



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE  
SAN NICOLAS DE HIDALGO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**División de Estudios de Posgrado**



**“DISEÑO Y SIMULACIÓN DE UN SISTEMA DE CONTROL DIGITAL DE  
POSICIÓN PARA SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS BASADO EN UN  
CONTROLADOR PID NO LINEAL”**

**TESIS**

Que para Obtener el Grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

Presenta

**EDGAR WALDEMAR PEREZ MENDOZA**

Asesor

**DR. EDMUNDO BARRERA CARDIEL**

Morelia, Michoacán

Febrero del 2012





**DISEÑO Y SIMULACIÓN DE UN SISTEMA DE CONTROL DIGITAL  
DE POSICIÓN PARA SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS BASADO  
EN UN CONTROLADOR PID NO LINEAL**

Los miembros del Jurado de Examen de Grado aprueban  
la Tesis de Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica de *Edgar Waldemar Pérez Mendoza*

Dr. José Juan Rincón Pasaye  
*Presidente del Jurado*

Dr. Edmundo Barrera Cardiel  
*Director de Tesis*

Dr. Norberto García Barriga  
*Vocal*

Dr. Juan Anzures Marín  
*Vocal*

Dr. Ignacio Juárez Campos  
*Examinador Externo, UMSNH*

Dr. J. Aurelio Medina Ríos  
*Jefe de la División de Estudios de Posgrado  
de la Facultad de Ingeniería Eléctrica*



---

## Dedicatorias

### **A mi madre: Martina.**

Por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos, sus valores, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien, pero más que nada, por su amor.

### **A mi padre: Waldemar.**

Por los ejemplos de perseverancia y constancia que lo caracterizan y que me ha infundado siempre, por el valor mostrado para salir adelante y por su amor.

### **A mis hermanos: Belén, Hugo y Eder.**

Porque siempre he contado con ellos para todo, gracias a la confianza que siempre nos hemos tenido; por el apoyo y amistad.

### **A mi novia: Ana Aishelt**

Por su paciencia, comprensión y apoyo incondicional en todo este proceso que representa el culminar los estudios de maestría y por todo el tiempo que no estuve con ella al realizar los presentes estudios.

## Agradecimientos

### **A mi asesor: Dr. Edmundo Barrera Cardiel**

Por su valiosa asesoría y paciencia, por su apoyo ofrecido en este trabajo, por su tiempo compartido y por impulsar el desarrollo de nuestra formación profesional.

A todos mi compañeros y amigos, por esos momentos inmemoriales en el desarrollo de esta maestría.



---

## RESUMEN

En muchas aplicaciones de control de movimiento, por ejemplo en el control de robots manipuladores, se requiere que el control de movimiento de la herramienta sea realizado con la mayor velocidad posible, para reducir los ciclos de trabajo, y con la mayor exactitud posible, evitando sobreimpulsos en la posición y manteniendo los pares de los actuadores sin oscilaciones bruscas que puedan deteriorar las partes mecánicas. Estos requerimientos se pueden lograr mediante el diseño adecuado de un controlador digital PID no lineal.

Este trabajo de tesis, presenta el diseño y la simulación de un sistema de control digital de posición basado en la propuesta de Slobodan N. Vukosavic. En la tesis se presenta en detalle el desarrollo teórico en el que se basa el diseño del controlador digital PID no lineal. Se analiza primeramente los casos de controladores digitales PI, PD y PID lineales, observando sus limitaciones en la respuesta a cambios grandes de referencia y a perturbaciones de par. Finalmente se presenta el diseño del controlador PID no lineal en el cual la configuración de sus parámetros se basa en la optimización de una función criterio que plantea la respuesta al escalón más rápida posible sin sobreimpulso. La estructura del controlador PID no lineal incluye un mecanismo Anti-Wind-Up.

Todas las propuestas se simulan utilizando las herramientas de Matlab y Simulink. El controlador PID no lineal se diseña para un actuador específico y se prueba su efectividad mediante la simulación del seguimiento de trayectorias predefinidas.





---

## ABSTRACT

In many motion control applications, e.g. in robot manipulator control, it is required that the tool movement control be such that the speed of motion be as high as possible, to reduce the cycle time, and with the best possible accuracy. Also, it is required to avoid position step responses with overshoots and driving torque transients with sudden oscillations that could deteriorate mechanical parts. These requirements can be reached by the design of a digital nonlinear PID position controller.

This thesis presents the design and simulation of a digital position control system based on the proposal of Slobodan N. Vukosavic. The thesis presents in detail the theoretical development of the basis of the digital nonlinear PID controller design. First, the linear-discrete-time PI, PD and PID position controllers are analyzed and their limitations to respond to large step references and to load disturbances are observed. Finally, the design of the nonlinear discrete-time PID position controller is presented. The parameter setting of this controller is based on a criterion function with the aim of achieving the fastest strictly aperiodic response. The structure of the nonlinear PID controller includes an Anti-Wind-Up mechanism.

The controllers are simulated using Matlab and Simulink tools. The nonlinear, discrete-time PID position controller is designed for a specific driver and its effectiveness is tested simulating the tracking of predefined trajectories.



---

## Contenido

|  |       |
|--|-------|
| DEDICATORIA.....   | v     |
| AGRADECIMIENTOS.....   | v     |
| RESUMEN.....   | vii   |
| ABSTRACT.....  | ix    |
| LISTA DE TABLAS.....   | xiii  |
| LISTA DE FIGURAS.....  | xv    |
| LISTA DE ABREVIACIONES.....  | xxv   |
| LISTA DE SÍMBOLOS.....   | xxvii |
| Capítulo 1 INTRODUCCIÓN .....  | 1     |
| 1.1 Revisión del Estado del Arte .....   | 2     |
| 1.2 Objetivos.....   | 7     |
| 1.2.1 Objetivo General.....  | 7     |
| 1.2.2 Objetivos Particulares .....   | 7     |
| 1.3 Metodología.....   | 7     |
| 1.4 Aportaciones .....   | 9     |
| 1.5 Justificación .....  | 9     |
| 1.6 Descripción de Capítulos .....   | 9     |
| Capítulo 2 ESTRUCTURA Y MODELADO DE UN SISTEMA DE CONTROL DE VELOCIDAD.....            | 11    |
| 2.1 Introducción.....  | 11    |
| 2.2 La Función de Transferencia del Subsistema Mecánico .....                          | 18    |
| 2.3 Función de Transferencia del Subsistema de Medición de Velocidad .....             | 21    |
| 2.4 Función de Transferencia al Pulso del Sistema en Lazo Cerrado .....                | 23    |
| 2.5 Polos de Lazo Cerrado y los Efectos de los Ceros de Lazo Cerrado.....              | 29    |
| 2.6 Reubicación de la Ganancia Proporcional .....                                      | 33    |
| 2.7 Cálculo de los Parámetros de Controladores Digitales de Velocidad .....            | 34    |
| 2.7.1 Respuesta Estrictamente No Oscilatoria.....                                      | 35    |
| 2.7.2 Formulación de la Función Criterio.....  | 35    |
| 2.7.3 Cálculo de los Valores Optimizados para las Ganancias Normalizadas .....         | 38    |
| 2.8 Evaluación del Desempeño en Simulación.....  | 43    |
| 2.9 Respuesta a Grandes Perturbaciones y el Fenómeno Wind-Up .....                     | 47    |
| 2.10 Mecanismo Anti-Wind-Up .....  | 50    |
| 2.11 Conclusiones.....   | 54    |
| Capítulo 3 DISEÑO DE UN CONTROLADOR DIGITAL DE POSICIÓN.....                           | 57    |
| 3.1 Introducción.....  | 57    |
| 3.1.1 La Función de Transferencia al Pulso del Objeto de Control.....                  | 58    |
| 3.2 Estructura de los Controladores de Posición .....                                  | 62    |
| 3.2.1 Controladores de Posición con Acción Derivativa.....                             | 63    |
| 3.2.2 Reubicación de la Acción Derivativa en la Trayectoria de Retroalimentación ..... | 64    |
| 3.3 Controlador de Posición PD Discreto.....   | 65    |
| 3.4 Cálculo de Parámetros Optimizados.....   | 73    |
| 3.5 Simulación del Sistema con un Controlador PD .....                                 | 77    |

---

|   |   |     |
|---|---|-----|
| 3.6   | Operación de un Controlador de Posición PD Ante Grandes Perturbaciones .....  | 79  |
| 3.7   | Control de Posición No Lineal .....   | 81  |
| 3.7.1   | Dependencia del Límite de Velocidad Sobre la Trayectoria Restante .....   | 81  |
| 3.7.2   | Mejorando el Controlador PD .....   | 82  |
| 3.7.3   | El Error del Controlador del Lazo Menor.....  | 86  |
| 3.8   | Simulación del Sistema con un Controlador PD No Lineal. ....  | 88  |
| 3.9   | El Controlador de Posición con Acción Integral .....  | 91  |
| 3.10  | La Operación en Modo Lineal y las Funciones de Transferencia al Pulso .....   | 94  |
| 3.11  | Cálculo de Parámetros de Controladores Digitales de Posición PID. ....  | 98  |
| 3.12  | La Respuesta al Escalón y el Ancho de Banda de los Controles PD y PID .....   | 102 |
| 3.13  | Simulación de la Respuesta a una Entrada Escalón y una Carga Escalón.....   | 104 |
| 3.14  | Respuesta a un Escalón Grande con un Control de Posición PID Lineal.....  | 108 |
| 3.15  | Controlador de Posición PID Digital No Lineal.....  | 112 |
| 3.15.1  | La Velocidad Máxima en el Modo de Operación Lineal .....  | 115 |
| 3.15.2  | Mejorando el Controlador PID Digital con Acción No Lineal.....  | 117 |
| 3.15.3  | Evaluación del Controlador Digital PID No Lineal .....  | 122 |
| 3.16  | Conclusiones.....   | 127 |
| Capítulo 4 SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS DEL SISTEMA DE CONTROL DE POSICIÓN CON CONTROL PID NO LINEAL ..... |   | 129 |
| 4.1   | Introducción.....   | 129 |
| 4.2   | Modelo del Actuador de Par del Motor de CD.....   | 130 |
| 4.3   | Simulación de la Aplicación del Controlador PID No Lineal al Seguimiento de Trayectorias.....                             | 138 |
| 4.3.1   | Simulación del Controlador Digital PID No Lineal con una Referencia de Posición Escalón Unitario .....                    | 139 |
| 4.3.2   | Simulación del Controlador Digital PID No Lineal con una Referencia de Posición Escalón Grande.....                       | 143 |
| 4.3.3   | Simulación del Controlador Digital PID No Lineal con una Referencia de Posición Escalón Grande y un Par de Carga .....    | 146 |
| 4.3.4   | Simulación del Controlador Digital PID No Lineal con una Trayectoria como Referencia de Posición sin Par de Carga.....    | 149 |
| 4.3.5   | Simulación del Controlador Digital PID No Lineal con una Trayectoria como Referencia de Posición con un Par de Carga..... | 151 |
| 4.4   | Errores de Modelado.....  | 154 |
| 4.4.1   | Simulación de Errores de Modelado en la Inercia. ....   | 155 |
| 4.4.2   | Errores de Modelado del Coeficiente de Fricción .....   | 158 |
| 4.5   | Errores del Controlador por Ruido de Medición .....   | 159 |
| 4.6   | Conclusiones.....   | 161 |
| Capítulo 5 CONCLUSIONES .....   |   | 163 |
| 5.1   | Conclusiones.....   | 164 |
| 5.2   | Trabajos Futuros .....  | 165 |
| 6 REFERENCIAS.....  |   | 167 |
| 7 APENDICE.....   |   | 171 |

---

---

---



---

## LISTA DE TABLAS

|           |  |     |
|-----------|--|-----|
| Tabla 2.1 | Secuencia de comandos de Matlab para calcular los polos y ceros de lazo cerrado y obtener la respuesta al escalón de la función de transferencia $WSS(z)$ . .....                | 30  |
| Tabla 2.2 | Secuencia de comando de Matlab usada para obtener la respuesta del sistema con dos polos reales y sin ceros. ....  | 32  |
| Tabla 3.1 | Secuencia de comandos de Matlab usados para obtener la respuesta al escalón y la gráfica de Bode para los sistemas de control de posición con acciones de control PD y PID. .... | 102 |
| Tabla 4.1 | Especificación de parámetros del motor GM9234S003.....   | 138 |





---

## LISTA DE FIGURAS

|             |   |    |
|-------------|---|----|
| Figura 2.1  | El flujo de señales entre el controlador de movimiento digital y el resto del sistema de control de velocidad.....  | 13 |
| Figura 2.2  | La señal de tiempo continuo $y(t)$ es convertida en un tren de pulsos. ....   | 14 |
| Figura 2.3  | Diagrama de bloques de un sistema de control de velocidad.....  | 16 |
| Figura 2.4  | Flujo de señales dentro de un Controlador de Velocidad.....   | 16 |
| Figura 2.5  | Diagrama de bloques del sistema de control de velocidad con algoritmo de implementación digital. El flujo de señales dentro de un microcontrolador o DSP se encuentra dentro de la línea discontinua. ....            | 19 |
| Figura 2.6  | El cambio de velocidad entre dos instantes de muestreo. Cuando el par de carga permanece constante durante el intervalo $[(n - 1)T, nT]$ , el cambio de velocidad es lineal. ....                                     | 23 |
| Figura 2.7  | Control de velocidad con actuador de par ideal, donde $K_M = 1$ . El control de velocidad trata con señales de tiempo discreto y el subsistema mecánico es descrito en términos de variables de dominio continuo..... | 24 |
| Figura 2.8  | Diagrama de bloques de un sistema de control de velocidad, comprendido por señales de tiempo discreto .....   | 25 |
| Figura 2.9  | Implementación de control de velocidad con acción proporcional e integral. La salida $INT_{(n)}$ del integrador de tiempo discreto representa la suma de las muestras anteriores. ....                                | 26 |
| Figura 2.10 | El control de velocidad con acciones de control proporcional e integral implementado en la forma incremental. Los incrementos de par $T_n^*$ son acumulados en el integrador discreto de la derecha. ....             | 27 |
| Figura 2.11 | La respuesta de la función de transferencia del sistema de lazo cerrado $W_{SS}(z)$ expresada en la Ec. (2.21) para los parámetros de retroalimentación $p = 0.15$ e $i = 0.01$ .....                                 | 31 |
| Figura 2.12 | Respuesta al escalón obtenida de la función de transferencia de lazo cerrado con $num(z) = 2iz^2$ y con el polinomio característico $f(z)$ expresado en la Ec. (2.22). ....   | 32 |

---

---

|             |  |    |
|-------------|--|----|
| Figura 2.13 | Control de velocidad en tiempo discreto con la ganancia proporcional reubicada en la trayectoria de retroalimentación.....   | 33 |
| Figura 2.14 | Respuesta estrictamente no oscilatoria. La superficie sombreada representa a la integral del error de velocidad.....   | 36 |
| Figura 2.15 | Máximo de la función $Q_1$ de la Ec.(2.42).....  | 41 |
| Figura 2.16 | Control de velocidad digital, con los coeficientes escalares $K_{FB}$ y $K_M$ .....  | 43 |
| Figura 2.17 | Modelo de Simulink de un sistema de control de velocidad, con un control PI digital. La ganancia proporcional es reubicada en la trayectoria de retroalimentación. ....  | 44 |
| Figura 2.18 | Respuesta al escalón de entrada y al escalón del par de carga de un controlador de velocidad de tiempo discreto.....   | 45 |
| Figura 2.19 | Respuesta del sistema al tener valores distintos en las ganancias.....   | 46 |
| Figura 2.20 | Comportamiento del sistema ante un incremento del 100% en las ganancias $K_p$ y $K_I$ .....  | 46 |
| Figura 2.21 | Sistema de control de velocidad con capacidad de par limitada. ....  | 47 |
| Figura 2.22 | Modelo de Simulink de un sistema de control de velocidad, con un limitador del par. ....   | 48 |
| Figura 2.23 | Respuesta de un escalón de entrada $\Omega^* = 1500 \text{ rad}$ , el par entra en saturación, aunque los polos de lazo cerrado son para una respuesta estrictamente no oscilatoria, el elemento no lineal como el limitador de par da lugar a oscilaciones. ....                          | 48 |
| Figura 2.24 | El fenómeno <i>wind-up</i> ilustrado, el cambio en la salida del error integrado en respuesta a grandes perturbaciones de entrada que va muy por encima de $T_{MAX}$ . Mientras el error de integración decrece, la velocidad del eje del motor sobrepasa la referencia de velocidad. .... | 49 |
| Figura 2.25 | Forma incremental de un control de velocidad digital con acción proporcional reubicada en la trayectoria de retroalimentación, que elimina el fenómeno <i>wind-up</i> . ....   | 52 |
| Figura 2.26 | Simulación del modelo del control de velocidad de la Figura 2.24, con la acción proporcional en la trayectoria de retroalimentación. La implementación incremental comprende la estructura <i>Anti Wind Up</i> .....   | 52 |

---

---

|             |  |    |
|-------------|--|----|
| Figura 2.27 | Respuesta de un escalón de entrada $\Omega^* = 1500 \text{ rad}$ , obtenida con un control de velocidad de tiempo discreto PI con una implementación incremental y con una estructura de Anti Wind. Los trazos son obtenidos del modelo de Simulink de la Figura 2.25, y representan la referencia de par, la referencia de velocidad, y la velocidad de retroalimentación. .... | 53 |
| Figura 3.1  | Actuador de par en el sistema de control .....   | 57 |
| Figura 3.2  | Diagrama de bloques simplificado de un control de posición en el dominio $s$ .....   | 63 |
| Figura 3.3  | Control proporcional derivativo con la acción de control derivativa ubicada en la trayectoria de retroalimentación.....  | 64 |
| Figura 3.4  | Sistema de control de posición con controlador de posición de tiempo discreto. La acción derivativa se encuentra en la trayectoria de retroalimentación.....   | 66 |
| Figura 3.5  | Diagrama de bloques simplificado del sistema de control de posición, con un control de tiempo discreto PD.....   | 67 |
| Figura 3.6  | Modelo de un sistema de control de posición con un controlador de tiempo discreto PD. El bloque designado como <i>Quantizer</i> , permite configurar la resolución del sensor del eje. ....  | 70 |
| Figura 3.7  | Trazo de simulación del par y posición del motor obtenido con un control de posición PD discreto dado en la Figura 3.5, con un periodo de muestreo $T = 1 \text{ ms}$ . ....   | 71 |
| Figura 3.8  | Trazo de simulación del par y posición del motor obtenido con un control de posición PD discreto dado en la Figura 3.5, con un periodo de muestreo $T = 3 \text{ ms}$ . ....   | 72 |
| Figura 3.9  | Trazo de simulación del par y posición del motor obtenido con un control de posición PD discreto dado en la Figura 3.5, con un periodo de muestreo $T = 10 \text{ ms}$ . ....  | 72 |
| Figura 3.10 | Respuesta al escalón estrictamente no oscilatoria de la posición de salida. El área sombreada corresponde al erro de velocidad integral, entre más pequeña el área sombreada, se obtiene un respuesta más rápida al escalón. ....  | 73 |

---

---

|             |   |    |
|-------------|---|----|
| Figura 3.11 | Respuesta transitoria del par del motor y la posición para pequeños cambios de escalón en la posición de referencia. La amplitud del escalón de entrada es pequeña y el par del motor no alcanza el límite del sistema. Las ganancias de retroalimentación del control PD son sintonizadas para obtener una respuesta al escalón de tiempo mínimo no oscilatoria de la posición de salida. .... | 77 |
| Figura 3.12 | Respuesta transitoria del par del motor, velocidad del eje y posición, para el cambio del par de carga. ....  | 78 |
| Figura 3.13 | Operación del control de posición PD con grandes perturbaciones de entrada. El par del motor alcanza el límite del sistema, llevando al sistema a un modo de operación no lineal que resulta en oscilaciones pobremente amortiguadas. La amplitud de la oscilación es inversamente proporcional a su frecuencia. ....   | 79 |
| Figura 3.14 | Funcionalidad de la trayectoria dependiente del límite de velocidad. Los puntos de operación permitidos están contenidos dentro del área sombreada. ....  | 84 |
| Figura 3.15 | Control de posición de tiempo discreto proporcional derivativo, donde el bloque proporcional es remplazado por una función no lineal $fx(\Delta\theta)$ . ....  | 86 |
| Figura 3.16 | Sistema de control de posición PD, incluido el bloque de la función $fx^*(\Delta\theta)$ dada en la Ec. (3.52). El bloque no lineal Y1 reemplaza la ganancia proporcional $K_p$ . ....  | 88 |
| Figura 3.17 | Subsistema de Simulink implementando la función no lineal $fx^*(\Delta\theta)$ , como se define en la Ec. (3.52). Este subsistema reemplaza al bloque de la ganancia proporcional $K_p$ del modelo dado en la Figura 3.5. ....  | 89 |
| Figura 3.18 | Respuesta a un escalón grande de un control de posición PD en tiempo discreto con trayectoria dependiente del límite de velocidad. ....   | 90 |
| Figura 3.19 | Respuesta transitoria al par de carga del modelo de Simulink de la Figura 3.16. Donde se observa el error de posición causado por un par de carga constante. ....   | 90 |
| Figura 3.20 | Control de posición en tiempo discreto, lineal con acciones de control integral, proporcional y derivativo. La acción integral se encuentra en la   |    |

---

---

|             |  |     |
|-------------|--|-----|
|             | trayectoria directa y procesa el error de seguimiento $\Delta\theta$ . Las acciones de control proporcional y derivativo están ubicadas en la trayectoria de retroalimentación.....  | 92  |
| Figura 3.21 | Diagrama de bloques simplificado de un control de posición operando en modo lineal. La función transferencia pulso $W_I(z)$ , $W_{PC}(z)$ y $W_D(z)$ representan las acciones proporcional, integral y derivativo respectivamente..... | 95  |
| Figura 3.22 | Respuesta al escalón de controladores de posición PD y PID, en ambos casos, la configuración de parámetros se eligió para tener una respuesta rápida y estrictamente no oscilatoria.....   | 103 |
| Figura 3.23 | La amplitud característica $W_{SS}(j\omega)$ del control de posición PD y PID. Se asume que el periodo de muestreo es $T = 1ms$ . El nivel de 0.707 es alcanzado para $f_{BW^{PID}} = 25.5Hz$ y $f_{BW^{PD}} = 41.4Hz$ .....           | 103 |
| Figura 3.24 | Modelo de Simulink de un control de posición PID lineal en tiempo discreto.....  | 105 |
| Figura 3.25 | Respuesta transitoria de la posición de salida y el par del motor de un sistema de control de posición con control PID.....  | 106 |
| Figura 3.26 | Respuesta transitoria de la posición de salida y par de carga de un sistema de control de posición PD. La entrada y el disturbio de carga son los mismos que los de la Figura 3.25.....  | 107 |
| Figura 3.27 | El impacto de la resolución limitada en la respuesta transitoria del sistema de control PID. Las señales de entrada y de disturbio de carga son las mismas que las de la Figura 3.25.....  | 107 |
| Figura 3.28 | Respuesta a grandes impulsos de un sistema de control de posición en tiempo discreto con acciones de control PID. El par del motor alcanza el límite del sistema y entra en un modo de operación no lineal.....                        | 108 |
| Figura 3.29 | Con el incremento de la amplitud de la posición de referencia, se exhiben oscilaciones sostenidas. El sistema opera de manera no lineal. El par cambia entre $+T_{MAX}$ y $-T_{MAX}$ .....   | 109 |
| Figura 3.30 | Un mayor incremento en la amplitud en el disturbio de entrada lleva al sistema a la inestabilidad.....   | 110 |

---

---

|             |  |     |
|-------------|--|-----|
| Figura 3.31 | La posición de referencia es igual a la de la figura anterior, pero esta con un perfil en forma de rampa .....   | 111 |
| Figura 3.32 | Limitador de la salida del integrador con el fin de prevenir el fenómeno <i>wind-up</i> .....  | 118 |
| Figura 3.33 | Región de operación permitida en el plano de fase, con el fin de evitar el sobreimpulso causado por el insuficiente par de frenado, la velocidad interna de referencia, debe de permanecer por debajo del límite de la raíz cuadrada $fp$ .....  | 118 |
| Figura 3.34 | Integrador saturable de tiempo discreto, introducido en la Figura 3.32, que contiene el límite de velocidad funcional $fp( \Delta\theta )$ y restringe el movimiento del sistema a la región permitida, como es definido en la Figura 3.33. ....   | 119 |
| Figura 3.35 | Control de posición PID en tiempo discreto con restricción de velocidad no lineal. El bloque <i>INT</i> en la Figura 3.20, es reemplazado por el integrador saturable de tiempo discreto, detallado en la Figura 3.34.....   | 120 |
| Figura 3.36 | Modelo de Simulink de un sistema de control de posición con un control PID no lineal. El integrador saturable proporciona $y_1$ , mostrado en la Figura 3.37. ....   | 122 |
| Figura 3.37 | Implementación del integrador saturable, diseñado en la Figura 3.34. El límite de velocidad $fp(\Delta\theta)$ es implementado como sugiere la Ec. (3.52), la señal $x_2$ es escalada con $K_S$ y limitada de acuerdo con la Ec. (3.87). La salida del subsistema es la velocidad interna de referencia $y_1$ .....  | 123 |
| Figura 3.38 | Posición de salida y par del motor obtenido con una escalón de referencia grande, llevando al sistema a un modo de operación no lineal, haciendo que tanto el par y la velocidad alcancen el límite del sistema.....   | 124 |
| Figura 3.39 | Simulación llevada a cabo sin la compensación del error de velocidad del control interno de velocidad. En referencia a la Figura 3.37, el bloque <i>S2</i> y el <i>LIMITER</i> son removidos, la señal $x_2$ es alimentada directamente de la salida del bloque $K_S$ a la entrada del bloque <i>MIN</i> , el coeficiente de escalamiento es establecido como $K_S = 1$ . .... | 126 |

---

---

|             |  |     |
|-------------|--|-----|
| Figura 4.1  | Modelado del motor de CD para la implementación del controlador de corriente.....  | 130 |
| Figura 4.2  | Diagrama de bloques de la implementación del controlador de corriente ...  | 132 |
| Figura 4.3  | Transitorio de par de referencia $T^*$ y par electromagnético $T^{em}$ en la entrada y salida respectivamente del controlador de corriente. ....   | 135 |
| Figura 4.4  | Transitorio de velocidad del sistema de control de posición PID no lineal con control de corriente.....  | 136 |
| Figura 4.5  | Transitorio de la posición de referencia posición de salida y posición.....  | 136 |
| Figura 4.6  | Transitorio de la corriente de armadura .....  | 137 |
| Figura 4.7  | Respuesta del voltaje de armadura ante cambios de la referencia de par $T^*$ .....   | 137 |
| Figura 4.8  | Diagrama de bloques de Control PID con Integrador saturable y control de corriente.....  | 139 |
| Figura 4.9  | Respuesta al escalón unitario del controlador digital de posición con controlador PID no lineal y controlador interno de corriente .....   | 140 |
| Figura 4.10 | Transitorio de la referencia del par, derivado de la respuesta al escalón unitario del sistema de control digital PID no lineal. ....  | 140 |
| Figura 4.11 | Transitorio del la Velocidad de salida, derivado de la respuesta al escalón unitario del sistema de control digital PID no lineal. ....  | 141 |
| Figura 4.12 | Traza de la corriente de armadura, obtenida del lazo de control interno de corriente, derivado de la respuesta al escalón unitario del sistema de control digital PID no lineal. ....        | 142 |
| Figura 4.13 | Traza de voltaje de armadura, obtenida del lazo de control interno de corriente, derivado de la respuesta al escalón unitario del sistema de control digital PID no lineal. ....             | 142 |
| Figura 4.14 | Transitorio de la posición de salida del controlador digital de posición con controlador PID no lineal y controlador interno de corriente.....   | 143 |
| Figura 4.15 | Respuesta transitoria de la referencia de par del controlador digital de posición con controlador PID no lineal y controlador interno de corriente, ante un gran escalón de referencia. .... | 144 |

---

---

|             |  |     |
|-------------|--|-----|
| Figura 4.16 | Respuesta transitoria de la velocidad del motor con un controlador digital de posición con controlador PID no lineal y controlador interno de corriente, ante un gran escalón de referencia. ....        | 144 |
| Figura 4.17 | Transitorio de la corriente de armadura, obtenido del controlador de corriente interno del sistema de control digital de posición.....   | 145 |
| Figura 4.18 | Voltaje de armadura del motor, los cambios en el valor del voltaje es directamente dependiente de los cambios del valor de la corriente de salida del controlador interno de corriente del sistema. .... | 146 |
| Figura 4.19 | Transitorio de la posición de salida del controlador digital de posición con controlador PID no lineal y controlador interno de corriente, con un par de carga aplicado.....                             | 146 |
| Figura 4.20 | Transitorio de la referencia de par para el par de carga aplicado.....   | 147 |
| Figura 4.21 | Transitorio de la velocidad del sistema durante el intervalo de aplicación del par de carga. ....  | 148 |
| Figura 4.22 | Transitorio de Corriente de armadura ante la presencia del par de carga. ...   | 148 |
| Figura 4.23 | Transitorio del voltaje de armadura ante la presencia del par de carga. ....   | 149 |
| Figura 4.24 | Respuesta transitoria del la posición de salida con respecto a la referencia de posición.....  | 149 |
| Figura 4.25 | Respuesta transitoria del par de referencia del motor .....  | 150 |
| Figura 4.26 | Respuesta transitoria de la velocidad del motor.....   | 150 |
| Figura 4.27 | Respuesta transitoria de la de corriente de armadura del motor .....   | 151 |
| Figura 4.28 | Respuesta transitoria del voltaje de armadura del motor .....  | 151 |
| Figura 4.29 | Transitorio de la posición de salida del sistema con la referencia de la trayectoria.....  | 152 |
| Figura 4.30 | Transitorio de la referencia de par con el par de carga aplicado.....  | 152 |
| Figura 4.31 | Transitorio de la velocidad de armadura del sistema con el par de carga aplicado. ....   | 153 |
| Figura 4.32 | Transitorio de la corriente de armadura del sistema con el par de carga aplicada.....  | 153 |
| Figura 4.33 | Transitorio del voltaje de armadura del sistema con el par de carga aplicado. ....   | 154 |

---



---

|             |   |     |
|-------------|---|-----|
| Figura 4.34 | Posición del motor para un error de modelado de la inercia del 10%.....   | 155 |
| Figura 4.35 | Par del motor para un error de modelado de la inercia del 10%. .....  | 156 |
| Figura 4.36 | Referencia de posición y posición del motor, para un error de modelado considerando una inercia 70% menor. .... | 157 |
| Figura 4.37 | Par electromagnético del motor, para un error de modelado considerando una inercia 70% menor.....               | 157 |
| Figura 4.38 | Posición del motor considerando un error de modelado con una inercia 70% mayor. ....                            | 158 |
| Figura 4.39 | Par de motor considerando un error de modelado con una inercia 70% mayor.....                                   | 158 |
| Figura 4.40 | Respuesta al escalón unitario del sistema de control PID, considerando la fricción. ....                        | 159 |
| Figura 4.41 | Respuesta del par del motor ante la presencia de la fricción.....   | 159 |
| Figura 4.42 | Efectos del ruido en el control de posición del motor.....  | 160 |
| Figura 4.43 | Efectos del ruido en el control del par del motor. ....   | 161 |



---

## LISTA DE ABREVIACIONES

|         |  |
|---------|--|
| DSP     | Procesador digital de señales                            |
| CD      | Corriente directa  |
| A/D     | Convertidor analógico digital                            |
| PWM     | Modulador de ancho de pulso                              |
| $\mu C$ | Microcontrolador   |
| AWU     | Anti Wind Up.  |
| DBR     | Resistencia de Frenado dinamico por sus siglas en ingles |



---

## LISTA DE SÍMBOLOS

|  |  |
|--|--|
| $t$                                      | Tiempo.  |
| $t_R$                                    | Tiempo de subida.  |
| $t_{PD}$                                 | Tiempo de subida para el control PD.   |
| $t_{PID}$                                | Tiempo de subida para el control PID.  |
| $y(t)$                                   | Señal en el dominio continuo.  |
| $Y_n$                                    | Señal en el dominio discreto.  |
| $nT$                                     | Instante de tiempo discreto.   |
| $C_{S/H}$                                | Capacitor retenedor de muestras digitales.                                       |
| $f_s$                                    | Frecuencia de muestreo.  |
| $f_{BW^{PD}}$                            | Frecuencia de ancho de banda de control PD.                                      |
| $f_{BW^{PID}}$                           | Frecuencia de ancho de banda de control PID.                                     |
| $T$                                      | Periodo de muestreo (te mayúscula con estilo de fuente cursiva).                 |
| $f(z)$                                   | Polinomio característico.  |
| $p$                                      | Ganancia proporcional normalizada  |
| $p_{OPT}$                                | Ganancia proporcional normalizada optimizada.                                    |
| $i$                                      | Ganancia integral normalizada.   |
| $i_{OPT}$                                | Ganancia integral normalizada optimizada.  |
| $d$                                      | Ganancia derivativa normalizada.   |
| $d_{OPT}$                                | Ganancia derivativa normalizada optimizada.                                      |
| $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ | Raíces del polinomio característico de la función transferencia de lazo cerrado. |
| $z_1, z_2$                               | Ceros la función transferencia de lazo cerrado.                                  |
| $f_{max}$                                | Límite de ancho de banda   |
| LSB                                      | Bit menos significativo.   |
| $U\Delta$                                | Resolución de convertidor analógico digital.                                     |
| $kHz$                                    | Frecuencia en Kilo Hertz   |
| $\omega_{DIG}^*$                         | Referencia de velocidad angular en dominio discreto.                             |
| $\omega_{(n)}^*$                         | Muestra de referencia de velocidad en dominio discreto.                          |

---

|  |   |
|--|---|
| $\omega^*(z)$                            | Referencia de velocidad en dominio discreto.  |
| $\omega_{(n)}$                           | Muestra de velocidad en dominio discreto.   |
| $\omega(z), \omega_{DIG}$                | Velocidad en dominio discreto.  |
| $\omega(t)$                              | Velocidad actual en dominio continuo.   |
| $\omega_{DIG}^{FB}$                      | Velocidad de retroalimentación en dominio discreto.   |
| $\omega_{(n)}^{FB}$                      | Muestra de velocidad de retroalimentación en dominio discreto.                                      |
| $\omega^{FB}(z)$                         | Velocidad de retroalimentación en dominio discreto.   |
| $\Delta\omega_{(n)}, \Delta\omega_{DIG}$ | Muestra de error de velocidad en dominio discreto.  |
| $\Delta\omega(z)$                        | Error de velocidad angular en dominio discreto.   |
| $\pm\omega_{MAX}$                        | Limite de velocidad angular.  |
| $F_{B(nT)}$                              | Muestra de velocidad de retroalimentación discreta del flujo de señales de un control de velocidad. |
| $T_{(n)}^*$                              | Muestra de referencia de par (te mayúscula con estilo de fuente normal).                            |
| $\Delta T_{(n)}^*$                       | Error de referencia de par.   |
| $T^*(z)$                                 | Referencia de par en dominio discreto.  |
| $T^*(t)$                                 | Referencia de par en dominio continuo   |
| $T_{ref}$                                | Par de referencia en dominio continuo.  |
| $T^{em}(t)$                              | Par de electromagnetico en dominio continuo.  |
| $\pm T_{MAX}$                            | Límite de par.  |
| $T^L(t)$                                 | Par de carga en dominio continuo.   |
| $T_{DIG}^L$                              | Par de carga en dominio discreto.   |
| $T_{(n)}^L$                              | Muestra de par de carga.  |
| $T_{LOAD}$                               | Par de carga.   |
| $G_i^F, G_i^\omega, G_i^T$               | Ganancias de retroalimentación.   |
| $\mu s$                                  | Microsegundo.   |
| $ms$                                     | Milisegundo.  |
| $W_{SC}(z)$                              | Controlador de velocidad o posición   |
| $W_P(z)$                                 | Función transferencia de la planta en dominio discreto.   |

---

---

|                           |   |
|---------------------------|---|
| $W_P(s)$                  | Función transferencia de la planta en dominio continuo.                                   |
| $W_{SE}(z)$               | Función transferencia del sistema de medición de velocidad.                               |
| $W_{SS}(z)$               | Función transferencia de lazo cerrado en tiempo discreto.                                 |
| $W_{SS}(s)$               | Función transferencia de lazo cerrado en tiempo continuo.                                 |
| $W_{LS}(z)$               | Función transferencia del sistema con perturbación de carga en dominio discreto.          |
| $W_{PL}(z)$               | Función transferencia de la planta con perturbación de carga en dominio discreto.         |
| $W_{KD}(z)$               | Función transferencia de la ganancia derivativa.  |
| $W_{KP}, W_{PC}(z)$       | Función transferencia de la ganancia proporcional.  |
| $W_I(z)$                  | Función transferencia de la ganancia integral.  |
| $W_{(KIN)}(\omega)$       | Energía cinética del sistema.   |
| $W_{(DBR)}(\Delta\theta)$ | Energía cinética requerida para el frenado del motor.                                     |
| $K_M$                     | Ganancia del actuador de par del motor.   |
| $K_{FB}$                  | Ganancia de retroalimentación.  |
| $J$                       | Inercia del motor de CD.  |
| $\omega_M(\Delta\theta)$  | Máxima velocidad permitida.   |
| $fp(\Delta\theta)$        | Máxima velocidad permitida en función del error de posición.                              |
| $fx(\Delta\theta)$        | Límite de velocidad funcional.  |
| $fp^*(\Delta\theta)$      | Máxima velocidad permitida en función del error de posición, con corrección de velocidad. |
| $fx^*(\Delta\theta)$      | Límite de velocidad funcional, con corrección de velocidad.                               |
| $\theta_{(n)}$            | Muestra de posición angular en dominio discreto.  |
| $\theta(z)$               | Posición angular del motor en tiempo discreto.  |
| $\theta_{DIG}^{FB}$       | Muestras de posición de retroalimentación en dominio discreto.                            |
| $\Delta\theta$            | Error de posición.  |
| $K_P$                     | Ganancia proporcional.  |
| $K_{P_{OPT}}$             | Ganancia proporcional optimizada.   |
| $K_I$                     | Ganancia integral.  |

---

---

|               |   |
|---------------|---|
| $K_{I_{OPT}}$ | Ganancia integral optimizada.   |
| $K_D$         | Ganancia derivativa.  |
| $K_{D_{OPT}}$ | Ganancia derivativa optimizada.                                       |
| $Q$           | Función criterio para para un respuesta estrictamente no oscilatoria. |
| $Q_1$         | Inverso de la función criterio.                                       |
| $Q_{(n)}$     | Muestras de la función criterio                                       |
| $Q(z)$        | Función criterio en dominio discreto.                                 |
| $i_a$         | Corriente de arandura del motor.                                      |
| $i_a^r$       | Corriente de referencia.  |
| $R_a$         | Resistencia de armadura del motor.                                    |
| $L_a$         | Inductancia de armadura del motor.                                    |
| $v_a$         | Voaltaje de arandura.   |
| $E$           | Fuerza contraelectromoriz.  |
| $int$         | Integrador.   |
| $K_t$         | Constante de par.   |



---

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

La Automatización Industrial es la tecnología o conjunto de procesos o procedimientos que se llevan a cabo en una fábrica o industria determinada sin la intervención humana, únicamente con la acción directa de dispositivos eléctricos, neumáticos, mecánicos e hidráulicos. Esto se implementa utilizando un programa de instrucciones combinado con un sistema de control que ejecuta las instrucciones y un sistema de monitoreo que permanentemente realiza el seguimiento de las instrucciones a los procesos involucrados.

Del Harder acuñó el término "Automatización" alrededor de 1946 para referirse a la gran cantidad de dispositivos automáticos que la Ford Motor Company había desarrollado en sus líneas de producción. La primera computadora electrónica digital fue desarrollada en la Universidad de Pensilvania en 1946, después de unos años la primera máquina de control numérico computarizado fue desarrollada y probada en 1952 en el Instituto Tecnológico de Massachussets, basados en los conceptos presentados por John Parsons y Frank Stulen. Más tarde, en los años 60's y 70's, computadoras digitales empezaron a ser conectadas a máquinas herramientas. En 1954, el primer robot industrial fue desarrollado y patentado por George Devol.

El primer robot comercial fue instalado para descargar partes en un proceso industrial de amoldamiento en 1961. En los 60's el primer sistema flexible de manufactura en Estados Unidos fue instalado por Ingersoll Rand Company para ejecutar operaciones de mecanizado en una gran variedad de piezas mecánicas. Cerca del año 1969 se presentó el primer controlador lógico programable. En 1978, el primer computador personal comercial fue introducido por Apple Compute, sin embargo, un producto similar ya había sido introducido en forma de kit en 1975.

---

El desarrollo de la tecnología de la computadora fue posible por los avances en electrónica, incluyendo el transistor (1948), el disco duro para la memoria de la computadora (1956), los circuitos integrados (1960), el microprocesador en 1971, las memorias RAM en 1984, chips de memoria en megas (1990), y los microprocesadores Pentium en 1993. El desarrollo del software con respecto a la automatización industrial ha sido también muy importante, incluyendo el desarrollo del lenguaje de programación FORTRAN (1955), el lenguaje para programación de máquinas herramientas con control numérico computarizado APT (1961), el sistema operativo UNIX (1969), el lenguaje para programación de robots VAL (1979), Microsoft Windows (1985), y el lenguaje de programación JAVA (1995). Los avances y desarrollos en esta tecnología aún continúan [J. Craig, 2006].

## **1.1 Revisión del Estado del Arte**

En el presente trabajo de tesis se presenta el diseño y la simulación de un sistema de control digital de posición no lineal para el seguimiento de trayectorias. En la mayoría de las aplicaciones los sistemas de control de posición siguen perfiles de referencia de posición o trayectorias, que no siempre son un escalón o una rampa. La simulación por computadora es usada con el fin de explorar la reducción de error alcanzado por el apropiado comportamiento del perfil de referencia respecto de salida.

Una de las dificultades para controlar la posición de un motor son sus limitaciones físicas, al intentar llevar a un motor a una posición específica, se aplica un voltaje a sus terminales el cual genera un par y una velocidad de desplazamiento, tanto el par como la velocidad del motor pueden llegar a su límite, esto provoca reacciones no deseadas en el control del motor, tales como sobreimpulso en la posición de salida y golpes mecánicos debido a los cambios bruscos de par y de la velocidad; ya que es deseable mantener la vida útil tanto del motor como de los dispositivos electrónicos que llevan a cabo esta función, es necesario diseñar un sistema de control que evite estas acciones, llevando a cabo la acción de control con rapidez para llegar a su referencia, manteniendo los cambios bruscos de par al margen de las limitantes físicas y eléctricas. Lo anterior debido a que en sistemas de control de posición es importante que el controlador en conjunto con el actuador (en este caso el motor) mantengan una posición adecuada de acuerdo al ambiente y tipo de trabajo que se

---

esté realizando, para evitar daños al mismo equipo, así como a los equipos y personal que se encuentren a su alrededor.

Un control de posición con acción de control PID elimina el error de salida causado por una carga constante, también proporciona al sistema la capacidad de seguir un perfil de pendiente constante sin error.

En el artículo [Nassirharand et al, 1988] se desarrolla una metodología de diseño de un controlador PID no lineal para el uso en servomecanismos con grandes no linealidades asistido por computadora. La metodología se basa en el uso de una técnica del dominio del tiempo. El comportamiento general del sistema de retroalimentación con el controlador sintetizado es comparado y contrastado con resultados obtenidos usando un enfoque de dominio de la frecuencia.

En el artículo de [James Carvajal et al, 2000] se presenta un diseño para una nueva lógica difusa proporcional integral derivativo (PID). La motivación principal de este diseño fue el control de algunos sistemas conocidos no lineales, como manipuladores robóticos, que violan la suposición convencional de un controlador PID lineal. Este controlador ha sido desarrollado primeramente describiendo las leyes de control PID lineal discreto y después describiendo progresivamente los pasos necesarios para incorporar un mecanismo de lógica de control difuso en las mediaciones de la estructura del control PID. La versión final de este controlador PID difuso es un nuevo esquema analítico computacionalmente eficiente adecuado para su aplicación en tiempo real en un control digital de lazo cerrado. Numerosas simulaciones se incluyen para demostrar la efectividad del controlador para sistemas lineales y no lineales. Finalmente se presenta un breve análisis para demostrar que el controlador tiene estabilidad BIBO (Bounded-Input Bounded-Output).

En [K.J. Åström et al, 2001] se presenta el estado del arte del control PID y reflexiona sobre su futuro. Temas particularmente discutidos incluyen las especificaciones, la estabilidad, diseño, aplicaciones y rendimiento del control PID. El documento termina con una discusión sobre alternativas del PID en el futuro.

En el artículo [Petrov et al, 2002] se presenta un método de diseño de un controlador difuso no lineal y menciona la dificultad de lograr un control eficiente en las plantas

---

---

variantes en el tiempo no lineales con controladores PID convencionales. Este controlador puede aplicarse en sistemas de control con varias no linealidades. El documento contiene la estructura y descripción del controlador, así como las investigaciones hacia la aplicación de algoritmos de control PID difuso. Las simulaciones realizadas muestran resultados satisfactorios de acuerdo a las aplicaciones puestas en práctica en una planta no lineal.

En [Wei-Der Chang et al, 2003] se presenta una nueva técnica de control PID basado en la auto sintonización de neuronas para sistemas multivariables. La principal diferencia entre una neurona auto sintonizada y una neurona en general es que hay parámetros ajustables de la función de activación utilizadas en las neuronas auto sintonizadas. En este trabajo, una función tangente hiperbólica modificada se utiliza como función de activación de una neurona de auto sintonización, que ofrece dos parámetros ajustables para determinar de manera flexible la magnitud y forma de la función. A continuación, se utiliza como ajuste automático de las neuronas para encontrar las ganancias del controlador PID multivariable, que se sintoniza en línea de acuerdo a las leyes de cierta adaptación.

En el artículo [Hirata et al, 2004] se propone un método de diseño de un sistema de control PID no lineal. En primer lugar, algunos modelos locales se estiman con base en el método de mínimos cuadrados mediante el uso de conjuntos de datos. La eficacia de la propuesta de esquema de control PID no lineal es evaluada por medio de la simulación y experimentación de un sistema de control de temperatura.

En el artículo [Y. X. Su et al, 2005] se propone realizar una mejora de un control PID no lineal que exhibe un mejor rendimiento que los controladores PID lineales convencionales de ganancia fija, mediante la incorporación de una ganancia no lineal en un sector limitado en cascada con una arquitectura de un control PID lineal convencional. Para lograr una alta robustez frente al ruido, se usan dos diferenciadores no lineales de seguimiento para seleccionar la señal diferencial en presencia del ruido de medición. Se trata el criterio para determinar la ganancia no lineal y mantener la estabilidad del sistema de control propuesto, utilizando el criterio de estabilidad de Popov. Las principales ventajas del controlador propuesto son la alta robustez frente al ruido y su fácil implementación. Los resultados de la simulación realizada en un robot manipulador se presentan para demostrar el desempeño

---

desarrollado por el control PID no lineal en comparación con el PID convencional de ganancia fija.

En el artículo [Hawwa M.A. et al, 2006] se realiza la propuesta de un control PID no lineal para el control de un servomotor de un disco duro que reduzca el tiempo de establecimiento y el número de acciones de control. El sistema es capaz de incrementar el efecto de amortiguamiento cuando el sistema se mueve hacia la pista deseada. Esto se lleva a cabo mediante la utilización de una acción derivativa ajustada por una función no lineal que provee al sistema del amortiguamiento necesario. Los resultados de las simulaciones incluyen la respuesta al escalón, la robustez en términos de la influencia de los tipos de limitadores y la capacidad del rechazo a perturbaciones.

En el artículo [Guoyong et al, 2007] se comenta que las simulaciones de controladores PID orientadas a entradas escalón muestran que un control PID puede reducir el sobreimpulso a cero, consiguiendo una respuesta rápida y mejorar el rendimiento del seguimiento de un sistema de control numérico (CNC).

En el artículo [Chun-Qing HUANG et al, 2008] se presenta un enfoque de regulación cartesiana de robots manipuladores con incertidumbre de matriz jacobiana, se propone un controlador con un esquema PID no lineal robusto con Anti Wind Up, para resolver los problemas derivados de la acción integral y en el Wind Up del integrador en los sistemas PID. La estabilidad asintótica es garantizada mientras solamente se requieran medidas de posición y velocidad; la robustez del sistema de lazo cerrado resultante es también garantizada debido a las restricciones que actúan sobre la ganancia integral. Especialmente, en comparación con otros enfoques Anti Wind Up, el algoritmo propuesto es más sencillo y eficaz para el diseño Anti Wind Up.

En el artículo [Chanchal Dey et al, 2009] se presenta la mejora del esquema de auto sintonización propuesto por Ziegler–Nichols (ZN) para controladores PID (ZNPIDs), que por lo general proporcionan grandes sobreimpulsos, que no son tolerables en la mayoría de las situaciones para procesos no lineales y de orden superior. Para superar esta limitación de diseño, se actualizan mediante algunas reglas heurísticas fácilmente interpretables, a través de la modificación en línea de un factor de ganancia definido en los estados instantáneos del

---

proceso. La propuesta aumentada del ZNPID es probada en varios procesos lineales de orden superior y en procesos no lineales de tiempo muerto con un rendimiento mejorado con respecto al ZNPID. Se muestra un desempeño robusto en el ZNPID aumentado al cambiar sus parámetros ajustables así como el proceso de tiempo muerto. El esquema propuesto se implementa también en un servosistema de posición en tiempo real.

En el artículo [Wei-Der Chang et al, 2010] se presenta una mejora de la optimización por enjambre de partículas para encontrar las ganancias óptimas del controlador PID para sistemas no lineales. El algoritmo propuesto consiste en modificar la fórmula de la velocidad de los sistemas POS (particle swarm optimization) con el fin de mejorar la eficiencia en la búsqueda. El mejoramiento es basado en el diseño de las ganancias de los sistemas de control PID no lineales, es decir, la ganancia proporcional  $K_P$ , la ganancia integral  $K_I$  y la ganancia derivativa  $K_D$  se requieren para formar un vector de parámetros que se llama partícula. Estos son los componentes básicos de los sistemas POS y muchas más partículas constituyen una población. Para obtener las ganancias óptimas para un sistema PID no lineal, se requieren dos ecuaciones iniciales, la actualización de la velocidad modificada y la actualización de la posición, que se emplean para mover las posiciones de todas las partículas en la población. Los resultados demuestran que la mejora del algoritmo POS puede mejorar el diseño de los sistemas de control PID no lineales.

En este trabajo de tesis, se realiza el diseño de un sistema de control digital PID no lineal, mediante el método de cálculo de parámetros de Slobodan, realizando pruebas por medio de Simulink y generando el código fuente para el controlador digital PID no lineal en Matlab para llevar a cabo pruebas para la respuesta a grandes cambios de referencia, rechazo de perturbaciones y el seguimiento de trayectorias.

---

## **1.2 Objetivos**

En el presente proyecto de tesis se plantean los siguientes objetivos.

### **1.2.1 Objetivo General**

Diseñar y simular un sistema de control digital de posición para el seguimiento de trayectorias, evitando sobreimpulsos en la posición y manteniendo los pares de los actuadores sin oscilaciones bruscas.

### **1.2.2 Objetivos Particulares**

- Presentar en detalle el desarrollo teórico de un controlador digital de posición PID no lineal basado en la propuesta de Slobodan N. Vukosavic.
- Evaluar el comportamiento en simulación para diferentes tipos de configuración de controladores, tales como el controlador PI lineal, el controlador PD lineal, el controlador PD no lineal y el controlador PID lineal.
- Calcular los parámetros del sistema basado en una función criterio que garantice el comportamiento estrictamente no oscilatorio de un controlador de posición digital.
- Desarrollar códigos en Matlab y Simulink para simular un controlador digital de posición PID no lineal basado en los cálculos de los parámetros de acuerdo a lo sugerido por el comportamiento no oscilatorio de la función criterio.
- Evaluar en simulación el comportamiento del sistema de control digital de posición PID no lineal con pequeñas y grandes perturbaciones de entrada, así como, el seguimiento de trayectorias de referencia de posición.

## **1.3 Metodología**

La metodología asociada con el desarrollo de esta tesis se basa en la ejecución de las siguientes actividades:

- 
1. **Revisión de las diferentes modelos de controladores de velocidad y posición.** En esta etapa se realiza la revisión de los diferentes tipos de controladores, así como los diferentes tipos de modelados para los controladores de velocidad y posición para tomar referencia de ellos en el desarrollo de la investigación.
  2. **Simulación de los diferentes tipos de controladores de velocidad y posición.** En esta etapa se realizan simulaciones de los diferentes tipos de controladores de velocidad y posición para observar su comportamiento. De esta manera se descartan los modelos que no son adecuados a nuestro objetivo.
  3. **Diseño del sistema de control de posición digital no lineal basado en la propuesta de N. Vukosavic.** Se analiza y se desarrolla un control de posición digital no lineal de acuerdo a una función criterio que describe una respuesta estrictamente no oscilatoria, considerando el modelado de un lazo interno de control de corriente para el control del actuador de par del subsistema mecánico.
  4. **Diseño de un código fuente para la simulación de un sistema de control de posición no lineal.** En base a la investigación realizada de los diferentes tipos y modelos de controladores de posición y velocidad, se establecerá un modelo del sistema de control de posición PID no lineal utilizando las diferentes herramientas encontradas en Matlab-Simulink para simularlo.
  5. **Simulación con diferentes tipos de entradas para observar el comportamiento del sistema de control de posición PID no lineal.** En esta etapa se realizan las simulaciones con diferentes tipos de entradas para analizar el comportamiento del sistema de control de posición y presentar los resultados obtenidos.



---

## 1.4 Aportaciones

- Presentación en detalle del desarrollo teórico de una propuesta de control basada en el cálculo de parámetros por medio de una función criterio que se basa en el comportamiento estrictamente no oscilatorio de un sistema de control de posición.
- Adaptación de la propuesta de Slobodan N. Vukosavic, para considerar la aplicación de un controlador digital de posición PID no lineal al seguimiento de trayectorias, tomando en cuenta la aplicación de un par de carga.
- Desarrollo de código fuente en Matlab para simular el controlador digital PID no lineal diseñado, lo cual puede facilitar su implementación en un microcontrolador o un procesador digital de señales (DSP).

## 1.5 Justificación

En la actualidad muchas aplicaciones de los sistemas de control digital de posición plantean un gran reto para su implementación, ya que en la gran mayoría de ellos el principal problema a vencer son los efectos adversos que se generan al mover grandes cargas o tener que mover el sistema de un punto determinado a otro en el menor tiempo posible, en cualquiera estos dos casos, el sistema puede llegar a tener un comportamiento no lineal, llevando a cabo sus tareas con errores de movimiento y posicionamiento que podrían llevar a daños del mismo sistema o a los sistemas que se encuentren a sus alrededores. Por tal motivo es necesario contar con un sistema que sea lo suficientemente robusto para manejar estas adversidades, el sistema debe de mantener un comportamiento estrictamente no oscilatorio independientemente de los límites de par y velocidad del sistema controlador de posición.

## 1.6 Descripción de Capítulos

En el Capítulo 1 se hace una reseña de las necesidades de la implementación de sistemas controladores de posición y los diferentes desarrollos de software para la implementación de los mismos. Se describen los objetivos del presente trabajo así como las

---

aportaciones de la misma y se comenta de manera general el contenido de los capítulos contenidos en la tesis.

En el Capítulo 2 se detalla la estructura y modelado de un sistema de control de movimiento, los efectos de los polos de lazo cerrado en el sistema, la consideración de la reubicación de las ganancias del sistema para eliminar los efectos de los ceros de lazo cerrado y mejorar el comportamiento del sistema. Se formula una función criterio y en base a esa función criterio se calculan los parámetros del sistema en base a un comportamiento estrictamente no oscilatorio. Se realizan simulaciones con un controlador PI y se realiza el análisis del mecanismo *Anti-Wind-Up* para un control de movimiento más eficiente.

En el Capítulo 3 se diseña un sistema de control digital de posición en base a una función criterio que tiene un comportamiento estrictamente no oscilatorio y en base a esta función se realiza el cálculo de los parámetros del sistema. Se implementa un controlador PD no lineal y se observa su comportamiento. Se agrega la acción de control integral para tener un Controlador PID, se realizan simulaciones y se agrega un control PID no lineal.

En el Capítulo 4 al controlador PID no lineal se le agrega el diseño de un controlador interno de corriente y se realizan simulaciones para observar su comportamiento.

En el Capítulo 5 se presentan las conclusiones obtenidas en la tesis y se mencionan trabajos futuros que se pueden desarrollar a partir de esta investigación.

---

# Capítulo 2

## ESTRUCTURA Y MODELADO DE UN SISTEMA DE CONTROL DE VELOCIDAD

### 2.1 Introducción

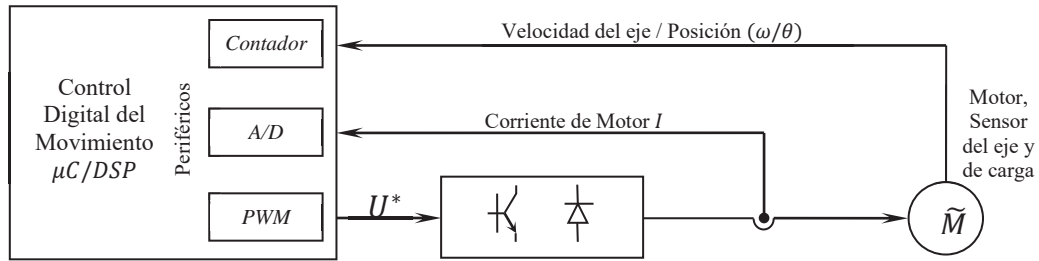
En esta sección se presenta una breve comparación de la implementación analógica y la implementación digital. Antes de la llegada de la implementación digital con microcontrolador, los controles de posición y velocidad se implementaban en el dominio continuo por medio de circuitos electrónicos analógicos comprendidos por amplificadores operacionales, resistencias y capacitores. La señal analógica, proporcional a la velocidad de giro, se obtenía de un taco-generador unido al eje. De un amplificador analógico, se obtenía la señal de referencia analógica para el par del motor en la forma de señal analógica, alimentando el amplificador para obtener un par. La implementación analógica establece los siguientes límites de desempeño, [N. Vukosavic, 2007]:

- La operación a bajas velocidades se ve afectada por el error intrínseco de los amplificadores operacionales.
- Las ganancias de retroalimentación, definidas por las resistencias y capacitores, cambian con la temperatura y el envejecimiento.
- Los sensores analógicos en el eje, como los taco-generadores, introducen ruido originado por la conmutación mecánica, con la frecuencia de ruido relacionada a la velocidad de rotación. El ruido en la retroalimentación reduce el rango de aplicación de las ganancias y con esto el ancho de banda.
- Aunque ofrece una manera sencilla de aplicar las medidas convencionales de control, como  $W_{SC}(s) = K_P + K_I/s$ , las aplicaciones analógicas encuentran grandes dificultades para la implementación de leyes de control no lineales, compensadoras de retraso, filtros anti resonantes o filtros de respuesta finita al impulso.

- 
- Un control de velocidad, donde los ajustes de los parámetros de retroalimentación tienen que ser adaptados en línea a las condiciones específicas de operación, difícilmente puede implementarse por medios analógicos. Un cambio en los parámetros o estructura del control analógico de velocidad requiere que se reemplacen las resistencias y capacitores. La sustitución es difícil con las herramientas analógicas. Por lo tanto, un controlador de estructura variable y adaptación de parámetros, requiere la implementación en una plataforma digital.

La implementación digital de los controladores de velocidad comenzó con la introducción del microcontrolador y el procesador digital de señales (DSP) que pueden ser empleados en el ambiente del control de movimiento. El desarrollo de sensores para ejes que proporcionan información de velocidad y posición de manera digital ha ayudado a mejorar el desempeño del lazo cerrado. Los codificadores ópticos proporcionan información del eje con una relación señal a ruido con mucho mejor desempeño que los taco-generadores analógicos. Las capacidades numéricas de los controladores digitales de movimiento permiten la implementación de compensadores complejos no lineales, disponen de adaptación en línea de la estructura del controlador, ganancias de retroalimentación, y permiten la implementación de los filtros FIR, que alguna vez fueron incompatibles con las plataformas analógicas.

El papel del controlador digital con los sistemas de control de movimiento se muestra en la Figura 2.1. El sistema de control digital de movimiento consta de un microprocesador o DSP equipado con unidades periféricas necesarias para comunicarse con el resto del sistema. El algoritmo de control incluye el control de velocidad, que calcula la referencia del par/corriente a partir del error de velocidad detectado. Además, el código del  $\mu C/DSP$  conforma el lazo local (menor), controlando la corriente del motor (par). Por esta razón, el controlador digital mostrado en la Figura 2.1 recibe las señales de retroalimentación de velocidad y corriente y genera los pulsos PWM. La unidad PWM es usada como el disparador de señales para los interruptores de potencia dentro del convertidor de potencia, modulando así el voltaje de alimentación del motor y restringiendo la corriente del motor para seguir al par de referencia.



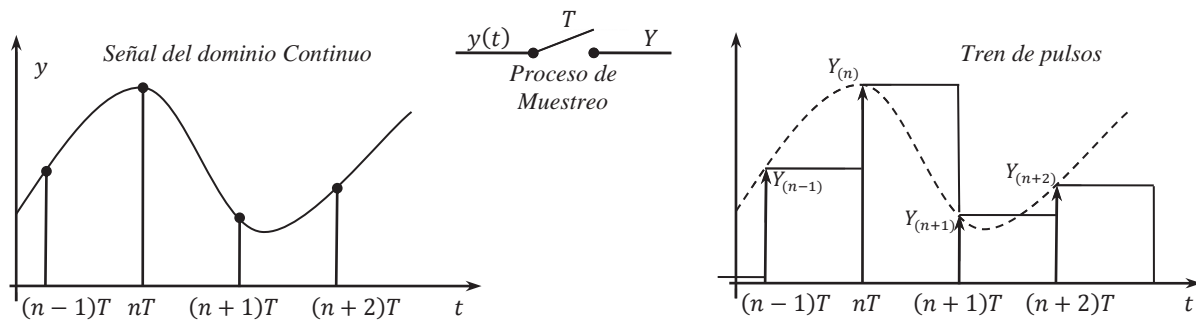
**Figura 2.1** El flujo de señales entre el controlador de movimiento digital y el resto del sistema de control de velocidad.

El módulo *contador* en la Figura 2.1 recibe el tren de pulsos que vienen del codificador óptico unido al eje del motor. La frecuencia de los pulsos corresponde a la velocidad del eje. El contador cuenta los pulsos y los convierte en información de retroalimentación en una palabra digital, leída y usada por el  $\mu C/DSP$  como la velocidad de retroalimentación.

El módulo *A/D* de la Figura 2.1 recibe la señal analógica proporcional a la corriente del motor. Las muestras de la corriente del motor son convertidas en palabras digitales y usadas como señales de retroalimentación por el control de corriente. La corriente del motor es controlada por el ajuste del voltaje de alimentación a un valor deseado. El voltaje del motor es decidido por el ancho de los pulsos del PWM, generados por la unidad periférica PWM. Dentro de cada periodo de muestreo el control digital evalúa el error en la corriente del motor y calcula la fuerza del motor en la forma del voltaje de referencia. El algoritmo de control de corriente calcula los voltajes de referencia que reducen el error de corriente en los intervalos de muestreo sucesivos llevándolo eventualmente a cero. A lo largo de esta sección, el análisis es simplificado por la suposición de un control de corriente ideal donde la corriente del motor y par suministrado corresponden a los valores de referencia. Posteriormente se realizará el análisis del control de corriente para el algoritmo de control.

La implementación digital implica un deterioro intrínseco de las señales debido a la discretización del tiempo y de la amplitud. La pérdida de información es una consecuencia inevitable del proceso de muestreo. Es indispensable para la implementación digital de las leyes de control, relacionar el muestreo a la conversión de las señales en tiempo real, del dominio continuo  $y(t)$  (en la Figura 2.2), en sus contrapartes digitales  $Y_n$ . La muestra  $Y_n$  es

la palabra digital que representa la señal analógica  $y(t)$  adquirida en el instante  $t = nT$ , convertida en un número para ser usado por el algoritmo de control. El proceso de muestreo consiste de la adquisición de la señal analógica en el instante de muestreo  $t = nT$  y manteniendo el valor  $y(nT)$  en un capacitor cargado  $C_{S/H}$  incluido en el circuito de muestreo y retención. El convertidor analógico a digital (A/D) entonces convierte el voltaje  $C_{S/H}$  en el número ( $Y_n$ ) representado por 12-16 bits y lo mantiene dentro de la memoria RAM del  $\mu C/DSP$ .



**Figura 2.2** La señal de tiempo continuo  $y(t)$  es convertida en un tren de pulsos.

Un proceso similar toma lugar dentro del contador (Figura 2.1) que procesa las señales originadas por el codificador óptico y las convierte en muestras de la velocidad o posición del eje.

El muestreo da como resultado una discretización tanto en amplitud como en tiempo. La conversión de  $y(t)$  en un tren de muestras  $Y_n$  no tiene en cuenta los valores de la señal en tiempo continuo entre los instantes de muestreo. Por lo tanto, la reconstrucción de la señal original del tren de muestras no siempre es posible. En tales casos, la discretización conduce a la pérdida de información. De acuerdo con el teorema de muestreo de Shannon [Ogata, 1995] es posible muestrear señales de tiempo continuo sin deterioro, siempre que la entrada  $y(t)$  tenga un ancho de banda limitado. Si las componentes de alta frecuencia de la entrada no exceden la mitad de la frecuencia de muestreo  $f_s = 1/T$  entonces,  $y(t)$  puede ser recuperada completamente del tren de pulsos  $Y_n$ . Por consiguiente, en tales casos, la discretización del tiempo no contribuye a la pérdida de información. El límite del ancho de

---

banda  $f_{max} = f_s/2 = 1/2T$  es también conocida como la *frecuencia de Nyquist* [J. Astrom & Wittenmark, 1997].

Los microcontroladores contemporáneos y procesadores de señal están equipados con unidades periféricas A/D capaces de alcanzar velocidades de muestreo de  $f_s > 10^6$ . El contenido de frecuencias de la corriente del motor y la velocidad del rotor no excede las decenas de *kHz*. Por lo tanto, el proceso de muestreo en el controlador digital de velocidad puede ser organizado de manera que la discretización del tiempo no afecte las señales de retroalimentación.

Las muestras  $Y_n$  representan la señal de entrada  $y(t)$  en un instante de tiempo  $t = nT$ . El número de bits en la palabra digital  $Y_n$  depende de la resolución de la unidad periférica A/D. Las resoluciones del A/D varían de 10 a 16 bits. Por lo tanto, las muestras de las señales retroalimentadas están internamente representadas como palabras digitales que tienen de 10 a 16 bits. Cuando la señal de entrada tiene un rango de  $\pm 10V$  y es muestreada a 12 bits, el bit menos significativo (LSB) corresponde a  $\Delta U = 20V/2^{12} = 4.88mV$ . Como consecuencia de ello, la amplitud de la señal es representada en fragmentos de  $\Delta U$ . Fluctuaciones muy pequeñas de la señal  $y(t)$  menores a  $\Delta U$  no pueden ser representadas y por lo tanto son perdidas. Por consiguiente, el proceso de muestreo implica discretización en amplitud y pérdidas de información causadas por los límites de resolución de las unidades A/D y una longitud de palabra finita.

En un sistema de control digital de velocidad (Figura 2.1) las señales retroalimentadas contienen componentes de ruido parásitas, originadas por el proceso de conmutación del convertidor de potencia y otras fuentes. En general, el ruido excede la cuantización  $\Delta U$  del convertidor A/D, mientras que los errores causados por la discretización de la amplitud son inferiores al ruido intrínseco. Por lo tanto, en la mayoría de los controladores digitales de velocidad, los efectos de la cuantización de la amplitud en la integridad de la señal de retroalimentación son despreciables. [N. Vukosavic, 2007]

En la Figura 2.3 se muestra un sistema de control de velocidad donde se observa el bloque  $W_{SC}$ , el bloque contiene el algoritmo del controlador de velocidad, el flujo de la señal del bloque  $W_{SC}$  se muestra en la Figura 2.4 y representa la parte digital del sistema.

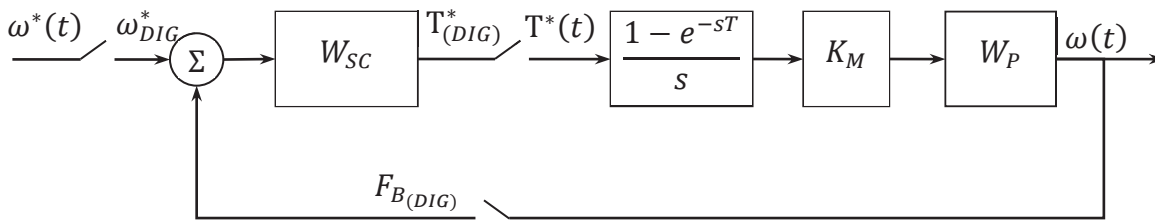


Figura 2.3 Diagrama de bloques de un sistema de control de velocidad.

El flujo de las señales dentro del controlador digital de velocidad está dado en la Figura 2.4. La referencia de velocidad  $\omega^*$  está disponible como un tren de muestras ( $\omega^*_{(DIG)}$ ). En el instante  $t = nT$ , la referencia de velocidad es igual a  $\omega^*_{(n)}$ . El tren de muestras de retroalimentación  $F_{B(nT)}$  (velocidad), evalúa el error de velocidad  $\Delta\omega_{(n)}$  y calcula la referencia de par  $T^*_{(n)}$ . El tren de pulsos de la referencia de par está dado en la Figura 2.4 como  $T^*_{(DIG)}$ . El algoritmo del control de velocidad puede calcular el valor de la referencia de par a partir de la muestra actual y pasada de la referencia de velocidad, y de las señales de retroalimentación, así como de las muestras anteriores de la referencia de par, como se indica en la Ec. (2.1)

$$T^*_{(n)} = f(F_{B(n)}, F_{B(n-1)}, F_{B(n-2)}, \dots, \omega^*_{(n)}, \omega^*_{(n-1)}, \omega^*_{(n-2)}, \dots, T^*_{(n-1)}, T^*_{(n-2)}, \dots) \quad (2.1)$$

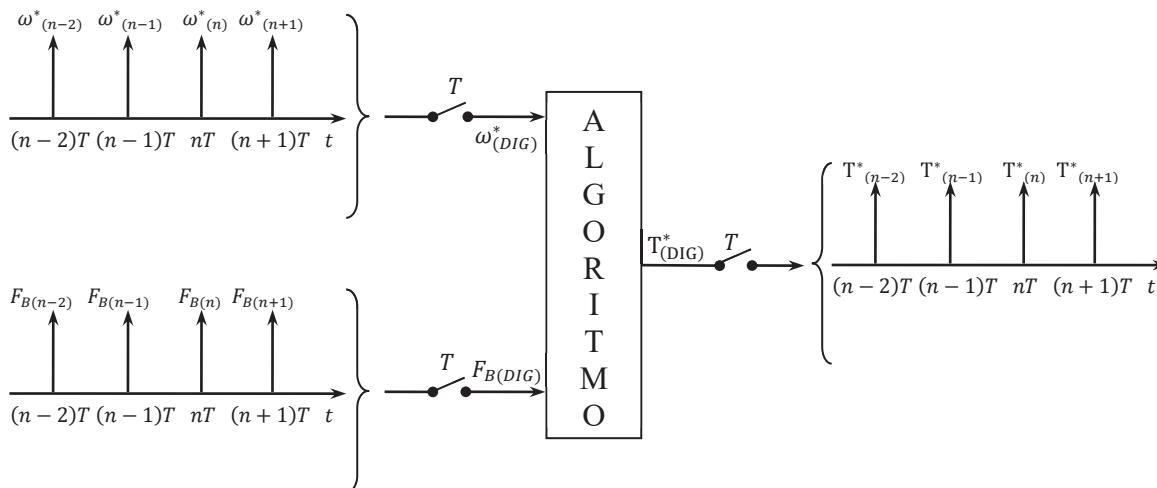


Figura 2.4 Flujo de señales dentro de un Controlador de Velocidad



---

El control de velocidad es lineal cuando calcula las muestras nuevas de la fuerza del motor como una suma ponderada de las muestras correspondientes Ec. (2.2).

$$T_{(n)}^* = \sum_{i=0}^{NF} F_{B(n-i)} G_i^F + \sum_{i=0}^{N\omega} \omega_{(n-i)}^* G_i^\omega + \sum_{i=0}^{NT} T_{(n-i)}^* G_i^T \quad (2.2)$$

En tales casos, los coeficientes de peso  $G_i^F$ ,  $G_i^\omega$  y  $G_i^T$  asumen el papel de ganancias de retroalimentación. Los números enteros  $NF$ ,  $N\omega$  y  $NT$  en la Ec. (2.2) determinan la estructura del control digital de velocidad.

La referencia de par  $T_{(n)}^*$  es calculada de las entradas muestreadas adquiridas en el instante  $t = nT$ . La nueva muestra  $T_{(n)}^*$  está disponible con cierto retraso, necesario para la unidad de control  $\mu C/DSP$  que evalúa la expresión (2.2). La referencia  $T_{(n)}^*$  es entonces alimentada al actuador mediante un intervalo de muestreo conjunto  $T$ . En casos cuando el cálculo del retraso es despreciable, la referencia de par es fijado en  $T_{(n)}^*$  durante el intervalo de tiempo  $[nT, (n+1)T]$ . Al siguiente instante de interrupción  $t = (n+1)T$ , el proceso se repite, obteniendo una nueva referencia  $T_{(n+1)}^*$ . Por consiguiente, la señal de la referencia de par  $T_{ref}$  cambia paso a paso, suponiendo un nuevo valor  $T_{(k)}^*$  en cada instante de muestreo  $kT$ .

Hay casos donde la implementación del algoritmo del control digital de velocidad requiere mucho tiempo, en ocasiones el retardo del cálculo es comparable al periodo de muestreo  $T$ . En estos casos, la referencia de par  $T_{(n)}^*$  es aplicada con un retraso de un periodo de muestreo completo y permanece en la entrada del actuador par durante el intervalo de tiempo  $[(n+1)T, (n+2)T]$ .

Comparado con la implementación analógica, el controlador digital de velocidad experimenta un deterioro de la señal debido a la discretización del tiempo y la amplitud. Al mismo tiempo, los cálculos numéricos involucrados contribuyen a retrasos de transporte adicionales. Sin embargo, los controladores digitales de velocidad superan el desempeño de sus contrapartes analógicas. Los efectos de la cuantización y los retardos en los cálculos se suprimen mediante el uso de plataformas DSP especializadas en el control de movimiento.

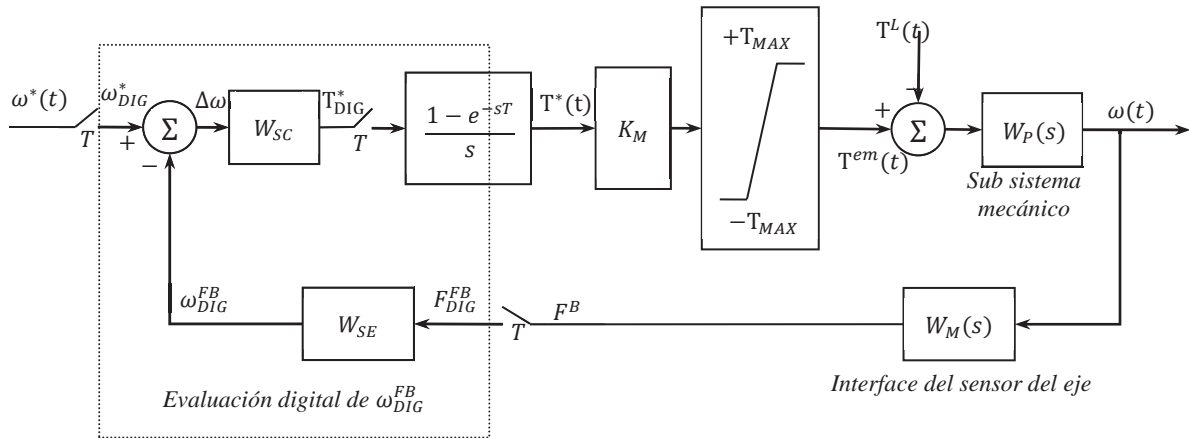
---

Con los sensores digitales, como los codificadores ópticos, las señales de retroalimentación están libres de desviación y libres de ruido y mantienen la relación señal a ruido incluso a velocidades muy bajas de rotación. Un controlador digital de velocidad puede incluir compensadores no lineales, un adaptador de parámetros en línea y mecanismos de cambio estructural; se pueden emplear filtros de respuesta finita al impulso y otras características que no están disponibles en implementaciones analógicas.

En un control digital de motores eléctricos, las funciones del control de velocidad pueden implementarse simultáneamente con controles de corriente (Figura 2.1) la disponibilidad de velocidades de muestreo superiores a  $f_s = 20kHz$  permite anchos de banda para el lazo de corriente superiores a  $1kHz$ . Consecuentemente, el par real alcanza la referencia  $T_{ref}$  dentro de los  $100 - 200\mu s$ . Las dinámicas del actuador normalmente sobrepasan la constante de tiempo del subsistema mecánico por dos órdenes de magnitud. Por lo tanto, el análisis y diseño de los controladores digital de velocidad pueden ser realizados bajo la suposición de que el actuador responde instantáneamente a los pulsos de referencia  $T_{(n)}^*$  [N. Vukosavic, 2007]. Las excepciones de esta conclusión deben tenerse en cuenta en los casos en que la inercia del subsistema mecánico es extremadamente baja y/o el tope del ancho de banda del lazo de velocidad alcanza el rango de  $1kHz$ .

## 2.2 La Función de Transferencia del Subsistema Mecánico

Un diagrama de bloques de un sistema de control de velocidad con un control digital (mostrado dentro del cuadro punteado) es mostrado en la Figura 2.5. La referencia de par asume la forma de un tren de muestras  $T_{(n)}^*$ . Procesadas a través de un retenedor de orden cero, la referencia de par es alimentada al actuador de par, afectando de esta manera, la velocidad de salida y la señal de retroalimentación  $F^B(t)$ . Por lo tanto, las muestras de la retroalimentación de velocidad de  $\omega_{DIG}^{FB}$  son afectadas por las muestras de la referencia de par  $T_{(DIG)}^*$ . Por consiguiente, la función de transferencia de la planta del sistema de la Figura 2.5 debe representar el impacto de la señal discreta  $T_{DIG}^*$ , sobre la retroalimentación discreta  $\omega_{DIG}^{FB}$ .



**Figura 2.5** Diagrama de bloques del sistema de control de velocidad con algoritmo de implementación digital. El flujo de señales dentro de un microcontrolador o DSP se encuentra dentro de la línea discontinua.

El subsistema mecánico es descrito por la segunda ley de Newton para el movimiento rotacional, Ec. (2.3).

$$J \frac{d\omega}{dt} = T^{em} - T^L \quad (2.3)$$

El par  $T^L$  comprende el par de carga, así como la fricción, la fricción en la transmisión y otras componentes de par parásitas. El parámetro  $J$  representa la inercia equivalente del sistema. Se supone que en la Ec. (2.3) las componentes parásitas del par están desacopladas de las dinámicas internas del sistema. Por consiguiente, las señales asociadas al par  $T^L$  pueden ser tratadas como perturbaciones externas.

La referencia de par  $T^*(t)$  en la Figura 2.5, se establece en  $T_{(n)}^*$  en el instante  $t = nT$  y preserva el valor hasta el siguiente instante de muestreo  $t = (n + 1)T$  debido a la presencia del retenedor de orden cero, donde el control de velocidad adquiere otra muestra de la retroalimentación y calcula la referencia de par  $T_{(n+1)}^*$ . Con un tiempo de retraso despreciable en el actuador de par, el par del motor  $T^{em}(t)$  sigue la referencia  $T^*(t)$  sin retraso y sin error. De acuerdo a la Ec. (2.3) la velocidad del eje  $\omega(t)$  cambia conforme cambia el par del motor y es afectada por perturbaciones externas  $T^L(t)$ . Los valores de  $\omega(t)$  en el instante

---

$t = nT$  y  $t = (n + 1)T$  son denotados por  $\omega_{(n)}$  y  $\omega_{(n+1)}$  respectivamente. Las transiciones de velocidad de  $\omega_{(n)}$  a  $\omega_{(n+1)}$  están dadas en la Ec. (2.4)

$$\omega_{(n+1)} = \omega_{(n)} + \frac{1}{J} \int_{nT}^{nT+T} (T_{(n)}^* - T^L(t)) dt \quad (2.4)$$

$$\omega_{(n+1)} = \omega_{(n)} + \frac{T}{J} T_{(n)}^* - \frac{1}{J} \int_{nT}^{nT+T} T^L(t) dt$$

Mientras que el par del motor en la Ec. (2.4) no cambia durante el intervalo  $(nT, (n + 1)T)$  en general el par de carga  $T^L(t)$  es una perturbación externa que puede fluctuar dentro del intervalo de manera arbitraria. Esta situación dificulta el intento de convertir la ecuación diferencial (2.4) en una ecuación de diferencias. Se observa que el último factor en la Ec. (2.4) es proporcional al valor promedio del par de carga  $T_{(n)}^L$  de la señal  $T^L(t)$ , calculada en el presente periodo de muestreo  $T$  de acuerdo con la expresión dada en la Ec. (2.5).

$$T_{(n)}^L = \frac{1}{T} \int_{nT}^{nT+T} T^L(t) dt \quad (2.5)$$

Si introducimos el valor promedio de la Ec. (2.5) en la Ec. (2.4), la nueva muestra de velocidad  $\omega_{(n+1)}$  es obtenida como una suma ponderada de la muestra anterior  $\omega_{(n)}$ , el par del motor  $T_{(n)}^*$  y el valor promedio del par de carga  $T_{(n)}^L$ , resultando la ecuación de diferencias (2.6)

$$\omega_{(n+1)} = \omega_{(n)} + \frac{T}{J} T_{(n)}^* - \frac{T}{J} T_{(n)}^L \quad (2.6)$$

La ecuación de diferencias (2.6) describe el subsistema mecánico donde la señal  $T_{(n)}^*$  es el par del motor, la velocidad  $\omega_{(n+1)}$  es la salida y  $T_{(n)}^L$  que es el promedio del par de carga entre el instante  $nT$  y el instante  $(n + 1)T$  representa las perturbaciones externas. La función de transferencia del subsistema mecánico  $W_P(z)$  (*planta*) se puede encontrar considerando  $W_P(z) = \omega(z)/T^*(z)$ , donde  $\omega(z)$  representa la transformada  $z$  de las muestras de salida

---

$\omega_{(n)}$  obtenida de la referencia de par dado  $T^*(z)$  con la condición  $T^L(t) = 0$ . Aplicando la transformada  $z$  y la propiedad de corrimiento obtenemos la Ec. (2.7).

$$z\omega(z) = \omega(z) + \frac{T}{J}T^*(z) \Rightarrow (z-1)\omega(z) = \frac{T}{J}T^*(z) \quad (2.7)$$

La función de transferencia al pulso de la planta  $W_P(z)$  está dada en la Ec. (2.8)

$$W_P(z) = \frac{\omega(z)}{T^*(z)} = \frac{T}{J} \frac{1}{z-1} \quad (2.8)$$

Similarmente, la función de transferencia al pulso  $W_{PL}(z)$  puede ser obtenida describiendo el impacto de las perturbaciones de carga  $T^L$  en la velocidad de salida del subsistema mecánico. Dado el tren de pulsos  $T^L_{(n)}$  que es el valor promedio de la señal  $T^L(t)$  dentro de periodos de muestreo individuales (Ec. (2.5)), la transformada  $z$  de la señal de perturbación puede ser obtenida  $T^L(z)$ . La función de transferencia al pulso describe la respuesta de la salida a la perturbación de carga es igual a  $-W_P(z)$ . La función de transferencia en tiempo discreto  $W_{PL}(z)$  puede ser encontrada como  $\omega(z)/T^L(z)$  con la condición  $T^*(z) = 0$ . De la Ec. (2.6) y aplicando los pasos para obtener la Ec. (2.7), encontramos que  $W_{PL}(z) = -W_P(z)$ . Finalmente, la transformada  $z$  de la velocidad de salida, cuando tanto el par de carga como la referencia de par están presentes, se obtiene como  $\omega(z) = W_P(z)(T^*(z) - T^L(z))$ .

### 2.3 Función de Transferencia del Subsistema de Medición de Velocidad

Las muestras de posición del control digital  $\theta_n$  ( $F^B$  en la Figura 2.1) y el correspondiente tren de pulsos  $\theta_{DIG}$  ( $F^B_{DIG}$  en la misma figura), deben de ser procesadas posteriormente con el fin de obtener la retroalimentación de velocidad deseada  $\omega^B_{DIG}$ . En tiempo continuo, la velocidad del eje es obtenida como la primera derivada de la posición. La derivación en tiempo discreto implica el cálculo de la diferencia entre muestras contiguas. Esta labor está designada mediante el bloque  $W_{SE}$  de la Figura 2.5.

---

Para obtener la función de transferencia al pulso del bloque  $W_{SE}$ , se debe de considerar el instante de muestreo  $t = nT$  cuando el controlador digital adquiere la muestra  $\theta_{(n)} = \theta(nT)$ . La muestra anterior  $\theta_{(n-1)}$  tiene que ser almacenada y residir en la memoria del controlador. En este instante ( $t = nT$ ), la retroalimentación de velocidad  $\omega_{(n)}^{FB}$  es calculada del incremento de la posición obtenida dentro del periodo de muestreo pasado  $T$  (Ec. (2.9)).

$$\omega_{(n)}^{FB} = \frac{\theta_{(n)} - \theta_{(n-1)}}{T} \quad (2.9)$$

La información de velocidad así obtenida corresponde a la velocidad promedio durante el intervalo de tiempo  $[(n-1)T, nT]$ , y no corresponde a la velocidad instantánea del eje del motor  $\omega(nT)$  Ec. (2.10).

$$\theta_{(n)} = \theta_{(n-1)} + \int_{(n-1)T}^{nT} \omega dt \Rightarrow \omega_{(n)}^{FB} = \frac{1}{T} \int_{(n-1)T}^{nT} \omega dt \quad (2.10)$$

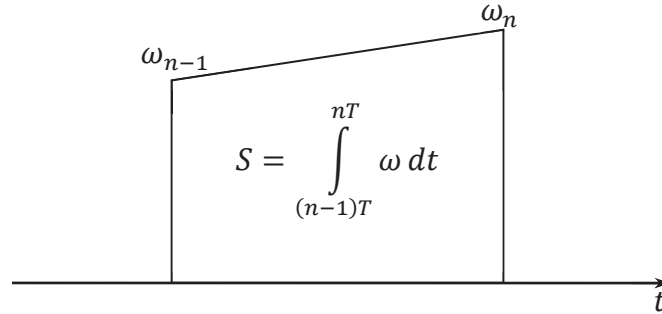
La relación entre la señal de retroalimentación de velocidad  $\omega_{(n)}^{FB}$  y los valores de la velocidad del eje del motor  $\omega_{(n)} = \omega(nT)$  en el instante de muestreo necesitan ser establecidos. En la Figura 2.6, se muestra el cambio de la velocidad del eje del motor entre dos instantes de muestreo. En casos cuando el par del motor y las perturbaciones de carga  $T^L$  se mantienen constantes dentro del intervalo de muestreo  $T$ , la velocidad cambia con una pendiente constante, como se observa en la Figura 2.6. En este caso, la velocidad promedio durante el intervalo  $T$  es proporcional a la superficie  $S$  y se encuentra que es igual al promedio de las muestras vecinas de la velocidad actual del eje del motor  $\omega_{(n-1)}$  y  $\omega_{(n)}$  en la Ec. (2.11)

$$\omega_{(n)}^{FB} = \frac{\omega_{(n)} - \omega_{(n-1)}}{2} \quad (2.11)$$

Se asume que el par del motor  $T^{em}(t)$  es igual a la referencia de par  $T^*(t)$ . La referencia de par es obtenida del circuito retenedor de orden cero en la Figura 2.5. Por consiguiente, se asume que el par del motor no cambia durante el intervalo de muestreo. En ausencia de par de carga  $T^L$ , la velocidad del eje del motor cambia de  $\omega_{(n-1)}$  a  $\omega_{(n)}$  en forma

---

lineal. Un cambio de velocidad lineal como el que se muestra en la Figura 2.6 es mantenido incluso en presencia de las perturbaciones de carga, siempre que  $T^L(t)$  permanezca constante dentro del intervalo de muestreo individual. Lo anterior es el caso de la mayoría de los sistemas de control de velocidad prácticos.



**Figura 2.6** El cambio de velocidad entre dos instantes de muestreo. Cuando el par de carga permanece constante durante el intervalo  $[(n-1)T, nT]$ , el cambio de velocidad es lineal.

La ecuación de diferencias (2.11) es transformada en la Ec. (2.12), relacionando la transformada  $z$  de las muestras de la velocidad del eje  $\omega(z)$  y la señal de la retroalimentación de velocidad  $\omega^{FB}(z)$ .

$$\omega^{FB}(z) = \frac{1}{2}\omega(z) + \frac{z^{-1}}{2}\omega(z) \quad (2.12)$$

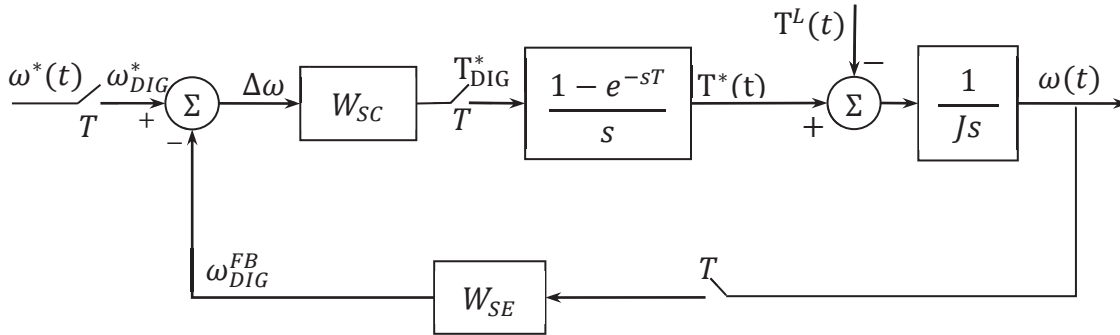
Finalmente, la función de transferencia al pulso  $W_{SE}(z)$  de la medición de la velocidad del sistema es dada en la Ec. (2.13)

$$W_{SE}(z) = \frac{\omega^{FB}(z)}{\omega(z)} = \frac{z+1}{2z} \quad (2.13)$$

## 2.4 Función de Transferencia al Pulso del Sistema en Lazo Cerrado

La función de transferencia de lazo cerrado  $W_{SS}(z)$  representa la transición de la entrada de referencia  $\omega^*(z)$  a la velocidad de salida  $\omega(z)$ . Los polos y ceros y el ancho de banda de lazo cerrado de  $W_{SS}(z)$  definen el comportamiento de cada instante de tiempo. En esta sección es obtenida la función de transferencia de lazo cerrado para un sistema con un control digital de velocidad, dado en la Figura 2.5. Con el propósito de obtener la función de

transferencia, el sistema de la Figura 2.5 es considerado para señales pequeñas de entrada y el límite del par puede ser despreciado. La ganancia del actuador de par  $K_m$  multiplica la salida del controlador de velocidad PI, por ejemplo, resultando en una ganancia proporcional e integral efectiva siendo multiplicada  $K_m$  veces. Asumiendo que el actuador de par tiene una ganancia  $K_m = 1$ , el diagrama de bloques simplificado del sistema del lazo cerrado se muestra en la Figura 2.7.

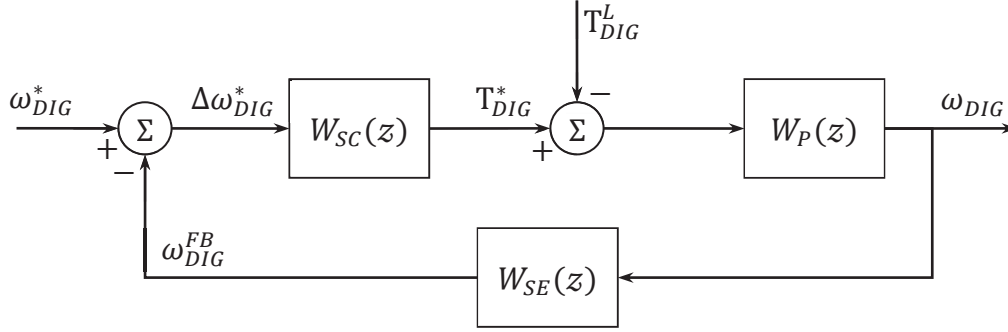


**Figura 2.7** Control de velocidad con actuador de par ideal, donde  $K_M = 1$ . El control de velocidad trata con señales de tiempo discreto y el subsistema mecánico es descrito en términos de variables de dominio continuo.

El diagrama de bloques de señal mixta en la Figura 2.7 tiene señales tanto continuas como de tiempo discreto. La salida de tiempo continuo  $\omega(t)$  puede ser aproximada por un tren de muestras  $\omega(n)$ , la transformada  $z$  de tales muestras es  $\omega(z)$ . La función de transferencia de  $W_P(z)$  del subsistema mecánico es dado en la Ec. (2.8). Esta función relaciona las muestras de entrada del par del motor a las muestras de salida  $\omega(n)$ . La función de transferencia al pulso  $W_{SE}(z)$  de la Ec. (2.13) describe los cálculos que resultan en la señal de retroalimentación  $\omega_{DIG}^{FB}$ . Si introducimos  $W_P(z)$  y  $W_{SE}(z)$ , el diagrama de bloques asume la forma de la Figura 2.8, que comprende las señales de tiempo discreto.

Con el fin de obtener la función de transferencia de lazo abierto  $W_S(z) = W_{SC}(z)W_P(z)W_{SE}(z)$ , se requiere la función de transferencia al pulso  $W_{SC}(z)$  del controlador de velocidad. El controlador digital de velocidad  $W_{SC}(z)$  de la Figura 2.8 calcula las muestras de la referencia de par del tren de pulsos del error de velocidad  $\Delta\omega_{DIG}$ .





**Figura 2.8** Diagrama de bloques de un sistema de control de velocidad, comprendido por señales de tiempo discreto

La Ec. (2.2) provee la fuerza impulsora  $T_{(n)}^*$  como una suma ponderada de las muestras pasadas de  $\Delta\omega$  y  $T^*$ . El número de muestras anteriores involucradas y sus correspondientes coeficientes determinan la estructura y acciones del controlador digital de velocidad. Los controladores de velocidad con acciones de control proporcional e integral aumentan el rechazo de perturbaciones de carga, por consiguiente, asumiremos que la función de transferencia al pulso  $W_{SC}(z)$  incluye una versión de un control en tiempo discreto de la acción proporcional e integral.

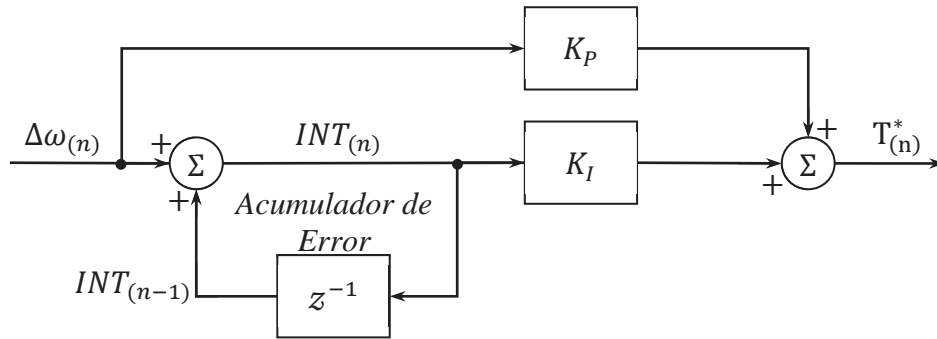
Un controlador de velocidad de tiempo discreto con acción proporcional e integral está dado por la Ec. (2.14).

$$T_{(n)}^* = K_P(\omega_{(n)}^* - \omega_{(n)}^{FB}) + K_I \sum_{j=0}^{j=n} (\omega_{(j)}^* - \omega_{(j)}^{FB}) \quad (2.14)$$

$$T_{(n)}^* = K_P \Delta\omega_{(n)} + K_I \sum_{j=0}^{j=n} \Delta\omega_{(j)}$$

La nueva muestra de salida  $T_{(n)}^*$  es calculada en el instante de muestreo  $t = nT$ . La acción integral en la forma discreta comprende la suma de las muestras  $\Delta\omega_{(j)}$ , empezando con  $\Delta\omega_{(0)}$  y terminando con  $\Delta\omega_{(n)}$ . Las ganancias de retroalimentación  $K_P$  y  $K_I$  son las ganancias proporcional e integral respectivamente. El ajuste de las ganancias debe dar lugar a acciones de control que lleven al error de velocidad hacia cero a lo largo de los periodos consecutivos de muestreo. Las ganancias de retroalimentación definen la función de transferencia de lazo abierto  $W_S(z)$  y el desempeño del sistema de lazo cerrado.

Una implementación directa de la ecuación previa, requiere de todas las muestras de velocidad  $\Delta\omega_{(j)}$  adquiridas en el intervalo  $[0 \dots nT]$ . Un microcontrolador no puede almacenar todas estas muestras en la memoria. Un enfoque más práctico consiste en asignar una localidad de memoria dedicada para la suma de los errores de velocidad ( $INT_{(n)}$  en la Figura 2.9).



**Figura 2.9** Implementación de control de velocidad con acción proporcional e integral. La salida  $INT_{(n)}$  del integrador de tiempo discreto representa la suma de las muestras anteriores.

En el instante  $t = nT$ , el acumulador  $INT$  es incrementado por  $\Delta\omega_{(n)}$ . Multiplicado por  $K_I$ , el acumulador de error proporciona la acción integral del controlador de velocidad. En la Figura 2.9, la referencia de par  $T_{(n)}^*$  es calculado como  $K_I INT_{(n)} + K_P \Delta\omega_{(n)}$ .

Si introducimos la función de transferencia  $(1 - z^{-1})^{-1}$  del integrador de tiempo discreto, la función de transferencia al pulso del controlador de velocidad en la Figura 2.9 esta dado por la Ec. (2.15)

$$W_{SC}(z) = \frac{T^*(z)}{\Delta\omega(z)} = K_P + K_I \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (2.15)$$

Una implementación alternativa del controlador PI de tiempo discreto es mostrada en la Figura 2.10. Los incrementos del par  $\Delta T_{(n)}^*$  son calculados en cada intervalo de muestreo y acumulados dentro del integrador discreto a la derecha de la Figura. Los incrementos de error son calculados como  $\Delta\omega_{(n)} - \Delta\omega_{(n-1)}$  y multiplicados por la ganancia proporcional obteniendo el incremento de la acción proporcional. El incremento de la acción integral es  $K_I \Delta\omega_{(n)}$ .

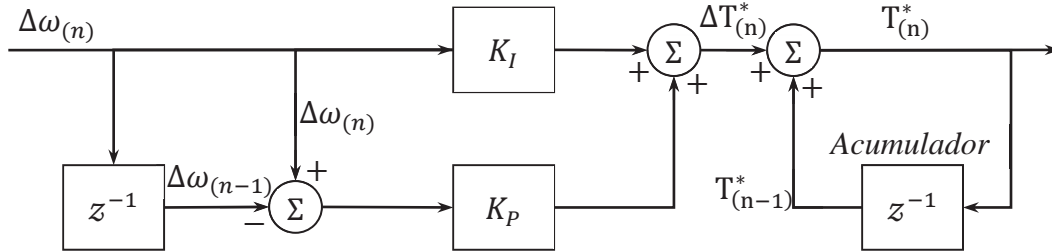
La operación de la estructura en la Figura 2.10 es descrita por la ecuación de diferencias (2.16).

$$T_{(n)}^* - T_{(n-1)}^* = K_P(\Delta\omega_{(n)} - \Delta\omega_{(n-1)}) + K_I\Delta\omega_{(n)} \quad (2.16)$$

Usando las propiedades de la transformada  $z$ , la ecuación algebraica (2.17) es obtenida, relacionando las transformadas  $z$  del error de velocidad y la referencia de par. De la Ec. (2.17), se encuentra la función de transferencia del controlador de velocidad  $W_{SC}(z)$ , y es esencialmente la misma ecuación que la Ec. (2.15).

$$T^*(z)(1 - z^{-1}) = K_P\Delta\omega(z)(1 - z^{-1}) + K_I\Delta\omega(z) \quad (2.17)$$

Por consiguiente, las dos implementaciones del controlador de velocidad indicadas en la Figura 2.9 y Figura 2.10 resultan en la misma función de transferencia. La forma incremental tiene algunas ventajas en el manejo de condiciones de operación donde el par del motor alcanza los límites del sistema.



**Figura 2.10** El control de velocidad con acciones de control proporcional e integral implementado en la forma incremental. Los incrementos de par  $T_{(n)}^*$  son acumulados en el integrador discreto de la derecha.

Si introducimos  $W_P(z)$  de la Ec. (2.8) y  $W_{SE}(z)$  de la Ec. (2.13) y consideramos la función de transferencia al pulso del controlador de velocidad de la Ec. (2.15), la función de transferencia de lazo cerrado  $W_{SS}(z)$  del sistema en la Figura 2.8, obtenemos la Ec. (2.18).

$$W_{SS}(z) = \frac{\omega(z)}{\omega^*(z)} \Big|_{T^L=0} = \frac{W_{SC}(z)W_P(z)}{1 + W_{SE}(z)W_{SC}(z)W_P(z)}$$

---


$$W_{SS}(z) = \frac{z(K_P(z-1) + K_I z) \frac{T}{J}}{z(z-1)^2 + \frac{T}{2J}(K_P(z-1) + K_I z)(z+1)} \quad (2.18)$$

$$W_{SS}(z) = \frac{(K_P + K_I) \frac{T}{J} z^2 - K_P \frac{T}{J} z}{z^3 - \left(2 - K_P \frac{T}{2J} - K_I \frac{T}{2J}\right) z^2 + \left(1 + K_I \frac{T}{2J}\right) z - K_P \frac{T}{2J}}$$

La función de transferencia del sistema de lazo cerrado es obtenida como  $\omega(z)/\omega^*(z)$  en condiciones cuando  $T_{DIG}^L = 0$ . Esta tiene dos ceros y tres polos de lazo cerrado

La señal  $T_{DIG}^L$  en la Figura 2.8, representa el tren de muestras de  $T_{(n)}^L$ , en donde cada muestra representa el valor promedio del par de carga en el intervalo de muestreo  $T$ . La transformada  $z$  de este tren de pulsos es la imagen compleja del par de carga  $T^L(z)$ . Con  $\omega_{DIG}^* = 0$  y en presencia de las perturbaciones de carga, la velocidad de salida se encuentra con  $\omega(z) = W_{LS}(z)T^L(z)$ , siendo  $W_{LS}(z)$  la función de transferencia de la perturbación, que refleja la sensibilidad de la salida a las perturbaciones de carga como se observa en la Ec. (2.19).

$$W_{LS}(z) = \left. \frac{\omega(z)}{T^L(z)} \right|_{\omega^*=0} = \frac{-W_P(z)}{1 + W_{SE}(z)W_{SC}(z)W_P(z)}$$

$$W_{LS}(z) = \frac{-\frac{T}{J}z^2 + \frac{T}{J}z}{z^3 - \left(2 - K_P \frac{T}{2J} - K_I \frac{T}{2J}\right) z^2 + \left(1 + K_I \frac{T}{2J}\right) z - K_P \frac{T}{2J}} \quad (2.19)$$

El denominador de  $W_{SS}(z)$  y  $W_{LS}(z)$  es el polinomio característico  $f(z)$  del sistema. Las raíces de la ecuación  $f(z) = 0$  representan los polos de lazo cerrado. Se observa que en la Ec. (2.18) y en la Ec. (2.19), las ganancias de retroalimentación  $K_P$  y  $K_I$  aparecen multiplicadas por el factor  $T/2J$ . Por consiguiente, es conveniente introducir ganancias normalizadas  $p$  e  $i$  que se definen en la Ec. (2.20).

$$p = K_P \frac{T}{2J}, \quad i = K_I \frac{T}{2J} \quad (2.20)$$


---

---

Si introducimos  $p$  e  $i$  en las expresiones previas, las funciones de transferencia de lazo cerrado  $W_{SS}(z)$  y  $W_{LS}(z)$  asumen la forma siguiente:

$$W_{SS}(z) = \frac{2(p+i)z^2 - 2pz}{z^3 - (2-p-i)z^2 + (1+i)z - p} \quad (2.21)$$

$$W_{LS}(z) = -\frac{T}{J} \frac{z^2 - z}{z^3 - (2-p-i)z^2 + (1+i)z - p}$$

## 2.5 Polos de Lazo Cerrado y los Efectos de los Ceros de Lazo Cerrado

El polinomio característico  $f(z)$  se encuentra en el denominador de la Ec. (2.21), las tres raíces del polinomio  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  son los polos de lazo cerrado, determinan el carácter y la velocidad de la respuesta al escalón. En la Ec. (2.22),  $f(z)$  es expresado en términos de sus raíces.

$$f(z) = z^3 - (2-p-i)z^2 + (1+i)z - p$$

$$f(z) = (z - \sigma_1)(z - \sigma_2)(z - \sigma_3) \quad (2.22)$$

$$f(z) = z^3 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)z^2 + (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)z - \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

Si igualamos los coeficientes de la primera y tercera ecuación del conjunto de ecuaciones (2.22), se obtiene un conjunto de tres ecuaciones (Ec. (2.23)) que relacionan los polos de lazo cerrado con las ganancias de retroalimentación normalizadas  $p$  e  $i$ .

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 2 - p - i$$

$$\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = i + 1 \quad (2.23)$$

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = p$$

Observamos que la colocación arbitraria de los polos no es factible, ya que los tres polos están sintonizados por sólo dos parámetros ajustables.

El numerador de la función de transferencia  $W_{SS}(z)$  está dado en la Ec. (2.23). Este polinomio de segundo orden, tiene dos ceros. Las raíces de la ecuación  $num(z) = 0$  son los ceros de lazo cerrado de la función de transferencia.

---

---


$$\text{num}(z) = 2(p + i)z^2 - 2pz \quad z_1 = \frac{p}{p + i}, \quad z_2 = 0 \quad (2.24)$$

El cero  $z_2$  se encuentra en el origen y designa el adelanto de un intervalo de muestreo  $T$ . Por lo tanto, la presencia de  $z_2$  es benéfica ya que reduce los retrasos introducidos por el polinomio de tercer orden del denominador  $f(z)$ . El cero de lazo cerrado  $z_1$  es positivo y real y se encuentra dentro del círculo unitario, por consiguiente, este se corresponde al lado negativo del eje real en el plano  $s$ , por lo tanto, el sistema se comportará de manera estable.

El cero de lazo cerrado  $z_1$  contribuye a la acción derivativa de la función de transferencia, este carácter diferencial de  $W_{SS}(z)$  enfatiza el flanco ascendente de la entrada y de las perturbaciones de la carga. Cambios abruptos en el par del motor, producidos por la acción derivativa, tienen efectos adversos en el subsistema mecánico y contribuyen con el desgaste de los elementos de la transmisión.

El cero de lazo cerrado  $z_1$  contribuye con sobreimpulsos de la respuesta del sistema al escalón. Para observar estas condiciones de comportamientos enseguida se presenta la simulación del sistema de lazo cerrado.

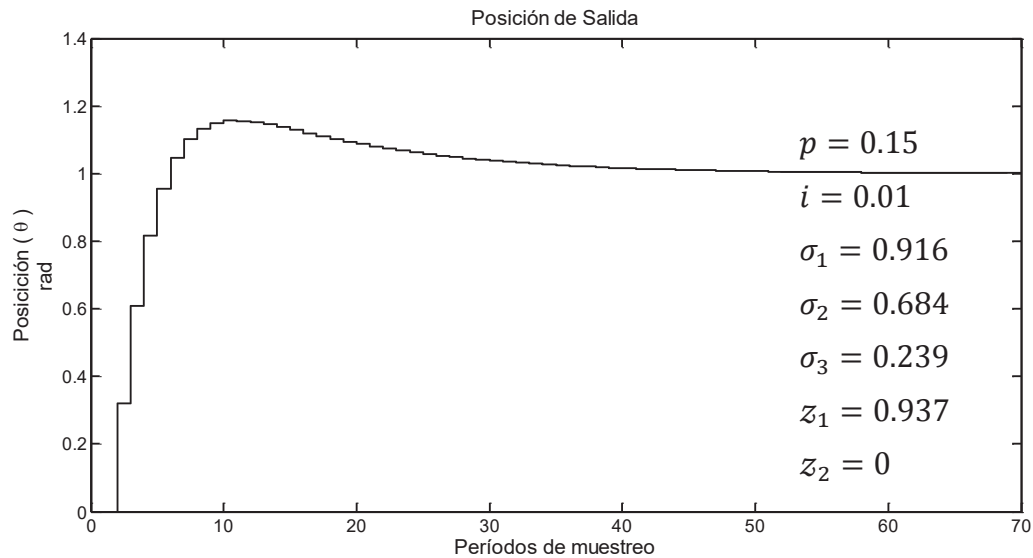
En la Figura 2.11 se muestra la respuesta al escalón obtenida con los polos  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  y los ceros  $z_1$  y  $z_2$ , obtenidos con los parámetros propuestos  $p = 0.15$  e  $i = 0.01$ , los valores de los polos, ceros y la respuesta al escalón son obtenidos con Matlab, con los comando que se muestran en la Tabla 2.1

**Tabla 2.1** Secuencia de comandos de Matlab para calcular los polos y ceros de lazo cerrado y obtener la respuesta al escalón de la función de transferencia  $W_{SS}(z)$ .

---

|                                 |  |
|---------------------------------|--|
| >> p=0.15, i=0.01               | % Establecimiento de ganancias $p$ e $i$ .                 |
| >> den = [1 -(2-p-i) (1+i) -p]; | % Polinomio $f(z)$ definido como den de Ec. 2.22           |
| >> num = [2*(p+i) -2*p 0];      | % Numerador $\text{num}(z)$ definido como num              |
| >> roots(num);                  | % Calcula los ceros de $f(z)$ (polos de lazo cerrado)      |
| >> roots(den);                  | % Calcula ceros de $\text{num}(z)$ (ceros de lazo cerrado) |
| >> response = dstep(num,den);   | % Muestras de respuestas al escalón que son                |
| >>                              | obtenidas % con la función dstep de Matlab y               |
| >>                              | almacenadas en él % arreglo response.                      |
| >> stairs(response),grid;       | % Trazado de la respuesta al escalón.                      |

---



**Figura 2.11** La respuesta de la función de transferencia del sistema de lazo cerrado  $W_{SS}(z)$  expresada en la Ec. (2.21) para los parámetros de retroalimentación  $p = 0.15$  e  $i = 0.01$ .

Todos los polos de lazo cerrado en la Figura 2.11 son reales y positivos. En ausencia de polos negativos complejos conjugados, se espera una respuesta al escalón no oscilatoria. Sin embargo, la presencia del cero real  $z_1$  contribuye al sobreimpulso. En numerosas aplicaciones de servomotores, no es aceptable sobrepasar la referencia. Un sobreimpulso en este tipo de sistemas puede llevar a la carga mecánica y sus partes vitales, tales como las herramientas, a una posición en donde pueden colisionar con otros objetos que se encuentren operando en sus alrededores y ocasionar daños. Si consideramos la respuesta al escalón de la Figura 2.11, el par del motor debe de ser negativo hacia el final del transitorio, que resulta en una fase de desaceleración para eliminar el exceso de velocidad. Cambios frecuentes en el signo del par del motor enfatizan una reacción adversa en el motor, que conlleva un desgaste y reduce la capacidad de control de la velocidad y la posición de la carga.

Para observar la relación entre el cero  $z_1$  y el sobreimpulso, enseguida, la respuesta al escalón del sistema es obtenida con el mismo polinomio característico de la Ec. (2.22), pero sin el cero  $z_1$ . La forma de onda resultante de la Figura 2.12 es no oscilatoria, sin sobreimpulso. La secuencia de comandos de Matlab para obtener la respuesta al escalón de la Figura 2.12 se encuentran en la Tabla 2.2

---

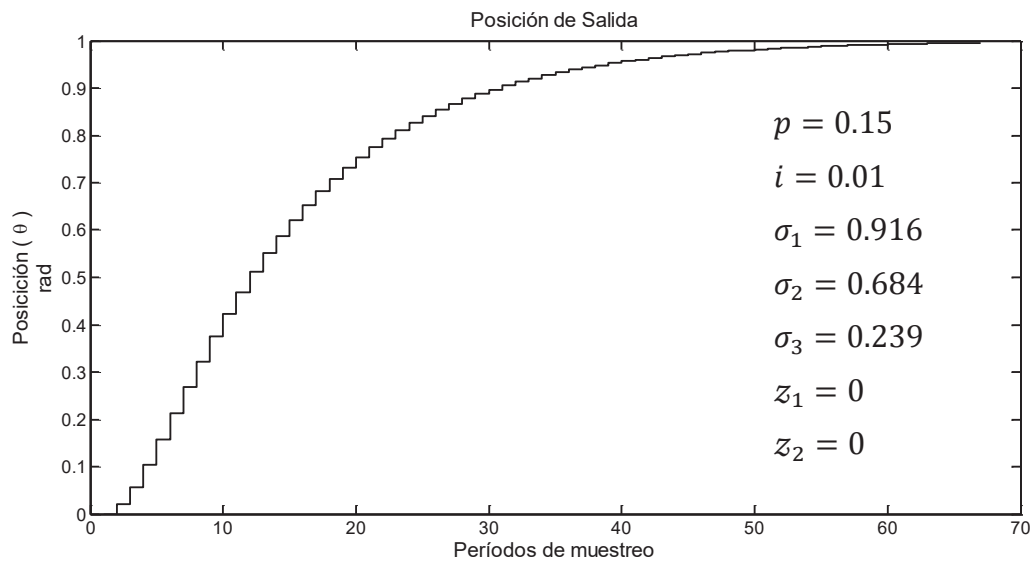
**Tabla 2.2** Secuencia de comando de Matlab usada para obtener la respuesta del sistema con dos polos reales y sin ceros.

---

|                                 |   |
|---------------------------------|---|
| >> p=0.15, i=0.01               | % Establecimientos de ganancias $p$ e $i$ .                 |
| >> den = [1 -(2-p-i) (1+i) -p]; | % Polinomio $f(z)$ definido en Ec. 2.22                     |
| >> num = [2*i 0 0];             | % Numerador $num(z)$ definido como num                      |
| >> roots(num);                  | % Calcula los ceros de $num(z)$ con $z_1 = 0$ y $z_2 = 0$ . |
| >> response = dstep(num,den);   | % Obtiene las muestras de respuesta.                        |
| >> stairs(response),grid;       | % Trazado de la respuesta al escalón.                       |

---

Una comparación de las respuestas al escalón obtenidas en la Figura 2.11 y la Figura 2.12 indican que los ceros reales positivos de lazo cerrado pueden contribuir al sobreimpulso en la respuesta al escalón, incluso en caso de que todos los polos de lazo cerrado sean reales. Por lo tanto, para evitar un sobreimpulso, el diseño de la función de transferencia del sistema de lazo cerrado de control de velocidad debe de establecerse sin ceros. La solución a este problema es la reubicación de la ganancia proporcional. [N. Vukosavic, 2007]



**Figura 2.12** Respuesta al escalón obtenida de la función de transferencia de lazo cerrado con  $num(z) = 2iz^2$  y con el polinomio característico  $f(z)$  expresado en la Ec. (2.22).



## 2.6 Reubicación de la Ganancia Proporcional

La ganancia proporcional del control de velocidad de la Figura 2.9 multiplica el error de velocidad, es decir, la acción proporcional se encuentra localizada en la trayectoria directa. Alternativamente, la estructura del control proporcional puede ser cambiada como se muestra en la Figura 2.13, en donde la ganancia proporcional  $K_P$  se encuentra en la trayectoria de retroalimentación y se multiplica por la velocidad retroalimentada.

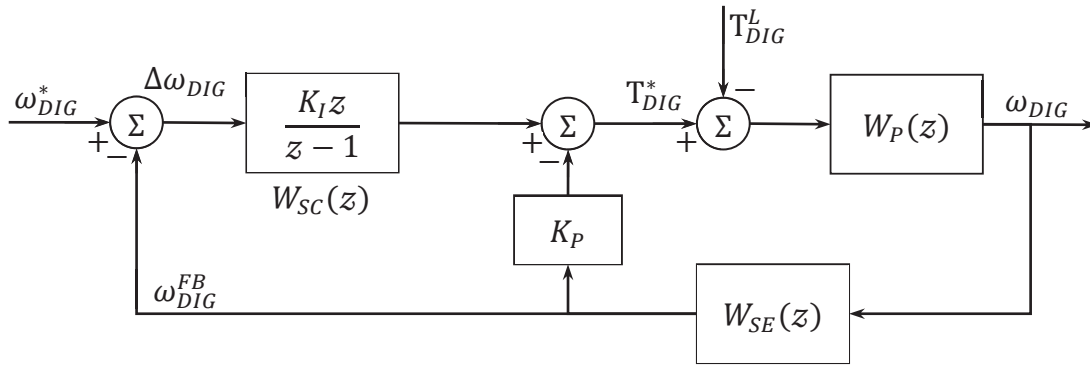


Figura 2.13 Control de velocidad en tiempo discreto con la ganancia proporcional reubicada en la trayectoria de retroalimentación.

Considerando la estructura del diagrama de bloques de la Figura 2.13 y asumiendo que el par de carga  $T_{DIG}^L = 0$ , entonces, la imagen compleja de la referencia de velocidad  $\omega^*(z)$  y la transformada  $z$  de la velocidad de salida  $\omega(z)$  son expresadas en la Ec. (2.25).

$$\omega(z)[1 + K_P W_{SE}(z) W_P(z) + W_{SC}(z) W_{SE}(z) W_P(z)] = W_{SC}(z) W_P(z) \omega^*(z) \quad (2.25)$$

La función de transferencia del sistema de lazo cerrado  $W_{SS}(z)$  con la ganancia proporcional reubicada es obtenida y se expresa en la Ec. (2.26).

$$W_{SS}(z) = \left. \frac{\omega(z)}{\omega^*(z)} \right|_{T^L=0} = \frac{W_{SC}(z) W_P(z)}{1 + W_{SE}(z) W_{SC}(z) W_P(z)} \quad (2.26)$$

$$W_{SS}(z) = \frac{K_I \frac{T}{J} z^2}{z^3 - \left(2 - K_P \frac{T}{2J} - K_I \frac{T}{2J}\right) z^2 + \left(1 + K_I \frac{T}{2J}\right) z - K_P \frac{T}{2J}}$$

Con la ganancia proporcional en la trayectoria de retroalimentación, las perturbaciones de entrada afectan el par del motor a través de la acción integral. Por lo tanto

---

los cambios en la entrada resultarán en fluctuaciones mucho más pequeñas de la referencia de par  $T^*$  y el esfuerzo ejercido en el subsistema mecánico será reducido. La implementación práctica del controlador se expresa en la Ec. (2.27).

$$\Delta T_{(n)}^* = T_{(n)}^* - T_{(n-1)}^* = K_p(\omega_{(n-1)} - \omega_{(n)}) + K_I \Delta \omega_{(n)} \quad (2.27)$$

$$T_{(n)}^* = T_{(n-1)}^* + \Delta T_{(n)}^*$$

Comparando las Ecs. (2.27) y (2.26), se observa la diferencia entre ambas es la acción proporcional, ya que en la Ec. (2.27) la acción proporcional multiplica las muestras de la velocidad del eje, en lugar de las muestras del error de velocidad del sistema.

Si introducimos las ganancias normalizadas  $p = K_p(T/2J)$  e  $i = K_I(T/2J)$ , la función de transferencia del sistema de lazo cerrado queda como se muestra en la Ec. (2.28).

$$W_{SS}(z) = \frac{2iz^2}{z^3 - (2 - p - i)z^2 + (1 + i)z - p} \quad (2.28)$$

Esto prueba que la reubicación de la ganancia proporcional  $K_p$  no cambia el polinomio característico, que mantiene la forma originada en la Ec. (2.22); el numerador tiene la forma  $num(z) = 2iz^2$ , por consiguiente, es removido el cero real  $z_1 = p/(p + i)$  y la función de transferencia de la Ec. (2.28), tiene dos ceros en el origen; la respuesta al escalón de este sistema es presentada en la Figura 2.12, la velocidad de salida tiene una forma no oscilatoria y sin sobreimpulso. Dependiendo de los requerimientos específicos, ambas implementaciones de los controladores de las ecuaciones (2.16) y (2.27) son aplicables en el campo, en nuestro caso consideramos la Ec. (2.27) como una aproximación a los objetivos de la presente investigación.

## 2.7 Cálculo de los Parámetros de Controladores Digitales de Velocidad

En esta sección, se evalúa la configuración de los parámetros ajustables de retroalimentación. El objetivo es lograr una respuesta no oscilatoria de la velocidad lo más rápida posible. El primer objetivo es formular una función criterio y expresarla en términos de parámetros de

---

---

retroalimentación, después, optimizaremos los valores de los parámetros de retroalimentación encontrados, para optimizar el valor de la función criterio.

### 2.7.1 Respuesta Estrictamente No Oscilatoria

Una respuesta estrictamente no oscilatoria impone las siguientes restricciones a los polos de lazo cerrado.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\sigma_1) = 0, \operatorname{Im}(\sigma_2) = 0, \operatorname{Im}(\sigma_3) = 0 \\ 0 < \operatorname{Re}(\sigma_1) < 1, 0 < \operatorname{Re}(\sigma_2) < 1, 0 < \operatorname{Re}(\sigma_3) < 1 \end{aligned} \tag{2.29}$$

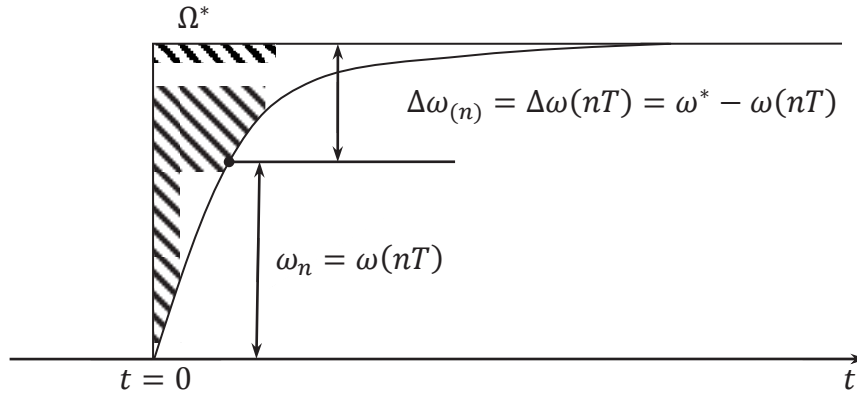
Bajo estas restricciones, en la Ec. (2.23) y la Ec. (2.29), las ganancias de retroalimentación deben de ser elegidas para que proporcionen una respuesta lo más rápida posible y un máximo ancho de banda de lazo cerrado. Un gran ancho de banda, permite la supresión de las fluctuaciones de velocidad causadas por las perturbaciones de la carga. En el dominio  $s$  la frecuencia de ancho de banda  $\omega_{BW}$  está relacionada con los polos de lazo cerrado. Por otra parte, el dominio  $z$  equivalente  $\sigma_m$  al polo equivalente  $s_m$  en el dominio  $s$ , es obtenido de  $\sigma_m = \exp(s_m T)$ , por consiguiente, para el intervalo de muestreo  $T$ , la frecuencia de ancho de banda  $\omega_{BW}$  es determinado por  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$ . Grandes anchos de banda son obtenidos en casos en los que los polos del dominio  $z$  se encuentran cerca del origen.

El periodo de muestreo tiene un efecto considerable en el ancho de banda  $\omega_{BW}$ . El ancho de banda de lazo cerrado es proporcional a la velocidad de muestreo  $f_s = 1/T$ , para los polos dados  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  del dominio  $z$ .

### 2.7.2 Formulación de la Función Criterio

El objetivo del procedimiento para el cálculo de parámetros se formulará en una función criterio expresada en términos de los parámetros de retroalimentación  $p$  e  $i$ . Las ganancias de retroalimentación se encuentran en el proceso de optimización, de acuerdo con la función criterio, respetando al mismo tiempo las restricciones dadas en la Ec. (2.23) y en la Ec. (2.29).

La Figura 2.14 presenta una respuesta al escalón estrictamente no oscilatoria de la velocidad del motor  $\omega(t)$ , las muestras del error de velocidad  $\Delta\omega_{(n)} = \omega^* - \omega(nT) = \Delta\omega(nT)$  son estrictamente positivas, ya que la velocidad no sobrepasa la referencia  $\Omega^*$ .



**Figura 2.14** Respuesta estrictamente no oscilatoria. La superficie sombreada representa a la integral del error de velocidad

El área sombreada en la Figura 2.14 puede servir como un indicador de la velocidad de respuesta, entre más rápida sea la respuesta menor es el área sombreada. La superficie  $S$  es definida por la integral de la Ec. (2.30).

$$S = \int_0^{+\infty} \Delta\omega(t) dt \quad (2.30)$$

Dada la naturaleza discreta del controlador, la superficie  $S$  puede ser expresada en términos de las muestras del error de velocidad  $\Delta\omega_{(n)}$ , por lo tanto, la integral  $S$  convierte en una sumatoria  $Q$ , que se expresa en la Ec. (2.31).

$$Q = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\omega(kT) \quad (2.31)$$

El valor de  $Q$  en esta ecuación representa la suma de todos las muestras de error comenzando cuando la posición de referencia empieza a subir. Este valor depende de las ganancias de retroalimentación y sirve como función criterio. La elección de los parámetros de retroalimentación ajustables debe de llevar a  $Q$ , a los valores más pequeños posibles para

---

las restricciones dadas. El cálculo de ganancias optimizadas debe de resultar en un valor mínimo de  $Q$ , manteniendo el carácter estrictamente no oscilatorio de la respuesta al escalón. Considerando la función de transferencia de sistema de lazo cerrado dada en la Ec. (2.28) y teniendo la transformada  $z$  del escalón de referencia  $\omega^*(z)$  dado como  $\Omega^*/(1 - z^{-1})$ , las muestras de error  $\Delta\omega_{(n)}$  son representadas por su imagen compleja  $\Delta\omega(z)$  dada en la Ec. (2.32).

$$\omega^*(z) = \frac{\Omega^*}{1 - z^{-1}} \quad (2.32)$$

El error de velocidad es calculado en el conjunto de ecuaciones (2.33) y expresado en términos de las ganancias normalizadas.

$$\begin{aligned} \Delta\omega(z) &= \omega^*(z) - \omega(z) = \omega^*(z)(1 - W_{SS}(z)) \\ \Delta\omega(z) &= \frac{\Omega^*}{1 - z^{-1}} \left( 1 - \frac{2iz^2}{z^3 - (2 - p - i)z^2 + (i + 1)z - p} \right) \\ \Delta\omega(z) &= \frac{z(z^2 + z(p - i - 1) + p)}{z^3 - (2 - p - i)z^2 + (i + 1)z - p} \Omega^* \end{aligned} \quad (2.33)$$

La imagen compleja de  $\Delta\omega(z)$  puede ser obtenida de las muestras de error  $\Delta\omega_{(n)}$  de acuerdo a la Ec. (2.34)

$$\Delta\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\omega_{(k)} z^{-k} \quad (2.34)$$

Con la función criterio siendo la suma de las muestras de error (Ec. (2.31)), el valor de  $Q$  es igual al valor de la imagen compleja  $\Delta\omega(z)$  calculada para  $z = 1$  es decir,

$$\Delta\omega(1) = \Delta\omega(z)|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\omega_{(k)} = Q \quad (2.35)$$

Aplicando los resultados de las Ec. (2.33) y de la Ec. (2.35), la función criterio puede ser expresada en términos de las ganancias normalizadas

---


$$Q = \Delta\omega(1) = \left[ \frac{1 + p - i - 1 + p}{1 - 2 + p + i + 1 + i - p} \right] \Omega^* = \left( \frac{p}{i} - \frac{1}{2} \right) \Omega^* \quad (2.36)$$

La función criterio puede ser minimizada aplicando las ganancias de retroalimentación  $p$  e  $i$  con la mínima relación  $p/i$  posible. La selección de ganancias es restringida por los requerimientos dada por (2.29), imponiendo polos de lazo cerrado reales y positivos ubicados dentro del círculo unitario. De lo anterior, ahora se puede formular la configuración de los parámetros optimizados para el controlador de velocidad discreto, con acción integral en la trayectoria directa y acción proporcional en la trayectoria de retroalimentación. Para una respuesta al escalón rápida y estrictamente no oscilatoria se debe de buscar que las ganancias proporcionen la mínima relación  $p/i$ , respetando al mismo tiempo las restricciones dadas por (2.29). En el desarrollo subsecuente, los valores optimizados de las ganancias normalizadas se encuentran mediante un procedimiento de búsqueda de un valor máximo de  $Q_1 = i/p = 1/Q$ .

### 2.7.3 Cálculo de los Valores Optimizados para las Ganancias Normalizadas

Encontraremos los valores optimizados de  $p$  e  $i$ , que resulte en una respuesta al escalón lo más rápida posible y estrictamente no oscilatoria. La relación entre los polos de lazo cerrado  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$ , y los valores de las ganancias normalizadas proporcional e integral, se encuentran dadas en tres ecuaciones relacionadas (Ec. (2.23)), sumando las tres ecuaciones, se obtiene una restricción que está expresada en la Ec. (2.37), lo cual restringe la ubicación de polos.

$$(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + (\sigma_1\sigma_2\sigma_3) = 3 \quad (2.37)$$

Con sólo dos parámetros ajustables de retroalimentación dos de los tres polos de lazo cerrado se pueden ajustar a voluntad, mientras que el tercero se establece como consecuencia del cálculo de la Ec. (2.37). La ganancia proporcional e integral puede ser expresada en términos de los polos de lazo cerrado, usando la segunda y la tercera expresión de la Ec. (2.23), la función criterio  $Q_1 = i/p$  puede expresarse en términos de los polos de lazo cerrado de la siguiente ecuación [N. Vukosavic, 2007]

---


$$Q_1 = \frac{i}{p} = \frac{\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 - 1}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} \quad (2.38)$$

Haciendo  $x = 1/\sigma_1$ ,  $y = 1/\sigma_2$  y  $v = 1/\sigma_3$ , dadas las restricciones por la Ec. (2.29), los valores de  $x, y$  y  $v$  son números positivos más grandes que uno ( $x > 1$ ,  $y > 1$ ,  $v > 1$ ), con estos valores la expresión de la Ec. (2.37) toma la forma siguiente

$$xy + yv + vx + x + y + v + 1 = 3xyv \quad (2.39)$$

y por consiguiente la variable  $v$  puede expresarse en términos de  $x$  y  $y$

$$v(x, y) = \frac{xy + x + y + 1}{3xy - x - y - 1} \quad (2.40)$$

Resultando en la función criterio  $Q_1(x, y)$  reformulada como sigue

$$Q_1 = \frac{i}{p} = x + y + v(x, y) - xyv(x, y) \quad (2.41)$$

$$Q_1 = x + y + (1 - xy) \frac{xy + x + y + 1}{3xy - x - y - 1} \quad (2.42)$$

En este punto es necesario encontrar los valores de  $x$  y  $y$  que resulten en el máximo valor posible de  $Q_1(x, y)$ . Los argumentos reales positivos de  $x$  y  $y$  tienen sus valores dentro del intervalo  $[1 \dots +\infty]$ . Se puede demostrar que la función  $Q_1(x, y)$  no tiene un máximo en los límites del intervalo, de la Ec. (2.37) como sigue [N. Vukosavic, 2007]

- Con  $x = y = +\infty$ , los polos de lazo cerrado  $\sigma_1 = 1/x$  y  $\sigma_2 = 1/y$ , están en el origen, mientras que el tercer polo permanece fuera del círculo unitario  $\sigma_3 = 3$  causando inestabilidad.
- Cuando  $x = y = 1$ , los polos de lazo cerrado  $\sigma_1 = 1/x$  y  $\sigma_2 = 1/y$ , se encuentran sobre el círculo unitario del plano  $z$ , y se mapean en el dominio  $s$  como  $s_{1/2} = 0$ , introduciendo doble integrador dentro de la función de lazo cerrado y la respuesta al escalón no converge hacia la referencia.
- Con cualquier  $x = 1, y = +\infty$  o  $y = 1, x = +\infty$ , el tercer polo  $\sigma_3 = 1/v$  se ubica sobre el círculo unitario ( $\sigma_3 = 1$ ), resultando en un polo equivalente del

---

dominio  $s$  en  $s_3 = 0$  que conlleva a la falta de convergencia de la velocidad de salida hacia la referencia.

Por lo tanto, la función criterio  $Q_1(x, y)$ , tiene su valor máximo o mínimo en el interior de la región en el plano  $x - y$  definido por  $x \in [1 \dots + \infty]$  y  $y \in [1 \dots + \infty]$ . Puesto que los extremos no residen en las fronteras de la región, sus coordenadas  $x_{OPT}$  y  $y_{OPT}$  pueden ser obtenidas igualando la primera derivada de  $Q_1(x, y)$  a cero

$$f_1(x, y) = \frac{\partial Q_1(x, y)}{\partial x} = 0, \quad f_2(x, y) = \frac{\partial Q_1(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (2.43)$$

Si aplicamos la derivación parcial, se obtiene las funciones  $f_1(x, y)$  y  $f_2(x, y)$

$$f_1(x, y) = \frac{(y - 1)^2(2xy - 3yx^2 + y + x^2 + 2x + 1)}{(3xy - x - y - 1)^2} = 0 \quad (2.44)$$

$$f_2(x, y) = \frac{(x - 1)^2(2yx - 3xy^2 + x + y^2 + 2y + 1)}{(3xy - x - y - 1)^2} = 0 \quad (2.45)$$

Sin tener en cuenta la solución  $(x = 1, y = 1)$  es necesario encontrar valores  $x > 1$  y  $y > 1$  que satisfagan las siguientes ecuaciones:

$$2xy - 3yx^2 + y + x^2 + 2x + 1 = 0 \quad (2.46)$$

$$2yx - 3xy^2 + x + y^2 + 2y + 1 = 0 \quad (2.47)$$

De la primera ecuación, la variable  $y$  puede ser expresada en términos de  $x$

$$y(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 2x - 1} \quad (2.48)$$

Sustituyendo en la segunda ecuación, obteniendo

$$4x \frac{(-1 - 4x - 6x^2 + 3x^4)}{(3x^2 - 2x - 1)^2} = 0 \quad (2.49)$$

La solución  $x = 0$  nos conduce a ceros inestables del polinomio característico de  $f(z)$ , las soluciones restantes se encuentran como las raíces de la siguiente ecuación



---


$$H(x) = 3x^4 - 6x^2 - 4x - 1 = 0 \quad (2.50)$$

Las cuatro raíces de la ecuación son:

$$x_1 = 1.7024$$

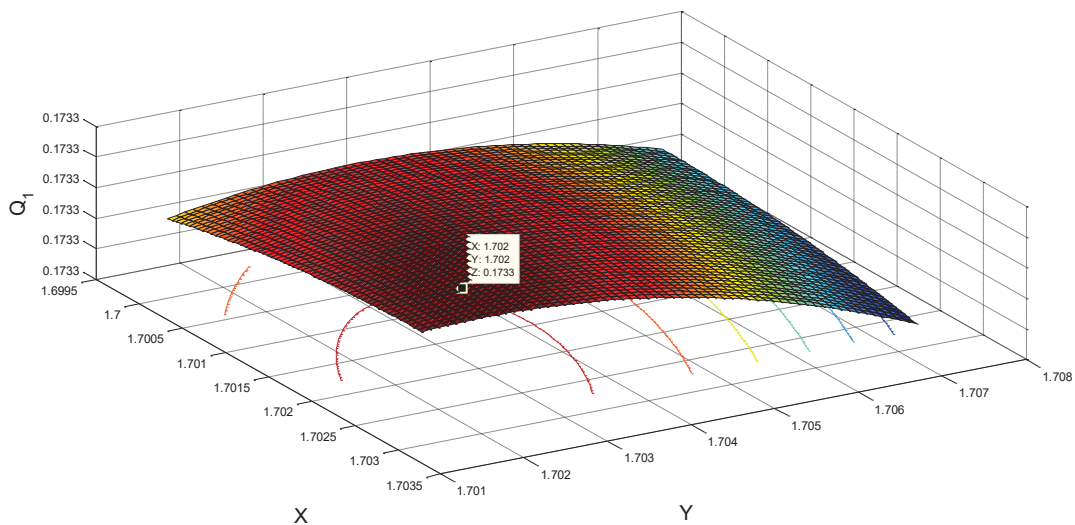
$$x_{2/3} = -0.3512 \pm j0.2692 \quad (2.51)$$

$$x_4 = -1$$

Dado que  $\sigma_1 = 1/x$  y debido a la restricción estrictamente no oscilatoria, son rechazadas las raíces  $x_2, x_3$  y  $x_4$ . Por lo cual utilizamos  $x_1 = 1.7024$  en la Ec. (2.48) y a su vez en la Ec. (2.40). Obtenemos:

$$x_{OPT} = y_{OPT} = v_{OPT} = 1.7024 \quad (2.52)$$

Se puede corroborar que este valor corresponde a un máximo de  $Q_1$ , al graficar la Ec. (2.42) observamos que el valor de  $x_1 = 1.724$  corresponde al maxcimo de  $Q_1$ . Este resultado se muestra en la Figura 2.15.



**Figura 2.15** Máximo de la función  $Q_1$  de la Ec.(2.42).

---

Consecuentemente, con el fin de obtener una respuesta al escalón rápida y estrictamente no oscilatoria, el polinomio característico asume la siguiente forma

$$f(z) = (z - \sigma_1)(z - \sigma_2)(z - \sigma_3) = (z - \sigma)^3 \quad (2.53)$$

Los valores optimizados de los polos de lazo cerrado  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  son

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma = \frac{1}{x_{OPT}} = 0.587 \quad (2.54)$$

y sus correspondientes valores de ganancias de retroalimentación normalizadas  $p_{OPT}$  e  $i_{OPT}$  se obtiene sustituyendo  $\sigma$  en (2.23) obteniendo

$$\begin{aligned} p_{OPT} &= \sigma^3 = 0.2027 \\ i_{OPT} &= 3\sigma^2 - 1 = 0.03512 \end{aligned} \quad (2.55)$$

Los valores de las ganancias normalizadas  $p_{OPT}$  e  $i_{OPT}$  se pueden utilizar para cualquier control PI de tiempo discreto, cualquiera que sea la planta y parámetros del actuador de par, siempre que el sistema mecánico pueda ser representado por la carga inercial y que los retrasos en el actuador de par sean despreciables. Las ganancias absolutas  $K_P$  y  $K_I$  dependen del periodo de muestreo  $T$  y de la inercia  $J$ :

$$K_{P_{OPT}} = 0.2027 \frac{2J}{T}, \quad K_{I_{OPT}} = 0.03512 \frac{2J}{T} \quad (2.56)$$

En casos en los que la inercia  $J$  es alterada en el momento de la ejecución, la Ec. (2.56) puede ser usada para el ajuste de las ganancias absolutas de acuerdo con los cambios de inercia.

En este punto, señalaremos algunos aspectos de la aplicación de los resultados expresados en las Ecs. (2.56) en la configuración de los parámetros de retroalimentación. En el diagrama de bloques de la Figura 2.7 del sistema de lazo cerrado, la referencia de velocidad, la señal de retroalimentación y el error de velocidad son expresados en  $[rad/s]$ ; la salida de la referencia de par en la misma figura es expresada en  $[Nm]$ . Como una consecuencia, las ganancias optimizadas expresadas en la Ec. (2.56), son expresadas en unidades  $[Nm/(rad/s)]$ , es decir, en términos de  $[Nm s/rad]$ , con esto, podemos asumir

---

que en la Figura 2.7 la ganancia  $K_M$  del actuador de par puede ser agregada dentro del bloque  $W_{SC}$ , suponiendo que el actuador de par tiene una ganancia  $K_M = 1$ .

En la Figura 2.16, se muestra el diagrama de bloques del sistema de control de velocidad, donde se introducen los coeficientes escalares  $K_{FB}$  y  $K_M$ , dichos coeficientes multiplican la función de transferencia de lazo cerrado y afectan la relación entre los valores de las ganancias optimizadas de retroalimentación  $K_p$  y  $K_i$  y sus contraparte normalizadas  $p$  e  $i$ . La expresión de la Ec. (2.57) establece los parámetros de retroalimentación. A fin de establecer las ganancias absolutas, es necesario tener los valores del período de muestreo  $T$ , la inercia  $J$  y los coeficientes de escalamiento  $K_{FB}$  y  $K_M$ .

$$K_{P_{OPT}} = 0.2027 \frac{2J}{T} \frac{1}{K_{FB}K_M}; \quad K_{I_{OPT}} = 0.03512 \frac{2J}{T} \frac{1}{K_{FB}K_M} \quad (2.57)$$

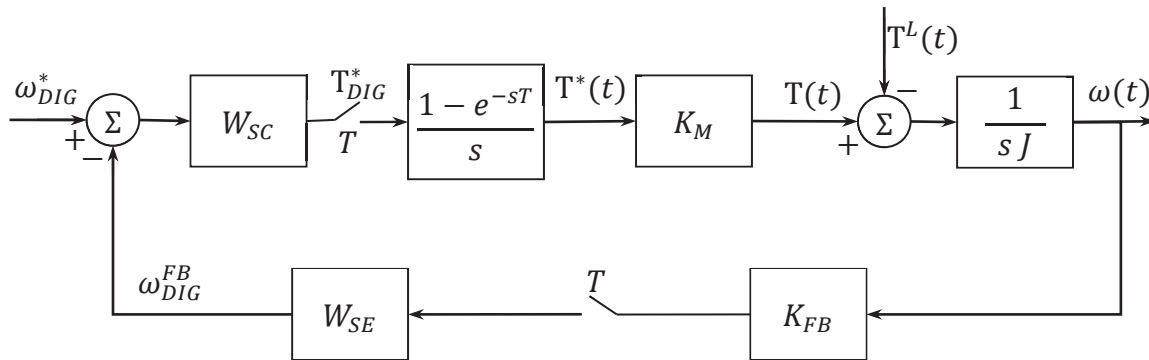


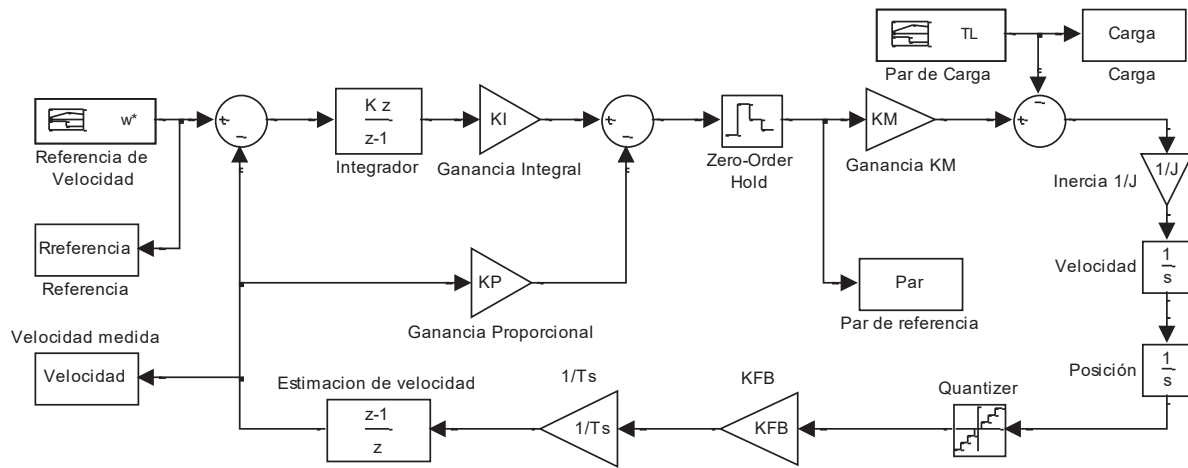
Figura 2.16 Control de velocidad digital, con los coeficientes escalares  $K_{FB}$  y  $K_M$

## 2.8 Evaluación del Desempeño en Simulación

Para verificar los resultados de la sección previa y además probar el comportamiento dinámico de los controladores digitales de velocidad, el sistema de la Figura 2.16 se simuló utilizando la herramienta Simulink de Matlab.

Utilizaremos la inercia con el valor de  $J = 4.2 \times 10^{-6} kg m^2$ , con un periodo de muestreo de  $T = 0.001 seg$ ,  $K_{FB} = 1$  y  $K_M = 1$ . Los valores de las ganancias  $K_{P_{OPT}}$  y  $K_{I_{OPT}}$  se obtienen sustituyendo los parámetros del motor en las ecuaciones (2.57). Los valores de la inercia, por máximo son obtenidos de los hoja de datos del motor GM9234S033. El modelo

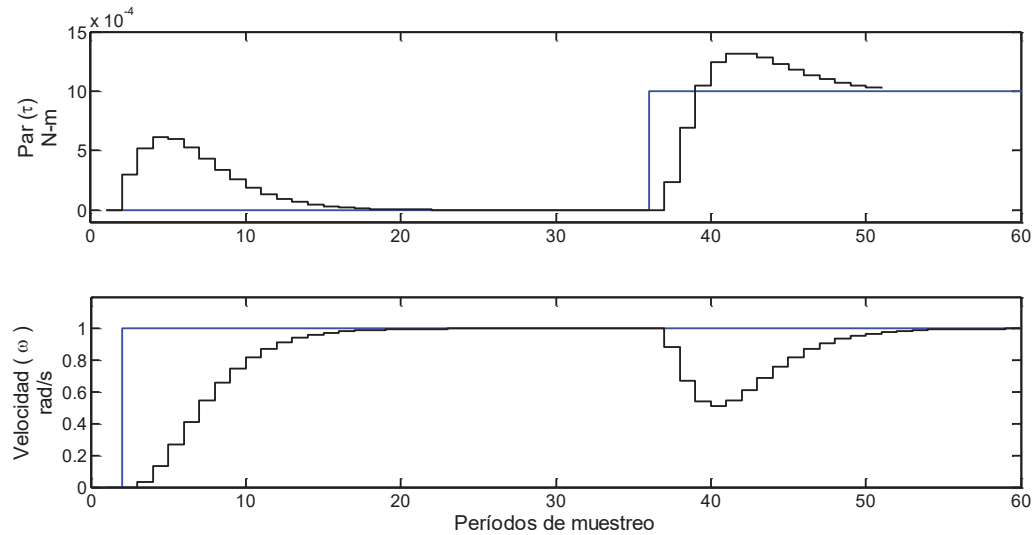
de Simulink mostrado en la Figura 2.17, es modelado de acuerdo al diagrama de bloques de la Figura 2.13.



**Figura 2.17** Modelo de Simulink de un sistema de control de velocidad, con un control PI digital. La ganancia proporcional es reubicada en la trayectoria de retroalimentación.

La acción integral procesa el error de velocidad, mientras que la ganancia de la acción proporcional multiplica la retroalimentación de velocidad. En el modelo, la referencia de velocidad y el par de carga suministran las entradas de excitación y perturbación del modelo respectivamente. Se observa que la señal de la retroalimentación de velocidad es estimada a partir de las muestras de posición del eje, de la manera en que se describió en la Ec. (2.9), por consiguiente, la retroalimentación de velocidad corresponde a la velocidad promedio en el periodo de muestreo pasado y difiere ligeramente de la velocidad real. El bloque *velocidad medida* y el bloque *par de referencia* capturan las muestras de la retroalimentación de velocidad y la referencia de par y las almacenan en los arreglos *velocidad* y *par* para el trazado de las gráficas.

En la Figura 2.18 se muestran las gráficas de la simulación de la retroalimentación de velocidad y de la referencia de par. En la simulación la referencia de velocidad es establecida con un valor  $\omega_{DIG}^* = 1$ , en la segunda mitad se establece el par de carga del sistema con un valor  $T_{DIG}^L = 0.001 Nm$ . Las ganancias de retroalimentación son establecidas de acuerdo a la Ec. (2.57), mientras que los efectos de la resolución finita son despreciados.



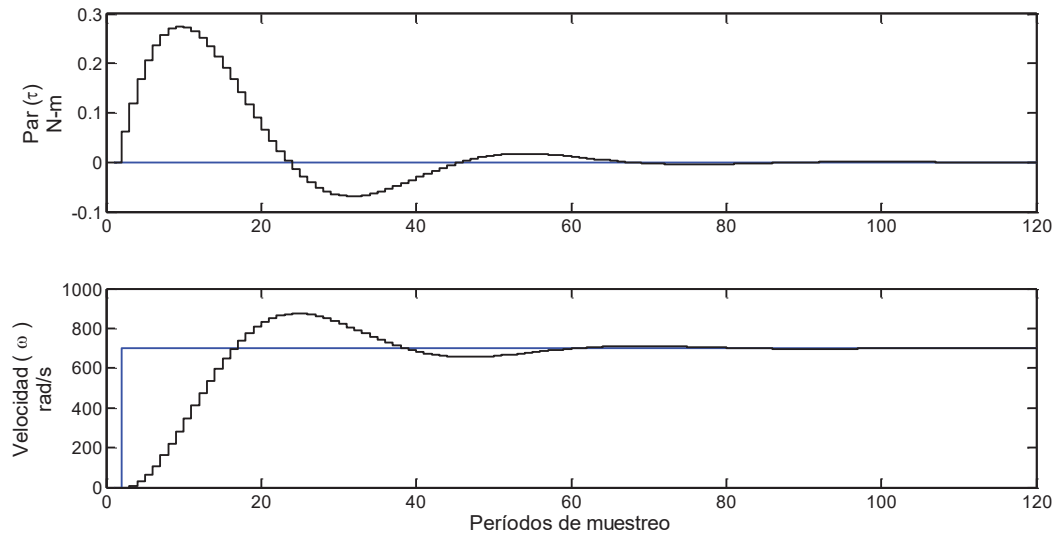
**Figura 2.18** Respuesta al escalón de entrada y al escalón del par de carga de un controlador de velocidad de tiempo discreto.

El modelo de simulación de la Figura 2.17 no toma en cuenta las no linealidades del sistema, como los límites del par de carga, por consiguiente, los trazos de la simulación obtenidos, corresponden a las condiciones de operación cuando la entrada y las perturbaciones de carga no tienen límites. Tales perturbaciones no implican que el transitorio del par del motor alcance los límites del servomotor, consecuentemente, los trazos de la Figura 2.18 corresponden al régimen lineal del sistema de controlador de velocidad.

La gráfica correspondiente a la velocidad del eje se muestra en la Figura 2.18, es estrictamente no oscilatoria y no contiene sobreimpulso. Mientras que la velocidad se aproxima a la referencia, el par no cambia de signo y se mantiene estrictamente positivo. En la respuesta al escalón del par de carga, el par del motor se incrementa en un intento de equilibrar el escalón de carga, mientras que la velocidad experimenta un hundimiento. En la fase final del transitorio, el par del motor excede el par de carga con el fin de proporcionar una aceleración para llevar a la velocidad hacia el valor de la referencia. Por consiguiente, el par del motor excede al par de carga para contra restar la caída de velocidad del sistema, lo cual no es una manifestación de un sobreimpulso en la velocidad, ya que la variable de control es la velocidad y no contradice el comportamiento estrictamente no oscilatorio esperado.

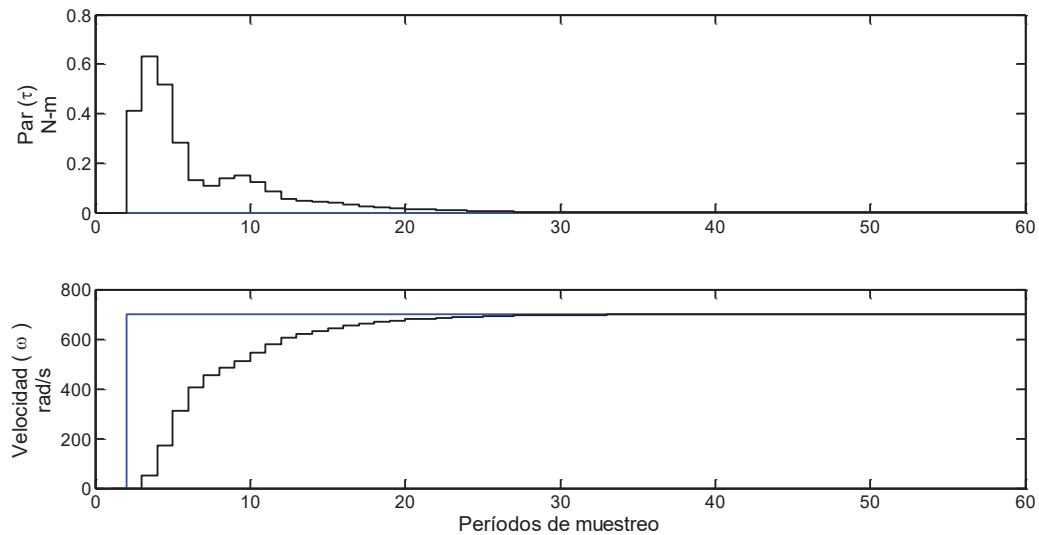
---

En caso de presentarse una variación en los valores de las ganancias del sistema de control de velocidad, considerando un decremento de las ganancias  $K_P$  y  $K_I$  en un 70%, tenemos el siguiente resultado.



**Figura 2.19** Respuesta del sistema al tener valores distintos en las ganancias.

Para un incremento en las ganancias del sistema se tiene el siguiente comportamiento.



**Figura 2.20** Comportamiento del sistema ante un incremento del 100% en las ganancias  $K_P$  y  $K_I$ .

## 2.9 Respuesta a Grandes Perturbaciones y el Fenómeno Wind-Up

La respuesta trazada en la Figura 2.18 corresponde al modo de operación lineal, donde la velocidad y el par del motor no alcanzan los límites del sistema. Cuando consideramos la respuesta al escalón de entrada, la amplitud del par transitorio es proporcional a la perturbación. Mientras el sistema permanece en el modo lineal, los cambios en la amplitud de la referencia de velocidad no afectarán el tiempo de subida y el tipo de respuesta. En su lugar, los trazos del par y la velocidad cambian en proporción del escalón de entrada. En cierto punto, el transitorio de par requerido alcanza el máximo par disponible. Cuando el par del motor es limitado a  $\pm T_{MAX}$ , un aumento adicional en la entrada llevará al sistema a un modo de operación no lineal.

En el diagrama de bloques de la Figura 2.21, se representa el límite del par  $\pm T_{MAX}$ , el cual es modelado como un bloque no lineal colocado a la salida del controlador de velocidad.

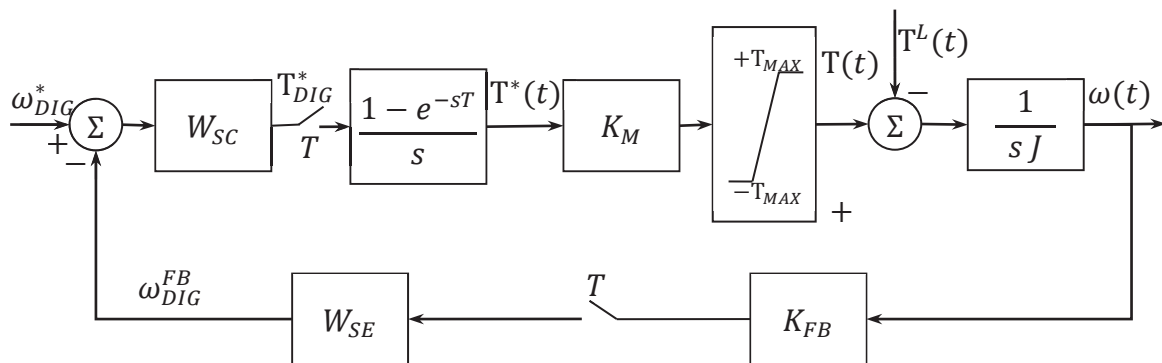


Figura 2.21 Sistema de control de velocidad con capacidad de par limitada.

Con el fin de simular la respuesta de un gran escalón de entrada, al modelo de Simulink del sistema del controlador de velocidad de la Figura 2.17 se le incluye un límite de par como se muestra en la Figura 2.22. El límite  $\pm T_{MAX} = 0.013736 Nm$  se toma de la hoja de datos del motor PittmanExpress GM9234S033.

Los resultados de la simulación, se muestran en la Figura 2.23, en la cual se muestra el par y la velocidad obtenidos con un gran escalón de entrada  $\Omega^* = 1500 rad$  para llevar al par del motor a la saturación. De igual manera, la amplitud de las perturbaciones consideradas  $\Omega^* = 1500 rad$  exceden los límites del par requeridos. Con el límite de par

activado, el sistema mostrado en la Figura 2.21 opera en modo no lineal, resultando en una respuesta transitoria distinta al caso lineal de la Figura 2.17.

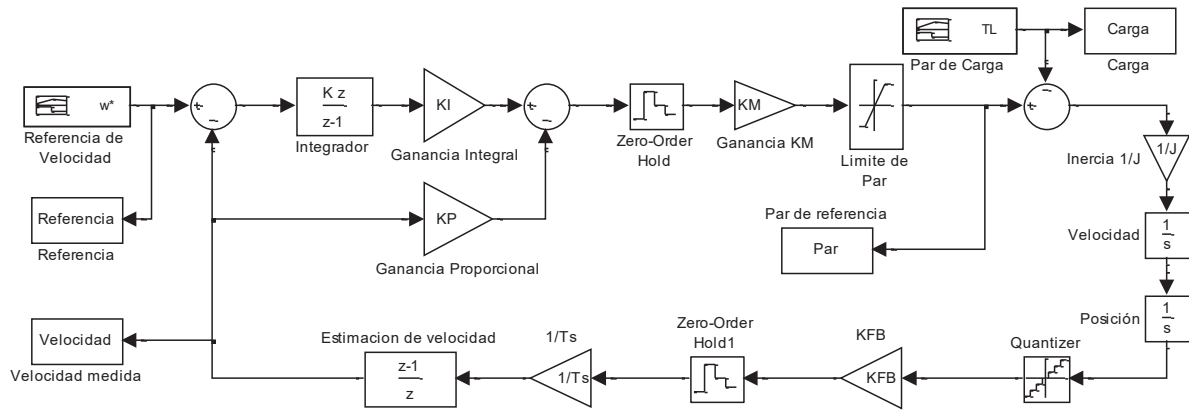


Figura 2.22 Modelo de Simulink de un sistema de control de velocidad, con un limitador del par.

En la Figura 2.23 el par del motor alcanza rápidamente el límite  $T_{MAX}$  y mantiene el mismo nivel durante aproximadamente 100 intervalos de muestreo.

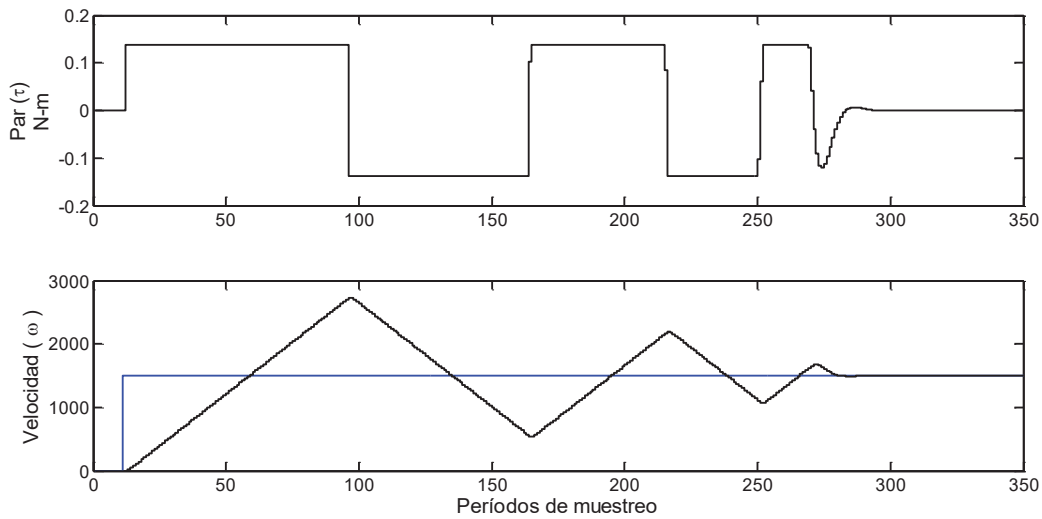
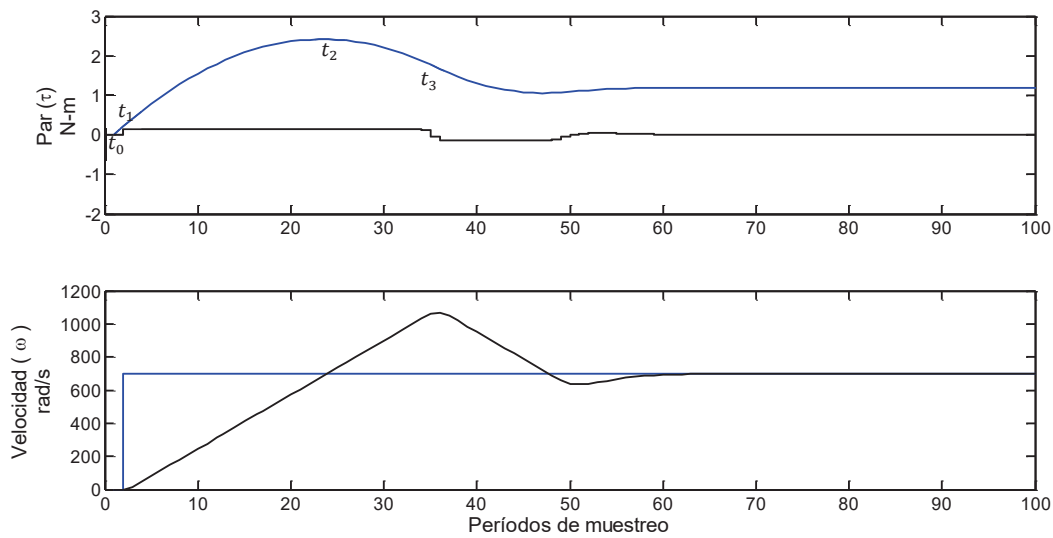


Figura 2.23 Respuesta de un escalón de entrada  $\Omega^* = 1500 \text{ rad}$ , el par entra en saturación, aunque los polos de lazo cerrado son para una respuesta estrictamente no oscilatoria, el elemento no lineal como el limitador de par da lugar a oscilaciones.



El par del motor se mantiene en el límite positivo incluso después de que la velocidad alcanza a la referencia, por lo tanto, la velocidad sobrepasa la referencia. Durante el transitorio, el par se mantiene en un valor absoluto de  $T_{MAX}$ , cambiando solo su signo de manera brusca, las oscilaciones de la velocidad son de forma triangular, con un decaimiento gradual de la amplitud e incremento de su frecuencia. El fenómeno de las oscilaciones en la Figura 2.23 es originada por una interacción entre los elementos no lineales del sistema, tal como el limitador de par y el integrador del error de velocidad contenido dentro del controlador de velocidad. Esta interacción perjudicial es conocida como *wind-up*.

El fenómeno *wind-up* es ilustrado en la Figura 2.24, que representa los trazos de la salida de integración del error y la referencia de par, estos trazos son obtenidos con una gran referencia de velocidad tipo escalón  $\Omega^* = 700 \text{ rad}$  y la velocidad del eje del motor.



**Figura 2.24** El fenómeno *wind-up* ilustrado, el cambio en la salida del error integrado en respuesta a grandes perturbaciones de entrada que va muy por encima de  $T_{MAX}$ . Mientras el error de integración decrece, la velocidad del eje del motor sobrepasa la referencia de velocidad.

En la Figura 2.24 el par electromagnético alcanza el nivel de  $T_{MAX}$  en el instante  $t_1$ , cuando la referencia de velocidad  $\Omega^*$  aparece en el sistema. En el intervalo  $[t_1 \dots t_2]$ , la entrada al integrador de error es positiva debido que  $\Delta\omega = \omega^* - \omega > 0$ . Por lo tanto, la salida del integrador se mantiene incrementando hasta el instante de tiempo  $t_2$ , cuando la velocidad del eje del motor alcanza la referencia de velocidad, el error de velocidad llega a

---

cero. Durante el mismo intervalo, el par se mantiene en el límite  $T_{MAX}$ . Con  $\Delta\omega(t_2) = 0$  sería conveniente llevar el par del motor a cero, esto mantendría la velocidad del eje del motor en el valor de la referencia de velocidad. Con la estructura del sistema de control de velocidad mostrado en las Figura 2.13 y Figura 2.22, este resultado no puede ser alcanzado ya que la integración del error se encuentra más allá del nivel de  $T_{MAX}$ . Para que el par electromagnético baje, debe de caer primero el error de velocidad del integrador. Dentro del intervalo  $[t_2 \dots t_3]$ , en la Figura 2.24 el par permanece en  $T_{MAX}$ , resultando en una aceleración continua, la velocidad sobrepasa la referencia y permanece incrementándose de manera lineal, por consecuencia el error de velocidad se convierte en negativo y el error de integración comienza a decrecer.

Los efectos causados por el fenómeno *wind-up* no son aceptables para el cumplimiento de los objetivos del presente trabajo, por consiguiente se deben de considerar medidas para eliminar el fenómeno *wind-up* en la integración de error. Tal medida es conocida como *Anti-Wind-Up* (AWU). Así que se considera la implementación de AWU con controladores PI con la forma incremental que describe la Figura 2.10 y la Ec. (2.16).

## 2.10 Mecanismo Anti-Wind-Up

Considerando la estructura del controlador con la implementación mostrada en la Figura 2.13 y Figura 2.9, las acciones proporcional e integral son calculadas en bloques separados e integrados en el punto de suma y después limitado por  $\pm T_{MAX}$ . El fenómeno *wind-up* ocurre cuando la salida de la integración del error va mucho más allá que el límite del par. Para evitar el fenómeno *wind-up* del integrador de error, se tomarán las siguientes medidas:

- Dentro de cada periodo de muestreo, nuevos valores tanto de la acción proporcional e integral se calcularán por separado.
- La suma de estas acciones será comparada con el límite del par.
- Cuando la suma exceda al límite del par en un valor  $\Delta T$ , la salida del integrador de error se decrementará en la misma cantidad.
- La suma de la acción proporcional y la acción integral ajustada, establecerán la referencia de par en el límite  $\pm T_{MAX}$ .

---

Los incrementos de la acción proporcional e integral son dados en la Ec. (2.9). En los casos en que la acción integral del control se encuentra en la trayectoria directa y procesa el error de velocidad y la acción de control proporcional es reubicada en la trayectoria de retroalimentación, los incrementos de par son expresados como:

$$\Delta T_{(n+1)}^* = T_{(n+1)}^* - T_{(n)}^* = K_P(\omega_{(n)} - \omega_{(n+1)}) + K_I \Delta \omega_{(n+1)} \quad (2.58)$$

Mientras la muestra  $T_{(n+1)}^*$  del par del motor es obtenida como la suma de los incrementos de par acumulados en el intervalo  $t \in [0 \dots (n+1)T]$ :

$$T_{(n+1)}^* = \sum_{k=0}^{n+1} \Delta T_{(k)}^* \quad (2.59)$$

En la forma incremental, la estructura del control de velocidad debe de calcular los incrementos de la acción proporcional e integral de acuerdo con la Ec. (2.58) y alimentarlos a la salida del integrador, como es mostrado a la derecha de la Figura 2.25. En la misma figura el integrador acumula los incrementos del par de acuerdo a la Ec. (2.59) y provee de la muestra de referencia de par  $T_{(n+1)}^*$ . El incremento de par  $\Delta T_{(n+1)}^*$  es alimentado desde el punto de suma  $S_1$  al punto de suma  $S_2$ , donde se le agrega el valor más reciente de la referencia de par  $T_{(n)}^*$ , obtenido en el instante de muestreo previo  $t = nT$ . La referencia de par más reciente es obtenida del bloque de retraso  $D_2$ , en la Figura 2.25. Se observa en la figura que el bloque de retraso  $D_2$  toma en cuenta el valor de la referencia de par procesada a través del limitador del par, asegurando que el par actual no exceda las capacidades del motor del sistema. La nueva señal de la referencia de par  $T_{(n+1)}^* = T_{(n)}^* + \Delta T_{(n+1)}^*$ , obtenida del punto de suma de la unión  $S_2$  y puede exceder el límite  $T_{MAX}$ . En este punto el limitador del par reducirá su magnitud, asegurando que el par del motor no sea excedido y que la línea de retraso  $D_2$  reciba la señal dentro de los límites de  $\pm T_{MAX}$ .

Cuando el par permanece dentro de los límites, el limitador del par de la Figura 2.25 actúa como un bloque de ganancia unitaria. En tales casos el bloque  $D_2$  y el punto de suma  $S_2$  constituyen un integrador, acumulando incrementos de par de acuerdo a la Ec. (2.59) y provee la referencia de par  $T_{(n+1)}^*$  para el sistema.

---

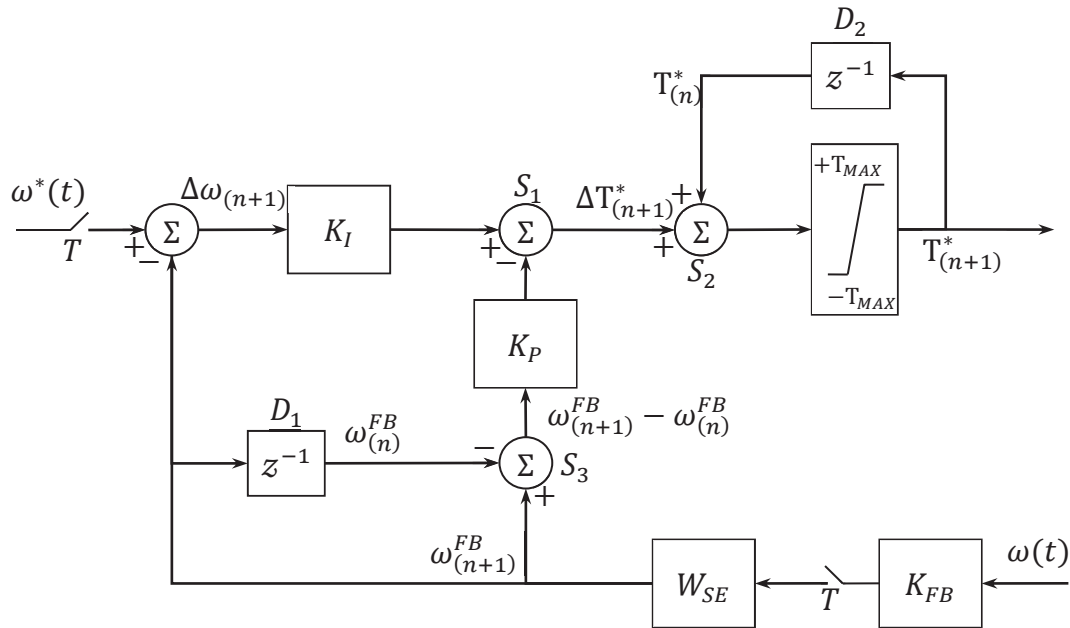


Figura 2.25 Forma incremental de un control de velocidad digital con acción proporcional reubicada en la trayectoria de retroalimentación, que elimina el fenómeno *wind-up*.

La operación del la estructura del controlador de la Figura 2.25 se evalúa por medio de la simulación del modelo mostrado en la Figura 2.17, modificada de modo que contenga un controlador de velocidad con una estructura Anti Wind Up de la Figura 2.25. En la Figura 2.26 se muestra el modelo del sistema con la estructura del controlador de velocidad, para su simulación con Matlab en la herramienta Simulink.

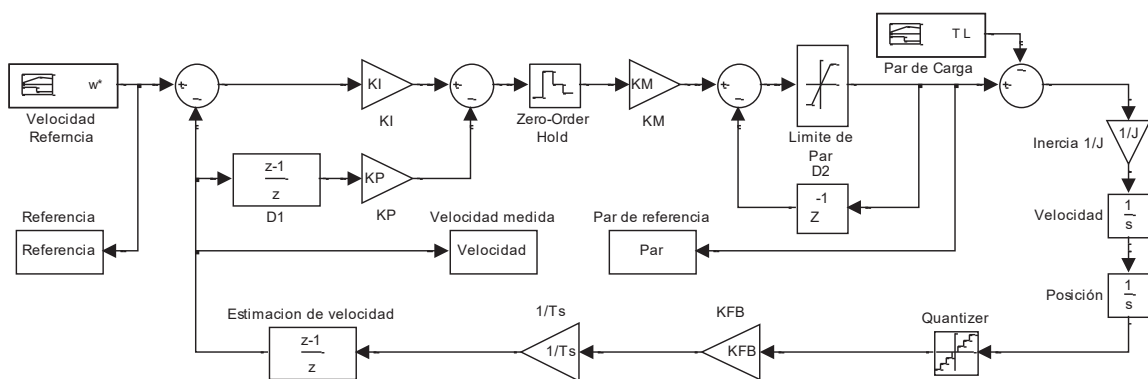
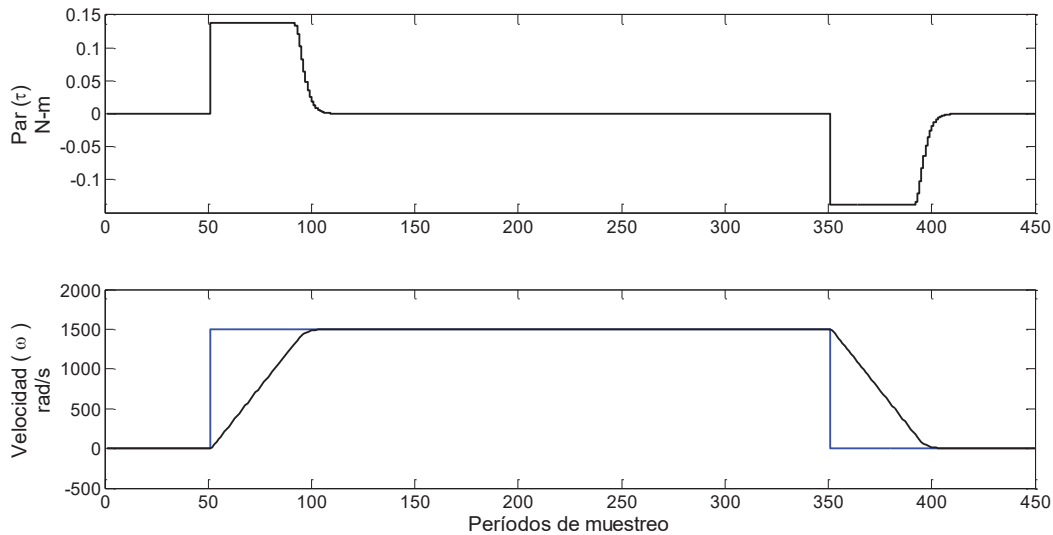


Figura 2.26 Simulación del modelo del control de velocidad de la Figura 2.25, con la acción proporcional en la trayectoria de retroalimentación. La implementación incremental comprende la estructura *Anti Wind Up*.

La respuesta del modelo es mostrada en la Figura 2.27. Contiene la respuesta del sistema a un gran escalón de velocidad de entrada  $\Omega^* = 1500\text{rad}$ , después de 50 periodos de muestreo y permanece de esa manera por 300 periodos de muestreo regresando finalmente a cero.



**Figura 2.27** Respuesta de un escalón de entrada  $\Omega^* = 1500\text{ rad}$ , obtenida con un control de velocidad de tiempo discreto PI con una implementación incremental y con una estructura de Anti Wind. Los trazos son obtenidos del modelo de Simulink de la Figura 2.26, y representan la referencia de par, la referencia de velocidad, y la velocidad de retroalimentación.

La velocidad del eje sigue la referencia, alcanzándola sin exhibir sobreimpulso en su respuesta, en este caso el par del motor cae a cero sin cambios de signo. De igual manera cuando la referencia cae a cero la velocidad del eje del motor sigue la caída de la referencia exhibiendo un par de frenado sin cambios de signo y sin sobreimpulso en su respuesta. Por consiguiente, con la estructura del controlador de la Figura 2.25, tenemos una respuesta del tipo estrictamente no oscilatoria, que se mantiene en casos en los que tenemos grandes perturbaciones de entrada.

Es importante mencionar el flujo de las señales en el control de velocidad durante el transitorio de la perturbación de entrada grande, dada la gran referencia de entrada, un error de velocidad de considerable magnitud, lleva rápidamente a la señal de par  $T_{(n)}^*$  al límite  $T_{MAX}$ . La velocidad acelera hacia la referencia con una pendiente constante  $T_{MAX}/J$ . Antes de

---

que la velocidad alcance la referencia, las muestras del error de velocidad son positivas, por consiguiente, el punto de suma  $S_1$  de la Figura 2.25 se mantiene generando incrementos positivos de  $\Delta T_{(n+1)}^*$ , el limitador rechaza cualquier incremento de par sobre el límite  $T_{MAX}$  y los incrementos de  $\Delta T_{(n+1)}^*$  no tienen efecto sobre  $T_{(n+1)}^* = T_{MAX}$ .

Con la velocidad del eje aproximándose a la referencia, el motor libera el par límite impuesto con una aceleración constante  $a = d\omega/dt$ . Los incrementos de velocidad en cada intervalo de muestreo son  $\omega_{(n+1)}^{FB} - \omega_{(n)}^{FB} = aT$ , por consiguiente, los incrementos de par  $\Delta T_{(n+1)}^*$  obtenidos en el punto  $S_1$  de la Figura 2.25 son negativos antes de que la velocidad alcance la referencia. La Ec. (2.58), indica que los incrementos de par cambian de signo cuando el error de velocidad residual son más pequeños que  $\Delta\omega = (K_P/K_I) \cdot aT$ . Más allá de este punto, el contenido del integrador  $D_2 + S_2$  disminuye. Con el limitador del par inactivo, el sistema opera de manera lineal. La caída del error de velocidad y el par es determinado por los polos del sistema de lazo cerrado, por consiguiente, el error de velocidad se reduce de  $\Delta\omega = (K_P/K_I) \cdot aT$  hacia cero de manera estrictamente no oscilatoria, que conduce a la ausencia de cualquier sobreimpulso. Cuando la velocidad se establece en la referencia el par llega a cero sin cambios de signo y el sistema entra en la condición de estado estable, interrumpido solamente por el próximo cambio en la referencia de velocidad. Esto prueba que la estructura de la Figura 2.23 elimina el fenómeno *wind-up* en el integrador de error y provee a una respuesta al escalón estrictamente no oscilatoria, incluso en casos en los que las perturbaciones de entrada son muy grandes.

## 2.11 Conclusiones

En el presente capítulo se analizó la estructura y modelado de un sistema de control de velocidad, se obtuvo la función transferencia del al pulso del sistema de lazo cerrado de donde se derivó la función transferencia del controlador digital de velocidad PI en forma directa y en forma incremental. También se obtuvieron los polos y ceros de lazo cerrado del sistema y se analizó su comportamiento. Se realizó la reubicación de la ganancia proporcional de un controlador de velocidad PI de lazo cerrado para la eliminación de los ceros del sistema de lazo cerrado, para el mejoramiento de la respuesta al escalón del sistema

---

de control de velocidad PI. De acuerdo a una respuesta estrictamente no oscilatoria se establecen las restricciones para los polos del sistema de lazo cerrado. Se realiza la formulación de una función criterio para el establecimiento de una respuesta estrictamente no oscilatorio del sistema de control de velocidad y de acuerdo a la función criterio calcular los valores de las ganancias normalizadas del sistema. Se realiza la evaluación del desempeño de las ganancias en el sistema por medio de la simulación del sistema de control de velocidad PI con la ganancia proporcional reubicada en la trayectoria de retroalimentación. El controlador de velocidad PI realiza el seguimiento de la velocidad de referencia para una respuesta al escalón unitario con un comportamiento estrictamente no oscilatorio como se esperaba, pero para grandes perturbaciones el control PI es incapaz de realizar el seguimiento de la referencia ya que presenta un comportamiento *Wind Up*.

Se analiza un mecanismo *Anti-Wind-Up* con un arreglo en el controlador de velocidad PI de manera incremental, este arreglo soluciona el comportamiento oscilatorio del control de velocidad para grandes perturbaciones de entrada, eliminando el fenómeno *Wind Up*.

La respuesta obtenida del control de velocidad PI con la ganancia proporcional reubicada en la trayectoria de retroalimentación es adecuada para de control de velocidad, ya que en la presente investigación se busca el control de posición estrictamente no oscilatorio para un motor, los resultados del presente capítulo no son adecuados para la aplicación deseada. En el siguiente capítulo analizaremos las estructuras y tipos de controladores de posición.





---

# Capítulo 3

## DISEÑO DE UN CONTROLADOR DIGITAL DE POSICIÓN

### 3.1 Introducción

El diagrama de bloques de la Figura 3.1 representa el actuador de par y el subsistema mecánico de un sistema de control de posición, la capacidad de par máximo  $T_{MAX}$  del actuador depende de los límites del motor y del convertidor de potencia. El subsistema mecánico en la figura es un integrador doble con salida  $\theta$ .

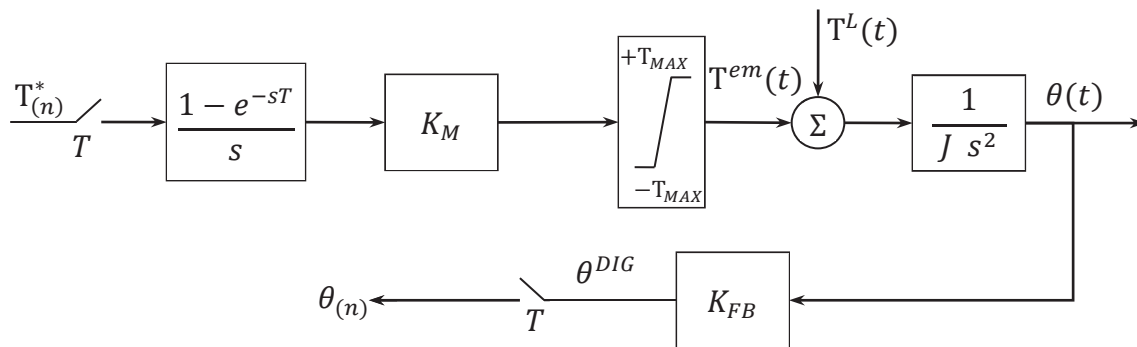


Figura 3.1 Actuador de par en el sistema de control

La retroalimentación de la posición es obtenida por medio de un codificador óptico. En la Figura 3.1, la variable  $\theta^{DIG}$  es una palabra digital que representa la posición de salida, la ganancia  $K_{FB} = \theta^{DIG} / \theta$  determina la relación entre la posición actual y su forma digital, esto depende del número de pulsos por vuelta del decodificador.

Un controlador de posición con un periodo de muestreo  $T$  adquiere las muestras de posición  $\theta(n)$  y calcula la referencia de par  $T^*(n)$  en cada instante de muestreo  $t = nT$ . El retenedor de orden cero proporciona la referencia de par de tal manera que el valor de  $T^*(n)$  se mantiene a través del periodo de muestreo, en el siguiente periodo de muestreo  $t = (n +$

---

1)  $T$ , la referencia de par es reemplazado por la muestra nueva de la referencia de par  $T_{(n+1)}^*$ . Si despreciamos los retrasos en el control del par del motor, el par real del motor  $T^{em}$  hará un seguimiento de la referencia  $K_M T^*$ , siempre que estos últimos se mantengan dentro de los límites del sistema  $\pm T_{MAX}$ .

Además de las limitaciones del par, la velocidad debe de ser limitada también. En el sistema de control de posición la velocidad no es explícitamente controlada, sin embargo la velocidad angular de las partes en movimiento y la velocidad de translación de las partes móviles tienen que ser limitadas a una velocidad máxima  $\pm \omega_{MAX}$ . El exceso de velocidad incrementa los riesgos de daños mecánicos debido al movimiento excéntrico de las partes girando y al desequilibrio de las partes en movimiento. Los rodamientos del motor y elementos de transmisión tienen una velocidad máxima permisible que puede limitar la velocidad máxima posible del posicionador, por lo tanto, la estructura y las acciones de control de los controladores de posición deben de ser diseñadas para asegurar que la velocidad experimentada durante los transitorios no exceda el rango permisible de velocidad  $\pm \omega_{MAX}$ .

Los límites de velocidad y par introducen no linealidades en el objeto de control, ya que cuando estos límites son alcanzados el sistema tiene un comportamiento no lineal. La operación de los sistemas de control de posición, será considerada primero para perturbaciones de entrada y de carga pequeñas, con transitorios de par y velocidad que permanezcan debajo de los límites del sistema. Basados en el análisis de los sistemas de control de posición dentro de un régimen lineal, se propone una estructura y parámetros con la finalidad de lograr un comportamiento estrictamente no oscilatorio, con la respuesta al escalón lo más rápida posible.

### **3.1.1 La Función de Transferencia al Pulso del Objeto de Control**

En el capítulo 2 en la sección 2.2 se definió la función transferencia del subsistema mecánico del control de velocidad, en esta sección se analizará la función transferencia del subsistema mecánico del control de posición.

---

Considerando el subsistema mecánico de la Figura 3.1 y asumiendo que la inercia  $J$  es conocida y el par de carga  $T^L(t)$  está disponible. Entonces el cambio en la posición de salida  $\theta$  es definido por la Ec. (3.1), como se planteo en el capítulo anterior en la Ec.(2.3).

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = J \frac{d\omega}{dt} = T^{em}(t) - T^L(t) \quad (3.1)$$

La posición del eje  $\theta$  se expresa en radianes, la velocidad del motor  $\omega = d\theta/dt$  es obtenida en  $[rad/s]$ , el cambio de velocidad en un periodo de muestreo y el correspondiente incremento en la posición puede ser expresado como sigue:

$$\omega_{(n+1)} = \omega_{(n)} + \frac{T}{J} K_M T_{(n)}^* - \frac{1}{J} \int_{nT}^{nT+T} T^L(t) dt \quad (3.2)$$

$$\theta_{(n+1)} = \theta_{(n)} + \int_{nT}^{nT+T} \omega(t) dt \quad (3.3)$$

El cálculo de  $\omega_{(n+1)}$  en la Ec. (3.2), requiere los valores de la referencia de par  $T_{(n)}^*$  y la muestra anterior de velocidad  $\omega_{(n)}$ . La velocidad también depende de las perturbaciones de carga  $T^L$  que puede exhibir cambios en el intervalo observado. La obtención de la función de transferencia al pulso, requiere de la conversión de las ecuaciones diferenciales en sus equivalentes ecuaciones de diferencias. La presencia de la integral en las ecuaciones (3.2) y (3.3) dificulta su conversión.

En la Ec. (3.2), la integral del par de carga representa el valor promedio en el intervalo de muestreo en cuestión, la Ec. (3.5), es por consiguiente reemplazada por la constante  $T_{(n)}^L$ , representando el valor promedio de  $T^L(t)$  en el intervalo  $[nT \dots (n+1)T]$ . El impacto del par de carga  $T^L(t)$  en el tren de pulsos  $\omega_{(n)}$  puede ser estudiado más a fondo considerando el tren de pulsos de  $T_{(n)}^L$ , que conforman los valores promedio de  $T^L(t)$  dentro de un periodo de muestreo (Ec. (2.5)). Los valores de la integral de la Ec. (3.3) puede ser expresada en términos de las muestras de velocidad  $\omega_{(n)}$  y  $\omega_{(n+1)}$  solamente en el caso cuando el cambio de la velocidad real  $\omega(t)$  entre los instantes de muestreo es lineal como se

---

---

indicó en la sección 2.3 (Figura 2.6, Ec. (2.11)). El cambio de velocidad es lineal solamente en casos cuando el par de carga  $T^L(t)$  no cambia en el intervalo  $[nT \dots (n+1)T]$ .

Debido a que el par de carga  $T^L(t)$  afecta la velocidad y la posición de salida, la elección del tiempo de muestreo  $T$ , tiene que ser considerado de tal manera que el controlador de posición pueda proporcionar un par de referencia con suficiente rapidez para compensar los cambios en la carga y eliminar los errores de posición. Con un adecuado periodo de muestreo  $T$ , las muestras de la referencia de par  $T_{(n)}^*$  se actualizan a una frecuencia de muestreo  $f_s = 1/T$ , compendo las fluctuaciones de las perturbaciones y mantiene la posición de salida en la trayectoria deseada.

Por los motivos citados arriba y discutidos en las secciones previas, el subsecuente análisis, asume que las variaciones de carga dentro del periodo de muestreo son despreciables y que el cambio de la velocidad entre los instantes de muestreo es lineal. Con este fin, la señal de perturbación del par de carga  $T^L(t)$  es asumida como constante en un intervalo de muestreo  $[nT, (n+1)T]$  e igual al valor promedio del par de carga  $T_{(n)}^L$  (Ec. (2.5)) y obtenida como:

$$T_{(n)}^L = \frac{1}{T} \int_{nT}^{nT+T} T^L(t) dt \quad (3.4)$$

Bajo esta suposición, la transición de velocidad del instante de muestreo  $nT$  al siguiente instante de muestreo se encuentra mediante la ecuación de diferencias (3.5)

$$\omega_{(n+1)} = \omega_{(n)} + \frac{T}{J} K_M T_{(n)}^* - \frac{T}{J} T_{(n)}^L \quad (3.5)$$

Con un cambio lineal de la velocidad del eje, (Figura 2.6, Ec. (2.11)) la integral de la Ec. (3.3) puede ser expresada en términos de las muestras de la velocidad del eje  $\omega_{(n)}$  y  $\omega_{(n+1)}$ . El cambio en la posición de salida puede ser descrito por la Ecuación de diferencias (3.6). La ecuación obtiene la siguiente muestra de salida  $\theta_{(n+1)}$  de las muestras de velocidad y posición  $\theta_{(n)}, \omega_{(n)}$  y  $\omega_{(n+1)}$ .

---


$$\theta_{(n+1)} = \theta_{(n)} + \int_{nT}^{(n+1)T} \omega dt = \theta_{(n)} + \frac{\omega_{(n+1)} + \omega_{(n)}}{2} T \quad (3.6)$$

La posición de salida, velocidad, par del motor y la perturbación de carga pueden ser expresados en términos de sus imágenes complejas  $\theta(z), \omega(z), T^*(z)$  y  $T^L(z)$  respectivamente, obtenida por la aplicación de la transformada  $z$  a los correspondientes trenes de pulsos  $\theta_{(n)}, \omega_{(n)}, T_{(n)}^*$  y  $T_{(n)}^L$ .

$$\begin{aligned} \theta(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \theta_{(i)} z^{-i}, & \omega(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \omega_{(i)} z^{-i}, \\ T^*(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} T_{(i)}^* z^{-i}, & T^L(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} T_{(i)}^L z^{-i} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Las ecuación de diferencias (3.5) y (3.6) pueden ser convertidas a ecuaciones algebraicas y usadas para la obtención de la función de transferencia al pulso del objeto de control. Con la propiedad de corrimiento en el tiempo de la transformada  $z$  [J. Astrom & Wittenmark, 1997].

$$\sum_{i=0}^{\infty} \theta_{(i+1)} z^{-i} = z\theta(z) - z\theta_{(0)} \quad (3.8)$$

Introduciendo la propiedad de corrimiento en el tiempo de la transformada  $z$  en las ecuaciones de diferencias de las ecuaciones (3.5) y (3.6) resultan las ecuaciones (3.9) y (3.10) que representan las imágenes complejas de la posición y velocidad:

$$\omega(z) = \frac{T}{J} \frac{1}{z-1} K_M T^*(z) - \frac{T}{J} \frac{1}{z-1} T^L(z) \quad (3.9)$$

$$\theta(z) = T \frac{z+1}{2(z-1)} \omega(z) \quad (3.10)$$

Como se indica en la Figura 3.1, la Ec. (3.9) se mantiene en el modo de operación lineal del sistema. En otras palabras, el par real del motor  $T^{em}(t)$  corresponde a la referencia  $K_M T_{(n)}^*$ , siempre que estos últimos se mantengan dentro de los límites del sistema  $\pm T_{MAX}$ ,

---

---

manteniendo el limitador del sistema inactivo. La imagen compleja de la posición de salida  $\theta(z)$  es dada en la Ec. (3.13), expresada en términos de  $T^*(z)$  y  $T^L(z)$ . La función de transferencia al pulso  $W_P(z)$  y  $W_{PL}(z)$  describen el flujo de la señal de la entrada del par del motor a la salida (Figura 3.1), y del disturbio de entrada a la salida, respectivamente. En los sistemas de control de posición, la planta tiene un polo real doble  $z_{1/2} = 1$  y un cero real.

$$\theta(z) = W_P(z)T^*(z) - W_{PL}(z)T^L(z) \quad (3.11)$$

Donde

$$W_P(z) = Z \left( \frac{1 - e^{-sT}}{s} K_M \frac{1}{JS^2} \right) = \frac{K_M T^2 (z + 1)}{2J(z - 1)^2}$$

$$W_{PL}(z) = Z \left( \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{1}{JS^2} \right) = \frac{T^2 (z + 1)}{2J(z - 1)^2} \quad (3.12)$$

$$\theta(z) = \frac{K_M T^2 (z + 1)}{2J(z - 1)^2} T^*(z) - \frac{T^2 (z + 1)}{2J(z - 1)^2} T^L(z) \quad (3.13)$$

## 3.2 Estructura de los Controladores de Posición

Con el procedimiento de diseño del capítulo anterior, el controlador de posición de tiempo discreto y las ganancias de retroalimentación pueden determinarse, considerando la función de transferencia al pulso del objeto de control  $W_P(z)$ , obteniendo la función de transferencia del controlador de posición  $W_{PC}(z)$  y de las dos anteriores se calcula la función de transferencia del sistema de lazo cerrado  $W_{SS}(z)$ , con lo cual se obtiene el polinomio característico y sus ceros, se determinan las ganancias de retroalimentación que resultan en el comportamiento de la respuesta al escalón y el ancho de banda de lazo cerrado deseado. Primeramente es necesario determinar las acciones de control y la estructura del controlador de posición.

### 3.2.1 Controladores de Posición con Acción Derivativa

Como la función de transferencia del objeto de control  $1/Js^2$ , contiene dos polos en el origen, es importante señalar que la acción de control derivativa puede ser necesaria con el fin de lograr la estabilidad. Para un mayor entendimiento del papel de la acción derivativa, el presente análisis se centra sobre un diagrama de bloques simplificado de la Figura 3.2 que comprende la representación del control de posición en el dominio  $s$ .

Si asumimos que el control de posición de la Figura 3.2 tiene acciones de control proporcional y derivativo, su función de transferencia en el dominio  $s$  es  $W_{PC}(s) = K_P + K_D s$ , con  $K_M = 1$ , la función de transferencia del sistema de lazo cerrado y su polinomio característico se muestra en la Ec. (3.14) y en la Ec. (3.15) se muestra la frecuencia no amortiguada  $\omega_n$  y el coeficiente de amortiguamiento  $\xi$  de los polos de lazo cerrado.

$$W_{SS}(s) = \frac{1 + s \frac{K_D}{K_P}}{1 + s \frac{K_D}{K_P} + s^2 \frac{J}{K_P}} \quad (3.14)$$

$$f(s) = s^2 + s \frac{K_D}{J} + \frac{K_P}{J}, \quad \omega_n^2 = \frac{K_P}{J}, \quad \xi = \frac{K_D}{2K_P} \quad (3.15)$$

La acción derivativa  $K_D d\theta(t)/dt$ , calculada a partir de la posición de salida, es equivalente a la acción de control  $K_D \omega(t)$  que es proporcional a la velocidad. Se puede observar en la Ec. (3.14) que la acción derivativa es indispensable para lograr una respuesta de lazo cerrado estable y bien amortiguado. Con  $K_D = 0$  el polinomio característico se convertirá en  $f(s) = s^2 + \omega_n^2$ , obteniendo los polos de lazo cerrado no amortiguados  $s_{1/2} = \pm j\omega_n$ .

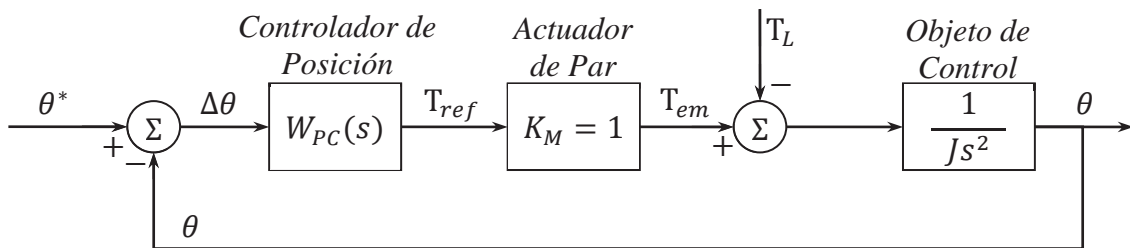


Figura 3.2 Diagrama de bloques simplificado de un control de posición en el dominio  $s$ .

### 3.2.2 Reubicación de la Acción Derivativa en la Trayectoria de Retroalimentación

Con la acción derivativa ubicada en la trayectoria directa (Figura 3.2), la función de transferencia del sistema de lazo cerrado  $W_{SS}(s)$ , mostrada en la Ec. (3.14), tiene un cero real  $s_1 = -K_p/K_D$ , el análisis realizado en el capítulo 2 indica que este cero contribuirá a un sobreimpulso en la respuesta al escalón, incluso en casos cuando todos los polos de lazo cerrado son reales. De acuerdo con el desarrollo de la sección 2.6, la reubicación de la acción proporcional del control de velocidad en la trayectoria de retroalimentación elimina el sobreimpulso, siempre que los polos discretos de lazo cerrado sean reales y positivos. Un cambio similar en la estructura del control de posición, puede remover los ceros de la función de transferencia de lazo cerrado del sistema. En la Figura 3.3 la acción derivativa del control de posición es reubicada en la trayectoria de retroalimentación.

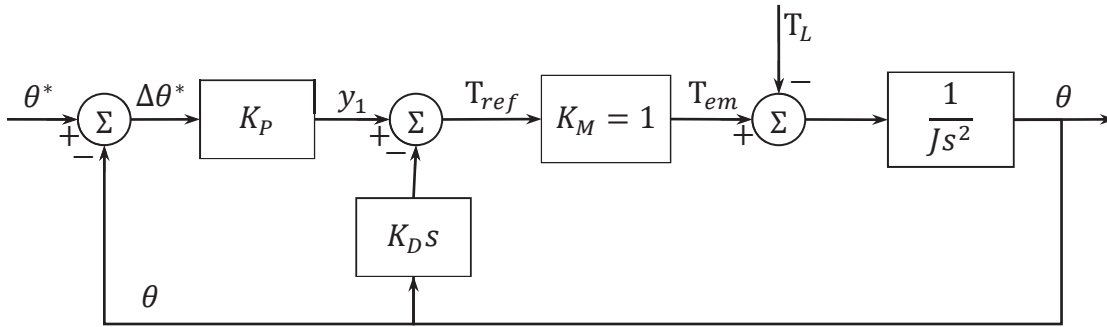


Figura 3.3 Control proporcional derivativo con la acción de control derivativa ubicada en la trayectoria de retroalimentación.

La correspondiente función de transferencia de lazo cerrado, está dada en la Ec. (3.16), contiene dos polos y no contiene ceros. Por lo tanto, cuando los polos discretos de lazo cerrado sean reales y positivos, la respuesta al escalón no contendrá sobreimpulso.

$$W_{SS}(s) = \frac{\theta(s)}{\theta^*(s)} = \frac{K_p}{K_p + K_D s + J s^2} = \frac{1}{1 + s \frac{K_D}{K_p} + s^2 \frac{J}{K_p}} \quad (3.16)$$



---

### 3.3 Controlador de Posición PD Discreto

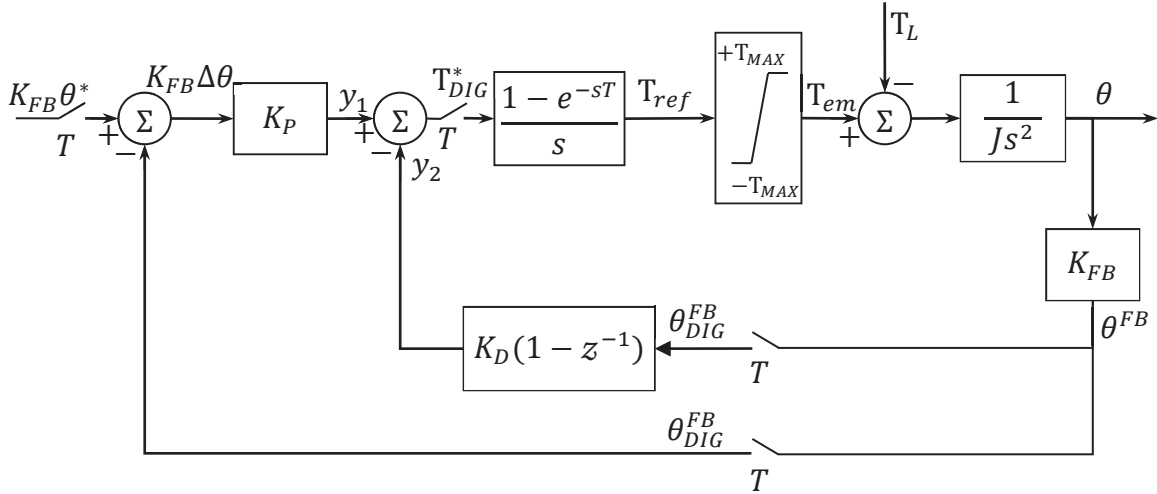
El diagrama de bloques de un sistema de control de posición PD es mostrado en la Figura 3.4 [N. Vukosavic, 2007]. La retroalimentación de la posición  $\theta^{FB}$ , obtenida del sensor del eje, es proporcional a la posición de salidas  $\theta$ . La relación entre las dos es definida por el parámetro  $K_{FB}$ . La señal de retroalimentación, es muestreada a una frecuencia  $f_s = 1/T$  y convertida en un tren de pulsos  $\theta_{DIG}^{FB}$ , que consiste de las muestras  $K_{FB}\theta_{(n)}$  de la posición de salida. El discriminador de error en la parte izquierda de la Figura 3.4, compara la referencia  $K_{FB}\theta^*$  y la retroalimentación, obteniendo el error de seguimiento  $K_{FB}\Delta\theta$ . La acción proporcional del control reside en la trayectoria directa y multiplica el error de seguimiento. La acción derivativa se encuentra reubicada en la trayectoria de retroalimentación con la finalidad de suprimir los ceros de lazo cerrado. Las acciones de control proporcional y derivativa son denotadas por  $y_1$  y  $y_2$  respectivamente. En el instante de muestreo  $t = nT$ , las señales  $y_1$  y  $y_2$  son obtenidas como

$$y_{1(n)} = K_{FB}K_P\Delta\theta_{(n)} \quad (3.17)$$

$$y_{2(n)} = K_{FB}K_D(\theta_{(n)} - \theta_{(n-1)}) \quad (3.18)$$

donde el parámetro  $K_P$  y  $K_D$  representan la ganancia proporcional y derivativa. En el instante de muestreo dado, la muestra del par del motor  $T_{(n)}^*$  es obtenido de la diferencia  $y_{1(n)} - y_{2(n)}$ . El tren de muestras  $T_{DIG}^*$  es alimentado al retenedor de orden cero, obteniendo de esta manera la referencia de par en tiempo continuo  $T_{ref}(t)$ .

En la Figura 3.4, la referencia de par en tiempo continuo  $T_{ref}(t)$  es alimentada al actuador de par. Para simplificar el desarrollo, se asume que el actuador tiene una ganancia estática  $K_M = 1$ . En la Figura 3.4, se asume que el actuador tiene un límite de par  $T_{MAX}$ . Es modelada introduciendo un limitador, que asegura que el par  $T_{em}$  se mantenga dentro de los límites  $\pm T_{MAX}$ . A la derecha se encuentra el par del motor y el disturbio del par de carga  $T_L$  que es alimentado al objeto de control, modelado como  $1/Js^2$ .



**Figura 3.4** Sistema de control de posición con controlador de posición de tiempo discreto. La acción derivativa se encuentra en la trayectoria de retroalimentación.

Considerando el sistema de la Figura 3.4 en modo de operación lineal, la muestra de la referencia de par  $T_{(n)}^*$  calculada en el instante de muestreo  $t = nT$  se muestra en la Ec. (3.19). La transformada  $z$  del par del motor  $T^*(z)$  se muestra en la Ec. (3.19). Esta ecuación define la función de transferencia del control de posición discreto PD.

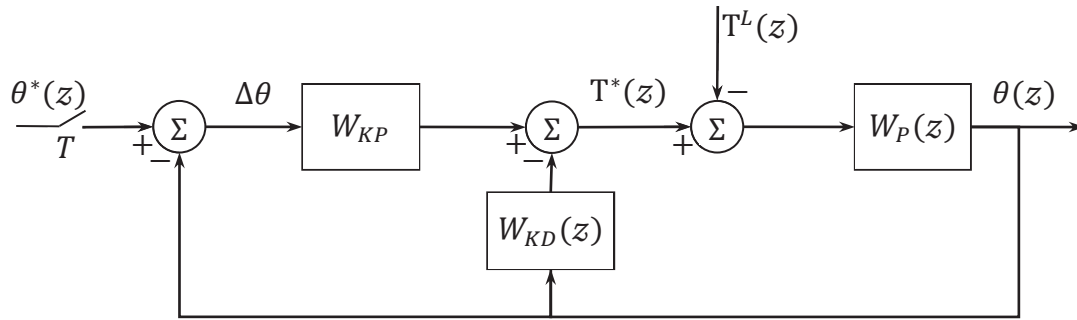
$$T_{(n)}^* = K_P K_{FB} K_M (\theta_{(n)}^* - \theta_{(n)}) + K_D K_{FB} K_M (\theta_{(n-1)} - \theta_{(n)}) \quad (3.19)$$

$$T^*(z) = K_P K_{FB} K_M (\theta^*(z) - \theta(z)) - K_D K_{FB} K_M \theta(z) (1 - z^{-1}) \quad (3.20)$$

Las funciones de transferencia al pulso  $W_P(z)$  y  $W_{PL}(z)$  están dadas en la Ec. (3.13), las funciones describen el flujo de la señal de la entrada del par del motor a la salida del sistema ( $W_P(z)$ ) y de la entrada de la perturbación a la salida del sistema ( $W_{PL}(z)$ ).

En la Ec. (3.20), el primer componente del par del motor  $T^*(z)$  es proporcional al error de seguimiento, mientras que el segundo depende del incremento de la posición de salida, por lo tanto, la transformada  $z$  del par del motor puede ser expresada como  $T^*(z) = W_{KP} \Delta \theta(z) - W_{KD}(z) \theta(z)$ , donde  $W_{KP} = K_P K_{FB} K_M$  y  $W_{KD}(z) = K_D K_{FB} K_M (1 - z^{-1})$ . De estas expresiones y de las Ec. (3.13) y (3.19), el sistema de control de posición con un controlador de tiempo discreto PD puede ser representado por el diagrama de bloques simplificado dado en la Figura 3.5. Esta representación es válida para el sistema operando en modo lineal, con el par del motor permaneciendo por debajo del límite del par  $\pm T_{MAX}$ . En la

salida del sistema,  $\theta(z)$  representa la transformada  $z$  del tren de pulsos de  $\theta(n)$  que comprenden las muestras de la posición del eje. La imagen compleja de  $T^L(z)$  representa las muestras de  $T^L(n)$ , cada muestra  $T^L(n)$  corresponde al valor promedio del par de carga dentro del intervalo de muestreo  $T$  (Ec. (2.5)). Para el sistema de la Figura 3.5, es útil calcular la función de transferencia de lazo cerrado  $W_{SS}(z) = \theta(z)/\theta^*(z)$ , así como,  $W_{LS}(z) = \theta(z)/T^L(z)$  describiendo la respuesta de la salida a las perturbaciones de carga.



**Figura 3.5** Diagrama de bloques simplificado del sistema de control de posición, con un control de tiempo discreto PD.

La función de transferencia del sistema de lazo cerrado  $W_{SS}(z)$ , se muestra en la Ec. (3.23), mientras que la función de transferencia de la perturbación de carga se muestra en la Ec. (3.24) [N. Vukosavic, 2007]. En estas ecuaciones  $K_P$  y  $K_D$  son las ganancias de retroalimentación,  $K_M$  es la ganancia del amplificador de par incluido en la Ec. (3.13) y  $K_{FB}$  es la ganancia del sensor del eje. La función  $W_{KD}(z)$  y  $W_{KP}$  son

$$W_{KD}(z) = K_D K_{FB} K_M (1 - z^{-1}) \quad (3.21)$$

$$W_{KP} = K_P K_{FB} K_M \quad (3.22)$$

mientras que  $W_P(z)$  es la función de transferencia al pulso del objeto de control, mostrado en la Ec. (3.13)

$$W_{SS}(z) = \frac{\theta(z)}{\theta^*(z)} = \frac{W_{KP} W_P(z)}{1 + W_P(z) (W_{KP} + W_{KD}(z))} \quad (3.23)$$

---


$$W_{SS}(z) = \frac{\left[ \frac{T^2(z+1)}{2J(z-1)^2} \right] K_P K_{FB} K_M}{1 + \left[ \frac{T^2(z+1)}{2J(z-1)^2} \right] K_{FB} K_M \left[ K_D \left( \frac{z-1}{z} \right) + K_P \right]}$$

$$W_{LS}(z) = \frac{\theta(z)}{T^L(z)} = \frac{-W_P(z)}{1 + W_P(z)(W_{KP} + W_{KD}(z))} \quad (3.24)$$

$$W_{LS}(z) = \frac{-\left[ \frac{T^2(z+1)}{2J(z-1)^2} \right]}{1 + \left[ \frac{T^2(z+1)}{2J(z-1)^2} \right] K_{FB} K_M \left[ K_D \left( \frac{z-1}{z} \right) + K_P \right]}$$

Las funciones pueden ser simplificadas introduciendo las ganancias de retroalimentación normalizadas para las acciones proporcional y derivativa. Las ganancias pueden ser definidas como

$$p = K_P K_{FB} K_M \left( \frac{T^2}{2J} \right)$$

$$d = K_D K_{FB} K_M \left( \frac{T^2}{2J} \right) \quad (3.25)$$

La introducción de las ganancias normalizadas facilita el procedimiento de la configuración de parámetros. Para el caso del control de velocidad discreta, analizada en el capítulo anterior, se demuestra que los valores optimizados de las ganancias de retroalimentación normalizados es invariable (Ec. (2.57)) y no dependen de los parámetros del sistema  $J, K_M$  y  $K_{FB}$ , ni cambian con el periodo de muestreo  $T$ . Resultados similares se establecen en este capítulo para el control de posición. Una vez que el ajuste de los parámetros optimizados ( $p_{OPT}, d_{OPT}$ ) sean determinados, las ganancias absolutas  $K_P$  y  $K_D$  pueden ser calculadas multiplicando las ganancias optimizadas por el coeficiente escalar  $2J/(K_{FB} K_M T^2)$ .

Con las ganancias normalizadas introducidas en las Ec. (3.23) y (3.24), se obtienen las funciones transferencias  $W_{SS}(z)$  y  $W_{LS}(z)$

---


$$W_{SS}(z) = \frac{z(z+1)p}{z(z-1)^2 + [d(z-1) + pz](z-1)} \quad (3.26)$$

$$W_{SS}(z) = \frac{pz^2 + pz}{z^3 - (2-p-d)z^2 + (1+p)z - d}$$

$$W_{LS}(z) = -\frac{1}{K_P K_{FB} K_M} \frac{pz^2 + pz}{z^3 - (2-p-d)z^2 + (1+p)z - d}$$

$$W_{LS}(z) = -\frac{T^2}{2J} \frac{z^2 + z}{z^3 - (2-p-d)z^2 + (1+p)z - d} \quad (3.27)$$

$$W_{LS}(z) = -\frac{T^2}{2J} \frac{z^2 + z}{f_{PD}(z)}$$

El polinomio característico  $f_{PD}(z) = z^3 - (2-p-d)z^2 + (1+p)z - d$  puede ser escrito como  $f_{PD}(z) = (z - \sigma_1)(z - \sigma_2)(z - \sigma_3)$  y está presente en los denominadores de ambas funciones de transferencia ( $W_{LS}(z)$  y  $W_{SS}(z)$ ). Los raíces del polinomio  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$ , son al mismo tiempo los polos de lazo cerrado y determinan el carácter de la respuesta al escalón de lazo cerrado y el ancho de banda del sistema.

Con la suposición de que los polos de lazo cerrado son estables y teniendo la entrada de referencia  $\theta^*(t) = \Theta^*h(t)$ , donde  $h(t)$  es un escalón unitario, y la perturbación de carga  $T^L(t) = T_{LOAD}h(t)$ , es posible aplicar las funciones de transferencia  $W_{SS}(z)$  y  $W_{LS}(z)$  y obtener el valor de la posición de salida de estado estable. Para la entrada y las perturbaciones de carga teniendo la forma de la función escalón unitario, su transformada  $z$  es  $\theta^*(z) = \Theta^*/(1 - z^{-1})$  y  $T^L(z) = T_{LOAD}/(1 - z^{-1})$  respectivamente. De la Ec. (3.26) y de la Ec. (3.27) la imagen compleja de la posición de salida es obtenida como:

$$\theta(z) = W_{LS}(z)T^L(z) + W_{SS}(z)\theta^*(z) \quad (3.28)$$

De acuerdo con el teorema del valor final, el valor de estado estable de la posición de salida es encontrado de la siguiente manera:

$$\theta(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})\theta(z)] = \Theta^* - \frac{T^2}{2J} \frac{1}{p} T_{LOAD} \quad (3.29)$$


---

En estado estable, el error  $\Delta\theta(\infty) = \theta^* - \theta(\infty)$  es directamente proporcional al cuadrado del periodo de muestreo  $T$  e inversamente proporcional a la ganancia de retroalimentación normalizada  $p$ . El aumento en  $p$  no lleva al error de salida a cero, ya que el rango de las ganancias aplicables es restringido por la estabilidad y las condiciones de ruido. En el análisis subsecuente, se demostrará que los valores optimizados de las ganancias normalizadas  $p_{OPT}$  y  $d_{OPT}$  aplicadas en diferentes plantas, mantienen sus valores normalizados, por consiguiente, la ganancia  $p_{OPT}$  no puede ser cambiada en la Ec. (3.25) arbitrariamente en un intento de reducir el error de salida.

Siendo el error proporcional a  $T^2$ , este disminuirá a medida que aumenta la frecuencia de muestreo  $f_s = 1/T$ . Doblando la frecuencia de muestreo se reducirá el error de salida por un factor de cuatro, sin embargo, hay límites de la frecuencia de muestreo, es decir, en cada sistema de control digital, algunos fenómenos dinámicos de alta frecuencia y componentes de ruido no pueden ser eliminados por una acción de control deliberada. Estas señales son atenuadas por el carácter pasa bajos de la planta (motor-carga) y son tratadas como dinámicas no modeladas. Por lo tanto, el pre-filtrado analógico y el proceso de muestreo necesitan asegurar que tales señales no se hallen en la adquisición de la información de baja frecuencia.

El impacto del tiempo de muestreo sobre el contenido de ruido del par del motor es analizado por medio de simulaciones. Un sistema de control de posición con controlador de tiempo discreto PD es modelado en Simulink, el modelo es mostrado en la Figura 3.6.

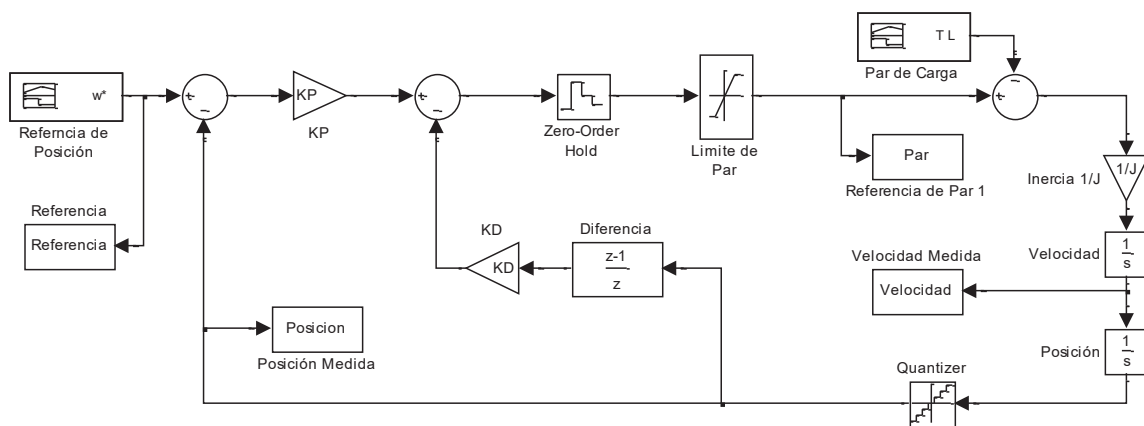
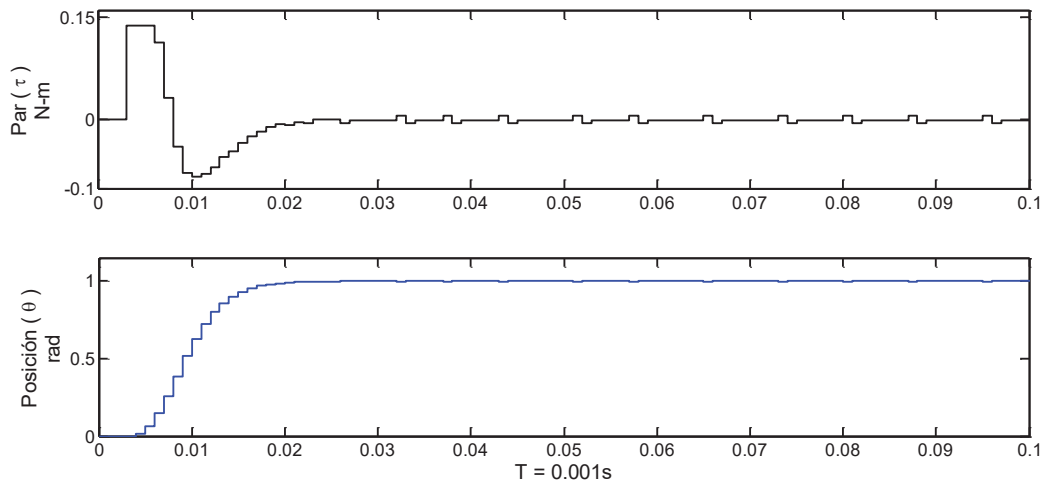


Figura 3.6 Modelo de un sistema de control de posición con un controlador de tiempo discreto PD. El bloque designado como *Quantizer*, permite configurar la resolución del sensor del eje.

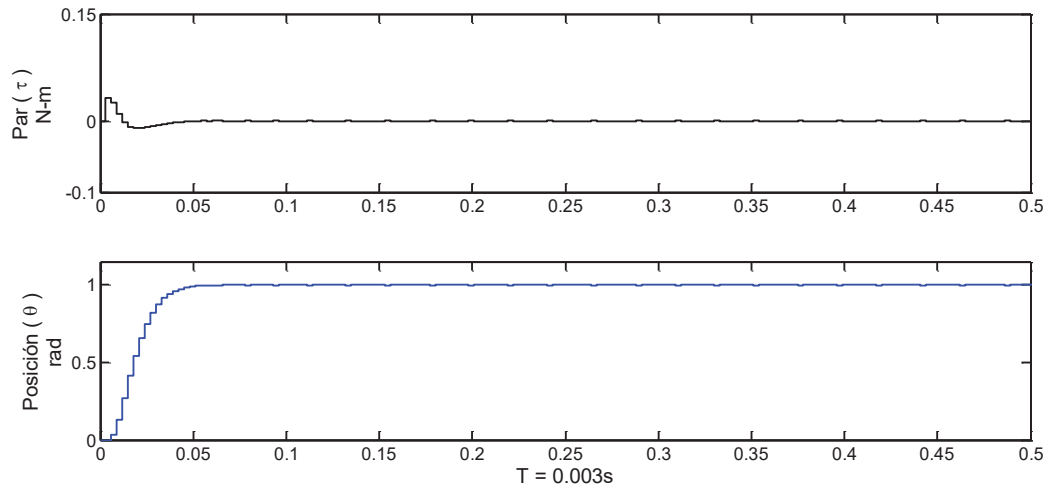
---

Las acciones de control son ubicadas de acuerdo al diagrama de bloques de la Figura 3.5, después del bloque ZOH (retenedor de orden cero), el limitador de par restringe el par del motor al rango  $\pm T_{MAX}$ . El objeto de control es modelado como  $W_p = 1/Js^2$ . La resolución del sensor del eje del motor es modelada en el bloque Quantizer, para este caso se utilizó un intervalo de cuantificación de  $q = 0.003146 \text{ rad}$

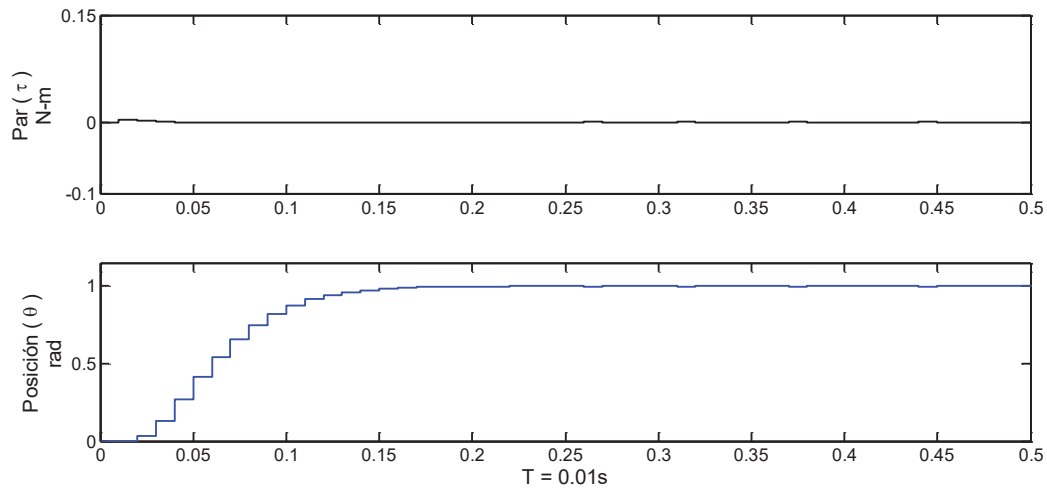
En las Figura 3.7, Figura 3.8 y Figura 3.9 se presentan las formas de onda del par y de la posición del motor ante un cambio de referencia tipo escalón, considerando diferentes periodos de muestreo:  $T = 1\text{ms}$  en la Figura 3.7,  $T = 3\text{ms}$  en la Figura 3.8 y  $T = 10\text{ms}$  en la Figura 3.9. En las tres simulaciones, las ganancias de retroalimentación  $K_p$  y  $K_D$  son ajustadas de acuerdo con la ganancias normalizadas obtenidas de las ecuaciones (3.25), por lo cual preservan el carácter de la respuesta de acuerdo con las Ecs. (3.25) a diferentes frecuencias de muestreo.



**Figura 3.7** Trazo de simulación del par y posición del motor obtenido con un control de posición PD discreto dado en la Figura 3.5, con un periodo de muestreo  $T = 1 \text{ ms}$ .



**Figura 3.8** Trazo de simulación del par y posición del motor obtenido con un control de posición PD discreto dado en la Figura 3.5, con un periodo de muestreo  $T = 3 \text{ ms}$ .



**Figura 3.9** Trazo de simulación del par y posición del motor obtenido con un control de posición PD discreto dado en la Figura 3.5, con un periodo de muestreo  $T = 10 \text{ ms}$ .

Se observa que la efectividad del sistema de control de posición de la Figura 3.4, no puede incrementarse reduciendo el periodo de muestreo. El mayor período de muestreo aceptable depende de los efectos de cuantificación y el contenido de ruido. La aplicación de altas frecuencias de muestreo, requiere encoders con un gran número de pulsos por vuelta.

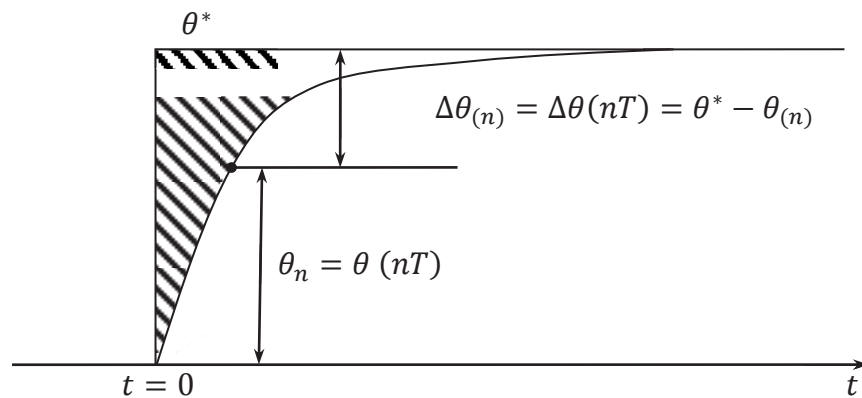


---

### 3.4 Cálculo de Parámetros Optimizados

En esta sección se analiza la configuración de parámetros del control de posición PD, con el objetivo de lograr una respuesta de tiempo mínimo y estrictamente no oscilatoria. Los ceros  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  del polinomio característico  $f_{PD} = z^3 - (2 - p - d)z^2 + (1 + p)z - d = (z - \sigma_1)(z - \sigma_2)(z - \sigma_3)$  han de ser números reales y positivos que residen dentro del círculo unitario. La configuración optimizada de las ganancias de retroalimentación resulta en una rápida respuesta al escalón bajo las suposiciones antes mencionadas. Con el fin de obtener las ganancias optimizadas, es necesario obtener la función criterio que expresa la calidad de la respuesta en forma numérica.

En la Figura 3.10 se muestra una respuesta al escalón estrictamente no oscilatoria de la posición del eje  $\theta(t)$  junto con la posición de referencia  $\theta^*(t)$ , que exhibe un escalón en  $t = 0$ . Las muestras de error de salida  $\Delta\theta_{(n)} = \theta^* - \theta(nT) = \Delta\theta(nT)$  son estrictamente positivas, ya que la posición de salida no sobrepasa la referencia  $\theta^*$ .



**Figura 3.10** Respuesta al escalón estrictamente no oscilatoria de la posición de salida. El área sombreada corresponde al error de velocidad integral, entre más pequeña el área sombreada, se obtiene un respuesta más rápida al escalón.

El área sombreada en la Figura 3.10 puede servir como un indicador de la velocidad de respuesta. Una velocidad de respuesta más rápida resulta en un área más pequeña. Dada la naturaleza discreta del control, la superficie  $S$  es definida por la suma de  $Q$ , definida en la Ec. (3.30).

---


$$Q = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\theta(kT) \quad (3.30)$$

El valor de  $Q$  en esta ecuación representa la suma de todas las muestras de error comenzando cuando la posición de referencia comienza a subir. Este valor depende de las ganancias de retroalimentación y sirve como función criterio. La elección de los parámetros de retroalimentación ajustables debe de llevar a  $Q$ , a los valores más pequeños posibles para las restricciones dadas. El cálculo de ganancias optimizadas debe de resultar en un valor mínimo de  $Q$ , manteniendo el carácter estrictamente no oscilatorio de la respuesta al escalón. Considerando la función de transferencia de sistema de lazo cerrado dada en la Ec. (3.26) y teniendo la transformada  $z$  del escalón de referencia  $\theta^*(z)$  dado como  $\Theta^*/(1 - z^{-1})$ , las muestras de error  $\Delta\theta_{(n)}$  son representadas por su imagen compleja  $\Delta\theta(z)$  dada en la Ec. (3.31).

$$\Delta\theta(z) = (1 - W_{SS}(z))\theta^*(z)$$

$$\Delta\theta(z) = \frac{z(z-1)^2 + d(z-1)(z+1)}{z^3 - (2-d-p)z^2 + (p+1)z - d} \frac{\Theta^*}{1 - z^{-1}} \quad (3.31)$$

$$\Delta\theta(z) = \frac{z^2(z-1) + d(z+1)z}{z^3 - (2-d-p)z^2 + (p+1)z - d} \Theta^*$$

La imagen compleja de  $\Delta\theta(z)$  puede ser obtenida de las muestras de error  $\Delta\theta_{(n)}$  de acuerdo con la Ec. (3.32).

$$\Delta\theta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\theta_{(k)} z^{-k} \quad (3.32)$$

Con la función criterio siendo la suma de las muestras de error (Ec. (3.30)), el valor de  $Q$  es igual al valor de la imagen compleja  $\Delta\theta(z)$ , en la Ec (3.32) calculada para  $z = 1$  es decir,

$$\Delta\theta(1) = \Delta\theta(z)|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\theta_{(k)} = Q \quad (3.33)$$


---

---

Aplicando los resultados de la Ec. (3.31) y de la Ec. (3.33), la función criterio puede ser expresada en términos de las ganancias normalizadas:

$$Q = \Delta\theta(1) = \frac{d(1+1)}{1-2+d+p+p+1-d} \theta^* = \frac{d}{p} \theta^* \quad (3.34)$$

Para una respuesta estrictamente no oscilatoria, los polos de lazo cerrado  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  tienen que asumir valores reales y positivos en el intervalo  $(0 \dots 1)$ , los polos son los ceros del polinomio característico:

$$f_{PD} = z^3 - (2-p-d)z^2 + (1+p)z - d = (z - \sigma_1)(z - \sigma_2)(z - \sigma_3) \quad (3.35)$$

$$f_{PD} = z^3 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)z^2 + (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)z - \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

Para la expresión anterior, los valores  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  pueden ser expresados en términos de ganancias de retroalimentación normalizadas  $p$  y  $d$ :

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2\sigma_3 &= d \\ \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 &= 1 + p \\ \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 &= 2 - p - d \end{aligned} \quad (3.36)$$

La suma de las ecuaciones previas resulta en la Ec. (3.37), esta ecuación impone una restricción en la colocación de los polos, es decir, los tres polos de lazo cerrado no pueden ubicarse arbitrariamente, con los dos primeros polos seleccionados a voluntad, el tercero será calculado a partir de la Ec. (3.37), la cual se obtiene sumando las ecuaciones (3.36).

$$(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + (\sigma_1\sigma_2\sigma_3) = 3 \quad (3.37)$$

El cálculo de los parámetros  $p$  y  $d$  que cumpla con las condiciones anteriores y minimice la relación  $d/p$  es equivalente al procedimiento de la Sección 2.7.3, obteniendo las ganancias  $p$  e  $i$  para el control de velocidad. La función criterio puede ser expresada en términos de los polos de lazo cerrado:

$$Q_1 = \frac{1}{Q} = \frac{p}{d} = \frac{\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 - 1}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} \quad (3.38)$$


---

---

Introduciendo los valores recíprocos de los polos de lazo cerrado  $x = 1/\sigma_1$ ,  $y = 1/\sigma_2$  y  $v = 1/\sigma_3$  y expresando  $v(x, y)$  en términos de  $1/\sigma_1$  y  $1/\sigma_2$  (Ec. (2.40)), la función criterio puede ser expresada como  $Q = 1/Q_1(x, y)$ , cuando ésta satisfaga los argumentos reales  $x > 1$  y  $y > 1$ :

$$Q_1 = \frac{1}{Q} = \frac{p}{d} = x + y + (1 - xy) \frac{xy + x + y + 1}{3xy - x - y - 1} \quad (3.39)$$

Las ganancias de retroalimentación  $p_{OPT}$  y  $d_{OPT}$ , que resulta en el máximo  $Q_1(x, y)$  y en el mínimo  $Q$ , son encontradas igualando las primeras derivadas a cero:

$$f_1(x, y) = \frac{\partial Q_1(x, y)}{\partial x} = 0, \quad f_2(x, y) = \frac{\partial Q_1(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (3.40)$$

Introduciendo  $y = y(x)$  de la Ec. (2.48) en la ecuación anterior, los valores optimizados para  $x, y$  y  $v$  son obtenidos como  $x_{OPT} = y_{OPT} = v_{OPT} = 1.7024$ . Consecuentemente, todos los polos de lazo cerrado  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  son iguales (Ec. (3.41)) y el polinomio característico  $f(z)$  asume la forma que se muestra en la Ec. (3.42).

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.587 \quad (3.41)$$

$$f(z) = (z - \sigma_1)(z - \sigma_2)(z - \sigma_3) = (z - \sigma)^3 = (z - 0.587)^3 \quad (3.42)$$

Los valores optimizados de las ganancias normalizadas  $p_{OPT}$  y  $d_{OPT}$  son calculadas de  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  (Ec. (3.43)). Los valores obtenidos corresponden a la configuración de las ganancias optimizadas del control de velocidad proporcional e integral, obtenido en la Ec. (2.55).

$$\begin{aligned} d_{OPT} &= \sigma^3 = 0.2027 \\ p_{OPT} &= 3\sigma^2 - 1 = 0.03512 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Mientras que la configuración optimizada de las ganancias normalizadas se mantienen para cualquier sistema de control de posición, los valores absolutos de  $K_P$  y  $K_D$  dependen de la inercia del objeto de control  $J[Kgm^2]$ , el parámetro  $K_{FB}$  del eje del sensor, la ganancia  $K_M$  del actuador de par y el periodo de muestreo  $T$ . Los valores absolutos de las ganancias de

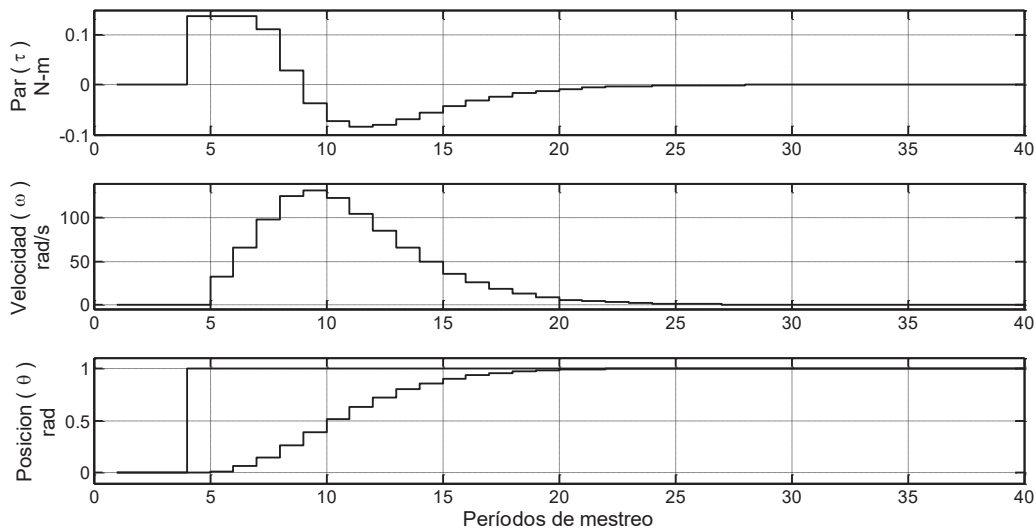
retroalimentación pueden ser calculados de la Ec. (3.44). En este caso, las ganancias optimizadas cambian con el cuadrado de la velocidad de muestreo.

$$K_{D_{OPT}} = 0.2027 \frac{2J}{K_{FB}K_M T^2} \quad K_{P_{OPT}} = 0.03512 \frac{2J}{K_{FB}K_M T^2} \quad (3.44)$$

### 3.5 Simulación del Sistema con un Controlador PD

Las características dinámicas del controlador de posición diseñado en la sección previa y mostrada en la Figura 3.6, son investigadas corriendo el modelo de Simulink y obteniendo las graficas de la posición de salida y los transitorios del par del motor, para una entrada de referencia y las perturbaciones de carga. Los parámetros del sistema a considerar son los siguientes:  $J = 4.2 \times 10^{-6} Kgm^2$ ,  $T = 0.001s$ ,  $K_{FB} = 1$  y  $K_M = 1$ . Las ganancias de retroalimentación son sintonizadas de acuerdo a la Ec. (3.44).

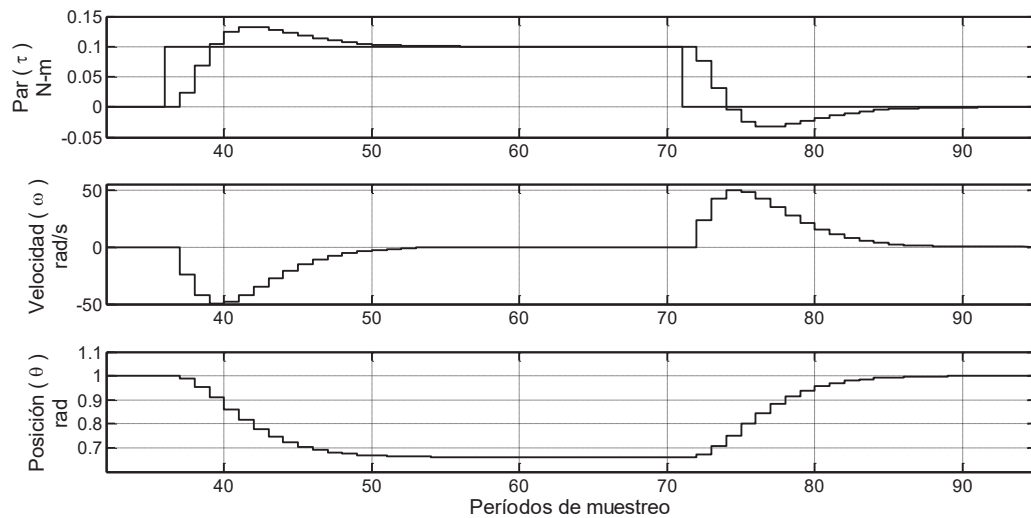
La respuesta transitoria del par del motor y la posición de salida para el cambio de la referencia de posición, es mostrada en la Figura 3.11



**Figura 3.11** Respuesta transitoria del par del motor y la posición para pequeños cambios de escalón en la posición de referencia. La amplitud del escalón de entrada es pequeña y el par del motor no alcanza el límite del sistema. Las ganancias de retroalimentación del control PD son sintonizadas para obtener una respuesta al escalón de tiempo mínimo no oscilatoria de la posición de salida.

La amplitud de la referencia es pequeña y el par del motor no alcanza el límite  $+T_{MAX}$ , la posición alcanza la referencia en 15 periodos de muestreo, tanto el par como la posición exhiben un comportamiento no oscilatorio. La posición de salida alcanza la referencia sin sobreimpulso.

En la Figura 3.12 se aplicó una perturbación de par de carga en forma de pulso en el instante de muestreo  $k = 35$  y luego se quitó en  $k = 70$ . Se observan las consecuencias en la respuesta transitoria de la posición, velocidad y del par del motor.



**Figura 3.12** Respuesta transitoria del par del motor, velocidad del eje y posición, para el cambio del par de carga.

El escalón de carga produce una velocidad negativa y consecuentemente un error en la posición (Ec. (3.29)). El control de posición provee un par motor para balancear la carga. En el instante cuando  $T_{em} = T_L$ , la velocidad deja de disminuir. En el subsecuente intervalo cuando  $T_{em} > T_L$  la velocidad es llevada a cero. El error de posición resultante  $\Delta\theta = 0.3389rad$ .

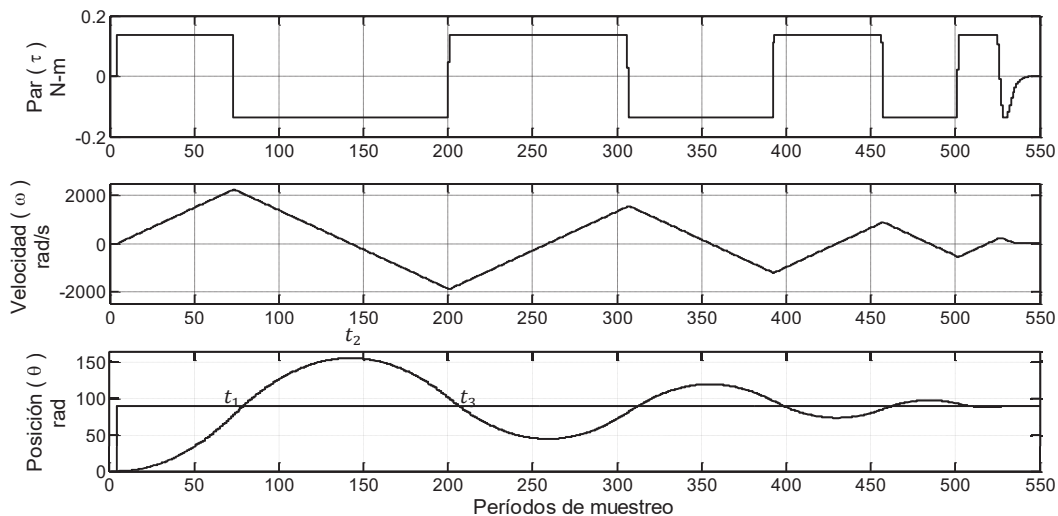
El cambio del periodo de muestreo no mejora la respuesta del sistema en el caso de la Figura 3.12, ya que la respuesta esperada en presencia de un par de carga en el controlador PD esta dada por la Ec. (3.29).

---

### 3.6 Operación de un Controlador de Posición PD Ante Grandes Perturbaciones

Cada sistema de control de posición tiene dos límites intrínsecos. El par del motor  $T_{em}$  no puede ir más allá del límite  $\pm T_{MAX}$  definido por las características del motor y por la corriente máxima disponible del convertidor de energía. Además, la velocidad del eje tiene que ser restringida a  $\pm \omega_{MAX}$ . La velocidad excesiva puede resultar en un esfuerzo y desgaste de los componentes del subsistema mecánico y eventualmente causar fallas.

La respuesta transitoria del par dada en la Figura 3.12 alcanza momentáneamente el límite  $T_{MAX}$ , llevando al sistema a un modo de funcionamiento no lineal. En esta figura el par del motor se recupera rápidamente del límite, el sistema regresa al modo de operación lineal y el carácter no oscilatorio de la respuesta transitoria es preservado. Vale la pena investigar la respuesta del sistema para grandes perturbaciones, a continuación, el modelo de la Figura 3.6 es usado para obtener la respuesta transitoria del par, la velocidad y la posición, obteniéndose la respuesta mostrada en las entradas y perturbaciones de par, Figura 3.13.



**Figura 3.13 Operación del control de posición PD con grandes perturbaciones de entrada. El par del motor alcanza el límite del sistema, llevando al sistema a un modo de operación no lineal que resulta en oscilaciones pobremente amortiguadas. La amplitud de la oscilación es inversamente proporcional a su frecuencia.**

---

El par del motor alcanza el límite del sistema, llevando al sistema a un modo de operación no lineal, resultando en oscilaciones pobremente amortiguadas. En un primer momento, un gran error positivo llega a la referencia de par  $T^*$  al límite ( $T_{em} = +T_{MAX}$ ). La aceleración  $\alpha = d\omega/dt = +T_{MAX}/J$  es constante y la velocidad aumenta a un ritmo constante. Con  $\omega = \alpha t$ , los cambios en la posición de salida son  $\theta = \alpha t^2/2$ . En el instante  $t_1$ , la posición alcanza la referencia y el error de posición cae a cero. Más adelante, con un error de posición negativo  $\Delta\theta < 0$  en la entrada, el control de posición provee un par de referencia negativo. Con  $\theta(t_1) = \theta^*$  sería deseable parar al sistema y mantener  $\omega(t) = 0$  para  $t > t_1$ , sin embargo, este resultado no puede ser posible debido a que la velocidad  $\omega(t_1) = \alpha t_1$  llega a un valor grande. El intervalo  $T_d$  requerido para desacelerar de  $\omega(t_1)$  hasta detenerse, es inversamente proporcional al límite del par ( $T_d = J\alpha t_1/T_{MAX}$ ). Por lo tanto, la velocidad permanece positiva después de  $t_1$  y la posición de salida sobre pasa la referencia. Debido a un gran error de posición negativo, el par del motor alcanza el límite negativo y se convierte en  $T_{em} = -T_{MAX}$ .

En el instante  $t_2$ , la velocidad se reduce a cero, pero la condición de estado estable no es establecida. Mientras se desacelera en el intervalo ( $t_1 \dots t_2$ ) el sistema acumula un gran sobreimpulso en la posición de salida. Con el par del motor negativo, el sistema desacelera más y la velocidad se hace negativa disminuyendo su amplitud. En el instante  $t_3$ , el error de posición es una vez más igual a cero y  $\theta(t_3) = \theta^*$ , pero el estado estable no es restaurado en este instante debido a que  $\omega(t_3) \neq 0$ . El proceso continua como se muestra en la Figura 3.13, con el error de posición oscilando y gradualmente decreciendo en amplitud. La amplitud de las oscilaciones es inversamente proporcional a su frecuencia, indicando un comportamiento no lineal del sistema.

El fenómeno *wind-up* está presente en la Figura 3.13, el integrador que lo provoca está dentro del objeto de control ya que la posición de salida es obtenida de la integración de la velocidad. Mientras el par se encuentra en el límite, la posición de salida varía y sobrepasa la referencia.



---

### 3.7 Control de Posición No Lineal

Como se observa en la Figura 3.13, el sobreimpulso y las oscilaciones no lineales surgen debido a un insuficiente par de frenado disponible en el instante  $t_1$ . Específicamente, la velocidad tiene un valor distinto de cero ( $\omega(t_x) \neq 0$ ) en el instante cuando la posición de salida alcanza la referencia ( $\theta(t_x) = \theta^*$ ). Una tasa de desaceleración limitada  $|d\omega/dt| = T_{MAX}/J$  no puede asegurar una abrupta reducción en la velocidad. Por lo tanto, la posición de salida pasa a través del objetivo con una velocidad distinta de cero, produciendo un sobreimpulso y consecuentes oscilaciones no lineales, como se muestra en la Figura 3.13. Con el fin de evitar el sobreimpulso, es necesario aproximarse a la posición objetivo de tal manera que la velocidad de movimiento se reduzca a cero cuando la posición de salida alcance el objetivo. Por lo tanto, el control de posición PD debe de ser modificado de tal manera que el error de posición y la velocidad vayan a cero al mismo tiempo.

Cuando el sistema se mueve hacia el objetivo, el valor absoluto del error de posición representa a la trayectoria restante. Asumiendo que el sistema frena con el máximo par disponible ( $-T_{MAX}$ ), la velocidad se reduce como una función lineal de tiempo. Puesto que la salida es la integral de la velocidad, es posible expresar la máxima velocidad permisible  $\omega_M$  para la trayectoria restante  $\Delta\theta$ . El sistema con un par de motor limitado  $T_{MAX}$ , corriendo a una velocidad  $|\omega| < \omega_M(\Delta\theta)$  será capaz de alcanzar una velocidad cero al mismo instante de tiempo cuando la posición de salida alcance el objetivo. Con el fin de garantizar tal comportamiento, es necesario implementar un límite de velocidad  $\omega_M(\Delta\theta) = fp(\Delta\theta)$ . Las subsecuentes consideraciones están enfocadas en determinar la función  $fp(\Delta\theta)$ .

#### 3.7.1 Dependencia del Límite de Velocidad Sobre la Trayectoria Restante

Considerando que el sistema corre a una velocidad  $\omega$  hacia la posición objetivo, con la trayectoria -restante  $\Delta\theta$  y con una tasa de desaceleración  $-d\omega/dt = -T_{MAX}/J$  limitada por el límite del sistema  $\pm T_{MAX}$ . La energía cinética de un sistema está dada en la Ec. (3.45).

---


$$W_{KIN}(\omega) = \frac{1}{2}J\omega^2 \quad (3.45)$$

Durante la fase de desaceleración, el servomotor entrega el par  $-T_{MAX}$ , oponiéndose a la dirección de movimiento. En tal caso el servomotor trabaja como generador. Convierte la energía cinética del sistema en energía eléctrica. Si despreciamos las pérdidas de potencia. La potencia eléctrica obtenida de las terminales del motor es igual a  $P_G = \omega T_{MAX}$ . La energía cinética del subsistema mecánico se reduce al mismo ritmo. Reduciendo así la velocidad de movimiento. En un servo-sistema práctico, la potencia de frenado  $P_G$  obtenida de los ejes de desaceleración es recuperada en la fuente primaria o convertida en calor y disipada en una resistencia de frenado dinámico (DBR, por sus siglas en inglés).

La energía cinética es tomada por el servo motor a través del proceso de frenado con un par constante  $T_{em} = -T_{MAX}$ . Por consiguiente, puede ser calculado multiplicando el par y el error en la trayectoria, como es indicado en la Ec. (3.46).

$$W_{DBR}(\Delta\theta) = T_{MAX}\Delta\theta \quad (3.46)$$

Con el fin de evitar el sobreimpulso, el sistema necesita llegar a la posición objetivo, al mismo tiempo que la velocidad se reduce a cero. Por consiguiente, en cualquier instante  $t_x$  durante el proceso de desaceleración, caracterizado por la velocidad actual  $\omega(t_x)$  y la trayectoria restante  $\Delta\theta(t_x)$ , la energía cinética  $W_{KIN}(\omega(t_x))$  no debe de exceder el valor de  $W_{DBR}(\Delta\theta(t_x))$ . La máxima velocidad permisible  $\omega_M$  del sistema acercándose a la posición objetivo puede ser calculado de  $W_{KIN} = W_{DBR}$ . La velocidad está dada en la Ec. (3.47) como una función de la trayectoria restante, el par máximo y la inercia. Esta ecuación relaciona el valor absoluto  $|\omega_M|$  al valor absoluto de la trayectoria restante.

$$|\omega_M| = fp(|\Delta\theta|) = \sqrt{\frac{2T_{MAX}|\Delta\theta|}{J}} \quad (3.47)$$

### 3.7.2 Mejorando el Controlador PD

La estructura del control de posición PD, dada en la Figura 3.4 no limita la velocidad. Por consiguiente, los cambios de velocidad incrementarán con la amplitud de entrada. Para un

---

---

escalón de entrada suficientemente grande (Figura 3.13), la velocidad excede el límite  $\omega_M$ . Con el fin de implementar una trayectoria dependiente del límite de velocidad, la estructura de la Figura 3.4 debe de cambiar. Es de interés notar que la señal  $y_2$  en la Figura 3.4 corresponde a la retroalimentación de velocidad:

$$y_2 \approx K_{FB}K_D\omega T \quad (3.48)$$

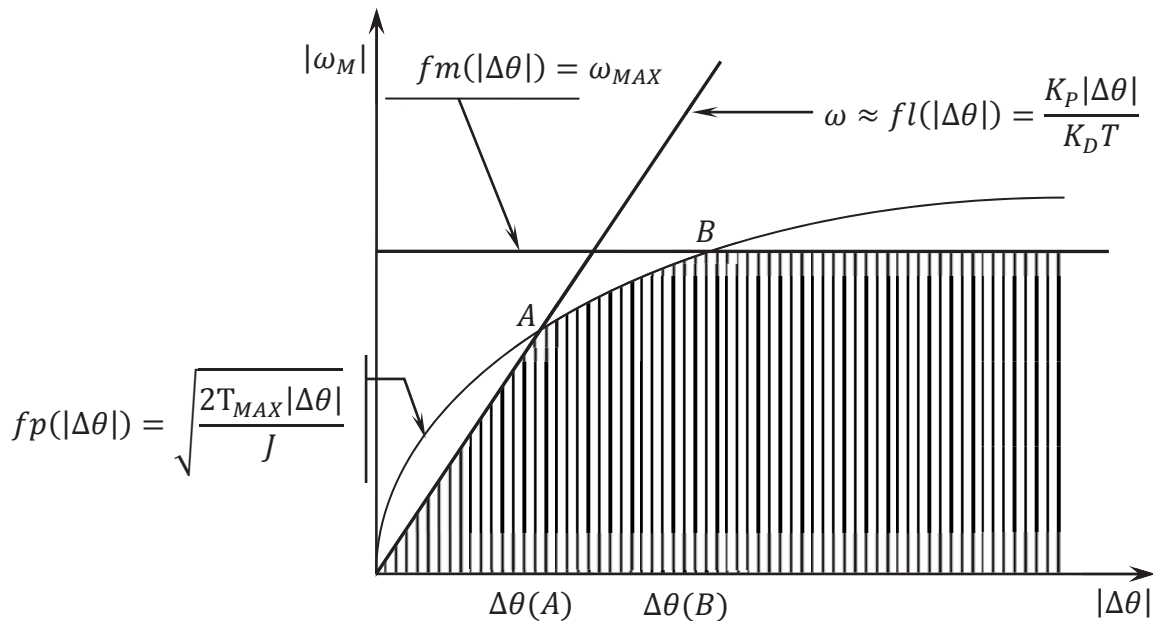
Por lo tanto, dado  $y_1 \approx y_2$  en la misma figura, la velocidad de movimiento es proporcional a  $y_1$ . En la Figura 3.4, el objeto de control con la acción derivativa en su lazo menor constituye un control de velocidad local, donde la señal  $y_1$  asume el papel de una referencia interna de velocidad.

$$\omega \approx \frac{y_1}{K_{FB}K_D T} \quad (3.49)$$

Por lo tanto, la velocidad del sistema puede ser limitada interviniendo la estructura del controlador de posición e imponiendo un límite  $\omega_M(|\Delta\theta|)(K_{FB}K_D T)$  en la señal  $y_1$ . Cada vez que  $|y_1|$  exceda el límite  $K_{FB}K_D T\omega_M(|\Delta\theta|)$ , el valor absoluto de la señal es restringida mientras preserva el signo. En otros casos, para perturbaciones de entrada bajos, la señal  $y_1$  no es afectada por el límite de velocidad funcional.

La funcionalidad requerida del límite de velocidad  $\omega_M(|\Delta\theta|)$  es ilustrada en la Figura 3.14. [N. Vukosavic, 2007]. Con el error de posición  $\Delta\theta$  en el eje horizontal y la velocidad en el eje vertical, el diagrama representa un plano de fase. Los puntos de operación permisibles  $(\Delta\theta, \omega)$  están comprendidos por el área sombreada. En la figura la línea recta  $fl$  tiene una pendiente  $K_P/(K_D T)$ . Considerando la estructura de la Figura 3.4 con la señal interna  $y_1 = K_{FB}K_P\Delta\theta \approx K_{FB}K_D\omega T$  tomando el papel de referencia de velocidad. En el plano de fase de la Figura 3.14, la línea  $fl$  proporciona la velocidad  $K_P\Delta\theta/(K_D T)$  para el error dado  $\Delta\theta$ . La operación de control de posición de la Figura 3.4 puede ser prevista de tal manera que la acción proporcional genere la referencia de velocidad interna corresponde a de  $y_1 = K_{FB}K_P\Delta\theta$ , mientras que la retroalimentación derivativa de posición  $y_2$  proporciona la retroalimentación de velocidad y el sistema corre a una velocidad  $\omega \approx K_P\Delta\theta/(K_D T)$ , proporcional al seguimiento de error  $\Delta\theta$ .

---



**Figura 3.14** Funcionalidad de la trayectoria dependiente del límite de velocidad. Los puntos de operación permitidos están contenidos dentro del área sombreada.

Se concluye que el área sobre la recta  $fl$  en la Figura 3.14 no puede ser alcanzada, ya que la acción proporcional genera la señal  $y_1$  estrictamente sobre la línea  $fl$ . No todos los puntos de la línea  $fl$  son permitidos, debido a la necesidad de limitar la velocidad de acuerdo a la Ec. (3.47)

La curva de la raíz cuadrada  $fp$  en la Figura 3.14 corresponde al límite de velocidad que se observa en la desaceleración (Ec. (3.47)) con el fin de asegurar una distancia de frenado suficiente y detener el motor en la referencia de posición. El punto de intersección de  $fp$  y  $fl$  es denotado por  $A$  en esta figura. Cuando el sistema opera con perturbaciones relativamente pequeñas, requiere valores de par por debajo del límite, el punto de operación se desliza a través de la línea  $fl$  entre el origen y el punto  $A$ : es decir, el límite de velocidad de la raíz cuadrada  $fp$  no se activará.

Cuando la amplitud de la referencia se incrementa, el transitorio de par alcanzará el límite del sistema y el valor de  $y_1$ , calculado como  $K_{FB}K_P\Delta\theta$ , irá más allá de  $A$ . En este punto, no se debe permitir al sistema subir a lo largo de la línea  $fl$ . En su lugar la velocidad

---

interna de referencia debe de ser limitada, en el plano de fase, el punto de operación  $(\Delta\theta, \omega)$  tiene que ser restringido a la sección  $AB$  de la curva de la raíz cuadrada  $fp$ .

Además de la trayectoria dependiente del límite de velocidad  $\omega_M(\Delta\theta) = fp(\Delta\theta)$ , la velocidad de movimiento tiene que ser sujeta a  $|\omega| \leq \omega_{MAX}$  donde el límite  $\omega_{MAX}$  corresponde a la máxima velocidad que preserva la integridad del subsistema mecánico. Este límite es representado por la línea horizontal  $fm$  en la Figura 3.14. Más allá de la intersección  $B$  en la figura, la señal  $y_1$  debe ser limitada en amplitud a  $K_{FB}K_D T \omega_{MAX}$ , con el fin de restringir la velocidad de movimiento del límite del sistema  $\omega_{MAX}$ .

La operación deseada del control de posición puede ser descrita como sigue. Para los errores de posición  $|\Delta\theta| < \Delta\theta(A)$ , el sistema opera de manera lineal, el flujo de señal mostrado en la Figura 3.4 no es alterado, y la señal  $y_1$  mantiene el valor de  $K_{FB}K_P \Delta\theta$ . Con el error de posición  $\Delta\theta(A) < |\Delta\theta| < \Delta\theta(B)$ , la amplitud de  $y_1$  es limitada a  $K_{FB}K_D T fp(|\Delta\theta|)$  y el signo es mantenido. En el caso cuando  $\Delta\theta(B) < |\Delta\theta|$ , la amplitud de  $y_1$  es constante e igual a  $K_{FB}K_D \omega T_{MAX}$ .

El bloque con la ganancia proporcional en la Figura 3.4 que proporciona  $y_1 = K_{FB}K_P \Delta\theta$ , tiene que ser reemplazado por otro bloque, que calcule  $y_1 = fx(\Delta\theta)$  de acuerdo con la Ec. (3.50).

$$fx(\Delta\theta) = \min \left\{ \frac{K_P |\Delta\theta|}{K_D T}, \omega_{MAX}, \sqrt{\frac{2T_{MAX} |\Delta\theta|}{J}} \right\} K_{FB} K_D T \operatorname{sgn}(\Delta\theta) \quad (3.50)$$

La entrada del bloque mantiene el error de posición  $\Delta\theta$ . Con la referencia de velocidad interna  $fx(\Delta\theta)$ , el punto de operación en el plano de fase, mostrado en la Figura 3.14, se desliza a lo largo de la línea  $fl$ , esto para pequeñas perturbaciones hasta que alcanza la intersección  $A$ , con el límite de la raíz cuadrada  $fp$ . Estos límites son seguidos hasta que la máxima velocidad  $\omega_{MAX}$  se alcanza en la intersección  $B$ .

Es interesante observar que en el caso cuando  $|\Delta\theta| < \Delta\theta(A)$ , la operación del sistema no es afectado por el reemplazo del bloque de la ganancia proporcional con  $fx(\Delta\theta)$ . En otras palabras, con posiciones de referencia más pequeños que  $\Delta\theta(A)$ , la función  $fx(\Delta\theta)$  resulta

---

en  $y_1 = K_{FB}K_P\Delta\theta$  y el sistema corresponde completamente al bloque previo del diagrama dado en la Figura 3.4. El sistema donde la ganancia  $K_P$  es reemplazada por  $f_x(\Delta\theta)$  se muestra en la Figura 3.15 [N. Vukosavic, 2007].

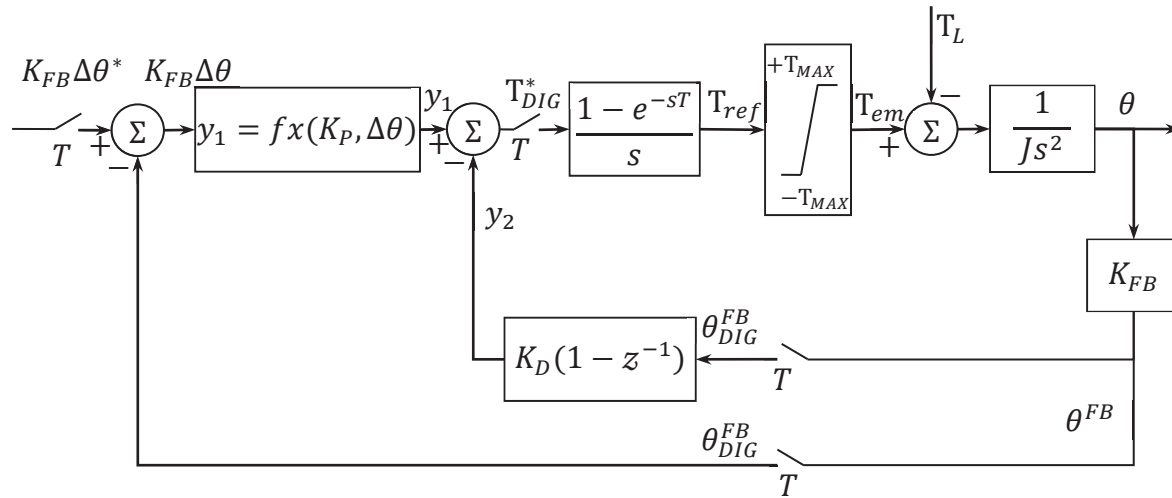


Figura 3.15 Control de posición de tiempo discreto proporcional derivativo, donde el bloque proporcional es reemplazado por una función no lineal  $f_x(\Delta\theta)$ .

### 3.7.3 El Error del Controlador del Lazo Menor

La ley de control no lineal, dada en la Figura 3.15, se basa en un lazo interno con una referencia de par interna  $y_1$  y una retroalimentación de par  $y_2$ . Este lazo de par proporcional controla la velocidad  $\omega$  con cierto error. La necesidad de proporcionar un valor finito de la señal de la referencia de par  $T_{ref}$  requiere un valor de  $K_M(y_1 - y_2)$  distinto de cero. Por esta razón, la diferencia entre la velocidad interna de referencia  $y_1/K_{FB}K_D T$  y la velocidad real que es inversamente proporcional a la ganancia  $d$  y a la ganancia  $K_M$ . Cuando la relación  $T_{MAX}/K_M$  es grande, el error  $y_1 - y_2$  puede tener un valor considerable. En tales casos, para tener en cuenta la imperfección del controlador del lazo interno, el lazo dependiente del límite de velocidad de la Ec. (3.47) puede ser modificado y sintonizado a fin de que el sistema desacelere y alcance el objetivo sin sobreimpulso.

Dado el intervalo de frenado con  $T_{em} = -T_{MAX}$ , la referencia  $y_1$  y la señal de retroalimentación  $y_2$  del controlador de lazo interno difieren por  $\Delta y = y_1 - y_2 = -T_{MAX}/K_M$ . Con  $y_2 \approx K_{FB}K_D T \omega$  la velocidad real  $\omega$  es igual a  $(y_1 + T_{MAX}/K_M)/K_{FB}K_D T$ ,

---

por lo tanto, se supera la referencia de velocidad interna que se había supuesto en la Ec. (3.49)  $y_1/K_{FB}K_D T$  por  $\Delta\omega_B = T_{MAX}/(K_{FB}K_D K_M T)$ . El error  $\Delta\omega_B$  asume valores despreciables en los casos en que la ganancia de retroalimentación  $K_D$  y la ganancia del actuador  $K_M$  son grandes, mientras los picos de par  $T_{MAX}$  son relativamente pequeños. En el caso cuando  $\Delta\omega_B$  no puede ser despreciable, la velocidad real excede las restricciones dadas en la Ec. (3.47), como consecuencia, el sistema de control de posición en la Figura 3.15 alcanza la posición objetivo con  $\omega > 0$ . La velocidad residual de  $\omega(\Delta\theta = 0) \approx \Delta\omega_B$  produce un exceso de la posición de salida que excede el objetivo provocando un sobreimpulso.

En un sistema corriendo hacia un objetivo negativo, la velocidad de movimiento es negativa, mientras que el par en la fase de frenado es igual a  $T_{em} = +T_{MAX}$ . Cuando el sistema frena, la velocidad real  $\omega$  es igual a  $(y_1 - T_{MAX}/K_M)/K_{FB}K_D T$  y la velocidad residual  $\Delta\omega_B$  es negativa.

Con el fin de evitar el sobreimpulso causado por la imperfección del controlador del lazo interno, la restricción de velocidad  $fx(\Delta\theta)$  tiene que ser modificada. El límite de la raíz cuadrada impuesto en la velocidad interna de referencia  $y_1$ , obtenido de la Ec. (3.47), tiene que ser coregido por  $T_{em}/(K_{FB}K_D K_M T)$  con el fin de proporcionar un frenado oportuno y restringir el movimiento del sistema a la región permitida del plano de fase (el área sombreada en la Figura 3.14). El límite de velocidad permitido  $fx^*(\Delta\theta)$  está dado en la Ec. (3.52). Para las velocidades por encima del límite  $\omega(A)$ , el límite de velocidad  $fp$  en la Ec. (3.47) se incrementa en  $|T_{em}/K_{FB}K_D K_M T|$ , lo cual incrementa la referencia de par  $T_{ref}$ , que proporciona el par de frenado necesario para evitar sobreimpulsos. El límite inferior de  $fp^*$  en la Ec. (3.51) es establecido a  $\omega(A) = 2K_D T_{MAX} T / (JK_P)$ , esta velocidad corresponde a la intersección de las curvas  $fl$  y  $fp$  en la Figura 3.14. Para  $|\omega| \leq \omega(A)$ , el sistema opera en modo lineal, donde el límite de velocidad no lineal  $fx^*$  se encuentra inactivo. El límite de velocidad modificado  $fx^*(\Delta\theta)$  es usado en las subsecuentes modelos [N. Vukosavic, 2007].

$$fp^*(\Delta\theta) = \min \left\{ \omega(A), \left( K_S \sqrt{\frac{2T_{MAX}|\Delta\theta|}{J}} + \left| \frac{T_{em}}{K_{FB}K_D K_M T} \right| \right) \right\} \quad (3.51)$$

$$f_{x^*}(\Delta\theta) = \min \left\{ \frac{K_P |\Delta\theta|}{K_D T}, \omega_{MAX}, f_{p^*}(\Delta\theta) \right\} K_{FB} K_D T \operatorname{sgn}(\Delta\theta) \quad (3.52)$$

La restricción de la velocidad interna de referencia al área sombreada de la Figura 3.14 todavía puede dejar fuera del área permitida a la velocidad real. El exceso de velocidad es proporcional al error de velocidad transitoria del control interno de velocidad. Incluso una pequeña excursión más allá del límite  $f_p(\Delta\theta)$  resulta en un retraso en el frenado y en un sobreimpulso. Con el fin de proporcionar un frenado oportuno, el límite de velocidad de la raíz cuadrada puede ser reducido, compensando de tal manera los errores de la velocidad dinámica. El valor nominal del coeficiente de escalamiento en la Ec. (3.51) es  $K_S = 1$ . En las simulaciones subsecuentes, el escalamiento es establecido en  $K_S = 0.98$

### 3.8 Simulación del Sistema con un Controlador PD No Lineal.

La estructura en la Figura 3.15, será evaluada por medio de una simulación. El modelo de Simulink dado en la Figura 3.6 se toma como punto de referencia, el modelo es modificado removiendo el bloque de la ganancia  $K_P$  e insertando en este lugar la función  $f_{x^*}(\Delta\theta)$  dada en la Ec. (3.52). El bloque no lineal Y1 en la Figura 3.16 recibe el error de posición  $\Delta\theta$  y el par  $T_{em}$  y proporciona la velocidad interna de referencia  $y_1$ , limitado de acuerdo a las ecuaciones.(3.51) y (3.52).

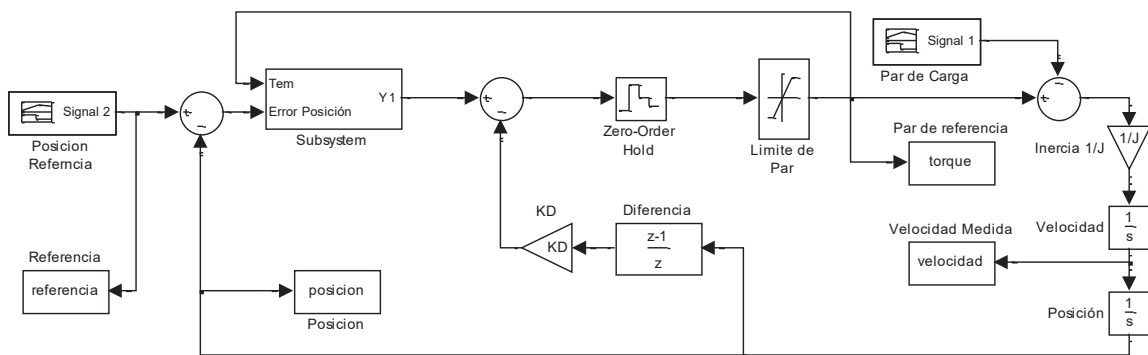


Figura 3.16 Sistema de control de posición PD, incluido el bloque de la función  $f_{x^*}(\Delta\theta)$  dada en la Ec. (3.52). El bloque no lineal Y1 reemplaza la ganancia proporcional  $K_P$ .



El subsistema Y1 se detalla en la Figura 3.17. El límite de la raíz cuadrada es corregido por la adición del valor absoluto del par del motor, obtenido del bloque *Abs1*, el bloque llamado *LIMITER* da el límite inferior de la señal de acuerdo con la Ec. (3.51).

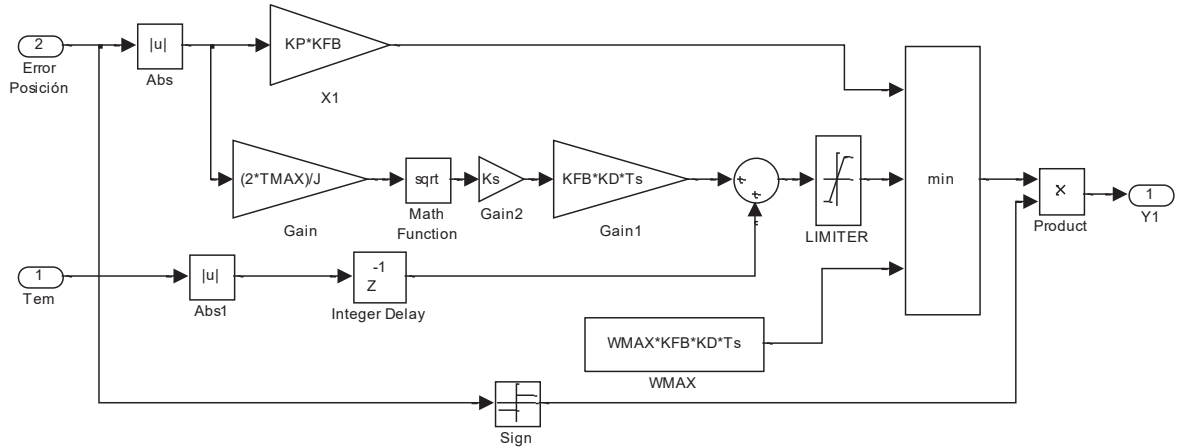
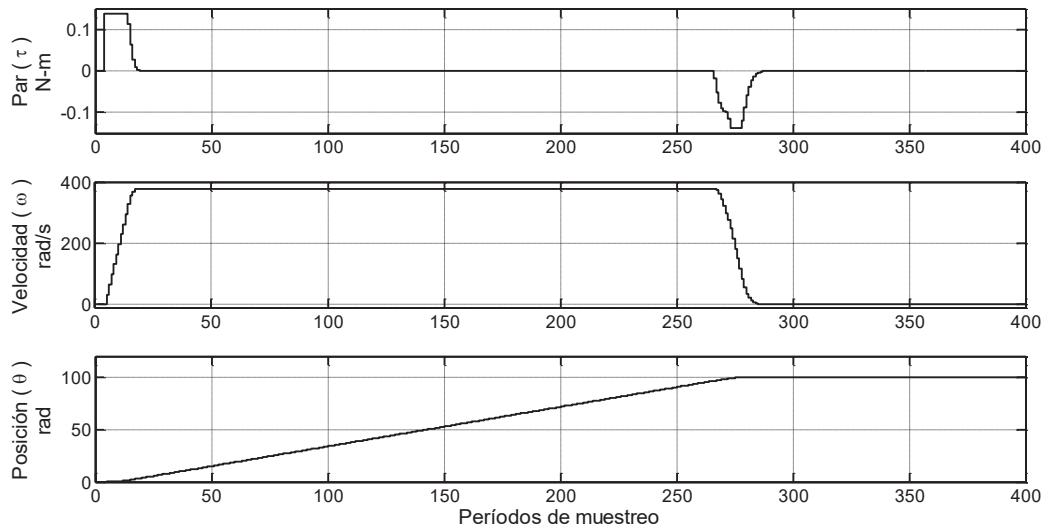


Figura 3.17 Subsistema de Simulink implementando la función no lineal  $f x^*(\Delta\theta)$ , como se define en la Ec. (3.52). Este subsistema reemplaza al bloque de la ganancia proporcional  $K_p$  del modelo dado en la Figura 3.5.

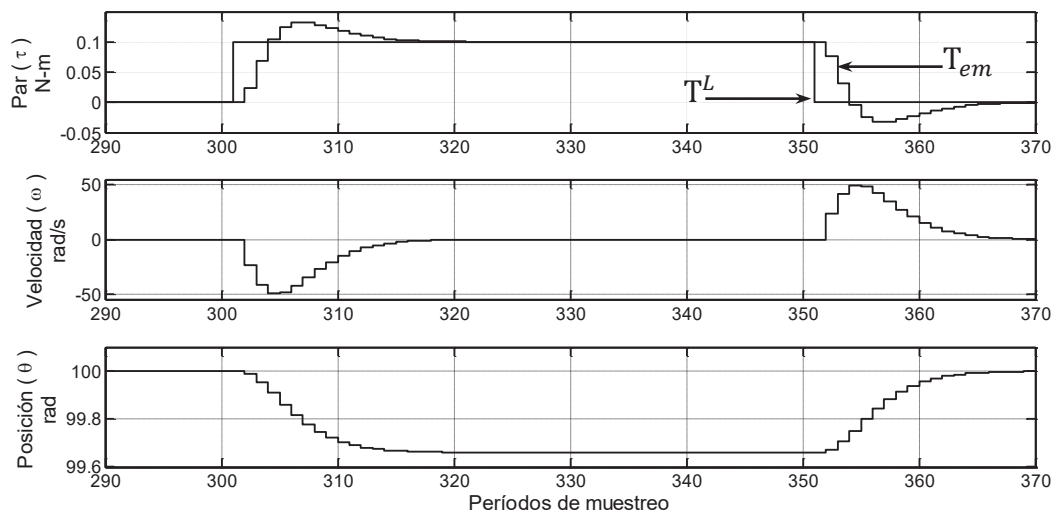
La simulación es desarrollada de acuerdo a un sistema con los siguientes parámetros  $K_M = 1$ ,  $T_{MAX} = 0.13736Nm$ ,  $K_{FB} = 1$ ,  $T = 1ms$ ,  $J = 4.2 \times 10^{-6}kgm^2$ ,  $\theta^* = 100 rad$  y  $\omega_{MAX} = 480.44 rad/s$ . Las ganancias de retroalimentación son establecidas de acuerdo con la regla de diseño de la Ec. (3.44).

La respuesta a grandes escalones de entrada se muestra en la Figura 3.18, los trazos representan el par del motor, velocidad y posición, el sistema primero acelera usando el par máximo  $T_{MAX}$ , corriendo a la máxima velocidad  $\omega_{MAX}$  y eventualmente frenando, usando el par de frenado disponible  $-T_{MAX}$ , deteniéndose justo a tiempo al llegar al objetivo sin presentar sobreimpulso, es importante observar que la respuesta dada en la figura alcanza el objetivo en el menor tiempo posible, dados los límites  $T_{MAX}$  y  $\omega_{MAX}$ .



**Figura 3.18** Respuesta a un escalón grande de un control de posición PD en tiempo discreto con trayectoria dependiente del límite de velocidad.

En la Figura 3.19 se observa la respuesta transitoria del modelo de Simulink de la Figura 3.16.



**Figura 3.19** Respuesta transitoria al par de carga del modelo de Simulink de la Figura 3.16. Donde se observa el error de posición causado por un par de carga constante.

Cuando se aplica una perturbación de par de carga, donde observamos que al aplicar el par de carga al sistema, el controlador de posición proporciona un par motor para

---

balancear la carga. En el instante que el par electromagnético es igual al par de carga, la posición de salida se mantiene desviada de la posición deseada  $\theta^*$ . Este comportamiento del controlador de posición PD es indeseable para el cumplimiento de las características necesarias de un control de posición, ya que es deseable que el sistema sea robusto y mantenga la posición deseada  $\theta^*$  en presencia de perturbaciones de carga.

Por consiguiente, es necesaria la implementación de la acción de control integral, para eliminar el error de posición causado por la aplicación de un par de carga constante. En seguida se analizará la respuesta transitoria del sistema con las acciones de control proporcional, integral y derivativo.

### 3.9 El Controlador de Posición con Acción Integral

Un control de posición con acción integral elimina el error de posición causado por una carga constante, también proporciona a los sistemas la capacidad de seguimiento de perfiles con pendiente constante sin errores. La estructura y configuración de parámetros es considerada para la operación en modo lineal, se analiza la habilidad del sistema para el seguimiento de trayectorias de referencia, para la operación con grandes perturbaciones de entrada, donde se alcanzan los límites de velocidad y par del sistema.

El diagrama de bloques de un controlador de posición PID lineal en tiempo discreto es mostrado en la Figura 3.20 [N. Vukosavic, 2007]. Las acciones proporcional, integral y derivativa en la Figura 3.20, están arregladas para remover los ceros de lazo cerrado y eliminar el sobreimpulso asociado con tales ceros, al mismo tiempo, la reubicación de las acciones proporcional y derivativa en la trayectoria de retroalimentación y su implementación en la forma incremental facilita la subsecuente implementación de la ley de control no lineal, adecuada para la operación con grandes perturbaciones, donde el par  $T_{MAX}$  y la velocidad  $\omega_{MAX}$  entran en los límites del sistema.

La acción integral es ubicada en la trayectoria directa y procesa el error de seguimiento  $\Delta\theta$ . En la salida del bloque de ganancia  $K_I$ , el incremento en la acción integral es obtenida como  $K_{FB}K_I\Delta\theta$ . El incremento en la acción proporcional es obtenido como la

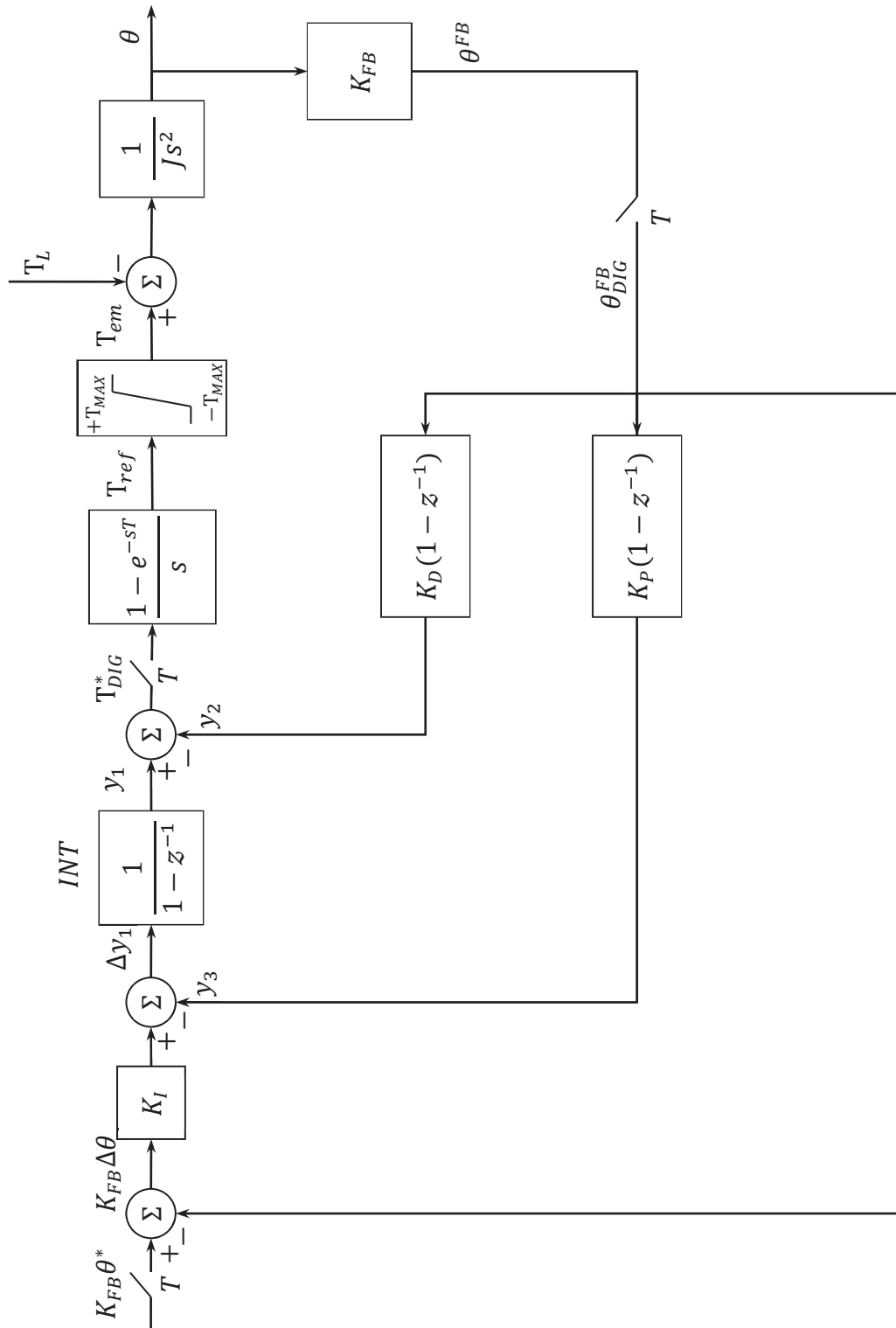


Figura 3.20 Control de posición en tiempo discreto, lineal con acciones de control integral, proporcional y derivativo. La acción integral se encuentra en la trayectoria directa y procesa el error de seguimiento  $\Delta\theta$ . Las acciones de control proporcional y derivativo están ubicadas en la trayectoria de retroalimentación.

---

diferencia entre las dos muestras sucesivas de la retroalimentación  $y_{3(n)} = K_{FB}K_P(\theta_n - \theta_{(n-1)})$ .

La señal  $y_3$  es restada de  $K_{FB}K_I\Delta\theta$ , obteniendo el incremento  $\Delta y_1$  de la señal  $y_1$ . Los incrementos  $\Delta y_1$  son sumados dentro del integrador digital, denotado como *INT* en la Figura 3.20. La retroalimentación derivativa es obtenido como  $y_{2(n)} = K_{FB}K_D(\theta_n - \theta_{(n-1)})$ . Las muestras de la referencia de par  $T_{(n)}^*$  son calculadas como  $y_{1(n)} - y_{2(n)}$  y alimentadas al retenedor de orden cero. Se asume que el par electromagnético  $T_{em}$  es proporcional a la salida del retenedor de orden cero  $T_{em}(t) = K_M T_{ref}(t)$ . Es importante notar que la señal  $y_1$  representa la referencia interna de velocidad, esto es, por razones de análisis en las secciones previas, la retroalimentación derivativa  $y_2$  es proporcional a la velocidad el eje y constituye un lazo de velocidad local con la referencia  $y_1$  y la señal de retroalimentación  $y_2$ .

Un controlador de posición en tiempo discreto adquiere las muestras de retroalimentación  $\theta_{(n)}$  en el instante de muestreo  $t = nT$ . Las muestras de la referencia de par  $T_{(n)}^*$  son calculadas de la referencia de posición, la muestra  $\theta_{(n)}$  y las muestras de retroalimentación pasadas (Ec. (3.53)).

$$T_{(n)}^* = K_{FB} \left[ K_I \sum_{j=0}^{j=n} (\theta_{(j)}^* - \theta_{(j)}) - K_P \theta_{(n)} - K_D (\theta_{(n)} - \theta_{(n-1)}) \right] \quad (3.53)$$

Si asumimos que el tiempo requerido para evaluar la Ec. (3.53) es despreciable comparado con el periodo de muestreo, el par del motor  $T_{em}(t) = K_M T_{(n)}^*$  es generado por el actuador y alimentado al objeto de control durante el intervalo  $[nT \dots (n+1)T]$ , en el instante  $t = (n+1)T$ , la muestra nueva de la referencia de par  $T_{(n+1)}^*$  es calculada y alimentada al retenedor de orden cero.

La suposición de que el par del motor  $T_{em}(t) = K_M T_{(n)}^*$  se encuentra disponible en el instante  $t = nT$  se basa en que el actuador de par tiene un retraso insignificante y el tiempo de cálculo es una pequeña fracción del periodo de muestreo. El actuador de par recibe la referencia digital  $T_{(n)}^*$  y produce el par del motor real  $T_{em}$  en el eje del motor.

---

### 3.10 La Operación en Modo Lineal y las Funciones de Transferencia al Pulso

El par del motor y la velocidad del sistema son limitados a  $T_{MAX}$  y a  $\omega_{MAX}$  respectivamente. En la respuesta a grandes perturbaciones de entrada, el par y/o la velocidad pueden alcanzar sus límites y llevar al sistema a un modo de operación no lineal. Con la variable de control al límite, el par no es afectado por la retroalimentación y el lazo es interrumpido, en este punto, los cambios en la posición de salida no pueden ser controlados. Con el fin de proporcionar un comportamiento controlado en tales casos, el controlador de posición tiene que ser ampliado con una ley de control no lineal, similar a la dada en la Figura 3.15 y la Ec. (3.50).

Cuando las perturbaciones son relativamente pequeñas, las variables del sistema en la Figura 2.21 permanecen dentro de los límites del sistema, el sistema tiene un comportamiento lineal y la relación entre la posición de salida, la entrada y las perturbaciones pueden ser descritas por medio de la función de transferencia al pulso; el carácter de la respuesta es determinado por lo polos y ceros de la función de transferencia de lazo cerrado.

Se asume que el objeto de control tiene una inercia  $J$  con una fricción despreciable, la función de transferencia al pulso del objeto de control fue discutida en detalle en la sección 3.1.1, la reescribimos la Ec. (3.13) a continuación.

$$\theta(z) = W_P(z)T^*(z) - W_{PL}(z)T^L(z) \quad (3.54)$$

Donde la función de transferencia al pulso  $W_P(z)$  y  $W_{PL}(z)$  son obtenidas como:

$$\begin{aligned} W_P(z) &= \mathcal{Z} \left( \frac{1 - e^{-sT}}{s} K_M \frac{1}{Js^2} \right) = \frac{K_M T^2 (z + 1)}{2J(z - 1)^2} \\ W_{PL}(z) &= \mathcal{Z} \left( \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{1}{Js^2} \right) = \frac{T^2 (z + 1)}{2J(z - 1)^2} \end{aligned} \quad (3.55)$$

El cálculo de la función de transferencia del sistema de lazo cerrado  $W_{SS}(z)$ , requiere de la función del objeto de control y de la representación del controlador de posición en el

dominio  $z$ . La ecuación de diferencias (3.56), describe el cálculo de la siguiente muestra de la referencia de par, el incremento  $\Delta T_{(n+1)}^*$  en la referencia de par es obtenido como:

$$\Delta T_{(n+1)}^* = T_{(n+1)}^* - T_{(n)}^* \quad (3.56)$$

$$\Delta T_{(n+1)}^* = K_{FB} [K_I(\theta_{(n+1)}^* - \theta_{(n+1)}) - K_P(\theta_{(n+1)} - \theta_{(n)}) - K_D(\theta_{(n+1)} - 2\theta_n + \theta_{(n-1)})]$$

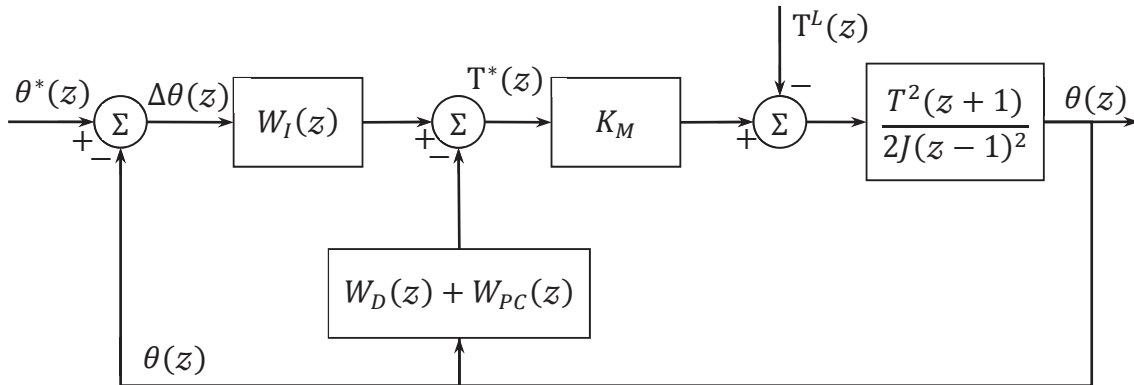
Si aplicamos la propiedad de corrimiento de la transformada  $z$ , la ecuación de diferencias es convertida de la siguiente forma [J. Astrom & Wittenmark, 1997]:

$$T^*(z)(z - 1) = K_{FB} \{K_I z (\theta^*(z) - \theta(z)) - \theta(z) [K_P(z - 1) - K_D(z - 2 + z^{-1})]\} \quad (3.57)$$

La imagen compleja de la referencia de par es obtenida como:

$$T^*(z) = K_{FB} K_I \frac{z}{(z - 1)} (\theta^*(z) - \theta(z)) - K_{FB} K_P \theta(z) - K_{FB} K_D \frac{z - 1}{z} \theta(z) \quad (3.58)$$

$$T^*(z) = W_I(z) (\theta^*(z) - \theta(z)) - W_{PC}(z) \theta(z) - W_D(z) \theta(z) \quad (3.59)$$



**Figura 3.21** Diagrama de bloques simplificado de un control de posición operando en modo lineal. La función transferencia pulso  $W_I(z)$ ,  $W_{PC}(z)$  y  $W_D(z)$  representan las acciones proporcional, integral y derivativo respectivamente.

El diagrama de bloques simplificado del sistema de la Figura 3.21, es obtenido de las ecuaciones (3.55) y (3.59). De la función de transferencia del objeto de control  $W_P(z)$  y las funciones  $W_I(z)$ ,  $W_{PC}(z)$  y  $W_D(z)$ , se obtiene la función de transferencia  $W_{SS}(z) = \theta(z)/\theta^*(z)$  que se muestra en la Ec. (3.60)

---


$$W_{SS}(z) = \frac{\theta(z)}{\theta^*(z)} = \frac{W_P W_I}{1 + W_P(W_I + W_{PC} + W_D)}$$

$$W_{SS}(z) = \frac{\frac{K_M T^2 (z+1)}{2J(z-1)^2} K_{FB} K_I \frac{z}{(z-1)}}{1 + \left[ \frac{K_M T^2 (z+1)}{2J(z-1)^2} \right] \left[ K_{FB} K_I \frac{z}{(z-1)} + K_{FB} K_P - K_{FB} K_D \frac{z-1}{z} \right]} \quad (3.60)$$

Dentro de la función de transferencia, todas las ganancias de retroalimentación  $K_I, K_P$  y  $K_D$  son multiplicadas por el factor  $K_M T^2 K_{FB}/2J$ , por consiguiente, es conveniente ganancias normalizadas  $i, p$  y  $d$  definidas como:

$$i = K_I K_{FB} K_M \frac{T^2}{2J}, \quad p = K_P K_{FB} K_M \frac{T^2}{2J}, \quad d = K_D K_{FB} K_M \frac{T^2}{2J} \quad (3.61)$$

Las ganancias normalizadas contienen los parámetros del sistema, simplifican la función de transferencia y el polinomio característico. Los valores optimizados de las ganancias normalizadas no cambian con los parámetros del sistema  $K_M, T, K_{FB}$  y  $J$ , lo que simplifica la sintonización y adaptación.

Con la introducción de las ganancias normalizadas, se obtiene la función de transferencia de lazo cerrado de la Ec. (3.62), donde  $f_{PID}(z)$  es designado como el polinomio característico del sistema. En la Ec. (3.63) el polinomio de cuarto orden es expresado en términos de  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$ .

$$W_{SS}(z) = \frac{(z+1)iz^2}{z(z-1)^3 + (z+1)[iz^2 + pz(z-1) + d(z-1)^2]} \quad (3.62)$$

$$W_{SS}(z) = \frac{(z+1)iz^2}{f_{PID}(z)}$$

$$f_{PID}(z) = z^4 - (3 - p - i - d)z^3 + (3 - d + i)z^2 - (1 + p + d)z + d \quad (3.63)$$

$$f_{PID}(z) = (z - \sigma_1)(z - \sigma_2)(z - \sigma_3)(z - \sigma_4)$$

La respuesta de la posición de salida a los cambios del par de carga es descrita por la función de transferencia  $W_{LS}(z) = \theta(z)/T^L(z)$ , esta función es obtenida de la Figura 3.21 y es obtenida como:



---


$$W_{LS}(z) = \frac{\theta(z)}{T^L(z)} = \frac{-W_{PL}(z)}{1 + W_P(W_I + W_P + W_D)}$$

$$W_{LS}(z) = \frac{-\frac{K_M T^2(z+1)}{2J(z-1)^2}}{1 + \left[ \frac{K_M T^2(z+1)}{2J(z-1)^2} \right] \left[ K_{FB} K_I \frac{z}{(z-1)} + K_{FB} K_P + K_{FB} K_D \frac{z-1}{z} \right]} \quad (3.64)$$

$$W_{LS}(z) = \frac{T^2 - (z^2 - 1)z}{2J f_{PID}(z)}$$

En presencia de una referencia de posición constante  $\theta^*(t) = \Theta^* h(t)$  y con un escalón de perturbación de carga  $T^L(t) = T^{LOAD} h(t)$ , donde  $h(t)$  representa un escalón unitario, el valor de estado estable de la posición de salida, puede ser encontrado de la función de transferencia al pulso  $W_{SS}(z)$  y de  $W_{LS}(z)$ , en base al teorema del valor final [Ogata, 1995], con la entrada y la perturbación de carga teniendo una función de escalón unitario, sus imágenes complejas son  $\theta^*/(1 - z^{-1})$  y  $T^{LOAD}/(1 - z^{-1})$ , respectivamente; dado que los polos de lazo cerrado son estables, el valor final de la salida se encuentra como:

$$\theta(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ (1 - z^{-1}) \left[ W_{SS}(z) \frac{\theta^*}{(1 - z^{-1})} + W_{LS}(z) \frac{T^{LOAD}}{(1 - z^{-1})} \right] \right\} = \theta^* \quad (3.65)$$

De la expresión anterior, ante la presencia de una entrada de referencia constante y perturbaciones constantes de carga  $|T^{LOAD}| \leq T_{MAX}$ , el valor de estado estable de la posición de salida corresponde a la referencia. De acuerdo con la Ec. (3.65) la robustez del controlador PID es infinita, el error observado en condiciones similares en el controlador PD es eliminado por la introducción de la acción integral. El integrador de error en la Figura 3.20, incrementa el número total de estados, por consiguiente, el polinomio característico  $f_{PID}(z)$  es de cuarto orden, en comparación con el polinomio característico  $f_{PD}(z)$  de tercer orden obtenido en la Ec. (3.27) para el controlador de posición PD. Un incremento en el orden y un mayor número de polos de lazo cerrado alarga el tiempo de elevación y disminuye el ancho de banda de la respuesta del sistema.

---

### 3.11 Cálculo de Parámetros de Controladores Digitales de Posición PID.

El tipo de respuesta transitoria a pequeñas perturbaciones donde el sistema opera en modo lineal, depende de los ceros del polinomio característico  $f_{PID}(z)$ . La presencia de oscilaciones en la respuesta al escalón depende del factor de amortiguamiento de los ceros del polinomio característico, este también determina el tiempo de subida y el ancho de banda. Los raíces  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  y  $\sigma_4$  son determinados por los valores normalizados de las ganancias  $p, i$  y  $d$ , llegando a la conclusión de que la ubicación de los polos no se puede realizar de manera arbitraria. Los polos de lazo cerrado y las ganancias de retroalimentación están vinculados por las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 &= 3 - p - i - d \\ \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_4 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_2\sigma_4 + \sigma_3\sigma_4 &= 3 + i - d \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2\sigma_4 + \sigma_1\sigma_3\sigma_4 + \sigma_2\sigma_3\sigma_4 &= 1 + p + d \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 &= d\end{aligned}\tag{3.66}$$

La suma de las cuatro relaciones resulta en la Ec. (3.67), presentando una restricción para los polos:

$$\begin{aligned}\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_4 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_2\sigma_4 + \sigma_3\sigma_4 \\ + \sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2\sigma_4 + \sigma_1\sigma_3\sigma_4 + \sigma_2\sigma_3\sigma_4 + \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 &= 7\end{aligned}\tag{3.67}$$

Con la estructura del controlador de la Figura 3.20, una configuración arbitraria de los polos de lazo cerrado no es factible. Cuando tres de ellos son conocidos, el cuarto puede ser determinado por la Ec. (3.67).

En un sistema de control de posición, la respuesta al escalón deseada es no oscilatoria, llegando a la posición deseada sin sobreimpulso. La respuesta transitoria del par, velocidad y posición tiene que ser no oscilatoria también, evitando por lo tanto cambios indeseables en el signo del par y en la dirección de la velocidad. Una respuesta estrictamente no oscilatoria requiere que los polos de lazo cerrado sean reales y positivos dentro del círculo unitario. Las ventajas de una respuesta estrictamente no oscilatoria fueron discutidas en el capítulo 2.

---

Para crear la configuración de parámetros optimizados, que resulte en un comportamiento estrictamente no oscilatorio con un corto tiempo de subida, la respuesta de velocidad debe ser evaluada numéricamente por la formulación de una función criterio apropiado. La función debe ser una relación monótona con la respuesta de velocidad. Esta función depende de los parámetros ajustables de retroalimentación, por lo tanto el cálculo de sus extremos resulta en la configuración de parámetros optimizados.

Como en la Ec. (3.30), la función criterio puede ser definida como la suma de las muestras del error de posición. Con una respuesta no oscilatoria, las muestras de error  $\Delta\theta_{(n)}$  son estrictamente positivas. La suma de las muestras de error durante la respuesta al escalón está dada en la Ec. (3.68), y es proporcional a la superficie sombreada de la Figura 3.10, que representa una respuesta al escalón estrictamente no oscilatoria de la posición de salida y del correspondiente error. Mientras más pequeña sea el área sombreada (es decir el valor de  $Q$ ), más rápida será la respuesta a la respuesta al escalón.

$$Q = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\theta(kT) \quad (3.68)$$

Es necesario expresar el valor de  $Q$  en términos de las ganancias de retroalimentación normalizadas. Dada la imagen compleja de la referencia de posición  $\theta^*(z) = \Theta^*/(1 - z^{-1})$  y la función de transferencia de lazo cerrado del sistema  $W_{SS}(z)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta\theta(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\theta_{(k)} z^{-k} = \theta^*(z) - \theta(z) \\ \Delta\theta(z) &= [1 - W_{SS}(z)]\theta^*(z) = [1 - W_{SS}(z)] \frac{\theta^*}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{[z^4 - (3 - p - i - d)z^3 + (3 - d + i)z^2 - (1 + p + d)z + d] - (z + 1)iz^2}{z^4 - (3 - p - i - d)z^3 + (3 - d + i)z^2 - (1 + p + d)z + d} \frac{\theta^*}{1 - z^{-1}} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Si introducimos el polinomio característico  $f_{PID}(z)$  de la Ec. (3.63) en la expresión anterior, la transformada  $z$  del error de posición es obtenido como

---


$$(1 - z^{-1})\Delta\theta(z) = \frac{z[z^3 - (2 - p - d)z^2 + (1 + p)z - d]}{f_{PID}(z)}\theta^* \quad (3.70)$$

El valor de  $Q$  es encontrado haciendo  $z = 1$  en la Ec. (3.70):

$$(1 - z^{-1})\Delta\theta(z)|_{z=1} = \Delta\theta(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\theta_{(k)} = \frac{p}{i}\theta^* = Q \quad (3.71)$$

Por lo tanto la suma de las muestras de error serán pequeñas y la respuesta rápida para la configuración donde la relación  $p/i$  es pequeña. Por lo tanto, la configuración de parámetros optimizados tienen que proveer las ganancias de retroalimentación  $p, i$  y  $d$  positivas, reales y con ceros estables de  $f_{PID}(z)$ , minimizando al mismo tiempo la relación  $p/i$  [N. Vukosavic, 2007].

Si introducimos  $x = 1/\sigma_1, y = 1/\sigma_2, v = 1/\sigma_3$  y  $w = 1/\sigma_4$  la función criterio puede ser expresada en términos de  $x > 1, y > 1, v > 1$  y  $w > 1$ . De la Ec. (3.67), la variable  $w$  puede ser expresada en términos de las otras tres:

$$w(x, y, v) = \frac{1 + x + y + v + xy + xv + yv + xyv}{7xyv - xy - xv - yv - x - y - v - 1} \quad (3.72)$$

De la ecuación previa y la Ec. (3.66), la función criterio  $Q$  puede ser expresada en términos de  $x, y$  y  $v$ .

$$Q(x, y, v) = \frac{(x + y + v + w(x, y, v) - xyvw(x, y, v) - 1)\theta^*}{1 + xy + yv + vw(x, y, v) + xv + yw(x, y, v) + xw(x, y, v) - 3xyvw(x, y, v)} \quad (3.73)$$

El mínimo de  $Q(x, y, v)$  tiene que ser encontrado dentro de la región  $x > 1, y > 1, v > 1$  y  $w > 1$ . El procedimiento fue explicado previamente en el capítulo 2 (sección 2.7.3) y capítulo 3 (sección 3.4). Para simplificar la búsqueda del mínimo de  $Q$ , es reemplazada por la búsqueda para el máximo de  $Q_1 = 1/Q$ . Es necesario demostrar que la función  $Q(x, y, v)$  no tiene un extremo en la frontera de la región de interés. Entonces, las derivadas parciales de  $Q_1$  son obtenidas. Los valores de  $x_{OPT}, y_{OPT}$  y  $v_{OPT}$  son calculados de  $\partial Q_1/\partial x = 0, \partial Q_1/\partial y = 0$  y  $\partial Q_1/\partial v = 0$ . Eventualmente, los valores optimizados para las

---

---

variables  $x, y$  y  $v$  son encontrados como  $x_{OPT} = y_{OPT} = v_{OPT} = 1.4667$ . La cuarta variable es calculada como  $w(x_{OPT}, y_{OPT}, v_{OPT}) = x_{OPT} = 1.4667$ . De este resultado, es calculada la respuesta más rápida al escalón estrictamente no oscilatoria con los polos de lazo cerrado  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0.6818$ . La forma optimizada del polinomio característico y los valores optimizados de las ganancias de retroalimentación se dan en la Ec. (3.74) y en la Ec. (3.75).

$$f_{PID}(z) = (z - \sigma_1)(z - \sigma_2)(z - \sigma_3)(z - \sigma_4) = (z - \sigma)^4$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma = \frac{1}{1.4667} = 0.6818 \quad (3.74)$$

$$d_{OPT} = \sigma^4 = 0.216$$

$$p_{OPT} = 4\sigma^3 - \sigma^4 - 1 = 0.0516 \quad (3.75)$$

$$i_{OPT} = 6\sigma^2 + \sigma^4 - 3 = 0.0052195$$

La sintonización de los valores absolutos de las ganancias de retroalimentación  $K_P, K_I$  y  $K_D$  requieren de la inercia  $J$  del objeto de control, el periodo de muestreo  $T$ , la ganancia estatica del amplificador de par  $K_M$  y la ganancia del sensor del eje  $K_{FB}$ . Las ganancias  $K_P, K_I$  y  $K_D$  son encontradas como

$$K_I = (2Ji_{OPT}) / (K_{FB}K_M T^2)$$

$$K_P = (2Jp_{OPT}) / (K_{FB}K_M T^2) \quad (3.76)$$

$$K_D = (2Jd_{OPT}) / (K_{FB}K_M T^2)$$

En casos cuando la inercia cambia durante el ciclo de operación del posicionador, las ganancias  $p, i$  y  $d$  se mantienen constantes, mientras las ganancias absolutas  $K_P, K_I$  y  $K_D$  son ajustadas de acuerdo a la Ec. (3.76).

## 3.12 La Respuesta al Escalón y el Ancho de Banda de los Controles PD y PID

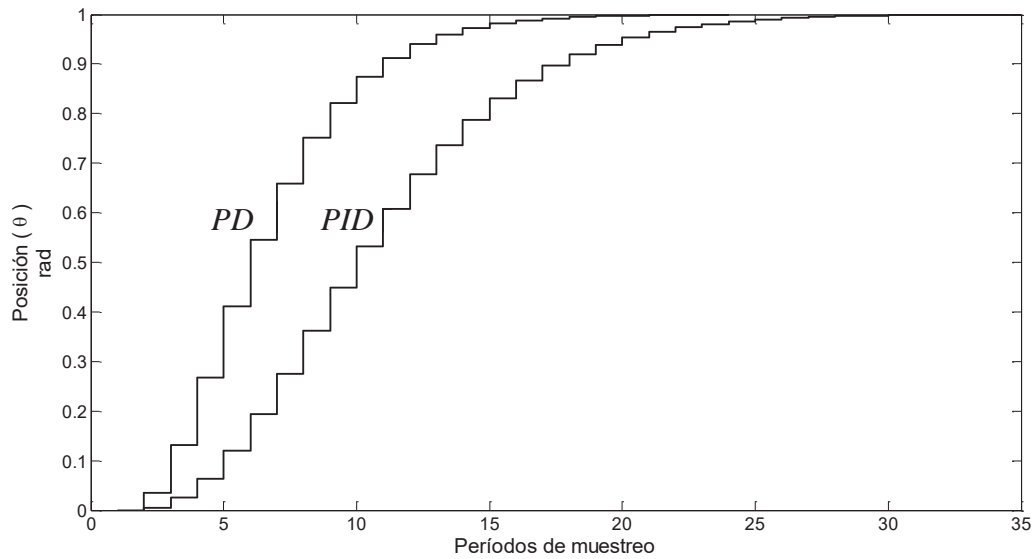
Es interesante comparar la respuesta del tiempo de subida y el ancho de banda del control de posición PD, discutida en el capítulo previo y el control PID, compuesto por la acción integral y una alta robustez. Ambos controladores son considerados en el modo de operación lineal, con la posición de salida definida por la función de transferencia  $W_{ss}(z)$  dada en la Ec. (3.26) para el control PD y la función de transferencia  $W_{ss}(z)$  dada en la Ec. (3.52) para el control PID. Se asume que las ganancias de retroalimentación son puestas de acuerdo a las Ec. (3.43) y (3.75) para proveer la respuesta estrictamente no oscilatoria más rápida. Para cada controlador la respuesta al escalón y sus graficas de Bode son obtenidas con Matlab, usando la secuencia de comandos de la Tabla 3.1.

**Tabla 3.1 Secuencia de comandos de Matlab usados para obtener la respuesta al escalón y la gráfica de Bode para los sistemas de control de posición con acciones de control PD y PID.**

|   |   |
|---|---|
| <code>d = 0.02027; p = 0.03512;</code>                | <code>%Ganancias retroalimentación PD</code>      |
| <code>num1 = [p p 0];</code>                          | <code>%Numerador Ec.3.23</code>                   |
| <code>den1 = [1 -(2-p-d) (1+p) -d];</code>            | <code>%Polinomio característico Ec.3.23</code>    |
| <code>step_pd = dstep(num1,den1);</code>              | <code>%Vector step_pd con repuesta escalón</code> |
| <code>d = 0.216; p = 0.0516; i = 0.0052195</code>     | <code>%Ganancias Control PID</code>               |
| <code>num2 = [i i 0 0];</code>                        | <code>%Numerador de Ec.3.51</code>                |
| <code>den2 = [1 -(3-p-i-d) (3-d+i) -(1+d+p) d]</code> | <code>%Polinomio característico Ec.3.52</code>    |
| <code>step_pid = dstep(num2,den2);</code>             | <code>%Respuesta escalón control PID</code>       |
| <code>stairs(step_pd); hold on;</code>                | <code>%Grafica la respuesta al escalón</code>     |
| <code>stairs(step_pid);</code>                        | <code>%del control PD y PID</code>                |
| <code>[a1,ph1,W1] = DBODE(num1,den1,0.001)</code>     | <code>%Obtención de la grafica de Bode</code>     |
| <code>[a2,ph2,W2] = DBODE(num2,den2,0.001)</code>     | <code>%Obtención de la grafica de Bode</code>     |
| <code>plot(W1,a1; hold on; plot(W2,a2);</code>        | <code>%Grafica para comparar la amplitud</code>   |
| <code>axis(0 500 0 1);</code>                         | <code>%característica.</code>                     |

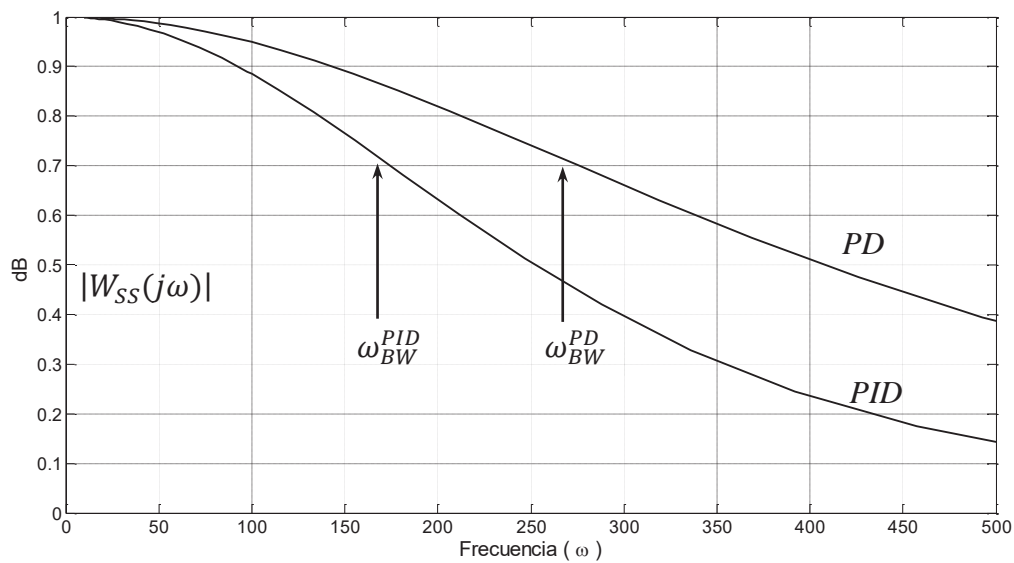
La respuesta al escalón del control PD, dada en la Figura 3.22, incrementa del 10% al 90% de su valor de estado estable en ocho periodos de muestreo (tiempo de subida).

Con el control PID, el tiempo de subida  $t_{PID}$  toma aproximadamente 13 periodos de muestreo. El ancho de banda de lazo cerrado del sistema puede ser evaluado a partir del tiempo de subida  $t_R$ . En sistemas con una respuesta de lazo cerrado bien amortiguada, la frecuencia del ancho de banda  $f_{BW}$  y el tiempo de subida están relacionados por la expresión aproximada  $t_R f_{BW} = 1/3$ .



**Figura 3.22** Respuesta al escalón de controladores de posición PD y PID, en ambos casos, la configuración de parámetros se eligió para tener una respuesta rápida y estrictamente no oscilatoria.

Considerando el periodo de muestreo  $T = 1ms$ , los tiempos de subida son  $t_{RPD} = 8ms$  y  $t_{RPID} = 13ms$ , y sus correspondientes frecuencias de ancho de banda son  $f_{BWPD} = (1/3)/0.08s = 41.6Hz$  y  $f_{BWPID} = 25.6Hz$ .



**Figura 3.23** La amplitud característica  $|W_{SS}(j\omega)|$  del control de posición PD y PID. Se asume que el periodo de muestreo es  $T = 1ms$ . El nivel de 0.707 es alcanzado para  $f_{BWPID} = 25.5Hz$  y  $f_{BWPD} = 41.4Hz$ .

---

El ancho de banda de lazo cerrado puede también ser evaluado de la amplitud característica  $|W_{ss}(j\omega)|$  de la función de transferencia del sistema de lazo cerrado. La amplitud característica es obtenida por medio de la función de Matlab *dbode*, como se explica en la secuencia de comandos de la Tabla 3.1, el resultado es mostrado en la Figura 3.23, escalada para facilitar la apreciación de la frecuencia de ancho de banda.

Con el control PD, el valor de  $|W_{ss}(j\omega)|$  cae a  $-3dB$  (es decir, 0.707) para  $\omega_{BW^{PD}} = 260rad/s$ . Por lo tanto  $f_{BW^{PD}} = 41.4Hz$ . Con el control PID  $f_{BW^{PID}} = 25.5Hz$ . Los valores obtenidos en la Figura 3.23 corresponden a los estimados calculados por el tiempo de subida.

Un control con acción integral tiene un tiempo de subida mayor y una frecuencia de ancho de banda más baja que un controlador que tiene solamente acción proporcional y derivativa. En la Figura 3.22, se puede observar que la introducción de la acción integral prolonga el tiempo de establecimiento aproximadamente un 60%.

### 3.13 Simulación de la Respuesta a una Entrada Escalón y una Carga Escalón.

Con el fin de verificar los resultados obtenidos en la sección previa e investigar el comportamiento de las dinámicas de los controladores de posición en tiempo discreto con acción integral, el sistema es convertido en un modelo de Simulink. En el sistema simulado, la inercia se establece  $J = 4.2 \times 10^{-6}kgm^2$  y el periodo de muestreo  $T = 0.001s$ . Para simplificar, los coeficientes escalares  $K_M$  y  $K_{FB}$  son ajustados a uno. El modelo, dado en la Figura 3.24, toma en cuenta la resolución limitada del sensor del eje.

El bloque *Quantizer* conectado a la salida del integrador de posición en la derecha inferior de la figura, puede ser usada para ajustar la resolución del sensor del eje, para este caso  $q = 0.000001 rad$ , para efectos ilustrativos. Para un apropiado uso del modelo, los parámetros del sistema  $J$  y  $T$  y las ganancias de retroalimentación  $K_P, K_I$  y  $K_D$  pueden ser agregadas como comandos de Matlab. En la subsecuente ejecución de la simulación, se asume que las ganancias de retroalimentación son ajustadas de acuerdo a la Ec. (3.75) y



(3.76). El control de posición es implementado de acuerdo al diagrama de bloques de las Figura 3.20 y Figura 3.21.

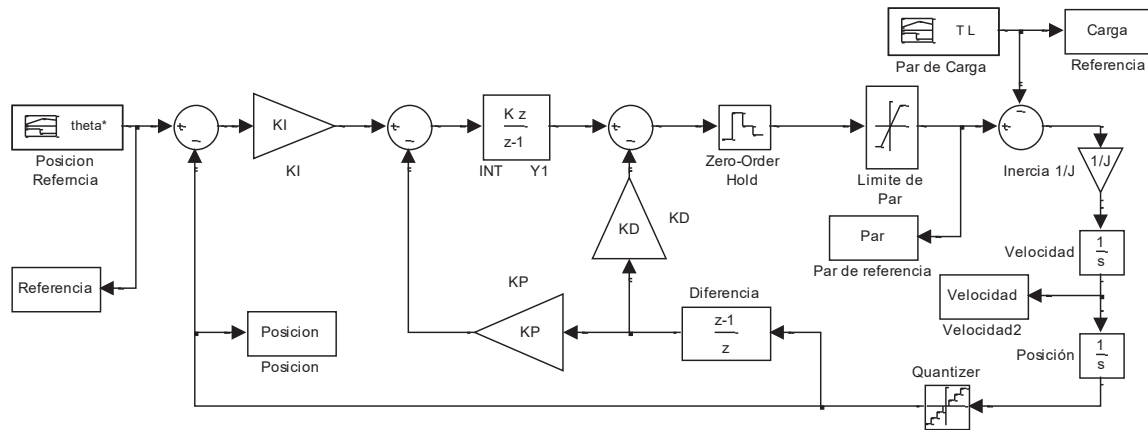


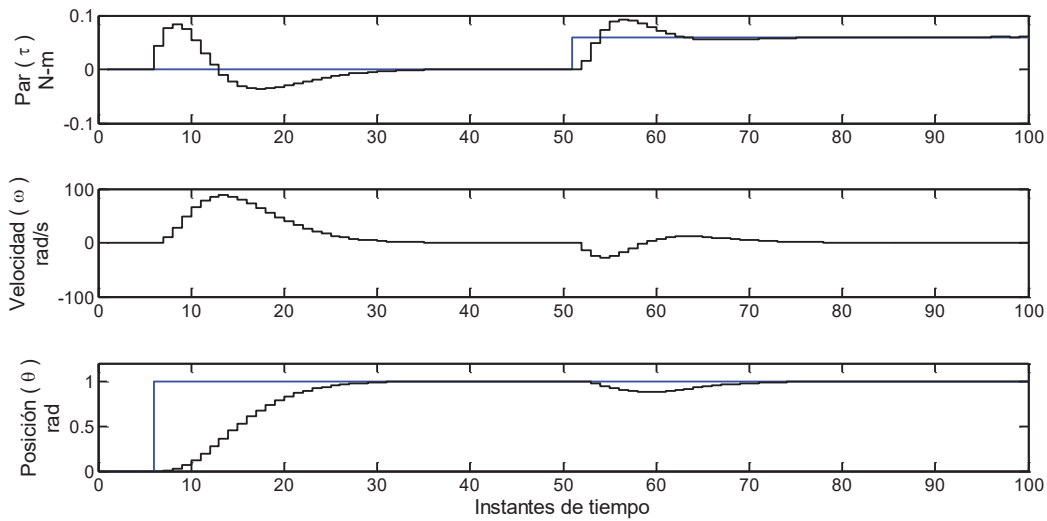
Figura 3.24 Modelo de Simulink de un control de posición PID lineal en tiempo discreto.

En el modelo, el bloque de la referencia de posición y el bloque del par de carga proveen la excitación de entrada y las perturbaciones de carga respectivamente. Se asume que el actuador de par tiene una respuesta instantánea y una ganancia  $K_M = 1$ . El bloque denotado LÍMITE DE PAR toma en cuenta el límite de la capacidad del par de los actuadores de par ( $|T_{em}| \leq T_{MAX}$ ). El bloque titulado *position* y el bloque *torque* capturan la muestras de la posición del eje y el par del motor y son almacenadas en los arreglos *position* y *par* para su trazo y procesamiento. En el menú *configuration parameters* de Simulink, es necesario establecer el paso de simulación. Con el fin de eliminar errores de simulación la parte continua del sistema (por ejemplo la velocidad, los integradores de posición) los pasos de simulación deben de establecerse a un valor de  $T/10$  o más pequeño.

En la Figura 3.25, se muestran los resultados de simulación. La referencia de posición, la posición de salida, el par del motor y el par de carga, para un cambio tipo escalón en la referencia de posición (a la izquierda en la Figura 3.25) y los subsecuentes cambios tipo escalón en el par de carga. La posición de salida alcanza su objetivo sin sobreimpulso. El tiempo de subida es aproximadamente 13 periodos de muestreo, de acuerdo con el resultado obtenido con la función *dstep* de Matlab y dada en la Figura 3.22. Se puede observar en la Figura 3.25 (izquierda) que el par del motor cambia de signo una sola vez, cuando el sistema

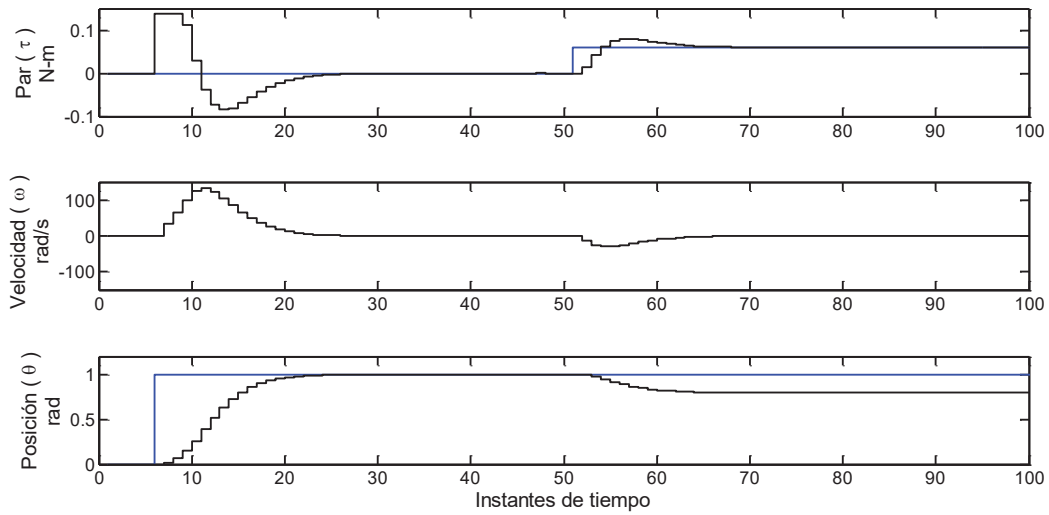
---

completa su fase de aceleración y comienza el frenado. En el lado derecho de la figura, el par de carga sube. En ese momento, la posición de salida cambia. Debido a la acción integral, el par del motor alcanza la carga y va más allá por un breve intervalo de tiempo, permitiendo una secuencia transitoria de aceleración, necesaria para que el error de posición se disipe y vaya a cero. De acuerdo con la Ec. (3.65), el valor de estado estable de la posición de salida no es afectada por la carga.



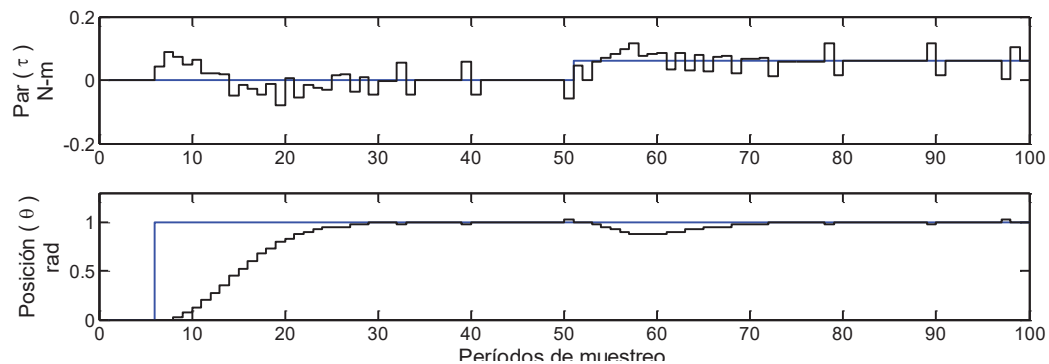
**Figura 3.25** Respuesta transitoria de la posición de salida y el par del motor de un sistema de control de posición con control PID.

Para propósito de comparación, los trazos obtenidos del control de posición PD que están dados en la Figura 3.26, usando la misma la referencia de posición y perturbaciones de carga. Comparado con la Figura 3.25, la respuesta al escalón es más rápida. Sin embargo el escalón de carga produce un error en la posición de salida, debido a la robustez finita obtenida con el control PD.



**Figura 3.26** Respuesta transitoria de la posición de salida y par de carga de un sistema de control de posición PD. La entrada y el disturbio de carga son los mismos que los de la Figura 3.25.

También es de ayuda conocer los efectos de los límites de resolución del sensor del eje. Para este fin, la simulación que arrojó los resultados mostrados en la Figura 3.25 es repetido, modificando la resolución del bloque *Quantizer* a  $25\mu\text{rad}$  de la Figura 3.24. Los trazos correspondientes están dados en la Figura 3.27, que contiene pequeños cambios en la posición de salida. Observables incluso en estado estable. El par del motor contiene pulsaciones tanto en estado estable como en el transitorio.



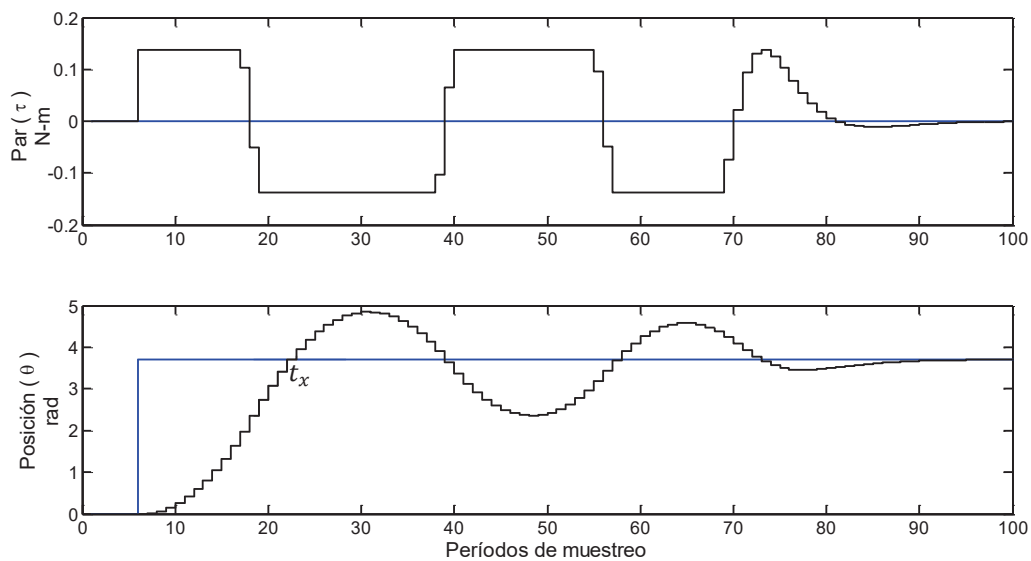
**Figura 3.27** El impacto de la resolución limitada en la respuesta transitoria del sistema de control PID. Las señales de entrada y de disturbio de carga son las mismas que las de la Figura 3.25.

---

### 3.14 Respuesta a un Escalón Grande con un Control de Posición PID Lineal.

El propósito de esta sección es investigar la respuesta a un gran escalón, de un controlador PID lineal en tiempo discreto. La subsecuente ejecución de la simulación es realizada con el modelo de Simulink de la Figura 3.24, con la configuración de ganancias que produzcan una respuesta estrictamente no oscilatoria y con los pasos de la referencia de posición significativamente más grandes con respecto a los presentados en la Figura 3.25.

En la Figura 3.28, están dados los trazos de la simulación donde se observa la posición de salida y la referencia de par para un gran escalón de referencia.



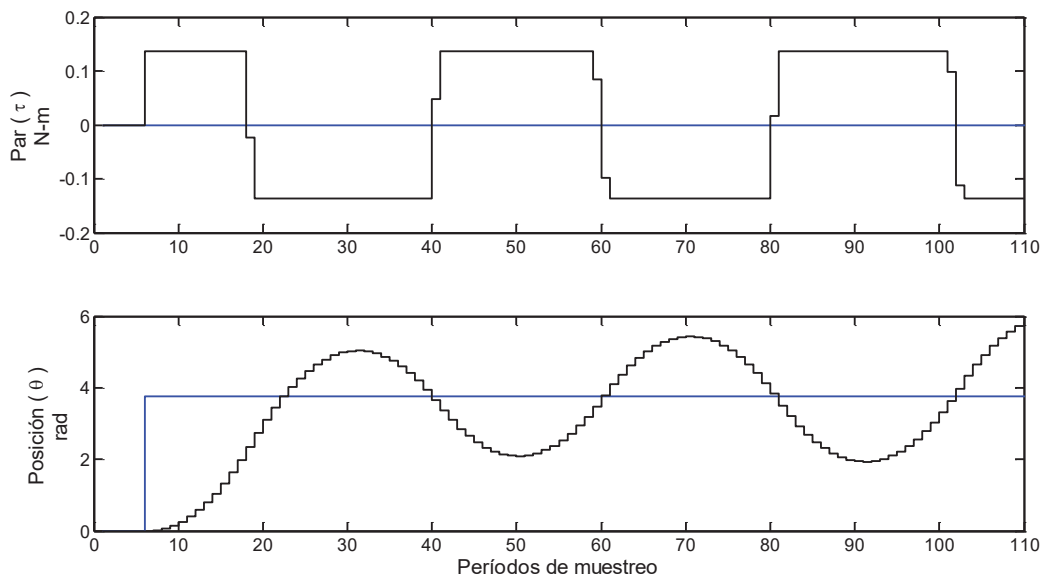
**Figura 3.28** Respuesta a grandes impulsos de un sistema de control de posición en tiempo discreto con acciones de control PID. El par del motor alcanza el límite del sistema y entra en un modo de operación no lineal

El par del motor alcanza el límite del sistema  $+T_{MAX}$  y acelera hacia la referencia. En el instante  $t_x$  la posición de salida alcanza la referencia. Por consiguiente, en el mismo instante, la velocidad máxima y la posición de salida sobrepasan la referencia. Además, la posición de salida oscila alrededor de la referencia con un decremento de la amplitud y el periodo. El par del motor oscila entre los límites  $\pm T_{MAX}$  con un incremento en la frecuencia.

---

Con el par al límite, el sistema opera en el modo no lineal. Después de varios periodos la oscilación decae y el sistema entra en estado estable.

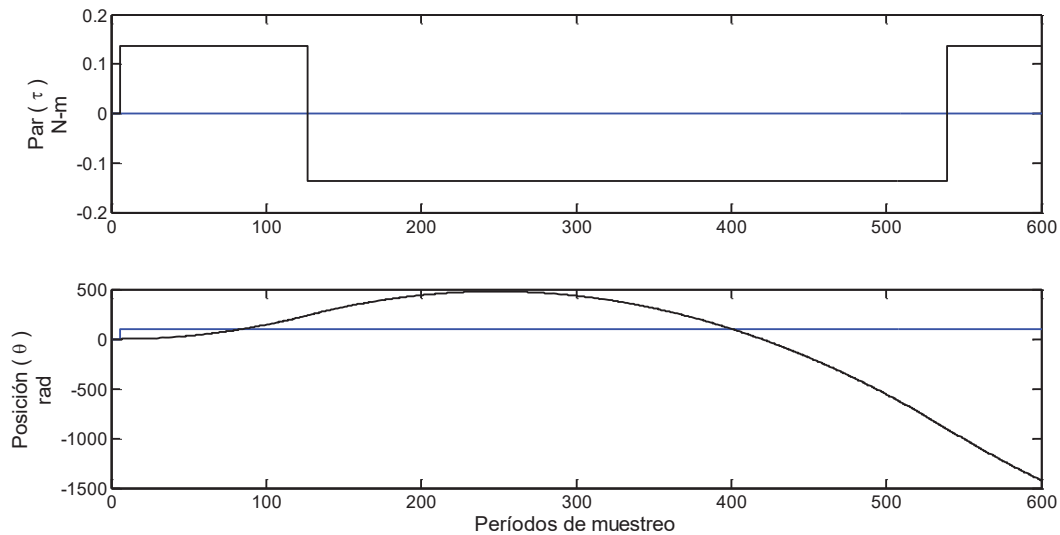
Un incremento en la perturbación de entrada puede aportar oscilaciones no lineales y provocar inestabilidad. En la Figura 3.29, se incrementa la amplitud del escalón de referencia, resultando en oscilaciones sostenidas. La referencia de posición para el trazo de la Figura 3.28 es de  $\theta^* = 3.7 \text{ rad}$ , para la Figura 3.29 corresponde a  $\theta^* = 3.765 \text{ rad}$  y para la Figura 3.30 corresponde una referencia de posición  $\theta^* = 100 \text{ rad}$ . Los valores de la referencia de posición para las distintas simulaciones se consideraron para observar el comportamiento oscilatorio en el caso mostrado en la Figura 3.28, oscilaciones sostenidas por el caso mostrado en la Figura 3.29 y el caso de la Figura 3.30 presenta un sistema inestable, y presenta la misma posición de referencia que el control PD en la Figura 3.13.



**Figura 3.29** Con el incremento de la amplitud de la posición de referencia, se exhiben oscilaciones sostenidas. El sistema opera de manera no lineal. El par cambia entre  $+T_{MAX}$  y  $-T_{MAX}$ .

Los efectos de un gran incremento en la posición de referencia  $\theta^* = 100 \text{ rad}$  son simulados en la Figura 3.30. La amplitud de las oscilaciones no lineales se incrementa, mientras su frecuencia decrece. La amplitud de los pulsos del par del motor se hace más larga y el error de posición continuamente se incrementa. La magnitud de la posición de referencia es la misma que se presenta en la Figura 3.13

---



**Figura 3.30** Un mayor incremento en la amplitud en el disturbio de entrada lleva al sistema a la inestabilidad.

De las respuestas dadas en las Figura 3.28–Figura 3.30, se concluye que el control PID lineal es estable, con una respuesta no oscilatoria solamente en los casos cuando la referencia y las perturbaciones de entrada son relativamente pequeñas, resultando en un transitorio de par y de velocidad que permanecen dentro de los límites del sistema  $\omega_{MAX}$  y  $T_{MAX}$ . Para escalones de entrada amplios (Figura 3.28) la referencia de par se lleva al límite, dando como resultando un comportamiento no lineal con oscilaciones poco amortiguadas. Incluso, grandes perturbaciones de entrada llevan al sistema a la inestabilidad.

En aplicaciones prácticas, el problema puede ser resuelto reemplazando el escalón de referencia por un perfil de rampa, incrementándose con una pendiente constante y alcanzando la posición objetivo.

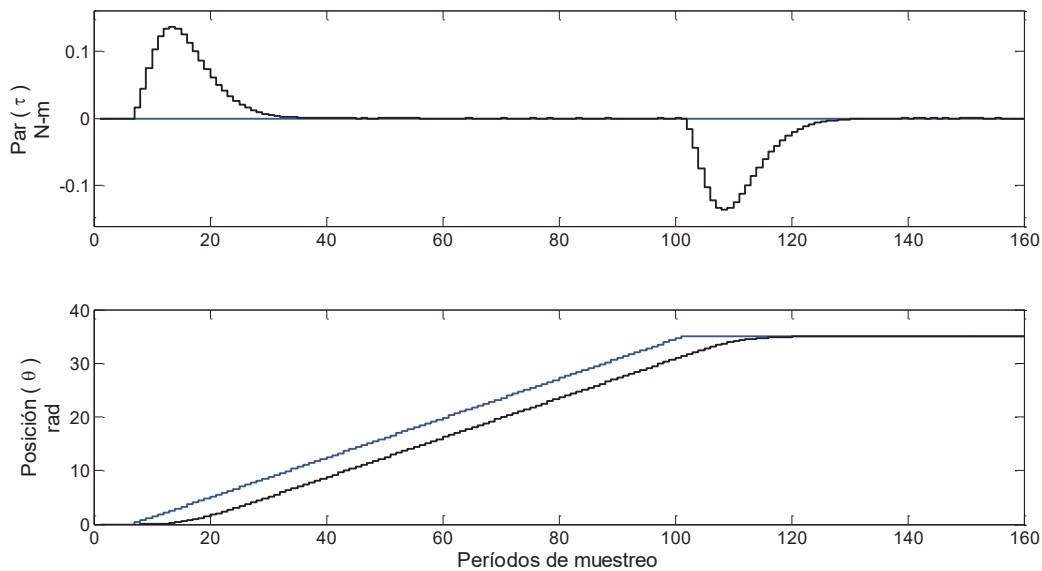
Con un cambio gradual en la referencia de entrada, el error de la posición de salida es reducido. Dado que el controlador PID actúa como un amplificador de error, proporcionando una referencia de par a su salida, restringiendo valores de error son poco probables para llevar a la referencia de par al límite  $T_{MAX}$ . Por consiguiente, con una referencia de posición en forma de rampa se tiene una pendiente razonable  $d\theta^*/dt$ , el sistema mantiene el modo de operación lineal, preservando la estabilidad y un carácter estrictamente no oscilatorio del

---

transitorio. La simulación mostrada en la Figura 3.30 es repetida con el perfil de la posición de referencia con una pendiente constante y los trazos de posición y par están mostrados en la Figura 3.31. Observe que en la Figura 3.31 el transitorio del par es mucho más pequeño que en el caso anterior.

El límite  $T_{MAX}$  del sistema no es alcanzado y el sistema permanece operando de manera lineal. La posición de salida sigue la rampa de referencia con cierto retraso y llega al objetivo sin sobreimpulso. Con el fin de alcanzar el límite de velocidad, la pendiente de la rampa de referencia  $d\theta^*/dt$  debe de ser lo suficientemente pequeña como para no alcanzar el límite  $\omega_{MAX}$  del sistema.

Los perfiles de la referencia de posición solucionan el problema asociado con escalones de posición muy grandes. Cuando los escalones son reemplazados por una trayectoria de posición suave, alcanzan la posición deseada con una relación de cambio limitada de  $d\theta^*/dt$ , manteniendo el sistema en el modo de operación lineal y como resultado se obtiene una respuesta estable no oscilatoria.



**Figura 3.31** La posición de referencia es igual a la de la figura anterior, pero esta con un perfil en forma de rampa

---

Sin embargo, si por alguna razón el error de seguimiento  $\Delta\theta$  se incrementa y lleva el par del motor al límite  $T_{MAX}$ , el sistema entra en el modo de operación no lineal, resultando en un pobre amortiguamiento de las oscilaciones (Figura 3.28) y eventualmente llegando a la inestabilidad (Figura 3.30). En el seguimiento de un perfil de referencia suave, un incremento abrupto en el error de seguimiento  $\Delta\theta$  puede ser producido por un incremento repentino del par, por una colisión accidental o malfuncionamiento en el subsistema mecánico, o por la necesidad de realizar un paro de emergencia. Además, el seguimiento de error  $\Delta\theta$  se incrementa en casos donde la posición objetivo tiene grandes cambios en línea. Un ejemplo en donde un gran error de posición es encontrado, es en el arranque, donde el sistema es encendido en posiciones aleatorias y la primera tarea de movimiento es llevar al sistema a la posición de inicio, el origen de los perfiles de posición y de las trayectorias de referencia. Estos casos son poco frecuentes, y en sistemas de controladores de posición operan en modo lineal en la mayoría de sus tareas, siguiendo perfiles de la posición de referencia adecuados. Sin embargo, en casos cuando el error de seguimiento se incrementa y lleva al sistema al modo de operación no lineal. Es necesario establecer medios de control y garantizar la controlabilidad del sistema.

Como con el resultado obtenido en la sección 3.7, la estructura del control PID tiene que ser modificada. Un mecanismo de control no lineal puede ser agregado en la estructura de la Figura 3.20 de tal manera que incluso grandes errores de posición  $\Delta\theta$  pueda ser disipados y reducidos a cero de manera no oscilatoria.

### **3.15 Controlador de Posición PID Digital No Lineal.**

Las oscilaciones de la posición de salida mostradas en la Figura 3.28 y la inestabilidad encontrada con grandes escalones de posición de entrada mostrada en la Figura 3.30, son originadas por un limitado par de frenado. En la respuesta a grandes perturbaciones de entrada, la velocidad es incrementada a un nivel que no puede ser reducida a cero en el momento que la posición alcanza su objetivo. Este instante es designado  $t_X$  en la Figura 3.28.

Con  $\theta(t_X) = \theta^*$ ,  $\omega(t_X) \neq 0$ . Por lo tanto, la posición de salida sobrepasa la referencia, resultando oscilaciones que son pobremente amortiguadas (Figura 3.28), oscilaciones



---

sostenidas (Figura 3.29) y oscilaciones inestables (Figura 3.30), dependiendo de la amplitud de la perturbación de entrada. La velocidad residual  $\omega(t_X)$  aparece debido al limitado par de frenado y a una limitada desaceleración ( $d\omega/dt = -T_{MAX}/J$ ). Dada la desaceleración limitada, el único enfoque viable para la supresión del sobreimpulso y las consecuentes oscilaciones, es comenzar la fase de desaceleración antes de que la posición de salida alcance el objetivo. Como previamente se encontró (Ec. (3.47)) la aproximación de la velocidad del sistema al objetivo tiene que ser limitada en proporción de la trayectoria residual  $\Delta\theta$ .

El límite de velocidad funcional  $\omega_M = fp(|\Delta\theta|)$  es obtenido en la sección 3.7 por la igualación de la energía cinética del sistema  $W_{KIN}(\omega(t_X))$ , a la energía de frenado  $W_{DBR}(\Delta\theta(t_X))$ , donde  $W_{DBR}$  es el producto de la trayectoria restante ( $\Delta\theta(t_X)$ ) y se asume un par de frenado constante  $T_{MAX}$ . El mismo resultado es obtenido enseguida de una manera diferente. Considere el sistema en la fase de frenado y observe el instante  $t_y$ , donde la velocidad de movimiento  $\omega(t_y) = \omega_y$ . Entonces, la trayectoria residual puede ser expresada como  $\Delta\theta = \theta^* - \theta(t_y)$ . Es razonable asumir que el máximo par de frenado disponible  $-T_{MAX}$  es aplicado para intentar detener el sistema antes de que llegue a su objetivo. Asumiendo, también que la fricción y la resistencia al movimiento es despreciable comparada con el par máximo  $T_{MAX}$ , la relación de desaceleración está definida como  $d\omega/dt = -T_{MAX}/J$ . Por consiguiente, el cambio de velocidad está de acuerdo con la siguiente ecuación

$$\omega(t) = \omega_y - \frac{T_{MAX}}{J}(t - t_y) \quad (3.77)$$

La velocidad cae a cero y el sistema llega a la detección del instante  $t_{STOP} = t_y + J\omega_y/T_{MAX}$ . Entre los dos instantes, la posición se mueve de  $\theta(t_y)$  a  $\theta(t_{STOP})$ :

$$\theta(t_{STOP}) - \theta(t_y) = \int_{t_y}^{t_{STOP}} \omega(t) dt = \frac{T_{MAX}}{2J}(t_{STOP} - t_y)^2 \quad (3.78)$$

Con el fin de obtener una respuesta de salida sin sobreimpulso, el error  $\Delta\theta = \theta^* - \theta(t_{STOP})$ , encontrado en el instante  $t_{STOP}$ , donde  $\omega(t_{STOP}) = 0$  tiene que ser  $\Delta\theta_{STOP} = 0$ . Por lo tanto, el valor en la Ec. (3.78) tiene que ser igual a  $\Delta\theta_y$ . De la Ec. (3.77)  $t_{STOP} - t_y =$

---

---

$J\omega_y/T_{MAX}$ . Así, la relación entre la velocidad residual y la distancia de frenado  $\Delta\theta_y$  es obtenida como:

$$\Delta\theta_y = \frac{J\omega_y^2}{2T_{MAX}} \quad (3.79)$$

La fórmula anterior sugiere que un sistema de control de posición, aproximándose al objetivo a una velocidad de  $\omega$ , no produce sobreimpulso siempre que la trayectoria residual  $\Delta\theta = \theta^* - \theta$  sea por lo menos  $J\omega^2/T_{MAX}$ . En la Ec. (3.79) se asume que tanto la velocidad como la trayectoria restante son positivas. Cuando el sistema de control de posición se mueve hacia objetivos negativos, donde tanto la velocidad como la posición asumen valores negativos, la Ec. (3.79) proporciona el mínimo valor absoluto de la trayectoria restante requerida para evitar un sobreimpulso. De las ecuaciones previas, la máxima velocidad de aproximación hacia el objetivo puede ser expresada en términos del error residual  $|\Delta\theta|$ . La función  $\omega_M = fp(|\Delta\theta|)$  en la Ec. (3.80) es obtenida de la Ec. (3.79) y corresponde totalmente a la Ec. (3.47), obtenida en la sección previa, cuando se discutió el control PD. La Ec. (3.80) nos da el límite de la velocidad funcional para ser respetado e incorporado a la estructura con el fin de prevenir los sobreimpulsos, oscilaciones no lineales e inestabilidad encontrados con perturbaciones de entrada muy grandes.

$$\omega_M = fp(|\Delta\theta|) = \sqrt{\frac{2T_{MAX}|\Delta\theta|}{J}} \quad (3.80)$$

Además del límite de velocidad en la ecuación previa, el límite  $|\omega| \leq \omega_{MAX}$  tiene que ser implementado también: esto es, el límite  $\omega_{MAX}$  del sistema no debe ser excedido, por razones explicadas en la sección anterior. Por otro lado, el transitorio de velocidad incrementa con la amplitud de las perturbaciones de entrada. Para grandes escalones de referencia y en los casos cuando el sistema sigue los perfiles de referencia  $\theta^*(t)$  con una gran relación de cambio, la velocidad del sistema tal vez exceda el límite. Para prevenir este suceso, la estructura del controlador PID debe ser modificada. En el diagrama de bloques de la Figura 3.15, un bloque no lineal tiene que ser introducido dentro de la trayectoria directa del controlador, esto asegura que las restricciones  $|\omega| \leq fp(|\Delta\theta|) \leq \omega_{MAX}$  satisfagan las condiciones de operación. Con el controlador PD (Figura 3.15) fue suficiente reemplazar el

---

---

bloque  $K_P$  por una función no lineal  $f_X(\Delta\theta)$ , dada en la Ec. (3.50) y explicada en la Figura 3.14. Debido a la presencia de la acción integral dentro del controlador PID, la implementación de un límite de velocidad funcional es más complicada, como se indica en las siguientes secciones.

### 3.15.1 La Velocidad Máxima en el Modo de Operación Lineal

En el diagrama a bloques del control PID lineal de la Figura 3.20, la señal  $\Delta y_1$  representa la suma de los incrementos de las acciones proporcional e integral:

$$\Delta y_{1(n+1)} = K_I K_{FB} \Delta\theta - K_P K_{FB} (\theta_{(n+1)} - \theta_{(n)}) \quad (3.81)$$

Dada la velocidad  $\omega$  el cambio en la posición de salida dentro del intervalo de muestreo es obtenido como

$$(\theta_{(n+1)} - \theta_{(n)}) \approx \omega_{n+1} T \quad (3.82)$$

El incremento de  $\Delta y_1$  es calculado ahora como:

$$\Delta y_{1(n+1)} \approx K_I K_{FB} \Delta\theta - K_P K_{FB} \omega_{n+1} T \quad (3.83)$$

Con el objetivo de determinar los valores de  $\Delta\theta_{(MAX)}$  y  $\omega_{(MAX)}$ , es importante considerar los trazos dados en la Figura 3.25 para la operación del control PID en modo lineal. Dentro de la respuesta al escalón, la velocidad máxima se alcanza después de  $3 - 4 T$ . En este punto, la posición de salida asciende linealmente. Con el transitorio de velocidad alcanzando el máximo. Los cambios de velocidad observados en el mismo instante de tiempo son relativamente pequeños. Puesto que la señal  $y_1$  representa la referencia interna de velocidad, se esperan cambios de  $\Delta y_1$  cerca de cero. Si introducimos  $\Delta y_1 = 0$  en la Ec. (3.83) el valor máximo de  $\omega_{(MAX)}$  puede ser calculado y está dado en la Ec. (3.84). El error  $\Delta\theta$  corresponde al error de posición observado en el instante cuando la velocidad  $\omega$  alcanza la máxima velocidad del sistema  $\omega_{(MAX)}$ .

$$\omega_{(MAX)} \approx \frac{K_I \Delta\theta}{K_P T} \quad (3.84)$$

La proporción entre la velocidad  $\omega_{(MAX)}$  y la posición de error  $\Delta\theta$ , dada en la ecuación anterior, es el comportamiento esperado de un sistema lineal. Un incremento en la perturbación de entrada aumenta la velocidad y el error de salida. En cierto punto, la velocidad  $\omega_{(MAX)}$  alcanza el límite  $fp(|\Delta\theta|)$ . Con un mayor incremento en la amplitud de las perturbaciones resulta en una velocidad máxima que excede el límite de frenado en la Ec. (3.80). Con grandes velocidades, el par de frenado  $T_{em} = -T_{MAX}$  es incapaz de desacelerar y detener el sistema antes de que la posición de salida alcance su objetivo. Por lo tanto, se concluye que la condición  $\omega_{(MAX)} = fp(|\Delta\theta|)$  delimita tanto el modo de operación lineal tanto como el modo de operación no lineal. El error  $\Delta\theta_{(MAX)}$  obtenido por la solución  $\omega_{(MAX)} = fp(|\Delta\theta|)$  representa el error más grande alcanzable en el modo de operación lineal. Este valor corresponde a la intersección de la función de la raíz cuadrada de la Ec. (3.80) con la línea recta de la Ec. (3.84) en el plano de fase, con  $\Delta\theta$  y  $\omega$  sobre los ejes horizontal y vertical, respectivamente.

$$\frac{K_I \Delta\theta}{K_P T} = \sqrt{\frac{2T_{MAX} |\Delta\theta|}{J}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2T_{MAX} |\Delta\theta|}{J} = \left(\frac{K_I}{K_P T}\right)^2 (\Delta\theta)^2 \quad (3.85)$$

$$\Delta\theta_{(MAX)} = \frac{2T_{MAX}}{J} \left(\frac{K_P T}{K_I}\right)^2 \quad (3.86)$$

El valor de  $\Delta\theta_{(MAX)}$ , obtenido de la formula anterior, representa el error de posición más grande que el sistema puede soportar sin entrar en el modo de operación no lineal. De la Ec. (3.84), la máxima velocidad en la frontera entre los modos de operación lineal y no lineal es obtenida como

$$\omega_{(MAX)} = \frac{2T_{MAX}}{J} \left(\frac{K_P T}{K_I}\right) \quad (3.87)$$

En un sistemas controlador de posición práctico, el valor de  $\Delta\theta_{(MAX)}$  y  $\omega_{(MAX)}$  son relativamente pequeños. Recordando que el control PID lineal de la Figura 3.20 que proporciona una respuesta estable no oscilatoria solamente en los casos donde la velocidad y

---

la posición permanecen debajo de  $\Delta\theta_{(MAX)}$  y  $\omega_{(MAX)}$ . Debido a esto, cualquier intento de usar el controlador PID lineal es limitado a velocidades excepcionalmente bajas y escalones de posición extremadamente pequeños. Por consiguiente, es necesario modificar la estructura del controlador y agregar la restricción no lineal de velocidad  $|\omega| \leq fp(|\Delta\theta|)$ , dada en la Ec. (3.83).

### 3.15.2 Mejorando el Controlador PID Digital con Acción No Lineal.

Un controlador PID necesita ser modificado para asegurar que la velocidad de movimiento durante el transitorio no exceda el límite  $\omega \leq fp(|\Delta\theta|) \leq \omega_{MAX}$ .

En la Figura 3.20,  $y_1$  es obtenido de la salida del integrador *INT*, que suma los incrementos de las acciones proporcional e integral ( $\Delta y_1$ ). La implementación del límite de velocidad  $|y_1| \leq K_{FB}K_D T fp(|\Delta\theta|)$  tiene que ser desarrollado de tal manera que el integrador *INT* no provoque *wind up* mientras la señal  $y_1$  se mantiene en el límite. En otras palabras, cuando la velocidad es restringida hasta el límite dependiente de  $fp(|\Delta\theta|)$ , el contenido del integrador tiene que ser modificado con el fin de prevenir un incremento incontenible en su valor (es decir, el *wind up*).

En la Figura 3.32, el limitador es fusionado con un integrador como una forma de prevenir el fenómeno *wind up*. La salida del integrador  $y_{(n)}$  es almacenada en el bloque *MEM* proporcionando el valor anterior  $y_{(n-1)}$  en la salida. El nodo  $S_1$  suma el incremento  $\Delta y_{(n)}$  al valor pasado  $y_{(n-1)}$  y alimenta la suma  $\Delta y_{(n)} + y_{(n-1)}$  al limitador. En casos cuando la variable no alcanza el límite, la señal  $\Delta y_{(n)} + y_{(n-1)}$  pasa a través del limitador y proporciona la muestra siguiente.

El limitador en la figura previa tiene que asegurar que la señal  $y_1$  no exceda el valor  $K_{FB}K_D T fp(|\Delta\theta|)$ . Al mismo tiempo, es necesario asegurar que la máxima velocidad permisible  $\omega_{MAX}$  tampoco sea excedida. Por lo tanto, independientemente del valor de  $fp(|\Delta\theta|)$ , es necesario asegurar que  $|y_1| \leq K_{FB}K_D T \omega_{MAX}$ . Ambos límites de velocidad están dados en la Figura 3.33.

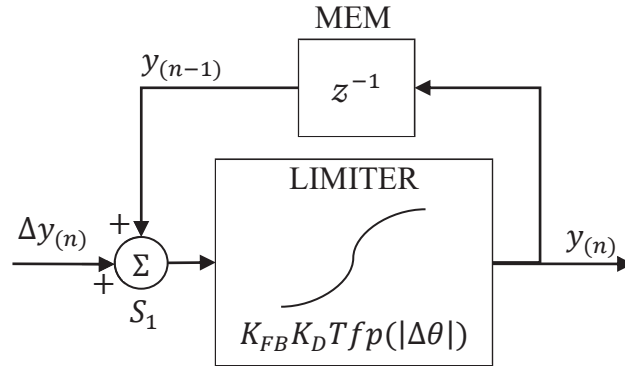


Figura 3.32 Limitador de la salida del integrador con el fin de prevenir el fenómeno *wind-up*.

Con el error de posición  $\Delta\theta$  en la abscisa y la velocidad en el eje de ordenadas, el diagrama representa un plano de fase. Cualquier estado  $(\omega, \Delta\theta)$  fuera de la región permitida resulta en un sobreimpulso, causado por un par de frenado insuficiente. Por consiguiente, la referencia interna de velocidad  $y_1/(K_{FB}K_D T)$  tiene que permanecer debajo de la curva de la raíz cuadrada, respetando al mismo tiempo, el límite del sistema de  $\omega_{MAX}$ .

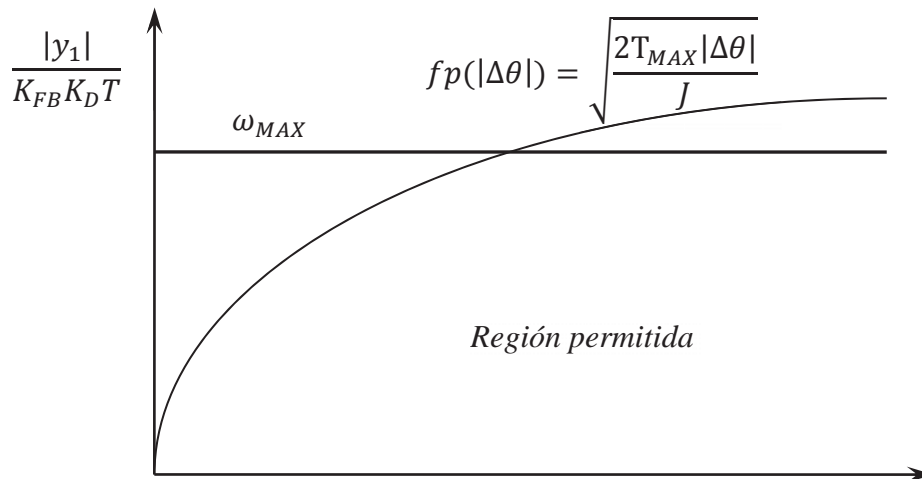


Figura 3.33 Región de operación permitida en el plano de fase, con el fin de evitar el sobreimpulso causado por el insuficiente par de frenado, la velocidad interna de referencia, debe de permanecer por debajo del límite de la raíz cuadrada  $fp$ .

En la Figura 3.33, se observa la estructura de un integrador de tiempo discreto, restringiendo la salida  $y_{1(n)}$  en la región permitida, como se definió en la Figura 3.32. El bloque *MEM* almacena los valores anteriores de la salida y proporciona la muestra  $y_{1(n-1)}$ .

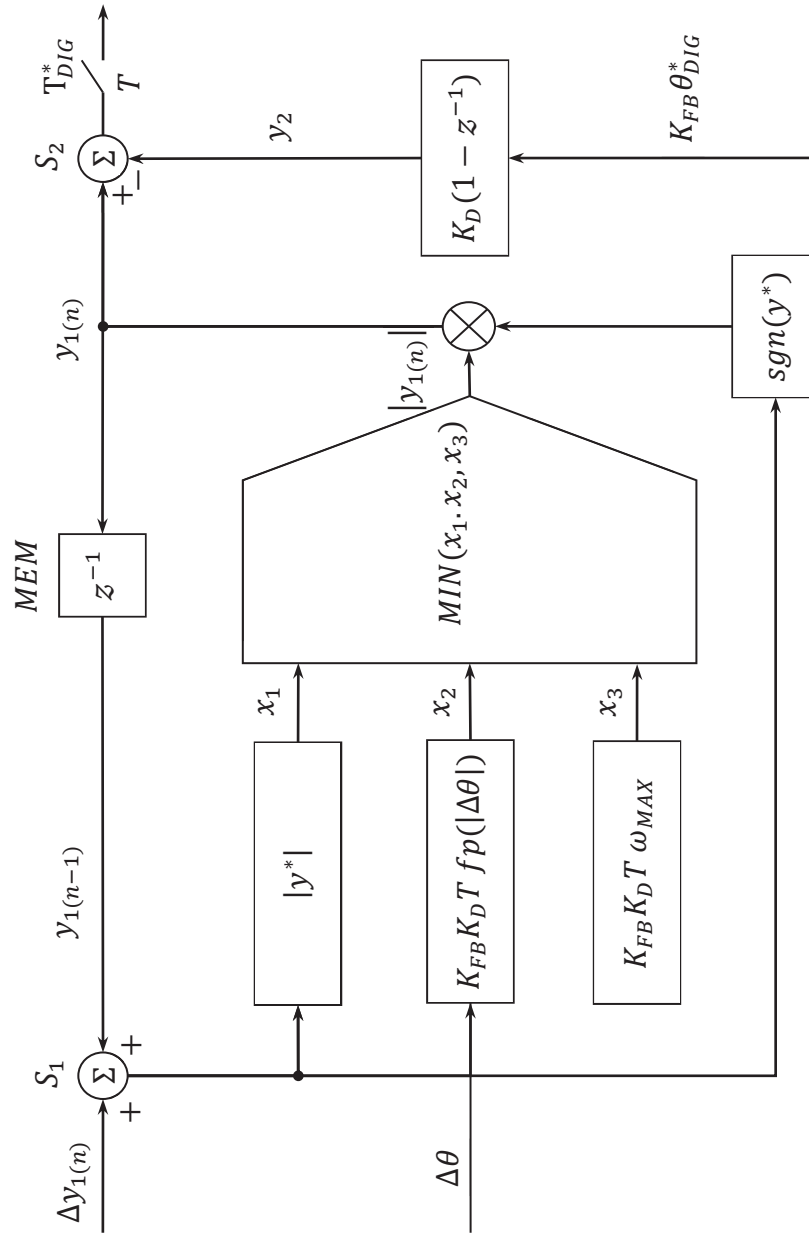


Figura 3.34 Integrador saturable de tiempo discreto, introducido en la Figura 3.32, que contiene el límite de velocidad funcional  $fp(|\Delta\theta|)$  y restringe el movimiento del sistema a la región permitida, como es definido en la Figura 3.33.

La salida del integrador es el valor  $y_{1(n)}$  ya procesada a través del limitador. De esta manera, el valor absoluto de  $y_{1(n)}/(K_{FB}K_D T)$  no excede el límite del sistema  $\omega_{MAX}$ , tampoco el valor

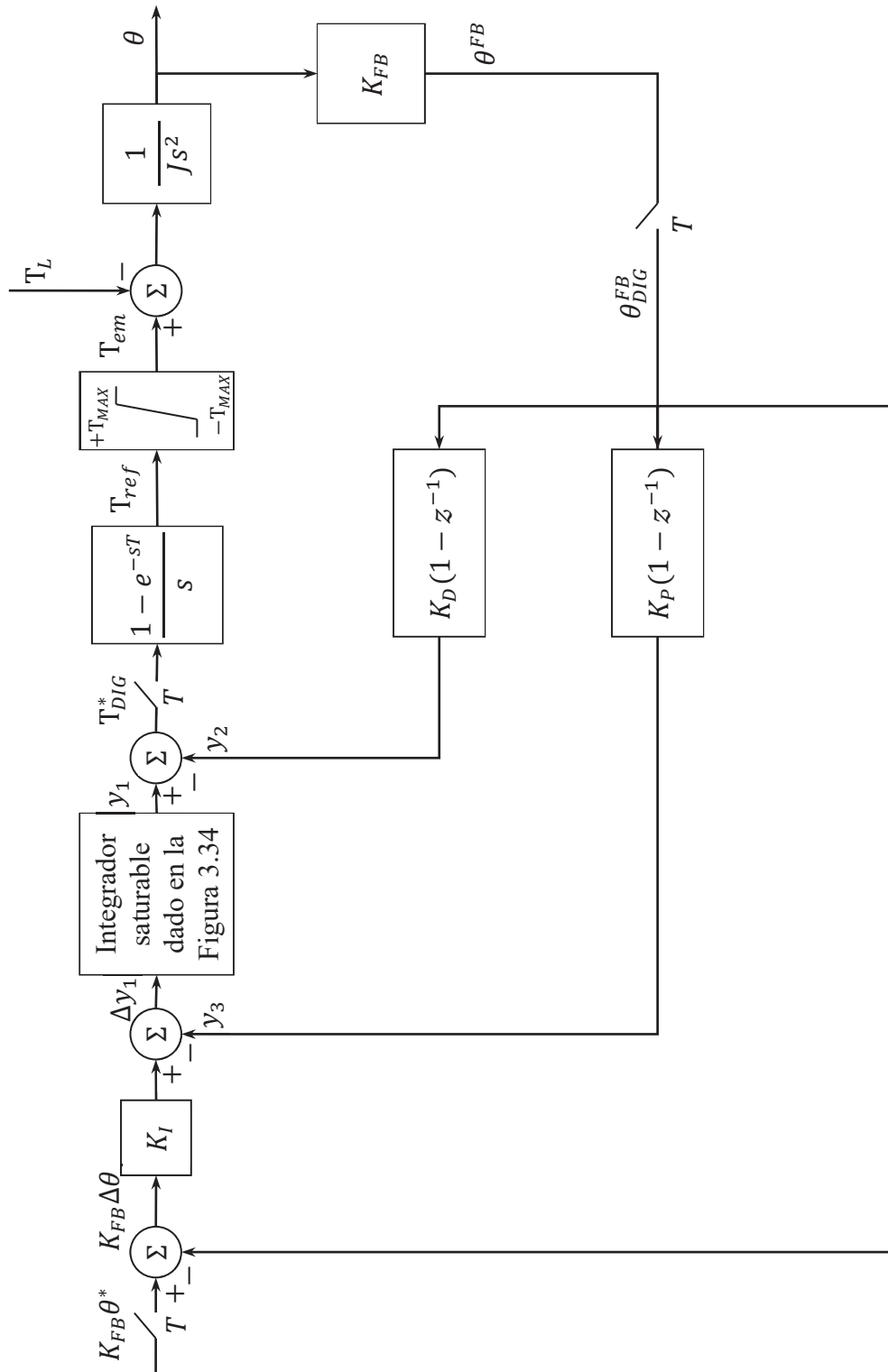


Figura 3.35 Control de posición PID en tiempo discreto con restricción de velocidad no lineal. El bloque *INT* en la Figura 3.20, es reemplazado por el integrador saturable de tiempo discreto, detallado en la Figura 3.34



---

funcional de  $fp(|\Delta\theta|)$ . En cada instante de muestreo, el incremento  $\Delta y_{1(n)}$  es agregado al valor pasado  $y_{1(n-1)}$ . La unión  $S_1$  en la Figura 3.34 proporciona la suma temporal de  $y^*$ . El signo de  $y^*$  es preservado, mientras la amplitud es procesada a través del limitador, diseñado como  $MIN$  en la figura mencionada. El limitador recibe tres valores  $x_1 = |y^*|$ ,  $x_2 = K_{FB}K_D T fp(|\Delta\theta|)$  y  $x_3 = K_{FB}K_D T \omega_{MAX}$ . La salida  $|y_{1(n)}|$  es obtenida como el valor más pequeño de  $x_1, x_2$  y  $x_3$ . La muestra nueva  $y_{1(n)}$  es obtenida atribuyéndole el signo de  $y^*$  a la salida del limitador. A la derecha de la figura, la retroalimentación derivativa  $y_2$  es restada en  $S_2$ .

Un diagrama de bloques completo de un controlador de posición PID está compuesto por el limitador de velocidad no lineal que se muestra en la Figura 3.35. Esencialmente, la estructura es obtenida por el reemplazo del integrador de tiempo discreto  $INT$  del controlador lineal de la Figura 3.20, por el integrador saturable, especificado en la Figura 3.34. Con la señal  $y_1$  asumiendo el papel de la referencia interna de velocidad, la velocidad del sistema cuando se aproxima a la posición objetivo es limitada de acuerdo a la Ec. (3.80). Por lo tanto, un intervalo de frenado oportuno llevará al sistema a detenerse antes de que exceda a su referencia. El límite de velocidad no lineal  $fp(|\Delta\theta|)$  depende del límite de par  $T_{MAX}$ . Cuanto mayor sea el par máximo de frenado, mayor será la velocidad permitida para la distancia de frenado dada  $\Delta\theta$ .

La estructura de la Figura 3.34 está diseñada para restringir el movimiento del sistema en la región permitida del plano de fase (el plano  $\Delta\theta - \omega$  en la Figura 3.33). El frenado oportuno y la naturaleza no oscilatoria de la respuesta a un gran escalón, es logrado siempre que la velocidad real se mantenga debajo del límite especificado por la raíz cuadrada en la Ec. (3.80). Mientras el mecanismo en la Figura 3.35 restringe la referencia de par interna  $y_1$  a la región prescrita del plano de fase, la velocidad real de movimiento puede ir hacia el límite debido al error finito  $\Delta y = y_1 - y_2$ . La imperfección del controlador de lazo interno fue discutida en la sección 3.7.3. El valor de estado estable de  $\Delta y$  es proporcional al par del motor e inversamente proporcional a la ganancia de lazo cerrado. Durante el transitorio la velocidad real se retrasa respecto a la referencia proporcional a  $y_1$  debido a un tiempo de respuesta finito del controlador de velocidad local. Por lo tanto, en casos cuando la velocidad

---

exceda  $\omega_{(MAX)}$  (Ec. (3.74)) y el sistema entre en modo no lineal, el límite de velocidad de la raíz cuadrada  $fp(|\Delta\theta|)$  tiene que ser modificado en proporción de la referencia de par. Al mismo tiempo, con el fin de tomar en cuenta la velocidad  $\omega$  retrasada respecto a la referencia proporcional a  $y_1$ , el límite de velocidad tiene que ser reducido ligeramente. Por lo cual, el límite  $fp(|\Delta\theta|)$  es multiplicado por el coeficiente escalar  $K_s = 0.98$  (referido en la Ec. (3.51) de la sección anterior).

### 3.15.3 Evaluación del Controlador Digital PID No Lineal

El controlador de posición con un límite de velocidad no lineal es verificado por medio de una simulación. El modelo de Simulink del sistema del controlador de posición es obtenido del diagrama de bloques en la Figura 3.35. El modelo previo del controlador digital de posición PID lineal (Figura 3.24) es ampliado introduciendo un modelo apropiado de un integrador saturable (Figura 3.34). Un modelo completo de un sistema controlador de posición con un límite de velocidad no lineal se muestra en la Figura 3.36.

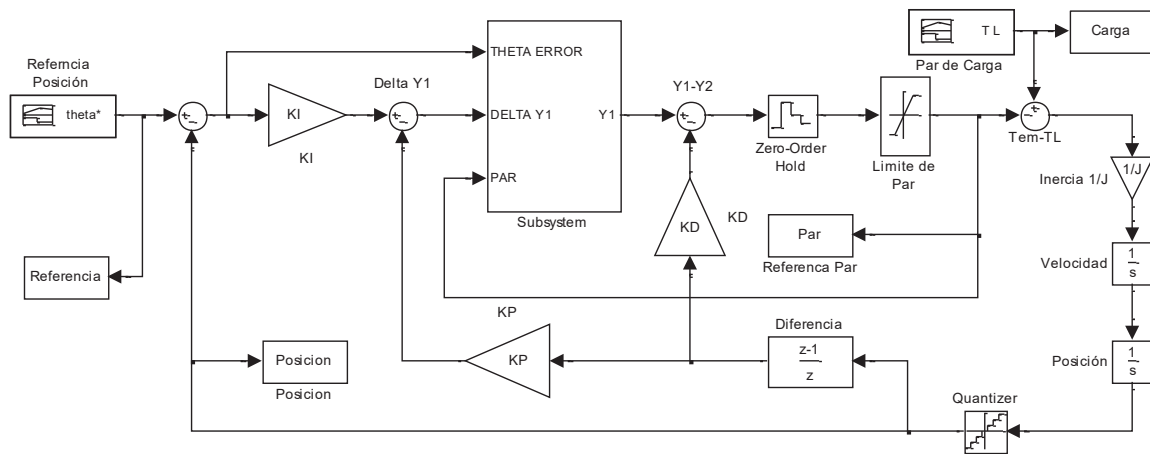
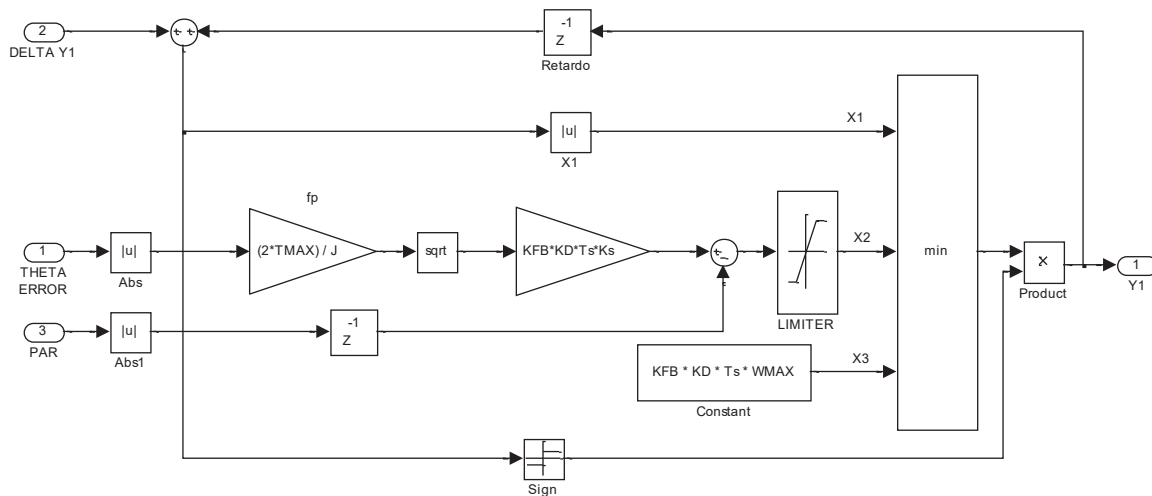


Figura 3.36 Modelo de Simulink de un sistema de control de posición con un control PID no lineal. El integrador saturable proporciona  $y_1$ , mostrado en la Figura 3.37.

El objeto de control es modelado como  $W_p(s) = 1/Js^2$ , asumiendo que la fricción es despreciable. El actuador de par es modelado como un limitador proporcionando el par de motor  $|T_{em}| \leq T_{MAX}$ . La posición de salida, velocidad y par son almacenados en bloques correspondientes para análisis adicionales y trazos. Dentro de la subsecuente ejecución de

simulación, los parámetros del sistema son puestos de la hoja de datos del motor PittmanExpress GM9234S003 como:  $K_M = 1, T_{MAX} = 0.138 Nm, K_{FB} = 1, T = 1ms, J = 4.62 \times 10^{-6} Kgm^2$  y  $\omega_{MAX} = 480.44 rad/s$ . Las ganancias de retroalimentación son establecidas de acuerdo a la regla de diseño en la Ec. (3.76).

El subsistema con el integrador saturable recibe la señal de error, referencia de par e incremento  $\Delta y_1$ , proporcionando al mismo tiempo, la señal de salida  $y_1$ , el sistema es detallado en la Figura 3.37 y está basado en la estructura de la Figura 3.34. En la estructura, la trayectoria dependiente del límite de velocidad  $x_2$ , es ligeramente cambiada debido a las imperfecciones del controlador interno de velocidad. El límite  $fp(\Delta\theta)$ , obtenido del bloque FP en la Figura 3.37 es escalada por el factor  $K_s = 0.790$ . El valor absoluto de la referencia de par es obtenido del bloque Abs1 y sustraído de  $x_2$ , el limitador suprime los valores negativos eventuales de  $x_2$  y asegura que  $x_2 > x_{2min} = K_{FB}K_D T \omega_{(max)}$ . La velocidad  $\omega_{(max)}$ , obtenida en la Ec. (3.87) representa el límite entre los modos de operación lineal y no lineal.

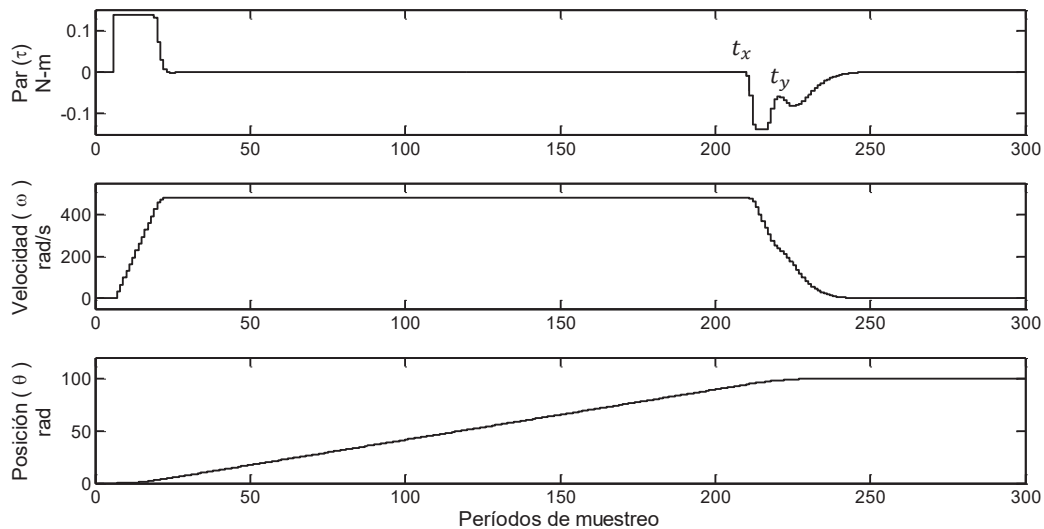


**Figura 3.37** Implementación del integrador saturable, diseñado en la Figura 3.34. El límite de velocidad  $fp(\Delta\theta)$  es implementado como sugiere la Ec. (3.52), la señal  $x_2$  es escalada con  $K_s$  y limitada de acuerdo con la Ec. (3.87). La salida del subsistema es la velocidad interna de referencia  $y_1$ .

En la Figura 3.38 se muestran los trazos de la simulación de la posición de salida, el par del motor y la velocidad, la respuesta es obtenida de una referencia de escalón grande

$\theta^* = 100 \text{ rad}$ , llevando al sistema a un modo de operación no lineal, alcanzando el límite tanto la velocidad como el par. La velocidad alcanza el límite del sistema  $\omega_{MAX}$ , mientras que el actuador de par proporciona el par máximo  $T_{MAX}$  tanto en aceleración como en frenado.

La velocidad se incrementa con una pendiente constante y alcanza el valor máximo permitido, mientras se encuentra en el límite, la posición de salida aumenta linealmente. El cambio lineal en la posición de salida termina en el instante  $t_x$  cuando el par del motor asume el valor  $T_{em} = -T_{MAX}$ , comenzando el intervalo de frenado. El frenado comienza cuando el límite de velocidad dependiente  $fp(\Delta\theta)$  en la Ec. (3.80) se reduce a  $\omega_{MAX}$  y es igual a la velocidad de funcionamiento. En el instante  $t_x$  la velocidad y la trayectoria restante son  $\omega(t_x) = \omega_{MAX}$  y  $\Delta\theta(t_x) = J\omega_{MAX}^2/2T_{MAX}$  respectivamente. Debemos tener en cuenta que un controlador de posición lineal, como el de la Figura 3.20, no comienza a frenar en el instante  $t = t_x$ . Con  $\Delta\theta(t_x) \gg 0$ , el sistema se mantiene proporcionando  $y_1 > y_2$  y  $T_{em}(t_x) > 0$ , con lo anterior el sistema no desacelera y sobrepasa la referencia (Figura 3.28). Con un controlador PID no lineal,  $y_1(t_x)$  es obtenida de la estructura de la Figura 3.37, con  $y_1(t_x) > y_2(t_x)$ , el par se vuelve negativo y alcanza  $-T_{MAX}$ .



**Figura 3.38** Posición de salida y par del motor obtenido con una escalón de referencia grande, llevando al sistema a un modo de operación no lineal, haciendo que tanto el par y la velocidad alcancen el límite del sistema.

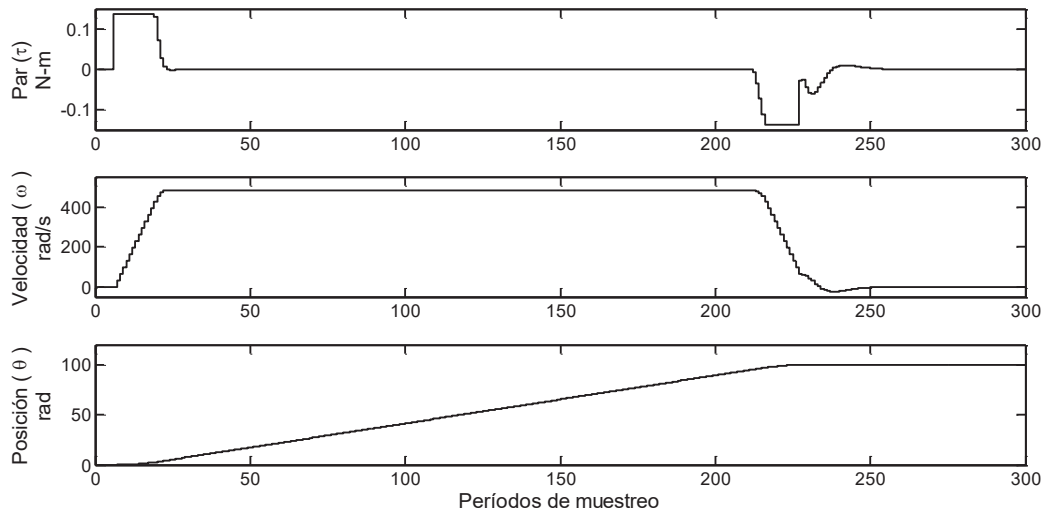
---

Dentro del intervalo  $[t_x \dots t_y]$  en la Figura 3.38 el par de frenado es constante, la velocidad se reduce linealmente y la pendiente de la posición de salida se reduce al aproximarse a la referencia, en esta fase, el sistema se desliza a través del límite de la raíz cuadrada de la región permitida del plano de fase (Figura 3.33). Cuando la velocidad cae por debajo de  $\omega_{(max)}$  (Ec. (3.74)) y con  $\Delta\theta < \Delta\theta_{(max)}$  (Ec. (3.70)), el sistema retorna al modo de operación lineal, en donde ninguno de los límites se encuentra activo, resultando en  $|y_{1(n)}| = x_1$  y  $y_{1(n)} = y^*$ . Después de esto, el par, la velocidad y los errores de posición caen de manera no oscilatoria y el sistema opera en estado estable. Mientras desacelera, el par no exhibe muchos cambios de signo, reduciendo en este sentido, los efectos de las imperfecciones de los elementos de transmisión, tal como una reacción adversa. Los transitorios de par, velocidad y posición obtenidos en la Figura 3.38 representan la transición más rápida posible de la posición inicial a la posición final, considerando las restricciones de velocidad y par.

Mientras que el pulso del par es rectangular durante la aceleración, el pulso de frenado es ligeramente diferente, antes de llegar a la referencia de posición, el par de frenado se aleja brevemente de  $-T_{MAX}$ , exhibiendo una pequeña diferencia ( $t_y$  en la Figura 3.38), el efecto es relacionado con la implementación del integrador saturable con el límite de velocidad no lineal (Figura 3.37). La amplitud de  $y_1$  es obtenida de la salida del bloque *MIN*, como el valor más pequeño de las tres entradas ( $x_1, x_2, x_3$ ). En el instante cuando el bloque conmuta entre las entradas, la primera derivada de la referencia interna de velocidad  $y_1$  exhibe un cambio abrupto, reflejado en la forma de onda del par del motor mostrada en la Figura 3.38. Como se muestra en el plano de fase en la Figura 3.33, una discontinuidad ocurre cuando el sistema abandona el límite de la raíz cuadrada y entra en el modo lineal  $\Delta\omega < \Delta\omega_{(max)}$ . Hay un cambio de parámetros en los bloques *K<sub>S</sub>* y *LIMITER* del modelo de la Figura 3.37 afectando la forma de onda del par y alterando la amplitud y forma de los pulsos del par. Observamos que el controlador de posición diseñado en esta sección no proporciona una forma completamente rectangular del pulso de frenado. En su etapa final, el sistema entra en un modo de operación lineal, donde el par de frenado cae exponencialmente, conforme a la naturaleza estrictamente no oscilatoria de los polos de lazo cerrado.

---

Es importante analizar el impacto de la imperfección del controlador interno de la velocidad sobre la respuesta a grandes escalones. En la simulación anterior, esto fue compensado por la substracción de la señal del par (bloque *AbsI*) de  $x_2$ , en la Figura 3.37, y por el escalado del límite de velocidad de la raíz cuadrada  $fp$  por  $K_S$ . La misma simulación es repetida omitiendo el cambio e implementando el integrador saturable como fue diseñado originalmente en la Figura 3.34. El subsistema de Simulink en la Figura 3.37 es editado para remover los bloques  $S_2$  y *LIMITER*, y alimentado  $x_2$  directamente de la salida del bloque  $K_S$  a la entrada *MIN*. Al mismo tiempo, el coeficiente escalar es establecido en  $K_S = 1$ . Los resultados de la simulación son mostrados en la Figura 3.39. Mientras que en la fase de frenado la velocidad excede el límite de la raíz cuadrada  $fp(\Delta\theta)$ , resultando en un sobreimpulso, el exceso de velocidad es causado por el error estático y un limitado ancho de banda del controlador interno de velocidad. Debido a un error finito  $\Delta y_1 = y_1 - y_2$ , la velocidad excede el límite de frenado  $fp(\Delta\theta)$ . El sobreimpulso en la posición de salida no es observado en la Figura 3.39, ya que es mucho menor que el cambio de posición, se puede deducir de las formas de onda de la velocidad y el par.



**Figura 3.39** Simulación llevada a cabo sin la compensación del error de velocidad del control interno de velocidad. En referencia a la Figura 3.37, el bloque  $S_2$  y el *LIMITER* son removidos, la señal  $x_2$  es alimentada directamente de la salida del bloque  $K_S$  a la entrada del bloque *MIN*, el coeficiente de escalamiento es establecido como  $K_S = 1$ .

---

### 3.16 Conclusiones

En el presente capítulo se analizó el diseño de un controlador digital de posición, el comportamiento de las diferentes estructuras de los controladores de posición y sus respectivos efectos. Se analizó en detalle el cálculo de los parámetros optimizados para un control de posición proporcional derivativo, se llevaron a cabo simulaciones con pequeñas y grandes perturbaciones de entrada observando que para el caso de pequeñas perturbaciones de entrada el control tiene un comportamiento estable, pero en caso de que se presente una perturbación de par de carga el control PD no es capaz de mantener la posición de referencia. Para el caso de grandes perturbaciones de entrada, el control PD presenta el efecto *Wind Up*, el efecto es eliminado con la integración de un limitador de velocidad, que evita que el sistema sobrepase los límites de velocidad y por consecuencia la limitación del par liberado por el control de posición; con esta mejora el control PD es capaz llegar a su posición de referencia por grande que esta sea, pero sigue siendo incapaz de mantener la posición de referencia en caso de presencia de perturbaciones de carga.

Debido a la incapacidad del controlador PD de mantener la referencia de posición en presencia de perturbaciones de carga, se propone la aplicación de un control de posición PID lineal. Se calculan los parámetros para el control de posición PID y se realiza un análisis de la respuesta al escalón y el ancho de banda para los controladores PD y PID, donde se observa que un control PID tiene un menor ancho de banda que un control PD y en consecuencia el control PID obtiene una respuesta al escalón más lenta. Se realiza una simulación de una respuesta al escalón y una carga escalón para un control PID, se observa la diferencia de la respuesta con el control PD, en este caso el control PID es capaz de mantener la posición de referencia en presencia de perturbaciones de carga. Para el caso de perturbaciones de entrada el control PID lineal no es capaz de mantenerse en estado estable, ya que al tener fuertes cambios en la entrada el control PID lineal llega a ser inestable, dependiendo de la magnitud de la perturbación del escalón entrada, se observa que para variaciones graduales (rampa) el control PID lineal es capaz de llegar a la posición de referencia establecida no importando que la magnitud de la misma sea grande.

---

Para lograr que el control PID lineal mantenga la estabilidad con variaciones grandes en la entrada, se propone la incorporación de un integrador saturable, lo cual convierte al control PID lineal en un control PID no lineal. Al agregar un integrador saturable, evitamos que el control PID sea inestable con grandes perturbaciones de entrada y que sea capaz de controlar cualquier escalón de entrada sin importar la magnitud que tenga. Por consiguiente, se obtiene un control PID que mantiene una respuesta estrictamente no oscilatoria y además tiene la capacidad de llegar a su posición de referencia sin importar la magnitud que tenga, lo anterior en presencia de perturbaciones de carga.



---

# Capítulo 4

## SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS DEL SISTEMA DE CONTROL DE POSICIÓN CON CONTROL PID NO LINEAL

### 4.1 Introducción

En la mayoría de las aplicaciones, los sistemas de control de posición dan seguimiento a perfiles o trayectorias predefinidos de referencias de posiciones. Generalmente, las trayectorias de posición no tienen la forma de escalón o de rampa, por ejemplo en el caso de los robots manipuladores, las entradas de referencia para los controladores de posición son generadas en el proceso llamado planeación de trayectorias. Típicamente, el usuario especifica la ruta deseada. El proceso de planeación genera una secuencia de valores en el dominio del tiempo. Las referencias de posición son el resultado de una interpolación polinomial de la trayectoria deseada.

Los polinomios más comúnmente usados en la generación de trayectorias son la interpolación lineal, los polinomios de tercer grado y los polinomios de quinto grado.

Muchas aplicaciones requieren que las trayectorias sean suaves, es decir, se busca que tanto la velocidad como la aceleración sean continuas, con la finalidad de que no se tengan cambios abruptos en los pares, para evitar un posible daño mecánico. Para conseguir este requerimiento, la interpolación necesita un polinomio de al menos quinto grado. [Sciavicco & Siciliano, 2000]

El controlador PID lineal no puede seguir perfiles tipo rampa o perfiles con derivadas de orden mayor sin error. Para poder hacer el seguimiento de trayectorias con cualquier perfil, es muy conveniente contar con un controlador digital de posición PID no lineal. En este capítulo se probará el funcionamiento del controlador de posición PID no lineal diseñado

---

para el seguimiento de diferentes perfiles de referencia, es decir, se probará la capacidad de seguimiento de trayectorias de este controlador.

Para realizar la simulación apegada a la implementación real del controlador diseñado, se incluirá el modelo del actuador de par. Este actuador de par incluye un motor de CD de imanes permanentes *PittmanExpress*, modelo GM9234S003 y un lazo interno de control de corriente.

## 4.2 Modelo del Actuador de Par del Motor de CD

El modelado del sistema de control de corriente se realiza para asegurar que la suposición de que la ganancia del actuador de par  $K_M = 1$  es válida para el modelado del sistema de control de posición, ya que el comportamiento del actuador de par tiene su tiempo de respuesta y con la ganancia  $K_M = 1$  se asume una respuesta de par instantánea. Ya que el par del motor es proporcional a la corriente, se diseñará un control de corriente con el cual controlaremos el par del motor.

Para el modelado del lazo interno de control de corriente del sistema de control digital de posición PID no lineal, se obtiene el modelo de la figura siguiente:

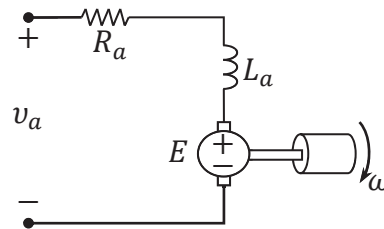


Figura 4.1 Modelado del motor de CD para la implementación del controlador de corriente.

De acuerdo al modelo de la figura anterior se tiene la siguiente ecuación:

$$v_a - i_a R_a - L_a \frac{di_a}{dt} - E = 0 \quad (4.1)$$

---

Para diseñar el controlador de corriente consideramos el modelo en variables de estado:

$$\frac{di_a}{dt} = -\frac{R_a}{L_a}i_a + \frac{v_a}{L_a} - \frac{E}{L_a} \quad (4.2)$$

se puede anotar como:

$$\frac{di_a}{dt} = Ai_a + B(v_a - E) \quad (4.3)$$

donde:

$$A = -\frac{R_a}{L_a} \quad B = \frac{1}{L_a} \quad (4.4)$$

El modelo discreto correspondiente está dado por

$$i_a(kT + T) = \Phi_1 i_a(kT) + \Gamma_1(v_a(kT) - E(kt)) \quad (4.5)$$

Donde

$$\Phi_1 = e^{AT} = e^{-\frac{R_a T}{L_a}} \quad (4.6)$$

$$\Gamma_1 = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau \quad (4.7)$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{R_a} \left( 1 - e^{-\frac{R_a T}{L_a}} \right) \quad (4.8)$$

Proponiendo un control mediante retroalimentación de estado considerando  $E$  como una perturbación, e incluyendo la acción de control integral como una nueva variable de estado:

$$Int(k + 1) = Int(k) + [i_a^r(k) - i_a(k)] \quad (4.9)$$

Donde  $i_a^r$  es la referencia de corriente.

La Figura 4.2 muestra el diagrama de bloques del controlador de corriente que se incluirá en el sistema de control de posición de la Figura 3.35 y realiza el seguimiento del par de referencia para obtener el par electromagnético del motor. Para obtener la corriente de referencia  $i_a^r$  el par electromagnético se divide por la constante de par  $K_t$ . A la salida del controlador de corriente, la corriente  $i_a$  se multiplica por la constante de par  $K_t$  y se obtiene el par electromagnético, el cual se aplica a la carga.

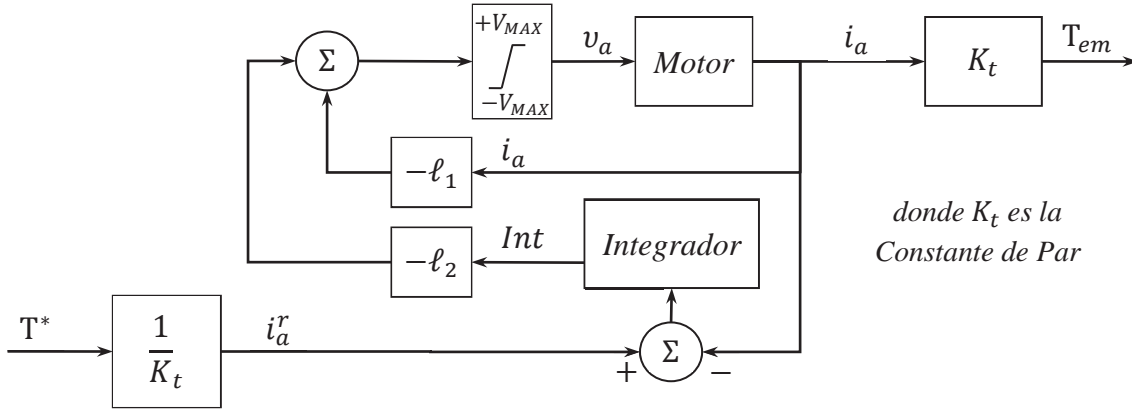


Figura 4.2 Diagrama de bloques de la implementación del controlador de corriente

Las ecuaciones de estado del sistema aumentado son:

$$\begin{bmatrix} i_a(k+1) \\ Int(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(k) \\ Int(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ 0 \end{bmatrix} (v_a(k) - E(k)) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} i_a^r(k) \quad (4.10)$$

Esto es

$$x_a(k+1) = \Phi_a x_a(k) + \Gamma_a (v_a(k) - E(k)) + \Gamma_c i_a^r(k) \quad (4.11)$$

Para la colocación de los polos de lazo cerrado utilizamos la fórmula de Ackermann [J. Astrom & Wittenmark, 1997]

$$L = [\ell_1 \quad \ell_2] = [0 \quad 1] W_c^{-1} P(\Phi_a) \quad (4.12)$$

Donde  $W_c$  es la matriz de controlabilidad del sistema y  $P(z)$  es el polinomio característico deseado.

La ganancia  $\ell_1$  y  $\ell_2$  se calculan considerando el sistema como regulador, es decir, sin considerar el término  $\Gamma_c i_a^r(k)$

$$W_C = [\Gamma_a \quad \Phi_a \Gamma_a] = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Phi_1 \Gamma_1 \\ 0 & -\Gamma_1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$W_C^{-1} = -\frac{1}{\Gamma_1^2} \begin{bmatrix} -\Gamma_1 & -\Phi_1 \Gamma_1 \\ 0 & \Gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Gamma_1} & \frac{\Phi_1}{\Gamma_1} \\ 0 & -\frac{1}{\Gamma_1} \end{bmatrix}$$

Planteando un control Deadbeat, el polinomio característico es:

$$P(z) = z^2 \quad (4.14)$$

$$P(\Phi_a) = \Phi_a^2 \quad (4.15)$$

$$P(\Phi_a) = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1^2 & 0 \\ -\Phi_1 - 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$L = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{\Gamma_1} & \frac{\Phi_1}{\Gamma_1} \\ 0 & -\frac{1}{\Gamma_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1^2 & 0 \\ -\Phi_1 - 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\Gamma_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1^2 & 0 \\ -\Phi_1 - 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\Phi_1 + 1}{\Gamma_1} & -\frac{1}{\Gamma_1} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Por consiguiente

$$\ell_1 = \frac{\Phi_1 + 1}{\Gamma_1}, \quad \ell_2 = -\frac{1}{\Gamma_1} \quad (4.20)$$

---


$$\ell_1 = \frac{\left( e^{-\frac{R_a T}{L_a}} + 1 \right) R_a}{\left( 1 - e^{-\frac{R_a T}{L_a}} \right)} \quad \ell_2 = -\frac{R_a}{\left( 1 - e^{-\frac{R_a T}{L_a}} \right)} \quad (4.21)$$

La acción de control está dada por

$$v_a(k) = -Lx_a(k) = -\ell_1 i_a(k) - \ell_2 Int(k) \quad (4.22)$$

La fuerza contraelectromotriz está dada por

$$E = K_E \omega \quad (4.23)$$

Así el modelo completo del motor en el dominio discreto es:

$$i_a(kT + T) = \Phi_1 i_a(kT) + \Gamma_1 (v_a(k) - K_E \omega(kT)) \quad (4.24)$$

Para la implementación del controlador de posición, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones, que representan al controlador de corriente interno

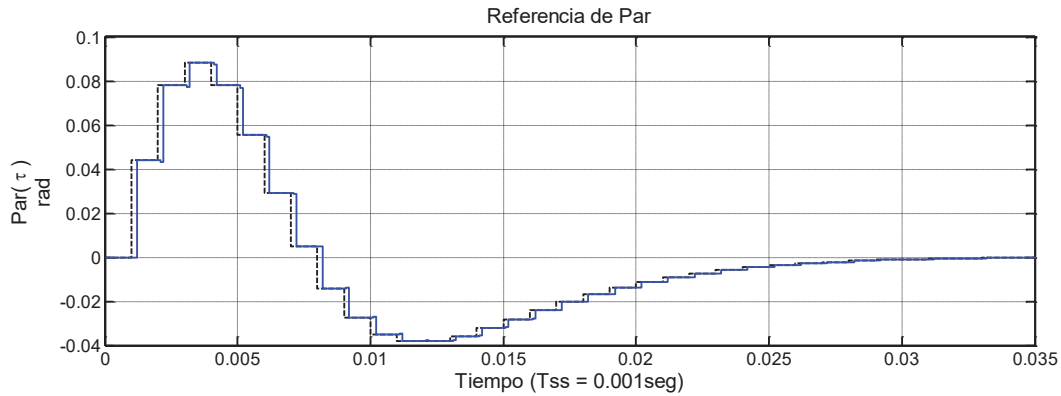
$$\begin{aligned} v_a(k) &= -Lx_a(k) = -\ell_1 i_a(k) - \ell_2 Int(k) \\ i_a(kT + T) &= \Phi_1 i_a(kT) + \Gamma_1 v_a(k) - \Gamma_1 K_E \omega(kT) \\ Int(k + 1) &= Int(k) + [i_a^r(k) - i_a(k)] \end{aligned} \quad (4.25)$$

Para probar que el controlador de corriente no modifica el comportamiento del sistema, se realiza una simulación para analizar el comportamiento y respuesta del control de corriente. Se considera la entrada al sistema de un escalón unitario para analizar la respuesta del control de corriente y observar el retraso consecuente del mismo, en comparación de la respuesta instantánea de actuador de par que se tiene considerando  $K_M = 1$ .

La Figura 4.3, Figura 4.4 y Figura 4.5 presentan los transitorios de par, velocidad y posición, respectivamente de la simulación del sistema de control mostrado en la Figura 4.8, aplicando una  $\theta^* = 1rad$ . En la Figura 4.3 se observa el seguimiento del par de referencia  $T^*$  (línea punteada) que realiza el control de corriente para obtener el par electromagnético

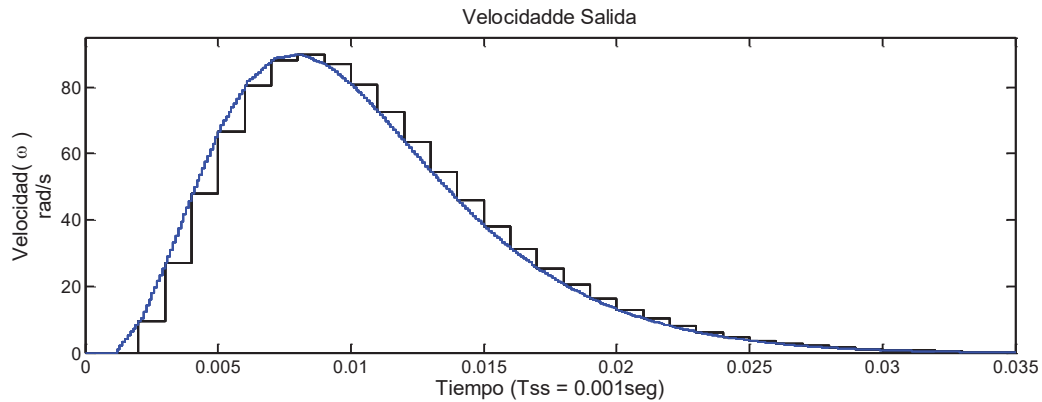
---

$T^{em}$ ; en la figura se observa un retraso correspondiente a la respuesta del controlador de corriente que se identifica en la figura por los pequeños cambios en el inicio de cada escalón, la respuesta no es instantánea como se venía observando en las simulaciones sin el control de corriente.



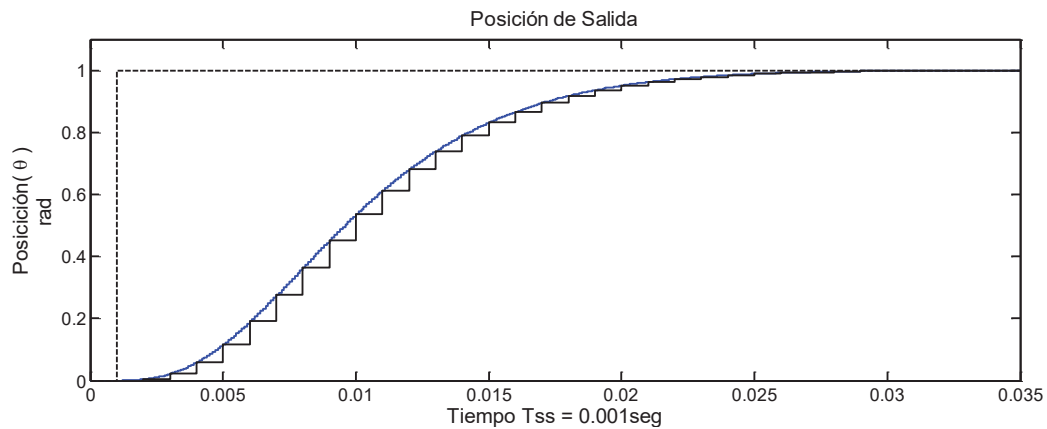
**Figura 4.3** Transitorio de par de referencia  $T^*$  y par electromagnético  $T^{em}$  en la entrada y salida respectivamente del controlador de corriente.

En la Figura 4.4 se observan los trazos de la reacción de la velocidad ante la presencia del control de corriente. Con la presencia del control de corriente la velocidad tiene una reacción entre periodos de muestreo, de igual manera la reacción del actuador de par con  $K_M = 1$  se obtiene una reacción en la velocidad, pero esta se obtiene después de cada periodo de muestreo  $T_{ss} = 0.001$  seg. En la Figura 4.4 se tiene la grafica de la velocidad obtenida con el control de corriente y con la  $K_M = 1$ , se observa que ambas velocidades coinciden en los instantes de muestreo del control de posición. Con lo anterior comprobamos que la suposición que la ganancia del actuador de par  $K_M = 1$  es válida, ya que los valores de velocidad y posición coinciden para ambas simulaciones.



**Figura 4.4** Transitorio de velocidad del sistema de control de posición PID no lineal con control de corriente.

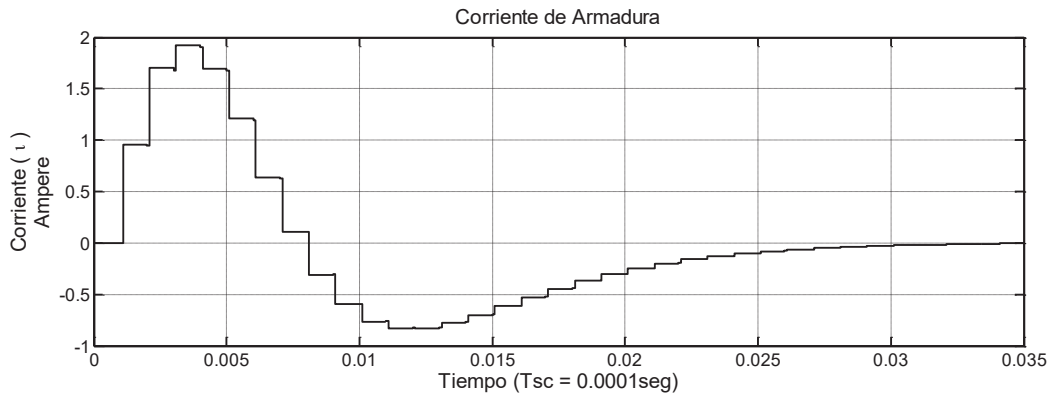
En la respuesta de la posición de salida del sistema de control de posición se observan los mismos efectos ante la presencia del control interno de corriente.



**Figura 4.5** Transitorio de la posición de referencia posición de salida y posición

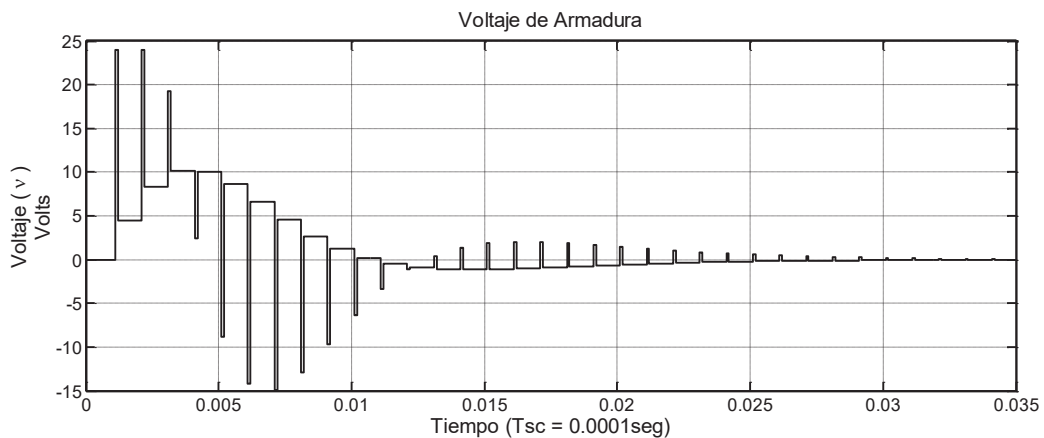
En la Figura 4.6 se observa el transitorio de la corriente de armadura, como la corriente de armadura es proporcional al par electromagnético, por consiguiente, se observan las mismas variaciones con sus respectivas unidades en ambos trazos.





**Figura 4.6** Transitorio de la corriente de armadura

En consecuencia de la aplicación de un lazo interno de control de corriente, el voltaje se ve afectado en su comportamiento, ya que el diseño del control de corriente se consideró un control tipo DeadBeat, se espera que la respuesta del voltaje se establezca en dos periodos de muestreo como se observa en la Figura 4.7. En la figura se observa como el voltaje tiene picos inicialmente para acelerar al motor hacia la referencia de posición, en el momento en que el motor se encuentra cerca de la referencia de posición, el controlador ejerce un par de frenado el cual se manifiesta en los picos de voltaje negativos, aproximadamente en  $t = 0.004s$ .



**Figura 4.7** Respuesta del voltaje de armadura ante cambios de la referencia de par  $T^*$ .

### 4.3 Simulación de la Aplicación del Controlador PID No Lineal al Seguimiento de Trayectorias.

Las simulaciones se realizan primero con una posición de referencia en forma de escalón unitario, posteriormente, con un escalón de gran amplitud para llevar al sistema controlador de posición al modo de operación no lineal y finalmente se realiza la simulación del sistema con una referencia de posición generada con polinomios de octavo grado [I. Juárez Campos, 2002], las simulaciones se realizan en base al código fuente derivado de la Figura 4.8, donde se aplicarán grandes cambios de posición del punto final respecto al punto inicial, para someter al sistema a pruebas robustas en cuanto al seguimiento de trayectorias se refiere.

La simulación se lleva a cabo con los parámetros del motor de CD Pittman *Express*, modelo GM9234S003, las especificaciones del motor se muestran en la Tabla 4.1:

Tabla 4.1 Especificación de parámetros del motor GM9234S003

| Datos del Motor                       | Símbolo  | Unidades       | Valor                 |
|---------------------------------------|----------|----------------|-----------------------|
| Voltaje de referencia                 | $E$      | $V$            | 24                    |
| Corriente máxima                      | $I_p$    | $A$            | 5.19                  |
| Par máximo                            | $T_{PK}$ | $N - m$        | 0.13736               |
| Velocidad máxima                      | $S_{NL}$ | $rad/s$        | 480.48                |
| Constante fuerza contra electromotriz | $K_E$    | $V/rad/s$      | $4.59 \times 10^{-2}$ |
| Inercia del Rotor                     | $J_M$    | $Kg \cdot m^2$ | $4.2 \times 10^{-6}$  |
| Inductancia                           | $L$      | $mH$           | 3.97                  |
| Resistencia                           | $R$      | $\Omega$       | 4.62                  |
| Par de fricción                       | $T_F$    | $N - m$        | $4.2 \times 10^{-3}$  |
| Constante de Par                      | $K_t$    | $N - m/A$      | $4.59 \times 10^{-2}$ |

En la Figura 4.8 se muestra el diagrama de bloques del control PID no lineal con control de corriente, en el cual se basa el código fuente en Matlab, para realizar las simulaciones subsecuentes del capítulo. Las simulaciones que a continuación se presentan se llevaran a cabo sin considerar el bloque de cuantificación. Los efectos del bloque de cuantificación se consideran en la sección 4.5.

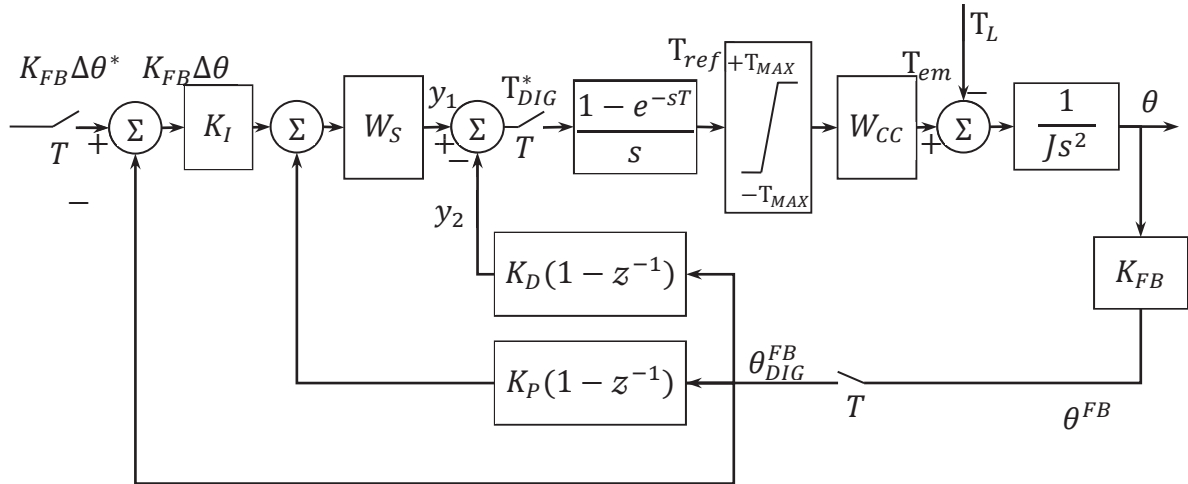


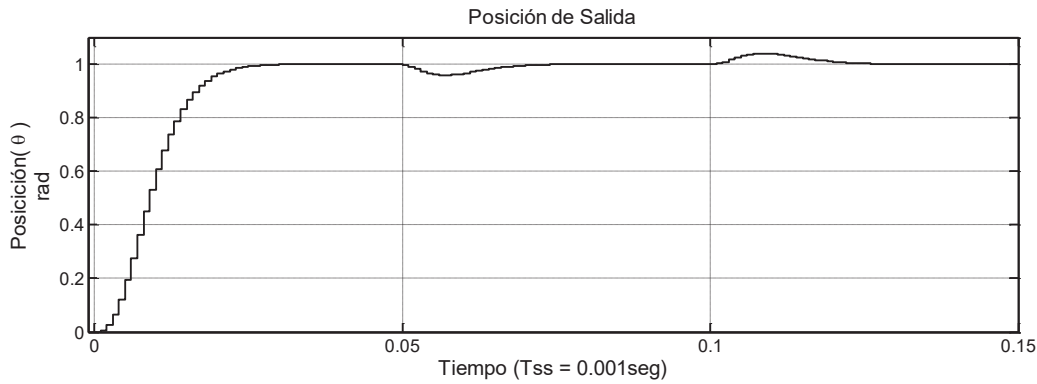
Figura 4.8 Diagrama de bloques de Control PID con Integrador saturable y control de corriente.

El bloque  $W_S$  de la Figura 4.8 representa el integrador saturable mostrado en el diagrama de bloques de la Figura 3.34. Respectivamente el bloque  $W_{CC}$  representa el controlador de corriente mostrado en el diagrama de bloques de la Figura 4.2.

### 4.3.1 Simulación del Controlador Digital PID No Lineal con una Referencia de Posición Escalón Unitario

En la simulación del controlador digital PID no lineal se consideran los siguientes parámetros para llevar a cabo la simulación: la referencia de posición será un escalón unitario, una vez que el sistema alcance el estado estable, se aplicará un par de carga de tipo escalón con un valor de  $T^L = 0.0189Nm$  iniciando en  $t = 50ms$  y terminando en  $t = 100ms$ . El periodo de muestreo del sistema de control de posición es  $T_{SS} = 0.001s$  y el periodo de muestreo del controlador de corriente interno es de  $T_{sc} = 0.0001s$

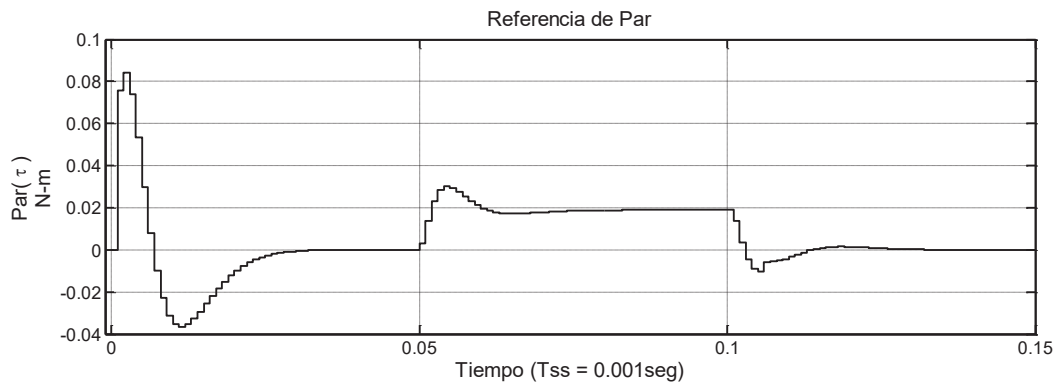
En la Figura 4.3, se observa el trazo de la posición de salida de la respuesta al escalón unitario del sistema de control digital de posición.



**Figura 4.9** Respuesta al escalón unitario del controlador digital de posición con controlador PID no lineal y controlador interno de corriente

El sistema llega a su estado estable en  $t = 36ms$ . En  $t = 50ms$  se aplica un escalón del par de carga, se observa un cambio en la posición de salida que es eliminado por el controlador de posición en  $38ms$ , es evidente que el controlador mantiene un par electromagnético para mantener la posición de salida en estado estable, en  $t = 100ms$  el par de carga es removido del sistema y nuevamente se observa un cambio en la posición de salida, esto a consecuencia del par electromagnético que mantenía el controlador para mantener el sistema en estado estable, después de  $37ms$  el sistema vuelve a su estado estable.

En la Figura 4.10, se observa el trazo del transitorio de la referencia de par del motor. Cuando  $t = 50ms$  el par de carga se presenta como una perturbación de tipo escalón, provocando que la referencia de par del motor se incremente para compensar el par de carga.

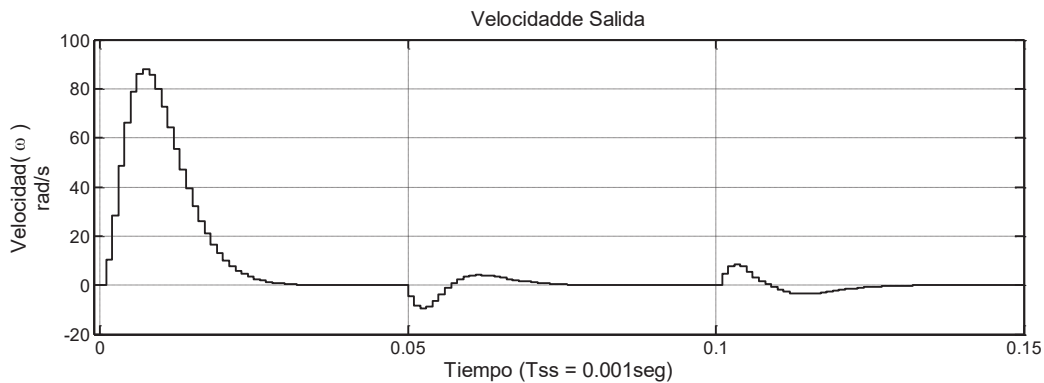


**Figura 4.10** Transitorio de la referencia del par, derivado de la respuesta al escalón unitario del sistema de control digital PID no lineal.

---

El par del motor permanece con un valor diferente de cero aun cuando la posición de salida alcanzó a la referencia de par, esto debido a que se mantiene un par de carga perturbando al sistema. Al momento en que el par de carga regresa a cero, la referencia de par del motor cae a cero después del par de carga

En la Figura 4.11, se observa el trazo de la velocidad del motor. En el instante que el par de carga se aplica al sistema la velocidad decae por el efecto del incremento del par del motor, para que la posición regrese a la referencia de posición del sistema. Al momento en que el par de carga es eliminado la referencia de par permanece presente instantes después de haberse quitado el par de carga, debido a esto el sistema experimenta un incremento en su velocidad, regresando a cero cuando la referencia de par y la posición de salida llegan a los valores deseados.

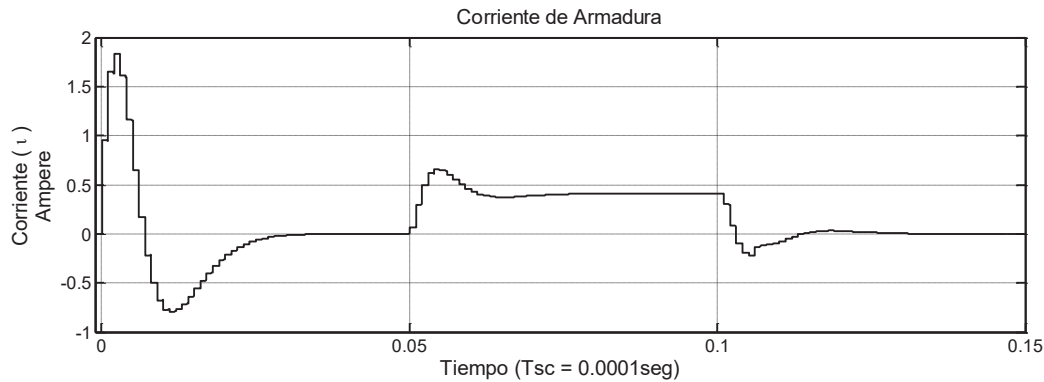


**Figura 4.11** Transitorio de la Velocidad de salida, derivado de la respuesta al escalón unitario del sistema de control digital PID no lineal.

En la Figura 4.12, se observa el trazo de la corriente de armadura, obtenido del lazo de control interno de corriente. En la simulación la corriente cambia en un tiempo mínimo, para este caso el tiempo es de  $200 \mu s$ , que corresponde a dos intervalos de tiempo del control de corriente. Como la corriente es directamente proporcional al par del motor, se muestra un transitorio de corriente de armadura similar al del par del motor. El controlador interno de corriente se diseñó planteando un control DeadBeat, esta estrategia de control tiene la propiedad de conducir al estado estable en el menor número de pasos posible después de la perturbación [J. Astrom & Wittenmark, 1997], para este caso  $n = 2$  ya que el sistema es de

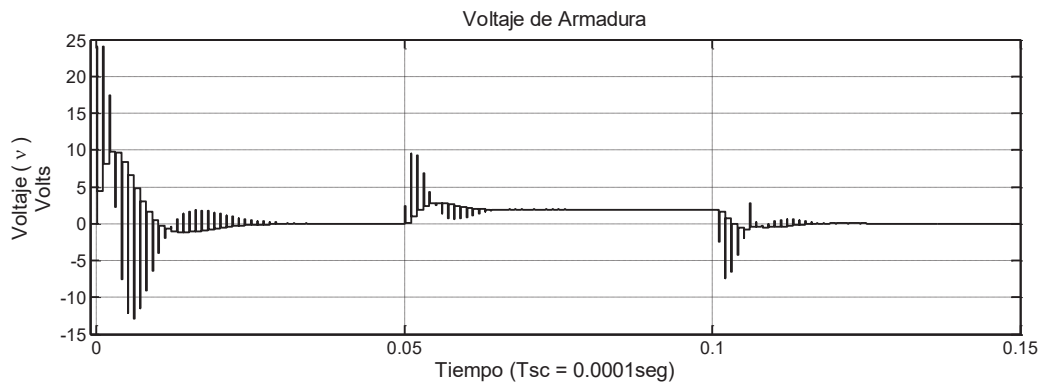
---

segundo orden. De acuerdo al planteamiento de la Ec. (4.14) el controlador de corriente se establecerá en el estado estable dos pasos después de la perturbación.



**Figura 4.12** Trazo de la corriente de armadura, obtenida del lazo de control interno de corriente, derivado de la respuesta al escalón unitario del sistema de control digital PID no lineal.

En la Figura 4.13, se observa el transitorio del voltaje de armadura del motor, donde el cambio de voltaje en la entrada del motor proporciona evidencia del controlador de corriente interno, ya que los picos en el voltaje son producidos por el cambio de la corriente de la propuesta de control DeadBeat. Como se puede observar en la figura, después de un cambio en el voltaje en un instante de muestreo del control interno de corriente  $T_{SC}$ , el voltaje permanece constante durante el periodo de muestreo del sistema  $T_{SS}$ .



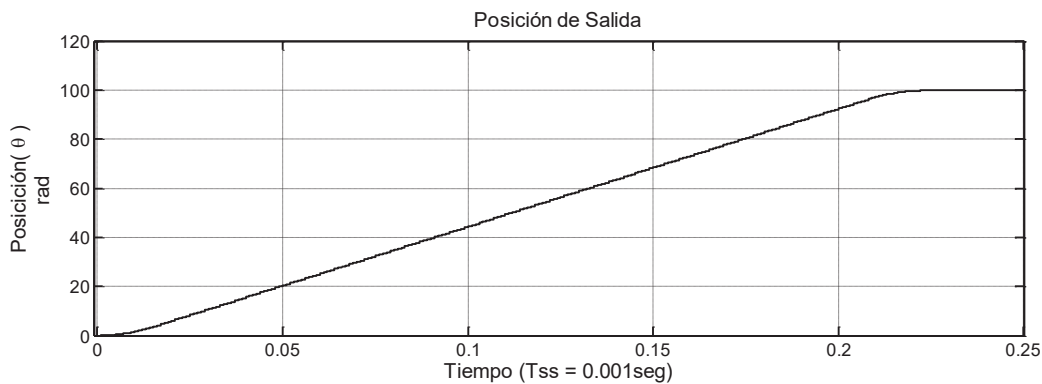
**Figura 4.13** Trazo de voltaje de armadura, obtenida del lazo de control interno de corriente, derivado de la respuesta al escalón unitario del sistema de control digital PID no lineal.

---

### 4.3.2 Simulación del Controlador Digital PID No Lineal con una Referencia de Posición Escalón Grande

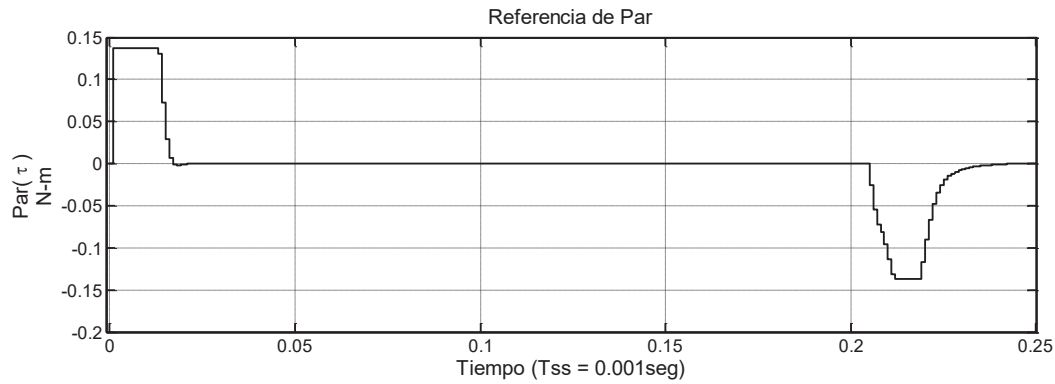
En la simulación del controlador digital PID no lineal se consideran los siguientes parámetros para llevar a cabo la simulación: la referencia de posición será un escalón con magnitud suficientemente grande para llevar al sistema al modo de operación no lineal, en este caso  $\theta^* = 100rad$ . El periodo de muestreo del sistema de control de posición es  $T_{ss} = 0.001s$  y el periodo de muestreo del controlador de corriente interno es de  $T_{sc} = 0.0001s$ . En esta simulación no se aplica par de carga.

En la Figura 4.8, se muestra la respuesta del sistema de control digital de posición con PID no lineal a una referencia de posición de escalón grande, se observa que el sistema llega a la referencia de posición con una respuesta estrictamente no oscilatoria.



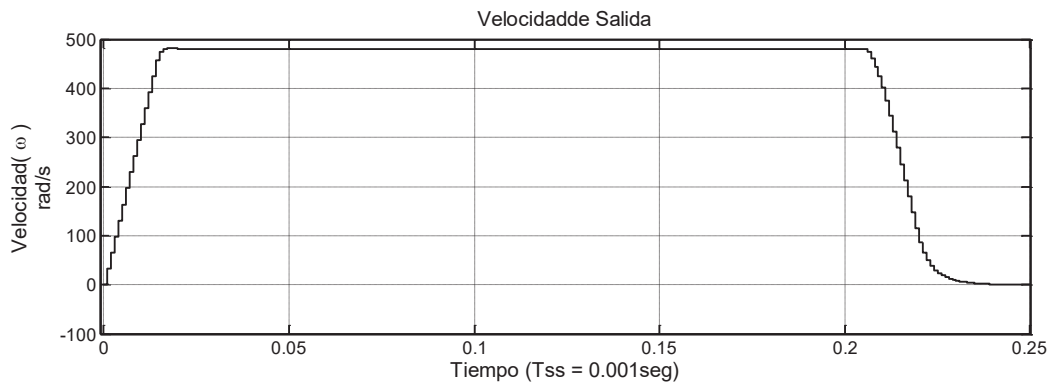
**Figura 4.14** Transitorio de la posición de salida del controlador digital de posición con controlador PID no lineal y controlador interno de corriente

En la Figura 4.15, se muestra el trazo de la respuesta transitoria de la referencia del par que exhibe un comportamiento estrictamente no oscilatorio, ya que el par del motor no presenta cambios de signo abruptos, en la fase de aceleración la referencia de par llega a su límite, dando evidencia de que el sistema se encuentra en un modo de operación no lineal. Cuando la posición real del sistema se aproxima a la referencia de posición, se observa un par de frenado, el cual no llega a su límite debido a las consideraciones de velocidad para que el sistema no sobrepase la referencia de posición y presente un comportamiento estrictamente no oscilatorio.



**Figura 4.15** Respuesta transitoria de la referencia de par del controlador digital de posición con controlador PID no lineal y controlador interno de corriente, ante un gran escalón de referencia.

En la Figura 4.16, se muestra el transitorio de la velocidad del motor, la velocidad llega a su límite, dando evidencia de que se encuentra en el modo de operación no lineal.



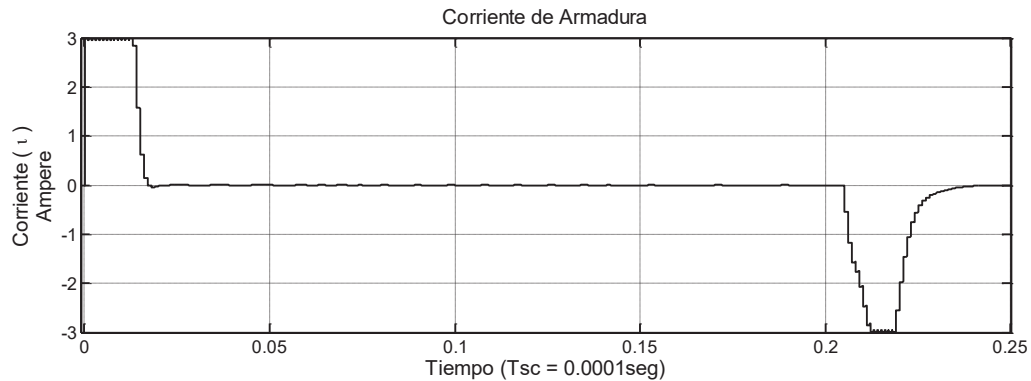
**Figura 4.16** Respuesta transitoria de la velocidad del motor con un controlador digital de posición con controlador PID no lineal y controlador interno de corriente, ante un gran escalón de referencia.

En la mayor parte del transitorio, la velocidad se encuentra en el límite máximo del sistema, ya que la referencia de la posición es muy grande y requiere de la máxima velocidad del sistema para poder alcanzar la referencia en el menor tiempo posible. Después de 0.2 seg, el par del motor comienza a caer junto con la velocidad ya que en ese instante de tiempo, el sistema se encuentra próximo a llegar a la referencia establecida, por lo cual el controlador de posición comienza a frenar para establecer una respuesta estrictamente no oscilatoria.



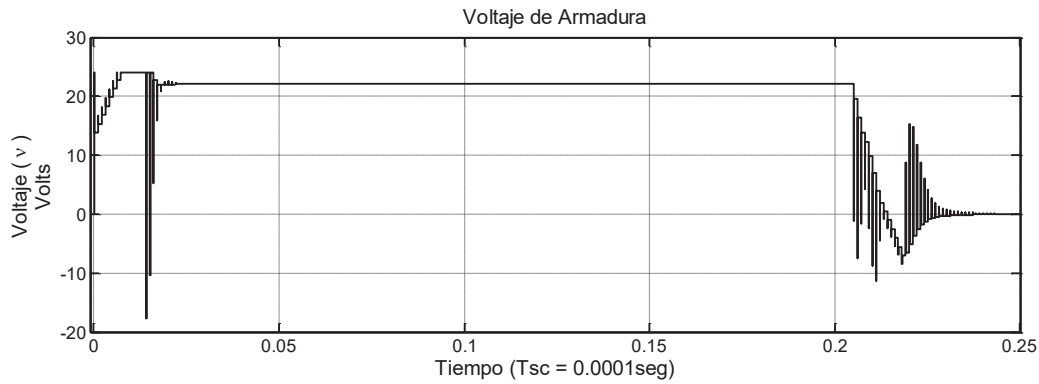
---

En la Figura 4.17 se muestra el transitorio de la corriente de armadura, generada por el controlador de corriente interno del sistema. Como se había mencionado anteriormente, la corriente de armadura es directamente proporcional al par, por esta razón muestra un comportamiento similar al de la referencia de par del motor.



**Figura 4.17** Transitorio de la corriente de armadura, obtenido del controlador de corriente interno del sistema de control digital de posición

En la Figura 4.18 se muestra el transitorio del voltaje de armadura, el cual depende de la retroalimentación de la corriente de salida del controlador interno de corriente, el comportamiento del voltaje depende de los cambios asociados a la corriente de salida. Esto último ilustrado en la Figura 4.2, donde se muestra la estructura del controlador interno de corriente en donde se observa la dependencia del voltaje del motor de la corriente de salida y de la acción integral incorporada al controlador. El sobreimpulso negativo en el inicio del transitorio es debido a par de frenado que ejerce el controlador para que el sistema opere en estado estable.

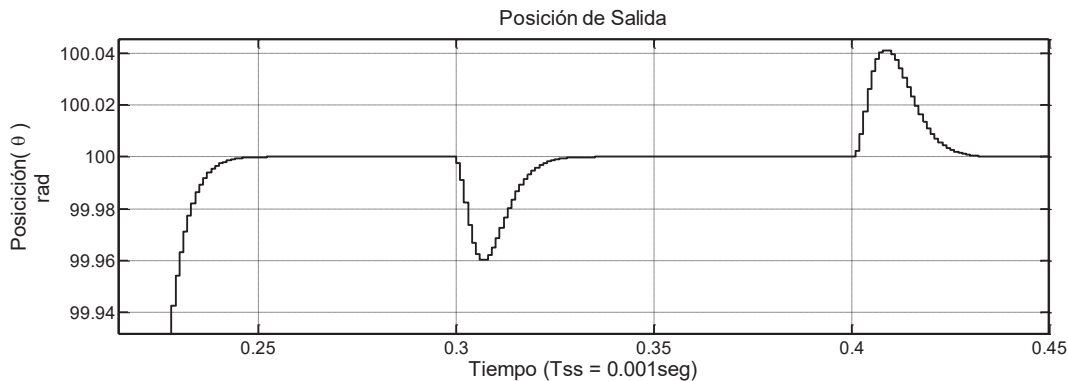


**Figura 4.18** Voltaje de armadura del motor, los cambios en el valor del voltaje es directamente dependiente de los cambios del valor de la corriente de salida del controlador interno de corriente del sistema.

### 4.3.3 Simulación del Controlador Digital PID No Lineal con una Referencia de Posición Escalón Grande y un Par de Carga

En la simulación del controlador digital PID no lineal se consideran los siguientes parámetros para llevar a cabo la simulación: la referencia de posición será un escalón de magnitud grande, en este caso  $\theta^* = 100rad$ . El periodo de muestreo del sistema de control de posición es  $T_{ss} = 0.001s$  y el periodo de muestreo del controlador de corriente interno es de  $T_{sc} = 0.0001s$ . En esta simulación se aplica par de carga en los intervalos de tiempo  $[0.3 s \dots 0.4s]$  con una magnitud de  $T^L = 0.02 Nm$ .

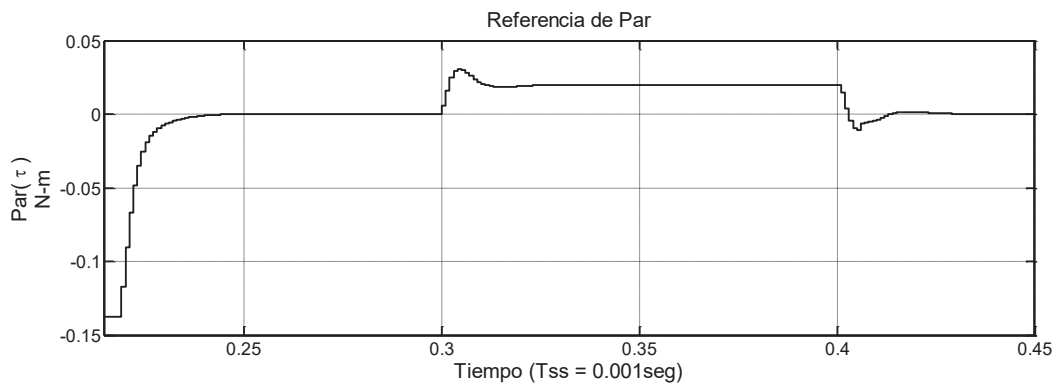
En la Figura 4.19, se observa que la posición de salida se establece en la referencia de posición  $\theta^*$  y se observa el transitorio de par de carga en el intervalo definido anteriormente.



**Figura 4.19** Transitorio de la posición de salida del controlador digital de posición con controlador PID no lineal y controlador interno de corriente, con un par de carga aplicado.

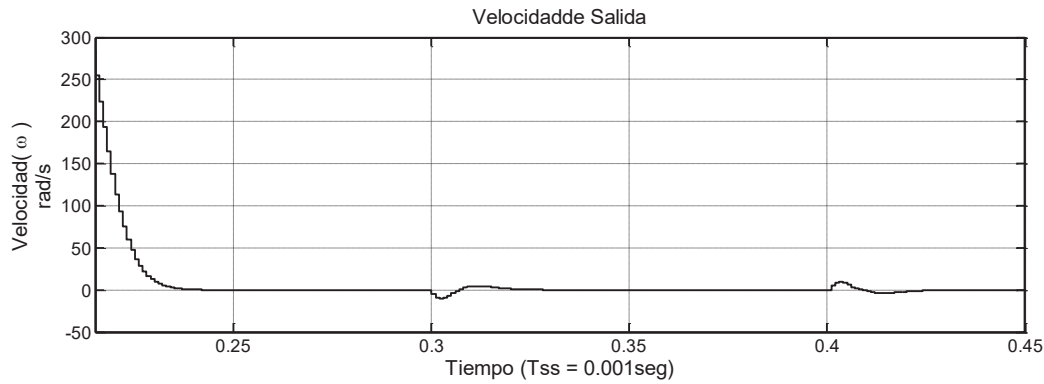
---

En la Figura 4.20 se observa el transitorio de la referencia de par, al aplicar el par de carga al sistema en  $t = 0.3s$  se observa el incremento de la referencia de par para compensar el movimiento provocado por el par de carga  $T^L$  aplicado al sistema, la referencia de par se incrementa a razón del par de carga y se mantiene así durante el intervalo que es aplicado el par de carga. En  $t = 0.4s$  el par de carga se retira y la referencia de par regresa a cero.



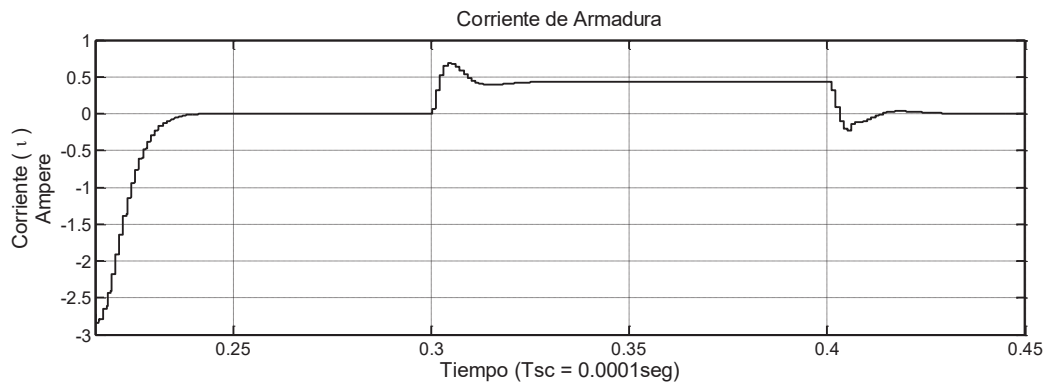
**Figura 4.20** Transitorio de la referencia de par para el par de carga aplicado

En la Figura 4.21 se observa el transitorio de la velocidad del sistema, al aplicar el par de carga en el instante  $t = 0.3s$  hay una caída en la velocidad, la respuesta del controlador se observa en la recuperación de la velocidad hasta que se establece nuevamente en cero, la velocidad permanece en cero durante el resto del intervalo en que se aplica el par de carga. Al momento de quitar el par de carga del sistema en el instante  $t = 0.4s$  se observa que la velocidad se incrementa debido a que la referencia de par tiene un valor distinto de cero, hasta que la referencia de par llega a cero la velocidad se establece nuevamente en cero.



**Figura 4.21** Transitorio de la velocidad del sistema durante el intervalo de aplicación del par de carga.

En la Figura 4.22 se observa el transitorio de la corriente de armadura que ocurre durante el intervalo de la aplicación del par de carga. Al presentarse el par de carga en el instante  $t = 0.3s$ , se presenta un incremento en la corriente de armadura, que mantiene a la referencia de par con un incremento de igual magnitud que el par de carga (Figura 4.20), la corriente es sostenida durante el intervalo que permanece el par de carga. En el instante  $t = 0.4s$  el par de carga es inhibido del sistema y la corriente de armadura regresa a cero.



**Figura 4.22** Transitorio de Corriente de armadura ante la presencia del par de carga.

En la Figura 4.23 se observa el transitorio de voltaje de armadura, en el instante de tiempo  $t = 0.3s$  se observa el incremento del voltaje de armadura derivado de la presencia del par de carga en el sistema, el voltaje se establece durante el resto del intervalo de tiempo en que el par de carga está presente y en el instante  $t = 0.4s$  el voltaje de cae a cero.

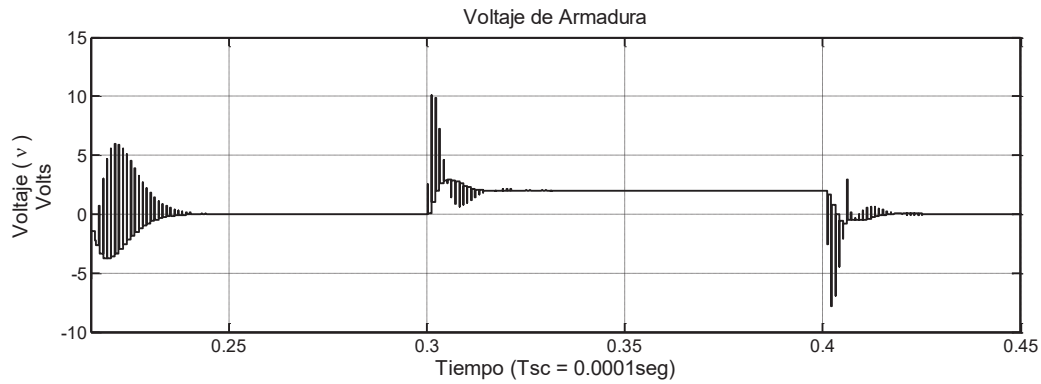


Figura 4.23 Transitorio del voltaje de armadura ante la presencia del par de carga.

#### 4.3.4 Simulación del Controlador Digital PID No Lineal con una Trayectoria como Referencia de Posición sin Par de Carga

En la simulación del controlador digital PID no lineal se consideran los siguientes parámetros para llevar a cabo la simulación: la referencia de posición será una trayectoria de uno de los motores de un robot manipulador de seis grados de libertad, que sigue una trayectoria generada utilizando polinomio de octavo grado [I. Juárez Campos, 2002]. El periodo de muestreo del sistema de control de posición es  $T_{ss} = 0.001s$  y el periodo de muestreo del controlador de corriente interno es de  $T_{sc} = 0.0001s$ . En esta simulación no se aplica par de carga. La Figura 4.24 muestra la posición de salida del sistema (línea continua) y la referencia de posición (línea discontinua).

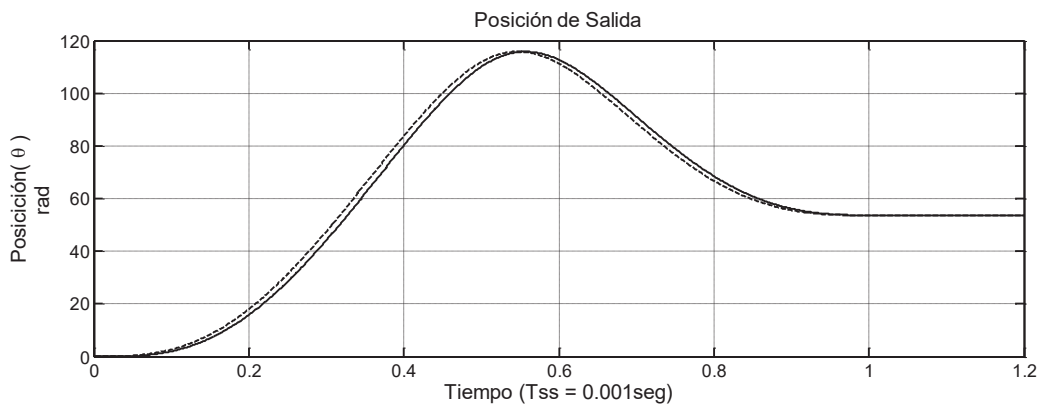
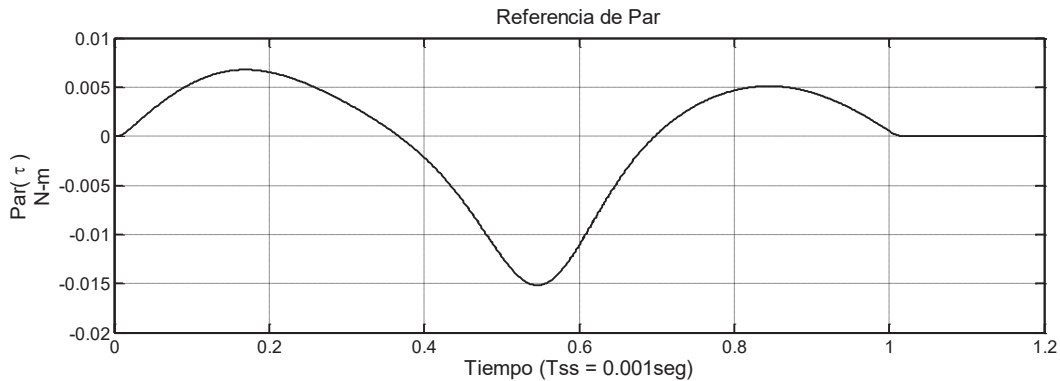


Figura 4.24 Respuesta transitoria de la posición de salida con respecto a la referencia de posición.

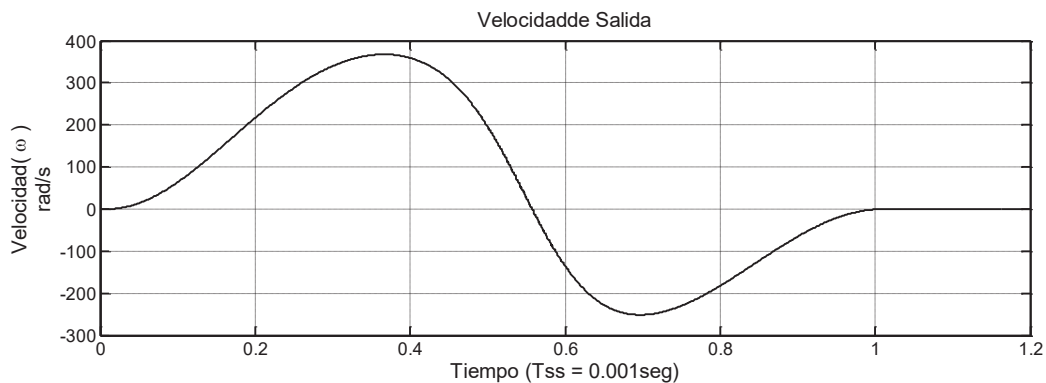
---

Con una referencia de posición con una pendiente lo suficientemente razonable, el sistema permanece en el modo de operación lineal, preservando la estabilidad y una respuesta transitoria estrictamente no oscilatoria. En la Figura 4.25 se muestra el transitorio de la referencia del par del motor que presenta un comportamiento estrictamente no oscilatorio, permaneciendo dentro del modo de operación lineal,



**Figura 4.25** Respuesta transitoria del par de referencia del motor

En la Figura 4.26, se muestra la respuesta transitoria de la velocidad del motor, donde se observa el incremento de velocidad conforme el cambio de posición (Figura 4.24) del sistema en el seguimiento de la trayectoria definida.

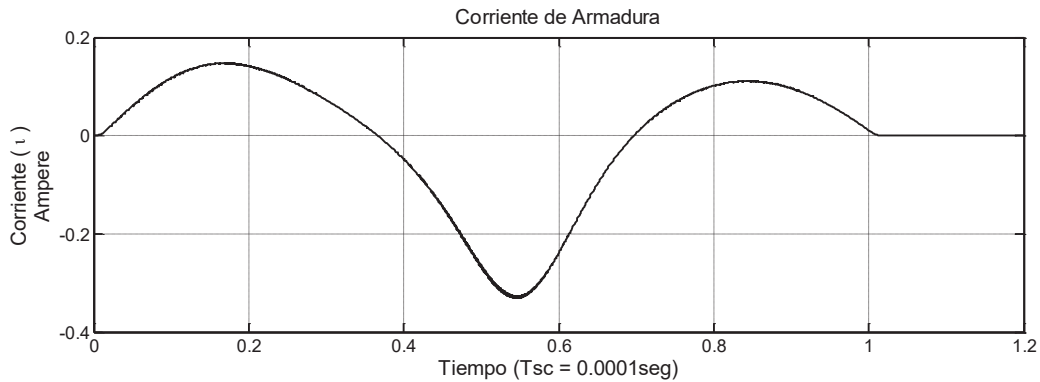


**Figura 4.26** Respuesta transitoria de la velocidad del motor

En la Figura 4.27, se muestra el transitorio de la corriente de armadura del motor, que es directamente proporcional a la referencia de par, ya que la referencia de par no llega a su límite, la corriente de igual forma no llega a su límite. El comportamiento de la corriente de

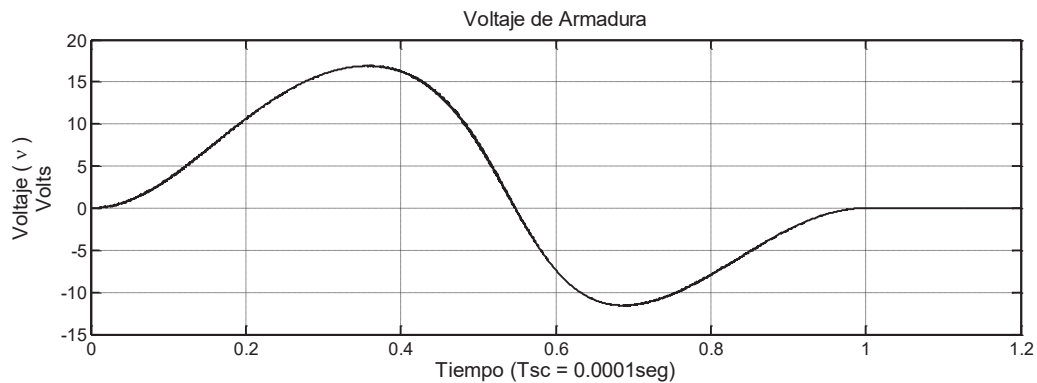
---

armadura del motor es similar al comportamiento del la referencia de par ya que estas son directamente proporcionales.



**Figura 4.27** Respuesta transitoria de la de corriente de armadura del motor

En la Figura 4.28, se muestra el transitorio del voltaje de armadura del motor.



**Figura 4.28** Respuesta transitoria del voltaje de armadura del motor

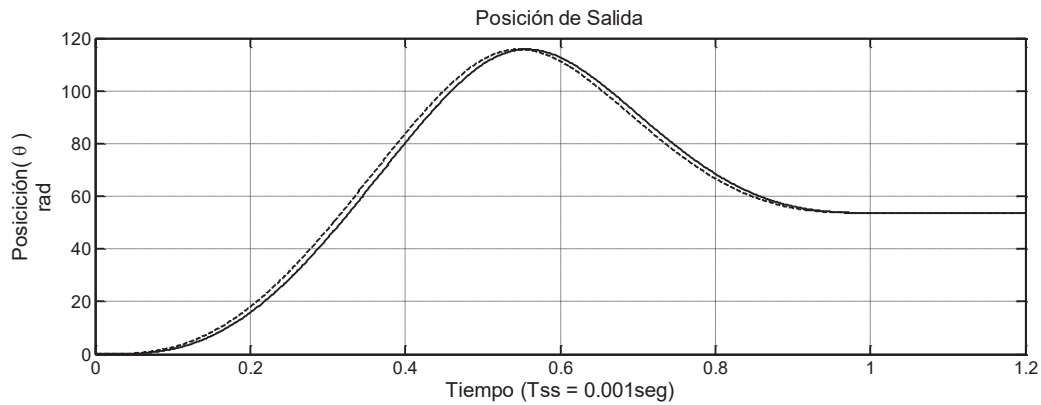
### 4.3.5 Simulación del Controlador Digital PID No Lineal con una Trayectoria como Referencia de Posición con un Par de Carga

En la simulación del controlador digital PID no lineal se consideran los siguientes parámetros para llevar a cabo la simulación: la referencia de posición será la misma trayectoria de la sección anterior. El periodo de muestreo del sistema de control de posición es  $T_{SS} = 0.001$ s y el periodo de muestreo del controlador de corriente interno es de  $T_{sc} = 0.0001$ s. En está

---

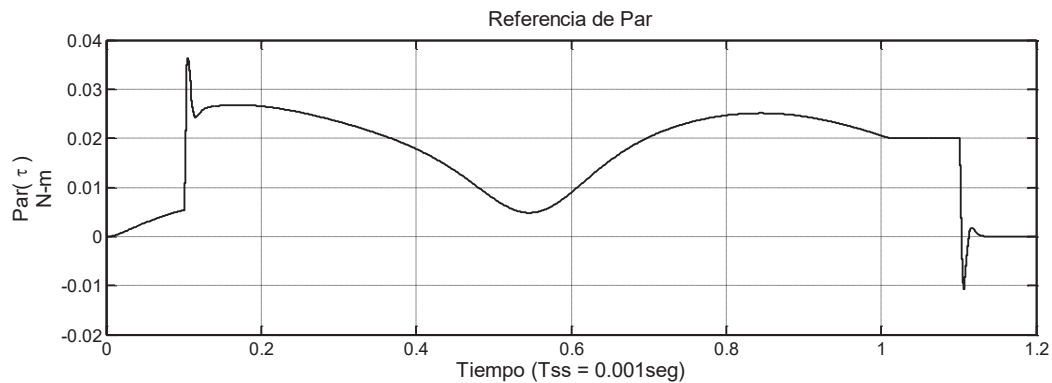
simulación se aplica un par de carga  $T^L = 0.02 \text{ Nm}$ . La magnitud del par de carga es elegida aleatoriamente, es menor que el par de carga máximo del sistema y es aplicado en el intervalo de tiempo  $[0.1s \dots 1.1s]$ .

La Figura 4.29 muestra la posición de salida del sistema (línea continua) y la referencia de posición (línea discontinua).



**Figura 4.29** Transitorio de la posición de salida del sistema con la referencia de la trayectoria.

En la Figura 4.30 se observa el transitorio de la referencia de par. En el instante de tiempo  $t = 0.1s$  se aplica el par de carga al sistema lo que incrementa en la misma proporción la referencia de par durante el resto del intervalo. En el instante de tiempo  $t = 1.1s$  el par de carga es retirado del sistema y la referencia de par regresa a cero ya que la posición de salida está establecida en un valor constante en ese intervalo de tiempo.

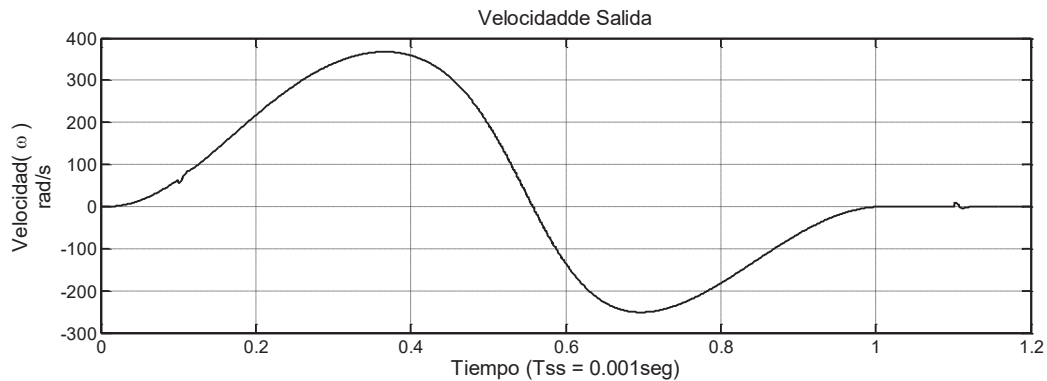


**Figura 4.30** Transitorio de la referencia de par con el par de carga aplicado.



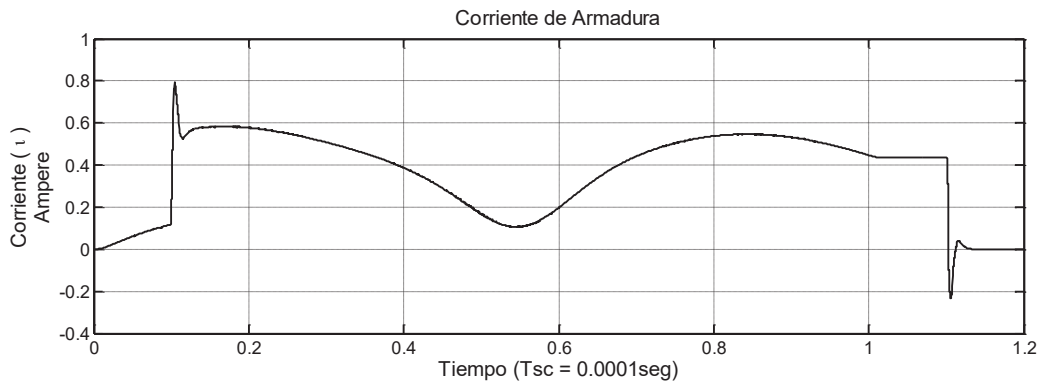
---

En la Figura 4.31 se observa el transitorio de la velocidad del sistema, en el instante de tiempo  $t = 0.1s$  se observa una pequeña perturbación de la velocidad del sistema ya que en ese instante de tiempo se aplica el par de carga. En el instante de tiempo  $t = 1.1s$  se observa nuevamente una perturbación de la velocidad del sistema, está perturbación es debida a que en ese instante de tiempo el par de carga es retirado del sistema.



**Figura 4.31** Transitorio de la velocidad de armadura del sistema con el par de carga aplicado.

En la Figura 4.32 se observa el transitorio de la corriente de armadura del sistema, en el instante de tiempo  $t = 0.1s$  se observa un cambio en la corriente de armadura debido a que el par de carga es aplicado en este instante de tiempo. La corriente de armadura tiene un comportamiento similar al de la corriente de armadura de la simulación anterior (Figura 4.27) pero con un incremento adicional proporcional al par de carga aplicado. En el instante de tiempo  $t = 1.1s$  el par de carga es retirado del sistema y la corriente regresa a cero ya que en ese intervalo de tiempo la trayectoria permanece con un valor constante.



**Figura 4.32** Transitorio de la corriente de armadura del sistema con el par de carga aplicada.

---

En la Figura 4.33 se observa el transitorio del voltaje de armadura del sistema, en el instante de tiempo  $t = 0.1s$  se observa que el par de carga aplicado provoca un cambio en el voltaje de armadura, el voltaje permanece proporcional al de la Figura 4.28 durante el resto del intervalo que se mantiene el par de carga. En el instante  $t = 1.1s$  el par de carga es retirado y el voltaje regresa a cero ya que la trayectoria es constante en ese intervalo de tiempo.

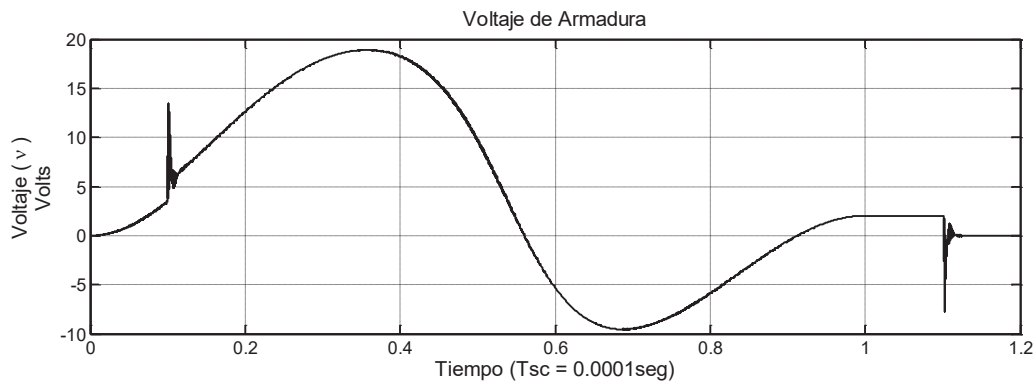


Figura 4.33 Transitorio del voltaje de armadura del sistema con el par de carga aplicado.

#### 4.4 Errores de Modelado

En esta sección se consideran los posibles errores de modelado que se pueden presentar en la implementación de un control de posición. Es habitual que al realizar las consideraciones del modelado del sistema de control de posición se encuentren incongruencias propias de la misma naturaleza de los elementos y dispositivos utilizados en el modelo. Podríamos tener un error de modelado en el caso de la inercia propia del motor a controlar, que puede diferir de la inercia que se encuentra en la hoja de datos de la inercia real que tiene el motor al término de su fabricación, además si el motor es usado puede también tener variaciones debido al desgaste del uso cotidiano. Es también importante predecir el comportamiento del sistema de control de posición en el caso en que la inercia considerada para el modelado del sistema sea totalmente diferente de la inercia del motor a utilizar en el sistema, ya que pueden llegar a darse errores humanos al momento de diseñar o de implementar un sistema de control de posición.

---

#### 4.4.1 Simulación de Errores de Modelado en la Inercia.

Para llevar a cabo las consideraciones de los errores de modelado en la inercia, se toma en cuenta el sistema de control de posición PID no lineal de la Figura 4.8, este sistema fue modelado con el motor PittmanExpress GM9234S003, sus especificaciones se encuentran en la Tabla 4.1. Para llevar a cabo las simulaciones de los errores de modelado se elige a propósito dos inercias que difieran de la inercia  $J = 4.2 \times 10^{-6} \text{Kg} \cdot \text{m}^2$  que se consideró para el modelado del sistema de la Figura 4.7, en este caso una inercia menor que la inercia de modelado y otra inercia mayor que la inercia de modelado del sistema de control PID no lineal.

##### 4.4.1.1 Para una variación del 10% en la inercia

La variación de la inercia de la hoja de datos al valor real que tiene un motor generalmente tiene una tolerancia del 10%, por consiguiente se elige una variación en la inercia con ese porcentaje para realizar la simulación y observar las consecuencias en el control de posición. La inercia se establece en  $J = 3.8 \times 10^{-6} \text{Kg} \cdot \text{m}^2$ . En la Figura 4.34 se observa la respuesta del sistema con una variación del 10% en la inercia del motor, la respuesta presenta pequeñas variaciones durante el transitorio en el seguimiento de la referencia de posición, pequeñas en comparación con los trazos de la Figura 4.9, por consiguiente se presentan también variaciones pequeñas en la velocidad y el par, sin embargo, el estado estable es alcanzado sin problemas, prácticamente con la misma rapidez.

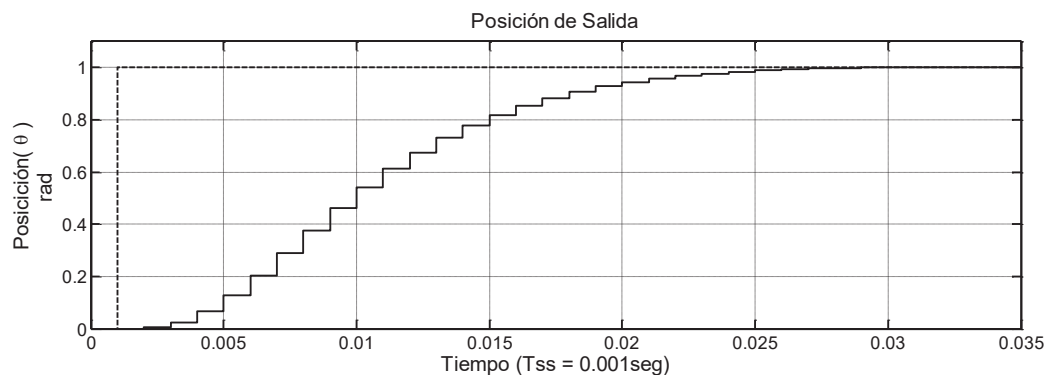
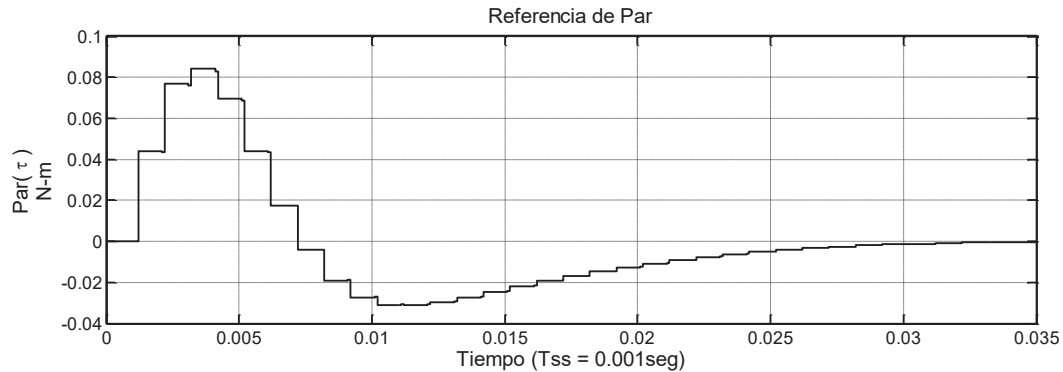


Figura 4.34 Posición del motor para un error de modelado de la inercia del 10%

---

En la Figura 4.35 se presentan los trazos del par del motor que como ya se ha mencionado tiene pequeñas variaciones con respecto a los valores de la Figura 4.10.

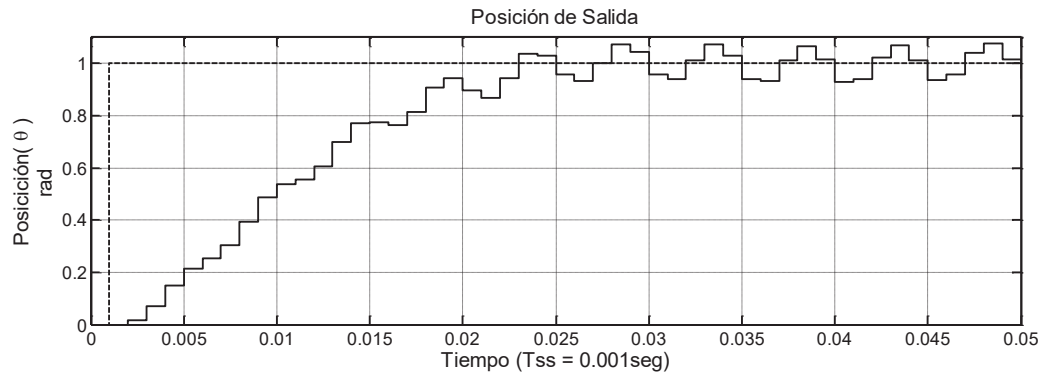


**Figura 4.35** Par del motor para un error de modelado de la inercia del 10%.

Con las simulaciones anteriores podemos asegurar que la capacidad de control del sistema controlador de posición tiene una alta robustez como para soportar estos errores de modelado en la inercia. A continuación se realizan dos simulaciones con variaciones aproximadas del 70% del valor de la inercia para observar el comportamiento del sistema.

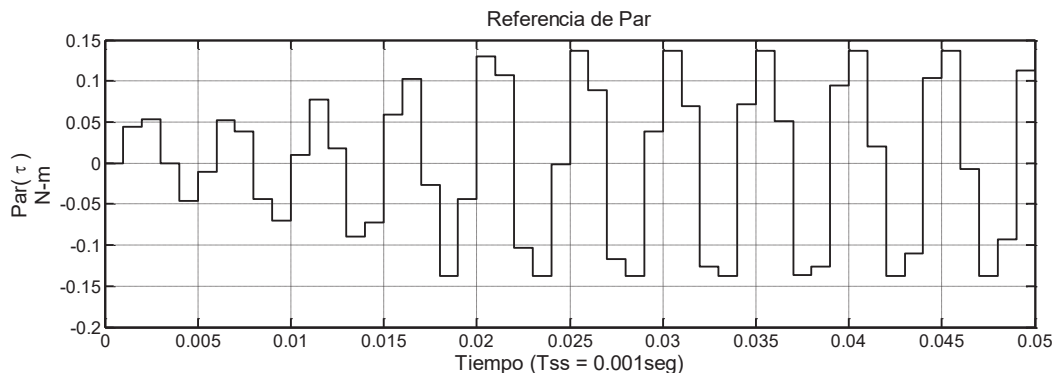
#### **4.4.1.2 Para una Inercia 70% Menor**

Se toma en cuenta en primera instancia una inercia menor  $J = 1.2 \times 10^{-6} Kg \cdot m^2$ , la simulación se lleva a cabo con una posición de referencia  $\theta^* = 1rad$ , sin considerar la entrada de perturbaciones de carga. En la Figura 4.36 se observa un comportamiento del sistema a consecuencia de la gran variación en la inercia del motor, en el seguimiento de la posición de referencia es inadecuado y no se logra establecer.



**Figura 4.36** Referencia de posición y posición del motor, para un error de modelado considerando una inercia 70% menor.

En la Figura 4.37 se observa el comportamiento del par del motor, el cual presenta oscilaciones constantes, este comportamiento es no deseado para un control de posición ya que para este tipo de controles es deseable tener un comportamiento estrictamente no oscilatorio tanto en la posición como en el par del motor.



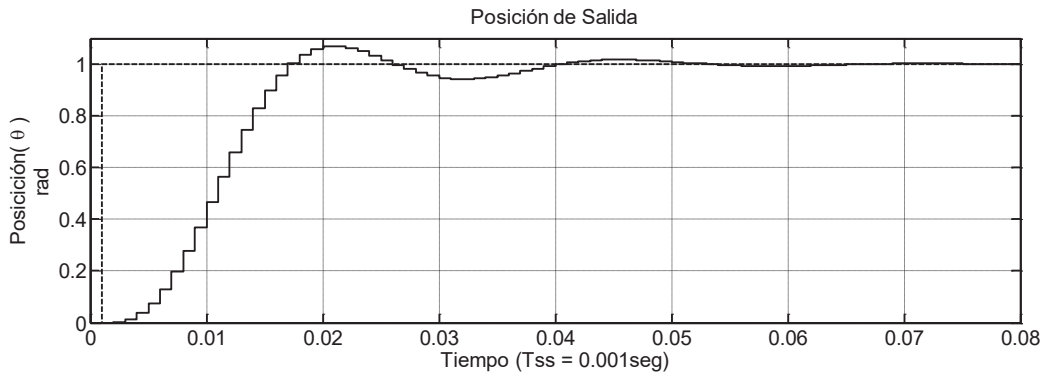
**Figura 4.37** Par electromagnético del motor, para un error de modelado considerando una inercia 70% menor.

#### 4.4.1.3 Para una Inercia 70% Mayor

Ahora consideraremos el incremento de la inercia del motor a  $J = 7.2 \times 10^{-6} \text{Kg} \cdot \text{m}^2$ . En la Figura 4.38 se observará el comportamiento de la posición en el seguimiento de la referencia de posición. Al ser mayor la inercia del motor que la inercia de modelado del sistema el sistema presenta sobreimpulsos y la referencia de posición se logra establecer. Es importante

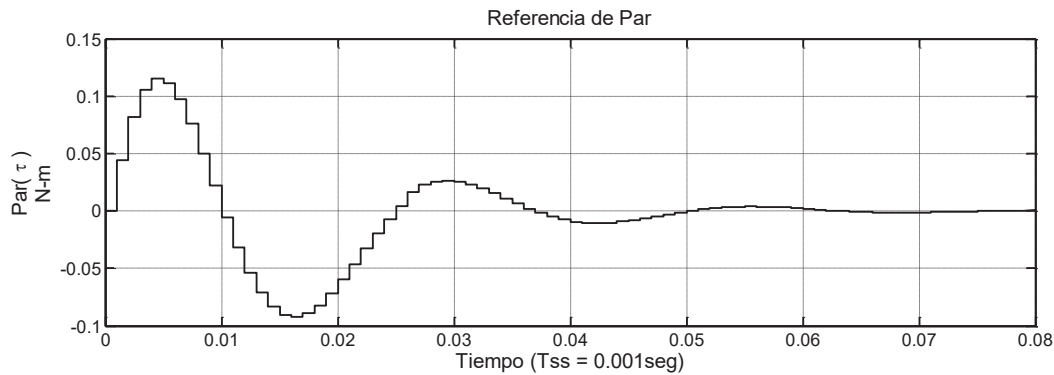
---

mencionar que, de igual manera que las simulaciones de la sección anterior, el comportamiento es inadecuado para el cumplimiento del objetivo de esta investigación.



**Figura 4.38** Posición del motor considerando un error de modelado con una inercia 70% mayor.

En consecuencia de la variación de la inercia, el par también presenta oscilaciones en su comportamiento y se ilustran en la Figura 4.39.



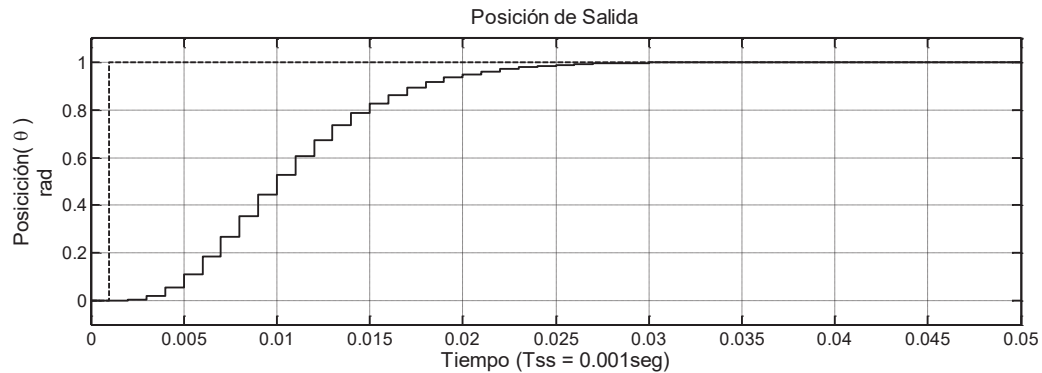
**Figura 4.39** Par de motor considerando un error de modelado con una inercia 70% mayor

#### 4.4.2 Errores de Modelado del Coeficiente de Fricción

El modelo del controlador de posición PID se diseñó sin considerar el coeficiente de fricción del motor, por lo cual es importante considerar los efectos que produce la fricción del motor en el sistema de control de posición. Para este caso se considera el par de fricción de la hoja de datos del motor que se utilizó para el modelado del sistema;  $T_F = 4.2 \times 10^{-03} N \cdot m$ . En la Figura 4.40 se observa el trazo de la respuesta al escalón, el seguimiento de la referencia se

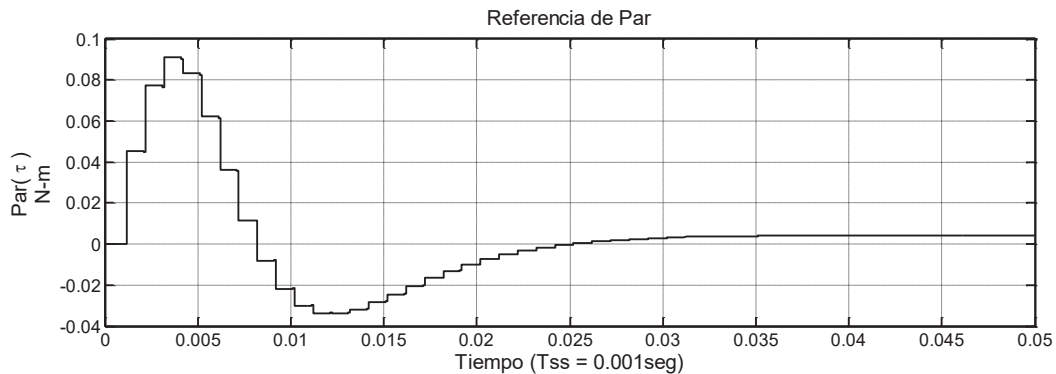
---

establece de igual manera con respecto a la simulación sin la consideración de la fricción, la referencia se sigue sin imperfecciones en su establecimiento.



**Figura 4.40** Respuesta al escalón unitario del sistema de control PID, considerando la fricción.

En la Figura 4.41 se observa el comportamiento del par del motor, el par del motor no se establece en cero al llegar el sistema al estado estable debido a que el motor debe de estar contrarrestando el efecto de frenado de la fricción, por lo cual el par mantiene un valor equivalente a la fricción del motor  $T_F = B d\theta/dt$ .



**Figura 4.41** Respuesta del par del motor ante la presencia de la fricción.

## 4.5 Errores del Controlador por Ruido de Medición

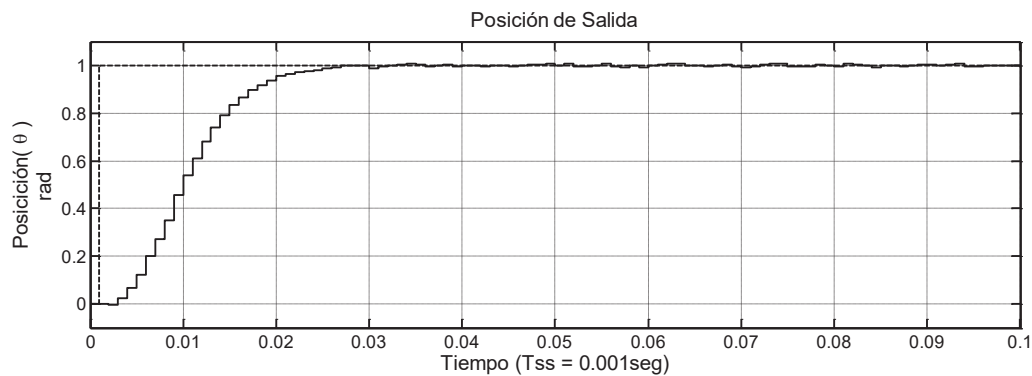
En la gran mayoría de los sistemas de medición nos encontramos con el problema que se genera al realizar una medición, ya sea por la propia naturaleza del sistema o por factores inherentes al mismo, se presenta el ruido en la medición. En esta sección se realiza una simulación para observar los efectos que produce el ruido en la medición de los parámetros

---

del sistema, para tener una idea más clara de los posibles efectos y tomar las consideraciones necesarias para evitar el ruido en la medición de parámetros del sistema.

Como ya se había visto en secciones previas, para realizar la medición de la posición del motor se utiliza un encoder con un intervalo de cuantificación  $q = 0.003146 \text{ rad}$ . Para llevar a cabo la introducción del ruido en el sistema se toma en consideración este parámetro, se introducirá ruido controlado con una magnitud máxima de  $q$  a partir de la medición obtenida del sistema.

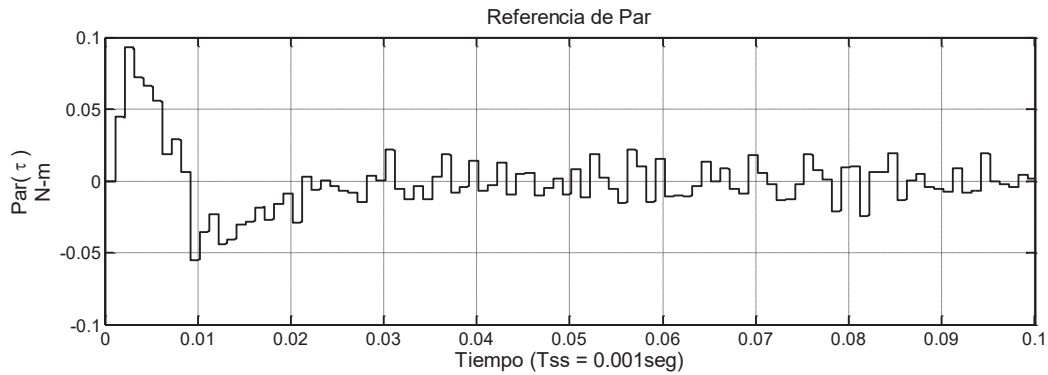
En la Figura 4.42 se observa que el sistema no puede establecer la posición de referencia debido a la presencia del ruido, esto debido a la sensibilidad y configuración del sistema de control de posición. En tanto mayor sea la magnitud del ruido mayor será la magnitud de error en la posición del motor.



**Figura 4.42 Efectos del ruido en el control de posición del motor**

En la Figura 4.43 se observa que el par del motor tiene un comportamiento oscilatorio debido a la presencia del ruido en la medición de la posición.





**Figura 4.43 Efectos del ruido en el control del par del motor.**

Es importante mencionar que para evitar el efecto del ruido en la medición de los sistemas de control con retroalimentación es necesario establecer filtros para evitar el ruido en la medición, ya que si no se diseña un buen sistema de medición se obtendrán resultados indeseables en la aplicación del sistema.

## 4.6 Conclusiones

En el presente capítulo se justificó la aplicación de la ganancia unitaria estática del actuador de par en las simulaciones de los capítulos previos. La aplicación del actuador de par, utilizando un lazo interno de control tiene una ventaja en el establecimiento del par de referencia, ya que se obtiene con el tiempo suficiente para que la respuesta del sistema sea satisfactoria. Se probó la efectividad del control PID no lineal para seguir trayectorias predefinidas. Se comprobó que el sistema tiene una alta robustez ante la presencia de grandes perturbaciones de entrada, perturbaciones de carga, errores de modelado en la inercia y fricción y se observaron los efectos que puede causar el ruido en la medición de los parámetros del sistema, por lo cual se deben tomar medidas para evitar los estragos que produce ruido en la medición de la posición de salida.



---

# Capítulo 5

## CONCLUSIONES

En el presente trabajo se realizó un análisis y descripción de una metodología para el diseño de un controlador digital de posición PID no lineal, que presenta un comportamiento estrictamente no oscilatorio, considerado para una implementación física y evitar daños sustanciales del sistema mecánico y los dispositivos electrónicos, derivados de cambios abruptos en las diferentes variables del sistema.

En la primera parte se abordó la estructura y modelado de un sistema de control de movimiento, así como las consideraciones de operación de los controladores PI y PD basados en el dominio continuo y en el dominio discreto. Se realiza la reubicación de las ganancias proporcional y derivativa en la trayectoria de retroalimentación para analizar los efectos en el comportamiento del sistema. Se obtuvo la función de transferencia al pulso de lazo cerrado para un sistema controlador de movimiento y en base a la función de transferencia se obtuvieron las ganancias normalizadas del sistema. Se realizó un análisis del comportamiento no oscilatorio del sistema para la generación de una función criterio y en base a esa función realizar el cálculo de los parámetros de los controladores digitales de movimiento. Una vez obtenidos los parámetros del sistema, se realizó un análisis del comportamiento del sistema con grandes perturbaciones, en base a los resultados obtenidos de dicho análisis, se discutió el comportamiento del sistema bajo estas condiciones y se tomaron medidas para evitar el fenómeno *Wind-Up*. Con las medidas anteriores se realizó el análisis para la implementación de un controlador de posición no lineal, considerando los límites de velocidad y par.

Finalmente se realizaron las pruebas con las simulaciones del sistema propuesto considerando el seguimiento de trayectorias con grandes cambios de posición, para verificar que el sistema se comporte estrictamente no oscilatorio, tanto en las variables de velocidad y par, así como en la posición de salida.

---

## 5.1 Conclusiones

En base a la experimentación llevada a cabo en este trabajo de tesis con las simulaciones de los controladores de posición PD y PID de manera lineal y no lineal, se presentan las siguientes conclusiones

- Los resultados obtenidos con la simulación de un controlador digital de posición PD lineal y también en caso no lineal, se observa que el controlador no es eficiente en el rechazo de carga, a pesar de que en el caso no lineal el controlador maneja muy bien los cambios de entrada grande.
- La simulación del controlador digital PID lineal presenta una respuesta estrictamente no oscilatoria a perturbaciones de entrada pequeñas, para el caso en que la perturbación de entrada presente una forma de rampa y con una amplitud grande, el controlador digital PID puede seguir la referencia sin error, siempre que la pendiente de la rampa sea razonable.
- Para el caso de la simulación del controlador digital PID no lineal, se observó un comportamiento aceptable para grandes perturbaciones de entrada, ya que el par y la velocidad del sistema alcanzaron sus límites, pero el comportamiento de la salida se mostró estrictamente no oscilatorio.
- En el seguimiento de trayectorias con grandes cambios en la entrada del controlador digital PID no lineal con el lazo interno de control de corriente, se observó un seguimiento sin errores.
- Con los resultados obtenidos de las simulaciones se observa que el sistema es capaz de realizar el seguimiento de trayectorias evitando los cambios abruptos de par, evitando daños físicos al motor y al sistema de conmutación electrónica. Los resultados mencionados son para el caso de seguimeito de trayectorias de un control de posición digital PID no lineal con perturbaciones de carga y sin perturbacionesd de carga.
- El código fuente del programa de simulación es de utilidad para la implementación de un programa para un sistema controlador digital de posición no lineal con DSP.
- Se comprobó que el método de diseño del control PID no lineal tiene una alta robustez ante la presencia de cambios de referencia grandes, perturbaciones de carga,

---

errores de modelado en la inercia y en la fricción y se observaron los efectos del ruido en la medición sobre la posición de salida del sistema.

## 5.2 Trabajos Futuros

La metodología presentada puede ser utilizada para el diseño e implementación de controladores digitales de posición. La propuesta de trabajos futuros son las siguientes:

- Implementación de un controlador de posición de un sólo eje con un controlador digital de señales (DSC) o Procesador digital de señales (DSP).
- Diseño e implementación de un controlador no lineal para el control de un motor de CD de imanes permanentes para la formación de un robot manipulador.
- Migración de código fuente generado en Matlab a una implementación con un controlador digital de señales (DSC) o Procesador digital de señales (DSP).



---

## REFERENCIAS

- [Åström et al, 1997] Karl J Åström y Bjorn Wittenmark, “*Computer Controlled Systems Theory and Desing*”: Prentice Hall, Inc., 1997.
- [Chanchal Dey et al, 2009] Chanchal Dey, Rajani K. Mudi, “*An improved auto-tuning scheme for PID controllers*”, ISA Transactions, Volume 48, Issue 4, October 2009, Pages 396-409.
- [Chun-Qing Huang et al, 2008] Chun-Qing Huang, Xia-Fu Peng, Jun-Ping Wang, “*Robust Nonlinear PID Controllers for Anti-windup Design of Robot Manipulators with an Uncertain Jacobian Matrix*” Acta Automatica Sinica, Volume 34, Issue 9, September 2008, Pages 1113-1121
- [Guoyong Zhao et al, 2007] Guoyong, Zhao; Yugang, Zhao; Aimei, Dong; Zhang, Lili, “*Research on Nonlinear PID Position Controller of CNC System*” Automation and Logistics, 2007 IEEE International Conference on, 2007
- [Hawwa, M.A. et al; 2006] Hawwa, M.A.; Masoud, A.A, “*A nonlinear PID servo controller for computer hard disk drives*”, Advanced Motion Control, 2006. 9th IEEE International Workshop on, 2006.
- [Hirata, M.et al; 2004] Hirata, M.; Ohnishi, Y.; Yamamoto, T, “*A design of nonlinear PID control systems by using local model identification*”, Industrial Electronics Society, 2004. IECON

- [I. Juárez Campos, 2002] I. Juárez Campos, “*Sobre las regiones geométricas articulares y su aplicación mediante estrategias evolutivas*”, Doctoral Thesis (In Spanish) Universidad Autónoma de México, 2002.
- [James Carvajal et al, 2000] James Carvajal, Guanrong Chen, Haluk Ogmen, “*Fuzzy PID controller: Design, performance evaluation, and stability analysis*”, Information Sciences, Volume 123, Issues 3-4, April 2000, Pages 249-270.
- [J. Craig, John, 2006] J. Craig, John, “*Robótica Tercera Edición*”, Pearson Prentice Hall, 2006
- [K.J. Åström et al, 2001] K.J. Åström, T. Hägglund, “*The future of PID control*”, Control Engineering Practice, Volume 9, Issue 11, November 2001, Pages 1163-1175.
- [Ned Mohan et al, 2003] Ned Mohan, Tore M. Undeland, William P. Robbins, “*Power electronics: converters, applications, and design*”, John Wiley & Sons, 2003.
- [N. Vukosavic, Slobodan, 2007] N. Vukosavic, Slobodan, “*Digital Control of Electrical Drives (Power Electronics and Power Systems)*”, Springer, 2007.
- [Nassirharand, A. et al, 1988] Nassirharand, A.; Hoq, N., “*CAD of nonlinear PID controllers for highly nonlinear servo systems*”, Aerospace and Electronics Conference, 1988. NAECON 1988., Proceedings of the IEEE 1988 National, 1988



- 
- [Ogata, Katsuito, 1995] Ogata, Katsuito, “*Discrete-Time Control Systems (2nd Edition)*”, Prentice Hall, 1995.
- [Petrov, M. et al; 2002] Petrov, M.; Ganchev, I.; Taneva, A., “*Fuzzy PID control of nonlinear plants*”, Intelligent Systems, 2002. Proceedings. 2002 First International IEEE Symposium, 2002
- [Y.X. Su et al, 2005] Y.X. Su, Dong Sun, B.Y. Duan, “*Design of an enhanced nonlinear PID controller*”, Mechatronics, Volume 15, Issue 8, October 2005, Pages 1005-1024.
- [Wei-Der Chang et al, 2003] Wei-Der Chang, Rey-Chue Hwang, Jer-Guang Hsieh, “*A multivariable on-line adaptive PID controller using auto-tuning neurons*”, Engineering Applications of Artificial Intelligence, Volume 16, Issue 1, February 2003, Pages 57-63.
- [Wei-Der Chang et al, 2010] Wei-Der Chang, Shun-Peng Shih, “*PID controller design of nonlinear systems using an improved particle swarm optimization approach*”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume 15, Issue 11, November 2010, Pages 3632-3639.



---

## APENDICE

### PROGRAMA DE MATLAB PARA LA SIMULACIÓN DE UN CONTROLADOR PID NO LINEAL PARA SEGUIMIENTO DE UNA TRAYECTORIA PREDEFINIDA

```
clear all
clc
clf

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%      PARAMETROS DEL MOTOR      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
dopt = 0.216;
popt = 0.0516;
iopt = 0.0052195;
KM = 1;
KFB = 1;
Ts = 0.001;
J = 4.2e-6;
Je = 4.2e-6;
WMAX = 480.44;
MWMAX = -480.44;
TMAX = 0.13736;
MTMAX = -0.13736;
Ks = 0.98;

KI = (2 * J * iopt)/(KFB * KM * Ts^2);
KP = (2 * J * popt)/(KFB * KM * Ts^2);
KD = (2 * J * dopt)/(KFB * KM * Ts^2);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%      VALORES INICIALES DEL SISTEMA      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

sdat1 = importdata('Motor3.txt',' ');
comp = length(sdat1);
i = comp;
posicion_referencia = zeros(1,i);
Velocidad = zeros(1,i);
posicion_error = zeros(1,i);
Delta_Y1 = zeros(1,i);
Y_referencia = zeros(1,i);
posicion_actual = zeros(1,i);
t = zeros(1,i);
Y1 = zeros(1,i);
GKP = zeros(1,i);
Y2 = zeros(1,i);
MEM = zeros(1,i);
```

---

---

```

Par_referencia = zeros(1,i);
Par_motor = zeros(1,i);
Par_carga = zeros(1,i);
X1 = zeros(1,i);
X2 = zeros(1,i);
X3 = zeros(1,i);

Kt = 4.59e-2;
Ke = 4.59e-2;
Ra = 4.62;
La = 3.97e-3;
Ts2 = 0.0001;
k = Ts / Ts2;
IMAX = 5.19;
MIMAX = -5.19;
VMAX = 24;
MVMAX = -24;
L1 = ((exp(-(Ra/La)*Ts2) + 1) * Ra) / (1 - exp(-(Ra/La)*Ts2));
L2 = -( Ra / (1 - exp(-(Ra/La)*Ts2)));
Fil = exp(-(Ra / La) * Ts2);
Gamma1 = (1 / Ra) * (1 - exp(-(Ra/La)*Ts2));

Int = zeros(1,i);
Va = zeros(1,i);
Ia = zeros(1,i);
Iaa = zeros(1,i);
t2 = zeros(1,i*k);
posicion_actualc = zeros(1,i);
Velocidadc = zeros(1,i);
Par_emc = zeros(1,i);
q = 0.003146;

for n=1:1:i
    posicion_referencia(n) = (sdat1(n)+0.213387596549579)*100;
end

n = 1;
posicion_actuall(n) = posicion_referencia(n);

posicion_error(n) = posicion_referencia(n) - posicion_actuall(n);
Delta_Y1(n) = (posicion_error(n) * KI)- GKP(n);
Y_referencia(n) = Delta_Y1(n);

X1(n) = abs(Y_referencia(n));

fx(n) = (Ks * sqrt((2 * TMAX * abs(posicion_error(n))))/J) * KFB *
KD * Ts);
WA(n) = ((2 * TMAX) / J) * ((KP * Ts) / KI);
if fx(n)>= WA(n)
    fx(n) = WA(n);
end

X2(n)= fx(n);

```

---

---

```

X3(n) = WMAX * KFB * KD * Ts;

fp = [X1(n),X2(n),X3(n)];
Y1(n) = min(fp) * sign(Y_referencia(n));

MEM(n+1) = Y1(n);

Y2(n) = KFB * KD * posicion_actual(n);

Par_referencia(n+1) = Y1(n) - Y2(n);

if Par_referencia(n+1) >= TMAX
    Par_referencia(n+1) = TMAX;
end

if Par_referencia(n+1)<= MTMAX
    Par_referencia(n+1) = MTMAX;
end

Iar(n) = Par_referencia(n+1) / Kt;
Ea(n) = Ke * Velocidad(n);

for m=1:1:k

    Int(m+((n-1)*k)+1) = Int(m)+(Iar(n) - Ia(m+((n-1)*k)));
    Va(m+((n-1)*k)) = -(L1 * Ia(m+((n-1)*k))) - (L2 * Int(m+((n-1)*k)));
    if Va(m+((n-1)*k)) >= VMAX
        Va(m+((n-1)*k)) = VMAX;
    end

    if Va(m+((n-1)*k))<= MVMAX
        Va(m+((n-1)*k)) = MVMAX;
    end
    Ia(m+((n-1)*k)+1) = Fil * Ia(m+((n-1)*k)) + (Gamma1 * (Va(m+((n-1)*k))-Ea(n)));

    if Ia(m+((n-1)*k)+1) >= IMAX
        Ia(m+((n-1)*k)+1) = IMAX;
    end

    if Ia(m+((n-1)*k)+1) <= MIMAX
        Ia(m+((n-1)*k)+1) = MIMAX;
    end

    Iaa(m+((n-1)*k)) = Ia(m+((n-1)*k)+1);
    t2(m+((n-1)*k))= (m+((n-1)*k) - 1) * Ts2;

    Par_emc(m+((n-1)*k)+1) = Ia(m+((n-1)*k)+1) * Kt;
    Par_motor(m+((n-1)*k)) = Par_emc(m+((n-1)*k)+1) - Par_carga(n);

    Velocidadc(m+((n-1)*k)+1) = Velocidadc(m+((n-1)*k))+ (Ts2 *
    Par_motor(m+((n-1)*k)))/Je;

```

---

---

```

    posicion_actualc(m+((n-1)*k)+1) = posicion_actualc(m+((n-1)*k)) +
    (Ts2 * Velocidadc(m+((n-1)*k))) + ((Ts2^2/(Je*2))*
    (Par_motor(m+((n-1)*k))));
    end

    Velocidad(n+1) = Velocidadc(m+((n-1)*k)+1);
    posicion_actual(n+1) = q * round (posicion_actualc(m+((n-1)*k)+1) /
    q);
    Par_emc(n) = Par_emc(m+((n-1)*k)+1);
    posicion_actual(n+1) = posicion_actual(n+1) + (randn(1) * q);

for n = 2 : 1 : i

    t(n) = (n-1) * Ts;

    if n >= 100 && n <= 1100
        Par_carga(n) = 0.020;
    end

    posicion_error(n) = posicion_referencia(n) - posicion_actual(n);
    Delta_Y1(n) = (posicion_error(n) * KI) - (KFB * KP *
    (posicion_actual(n) - posicion_actual(n-1)));
    Y_referencia(n) = Delta_Y1(n) + Y1(n-1);

    X1(n) = abs(Y_referencia(n));

    fx(n) = (Ks* ( sqrt((2 * TMAX * abs(posicion_error(n)))/J)) * KFB * KD
    * Ts) + abs(Par_referencia(n-1));
    WA(n) = ((2 * TMAX) / J) * ((KP * Ts) / KI);

    if fx(n) >= WA(n)
        fx(n) = WA(n);
    end

    X2(n) = fx(n);

    X3(n) = WMAX * KFB * KD * Ts;

    fp = [X1(n), X2(n), X3(n)];
    Y1(n) = min(fp) * sign(Y_referencia(n));
    MEM(n+1) = Y1(n);

    Y2(n) = KFB * KD * (posicion_actual(n) - posicion_actual(n-1));

    Par_referencia(n+1) = Y1(n) - Y2(n);

    if Par_referencia(n+1) >= TMAX
        Par_referencia(n+1) = TMAX;
    end
end

```

---

---

```

if Par_referencia(n+1) <= -TMAX
    Par_referencia(n+1) = -TMAX;
end

Iar(n) = Par_referencia(n+1) / Kt;
Ea(n) = Ke * Velocidad(n);

for m=1:1:k

Va(m+((n-1)*k)) = -(L1 * Ia(m+((n-1)*k))) -(L2 * Int(m+((n-1)*k)));
Ia(m+((n-1)*k)+1) = Fil * Ia(m+((n-1)*k)) + (Gamma1 * ( Va(m+((n-1)*k)) - Ea(n)));
Int(m+((n-1)*k)+1) = Int(m+((n-1)*k))+(Iar(n) - Ia(m+((n-1)*k)));

    if Va(m+((n-1)*k)) >= VMAX
        Va(m+((n-1)*k)) = VMAX;
    end

    if Va(m+((n-1)*k)) <= -VMAX
        Va(m+((n-1)*k)) = -VMAX;
    end

    if Ia(m+((n-1)*k)+1) >= IMAX
        Ia(m+((n-1)*k)+1) = IMAX;
    end

    if Ia(m+((n-1)*k)+1) <= -IMAX
        Ia(m+((n-1)*k)+1) = -IMAX;
    end

Iaa(m+((n-1)*k)) = Ia(m+((n-1)*k)+1);
t2(m+((n-1)*k)) = ((m+((n-1)*k)) - 1) * Ts2;

Par_emc(m+((n-1)*k)+1) = Ia(m+((n-1)*k)+1) * Kt;
Par_motor(m+((n-1)*k)) = Par_emc(m+((n-1)*k)+1) - Par_carga(n);

Velocidadc(m+((n-1)*k)+1) = Velocidadc(m+((n-1)*k))+ (Ts2 *
Par_motor(m+((n-1)*k)))/Je;
B = 4.2e-3 * posicion_actualc(m+((n-1)*k));
posicion_actualc(m+((n-1)*k)+1) = posicion_actualc(m+((n-1)*k)) +
(Ts2 * Velocidadc(m+((n-1)*k))) + ((Ts2^2/(Je*2))*
(Par_motor(m+((n-1)*k))));
end

Velocidad(n+1) = Velocidadc(m+((n-1)*k)+1);
posicion_actual(n+1) = q * round (posicion_actualc(m+((n-1)*k)+1) /
q);
Par_em(n) = Par_emc(m+((n-1)*k)+1);
posicion_actual(n+1) = posicion_actual(n+1) + (randn(1) * q);

```

end

---

---

```

t(n+1) = n * Ts;
Par_referencia(n+1) = Par_referencia(n);
Velocidad(n+1) = Velocidad(n);
posicion_referencia(n+1) = posicion_referencia(n);

t2(m+((n-1)*k)+1) = (m+((n-1)*k)) * Ts2;
Va(m+((n-1)*k)+1) = Va(m+((n-1)*k));
Iaa(m+((n-1)*k)+1) = Iaa(m+((n-1)*k));

figure(1)
stairs(t,posicion_actual,'Color','black','LineWidth',2);grid
hold on
stairs(t,posicion_referencia,'Color','black','LineWidth',2,'lineStyle','--
')
title('Posición de Salida','fontsize',16,'fontweight','n')
xlabel('Tiempo (Tss = 0.001seg)','fontsize',16,'fontweight','n')
ylabel('Posicición( \theta )','fontsize',16,'fontweight','n')

figure(2)
stairs(t2,Par_emc,'Color','black','LineWidth',2); grid
title('Referencia de Par','fontsize',16,'fontweight','n')
xlabel('Tiempo (Tss = 0.001seg)','fontsize',16,'fontweight','n')
ylabel('Par( \tau )','fontsize',16,'fontweight','n')

figure(3)
stairs(t,Velocidad,'Color','black','LineWidth',2); grid
title('Velocidadde Salida','fontsize',16,'fontweight','n')
xlabel('Tiempo (Tss = 0.001seg)','fontsize',16,'fontweight','n')
ylabel('Velocidad( \omega )','fontsize',16,'fontweight','n')

figure(4)
stairs(t2,Iaa,'Color','black','LineWidth',2); grid
title('Corriente de Armadura','fontsize',16,'fontweight','n')
xlabel('Tiempo (Tsc = 0.0001seg)','fontsize',16,'fontweight','n')
ylabel('Corriente ( \iota )','fontsize',16,'fontweight','n')

figure(5)
stairs(t2,Va,'Color','black','LineWidth',2); grid
title('Voltaje de Armadura','fontsize',16,'fontweight','n')
xlabel('Tiempo (Tsc = 0.0001seg)','fontsize',16,'fontweight','n')
ylabel('Voltaje ( \nu )','fontsize',16,'fontweight','n')

```

---