



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE  
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

CONTROL ÓPTIMO NO LINEAL PARA LA  
REDUCCIÓN DE VIBRACIONES EN ESTRUCTURAS  
CIVILES USANDO DISPOSITIVOS INTELIGENTES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
**DOCTOR EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**  
OPCIÓN EN SISTEMAS DE CONTROL

PRESENTA  
**JOAQUÍN CONTRERAS LÓPEZ**

DIRECTORA DE TESIS  
**DRA. ELISA ESPINOSA JUÁREZ**

CO-DIRECTOR DE TESIS  
**DR. FERNANDO ORNELAS TÉLLEZ**

MORELIA, MICHOACÁN, NOVIEMBRE DE 2019







## CONTROL ÓPTIMO NO LINEAL PARA LA REDUCCIÓN DE VIBRACIONES EN ESTRUCTURAS CIVILES USANDO DISPOSITIVOS INTELIGENTES

Los Miembros del Jurado de Examen de Grado aprueban la Tesis de Doctorado en Ciencias en Ingeniería Eléctrica, Opción en Sistemas de Control de *Joaquín Contreras López*

Dr. Roberto Tapia Sánchez  
*Presidente del Jurado*

Dra. Elisa Espinosa Juárez  
*Director de Tesis*

Dr. Fernando Ornelas Téllez  
*Co-director*

Dr. Juan Anzures Márin  
*Vocal*

Dr. Hugo Hernández Barrios  
*Revisor Externo (Fac. de Ingeniería Civil UMSNH)*

Dr. Roberto Tapia Sánchez  
*Jefe de la División de Estudios de Posgrado  
de la Facultad de Ingeniería Eléctrica. UMSNH  
(Por reconocimiento de firmas)*

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO  
Octubre 2019



*A mis hijos, Yazmín, José Antonio y Carlos  
Aunque malgasten el tiempo sin mi cariño...*



# Agradecimientos

A la vida por permitirme estar aquí y ahora.

A mis padres y familiares.

A la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo que ha sido mi segunda casa por muchos años.

A la Dra. Elisa Espinosa Juárez y al Dr. Fernando Ornelas Téllez por todo el apoyo y la confianza brindada durante esta aventura.

A todos los docentes de la División de estudios de posgrado, especialmente a aquellos con quienes tuve mayor interacción, me recibieron en sus espacios y me ayudaron con sus consejos: Drs. Carlos Pérez Rojas, Félix Calderón Solorio, Juan Anzures Marín, J. Jesús Rico Melgoza, José Antonio Camarena Ibarrola, Juan José Flores Romero, Norberto García Barriga y Roberto Tapía Sánchez.

De la misma manera al Dr. Hugo Hernández Barrios, revisor externo de este trabajo por su valioso apoyo.

A la Sra. Lupita Mercado Hernández, a la Lic. Yunuén Vargas Barajas y al personal manual de la división de estudios de posgrado.

A los compañeros con los que conviví y que a veces, hasta sin saberlo, aligeraron la carga de trabajo; entre otros: Adán Garníca Carrillo, David Cortes Vega, Didier González López, José Luis García Nava, Rodrigo Morfín Magaña y Serafín Ramos Paz.





# Resumen

Debido a las frecuentes y posiblemente excesivas vibraciones que se presentan en diferentes tipos de estructuras civiles como son edificios, torres, sistemas de entrepiso, puentes vehiculares y peatonales, entre otros, producidas por distintos fenómenos, como eventos sísmicos, fuertes vientos o condiciones de servicio, estas vibraciones pueden derivar en la incomodidad de los usuarios, en daño a las estructuras o, peor aún, en su colapso, con las posibles consecuencias de pérdidas económicas y de vidas humanas.

En este trabajo se presenta la síntesis de un esquema de control óptimo no lineal robusto que reduce la respuesta estructural, y por ende, las vibraciones en estructuras civiles, a través del uso de dispositivos de control semiactivo como son los amortiguadores magnetoreológicos, que tienen la ventaja de ser dispositivos de muy bajo consumo de energía y que funcionarán como amortiguadores pasivos en caso de un malfuncionamiento del sistema de control.

El esquema de control propuesto determina el voltaje óptimo necesario a aplicar a los dispositivos físicos de control semiactivo, basando su cálculo en el conocimiento de los estados de la respuesta estructural, como son: los desplazamientos y velocidad de los distintos grados de libertad considerados en el modelo matemático de la estructura. Con este conocimiento del sistema, la acción de control se determina aplicando los principios de optimalidad como el principio máximo de Pontryagin que en conjunto con la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman y la ecuación diferencial de Riccati, rigen el control óptimo, para lograr esquemas de control efectivos en la reducción de vibraciones y que utilicen la menor cantidad de energía o esfuerzo de control.

Se abordan dos casos de estudio. El primero, el de una estructura a escala representando un edificio de tres niveles, la que se somete a dos condiciones de vibración, a saber, vibración libre y vibración forzada. El segundo, el de un puente peatonal real con un claro de 36 m de longitud, que se estudia, por separado, para la condición de vibración libre y la de vibración forzada. Para ambos casos se cuenta con resultados de simulación y cuantificaciones de los mismos. Los resultados muestran que el con-

trolador óptimo no lineal propuesto reduce las vibraciones del sistema estructural en cada caso de estudio.

El proceso seguido para el análisis de los casos de estudio, consiste en realizar el modelado lineal de la estructura civil partiendo de la segunda ley del movimiento de Newton, que en conjunto con el modelo no lineal de Bouc-Wen modificado del amortiguador magnetoreológico, forman un sistema no lineal, que al ser representado en espacio de estados, permite llevar a cabo el diseño del controlador óptimo no lineal. Con el sistema y el controlador definidos, se realizan simulaciones de la respuesta estructural para diferentes condiciones de vibración y diferentes condiciones de operación del controlador.

La dinámica lineal de la estructura civil y la dinámica no lineal del dispositivo de control, se conjuntan en un sistema no lineal, que representado en espacio de estados, se lleva a una forma en coeficientes dependientes del estado, lo que permite hacer control sobre el sistema. A través de la teoría que respalda el esquema de control óptimo, se desarrolla una estrategia de control óptimo no lineal robusta que reduce las vibraciones en estructuras civiles sujetas a perturbaciones externas variantes en el tiempo, a través del uso de dispositivos semiactivos y con ello se establece un algoritmo de control eficiente que puede servir como base para la implementación de un sistema de control estructural a escala natural.

**Palabras clave:** Control estructural, control semiactivo, control óptimo no lineal, amortiguador magnetoreológico, reducción de respuesta estructural.

# Abstract

Due to the frequent and possibly excessive vibrations presented in different types of civil structures such as buildings, towers, flooring systems, vehicular and pedestrian bridges, among others, produced by different phenomena like earthquakes, strong winds or service conditions, this vibrations can derive in user's discomfort, structural damage or worst, in their failure, with the possible consequences of economic and human life losses.

In this work the synthesis of a robust non-linear optimal control scheme to reduce the structural response, and hence, vibrations in civil structures, through the use of semi-active control devices such as magnetorheological dampers is presented. These devices have the advantage of having very low power consumption and they become passive dampers in a control system malfunction case.

The proposed control scheme determines the necessary optimal voltage to apply to the physic semi-active control devices, basing its calculus in the knowledge of the structure states as: displacements and velocity of the different degrees of freedom considered in the mathematical model of the structure. With this knowledge of the system, the control action is determined by applying the optimal principles that rules the optimal control theory as the Riccati differential equation and the Hamilton-Jacobi-Bellman equation to achieve effective control schemes for reducing vibrations, using a minor control effort.

Two case studies are addressed. First, a scaled structure representing a three stories building which is subjected to two vibrations conditions, namely, free vibration and forced vibration. Second, a real footbridge with a 36 m span, are studied separately, for the free vibration condition and for the forced vibration. For both cases, simulation results and its respective quantification are obtained. Results show that the proposed optimal controller has an adequate performance in the structural system vibration reduction for each case study.

The process followed for the analysis of both case studies, consist in carrying out the linear modeling of the civil structure based on the Newton's second law

of movement, which together with the non-linear modified Bouc-Wen model of the magnetorheological damper, form a non-linear system that when represented in state space, allows to carry out the design of the optimal non-linear controller. With the system and the controller defined, system response simulations are performed for different vibration conditions and different controller operating conditions.

The linear dynamics of the civil structure and the nonlinear from the control device, are gathered in a nonlinear control that, represented in a state space, is re-expressed in a state dependent coefficient factorized form, which allows to apply control over the system. Through the use of semiactive devices and the theory that supports the optimal control scheme, a robust nonlinear optimal control strategy is developed to reduce vibrations in civil structures subject to external time varying perturbations and with this, an efficient control algorithm is established and that may be used as starting point to the real scale implementation of a structural control system.

**Keywords:** Structural control, semiactive control, nonlinear optimal control, magnetorheological damper, structural response reduction.

# Lista de Publicaciones

- Contreras-Lopez J., Ornelas-Tellez F., and Espinosa-Juarez E. Nonlinear optimal control for reducing vibrations in civil structures using smart devices. *Smart Structures and Systems*, **23**(3): 307–318, 2019.  
<https://doi.org/10.12989/SSS.2019.23.3.307>.
- Contreras-Lopez J., Ornelas-Tellez F., and Espinosa-Juarez E. Optimal Control for Footbridges' Vibration Reduction based on Semiactive Control through Magnetorheological Dampers. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **19**(9): 1–28, 2019.  
<https://doi.org/10.1142/S0219455419501104>.
- Contreras-Lopez J., Ornelas-Tellez F., and Espinosa-Juarez E. Nonlinear Optimal Control for Reducing Vibrations in Civil Structures Using Magnetorheological Dampers. IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC 2016). Ixtapa, Mexico. Electronic ISBN: 978-1-5090-3794-0.
- Contreras-Lopez J., Ornelas-Tellez F., and Espinosa-Juarez E. Footbridges Vibration Reduction based on Semiactive Control by using Magnetorheological Dampers and Optimal Control. IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC 2018). Ixtapa, Mexico. Electronic ISBN: 978-1-5386-5935-9.
- Contreras-López J., Concha-Sánchez Y., Espinosa-Juaréz E., y Ornelas-Téllez F. Control de Vibraciones en Estructuras Civiles usando Amortiguadores Magnetoreológicos. XV encuentro Participación de la Mujer en la Ciencia. Centro de Investigaciones en Óptica (CIO). León Gto. Mayo de 2018.
- Contreras-López J., Concha-Sánchez Y., Espinosa-Juaréz E., y Ornelas-Téllez F. Control de Vibraciones Verticales en Puentes Peatonales usando Amortiguadores Magnetoreológicos. XVI encuentro Participación de la Mujer en la Ciencia. Centro de Investigaciones en Óptica (CIO). Leon Gto. Mayo de 2019.



# Contenido

Dedicatoria . . . . .	V
Agradecimientos . . . . .	VII
Resumen . . . . .	IX
Abstract . . . . .	XI
Lista de Publicaciones . . . . .	XIII
Contenido . . . . .	XV
Lista de Figuras . . . . .	XIX
Lista de Tablas . . . . .	XXI
Lista de Símbolos . . . . .	XXIII
Lista de Acrónimos . . . . .	XXVII
1. Introducción . . . . .	1
1.1. Estado del arte . . . . .	1
1.2. Principales tipos de sistemas de control . . . . .	2
1.2.1. Sistemas de control pasivo . . . . .	4
1.2.2. Sistemas de control activo . . . . .	7
1.2.3. Sistemas de control semiactivo . . . . .	8
1.2.4. Sistemas de control híbrido . . . . .	12
1.3. Algoritmos de control . . . . .	12
1.4. Justificación . . . . .	16
1.5. Motivación . . . . .	17
1.6. Hipótesis . . . . .	18
1.7. Objetivo . . . . .	18
1.7.1. General . . . . .	18
1.7.2. Particulares . . . . .	19
1.8. Contribuciones . . . . .	19
1.9. Organización de tesis . . . . .	20
2. Modelado de estructuras civiles . . . . .	21
2.1. Introducción . . . . .	21
2.2. Propiedades o parámetros de una estructura . . . . .	22
2.3. Modelado de una estructura vertical tipo edificio . . . . .	22

2.3.1.	Fuerza de rigidez . . . . .	24
2.3.2.	Fuerza de amortiguamiento . . . . .	24
2.3.3.	Ecuación de movimiento para vibración forzada de un sistema de un grado de libertad, caso: fuerza actuando sobre una masa . . . . .	25
2.3.4.	Ecuación de movimiento para vibración forzada de un sistema de un grado de libertad, caso: movimiento del suelo . . . . .	26
2.3.5.	Ecuación de movimiento para vibración forzada de un sistema de $N$ -grados de libertad. . . . .	28
2.4.	Modelado de una estructura horizontal tipo puente . . . . .	31
2.4.1.	Fuerza de rigidez . . . . .	32
2.4.2.	Fuerza de amortiguamiento . . . . .	32
2.4.3.	Ecuación de movimiento para vibración forzada de un sistema de un grado de libertad: fuerza actuando sobre una masa . . . . .	33
2.4.4.	Ecuación de movimiento para vibración forzada de un sistema de $N$ -grados de libertad. . . . .	34
2.5.	Propiedades dinámicas . . . . .	37
2.5.1.	Fuerza de inercia . . . . .	38
2.5.2.	Fuerza de rigidez . . . . .	40
2.5.3.	Propiedades de vibración y fuerza de amortiguamiento . . . . .	43
2.5.4.	Carga peatonal . . . . .	45
2.6.	Modelo dinámico de un amortiguador magnetoreológico . . . . .	54
2.7.	Modelo de la estructura con entrada de fuerza de un amortiguador . . . . .	60
2.8.	Conclusiones del capítulo . . . . .	61
3.	Control óptimo no lineal . . . . .	63
3.1.	Introducción . . . . .	63
3.2.	Algoritmos de control lineal . . . . .	66
3.2.1.	Controlador PID . . . . .	66
3.2.2.	Regulador cuadrático lineal (LQR) . . . . .	67
3.2.3.	Colocación de polos . . . . .	69
3.3.	Algoritmos de control no lineal . . . . .	69
3.3.1.	Control polinomial óptimo . . . . .	70
3.3.2.	Control por modos deslizantes (SMC) . . . . .	71
3.4.	Algoritmos de control inteligente . . . . .	71
3.4.1.	Control por Lógica Difusa (FLC, Fuzzy logic control) . . . . .	72
3.4.2.	Red neuronal artificial (ANN, Artificial Neural Network) . . . . .	72
3.4.3.	Algoritmos genéticos (GA, Genetic algorithm) . . . . .	73
3.5.	Control óptimo para reducir las vibraciones en estructuras civiles . . . . .	74
3.5.1.	Sistema no lineal en la forma SDCF . . . . .	75
3.5.2.	Funcional de costo . . . . .	75
3.5.3.	Controlador óptimo propuesto . . . . .	76
3.6.	Conclusiones del capítulo . . . . .	81



---

4.	Aplicación del controlador óptimo a estructuras civiles	83
4.1.	Introducción . . . . .	83
4.2.	Modelo de edificio a escala de tres niveles, caso: vibración libre amortiguada . . . . .	84
4.3.	Modelo de edificio a escala de tres niveles, caso: vibración forzada por sismo . . . . .	91
4.3.1.	Representación del modelo a escala en factorización de coeficientes dependientes del estado (SDCF, por sus siglas en inglés)	91
4.3.2.	Síntesis del controlador . . . . .	93
4.3.3.	Discusión de resultados . . . . .	98
4.4.	Modelo de puente peatonal, caso: vibración libre . . . . .	103
4.4.1.	Puente representado en coeficientes dependientes del estado (SDCF, por sus siglas en inglés) . . . . .	104
4.4.2.	Síntesis del controlador . . . . .	105
4.5.	Modelo de puente peatonal, caso: vibración forzada por carga peatonal	108
4.5.1.	Puente peatonal con representación en coeficientes dependientes del estado, SDCF . . . . .	111
4.5.2.	Síntesis del controlador . . . . .	114
4.5.3.	Resultados de la simulación . . . . .	116
4.5.4.	Discusión de resultados . . . . .	117
4.6.	Conclusiones del capítulo . . . . .	125
5.	Conclusiones y trabajo futuro	127
5.1.	Conclusiones Generales . . . . .	127
5.2.	Propuesta de trabajo futuro . . . . .	129
	Referencias	133



# Lista de Figuras

1.1. Funcionamiento de los principales tipos de sistemas de control estructural. . . . .	3
1.2. Modelo mecánico de una estructura con TMD. . . . .	5
1.3. Esquemático de un amortiguador magnetoreológico, MRD. . . . .	11
2.1. Idealización de un grado de libertad para estructuras verticales. . . . .	23
2.2. Sistema masa-resorte-amortiguador de un grado de libertad. . . . .	24
2.3. Fuerzas internas de rigidez y amortiguamiento opuestas al movimiento en un sistema de un grado de libertad. . . . .	25
2.4. Idealización de un grado de libertad para estructuras verticales. . . . .	27
2.5. Idealización de masas concentradas para una estructura de $N$ -grados de libertad. . . . .	29
2.6. Idealización de un grado de libertad para una estructura horizontal. . . . .	32
2.7. Fuerzas internas de rigidez y amortiguamiento opuestas al movimiento en un sistema de un grado de libertad. . . . .	33
2.8. Idealización de masas concentradas para una estructura horizontal de $N$ -grados de libertad. . . . .	35
2.9. Modelo de un edificio y un puente con masas concentradas en los nodos. . . . .	38
2.10. (a) Componentes de masa del marco; (b) Coeficientes de influencia de masa para $\ddot{x}_{s_1}=1$ ; (c) Coeficientes de influencia de masa para $\ddot{x}_{s_4}=1$ . . . . .	40
2.11. (a) Componentes de rigidez del marco; (b) Coeficientes de influencia de rigidez para $x_{s_1}=1$ ; (c) Coeficientes de influencia de rigidez para $x_{s_4}=1$ . . . . .	42
2.12. Variación de la fuerza vertical pico y tiempo de contacto respecto de la frecuencia de pisada [Zivanovic05] . . . . .	46
2.13. Historial de fuerza en el tiempo de la caminata en dirección vertical, lateral y longitudinal [Zivanovic05] . . . . .	47
2.14. Relación entre la frecuencia natural y el factor de reducción $\psi$ , para el primer armónico [NormaBS03]. . . . .	51
2.15. Factor de reducción $\psi$ , para vibraciones longitudinales y verticales [Sétra06]. . . . .	51
2.16. Esquemático de un amortiguador magnetoreológico [Preumont11]. . . . .	55

2.17. Respuesta de un MRD a una excitación sinusoidal de 2.5 Hz y amplitud máxima de 1.5 cm [Dyke96a]. . . . .	56
2.18. Esquema mecánico del modelo de Bouc-Wen modificado para un MRD. . . . .	59
3.1. Diagrama de bloques del sistema de control. . . . .	79
4.1. Modelo de edificio con MRD. . . . .	85
4.2. Respuesta de desplazamiento y velocidad de los entresijos. . . . .	90
4.3. Registro acelerográfico, escalado cinco veces en el tiempo, de la componente Norte-Sur, de la estación JC54 de la RACM. Sismo Puebla-Morelos(7.1M), México, 2017. . . . .	94
4.4. Espectro de aceleraciones para diferentes fracciones de amortiguamiento $\xi$ . . . . .	96
4.5. Respuesta de desplazamiento y velocidad de los entresijos. . . . .	99
4.6. Voltaje aplicado y fuerza de amortiguamiento. . . . .	100
4.7. Modelo del puente peatonal de once masas concentradas con un MRD en el centro del claro. . . . .	103
4.8. Desplazamiento y velocidad para el centro del claro. . . . .	107
4.9. Procedimiento de análisis de la vibración del puente peatonal. . . . .	111
4.10. Fuerza $p(t)$ ejercida por un peatón, en el centro del claro (nodo 6), al cruzar el puente a una velocidad constante de 4 m/s. . . . .	117
4.11. Desplazamiento del nodo central para 1, 2 y 4 peatones. . . . .	118
4.12. Velocidad del nodo central para 1, 2 y 4 peatones. . . . .	119
4.13. Aceleración del nodo central para 1, 2 y 4 peatones. . . . .	120
4.14. Configuración deformada del puente, para $0.5 \leq t \leq 8.5$ s, con $\Delta t=1$ s, “Sin control” y con “Control óptimo”, para diferente número de peatones. . . . .	123
4.15. Voltaje $u^*$ y fuerza $f_d$ , aplicados para diferente número de peatones. . . . .	124

# Lista de Tablas

1.1. Principales dispositivos de control. . . . .	9
1.2. Propiedades de los amortiguadores magnetoreológicos y electroreológicos. . . . .	11
2.1. Fracción de amortiguamiento, $\xi$ para puentes peatonales [Sétra06]. . . . .	44
2.2. Valores recomendados de fracción de amortiguamiento, $\xi_i$ [Chopra12]. . . . .	45
2.3. Velocidades promedio y frecuencias verticales típicas de excitación peatonal [Bachmann87] . . . . .	46
2.4. Frecuencias de caminata ejercidas por peatones [Bachmann95] . . . . .	48
2.5. Fuerzas dinámicas peatonales normalizadas [Bachmann95] . . . . .	49
4.1. Parámetros para el modelo del MRD [Dyke96b]. . . . .	86
4.2. Elementos del renglón 4 y 5 de la matriz $A(x)$ . . . . .	88
4.3. Elementos de renglones 6 y 7 de la matriz $A(x)$ . . . . .	88
4.4. Valores de los elementos del renglón 8 de la matriz $A(x)$ . . . . .	89
4.5. Parámetros del modelo a escala del edificio. . . . .	92
4.6. Respuestas pico máximas de la estructura, porcentaje de reducción de la respuesta y NRMSD para la respuesta de cada nivel. . . . .	97
4.7. Parámetros del puente peatonal. . . . .	106
4.8. Constantes para distintas condiciones de apoyo [Gonçalves07]. . . . .	110
4.9. Valores numéricos de $B(x)$ . . . . .	112
4.10. Valores numéricos de $D$ . . . . .	113
4.11. Frecuencias naturales circulares en rad/s y frecuencias en Hz, del puente peatonal. . . . .	113
4.12. Pico máximo de aceleración del nodo central para 1, 2 y 4 peatones. . . . .	121



# Lista de Símbolos

$\alpha$	Parámetro de amortiguamiento viscoso del MRD en función del voltaje.
$\alpha_a$	Parámetro asociado a un MRD específico.
$\alpha_b$	Parámetro asociado a un MRD específico.
$\alpha_i$	Coefficiente de Fourier para el $i$ -ésimo armónico.
$\beta$	Parámetro asociado a un MRD específico.
$\gamma$	Parámetro asociado a un MRD específico.
$\delta$	Función delta de Dirac.
$\delta x_i$	Raíz cuadrada media normalizada para el desplazamiento.
$\delta \dot{x}_i$	Raíz cuadrada media normalizada para la velocidad.
$\eta$	Constante del sistema eléctrico del MRD.
$\lambda$	Vector de coeficientes de influencia de la fuerza dinámica externa.
$\xi_i$	Fracción de amortiguamiento estructural para el $i$ -ésimo modo de vibrar.
$\phi_i(x)$	Función de interpolación para el $i$ -ésimo modo de vibrar normalizado.
$\phi_{f_i}$	Ángulo de fase para el $i$ -ésimo armónico.
$\varphi$	Solución de la función escalar diferenciable asociada a la función de valor óptimo $J^*$ .
$\psi$	Coefficiente de probabilidad de coincidencia entre la frecuencia peatonal
$\omega_i$	$i$ -ésima frecuencia natural circular de vibrar de la estructura.
$\Gamma$	Vector de influencia de la entrada de fuerza del amortiguador.
$\Phi_i$	Vector modal de vibración para el $i$ -ésimo modo de vibrar.
$\Omega$	Frecuencia circular peatonal.
$c$	Coefficiente de amortiguamiento.
$c_0$	Amortiguamiento viscoso para altas velocidades del MRD en función del voltaje.
$c_{0a}$	Parámetro asociado a un MRD específico.
$c_{0b}$	Parámetro asociado a un MRD específico.
$c_1$	Amortiguamiento viscoso para bajas velocidades en el MRD en función del voltaje.
$c_{1a}$	Parámetro asociado a un MRD específico.
$c_{1b}$	Parámetro asociado a un MRD específico.

---

$c_i$	$i$ -ésimo coeficiente de amortiguamiento.
$d_i$	Desplazamiento de entrepisos del modelo a escala.
$e$	Diferencia entre la referencia y la salida del sistema.
$f_d$	Fuerza reactiva de amortiguamiento producida por el amortiguador.
$f_p$	Frecuencia peatonal de caminar o correr.
$f_s$	Fuerza de rigidez de la estructura.
$f_D$	Fuerza de amortiguamiento de la estructura.
$f_I$	Fuerza de inercia de la estructura.
$k$	Coeficiente de rigidez.
$k_0$	Rigidez para altas velocidades del MRD.
$k_1$	Rigidez del acumulador del MRD.
$k_i$	$i$ -ésimo coeficiente de rigidez.
$\hat{k}_{tt}$	Matriz de rigidez condensada.
$l$	longitud del elemento.
$m$	Masa concentrada.
$m_i$	$i$ -ésima masa concentrada.
$n$	Parámetro asociado a un MRD específico.
$n_p$	Número de peatones.
$n_{eff}$	Número efectivo de peatones.
$p(t)$	Carga dinámica externa.
$p_i(t)$	$i$ -ésima carga dinámica externa.
$r$	error de seguimiento del controlador óptimo.
$t$	Instante de tiempo.
$u$	Entrada de control al sistema.
$u^*$	Ley de control óptimo.
$u_d$	Voltaje filtrado en el circuito del MRD.
$v$	Voltaje aplicado al MRD.
$x_0$	Desplazamiento inicial del resorte $k_1$ del MRD.
$x_d$	Vector de estados.
$x_g$	Desplazamiento del suelo.
$x_p$	Desplazamiento de la barra del pistón del MRD.
$x_s$	Desplazamiento horizontal de la estructura.
$x_{s_i}$	Desplazamiento horizontal de la $i$ -ésima masa concentrada.
$x_t$	Desplazamiento total.
$\dot{x}_d$	Derivada del vector de estados.
$\dot{x}_g$	Velocidad del suelo.
$\dot{x}_s$	Velocidad horizontal de la estructura.
$\dot{x}_{s_i}$	Velocidad horizontal de la $i$ -ésima masa concentrada.
$\ddot{x}_g$	Aceleración del suelo.
$\ddot{x}_s$	Aceleración horizontal de la estructura.
$\ddot{x}_{s_i}$	Aceleración horizontal de la $i$ -ésima masa concentrada.



---

$y$	Salida del sistema.
$y_d$	Desplazamiento interno del MRD.
$y_s$	Desplazamiento vertical de la estructura.
$y_{s_i}$	Desplazamiento vertical de la $i$ -ésima masa concentrada.
$\dot{y}_s$	Velocidad vertical de la estructura.
$\dot{y}_{s_i}$	Velocidad vertical de la $i$ -ésima masa concentrada.
$\ddot{y}_s$	Aceleración vertical de la estructura.
$\ddot{y}_{s_i}$	Aceleración vertical de la $i$ -ésima masa concentrada.
$z$	Vector solución de la ecuación diferencial asociada a la ecuación diferencial de Riccati.
$z_d$	Variable que toma en cuenta el historial de respuestas del MRD.
$A$	Matriz del sistema.
$A_d$	Parámetro asociado a un MRD específico.
$B$	Matriz de entrada del sistema.
$C$	Matriz de salida del sistema.
$C_s$	Matriz de amortiguamiento de la estructura.
$D$	Señal externa de perturbación desconocida acotada.
$E$	Matriz de entrada de la perturbación.
$E_m$	Módulo de elasticidad del material.
$F(x, t)$	Carga dinámica peatonal en función del tiempo y la posición.
$G$	Peso de un peatón.
$\mathcal{H}$	Hamiltoniano.
$I$	Momento de inercia de la sección transversal.
$J$	Índice de desempeño del controlador óptimo.
$J^*$	Función de valor óptimo para el funcional $J$ .
$K$	Matriz de rigidez de la estructura.
$M$	Matriz de masa de la estructura.
$N$	Número de grados de libertad.
$P$	Solución de la ecuación diferencial de Riccati.
$P_{c_i}(t)$	Carga constante móvil.
$P_{h_i}(t)$	Carga armónica móvil.
$P_0$	Amplitud máxima de la carga armónica.
$P_p$	Peso de los peatones.
$Q$	Matriz de ponderación del error de seguimiento.
$R$	Matriz de ponderación del esfuerzo de control.
$V_0$	Velocidad constante de los peatones.
$W$	Función candidata de Lyapunov.



# Lista de Acrónimos

ANN	<i>Artificial neural network</i> -Red neuronal artificial.
ATMD	<i>Active tuned mass damper</i> -Amortiguador de masas sintonizado activo.
AMD	<i>Active mass damper</i> -Amortiguador de masa activo.
CIRES	Centro de instrumentación y registro sísmico A. C.
DACS	<i>Deployable autonomous control system</i> -Sistema de control autónomo desplegable.
DOF	<i>Degree of freedom</i> -Grado de libertad.
ECD	<i>Eddy current damper</i> -Amortiguador de corriente Eddy.
ERD	<i>Electro-rheological damper</i> -Amortiguador electroreológico.
FLC	<i>Fuzzy logic control</i> -Control por lógica difusa.
GA	<i>Genetic algorithm</i> -Algoritmo genético.
GCNES	<i>Gravity-compensated nonlinear energy sink</i> -Disipador de energía no lineal compensado por gravedad.
HJB	<i>Hamilton-Jacobi-Bellman</i> .
LCVA	<i>Liquid column vibration absorber</i> -Absorbedor de vibración de columna líquida.
LQR	<i>Linear quadratic regulator</i> -Regulador cuadrático lineal.
MDOF	<i>Multi degree of freedom</i> -Múltiples grados de libertad.
MPPF	<i>Multiple positive position feedback</i> -Retroalimentación de posición positiva múltiple.
MRD	<i>Magneto-rheological Damper</i> -Amortiguador magnetoreológico.
NARX	<i>Nonlinear autoregressive model with exogenous inputs</i> -Modelo autoregresivo no lineal con entradas externas.
NRMSD	<i>Normalized root mean square deviation</i> -Desviación de la raíz cuadrada media normalizada.
PD	Proporcional-Derivativo.
PI	Proporcional-Integral.
PID	Proporcional-Integral-Derivativo.
PVID	<i>Parallel Viscous Inerter Damper</i> - Inerter amortiguador viscoso paralelo.
RACM	Red acelerográfica de la Ciudad de México.

RIDTMD	<i>Rotational Inertia Double Tuned Mass Damper</i> -Amortiguador de masa sintonizada de doble inercia rotacional.
SASD	<i>Semiactive stiffness damper</i> -Amortiguador de rigidez semiactivo.
SDCF	<i>State dependent coefficient factorized</i> -Factorización de coeficientes dependientes del estado.
SDOF	<i>Single degree of freedom</i> -Un sólo grado de libertad.
SMC	<i>Sliding mode control</i> -Control por modos deslizantes.
TID	<i>Tuned inerter damper</i> -Amortiguador inercial sintonizado.
TMD	<i>Tuned mass damper</i> -Amortiguador de masa sintonizado.
TLCD	<i>Tuned liquid column damper</i> -Amortiguador de columna líquida sintonizado.

# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo se presenta una revisión del estado del arte, sobre los tipos y dispositivos de control comúnmente conocidos y utilizados en el área de control estructural. Así mismo, se da la justificación, la motivación y la hipótesis que sirve como base para la realización de la presente tesis. Al final del capítulo se presentan los objetivos esperados y las contribuciones que este trabajo ofrece.

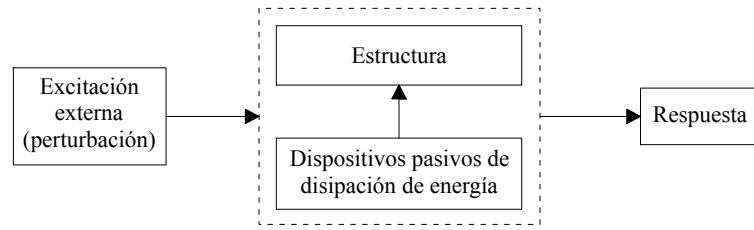
### 1.1. Estado del arte

El control de estructuras civiles sujetas a una sollicitación o fuerza dinámica externa, producida por sismo, por viento o por condiciones de servicio, representa una tarea desafiante para el campo de la Ingeniería civil. La manera convencional de afrontar esta tarea es diseñando los elementos estructurales con la suficiente capacidad para resistir las cargas vivas y muertas, así como permitiendo la deformación de los materiales en la zona de rango plástico. De manera alternativa y no obstante que la primera mención y uso del término control estructural en la Ingeniería civil data de hace más de 40 años [Yao72], en la actualidad, existen nuevos conceptos de control estructural y dispositivos de control para reducir la respuesta de estructuras civiles sujetas a la acción de cargas dinámicas, estos dispositivos de control o actuadores, son

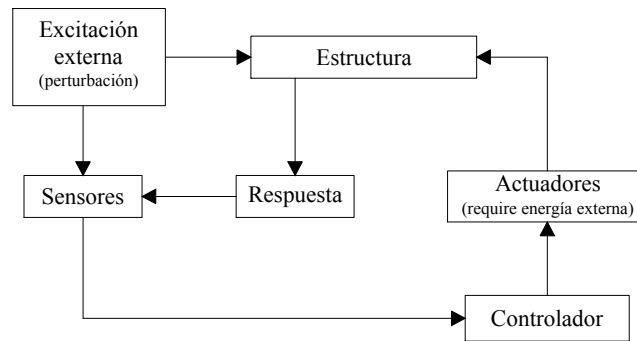
responsables de mover la estructura o de controlar sus movimientos [Xu17]. Dentro de estos conceptos se encuentran el control estructural pasivo y el control estructural activo, que pueden limitar las deformaciones estructurales al rango elástico [Li18]. Una combinación entre estos dos tipos de control ha dado lugar a los sistemas de control semiactivo, los que mantienen la confiabilidad de los sistemas pasivos y, a la vez, poseen la característica de ser ajustables en sus parámetros de control como los sistemas activos. Comparado con una estructura tradicional, una estructural con control puede modificar su respuesta dinámica para reducir el desplazamiento estructural, la velocidad y la aceleración producidas por fuerzas dinámicas externas como las mencionadas. En las siguientes secciones se describen los principales tipos de control estructural.

## 1.2. Principales tipos de sistemas de control

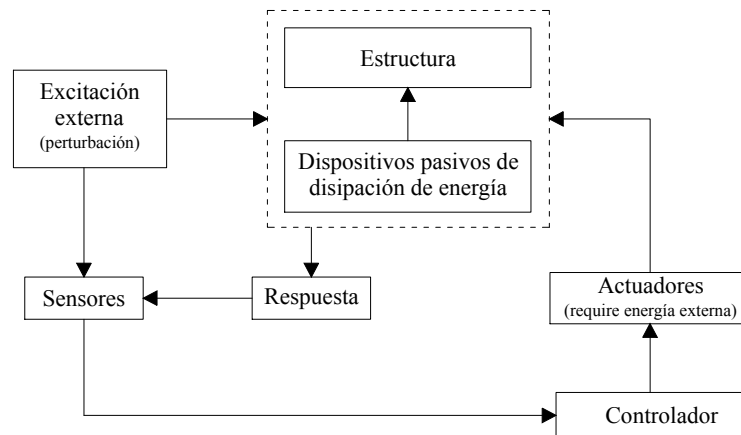
El control de vibraciones en estructuras se enfoca en prevenir daños estructurales al utilizar dispositivos de control para reducir las vibraciones. Existen diferentes dispositivos de control que garanticen la seguridad estructural durante solicitaciones externas eventuales como las producidas por sismo, por viento o por condiciones de servicio extremas. Los dispositivos físicos para la implementación de un sistema de control son: los actuadores, aisladores y/o amortiguadores que se utilizan para atenuar las vibraciones no deseadas en las estructuras, éstos pueden tomar diversas formas, dependiendo del tipo de control a implementar. Los tres principales tipos o conceptos en sistemas de control estructural son el control pasivo, el control activo y el control semiactivo. Estas tres principales clases se pueden combinar para formar los llamados sistemas de control híbrido. En la Figura 1.1 se muestran los diagramas de bloques que describen, a grandes rasgos, el funcionamiento de los principales sistemas de control.



(a) Control pasivo.



(b) Control activo.



(c) Control híbrido.

Figura 1.1: Funcionamiento de los principales tipos de sistemas de control estructural.

Para el caso del control pasivo, la Figura 1.1a presenta un esquema de control en lazo abierto donde la excitación externa, o perturbación, es aplicada a una estructura civil que cuenta con algún tipo de dispositivo pasivo de disipación de energía, el cual modifica la respuesta estructural. Por su parte, para el control activo, la Figura 1.1b describe un esquema de control en lazo cerrado por retroalimentación de estado, en el que tanto la excitación externa o perturbación, como la respuesta estructural, son sensadas y enviadas al controlador para que éste determine la acción de control por aplicar a los actuadores y con ello, modificar la respuesta estructural. Por último, para el control híbrido, la Figura 1.1c muestra el mismo esquema de control en lazo cerrado, descrito para la Figura 1.1b, pero con la diferencia de que la estructura, además de ser sujeta a la acción del dispositivo de control activo, contiene un dispositivo pasivo de disipación de energía.

Las siguientes subsecciones describen cada uno de estos esquemas de control y la Tabla 1.1 muestra un listado, no exhaustivo, de los dispositivos más comunmente utilizados bajo el sistema de control correspondiente.

### 1.2.1. Sistemas de control pasivo

Un sistema de control pasivo, no requiere de fuentes de alimentación de energía externa para su operación [Andersson15] y utiliza el movimiento propio de la estructura para generar las fuerzas de control en función de su respuesta y de la localización de los dispositivos de control pasivo [Symans99]. Estos dispositivos también denominados de disipación de energía, modifican la respuesta estructural sin utilizar una fuente de energía externa y son instalados en las estructuras para absorber una cantidad significativa de la energía inducida por viento, sismo o carga de servicio. La energía se disipa al producir un movimiento relativo dentro del dispositivo de control respecto al movimiento de la estructura [Symans99]. Los tipos más comunes de dispositivos pasivos incluyen el amortiguador de masa sintonizada (TMD, por sus siglas en inglés) que consiste, básicamente, en un dispositivo con una masa sujeta a la estructura de



manera que oscile a la misma frecuencia que ella, pero con un cierto desfaseamiento. Por lo general, la masa se sujeta a la estructura a través de un sistema de resorte( $k$ )-amortiguador( $c$ ) y la energía se disipa a través del amortiguador mientras que se desarrolla el movimiento relativo entre la masa y la estructura [Kwok95]. Un sistema simple de TMD se muestra en la Figura 1.2, donde  $k$  y  $c$  representan la rigidez y el amortiguamiento que actúan, respectivamente, sobre la masa  $m$  de la estructura;  $k_d$  y  $c_d$  corresponden a la rigidez y el amortiguamiento del TMD con masa  $m_d$ , mientras que  $x$  y  $x_d$  son el desplazamiento de la estructura y del TMD respectivamente;  $f$  es la fuerza actuando sobre la estructura.

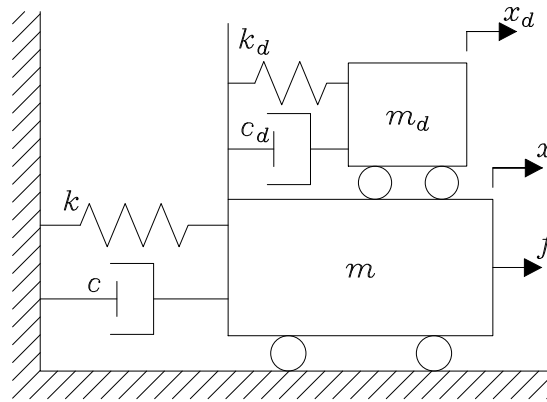


Figura 1.2: Modelo mecánico de una estructura con TMD.

El amortiguador sintonizado de columna líquida (TLCD, por sus siglas en inglés) es otro dispositivo que disipa la energía de una manera similar a la de los TMD, con la diferencia de que la masa secundaria  $m_d$ , es reemplazada con una columna líquida, lo que resulta en una respuesta altamente no lineal. Los TLCD disipan la energía al pasar líquido de un lado a otro a través de orificios. Un estudio comparativo del desempeño de estos dos tipos de amortiguadores de masa: el TMD y el TLCD, que además incluye un tercer tipo de amortiguador, llamado amortiguador de vibración de columna líquida (LCVA, por sus siglas en inglés), fueron discutidos

por [Chang99] y concluye que el TMD tiene un mejor desempeño en la reducción de vibraciones que los otros dos amortiguadores. Otros dispositivos de control pasivo [Soong02] son los amortiguadores metálicos de deformación, que disipan la energía a través de la deformación inelástica del metal; los amortiguadores de fricción, que utilizan el mecanismo de fricción que se genera entre dos cuerpos sólidos donde existe desplazamiento relativo de uno respecto del otro y con ello proveen la disipación de energía requerida; y los amortiguadores viscoelásticos que disipan la energía a través de la deformación por cortante en el material viscoelástico, colocado entre dos placas elásticas que experimentan un desplazamiento relativo longitudinal entre ellas. Los amortiguadores de flujo viscoso tienen un pistón dentro de un contenedor lleno con un fluido altamente viscoso, el pistón contiene orificios, a través de los cuales pasa el fluido de un lado hacia otro lo que resulta en disipación de energía. Un resumen, no exhaustivo, de estos dispositivos se muestra en la Tabla 1.1.

Los amortiguadores pasivos son simples y debido al hecho de que no agregan energía a la estructura, no la pueden desestabilizar. La mayoría de los amortiguadores pasivos se pueden sintonizar solamente a una frecuencia estructural y a características de amortiguamiento particular. Algunas veces estos valores sintonizados no corresponderán a la excitación de entrada y a la respuesta estructural. Por ejemplo, la no linealidad en una estructura causará variación en sus frecuencias y modos naturales de vibrar durante una excitación grande y una estructura con múltiples grados de libertad (MDOF, por sus siglas en inglés), vibrará en muchas frecuencias durante un evento sísmico. Como los amortiguadores pasivos no se pueden adaptar a los cambios en la respuesta de la estructura, no pueden asegurar una supresión satisfactoria de las vibraciones [Fisco11]. Las limitaciones que presentan estos dispositivos a la variación de las cargas dinámicas o parámetros estructurales, conlleva al desarrollo y estudio de sistemas de control más avanzados basados en dispositivos de control activos, semiactivos o híbridos.

### 1.2.2. Sistemas de control activo

El concepto de control activo existe desde inicios de los años 70's y su aplicación a escala natural se concretó en 1989 [Spencer-Jr.97]. El sistema de control activo, es un sistema que requiere de una fuente de alimentación externa que dependiendo el tamaño de la estructura tendrá requerimientos de potencia del orden de los kilowatts o hasta varios megawatts [Thenozhi13], para generar las fuerzas de control sobre la estructura, a través de los actuadores electromecánicos (servomotores) o electrohidráulicos instalados en ella [Gutierrez-Soto13] y que modifican su rigidez o su amortiguamiento. Las fuerzas de control se generan en base a la retroalimentación de información de sensores que miden la excitación y la respuesta de la estructura [Symans99] y los actuadores colocados en puntos estratégicos de la estructura, aplicarán las fuerzas necesarias para compensar las fuerzas producidas por cargas accidentales o de servicio y así minimizar las vibraciones de la estructura [Adeli99]. El algoritmo de control genera la señal de control requerida por los actuadores para atenuar la vibración. Dependiendo del tamaño de la estructura, la energía requerida por los actuadores puede variar del orden de los kilowatts hasta los megawatts [Soong91]. Como los dispositivos activos pueden trabajar en diferentes modos de vibración, resultan ser una buena elección para sistemas estructurales con múltiples grados de libertad.

Dentro de los principales tipos de dispositivos utilizados en el control estructural activo se tiene el amortiguador de masa sintonizada activo (ATMD, por sus siglas en inglés), también conocido como amortiguador de masa activo (AMD, por su siglas en inglés). En un sistema ATMD se coloca un actuador que aplica fuerza entre la estructura y entre un TMD pasivo para mover la masa del amortiguador, esta fuerza se calcula en tiempo real. En este tipo de sistema, entre el 1 y el 2% del total de la masa de la estructura es directamente excitada por un actuador. Otro tipo común de dispositivo activo son los tirantes y tendones activos que, generalmente, consisten en un conjunto de tendones o tirantes pretensados, conectados a la estructura y cuyas

tensiones son controladas por servomecanismos electrohidráulicos. Una de las razones principales para usar este tipo de control se relaciona con el hecho de que los tendones y tirantes, en algunos casos, ya forman parte de la estructura, por lo que este tipo de control puede utilizar miembros estructurales preexistentes y con ello minimizar las modificaciones o adiciones necesarias. Este tipo de dispositivos se ha utilizado para el control de estructuras esbeltas, edificios altos, puentes atirantados y estructuras marinas [Soong94]. Un resumen, no exhaustivo, de estos dispositivos se muestra en la Tabla 1.1.

Si bien los dispositivos de control activo son efectivos en la reducción de la respuesta estructural producida por sismos de gran magnitud, existen varios retos para los diseñadores, entre los que se encuentran el cómo reducir los costos iniciales de instalación y de mantenimiento, eliminar la elevada cantidad de energía requerida, incrementar la confiabilidad y robustez del sistema, y ganar aceptación de las tecnologías no convencionales como esta. Estos retos condujeron al desarrollo de los dispositivos de control semiactivo e híbridos [Forrai02].

### 1.2.3. Sistemas de control semiactivo

El sistema de control semiactivo se define como un sistema de control con el mismo principio de los sistemas de control activo, pero con la diferencia de que requieren una pequeña fuente de alimentación externa para su operación [Fisco11]. Las fuerzas de control se desarrollan por dispositivos semiactivos que combinan las propiedades de los dispositivos pasivos y de los semiactivos. Los dispositivos de control semiactivo, por lo general se originan de un dispositivo de control pasivo que ha sido modificado para permitir ajustar en tiempo real sus propiedades mecánicas como la rigidez o el amortiguamiento, pero no pueden aportar energía de manera directa al sistema a controlar [Preumont11]. Como ocurre en el sistema de control activo, el controlador monitorea la retroalimentación de la respuesta estructural y genera una señal de control adecuada para los dispositivos semiactivos. Al mismo tiempo, como ocurre con un sistema

Tabla 1.1: Principales dispositivos de control.

<b>Pasivo</b>	Amortiguador de masa sintonizada (TMD)
	Amortiguador de columna líquida sintonizada (TLCD)
	Disipador de vibración de columna líquida (LCVA)
<b>Activo</b>	Amortiguador de masa sintonizada activo (ATMD)
	Tirantes y tendones activos
<b>Semiactivo</b>	Dispositivos de control de rigidez
	Dispositivos de control por fricción semiactivo
	Dispositivos de control de rigidez
	Amortiguador de rigidez semiactivo (SADS)
	Amortiguador electroreológico (ERD)
	Amortiguador magnetoreológico (MRD)
<b>Híbrido</b>	Combinaciones de los anteriores

de control pasivo, las fuerzas de control se desarrollan como resultado del movimiento propio de la estructura y su magnitud se ajusta al modificar las propiedades mecánicas del dispositivo a través de la fuente externa de alimentación [Symans99]. Las fuerzas de control en la mayoría de los dispositivos semiactivos actúan en oposición al movimiento del sistema estructural, por lo que promueven la estabilidad global de la estructura [Symans99]. La resistencia variable de estos dispositivos se puede aplicar en una gran variedad de formas físicas, como por ejemplo válvulas de control, fluidos controlables o juntas de fricción con actuadores piezoeléctricos [Preumont11].

Una forma común de estos actuadores son los dispositivos de control de rigidez que se utilizan para modificar la rigidez y, por lo tanto, las características del periodo natural de vibración de la estructura a la cual se encuentran sujetos, de manera que se establezca una condición de no resonancia durante la aplicación de la carga dinámica. Al igual que los dispositivos de control por fricción pasivos, se tienen los de control

por fricción semiactivos, que disipan la energía a través de la fricción causada por el deslizamiento entre dos superficies, con la diferencia de que éstos últimos utilizan un actuador para ajustar la fuerza de contacto entre las dos superficies. Los amortiguadores de rigidez semiactivos (SASD, por sus siglas en inglés) consisten de un cilindro relleno con fluido, un pistón y una válvula controlada por un motor que regula la apertura de la válvula, con la que se controla el flujo de un fluido viscoso, por lo general un aceite, y permite ajustar el coeficiente de amortiguamiento en tiempo real [Patten98].

Otro dispositivo común es el amortiguador electroreológico (ERD, por sus siglas en inglés) que consiste en un cilindro hidráulico que contiene partículas dieléctricas de tamaño microscópico suspendidas dentro de un fluido, por lo general, aceite. En la presencia de un campo eléctrico fuerte, las partículas se polarizan y se alinean, ofreciendo con ello un incremento de resistencia al flujo. Al variar el campo eléctrico se puede variar el comportamiento dinámico del amortiguador. Al incrementar el campo eléctrico el comportamiento del fluido electroreológico cambia de ser un fluido viscoso al comportamiento de un sólido blando en cuestión de milisegundos [Symans99].

Un dispositivo análogo en funcionamiento al ERD, pero con ventajas en su funcionamiento es el amortiguador magnetoreológico (MRD, por sus siglas en inglés) que es un análogo magnético de los ERD, salvo que el efecto de control es gobernado por un campo magnético en lugar de un campo eléctrico. El comportamiento del fluido magnetoreológico se controla al exponer el fluido a un campo magnético. En ausencia de un campo magnético, el fluido magnetoreológico fluye libremente, mientras que en la presencia de un campo magnético el fluido se vuelve semisólido. El electroimán colocado dentro del émbolo del pistón se utiliza para generar el campo magnético. La fuerza del amortiguador tiene una variación de menos del 10 % dentro de un rango de temperatura de  $-40^{\circ}\text{C}$  a  $150^{\circ}\text{C}$  y se puede modificar en tiempos del orden de los milisegundos [Symans99]. La Figura 1.3 muestra de manera esquemática un amortiguador con fluido magnetoreológico. La Tabla 1.1 muestra un resumen de estos dispositivos.

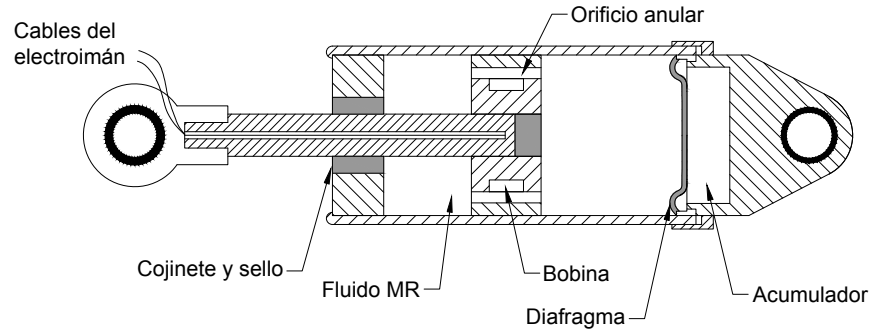


Figura 1.3: Esquemático de un amortiguador magnetoreológico, MRD.

Los MRD tienen varias ventajas sobre los ERD, lo que los hace más populares para aplicaciones de control estructural. Estos dispositivos tienen un mayor esfuerzo de fluencia, es decir, el máximo esfuerzo que pueden desarrollar en la zona de deformaciones elásticas, comparado con el de los electroreológicos, con una menor entrada de energía y son menos sensibles a las impurezas del fluido magnetoreológico [Yu16]. La Tabla 1.2 muestra un comparativo entre ambos tipos de amortiguador.

Tabla 1.2: Propiedades de los amortiguadores magnetoreológicos y electroreológicos.

Propiedad	MRD	ERD
Máx. esfuerzo de fluencia	50–100 kPa	2–5 kPa
Campo máximo	~250 kA/m	~4 kV/mm
Viscosidad plástica	0.1–1.0 Pa-s	0.1–1.0 Pa-s
Rango de temp. operable	–40 a 150 °C	+10 a 90 °C
Estabilidad	No afectada por impurezas	No operable con impurezas
Tiempo de respuesta	milisegundos	milisegundos
Densidad	3–4 g/cm <sup>3</sup>	1–2 g/cm <sup>3</sup>
Densidad energética máx.	0.1 J/cm <sup>3</sup>	0.001 J/cm <sup>3</sup>
Alimentación	2–25 V; 1–2 A	2000–5000 V; 1–10 mA

Como dispositivos semiactivos también se tiene el amortiguador de masa sintonizada, TMD semiactivo, análogo al TMD pasivo, con la diferencia que de un dispositivo de amortiguamiento variable, tal como un amortiguador MRD, se agrega al sistema TMD para ajustar su capacidad de sintonización en tiempo real. También se cuenta con el amortiguador de columna líquida, TLCD semiactivo, en el que el tamaño del orificio que permite el flujo de líquido se modifica en tiempo real para controlar la cantidad de intercambio del flujo.

#### **1.2.4. Sistemas de control híbrido**

Los dispositivos híbridos se forman con la utilización de dispositivos tanto pasivos como activos o pasivos y semiactivos. El uso combinado de dispositivos pasivos como los TMD y dispositivos activos como tendones u otro, llevan a lo que se conoce como sistemas híbridos que se utilizan para aplicaciones estructurales específicas. El control híbrido aprovecha las ventajas de cada uno de los sistemas de manera individual, lo que resulta en un sistema de protección más efectivo. Por ejemplo, en combinación con un sistema pasivo, la fuerza requerida por un dispositivo activo puede reducirse significativamente, lo que permite que el dispositivo de control activo opere con una eficiencia y eficacia más altas. Al mismo tiempo, un sistema puramente pasivo, como un aislador de base, se ve limitado a estructuras de poca altura debido a la posibilidad de que el aislador se desprenda o levante por efecto de grandes aceleraciones horizontales, la complementación con un sistema de control activo que reduzca, en cierta medida, esas aceleraciones, reduce el efecto de levantamiento y hace posible su aplicación a estructuras de mayor altura [Soong94].

### **1.3. Algoritmos de control**

El objetivo de los sistemas de control estructural es reducir la vibración y mejorar la integridad de la estructura debida a sismos, cargas de servicio o fuertes vientos,



a través de una fuerza de control externa [Kim00]. En los sistemas de control activo y semiactivo, resulta esencial diseñar un controlador que envíe las señales de control apropiadas a los actuadores de manera que la vibración estructural se vea reducida. La estrategia de control debe ser simple, robusta, tolerante a fallas, no necesita ser óptima y deber ser posible su realización [Tang96].

Un sistema de control pasivo que utiliza TMD's puede ser utilizado para reducir las vibraciones de un modo específico de vibración, sin embargo, su efectividad se ve limitada debido a que solamente puede controlar vibraciones de manera efectiva en un estrecho margen de variación respecto de la frecuencia para la cual fue sintonizado; en ese sentido, un dispositivo pasivo, novedoso para el control de vibraciones, es el llamado "inertor" que ofrece un amplio rango de posibles aplicaciones en la práctica de la ingeniería. Su efectividad ha sido probada, analíticamente, en la reducción de vibraciones en sistemas estructurales [Deastra18]. Una de las estrategias más efectivas de control que emplean un inertor, es el amortiguador de inercia sintonizado (TID, por su siglas en inglés) cuyo elemento de inercia se conecta en serie con un sistema masa-amortiguador paralelo. Cuando el elemento de inercia se conecta en paralelo con el elemento amortiguador se llama amortiguador inertor viscoso paralelo (PVID, por sus siglas en inglés), un análisis relativo a este tipo de dispositivos se muestra en [Deastra18], donde demuestra que un PVID puede ser utilizado para la reducción de la respuesta pico de estructuras sujetas a una excitación en su base. En [Javidialesaadi19] se presenta el análisis de la respuesta de un sistema de un grado de libertad que utiliza un TMD basado en un amortiguador de masa sintonizada de doble inercia rotacional con un inertor (RIDTMD, por sus siglas en inglés), donde demuestra que el RIDTMD tiene un desempeño superior al TMD cuando el primero se coloca en una estructura sujeta a una excitación estacionaria.

Recientemente, un amortiguador de masa pasivo conocido como disipador de energía no lineal compensado por gravedad (GCNES, por sus siglas en inglés) ha sido propuesto para mitigar las vibraciones verticales [Ramsey18]; la no linealidad

utilizada para producir la rigidez de este dispositivo, compensa la diferencia vertical que resulta del peso propio del dispositivo y le permite alcanzar una dinámica con una no linealidad cúbica. Esta no linealidad permite que el GCNES interactúe en un amplio rango de frecuencias con la estructura que controla. En [Ramsey18] se presenta el uso de un GCNES en el control de la reducción de vibraciones de un sistema de piso y concluye que un TMD es más efectivo para mitigar excitaciones dinámicas en la frecuencia específica que está sintonizado, y que el GCNES puede proporcionar un control efectivo de las vibraciones en un rango más amplio de frecuencias cercanas al punto de resonancia de la estructura.

En referencia a los sistemas de control activo, el amortiguador de corriente Eddy (ECD, por sus siglas en inglés) también llamado amortiguador de masa electromagnético (EMD, por sus siglas en inglés) es un dispositivo desarrollado en años recientes, que se utiliza ampliamente en el sector de la ingeniería mecánica para el frenado de trenes y turbinas, así como en el control de vibraciones de automóviles, sin embargo, los esquemas de control para estructuras civiles, por lo general, utilizan dispositivos más tradicionales, por lo que [Ao17], propone que el uso de dispositivos novedosos como el ECD tienen el potencial de complementar a los dispositivos más tradicionales. En [Ao17] se valida la propuesta al aplicar un ECD, dentro de un TMD, al control de vibraciones en un puente peatonal real y concluye, en base a resultados analíticos por simulación, que el amortiguador propuesto hace que el puente cumpla los requerimientos de diseño establecidos.

Tanto en los sistemas de control activo como semiactivo, la mayoría de los dispositivos de control se instalan de manera permanente y son diseñados para una estructura específica, lo que resulta impráctico para controlar estructuras temporales (como puentes peatonales o accesos temporales), donde el requerimiento de control, depende del uso pretendido. En [Goorts18] se presenta el concepto de sistemas de control autónomo desplegable (DACS, por sus siglas en inglés), donde el concepto de desplegable se refiere a que el sistema se puede implementar rápidamente en las

estructuras, mientras que el aspecto de autonomía se refiere a la facilidad de colocación, en tiempo real, del sistema y a la consecuente generación de fuerzas de control activo; para ello, utiliza un EMD y un vehículo terrestre no tripulado equipado con sensores de visión, que coloca el EMD en la estructura y transmite las fuerza activas generadas por el EMD hacia el suelo; valida los resultados del diseño del controlador que propone, de manera experimental, en un puente peatonal a escala real.

Referente a sistemas de control semiactivo, [Enríquez-Zárate15] propone un sistema de control para una estructura tipo edificio de tres niveles, basado en un controlador de retroalimentación de posición positiva múltiple (MPPF, por sus siglas en inglés), en combinación con un control por modos deslizantes para aportar robustez al sistema, contra la incertidumbre en algunos parámetros del sistema y del movimiento del suelo y con ello controlar un MRD representado por un modelo polinomial. Muestra que sus resultados experimentales son efectivos en el caso de excitaciones en el suelo, similares a las de un sismo. Otro esquema de control semiactivo reciente, propuesto por [Weber17], utiliza péndulos de fricción esféricos semiactivos basados en un amortiguadores de aceite, controlados en tiempo real. Propone cuatro leyes de control y las compara, en términos de las aceleraciones absolutas y otros parámetros del sistema. Con los resultados que obtiene, afirma que mejora significativamente el aislamiento de la estructura en comparación con otros tipos de péndulos de fricción.

Basado en el modelo del sistema de control, el control de estructuras se puede clasificar como: 1) control lineal; 2) control no lineal; 3) control variante en el tiempo, en el cual las funciones de control y sus parámetros cambian con el tiempo; 4) sistemas de control en tiempo discreto, en el cual los parámetros de control varían en intervalos de tiempo discreto; 5) sistemas de control con parámetros centralizados en los cuales los parámetros de control están centralizados; 6) sistemas de control con parámetros distribuidos, son aquellos en los cuales los parámetros son función del espacio; 7) sistemas de control determinístico en los cuales todas las operaciones matemáticas son determinísticas y 8) sistemas de control estocástico en los cuales las ecuaciones

matemáticas y las operaciones son estocásticas [Datta03]. La mayoría de las teorías de control reportadas en la literatura se basan en sistemas de control determinístico con los parámetros de la estructura concentrados y operaciones de control variantes en el tiempo [Datta03].

## 1.4. Justificación

El modelado de estructuras civiles usando la segunda ley del movimiento de Newton, así como la teoría del control óptimo están ampliamente descritas en la literatura. La representación en espacio de estados de una estructura civil permite hacer un análisis de su respuesta dinámica con métodos no convencionales en el ámbito de la Ingeniería Civil. Esta representación facilita la inclusión en el modelo, de perturbaciones dinámicas que actúan sobre la estructura, así como la inclusión de la acción de amortiguamiento ejercida por un sistema de reducción de vibraciones que estabilice a la estructura en su posición de equilibrio estático.

Ciertas clases de sistemas no lineales pueden ser representadas en la forma de factorización de coeficientes dependientes del estado (SDCF, por sus siglas en inglés), donde el sistema no lineal se factoriza con una estructura similar a la lineal, pero conteniendo matrices que dependen del estado, lo que conserva la no linealidad del sistema. Basado en la representación SDCF, esta tesis pretende desarrollar una técnica de modelado no lineal, en espacio de estados, para estructuras civiles sujetas a perturbaciones dinámicas externas, como las producidas por un sismo o por cargas de servicio, que incluyan un sistema de amortiguamiento semiactivo de las vibraciones y que admita una entrada de control obtenida a través de una técnica de control óptimo no lineal robusto que estabilice a la estructura en su posición de equilibrio estático, aún estando sujeta a una perturbación acotada y variante en el tiempo.

La mayoría de las referencias en la literatura, hacen alusión a controladores que determinan la fuerza necesaria para estabilizar la estructura, para posteriormente, en

una segunda etapa, determinar la acción de control a aplicar sobre el dispositivo de control y aquellos que llegan a determinar directamente la acción de control sobre el dispositivo, carecen de un modelo matemático. En el caso de esta tesis, el controlador óptimo no lineal robusto propuesto para el control estructural, toma en cuenta el modelo no lineal del sistema estructura-dispositivo de control y la salida del controlador corresponde directamente a la acción de control, que para el caso específico del MRD, corresponde al voltaje necesario para reducir la respuesta estructural.

## 1.5. Motivación

Las estructuras civiles con frecuencia sufren de excesivas vibraciones inducidas por la acción de cargas dinámicas producidas por viento o sismos, o bien, por cargas de trabajo, lo que hace necesario tomar medidas de control para mejorar las condiciones de servicio. Estas medidas de control, pueden implementarse a través de algún tipo de control estructural como puede ser el control estructural pasivo, el control estructural activo, el control estructural semiactivo o alguna combinación de los anteriores bajo el tipo de control estructural híbrido. Al usar controladores activos o semiactivos, una estructura puede adaptar su respuesta estructural a la aplicación de cargas dinámicas. Las estructuras con esta capacidad de adaptación se conocen como estructuras inteligentes. La tecnología relacionada con las estructuras inteligentes esta siendo cada vez más y más utilizada en el campo de la ingeniería estructural ya que es una tecnología que presenta grandes beneficios en términos relacionados con la prevención de pérdidas humanas y de daño estructural o al contenido de ellas. La implementación satisfactoria de este tipo de tecnología requiere de un algoritmo de control efectivo para determinar la magnitud de la acción de control a aplicar a la estructura. Al conocer el comportamiento y las propiedades del sistema formado por la estructura y el dispositivo de control, siendo éste un sistema no lineal, la utilización de un esquema de control óptimo no lineal para la reducción de vibraciones,

a través de un control estructural semiactivo, representa una alternativa adecuada para el análisis y el control de la respuesta estructural, siendo factible hacer un mejor control sobre el sistema en una región de operación más grande, es decir, que reduce las vibraciones del sistema en un rango de respuesta estructural más amplio.

## 1.6. Hipótesis

El control óptimo es ampliamente utilizado para el control de sistemas en procesos de diferente índole. Al contar con el modelo del sistema no lineal formado por una estructura civil, sujeta a vibración forzada por una carga dinámica externa y un actuador o dispositivo de control semiactivo, que admita una entrada de control, resulta posible diseñar un esquema de control óptimo no lineal y robusto que reduzca las vibraciones de la estructura, y minimice un funcional de costo cuadrático asociado a la respuesta del sistema, para llevarla a su estado de equilibrio estático usando el menor esfuerzo de control posible.

## 1.7. Objetivo

Proponer un enfoque de control estructural no lineal, diferente al reportado en la literatura, haciendo uso de los principios teóricos del control óptimo, que reduzca las vibraciones en estructuras civiles y se base en el conocimiento de los modelos que describen el comportamiento dinámico tanto de la estructura a controlar como del dispositivo físico de control, lo que permite hacer una representación integral, en espacio de estados, del sistema no lineal a controlar.

### 1.7.1. General

Desarrollar un algoritmo de control óptimo no lineal aplicado para la reducción de la respuesta de desplazamiento, velocidad y aceleración de estructuras civiles que

incluyan en su modelo un dispositivo de control de tipo semiactivo.

### 1.7.2. Particulares

- Representación del modelo de estructuras civiles en espacio de estados.
- Representación del modelo de amortiguador magnetoreológico en espacio de estados.
- Implementación de un controlador óptimo no lineal para el control de la respuesta de estructuras civiles.

## 1.8. Contribuciones

La contribución es directamente en el área de sistemas de control, aplicado a estructuras civiles (control estructural), a través de la teoría que respalda el esquema de control óptimo. Se hace control estructural por medio de técnicas no convencionales dentro del ámbito de la Ingeniería Civil, como la representación en espacio de estados, a través de la combinación de las áreas de Ingeniería de control y dinámica estructural, al modelar un sistema estructural que modifica su respuesta de desplazamiento, velocidad y aceleración debido a la acción de un dispositivo de control. De manera puntual son:

- Conjuntar en representación de espacio de estados, la dinámica lineal de la estructura civil y la dinámica no lineal del dispositivo de control y usar la representación SDCF, como sistema a controlar.
- La síntesis de una estrategia de control óptimo no lineal robusta para reducir las vibraciones en estructuras civiles sujetas a perturbaciones externas variantes en el tiempo, basado en el uso de dispositivos semiactivos.

- Plantear un algoritmo de control eficiente que pueda servir como punto de partida para la implementación de un sistema de control estructural a escala natural.

## 1.9. Organización de tesis

La tesis esta organizada de la siguiente manera:

- En el Capítulo 2 se presenta el modelado de estructuras civiles verticales (tipo edificio) y horizontales (tipo puente), así como el modelo de Bouc-Wen modificado de un amortiguador magnetoreológico, lo que permite tener la base para analizar el comportamiento dinámico del sistema completo al ser sujeto a una perturbación dinámica externa.
- En el Capítulo 3 se presentan, de manera breve, algunos de los esquemas de control lineal y no lineal que se utilizan en el control estructural. Además, presenta el controlador óptimo no lineal propuesto, que permite llevar a cabo la estabilización del sistema, aún con la presencia de una perturbación variante en el tiempo, al incluir el sistema dinámico formado por la estructura-amortiguador en el controlador.
- En el Capítulo 4 se presenta la aplicación del esquema de control óptimo no lineal propuesto a dos diferentes estructuras sujetas cada una a dos diferentes condiciones de carga. La primer condición para vibración libre y la segunda para vibración forzada. Además se compara la respuesta del control óptimo no lineal propuesto con la respuesta de un controlador PD modificado.
- En el Capítulo 5 se concluye la tesis y se propone trabajo futuro.



## Capítulo 2

# Modelado de estructuras civiles

### 2.1. Introducción

El modelo más utilizado para describir el comportamiento que tiene una estructura vertical (como es el caso de un edificio), frente a una sollicitación externa, corresponde al denominado edificio de corte, en el que se considera que la masa total del sistema se concentra en las losas, mismas que se consideran infinitamente rígidas en su plano y que las columnas sólo aportan rigidez, pero no masa. También se admite que las rotaciones en los extremos de las columnas son nulas y que su deformación axial es despreciable, de manera tal que el sistema queda definido por un grado de libertad por planta, asociado a la traslación horizontal respecto a la base del edificio [Medina08]. Para el caso de estructuras horizontales, como los puentes, estos se pueden representar con modelos matemáticos simplificados, considerándolos como vigas tipo Euler-Bernoulli, sometidas simultáneamente a cargas constantes y armónicas en movimiento [Huergo-R16]. Dependiendo de las hipótesis que se manejen, los parámetros del sistema estructural como son la masa  $m$ , el amortiguamiento  $c_s$  y la rigidez  $k$ , se pueden considerar distribuidos a lo largo del elemento estructural (modelo distribuido), o bien, concentrados en determinados puntos de la estructura (modelo discreto). Bajo cualquiera de los dos tipos de modelos, distribuido o discreto, los sis-

temas con los que se trabaja en ingeniería civil pueden ser descritos por la segunda ley del movimiento de Newton [Huang14].

Este capítulo describe el modelado en espacio de estados de dos diferentes tipos de estructura civil; una vertical tipo edificio y una horizontal tipo puente, que incluyen la dinámica de un MRD, lo que en su conjunto se denominará el sistema. Para el diseño del control de una estructura civil es necesario conocer sus características dinámicas, a través de su modelo matemático, lo que permitirá la síntesis de una estrategia de control para producir el comportamiento dinámico esperado de la estructura, dentro de una región de operación.

## 2.2. Propiedades o parámetros de una estructura

La mayoría de los sistemas estructurales ya sea horizontales o verticales, son estudiados como un sistema de masas concentradas, resortes y amortiguadores finitos, llamados sistemas discretos o sistemas de parámetros concentrados, mientras que los sistemas distribuidos, con un número infinito de grados de libertad, llamados sistemas continuos necesitan un número infinito de coordenadas para definir su curva de deformación elástica, haciendo la solución analítica complicada. En este sentido una idealización de masas concentradas en los nodos de una estructura discreta es, por lo general, satisfactoria, ya que dichos sistemas pueden idealizar de manera efectiva muchas clases de estructuras y además, existen métodos efectivos para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que gobiernan su movimiento.

## 2.3. Modelado de una estructura vertical tipo edificio

Una estructura vertical como una torre o una formada por traveses y columnas, es decir, conformada por marcos y crujeías, se puede idealizar como un ensamble de estos

elementos, interconectados en puntos nodales llamados nodos. Para comprender el fenómeno de vibración en una estructura vertical, como por ejemplo, una estructura de un nivel, sujeta a una carga  $p(t)$ , horizontal, variante en el tiempo, que produce una deformación  $x_s$ , resulta conveniente proponer un sistema idealizado como una masa concentrada  $m$ , soportada por un elemento vertical, sin masa, pero con rigidez  $k$ , en la dirección horizontal, así como un mecanismo de amortiguamiento viscoso  $c$ , que disipe la energía vibracional del sistema. Cada elemento como trabes y columnas de la estructura contribuirán a las propiedades de inercia (masa), elasticidad (rigidez o flexibilidad), y disipación de energía (amortiguamiento) de la estructura. En el sistema idealizado, sin embargo, cada una de estas propiedades se concentra en tres componentes puras y separadas, a saber: la componente de masa, la componente de rigidez y la componente de amortiguamiento como se muestra en la Figura 2.1. En

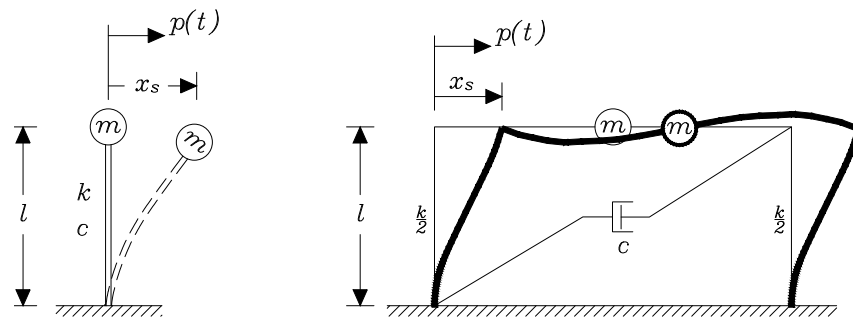


Figura 2.1: Idealización de un grado de libertad para estructuras verticales.

ella, se asume que toda la masa se concentra en el nivel superior, el cual efectivamente es rígido. Las columnas proveen la rigidez lateral y se agrega la representación de un amortiguador para representar el amortiguamiento dentro de la estructura. Estas tres componentes se representan de manera clásica en un sistema masa-resorte-amortiguador; si se considera la masa como un cuerpo rígido, que el resorte y el amortiguador no tienen masa y que todo el movimiento es en la dirección de un sólo eje, en este caso del eje horizontal  $x$ , entonces se tiene un sistema de un grado de liber-

tad (SDOF, por sus siglas en inglés), como el mostrado en la Figura 2.2a. Un grado de libertad para el análisis dinámico es el número de desplazamientos requeridos para describir la posición desplazada de una masa, respecto de su posición original. Las componentes para el sistema masa-resorte-amortiguador se obtienen como se muestra a continuación.

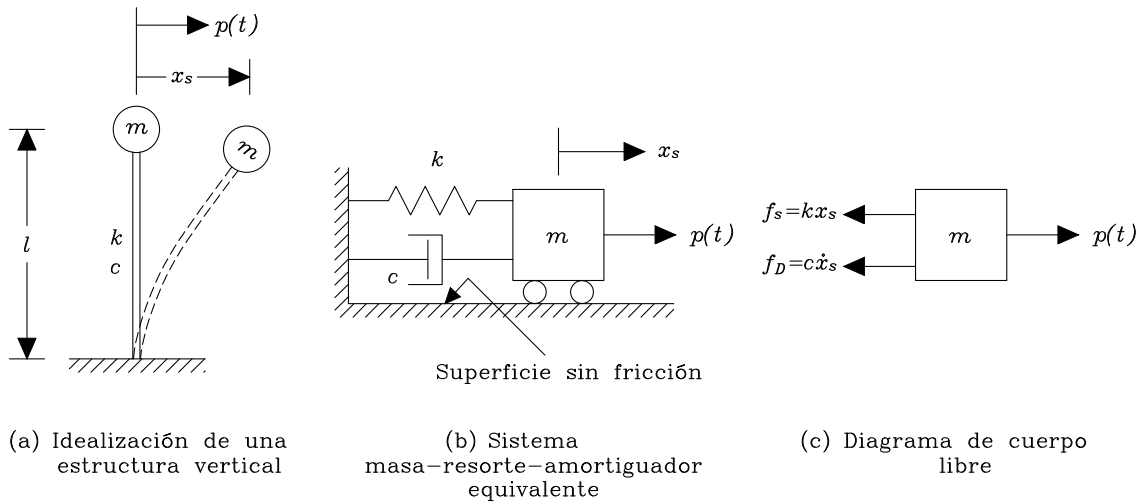


Figura 2.2: Sistema masa-resorte-amortiguador de un grado de libertad.

### 2.3.1. Fuerza de rigidez

La fuerza interna  $f_s$  que resiste el desplazamiento  $x_s$  es igual y opuesta a la fuerza externa  $f_s$ , como se muestra en el diagrama de cuerpo libre mostrado en la Figura 2.3a. Para un sistema lineal la relación entre la fuerza vertical  $f_s$  y la deformación resultante  $x_s$  está dada por,  $f_s = k x_s$ , donde  $k$  es la rigidez horizontal del sistema.

### 2.3.2. Fuerza de amortiguamiento

El mecanismo por el cual la vibración de un sistema desaparece de manera gradual se llama amortiguamiento. Las fuerzas de amortiguamiento existen solamente si se

presenta una velocidad relativa entre los dos extremos del sistema de amortiguación. La fuerza interna  $f_D$ , en el mecanismo de amortiguamiento, es opuesta e igual a la fuerza externa  $f_D$  como se muestra en el diagrama de cuerpo libre mostrado en la Figura 2.3b. La fuerza de amortiguamiento  $f_D$  se relaciona con la velocidad  $\dot{x}_s$  en el sistema de amortiguamiento a través de  $f_D = c\dot{x}_s$ , donde la constante  $c$  es el coeficiente de amortiguamiento viscoso.

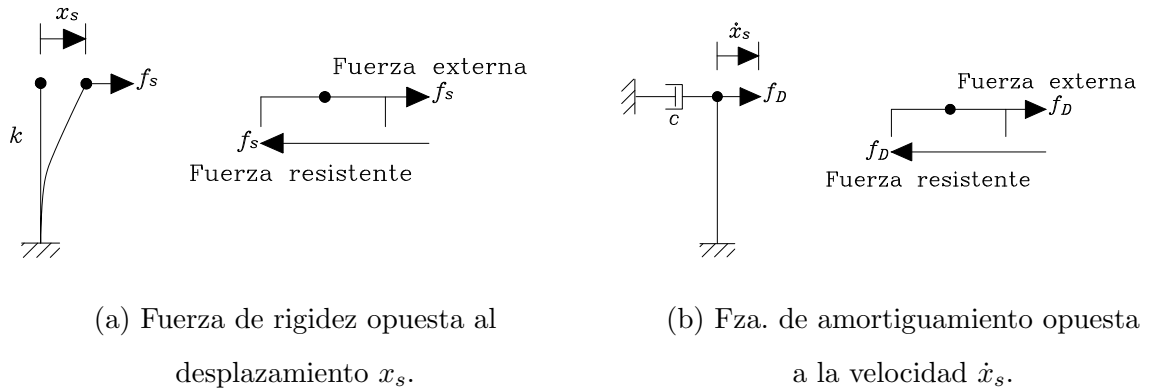


Figura 2.3: Fuerzas internas de rigidez y amortiguamiento opuestas al movimiento en un sistema de un grado de libertad.

### 2.3.3. Ecuación de movimiento para vibración forzada de un sistema de un grado de libertad, caso: fuerza actuando sobre una masa

Considerese el sistema de un grado de libertad mostrado en la Figura 2.2a, y las correspondientes fuerzas que actúan en un determinado instante en el diagrama de cuerpo libre sobre la masa  $m$ , que incluyen la fuerza resistente por rigidez  $f_s$ , ejercida por el resorte lineal con rigidez  $k$ , y la correspondiente fuerza resistiva de amortiguamiento  $f_D$ , debida al amortiguador viscoso lineal, mostradas en la Figura 2.2c. La fuerza externa variante en el tiempo  $p(t)$  se considera positiva en la dirección

izquierda-derecha del eje  $x$ , al igual que el desplazamiento  $x_s$ , la velocidad  $\dot{x}_s$ , y la aceleración  $\ddot{x}_s$ . La fuerza de rigidez y amortiguamiento se muestran actuando en la dirección opuesta ya que son fuerzas internas que se oponen a la deformación y velocidad respectivamente. Al aplicar la segunda ley del movimiento de Newton a lo largo del eje  $x$ , la fuerza resultante, fuerza=masa×aceleración, debida al movimiento causado por la falta de equilibrio esta dada por  $m\ddot{x}_s = p(t) - f_s - f_D$ , la cual, al sustituir las fuerzas  $f_s$  y  $f_D$  asi como reordenando términos resulta en

$$m\ddot{x}_s + c\dot{x}_s + kx_s = p(t) \quad (2.1)$$

donde  $k$  representa la rigidez,  $c$  el amortiguamiento,  $x_s$ ,  $\dot{x}_s$ , y  $\ddot{x}_s$  el desplazamiento, la velocidad y la aceleración, respectivamente, en la dirección positiva del eje  $x$ .

#### 2.3.4. Ecuación de movimiento para vibración forzada de un sistema de un grado de libertad, caso: movimiento del suelo

En regiones sísmicas, el principal problema de la dinámica estructural es el comportamiento de las estructuras al verse sujetas a un movimiento en la base, inducido por un sismo. En la Figura 2.4 el desplazamiento del suelo es denotado por  $x_g$ , el desplazamiento absoluto o total se denota por  $x_t$  y el desplazamiento relativo entre la masa y el suelo, a través de  $x_s$ . El desplazamiento total esta dado por

$$x_t = x_g + x_s \quad (2.2)$$

donde el desplazamiento total  $x_t$  y el del suelo  $x_g$  están referidos al mismo marco inercial de referencia. La velocidad y la aceleración correspondientes resultan

$$\dot{x}_t = \dot{x}_g + \dot{x}_s \quad (2.3)$$

$$\ddot{x}_t = \ddot{x}_g + \ddot{x}_s \quad (2.4)$$

del diagrama de cuerpo libre de la Figura 2.4, y tomando en cuenta que sólo el desplazamiento relativo de la estructura  $x_s$ , entre su masa y la base producen la fuerza de rigidez y de amortiguamiento, la ecuación de equilibrio dinámico, aplicando el principio de D'Alembert resulta

$$f_I + f_D + f_s = 0 \quad (2.5)$$

$$m\ddot{x}_t + c\dot{x}_s + kx_s = 0 \quad (2.6)$$

sustituyendo (2.4)

$$m(\ddot{x}_g + \ddot{x}_s) + c\dot{x}_s + kx_s = 0 \quad (2.7)$$

ordenando términos y simplificando resulta

$$m\ddot{x}_s + c\dot{x}_s + kx_s = -m\ddot{x}_g \quad (2.8)$$

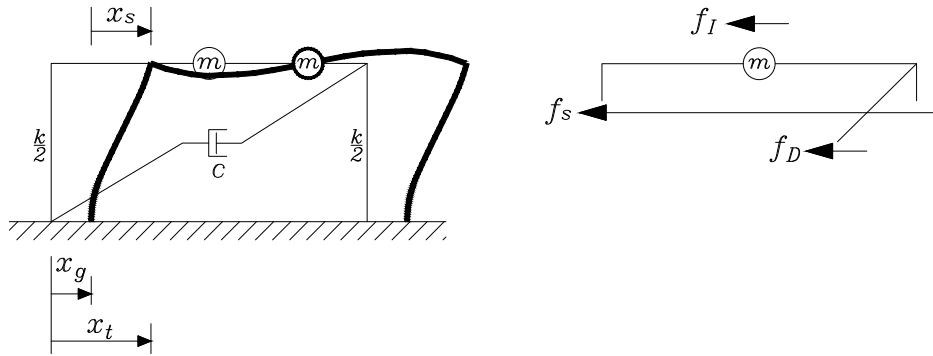


Figura 2.4: Idealización de un grado de libertad para estructuras verticales.

La expresión (2.8) es la ecuación de movimiento del desplazamiento relativo, o deformación  $x_s$  de una estructura linealmente elástica sujeta a una aceleración del suelo  $\ddot{x}_g$ . Comparando las expresiones (2.1) y (2.8) se observa que las ecuaciones de movimiento para dos diferentes tipos de excitación, la primera debida a una fuerza

externa  $p(t)$ , y la segunda a una aceleración del suelo  $\ddot{x}_g$ , son exactamente las mismas, por lo que se puede concluir que el movimiento del suelo es equivalente a aplicar una fuerza en la masa (grado de libertad) igual al producto de la masa por la aceleración del suelo  $p(t) = -m\ddot{x}_g$ .

### 2.3.5. Ecuación de movimiento para vibración forzada de un sistema de $N$ -grados de libertad.

Considerando un sistema masa-resorte-amortiguador de  $N$ -grados de libertad como el mostrado en la Figura 2.5a, las coordenadas  $x_{s_i}$  describen completamente el desplazamiento del sistema, lo que define la posición de la masa  $m_i$  en cualquier instante  $t$ , respecto de la posición de equilibrio. La fuerza  $p_i(t)$  actúa sobre la masa  $m_i$ . Las fuerzas que actúan en cualquier instante sobre las masas  $m_1, m_i$  y  $m_N$  se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la Figura 2.5b. Al aplicar la segunda ley del movimiento de Newton en la masa  $m_i$  se obtiene la ecuación de movimiento

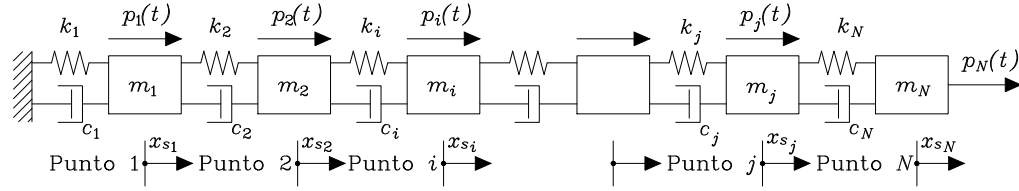
$$\begin{aligned} p_i + c_{i+1}(\dot{x}_{s_{i+1}} - \dot{x}_{s_i}) + k_{i+1}(x_{s_{i+1}} - x_{s_i}) - c_i(\dot{x}_{s_i} - \dot{x}_{s_{i-1}}) \\ - k_i(x_{s_i} - x_{s_{i-1}}) = m_i\ddot{x}_{s_i}, \end{aligned} \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, N - 1$$

reescribiendo de una manera conveniente,

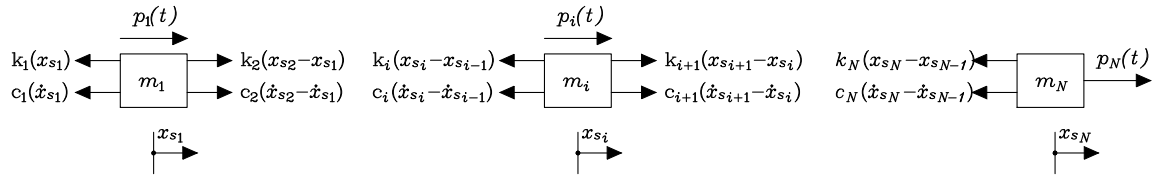
$$\begin{aligned} m_i\ddot{x}_{s_i} - c_i\dot{x}_{s_{i-1}} + (c_i + c_{i+1})\dot{x}_{s_i} - c_{i+1}\dot{x}_{s_{i+1}} - k_ix_{s_{i-1}} + (k_i + k_{i+1})x_{s_i} \\ - k_{i+1}x_{s_{i+1}} = p_i, \end{aligned} \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, N - 1. \quad (2.9)$$

Como las masas  $m_1$  y  $m_N$  se encuentran en los extremos izquierdo y derecho del sistema, respectivamente, sus ecuaciones de movimiento se derivan de (2.9) al establecer  $i = 1$  junto con  $x_{s_0} = 0$ , para el extremo izquierdo, así como  $i = N$  junto con





(a) Idealización con  $N$  grados de libertad de una estructura vertical sujeta a fuerzas horizontales.



(b) Diagrama de cuerpo libre y fuerzas actuando sobre las masas  $m_1$ ,  $m_i$  y  $m_N$  de la idealización de  $N$ -grados de libertad.

Figura 2.5: Idealización de masas concentradas para una estructura de  $N$ -grados de libertad.

$x_{s_{N+1}} = 0$ ,  $c_{N+1} = 0$  y  $k_{N+1} = 0$ , para el extremo derecho, resultando en,

$$m_1 \ddot{x}_{s_1} + (c_1 + c_2) \dot{x}_{s_1} - c_2 \dot{x}_{s_2} + (k_1 + k_2) x_{s_1} - k_2 x_{s_2} = p_1 \quad (2.10)$$

$$m_N \ddot{x}_{s_N} - c_N \dot{x}_{s_{N-1}} + c_N \dot{x}_{s_N} - k_N x_{s_{N-1}} + k_N x_{s_N} = p_N \quad (2.11)$$

Un sistema de  $N$ -grados de libertad, como el descrito por (2.9)–(2.11) puede reescribirse en forma matricial como

$$M \ddot{x}_s + C_s \dot{x}_s + K x_s = p(t) \quad (2.12)$$

y para el caso de sismo

$$M \ddot{x}_s + C_s \dot{x}_s + K x_s = -M \ddot{x}_g \quad (2.13)$$

lo que representa un sistema de  $N$  ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden, que implica que los desplazamiento de las masas  $m_{i-1}$  y  $m_{i+1}$ , tienen influencia

en el movimiento de la masa  $m_i$  y viceversa.  $M$  es la matriz de masa,  $C_s$  es la matriz de amortiguamiento,  $K$  la matriz de rigidez de la estructura, y  $p(t)$  es un vector de fuerzas externas aplicadas. Estas cuatro propiedades son los parámetros de la estructura.

Las matrices  $M$ ,  $C_s$  y  $K$  se expresan a través de (2.14)–(2.16)

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & m_N \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$C_s = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -c_2 & (c_2 + c_3) & -c_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & (c_3 + c_4) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (c_i + c_{i+1}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -c_N & c_N \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$K = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (k_i + k_{i+1}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -k_N & k_N \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Por conveniencia, para especificar cuales grados de libertad son excitados por las fuerzas dinámicas, en (2.12) se incluye un vector de coeficientes de influencia  $\lambda$ ,

resultando la ecuación de movimiento como

$$M\ddot{x}_s + C_s\dot{x}_s + Kx_s = \lambda p(t) \quad (2.17)$$

o bien, para el caso de sismo en (2.13), resulta

$$M\ddot{x}_s + C_s\dot{x}_s + Kx_s = -\lambda M\ddot{x}_g \quad (2.18)$$

Los sistemas (2.17) y (2.18) son sistemas de  $N$ -ecuaciones diferenciales ordinarias que gobiernan el desplazamiento  $x_s(t)$  debido a las fuerzas dinámicas aplicadas  $p(t)$  ó  $-M\ddot{x}_g$  respectivamente, donde  $N$  es el número de grados de libertad del sistema;  $\lambda$  es un vector de coeficientes de influencia que permite especificar cuales grados de libertad son afectados por las fuerzas dinámicas;  $x_s \in \mathbb{R}^N$  es el vector de desplazamientos;  $\dot{x}_s$  es el vector de velocidad y  $\ddot{x}_s$  es el vector de aceleración de la estructura.

## 2.4. Modelado de una estructura horizontal tipo puente

Al igual que el marco de un edificio, un puente también se puede idealizar como un ensamble de elementos, vigas y pilas, interconectados en puntos nodales. Para comprender el fenómeno de vibración en una estructura horizontal, como por ejemplo, una viga en cantiliver sujeta a una carga vertical  $p(t)$ , variante en el tiempo y actuando en su extremo libre, se propone un sistema idealizado como una masa concentrada  $m$ , soportada por un elemento horizontal sin masa, pero con rigidez  $k$  en la dirección del movimiento y un mecanismo de amortiguamiento viscoso  $c$  que disipe la energía vibracional del sistema como se muestra en la Figura 2.6a. Cada miembro estructural del puente real contribuirá a las propiedades de inercia (masa), elasticidad (rigidez o flexibilidad), y disipación de energía (amortiguamiento). En el sistema idealizado, sin embargo, cada una de estas propiedades se concentra en tres componentes puras y separadas, a saber: la componente de masa, la componente de rigidez y la componente

de amortiguamiento. Estas componentes se representan de manera clásica en un sistema masa-resorte-amortiguador; si se considera la masa como un cuerpo rígido, que el resorte y el amortiguador no tienen masa y todo el movimiento en la dirección del eje vertical para estructuras horizontales, entonces se tiene un sistema de un grado de libertad. Las componentes para tal sistema masa-resorte-amortiguador se obtienen como se muestra en las siguientes subsecciones.

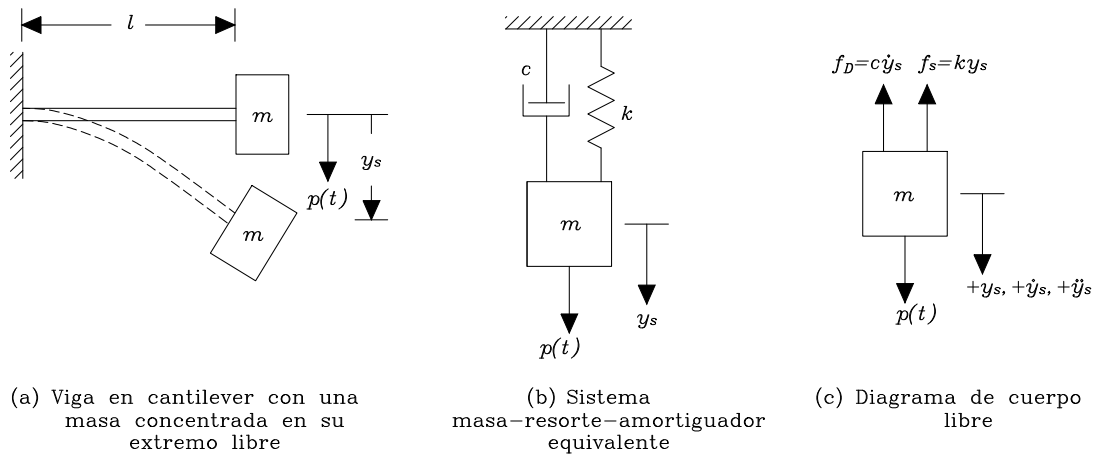


Figura 2.6: Idealización de un grado de libertad para una estructura horizontal.

### 2.4.1. Fuerza de rigidez

La fuerza interna  $f_s$  que resiste el desplazamiento  $y_s$  es igual y opuesta a la fuerza externa  $f_s$ , como se muestra en el diagrama de cuerpo libre mostrado en la Figura 2.7a. Para un sistema lineal, la relación entre la fuerza vertical  $f_s$  y la deformación resultante  $y_s$  está dada por,  $f_s = k y_s$ , donde  $k$  es la rigidez vertical del sistema.

### 2.4.2. Fuerza de amortiguamiento

El mecanismo por el cual la vibración de un sistema desaparece de manera gradual se llama amortiguamiento. Las fuerzas de amortiguamiento existen solamente si se

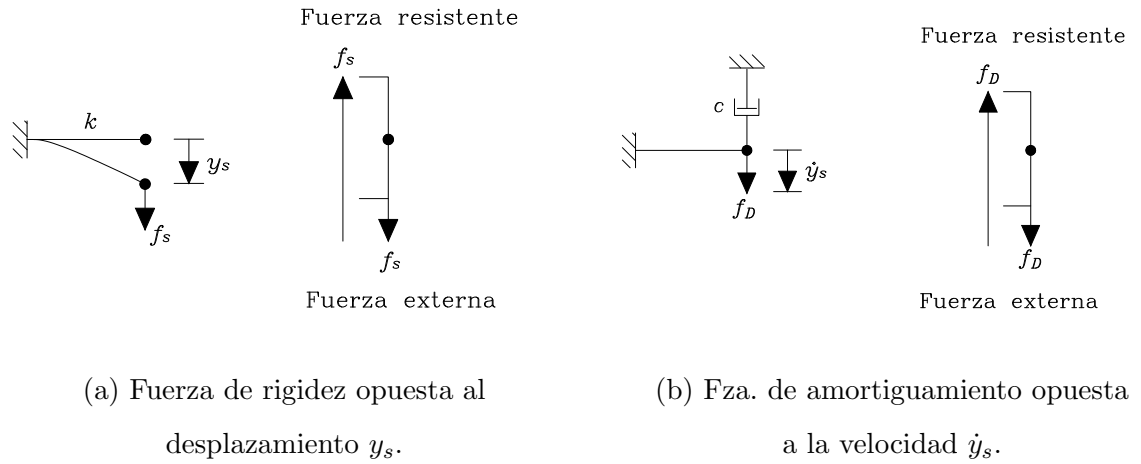


Figura 2.7: Fuerzas internas de rigidez y amortiguamiento opuestas al movimiento en un sistema de un grado de libertad.

presenta una velocidad relativa entre los dos extremos del sistema de amortiguación. La fuerza interna  $f_D$ , en el mecanismo de amortiguamiento, es opuesta e igual a la fuerza externa  $f_D$  como se muestra en el diagrama de cuerpo libre mostrado en la Figura 2.7b. La fuerza de amortiguamiento  $f_D$  se relaciona con la velocidad  $\dot{y}_s$  en el sistema de amortiguamiento a través de  $f_D = c\dot{y}_s$ , donde la constante  $c$  es el coeficiente de amortiguamiento viscoso.

### 2.4.3. Ecuación de movimiento para vibración forzada de un sistema de un grado de libertad: fuerza actuando sobre una masa

Considerando el sistema de un grado de libertad mostrado en la Figura 2.6a, y las correspondientes fuerzas que actúan en un determinado instante en el diagrama de cuerpo libre sobre la masa  $m$ , que incluyen la fuerza resistente por rigidez  $f_s$ , ejercida por un resorte lineal con rigidez  $k$ , y la correspondiente fuerza resistiva de amortiguamiento  $f_D$ , debida a un amortiguador viscoso lineal, mostradas en la Figura 2.6c.

La fuerza externa variante en el tiempo  $p(t)$  se considera positiva en la dirección vertical hacia abajo del eje  $y$ ; el desplazamiento  $y_s$ , la velocidad  $\dot{y}_s$ , y la aceleración  $\ddot{y}_s$ , también se consideran positivas en la misma dirección. La fuerza de rigidez y amortiguamiento se muestran actuando en la dirección opuesta ya que son fuerzas internas que se oponen a la deformación y velocidad respectivamente. Al aplicar la segunda ley del movimiento de Newton a lo largo del eje  $y$ , la fuerza resultante fuerza=masa×aceleración, debida al movimiento causado por la falta de equilibrio esta dada por  $m\ddot{y}_s = p(t) - f_s - f_D$ , la cual, al sustituir las fuerzas  $f_s$  y  $f_D$  así como reordenando términos resulta en

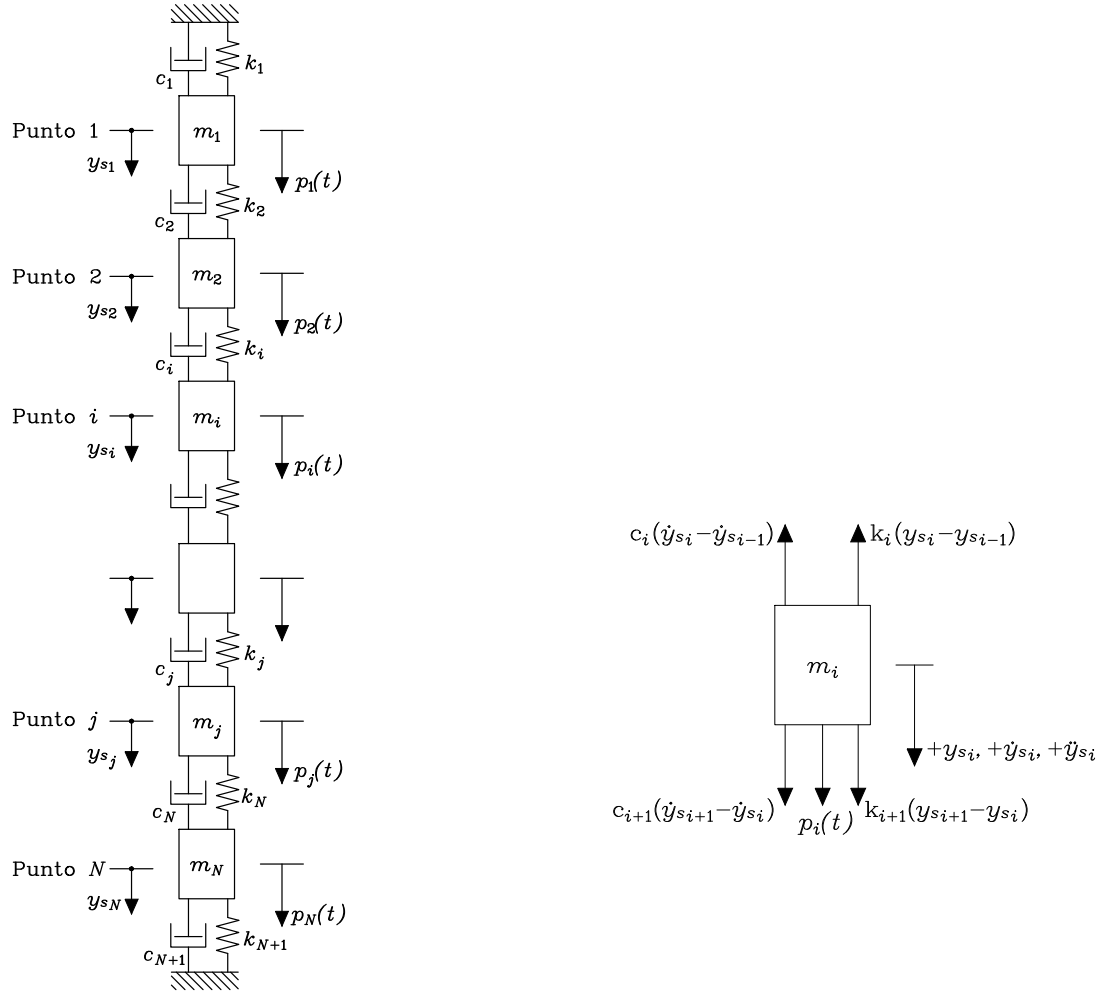
$$m\ddot{y}_s + c\dot{y}_s + ky_s = p(t). \quad (2.19)$$

donde  $k$  representa la rigidez,  $c$  el amortiguamiento,  $y_s$ ,  $\dot{y}_s$ , y  $\ddot{y}_s$  el desplazamiento, la velocidad y la aceleración, respectivamente, en la dirección del eje  $y$ .

#### 2.4.4. Ecuación de movimiento para vibración forzada de un sistema de $N$ -grados de libertad.

Considerando un sistema masa-resorte-amortiguador de  $N$ -grados de libertad como el mostrado en la Figura 2.8a, las coordenadas  $y_{s_i}$  describen completamente el desplazamiento del sistema, lo que define la posición de la masa  $m_i$  en cualquier instante  $t$ , respecto de la posición de equilibrio. La fuerza  $p_i(t)$  actúa sobre la masa  $m_i$ . Las fuerzas que actúan en la masa  $m_i$  en cualquier instante se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la Figura 2.8b.

La ecuación de movimiento se puede obtener aplicando la segunda ley del movimiento de Newton como en (2.20)



(a) Idealización con  $N$  grados de libertad de una estructura horizontal sujeta a fuerzas verticales.

(b) Diagrama de cuerpo libre y fuerzas actuando sobre la masa  $m_i$  de la idealización de  $N$ -grados de libertad.

Figura 2.8: Idealización de masas concentradas para una estructura horizontal de  $N$ -grados de libertad.

$$\begin{aligned}
 p_i + c_{i+1}(\dot{y}_{s_{i+1}} - \dot{y}_{s_i}) + k_{i+1}(y_{s_{i+1}} - y_{s_i}) - c_i(\dot{y}_{s_i} - \dot{y}_{s_{i-1}}) \\
 - k_i(y_{s_i} - y_{s_{i-1}}) = m_i \ddot{y}_{s_i}, \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, N - 1 \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

reescribiendo de una manera conveniente

$$\begin{aligned} m_i \ddot{y}_{s_i} - c_i \dot{y}_{s_{i-1}} + (c_i + c_{i+1}) \dot{y}_{s_i} - c_{i+1} \dot{y}_{s_{i+1}} - k_i y_{s_{i-1}} + (k_i + k_{i+1}) y_{s_i} \\ - k_{i+1} y_{s_{i+1}} = p_i, \end{aligned} \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, N-1. \quad (2.21)$$

Como las masas  $m_1$  y  $m_N$  se encuentran en los extremos superior e inferior del sistema, respectivamente, sus ecuaciones de movimiento se derivan de (2.21) al fijar  $i = 1$  junto con  $y_{s_0} = 0$ , para el extremo superior, e  $i = N$  junto con  $y_{s_{N+1}} = 0$ , para el extremo inferior:

$$m_1 \ddot{y}_{s_1} + (c_1 + c_2) \dot{y}_{s_1} - c_2 \dot{y}_{s_2} + (k_1 + k_2) y_{s_1} - k_2 y_{s_2} = p_1 \quad (2.22)$$

$$m_N \ddot{y}_{s_N} - c_N \dot{y}_{s_{N-1}} + (c_N + c_{N+1}) \dot{y}_{s_N} - k_N y_{s_{N-1}} + (k_N + k_{N+1}) y_{s_N} = p_N \quad (2.23)$$

Un sistema de  $N$ -grados de libertad, como el descrito por (2.21)–(2.23) puede reescribirse en forma matricial como

$$M \ddot{y}_s + C_s \dot{y}_s + K y_s = p(t) \quad (2.24)$$

lo que representa un sistema de  $N$  ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden, que implica que los desplazamiento de las masas  $m_{i-1}$  y  $m_{i+1}$ , tienen influencia en el movimiento de la masa  $m_i$  y viceversa.  $M$  es la matriz de masa,  $C_s$  es la matriz de amortiguamiento,  $K$  la matriz de rigidez de la estructura, y  $p(t)$  es un vector de fuerzas externas aplicadas. Estos cuatro parámetros definen las propiedades de la estructura.

Por conveniencia, para especificar cuales grados de libertad son excitados por las fuerzas dinámicas, en (2.24) se incluye un vector de coeficientes de influencia  $\lambda$ , reescribiéndose como

$$M \ddot{y}_s + C_s \dot{y}_s + K y_s = \lambda p(t). \quad (2.25)$$

El sistema (2.25) es un sistema de  $N$ -ecuaciones diferenciales ordinarias que gobiernan el desplazamiento  $y_s(t)$  debido a las fuerzas dinámicas  $p(t)$  aplicadas, donde



$N$  es el número de grados de libertad del sistema.  $\lambda$  es un vector de coeficientes de influencia que permite especificar cuales grados de libertad son afectados por las fuerzas  $p(t)$ ;  $y_s \in \mathbb{R}^N$  es el vector de desplazamientos;  $\dot{y}_s$  es el vector de velocidad y  $\ddot{y}_s$  es el vector de aceleración de la estructura.

Comparando la ecuación de movimiento (2.17) con (2.25), la primera para estructuras verticales con fuerza horizontal aplicada y la segunda, para estructuras horizontales con carga vertical aplicada, se observa que son exactamente las mismas, con la única diferencia de que para el primer caso, los desplazamientos están referidos al eje  $x$ , y para el segundo caso, referidos al eje  $y$ , por lo que se puede concluir que independientemente del tipo de estructura, la ecuación de movimiento que rige su dinámica es la misma.

## 2.5. Propiedades dinámicas

Las propiedades dinámicas de una estructura están definidas en las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, así como por la fuerza externa aplicada. Si bien, la masa está distribuida a lo largo de toda la estructura, esta se idealiza como concentrada en los nodos de la estructura discretizada equivalente como se muestra en la Figura 2.9. Cada elemento estructural se reemplaza por masas puntuales en los nodos de sus dos extremos. La masa concentrada en un nodo se determina de la porción de peso que actúa sobre ese nodo. Con la distribución de las dos masas habiendo sido determinada por un análisis estático del elemento bajo su propio peso, se determina la masa concentrada en los nodos de la estructura, que es la suma de las contribuciones de masas de todos los elementos estructurales conectados al nodo. Los desplazamientos de los nodos son los grados de libertad, que en un marco plano bidimensional serán tres grados de libertad por nodo, dos traslacionales y uno rotacional. En un nodo de un marco tridimensional, cada nodo tendrá seis grados de libertad, tres traslacionales, uno por cada uno de sus ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  y tres rotacionales, uno alrededor de cada uno

de sus ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

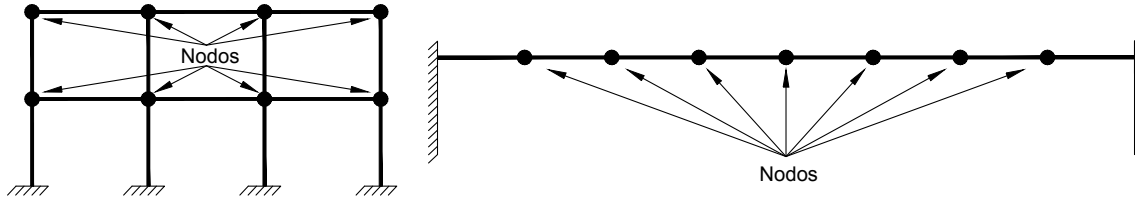


Figura 2.9: Modelo de un edificio y un puente con masas concentradas en los nodos.

Para el caso de un edificio, la deformación axial en vigas puede ser despreciada y la deformación axial en columnas no necesita ser considerada en edificios de poca altura [Chopra12]. Bajo estas consideraciones los grados de libertad, por nodo, se reducen de la siguiente manera. Todos los grados de libertad verticales de los nodos, se establecen en un valor cero de desplazamiento. Todos los nodos en un mismo nivel horizontal se relacionan con el mismo grado de libertad horizontal, por lo que habrá un sólo y mismo grado de libertad horizontal por nivel en todos los nodos de él, resultando así un modelo que considera únicamente un grado de libertad traslacional por nivel en la dirección horizontal y un grado de libertad rotacional para cada nodo.

Para el caso de los puentes, como la deformación axial en las vigas puede ser despreciada y todos los nodos de la viga se relacionan con el mismo grado de libertad horizontal [Chopra12], entonces los grados de libertad horizontales se establecen en un valor cero de desplazamiento, resultando en un modelo que considera únicamente un grado de libertad traslacional en la dirección vertical y un grado de libertad rotacional para cada nodo.

### 2.5.1. Fuerza de inercia

Para relacionar la fuerza externa  $f_{Ij}$  que actúa sobre la componente de masa de la estructura con las aceleraciones  $\ddot{x}_{s_j}$ , de la Figura 2.10a, se aplica una aceleración uni-

taria al  $j$ -ésimo grado de libertad, mientras que las aceleraciones en todos los demás grados de libertad se mantienen en cero. De acuerdo al principio de D'Alembert, las fuerzas de inercia ficticias se oponen a estas aceleraciones, por lo que se requiere de las fuerzas externas necesarias para equilibrar estas fuerzas de inercia. Los coeficientes de influencia de masa  $m_{ij}$  representan la fuerza externa en el  $i$ -ésimo grado de libertad, debida a la aceleración unitaria en el  $j$ -ésimo grado de libertad y son los elementos de la matriz de masa  $M$ . De manera particular las fuerzas  $m_{i1}$  ( $i=1, 2, \dots, 8$ ) de la Figura 2.10b se requieren en los diversos grados de libertad para equilibrar las fuerzas de inercia asociadas con  $\ddot{x}_{s_1}=1$  y todos los demás  $\ddot{x}_{s_j}=0$ . De manera similar, las fuerzas  $m_{i4}$  ( $i=1, 2, \dots, 8$ ) de la Figura 2.10c se asocian con la aceleración  $\ddot{x}_{s_4}=1$  y todos los demás  $\ddot{x}_{s_j}=0$ . La fuerza  $f_{Ii}$  en el grado de libertad  $i$  asociada con las aceleraciones  $\ddot{x}_{s_j}$ ,  $j=1$  hasta  $N$ , se obtiene por superposición

$$f_{Ii} = m_{i1} \ddot{x}_{s_1} + m_{i2} \ddot{x}_{s_2} + \dots + m_{ij} \ddot{x}_{s_j} + \dots + m_{iN} \ddot{x}_{s_N}. \quad (2.26)$$

Una ecuación similar existe para cada  $i=1$  hasta  $N$ , por lo que se puede escribir en una forma matricial como  $f_I = M \ddot{x}_s$  donde  $M$  es la matriz de masa de la estructura, la cual es simétrica ( $m_{ij} = m_{ji}$ )

En general, para una idealización de masas concentradas, la matriz  $M$  es diagonal, con sus elementos dados por

$$m_{ij} = 0, \quad i \neq j; \quad m_{jj} = m_j \quad \text{ó} \quad 0 \quad (2.27)$$

donde  $m_j$  es la masa concentrada asociada con  $j$ -ésimo grado de libertad traslacional, y  $m_{jj} = 0$  para los grados de libertad rotacionales.

La masa concentrada  $m_j$ , se determina de la porción de peso que puede ser asignada a los nodos, es decir, la suma de las contribuciones de masa de todos los miembros estructurales conectados al nodo.

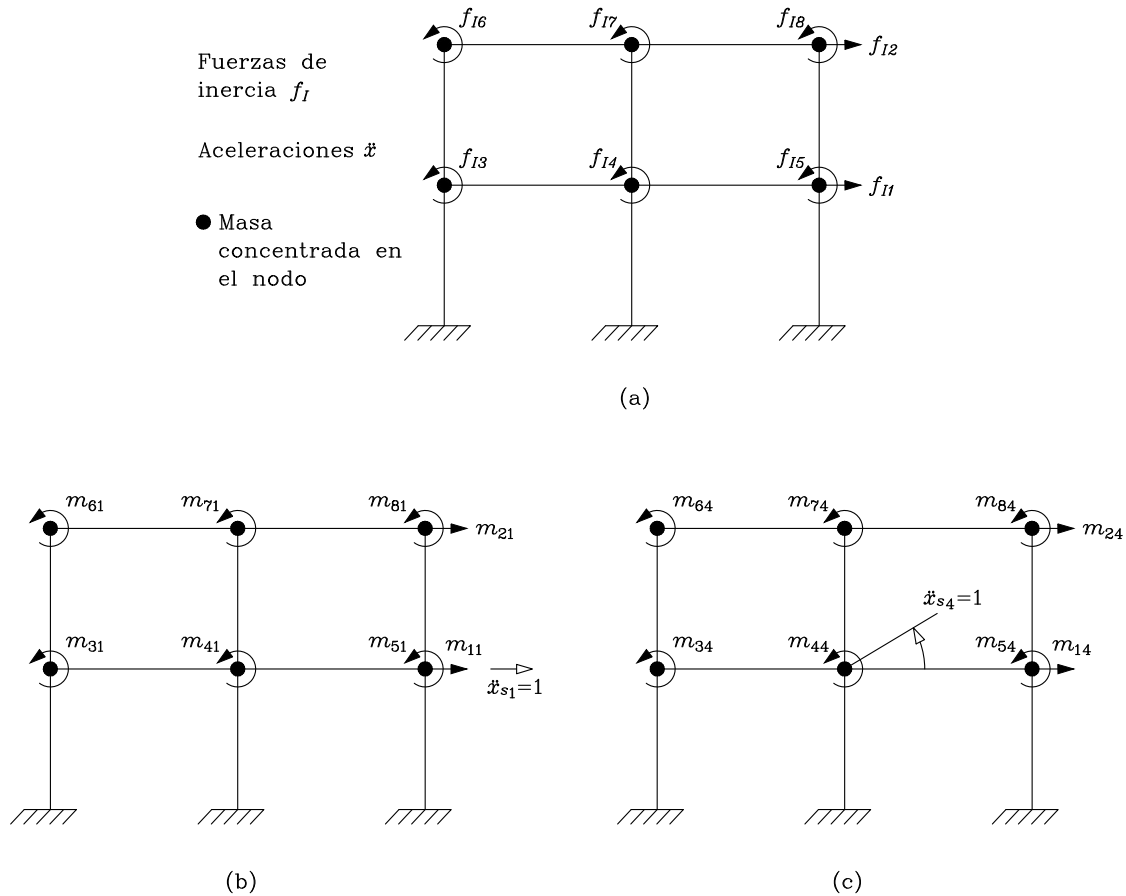


Figura 2.10: (a) Componentes de masa del marco; (b) Coeficientes de influencia de masa para  $\ddot{x}_{s_1}=1$ ; (c) Coeficientes de influencia de masa para  $\ddot{x}_{s_4}=1$ .

### 2.5.2. Fuerza de rigidez

La matriz de rigidez  $K$  para el sistema discretizado se obtiene por el método de equilibrio directo, basado en la definición de los coeficientes de influencia de rigidez, determinados de las ecuaciones de deflexión de la elástica de un elemento de longitud  $l$ , el segundo momento de área o momento de inercia  $I$ , y del módulo de elasticidad  $E_m$ ; Al aplicar un desplazamiento unitario en el grado de libertad  $j$ , manteniendo todos los demás desplazamientos en cero como se muestra, para el caso  $j = 1$ , en la Figura 2.11b. Para mantener estas condiciones se deben aplicar fuerzas en los

demás grados de libertad. Los coeficientes de influencia de rigidez  $k_{ij}$  son las fuerzas requeridas en el grado de libertad  $i$  debida al desplazamiento unitario del grado de libertad  $j$ . En particular, las fuerzas  $k_{i1}$  ( $i=1, 2, \dots, 8$ ) de la Figura 2.11b se requieren para mantener la forma flexionada asociada con  $x_{s_1}=1$  y todos los demás  $x_{s_j}=0$ . De manera similar, las fuerzas  $k_{i4}$  ( $i=1, 2, \dots, 8$ ) de la Figura 2.11c se requieren para mantener la forma flexionada asociada con  $x_{s_4}=1$  y todos los demás  $x_{s_j}=0$ . La fuerza  $f_{si}$  en el grado de libertad  $i$  asociado con los desplazamientos  $x_{s_j}$ ,  $j=1$  hasta  $N$ , se obtiene por superposición

$$f_{si} = k_{i1} x_{s_1} + k_{i2} x_{s_2} + \dots + k_{ij} x_{s_j} + \dots + k_{iN} x_{s_N}. \quad (2.28)$$

Una ecuación similar existe para cada  $i=1$  hasta  $N$ , por lo que se puede escribir en una forma matricial como  $f_s = K x_s$ , donde  $K$  es la matriz de rigidez de la estructura, la cual, de manera similar a la matriz de masa, es simétrica ( $k_{ij} = k_{ji}$ ).

Debido a los grados de libertad rotacionales, la matriz de masas contiene elementos con valor cero en su diagonal principal. Es posible eliminar estos grados de libertad al considerar que la excitación dinámica no incluirá fuerzas externas en estos grados de libertad rotacionales. El método de condensación estática se utiliza para eliminar del análisis dinámico estos grados de libertad como se describe a continuación:

La condensación estática se lleva a cabo al particionar las ecuaciones de movimiento para un sistema como (2.12), excluyendo el amortiguamiento, en una forma particionada como

$$\begin{bmatrix} m_{tt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{s_t} \\ \ddot{x}_{s_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{tt} & k_{t0} \\ k_{0t} & k_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s_t} \\ x_{s_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde  $x_{s_0}$  denota los grados de libertad con masa cero y  $x_{s_t}$  los grados de libertad con masa asignada, conocidos como grados de libertad dinámicos;  $k_{t0} = k_{0t}^T$ . Las dos ecuaciones particionadas son

$$m_{tt} \ddot{x}_{s_t} + k_{tt} x_{s_t} + k_{t0} x_{s_0} = p(t), \quad k_{0t} x_{s_t} + k_{00} x_{s_0} = 0. \quad (2.29)$$

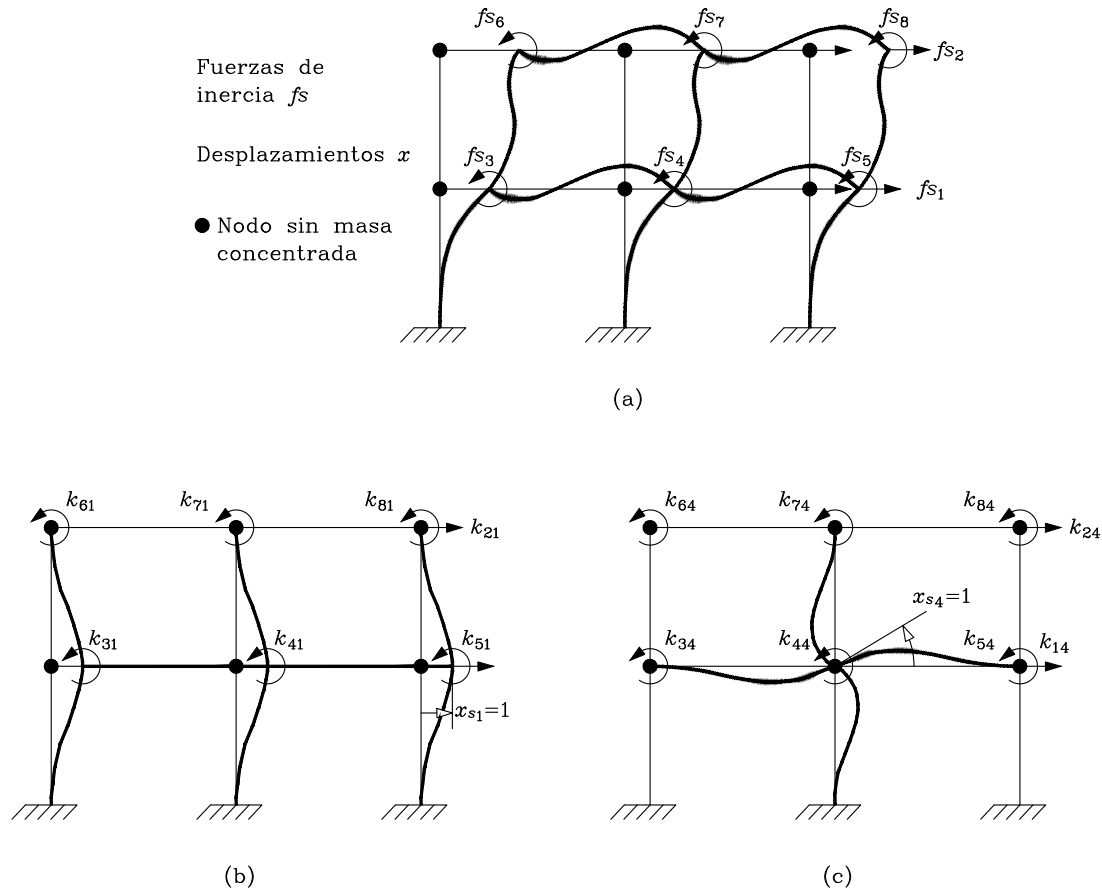


Figura 2.11: (a) Componentes de rigidez del marco; (b) Coeficientes de influencia de rigidez para  $x_{s1}=1$ ; (c) Coeficientes de influencia de rigidez para  $x_{s4}=1$ .

Ya que no existen términos de inercia asociados con  $x_{s_0}$ , la segunda ecuación en (2.29) permite establecer una relación estática entre  $x_{s_0}$  y  $x_{s_t}$  como  $x_{s_0} = -k_{00}^{-1} k_{0t} x_{s_t}$ . Sustituyendo  $x_{s_0}$  y  $k_{t0} = k_{0t}^T$  en la primera ecuación en (2.29) resulta

$$\begin{aligned}
 m_{tt} \ddot{x}_{s_t} + k_{tt} x_{s_t} - k_{0t}^T k_{00}^{-1} k_{0t} x_{s_t} &= p(t) \\
 m_{tt} \ddot{x}_{s_t} + (k_{tt} - k_{0t}^T k_{00}^{-1} k_{0t}) x_{s_t} &= p(t)
 \end{aligned}
 \tag{2.30}$$

haciendo

$$\hat{k}_{tt} = k_{tt} - k_{0t}^T k_{00}^{-1} k_{0t}
 \tag{2.31}$$

la expresión (2.30) resulta,

$$m_{tt} \ddot{x}_{st} + \hat{k}_{tt} x_{st} = p(t) \quad (2.32)$$

donde  $\hat{k}_{tt}$  es la matriz de rigidez condensada. La aplicación del método de condensación estática arroja una matriz de rigidez de orden reducido,  $K = \hat{k}_{tt}$ .

### 2.5.3. Propiedades de vibración y fuerza de amortiguamiento

Para calcular las propiedades de vibración del modelo de masas concentradas de la estructura, como son la frecuencia natural circular  $\omega_i$  y los modos de vibrar  $\Phi_i = [\phi_{1i} \ \phi_{2i} \ \dots \ \phi_{Ni}]^T$  con  $i = 1, 2, \dots, N$ , se requiere la solución del problema de los eigenvalores. Las frecuencias naturales y los modos de vibrar deben satisfacer la ecuación algebraica

$$K \Phi_i = \omega_i^2 M \Phi_i. \quad (2.33)$$

Considerando que las matrices de masa y rigidez  $M$  y  $K$ , respectivamente son conocidas, el problema es determinar el escalar  $\omega_i^2$  y el vector  $\Phi_i$  a través de la solución de la ecuación  $[K - \omega_i^2 M] \Phi_i = 0$ , la cual representa un conjunto de  $N$  ecuaciones algebraicas homogéneas para los  $N$  elementos  $\phi_{ji}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, N$ ). La solución trivial  $\Phi_i = 0$  no resulta útil ya que implica que no hay movimiento. Tendrá soluciones no triviales al resolver  $\det[K - \omega_i^2 M] = 0$ , cuyas raíces  $\omega_i^2$ , determinan las frecuencias naturales circulares de vibración  $\omega_i$ . Al conocer una frecuencia natural  $\omega_i$ , el correspondiente vector  $\Phi_i$  puede ser determinado dentro de una constante multiplicativa.

La matriz de amortiguamiento  $C_s$ , se calcula una vez que se conocen las propiedades de vibración y, en base a datos recopilados de estructuras similares, como los mostrados en la Tabla 2.1, para el caso de puentes peatonales y en la Tabla 2.2, para estructuras en general, mismos que toman en cuenta todos los mecanismos de disipación de energía, se obtienen los valores numéricos para las fracciones de amortiguamiento  $\xi_i$ .

Tabla 2.1: Fracción de amortiguamiento,  $\xi$  para puentes peatonales [Sétra06].

Tipo de construcción	Fracción de amortiguamiento estructural, $\xi$	
	Valor mínimo	Valor promedio
Concreto reforzado	0.8 %	1.3 %
Concreto pretensado	0.5 %	1.0 %
Acero	0.2 %	0.4 %
Compuesto	0.3 %	0.6 %
Madera	1.5 %	3.0 %

La matriz de amortiguamiento  $C_s$  se determina usando la forma general de una matriz de amortiguamiento, conocida como amortiguamiento de Caughey [Chopra12] y se obtiene con

$$C_s = M \sum_{l=0}^{J-1} a_l [M^{-1}K]^l \quad (2.34)$$

donde  $J$  es el número de fracciones de amortiguamiento modal usadas  $\xi_i$  de un sistema de  $N$  grados de libertad, y  $a_l$  son constantes, por lo que se requiere incluir  $J$  términos en la serie de Caughey; estos pueden ser cualquiera  $J$ -ésimos de los  $N$ -ésimos términos.

Los coeficientes  $a_l$  se determinan a partir de las fracciones de amortiguamiento  $\xi_i$  especificadas en cualquier  $J$  modo, al solucionar las  $J$  expresiones algebraicas

$$\xi_i = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{J-1} a_l \omega_i^{2l-1}. \quad (2.35)$$

Al considerar las fracciones de amortiguamiento  $\xi_i$  y las frecuencias naturales circulares de vibración para los  $N$ -ésimos modos de vibrar, se determinan los coeficientes  $a_l$  y con ellos se obtiene la matriz de amortiguamiento  $C_s$  al usar (2.34).



Tabla 2.2: Valores recomendados de fracción de amortiguamiento,  $\xi_i$  [Chopra12].

Nivel de esfuerzo	Tipo y condición de la estructura	Fracción de amortiguam.
Esfuerzo de trabajo no más allá de la mitad del punto de fluencia	Acero soldado, concreto pretensado, concreto muy reforzado (ligero agrietamiento).	2–3 %
	Concreto reforzado con agrietamiento considerable.	3–5 %
	Acero remachado y/o atornillado, estructuras de madera con uniones clavadas o atornillas.	5–7 %
En o justo debajo del punto de fluencia	Acero soldado, concreto pretensado (sin pérdida total del pretensado).	5–7 %
	Concreto pretensado sin pretensado residual.	7–10 %
	Concreto reforzado.	7–10 %
	Acero atornillado y/o remachado, estructuras de madera con uniones atornilladas.	10–15 %
	Estructuras de madera con uniones clavadas.	15–20 %

#### 2.5.4. Carga peatonal

Cuando los peatones caminan, el peso de la persona se transfiere al suelo a intervalos aproximadamente regulares, lo que provocará una fuerza periódica. Esta fuerza dependerá de la velocidad del peatón y de la longitud del paso, es decir, del ritmo de la caminata o bien, la frecuencia de los pasos. La relación entre la velocidad del

Tabla 2.3: Velocidades promedio y frecuencias verticales típicas de excitación peatonal [Bachmann87]

Actividad peatonal	Vel. promedio constante (m/s)	Frecuencia típica vertical de excitación peatonal (Hz)	Longitud de paso (m)
Caminata lenta	1.1	1.7	0.60
Caminata normal	1.5	2.0	0.75
Caminata rápida	2.2	2.3	1.0
Carrera lenta	2.5	2.1	1.15
Carrera normal	3.3	2.5	1.30
Carrera rápida	5.5	3.2	1.75

peatón y la frecuencia de los pasos se puede obtener de la Tabla 2.3. Al incrementarse la frecuencia de los pasos, el tiempo en el cual un pie tiene contacto con el suelo se reduce y al mismo tiempo, el factor de amplificación dinámica se incrementa, como se muestra en la Figura 2.12

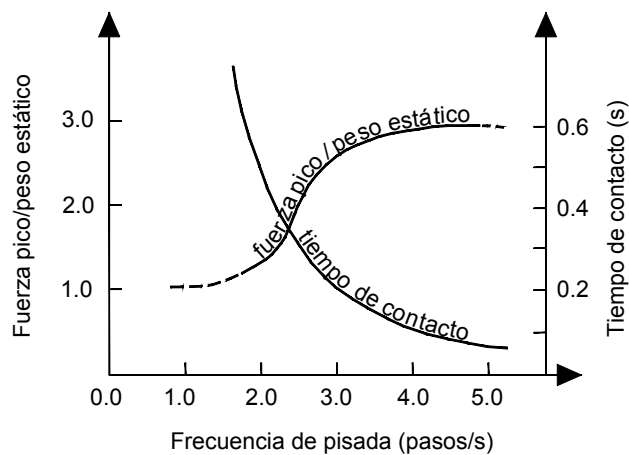


Figura 2.12: Variación de la fuerza vertical pico y tiempo de contacto respecto de la frecuencia de pisada [Zivanovic05]

Al caminar o correr, se generan fuerzas dinámicas en tres direcciones: vertical, longitudinal y lateral. Las dos primeras tienen la misma frecuencia, mientras que la componente lateral tiene la mitad de esta frecuencia ya que sólo cada dos pasos es con el mismo pie y por lo tanto, en la misma dirección. La dirección vertical es la más estudiada debido a que en ella se presentan las magnitudes de respuesta más grandes [Zivanovic05], sin embargo, en las últimas décadas se han estudiado los efectos de la carga lateral sobre puentes expuestos a grandes multitudes fuera de lo común donde se puede presentar el fenómeno de *Lock-in* o de excitación lateral síncrona [Dallard01]. La Figura 2.13 muestra la diferencia de periodos y frecuencias.

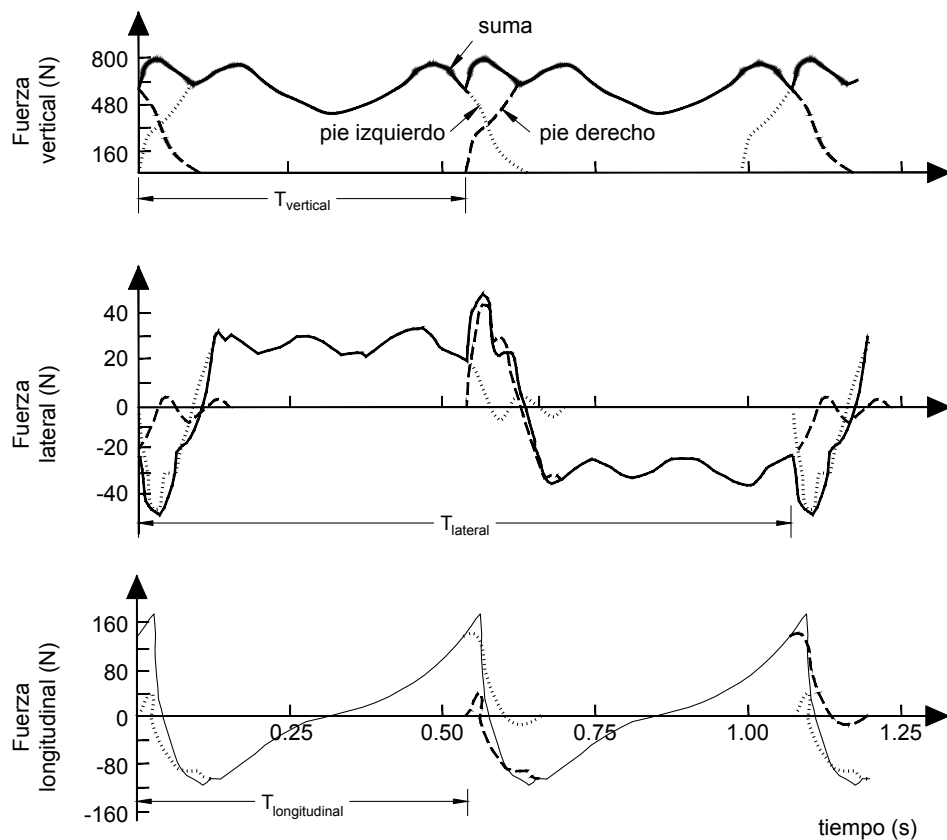


Figura 2.13: Historial de fuerza en el tiempo de la caminata en dirección vertical, lateral y longitudinal [Zivanovic05]

La línea continua superior de los perfiles de la Figura 2.13, representa el perfil general de la fuerza continua ejercida por ambos pies de un peatón en caminata, donde las líneas discontinuas indican la entrada o salida de la fuerza del pie izquierdo o derecho y los correspondientes traslapes entre ellas. Las mediciones se aproximan a un comportamiento periódico donde el periodo es igual al valor recíproco de la frecuencia de caminata.

Los valores de las frecuencias típicas para las actividades de correr o caminar de los peatones se muestran en la Tabla 2.4

Tabla 2.4: Frecuencias de caminata ejercidas por peatones [Bachmann95]

Actividad	Frecuencia peatonal (Hz)		
	Vertical	Lateral	Longitudinal
Caminata lenta	1.7	0.85	1.7
Caminata normal	2.0	1.0	2.0
Caminata rápida	2.3	1.15	2.3
Carrera lenta	2.1	1.05	2.1
Carrera normal	2.5	1.25	2.5
Carrera rápida	3.2	1.6	3.2

La carga peatonal, de acuerdo a [Bachmann87] puede ser modelada como una carga dinámica concentrada que es función del tiempo y de la posición del peatón,

$$F(x, t) = p(t)\delta(x - V_0 t) \quad (2.36)$$

siendo  $x$  la posición del peatón en relación al extremo del puente, por lo que la carga de un peatón desplazándose a una velocidad constante  $V_0$  puede ser representada como el producto de la función del tiempo  $p(t)$  por la componente espacial  $\delta(x - V_0 t)$ , siendo  $\delta$  la función delta de Dirac que expresa la carga constante en movimiento debida al peso del peatón.

Existen muchos parámetros como el tamaño del paso, características psicológicas, vestimenta, rugosidad del piso, etc, que puede afectar y modificar esta carga, sin embargo, resulta ser una carga periódica que se caracteriza por su frecuencia, es decir, el número de pasos por segundo.

La función periódica del tiempo  $p(t)$  puede ser descrita por una serie de Fourier [Sétra06] como

$$p(t) = P_p + \sum_{i=1}^{\infty} P_p \alpha_i \sin(2\pi i f_p t - \phi_{f_i}) \quad (2.37)$$

donde  $p(t)$  es la fuerza variante en el tiempo,  $P_p$  es el peso total de un peatón,  $\alpha_i$  es el coeficiente de Fourier para el  $i$ -ésimo armónico;  $f_p$  es la frecuencia, en Hz, de caminar/correr del peatón;  $t$  es el tiempo y  $\phi_{f_i}$  es el ángulo de fase para el  $i$ -ésimo armónico, teniendo el valor  $\phi_{f_1}=0$  para el primer armónico. La Tabla 2.5 muestra los valores de los coeficientes de Fourier y de los ángulos de fase para los primeros tres armónicos.

Tabla 2.5: Fuerzas dinámicas peatonales normalizadas [Bachmann95]

Actividad	Frec. de vibrar (Hz)		Coeficientes de Fourier y ángulos de fase				
			$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\phi_{f_2}$	$\alpha_3$	$\phi_{f_3}$
Caminando	Vertical	2	0.4	0.1	$\pi/2$	0.1	$\pi/2$
		2.4	0.5				
	Longitudinal	2	0.2	0.1			
			$\alpha_{1/2}=0.1$				
Horizontal/Lateral	2	$\alpha_{1/2}=0.1$	$\alpha_{3/2}=0.1$				
Corriendo		2 a 3	1.6	0.7		0.2	

La función periódica dada por (2.37) es el resultado de la superposición de varias ondas o componentes armónicos más una fuerza constante  $P_p$ . El número de compo-

mentos armónicos dependerá de la frecuencia estructural del puente que puede vibrar en resonancia, sin embargo, para fines prácticos la norma Sétra [Sétra06] recomienda limitar la serie de Fourier al primer armónico.

En la práctica los puentes peatonales están sujetos a la acción simultánea de muchas personas y esto hace que la correspondiente dinámica sea complicada; ya que cada peatón tendrá su propia velocidad, peso y frecuencia y, de acuerdo al número de personas presentes a la vez en el puente, los peatones generarán cargas que, por un lado, tiendan a sincronizarse con las de los demás peatones y por otro lado, posiblemente a sincronizarla con el puente. Por lo anterior, resulta complicada la simulación de la acción real de una multitud. Para lidiar con esta situación, en [Sétra06] se proponen modelos simplificados basados en estudios del comportamiento de los peatones y asume que el efecto de una multitud se obtiene al multiplicar el efecto elemental de un peatón por los correspondientes factores de ponderación.

La fuerza debida a la contribución del  $i$ -ésimo armónico generado por un grupo de peatones esta dada por

$$p_i(t) = G \alpha_i \sin(2\pi i f_p t - \phi_{f_i}) n_{eff} \psi. \quad (2.38)$$

donde  $n_{eff} = \sqrt{n_p}$  es el número efectivo de peatones desplazándose de manera sincronizada en la misma frecuencia y fase, correspondientes a  $n_p$  peatones que caminan sin afectación entre si [Zivanovic05].  $G$  es el peso promedio de un peatón, considerado en 700 newtons.

El factor  $\psi$  es un coeficiente de reducción que expresa la probabilidad de ocurrencia de coincidencia entre la frecuencia peatonal y la frecuencia de interés del puente y se obtiene de la Figura 2.14, o bien, para el caso en que se considera un segundo armónico de la carga peatonal, de la Figura 2.15.

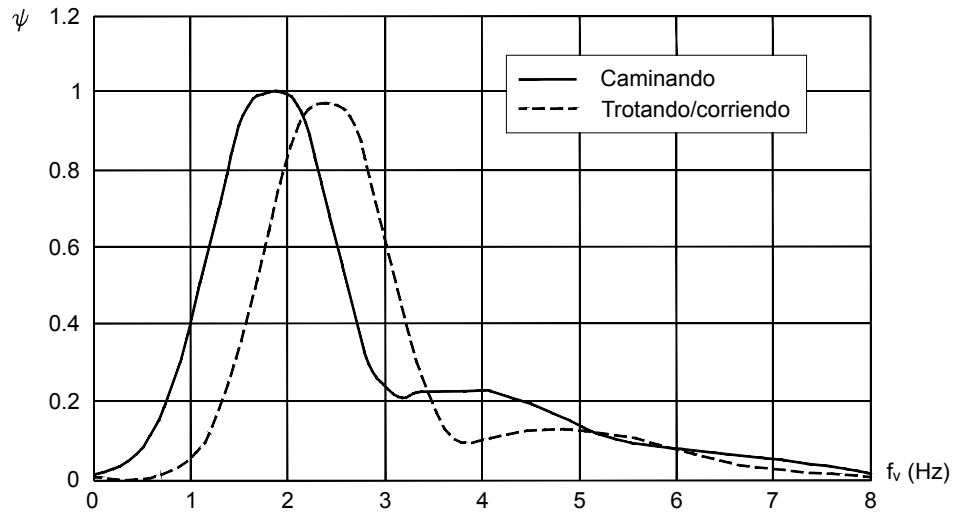


Figura 2.14: Relación entre la frecuencia natural y el factor de reducción  $\psi$ , para el primer armónico [NormaBS03].

La vibración vertical, inducida por los peatones, en los puentes peatonales con sección transversal constante se obtiene de modelos simplificados de una viga Euler-Bernoulli, donde las componentes de la carga peatonal se modelan como la combinación de una carga constante  $Pc_i(t)$  y una carga armónica  $Ph_i(t)$ , cruzando de manera simultánea el puente a una velocidad constante.

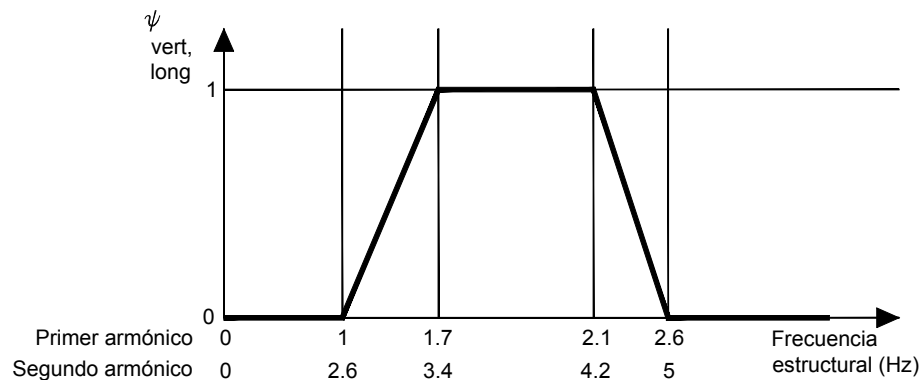


Figura 2.15: Factor de reducción  $\psi$ , para vibraciones longitudinales y verticales [Sétra06].

La vibración forzada resultante se obtiene por medio de la superposición del efecto de ambas cargas [Frýba99]. La fuerza dinámica vertical total ejercida por el peatón  $p(t)$  se obtiene con

$$p(t) = P c_i(t) + P h_i(t) \quad (2.39)$$

cuyo primer y segundo término corresponden con los términos de la serie de Fourier (2.37).

En primer lugar, la  $i$ -ésima carga constante peatonal generalizada  $P c_i(t)$  para el  $i$ -ésimo modo de vibrar del sistema se obtiene con

$$P c_i(t) = \int_0^L F(x, t) \phi_i(x) dx. \quad (2.40)$$

Usando las consideraciones de que  $\phi_{f_1} = 0$  y de que sólo se tomará en cuenta la contribución del primer armónico de la carga peatonal, (2.37) se reduce a

$$p(t) = P_p + P_p \alpha_1 \sin(2\pi f_p t) \quad (2.41)$$

por lo que la carga dinámica concentrada (2.36) resulta

$$F(x, t) = [P_p + P_p \alpha_1 \sin(2\pi f_p t)] \delta(x - V_0 t). \quad (2.42)$$

Utilizando sólo el primer término de la multiplicación en (2.42), el cual representa la componente constante de la carga peatonal, (2.40) resulta

$$P c_i(t) = \int_0^L P_p \delta(x - V_0 t) \phi_i(x) dx \quad (2.43)$$

donde la carga  $F(x, t)$  de un peatón moviéndose a una velocidad constante  $V_0$  se representada como el producto de una componente  $P_p$  en el tiempo, por una componente espacial  $\delta(x - V_0 t)$ , siendo  $\delta$  la función delta de Dirac que expresa la carga constante en movimiento debida al peso del peatón;  $x$  representa la posición del peatón en relación al extremo del puente y  $\phi_i(x)$  es la función de interpolación que representa el  $i$ -ésimo modo de vibrar normalizado, obtenido del vector modal de vibración  $\Phi_i$



para el  $i$ -ésimo modo de vibrar. Haciendo uso de las propiedades de la integral de la función delta de Dirac, resulta que

$$\int_0^L \delta(x - V_0 t) \phi_i(x) dx = \phi_i(V_0 t), \quad 0 < V_0 t < l$$

por lo que (2.43) resulta

$$Pc_i(t) = P_p \phi_i(V_0 t) \quad (2.44)$$

donde  $P_p = n_p G$ , es el peso total debido a los peatones, obtenido al multiplicar el número de peatones  $n_p$ , por el peso promedio de un peatón ( $G = 700$  newton) [Sétra06].

En segundo lugar, la  $i$ -ésima carga armónica peatonal generalizada  $Ph_i(t)$  debida a una carga armónica en movimiento, para el  $i$ -ésimo modo de vibrar del sistema se obtiene con

$$Ph_i(t) = \int_0^L F(x, t) \phi_i(x) dx.$$

Considerando sólo el segundo término de la multiplicación en (2.42), en conjunto con (2.38), la carga  $F(x, t)$  producida por el primer armónico de un peatón moviéndose a una velocidad constante, se representa como el producto de una componente de tiempo  $P_0 \sin(\Omega t)$  por una componente espacial  $\delta(x - V_0 t)$ , siendo  $\delta$  la función delta de Dirac, resultando en

$$Ph_i(t) = \int_0^L P_0 \sin(\Omega t) \delta(x - V_0 t) \phi_i(x) dx = P_0 \sin(\Omega t) \phi_i(V_0 t) \quad (2.45)$$

donde  $P_0 = n_{eff} G \alpha_1 \psi = \sqrt{n_p} G \alpha_1 \psi$  es la máxima amplitud armónica generada por el grupo de peatones;  $n_{eff}$  es el número efectivo de peatones desplazándose de manera sincronizada;  $\alpha_1$  es el coeficiente de Fourier para el primer armónico peatonal para vibración vertical, que se obtiene de la Tabla 2.5; el factor  $\psi$  es el coeficiente de reducción que expresa la probabilidad de la ocurrencia de la frecuencia peatonal en coincidencia con la frecuencia del puente;  $\Omega = 2\pi f_p$  es la frecuencia circular ejercida

por los peatones caminando de manera sincronizada, y  $V_0$  es la velocidad de cruce del peatón. Esta velocidad será la correspondiente para que se genere la frecuencia peatonal resonante que corresponda con la frecuencia natural de vibración que pudiera causar resonancia.

## 2.6. Modelo dinámico de un amortiguador magnetoreológico

De acuerdo a las definiciones actualmente aceptadas, un dispositivo de control semiactivo no puede aportar energía mecánica al sistema estructural al cual está sujeto, ya que no se aplican fuerzas activas de manera directa a la estructura [Housner97], pero el dispositivo si produce una fuerza reactiva o retardante que se presenta solamente si hay una velocidad relativa entre los dos extremos del dispositivo amortiguador [Rao11]. Un componente pasivo o un actuador semiactivo solamente extrae energía del sistema [Wang11]. Un dispositivo de control semiactivo particularmente prometedor en la reducción de la respuesta estructural es el amortiguador magnetoreológico (MRD), ya que ofrece simplicidad mecánica, un bajo consumo de energía para su operación, condiciones de operación en un amplio rango de temperatura ambiente y potencial demostrado para desarrollar fuerzas suficientes en aplicaciones a escala real [Dyke96a]. Sin embargo, estos dispositivos de control tienen una dinámica intrínsecamente no lineal lo que hace necesario desarrollar técnicas para la identificación de sus parámetros y el diseño de estrategias de control apropiadas que puedan utilizar de manera óptima sus características únicas.

Los fluidos magnetoreológicos tienen la característica esencial de que pueden ser reversiblemente cambiados de un estado de un fluido viscoso lineal que fluye libremente a un estado semisólido en cuestión de milisegundos cuando es expuesto a un campo magnético. Un MRD consiste de un amortiguador cilíndrico de orificios fijos, relleno con un fluido magnetoreológico, que, a su vez, consiste en un medio de aceite

de hidrocarburo que contiene partículas ferrosas de tamaño micrométrico y sensibles al magnetismo, dispersas en él, con aditivos que promueven la homogeneidad de las partículas e inhiben el asentamiento gravitacional. En la Figura 2.16 se muestra el diagrama esquemático de un MRD. El cilindro principal alberga el pistón, el circuito magnético, un acumulador y el fluido magnetoreológico. Como se aprecia, la válvula del flujo está dentro del pistón del amortiguador y consiste de un canal de flujo anular.

La fuerza de amortiguamiento  $f_d$  en un MRD varía con el cambio en la viscosidad del fluido magnetoreológico, el cual se modifica de acuerdo al campo magnético producido por el voltaje aplicado, cuando las partículas polarizables de tamaño micrométrico dispersas en el medio portador, forman cadenas de partículas y el fluido se vuelve semisólido. El campo magnético se aplica de manera radial, perpendicular a la dirección del fluido.

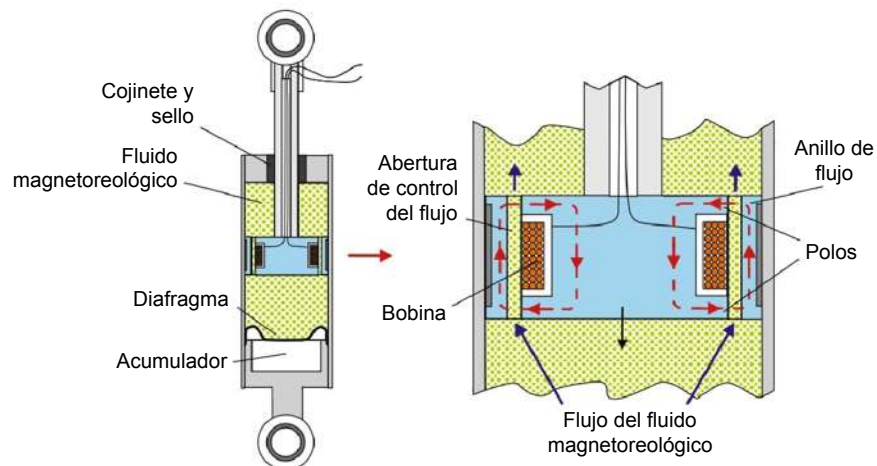
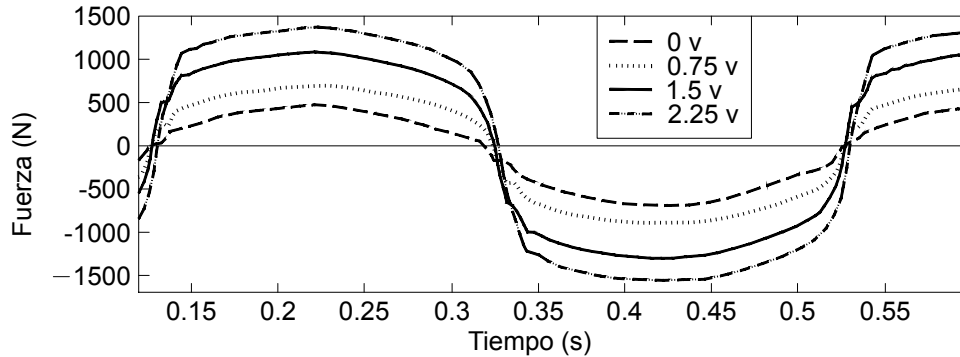


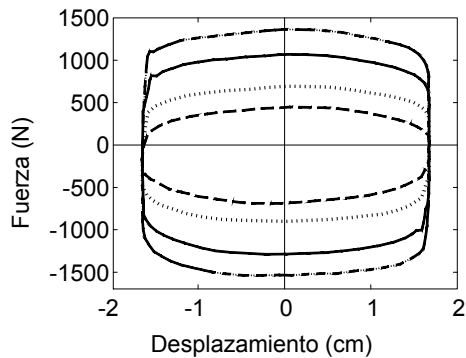
Figura 2.16: Esquemático de un amortiguador magnetoreológico [Preumont11].

La respuesta de un MRD debida a la aplicación de una carga con forma sinusoidal, amplitud máxima de 1.5 cm y frecuencia de 2.5 Hz se muestra en la Figura 2.17, para cuatro diferentes voltajes aplicados al amplificador de potencia del dispositivo, 0 V, 0.75 V, 1.5 V y 2.25 V. Estos voltajes corresponden a 0 A, 0.25 A, 0.5 A y 0.75 A, respectivamente. En la Figura 2.17a se muestra la evolución de la fuerza en función

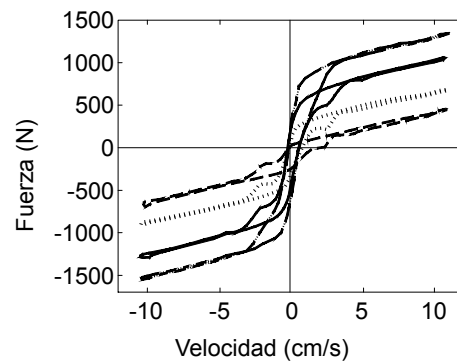
del tiempo, el ciclo fuerza-desplazamiento, que progresa en sentido horario conforme aumenta el tiempo, se muestra en la Figura 2.17b y el ciclo fuerza-velocidad que progresa en sentido antihorario conforme avanza el tiempo, en la Figura 2.17c.



(a) Fuerza-tiempo.



(b) Fuerza-desplazamiento.



(c) Fuerza-velocidad.

Figura 2.17: Respuesta de un MRD a una excitación sinusoidal de 2.5 Hz y amplitud máxima de 1.5 cm [Dyke96a].

En la Figura 2.17 se observan los efectos del cambio en el campo magnético ya que a 0 V, el MRD presenta las características de un dispositivo de amortiguamiento viscoso normal, es decir, la relación fuerza-desplazamiento es sensiblemente elíptica y la relación fuerza-velocidad es sensiblemente lineal. Al incrementar el voltaje, la fuerza requerida para desplazar el fluido magnetoreológico del amortiguador se incrementa

y genera un comportamiento asociado a un material plástico en paralelo con un amortiguador viscoso, es decir, un comportamiento plástico de Bingham [Shames92].

Se puede observar que la fuerza no está centrada en cero, esto se debe a la presencia de un acumulador, dentro del propio cilindro de la Figura 2.16, que contiene nitrógeno presurizado, que previene el efecto de cavitación del fluido. Este acumulador actúa como un resorte en el amortiguador, lo que produce un desfaseamiento en la fuerza y un ligero alargamiento vertical en el ciclo fuerza-velocidad. Otra característica importante de los datos es en el ciclo fuerza-velocidad, Figura 2.17c; en la parte superior de la curva fuerza-velocidad, que corresponde a velocidades en disminución, es decir, aceleraciones negativas, y por lo tanto, desplazamientos positivos, para velocidades positivas grandes, la fuerza en el MRD varía linealmente con la velocidad, sin embargo, al disminuir la velocidad y antes de volverse negativa, la relación fuerza-velocidad ya no es lineal, cayendo rápida y suavemente. Este decaimiento en la fuerza para pequeñas velocidades, se debe al efecto de “goteo” del fluido entre el cilindro y el pistón.

Para aprovechar por completo las características únicas de un MRD en aplicaciones de control, se debe de utilizar un modelo que de la manera más precisa pueda reproducir el comportamiento de su respuesta. Un modelo que ha sido ampliamente utilizado para modelar el comportamiento histerético de sistemas, es el modelo de Bouc-Wen [Wen76], ya que es versátil y puede representar una gran variedad de comportamientos histeréticos, sin embargo, la respuesta no lineal de la fuerza-velocidad no decae en la región donde la aceleración y la velocidad tienen signos opuestos y la magnitud de la velocidad es pequeña.

Un modelo que representa de mejor manera el comportamiento en esta región, es el modelo propuesto por [Dyke96a, Spencer97], conocido como modelo de Bouc-Wen modificado, que de manera esquemática se muestra en la Figura 2.18. Al considerar solamente la parte superior del modelo, las fuerzas en cualquiera de los lados de la

barra rígida son equivalentes, por lo que

$$c_1 \dot{y}_d = \alpha z_d + k_0(x_p - y_d) + c_0(\dot{x}_p - \dot{y}_d) \quad (2.46)$$

y resolviendo (2.46) para  $\dot{y}_d$  se tiene

$$\dot{y}_d = \frac{1}{c_0 + c_1} \{ \alpha z_d + c_0 \dot{x}_p + k_0(x_p - y_d) \}. \quad (2.47)$$

donde la variable evolutiva  $z_d$  está gobernada por

$$\dot{z}_d = -\gamma |\dot{x}_p - \dot{y}_d| z_d |z_d|^{n-1} - \beta (\dot{x}_p - \dot{y}_d) |z_d|^n + A_d (\dot{x}_p - \dot{y}_d). \quad (2.48)$$

La fuerza total generada por el sistema se obtiene al sumar las fuerzas en las secciones superior e inferior del sistema, resultando en

$$f_d = \alpha z_d + c_0(\dot{x}_p - \dot{y}_d) + k_0(x_p - y_d) + k_1(x_p - x_0). \quad (2.49)$$

De (2.46) la fuerza total puede ser reescrita como

$$f_d = c_1 \dot{y}_d + k_1(x_p - x_0) \quad (2.50)$$

siendo  $y_d$  un desplazamiento interno del modelo del MRD;  $z_d$  es una variable que toma en cuenta la dependencia de las respuestas anteriores del amortiguador;  $k_1$  representa la rigidez del acumulador;  $c_0$  es el amortiguamiento viscoso observado a altas velocidades; el amortiguador representado por  $c_1$ , toma en cuenta el amortiguamiento a bajas velocidades,  $k_0$  controla la rigidez a altas velocidades;  $x_0$  es el desplazamiento inicial para el resorte  $k_1$ , asociado con la fuerza nominal debida al acumulador;  $x_p$  es el desplazamiento de la barra del pistón que corresponde al desplazamiento de la estructura en el punto de conexión con ella. Las constantes  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $n$  y  $A_d$ , son parámetros asociados a un amortiguador específico.

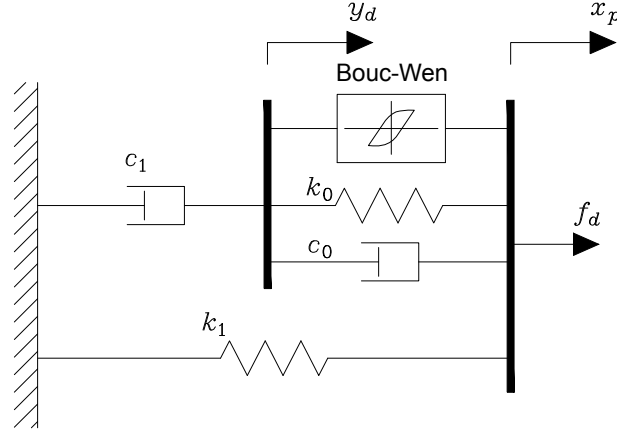


Figura 2.18: Esquema mecánico del modelo de Bouc-Wen modificado para un MRD.

Las expresiones (2.47), (2.48) y (2.50) modelan el comportamiento dinámico de un MRD con el modelo de Bouc-Wen modificado. Los parámetros de amortiguamiento viscoso varían en función del voltaje aplicado al manejador de corriente del amortiguador, para el modelo de Bouc-Wen modificado, se utilizan las siguientes relaciones

$$\alpha = \alpha_a + \alpha_b u_d \quad (2.51)$$

$$c_0 = c_{0a} + c_{0b} u_d \quad (2.52)$$

$$c_1 = c_{1a} + c_{1b} u_d \quad (2.53)$$

siendo  $\alpha_a$ ,  $\alpha_b$ ,  $c_{0a}$ ,  $c_{0b}$ ,  $c_{1a}$  y  $c_{1b}$  parámetros relacionados con un MRD específico. El término  $u_d$  representa un voltaje filtrado en el circuito, obtenido de la dinámica relacionada con que el fluido alcance el equilibrio magnetoreológico y está determinado por la relación

$$\dot{u}_d = -\eta(u_d - v) \quad (2.54)$$

donde  $v$  es el voltaje aplicado y  $\eta$  es una constante del sistema eléctrico del MRD [Kori09]. Vale la pena recalcar que el voltaje  $u_d$  será utilizado como la variable a ser diseñada utilizando la estrategia de control óptimo con la finalidad de reducir las vibraciones estructurales.

## 2.7. Modelo de la estructura con entrada de fuerza de un amortiguador

Para el caso de que una estructura con  $N$  grados de libertad esté equipada con amortiguadores, pudiendo ser del tipo MRD, el sistema (2.17) resulta en

$$M\ddot{x}_s + C_s\dot{x}_s + Kx_s = -\Gamma f_d + \lambda p(t) \quad (2.55)$$

donde  $f_d$  es la fuerza reactiva generada por el amortiguador, misma que se usará para reducir las vibraciones. El término  $\Gamma$  es un vector que indica la colocación de los amortiguadores en la estructura. Al definir un vector en espacio de estados como  $x = \begin{bmatrix} x_s^T & \dot{x}_s^T \end{bmatrix}^T$ , el sistema (2.55) se puede reescribir en una representación en espacio de estados como

$$\dot{x} = Ax + Bf_d + Ep(t) \quad (2.56)$$

donde las correspondientes matrices están dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C_s \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}\Gamma \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}\lambda \end{bmatrix}.$$

Para el caso con carga por sismo, el sistema (2.18), resulta en

$$M\ddot{x}_s + C_s\dot{x}_s + Kx_s = -\Gamma f_d - \lambda M\ddot{x}_g. \quad (2.57)$$

Definiendo un vector en espacio de estados como  $x = \begin{bmatrix} x_s^T & \dot{x}_s^T \end{bmatrix}^T$ , el sistema (2.57) se puede reescribir en una representación en espacio de estados como

$$\dot{x} = Ax + Bf_d + E\ddot{x}_g \quad (2.58)$$

donde las correspondientes matrices están dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C_s \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}\Gamma \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$



Finalmente, el modelo completo, no lineal de una estructura civil, incluyendo un MRD está descrito por (2.47)–(2.48), (2.50)–(2.54) y (2.56) y se representa como un sistema no lineal como

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u + D \quad (2.59)$$

$$y = h(x) \quad (2.60)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u \in \mathbb{R}^m$  es la entrada de control,  $y \in \mathbb{R}^p$  es la salida del sistema; las funciones  $f(x)$ ,  $B(x)$  y  $h(x)$  son mapeos suaves de dimensiones adecuadas. El término  $D$  es una señal externa que representa una perturbación desconocida acotada. Este modelo completo es el que se utilizará en el siguiente capítulo para fines de control.

## 2.8. Conclusiones del capítulo

De lo expuesto en el capítulo se puede concluir que

- La ecuación de movimiento de una estructura civil, modelada a través de la segunda ley del movimiento de Newton, permite conocer su respuesta estructural respecto del desplazamiento, la velocidad y la aceleración de las masas utilizadas en su modelado discreto.
- Es posible plantear un modelo no lineal que involucre el comportamiento lineal de la estructura y el comportamiento altamente no lineal de un elemento de control semiactivo, como lo es un MRD, al llevar el sistema completo a una representación en espacio de estados.
- La representación en espacio de estados facilita la inclusión de una fuerza externa, variante en el tiempo, que perturbe al sistema y lo haga salir de su estado estacionario, ocasionando con ello vibraciones en el sistema. La perturbación

puede ser producida por un evento sísmico o bien por la carga viva dinámica inducida por personas.

- La representación en espacio de estados, a la vez, permite encontrar la solución del problema de control y el desarrollo del algoritmo de control para reducir las vibraciones no deseadas.

# Capítulo 3

## Control óptimo no lineal

### 3.1. Introducción

Este capítulo describe, brevemente, algunos de los principales algoritmos de control aplicables a los diferentes esquemas de control estructural, a saber, control estructural activo y control estructural semiactivo, para con ello dar paso a la consideración del problema del diseño de una ley de control óptimo  $u^*$ , tal que la salida de la respuesta de un sistema estructural se reduzca de una manera significativa y minimice un índice de desempeño predeterminado, a través del cual, se evalúa el comportamiento dinámico del sistema. Vale la pena mencionar que para sistemas no lineales generales, el control óptimo no lineal es complicado de resolver, lo que se relaciona con la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) asociada [Sepulchre97]; para sistemas no lineales que admitan una factorización de coeficientes dependientes del estado (SDCF), la determinación de la solución de la ecuación de HJB es posible y, por lo tanto, la solución de control óptimo [Haessig02].

En el caso del control semiactivo, en la literatura se reporta la utilización de diferentes esquemas de control como, por ejemplo, el control por modos deslizantes de segundo orden, donde el enfoque principal es el de controlar la corriente de magnetización de un MRD, pero convirtiendo las ecuaciones que describen el comportamiento

altamente no lineal del ciclo histerético fuerza-velocidad del MRD, en una serie de funciones algebraicas que modelan la histéresis estática y que dejan fuera la dinámica interna del MRD [Ha13].

Por otro lado, [Lara-V17] presenta el comparativo de tres diferentes esquemas de control semiactivo, utilizando un controlador cuadrático lineal (LQR, por su siglas en inglés) asociado a un algoritmo óptimo conmutado (clipped-optimal), donde la ley de control óptimo lineal utilizada, determina la fuerza que el MRD debe proveer para controlar la vibración, para después, a través de la comparación de la fuerza ideal calculada, con la fuerza real ejercida, aplica un esquema de control óptimo conmutado, donde si la fuerza real está por debajo de la fuerza necesaria calculada y ambas tienen el mismo signo, se aplica el voltaje máximo permisible al MRD, en caso contrario, el voltaje se hace cero. Así mismo también presenta un algoritmo de control basado en un modelo predictivo y en un modelo inverso dinámico construido por medio de redes neuronales tipo NARX, donde una primer red neuronal simula un modelo predictivo que determina la fuerza de control óptima que requiere el MRD para minimizar las vibraciones; una segunda red neuronal, que funciona como un modelo inverso, determina las entradas al controlador basado en las salidas retrasadas del sistema, con lo que esta segunda red, calcula el voltaje a aplicar al MRD para que éste aplique una fuerza cercana a la óptima, determinada por la primer red neuronal. Por último, [Lara-V17] presenta un algoritmo de toma de decisiones basado en lógica difusa, que consiste en una serie de ajustes intuitivos determinados por la observación y racionalización del comportamiento del sistema estructural bajo análisis. Es un esquema pragmático que sirve para abordar la dificultad del modelado asociada con la naturaleza dinámica y los aspectos no lineales del sistema, y que hace uso de un conocimiento heurístico. Las variables del entrada al controlador son las velocidades y el desplazamiento, mientras que la variable de salida corresponde al voltaje a aplicar al MRD.

Los diversos tipos de controladores existentes se basan en diferentes teorías de

control, algunas de ellas con enfoques relativamente sencillos hasta otras con planteamientos mucho más complejos, sin embargo, la ecuación de movimiento para todas las metodologías de control [Datta03] tiene la siguiente estructura básica

$$M\ddot{x}_s(t) + C_s\dot{x}_s(t) + Kx_s(t) = \Gamma u(t) + \lambda p(t) \quad (3.1)$$

donde  $M$ ,  $C_s$  y  $K$  son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez;  $x_s(t)$  es el vector de desplazamiento;  $p(t)$  es la excitación producida por la carga externa;  $\Gamma$  es la matriz de colocación de la fuerza de control;  $\lambda$  es la matriz de colocación de la fuerza de excitación externa, y  $u(t)$  es el vector de fuerzas de control. El vector de fuerzas de control tiene la forma aproximada

$$u(t) = K_1x_s(t) + C_1\dot{x}_s(t) + E_1p(t) \quad (3.2)$$

donde  $K_1$ ,  $C_1$  y  $E_1$  son ganancias de control que pueden ser dependientes del tiempo.

De (3.1) y (3.2) se tiene que

$$M\ddot{x}_s(t) + (C_s - \Gamma C_1)\dot{x}_s(t) + (K - \Gamma K_1)x_s(t) = (\lambda + \Gamma E_1)p(t). \quad (3.3)$$

Se puede observar de (3.3), que el efecto del control estructural es el de modificar matemáticamente el amortiguamiento, la rigidez y la excitación, de manera que la respuesta del sistema sea controlada. Las matrices  $K_1$ ,  $C_1$  y  $E_1$  son matrices de ganancias y es posible obtenerlas de tal manera que la respuesta, en principio, sea eliminada totalmente. En la práctica, no es posible eliminar totalmente la respuesta por lo que se obtienen diferentes grados de control de la respuesta al modificar las matrices de ganancias de control. La selección de estas matrices de control, dependen del algoritmo de control seleccionado y como, por lo general, los algoritmos de control tienen alguna función objetivo a minimizar, estas ganancias se obtienen de acuerdo a la función objetivo.

Los diferentes algoritmos de control difieren en el cómo encontrar estas matrices de ganancias o de cómo encontrar el vector de fuerzas de control de entrada, sin perder

de vista la función objetivo en la reducción de la respuesta estructural. La solución del problema de control y el desarrollo del algoritmo de control se obtiene al escribir la ecuación de movimiento de control en una representación en espacio de estados con la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ep(t) \quad (3.4)$$

donde  $A$  es la matriz del sistema,  $B$  es el vector de colocación de la entrada del controlador,  $E$  es el vector de colocación de la entrada de fuerza externa y  $x(t)$  es el vector de estados.

Enseguida se presentan de manera breve algunos de los principales esquemas de control lineal, control no lineal y control inteligente, utilizados en el control estructural, para después abordar el diseño de un controlador óptimo no lineal robusto respecto de las perturbaciones y capaz de llevar a cabo la estabilización del sistema estructural.

## 3.2. Algoritmos de control lineal

Algunos de los principales esquemas de control lineal usados en el control estructural son los descritos a continuación.

### 3.2.1. Controlador PID

El controlador proporcional-integral-derivativo (PID) ha sido ampliamente utilizado en aplicaciones prácticas, especialmente para sistemas con uno o dos grados de libertad (DOF, por sus siglas en inglés). Para sistemas multivariable, su algoritmo de control se vuelve más complicado, lo que lo hace inadecuado para aplicaciones con el control de vibraciones en estructuras flexibles de múltiples grados de libertad [Yu16]. En general, la fuerza de control de la estructura para un controlador PID con salida

$y(t)$  se describe como [Li18]

$$u(t) = k_p y(t) + k_i \int_0^t y(t) dt + k_d \frac{dy(t)}{dt} \quad (3.5)$$

donde  $k_p$ ,  $k_d$  y  $k_i$  son los valores de las ganancias proporcional, integral y derivativa, respectivamente. La clave para el diseño de un controlador PID es la determinación de los valores para  $k_p$ ,  $k_d$  y  $k_i$ , que se pueden obtener utilizando el método de Ziegler-Nichols [Ogata09]. En el trabajo presentado por [Guclu06], se presenta el diseño de un controlador PID para control estructural que tiene la siguiente ley de control

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{K_i} \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (3.6)$$

donde  $K_p$ ,  $K_d$  y  $K_i$  son las ganancia proporcional, derivativa del tiempo e integral, respectivamente, y  $e(t)$  es el error de posición. Aquí, el desempeño del controlador PID lo compara con el de un controlador de modos deslizantes (SMC, por sus siglas en inglés) y se encuentra que el control PID es menos efectivo en reducir la vibración estructural.

La principal desventaja del uso de un control de este tipo, consiste en que su funcionamiento no se basa en un modelo matemático del sistema, lo que, aunado a que es un algoritmo de control lineal, reduce su eficacia y rango de operación sobre la respuesta estructural, en el control de un sistema no lineal.

### 3.2.2. Regulador cuadrático lineal (LQR)

Como uno de los algoritmos clásicos de control lineal, el regulador cuadrático lineal (LQR, por sus siglas en inglés), ha sido aplicado ampliamente en muchos problemas de la industria, partiendo de un modelo estructural preciso y retroalimentación de estado completa [Li18]. Las ventajas del controlador LQR incluyen la linealidad de la ley de control, lo que simplifica el análisis y la implementación práctica, buena supresión de las vibraciones y buenas propiedades de estabilidad. Definiendo las fuerzas de control del algoritmo LQR como  $u(t) = -K_u x$ , la matriz de ganancia del controlador  $K_u$  se

obtiene en unos cuantos pasos. El índice de desempeño del controlador se expresa por el funcional de costo [Saleh94]

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \quad (3.7)$$

donde  $Q$  es una matriz de ponderación semidefinida positiva de tamaño  $2n \times 2n$  que representa la importancia de los diferentes componentes del vector de respuesta estructural  $x(t)$ , y  $R$  es una matriz de ponderación definida positiva de tamaño  $r \times r$  que indica la importancia del vector de fuerzas de control  $u(t)$ .

La matriz de ganancias de control  $K_u$  se obtiene al minimizar el funcional de costo  $J$  y está dado por [Adeli97]

$$K_u = R^{-1} B^T P \quad (3.8)$$

donde  $P$  es una matriz definida positiva de tamaño  $2n \times 2n$  obtenida de la solución de la ecuación de Riccati [Saleh94, Saleh97]

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P = -Q. \quad (3.9)$$

Uno de los principales problemas del algoritmo de control LQR consiste en la efectiva obtención de las matrices de ponderación  $Q$  y  $R$ , para lo cual, en base a la relación entre la matriz de ponderación  $Q$  y la matriz de Riccati  $P$ , [Yang91] propone un control óptimo instantáneo con retroalimentación de velocidad y aceleración para estructuras no lineales con comportamiento histerético basado en el método de linealización equivalente. Otro problema con el control LQR tiene es la retroalimentación completa del estado, lo que resulta complicado para estructuras grandes. En [Aldemir01] se presenta un control óptimo para edificios lineales sujetos a excitaciones sísmicas. En [Wu98] se presenta un controlador LQR de orden reducido para el control de un edificio excitado por el viento y con los resultados de la simulación, determinan que para una implementación práctica es preferible el control de orden reducido sobre el control de orden completo ya que el primero no requiere de un observador.



### 3.2.3. Colocación de polos

El desempeño óptimo del controlador para aplicaciones de control estructural, se obtiene de acuerdo a los polos deseables (razones de amortiguamiento modal  $\xi_n$  y frecuencias naturales  $\omega_n$  ó eigenvalores del sistema) [Li18]. El control por colocación de polos es una técnica bien conocida para controlar sistemas lineales invariantes en el tiempo que se aplica a sistemas continuos y discretos [Ackermann93]. Si se define la fuerza de control del algoritmo de control por colocación de polos como  $u(t) = -K_u x$ , la idea principal del método consiste en encontrar una matriz de ganancia de control  $K_u$ , tal que los polos del sistema estructural de (3.4) se establezcan en valores preasignados deseables. La colocación de polos robusta [Kautsky85] y el algoritmo de Ackermann [Ackermann93] son algoritmos comunes para esta labor.

## 3.3. Algoritmos de control no lineal

Si bien, el método clásico de linealización por serie de Taylor, permite aproximar el comportamiento de un sistema no lineal a uno lineal y con ello, contar con métodos sistemáticos bien establecidos para su análisis y control, la mayoría de los sistemas físicos tienen un comportamiento no lineal, por lo que es preferible trabajar con modelos no lineales, ya que ofrecen una representación más apegada al comportamiento real del sistema. El control no lineal permite hacer un mejor control estructural al operar en un rango global, o cuando menos en un rango de respuesta estructural mucho más amplio que el de un controlador lineal. No obstante lo anterior, se siguen utilizando modelos lineales de orden reducido por su facilidad de manejo [Yoshida04]. Dadas las imprecisiones relativas al modelado de las estructuras civiles y lo cambiante de las cargas externas, la respuesta estructural inevitablemente incluye ciertas incertidumbres. Un algoritmo de control pudiera deteriorarse y volverse inestable debido a estas incertidumbres. En este sentido, los algoritmos de control lineal no pueden garantizar la estabilidad de una sistema no lineal sujeto a una carga dinámica cambiante, por

el contrario, la mayoría de los algoritmos de control no lineal, tienen la intención de conservar la confiabilidad necesaria en la presencia de las incertidumbres inherentes en los sistemas prácticos de control estructural [Li18].

Un modelo no lineal permite mejoras en la reducción de las vibraciones del sistema y en la robustez del controlador al compensar las incertidumbres del modelado y las cargas externas, asegurando con ello un adecuado desempeño en un amplio rango de operación de la respuesta estructural. En el control no lineal, se minimiza un funcional de costo de orden superior, de manera tal que la fuerza de control se vuelve una función no lineal de la variable de estado [Datta03]. La idea atrás de un controlador no lineal es la de obtener un mejor control de la respuesta con, relativamente, un menor esfuerzo de control.

A continuación, se describen algunos de los principales esquemas de control no lineal usados en el control estructural.

### 3.3.1. Control polinomial óptimo

Este algoritmo de control no lineal puede ser aplicado tanto a estructuras lineales como no lineales [Yang96]. El controlador polinomial óptimo no lineal es una suma de polinomios de diferentes órdenes en estados no lineales, i.e lineal, cúbico, quíntico, etc., donde las ganancias de las matrices para las diferentes partes del controlador se calculan de las ecuaciones matriciales de Riccati y de Lyapunov [Agrawal96]. Este controlador consume menos energía en la reducción de los picos de la respuesta de la estructura, sin embargo, pudiera usar picos de fuerza de control más grandes que los de un controlador lineal. El índice de desempeño que minimiza el controlador es cuadrático en control y polinomial, de cualquier orden, en los estados no lineales. La solución del control, se basa en la ecuación de HJB y las condiciones de optimalidad derivadas por Bernstein para el problema de control óptimo no lineal; éste presenta un desempeño razonable cuando se utiliza en un esquema de control híbrido con actuadores activos y dispositivos pasivos [Yang96].

### 3.3.2. Control por modos deslizantes (SMC)

Como un algoritmo de control no lineal, el control SMC ha sido utilizado para el control de vibraciones en estructuras civiles [Cho93]. En el control por modos deslizantes, se genera una superficie de deslizamiento que consiste en una combinación lineal de variables de estado [Datta03]. La superficie de deslizamiento se define de manera tal que el movimiento de la estructura sea estable dentro de esta superficie. La superficie de deslizamiento se obtiene al minimizar un funcional de costo del tipo LQR y, por lo tanto, requiere la solución de la ecuación de Riccati. Los controladores se diseñan de manera tal que conduzcan la trayectoria de la respuesta estructural dentro de la superficie de deslizamiento. Esto se logra a través del criterio de estabilidad de Lyapunov, ya que el movimiento dentro de la superficie de deslizamiento siempre es estable y la fuerza de control se estima para esta condición [Datta03].

La principal ventaja del SMC es su robustez en términos de las variaciones paramétricas del sistema, tales como la rigidez y el amortiguamiento, sin embargo, presentan el problema del indeseable efecto de “chattering”, que consiste en “switches” de alta frecuencia del controlador, mismos que no pueden ser manejados por los controladores físicos [Gao96].

## 3.4. Algoritmos de control inteligente

El principal objetivo de aplicar los conceptos de control inteligente al control estructural es el de obviar la necesidad de desarrollar un algoritmo de control analítico, sin embargo, en algunos casos aún así se mantiene la perspectiva de minimizar un funcional de costo [Datta03].

Algunos de los principales esquemas de control inteligente se muestran a continuación.

### 3.4.1. Control por Lógica Difusa (FLC, Fuzzy logic control)

La teoría de control por lógica difusa presenta la ventaja de su implícita robustez y su habilidad para manejar el comportamiento no lineal de las estructuras, además, los cálculos necesarios para el controlador son relativamente sencillos y se pueden implementar fácilmente en la práctica [Datta03]. En el FLC, se utilizan diferentes tipos de bases de reglas difusas, o conjuntos difusos, para alcanzar el objetivo de control y en base a operaciones de lógica difusa deducir la acción de control [Li18]. Las bases de los conjuntos difusos se pueden construir considerando la retroalimentación de solamente la velocidad, de la velocidad y el desplazamiento, o de la velocidad, la aceleración y el desplazamiento. El control por lógica difusa no provee un control óptimo, pero tiene mayor flexibilidad al ser comparado con teorías de control clásico [Datta03].

### 3.4.2. Red neuronal artificial (ANN, Artificial Neural Network)

A diferencia de los métodos de control convencionales que son programados explícitamente para llevar a cabo una tarea específica de control, los controladores basados en redes neuronales, también llamados neurocontroladores, aprenden la tarea de control, lo que probablemente sea su atributo más importante en el control de vibraciones estructurales [Adeli98]. Las redes neuronales son efectivas para problemas de control no lineal ya que son capaces de aprender mapeos no lineales complejos [Adeli01]. El neurocontrolador adquiere su conocimiento de control estructural a partir de un conjunto de casos de estudio y almacena ese conocimiento en los pesos de sus conexiones, para establecer relaciones deseables entre el pasado inmediato de la respuesta estructural y las señales de control ajustadas del actuador, sin embargo, ya que no existen métodos rigurosos para determinar algunos de sus parámetros, algunos de ellos se determinan por prueba y error [Bani-Hani98]. Estas redes tienden a proveer

fuerzas de control que reducirán la respuesta de la estructura cuando sea sujeta a cargas dinámicas futuras y desconocidas. En una red neuronal artificial los “pesos” de las conexiones representan su memoria y tienen el papel preponderante.

Esta estrategia presenta inconvenientes como la falta de precisión, lo limitado de su teoría para el diseño, y la limitada habilidad para racionalizar las soluciones que provee [Flood94], además de que no controla la respuesta estructural de manera óptima [Datta03].

### 3.4.3. Algoritmos genéticos (GA, Genetic algorithm)

Dado que el problema de control estructural consiste en la minimización de diferentes objetivos, estos pueden ser formulados a través de algoritmos de optimización multi-objetivo como el GA, por lo que esta técnica resulta útil para ajustar los parámetros de otros controladores [Li18]. El algoritmo genético es un proceso estocástico iterativo que se lleva a cabo al crear generaciones sucesivas de descendientes a partir de los “padres”, al llevar a cabo operaciones de selección, cruzamiento y mutación [Thenozhi13]. Las operaciones anteriores se llevan a cabo en base al valor de un funcional de costo a optimizar. Después de estas operaciones, los “padres” son reemplazados por los descendientes, proceso que continuará hasta se encuentre una solución óptima para el problema [Fleming02].

En [Park04] se propone el diseño de un controlador óptimo LQR, basado en un GA como la técnica numérica para el problema de optimización, donde la estructura y el sistema de control se tratan como un sistema combinado. También es posible utilizar la técnica de GA para optimizar los pesos de los coeficientes de la base de reglas de un FLC, al igual que el número de reglas difusas [Li18].

### 3.5. Control óptimo para reducir las vibraciones en estructuras civiles

Como se describió en las tres secciones antecedentes, algunos algoritmos de control no utilizan el modelo del sistema a controlar, lo que si bien, pudiera resultar en un control aceptable, este no necesariamente sería óptimo. Los controladores que si utilizan el modelo matemático, no determinan de manera directa la señal de control, voltaje, a aplicar al dispositivo de control utilizado y no son robustos a perturbaciones externas o imprecisiones paramétricas del modelo; la obtención final de la señal de control, la realizan por un simple esquema de comparación y conmutación. Los controladores no lineales mencionados, que incluyen los basados en control inteligente, no utilizan el modelo matemático del sistema y en su lugar utilizan procesos heurísticos cuyo resultado, por lo general, es la determinación de la fuerza necesaria a ejercer por el actuador, mas no la señal de control adecuada y directa, para el dispositivo actuador, misma que debe ser calculada a posteriori. Por otro lado, esta el más amplio rango de operación de la respuesta estructural que ofrece un controlador no lineal respecto de uno lineal, lo que haría preferible el uso del primero sobre el segundo, para obtener un mejor desempeño en la reducción de vibraciones.

El controlador que se presenta a continuación, es un controlador óptimo, no lineal y robusto. Óptimo, ya que debe lograr una reducción de las vibraciones del sistema al aplicar la menor cantidad de energía necesaria, minimizando un funcional de costo cuadrático asociado al sistema; no lineal, porque su síntesis, involucra al modelo no lineal con representación SDCF, obtenido de la dinámica lineal de la estructura civil y la dinámica altamente no lineal del dispositivo de control semiactivo usado (MRD), lo que garantiza un amplio rango de operación sobre la respuesta estructural ; robusto, porque ante la presencia de perturbaciones acotadas y variantes en el tiempo, es capaz de hacer un seguimiento de trayectoria, que en el caso estructural particular, resulta en un proceso de estabilización a su estado estable estático. Además, la salida del

controlador, es directamente, la señal de control óptima, voltaje, a ser aplicada al dispositivo de control.

### 3.5.1. Sistema no lineal en la forma SDCF

Asumiendo, para el sistema no lineal perturbado dado por (2.59)–(2.60), que  $f(0) = 0$ ,  $h(0) = 0$ ,  $f(\cdot) \in C^1$  y  $h(\cdot) \in C^1$ , entonces las funciones  $f(x)$  y  $h(x)$  pueden ser reescritas en una representación de coeficientes dependientes del estado (SDCF) [Cloutier97] como  $f(x) = A(x)x$  y  $h(x) = C(x)x$ , resultando en

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u + D \quad (3.10)$$

$$y = C(x)x. \quad (3.11)$$

Como las factorizaciones  $A(x)x$  y  $C(x)x$  no son únicas, entonces para lograr un esquema de control bien definido, estas factorizaciones deben de seleccionarse de manera que se garanticen las propiedades de controlabilidad y de observabilidad del sistema (3.10) con salida (3.11) [Banks07].

### 3.5.2. Funcional de costo

Es importante que el controlador force la salida del sistema para que siga, lo más apegada posible, una determinada trayectoria en un sentido óptimo y con el menor esfuerzo posible de control. Esta trayectoria a seguir, involucra un determinado error o diferencia en el seguimiento, entre la referencia y la salida del sistema, y es descrita como

$$e = r - y \quad (3.12)$$

$$e = r - c(x)x \quad (3.13)$$

siendo  $r$  la referencia del sistema, la cual, en el caso de problemas de estabilización como es el de las estructuras civiles, se establece como  $r = 0$  para equilibrar la estructura en la posición de equilibrio estático.

El funcional de costo está dado por un índice de desempeño cuadrático asociado, de manera que el control, al mover el sistema hacia un objetivo o seguir una trayectoria, satisfaga el criterio de desempeño dado por el funcional. Para el sistema (3.10)–(3.11), el funcional de costo a ser minimizado está dado por

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (e^T Q e + u^T R u) dt. \quad (3.14)$$

Las matrices  $Q$  y  $R$  son matrices simétricas definidas positivas que ponderan, respectivamente, la evolución en el tiempo del error de seguimiento  $e$  y la cantidad de esfuerzo de control. Es decir, con un valor apropiado de los elementos de  $Q$ , se le puede dar mayor importancia al desempeño en el seguimiento de la trayectoria si se selecciona un valor más grande en ella o se reducen los valores de  $R$ . Si se tiene un mayor interés en ahorrar energía de control, se reducen los valores de  $Q$  o se aumentan los valores de  $R$ . Con valores grandes de  $R$  se producirán menores cantidades de energía, obteniendo una respuesta lenta en el sistema y con valores de  $R$  pequeños se produce mayor gasto de energía con el consecuente incremento de la velocidad del sistema. Este par de matrices sirven, en general, para establecer un balance entre el desempeño del seguimiento y el esfuerzo de control. La minimización del funcional de costo dado por (3.14) se debe lograr tomando en cuenta las restricciones dinámicas del sistema (3.10)–(3.11).

Por lo anterior, el problema de control óptimo, para el caso de estructuras civiles, consiste en determinar una ley de control  $u^*$ , que mueva al sistema hacia un objetivo, de tal manera que (3.14) se minimice.

### 3.5.3. Controlador óptimo propuesto

Para resolver el problema de control y determinar la ley de control óptimo no lineal que logre una estabilización robusta del sistema no lineal (3.10)–(3.11) representado en la forma SDCF, que involucra un seguimiento de trayectoria, esta sujeto a una perturbación y a la vez busca minimizar el índice de desempeño dado por el funcional



de costo (3.14), se seguirá el procedimiento descrito en [Ornelas-Tellez18] donde se utilizará la ecuación de HJB y el principio de optimalidad, aplicada al sistema no lineal (3.10), con (3.14) como funcional de costo. Partimos de la consideración de que el sistema en cuestión es controlable y observable, por lo que la ley de control  $u_k$  se determinará en base al Hamiltoniano planteado como

$$\mathcal{H}(x, u, t) = \frac{1}{2} e^T Q e + \frac{1}{2} u^T R u + \frac{\partial V(x, t)^T}{\partial x} [A(x)x + B(x)u + D] \quad (3.15)$$

donde  $V(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función definida positiva.

Al aplicar el principio máximo de Pontryagin [Pontryagin62], derivando (3.15) respecto a  $u$ , e igualando a cero para minimizar  $\mathcal{H}$  respecto de  $u$ , resulta

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, u, t)}{\partial u} = R u^* + B^T(x) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = 0$$

de donde la ley de control óptimo resulta en

$$u^*(x) = -R^{-1} B^T(x) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x}. \quad (3.16)$$

Al sustituir (3.16) en (3.15), se obtiene la ecuación de HJB, misma que debe satisfacerse para obtener la solución óptima [Kirk04]. La ecuación de HJB resulta

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \mathcal{H}(x, u^*(x), t) \\ &= \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} r^T Q r - r^T Q C(x)x + \frac{1}{2} x^T C^T(x) Q C(x)x \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial V(x, t)^T}{\partial x} B(x) R^{-1} B^T(x) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial V(x, t)^T}{\partial x} [A(x)x + D]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Para resolver (3.17) para la función  $V(x, t)$ , [Kirk04] propone una solución con la forma

$$V(x, t) = \frac{1}{2} x^T P x - z^T x + \varphi, \quad P = P^T > 0 \quad (3.18)$$

por lo que

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} x^T \dot{P} x - \dot{z}^T x + \dot{\varphi} \quad \text{y} \quad \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = P x - z, \quad (3.19)$$

con lo que al sustituir (3.19) en (3.17) resulta

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{1}{2} x^T [\dot{P} + C^T(x) Q C(x) - P B(x) R^{-1} B^T(x) P + A^T(x) P + P A(x)] x \\
& - [\dot{z}^T + r^T Q C(x) + z^T [A(x) - B(x) R^{-1} B^T(x) P] - D^T P] x \\
& + \dot{\varphi} + \frac{1}{2} r^T Q r - z^T D - \frac{1}{2} z^T B(x) R^{-1} B^T(x) z.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Para satisfacer (3.20), se definen las tres siguientes ecuaciones diferenciales

$$\dot{P} = -C^T(x) Q C(x) + P B(x) R^{-1} B^T(x) P - A^T(x) P - P A(x) \tag{3.21}$$

donde la matriz  $P$  es la solución de la ecuación diferencial matricial simétrica de Riccati, con condición de frontera  $P(\infty) = 0$ ,

$$\dot{z} = -[A(x) - B(x) R^{-1} B^T(x) P]^T z - C^T(x) Q r + P D \tag{3.22}$$

donde el vector  $z$  es la solución de la ecuación diferencial asociada a (3.21), con condición de frontera  $z(\infty) = 0$ , y,

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{2} r^T Q r + z^T D + \frac{1}{2} z^T B(x) R^{-1} B^T(x) z \tag{3.23}$$

siendo  $\varphi$  la solución de la función escalar diferenciable asociada a (3.21), con condición de frontera  $\varphi(\infty) = 0$ .

Finalmente la ley de control óptimo se obtiene al sustituir la segunda ecuación de (3.19) en (3.16), resultando

$$\begin{aligned}
u^*(x) &= -R^{-1} B^T(x) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \\
u^*(x) &= -R^{-1} B^T(x) (P x - z)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

siendo (3.24) una ley de control óptimo para retroalimentación que garantiza una estabilidad asintótica en lazo cerrado, lleva a cabo la estabilización del sistema (3.10) y minimiza el funcional de costo asociado  $J$ .

Para el caso particular del MRD utilizado en el siguiente capítulo como dispositivo semiactivo de control, la salida de control representa la entrada de voltaje de alimentación al MRD, por lo que  $v = u^*(x)$ . Para la ley de control óptimo, todos los estados deben de estar disponibles para retroalimentación al controlador [Kirk04], los que pueden ser obtenidos por mediciones directas, o por un estimador de estado como se propone en [Anderson90, Stengel94]. La Figura 3.1 muestra el diagrama de bloques del sistema de control propuesto.

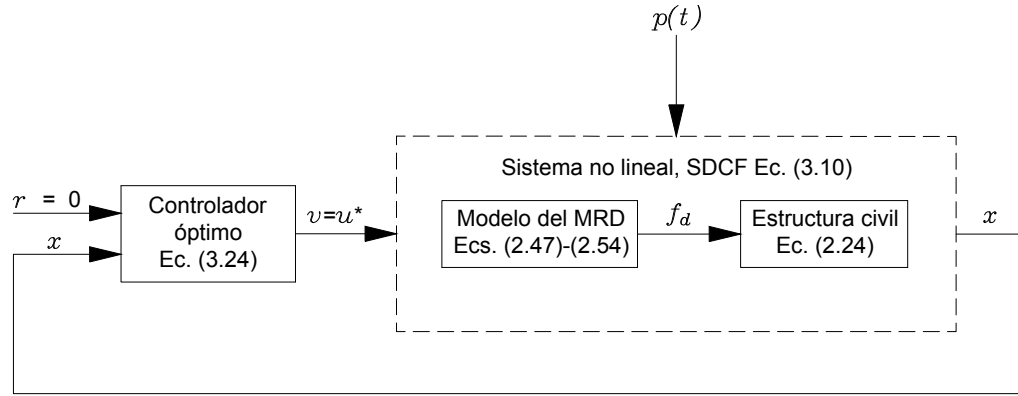


Figura 3.1: Diagrama de bloques del sistema de control.

La ley de control óptimo (3.24) es óptima en el sentido de que minimiza el funcional de costo (3.14), que tiene una función de valor óptimo dado como

$$J^* = \frac{1}{2}x^T(t_0)P(t_0)x(t_0) - z^T(t_0)x(t_0) + \varphi(t_0). \quad (3.25)$$

Las suposiciones de controlabilidad y observabilidad para (3.10)–(3.11) garantizan que la solución para (3.21) existe, es única y es una matriz definida positiva.

Respecto de la estabilidad del sistema, ésta es analizada en dos pasos. Primero, considerando el sistema en lazo cerrado dado por (3.10) con (3.24) como

$$\dot{x} = [A(x) - B(x)R^{-1}B^T(x)P]x + B(x)R^{-1}B^T(x)z + D \quad (3.26)$$

La ecuación (3.26) se compone de un sistema dinámico y las funciones de fuerza  $z$  y  $D$ . La estabilidad, unicamente, del sistema dinámico dado por

$$\dot{x} = [A(x) - B(x)R^{-1}B^T(x)P]x \quad (3.27)$$

se investiga al considerar una función candidata de Lyapunov  $W$ , definida positiva y radialmente acotada como,  $W = x^T P x$ , y obteniendo la derivada respecto del tiempo para (3.27), resultando en

$$\dot{W} = x^T \dot{P} x + x^T [P A(x) + A^T(x) P - 2PB(x)R^{-1}B^T(x)P]x \quad (3.28)$$

de (3.21)

$$PA(x) + A^T(x) P = -\dot{P} - C^T(x) Q C(x) + PB(x)R^{-1}B(x)^T P$$

entonces (3.28) resulta

$$\dot{W} = -x^T [C^T(x) Q C(x) + PB(x)R^{-1}B^T(x)P]x, \quad (3.29)$$

por lo que  $\dot{W}$  es semidefinida negativa.

Ya que el par  $(A(x), C(x))$  es observable y por el teorema de LaSalle, se asegura una estabilidad asintótica para el sistema nominal [Khalil96]. En segundo lugar, al ser la perturbación  $D$  una señal de entrada acotada, de acuerdo a [Kwakernaak72], ésta no afecta la estabilidad asintótica de (3.26).

Después de un procedimiento algebraico el valor óptimo de la función  $J^*$  para (3.14) resulta

$$\begin{aligned} J^* &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [e^T Q e + u^*(x)^T R u^*(x)] dt \\ &= -\frac{1}{2} x^T(\infty) P(\infty) x(\infty) + \frac{1}{2} x^T(t_0) P(t_0) x(t_0) \\ &\quad + z^T(\infty) x(\infty) - z^T(t_0) x(t_0) - \varphi(\infty) + \varphi(t_0) \end{aligned} \quad (3.30)$$

de donde la función de valor óptimo (3.25), resulta al considerar las condiciones de frontera  $P(\infty) = 0$ ,  $z(\infty) = 0$  y  $\varphi(\infty) = 0$ .

## 3.6. Conclusiones del capítulo

De lo expuesto en el capítulo es posible concluir que

- El problema de control para una estructura civil horizontal o vertical, se convierte en un problema de estabilización,  $r = 0$ . El significado físico de (3.14) es la minimización de la respuesta de la estructura civil, es decir, la minimización del desplazamiento  $x_s$ , la velocidad  $\dot{x}_s$  y/o la aceleración  $\ddot{x}_s$ , en los grados de libertad de la estructura, utilizando el mínimo esfuerzo de control.
- El uso de un modelo no lineal implica la utilización de un controlador no lineal, cuyo desempeño involucra una más amplia región de operación del sistema, proporcionando con ello un mejor control.
- El controlador utilizado, dado por (3.22)–(3.24), es un controlador robusto con respecto a la perturbación  $D$ , ya que permite hacer el seguimiento de una trayectoria variante en el tiempo, en este caso particular de estructura civiles, una estabilización, aún con la presencia de la perturbación  $D$  en (3.22).
- Hay que destacar que la salida  $u^*(x)$  producida por el controlador (3.24) se aplica de manera directa como entrada de alimentación del MRD, y representa el voltaje  $v$  óptimo necesario para la generación de la fuerza reactiva de amortiguamiento usada para la reducción de vibraciones.
- Una característica importante es que el diseño del controlador óptimo no lineal, utiliza el modelo completo de la estructura civil y el MRD mediante una representación en espacio de estados SDCF y toma en cuenta la dinámica de la alta no linealidad del MRD.



## Capítulo 4

# Aplicación del controlador óptimo a estructuras civiles

### 4.1. Introducción

La técnica de control óptimo no lineal robusta propuesta se probó a nivel simulación en dos diferentes tipos de estructuras: la primera, una estructura vertical, a escala, representando un edificio de tres niveles y la segunda, una estructura horizontal consistente en un puente peatonal real, de un sólo claro de 36 m de longitud, idealizado como una viga empotrada en ambos extremos.

Para cada una de las estructuras se analizó la reducción de la respuesta producida bajo dos diferentes condiciones de carga:

- El primer análisis se realizó para vibración libre, donde se impuso una deformación inicial a la estructura correspondiente y partiendo de ella, se analizó la respuesta bajo tres diferentes escenarios de control. Primero, cuando la estructura no incorpora ningún tipo de amortiguamiento adicional al proporcionado por los mismos elementos estructurales que la conforman, es decir, cuando no se aplicó ningún tipo de control sobre ella; segundo, cuando la estructura incorpora

la instalación de un MRD cuyo voltaje de operación es controlado por la salida del controlador óptimo no lineal propuesto; tercero y para fines de comparación, cuando la estructura incorpora la instalación de un MRD cuyo voltaje de operación es controlado por la salida de un controlador Proporcional-Derivativo no lineal.

- El segundo análisis se realizó para vibración forzada. Para el caso del modelo a escala del edificio, se le aplicó el registro de un acelerograma y se obtuvo la respuesta para tres diferentes escenarios de control: Primero, la respuesta sin ningún tipo de control; segundo, la respuesta obtenida con un MRD colocado en ella y controlado por el controlador óptimo propuesto, y tercero, para fines comparativos, la respuesta obtenida con la colocación de un MRD controlado por un controlador Proporcional-Derivativo no lineal. Para el caso del puente peatonal, se le aplicó la carga dinámica producida por diferente número de peatones cruzando el puente y se obtuvo la respuesta para los mismos escenarios de control anteriores, es decir, cuando no se consideró ningún tipo de control, cuando se consideró un MRD instalado en el centro del claro y el uso del controlador óptimo propuesto y cuando se consideró un MRD instalado en el centro del claro, con el uso de un controlador Proporcional-Derivativo no lineal.

La respuesta estructural para cada estructura y condición de carga específica se muestran a continuación:

## **4.2. Modelo de edificio a escala de tres niveles, caso: vibración libre amortiguada**

Se entiende por vibración libre como aquella que se produce en una estructura al ser perturbada de su posición de equilibrio estático y después se dejar vibrar sin la aplicación de ninguna otra fuerza externa, hasta que dicha vibración decae por



el amortiguamiento propio de la estructura. Para fines de simulación se utiliza un modelo de edificio a escala de tres niveles, con un MRD colocado en el primer nivel, como el que se muestra en la Figura 4.1. Los parámetros de masa, amortiguamiento

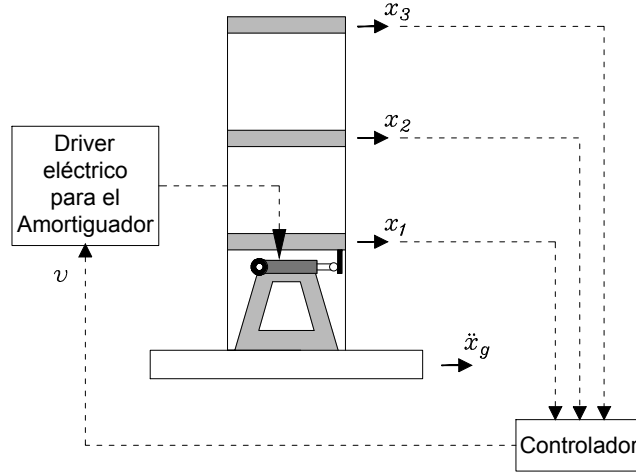


Figura 4.1: Modelo de edificio con MRD.

y rigidez se tomaron de [Dyke96b].

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix} \text{ kg} \quad (4.1)$$

$$C_s = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}} \quad (4.2)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (4.3)$$

donde los valores de los elementos de las matrices (4.1)–(4.3) son:  $m_{11} = m_{22} = m_{33} = 98.3$  y todos los elementos fuera de la diagonal principal de  $M$  son cero, mientras que

Tabla 4.1: Parámetros para el modelo del MRD [Dyke96b].

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
$C_{0a}$	21.0 N · s/cm	$\alpha_a$	140 N/cm
$C_{0b}$	3.5 N · s/cm · $u_d$	$\alpha_b$	695 N/cm · $u_d$
$k_0$	46.9 N/cm	$\gamma$	363 cm <sup>-2</sup>
$C_{1a}$	283 N · s/cm	$\beta$	363 cm <sup>-2</sup>
$C_{1b}$	2.95 N · s/cm · $u_d$	$A_d$	301
$k_1$	5.00 N/cm	$n$	2
$x_0$	14.3 cm	$\eta$	190 s <sup>-1</sup>

$c_{11} = 175.0, c_{12} = -50.0, c_{13} = 0; c_{21} = -50.0, c_{22} = 100.0, c_{23} = -50.0; c_{31} = 0, c_{32} = -50.0, c_{33} = 50.0$ , y finalmente  $k_{11} = 12.0, k_{12} = -6.84, k_{13} = 0; k_{21} = -6.84, k_{22} = 13.7, k_{23} = -6.84; k_{31} = 0, k_{32} = -6.84, k_{33} = 6.84$ . Los parámetros del modelo del amortiguador, mostrados en la Tabla 4.1, fueron tomados de [Dyke96b]. El problema de control óptimo consiste en encontrar la entrada de control  $u^*$  de manera tal que se estabilice a la estructura en la vertical. Para ello, es necesario llevar al sistema a la representación en espacio de estados, donde las variables de estado se definen como:

$$x = \left[ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8 \quad x_9 \right]^T$$

donde  $x_i$ , para  $i = 1, 2, 3$ , son los desplazamientos del entrepiso correspondiente;  $x_i$ , para  $i = 4, 5, 6$ , son las velocidades correspondientes al 1er, 2do y 3er entrepiso, respectivamente; mientras que las variables del MRD son  $x_7 = y_d, x_8 = z_d$  y  $x_9 = u_d$ , en correspondencia con (2.47), (2.48) y (2.54).

De acuerdo al controlador dado por (3.24), se requiere que el sistema a controlar tenga la forma (3.10)–(3.11), por lo que las matrices del sistema del modelo a escala

con el MRD son:

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} & a_{49} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} & a_{59} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} & a_{69} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{78} & a_{79} \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{88} & a_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta \end{bmatrix}$$

donde los valores de los elementos de los renglones 4, 5, 6, 7 y 8 están dados en las Tablas 4.2–4.4, mientras que

$$B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta \end{bmatrix}^T,$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{k_1 x_0}{m_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta \end{bmatrix}^T$$

y  $C(x)$  es una matriz identidad de dimensión  $9 \times 9$ .

La excitación inicial de la estructura fue proporcionada por las condiciones iniciales impuestas a las ecuaciones diferenciales del sistema (3.10), considerando que los desplazamientos iniciales para cada uno de los tres niveles son:  $x_1 = 0.1$  cm,  $x_2 = 0.1$  cm y  $x_3 = -0.1$  cm. Calculando la entrada de voltaje óptima al MRD del modelo dado por (2.47), (2.48) y (2.50), con los parámetros de la Tabla 4.1 y la ley de control óptimo dada por (3.24), se obtienen las gráficas de desplazamiento en los diferentes niveles del modelo a escala, como se muestra en las Figuras 4.2a–4.2c, mismos que son comparados con la respuesta de la estructura sin control y con la respuesta obtenida con un controlador PD no lineal. De igual forma en las Figuras 4.2d–4.2f, se muestra la velocidad, sin control, con control óptimo y con un control PD no lineal, de cada uno de los tres niveles.

Tabla 4.2: Elementos del renglón 4 y 5 de la matriz  $A(x)$ .

Elemento	Valor	Elemento	Valor
$a_{41}$	$-\frac{k_1-k_{11}}{m_{11}} - \frac{c_{1a}k_0}{m_{11}(c_{0a}+c_{1a}+c_{0b}x_9+c_{1b}x_9)}$	$a_{51}$	$-\frac{k_{21}}{m_{22}}$
$a_{42}$	$-\frac{k_{12}}{m_{11}}$	$a_{52}$	$-\frac{k_{22}}{m_{22}}$
$a_{43}$	$-\frac{k_{13}}{m_{11}}$	$a_{53}$	$-\frac{k_{23}}{m_{22}}$
$a_{44}$	$-\frac{c_{11}}{m_{11}} - \frac{c_{0a}c_{1a}-c_{0b}c_{1b}x_9^2}{m_{11}(c_{0a}+c_{1a}+c_{0b}x_9+c_{1b}x_9)}$	$a_{54}$	$-\frac{c_{21}}{m_{22}}$
$a_{45}$	$-\frac{c_{12}}{m_{11}}$	$a_{55}$	$-\frac{c_{22}}{m_{22}}$
$a_{46}$	$-\frac{c_{13}}{m_{11}}$	$a_{56}$	$-\frac{c_{23}}{m_{22}}$
$a_{47}$	$\frac{c_{1a}k_0}{m_{11}(c_{0a}+c_{1a}+c_{0b}x_9+c_{1b}x_9)}$	$a_{57}$	0
$a_{48}$	$\frac{-c_{1a}\alpha_a-c_{1b}x_9^2\alpha_b}{m_{11}(c_{0a}+c_{1a}+c_{0b}x_9+c_{1b}x_9)}$	$a_{58}$	0
$a_{49}$	$-\frac{c_{1b}(c_{0a}x_4+k_0(x_1-x_7)+x_8\alpha_a)+c_{1a}(c_{0b}x_4+x_8\alpha_b)}{m_{11}(c_{0a}+c_{1a}+(c_{0b}+c_{1b})x_9)}$	$a_{59}$	0

Tabla 4.3: Elementos de renglones 6 y 7 de la matriz  $A(x)$ .

Elemento	Valor	Elemento	Valor
$a_{61}$	$-\frac{k_{31}}{m_{33}}$	$a_{71}$	$\frac{k_0}{c_{0a}+c_{1a}+c_{0b}x_9+c_{1b}x_9}$
$a_{62}$	$-\frac{k_{32}}{m_{33}}$	$a_{72}$	0
$a_{63}$	$-\frac{k_{33}}{m_{33}}$	$a_{73}$	0
$a_{64}$	$-\frac{c_{31}}{m_{33}}$	$a_{74}$	$\frac{c_{0a}}{c_{0a}+c_{1a}+c_{0b}x_9+c_{1b}x_9}$
$a_{65}$	$-\frac{c_{32}}{m_{33}}$	$a_{75}$	0
$a_{66}$	$-\frac{c_{33}}{m_{33}}$	$a_{76}$	0
$a_{67}$	0	$a_{77}$	$-\frac{k_0}{c_{0a}+c_{1a}+c_{0b}x_9+c_{1b}x_9}$
$a_{68}$	0	$a_{78}$	$\frac{\alpha_a}{c_{0a}+c_{1a}+c_{0b}x_9+c_{1b}x_9}$
$a_{69}$	0	$a_{79}$	$\frac{c_{0b}x_4+x_8\alpha_b}{c_{0a}+c_{1a}+c_{0b}x_9+c_{1b}x_9}$

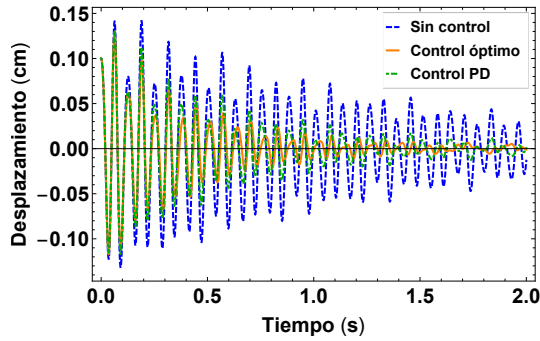
Tabla 4.4: Valores de los elementos del renglón 8 de la matriz  $A(x)$ .

Elemento	Valor
$a_{81}$	$\frac{k_0 x_8^2 \beta - A_d k_0}{c_0 + c_1}$
$a_{82}$	0
$a_{83}$	0
$a_{84}$	$A_d - x_8^2 \beta + \frac{c_0 x_8^2 \beta - A_d c_0}{c_0 + c_1}$
$a_{85}$	0
$a_{86}$	0
$a_{87}$	$\frac{A_d k_0 - k_0 x_8^2 \beta}{c_0 + c_1}$
$a_{88}$	$\frac{x_8^2 \alpha \beta - A_d \alpha}{c_0 + c_1} - \gamma  x_8 ^{n-1}  x_4 - \frac{c_0 x_4 + k_0 (x_1 - x_7) + x_8 \alpha}{c_0 + c_1} $
$a_{79}$	0

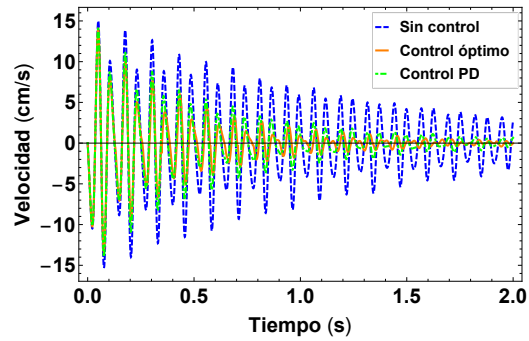
Para fines comparativos del controlador óptimo no lineal propuesto, también se muestra la respuesta del sistema obtenida con un controlador PD no lineal, con la estructura  $v = u_{pd} = -k_p x_1 - k_d |\dot{x}_1|$ , donde la estructura original de un controlador PD lineal, se modificó con la inclusión del valor absoluto en el término de la velocidad, para con ello forzar que la salida del controlador sea siempre un voltaje positivo, y tener la polarización requerida por el MRD. Los valores usados para las ganancias son  $k_p = 0.1$  y  $k_d = -10$ , mismos que se obtuvieron por un procedimiento iterativo de prueba y error, hasta encontrar valores que lograran un cierto equilibrio entre rapidez de respuesta del sistema y el esfuerzo de control.

En las Figuras 4.2a, 4.2b y 4.2c se puede apreciar como la respuesta del desplazamiento del modelo del edificio a escala, disminuye con la acción del controlador óptimo, respecto de la respuesta que se tiene si no se tuviera control sobre el MRD. Se puede apreciar, en la Figura 4.2a, que las oscilaciones son de menor amplitud debido que en dicho nivel es donde está instalado el MRD. En las Figuras 4.2d, 4.2e y 4.2f se observa que la velocidad respectiva de cada uno de los tres niveles del modelo

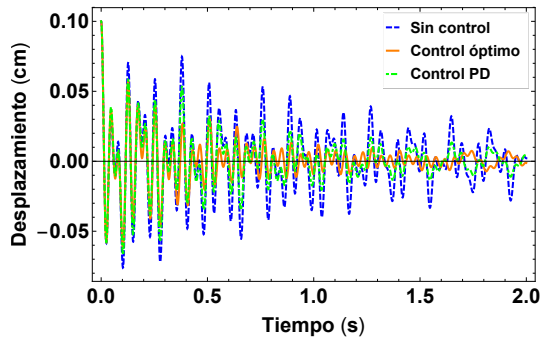
a escala, es menor cuando se tiene una acción de control sobre el MRD, con respecto a la respuesta que se tiene cuando el amortiguador no tiene acción de control.



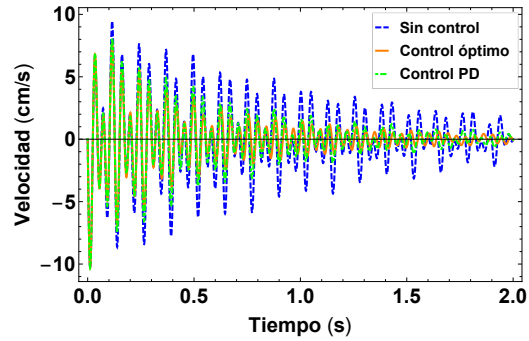
(a) Desplazamiento del primer nivel.



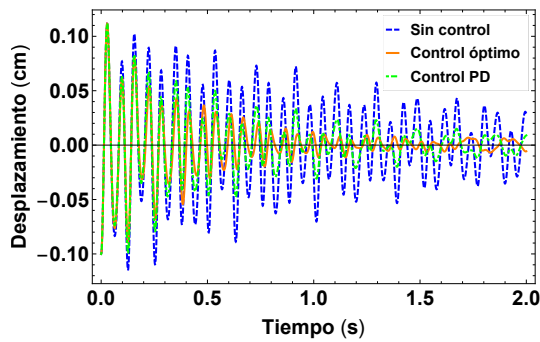
(d) Velocidad del primer nivel.



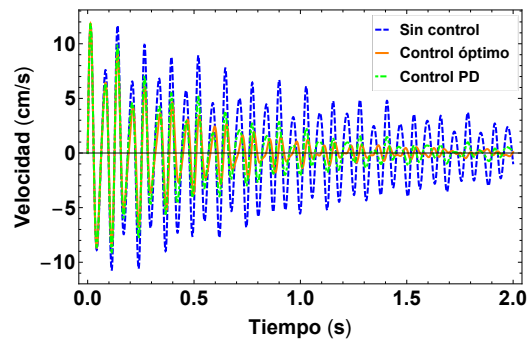
(b) Desplazamiento del segundo nivel.



(e) Velocidad del segundo nivel.



(c) Desplazamiento del tercer nivel.



(f) Velocidad del tercer nivel.

Figura 4.2: Respuesta de desplazamiento y velocidad de los entrepisos.

### 4.3. Modelo de edificio a escala de tres niveles, caso: vibración forzada por sismo

Se entiende por vibración forzada como aquella que se produce en una estructura como resultado de la aplicación de una fuerza externa  $p(t)$  que varía con el tiempo. Para fines de análisis y simulación se llevó a cabo una investigación para comparar la respuesta estructural, en el tiempo, de un modelo a escala de un edificio de tres niveles [Dyke96a], donde se evalúa un primer escenario que no considera ningún amortiguamiento adicional a aquel proporcionado por la propia estructura. Un segundo escenario considera que un único MRD se instala entre el primer piso del modelo a escala y el suelo, como se muestra en la Figura 4.1, y se utiliza el controlador óptimo no lineal propuesto (3.24) para controlar el voltaje de entrada al MRD. Para ambos escenarios se aplicó, al modelo, un registro acelerográfico correspondiente al sismo Puebla-Morelos(7.1M), México 2017, obtenido por la estación JC54 de la red acelerográfica de la Ciudad de México.

#### 4.3.1. Representación del modelo a escala en factorización de coeficientes dependientes del estado (SDCF, por sus siglas en inglés)

El sistema (2.47), (2.48), (2.50)–(2.54) y (2.58) representa el modelo de la descripción general de una estructura civil incluyendo un MRD, cuyo vector y variables de estado se definen como

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix}^T$$

donde  $x_i$ , para  $i = 1, 2, 3$ , son los desplazamientos del entrepiso correspondiente. Las variables  $x_i$ , para  $i = 4, 5, 6$ , son las velocidades correspondientes a los entrepisos 1, 2 y 3, respectivamente, mientras que las variables del amortiguador son  $x_7 = y_d$ ,

$x_8 = z_d$  y  $x_9 = u_d$ , de acuerdo a (2.47), (2.48) y (2.54). Para el modelo a escala, las correspondientes matrices para la representación en coeficientes dependientes del estado (3.10)–(3.11), se determinan como

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} & a_{49} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} & a_{59} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} & a_{69} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{78} & a_{79} \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{88} & a_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta \end{bmatrix},$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta \end{bmatrix}^T,$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{k_1 x_0}{m_{11}} - \ddot{x}_g & -\ddot{x}_g & -\ddot{x}_g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

y  $C(x)$  resulta una matriz identidad de  $9 \times 9$ . La factorización de los renglones  $a_4$ ,  $a_7$  y  $a_8$  se lleva a cabo factorizando las variables de estado en el orden  $x_9$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$ ,  $x_5$ ,  $x_6$ ,  $x_7$ ,  $x_8$ . Los valores algebraicos de  $A(x)$  se dan en las Tablas 4.2–4.4 y sus valores numéricos, junto con los de  $B(x)$  y  $D$ , se dan en las Tablas 4.1 y 4.5.

Tabla 4.5: Parámetros del modelo a escala del edificio.

Masa	Valor (kg)	Amortiguam.	Valor ( $\frac{N \cdot s}{m}$ )	Rigidez	Valor ( $\frac{N}{m}$ )
$m_{11}$	98.3	$c_{11}$	175	$k_{11}$	12
$m_{12}$	0	$c_{12}$	-50	$k_{12}$	-6.84
$m_{13}$	0	$c_{13}$	0	$k_{13}$	0
$m_{21}$	0	$c_{21}$	-50	$k_{21}$	-6.84
$m_{22}$	98.3	$c_{22}$	100	$k_{22}$	13.7
$m_{23}$	0	$c_{23}$	-50	$k_{23}$	-6.84
$m_{31}$	0	$c_{31}$	0	$k_{31}$	0
$m_{32}$	0	$c_{32}$	-50	$k_{32}$	-6.84
$m_{33}$	98.3	$c_{33}$	50	$k_{33}$	6.84



Los parámetros del MRD obtenidos de [Dyke96b] se muestran en la Tabla 4.1. Para el edificio, la masa, el amortiguamiento y rigidez, representados en las matrices  $M$ ,  $C_s$  y  $K$ , se muestran en la Tabla 4.5.

### 4.3.2. Síntesis del controlador

La metodología de modelado y control descrita en los capítulos 2 y 3, se aplica al modelo a escala de tres niveles mostrado en la Figura 4.1. El problema de control óptimo para la estructura a escala se relaciona con encontrar la entrada de control  $u^*$  de manera tal que la estructura reduzca la respuesta generada por la perturbación  $D$  y, por lo tanto, se estabilice verticalmente, lo cual se especifica al fijar  $r = 0$  en (3.22).

Ya que sólo hay un MRD colocado en el primer nivel, el vector  $\Gamma$  in (2.57) resulta como

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

En la ley de control (3.24) y en la SDRE (3.21),  $R$  se selecciona como  $R = 1.5$  y la correspondiente matriz  $Q$ , como  $Q = \text{diag} [100 \ 100 \ 100 \ 20000 \ 20000 \ 20000 \ 1 \ 1 \ 1 ]$ , ya que estos valores proporcionan un adecuado balance entre el esfuerzo de control y la velocidad de respuesta del sistema. Para la determinación de las matrices  $Q$  y  $R$ , se siguió el procedimiento sugerido por [Kwakernaak72], al considerar  $R$  como constante e incrementando los valores de  $Q$  hasta que se obtuvo un desempeño satisfactorio del controlador. Para que la aceleración del suelo excite a cada uno de los tres grados de libertad del modelo a escala, uno por entrepiso, y así obtener un modo de vibrar más real al considerar los desplazamientos en una sola dirección [Williams16], el vector de coeficientes de influencia  $\lambda$  en (2.57) se establece como

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

En simulación, la componente Norte-Sur de la aceleración del suelo  $\ddot{x}_g$ , del sis-

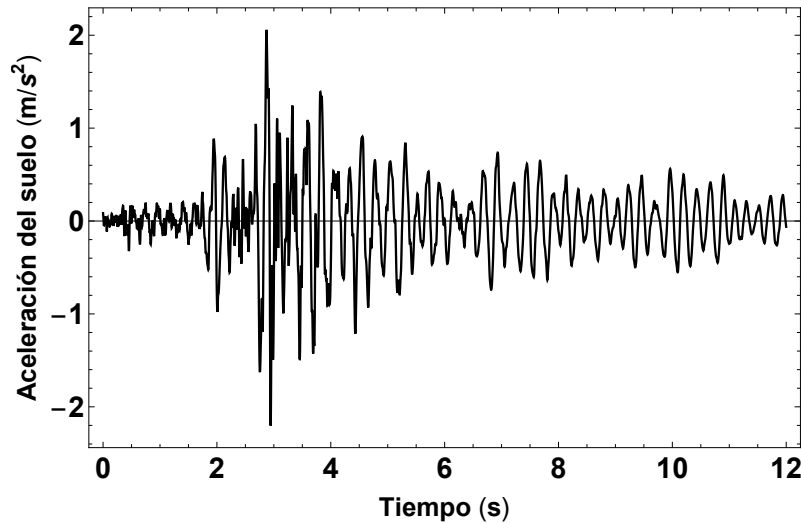


Figura 4.3: Registro acelerográfico, escalado cinco veces en el tiempo, de la componente Norte-Sur, de la estación JC54 de la RACM. Sismo Puebla-Morelos(7.1M), México, 2017.

mo del 19 de septiembre de 2017, Puebla-Morelos (7.1M), México<sup>1</sup>, se aplica a la estructura a escala; tomando en cuenta que el tamaño a escala del modelo es de 1/5 parte del tamaño real y la consecuente reducción del periodo natural de vibración, la aplicación del sismo se lleva a cabo en una quinta parte del tiempo del registro original [Dyke96b] para así mismo reducir, en la misma proporción, el periodo de tiempo original de la aceleración del suelo.

El registro original con el acelerograma para un minuto, se reduce a doce segundos y se muestra en la Figura 4.3, donde se observa el pico máximo de aceleración de  $-2.20 \text{ m/s}^2$  registrado en la estación.

Para determinar si la aplicación del mencionado sismo resulta relevante en la respuesta de aceleración del edificio a escala, se llevó a cabo la determinación de las aceleraciones máximas absolutas que se presentan en un oscilador de un sólo grado de libertad, al aplicarle el mencionado registro acelerográfico (Figura 4.3). El modelo

<sup>1</sup>Datos obtenidos del Centro de instrumentación y registro sísmico A. C. (CIRES), con registros de la estación *Parque jardines de Coyoacán (JC54)* de la red acelerográfica de la Ciudad de México (RACM).

del oscilador esta dado por la forma algebraica de (2.13), es decir,

$$m\ddot{x}_s + c\dot{x}_s + kx_s = -m\ddot{x}_g. \quad (4.4)$$

Dividiendo (4.4) entre la masa  $m$ , igualando a cero y sustituyendo  $c = 2m\omega\xi$  y  $k = m\omega^2$ , donde  $\omega$  es la frecuencia circular de vibración del oscilador y  $\xi$  es la razón de amortiguamiento, se obtiene:

$$\ddot{x}_s + 2\omega\xi\dot{x}_s + \omega^2x_s + \ddot{x}_g = 0. \quad (4.5)$$

Resolviendo (4.5) con diferentes valores de  $\xi$ , variando la frecuencia de 0.2–50 Hz, es decir,  $0.2(2\pi) \leq \omega \leq 50(2\pi)$  rad/s<sup>2</sup>, se obtiene el espectro de respuesta de aceleración en función de la frecuencia de vibrar y de  $\xi$ , sin embargo, la representación común del espectro de aceleración es en función del periodo natural de vibración  $T$ , en segundos, por lo que, para cada frecuencia contemplada, se hace la equivalencia de su respectivo periodo y el correspondiente valor máximo absoluto de aceleración que se presenta para dicha frecuencia. La Figura 4.4 muestra el espectro de aceleraciones, como fracción de la aceleración de la gravedad,  $g$ , para diferentes razones de amortiguamiento  $\xi$ .

Calculando, para el modelo a escala, el periodo correspondiente a la frecuencia natural de vibración más pequeña, llamada frecuencia fundamental de vibración  $\omega_1$ , a través de (2.33), resulta que  $T_1 = 1/(\omega_1/2\pi) = 2\pi/\omega_1 = 2\pi/34.2848 = 0.18$  s. Leyendo este valor en el eje horizontal de la Figura 4.4, representado por la línea vertical punteada, se puede observar que para los diversos amortiguamientos  $\xi$ , la aceleración espectral para la frecuencia fundamental, expresada como periodo, se encuentra en la zona de periodos donde se presentan las aceleraciones máximas, lo que permite validar la pertinencia del uso del registro acelerográfico utilizado, por causar, éste último, las respuestas más altas de aceleración en la estructura a escala y, al mismo tiempo, justifica la implementación de un control estructural.

En la Tabla 4.6 se presentan los picos de máxima respuesta obtenidos para el edificio a escala, al aplicarle el sismo Puebla-Morelos (7.1M), México 2017. La infor-

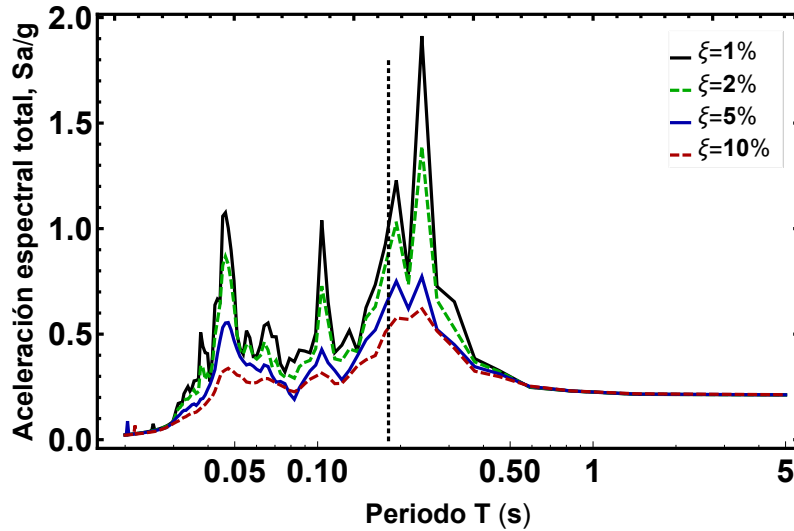


Figura 4.4: Espectro de aceleraciones para diferentes fracciones de amortiguamiento  $\xi$ .

mación se divide en cinco columnas. La primera columna de resultados (Sin control) muestra las respuestas pico cuando no existe amortiguamiento adicional al que provee la propia estructura; la segunda columna de resultados (Control óptimo) contiene las respuestas pico para un escenario donde un MRD está instalado entre el suelo y el primer nivel de la estructura y se utiliza la estrategia de control óptimo propuesta para controlar el voltaje de entrada al MRD; la tercera columna de resultados (control PD) muestra las respuestas pico para un escenario, con fines de comparación, donde un MRD está instalado entre el suelo y el primer nivel de la estructura y se utiliza un controlador Proporcional-Derivativo (PD) no lineal, con la estructura  $v = u_{pd} = -k_p x_1 - k_d |\dot{x}_4|$ , en el que los valores de las ganancias son:  $k_p = 0.1$  y  $k_d = -10$ , mismos que fueron utilizados por presentar un equilibrio adecuado entre velocidad de respuesta y el esfuerzo de control.

Las respuestas mostradas son: desplazamientos relativos al suelo  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ; desplazamiento de entrepisos  $d_i$ , obtenido con  $d_i = x_i - x_{i-1}$ ; velocidad del entrepiso  $\dot{x}_i$  y aceleración del entrepiso  $\ddot{x}_i$ .

4.3. Modelo de edificio a escala de tres niveles, caso: vibración forzada por sismo 97

Tabla 4.6: Respuestas pico máximas de la estructura, porcentaje de reducción de la respuesta y NRMSD para la respuesta de cada nivel.

Respuesta	Sin control	Control óptimo	Control PD	Reducción con óptimo	Reducción con PD
$x_i$ (m)	0.0083	0.0009	0.0020	89.6 %	75.3 %
	0.0131	0.0015	0.0034	88.8 %	74.1 %
	0.0158	0.0019	0.0041	87.7 %	74.0 %
$d_i$ (m)	0.0083	0.0009	0.002	89.6 %	75.9 %
	0.0048	0.0006	0.001	87.3 %	79.2 %
	0.0027	0.0004	0.001	85.2 %	63.0 %
$\dot{x}_i$ (m/s)	0.2780	0.0258	0.0714	90.7 %	74.3 %
	0.4378	0.0670	0.1189	84.7 %	72.8 %
	0.5242	0.0876	0.1463	83.3 %	72.1 %
$\ddot{x}_i$ (m/s <sup>2</sup> )	9.7937	3.9701	3.2072	59.4 %	67.2 %
	15.0024	3.3597	4.9387	77.6 %	67.1 %
	17.6050	4.1003	4.6426	76.7 %	73.6 %
$\delta x_i$	2.33	0.11	0.21	–	–
	3.70	0.20	0.35	–	–
	4.45	0.26	0.43	–	–
$\delta \dot{x}_i$	2.40	0.10	0.19	–	–
	3.80	0.19	0.32	–	–
	4.57	0.25	0.40	–	–
$\sum (\delta x_i + \delta \dot{x}_i)$	21.25	1.11	1.92	–	–

La cuarta columna de resultados muestra porcentajes de la reducción de la respuesta cuando se utiliza la ley de control (3.24), donde se observa que el controlador propuesto reduce de una manera significativa los picos de máxima respuesta de la

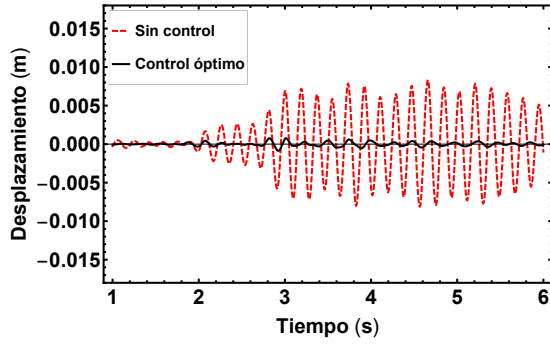
estructura, por su parte, la quinta columna de resultados contiene los porcentajes de reducción de la respuesta cuando se utiliza el controlador PD, con fines de comparación.

De manera adicional, la Tabla 4.6 también presenta el valor de la desviación de la raíz cuadrada media normalizada (NRMSD, por sus siglas en inglés)  $\delta x_i$  y  $\delta \dot{x}_i$  para la respuesta correspondiente.

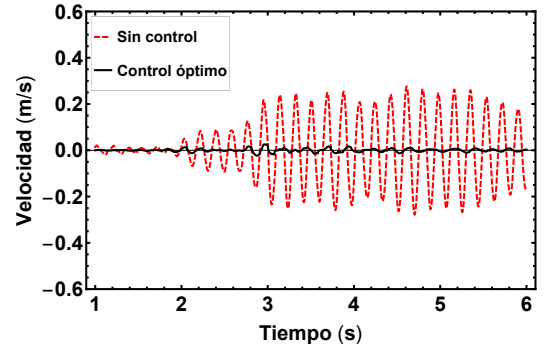
La Figura 4.5a muestra la respuesta, en el tiempo escalado, en el intervalo de 1 a 6 segundos, de acuerdo al registro sísmico de la Figura 4.3. Se muestran las respuestas para el caso cuando no se tiene control sobre la estructural (Sin control) y el caso cuando está en operación el controlador óptimo propuesto (Control óptimo). Se observa que la respuesta de desplazamiento del primer nivel disminuye de manera importante debido a la acción del controlador óptimo, con respecto a la respuesta obtenida cuando no se tiene control estructural (Sin control). Reducciones similares se muestran en las Figuras 4.5b y 4.5c para la respuesta del segundo y tercer nivel, respectivamente. Para el caso de la respuesta de la velocidad, las Figuras 4.5d, 4.5e y 4.5f, muestran de nueva cuenta que la respuesta estructural se reduce de una manera importante a lo largo de todo el intervalo de tiempo mostrado.

### 4.3.3. Discusión de resultados

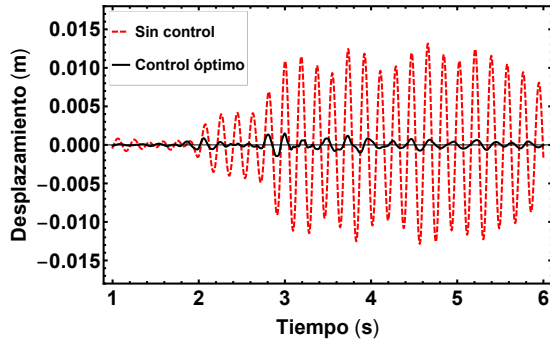
Para todos los casos, los valores pico de la respuesta controlada son significativamente menores que la de los no controlados, como se muestra en las Figuras 4.5a – 4.5f al comparar ambos perfiles de respuesta, lo que, de manera cualitativa, demuestra que el control óptimo cumple con su propósito de reducir la respuesta de la estructura. Para propósitos cuantitativos, de la Tabla 4.6, los valores pico para el caso no controlado son substancialmente mayores en comparación con aquellos obtenidos para el caso controlado (e.g. para el tercer nivel, 0.0158 m, comparados con 0.0019 m, lo que representa un 87.7% de reducción del desplazamiento). Reducciones similares se obtienen para el resto de los perfiles de respuesta. Para propósitos de com-



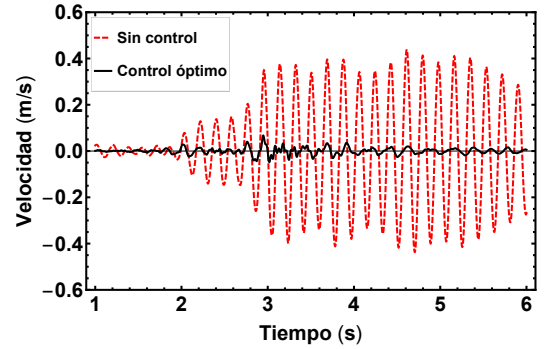
(a) Desplazamiento del primer nivel.



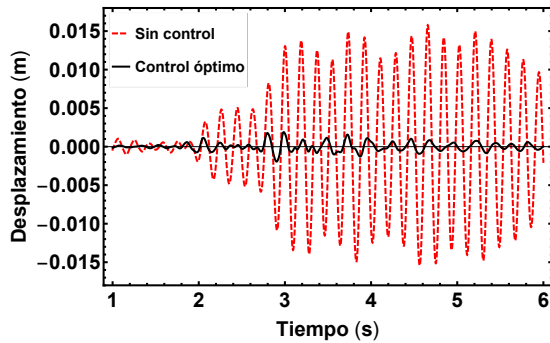
(d) Velocidad del primer nivel.



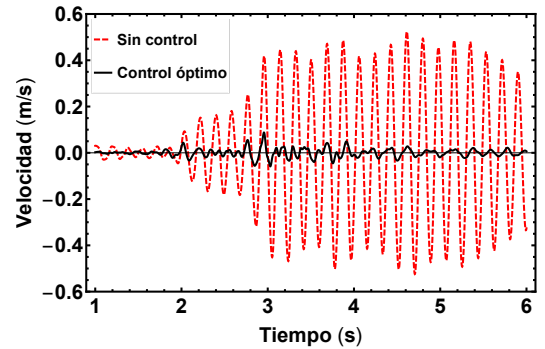
(b) Desplazamiento del segundo nivel.



(e) Velocidad del segundo nivel.



(c) Desplazamiento del tercer nivel.



(f) Velocidad del tercer nivel.

Figura 4.5: Respuesta de desplazamiento y velocidad de los entrepisos.

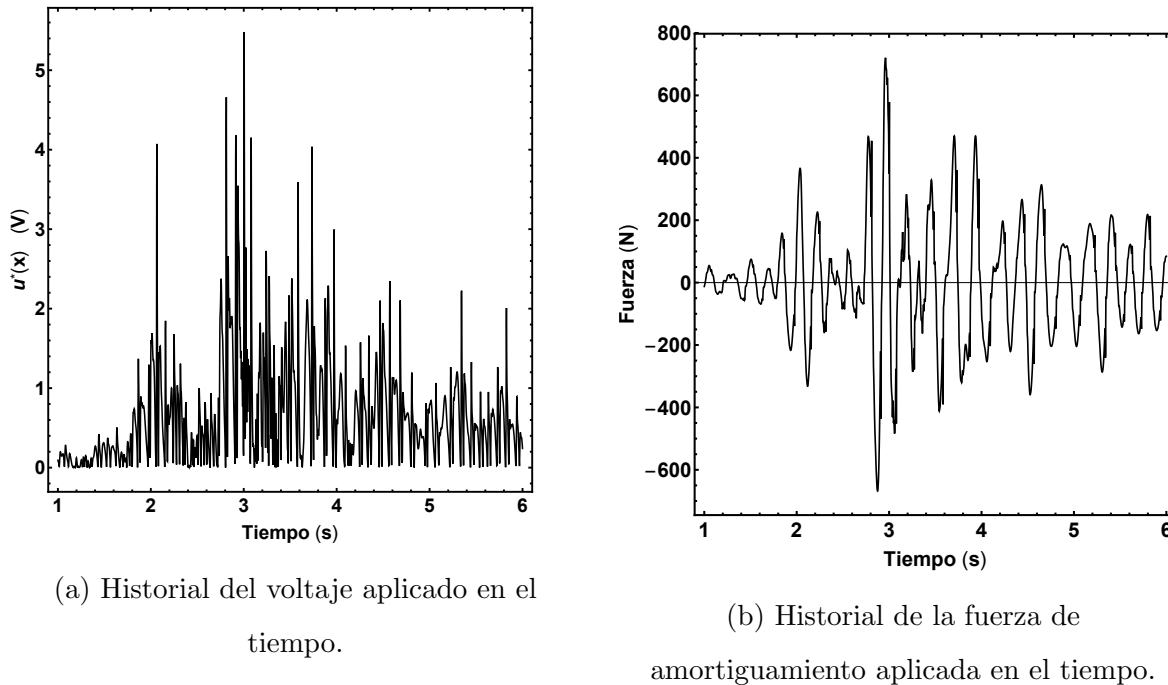


Figura 4.6: Voltaje aplicado y fuerza de amortiguamiento.

paración, los desplazamientos máximos obtenidos con el esquema de control óptimo propuesto, se compararon con resultados obtenidos con un controlador PD no lineal, obteniendo que para el primer piso, los desplazamientos son 0.0009 m vs 0.0020 m, respectivamente, para el segundo nivel 0.0015 m vs 0.0034 m, y para el tercer nivel 0.0019 m vs 0.0041 m, lo que en todos los casos equivale a una reducción mayor al 50% en el desplazamiento, cuando se utiliza el controlador óptimo propuesto respecto del controlador PD no lineal utilizado. Estableciendo nuevamente el comparativo de desplazamiento, para el tercer nivel, pero ahora entre el caso Sin control y el control PD no lineal, resulta que al comparar el desplazamiento de 0.0158 m, contra 0.0041 m, se tiene una reducción del 74% donde el control óptimo logró una reducción del 87.7%. La finalidad de establecer el comparativo en el tercer nivel se debe a que es en él, donde se presenta la menor reducción de respuesta de desplazamiento. Una desventaja común de utilizar métodos de control lineal, como el tradicional contro-



lador PD, es que cuando el sistema es no lineal, su adecuado desempeño no puede ser asegurado en todo el rango de operación del sistema no lineal, o bien, cuando las condiciones de operación son diferentes del punto para el cual el controlador lineal ha sido sintonizado; ambas situaciones se pueden presentar en una estructura civil debido a las perturbaciones desconocidas variantes en el tiempo como los terremotos o diferentes condiciones de servicio.

Más allá de la reducción de los picos de respuesta y de la evidencia gráfica, se realizó un estudio adicional del error o desviación para los casos de los esquemas “Sin control” y “Control óptimo”. Para ello, se calcularon las desviaciones de desplazamiento y velocidad a partir de la posición y velocidad en estado estable correspondientes, para el registro de doce segundos de tiempo escalado del acelerograma de la Figura 4.3. Las desviaciones calculadas se normalizaron a través del rango de respuesta [Spiegel08], al considerar el valor máximo de la respuesta menos el valor mínimo de la respuesta, como

$$\delta x = \frac{\sqrt{\left(\sum_{t=0}^N x_t^2\right) / N}}{|x_{max} - x_{min}|} \quad (4.6)$$

$$\delta \dot{x} = \frac{\sqrt{\left(\sum_{t=0}^N \dot{x}_t^2\right) / N}}{|\dot{x}_{max} - \dot{x}_{min}|} \quad (4.7)$$

donde  $\delta x$  y  $\delta \dot{x}$  son los valores de la NRMSD para el desplazamiento y velocidad respectivamente. Un valor cercano a cero representa un mejor desempeño debido a una menor respuesta del edificio. En la segunda parte de la Tabla 4.6 se dan los valores del NRMSD individuales de cada desplazamiento y velocidad correspondientes a cada entrepiso, así como el total. Por ejemplo, el desplazamiento del primer piso tiene un NRMSD de 2.33 para el caso “Sin control”, en comparación con 0.11 para el caso “Control óptimo” y 0.21 para el caso “Control PD”. Cálculos similares se pueden llevar a cabo para el resto de los pisos y su correspondiente respuesta. Como se puede apreciar, existe una diferencia substancial entre los pequeños valores del NRMSD

cuando se utiliza el sistema de control propuesto, comparado con valores más grandes cuando no se aplica control.

Además de la respuesta de la estructura a escala, las Figuras 4.6a y 4.6b, muestran el historial en el tiempo del voltaje aplicado y la correspondiente fuerza de amortiguamiento, generados por el controlador y el MRD, respectivamente, para reducir las vibraciones del edificio, donde se observa que se requiere un voltaje pequeño para la operación del MRD y por lo tanto un bajo consumo de energía. Resulta importante mencionar que para aplicaciones reales y para prevenir posibles deformaciones, se deben tomar en cuenta los límites del rango de operación del MRD para seleccionar o dimensionar un MRD adecuado para la estructura y que permita lograr una operación efectiva.

Adicionalmente al estudio que se llevó a cabo en el modelo del edificio a escala con sólo un MRD instalado, se realizó un experimento con tres MRDs, uno por entrepiso, pero controlados, los tres, con la misma señal de control. Los resultados obtenidos de la simulación mostraron una muy ligera mejora en el desempeño, sin embargo, la diferencia en los nuevos resultados no fue sustancial, por lo que no se consideraron relevantes, tomando en cuenta las implicaciones que, por ejemplo, representa para una implementación real en cuanto al significativo aumento en el número de actuadores (de uno a tres), así como el espacio físico requerido para su instalación, además de que la fuerza externa para el experimento es un movimiento de la tierra, dado a través de su registro de aceleración y aplicado directamente al primer piso. Por estos motivos, los perfiles de respuesta mostrados en esta tesis corresponden a los del caso de sólo un MRD instalado en el primer nivel.

## 4.4. Modelo de puente peatonal, caso: vibración libre

Para propósitos de análisis e investigación, se realizó una simulación dirigida a comparar la respuesta dinámica, en el tiempo, de un puente peatonal real, con pasarela de concreto de 2 m de ancho y 36 m de longitud en un sólo claro, el cual se modeló como un sistema discretizado con once masas concentradas y empotrado en ambos extremos, que considera únicamente grados de libertad traslacionales en la dirección vertical. La discretización con once masas concentradas se validó al comparar las frecuencias naturales de vibrar del modelo discreto, con las frecuencias de un modelo continuo considerando el puente como una viga tipo Euler-Bernoulli [Frýba99].

Un primer escenario considera la respuesta del puente cuando no se tiene amortiguamiento adicional al provisto por la propia estructura y un segundo escenario considera que se instala un sólo MRD en el centro del claro, como se muestra en la Figura 4.7, y el controlador óptimo no lineal propuesto es utilizado para controlar la entrada de voltaje al MRD.

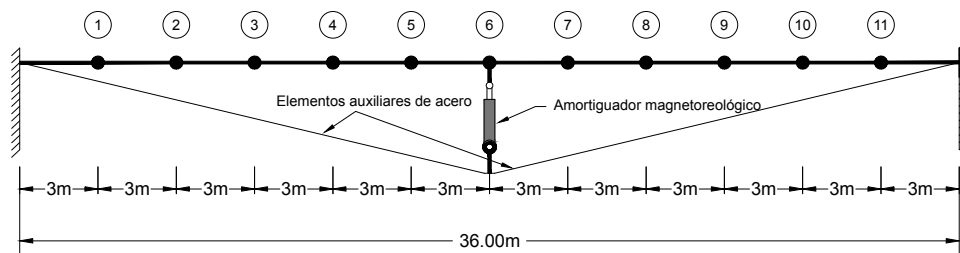


Figura 4.7: Modelo del puente peatonal de once masas concentradas con un MRD en el centro del claro.

#### 4.4.1. Puente representado en coeficientes dependientes del estado (SDCF, por sus siglas en inglés)

Delimitando el sistema (2.56) para una estructura con once grados de libertad, sus variables de estado se definen como:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{25} \end{bmatrix}^T$$

donde  $x_i$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots, 11$ , son los desplazamientos correspondientes a la  $i$ -ésima masa concentrada; para  $i = 12, 13, 14, \dots, 22$ , son las correspondientes velocidades para la  $(i - 11)$ -masa concentrada, respectivamente, mientras que las variables para el amortiguador están dadas por  $x_{23} = y_d$ ,  $x_{24} = z_d$  y  $x_{25} = u_d$ , de acuerdo a (2.47), (2.48) y (2.54). Las correspondientes matrices para la representación en coeficientes dependientes del estado (3.10)–(3.11), están determinadas como

$$A(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & \mathbf{I} & & & & \mathbf{0} \\ a_{12,1} & \cdots & a_{12,11} & a_{12,12} & \cdots & a_{12,22} & a_{12,23} & \cdots & a_{12,25} \\ a_{13,1} & \cdots & a_{13,11} & a_{13,12} & \cdots & a_{13,22} & a_{13,23} & \cdots & a_{13,25} \\ a_{14,1} & \cdots & a_{14,11} & a_{14,12} & \cdots & a_{14,22} & a_{14,23} & \cdots & a_{14,25} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{24,1} & \cdots & a_{24,11} & a_{24,12} & \cdots & a_{24,22} & a_{24,23} & \cdots & a_{24,25} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -\eta \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{16} & \frac{1}{m_{6,6}} & b_{18} & \cdots & b_{24} & \eta \end{bmatrix}^T \quad y \quad (4.9)$$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_{16} & \frac{p(t) - k_1 x_0}{m_{6,6}} & d_{18} & \cdots & d_{25} \end{bmatrix}^T \quad (4.10)$$

La factorización para los renglones  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{14}$ , ...,  $a_{24}$ , se llevó a cabo factorizando las variables de estado en el orden  $x_{25}$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , ...,  $x_{24}$ . Excepto para  $b_{17}$  y  $b_{25}$  todos los demás renglones del vector  $B(x)$  son iguales a cero. En el vector D, para  $i = 1, 2, \dots, 11$ ,  $d_i = 0$ ; para  $i = 12, 13, \dots, 22$ ;  $i \neq 17$ ,  $d_i = \frac{p(t)}{m_{i-11, i-11}}$ .  $C(x)$  es la matriz

identidad de tamaño  $25 \times 25$ . Los valores numéricos para  $B(x)$  y  $D$ , se obtienen de (4.11) y de la Tabla 4.1.

La matriz de masas (4.11), es una matriz diagonal cuyos valores son  $m_{1,1} = m_{2,2} = \dots = m_{11,11} = 3,050.79$  kg, obtenidos como el producto de la masa por unidad de longitud del puente, Tabla 4.7, por la distancia de 3 m, entre cada nodo (1.5 m hacia la izquierda y 1.5 m hacia la derecha). La matriz de rigidez (4.12), se obtiene a través del método del equilibrio directo, basado en la definición de coeficientes de influencia de rigidez [Chopra12]. La matriz de amortiguamiento (4.13) se deriva de considerar una fracción de amortiguamiento del 2 %, Tabla 2.2, en los once modos de vibrar, y a través del amortiguamiento de Caughey, que es la forma general de la matriz clásica de amortiguamiento [Chopra12].

$$M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_{11,11} \end{bmatrix} \text{ kg} \quad (4.11)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{1,1} & \cdots & k_{1,11} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{11,1} & \cdots & k_{11,11} \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (4.12)$$

$$C_s = \begin{bmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,11} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{11,1} & \cdots & c_{11,11} \end{bmatrix} \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}} \quad (4.13)$$

Los parámetros del MRD se tomaron de [Dyke96b], mismos que se muestran en la Tabla 4.1 y los parámetros correspondientes al puente se obtuvieron de [Huergo-R16] y son los que se muestran en la Tabla 4.7.

#### 4.4.2. Síntesis del controlador

El problema de control óptimo para el puente peatonal se relaciona con encontrar una entrada de control óptima  $u^*$  tal que el puente reduzca su respuesta debida a la

Tabla 4.7: Parámetros del puente peatonal.

Parámetro	Valor	Unidades
Longitud total del puente	36	m
Masa por unidad de longitud	1,016.93	kg/m
Inercia de la sección transversal compuesta (I)	$4.91 \times 10^{-3}$	$\text{m}^4$
Módulo de elasticidad del acero A36 ( $E_m$ )	$2.1 \times 10^{11}$	Pa

perturbación  $D$  y, por lo tanto, se estabilice, lo que se logra al fijar  $r = 0$  en (3.22). Ya que sólo hay un MRD en la sexta masa concentrada, el vector  $\Gamma$  en (2.55) se establece como

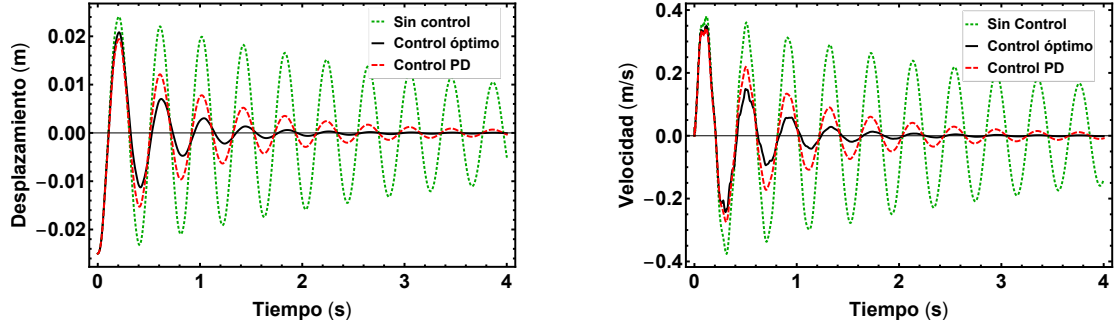
$$\Gamma = \left[ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T.$$

En la ley de control (3.24) y en la ecuación de Riccati dependiente del estado (SDRE) (3.21),  $R$  se selecciona como  $R = 0.93$ . Los elementos de la correspondiente matriz  $Q = \text{diag}[q_1 \ q_2 \ q_3 \ \cdots \ q_{25}]$ , son  $q_i = 1000$ , para  $i = 1, 2, \dots, 11$ ;  $q_i = 70000$ , para  $i = 12, 13, \dots, 22$ , y  $q_i = 20$ , para  $i = 23, 24, 25$ . Para la determinación de los valores de  $R$  y  $Q$  se siguió el procedimiento sugerido en [Kwakernaak72].

Como se analizará la vibración libre, se imponen condiciones iniciales al sistema (3.10), para cada masa concentrada del puente. El vector de coeficientes de influencia  $\lambda$  en (2.55) se fija en:

$$\lambda = \left[ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \right]^T.$$

Las condiciones iniciales de desplazamiento en la dirección vertical para los diferentes nodos, se calcularon tomando la deflexión inicial en el centro del claro, correspondiente a la deformación real obtenida bajo condiciones de resonancia para el puente peatonal [Huergo-R16]. Para el resto de los nodos, la deflexión inicial se determinó del análisis estático de deflexión, usando la carga uniformemente distribuida



(a) Desplazamiento vertical del nodo central. (b) Velocidad vertical del nodo central.

Figura 4.8: Desplazamiento y velocidad para el centro del claro.

que eventualmente produciría la deflexión inicial en el sexto nodo. Las correspondientes deflexiones iniciales resultan:  $x_1 = x_{11} = -0.0023$  m,  $x_2 = x_{10} = -0.0077$  m,  $x_3 = x_9 = -0.0141$  m,  $x_4 = x_8 = -0.0198$  m,  $x_5 = x_7 = -0.0236$  m,  $x_6 = -0.0250$  m.

Como en el centro del claro está el grado de libertad más desfavorable, es decir, donde ocurren los desplazamientos más grandes, se muestra la correspondiente respuesta en la Figura 4.8a. Las respuestas mostradas son con los esquemas de “Sin Control” y “Control óptimo”. Resulta claro que la respuesta de desplazamiento disminuye con la acción del controlador óptimo, respecto de la respuesta obtenida cuando no se aplica control sobre el puente. La vibración del nodo es prácticamente amortiguada en su totalidad alrededor de los 2.1 segundos, en contraste con la deflexión, aún presente, de aproximadamente 0.014 m, cercana a la mitad de la deflexión inicial, en el mismo instante de tiempo, cuando no se aplicó control sobre el puente. Además se observa que el puente aún vibra dentro del intervalo de 4 s mostrado. En los otros diez nodos del modelo, se presentó un comportamiento similar de reducción del desplazamiento. Para el caso de la velocidad, en la Figura 4.8b se muestra de nuevo, que en el nodo central, la respuesta estructural se reduce de una manera importante en el

intervalo de tiempo mostrado cuando el esquema de control óptimo esta en operación.

Para fines comparativos del controlador óptimo propuesto, también se presenta la respuesta obtenida del puente, usando un controlador Proporcional-Derivativo no lineal, con la estructura  $v = u_{pd} = -k_p x_6 - k_d |\dot{x}_6|$ , donde la estructura tradicional de un controlador PD se ha modificado con la inclusión del valor absoluto en el término de la velocidad, para forzar que la salida del controlador sea siempre positiva y así tener la polarización requerida por el MRD. Los valores utilizados en la sintonización de las ganancias del controlador PD son  $k_p = 1.0$  y  $k_d = 40$ , mismos que se obtuvieron por un procedimiento iterativo de prueba y error, hasta encontrar valores que logran un cierto equilibrio entre rapidez de respuesta del sistema y el esfuerzo de control. La decisión de usar un controlador PD se debe a que el término derivativo se utiliza para tratar con las oscilaciones (transitorios), en contraste, sí se usara un controlador PI o un PID, la componente integral no tiene una mejora significativa en el desempeño del controlador para la reducción de oscilaciones del sistema, de hecho, el término integral usualmente se utiliza para mejorar la condición en estado estacionario, lo que no es posible controlar con un MRD.

El controlador PD también cumple con el objetivo de reducir la respuesta estructural, sin embargo, la reducción obtenida es menor en comparación con la obtenida con el controlador óptimo. Este comportamiento parece lógico ya que se esperaría que un esquema de control que considera el modelo matemático de la planta a controlar, como es el caso del control óptimo, permita un mejor control del sistema, comparativamente con un controlador que no contempla dicho modelo.

## 4.5. Modelo de puente peatonal, caso: vibración forzada por carga peatonal

La vibración se produce por fuerzas dinámicas que son función del tiempo y el espacio, y la magnitud en la cual se presenta el fenómeno depende de factores como



la longitud del puente, su rigidez, el amortiguamiento, el tipo de carga, la magnitud de la carga, el lugar de la carga [Roos09]. Para puentes peatonales ligeros la fuente más importante de fuerza son los peatones que cruzan el puente, por lo que se considera un problema de condición de servicio [Roos09]. La masa, la rigidez y el amortiguamiento tienen la principal influencia en la respuesta del puente. La masa y la rigidez se pueden determinar de las propiedades de los materiales, la longitud de los elementos estructurales y las condiciones de apoyo. El amortiguamiento involucra el conocimiento de las propiedades de vibración. Es bien sabido que diferentes materiales de construcción, producen diferentes fracciones de amortiguamiento para los puentes peatonales [Bachmann95], siendo las estructuras ligeras de acero las que tienen mayor tendencia a vibrar. Investigaciones dinámicas preliminares [Huergo-R16] indican que en el puente estudiado sólo las vibraciones verticales se excitan fácilmente debido a la baja frecuencia fundamental del puente; por otro lado, no se consideraron las vibraciones laterales ni torsionales debido a su relativamente alta frecuencia y porque la rigidez torsional se ve incrementada por un sistema de arriostramiento debajo de la pasarela del puente, respectivamente. En caso de requerirse, se puede plantear un modelo más preciso de la estructura como se propone en la referencias [Zivanovic05, BrownJohn05].

En esta sección, con propósitos de investigación y análisis, se muestran los resultados del estudio conducido para obtener la respuesta estructural en el tiempo, de un modelo idealizado de un puente peatonal real, uniforme, discretizado con once masas concentradas, con calzada de concreto de 2 m de ancho y 36 m de longitud en un sólo claro, considerado empotramiento en ambos extremos y utilizando solamente grados de libertad traslacionales en la dirección vertical. Un puente se puede modelar como un elemento barra y esta a su vez es convenientemente reducida a una línea, donde su resistencia a la deformación y desplazamiento es función de sus propiedades elásticas como el módulo de elasticidad y de las propiedades geométricas de la sección transversal como área y momento de inercia.

Para tomar la determinación de utilizar una discretización del puente continuo, utilizando once masas concentradas, se realizaron pruebas preliminares usando 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 y hasta 15 masas, para resolver el problema de los eigenvalores (2.33) y obtener las respectivas frecuencias circulares de vibrar  $\omega_i$  (una por cada masa concentrada). Para cada caso de diferente número de masas, los resultados se compararon con los obtenidos al representar el puente, con un modelo matemático que lo considera como una viga uniforme Euler-Bernoulli, con condiciones de empotramiento en ambos extremos [Frýba99], donde las  $i$ -ésimas frecuencias circulares de vibrar se obtienen mediante

$$\omega_i = \sqrt{\frac{E_m I}{\bar{m}}} \beta_i^4$$

siendo  $E_m$  el módulo de elasticidad del material del puente;  $I$  el momento de inercia de la sección compuesta;  $\bar{m}$  la masa por unidad de longitud y  $\beta_i = a_i/L$ , donde la constante  $a_i$ , para los diferentes modos de vibrar, se obtiene de la Tabla 4.8;  $L$  es la longitud total de la viga.

Tabla 4.8: Constantes para distintas condiciones de apoyo [Gonçalves07].

Condiciones de apoyo		$i$ -ésimo modo de vibrar	Unidades
$x=0$	$x=L$		
		1	4.73004
		2	7.85320
Empotrado	Empotrado	3	10.9956
		4	14.1372
		5	17.2788
		6, 7, ...	$(2i + 1)\pi/2$

Las once frecuencias circulares de vibración para el modelo discretizado con once masas, a diferencia de las discretizaciones con menos masas, resultaron ser muy

cercanas a las frecuencias obtenidas del modelo analítico de la viga Euler-Bernoulli, lo que valida el modelo discreto con once masas concentradas. Un mayor número de masas (13 ó 15) también presentan frecuencias de vibrar muy similares al modelo Euler-Bernoulli, sin embargo, la diferencia con las frecuencias para el caso de once masas, es muy pequeña, en contraste con el aumento del tiempo computacional necesario para resolver el sistema, razón adicional por la que, buscando un equilibrio entre tiempo y precisión, se decidió usar el modelo de once masas concentradas.

En la Figura 4.9 se muestra el diagrama de bloques del procedimiento seguido para llevar a cabo el análisis de la vibración del puente.

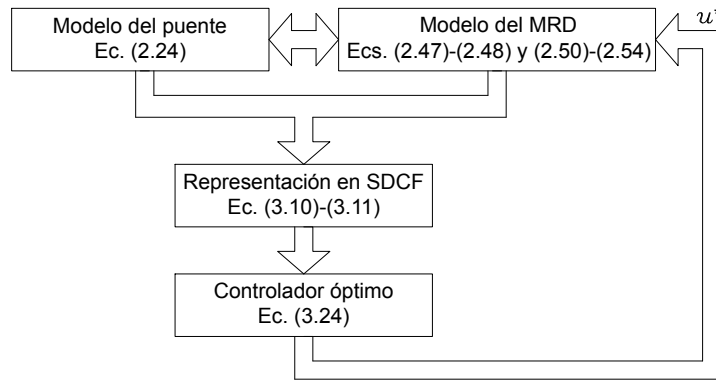


Figura 4.9: Procedimiento de análisis de la vibración del puente peatonal.

### 4.5.1. Puente peatonal con representación en coeficientes dependientes del estado, SDCF

Delimitando el sistema (3.10)–(3.11) para una estructura con once grados de libertad, sus variables de estado se definen como:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{25} \end{bmatrix}^T$$

donde  $x_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, 11$ , son los desplazamientos  $y_{s_i}$  correspondientes a la  $i$ -ésima masa concentrada; para  $i = 12, 13, \dots, 22$ , son las correspondientes velocidades

$\dot{y}_{s_i}$  para la  $(i-11)$ -masa concentrada, respectivamente, mientras que las variables para el amortiguador están dadas por  $x_{23} = y_d$ ,  $x_{24} = z_d$  y  $x_{25} = u_d$ , de acuerdo a (2.47), (2.48) y (2.54). Considerando los parámetros para el modelo del MRD, mostrados en la Tabla 4.1, las matrices correspondientes para el puente y el MRD, en la representación de coeficientes dependientes del estado (3.10)–(3.11), están determinadas por (4.8)–(4.10), donde los elementos de la matriz  $A(x)$ , se obtienen al factorizar la función  $f(x)$  en (2.59).

Para el vector  $B(x)$ , (4.9), sus valores numéricos se muestran en la Tabla 4.9. Los elementos  $b_{17}$  y  $b_{25}$  se establecen de (4.9).

Tabla 4.9: Valores numéricos de  $B(x)$ .

$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$	$b_8$	$b_9$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
$b_{10}$	$b_{11}$	$b_{12}$	$b_{13}$	$b_{14}$	$b_{15}$	$b_{16}$	$b_{17}$	$b_{18}$
0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3050.79}$	0
$b_{19}$	$b_{20}$	$b_{21}$	$b_{22}$	$b_{23}$	$b_{24}$	$b_{25}$		
0	0	0	0	0	0	190		

Los valores numéricos del vector  $D$ , (4.10), se muestran en la Tabla 4.10. El elemento  $d_{17}$  se establece de (4.10).

La matriz  $C(x)$  es la matriz identidad de tamaño  $25 \times 25$ . Los valores numéricos correspondientes para  $B(x)$ , (4.9) y  $D$ , (4.10), se obtienen de (4.14) y de la Tabla 4.1, siendo,  $p(t)$  en el caso del vector  $D$ , la carga peatonal a aplicar como función del tiempo.

La matriz de masa  $M$  obtenida de (2.27) es una matriz diagonal cuyos valores son

Tabla 4.10: Valores numéricos de  $D$ .

$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$	$d_6$	$d_7$	$d_8$	$d_9$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
$d_{10}$	$d_{11}$	$d_{12}$	$d_{13}$	$d_{14}$	$d_{15}$	$d_{16}$	$d_{17}$	$d_{18}$
0	0	0	0	0	0	0	$\frac{p(t)-71.5}{3050.79}$	0
$d_{19}$	$d_{20}$	$d_{21}$	$d_{22}$	$d_{23}$	$d_{24}$	$d_{25}$		
0	0	0	0	0	0	0		

$m_{1,1} = m_{2,2} = \dots = m_{11,11} = 3,050.79$  kg, obtenidos como el producto de la masa por unidad de longitud del puente, Tabla 4.7, por la distancia de 3 m, entre cada nodo (1.5 m hacia la izquierda y 1.5 m hacia la derecha); esta matriz se muestra en (4.14).

La matriz de rigidez es la matriz de rigidez condensada obtenida con (2.31) y se muestra en (4.15).

Considerando  $\xi_i=0.45\%$  ( $i = 1, 2, \dots, 11$ ) en (2.35) como fracción de amortiguamiento para los once modos de vibrar y con las frecuencias naturales circulares de vibración  $\omega_i$  de (2.33), determinadas para los once modos de vibrar, se calcula la matriz de amortiguamiento (2.34) mostrada en (4.16). Las once frecuencias naturales circulares calculadas con (2.33) se muestran en la Tabla 4.11. Los parámetros del puente mostrados en la Tabla 4.7, así como  $\xi_i$ , se obtuvieron de [Huergo-R16].

Tabla 4.11: Frecuencias naturales circulares en rad/s y frecuencias en Hz, del puente peatonal.

$i$	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
$\omega_i$	17.39	47.93	93.92	155.01	230.70	319.72	419.18	523.43	622.89	704.81	757.61
$f_i$	2.77	7.63	14.95	24.67	36.72	50.89	66.71	84.26	99.14	112.17	120.58

### 4.5.2. Síntesis del controlador

La síntesis del controlador se basa en el modelo completo del sistema establecido en (2.59)–(2.60) que incluye la función del modo de vibrar  $\phi_i(x)$  de (2.44)–(2.45) considerada en la matriz de perturbación  $D$  (4.10), así como los demás parámetros descritos en la sección anterior. El problema de control óptimo del puente se refiere a encontrar una entrada de control  $u^*$  tal que se disminuya la respuesta causada por la perturbación  $D$ , e.g. las fuerzas externas producidas por los peatones y, por lo tanto, mantener estabilizado el puente, lo que se indica al seleccionar  $r = 0$  en (3.22).

Ya que sólo hay un MRD colocado en el centro del claro, en la sexta masa concentrada, el vector  $\Gamma$  en (2.55) resulta como:

$$\Gamma = \left[ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T .$$

La matriz  $Q$  pondera la evolución en el tiempo del error de seguimiento  $e$ , mientras que  $R$  es una matriz que pondera el gasto del esfuerzo de control; por lo tanto, estas matrices se utilizan para establecer un equilibrio entre el desempeño del seguimiento y el esfuerzo de control. El experimento sigue el procedimiento sugerido dado en [Kwakernaak72] para seleccionar los valores de estas matrices al considerar  $R$  como constante e incrementando los valores de  $Q$  hasta que se obtenga un desempeño satisfactorio del controlador.

Para la ley de control (3.24) y la ecuación de Riccati dependiente del estado (3.21), las matrices  $Q$  y  $R$  se seleccionan como  $Q = \text{diag} [q_1 \ q_2 \ q_3 \ \cdots \ q_{25}]$ , donde  $q_i = 1000$ , para  $i = 1, 2, \dots, 11$ ;  $q_i = 70000$ , para  $i = 12, 13, \dots, 22$ ;  $q_i = 20$ , para  $i = 23, 24, 25$  y  $R = 0.93$ , ya que estos valores proporcionan un adecuado balance entre el esfuerzo de control y la velocidad de respuesta para la estabilización del sistema.

Para excitar el grado de libertad en el centro del claro, i.e. el sexto nodo del puente, con la fuerza generada por los peatones, entonces el vector de coeficientes de influencia  $\lambda$  de (2.55) se fija como

$$\lambda = \left[ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T .$$



### 4.5.3. Resultados de la simulación

Un primer escenario considera la respuesta del puente cuando no existe amortiguamiento adicional al proporcionado por la propia estructura. Un segundo escenario considera un MRD instalado en el centro del claro, como se muestra en la Figura 4.7, en combinación con el controlador óptimo no lineal propuesto, para controlar el voltaje de entrada al MRD.

El procedimiento seguido, consistió en que la frecuencia del primer armónico del modelo de fuerza peatonal, se sincronizó con la frecuencia del modo de vibrar relevante (o modo objetivo) de la estructura, para crear la resonancia, i.e, el escenario con el peor caso que lleva a la máxima respuesta de vibración [Shahabpoor18]. Para ello, se requiere determinar la respuesta de vibración en el “anti-nodo” del primer modo de vibrar (en el centro del puente), lo que se logra al aplicar el modelo de fuerza peatonal a un oscilador equivalente al primer modo de vibración [Mohammed17].

Ya que la frecuencia natural del segundo modo vertical de vibrar  $f_2 = 7.63$  Hz (Tabla 4.11) y la de los subsecuentes modos, es más alta y está fuera del rango de las frecuencias típicas de los modelos de carga peatonal, 1.7–2.4 Hz para caminar y 2.1–3.2 Hz para correr [Bachmann95], solamente se considerará el modo fundamental de vibrar, correspondiente a la frecuencia fundamental de vibración  $f_1 = 2.77$  Hz (Tabla 4.11). La frecuencia fundamental  $f_1$ , resulta de interés particular debido a su posible coincidencia con la frecuencia natural de caminar de los peatones, donde se presenta el primer modo de vibrar  $\phi_1(x)$ , el cual es un modo simétrico obtenido del análisis modal realizado, y puede llevar al peor caso de vibración, causado por resonancia. Por ello, en este análisis, para forzar la condición de resonancia, la carga peatonal se aplica para excitar al modo fundamental de vibrar, que conduce a una condición crítica de carga. De acuerdo a la Tabla 2.3, para generar la frecuencia resonante de 2.77 Hz, se considera que los peatones cruzan el puente a una velocidad promedio constante de  $V_0 = 4$  m/s. El tiempo necesario para que los peatones crucen el claro de 36 m es de 9 segundos. El valor del coeficiente de reducción, de la Figura 2.14, se



toma como  $\psi = 0.84$ . Bajo estas condiciones, la fuerza variante en el tiempo  $p(t)$ , ejercida por un peatón en el centro del claro del puente (nodo 6), mostrada en la Figura 4.10, se obtiene de (2.39) y se aplica al sistema (2.55). Para el caso de dos y cuatro peatones, se obtuvieron gráficos con forma similar a la Figura 4.10, en los que la amplitud de la carga  $p(t)$  se incrementa, conforme el número de peatones  $n_p$  también lo hace.

Para las simulaciones, la fuerza generada por diferente número de peatones se aplica al puente en el centro del claro (sexto nodo), al considerar diferentes situaciones de servicio estipuladas en la norma [NormaBS03] como, un peatón para localidades suburbanas, dos peatones para rutas urbanas sujetas a una importante variación en su uso a lo largo del día y cuatro peatones para accesos primarios a instalaciones de servicio públicas.

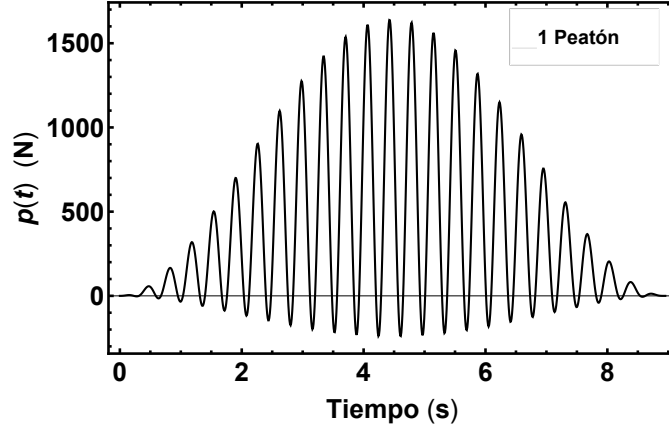
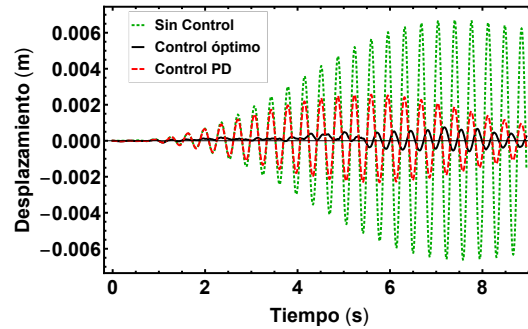


Figura 4.10: Fuerza  $p(t)$  ejercida por un peatón, en el centro del claro (nodo 6), al cruzar el puente a una velocidad constante de 4 m/s.

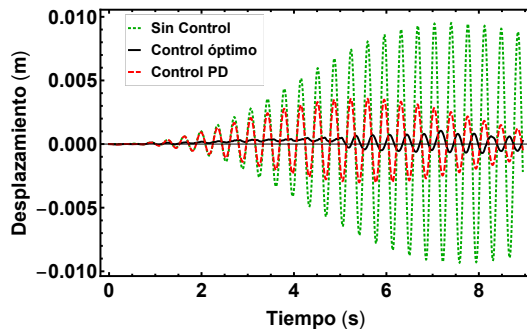
#### 4.5.4. Discusión de resultados

Debido a que en el centro del claro se encuentra el grado de libertad más desfavorable, i.e. donde ocurre el mayor desplazamiento, en las Figuras 4.11a, 4.11b y

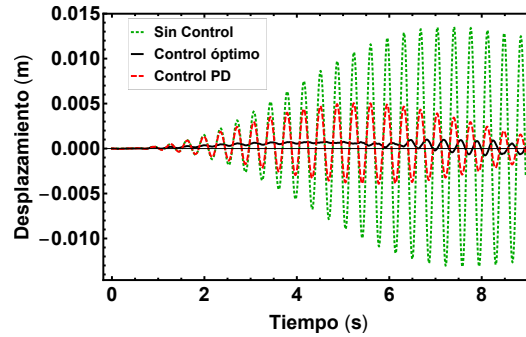
4.11c se muestran las respuestas del desplazamiento para el nodo central, con un peatón desplazándose a la velocidad  $V_0 = 4 \text{ m/s}$ , para generar la frecuencia resonante  $f_p = 2.77 \text{ Hz}$ .



(a) Desplazamiento vertical para 1 peatón.



(b) Desplazamiento vertical para 2 peatones.

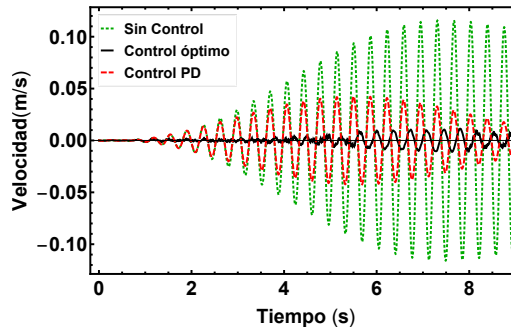


(c) Despl. vertical para 4 peatones.

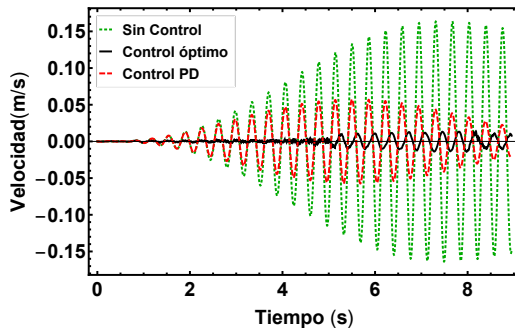
Figura 4.11: Desplazamiento del nodo central para 1, 2 y 4 peatones.

Se muestran las respuestas “Sin control” y “Control óptimo”. Es claro que la respuesta de desplazamiento disminuye por la acción del controlador óptimo, con respecto a la obtenida cuando no se tiene control sobre la respuesta (Sin control). Comportamientos similares, en la reducción de las vibraciones verticales para diferente número de peatones se presentan en los otros diez nodos, pero como están más cercanos a los extremos empotrados, la vibración en estos nodos tiende a ser mas pequeña que en el nodo central mostrado. Para el caso de la velocidad, las Figuras 4.12a,

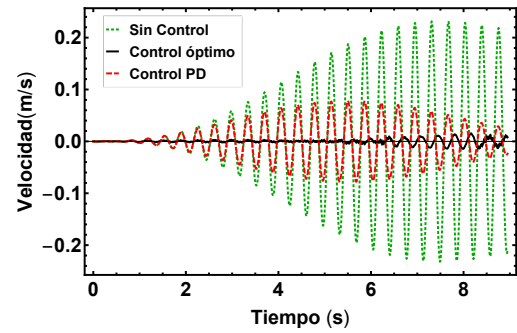
4.12b y 4.12c muestran, de nuevo, para el nodo central, que la respuesta estructural se reduce de una manera importante en todo el intervalo de tiempo mostrado cuando el esquema de control óptimo está en operación.



(a) Velocidad vertical para 1 peatón.



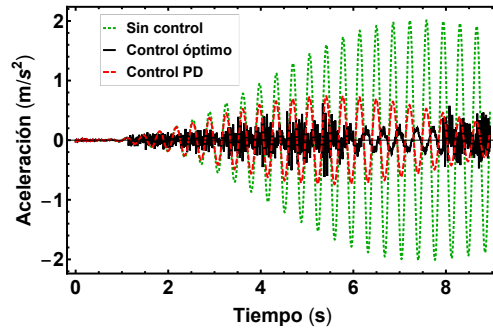
(b) Velocidad vertical para 2 peatones.



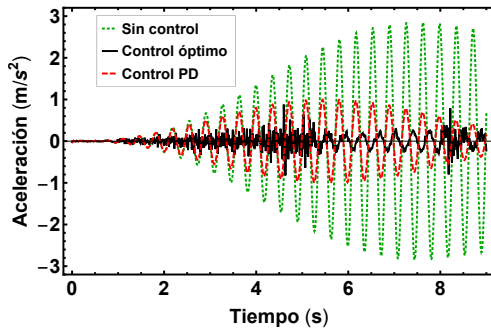
(c) Velocidad vertical para 4 peatones.

Figura 4.12: Velocidad del nodo central para 1, 2 y 4 peatones.

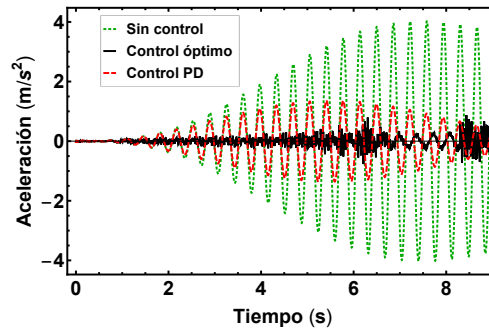
En el caso de la aceleración vertical, que se muestra en las Figuras 4.13a, 4.13b y 4.13c, también se observa una reducción importante en todo el intervalo de tiempo mostrado, cuando se aplica el control óptimo. Si bien, los códigos internacionales que establecen los valores límite de confort de aceleración vertical, no especifican un único valor, es posible considerar que el límite de confort esta en el rango de  $0.5 - 1.0 \text{ m/s}^2$  establecido por [Sétra06], aunque un valor más puntual de  $0.7 \text{ m/s}^2$  se propone en [Hernández-B16].



(a) Aceleración vertical para 1 peatón.



(b) Aceleración vertical para 2 peatones.



(c) Aceleración vertical para 4 peatones.

Figura 4.13: Aceleración del nodo central para 1, 2 y 4 peatones.

Los valores del pico máximo de aceleración para el nodo central, se muestran en la Tabla 4.12; comparando los valores obtenidos por el controlador óptimo, con el rango de confort establecido por [Sétra06], se observa que en los tres diferentes casos de 1, 2 y 4 peatones, las aceleraciones verticales están dentro del rango de confort, es decir, para 1 peatón  $0.58 < 1 \text{ m/s}^2$ , para 2 peatones  $0.88 < 1 \text{ m/s}^2$  y para 4 peatones  $0.69 < 1 \text{ m/s}^2$ , situación que no ocurre para el caso “Sin control”. Al establecer la comparación con [Hernández-B16], para el caso de 1 y 4 peatones, los correspondientes valores son menores de  $0.75 \text{ m/s}^2$ , pero para el caso de 2 peatones, éste se excede ( $0.88 \text{ m/s}^2 > 0.75 \text{ m/s}^2$ ), no obstante y tomando en cuenta que sólo es el valor del pico máximo que se presenta y que éste no generaliza el comportamiento de la aceleración,

se comprueba que el controlador óptimo tiene un desempeño adecuado en la reducción de la respuesta estructural y de manera más específica, que reduce las aceleraciones verticales haciendo que estén dentro del rango de confort. Como puede verse en la Tabla 4.12, para el escenario “Sin control”, se excede por mucho, el rango de confort en los tres casos de número de peatones.

Tabla 4.12: Pico máximo de aceleración del nodo central para 1, 2 y 4 peatones.

Peatones	Pico máximo de aceleración (m/s <sup>2</sup> )		
	Sin control	Control óptimo	Control PD
1	2.01	0.58	0.74
2	2.85	0.88	1.00
4	4.03	0.69	1.36

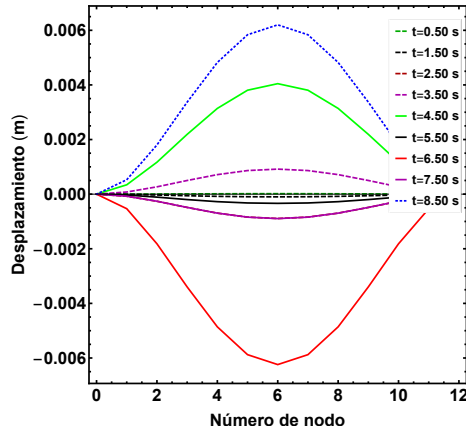
Con la finalidad de establecer un comparativo del desempeño del controlador óptimo no lineal robusto propuesto en la reducción de las vibraciones del puente, se implementó un controlador Proporcional-Derivativo no lineal, con la estructura  $v = u_{pd} = -k_p x_6 - k_d |\dot{x}_6|$ , donde la forma tradicional de un controlador PD lineal se modificó, con la inclusión del valor absoluto en el término de la velocidad, para forzar la salida del controlador a tener la polarización requerida por el MRD. El mejor desempeño del controlador PD, para la atenuación de las vibraciones, se obtuvo con los valores  $k_p = 1.0$  y  $k_d = 40$ , en las ganancias proporcional y derivativa. Ya que la componente integral de un controlador PID tradicional, se utiliza para mejorar la condición del sistema en estado estable, situación que no es posible controlar con un MRD, se optó por no incluir el correspondiente término ya que, por el contrario, el término derivativo resulta adecuado para reducir las oscilaciones transitorias.

De los resultados se observa que, como era de esperarse, un control que involucra el modelo matemático del sistema a controlar, como es el caso del control óptimo, presenta una mejor respuesta que su contraparte que no considera el modelo, como

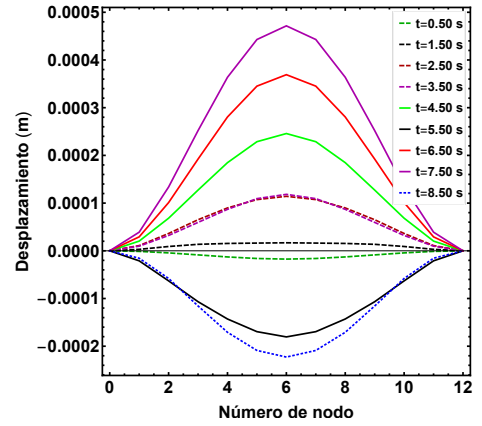
es el caso del control PD, no obstante que este último, también logra reducir las vibraciones, pero en una menor cuantía.

En las Figuras 4.14a–4.14f se muestra el desplazamiento vertical del puente, al aplicar al nodo central, las condiciones de carga peatonal para 1, 2 y 4 peatones, cada una de ellas para diferentes instantes de tiempo, desde  $0.5 \leq t \leq 8.5$  s, con incrementos de 1 s. Éstas, muestran la evolución de la respuesta de desplazamiento del puente durante el tiempo que le toma a los peatones cruzar los 36 m de longitud de la plataforma, es decir, la configuración vertical deformada del puente en el tiempo indicado. Por la convención utilizada en el análisis, un valor positivo indica un desplazamiento por debajo del eje longitudinal de la curva elástica respecto de su configuración recta. Los nodos 0 y 12, corresponden a los extremos empotrados, los que con las condiciones de frontera consideradas en el análisis (empotramiento), no presentan desplazamiento. Como se puede ver en las significativas magnitudes del desplazamiento, se obtiene una importante reducción en el desplazamiento de los nodos cuando se aplica el control óptimo.

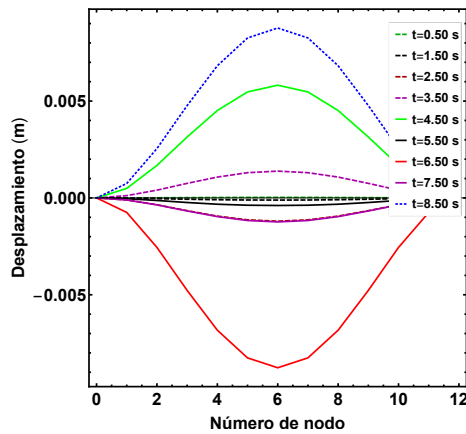
Adicional a la respuesta de la estructura, las Figuras 4.15a, 4.15b y 4.15c, muestran el historial en el tiempo del voltaje  $u^*$  aplicado, y generado por el controlador para reducir las vibraciones, donde se observa que se requiere de un bajo voltaje para la operación del MRD y, por lo tanto, tiene un bajo consumo de energía. Los picos máximos de voltaje rondan los 15, 20 y 16 volts para los diferentes números de peatones, pero la mayoría del tiempo los voltajes son mucho menores que esos valores pico. Se muestran los historiales en el tiempo para los casos cuando uno, dos y cuatro peatones cruzan el claro del puente. Las Figuras 4.15d, 4.15e y 4.15f muestran la correspondiente fuerza de amortiguamiento  $f_d$ , ejercida por el MRD para los diferentes números de peatones considerados y, como se observa, los picos de fuerza rondan los 4, 6 y 5 kilonewtons respectivamente.



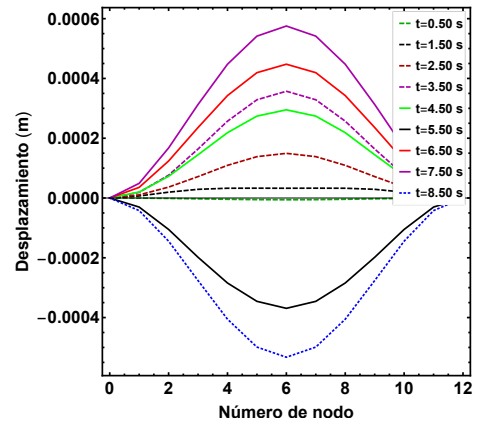
(a) Despl. “Sin control”, 1 peatón.



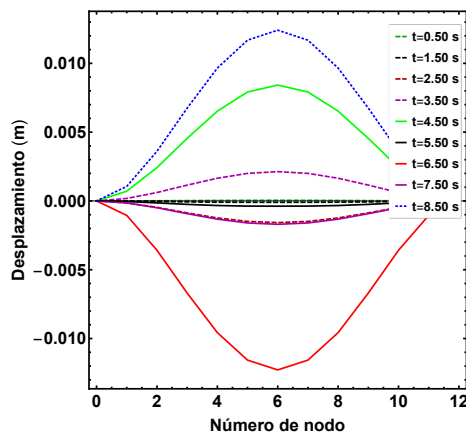
(d) Despl. “Control óptimo”, 1 peatón.



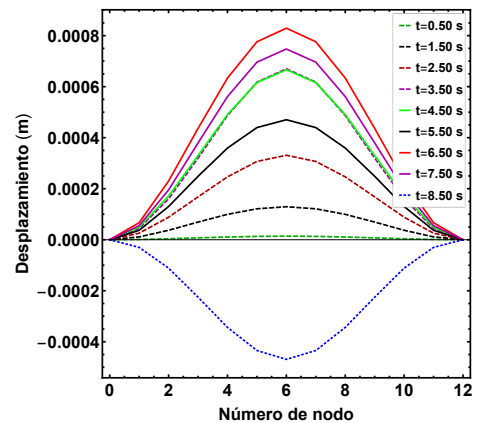
(b) Despl. “Sin control”, 2 peatones.



(e) Despl. “Control óptimo”, 2 peatones.

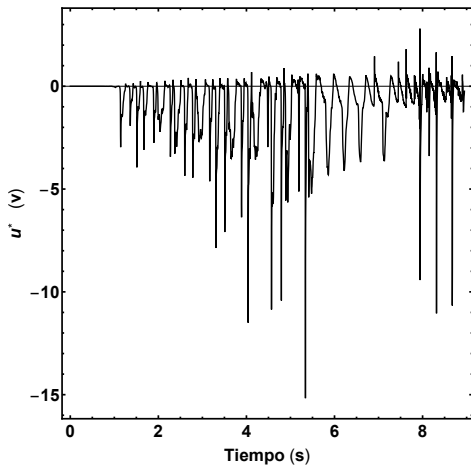
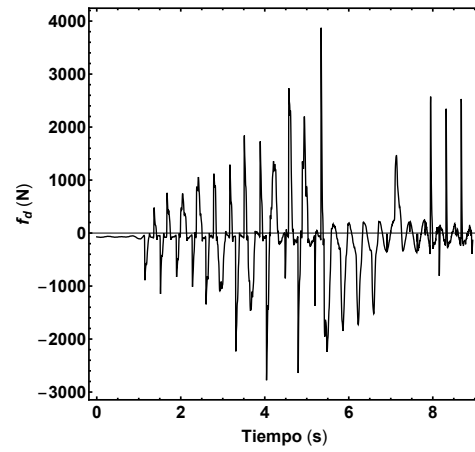
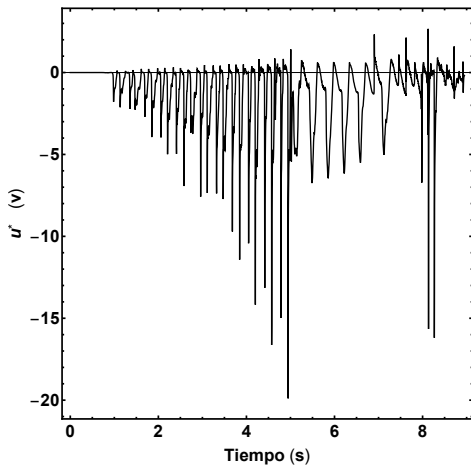
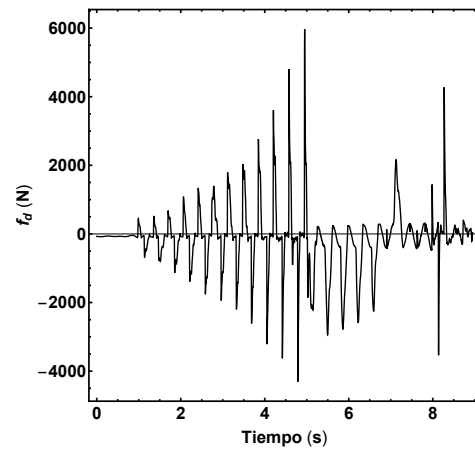
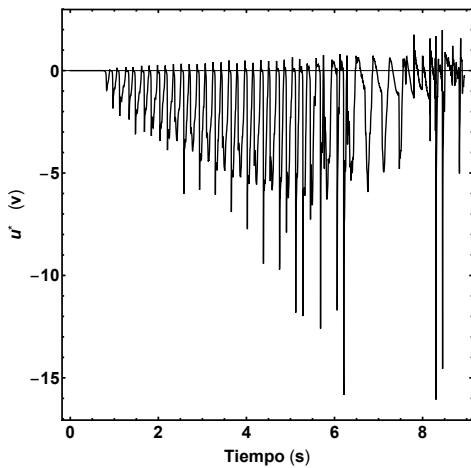
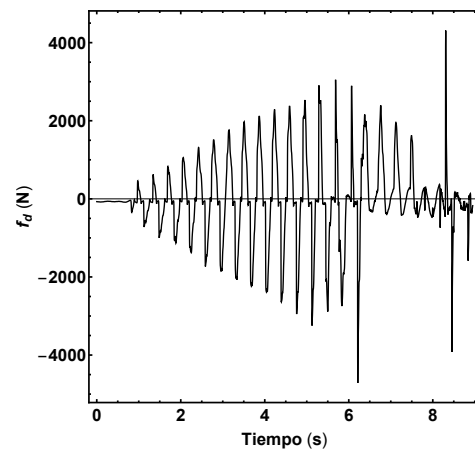


(c) Despl. “Sin control”, 4 peatones.



(f) Despl. “Control óptimo”, 4 peatones.

Figura 4.14: Configuración deformada del puente, para  $0.5 \leq t \leq 8.5$  s, con  $\Delta t=1$  s, “Sin control” y con “Control óptimo”, para diferente número de peatones.

(a) Voltaje  $u^*$  aplicado al MRD, 1 peatón.(d) Fuerza  $f_d$  del MRD, 1 peatón.(b) Voltaje  $u^*$  aplicado al MRD, 2 peatones.(e) Fuerza  $f_d$  del MRD, 2 peatones.(c) Voltaje  $u^*$  aplicado al MRD, 4 peatones.(f) Fuerza  $f_d$  del MRD, 4 peatones.Figura 4.15: Voltaje  $u^*$  y fuerza  $f_d$ , aplicados para diferente número de peatones.



## 4.6. Conclusiones del capítulo

A través de los resultados de las diferentes simulaciones realizadas, y presentadas en este capítulo, es posible concluir lo siguiente:

- Es posible utilizar un esquema de control óptimo no lineal robusto para la reducción de vibraciones en estructuras civiles, teniendo como base matemática la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, la ecuación diferencial de Riccati y el principio de optimalidad.
- Al estar activo el sistema de control óptimo no lineal robusto propuesto, se logra una importante reducción en la vibración de las estructuras civiles tanto verticales como horizontales, al estar sujetas a una condición de vibración libre.
- Se comprueba la robustez del controlador óptimo no lineal propuesto, ya que éste logra una significativa reducción en la vibración de las estructuras civiles tanto verticales como horizontales, bajo condiciones de vibración forzada por sismo o por carga de servicio.
- Los resultados obtenidos demuestran la efectividad, en la reducción de la respuesta estructural, del controlador óptimo no lineal robusto propuesto, cuando se utiliza un dispositivo de amortiguamiento semiactivo, como es el caso de un MRD.
- Se comprueba que un esquema de control que considera el modelo matemático del sistema a controlar, como es el caso del control óptimo, permite hacer un mejor control de la respuesta del sistema, respecto de un controlador que no contempla tal modelo, como es el caso del controlador PD.
- Los casos de estudio aportan importante información para el diseño de sistemas de control de vibraciones en estructuras a escala real.

- La mayoría de las propuestas de control estructural se basan en la determinación de la fuerza necesaria a ejercer por el dispositivo de control, sin embargo, el control de tal fuerza, en el caso de un MRD, se hace a través del voltaje aplicado, lo que hace necesario involucrar al modelo no lineal del MRD.
- Basado en la revisión bibliográfica llevada a cabo, hasta donde se tiene conocimiento, no hay reportes en la literatura de que un controlador óptimo no lineal robusto como el propuesto, tome en cuenta la dinámica del MRD en la reducción de la respuesta de estructuras civiles.

# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajo futuro

### 5.1. Conclusiones Generales

Teniendo el sustento matemático, como lo es la segunda ley del movimiento de Newton, fue posible plantear un modelo no lineal que considera la dinámica lineal de estructuras civiles sujetas a solicitaciones externas e incluye la dinámica no lineal de un dispositivo semiactivo de control de vibraciones. El modelo no lineal utiliza el controlador óptimo no lineal robusto que basa su funcionamiento en el principio máximo de Pontryagin, la solución de la ecuación de HJB y la ecuación diferencial de Riccati, para llevar a cabo la estabilización del sistema y con ello reducir su respuesta estructural. Como resultado de esta investigación es posible inferir las siguientes conclusiones generales

- A través de la segunda ley de movimiento de Newton es posible representar la dinámica de estructuras civiles, tanto verticales como horizontales, ya sea que estén sujetas a condiciones de vibración libre o de vibración forzada.
- La representación en espacio de estados de un sistema no lineal que admite la forma SDCF, facilita la inclusión de fuerzas de perturbación externas, así como entradas de control, que rechacen o reduzcan la perturbación y su consecuente

análisis.

- Basado en la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman y el principio de optimalidad, que conducen a la ecuación diferencial de Riccati, el esquema de control óptimo no lineal robusto propuesto, actúa satisfactoriamente sobre el sistema no lineal, estructura-MRD y reduce, de manera significativa, la respuesta estructural.
- Es posible utilizar un esquema de control óptimo no lineal robusto para la efectiva reducción de las vibraciones en estructuras civiles a través del uso de amortiguadores del tipo MRD.
- Se ha verificado la efectividad y aplicabilidad, en el área del control estructural semiactivo, de los dispositivos de control del tipo MRD.
- El modelo utilizado para el MRD, depende directamente de las variables de estado de la estructura (desplazamiento y velocidad), sobre la cual actúa, y como resultado, la inclusión de esta dinámica resulta efectiva en la síntesis del controlador óptimo no lineal propuesto y en el consecuente desempeño del mismo.
- El controlador óptimo no lineal propuesto, toma en cuenta el modelo lineal de la estructura, así como la dinámica altamente no lineal del MRD en la reducción de la respuesta estructural, lo que permite hacer control dentro de una región de operación si no global, cuando menos si más grande que la que se tendría con un modelo lineal.
- Si bien, en esta tesis se consideró un modelo lineal de la estructura, es posible aplicar la técnica de control desarrollada, a modelos no lineales de la estructura, siempre y cuando, el sistema no lineal completo, con la inclusión del MRD, admita una representación en la forma SDCF.

- Un esquema de control que considera el modelo matemático de la planta a controlar, como es el caso del control óptimo, permite hacer un mejor control de la respuesta del sistema, respecto de un controlador que no contempla tal modelo, como es el caso del controlador PD.
- La mayoría de las propuestas para control estructural, se enfocan en la determinación de la fuerza necesaria a ejercer por el amortiguador, sin embargo, el control de tal fuerza, para el caso de un dispositivo semiaactivo, como el MRD, se hace a través del voltaje aplicado, lo que hace necesario involucrar al modelo no lineal del MRD en la síntesis del controlador.
- El controlador óptimo no lineal robusto propuesto para la reducción de vibraciones, utiliza un modelo que incluye la dinámica del MRD, por lo que, a diferencia de la mayoría de los controladores reportados en la literatura, hace que la salida del controlador, corresponda al voltaje a aplicar al MRD.
- Basado en la revisión del estado del arte, hasta donde se tiene conocimiento, no hay reportes en la literatura de que un controlador óptimo no lineal robusto como el propuesto, tome en cuenta la dinámica del MRD en la reducción de la respuesta estructural de estructuras civiles.
- Los casos de estudio aportan información importante para el diseño de sistemas de control de vibraciones en estructuras a escala real.

## 5.2. Propuesta de trabajo futuro

Resulta deseable propiciar la participación colaborativa entre grupos de trabajo de Ingeniería Civil e Ingeniería de Control, ya que al aumentar los trabajos interdisciplinarios en el área de control estructural, se tendría un mejor y más rápido avance, debido a que ésta, pudiera verse influenciada por características que ya existen en un campo, pero no en otro.

Un sistema de control estructural tiene la configuración básica: a) sensores colocados en la estructural para medir las perturbaciones externas, las variables de la respuesta estructural, o ambas. b) dispositivos para procesar la información medida y calcular las acciones de control necesarias basadas en un determinado algoritmo de control y c) actuadores, que en el caso del control activo y semiactivo, requieren fuentes de energía externa para producir o regular las fuerzas de control requeridas. Lo anterior, sugiere la necesidad de un análisis de diferentes diseños de un sistema de control, para evaluar la factibilidad de implementar los resultados teóricos, a nivel laboratorio o en estructuras reales.

Sobre los sensores: La retroalimentación completa del estado, asume que los estados son conocidos en todo momento, sin embargo, para una aplicación práctica, el uso de un gran número de sensores para una medición directa de todos los estados, pudiera no ser factible por la dificultad de instalación de cables o conexiones inalámbricas, así como las limitaciones debidas a costos o requerimientos técnicos. En esta situación, si el sistema es observable, los estados pueden ser estimados a partir de un modelo del sistema y de la medición de su salida, a través de la implementación de un observador de estado. Debido a su relación costo-eficiencia, disponibilidad y confiabilidad en las mediciones, la instrumentación más común es con acelerómetros, que miden la vibración en tres ejes ortogonales, dos horizontales y uno vertical. Éstos deberán tener las características adecuadas de sensibilidad, estabilidad, durabilidad y una confiable robustez de aislamiento y protección. La respuesta (estados) de velocidad y el desplazamiento se pueden obtener a través de la integración de la señal de salida del acelerómetro, lo que hace necesaria la implementación de integradores numéricos y el posible requerimiento de filtros que eviten señales con ruido.

Sobre los dispositivos para procesar la información. En la actualidad, se puede acceder a microprocesadores de bajo costo, lo que facilita la implementación digital de un sistema de control, además de que en ellos, resulta fácil la actualización de sus algoritmos, coeficientes o filtros. Los controladores digitales se pueden implementar en

diferentes arquitecturas, incluyendo microprocesadores dedicados, tarjetas para PC y procesadores de señal digitales (DSP, por sus siglas en inglés).

Sobre los actuadores: Se deberán de tomar en cuenta los valores de los puntos de saturación en cuanto a su rango de operación física de fuerza o desplazamiento, así como de su alimentación, lo que, eventualmente, limitaría la fuerza ejercida. Otro importante punto a tomar en cuenta es el número de actuadores, su tamaño y lugar de colocación, lo que dependerá de las propiedades, configuración y requerimientos estéticos de la estructura.

Con lo ya mencionado en esta sección y para dar una continuidad tendiente a ampliar la investigación realizada, se proponen los siguientes trabajos.

- Estudiar las consideraciones prácticas para mejorar la robustez del controlador, relacionadas con ruido en las mediciones y el diseño de estimadores de estado para reducir el número de sensores.
- Implementar los integradores numéricos necesarios para la determinación de los estados correspondientes a la velocidad y el desplazamiento.
- Para aplicaciones reales y para prevenir posibles fallas de diferente índole, es necesario tomar en cuenta los rangos de operación del MRD para dimensionar un amortiguador acorde a la estructura de manera que se logre una operación efectiva.
- Proponer adecuaciones al controlador de manera que tome en cuenta los puntos de saturación del MRD.
- Estudiar la ampliación del sistema para que contemple múltiples salidas, es decir, más de un MRD, con diferentes señales de control para cada uno.
- En una aplicación real, identificar los puntos óptimos de colocación de los dispositivos de control.

- Hacer la identificación de los parámetros del modelo dinámico de Bouc-Wen modificado, para MRDs de diferentes características, usando diversas técnicas de identificación, comparar los resultados y utilizar los que produzcan un mejor desempeño.
- Identificar el dispositivo digital que resulte más factible para la programación del controlador, así como el sistema de adquisición de datos, teniendo presente que existirá un retardo en el tiempo que puede ocurrir entre las diferentes etapas del sistema y que en conjunto tiendan a tener un proceso en tiempo real.



# Referencias

- [Ackermann93] Ackermann, J. *Robust Control: Systems with uncertain physical parameters*. Springer-Verlag, London, UK, 1993.
- [Adeli97] Adeli, H. and Saleh, A. Optimal control of adaptive/smart bridge structures. *Journal of Structural Engineering*, 123(2):218–226, 1997.
- [Adeli98] Adeli, H. and Park, S. H. *Neurocomputing for design automation*. CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 1998.
- [Adeli99] Adeli, H. and Saleh, A. *Control , Optimization and Smart Structures-High Performance Bridges and Buildings of the Future*. John Wiley and Sons, New York, NY, USA, 1999.
- [Adeli01] Adeli, H. Neural networks in civil engineering. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 16(2):126–142, 2001.
- [Agrawal96] Agrawal, A. K. and Yang, J. N. Optimal polynomial control of seismically excited linear structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 122(8):753–761, 1996.
- [Aldemir01] Aldemir, U., Bakioglu, M., and Akhiev, S. S. Optimal control of linear buildings under seismic excitations. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 30:835–851, 2001.

- [Anderson90] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B. *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1990.
- [Andersson15] Andersson, A., O'Connor, A., and Karoumi, R. Passive and adaptive damping systems for vibration mitigation and increased fatigue service life of a tied arch railway bridge. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 30(9):748–757, 2015.
- [Ao17] Ao, W. K. and Reynolds, P. Analytical and experimental study of Eddy current damper for vibration suppression in footbridges structure. *En Dynamics of civil structures. Proceedings of the 35th IMAC, A conference and exposition on Structural Dynamics*, tomo 2, págs. 131–138. Bethel, CT, USA, 2017.
- [Bachmann87] Bachmann, H. and Ammann, W. *Vibrations in Structures: Induced by Man and Machines, Structural Engineering Document (3rd edition)*. International Association for Bridge and Structural Engineering, Zurich, Switzerland, 1987.
- [Bachmann95] Bachmann, H., Ammann, W., Deischl, F., Eisenmann, J., Floegl, I., and Hirsch, H. G. *Vibration Problems in Structures: Practical Guidelines (2nd edition)*. Birkhauser, Berlin, Germany, 1995.
- [Bani-Hani98] Bani-Hani, K. and Ghaboussi, J. Neural networks for structural control of a benchmark problem, active tendon system. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 27:1225–1245, 1998.
- [Banks07] Banks, H. T., Lewis, B. M., and Tan, H. T. Nonlinear feedback controllers and compensators: a state-dependent Riccati equa-

- tion approach. *Computational Optimization and Applications*, 37(2):177–218, June 2007.
- [BrownJohn05] BrownJohn, J. M. W. and Fu, T. N. Vibration excitation and control of a pedestrian walkway by individuals and crowds. *Shock and Vibration*, 12:333–347, 2005.
- [Chang99] Chang, C. C. Mass dampers and their optimal designs for building vibration control. *Engineering Structures*, 21:454–463, 1999.
- [Cho93] Cho, D. D. Experimental results on sliding mode control of an electromagnetic suspension. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 7(4):283–292, 1993.
- [Chopra12] Chopra, A. K. *Dynamics of Structures*, 4/e. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2012.
- [Cloutier97] Cloutier, J. R. State-dependent Riccati equation techniques: an overview. *En Proceedings of the American Control Conference*, págs. 932–936. Albuquerque, New Mexico, USA, June 1997.
- [Dallard01] Dallard, P., Fitzpatrick, A. J., Flint, A., Le Bourva, S., Low, A., Ridsdill Smith, R. M., and Willford, M. The london millenium footbridge. *Structural Engineering*, 79(22):17–33, 2001.
- [Datta03] Datta, T. K. A state-of-the-art review on active control of structures. *ISET Journal of Earthquake Technology*, 40(1):1–17, 2003.
- [Deastra18] Deastra, P., Wagg, D. J., and Sims, N. D. The realisation of an inerter-based system using fluid inerter. *En Dynamics of civil structures. Proceedings of the 36th IMAC, A conference and exposition on Structural Dynamics*, tomo 2, págs. 127–134. Bethel, CT, USA, 2018.

- [Dyke96a] Dyke, S. J. *Acceleration feedback control strategies for active and semi-active control systems: modeling, algorithm development, and experimental verification*. Phd thesis, Graduate School of the University of Notre Dame, Notre Dame, IN, USA, 1996.
- [Dyke96b] Dyke, S. J., Spencer-Jr., B. F., Sain, M. K., and Carlson, J. D. Modeling and control of magnetorheological dampers for seismic response reduction. *Smart Materials and Structures*, 5:565–575, 1996.
- [Enrriquez-Zarate15] Enrriquez-Zarate, J., Silva-Navarro, G., and Cabrera-Amado, A. Semiactive vibration control in a three-story building-like structure using a magnetorheological damper. *En Dynamics of civil structures. Proceedings of the 33rd IMAC, A conference and exposition on Structural Dynamics*, tomo 2, págs. 475–483. Bethel, CT, USA, 2015.
- [Fisco11] Fisco, N. R. and Adeli, H. Smart structures: Part I - Active and semi-active control. *Scientia Iranica, Transactions A: Civil Engineering*, 18(3):275–284, 2011.
- [Fleming02] Fleming, P. J. and Purshouse, R. C. Evolutionary algorithms in control systems engineering: A survey. *Control Engineering Practice*, 10:1223–1241, 2002.
- [Flood94] Flood, I. and Kartam, N. Neural networks in civil engineering. ii: Systems and applications. *Journal of Computing in Civil Engineering*, 8(2):149–162, 1994.
- [Forrai02] Forrai, A., Hashimoto, S., Funato, H., and Kamiyama, K. Structural control technology: system identification and control of fle-

- xible structures. *Computing and control engineering Journal*, 12(6):257–262, 2002.
- [Frýba99] Frýba, L. *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads (3rd edition)*. Tomas Telford, Praga, Czech Republic, 1999.
- [Gao96] Gao, W. *Theory and desing methods of variable structure control*. Science Press, Beijing, China, 1996.
- [Gonçalves07] Gonçalves, P., Brennan, M., and Elliot, S. Numerical evaluation of high-order modes of vibration in uniform Euler-Bernoulli beams. *Journal of Sound and Vibration*, 301:1035–1039, 2007.
- [Goorts18] Goorts, K. and Narasimhan, S. The role of control-structure interaction in deployable autonomous control systems. *En Dynamics of civil structures. Proceedings of the 36th IMAC, A conference and exposition on Structural Dynamics*, tomo 2, págs. 301–134. Bethel, CT, USA, 2018.
- [Guclu06] Guclu, R. Sliding mode and PID control of a structural system against earthquake. *Mathematical and Computer Modelling*, 44(1-2):210–217, July 2006.
- [Gutierrez-Soto13] Gutierrez-Soto, M. and Adeli, H. Placement of control devices for passive, semi-active, and active vibration control of structures. *Scientia Iranica*, 20(6):1567–1578, 2013.
- [Ha13] Ha, Q. P., Nguyen, M. T., Li, J., and Kwok, N. M. Smart structures with current-driven MR dampers: modeling and second-order sliding mode control. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 18(6):1702–1712, 2013.

- [Haessig02] Haessig, D. A. and Friedland, B. State dependent differential Riccati equation for nonlinear estimation and control. *En 15th IFAC World Congress*, tomo 35, págs. 405–410. Barcelona, Spain, 2002.
- [Hernández-B16] Hernández-B, H., Huergo-R, I. F., and Ceja-M, C. J. Consideraciones de diseño para condiciones de servicio de puentes peatonales. *En XX Congreso Nacional de Ingeniería Estructural*, págs. 1–24. Merida, Yucatán, México, 2016.
- [Housner97] Housner, G. W., Bergman, L. A., Caughey, T. K., Chassiakos, A. G., Claus, R. O., Masri, S. F., Skelton, R. E., Soong, T. T., Spencer, B. F., and Yao, J. T. P. Structural control: past, present and future. *Journal of engineering Mechanics*, 123(9):897–971, September 1997.
- [Huang14] Huang, C. S., Chen, L. J., Su, W. C., and Wang, S. D. Applying time-frequency analysis on earthquake inputs and structure responses. *En International Symposium on Computer, Consumer and Control (IEEE IS3C2014)*, págs. 1245–1248. Taichung, Taiwan, June 2014.
- [Huergo-R16] Huergo-R, I. *Control de vibraciones verticales en puentes peatonales mediante amortiguadores de masa sintonizados*. Tesis de maestría, Facultad de estudios superiores Acatlan, UNAM, Cd. Universitaria, Cd.Mx, 2016.
- [Javidialesaadi19] Javidialesaadi, A. and Wierschem, N. E. Response of a sdof system with an inerter-based tuned mass damper subjected to non-stationary random excitation. *En Dynamics of civil structures. Proceedings of the 37th IMAC, A conference and exposition on*

- Structural Dynamics*, tomo 2, págs. 201–203. Bethel, CT, USA, 2019.
- [Kautsky85] Kautsky, J., Nichols, N. K., and Dooren, P. V. Robust pole-assignment in linear state feedback. *International Journal of Control*, 41(5):1129–1155, 1985.
- [Khalil96] Khalil, H. K. *Nonlinear Systems, 2nd ed.* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1996.
- [Kim00] Kim, S. B. and Yun, C. B. Sliding mode fuzzy control: Theory and verification on a benchmark structure. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 29(11):1587–1608, 2000.
- [Kirk04] Kirk, D. E. *Optimal Control Theory.* Dover, Mineola, NY, USA, 2004.
- [Kori09] Kori, J. G. and Jangid, R. S. Semi-active MR dampers for seismic control of structures. *Bulletin of the New Zealand Society for Earthquake Engineering*, 42(3):157–166, September 2009.
- [Kwakernaak72] Kwakernaak, H. and Sivan, R. *Linear Optimal Control Systems.* Wiley-Interscience, NY, NY, USA, 1972.
- [Kwok95] Kwok, K. and Samali, B. Performance of tuned mass dampers under wind loads. *Engineering Structures*, 17(9):655–667, 1995.
- [Lara-V17] Lara-V, L. A., Brito, J. L. V., and Valencia-G., Y. Comparative analysis of semi-active control algorithm applied to magnetorheological dampers. *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, 25(1):39–58, 2017.

- [Li18] Li, Z. and Adeli, H. Control methodologies for vibration control of smart civil and mechanical structures. *Expert systems*, 35(6):1–20, 2018.
- [Medina08] Medina, J., Marichal, M., and Simón, M. Desarrollo de dos modelos inversos de un amortiguador magneto-reológico para el control de vibraciones en estructuras civiles. *Boletín Técnico, Instituto de Materiales y Modelos Estructurales (IMME), Universidad Central de Venezuela*, 46(2):1–22, 2008.
- [Mohammed17] Mohammed, A. S. and Pavic, A. Evaluation of mass-spring-damper models for dynamic interaction between walking humans and civil structures. *En Dynamics of civil structures. Proceedings of the 35th IMAC, A conference and exposition on Structural Dynamics*, tomo 2, págs. 169–177. Bethel, CT, USA, 2017.
- [NormaBS03] NormaBS. BS NA EN 1991-2. UK National Annex to Eurocode 1. Actions on structures. Traffic loads on bridges. UK, 2003.
- [Ogata09] Ogata, K. *Modern Control Engineering*. Prentice-Hall, New Jersey, USA, 2009.
- [Ornelas-Tellez18] Ornelas-Tellez, F., Rico-Melgoza, J. J., Espinosa-Juarez, E., and Sanchez, E. N. Optimal and robust control in DC microgrids. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 9(6):5543–5553, 2018.
- [Park04] Park, K. S. and Koh, H. M. Preference-based optimum design of an integrated structural control system using genetic algorithms. *Advances in Engineering Software*, 35:85–94, 2004.
- [Patten98] Patten, W. N., Mo, C., Kuehn, L., and Lee, J. A primer on design



- of semiactive vibration absorbers (sava). *Journal of Engineering Mechanics*, 124(1):61–68, 1998.
- [Pontryagin62] Pontryagin, L. S. and Boltianski, P. V. *Mathematical theory of Optimal Processes*. Fizmagtiz, Moscow, 1962.
- [Preumont11] Preumont, A. *Vibration Control of Active Structures: An Introduction (3rd edition)*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Germany, 2011.
- [Ramsey18] Ramsey, J. R. and Wierschem, N. E. A numerical investigation of a gravity-compensated nonlinear energy sink for the passive control of flooring systems. *En Dynamics of civil structures. Proceedings of the 36th IMAC, A conference and exposition on Structural Dynamics*, tomo 2, págs. 229–332. Bethel, CT, USA, 2018.
- [Rao11] Rao, S. S. *Mechanical Vibrations, (5th edition)*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2011.
- [Roos09] Roos, I. *Human induced vibrations on footbridges: Application and comparison of pedestrian load models*. Master’s thesis, Delft University of Technology, The Netherlands, 2009.
- [Saleh94] Saleh, A. and Adeli, H. Parallel algorithms for integrated structural/control optimization. *Journal of Aerospace Engineering*, 7(3):297–314, 1994.
- [Saleh97] Saleh, A. and Adeli, H. Robust parallel algorithms for solution of riccati equation. *Journal of Aerospace Engineering*, 10(3):126–133, 1997.

- [Sepulchre97] Sepulchre, R., Jankovic, M., and Kokotovic, P. *Constructive Nonlinear Control*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1997.
- [Sétra06] Sétra. Footbridges: Assessment of vibrational behaviour of footbridges under pedestrian loading. Paris, Fr, 2006.
- [Shahabpoor18] Shahabpoor, E., Pavic, A., Racic, V., and Rezaei, H. Paradigm shift in structural vibration serviceability: New assessment framework based on human’s experience of vibration. *En Dynamics of civil structures. Proceedings of the 36th IMAC, A conference and exposition on Structural Dynamics*, tomo 2, págs. 217–221. Bethel, CT, USA, 2018.
- [Shames92] Shames, I. and Cozzarelli, F. *Elastic and Inelastic Stress Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1992.
- [Soong91] Soong, T. T., Reinhorn, A. M., Wang, Y. P., and Lin, R. C. Full-scale implementation of active control i: Design and simulation. *Journal of Structural Engineering*, 117(11):3516–3536, 1991.
- [Soong94] Soong, T. T. and Constantinou, M. C. *Passive and Active Structural Vibration Control in Civil Engineering*. Springer-Verlag, Buffalo, NY, USA, 1994.
- [Soong02] Soong, T. T. and Spencer-Jr., B. F. Supplemental energy dissipation: state-of-the-art and state-of-the-practice. *Engineering Structures*, 24:243–259, 2002.
- [Spencer-Jr.97] Spencer-Jr., B. F. and Sain, M. K. Controlling buildings: a new frontier in feedback. *IEEE Control Systems: Special Issue on Emerging Technologies*, 17(6):19–35, December 1997.

- [Spencer97] Spencer, B. F., Dyke, S. J., Sain, M. K., and Carlson, J. D. Phenomenological model of a magnetorheological damper. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 123(3):230–238, March 1997.
- [Spiegel08] Spiegel, M. R. and Stephens, L. J. *Statistics, (4th edition)*. McGraw-Hill, New York, NY, USA, 2008.
- [Stengel94] Stengel, R. F. *Optimal Control and Estimation*. Dover, New York, NY, USA, 1994.
- [Symans99] Symans, M. D. and Constantinou, M. C. Semi-active control systems for seismic protection of structures: a state-of-the art review. *Engineering Structures*, 21:469–487, 1999.
- [Tang96] Tang, Y. Active control of sdf systems using artificial neural networks. *Computers and Structures*, 60(5):695–703, 1996.
- [Thenozhi13] Thenozhi, S. and Yu, W. Advances in modeling and vibration control of buildings structures. *Annual Reviews in control*, 37:346–364, 2013.
- [Wang11] Wang, Y., Utsunomiya, K., and Bortoff, S. A. Nonlinear control design for a semi-active vibration reduction system. *En Proceedings of the 30th Chinese Control Conference*, págs. 5833–5837. Yantai, China, July 2011.
- [Weber17] Weber, F., Distl, H., and Braun, C. Semi-active base isolation of civil engineering structures based on optimal viscous damping and zero dynamic stiffness. *En Dynamics of civil structures. Proceedings of the 35th IMAC, A conference and exposition on Structural Dynamics*, tomo 2, págs. 1–9. Bethel, CT, USA, 2017.

- [Wen76] Wen, Y.-K. Method of random vibration of hysteretic systems. *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, 102(2):249–263, April 1976.
- [Williams16] Williams, M. *Structural Dynamics*. CRC press, Taylor & Francis group, Boca Raton, FL, USA, 2016.
- [Wu98] Wu, J., Yang, J., and Schmiterndorf, W. Reduced order  $H_\infty$  and LQR control for wind-excited tall buildings. *Engineering Structures*, 20(3):222–236, 1998.
- [Xu17] Xu, Y. L. and He, J. *Smart Civil Structures*. Taylor & Francis, CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 2017.
- [Yang91] Yang, J. N., Li, Z., and Liu, S. C. Instantaneous optimal control with acceleration and velocity feedback. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 6(3-4):204–211, 1991.
- [Yang96] Yang, J. N., Agrawal, A. K., and Chen, S. Optimal polynomial control of seismically excited nonlinear and hysteretic structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25:1211–1230, 1996.
- [Yao72] Yao, J. T. P. Concept of structural control. *Journal of the Structural Division*, 98(7):1567–1574, 1972.
- [Yoshida04] Yoshida, O. and Dyke, S. J. Seismic control of a nonlinear benchmark building using smart dampers. *Journal of Engineering Mechanics*, (130):386–392, 2004.
- [Yu16] Yu, W. and Thenozi, S. *Active Structural Control with Stable Fuzzy PID Techniques*, SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. Springer, AG, Switzerland, 2016.

- [Zivanovic05] Zivanovic, S., Pavic, A., and Reynolds, P. Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation: a literature review. *Journal of Sound and Vibration*, 279(1-2):1–74, 2005.