trayectoria causal directa. Y determinando cada esfuerzo de variable inductiva en el coárbol

como una función de los esfuerzos en el árbol con los que mantiene una trayectoria causal directa. Finalmente escribir las ecuaciones de estado/algebraicas mediante la relación constitutiva de cada elemento (capacitivo e inductivo)/(resistivo perteneciente a EAA), respectivamente.

Nota 2 *En el paso 6, si existen solamente trayectorias causales directas entre elementos de EAA y de FC , entonces en las ecuaciones finales no aparecerán variables de EAA , ya que mediante manipulación matemática se pueden sustituir. Pero si existen trayectorias causales directas entre variables de EAA y de FN , entonces surge un problema conocido como lazos algebraicos. Los lazos algebraicos pueden ser tratados en sistemas lineales, a fin de despejar las variables de interés en el sistema final de ecuaciones. En el caso de sistemas no lineales, con la metodología presentada se puede derivar directamente un sistema de ecuaciones algebraicas implícitas (cuando solo hay elementos resistivos) ó algebro-diferenciales (cuando hay elementos dinámicos).*

4.5. Conclusiones

Se ha conseguido proponer una nueva metodología que permite aplicar las ventajas del análisis de árboles en un modelo descrito como un bond graph. Para ello se hace uso de una de las características más importantes de los bond graphs: la causalidad. Las trayectorias causales permiten identificar las relaciones que existen entre elementos pertenecientes al árbol y al coárbol y finalmente encontrar las ecuaciones descriptivas del sistema, tal y como ocurre en la teoría de árboles sola.

El procedimiento propuesto permite manipular adecuadamente los sistemas estudiados en el presente trabajo de investigación, los cuales son sistemas electrónicos cuyo dispositivo de conmutación está basado en el modelo del diodo de Shockley, descrito por (A.3). El modelo de Shockley permite además ser la base para los modelos de otros dispositivos de conmutación aparte del propio diodo, tal como se describe en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Otros dispositivos de conmutación electrónicos

5.1. Introducción

El universo de los dispositivos electrónicos de conmutación es bastante amplio hoy día y se habla de una gran variedad de tipos y subtipos. Mediante la ecuación de Shockley, se pueden modelar, al menos otros tres dispositivos de conmutación. La relación exponencial $v - i$ no lineal de la ecuación le confiere una naturaleza de estructura única al modelo completo, por lo que los otros dispositivos que se basen en esa relación, también tendrán dicha naturaleza invariante.

Se propone un modelo de tiristor representado mediante diodos que no ha sido reportado en la literatura hasta donde ha sido posible investigar. Este modelo se deduce y se presenta en este mismo capítulo.

El primer dispositivo que se puede modelar empleando la relación de Shockley es el transistor de unión bipolar (BJT de sus siglas en inglés). El estudio de este dispositivo se realiza en la siguiente sección.

5.2. Transistor bipolar

Para modelar el BJT utilizando la ecuación de Shockley como base, se puede utilizar el modelo de Ebers-moll [59]. El modelo completo fue desarrollado por Ebers y Moll en 1954, y es denominado también como el “modelo de diodos acoplados”. En la figura 5.1 se observa el modelo Ebers-Moll para un BJT NPN.

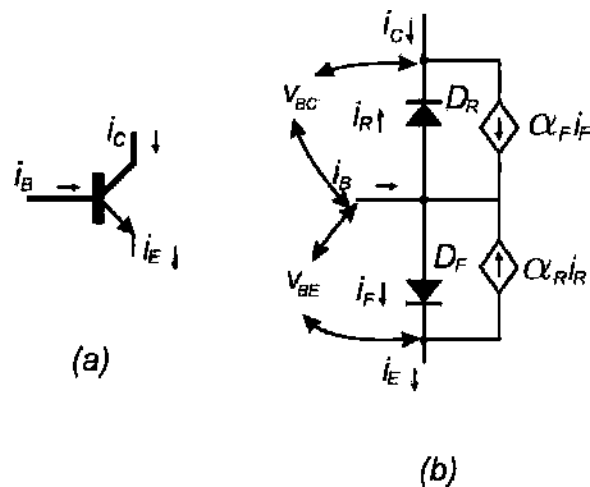


Figura 5.1: Modelo Ebers-Moll de un BJT

En la figura 5.1 i_F e i_R son las corrientes directa e inversa, que circulan por los diodos D_F y D_R , respectivamente. Tanto i_F como i_R se modelan mediante (A.3), como funciones de los voltajes V_{BE} y V_{BC} , respectivamente. Por la configuración del arreglo, i_F genera una corriente $\alpha_F i_F$ e i_R genera una corriente $\alpha_R i_R$. En un BJT típico en operación normal, el valor de i_R suele ser muy pequeño, de manera tal que se le puede despreciar. Si α_R se asume cero, el modelo simplificado de la figura 5.2 puede ser considerado.

En la figura 5.2 (a) se observa un BJT NPN, y en (b) se observa el respectivo modelo Ebers-Moll simplificado, en donde α_F está relacionada a la ganancia de corriente directa β mediante

$$\alpha_F = \frac{\beta}{\beta + 1}$$

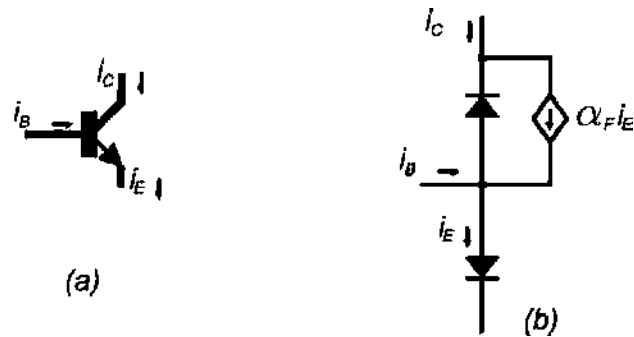


Figura 5.2: Modelo simplificado de Ebers-Moll de un transistor NPN.

El modelo simplificado de la figura (5.2) es el que se emplea en este trabajo de investigación. En la figura 5.3 aparece el bond graph que permite modelar el mismo sistema.

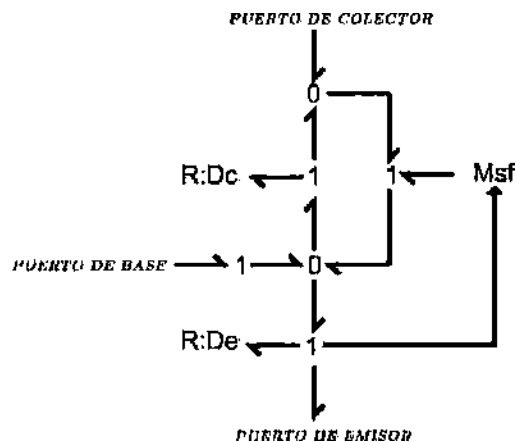


Figura 5.3: Bond graph del modelo Ebers-Moll simplificado del BJT NPN.

El bond graph de la figura 5.3 es empleado en este trabajo de investigación como modelo del dispositivo de conmutación de un convertidor Buck. El diodo, descrito mediante la ecuación (A.3) permite el modelado del BJT mediante la construcción de Ebers-Moll. Sin embargo, más dispositivos pueden ser descritos con la misma base. Otro de estos dispositivos puede ser el tiristor, el cual se modela en la siguiente sección bajo un enfoque que es nuevo.

5.3. Tiristor

El tiristor ó rectificador controlado de silicio (SCR de sus siglas en inglés) es un dispositivo semiconductor formado por tres uniones pn dispuestas de acuerdo a la figura 5.4.

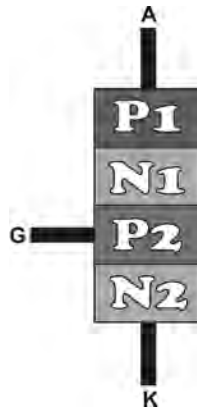


Figura 5.4: Disposición de uniones pn en un tiristor.

El tiristor puede ser modelado mediante dos BJT acoplados de acuerdo a la figura 5.5 [60].

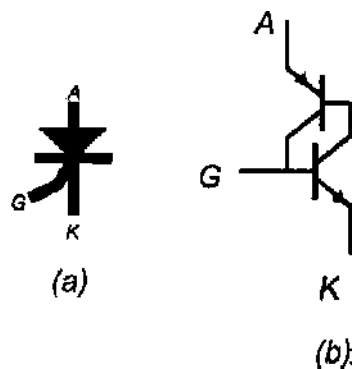


Figura 5.5: El símbolo de un tiristor y su representación mediante dos BJT.

Si se usan los modelos simplificados de Ebers-Moll de la figura 5.6 en el modelo de la figura 5.5 (b), se obtiene el modelo de la figura 5.7.

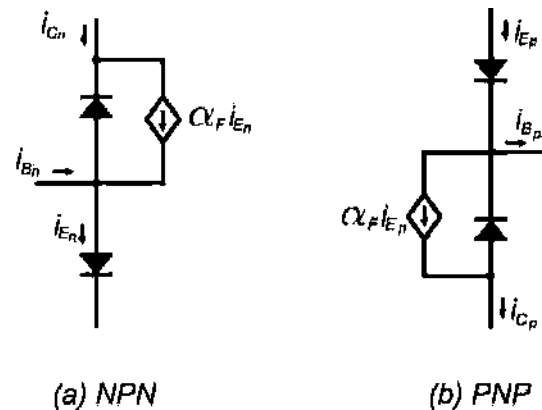


Figura 5.6: Modelos simplificados de Ebers-Moll para los dos tipos de BJT.

Si en la figura 5.7 se sustituyen los dos diodos centrales en paralelo por uno solo, se obtiene el modelo de la figura 5.8.

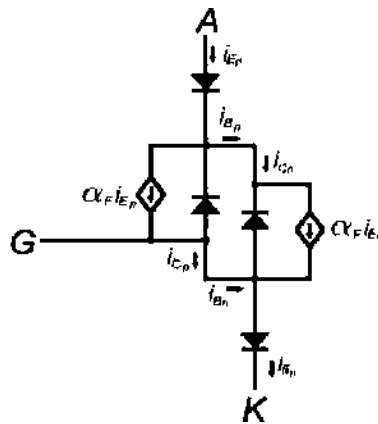


Figura 5.7: Tiristor formado con dos equivalentes simplificados Ebers-Moll de BJT.

Este modelo permite deducir las ecuaciones matemáticas mediante la metodología propuesta.

En el capítulo siguiente se desarrolla una aplicación que involucra el modelo de la figura 5.8, el cual no se ha reportado con anterioridad.

El modelo de la figura 5.8 puede ser también representado como un bond graph. En

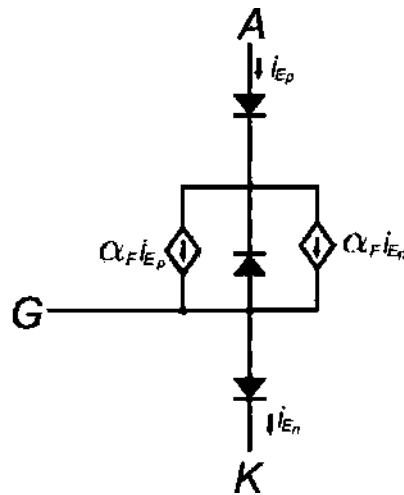


Figura 5.8: Modelo del tiristor basado en diodos semiconductores.

la figura 5.9 se muestra este bond graph.

Esta representación del tiristor por medio de diodos no se ha visto en la literatura previa, hasta donde ha sido posible investigar. Esta representación además posee buenas características en tiempo de simulación, y para muestra de ello a continuación se realiza una comparación mediante PSPICE del desempeño de un tiristor convencional (2N5061) con el modelo propuesto.

5.3.1. Comparativo del modelo de Tiristor propuesto contra un tiristor convencional

Las simulaciones de esta parte se realizan en PSPICE.

En la figura 5.10 se muestra un rectificador controlado de media onda, basado en un tiristor 2N5061. El Tiristor de la figura 5.10 aparece en el catálogo de componentes del simulador.

El circuito de la figura 5.10 se simula en PSPICE obteniéndose las curvas de la figura 5.11.

En la figura 5.12 se muestra el circuito rectificador, en el que el dispositivo de con-

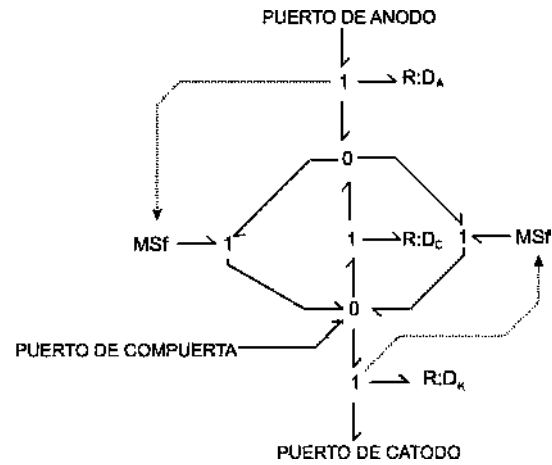


Figura 5.9: Bond graph de un tiristor modelado mediante diodos y fuentes controladas.

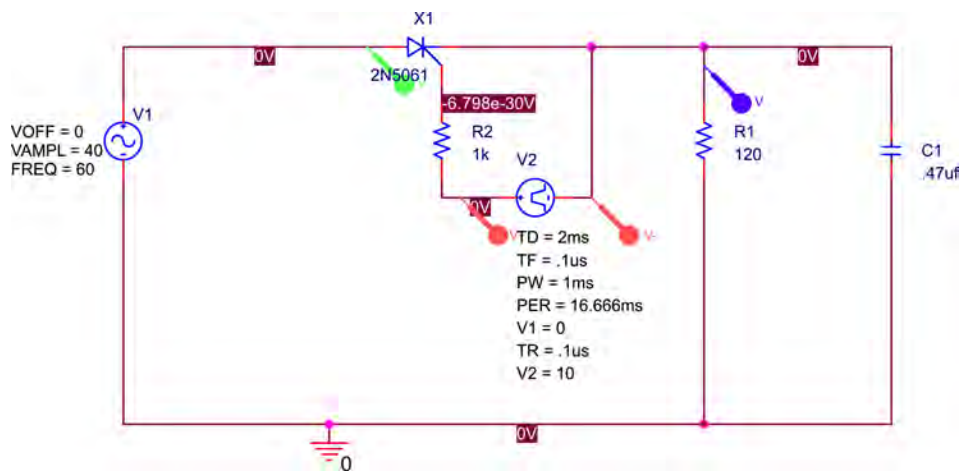


Figura 5.10: Circuito rectificador controlado de media onda a simular en PSPICE.

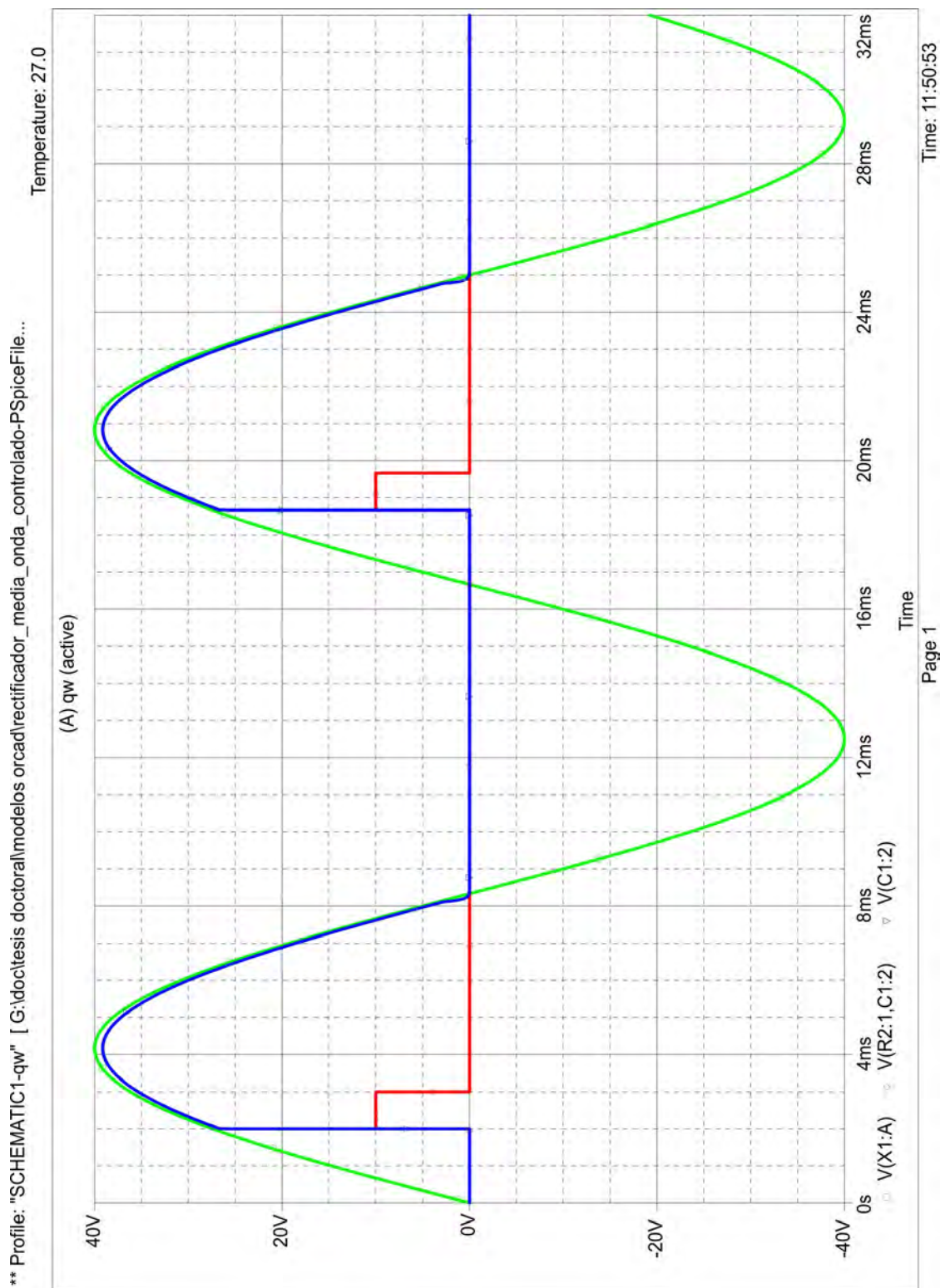


Figura 5.11: Curvas de salida del rectificador de media onda controlado.

mutación se sustituye por el modelo propuesto.

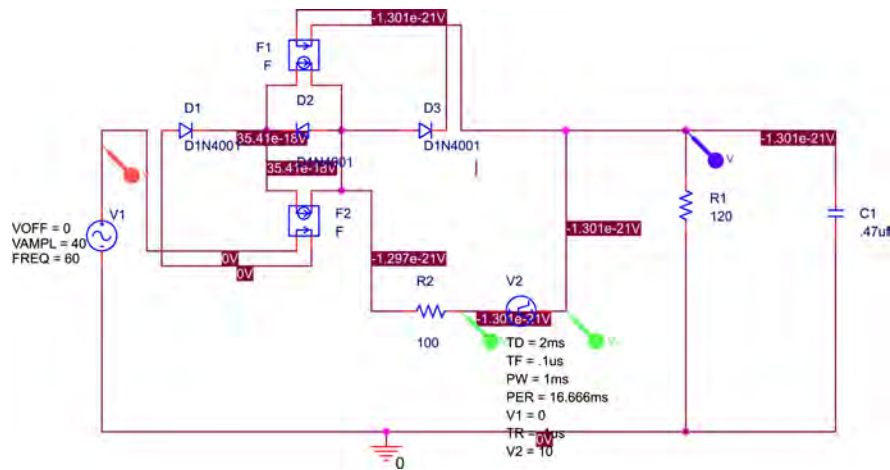


Figura 5.12: Rectificador controlado de media onda, con tiristor modelado mediante el esquema propuesto.

En la figura 5.13 se muestran las curvas de voltaje del circuito de la figura 5.12 modelado en PSPICE.

Las curvas de la figura 5.13 muestran un desempeño adecuado del modelo, ya que (comparado con el 2N5061) la diferencia en la evolución de las curvas es prácticamente imperceptible, por lo que se puede concluir que el modelo sugerido es una buena propuesta.

En la siguiente sección se aborda otro dispositivo de conmutación que puede ser modelado con la base del diodo semiconductor y su relación $v - i$. Este otro dispositivo se puede derivar del tiristor de una manera relativamente sencilla. El dispositivo es el TRIAC.

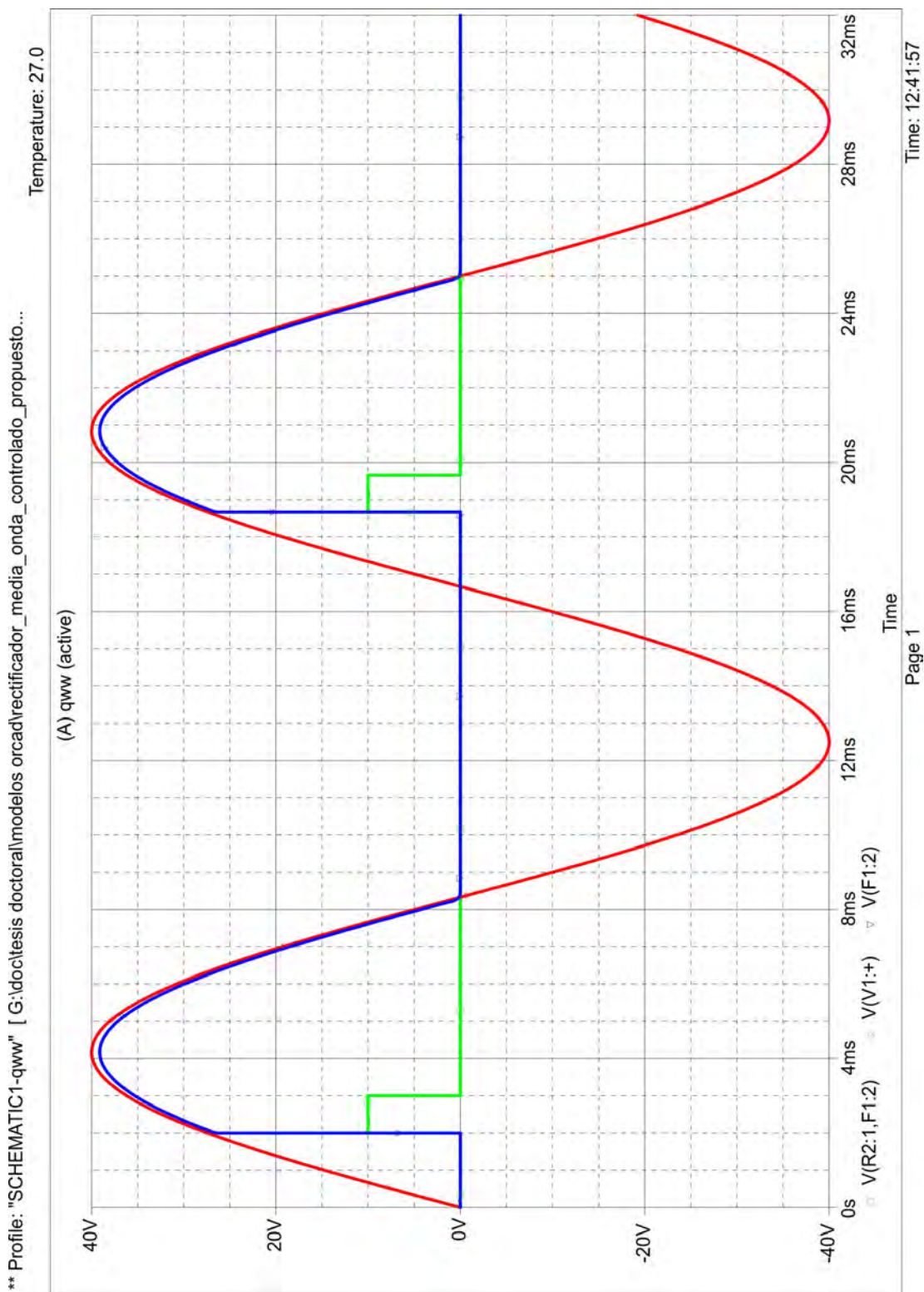


Figura 5.13: Curvas de voltajes del rectificador de media onda controlado, obtenidas mediante simulación en PSPICE.

5.4. Triac

El triodo de corriente alterna (TRIAC de sus siglas en inglés) es otro dispositivo semiconductor utilizado en sistemas de conmutación electrónicos.



Figura 5.14: El símbolo de un triac.

El triac puede ser considerado como un arreglo de dos tiristores en antiparalelo, compartiendo la misma compuerta, como se muestra en la figura 5.15.

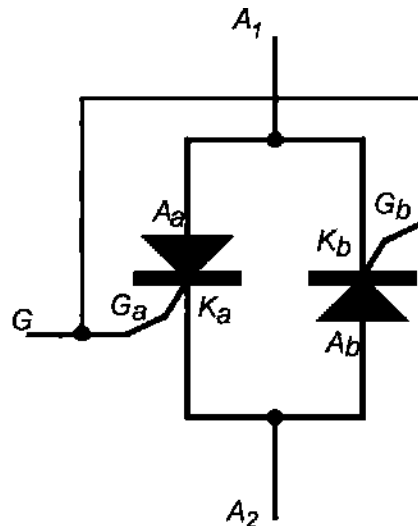


Figura 5.15: Un Triac modelado mediante dos tiristores en antiparalelo.

Se puede considerar el mismo modelo de tiristor basado en diodos..

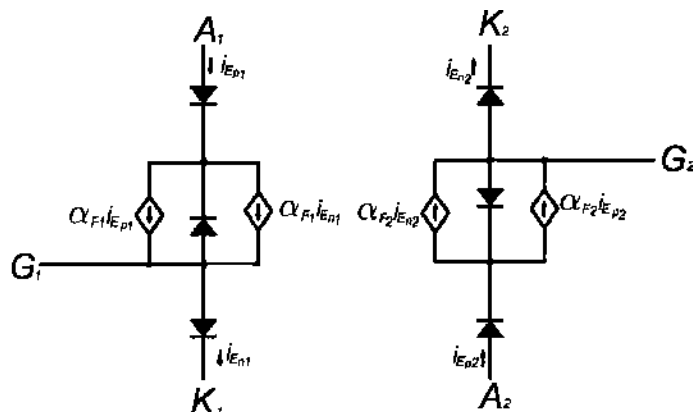


Figura 5.16: Dos tiristores modelados con diodos y fuentes de corriente controladas.

En la figura 5.16 se observan dos tiristores modelados de acuerdo a la descripción utilizada en la sección previa. Si se realiza el acoplamiento en antiparalelo, se obtiene el modelo de la figura 5.17.

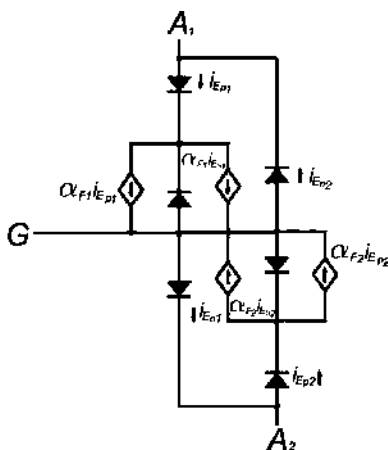


Figura 5.17: Triac modelado mediante diodos y fuentes de corriente controladas.

Al construir el bond graph del modelo de la figura 5.17, se obtiene el modelo de la figura 5.18.

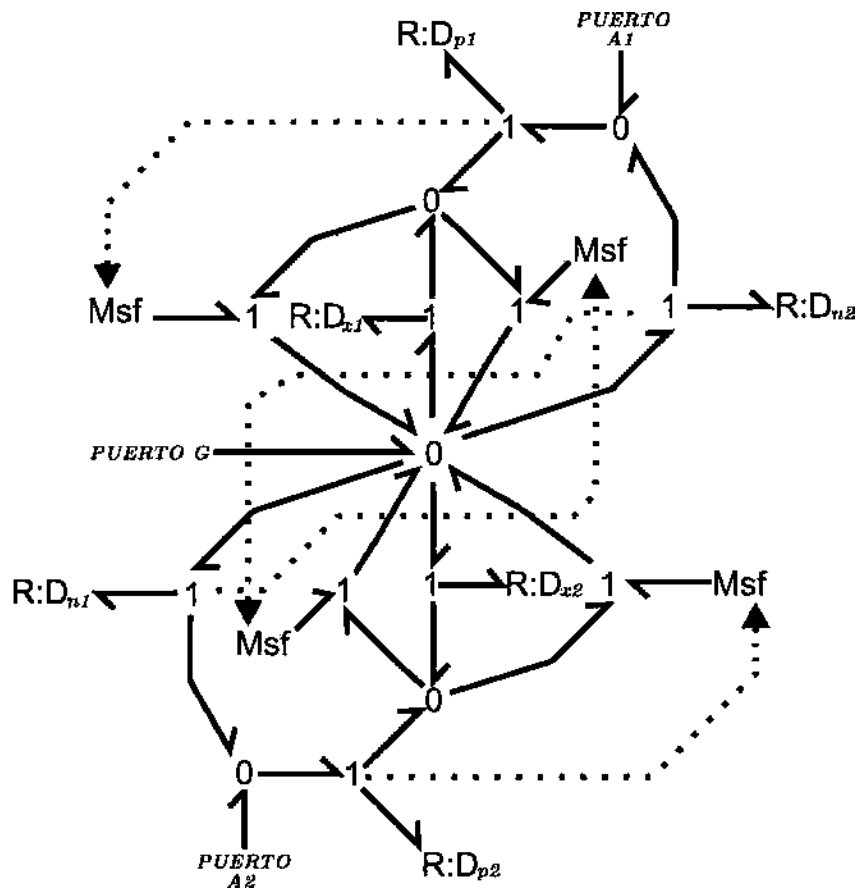


Figura 5.18: Bond graph de un triac modelado con diodos y fuentes controladas.

5.5. Conclusiones

Se ha visto de manera gráfica como se pueden representar algunos dispositivos de conmutación controlados mediante diodos, que a su vez son representados mediante la relación $v - i$ de Shockley. Esta representación presenta la ventaja de la estructura invariante, en la que el circuito bajo análisis mantiene la misma forma durante todo el periodo de simulación. Entre los dispositivos que se pueden representar mediante diodos se puede destacar al modelo del tiristor propuesto en este trabajo de investigación y que por si solo puede representar una contribución interesante.

Capítulo 6

Ejemplos de aplicación

6.1. Introducción

Se ha propuesto una nueva metodología para obtener ecuaciones descriptivas de un circuito que se ha formulado como un bond graph y al que se le aplican las técnicas de análisis de los grafos y los árboles. También se han representado varios dispositivos de conmutación mediante diodos con la relación $v - i$ no lineal de Shockley.

En este capítulo se ponen a prueba algunos modelos mediante la metodología explicada en el capítulo 4. Los sistemas se estudian de acuerdo al nivel de complejidad, comenzando con el más simple.

6.2. Circuito elemental

A fin de ilustrar la aplicación de la metodología descrita en el capítulo 5, considérese el circuito mostrado en la figura 6.1.

En la figura 6.2 se dibuja el grafo y el único posible árbol normal del circuito de la figura 6.1.

En la figura 6.3 se muestra el bond graph del circuito.

Una vez disponible el bond graph, el procedimiento 1 (P1) del capítulo 4 requiere en

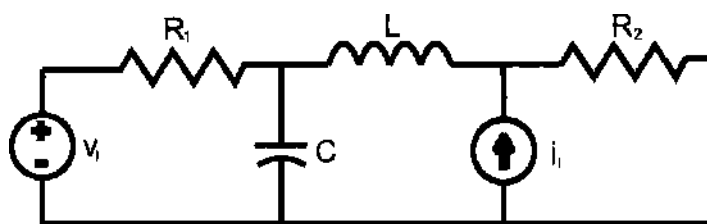


Figura 6.1: Un circuito elemental.

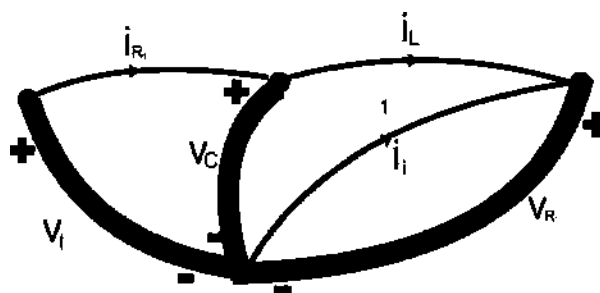


Figura 6.2: Un árbol del circuito de la figura 6.1.

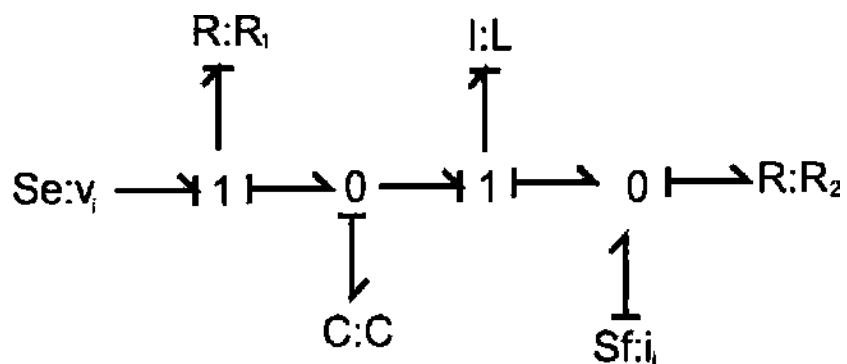


Figura 6.3: Bond graph del circuito de la figura 6.1.

su primer paso que se asigne causalidad integral preferida. El bond graph de la figura 6.3 ya tiene causalidad integral completa. El paso 2 de P1 implica aplicar el criterio de adyacencia para determinar ramas de árbol y eslabones de coárbol en el bond graph.

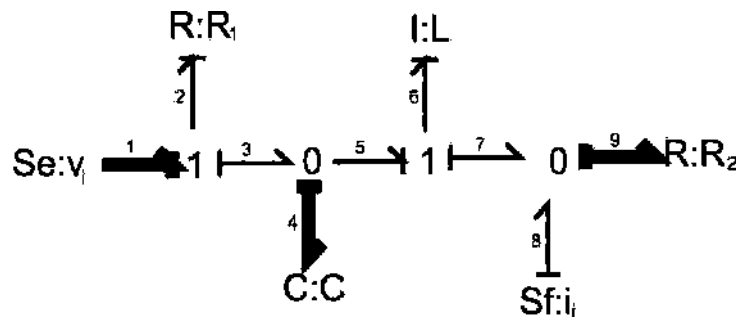


Figura 6.4: Bond graph con bonds de árbol engrosados.

En la figura 6.4 se muestra el bond graph al que ya se le ha aplicado el criterio de adyacencia, y al cual se le han trazado los bonds externos pertenecientes al árbol intencionalmente más gruesos. Este trazo más grueso se realiza también en el resto de los ejemplos de aplicación de este documento. En la misma figura 6.4 además, los bonds se han enumerado para efectos de análisis. El paso 3 de P1 solicita seleccionar los esfuerzos de árbol, tanto principales como auxiliares. En la figura 6.4 se observa que los esfuerzos principales de árbol son e_1 y e_4 . Existe también un esfuerzo auxiliar que es e_9 . El paso 4 de P1 pide seleccionar las variables de flujo clave y flujo no clave. De la figura 6.4 se observa que f_6 y f_8 son flujos clave, mientras que f_2 es flujo no clave. Una vez identificados los flujos, el paso 5 de P1 pide escribir los f_{n_k} como función de elementos en EPA y EAA a través de la relación constitutiva. En la figura 6.4 se observa que el bond 2, correspondiente al elemento R_1 mantiene trayectorias causales directas con el bond 1, correspondiente a v_i y con el bond 4, correspondiente a C . Un análisis de estas trayectorias causales permite escribir el esfuerzo en el bond 2 como:

$$e_2 = e_1 - e_4$$

Ahora bien, la relación constitutiva de R_1 está descrita de acuerdo a

$$f_2 = \frac{1}{R_1} e_2$$

por lo que

$$f_2 = \frac{1}{R_1} (e_1 - e_4) \quad (6.1)$$

El paso 6 de P1 requiere escribir cada variable ea_i como función de variables en FC . De acuerdo a la nota 2 relacionada con P1, en el bond graph de la figura 6.4 no existen trayectorias causales directas desde la única variable en EAA (e_9) hacia variables en FN , por lo que no se esperan lazos algebraicos. Sí existen, sin embargo, trayectorias causales directas hacia las variables de FC f_6 y f_8 . El flujo en el bond 9 se puede escribir como

$$f_9 = f_6 + f_8$$

y mediante la relación constitutiva de R_2

$$e_9 = R_2 f_9$$

se tiene:

$$e_9 = R_2 (f_6 + f_8) \quad (6.2)$$

El sistema es lineal y contiene dos elementos almacenadores de energía linealmente independientes (situación que se puede asegurar debido a que el bond graph aceptó causalidad integral completa), de modo que se espera un sistema de dos ecuaciones de estado. Continuando con el paso 7 de P1, se considera primero al capacitor. Se puede observar en la figura 6.4 que el bond 4 de la variable capacitiva (en el árbol) mantiene trayectorias causales directas con el bond 2 y con el bond 6 (ambos en el coárbol). El flujo en el capacitor se puede escribir entonces como:

$$f_4 = f_2 - f_6$$

y si se aplica la relación constitutiva del capacitor

$$\dot{e}_4 = \frac{1}{C} f_4$$

entonces se puede escribir

$$\dot{e}_4 = \frac{1}{C} (f_2 - f_6) \quad (6.3)$$

Recordando que no aparecen lazos algebraicos, la sustitución directa de (6.1) en (6.3) permite llegar a la primera ecuación de estado:

$$\dot{e}_4 = -\frac{1}{R_1 C} e_4 - \frac{1}{C} f_6 + \frac{1}{R_1 C} e_1 \quad (6.4)$$

Continuando con el mismo paso 7 de P1, sigue la variable inductiva del bond 6. Este bond en el coárbol mantiene trayectorias causales directas con el bond 4 y con el bond 9, ambos en el árbol. De esta manera, se puede escribir:

$$e_6 = e_4 - e_9$$

y mediante la relación constitutiva

$$\dot{f}_6 = \frac{1}{L} e_6$$

se llega a:

$$\dot{f}_6 = \frac{1}{L} (e_4 - e_9) \quad (6.5)$$

nuevamente se aclara que no se esperan lazos algebraicos, así que la sustitución de (6.2) en (6.5) permite llegar a la segunda ecuación de estado:

$$\dot{f}_6 = \frac{1}{L} e_4 - \frac{R_2}{L} f_6 - \frac{R_2}{L} f_8 \quad (6.6)$$

Si se acomodan las ecuaciones (6.3) y (6.6) en la clásica forma matricial $\dot{x} = Ax + Bu$ se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_4 \\ \dot{f}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ f_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C} & 0 \\ 0 & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ f_8 \end{bmatrix}$$

El sencillo circuito analizado en esta sección permite evaluar prácticamente la metodología propuesta. Sin embargo, los circuitos de interés en este trabajo de investigación contienen además diodos descritos por su relación $v - i$, ya sea de forma individual, o bien conformando otros dispositivos de conmutación más complejos. En la siguiente sección se muestra ya una sencilla aplicación del diodo semiconductor.

6.3. Rectificador monofásico de onda completa

Uno de los ejemplos de aplicación más sencillos con diodos es el rectificador monofásico de onda completa con transformador de derivación central y carga resistiva.

Considérese el circuito de la figura 6.5.

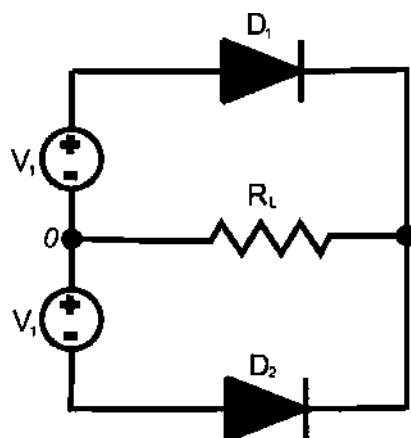


Figura 6.5: Un rectificador de onda completa con carga puramente resistiva.

Si en el circuito de la figura 6.5 se toma como referencia el nodo señalado con 0, al aplicar el método para generación del bond graph, se obtiene el modelo de la figura 6.6.

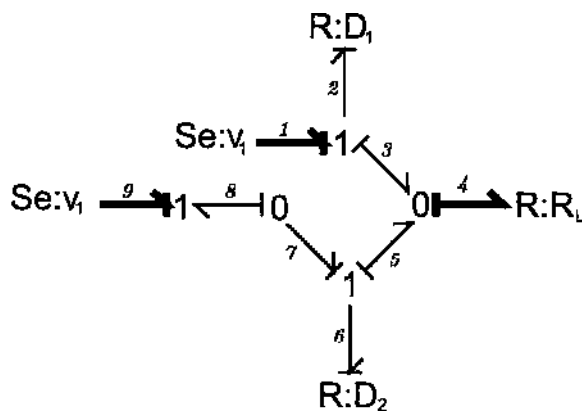


Figura 6.6: Bond graph del rectificador de onda completa.

Al tratarse de un sistema puramente resistivo, de la teoría de árboles se destaca que al aplicar el análisis generalizado de nodos, se obtendrá el conjunto mínimo de ecuaciones necesario. Del bond graph de la figura 6.6 (y del árbol correspondiente) se observa que sólo se requiere una ecuación clave para resolver el sistema completo, y para ello se debe aplicar la Ley de corrientes de Kirchhoff en la resistencia R_L . Con esa idea se aplica P1, en la figura 6.6 los pasos 1 y 2 ya están cubiertos. Más aún, los bonds se encuentran debidamente ennumerados. Continuando con el paso 3 y el paso 4 de P1, se tiene:

$$EPA = \{e_1, e_9\}$$

$$EAA = \{e_4\}$$

$$FC = \{0\}$$

$$FN = \{f_2, f_6\}$$

Para el paso 6 de P1 se tiene que el bond 2 en el coárbol mantiene trayectorias causales directas con el bond 1 y el bond 4, ambos en el árbol y se puede escribir

$$e_2 = e_1 - e_4$$

A su vez, el bond 6 mantiene trayectorias causales con el bond 4 y con el bond 9, y un sencillo análisis visual permite llegar a:

$$e_6 = -e_9 - e_4$$

Ahora bien, la relación constitutiva de D_1 y de D_2 es la ecuación de Shockley (A.3). De manera que se puede escribir:

$$\begin{aligned} f_2 &= I_s (e^{\Lambda e_2} - 1) \\ f_2 &= I_s (e^{\Lambda(e_1 - e_4)} - 1) \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} f_6 &= I_s (e^{\Lambda e_6} - 1) \\ f_6 &= I_s (e^{\Lambda(-e_9 - e_4)} - 1) \end{aligned} \quad (6.8)$$

También dentro del sexto paso de P1 se puede observar que el bond 4 mantiene trayectorias causales con el bond 2 y el bond 6, por lo que:

$$f_4 = f_2 + f_6 \quad (6.9)$$

La relación constitutiva de R_L es:

$$\begin{aligned} e_4 &= R_L f_4 \\ e_4 &= \frac{1}{R_L} f_2 + \frac{1}{R_L} f_6 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Del paso 7 de P1, sustituyendo (6.7) y (6.8) en (6.9) se tiene:

$$f_4 = I_s (e^{\Lambda(e_1 - e_4)} + e^{\Lambda(-e_9 - e_4)} - 2) \quad (6.11)$$

sustituyendo (6.10) en (6.11) se llega a:

$$f_4 = I_s (e^{\Lambda(e_1 - R_L f_4)} + e^{\Lambda(-e_9 - R_L f_4)} - 2) \quad (6.12)$$

La ecuación (6.12) es una ecuación algebraica implícita de la variable f_4 .

Matlab contiene herramientas capaces de tratar con ecuaciones como (6.12). El código de Matlab que aparece en el apéndice D permite resolver numéricamente la ecuación.

Y el visualizador de matlab permite observar las curvas de la figura 6.7.

Para efectos de comparar, se simula el mismo sistema en PSPICE mediante Orcad Capture. El circuito simulado es el que aparece en la figura 6.8.

Como resultado de la simulación se muestran las curvas obtenidas en la figura 6.9.

Modelar un rectificador de onda completa tipo puente es una tarea que puede ser desafiante. En la siguiente sección se modela precisamente este sistema, mediante la metodología propuesta.

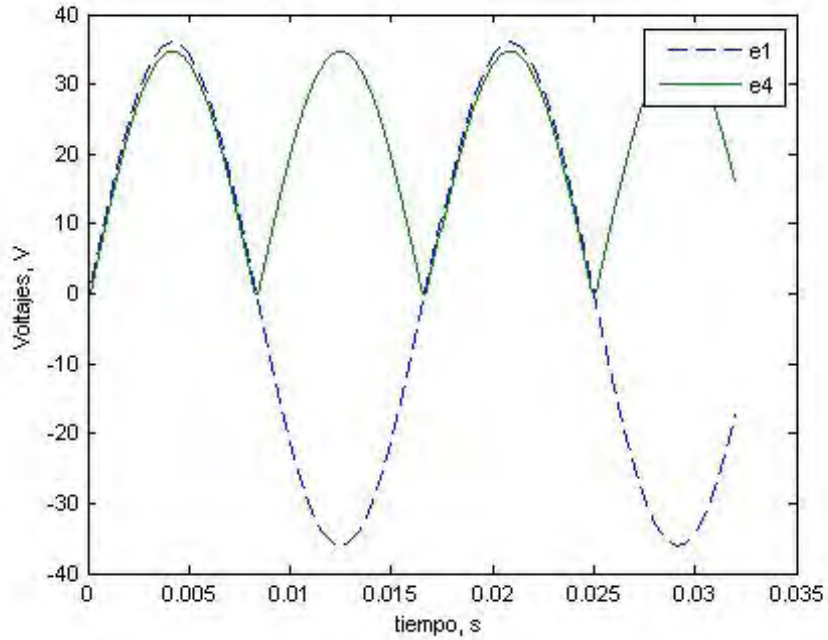


Figura 6.7: Formas de onda de entrada y de salida del rectificador monofásico de onda completa.

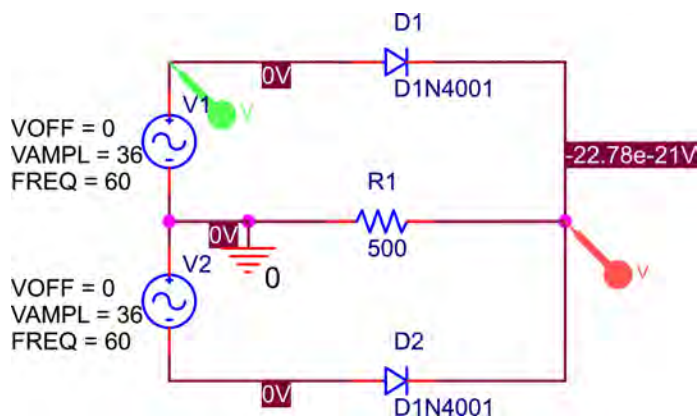


Figura 6.8: Circuito rectificador de onda completa simulado en PSPICE.

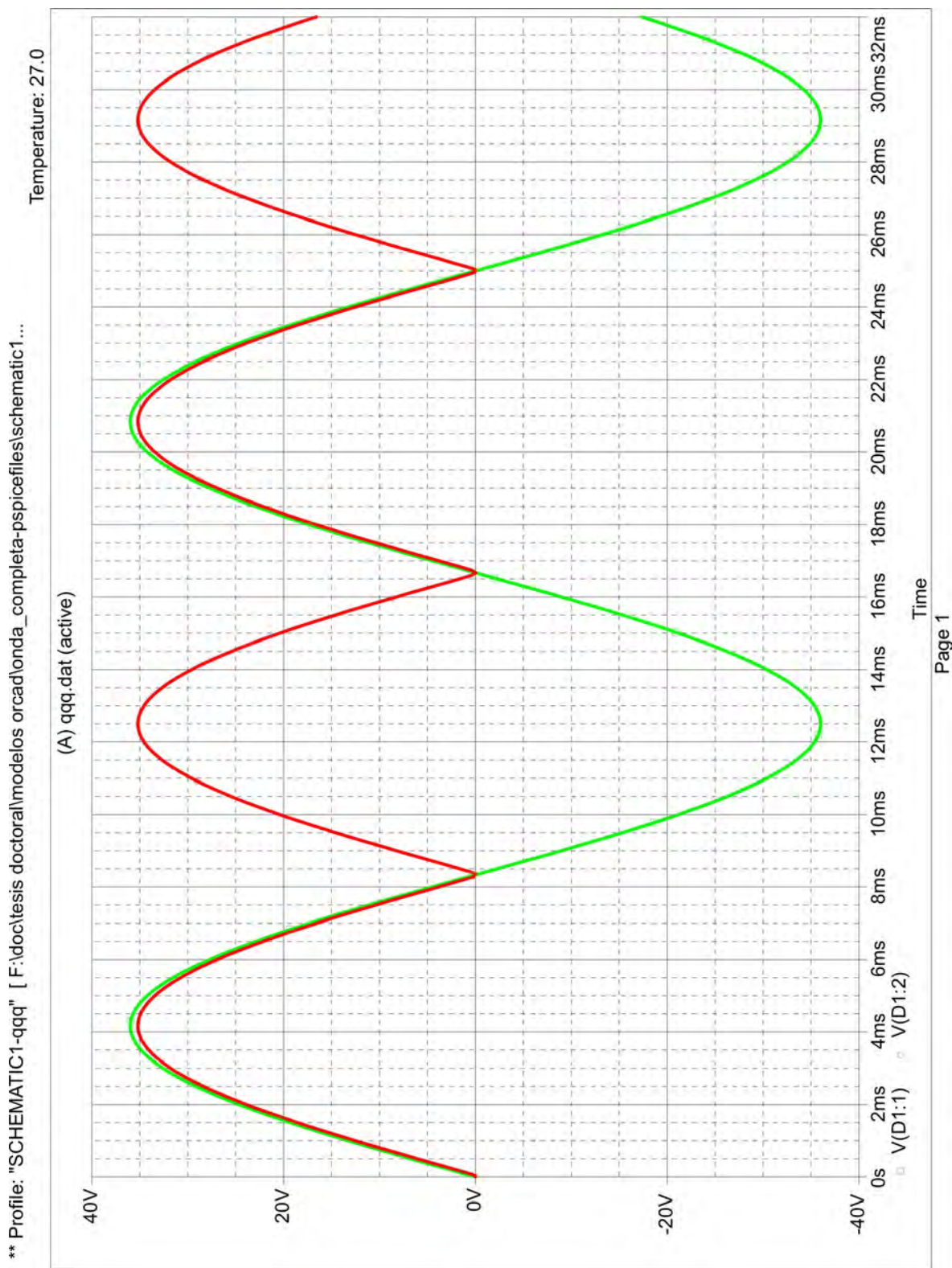


Figura 6.9: Curvas de los voltajes en simulación de PSPICE.

6.4. Rectificador monofásico de onda completa tipo puente

Considérese el circuito de la figura.6.10.

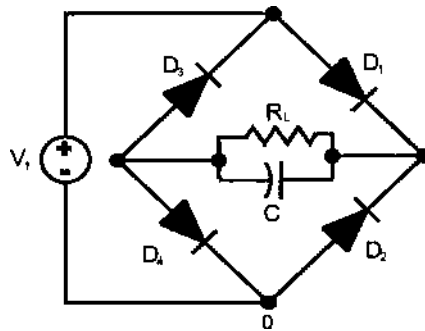


Figura 6.10: Rectificador de onda completa tipo puente con carga RC.

Si en el circuito de la figura 6.10 se toma como referencia el nodo señalado como 0, y si se aplica el método señalado en [43], el bond graph del rectificador de onda completa tipo puente con carga RC se muestra en la figura 6.11.

A fin de determinar las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema, se emplea el procedimiento P1. de la figura 6.11 se observa que el paso 1 ya se encuentra realizado. Se ha asignado causalidad preferida integral. De hecho se observa que tres de los cuatro diodos aceptan causalidad conductancia, pero D_1 se mantiene en causalidad resistencia¹.

Continuando con P1, el paso 2 ya se encuentra realizado y se han ennegrecido los bonds pertenecientes al árbol.

¹Este es un excelente ejemplo de cómo matemáticamente no tiene relevancia esta causalidad resistencia, mediante la metodología propuesta. Revisar apéndice A para ver este problema.

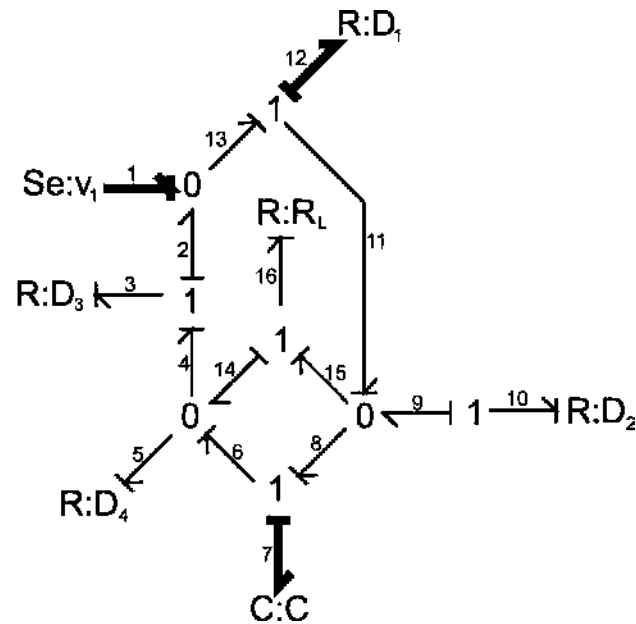


Figura 6.11: Bond graph del rectificador de onda completa tipo puente con carga RC.

Para los pasos 3 y 4 se tiene:

$$EPA = \{e_1, e_7\}$$

$$EAA = \{e_{12}\}$$

$$FC = \{0\}$$

$$FN = \{f_3, f_5, f_{10}, f_{16}\}$$

Para el paso 5 se tiene que el bond 3 está causalmente conectado con todos los bonds en el árbol, sin embargo, la conexión con el bond 1 ocurre mediante dos diferentes trayectorias causales que se cancelan una a la otra, de modo que se puede escribir:

$$e_3 = -e_{12} - e_7$$

y mediante la relación constitutiva (la ecuación de Shockley) se tiene

$$f_3 = I_S (e^{\Lambda e_3} - 1)$$

por lo que:

$$f_3 = I_S (e^{\Lambda(-e_{12}-e_7)} - 1) \quad (6.13)$$

El bond 5 también está causalmente conectado con todos los bonds del árbol, por lo que:

$$e_5 = e_1 - e_{12} - e_7$$

Mediante la relación constitutiva:

$$f_5 = I_S (e^{\Lambda(e_1-e_{12}-e_7)} - 1) \quad (6.14)$$

El bond 10 está causalmente conectado con el bond 1 y con el bond 12, de modo que:

$$e_{10} = -e_1 + e_{12}$$

y

$$f_{10} = I_S (e^{\Lambda(-e_1+e_{12})} - 1) \quad (6.15)$$

El bond 16 está causalmente conectado con todos los bonds del árbol, aunque tanto con el bond 1 como con el bond 12 existen en cada caso un par de trayectorias causales diferentes que se cancelan la una con la otra, y entonces la relación final es:

$$e_{16} = e_7$$

Y mediante la relación constitutiva, que en este caso es la ley de Ohm,

$$f_{16} = \frac{1}{R_L} e_{16}$$

se tiene

$$f_{16} = \frac{1}{R_L} e_7 \quad (6.16)$$

continuando con el paso 6 de P1, se tiene que el bond 12 está causalmente conectado con todos los bonds en el coárbol, aunque con el bond 16 lo hace a través de dos trayectorias causales diferentes que se cancelan una con la otra. De este modo, la relación es:

$$f_{12} = f_3 + f_5 - f_{10} \quad (6.17)$$

La relación constitutiva es la ecuación de Shockley

$$f_{12} = I_S (e^{\Lambda e_{12}} - 1) \quad (6.18)$$

Ya se discutió que en la ecuación (6.18), aunque es matemáticamente posible aislar la variable e_{12} , no es conveniente, de modo que si se igualan las ecuaciones (6.17) y (6.18), se puede obtener una ecuación algebraica que aparecerá en el sistema final de ecuaciones (algebrao-diferencial). Esta ecuación es:

$$I_S (e^{\Lambda e_{12}} - 1) = f_3 + f_5 - f_{10} \quad (6.19)$$

sustituyendo (6.13), (6.14) y (6.15) en (6.19) se tiene

$$I_s [-e^{\Lambda e_{12}} + e^{\Lambda(-e_{12}-e_7)} + e^{\Lambda(e_1-e_{12}-e_7)} - e^{\Lambda(-e_1+e_{12})}] = 0 \quad (6.20)$$

El circuito de la figura 6.10 contiene un capacitor y se esperaría un sistema de primer orden. Sin embargo, el mismo circuito no proporciona más información respecto a la naturaleza de las ecuaciones. En cambio, el bond graph de la figura 6.11 si proporciona más información. Primero, en el coárbol no existen elementos inductivos, así que del coárbol no se espera ninguna ecuación final. Sin embargo, en el árbol están situados tanto el capacitor (del que se obtendrá la ecuación de estado), la fuente de esfuerzo y el diodo D_1 . Este último mantiene trayectorias causales directas con elementos resistivos del coárbol, de modo que se requiere la ecuación algebraica (6.20) en el sistema final de ecuaciones. La ecuación diferencial se deriva a continuación:

Para el paso 7 de P1 se considera el capacitor (bond 7), el cual esta causalmente conectado los bonds 3, 5 y 16 del coárbol, y se tiene:

$$f_7 = f_5 + f_3 - f_{16}$$

y mediante la relación constitutiva:

$$\dot{e}_7 = \frac{1}{C} f_7$$

se llega a la ecuación de estado

$$\dot{e}_7 = \frac{1}{C} (f_5 + f_3 - f_{16}) \quad (6.21)$$

sustituyendo (6.13), (6.14), y (6.16) en (6.21) se tiene:

$$\dot{e}_7 = \frac{I_s}{C} (e^{\Lambda(e_1 - e_{12} - e_7)} + e^{\Lambda(-e_{12} - e_7)} - 2) - \frac{1}{RC} e_7$$

Una forma conveniente de organizar este tipo de modelos es de acuerdo a

$$M \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x, z, t) \\ h(x, z, t) \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

donde una matriz de masa M singular implica que el sistema de ecuaciones es diferencial-algebraico. Para este caso se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{e}_7 \\ z &= e_{12} \\ f &= \frac{I_s}{C} (e^{\Lambda(e_1 - e_{12} - e_7)} + e^{\Lambda(-e_{12} - e_7)} - 2) - \frac{1}{RC} e_7 \\ h &= I_s [-e^{\Lambda e_{12}} + e^{\Lambda(-e_{12} - e_7)} + e^{\Lambda(e_1 - e_{12} - e_7)} - e^{\Lambda(-e_1 + e_{12})}] \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para efectos de prueba, se utiliza el solucionador ode23t de Matlab, el cual acepta ecuaciones de la forma (6.22). Para este fin se utiliza el código que aparece en el apéndice D.

En la figura 6.12 se muestran las curvas de salida en Matlab

Para efectos comparativos, en PSPICE se simula el circuito mostrado en la figura 6.13:

Como resultado de la simulación en PSPICE se obtienen las curvas de la figura 6.14.

El rectificador monofásico de onda completa tipo puente es un buen ejemplo de la factibilidad tanto de la metodología propuesta, así como de la visión del diodo como base para circuitos electrónicos de conmutación. De hecho, se observa un mejor desempeño en

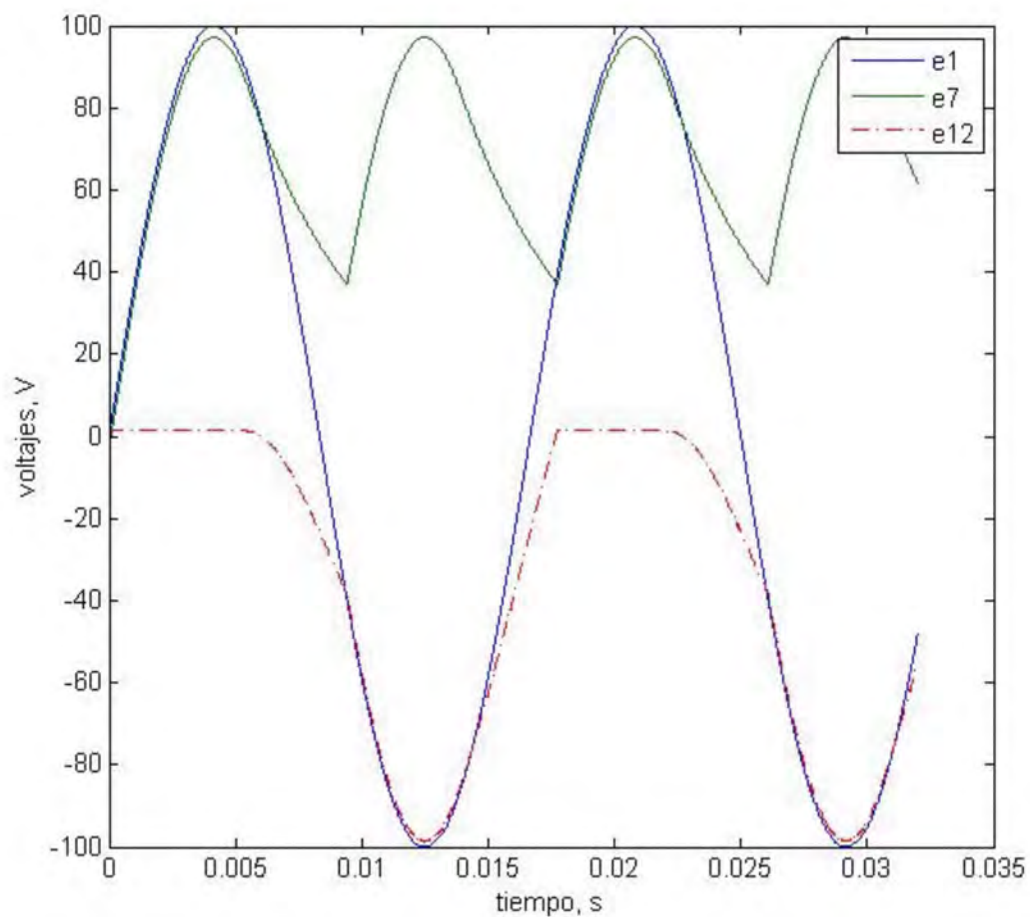


Figura 6.12: Curvas de voltaje del rectificador de puente completo tipo puente, obtenidas mediante Matlab.

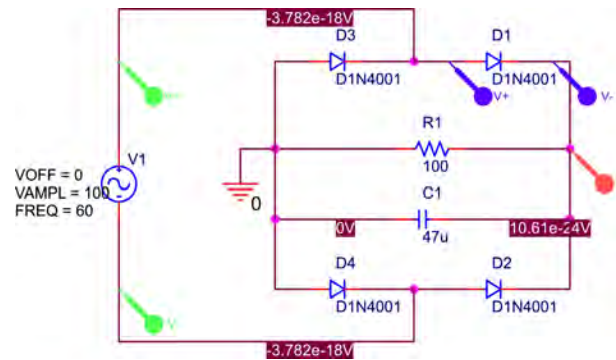


Figura 6.13: Circuito rectificador de onda completa tipo puente simulado en PSPICE.

** Profile: "SCHEMATIC1-qq" [F:\DOC\TESIS DOCTORAL\models orcad\puente_completo-PSpiceFiles\SCHEMATIC...

Temperature: 27.0

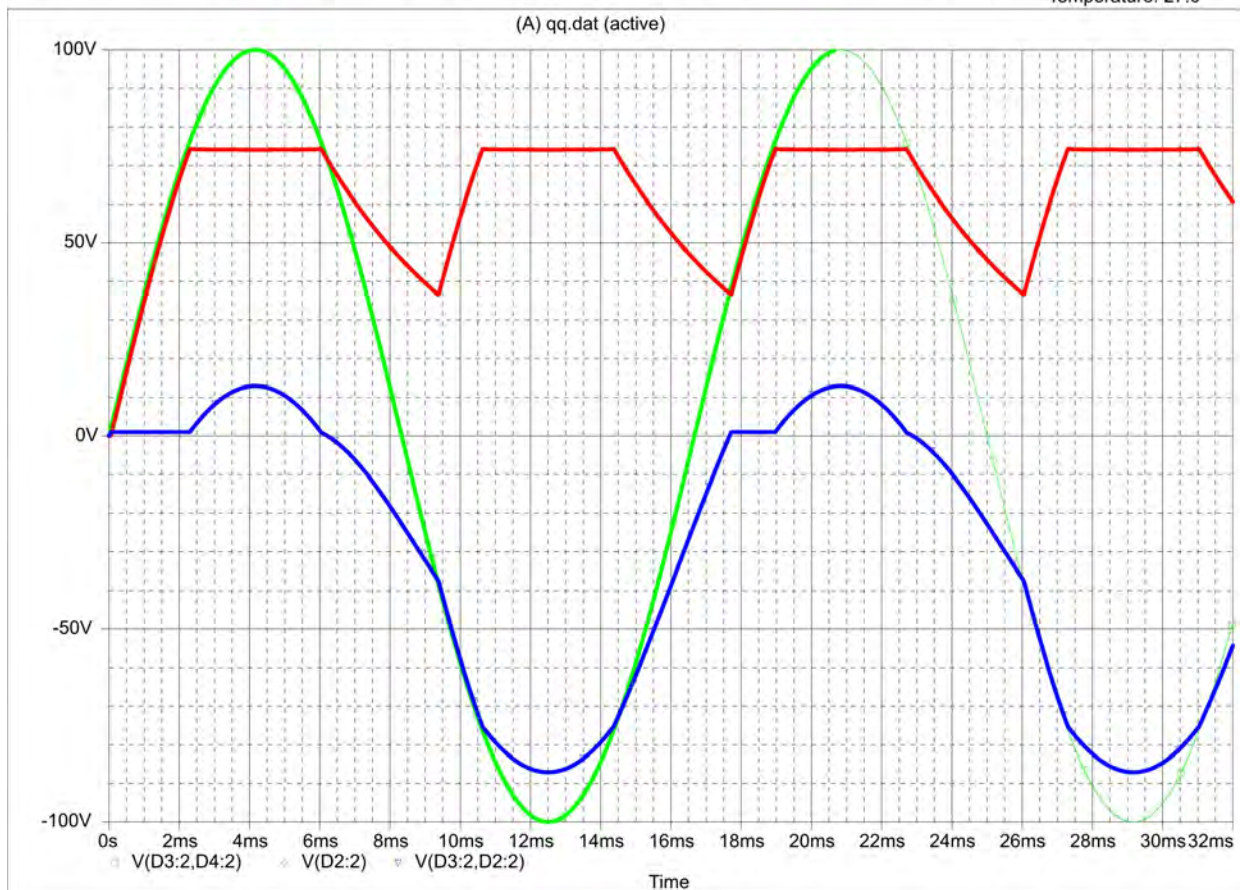


Figura 6.14: Curvas de voltajes en el circuito simulado en PSPICE.

las curvas de la figura 6.12, de la metodología propuesta, comparando contra PSPICE y las curvas de la figura 6.14, en donde se aprecia un efecto de saturación ó recorte de la señal, con el modelo del 1N4001 del catálogo de componentes, debido a la dificultad de solución numérica para estos modelos exponenciales.

Un sistema más complejo, con mayor cantidad de diodos es revisado en la siguiente sección.

6.5. Rectificador Trifásico

Considérese el circuito rectificador trifásico mostrado en la figura 6.15.

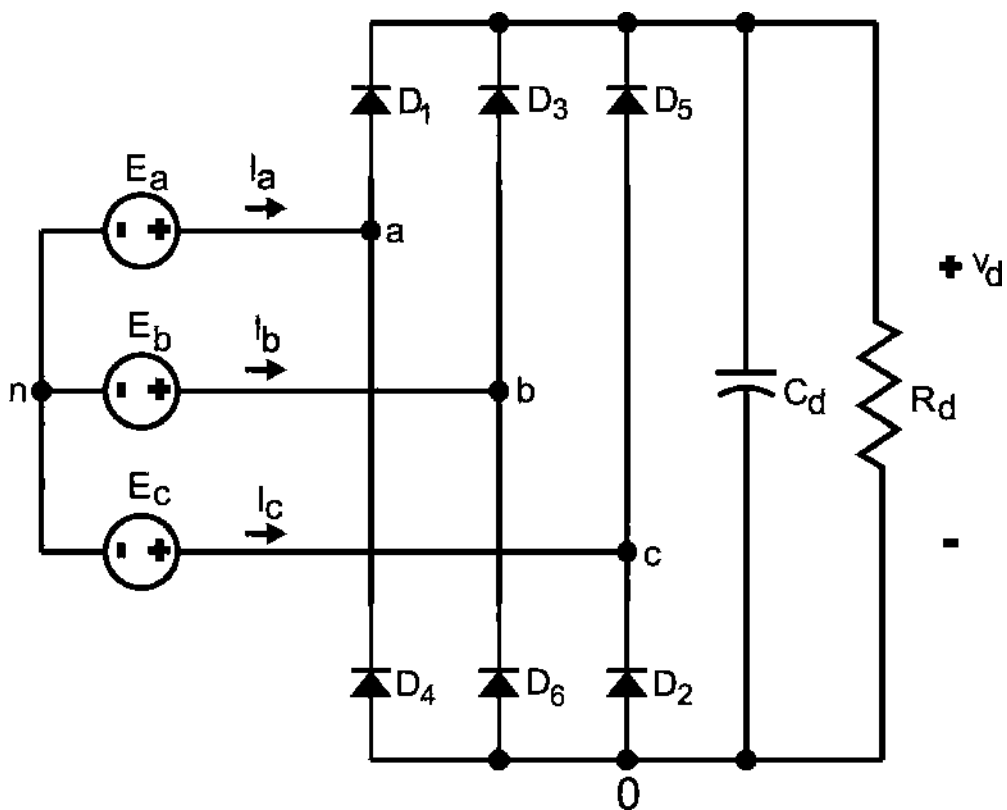


Figura 6.15: Circuito rectificador trifásico con carga RC.

En la figura 6.16 se muestra el bond graph del circuito de la figura 6.15, que se

construye considerando al nodo 0 como el nodo de referencia.

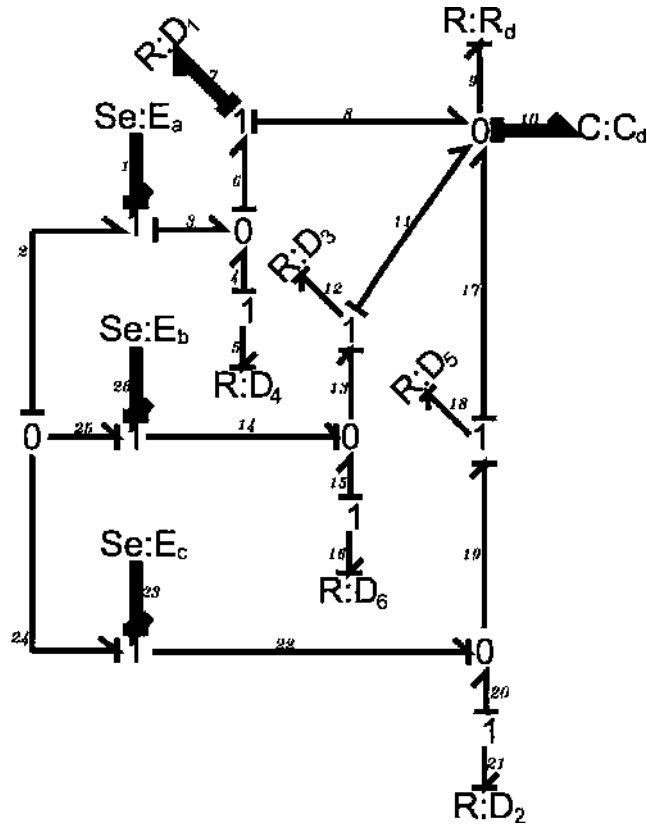


Figura 6.16: Bond graph del circuito rectificador trifásico.

El bond graph de la figura 6.16 ya se encuentra listo para aplicar el procedimiento P1 (los pasos 1 y 2 ya están realizados). Continuando con el procedimiento P1, se tiene que para los pasos 3 y 4, los conjuntos son los siguientes:

$$EPA = \{e_1, e_{10}, e_{23}, e_{26}\}$$

$$EAA = \{e_7\}$$

$$FC = \{0\}$$

$$FN = \{f_5, f_9, f_{12}, f_{16}, f_{18}, f_{21}\}$$

De acuerdo al paso 5 de P1, los elementos de FN se expresan como funciones de elementos en EPA y EAA . De la figura 6.16 se observa que el bond 5 mantiene trayectorias causales directas con los bonds 7 y 10. Entonces, por medio de las relaciones causales de los esfuerzos y de la propia relación constitutiva de D_4 se obtiene:

$$f_5 = I_s (e^{\Lambda(-e_7-e_{10})} - 1) \quad (6.23)$$

El bond 9 se conecta causalmente con el bond 10. Mediante la relación causal y la propia relación constitutiva de R_d se tiene:

$$f_9 = \frac{1}{R_d} e_{10} \quad (6.24)$$

El bond 12 mantiene trayectorias causales directas con los bonds 1, 7, 26 y 10, aunque con este último lo hace mediante dos trayectorias distintas que se cancelan una con la otra. Si se consideran esas conexiones causales y la propia relación constitutiva de D_3 , se tiene:

$$f_{12} = I_s (e^{\Lambda(e_{26}-e_1+e_7)} - 1) \quad (6.25)$$

El bond 16 se conecta causalmente con los bonds 1, 7, 10 y 26. A través de estas conexiones y mediante la relación constitutiva de D_6 se tiene:

$$f_{16} = I_s (e^{\Lambda(-e_{26}+e_1-e_7-e_{10})} - 1) \quad (6.26)$$

El bond 18 se encuentra causalmente conectado con los bonds 1, 7, 23 y 10, aunque con este último a través de dos trayectorias causales que se cancelan una con la otra. Si se consideran esas conexiones causales, así como la relación constitutiva de D_5 , se tiene:

$$f_{18} = I_s (e^{\Lambda(-e_1+e_7+e_{23})} - 1) \quad (6.27)$$

Por último, el bond 21 incide en forma directa causal sobre los bonds 1, 7, 10 y 23. Mediante esas dependencias directas causales y mediante la relación constitutiva de D_2 , se llega a:

$$f_{21} = I_s (e^{\Lambda(-e_{23}+e_1-e_7-e_{10})} - 1) \quad (6.28)$$

Luego, considerando el paso 6 de P1, el elemento e_7 de EAA tiene como relación constitutiva a la ecuación de Shoockley, de modo que su análisis debe permitir conformar una ecuación algebraica perteneciente al sistema final de ecuaciones. El bond 7 está causalmente conectado con los bonds 5, 12, 16, 18 y 21 en el coárbol. De acuerdo a las trayectorias causales se tiene:

$$f_7 = -f_{12} + f_{16} - f_{18} + f_{21} + f_5$$

o bien,

$$0 = -f_7 - f_{12} + f_{16} - f_{18} + f_{21} + f_5 \quad (6.29)$$

Sustituyendo (6.23), (6.25), (6.26), (6.27), (6.28) y la propia relación constitutiva $f_7 = I_s (e^{\Lambda e_7} - 1)$ en (6.29) se obtiene la ecuación algebraica completa:

$$\begin{aligned} 0 = & -e^{\Lambda e_7} - e^{\Lambda(e_{26}-e_1+e_7)} + e^{\Lambda(-e_{26}+e_1-e_7-e_{10})} + \\ & -e^{\Lambda(-e_1+e_7+e_{23})} + e^{\Lambda(-e_{23}+e_1-e_7-e_{10})} + \\ & + e^{\Lambda(-e_7-e_{10})} \end{aligned} \quad (6.30)$$

La ecuación diferencial se construye analizando al capacitor C . El bond 10 está causalmente conectado con los bonds 5, 9, 12, 16, 21 y 18, aunque con este último a través de dos diferentes trayectorias causales que se cancelan una con la otra. De acuerdo a las relaciones causales se tiene:

$$f_{10} = f_5 - f_9 + f_{16} + f_{21} \quad (6.31)$$

Sustituyendo (6.23), (6.24), (6.26), (6.28) y la relación constitutiva $f_{10} = C \dot{e}_{10}$ en (6.31) se llega a la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{10} = & \frac{I_s}{C_d} (e^{\Lambda(e_1-e_7-e_{10}-e_{26})} + e^{\Lambda(-e_{23}+e_1-e_7-e_{10})}) + \\ & + \frac{I_s}{C_d} (e^{\Lambda(-e_7-e_{10})} - 3) - \frac{1}{R_d C_d} e_{10} \end{aligned} \quad (6.32)$$

Si se acomoda el sistema de acuerdo a (6.22), se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{e}_{10} \\ z &= e_7 \end{aligned}$$

la función f está descrita por el lado derecho de la ecuación (6.32), mientras que la función h es el lado derecho de la ecuación (6.30). La matriz de masa es:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema se simula con el solucionador ode23t de Matlab, mediante el código que se presenta en el apéndice D.

Como resultado de la simulación, se obtienen las curvas mostradas en la figura 6.17

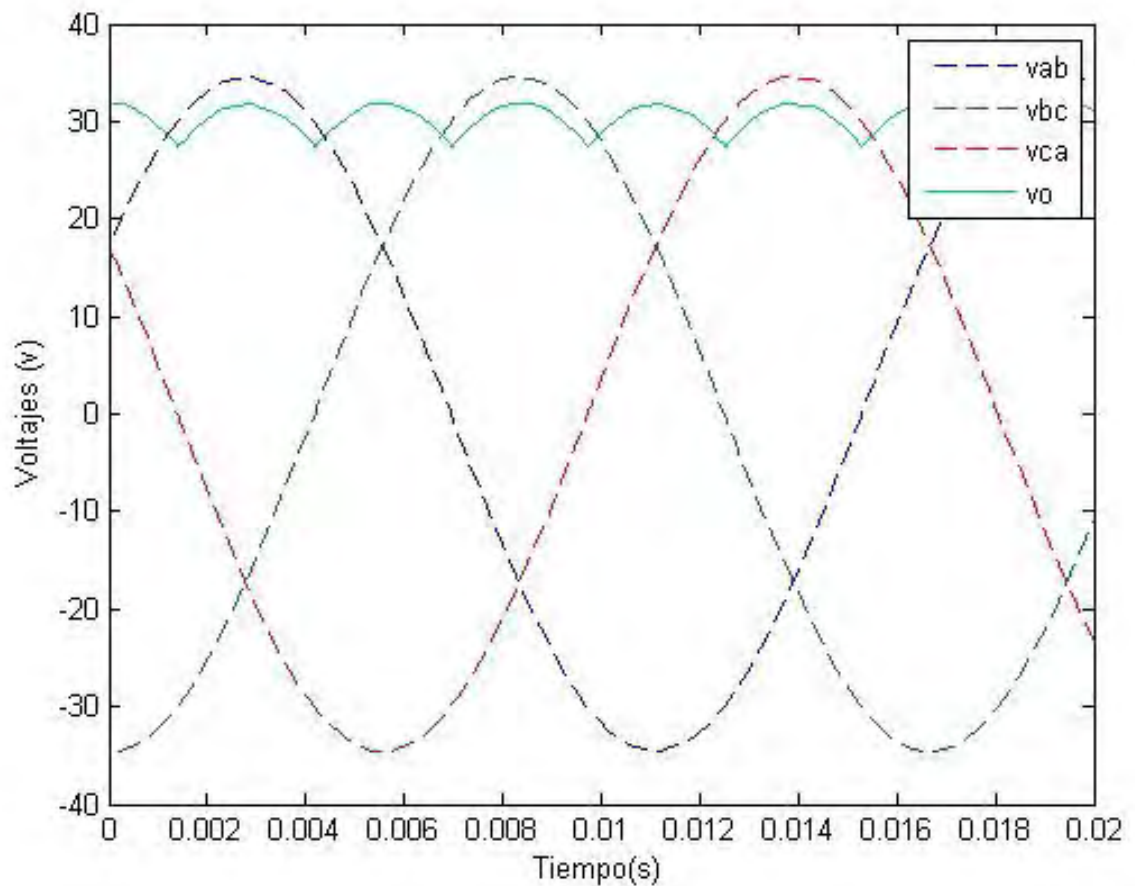


Figura 6.17: Voltajes de línea y voltaje de salida en el rectificador trifásico con entradas balanceadas.

Las corrientes de fase se muestran en la figura 6.18.

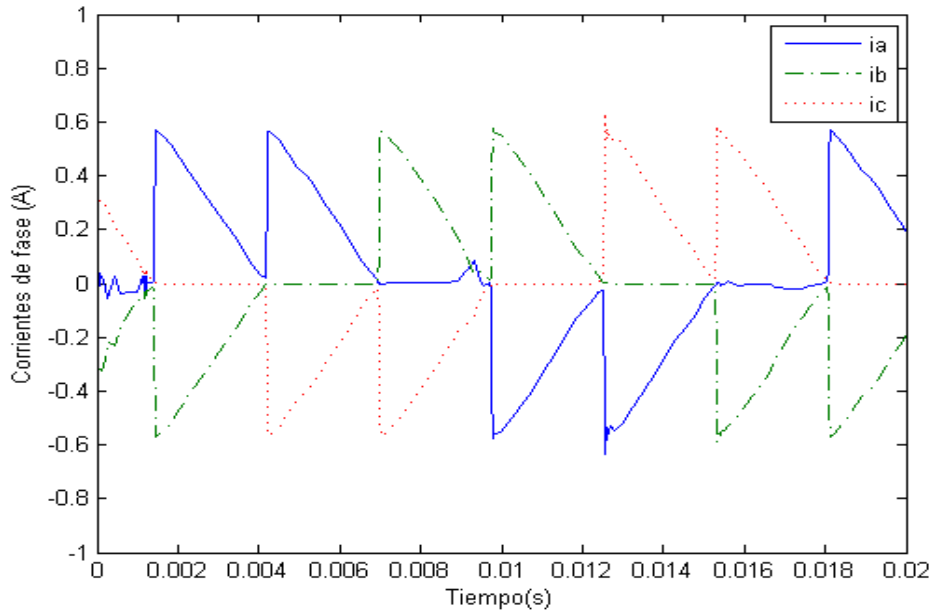


Figura 6.18: Corrientes de fase del rectificador trifásico balanceado.

A modo de comparación, se simula el circuito de la figura 6.19 en PSPICE.

Como resultado de la simulación en PSPICE, la figura 6.21 muestra las curvas de voltajes.

Para otro comparativo, se simula el sistema desbalanceado mediante la metodología propuesta (figura 6.20) y mediante PSPICE (figura 6.22).

Las dos últimas figuras muestran un desempeño bastante similar en el sistema con voltajes de entrada altamente desbalanceados.

Un circuito de electrónica de potencia muy conocido, que cambia un voltaje de corriente directa a otro voltaje de corriente directa, es el convertidor Buck. Este convertidor emplea un dispositivo de conmutación, además de un diodo de giro libre. El convertidor se puede modelar con la metodología propuesta, tal como se revisa en la siguiente sección.

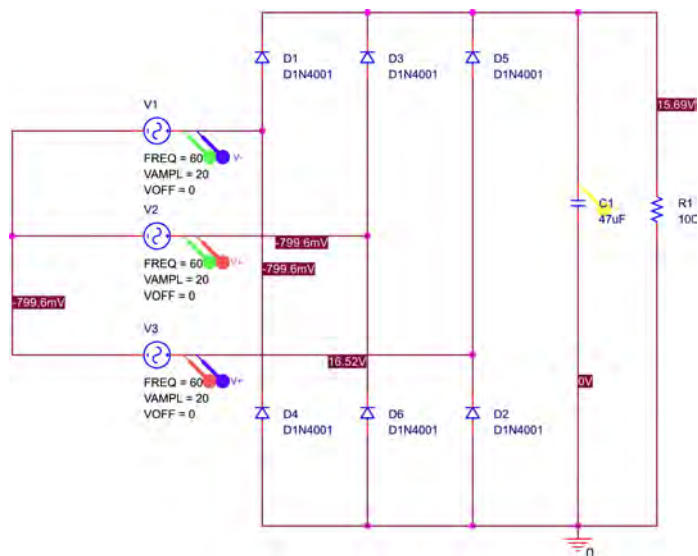


Figura 6.19: Circuito rectificador trifásico con carga RC simulado en PSPICE.

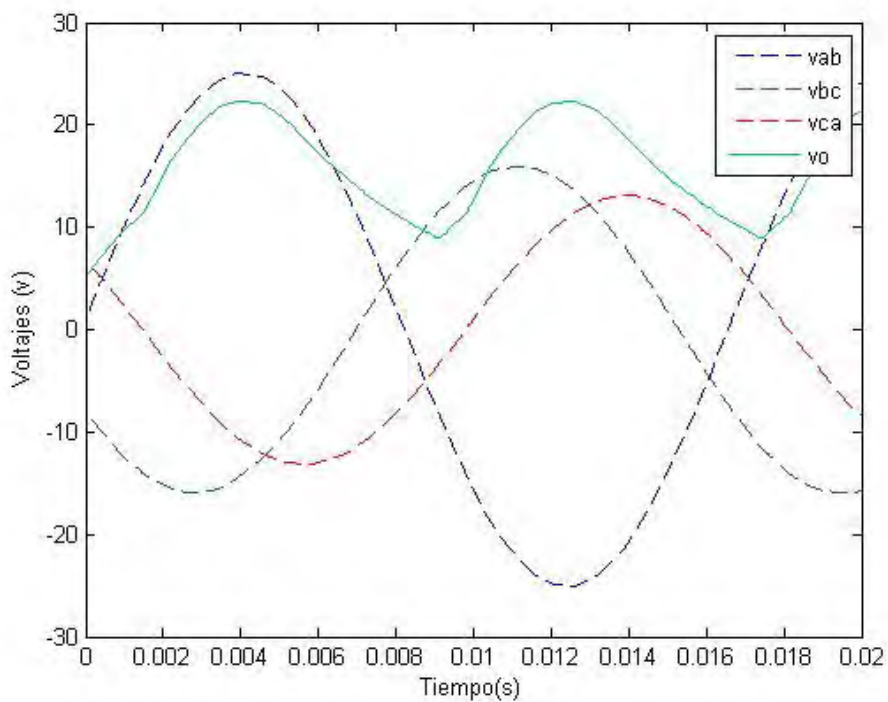


Figura 6.20: Curvas de voltajes en Matlab, ante entrada de voltaje desbalanceada.

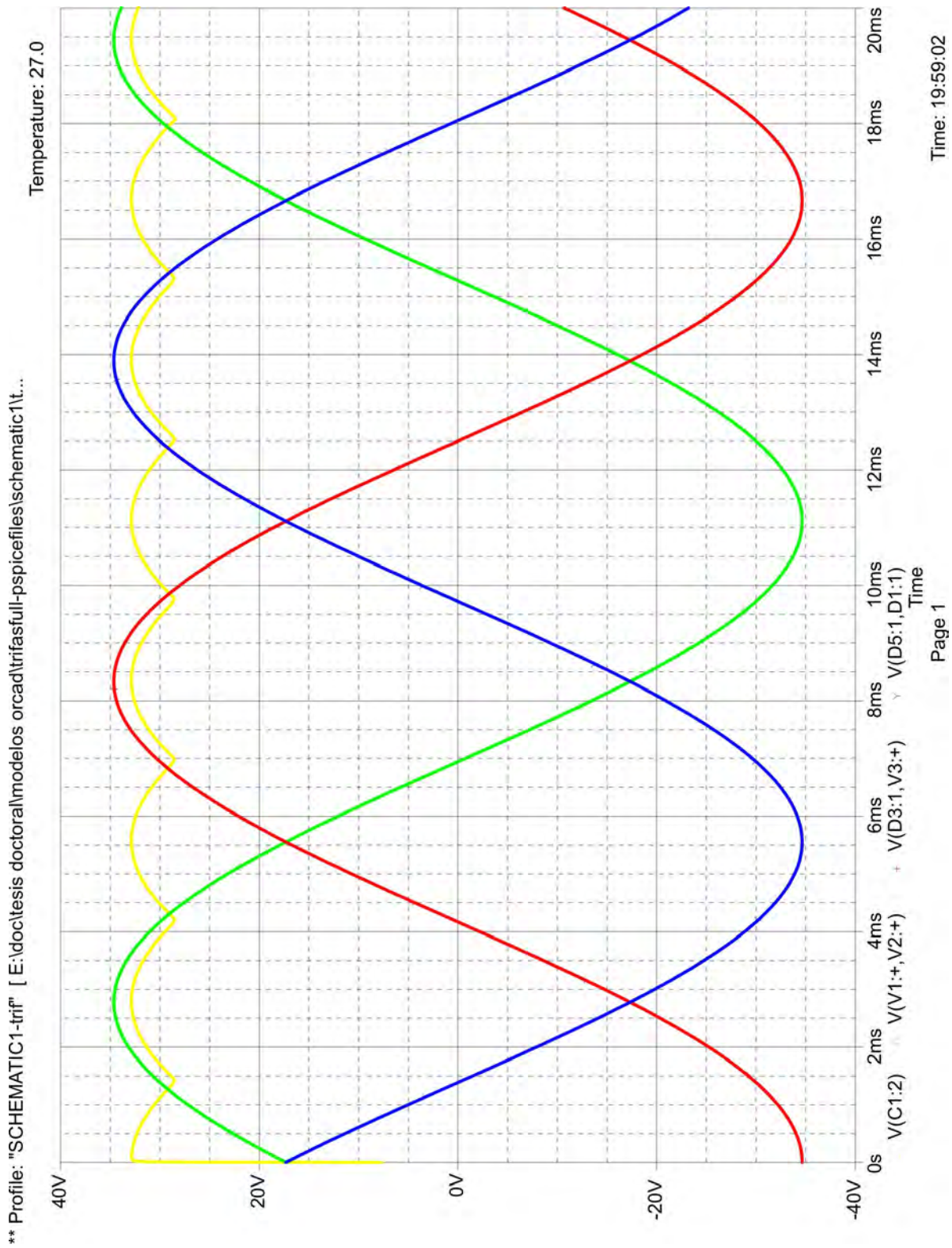


Figura 6.21: Curvas de voltaje del rectificador trifásico simulado mediante PSPICE.

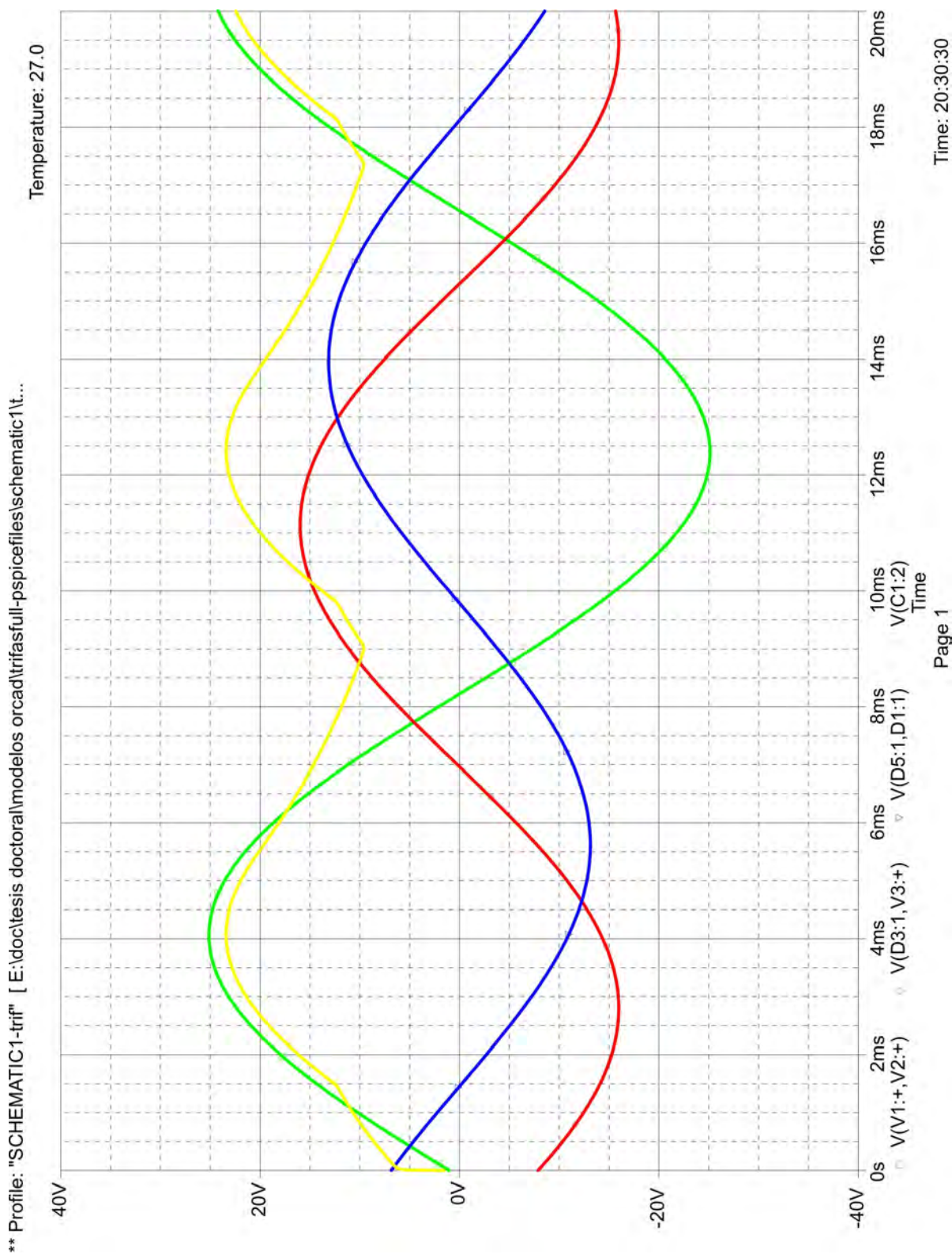


Figura 6.22: Curvas de voltaje en la simulación del rectificador desbalanceado en PSPICE.

6.6. Convertidor Buck

El circuito de la figura 6.23 es un circuito reductor (step down) de voltaje conocido como convertidor Buck. Como dispositivo de conmutación se ha seleccionado un BJT.

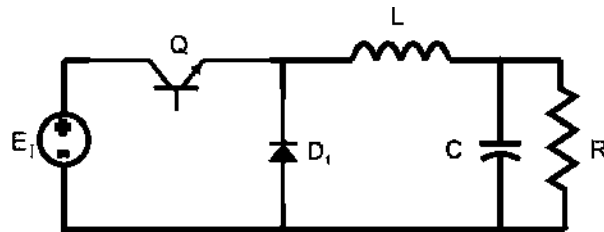


Figura 6.23: Convertidor Buck.

En el convertidor Buck de la figura 6.23 el BJT se puede sustituir por el modelo de Ebers-Moll, analizado en la sección 5.1, además se puede integrar el circuito de control de lazo abierto, compuesto por una fuente de voltaje V_B y una resistencia en serie R_B . Con estos cambios se obtiene el circuito de la figura 6.24.

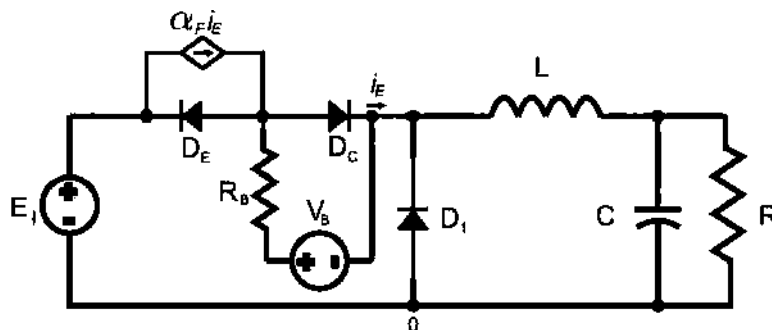


Figura 6.24: Convertidor Buck con un BJT como dispositivo de conmutación, que a su vez es implementado con el modelo Ebers-Moll.

El circuito convertidor se modela mediante el bond graph de la figura 6.25, en el que para su construcción se ha considerado como referencia al nodo señalado con 0.

El modelo se encuentra listo para aplicarle el procedimiento P1. Los pasos 1 y 2 ya se

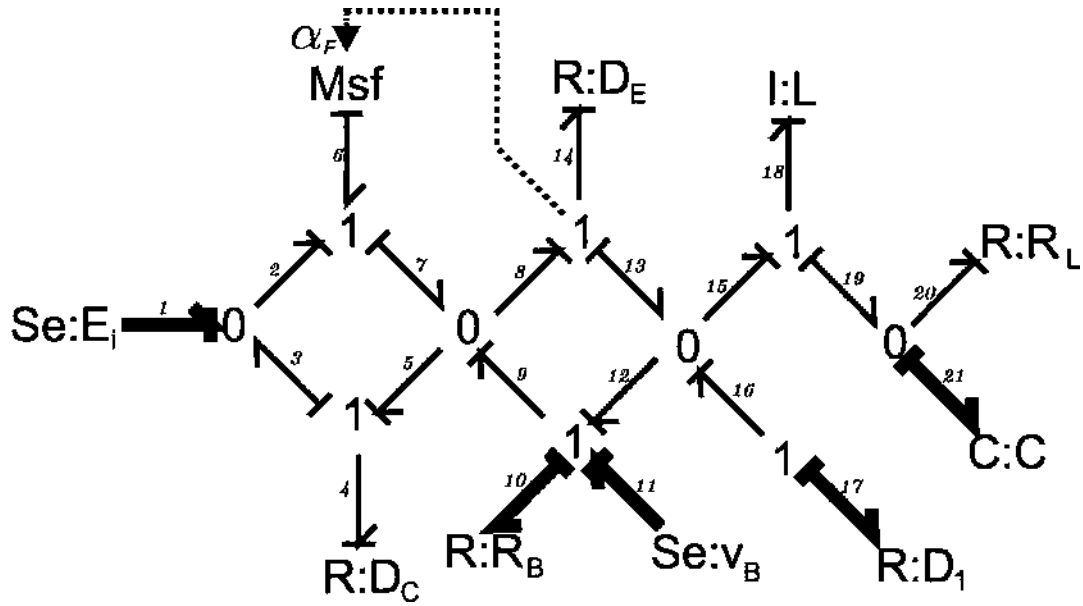


Figura 6.25: Bond graph del convertidor Buck.

encuentran realizados. Para el paso 3 se tiene:

$$EPA = \{e_1, e_{11}, e_{21}\}$$

$$EAA = \{e_{10}, e_{17}\}$$

$$FC = \{f_6, f_{18}\}$$

$$FN = \{f_4, f_{14}, f_{20}\}$$

Para las ecuaciones auxiliares se tiene que el bond 4 se conecta causalmente con los bonds 1, 10, 11 y 17, y entonces, mediante la relación constitutiva de D_C se tiene:

$$f_4 = I_s \left(e^{\Lambda(e_{11} - e_{17} - e_{10} - e_1)} - 1 \right) \quad (6.33)$$

El bond 14 tiene conexiones causales directas con los bonds 10, 11 y 17, pero con dos trayectorias hacia el último, que se cancelan una con la otra, de modo que, mediante las relaciones causales y la relación constitutiva de D_E , se tiene:

$$f_{14} = I_s \left(e^{g(e_{11} - e_{10})} - 1 \right) \quad (6.34)$$

La única conexión causal entre el bond 20 y elementos del árbol se realiza con el bond 21. Así, mediante la conexión causal y la relación constitutiva de R_L se llega a:

$$f_{20} = \frac{1}{R_L} e_{21} \quad (6.35)$$

Considerando el paso 6 de P1, los dos elementos de EAA tienen trayectorias causales directas con al menos un elemento de FN , por lo que se consideran ambos en el sistema final de ecuaciones, como variables algebraicas. obteniéndose las siguientes dos ecuaciones:

$$0 = I_s (e^{\Lambda e_{17}} - e^{\Lambda(e_{11}-e_{17}-e_{10}-e_1)}) + \alpha_F I_s (e^{\Lambda(e_{11}-e_{10})} - 1) - f_{18} \quad (6.36)$$

$$0 = I_s (e^{\Lambda(e_{11}-e_{17}-e_{10}-e_1)} + e^{\Lambda(e_{11}-e_{10})} - 2) - \alpha_F I_s (e^{\Lambda(e_{11}-e_{10})} - 1) - \frac{1}{R_B} \quad (6.37)$$

Las ecuaciones de estado se forman analizando al capacitor y al inductor, obteniéndose las siguientes ecuaciones de estado:

$$\dot{e}_{21} = \frac{1}{C} f_{18} - \frac{1}{CR_L} e_{21} \quad (6.38)$$

$$\dot{f}_{18} = -\frac{1}{L} e_{17} - \frac{1}{L} e_{21} \quad (6.39)$$

Organizando las ecuaciones de acuerdo a (6.22) se tiene:

$$x = \begin{bmatrix} e_{21} \\ f_{18} \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} e_{10} \\ e_{17} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} f_{18} - \frac{1}{CR_L} e_{21} \\ -\frac{1}{L} e_{17} - \frac{1}{L} e_{21} \end{bmatrix}$$

$$h = \begin{bmatrix} I_s (e^{\Lambda e_{17}} - e^{\Lambda(e_{11}-e_{17}-e_{10}-e_1)}) + \alpha_F I_s (e^{\Lambda(e_{11}-e_{10})} - 1) - f_{18} \\ I_s (e^{\Lambda(e_{11}-e_{17}-e_{10}-e_1)} + e^{\Lambda(e_{11}-e_{10})} - 2) - \alpha_F I_s (e^{\Lambda(e_{11}-e_{10})} - 1) - \frac{1}{R_B} \end{bmatrix}$$

A modo de prueba, se simula el sistema descrito por las ecuaciones (6.36), (6.37), (6.38) y (6.39) con el solucionador ode23t de Matlab, mediante el código que se muestra en el apéndice D.

La función pwm que aparece en el apéndice D es una función construida para eliminar la discontinuidad que presenta la función square de matlab en los instantes de cambio de voltaje. La función pwm tiene tiempos de subida y de bajada mayores a cero, por lo que brinda ciertas condiciones de continuidad a la forma de onda (al igual que lo hace una señal “cuadrada” real). La construcción de esta señal de control es obligada para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones, ya que Matlab presenta problemas con la función completamente cuadrada incorporada.

Como resultado de esta simulación, se obtiene la forma de onda de voltaje de salida ilustrada en la figura 6.26.

Para efectos de comparación, se simula en PSPICE el circuito de la figura 6.27.

El resultado de la simulación en PSPICE se muestra en la curva de la figura 6.28.

Se observan algunas diferencias entre las curvas de las dos simulaciones. La curva de PSPICE exhibe un mayor rizo, respecto a la de Matlab. El tiempo de crecimiento de la curva también es diferente, pues en la gráfica de Matlab se alcanza el valor de quiebre en aproximadamente 2.8ms, mientras que en la curva de PSPICE se logra en aproximadamente 1ms. Otra diferencia es el valor de estado estacionario de las curvas, siendo de aproximadamente 96V para la curva de Matlab y de aproximadamente 62V para la curva de Matlab. Se puede presumir que una de las causas de estas diferencias recae en la inexactitud del método en Matlab, toda vez que para efectos de conseguir que la simulación llegue a término, es necesario introducir una matriz de masa acondicionada como casi singular, pues una matriz completamente singular impide la realización del experimento por razones numéricas.

El convertidor Buck es un circuito, que ya posee un cierto grado de complejidad. La

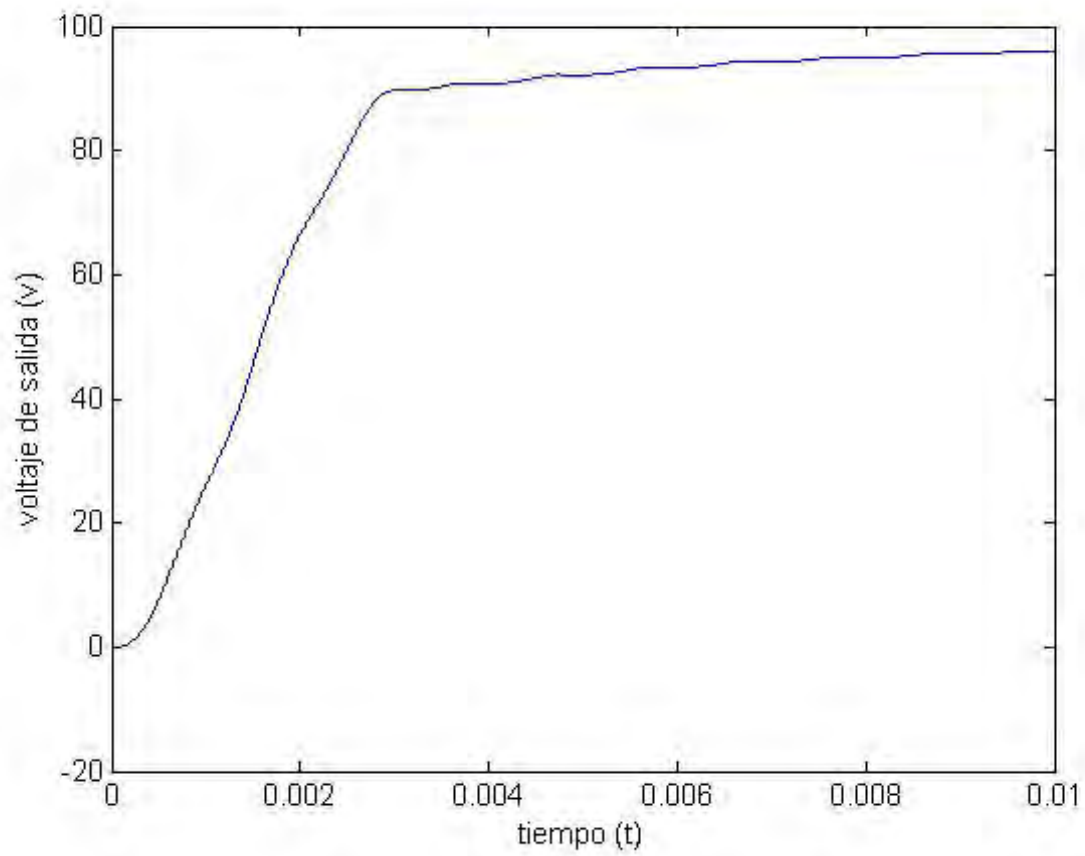


Figura 6.26: Voltaje de salida del convertidor Buck, con simulación corrida en Matlab.

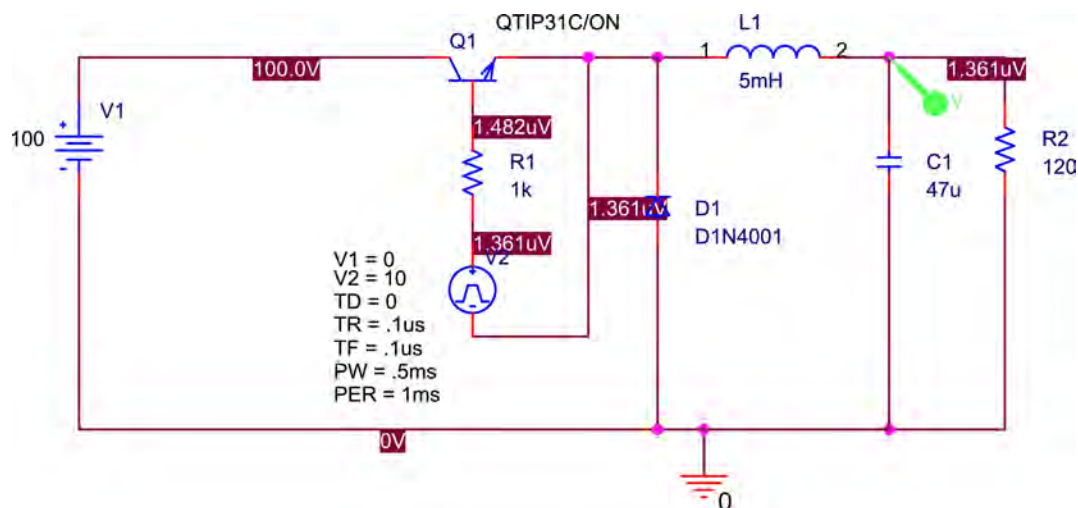


Figura 6.27: Circuito convertidor Buck simulado en PSPICE.

metodología propuesta es sin embargo, una buena herramienta para determinar el conjunto de ecuaciones que permiten llevar a la simulación a un sistema de estas características. Un rectificador de media onda con tiristor es un circuito, que si bien tiene menos componentes, es más complejo debido a la naturaleza del dispositivo de conmutación. Utilizando nuevamente la metodología propuesta, este sistema se revisa en la siguiente sección.

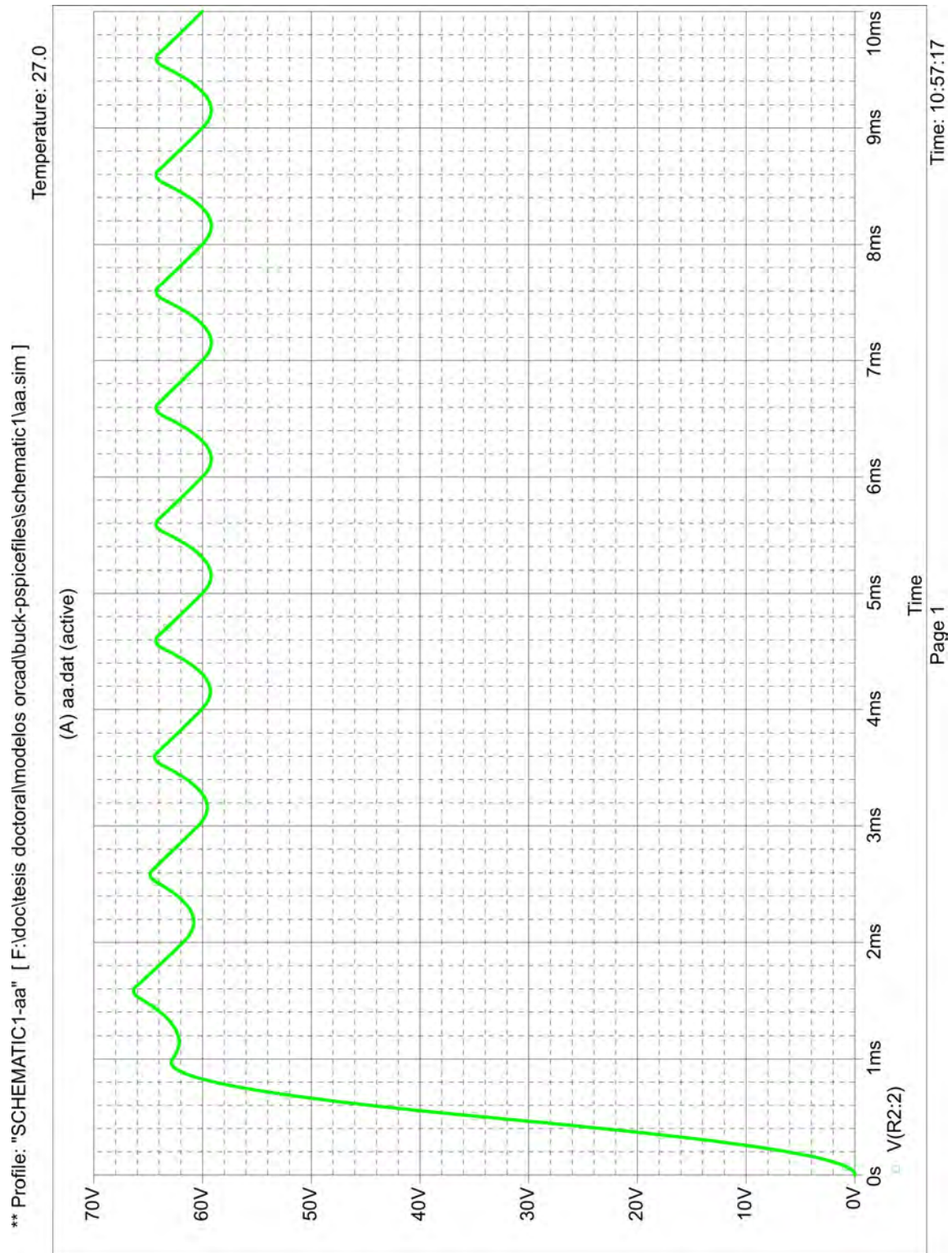


Figura 6.28: Curva de voltaje de salida obtenida mediante simulación de PSPICE.

6.7. Rectificador monofásico controlado

Los rectificadores controlados son por mucho, la aplicación más extensa del tiristor, ya que el dispositivo permite el control del ángulo de disparo, y la conmutación natural es inherente en el apagado.

En la figura 6.29 se observa un circuito rectificador de media onda controlado, con carga RC.

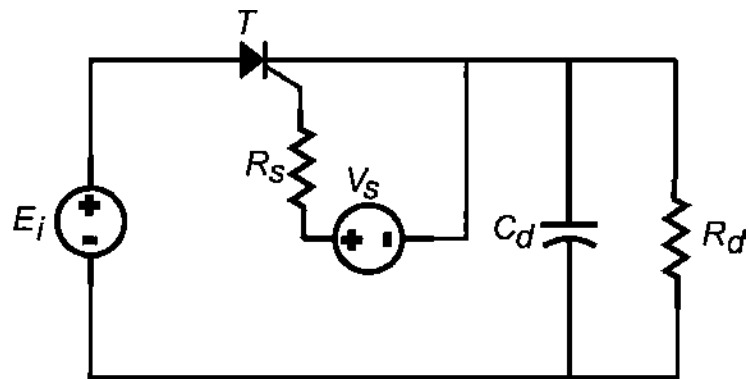


Figura 6.29: Circuito rectificador controlado de media onda.

El circuito de la figura 6.29 tiene integrado un circuito de control, formado por la fuente V_s y el resistor R_s . Si el tiristor se sustituye por el modelo de la figura 5.8, se obtiene el circuito equivalente mostrado en la figura 6.30.

El bond graph del convertidor se muestra en la figura 6.31.

El bond graph de la figura 6.31 ya incluye los pasos 1 y 2 del procedimiento P1, y está listo para el paso 3 y 4, en los que se tienen los conjuntos:

$$EPA = \{e_1, e_{19}, e_{21}\}$$

$$EAA = \{e_8, e_{18}\}$$

$$FC = \{f_5, f_{12}\}$$

$$FN = \{f_2, f_{14}, f_{20}\}$$

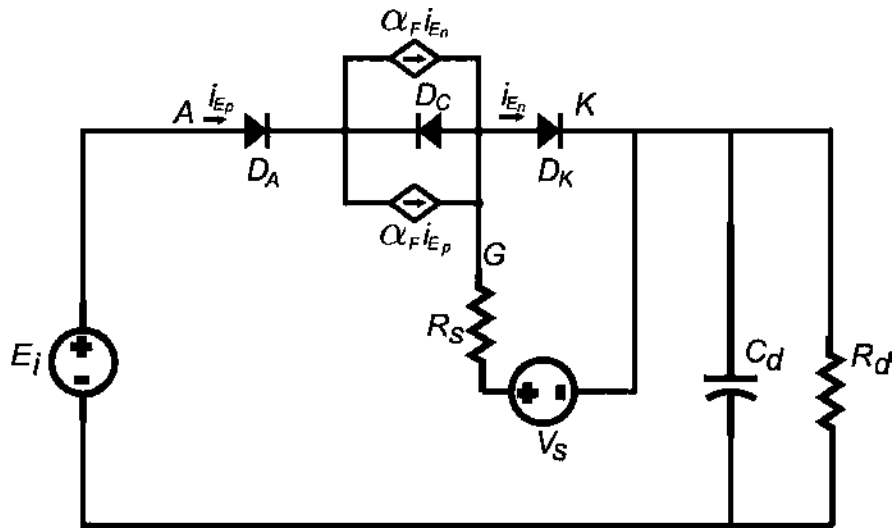


Figura 6.30: Circuito rectificador controlado de media onda con tiristor implementado mediante el modelo propuesto.

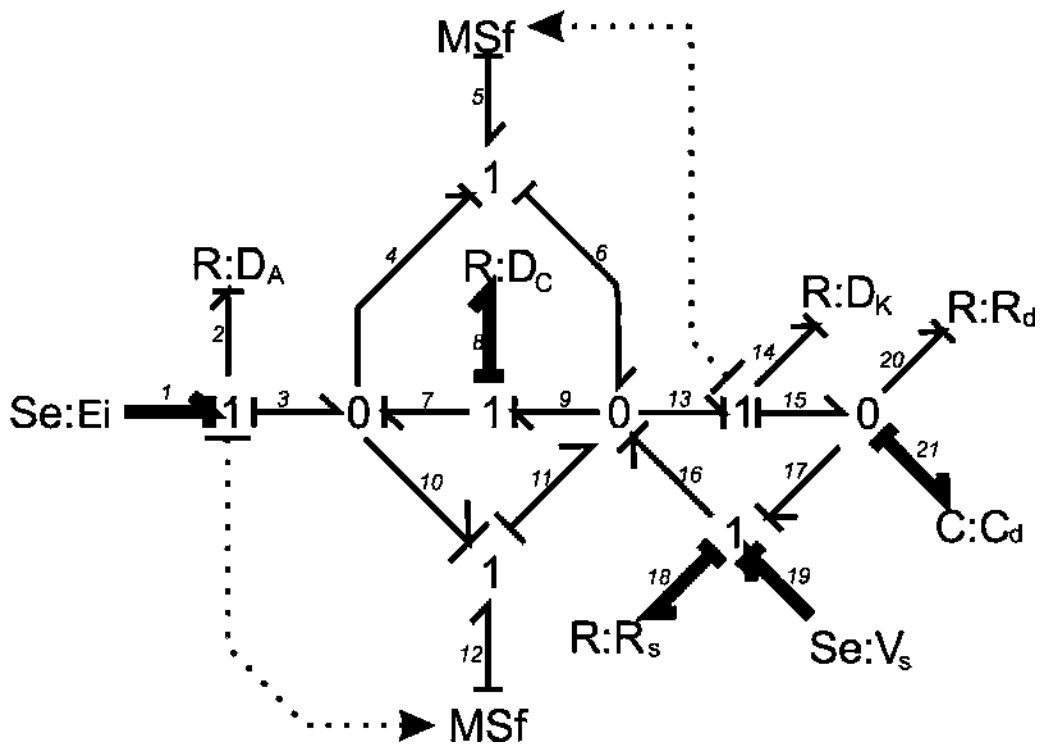


Figura 6.31: Bond graph del rectificador controlado de media onda.

En el paso 5 de P1 se tiene que el bond 2 se conecta causalmente con los todos los bonds del árbol, entonces, mediante las dependencias causales y la propia relación constitutiva de D_A se tiene:

$$f_2 = I_s \left(e^{\Lambda(e_1+e_8-e_{21}-e_{19}+e_{18})} - 1 \right) \quad (6.40)$$

El bond 14 se relaciona en forma directa causal con los bonds 18, 19 y 21, aunque con el último lo hace a través de dos trayectorias causales diferentes que se anulan una con la otra. Entonces, mediante la relación constitutiva de D_K y las trayectorias causales, se tiene:

$$f_{14} = I_s \left(e^{\Lambda(e_{19}-e_{18})} - 1 \right) \quad (6.41)$$

el bond 20 está causalmente conectado únicamente con el bond 21. Es por ello que, mediante la relación constitutiva de R_d se tiene:

$$f_{20} = \frac{1}{R_d} e_{21} \quad (6.42)$$

El paso 6 de P1 lleva a dos ecuaciones algebraicas que deben aparecer en el sistema final de ecuaciones, ya que tanto el bond 8 como el bond 18, ambos elementos de EAA en el árbol, mantienen trayectorias causales con elementos de FN en el coárbol. Para la primera ecuación se analiza el bond 8, que tiene trayectorias causales directas con los bonds 2, 5 y 12 en el coárbol, de modo que:

$$f_8 = -f_2 + f_5 + f_{12} \quad (6.43)$$

La fuente controlada del bond 5 tiene la relación:

$$f_5 = \alpha_F f_{14} \quad (6.44)$$

Mientras que la fuente controlada del bond 12 está descrita como:

$$f_{12} = \alpha_F f_2 \quad (6.45)$$

Si se sustituye (6.41) y (6.40) en (6.44) y (6.45), respectivamente, se tiene

$$f_5 = \alpha_F I_s \left(e^{\Lambda(e_{19}-e_{18})} - 1 \right) \quad (6.46)$$

$$f_{12} = \alpha_F I_s \left(e^{\Lambda(e_1+e_8-e_{21}-e_{19}+e_{18})} - 1 \right) \quad (6.47)$$

Sustituyendo (6.40), (6.46) y (6.47), además de la propia relación constitutiva de D_C en (6.43) se obtiene la primera ecuación algebraica:

$$0 = (\alpha_F - 1) I_s \left(e^{\Lambda(e_1+e_8-e_{21}-e_{19}+e_{18})} - 1 \right) - I_s \left(e^{\Lambda e_8} - 1 \right) + \alpha_F I_s \left(e^{\Lambda(e_{19}-e_{18})} - 1 \right) \quad (6.48)$$

Para la segunda ecuación algebraica, se analiza el bond 18, el cual mantiene trayectorias causales directas con los bonds 2, 14, 5 y 12, aunque con cada uno de los últimos dos lo hace mediante dos trayectorias causales distintas que se cancelan una con la otra. De acuerdo a las trayectorias causales, la relación es:

$$f_{18} = -f_2 + f_{14} \quad (6.49)$$

Sustituyendo (6.40) y (6.41), además de la propia relación constitutiva de R_S en (6.49) se obtiene la segunda ecuación algebraica:

$$0 = -\frac{1}{R_s} e_{18} - I_s \left(e^{\Lambda(e_1+e_8-e_{21}-e_{19}+e_{18})} - 1 \right) + I_s \left(e^{\Lambda(e_{19}-e_{18})} - 1 \right) \quad (6.50)$$

A continuación se analiza el bond 21, como paso 7 de P1. Este bond mantiene trayectorias causales directas con los bonds 2, 20, 5, 12 y 14. Con cada uno de los últimos tres la conexión se realiza mediante dos trayectorias distintas en cada caso, mismas que se anulan una con la otra. De esta forma, las relaciones causales establecen que:

$$f_{21} = f_2 - f_{20} \quad (6.51)$$

Si se sustituye (6.40) y (6.42), además de la propia relación constitutiva de C_d en (6.51), se obtiene la única ecuación diferencial del sistema:

$$\dot{e}_{21} = \frac{1}{C_d} \left(I_s \left(e^{\Lambda(e_1+e_8-e_{21}-e_{19}+e_{18})} - 1 \right) - \frac{1}{R_d} e_{21} \right) \quad (6.52)$$

Si se organizan las ecuaciones del sistema de acuerdo a (6.22), se tiene que:

$$\begin{aligned}
 x &= e_{21} \\
 z &= \begin{bmatrix} e_8 \\ e_{18} \end{bmatrix} \\
 f &= \frac{1}{C_d} \left(I_s \left(e^{\Lambda(e_1+e_8-e_{21}-e_{19}+e_{18})} - 1 \right) - \frac{1}{R_d} e_{21} \right) \\
 h &= \begin{bmatrix} (\alpha_F - 1) I_s \left(e^{\Lambda(e_1+e_8-e_{21}-e_{19}+e_{18})} - 1 \right) - I_s \left(e^{\Lambda e_8} - 1 \right) + \alpha_F I_s \left(e^{\Lambda(e_{19}-e_{18})} - 1 \right) \\ -\frac{1}{R_s} e_{18} - I_s \left(e^{\Lambda(e_1+e_8-e_{21}-e_{19}+e_{18})} - 1 \right) + I_s \left(e^{\Lambda(e_{19}-e_{18})} - 1 \right) \end{bmatrix} \\
 M &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Este sistema presenta dificultades en la solución mediante Matlab. Sin embargo, se puede simular mediante Mathematica y NDSolve, usando el sistema en forma implícita, introduciendo directamente las ecuaciones (6.48), (6.50) y (6.52). En el apéndice D se muestra el código empleado. En la figura 6.32 se muestra la respuesta en el voltaje rectificado de salida ante un ángulo de disparo de 1ms.

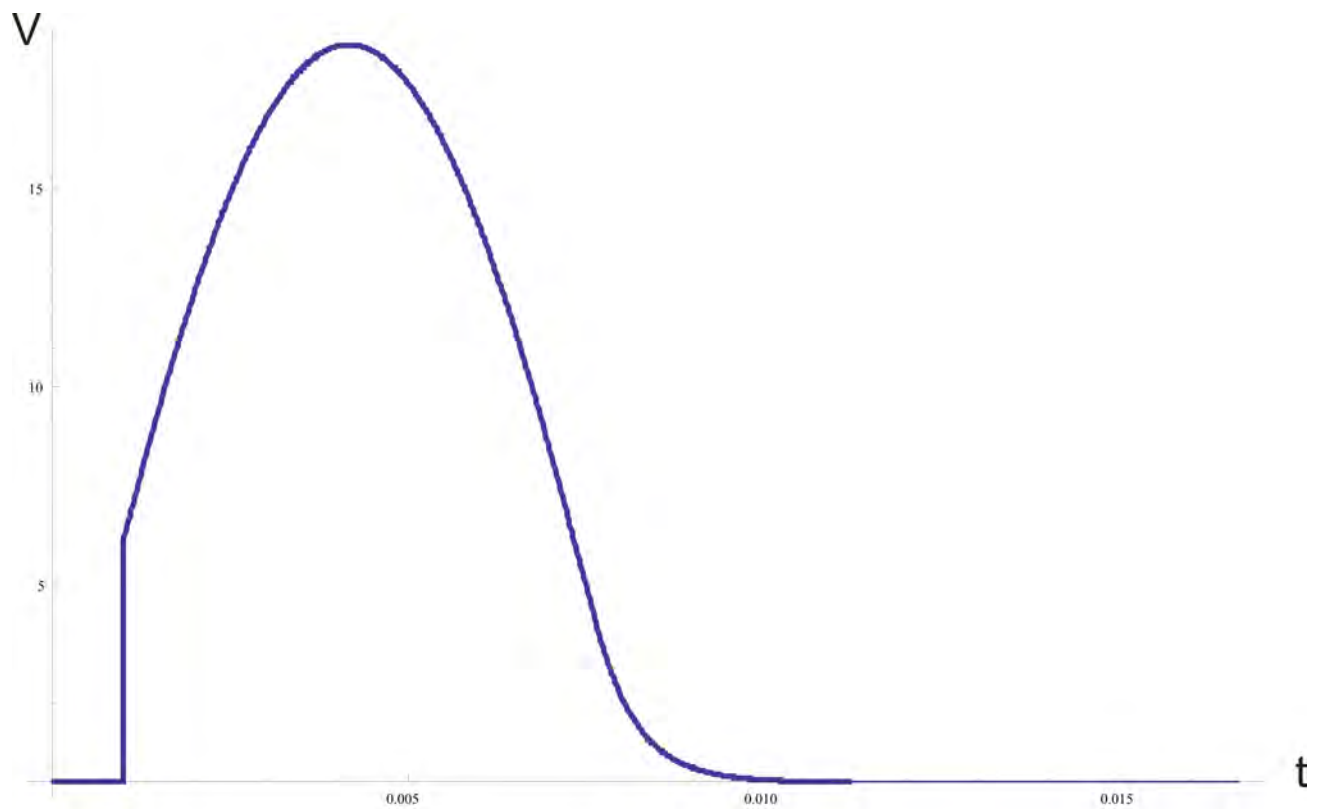


Figura 6.32: Voltaje en el capacitor del circuito rectificador monofásico controlado.

6.8. Conclusiones

Después de presentar los ejemplos de aplicación como prueba de las metodologías propuestas se puede concluir que la técnica para obtener las ecuaciones descriptivas de los sistemas es exitosa, ya que resulta estar bien estructurada y mediante el procedimiento P1 se establece una secuencia de pasos que permiten a cualquier analista llegar a dichas ecuaciones de forma metódica e invariable. La selección del diodo como parte fundamental de los circuitos convertidores resultó también ser adecuada, ya que en todos los casos el sistema queda bien definido. La solución numérica de los sistemas de ecuaciones presenta algunas dificultades debido a la naturaleza no lineal de la relación $v - i$ en que se basan todos los modelos y la rigidez de los sistemas de ecuaciones que los describen.

Capítulo 7

Conclusiones generales

Se ha propuesto un enfoque de análisis diferente para el modelado de sistemas conmutados. Dentro de la forma de modelar los interruptores, la selección del modelo de Shockley permite situar la metodología sugerida dentro del modelado de sistemas de topología fija, aunque ello conlleva el empleo de modelos y técnicas no lineales.

La metodología sugerida permite formular ecuaciones incluso álgebra diferenciales de manera directa, a partir del bond graph. Se ha expuesto y explotado el criterio de adyacencia y se ha sugerido una forma metódica para realizar el análisis del bond graph, empleando una potente mezcla de técnicas de árboles y análisis causal.

Existe una variedad de potentes técnicas de análisis de circuitos eléctricos, ya que se ha hecho investigación sobre ellas durante décadas. Una prueba de ello es la versatilidad de simuladores como PSPICE. En otras áreas de la física, sin embargo, no se cuenta con tal repertorio de técnicas de análisis. La metodología propuesta permite explotar las bondades del análisis de circuitos mediante grafos en otras ramas de la física, gracias a la multi disciplina de los bond graphs. Ingenieros mecánicos, químicos, hidráulicos, térmicos, etc. se pueden beneficiar de las metodologías de los circuitos eléctricos. Basta con que sea posible contruir un modelo bond graph del sistema de interés. Enseguida, al aplicar la metodología sugerida, se estarían obteniendo las ventajas relacionadas a las técnicas de los árboles.

Se ha seleccionado el modelo de Shockley como pieza fundamental. Sin embargo, este modelo permite además, construir otros interruptores, que se pueden analizar con las mismas herramientas sugeridas. De los modelos propuestos, cabe destacar el del tiristor, mismo que tiene una novedosa forma de representación a diodos. Un estudio posterior llevará sin duda a resultados interesantes que involucren la aplicación del modelo.

La solución numérica es parte de la problemática de los sistemas utilizados en este trabajo. Si bien Matlab y su grupo de solucionadores permitieron la correcta simulación de algunos de los sistemas propuestos, se observaron dificultades en tiempo de simulación en otros. Es por lo tanto un área de posible investigación adicional, revisar mas a fondo los métodos de Matlab, o bien, seleccionar algún otro solucionador numérico de ecuaciones algebro-diferenciales, capaz de manejar los sistemas rígidos característicos de estos sistemas. Una vez seleccionado ó depurado el paquete adecuado para esa tarea, se le conferiría una enorme potencia a las metodologías aquí expuestas, y de manera segura, se permitiría la solución de problemas complejos de los convertidores reales, y de otras áreas de la física y la ingeniería en donde se puedan construir modelos en bond graph.

Apéndice A

La unión p-n y la ecuación de Shockley

En 1940, Russell Ohl, trabajando en los laboratorios de Bell Telephone, descubrió la unión p-n, al observar el efecto fotovoltaico cuando aplicó luz a una barra de silicio. Debido a que los cristales no eran demasiado puros en esos tiempos, diferentes partes del mismo cristal tenían diferentes impurezas, y una unión p-n fue formada de manera accidental [54]. Ohl también se dió cuenta de que cuando una punta de metal era presionada contra áreas diferentes del cristal, se observaban efectos opuestos. Él utilizó el término “tipo-p” cuando se necesitaba polarización positiva en la punta de metal para producir una corriente significativa, y de manera converso, “tipo-n” cuando se requería una polarización negativa para conducir la misma corriente. La teoría de la unión p-n fue desarrollada por William Bradford Shockley en 1949 [55]. Esta teoría fue un instrumento para la invención del transistor de unión bipolar, que harían merecedores a Shockley, junto con John Bardeen y Walter Houser Brattain, del premio nobel de física en 1956. En las páginas 451 a la 454 de [55], Shockley desarrolla la densidad de corriente directa total en la unión p-n, que conduce a la siguiente ecuación, tal como él la representa:

$$I = I_s \left[e^{q\delta\varphi_J/kT} - 1 \right] \quad (\text{A.1})$$

donde I es la corriente total a través de la unión; q es la carga del electrón: $1.6022 \times 10^{-19} C$; T es la temperatura absoluta en kelvins; k es la constante de Boltzmann: $1.3806 \times 10^{-23} J/K$; $\delta\varphi_J$ es la diferencia de potencial en la unión e I_s es la densidad de corriente correspondiente a la razón total de generación de pares electrón-hueco. La teoría de la unión p-n es revisada posteriormente, por el mismo Shockley en conjunto con Noyce y Sah [56] y por John L. Moll [57]. Una forma ligeramente diferente de escribir (A.1) es como sigue:

$$I_D = I_S \left(e^{\frac{V_D}{nV_T}} - 1 \right) \quad (\text{A.2})$$

En (A.2), I_D es la corriente en el diodo; I_S es la corriente inversa de saturación, que para cuestiones prácticas, puede tomar un valor de $1 \times 10^{-12} A$ [58]; n es una constante empírica conocida como coeficiente de emisión. Nótese que n no tiene equivalente aparente en (A.1). Esto se debe a que el trabajo de Shockley estuvo basado en el germanio, y justamente, n toma valores aproximados de 1 y de 2 para el germanio y el silicio, respectivamente. V_T es el voltaje térmico, definido como $V_T = \frac{kT}{q}$, con k , T y q definidas como en (A.1). La relación (A.2) es la llamada ecuación de Shockley. En este trabajo de investigación, para efectos de simplicidad, si se considera que la temperatura ambiente es siempre de $27^\circ C$ (300 kelvins) y si se trabaja con silicio, esto es, $n = 2$, entonces se puede definir el valor Λ como:

$$\Lambda = \frac{1}{\eta v_T} \approx 19,2308$$

y de esta manera la ecuación (A.2) se escribe como:

$$I_D = I_S \left(e^{\Lambda V_D} - 1 \right) \quad (\text{A.3})$$

En la figura A.1 se muestra la curva característica resultado de graficar la relación (A.3) en Matlab. Conviene destacar que en la figura A.1, y de acuerdo a (A.3), la variable independiente es el voltaje, mientras que la variable dependiente es la corriente. Este es el concepto de *causalidad conductancia*. Se comenta aquí, sin embargo, que este acomodo de la ecuación es el que exhibe menos problemas numéricos, ya que si se considera la

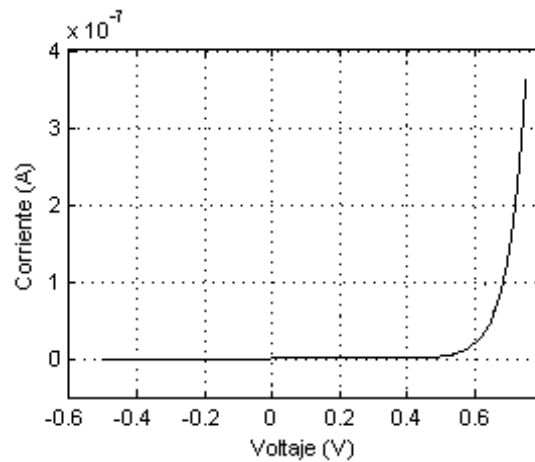


Figura A.1: Curva v - i característica del diodo, obtenida al graficar la ecuación (A.3).

función inversa (*causalidad resistencia*):

$$V_D = \frac{1}{\Lambda} \ln \left(\frac{I_D}{I_s} + 1 \right) \quad (\text{A.4})$$

se hace evidente que para valores de la corriente en el dispositivo en los que $I_D \leq -I_s$, existen problemas numéricos. Visto de esta manera, la ecuación (A.3) es preferida sobre la ecuación (A.4). En otras palabras, la causalidad conductancia es preferida en vez de la causalidad resistencia. Resulta más adecuada una metodología que explote la ecuación de Shockley en causalidad conductancia exclusivamente. Sin embargo, en algunos casos es imposible mantener a todos los diodos en causalidad conductancia. En algunas pruebas realizadas, el paquete de simulación 20 sim -con excelente manejo de los bond graphs- presenta problemas numéricos por esta razón de la causalidad. No obstante, mediante el procedimiento propuesto en este trabajo de investigación la causalidad no es un problema crítico. La causalidad resistencia obligada puede aparecer en varios convertidores. En particular, aparece en el rectificador de onda completa tipo puente, revisado en la sección 6.3. En esa misma sección, el problema se lleva a solución completa, probando la factibilidad del método propuesto en estas circunstancias de causalidad resistencia.

Apéndice B

Definiciones básicas de Árboles

En esta parte se revisan algunos conceptos básicos de la teoría de árboles, que permiten recordar algunas de las reglas básicas para una de las principales herramientas de este trabajo de investigación.

Grafo de un circuito.- El grafo G es una representación gráfica del circuito en la que los nodos del circuito se representan mediante puntos. Los componentes del circuito se representan mediante líneas que unen a los nodos. En general, a estas líneas se les puede llamar lados.

Árbol.- Un sub grafo de G se dice ser árbol sí y sólo sí contiene todos los nodos del grafo y no contiene lazos cerrados.

Como ejemplo, considérese el grafo de la figura B.1.

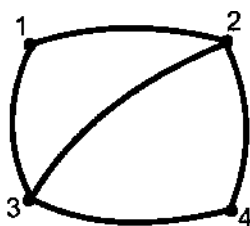


Figura B.1: Grafo lineal.

En las figuras B.2 a la B.5 se muestran posibles árboles del grafo de la figura B.1

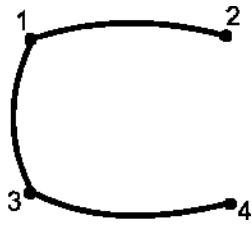


Figura B.2: Arbol 1.

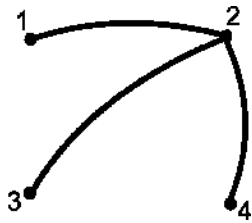


Figura B.3: Arbol 2.

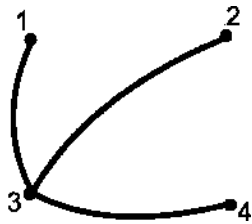


Figura B.4: Arbol 3.

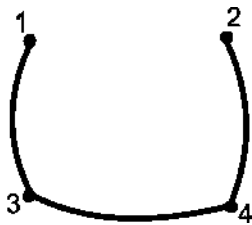


Figura B.5: Arbol 4.

Rama del árbol.- Una vez seleccionado un árbol, cada línea que pertenece al árbol se llama rama del árbol.

Coárbol.- El complemento de un árbol en un grafo G se llama coárbol.

Eslabón.- Una línea ó lado en el coárbol se llama eslabón. Si un grafo tiene n nodos y b líneas, entonces contiene $m = b - n + 1$ eslabones.

Circuitos fundamentales.- Los circuitos fundamentales, o de manera simple, circuitos-f, son los m circuitos simples que se forman con un eslabón y una trayectoria única en el árbol que conecta los dos puntos terminales del eslabón.

Las siguientes definiciones corresponden a los conjuntos de corte, que en inglés son cutsets y a los conjuntos de lazo (loopset) En este trabajo de investigación se mantienen los término en inglés cutset y loopset.

Conjunto de lazo ó loopset.- Son las líneas de un grafo G que forman parte de un circuito. Si el circuito es además fundamental, el conjunto se denomina loopset fundamental.

Conjunto de corte ó cutset.- Un cutset de un grafo G inducido por una partición de los nodos de G en dos conjuntos X e Y es el conjunto de todas las líneas con un punto terminal en X y el otro punto terminal en Y .

Cutsets fundamentales.- Cada rama b_i de un árbol T en un grafo G tiene un cutset correspondiente I_i en que no aparece ninguna otra rama b_j de T . Los cutsets I_1, \dots, I_{n-1} se llaman cutsets fundamentales.

Apéndice C

Solucionadores numéricos

Muchos problemas de aplicación de ingeniería involucran el empleo de ecuaciones diferenciales para su análisis y simulación. En muchos casos, la solución de dichas ecuaciones puede efectuarse mediante conocidos métodos analíticos. Otras veces, sin embargo, no es posible llegar a una solución por medio de métodos analíticos y cobra relevancia una herramienta numérica para estos casos. Los problemas que se analizan en este trabajo de investigación, requieren una solución numérica. Tras revisar diferentes posibilidades, se determinó que una de las opciones a considerar es el juego ODE (de las siglas en inglés para ecuación diferencial ordinaria) de Matlab, que es un conjunto de programas solucionadores numéricos para ecuaciones diferenciales, implementados mediante código de Matlab [61].

Los programas del juego ODE se implementan para solucionar problemas de valor inicial de la forma

$$y' = F(t, y)$$

en un intervalo de tiempo $[t_0, t_f]$, dados valores iniciales $y(t_0) = y_0$. Los solucionadores para problemas rígidos (stiff) permiten la forma más general:

$$M(t) y' = f(t, y)$$

con una matriz de masa $M(t)$ que es no singular y (usualmente) dispersa. Es importante

señalar a los problemas rígidos, porque en este trabajo de investigación, los ejemplos de aplicación desarrollados presentan rigidez, y es conveniente atacarlos con las herramientas más adecuadas.

Al igual que en muchos otros ambientes de solución numérica y simulación, el problema típico en Matlab se soluciona de manera interactiva, y los resultados se despliegan de manera gráfica. Generalmente las funciones que definen las ecuaciones diferenciales no son difíciles de evaluar. El problema rígido típico, o bien es de tamaño manejable, o bien tiene un jacobiano altamente estructurado. En Matlab, el álgebra lineal y las operaciones de arreglos incluidas son relativamente rápidas y el lenguaje provee manejo de arreglos dispersos. Matlab maneja el almacenamiento de manera dinámica y mantiene copias de los arreglos.

C.1. Fórmulas de diferenciación hacia atrás contra Fórmulas de diferenciación numérica

Los métodos de diferenciación hacia atrás (BDF) son populares en la solución de problemas rígidos. Cuando el paso de integración es una constante h y se usan diferencias hacia atrás, la fórmula de orden k , BDF_k , para un paso de (t_n, y_n) a (t_{n+1}, y_{n+1}) está dado por

$$\sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \nabla^m y_{n+1} - hF(t_{n+1}, y_{n+1}) = 0$$

donde ∇ es el operador de diferencia hacia atrás. La ecuación algebraica para y_{n+1} se resuelve con una iteración simplificada de Newton. La iteración empieza con el valor predicho

$$y_{n+1}^{(0)} = \sum_{m=0}^k \nabla^m y_n$$

Otro método, denominado fórmula de diferenciación numéricas (NDF) tiene la forma

$$\sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \nabla^m y_{n+1} - hF(t_{n+1}, y_{n+1}) - k\gamma_k (y_{n+1} - y_{n+1}^{(0)}) = 0$$

donde k es un parámetro escalar y los coeficientes γ_k están dados por $\gamma_k = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}$.

El empleo de NDF de segundo orden presenta algunas ventajas sobre BDF del mismo segundo orden. Por ejemplo, reduce el error por truncamiento, mientras que preserva la estabilidad. Además, permite manejar tamaños de paso mayores [61]. Debido a dichas ventajas, en los solucionadores para sistemas rígidos, se emplea el NDF como método de segundo orden.

Los métodos NDF requieren de diferencias hacia atrás, que pueden ser adecuadamente programadas en Matlab, permitiendo cambios de paso de integración.

C.2. El solucionador ode15s

El código ode15s es una implementación de paso casi constante de NDFs en términos de diferencias hacia atrás. Las opciones permiten la integración con BDFs, así como integración con un orden máximo menor que el estándar de 5. En este código se estima un tamaño de paso inicial óptimo, formando derivadas parciales de $F(t, y)$ en t_0 . En Matlab es natural mantener una copia de la matriz jacobiana cuando es necesario, por lo que en caso de jacobianos constantes, el cálculo se realiza solamente una vez en todo el proceso de integración.

C.3. El solucionador ode23s

El código ode23s se basa en un esquema de fórmulas linealmente implícitas para la solución de problemas rígidos. Estos métodos se llaman así porque el cálculo de y_{n+1} requiere la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Es especialmente efectivo ante tolerancias difíciles, en donde un método de un paso tiene ventajas sobre métodos con

memoria, y donde los jacobianos tienen eigenvalores cercanos al eje imaginario. Se trata de un método de orden fijo de estructura simple. En este método se hace una evaluación del jacobiano en cada paso, lo que mejora la confiabilidad del código. Este método requiere una aproximación de $\frac{\partial F}{\partial t}$ además de la de $\frac{\partial F}{\partial y}$.

C.4. Otros solucionadores

Además de los solucionadores para problemas rígidos, existen los que son para problemas no rígidos, como el ode23 y el ode45, basados explícitamente en métodos de Runge Kutta, ó el solucionador ode113, que es una implementación de los métodos de Adams-Bashforth-Moulton.

C.5. Propiedades de tiempo de simulación

A fin de controlar el resultado del sistema a simular, el juego ODE de Matlab presenta un conjunto de propiedades de control, que permite relizar ajustes al sistema en cuestión. Estas propiedades se pasan en la función 'options'. Las propiedades son las siguientes:

RelTol	Tolerancia relativa
AbsTol	Tolerancia absoluta
NormControl	Control relativo a la norma de la solución
Refine	Permite incrementar los puntos de salida, a fin de hacer la curva más suave
OutputFcn	Función de salida instalable
OutputSel	Selección de índices de salida
Stats	Muestra las estadísticas de costos de computación
Jacobian	Permite pasar el jacobiano, para ahorrar el cálculo por parte del método
Jpattern	Permite pasar una matriz de patrón de dispersidad del jacobiano
Vectorized	Indica si el resultado debe ser vectorizado
Events	Permite detectar eventos
Mass	Permite pasar la matriz de masa (problemas stiff y DAE)
MstateDependence	Permite indicar si la matriz de masa depende de y
MassSingular	Permite especificar si la matriz de masa es singular
MvPattern	Permite indicar si existe dependencia de la matriz de masa respecto de los estados uno a uno
InitialStep	Permite imponer el paso inicial
MaxStep	Permite imponer el tamaño máximo de paso
NonNegative	Forza a que la solución sea un vector de números positivos
BDF	Permite forzar a usar los métodos BDF en solucionadores cuyo método default es NDF
MaxOrder	Por default en ode15s y ode15l se emplea orden 5. Esta propiedad permite reducir ese orden

C.6. El solucionador NDSolve de Mathematica

NDSolve es un solucionador numérico de ecuaciones diferenciales y álgebra-diferenciales. Está contenido en el compendio de herramientas de la plataforma de desarrollo Mathematica. El solucionador de DAEs de NDSolve está basado en IDA, que es un programa solucionador de propósito general para el problema de valor inicial de ecuaciones álgebra diferenciales [62]. IDA a su vez está basado en DASPK, pero está escrito en lenguaje C y no en FORTRAN que es el lenguaje original de DASPK. Una de las características notables de IDA es que en la solución del sistema algebraico no lineal inherente en cada paso de integración, se pueden escoger los métodos directos de Newton, así como métodos

indirectos de Newton-Krylov.

A diferencia de los solucionadores de Matlab, en los que el sistema DAE se tiene que introducir en formato semi explícito, en NDSolve se proporciona en forma implícita, de acuerdo a:

$$F(t, y, y') = 0 \quad (\text{C.1})$$

De la misma manera que en todos los métodos de solución de DAEs, IDA requiere un juego consistente de condiciones iniciales $y(t_0) = y_0$ y $y'(t_0) = y'_0$. Sin embargo, IDA incluye una rutina que calcula condiciones iniciales consistentes a partir de algún aproximado de entrada.

IDA integra el sistema (C.1) con métodos de fórmula de diferenciación hacia atrás de orden variable y paso variable. El orden varía entre 1 y 5.

Apéndice D

Programas de ejemplos de aplicación

Código de Matlab para el circuito de la sección 6.3.

```

clear
clc
t=[0:1e-4:32e-3];
e1=[36*sin(377*t)];
e9=e1;
n=2;
vt=26e-3; %@T=27 celsius
is=1e-12;
lambda=1/(n*vt)
R=500;
size=size(e1);
saís=size(:,2);
f14=zeros(1,saís);
e2=zeros(1,saís);
e6=zeros(1,saís);
ye=zeros(1,saís);
for j=1:saís
funkt=@(f4)((is*(exp(lambda*(e1(1,j)-(R*f4)))+exp(lambda*(-e9(1,j)-(R*f4)))-2))-f4);
varr=fzero(funkt,[-.0010 .1]);
f14(1,j)=varr;
ye(1,j)=R*f14(1,j);
end
plot(t,e1,'--',t,ye)
xlabel('tiempo, s');
ylabel('voltajes, V');
legend('e1','e4');

```

Código de Matlab para el circuito de la sección 6.4.

```

clear
clc
masa=[1 0;...
      0 0];
options = odeset('InitialStep',1e-30,...
'MStateDependence','none','Mass',masa,...
'RelTol',1e-10,'AbsTol',[1e-12 1e-12]);
[T,Y] = ode23t(@full_RC,[0:0.1e-5:32e-3],...
[0 0],options);
ent=100*sin(377*T);
plot(T,ent,T,Y(:,1),'-',T,Y(:,2),'-.');
xlabel('tiempo, s');
ylabel('voltajes, V');
legend('e1','e7','e12');

```

Función full_RC.

```

function dy = full_RC(t,y)
n=2;%parametros del modelo de Shockley
vt=26e-3;
is=1e-12;
g=1/(n*vt);

c=47e-6;%capacitancia de carga
r=100;%resistencia de carga
ei=100.*sin(377*t);%voltaje de entrada
dy = zeros(2,1);
dy(1)=((is/c)*(exp(g*(-y(2)-y(1)))+...
exp(g*(ei-y(2)-y(1)))-2))-((1/(r*c))*y(1));
dy(2)=-exp(g*y(2))+exp(g*(-y(2)-y(1)))+...
exp(g*(ei-y(2)-y(1)))-exp(g*(y(2)-ei));

```

Código de Matlab para el circuito de la sección 6.5.

```

clear
clc
epsilon=0.00000001;
masa=diag([1 epsilon]);...
options = odeset('MStateDependence','none','Mass',masa);

[T,Y] = ode23t(@trifasnested,[0 20e-3],...
[0 0],options);

aan=0;
abr=(pi/180)*(-12);
acr=(pi/180)*20;
f=60;
van=30*sin(2*pi*f*T);
vbn=5*sin(2*pi*f*T+abr);
vcn=20*sin(2*pi*f*T+acr);

plot(T,van-vbn,'--',T,vbn-vcn,'--',T,vcn-van,'--',T,Y(:,1));
xlabel('Tiempo(s)');
ylabel('Voltajes (V)');
legend('vab','vbc','vca','vo');

```

Función trifasnested.

```
function dy = trifasnested(t,y)%
    cd=47e-6;%capacitancia de carga
    rd=100;%resistencia de carga

    aan=0;%voltaje de fase a
    abn=(pi/180)*(-120);%voltaje de fase b
    acn=(pi/180)*120;%voltaje de fase c
    f=60;
    omega=2*pi*f;
    e1=20*sin(omega*t);%van
    e26=20*sin(omega*t+abn);%vbn
    e23=20*sin(omega*t+acn);%vcn

    dy = zeros(2,1);
    dy(1)=(1/cd)*(shockley(-e26+e1-y(2)-y(1))+shockley(-e23+e1-y(2)-y(1))+shockley(-y(2)-y(1))-(y(1)/rd));
    dy(2)=-shockley(y(2))-shockley(e26-e1+y(2))+shockley(-e26+e1-y(2)-y(1))-shockley(-e1+y(2)+e23)+...
    +shockley(-e23+e1-y(2)-y(1))+shockley(-y(2)-y(1));|
```

Función shockley.

```
function y = shockley(vd)
    n=2;
    vt=26e-3;
    is=1e-12;
    g=1/(n*vt);
    y=is*(exp(g*vd)-1);|
```

Código de Matlab para el circuito de la sección 6.6:

```
clear
clc
epsilon=1e-8;
masa=diag([1 1 epsilon epsilon]);...
options = odeset('InitialStep',1e-30,...
'MStateDependence','none','Mass',masa,...
'RelTol',1e-13,'AbsTol',[1e-13,1e-13,1e-13,1e-13]);
[T,Y] = ode23t(@buck1,[0 10e-3],...
[0 0 0 0],options);
ent=5+5*sqrt(2*pi*1000*T,50);
plot(T,Y(:,1))
xlabel('tiempo (s)');
ylabel('voltaje de salida (v)');
```

Función buck1.

```

function dy = buck1(t,y)

n=2;
vt=26e-3;
is=1e-12;
g=1/(n*vt);
c=47e-6;
r=120;
l=5e-3;
rb=1000;
ei=100;
beta=450;
alfaF=beta/(beta+1);
vb=pwm(1/1000,45,10,t);
dy = zeros(4,1);
dy(1)=-(1/(c*r))+1/c)*y(2);
dy(2)=-(1/l)*(y(1)+y(4));
dy(3)=is*(exp(g*y(4))-exp(g*(vb-y(4)-y(3)-ei)))+alfaF*is*(exp(g*(vb-y(3)))-1)-y(2);
dy(4)=-(1/rb)*y(3)+is*(exp(g*(vb-y(4)-y(3)-ei))+exp(g*(vb-y(3)))-2)-alfaF*is*(exp(g*(vb-y(3)))-1);

```

Función pwm.

```

function y=pwm(periodo,duty,alto,tee)
y=tee;
tr=periodo/40;
Dt=periodo*duty/100;
tam=length(tee);
for i=1:tam
    ti(i)=tee(i);
    while ti(i)>=0;
        ti(i)=ti(i)-periodo;
    end
    ti(i)=ti(i)+periodo;
    if ti(i)<tr
        y(i)=(alto/tr)*ti(i);
    else if ti(i)>tr & ti(i)<Dt
        y(i)=alto;
    else if ti(i)<(Dt+tr)
        y(i)=((-alto/tr)*(ti(i)-Dt))+alto;
    else
        y(i)=0;
    end
end
end
end

```

Códigos de Mathematica para el circuito de la sección 6.7.

Definición de parámetros.

```

n = 1.987;
vt = 26*^-3;
is = 1*^-12;
g = 1 / (n * vt);
cd = 4.7*^-6;
Rd = 120;
Rs = 100;
betaF = 85;
alphaF = N[betaF / (betaF + 1)];
freq = 60;
omega = 2 Pi * freq;
e1 = 20 * Sin[omega * t];
(*Tiempo final de simulación*)
tf =  $\frac{1}{\text{freq}}$ ;
sigma = 0.001;

```

Definición de DAEs.

```

In[19]:= e19[t_] := 0;
TraditionalForm[
DAE1 = N[ExpandAll[{{e21'[t] =  $\left(\frac{1}{c_d} \star \text{Sh}[e_1 + e_8[t] - e_{21}[t] - e_{19}[t - \sigma] + e_{18}[t]]\right) - \left(\frac{1}{R_d c_d} e_{21}[t]\right)$ ,
((1 - alphaF) * Sh[e1 + e8[t] - e21[t] - e19[t - sigma] + e18[t]]) + (Sh[e8[t]]) - (alphaF * Sh[e19[t - sigma] - e18[t]]) = 0,
 $\left(\frac{1}{R_s} e_{18}[t]\right) + (\text{Sh}[e_1 + e_8[t] - e_{21}[t] - e_{19}[t - \sigma] + e_{18}[t]]) - (\text{Sh}[e_{19}[t - \sigma] - e_{18}[t]]) = 0$ }}]]]]
In[21]:=
e19[t_] := 2;
TraditionalForm[
DAE2 = N[ExpandAll[{{e21'[t] =  $\left(\frac{1}{c_d} \star \text{Sh}[e_1 + e_8[t] - e_{21}[t] - e_{19}[t - \sigma] + e_{18}[t]]\right) - \left(\frac{1}{R_d c_d} e_{21}[t]\right)$ ,
((1 - alphaF) * Sh[e1 + e8[t] - e21[t] - e19[t - sigma] + e18[t]]) + (Sh[e8[t]]) - (alphaF * Sh[e19[t - sigma] - e18[t]]) = 0,
 $\left(\frac{1}{R_s} e_{18}[t]\right) + (\text{Sh}[e_1 + e_8[t] - e_{21}[t] - e_{19}[t - \sigma] + e_{18}[t]]) - (\text{Sh}[e_{19}[t - \sigma] - e_{18}[t]]) = 0$ }}]]]]

```

Solución mediante NDSolve.

```

In[23]:= i = 1;
        tini = 0;
        tsub =  $\sigma$ ;
        tbaj =  $\frac{1}{\text{freq}}$ ;
        tfinal = tf;
        cis1 = {e21'[0] = 0, e21[0] = 0, e8[0] = 0, e18[0] = 0}
        sol1 = NDSolve[{DAE1, cis1}, {e21, e8, e18}, {t, tini, tsub}, MaxSteps  $\rightarrow 10^8$ , MaxStepFraction  $\rightarrow \frac{1}{100000}$ , AccuracyGoal  $\rightarrow 10$ ]
        Plot[e21[t] /. sol1, {t, tini, tsub}, PlotPoints  $\rightarrow 1000$ ];

In[31]:= vcapp = e21'[tsub] /. sol1;
        vcap = e21[tsub] /. sol1;
        vdcom = e8[tsub] /. sol1;
        vrs = e18[tsub] /. sol1;
        cis2 = {e21'[0] = vcapp, e21[0] = vcap, e8[0] = vdcom, e18[0] = vrs}

In[36]:= sol2 = NDSolve[{DAE2}, {e21, e8, e18}, {t, tsub, tbaj}, MaxSteps  $\rightarrow 10^8$ , MaxStepFraction  $\rightarrow \frac{1}{100000}$ , AccuracyGoal  $\rightarrow 10$ ]
        Plot[e21[t] /. sol2, {t, tsub, tbaj}, PlotPoints  $\rightarrow 1000$ ];
        (*VDC*)

In[38]:= {{e21'[0]}, {e21[0], e8[0], e18[0]}} /. First[sol1]
+ ]
In[39]:= Plot[Piecewise[{{e21[t] /. sol1, tini < t < tsub}, {e21[t] /. sol2, tsub < t < tbaj}}, {t, tini, tbaj}, PlotPoints  $\rightarrow 1000$ ]

```

Apéndice E

Publicaciones

E.1. Artículo de conferencia 1

“Diodes and an alternative Procedure to derive equations from Bond Graph models by exploiting a Linear Graph approach” .

Presentado en: The 5th International Conference on Integrated Modeling and Analysis in Applied Control and Automation (IMAACA 2011), Italy, 2011.

Diodes and an alternative Procedure to derive equations from Bond Graph models by exploiting a Linear Graph approach.

Noé Villa-Villaseñor, Gilberto González-Ávalos and Jesús Rico-Melgoza
DEP-FIE

Universidad Michoacana
de San Nicolás Hidalgo
Morelia, Michoacán, México
contact Email: vilaslord@hotmail.com

Keywords- Algebraic equations, State Space Equations, Bond Graph Modelling, Linear Graph Modelling, Tree Theory, Causal Paths, Shockley Model of the diode.

Abstract— This paper deal with methods to get equations from a Bond Graph (BG) Model. Mixed Techniques to get equations from both Linear Graph (LG) and BG Models are employed. A criterion that allows to identify the tree and the co-tree in a BG model is reviewed. Also, the advantages of causal paths inherent to BG are exploited. The equivalence between a LG model and its respective BG model is also used. A procedure to get equations from a given BG model is proposed. To show the functionality of the proposed methods, examples with diodes are solved.

I. INTRODUCTION

Graphs are simple geometrical figures consisting of nodes and lines that connect some of these nodes; they are sometimes called “Linear Graphs” [1]. One of the most important applications of Graph Theory is its use in the formulation and solution of the electrical network problem by Kirchhoff [1]. Equations can be determined from a LG by finding a normal form based on an appropriate tree [1].

Bond graph is a highly structured modelling technique that allows to analyze different kinds of physical systems in a unique way determined by a basis of unified description [2]. This technique allows the determination of the State Space Equation (SSE) in several different ways by reviewing the interactions of the dynamic elements and the causal paths they determine [3], [4].

Both BG and LG treats with spatially discrete physical systems [5] even when only LG modelling preserves the spatial visualization related to the model being analyzed. The spatial constraints in a BG model are implicit in the location of the 0 and 1 junctions [5].

There exists several ways to get the SSE from a BG model [6], some of them exploiting the concept of causality and causal paths.

Mathematical manipulation of non linear semiconductor models could be difficult. Here, diodes are reviewed and modeled with a non linear constitutive relation.

In this paper a procedure to obtain equations from a BG model

by exploiting the LG tree Theory is proposed. The proposed procedure can be particularly useful in the analysis of some systems involving algebraic loops.

The contents are ordered as follows:

Section II shows a reviewing of the Shockley diode model . Section III presents some current techniques to derive equations from BG and LG models. Section IV shows the main result of this work, First a criterion that allow to identify the LG related tree in a BG model is discussed. Then, a procedure that allow to derive the SSE from a BG model by employing the LG related tree theory is presented. Finally three examples are analyzed and discussed while they are solved with the proposed approach. In section V, the conclusions and final comments are written.

In the next Section a short review of the Shocley diode model is presented.

II. THE DIODE MODEL

The diode can be considered as a non controlled switching device [7]. Switched systems can be viewed from several approaches and two main classifications can be made: The variant topology approach and the invariant topology approach [6].

Most texts deal with the idealized model of the diode, i.e. a variant topology model whose representation changes between a short circuit and an open circuit, depending on its on-off state.

The Shockley model is a non linear invariant topology model that is presented in several power electronics textbooks. However, a procedure to derive equations from systems involving this Shockley model is rarely presented and authors start their analysis with the idealized on-off-switch approach. In this paper the Shockley model is used.

The constitutive relation of the Shockley model as appears in [8] is

$$I_D = I_S \left(e^{\frac{V_D}{nV_T}} - 1 \right)$$

where:

- I_D = Current through the diode.

- V_D = Voltage in the diode in the anode referred to the cathode.
- I_S = Reverse saturation current with a value of $1 \times 10^{-12} A$.
- n = Empirical constant known as emission coefficient, that depends on the construction of the element.
- V_T = Thermal voltage given by

$$V_T = \frac{kT}{q}$$

Where q is the electron charge equal to $1.6022 \times 10^{-19} C$; T is the absolute temperature in kelvins and k is the Boltzmann constant equal to $1.3806 \times 10^{-23} J/K$.

For simplicity, some values will be fixed and it will be assumed that

$$I_D = I_S (e^{gV_D} - 1) \quad (1)$$

considering a $27^\circ C$ temperature and $n = 2$ that is a value that can be assigned to silicon diodes. With these considerations the g value is

$$g = \frac{1}{\eta v_T} \simeq 19.2308$$

The characteristic $v - i$ curve for this constitutive relation is shown in Figure 1.

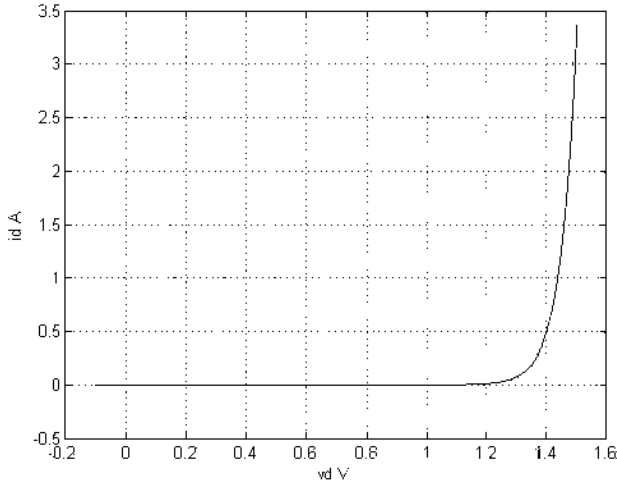


Fig. 1. The characteristic $v - i$ curve resulting of the constitutive relation (1).

The BG model that will be used in this paper is a resistive non linear R element whose constitutive relation is that presented in equation (1). This model appears in figure 2.



Fig. 2. A resistive non linear diode model.

In the next section a reviewing of some of the current techniques to get the equations from both BG and LG models is performed.

III. CURRENT METHODS OF EQUATIONS DERIVATION.

There exist several techniques in order to derive equations from both LG and BG models, and some of them are reviewed in the following paragraphs.

A. SSE derivation from a BG models through junction structure matrix

There exists several approaches to develop the SSE from a BG model [6], one of the most powerful is the related with the junction structure matrix [3]. In Figure 3 The key vectors and the junction structure relationships are shown.

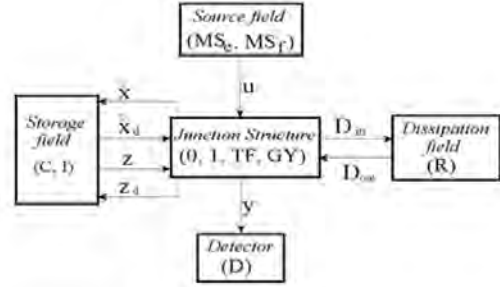


Fig. 3. Key vectors and the junction structure.

In figure 3, the key vectors are formed as follows: (MS_e, MS_f) is the sources field; (L, C) is the storage field; (R) is the dissipative field; (D_e) is the field of detectors; finally, $(0, 1, TF, GY)$ are the elements of the junction structure. The vectors x and x_d represent the states of the system at integral and derivative causality, respectively. z denotes the co-energy vector and z_d the derivative co-energy vector. The vectors u and y are the input and the output, respectively. D_{in} and D_{out} show the relationships between efforts and flows in the dissipative field. The constitutive relationships are given by,

$$z = Fx \quad (2)$$

$$D_{out} = LD_{in} \quad (3)$$

$$z_d = F_d x_d \quad (4)$$

Also the relationships of the junction structure are specified by,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} & D_{in} & y \end{bmatrix}^T = S \begin{bmatrix} z & D_{out} & u & \dot{x}_d \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

where the matrix of junction structure S is given by,

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$z_d = G_1 - S_{14}^T z$$

By employing the junction structure matrix S and the relationships between the different fields it is possible to write the model as a space-state equation of the form

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (7)$$

$$y = Cx + Du \quad (8)$$

with

$$A = E^{-1} (S_{11} + S_{12}MS_{21}) F \quad (9)$$

$$B = E^{-1} (S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (10)$$

$$C = (S_{31} + S_{32}MS_{21}) F \quad (11)$$

$$D = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (12)$$

where

$$E = I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^T F \quad (13)$$

$$M = (I - LS_{22})^{-1} L \quad (14)$$

The dynamic elements being placed in vectors x and x_d are selected depending on its causality assignment.

One disadvantage of this method arises in non linear systems modelling, since this matrix representation is not always possible to obtain.

In the next subsection, other approach employed to get the SSE from a BG model is cited.

B. Other SSE derivation method from Bond Graph

According to [6] and [2], given a BG model, the SSE can be achieved by proceeding in a systematic way, as follows:

- 1) Write the structure laws in the junctions by considering causality.
- 2) Write the constitutive relationships of the elements by considering causality.
- 3) Combine these different laws in order to put on explicitly the derivatives of the state variables as function of the state variables and the inputs.

The key concept in both methods is causality, because the formulation of S matrix (in the first method) depends totally on causal paths as well as the systematic (second) method needs the causality assignment already performed. Once the S matrix has been constructed, the procedure to derive the SSE of the model is just a step-by-step algorithm. In the next subsection a short review on causality and causal paths is done.

C. Causality and causal paths

One of the most powerful characteristics of bond graph is that a lot of information can be retrieved without writing any equations, just by analyzing the causality. Physical systems are full of interacting variable pairs [2]. If two elements are bonded, the effort causes one element to respond with flow, while the flow causes the first element to respond with effort. Thus, the cause-effect relationships for efforts and flows are represented in opposite directions.

A detailed description of causal paths can be found in [9] from where the next has been extracted:

Definition 1: A causal path in bond graph is an alternation of bonds and basic elements, called "nodes" such that:

- 1) For the acausal graph (before establishing causality), the sequence forms a single chain.

- 2) All of the nodes in the path have complete and correct causality.
- 3) Two bonds in a causal path have in the same node opposite causal orientations.

According to the variable being followed, there are two kinds of causal paths. The causal path is simple if it can be crossed by following always the same variable and the causal path is mixed if it is necessary to perform a variable change while the graphic is crossed. In addition, two elements P_1 and P_2 , belonging to the set $\{R, C, I, S_e, S_f, D_e, D_f\}$ are *causally connected* if the input variable of one is influenced by the output variable of the other.

In the next section some of the techniques used to develop equations from a LG model are mentioned.

D. SEE derived from a LG model

The tree theory developed originally by Kirchhoff [1] is very useful in the formulation of equations in electrical networks. In purely resistive linear networks, two general approaches can lead to the formulation of a minimal set of equations: general node analysis and general loop analysis [10]. If a given network has dynamic elements, there exists procedures to derive the SSE by using the basis of a normal tree. According to [1] a normal tree can be defined as follows:

Definition 2: A normal tree of a connected directed graph representing a network is a tree that contains all the independent voltage (effort) sources edges, the maximum number (all) of capacitive edges, the minimum number (none) of inductive edges, and none of the independent current (flow) source edges.

The SSE equation of any linear time-invariant system represented by a LG model can be derived by following a systematic procedure [1]. In the case when a normal tree as described in definition 2 cannot be constructed, the LG model includes dynamical elements that cannot be expressed independently in the resulting SSE.

In the next section a mixed approach that exploits the LG tree theory is presented. This proposed approach works directly on the BG model.

IV. DERIVING THE EQUATIONS FROM A BG MODEL BY USING A LG TREE APPROACH

The equivalence between a LG model and a BG model is reviewed in [12]. Authors establishes a relation between a BG model and the tree of the related LG model by considering causality and adjacent causal strokes. A slightly different qualitative analysis can be performed. Consider the electrical network shown in Figure 4.

In Figure 4 (a) an electric network is drawn. In Figure 4 (b) the corresponding tree (the only possible normal tree) of the system is shown. In Figure 4 (c) the unique related Bond Graph model with integral preferred causality (BGI) can be seen. It is very important to notice the branches of the tree and the orientation of the causal strokes in the corresponding elements on the BG model. The following concepts allow to

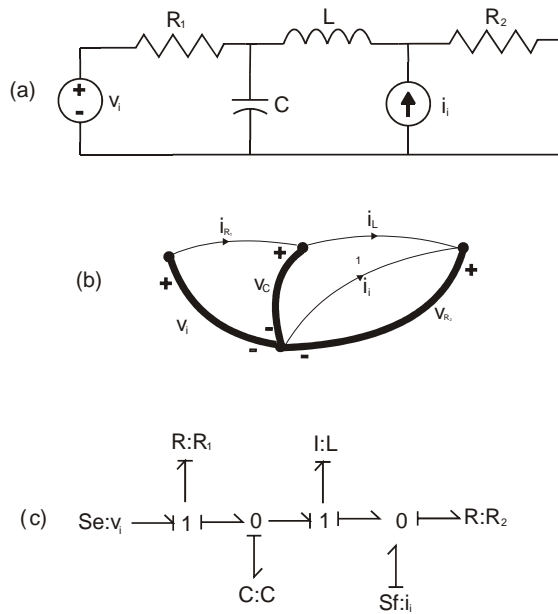


Fig. 4. Electrical network (a) and their LG (b) and BGI (c) representation.

formalize the criterion employed to identify a tree on a BG model.

When a port-1 element is causally connected to a BG junction structure two situations are possible: (i) The causal stroke (effort) go from the junction structure toward the element or *outwards* as in Figure 5 (a), or (ii) the causal stroke go from the element toward the junction structure or *inwards*, as in Figure 5 (b). In Figure 5, the X element is assumed to be a port-1 element.

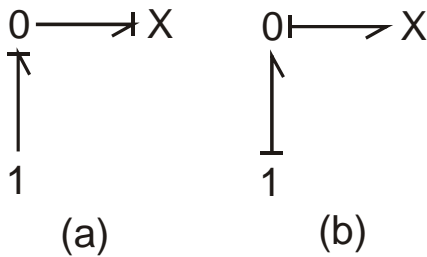


Fig. 5. The two possible causal orientations of a port-1 element.

This direction on the casual strokes is important, because it bring the conditions to identify the spanning tree of a system in a BG model. This is summarized in the next criterion:

Criterion 1: In a BGI model, each port-1 element whose causal stroke is inwards (junction adjacent) determine a branch of the related spanning tree. The set of all these port-1 elements spans the related tree. In the other hand, each port-1 element whose causal stroke is outwards (element adjacent) determine a chord of the related cotree.

This criterion allow to find out a one to one relation between a BG model and its associated LG model.

In LG theory, Kirchoff Current Law (KCL) is applied over tree branches in order to get their currents as a sum of currents of the cotree chords. This is completely equivalent to analyze the causal paths related to each “tree branch” on the BG model after Criterion 1 has been applied. With this consideration, a direct procedure to derive the SSE from a BG model can be written as follows:

Procedure 1:

- 1) Given an acausal BG model, assign causality as BGI.
- 2) Determine the tree branches and the cotree chords according to criterion 1.
- 3) Set the effort sources and capacitive elements in the tree as tree-main-effort (TME) variables. If resistive elements belong to the tree, set them as tree-helper-effort (THE) variables.
- 4) Set the flow sources and inductive elements in the cotree as key-flow (KF) variables. If resistive elements belong to the cotree, set them as nonkey-flow (NF) variables.
- 5) By using the element constitutive relation, write each NF variable as a combination of all the TME variables that hold a direct causal path with it.
- 6) By using the element constitutive relation, write the each THE variable as a combination of all the flow variables that hold a direct causal path with it.
- 7) Write the state equations by determining each capacitor flow in the tree as a combination of the cotree flows that hold a direct causal path with it. And by determining each inductive effort in the cotree as a combination of the tree efforts that hold a direct causal path with it. Finally, write the state equation by using (in the linear case) the relations $f_C = C\dot{e}_C$ and $e_I = I\dot{f}_I$

Remark 1: If in step 1, Integral causality cannot be assigned in all elements, it implies that a normal tree cannot be constructed. In step 5 and 6 if it is found that direct causal paths are held between THE and NF elements, then algebraic loops will arise in the case of linear systems or differential algebraic equations must be constructed in the case of non linear systems.

The preceding Procedure allows to derive the SSE from a BG model. If only algebraic equations are needed (resistive systems), the general node analysis can be performed. General node analysis mixed with BG analysis brings a very systematic procedure to derive equations. Once a normal tree is established, it is always possible to find causal paths between tree elements and cotree elements. The key of the procedure is to determine the flows in the tree elements in terms of cotree variables by following the (unique) causal paths that are formed, at the same time cotree elements can be determined by their constitutive relationship and the (also unique) causal paths to tree elements. The next example show how this Procedure can be applied.

Example 1: Consider again the system in Figure 4.

In Figure 6 the BGI model of Figure 4 has been redrawn and the bonds are now numbered, as well as the tree branches are

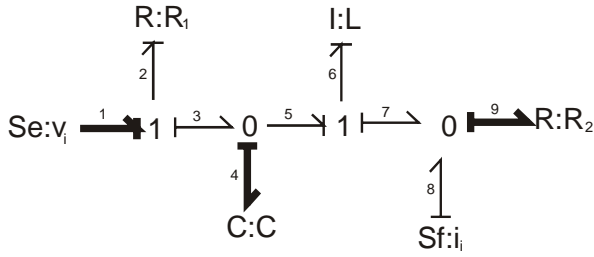


Fig. 6. The BGI model of system in Figure 4.

now remarked as black bonds. According to Procedure 1, the first step is already done. According to criterion 1, the second step is also performed and the bonds corresponding to the tree branches are darkened. In this terms, the bonds belonging to the tree are 1, 4 and 9. the bonds of the cotree are 2, 6 and 8. According with step 3, TME variables are e_1 and e_4 whereas e_9 is the unique THE variable. Step 4 allow to identify f_6 and f_8 as KF variables and f_2 as NF variable. Step 5 of Procedure 1 ask to write any cotree R element flow (NF variable) as a combination of main efforts on the tree and the related constitutive relationship. This is the case of R_1 . The flow on R_1 can be written as,

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{1}{R_1} e_2 \\ f_2 &= \frac{1}{R_1} (e_1 - e_3) \\ f_2 &= \frac{1}{R_1} (e_1 - e_4) \end{aligned} \quad (15)$$

Step 6 requires to write e_9 as a combination of flows in the cotree. It can be seen that R_2 holds direct causal paths with i_1 through $\{9, 8\}$ and with L through $\{9, 7, 6\}$, therefore it can be written

$$\begin{aligned} e_9 &= R_2 f_9 \\ e_9 &= R_2 (f_7 + f_8) \\ e_9 &= R_2 (f_6 + f_8) \end{aligned} \quad (16)$$

Step 7 requires to write the flow in the capacitor as a combination of cotree variables causally connected with it. Reviewing the causal paths, it can be noticed that

$$\begin{aligned} f_4 &= f_3 - f_5 \\ f_4 &= f_2 - f_6 \end{aligned} \quad (17)$$

Replacing (15) into (17) the result is,

$$\begin{aligned} f_4 &= \frac{1}{R_2} (e_1 - e_4) - f_6 \\ f_4 &= -\frac{1}{R_2} e_4 - f_6 + \frac{1}{R_2} e_1 \end{aligned} \quad (18)$$

Following step 7 I effort equation can also be derived as

$$\begin{aligned} e_6 &= e_5 - e_7 = \\ e_6 &= e_4 - e_9 \end{aligned} \quad (19)$$

Replacing (16) into (19) the result is

$$\begin{aligned} e_6 &= e_4 - R_2 (f_6 + f_8) \\ e_6 &= e_4 - R_2 f_6 - R_2 f_8 \end{aligned} \quad (20)$$

Finally, equations (18) and (20) can be modified as

$$\begin{aligned} \dot{e}_4 &= -\frac{1}{R_2 C} e_4 - \frac{1}{C} f_6 + \frac{1}{R_2 C} e_1 \\ \dot{f}_6 &= \frac{1}{L} e_4 - \frac{R_2}{L} f_6 - \frac{R_2}{L} f_8 \end{aligned} \quad (21)$$

Equation (21) is the SSE corresponding to model in Figure 4.

In the next example, a diode circuit is analyzed.

Example 2: A purely resistive system: The central tap full wave rectifier with resistive load

Consider the electrical network shown in Figure 7.

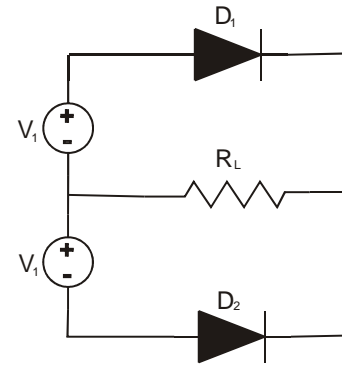


Fig. 7. A full wave rectifier with resistive load.

In Figure 8 the model with causality assigned is shown

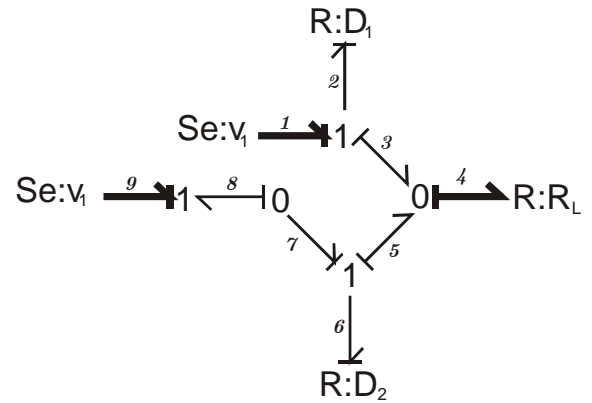


Fig. 8. Bond Graph model of the system in figure 7 with causality assigned.

Notice in figure 8 that bonds 1, 4 and 9 belong to the tree. The R elements in the cotree are D_1 and D_2 . Their flows depending on the tree efforts and the constitutive relation (1) are as follows:

$$f_2 = I_s (e^{g e_2} - 1)$$

or

$$f_2 = I_s (e^{g(e_1 - e_4)} - 1) \quad (22)$$

and

$$f_6 = I_s (e^{g e_6} - 1)$$

or

$$f_6 = I_s \left(e^{g(-e_9 - e_4)} - 1 \right) \quad (23)$$

Writing one equation in this example can lead to the solution of the entire model. This equation is

$$f_4 = f_2 + f_6 \quad (24)$$

Substituting equations (22) and (23) in equation (24) it results

$$f_4 = I_s \left(e^{g(e_1 - e_4)} + e^{g(-e_9 - e_4)} - 2 \right) \quad (25)$$

Also the effort in R_L can be expressed as

$$e_4 = R_L f_4 \quad (26)$$

Substituting equation (26) in equation (25), the following equation can be written

$$f_4 = I_s \left(e^{g(e_1 - R_L f_4)} + e^{g(-e_9 - R_L f_4)} - 2 \right) \quad (27)$$

Equation (27) is an implicit function of the flow f_4 in R_L that can be simulated in Matlab as follows

```

t=[0:1e-4:32e-3];
ei=[36*sin(377*t)];
e9=ei;
n=2;
vt=26e-3; %@T=27 celsius
is=1e-12;
g=1/(n*vt)
R=500;
size=size(ei);
sais=size(:,2);
f14=zeros(1,sais);
e2=zeros(1,sais);
e6=zeros(1,sais);
ye=zeros(1,sais);
for j=1:sais
funkt=@(f4)((is*(exp(g*(ei(1,j)-(R*f4))))+exp(g*(-e7(1,j)-(R*f4))))-2))-f4);
varr=fzero(funkt,[-.0010 .1]);
f14(1,j)=double(varr);
ye(1,j)=R*f14(1,j);
end
plot(t,ei,t,ye)
xlabel('time, s');
ylabel('in and out Voltages, V');

```

And the graphic of the Figure 9 is obtained

The preceding example has shown how to apply the proposed Procedure in purely resistive systems containing diodes represented by the Shockley model (1).

Now a dynamic system is analyzed. Consider the electric network shown in Figure 10.

The corresponding BGI is shown in Figure 11.

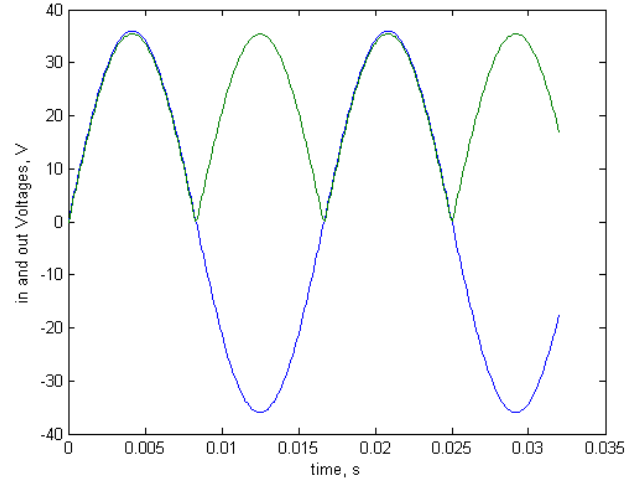


Fig. 9. The input and output voltages of the system in Figure 7.

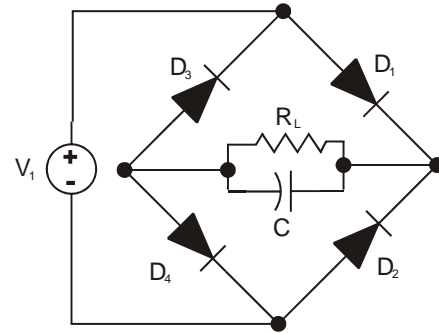


Fig. 10. A full wave rectifier with RC load.

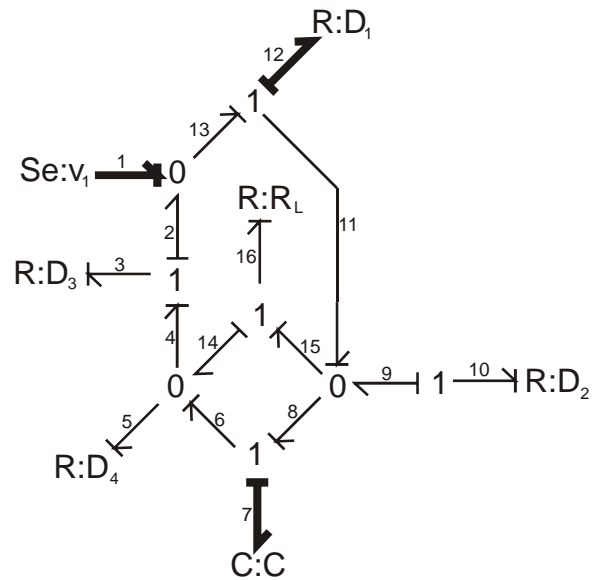


Fig. 11. BGI model of the system in Figure 10.

The tree is conformed by 2 TME variables an 1 THE variable, (e_1 , e_7 and e_{12} , respectively). All elements in the cotree are causally conected with elements in the tree, D_2 is causally connected with D_1 through the causal path $\{10, 9, 11, 12\}$, and with V_1 through the causal path $\{10, 9, 11, 13, 1\}$, and effort e_{10} can be expressed as

$$e_{10} = -e_1 + e_{12} \quad (28)$$

Similarly, R is causally connected with C , D_1 and V_1 , and

$$e_{16} = e_7 \quad (29)$$

In a similar way, the following cotree efforts can be expressed in terms of the tree variables as:

$$e_3 = -e_{12} - e_7 \quad (30)$$

$$e_5 = e_1 - e_{12} - e_7 \quad (31)$$

According to general node analysis, and the given procedure, KCL must be applied twice, and in the BG model this means that the flow in the unknowns must be expressed in terms of the flows in the cotree. Starting with the flow in D_1 , it can be seen that this element is causally connected with D_2 , R_L , D_3 and D_4 . This dependence can be written as

$$f_{12} = f_3 + f_5 - f_{10} \quad (32)$$

due to the non linear nature of the system, the e_{12} tree variable is very difficult to eliminate, so a differential algebraic equation must me constructed, and equation 32 shall be rewritten as

$$-f_{12} + f_3 + f_5 - f_{10} = 0$$

by applying the diode constitutive relations, it can be seen that

$$I_s [-e^{ge_{12}} + e^{ge_3} + e^{ge_5} - e^{ge_{10}}] = 0 \quad (33)$$

Substituting 28, 30 and 31 into 33, the first system equation is obtained as:

$$I_s \left[-e^{ge_{12}} + e^{g(-e_{12}-e_7)} + e^{g(e_1-e_{12}-e_7)} - e^{g(-e_1+e_{12})} \right] = 0 \quad (34)$$

Now, considering the flow in C , this element is causally connected with D_4 , R_L and D_3 , and its flow can be written as

$$f_7 = f_5 + f_3 - f_{16}$$

or

$$f_7 = I_s (e^{ge_5} - 1) + I_s (e^{ge_3} - 1) - \frac{1}{R_L} e_7 \quad (35)$$

Substituting 29, 30 and 31 into 35, and isolating the derivative of the state, the second system equation can be written as

$$\dot{e}_7 = \frac{I_s}{C} \left(e^{g(e_1-e_{12}-e_7)} + e^{g(-e_{12}-e_7)} - 2 \right) - \frac{1}{R_L C} e_7 \quad (36)$$

equations 34 and 36 conform a differential algebraic system. This system is simulated in Matlab with the next code lines:

```
clear
clc
masa=[1 0;...
0 0];%mass matrix to indicate DAE
```

```
options = odeset('Initialstep',1e-30,...
'MStateDependence','none','Mass',masa,...
'RelTol',1e-10,'AbsTol',[1e-12 1e-12]);
[T,Y] = ode23t(@full_RC,[0:0.1e-5:32e-3],...
[0 0],options);
ent=100*sin(377*T);
plot(T,ent,T,Y(:,1),'-',T,Y(:,2),'-')
%plotting the input, the D1 voltage and the output
```

```
With the fuction full_RC defined as
function dy = full_RC(t,y)
%Shockley model parameters
n=2; %silice 2, germanium 1
vt=26e-3; %@T=27 degrees celsius
is=1e-12;
g=1/(n*vt);
%component values
c=47e-6;%load capacitance
r=100;%load resistance
ei=100.*sin(377*t);%input voltage
dy = zeros(2,1);
dy(1)=(is/c*(exp(g*(-y(2)-y(1)))+...
exp(g*(ei-y(2)-y(1)))-2))-((1/(r*c))*y(1));
dy(2)=-exp(g*y(2))+exp(g*(-y(2)-y(1)))+...
exp(g*(ei-y(2)-y(1)))-exp(g*(y(2)-ei));
```

Once these codes are implemented in Matlab, the plotting in the following Figure is obtained:

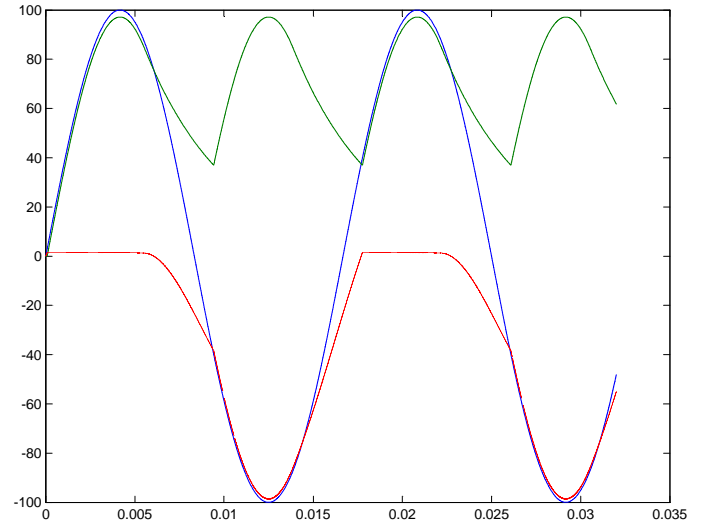


Fig. 12. Simulation results of the system in Figure 11.

V. CONCLUSIONS

An alternative approach to derive equations from a BG model has been presented. Two important tools are employed: The causality and causal paths involved in BG theory and the tree formulation of SSE employed in LG theory. The proposed approach allow to derive the SSE in a systematic way by following a step by step procedure.

Causal connections between tree elements and cotree elements can be directly found with the suggested Procedure, allowing the equation derivation of systems containing elements with non linear constitutive relations, such as the well known Shockley diode model. General node analysis allows to analyze even purely resistive (algebraic) systems, and also dynamic systems with the proposed modification in BG models.

REFERENCES

- [1] Wai-Kai Chen, "Applied Graph Theory" 2nd revised edition, North-Holland Publishing Company, 1976, Netherlands.
- [2] Ronald C. Rosenberg and Dean C. Karnopp, "Introduction to physical system dynamics", McGraw-Hill 1983.
- [3] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy, "Structural controllability/observability of linear systems represented by bond graphs", J. Franklin Inst., vol. 326 No. 6, P. 869-883, 1989.
- [4] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy, "Bond-graph approach for structural analysis of MIMO linear systems", J. Franklin Inst. vol. 328 No. 1 P. 55-70, 1991
- [5] Stephen Birkett Jean Thoma and Peter Roe, "A pedagogical analysis of bond graph and linear graph physical system models", Mathematical and computer modelling of dynamical systems, vol. 12. no. 2-3, april - june 2006, P. 107-125, Taylor & Francis.
- [6] Dauphin-Tanguy Geneviève, et al., "Les Bond Graphs", Hermes Science Publications, 2000, France.
- [7] Ned Mohan, et al. "Power electronics", John wiley and Sons, U.S.A. 2003
- [8] Muhammad H. Rashid "Power electronics Circuits, Devices, and Applications", Prentice Hall, 1993
- [9] G. Dauphin-Tanguy and S. Scavarda, "Bond-graph modeling of physical systems", Chapman & Hall. A. J. Fossard, D. Normand-Cyrot. 1995. Vol. 1, pp. 33-109.
- [10] William Hayt et al. "Engineering Circuit Analysis", 7th ed. 2007, Mc. Graw Hill.
- [11] Amalendu Mukherjee, et al, "Bond Graph in Modeling, Simulation and Fault Identification", CRC Press, 2006, India.
- [12] Alan S. Perelson, George F. Oster, "Bond Graphs and Linear Graphs" J. of the Franklin Institute, 302 (2), pp.159-185. (1976)

E.2. Artículo de conferencia 2

“Bond Graph Modeling of a Non-Linear Buck Converter Using a Linear Graph Approach” .

Presentado en: The 10th international Conference on Bond graph Modeling and Simulation (ICBGM'12), Italy, 2012.

Bond Graph Modeling Of A Non-linear Buck Converter Using A Linear Graph Approach.

Noé Villa-Villaseñor, Gilberto González-Ávalos and Jesús Rico-Melgoza
DEP-FIE

Universidad Michoacana
de San Nicolás Hidalgo
Morelia, Michoacán, México
contact Email: vilaslord@hotmail.com

Keywords Buck converter; Tree theory; DAE systems; Ebers-Moll model; causal paths.

Abstract—In this paper a buck converter whose switching device is a bipolar junction transistor (BJT) is presented. This BJT is also modeled according to the non-linear Ebers-Moll model. The derivation of the system equations is performed through a mixed approach that exploits advantages of both Bond Graph and Linear Graph techniques. Due to the non-linear nature of the switching device, the resulting mathematical model is a differential algebraic equation (DAE) that is simulated in order to prove the validity of the model.

I. INTRODUCTION

Bond graph is a powerful modeling technique, that allows to mix different physical realms in a sole context [1]. This brings several advantages, since isolated analysis is not required when working with mixed systems. Moreover, Bond Graph has a very powerful feature that is *causality*. This property, among other things, allow to know system properties before writing any equation, and it is widely useful in linear system theory. However, when dealing with non-linear systems, causality has not been fully exploited yet. In this paper, causality plays a main role in the process of getting the non linear system equations.

Bond Graph is also a highly structured technique, that allows to represent a system in a very organized way [2]. In Figure 1, the typical key vectors that mathematically conform a Bond Graph model are shown.

For all of the aforementioned reasons, it is convenient to work with Bond Graph, since it is a technique that brings several advantages.

On the other hand, Linear graph theory, is a powerful field that has a specially good capability when dealing with electrical systems [3]. Tree theory is a very optimized methodology that allows to deal with electric circuits in simplified and yet optimal ways. This theory is a great tool that an electric engineer can use to derive a minimal set of equations of an electric network. The buck converter is an electric power switching converter, and in this researching project, it has been found that when trying to make a complete analysis, tree theory is one of the best possible choices that can be taken

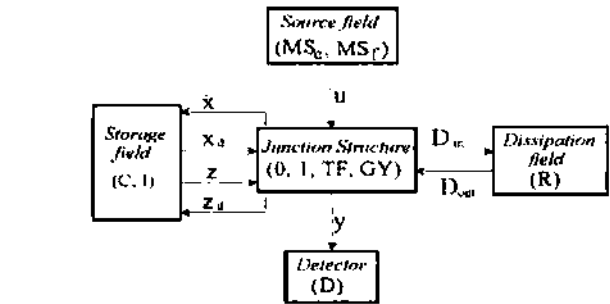


Fig. 1. The key vectors that conform a Bond Graph model.

into account. In this paper, a mixed procedure that uses the advantages of tree theory in the realm of Bond Graph modeling is exploited. The buck converter is mathematically modeled, and the procedure for getting the system equations from the electric model is step by step explained.

Switching systems are often modeled with the variable topology approach [4]. The main reason for this is the ease that such approach brings when performing model-related analysis. Another reason is the big existing knowledge in applying the approach to linear systems. However, the variable topology approach present some problems, specially those related with the initial conditions in the commutation points. Each time a change in the switching device(s) takes place, a new set of initial conditions in the dynamic elements is needed. This is specially hard to deal with in the case of systems containing a big number of switching devices. In this paper, the Ebers-Moll model of the BJT is used as switching device. This model has the advantage of showing a fixed topology approach, since the device is always present during the simulation period, and its state does not change. The paper is organized as follows: in section II the Ebers-Moll model of the bipolar transistor is reviewed. Also the simplified model that is used within this paper is shown. In section III, the main modeling of the paper is presented. The procedure that allows to derive equations from the Bond Graph model is explained. This procedure is applied, then the obtained equations are numerically solved and simulation results are shown. Finally, in section IV conclusions are written.

II. EBERS-MOLL MODEL

In this paper the switching device being employed, is a simplified Ebers-Moll model of the bipolar junction transistor. The complete model was developed by Ebers and Moll in 1954, and it is also called the ‘‘coupled diode model’’. It consists of two diodes and two controlled current sources. The Ebers-Moll model depicted in Figure 2 is a simplified one. The value of α_F is related with the transistor current gain β through

$$\alpha_F = \frac{\beta}{\beta + 1}$$

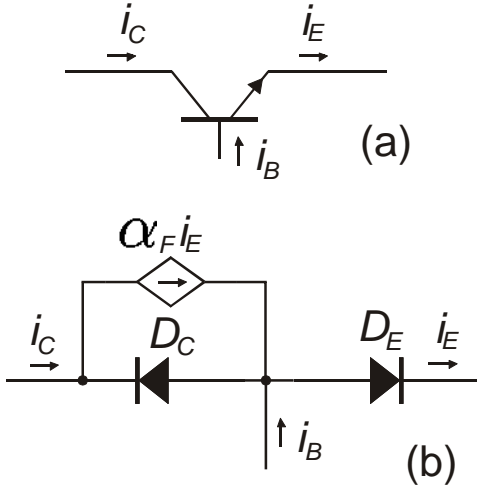


Fig. 2. A NPN bipolar junction transistor (a), and the related simplified Ebers-Moll model (b).

The non-linear constitutive relation in both diodes is given by the Shockley equation [5], as follows:

$$I_D = I_S \left(e^{\frac{V_D}{nV_T}} - 1 \right) \quad (1)$$

where:

- I_D is the current through the diode.
- V_D is the voltage in the diode in the anode referred to the cathode.
- I_S is the reverse saturation current with a value of $1 \times 10^{-12} A$.
- n is an empirical constant known as emission coefficient, that depends on the construction of the element.

V_T is the thermal voltage given by

$$V_T = \frac{kT}{q}$$

q is the electron charge equal to $1.6022 \times 10^{-19} C$; T the absolute temperature in kelvins and k the Boltzmann constant equal to $1.3806 \times 10^{-23} J/K$.

For a sake of simplicity, in this paper some values will be fixed and it will be assumed that

$$I_D = I_S (e^{gV_D} - 1) \quad (2)$$

considering a $27^\circ C$ temperature and $n = 2$ that is a value that can be assigned to silicon diodes. With these considerations the g value is

$$g = \frac{1}{\eta v_T} \simeq 19.2308$$

In Bond Graph, each diode is modelled as a R element, whose constitutive relation is given by (2). In Bond Graph terms, the simplified Ebers-Moll model can be constructed according to Figure 3.

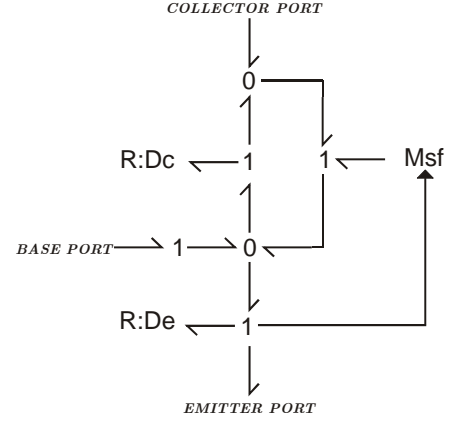


Fig. 3. Bond Graph diagram of the simplified Ebers-Moll model of the bipolar transistor.

Once the simplified Ebers-Moll is reviewed, in the next section this model is used as the switching device in the buck converter.

III. MODELING OF THE BUCK CONVERTER

The Buck converter is a step-down one, that can generate output voltages from 0 to the value of the input voltage, according to the duty cycle. The system can operate in two modes, i.e. continuous and discontinuous modes, according to the values of the inductor current [6]. If the inductor current remains in zero value for a short period of time during operation, then it is said that the system is operating in discontinuous mode, otherwise, if this value never reaches the zero value, then it is said that the system is operating in continuous mode.

In Figure 4 a Buck converter is shown.

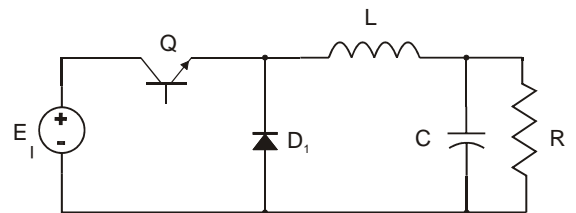


Fig. 4. A buck converter with a BJT as a switching device.

In Figure 5 the inductor current according to time in both operating modes is shown.

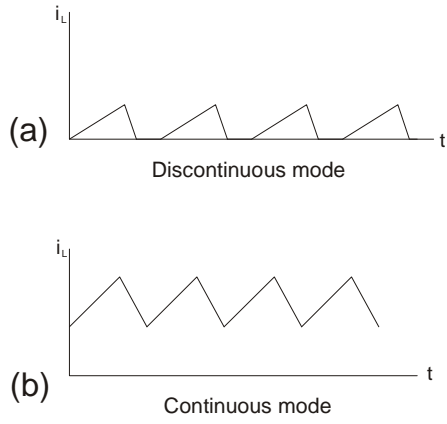


Fig. 5. The inductor current in the two modes of operation of the buck converter.

In this paper, the Buck converter being modeled has a switching device that is a bipolar junction transistor. Furthermore, this bipolar transistor is assumed to be constructed according to the simplified Ebers-Moll model of figure 2. In these terms, Figure 6 shows a buck converter, whose switching device is the Ebers-Moll model of the BJT.

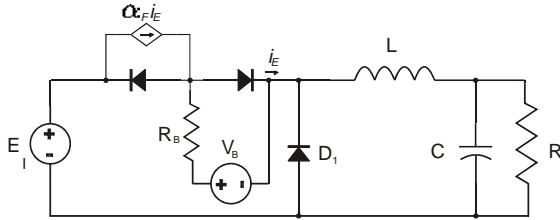


Fig. 6. A buck converter where the switching device is a BJT being replaced by its Ebers-Moll model.

The system of Figure 7 is the Bond Graph model of the buck converter.

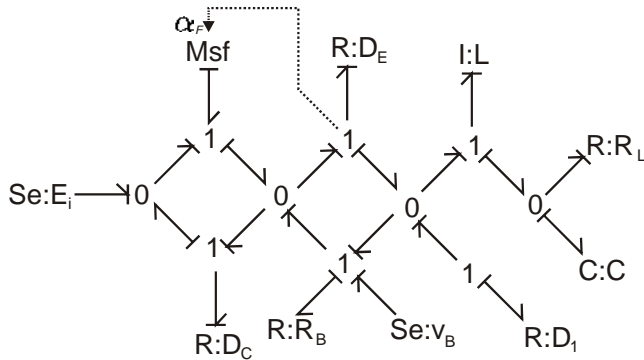


Fig. 7. A bond Graph model of a buck converter, whose switching device is an Ebers-Moll model of the BJT.

In Figure 7 notice the location of the three diodes. Each one of these diodes is modeled as a R element, whose constitutive relation is the Shockley equation (2). This equation brings the

non-linear nature of the final equations.

Once the model is constructed, there is a need of extracting the system equations in order to obtain the simulations. Though structure junction matrix is a powerful approach to get state equations of linear systems, it shows difficulties when dealing with non-linear systems, and different approaches must be employed. The following is a procedure that is useful when dealing with Bond Graph models containing non-linear elements.

A. Procedure to derive system equations

In order to get equations from Bond Graph models containing elements with non-linear constitutive relations, the Linear Graph modeling power can be exploited. In this paper, a procedure that allows to get equations from Bond Graph models of this kind is applied. This procedure allows to derive the required equations from the Buck converter covered in this paper. The procedure is based in the equivalence that exists between a Bond Graph model and a Linear Graph model. This equivalence is based on the **junction adjacency criterion**, first mentioned in [7]. The criterion can be described as follows:

In a Bond Graph model with preferred and complete integral causality, each port-1 element whose causal stroke is outwards (junction adjacent) determines a branch of the related spanning tree [8]. The set of all these port-1 elements spans a normal tree [3]. Moreover, each port-1 element whose causal stroke is inwards (element adjacent) determines a chord of the related cotree.

The preceding criterion allows to find out the relation between a Bond Graph model and the related Linear Graph model.

Then, a step by step procedure can be applied in order to get the system equations as follows.

Procedure 1:

- 1) Given an acausal Bond Graph model, assign preferred (and complete) integral causality.
- 2) Determine the tree branches and the cotree chords according to junction-adjacency criterion.
- 3) Set the effort sources and capacitive elements in the tree as tree-main-effort (TME) variables. If resistive elements belong to the tree, set them as tree-helper-effort (THE) variables.
- 4) Set the flow sources and inductive elements in the cotree as key-flow (KF) variables. If resistive elements belong to the cotree, set them as non-key flow (NF) variables.
- 5) By using the element constitutive relation, write each NF variable as a combination of all the TME and THE variables that hold a direct causal path with it.
- 6) By using the element constitutive relation, write each THE variable as a combination of all the KF variables that hold a direct causal path with it (see remark 2).
- 7) Write the state equations by determining each capacitor flow in the tree as a combination of the cotree flows that

hold a direct causal path with it, and by determining each inductive effort in the cotree as a combination of the tree efforts that hold a direct causal path with it. Finally, write the state equations by using (in the linear case) the relations

$$f_C = C\dot{e}_C \quad (3)$$

and

$$e_I = I\dot{f}_I \quad (4)$$

Remark 1: If in step 1, Integral causality cannot be assigned in all elements, it implies that a normal tree cannot be constructed.

Remark 2: In step 6, if it is found that direct causal paths are held between THE and NF elements, then algebraic loops will arise in the case of linear systems or differential algebraic equations will rise in the case of non-linear systems.

Once the procedure has been explained, it will be applied in the Buck converter in order to get the system equations.

The procedure requires to construct a Bond Graph Model of the system. In order to do that, there exists a precise method for getting the Bond Graph of an electric circuit, as explained in [4]. Figure 8 shows the Bond Graph model of the buck converter, constructed with this method.

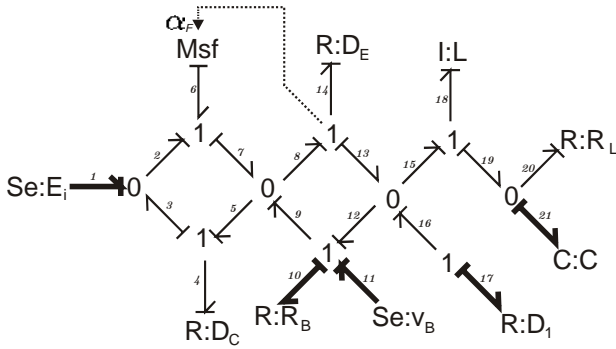


Fig. 8. Bond Graph model of the buck converter shown in figure 6.

The system in Figure 8 is a Bond Graph model of the buck converter shown in Figure 6. The procedure to derive the system equations requires assigning complete integral causality. This step is already done. The next step is to identify the elements that belong to the tree and the cotree by employing the junction adjacency criterion. This is also done, and the bonds belonging to the tree are intentionally drawn darker than the rest. Once the tree is identified, the bonds are numbered; then the variables must be arranged, following steps 3 and 4, as follows:

Tree main efforts (TME's): e_1, e_{11}, e_{21}

Tree helper efforts (THE's): e_{10}, e_{17}

Key Flows (KF's): f_6, f_{18}

Non-Key Flows (NF's): f_4, f_{14}, f_{20}

Step 5 requires to write the NF's as a function of TME's and THE's. This is performed as follows:

$$e_4 = \varphi_4(e_1, e_{10}, e_{11}, e_{17})$$

(by examining the direct causal paths held between bond 4 and bonds belonging to the tree)

$$e_4 = e_{11} - e_{17} - e_{10} - e_1$$

and by applying the constitutive relation, the result is:

$$f_4 = I_s \left(e^{g(e_{11} - e_{17} - e_{10} - e_1)} - 1 \right) \quad (5)$$

Also

$$e_{14} = \varphi_{14}(e_{10}, e_{11}, e_{17})$$

$$e_{14} = e_{11} - e_{10}$$

Notice that the dependence on e_{17} is through 2 direct causal paths that cancel each other.

Again, by applying the constitutive relation, the result is:

$$f_{14} = I_s \left(e^{g(e_{11} - e_{10})} - 1 \right) \quad (6)$$

Finally,

$$e_{20} = \varphi_{20}(e_{21})$$

$$e_{20} = e_{21}$$

and with the constitutive relation:

$$f_{20} = \frac{1}{R_L} e_{21} \quad (7)$$

In this case, it can be noticed that THE's elements hold causal paths with NF elements, so, according to remark 1, getting a differential-algebraic equation (DAE) as mathematic model of the system is expected. Remark 1 implies that THE's elements cannot be written as a combination of KF elements, nor a direct substitution that leads to an ordinary differential equation can be made.

Step 7 requires to perform a (modified) nodal analysis (This is part of the Linear Graph approach). In this step, causal paths are outstanding again, because such nodal analysis is performed by writing each capacitive element as a function of variables in the cotree that hold a direct causal path with it, each inductive element as a function of tree elements that hold a direct causal path with it, and eventually, each THE as combination of cotree variables that hold a direct causal path with it. From this standpoint, the capacitor equation can be constructed as follows:

$$f_{21} = \varphi_{21}(f_{18}, f_{20})$$

$$f_{21} = f_{18} - f_{20}$$

through the relation (3) and using equation (7), it yields to:

$$\dot{e}_{21} = \frac{1}{C} f_{18} - \frac{1}{CR_L} e_{21} \quad (8)$$

The inductor equation can be derived as follows:

$$e_{18} = \varphi_{18}(e_{17}, e_{21})$$

$$e_{18} = -e_{17} - e_{21}$$

By employing relation (4), the result is:

$$\dot{f}_{18} = -\frac{1}{L}e_{17} - \frac{1}{L}e_{21} \quad (9)$$

Now the tree effort e_{17} will be employed to get one algebraic equation, in the same way it is done in the Linear Graph approach, and by exploiting the causal paths related with Bond Graph:

$$f_{17} = \varphi_{17}(f_{18}, f_{14}, f_4, f_6)$$

Here, being in account of the controlled source f_6 , that is related with f_{14} as:

$$f_6 = \alpha_F f_{14} \quad (10)$$

the flow f_{17} can be written as:

$$f_{17} = f_4 - \alpha_F f_{14} + f_{18}$$

but considering the constitutive relation

$$f_{17} = I_s (e^{g e_{17}} - 1)$$

and equations (5) and (6) it follows that:

$$0 = I_s \left(e^{g e_{17}} - e^{g(e_{11} - e_{17} - e_{10} - e_1)} \right) + \alpha_F I_s \left(e^{g(e_{11} - e_{10})} - 1 \right) - f_{18} \quad (11)$$

The other algebraic equation can be constructed by analyzing the causal paths toward the cotree that are held with bond 10, as follows:

$$f_{10} = \varphi_{10}(f_4, f_6, f_{14})$$

$$f_{10} = f_4 - f_6 + f_{14}$$

Considering again equation (10), and the constitutive relation:

$$f_{10} = \frac{1}{R_B} e_{10}$$

the following equation is obtained:

$$0 = I_s \left(e^{g(e_{11} - e_{17} - e_{10} - e_1)} + e^{g(e_{11} - e_{10})} - 2 \right) - \alpha_F I_s \left(e^{g(e_{11} - e_{10})} - 1 \right) - \frac{1}{R_B} e_{10} \quad (12)$$

Equations (8), (9), (11) and (12) allow to conform the semi-explicit DAE that mathematically describes the converter as:

$$M \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x, z, t) \\ g(x, z, t) \end{bmatrix}$$

where

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} e_{21} \\ f_{18} \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} e_{10} \\ e_{17} \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} f_{18} - \frac{1}{C R_L} e_{21} \\ -\frac{1}{L} e_{17} - \frac{1}{L} e_{21} \end{bmatrix}$$

The function g is conformed by equations (11) and (12).

The system is simulated, considering a guess of zeros [10], and element values as follows:

$$R_L = 120\Omega$$

$$C = 47\mu F$$

$$L = 25mH$$

$$f = 2KHz$$

$$D = 50\%$$

With these values, the converter is operating in discontinuous mode, as can be observed with the values the inductor current takes in Figure 9.

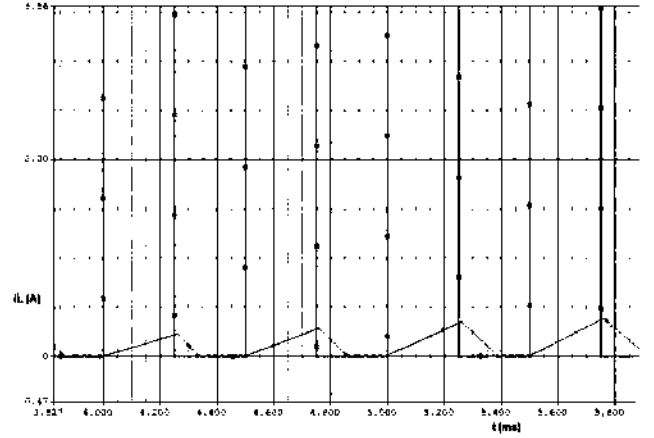


Fig. 9. Current in the inductor, that shows a discontinuous mode of operation.

The duty cycle is set to 50%. The voltage in the output is as shown in Figure 10

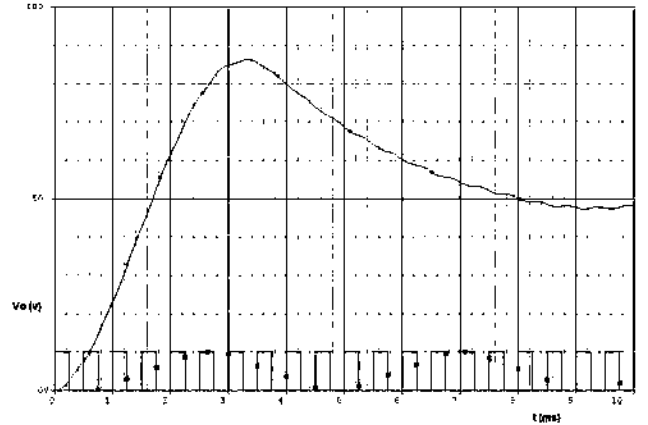


Fig. 10. Output voltage in the converter with a duty cycle of 50%.

Figures 9 and 10 show the results of the simulation of the buck converter. The applied methods have proved to be useful. In the following, some final comments and conclusions are written.

IV. CONCLUSIONS

A buck converter is presented. The converter is modeled with a fixed topology (non switching mode) approach. The use of a close-to-real mathematical model for the switching device is employed. A procedure to get the mathematical model from the Bond Graph model is exploited. This procedure is a mixture that exploits advantages in both Bond Graph and Linear Graph methodologies. The resulting mathematical model is a differential algebraic equation, that can be numerically solved by employing actual integration algorithms.

REFERENCES

- [1] Ronald C. Rosenberg and Dean C. Karnopp, "Introduction to physical system dynamics", McGraw-Hill 1983.
- [2] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy, "Bond-graph approach for structural analysis of MIMO linear systems", J. Franklin Inst. vol. 328 No. 1 P. 55-70, 1991.
- [3] Wai-Kai Chen, Applied Graph Theory, 2nd revised edition, North-Holland Publishing Company, 1976, Netherlands.
- [4] Dauphin-Tanguy Geneviève, et al., Les Bond Graphs, Hermes Science Publications, 2000, France.
- [5] Safa Kasap, "PN Junction, the Shockley model", E.Booklet, 2001, Canada.
- [6] Umarikar, A.C.; Umanand, L., "Modelling of switched mode power converters using bond graph ", Electric Power Applications, IEE Proceedings, 2005.
- [7] Alan S. Perelson, George F. Oster, "Bond Graphs and Linear Graphs" J. of the Franklin Institute, 302 (2), pp.159-185. (1976).
- [8] Noe Villa-Villaseñor, et al., "Diodes and an alternative Procedure to derive equations from Bond Graph models by exploiting a Linear Graph approach", Proceedings of the 5th IMAACA, Italy, 2011.
- [9] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy, "Structural controllability/observability of linear systems represented by bond graphs", J. Franklin Inst., vol. 326 No. 6, P. 869-883, 1989.
- [10] R. C. Vieira, "Direct methods for consistent initialization of DAE systems", Computers & Chemical Engineering, vol. 25, 2001.
- [11] Lawrence F. Shampine, et al. "Solving index 1 DAES in Matlab and Simulink", SIAM, 1999.

E.3. Artículo de conferencia 3

“Bond Graph modeling, DAE formulation and numeric simulation of a three phase rectifier”.

Presentado en: The 17th International conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR 2012), Poland, 2012.

Bond Graph modeling, DAE formulation and numeric simulation of a three phase rectifier

Noé Villa-Villaseñor, Gilberto González-Ávalos and Jesús Rico-Melgoza
DEP-FIE

Universidad Michoacana
de San Nicolás Hidalgo
Morelia, Michoacán, México
contact Email: vilaslord@hotmail.com

Abstract—This paper describes how to apply a group of alternative methodologies to the modeling and simulation of a three phase rectifier. The system is a full bridge rectifier with RC load, that consist of diodes that are modeled with the accurate and close-to-real constitutive relation of Shockley. This constitutive relation bring an unvariable topology and a non linear nature to the whole system. The emerging non linearities are handled with the described methodologies, and a procedure to formulate differential-algebraic equations (DAE) is reviewed. The obtained DAE is numerically solved and simulation results are presented. In order to prove the significance of the modeling and simulation approach, non standard conditions, such as unbalanced sources are included.

Keywords Bond Graph, causal paths; Three phase full bridge rectifier; Linear Graph and Tree theory; modified nodal analysis, DAE formulation; Shockley model of the diode.

I. INTRODUCTION

Three phase rectifiers are widely used. Their applications range from small rectifiers to large High Voltage Direct Current Transmission systems (HVDC). They are used in electrochemical processes, controlled power supplies, motor drives and traction equipment, as well as in many other applications. Though complete models of three phase rectifiers are expected to exist numerously in the literarture, that is not the case [1]. Three phase rectifiers are often modeled with simplified approaches, such as assuming balanced sources and loads, as well as considering ideal diodes [2]. Also, analysis is often focused in the waveforms and its mathematical representation instead of the rectifier model itself. The waveforms are idealized too and several approaches are employed to deal with them, for instance, the sinusoidal Fourier decomposition [3]. In this paper, a close-to-real model of the diode is used. The employed model of the diode is the Shockley one. This model shows a constitutive relation that has a non-linear nature. It difficults the process of formulating the system equations. However, this Shockley model has two main advantages: first, it is an accurate representation of the diode, and second, it possesses a fixed topology behavior, that avoid the need of several subsystems in the simulation time, in order to represent the different states of the idealized (variable topology) device.

Aside, Linear Graph Theory and tree theory are powerful tools that allow to formulate optimized equation sets of electric systems [4]. These theories are useful in the aforementioned problem of deriving the hard-to-deal equations of a three phase rectifier, involving diodes with the non-linear constitutive relation of Shockley.

Bond graph is a powerful modeling technique, that allows to mix different physical realms in a sole context [5]. This brings several advantages, since not isolated analysis is required when working with mixed systems. Moreover, Bond Graph has a powerful characteristic that is *causality*. This feature, among other things, allow to know system properties before write any equation, and it is widely useful in linear system theory. However, when dealing with non-linear systems, causality has not been fully exploited yet. In this paper, causality plays a main role in the process of formulating the non linear system equations.

Bond Graph is also a highly structured technique, that allows to represent a system in a very organized way [6].

In Fig. 1, the key vectors that mathematically conform a Bond Graph model are shown.

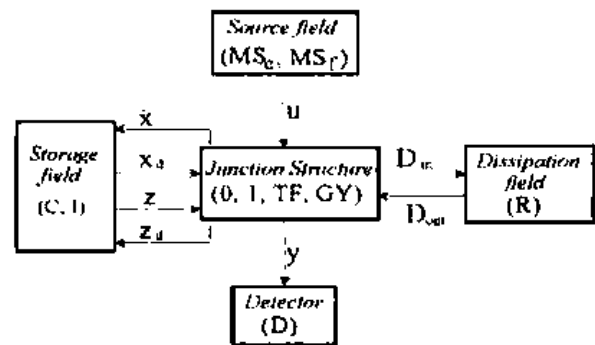


Fig. 1. The key vectors that conform a Bond Graph model.

For all of the aforementioned reasons, it is convenient to work with Bond Graph. Moreover, in this paper, a one to one equivalence between a Linear Graph model and the related Bond Graph model is exploited.

It is possible to bring the power of the modified nodal analysis to other fields in the physics. If an equivalent circuit

can be constructed for every non-electric system, then tree theory can be applied directly. However, building an equivalent circuit directly from a non-electric system is not always possible, and in most cases it can be hard to acquire. The used approach, that identifies a tree in a Bond Graph model is a straightforward method that exploits tree theory advantages directly in the Bond Graph model. And due to the multi physical field nature of Bond Graph, the used methodology can allow to exploit the modified nodal analysis in every branch of the physics, whose systems could be represented by a Bond Graph model.

Regarding to the three phase rectifier, it can be said that the presented approach breaks the need of balanced sources, as well as the need of several subsystems according to the state of the rectifier diodes.

The constitutive relation of the diodes being used has a non-linear nature, and due to the presence of dynamic elements, a differential-algebraic-equation (DAE) that mathematically describes the rectifier is expected. DAE formulation is not an easy problem and deserves special attention [7], [8]. In this paper, as a consequence of the methodology being used, a direct DAE formulation algorithm is exploited. The Procedure to derive system equations addresses the right type between DAE, ordinary differential equation (ODE), or just a purely algebraic equation.

Switching systems are often modeled with a variable topology approach [9]. This is because of the ease such approach offers when performing model-related analysis. Also, there is a good knowledge in applying this approach to linear systems. However, the variable topology approach present some problems, specially those related with the initial conditions in the commutation points. Each time a change in the switching device(s) take place, a new set of initial conditions in the dynamic elements is needed. This is specially hard to deal with in the case of systems containing a big number of switching devices. That is the case of the three phase rectifier, where six diodes work together, and at least six modes are needed. In this paper, the Shockley model of the diode is used as switching device. This model has the advantage of showing a fixed topology approach, since the device is always present during the simulation period, and its state does not change.

In the next section, the Shockley model of the diode in Bond Graph is reviewed.

II. DIODE MODEL

The diode can be considered as a non controlled switching device [10]. Switched systems can be arranged in two classifications, according to the switch modeling: The variant topology approach and the invariant topology approach [9]. Most authors deal with the idealized model of the diode, i.e. a variant topology model whose representation changes between two different modes, depending on its on-off state.

The Shockley model is a non linear invariant topology model that has a close-to-real representation of the diode [12]. It maintains always the same state. However, a procedure to derive equations from systems involving this model is rarely

presented, and the simplified on-off-switch approach is often chosen [11]. In this paper the Shockley model is used. The constitutive relation of the Shockley model according to [12], is

$$I_D = I_S \left(e^{\frac{V_D}{nV_T}} - 1 \right)$$

where:

- I_D is the current through the diode, V_D is the voltage in the diode in the anode referred to the cathode, I_S is the reverse saturation current with a value of $1 \times 10^{-12} A$, n is an empirical constant known as emission coefficient, that depends on the construction of the element, V_T is the thermal voltage given by $V_T = \frac{kT}{q}$

Where q is the electron charge equal to $1.6022 \times 10^{-19} C$; T is the absolute temperature in kelvins and k is the Boltzmann constant equal to $1.3806 \times 10^{-23} J/K$.

For simplicity, some values will be fixed and it will be assumed that

$$I_D = I_S (e^{gV_D} - 1) \quad (1)$$

considering a $27^\circ C$ temperature and $n = 2$ that is a value that can be assigned to silicon diodes. With these considerations the g value is

$$g = \frac{1}{\eta v_T} \simeq 19.2308$$

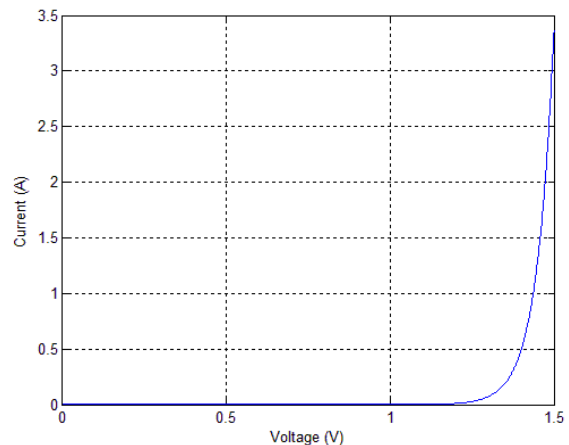


Fig. 2. The characteristic $v - i$ curve resulting of the constitutive relation (1).

Fig. 2 illustrates the characteristic $v - i$ curve for the constitutive relation (1).

The BG model to be used is a resistive non linear R element whose constitutive relation is (1). This model appears in Fig. 3.



Fig. 3. A resistive non-linear diode model.

In the next section, the main ideas of the paper are expressed, and the modeling and simulation of the rectifier are performed.

III. MODELING AND SIMULATION OF A THREE PHASE RECTIFIER

Consider the three phase rectifier illustrated in Fig. 4.

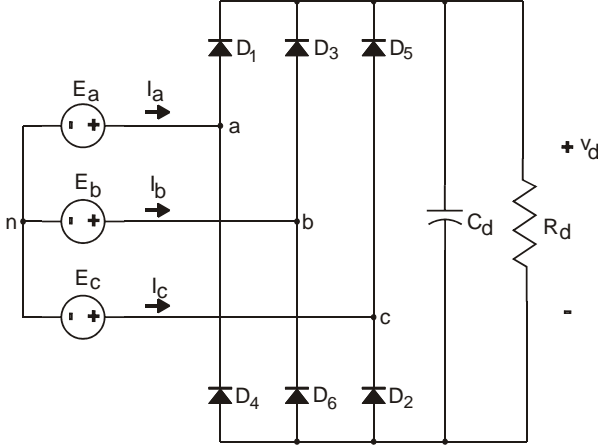


Fig. 4. A three phase rectifier with RC load.

In Fig. 4, E_a , E_b and E_c constitute a three phase voltage source; I_a , I_b , and I_c are the phase currents; diodes D_1 through D_6 are arranged as a full bridge three phase rectifier, and all of them are modeled with the constitutive relation (1); R_d and C_d are the load.

A. Bond Graph model building

The circuit of Fig. 4 has to be modeled in Bond Graph. A good and useful method to get the Bond Graph model from an electric circuit is given in [9].

Fig. 5 shows the acausal Bond Graph model of the three phase rectifier. Notice that the diodes are modelled according to the Bond Graph Shockley model of Fig. 3. An advantage of such model is that it bring simplicity to the complete system model, since it is has not nested submodels. Once the Bond Graph model is constructed, then the system equations must be derived.

B. System equations (DAE) formulation

In order to get equations from Bond Graph models containing elements with non-linear constitutive relations, the Linear Graph modeling power is exploited. Here, a procedure that allows to get equations from Bond Graph models of this kind is applied. This procedure allows to derive the required equations from the three phase rectifier covered in this paper. The procedure is based in the equivalence that exists between a Bond Graph model and a Linear Graph model. This equivalence is based on the *junction-adjacency criterion*, first mentioned in [13]. The criterion can be described as follows:

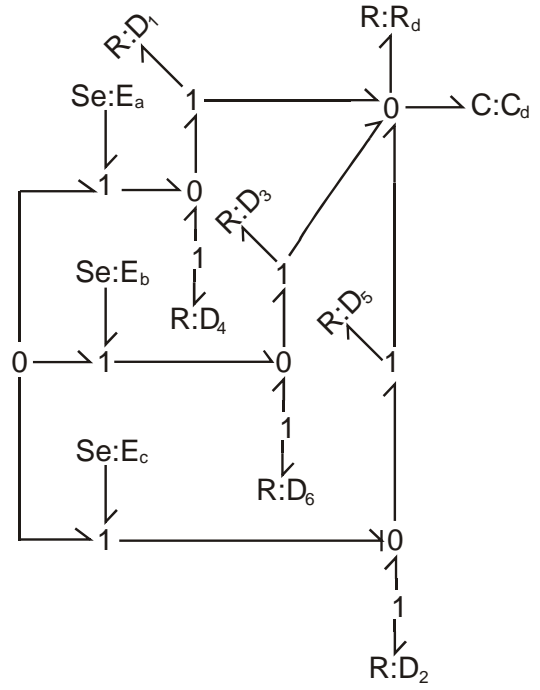


Fig. 5. Bond Graph model of the three phase rectifier of Fig. 4.

In a Bond Graph model with preferred and complete integral causality, each port-1 element whose causal stroke is outwards (junction adjacent) determine a branch of the related spanning tree [14]. The set of all these port-1 elements spans a normal tree [4]. Moreover, each port-1 element whose causal stroke is inwards (element adjacent) determine a chord of the related cotree.

The preceding criterion allows to find out a direct relation between a Bond Graph model and the related Linear Graph model.

Then, a step by step procedure can be applied in order to get the system equations as follows.

Procedure 1:

- 1) Given an acausal Bond Graph model, assign preferred (and complete) integral causality.
- 2) Determine the tree branches and the cotree chords according to junction-adjacency criterion.
- 3) Set the effort sources and capacitive elements in the tree as tree-main-effort (TME) variables. If resistive elements belong to the tree, set them as tree-helper-effort (THE) variables.
- 4) Set the flow sources and inductive elements in the cotree as key-flow (KF) variables. If resistive elements belong to the cotree, set them as nonkey-flow (NF) variables.
- 5) By using the element constitutive relation, write each NF variable as a combination of all the TME and THE variables that hold a direct causal path with it.
- 6) By using the element constitutive relation, write the each

THE variable as a combination of all the KF variables that hold a direct causal path with it (see remark 2).

- 7) Write the state equations by determining each capacitor flow in the tree as a combination of the cotree flows that hold a direct causal path with it. And by determining each inductive effort in the cotree as a combination of the tree efforts that hold a direct causal path with it. Finally, write the state equation by using (in the linear case) the relations

$$f_C = C\dot{e}_C \quad (2)$$

and

$$e_I = I\dot{f}_I \quad (3)$$

Remark 1: If in step 1, Integral causality cannot be assigned in all elements, it implies that a normal tree cannot be constructed.

Remark 2: In step 6, if it is found that direct causal paths are held between THE and NF elements, then algebraic loops will arise in the case of linear systems or differential algebraic equations will rise in the case of non linear systems.

Once the Procedure has been explained, it will be applied in the three phase rectifier in order to derive the DAE of the system.

The procedure requires to construct a Bond Graph Model of the system. The model is already constructed, as can be seen in Fig. 5. The procedure requires assigning complete integral causality. Consider the Bond Graph model shown in Fig. 6.

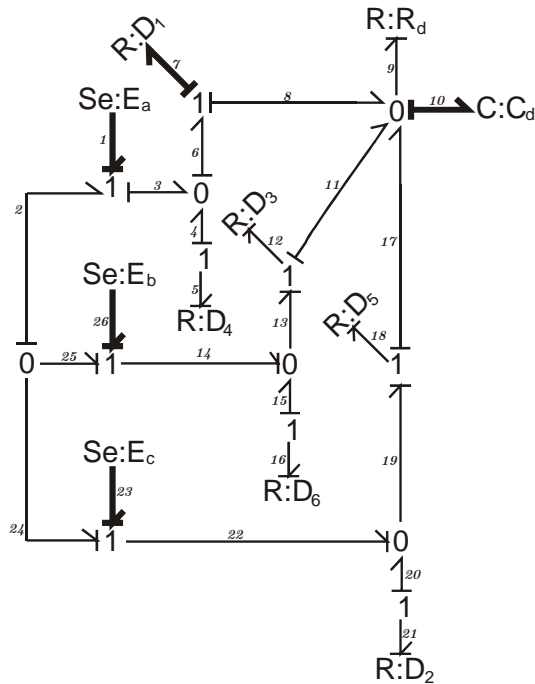


Fig. 6. Bond Graph model of the three phase rectifier with complete integral causality assigned.

The Bond Graph model of Fig. 6 has complete integral causality, and the bonds are numbered. The next step asks to

identify the elements that belong to the tree and the cotree by employing the junction adjacency criterion. This is also done, and the bonds belonging to the tree are intentionally drawn darker than the rest in Fig. 6. Once the tree is identified, the variables must be arranged, following steps 3 and 4, as follows:

Tree main efforts (TME's): e_1, e_{26}, e_{23}

Tree helper efforts (THE's): e_7

Key Flows (KF's): none

Non Key Flows (NF's): $f_5, f_{16}, f_{21}, f_{12}, f_{18}, f_9$

Step 5 requires to write the NF's as a function of TME's and THE's. This is performed as follows:

$$e_5 = \varphi_5(e_7, e_{10})$$

(by examining the direct causal paths held between bond 5 and tree bonds 7 and 10)

$$e_5 = -e_7 - e_{10}$$

And by applying the constitutive relation, the result is:

$$f_5 = I_s \left(e^{g(-e_7 - e_{10})} - 1 \right) \quad (4)$$

Also,

$$e_{16} = \varphi_{16}(e_{25}, e_1, e_7, e_{10})$$

$$e_{16} = -e_{26} + e_1 - e_7 - e_{10}$$

applying the constitutive relation, the result is:

$$f_{16} = I_s \left(e^{g(-e_{26} + e_1 - e_7 - e_{10})} - 1 \right) \quad (5)$$

continuing with,

$$e_{18} = \varphi_{18}(e_{10}, e_{23}, e_1, e_7)$$

$$e_{18} = -e_1 + e_7 + e_{23}$$

Notice that the dependence on e_{10} is through 2 direct causal paths that cancel each other.

With the constitutive relation:

$$f_{18} = I_s \left(e^{g(-e_1 + e_7 + e_{23})} - 1 \right) \quad (6)$$

also,

$$e_{21} = \varphi_{21}(e_{23}, e_1, e_7, e_{10})$$

$$e_{21} = -e_{23} + e_1 - e_7 - e_{10}$$

through the constitutive relation, it leads to:

$$f_{21} = I_s \left(e^{g(-e_{23} + e_1 - e_7 - e_{10})} - 1 \right) \quad (7)$$

following with

$$e_{12} = \varphi_{12}(e_{10}, e_{26}, e_1, e_7)$$

$$e_{12} = e_{26} - e_1 + e_7$$

The dependence on e_{10} is cancelled due to the existence of two direct causal paths. By applying the constitutive relation:

$$f_{12} = I_s \left(e^{g(e_{26} - e_1 + e_7)} - 1 \right) \quad (8)$$

Finally,

$$\begin{aligned} e_9 &= \varphi_9(e_{10}) \\ e_9 &= e_{10} \end{aligned}$$

with the constitutive relation

$$f_9 = \frac{1}{R_d} e_{10} \quad (9)$$

Notice that THE's elements hold causal paths with NF elements, and getting a differential-algebraic equation (DAE) as mathematic model of the system is expected. This implies that THE's elements cannot be written as a combination of KF elements, nor a direct substitution that lead to an ordinary differential equation can be made.

Step 7 requires to perform a (modified) nodal analysis (This as part of the Linear Graph approach). In this step, causal paths play a main role, because such nodal analysis is performed by writing each capacitive element as a fuction of variables in the cotree that hold a direct causal path with it, each inductive element as a function of tree elements that hold a direct causal path with it, and eventually, each THE as combination of cotree variables that hold a direct causal path with it. From this standpoint, the capacitor (differential) equation can be constructed as follows:

$$\begin{aligned} f_{10} &= \varphi_{10}(f_9, f_5, f_{12}, f_{16}, f_{18}, f_{21}) \\ f_{10} &= f_{16} + f_{21} + f_5 - f_9 \end{aligned}$$

Notice that bond 10 has two causal paths with bond 12 that algebraically cancel each other. The same occurs with bond 18. Through the relation (2) and using equations (5), (7), (4) and (9), it yields to:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{10} &= \frac{I_s}{C_d} \left(e^{g(e_1 - e_7 - e_{10} - e_{26})} + e^{g(-e_{23} + e_1 - e_7 - e_{10})} \right) + \\ &+ \frac{I_s}{C_d} \left(e^{g(-e_7 - e_{10})} - 3 \right) - \frac{1}{R_d C_d} e_{10} \end{aligned} \quad (10)$$

The D_1 algebraic equation can be derived as follows:

$$\begin{aligned} f_7 &= \varphi_7(f_5, f_{12}, f_{16}, f_{18}, f_{21}) \\ f_7 &= -f_{12} + f_{16} - f_{18} + f_{21} + f_5 \end{aligned}$$

or

$$0 = -f_7 - f_{12} + f_{16} - f_{18} + f_{21} + f_5 \quad (11)$$

considering equations (8), (5), (6), (7), (4), and the constitutive relation

$$f_7 = I_s (e^{ge_7} - 1)$$

equation (11) can be written as:

$$\begin{aligned} 0 &= -e^{ge_7} - e^{g(e_{26} - e_1 + e_7)} + e^{g(-e_{26} + e_1 - e_7 - e_{10})} + \\ &- e^{g(-e_1 + e_7 + e_{23})} + e^{g(-e_{23} + e_1 - e_7 - e_{10})} + \\ &+ e^{g(-e_7 - e_{10})} \end{aligned} \quad (12)$$

Equations (10) and (12) allow to conform the semi-explicit DAE that mathematically describes the rectifier as:

$$M \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x, z, t) \\ h(x, z, t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

where

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ x &= [e_{10}] \\ z &= [e_7] \end{aligned}$$

The function f is equation (10) and function h is equation (12).

After the DAE of the system has been derived, it is possible to put it in a numeric solver in order to get the simulation of the rectifier.

C. Simulation and results

Numeric solution of DAE systems is an open problem [15], [16]. In the case of the exponential equations that are obtained in the present problem, the ode23t solver in Matlab can handle them. This solver is used and it delivers the following presented results. The choosing of a consistent set of initial conditions (IC's) is other problem. The ode23t solver is capable of calculate consistent IC's, starting with a provided guess.

The balanced three phase rectifier is simulated, considering a guess of zeros and element values as follows:

$$\begin{aligned} R_d &= 100\Omega \\ C_d &= 47\mu\text{F} \\ V_m &= 20\text{V} \\ f &= 60\text{Hz} \end{aligned}$$

V_m is the amplitude of each phase voltage, f is the frequency of the sources. Equation (13) is provided to the solver, then the following results are obtained:

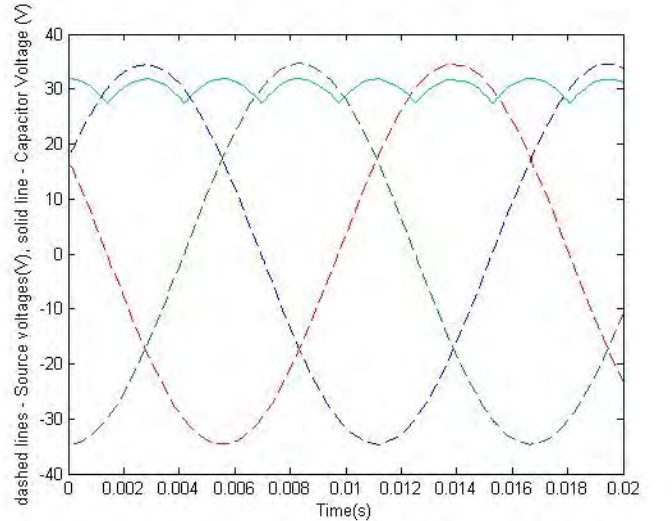


Fig. 7. Simulation result of the three phase rectifier.

In Fig. 7 simulation results are shown. The dashed signals are the line voltages. The solid signal is the voltage in the capacitor v_d . An advantage of tree analysis is that, once the minimal set of equations is solved, all the variables in the

system are available through direct calculation. In this case, The phase current i_a can be directly computed as

$$i_a = f_3 = f_7 - f_5$$

This equation is solved with the previously obtained results e_{10} and e_7 . This simulation result is presented in Fig. 8.

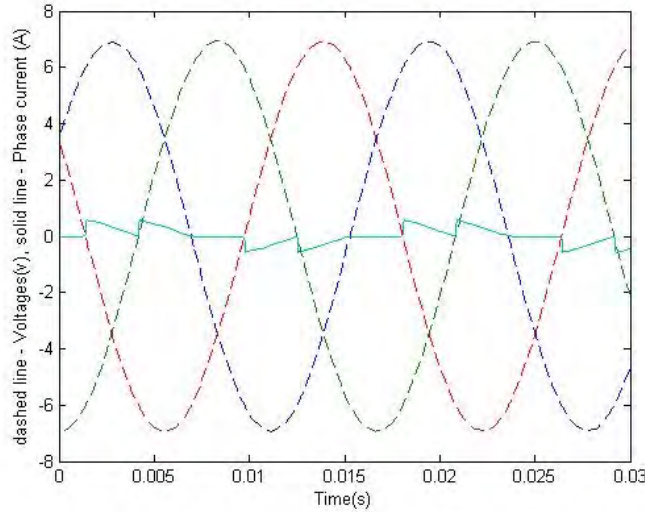


Fig. 8. Simulation result of the I_a phase current.

In Fig. 8, the phase current (solid line) is shown. The line voltages (dashed lines) are scaled in order to highlight the shape of the current curve.

Other advantage of the used approach is that does not exist dependence on a balanced source in order to perform calculations.

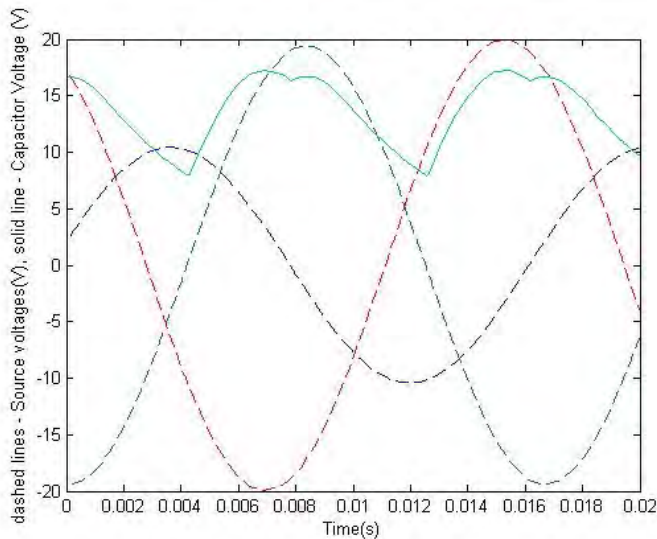


Fig. 9. Voltage response with a highly unbalanced source.

In Fig. 9, the simulation results of the three phase rectifier

with an unbalanced source are shown.

IV. CONCLUSIONS

A three phase rectifier built as a Bond Graph model has been analysed and simulated. The rectifier has an unvariable topology, due to the chosen model of the diode. However, the complete system has a non-linear nature. The reviewed procedure allow to deal with such non linearities. This Procedure exploits the power of both Bond Graph and Linear Graph techniques, and allow to apply the advantages of modified nodal analysis to other non-electric fields of physics. The described approach has enough flexibility to deal with non standard conditions, such as an unbalanced three phase voltage source. Inherent to the reviewed Procedure, a DAE formulation algorithm is discussed and employed.

REFERENCES

- [1] Pejovic, P.; Kolar, J.W., "Exact Analysis of Three-Phase Rectifiers With Constant Voltage Loads", IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, Volume 55, Issue 8, pp. 743 - 747, 2008.
- [2] Caliskan, V. Perreault, D.J. Jahns, T.M. Kassakian, J.G., "Analysis of three-phase rectifiers with constant-voltage loads", IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, Vol. 50, Issue 9, 2003.
- [3] Predrag Pejović, et. al., "Sinusoidal Approximation in the Analysis of Twelve-Pulse Output Voltage Type Rectifiers", 15th International Symposium on Power Electronics - Ee, Serbia, 2009
- [4] Wai-Kai Chen, "Applied Graph Theory" 2nd revised edition, North-Holland Publishing Company, 1976, Netherlands.
- [5] Ronald C. Rosenberg and Dean C. Karnopp, "Introduction to physical system dynamics", McGraw-Hill 1983.
- [6] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy, "Bond-graph approach for structural analysis of MIMO linear systems", J. Franklin Inst. vol. 328 No. 1 pp. 55-70, 1991.
- [7] Berber, R. and Kravaris, C., "Nonlinear Model Based Process Control", NATO ASI series, Kluwer academic publishers, Netherlands 1998.
- [8] Aditya Kumar, Prodromos Daoutidis, "Feedback control of nonlinear differential-algebraic-equation systems", AIChE Journal, Vol. 41, issue 3, 1995.
- [9] Dauphin-Tanguy Geneviève, et al., "Les Bond Graphs", Hermes Science Publications, 2000, France.
- [10] Ned Mohan, et al. "Power electronics", John wiley and Sons, U.S.A. 2003
- [11] Umarikar, A.C.; Umanand, L., "Modelling of switched mode power converters using bond graph", Electric Power Applications, IEE Proceedings, 2005.
- [12] Safa Kasap, "PN Junction, the Shockley model", E.Booklet, 2001, Canada.
- [13] Alan S. Perelson, George F. Oster, "Bond Graphs and Linear Graphs" J. of the Franklin Institute, 302 (2), pp.159-185, 1976.
- [14] Noe Villa-Villaseñor, et al., "Diodes and an alternative Procedure to derive equations from Bond Graph models by exploiting a Linear Graph approach", Proceedings of the 5th IMAACA, Italy, 2011.
- [15] R. C. Vieira, "Direct methods for consistent initialization of DAE systems", Computers & Chemical Engineering, Vol. 25, 2001.
- [16] Lawrence F. Shampine, et al. "Solving index 1 DAES in Matlab and Simulik", SIAM, 1999.

Bibliografía

- [1] Egalon, J., "Multiphase System for Metal Disc Induction Heating: Modeling and RMS Current Control", IEEE Transactions on Industry Applications (Volume:48 , Issue: 5), 2012.
- [2] Chi K. Tse, "Zero-Order Switching Networks and Their Applications to Power Factor Correction in Switching Converters", IEEE Transactions on circuits and systems —I: Fundamental theory and applications, vol 44, no. 8 1997.
- [3] Diego Soto, "A Comparison of High-Power Converter Topologies for the Implementation of FACTS Controllers", IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 49, no. 5,2002.
- [4] R. W. Erickson, Slovodan Cuk, Richard D. Middlebrook. "Large-signal modelling and analysis of switching regulators". IEEE Power Electronics Specialist Conference Records (PESC'82). 1982.
- [5] Eun-Soo Kim, et al. "An Improved Soft-Switching PWM FB DC/DC Converter for Reducing Conduction Losses", IEEE Transactions on Power Electronics, VOL. 14, NO. 2, march 1999
- [6] Jiachuan Wang, "Knowledge interaction with genetic programming in mechatronic systems design using bond graphs", IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews, vol. 35, issue 2, pp 172-182., 2005

- [7] Jose J. Granda, "The role of bond graph modeling and simulation in mechatronics systems: An integrated software tool: CAMP-G, MATLAB–SIMULINK", *Mechatronics*, Vol. 12, Issues 9–10, November–December 2002, Pages 1271-1295, Elsevier, 2002.
- [8] Damic Vjekoslav, Montgomery John, "Mechatronics by Bond Graphs, An Object-Oriented Approach to Modelling and Simulation", ISBN 978-3-540-42375-1, Springer, 2003
- [9] Dhafer Mezghani, Med Akram Jabalah and Abdelkader Mami, "A New Design Vector Control of Pumping Photovoltaic System: Tests and Measurements", *European Journal of Scientific Research*, Volume 61 Issue 4, pp. 493-507, 2011.
- [10] Zitouni.N.,et al., "Modelling and non linear control of a photovoltaic system with storage batteries: A bond graph approach", *IJCSNS International Journal of Computer Science and Network Security*, Vol.11 No.6, pp. 105-114, June 2011.
- [11] Mabrouk Khemliche et al., "Bond Graph Modeling, Control and Simulation of the Photovoltaic System Performances", *Proc. of the EFEEA'10 International Symposium on Environment Friendly Energies in Electrical Applications* 2-4 November 2010.
- [12] Cellier, François E. und Jürgen Greifeneder, "ThermoBondLib - A New Modelica Library for Modeling Convective Flows", *Proceedings of the 6th International Modelica Conference*, Bielefeld, Deutschland, Seiten, pp. 163 - 172, 2008
- [13] James C. Mackanic, "Design, Construction and Evaluation of a Simulated Geothermal Flow System", University of California, 1980.
- [14] Øyvind Ygre Rogne, Eilif Pedersen, "Bond Graph Modeling of a Multibody Wave Energy Converter", *Proceedings of the 10th International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation*, Italy, 2012.

- [15] Adi Kurniawan, et al., "Modelling of Wave Energy Converters Using Bond Graph", Proceedings of the 10th International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, Italy, 2012.
- [16] Mihael Cipek, Joško Deur, and Joško Petrić, "Bond Graph Modeling and Power-flow Analysis of Range Extended Electric Vehicle Transmission", Proceedings of the 10th International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, Italy, 2012.
- [17] Joško Deur, et al. "Bond Graph Modeling of Automotive Transmissions and Drivelines", Proceedings of the 7th Vienna International Conference on Mathematical Modelling, Austria, 2012.
- [18] Vladimir Ivanović et al. "Bond Graph Model of Electromechanical Actuation System for a Dry Dual Clutch", Proceedings of the 10th International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, Italy, 2012.
- [19] Wai-Kai Chen, "Applied Graph Theory" 2nd revised edition, North-Holland Publishing Company, 1976, Netherlands.
- [20] William Hyatt, Jack Kemmerly, Steven Durbin, "Análisis de Circuitos en Ingeniería", mcgraw-hill, 2008.
- [21] Mosterman, P. and G. Biswas. "A theory of discontinuities in physical systems models". J. Franklin Institute, 335B (3), 401 - 439. 1998.
- [22] G. W. Wester y Middlebrook, Richard D. "Low frequency characterization of switched DC/DC converters", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. Vol. AES-9. 1973.
- [23] Richard D. Middlebrook y Slobodan Cuk. "A general unified approach to modelling switching converters power stages", IEEE Power Electronics Specialist Conference Records (PESC'76). 1976.

- [24] Slobodan Cuk y Richard D. Middlebrook. "A general unified approach to modelling switching DC-to-DC converters in discontinuous conduction mode", IEEE Power Electronics Specialist Conference Records (PESC'77). 1977.
- [25] Ralph P. Iwens, Yuan Yu y James E. Triner. "Time domain modelling and stability analysis of an integral pulse frequency modulated dc-to-dc power converter" . IEEE Power Electronics Specialist Conference Records (PESC'75). 1975.
- [26] Fred C. Lee, Ralph P. Iwens, Yuan Yu y James E. Triner. "Generalized computer aided discrete time domain modelling and stability analysis of dc-dc converters", IEEE Power Electronics Specialist Conference Records (PESC'77). 1977.
- [27] Fred C. Lee, Ralph P. Iwens, Yuan Yu y James E. Triner. "Generalized computer-aided discrete time domain modelling and analysis of dc-dc converters". IEEE Transactions on Industrial Electronics and Control Instrumentation. Vol. IECI-26. N. 2. May, 1979.
- [28] Lóránt Lakatos, "a new method for simulating power semiconductor circuits. IEEE transactions on Industrial Electronics and Control Instrumentation", Vol. IECI-26. N 1. February, 1979.
- [29] R. M. Nelms, Bruce W. Evans y L. L. Grigsby. "Simulation of AC spacecraft power systems", IEEE Transactions on Industrial Electronics. Vol. 36. No 3. August, 1989.
- [30] Ali Bekir Yildiz y Nurettin Abut. "An efficient approach to modelling and analysis of power electronic circuits". Proceedings of the Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC '98). February, 1998.
- [31] A. J. Fossard, M. Clique, J. G. Ferrante y Antoine Capel. "A general linear continuous model for designing of power conditions units at fixed and free running frequency". IEEE Power Electronics Specialist Conference Records, 1977.
- [32] P. R. K. Chetty. "Modeling and design of switching regulator". IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. Vol. AES-18. N 3, may 1982.

- [33] Chetty, P.R.K. "Current Injected Equivalent Circuit Approach to Modeling Switching DC-DC Converters", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Volume: AES-17, Issue: 6
- [34] W. P. M. Heemels, B. Brogliato, "The complementarity class of hybrid dynamical systems", Minicourse at the European Control Conference. Cambridge, UK, 2003
- [35] Richard Cottle, Jong-Shi Pang, Richard E. Stone, "The linear complementarity problem", Academic Press, 1992.
- [36] D. Jeff Shortt, Fred C. Lee. "An improved switching converter model using discrete and average techniques". IEEE Power Electronics Specialist Conference Records (PESC'82). 1982.
- [37] D. J. Shortt, Fred C. Lee. "Extensions of the discrete-average models for converter power stages". IEEE Power Electronics Specialist Conference Records (PESC'83). 1983.
- [38] Luis García de Vicuña, et al. "computer- aided discrete-time large-signal analysis of switching regulators". IEEE Transactions on Power Electronics. Vol. 7. N. 1,1992.
- [39] Yan-Fei Liu y Paresh C. Sen. "A general unified large signal model for current programmed dc-to-dc converters". IEEE Transactions on Power Electronics. Vol. 9. N. 4, 1994.
- [40] Richard Tymerski. "Frequency analysis of time-interval-modulated switched networks". IEEE Transactions on Power Electronics. Vol. 6. N.2, 1991.
- [41] Richard Tymerski. "Volterra series modeling of power conversion systems". IEEE Transactions on Power Electronics. Vol. 6. No 4. Octubre, 1991.
- [42] Henry Chung y Adrian Ioinovici. "Small-signal characteristics of switching regulators using fourier technique in modified nodal approach". 21st Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, 1995.

- [43] G. Dauphin-Tanguy, "Les Bond Graphs", Hermes Science, France, 2000.
- [44] A. C. Umarikar and L. Umanand, "Modelling of switching systems in bond graphs using the concept of switched power junctions", *Journal of The Franklin Institute*, 342, pp 131-147, 2005
- [45] Cellier, F.E. and M. Krebs, "Analysis and Simulation of Variable Structure Systems Using Bond Graphs and Inline Integration", *Proc. ICBGM '07, 8th SCS Intl. Conf. on Bond Graph Modeling and Simulation*, San Diego, California, pp. 29-34, 2007
- [46] J. P. Duceux, G Dauphin-Tanguy, C Rombaut "Bond Graph Modelling of Commutation Phenomena in Power Electronic Circuits", *Proc. International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation*, 1993.
- [47] Ahmed Rahmani, Geneviève Dauphin-Tanguy, "Structural analysis of switching systems modelled by bond graph", *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems: Methods, Tools and Applications in Engineering and Related Sciences*, Volume 12, Issue 2-3, 2006.
- [48] G M Asher, "The Robust Modelling of Variable Topology Circuits Using Bond Graphs", *Proc. International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation* 1993.
- [49] Jan-Erik Strömberg , Jan Top , Ulf Söderman , "Variable Causality in Bond Graphs Caused by Discrete Effects", *Proc. First International Conference on Bond Graph Modeling*, La Jolla, CA, USA, January, 1993.
- [50] Mustafa Poyraz et al., "Analysis of switched systems using the bond graph methods", *Journal of the Franklin Institute*, Volume 336, Issue 3, April 1999.
- [51] Marisol Delgado, Hebertt Sira-Ramírez, "regulated DC-to-DC power supplies", *Simulation Practice and Theory*, Volume 6, Issue 7, 15, Elsevier, November 1998.

- [52] Lin-Shi, X; Retif, J-M; Allard, B; Morel, H., "Non-linear control design for a boost converter using bond graphs", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers – Part I;2002, Vol. 216 Issue 1, p1.
- [53] Murad Ahmed Ali Taher, "Algorithmic Method for Generating DC-DC Converter Circuits by Using Topological Matrix", Communications in Computer and Information Science Volume 194, 2011, pp 714-723, Springer Berlin Heidelberg.
- [54] Kwok K. Ng, "Complete Guide to Semiconductor Devices, 2nd Edition", July 2002, Wiley-IEEE Press.
- [55] Shockley, W., "The Theory of p-n Junctions in Semiconductors and p-n Junction Transistors", Bell System Technical Journal, 28: 3. July 1949 pp 435-489.
- [56] Sah, R., Noyce N., and Shockley W. "Carrier Generation and Recombination in P-N Junctions and P-N Junction Characteristics ", Proceedings of the IRE, Volume: 45 , Issue: 9, 1957.
- [57] Moll, J.L., "The Evolution of the Theory for the Voltage-Current Characteristic of P-N Junctions", Proceedings of the IRE, Volume: 46 , Issue: 6, 1958.
- [58] Safa Kasap, "The p-n Junction: The Shockley Model ", e-Booklet.
- [59] Ebers, J.J., Moll, J.L., "Large-Signal Behavior of Junction Transistors ", Proceedings of the IRE, Volume: 42 , Issue: 12, 1954.
- [60] Muhammad H. Rashid, "Electrónica de potencia, Circuitos, dispositivos y aplicaciones", Prentice Hall.
- [61] Lawrence F. Shampine and Mark W. Reichelt, "The MATLAB ODE Suite", SIAM Journal on Scientific Computing, Volume 18, Issue 1, 1997

- [62] Hindmarsh, A. and A. Taylor. "User Documentation for IDA: A Differential-Algebraic Equation Solver for Sequential and Parallel Computers". Lawrence Livermore National Laboratory report, 1999.