



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**“DISEÑO DE CONTROLADORES
EN BOND GRAPH PARA SISTEMAS LTI”**

TESIS

Que para obtener el Grado de
MAESTRA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

Presenta

RAQUEL SARAHÍ RODRÍGUEZ ANGULO

DR. GILBERTO GONZÁLEZ AVALOS

Director de Tesis

AGOSTO 2010



Dedicatorias y agradecimientos...

A mis padres, **Raquel y Sergio**, quienes siempre han estado conmigo a mi lado, quienes me han dado los más sabios consejos en los momentos cruciales de mi vida...

A mi hermanita, **Pao**, con quien he compartido muchos momentos de felicidad, de sueños, de recuerdos...

Al amor de mi vida, **Román**, quien siempre esta apoyándome en todo sentido y con quien comparto mis momentos de felicidad, mis sueños, mi vida y que además me dio la fortuna de ser madre ...

A **Romina**, mi pequeñita, quien nos llena de las más hermosas alegrías que se pueden tener en la vida, quien con solo una sonrisa puede lograr el olvido del cansancio y de cualquier otro pensamiento...

A **Pris y Celeste**, quienes son casi mis hermanas y quienes siempre han estado conmigo compartiendo todo momento...

Al **Dr. Gilberto**, por compartir sus conocimientos y consejos y por la sensibilidad humana que tiene y que hizo posible la combinación de mi crecimiento académico y personal...

A todos mis **profesores**, quienes comparten parte de sus conocimientos...

Resumen

En el presente trabajo, se presentan los conceptos básicos de la técnica de Bond Graph, la cuál está basada en el modelado gráfico de sistemas dinámicos, además de que se aplican aportaciones que se han dado enfocadas al área de control, así mismo, se estudian algunas de las características que se pueden obtener de manera directa a partir de un modelo en bond graph, como son la controlabilidad, la observabilidad y la determinación directa de la función de transferencia. Se analiza el comportamiento de sistemas en lazo cerrado para comenzar a plantear el análisis para el diseño de controladores. Por otro lado, se muestra el procedimiento para realizar el diseño de controladores clásicos en lazo cerrado utilizando bond graph, entre los cuales se presentan, el control por retroalimentación de estados por medio de ubicación de polos, control proporcional (P), control integral-proporcional (PI) y control proporcional-integral-derivativo (PID) los cuales son los más comunes.

Finalmente, se presenta la propuesta de un controlador (tipo compensador) partiendo de su función de transferencia hasta llegar a la construcción del modelo en bond graph mediante la obtención previa de la estructura unión correspondiente. En cada tema presentado se muestran ejemplos con las simulaciones correspondientes para dejar más clara la aplicación y la importancia de ella. Los resultados obtenidos se comprueban mediante simulaciones utilizando 20- SIM y MATLAB.

Abstract

This work presents the basic concepts of the Bond Graph technique, which is based on the graph model of dynamic systems, besides we will applicate some contributions that have been given in control, likewise they present some of the characteristics that can be obtained in a direct way beginning by a model in bond graph, like controlability, observability and the direct determination of the transfer function. The system behavior is analyzed in closed loop to begin to analyze the design of controllers. On the other hand, it presents the procedure to realize the classic controllers design in closed loop using bond graph, between which are, the state feedback control by poles placing, proportional control (P), proportional-integral control (PI) and proportional-integral-derivative (PID) control that are the most common. Finally, it gives a propose of a Bond Graph model for a controller that begins since by a transfer function which is the targ, to the construction of the model in bond graph with the union structure previosly obtained. In each chapter, are presented examples with simulations for explaining the aplication and the importance of it. The results obtains are verifying by 20-SIM and MATLAB.

Índice general

Resumen	i
Abstract	ii
Lista de figuras	vi
Lista de tablas	ix
Lista de publicaciones	x
1 Introducción	1
1.1 Controladores y su diseño	1
1.2 Objetivos	2
1.2.1 Objetivo General	2
1.2.2 Objetivos particulares	2
1.3 Justificación	3
1.4 Contribución de la tesis	3
1.5 Metodología	4
1.6 Estado del arte	6
1.7 Estructura de la tesis	8
2 Modelado en Bond Graph	9
2.1 Introducción	9
2.2 Componentes básicos de un Bond Graph	10
2.2.1 Elementos Puerto-1 Pasivos	11
2.2.2 Elementos Puerto-1 Activos o Fuentes	12
2.2.3 Puertos uno y medio	12
2.2.4 Elementos Ideales de Puerto-2	13
2.2.5 Elementos de Unión, Puertos - 3	13

2.2.6	Causalidad para los multipuertos básicos	13
2.2.7	Procedimiento para el modelado de sistemas	15
2.2.8	Ejemplo de un sistema eléctrico	16
2.3	Estructura de unión en sistemas multipuerto	20
2.3.1	Vectores clave	20
2.3.2	Relaciones de campo y ecuaciones de estado	21
2.3.3	Procedimiento para obtención de la estructura de unión de un modelo en Bond Graph:	23
2.3.4	Ejemplo de obtención de la estructura de unión de un modelo en BG	24
2.4	Campos de multipuerto	26
2.4.1	Campos resistivos	26
2.4.2	Ejemplo Campo-R con causalidad mezclada	28
2.4.3	Ejemplo Campo-R con un girador incluido	28
3	Sistema en lazo cerrado en Bond Graph	30
3.1	Introducción	30
3.2	Sistemas en lazo cerrado	31
3.3	Función de transferencia	31
3.3.1	Función de transferencia en Bond Graph a partir de la estructura de unión	32
3.4	Determinación directa de la función de transferencia en lazo cerrado	33
3.4.1	Trayectoria Causal	33
3.4.2	Bond Adaptado	35
3.4.3	Función característica de una trayectoria causal directa mezclada o simple	37
3.4.4	Ejemplo de obtención de la ganancia de una trayectoria directa	37
3.4.5	Obtención del polinomio característico	39
3.4.6	Función de transferencia de un sistema en lazo cerrado	40
3.4.7	Ejemplo de un sistema eléctrico	40
3.4.8	Ejemplo de un sistema eléctrico	43
3.5	Esquema general de un sistema en lazo cerrado en BG	50
3.5.1	Ejemplo partiendo de las estructuras de unión de planta y controlador	54
3.6	Controlabilidad y observabilidad	57
3.6.1	Conceptos Básicos (Enfoque clásico)	57
3.6.2	Enfoque Bond Graph	58

3.7	Retroalimentación de estados	59
3.7.1	Enfoque clásico	60
3.7.2	Ubicación de polos	60
3.7.3	Procedimiento de retroalimentación de estados en bond graph	62
3.7.4	Ejemplo de un motor de CD	63
4	Diseño de controladores en Bond Graph para sistemas LTI	72
4.1	Introducción	72
4.1.1	Control por retroalimentación de estados estimados desde un enfoque clásico	73
4.1.2	Control por retroalimentación de estados estimados desde un enfoque de Bond Graph	75
4.1.3	Ejemplo de un observador de un motor de CD	77
4.2	Los controladores en el dominio de la frecuencia	82
4.2.1	Enfoque clásico	82
4.2.2	Diseño de controladores clásicos en Bond Graph	84
4.3	Propuesta de diseño de controladores en Bond Graph a partir de su función de transferencia	92
4.3.1	Introducción	92
4.3.2	Una estructura de unión	92
4.3.3	Procedimiento de diseño	94
4.3.4	Ejemplo de un controlador cuya función de transferencia es $\frac{s}{s+P}$	95
4.3.5	Ejemplo de un motor de CD linealizado	99
5	Conclusiones	109
5.1	Conclusiones generales	109
5.2	Sugerencias de trabajos futuros	109
	Bibliografía	111

Lista de figuras

1.1	Diagrama conceptual de la tesis.	5
2.1	Bond y las variables generalizadas que lo componen.	10
2.2	Fuente de esfuerzo	12
2.3	Fuente de flujo	12
2.4	Fuente modulada de esfuerzo	12
2.5	Fuente modulada de flujo	13
2.6	Transformador y sus ecuaciones	14
2.7	Girador y sus ecuaciones	14
2.8	Unión de esfuerzo común	14
2.9	Unión de flujo común	14
2.10	Causalidad en un bond	14
2.11	16
2.12	Sistema eléctrico	17
2.13	Paso 1 del procedimiento para la obtención del modelo en Bond Graph del sistema eléctrico mostrado en 2.12.	17
2.14	Paso 2 del procedimiento para la obtención del modelo en Bond Graph del sistema eléctrico mostrado en 2.12.	17
2.15	Paso 3 y 4 del procedimiento para la obtención del modelo en Bond Graph del sistema eléctrico mostrado en 2.12.	18
2.16	Paso 5 del procedimiento para la obtención del modelo en Bond Graph del sistema eléctrico mostrado en 2.12.	18
2.17	Paso 6, obtención final del Bond Graph del sistema eléctrico mostrado en 2.12 sin asignación de causalidad.	19
2.18	Paso 7, obtención final del Bond Graph del sistema eléctrico mostrado en 2.12, con causalidad integral predefinida asignada.	19
2.19	Diagrama a bloques de la estructura de unión de un Bond Graph	20
2.20	Modelo BG de un sistema eléctrico	24
2.21	Enumeración de los bonds	24
2.22	Ejemplos de campos -R con causalidad homogénea.	26
2.23	Ejemplo de un campo -R	27

2.24	Campo-R con causalidad mezclada	28
2.25	Ejemplo de un campo-R donde se incluye un elemento girador.	29
3.1	Sistema en lazo cerrado y sus elementos principales.	31
3.2	Ejemplo de trayectoria causal simple	34
3.3	Ejemplo de trayectoria causal mezclada directa a través de un elemento girador (GY)	34
3.4	Ejemplo de trayectoria causal mezclada indirecta a través de un elemento de almacenamiento (I)	34
3.5	Tabla con algunas conexiones causales y sus correspondientes relaciones constitutivas (Transmitancias)[29].	35
3.6	Bond adaptado conectando dos subsistemas	36
3.7	Bond adaptado conectado a uniones.	36
3.8	Ejemplo de un bond causal utilizando un bond adaptado.	37
3.9	Ejemplos de la representación del número total de cambios de orientación.	38
3.10	Ejemplo para encontrar la relación entre la entrada y el elemento I del sistema.	38
3.11	Ejemplo para la obtención de la función de transferencia a través de trayectorias causales	40
3.12	Trayectoria causal directa entre entrada-salida.	41
3.13	Sistema eléctrico	43
3.14	Representación en BG del sistema eléctrico en lazo abierto	43
3.15	Modelo de un sistema mecánico y su controlador tipo PI utilizando bonds adaptados	44
3.16	Respuesta al escalón unitario simulada en 20- SIM	48
3.17	Respuesta al escalón unitario simulada en Matlab	48
3.18	Corriente correspondiente al inductor "m", simulada en 20-SIM	49
3.19	Corriente correspondiente al inductor "m", simulada en MATLAB	49
3.20	Esquema general de un sistema de control clásico en lazo cerrado.	50
3.21	Salida del sistema en lazo cerrado simulado en 20-SIM.	56
3.22	Salida del sistema en lazo cerrado simulado en MATLAB	56
3.23	Diagrama a bloques de un sistema representado por 3.43	61
3.24	Sistema linealizado de un motor de CD	63
3.25	BGI del motor de CD	64
3.26	BGD del motor de CD	64
3.27	Trayectorias causales, entrada-elementos de almacenamiento	66
3.28	Retroalimentación variables de flujo	66
3.29	Retroalimentación de variables de flujo con control tipo proporcional.	67
3.30	Respuesta del motor de CD en lazo abierto usando 20-SIM	69
3.31	Respuesta al escalón del sistema en lazo abierto, usando Matlab	69
3.32	Respuesta al escalón del motor en lazo cerrado usando 20-SIM	70
3.33	Respuesta al escalón del sistema en lazo cerrado usando Matlab.	70
4.1	Esquema general de un control por retroalimentación de estados estimados.	73

4.2	Esquema general del observador de Luenberger	74
4.3	Modelo en bond Graph del motor de CD con su observador y control por retroalimentación de estados estimados.	77
4.4	Estructura de union del modelo del motor en lazo cerrado con el observador y controlador respectivo.	78
4.5	Respuesta del estado 1, sistema original-observador correspondiente al enlace de flujo en el inductor La.	81
4.6	Respuesta del estado 2, sistema original-observador correspondiente al movimiento rotacional del rotor del motor.	81
4.7	Modelo de un motor de CD (Sistema electromecánico).	85
4.8	Modelo en Bond Graph de un motor de CD	85
4.9	Sistema electromecánico, retroalimentando su salida y utilizando un girador para acoplamiento de las señales.	86
4.10	Comparación de señales entrada - salida.	86
4.11	Modelo del controlador y señales de entrada y salida.	87
4.12	Modelo de un motor de CD junto con un controlador tipo PID.	89
4.13	Simulación realizáda en MATLAB	91
4.14	Simulación realizáda en 20 - SIM	91
4.15	Paso 1. Conexión de elemento de almacenamiento a elemento de unión.	97
4.16	Paso 2. Conexión directa entre fuente y elemento de unión.	97
4.17	Paso 3. Elemento de unión adicional, correspondiente a la matriz S_{12}	97
4.18	Paso 4. Conexión con el campo R	98
4.19	Paso 5. Extensión de la fuente de flujo para retroalimentar a la salida.	98
4.20	Paso 6. Bond Graph del controlador con función de transferencia $\Rightarrow \frac{s}{s+P_1}$	99
4.21	Motor de CD con el circuito de campo y de armadura.	100
4.22	Modelo en bond graph del motor de CD	100
4.23	Modelo en Bond Graph del motor de CD linealizado.	101
4.24	Modelo en Bond Graph del motor de CD linealizado con la numeración correspondiente de sus bonds.	101
4.25	Diagrama a bloques del sistema del motor en lazo cerrado con los controladores correspondientes.	103
4.26	Modelo del controlador construido en Bond Graph.	104
4.27	Modelo en Bond Graph del sistema en lazo cerrado del motor de CD con sus controladores respectivos K1 y K2.	105
4.28	Lugar de las raíces de la función de transferencia Q1, sin la implementación del controlador.	106
4.29	Lugar de las raíces de la función de transferencia Q2, sin la implementación del controlador.	106
4.30	Lugar de las raíces de la función de transferencia Q1, con la implementación del controlador.	107
4.31	Lugar de las raíces de la función de transferencia Q2, con la implementación del controlador.	107

Lista de tablas

2.1	Variables generalizadas en algunos sistemas.	11
2.2	Elementos de disipación y de almacenamiento.	11
2.3	Consideraciones de causalidad para elementos en Bond Graph.	15

Publicaciones

Publicación asociada con este trabajo de investigación:

"Controllers Design for LTI MIMO Systems: A Bond Graph Approach", González A. Gilberto, Raquel S. Rodríguez, artículo aceptado en el IASTED International Conference on ACIT-Control, Diagnostics, and Automation, llevado a cabo del 15 al 18 de Junio de 2010 en Novosibirsk, Rusia.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Controladores y su diseño

El diseño de controladores ha sido motivo de muchos estudios que tienen un objetivo en común, que es el de lograr un control eficiente y que llene las expectativas de diseño para un sistema determinado que cada día son mayores debido al avance tecnológico y a las innumerables necesidades del hombre en conjunto con la industria.

Existe una teoría muy amplia de teoría de control, basada en la representación matemática de los sistemas involucrados en el diseño así como de los controladores que se aplicarán a dichos sistemas, que es llamada en este trabajo de investigación como "Teoría clásica", las técnicas utilizadas a esta teoría son llamadas técnicas clásicas y pueden aplicarse a través de un extenso rango de dominios físicos.

El diseño de controladores requiere de una representación del sistema a ser controlado. Tales representaciones son llamadas genéricas en el sentido de que pueden representar sistemas de distintos dominios físicos como pueden ser sistemas mecánicos, eléctricos, hidráulicos, termodinámicos pero carecen de ser abstracciones de los sistemas físicos: el proceso mismo de extraer los rasgos genéricos de los sistemas físicos provocan la pérdida de detalles específicos de los mismos, además de que tanto los parámetros como los estados de dichas representaciones

no fácilmente pueden tener una regresión a las propiedades del sistema original [23].

La teoría de Bond Graph brinda la opción del diseño de modelos para sistemas dinámicos de forma gráfica, la cual está basada en la representación del flujo de potencia a través de elementos de almacenamiento de energía y de disipadores, gracias a ello es posible diseñar controladores implementables físicamente. El Bond Graph puede representar una variedad de tipos de energía en cuya estructura de unión se puede tener información importante de las propiedades del sistema físico logrando evitar con ello la pérdida de las propiedades específicas del sistema original.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

El objetivo general de este trabajo de investigación es explorar el diseño de controladores utilizando la técnica de Bond Graph para hacer posible su aplicación en sistemas dinámicos.

1.2.2 Objetivos particulares

- Obtención de la función de transferencia en Bond Graph en lazo cerrado
- Uso de Trayectorias causales-Lazos causales para la determinación directa de la función de transferencia en lazo cerrado.
- Diseño de controladores por ubicación de polos en Bond Graph
- Proponer una estructura de unión del sistema en lazo cerrado basado en las estructuras de unión de la planta y el controlador en Bond Graph
- Diseño de controladores clásicos en Bond Graph
- Proponer una función de transferencia para un controlador
- Proponer la estructura de unión correspondiente a la función de transferencia propuesta para el controlador, así como su modelo en Bond Graph

1.3 Justificación

El diseño de controladores siempre ha evolucionado debido a las necesidades que día a día se presentan, existe gran avance en lo referente a controladores en general, clasificándose éstos en implementables y no implementables, debido a que la implementación física ha sido cada vez más compleja.

Es bien conocido que los sistemas reales están formados por diversos dominios de energía, por ejemplo, un automovil está formado por subsistemas entre los que se encuentran, térmico, mecánico, hidráulico y eléctrico. Así, la metodología de bond graph permite modelar un sistema dado por uno o varios dominios de energía en la misma plataforma de enlaces de potencia, que representan los bond graphs de un sistema.

También, un sistema actual requiere para un adecuado desempeño el tener controladores de la planta en un esquema en lazo cerrado para mejores resultados.

Con el presente trabajo de investigación se busca tener un avance en el análisis de sistemas en lazo cerrado en bond graph y el diseño de controladores en el dominio físico, es por ello que se propone un controlador que pueda ser representado físicamente por elementos de almacenamiento y elementos resistivos, para ello, se propone una estructura de unión que parte de la función de transferencia que representa el controlador deseado y partiendo de la misma, se pueda edificar el modelo en su Bond Graph correspondiente, implicando con ello su posible implementación física.

1.4 Contribución de la tesis

La contribución de esta tesis radica en la propuesta de una función de transferencia de un controlador de la cual se propone su correspondiente estructura de unión para la obtención de su modelo en Bond Graph y con ello asegurar la implementación física del controlador deseado. Para lograrlo se utilizaron resultados presentados en [20].

1.5 Metodología

La metodología a utilizar para el desarrollo en el diseño de controladores en este trabajo de investigación es la de Bond Graph puesto que es una técnica que brinda la ventaja de la implementación física de los modelos desarrollados, que es en este caso, el de los controladores diseñados. Para ello es necesario tener un conocimiento previo de la teoría de Bond Graph así como también de la teoría clásica de control.

En la figura 1.1, se muestra de manera esquemática la metodología necesaria para la culminación del trabajo de investigación presentado.

Del lado derecho de la figura 1.1, se aprecia como a partir de la teoría clásica se puede obtener un modelo que representa al sistema dinámico (de forma matemática), a partir del cual se pueden realizar distintos análisis, en este caso, para el diseño de controladores. Del lado izquierdo se aprecia la aportación de la técnica de Bond Graph para lograr obtener, características propias del sistema de manera directa partiendo del modelo gráfico que representa al sistema dinámico, así como también se puede tener una representación matemática al igual que la teoría clásica .

La columna que se encuentra en la parte central muestra la relación existente entre la teoría de Bond Graph y la teoría de control clásica la cual puede ilustrar a grandes rasgos la capacidad del bond graph en referencia de la teoría clásica.

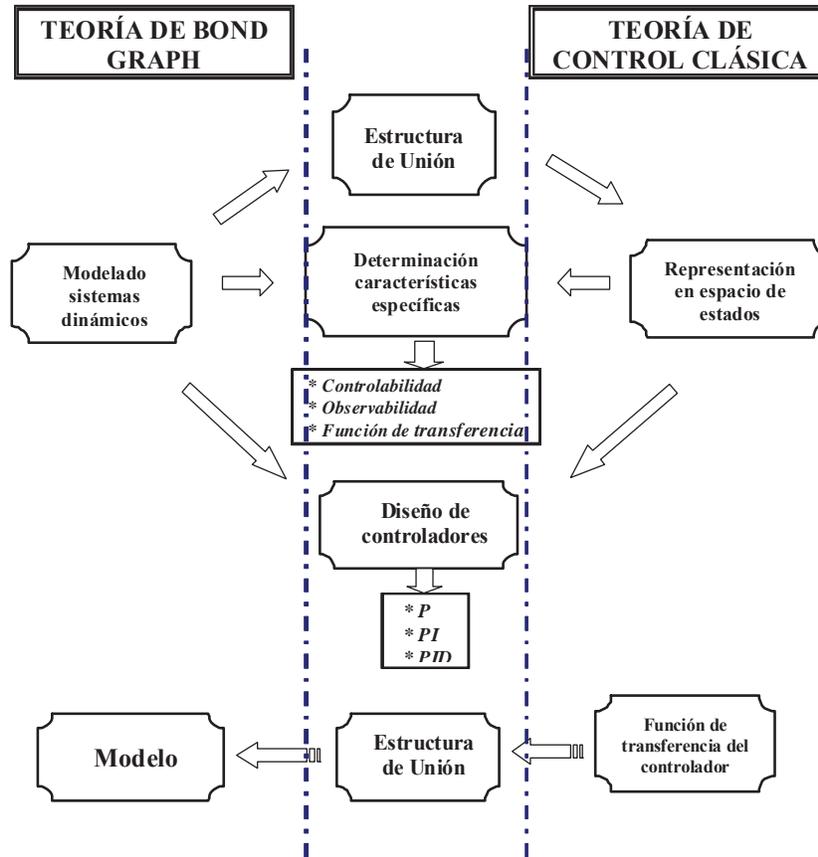


Figura 1.1: Diagrama conceptual de la tesis.

1.6 Estado del arte

Con el incremento de la complejidad de los procesos industriales a ser analizados, el ingeniero de control moderno, frecuentemente necesita un modelo del sistema a ser controlado. Henry Paynter [1] presentó en 1961, la Teoría de Bond Graph como una metodología abstracta general para modelar sistemas físicos. Dean Karnopp y Ronald Rosenberg formalizaron la metodología de bond graph en el modelado de sistemas [2]. Así mismo, P. Wellstead en su libro "Physical System Modelling" [3], describe la técnica de bond graph que puede ser utilizada en el modelado de sistemas en dos capítulos.

Recientemente se han publicado un número cada vez más extenso de bases y aplicación de bond graph a sistemas, por ejemplo a sistemas Mecatrónicos por Damic y Montgomery [4]. En sistemas químicos y termodinámicos modelados y simulados en bond graph se encuentran las referencias de J. Thoma y B. Ould Bouamama [5] y en ingeniería termodinámica utilizando simulación con entropía presentado por Jean Thoma y Gianni Mocellin [6].

Una referencia completa en el modelado de sistemas y control por retroalimentación es dada por Peter Gawthrop y Lorcan Smith [7]. Amalendu Mukherjee y Ranjit Karmakar proponen la aplicación de controladores en el dominio de la frecuencia a plantas modeladas en bond graph utilizando gráficas de flujo de señal, es decir, gráficas lineales presentadas en [8].

Por otra parte, los artículos publicados que indican el estado del arte de la aplicación de bond graph en el diseño de controladores se pueden enlistar en las siguientes referencias:

Peter J. Gawthrop introdujo una representación de bond graph basada en el modelo del control de observador, presentado en [9]; en este artículo se describe que el diseño de controladores en el dominio físico puede ser utilizado. También controladores del tipo PID en bond graph son propuestos por él.

También, Andre Sharon, Neville Hogan y David E. Hardt proponen el diseño en el control físico que implica a sistemas de control aplicado a sistemas mecánicos, es decir, el control de sistemas unificados aplicado al diseño de sistemas preservando la planta física y dando una guía en la selección apropiada de la arquitectura física del control [10].

Así mismo, Dean Karnopp describe que la fácil interpretación física de las variables de estado a partir de su modelo en bond graph permite la realización de esquemas de control automático considerando la retroalimentación de variables de estado [11].

Otro artículo interesante de citar es propuesto por A. Kamel, que presenta una metodología para representar funciones de transferencia a partir de modelos de bond graph, la cuál es presentada en [12], logrando que a partir de estas funciones de transferencia se pueda introducir alguna estrategia de control basado en funciones de transferencia.

T. K. Yeh, ha propuesto en [13] la metodología de control de backstepping en el dominio físico. En este artículo explora la capacidad intrínseca del controlador de alterar el comportamiento de un sistema físico que emula el comportamiento de otro sistema físico.

En [14], C. Sueur presenta la determinación de las propiedades de rango estructural, controlabilidad y observabilidad estructural basado en un modelo de bond graph del sistema, características indispensables para el diseño de un observador y/o controlador en el dominio físico.

Finalmente, es importante citar el trabajo de Genevieve Dauphin-Tanguy [15], donde presenta el uso combinado de la asignación de causalidad integral y derivativa, así como de las propiedades de trayectoria causal y lazo causal que dan al diseñador del sistema procedimientos gráficos para el análisis estructural y la determinación de la ley de control.

Por lo tanto, esta tesis de maestría utiliza parte de la información existente en el estado del arte:

- Modelado de sistemas en bond graph.
- Obtención de la función de transferencia en lazo abierto mediante trayectorias causales.
- La retroalimentación de estados la realiza Peter Gawthrop con diagramas de bloques y bond graph.
- Así mismo, los artículos de controladores en bond graph están dirigidos a aplicaciones de un controlador a un sistema dado, es decir, a resolver la problemática de control de un sistema modelado en bond graph, sin tener la intención de proponer controladores en

bond graph para cualquier sistema utilizando esta plataforma gráfica de modelado.

Siendo las contribuciones que no están reportadas en el estado del arte:

- La obtención de la función de transferencia en lazo cerrado mediante trayectorias causales.
- La obtención de la realización en espacio de estados de un sistema en lazo cerrado por medio de la estructura de unión en lazo cerrado a partir de las estructuras de unión en lazo abierto del controlador y de la planta.
- Una propuesta de diseño de controladores en bond graph a partir de su función de transferencia, para lo cual, se propone una estructura de unión para el controlador y se propone un procedimiento de construcción, para que a partir de la estructura de unión propuesta se obtenga el bond graph respectivo.

1.7 Estructura de la tesis

La presente tesis se encuentra organizada de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se dan los antecedentes existentes para el modelado en Bond Graph desde los elementos básicos de la técnica hasta el procedimiento para el modelado de sistemas dinámicos.

El capítulo 3 contiene el análisis de los sistemas en lazo cerrado incluyendo la determinación directa de la función de transferencia en lazo cerrado a partir del modelo en Bond Graph.

El capítulo 4 abarca el diseño de controladores en Bond Graph así como también la propuesta de un controlador partiendo de una función de transferencia deseada del mismo, logrando obtener su estructura de unión para posteriormente llegar a la construcción del modelo en Bond Graph para hacer posible la implementación del mismo.

Finalmente en el capítulo 5 se dan las conclusiones obtenidas, recomendaciones y trabajo futuro.

Capítulo 2

Modelado en Bond Graph

2.1 Introducción

Hoy en día la necesidad del modelado y la simulación se ha vuelto cada vez más importante en el proceso de diseño y análisis de sistemas dinámicos debido a que con la simulación de un sistema podemos obtener el comportamiento del sistema y por tanto, también podemos obtener información crítica del sistema sin la necesidad de tener un prototipo de prueba el cual tiene un costo mucho mayor que el desarrollo de la simulación del mismo.

En este sentido el Bond Graph es un método que se comenzó a desarrollar para el modelado de sistemas dinámicos y fue establecido por Henry Paynter en 1961 y más tarde desarrollado por Karnopp and Rosenberg (1968, 1975, 1983) así como, también por Thomas (1975) y Van Dixhoorn (1982), especialmente en casos donde existía interacción entre sistemas mecánicos, hidráulicos, eléctricos y térmicos.

El modelado en Bond Graph está basado en la idea de que todos los sistemas dinámicos tienen elementos de energía por lo que sólo se necesita la identificación de los mismos para poder representarlos.

Gracias a que es un método gráfico, al tener el modelado de un sistema se pueden visualizar de forma directa algunas características o propiedades del sistema, como pueden ser el

orden del sistema (que está ligado directamente con la dependencia e independencia lineal de los elementos), la observabilidad y la controlabilidad sin necesidad de realizar operaciones matemáticas más complejas como las requeridas para conocer la observabilidad y controlabilidad utilizando métodos tradicionales (con uso de ecuaciones diferenciales e inversión de matrices).

2.2 Componentes básicos de un Bond Graph

Los sistemas en Bond Graph pueden ser utilizados para representar sistemas interdisciplinarios por utilizar únicamente los intercambios de energía que existen en ellos que son representados por elementos gráficos, los cuales son principalmente, flechas y semiflechas que son llamados "**bonds**", que se utilizan para acoplar los puertos de energía de los componentes del sistema.

El bond es representado por una semiflecha indicando en la dirección de ésta cómo fluye la energía entre los puertos al cual está conectado y las variables que describen la unión entre puertos son llamadas "**variables de potencia**" o "**variables de bond generalizadas**" debido a que pueden ser utilizadas en todos los dominios de energía y son: esfuerzo $e(t)$ y flujo $f(t)$. En la figura 2.1, se muestra la representación de un bond con las variables de potencia asociadas, así como también en la ecuación (2.1) se muestra la relación de las mismas.

Figura 2.1: Bond y las variables generalizadas que lo componen.

$$P(t) \triangleq e(t) \cdot f(t) \tag{2.1}$$

En sistemas que almacenan energía es necesario definir variables que representen el estado del sistema llamadas variables de energía, denominadas *momento* $p(t)$ ó *esfuerzo acumulado*

Tabla 2.1: Variables generalizadas en algunos sistemas.

Variables	Eléctrico (t)		Hidráulico (t)		Mecánico (t)	
					M.Traslacional	M.Rotacional
Esfuerzo e	Voltaje v	Presión P	Fuerza F	Par τ		
Momento p	Enlace de flujo λ	M. de flujo Γ	M. rotacional p_R	M. angular h_R		
Flujo f	corriente i	Caudal Q	Velocidad V	Vel. angular ω		
Desplazamiento q	Carga q	Volumen V	Distancia x	Desp. angular θ		

Tabla 2.2: Elementos de disipación y de almacenamiento.

Elemento	Eléctrico	Hidráulico	Mecánico
R	$v(t) = R i(t)$	$\Delta P_r(t) = R Q(t)$	$F(t) = b V(t)$
C	$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$	$P_r(t) = C \int \Delta Q(t) dt$	$F(t) = k \int V(t) dt$
I	$i(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt$	$Q(t) = I \int \Delta P_r(t) dt$	$V(t) = \frac{1}{M} \int F(t) dt$

$e_a(t)$ y desplazamiento $q(t)$ ó flujo acumulado $f_a(t)$, y están dadas por (2.2) y (2.3)

$$p(t) = e_a(t) \triangleq \int^t e(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

$$q(t) = f_a(t) \triangleq \int^t f(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

Gracias a estas variables generalizadas podemos aplicarlas a cualquier sistema dinámico, únicamente debemos de tenerlas bien definidas. A continuación en la tabla 2.1 se muestran las variables generalizadas utilizadas en sistemas eléctricos, hidráulicos y mecánicos.

Para la representación de un sistema, cualquiera que éste fuere, primeramente es necesario conocer los elementos propios de la técnica que nos ayudarán a ello. Para esto, existe una clasificación de los elementos.

2.2.1 Elementos Puerto-1 Pasivos

Se consideran elementos ideales, los cuales representan un intercambio de potencia en un elemento sencillo y éste puede ser por disipación de potencia o por dos formas de almacenamiento de energía. En la tabla 2.2 se muestran los elementos de disipación y de almacenamiento para algunos sistemas.

2.2.2 Elementos Puerto-1 Activos o Fuentes

Los elementos que introducen energía al sistema son llamados *fuentes* y existen dos tipos de fuentes, *fente de esfuerzo* (que representa voltaje, presión o fuerza) y *fente de flujo* (que representa corriente, caudal o velocidad) denotadas como S_e y S_f respectivamente y se puede observar su representación gráfica en las figuras 2.2.y 2.3.

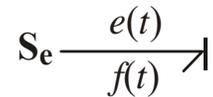


Figura 2.2: Fuente de esfuerzo

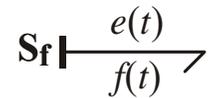


Figura 2.3: Fuente de flujo

2.2.3 Puertos uno y medio

Al realizar la representación de un sistema en Bond Graph se utilizan fuentes moduladas, es decir, fuentes que cuentan con un puerto extra de control por el cual se puede modificar el valor de la fuente. Estos elementos se muestran en las figuras 2.4 y 2.5.



Figura 2.4: Fuente modulada de esfuerzo

2.2.4 Elementos Ideales de Puerto-2

Los elementos de este puerto se caracterizan por cambiar la relación entre las variables generalizadas y son el *transformador* y el *girador*, denotados como TF y GY . En las figuras 2.6 y 2.7 se muestran estos elementos, así como la relación entre sus variables respectivamente.

2.2.5 Elementos de Unión, Puertos - 3

Estos elementos sirven para interconectar tres o más puertos de energía dentro de un sub-sistema y representan las conexiones en serie y paralelo. Son llamados *unión de flujo*, *unión -0* ó *unión de esfuerzo común* y *unión de esfuerzo*, *union -1* ó *unión de flujo común* y se muestran en las figuras 2.8 y 2.9.

Las relaciones de interconexión que describen una unión de flujo están dadas por la ecuación (2.4) así como las que describen una unión de esfuerzo, están dadas por la ecuación (2.5):

$$\begin{aligned} e_1 &= e_2 = \dots = e_n \\ f_1 + f_2 + \dots + f_n &= 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} i_1 &= i_2 = \dots = i_n \\ e_1 + e_2 + \dots + e_n &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.2.6 Causalidad para los multipuertos básicos

Una vez que ya se conocen los elementos básicos, se debe conocer también la relación de causa-efecto. La dirección del esfuerzo en un bond es contraria a la de su flujo y se representa



Figura 2.5: Fuente modulada de flujo

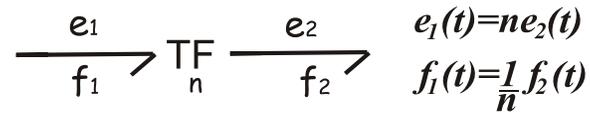


Figura 2.6: Transformador y sus ecuaciones

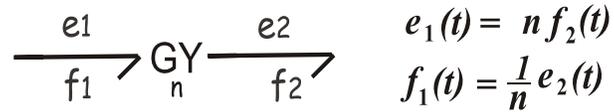


Figura 2.7: Girador y sus ecuaciones

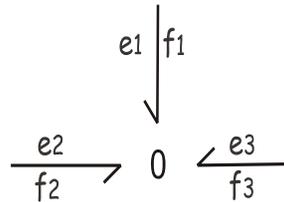


Figura 2.8: Unión de esfuerzo común

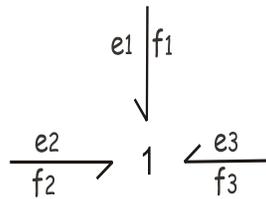


Figura 2.9: Unión de flujo común



Figura 2.10: Causalidad en un bond

Tabla 2.3: Consideraciones de causalidad para elementos en Bond Graph.

Causalidad Necesaria	MS_e	MS_f
Causalidad Restrictiva	$\overline{\text{--- 0---}}$	$\overline{\text{--- 0---}}$
	--- 1---	--- 1---
	--- TF---	--- TF---
	--- GY---	--- GY---
Causalidad Integral	--- C	--- I
Causalidad Derivativa	--- C	--- I
Causalidad Arbitraria	--- R	--- R

con una línea perpendicular al bond, la cual indica la dirección del esfuerzo. El trazo causal ayuda a saber identificar las entradas y salidas en los elementos.

Para los elementos de almacenamiento es preferible que se asigne una causalidad integral debido a que estos elementos son los que definen las variables de estado en una representación matemática y la causalidad integral asigna independencia lineal. Las reglas que se presentan en la tabla 2.3 se deben cumplir.

2.2.7 Procedimiento para el modelado de sistemas

Como se mencionó anteriormente, un sistema dinámico puede ser representado gráficamente con esta técnica, sólo es necesario tomar en cuenta la conceptualización de las variables para cada sistema. El procedimiento que se presenta en [25], es para un sistema eléctrico y la variación que tiene con respecto a otro tipo de sistemas radica principalmente en la asignación de las uniones.

1. Se etiquetan los nodos en cada voltaje distinto en el circuito.

2. Se asigna una unión - 0 a cada nodo.
3. Se asigna una unión - 1 para cada componente en una trayectoria serie y se conecta el componente apropiado de Bond Graph por un bond en esa unión. Esta unión 1 se coloca entre las uniones 0 que le corresponden .
4. Se colocan los bonds entre cada una de las uniones. La dirección de la semiflecha en cada bond indica la dirección asumida del flujo de potencia, es decir, a partir de fuentes y hacia almacenadores y elementos disipadores .
5. Remover la unión -0 que representa el punto de referencia y remover todos los bonds conectados a ésta unión .
6. Simplificar la gráfica de acuerdo a las reglas que se muestran en la Figura 2.11 según [29].

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow = \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow = \longrightarrow \end{array}$$

Figura 2.11:

7. Finalmente se asigna la causalidad a los elementos comenzando con aquellos de causalidad necesaria (ver tabla 2.3 (fuentes)), a continuación aquellos en los que es preferentemente la asignación de la causalidad integral (almacenadores) y por último los elementos a los que se les puede asignar una causalidad arbitraria (disipadores). Pero esto se hace cuidando la causalidad restrictiva.

2.2.8 Ejemplo de un sistema eléctrico

Dado el diagrama eléctrico de la Figura 2.12, y siguiendo los pasos en el procedimiento descrito para obtener su Bond Graph correspondiente.

Primeramente se nombran los nodos donde hay voltajes distintos, como se muestra en la figura 2.13.

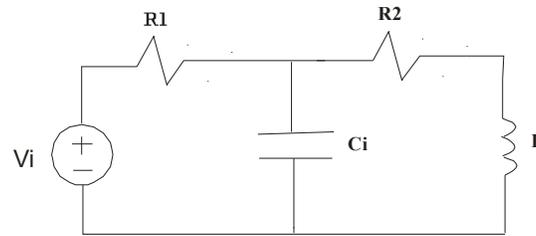


Figura 2.12: Sistema eléctrico

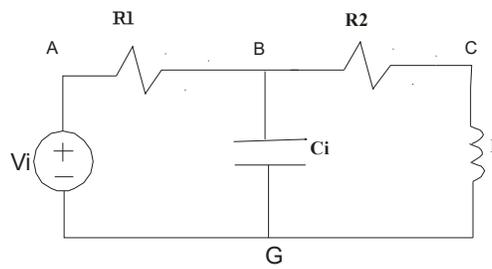


Figura 2.13: Paso 1 del procedimiento para la obtención del modelo en Bond Graph del sistema eléctrico mostrado en 2.12.

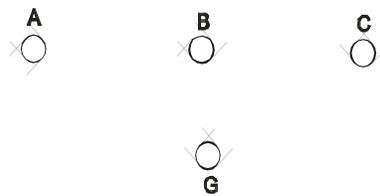


Figura 2.14: Paso 2 del procedimiento para la obtención del modelo en Bond Graph del sistema eléctrico mostrado en 2.12.

Se añaden las uniones con sus respectivos elementos colocando la dirección de los bonds de acuerdo al flujo de potencia como se muestra en la figura 2.15.

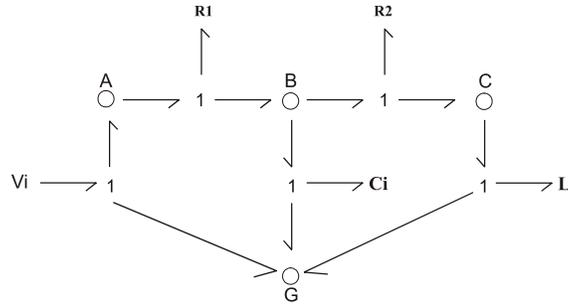


Figura 2.15: Paso 3 y 4 del procedimiento para la obtención del modelo en Bond Graph del sistema eléctrico mostrado en 2.12.

Se elimina un nodo de referencia como se muestra en la figura 2.16.

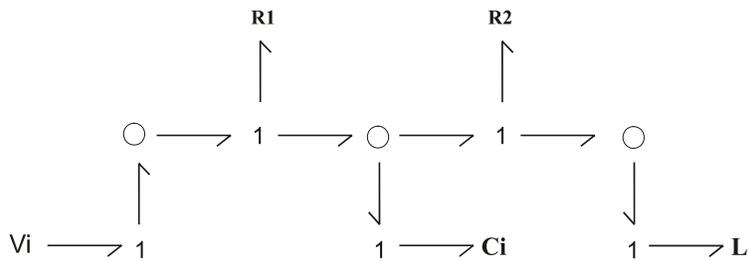


Figura 2.16: Paso 5 del procedimiento para la obtención del modelo en Bond Graph del sistema eléctrico mostrado en 2.12.

Se reduce el BG (figura 2.17)

Se asigna la causalidad para finalmente tener el modelo en BG del sistema eléctrico como se ilustra en la figura 2.18.

En el modelado de sistemas mecánicos e hidráulicos, se debe realizar los siguientes ajustes al procedimiento dado para la obtención del bond graph correspondiente.

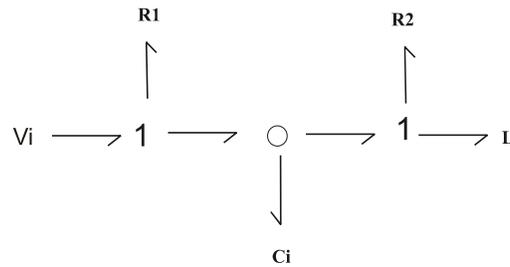


Figura 2.17: Paso 6, obtención final del Bond Graph del sistema eléctrico mostrado en 2.12 sin asignación de causalidad.

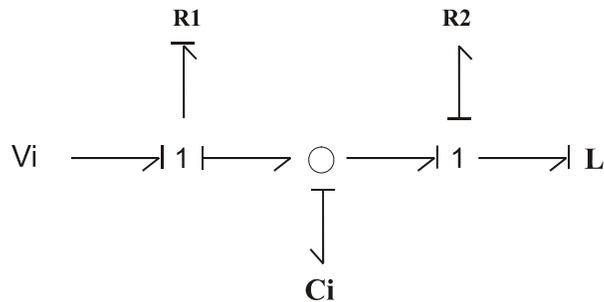


Figura 2.18: Paso 7, obtención final del Bond Graph del sistema eléctrico mostrado en 2.12, con causalidad integral predefinida asignada.

Caso mecánico En el paso 1 y 2, se etiquetan los nodos para cada velocidad distinta y se asigna a cada uno una unión -1

En el paso 3, se insertan uniones -0 entre cada unión -1 del paso 1 con los elementos de generación de fuerza.

El nodo de referencia puede ser cualquier velocidad cero.

Caso hidráulico Es más parecido al caso eléctrico.

En el paso 1 y 2 se consideran las presiones distintas y se asignan uniones -0

En el paso 3, se insertan uniones -1 entre cada unión -0 del paso 1 con los elementos de presión y flujo

El nodo de referencia es una presión (normalmente la atmosférica).

2.3 Estructura de unión en sistemas multipuerto

La *estructura de unión* es una representación análoga a una representación en espacio de estados tradicional en donde se visualiza la dinámica del sistema, la diferencia radica en que se utilizan variables de energía y no los estados en sí, aunque se sabe la relación entre estas variables de energía y sus estados correspondientes, por lo que a partir de esta representación podemos obtener una representación en espacio de estados tradicional [25].

Un diagrama a bloques de la estructura de unión de un modelo se muestra en la figura 2.19, donde se puede ver con claridad todos los elementos que conforman cualquier sistema dinámico. Para la obtención de la estructura de unión de un sistema, es necesario conocer los vectores clave y las relaciones de campo o relaciones constitutivas.

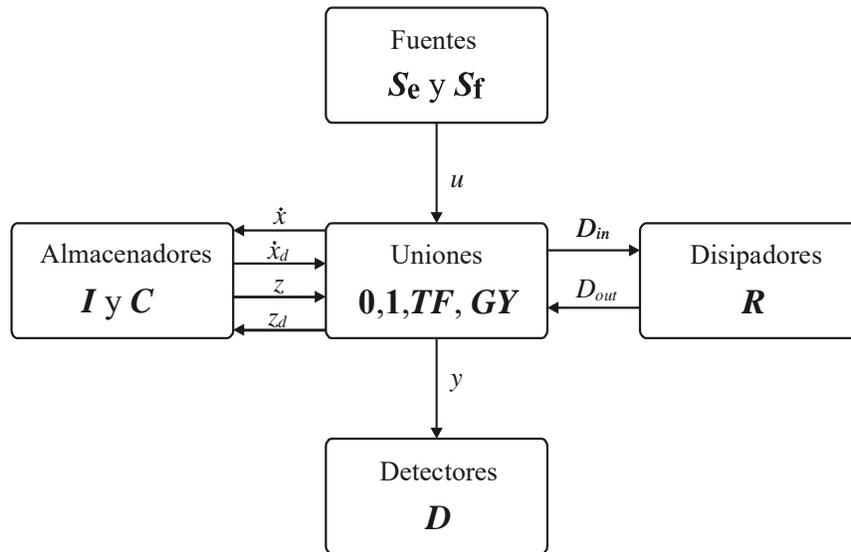


Figura 2.19: Diagrama a bloques de la estructura de unión de un Bond Graph

2.3.1 Vectores clave

Los vectores clave están representados como $u(t)$ que contiene las variables de potencia impuestos por los elementos de las fuentes, los estados $x(t)$ y $x_d(t)$ que contienen a las variables

de energía (momentos y desplazamientos generalizados generados en los elementos almacenadores) en causalidad integral y derivativa, respectivamente, $z(t)$ y $z_d(t)$ que contiene a las variables de co-energía en causalidad integral y derivativa, respectivamente y finalmente $D_{in}(t)$ y $D_{out}(t)$ que contienen a los elementos disipadores.

2.3.2 Relaciones de campo y ecuaciones de estado

Las relaciones de campo o constitutivas en general entre los elementos de almacenamiento y de disipación están definidas así:

$$z(t) = \Phi_F(x) \quad (2.6)$$

$$z_d(t) = \Phi_{Fd}(x_d) \quad (2.7)$$

$$D_{out}(t) = \Phi_L(D_{in}) \quad (2.8)$$

donde,

Φ_F es una función que relaciona cada z_i con x_i para $i = 1, \dots, n$.

Φ_{Fd} representa una función que relaciona cada z_{di} con x_{di} para $i = 1, \dots, m$.

Φ_L denota una función que relaciona cada D_{outi} con D_{ini} para $i = 1, \dots, r$.

donde n es el número de elementos de almacenamiento en causalidad integral, m es el número de elementos en causalidad derivativa y r es el número de elementos disipadores.

Particularizando las relaciones constitutivas a un comportamiento lineal, se tiene:

$$z(t) = Fx(t) \quad (2.9)$$

$$z_d(t) = F_d x_d(t) \quad (2.10)$$

$$D_{out}(t) = LD_{in}(t) \quad (2.11)$$

donde, L , F y F_d son matrices reales de dimensión $r \times r$, $n \times n$ y $m \times m$, respectivamente.

Las relaciones de la estructura de unión están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$z_d(t) = -S_{14}^T z(t) \quad (2.13)$$

donde

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos dentro de la matriz de estructura unión S toman valores dentro del conjunto $\{0, \pm 1, \pm n_t, \pm r_g\}$ donde n_t y r_g representan el módulo o relación del transformador y del girador. La matriz S está particionada de acuerdo a la dimensión de sus vectores clave.

Las submatrices S_{ij} cuando *no utilizan bonds activos* poseen las propiedades siguientes:

- Propiedad 1.- S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas antisimétricas.
- Propiedad 2.- S_{12} es la matriz transpuesta negativa de S_{21} y viceversa.

Las propiedades 1 y 2 están basadas en el principio de conservación de energía.

A partir de las relaciones existentes en la estructura unión, se puede obtener una representación en espacio de estados tradicional de la forma:

$$\dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p u(t) \quad (2.14)$$

$$y(t) = C_p x(t) + D_p u(t) \quad (2.15)$$

Considerando las submatrices S_{ij} y relacionando las ecuaciones (2.9) a la (2.11) con (2.14)

y (2.15) se obtienen las matrices:

$$A_p = E^{-1}(S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad (2.16)$$

$$B_p = E^{-1}(S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (2.17)$$

$$C_p = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad (2.18)$$

$$D_p = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (2.19)$$

Donde las matrices E y M están definidas por:

$$E = I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^T F \quad (2.20)$$

$$M = (I - LS_{22})^{-1}L \quad (2.21)$$

2.3.3 Procedimiento para obtención de la estructura de unión de un modelo en Bond Graph:

1. Se enumeran los bonds
2. Se crean los vectores clave, tomando en cuenta que:

Para un elemento C_n le corresponde en $x_n \longrightarrow q_n$, $\dot{x}_n \longrightarrow f_n$, $z_n \longrightarrow e_n$

Para un elemento I_n le corresponde en $x_n \longrightarrow p_n$, $\dot{x}_n \longrightarrow e_n$, $z_n \longrightarrow f_n$

donde p es el momento generalizado, q es el desplazamiento generalizado y f y e son los flujos y esfuerzos (en un sistema eléctrico son la corriente y el voltaje respectivamente).

El número asignado a cada bond se usa como subíndice.

3. Para establecer las relaciones constitutivas se considera:

$z = Fx \implies F = \text{diag}(\frac{1}{M_1}, \dots, \frac{1}{M_n})$ donde M_n son los elementos almacenadores de energía en causalidad integral

$D_{out} = LD_{in} \implies L = \text{diag}(N_1, \dots, N_n, \dots, \frac{1}{\tilde{N}_1}, \dots, \frac{1}{\tilde{N}_n})$ donde N_n y \tilde{N}_n son los elementos resistivos y de conductancia respectivamente.

4. La matriz S se obtiene aplicando las reglas de interconexión que describen una unión de flujo común (Unión 1), así como de una unión de esfuerzo común (Union 0). Para así tener completa la estructura de unión del modelo.

2.3.4 Ejemplo de obtención de la estructura de unión de un modelo en BG

A partir del Bond Graph de la figura 2.20, se encontrará la matriz de estructura de unión para encontrar el modelo en espacio de estados, siguiendo el procedimiento presentado.

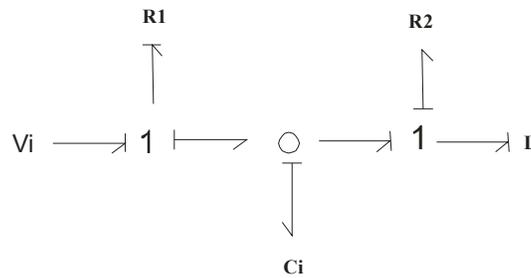


Figura 2.20: Modelo BG de un sistema eléctrico

1. Se enumeran los bonds (Figura 2.21)

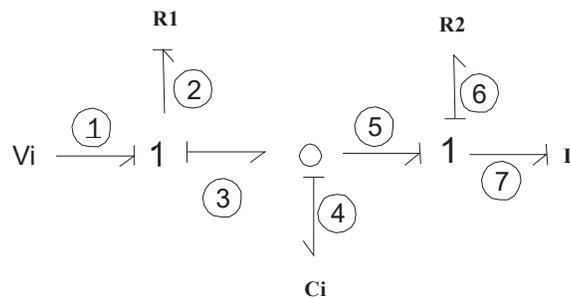


Figura 2.21: Enumeración de los bonds

2. Se crean los vectores clave utilizando la numeración ilustrada en la figura 2.21:

$$x = \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \end{bmatrix}, \quad D_{in} = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \end{bmatrix}, \quad D_{out} = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \end{bmatrix}, \quad u = e_1, \\ y = f_7$$

3. Las relaciones constitutivas de los elementos de disipación como de almacenamiento, tomando en cuenta la numeración mostrada en 2.21, están dadas por:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad ; \quad L = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \quad \text{y } F_d = 0 \text{ (por no haber elementos almacenadores en causalidad derivativa)}$$

4. La estructura de unión del Bond Graph queda:

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \\ e_2 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \\ f_2 \\ e_6 \\ e_1 \\ \dot{x}_d \end{bmatrix}$$

donde:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad S_{14} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ S_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad S_{24} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ S_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{33} = 0 \quad \text{y} \quad S_{34} = 0$$

5. Sustituyendo en las ecuaciones para la obtención de la representación en espacio de estados, se tiene:

$$A_p = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 C} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-R_2}{L} \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad D_p = 0$$

2.4 Campos de multipuerto

En el transcurso de este capítulo se mostraron los elementos puerto-1 pasivos, I, C y R, utilizando la esencia de los mismos, se tienen los "campos" que son generalizaciones de multipuerto de ellos. En este trabajo se necesita conocer los campos involucrados con elementos resistivos que son llamados campos resistivos o campos-R que se pueden revisar en [2].

2.4.1 Campos resistivos

Un campo-R es un puerto- n y las leyes constitutivas que relacionan los esfuerzos de n puertos y flujos de n puertos son por medio de funciones algebraicas. La causalidad para campos -R usualmente es determinada por la fuente de energía y elementos de almacenamiento de energía en el sistema. Dos modelos causales fundamentales son mostrados en la siguiente figura 2.22.

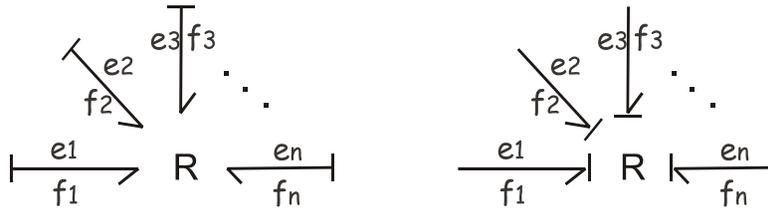


Figura 2.22: Ejemplos de campos -R con causalidad homogénea.

donde las leyes constitutivas para la causalidad de resistencia puede ser escrita por la expresión (2.22), así como, para la causalidad de conductancia es (2.23),

$$e_i = \Phi_{R_i}(f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.22)$$

$$f_i = \Phi_{R_i}^{-1}(e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.23)$$

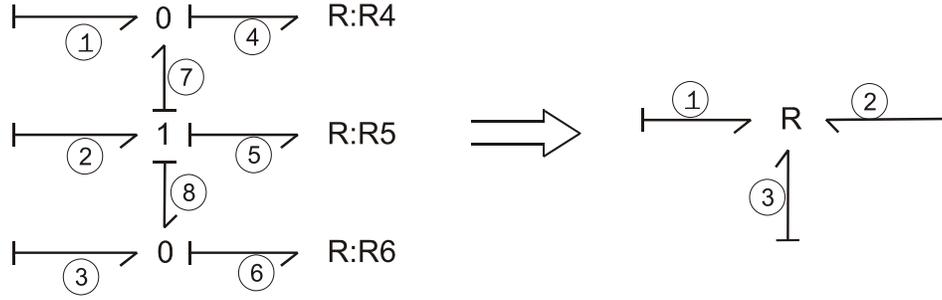


Figura 2.23: Ejemplo de un campo -R

donde

$$\Phi_{R_i} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo de un campo-R con causalidad simple

En la figura 2.23 se tiene el bond graph de un campo -R y su representación concentrada a su derecha, cuya relación constitutiva se muestra en la expresión (2.24).

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_4 & R_4 & 0 \\ R_4 & R_4 + R_5 + R_6 & R_6 \\ 0 & R_6 & R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

En el bond graph mostrado, las relaciones constitutivas son simétricas y a estas formas se les llama formas "Onsager" en analogía a las conocidas relaciones recíprocas Onsager de termodinámica irreversible.

Por otra parte, para causalidad mezclada, la matriz tendrá términos antisimétricos y si giradores están presentes, las relaciones de reciprocidad de Onsager no se tendrán. A continuación, se muestra un campo -R con causalidad mezclada donde se dan términos asimétricos y posterior a éste, se presenta un ejemplo donde un girador es incluido.

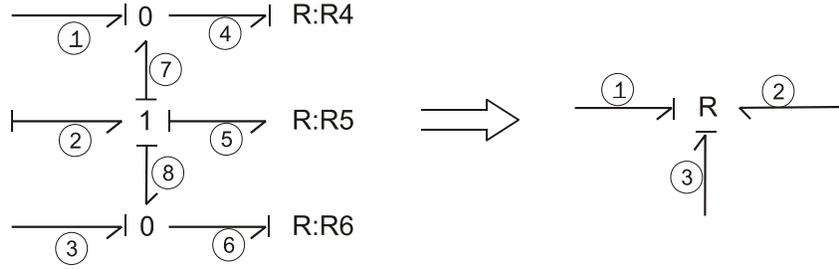


Figura 2.24: Campo-R con causalidad mezclada

2.4.2 Ejemplo Campo-R con causalidad mezclada

En la figura 2.24 se muestra un campo -R con causalidad mezclada y su representación concentrada a su lado derecho, cuya relación constitutiva se muestra en la expresión (2.25) en donde se puede observar la asimetría en la expresión.

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ e_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_4} & -1 & 0 \\ 1 & R_5 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{R_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ f_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

2.4.3 Ejemplo Campo-R con un girador incluido

En la figura 2.25 se muestra un campo -R con un elemento girador incluido cuyo modulo se ve reflejado en la relación constitutiva del campo como se muestra en la expresión (2.26) en donde se puede observar la asimetría en la expresión.

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{R_5}{r^2} & \frac{1}{r} \\ 0 & -\frac{1}{r} & \frac{1}{R_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

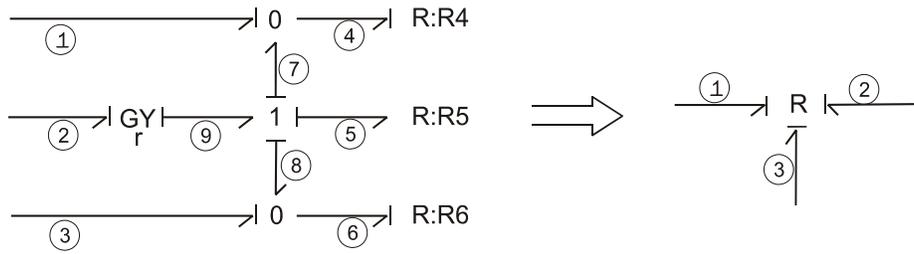


Figura 2.25: Ejemplo de un campo-R donde se incluye un elemento girador.

En este capítulo se abarcó todo lo concerniente a los conceptos básicos del modelado en Bond Graph para poder continuar el análisis de los sistemas en lazo cerrado utilizando la técnica del bond graph y comparar con la forma tradicional de análisis de los mismos.

Capítulo 3

Sistema en lazo cerrado en Bond Graph

3.1 Introducción

Los sistemas de control se clasifican en sistemas en lazo abierto y en lazo cerrado, un sistema de lazo abierto es aquel donde la salida no tiene efecto sobre la acción de control. La exactitud de un sistema de lazo abierto depende de dos factores que son, la calibración del elemento de control y la repetitividad de eventos de entrada sobre un extenso período de tiempo en ausencia de perturbaciones externas.

Un sistema de control en lazo cerrado es también conocido como un sistema de control retroalimentado, es decir, son aquellos en los que existe una retroalimentación de la señal de salida, o dicho de otra forma, aquellos en los que la señal de salida tiene efecto sobre la acción de control. En algunas ocasiones, la señal controlada y la señal de referencia no son de la misma naturaleza, por lo que es necesario un elemento encargado de detectar la señal de salida y transformarla en una señal que puedan entender los demás componentes del sistema del controlador, este elemento es un transductor y en bond graph se representa por un elemento girador, un ejemplo es el de una galga extensiométrica, que transforma una señal mecánica (tensión producida por una fuerza) a una señal eléctrica (voltaje).

3.2 Sistemas en lazo cerrado

En el enfoque clásico, un sistema en lazo cerrado tiene la finalidad de poder aplicar un control a partir de un error producido por la dinámica del sistema, a fin de obtener un comportamiento deseado del sistema a controlar, como puede ser, la estabilidad, la ganancia directa, el sobreimpulso, el tiempo de rizado, entre otras, esto lo hace, por medio de una señal de error la cual es producida por la señal retroalimentada y una señal de referencia. La señal de error será aplicada al controlador para que éste calcule una señal de control que será aplicada al sistema. Está formado, en general, por elementos de, comparación, control, corrección y de medición, así como del proceso principal del sistema como se muestra en la figura 3.1.

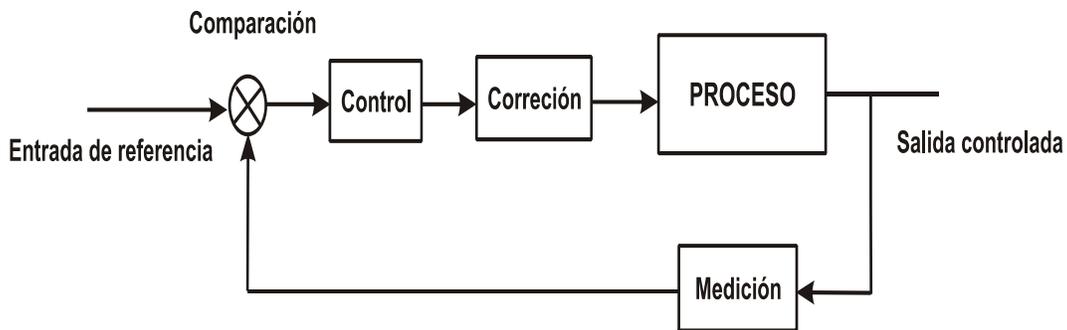


Figura 3.1: Sistema en lazo cerrado y sus elementos principales.

3.3 Función de transferencia

La Función de Transferencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI), está definida como el cociente de la transformada de Laplace de la variable de salida entre la transformada de Laplace de la variable de entrada, considerando nulas las condiciones iniciales.

$$FT = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{3.1}$$

Dicha relación entrada-salida está descrita matemáticamente por el cociente dado en la ecuación (3.2) para el caso de sistemas LTI.

$$FT = \frac{a_0s^m + a_1s^{m-1} + \dots + a_{m-1}s + a_m}{b_0s^n + b_1s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + b_n} \quad (3.2)$$

En donde las raíces del polinomio del denominador, o también llamado polinomio característico, son los polos del sistema, así como las raíces del polinomio del numerador son los ceros del mismo. Al examinar la función de transferencia de un sistema se puede saber si es realizable o no, basta con observar las variables m y n de los polinomios, ya que para que un sistema sea realizable es necesario que se cumpla (3.3).

$$n \geq m \quad (3.3)$$

La función de transferencia resulta de suma importancia en el diseño de controladores ya que a partir de ella se pueden realizar pruebas para conocer la respuesta del sistema ante cualquier entrada.

3.3.1 Función de transferencia en Bond Graph a partir de la estructura de unión

Como se vió en el capítulo 2, a partir de la representación en bond graph se obtiene la estructura unión del sistema del cual se pueden obtener las matrices en espacio de estados dadas por el conjunto de ecuaciones (2.16) a (2.21).

Una vez obtenidas las matrices en espacio de estados, se puede obtener la relación entrada-salida del sistema, expresión (3.4), que para un caso SISO, se traduce en la función de transferencia mostrada en la expresión (3.5).

$$Y(s) = \left[C_p(sI_n - A_p)^{-1}B_p + D_p \right] U(s) \quad (3.4)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C_p(sI_n - A_p)^{-1}B_p + D_p \quad (3.5)$$

Un inconveniente para el uso de este camino para encontrar la función de transferencia de un sistema es la obtención de la matriz inversa de $(SI_n - A_p)$, ya que en ocasiones resulta complicado hablando computacionalmente, es por ello que el BG (Bond Graph) da otra alternativa para la obtención de dicha función de transferencia partiendo del Bond Graph directamente [18] como se describe a continuación.

3.4 Determinación directa de la función de transferencia en lazo cerrado

Para determinar en forma directa la función de transferencia en lazo cerrado, es necesario tomar en cuenta las definiciones dadas en [29], que a continuación se presentan :

3.4.1 Trayectoria Causal

Una trayectoria causal de una estructura de unión es una secuencia alternante de bonds y nodos tal que:

- * *Para una gráfica acausal, es decir, una gráfica que no tiene la causalidad aplicada a sus elementos o bonds, la secuencia se dice que forma una cadena sencilla.*
- * *Todos los nodos en la secuencia tienen una completa y correcta causalidad.*
- * *En cada unión en una trayectoria se tiene una orientación de causalidades opuesta.*

Una *trayectoria causal es simple*, si a través de la misma sigue solamente una misma variable, tal como se muestra en la figura 3.2 .

Una *trayectoria causal es mezclada* si un cambio de variable es requerido a través de la secuencia causal.

Si el cambio se debe a un elemento puerto-2 (GY), la trayectoria causal es llamada *mezclada directa* (fig 3.3).

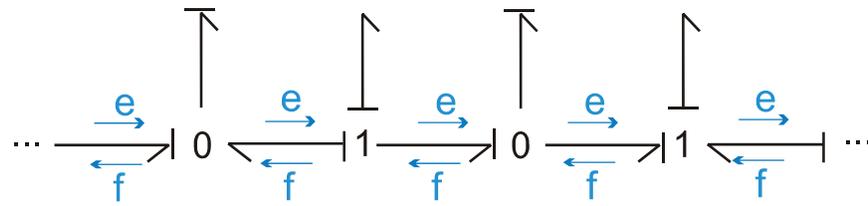


Figura 3.2: Ejemplo de trayectoria causal simple

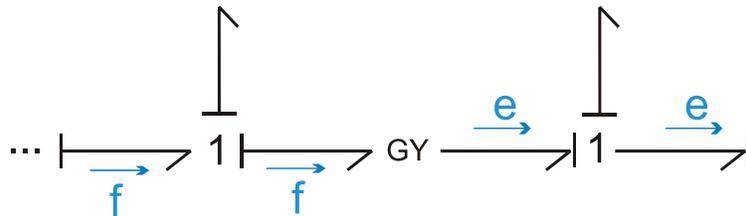


Figura 3.3: Ejemplo de trayectoria causal mezclada directa a través de un elemento girador (GY)

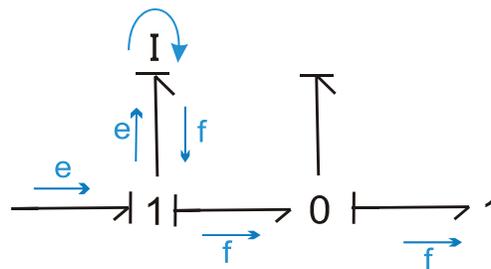


Figura 3.4: Ejemplo de trayectoria causal mezclada indirecta a través de un elemento de almacenamiento (I)

Cuando pasa la trayectoria a través de un elemento puerto-1 pasivo , la trayectoria causal es llamada *mezclada indirecta* (fig 3.4).

Dos elementos P_1 y P_2 perteneciendo al conjunto $\{R, C, I, S_e, S_f, D_e$ y $D_f\}$ se dicen ser causalmente conectados si la variable de entrada de una, es influenciada por la variable de salida de la otra.

Una *trayectoria directa* es una trayectoria causal entre una entrada y un detector (entrada-salida)

Una *trayectoria causal indirecta* es una trayectoria que pasa a través de elementos R , C o I cuyas relaciones constitutivas son tomadas en cuenta (fig 3.5)

Un *lazo causal* es una trayectoria causal sencilla cerrada.

Un *lazo de Mason* es un lazo causal de la salida de un puerto a la entrada del mismo puerto sin trazar el mismo bond en la misma dirección más de una vez.

Conexión causal	Transmitancia
$C \leftarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow R$	$-1 / RCs$
$I \leftarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow R$	$-R / Is$
$I \leftarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow C$	$-1 / Cs^2$
$R_1 \leftarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow R_2$	$-R_2 / R_1$
$C \leftarrow 0 \rightarrow \begin{matrix} TF \\ m \end{matrix} \rightarrow \dots \rightarrow R$	$-1 / RCm^2s$
$C \leftarrow 0 \rightarrow \begin{matrix} GY \\ r \end{matrix} \rightarrow \dots \rightarrow R$	$-R / Cr^2s$

Figura 3.5: Tabla con algunas conexiones causales y sus correspondientes relaciones constitutivas (Transmitancias)[29].

3.4.2 Bond Adaptado

Para la obtención directa de la función de transferencia en lazo cerrado se utiliza un bond especial, llamado *bond adaptado* [18] que se muestra en la figura 3.6, que está conformado por una línea continua la cuál posee las características típicas de un bond y una línea discontinua

que es una aproximación de un bond. Este bond tiene la finalidad de poder conectar dos subsistemas como lo hace un típico bond activo pero con la ventaja de poseer causalidad como la tiene un bond simple.



Figura 3.6: Bond adaptado conectando dos subsistemas

En la figura 3.6, el subsistema B tiene un efecto de carga sobre el subsistema A y se pueden presentar los casos mostrados en la figura 3.7.

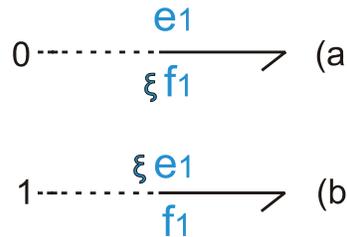


Figura 3.7: Bond adaptado conectado a uniones.

El parámetro ξ , puede variar en el intervalo, $0 \leq \xi \leq 1$. Si $\xi = 0$ el bond adaptado tiene el comportamiento ideal, es decir, el mismo comportamiento que tiene un bond activo, en cambio si $\xi = 1$, entonces el bond adaptado se comporta como un bond común.

En la figura 3.8 se muestra un ejemplo donde se utiliza el bond adaptado con causalidad. Las relaciones para la unión 1 son:

$$f_3 = f_1 \quad ; \quad f_2 = f_1 \quad ; \quad e_1 = \xi e_3 - e_2$$

y en la unión 0 son:

$$e_5 = e_4 \quad ; \quad e_3 = e_4 \quad ; \quad f_4 = f_3 + f_5$$

3.4.3 Función característica de una trayectoria causal directa mezclada o

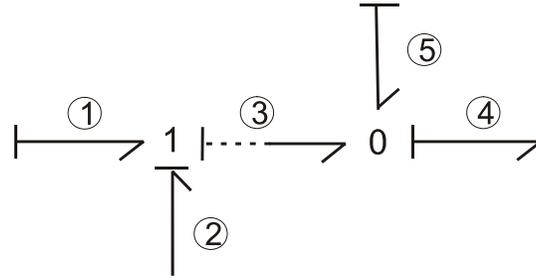


Figura 3.8: Ejemplo de un bond causal utilizando un bond adaptado.

simple

La función característica de una trayectoria causal está definida como la función que enlaza la variable de salida del elemento correspondiente al origen de la trayectoria, a la variable de entrada del elemento final de la trayectoria y está definida para una trayectoria causal directa mezclada o simple como se muestra en la ecuación (3.6).

$$T_i = (-1)^{n_0+n_1} \prod_{j,k} (m_j \text{ ó } \frac{1}{m_j})(r_k \text{ ó } \frac{1}{r_k}) \quad (3.6)$$

donde n_0 y n_1 representan el número total de cambios de orientación de los bonds en las uniones -0 mientras se sigue la variable de flujo y en las uniones -1 mientras se sigue la variable de esfuerzo, respectivamente. Así mismo, $m_j, \frac{1}{m_j}, r_k$ y $\frac{1}{r_k}$ son los módulos de los elementos TF o GY (dependiendo de su causalidad), que intervienen en la trayectoria causal.

En la figura 3.9 se ilustran ejemplos para hacer notar los cambios de orientación.

3.4.4 Ejemplo de obtención de la ganancia de una trayectoria directa

En la figura 3.10 se muestra un ejemplo sencillo para encontrar la relación $\frac{e_5}{e_1}$.

Siguiendo la variable de esfuerzo existe un cambio de orientación, por lo que se tiene:

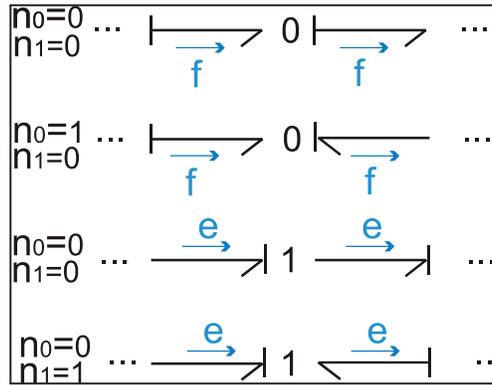


Figura 3.9: Ejemplos de la representación del número total de cambios de orientación.

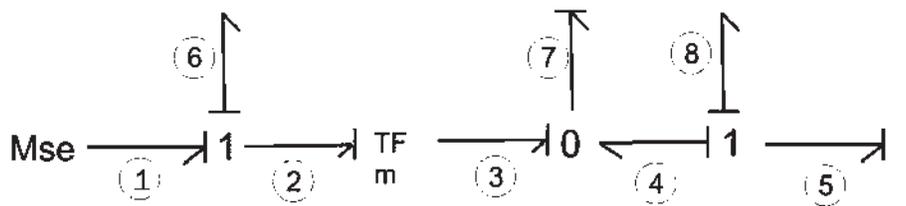


Figura 3.10: Ejemplo para encontrar la relación entre la entrada y el elemento I del sistema.

$$n_0 = 0 \quad ; \quad n_1 = 1$$

y puesto que sólo pasa a través de un transformador (TF), este contribuye debido a su causalidad con una ganancia de $\frac{1}{m}$

Por lo que la relación deseada es,

$$\frac{e_5}{e_1} = (-1)\left(\frac{1}{m}\right)$$

3.4.5 Obtención del polinomio característico

El polinomio característico está dado por la ecuación (3.7) en [29]:

$$\Delta(s) = 1 - \sum_i B_i + \sum_{i,j} B_i B_j - \sum_{i,j,k} B_i B_j B_k + \dots \quad (3.7)$$

donde, B_i es el producto de las ganancias del lazo sencillo i , $B_i B_j$ es el producto de las ganancias de todas las combinaciones posibles de 2 lazos sencillos que no se tocan entre sí, así sucesivamente.

La ganancia de lazo sencillo denotada por $L_{ij}(s)$ en la ecuación (3.8) es la ganancia del j^{th} lazo de Mason.

$$L_{iJ}(s) = (-1)^{n_0+n_1} \prod_{J,K} \left(m_J \text{ ó } \frac{1}{m_J} \right)^2 \left(r_K \text{ ó } \frac{1}{r_K} \right)^2 \prod_h G_h \quad (3.8)$$

donde $\prod_{J,K}$ denota el producto de los módulos de los elementos de TF y GY incluidos en trayectoria causal, dependiendo sus causalidades y \prod_h denota el producto de ganancias de los elementos que componen el lazo.

3.4.6 Función de transferencia de un sistema en lazo cerrado

La función de transferencia a través de lazos está definida por la regla de Mason y es expresada por la ecuación (3.9) [18] .

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{\sum T_i(s)\Delta_i(s)}{\Delta(s)} \quad (3.9)$$

Tomando:

$$\Delta(s) = 1 - \sum_i B_i + \sum_{i, j} B_i B_j - \sum_{i, j, k} B_i B_j B_k + \dots \quad (3.10)$$

donde T_i es la ganancia de la trayectoria directa i ; Δ está definida por (3.7); Δ_i es similar a Δ pero excluyendo los términos que incluyan los lazos sencillos y sus combinaciones que toquen la trayectoria directa i .

3.4.7 Ejemplo de un sistema eléctrico

A partir de la figura 3.11, se desea obtener la función de transferencia $\frac{Y(s)}{W(s)}$ utilizando trayectorias causales [18], donde la salida deseada es el esfuerzo correspondiente al elemento C_1 .

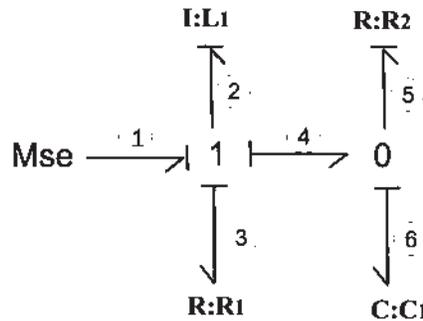


Figura 3.11: Ejemplo para la obtención de la función de transferencia a través de trayectorias causales

La estructura unión correspondiente a la figura 3.11, se muestra en (3.11).

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \\ f_3 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \\ e_3 \\ f_5 \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Primero se obtiene la trayectoria directa siguiendo los bonds: 1 – 2 – 2 – 4 – 6 – 6, como se muestra en la figura 3.12.

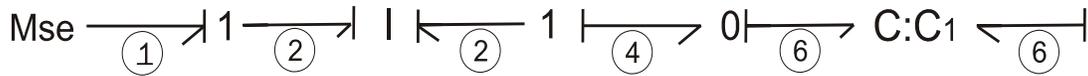


Figura 3.12: Trayectoria causal directa entre entrada-salida.

Obteniendo :

$$T_1 = \frac{1}{L_1 C_1 s^2}$$

Ahora se obtienen los lazos causales:

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{R_1}{L_1 s} \\ B_2 &= -\frac{1}{L_1 C_1 s^2} \\ B_3 &= -\frac{1}{R_2 C_1 s} \\ B_{1,3} &= \frac{R_1}{R_2 L_1 C_1 s} \end{aligned}$$

Por lo que,

$$\Delta(s) = 1 - \left(-\frac{R_1}{L_1 s} - \frac{1}{L_1 C_1 s^2} - \frac{1}{R_2 C_1 s} \right) + \frac{R_1}{R_2 L_1 C_1 s}$$

$$\Delta_i(s) = 1$$

Por lo tanto,

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{\frac{1}{L_1 C_1 s^2}}{1 + \frac{R_1}{L_1 s} + \frac{1}{L_1 C_1 s^2} + \frac{1}{R_2 C_1 s} + \frac{R_1}{R_2 L_1 C_1 s}}$$

Reacomodando se tiene la ecuación (3.12).

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{\frac{1}{C_1 L_1}}{s^2 + \left(\frac{1}{R_2 C_1} + \frac{R_1}{L_1}\right)s + \frac{R_1}{R_2 C_1 L_1} + \frac{1}{C_1 L_1}} \quad (3.12)$$

Por otro lado, y utilizando la estructura de unión se obtiene la representación en espacio de estados del sistema, dado por las matrices (3.13)

$$A_p = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{1}{R_2 C_1} \end{bmatrix}; \quad B_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} \end{bmatrix}; \quad D_p = 0 \quad (3.13)$$

y tomando en cuenta la expresión (3.14) encontrada para obtener la relación entrada - salida en un sistema (en el dominio de Laplace), se obtiene la función de transferencia mostrada en la ecuación (3.15) y reacomodando términos se tiene la ecuación (3.16)

$$Y(s) = [C_p(sI_n - A_p)^{-1}B_p + D_p] \quad (3.14)$$

$$\frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + sL_1 + sC_1 R_1 R_2 + s^2 C_1 L_1 R_2} \quad (3.15)$$

$$\frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{\frac{1}{C_1 L_1}}{s^2 + \left(\frac{1}{R_2 C_1} + \frac{R_1}{L_1}\right)s + \frac{R_1}{R_2 C_1 L_1} + \frac{1}{C_1 L_1}} \quad (3.16)$$

Como se puede observar, la función de transferencia del sistema utilizando trayectorias causales (ecuación (3.12)) y la encontrada utilizando la forma tradicional (ecuación (3.16)) es la misma.

3.4.8 Ejemplo de un sistema eléctrico

A continuación se da un ejemplo de aplicación con un controlador PI aplicado al sistema eléctrico que se ilustra en la figura 3.13 , así como el bond graph en las figuras 3.14 y 3.15 del sistema en lazo abierto y en lazo cerrado respectivamente, así como el conjunto de matrices (3.17) correspondientes a su representación en espacio de estados en lazo cerrado.

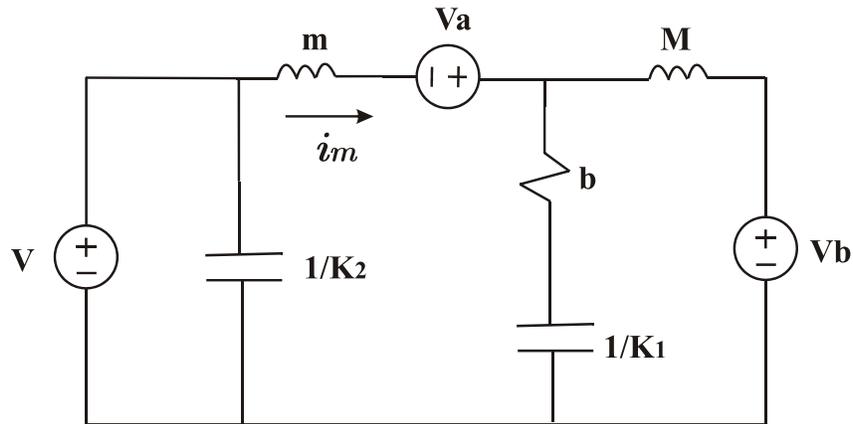


Figura 3.13: Sistema eléctrico

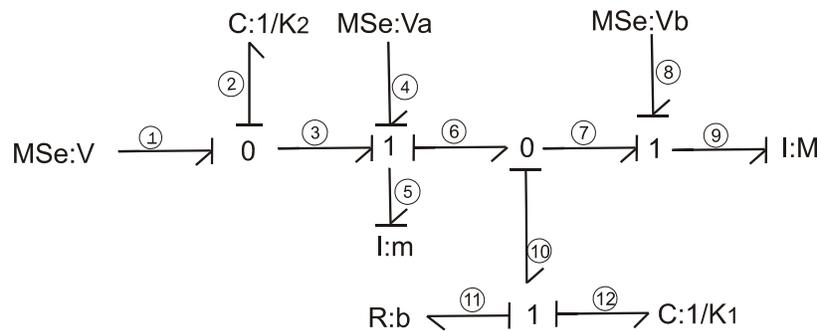


Figura 3.14: Representación en BG del sistema eléctrico en lazo abierto

$$\begin{aligned}
 A_{lc} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{(-1-\frac{1}{R})}{m} & 0 & 0 & \frac{1}{L_i} \\ K_2 & -\frac{b}{m} & \frac{b}{M} & -K_1 & 0 \\ 0 & \frac{b}{m} & -\frac{b}{M} & K_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & -\frac{1}{M} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 B_{lc} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R_c} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 C_{lc} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Al sistema se le implementa un controlador de tipo PI (la forma de implementar el controlador se ve en el capítulo 4) y el BG del sistema en lazo cerrado se muestra en la figura 3.15, lo que se busca es encontrar la función de transferencia en lazo cerrado a través del uso de trayectorias causales.

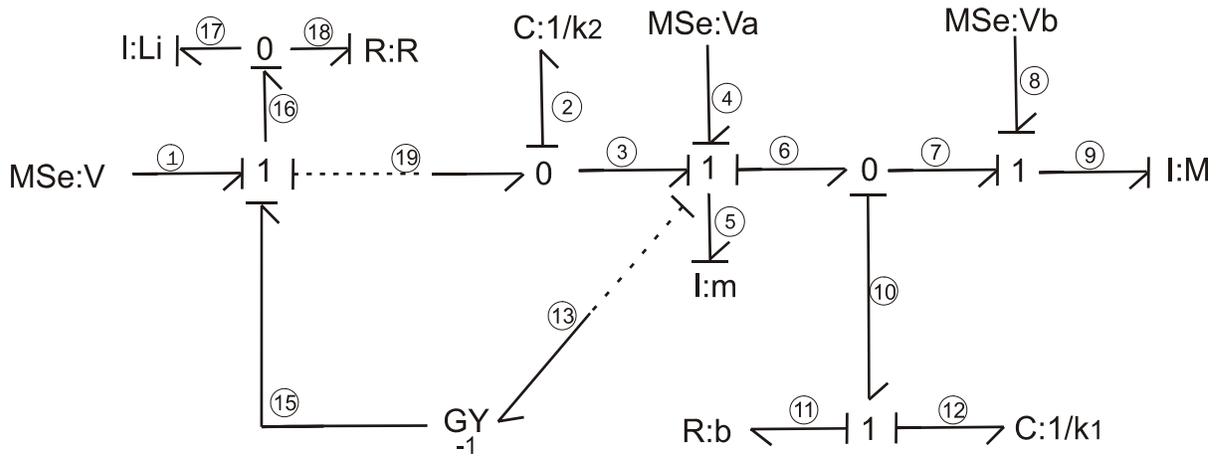


Figura 3.15: Modelo de un sistema mecánico y su controlador tipo PI utilizando bonds adaptados

La salida deseada es la velocidad de la llanta, es decir, el flujo en el elemento m , y tomando

ésto en cuenta, las trayectorias causales directas son:

$$\begin{aligned}
 T_1: & \quad \left(\frac{1}{L_i s}\right) \left(\frac{K_2}{s}\right) \left(\frac{1}{ms}\right) = \frac{K_2}{s^3 m L_i} & 1 - 16 - 17 - 17 - 16 - 19 - 2 - 2 - 3 - 5 - 5 \\
 T_2: & \quad \left(\frac{1}{R}\right) \left(\frac{K_2}{s}\right) \left(\frac{1}{ms}\right) = \frac{K_2}{s^2 m R} & 1 - 16 - 18 - 18 - 16 - 19 - 2 - 2 - 3 - 5 - 5 \\
 T_3: & \quad \left(\frac{1}{L_i s}\right) (-1) (\xi_{13}) \left(\frac{1}{ms}\right) = -\frac{\xi_{13}}{s^2 m L_i} & 1 - 16 - 17 - 17 - 16 - 15 - 13 - 5 - 5 \\
 T_4: & \quad \left(\frac{1}{R}\right) (-1) (\xi_{13}) \left(\frac{1}{ms}\right) = -\frac{\xi_{13}}{sm R} & 1 - 16 - 18 - 18 - 16 - 15 - 13 - 5 - 5
 \end{aligned}$$

Los lazos causales encontrados son:

$$\begin{aligned}
 L_1: & \quad \begin{array}{l} n_1 = 1 \\ n_0 = 0 \end{array} & \left(\frac{K_2}{s}\right) (\xi_{19}) \left(\frac{1}{L_i s}\right) = -\frac{\xi_{19} K_2}{s^2 L_i} \\
 & & 2 - 19 - 16 - 17 - 17 - 16 - 19 - 2 \\
 \\
 L_2: & \quad \begin{array}{l} n_1 = 1 \\ n_0 = 0 \end{array} & \left(\frac{K_2}{s}\right) (\xi_{19}) \left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\xi_{19} K_2}{s R} \\
 & & 2 - 19 - 16 - 18 - 18 - 16 - 19 - 2 \\
 \\
 L_3: & \quad \begin{array}{l} n_1 = 0 \\ n_0 = 1 \end{array} & \left(\frac{1}{sm}\right) (-1) \left(\frac{1}{L_i s}\right) (-1) (\xi_{13}) = -\frac{\xi_{13}}{s^2 m L_i} \\
 & & 5 - 13 - 15 - 16 - 17 - 17 - 16 - 15 - 13 - 5 \\
 \\
 L_4: & \quad \begin{array}{l} n_1 = 0 \\ n_0 = 1 \end{array} & \left(\frac{1}{sm}\right) (-1) \left(\frac{1}{R}\right) (-1) (\xi_{13}) = -\frac{\xi_{13}}{sm R} \\
 & & 5 - 13 - 15 - 16 - 18 - 18 - 16 - 15 - 13 - 5 \\
 \\
 L_5: & \quad \begin{array}{l} n_1 = 0 \\ n_0 = 1 \end{array} & \left(\frac{1}{sm}\right) \left(\frac{K_2}{s}\right) = -\frac{K_2}{s^2 m} \\
 & & 5 - 3 - 2 - 2 - 3 - 5 \\
 \\
 L_6: & \quad \begin{array}{l} n_1 = 1 \\ n_0 = 0 \end{array} & \left(\frac{1}{sm}\right) (b) = -\frac{b}{sm} \\
 & & 5 - 6 - 10 - 11 - 11 - 10 - 6 - 5 \\
 \\
 L_7: & \quad \begin{array}{l} n_1 = 1 \\ n_0 = 0 \end{array} & \left(\frac{1}{sm}\right) \left(\frac{K_1}{s}\right) = -\frac{K_1}{s^2 m} \\
 & & 5 - 6 - 10 - 12 - 12 - 10 - 6 - 5 \\
 \\
 L_8: & \quad \begin{array}{l} n_1 = 0 \\ n_0 = 1 \end{array} & (b) \left(\frac{1}{sM}\right) = -\frac{b}{sM} \\
 & & 11 - 10 - 7 - 9 - 9 - 7 - 10 - 11 \\
 \\
 L_9: & \quad \begin{array}{l} n_1 = 0 \\ n_0 = 1 \end{array} & \left(\frac{K_1}{s}\right) \left(\frac{1}{sM}\right) = -\frac{K_1}{s^2 M}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
 L_{10}: \quad n_1 = 2 \\
 \quad \quad n_0 = 1 \\
 \quad \quad \quad 12 - 10 - 7 - 9 - 9 - 7 - 10 - 12 \\
 \quad \quad \quad \left(\frac{1}{sm}\right) \left(\frac{K_2}{s}\right) (\xi_{19}) \left(\frac{1}{R}\right) (-1) (\xi_{13}) = \frac{\xi_{13}\xi_{19}K_2}{s^2mR} \\
 \quad \quad \quad 5 - 3 - 2 - 2 - 19 - 16 - 18 - 18 - 16 - 15 - 13 - 5 \\
 L_{11}: \quad n_1 = 2 \\
 \quad \quad n_0 = 1 \\
 \quad \quad \quad \left(\frac{1}{sm}\right) \left(\frac{K_2}{s}\right) (\xi_{19}) \left(\frac{1}{sL_i}\right) (-1) (\xi_{13}) = \frac{\xi_{13}\xi_{19}K_2}{s^3mL_i} \\
 \quad \quad \quad 5 - 3 - 2 - 2 - 19 - 16 - 17 - 17 - 16 - 15 - 13 - 5 \\
 L_{12}: \quad n_1 = 0 \\
 \quad \quad n_0 = 0 \\
 \quad \quad \quad \left(\frac{1}{sm}\right) (-1) \left(\frac{1}{R}\right) \left(\frac{K_2}{s}\right) = -\frac{K_2}{s^2mR} \\
 \quad \quad \quad 5 - 13 - 15 - 16 - 18 - 18 - 16 - 19 - 2 - 2 - 3 - 5 \\
 L_{13}: \quad n_1 = 0 \\
 \quad \quad n_0 = 0 \\
 \quad \quad \quad \left(\frac{1}{sm}\right) (-1) \left(\frac{1}{sL_i}\right) \left(\frac{K_2}{s}\right) = -\frac{K_2}{s^3mL_i} \\
 \quad \quad \quad 5 - 13 - 15 - 16 - 17 - 17 - 16 - 19 - 2 - 2 - 3 - 5
 \end{array}$$

Considerando que no hay efectos de carga, se tiene que, $\xi_j = 0 \quad \forall j$, por lo que los vectores resultan:

$$\Delta = 1 - \sum_{j=1}^{13} L_j + L_5L_8 + L_5L_9 + L_8L_{12} + L_8L_{13} + L_9L_{12} + L_9L_{13}$$

$$\Delta = \frac{\gamma_1s^5 + \gamma_2s^4 + \gamma_3s^3 + \gamma_4s^2 + \gamma_5s + \gamma_6}{\gamma_1s^5}$$

donde:

$$\gamma_1 = L_iRMm$$

$$\gamma_2 = L_iMRb + LRbm$$

$$\gamma_3 = L_iMRK_1 + L_iMRK_2 + L_iRmK_1 + L_iMK_2$$

$$\gamma_4 = L_iRbK_2 + MRK_2 + L_ibK_2$$

$$\gamma_5 = RbK_2 + L_iRK_1K_2 + L_iK_1K_2$$

$$\gamma_6 = RK_1K_2$$

$$\Delta_i = \Delta_1 = \Delta_2 = 1 - L_8 - L_9$$

$$\Delta_i = \frac{Ms^2 + bs + K_1}{Ms^2}$$

Por lo que:

$$\sum T_i(s)\Delta_i(s) = T_1\Delta_i + T_2\Delta_i = (T_1 + T_2)\Delta_i$$

$$\sum T_i(s)\Delta_i(s) = \left(\frac{K_2}{s^3mL_i} + \frac{K_2}{s^2Rm} \right) \left(\frac{Ms^2 + bs + K_1}{Ms^2} \right) = \frac{(K_2R + K_2L_i s)(Ms^2 + bs + K_1)}{L_iMRms^5}$$

Por lo tanto, la función de transferencia se culmina en la ecuación (3.19).

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{\frac{(K_2R + K_2L_i s)(Ms^2 + bs + K_1)}{\gamma_1 s^5}}{\gamma_1 s^5 + \gamma_2 s^4 + \gamma_3 s^3 + \gamma_4 s^2 + \gamma_5 s + \gamma_6} \quad (3.18)$$

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{(K_2R + K_2L_i s)(Ms^2 + bs + K_1)}{\gamma_1 s^5 + \gamma_2 s^4 + \gamma_3 s^3 + \gamma_4 s^2 + \gamma_5 s + \gamma_6} \quad (3.19)$$

Por otro lado, la representación en espacio de estados del sistema mecánico presentado está dado por (3.17)

y obteniendo la función de transferencia a partir de las matrices A_{lc} , B_{lc} y C_{lc} , se obtiene la función de transferencia mostrada en la expresión (3.20).

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{K_2 (R + L_i s) (Ms^2 + bs + K_1)}{\gamma_1 s^5 + \gamma_2 s^4 + \gamma_3 s^3 + \gamma_4 s^2 + \gamma_5 s + \gamma_6} \quad (3.20)$$

Como se puede observar, los resultados mostrados en las expresiones (3.19) y (3.20) son los mismos, la única diferencia radica en su obtención.

Para efectos de simulación se dan los valores para el sistema $m = 1$, $M = 5$, $K_1 = 100$, $K_2 = 100$, $b = 0.5$, y para el controlador $L_i = 100$, $R = 8$.

En las figuras 3.16 y 3.17 se muestran las simulaciones de la respuesta al escalón del sistema utilizando 20SIM y MATLAB respectivamente, mientras que en las figuras 3.18 y 3.19 se muestran las simulaciones de la corriente en el inductor "m" utilizando 20-SIM y MATLAB respectivamente.

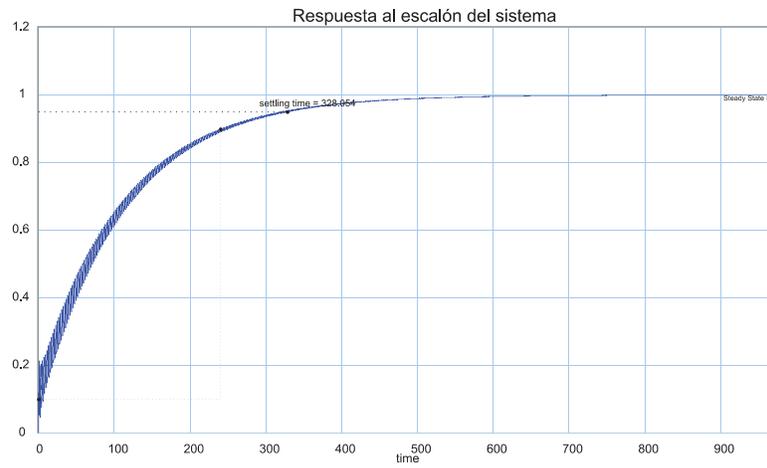


Figura 3.16: Respuesta al escalón unitario simulada en 20- SIM

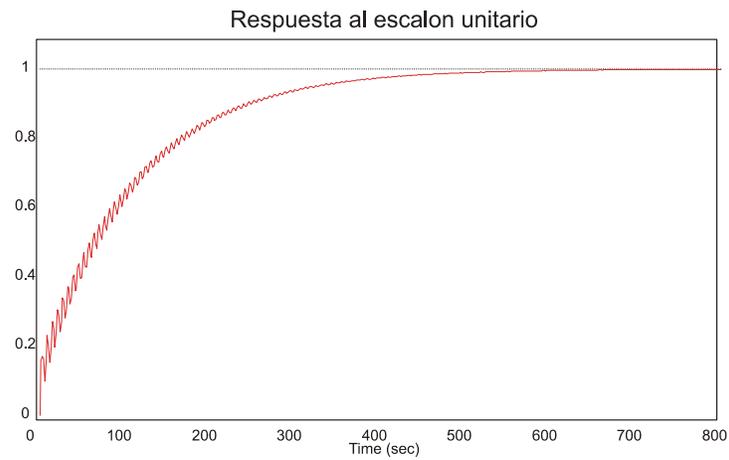


Figura 3.17: Respuesta al escalón unitario simulada en Matlab

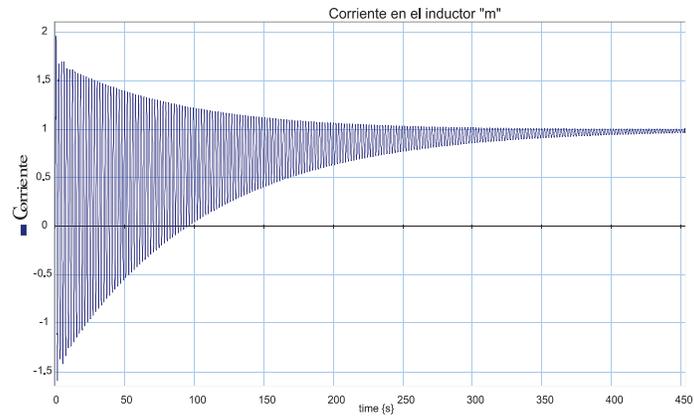


Figura 3.18: Corriente correspondiente al inductor "m", simulada en 20-SIM

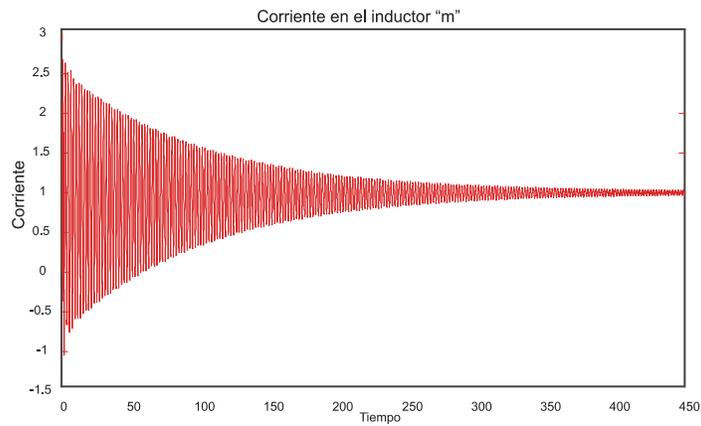


Figura 3.19: Corriente correspondiente al inductor "m", simulada en MATLAB

3.5 Esquema general de un sistema en lazo cerrado en BG

Partiendo de la figura 3.20, se puede observar que el controlador tiene como entrada la señal de error, siendo ésta la diferencia entre la salida y una entrada de referencia, así mismo, tiene como salida la acción de control de la planta que es directamente la entrada a la misma, por lo que, tanto el bloque del controlador como el bloque de la planta pueden ser vistos con una propia estructura de unión como se muestra en las expresiones (3.21) y (3.22) respectivamente.

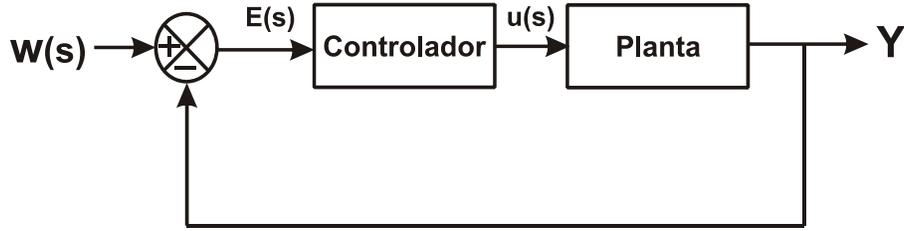


Figura 3.20: Esquema general de un sistema de control clásico en lazo cerrado.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ D_{in}^c(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^c & S_{12}^c & S_{13}^c \\ S_{21}^c & S_{22}^c & S_{23}^c \\ S_{31}^c & S_{32}^c & S_{33}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_c(t) \\ D_{out}^c(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ D_{in}^p(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^p & S_{12}^p & S_{13}^p \\ S_{21}^p & S_{22}^p & S_{23}^p \\ S_{31}^p & S_{32}^p & S_{33}^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_p(t) \\ D_{out}^p(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Donde la señal de error está determinada por (3.23).

$$e(t) = w(t) - y(t) \quad (3.23)$$

además, $y(t)$ está definida como (3.24) a partir de (3.22),

$$y(t) = S_{31}^p Z_p(t) + S_{32}^p D_{out}^p(t) + S_{33}^p u(t) \quad (3.24)$$

Pero $u(t)$ está definida como (3.25),

$$u(t) = S_{31}^c Z_c(t) + S_{32}^c D_{out}^c(t) + S_{33}^c e(t) \quad (3.25)$$

Desarrollando se tiene finalmente (3.26),

$$e(t) = K_a [w(t) - S_{31}^p Z_p(t) + S_{32}^p D_{out}^p(t) - S_{33}^p S_{31}^c Z_c(t) - S_{33}^p S_{32}^c D_{out}^c(t)] \quad (3.26)$$

donde:

$$K_a = (I - S_{33}^p S_{33}^c)^{-1}$$

Para la señal de salida, sustituyendo (3.25) y (3.26) en (3.24) y desarrollando, se obtiene la expresión (3.27).

$$y(t) = K_{ya} Z_c(t) + K_{yb} Z_p(t) + K_{yc} D_{out}^c(t) + K_{yd} D_{out}^p(t) + K_{ye} w(t) \quad (3.27)$$

donde:

$$\begin{aligned} K_{ya} &= S_{33}^p S_{31}^c - S_{33}^p S_{33}^c K_a S_{33}^p S_{31}^c \\ K_{yb} &= S_{31}^p - S_{33}^p S_{33}^c K_a S_{31}^p \\ K_{yc} &= S_{33}^p S_{32}^c - S_{33}^p S_{33}^c K_a S_{33}^p S_{32}^c \\ K_{yd} &= S_{32}^p - S_{33}^p S_{33}^c K_a S_{32}^p \\ K_{ye} &= S_{33}^p S_{33}^c K_a \end{aligned}$$

Para \dot{x}_c , se tiene (3.28),

$$\dot{x}_c(t) = K_{xca} Z_c(t) - K_{xcb} Z_p(t) + K_{xcc} D_{out}^c(t) - K_{xcd} D_{out}^p(t) + K_{xce} w(t) \quad (3.28)$$

donde,

$$\begin{aligned}
 K_{xca} &= S_{11}^c - S_{13}^c K_a S_{33}^p S_{31}^c \\
 K_{xcb} &= S_{13}^c K_a S_{31}^p \\
 K_{xcc} &= S_{12}^c - S_{13}^c K_a S_{33}^p S_{32}^c \\
 K_{xcd} &= S_{13}^c K_a S_{32}^p \\
 K_{xce} &= S_{13}^c K_a
 \end{aligned}$$

Para \dot{x}_p , se tiene (3.29):

$$\dot{x}_p(t) = K_{xpa} Z_c(t) + K_{xpb} Z_p(t) + K_{xpc} D_{out}^c(t) + K_{xpd} D_{out}^p(t) + K_{xpe} w(t) \quad (3.29)$$

donde,

$$\begin{aligned}
 K_{xpa} &= S_{13}^p S_{31}^c - S_{13}^p S_{33}^c K_a S_{33}^p S_{31}^c \\
 K_{xpb} &= S_{11}^p - S_{13}^p S_{33}^c K_a S_{31}^p \\
 K_{xpc} &= S_{13}^p S_{32}^c - S_{13}^p S_{33}^c K_a S_{33}^p S_{32}^c \\
 K_{xpd} &= S_{12}^p - S_{13}^p S_{33}^c K_a S_{32}^p \\
 K_{xpe} &= S_{13}^p S_{33}^c K_a
 \end{aligned}$$

Para D_{in}^c y D_{in}^p , se tienen las ecuaciones (3.30) y (3.31) respectivamente:

$$D_{in}^c(t) = K_{Dica} Z_c(t) - K_{Dicb} Z_p(t) S_{22}^c - K_{Dicc} D_{out}^c(t) - K_{Dicd} D_{out}^p(t) + K_{Dice} w(t) \quad (3.30)$$

donde,

$$\begin{aligned}
 K_{Dica} &= S_{21}^c - S_{23}^c K_a S_{33}^p S_{31}^c \\
 K_{Dicb} &= S_{23}^c K_a S_{31}^p \\
 K_{Dicc} &= S_{22}^c - S_{23}^c K_a S_{33}^p S_{32}^c \\
 K_{Dicd} &= S_{23}^c K_a S_{32}^p \\
 K_{Dice} &= S_{23}^c K_a
 \end{aligned}$$

$$D_{in}^p = K_{Dipa}Z_c(t) + K_{Dipb}Z_p(t) + K_{Dipc}D_{out}^c(t) + K_{Dipd}D_{out}^p(t) + K_{Dipe}w(t) \quad (3.31)$$

donde:

$$\begin{aligned} K_{Dipa} &= S_{23}^p S_{31}^c - S_{23}^p S_{33}^c K_a S_{33}^p S_{31}^c \\ K_{Dipb} &= S_{21}^p - S_{23}^p S_{33}^c K_a S_{31}^p \\ K_{Dipc} &= S_{23}^p S_{32}^c - S_{23}^p S_{33}^c K_a S_{33}^p S_{32}^c \\ K_{Dipd} &= S_{22}^p - S_{23}^p S_{33}^c K_a S_{32}^p \\ K_{Dipe} &= S_{23}^p S_{33}^c K_a \end{aligned}$$

Reuniendo todos los componentes en una estructura de unión en lazo cerrado, se obtiene finalmente una representación mostrada en (3.32).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_p \\ D_{in}^c \\ D_{in}^p \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{xca} & K_{xcb} & K_{xcc} & K_{xcd} & K_{xce} \\ K_{xpa} & K_{xpb} & K_{xpc} & K_{xpd} & K_{xpe} \\ K_{Dica} & K_{Dicb} & K_{Dicc} & K_{Dicd} & K_{Dice} \\ K_{Dipa} & K_{Dipb} & K_{Dipc} & K_{Dipd} & K_{Dipe} \\ K_{ya} & K_{yb} & K_{yc} & K_{yd} & K_{ye} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_c \\ Z_p \\ D_{out}^c \\ D_{out}^p \\ w \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Una representación más compacta de (3.32), se da en (3.33),

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{cp} \\ D_{in}^{cp} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^{cp} & S_{12}^{cp} & S_{13}^{cp} \\ S_{21}^{cp} & S_{22}^{cp} & S_{23}^{cp} \\ S_{31}^{cp} & S_{32}^{cp} & S_{33}^{cp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{cp} \\ D_{out}^{cp} \\ w \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

donde:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cp} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_p \end{bmatrix} & D_{in}^{cp} &= \begin{bmatrix} D_{in}^c \\ D_{in}^p \end{bmatrix} \\ Z_{cp} &= \begin{bmatrix} Z_c \\ Z_p \end{bmatrix} & D_{out}^{cp} &= \begin{bmatrix} D_{out}^c \\ D_{out}^p \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
 S_{11}^{cp} &= \begin{bmatrix} K_{xca} & K_{xcb} \\ K_{xpa} & K_{xpb} \end{bmatrix} & S_{12}^{cp} &= \begin{bmatrix} K_{xcc} & K_{xcd} \\ K_{xpc} & K_{xpd} \end{bmatrix} & S_{13}^{cp} &= \begin{bmatrix} K_{xce} \\ K_{xpe} \end{bmatrix} \\
 S_{21}^{cp} &= \begin{bmatrix} K_{Dica} & K_{Dicb} \\ K_{Dipa} & K_{Dipb} \end{bmatrix} & S_{22}^{cp} &= \begin{bmatrix} K_{Dicc} & K_{Dicd} \\ K_{Dipc} & K_{Dipd} \end{bmatrix} & S_{23}^{cp} &= \begin{bmatrix} K_{Dice} \\ K_{Dipe} \end{bmatrix} \\
 S_{31}^{cp} &= \begin{bmatrix} K_{ya} & K_{yb} \end{bmatrix} & S_{32}^{cp} &= \begin{bmatrix} K_{yc} & K_{yd} \end{bmatrix} & S_{33}^{cp} &= [K_{ye}]
 \end{aligned}$$

Como se puede observar, la estructura unión está formada por elementos dependientes de las submatrices de ambos subsistemas (controlador y planta), por lo que a partir de ésta estructura en lazo cerrado se pueden realizar todos los análisis utilizados en Bond Graph.

3.5.1 Ejemplo partiendo de las estructuras de unión de planta y controlador

Para que se pueda apreciar más claramente, se consideran las estructuras de unión de un controlador cuya función de transferencia esta dada por (3.34) y un motor de cd como planta en (3.35) y (3.36) respectivamente.

$$K_c = \frac{s+1}{s+10} \quad (3.34)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ D_{in}^c \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -0.9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_c \\ D_{out}^c \\ u_c \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{p1} \\ \dot{x}_{p2} \\ D_{in1}^c \\ D_{in2}^c \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -n & -1 & 0 & 1 \\ n & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{p1} \\ z_{p2} \\ D_{out1}^p \\ D_{out2}^p \\ u_p \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Sustituyendo los elementos de ambas estructuras de unión en la ecuación (3.33), se obtiene la estructura en lazo cerrado mostrada en (3.37)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{cp1} \\ \dot{x}_{cp2} \\ \dot{x}_{cp3} \\ D_{in1}^{cp} \\ D_{in2}^{cp} \\ D_{in3}^{cp} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -0.9 & 0 & -n-1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & n & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{cp1} \\ z_{cp2} \\ z_{cp3} \\ D_{out1}^{cp} \\ D_{out2}^{cp} \\ D_{out3}^{cp} \\ w \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Considerando las relaciones constitutivas del controlador y de la planta respectivamente por las ecuaciones (3.38) y (3.39), así como también las ecuaciones en el espacio de estados que están definidas bajo la estructura de unión, se tiene la función de transferencia dada por (3.40).

$$F_c = 10 \quad L_c = 1 \quad (3.38)$$

$$F_p = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad L_p = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\frac{Y}{W} = \frac{300(s+1)}{15s^3 + 226s^2 + 1965s + 14750} \quad (3.40)$$

En estado estable la salida tiene un valor de 0.0203 el cual se puede observar en la figuras 3.21 y 3.22 donde se muestran las simulaciones correspondientes al comportamiento del sistema en lazo cerrado en 20-SIM y en MATLAB debido a que son software en donde se permite la simulación del modelo en BG directamente y el modelo matematico respectivamente.

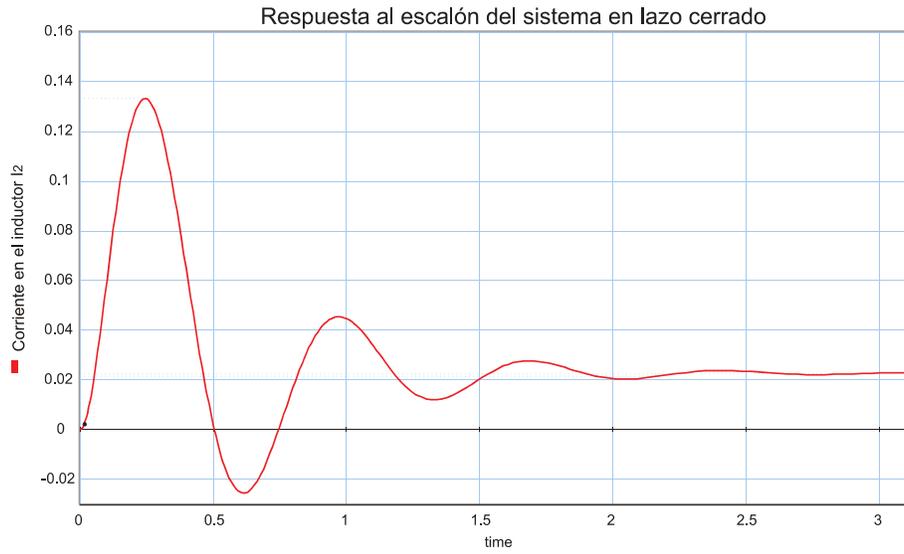


Figura 3.21: Salida del sistema en lazo cerrado simulado en 20-SIM.

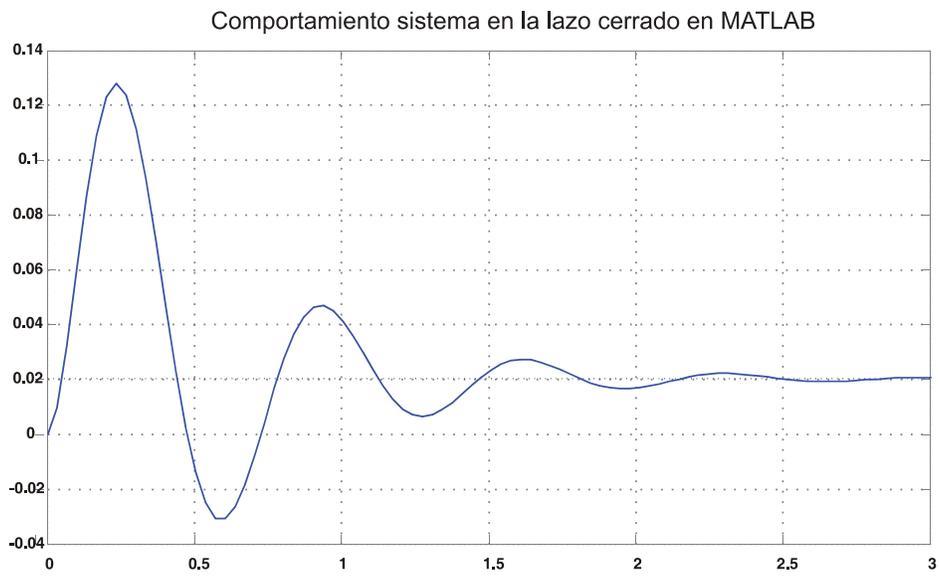


Figura 3.22: Salida del sistema en lazo cerrado simulado en MATLAB

3.6 Controlabilidad y observabilidad

3.6.1 Conceptos Básicos (Enfoque clásico)

La controlabilidad estudia la posibilidad de alcanzar los estados mientras que la observabilidad se refiere a la posibilidad de estimarlos a partir de las señales de entrada y de salida. Estos conceptos son definidos bajo la premisa del conocimiento de la representación en espacio de estados del sistema en discusión es decir de las matrices A_p, B_p, C_p y D_p de la representación dada por (2.14) y (2.15).

Para el diseño de controladores es primordial conocer la posibilidad de controlar el sistema ya que si el sistema no es controlable entonces no es posible la implementación de un controlador que alcance cualquier punto del espacio de estados. Hablando en términos del análisis clásico de la controlabilidad, es decir, a partir de las matrices que forman parte de la representación en espacio de estados del sistema, para que el sistema sea controlable se tiene que cumplir que la matriz de controlabilidad debe ser de orden completo, es decir.

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & \vdots & AB & \dots & \vdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n \quad (3.41)$$

donde n es el orden del sistema y $\begin{bmatrix} B & \vdots & AB & \dots & \vdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ es la matriz de controlabilidad.

Existen observadores de estado en lazo abierto, como es el caso del observador NAIVE, aunque son muy poco usados, y también los hay en lazo cerrado, como es el caso del observador de Luenberger, que resulta muy utilizado para efectos prácticos. Uno de los usos más comunes de utilizar este observador es para la retroalimentación de estados estimados, sin embargo, ese tema se retomará más adelante, por ahora basta con tener presente la matriz de observabilidad que se muestra en (3.42) cuyo objetivo es conocer la observabilidad de un sistema a partir de la representación en espacio de estados, calculando el rango de la matriz de observabilidad y tomando en cuenta, que al igual que en el caso de la controlabilidad, la matriz debe de ser de orden completo pleno para que el sistema sea completamente observable.

$$\text{rank} \left[C \ : \ CA \ \dots \ : \ CA^{n-1} \right]^T = n \quad (3.42)$$

donde n es el orden del sistema y $\left[C \ : \ CA \ \dots \ : \ CA^{n-1} \right]^T$ es la matriz de observabilidad.

3.6.2 Enfoque Bond Graph

Hablando en términos de Bond Graph, la controlabilidad es llamada *controlabilidad estructural* debido a que no es una propiedad que dependa de valores numéricos de los componentes del sistema, sino de la conectividad o estructura del sistema, es decir, es un análisis cualitativo del mismo.

Con el Bond Graph se puede analizar directamente tanto la controlabilidad y observabilidad estructural completa de un sistema, tomando en cuenta de manera inicial el rango estructural del modelo en BG [14] .

Definición 1 [14] .El orden n de un modelo es igual al número de elementos de almacenamiento en causalidad integral cuando una causalidad integral predefinida es asignada al modelo de Bond Graph.

Definición 2 [14] . El rango estructural q de la matriz A de espacio de estado deducida a partir del Bond Graph es igual al número de elementos de almacenamiento en causalidad derivativa cuando una causalidad derivativa predefinida es asignada al modelo de Bond Graph.

Definición 3 [14] . El número $k = n - q$ de modos nulos estructuralmente es igual al número de elementos de almacenamiento que permanecen en causalidad integral cuando una causalidad derivativa predefinida es asignada al modelo de Bond Graph,

si $k \neq 0$ es porque alguno de los elementos de almacenamiento no acepta(n) una asignación de causalidad derivativa sin crear conflicto de causalidad en las uniones y significa que la

matriz A es singular, por lo tanto, no es de rango pleno, por consiguiente el sistema no es controlable de manera completa.

Definición 4 [14]. *El sistema $[A_p B_p]$ es estructuralmente controlable si y solo si se cumple:*

- o Existe al menos una trayectoria causal enlazando cada elemento de almacenamiento en causalidad integral con una fuente de control en el Bond Graph en causalidad integral predefinida.
- o El rango estructural de $[A_p B_p]$ es igual al orden n , si no es satisfecha directamente, una dualización de algunas fuentes tiene que hacerse para transformar las causalidades integrales remanentes.

Definición 5 [14]. *El sistema $[A_p C_p]$ es estructuralmente observable si y solo si se cumple:*

- o Existe al menos una trayectoria causal enlazando cada elemento de almacenamiento en causalidad integral con un detector en el Bond Graph en causalidad integral predefinida.
- o El rango estructural de $[A_p C_p]$ es igual al orden n , si no es satisfecha directamente, una dualización de algunos detectores tiene que hacerse para transformar las causalidades integrales remanentes.

3.7 Retroalimentación de estados

La retroalimentación de estados es un método utilizado para el diseño de controladores cuyo objetivo consiste en tener un sistema de control óptimo respecto a índices de desempeño deseados. Para la aplicación de un control por retroalimentación de estados es necesario tener el sistema representado matemáticamente en espacio de estados. Los métodos que utilizan sistemas en espacio de estados tienen ventajas computacionales ya que están planteados en el dominio del tiempo liberando al diseñador de cálculos.

Las técnicas tradicionales de diseño de controladores mediante este método pueden realizar la elección de las variables de estado arbitrariamente sin ser necesario que éstas representen magnitudes físicas a diferencia de la técnica del Bond Graph que está enfocado al dominio físico y es necesario que las variables representen variables físicas. Esta es una gran ventaja del uso del Bond Graph ya que al diseñar un controlador podemos tener la seguridad de que este puede ser implementado físicamente.

3.7.1 Enfoque clásico

Antes de comenzar con el diseño del controlador es necesario saber que el sistema a controlar debe ser completamente controlable y las variables de estado deben ser al menos medibles, si existiera alguna variable no medible al menos debe de ser observable y así poder estimar dicha variable, en forma similar, si existe alguna variable no controlable, ésta debe ser estable.

3.7.2 Ubicación de polos

Para diseñar un controlador mediante la ubicación de polos es necesario que todas las variables de estado sean medibles y estén disponibles para la retroalimentación, una vez logrado esto, lo siguiente es obtener los polos dominantes en lazo cerrado del sistema deseado, tomando en cuenta los requerimientos de diseño.

Es importante mencionar que es recomendable tener polos dominantes en el sistema de control para poder tener sistemas de control de cualquier orden [16].

A continuación se describe el procedimiento de diseño de un controlador basado en la ubicación de polos para el sistema dado por:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.43}$$

donde x es el vector de estado (de dimensión n), u es el vector de entradas de control, A la matriz de estados de $n \times n$, B la matriz de entrada $n \times m$, n el orden del sistema y m el número de entradas.

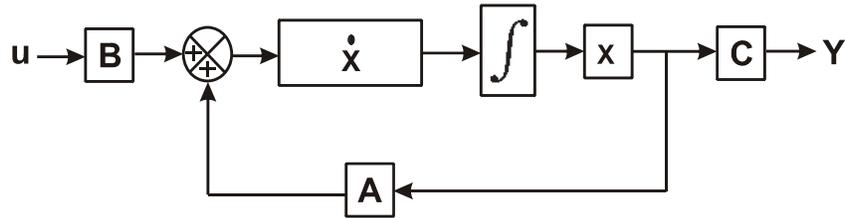


Figura 3.23: Diagrama a bloques de un sistema representado por 3.43

La figura 3.23 ilustra la representación en diagrama de bloques del sistema descrito en variables de estado, el cual es el punto de partida para el diseño de una posible retroalimentación de estados.

Para la obtención del polinomio característico, es sumamente necesario considerar las características específicas del sistema deseado y así elegir los polos adecuados. Tomando en cuenta que los polos seleccionados que describen el comportamiento deseado del sistema están en $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$, se forma el polinomio característico deseado mediante el producto de los mismos como se muestra en la ecuación (3.44):

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)\dots(s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n \quad (3.44)$$

Hasta ahora se conoce el comportamiento del sistema en lazo abierto y también se sabe que el polinomio característico del sistema al que se quiere llegar, pero falta conocer los parámetros que van a ayudar a llevar el sistema original a un sistema en lazo cerrado con las características específicas.

Como se quiere tener un control por retroalimentación de estados entonces se considera la señal de control mediante (3.45).

$$u = -Kx \quad (3.45)$$

donde K es la matriz de ganancias de dimensión $m \times n$.

Sustituyendo la ecuación (3.45) en (3.43) se tiene el sistema de lazo cerrado dado por (3.46).

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (3.46)$$

El siguiente paso es obtener el polinomio característico a partir del sistema de lazo cerrado, esto es, calculando el determinante como se indica en (3.47), obteniendo el polinomio mostrado en (3.48).

$$|sI - (A - BK)| = 0 \quad (3.47)$$

$$s^n + \beta s^{n-1} + \dots + \beta_{n-1}s + \beta_n = 0 \quad (3.48)$$

donde los coeficientes β están en función de K y de constantes conocidas.

Una vez teniendo el polinomio característico del sistema en lazo cerrado (3.48), y puesto que en él se tienen incógnitas que son requeridas para llevar el sistema al sistema deseado (3.44), se igualan ambos polinomios (3.49) y se obtiene un sistema de ecuaciones lineal de n incógnitas mediante el cual se podrán obtener los componentes de la matriz de ganancias del controlador K .

$$s^n + \beta s^{n-1} + \dots + \beta_{n-1}s + \beta_n = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha_1 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\beta_{n-1} = \alpha_{n-1}$$

$$\beta_n = \alpha_n$$

3.7.3 Procedimiento de retroalimentación de estados en bond graph

Al igual que en las técnicas utilizadas de manera tradicional, para aplicar un controlador es necesario conocer la controlabilidad del sistema. A diferencia de dichas técnicas, en Bond Graph resulta sencillo saber si un sistema dinámico es controlable y observable directamente analizando el Bond Graph del sistema.

Una vez conocida la controlabilidad del sistema, se procede al diseño del controlador por retroalimentación.

Como ya se vió en el capítulo 2, la representación matemática de un sistema en Bond Graph está dado por el conjunto de ecuaciones (2.9), (2.10), (2.11) y (2.12).

La retroalimentación de estados de un sistema dinámico mediante Bond Graph se realiza de manera indirecta, esto es, se retroalimenta z cuya relación con el estado es la mostrada por la ecuación (2.9), donde F depende de los elementos de almacenamiento, así como también son necesarios otros elementos cuya función es de acoplamiento de las señales para una retroalimentación adecuada, éstos son los llamados transformadores y giradores en los que se pueden incluir las ganancias de control como se explicará más adelante.

A continuación se presenta un ejemplo de aplicación de la retroalimentación de estados.

3.7.4 Ejemplo de un motor de CD

Sea el modelo lineal de un motor de CD controlado por armadura como se muestra en la figura 3.24

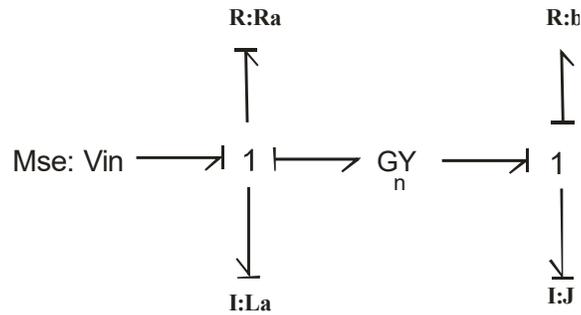


Figura 3.24: Sistema linealizado de un motor de CD

Se puede observar que en la figura 3.24, existen únicamente dos elementos de almacenamiento que son L_a (Inductancia de la armadura) y J (Momento de inercia en el eje del motor). Primeramente se debe verificar la controlabilidad del sistema.

Analizando el rango estructural del modelo en BG, tomando en cuenta tanto el BGI y el BGD que se muestran en las figuras 3.25 y 3.26 correspondientes a las definiciones, además, considerando que se tienen las trayectorias causales como se muestran en la figura 3.27 ,

de entrada a cada uno de los elementos, se puede concluir que el sistema es completamente estructuralmente controlable.

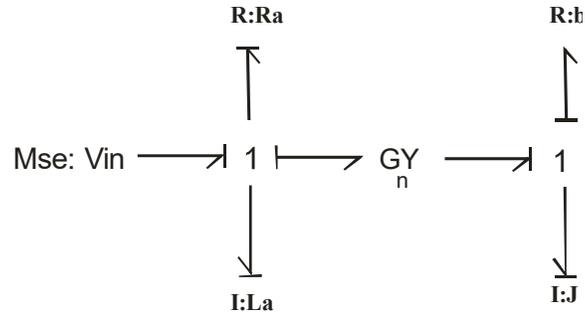


Figura 3.25: BGI del motor de CD

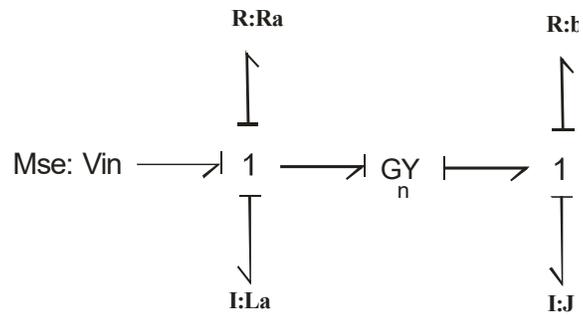


Figura 3.26: BGD del motor de CD

Una vez que ya se sabe que el sistema es controlable, se procede a la retroalimentación mediante la utilización de bonds activos como se muestra en la figura 3.28 y puesto que la variable de salida es la velocidad del motor, ésta corresponde a una variable de flujo y puesto que la entrada al sistema es de esfuerzo, se utiliza un elemento de puerto-2, en este caso, un girador para poder tener compatibilidad de las señales (figura 3.29). Por cuestiones didácticas, se utilizan transformadores en serie con los giradores respectivos para que en ellos se note la aportación de las ganancias de control.

Una vez el sistema completo, se obtiene la estructura de unión del bond graph (ec. (3.51)):

$$\begin{bmatrix} e_5 \\ e_{11} \\ f_3 \\ f_9 \\ f_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & -(n+k_2) & -1 & 0 & 1 \\ n & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_5 \\ f_{11} \\ e_3 \\ e_9 \\ e_{11} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Con sus vectores respectivos:

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} P_5 \\ P_{11} \end{bmatrix} & \dot{x} &= \begin{bmatrix} e_5 \\ e_{11} \end{bmatrix} & z &= \begin{bmatrix} f_5 \\ f_{11} \end{bmatrix} \\ D_{in} &= \begin{bmatrix} f_3 \\ f_9 \end{bmatrix} & D_{out} &= \begin{bmatrix} e_3 \\ e_9 \end{bmatrix} & u &= e_1 & y &= f_{11} \\ L &= \begin{bmatrix} R_a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} & F &= \begin{bmatrix} 1/L_a & 0 \\ 0 & 1/J \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A continuación se aplica la técnica tradicional de ubicación de polos, para ello se obtiene la representación en espacio de estados obteniendo las ecuaciones (3.52)

$$\begin{aligned} A_p &= \begin{bmatrix} -\frac{(k_1+R_a)}{L_a} & -\frac{(n+k_2)}{J} \\ \frac{n}{L_a} & \frac{-b}{J} \end{bmatrix} \\ B_p &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_p &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \\ D_p &= 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

A partir de las ecuaciones (3.52) se obtiene el polinomio del sistema en lazo cerrado mostrado en la ecuación (3.54)

$$\begin{aligned} \det [sI - (A_p - B_p K)] &= \det \begin{bmatrix} s - \frac{(K_1+R_a)}{L_a} & \frac{(n+K_2)}{J} \\ -\frac{n}{L_a} & s + \frac{b}{J} \end{bmatrix} \\ \det [sI - (A_p - B_p K)] &= \frac{1}{JL_a} (bK_1 + nK_2 + bR_a + JK_1s + JR_as + bL_as + n^2 + JL_as^2) \end{aligned} \quad (3.53)$$

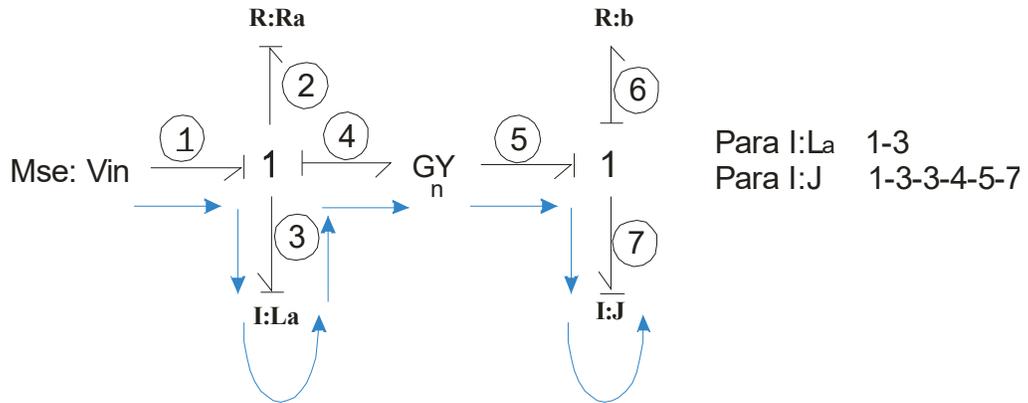


Figura 3.27: Trayectorias causales, entrada-elementos de almacenamiento

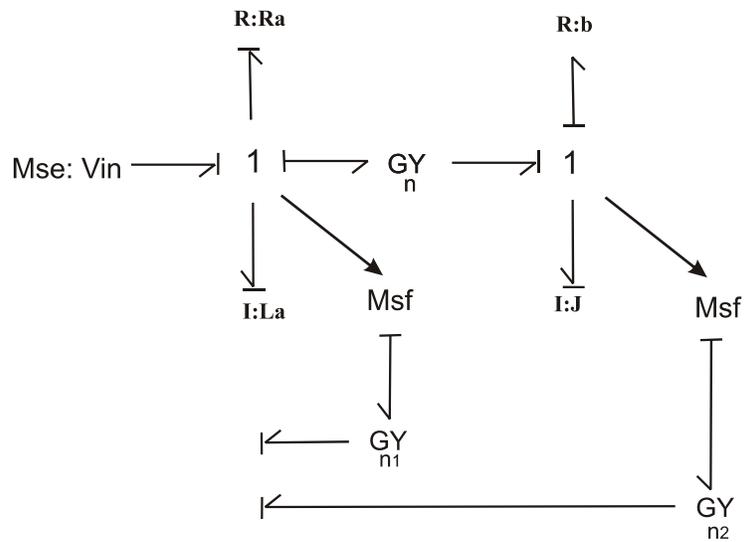


Figura 3.28: Retroalimentación variables de flujo

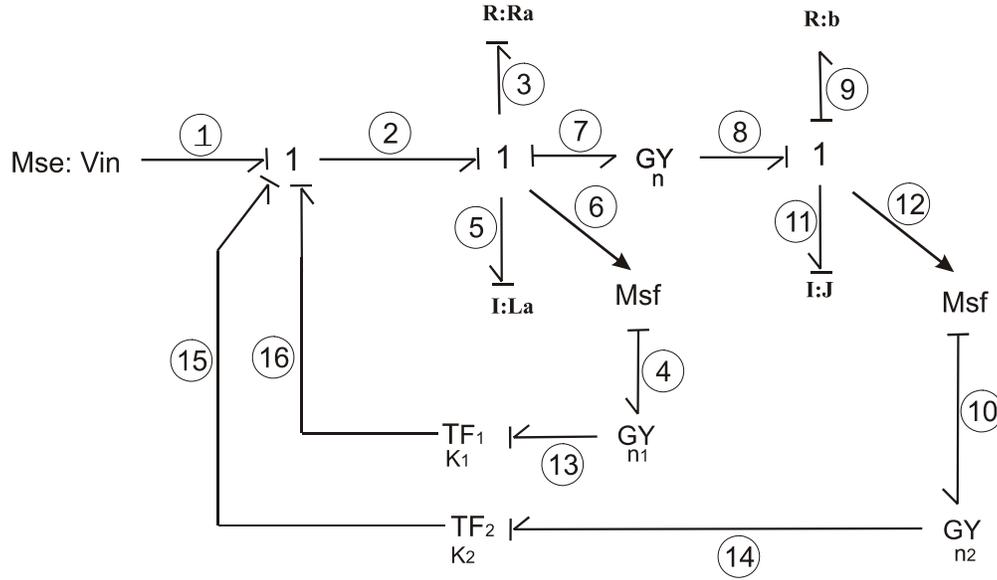


Figura 3.29: Retroalimentación de variables de flujo con control tipo proporcional.

$$s^2 + \left(\frac{K_1}{L_a} + \frac{b}{J} + \frac{R_a}{L_a} \right) s + \frac{bK_1 + nK_2 + bR_a + n^2}{JL_a} \quad (3.54)$$

Considerando los polos deseados en μ_1 y μ_2 se obtiene el polinomio de la ecuación

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2 \quad (3.55)$$

Igualando las ecuaciones (3.54) y (3.55) se tiene el conjunto de ecuaciones (3.56)

$$\begin{aligned} \left(\frac{K_1}{L_a} + \frac{b}{J} + \frac{R_a}{L_a} \right) &= \alpha_1 \\ \frac{bK_1 + nK_2 + bR_a + n^2}{JL_a} &= \alpha_2 \end{aligned} \quad (3.56)$$

De forma numérica y tomando en consideración que el tiempo de pico (t_p) deseado es de 0.785 s, así como el tiempo de establecimiento (t_s) de 1.35 s, los valores de la planta como de los polos deseados son:

Motor CD: Polos deseados:

$$R_a = 0.5$$

$$b = 0.1$$

$$L_a = 0.1$$

$$J = 1.5$$

$$n = 3$$

$$\mu_1 = -3 + j4$$

$$\mu_2 = -3 - j4$$

Evaluando las ecuaciones (3.54) y (3.55), se obtienen las ecuaciones (3.57) y (3.58).

$$s^2 + \left(\frac{K_1}{L_a} + \frac{b}{J} + \frac{R_a}{L_a} \right) s + \frac{bK_1 + nK_2 + bR_a + n^2}{JL_a} \quad (3.57)$$

$$s^2 + s \left(10K_1 + \frac{76}{15} \right) + \frac{2}{3}K_1 + 20K_2 + \frac{181}{3} \quad (3.58)$$

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) = s^2 + 6s + 25$$

$$10K_1 + \frac{76}{15} = 6 \quad (3.59)$$

$$\frac{2}{3}K_1 + 20K_2 + \frac{181}{3} = 25$$

Igualando las ecuaciones resultantes (3.57) y (3.58) queda el sistema de ecuaciones (3.59), obteniendo como ganancias de los transformadores:

$$K_1 = 0.0933$$

$$K_2 = -1.77$$

En las figuras 3.30 y 3.31, se muestran la respuesta al escalón unitario utilizando el Bond-Graph del sistema en lazo abierto usando el software 20-SIM y Matlab respectivamente, así como en las figuras 3.32 y 3.33 se muestra de la misma forma el comportamiento en lazo cerrado usando 20-SIM y MATLAB respectivamente.

Se puede observar que los simuladores utilizados presentan comportamientos semejantes, el procedimiento para encontrar las ganancias del controlador para tener una respuesta con polos deseados corresponde a la utilizada en la teoría clásica, sin embargo, usando BG se observa directamente la retroalimentación de las variables de co-energía y no del estado en sí, es ahí donde difieren en gran medida ambas técnicas.

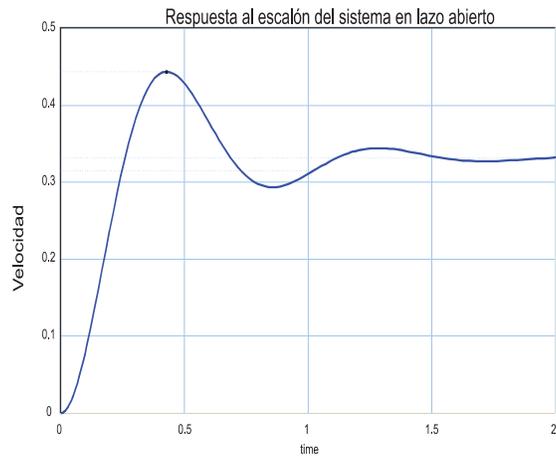


Figura 3.30: Respuesta del motor de CD en lazo abierto usando 20-SIM

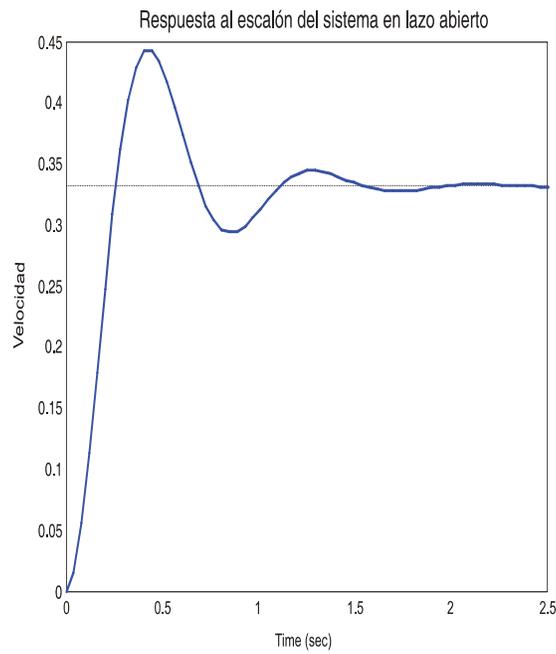


Figura 3.31: Respuesta al escalón del sistema en lazo abierto, usando Matlab

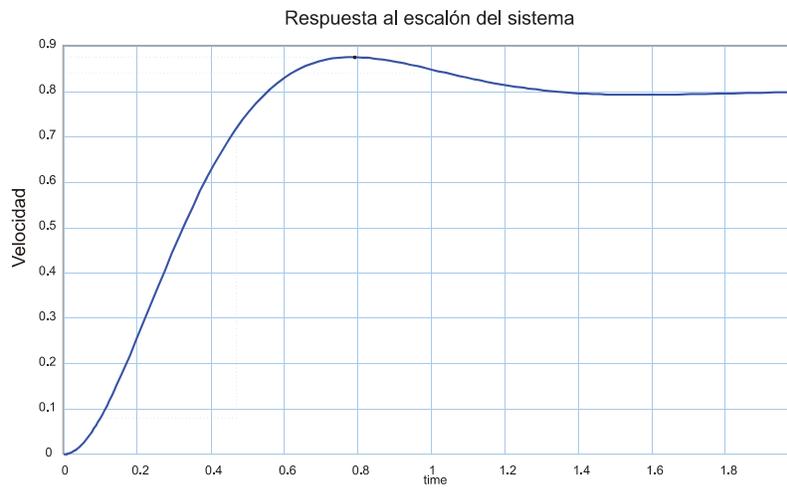


Figura 3.32: Respuesta al escalón del motor en lazo cerrado usando 20-SIM

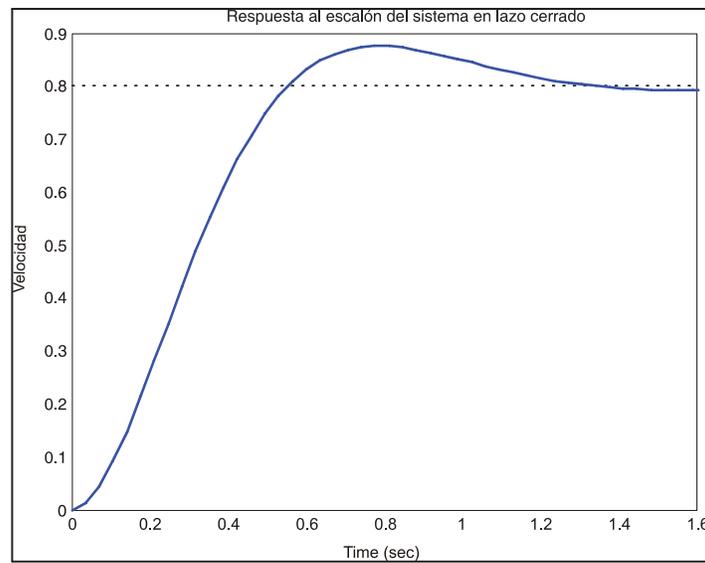


Figura 3.33: Respuesta al escalón del sistema en lazo cerrado usando Matlab.

En este capítulo se determinó de manera directa la función de transferencia utilizando trayectorias causales y bonds adaptados, evitando con esto cálculos matriciales que se realizan aplicando las técnicas clásicas, así como también, se pueden realizar análisis de los efectos de carga que pueden existir en los instrumentos de medición a través de los bonds adaptados. Otro aspecto importante fue el mostrar la ventaja que tiene el análisis de la controlabilidad y observabilidad estructural para saber con exactitud cuál es la relación que existe entre cada una de las variables y las entradas y/o salidas de un sistema. El enfoque de bond graph de la retroalimentación de estados difiere con el enfoque clásico en la forma de como se miden las variables y como se tratan en el proceso, con lo que respecta a la obtención de los valores del controlador, es la misma que se aplica en las técnicas clásicas.

Una vez analizados los sistemas en lazo cerrado en bond graph, se puede profundizar aún más en el diseño de controladores en bond graph.

Capítulo 4

Diseño de controladores en Bond Graph para sistemas LTI

4.1 Introducción

La sociedad cada día se vuelve más exigente con las comodidades provocándose con esto una mayor exigencia a los sistemas de calidad. Es ahí donde entra la importancia de la aplicación de los sistemas de control.

El diseño de controladores no es nuevo, se ha desarrollado desde hace mucho tiempo utilizando las mismas técnicas tradicionales, también es bien conocido el diseño de controladores clásicos en bond graph, sin embargo, en este trabajo se busca diseñar controladores que tengan un grado de complejidad mayor al que tienen los controladores clásicos y lograr con ello utilizar las ventajas que brinda la técnica de modelado en Bond Graph.

Algunas de las ventajas que se tienen al utilizar esta técnica es que es una técnica gráfica, por lo que podemos detectar con facilidad los componentes del sistema, además de que podemos detectar algunas de las propiedades como pueden ser la controlabilidad y la observabilidad del sistema de manera gráfica, convirtiendo esto en una forma sencilla y rápida ya que a diferencia de los métodos tradicionales, se pueden conocer sin la necesidad de realizar cálculos

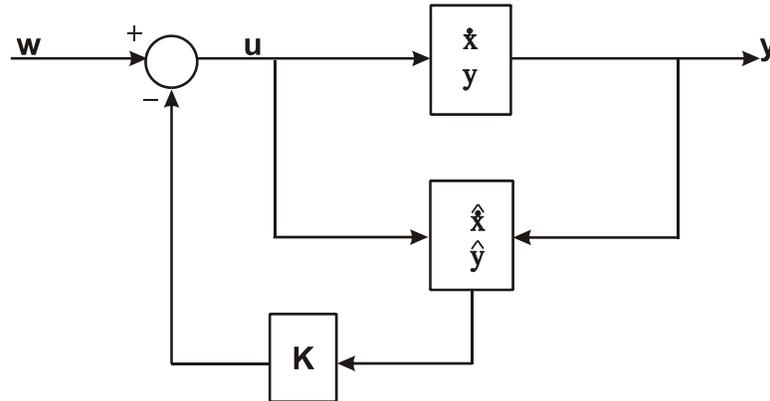


Figura 4.1: Esquema general de un control por retroalimentación de estados estimados.

matriciales ya que si recordamos la forma en que se obtienen estas propiedades es a partir de conocer las matrices A_p , B_p , C_p y D_p del sistema.

La ventaja principal que se aprovechará, es la posible implementación física de los controladores diseñados.

4.1.1 Control por retroalimentación de estados estimados desde un enfoque clásico

El esquema de un control por retroalimentación de estados estimados se muestra en la figura 4.1, así como el observador de Luenberger se muestra en la figura 4.2.

Para poder analizar más a fondo el comportamiento del control por retroalimentación de estados observados, se parte de la representación en espacio de estados (4.1) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_p x + B_p u \\ y &= C_p x + D_p u \end{aligned} \quad (4.1)$$

Para el observador de Luenberger se tiene el sistema estimado representado por (4.2),

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= A_p x_e + B_p u + H(y - y_e) \\ y_e &= C_p x_e + D_p u \end{aligned} \quad (4.2)$$

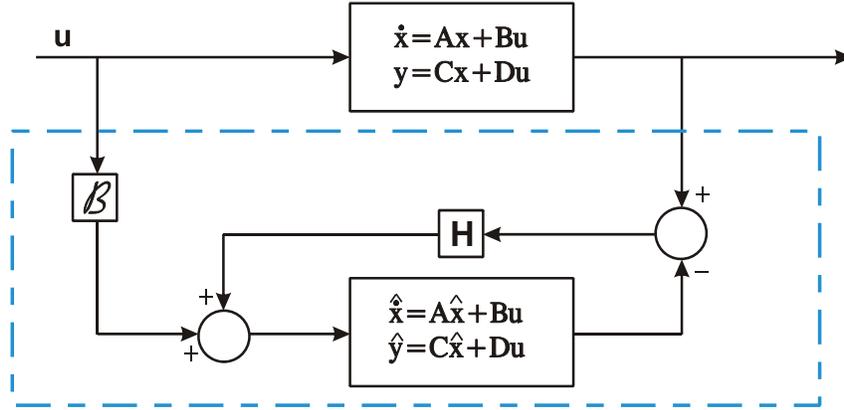


Figura 4.2: Esquema general del observador de Luenberger

donde x_e y y_e son las variables de estado estimadas y las salidas estimadas, respectivamente. Pero ya que queremos ver su comportamiento tomando en cuenta los estados estimados, éstos se retroalimentan :

$$u = -Kx_e + w \quad (4.3)$$

Sustituyendo (4.3) en (4.2) y desarrollando, se tiene el sistema (4.4),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_p x - B_p K x_e + B_p w \\ y &= C_p x - D_p K x_e + D_p w \end{aligned} \quad (4.4)$$

Así mismo, para el observador sustituyendo (4.3) en (4.2) y desarrollando, se tiene el sistema (4.5),

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= (A_p - B_p K - H C_p) x_e + H C_p x + B_p w \\ y_e &= (C_p - D_p K) x_e + D_p w \end{aligned} \quad (4.5)$$

Realizando el análisis del error:

$$\begin{aligned} x_{err} &= x - x_e \\ \dot{x}_{err} &= \dot{x} - \dot{x}_e \end{aligned} \quad (4.6)$$

Desarrollando (4.6), se obtiene (4.7),

$$\dot{x}_{err} = (A_p - H C_p) x_{err} \quad (4.7)$$

Por lo que se obtiene (4.8) para la obtención de las ganancias del observador se busca H tal que el polinomio (4.8) sea Hurwitz.

$$\det(sI - (A_p - HC_p)) = 0 \quad (4.8)$$

Por otro lado, a partir de (4.4) y considerando x_e de (4.6) en forma similar se busca K tal que el polinomio (4.9) sea Hurwitz.

$$\det(sI - (A_p - B_pK)) = 0 \quad (4.9)$$

4.1.2 Control por retroalimentación de estados estimados desde un enfoque de Bond Graph

La representación del sistema original y del observador a partir de las estructuras de unión se muestran en (4.10) y (4.11) respectivamente [22].

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ w \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} - \tilde{S} \begin{bmatrix} z_e \\ D_{out_e} \\ w \\ \dot{x}_{d_e} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ D_{in_e} \\ y_e \end{bmatrix} = S^e \begin{bmatrix} z_e \\ D_{out_e} \\ w \\ \dot{x}_{d_e} \end{bmatrix} - \bar{S} \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ w \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

donde:

S : Matriz que corresponde al sistema original

S^e : Matriz correspondiente al observador

\tilde{S} : Matriz que relaciona el sistema original y el observador

\bar{S} : Matriz que relaciona el observador y el sistema original

Con:

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{S}_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{S}_{31} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La representación en espacio de estados del sistema en lazo cerrado está determinada por (4.12) [22]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= E^{-1}A_{ss}Fx - E^{-1}A_{so}Fx_e + E^{-1}B_{ss}w \\ y &= C_{ss}Fx - C_{so}Fx_e + D_{ss}w \\ \dot{x}_e &= E_e^{-1}[A_{oo}Fx_e + A_{os}Fx + B_{oo}w] \\ y_e &= C_{oo}Fx_e + D_{oo}w \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_{ss} &= S_{11} + S_{12}MS_{21} & A_{oo} &= S_{11}^e + S_{12}^eM_eS_{21}^e - \bar{S}_{12}M\tilde{S}_{21} \\ A_{so} &= \tilde{S}_{11} + S_{12}M\tilde{S}_{21} & B_{oo} &= S_{12}^eM_eS_{23}^e + \bar{S}_{12}MS_{23} + S_{13}^e \\ B_{ss} &= S_{13} + S_{12}MS_{23} & A_{os} &= \bar{S}_{11} + \bar{S}_{12}MS_{21} \\ C_{ss} &= S_{31} + S_{32}MS_{21} & C_{oo} &= S_{31}^e + S_{32}^eM_eS_{21}^e \\ C_{so} &= \tilde{S}_{31} + S_{32}M\tilde{S}_{21} & D_{oo} &= S_{32}^eM_eS_{23}^e + S_{33}^e \\ D_{ss} &= S_{33} + S_{32}MS_{23} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Realizando una analogía se tiene para el observador (4.14),

$$HC = E_e^{-1}(\bar{S}_{11} + \bar{S}_{12}MS_{21})F \quad (4.14)$$

Además partiendo de (4.8) y considerando la representación en elementos de la estructura de unión de la planta original se tiene (4.15),

$$\det(sI - [(E^{-1}S_{11} - E_e^{-1}\bar{S}_{11}) + (E^{-1}S_{12} - E_e^{-1}\bar{S}_{12})MS_{21}]F) = 0 \quad (4.15)$$

Para el controlador se tiene (4.16), y partiendo de (4.9) de forma similar se obtiene (4.17):

$$BK = E^{-1}(\tilde{S}_{11} + S_{12}M\tilde{S}_{21})F \quad (4.16)$$

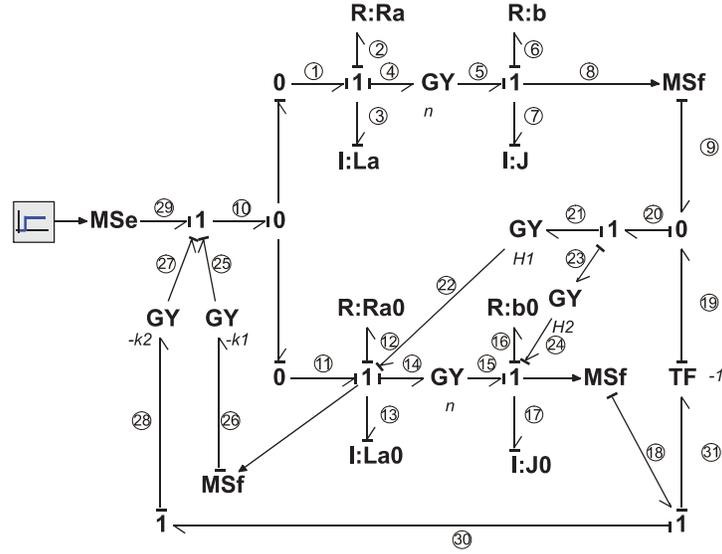


Figura 4.3: Modelo en bond Graph del motor de CD con su observador y control por retroalimentación de estados estimados.

$$\det(sI - E^{-1}(S_{11} - \tilde{S}_{11} + S_{12}M(S_{21} - \tilde{S}_{21}))F) = 0 \quad (4.17)$$

4.1.3 Ejemplo de un observador de un motor de CD

A continuación se presenta un ejemplo de un motor de cd al cual se le construye el observador y su controlador respectivo, basándose en la teoría de Bond Graph. El modelo en Bond Graph del motor de CD y su observador se muestra en la figura 4.3.

Se asume que todos los elementos tienen relaciones constitutivas lineales.

Los vectores clave tanto del sistema original, como del observador se muestran en (4.18) y

$$\begin{bmatrix} e_3 \\ e_7 \\ f_2 \\ f_6 \\ f_7 \\ e_{13} \\ e_{17} \\ f_{12} \\ f_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -n & -1 & 0 & 1 \\ n & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & H_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\| \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -k_1 & -(H_1 + k_2 + n) \\ n & -H_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \\ e_2 \\ e_6 \\ e_7 \\ f_{13} \\ f_{17} \\ e_{12} \\ e_{16} \end{bmatrix}$$

Figura 4.4: Estructura de union del modelo del motor en lazo cerrado con el observador y controlador respectivo.

(4.19) respectivamente:

$$\begin{aligned}
 x &= \begin{bmatrix} P_3 \\ P_7 \end{bmatrix} & \dot{x} &= \begin{bmatrix} e_3 \\ e_7 \end{bmatrix} & \dot{x} &= \begin{bmatrix} e_3 \\ e_7 \end{bmatrix} \\
 D_{in} &= \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} & & & D_{out} &= \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
 x_e &= \begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{17} \end{bmatrix} & \dot{x}_e &= \begin{bmatrix} e_{13} \\ e_{17} \end{bmatrix} & z_e &= \begin{bmatrix} f_{13} \\ f_{17} \end{bmatrix} \\
 D_{in}^e &= \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{16} \end{bmatrix} & & & D_{out}^e &= \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{16} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Así como también se muestran las matrices de la representación en espacio de estados del motor en 4.20.

$$A_p = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{n}{J} \\ \frac{n}{L_a} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix}; \quad B_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix}; \quad D_p = 0 \tag{4.20}$$

La matriz de estructura de unión del sistema en lazo cerrado se muestra en la figura 4.4.

Partiendo de la matriz de estructura de unión, se obtienen las submatrices correspondientes a la parte del observador según (4.13),

Visto desde el sistema original se tiene el conjunto de submatrices (4.21),

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & -n \\ n & 0 \end{bmatrix} & S_{12} = -S_{21}^T &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & S_{13} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & S_{31} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 S_{22} &= S_{23} = S_{32} = S_{33} = 0 \\
 \tilde{S}_{11} &= \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \tilde{S}_{12} = \tilde{S}_{13} = \tilde{S}_{21} = \tilde{S}_{22} = \tilde{S}_{23} = \tilde{S}_{31} = \tilde{S}_{32} = \tilde{S}_{33} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Visto desde el observador se tiene el conjunto de submatrices (4.22),

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & H_1 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} & \bar{S}_{13} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \bar{S}_{12} &= \bar{S}_{21} = \bar{S}_{22} = \bar{S}_{23} = 0 \\
 S_{11}^e &= \begin{bmatrix} -k_1 & -(H_1 + k_2 + n) \\ n & -H_2 \end{bmatrix} & S_{12}^e &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & S_{21}^e &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & S_{22}^e &= 0
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Para las ganancias del observador se tiene a partir de (4.15),

$$\det(sI - [(E^{-1}S_{11} - E_e^{-1}\bar{S}_{11}) + (E^{-1}S_{12} - E_e^{-1}\bar{S}_{12})MS_{21}]F) = 0$$

como,

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_{12} &= 0 \\
 E_e &= I + S_{14}^e F_d^{-1} S_{14}^{eT} F = I
 \end{aligned}$$

entonces,

$$\det(sI - A + \bar{S}_{11}F) = 0$$

dados los valores, $L_a = 0.1$, $b = 0.1$, $R_a = 0.5$, $J = 1.5$ y $n = 3$, se obtiene (4.23).

$$\det(sI - (S_{11} - \bar{S}_{11} + S_{12}MS_{21})F) = s^2 + (5.0667 + 0.6667H_2)s + 60.333 + 3.333H_2 + 20H_1 = 0 \tag{4.23}$$

El comportamiento deseado del sistema requiere que tenga los polos en -15 y -15 los cuales corresponden al polinomio que se muestra en (4.24),

$$s^2 + 30s + 225 = 0 \tag{4.24}$$

se obtienen los valores de las ganancias para el observador en:

$$\begin{aligned} H_1 &= 2.003 \\ H_2 &= 37.3812 \end{aligned}$$

Para las ganancias del controlador se tiene a partir de (4.17),

$$\det(sI - E^{-1}(S_{11} - \tilde{S}_{11} + S_{12}M(S_{21} - \tilde{S}_{21}))F) = 0$$

como,

$$\tilde{S}_{21} = 0 \quad y \quad E = I$$

entonces,

$$\det(sI - A + \tilde{S}_{11}F) = 0$$

$$\det(sI - (S_{11} - \tilde{S}_{11} + S_{12}MS_{21})F) = s^2 + (5.0667 - k_1)s + 60.333 - 0.0667 - 30k_2 = 0$$

Si se desea obtener un polinomio con $\zeta = 0.75$ y $W_n = 1$, como se muestra en (4.25),

$$s^2 + 1.5s + 1 \tag{4.25}$$

se obtienen los valores para el controlador,

$$\begin{aligned} k_1 &= 3.5667 \\ k_2 &= 1.9687 \end{aligned}$$

En las figuras 4.5 y 4.6 se muestra la respuesta del sistema con las condiciones iniciales del observador distintas de cero para hacer notar la importancia de las mismas. Las condiciones iniciales del observador son fundamentales, sin embargo, ya que no se tienen las condiciones iniciales del sistema original, resulta casi imposible que sean iguales. Por otro lado es necesario determinar más de un diseño para el observador e implementarlos para tener en cuenta el comportamiento y poder elegir un diseño apropiado al sistema.

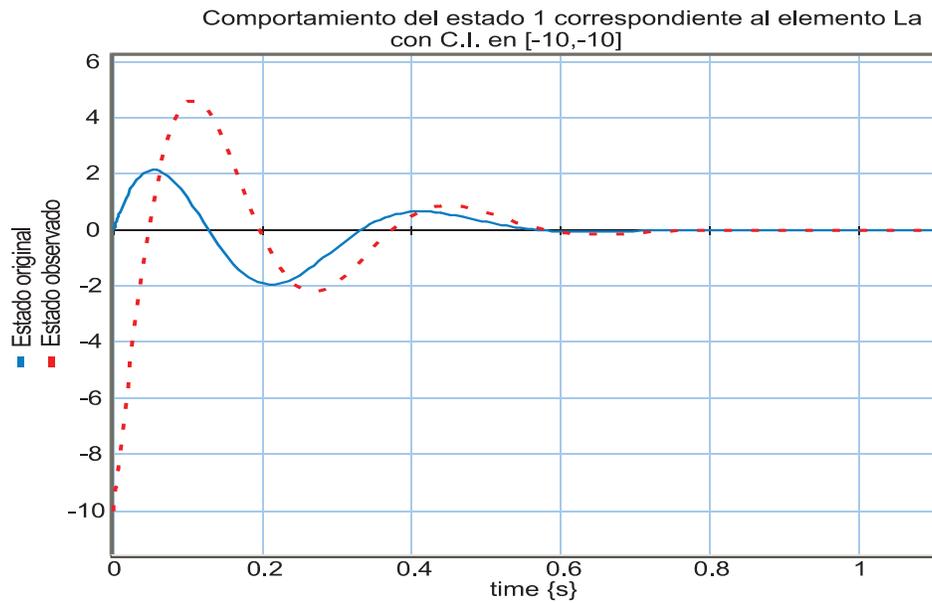


Figura 4.5: Respuesta del estado 1, sistema original-observador correspondiente al enlace de flujo en el inductor L_a .

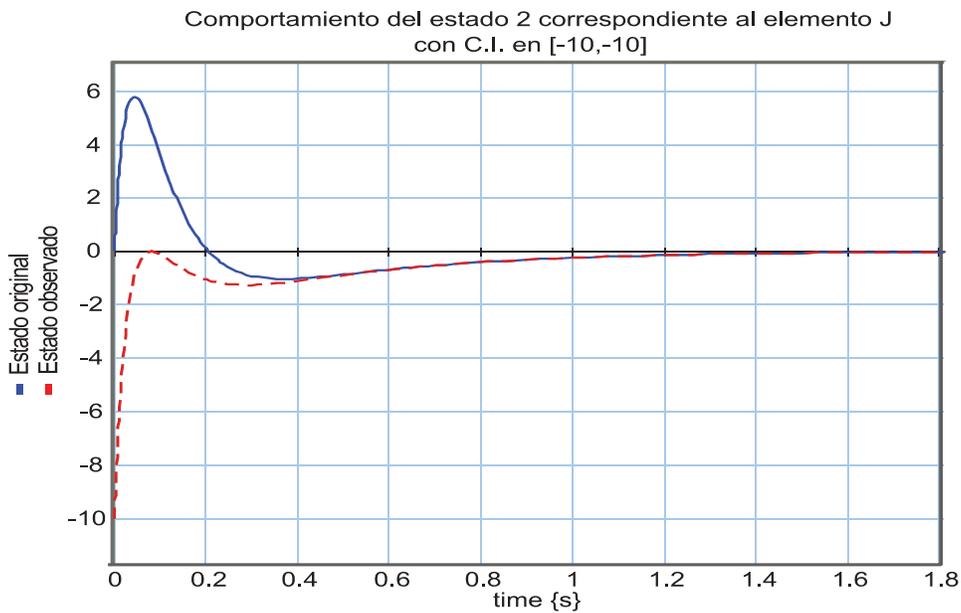


Figura 4.6: Respuesta del estado 2, sistema original-observador correspondiente al movimiento rotacional del rotor del motor.

4.2 Los controladores en el dominio de la frecuencia

4.2.1 Enfoque clásico

Los controladores tradicionales son basados en referencia al error producido entre una referencia y la salida del sistema. Este error es utilizado para la acción de control la cuál dependerá de las características específicas para lograr que el sistema tenga un comportamiento deseado [16].

Existe una variedad de tipos de controladores, en este trabajo se analizarán sólo algunos de ellos, que son los tipo P (Proporcional), PI (Proporcional-Integral), los PID (Proporcional-Integral-Derivativo) y controladores basados en su función de transferencia.

a) Controlador tipo P

El controlador tipo P, está basado en una ganancia proporcional que afecta directamente al error para obtener una acción de control adecuada.

Este controlador tiene como entrada la señal del error y como salida, la entrada a la planta o sistema, como en este caso se trata de un controlador de tipo proporcional, entonces se tiene (4.26).

$$u(t) = K_p e_{rr}(t) \quad (4.26)$$

Pasandolo al dominio de la frecuencia, se tiene (4.27).

$$u(s) = K_p e_{rr}(s) \quad (4.27)$$

Una característica de este tipo de controladores es que no incrementa el orden del sistema, caso contrario en casi todos los demás tipos de controladores y también tiene la desventaja de tener un offset de error en estado estacionario.

b) Controlador tipo PI

Este controlador utiliza una acción proporcional y una integrativa al error, por lo que se tiene (4.28) y llevandolo al dominio de la frecuencia (4.29).

$$u(t) = K_p e_{rr}(t) + K_I \int e_{rr}(t) dt \quad (4.28)$$

$$u(s) = K_p e_{rr}(s) + \frac{K_I}{s} e_{rr}(s) \quad (4.29)$$

El controlador tipo PI tiene la característica de reducir el offset de error en estado estacionario pero incrementa el orden del sistema original así como también se puede tener una respuesta más rápida al incrementar la ganancia proporcional (K_p) o la ganancia integral (K_I), aunque con ciertos límites puesto que se puede llegar a tener una respuesta muy oscilatoria.

c) Controlador tipo PID

El controlador tipo PID posee además de la contribución proporcional e integral una contribución derivativa y tiene las características dinámicas del sistema muy semejantes que las que tiene un controlador tipo PI (sin offset de error y respuesta rápida), pero asegurando estabilidad, es decir, disminuyendo las oscilaciones que produce un incremento de ganancias K_p o K_I (En el caso de un PI).

La expresión en el tiempo está definida por la ecuación (4.30) y llevandolo al dominio de la frecuencia se tiene (4.31).

$$u(t) = K_p e_{rr}(t) + K_I \int e_{rr}(t) dt + K_D \frac{d}{dt} e_{rr} \quad (4.30)$$

$$u(s) = K_p e_{rr}(s) + \frac{K_I}{s} e_{rr}(s) + K_D s e_{rr} \quad (4.31)$$

La parte derivativa de este tipo de controladores puede ofrecer mayor estabilidad que lo que da uno de tipo PI debido a que cuando un PI tiene una respuesta rápida, provoca oscilaciones y con ello inestabilidad y con la acción derivativa se acelera la respuesta pero no incrementa la amplitud de oscilación.

4.2.2 Diseño de controladores clásicos en Bond Graph

El diseño de controladores en Bond Graph se realizó considerando aspectos específicos del proceso o sistema que se trate, ya que para cada tipo de controlador (P, PI, PID) se tienen modelos dependiendo de las variables que se estén comparando y de las que se desean controlar.

Procedimiento

El procedimiento presentado es para el diseño de controladores tipo P, PI y PID únicamente, aunque el análisis puede utilizarse para el diseño de otros tipos.

1. *Paso 1* Se decide el tipo de controlador a utilizar.
2. *Paso 2* Se analizan las variables involucradas, que son, la variable de salida y la variable de referencia.
3. *Paso 3* Se toma la ecuación de la acción de control en el dominio del tiempo correspondiente al tipo de controlador (4.26, 4.28 o 4.30).
4. *Paso 4* Si las variables involucradas son distintas entre sí, un elemento girador (elemento de Puerto-2) es colocado entre la variable de salida y el elemento de comparación (elemento de Puerto-3) para el acoplamiento de las señales.
5. *Paso 5* La variable e_{rr} se toma como la diferencia entre la salida y la entrada de referencia, teniendo como punto de comparación el elemento del Puerto-3 (Unión-0 o Unión-1).
6. *Paso 6* Se desarrolla la ecuación con las variables que le corresponden y la salida del controlador se dirige con un bond activo (o en su defecto con un bond adaptado si se usarán trayectorias causales) a partir del elemento Puerto-3 hacia el sistema a través de una fuente modulada.

Notar que dependiendo de la combinación de variables, la contribución integral o derivativa estará dada por elementos I o elementos C.

Ejemplos de diseño de controlador PID en BG

Se tiene el modelo del sistema electromecánico que se muestra en la figura 4.7 cuyo Bond Graph se muestra en la figura 4.8, a partir del cual se requiere diseñar un control tipo PID para controlar la salida (flujo en el elemento J), y controlarlo por voltaje (esfuerzo).

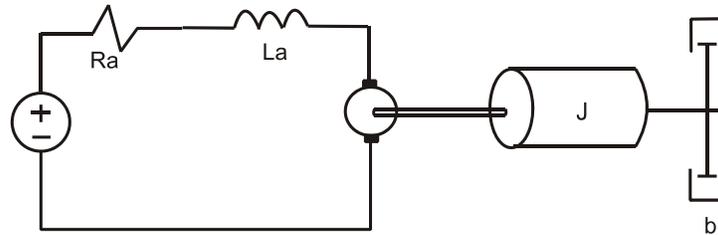


Figura 4.7: Modelo de un motor de CD (Sistema electromecánico).

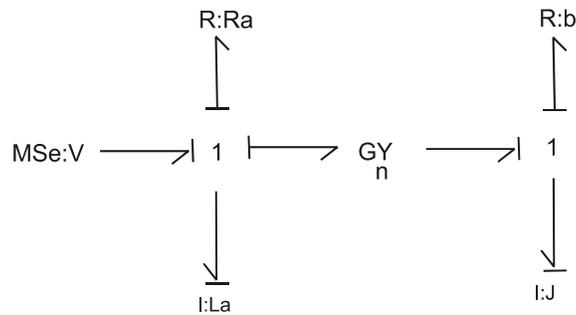


Figura 4.8: Modelo en Bond Graph de un motor de CD

No olvidar revisar la controlabilidad del sistema, en este caso, es controlable y se prosigue con el diseño.

Paso 1 El controlador es un PID

Paso 2 La variable de salida es de flujo, y la señal de referencia se considerará de esfuerzo para éste ejemplo.

Paso 3 La ecuación que define al controlador es (4.32):

$$u(t) = K_p e_{rr}(t) + K_I \int e_{rr}(t) dt + K_D \frac{d}{dt} e_{rr} \tag{4.32}$$

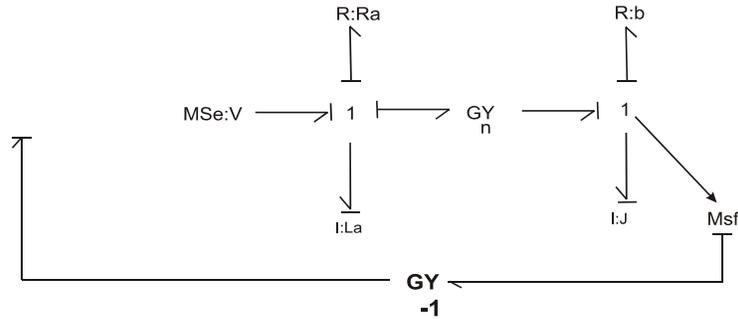


Figura 4.9: Sistema electromecánico, retroalimentando su salida y utilizando un girador para acoplamiento de las señales.

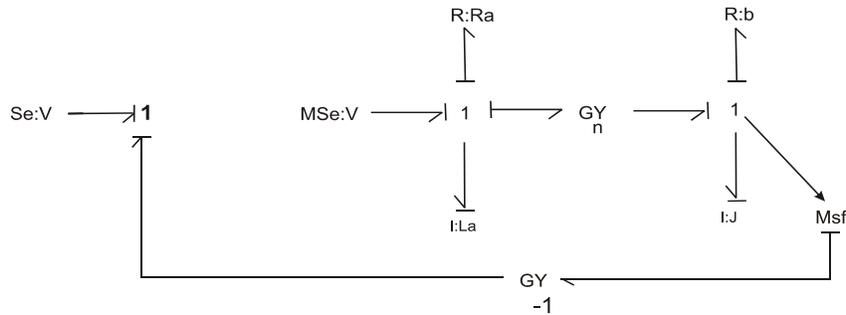


Figura 4.10: Comparación de señales entrada - salida.

Paso 4 Puesto que las señales involucradas son distintas entre sí, se utiliza un girador (con ganancia unitaria y negativa para hacer posible la diferencia entre ambas señales) antes de compararlas, como se muestra en la fig 4.9.

Puesto que las señales a comparar son esfuerzos, se requiere para ello un elemento Puerto-3 de tipo Unión - 1, como se muestra en la figura 4.10.

Paso 5 Tomando en cuenta la ecuación de la acción de control, y tomando en cuenta las ecuaciones que describen el comportamiento de los elementos de almacenamiento, dadas por (4.33) y (4.34).

$$L \longrightarrow f = \frac{1}{L} \int e \, dt \quad e = L \frac{d}{dt} f \quad (4.33)$$

$$C \longrightarrow f = C \frac{d}{dt} e \quad e = \frac{1}{C} \int f \, dt \quad (4.34)$$

Como se puede observar, será necesario utilizar ambos elementos de almacenamiento, además de un elemento resistivo para la contribución proporcional del controlador.

Paso 6 Realizando un análisis del controlador (4.32), se tiene la figura 4.11.

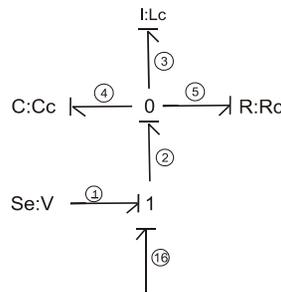


Figura 4.11: Modelo del controlador y señales de entrada y salida.

$$e_{rr} = e_1 - e_{16}$$

(Recordando que la salida se retroalimenta con ganancia unitaria negativa)

pero,

$$e_2 = e_1 - e_{16}$$

$$e_2 = e_{rr}$$

Además,

$$e_3 = e_4 = e_5 = e_2 = e_{rr}$$

Por otro lado, tomando en cuenta las ecuaciones que describen el comportamiento de los

elementos de almacenamiento y el elemento resistivo, se tienen (4.35), (4.36) y (4.37)

$$f_3 = \frac{1}{L_c} \int e_3 dt \quad \Rightarrow \quad f_3 = \frac{1}{L_c} \int e_{rr} dt \quad (4.35)$$

$$f_4 = C_c \frac{d e_4}{dt} \quad \Rightarrow \quad f_4 = C_c \frac{d e_{rr}}{dt} \quad (4.36)$$

$$f_5 = \frac{1}{R_c} e_5 \quad \Rightarrow \quad f_5 = \frac{1}{R_c} e_{rr} \quad (4.37)$$

Por lo que la ecuación (4.32) se puede reescribir como (4.38),

$$u = \frac{1}{R_c} e_{rr} + \frac{1}{L_c} \int e_{rr} dt + C_c \frac{d}{dt} e_{rr} \quad (4.38)$$

$$u = f_5 + f_3 + f_4 \quad (4.39)$$

Además,

$$f_5 + f_3 + f_4 = f_2$$

Por lo que, finalmente se logra tener la acción de control representada mediante la ecuación (4.40),

$$f_2 = f_5 + f_3 + f_4 \quad (4.40)$$

donde f_2 (que es la acción de control), se toma con un bond activo a partir del elemento de comparación (Unión -1) como se muestra en la figura 4.12, es decir,

$$f_2 = f_6 \quad (4.41)$$

que es la acción de control que alimentará a la planta por medio de una fuente modulada de esfuerzo. Ya teniendo el modelo en Bond Graph, se realiza la obtención de la estructura de unión del modelo en lazo cerrado, la cual se muestra en (4.42).

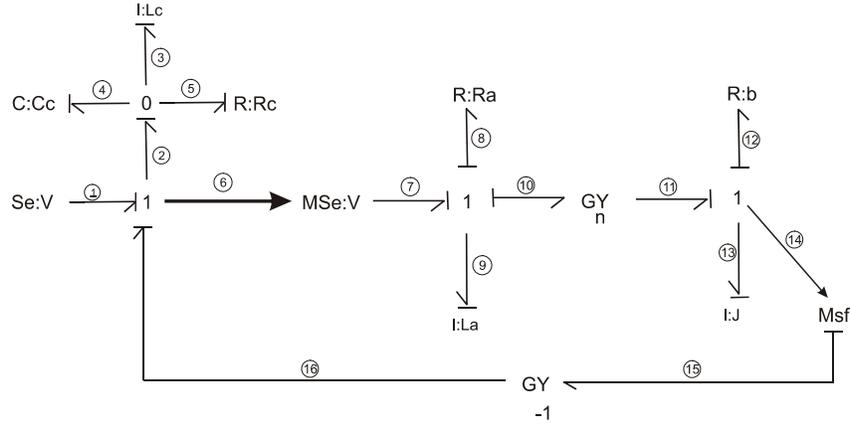


Figura 4.12: Modelo de un motor de CD junto con un controlador tipo PID.

$$\begin{bmatrix} e_3 \\ e_9 \\ e_{13} \\ e_5 \\ f_8 \\ f_{12} \\ f_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -n & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & n & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3 \\ f_9 \\ f_{13} \\ f_5 \\ e_8 \\ e_{12} \\ e_1 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_c} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_c} & 0 & 0 \\ 0 & R_a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \quad F_D = \frac{1}{C_c} \quad (4.43)$$

$$u = e_1 \quad y = f_{13} \quad (4.44)$$

A partir de la estructura de unión se obtiene la representación matemática en espacio de

estados que se muestra en las expresiones (4.45).

$$\begin{aligned}
 A_{LC} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{J} \\ \frac{L_a}{(L_a+C_c)L_c} & -\frac{R_a}{L_a+C_c} & -\frac{L_a}{J(L_a+C_c)}\left(n + \frac{1}{R_c}\right) \\ 0 & \frac{n}{L_a} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} & B_{LC} &= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{L_a}{(L_a+C_c)R_c} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 C_{LC} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} & D_{LC} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

La función de transferencia queda determinada en (4.46).

$$Y(s) = \frac{\eta_0 s + \eta_4}{\eta_1 s^3 + \eta_2 s^2 + \eta_3 s + \eta_4} \tag{4.46}$$

donde,

$$\begin{aligned}
 \eta_0 &= nL_c \\
 \eta_1 &= L_c R_c L_a J + L_c R_c C_c J \\
 \eta_2 &= L_c R_c L_a b + L_c R_c C_c J + L_c R_c R_a J \\
 \eta_3 &= L_c R_c R_a b + L_c n^2 R_c + L_c n \\
 \eta_4 &= nR_c
 \end{aligned}$$

Sustituyendo valores numéricos al sistema (expresión (4.47)):

$$\begin{aligned}
 R_a &= 0.5 \\
 b &= 0.1 \quad C_c = 0.001 \\
 L_a &= 0.1 \quad L_c = 0.1 \\
 J &= 1.5 \quad R_c = 0.85 \\
 n &= 3
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

se obtiene la función de transferencia (4.48),

$$Y(s) \approx \frac{23.3s + 198}{s^3 + 5.017s^2 + 83.03s + 198} \tag{4.48}$$

El comportamiento puede observarse en la figura 4.13 simulado en MATLAB y en la figura

4.14 la simulación correspondiente en 20- SIM y como se puede observar muestran el mismo

tipo de comportamiento por lo que se puede comprobar que el diseño bajo la plataforma de Bond Graph entrega los mismos resultados que los que se obtienen en la teoría clásica, sin embargo, se puede notar que no es posible establecer el diseño en forma de bloques como se hizo en el Capítulo 3.

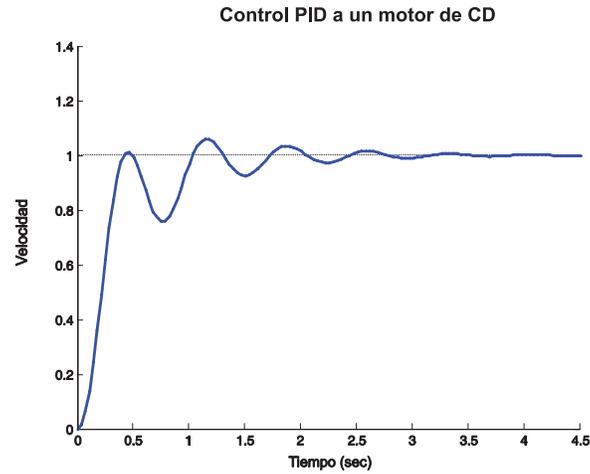


Figura 4.13: Simulación realizada en MATLAB

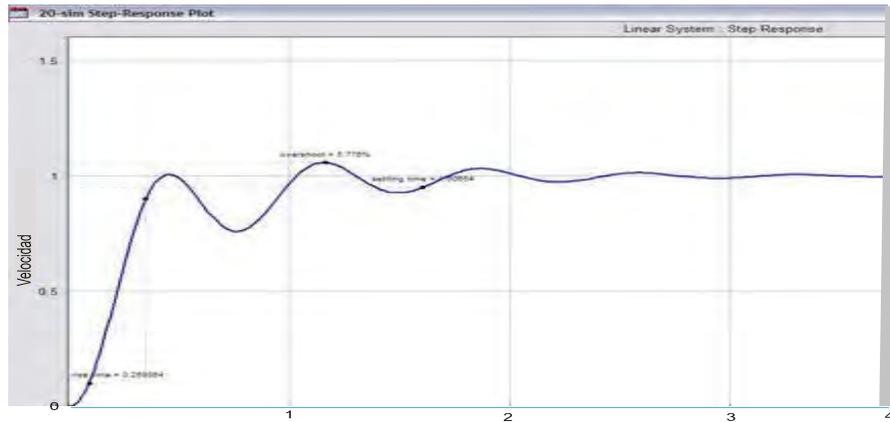


Figura 4.14: Simulación realizada en 20 - SIM

4.3 Propuesta de diseño de controladores en Bond Graph a partir de su función de transferencia

4.3.1 Introducción

Comúnmente se obtiene una representación matemática de un modelo y su controlador a través del modelo correspondiente de bond graph, pero que pasaría si se quisiera implementar un controlador determinado del cuál se tiene su función de transferencia a un modelo existente en bond graph, ese es uno de los objetivos de éste trabajo de investigación, poder tener el diseño de un controlador partiendo de su función de transferencia para tener la seguridad de ser éste implementable.

La propuesta que a continuación se presenta parte de proponer un modelo en Bond Graph con una causalidad integral predefinida para una función de transferencia del controlador.

4.3.2 Una estructura de unión

Dada una realización de un controlador o su función de transferencia, una estructura de unión se presenta en la siguiente proposición con el objetivo de obtener un bond graph del controlador.

Proposición 6 *Considerar una realización en espacio de estados (A_c, B_c, C_c, D_c) de un controlador LTI MIMO $\forall \{x_c \in \mathbb{R}^{n_c}, D_{in}^c \in \mathbb{R}^{n_c}, y_c \in \mathbb{R}^p, u_c \in \mathbb{R}^q\}$. Suponer que todos los elementos de almacenamiento tienen asignación en causalidad integral predefinida. Si existe, la estructura de unión tiene la forma (4.49).*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ D_{in}^c(t) \\ y_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_c} & S_{13}^c \\ -I_{n_c} & 0 & 0 \\ S_{31}^c & 0 & S_{33}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_c(t) \\ D_{out}^c(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

que verifica a,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ D_{in}^c(t) \\ y_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^c & S_{12}^c & S_{13}^c \\ S_{21}^c & S_{22}^c & S_{23}^c \\ S_{31}^c & S_{32}^c & S_{33}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_c(t) \\ D_{out}^c(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

tal que las relaciones constitutivas entre los elementos son,

$$D_{out}^c(t) = L_c D_{in}^c(t) \quad (4.51)$$

$$z_c(t) = F_c x_c(t) \quad (4.52)$$

entonces una realización de bond graph corresponde a,

$$S_{13}^c = B_c \quad (4.53)$$

$$S_{31}^c = C_c F_c^{-1} \quad (4.54)$$

$$S_{33}^c = D_c \quad (4.55)$$

$$L_c = -A_c F_c^{-1} \quad (4.56)$$

con,

$$L_c = P F_c^{-1} \quad (4.57)$$

donde P es una matriz de polos, es decir, una matriz donde sus elementos son las raíces del polinomio característico deseado para el controlador

Más aún, la matriz de función de transferencia es dada por,

$$K_{ij}(s) = (M_G)_{ij} + \frac{(M_H)_{ij} s + z_{ij}}{s + P_{ij}} \quad \forall \{i = \{1, \dots, \theta\}, j = \{1, \dots, \beta\} \forall i, j \in \mathbb{N}\} \quad (4.58)$$

donde,

$$z_i = (M_r)_i + (M_H)_i P_i \quad (4.59)$$

siendo,

$$C_c = M_r \quad (4.60)$$

$$D_c = M_G + M_H \quad (4.61)$$

Demostración. A partir de que todos los elementos de almacenamiento permanecen en causalidad integral, entonces $S_{14}^c = 0$ y $E_c = I_n$. También, $S_{22}^c = 0$, y utilizando $M = (I - L_c S_{22}^c) L_c$ entonces, $M = L_c$. Sustituyendo las submatrices correspondientes de (4.49) en $A_c = E_c^{-1}(S_{11}^c + S_{12}^c M S_{21}^c) F_c$, la matriz de estado del controlador es $A_c = -L_c F_c$, y utilizando (4.57), se tiene $L_c = -P$.

También a partir de $B_c = E_c^{-1}(S_{13}^c + S_{12}^c M S_{23}^c)$ y las submatrices de (4.49) se tiene, $S_{13}^c = B_c$ y sustituyendo (4.49) en $C_c = (S_{31}^c + S_{32}^c M S_{21}^c) F_c$, se tiene que $S_{31}^c = C_c F_c^{-1}$. Finalmente, a partir de $D_c = S_{33}^c + S_{32}^c M S_{23}^c$ y (4.49) entonces $D_c = S_{33}^c$.

La función de transferencia para el controlador es $K(s) = C_c(sI - A_c)^{-1} B_c + D_c$, sustituyendo (4.57) en (4.56) con (4.60) y (4.61), y asumiendo $B_c = I$, entonces (4.58) y (4.59) es probado.

■

4.3.3 Procedimiento de diseño

Partiendo del controlador deseado se definen las matrices (4.62)

$$\begin{aligned} A_c &= -P \\ B_c &= I_{n \times q} \\ C_c &= M_r \\ D_c &= M_G + M_H \end{aligned} \tag{4.62}$$

Se deducen los vectores clave y la matriz F_c , con lo que se deduce L_c , siendo ambas las matrices que marcan las relaciones constitutivas entre los elementos. La estructura de unión del controlador finalmente queda como se muestra en la expresión (4.63).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ D_{in}^c(t) \\ y_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_c} & I_{n \times \beta} \\ -I_{n_c} & 0 & 0 \\ M_r F_c^{-1} & 0 & M_G + M_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_c(t) \\ D_{out}^c(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} \tag{4.63}$$

Una vez hecho, se procede al procedimiento de construcción dado en [20].

Construcción del Bond Graph del controlador

1. (a) Dibujar para cada elemento de almacenamiento un elemento de unión (Un *elemento* $-C$ es conectado *con una unión*-0, un *elemento* $-I$ es conectado *con una unión* -1). La dirección del bond será hacia los elementos de almacenamiento.
- (b) En cada unión del paso (a), conectar las fuentes de acuerdo a la matriz S_{13}^c . En el caso de que la submatriz esté determinada por una ganancia, se tendrá que colocar un elemento girador o transformador según sea el caso.
- (c) Conectar a cada unión 0 del paso (a) con un bond a una unión 1, la dirección de potencia del bond será hacia los elementos $-C$.

Conectar a cada unión 1 del paso (a) con un bond a una unión 0, la dirección de potencia del bond será hacia los elementos $-I$.

Nota: Estas uniones adicionales corresponden a la submatriz $S_{12}^c = -I_{n_c}$.

- (d) Las uniones -0 y -1 agregadas en el paso (c) se conectan a el campo $-R$, el cuál se obtuvo a partir de 4.56 (L_c), la dirección de éstos bonds es contraria respecto a los elementos $-I$ y $-C$, esto corresponde a la submatriz $S_{21}^c = -I_{n_c}$.
- (e) La salida del controlador se obtiene mediante bonds activos.
- (f) Finalmente, se asigna una causalidad integral al BG del sistema.

4.3.4 Ejemplo de un controlador cuya función de transferencia es $\frac{s}{s+P}$

Considerando un controlador cuya función de transferencia está determinada por (4.64). Comparando con la función de transferencia general de un controlador dada por (??), se tiene (4.65).

$$K(s) = \frac{s}{s + P_1} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned}
 M_G &= 0 \\
 M_H &= 1 \\
 z_1 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.65}$$

de (4.59) se tiene (4.66),

$$M_r = -P_1 \tag{4.66}$$

Sustituyendo los valores en (4.63) se obtiene (4.67),

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ D_{in}^c(t) \\ y_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -P_1 F_c^{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_c(t) \\ D_{out}^c(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix}
 \tag{4.67}$$

En la función de transferencia se puede observar la cantidad de elementos de almacenamiento, en este caso es uno, por lo que podemos seleccionar (4.68).

$$F_c = \frac{1}{C_1} \tag{4.68}$$

por lo que se tiene (4.69),

$$L_c = P_1 C_1 \tag{4.69}$$

Puesto que es un elemento -C, los vectores clave, están dados por (4.70),

$$\begin{aligned}
 x_1^c &= q_1 & \dot{x}_1^c &= f_1 & z_1^c &= e_1 \\
 D_{in}^c &= e_2 & ; & & D_{out}^c &= f_2 \\
 u_c &= f_3 & ; & & y_c &= f_4
 \end{aligned}
 \tag{4.70}$$

Los vectores de salida y entrada se eligen y el número de bonds es arbitrario, en este caso, se requiere que el controlador tenga tanto como entrada como de salida (acción de control), señales de flujo. La estructura unión queda definida por la expresión (4.71),

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ e_2 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -P_1 C_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}
 \tag{4.71}$$

Una vez logrado tener la estructura unión del controlador deseado, se procede a la construcción del bond graph correspondiente.

Dado que se tiene un elemento de almacenamiento $-C$, se conecta a una unión -0 (figura 4.15).

Dado que la matriz $S_{13}^c = 1$, se conecta directamente la fuente de flujo (figura 4.16).

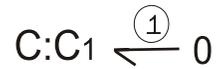


Figura 4.15: Paso 1. Conexión de elemento de almacenamiento a elemento de unión.

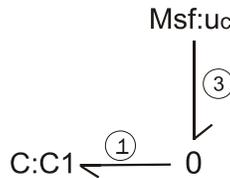


Figura 4.16: Paso 2. Conexión directa entre fuente y elemento de unión.

Se realiza una conexión con un elemento de unión adicional, cuya dirección es hacia el elemento de almacenamiento (figura 4.17).

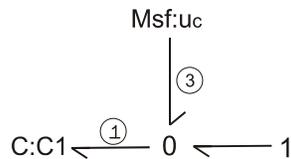


Figura 4.17: Paso 3. Elemento de unión adicional, correspondiente a la matriz S_{12}

Posterior a esto, se conecta con el campo R mediante un bond cuya dirección es contraria al elemento de almacenamiento. Dado que R representa la relación entre los elementos resistivos y éstos están definidos por L_c en (4.69), se tiene la figura 4.18.

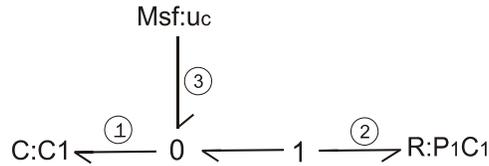


Figura 4.18: Paso 4. Conexión con el campo R

La salida del controlador está definida por (4.72) en (4.71),

$$f_4 = -P_1 C_1 * e_1 + f_3 \tag{4.72}$$

donde e_1 es el esfuerzo del elemento de almacenamiento y f_3 el flujo de la señal de entrada. Como se necesita tomar la entrada para retroalimentarla para la señal de salida se extiende con un elemento de unión -1 (por ser fuente de flujo) entre la fuente y el elemento de unión del paso (1) a partir de la cual se tomara la retroalimentación requerida para la señal de salida, obteniendose así la figura 4.19.

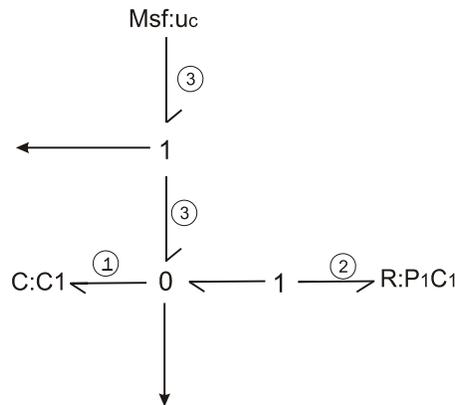


Figura 4.19: Paso 5. Extensión de la fuente de flujo para retroalimentar a la salida.

Dado que la señal del elemento de almacenamiento es de esfuerzo, y puesto que se va comparar con una señal de flujo, se hace uso de un elemento girador para acoplar las señales, cuyo módulo será la ganancia requerida para retroalimentar la señal, así, finalmente el bond graph del controlador se culmina como se muestra en la figura 4.20.

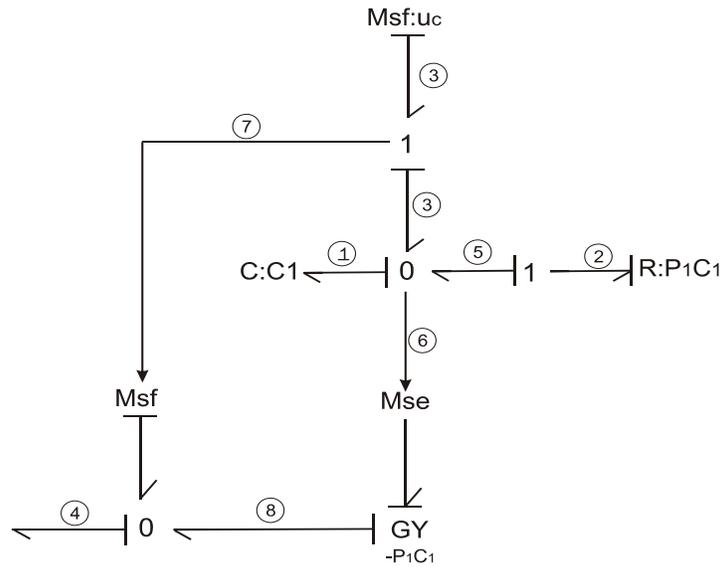


Figura 4.20: Paso 6. Bond Graph del controlador con función de transferencia $\Rightarrow \frac{s}{s+P_1}$

4.3.5 Ejemplo de un motor de CD linealizado

Ahora considerese el modelo de un motor de DC que se muestra en la figura 4.21:

El modelo del motor de CD considerando las corrientes de campo y de armadura es un modelo de un sistema no lineal. Con el objetivo de tener un sistema LTI MIMO el sistema es linealizado siguiendo el procedimiento de [28] y su bond graph correspondiente se muestra en la figura 4.23 [21].

Numerando los bonds, el modelo queda como se muestra en la figura 4.24, a partir del cuál se tienen los vectores clave de la planta como se muestra en (4.73).

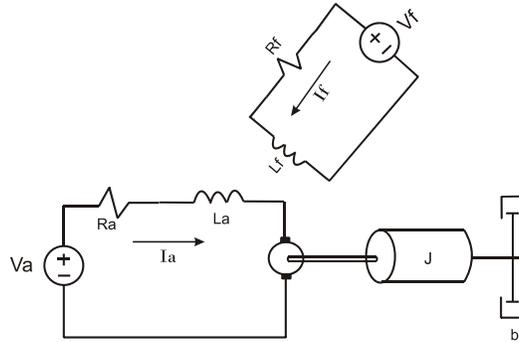


Figura 4.21: Motor de CD con el circuito de campo y de armadura.

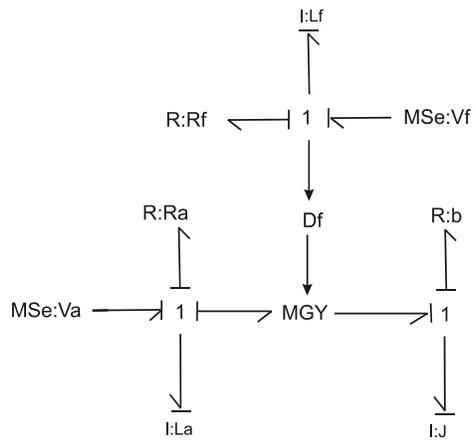


Figura 4.22: Modelo en bond graph del motor de CD

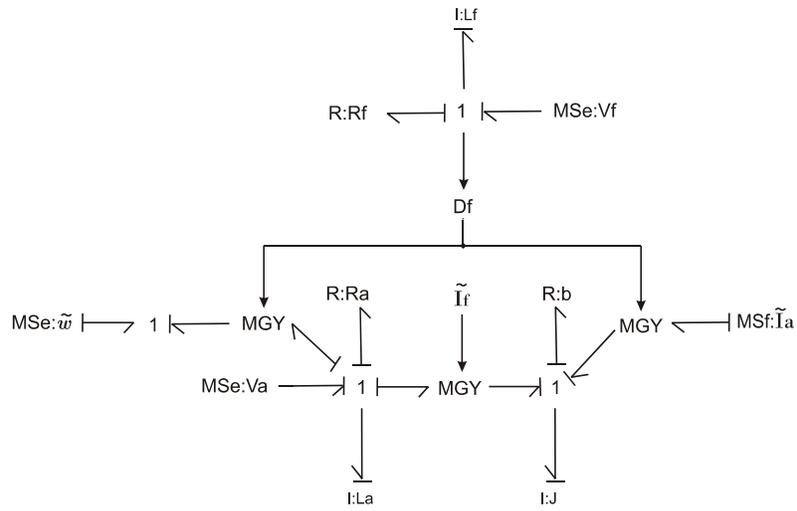


Figura 4.23: Modelo en Bond Graph del motor de CD linealizado.

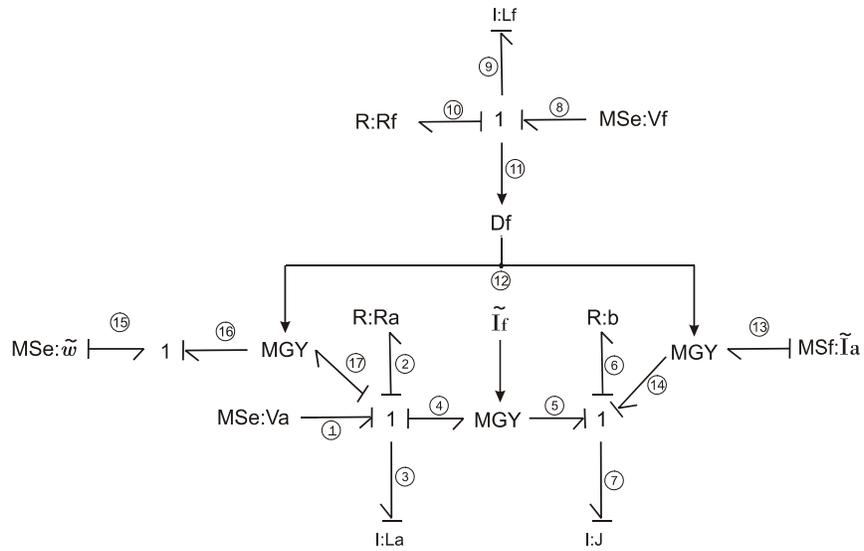


Figura 4.24: Modelo en Bond Graph del motor de CD linealizado con la numeración correspondiente de sus bonds.

$$\begin{aligned}
 x &= \begin{bmatrix} p_3 \\ p_7 \\ p_9 \end{bmatrix}; & \dot{x} &= \begin{bmatrix} e_3 \\ e_7 \\ e_9 \end{bmatrix}; & x &= \begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \\ f_9 \end{bmatrix} \\
 D_{in} &= \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_{10} \end{bmatrix}; & D_{out} &= \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \\ e_{10} \end{bmatrix} \\
 y &= f_7; & u &= \begin{bmatrix} e_1 \\ e_8 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

Las relaciones constitutivas se definen como (4.74) y (4.75):

$$L = \text{diag}\{R_a, b, R_f\} \tag{4.74}$$

$$F = \text{diag}\left\{\frac{1}{L_a}, \frac{1}{J}, \frac{1}{L_f}\right\} \tag{4.75}$$

y la estructura unión está dada por (4.76):

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{I}_f & -\tilde{w} \\ \tilde{I}_f & 0 & \tilde{I}_a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & S_{13} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 S_{21} &= -S_{12}^T = I_3; & S_{22} &= S_{23} = S_{32} = S_{33} = 0
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

Considerando los valores numéricos mostrados en (4.77) al modelo, la función de transferencia de la planta está dada por (4.78),

$$\begin{aligned}
 L_a &= 0.1; & J &= 1.5; & L_f &= 0.02 \\
 R_a &= 2; & R_f &= 1.5; & b &= 1.5 \\
 \tilde{I}_f &= 0.3; & \tilde{I}_a &= 0.1; & \tilde{w} &= 0.5
 \end{aligned} \tag{4.77}$$

$$Y_T = [Q_1(s) \quad Q_2(s)] \begin{bmatrix} V_a(s) \\ V_f(s) \end{bmatrix} \tag{4.78}$$

donde,

$$Q_1(s) = \frac{2}{(s + 19.97)(s + 1.032)}; \quad Q_2(s) = \frac{10(s + 5)}{3(s + 19.97)(s + 1.032)(s + 75)} \quad (4.79)$$

Partiendo de (4.78), se desean diseñar dos controladores como se muestra en el diagrama de bloques de la figura 4.25 cuyas funciones de transferencia nos interesa que sean definidas como (4.80), con la finalidad de eliminar el polo que está ubicado en -1.032 para asegurar la estabilidad del sistema, ya que éstos se encuentran muy cerca del origen.

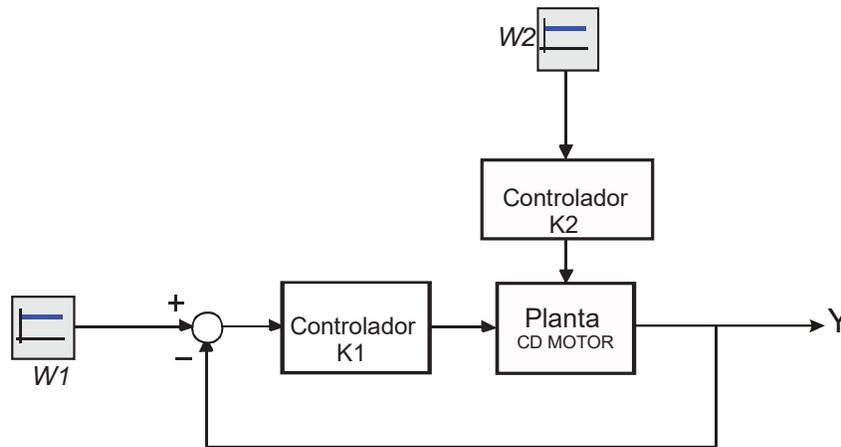


Figura 4.25: Diagrama a bloques del sistema del motor en lazo cerrado con los controladores correspondientes.

$$K_1(s) = \frac{s + 1.032}{s + 10}; \quad K_2(s) = \frac{s + 1.032}{s + 40} \quad (4.80)$$

Notar que al implementar los controladores con las funciones de transferencia mostradas en (4.80), se logrará eliminar el polo en -1.032, más sin embargo, se le agregará un polo más en -10, para el caso del controlador 1, y en -40 en el caso del controlador 2.

Para los controladores se tiene (4.81),

$$\begin{array}{ll}
 \text{Para } K_1(s) & \text{Para } K_2(s) \\
 M_{G_1} = 0 & M_{G_2} = 0 \\
 M_{H_1} = 1 & M_{H_2} = 1 \\
 z_1 = -1.032 & z_2 = -1.032 \\
 P_{1_1} = -10 & P_{1_2} = -40 \\
 M_{r_1} = -8.968 & M_{r_2} = -39
 \end{array} \tag{4.81}$$

Siguiendo el procedimiento para la construcción de los controladores, se obtienen los bond graphs mostrados en la figura 4.26:

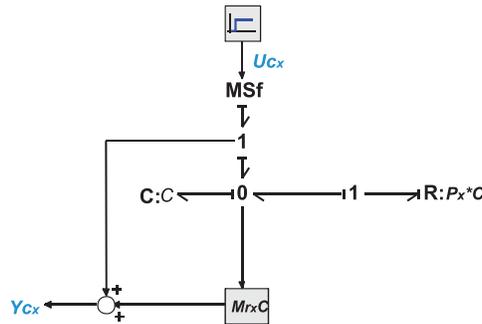


Figura 4.26: Modelo del controlador construido en Bond Graph.

$$\forall x \in \{1, 2\}$$

Finalmente se tiene el modelo en bond graph del sistema en lazo cerrado y se muestra en la figura 4.27, donde se puede apreciar que los controladores establecidos bajo la propuesta planteada pueden ser planteados por bloques, haciendo una analogía con la teoría de control clásica, así es que se pueden obtener las funciones de transferencia de los bloques individualmente y esto es útil cuando existe una falla en alguno de ellos para poder identificar el problema de manera rápida.

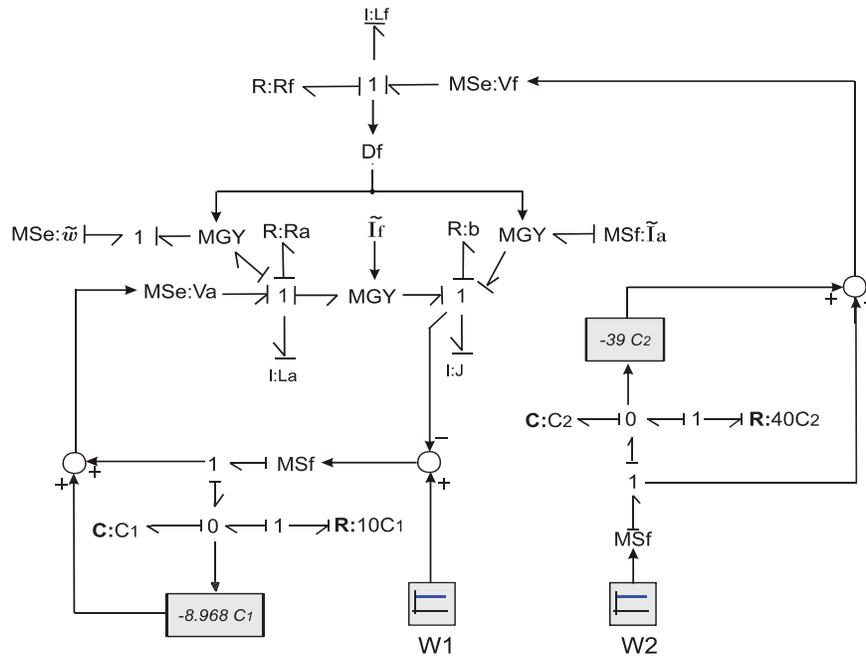


Figura 4.27: Modelo en Bond Graph del sistema en lazo cerrado del motor de CD con sus controladores respectivos K1 y K2.

En las figuras 4.28 y 4.29 se muestran los lugares de las raíces de las funciones de transferencia del sistema sin la implementación de los controladores respectivamente, así como en las figuras 4.30 y 4.31 se muestran nuevamente los lugares de las raíces de las funciones de transferencia pero con la implementación de los controladores respectivos, así, como se puede observar, se eliminan correctamente los polos de -1.032 de interés en ambas funciones de transferencia, así como también, los polos adicionales en $P=-10$ y en $P=-40$, respectivamente. Como se puede observar en las figuras 4.28 a 4.31, se pueden apreciar claramente las contribuciones de los controladores al lograr eliminar el polo deseado y el de dar de manera adicional un polo extra al sistema original con lo que se demuestra la importancia que se tiene la propuesta de este controlador.

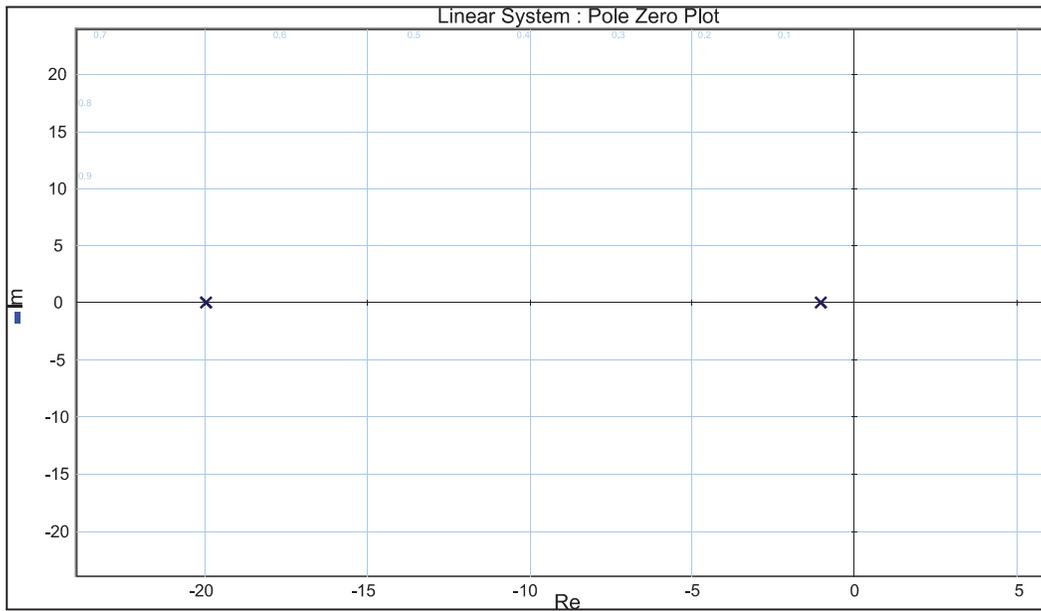


Figura 4.28: Lugar de las raíces de la función de transferencia Q_1 , sin la implementación del controlador.

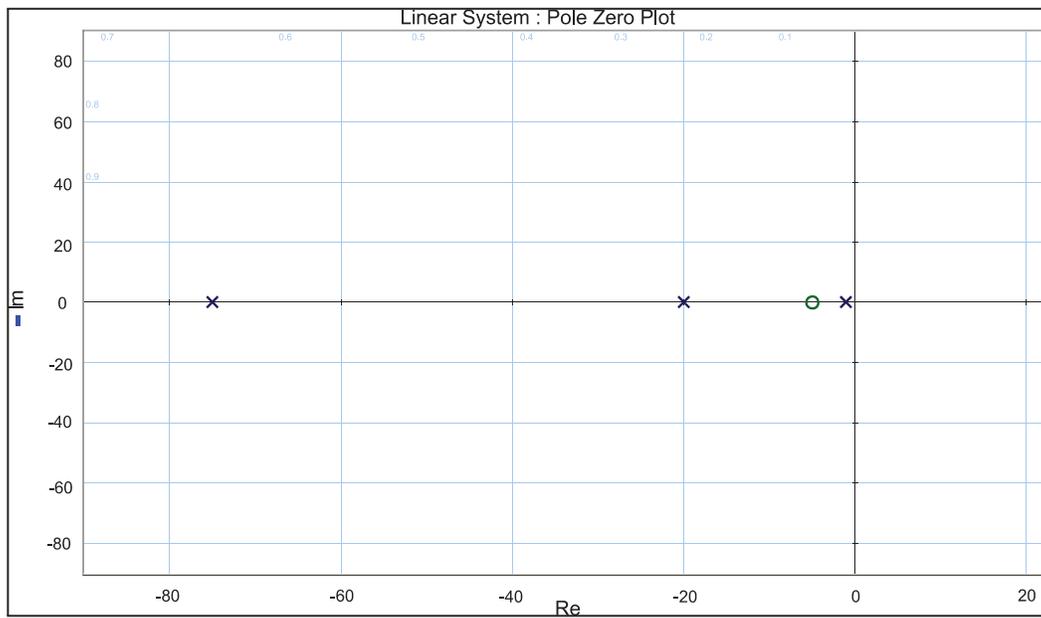


Figura 4.29: Lugar de las raíces de la función de transferencia Q_2 , sin la implementación del controlador.

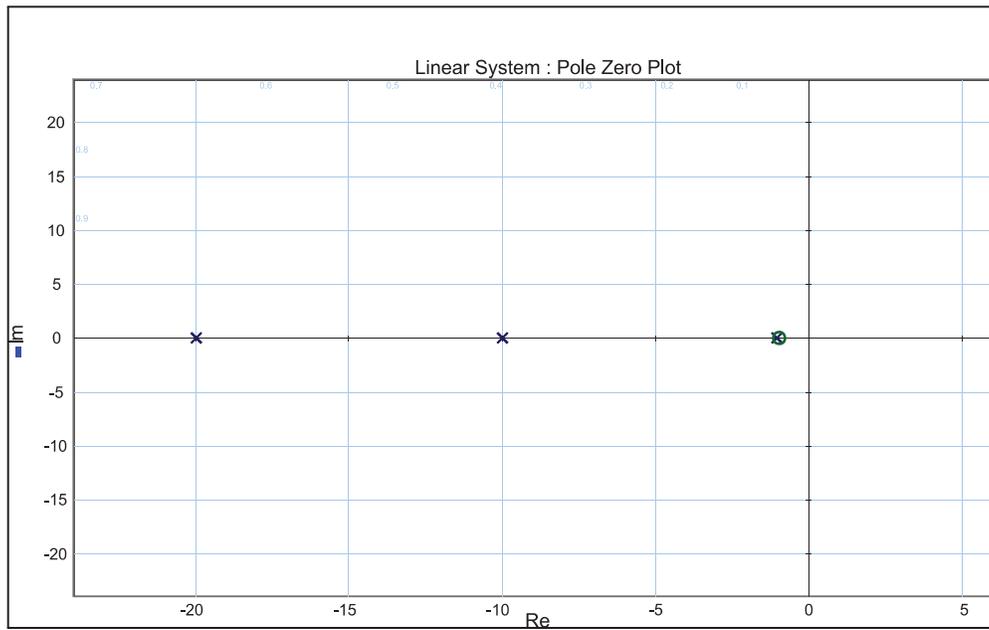


Figura 4.30: Lugar de las raíces de la función de transferencia Q1, con la implementación del controlador.

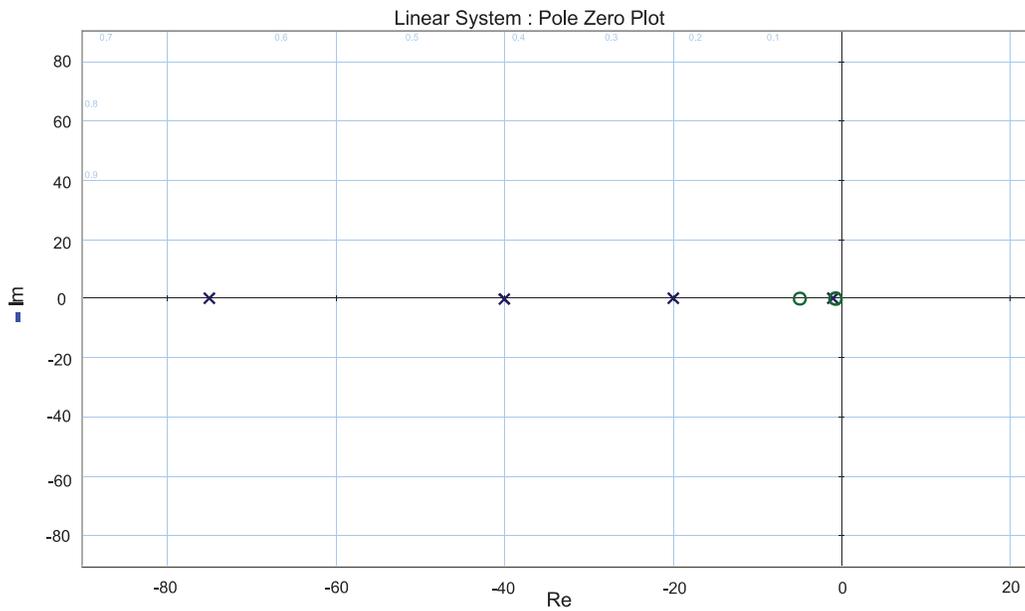


Figura 4.31: Lugar de las raíces de la función de transferencia Q2, con la implementación del controlador.

El control por retroalimentación de estados estimados visto en este Capítulo está basado en expresiones que involucran únicamente los componentes de la estructura de unión del sistema, es decir, es directamente una aplicación en la plataforma de bond graph, sin embargo, para llegar a dichas expresiones, fue necesario tomar en cuenta aspectos de la teoría de control clásica, en este sentido, existe una analogía entre las expresiones en la plataforma de BG y las manejadas por la teoría clásica como se pudo ver en las expresiones 4.15 y 4.8 para el caso del observador y en 4.17 y 4.9 para el caso del controlador, así mismo los controladores clásicos P, PI y PID vistos pertenecen a la plataforma de BG y también utilizaron teoría clásica, sin embargo, éstos no tienen una analogía directa con la teoría clásica ya que las herramientas utilizadas pertenecen y tienen significado únicamente en la plataforma de BG. Para el caso del diseño de controladores en base a la función de transferencia es un avance en la plataforma de BG y que aporta de manera importante en el área de control debido a que los modelos a los que se llega con este diseño son de controladores implementables en base a elementos de almacenamiento de energía y de disipación.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1 Conclusiones generales

En este trabajo se obtuvo la determinación directa de la función de transferencia para un sistema en lazo cerrado utilizando trayectorias causales y bonds adaptados, además, también se obtuvo la determinación directa de la estructura de unión de un sistema en lazo cerrado partiendo de las estructuras de unión del controlador y la planta de manera individual, así mismo, se hizo el diseño del control por retroalimentación de estados, así como también de controladores tipo P, PI y PID desde el enfoque de bond graph, finalmente se logró tener la aportación de un controlador propuesto del que se tiene la certeza de poder implementarse físicamente ya que el uso del bond graph es para sistemas dinámicos únicamente siendo esta la ventaja primordial para ello, por lo que queda logrado el objetivo de este trabajo de investigación.

5.2 Sugerencias de trabajos futuros

El uso de trayectorias causales y bonds adaptados puede ser enfocado para sistemas donde se deben considerar efectos de carga o pérdida de una variable de potencia además se podría

investigar el como manipular esa variable tanto para reutilizarse como también para eliminarse y además mediante que variable del sistema hacerlo aplicando teoría de análisis estructural. Para el caso del controlador propuesto, considero que puede extenderse para lograr diseñar controladores más complejos implementables y unificandolo con el uso de las trayectorias causales y con campos no solo de disipación sino de almacenamiento se podrían diseñar controladores tomando en cuenta parámetros de perturbación, es decir, controladores robustos.

Bibliografía

- [1] H. Paynter, "Analysis and design of engineering", MIT press, Cambridge, Mass, 1961.
- [2] D. Karnopp, R. Rosenberg, "System Dynamics: A Unified Approach", Wiley, Johns & Sons, 1975.
- [3] P. E. Wellstead, "Physical System Modelling", Academic Press, 1979.
- [4] V. Damic, J. Montgomery, "Mechatronics by Bond Graphs", Springer, 2003.
- [5] J. Thoma, B. Ould Bouamama, "Modelling and Simulation in Thermal and Chemical Engineering, A Bond Graph Approach", Springer, 2000.
- [6] J. Thoma, G. Mocellin, "Simulation with Entropy in Engineering Thermodynamics, Understanding Matter and Systems with Bond Graphs", Springer, 2006.
- [7] P. Gawthrop, L. Smith, "Metamodeling", Prentice Hall, 1996.
- [8] A. Mukherjee, R Karmakar, "Modelling and Simulation of Engineering Systems through Bondgraphs", Narosa Publishing House, 2000.
- [9] P. Gawthrop, "Physical Model-based Control: A Bond Graph Approach", Journal of the Franklin Institute, Vol. 332B, No. 3, pp. 285-305, 1995.
- [10] A. Sharon, N. Hogan, D. E. Hardt, "Controller Design in the Physical Domain", Journal of the Franklin Institute, Vol. 328, No. 5/6, pp. 697-721, 1991.

- [11] D. Karnopp, "Bond Graphs in Control: Physical State Variables and Observers", Journal of the Franklin Institute, Vol. 308, No. 3, pp. 219-234, 1979.
- [12] A. Kamel, C. Sueur, G. Dauphin-Tanguy, "How to Derive a Bond Graph Model from a Transfer Matrix", Journal of the Franklin Institute, Vol. 330, No. 5, pp. 787-798, 1993.
- [13] T. J. Yeh, "Backstepping control in the physical domain", Journal of the Franklin Institute, Vol. 328, pp. 455-479, 2001.
- [14] C. Sueur, G. Dauphin-Tanguy, "Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems", Journal of the Franklin Institute, Vol. 328, No. 1, pp. 55-70, 1991.
- [15] G. Dauphin-Tanguy, A. Rahmani y C. Sueur, "Bond Graph aided design of controlled systems", Simulation Practice and Theory, Vol. 7, pp. 493-513, 1999.
- [16] K. Ogata, "Ingeniería de Control Moderna", Segunda Edición, Prentice Hall, 1993.
- [17] D. Antic, B. Vidojkovic, M. Mladenovic, "An Introduction to Bond Graph Modelling of Dynamic Systems", TELSIAK '99, 13-15. October 1999, NiS, Yugoslavia.
- [18] G. González, "Analysis of a Closed Loop System Based on a Bond Graph", ICBGM '07.
- [19] G. González, G. Dauphin-Tanguy, R. Galindo, "Steady State Error for a Closed Loop Physical System with a Bond Graph Approach".
- [20] G. González, R. Galindo, "A causal Bond Graph Model from a State Space Description", Elsevier Science, October 2007.
- [21] G. González, R. Galindo, "A Linearization Procedure for a Class of Nonlinear Systems Based on Bond Graph".
- [22] G. González, R. Galindo, "Direct Control in Bond Graph by State Estimated Feedback for MIMO LTI Systems", Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Control Applications, September 18-20, 2002, Glasgow, Scotland, U.K.
- [23] P. J. Gawthrop, "Bond Graph Based Control", 1995 IEEE.

- [24] D. C. Karnopp, D. L. Margolis, R. C. Rosenberg, "System Dynamics, Modeling and Simulation of Mechatronic Systems", 3ra. Edición, 2000.
- [25] G. González, "Modelado de sistemas en el dominio físico", Notas de curso, Septiembre 2007.
- [26] P. Apkarian, "Time-Domain Control Design: A Nonsmooth Approach", Member, IEEE, Dominikus Noll, and Alberto M. Simões, IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY.
- [27] G. González A., "Modelado avanzado en Bond Graph", Notas de curso, Marzo 2008.
- [28] G. González A., "Técnicas de Control Basadas en el Dominio Físico para Sistemas LTI MIMO. Aplicación a la Máquina Síncrona", Tesis de Doctorado, UANL, 2004, pp.106-114.
- [29] G. Dauphin-Tanguy, "Modelling of Physical Dynamical Systems by Bond-Graphs", Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle (L.A.I.I), Institut Industriel du Nord (I.D.N)

Controllers Design for LTI MIMO Systems: A Bond Graph Approach

González-A. Gilberto^{1*}; Raquel S. Rodríguez^{2†}

¹University of Michoacan, Faculty of Electrical Engineering
México

Abstract. A direct procedure to obtain a bond graph from a state space description or transfer function of a controller is presented. This procedure is based on a proposed junction structure and a elements R or R -field. The junction structure allows interactions only between the state variables and the dissipation field and inputs, between the dissipation field and the co-energy variables, and the output variables are only function of the co-energy variables and the inputs. Simple transfer functions for the controllers using 1-port resistor are designed. However, complex controllers can also be obtained. Moreover, the closed loop system In order to get a physical meaning of the proposed bond graph model, the R -field of this bond graph is changed by 1-ports resistors, transformers and gyrators.

KEYWORDS. Bond graph, transfer function, junction structure, closed loop system

I. INTRODUCTION

Bond graph modelling is largely employed nowadays and new techniques for structural analysis, model reduction as well as a certain number of software packages using bond graph have been developed.

Thus, a bond graph is an abstract representation of a system where a collection of components interact with each other through energy ports and are placed in the system where energy is exchanged.

It is very common to determine the mathematical model of a system formed by a plant and controllers from its bond graph. However, if we have the transfer function or the state space description of a controller how can we obtain a physical system from this information of the controller.

Hence, by solving the problem to determine a bond graph model from a state space description, an implementation model with physical meaning can be obtained.

The bond graph technics are useful and important tools for physical system modelling [2]. They are based on power representation and enables the description of

the system through energy storage and dissipative elements [3, 4].

The contribution of this paper is to propose a Bond Graph model with a predefined Integral causality assignment (BGI) from the transfer function of the controller. This problem has been solved in [5] where a special form of the state matrix is used. This special form is not required in this paper. The basic information to use the proposed methodology is to know the characteristics of the transfer function.

In [5] an original methodology to represent transfer function equations by bond graph models based on the alpha-beta expansion is proposed.

In [6] describes an approach to the design of interaction controllers and contrasts this with an approach to servo design. Here, a bond graph representation of an impedance controlled manipulator is proposed.

In [7] the backstepping in the physical domain is proposed as a means of exploring controller's intrinsic capability to alter the behavior of a physical system so that it emulates the behavior of another physical system.

Also, some papers are been published by using the state feedback, a procedure to determine a bond graph by state estimated feedback for LTI systems is described in [8]. The use of the bond graph representation by introducing the approach of model-based observer control is described in [10].

The tackled problem is to find a bond graph model from the transfer function of the controller. Therefore, a procedure to get the junction structure and the bond graph model in a integral causality assignment from the transfer function is presented. Bond graph with R -field for complex controllers can be obtained. Thus, this bond graph is a physical model and is useful for implementation.

Also, from the proposed junction structure, a bond graph in a predefined derivative causality assignment (BGD) and its steady state of the system can be obtained [9].

Section II describes the basic elements the modelling in bond graph. In section III, a junction structure of a bond graph in an integral causality assignment

*gilmichga@yahoo.com.mx

†sallyrodam@hotmail.com

Then, a state variable representation is,

$$\dot{x}_{cp}(t) = A_{cp}x_{cp}(t) + B_{cp}x_{cp}(t) \quad (14)$$

$$y(t) = C_{cp}x_{cp}(t) + D_{cp}x_{cp}(t) \quad (15)$$

where

$$A_{cp} = (S_{11}^{cp} + S_{12}^{cp}M^{cp}S_{21}^{cp})F^{cp} \quad (16)$$

$$B_{cp} = S_{13}^{cp} + S_{12}^{cp}M^{cp}S_{23}^{cp} \quad (17)$$

$$C_{cp} = (S_{31}^{cp} + S_{32}^{cp}M^{cp}S_{21}^{cp})F^{cp} \quad (18)$$

$$D_{cp} = S_{33}^{cp} + S_{32}^{cp}M^{cp}S_{23}^{cp} \quad (19)$$

being

$$\dot{x}_{cp}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ \dot{x}_p(t) \end{bmatrix}; z_{cp}(t) = \begin{bmatrix} z_c(t) \\ z_p(t) \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$D_{in}^{cp}(t) = \begin{bmatrix} D_{in}^c(t) \\ D_{in}^p(t) \end{bmatrix}; D_{out}^{cp}(t) = \begin{bmatrix} D_{out}^c(t) \\ D_{out}^p(t) \end{bmatrix}$$

$$M^{cp} = L^{cp}(I_n - S_{22}L^{cp})^{-1} \quad (21)$$

and the relations of the storage and dissipation fields are,

$$z_{cp}(t) = F^{cp}x_{cp}(t) \quad (22)$$

$$D_{out}^{cp}(t) = L^{cp}D_{in}^{cp}(t) \quad (23)$$

with

$$F^{cp} = \text{diag}\{F^c, F^p\} \quad (24)$$

$$L^{cp} = \text{diag}\{L^c, L^p\} \quad (25)$$

Proof. From the second line of (13), we have

$$D_{in}^{cp}(t) = (I - S_{22}L^{cp})^{-1}[S_{21}\dot{x}(t) + S_{23}u(t)] \quad (26)$$

substituting (26) on the first line of (13),

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cp}(t) &= \left[S_{11} + S_{12}L^{cp}(I - S_{22}L^{cp})^{-1}S_{21} \right] \dot{x}(t) \\ &+ \left[S_{13} + S_{12}L^{cp}(I - S_{22}L^{cp})^{-1}S_{23} \right] u(t) \end{aligned} \quad (27)$$

from (16), (17), (21) and (27) we prove (14).

In a similar way, from (26) and the third line of (13),

$$\begin{aligned} y(t) &= \left[S_{31} + S_{32}L^{cp}(I - S_{22}L^{cp})^{-1}S_{21} \right] x_{cp}(t) \\ &+ \left[S_{33} + S_{32}L^{cp}(I - S_{22}L^{cp})^{-1}S_{23} \right] u(t) \end{aligned} \quad (28)$$

from (18), (19), (21) and (28) we prove (15). \blacksquare

Note that the state space of the closed loop system have an uncertainty ξ by the adapted bonds. If we do $\xi = 0$ then we get the closed loop system without the loading effect.

In the next section, a particular junction structure for the controller is proposed. This junction structure allows to design the controller in the physical domain.

IV. A CONTROLLER DESIGN FROM THE JUNCTION STRUCTURE

The bond graph modelling of systems is an important and interesting methodology to get many characteristics of the system, such as controllability and observability properties, knowing of fast and slow dynamics, decoupling and linearization of a class of nonlinear systems [2]. Also, if the realization of the controller (A_p, B_p, C_p, D_p) is given, it can be useful to get the bond graph model in order to apply procedures in the physical domain.

Therefore, for a given controller realization or its transfer function, a junction structure matrix is presented in the following proposition with the objective to get a bond graph of the controller.

Proposition 2. Consider a state space description (A_c, B_c, C_c, D_c) of a LTI MIMO controller with $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$, $D_{in}^c \in \mathbb{R}^{n_c}$, $y_c \in \mathbb{R}^p$ and $u_c \in \mathbb{R}^q$. Suppose that all the storage elements remains in integral causality assignment when a predefined integral causality is realized. If there exists a junction structure for this system is of the form

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ D_{in}^c(t) \\ y_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_c} & S_{13}^c \\ -I_{n_c} & 0 & 0 \\ S_{31}^c & 0 & S_{33}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_c(t) \\ D_{out}^c(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} \quad (29)$$

that verifies (4), invertible such as the relations for the storage and dissipative elements are,

$$z_c(t) = F_c x_c(t) \quad (30)$$

$$D_{out}^c(t) = L_c D_{in}^c(t) \quad (31)$$

all these matrices associated to the same MIMO system, then a bond graph realization corresponds to

$$S_{13}^c = B_c \quad (32)$$

$$S_{31}^c = C_c F_c^{-1} \quad (33)$$

$$S_{33}^c = D_c \quad (34)$$

$$L_c = -A_c F_c^{-1} \quad (35)$$

with

$$L_c = P F_c^1 \quad (36)$$

where P is a poles matrix. Moreover transfer function matrix for the controller given by,

$$K(s) = \begin{bmatrix} K_{11}(s) & K_{12}(s) & \cdots & K_{1q}(s) \\ K_{21}(s) & K_{22}(s) & \cdots & K_{2q}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{p1}(s) & K_{p2}(s) & \cdots & K_{pq}(s) \end{bmatrix} \quad (37)$$

where each transfer function is,

$$K_{ij}(s) = (M_G)_{ij} + \frac{(M_h)_{ij}s + z_{ij}}{s + p_{ij}} \quad \forall i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q \quad (38)$$

where

$$z_i = (M_r)_i + (M_h)_i p_i \quad (39)$$

being

$$C_c = M_r \quad (40)$$

$$D_c = M_G + M_h \quad (41)$$

Proof. Since all the storage elements remains in integral causality, from (11) $E = I_n$ and since $S_{22}^c = 0$ from (12) $M = L_c$. Hence, from (29) and (7) the state matrix of the controller is $A_c = -L_c F_c$, and using (36) $L_c = -P$.

Also, from (8) and (29) B_c reduces to $S_{13} = B_c$ and substituting (29) into (9) we have $C_c = S_{31}^c F_c$, that is C_c since $S_{31} = C_c F_c^{-1}$. Finally, from (10) and using (29), $D_c = S_{33}^c$. The transfer function for the controller is $K(s) = C_c (sI - A_c)^{-1} B_c + D_c$, substituting (36) into (35) with (40) and (41) and assuming $B_c = I$, then (38) with (39) is proved. ■

Since F_c is a diagonal matrix, the elements of F_c^{-1} realize column operation that cancel the capacitive and inertia elements in $L = -A_c F_c^{-1}$, remaining only the resistive elements.

Now, it is shown how to use Proposition 1 or to get (29) for a given system. First, the state dimension or the order of the controller is known by $n_c = \text{Rank}(A_c)$, the number of system inputs and outputs are, $q = \text{Rank}(B_c)$ and $p = \text{Rank}(C_c)$, respectively, and the dimension of the dissipation field is $r_c = n_c$.

After this, the characteristic of each storage element, *i.e.* if the storage element is I or C , is solved by knowledge of the system. Hence, the constitutive relation of the storage field, F_c is gotten.

Suppose that the storage field is,

$$F_c = \text{diag} \left\{ \frac{1}{I_1}, \frac{1}{I_2}, \dots, \frac{1}{I_v}, \frac{1}{C_{v+1}}, \frac{1}{C_{v+2}}, \dots, \frac{1}{C_n} \right\} \quad (42)$$

where v is the number of I -elements in F_c , then the key vectors of the proposed junction structure have the following arrangement,

$$\begin{aligned} x_c(t) &= [p_1(t) \quad \dots \quad p_v(t) \quad q_{v+1}(t) \quad \dots \quad q_n(t)]^T \\ \dot{x}_c(t) &= [e_1(t) \quad \dots \quad e_v(t) \quad f_{v+1}(t) \quad \dots \quad f_n(t)]^T \\ z_c(t) &= [f_1(t) \quad \dots \quad f_v(t) \quad e_{v+1}(t) \quad \dots \quad e_n(t)]^T \end{aligned}$$

$$D_{in}^c(t) = \begin{bmatrix} f_{n+1}(t) \\ f_{n+2}(t) \\ \vdots \\ f_{n+v}(t) \\ e_{n+v+1}(t) \\ e_{n+v+2}(t) \\ \vdots \\ e_{2n}(t) \end{bmatrix}; D_{out}^c(t) = \begin{bmatrix} e_{n+1}(t) \\ e_{n+2}(t) \\ \vdots \\ e_{n+v}(t) \\ f_{n+v+1}(t) \\ f_{n+v+2}(t) \\ \vdots \\ f_{2n}(t) \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$B_c u(t) = \begin{bmatrix} H_1 \cdot e_{2n+1}(t) \\ H_2 \cdot e_{2n+2}(t) \\ \vdots \\ H_v \cdot e_{2n+v}(t) \\ H_{v+1} \cdot f_{2n+v+1}(t) \\ H_{v+2} \cdot f_{2n+v+2}(t) \\ \vdots \\ H_n \cdot f_{3n}(t) \end{bmatrix}$$

where H_1 to H_n are in the set $\{0, 1\}$ or are a gain. The order of the elements in (42) is arbitrary and equation (43) changes its order accordingly.

In order to get a bond graph model of a given system from a state space description (A_c, B_c, C_c, D_c) and knowing the constitutive relation of the storage field of the system, F_c which is given by (42) and the key vectors of this field, $x_c(t)$, $\dot{x}_c(t)$ and $z_c(t)$ are defined by (43). Also, the key vectors, $D_{out}^c(t)$ and $D_{in}^c(t)$ of the dissipation field, R -field, are found and determine the constitutive relation of this field substituting A_c and F_c into (35). The submatrix S_{31}^c is given by $S_{31}^c = C_c F_c^{-1}$ and the system junction structure is then given by (29). Hence, a bond graph model of a given state space realization is shown in the following procedure.

Procedure 1

1. Draw each storage element and associated junction of the key vector, $x_c(t)$, if it is a C -element, it is connected to 0-junction and if it is a I -element, it is connected a 1-junction.
2. In each junction of step (1), connect the sources in according with the submatrix S_{13} . In case that the element of this submatrix is a gain given by R or $1/R$, we have to connect between the source and the junction a gyrator where the gain is the gyrator modulus. In case that the gain is R_1/R_2 connect between the source and the junction a transformer where R_1/R_2 is the transformer modulus.
3. Connect each 0-junction of step (1) to a 1-junction with a bond, the direction of the power of this bond is in the same direction of the C -element. Connect each 1-junction of step (1) to a 0-junction with a bond and its direction is the same of the one of the I -element. These additional junctions correspond to the submatrix $S_{12}^c = I_{n_c}$.
4. The 0-junctions and 1-junctions added in step (3) are connected to the R -field of step 2. As the submatrix $S_{21}^c = -I_{n_c}$ the direction of these bonds are in the opposite direction respect to the C -elements and the I -elements, we determine the submatrix $S_{21}^c = -I_{n_c}$.
5. Each system output is obtained using active bonds and typical block diagram [2, 13].

C. Example 3. Closed Loop System

Consider the following scheme of a DC motor of Fig. 5.

Fig. 5. DC motor scheme with armature and field circuits.

The modelling of the DC motor by considering the field and armature currents is a nonlinear system. In order to obtain a LTI MIMO system the linearized system in the physical domain is shown in Fig. 6 [14].

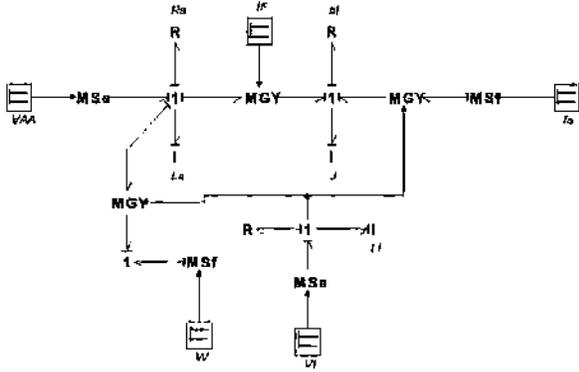


Fig. 6. Linearized bond graph of the DC motor.

The key vectors of the plant is,

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} p_3 \\ p_7 \\ p_9 \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_7 \\ e_9 \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \\ f_9 \end{bmatrix} \\ D_{in} &= \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_{10} \end{bmatrix}; D_{out} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \\ e_{10} \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_8 \end{bmatrix} \\ y &= f_7 \end{aligned} \quad (65)$$

The constitutive relations

$$L = \text{diag}\{R_a, b_f, R_f\} \quad (66)$$

$$F = \text{diag}\left\{\frac{1}{L_a}, \frac{1}{J}, \frac{1}{L_f}\right\} \quad (67)$$

and the junction structure is,

$$\begin{aligned} S_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{I}_f & -\tilde{\omega} \\ \tilde{I}_f & 0 & \tilde{I}_a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ S_{21} &= -S_{12}^T = I_3; S_{22} = S_{23} = S_{32} = S_{33} = 0 \end{aligned} \quad (68)$$

By substituting the following the numerical values of the parameters: $L_a = 0.1H$, $J = 1.5Kg \cdot m^2$, $L_f = 0.02H$, $R_a = 2\Omega$, $R_f = 1.5\Omega$, $b_f = 1.5N \cdot m \cdot s$, $\tilde{I}_f = 0.3A$, $\tilde{I}_a = 0.1A$, $\tilde{\omega} = 0.5Rad/s$, the transfer functions of the plant are

$$W(s) = \begin{bmatrix} P_1(s) & P_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a(s) \\ V_f(s) \end{bmatrix} \quad (69)$$

where

$$P_1(s) = \frac{2}{(s + 19.97)(s + 1.032)}; P_2(s) = \frac{\frac{5}{3}(s + 5)P_1(s)}{(s + 75)} \quad (70)$$

In Fig. 7 a closed loop system based on two controllers is proposed.

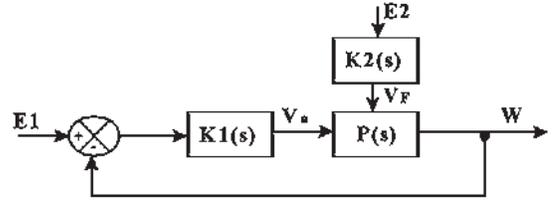


Fig. 7. Closed loop system.

These controllers for this system are proposed according with the following transfer functions,

$$K_1(s) = \frac{s + 1.032}{s + 10}; K_2(s) = \frac{s + 1.032}{s + 40} \quad (71)$$

Note that the objective of the controllers is to eliminate the pole at 1.032, and the controllers design are given on the example 2. Fig. 8 shows the closed loop system.

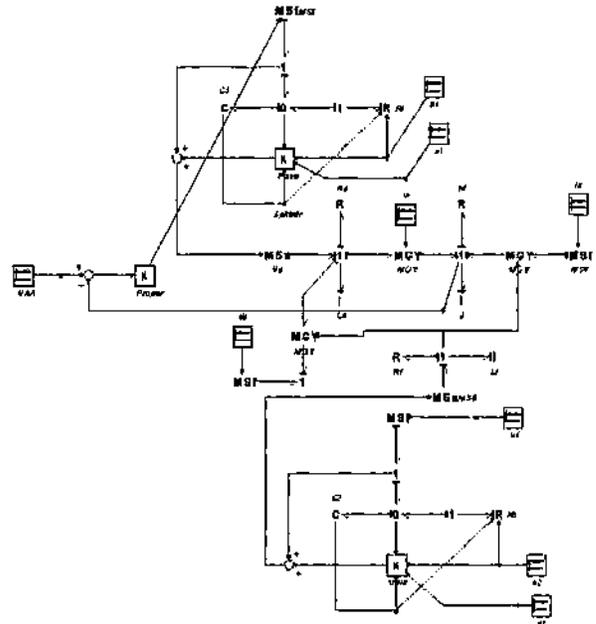


Fig. 8. Bond graph of the closed loop system.

From (13) and (14) the junction structure and the state space realization of the closed loop system can be obtained.

By using 20-SIM, the root locus of the plant without controller for the transfer function $P_1(s)$ is shown in Fig. 9.

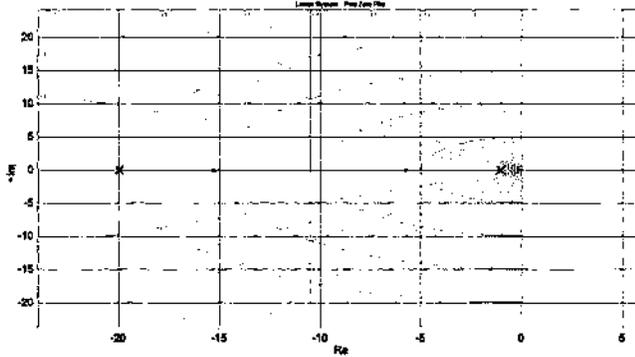


Fig. 9. Root locus of the transfer function $P_1(s)$.

Fig. 10 shows the root locus of the plant with the controller $K_1(s)$ applied to the plant.

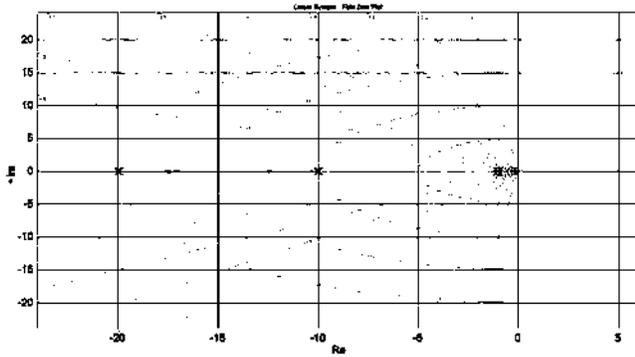


Fig. 10. Root locus of the plant $P_1(s)$ with the controller $K_1(s)$.

Now, for transfer function $P_2(s)$, Fig. 11 the root locus without controller is shown.

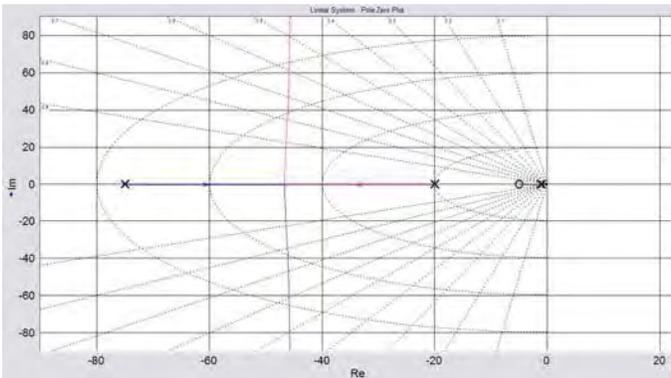


Fig. 11. Root locus of the transfer function $P_2(s)$.

Finally, the controller $K_2(s)$ is applied to $P_2(s)$, the corresponding root locus is illustrated in Fig. 12.

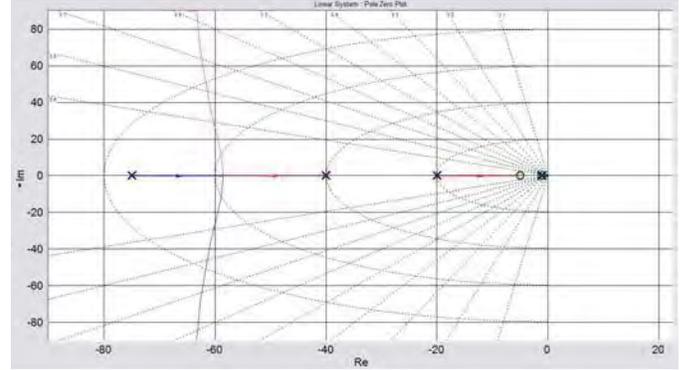


Fig. 12. Root locus of the plant $P_1(s)$ with the controller $K_2(s)$.

Note that this design of the controllers in bond graph to more complex controllers, *i.e.* robust controllers, can be extended.

VI. CONCLUSIONS

A methodology to find a physical description through a bond graph for the design controllers is presented. This methodology is based on proposed junction structures of a bond graph with an integral causality assignment. The proposed junction structure of the BGI can be extended to obtain the junction structure of the Bond Graph in a Derivative causality (BGD) in a direct manner to determine the steady state response.

REFERENCES

- [1] Norman S. Nise, "Control Systems Engineering", Wiley, John & Sons, 2000.
- [2] D. Karnopp, R. C. Rosenberg, "System Dynamics: A Unified Approach", Wiley, John & Sons, 1975.
- [3] P. E. Wellstead, "Physical System Modelling", Academic Press, London, 1979.
- [4] C. Sueur, G. Dauphin-Tanguy, "Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems", J. of the Franklin Inst., vol. 328, No.1 pp. 55-70, 1991.
- [5] A. Kamel, C. Sueur G. Dauphin-Tanguy, "How to Derive a Bond Graph Model from a Transfer Matrix", J. of the Franklin Inst., Vol. 330, No. 5, pp. 787-798, 1993.
- [6] J. E. Cogate, N. Hogan, "Robust control of dynamically systems", J. of the Franklin Inst., Vol. 48, No. 1, pp. 65-88, 1988.

- [7] T.-J. Yeh, “*Backstepping control in the physical domain*”, J. of the Franklin Inst., Vol. 328, pp. 455-479, 2001.
- [8] Gilberto Gonzalez-A, R. Galindo, *Direct Control in Bond Graph by State Estimated Feedback for MIMO LTI Systems*, Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Control Applications, pp. 1183-1188, Glasgow, Scotland, 2002.
- [9] Gilberto Gonzalez-A., R. Galindo, “*Steady-State Values for a Physical with Bond Graph Approach*”, 9th IEEE Inter. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics, Miedzyzdroje, Poland pp.1317-1322, 2003.
- [10] Peter Gawthrop and L. Smith, “*Metamodelling*”, Prentice-Hall, 1996.
- [11] P. C. Breedveld, “*A Bond Graph Algorithm to Determine the Equilibrium State of a System*”, J. Franklin Inst., Vol. 318, pp. 71-75, 1984.
- [12] G. Dauphin-Tanguy, A. Rahmani, C. Sueur, “*Bond graph aided design of controlled systems*”, Simulation Practice and Theory, Inter. Journal of the Federation of European Simulation Societies, March, 1999.
- [13] Forbes T. Brown, “*Engineering System Dynamics*”, Marcel Dekker, Inc., 2001.
- [14] Gilberto Gonzalez-A and R. Galindo, “*A Linearization Procedure for a Class of Nonlinear Systems Based on Bond Graph*”, Proceedings of the International Mediterranean Modeling Multiconference, Marseille, October, 2005.