



**UNIVERSIDAD MICHOACANA  
DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



# **SEGMENTACIÓN DEL LUMEN ARTERIAL EN IMÁGENES ULTRASONOGRÁFICAS**

**TESIS**

Que para obtener el grado de  
**DOCTOR EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA  
OPCIÓN EN SISTEMAS COMPUTACIONALES**

presenta

**Sergio Rogelio Tinoco Martínez**

**Félix Calderón Solorio — Director de Tesis**  
Doctor en Ciencias con Orientación en Ciencias de la Computación

Morelia, Michoacán, Febrero 2014





A mi madre *María Elvia Martínez Casillas*  
Te amo *Shincuecita*, sin ti no sería lo que hoy soy.



## Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a Diosito por mimarme tanto. Él me ha concedido tantas cosas a lo largo de mi vida, que llenaría páginas y páginas enlistándolas. Pero, en esta ocasión, enlisto a la familia maravillosa en la que nací, crecí y me he desarrollado. Ahora ya formo parte también de otra familia, la cual es igualmente fantástica e increíble. Termino agradeciéndole a Dios Espíritu Santo el que tantas y tantas veces me haya iluminado (y me ilumina) en situaciones en las que no encontraba *la salida*, por más que la buscaba. Gracias Diosito.

A mis padres, porque siempre me han predicado con el ejemplo y, sobre todo, con amor. Jefazo y Shincuecita, espero poderlo hacer en *mi pequeño mundo*.

A mis hermanos, gracias por compartir nuestra infancia, adolescencia, juventud y, ahora, madurez. Gracias porque a su lado crecí como ser humano, en todos los aspectos. Tita, te doy gracias muy especialmente, por todas las situaciones que hemos vivido juntos y por ser la única también capaz de *jalarme las orejas* cuando nadie más lo hacía.

A mi esposa Angie, por todo tu amor, comprensión y entendimiento. Por todas esas veces en que dijiste “*Atziri, deja a papá trabajar en su tesis en paz...*”, pero también por todas esas veces en que dijiste “*TE AMO*”.

A Mi Atziri y a Mi Jazmín, por ser mi alegría, mi motivo y mi razón...

Al Dr. Félix Calderón Solorio, por la fe que depositó en mi, a pesar del *broncón* que le *eché* encima.

Al Dr. Juan Manuel García García, por apoyarme aunque las cosas no se hayan dado de la manera que esperábamos.

Al Dr. Jaime Carranza Madrigal, por toda su ayuda en la consecución de este proyecto.



## Resumen

Las enfermedades cardiovasculares se han convertido en la primera causa de fallecimientos en México y en el mundo. Dos de los marcadores principales con que se valoran de manera temprana estos padecimientos son la medición del grosor de la capa íntima-media carotídea y del diámetro del lumen de la arteria humeral en imágenes de ultrasonido.

En este trabajo se presenta una metodología completamente automática para la detección del lumen arterial en ultrasonografías, detección que las pruebas citadas en el párrafo anterior requieren, a fin de ejecutarse correctamente.

El algoritmo propuesto primero determina los bordes de la ecografía, para luego crear un grafo con los puntos intermedios entre los puntos borde consecutivos (por columnas) detectados. Posteriormente, se calcula el árbol de expansión mínima del grafo y se realiza un proceso de segmentación de las trayectorias factibles de ser el lumen arterial, empleando un criterio de distancia entre nodos conectados, avalado por una prueba de hipótesis bayesiana. La trayectoria que representa el lumen verdadero se selecciona de entre las trayectorias segmentadas, combinando tres criterios: un criterio de longitud, otro de obscuridad y un último de varianza mínima de error.

En 334 ultrasonografías con mediciones establecidas manualmente por un médico radiólogo, de un conjunto de 1,104 ecografías en total, el error promedio en la detección de la pared humeral cercana es de  $14.6 \mu\text{m}$ , con una desviación estándar de  $17.0 \mu\text{m}$ . Por su parte, en la pared arterial lejana el resultado es de  $15.1 \mu\text{m}$ , con una desviación estándar de  $14.5 \mu\text{m}$ .

La comparación del desempeño de nuestro algoritmo se realizó contra los resultados presentados en la literatura reciente para técnicas tanto automáticas como semi-automáticas en esta área. Nuestra técnica tiene un desempeño muy competitivo con relación a estas técnicas.

**Palabras clave:** segmentación, lumen, ultrasonografía, carótida, humeral, bayesiano, varianza, grafos, ajuste polinomial, ransac



# Abstract

Cardiovascular diseases have become the leading cause of deaths in Mexico and the whole world. Two of the key markers for early assessment of these diseases are the measuring of the thickness of carotid intima-media layer and the lumen diameter of the brachial artery in ultrasound imaging.

In this work, a fully unsupervised arterial lumen detection methodology in ultrasound imaging is presented. The lumen detection is required in order for the aforementioned tests to run properly.

The proposed algorithm first determines the edges of the ultrasound image, and then creates a graph with the intermediate points between consecutive (in a column basis) edge points detected. Subsequently, the minimum spanning tree of the graph is calculated, and those trajectories being feasible to be the true arterial lumen are segmented from it, using a criterion of distance between connected nodes, validated by a Bayesian hypothesis test. The trajectory that represents the true lumen is selected from the segmented ones, combining three criteria: a length criterion, another one of darkness and, a last one, of minimum error variance.

From a set of 1,104 sonograms, 334 of them having manually established measurements by a radiologist (*ground truth*), mean and standard deviation error in brachial near wall detection was  $14.6\ \mu\text{m}$  and  $17.0\ \mu\text{m}$ , respectively. Meanwhile, for the far wall of the same artery the results of those measurements were  $15.1\ \mu\text{m}$  and  $14.5\ \mu\text{m}$ , respectively.

Performance comparison of our algorithm was determined against results presented in recent literature for both unsupervised and semi-supervised techniques in this area. Our proposed technique has a very competitive performance with respect to these techniques.

**Keywords:** segmentation, lumen, ultrasonography, carotid, brachial, bayesian, variance, graphs, polynomial fitting, ransac



# Contenido

Dedicatoria . . . . .	III
Agradecimientos . . . . .	V
Resumen . . . . .	VII
Abstract . . . . .	IX
Contenido . . . . .	X
Lista de Figuras . . . . .	XIII
Lista de Tablas . . . . .	XV
Lista de Algoritmos . . . . .	XVII
Lista de Símbolos . . . . .	XIX
Lista de Publicaciones . . . . .	XXIII
1. Introducción . . . . .	1
1.1. Prueba de la medición del grosor de la íntima-media carotídea . . . . .	3
1.2. Prueba de la Función Endotelial de la Arteria Humeral (FEAH) . . . . .	4
1.3. Descripción del problema . . . . .	6
1.4. Objetivos . . . . .	10
1.4.1. Objetivo general . . . . .	10
1.4.2. Objetivos específicos . . . . .	10
1.5. Descripción de capítulos . . . . .	11
2. Estado del arte . . . . .	13
2.1. Enfoques basados en bordes y gradientes . . . . .	13
2.2. Enfoques basados en programación dinámica . . . . .	14
2.3. Técnicas basadas en <i>serpientes</i> . . . . .	15
2.4. Técnicas basadas en estadísticas locales . . . . .	16
2.5. Propuestas basadas en distribuciones de probabilidad . . . . .	17
2.6. Segmentación basada en la transformada de Hough . . . . .	18
2.7. Propuestas con enfoques integrados . . . . .	18
2.8. Discusión . . . . .	19
3. Metodología . . . . .	21
3.1. Recorte automático de la imagen de ultrasonido . . . . .	22
3.2. Detección de bordes y opciones de lumen arterial . . . . .	25
3.2.1. Algoritmo de detección de bordes de Canny . . . . .	25

3.2.2.	Análisis de bordes . . . . .	28
3.2.3.	Reducción del universo de búsqueda del lumen . . . . .	28
3.3.	Segmentación basada en árbol de expansión mínima . . . . .	29
3.3.1.	Construcción del grafo . . . . .	31
3.3.2.	Segmentación y clasificación del grafo . . . . .	31
3.3.3.	Algoritmo . . . . .	33
3.3.4.	Eliminación de trayectorias cortas . . . . .	33
3.4.	Criterios de selección del lumen arterial . . . . .	35
3.5.	Ajuste polinomial robusto . . . . .	37
3.6.	Discusión . . . . .	38
4.	Prueba de hipótesis bayesiana . . . . .	41
4.1.	Criterio de decisión probabilista . . . . .	42
4.2.	Algoritmo . . . . .	46
4.3.	Segmentación del árbol de expansión mínima . . . . .	46
5.	Criterio de varianza mínima de error para selección del lumen . . . . .	49
5.1.	Criterio de varianza mínima de error . . . . .	51
5.2.	Discusión . . . . .	54
5.3.	Algoritmo general de la metodología propuesta . . . . .	54
6.	Pruebas y resultados . . . . .	59
6.1.	Material . . . . .	59
6.2.	Pruebas y Resultados . . . . .	60
6.3.	Discusión . . . . .	63
7.	Conclusiones y trabajos futuros . . . . .	67
7.1.	Conclusiones . . . . .	67
7.2.	Trabajo futuro . . . . .	68
A.	Método de mínimos cuadrados . . . . .	71
	Referencias . . . . .	73

# Lista de Figuras

1.1. Aterosclerosis, lumen, capas arteriales y placa de ateroma. . . . .	2
1.2. (a) Arterias carótidas: comunes, internas y externas. (b) Medición óptima de la IMT. . . . .	4
1.3. Prueba de la función endotelial de la arteria humeral ( <i>FEAH</i> ). . . . .	5
1.4. Ultrasonografía de modo-B de una arteria carótida común en proyección longitudinal. . . . .	7
1.5. Ultrasonografía de modo-B vista como una superficie tridimensional. . . . .	9
3.1. Imagen de ultrasonido de una arteria. . . . .	21
3.2. Recorte automático de una ecografía arterial, basado en histogramas. . . . .	24
3.3. Recorte automático de una ecografía arterial. . . . .	25
3.4. Bordes detectados resultado de aplicar el algoritmo de Canny sobre la imagen de la Figura 3.3. . . . .	27
3.5. Puntos de los conjuntos $B_L$ y $V$ , sobreimpuestos en la imagen original. . . . .	30
3.6. Árbol de expansión mínima del grafo. . . . .	32
3.7. Trayectorias detectadas con posibilidad de ser el centro del lumen del vaso arterial. . . . .	35
3.8. Bordes del lumen arterial detectado con los criterios de selección expuestos. . . . .	37
3.9. Ajuste polinomial robusto sobre los puntos de los bordes del lumen arterial segmentado. . . . .	39
4.1. Trayectorias factibles de ser el lumen arterial en una ecografía de prueba. . . . .	42
4.2. Árbol de expansión mínima del grafo, correspondiente a la ecografía de la Figura 4.1. . . . .	47
4.3. Lumen arterial segmentado con la metodología propuesta, correspondiente a la imagen en la Figura 4.1. . . . .	48
5.1. Ejemplo de inconsistencia en la metodología de detección del lumen arterial, relativa al criterio de longitud. . . . .	50
5.2. Ajuste de mínimos cuadrados a las trayectorias de la Figura 5.1. Datos originales. . . . .	51
5.3. Ajuste de mínimos cuadrados a las trayectorias de la Figura 5.1. Ajuste a la trayectoria 0. . . . .	52

5.4. Ajuste de mínimos cuadrados a las trayectorias de la Figura 5.1. Ajuste a la trayectoria 4. . . . .	52
5.5. Bordes del lumen arterial detectado con el criterio de varianza mínima. . .	53
6.1. Resultados de la prueba cualitativa. . . . .	61
6.2. Comparativa entre los resultados de la metodología propuesta y las técnicas del estado del arte. . . . .	64

# Lista de Tablas

5.1. Criterios de selección para la ecografía de la Figura 5.1 . . . . .	49
6.1. Resultados de la prueba cualitativa . . . . .	61
6.2. Error en las <i>mediciones interfaz lumen-íntima</i> (en micrómetros) . . . . .	62
6.3. Error en las <i>mediciones interfaz lumen-íntima</i> (en pixeles) . . . . .	63
6.4. Error en las <i>mediciones interfaz lumen-íntima</i> para las imágenes con error en la detección del lumen arterial (en micrómetros) . . . . .	64
6.5. Error en las <i>mediciones interfaz lumen-íntima</i> para las imágenes con error en la detección del lumen arterial (en pixeles) . . . . .	65



# Lista de Algoritmos

1.	RecorrerÁrbol: Recorre el árbol de expansión mínima $G^+$ , para determinar los subgrafos que corresponden a posibles opciones de lumen arterial. . . . .	33
2.	MarcarSubgrafos: Marca los subgrafos del árbol de expansión mínima que corresponden a posibles opciones de lumen arterial. . . . .	34
3.	SegmentarLumen: Implementación de la metodología para segmentación del lumen arterial en imágenes de ultrasonido. . . . .	55
3.	SegmentarLumen: ...Continuación. . . . .	56
3.	SegmentarLumen: ...Continuación. . . . .	57
3.	SegmentarLumen: ...Continuación. . . . .	58



# Lista de Símbolos

Símbolos	Descripción
$A$	Conjunto de aristas del grafo $G$
$A^+$	Conjunto de aristas del árbol de expansión mínima $G^+$
$ A^+ $	Cardinalidad del conjunto $A^+$
$A_g$	Integral en $m$ dimensiones de una función gaussiana
$A_{ij}$	Arista del grafo $G$ que conecta los vértices $v_i$ y $v_j$
$A_{Min}$	Umbral de separación mínima entre puntos borde consecutivos
$a^*$	Solución que minimiza $E(a)$ o <i>solución de mínimos cuadrados</i>
$a_i$	Parámetros del modelo de la función polinomial de ajuste
$B$	Conjunto de puntos borde detectados en $I$
$\hat{B}$	Representación ordenada de todos los bordes de la imagen $I \equiv B$
$\hat{B}_c$	Representación de los puntos borde en una columna $c$ de $g$
$\hat{b}_{i^*}$	Puntos borde de la pared arterial cercana del lumen detectado
$\hat{b}_{i^*+1}$	Puntos borde de la pared arterial lejana del lumen detectado
$\hat{b}_k$	Cada uno de los puntos borde que forman el conjunto $\hat{B}_c$
$B_L$	Conjunto de puntos de opciones factibles de ser el lumen arterial
CA	Ecografías con mediciones y acierto en el lumen detectado
CF	Ecografías con mediciones y fallo en el lumen detectado
$D$	Unión de los conjuntos $D_1$ y $D_2$ , si se cumple $H_0$
$D_1, D_2$	Conjuntos de puntos disjuntos de dos subgrafos $G_i^+$ y $G_j^+$ de $S^+$
$\det(A)$	Determinante de la matriz $A$
$d(v_i, v_j)$	Peso de $A_{ij} \equiv$ la distancia euclidiana entre los vértices que conecta
$E(a)$	Función de error que mide la calidad del ajuste polinomial
$error_C$	Error en la ubicación de la pared arterial cercana, entre lo indicado por el radiólogo y la estimación automática
$error_L$	Error en la ubicación de la pared arterial lejana, entre lo indicado por el radiólogo y la estimación automática
$f$	$f(x; a)$
$f_1$	$f_1(x_i; a_1)$
$f_1(x_i; a_1)$	Aproximación polinomial al conjunto de datos $D_1$
$f_2$	$f_2(x_j; a_2)$
$f_2(x_j; a_2)$	Aproximación polinomial al conjunto de datos $D_2$
$f_C(\hat{x})$	Función de ajuste al borde de la pared arterial cercana
$f_L(\hat{x})$	Función de ajuste al borde de la pared arterial lejana

Símbolos	Descripción
$f(x; a)$	Aproximación polinomial única al conjunto de datos $D$
$f(\hat{x}; a)$	Función polinomial de ajuste a los bordes del lumen detectado
$G$	Grafo no dirigido construido con los puntos del conjunto $V$
$g$	Imagen binaria con los bordes detectados en $I$
$G^+$	Árbol de expansión mínima del grafo $G$
$G_i^+$	$i$ -ésimo subgrafo conectado perteneciente al conjunto $S$
$G_{i^*}^+$	Subgrafo de $S^+$ elegido como el lumen arterial verdadero
$G_x$	Primera derivada de una imagen en la dirección horizontal
$G_y$	Primera derivada de una imagen en la dirección vertical
$H_0$	Hipótesis nula, $D_1$ y $D_2$ son particiones de un mismo conjunto
$H_1$	Hipótesis alterna, $D_1$ y $D_2$ <b>no</b> son particiones de un conjunto
$I$	Ecografía original recortada de $N_{Cols} \times N_{Filas}$ pixeles
$i^*$	Índice del subgrafo de $S^+$ elegido como el lumen arterial real
$j^*$	Índice de la trayectoria de $S_u$ elegida como el lumen arterial real, con base en el criterio de varianza mínima
$K$	Constante de proporcionalidad = $k_1 k_2$
$k_1$	Valor de $P(a   H_0)$
$k_2$	$\frac{1}{\sigma^m \sqrt{(2\pi)^m}}$
$l_i$	Valor del criterio de longitud para el $i$ -ésimo subgrafo de $S^+$
$m$	Grado del ajuste polinomial a los bordes del lumen detectado
$M_G$	Magnitud del gradiente de una imagen
$\mu_j$	Promedio de tonos de gris del área del $j$ -ésimo subgrafo de $S^+$
$n$	Puntos totales en el borde actual al que se ajusta un polinomio
$N_1, N_2$	Cardinalidad de los conjuntos $D_1$ y $D_2$ , respectivamente
$N_A$	Número de aristas en el grafo $G$
$\nabla E^T(a^*)$	Gradiente de $E(a)$
$\nabla^2 E(a^*)$	Hessiano de $E(a)$
$N_B$	Número de puntos en el conjunto $B$
$N_G$	Número de subgrafos conectados que forman el conjunto $S$
$N_{Min}$	Umbral de nodos para que un subgrafo sea opción de lumen
$o_i$	Valor del criterio de obscuridad para el $i$ -ésimo subgrafo de $S^+$
$P(a   f)$	Probabilidad posterior para un modelo de parámetros $a$ dada una función de ajuste polinomial $f$
$P(D_1, D_2   f)$	Probabilidad posterior de que $D_1$ y $D_2$ son un solo conjunto de datos, dada una función de ajuste polinomial $f$
$P(D_1, D_2   f_1, f_2)$	Probabilidad posterior de que $D_1$ y $D_2$ <b>no</b> son un solo conjunto de datos, dadas dos funciones de ajuste polinomial $f_1$ y $f_2$
$P(D_1   f)$	Probabilidad posterior de que $D_1$ fue generado por un modelo independiente (de $D_2$ ), dada una función de ajuste $f$
$P(D_1   f_1, f_2)$	Probabilidad posterior de que $D_1$ fue generado por un modelo independiente (de $D_2$ ), dadas dos funciones de ajuste $f_1$ y $f_2$

Símbolos	Descripción
$P(D_2   f)$	Probabilidad posterior de que $D_2$ fue generado por un modelo independiente (de $D_1$ ), dada una función de ajuste $f$
$P(D_2   f_1, f_2)$	Probabilidad posterior de que $D_2$ fue generado por un modelo independiente (de $D_1$ ), dadas dos funciones de ajuste $f_1$ y $f_2$
$P(D   a, f)$	Probabilidad posterior de que $D$ es un solo conjunto de datos, dados unos parámetros $a$ , para una función de ajuste $f$
$P(D   f)$	$\equiv P(D_1, D_2   f)$
$P(f   D_1, D_2)$	Probabilidad de que una sola función de ajuste $f$ caracterice a los conjuntos de datos $D_1$ y $D_2$ , dados dichos conjuntos
$P(f_1, f_2   D_1, D_2)$	Probabilidad a priori de que dos funciones de ajuste $f_1$ y $f_2$ caractericen a los conjuntos $D_1$ y $D_2$ , dados dichos conjuntos
$P(H_0)$	Probabilidad a priori de que $H_0$ sea verdadera
$P(H_1)$	Probabilidad a priori de que $H_1$ sea verdadera
$p_{Max}$	Umbral de separación máxima entre nodos conectados en $G^+$
$S$	Conjunto de subgrafos que resultan de segmentar $G^+$
$S^+$	Conjunto de subgrafos de $S$ con número de nodos $\geq N_{Min}$
$ S^+ $	Cardinalidad del conjunto $S^+$
SA	Ecografías sin mediciones y acierto en el lumen detectado
SF	Ecografías sin mediciones y fallo en el lumen detectado
$\sigma^2$	Varianza del error entre el ajuste polinomial y los datos reales
$\sigma_j^2$	Varianza muestral de los puntos borde de la $j$ -ésima estructura anatómica en la ecografía
$ S_j^+ $	Número de nodos en el subgrafo $S_j^+$
$S_u$	Conjunto de trayectorias cuyo número de puntos borde detectados en la ecografía $> u_{cl}$
$ S_u $	Cardinalidad del conjunto $S_u$
$\theta$	Dirección del gradiente de una imagen
$u_{cl}$	Umbral de inconsistencia para el criterio de longitud
$v_{i^*}$	Conjunto de puntos del subgrafo $G_{i^*}^+$
$V$	Conjunto de puntos medios entre los bordes del conjunto $B_L$
$ V $	Número de nodos del grafo $G$
$ V_i $	Cardinalidad del conjunto $V_i$ y número de nodos en $G_i^+$
$[x_C, y_C]^T$	Coordenadas del punto donde el radiólogo señala la pared arterial cercana
$\xi$	Umbral de error entre la solución de ajuste y los datos reales
$[\hat{x}_i, \hat{y}_i]^T$	Coordenadas de los puntos de los bordes del lumen detectado
$[x_L, y_L]^T$	Coordenadas del punto donde el radiólogo señala la pared arterial lejana



# Lista de Publicaciones

Tinoco-Martínez, S. R., Calderon, F., Lara-Alvarez, C., y Carranza-Madrigal, J. Una técnica bayesiana y de varianza mínima para segmentación del lumen arterial en imágenes de ultrasonido. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 2014. Por publicar.

Tinoco-Martínez, S. R., Calderon, F., Lara-Alvarez, C., y Carranza-Madrigal, J. A bayesian and minimum variance technique for arterial lumen segmentation in ultrasound imaging. En F. Castro, A. Gelbukh, y M. González, eds., *Advances in Artificial Intelligence and Its Applications*, tomo 8265 de *Lecture Notes in Computer Science*, págs. 545–557. Springer Berlin Heidelberg, 2013. ISBN 978-3-642-45113-3. doi:10.1007/978-3-642-45114-0\_43. URL [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-45114-0\\_43](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-45114-0_43)  
«*First Place, Best Paper Award*» in the 12th. Mexican International Conference on Artificial Intelligence (MICAI 2013). November 24 to 30, 2013. Mexico, City, Mexico.

Calderon, F., Tinoco-Martínez, S. R., y Carranza-Madrigal, J. Un algoritmo basado en grafos para la detección automática de la luz arterial en imágenes ultrasonográficas. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 10(4):423–433, 2013.

Tinoco-Martínez, S. R. y Calderon, F. Detección de la luz arterial empleando grafos y funciones polinomiales. En *IEEE 13ª Reunión de Otoño de Potencia, Electrónica y Computación (ROPEC' 2011 Internacional)*, págs. 103–108. 2011. ISBN: 978-607-95476-3-9.



## Capítulo 1

# Introducción

Las enfermedades cardiovasculares (*ECVs*) son las enfermedades relacionadas con el corazón y los vasos sanguíneos (venas y arterias), entre las cuales se incluyen las enfermedades de las arterias coronarias, los accidentes cerebrovasculares, las enfermedades de las arterias periféricas, las fallas del corazón y la hipertensión.

Las ECVs son la causa principal de fallecimientos en el mundo. La *Organización Mundial de la Salud (OMS)* informa que, sólo en 2004, las muertes originadas por las ECVs llegaron a los 17.1 millones de personas, lo cual representa el 29% de todos los decesos registrados en nuestro planeta [OMS2011]. Además, la OMS calcula que para el año 2030 morirán cerca de 23.6 millones de personas a causa de este tipo de enfermedades.

En México, el *Consejo Nacional de Población (CONAPO)* indica que, del año 1980 al año 2007, las enfermedades cardiovasculares representaron la primera causa de muerte entre la población en general, llegando a originar hasta el 21.2% del total de casos fatales registrados oficialmente [CONAPO2010].

El ultrasonido es una de las herramientas principales utilizadas para la prevención de las ECVs. Esto se debe a que es una técnica no invasiva para el paciente, aunada a la rapidez relativa con la cual se examina mediante este instrumento. La desventaja principal del ultrasonido radica en su dependencia sobre las habilidades del operador de la maquinaria ultrasónica. El operador de este equipo requiere de entrenamiento especial para interpretar la imagen ultrasonográfica, que generalmente es muy ruidosa.

La patología más inquietante asociada a las ECVs es la *aterosclerosis* [Molinari et al. 2010b]. La aterosclerosis es una degeneración progresiva que reduce el lumen de la arteria y provoca el engrosamiento de la pared arterial. Esta enfermedad es la forma más común de la *arteriosclerosis*, la cual engloba a una familia de enfermedades que provocan el endurecimiento de las paredes de una arteria, haciendo que pierda su elasticidad natural. El lumen del vaso de la arteria es el espacio interior por donde circula el flujo sanguíneo.

La aterosclerosis es un depósito o infiltración de sustancias grasas (por ejemplo, el colesterol) en las paredes arteriales. Específicamente, la acumulación se efectúa entre las dos capas más internas que conforman a la arteria, de adentro hacia afuera, denominadas *íntima* y *media*. La última capa arterial, y la más externa, se denomina *adventicia*. La acumulación de grasas puede llegar a formar una placa aterosclerótica o *ateroma*, que llega a ocluir (obstruir) el *lumen arterial*. El desarrollo progresivo de la aterosclerosis se ha correlacionado con el incremento del riesgo de sufrir ECVs, lo cual implica que la vigilancia del proceso aterosclerótico es de suma importancia en la medicina práctica, conforme lo describen Molinari et al. en [Molinari et al. 2010b].

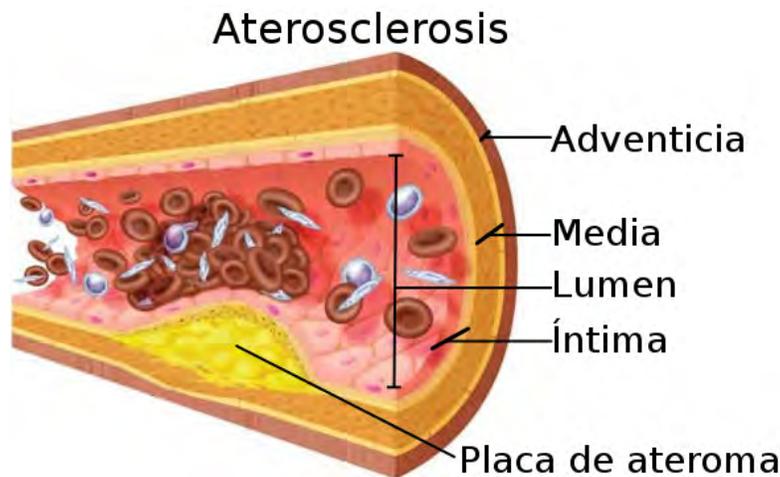


Figura 1.1: Aterosclerosis, lumen, capas arteriales y placa de ateroma.

La Figura 1.1 muestra el proceso aterosclerótico en una arteria, el lumen y las capas que la conforman, así como una placa de ateroma con un grado de avance importante

en su desarrollo. También se puede observar el grado de *estenosis* avanzado, esto es, la oclusión del lumen que la placa de ateroma genera.

Basados en el ultrasonido, los marcadores principales con que se valoran las ECVs y la aterosclerosis son dos: la prueba de medición del grosor de la íntima-media carotídea (por sus siglas en inglés *IMT – Intima-Media Thickness*) [Amato et al. 2007] y la prueba de la función endotelial de la arteria humeral (que referiremos en este trabajo como *FEAH – Función Endotelial de la Arteria Humeral*) [Celermajer et al. 1994]. Cabe señalar que, en la práctica clínica diaria y con fundamento en la difusión del conocimiento y la educación de la opinión pública, muchos médicos solicitan la realización de las pruebas citadas incluso en pacientes sin riesgo cardiovascular, es decir, como medida de diagnóstico preventivo, puntualiza Villela en [Villela et al. 2008]. Además, son utilizadas para el diagnóstico, la evaluación y el tratamiento de pacientes que ya presentan síntomas de una o varias de las ECVs, según se indica en [Touboul et al. 2007, Hall y Bassiouny 2012, Molinari y Suri 2012].

## 1.1. Prueba de la medición del grosor de la íntima-media carotídea

El ultrasonido de modo-B de alta resolución es una técnica no invasiva utilizada ampliamente para evaluar la aterosclerosis en arterias superficiales. Permite la medición precisa de la distancia que existe entre la interfaz del lumen arterial y la capa íntima (el límite entre ambas) y la interfaz entre la capa media y la capa adventicia (también la línea límite entre ambas) de la pared de la arteria carótida, lo cual se define como el grosor de la íntima-media carotídea [Amato et al. 2007]. La imagen debe ser tomada por un radiólogo entrenado, empleando un transductor lineal de frecuencia alta sobre el tracto común de la arteria, ver Figura 1.2(a). El punto óptimo para realizar la medición es a un centímetro del bulbo o seno carotídeo (una dilatación de la arteria carótida interna, en el sitio donde el tracto común se divide en las arterias internas y externas), ver Figura 1.2(b).

Cuando el examen clínico tiene como objetivo la medición de la IMT, se requiere que el ultrasonido se tome con una vista longitudinal. Además, se deben tomar dos vistas de la arteria, la vista lateral anterior y la vista lateral posterior [Molinari et al. 2010c].

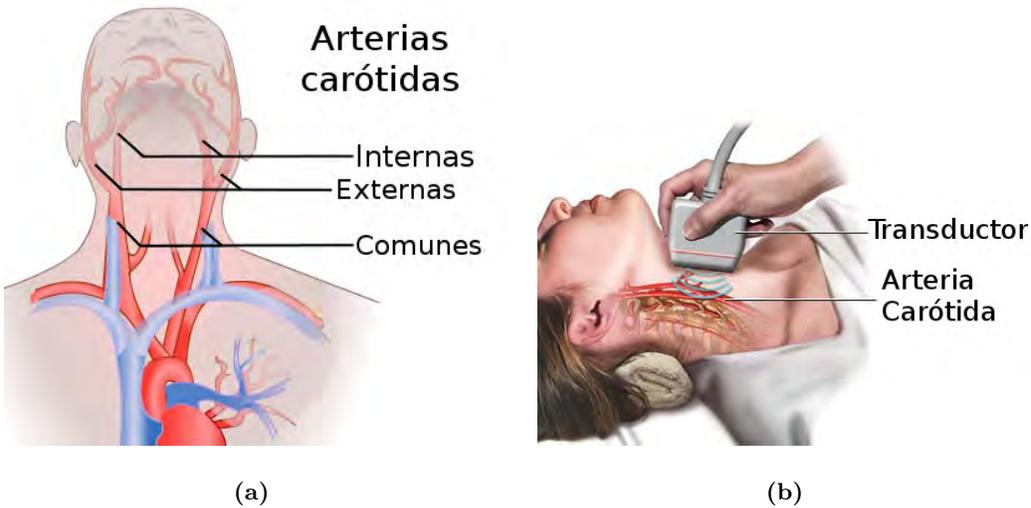


Figura 1.2: (a) Arterias carótidas: comunes, internas y externas. (b) Medición óptima de la IMT.

La medición de la IMT se realiza píxel a píxel, por columnas, de un extremo de la imagen de ultrasonido al otro. Esto proporciona un conjunto de mediciones a analizar. Si el grosor máximo encontrado en la IMT es mayor a 1.78 mm o, también, si el grosor medio encontrado es mayor a 1 mm, se diagnostica un riesgo importante de sufrir un accidente cardiovascular, según lo establecen Amato et al. en [Amato et al. 2007].

## 1.2. Prueba de la Función Endotelial de la Arteria Humeral (FEAH)

La capa *íntima* de la pared arterial está constituida principalmente por un pavimento de endotelio, con células poligonales, ovals y fusiformes; seguido por una capa de tejido conectivo subendotelial cubierto por una capa de fibras elásticas. El endotelio de la capa íntima representa la parte de la pared que está en contacto directo con la sangre. La capa arterial *media* está compuesta principalmente por células musculares, con una orientación de fibras transversales. La capa *adventicia* está compuesta por haces de tejido conectivo y fibras elásticas [Molinari et al. 2010c, Phinikaridou et al. 2012, Hall y Bassiouny 2012].

El endotelio es el órgano más grande del cuerpo humano, pesa 1.8 kg y mide alre-

dedor de  $700\text{ m}^2$ . No solamente actúa como una barrera mecánica entre la sangre y el vaso arterial, sino también como una glándula autocrina, paracrina y endocrina. Este órgano de células planas es capaz de regular el tono arterial, la proliferación del músculo liso, la agregación plaquetaria, la adhesión de los monocitos, la hemostasis, la trombólisis, la inflamación, algunas respuestas inmunes y la producción de radicales libres [García-Barreto et al. 2003].

La determinación de la función endotelial se realiza, de manera resumida, colocando un dispositivo de presión en el antebrazo del paciente, para luego tomar una imagen de ultrasonido con un transductor de al menos  $7.5\text{ MHz}$ ., con el haz perpendicular a la arteria humeral (que también se denomina *braquial*), ver Figura 1.3. Posteriormente, se ejerce sobre la arteria una presión de al menos  $30\text{ mm}$  de mercurio por encima de la presión arterial sistólica máxima que presente el paciente al momento de efectuar la prueba. La presión ejercida se sostiene durante 5 minutos aproximadamente y luego se libera. En este momento se registra nuevamente el diámetro del lumen humeral. El proceso se puede repetir esperando 15 minutos entre una y otra intervención.

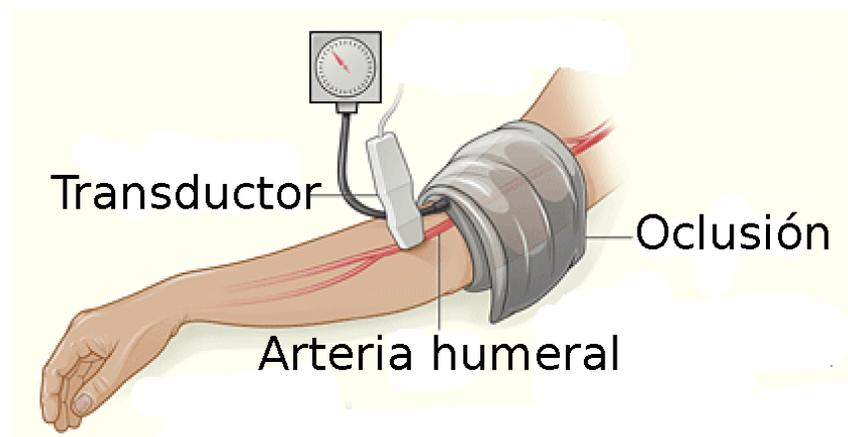


Figura 1.3: Prueba de la función endotelial de la arteria humeral (FEAH).

En condiciones de normalidad, el diámetro de la arteria humeral después de liberarse la presión, debe ser al menos  $10\%$  mayor que el obtenido en condiciones basales (antes de ejercer presión sobre la arteria), cuando el dispositivo oclusivo se ha colocado en el antebrazo. Si el resultado es contrario a esto, el riesgo de padecer una enfermedad cardiovascular está muy por encima de lo normal, de acuerdo con las conclusiones de García-Barreto et al.

en [García-Barreto et al. 2003].

### 1.3. Descripción del problema

La Figura 1.4 muestra una imagen longitudinal de ultrasonido de modo-B de ejemplo, de una arteria carótida. La franja oscura central corresponde al lumen arterial (indicado con la letra  $L$ ), flanqueado en su parte superior por la pared arterial cercana (o próxima) y por la pared arterial lejana (o distante) en su parte inferior (las flechas negras a la izquierda de la imagen). La profundidad de los tejidos se incrementa de arriba hacia abajo, de acuerdo a la dirección del haz ultrasónico.

El modo-B del ultrasonido se refiere al modo de brillo. En este modo, los ecos que envía y recibe el transductor ultrasónico se muestran como una imagen bidimensional en escala de grises. La amplitud de los ecos recibidos se representa como puntos (píxeles) de una imagen en tonos de gris, como presenta la Figura 1.4. La imagen se construye, línea a línea, a partir de estos píxeles conforme al procedimiento que Loizou detalla en [Loizou2005].

En ecografías longitudinales de modo-B, la capa arterial íntima genera un eco delgado y de baja intensidad, por lo que no se puede distinguir nítidamente de la capa media, lo que impide saber en dónde termina una y empieza la otra. La capa media generalmente se observa con un color gris oscuro, mientras que la capa adventicia es muy ecogénica (que genera un eco ultrasónico muy notorio) y se observa con un color gris brillante (las flechas negras a la derecha de la Figura 1.4). Las flechas blancas (en la misma figura), señalan la interfaz entre el lumen arterial y la capa íntima (indicada con  $LI$ ) y entre la capa media y la capa adventicia (indicada con  $MA$ ).

Para la prueba IMT, el grosor de la capa íntima-media (señalado con la leyenda  $IMT$  en la Figura 1.4) es la distancia entre los límites  $LI$  y  $MA$  [Molinari et al. 2010c]. Sin embargo, esta medición debe realizarse en la pared arterial lejana, ya que no se pueden obtener mediciones válidas de la IMT de la pared arterial cercana debido a que, cualquier eco ultrasónico devuelto por la interfaz  $MA$  de esta pared, se pierde en el eco producido por las partes bajas de la propia capa adventicia. Mientras tanto, el diámetro del lumen de la arteria humeral, para la prueba FEAH, se mide entre los límites  $LI$  de la pared arterial

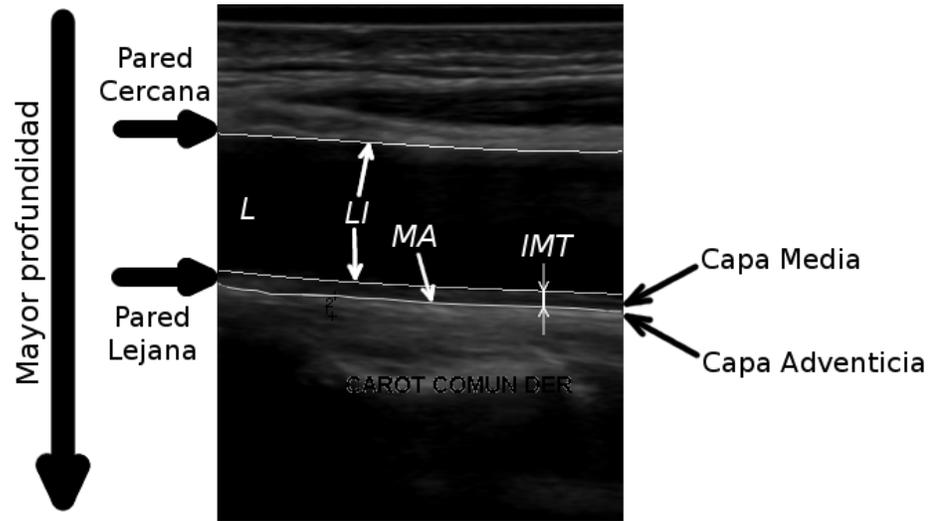


Figura 1.4: Ultrasonografía de modo-B de una arteria carótida común en proyección longitudinal.

cercana y la pared arterial lejana. Las consideraciones metodológicas descritas son sugeridas enfáticamente por Wikstrand en [Wikstrand2012].

En la práctica clínica, el valor de la IMT carotídea y el diámetro del lumen humeral son medidos rutinariamente mediante un examen de ultrasonido. El radiólogo toma una imagen en proyección longitudinal de la arteria correspondiente y coloca dos marcas en la imagen. Para la IMT, las marcas son, como ya se mencionó, la interfaz LI y la interfaz MA. Para la FEAH, las marcas son en ambas interfaces LI de las paredes arteriales. Debido a que la medición manual depende del radiólogo, está sujeta a errores, inconsistencias y a un periodo de tiempo de procesamiento largo. Por este motivo, se ha demostrado que la aplicación de técnicas automatizadas en computadora que realizan estos procedimientos, ayuda a reducir el error humano y mejorar el diagnóstico clínico, afirman Molinari y Suri en [Molinari y Suri 2012].

En general, las dificultades existentes para realizar la segmentación del lumen arterial en imágenes de ultrasonido, de acuerdo con los trabajos presentados en [Molinari et al. 2010c, Loizou2005, Wendelhag et al. 1996, Furberg et al. 1994], son las siguientes:

1. El ruido. La forma principal de ruido en las imágenes formadas empleando el ultra-

sonido se denomina *speckle*. En esencia, el ruido *speckle* es un tipo de ruido multiplicativo correlacionado localmente, producido por la interferencia constructiva o destructiva entre las ondas ultrasónicas reflejadas, refractadas o absorbidas por el tejido del que se toma la imagen. El trabajo publicado por Loizou y Pattichis en [Loizou y Pattichis 2008] presenta una revisión detallada sobre el ruido *speckle* en ultrasonografías arteriales.

El ruido *speckle* reduce la calidad general de una ultrasonografía al crear un efecto de *pixelación* o patrón de textura en ésta, patrón que, además, varía dependiendo del tejido biológico que atraviese el ultrasonido, lo cual contribuye en detrimento de la percepción humana y de los algoritmos de procesamiento numérico.

Las imágenes de ultrasonido en modo-B se pueden analizar como una superficie tridimensional, en la cual las posiciones de fila y columna de un pixel dentro de la imagen definen los ejes de abscisas y ordenadas, considerando el tono de gris como la coordenada del tercer eje, perpendicular a los anteriores. La Figura 1.5 presenta la ultrasonografía de la imagen en la Figura 1.4, representada como una superficie en 3D. Se puede observar claramente la gran proporción de ruido *speckle* en la ecografía, esto es, todos los picos irregulares que se encuentran tanto fuera del lumen, como dentro de éste. Obsérvense también los límites del lumen (en forma de muros o paredes) que la metodología formulada en esta investigación de tesis detecta automáticamente.

Otras fuentes importantes de ruido son las características ecogénicas de la sangre, cuando las células que la componen se aglutinan o cuando se presentan coágulos. Los ecos generados por estos factores dificultan, primordialmente, la delimitación de la interfaz entre el lumen y las paredes arteriales. Aunado a lo anterior, las placas de ateroma o la presencia de depósitos de calcio en la arteria tienen un coeficiente de reflexión muy alto, lo cual crea conos de sombra en la ultrasonografía al no permitir que el ultrasonido pase a través de ellos. Este proceso hace que aparezcan discontinuidades en la apariencia de la arteria, originando resultados poco fiables en su segmentación.

2. El equipamiento utilizado. La calidad de las ecografías depende en gran medida del aparato de ultrasonido empleado así como de los ajustes que se realicen al mismo (en-

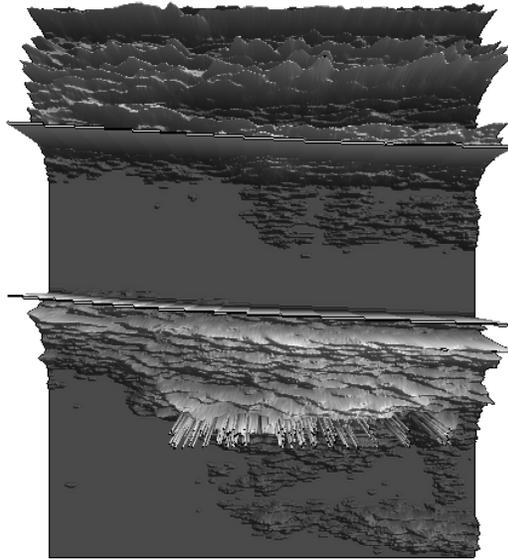


Figura 1.5: Ultrasonografía de modo-B vista como una superficie tridimensional.

foque, profundidad de rastreo, frecuencia del pulso de repetición, ganancia, apariencia de la escala de grises y compensación de la ganancia temporal).

3. *Apreciación referida al observador.* Las ultrasonografías evaluadas por un mismo experto, en ocasiones diferentes, tienen resultados diferentes.
4. *Apreciación referida a los observadores.* La inspección de imágenes de ultrasonido, por dos o más expertos, arrojará resultados diferentes, ya que cada experto interpretará de forma distinta los tejidos específicos en la imagen.
5. *Morfología.* La forma que presente la arteria en la imagen de ultrasonido también puede llegar a ser un obstáculo, ya que el lumen arterial puede presentarse en línea horizontal y recta (lo más común), pero también en forma curva, torcida o, incluso, en una trayectoria que no sea paralela al eje del cuello del paciente.

## 1.4. Objetivos

### 1.4.1. Objetivo general

El objetivo de este trabajo de tesis es desarrollar una metodología para la detección completamente automática del lumen arterial en imágenes ultrasonográficas.

### 1.4.2. Objetivos específicos

1. Realizar las gestiones necesarias con la finalidad de obtener una base de datos de imágenes de ultrasonido de las arterias carótidas y humerales tomadas a pacientes en evaluación de riesgos cardiovasculares.
2. Desarrollar la metodología para la detección automática del lumen arterial en ultrasonografías.
3. Implementar la metodología desarrollada como software de computadora.
4. Poner a prueba el software y la metodología desarrollados para verificar su efectividad en la práctica.
5. Procesar al menos el 90% de las imágenes de ultrasonido de prueba, con una exactitud o error promedio inferior a  $35.0 \mu\text{m} \pm 32.0 \mu\text{m}$ . Es decir, mejorar los resultados de la técnica automática con mejor desempeño en el estado del arte, formulada por Molinari et al. en [Molinari et al. 2009].

Considerando lo visto en este capítulo, así como que la capa íntima-media inicia en el borde del lumen arterial a partir del cual se realiza su medición, para la IMT; y dado que el cálculo del diámetro del lumen de la arteria humeral es fundamental para la FEAH; el presente trabajo se desarrolla con el objetivo de apoyar el diagnóstico médico en estas dos pruebas. Para tal fin, se pretende proporcionar la detección automática del lumen arterial (carotídeo o humeral) en imágenes de ultrasonido, tomadas a pacientes en diagnóstico de enfermedades cardiovasculares.

La finalidad que se persigue consiste en acelerar el proceso de diagnóstico, un proceso que es altamente tedioso y que requiere de un especialista radiólogo para efectuarse

apropiadamente. Así mismo, se pretende facilitar -en la medida de lo posible- la interpretación de este tipo de imágenes por un proceso automático, dirigido por una persona que no sea experta en el área, forzosamente.

## 1.5. Descripción de capítulos

En este primer capítulo se presentó la motivación que nos llevó a abordar el tema de esta investigación, cómo las enfermedades cardiovasculares se han convertido en la primera causa de muerte en México y en el mundo y cómo podemos apoyar el diagnóstico preventivo de las mismas. Se describió el problema específico que queremos resolver, la detección automática del lumen arterial en ultrasonografías, y los objetivos general y específicos del proyecto de trabajo planteado.

En el Capítulo 2 se presenta una revisión breve de los trabajos más recientes en el área de la detección del lumen arterial, los cuales son trabajos orientados también hacia la realización de las pruebas IMT y FEAH.

En el Capítulo 3 se expone la metodología desarrollada para la detección automática del lumen arterial, la cual se basa en la detección de bordes de la imagen de ultrasonido y la creación de un grafo con los puntos intermedios entre ellos. Posteriormente se calcula el árbol de expansión mínima del grafo y se segmenta mediante un criterio de distancia avalado por una prueba de hipótesis bayesiana. El lumen arterial correcto se selecciona, aplicando a las trayectorias segmentadas del árbol, tres criterios de discriminación: uno de longitud, otro de obscuridad y otro de varianza mínima.

El Capítulo 4 detalla la prueba de hipótesis bayesiana que avala los cortes en el árbol de expansión mínima que se realizan dentro de la metodología propuesta para ubicar el lumen del vaso arterial.

El Capítulo 5 describe el criterio de varianza mínima de error utilizado para la selección del lumen arterial verdadero, así como los casos específicos en los que se emplea. Esto como parte integral, también, de la metodología desarrollada.

El Capítulo 6 describe las pruebas realizadas y los resultados obtenidos en la aplicación de la metodología desarrollada para detección automática del lumen arterial,

sobre un conjunto de ultrasonografías de prueba.

Finalmente, el Capítulo 7 presenta las conclusiones alcanzadas con el trabajo desarrollado, así como los trabajos que a futuro se pretenden realizar en la dirección del área de esta tesis.

## Capítulo 2

# Estado del arte

Las técnicas para detectar el lumen arterial en una imagen de ultrasonido se han aplicado principalmente como un primer paso en la prueba IMT sobre la arteria carótida (un segundo paso consistirá en calcular el propio grosor de las capas íntima y media, basándose en la segmentación anterior). Para lograr su objetivo estas técnicas emplean diversos métodos, de los cuales se mencionarán a continuación los más utilizados en la investigación en el área. Molinari et al. presentan en [Molinari et al. 2010c] una revisión más a detalle de los métodos que a continuación se citan.

Cabe señalar que en la presente tesis no se mencionan técnicas en tres dimensiones debido a que su complejidad computacional las aleja de su ejecución en tiempo real o cercana a ésta. De la misma manera, no se refieren técnicas basadas en el ultrasonido intravascular (*IVUS - Intravascular Ultrasound*) [Reid et al. 2012], por ser una metodología invasiva que se emplea usualmente en pacientes en estado crítico o que se encuentran en una etapa de examen previa a una intervención quirúrgica. Con la tecnología del IVUS no trabaja de forma normal el centro de diagnóstico que nos proporcionó las imágenes de ultrasonido. Trabaja sólo con la investigación cuyo desarrollo y resultados se presentan en esta tesis.

### 2.1. Enfoques basados en bordes y gradientes

Los primeros enfoques para la segmentación del vaso arterial en una ultrasonografía se basaron en detección de bordes [Pignoli y Longo 1988, Touboul et al. 1992]; y, posterior-

mente, en el gradiente de la imagen [Liguori et al. 2001, Stein et al. 2005, Faita et al. 2008].

En una ultrasonografía el lumen arterial se puede observar como una región oscura rodeada por franjas brillantes. Las franjas conformarán bordes si se considera el perfil de intensidad de los píxeles. Los métodos basados en detección de bordes ubican dichas franjas brillantes (o bordes) y determinan que el lumen de la arteria se conforma como el espacio existente entre éstas. Las técnicas basadas en gradiente consideran las transiciones en el gradiente de la imagen que estas franjas originan, e intentan ubicar un patrón ideal de los cambios (en el gradiente) que corresponderían al vaso de una arteria.

Las técnicas en estas categorías son muy veloces en su cálculo, generalmente; pero se ven afectadas de forma importante por el ruido y la morfología de la arteria. Además, carecen de una automatización completa (requieren de intervención manual para señalar la región a analizar en la ultrasonografía, a fin de obtener buenos resultados).

## 2.2. Enfoques basados en programación dinámica

Algunos enfoques a la solución del problema [Schmidt y Wendelhag 1999, Wendelhag et al. 1997, Wendelhag et al. 1992, Wendelhag et al. 1991], aplican la programación dinámica y combinan linealmente mediciones múltiples ponderadas (la intensidad de los píxeles, la intensidad del gradiente y la continuidad de los bordes) a fin de establecer una función de costo que permita determinar si un píxel forma parte de la interfaz entre el lumen y las paredes arteriales. Revisados cada uno de los píxeles que conforman la imagen, y determinados aquéllos que pertenecen a dicha interfaz, el lumen detectado se encontrará entre los píxeles correspondientes a ambas paredes de la arteria. Los pesos para optimizar la función de costo se obtienen entrenando el sistema con información de referencia (un conjunto inicial de ultrasonografías segmentadas manualmente por expertos).

Para reducir el costo computacional de esta metodología existen algunos trabajos que proponen aplicar la programación dinámica sobre la ultrasonografía a diferentes escalas de tamaño, a fin de ubicar la posición global de la arteria a una escala mayor y refinar su ubicación en una escala más pequeña [Liang et al. 2000].

Las propuestas en este grupo tienen como desventaja la necesidad de entrenamien-

to del sistema, el cual también es necesario cada vez que se cambia el escáner ultrasónico empleado (dado que las características medidas que conforman la función de costo dependen de éste). La gran ventaja con que cuentan, una vez entrenado el sistema, consiste en que son completamente automáticas; lo cual limita la gran variabilidad en los resultados [Wendelhag et al. 1996, Furberg et al. 1994], debida a las habilidades y al cansancio del operador. Por otra parte, el ruido en la imagen también afecta notoriamente a las propiedades en que se basa la función de costo medidas en la ultrasonografía y, por tanto, a ésta en general.

### 2.3. Técnicas basadas en *serpientes*

Los contornos paramétricos activos [Williams y Shah 1992, Xu et al. 2001, Kass et al. 1988, Ronfard1994, Blake y Isard 2000, Cohen1991], también denominados *serpientes*, son otro tipo de metodología empleada en la segmentación arterial en una imagen de ultrasonido, y son una de las técnicas que más propuestas tiene por parte de los equipos de investigación en el área [Loizou et al. 2007, Molinari et al. 2010a, Gutierrez et al. 2002, Cheng et al. 2002, Delsanto et al. 2007, Molinari et al. 2008].

Debido a que el límite entre la íntima y el lumen arterial se puede distinguir bien en la imagen de ultrasonido, resulta factible adaptar un modelo lineal deformable a dicha frontera. La formulación de ese modelo lineal deformable, las serpientes, consiste en una combinación de energías internas y externas que constituyen una función de energía global. Las energías internas evitan que las serpientes se enrollen o curven excesivamente, y las externas dependen de características relevantes de la imagen como bordes, líneas, puntos, etc. Las serpientes se pueden pensar como un conjunto de vértices conectados por segmentos de línea que evolucionan bajo la acción de diferentes fuerzas; un proceso dinámico cuyo objetivo es minimizar la función de energía global, alcanzando el equilibrio entre las fuerzas involucradas.

La mayoría de los trabajos adoptan la formulación de las serpientes presentada por Williams y Shah en [Williams y Shah 1992], pero también se emplean otras [Lobregt y Viergever 1995, Cheng et al. 2002, Cohen1991, Lai y Chin 1995,

Xu y Prince 1997, Xu y Prince 1998]. El trabajo publicado por Loizou et al. en [Loizou et al. 2007] proporciona un resumen muy completo del desempeño de las serpientes en la segmentación arterial carotídea.

El uso de las serpientes es muy sensible al ruido en la imagen y conlleva la necesidad de afinar los parámetros de optimización de la función de energía global. Además, las serpientes resultantes dependen de los puntos elegidos inicialmente así como del número de puntos que las constituyan. Por último, los trabajos que emplean esta herramienta no son automáticos completamente.

## 2.4. Técnicas basadas en estadísticas locales

Otra propuesta para localizar de manera automática el lumen arterial en una ultrasonografía es el cálculo de estadísticas locales [Delsanto et al. 2007, Delsanto et al. 2005]. Los autores proponen agrupar, en un histograma bidimensional, el valor promedio y el valor de la desviación estándar locales a una ventana deslizante, de 10 por 10 píxeles, que recorra toda la imagen de ultrasonido. Bajo la suposición de que los píxeles del lumen arterial son negros idealmente, y que están rodeados por otros píxeles negros, las estadísticas locales a una ventana de dichos píxeles deberían tener un promedio y desviación estándar de sus valores de intensidad muy bajos. Por tanto, la detección de los píxeles en el área correspondiente al lumen arterial es posible automáticamente, estableciendo un umbral de aceptación/rechazo en los valores del promedio y la desviación estándar calculados para la ventana respectiva a cada píxel de la imagen de ultrasonido.

Como esta técnica es parte de una prueba IMT, a continuación se revisa el perfil de intensidad de los píxeles en la ultrasonografía, por columnas y de abajo hacia arriba; esto es, de mayor a menor profundidad de los tejidos según presenta el ultrasonido. El primer máximo local encontrado en esta revisión, indica la posición de la capa adventicia de la pared lejana de la arteria y, el siguiente máximo local, indica el de la pared cercana. Para que ambos puntos se tomen como válidos, deben estar separados por puntos correspondientes al lumen arterial anteriormente localizados.

A fin de mejorar el desempeño de la técnica anterior, varias propuestas introducen

un paso extra posterior a la ubicación de la capa adventicia de ambas paredes arteriales [Molinari et al. 2008, Delsanto et al. 2006]. Los puntos ubicados de esta capa en ambas paredes de la arteria, definen una región de interés (*ROI - Region Of Interest*) cuyos pixeles se agrupan en lumen, íntima-media o adventicia; empleando un clasificador de k-medias difuso. Los bordes entre el agrupamiento lumen e íntima-media se emplean como inicialización para serpientes que refinan la detección de los bordes del vaso arterial [Molinari et al. 2009].

## 2.5. Propuestas basadas en distribuciones de probabilidad

La detección del lumen de la arteria también se ha intentado modelando la intensidad de los pixeles y el ruido speckle que conforman la ultrasonografía, por medio de distribuciones de probabilidad. Teniendo señalada una ROI que incluya las capas íntima y media de las paredes arteriales, se formula una estrategia de segmentación basada en un modelo de mezcla de distribuciones de Nakagami -la cual modela de forma efectiva la señal de radiofrecuencia del ultrasonido [Shankar et al. 2003, Shankar2003a, Shankar2003b]- y optimización estocástica. El modelado de las señales de radiofrecuencia en la ROI se realiza como una mezcla de tres distribuciones de Nakagami, bajo la suposición de que el lumen corresponde a la distribución con media más pequeña, la IMT corresponde localmente a la mezcla, y que la adventicia corresponde localmente a la distribución con media más grande [Destrempes et al. 2009].

El modelo propuesto se calcula con el algoritmo de maximización de la esperanza (*EM*) [Dempster et al. 1977], y la segmentación se realiza con las distribuciones calculadas y un modelo estadístico genérico de una capa íntima-media sana, empleando una variante del algoritmo de exploración/selección.

La ventaja principal de esta propuesta es que se reportan buenos resultados, pero tiene las inconveniencias de requerir la disponibilidad de la señal de radiofrecuencia del ultrasonido; de que, debido a la suposición de que la adventicia corresponde a la distribución con media mayor, difícilmente es aplicable sobre una ecografía que presente una arteria con alguna patología; y de que requiere intervención manual (aunque mínima) de un experto, para su aplicación.

## 2.6. Segmentación basada en la transformada de Hough

La transformada de Hough permite la detección confiable de formas definidas matemáticamente, principalmente líneas y circunferencias, en imágenes con ruido [Hough1962]. Aprovechando las líneas dominantes que presenta la interfaz entre el lumen y las paredes arteriales en ultrasonografías longitudinales, se plantea delinear esta interfaz empleando dicha transformada [Golemati et al. 2005, Golemati et al. 2007, Golemati et al. 2004, Stoitsis et al. 2008]. Con relación a imágenes transversales, lo que se delinea es la circunferencia correspondiente a la misma interfaz entre el lumen y las paredes arteriales.

Aunque el procedimiento de segmentación basado en la transformada de Hough es confiable y veloz, la limitante del enfoque consiste en la necesidad de que el vaso arterial se presente en la imagen de ultrasonido en forma recta y horizontal. Cualquier otro tipo de morfología impedirá que la transformada reconozca las líneas dominantes correctas.

## 2.7. Propuestas con enfoques integrados

De manera reciente, se propone un enfoque integrado para la realización totalmente automatizada de la prueba IMT [Molinari et al. 2010a]. La técnica se conforma de un módulo para segmentar el vaso arterial y un procedimiento para la medición de la capa íntima-media a partir de la segmentación.

El primer módulo detecta los máximos locales en la intensidad de los píxeles en cada columna de la imagen de ultrasonido. Luego, se aplica un discriminante lineal a los máximos detectados, manteniendo solamente aquéllos que se ubican en las paredes de la arteria (*puntos semilla*). En forma posterior, se conectan los puntos semilla para formar segmentos de línea. A continuación, un procedimiento inteligente elimina segmentos de línea cortos o falsos y conecta aquéllos que están alineados y cercanos entre sí. Los segmentos de línea que aún sobreviven se analizan en pares, a fin de encontrar los que comprenden el lumen arterial.

Para refinar la localización del lumen y las capas arteriales, se analiza la imagen de ultrasonido por columnas, nuevamente. Con base en su intensidad, los píxeles en cada columna se agrupan en lumen, íntima-media o adventicia; empleando un clasificador de

k-medias difuso. Los puntos en la transición entre los grupos lumen e íntima-media se consideran los límites del lumen arterial.

## 2.8. **Discusión**

En este capítulo se han revisado varios enfoques y técnicas de segmentación del lumen arterial en imágenes de ultrasonido. Con relación a las técnicas semi-automáticas del estado del arte referidas en este análisis, la que presentó el mejor desempeño (según concluyen Molinari et al. en [Molinari et al. 2010c]) es la desarrollada por Destremes et al. en [Destremes et al. 2009], basada en distribuciones de probabilidad y con un promedio de error en la detección de la interfaz entre el lumen y la pared lejana arteriales igual a  $35.0 \mu\text{m} \pm 32.0 \mu\text{m}$ . De la misma manera, la técnica automática más exacta es la presentada por Molinari et al. en [Molinari et al. 2009], técnica basada en cálculo de estadísticas locales y serpientes, con un error promedio en la detección de la misma interfaz de  $21.0 \mu\text{m} \pm 13.0 \mu\text{m}$ . Desafortunadamente, en los trabajos revisados, sólo el presentado en [Molinari et al. 2008] indica el error promedio en la detección de la interfaz lumen-íntima de la pared arterial cercana, el cual fue de  $75.0 \mu\text{m} \pm 56.3 \mu\text{m}$ .

Se debe considerar que la comparación entre los enfoques de segmentación del lumen arterial analizados en este capítulo no es tan sólida como debiera. Esto es consecuencia del hecho de que el desempeño de cada propuesta se reporta con relación a una base de datos de ecografías adquirida o facilitada por/a cada equipo de investigación, lo que representa una comparación en circunstancias diferentes y, posiblemente, desiguales.

A continuación, el Capítulo 3 introduce la metodología propuesta en este trabajo de tesis para detección automática del lumen arterial en ultrasonografías de modo-B.



## Capítulo 3

# Metodología

En este capítulo se presenta la metodología propuesta para detección automática del lumen arterial en ultrasonografías. El proceso de detección automática se realiza sobre un conjunto de sonogramas facilitado por el Centro Unión. Un ejemplo de este conjunto se puede apreciar en la Figura 3.1, en el cual se señala también, el vaso y el lumen de la arteria.

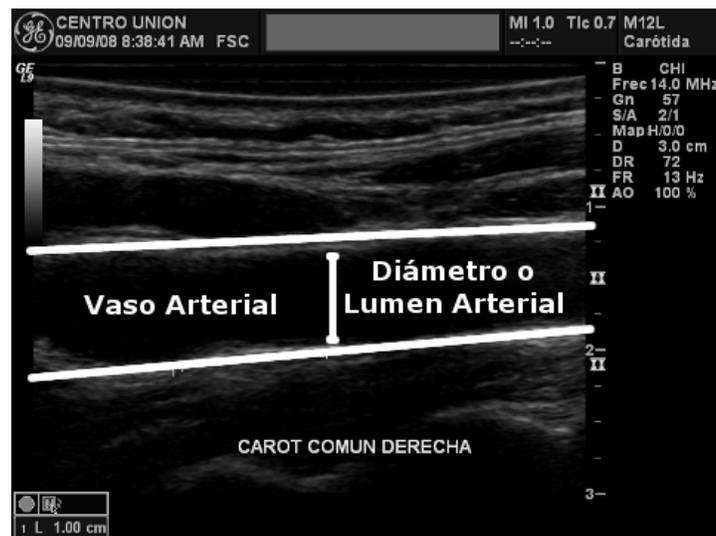


Figura 3.1: Imagen de ultrasonido de una arteria.

Aunada a las dificultades existentes para realizar la segmentación del lumen arterial en imágenes de ultrasonido especificadas en la Sección 1.3: el ruido, el equipamiento

utilizado, la apreciación referida al observador o a los observadores y la morfología de la arteria; la ultrasonografía capta las capas musculares que rodean a la arteria, tejidos que también se pueden llegar a observar con el mismo patrón señalado para el vaso arterial; dando pie a posibilidades de confusión y a dificultar, aún más, el proceso de detección del lumen arterial.

A continuación presentamos los pasos que conforman el proceso que proponemos para detectar de forma automática el lumen arterial carotídeo o humeral en imágenes de ultrasonido.

### 3.1. Recorte automático de la imagen de ultrasonido

Las imágenes de ultrasonido en modo-B incluyen un área en la cual se indican tanto los datos del paciente como los del dispositivo con el que se adquirió la imagen. Esta información genera un recuadro que circunda la imagen de los tejidos del paciente, recuadro que se puede recortar con la finalidad de extraer la parte de la imagen que contiene los tejidos de interés. Si el formato de archivo de la imagen es *DICOM*, el campo *SequenceOfUltrasoundRegions* contiene cuatro subcampos que señalan la ubicación de la representación del ultrasonido, es decir, los tejidos del paciente. Así pues, empleando los subcampos *RegionLocation* (con los sufijos  $x_{min}$ ,  $x_{max}$ ,  $y_{min}$  y  $y_{max}$ ) se puede realizar el recorte sugerido. En las imágenes a nuestra disposición, los campos de localización referidos en la cabecera DICOM no existen. Mediante cálculo de histogramas se realiza automáticamente el proceso de recorte. Se mantiene únicamente el área de interés, es decir, la zona de tejidos del paciente.

Para realizar el proceso de recorte, se define una imagen  $I'$  como un conjunto de pixeles  $I'(p_i)$ , el cual representa el tono de gris en un punto, de coordenadas  $p_i = [x_i, y_i]^T$ , sobre la rejilla  $R$  de la imagen de tamaño  $N'_{Cols} \times N'_{Filas}$ . Además, se calculan 4 coordenadas de la imagen  $I'$  (las filas  $f_a$  y  $f_b$  y las columnas  $c_a$  y  $c_b$ ) que indiquen el área de interés deseada. Para esto, se calcula un vector  $h = [h_1, h_2, h_3, \dots, h_{N'_{Filas}}]$ , donde  $h_i$  es el conteo

por filas (de  $I'$ ) de los pixeles con tono de gris mayor que 0, mismo que se calcula como:

$$h_i = \sum_{j=1}^{N_{Cols}} \delta(I'(i, j)) \quad (3.1)$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

De la misma manera, se calcula un vector  $v = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_{N'_{Cols}}]$ , donde  $v_j$  es el conteo por columnas (de  $I'$ ) de los pixeles con tono de gris mayor que 0, mismo que se calcula como:

$$v_j = \sum_{i=1}^{N'_{Filas}} \delta(I'(i, j)) \quad (3.2)$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Los histogramas de los valores de los elementos en el vector  $h$  y en el vector  $v$ , para la imagen en la Figura 3.1, se muestran en la parte superior izquierda e inferior derecha, respectivamente, de la Figura 3.2.

La coordenada  $f_a$  se localiza revisando el vector  $h$  a partir de su primer elemento y en orden consecutivo, a fin de localizar el primero de los elementos cuyo valor sea 0. Este elemento inicia un grupo de elementos cuyo valor también es 0 y que, en la elipse de acercamiento en la parte inferior izquierda de la Figura 3.2, se indica como *Zona de "ceros"*.  $f_a$  es el índice en el vector  $h$  correspondiente al elemento que sigue a la zona de ceros, cuyo valor es mayor que 0. Por otra parte, la coordenada  $f_b$  es el índice en el vector  $h$  correspondiente al primero de los elementos, revisando los elementos de este vector del último al primero, cuyo valor difiera del valor del elemento final del vector.

Para determinar  $c_a$  y  $c_b$ , se calcula primero el valor promedio de los elementos pertenecientes al vector  $v$  (promedio indicado con la línea horizontal de guiones, etiquetada con la leyenda *Media*, que une a los puntos  $c_a$  y  $c_b$  en la Figura 3.2).  $c_a$  es el índice en el vector  $v$ , revisando a partir de su primer elemento y en orden consecutivo ascendente, correspondiente al primero de sus elementos cuyo valor sea igual o mayor al valor promedio calculado.  $c_b$  también es el índice en el vector  $v$  correspondiente al primero de los elementos

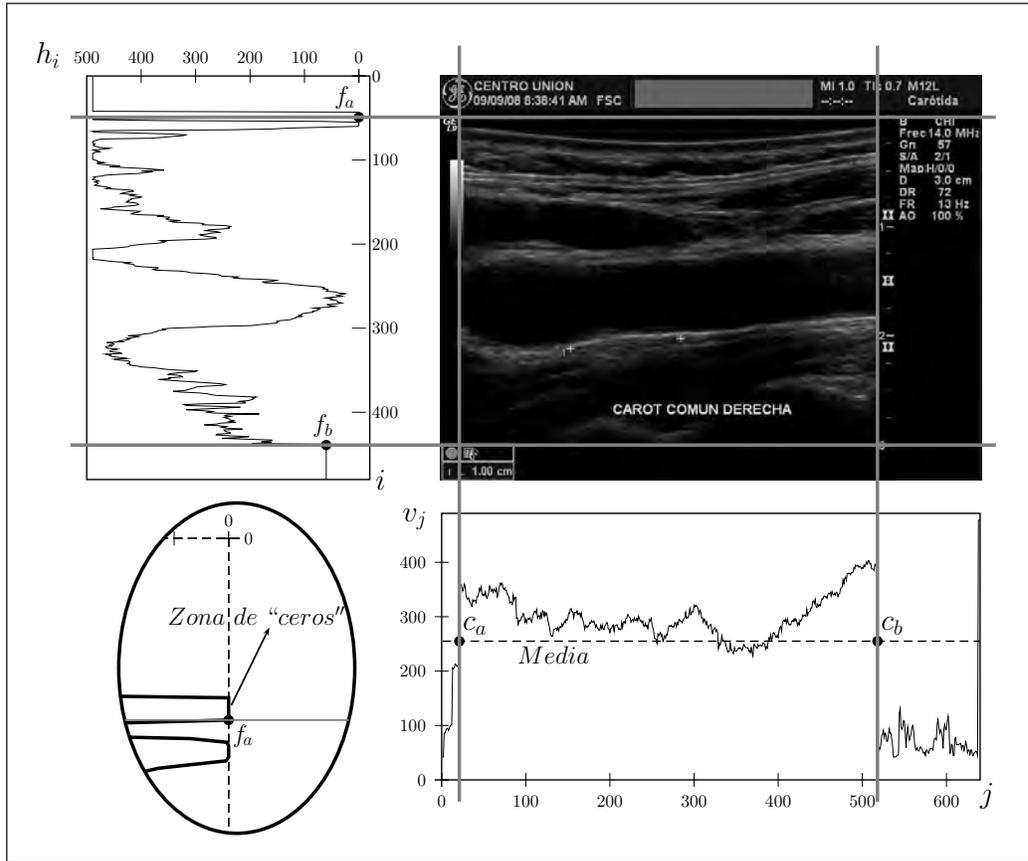


Figura 3.2: Recorte automático de una ecografía arterial, basado en histogramas.

cuyo valor sea igual o mayor al valor promedio calculado, pero revisando consecutivamente el vector  $v$  de su último a su primer elemento. Así pues, obtenidas las cuatro referencias de la imagen  $I'$ , la zona de interés para la detección del lumen arterial se encuentra delimitada con las cuatro líneas rectas, en la Figura 3.2, que parten de los puntos indicados como  $f_a$ ,  $f_b$ ,  $c_a$  y  $c_b$ .

La Figura 3.3 presenta la imagen resultante del proceso de recorte automático de la imagen en la Figura 3.1. A esta imagen se hará referencia como la imagen original  $I$ , la cual es un conjunto de píxeles  $I(p_i)$ , el cual representa el tono de gris en un punto, de coordenadas  $p_i = [x_i, y_i]^T$ , sobre la rejilla  $R$  de la imagen de tamaño  $N_{Cols} \times N_{Filas}$ .



Figura 3.3: Recorte automático de una ecografía arterial.

## 3.2. Detección de bordes y opciones de lumen arterial

La técnica que se expone, trabaja bajo la suposición de que el lumen arterial se presenta en la ultrasonografía como una zona oscura flanqueada arriba y abajo por áreas mucho más claras. En virtud de esta suposición, para el segundo paso del proceso proponemos detectar los bordes de la imagen  $I$ , utilizando el algoritmo de detección de bordes de Canny [Canny1986].

### 3.2.1. Algoritmo de detección de bordes de Canny

En 1986, John F. Canny empleó el cálculo de variaciones para descubrir el algoritmo óptimo de detección de bordes. La función óptima en este algoritmo es descrita por la suma de cuatro términos exponenciales, pero dada su complejidad de cálculo se pueden aproximar con la primera derivada de una gaussiana. El filtro gaussiano transforma la imagen original para robustecer el algoritmo contra el ruido presente en una imagen sin procesar. El resultado es una imagen ligeramente borrosa respecto a la versión original, pero robusta contra el ruido hasta cierto grado.

Después, el algoritmo aprovecha el hecho de que el gradiente de una imagen indica

la dirección en la cual varía más rápidamente el contraste entre los tonos de gris de los píxeles adyacentes en ésta. Además, indica la magnitud de dicha variación. Si el objetivo del algoritmo es detectar bordes, es precisamente en ellos en los que el contraste varía de forma más notoria, por lo cual, el gradiente sirve como herramienta para detectarlos.

Para calcular la magnitud y la dirección del vector gradiente correspondiente a cada píxel de una imagen, se calcula la primera derivada de la imagen en la dirección horizontal ( $G_x$ ). El cálculo se realiza empleando algún operador de detección de bordes, por ejemplo Roberts, Prewitt o Sobel. Después se calcula la primera derivada en la dirección vertical ( $G_y$ ) y ya se pueden determinar la magnitud del gradiente ( $M_G$ ) y el ángulo de su dirección ( $\theta$ ), con:

$$M_G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2} \quad (3.3)$$

$$\theta = \arctan \frac{G_y}{G_x} \quad (3.4)$$

La dirección del gradiente se redondea a una de cuatro direcciones posibles: vertical, horizontal y las dos diagonales (por ejemplo 0, 45, 90 y 135 grados sexagesimales).

En cada píxel de la imagen un filtro de  $3 \times 3$  píxeles elimina el tono de gris del píxel central (le asigna un valor de 0) si la magnitud del gradiente en éste, no supera a la magnitud de sus dos píxeles vecinos en la dirección del gradiente. Lo que este paso realiza es adelgazar los bordes de la imagen borrosa hasta dejarlos del ancho de un solo píxel.

Finalmente, el algoritmo de Canny realiza un proceso de binarización de la imagen con un proceso histerético, aplicando dos umbrales. Bajo la suposición de que los bordes importantes trazan líneas suaves en la imagen, primero se filtra la imagen con un umbral alto. Este filtrado indica, con una gran probabilidad, qué píxeles pertenecen a bordes genuinos. Posteriormente, el proceso utiliza la información de la dirección del gradiente para, iniciando con los píxeles ya marcados (la histéresis consiste en recordar el estado anterior del proceso), rastrear más bordes de la imagen. Mientras se rastrea uno de estos bordes, se aplica un segundo proceso de binarización, pero ahora aplicando un umbral bajo; lo que permite seguir secciones del borde tenues o apenas visibles.

Cuando el algoritmo completa su ejecución se tiene una imagen binaria, en la cual, cada píxel está marcado como un píxel borde (blanco) o como un píxel que no es borde

(negro).

Los bordes detectados por el algoritmo de Canny se representan como el conjunto  $B$ , que contiene  $N_B$  puntos de coordenadas  $b_i = [x_i, y_i]^T$  tales que:

$$B = \{b_i \mid g(b_i) = 1, \forall b_i \in R\} \quad (3.5)$$

donde  $g$  es una imagen binaria del mismo tamaño que  $I$ , sobre la rejilla  $R$  de la imagen de tamaño  $N_{Cols} \times N_{Filas}$ , con la información de los bordes detectados; la cual se define en (3.6).

$$g(b_i) = g(x_i, y_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } b_i \text{ es un borde,} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases} \quad (3.6)$$

En la Figura 3.4 se muestra la imagen binaria  $g$ , resultado de aplicar el algoritmo de Canny a la imagen de la Figura 3.3.

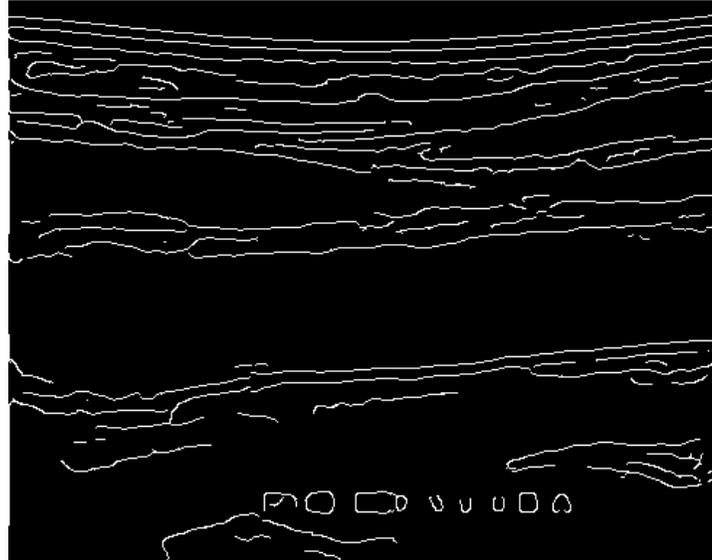


Figura 3.4: Bordes detectados resultado de aplicar el algoritmo de Canny sobre la imagen de la Figura 3.3.

### 3.2.2. Análisis de bordes

El paso siguiente del proceso consiste en analizar una columna  $c$  de la imagen  $g$ , la cual luce como un vector de 0's y 1's, por ejemplo:

$$g_c = [0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots]^T \quad (3.7)$$

La representación de estos bordes se realiza almacenando sus coordenadas en un arreglo ordenado. Para la columna de bordes en (3.7), su representación está dada por (3.8).

$$\hat{B}_c = [[c, 3]^T, [c, 5]^T, [c, 9]^T, [c, 13]^T, [c, 16]^T, \dots] \quad (3.8)$$

$$\hat{B}_c = [\hat{b}_k, \hat{b}_{k+1}, \hat{b}_{k+2}, \dots] \quad (3.9)$$

y la representación ordenada de todos los bordes de la imagen  $I$ , equivalente al conjunto  $B$  dado por (3.5), es (3.10).

$$\begin{aligned} \hat{B} &= \{\hat{B}_1, \hat{B}_2, \dots, \hat{B}_c, \dots, \hat{B}_{N_{Cols}}\} \\ \hat{B} &= \{\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \dots, \hat{B}_2, \dots, \hat{B}_c, \dots, \hat{B}_{N_{Cols}}\} \\ \hat{B} &= \{\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \dots, \hat{b}_j, \hat{b}_{j+1}, \hat{b}_{j+2}, \dots, \hat{B}_c, \dots, \hat{B}_{N_{Cols}}\} \\ \hat{B} &= \{\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \dots, \hat{b}_j, \hat{b}_{j+1}, \hat{b}_{j+2}, \dots, \hat{b}_k, \hat{b}_{k+1}, \hat{b}_{k+2}, \dots, \hat{B}_{N_{Cols}}\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Con esto se tienen varios pares de puntos  $\langle \hat{b}_i, \hat{b}_{i+1} \rangle$  en cada columna en la imagen de bordes, candidatos a ser las fronteras del lumen arterial.

### 3.2.3. Reducción del universo de búsqueda del lumen

Para disminuir el número de opciones factibles de ser seleccionadas como el lumen arterial correcto, encontradas hasta el momento, se descartan las parejas de puntos borde consecutivos cuyas distancias de separación sean inferiores a un umbral preestablecido  $A_{Min}$ .

Para determinar el umbral  $A_{Min}$  se observó que en poco más del 99% de las imágenes con que se cuenta de la arteria humeral (no se consideran las imágenes de la arteria carótida puesto que presenta un ancho mayor a la humeral), el diámetro del lumen medido por el médico radiólogo es mayor o igual a 20 pixeles, por lo que se eligió este valor como el del umbral buscado ( $A_{Min} = 20$ ).

Entonces, con base en el conjunto ordenado de puntos  $\hat{B} \equiv B$ , se define el conjunto de puntos de opciones factibles de ser seleccionadas como el lumen arterial verdadero,  $B_L$ , de la manera siguiente:

$$B_L = \{\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_i, \hat{b}_{i+1} \dots \mid (\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i) \geq A_{Min}, \hat{x}_i = \hat{x}_{i+1}\} \quad (3.11)$$

El significado de (3.11) es que no se aceptan bordes consecutivos con una separación inferior a  $A_{Min} = 20$  pixeles. El conjunto  $B_L$  es un subconjunto del conjunto de bordes  $B$ , lo cual permite reducir el universo de búsqueda del lumen.

El conjunto  $V$  de puntos medios de los posibles bordes del lumen se define como:

$$V = \{v_i \mid v_i = [\hat{x}_i, \frac{\hat{y}_i + \hat{y}_{i+1}}{2}]^T, \hat{x}_i = \hat{x}_{i+1}, \forall \hat{b}_i \in B_L\} \quad (3.12)$$

donde  $\hat{b}_i = [\hat{x}_i, \hat{y}_i]^T$  y  $\hat{b}_{i+1} = [\hat{x}_{i+1}, \hat{y}_{i+1}]^T$ . Así, para un punto  $v_i$  existe un par asociado de puntos  $\langle \hat{b}_i, \hat{b}_{i+1} \rangle$  tal que las coordenadas verticales de dichos puntos siguen la relación  $\hat{b}_i < v_i < \hat{b}_{i+1}$ , y los tres estarán en una misma columna de la imagen  $g$ . Esta información será importante para calcular el criterio de oscuridad de la Sección 3.4.

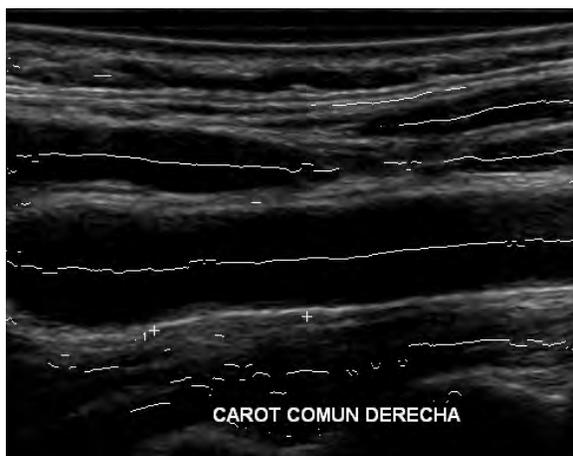
La Figura 3.5 muestra los puntos del conjunto  $B_L$  y los puntos en  $V$ , sobreimpuestos en la imagen original de la Figura 3.3. Los puntos del conjunto  $V$  son las opciones factibles de ser seleccionadas como el centro del lumen arterial real. Para los puntos en  $V$  se hará un proceso de segmentación basado en árbol de expansión mínima que se explica en la sección siguiente.

### 3.3. Segmentación basada en árbol de expansión mínima

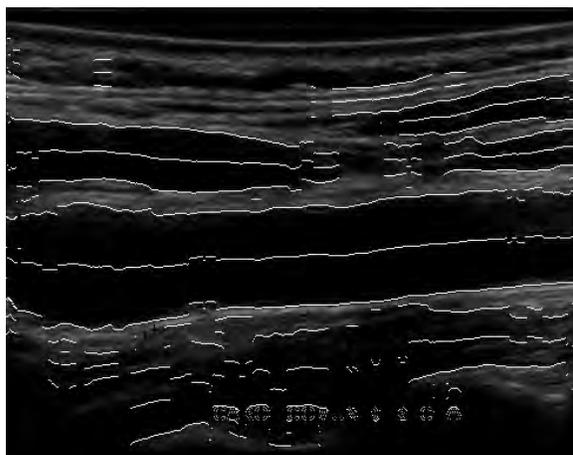
El conjunto de puntos  $V$ , las opciones factibles de ser el lumen arterial verdadero, requieren de un proceso mediante el cual los puntos se puedan agrupar en segmentos de línea o trayectorias. Las trayectorias permitirán representar las estructuras anatómicas presentes en la ecografía y, más adelante, separar aquella que corresponda al lumen del vaso de la arteria. El proceso de agrupamiento se basa en la construcción de un grafo.



(a) *Puntos del conjunto  $B_L$*



(b) *Puntos del conjunto  $V$*



(c) *Puntos de los conjuntos  $B_L$  y  $V$*

Figura 3.5: Puntos de los conjuntos  $B_L$  y  $V$ , sobreimpuestos en la imagen de la Figura 3.3.

### 3.3.1. Construcción del grafo

En la etapa siguiente del algoritmo se construye un grafo no dirigido  $G = \{V, A\}$ , a partir del conjunto de puntos  $V$  definido en (3.12). El conjunto  $V$  representa los nodos y el conjunto  $A$  las aristas del grafo. Inicialmente se supone que todos los nodos están conectados, por lo cual, el número de aristas corresponde a las  $N_A = [|V| \times (|V| - 1)]/2$  posibles conexiones entre los  $|V|$  nodos (no se conecta un nodo consigo mismo). El *peso* de cada arista  $A_{ij}$ , será la distancia euclidiana en la ecuación (3.13) entre los puntos del conjunto  $V$ , que ésta conecta.

$$d(v_i, v_j) = d([x_i, y_i]^T, [x_j, y_j]^T) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (3.13)$$

### 3.3.2. Segmentación y clasificación del grafo

A continuación se hace la segmentación y clasificación del grafo utilizando el peso  $d(v_i, v_j)$ , avalando los cortes mediante la prueba de hipótesis bayesiana expuesta en el Capítulo 4. Para lograr este fin, se calcula el *árbol de expansión mínima* del grafo  $G$ , mediante el algoritmo de Kruskal [Kruskal1956]. Sedgewick y Wayne [Sedgewick y Wayne 2011] y Cormen et al. [Cormen et al. 2009] señalan a este algoritmo como uno de los mejores para realizar tal procedimiento, siendo su complejidad computacional de  $O(N_A \log N_A)$ .

El árbol de expansión mínima  $G^+ = \{V, A^+\}$  es un subgrafo de  $G$ , en el cual el conjunto de nodos se mantiene, pero el número de aristas  $|A^+|$  se reduce a las  $|V| - 1$  seleccionadas por el algoritmo de Kruskal. Cabe mencionar que este algoritmo genera una ruta entre un nodo inicial y un nodo final (conectando a todos los nodos del grafo), de tal suerte que la longitud de la ruta tiene una distancia mínima. En la Figura 3.6 se presenta el árbol de expansión mínima del grafo.

Dado el árbol de expansión mínima  $G^+$ , todas las trayectorias que pueden ser el centro del lumen arterial estarán conectadas, tal como se muestra en la Figura 3.6. Con la finalidad de segmentar la trayectoria que es el centro del lumen verdadero, se define en (3.14) el conjunto  $S$ , de  $N_G$  subgrafos conectados que resultan de segmentar el árbol de expansión mínima  $G^+$ , al realizar cortes en las aristas cuyas distancias  $d(v_i, v_j) > p_{Max}$  y que cumplen la hipótesis  $H_1$  (presentada en el Capítulo 4) para los nodos correspondientes a los

subgrafos  $G_i^+$  y  $G_j^+$ , que la arista  $A_{ij}$  conecta. El umbral  $p_{Max}$  se establece en 10 píxeles con base en los experimentos realizados, valorando separar las trayectorias pero sin generar una sobresegmentación del árbol de expansión mínima. En caso de que la hipótesis que se cumpla sea  $H_0$  (expuesta, también, en el mismo Capítulo 4), la arista  $A_{ij}$  se mantiene intacta, aún y cuando la distancia supere el umbral de corte. Los cortes se efectúan empleando un recorrido en profundidad [Sedgewick y Wayne 2011] sobre  $G^+$ .

$$S = \{G_1^+, G_2^+, \dots, G_{N_G}^+\} \quad (3.14)$$

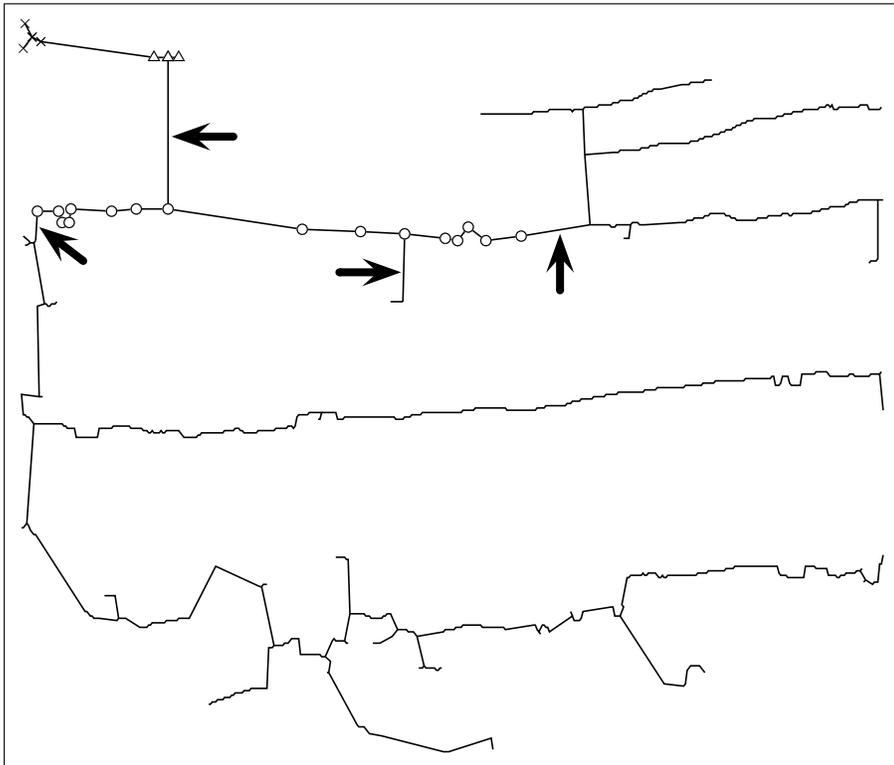


Figura 3.6: Árbol de expansión mínima del grafo creado con los puntos que indican opciones factibles de ser el centro del lumen real de la arteria. Las flechas indican algunos ejemplos de los cortes a realizar en el árbol para segmentar estas opciones.

La Figura 3.6 presenta el árbol de expansión mínima del grafo, creado con los puntos que indican opciones factibles de ser seleccionadas como el centro del lumen real de la arteria. En esta figura, los nodos marcados con los símbolos “x”, “Δ” y “o”; ejemplifi-

can tres de las posibilidades de ser el centro del lumen arterial que se deben separar. Las flechas en esta misma imagen indican los cortes requeridos en el árbol, a fin de segmentar el subconjunto de nodos marcados con el símbolo “o”.

### 3.3.3. Algoritmo

El Algoritmo 1 que se presenta a continuación, realiza las inicializaciones necesarias para que el Algoritmo 2 realice una búsqueda en profundidad sobre el árbol de expansión mínima  $G^+$ . En esta búsqueda se marca cada nodo por proximidad. La diferencia existente con relación a una búsqueda en profundidad, como generalmente se conoce, es que cuando la arista  $A_{ij}$  que conecta a dos nodos  $v_i$  y  $v_j$  del árbol tiene un peso  $> p_{Max}$ , se cambia el subgrafo al que pertenece el nodo, esto es, el nodo  $v_i$  pertenecerá a un subgrafo y  $v_j$  a otro (líneas 5–9 del Algoritmo 2).

---

**Algoritmo 1** RecorrerÁrbol: Recorre el árbol de expansión mínima  $G^+$ , para determinar los subgrafos que corresponden a posibles opciones de lumen arterial.

---

```

RECORRERÁRBOL( $G^+$ )
1   $N_G \leftarrow 0$  // Número total de subgrafos segmentados
2  para cada nodo en  $G^+$ 
3     $nodo.estado \leftarrow$  NOVISITADO
4     $nodo.marca \leftarrow$  SINMARCA
5
6    // Se inicia con el (primer) nodo 0 y la marca 0.
7  MARCARSUBGRAFOS(0,0) // Algoritmo 2

```

---

### 3.3.4. Eliminación de trayectorias cortas

La etapa siguiente de la metodología radica en eliminar las trayectorias que corresponden a opciones muy cortas de lumen en la imagen, debidas a ruido o a capas de tejido muscular. Para esto, se eliminan los subgrafos  $G_i^+$  que presentan un número de nodos total inferior a un umbral  $N_{Min}$ , lo cual define el conjunto de subgrafos  $S^+$  de la manera que a

---

**Algoritmo 2** MarcarSubgrafos: Marca los subgrafos del árbol de expansión mínima que corresponden a posibles opciones de lumen arterial.

---

```

MARCARSUBGRAFOS(nodoActual, marca)
1  nodoActual.estado ← VISITADO
2  nodoActual.marca ← marca
3  para cada nodoVecino en nodoActual
4    si (nodoVecino.estado = NOVISITADO)
5      entonces si DISTANCIAEUCLIDIANA(nodoActual, nodoVecino) <  $p_{Max}$ )
6        entonces MARCARSUBGRAFOS(nodoVecino, marca)
7        sino      // “Segmentar” esta parte del árbol de expansión mínima
8                   $N_G \leftarrow N_G + 1$  // Incrementar el total de subgrafos
9                  MARCARSUBGRAFOS(nodoVecino,  $N_G$ )

```

---

continuación se indica:

$$S^+ = S - \{G_i^+ = \{V_i, A_i\} \mid |V_i| < N_{Min}\} \quad (3.15)$$

$$i \in \{1, 2, \dots, N_G\}$$

siendo  $|V_i|$  la cardinalidad del conjunto  $V_i$ , es decir, el número de nodos en  $G_i^+$ .

El umbral  $N_{Min}$  se establece de manera experimental en 100 nodos, considerando que el lumen verdadero de la arteria tiene una proporción considerable con relación al ancho de la ecografía.

En la Figura 3.7 se muestra la imagen de ultrasonido original (Figura 3.3) con las trayectorias sobrepuestas correspondientes a los puntos en los subgrafos  $G_i^+ \in S^+$ , esto es, las trayectorias detectadas con posibilidad de ser el centro del lumen del vaso arterial.

A pesar de que se han disminuido las opciones que se pueden seleccionar como el centro del lumen arterial, todavía se tiene que discriminar entre varias posibilidades. Una manera de realizar esto, se explica en la sección siguiente.



Figura 3.7: Trayectorias detectadas con posibilidad de ser el centro del lumen del vaso arterial.

### 3.4. Criterios de selección del lumen arterial

El paso siguiente del algoritmo consiste en discernir el lumen real de entre las opciones con las que aún se cuenta. Esto se realiza mediante el cálculo de tres criterios: el *criterio de longitud*, el *criterio de varianza mínima de error* y el *criterio de oscuridad*.

El criterio de longitud consiste en calcular el número total de nodos que pertenecen a cada subgrafo  $G_i^+ = \{V_i, A_i\} \in S^+$ , normalizado al rango  $[0, 1]$ , de acuerdo con la ecuación siguiente:

$$l_i = \frac{|V_i^+|}{\max(|V_1^+|, |V_2^+|, \dots, |V_{|S^+|}^+|)}, i \in \{1, 2, \dots, |S^+|\} \quad (3.16)$$

siendo  $|S^+|$  la cardinalidad del conjunto  $S^+$ . Note que  $l_k = 1.0$  representa que la  $k$ -ésima trayectoria es la más larga.

Ahora bien, se determinará el lumen arterial correcto de la ecografía empleando el criterio de varianza mínima de error expuesto en el Capítulo 5, si al momento de realizar el cálculo del criterio de longitud  $l_i$  para cada subgrafo  $G_i^+$ , se tiene que más de un  $l_i > u_{cl}$ . El significado y valor del umbral  $u_{cl}$  se detalla en el Capítulo 5. En caso contrario, el criterio de selección del lumen de la arteria estará basado en la suma de los criterios de longitud y

de obscuridad.

Para el criterio de obscuridad se calcula primero el valor promedio  $\mu_j$  de los tonos de gris del área correspondiente a cada subgrafo  $G_j^+ \in S^+$ . Para ello, se recorre el subgrafo en cada uno de sus puntos  $v_i$ , y se barre por columnas en los intervalos  $[\hat{b}_i, \hat{b}_{i+1}]$  (de acuerdo con (3.12)) de la imagen original  $I$ , tal y como se formula a continuación:

$$\mu_j = \frac{1}{|G_j^+|} \sum_{\forall v_i \in G_j^+} \left[ \frac{1}{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i + 1} \sum_{\forall p \in [\hat{b}_i, \hat{b}_{i+1}]} I(p) \right] \quad (3.17)$$

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, |S^+|\}$$

siendo  $|S_j^+|$  el número de nodos en el subgrafo  $S_j^+$ .

El valor promedio más bajo indica el subgrafo que representa el lumen arterial, bajo la suposición en la que trabaja la metodología de que el lumen arterial es una región oscura.

Calculado el promedio, el criterio de obscuridad se expresa del modo siguiente:

$$o_i = 1 - \frac{\mu_i}{\max(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{|S^+|})} \quad (3.18)$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, |S^+|\}$$

Note que el subgrafo con el promedio más alto tendrá un valor  $o_i = 0$  y, el subgrafo con el menor de los promedios, tendrá el valor que esté más lejano de 0.

El criterio de obscuridad, al igual que el de longitud, se normaliza al intervalo  $[0, 1]$  a fin de poderlos combinar y estar en posibilidad de determinar el subgrafo más largo con el área correspondiente más oscura. Es decir, el subgrafo correspondiente al centro del lumen verdadero de la arteria es aquél que tenga el valor máximo de la suma de ambos criterios:

$$i^* = \max_i (l_i + o_i) \quad (3.19)$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, |S^+|\}$$

La Figura 3.8 presenta la Figura 3.3 con la sobreposición de los bordes correspondientes al lumen arterial detectado, con base en los criterios de selección expuestos.

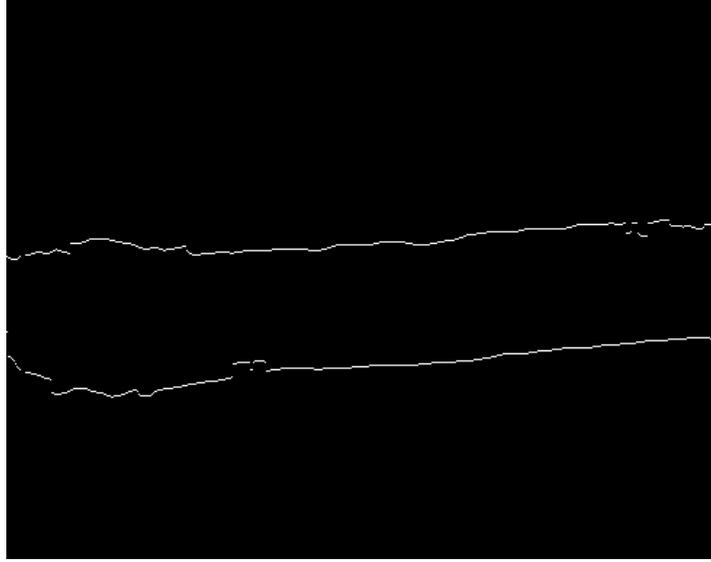


Figura 3.8: Bordes del lumen arterial detectado con los criterios de selección expuestos.

Con la finalidad de mejorar la detección resultante del proceso presentado, se propone adicionar el ajuste de una función polinomial a los conjuntos de puntos bordes  $\langle \hat{b}_{i^*}, \hat{b}_{i^*+1} \rangle$ , relacionados con los puntos  $v_{i^*} \in G_{i^*}^+$ . Este ajuste es el tema de la sección que a continuación se presenta.

### 3.5. Ajuste polinomial robusto

Para ajustar un polinomio de grado  $m$  a los puntos  $[\hat{x}_i, \hat{y}_i]^T$  correspondientes a cada uno de los bordes  $\hat{b}_{i^*}$  y  $\hat{b}_{i^*+1}$  del lumen segmentado de la arteria, tenemos que calcular una función  $f(\hat{x}; a)$  dada por la ecuación:

$$f(\hat{x}_i; a) = a_0 + a_1\hat{x}_i + a_2\hat{x}_i^2 + a_3\hat{x}_i^3 + \cdots + a_m\hat{x}_i^m \quad (3.20)$$

donde los valores  $a_i$ , son los parámetros que definen el modelo de la función polinomial a adecuar a todos los puntos. Una manera de realizar lo anterior es utilizando el *método de mínimos cuadrados* (apéndice A).

Cabe señalar que primero se realiza el ajuste polinomial al conjunto de puntos bordes  $\hat{b}_{i^*}$ , los cuales corresponden al borde  $f_C(\hat{x})$  entre el lumen y la pared cercana de

la arteria; y, posteriormente, se repite el proceso de ajuste polinomial para el conjunto de puntos bordes  $\hat{b}_{i^*+1}$ , que corresponden al borde  $f_L(\hat{x})$  entre el lumen y la pared lejana de la arteria.

Desafortunadamente, el método de mínimos cuadrados es muy sensible a los datos atípicos, es decir, al ruido speckle que genera bordes espurios en la ultrasonografía para nuestro caso. Por esta razón y con la finalidad de robustecer el ajuste, dirigimos la estimación de los parámetros del modelo polinomial (los valores del vector  $a$ ) por medio del algoritmo *RANdom SAmple Consensus (RANSAC)* [Fischler y Bolles 1981].

El método RANSAC realiza el ajuste polinomial con sólo  $m + 1$  puntos diferentes (para garantizar la independencia lineal), elegidos al azar de entre los  $n$  puntos. Aquí,  $m$  sigue siendo el grado del polinomio a ajustar y  $m + 1 \leq n$ . Además, para los  $n - (m + 1)$  puntos restantes, se verifica cuántos de ellos cumplen con que:

$$|f(\hat{x}_i, a) - \hat{y}_i| < \xi \quad (3.21)$$

donde  $\xi$  es un umbral preestablecido de error, entre la solución de ajuste y el dato real. Los puntos que cumplen con (3.21) se denominan *conjunto de consenso*.

En el algoritmo RANSAC el modelo seleccionado para realizar el ajuste final se elegirá como aquel modelo que cuente con un conjunto de consenso mayor. Esto es, después de realizar un número predeterminado de repeticiones del proceso de elegir aleatoriamente  $m + 1$  puntos, realizar el ajuste polinomial de grado  $m$  y calcular el conjunto de consenso respectivo, empleando el método de mínimos cuadrados y (3.21). Se hace notar que el ajuste polinomial final que señalamos, se determina con la solución de mínimos cuadrados empleando *todos* los puntos pertenecientes al mejor conjunto de consenso.

La Figura 3.9 muestra la imagen con las funciones polinomiales ajustadas mediante el método de mínimos cuadrados y el algoritmo RANSAC, sobre los puntos de los bordes del lumen arterial segmentado a partir de la imagen de la Figura 3.3.

### 3.6. Discusión

A pesar de que la metodología presentada en este capítulo ya logra resultados que superan a las técnicas mejor desempeñadas del estado del arte, presenta algunas deficiencias.

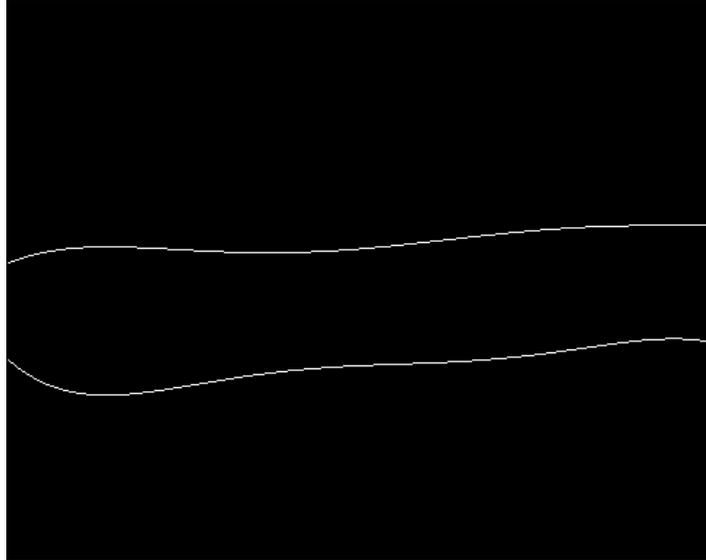


Figura 3.9: Ajuste polinomial robusto sobre los puntos de los bordes del lumen arterial segmentado.

Por ejemplo, el algoritmo enfrenta dificultades en reconocer un lumen arterial que tiene discontinuidades o cortes notorios en sus bordes, debidos a conos de sombra en la ecografía por placas de ateroma, calcificaciones u otras características ecogénicas de los tejidos del paciente. Por lo tanto y con la finalidad de subsanar algunas de estas deficiencias, se agregó la validación de la segmentación del árbol de expansión mínima mediante una prueba de hipótesis bayesiana (Capítulo 4), no sólo con base en un criterio de distancia entre nodos conectados. Así también, se añadió un tercer criterio de discriminación del lumen arterial verdadero, el criterio de varianza mínima (Capítulo 5).

Los resultados de la metodología con las adiciones señaladas mejoran aún más los resultados de desempeño obtenidos, sin agregar complejidad computacional de manera significativa al procedimiento.

El capítulo siguiente detalla la prueba de hipótesis bayesiana con la cual se avala la segmentación del árbol de expansión mínima expuesta en la Subsección 3.3.2.



## Capítulo 4

# Prueba de hipótesis bayesiana

La metodología para detección automática del lumen arterial en ultrasonografías, presentada en el capítulo anterior, realiza la segmentación del árbol de expansión mínima del grafo, detallada en la Subsección 3.3.2, mediante un criterio basado en distancia entre nodos conectados. Esta forma de segmentar el árbol puede generar una sobresegmentación del mismo, la cual llega a fragmentar en varias trayectorias la trayectoria correspondiente al lumen arterial verdadero, cuando éste tiene discontinuidades o cortes notorios en sus bordes.

Para ejemplificar el punto anterior, en la Figura 4.1 se indican las trayectorias con posibilidad de ser seleccionadas como el lumen verdadero de la arteria, en una ecografía de prueba. La sobresegmentación generada divide el lumen verdadero de la arteria en las trayectorias numeradas como 2 y 3 en la figura. La trayectoria del lumen se divide dado el criterio de distancia que se aplica. Nótese que ambas trayectorias pueden ser representadas como un solo segmento (una sola trayectoria).

Posteriormente, se elige equivocadamente la trayectoria 1 como la que representa al lumen real del vaso de la arteria, con base en el criterio de longitud de la trayectoria empleado por la metodología.

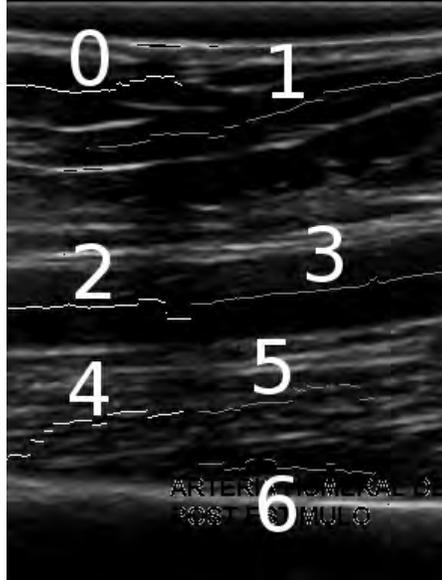


Figura 4.1: Trayectorias factibles de ser el lumen arterial en una ecografía de prueba.

#### 4.1. Criterio de decisión probabilista

Con la finalidad de subsanar el problema señalado, se valida la segmentación por distancia entre nodos mediante una prueba de hipótesis bayesiana [Sivia y Skilling 2006]. La hipótesis a probar consiste en discernir si una arista  $A_{ij}$ , que conecta a los conjuntos de nodos -puntos- pertenecientes a dos subgrafos  $G_i^+$  y  $G_j^+$  del árbol de expansión mínima, se debe *cortar* (eliminar) de éste o no. En otras palabras, dados los conjuntos de puntos:

$$D_1 = \{p_i\}, p_i = [x_i, y_i]^T \quad y \quad D_2 = \{p_j\}, p_j = [x_j, y_j]^T \quad (4.1)$$

tal que  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ , de tamaño  $N_1$  y  $N_2$ , respectivamente; los cuales tienen asociadas las aproximaciones polinomiales correspondientes  $f(x_i; a_1)$  y  $f(x_j; a_2)$  dadas por:

$$f(x; a) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_mx^m \quad (4.2)$$

queremos demostrar una de las hipótesis siguientes:

**$H_0$ :** Los conjuntos  $D_1$  y  $D_2$  son particiones de un mismo conjunto  $D$  ( $D = D_1 \cup D_2$ ), por lo tanto, pueden ser caracterizados por una aproximación polinomial única  $f(x; a)$ .

**$H_1$ :** Los conjuntos  $D_1$  y  $D_2$  **no** son particiones de un mismo conjunto, por lo tanto, se caracterizan por dos aproximaciones polinomiales  $f_1(x_i; a_1)$  y  $f_2(x_j; a_2)$ , respectivamente.

Para abreviar la notación se considerará  $f(x; a)$  como  $f$ ,  $f_1(x_i; a_1)$  como  $f_1$  y  $f_2(x_j; a_2)$  como  $f_2$ . Así, el criterio de decisión será probabilista, por lo que la hipótesis  $H_0$  será válida si y sólo si se cumple (4.3), en caso contrario, la hipótesis que se cumple será  $H_1$ .

$$P(f \mid D_1, D_2) > P(f_1, f_2 \mid D_1, D_2) \quad (4.3)$$

Aplicando la regla de Bayes se puede expresar el criterio de decisión (4.3) como:

$$\frac{P(D_1, D_2 \mid f)P(f)}{P(D_1, D_2)} > \frac{P(D_1, D_2 \mid f_1, f_2)P(f_1, f_2)}{P(D_1, D_2)} \quad (4.4)$$

Como no se tiene información de cómo se distribuyen  $P(f)$  y  $P(f_1, f_2)$ , se asumirá una distribución de probabilidad uniforme, lo cual es equivalente a decir que  $P(f) = P(f_1, f_2)$ . Por lo tanto, el criterio final de decisión se expresa de la forma:

$$P(D_1, D_2 \mid f) > P(D_1, D_2 \mid f_1, f_2) \quad (4.5)$$

Para poder utilizar el criterio de decisión (4.5), se tienen que estimar las probabilidades  $P(D_1, D_2 \mid f)$  y  $P(D_1, D_2 \mid f_1, f_2)$ . Se comienza por estimar  $P(D \mid f)$ , considerando que  $D$  es un solo conjunto de datos; para ello se utilizará la regla de probabilidad total dada como:

$$P(D \mid f) = \int_{\Omega} P(D \mid a, f)P(a \mid f)d^m a \quad (4.6)$$

donde  $\Omega$  es el dominio de los elementos del vector de parámetros del polinomio de aproximación,  $a$ ; realizándose la integración en  $m$  dimensiones.

Se supondrá también, que cualquier polinomio con parámetros  $a$  tiene la misma probabilidad de ser seleccionado, por lo tanto, sigue una distribución uniforme,  $P(a \mid f) = k_1$ ; y que los errores entre la aproximación  $f(x_i; a)$  y las mediciones reales  $y_i$ , siguen un modelo gaussiano con media cero y varianza  $\sigma^2$ , dado por (4.7).

$$P(D \mid a, f) = k_2 \exp\left(-\frac{E(a)}{2\sigma^2}\right) \quad (4.7)$$

donde  $E(a)$  es la suma de las diferencias al cuadrado, dado por:

$$E(a) = \sum_{i=1}^N (f(x_i; a) - y_i)^2 \quad (4.8)$$

Entonces, se puede escribir  $P(D | f)$  a partir de (4.6) y (4.7):

$$P(D | f) = k_1 k_2 \int_{\Omega} \exp\left(-\frac{E(a)}{2\sigma^2}\right) d^m a \quad (4.9)$$

Para resolver la integral dada por (4.9), se hace la expansión en serie de Taylor en el punto  $a^*$ , que es la solución de mínimos cuadrados de (4.8):

$$\begin{aligned} E(a) &= E(a^*) + \nabla E^T(a^*)(a - a^*) + \\ &\quad \frac{1}{2}(a - a^*)^T \nabla^2 E(a^*)(a - a^*) \\ E(a) &= E(a^*) + \frac{1}{2}(a - a^*)^T \nabla^2 E(a^*)(a - a^*) \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde el gradiente  $\nabla E^T(a^*) = 0$ , dado que el vector de parámetros  $a^*$  es el óptimo de la función  $E(a)$ ; y el hessiano se define en (4.11), de acuerdo con el apéndice A.

$$\nabla^2 E(a^*) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N 1 & \sum_{i=1}^N x_i & \cdots & \sum_{i=1}^N x_i^m \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^N x_i^{m+1} \\ \sum_{i=1}^N x_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i^3 & \cdots & \sum_{i=1}^N x_i^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^N x_i^m & \sum_{i=1}^N x_i^{m+1} & \cdots & \sum_{i=1}^N x_i^{m+m} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Considerando que la integral  $A_g$  en  $m$  dimensiones de una función gaussiana con una variable  $x \in \mathbb{R}^m$  se calcula por [Sivia y Skilling 2006]:

$$A_g = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}x^T A x\right) d^m x = \sqrt{\frac{(2\pi)^m}{\det(A)}} \quad (4.12)$$

Además, considerando también que el determinante de una matriz  $A$  multiplicado por un escalar  $k$  es [Strang2006]:

$$\det(kA) = k^n \det(A) \quad (4.13)$$

y substituyendo (4.10) en (4.9), se resuelve la integral obteniendo:

$$P(D | f) = k_1 k_2 \int_{\Omega} \exp \left( \frac{-E(a^*) - \frac{1}{2}(a - a^*)^T \nabla^2 E(a^*) (a - a^*)}{2\sigma^2} \right) d^m a \quad (4.14)$$

$$= k_1 k_2 \exp \left( \frac{-E(a^*)}{2\sigma^2} \right) \quad (4.15)$$

$$\int_{\Omega} \exp \left[ -\frac{1}{2}(a - a^*)^T \left( \frac{\nabla^2 E(a^*)}{2\sigma^2} \right) (a - a^*) \right] d^m a$$

$$= k_1 k_2 \exp \left( \frac{-E(a^*)}{2\sigma^2} \right) \sqrt{\frac{(2\pi)^m}{\det \left( \frac{\nabla^2 E(a^*)}{2\sigma^2} \right)}} \quad (4.16)$$

$$= k_1 k_2 \exp \left( \frac{-E(a^*)}{2\sigma^2} \right) \sqrt{\frac{(2\sigma^2)^m (2\pi)^m}{\det(\nabla^2 E(a^*))}} \quad (4.17)$$

Para, finalmente, obtener:

$$P(D | f) = K \sqrt{\frac{(4\pi\sigma^2)^m}{\det(\nabla^2 E(a^*))}} \exp \left( -\frac{E(a^*)}{2\sigma^2} \right) \quad (4.18)$$

donde  $K = k_1 k_2$  es una constante de proporcionalidad y, en nuestro caso, la matriz  $A$  de (4.12) corresponde al hessiano en (4.11).

Para el cálculo de la probabilidad  $P(D_1, D_2 | f_1, f_2)$ , se asumirá que los conjuntos de datos  $D_1$  y  $D_2$  fueron generados por modelos independientes, por lo que ésta puede escribirse como:

$$P(D_1, D_2 | f_1, f_2) = P(D_1 | f'_1, f'_2) P(D_2 | f''_1, f''_2) \quad (4.19)$$

Considérese, además, que si se ajustan al mismo conjunto de datos  $D_1$  dos polinomios del mismo grado,  $f'_1$  y  $f'_2$ , empleando el método de mínimos cuadrados, estos polinomios serán iguales,  $f'_1 = f'_2$ , entonces se puede escribir:

$$P(D_1 | f'_1, f'_2) = P(D_1 | f_1) \quad (4.20)$$

la cual se calcula con (4.18).

De manera análoga, si se ajustan al mismo conjunto de datos  $D_2$  dos polinomios del mismo grado,  $f''_1$  y  $f''_2$ , empleando el método de mínimos cuadrados, estos polinomios serán iguales,  $f''_1 = f''_2$ , y por lo tanto:

$$P(D_2 | f''_1, f''_2) = P(D_2 | f_2) \quad (4.21)$$

la cual también se calcula con (4.18).

Por lo tanto y substituyendo (4.20) y (4.21) en (4.19), se obtiene que:

$$P(D_1, D_2 | f_1, f_2) = P(D_1 | f_1)P(D_2 | f_2) \quad (4.22)$$

Las probabilidades  $P(D_1 | f_1)$  y  $P(D_2 | f_2)$  se calculan empleando (4.18), y el resultado que se obtiene para (4.22) es (4.23):

$$P(D_1, D_2 | f_1, f_2) = \frac{K^2(4\pi\sigma^2)^m}{\sqrt{\det(\nabla^2 E(a_1^*)) \det(\nabla^2 E(a_2^*))}} \exp\left(-\frac{E(a_1^*) + E(a_2^*)}{2\sigma^2}\right) \quad (4.23)$$

En la práctica, para poder aplicar (4.18) y (4.23) se requiere determinar el punto óptimo,  $a^*$ , alrededor del cual se expande la serie de Taylor, así como el hessiano de la función de error  $E(a)$ . Ambos se pueden determinar como parte del método de mínimos cuadrados que se examina en el apéndice A.

Con todos los elementos definidos, la prueba de hipótesis se puede determinar siguiendo los pasos del algoritmo siguiente.

## 4.2. Algoritmo

Para determinar las hipótesis  $H_0$  y  $H_1$ , dados los conjuntos de puntos  $D_1$  y  $D_2$ , se realizan los pasos siguientes:

1. Calcular el conjunto  $D = D_1 \cup D_2$ .
2. Calcular la solución de mínimos cuadrados de (4.8), para los vectores de parámetros  $a$ ,  $a_1$  y  $a_2$  relativos a los conjuntos  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ ; respectivamente.
3. Determinar  $P(D | f)$ , utilizando (4.18); y  $P(D_1, D_2 | f_1, f_2)$ , utilizando (4.23).
4. Por último, unir los conjuntos  $D_1$  y  $D_2$  si  $P(D | f) > P(D_1, D_2 | f_1, f_2)$ , en caso contrario, dejar los conjuntos separados.

## 4.3. Segmentación del árbol de expansión mínima

Volviendo a la validación de la segmentación del árbol de expansión mínima,  $G^+$ , de la Subsección 3.3.2, se tiene que las aristas  $A_{ij}$  cuyas distancias  $d(v_i, v_j) > p_{Max}$ , pero

que cumplan la hipótesis  $H_0$  (para los conjuntos de nodos -puntos- correspondientes a los subgrafos  $G_i^+$  y  $G_j^+$ , que la arista  $A_{ij}$  conecta), se mantendrán intactas aún y cuando la distancia supere el umbral de corte. Por el contrario, si el umbral de corte se supera y la hipótesis que se cumple es la  $H_1$ , se cortará la arista en el árbol de expansión mínima, segmentando los subgrafos mencionados  $G_i^+$  y  $G_j^+$ .

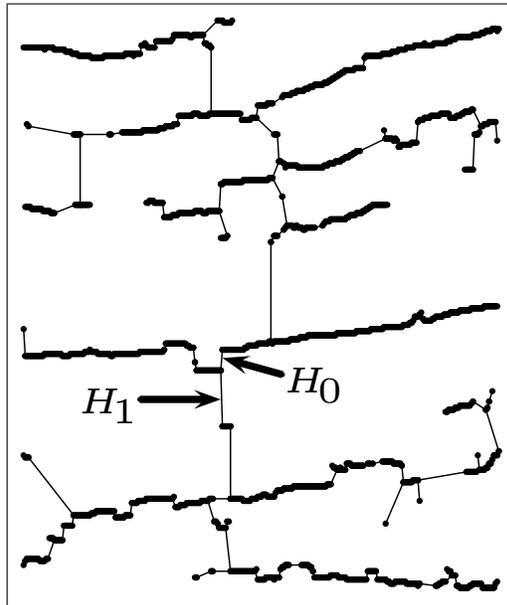


Figura 4.2: Árbol de expansión mínima del grafo, correspondiente a la ecografía de la Figura 4.1.

La Figura 4.2 presenta el árbol de expansión mínima del grafo, creado con los puntos que indican opciones factibles de ser seleccionadas como el centro del lumen real de la arteria, correspondiente a la Figura 4.1. La flecha señalada como  $H_1$ , indica un ejemplo de arista que supera el umbral de distancia  $p_{Max}$  y que cumple la hipótesis  $H_1$ , por lo que será cortada. Por el contrario, la flecha señalada como  $H_0$ , indica un ejemplo de arista que, aunque supera el umbral de distancia  $p_{Max}$ , cumple la hipótesis  $H_0$ ; lo cual indica que se debe mantener intacta.

Finalmente, la Figura 4.3 presenta el resultado final de la metodología de detección automática del lumen arterial presentada, sobre la ecografía en la imagen de la Figura 4.1.

El capítulo siguiente describe el criterio de varianza mínima utilizado para la selección del lumen arterial, así como los casos en los que se emplea.

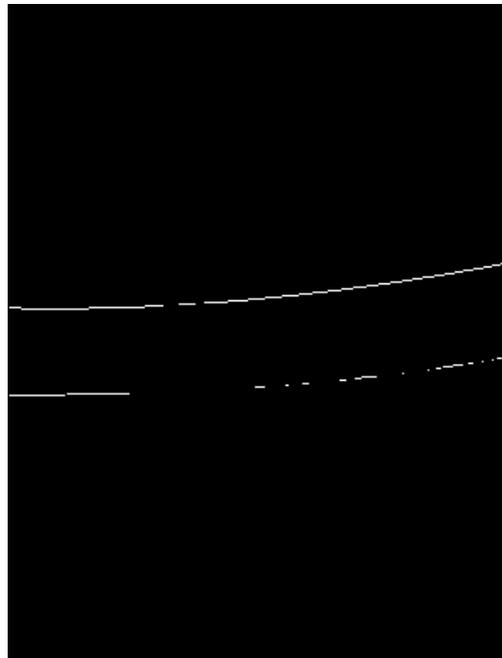


Figura 4.3: Lumen arterial segmentado con la metodología propuesta, correspondiente a la imagen en la Figura 4.1.

## Capítulo 5

# Criterio de varianza mínima de error para selección del lumen

La metodología formulada en el Capítulo 3 experimenta una inconsistencia que se presenta con el criterio de longitud para discriminar el lumen arterial. En dicha metodología, cuando existen dos o más trayectorias con valores del criterio de longitud cercanos o iguales a 1.0, esto es, si al calcular el valor del criterio de longitud  $l_i$  para las trayectorias que representan opciones factibles de ser seleccionadas como el centro del lumen de la arteria (Sección 3.4), dos o más de éstos superan un cierto umbral  $u_{cl}$ , el algoritmo resulta incapaz de discernir la selección correcta. En caso contrario, la combinación lineal de los criterios de longitud y de oscuridad es capaz de realizar la detección de manera satisfactoria.

Tabla 5.1: Criterios de selección para la ecografía de la Figura 5.1

Trayectoria	Criterios		Suma
	Longitud	Oscuridad	
0	0.98661	0.95766	1.94427
4	1.00000	0.87787	1.87787

Para ejemplificar la inconsistencia en el algoritmo, la Tabla 5.1 presenta los valores de los criterios de selección del lumen arterial así como la combinación de ambos, correspondientes a la ecografía mostrada en la Figura 5.1. Como se puede observar, si seleccionamos el lumen verdadero de la arteria atendiendo solamente al criterio de longitud, la trayectoria

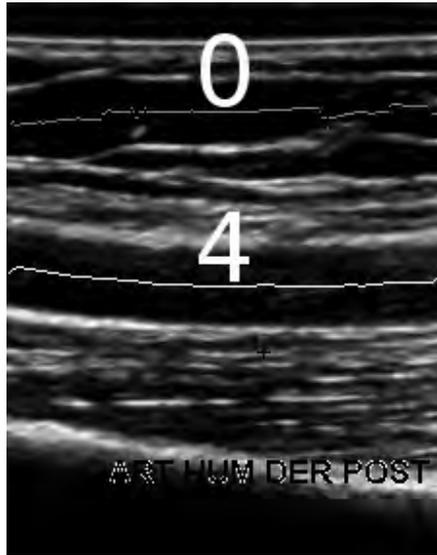


Figura 5.1: Ejemplo de inconsistencia en la metodología de detección del lumen arterial, relativa al criterio de longitud.

de la Figura 5.1 marcada con 0 tiene un valor  $l_0 = 0.98661$ , mientras que la marcada con 4 tiene un  $l_4 = 1.0$ . Lo que implica que seleccionaríamos correctamente la trayectoria 4 como el lumen arterial. Por otra parte, si seleccionamos el lumen arterial atendiendo solamente al criterio de obscuridad, la trayectoria 0 tiene un valor de  $o_0 = 0.95766$ , mientras que la 4 lo tiene de  $o_4 = 0.87787$ . Lo que implica que seleccionaríamos incorrectamente la trayectoria 0 como el lumen arterial. Por último, la selección realizada con base en el valor máximo de la suma de ambos criterios indica que la trayectoria 0 tiene un valor de 1.94427, mientras que la trayectoria 4 tiene un valor de 1.87787. Esto implica que la trayectoria 0 se selecciona como el lumen del vaso de la arteria, lo cual es incorrecto para esta ecografía en particular.

Para el conjunto completo de sonografías de prueba, la combinación de los criterios de longitud y de obscuridad es la que mejores resultados reporta para elegir el lumen adecuado del vaso arterial, sin considerar la inconsistencia del criterio de longitud.

Sin embargo, si se desea resolver el problema de la inconsistencia mencionada, sin afectar el desempeño global de la metodología, se emplea un tercer criterio para realizar la discriminación del lumen verdadero de la arteria: el criterio de varianza mínima.

## 5.1. Criterio de varianza mínima de error

De acuerdo con las observaciones y el criterio de un radiólogo, se puede considerar que el lumen arterial presenta una curvatura suave en una ecografía, por lo que al detectar sus bordes en la imagen, el número de puntos borde atípicos será menor en comparación con el número existente en los bordes detectados de los canales o estructuras anatómicas que se asemejen a éste. Una manera de calcular esto es utilizando la varianza muestral de los puntos borde.

El cálculo de varianza lo realizaremos sobre los elementos de un conjunto  $S_u$ , formado por el conjunto de trayectorias cuyo número de puntos borde es mayor a un porcentaje  $u_{cl}$  del número de puntos correspondiente a la estructura anatómica en la ecografía con la mayor cantidad de éstos.

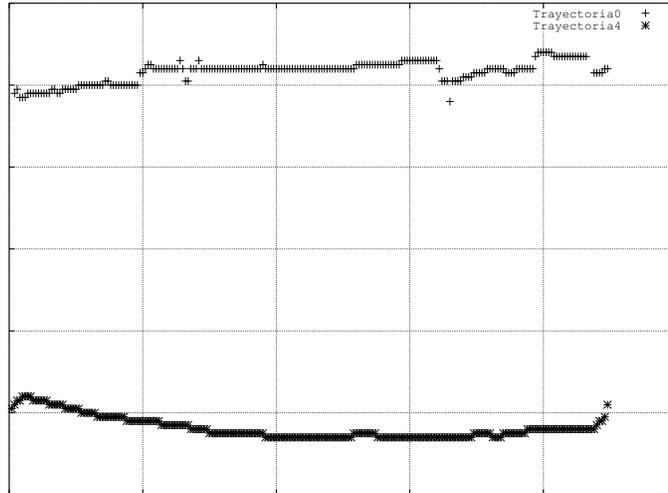


Figura 5.2: Ajuste de mínimos cuadrados a las trayectorias de la Figura 5.1. Datos originales.

Para nuestro modelo de ruido dado por (4.7), tenemos que la varianza muestral puede calcularse como:

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{N_j - 1} \sum_{i=1}^{N_j} (f(x_i; a_j^*) - y_i)^2 \quad (5.1)$$

donde  $f(x_i; a_j)$  es la aproximación polinomial de mínimos cuadrados (apéndice A), a los puntos borde detectados para la  $j$ -ésima estructura anatómica en la ecografía. Las Figu-

ras 5.2, 5.3 y 5.4 presentan las trayectorias originales de la ultrasonografía en la Figura 5.1, así como el ajuste de mínimos cuadrados que se realiza a cada una de ellas.

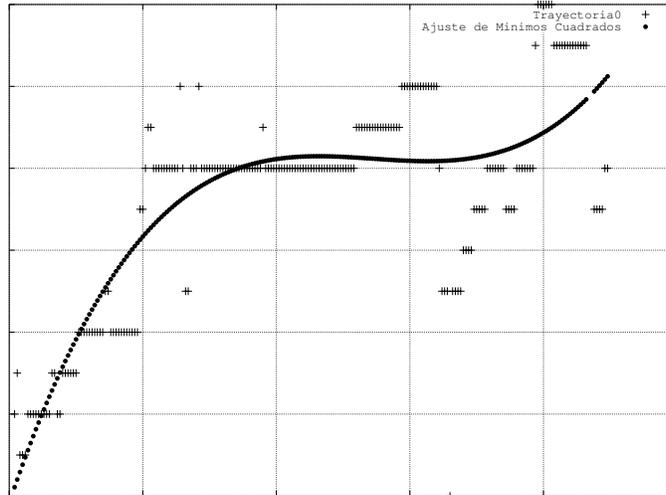


Figura 5.3: Ajuste de mínimos cuadrados a las trayectorias de la Figura 5.1. Ajuste a la trayectoria 0.

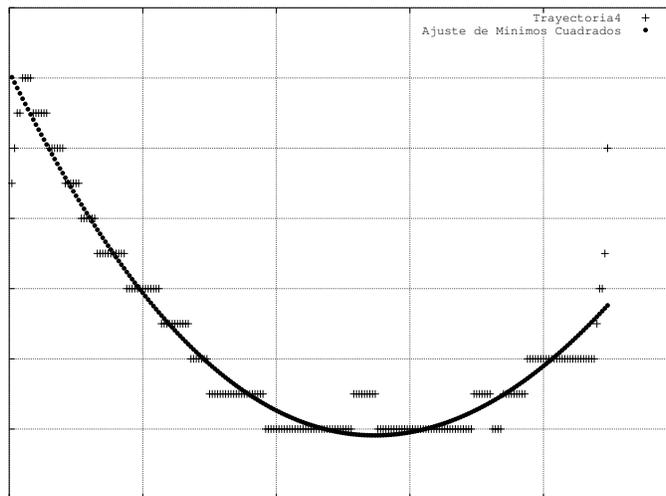


Figura 5.4: Ajuste de mínimos cuadrados a las trayectorias de la Figura 5.1. Ajuste a la trayectoria 4.

Entonces, el criterio de varianza mínima determina que la trayectoria correspondiente al centro del lumen verdadero de la arteria, es aquella trayectoria dada por (5.2) que

tenga el valor mínimo de la varianza muestral:

$$j^* = \underset{j}{\text{mín}}(\sigma_j^2), \quad j \in \{1, 2, \dots, |S_u|\} \quad (5.2)$$

siendo  $|S_u|$  la cardinalidad del conjunto  $S_u$ .

Cabe señalar que el criterio de varianza mínima se emplea solamente en los casos en los que tengamos más de una trayectoria, es decir, que  $|S_u| > 1$ . En caso contrario, se emplea la combinación lineal de los criterios de longitud y obscuridad, tal y como se propone en el Capítulo 3.

Para el caso de la ecografía en la Figura 5.1, tenemos que las trayectorias 0 y 4 presentan longitudes similares; pero la varianza muestral, calculada con (5.1), proporciona un valor de  $\sigma_0^2 = 2.2321$  y de  $\sigma_4^2 = 0.3649$ . De lo anterior se desprende que el lumen arterial a seleccionar es el dado por la trayectoria 4. Esto se puede deducir también del hecho de que, aún y cuando el ajuste polinomial sobre cada trayectoria es del mismo grado  $m = 3$ , siempre se observa que el ajuste polinomial a la trayectoria 0 (Figura 5.3) se comporta como un polinomio cúbico, mientras que el ajuste polinomial a la trayectoria 4 (Figura 5.4) se comporta como una parábola; lo cual implica que esta trayectoria tiene una variabilidad menor.

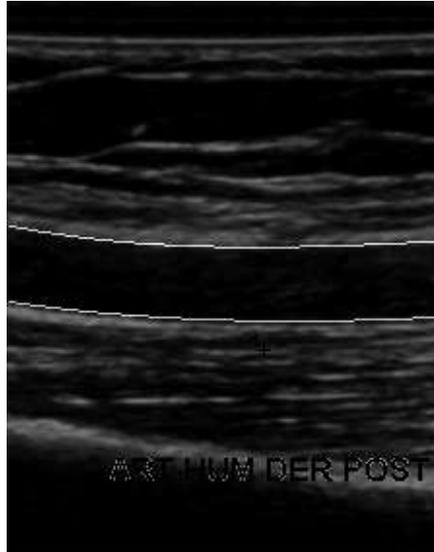


Figura 5.5: Bordes del lumen arterial detectado con el criterio de varianza mínima.

La Figura 5.5 presenta la imagen de la sonografía en la Figura 5.1, con la sobreposición del ajuste polinomial robusto a los bordes correspondientes al lumen arterial detectado, con base en este criterio de varianza mínima.

## **5.2. Discusión**

La solución propuesta en el Capítulo 4, para validar la segmentación del árbol de expansión mínima; así como la solución propuesta en este capítulo, para resolver los casos en los que el criterio de longitud para selección del lumen arterial verdadero es inconsistente, complementan la metodología de detección automática expuesta en el Capítulo 3. Así también, robustecen el procedimiento automatizado y mejoran los resultados obtenidos en la segmentación del lumen.

Las pruebas realizadas y los resultados obtenidos en la aplicación de la metodología complementada con la prueba de hipótesis bayesiana y el criterio de varianza mínima, sobre un conjunto de ultrasonografías de prueba, se presentan y discuten en el capítulo siguiente. Dichos resultados se comparan contra los resultados presentados por las técnicas del estado del arte con mejor desempeño, tanto automáticas como semi-automáticas y que se citan en la Sección 2.8.

La comparación aludida en el párrafo anterior permite que, en el Capítulo 7, se llegue a la conclusión de que nuestra técnica es muy competitiva aún comparada contra las técnicas del estado del arte semi-automáticas.

## **5.3. Algoritmo general de la metodología propuesta**

Finalmente, el Algoritmo 3 que inicia en la página siguiente, presenta los pasos generales a seguir en la metodología de detección automática del lumen arterial expuesta en el presente trabajo de tesis.

---

**Algoritmo 3** SegmentarLumen: Implementación de la metodología para segmentación del lumen arterial en imágenes de ultrasonido.

---

```

SEGMENTARLUMEN( $I'$ )
1   $I \leftarrow \text{RECORTEAUTOMÁTICO}(I')$  // Sección 3.1
2   $g \leftarrow \text{DETECTARBORDESCANNY}(I)$  // Subsección 3.2.1
3   $\hat{B} \leftarrow \text{CREARREPRESENTACIÓNORDENADA}(g)$  // Ecuaciones 3.8 – 3.10
4
5  // Eliminar bordes consecutivos muy cercanos
6   $B_L \leftarrow \emptyset$ 
7  para cada  $\hat{b}_i$  en  $\hat{B}$ 
8       $\hat{x}_i = \text{COORDX}(\hat{b}_i)$    $\hat{y}_i = \text{COORDY}(\hat{b}_i)$ 
9       $\hat{x}_{i+1} = \text{COORDX}(\hat{b}_{i+1})$    $\hat{y}_{i+1} = \text{COORDY}(\hat{b}_{i+1})$ 
10     si ( $\hat{x}_i = \hat{x}_{i+1}$ ) y ( $|\hat{y}_i - \hat{y}_{i+1}| \geq A_{Min}$ )
11         entonces  $B_L \leftarrow B_L \cup \{\hat{b}_i, \hat{b}_{i+1}\}$  // Ecuación 3.11
12
13     // Determinar puntos medios de los posibles bordes del lumen
14      $V \leftarrow \emptyset$ 
15     para cada  $\hat{b}_i$  en  $B_L$ 
16         si ( $\text{COORDX}(\hat{b}_i) = \text{COORDX}(\hat{b}_{i+1})$ )
17             entonces  $v \leftarrow \frac{\hat{b}_i + \hat{b}_{i+1}}{2}$  // Ecuación 3.12
18                  $V \leftarrow V \cup v$ 
19
20     // Crear grafo y árbol de expansión mínima con los puntos medios
21      $G \leftarrow \text{CREARGRAFO}(V)$  // Subsección 3.3.1
22      $G^+ \leftarrow \text{CALCULARÁRBOLDEEXPANSIÓNMÍNIMAKRUSKAL}(G)$  //  $G^+ = (V, A^+)$ 
23
24     // Recorrer el árbol de expansión mínima para segmentarlo
25      $\text{RECORRERÁRBOL}(G^+)$  // Algoritmo 1
26

```

---

**Algoritmo 3** SegmentarLumen: ...Continuación.

---

```

...SEGMENTARLUMEN( $I'$ )
27 // Unir subgrafos cuyos puntos se puedan caracterizar por un solo polinomio
28 para cada  $G_i^+$  en los subgrafos de  $G^+$ 
29   para cada  $G_j^+$  en los subgrafos de  $G^+$ 
30      $D_i \leftarrow V_i \quad D_j \leftarrow V_j \quad D \leftarrow D_i \cup D_j$ 
31     si ( $G_i^+ \neq G_j^+$ ) y ( $P(D | f) > P(D_i, D_j | f_i, f_j)$ )
32       entonces UNIRSUBGRAFOS( $G_i^+, G_j^+$ ) // Ecuación (4.5)
33
34 // Determinar la configuración final de los subgrafos segmentados de  $G^+$ 
35  $S \leftarrow$  CREARLISTADENODOSPORSUBGRAFO( $G^+$ ) // Ecuación 3.14
36
37 // Eliminar trayectorias (subgrafos) cortas
38  $S^+ \leftarrow \emptyset$ 
39 para cada  $G_i^+$  en  $S$ 
40   //  $G_i^+ = \{V_i, A_i\}$ 
41   si  $|V_i| < N_{Min}$ 
42     entonces  $S^+ \leftarrow S - G_i^+$  // Ecuación 3.15
43
44 // Discriminar el lumen verdadero mediante los criterios de selección
45  $maximol_i \leftarrow 0$ 
46 para cada  $G_i^+$  en  $S^+$ 
47   si  $|V_i| > maximol_i$ 
48     entonces  $maximol_i \leftarrow |V_i|$ 
49
50  $valoresl \leftarrow [] \quad S_u \leftarrow \emptyset$  // Calcular el criterio de longitud
51 para cada  $G_i^+$  en  $S^+$ 
52    $valoresl[i] \leftarrow \frac{|V_i|}{maximol_i}$  // Ecuación 3.16
53   si  $valoresl[i] > u_{cl}$ 
54     entonces  $S_u \leftarrow S_u \cup G_i^+$  // Secciones 3.4 y 5.1

```

---

**Algoritmo 3** SegmentarLumen: ...Continuación.

---

```

...SEGMENTARLUMEN( $I'$ )
55 // Verificar si hay inconsistencia en el criterio de longitud, Sección 3.4
56 si  $|S_u| = 1$ 
57     entonces // No hay inconsistencia, calcular el criterio de oscuridad
58          $valores\mu \leftarrow []$    $maximo\mu \leftarrow 0$  //  $G_j^+ = \{V_j, A_j\}$ 
59         para cada  $G_j^+$  en  $S^+$ 
60              $promediosv \leftarrow []$ 
61             para cada  $v_i$  en  $V_j$ 
62                 // Ecuación 3.17 (mitad derecha), de acuerdo con la Ecuación 3.12
63                  $promediosv[i] \leftarrow \text{PROMEDIARTONOSDEGRISBORDEABORDE}(v_i)$ 
64
65                  $valores\mu[j] \leftarrow \frac{\text{SUMARARREGLO}(promediosv)}{|G_j^+|}$  // Ecuación 3.17
66                 si  $valores\mu[j] > maximo\mu$ 
67                     entonces  $maximo\mu \leftarrow valores\mu[j]$ 
68
69              $valoreso \leftarrow []$ 
70             para cada  $G_i^+$  en  $S^+$ 
71                  $valoreso[i] \leftarrow 1 - \frac{valores\mu[i]}{maximo\mu}$  // Ecuación 3.18
72
73              $i^* \leftarrow 0$  // Buscar maximizar criterio de longitud + oscuridad en  $i^*$ 
74             para cada  $G_i^+$  en  $S^+$ 
75                 si  $(valoresl[i^*] + valoreso[i^*]) < (valoresl[i] + valoreso[i])$ 
76                     entonces  $i^* \leftarrow i$  // Ecuación (3.19)
77         sino // Calcular el criterio de varianza mínima de error
78              $valores\sigma^2 \leftarrow []$    $i^* \leftarrow 0$  // Minimizar la varianza muestral en  $i^*$ 
79             para cada  $G_i^+$  en  $S_u$  //  $m = 3$ , es el grado del ajuste polinomial
80                  $valores\sigma^2[i] \leftarrow \text{VARIANZAMUESTRAL}(G_i^+, m)$  // Ecuación 5.1
81                 si  $(valores\sigma^2[i^*] > valores\sigma^2[i])$ 
82                     entonces  $i^* \leftarrow i$  // Ecuación (5.2)

```

---

**Algoritmo 3** SegmentarLumen: ...Continuación.

...SEGMENTARLUMEN( $I'$ )

83

84 // Ajustar polinomios sobre los bordes del lumen detectado

85 //  $G_{i^*}^+ = \{V_{i^*}, A_{i^*}\}$

86  $C \leftarrow \emptyset$   $L \leftarrow \emptyset$

87 **para cada**  $v_{i^*}$  **en**  $V_{i^*}$

88  $C \leftarrow C \cup$  Calcular  $\hat{b}_i$  asociado a  $v_{i^*}$  // Forma inversa a la Ecuación (3.12)

89  $L \leftarrow L \cup$  Calcular  $\hat{b}_{i+1}$  asociado a  $v_{i^*}$  // Forma inversa a la Ecuación (3.12)

90

91  $m \leftarrow 3$  //  $m$  es el grado de los polinomios de ajuste

92

93 // Polinomio correspondiente a la pared arterial cercana

94  $f_C(\hat{x}) \leftarrow$  AJUSTARPOLINOMIOCONRANSAC( $C, m$ )

95

96 // Polinomio correspondiente a la pared arterial lejana

97  $f_L(\hat{x}) \leftarrow$  AJUSTARPOLINOMIOCONRANSAC( $L, m$ )

98

99 **regresar**  $f_C(\hat{x})$  y  $f_L(\hat{x})$

## Capítulo 6

# Pruebas y resultados

### 6.1. Material

Para el desarrollo de este trabajo se contó con una base de datos de imágenes de ultrasonido proporcionadas por el Centro de Diagnóstico Médico *Centro Unión*, a través del Dr. Jaime Carranza Madrigal.

El Centro Unión se encuentra ubicado en la ciudad de Morelia, Michoacán, México. El Dr. Jaime Carranza Madrigal es un radiólogo experto, Profesor Investigador Titular “C”, adscrito a la Escuela de Enfermería y Salud Pública de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo; colaborador de la Clínica Médica Universitaria de la Facultad de Ciencias Médicas y Biológicas “Dr. Ignacio Chávez”, integrada a la misma UMSNH; y es miembro médico activo del Hospital Civil y de la Unidad de Prevención y Atención Cardiometabólica (*UPAC*) de la ciudad de Morelia, Michoacán.

El Dr. Carranza no sólo facilitó amablemente el banco de imágenes, también supervisó y revisó el desarrollo de los trabajos y publicaciones derivadas de esta investigación, en cuanto a la parte médica de los mismos.

Las imágenes facilitadas corresponden a 184 pacientes en análisis de factores de riesgo cardiovasculares y consisten (por cada individuo) en 2 ultrasonografías de la arteria carótida y 4 pertenecientes a la arteria humeral (2 previas y 2 posteriores a la estimulación de presión sobre la arteria en la prueba de la *FEAH*). El conjunto completo consiste,

pues, de 1,104 imágenes longitudinales de ultrasonido en modo-B, de las arterias carótida y humeral. Todas las imágenes del conjunto se transfirieron a la computadora a través de un puerto de comunicación *DICOM* (*Digital Imaging and Communications in Medicine*) [ISO2006], fueron comprimidas logarítmicamente a una escala de grises de 8 bits (256 tonos de gris) y presentan una resolución de 640 píxeles de ancho por 480 píxeles de alto. Además, la resolución axial de las ecografías es de  $76.9 \mu\text{m}$  por píxel.

Las pruebas se ejecutaron en una computadora portátil con microprocesador Intel® Core™ i5 a 2.30GHz, con 4GB de memoria RAM y software creado con el kit de desarrollo abierto de Java versión 7 (*Open Java Development Kit 7*). El sistema operativo utilizado fue Debian GNU/Linux con un kernel version 3.2.0 de 64 bits.

Cabe mencionar que con la finalidad de disminuir el costo computacional del proceso de detección del lumen arterial en los experimentos realizados, y considerando que la medición ecográfica es más precisa en el centro de la imagen (debido a la distorsión radial del ultrasonido), se realiza un corte adicional del 20% a ambos lados de la misma, quedando solamente el 60% central. Además, se determinó experimentalmente que el grado,  $m = 3$ , de los polinomios de ajuste a los bordes del lumen del vaso de la arteria, sobre esta imagen procesada, reporta los mejores resultados para este conjunto de ultrasonografías de prueba.

## 6.2. Pruebas y Resultados

Los resultados obtenidos en la etapa de pruebas se lograron ajustando los parámetros de la metodología de la forma siguiente:  $A_{Min} = 20$  píxeles,  $p_{Max} = 10$  píxeles,  $N_{Min} = 100$  nodos, grado de los polinomios de ajuste  $m = 3$ ,  $\xi = 2$  píxeles, un umbral del conjunto de consenso del 90% y 150,000 repeticiones en el algoritmo RANSAC,  $\sigma = 32.0$  para la prueba de hipótesis bayesiana y el umbral  $u_{cl} = 0.95$ .

Las pruebas se realizaron sobre un total de 1,104 imágenes de ultrasonido, de las cuales 368 cuentan con mediciones establecidas manualmente por un médico radiólogo y, las restantes 736, no tienen medición. Por este motivo, los experimentos sólo se cuantifican en el caso de las 368 ecografías con información de referencia.

Se comienzan las pruebas con las 1,104 sonografías que nos fueron proporcionadas,

a las cuales se les aplica el método de detección del lumen arterial presentado en este trabajo. Posteriormente se analiza individualmente cada una de las imágenes resultantes de la detección, y se evalúa cualitativamente el porcentaje de las mismas en las que el algoritmo selecciona el patrón correcto de zona oscura flanqueado arriba y abajo por zonas más claras (el lumen supuesto). Este experimento cualitativo tiene el aval de un médico radiólogo en cuanto a la selección apropiada del lumen arterial. Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 6.1 y se muestran en el diagrama de Venn-Euler de la Figura 6.1.

Tabla 6.1: Resultados de la prueba cualitativa

Conjunto	Cantidad	Características	Resultado
SA	719	Imágenes sin medición del radiólogo	Acierto
SF	17	Imágenes sin medición del radiólogo	Fallo
CA	334	Imágenes con medición del radiólogo	Acierto
CF	34	Imágenes con medición del radiólogo	Fallo
Total	1,104	Total de imágenes	

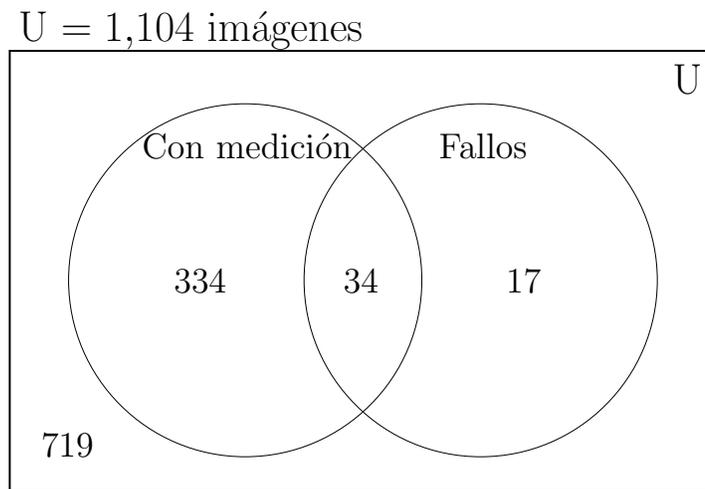


Figura 6.1: Resultados de la prueba cualitativa.

La Tabla 6.1 presenta los resultados clasificados en 4 conjuntos de imágenes:

**Conjunto SA** Conjunto de 719 ecografías sin medición manual del radiólogo, en las cuales nuestra metodología acertó en detectar el lumen arterial.

**Conjunto SF** Conjunto de 17 ecografías que no cuentan con medición manual del radiólo-

go, en las cuales nuestro algoritmo falló en detectar el lumen arterial.

**Conjunto CA** Conjunto de 334 ecografías con medición manual del radiólogo, en las cuales nuestra metodología acertó en detectar el lumen arterial.

**Conjunto CF** Conjunto de 34 ecografías que cuentan con medición manual del radiólogo, en las cuales nuestro algoritmo falló en detectar el lumen arterial.

La detección del patrón arterial correcto por medio de nuestro algoritmo falla en 51 de las 1,104 imágenes (4.6% de error). Las fallas se deben a estructuras anatómicas presentes en la ecografía, cuya apariencia es similar a la que se supone para la arteria.

El experimento cuantitativo consiste en aplicar nuestra técnica a cada una de las 334 imágenes con mediciones del radiólogo en las que se detectó correctamente el lumen arterial (imágenes del conjunto CA en la Tabla 6.1). Enseguida, se obtienen los bordes del lumen del vaso de la arteria en forma parametrizada. Teniendo el polinomio de ajuste del borde de la pared arterial cercana  $f_C(\hat{x})$ , se calcula el error entre el punto señalado por el radiólogo  $[x_C, y_C]^T$  y nuestra estimación, de la manera siguiente:

$$error_C = |y_C - f_C(x_C)| \quad (6.1)$$

Posteriormente, el proceso se repite para calcular el error entre la estimación del radiólogo  $[x_L, y_L]^T$  y nuestra aproximación polinomial  $f_L(\hat{x})$ , referido a la pared arterial lejana:

$$error_L = |y_L - f_L(x_L)| \quad (6.2)$$

Los resultados del error promedio y desviación estandar obtenidos en estas pruebas se presentan en la Tabla 6.2, para las mediciones dadas en micrómetros ( $\mu\text{m}$ ); y en la Tabla 6.3, para las mediciones dadas en pixeles.

Tabla 6.2: Error en las *mediciones interfaz lumen-íntima* (en micrómetros)

$\mu\text{m}$	Interfaz lumen-íntima	
	Pared cercana	Pared lejana
<b>Promedio</b>	14.6	15.1
<b>Desviación estándar</b>	17.0	14.5

En las Tablas 6.2 y 6.3, la primera columna es la descripción del estadístico calculado; la segunda indica los valores obtenidos, relativos a la interfaz lumen-íntima de la pared arterial cercana; y, la tercera, también representa los valores para cada estadístico, pero relativos a la pared arterial lejana.

Tabla 6.3: Error en las *mediciones interfaz lumen-íntima* (en pixeles)

Píxeles	Interfaz lumen-íntima	
	Pared cercana	Pared lejana
<b>Promedio</b>	1.8	1.9
<b>Desviación estándar</b>	2.2	1.9

En [Molinari et al. 2010c] se señala que de las técnicas revisadas en dicho estudio, que son completamente automáticas y que reportan información en este sentido, la que presentó el mejor desempeño es la desarrollada en [Molinari et al. 2009], con un promedio de error en la detección de la interfaz entre el lumen y la pared lejana arteriales igual a  $35.0 \mu\text{m} \pm 32.0 \mu\text{m}$ . También se señala que, de las técnicas semi-automáticas, el trabajo presentado en [Destrepes et al. 2009] arrojó el mejor desempeño, con un error promedio, en la detección de la misma interfaz, de  $21.0 \mu\text{m} \pm 13.0 \mu\text{m}$ . Desafortunadamente, en los trabajos revisados, sólo el presentado en [Molinari et al. 2008] indica el error promedio en la detección de la interfaz lumen-íntima de la pared arterial cercana, el cual fue de  $75.0 \mu\text{m} \pm 56.3 \mu\text{m}$ .

### 6.3. *Discusión*

Con fundamento en los resultados presentados en las Tablas 6.2 y 6.3, la metodología que proponemos en el presente trabajo tiene un desempeño muy competitivo con relación al reportado por las técnicas del estado del arte ya que, considerando el desempeño general de nuestra propuesta en la pared lejana, el error promedio fue de  $15.1 \mu\text{m}$ , con una desviación estándar de  $14.5 \mu\text{m}$ . Lo mismo pasa con los resultados generales en la pared cercana, cuyo error promedio fue de  $14.6 \mu\text{m}$  y  $17.0 \mu\text{m}$  de desviación estándar.

La Figura 6.2 presenta el gráfico comparativo de los resultados obtenidos. Los datos menores son mejores. En la figura, los valores indicados como 0.0 señalan que los

datos no son proporcionados por el autor de la metodología respectiva.

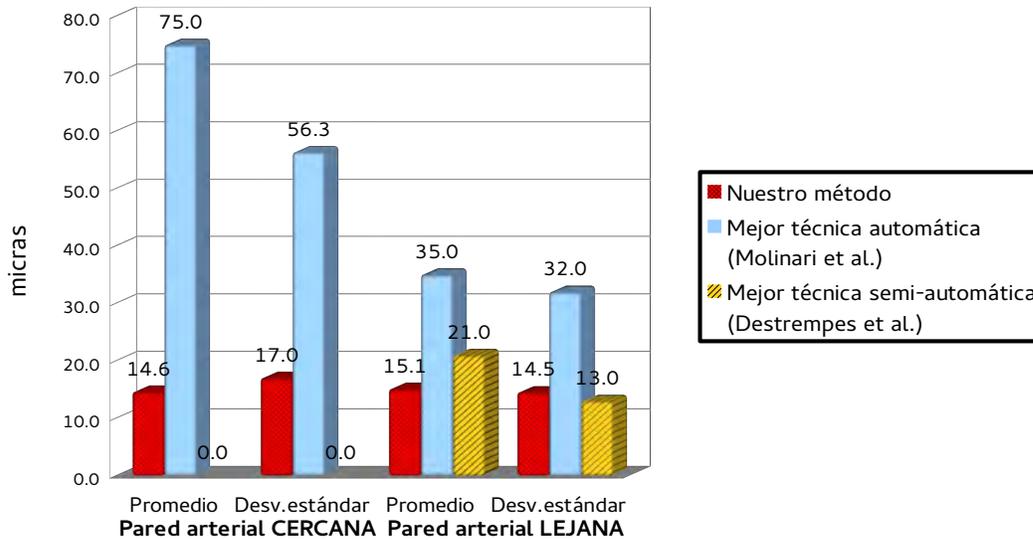


Figura 6.2: Comparativa entre los resultados de la metodología propuesta y las técnicas del estado del arte.

Cabe señalar que reconocemos que los resultados indicados no incluyen las ecografías indicadas en el 4.6% de error, es decir, las 51 imágenes en las que falla nuestra propuesta en detectar el patrón correcto de lumen arterial. De manera análoga, los resultados correspondientes a estas imágenes se presentan en las Tablas 6.4 y 6.5. El incremento en el error en las mediciones se debe, por supuesto, a la selección incorrecta del lumen arterial por parte de nuestro método, además y derivado de esto, en algunos casos el sobreajuste del método de mínimos cuadrados genera una gran diferencia entre la medición automática y la manual, realizada por el médico radiólogo.

Tabla 6.4: Error en las *mediciones interfaz lumen-íntima* para las imágenes con error en la detección del lumen arterial (en micrómetros)

$\mu\text{m}$	Interfaz lumen-íntima	
	Pared cercana	Pared lejana
<b>Promedio</b>	521.9	547.0
<b>Desviación estándar</b>	564.6	570.1

Tabla 6.5: Error en las *mediciones interfaz lumen-íntima* para las imágenes con error en la detección del lumen arterial (en píxeles)

<b>Píxeles</b>	<b>Interfaz lumen-íntima</b>	
	<b>Pared cercana</b>	<b>Pared lejana</b>
<b>Promedio</b>	59.8	62.8
<b>Desviación estándar</b>	61.9	63.1



## Capítulo 7

# Conclusiones y trabajos futuros

En este trabajo de tesis se ha presentado una metodología para detección automática del lumen arterial en ultrasonografías, tomadas a pacientes en estudio de riesgos cardiovasculares. Las conclusiones que del mismo se obtienen se mencionan a continuación.

### 7.1. Conclusiones

- La metodología obtiene resultados muy competitivos en comparación con los resultados de las técnicas automáticas y semi-automáticas existentes en el estado del arte.
- El método formulado es robusto con relación al ruido y a la morfología y orientación de la arteria en la imagen de ultrasonido.
- También es robusto contra discontinuidades o cortes notorios en los bordes del vaso arterial. Generalmente estos cortes se deben a ruido en la imagen o a ajustes inapropiados del aparato de ultrasonido en la toma de la imagen, más que a rasgos físicos del propio tejido del paciente.
- A pesar de lo anterior, la propuesta de detección aún es vulnerable contra patologías o características ecogénicas anormales de la arteria.
- El procedimiento desarrollado encuentra el límite de su aplicación en el algoritmo de detección de bordes de Canny. Si este algoritmo es incapaz de detectar los bordes de

la arteria, por ejemplo debido a ruido, la metodología de detección automática del lumen arterial propuesta también será incapaz de seleccionar el lumen correcto del vaso de la arteria.

- Al ser automática completamente, la metodología expuesta elimina el error humano en la segmentación del lumen. Además, evita la diferencia de resultados debida a la apreciación del experto (cuando el análisis de la ecografía se realiza varias veces en distintos momentos) o a las apreciaciones de los expertos (cuando la misma ecografía la analiza más de una persona).

Finalmente, con la plataforma de hardware y software utilizada, la técnica creada procesa cada ultrasonografía en un tiempo variable de hasta 30 segundos. Sin embargo, se piensa que la ejecución en tiempo real es factible, optimizando el proceso y haciendo uso del procesamiento en paralelo.

## 7.2. Trabajo futuro

Los trabajos que a futuro se piensan desarrollar se enlistan enseguida brevemente.

- Realizar pruebas de rendimiento del método formulado, empleando otras bases de datos de imágenes de ultrasonido. Tal y como lo sugirieron varios de los revisores de los artículos publicados con base en los resultados de esta tesis.
- Llevar a cabo la medición automática de la íntima-media carotídea y de la dilatación del diámetro de la luz humeral (en la prueba de la función endotelial de esta arteria), a fin de realizar comparaciones entre el proceso automático y el realizado manualmente por médicos radiólogos. Aunado a ello, realizar la comparación de los resultados que se obtengan contra los presentados en los métodos del estado del arte.
- Emitir una opinión sobre el estado de bienestar (o malestar) de la función endotelial de la arteria humeral (debido a los protocolos médicos en México, el *diagnóstico* sólo lo puede realizar un doctor en medicina).

- Desarrollar una implementación de software de nuestra metodología, en tiempo real, de tal manera que se pudiera aplicar como complemento en equipos de ultrasonido, a fin de que éstos presenten dichas mediciones automáticamente y al momento de la toma de la sonografía.



## Apéndice A

# Método de mínimos cuadrados

Para un conjunto de  $n$  puntos  $p_i$  con coordenadas  $[x_i, y_i]^T$ , se define una función polinomial de ajuste de grado  $m$ , como:

$$f(x_i; a) = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3 + \cdots + a_mx_i^m \quad (\text{A.1})$$

donde las  $a_i$  son el conjunto de parámetros que caracterizan al polinomio y, además, existe una función de error  $E(a)$  que mide la calidad del ajuste polinomial dada por:

$$E(a) = \sum_{i=1}^n e_i^2(a) = e^T(a) e(a) \quad (\text{A.2})$$

donde  $e_i(a) = f(x_i; a) - y_i$ , lo cual se puede representar en forma matricial de la manera siguiente:

$$e(a) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^m \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

o en forma abreviada:

$$e(a) = Pa - y \quad (\text{A.4})$$

La solución  $a^*$  que minimiza la función de error (A.2) se calcula con (A.5) y es llamada la solución de mínimos cuadrados.

$$a^* = P^+y \quad (\text{A.5})$$

donde  $P^+$  es la *inversa generalizada de Moore-Penrose* o *pseudoinversa* de  $P$  [Penrose1955], la cual se puede calcular mediante (A.6), si existe la matriz inversa de  $P^T P$ .

$$P^+ = (P^T P)^{-1} P^T \quad (\text{A.6})$$

Para determinar el hessiano de la función de error  $E(a)$ , de acuerdo con (A.4), podemos expresar (A.2) como:

$$E(a) = (Pa - y)^T (Pa - y) = a^T (P^T P) a - 2y^T P a + y^T y \quad (\text{A.7})$$

Derivando con respecto a la variable independiente, se tiene:

$$\nabla E(a) = 2[(P^T P)a - P^T y] \quad (\text{A.8})$$

Por lo que, al derivar nuevamente, el hessiano resulta:

$$\nabla^2 E(a) = 2(P^T P) \quad (\text{A.9})$$

Freund et al. presentan una revisión más detallada de este método en [Freund et al. 2000].

# Referencias

- [Amato et al. 2007] Amato, M., Montorsi, P., Ravani, A., Oldani, E., Galli, S., Ravagnani, P. M., Tremoli, E., y Baldassarre, D. Carotid intima-media thickness by B-mode ultrasound as surrogate of coronary atherosclerosis: Correlation with quantitative coronary angiography and coronary intravascular ultrasound findings. *European Heart Journal*, 28(17):2094–2101, September 2007.
- [Blake y Isard 2000] Blake, A. y Isard, M. *Active contours*. Springer-Verlag, 2000.
- [Canny1986] Canny, J. A computational approach to edge detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-8(6):679–698, November 1986. ISSN 0162-8828.
- [Celermajer et al. 1994] Celermajer, D. S., Sorensen, K. E., Bull, C., Robinson, J., y Deanfield, J. E. Endothelium-dependent dilation in the systemic arteries of asymptomatic subjects relates to coronary risk factors and their interaction. *Journal of the American College of Cardiology*, 24(6):1468–1474, 1994. ISSN 0735-1097.
- [Cheng et al. 2002] Cheng, D. C., Schmidt-Trucksass, A., Cheng, K. S., y Burkhardt, H. Using snakes to detect the intimal and adventitial layers of the common carotid artery wall in sonographic images. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 67(1):27–37, 2002.

- [Cohen1991] Cohen, L. D. On active contour models and balloons. *Computer Vision Graphics Image Processing Image Understanding*, 53(2):211–8, 1991.
- [CONAPO2010] CONAPO. Principales causas de mortalidad en México 1980 - 2007. [http://www.conapo.gob.mx/publicaciones/mortalidad/Mortalidadxcausas\\\_80\\\_07.pdf](http://www.conapo.gob.mx/publicaciones/mortalidad/Mortalidadxcausas\_80\_07.pdf), Abril 2010. Documento de trabajo para el XLIII periodo de sesiones de la Comisión de Población y Desarrollo “Salud, morbilidad, mortalidad y desarrollo”.
- [Cormen et al. 2009] Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., y Stein, C. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, 2009.
- [Delsanto et al. 2005] Delsanto, S., Molinari, F., Giustetto, P., Liboni, W., y Badalamenti, S. CULEX-Completely User-independent Layers EXtraction: ultrasonic carotid artery images segmentation. *Proceedings of the 2005 IEEE Engineering in Medicine and Biology Society 27th Annual Conference*, 6:6468–71, 2005.
- [Delsanto et al. 2006] Delsanto, S., Molinari, F., Liboni, W., Giustetto, P., Badalamenti, S., y Suri, J. S. User-independent plaque characterization and accurate IMT measurement of carotid artery wall using ultrasound. *Proceedings of the 2006 IEEE Engineering in Medicine and Biology Society 28th Annual International Conference*, 1:2404–7, 2006.
- [Delsanto et al. 2007] Delsanto, S., Molinari, F., Giustetto, P., Liboni, W., Badalamenti, S., y Suri, J. S. Characterization of a completely user-independent algorithm for carotid artery segmentation in 2-D ultrasound images. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 56(4):1265–74, 2007.

- [Dempster et al. 1977] Dempster, A. P., Laird, N. M., y Rubin, D. B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 39(1):1–38, 1977.
- [Destrempe et al. 2009] Destrempe, F., Meunier, J., Giroux, M. F., Soulez, G., y Cloutier, G. Segmentation in ultrasonic B-mode images of healthy carotid arteries using mixtures of Nakagami distributions and stochastic optimization. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 28(2):215–29, 2009.
- [Faita et al. 2008] Faita, F., Gemignani, V., Bianchini, E., Giannarelli, C., Ghiadoni, L., y Demi, M. Real-time measurement system for evaluation of the carotid intima-media thickness with a robust edge operator. *Journal of Ultrasound in Medicine*, 27(9):1353–61, 2008.
- [Fischler y Bolles 1981] Fischler, M. A. y Bolles, R. C. Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. *Communications of the ACM*, 24:381–395, June 1981. ISSN 0001-0782.
- [Freund et al. 2000] Freund, J. E., Miller, I., y Miller, M. *Estadística matemática con aplicaciones*. Pearson Educación, 6<sup>a</sup> ed<sup>ón</sup>., 2000.
- [Furberg et al. 1994] Furberg, C. D., Byington, R. P., y Craven, T. E. Lessons learned from clinical trials with ultrasound end-points. *Journal of Internal Medicine*, 236(5):575–80, 1994.
- [García-Barreto et al. 2003] García-Barreto, D., García-Fernández, R., García-Pérez-Velazco, J., Milián, A. C., y Peix-González, A. Diagnóstico preclínico de la aterosclerosis: Función endotelial. *Revista cubana de medicina*, 42(1):58–63, Enero–Febrero 2003.

- [Golemati et al. 2004] Golemati, S., Tegos, T. J., Sassano, A., Nikita, K. S., y Nicolaides, A. N. Echogenicity of B-mode sonographic images of the carotid artery: work in progress. *Journal of Ultrasound in Medicine*, 23(5):659–69, 2004.
- [Golemati et al. 2005] Golemati, S., Stoitsis, J., Balkizas, T., y Nikita, K. Comparison of B-mode, M-mode and Hough transform methods for measurement of arterial diastolic and systolic diameters. *Proceedings of the 2005 IEEE Engineering in Medicine and Biology Society 27th Annual Conference*, 2(1):1758–61, 2005.
- [Golemati et al. 2007] Golemati, S., Stoitsis, J., Sifakis, E. G., Balkizas, T., y Nikita, K. S. Using the Hough transform to segment ultrasound images of longitudinal and transverse sections of the carotid artery. *Ultrasound in Medicine and Biology*, 33(12):1918–32, 2007.
- [Gutierrez et al. 2002] Gutierrez, M. A., Pilon, P. E., Lage, S. G., Kopel, L., Carvalho, R. T., y Furuie, S. S. Automatic measurement of carotid diameter and wall thickness in ultrasound images. *Computers in Cardiology*, 29:359–62, 2002.
- [Hall y Bassiouny 2012] Hall, H. A. y Bassiouny, H. S. *Ultrasound and Carotid Bifurcation Atherosclerosis*, cap. Pathophysiology of Carotid Atherosclerosis, págs. 27–40. Springer-Verlag, 2012.
- [Hough1962] Hough, P. V. C. Method and means for recognizing complex patterns. U. S. Patent No. 3069654, 1962.
- [ISO2006] ISO. Health informatics – Digital imaging and communication in medicine (DICOM) including workflow and data management, 2006.

- [Kass et al. 1988] Kass, M., Witkin, A., y Terzopoulos, D. Snakes: Active contour models. *Int. Journal of Computer Vision*, 1:321–31, 1988.
- [Kruskal1956] Kruskal, J. B. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *En Proceedings of the American Mathematical Society*, págs. 48–50. 1956.
- [Lai y Chin 1995] Lai, K. F. y Chin, R. T. Deformable contours-modeling and extraction. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(11):1084–90, 1995.
- [Liang et al. 2000] Liang, Q., Wendelhag, I., Wikstrand, J., y Gustavsson, T. A multiscale dynamic programming procedure for boundary detection in ultrasonic artery images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 19(2):127–42, 2000.
- [Liguori et al. 2001] Liguori, C., Paolillo, A., y Pietrosanto, A. An automatic measurement system for the evaluation of carotid intima-media thickness. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 50(6):1684–91, 2001.
- [Lobregt y Viergever 1995] Lobregt, S. y Viergever, M. A. A discrete dynamic contour model. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 14(1):12–24, 1995.
- [Loizou et al. 2007] Loizou, C. P., Pattichis, C. S., Pantziaris, M., Tyllis, T., y Nicolaides, A. Snakes based segmentation of the common carotid artery intima media. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 45(1):35–49, 2007.
- [Loizou y Pattichis 2008] Loizou, C. P. y Pattichis, C. S. *Despeckle Filtering Algorithms and Software for Ultrasound Imaging*. Morgan and Claypool, 2008.

- [Loizou2005] Loizou, C. P. *Ultrasound Image Analysis of the Carotid Artery*. Tesis Doctoral, School of Computing and Information Systems, Kingston University, 2005.
- [Molinari et al. 2008] Molinari, F., Delsanto, S., Giustetto, P., Liboni, W., Badalamenti, S., y Suri, J. S. *Advances in diagnostic and therapeutic ultrasound imaging*, cap. User-independent plaque segmentation and accurate intima-media thickness measurement of carotid artery wall using ultrasound, págs. 111–140. Artech House, Norwood, MA, 2008.
- [Molinari et al. 2009] Molinari, F., Liboni, W., Giustetto, P., Badalamenti, S., y Suri, J. S. Automatic Computer-based Tracings (ACT) in longitudinal 2-D ultrasound images using different scanners. *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, 9(4):481–505, 2009.
- [Molinari et al. 2010a] Molinari, F., Zeng, G., y S., J. An integrated approach to computer-based automated tracing and its validation for 200 common carotid arterial wall ultrasound images: a new technique. *Journal of Ultrasound in Medicine*, 29(3):399–418, 2010.
- [Molinari et al. 2010b] Molinari, F., Zeng, G., y Suri, J. S. *Atherosclerosis Disease Management*, cap. An Integrated Approach to Computer-Based Automated Tracing and IMT Measurement for Carotid Artery Longitudinal Ultrasound Images, págs. 221–251. Springer, 2010.
- [Molinari et al. 2010c] Molinari, F., Zeng, G., y Suri, J. S. *Atherosclerosis Disease Management*, cap. Techniques and challenges in intima–media thickness measurement for carotid ultrasound images: a review, págs. 281–324. Springer, 2010.

- [Molinari y Suri 2012] Molinari, F. y Suri, J. S. *Ultrasound and Carotid Bifurcation Atherosclerosis*, cap. Automated Measurement of Carotid Artery Intima-Media Thickness, págs. 177–192. Springer-Verlag, 2012.
- [OMS2011] OMS. Enfermedades cardiovasculares. <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs317/es/index.html>, Enero 2011.
- [Penrose1955] Penrose, R. A generalized inverse for matrices. *En Cambridge Philosophical Society*, tomo 51, págs. 406–413. 1955.
- [Phinikaridou et al. 2012] Phinikaridou, A., Qiao, Y., y Hamilton, J. A. *Ultrasound and Carotid Bifurcation Atherosclerosis*, cap. Stable and Vulnerable Atherosclerotic Plaques, págs. 3–26. Springer-Verlag, 2012.
- [Pignoli y Longo 1988] Pignoli, P. y Longo, T. Evaluation of atherosclerosis with b-mode ultrasound imaging. *The Journal of nuclear medicine and allied sciences*, 32(3):166–73, 1988.
- [Reid et al. 2012] Reid, D. B., Watson, C., Majumder, B., y Irshad, K. *Ultrasound and Carotid Bifurcation Atherosclerosis*, cap. Intra-vascular ultrasound: plaque characterization, págs. 551–562. Springer, 2012.
- [Ronfard1994] Ronfard, R. Region based strategies for active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 13(2):229–51, 1994.
- [Schmidt y Wendelhag 1999] Schmidt, C. y Wendelhag, I. How can the variability in ultrasound measurement of intima-media thickness be reduced? studies of interobserver variability in carotid and femoral arteries. *Clinical Physiology*, 19(1):45–55, 1999.

- 
- [Sedgewick y Wayne 2011] Sedgewick, R. y Wayne, K. *Algorithms*. Pearson Education, Inc., 2011.
- [Shankar et al. 2003] Shankar, P. M., Dumane, V. A., George, T., Piccoli, C. W., Reid, J. M., Forsberg, F., y Goldberg, B. B. Classification of breast masses in ultrasonic B scans using Nakagami and K distributions. *Physics in Medicine and Biology*, 48(14):2229–40, 2003.
- [Shankar2003a] Shankar, P. M. A compound scattering pdf for the ultrasonic echo envelope and its relationship to K and Nakagami distributions. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 50(3):339–43, 2003.
- [Shankar2003b] Shankar, P. M. Estimation of the nakagami parameter from log-compressed ultrasonic backscattered envelopes. *Journal of the Acoustical Society of America*, 114(1):70–2, 2003.
- [Sivia y Skilling 2006] Sivia, D. S. y Skilling, J. *Data Analysis: A Bayesian Tutorial*. Oxford University Press, USA, 2006.
- [Stein et al. 2005] Stein, J. H., Korcarz, C. E., Mays, M. E., Douglas, P. S., Palta, M., Zhang, H., LeCaire, T., Paine, D., Gustafson, D., y Fan, L. A semiautomated ultrasound border detection program that facilitates clinical measurement of ultrasound carotid intima-media thickness. *Journal of the American Society of Echocardiography*, 18(3):244–51, 2005.
- [Stoitsis et al. 2008] Stoitsis, J., Golemati, S., Kendros, S., y Nikita, K. S. Automated detection of the carotid artery wall in B-mode ultrasound images using active contours initialized by the Hough transform. *Proceedings of the 2008 IEEE Engineering in Medicine and Biology Society 30th Annual International Conference*, 2008:3146–9, 2008.

- [Strang2006] Strang, G. *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Thomson, 4<sup>a</sup> ed<sup>ón</sup>, 2006.
- [Touboul et al. 1992] Touboul, P. J., Prati, P., Yves Scarabin, P., Adrai, V., Thibout, E., y Ducimetiere, P. Use of monitoring software to improve the measurement of carotid wall thickness by b-mode imaging. *Journal of Hypertension*, 10(Supplement 5):S37–42, 1992.
- [Touboul et al. 2007] Touboul, P. J., Hennerici, M., Meairs, S., Adams, H., Amarenco, P., Bornstein, N., Csiba, L., Desvarieux, M., Ebrahim, S., Fatar, M., Hernandez-Hernandez, R., Jaff, M., Kownator, S., Prati, P., Rundek, T., Sitzer, M., Schminke, U., Tardif, J. C., Taylor, A., Vicaut, E., Woo, K. S., Zannad, F., y Zureik, M. Mannheim carotid intima-media thickness consensus (2004-2006). *Cerebrovascular Diseases*, 23:75–80, 2007. doi: 10.1159/000097034.
- [Villela et al. 2008] Villela, L. A., de Oliveira, A., Vidal, E. A., França, G. J., Dalla, P. S., Alessi, A., y Précoma, D. B. Appropriateness of carotid plaque and intima-media thickness assessment in routine clinical practice. *Cardiovascular Ultrasound*, 6(1):52, 2008.
- [Wendelhag et al. 1991] Wendelhag, I., Gustavsson, T., Suurkula, M., Berglund, G., y Wikstrand, J. Ultrasound measurement of wall thickness in the carotid artery: fundamental principles and description of a computerized analysing system. *Clinical Physiology*, 11(6):565–77, 1991.
- [Wendelhag et al. 1992] Wendelhag, I., Wiklund, O., y Wikstrand, J. Arterial wall thickness in familial hypercholesterolemia. ultrasound measurement of intima-media thickness in the common carotid

- artery. *Arteriosclerosis, Thrombosis, and Vascular Biology*, 12(1):70–7, 1992.
- [Wendelhag et al. 1996] Wendelhag, I., Wiklund, O., y Wikstrand, J. On quantifying plaque size and intima-media thickness in carotid and femoral arteries. comments on results from a prospective ultrasound study in patients with familial hypercholesterolemia. *Arteriosclerosis, Thrombosis, and Vascular Biology*, 16(7):843–50, 1996.
- [Wendelhag et al. 1997] Wendelhag, I., Liang, Q., Gustavsson, T., y Wikstrand, J. A new automated computerized analyzing system simplifies readings and reduces the variability in ultrasound measurement of intima-media thickness. *Stroke*, 28(11):2195–200, 1997.
- [Wikstrand2012] Wikstrand, J. C. *Ultrasound and Carotid Bifurcation Atherosclerosis*, cap. Methodological Considerations of Ultrasound Measurement of Carotid Artery Intima-Media Thickness and Lumen Diameter, págs. 165–176. Springer-Verlag, 2012.
- [Williams y Shah 1992] Williams, D. J. y Shah, M. A fast algorithm for active contours and curvature estimation. *Computer Vision Graphics and Image Processing: Image Understanding*, 55(1):14–26, 1992.
- [Xu et al. 2001] Xu, C., Yezzi, A., y Prince, J. L. A summary of geometric level set analogues for a general class of parametric active contour and surface models. *En Proceedings of the 1st. IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision*, págs. 104–11. 2001.
- [Xu y Prince 1997] Xu, C. y Prince, J. L. Gradient vector flow: A new external force for snakes. *Proceedings of the 1997 IEEE Computer*

*Vision and Pattern Recognition (CVPR'97) Computer Society Conference*, 1997:66–71, 1997.

[Xu y Prince 1998] Xu, C. y Prince, J. L. Snake, shapes, and gradient vector flow. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3):359–69, 1998.