

DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA DE SISTEMAS LTI MIMO EN EL DOMINIO FÍSICO

TESIS

Que para obtener el grado de
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

presenta
Noé Villa Villaseñor

Gilberto González Ávalos
Director de Tesis

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Marzo 2007

RESUMEN

En este documento se propone una metodología para realizar la descomposición canónica de sistemas LTI MIMO representados por un modelo en Bond Graph. Además se proponen dos metodologías para construir modelos de sistemas LTI MIMO en Bond Graph cuyos elementos dinámicos pueden ser arbitrariamente forzados a no aceptar una conexión causal con una fuente arbitrariamente seleccionada dentro del modelo. Estas dos metodologías pueden ser aplicadas en el problema de la cancelación estructural de perturbaciones. Para estos fines se realiza un estudio de la metodología de Bond Graph y sus propiedades estructurales. Se realiza también un estudio de las características de controlabilidad y observabilidad de sistemas LTI MIMO. Además se estudia la metodología de la descomposición canónica introducida por Kalman [11]. Finalmente se realiza el análisis sobre las metodologías propuestas. En conjunto con este trabajo de investigación se ha redactado y publicado un artículo en la Multiconferencia Internacional de Modelado y Simulación 2007 [18].

ABSTRACT

In this document a methodology to achieve the canonical decomposition of LTI MIMO systems represented by a Bond Graph model is proposed. Also two methodologies are proposed in order to construct Bond Graph models of LTI MIMO systems whose dynamic elements could be arbitrarily forced to do not accept a causal connexion with an arbitrarily selected source within the model. These two methodologies can be applied in the structural perturbation rejection problem. In order to accomplish these goals a study on the Bond Graph methodology and its structural properties is performed. A study on the characteristics of controllability and observability of LTI MIMO systems is performed too. Also the methodology on the canonical decomposition introduced by Kalman [11] is studied. Finally an analysis on the proposed methodologies is performed. In conjunction with this research work a paper has been written and published in the International Modeling and Simulation Multiconference 2007 [18].

Índice general

Índice de figuras	VIII
Índice de cuadros	XI
1. Introducción	3
1.1. Objetivo	4
1.2. Justificación	4
1.3. Organización	5
I Antecedentes	7
2. El lenguaje de Bond Graph	9
2.1. Presentación del lenguaje de Bond Graph	9
2.2. Representación de la transferencia de potencia	10
2.3. Variables involucradas en el lenguaje de Bond Graph	11
2.3.1. Variables de potencia	11
2.3.2. Variables de energía	11
2.4. Elementos del lenguaje de Bond graph	12
2.4.1. Elementos pasivos de puerto-1	12
2.4.2. Energía almacenada en los elementos C e I	14
2.4.3. Elementos pasivos multipuerto	15
2.4.4. Fuentes	16
2.4.5. Detectores	17
2.4.6. Elementos de unión	17
2.4.7. El concepto de señal y el Bond activo	22
2.4.8. Fuentes Moduladas	23
2.5. Procedimientos para la construcción de modelos en Bond Graph	24
2.5.1. Sistemas mecánicos unidimensionales.	24
2.5.2. Sistemas eléctricos monofásicos.	26
2.5.3. Sistemas hidráulicos.	28
2.6. Causalidad	30
2.6.1. Causalidad en puertos-1 básicos	31
2.6.2. Causalidad para puertos-2 y puertos-3 básicos	33

2.6.3.	Procedimiento de asignación de causalidad	36
2.6.4.	Trayectorias causales	40
2.7.	Vectores clave, estructura de unión y la ecuación de estado.	43
2.7.1.	Vectores clave	43
2.7.2.	Estructura de unión y ecuación de estado	45
2.7.3.	Función de transferencia y ecuación de estado	49
3.	Análisis de controlabilidad y observabilidad	50
3.1.	Estabilidad asintótica, controlabilidad y observabilidad: El enfoque clásico .	50
3.1.1.	Solución de la ecuación de estado para sistemas LTI	50
3.1.2.	Estabilidad asintótica	51
3.1.3.	Controlabilidad	54
3.1.4.	Observabilidad	56
3.2.	Estabilidad asintótica, Controlabilidad y Observabilidad: El enfoque estructural de Bond Graph	58
4.	Descomposición canónica de sistemas LTI MIMO	66
4.1.	Los dos enfoques tradicionales para modelar un sistema LTI MIMO	66
4.2.	Estructura canónica de sistemas dinámicos lineales	67
II	Descomposición canónica en el dominio físico	77
5.	Descomposición canónica de sistemas LTI MIMO bajo el enfoque de Bond Graph	80
5.1.	Herramientas utilizadas	80
5.2.	El método de descomposición canónica en el dominio físico.	83
6.	Cancelación estructural de perturbaciones mediante análisis de trayectorias causales.	96
6.1.	Introducción	96
6.2.	Nodos con pérdida de controlabilidad.	97
6.3.	Subsistemas desacoplados	99
6.4.	Construcción en Bond Graph de los subsistemas que conforman una forma canónica descompuesta.	100
6.5.	Desviación de perturbaciones mediante nodos no controlables y subsistemas desacoplados.	107
6.5.1.	Desviación de perturbaciones mediante nodos no controlables	107
6.5.2.	Desviación de perturbaciones mediante subsistemas desacoplados	113
7.	Conclusiones y trabajos futuros	120
7.1.	Conclusiones	120
7.2.	Trabajos futuros	122
A.	Artículo publicado en la Multiconferencia Internacional de Modelado y Simulación 2007.	123

Bibliografia

Índice de figuras

2.1. Sistemas físicos en diferentes dominios y la representación de transferencia de potencia.	10
2.2. Representación de un elemento R en Bond Graph.	12
2.3. Elemento R lineal.	13
2.4. Representación de un elemento C	13
2.5. Elemento C lineal.	13
2.6. Representación de un elemento I	14
2.7. Elemento I lineal.	14
2.8. Inductor de tres bobinas y su representación en Bond Graph.	16
2.9. Fuentes de esfuerzo y de flujo.	17
2.10. Detectores de esfuerzo y flujo.	17
2.11. Utilización de la unión 0.	18
2.12. Utilización de la unión 1.	19
2.13. Sistemas equivalentes y su representación en Bond Graph.	20
2.14. Transformador.	20
2.15. Acoplamiento hidráulico-mecánico en un gato hidráulico.	21
2.16. Girador.	21
2.17. Acoplamiento eléctrico-mecánico en un motor de CD.	22
2.18. Bonds activos.	22
2.19. Fuentes moduladas.	23
2.20. Simplificaciones.	24
2.21. Sistema de suspensión.	25
2.22. Modelo en Bond Graph de un sistema de suspensión.	25
2.23. Modelos en Bond Graph Simplificados.	26
2.24. Circuito eléctrico.	27
2.25. Modelo en Bond Graph del circuito eléctrico de la figura 2.24.	27
2.26. Modelo simplificado.	28
2.27. Sistema hidráulico de bombeo.	29
2.28. Modelo en Bond Graph del sistema hidráulico de la figura 2.27.	29
2.29. Modelo reducido del sistema hidráulico de la figura 2.27.	30
2.30. Causalidad entre dos elementos.	30
2.31. Causalidad en fuentes de potencia.	31
2.32. Causalidad en elementos resistivos.	31

2.33. Causalidad en un elemento capacitivo.	32
2.34. Causalidad en un elemento inductivo.	33
2.35. Causalidad en un transformador.	33
2.36. Causalidad en un girador.	34
2.37. Causalidad en uniones 0.	34
2.38. Causalidad en uniones 1.	35
2.39. Modelo acausal en Bond Graph.	37
2.40. Asignación de causalidad a las fuentes.	37
2.41. Asignación de causalidad integral al elemento C y las primeras consecuencias.	38
2.42. Asignación consecuente de causalidad.	38
2.43. Asignación de causalidad al elemento I y las consecuencias correspondientes.	39
2.44. Modelo BGI con causalidad completamente asignada.	39
2.45. Trayectoria causal simple.	40
2.46. Trayectoria causal mezclada directa.	41
2.47. Trayectoria causal mezclada indirecta.	41
2.48. Lazo causal.	42
2.49. Lazo de causalidad.	42
2.50. Vectores clave.	43
2.51. Circuito eléctrico $RC - RC$	46
2.52. Modelo BGI del circuito eléctrico de la figura 2.51.	47
3.1. Respuesta al impulso de tres variables de estado asintóticamente estables.	52
3.2. Respuestas al impulso de tres variables de estado: una inestable (1), otra que mantiene un offset (2) y una asintóticamente estable (3).	53
3.3. Modelo en Bond Graph en causalidad integral.	62
3.4. Modelo BGD con un elemento que permanece en causalidad integral.	63
3.5. Dualización de fuente.	64
3.6. Dualización de detector.	64
4.1. Diagrama a bloques de un sistema LTI MIMO en forma canónica descompuesta.	69
5.1. Circuito eléctrico con seguidor de voltaje mediante un amplificador operacional.	81
5.2. Una versión equivalente del circuito de la figura 5.1.	82
5.3. Modelo BGI del sistema eléctrico de la figura 5.2.	82
5.4. BGI de un sistema de orden 6.	85
5.5. BGD del modelo de la figura 5.4.	86
5.6. Respuesta al escalón del sistema de la figura 5.4.	91
5.7. BGI de un sistema de tercer orden.	92
6.1. Bloque con pérdida de controlabilidad.	97
6.2. Simplificación del modelo de la figura 6.1.	97
6.3. Bloque con pérdida de controlabilidad.	98
6.4. Simplificación del modelo de la figura 6.3.	98
6.5. Dos subsistemas desacoplados.	99
6.6. Pérdida de observabilidad por la inclusión de un bond activo.	100

6.7. Sistema de primer orden estructuralmente controlable y observable.	102
6.8. Sistema lineal con un modo co y un modo $c\bar{o}$	102
6.9. Sistema con bloques co , $c\bar{o}$ y $\bar{c}\bar{o}$	103
6.10. Sistema lineal que incluye los cuatro subsistemas involucrados en una forma canónica descompuesta.	103
6.11. Modelo BGD del modelo de la figura 6.10.	104
6.12. BGI de un sistema lineal de cuarto orden.	104
6.13. BGI de un modelo de segundo orden.	108
6.14. Respuesta al escalón del esfuerzo de salida en el elemento C_2 en la figura 6.13.	108
6.15. Versión manipulada del modelo de la figura 6.13.	109
6.16. Creación de una nueva trayectoria causal para controlar la variable de estado de salida.	110
6.17. Respuesta al escalón en dos elementos del modelo de la figura 6.16.	110
6.18. Respuesta al escalón de las variables de estado del sistema original.	112
6.19. Respuesta al escalón de las variables de estado del sistema modificado.	113
6.20. BGI de un sistema de segundo orden con una fuente de perturbación incluida.	114
6.21. Desacoplamiento del modelo de la figura 6.20 mediante una fuente modular.	115
6.22. Respuesta al escalón en dos elementos del modelo de la figura 6.21.	115
6.23. Modelo en Bond Graph de un sistema de suspensión.	116
6.24. Modelo modificado para desacoplar subsistemas.	117
6.25. Algunas respuestas simuladas del sistema de la figura 6.24.	118

Índice de cuadros

2.1. Variables generalizadas para diferentes dominios físicos.	11
--	----

LISTA DE ACRÓNIMOS

- LTI: Linear-Time-Invariant (Lineal con parámetros invariantes en el tiempo).
- MIMO: Multi-Input-Multi-Output (Múltiples entradas, múltiples salidas).
- SISO: Single-Input-Single-Output (Una entrada, una salida)
- BGI: Modelo en Bond Graph con causalidad integral predefinida.
- BGD: Modelo en Bond Graph con causalidad derivativa predefinida.

Capítulo 1

Introducción

Bond Graph es una técnica de modelado altamente estructurada que permite analizar diferentes tipos de sistemas en una manera única determinada por una base de descripción unificada [3]. Dentro de esta técnica es posible realizar un análisis estructural de controlabilidad y observabilidad en una manera directa que facilita la determinación de estas características [4]. Por otra parte, el Teorema de descomposición canónica introducido por Kalman [11] permite entender las relaciones existentes entre los dos esquemas clásicos del modelado de sistemas: la función de transferencia que se analiza en el dominio de la frecuencia y cuya principal herramienta es el cálculo en variable compleja, y la ecuación de estado que se analiza en el dominio del tiempo y cuya principal herramienta es el álgebra de matrices [9]. Una de las principales consecuencias del estudio de estas relaciones es que se puede asegurar que la función de transferencia no siempre muestra toda la información necesaria para estudiar las propiedades de un sistema dado; de hecho, la función de transferencia sólo muestra la información correspondiente a los modos del sistema que son tanto controlables como observables. Esto puede ser un problema, pues estados internos del sistema no identificados pueden inducir formas de operación indeseables y no identificadas. Mediante el Teorema de descomposición canónica se puede identificar la condición de todos los estados de un sistema, pues permite identificar a cuál de cuatro subconjuntos pertenece cada uno. Estos cuatro subconjuntos son los inherentes a la forma canónica descompuesta de un sistema LTI. Los estados que son tanto controlables como observables son los únicos que pueden ser identificados mediante mediciones de la entrada y la salida, y son los únicos que aparecen en la función de transferencia del sistema. El Teorema de descomposición canónica fue publicado en 1961, de modo que ya ha sido bastante estudiado, sin embargo, en este documento se desarrolla una metodología que permite realizar la descomposición

canónica de un sistema LTI MIMO mediante un enfoque nuevo: el enfoque de Bond Graph. Es de esperarse así que la nueva metodología realice la misma acción que el método de descomposición canónica de Kalman, pero incorporando las ventajas estructurales que exhibe Bond Graph.

Por otra parte, la naturaleza estructural de Bond Graph permite realizar análisis visuales sobre los modelos y los elementos que los conforman, y debido a ello, muchos aspectos internos pueden ser observados. La propiedad de la causalidad que es básica en Bond Graph permite determinar de manera visual las posibles interacciones energéticas entre cualquier par de elementos del sistema, a través de las trayectorias causales [14]. Esta propiedad de la causalidad es fundamental para el establecimiento de la metodología de la descomposición canónica desarrollada en este documento y permite también realizar el análisis concerniente a otra metodología propuesta: la cancelación de perturbaciones desde un enfoque estructural. En este problema de cancelación de perturbaciones el reto consiste en anular el efecto que fuentes de energía indeseables tienen sobre los elementos del sistema. En este documento se propone una metodología para cancelar perturbaciones desde un enfoque estructural en modelos de sistemas realizados en Bond Graph

1.1. Objetivo

Estudiar las propiedades estructurales de Bond Graph y utilizarlas para la determinación de la forma canónica descompuesta de sistemas LTI MIMO.

Utilizar éstas propiedades para el análisis y posible solución en el problema de cancelación estructural de perturbaciones en el proceso de diseño de sistemas LTI MIMO.

1.2. Justificación

El área del control de sistemas tiene muchas posibles ramificaciones. Dos de las principales vertientes consisten en el análisis de sistemas y en el control de sistemas propiamente. En éste documento se aborda el problema del análisis de sistemas. Éste problema involucra -entre otros- el análisis de estabilidad, controlabilidad y observabilidad. Al determinar adecuadamente las propiedades de estabilidad controlabilidad y observabilidad, el ingeniero de diseño obtiene información que es crítica para predecir el comportamiento del sistema físico antes de que éste sea implementado en forma real. Con ello se pueden corregir desde la etapa de desarrollo posibles funcionamientos indeseables, además se puede seleccionar un conjunto de parámetros del sistema que lo aproximen a un punto de operación

óptimo. El análisis de sistemas es entonces una herramienta de suma utilidad y cualquier metodología que ayude a simplificar dicho análisis será por tanto de suma utilidad. Este ha sido uno de los factores primordiales que han motivado al desarrollo del presente documento.

Otro aspecto a considerar lo reviste el propio análisis en Bond Graph. Esta técnica goza de buena aceptación dentro de diversos campos ingenieriles que van desde áreas como la mecatrónica, la termodinámica, la hidráulica, hasta las recientes incursiones en sistemas biológicos, por citar algunas. En México la difusión y aplicación de esta técnica es pobre. Mediante el desarrollo del presente documento se pretende asentar un precedente más que pueda ser de utilidad a ingenieros y tecnólogos interesados en el tópico.

1.3. Organización

El presente documento se ha organizado de la siguiente manera:

Se realizado una división del material de estudio en dos partes, la primera de ellas concerniente a los antecedentes necesarios y la segunda relacionada con las propuestas hechas en este trabajo de investigación. La primera parte consta de los capítulos 2, 3 y 4, los cuales se organizan como se especifica a continuación

En el capítulo 2 se realiza la introducción, estudio y análisis del elnguaje de Bond Graph. Se pretende dejar este capítulo en los términos más básicos, de modo que pueda ser abordado por cualquier persona que tenga conocimiento escaso o nulo sobre Bond Graph. En el capítulo 3 se revisan las propiedades de controlabilidad, observabilidad y estabilidad asintótica. En este capítulo 3 se revisa el análisis clásico y el análisis estructural inherente a Bond Graph de las propiedades citadas. En el capiítulo 4 se estudia el enfoque clásico de la descomposición canónica de sistemas LTI MIMO introducido por Kalman [11], y que asienta el antecedente para uno de los temas principales que aborda el presente documento. La segunda parte consta de los capítulos 5, 6 y 7, los cuales se organizan como se especifica a continuación:

En el capítulo 5 se propone una metodología para realizar la descomposición canónica de sistemas LTI MIMO en base al enfoque estructural de Bond Graph. En el capítulo 6 se proponen dos metodologías relacionadas con el problema de la cancelación estructural de perturbaciones. Finalmente, en el capítulo 7 se anotan las conclusiones del trabajo de investigación y se señalan posibles trabajos futuros.

En conjunto con este trabajo de investigación se realizó la escritura y publicación de un

artículo en la Multiconferencia Internacional de Modelado y Simulación 2007 [17], [18]. El artículo publicado se ha incluido en el apéndice A.

Parte I

Antecedentes

Capítulo 2

El lenguaje de Bond Graph

2.1. Presentación del lenguaje de Bond Graph

El Profesor H. M. Paynter del Instituto Tecnológico de Massachussets, E. U., inventó un procedimiento por medio del cual el trabajo de obtener ecuaciones diferenciales puede ser realizado por una computadora [1]. Para esto, la descripción del sistema tiene que ser introducido en la computadora en términos claros y no ambiguos, de modo que la computadora pueda seguir un procedimiento algorítmico para obtener las ecuaciones diferenciales. Así, las ecuaciones pueden ser resueltas, la evolución en el tiempo de las variables puede ser graficada y muchas otras operaciones se pueden realizar por la computadora para obtener un completo entendimiento del comportamiento del sistema. El lenguaje en el que cualquier sistema puede ser representado en forma gráfica y puede ser transportado a una computadora se llama *Bond Graph*, y una potencial traducción al castellano sería *gráfico de enlaces*.

Además de ofrecer ventaja al obtener las ecuaciones del sistema, la representación de un sistema físico en términos de Bond Graph también ofrece información sobre las interacciones ocultas entre elementos, permitiendo al ingeniero de diseño un mejor entendimiento de la dinámica del sistema completo. Un modelo en Bond Graph se pueden situar como intermediario entre el sistema físico y los modelos matemáticos asociados con él [2].

En este capítulo se presentan los principios y conceptos base para la representación de sistemas físicos dinámicos mediante Bond Graphs. Las principales características de esta herramienta se mencionan enseguida [2]. El lenguaje de Bond Graph:

- (a) Es gráfico;
- (b) Está fundamentado en la noción de analogía;

- (c) Supone parámetros concentrados;
- (d) Pone de manifiesto explícitamente las relaciones de *causa y efecto* (causalidad);
- (e) Permite construir de manera sistemática los modelos matemáticos “clásicos”.

En la siguiente sección se aborda el modo en que es representada la transferencia de potencia entre elementos de un sistema en Bond Graph.

2.2. Representación de la transferencia de potencia

Considérense los dos sistemas físicos de la figura 2.1, uno mecánico y otro eléctrico.

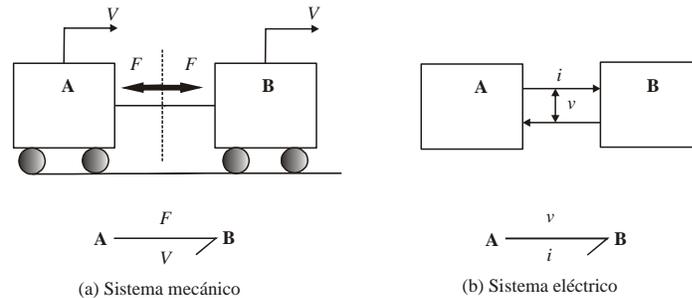


Figura 2.1: Sistemas físicos en diferentes dominios y la representación de transferencia de potencia.

En el sistema global compuesto de dos subsistemas A y B, hay conservación de la energía y continuidad de potencia. La transferencia de potencia (o el flujo de energía) entre dos subsistemas es representado por una semiflecha que corresponde a un bond (enlace) del Bond Graph; La potencia instantánea se calcula en el dominio mecánico como FV (el producto de la fuerza por la velocidad), mientras que en el dominio eléctrico, ésta se calcula como vi (el producto del voltaje por la corriente). En ambos casos, el bond acarrea las dos variables consideradas en el cálculo de la potencia instantánea, y el sentido de la semiflecha es el que corresponde al sentido positivo de la potencia.

Desde un punto de vista general, la metodología de Bond Graph se basa en el análisis y la caracterización de las transferencias de potencia que ocurren en el seno del sistema estudiado [2].

En la siguiente sección se estudian las variables inherentes al lenguaje de Bond Graph.

2.3. Variables involucradas en el lenguaje de Bond Graph

En Bond Graph se consideran las variables siguientes.

2.3.1. Variables de potencia

La potencia P intercambiada entre dos elementos, se expresa como el producto de dos variables complementarias. Independientemente del dominio considerado, estas variables son llamadas *variables generalizadas* de *esfuerzo* y de *flujo*, denotadas respectivamente e y f . Éstas son las variables involucradas en el cálculo de la potencia instantánea, y se tiene

$$P = ef$$

2.3.2. Variables de energía

La energía se calcula mediante la integración de la potencia respecto del tiempo, de acuerdo a:

$$E(t) = \int_0^t e(\tau)f(\tau)d\tau + E(0) \quad (2.1)$$

De este modo, las variables de energía son definidas por las relaciones integrales siguientes:

$$p(t) = \int_0^t e(\tau)d\tau + p(0) \quad (2.2)$$

$$q(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau + q(0) \quad (2.3)$$

$p(t)$ y $q(t)$ son llamadas *momento generalizado* y *desplazamiento generalizado*, respectivamente. El cuadro 2.1 indica el significado de éstas variables generalizadas para diferentes dominios de la física.

Dominio	Esfuerzo e	Flujo f	Momento p	Desplazamiento q
Mec. traslacional	Fuerza F	Velocidad v	Momento p	Posición x
Mec. rotacional	Par τ	Vel. angular ω	Mom. angular h	Ángulo θ
Eléctrico	Voltaje v	Corriente i	Flujo magnético ϕ	Carga q
Hidráulico	Presión P	Caudal Q	Imp. de presión	Volumen V
Magnético	F.M.M.	Deriv. F.M.		Flujo magnético
Químico	P.H.	Flujo molar		Masa molar
Térmico	Temperatura	F. de entropía		Entropía

Cuadro 2.1: Variables generalizadas para diferentes dominios físicos.

Para los dominios magnético, químico y termodinámico, no existe una variable de momento p ya que no es posible expresar las variables de esfuerzo correspondientes como la derivada de una función de variables complementarias de flujo como en el caso del dominio mecánico en donde la función característica de una masa se expresa (en el caso lineal) por $F = Mdv/dt$. La siguiente sección trata a los elementos que en conjunto con los bonds, conforman la estructura gráfica de Bond Graph.

2.4. Elementos del lenguaje de Bond graph

Los elementos de Bond Graph se clasifican en elementos pasivos (tres tipos), elementos activos (dos tipos) y elementos de unión (cuatro tipos). Éstos nueve tipos de elementos en conjunto con los propios enlaces (bonds) constituyen el lenguaje de Bond Graph.

2.4.1. Elementos pasivos de puerto-1

Los elementos R , C e I se dice que son elementos pasivos ya que transforman la potencia que les es proporcionada en energía disipada bajo forma de calor (elemento R) o bien la almacenan (elementos C e I). Se dicen que son puertos-1 debido a que son caracterizados por una función escalar y reciben la potencia por un enlace (bond) único. En seguida se mencionan cada uno de éstos elementos.

- **Elemento R .** Éste elemento es utilizado para modelar todo fenómeno físico que vincule la variable de esfuerzo a la variable de flujo en el dominio físico bajo consideración. La potencia que le es suministrada se transforma en energía calorífica disipada. La función genérica que le caracteriza es:

$$\varphi_R(e, f) = 0$$

y su representación general se muestra en la figura 2.2.

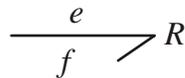


Figura 2.2: Representación de un elemento R en Bond Graph.

Si la ley es lineal (por ejemplo $v - R_1 i = 0$ en el caso eléctrico), el modelo específico

en Bond Graph se convierte en el mostrado en la figura 2.3.

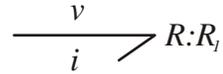


Figura 2.3: Elemento R lineal.

- **Elemento C .**- Éste elemento es utilizado para modelar todo fenómeno físico que vincule la variable de esfuerzo con la variable de desplazamiento en el dominio físico considerado. La potencia que le es transmitida es transformada en energía almacenada. La ley genérica que le caracteriza es:

$$\varphi_C(e, q) = 0 \quad (2.4)$$

y su representación general es,

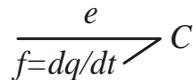


Figura 2.4: Representación de un elemento C .

En el caso lineal (por ejemplo $v = q/C_1$ en sistemas eléctricos), el modelo queda como el de la figura 2.5.

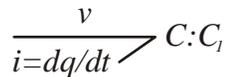


Figura 2.5: Elemento C lineal.

- **Elemento I .**- Éste elemento permite modelar todo fenómeno físico que realcione la variable de flujo a la variable de momento en el dominio físico considerado. La potencia que le es suministrada se transforma en energía almacenada. La función genérica que le caracteriza es

$$\varphi_I(p, f) = 0 \quad (2.5)$$

y su representación general se muestra en la figura 2.6.

$$\frac{e=dp/dt}{f} \nearrow I$$

Figura 2.6: Representación de un elemento I .

Para el caso lineal la representación del elemento I se puede reducir a la mostrada en la figura 2.7 para el caso eléctrico por ejemplo.

$$\frac{v=d(\psi)/dt}{i} \nearrow I:L$$

Figura 2.7: Elemento I lineal.

2.4.2. Energía almacenada en los elementos C e I

La energía almacenada se calcula como la integral de la potencia con respecto al tiempo, de acuerdo a (2.1), y se puede expresar de forma diferente, siguiendo el tipo de elemento C ó I en consideración.

- **Energía almacenada en un elemento C .**- La relación característica de un elemento C se escribe, en el caso general como,

$$e = \psi_C \left(\int f dt \right) = \psi_C(q)$$

además, $f dt = dq$ por la definición de la variable q . Éstas dos relaciones conducen a escribir la ecuación (2.1) como:

$$E_C(q) = \int_{q_0}^{q_t} e(q) dq + E_C(q_0)$$

en función de la variable de energía asociada al elemento C . Por ejemplo, en el caso eléctrico (lineal) se tiene:

$$E_C(q) = \int_{q_0}^{q_t} e(q) dq + E_C(q_0) = \frac{1}{2} \frac{q_t^2}{C}$$

- **Energía almacenada en un elemento I .**- La relación característica del elemento I se escribe como:

$$f_I = \psi_I \left(\int e_I dt \right) = \psi_I(p)$$

además, $edt = dp$ por la definición de la variable p . Estas dos relaciones llevan a escribir la ecuación (2.1) en la forma:

$$E_P = \int_{p_0}^{p_t} f(p) dp + E(p_0)$$

en función de la variable de energía asociada al elemento I . Por ejemplo, la energía magnética almacenada en un inductor (lineal) se expresa como:

$$E_L(\phi) = \int_{\phi_0}^{\phi_t} i(\phi) d\phi + E_L(\phi_0) = \frac{1}{2} \frac{\phi_t^2}{L}$$

Otro cambio de variables en la ecuación (2.1) lleva a la definición de otra expresión, llamada co-energía. La co-energía se expresa en función de variables de potencia como:

$$E_C^*(e) = \int_{e_0}^{e_t} q(e) de + E_C^*(e_0)$$

para un elemento C . Por ejemplo, en el caso eléctrico (lineal) $E_C^* = Cv^2/2$, y como:

$$E_I^*(f) = \int_{f_0}^{f_t} p(f) df + E_I^*(f_0)$$

para un elemento I . Por ejemplo, en el caso eléctrico, para un inductor lineal se tiene $E_L^* = Li^2/2$.

2.4.3. Elementos pasivos multipuerto

En ciertos casos, no es posible representar los fenómenos que se desea modelar mediante elementos pasivos de puerto-1. Éste es el caso de las inductancias mutuas que se muestran en la figura 2.8 (a).

En la figura 2.8, cada devanado posee una inductancia propia L_i , pero interactúa con los otros dos devanados por inductancia mutua.

La representación de éstos fenómenos acoplados se realiza mediante un elemento I multipuerto, al cuál se asocia una relación matricial que vincula al vector de flujos magnéticos $\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix}^T$ y el vector de corrientes $i = \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \end{bmatrix}^T$ bajo la forma:

$$\phi = Li = \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & L_2 & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & L_3 \end{bmatrix} i$$

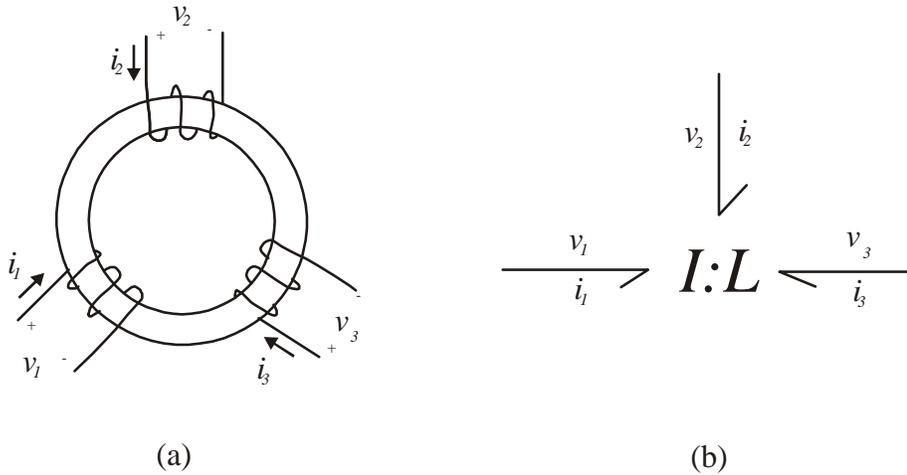


Figura 2.8: Inductor de tres bobinas y su representación en Bond Graph.

La energía almacenada en este sistema se expresa mediante:

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \phi^T L^{-1} \phi$$

La representación gráfica se muestra en la figura 2.8 (b). Las variables de esfuerzo y de flujo se agrupan en los vectores $v = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$ e $i = [i_1 \ i_2 \ i_3]^T$ y la potencia se expresa como:

$$P = v^T i$$

Cualquiera de los elementos pasivos puede ser modelado mediante un multipuerto y se habla así de campos resistivos, campos capacitivos y campos inductivos [3].

2.4.4. Fuentes

Las fuentes S_e y S_f se dice que son elementos activos de puerto-1 ya que suministran potencia al sistema. Por ejemplo, en el caso eléctrico, una fuente de voltaje (supuesta ideal) modelada por $S_e : E$ aplica una tensión eléctrica E entre bornes del circuito eléctrico al cual está conectada; dicho circuito a su vez lleva una corriente eléctrica i ; el producto iE es la potencia instantánea suministrada por la fuente al circuito. La orientación de la semiflecha es fija y se representa saliendo de la fuente, de acuerdo a la figura 2.9.



Figura 2.9: Fuentes de esfuerzo y de flujo.

La propiedad fundamental que define una fuente es la siguiente: La variable de esfuerzo ó flujo suministrada por la fuente se supone independiente de la variable complementaria (flujo ó esfuerzo, respectivamente), la cuál depende de las características del sistema y de la variable aplicada.

Para diferenciarlas entre sí, las entradas de comando se denotan como MS_e ó MS_f (M hace referencia a la propiedad de modulación de éstas fuentes), mientras que las entradas de perturbación, o bien, entradas sobre las que no se tiene control, se denotan como S_e ó S_f .

2.4.5. Detectores

Los detectores D_e y D_f son elementos colocados sobre el modelo en Bond Graph para indicar la presencia de un sensor ó un instrumento de medición considerado ideal (que no consume potencia).

Al no intervenir ninguna potencia, se emplea un bond de información o señal representado por una flecha completa, como en la figura 2.10.

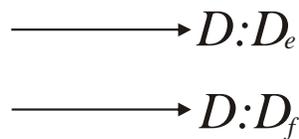


Figura 2.10: Detectores de esfuerzo y flujo.

2.4.6. Elementos de unión

Los elementos de unión, denotados 0 , 1 , TF y GY , sirven para acoplar los elementos R , C , e I a las fuentes y entre ellos, y conforman la estructura de unión correspondiente a la arquitectura del modelo bajo análisis. Estos elementos obedecen a la ley de conservación de la potencia. Los elementos TF y GY son llamados puertos-2, mientras que los elementos

0 y 1 se denominan puertos-3, aunque un mejor nombre sería puertos-n, toda vez que no exhiben un límite restrictivo a la cantidad de bonds que se les puede conectar. En seguida se revisan éstos elementos.

Unión 0.- Esta unión sirve como acoplador de elementos sometidos al mismo esfuerzo. Las relaciones que le caracterizan son:

- (a) Igualdad de esfuerzos en todos los bonds con una extremidad conectada sobre la unión
- (b) La sumatoria algebraica de potencias es cero.

En forma simplificada:

$$e_1 = e_2 = \dots = e_n$$

$$\sum_i a_i f_i = 0$$

con $a_i = +1$ si la semiflecha está dirigida hacia la unión y (-1) en caso contrario.

Considérese el circuito eléctrico de la figura 2.11 (a), cuyo modelo en Bond Graph aparece en la figura 2.11 (b).

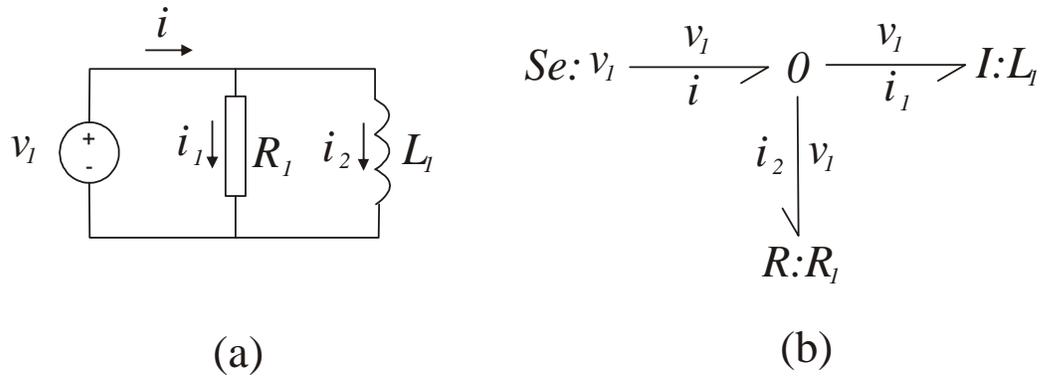


Figura 2.11: Utilización de la unión 0.

En el modelo de la figura 2.11 (b), las relaciones correspondientes son las siguientes:

- * Mismo voltaje v en todos los elementos.
- * Por balance de potencias se tiene: $i = i_1 + i_2$ ó $i - i_1 - i_2 = 0$.

Unión 1.- Ésta unión sirve para acoplar elementos que son recorridos por el mismo flujo. Las relaciones que le caracterizan son:

- (a) Todos los bonds con un extremo conectado a la unión tienen el mismo flujo.
- (b) La suma algebraica de potencias es cero.

En forma simplificada:

$$f_1 = f_2 = \dots = f_n$$

$$\sum_i a_i e_i = 0$$

con $a_i = +1$ si la semiflecha está dirigida hacia la unión y (-1) en caso contrario.

Considérese el circuito eléctrico mostrado en la figura 2.12 (a) y su modelo en Bond Graph, el cual es mostrado en la figura 2.12 (b).

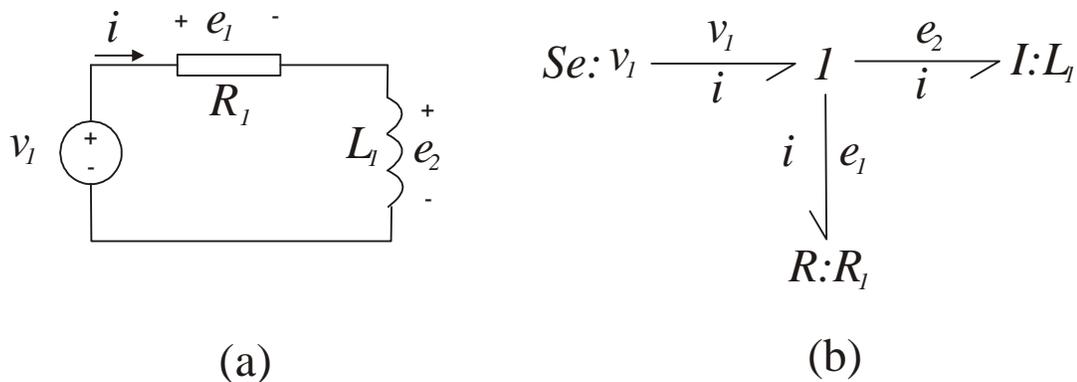


Figura 2.12: Utilización de la unión 1.

Las relaciones correspondientes son:

- * Misma corriente i en todos los elementos.
- * Por balance de potencias se tiene: $v_1 - e_1 - e_2 = 0$.

Es recomendable evitar el utilizar los términos “serie” y “paralelo” tal como se les considera en sistemas eléctricos, toda vez que en algunos dominios físicos, éstos pueden llevar a confusiones.

Las relaciones constitutivas de las uniones 0 y de las uniones 1 corresponden a la generalización hacia todos los dominios físicos de las leyes de Kirchoff en sistemas eléctricos (leyes de nodos y de mallas); de este modo, cualquier sistema físico representado mediante Bond Graph puede tener su equivalente eléctrico.

Considérense el sistema eléctrico de la figura 2.13 (a) y el sistema mecánico de la figura 2.13 (b). Estos dos sistemas comparten un mismo modelo en Bond Graph (figura 2.13 (c)), ya que los elementos en el sistema eléctrico son recorridos por una única corriente i , mientras que en el sistema mecánico los elementos se mueven a la misma velocidad v .

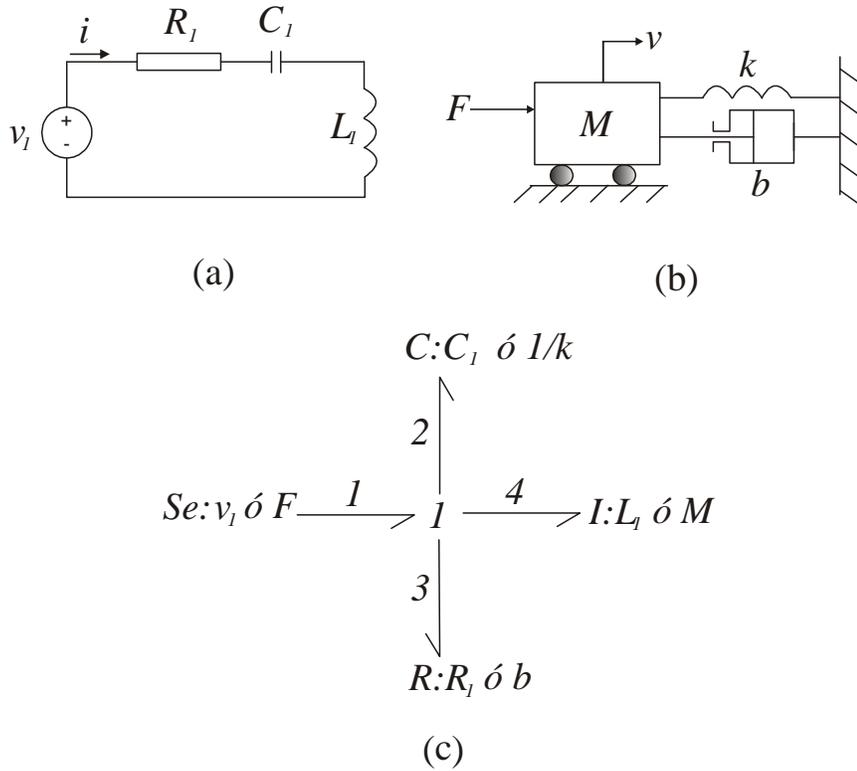


Figura 2.13: Sistemas equivalentes y su representación en Bond Graph.

Las relaciones características de ambos modelos son:

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = i \text{ ó } v$$

$$e_1 - e_2 - e_3 - e_4 = 0$$

Transformador TF.- Este es un elemento de dos puertos, cuya representación en Bond Graph aparece en la figura 2.14.



Figura 2.14: Transformador.

El transformador obedece al principio de conservación de la potencia ($e_1 f_1 = e_2 f_2$); Las

relaciones que le caracterizan y que permiten definir el parámetro m son las siguientes:

$$\begin{aligned} e_1 &= me_2 \\ f_2 &= mf_1 \end{aligned}$$

Este elemento interviene en el modelado de transformadores eléctricos, palancas, engranajes, poleas, etc., y también se le utiliza para modelar cambios de dominio físico que se realizan sin pérdida de potencia.

El acoplamiento hidráulico-mecánico en un elevador (gato) se representa como en la figura 2.15, donde S es el área del pistón, P es la presión de fluido, v es la velocidad del émbolo, F es la fuerza y \dot{V} es el caudal de fluido.

$$\frac{e_1=P}{f_1=\dot{V}} \xrightarrow{\text{TF}} \frac{e_2=F}{f_2=v} \quad \frac{1}{S}$$

Figura 2.15: Acoplamiento hidráulico-mecánico en un gato hidráulico.

En un transformador, si la relación m no es constante, se dice que el transformador es “modulado” y se representa como MTF . El transformador modulado se usa por ejemplo en el dominio mecánico en cambio de referencia, reductores de velocidad variables, etc.

Girador GY .- Éste elemento de puerto-2 se representa de acuerdo a la figura 2.16.

$$\frac{e_1}{f_1} \xrightarrow{\text{GY}} \frac{e_2}{f_2} \quad r$$

Figura 2.16: Girador.

El girador obedece a la ley de conservación de la potencia ($e_1 f_1 = e_2 f_2$); las relaciones que le caracterizan y que permiten definir a r son:

$$\begin{aligned} e_1 &= r f_2 \\ e_2 &= r f_1 \end{aligned}$$

éste elemento permite el modelado de giroscopios, sensores de efecto Hall, etc. y puede también ser utilizado para modelar cambios de dominio físico que ocurren sin pérdida de potencia.

Considérese la representación en Bond Graph del acoplamiento eléctrico-mecánico de un motor de corriente continua mostrada en la figura 2.17, donde F_{cem} es la fuerza contra electro motriz inducida, T es el par producido, i_a es la corriente de armadura, w es la velocidad angular del eje y kp es la constante del motor definida a partir de $T = kpi_a$ y $F_{cem} = kpw$.



Figura 2.17: Acoplamiento eléctrico-mecánico en un motor de CD.

En un girador, si la relación r no es constante, se dice que el girador es “modulado” y se le denota como MGY . El girador modulado se utiliza, por ejemplo, en el dominio mecánico en dinámica de sólidos en el espacio.

2.4.7. El concepto de señal y el Bond activo

El uso de muchos tipos de sensores en sistemas de monitoreo y control se basa en la definición de señal, que indica que es posible leer la información en determinada parte de un sistema sin provocar un efecto de carga, es decir, monitorear tal información sin consumir potencia en el proceso.

En Bond Graph cuando una de las dos variables de esfuerzo o flujo en un bond es muy pequeña, la potencia transmitida por éste es despreciable. Los bonds que cumplen esta propiedad son llamados bonds activos y su representación varía ligeramente, convirtiéndose en una flecha completa, en lugar de la semiflecha representativa del bond de potencia normal. En la figura 2.18 se muestra la representación de los dos posibles tipos de bonds activos.

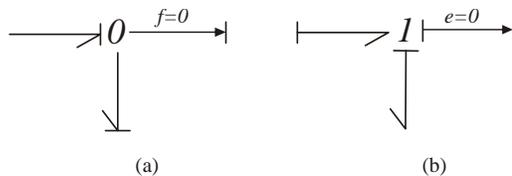


Figura 2.18: Bonds activos.

En la figura 2.18 (a) se muestra un bond activo que mide la variable de esfuerzo de la unión 0, sin consumir potencia en el proceso, de este modo, en el caso ideal, el flujo de ese bond es cero. En la figura 2.18 (b) se observa un bond activo que mide la variable de flujo en la unión 1, sin consumir potencia en el proceso; eso implica que el esfuerzo en el bond es cero.

Los elementos del campo de detectores se pueden considerar como bonds activos, ya que su implementación obedece a la definición dada.

2.4.8. Fuentes Moduladas

Cuando una fuente no es independiente, sino que su valor depende del contexto, el concepto de fuente controlada o fuente modulada puede ser utilizado. Aquí se pueden considerar los cuatro tipos de fuentes controladas normalmente revisados en los cursos de análisis de circuitos eléctricos, tomando en cuenta las variables generalizadas. Éstas fuentes controladas en conjunto con sus relaciones constitutivas son las siguientes:

- (a) Fuente de esfuerzo controlada por esfuerzo con $e_2 = k(e_1)$ (figura 2.19 (a));
- (b) Fuente de esfuerzo controlada por flujo con $e_2 = k(f_1)$ (figura 2.19 (b));
- (c) Fuente de flujo controlada por esfuerzo con $f_2 = k(e_1)$ (figura 2.19 (c));
- (d) Fuente de flujo controlada por flujo con $f_2 = k(f_1)$ (figura 2.19 (d)).

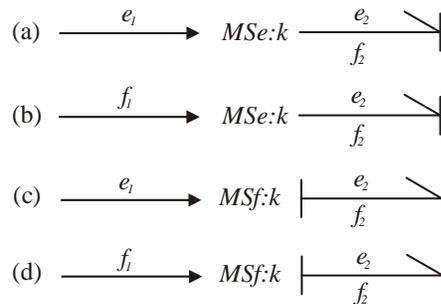


Figura 2.19: Fuentes moduladas.

Obsérvese el empleo de bonds activos para conectar la señal de control con la fuente modulada.

Hasta el momento se han presentado los elementos básicos que permiten modelar un sinnúmero de sistemas físicos mediante la técnica de Bond Graph. Para mostrar cómo se puede contruir un modelo en Bond Graph en la siguiente sección se presentan los procedimientos característicos para construir modelos considerando diferentes dominios físicos.

2.5. Procedimientos para la construcción de modelos en Bond Graph

Bond Graph permite modelar en un mismo contexto sistemas que pueden tener partes de diferentes dominios físicos; sin embargo, en esta sección se presentan los procedimientos para construir modelos que involucran un solo dominio físico. Una vez dominada la construcción de modelos en los diferentes dominios, no debe revestir mayor dificultad el construir modelos de sistemas mezclados.

2.5.1. Sistemas mecánicos unidimensionales.

La construcción de modelos mecánicos unidimensionales toma como base para las relaciones constitutivas a las leyes del movimiento de Newton. Su implementación se basa en las variables generalizadas que en esta caso adoptan la forma de velocidad y fuerza.

Procedimiento 1

Para la construcción de un modelo en Bond graph a partir de un sistema mecánico unidimensional:

- 1.- Fijar un eje de referencia para las velocidades;
- 2.- Encontrar todas las velocidades diferentes (velocidades absolutas para las masas e inercias y velocidades relativas para los demás elementos móviles). Colocar una unión 1 por cada velocidad diferente y conectar mediante bonds de potencia los elementos correspondientes;
- 3.- Expresar las relaciones entre velocidades. Colocar una unión 0 por relación entre las uniones 1 asociadas a las velocidades que intervienen en dicha relación;
- 4.- Conectar las uniones con bonds, respetando el sentido de transferencia de potencia;
- 5.- Suprimir las uniones 1 asociadas a velocidades nulas, así como todos los bonds conectados a ellas. Simplificar si es posible, de acuerdo a la figura 2.20.



Figura 2.20: Simplificaciones.

Ejemplo 1

Considérese el diagrama a bloques de la figura 2.21.

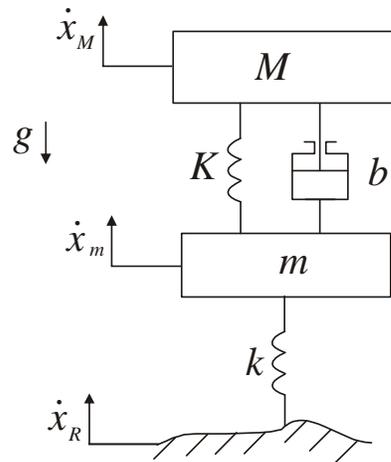


Figura 2.21: Sistema de suspensión.

Éste modelo corresponde a un sistema de suspensión automotriz. Tras la aplicación del procedimiento, la representación en Bond Graph del mismo sistema aparece en la figura 2.22 (sin simplificar).

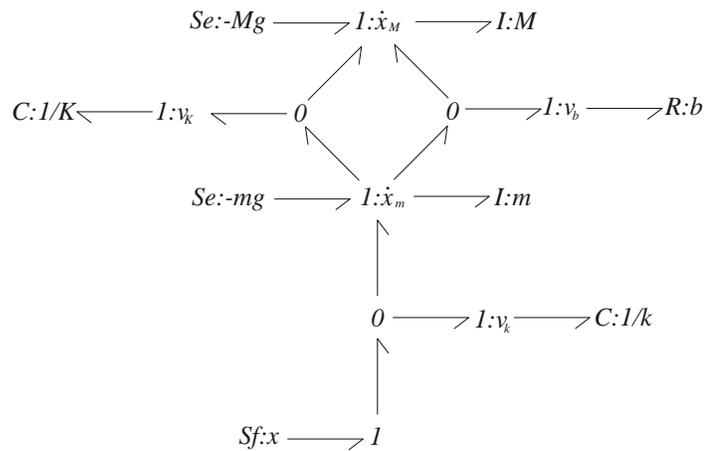


Figura 2.22: Modelo en Bond Graph de un sistema de suspensión.

Seis uniones 1 corresponden a diferentes velocidades de los componentes, y tres uniones 0 representan las relaciones entre velocidades. Tras una simplificación inicial (de acuerdo a la Figura 2.20), se puede obtener el modelo presentado en la figura 2.23 (a).

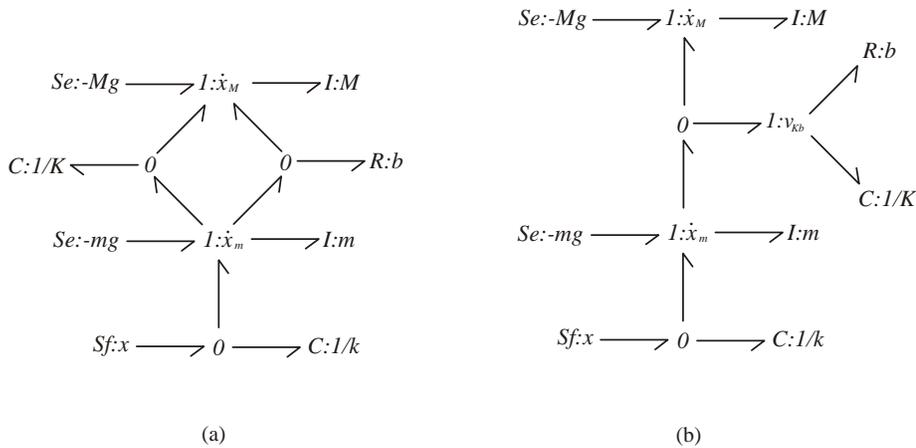


Figura 2.23: Modelos en Bond Graph Simplificados.

Un análisis de relaciones entre velocidades pone en evidencia que existe una igualdad entre v_K y v_b , la cual permite reagrupar $C : 1/k$ y $R : b$ sobre la misma unión 1 correspondiente a la velocidad común denotada v_{kb} y reducir el Bond Graph eliminando una unión 1 y una unión 0, como se muestra en la figura 2.23 (b).

2.5.2. Sistemas eléctricos monofásicos.

Procedimiento 2

Para la construcción del modelo en Bond graph de un sistema eléctrico monofásico:

- 1.- Fijar un sentido de circulación de la corriente, Éste es considerado como el sentido de transferencia de potencia;
- 2.-Localizar todos los nodos con potenciales eléctricos diferentes. Colocar una unión 0 por nodo;
- 3.-Colocar una unión 1 entre dos uniones 0 y conectar los elementos sometidos a la diferencia de potencial correspondiente;
- 4.-Conectar las uniones con bonds, respetando el sentido de transferencia de la potencia;
- 5.-Seleccionar un nodo de referencia (ó varios, según el caso) y suprimir la(s) unión(es) 0 que le está(n) asociada(s). Así como todos los bonds conectados. Simplificar si es posible.

Ejemplo 2

Considérese el circuito eléctrico mostrado en la figura 2.24.

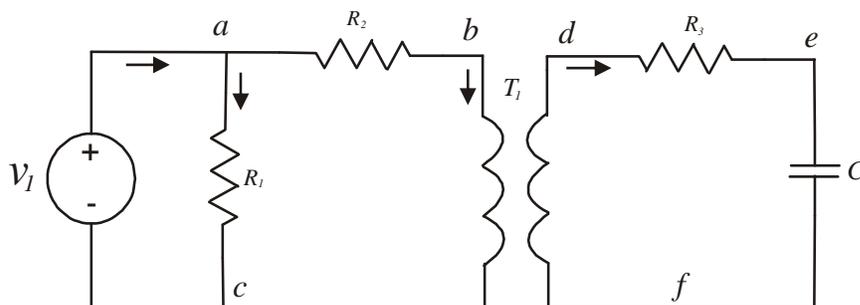


Figura 2.24: Circuito eléctrico.

Las flechas indican el sentido de circulación de la corriente que se ha definido. Con minúsculas se han señalado los nodos que están sometidos a diferentes potenciales eléctricos, el nodo c y el nodo f corresponden a los nodos de referencia. La aplicación del procedimiento descrito lleva al Bond Graph que se muestra en la figura 2.25.

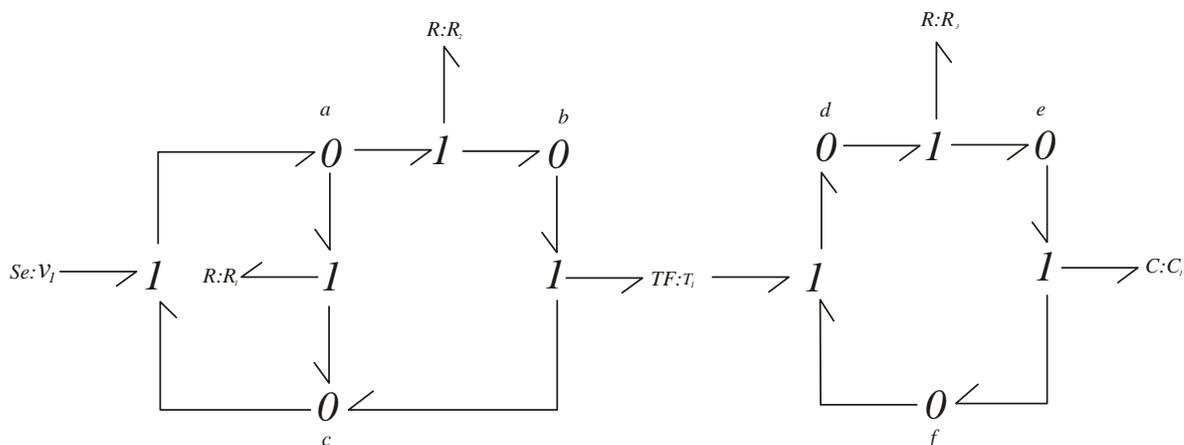


Figura 2.25: Modelo en Bond Graph del circuito eléctrico de la figura 2.24.

Al suprimir los nodos de referencia (c y f) y simplificar de acuerdo a las pautas de la figura 2.20, se llega al modelo en Bond Graph de la figura 2.26.

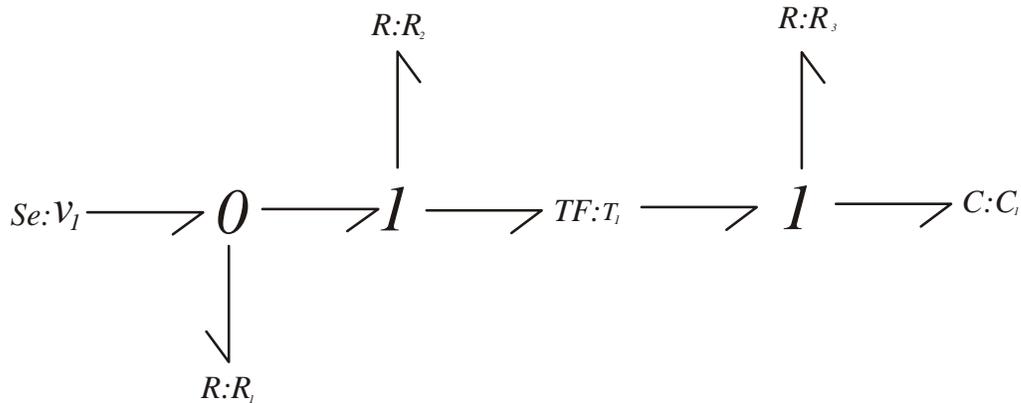


Figura 2.26: Modelo simplificado.

Los voltajes se calculan respecto a los potenciales de referencia; los dos circuitos del transformador (considerado ideal) están aislados.

2.5.3. Sistemas hidráulicos.

El procedimiento para modelar sistemas hidráulicos en Bond Graph es muy parecido al utilizado para modelar sistemas eléctricos debido a la existencia de las analogías entre la corriente eléctrica y el caudal y entre el voltaje y la presión de fluido.

Procedimiento 3

Para la construcción del modelo en Bond Graph de un sistema hidráulico:

- 1.- Fijar un sentido de circulación del fluido, el cual será considerado como el de transferencia de potencia.
- 2.- Localizar todos los nodos sometidos a presiones diferentes y colocar una unión 0 por nodo.
- 3.- Conectar las uniones con bonds, respetando el sentido de transferencia de la potencia.
- 4.- Escoger una presión de referencia (por lo general, la presión atmosférica) y suprimir las uniones 0 asociadas a ella, así como todos los bonds conectados. Simplificar si es posible, de acuerdo a las pautas dadas en la figura 2.20.

Ejemplo 3

Considérese el sistema hidráulico de la figura 2.27.

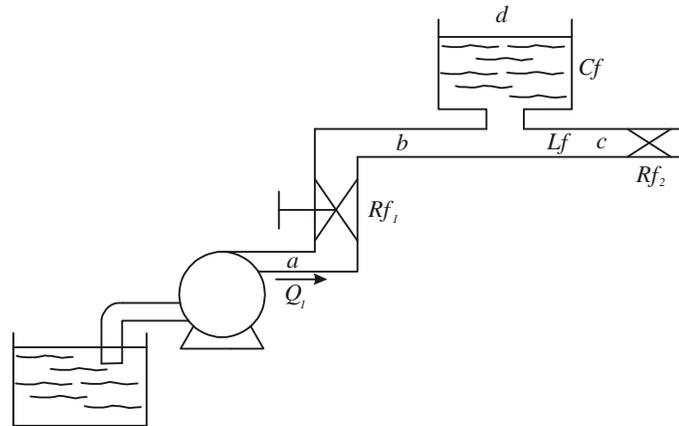


Figura 2.27: Sistema hidráulico de bombeo.

El sentido del flujo es el indicado por la flecha de la bomba. Se consideran cuatro puntos sometidos a diferentes presiones, a , b , c y d . Éste último punto d es la presión atmosférica y se le considera como la referencia. Al aplicar el procedimiento descrito, se obtiene el modelo en Bond Graph mostrado en la figura 2.28.

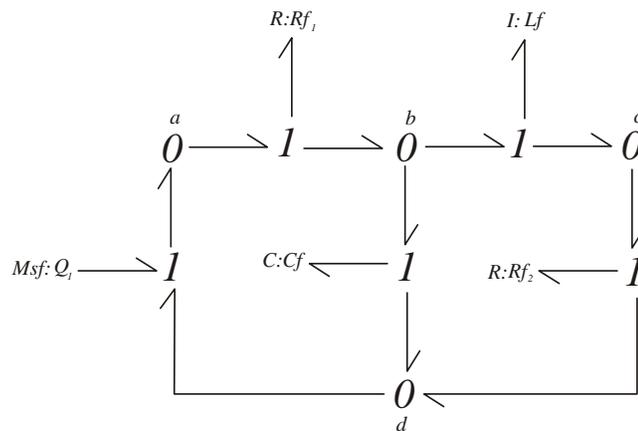


Figura 2.28: Modelo en Bond Graph del sistema hidráulico de la figura 2.27.

Tras anular el nodo de referencia (d) y aplicar las pautas dadas en la figura 2.20, se obtiene el modelo reducido de la figura 2.29.

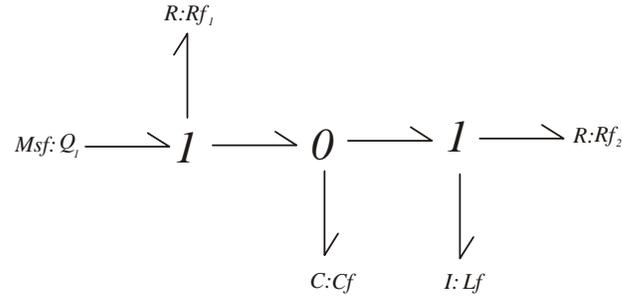


Figura 2.29: Modelo reducido del sistema hidráulico de la figura 2.27.

En la siguiente sección se revisa uno de los conceptos más útiles que aparecen en Bond Graph: el análisis de causalidad.

2.6. Causalidad

La causalidad es una de las características más potentes de Bond Graph, pues permite analizar en forma visual las interrelaciones que ocurren en el interior de un sistema. Un modelo en Bond Graph representa la forma en que la potencia es intercambiada entre los elementos que lo conforman [3].

Cuando dos subsistemas A y B están acoplados e intercambian potencia, dos situaciones son posibles:

* A aplica un esfuerzo e a B , el cual reacciona enviando un flujo $f = \psi_B(e)$ a A .

* A envía un flujo f a B , el cual reacciona con un esfuerzo $e = \lambda_B(f)$.

Éstos dos casos se representan en la figura 2.30.

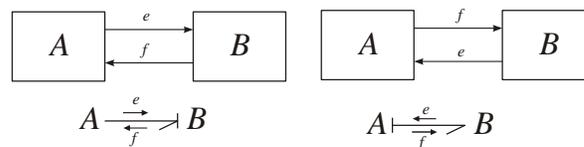


Figura 2.30: Causalidad entre dos elementos.

En Bond Graph, el sentido de causalidad lo determina un trazo perpendicular al bond en cuestión llamado trazo causal. Éste trazo causal se sitúa en uno de los extremos del respectivo bond indicando la dirección del esfuerzo.

Algunos tipos de elementos básicos están fuertemente restringidos respecto a su posible causalidad, para otros, la asignación de causalidad es indiferente y unos más exhiben relaciones constitutivas diferentes, en función de la causalidad asignada. Ésto se revisa enseguida.

2.6.1. Causalidad en puertos-1 básicos

Fuentes.- Las fuentes de esfuerzo y flujo son los elementos más fácilmente manejables desde el punto de vista de la causalidad, toda vez que una fuente suministra un esfuerzo ó un flujo, según sea el caso a cualquier sistema conectado a ella. Las únicas causalidades permisibles para fuentes (S_e : fuente de esfuerzo, S_f : fuente de flujo) se muestran en la figura 2.31.



Figura 2.31: Causalidad en fuentes de potencia.

Las fuentes de esfuerzo y de flujo tienen, respectivamente, las siguientes relaciones causales:

$$\begin{aligned} e(t) &= E(t) \\ f(t) &= F(t) \end{aligned}$$

Elementos resistivos.- En contraste con las fuentes, el elemento resistivo es indiferente a la asignación de causalidad. Obsérvese la figura 2.32.

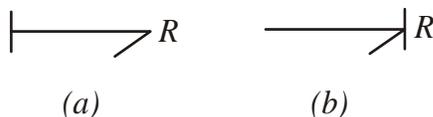


Figura 2.32: Causalidad en elementos resistivos.

Éste elemento exhibe las siguientes relaciones causales, para los casos (a) y (b) de la figura

2.32, respectivamente:

$$\begin{aligned} e &= \phi_R(f) \\ f &= \phi_R^{-1}(e) \end{aligned}$$

Se suele usar la convención de que la variable a la izquierda del signo de igualdad representa la salida ó la variable dependiente del elemento resistivo, y la variable a la derecha es la entrada ó variable independiente [3].

Dado que normalmente las funciones ϕ_R y ϕ_R^{-1} existen, en los elementos R no se suele dar relevancia a la orientación preferida de causalidad. Sin embargo, si alguna entre ϕ_R ó ϕ_R^{-1} es multivaluada, se prefiere seleccionar la causalidad de modo que la expresión sea univaluada [2].

Elementos almacenadores de energía.- Las relaciones constitutivas de los elementos C e I , (2.4) y (2.5), se representan como relaciones estáticas entre e y $q = \int^t f dt$ y f ; y $p = \int^t e dt$, respectivamente. Al expresar las relaciones causales entre e y f , se observa que la selección de la causalidad tiene un efecto importante. Por ejemplo, considerando el elemento capacitivo, se tiene:

$$e = \phi_C^{-1} \left(\int^t f dt \right) \quad (2.6)$$

$$f = \frac{d}{dt} [\phi_C(e)] \quad (2.7)$$

Se observa que la forma de la ecuación determina la causalidad. Cuando f es la entrada al elemento capacitivo, e está determinado por una función estática de la integral respecto al tiempo de f , pero cuando e es la entrada, f es la derivada de una función estática de e . Estos dos tipos de causalidad, descritos por las relaciones (2.6) y (2.7), son llamados *causalidad integral* y *causalidad derivativa*, respectivamente. La representación en Bond Graph se muestra en la figura 2.33.



Figura 2.33: Causalidad en un elemento capacitivo.

El caso del elemento inductivo es el dual del capacitivo. En la figura 2.34 se muestra la representación en Bond Graph de las dos asignaciones posibles de causalidad para este elemento.



Figura 2.34: Causalidad en un elemento inductivo.

Las relaciones causales para el elemento I en causalidad integral y derivativa, respectivamente son las siguientes:

$$f = \phi_I^{-1} \left(\int^t e dt \right)$$

$$e = \frac{d}{dt} [\phi_I(f)]$$

2.6.2. Causalidad para puertos-2 y puertos-3 básicos

Transformadores.- Los elementos TF tienen sólo dos posibles asignaciones de causalidad, obsérvese la figura 2.35.

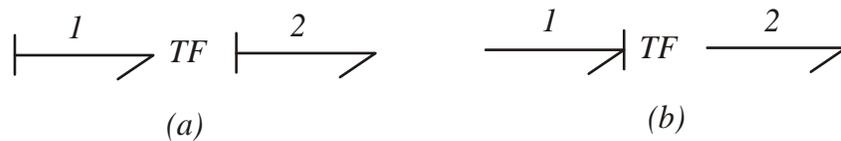


Figura 2.35: Causalidad en un transformador.

Las relaciones causales de acuerdo a la figura 2.35 son:

$$e_1 = m e_2$$

$$f_2 = m f_1$$

y

$$f_1 = \frac{1}{m} f_2$$

$$e_2 = \frac{1}{m} e_1$$

en donde m es la relación del transformador.

Giradores.- El girador GY es un elemento de puerto-2 que también acepta solamente dos asignaciones diferentes de causalidad. Obsérvese la figura 2.36.



Figura 2.36: Causalidad en un girador.

Las relaciones causales, de acuerdo a la figura 2.36 son:

$$e_1 = r f_2$$

$$e_2 = r f_1$$

y

$$f_1 = \frac{1}{r} e_2$$

$$f_2 = \frac{1}{r} e_1$$

donde r es la realción del girador.

Uniones 0.- Las relaciones constitutivas para las uniones 0 ocasionan que los esfuerzos en todos los bonds conectados sean iguales y que la suma algebraica de flujos sea igual a cero. Obsérvese la figura 2.37.

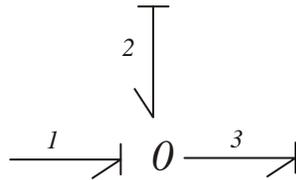


Figura 2.37: Causalidad en uniones 0.

Las relaciones constitutivas para esta unión son las siguientes:

$$e_2 = e_1$$

$$e_3 = e_1$$

$$f_1 + f_2 - f_3 = 0 \tag{2.8}$$

El esfuerzo que comparten todos los bonds ligados a una unión 0 es impuesto por el bond cuyo trazo causal está conectado a la unión. Éste bond es único y no está permitido colocar más de un trazo causal en conexión con la unión [2].

Uniones1.- Para las uniones 1 aplican las mismas consideraciones que para las uniones 0, pero en forma dual, es decir, los roles de los esfuerzos y los flujos se intercambian. En la figura 2.38 se muestra esta propiedad.

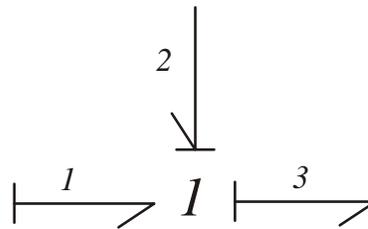


Figura 2.38: Causalidad en uniones 1.

La unión 1 de la figura 2.38 exhibe las siguientes relaciones constitutivas

$$\begin{aligned}
 f_2 &= f_1 \\
 f_3 &= f_1 \\
 e_1 + e_2 - e_3 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

El flujo que comparten todos los bonds ligados a una unión 1 es impuesto por el bond cuyo trazo causal está en el extremo opuesto del extremo conectado a la unión. Éste bond es único y en una unión 1 todos los trazos causales excepto uno deben estar en contacto con la unión [2].

La determinación del signo de los flujos ó de los esfuerzos dentro de las relaciones constitutivas (2.8) y (2.9) obedece a la dirección de los bonds de potencia entrando o saliendo de la unión en cuestión. Si el bond de potencia está dirigido hacia la unión, se suma su flujo (resp. su esfuerzo), si está dirigido en dirección opuesta de la unión, se resta su flujo (resp. su esfuerzo).

A continuación se revisa la metodología empleada para asignar causalidad a un modelo en Bond Graph acausal.

2.6.3. Procedimiento de asignación de causalidad

Es posible construir un modelo en Bond Graph asignando en forma predefinida la causalidad, de acuerdo a las dos posibles causalidades que aceptan los elementos almacenadores de energía. Si el modelo se construye asignando causalidad integral en forma predefinida, éste recibe el nombre de *Bond Graph Integral* y se abrevia como BGI. Por otra parte, si se asigna causalidad derivativa en forma predefinida, el modelo así construido se llama *Bond Graph Derivativo* y se abrevia como BGD.

No siempre es posible asignar causalidad integral a la totalidad de los elementos dinámicos de un BGI, debido a que puede existir dependencia lineal entre ellos [3]. Los elementos que permanecen en causalidad derivativa son linealmente dependientes con algún(os) elemento(s) que si acepta(n) la asignación de causalidad integral.

Si se ha construido un modelo en Bond Graph acausal (sin causalidad establecida), realizar el siguiente procedimiento permitirá asignarle causalidad a dicho modelo para convertirlo en un BGI.

Procedimiento 4

Para establecer causalidad como BGI en un modelo en Bond Graph.

- 1.- Asignar la causalidad requerida a las fuentes.
- 2.- Asignar causalidad integral a todos los elementos almacenadores de energía C e I , y la causalidad requerida por elementos R no lineales.
- 3.- Asignar causalidad a los elementos de la estructura de unión $0, 1, TF, GY$, usando las restricciones de los elementos.
- 4.- Asignar causalidad a los elementos R lineales restantes, dependiendo de las posibilidades disponibles.
- 5.- Buscar conflictos causales. Si un conflicto aparece, regresar al paso 2 y modificar la causalidad del elemento C ó I que ocasiona dicho conflicto.

Si se desea asignar causalidad al modelo en forma de BGD, sóloamente hay que asignar causalidad derivativa a los elementos dinámicos en lugar de causalidad integral en el paso 2 del procedimiento 4. De manera similar que en un BGI, en un BGD es posible que no todos los elementos dinámicos acepten causalidad derivativa, sin embargo esto no implica dependencia lineal entre elementos dinámicos, sino otras propiedades que se revisaran en secciones posteriores.

Ejemplo 4

Considérese el modelo en Bond Graph acausal de la figura 2.39.

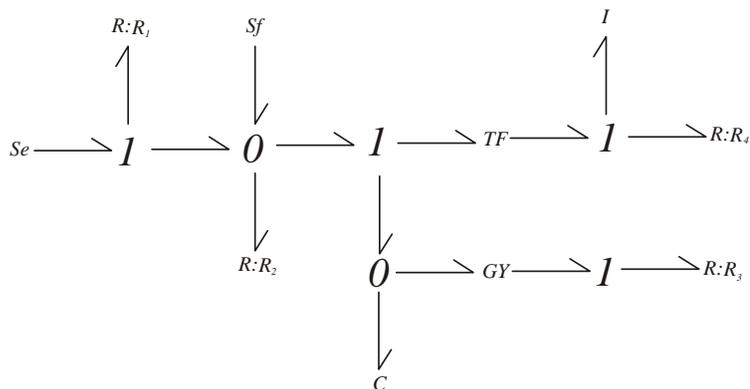


Figura 2.39: Modelo acausal en Bond Graph.

Tras aplicar el paso 1 del procedimiento, en la figura 2.40 se muestra el modelo con las fuentes exhibiendo la causalidad requerida (bonds a y b).

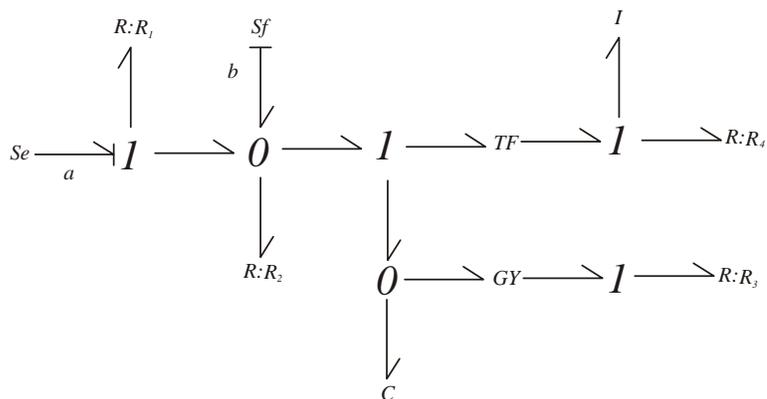


Figura 2.40: Asignación de causalidad a las fuentes.

El paso 2 del procedimiento exige asignar causalidad integral a los elementos almacenadores de energía. esto es realizado con el elemento C (bond b), tras lo cual se obtiene el modelo de la figura 2.41.

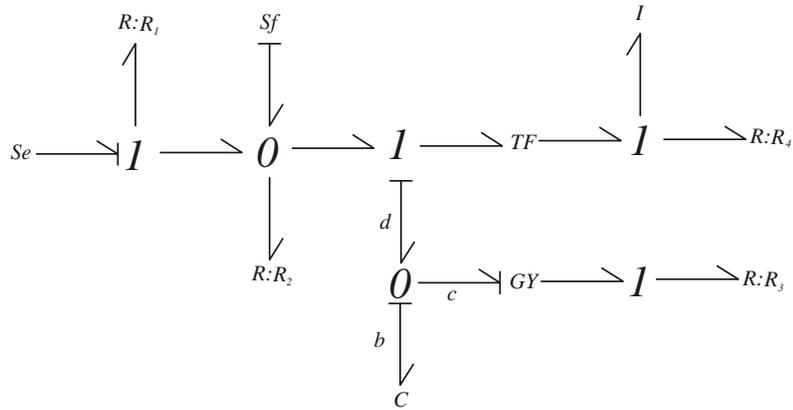


Figura 2.41: Asignación de causalidad integral al elemento C y las primeras consecuencias.

En la figura 2.41, la unión O conectada al elemento C obliga a que la causalidad de los bonds c y d sea la mostrada. En la figura 2.42 aparece la causalidad asignada al segundo bond (f) conectado al girador GY obedeciendo a la restricción impuesta por éste. De la misma manera es asignada la causalidad al bond conectado con R_3 (bond g), ya que la unión 1 sólo puede tener un bond sin trazo causal conectado a ella.

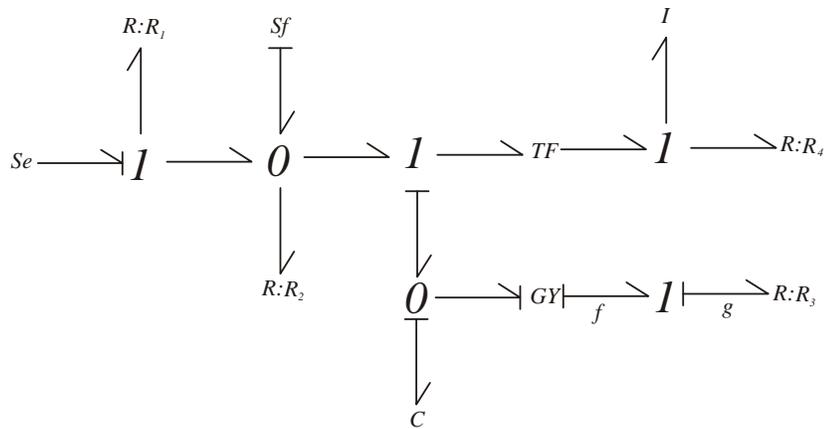


Figura 2.42: Asignación consecuente de causalidad.

En la figura 2.43 se asigna causalidad integral al elemento inductivo I (bond h).

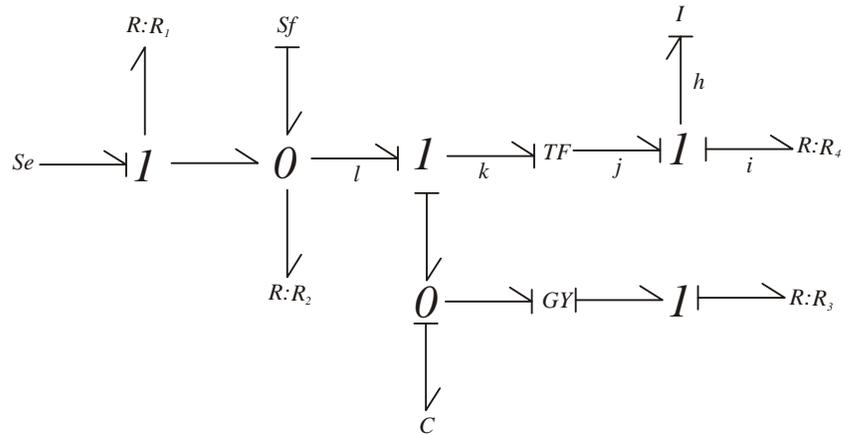


Figura 2.43: Asignación de causalidad al elemento I y las consecuencias correspondientes.

Debido a la unión 1 conectada a dicho elemento inductivo, la causalidad impuesta a los bonds i y j es la única posible. El bond j está conectado a un transformador TF , por lo que de inmediato se puede asignar causalidad al otro bond conectado a dicho transformador (bond k). El bond l recibe la causalidad mostrada, al estar conectado a una unión 1 que ya tiene a los otros dos bonds conectados a ella con causalidad asignada.

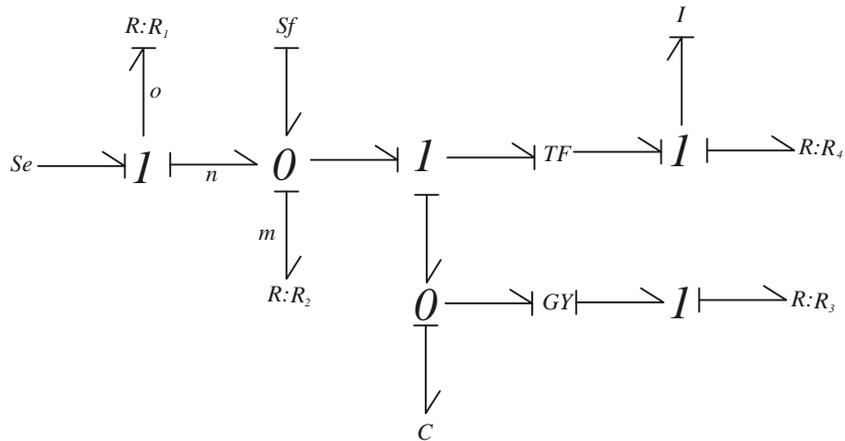


Figura 2.44: Modelo BGI con causalidad completamente asignada.

En la figura 2.43 surge la posibilidad de asignar la causalidad de forma arbitraria a los elementos resistivos R_1 y R_2 . Se opta por asignar la causalidad mostrada al elemento R_2

(bond m de la figura 2.44), lo cual ocasiona, por las propiedades de las uniones 0 y 1, que la causalidad asignada a los bonds n y o sea la mostrada en la figura 2.44, la cual muestra el BGI completo.

A continuación se realiza la definición de un importante concepto: las trayectorias causales.

2.6.4. Trayectorias causales

El empleo de las trayectorias causales permite abordar de manera directa el problema de la controlabilidad, la estabilidad asintótica y la observabilidad [14], tal como se estudiará en la sección. Más aún, esta es una herramienta de vital importancia en el análisis principal que se desarrolla en las propuestas de este documento.

En las siguientes definiciones aparecen los conceptos concernientes a las trayectorias causales.

Definición 1

Una trayectoria causal en una estructura de unión en Bond Graph es la alternación de bonds y elementos básicos llamados nodos, de modo que

- (a) En el Bond Graph acausal, la secuencia forma una cadena simple.
- (b) Todos los nodos dentro de la secuencia tienen causalidad completa y correcta.
- (c) Dos bonds en una trayectoria causal tienen en el mismo nodo orientaciones causales opuestas

Una trayectoria causal es simple si puede ser recorrida mientras se sigue siempre a la misma variable generalizada. Por lo tanto, en la misma secuencia de bonds y nodos existen dos trayectorias, ya sea que se siga al esfuerzo ó al flujo. Obsérvese la figura 2.45, en donde los elementos A y B están unidos por una trayectoria causal simple.

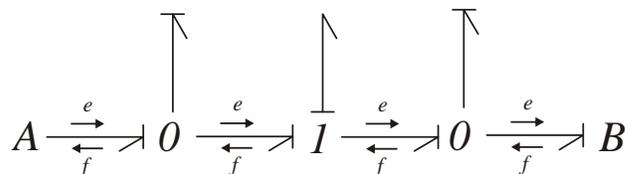


Figura 2.45: Trayectoria causal simple.

Definición 2

Una trayectoria causal es mezclada si es obligatorio cambiar la variable generalizada a la que se sigue mientras se realiza el recorrido. Éste es el caso cuando un elemento GY está presente, y la trayectoria es llamada mezclada directa. Ahora bien, si al hacer el recorrido hay que pasar a través de algún elemento R , I ó C , la trayectoria es llamada mezclada indirecta.

Obsérvese la figura 2.46, en donde los elementos A y B se encuentran unidos por una trayectoria causal mezclada directa.

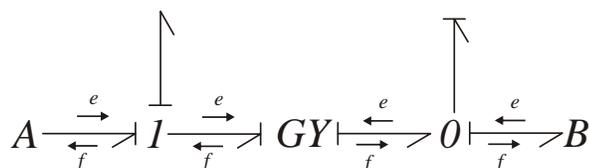


Figura 2.46: Trayectoria causal mezclada directa.

Por otra parte, en la figura 2.47 se muestran los elementos A y B unidos a través de una trayectoria causal mezclada indirecta. Obsérvese que el cambio de variable generalizada necesario para continuar el recorrido es realizado por el elemento resistivo R .

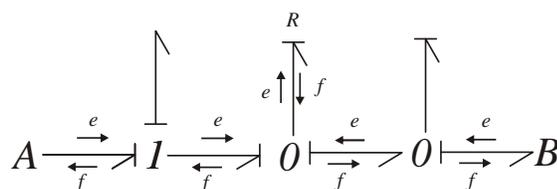


Figura 2.47: Trayectoria causal mezclada indirecta.

Definición 3

Dos elementos P_1 y P_2 pertenecientes al conjunto $\{R, C, I, S_e, S_f, D_e, D_f\}$ se dice que están causalmente conectados si la variable generalizada de entrada de uno de ellos es influenciada por la variable generalizada de salida del otro.

Definición 4

Un lazo causal es una trayectoria causal cerrada comenzando en la salida de un elemento R , C o I y terminando en la entrada de él mismo sin recorrer el mismo bond más de una vez mientras se sigue a una misma variable. En la figura 2.48 se muestra un lazo causal entre los elementos A y B .

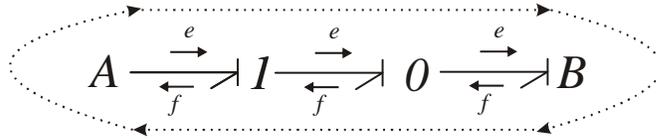


Figura 2.48: Lazo causal.

Definición 5

Un lazo de causalidad es una sucesión de uniones y bonds formando un ciclo y para el que la causalidad está orientada en la misma dirección para todos los bonds, excepto en la presencia de un girador. En la figura 2.49 se muestra un lazo de causalidad.

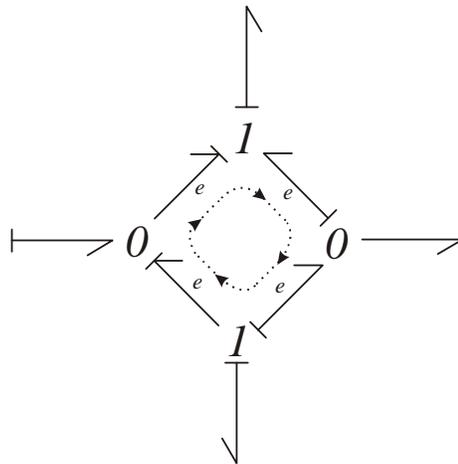


Figura 2.49: Lazo de causalidad.

Se ha presentado el potente concepto de la causalidad en Bond Graph. El análisis visual de causalidad por si solo permite obtener bastante información sobre las propiedades

estructurales del sistema modelado. Por otra parte, para efectos de análisis matemático, se hace necesario encontrar una relación directa entre un modelo en Bond Graph y su contraparte en forma de ecuaciones. Éste es el papel que desempeñan los vectores clave, presentados en la siguiente sección, que permiten vincular satisfactoriamente al modelo en Bond Graph y la descripción matemática del mismo sistema mediante la conocida ecuación de estado (2.15) y (2.16).

2.7. Vectores clave, estructura de unión y la ecuación de estado.

El arreglo de variables que se describe en los siguientes párrafos asume que el modelo bajo análisis es un BGI.

2.7.1. Vectores clave

Un modelo en Bond Graph se puede organizar en campos interconectados (fuentes, campos disipativo, campo almacenativo y estructura de unión) [4]. En la figura 2.50 se muestra la identificación de los vectores clave de variables en Bond Graph bajo el rol de entrada/salida que desempeñan en el problema causal.

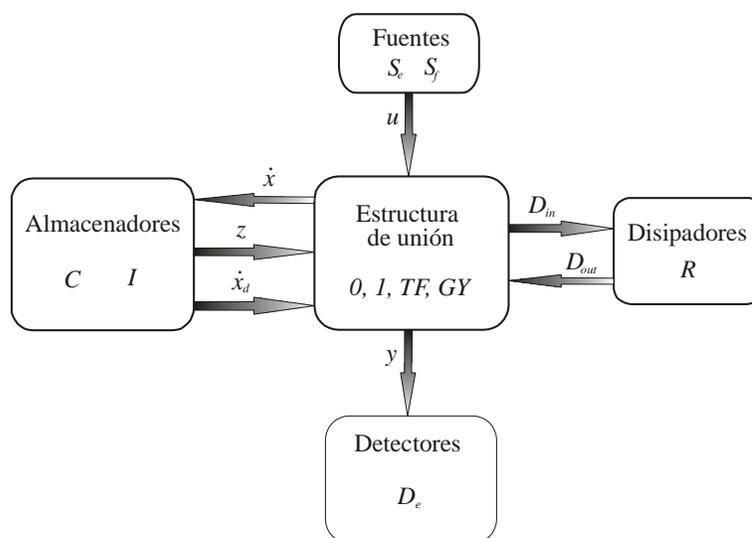


Figura 2.50: Vectores clave.

En la figura 2.50, los vectores clave están formados como sigue: (S_e, S_f) es el campo de fuentes; (C, I) es el campo almacenativo; (R) es el campo disipativo; (D_e) es el campo de detectores; finalmente, $(0, 1, TF, GY)$ es el conjunto de elementos que forman la estructura de unión. El vector de estado x está conformado por variables de energía (momento generalizado y desplazamiento generalizado) en causalidad integral, de acuerdo a (2.2) para elementos I y (2.3) para elementos C . El vector z es el vector de estados complementarios, descrito como,

$$z = \begin{cases} f & \text{en } I \\ e & \text{en } C \end{cases}$$

Si existen elementos C e I en causalidad derivativa en el BGI, el vector \dot{x}_d se define como

$$\dot{x}_d = \begin{cases} e & \text{en } I \\ f & \text{en } C \end{cases}$$

Los vectores D_{in} y D_{out} representan a las variables de esfuerzo y/o flujo que entran y salen, respectivamente, de los elementos que conforman el campo disipativo.

Este documento aborda primordialmente sistemas lineales. Para estos sistemas se cumplen las siguientes relaciones [3]:

$$z = Fx \tag{2.10}$$

con $x \in R^n$, $z \in R^n$, $F \in R^n \times R^n$,

F es una matriz positivamente definida, y es diagonal (cada elemento C e I es de puerto-1)

$$D_{out} = LD_{in} \tag{2.11}$$

con $D_{in} \in R^r$, $L \in R^r \times R^r$,

L es diagonal (cada elemento R es de puerto-1)

$$z_d = F_d x_d \tag{2.12}$$

con $Z_d \in R^q$, $x_d \in R^q$, $F_d \in R^q \times R^q$,

F_d es diagonal (elementos de puerto-1). Finalmente, u denota el vector de entradas de dimensión p

2.7.2. Estructura de unión y ecuación de estado

Uno de los principales pilares en Bond Graph lo constituyen las relaciones de la estructura de unión, las cuales se especifican por,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$Z_d = G_1 - S_{14}^T z \quad (2.14)$$

La matriz

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \end{bmatrix}$$

es conocida como la *matriz de estructura de unión*. En el caso de sistemas *conservativos* de energía, se presentan las siguientes propiedades entre las submatrices de la matriz de estructura de unión S :

- 1) S_{11} y S_{22} son antisimétricas.
- 2) S_{21} es la transpuesta negativa de S_{12}

Considérese la ecuación de estado en la conocida forma,

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.15)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.16)$$

de (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) y (2.14), es posible determinar que

$$A = E^{-1}(S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad (2.17)$$

$$B = E^{-1}(S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (2.18)$$

$$C = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad (2.19)$$

$$D = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (2.20)$$

donde

$$E = I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^T F \quad (2.21)$$

$$M = (I - LS_{22})^{-1} L \quad (2.22)$$

Ejemplo 5

Considérese el circuito eléctrico de la figura 2.51.

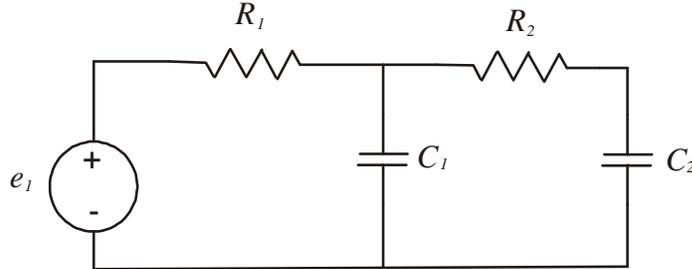


Figura 2.51: Circuito eléctrico $RC - RC$.

Primero se realiza un análisis clásico para obtener la ecuación de estado del sistema.

Las ecuaciones que caracterizan al circuito son:

$$i_{C_1} = \frac{e_1 - v_{C_1}}{R_1} - \frac{v_{C_1} - v_{C_2}}{R_2} \quad (2.23)$$

$$i_{C_2} = \frac{v_{C_1} - v_{C_2}}{R_2} \quad (2.24)$$

de (2.23) y (2.24) se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{C_1} &= -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1} v_{C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} v_{C_2} + \frac{1}{R_1 C_1} e_1 \\ \dot{v}_{C_2} &= \frac{1}{R_2 C_2} v_{C_1} - \frac{1}{R_2 C_2} v_{C_2} \end{aligned}$$

y en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C_1} \\ \dot{v}_{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1} & \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix} e_1 \quad (2.25)$$

Si se considera como salida al voltaje en el capacitor C_2 , se tiene:

$$v_{C_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Ahora bien, siguiendo los procedimientos, se construye el modelo en Bond Graph mostrado en la figura 2.52.

Los bonds se enumeran a fin de identificarlos durante el proceso de creación de la matriz de

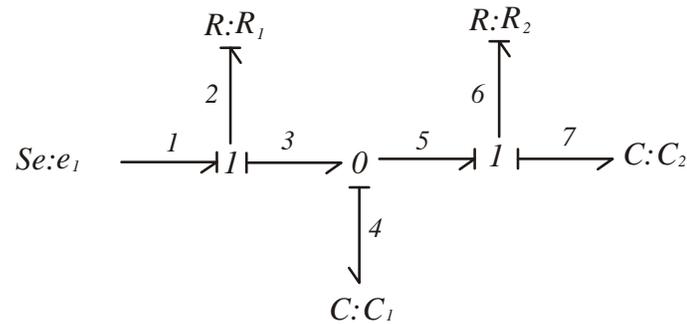


Figura 2.52: Modelo BGI del circuito eléctrico de la figura 2.51.

estructura de unión. De acuerdo a la figura 2.50, en el presente ejemplo, los vectores clave son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 x &= \begin{bmatrix} q_4 \\ q_7 \end{bmatrix} \Rightarrow z = \begin{bmatrix} e_4 \\ e_7 \end{bmatrix}; \\
 D_{in} &= \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \end{bmatrix}; \Rightarrow D_{out} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} \\
 u &= e_1 \\
 y &= e_7
 \end{aligned}$$

nótese que no hay elementos que permanezcan en causalidad derivativa en el BGI, de ahí que $x_d = 0$. Las relaciones constitutivas de los elementos resistivos y almacenadores de energía, indican que:

$$\begin{aligned}
 L &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}; \\
 F &= \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Un análisis visual del modelo en Bond Graph de la figura 2.52 permite aseverar que:

$$\begin{aligned}
 f_4 &= f_3 - f_5 = f_2 - f_6 \\
 f_7 &= f_6 \\
 e_2 &= e_1 - e_3 = e_1 - e_4 \\
 e_6 &= e_5 - e_7 = e_4 - e_7 \\
 e_7 &= e_7
 \end{aligned}$$

De esta forma, se puede escribir la matriz de estructura de unión del modelo, obedeciendo a:

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ f_7 \\ - \\ e_2 \\ e_6 \\ - \\ e_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 1 & | & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ -1 & 0 & | & 0 & 0 & | & 1 \\ 1 & -1 & | & 0 & 0 & | & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ e_7 \\ - \\ f_2 \\ f_6 \\ - \\ e_1 \end{bmatrix}$$

De acuerdo a (2.17), (2.18), (2.19) y (2.20), se tiene:

$$\begin{aligned} A &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} = \\ A &= \begin{bmatrix} \frac{-R_1-R_2}{C_1 R_1 R_2} & \frac{1}{C_2 R_2} \\ \frac{1}{C_1 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \\ D &= 0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

de tal modo que la ecuación de estado es:

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_4 \\ \dot{f}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_4 \\ \dot{q}_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-R_1-R_2}{C_1 R_1 R_2} & \frac{1}{C_2 R_2} \\ \frac{1}{C_1 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ q_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} e_1 \quad (2.27)$$

$$e_7 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ q_7 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

La ecuación de estado descrita por (2.27) y (2.28) exhibe como variables de estado a las cargas en los capacitores; por otra parte, la ecuación de estado (2.25) y (2.26), obtenida por análisis convencional considera que las variables de estado son los voltajes en los capacitores. La ecuación que relaciona la carga con el voltaje en un capacitor es:

$$q = C v_C$$

de modo que la matriz de transformación que permite el cambio de variables de estado, de cargas en los capacitores a voltajes en los capacitores es:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix}$$

así, se puede realizar la transformación de coordenadas [12] mediante :

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-R_1-R_2}{R_1R_2C_1} & \frac{1}{R_2C_2} \\ \frac{1}{R_2C_1} & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-R_1-R_2}{R_1R_2C_1} & \frac{1}{R_2C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} \\ \tilde{B} &= TB = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{C} &= CT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \tilde{D} &= D = 0 \end{aligned}$$

y la ecuación de estado convertida es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{e}_4 \\ \dot{e}_7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{-R_1-R_2}{R_1R_2C_1} & \frac{1}{R_2C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ e_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1R_1} \\ 0 \end{bmatrix} e_1 \\ e_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ e_7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

que resulta ser la misma (2.25) y (2.26) que se obtuvo mediante el análisis convencional.

2.7.3. Función de transferencia y ecuación de estado

Es posible establecer una relación entre el enfoque de la función de transferencia y la ecuación de estado [10].

La ecuación de estado descrita por (2.15) y (2.16) está vinculada con la función de transferencia que relaciona a la salida y con la entrada u del sistema en cuestión. Para calcular la función de transferencia de un sistema dada su ecuación de estado se puede utilizar:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.29)$$

Capítulo 3

Análisis de controlabilidad y observabilidad

En éste capítulo se abordan las útiles propiedades de la estabilidad asintótica, la controlabilidad y la observabilidad de sistemas LTI MIMO. Mediante el análisis de éstas propiedades, es posible determinar importantes características de los estados, que proveen invaluable información para el establecimiento de una ley de control adecuada.

3.1. Estabilidad asintótica, controlabilidad y observabilidad: El enfoque clásico

En esta sección se estudia el análisis clásico de estabilidad asintótica y los conceptos de controlabilidad y observabilidad introducidos por Kalman [10].

3.1.1. Solución de la ecuación de estado para sistemas LTI

El sistema (2.15), (2.16),

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

cumple con los siguientes axiomas [11]:

Axioma 1

Dados: dos espacios topológicos abstractos Σ (el espacio de estados) y U (el espacio de entradas), y un subconjunto T (los valores del tiempo) de los números reales R^1 .

Axioma 2

Para cada entrada abstracta u en U , hay un mapa continuo $\varphi_u : T \times \Sigma \times T \rightarrow \Sigma$ (la función de transición) con las siguientes propiedades:

- (i) $\varphi_u(t_0; x_0, t_0) = x_0$ para todo t_0 en T y para todo x_0 en Σ ;
- (ii) $\varphi_u(t_2; \varphi_u(t_1; x_0, t_0), t_1) = \varphi_u(t_2, x_0)$ para todo $t_0 \leq t_1 \leq t_2$ en T y para todo x_0 en Σ .

Cada salida (observación sobre el sistema) es un mapa continuo $h : \Sigma \times T \rightarrow R^1$.

Si φ_u es lineal sobre $\Sigma \times u$ y si h es lineal sobre Σ , se dice que el sistema es lineal.

La función de transición φ_u es la solución de (2.15), y puede ser expresada en forma explícita como:

$$x(t) = \varphi_u(t; x_0, t_0) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

donde $\Phi(t, t_0)$ es la matriz de transición de (2.15); es decir, la única solución de $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$ con $\Phi(t_0, t_0) = I$; y en el caso de sistemas LTI ésta es la matriz exponencial $\Phi = e^{At}$ [12]. De este modo, la solución de la ecuación de estado (2.15) se escribe de manera simplificada como:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (3.1)$$

3.1.2. Estabilidad asintótica

El término estabilidad asintótica hace referencia al efecto por parte de un sistema de que el valor de sus variables de estado decaigan a cero en forma asintótica cuando una entrada impulso es aplicada. Un modo de determinar la estabilidad asintótica del sistema $\dot{x} = Ax$ es revisando los valores característicos de la matriz A . Si éstos tienen partes reales negativas, o bien, los ceros del polinomio característico $P(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$, tienen partes reales negativas, entonces se satisface la condición necesaria y suficiente para que el sistema sea asintóticamente estable.

Cuando los coeficientes del polinomio característico no son numéricos, se torna complicado el cálculo de los valores característicos, en este caso, la determinación de la estabilidad asintótica puede ser resuelta mediante la aplicación del criterio de Routh, o bien, el segundo método de Lyapunov. En la sección 2.2 se abordará un útil método para la determinación de la estabilidad asintótica estructural mediante el modelado en Bond Graph. Si la matriz A del sistema en cuestión no tiene todos sus valores característicos dentro del semiplano izquierdo del plano complejo s , dos situaciones son posibles: (a) los valores característicos están situados en el semiplano derecho del plano complejo s y el sistema es inestable y (b) los valores característicos están situados sobre el eje imaginario y el sistema es oscilatorio,

o bien, la variable de estado correspondiente decae a un valor diferente de cero (mantiene un “offset”) [15].

El sistema modelado mediante la ecuación de estado (3.2) y (3.3) exhibe estabilidad asintótica, toda vez que sus valores característicos tienen su parte real situada en el semiplano izquierdo del plano complejo s .

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.2)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \quad (3.3)$$

La figura 3.1 muestra la respuesta al impulso en MATLAB de las tres variables de estado.

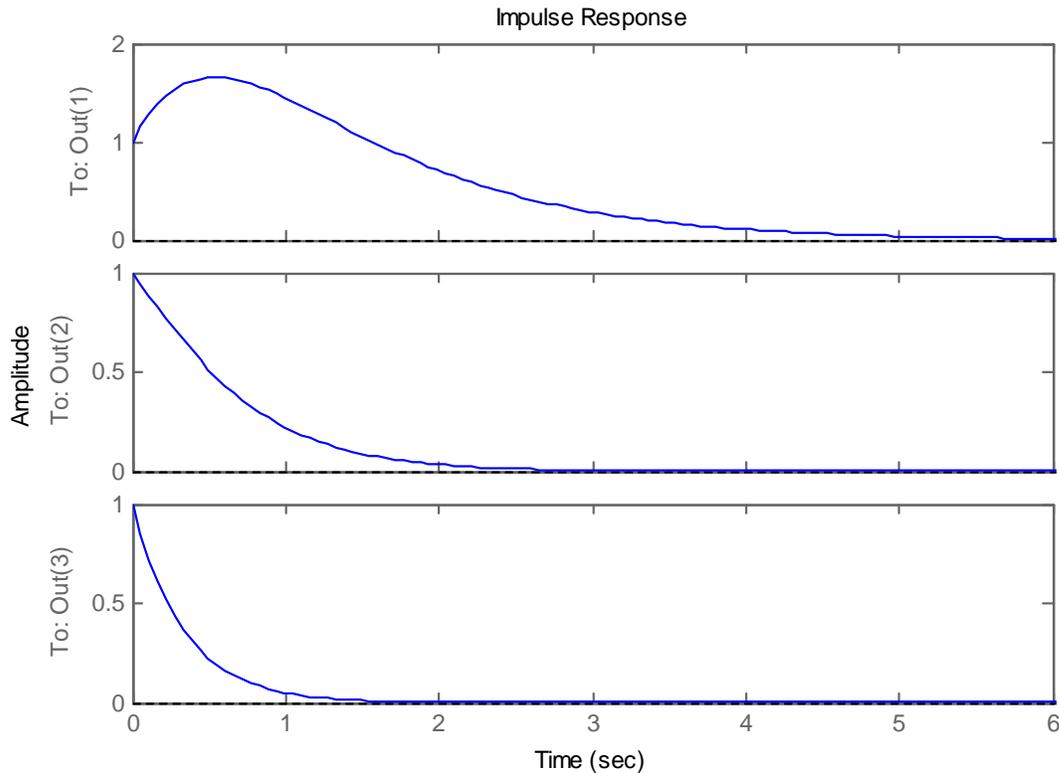


Figura 3.1: Respuesta al impulso de tres variables de estado asintóticamente estables.

El sistema modelado mediante

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.4)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \quad (3.5)$$

exhibe un valor característico inestable (localizado en el semiplano derecho del plano complejo s), y uno situado sobre el eje imaginario. Este último ocasiona la respuesta en la figura 3.2, cuyo valor no decae a cero, sino que mantiene un valor de offset.

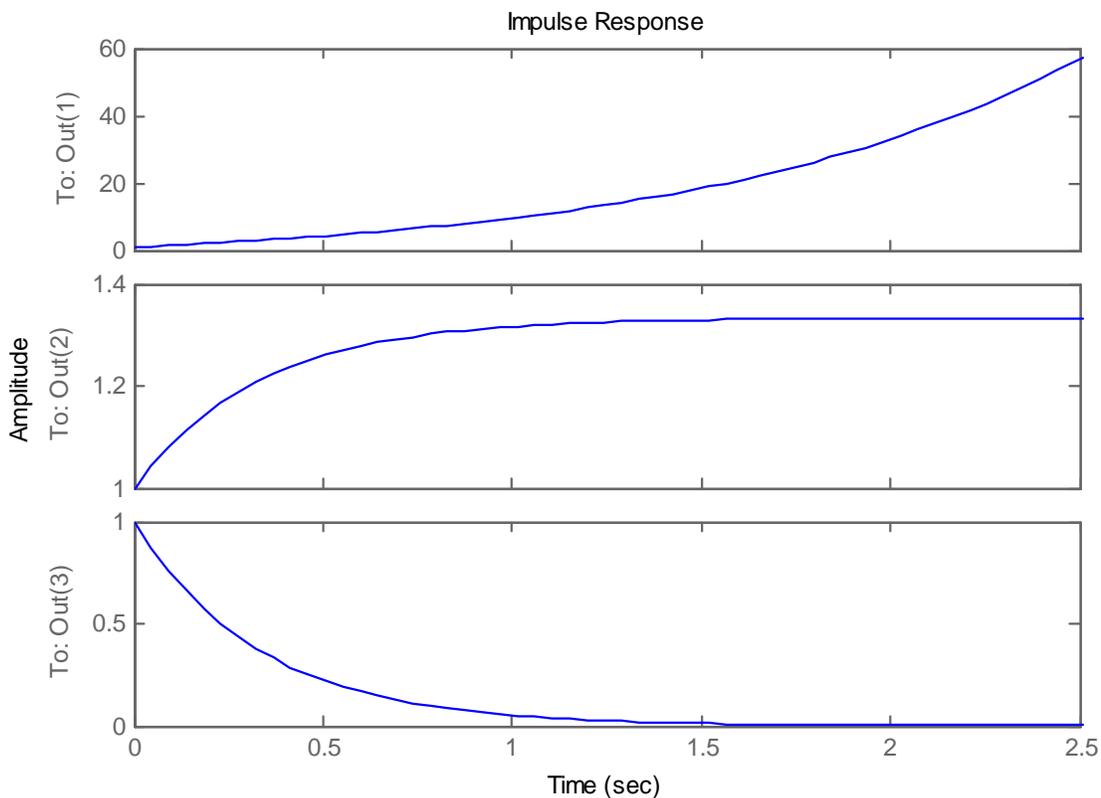


Figura 3.2: Respuestas al impulso de tres variables de estado: una inestable (1), otra que mantiene un offset (2) y una asintóticamente estable (3).

3.1.3. Controlabilidad

El estudio de la controlabilidad reviste esencial importancia dentro del análisis de sistemas, toda vez que permite determinar si en un sistema dado, los valores de las variables de estado del sistema se pueden manipular a discreción para fines de ubicarlas en valores deseados prestablecidos, mediante una acción de control. Como se verá enseguida, si alguna variable de estado no es controlable, *ninguna* acción de control físicamente realizable logrará situar su valor en un punto de operación arbitrario.

Considérese el sistema de tiempo continuo

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.6)$$

Se dice que el sistema descrito mediante (3.6) es de estado controlable en $t = t_0$, si es posible construir una señal de control sin restricciones que transfiera a cero un estado inicial en un valor arbitrario en un intervalo de tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$. Si todos los estados son controlables, se dice que el sistema es de estado completo controlable.

De acuerdo a (3.1) para $t_0 = 0$, la solución de (3.6) es:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Si se aplica la definición, se tiene:

$$x(t_1) = 0 = e^{At_1}x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

o bien

$$x(0) = - \int_0^{t_1} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \quad (3.7)$$

Ahora bien, mediante el Teorema de Cayley-Hamilton [16], la matriz exponencial se puede expresar como,

$$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)A^k \quad (3.8)$$

Sustituyendo (3.8) en (3.7) se tiene

$$x(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau \quad (3.9)$$

Si se define

$$\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau = \beta_k$$

la ecuación (3.9) se convierte en

$$\begin{aligned}
 x(0) &= -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \beta_k & (3.10) \\
 &= -\left[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B \right] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \text{---} \\ \beta_1 \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Si el sistema es de estado completo controlable, entonces, dado cualquier estado inicial $x(0)$, la ecuación (3.10) debe satisfacerse. Esto requiere que el rango de la matriz de $n \times n$

$$R_k = \left[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B \right] \quad (3.11)$$

sea n . La matriz R_k es llamada *matriz de controlabilidad*.

A partir del análisis previo, se establece la condición necesaria y suficiente para la controlabilidad completa del estado como sigue:

Teorema 1

El sistema (3.6) es de estado completo controlable si y solo si la *matriz de controlabilidad* R_k es de rango n .

Ejemplo 6

Considérese el sistema descrito por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

La matriz de controlabilidad de este sistema es

$$R_k = \left[B \mid BA \mid BA^2 \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por simple inspección se observa que la matriz de controlabilidad R_k es de rango 1, de tal forma que sólo una variable de estado es controlable.

Una desventaja del análisis de controlabilidad tradicional, es que éste permite establecer el número de variables controlables y no controlables, pero no es capaz de determinar cuáles variables pertenecen a cada subconjunto. Esto se puede resolver mediante el teorema de descomposición canónica, que se estudia en la sección 3.2.

3.1.4. Observabilidad

El análisis de observabilidad es de gran importancia principalmente en la técnica del espacio de estado y en la construcción de observadores. Un observador permite estimar el valor de cualquier variable de estado a partir de mediciones en la entrada y en la salida del sistema, es decir, se pueden reconstruir las variables de estado sin necesidad de medirlas directamente. Lo anterior es cierto para cualquier variable de estado *observable*. Como se analizará enseguida, si una variable de estado no es observable, resultará imposible reconstruirla en base solamente a mediciones de la entrada y la salida del sistema.

Se dice que un sistema es observable en el tiempo t_0 si, con el sistema en el estado $x(t_0)$, es posible determinar éste estado a partir de la observación de la salida en un intervalo de tiempo finito.

Considérese el sistema descrito por:

$$\dot{x} = Ax \quad (3.12)$$

$$y = Cx \quad (3.13)$$

Se dice que el sistema es completamente observable si el estado $x(t_0)$ se determina a partir de la observación de $y(t)$ durante un intervalo de tiempo finito, $t_0 \leq t \leq t_1$. Por lo tanto, el sistema es completamente observable si todas las transiciones del estado afectan eventualmente a todos los elementos del vector de salida. El vector de salida $y(t)$ está dado por:

$$y(t) = Ce^{At}x(0) \quad (3.14)$$

Sustituyendo la expansión de la matriz exponencial (3.8) en (3.14) se obtiene:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)CA^kx(0)$$

$$y(t) = \alpha_0(t)Cx(0) + \alpha_1(t)CAx(0) + \dots + \alpha_{n-1}(t)CA^{n-1}x(0)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & | & \alpha_1 & | & \cdots & | & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ -- \\ CA \\ -- \\ \vdots \\ -- \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0) \quad (3.15)$$

De este modo, si el sistema es completamente observable, dada la salida $y(t)$ durante un intervalo de tiempo $t_0 \leq t \leq t_1$, $x(0)$ se determina únicamente a partir de (3.15). Esto requiere que el rango de la *matriz de observabilidad*

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ -- \\ CA \\ -- \\ \vdots \\ -- \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

sea n .

Se puede establecer la condición para la observabilidad completa mediante el siguiente Teorema:

Teorema 2

El sistema descrito por (3.12) y (3.13) es completamente observable si y sólo si la matriz de observabilidad W_o es de rango n .

Ejemplo 7

Considérese el sistema descrito mediante la siguiente ecuación de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

el cálculo de la matriz de observabilidad lleva a:

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz de observabilidad W_o es 2, de modo que sólomente dos variables de estado pueden ser reconstruidas a partir de mediciones en la entrada y la salida.

Al igual que en el análisis de controlabilidad, la determinación específica de cuáles variables de estado son observables y cuáles no requiere de la intervención del teorema de descomposición canónica que se estudia en la sección. En la siguiente sección se presenta el enfoque estructural empleado en Bond Graph para determinar las propiedades de estabilidad asintótica, controlabilidad y observabilidad.

3.2. Estabilidad asintótica, Controlabilidad y Observabilidad: El enfoque estructural de Bond Graph

La definición de estructura fue introducida por Lin [3] para sistemas SISO y ampliada a sistemas multi-entrada por Shields y Pearson [6]. El término estructural hace referencia a un análisis en el que se hace énfasis en el acomodo de los parámetros más que en los valores numéricos de éstos dentro de las matrices de la ecuación de estado (2.15) y (2.16). Este análisis depende sólo del tipo de elementos que componen el sistema y la forma en que están interconectados, y es cierto para casi todos los valores numéricos de los parámetros [4]. La definición formal de estructura se analiza enseguida.

Definición 6

Un par matricial (A, B) (resp. (A, C)) tiene la misma *estructura* que otro par (\tilde{A}, \tilde{B}) (resp. (\tilde{A}, \tilde{C})), de las mismas dimensiones, si para cada entrada fija en cero de la matriz (AB) (resp. (AC)), la correspondiente entrada en la matriz $(\tilde{A}\tilde{B})$ (resp. $(\tilde{A}\tilde{C})$) está fija en cero y al mismo tiempo, para cada entrada fija en cero de $(\tilde{A}\tilde{B})$ (resp. $(\tilde{A}\tilde{C})$), la correspondiente entrada en (AB) (resp. (AC)) está fija en cero.

La definición de controlabilidad y observabilidad varía ligeramente en el enfoque estructural respecto de su concepción para valores numéricos específicos de los parámetros. El siguiente Lema pone de manifiesto esta aseveración.

Lema 1

El par (A_0, B_0) es *estructuralmente* controlable (respectivamente observable) si y sólo si existe un par completamente controlable (respectivamente observable) que tenga la misma estructura que (A_0, B_0) .

La adaptación a Bond Graph y una consecuente mejora del análisis de estabilidad asintótica, controlabilidad y observabilidad bajo el enfoque estructural, fue abordada por Sueur y Dauphin-Tanguy [4], [7]. Las siguientes definiciones permiten establecer los conceptos de orden mínimo y rango estructural, mismos que revisten vital importancia durante el análisis de controlabilidad y observabilidad bajo el enfoque de Bond Graph.

Definición 7

El orden mínimo de un modelo en Bond Graph, que es igual a la dimensión de la matriz de estado, es igual al número $(n_i)_i$ de elementos dinámicos C e I en causalidad integral en el BGI.

Definición 8

El rango estructural de una matriz A está definido como el rango máximo que esa matriz alcanza en función de sus parámetros libres, tomando en cuenta las interrelaciones entre los parámetros.

Definición 9

El rango estructural q de la matriz de estado A asociada con un modelo en Bond Graph es igual al número de elementos dinámicos C e I en causalidad integral en el BGI, que aceptan causalidad derivativa cuando se construye el BGD. Si $(n_i)_i$ (respectivamente $(n_i)_d$) representa el número de elementos dinámicos C e I en causalidad integral en el BGI (respectivamente en el BGD), se tiene,

$$q = (n_i)_i - (n_i)_d$$

El rango estructural permite determinar la estabilidad asintótica de un sistema dinámico. Esto es puesto de manifiesto en el siguiente Teorema:

Teorema 3

Una condición necesaria y suficiente de no existencia de estabilidad asintótica del sistema modelado por (2.15) y (2.16), es que el rango estructural q de la matriz A sea menor que n . De hecho existen $n - q$ valores característicos cero de A .

Para el cálculo del rango estructural que permite determinar la controlabilidad estructural y la observabilidad estructural de un sistema dinámico representado en Bond Graph, es necesario definir el concepto de dualización de fuentes

Definición 10

La dualización de fuentes y detectores consiste en transformar una fuente (ó detector) de esfuerzo (respectivamente de flujo) en una fuente (ó detector) de flujo (respectivamente de esfuerzo).

Definición 11

El rango estructural q_c de la matriz concatenada $[AB]$ asociada con un modelo en Bond Graph es igual al número de elementos dinámicos C e I en causalidad integral en el BGI que aceptan causalidad derivativa cuando se construye el BGD y cuando se realiza una dualización máxima de fuentes. El número de elementos en causalidad integral en el BGI que permanecen en causalidad integral en el BGD se denota como t_s .

Definición 12

El rango estructural q_o de la matriz concatenada $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ asociada con un modelo en Bond Graph es igual al número de elementos dinámicos C e I en causalidad integral en el BGI que aceptan causalidad derivativa cuando se construye el BGD y cuando se realiza una dualización máxima de detectores. El número de elementos en causalidad integral en el BGI que permanecen con causalidad integral en el BGD se denota como t_d .

En las siguientes propiedades se hace referencia tanto a la ecuación de estado (2.15) y (2.16) de orden mínimo n , como a la matriz de estructura de unión S definida en (2.13).

Propiedad 1

El rango estructural de $[AB]$ es igual a:

* El rango de la matriz concatenada $S_c = [S_{11} \ S_{12} \ S_{13}]$

* $n - t_s$

Propiedad 2

El rango estructural de $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ es igual a:

$$* \text{ El rango de la matriz concatenada } S_o = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{21} \\ S_{31} \end{bmatrix}$$

$$* n - t_d$$

Las propiedades 1 y 2 permiten asegurar que el rango estructural es igual al rango de las matrices concatenadas S_c y S_o solamente si el sistema es conservativo de energía. Las propiedades de la matriz de estructura de unión (2.13) para sistemas no conservativos no obedecen a éstas propiedades y sus características se pueden investigar en un trabajo futuro.

El análisis de controlabilidad y observabilidad estructural en un modelo en Bond Graph se resume en los siguientes Teoremas, que son la base del método de descomposición canónica propuesto en la sección 4.2:

Teorema 4

El sistema $[AB]$ es estructuralmente de estado controlables si y sólo si:

- (a) Todos los elementos dinámicos C e I en causalidad integral en el BGI están causalmente conectados con una fuente,
- (b) El rango estructural de $[AB]$ es igual al orden mínimo n .

Teorema 5

El sistema $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ es estructuralmente de estado observable si y sólo si:

- (a) Todos los elementos en causalidad integral en el BGI están causalmente conectados con un detector,
- (b) El rango estructural de $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ es igual al orden mínimo n .

A modo de presentar estas propiedades estructurales, se realiza el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8

Considérese el modelo BGI de la figura 3.3.

Los vectores clave del modelo son:

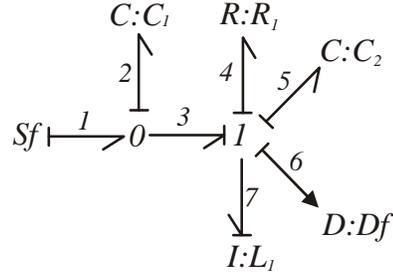


Figura 3.3: Modelo en Bond Graph en causalidad integral.

$$\begin{aligned}
 x &= \begin{bmatrix} q_2 \\ q_5 \\ p_7 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_5 \\ e_7 \end{bmatrix} \Rightarrow z = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_5 \\ f_7 \end{bmatrix} \\
 D_{in} &= f_4 \Rightarrow D_{out} = e_4 \\
 y &= f_6 \\
 u &= f_1
 \end{aligned}$$

y las relaciones constitutivas de los elementos dinámicos y disipativos, de acuerdo a (2.10) y (2.11), establecen que:

$$\begin{aligned}
 F &= \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \\
 L &= R_1
 \end{aligned}$$

Las relaciones de la estructura de unión indican que:

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ f_5 \\ e_7 \\ - \\ f_4 \\ - \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & | & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & -1 & | & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & | & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_5 \\ f_7 \\ - \\ e_4 \\ - \\ f_1 \end{bmatrix}$$

El sistema de la figura 3.3 es conservativo de energía debido a que no hay elementos activos, de modo que se puede realizar el análisis de estabilidad asintótica, controlabilidad y observabilidad de dos formas diferentes, de acuerdo a las partes (a) y (b) de los Teoremas 4 y 5 y a la Propiedad 1. La parte (a) de los Teoremas 4 y 5 queda cubierta, ya que la fuente Sf está causalmente conectada con todos los elementos dinámicos:

- Con C_1 a través de la trayectoria causal $\{1, 2\}$;
- Con C_2 a través de la trayectoria causal $\{1, 2, 2, 3, 7, 7, 5\}$;
- Con L_1 a través de la trayectoria causal $\{1, 2, 2, 3, 7\}$

El detector Df está conectado:

- Con C_1 a través de la trayectoria causal $\{2, 3, 7, 7, 6\}$;
- Con C_2 a través de la trayectoria causal $\{5, 7, 7, 6\}$;
- Con L_1 a través de la trayectoria causal $\{7, 6\}$

Ahora bien, para analizar la parte (b) de los Teoremas 4 y 5 se tiene lo siguiente: La matriz concatenada

$$[S_{11}S_{12}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

exhibe dependencia lineal en los dos primeros renglones, por lo que su rango (y el rango estructural de A) es $2 < n = 3$ (el orden mínimo), razón por la que es posible asegurar que el sistema no es asintóticamente estable. El otro enfoque posible para determinar el rango estructural de la matriz A consiste en contruir el BGD. En la figura 3.4 se muestra un primer intento de construcción del BGD.

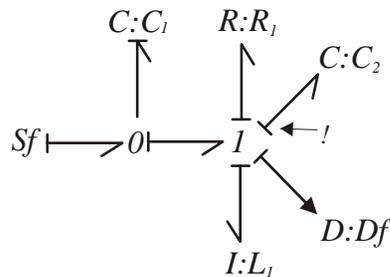


Figura 3.4: Modelo BGD con un elemento que permanece en causalidad integral.

Se puede observar que el elemento $C : C_2$ permanece en causalidad integral. No es posible para este modelo construir un BGD en el que todos los elementos I y C acepten causalidad

derivativa, de nuevo, la conclusión es la misma: Existe al menos un valor propio cero en la matriz A , lo que indica la existencia de un polo al origen que ocasiona que el sistema no exhiba estabilidad asintótica (el rango estructural de la matriz A es menor que el orden mínimo n).

Un análisis similar permite ver que la matriz concatenada $[S_{11}S_{12}S_{13}]$ es de rango 3, ya que entre sus renglones no hay dependencia lineal. Así, el rango estructural de la matriz concatenada $[AB]$ es igual al orden mínimo n . Esto permite asegurar que el sistema es controlable y los polos se pueden reubicar a discreción mediante realimentación de estados. Ahora el análisis gráfico es realizado:

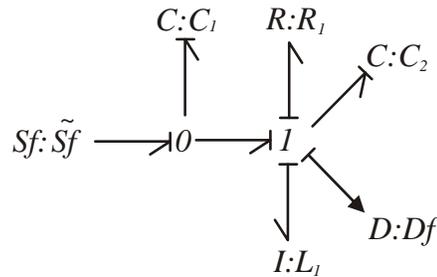


Figura 3.5: Dualización de fuente.

En la figura 3.5 se observa que si se dualiza la fuente de flujo, el elemento que faltaba de aceptar causalidad derivativa en el BGD termina aceptando ésta causalidad, de modo que el rango estructural de $[AB]$ es 3, que es el igual orden mínimo y se concluye de nuevo que el sistema es estructuralmente controlable.

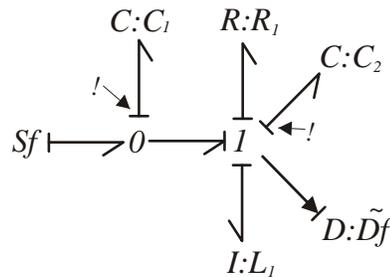


Figura 3.6: Dualización de detector.

Por otra parte, aún tras la dualización del detector de flujo, en la figura 3.6 se observa que el BGD sigue manteniendo elementos en causalidad integral pese a la dualización del detector de flujo, de hecho, ahora son dos los elementos que no aceptan causalidad derivativa en el BGD, sin embargo, se considera el número mínimo de elementos que permanecen en causalidad integral. Este número mínimo ocurre en el modelo de la figura 3.4 en donde no se ha realizado ninguna dualización. De esta forma, es posible concluir que el rango estructural de la matriz concatenada $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ es 2, que es menor que el orden mínimo 3 y el sistema no es de estado completo observable.

En el ejemplo anterior se hizo uso de las dos posibles maneras de determinar los rangos estructurales de un sistema modelado en Bond Graph: mediante revisión de la matriz S de estructura de unión y a través del análisis visual, mediante el BGI y el BGD. Ya se señaló que las conclusiones obtenidas mediante la revisión de la matriz S es válida solamente para sistemas conservativos de potencia, de modo que en lo sucesivo se evitará su uso, más aún porque en capítulo 5 se emplearán estratégicamente elementos activos para fines de cancelación de perturbaciones.

Capítulo 4

Descomposición canónica de sistemas LTI MIMO

4.1. Los dos enfoques tradicionales para modelar un sistema LTI MIMO

Un mismo sistema dinámico lineal puede ser modelado matemáticamente, al menos de dos maneras diferentes. En el análisis clásico de sistemas físicos es ampliamente utilizado el enfoque de la función de transferencia, que implica el análisis de la relación de la entrada a la salida de un sistema, mientras que en el esquema que algunos llaman “enfoque moderno”, el análisis se realiza en función de variables internas del sistema, comúnmente llamadas estados. Para el análisis clásico se han desarrollado una gran cantidad de herramientas que permiten determinar y establecer características tales como la estabilidad, la respuesta del sistema en función de la frecuencia, y la implementación de compensadores. Por otra parte, el enfoque moderno permite realizar análisis primordialmente en el dominio del tiempo, y en particular permite la determinación de dos propiedades no abordadas bajo el enfoque clásico: la controlabilidad y la observabilidad de un sistema lineal dado [10]. En el enfoque clásico, la herramienta matemática principal es el análisis en variable compleja, mientras que en el enfoque moderno se explota ampliamente el álgebra lineal [9].

Los dos enfoques, el clásico y el moderno, permiten analizar un mismo sistema y conseguir un objetivo común: proveer a dicho sistema con una ley de control satisfactoria. Sin embargo, es sabido que el enfoque clásico, al basarse en la función de transferencia puede ignorar el desempeño dinámico de algunas variables de estado, si dichas variables son no controlables

y/o no observables [13]. La información proporcionada por la función de transferencia no siempre es completa. El Teorema de descomposición canónica que es revisado en la siguiente sección, ayuda a resolver de forma parcial este problema, al permitir identificar cuáles variables de estado están incluidas y cuales no en la información proporcionada por la función de transferencia.

4.2. Estructura canónica de sistemas dinámicos lineales

En el capítulo anterior se establecieron las condiciones para determinar si un sistema lineal es controlable y/o observable, tanto del punto de vista numérico como desde el enfoque estructural. Estas condiciones, sin embargo proporcionan información sobre si el sistema completo bajo análisis es controlable/observable o no, más no permiten identificar cuales variables de estado pertenecen a cada subconjunto. Esta identificación se puede lograr mediante el cálculo del subespacio controlable y el subespacio observable.

Considérese la matriz de controlabilidad (3.11) y la matriz de observabilidad (3.16) de un sistema físico lineal de orden mínimo n . Mediante lo siguiente se puede identificar el subespacio controlable y el subespacio observable [12]:

El subespacio controlable Σ_k del espacio de estados Σ es igual al espacio columna de la matriz de controlabilidad R_k definida en (3.11), es decir,

$$\Sigma_k = \text{span}\{R_k\}$$

El subespacio no controlable $\Sigma_{\bar{k}}$ es el complemento de Σ_k , de modo que,

$$\Sigma_k \cup \Sigma_{\bar{k}} = \Sigma = R^n$$

El subespacio observable Σ_o del espacio de estados Σ es igual al espacio fila de la matriz de observabilidad W_o definida en (3.16), es decir,

$$\Sigma_o = \text{span}\{W_o^T\}$$

El subespacio no controlable $\Sigma_{\bar{o}}$ es el complemento de Σ_o , de modo que,

$$\Sigma_o \cup \Sigma_{\bar{o}} = R^n$$

Los subespacios $\Sigma_{c\bar{o}}$, Σ_{co} , $\Sigma_{\bar{c}o}$ y $\Sigma_{\bar{c}\bar{o}}$ del espacio de estados $\Sigma = R^n$ están definidos por

$$\begin{aligned}\Sigma_{c\bar{o}} &= \Sigma_k \cap \Sigma_{\bar{o}} \\ \Sigma_k &= \Sigma_{c\bar{o}} \cup \Sigma_{co} \\ \Sigma_{\bar{o}} &= \Sigma_{\bar{c}o} \cup \Sigma_{\bar{c}\bar{o}}\end{aligned}$$

de modo que,

$$\Sigma_{c\bar{o}} \cup \Sigma_{co} \cup \Sigma_{\bar{c}\bar{o}} \cup \Sigma_{\bar{c}o} = \Sigma = \mathbb{R}^n$$

En el siguiente procedimiento se muestran los pasos para descomponer un sistema LTI MIMO, tal como lo indicó Kalman en su Teorema de descomposición canónica [11].

Procedimiento 5

Para la descomposición canónica de un sistema LTI MIMO

1.- Construir la matriz de transformación

$$T = \begin{bmatrix} T_{c\bar{o}} & T_{co} & T_{\bar{c}\bar{o}} & T_{\bar{c}o} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

donde las submatrices están definidas de acuerdo a los siguientes puntos:

- Las columnas de $T_{c\bar{o}}$ forman una base del subespacio $\Sigma_{c\bar{o}}$ que es tanto controlable como no observable

- T_{co} es el complemento de base de $T_{c\bar{o}}$ en el subespacio controlable Σ_k , de modo que $\text{span} \left\{ T_{c\bar{o}} \ T_{co} \right\} = \Sigma_k$;

- $T_{\bar{c}\bar{o}}$ es el complemento de base de $T_{c\bar{o}}$ en el espacio no observable $\Sigma_{\bar{o}}$, de modo que $\text{span} \left\{ T_{c\bar{o}} \ T_{\bar{c}\bar{o}} \right\} = \Sigma_{\bar{o}}$;

- $T_{\bar{c}o}$ es el complemento de $\left[T_{c\bar{o}} \ T_{co} \ T_{\bar{c}\bar{o}} \right]$, en el espacio de estados Σ , de modo que $\text{span} \{T\} = \text{span} \left\{ T_{c\bar{o}} \ T_{co} \ T_{\bar{c}\bar{o}} \ T_{\bar{c}o} \right\} = \Sigma$

2.- Realizar la transformación lineal de la ecuación de estado (2.15) y (2.16), de acuerdo a:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT; \quad (4.2)$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B \quad (4.3)$$

$$\tilde{C} = CT \quad (4.4)$$

$$\tilde{D} = D \quad (4.5)$$

Se dice que el sistema $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ es una forma canónica descompuesta [11] del sistema (A, B, C, D) descrito por (2.15) y (2.16).

El espacio de estado $\Sigma = \mathbb{R}^n$ de cualquier sistema dinámico lineal de orden n representado por (2.15) y (2.16) puede ser descompuesto en cuatro partes, de acuerdo al procedimiento previo. De acuerdo a ésta descomposición, las matrices \tilde{A} , \tilde{B} y \tilde{C} exhiben la

siguiente forma [11]:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{c\bar{o}} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{co} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{\bar{c}\bar{o}} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{\bar{c}o} \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_{c\bar{o}} \\ B_{co} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & C_{co} & 0 & C_{\bar{c}o} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

En la figura 4.1 se muestra un diagrama a bloques de un sistema físico en la forma canónica descompuesta.

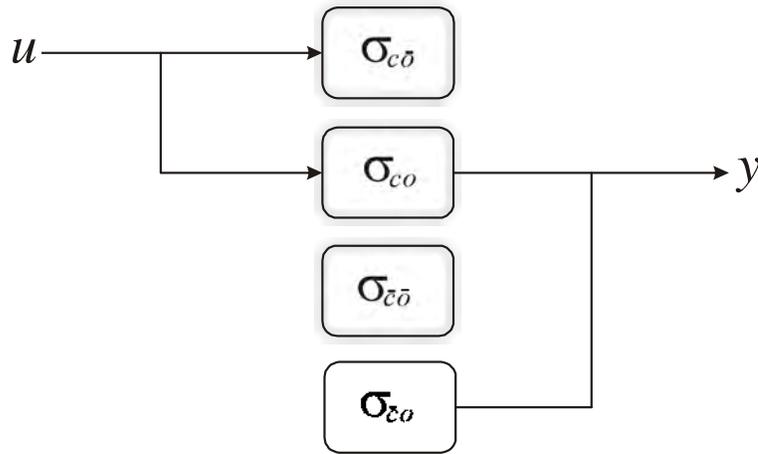


Figura 4.1: Diagrama a bloques de un sistema LTI MIMO en forma canónica descompuesta.

En la figura 4.1, el bloque $\sigma_{c\bar{o}}$ es la parte del sistema que es tanto controlable como no observable. El bloque σ_{co} es la parte controlable y observable. El bloque $\sigma_{\bar{c}\bar{o}}$ es la parte que no es controlable ni observable y finalmente, el bloque $\sigma_{\bar{c}o}$ es la parte que no es controlable, pero si es observable. En el sistema de la figura 4.1, solamente el bloque que es tanto controlable como observable (σ_{co}) es el único que interviene en la formulación de la función de transferencia y es el que determina la *realización mínima* del sistema. Más aún, éste bloque es el único que puede ser identificado en base solamente a mediciones de la entrada y de la salida.

En el siguiente ejemplo se muestra cuantitativamente el caso de un sistema dinámico lineal que es convertido a su forma canónica descompuesta.

Ejemplo 9

Considérese el sistema físico de orden mínimo $n = 5$, modelado por la siguiente ecuación de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

la matriz de controlabilidad del sistema se calcula mediante (3.11) como:

$$\begin{aligned} R_k &= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B & A^4B \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -12 & 39 & -120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & -135 & 870 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Por otra parte, la matriz de observabilidad es calculada mediante (3.16) como:

$$\begin{aligned} W_o &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ -12 & 15 & 9 & 0 & 0 \\ 39 & -57 & -27 & 0 & 0 \\ -120 & 195 & 81 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

El rango de la matriz (4.8) es 3, y de acuerdo al Teorema 1, s3lamente 3 variables de estado son controlables. El rango de la matriz (4.9) es 3, entonces por el Teorema 2, es posible establecer que solamente tres variables de estado son observables. A modo de identificar estas variables de estado controlables, se aplica el Procedimiento 5:

La base can3nica del subespacio controlable Σ_k se encuentra a partir de (4.8) como:

$$\beta_k = \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (4.10)$$

Por otra parte, de (4.9), la base del espacio observable es:

$$\beta_o = \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\}$$

de donde se concluye que la base del espacio no observable es:

$$\beta_{\bar{o}} = \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (4.11)$$

de (4.10) y (4.11) se tiene que una base para el espacio que es controlable y no observable es:

$$\beta_{c\bar{o}} = \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\}$$

que de hecho constituye la primer columna de la matriz de transformaci3n T definida por

(4.1), de tal forma que:

$$T_{c\bar{o}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

una base del complemento del espacio generado por $\beta_{c\bar{o}}$ en el subespacio controlable la constituyen los dos vectores restantes en (4.10), de tal forma que,

$$T_{co} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En forma similar, de (4.11), se tiene que una base del complemento del espacio generado por $\beta_{c\bar{o}}$ en el espacio no observable la constituye el vector,

$$T_{\bar{c}\bar{o}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora bien, dados $T_{c\bar{o}}$, T_{co} , y $T_{\bar{c}\bar{o}}$, el vector que en conjunto con éstos permite generar a todo el espacio de estados Σ es

$$T_{\bar{c}o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de este modo, se tiene que la matriz de transformación adopta la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 T &= \begin{bmatrix} T_{c\bar{o}} & T_{co} & T_{\bar{c}\bar{o}} & T_{\bar{c}o} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & | & 1 & 0 & | & 0 & | & 0 \\ 0 & | & 0 & 0 & | & 0 & | & 1 \\ 0 & | & 0 & 1 & | & 0 & | & 0 \\ 0 & | & 0 & 0 & | & 1 & | & 0 \\ 1 & | & 0 & 0 & | & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \tag{4.12}
 \end{aligned}$$

Se puede entonces convertir el sistema a su forma canónica descompuesta, de acuerdo a (4.2), (4.3), (4.4) y (4.5):

$$\begin{aligned}
 \tilde{A} &= T^{-1}AT = \\
 &= \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{B} &= T^{-1}B = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{C} &= CT = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

de tal forma que la ecuación de estado en forma descompuesta adopta la siguiente forma:

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} -5 & | & 0 & 5 & | & -5 & | & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & | & -1 & 0 & | & 0 & | & 0 \\ 0 & | & 3 & -3 & | & 0 & | & -3 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & | & 0 & 0 & | & -4 & | & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & | & 0 & 0 & | & 0 & | & -2 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ - \\ 1 \\ 0 \\ - \\ 0 \\ - \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4.13)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & | & 0 & 1 & | & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} \quad (4.14)$$

La ecuación de estado descrita por (4.13) y (4.14) exhibe la misma forma descrita por (4.6) y (4.7), que corresponde a la forma general de una descomposición canónica. Por otra parte, la matriz de transformación (4.12) es una matriz de conmutación, por lo que al transformar al vector de estados x mediante (4.12), solamente se reacomoda el orden de las variables de estado:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= T^{-1}x = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x_5 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Observando las dimensiones y el acomodo en la matriz de transformación (4.12), es posible establecer que la variable x_5 es controlable más no observable; las variables x_1 y x_3 son tanto controlables como observables; la variable x_4 no es controlable ni observable, y finalmente, la variable x_2 es observable más no controlable.

La ecuación de estado está relacionada con una función de transferencia [10], que puede ser calculada mediante:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (4.15)$$

y para este ejemplo se tiene:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & s+3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{3}{s^2 + 4s + 3} \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

Ahora bien, en el sistema descompuesto descrito por (4.13) y (4.14) el subsistema que es tanto controlable como observable es el correspondiente a los estados x_1 y x_3 :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
 y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente (4.15) se calcula la función de transferencia de este subsistema como

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{3}{(s+1)(s+3)}
 \end{aligned}$$

que es la misma función de transferencia que la obtenida empleando el modelo completo (4.16).

Se han establecido los pasos para realizar la descomposición canónica de un sistema LTI MIMO. Tal como se observó en el ejemplo, la función de transferencia otorga solamente una parte de la información y es aquella correspondiente a las variables de estado que son tanto controlables como observables. Estas variables determinan la realización mínima del sistema.

De vital importancia resulta el acomodo al que se deben someter las variables de estado en el procedimiento e interpretación de la descomposición canónica. Para lograr dicho acomodo, es necesario realizar el cálculo de la matriz de transformación (4.1), lo cual a su vez, implica el cálculo de los subespacios relacionados: el espacio controlable y el espacio no observable. El cálculo de estos subespacios suele resultar una tarea tediosa y sobre todo, que consume mucho tiempo, en particular cuando se trabaja con sistemas de orden elevado.

Sobre este acomodo de variables trata la siguiente sección, en la que además se propone un procedimiento para identificar el subconjunto al que pertenecen las variables de estado en una forma visual directa, en base al enfoque estructural de análisis empleado en el análisis de controlabilidad y observabilidad como se aborda en Bond Graph.

Parte II

Descomposición canónica en el dominio físico

En la sección previa se describió la metodología clásica empleada para llegar a la forma canónica descompuesta de un sistema LTI MIMO. Durante el análisis realizado en esa sección, se concluyó que la clave de la descomposición canónica consiste en identificar las variables de estado que encajan en cada uno de los cuatro subconjuntos inherentes a ésta forma descompuesta. Además, en la sección 3.1 se realizó un análisis gráfico estructural de controlabilidad y observabilidad en Bond Graph, por lo que se puede considerar que se tienen todas las herramientas para abordar uno de los problemas principales de este documento: Desarrollar una nueva metodología para realizar la descomposición canónica, en base al enfoque estructural de Bond Graph.

Capítulo 5

Descomposición canónica de sistemas LTI MIMO bajo el enfoque de Bond Graph

5.1. Herramientas utilizadas

En la sección 2.2 se realiza el análisis estructural de controlabilidad y observabilidad bajo el enfoque de Bond Graph. Esta herramienta es la principal a ser utilizada en el nuevo enfoque cuya finalidad es conseguir la forma canónica descompuesta de un sistema LTI MIMO. Además, el concepto de conexión causal entre dos elementos es de vital importancia en esta nueva técnica.

Más aún, se hace uso de elementos activos para poner en evidencia cómo dos elementos pueden no estar conectados causalmente, por tanto, la definición del bond de señal o bond activo reviste su importancia también. Finalmente, el acomodo de variables de estado analizado en la sección 3.2 da la pauta para conseguir de forma directa la ecuación de estado del modelo bajo análisis en forma canónica descompuesta.

En la definición 1 se establece el concepto de trayectoria causal como se le conoce actualmente en la teoría de Bond Graph. Sin embargo, esta definición asume que los elementos son todos pasivos y de manera lógica, las relaciones de causa y efecto son bidireccionales, es decir, si en alguno de dos elementos conectados causalmente ocurre una acción, en el otro ocurrirá una reacción, independientemente del elemento que se considere para realizar la acción. En todo el conjunto de referencias revisadas no se ha encontrado una definición de trayectorias causales unidireccionales, mismas que serán utilizadas en los desarrollos de

este documento, de modo que la siguiente definición pretende asentar una base para dicho concepto.

Definición 13

Entre dos elementos A y B existe una conexión causal unidireccional, si y solo si:

- (a) Cualquier acción sobre A ocasiona causalmente una reacción en B .
- (b) Cualquier acción sobre B es causalmente indetectable por A .

Una trayectoria causal unidireccional aparece de manera natural cuando se utilizan fuentes moduladas y los bonds activos asociados. Las fuentes moduladas existen en los diferentes dominios físicos y son especialmente evidentes en sistemas eléctricos, en donde incluso se les implementa de manera práctica mediante amplificadores operacionales. En estos casos, se considera teóricamente que se toma una señal de control en alguna parte del circuito en cuestión, sin producir un efecto de carga y dicha señal se aplica como elemento de control de una fuente de energía ubicada en otra parte del circuito. Esta fuente de energía mantiene las relaciones constitutivas de una fuente, pero su dependencia del parámetro de control mantiene la relación de causa y efecto. Para visualizar en forma práctica una trayectoria causal unidireccional, estúdiense el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10

Considérese el circuito eléctrico de la siguiente figura.

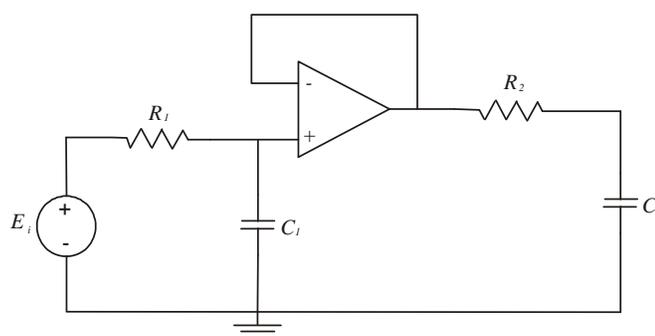


Figura 5.1: Circuito eléctrico con seguidor de voltaje mediante un amplificador operacional.

En el circuito de la figura 5.1, dos redes $R - C$ son conectadas mediante un amplificador operacional que hace de fuente regulada. Bajo esta consideración, una representación diferente del mismo circuito aparece en la figura 5.2.

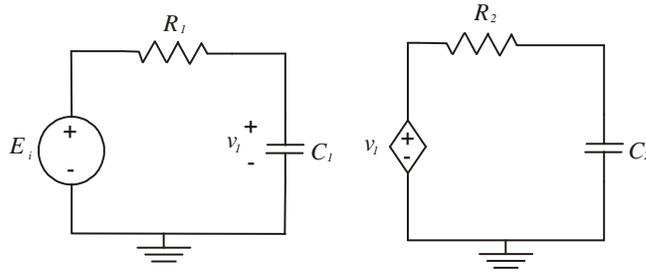


Figura 5.2: Una versión equivalente del circuito de la figura 5.1.

El BGI del circuito se puede observar en la figura 5.3.

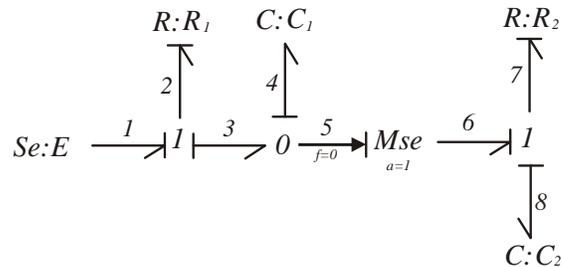


Figura 5.3: Modelo BGI del sistema eléctrico de la figura 5.2.

Analizando el BGI de la figura 5.3 y de acuerdo a la definición, es posible establecer que entre los elementos C_1 y C_2 existe una conexión causal unidireccional. La trayectoria causal $\{4, 5, 6, 7, 7, 8\}$ indica que cualquier acción sobre C_1 ocasionará una consecutiva reacción en C_2 . Sin embargo, debido a que el bond activo (bond 5) es un detector de esfuerzo, éste transferirá el esfuerzo de la unión 0 a la izquierda a cualquier elemento conectado a la derecha, en este caso, la fuente modulada, pero la acción opuesta no es cierta, es decir, no transferirá el flujo de la derecha hacia la izquierda, ya que por definición, en este bond el flujo es nulo. De esta manera, cualquier acción sobre C_2 no ocasionará ningún efecto sobre C_1 .

5.2. El método de descomposición canónica en el dominio físico.

En esta sección es posible proponer el nuevo método para conseguir la descomposición canónica estructural de un sistema LTI MIMO. Esto es posible en dos formas: Si solamente se cuenta con el modelo gráfico, sin escribir aún ecuaciones, un ordenamiento adecuado de las variables seguido de la técnica habitual para construir la ecuación de estado ocasionará que se obtenga el modelo en forma descompuesta en forma directa. Por otra parte, si ya se tiene construida la ecuación de estado, o bien la matriz de estructura de unión, es posible construir de manera directa la matriz de transformación T que convertirá la ecuación de estado a su forma canónica descompuesta. En los siguientes procedimientos se proponen ambas metodologías.

Procedimiento 6

Para realizar la descomposición canónica de un sistema LTI MIMO modelado en Bond Graph, partiendo de un modelo nuevo

- 1.- Identificar los elementos dinámicos estructuralmente controlables mediante la aplicación del Teorema 4;
- 2.- Identificar los elementos dinámicos estructuralmente observables mediante la aplicación del Teorema 5;
- 3.- Formar el vector clave de estados x introduciendo los elementos ya identificados de acuerdo al acomodo descrito en el procedimiento 5:

$$x = \begin{bmatrix} x_{c\bar{o}} \\ x_{co} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

y formar el resto de los vectores clave, adecuando las relaciones constitutivas al vector de estados x .

- 4.- Construir la matriz de estructura de unión \tilde{S} con los elementos dinámicos ordenados del modo descrito en el paso 3.
- 5.- Construir la ecuación de estado mediante (2.17), (2.18), (2.19) y (2.20).

En el siguiente procedimiento se asume que el vector de estados original tiene el acomodo $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$, mientras que el vector de estados deseado tiene el

acomodo $\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \cdots & \tilde{x}_n \end{bmatrix}^T$, y en el caso de análisis estructural, los x_i en x sólo han cambiado de posición en \tilde{x} .

Procedimiento 7

Para realizar la descomposición canónica de un sistema LTI MIMO modelado en Bond Graph, cuando ya se ha construido la matriz de estructura de unión S .

- 1.- Identificar los elementos dinámicos estructuralmente controlables mediante la aplicación del Teorema 4;
- 2.- Identificar los elementos dinámicos estructuralmente observables mediante la aplicación del Teorema 5;
- 3.- Establecer el orden deseado de los elementos del vector de estados \tilde{x} , de acuerdo al acomodo descrito en el procedimiento 5. ;
- 4.- Establecer una correspondencia entre la posición de los elementos de x con la posición de los renglones de la matriz identidad I de orden n .
- 5.- Construir la matriz de transformación T , realizando conmutación de renglones en I , intercambiando el renglón correspondiente a la variable de estado x_i de la posición que guarda en x a la posición correspondiente en \tilde{x} .
- 6.- Realizar la transformación

$$\tilde{S} = PSP^{-1} \quad (5.1)$$

sobre la matriz de estructura de unión con la matriz de transformación P definida como:

$$P = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I_d \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

en donde T es la matriz descrita en el paso 5 e I_d es una matriz identidad cuyo tamaño es del número de elementos en el vector clave D_{in} sumado al número de elementos en el vector clave y .

- 7.- Construir la ecuación de estado mediante (2.17), (2.18), (2.19) y (2.20), empleando la matriz transformada \tilde{S} .

En ambos casos, la ecuación de estado obtenida estará en forma canónica descompuesta. En el siguiente ejemplo se muestra la aplicación del Procedimiento 6.

Ejemplo 11

Considérese el modelo BGI de la figura 5.4.

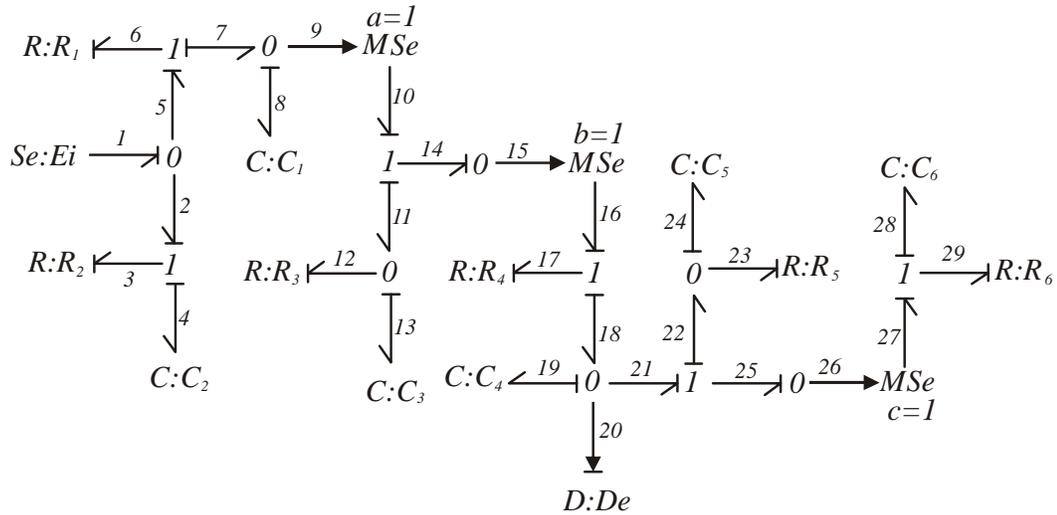


Figura 5.4: BGI de un sistema de orden 6.

Los elementos dinámicos que tienen conexión causal con la fuente son:

- C_1 , mediante la trayectoria causal $\{1, 5, 6, 6, 7, 8\}$;
- C_2 , mediante la trayectoria causal $\{1, 2, 3, 3, 4\}$;
- C_4 , mediante la trayectoria causal $\{1, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 17, 17, 18, 19\}$;
- C_6 , mediante la trayectoria causal $\{1, 2, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 17, 17, 18, 19, 19, 21, 25, 26, 27, 29, 29, 28\}$

Los elementos C_3 y C_5 no mantienen una conexión causal con la fuente.

Los elementos que tienen una conexión causal con el detector de esfuerzo de la salida son:

- C_1 , mediante la trayectoria causal $\{8, 9, 19, 14, 15, 16, 17, 17, 18, 19, 19, 20\}$;
- C_3 , mediante la trayectoria causal $\{13, 11, 14, 15, 16, 17, 17, 18, 19, 19, 20\}$
- C_4 , mediante la trayectoria causal $\{19, 20\}$;

Los elementos dinámicos C_2 , C_5 y C_6 no mantienen una conexión causal con la salida

Ahora bien, en la figura 5.5 se muestra el BGD del sistema.

En la figura 5.5 se puede observar que la totalidad de los elementos dinámicos aceptan causalidad derivativa en el BGD, de tal modo que en base a los Teoremas 4 y 5, es posible

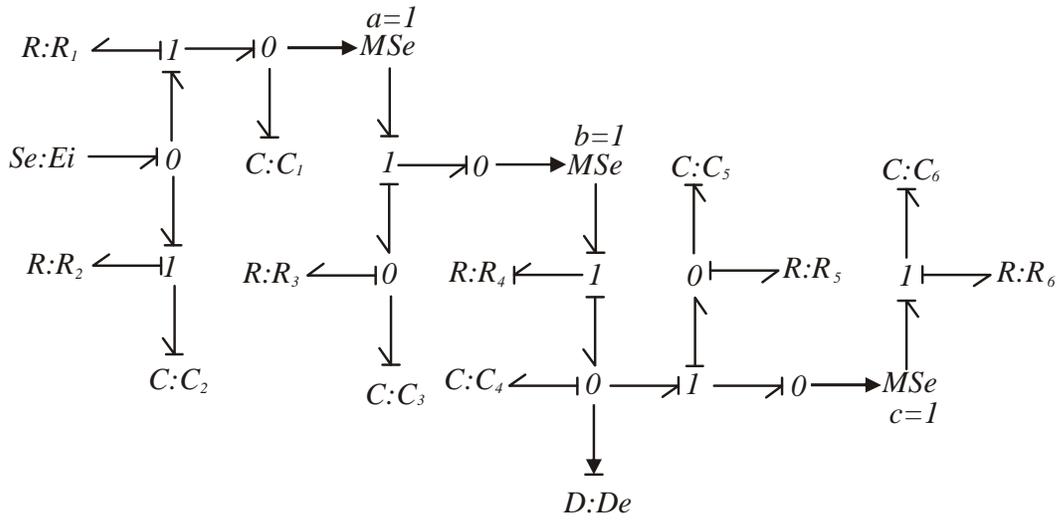


Figura 5.5: BGD del modelo de la figura 5.4.

establecer que el rango estructural de A es igual al rango estructural de $[AB]$ e igual al rango estructural de $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$, y todos son 6. Por tanto, los conjuntos de elementos determinados a partir de las conexiones causales en el BGI (figura 5.4) indican que el vector de estado que llevará a la forma canónica descompuesta es:

$$x = \begin{bmatrix} x_{c\bar{o}} \\ x_{co} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_4 \\ q_{28} \\ - \\ q_8 \\ q_{19} \\ - \\ q_{24} \\ - \\ q_{13} \end{bmatrix}$$

por tanto, el vector de derivadas de los estados respecto del tiempo y el vector z quedan determinados como:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} f_4 \\ f_{28} \\ - \\ f_8 \\ f_{19} \\ - \\ f_{24} \\ - \\ f_{13} \end{bmatrix} ;$$

$$z = \begin{bmatrix} e_4 \\ e_{28} \\ - \\ e_8 \\ e_{19} \\ - \\ e_{24} \\ - \\ e_{13} \end{bmatrix}$$

y la matriz de relaciones constitutivas de los elementos dinámicos, de acuerdo a (2.10) es:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix}$$

el vector D_{in} se selecciona arbitrariamente como:

$$D_{in} = \begin{bmatrix} e_6 \\ e_3 \\ e_{12} \\ e_{17} \\ e_{23} \\ e_{29} \end{bmatrix}$$

con,

$$D_{out} = \begin{bmatrix} f_6 \\ f_3 \\ f_{12} \\ f_{17} \\ f_{23} \\ f_{29} \end{bmatrix}$$

por lo que la matriz de relaciones constitutivas de los elementos disipativos es, de acuerdo a (2.11):

$$L = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_6} \end{bmatrix}$$

de acuerdo al modelo de la figura 5.4, la entrada y la salida son, respectivamente:

$$u = e_1$$

$$y = e_{20}$$

las relaciones constitutivas de la estructura de unión de la figura 5.4, especifican que:

$$\begin{aligned}
 f_4 &= f_3; \\
 f_{28} &= f_{29}; \\
 f_8 &= f_6; \\
 f_{19} &= f_{17}; \\
 f_{24} &= -f_{23}; \\
 f_{13} &= -f_{12}; \\
 e_6 &= e_1 - e_8; \\
 e_3 &= e_1 - e_4; \\
 e_{12} &= e_{13}; \\
 e_{17} &= e_8 - e_{13} - e_{19}; \\
 e_{23} &= e_{24}; \\
 e_{29} &= e_{19} - e_{24} - e_{28}; \\
 e_{20} &= e_{19}
 \end{aligned}$$

por lo que se tiene, de acuerdo a (2.13):

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ f_{28} \\ f_8 \\ f_{19} \\ f_{24} \\ f_{13} \\ e_6 \\ e_3 \\ e_{12} \\ e_{17} \\ e_{23} \\ e_{29} \\ e_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ e_{28} \\ e_8 \\ e_{19} \\ e_{24} \\ e_{13} \\ f_6 \\ f_3 \\ f_{12} \\ f_{17} \\ f_{23} \\ f_{29} \\ e_1 \end{bmatrix}$$

el cómputo de la ecuación de estado mediante (2.17), (2.18), (2.19) y (2.20) permite llegar a la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ f_{28} \\ - \\ f_8 \\ f_{19} \\ - \\ f_{24} \\ - \\ f_{13} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} q_4 \\ q_{28} \\ - \\ q_8 \\ q_{19} \\ - \\ q_{24} \\ - \\ q_{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} \\ 0 \\ - \\ \frac{1}{R_1} \\ 0 \\ - \\ 0 \\ - \\ 0 \end{bmatrix} e_1 \quad (5.3)$$

con

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -\frac{1}{R_2 C_2} & 0 & & 0 & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_6 C_6} & & 0 & \frac{1}{R_6 C_4} & & -\frac{1}{R_6 C_5} & & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & & -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & \frac{1}{R_4 C_1} & -\frac{1}{R_4 C_4} & & 0 & & -\frac{1}{R_4 C_3} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & -\frac{1}{R_5 C_5} & & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & & -\frac{1}{R_3 C_3} \end{array} \right]$$

La salida se expresa como:

$$e_{20} = \left[0 \quad 0 \quad | \quad 0 \quad \frac{1}{C_4} \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \right] \begin{bmatrix} q_4 \\ q_{28} \\ - \\ q_8 \\ q_{19} \\ - \\ q_{24} \\ - \\ q_{13} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

la ecuación de estado descrita por (5.3) y (5.4) se encuentra en forma canónica descompuesta. Más aún, la ecuación de estado del subsistema que es tanto controlable como observable se

escribe como:

$$\begin{bmatrix} f_8 \\ f_{19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ \frac{1}{R_4 C_1} & -\frac{1}{R_4 C_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_8 \\ q_{19} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} e_1 \quad (5.5)$$

$$e_{20} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_8 \\ q_{19} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

y su función de transferencia se calcula mediante (2.29) como:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B = \quad (5.7)$$

$$G(s) = \frac{1}{(sR_1 C_1 + 1)(sR_4 C_4 + 1)} \quad (5.8)$$

La función de transferencia (5.8) resulta ser la misma, ya sea que se calcule empleando las matrices de la ecuación de estado del sistema completo (5.3) y (5.4), o bien empleando las matrices de la ecuación de estado del subsistema que es tanto controlable como observable (5.5) y (5.6).

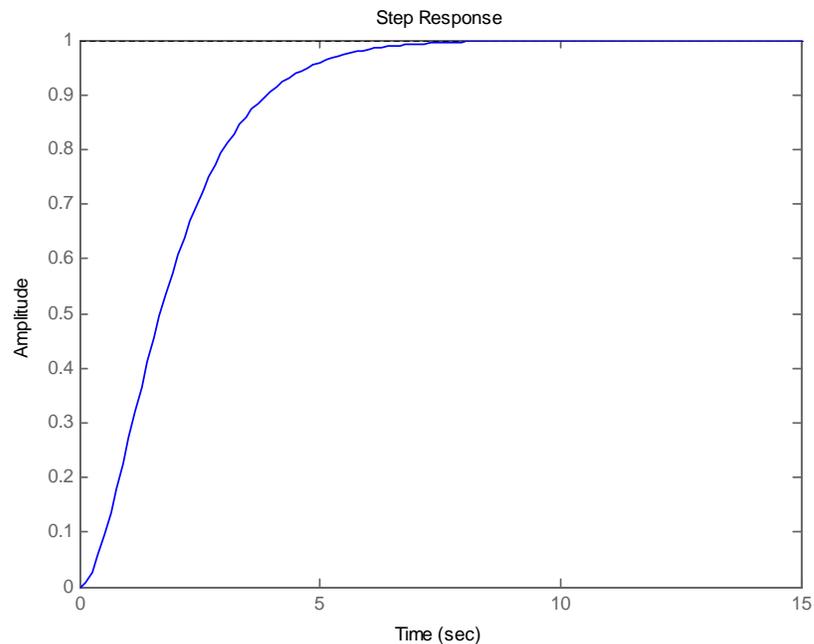


Figura 5.6: Respuesta al escalón del sistema de la figura 5.4.

En la figura 5.6 se observa la respuesta al escalón del sistema en MATLAB, tras haber dado

valores numéricos unitarios a los parámetros (para efectos de simulación).

Obsérvese que la respuesta corresponde a un sistema de segundo orden sobreamortiguado, situación que es normal, ya que cuatro de los seis estados no participan en la dinámica de la entrada a la salida y sólo dos están involucrados.

El siguiente ejemplo pone de manifiesto la aplicación del procedimiento 7.

Ejemplo 12

Considérese el modelo en Bond Graph que se muestra en la figura 5.7.

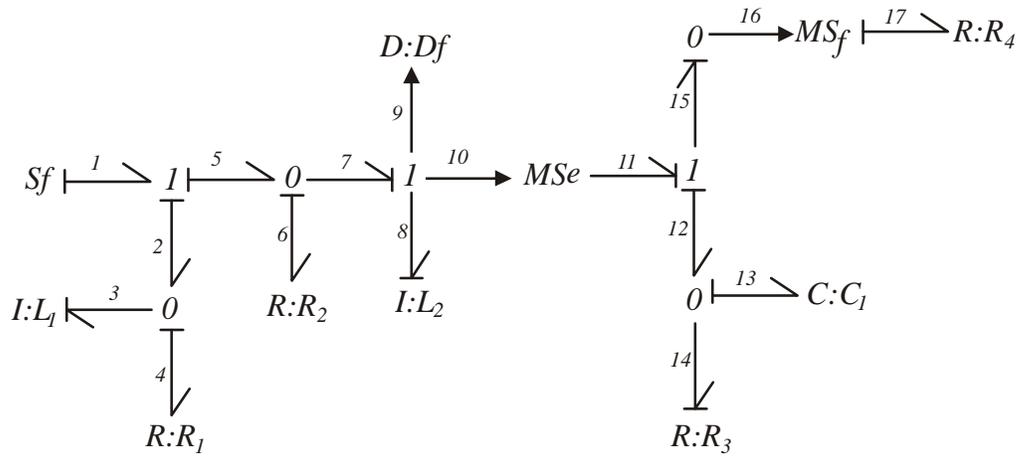


Figura 5.7: BGI de un sistema de tercer orden.

En el modelo de la figura 5.7 las fuentes moduladas se asumen con ganancia unitaria, por simplicidad. El vector de estado se selecciona como:

$$x = \begin{bmatrix} p_8 & q_{13} & p_3 \end{bmatrix}^T \quad (5.9)$$

por lo que,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} e_8 & f_{13} & e_3 \end{bmatrix}^T$$

y,

$$z = \begin{bmatrix} f_8 & e_{13} & f_3 \end{bmatrix}^T$$

además,

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_2}, \frac{1}{C_1}, \frac{1}{L_1} \right\}$$

El vector D_{in} se selecciona como:

$$D_{in} = \begin{bmatrix} f_4 & f_6 & e_{14} & e_{17} \end{bmatrix}^T$$

por lo que,

$$D_{out} = \begin{bmatrix} e_4 & e_6 & f_{14} & f_{17} \end{bmatrix}^T$$

y,

$$L = \text{diag} \left\{ R_1, R_2, \frac{1}{R_3}, R_4 \right\}$$

La entrada y la salida son, respectivamente:

$$u = f_1$$

$$y = f_9$$

Las relaciones constitutivas para los elementos de los vectores clave especifican que:

$$e_8 = e_6$$

$$f_{13} = -f_{14}$$

$$e_3 = e_4$$

$$f_4 = f_1 - f_3$$

$$f_6 = f_1 - f_8$$

$$e_{14} = e_{13}$$

$$f_{17} = f_8 - e_{13}$$

$$f_9 = f_8$$

Nótese que la aparente ambigüedad de dimensiones de la variable f_{17} queda resuelta por las propiedades de las fuentes moduladas. Al agrupar éstas relaciones constitutivas en forma matricial, se tiene que la matriz de estructura de unión está dada por:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Al aplicar (2.17), (2.18), (2.19) y (2.20) se tiene que la ecuación de estado del sistema está descrita por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_3 C_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_1}{L_1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} R_2 \\ 0 \\ R_1 \end{bmatrix} u \quad (5.10)$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Si se compara la estructura de (4.6) y (4.7) con (5.10) y (5.11), respectivamente, se puede concluir que la ecuación de estado de éste sistema no es una forma canónica descompuesta. Al aplicar los Teoremas 4 y 5, un análisis de trayectorias causales del modelo de la figura 5.7 permite determinar que la variable p_3 es controlable, pero no observable, la variable p_8 es controlable y observable y la variable q_{13} no es controlable ni observable. De esta forma, si se sigue el orden descrito en (4.1), se tiene que el vector de estados deseado es:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_8 \\ q_{13} \end{bmatrix}$$

Debido a que éste vector \tilde{x} y el vector de estado original (5.9) exhiben acomodos diferentes, se hace necesario construir la matriz de conmutación T que permita llevar del acomodo original al acomodo deseado. De acuerdo al Procedimiento 7, ésta matriz T se construye realizando la conmutación de renglones en una matriz identidad 3×3 , en la misma forma en que se encuentran ubicados los elementos de x (correspondiente a la matriz identidad) y \tilde{x} (correspondiente a la matriz T). Así se tiene que:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de permutación P descrita en (5.2) queda determinada como:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz transformada \tilde{S} se calcula mediante (5.1) como:

$$\tilde{S} = PSP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

al aplicar la transformación T al vector x se puede determinar que:

$$\tilde{F} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_1}, \frac{1}{L_2}, \frac{1}{C_1} \right\}$$

Mediante la aplicación de (2.17), (2.18), (2.19) y (2.20) se obtiene el sistema convertido:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_3 C_1} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} \end{aligned}$$

La estructura de esta nueva ecuación de estado coincide con (4.6) y (4.7) y es una forma canónica descompuesta. La función de transferencia del sistema es:

$$G(s) = \frac{R_2}{sL_2 + R_2}$$

En ésta función de transferencia sólo está involucrado el modo R_2L_2 que es el correspondiente al bloque Σ_{co} del sistema.

Capítulo 6

Cancelación estructural de perturbaciones mediante análisis de trayectorias causales.

6.1. Introducción

Cuando un sistema físico es construido, es deseable que éste obedezca los patrones de diseño de modo que no presente comportamientos indeseables. Desafortunadamente, esto no siempre es posible, debido entre otras cosas a la presencia de fuentes de excitación no deseadas, generalmente llamadas perturbaciones. En este capítulo se investiga cómo anular el efecto de perturbaciones explotando el enfoque visual del bond graph, mediante el concepto de controlabilidad estructural y las trayectorias causales, de tal modo que la fuente de excitación indeseable no tenga acceso causal a los estados del sistema. La técnica propuesta evidentemente es útil en los sistemas sobre los que se tenga acceso a su estructura, y es particularmente útil en el proceso de diseño; de otro modo, será necesario desarrollar un controlador más convencional para efectos de atenuar ó cancelar una perturbación dada. Durante el análisis realizado para encontrar la metodología de la descomposición canónica en Bond Graph, se han podido encontrar dos tópicos de importancia, mismos que se revisan y se describen en las siguientes dos secciones, respectivamente.

6.2. Nodos con pérdida de controlabilidad.

El bond activo desempeña una labor de esencial importancia dentro de la definición de trayectoria causal unidireccional (sección 4.1). Más aún, ante ciertas interconexiones de bonds normales de potencia con bonds activos, es posible observar un efecto que puede resultar de utilidad para desviar una señal de comando. Este efecto se denomina aquí como efecto de nodos con pérdida de controlabilidad. Considérese el submodelo en Bond Graph de la figura 6.1.

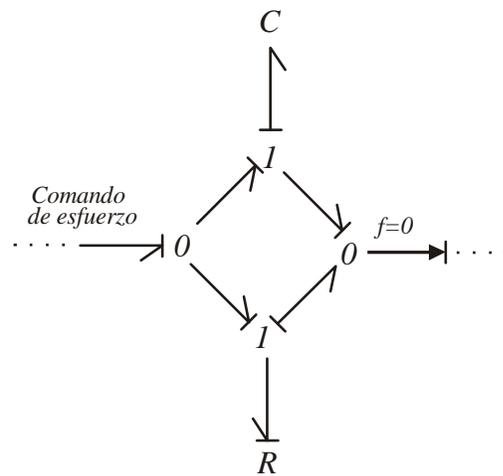


Figura 6.1: Bloque con pérdida de controlabilidad.

En la figura 6.2 se muestra un modelo simplificado del modelo de la figura 6.1.

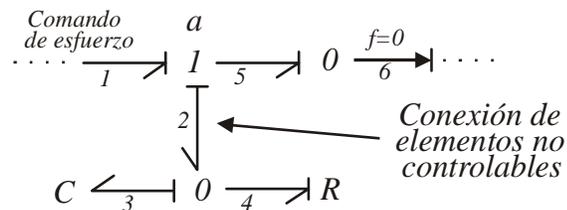


Figura 6.2: Simplificación del modelo de la figura 6.1.

En la figura 6.2 se considera que el esfuerzo en el bond 1 es la entrada de control al submodelo. Por otra parte, el bond activo (bond 6) impone un flujo cero en la unión 0 a la que

se encuentra conectado y de acuerdo a la relación constitutiva de dicha unión 0, la unión 1 a la que se encuentra conectada (señalada con a) también mantiene un flujo cero. De esta manera, todos los bonds conectados a dicha unión 1 tendrán un flujo cero. Esto permite asegurar que la variable de esfuerzo comando no puede alcanzar al elemento capacitivo, ya que resulta imposible establecer una trayectoria causal desde el bond 1 a la entrada hasta el elemento capacitivo C . La unión a , cuyo flujo es cero en la figura 6.2 determina un nodo con pérdida de causalidad. Especial atención requiere la configuración de las causalidades, toda vez que la imposición de flujo cero por parte del bond activo no es condición suficiente. Así, en este caso la causalidad en el bond 2 es la requerida para que cualquier elemento conectado a ella sea no controlable por la variable de esfuerzo de comando.

El caso dual del modelo mostrado en la figura 6.1 se puede observar en la figura 6.3 en forma normal y en la figura 6.4 en forma simplificada.

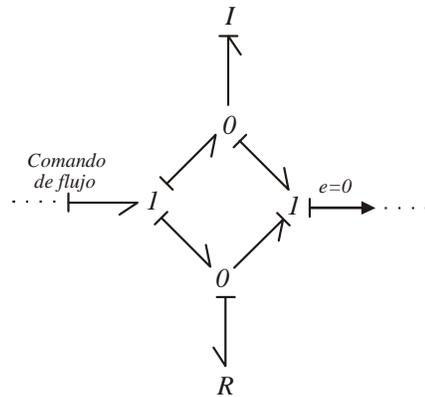


Figura 6.3: Bloque con pérdida de controlabilidad.

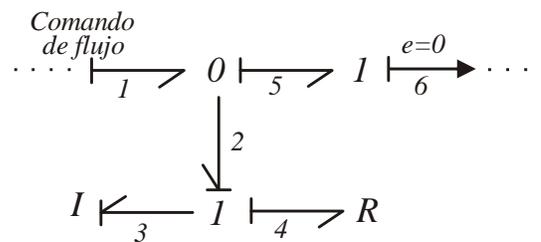


Figura 6.4: Simplificación del modelo de la figura 6.3.

Un análisis equivalente permite asegurar que la variable de flujo comando es incapaz de alcanzar mediante una trayectoria causal al elemento inductivo I de la figura 6.4.

Los nodos con pérdida de causalidad aparecen siempre que se inserta un bond activo que imponga flujo cero en una unión 1 o esfuerzo cero en una unión 0. además, las orientaciones causales deben ser tales que den lugar a dicha pérdida de controlabilidad, de acuerdo a lo descrito en los párrafos previos. En la siguiente sección se presentan los sistemas desacoplados y cómo en ellos se puede originar también pérdida de controlabilidad.

6.3. Subsistemas desacoplados

Cuando una fuente está conectada a dos subsistemas y éstos pueden operar sin que existan interacciones causales entre ellos, se dice que dichos subsistemas están desacoplados [4].

En esta sección se propone la utilización estratégica de subsistemas desacoplados a fin de cancelar la acción de perturbaciones sobre elementos predefinidos. Para mostrar la relación existente entre los subsistemas desacoplados y la consecuente pérdida de controlabilidad posible, considérese el siguiente ejemplo.

En la figura 6.5 se muestran dos subsistemas desacoplados.

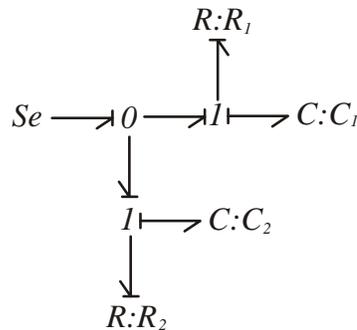


Figura 6.5: Dos subsistemas desacoplados.

Analizando las trayectorias causales se encuentra que no es posible establecer una conexión causal entre los elementos dinámicos C_1 y C_2 ; más aún, los modos R_1C_1 y R_2C_2 constituyen dos subsistemas desacoplados, gracias a la relación constitutiva de la fuente de esfuerzo, la cual indica que el esfuerzo que provee es independiente del flujo que se le demande.

Para fines de poder intervenir en la estructura de un sistema dinámico lineal con el objetivo de manipular las características de controlabilidad sobre algún(os) elemento(s) dinámico(s) por parte de una entrada de perturbación, se hace necesario conocer alguna técnica que permita alterar arbitrariamente dichas características. En la siguiente sección se da un primer vistazo a la construcción de modelos en los que se pueden incluir arbitrariamente elementos dinámicos que no sean controlables y/o observables.

6.4. Construcción en Bond Graph de los subsistemas que conforman una forma canónica descompuesta.

En el capítulo anterior se desarrolló la metodología para llevar un sistema LTI MIMO a su forma canónica descompuesta, desde el punto de vista estructural. En esta sección se da una orientación para poder incluir en un mismo modelo elementos dinámicos que arbitrariamente pertenezcan a alguno de los cuatro subsistemas concernientes a la forma canónica descompuesta.

En esta sección se consideran las trayectorias causales y en particular las trayectorias causales unidireccionales. El empleo de dichas trayectorias causales unidireccionales brinda comodidad para incorporar elementos dinámicos que pueden pertenecer arbitrariamente a cada subsistema de la forma canónica descompuesta.

Antes de establecer el procedimiento para construir modelos que involucren elementos dinámicos no controlables y/o no observables, se revisa una característica de pérdida de observabilidad consecuente a la inclusión de bonds activos. En la figura 6.6 se muestra un sistema en el que ocurre pérdida de observabilidad estructural debido a la inclusión de la fuente modulada y el bond activo asociado.

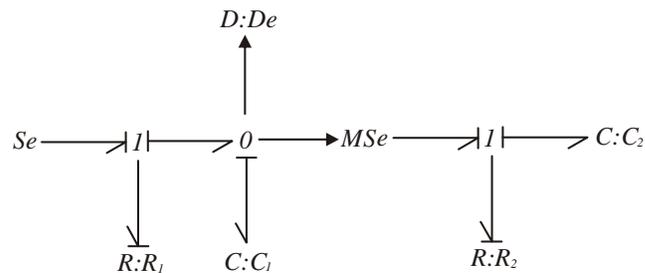


Figura 6.6: Pérdida de observabilidad por la inclusión de un bond activo.

En la figura 6.6, el elemento capacitivo C_2 no puede conectarse causalmente con el detector de esfuerzo a la salida, debido a la presencia de la fuente modulada y el bond activo asociado. De esta forma, el elemento C_2 es estructuralmente no observable. Se dice que el elemento C_2 está situado después del bond activo asociado a la fuente modulada y este, a su vez, se encuentra después del detector de esfuerzo a la salida. Es importante señalar que la ubicación “después de” mencionada aquí obedece a la posición relativa de los elementos respecto del flujo de potencia determinado por los bonds.

En el siguiente procedimiento, la referencia de dirección la determina el flujo natural de la potencia y la respectiva ubicación de los elementos de la estructura de unión.

Procedimiento 8

Para construir un modelo que envuelva los cuatro posibles bloques concernientes a la forma canónica descompuesta de un modelo.

- 1.- Incluir elementos dinámicos pertenecientes al subsistema σ_{co} , que es tanto controlable como observable. Esto se puede conseguir si se evita el uso de bloques con pérdida de controlabilidad, como los de la figura 6.2, así como asegurando que exista una conexión causal entre la variable generalizada de salida de cada elemento dinámico perteneciente a este bloque y la salida del sistema.
- 2.- Incluir elementos dinámicos pertenecientes al subsistema $\sigma_{c\bar{o}}$, que es controlable pero no observable. Para ello, inclúyanse elementos dinámicos que pertenezcan a un subsistema que esté desacoplado del subsistema sobre el que está ubicada la salida (esto brindará una característica de no-observabilidad sin perder la controlabilidad), o bien, sitúense dichos elementos dinámicos después de un bond activo conectado después de la salida, considerando el flujo natural de la potencia. Esto generará una trayectoria causal unidireccional entre el elemento dinámico y la salida, confiriéndole a este la propiedad de no-observabilidad.
- 3.- Incluir elementos dinámicos que pertenezcan al subsistema $\sigma_{\bar{c}\bar{o}}$, el cual no es controlable ni observable. Para esto inclúyase un bloque no controlable como se especifica en la figura 6.2, asegurándose de que dicho bloque quede situado después de la trayectoria causal que involucra a la salida, respecto del flujo de potencia. Si el bloque no controlable se coloca obediendo esta consideración, se garantizará no observabilidad del elemento dinámico correspondiente.
- 4.- Incluir elementos dinámicos pertenecientes al subsistema $\sigma_{\bar{c}o}$, que es no controlable y observable. Para esto es suficiente con incluir un bloque no controlable, de acuerdo a la figura 6.2 antes de la trayectoria que involucra a la salida, respecto del flujo de potencia, de

tal modo que se pueda asegurar una conexión causal entre el elemento dinámico y la salida, asegurando observabilidad de éste elemento.

Para mostrar cualitativamente la validez del procedimiento previo, en el siguiente ejemplo se construye un modelo en Bond Graph de un sistema que contenga un elemento dinámico perteneciente a cada uno de los subsistemas concernientes a la forma canónica descompuesta.

Ejemplo 13

En la figura 6.7 se muestra el modelo en Bond Graph de un sistema que es tanto controlable como observable.

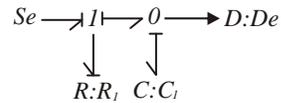


Figura 6.7: Sistema de primer orden estructuralmente controlable y observable.

En el modelo de la figura 6.7, es fácil notar que existen conexiones causales entre la fuente y el elemento dinámico C_1 y entre éste y la salida. El paso 2 del Procedimiento propone incluir un subsistema controlable y no observable. Esto se consigue mediante la inclusión de un subsistema desacoplado conectado a la fuente de esfuerzo, tal como se muestra en la figura 6.8.

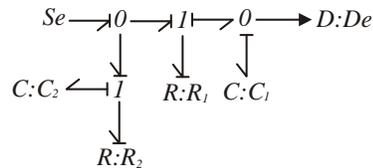


Figura 6.8: Sistema lineal con un modo co y un modo $c\bar{o}$.

En el modelo de la figura 6.8 el modo formado por los elementos R_2 y C_2 está desacoplado del modo formado por los elementos R_1 y C_1 . La salida se encuentra conectada al elemento C_1 y debido al desacoplamiento mencionado, se puede observar que es imposible establecer una conexión causal entre el elemento C_2 y la salida, por lo que se puede asegurar que dicho

elemento es estructuralmente no observable en estas condiciones del sistema.

El paso 3 del Procedimiento propone incluir un subsistema que no sea controlable ni observable. Para esto, en el presente ejemplo, se incluye un bloque no controlable que se conecta mediante un bond activo más allá de la salida, respecto al flujo de potencia. Esta inserción se puede observar en la figura 6.9.

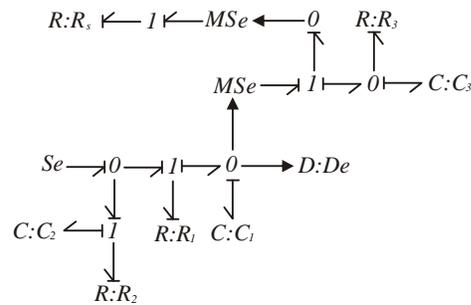


Figura 6.9: Sistema con bloques co , $c\bar{o}$ y $\bar{c}o$.

En la figura 6.9 el modo formado por los elementos R_3 y C_3 pertenece a un bloque no controlable debido al nodo con pérdida de controlabilidad que sigue a la fuente modulada. Además, debido a su ubicación, se puede ver que es imposible establecer una conexión causal entre el elemento C_2 y la salida del sistema. En términos de conexiones causales, el elemento C_2 no es controlable ni observable.

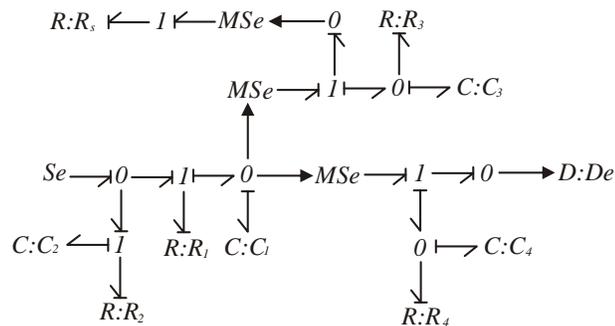


Figura 6.10: Sistema lineal que incluye los cuatro subsistemas involucrados en una forma canónica descompuesta.

El paso 4 del procedimiento propone finalmente incluir un subsistema que sea observable,

pero no controlable. Esto se realiza en el presente ejemplo agregando otro bloque no controlable, pero ahora situado antes de la salida determinada por el detector de esfuerzo De , obsérvese la figura 6.10

El modelo en Bond Graph de la figura 6.10 incluye a los cuatro subsistemas que pueden aparecer en una forma canónica descompuesta. Para efectos de simplicidad, se asume que las ganancias de las tres fuentes moduladas es unitaria.

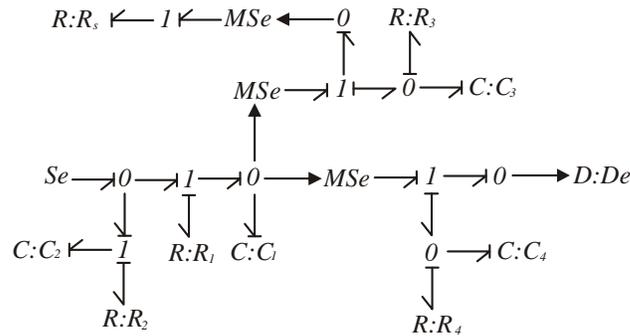


Figura 6.11: Modelo BGD del modelo de la figura 6.10.

En la figura 6.11 se puede observar el BGD del sistema. Todos los elementos dinámicos aceptan causalidad derivativa, por lo que de acuerdo a la parte (b) de los Teoremas 4 y 5, los rangos estructurales $n - t_s$ y $n - t_d$ son ambos $n = 4$ y las características estructurales de controlabilidad y observabilidad del sistema quedan determinadas por la parte (a) de esos Teoremas, es decir, por las trayectorias causales exclusivamente.

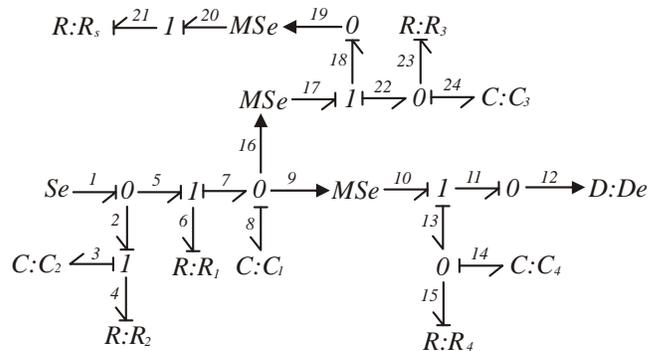


Figura 6.12: BGI de un sistema lineal de cuarto orden.

Para probar matemáticamente que el sistema está conformado por los cuatro subsistemas mencionados, enseguida se procede a obtener la ecuación de estado del sistema en forma canónica descompuesta. En la figura 6.12 se ha vuelto a colocar al modelo de la figura 6.10, y los bonds se han enumerado para efectos de obtener la matriz de estructura de unión y la ecuación de estado.

De acuerdo al Procedimiento 7, el orden requerido en el vector de estados para obtener directamente la ecuación de estado en forma canónica descompuesta es:

$$x = \begin{bmatrix} q_3 & q_8 & q_{24} & q_{14} \end{bmatrix}^T$$

de tal forma que

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} f_3 & f_8 & f_{24} & f_{14} \end{bmatrix}^T$$

y

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{C_2}, \frac{1}{C_1}, \frac{1}{C_3}, \frac{1}{C_4} \right\}$$

El vector D_{in} se selecciona arbitrariamente como:

$$D_{in} = \begin{bmatrix} e_4 & e_6 & e_{23} & e_{21} & e_{15} \end{bmatrix}^T$$

por lo que:

$$D_{out} = \begin{bmatrix} f_4 & f_6 & f_{23} & f_{21} & f_{15} \end{bmatrix}^T$$

y

$$L = \text{diag} \left\{ \frac{1}{R_2}, \frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_3}, \frac{1}{R_s}, \frac{1}{R_4} \right\}$$

La entrada y la salida la constituyen, respectivamente:

$$u = e_1$$

$$y = e_{12}$$

Con el orden de los vectores clave arriba dados, las relaciones constitutivas se pueden determinar como:

$$f_3 = f_4$$

$$f_8 = f_6$$

$$f_{24} = -f_{23}$$

$$f_{14} = -f_{15}$$

$$e_4 = e_1 - e_3$$

$$e_6 = e_1 - e_8$$

$$\begin{aligned}
e_{23} &= e_{24} \\
e_{21} &= e_8 - e_{24} \\
e_{15} &= e_{14} \\
e_{12} &= e_8 - e_{14}
\end{aligned}$$

De acuerdo a las relaciones constitutivas previas y a (2.13), la matriz S queda determinada como:

$$S = \left[\begin{array}{cccc|cccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
- & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
- & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right]$$

Mediante (2.17), (2.18), (2.19) y (2.20) es posible obtener la ecuación de estado del sistema como:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_3 C_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_4 C_4} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & -\frac{1}{C_4} \end{bmatrix} x \quad (6.2)$$

La ecuación de estado descrita por (6.1) y (6.2) exhibe la misma forma descrita por (4.6) y (4.7), que corresponde a la forma general de una descomposición canónica. Se puede concluir que es correcto el acomodo inicial de las variables de estado dentro de los cuatro subconjuntos correspondientes a la forma canónica descompuesta, y por tanto, cada variable de estado exhibe las características de observabilidad y/o controlabilidad deseadas descritas antes y durante la construcción del modelo.

Como se pudo observar en las tres secciones anteriores, la propiedad de desacoplamiento puede permitir colocar fuentes moduladas en sitios estratégicos a fin de cancelar la acción

de fuentes de perturbación sobre algún elemento dinámico en particular. Esta técnica y otra referente a la cancelación de perturbaciones mediante nodos con pérdida de controlabilidad se proponen en la siguiente sección.

6.5. Desviación de perturbaciones mediante nodos no controlables y subsistemas desacoplados.

6.5.1. Desviación de perturbaciones mediante nodos no controlables

Para desviar la acción de perturbaciones sobre algún(os) elemento(s) dinámico(s) mediante el empleo nodos no controlables, es necesario modificar el modelo en Bond Graph introduciendo uno de estos nodos en un sitio estratégico de tal forma que su inclusión determine que la fuente de perturbación no encuentre una trayectoria causal por la cual conectarse causalmente al elemento dinámico en cuestión. El siguiente procedimiento resume esta metodología.

Procedimiento 9

Para cancelar el efecto de perturbaciones en elementos dinámicos mediante nodos no controlables.

- 1.- Identificar la fuente de control, la fuente de perturbación y el elemento dinámico que se desea aislar en el modelo en Bond Graph;
- 2.- Introducir un bond activo que imponga un flujo cero o bien, un esfuerzo cero en algún bond que conecte causalmente la fuente de perturbación con el elemento dinámico, siguiendo los acomodos causales mostrados en las figuras 6.2 y 6.4, de modo que el elemento dinámico quede causalmente aislado;
- 3.- Asegurar alguna trayectoria para la disipación de la energía de la fuente de perturbación, mediante un elemento resistivo;
- 4.- Si la inclusión del nodo con pérdida de controlabilidad inhibe una conexión causal entre la fuente de control y el elemento dinámico, elaborar una nueva trayectoria mediante un bond activo, que lleve la señal de alguna parte del sistema que si esté conectada causalmente con la fuente de control hacia la parte que ha quedado aislada.
- 5.- Si algún elemento resistivo ha quedado fuera del bloque aislado, sustituirle con otro de características similares, a fin de no alterar demasiado la dinámica del sistema.

Para mostrar cualitativamente el desarrollo del procedimiento anterior, véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo 14

Considérese el modelo en Bond Graph en causalidad integral que aparece en la figura 6.13.

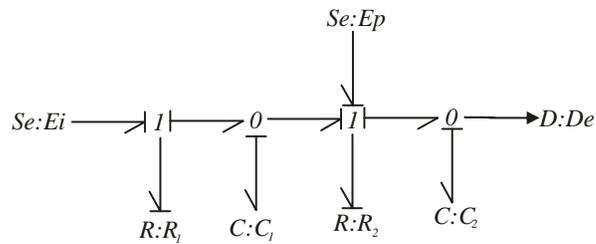


Figura 6.13: BGI de un modelo de segundo orden.

En el BGI de la figura 6.13, E_i es la entrada y E_p es una fuente de perturbación. Un análisis de trayectorias causales permite determinar que la fuente de perturbación E_p está causalmente conectada a ambos elementos dinámicos C_1 y C_2 .

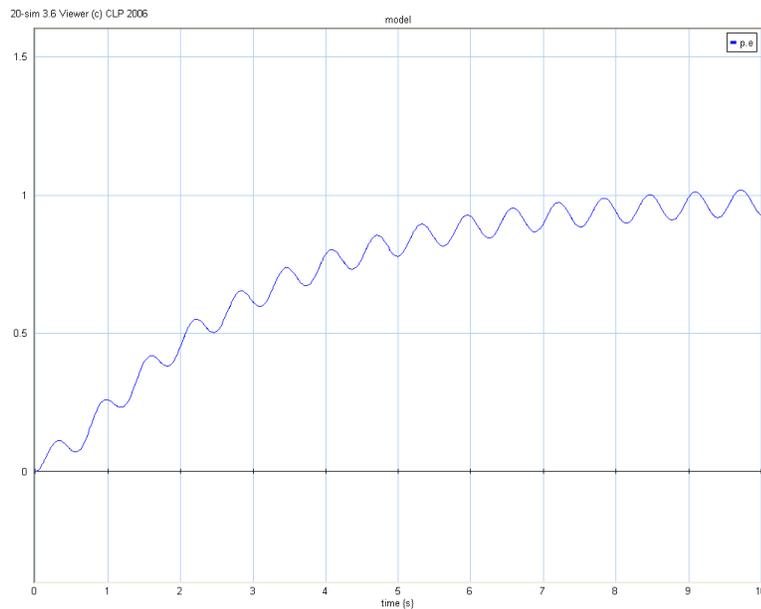


Figura 6.14: Respuesta al escalón del esfuerzo de salida en el elemento C_2 en la figura 6.13.

En la figura 6.14 aparece la respuesta al escalón en 20-sim de la variable de esfuerzo en

el elemento C_2 . Se observa como la fuente de perturbación (simulada mediante una señal senoidal de amplitud unitaria y $\omega = 5\text{rad/seg}$) altera a ésta variable de estado. Los valores de los elementos son unitarios para efectos de simplicidad.

Siguiendo el procedimiento, en la figura 6.15 se ha introducido un bond activo que impone un flujo cero en la unión 1 a la que se encuentra conectada la fuente de perturbación E_p de la figura 6.13.

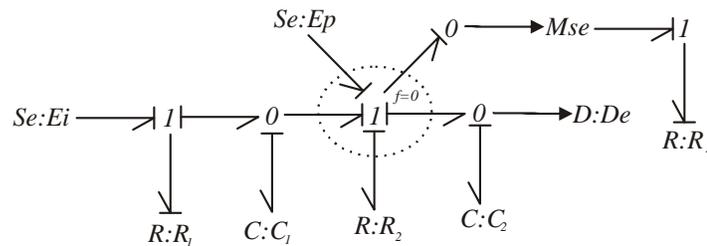


Figura 6.15: Versión manipulada del modelo de la figura 6.13.

Obsérvese en la figura 6.15 que ante ésta imposición de flujo cero en la unión 1 mencionada, causalmente ocurre una pérdida total del alcance de la fuente de perturbación a los dos elementos dinámicos, ya que no es posible establecer trayectorias causales que vinculen a E_p con C_1 y C_2 . El elemento resistivo R_s se ha colocado con la finalidad de disipar la energía de la fuente de perturbación de acuerdo al procedimiento. Un efecto adverso en la inclusión de nodos con pérdida de controlabilidad, es que también se puede perder la controlabilidad de un elemento dinámico dado por parte de la fuente de control, como en el caso de este ejemplo. Si se observa la figura 6.15, la fuente de control tampoco alcanza mediante ninguna trayectoria causal al elemento dinámico C_2 . Se hace necesario entonces, como lo indica el procedimiento, agregar una trayectoria adicional que permita llevar la señal de control al elemento dinámico en cuestión.

En la figura 6.16 se muestra el modelo en el que se ha llevado una señal de control a la rama causalmente aislada, mediante la inclusión de una fuente modulada.

De acuerdo al procedimiento, en la figura 6.16, el elemento resistivo R_3 se ha colocado para no alterar demasiado a la dinámica original del sistema completo y su valor es el mismo que R_2 .

Un nuevo análisis de trayectorias causales permite notar que este modelo admite conexiones

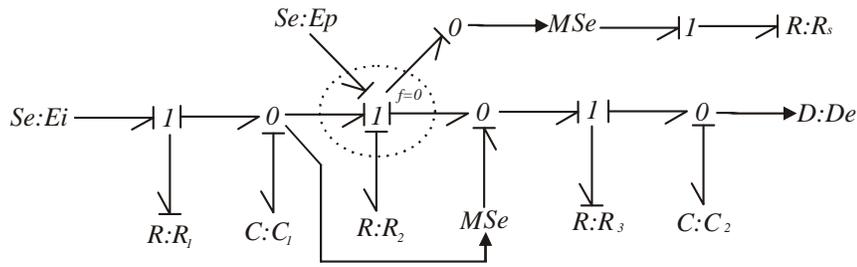


Figura 6.16: Creación de una nueva trayectoria causal para controlar la variable de estado de salida.

causales entre la fuente de control E_i y los elementos dinámicos C_1 y C_2 . Así mismo, se mantiene la imposibilidad de conexiones causales entre la fuente de perturbación E_p y dichos elementos dinámicos.

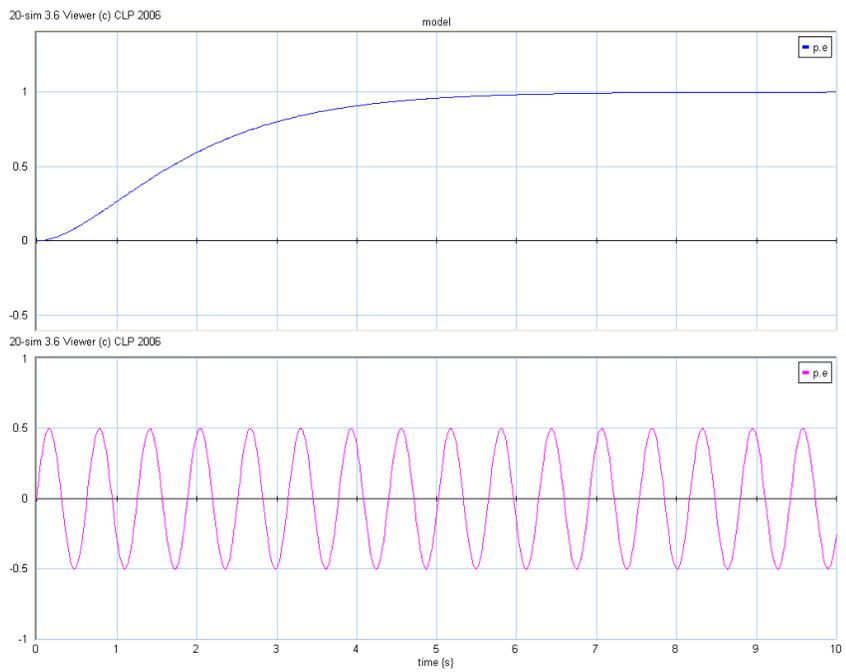


Figura 6.17: Respuesta al escalón en dos elementos del modelo de la figura 6.16.

En la figura 6.17 se muestra la respuesta al escalón de la variable de salida y la variable disipativa e_{R_s} ante la simulación del sistema completo en 20-SIM

En el recuadro superior de la figura 6.17 aparece la respuesta de la variable de esfuerzo en el elemento capacitivo C_2 , observándose como la alteración producida por la fuente de perturbación es nula. En el recuadro inferior de la figura 6.17 se muestra la variable de esfuerzo del elemento resistivo R_s . Se observa que la totalidad del esfuerzo producido por la fuente de perturbación queda disipado por este elemento resistivo.

Para fines de realizar un análisis matemático del sistema original (figura 6.13) y del sistema modificado (figura 6.16) y comparar sus propiedades de controlabilidad desde el punto de vista de la fuente de perturbación E_p se construyen las ecuaciones de estado de ambos sistemas con la fuente de control E_i pacificada de modo que los sistemas contengan una entrada y dos salidas (las variables de estado q_{C_1} y q_{C_2}). La construcción de éstos modelos matemáticos se realiza siguiendo la metodología para la obtención de la ecuación de estado a partir del modelo en Bond Graph. La ecuación de estructura de unión del modelo original es:

$$\begin{bmatrix} f_{C_1} \\ f_{C_2} \\ e_{R_1} \\ e_{R_2} \\ e_{C_2} \\ e_{C_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{C_1} \\ e_{C_2} \\ f_{R_1} \\ f_{R_2} \\ e_{E_p} \end{bmatrix}$$

a partir de esta ecuación de estructura de unión y mediante (2.17), (2.18), (2.19) y (2.20) la ecuación de estado del sistema es:

$$\begin{bmatrix} f_{C_1} \\ f_{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R_1-R_2}{R_1 R_2 C_1} & \frac{1}{R_2 C_2} \\ \frac{1}{R_2 C_1} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{C_1} \\ q_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} e_{E_p}$$

$$\begin{bmatrix} e_{C_2} \\ e_{C_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{C_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{C_1} \\ q_{C_2} \end{bmatrix}$$

la matriz de controlabilidad del sistema está dada por:

$$R_k = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{C_2 R_2^2} - \frac{1}{C_1 R_1 R_2^2} (-R_1 - R_2) \\ \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{C_1 R_2^2} - \frac{1}{C_2 R_2^2} \end{bmatrix}$$

y su rango es: $rank(R_k) = 2$, por lo que se puede asegurar que la entrada de perturbación alcanza a las dos variables de estado.

Un procedimiento similar se aplica sobre el modelo modificado (figura 6.16), obteniéndose

la siguiente ecuación de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_{C_1} \\ \dot{q}_{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ \frac{1}{R_3 C_1} & -\frac{1}{R_3 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{C_1} \\ q_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_{E_p}$$

$$\begin{bmatrix} e_{C_1} \\ e_{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{C_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{C_1} \\ q_{C_2} \end{bmatrix}$$

Evidentemente, debido a que la matriz B es cero, la matriz de controlabilidad exhibirá un rango cero y el sistema no tiene ningún elemento dinámico que pueda ser alcanzado por la fuente de perturbación. En las siguientes dos figuras se muestra la respuesta del sistema al escalón en MATLAB ante la entrada de perturbación en el sistema original (figura 6.18) y en el sistema modificado (figura 6.19). Tal como se esperaba, la acción de la fuente de perturbación sobre los elementos dinámicos es nula cuando el sistema ha sido modificado.

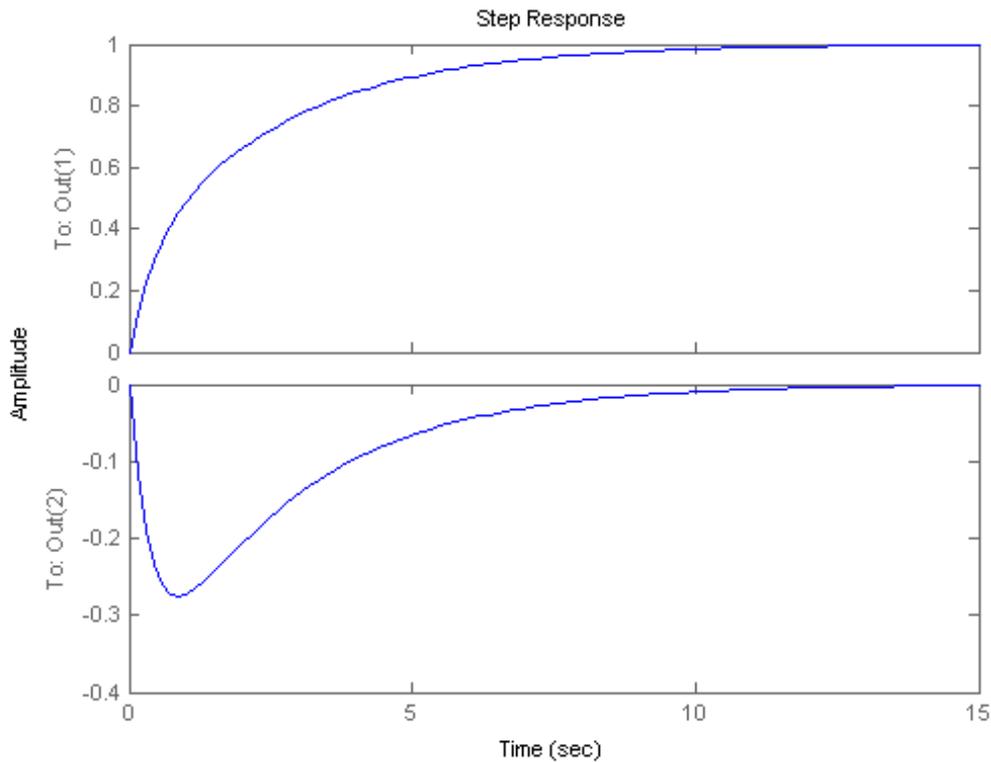


Figura 6.18: Respuesta al escalón de las variables de estado del sistema original.

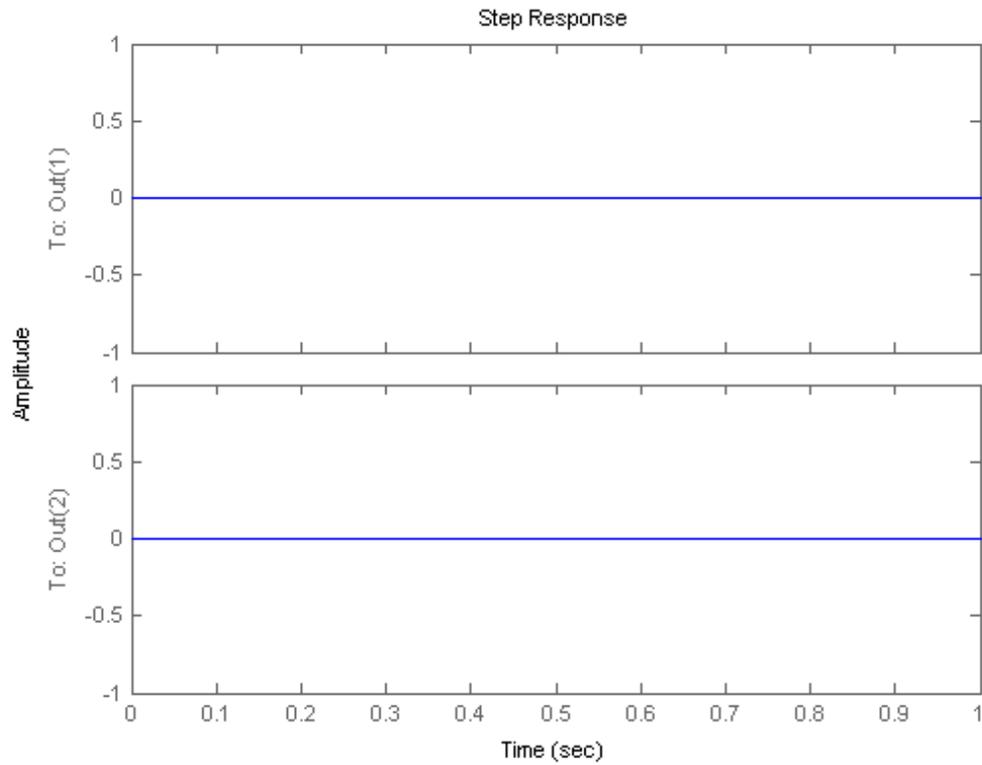


Figura 6.19: Respuesta al escalón de las variables de estado del sistema modificado.

6.5.2. Desviación de perturbaciones mediante subsistemas desacoplados

La inclusión de fuentes moduladas puede llevar al desacoplamiento entre dos o más subsistemas de un sistema completo. Esta característica puede ser utilizada en el problema de desviación de perturbaciones, ya que el desacoplamiento de subsistemas conlleva ciertas características que pueden romper trayectorias causales. En el siguiente procedimiento se proponen los pasos para anular la acción de una fuente de perturbación sobre un elemento dinámico dado, mediante la inclusión de subsistemas desacoplados.

Procedimiento 10

Para la desviación de perturbaciones con subsistemas desacoplados.

- 1.- Identificar la fuente de control, la fuente de perturbación y el elemento dinámico que se quiere aislar causalmente;
- 2.- Introducir una fuente modulada estratégicamente de modo que altere la trayectoria causal de la fuente de perturbación hacia el elemento dinámico.
- 3.- Introducir elementos resistivos para la disipación de la energía producida por la fuente de perturbación;
- 4.- Introducir nuevos elementos resistivos si es necesario, para suplir elementos que hayan quedado cancelados por la inclusión de la fuente a fin de no alterar demasiado la dinámica del sistema completo.

Para realizar una inspección cualitativa del porcedimiento previo, véase el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15

Considérese el BGI de la figura 6.20.

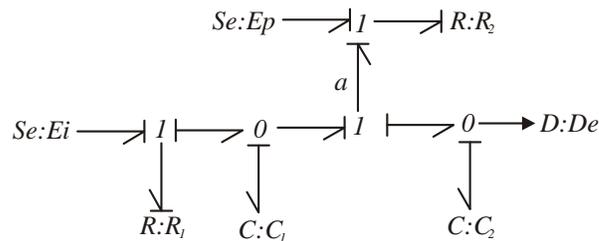


Figura 6.20: BGI de un sistema de segundo orden con una fuente de perturbación incluida.

El modelo que aparece en la figura 6.20 es el mismo que el mostrado en la figura 6.13 y el arreglo del elemento R_2 ha sido ligeramente modificado para fines de mostrar esta técnica, aunque el sistema es completamente equivalente. Del ejemplo 14 se sabe que la fuente de perturbación E_p está causalmente conectada con ambos elementos dinámicos y los altera a los dos. En la figura 6.20 se ha señalado también un bond en particular, que es el bond marcado con a y es que sobre ese bond se insertará la fuente modulada que llevará al desacoplo de sistemas. En la figura 6.21 aparece el modelo con la correspondiente inserción de la fuente modulada.

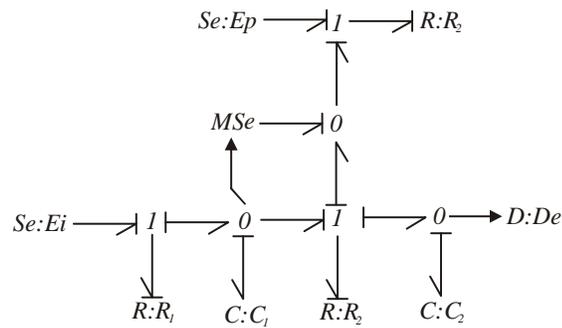


Figura 6.21: Desacoplamiento del modelo de la figura 6.20 mediante una fuente modal.

El elemento resistivo R_2 se ha colocado en forma repetida para intentar mantener la dinámica del sistema completo en los términos originales.

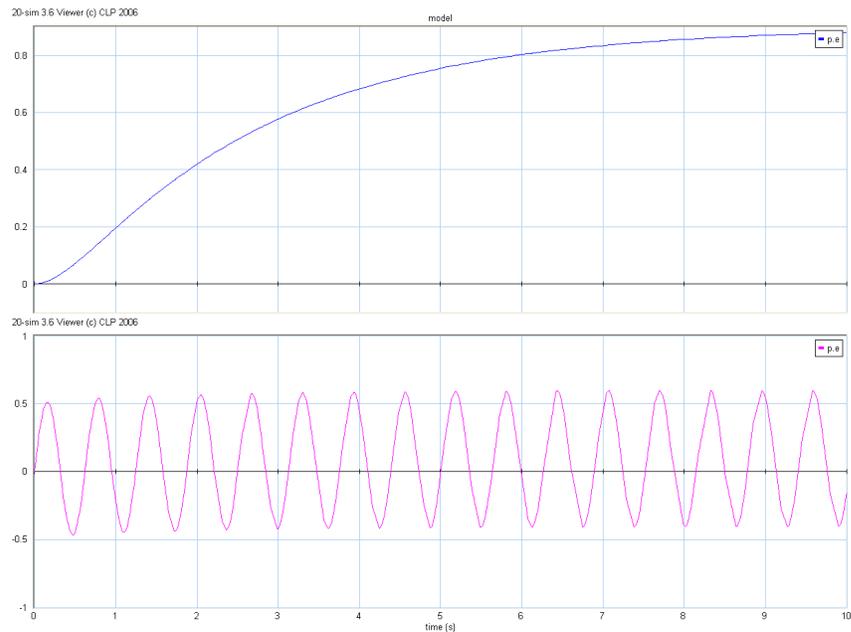


Figura 6.22: Respuesta al escalón en dos elementos del modelo de la figura 6.21.

En este caso, la fuente controlada tiene una ganancia diferente de uno, para evitar que en suma con la variable de esfuerzo en el elemento C_1 se anule la potencia hacia el elemento C_2 .

En el recuadro superior de la figura 6.22 se observa la respuesta al escalón en 20-sim de la variable de esfuerzo en el elemento C_4 . Nótese que la acción de la perturbación ha desaparecido, más aún, en el recuadro inferior de la figura 6.22, se observa la variable de esfuerzo del elemento resistivo R_2 , pudiéndose notar que éste consume toda la potencia suministrada por la fuente de perturbación que ha sido modelada con una señal senoidal de amplitud unitaria y $\omega = 3\text{rad/seg}$. Los parámetros de los elementos son unitarios.

En el siguiente ejemplo se analiza un sistema de suspensión y cómo la técnica propuesta de desviación de perturbaciones mediante sistemas desacoplados puede eliminar el efecto de las vibraciones en la masa de la carrocería.

Ejemplo 16

En la figura 6.23 se muestra una versión simplificada del modelo en Bond Graph de una suspensión automotriz representado en la figura 2.22.

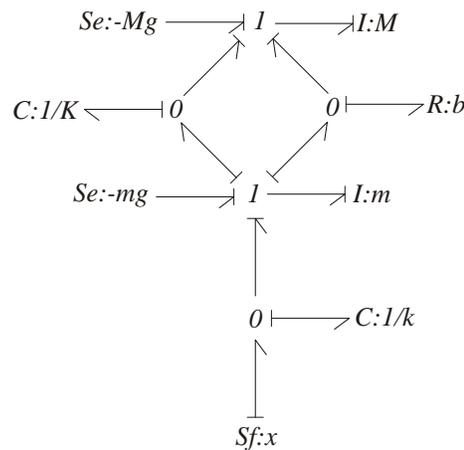


Figura 6.23: Modelo en Bond Graph de un sistema de suspensión.

En el modelo de la figura 6.23 no existe ninguna entrada de control y se asume que la entrada de flujo $Sf : x$ es la entrada de perturbación. Para este caso en particular se encuentra que se puede desacoplar el subsistema formado por la masa m y el resorte k del subsistema formado por la masa M , el resorte K y el amortiguador b . Para ello se puede insertar una fuente modulada de flujo en conjunto con un elemento disipativo, tal como se aprecia en la figura 6.24.

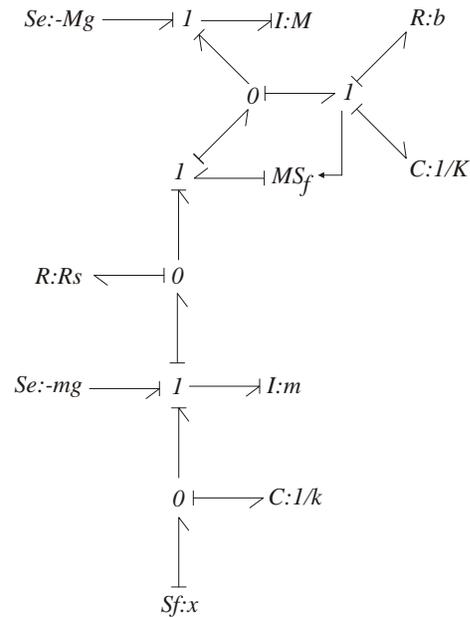


Figura 6.24: Modelo modificado para desacoplar subsistemas.

En la figura 6.24 se ha realizado la simplificación del arreglo de $R : b$ con $C : 1/K$ a una forma equivalente [3], y de la velocidad a la que se mueven b y K (unión 1) se ha tomado la señal de control para modular a la fuente de flujo. Un análisis de trayectorias causales permite concluir que resulta imposible establecer una conexión causal entre la fuente de perturbación $Sf : x$ y la masa de la carrocería M . Para fines de mostrar un vistazo cuantitativo a la operación de éste sistema, en la figura 6.25 se muestran las respuestas en 20-SIM de varios elementos clave ante la entrada $Sf : x$ que se ha modelado con una señal senoidal de amplitud unitaria y $\omega = 1 \text{ rad/seg}$, que simula un entrada vibratoria. Los elementos pasivos del sistema tienen valores unitarios y las fuentes de gravedad tienen valor constante a 1,5.

En la figura 6.25 la primer curva (superior) corresponde a la velocidad de la masa M de la carrocería. Obsérvese que esta velocidad se mantiene en cero y no es afectada por la entrada x . La segunda curva corresponde a la velocidad de la fuente modulada MSf cuya ganancia es unitaria, notándose que exhibe un periodo transitorio que desaparece y entra en un estado de equilibrio de cero. La tercera curva muestra la respuesta de la fuerza de la fuente MSf . La cuarta curva es la velocidad en la masa de la rueda y se nota que la perturbación si la alcanza, toda vez que éste subsistema no ha quedado desacoplado de

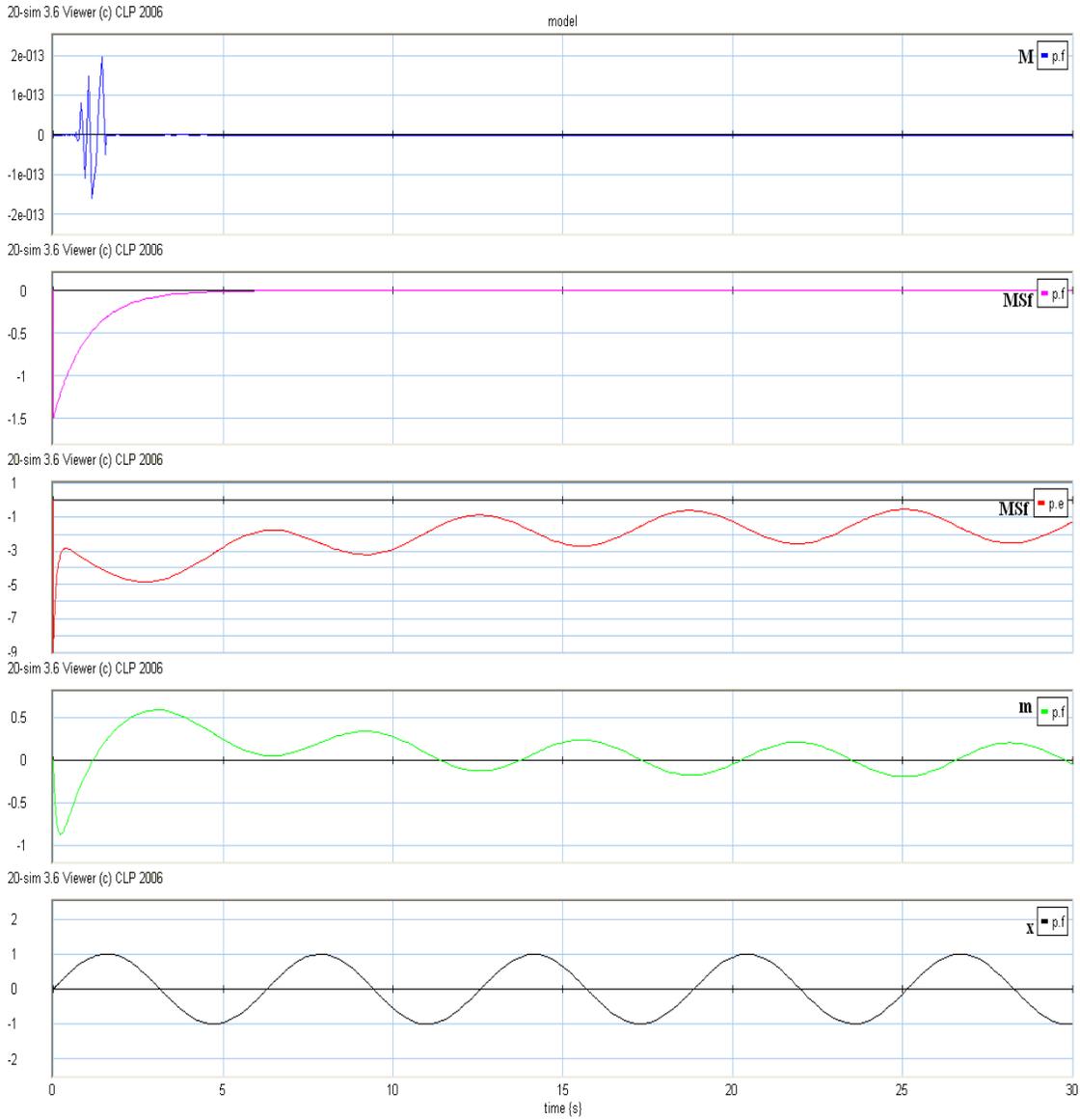


Figura 6.25: Algunas respuestas simuladas del sistema de la figura 6.24.

la fuente MSf . La quinta curva (inferior) es la entrada de velocidad x . En un potencial experimento futuro se pueden realizar pruebas mediante un pistón neumático que puede hacer de fuente modulada y revisar resultados reales. Si bien es de esperar que la velocidad de la masa de la carrocería no será de cero en todo instante, debido a la inexistencia de una fuente modulada de flujo ideal en sistemas mecánicos, si es muy posible que el efecto de la velocidad de entrada al sistema se vea drásticamente disminuido con respecto a un sistema de suspensión convencional.

Capítulo 7

Conclusiones y trabajos futuros

7.1. Conclusiones

Se ha presentado una introducción detallada al lenguaje de modelado en Bond Graph. Esta introducción ha incursionado en los aspectos básicos del lenguaje, tales como la definición del bond de potencia y su rol en el problema de la transferencia de potencia entre elementos. Se ha revisado también la misma definición generalizada de los elementos de sistemas en Bond Graph. Estos elementos pueden ser encontrados en diversos dominios físicos. Especial énfasis se ha hecho en la definición del bond activo y las fuentes moduladas, toda vez que su utilización dentro de las propuestas expuestas en este documento reviste gran importancia. Así mismo, se ha realizado una exposición de la metodología necesaria para contruir un modelo en Bond Graph a partir de un sistema físico determinado, el cual puede provenir de diferentes dominios y se ha señalado esa característica como una de las propiedades positivas de este lenguaje.

Por otra parte, se ha revisado el importante concepto de la causalidad y sus características inherentes, tales como el análisis de trayectorias causales y su rol en la determinación de controlabilidad y observabilidad de sistemas LTI MIMO. En este tópico se cubrió desde la misma definición, hasta la asignación de causalidad a modelos en Bond Graph acasuales en los dos esquemas posibles: causalidad integral predefinida (modelos BGI) y causalidad derivativa predefinida (modelos BGD).

Se ha hecho una revisión detallada de la importante relación entre un modelo en Bond Graph y su contraparte matemática en forma de ecuación de estado. Para ello se han revisado los conceptos concernientes a los vectores clave y la ecuación de estructura de unión y como a partir de éstos se puede obtener la ecuación de estado del sistema bajo análisis.

El análisis de controlabilidad y observabilidad son piezas fundamentales en el desarrollo de las propuestas expuestas en este documento y se les ha revisado desde dos perspectivas distintas: a partir del análisis tradicional efectuado basándose en la ecuación de estado y las matrices de controlabilidad y de observabilidad; y desde el enfoque estructural desarrollado en Bond Graph, el cual se basa principalmente en el análisis de las trayectorias causales. Se ha revisado la metodología clásica para la obtención de la forma canónica descompuesta de un sistema LTI MIMO. Esta metodología, introducida por Kalman, se basa primordialmente en el cálculo del subespacio controlable y del subespacio observable y sus respectivos complementos.

Se ha propuesto una metodología para la obtención de la forma canónica descompuesta de sistemas LTI MIMO modelados en Bond Graph. En esta propuesta se ha hecho especial énfasis en la revisión de trayectorias causales como herramienta principal de análisis. El concepto de trayectoria causal unidireccional ha sido propuesto. Este concepto establece que puede existir una conexión causal entre un elemento A y otro B de modo que A afecta al estado de B, pero A es insensible ante los cambios de B. Para el establecimiento de éste concepto, las definiciones del bond activo y las fuentes moduladas han sido fundamentales. El objetivo principal al comienzo de la investigación concerniente al presente documento era encontrar una metodología para realizar la descomposición canónica de sistemas LTI MIMO modelados en Bond Graph. Sin embargo, durante los trabajos de investigación se descubrieron algunas propiedades que dieron lugar a nuevas propuestas, de las cuales el análisis estructural de cancelación de perturbaciones es la más notable. Se han propuesto dos metodologías que pueden auxiliar primordialmente en el proceso de diseño de sistemas para cancelar perturbaciones. Estas metodologías conciernen a la cancelación de perturbaciones mediante nodos de ruptura y mediante desacoplamiento de subsistemas. Se enfatiza que estas metodologías pueden ser de especial utilidad en el proceso de diseño, debido a que para su implementación es necesario tener acceso a la estructura del sistema bajo análisis, y su aplicación producirá cambios más o menos notables en la dinámica de dicho sistema. Sin embargo, estas metodologías permiten mantener la característica de la controlabilidad individual de cada elemento dinámico dentro de un esquema arbitrariamente seleccionado. Adicionalmente se ha propuesto una metodología para la construcción arbitraria de modelos que involucren estructuralmente a los cuatro subsistemas concernientes a una forma canónica descompuesta. Esta metodología se ha incluido debido a que se muestra como un primer paso hacia el tratamiento estructural de la cancelación de perturbaciones mencionada en el párrafo anterior. Además, dicha metodología permite la construcción de modelos

con las características citadas para los fines de análisis que en trabajos futuros se estimen convenientes.

7.2. Trabajos futuros

Durante el periodo de investigación se revisaron dos diferentes enfoques para la determinación estructural de controlabilidad y observabilidad a partir de un modelo en Bond Graph: uno relacionado con el gráfico en sí y las trayectorias causales y que fue el que se empleó durante las propuestas expuestas en este documento; y otro que deduce dichas características de controlabilidad y observabilidad a partir de la ecuación de estructura de unión. Este segundo enfoque se describe en [4], y es válido para sistemas conservativos de energía. En este documento, sin embargo, al incluir bonds activos y fuentes moduladas, la propiedad de conservación se pierde y el enfoque resulta erróneo tal y como se le describe en [4]. No obstante, parece ser que un análisis detallado puede llevar a conclusiones similares para sistemas no conservativos, siempre y cuando se mantengan las consideraciones pertinentes.

Otro tema que es motivo de interés consiste en la determinación de mapas de controlabilidad y observabilidad en función de los valores de los parámetros de un sistema dado. Si bien es cierto que un sistema estructuralmente controlable/observable mantiene las propiedades de controlabilidad/observabilidad para casi todos los valores de sus parámetros, es sabido que ante algunas combinaciones de valores éstas características se pueden perder. De gran utilidad sería un resultado concerniente al comportamiento de dichos valores y los rangos en los que éstos conducen a la pérdida de las propiedades estructurales de controlabilidad/observabilidad, sobre todo si dicho resultado se fundamentara y mantuviera las características de determinación directa que suele proporcionar la metodología de Bond Graph.

Evidentemente un buen trabajo futuro consiste en la aplicación a algún tipo de sistema físico de las técnicas propuestas en este documento para la cancelación de perturbaciones. De especial interés puede ser el caso del sistema de suspensión automotriz visto aquí, aunque desde luego, considerando un modelo más completo y con fines de realizar un prototipo físico

En la misma línea, el análisis de puentes y edificios y su resistencia a terremotos podría verse beneficiado con una adecuada aplicación de las metodologías propuestas.

Apéndice A

**Artículo publicado en la
Multiconferencia Internacional de
Modelado y Simulación 2007.**

Canonical decomposition of a LTI MIMO system: A bond graph approach

Noé Villa-Villaseñor¹ and Gilberto González-Ávalos². University of Michoacán, Faculty of Electrical Engineering³.

Abstract—A procedure to construct Bond Graph models that represent a canonical decomposed form of a LTI MIMO system is presented. In order to verify the canonical decomposition, a simple procedure to obtain a mathematical model of the system based on a Bond Graph model is proposed.

Keywords – Bond graph modeling, controllability, observability, canonical decomposition theorem, minimal realization.

I. INTRODUCTION

Bond graph is a highly structured modelling technique that allows to analyze different kinds of physical systems in an unique way determined by a basis of unified description [7]. This technique allows the determination of structural controllability and structural observability, in a simple and direct way by means of reviewing the interactions of the dynamic elements and the causal paths they determine [1], [2].

It is known that the input-output relationship of a LTI MIMO dynamic system is determined by the modes that are both controllable and observable [8], but states are not always controllable and/or observable. The input-output description is sometimes insufficient to describe a system. The system models can be manipulated in order to led them to a canonical decomposed form that shows four subsystems in an isolated way. One of these four subsystems is precisely the corresponding to controllable and observable modes [3], and it describes the *minimal realization* of the system. This decomposed form brings a lot of information that is useful to establishing a suitable control law.

In this paper, a methodology to obtain the canonical decomposed form of a LTI MIMO dynamic system represented by its bond graph model is proposed. The decomposed state equation and the required permutation matrix are obtained in a direct way using the structural controllability/observability characteristics, obtained by inspection of the bond graph model. Structural controllability/observability is related with the structure of the system, this is, it do not depend upon the numerical values of the components of the system [1]. In [10] is given a methodology to obtain the controllability and observability subspaces and the main analysis concern to energy-conservative elements. This paper partially treat

problem of including active bonds, which led systems to be non energy conservatives. Inclusion of such non conservative properties can help to design systems including (especially) non-controllable elements in a deliberated way. This is useful in the perturbation rejection problem, since the capacity of a (perturbation) source of reach a determined state variable can be removed by the inclusion of a non controllable block. Also if further analysis is desired, a guideline to construct models including the four possible subsystems of a canonical form is proposed.

This paper is organized as follows: in Section II, the basic aspects of bond graph modelling are reviewed. In Section III, causality and causal paths are mentioned. In Section IV, is performed a reviewing about the properties of controllability and observability and how they can be determined from the bond graph model. In Section V, the canonical decomposition of LTI MIMO dynamic systems, and the inherent arrangement of state variables is studied. In Section VI, one of the main results of this paper is described; state variables can be arranged as required to perform the canonical decomposition by direct inspection of the bond graph. Construction of the junction structure matrix with the state variables arranged in such way will led to a state equation that will be in the canonical decomposed form. In Section VII, a guideline to construct models involving the four possible subsystems is given. Finally, the conclusions are given in Section VIII.

II. KEY VECTORS IN MULTIPORT SYSTEMS

A basis for a bond graph model are the key vectors. Consider a LTI MIMO system in figure 1.

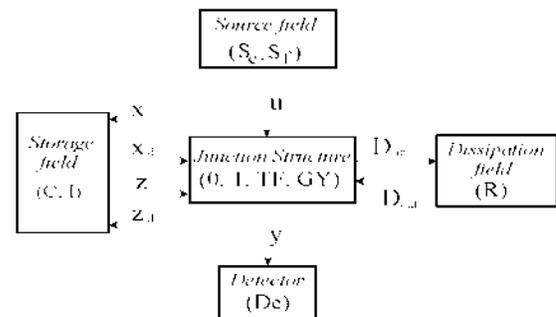


Fig. 1. Key vectors.

In figure 1, the key vectors are formed as follows: (S_e, S_f) is the sources field; (C, I) is the storage field; (R) is

¹vilaslord@hotmail.com

²gilmichga@yahoo.com.mx. Under Project EXB-114

³58030 Morelia, Michoacán, México

the dissipative field; (D_e) is the field of detectors; finally, $(0, 1, TF, GY)$ are the elements of the junction structure. The vectors x and x_d represent the states of the system at integral and derivative causality, respectively. z denotes the co-energy vector and z_d the derivative co-energy vector. The vectors u and y are the input and the output, respectively. D_{in} and D_{out} show the relationships between efforts and flows in the dissipative field. The relationships between the storage and dissipative fields are given by,

$$z = Fx \quad (1)$$

$$D_{out} = LD_{in} \quad (2)$$

$$z_d = F_d x_d \quad (3)$$

Also the relationships of the junction structure are specified by,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} \quad (4)$$

where the matrix of junction structure S is given by,

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$z_d = -S_{14}^T z$$

Some submatrices of S show the next properties in the case of energy conservative systems [4]:

- 1) S_{11} and S_{22} are antisymmetric matrices
- 2) S_{21} is the negative transpose of S_{12}

By employing the junction structure matrix S and the relationships between the different fields it is possible to write the model as a space-state equation of the form

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (6)$$

$$y = Cx + Du \quad (7)$$

with

$$A = E^{-1}(S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad (8)$$

$$B = E^{-1}(S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (9)$$

$$C = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad (10)$$

$$D = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (11)$$

where

$$E = I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^TF \quad (12)$$

$$M = (I - LS_{22})^{-1}L \quad (13)$$

The dynamic elements being placed in vectors x and x_d are selected depending on its causality assignment. Other important role of causality is to determine interactions between dynamic elements, sources and detectors, this is reviewed in the next section.

III. CAUSALITY AND CAUSAL PATHS

One of the most powerful characteristics of bond graph is that a lot of information can be retrieved without writing any equations, just by analyzing the causality. Physical systems are full of interacting variable pairs [7]. If two elements are bonded, the effort causes one element to respond with flow, while the flow causes the first element to respond with effort. Thus, the cause-effect relationships for efforts and flows are represented in opposite directions.

A detailed description of causal paths can be found in [4]. There are two kinds of causal paths. The causal path is simple if it can be crossed by following always the same variable and the causal path is mixed if it is necessary to perform a variable change while the graphic is crossed. In addition, two elements P_1 and P_2 , belonging to the set $\{R, C, I, S_e, S_f, D_e, D_f\}$ are *causally connected* if the input variable of one is influenced by the output variable of the other. Finally, a forward path is a causal connection between a source and a detector.

By using information collected through causality, structural controllability/observability of a bond graph model can be determined. In the next section these properties are summarized.

IV. STRUCTURAL CONTROLLABILITY/OBSERVABILITY OF SYSTEMS REPRESENTED BY BOND GRAPHS

There exists a lot of information about controllability/observability of dynamic LTI MIMO systems in literature, for example [8] or [9]. The main analysis concerning to this problem resides on calculations of the controllability and observability matrices. The next two theorems are extracted from [8].

Theorem 1: The state equation (6) describing a LTI MIMO system of $n - th$ order is controllable iff the controllability matrix

$$R_k = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

has rank n .

Theorem 2: The state equation (7) is observable iff the observability matrix

$$W_o = [C^T \quad (CA)^T \quad (CA^2)^T \quad \dots \quad (CA^{n-1})^T]^T$$

has rank n .

The *controllable subspace* V_k is determined by,

$$V_k = Range \{R_k\}$$

and the complement of V_k such that they together span \mathbb{R}^n is $\overline{V_k}$, that is called the *non-controllable subspace*.

The *observable subspace* V_o can be determined by,

$$V_o = Range \{W_o^T\}$$

and its complement $\overline{V_o}$ is called the *non-observable subspace* [9].

It is possible to determine the structural observability/controllability in a bond graph without perform any matrix calculations, just by visual analysis of the graph [1], [2]. This is formalized with the next theorem.

Theorem 3: The system $[AB]$ described in (6) is structurally-state controllable iff

- 1) Every dynamic element in integral causality is causally connected with a source.
- 2) $struct - rank[AB] = n$

Theorem 4: The system $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ described in (7) is structurally-state observable iff

- 1) Every dynamic element in integral causality is causally connected with a detector
- 2) $struct - rank \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = n$

The structural rank of the matrices $[AB]$ and $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ can be obtained using the information of the bond graph model of the system. The next properties are shown:

Property 1: The structural rank of $[AB]$ is equal to:

- The rank of the matrix $[S_{11} \ S_{12} \ S_{13}]$
- $(n - t_s)$

where t_s is the number of dynamic elements which remain in integral causality when a derivative causality assignment is performed.

Property 2: The structural rank of $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ is equal to:

- The rank of the matrix $[S_{11}^T \ S_{21}^T \ S_{31}^T]^T$
- $(n - t_d)$

where t_d is the number of dynamic elements which remain in integral causality when a derivative causality assignment is performed.

In order to determine the correct values of t_s (resp. t_d) a dualization of sources (resp. detectors) could be required [2].

In the following section, the canonical decomposition theorem is reviewed.

V. CANONICAL DECOMPOSITION OF THE STATE EQUATION OF A LTI MIMO SYSTEM

The state equation of a LTI MIMO system can be decomposed in four different parts that bring information on the internal structure of such a system [8]. The next is a synthesis of the canonical decomposition theorem given in [3].

Consider the following procedure: Suppose that (A, B, C, D) are the matrices specifying the state-space model of order n given by (6) and (7) and suppose the transformation matrix

$$T = \begin{bmatrix} T_{r\bar{o}} & T_{r_o} & T_{\bar{r}o} & T_{\bar{r}o} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Where the submatrices are defined as follows:

- 1) The columns of $T_{r\bar{o}}$ form a basis for $V_k \cap \bar{V}_o$, the subspace that is both controllable and non-observable.
- 2) T_{r_o} is the complement of $T_{r\bar{o}}$ in the controllable subspace, such that $Range \{ [T_{r\bar{o}} \ T_{r_o}] \} = V_k$

- 3) $T_{\bar{r}o}$ is the complement of $T_{r\bar{o}}$ in the non observable subspace, such that $Range \{ [T_{r\bar{o}} \ T_{\bar{r}o}] \} = \bar{V}_o$
- 4) $T_{\bar{r}o}$ is the complement of $[T_{r\bar{o}} \ T_{r_o} \ T_{\bar{r}o}]$ to generate \mathbb{R}^n , from where it is possible to assure that T is non singular.

Now, perform a similitude transformation by using T , carrying out the mapping

$$(A, B, C, D) \rightarrow (T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D) = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$$

It is said that the system $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$ is a *canonical decomposed form* [3].

Theorem 5: The state space \mathbb{R}^n of any linear dynamic system represented by (6) and (7) can be decomposed in four parts, as can be accomplished by means of the previous procedure. According to this decomposition, the matrices \hat{A} , \hat{B} and \hat{C} are of the form:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{r\bar{o}} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{r_o} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{\bar{r}o} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{\bar{r}o} \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B_{r\bar{o}} \\ B_{r_o} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\hat{C} = [0 \ C_{r_o} \ 0 \ C_{\bar{r}o}]$$

In the decomposed system $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$, the subsystem $(A_{r_o}, B_{r_o}, C_{r_o}, D)$ is both reachable and observable, and then is the only one that can be identified by means of information on the input and the output. This can be clarified by analyzing figure 2 where the representation of system $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$ can be seen.

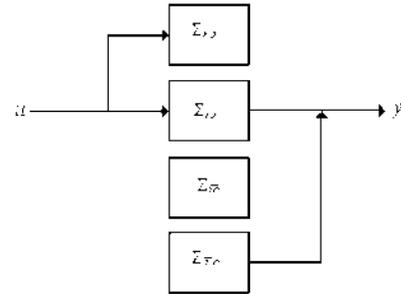


Fig 2. Canonical decomposition of a state-space dynamical system.

An equivalent but simpler analysis is performed in the next section.

VI. CANONICAL DECOMPOSITION BY A BOND GRAPH APPROACH

Bond graph brings tools of easy use for determining the structural controllability/observability characteristics, as has been defined in Theorems 3 and 4 of Section IV. The canonical decomposition is performed by ordering the state variables of the whole system trough a similitude transformation, allowing the formation of four subsystems, ordered in the same way

indicated in the previous section: controllable but non observable ($\Sigma_{r\bar{o}}$), controllable and observable (Σ_{ro}), non controllable nor observable ($\Sigma_{\bar{r}\bar{o}}$) and non controllable and observable ($\Sigma_{\bar{r}o}$). In this section, a graphical procedure to achieve the canonical decomposed form of a LTI MIMO dynamic system is presented. No elements in derivative causality are considered, because such elements are non controllable nor observable. In order to perform a graphical decomposition, structural controllability/observability determination from the bond graph model is exploited.

According to this study, given a bond graph model of a LTI MIMO dynamic system, it is possible to get its decomposed form in two ways, by following the next procedure:

Procedure 1: (a) Before constructing the S matrix. The canonical decomposition is performed directly from the bond graph. Obeying Theorem 3 and Theorem 4, it is possible to determine which state variables corresponds to each subsystem of the canonical decomposition. So, the state vector \hat{x} is constructed considering this arrangement,

$$\hat{x} = [x_{r\bar{o}}^T \quad x_{ro}^T \quad x_{\bar{r}\bar{o}}^T \quad x_{\bar{r}o}^T]^T$$

The elements of vectors D_{in} , u and y stay in an arbitrary order. Then, from (8), (9), (10) and (11) the \hat{S} matrix is obtained.

(b) When S matrix is previously constructed. If S matrix is already constructed, the state variables would not be sorted as required for the canonical decomposed form. In order to achieve such an arrangement is necessary to perform the similitude transformation,

$$P = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (16)$$

where I matrix is the identity matrix of the size of vector D_{in} plus the size of vector y . Also the T matrix is the transformation matrix (14) that is formed by interchanging rows from an original identity matrix according to the desired order of the state variables [6]. Therefore the arranged matrix \hat{S} is

$$\hat{S} = PSP^{-1} \quad (17)$$

From (8), (9), (10), (11) and (17) it can be obtained the state space representation in a canonical decomposition of the system $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$.

Remark 1: The similitude transformation through permutation matrix T have to be applied to matrix F in order to keep the correct relationships in the storage elements.

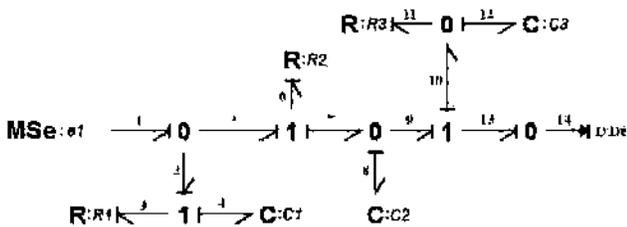


Fig 3. Bond graph model of a third order system.

Example 1: Consider the third order bond graph model in integral causality showed in Figure 3.

Now the Procedure 1(a) is applied. By inspecting the causal paths, it can be seen that C_1 is controllable, but non observable (there is not a causal connection between variables e_4 and e_{14}); C_2 is both controllable and observable; finally, C_3 is observable, but non controllable (no causal connection between e_1 and f_{12}). If a derivative causality assignment is performed, the three dynamic elements accept such a causality, so $struct - rank[A] = struct - rank[AB] = struct - rank \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = n = 3$. Thus part 2 of Theorems 3 and 4 is accomplished, but part 1 of these theorems is responsible of the non observability and non controllability characteristics developed in this example. The arranged state vector and the D_{in} vector arbitrarily chosen are

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_{r\bar{o}} \\ x_{ro} \\ x_{\bar{r}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_4 \\ q_8 \\ q_{12} \end{bmatrix} \quad D_{in} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_6 \\ e_{11} \end{bmatrix}$$

(notice that there is not $\Sigma_{\bar{r}\bar{o}}$ subsystem). The arranged junction structure matrix is

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ - & - & - & | & - & - & - & | & - \\ -1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ - & - & - & | & - & - & - & | & - \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

computing the state equation the next result is obtained:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_3 C_3} \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_2} \\ 0 \end{bmatrix} e_1$$

The output equation is given by

$$e_{14} = [0 \quad | \quad \frac{1}{C_2} \quad | \quad -\frac{1}{C_3}] \hat{x}$$

The transfer function of the system is

$$G(s) = \frac{e_{14}(s)}{e_1(s)} = \frac{1}{sR_2 C_2 + 1}$$

that corresponds to the first order subsystem determined by the mode $R_2 C_2$ and which is both controllable and observable. In order to show Procedure 1(b), consider the same system, but with the state vector being

$$x = [q_4 \quad q_{12} \quad q_8]^T$$

The corresponding S matrix is

$$S = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (19)$$

and it exhibits the following state equation

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_3 C_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \\ \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} e_1$$

$$e_{14} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C_3} & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} x$$

the desired order of the state variables will be the same, and it has been determined following the guidelines of Procedure 1.

This desired vector is $\hat{x} = \begin{bmatrix} x_{r\bar{o}} \\ x_{r_o} \\ x_{\bar{r}_o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_4 \\ q_8 \\ q_{12} \end{bmatrix}$ from where

it can be seen that a commutation between variables q_8 and q_{12} is needed. The transformation matrix is then

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

From (16), (17), (19), and (20) the similitude transformation is obtained. This is the same \hat{S} matrix obtained through Procedure 1(a) (18), and its state equation is in canonical decomposed form. In order to show the properties of the system, the figure 4 present the responses of efforts through capacitive elements.

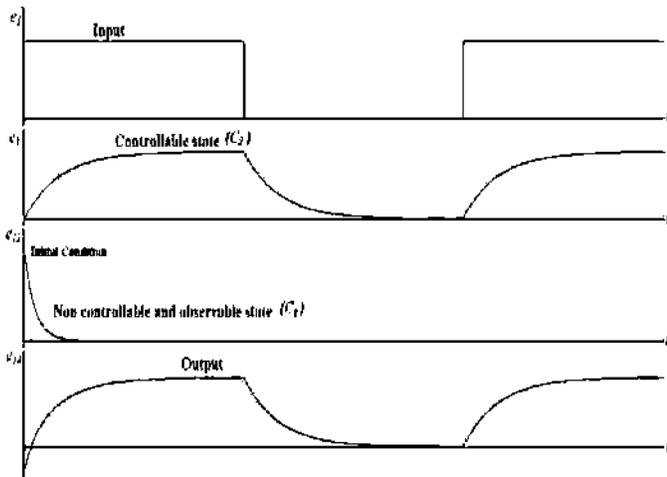


Fig. 4. Responses of capacitive elements.

Notice that C_3 have a null response and its effort stay at zero, after the effect of the initial condition has ended, due to its non-controllability property.

A graphic method to get the canonical decomposed form of a bond graph model has been presented. In order to design canonically decomposed systems, a guide to construct models involving the four subsystems is presented in the following section.

VII. CONSTRUCTION OF MODELS INVOLVING THE FOUR SUBSYSTEMS RELATED TO ITS CANONICAL DECOMPOSITION

Active bonds hold an *unidirectional* causality characteristic, it is, generalized variables before the active bond causes an effect in the elements beyond it, but the converse case is not true. The inclusion of active bonds can alter the structural controllability/observability of a system if they are judiciously positioned. Figure 5 (a) shows a non controllable block. A simplified form of the same model is shown in Figure 5(b). It can be seen that C cannot be causally connected to the input command of effort. However, the variable is observable because exists a (unidirectional) causal connection between C and the active bond at the output. The dual case is shown in figure 5(c).

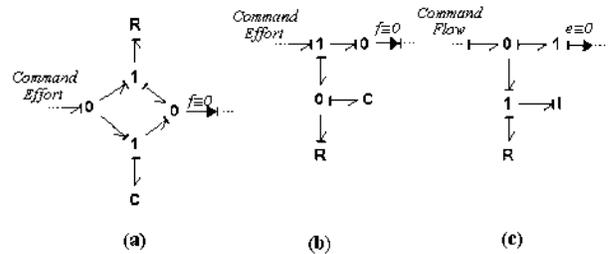


Fig. 5. Non controllable blocks.

In the other hand, if detectors are placed before an active bond, observability loss can occur on the system. Consider the bond graph model showed in figure 6. Mode $R_2 C_2$ is unobservable because no causal connection exists between C_2 and the output.

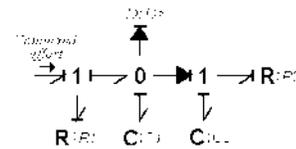


Fig. 6. Observability loss due to an active bond.

Decoupled systems can exhibit non observability, if the number of detectors is not enough. The bond graph model presented in figure 7 shows this characteristic. There is not a causal connection between C_1 and the output, then the entire system is not completely observable.

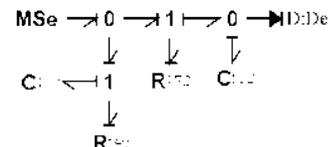


Fig. 7. Observability loss in decoupled systems.

By using active bonds (and related elements, i.e., modulated sources) it is possible to construct bond graph models that includes the four subsystems related to the canonical decomposition of a whole system. The different subsystems can be constructed in the bond graph context, in according to the following procedure. Here direction of power flow determines relative placement of elements in the bond graph model under analysis.

Procedure 2: In order to construct a synthetic bond graph model that includes the four possible subsystems, there are necessarily four cases:

Case 1: Controllable and observable systems. These systems can be constructed without difficulty, only by having care on avoiding non controllable blocks and placing detectors adequately in the case of planned existence of active bonds and/or decoupled systems.

Case 2: Controllable and non observable systems. The controllable part can be constructed according to preceding case. Achieve non observability by means of placing modes beyond detectors and active bonds in relation with the natural flow of power as showed in figure 6.

Case 3: Non controllable and non observable systems. Construct systems with these characteristics by placing non controllable blocks (fig. 5) beyond detectors and active bonds in relation to the flow of power.

Case 4: Non controllable and observable systems. In order to achieve systems with these characteristics, non controllable blocks are to be placed before detectors, so the system remains observable.

In order to show this procedure, the next example is performed.

Example 2: The objective is to construct a SISO model (for simplicity) involving the four possible subsystems indicated by the canonical decomposition. Figure 8(a) shows a Σ_{ro} system.

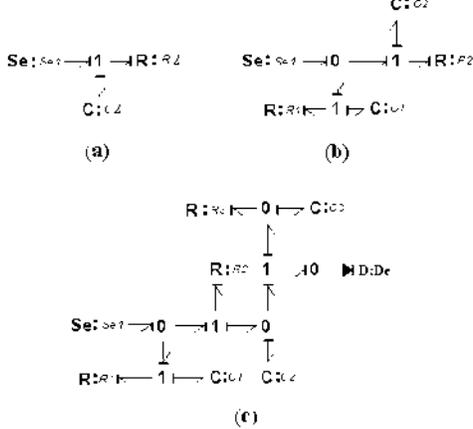


Fig. 8. Construction of a model involving the four possible subsystems.

To insert a Σ_{ro} subsystem a decoupled mode is connected before the 1 junction that connect C_2 and R_2 , this is shown in figure 8(b). By using a non controllable block, and placing the output as indicated in figure 8(c), a Σ_{ro} subsystem is attached to the model. Finally a new non controllable block is placed beyond the 0 junction which is connected with C_2 . This new

block constitute the Σ_{ro} subsystem. Figure 9 show the whole system.

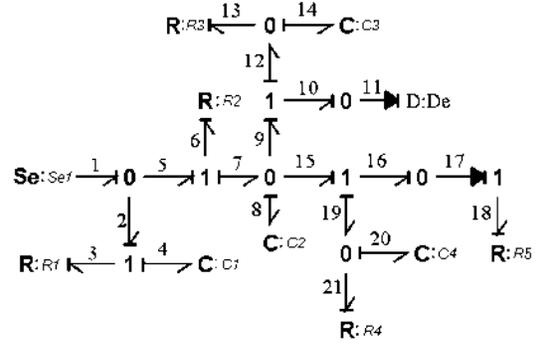


Fig 9. Bond graph model of a fourth order system.

In order to probe that the model holds the four subsystems the canonical decomposition is performed.

Consider the key vectors

$$x = [q_8 \quad q_{20} \quad q_{14} \quad q_4]^T$$

$$D_{in} = [e_3 \quad e_6 \quad e_{13} \quad e_{21} \quad e_{18}]^T$$

The input and the output are $u = e_1$ and $y = e_{11}$, respectively. Under these assignments, the junction structure matrix is

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

and the state equation is

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_4 C_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_3 C_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_1 C_1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{R_1} \end{bmatrix} e_1$$

$$e_{11} = \left[\frac{1}{C_2} \quad 0 \quad -\frac{1}{C_3} \quad 0 \right] x$$

The (A, B, C, D) matrices are not in decomposed form. Due to model is constructed with predefined characteristics it is known that the desired arrangement of variables is $\hat{x} = [q_4 \quad q_8 \quad q_{20} \quad q_{14}]^T$ according to Procedure 1(b), thus the transformation matrix is,

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

applying the similitude transformation (16) the new junction structure matrix is obtained:

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

so the decomposed state equation is

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_4 C_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_3 C_3} \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_1$$

$$e_{11} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & -\frac{1}{C_3} \end{bmatrix} \hat{x}$$

which structure corresponds to a canonically decomposed state equation with the four subsystems present.

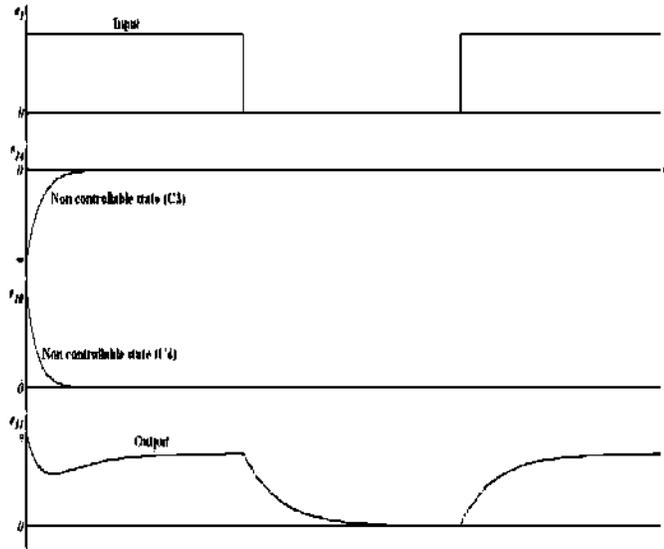


Fig 10. Responses on some capacitive elements.

In Figure 10 the responses of the ro , $\bar{r}o$, and $\bar{r}o$ dynamic elements is shown.

It can be seen that once the effect of initial conditions has expired, the outputs in the non controllable elements stays in zero and they are not altered by the changes at the input. Also the output is affected by the $\bar{r}o$ element (C_3) while the effect of the initial condition (a) exists.

If e_1 is a perturbation source, it can not reach the C_3 and C_4 elements. A goal in the perturbation rejection problem is to cancel the effect of not desired excitation sources in the state variables. By means of the proposed procedure such a perturbation cancellation can be achieved.

VIII. CONCLUSIONS

A methodology to convert a LTI MIMO dynamic system to its canonical decomposed form starting from its bond graph model has been presented. Inclusion of active bonds is considered. Also, a procedure to construct Bond Graph models that represent non controllable and non observable subsystems is presented. In order to divert perturbation inputs, the non controllable blocks can be used in the design process.

REFERENCES

- [1] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy, "Structural controllability/observability of linear systems represented by bond graphs", J. Franklin Inst., vol. 326 No. 6, pp. 869-883, 1989
- [2] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy, "Bond-graph approach for structural analysis of MIMO linear systems", J. Franklin Inst. vol. 328 No. 1 pp. 55-70, 1991
- [3] R. E. Kalman, "Canonical structure of linear dynamical systems", Proc. Nat. Acad. Sci. USA, No. 48, pp. 596-600, 1962
- [4] G. Dauphin-Tanguy and S. Scavarda, "Bond-graph modeling of physical systems", Chapman & Hall. A. J. Fossard, D. Normand-Cyrot. 1995. Vol. 1, pp. 33-109.
- [5] R. E. Kalman, "Mathematical description of linear dynamical systems," J. SIAM on Control, pp. 152-192, 1963.
- [6] Gilbert Strang, "Linear Algebra and Its Applications", 3rd ed., Saunders 1988.
- [7] Ronald C. Rosenberg and Dean C. Karnopp, "Introduction to physical system dynamics", McGraw-Hill 1983.
- [8] Chi-Tsong Chen, "linear system Theory and design", Oxford University Press, 1984.
- [9] Thomas Kailath, "Linear systems", Prentice-Hall 1980.
- [10] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy, "Bond Graph determination of controllability subspaces for pole assignment", Proc. of the International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Systems engineering in the service of humans, Vol. 1, pp. 14-19, France 1993.

Bibliografía

- [1] S. Banerjee, Curso “Dynamics of Physical Systems (EE 30016)”, Instituto Tecnológico de la India, <http://www.ee.iitkgp.ernet.in/~soumitro/dops/>
- [2] Dauphin-Tanguy Geneviève, et al., “Les Bond Graphs”, Hermes Science Publications, 2000, France.
- [3] Karnopp Dean and Rosenberg Ronald, “System Dynamics: A Unified Approach”, John Wiley & Sons, Inc, 1975, USA.
- [4] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy, “Structural Controllability/Observability of linear systems represented by Bond Graphs”, Journal of The Franklin Institute, vol. 326 No. 6, pp. 869-883, 1989.
- [5] Lin Ching-Tai, “Structural Controllability”, IEEE Trans. Aut. Control, vol. AC-19, No. 3, 1974
- [6] Shields Robert W. and Pearson J. Boyd, “Structural Controllability of Multiinput Linear Systems”, IEEE Trans. Aut. Control, vol AC-21, No. 2, 1976
- [7] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy, “Bond-graph approach for structural analysis of MIMO linear systems”, J. Franklin Inst. vol. 328 No. 1 pp. 55-70, 1991
- [8] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy, “Bond Graph determination of controllability subspaces for pole assignment”, Proc. of the International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Systems engineering in the service of humans, Vol. 1, pp. 14-19, France 1993.
- [9] R. E. Kalman, “Mathematical description of linear dynamical systems”, J. SIAM on Control, pp. 152-192, 1963.

- [10] R. E. Kalman, "On the general theory of control systems", Proceedings of the 1st IFAC Congress, vol. 1, (Moscow), pp. 481–492, Butterworth's, London, 1960.
- [11] R. E. Kalman, "Canonical structure of linear dynamical systems", Proc. Nat. Acad. Sci. USA, No. 48, pp. 596-600, 1962
- [12] Thomas Kailath, "Linear systems", Prentice-Hall 1980.
- [13] Chi-Tsong Chen, "linear system Theory and design", Oxford University Press, 1984.
- [14] G. Dauphin-Tanguy and S. Scavarda, "Bond-graph modeling of physical systems", Chapman & Hall. A. J. Fossard, D. Normand-Cyrot. 1995. Vol. 1, pp. 33-109.
- [15] Gilbert Strang, "Linear Algebra and Its Applications", 3rd ed., Saunders 1988.
- [16] Katsuhiko Ogata, "Ingeniería de control moderna", Prentice Hall hispanoamericana, 1993
- [17] Sitio Web de la Multiconferencia Internacional de Modelado y Simulación 2007, <http://www.lsis.org/imsm07/>
- [18] Noé Villa-Villaseñor. and Gilberto González-Ávalos, "Canonical decomposition of a LTI MIMO system: a Bond Graph approach", Proc. of the 3rd Int. AVC-IMAACA conference, Buenos Aires, 2007.