



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

OBTENCIÓN DEL ESTADO ESTACIONARIO
PERIÓDICO DE REDES ELÉCTRICAS CON
ELEMENTOS NO LINEALES USANDO MÉTODOS DE
DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA Y SPLINES CÚBICOS

TESIS

Que Para Obtener el Grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA
ELÉCTRICA

Presenta:

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas
Sanzon Mendoza Armenta

Director de Tesis:

Doctor en Filosofía en Ingeniería Eléctrica y Electrónica
J. Aurelio Medina Ríos

Agosto 2013



Con cariño para:

Teresa Correra Barrea

Pablo Mendoza Ramirez

Amalia Armenta Marcos

Sarai Mendoza Armenta

Acknowledgements

Gracias a Dios

Gracias a Conacyt

Gracias a mis sinodales

Gracias a mis compañeros de generación

ABSTRACT

This thesis deals with the determination of the periodic steady state of power networks in the time domain using Newton methods based on poincaré maps and extrapolation to the limit cycle. In particular, in this thesis, the Numerical Differentiation (ND) and Enhanced Numerical Differentiation (END) methods, are considered.

The main idea worked in the reported investigation is using the minimum possible number of integration steps per simulated period of time with the ND and END methods, to significantly increase their efficiency and in time, reduce the computational effort required for the determination of the periodic steady state of the analyzed power network.

The above is achieved through the use of the cubic splines interpolation method, during the numerical solution process, with the purpose of closely approximate the previously processed waveform with a reduced number of integration steps.

The computational effort required by the solution process is considerably reduced with the single computation of the transition matrix, needed by the methods ND and END to iteratively calculate the state variables in the limit cycle. The methodology is applied to diverse single phase power networks, including IEEE modified test systems with linear and nonlinear elements.

RESUMEN

Esta tesis trata sobre la determinación del estado estacionario periódico de redes eléctricas en el dominio del tiempo aplicando métodos Newton basados en mapas de Poincaré y extrapolación al ciclo límite. En particular, se consideran los métodos de Diferenciación Numérica (DN) y Diferenciación Numérica Mejorado (DNM).

La idea central de esta investigación es utilizar el menor número posible de pasos de integración por periodo de tiempo simulado con los métodos DN y DNM, para de esta manera incrementar de manera significativa la eficiencia del método de DN y reducir el esfuerzo computacional necesario para la determinación del estado estacionario periódico de la red eléctrica analizada.

Lo anterior se logra mediante la utilización del método de interpolación de splines cúbicos durante el proceso de solución numérica, con el propósito de aproximar (suavizar) la forma de onda procesada previamente con un número requerido de pasos de integración.

El esfuerzo computacional requerido durante el proceso de solución se reduce considerablemente al calcular una sola vez la matriz de transición de estados requerida por el método DN para calcular iterativamente las variables de estado en el ciclo límite.

Esta metodología se aplica en distintos sistemas eléctricos monofásicos, entre ellos redes modificadas del IEEE con elementos lineales y no lineales.

Índice general

Agradecimientos	v
Abstract	vii
Resumen	ix
Lista de Figuras	xiii
Lista de Símbolos y Abreviaturas	xv
1. Introducción	1
1.1. Introducción	1
1.2. Antecedentes	2
1.3. Justificación	4
1.4. Metodología	5
1.5. Objetivos	5
1.6. Descripción de Capítulos	6
2. Métodos en el Dominio del Tiempo para la Determinación del Estado Estacionario Periódico en Redes Eléctricas no Lineales	7
2.1. Introducción	7
2.2. Dominio de la Frecuencia	8
2.2.1. Método de Inyecciones	8
2.2.2. Dominio Armónico	9
2.3. Dominio del Tiempo	10
2.4. Métodos Convencionales	10
2.4.1. Método de Runge-Kutta	11
2.5. Métodos Newton para la Aceleración de Convergencia al Ciclo Límite	12
2.5.1. Método de Diferenciación Numérica	16
2.5.2. Método de Diferenciación Numérica Mejorado	18
3. Métodos de Ajuste de Curvas Aplicados a la aproximación de la Forma de Onda	21
3.1. Introducción	21

3.2. Métodos de Paso Variable	22
3.3. Métodos de Interpolación	23
3.3.1. Splines	24
3.3.2. Funciones Splines Cúbicos (SC)	27
3.4. Método Propuesto	32
3.5. Conclusiones	40
4. Casos de Estudio	41
4.1. Introducción	41
4.2. Sistema de 3 nodos	42
4.3. Sistema Modificado IEEE-14 Nodos	47
4.4. Sistema Modificado IEEE-57 Nodos	49
4.5. Sistema Modificado IEEE-118 Nodos	55
4.6. Conclusiones	58
5. Conclusiones Generales y Trabajos Futuros	59
5.1. Conclusiones Generales	59
5.2. Trabajos Futuros	60
 A. Método Newton	 61
B. Modelado de Elementos	63
C. Datos de los Casos de Estudio	67
D. La Transformada de Fourier	75
 Bibliografía	 81

Índice de figuras

2.1. Circuito con una rama magnetizante.	12
2.2. Estado estacionario de un sistema desde el período nT a $(n + 1)T$. .	13
2.3. Aproximación a las variables de estado mediante el método MDN. .	20
3.1. Aproximación por funciones splines cúbicos.	25
3.2. Aproximación por splines lineales.	27
3.3. Integrando la forma de onda con el paso de integración Δt mayor posible.	33
3.4. Circuito con un elemento no lineal.	36
3.5. Interpolación mediante Splines Cúbicos.	39
4.1. Sistema de 3 nodos con 2 ramas magnetizantes.	42
4.2. Comportamiento del flujo de la rama magnetizante conectada al nodo 2 del circuito de la Figura 4.1.	43
4.3. Espectro armónico de un período completo en estado estacionario de la forma de onda de la Figura 4.2.	45
4.4. Comportamiento del voltaje medido en el nodo 2 del circuito de la Figura 4.1.	46
4.5. Espectro armónico de un período completo en estado estacionario de la forma de onda de la Figura 4.4.	46
4.6. Sistema de 14 nodos de la IEEE modificado.	47
4.7. Comportamiento del flujo de la rama magnetizante conectada al nodo 10 del circuito de la Figura 4.6.	48
4.8. Espectro armónico de un periodo completo en estado estacionario de la forma de onda de ψ_{18}	49
4.9. Comportamiento del voltaje medido en el nodo 10 del circuito de la Figura 4.6.	50
4.10. Espectro armónico de un periodo completo en estado estacionario de la forma de onda de v_{30}	50
4.11. Comportamiento del flujo de la rama magnetizante ψ_{136}	51
4.12. Espectro armónico de un período completo en estado estacionario de la forma de onda de ψ_{136}	52
4.13. Comportamiento del voltaje v_{135} en el nodo 57.	53

4.14. Espectro armónico de un período completo en estado estacionario de la forma de onda de v_{135}	53
4.15. Comportamiento del voltaje en el nodo 1.	55
4.16. Espectro armónico de un período completo en estado estacionario de la forma de onda de la Figura 4.15.	56
4.17. Comportamiento del flujo de una rama magnetizante.	57
4.18. Espectro armónico de un período completo en estado estacionario de la forma de onda de ψ_{303}	57
B.1. Modelo de la Línea de Transmisión.	63
B.2. Modelo del Generador.	64
B.3. Modelo del banco de capacitores.	65
B.4. Modelo de la Rama Magnetizante.	65
D.1. Función periódica $f(t) = \text{sen}(t)$	76

Lista de Símbolos y Abreviaturas

Símbolos

J	Jacobiano
Φ	Matriz de transición
j	Unidad imaginaria
h	Armónico
L	Inductor
C	Capacitor
w_0	Frecuencia base
T	Período completo
t	Tiempo
$\mathbf{x}$	Vector de estados
$\Delta \dot{\mathbf{x}}$	Perturbación
$\mathbf{e}_i$	Vector unitario
I	Matriz identidad
$\mathbf{x}_\infty$	Vector de variables de estado en el ciclo límite
Nh	Número de particiones del periodo
Δt	Paso de integración
$S(x)$	Polinomio de interpolación
ψ	Flujo en la rama magnetizante

Abreviaciones

CA	Corriente Alterna
CD	Corriente Directa
DN	Diferenciación Numérica
DNM	Método de Diferenciación Numérica Mejorado

DN-SC	Diferenciación Numérica - Splines Cúbicos
ED	Ecuaciones Diferenciales
EDOs	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers
LCK	Ley de Corrientes de Kirchhoff
LVK	Ley de Voltajes de Kirchhoff
Np	Número de Puntos
PV	Paso Variable
RK4	Runge Kutta de cuarto orden
SC	Splines Cúbicos
Tol	Tolerancia
TF	Transformada de Fourier

Introducción

1.1. Introducción

Bajo condiciones de operación ideales, un sistema de potencia se espera que sea perfectamente balanceado, de una frecuencia constante, única y con formas de onda del voltaje y corriente perfectamente senoidales. Sin embargo, elementos no lineales y variantes en el tiempo, tales como hornos de arco, rectificadores, lamparas fluorescentes y dispositivos de electrónica de potencia distorsionan la forma de onda del voltaje y corriente en sistemas eléctricos de potencia, a éste fenómeno se le conoce como *distorsión armónica* [Arrillaga *et al.*, 1995].

Las Simulaciones por computadora ayudan a predecir la distorsión armónica de la forma de onda en estado estacionario periódico de sistemas eléctricos, mediante una solución numérica del modelo en espacio de estado que describe la dinámica de estos sistemas eléctricos.

En este capítulo se presentan algunos métodos reportados en la literatura que abordan el problema de obtener el estado estacionario periódico de redes eléctricas de pequeña, mediana y gran escala. En general estos métodos se pueden clasificar en: 1) métodos en el dominio del tiempo, 2) métodos en el dominio de la frecuencia y 3) métodos híbridos en el dominio del tiempo-frecuencia [Chavez *et al.*, 2010] [Medina *et al.*, 2013]. Estos métodos obtienen las formas de onda de un sistema en estado estacionario periódico de acuerdo a sus características particulares de eficiencia, precisión y esfuerzo computacional.

De los métodos disponibles en la literatura para el análisis de armónicos en el dominio de la frecuencia se pueden mencionar el Método Directo, Análisis Armónico Iterativo y Métodos de Flujos de Potencia Armónicos [Medina *et al.*, 2013], entre otros.

Por su parte, los métodos que se han desarrollado en el dominio del tiempo, brindan una solución numérica a sistemas de ED que no tienen una solución analítica [Parker y Chua, 1989]. Algunos de ellos aprovechan las características de los elementos involucrados en los sistemas eléctricos, como fuentes de voltajes y de corrientes [Segundo y Medina, 2010]. En particular durante el proceso de solución de sistemas eléctricos se consideran dos aspectos importantes: esfuerzo computacional y precisión en la obtención del estado estacionario periódico.

A continuación se presenta una descripción concisa de los antecedentes asociados con los métodos más relevantes para la solución del estado estacionario de redes eléctricas, en los marcos de referencia antes mencionados.

1.2. Antecedentes

El método más simple para determinar la propagación de corrientes armónicas características mediante inyección de fuentes de corrientes ideales en la red eléctrica fue propuesto por [Mahmoud y Shultz, 1982]. Se utiliza el dominio de la frecuencia como marco de referencia.

En esta contribución, los elementos y cargas de la red se representan para un cierto rango de frecuencias. El punto de operación en estado estacionario se determina considerando inyecciones de corrientes armónicas para representar el efecto de cargas y elementos no lineales.

Diferentes modelos analíticos en el dominio de la frecuencia que describen el comportamiento periódico de componentes lineales y no lineales han sido combinados para formar un marco de referencia general, orientado al análisis de armónicos en sistemas de potencia. En este marco de referencia, denominado *Dominio Armónico* [Arrillaga *et al.*, 1995], los nodos, fases, armónicos y acoplamiento entre armónicos se representan explícitamente, obteniéndose una solución unificada para la red completa mediante un procedimiento iterativo tipo Newton.

El comportamiento de un sistema eléctrico de potencia también puede ser determinado mediante la solución numérica de las variables de estado asociadas a la red. Una vez que la respuesta transitoria ha transcurrido y se obtiene el

estado estacionario periódico [Dommel, 1969]. Este procedimiento, conocido como métodos convencionales [Parker y Chua 1989] requiere generalmente de integrar sobre un número considerable de períodos de tiempo hasta que el transitorio inicial decaiga a proporciones despreciables.

Uno de los primeros trabajos en el dominio del tiempo reportados en la literatura que presenta una solución numérica, sin tener que pasar por todo el transitorio es presentado en [Aprille y Trick, 1972b]. En este se presenta un análisis en estado estable de circuitos no lineales con entradas periódicas, se incorpora una formulación tipo Newton para resolver el problema planteado. Los ejemplos mostrados en este trabajo muestran que el algoritmo propuesto converge rápidamente al estado estacionario periódico.

Una metodología en donde se combina el dominio de la frecuencia y del tiempo se presenta en [Semlyen y Medina, 1995]. En este artículo se propone un método híbrido en el dominio del tiempo-frecuencia, los elementos lineales, así como algunas cargas y partes lineales y dependientes de la frecuencia de la red se representan en el dominio de la frecuencia, mientras que en el dominio del tiempo se tienen los elementos no lineales y/o variantes en el tiempo. Este proceso es iterativo y su eficiencia se mejora con el uso de un algoritmo tipo Newton para una rápida convergencia al estado estacionario de la solución en el dominio del tiempo. Es en este trabajo donde se reporta por primera vez los métodos Newton basados en procesos de Diferenciación Numérica (DN), Aproximación Directa (AD) y Matriz Exponencial (ME) y de extrapolación al ciclo límite mediante mapas de Poincaré [Parker y Chua, 1989].

Esta metodología se ha aplicado exitosamente en trabajos en donde se determina la rápida solución al estado estacionario periódico de componentes y redes eléctricas [Medina *et al.*, 2013].

Una variante del método de Diferenciación Numérica está asociada con la aplicación de técnicas de procesamiento en paralelo a la solución eficiente en estado estacionario en el dominio del tiempo, de sistemas eléctricos no lineales [Paz, 2007]. Las plataformas de procesamiento en paralelo utilizadas en este trabajo son Parallel Virtual Machine [Geist *et al.*, 1994], programación Multihilos [Kleiman *et al.*, 1992], Message Passing Interface (MPI), entre otros. Una actualización de este trabajo se presenta en [Medina *et al.*, 2003] los detalles de este trabajo se reportan en [Paz, 2007].

Más recientemente, se ha propuesto un método de Diferenciación Numérica Mejorado (DNM) [Segundo y Medina, 2010]. Se introduce un algoritmo con el cual se

reduce drásticamente el esfuerzo computacional requerido para la solución periódica en estado estacionario de redes eléctricas que contienen elementos no lineales. En dicha contribución, se muestra circuitos y redes eléctricas con respuestas periódicas que el método propuesto de DNM reduce el esfuerzo computacional aproximadamente en un cincuenta por ciento, comparado con el requerido por el método de DN. Para lograr lo anterior se toma ventaja de la propiedad de simetría de media onda.

Por otro lado en la literatura no se han encontrado trabajos que relacionan el método de Interpolación por Splines Cúbicos (SC) con la obtención del estado estacionario de sistemas eléctricos de potencia. Mayormente estas técnicas de interpolación son utilizadas en el área de reconstrucción de imágenes [[Herman et al., 1979](#)]. En esta tesis se utiliza la interpolación mediante splines cúbicos para aproximar la forma de onda en estado estacionario, con el proposito de obtener una solución precisa y eficiente, que requiera utilizar del mínimo de pasos de integración.

1.3. Justificación

El dominio del tiempo es uno de los marcos de referencia que puede ser aplicado para la determinación de la solución periódica en estado estacionario de redes eléctricas. La eficiencia, esfuerzo computacional y precisión asociados con el proceso de solución depende fundamentalmente del método y paso de integración utilizados; no necesariamente estos aspectos son compatibles entre si.

En particular, en la literatura abierta y reportes de experiencia práctica en este campo del conocimiento se establece que el grado de precisión de la solución obtenida en el dominio del tiempo depende directamente del paso de integración utilizado para un método numérico de integración. Es evidente, sin embargo que el uso de un paso de integración pequeño proporciona una mayor precisión numérica, la cual puede estar asociado con un esfuerzo computacional considerable.

La obtención del estado estacionario periódico de sistemas eléctricos que contiene elementos no lineales, se puede obtener en el dominio del tiempo mediante un método numérico convencional como el RK4, una vez que el transitorio ha transcurrido [[Parker y Chua, 1989](#)]. Sin embargo, la obtención del estado estacionario en sistemas pobremente amortiguados resulta ser muy lenta [[Dommel, 1969](#)]. La eficiencia del método DN para obtener el estado estacionario periódico en el dominio del tiempo en redes no lineales, mediante la extrapolación al ciclo límite ha sido reportada [[Semlyen y Medina, 1995](#)]. Sin embargo, surge un problema el cual

está relacionado con el cálculo de la matriz Φ , ya que el mayor esfuerzo computacional se emplea en formar esta matriz Φ columna por columna.

En esta tesis se aprovecha la característica principal del método de DN para obtener el estado estacionario periódico y un método de ajuste de curvas aplicado a la aproximación de la forma de onda. Para eficientar el proceso de obtención de estado estacionario periódico.

1.4. Metodología

A continuación se describe en terminos generales la metodología en que está basada la realización de ésta tesis:

La propuesta de la metodología que se presenta en esta tesis se sustenta mediante una revisión de antecedentes, de métodos en el dominio del tiempo existentes en la literatura que abordan el problema de la determinación del estado estable estacionario periódico de redes eléctricas que contienen elementos no lineales. Algunos de estos métodos se presentan y se describen a detalle sus características principales, como lo son, el método de Diferenciación Numérica y el método de Diferenciación Numérica Mejorado, entre otros.

De los métodos anteriores, y tomando como base el método de Diferenciación Numérica, se aplica un método de ajuste de curvas aplicado al procesamiento de la forma de onda en estado estacionario periódico. Este consiste en obtener el estado estacionario integrando cada período completo utilizando la menor cantidad de puntos de integración posible hasta llegar al estado estacionario, para después suavizar la forma de onda obtenida mediante una técnica de interpolación de Splines Cúbicos. Cabe destacar que el proceso de interpolación sólo se realiza una vez, así como también el cálculo de la matriz Φ en el método de DN.

1.5. Objetivos

Los objetivos de esta tesis son los siguientes:

- Obtener el estado estacionario periódico de redes eléctricas en el dominio del tiempo, integrando períodos completos con la menor cantidad de puntos de integración posible, preservando la solución obtenida mediante la aplicación del método de interpolación por Splines Cúbicos.

- Eficientar, mediante la aplicación de la metodología descrita en el inciso anterior el tiempo de cómputo que le tome a la metodología propuesta llegar al estado estacionario periódico.

Lo anterior ha motivado la investigación presente. En donde la alternativa que se explora es procesar en el dominio del tiempo las formas de onda asociadas con las variables de estado a resolver con el menor número posible de pasos de integración y corregir posteriormente la respuesta mediante el método de interpolación por Splines Cúbicos. Lo anterior para incrementar la eficiencia computacional del método DN para obtener la solución periódica en estado estacionario de redes eléctricas.

1.6. Descripción de Capítulos

El contenido de esta tesis esta organizado de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se describen los antecedentes de los métodos en el dominio del tiempo existentes en la literatura, así como también la justificación que avala la importancia de esta investigación, seguido de la metodología empleada, y por ultimo los objetivos a cumplir.

En el Capítulo 2 se describen los métodos en el domino del tiempo asociados con esta investigación, considerando sus características principales.

En el Capítulo 3 se presentan los métodos de ajuste de curvas aplicados al procesamiento de la forma de onda en estado estacionario periódico. Posteriormente, se describe la metodología propuesta en esta tesis.

En el Capítulo 4 se aplica la metodología propuesta en el Capítulo 3 a distintos sistemas de prueba para determinar su eficiencia. Los sistemas considerados contienen elementos lineales y no lineales. Se consideran sistemas monofásicos modificados del IEEE de 14, 57 y 118 nodos.

En el Capítulo 5 se aportan las conclusiones generales de la investigación reportada en esta tesis y se ofrecen sugerencias para investigacion futura en el mismo campo del conocimiento.

Métodos en el Dominio del Tiempo para la Determinación del Estado Estacionario Periódico en Redes Eléctricas no Lineales

2.1. Introducción

En varias áreas del conocimiento, los modelos de los sistemas dinámicos se pueden escribir en un marco de referencia común, el cual se denomina modelo de espacio de estado. Un modelo de espacio de estado es un conjunto de ecuaciones con una estructura particular. A estas ecuaciones también se les conoce como Ecuaciones Diferenciales Ordinarias(EDOs). Tal modelo de espacio de estado posee algunos beneficios como su forma contribuye a un entendimiento intuitivo del comportamiento de muchos sistemas dinámicos. Actualmente en la literatura existen técnicas computacionales capaces de procesar y resolver numéricamente estos modelos. La estructura con la que se está familiarizado es la siguiente,

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}). \tag{2.1}$$

Existe una gran variedad de sistemas de ED que tienen una forma similar a (2.1) como los sistemas no lineales variantes en el tiempo con respuesta natural, sistemas no lineales variantes en el tiempo y forzado, este tipo de sistemas de ED se estudian a detalle en [Pai, 1981]. En un caso particular, redes eléctricas que contienen elementos no lineales generan sistemas de ED no lineales. Esto debido

a la representación en el dominio del tiempo de los elementos no lineales incorporados a las redes eléctricas, como es el caso de una rama magnetizante en la que se representa la no linealidad en el dominio del tiempo mediante un polinomio cúbico.

Muy pocos de estos sistemas de ED asociados a sistemas eléctricos se pueden resolver de manera analítica. Es en este punto en donde las computadoras y los métodos numéricos se encargan de proporcionar una solución numérica que se aproxime lo mejor posible a la solución exacta.

En este capítulo se hace un especial énfasis a los métodos numéricos relacionados al área de sistemas eléctricos de potencia para su solución numérica, en particular para la determinación de su estado estacionario de operación.

2.2. Dominio de la Frecuencia

2.2.1. Método de Inyecciones

El análisis de estado estacionario de circuitos lineales operando bajo condiciones no senoidales se puede realizar utilizando el análisis fasorial, en donde el circuito se resuelve para cada frecuencia de interés. Los elementos no lineales son reemplazados por fuentes de corriente, las cuales representan cada uno de los armónicos de interés. Este método se le conoce como inyección de corrientes armónicas.

Los inductores y capacitores tienen dependencia de la frecuencia lineal, es decir, $X_L = j\omega_0 L$ y $X_C = -j/\omega_0 C$, con el resistor considerado como constante. Con estos tres elementos pasivos y las fuentes representadas por su contenido armónico, se puede efectuar el análisis de un circuito lineal. En general, un circuito lineal operando bajo condiciones no senoidales se representa mediante el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{bmatrix} I_h^1 \\ \vdots \\ I_h^i \\ \vdots \\ I_h^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_h^{1,1} & \cdots & Y_h^{1,i} & \cdots & Y_h^{1,N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Y_h^{i,1} & \cdots & Y_h^{i,i} & \cdots & Y_h^{i,N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Y_h^{N,1} & \cdots & Y_h^{N,i} & \cdots & Y_h^{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_h^1 \\ \vdots \\ V_h^i \\ \vdots \\ V_h^N \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

De donde la corriente I_h^i representa la corriente fasorial a frecuencias armónicas h , inyectadas en el nodo i , es decir, $I_h^i = |I_h| \angle \theta_h$, $Y_h^{k,i}$ es la admitancia equivalente a frecuencia h entre los nodos k y i , V_h^i es el voltaje fasorial a frecuencia h en el nodo i , y N es el número de nodos de la red eléctrica. El sistema anterior se puede representar en forma compacta como

$$\mathbf{I}_h = \mathbf{Y}_h \mathbf{V}_h. \quad (2.3)$$

Este sistema se resuelve para cada frecuencia armónica h y el resultado final se obtiene por superposición.

Una desventaja del método de Inyecciones es que solo se hace el estudio para los armónicos de interés. Esto resulta una limitante si se requiere conocer todos los armónicos involucrados en la red eléctrica.

Bajo condiciones normales de operación, la representación de las funestes de corriente puede ser muy buena para la mayoría de las cargas en los sistemas eléctricos. Sin embargo, pueden generar resultados erróneos en elementos como hornos de arco y convertidores bajo condiciones de resonancia.

2.2.2. Dominio Armónico

El dominio armónico se basa en un proceso de linealización alrededor de un punto de operación. Se obtiene así una relación lineal entre voltajes y corrientes armónicas. Esta condición es válida únicamente en una región cercana al punto de operación. Como resultado del proceso de linealización se obtiene un equivalente Norton armónico en donde explícitamente está representado el efecto de acoplamiento entre armónicos y desbalance entre fases [Arrillaga *et al.*, 1995]. El cálculo de dicho equivalente puede no ser fácil y para obtener resultados precisos debe ser actualizado iterativamente. El esfuerzo computacional asociado es directamente proporcional al tamaño del sistema analizado y al número de armónicos representados explícitamente. La solución iterativa unificada del sistema es de la forma [Arrillaga *et al.*, 1995],

$$\Delta I = [Y] \Delta V \quad (2.4)$$

en donde ΔI es el vector de corrientes incrementales, y este contiene la contribución de componentes no lineales, ΔV es el vector de voltajes incrementales e $[Y]$ es la matriz de admitancias armónicas que representa toda la red, la cual contiene todos los nodos de la red, fases y el espectro armónico de interés. Estas últimas corresponden en cada caso al equivalente Norton armónico obtenido. Esta metodología ha sido reportada como robusta numéricamente y con buenas características de convergencia [Arrillaga *et al.*, 1995].

2.3. Dominio del Tiempo

Un modelo en espacio de estado es útil para conocer el comportamiento de un determinado sistema dinámico. La mayoría de estas ecuaciones requieren la solución de un problema con valores iniciales, es decir, la solución de una ED que satisfaga las condiciones iniciales dadas.

En muchas situaciones reales, las ED que modelan el problema son difíciles de resolver de forma exacta, por lo que se recurre a los métodos numéricos para obtener la solución. Los métodos más ampliamente usados para la determinación de la solución numérica de ED son los métodos convencionales [Parker y Chua, 1989]. Estos generalmente se aproximan a la solución de una manera satisfactoria a sistemas del tipo (2.1) o también vistos de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.5)$$

con condiciones iniciales dadas. En la siguiente sección se describen algunos de estos métodos y sus principales características.

2.4. Métodos Convencionales

Los métodos de fuerza bruta más usados en el área son el Runge-Kutta de 4 orden y la Regla Trapezoidal, el primero en su modalidad de explícito [Butcher, 2008] y el segundo implícito [Hornbeck, 1975]. Estos tratan de obtener una solución numérica al problema (2.5), una desventaja que tienen es que en algunos sistemas eléctricos son muy lentos (especialmente en sistemas ligeramente amortiguados) y requieren de mucho tiempo de cómputo para llegar al estado estacionario de un sistema del tipo (2.5), como se observó en un caso de estudio en [Semlyen y Medina, 1995].

Sin embargo estos métodos resultan ser muy robustos en la obtención de una solución numérica de sistemas de EDOs. En la siguiente sección se describe el método de Runge-Kutta de 4^{to} orden (RK4).

2.4.1. Método de Runge-Kutta

Es probable que uno de los métodos más difundidos y a la vez más preciso en el área para obtener soluciones aproximadas al problema (2.5) sea el método de Runge-Kutta de 4^{to} orden. Como lo indica el nombre, hay métodos de Runge-Kutta de distintos órdenes, los cuales se deducen a partir de un desarrollo de la serie de Taylor.

Existen métodos de Runge-Kutta explícitos como implícitos [Butcher, 2008], sin embargo el método de RK4 es el que tiene una estructura fácil de entender, ya que sólo necesita de cuatro evaluaciones para obtener k_1, k_2, k_3 y k_4 y hacer un promedio de estas para determinar el valor estimado en el punto de la función en cuestión.

En seguida se presenta la estructura esencial del método:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.6)$$

de donde

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{aligned}$$

Nota: en el sistema anterior h significa el paso de integración. Es importante hacer notar que este método requiere de la evaluación de cuatro funciones en cada paso de integración, lo cual se ve reflejado en el tiempo de computo. A continuación se presenta un ejemplo de aplicación del método.

Ejemplo 2.1. *Considérese una pequeña red, reportada en [Ramirez, 2011] que consta de una fuente de voltaje, dos resistencias, dos inductancias y una rama magnetizante, como se muestra en la Figura 2.1. El propósito del ejercicio es obtener la solución en estado estacionario periódico del circuito utilizando el método de $RK4$.*

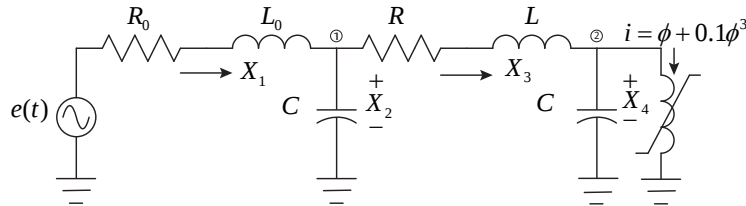


Figura 2.1: Circuito con una rama magnetizante.

Los datos del sistema así como el sistema de EDOs se encuentran en el Apéndice C.

Considerando un criterio para verificar periodicidad en variables de estado, es decir, considérese los vectores $\mathbf{x}_n$ y $\mathbf{x}_{n+1}$ los cuales contienen los valores finales de dos ciclos continuos en estado estacionario periódico. Cuando la diferencia de estos dos vectores es menor que un valor especificado: por ejemplo $Tol = 1.0 \times 10^{-10}$, el proceso concluye. Matemáticamente se expresa como $\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| < Tol$. Utilizando el criterio de convergencia anterior, se obtiene la solución en estado estacionario periódico después de integrar 2,782 ciclos completos en un tiempo de cómputo de 8.4 minutos en una computadora. Esto se obtuvo usando un paso de integración de $h = 1.6276 \times 10^{-5}$. Este método puede requerir de un esfuerzo computacional considerable, así como de un considerable número de ciclos de integración para llegar al estado estacionario.

En las siguientes secciones se describen algunas de las técnicas de aceleración de convergencia al ciclo limite propuestas en [Semlyen y Medina, 1995].

2.5. Métodos Newton para la Aceleración de Convergencia al Ciclo Límite

Considérese un sistema dinámico no lineal con una señal de entrada con período fundamental T y condiciones iniciales:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.7)$$

con $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, m representa el tamaño del vector de estados $\mathbf{x}$. Considerando que el sistema anterior sea periódico, el estado estacionario cumple la siguiente igualdad,

$$f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t + nT) \quad (2.8)$$

la expresión anterior se deduce de las propiedades de los sistemas periódicos. La integración de la ecuación (2.7) se realiza sobre periodos completos T , de una manera similar como se hizo en el Ejemplo 2.1. Utilizando un método convencional y después de integrar n periodos, se tiene el estado $\mathbf{x}_n$; un período adicional resulta en el estado $\mathbf{x}_{n+1}$. Como resultado de realizar este proceso tenemos un periodo completo $[\mathbf{x}_1(T), \mathbf{x}_2(T), \mathbf{x}_3(T), \dots, \mathbf{x}_k(T)]$ en el intervalo $[\mathbf{x}(n)T, \mathbf{x}(n+1)T]$ en donde se conoce el comportamiento de (2.7). La Figura 2.2 muestra una forma de onda senoidal, con simetría de media onda.

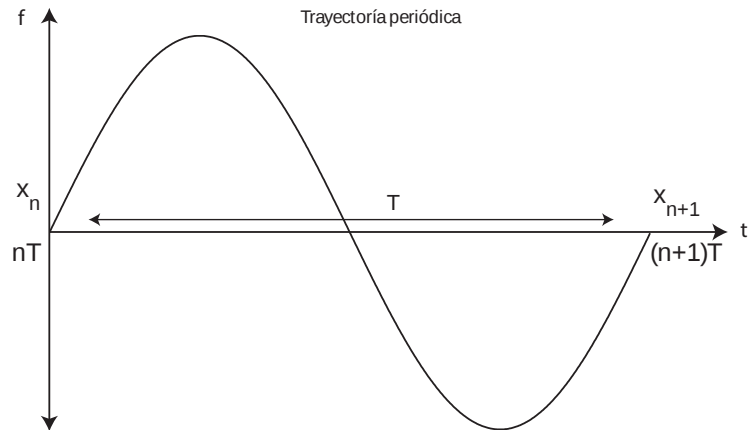


Figura 2.2: Estado estacionario de un sistema desde el período nT a $(n+1)T$.

Introduciendo una pequeña perturbación al sistema (2.7), el vector de estados $\mathbf{x}$ tomaría la forma $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t) + \Delta\mathbf{x}(t)$. Haciendo lo anterior al sistema (2.7), se transforma en

$$\dot{\mathbf{x}} + \Delta\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, t) \quad (2.9)$$

nótese que de la expresión anterior únicamente $\mathbf{x}$ es incremental. Por lo tanto, linealizando el sistema (2.9) con respecto a $\mathbf{x}$ resulta en

$$\dot{\mathbf{x}} + \Delta \dot{\mathbf{x}} = \underline{f(\mathbf{x}, t)} + \underbrace{D\mathbf{x}f(\mathbf{x}, t)}_{J(t)} \Delta \mathbf{x} \quad (2.10)$$

de la expresión anterior la parte subrayada corresponde a la ecuación (2.7). De modo que la ecuación (2.10) puede escribirse como,

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = J(t) \Delta \mathbf{x} \quad (2.11)$$

en donde $J(t)$ es el Jacobiano

$$J(t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} = D\mathbf{x}f(\mathbf{x}, t) \quad (2.12)$$

es decir, es la matriz de derivadas parciales de $f(\mathbf{x}, t)$ con respecto a cada uno de los elementos de $\mathbf{x}$. Se ha obtenido así una matriz de coeficientes $J(t)$ variante en el tiempo con EDOs lineales. El sistema (2.11) se puede resolver especificando condiciones iniciales para $\Delta \mathbf{x}$:

$$\Delta \mathbf{x}(t_0) = \Delta \mathbf{x}_0. \quad (2.13)$$

Hasta este punto la solución de (2.11) con los valores (2.12) y condiciones iniciales (2.13) parece ser todavía un procedimiento que se puede resolver con los métodos convencionales, como un proceso múltiple.

Por otro lado, la Ecuación (2.11) es una EDO de primer orden, cuya forma general de solución tiene la siguiente estructura [Boyce y DiPrima, 2000],

$$\Delta \mathbf{x}(t) = \left[e^{\int_0^t J(t) dt} \right] \Delta \mathbf{x}(0), \quad (2.14)$$

también se puede escribir como

$$\Delta \mathbf{x}(t) = \Phi(t) \Delta \mathbf{x}(0) \quad (2.15)$$

de donde reconocemos la matriz de transición de estado como

$$\Phi(t) = e^{\int_0^t J(t) dt} \quad (2.16)$$

es una matriz de solución general de 2.11 que da $\Delta \mathbf{x}(t)$ en cualquier tiempo t . Si se elige $\Delta \mathbf{x}(0)$, tal que correspondan a los vectores columna $\Delta \mathbf{x}_{0i}$ de la matriz identidad I , entonces $\Delta \mathbf{x}(t)$ será $\Phi(t)$. Es decir, habremos encontrado una solución al sistema (2.11).

Haciendo un procedimiento similar, pero ahora para $t = T$ en (2.15), se tiene:

$$\Delta \mathbf{x}(T) = \Phi(T) \Delta \mathbf{x}(0) \quad (2.17)$$

con

$$\Phi(T) = e^{\int_0^T J(t) dt}. \quad (2.18)$$

Si se considera una pequeña perturbación al vector de estados $\mathbf{x}_n$ con $\mathbf{x}_n + \Delta \mathbf{x}(0)$, entonces $\mathbf{x}_{n+1}$ se transforma en $\mathbf{x}_{n+1} + \Phi(T) \Delta \mathbf{x}(0)$, $\mathbf{x}_n$ y $\mathbf{x}_{n+1}$ de la Figura 2.2 y debido a que se consideran sistemas periódicos, en el ciclo límite se cumple la siguiente relación:

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_n + \Delta \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_{n+1} + \Phi(T) \Delta \mathbf{x}(0). \quad (2.19)$$

Note que $\mathbf{x}_N$ es un valor nuevo de $\mathbf{x}$.

De la expresión (2.19) se tiene que,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n + \Delta \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_{n+1} + \Phi(T) \Delta \mathbf{x}(0) \\ [I_n - \Phi(T)] \Delta \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Resolviendo para $\Delta \mathbf{x}(0)$ tenemos

$$\Delta \mathbf{x}(0) = [I_n - \Phi(T)]^{-1}(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) \quad (2.21)$$

sustituyendo la ecuación anterior en (2.19) resulta en

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_n + [I_n - \Phi(T)]^{-1}(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n). \quad (2.22)$$

La expresión anterior la podemos expresar de manera concisa como

$$\mathbf{x}_\infty = \mathbf{x}_n + \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n), \quad (2.23)$$

donde $\mathbf{C} = (I_n - \Phi(T))$, [Semlyen y Medina, 1995]

Con $\mathbf{x}_\infty$ vector de variables de estado en el ciclo límite.

La expresión anterior tiene la forma de un método Newton descritos en el Apéndice A para sistemas no lineales, así como también sus propiedades de convergencia.

Hasta ahora se ha descrito el proceso general de extrapolación al ciclo límite mediante el método Newton. En la siguiente sección se detallan dos métodos que permiten obtener la matriz de transición Φ por columnas. Estos métodos son, Diferenciación Numérica (DN) y el método Diferenciación Numérica Mejorado (DNM).

2.5.1. Método de Diferenciación Numérica

El método de Diferenciación Numérica fue propuesto en [Semlyen y Medina, 1995]. A raíz de la publicación de este artículo se han propuesto una serie de modificaciones que mejoran este método, una de ellas se describe en la siguiente sección. Estos métodos se centran en la identificación por columna de la matriz Φ . El método DN contribuye a una solución eficiente en el dominio del tiempo de sistemas periódicos, que es una característica de operación de la mayoría de los

sistemas de potencia. El método DN representa también un proceso de identificación de la matriz Φ que permite al método Newton acercarse rápidamente y converger al ciclo límite, que representa para una red eléctrica su estado estacionario periódico de operación.

Enseguida se describen los pasos a seguir para aplicar el método de DN a sistemas de EDOs como (2.5).

- 1.- A partir de un sistema eléctrico como el de la Figura 2.1, se forma el sistema de EDOs asociado a este, como el (2.5).
- 2.- Se resuelve el sistema de EDOs, para un determinado número de ciclos iniciales completos. Este número requerido depende del amortiguamiento natural del sistema a resolver [Semlyen y Medina, 1995].
- 3.- Una vez obtenidos los ciclos iniciales se obtiene un ciclo base.
- 4.- Se crean m problemas separados de (2.11) y se resuelven empleando como condiciones iniciales los vectores $\Delta \mathbf{x}_{0i}$, $i = 1, \dots, m$. Así, el problema es de la forma (2.7), donde

$$f(\mathbf{x}(t), t) = J(t)\Delta \mathbf{x}(t). \quad (2.24)$$

Se resuelven m ecuaciones (2.11), integrando períodos completos para obtener $\Delta \mathbf{x}_i(T)$ ($i = 1, \dots, m$).

- 5.- Cada uno de los vectores solución obtenidos en el paso anterior se ensamblan para formar la matriz Φ

$$\Phi(T) = [\Delta x_1(T), \Delta x_2(T), \dots, \Delta x_m(T)] \quad (2.25)$$

- 6.- Una vez obtenida la matriz Φ se obtiene una estimación del ciclo límite $\mathbf{x}_\infty$ mediante la ecuación

$$\mathbf{x}_\infty = \mathbf{x}_n + [I_n - \Phi(T)]^{-1}(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n). \quad (2.26)$$

- 7.- Finalmente se verifica si dos estimaciones sucesivas de $\mathbf{x}_\infty$ satisfacen el criterio de convergencia especificado, es decir, se verifica si se cumple que $\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| < Tol$. La tolerancia en pu a elegir dependerá de las bases del sistema elegido. Si se satisface la condición de convergencia el proceso

concluye, en caso contrario se regresa al paso 4 haciendo $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_\infty$; se aumenta un periodo de integración y se repite el proceso hasta cumplir con la tolerancia especificada.

El método de integración que se eligió para integrar el sistema de EDOS en el paso 4 fue el método de RK4 cuyas características se describen en la Sección 2.4.1.

En el método de Diferenciación Numérica, el mayor esfuerzo computacional se centra en el cálculo de la matriz Φ . Dicho esfuerzo computacional está relacionado con el tamaño del sistema de ED a resolver, los parametros del sistema. Éstos últimos relacionados con los elementos incorporados a los sistemas eléctricos.

En la siguiente sección se describe un algoritmo que contribuye a incrementar de manera significativa la eficiencia del método de Diferenciación Numérica, en la cual se aprovecha la característica principal de los sistemas periodicos, su simetría de media onda.

2.5.2. Método de Diferenciación Numérica Mejorado

En esta sección se describe un algoritmo el cual reduce dramáticamente el esfuerzo computacional requerido para la identificación de la matriz de transición Φ utilizada por el método DN para la rápida solución al estado estacionario en el dominio del tiempo de sistemas de potencia no lineales, mediante extrapolación al ciclo límite. Se ha demostrado en [Segundo y Medina, 2010], que este proceso llamado método Diferenciación Numérica Mejorado (DNM) disminuye el tiempo computacional en al menos 50 %, comparado con el método de DN [Segundo y Medina, 2010].

El método DNM toma ventaja de las propiedades de simetría de media onda de señales de excitación, como fuentes de voltaje y corriente en la red de potencia. Esta metodología básicamente consiste en la evaluación de (2.16), aproximando $\mathbf{x}(t + T)$ a través de la extrapolación de $\mathbf{x}(t + T/2)$. Con ésta aproximación, para calcular $\mathbf{x}(t + T)$ del sistema (2.5) no se necesita de integrar todo el periodo completo, como usualmente se hace en el método de DN, basta con integrar solo la mitad del periodo para llegar al estado estacionario.

Sea $x_i(t)$ la i -ésima variable de estado de $\mathbf{x}(t)$. Para algunos sistemas de potencia, se espera que en estado estacionario periódico cerca del ciclo límite $x_i(t)$ se satisfaga la siguiente relación,

$$x_i(t + T) \approx x_i(t + T/2). \quad (2.27)$$

Por otro lado, si en el estado estacionario periódico cerca del ciclo límite $x_i(t)$ satisface la siguiente condición, entonces el sistema en cuestión no contiene componente cd,

$$x_i(t + T) \approx -x_i(t + T/2). \quad (2.28)$$

Con el fin de utilizar apropiadamente las condiciones (2.27) y (2.28), se identifican las variables de estado $x_i(t)$ que contienen componente cd a partir de las que no la tienen, es decir, a partir de (2.28). Si $x_i(t)$ tiene componente de cd, entonces se satisface la siguiente condición:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} \frac{dx_i(t + T/2)}{dt} > 0. \quad (2.29)$$

En resumen, si $x_i(t)$ satisface (2.29), se utiliza (2.27) para aproximar $x_i(t + T)$ hasta $x_i(t + T/2)$, de otra manera se utiliza (2.28). Recordemos que $x_i(t + T)$ y $x_i(t)$ son los i -ésimo elementos de $\mathbf{x}_{n+1}(t)$ y $\mathbf{x}_n(t)$, respectivamente. Por otro lado, con el fin de calcular $\mathbf{x}(t + T)$ integrando solo la mitad de un período completo de (2.5) con condición inicial $\mathbf{x}(t)$ para obtener $\mathbf{x}(t + T/2)$, y después utilizar (2.27) y (2.28) para calcular $\mathbf{x}(t + T) + \Delta\mathbf{x}_k(t + T)$ a partir de $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t) + \Delta\mathbf{x}_k(t)$ y calcular Φ .

En la Figura 2.3 se presenta un diagrama en donde se describe el algoritmo del método DNM.

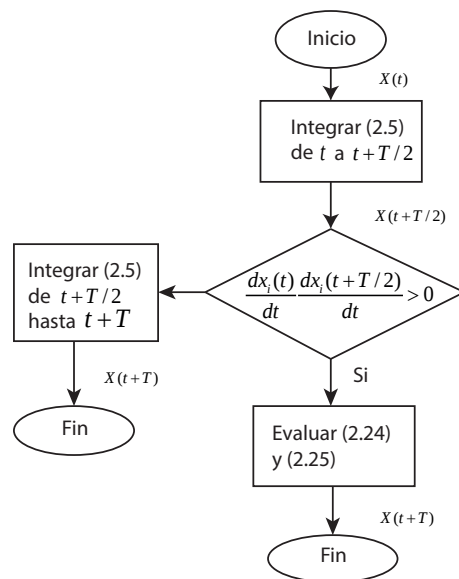


Figura 2.3: Aproximación a las variables de estado mediante el método MDN.

Métodos de Ajuste de Curvas Aplicados a la aproximación de la Forma de Onda

3.1. Introducción

En este capítulo se retoman las técnicas descritas en el capítulo anterior para la obtención de la solución en estado estacionario de redes de potencia en el dominio del tiempo, con el propósito de mostrar la aplicación de algoritmos para el ajuste y aproximación de la forma de onda, de tal manera que su procesamiento, mediante métodos numéricos de integración se realice de manera eficiente.

Como antecedentes de investigación en esta dirección se puede mencionar el trabajo de [Dominguez *et al.*, 1994] en donde se reporta una técnica de interpolación adaptativa para minimizar el número de frecuencias discretas requeridas para aproximar las impedancias equivalentes, vistas desde un punto (nodo) del sistema, para un rango determinado de frecuencias. Dos métodos de uso común se emplean en este trabajo, siendo estos Annular Sectors y Discrete Polygons.

Se ilustra en este capítulo que durante el proceso de solución en el dominio del tiempo utilizando el método propuesto, en estado estacionario periódico sólo se integra un ciclo con la ayuda del método de diferenciación numérica, empleando el paso de integración más grande posible, es decir, utilizando el menor número de puntos posibles que se requieren para integrar los sistemas de EDO. Una vez que se integra un ciclo completo en estado estacionario, se interpola con la ayuda de los puntos ya obtenidos para de esta forma suavizar la forma de onda obtenida.

3.2. Métodos de Paso Variable

Una opción natural de optimizar el paso de integración en métodos de paso fijo son los métodos de paso variable [Burden y Faires, 2001]; éste tipo de métodos incrementa ó disminuye el paso de integración dependiendo de la suavidad de la onda que se esté integrando. En esta sección se abordará de forma general estos métodos y se describe en esta tesis la experiencia obtenida.

Los métodos del tipo Runge-Kutta no tienen forma de evaluar el error cometido en cada paso de integración. Sin embargo, es posible combinar dos métodos de orden diferente o utilizar un método con dos pasos de integración diferentes, para estimar el error y en base a este, decidir si es necesario o no cambiar el tamaño del paso de integración (reducirlo o incrementarlo), teniéndose entonces un método de paso variable.

Por ejemplo, los métodos Runge-Kutta-Fehlberg de segundo y cuarto orden son métodos del tipo Runge-Kutta, en los cuales se combinan dos métodos de diferente orden, para poder estimar el error cometido en cada iteración de la solución [Conte y de Boor, 1980].

La utilización combinada de los métodos de integración del tipo Runge-Kutta con los métodos numéricos predictor-corrector, permite desarrollar un algoritmo de solución de ecuaciones diferenciales de paso variable el cual en términos generales comprende los siguientes pasos:

- 1.- Utilizar un algoritmo Runge-Kutta para iniciar la solución y obtener la información requerida por el método predictor-corrector.
- 2.- En cada iteración: predecir el valor de $y_{n+1}^{(0)}$ y corregir para $y_{n+1}^{(1)}$.
- 3.- Si la diferencia porcentual entre el valor predicho y el corregido es menor que un valor h_{max} , pero mayor que un valor h_{min} dado, entonces continuar.
- 4.- Si la diferencia anterior no es menor que h_{max} , utilizar entonces nuevamente el corrector obteniendo $y_{n+1}^{(2)}$. Si en dos iteraciones del corrector no se logra la precisión deseada, entonces el paso de integración debe dividirse a la mitad y volver a utilizar el método de Runge-Kutta a partir del punto n para continuar la solución, cambiando nuevamente al método predictor-corrector cuando se tenga la información requerida por éste.
- 5.- Si la diferencia entre el valor predicho y el corregido es menor que h_{min} , entonces el error introducido es muy pequeño y se puede acelerar la solución

aumentando el paso de integración al doble; continuar con el método Runge-Kutta y luego el predictor-corrector nuevamente.

- 6.- El método continuará multiplicando o dividiendo por dos el paso de integración a manera de mantener el error por truncamiento local dentro de los límites establecidos y tratando en todo caso de usar el mayor paso de integración posible para obtener una solución rápida.

Esta es la manera general de como trabajan los métodos de paso variable, en cada paso de integración se decide si se disminuye ó incrementa el paso de integración. También cabe mencionar que en estos métodos de paso variable hay que definir el paso de integración máximo y mínimo que pueden adoptar.

En el Capítulo 4 se presentan algunos resultados obtenidos con el método de Paso Variable (PV) Runge-Kutta-Fehlberg.

3.3. Métodos de Interpolación

Frecuentemente se dispone de una gran cantidad de datos relativos a una función, conocida o no, que se desea aproximar. Las técnicas de interpolación polinómica [Heath, 2002] dan lugar en general a interpolantes que presentan grandes oscilaciones. La interpolación spline desempeña un papel fundamental en el tratamiento de este tipo de problemas. Esta investigación, se centrará principalmente en la *interpolación spline cúbica*.

Considerese que se tiene un conjunto de datos (t_i, y_i) . Tales datos pueden representar los resultados de medidas en el laboratorio, donde t puede representar tiempo o temperatura e y puede representar distancia o presión. Los datos también pueden representar valores de una función matemática.

En este capítulo se indica como representar tales datos discretos en términos de funciones simples que sean fácilmente manipulables. Dichas funciones no solo deben obtener la tendencia general de los valores de los datos exactamente, también deben de preservar las propiedades de convexidad y concavidad de la función a aproximar. Tal función es llamada un *interpolante*. El significado simple de una interpolación se puede entender a partir de algunos datos dados a algunas funciones, tales que deben tener los mismos valores que los datos proporcionados.

De manera general, el problema de interpolación en una dimensión es de la siguiente manera: dado un conjunto de datos (t_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$, con $t_1 < t_2 < \dots < t_m$, se busca una función $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$S(t_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.1)$$

De donde S es una *función de interpolación*, o simplemente un interpolante para tales datos [Moler, 2008].

La elección de una función de interpolación depende del tipo de respuesta que se espera obtener. La selección de una función de interpolación se basa usualmente en:

- Qué tan bien responde el interpolante (determinando los parámetros de los datos, evaluando el interpolante en un punto dado, integrando o diferenciando el interpolante, etc.)
- Qué tan bien las propiedades del interpolante coinciden con las propiedades de los datos a ajustar (suavidad, monotonicidad, convexidad, periodicidad, etc.)

Algunas familias de funciones comunmente usadas para la interpolación son:

- Polinomiales
- Polinomios por segmentos
- Funciones trigonométricas
- Funciones exponenciales
- Funciones racionales

En la siguiente sección se detalla el método de interpolación de splines cúbicos, elegido en base sus características numéricas para interpolar la forma de onda en estado estacionario periódico de sistemas electricos.

3.3.1. Splines

Evidentemente pueden existir varios tipos de funciones que interpolen los mismos datos; por ejemplo, funciones trigonométricas, funciones exponenciales, funciones polinomiales y combinaciones de éstas [Boor, 2001]. El tipo de interpolación

elegida, depende generalmente de la naturaleza de los datos que se están procesando, así como de los valores intermedios que se están esperando.

Un tipo muy importante es la interpolación por funciones polinomiales. Puesto que evidentemente pueden existir una infinidad de funciones polinomiales de interpolación para una misma tabla de datos, se hace una petición extra para que el polinomio de interpolación sea único [Heath, 2002].

En seguida se presenta el estudio de un tipo de interpolación que ha demostrado poseer una gran finura. Esta interpolación se llama interpolación segmentaria o interpolación por splines [Burden y Faires, 2001]. La idea central es que en vez de usar un solo polinomio para interpolar los datos, podemos usar segmentos de polinomios y unirlos adecuadamente para formar nuestra interpolación, como se puede observar en la Figura 3.1.

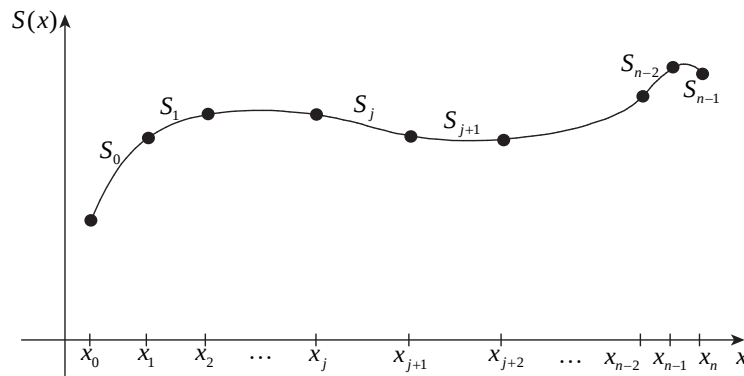


Figura 3.1: Aproximación por funciones splines cúbicos.

Así pues, se puede decir de manera práctica que una función spline está formada por varios polinomios, cada uno definido en un intervalo y que se unen entre sí bajo ciertas condiciones de continuidad. De manera formal lo anterior se presenta con la siguiente definición [Burden y Faires, 2001]:

Definición 3.3.1. Dado los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ que representan una determinada función, donde se supone que $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, y dado k un número entero positivo, una función de interpolación spline de grado k con los datos proporcionados es una función $S(x)$ tal que:

- i) $S(x_i) = y_i$, para toda $i = 0, 1, \dots, n$.
- ii) $S(x)$ es un polinomio de grado $\leq k$ en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.
- iii) $S(x)$ tiene derivada continua hasta de orden $k - 1$ en $[x_0, x_n]$.

Los polinomios de grado elevado pueden presentar grandes oscilaciones. Ello hace que éstos polinomios pueda coincidir con una función en muchos puntos y además, puede suceder que aunque se tengan dos puntos consecutivos de la función a aproximar los valores proporcionados por el polinomio disten mucho de los valores de la función entre esos dos puntos consecutivos. Incluso es posible que la distancia tienda a infinito cuando el grado del polinomio crece.

Por el contrario, para los polinomios de grado bajo no se dan tales oscilaciones; basta pensar en las gráficas de las rectas, las parábolas o las cúbicas, por citar los de grado más bajo, que son los de mayor interés en la construcción de las funciones spline polinómicas.

La idea de este tipo de funciones es hacer posible la construcción de espacios de funciones suficientemente suaves que sean fácilmente manejables. Los más utilizados son los construidos, hablando en términos gráficos, a partir de funciones polinómicas a segmentos de grado bajo que presentan cierta regularidad. Un ejemplo sencillo es el de una función cuya gráfica la forman segmentos de rectas.

La aproximación lineal por segmentos quizá no tenga tanta relevancia como los spline cúbicos, o incluso una aproximación de orden mayor. Sin embargo, muestra la mayoría de las características esenciales de la aproximación polinomial de una manera simple y fácil de entender.

El caso más simple de un polinomio de interpolación es el que une dos puntos dados, como se muestra en la Figura 3.2. Esto es, la ecuación de la línea recta.

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \quad \forall x \in [x_0, x_1]. \quad (3.2)$$

Las funciones spline polinómicas de grado mayor que uno siguen una filosofía idéntica a las de grado uno, sólo que al aumentar el grado se puede conseguir mayor regularidad global, sin que cambie mucho la dimensión del espacio vectorial. Así, los splines cuadráticos con nodos $x_1, \dots, x_n$ están constituidos por segmentos de parábolas, unidas entre sí no sólo con continuidad sino también con tangente continua, de tal forma que son funciones de clase uno en el intervalo.

La ecuación que representa a los splines cuadráticos es

$$f(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \text{Término cuadrático} \quad (3.3)$$

Por lo tanto, se plantea el polinomio de interpolación como sigue:

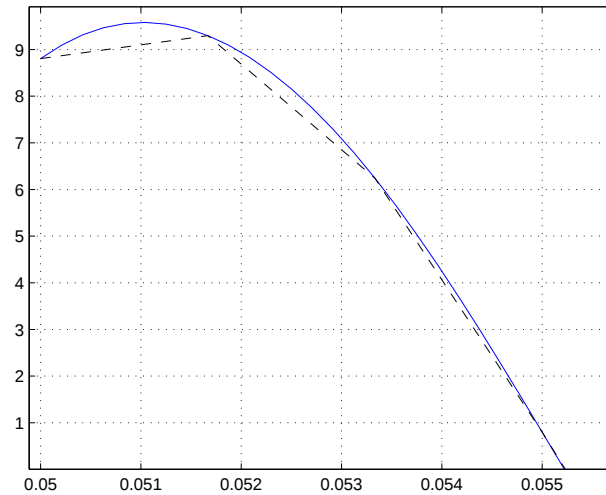


Figura 3.2: Aproximación por splines lineales.

$$S(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1). \quad (3.4)$$

3.3.2. Funciones Splines Cúbicos (SC)

En general, un spline S es un polinomio compuesto por segmentos de funciones, siendo este de grado k continuo y diferenciable $k - 1$ veces. Por ejemplo, un spline lineal es un polinomio lineal por segmentos que tiene grado uno y que es continuo pero no diferenciable. Un spline cúbico es un polinomio cúbico por segmentos que es dos veces continuo y diferenciable. Los dos parámetros finales pueden ser ajustados de varias formas [Burden y Faires, 2001], por ejemplo:

- Especificando la primera derivada en los puntos t_1 y t_n , basada en las condiciones de contorno deseadas o en las derivadas estimadas de los datos.
- Forzando que la segunda derivada sea igual a cero en los puntos extremos, resulta en el llamado *spline natural*.
- Forzando una condición punto a punto, que fuerza efectivamente dos piezas cúbicas consecutivas sean la misma, en t_2 y en t_n .
- Forzando igualdad de la primera y segunda derivadas en los puntos t_1 y t_n (si el spline es periódico).

Dada la función f definida en el intervalo $[a, b]$ y un conjunto de datos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, se dice que un interpolante de spline cúbico S para f es una función que satisface las siguientes condiciones:

- a) $S(x)$ es un polinomio cúbico, denotado $S_j(x)$, en el subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$.
- b) $S(x_j) = f(x_j)$ para cada $j = 0, 1, \dots, n$.
- c) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$.
- d) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$.
- e) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$.
- f) Una de las siguientes condiciones de frontera se satisfacen:
 - i) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (condiciones de frontera naturales).
 - ii) $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$ (condiciones de frontera sujetas).

Aunque los splines cúbicos son definidos con otras condiciones de frontera, las condiciones dadas en f) son suficientes para los propósitos prácticos de esta investigación. Cuando se tienen las condiciones frontera naturales, el spline es llamado *spline natural*, y su gráfica aproxima la forma de onda utilizando los puntos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$.

Para construir un spline cúbico en una función dada f , las condiciones vistas anteriormente se aplican a polinomios cúbicos como

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, \quad (3.5)$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$.

De ahí que

$$S_j(x_j) = a_j = f(x_j), \quad (3.6)$$

la condición c) se puede aplicar para obtener

$$\begin{aligned} a_{j+1} = S_{j+1}(x_{j+1}) &= S_j(x_{j+1}) \\ &= a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3 \end{aligned} \quad (3.7)$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n - 2$.
considerando la expresión $x_{j+1} - x_j$ como

$$h_j = x_{j+1} - x_j, \quad (3.8)$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n - 1$. Si también definimos $a_n = f(x_n)$, entonces se tiene la ecuación

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \quad (3.9)$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n - 1$.

De manera similar, definiendo $b_n = S'(x_n)$ se observa que

$$S'_j(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2 \quad (3.10)$$

implica que $S'_j(x_j) = b_j$, para cada $j = 0, 1, \dots, n - 1$. Aplicando la condición d) se obtiene

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2, \quad (3.11)$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n - 1$.

Otra relación entre los coeficientes de S_j se obtiene definiendo $c_n = S''(x_n)/2$ y aplicando la condición (e). Entonces, para cada $j = 0, 1, \dots, n - 1$,

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j. \quad (3.12)$$

Resolviendo para d_j de la expresión anterior y sustituyendo este valor en las ecuaciones (3.9) y (3.11), para cada $j = 0, 1, \dots, n - 1$, surge una nueva ecuación que es

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1}) \quad (3.13)$$

y

$$b_{j+1} = b_j + h_j(c_j + c_{j+1}). \quad (3.14)$$

La relación final envuelve los coeficientes obtenidos mediante la solución de la ecuación apropiada en la forma de la Ecuación (3.13), primero para b_j ,

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}), \quad (3.15)$$

y luego, con una reducción del índice para b_{j+1} . Se tiene

$$b_{j+1} = \frac{1}{h_{j+1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j), \quad (3.16)$$

sustituyendo estos valores en la ecuación derivada de (3.15), con una reducción de uno en el índice, se tiene un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_jc_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) \quad (3.17)$$

para cada $j = 1, 2, \dots, n-1$. Este sistema involucra sólo las $\{c_j\}_{j=0}^n$ como variables, de ahí que los valores de $\{h_j\}_{j=0}^{n-1}$ y $\{a_j\}_{j=0}^n$ son dados, respectivamente, por el espaciamento de los nodos $\{x_j\}_{j=0}^n$ y los valores de f en los nodos.

Note que una vez que se determinan los valores $\{c_j\}_{j=0}^n$, es sencillo encontrar las constantes restantes $\{b_j\}_{j=0}^{n-1}$ de (3.15) y $\{d_j\}_{j=0}^{n-1}$ de (3.12), y construir los polinomios cúbicos $\{S_j(x)\}_{j=0}^{n-1}$.

La mayor interrogante que surge en la conexión con esta construcción es si los valores de $\{c_j\}_{j=0}^n$ se pueden encontrar utilizando los sistemas de ecuaciones dados en (3.17) y, si es así, si estos valores son únicos. El siguiente teorema indica que este es el caso cuando cualquiera de las dos condiciones de frontera dadas en f) se imponen.

Teorema 3.1. *Si f es definida en $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, entonces f tiene un único spline natural que es el interpolante S en los nodos $x_0, x_1, \dots, x_n$; es decir, un interpolante spline que satisfase las condiciones de frontera $S''(a) = 0$ y $S''(b) = 0$.*

Las dos ecuaciones $c_0 = 0$ y $c_n = 0$ junto con las ecuaciones de (3.17) producen un sistema lineal descrito por el sistema matricial $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, de donde $\mathbf{A}$ es una matriz de $(n+1) \times (n+1)$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{x}$ son vectores.

La matriz $\mathbf{A}$ tiene la forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

El vector $\mathbf{b}$ tiene la forma

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

y

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

La matriz $\mathbf{A}$ es diagonal estrictamente dominante, de modo que el sistema lineal asociado tiene una única solución para $c_0, c_1, \dots, c_n$.

En seguida se presenta los pasos a seguir para obtener una interpolación mediante splines cúbicos, bajo condiciones de frontera $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$.

El procedimiento a seguir para construir una interpolación de splines cúbicos S para una función f , definida en $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, que satisfaga $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ es el siguiente:

- Se introducen los datos de entrada, $x_0, x_1, \dots, x_n$, $a_0 = f(x_0), a_1 = f(x_1), \dots, a_n = f(x_n)$.
 - Los datos de salida son los valores de a_j, b_j, c_j, d_j para $j = 0, 1, \dots, n - 1$.
- 1) Hacer $h_i = x_{i+1} - x_i$ para $i = 0, 1, \dots, n - 1$
 - 2) Hacer $\alpha_i = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1})$ para $i = 1, 2, \dots, n - 1$.
 - 3) Definir $l_0 = 1, \mu_0 = 0$ y $z_0 = 0$.

4) Hacer

$$l_i = 2(x_{i+1} - x_{i-1}) - h_{i-1}\mu_{i-1} \quad (3.21)$$

$$\mu_i = h_i/l_i \quad (3.22)$$

$$z_i = (\alpha_i - h_{i-1}z_{i-1})/l_i \quad (3.23)$$

para $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

5) Definir $l_n = 1$, $z_n = 0$ y $c_n = 0$.

6) Hacer

$$c_j = z_j - \mu_j c_{j+1} \quad (3.24)$$

$$b_j = (a_{j+1} - a_j)/h_j - h_j(c_{j+1} + 2c_j)/3 \quad (3.25)$$

$$d_j = (c_{j+1} - c_j)/3h_j \quad (3.26)$$

para $j = n - 1, n - 2, \dots, 0$.

7) Salida a_j, b_j, c_j y d_j para $j = 0, 1, \dots, n - 1$.

■ Finaliza

Con los valores de a, b, c y d obtenidos mediante el proceso anterior, se forman las funciones de los SC

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, \quad (3.27)$$

Cada una de estas funciones S_j forman la forma de onda completa como se muestra en la Figura 3.1.

La metodología mostrada en esta sección es la que se utiliza para interpolar la forma de onda en estado estacionario. En la siguiente sección veremos el método que se propone y la incorporación del método de interpolación de SC.

3.4. Método Propuesto

El método que se propone en esta tesis involucra muchas de las características principales de los métodos vistos previamente. La idea principal de esta propuesta

surge a partir de tratar de optimizar el esfuerzo computacional requerido para llegar al estado estacionario periódico de sistemas de la forma (3.29), estos asociados a sistemas eléctricos como el mostrado en la Figura 2.1.

Para lograr lo anterior se propone obtener el estado estacionario periódico integrando los sistemas de EDOs con la menor cantidad de puntos posibles, es decir, considerando un período completo de $T = 1/f$ con $f = 60$ Hz, que representa la frecuencia del sistema y Np Número de Particiones del período, se obtiene el paso de integración mediante la siguiente expresión

$$\Delta t = \frac{T}{Np}. \quad (3.28)$$

La idea es integrar los sistemas con el tamaño del paso de integración mayor posible, ó visto de otra manera con el menor número de puntos de integración posible, como se muestra en Figura 3.3. Esto se logra reducción el valor de Np al mínimo posible.

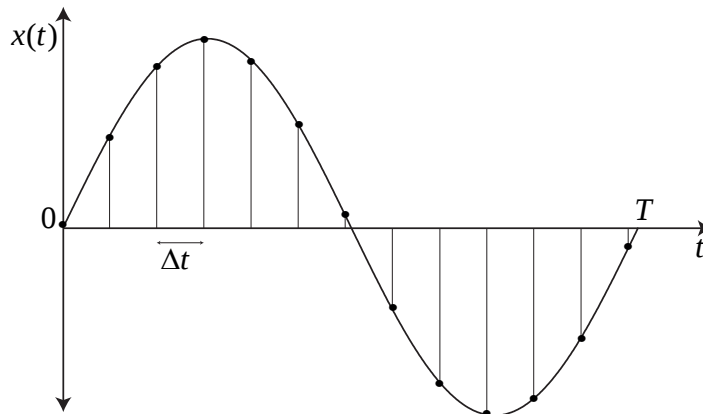


Figura 3.3: Integrando la forma de onda con el paso de integración Δt mayor posible.

Para los casos de estudio presentados en el Capítulo 4, se integraron los sistemas de EDOs asociados a los sistemas eléctricos con distintos valores de Np , observando lo siguiente: para sistemas con respuesta (forma de onda) casi senoidal se obtuvo una adecuada precisión en la solución del sistema considerando 102 puntos, es decir $Np = 102$. Esto representa el 10 % de 1024 puntos que se utilizaron originalmente con el método de DN.

Para sistemas con respuesta notoriamente distorsionada se logró una adecuada precisión numérica en la solución del sistema con 204 puntos, es decir, $Np = 204$. Que es el 20 % de 1024. Lo anterior se consideró para obtener con pocos puntos Np el estado estacionario periódico con el método de DN. A éstos datos que describen

la forma de onda, se propone aplicar interpolación mediante Splines Cúbicos. Los pasos a seguir de la metodología propuesta son los siguientes.

- 1.- Se forma el sistema de EDOs, asociado al sistema eléctrico.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (3.29)$$

- 2.- Se resuelve el sistema de EDOs, para un determinado número de ciclos iniciales completos. En particular, de la experiencia obtenida con los casos de estudio reportados en esta tesis, se ha observado que basta con 3 ciclos completos.
- 3.- Una vez obtenidos los ciclos iniciales se obtiene un ciclo base, para aplicar el método de Diferenciación Numérica [Semlyen y Medina, 1995].
- 4.- Se crean m problemas separados de,

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(t)\Delta\mathbf{x} \quad (3.30)$$

los cuales se resuelven emplendo condiciones iniciales $\Delta\mathbf{x}_{0i}$, $i = 1, \dots, m$. Así, el problema es de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

de donde

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{J}(t)\Delta\mathbf{x}(t). \quad (3.31)$$

El sistema (3.30) se resuelve m veces, integrando períodos completos para obtener $\Delta\mathbf{x}_i(T)$ con $i = 1, \dots, m$.

- 5.- Cada uno de estos vectores $\Delta\mathbf{x}_i(T)$ se ensamblan columna por columna en $\Phi(T)$ para formar

$$\Phi(T) = [\Delta\mathbf{x}_1(T), \Delta\mathbf{x}_2(T), \dots, \Delta\mathbf{x}_m(T)]. \quad (3.32)$$

Cabe mencionar que para propósitos de esta tesis, el proceso del paso 4 y 5 solo se realiza una sola vez.

- 6.- Se obtiene una estimación de $\mathbf{x}_\infty$, sustituyendo $\Phi(T)$ en la siguiente ecuación:

$$\mathbf{x}_\infty = \mathbf{x}_n + [\mathbf{I} - \Phi(T)]^{-1}(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n). \quad (3.33)$$

Hasta este punto se utilizó la metodología de DN para llegar al estado estacionario periódico. Obteniendo como resultado una aproximación de $\mathbf{x}_\infty$. La forma de onda en estado estacionario periódico fue generada con la menor cantidad de puntos posibles, de acuerdo a las propiedades de cada sistema a estudiar.

- 7.- Utilizando los datos que describen la forma de onda en estado estacionario periódico,

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n). \quad (3.34)$$

Obtenidos en el paso anterior se hace un proceso de interpolación mediante los splines cúbicos como el descrito en la Sección 3.3.2.

- 8.- De la interpolación realizada a los datos (3.34), se tienen los valores de, a_j, b_j, c_j y d_j para $j = 0, 1, \dots, n - 1$. Con estos valores se crean las funciones de interpolación,

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, \quad (3.35)$$

- 9.- Las funciones $S_j(x)$ suavizan la forma de onda en estado estacionario, y con esto se logra obtener una aproximación satisfactoria al ciclo límite $\mathbf{x}_\infty$.

El proceso que se describió anteriormente se aplica al método de DN. Con el propósito de llegar al estado estacionario periódico lo más rápidamente posible y reducir aún más el esfuerzo computacional, solo se considera calcular una vez la matriz Φ [Semlyen y Medina, 1995].

Es de resaltar el hecho de solo calcular una vez esta matriz Φ , ya que el ahorro de tiempo computacional es muy considerable. Recordemos que las dimensiones de esta matriz están directamente relacionadas con el número de variables de estado que contenga nuestro sistema de EDOs. Por ejemplo el circuito de la Figura 2.1 contiene 5 variables de estado, por lo que las dimensiones de la matriz $\Phi(T)$ serán de 5×5 .

Recordemos que en el paso 5 se construye la matriz $\Phi(T)$ por columnas; este proceso es el que demanda el mayor tiempo de cómputo. Por esta razón es que en el método propuesto solo se calcula una vez la matriz $\Phi(T)$.

Aunado a lo anterior, se considera resolver los sistemas de EDOs asociados a los sistemas eléctricos con la menor cantidad de puntos posibles para integrar los sistemas de EDOs. Como consecuencia de hacer esta consideración se obtiene una forma de onda distorsionada la cual se procesa mediante técnicas de interpolación para suavizar la forma de onda en estado estacionario.

Enseguida veremos un ejemplo de aplicación de la metodología propuesta.

Ejemplo 3.1. *Considérese el circuito de la Figura 3.4, el cual se presentó en el Capítulo 2 y que por comodidad se muestra de nuevo. Las ED que describen la dinámica del sistema se describen en el Apéndice C.*

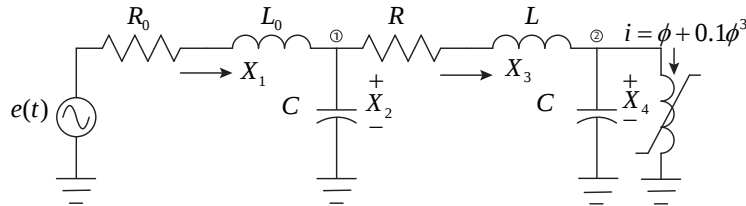


Figura 3.4: Circuito con un elemento no lineal.

Utilizando la metodología propuesta obtener el ciclo límite.

De acuerdo al primer paso de la metodología propuesta, se obtiene el sistema de ED que describe la dinámica del circuito 3.4, estas se muestran en el Apéndice C. Se llega al estado estacionario periódico de dicho sistema utilizando el método de DN, el cual se describe del paso 1 al 6. Obteniendo con éste una aproximación a la forma de onda en estado estacionario. En la siguiente tabla se muestran todos los datos que describen la forma de onda en estado estacionario periódico.

Tabla 3.1: Puntos conocidos de la forma de onda en estado estacionario.

x	0.0667	0.0683	0.0700	0.0717	0.0733	0.0750
f(x)	8.8059	9.2989	6.2400	0.7976	-4.9494	-8.8059
	...	0.0767	0.0783	0.0800	0.0817	0.0833
	...	-9.2989	-6.2400	-0.7976	4.9494	8.8059

La forma de onda generada con esta información es imprecisa, como puede observarse de la Figura 3.5. A estos datos se les aplica la interpolación por SC, de la siguiente manera.

Siguiendo los pasos de la metodología propuesta, una vez que se tienen los datos a interpolar se definen los polinomios cúbicos en cada uno de los intervalos que se forman:

$$S(x) = \begin{cases} S_1 = a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3 & \text{si } x \in [0.0667, 0.0683] \\ S_2 = a_2 + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3 & \text{si } x \in [0.0683, 0.0700] \\ \vdots & \\ S_{10} = a_{10} + b_{10}x + c_{10}x^2 + d_{10}x^3 & \text{si } x \in [0.0817, 0.0833] \end{cases} \quad (3.36)$$

A continuación, se hace que se cumpla la condición de que el spline debe pasar por los puntos dados en la tabla. Así, que se tienen las primeras 20 ecuaciones:

$$\begin{aligned} S_1(0.0667) &= 8.8059 \implies a_1 + b_1(0.0667) + c_1(0.0667)^2 + d_1(0.0667)^3 = 8.8059 \\ S_1(0.0683) &= 9.2989 \implies a_1 + b_1(0.0683) + c_1(0.0683)^2 + d_1(0.0683)^3 = 9.2989 \\ S_2(0.0683) &= 9.2989 \implies a_2 + b_2(0.0683) + c_2(0.0683)^2 + d_2(0.0683)^3 = 9.2989 \\ S_2(0.0700) &= 6.2400 \implies a_2 + b_2(0.0700) + c_2(0.0700)^2 + d_2(0.0700)^3 = 6.2400 \\ &\vdots \\ S_{10}(0.0817) &= 4.9494 \implies a_{10} + b_{10}(0.0817) + c_{10}(0.0817)^2 + d_{10}(0.0817)^3 = 4.9494 \\ S_{10}(0.0833) &= 8.8059 \implies a_{10} + b_{10}(0.0833) + c_{10}(0.0833)^2 + d_{10}(0.0833)^3 = 8.8059 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Ahora se calcula la primera derivada de $S(x)$,

$$S'(x) = \begin{cases} S_1 = b_1 + 2c_1x + 3d_1x^2 & \text{si } x \in [0.0667, 0.0683] \\ S_2 = b_2 + 2c_2x + 3d_2x^2 & \text{si } x \in [0.0683, 0.0700] \\ \vdots & \\ S_{10} = b_{10} + 2c_{10}x + 3d_{10}x^2 & \text{si } x \in [0.0817, 0.0833] \end{cases} \quad (3.38)$$

Como resultado de hacer lo anterior, se pueden presentar ecuaciones que presenten discontinuidad en los cambios de intervalo; las posibles discontinuidades en este caso es $x = 0.0683$ al punto 0.0817. Para evitar esta discontinuidad, se evalúa en los polinomios y se iguala:

$$\begin{aligned} b_1 + 2c_1(0.0683) + 3d_1(0.0683)^2 &= b_2 + 2c_2(0.0683) + 3d_2(0.0683)^2 \\ &\vdots \\ b_9 + 2c_9(0.0817) + 3d_9(0.0817)^2 &= b_{10} + 2c_{10}(0.0817) + 3d_{10}(0.0817)^2. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Como resultado del proceso anterior se tienen 9 ecuaciones adicionales. Se procede de manera análoga con la segunda derivada,

$$S''(x) = \begin{cases} S_1 = 2c_1 + 6d_1x & \text{si } x \in [0.0667, 0.0683] \\ S_2 = 2c_2 + 6d_2x & \text{si } x \in [0.0683, 0.0700] \\ \vdots & \\ S_{10} = 2c_{10} + 6d_{10}x & \text{si } x \in [0.0817, 0.0833] \end{cases} \quad (3.40)$$

Y para lograr que $S''(x)$ sea continua:

$$\begin{aligned} 2c_1 + 6d_1(0.0683) &= 2c_2 + 6d_2(0.0683) \\ &\vdots \\ 2c_9 + 6d_9(0.0817) &= 2c_{10} + 6d_{10}(0.0817). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Con el proceso anterior se tienen 38 ecuaciones y 40 incógnitas, por lo que faltan dos ecuaciones para tener el mismo número de ecuaciones y de incógnitas, de modo que agregando las condiciones de los splines cúbicos naturales, estas son:

$$S''(x_0) = 0 \quad (3.42)$$

$$S''(x_n) = 0. \quad (3.43)$$

De los cuales se obtienen:

$$S''(0.0667) = 0 \Rightarrow 2c_1 + 6d_1(0.0667) = 0 \quad (3.44)$$

$$S''(0.0833) = 0 \Rightarrow 2c_{10} + 6d_{10}(0.0833) = 0. \quad (3.45)$$

Con los sistema de Ecuaciones 3.37, 3.39 y 3.41, junto con las condiciones de los SC naturales 3.44 y 3.45. Se forma un sistema de 40 ecuaciones con 40 incógnitas, el cual tiene la forma de un sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. con $\mathbf{x} = [a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, \dots]^T$ que representa el vector de las incógnitas. Al resolver este sistema se determinan los valores de a_j, b_j, c_j y d_j . Con ayuda de estos valores se encuentran las funciones splines,

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3. \quad (3.46)$$

Las funciones $S_j(x)$ suavizan la forma de onda en estado estacionario, y con esto se logra obtener una aproximación satisfactoria a la forma de onda en estado estacionario periódico, como se muestra en la Figura 3.5 para la solución con línea continua.

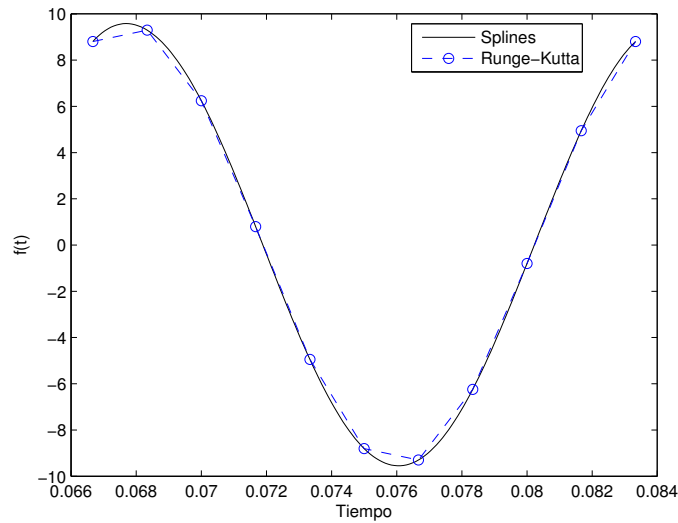


Figura 3.5: Interpolación mediante Splines Cúbicos.

En la Figura 3.5 se comparan dos gráficas, la primera corresponde al método de DN, el cual se utiliza para generar once puntos y así conocer el comportamiento del sistema de ED. El inconveniente de reproducir la forma de onda con tan pocos puntos es que al unir estos puntos en la Figura 3.5, se introduce un notable error numérico.

Utilizando estos once puntos en la segunda gráfica se hace una interpolación mediante los splines cúbicos. Obsérvese como estos suavizan la forma de onda, de tal manera que la forma de onda pueda reproducirse con una elevada precisión numérica. Esta es la idea principal de recurrir a la interpolación mediante splines cúbicos, utilizar pocos datos que contengan información de la forma de onda, para que mediante su aplicación logre obtenerse una forma de onda que se aproxime lo mas cercanamente posible a la original o a la adquirida mediante el metodo de Runge-Kutta de 4^{to} orden con un paso de integracion mas fino, que estaría asociado con un tiempo de cómputo considerablemente mayor. Este tiempo de cómputo se reduce aplicando splines cúbicos ya que se optimiza el proceso de obtención del estado estacionario periódico de sistemas eléctricos como 2.1.

Obsérvese que se recrea la forma de onda en estado estacionario con la menor cantidad de puntos posibles. Estos puntos se obtienen mediante el método de DN. En segundo lugar, se evalúa sólo una vez la matriz de transición Φ para obtener la solución en estado estacionario periódico de la red eléctrica.

3.5. Conclusiones

En este capítulo se ha descrito un método alternativo orientado a la obtención del estado estacionario periódico de manera rápida y eficiente. En principio, se han descrito los métodos de paso variable. De los experimentos realizados, se observó que en ocasiones requirieron utilizar mayormente el paso de integración mínimo, es decir, requirieron de mas puntos para integrar un periodo completo, en el siguiente capítulo se observa este resultado.

Posteriormente se han descrito los métodos de interpolación mediante splines los cuales se basan en datos conocidos de una función. En general, un spline es un polinomio de grado k , que es continuo y diferenciable $k - 1$ veces.

En particular, en el capítulo se trata la fundamentación conceptual y analítica de los métodos de interpolación por Splines cúbicos. Un spline cúbico es un polinomio cúbico conformado por segmentos de polinomios, siendo además continuos y diferenciables.

Finalmente se presenta el método propuesto, en donde se combina el método de Diferenciación Numérica con splines cúbicos, para de esta manera obtener una rápida solución al estado estacionario periódico de la red de potencia analizada.

En el siguiente capítulo se aplican, mediante distintos casos de estudios los métodos descritos previamente, es decir, el método de Diferenciación Numérica, el método de Diferenciación Númerica Mejorado y la interpolación mediante Splines Cúbicos.

Casos de Estudio

4.1. Introducción

En este capítulo se presentan distintos casos de estudio aplicados a sistemas modificados del IEEE, en los cuales se comprueba la validez del método propuesto. Estos sistemas contienen elementos lineales y no lineales como ramas magnetizantes. Los modelos de los elementos (líneas, generadores, etc) de estos sistemas y sus ecuaciones relacionadas se presentan en el Apéndice B. Estos modelos fueron tomados de [Paz, 2007], así como también los sistemas de EDOs generados por los sistemas modificados de 14, 57 y 118 nodos del IEEE. Los datos y sistemas de ED generadas por estos sistemas eléctricos propuestos se detallan en el Apéndice C.

En cada caso de estudio se aplicó el método de Diferenciación Numérica (DN). Se utilizó un paso de integración de $\Delta t = 1.62 \times 10^{-5}$ ($N_p = 1024$) para integrar los sistemas de EDOs por periodo completo.

Se utilizó el 20 % de $N_p = 1024$ que corresponde a $N_p = 204$ para integrar los sistemas de ED. Obteniendo el estado estacionario periódico de sistemas eléctricos utilizando la metodología propuesta, siendo esta una fusión de los métodos Diferenciación Numérica y Splines Cúbicos (DN-SC).

También se utilizó el método de Diferenciación Numérica Mejorado (DNM) para hacer una comparación de los tiempos de cómputo con el método propuesto.

Adicionalmente, se utilizó un método de Paso Variable (PV), siendo este el Runge-Kutta-Fehlberg, para conocer el número de puntos que utiliza para integrar

los sistemas de EDOs asociados a los distintos casos de estudio presentados en esta tesis.

El criterio de convergencia que se adopta es mediante la diferencia de dos ciclos consecutivos en estado estacionario periódico sea menor que una tolerancia especificada $\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| < Tol$ con $Tol = 1 \times 10^{-10}$. Lo anterior sólo se aplica para los métodos de DN, DNM y PV. Por su parte el método propuesto no necesita de este criterio de convergencia ya que solo se calcula una vez la matriz Φ para llegar al estado estacionario periódico y en el primer ciclo completo se aplica la técnica de SC.

Todos los programas se desarrollaron en una versión de MATLAB 2012, el cuál se instaló en una computadora portátil marca MP. La arquitectura del sistema operativo en donde se instaló MATLAB fue Linux.

4.2. Sistema de 3 nodos

El primer caso de estudio es una red de tres nodos reportada en [Semlyen y Medina, 1995]. En este trabajo se propuso el método de Diferenciación Numérica para determinar eficientemente en el dominio del tiempo el estado estacionario periódico de redes eléctricas.

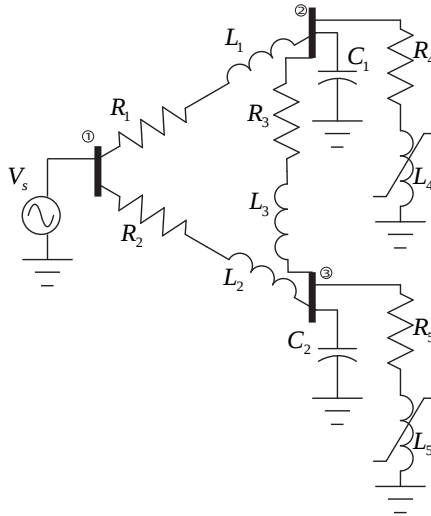


Figura 4.1: Sistema de 3 nodos con 2 ramas magnetizantes.

En la Figura 4.1 se presenta el sistema de prueba; éste cuenta con dos ramas magnetizantes conectadas a los nodos 2 y 3, también dos capacitores conectados a esos mismo nodos, tres inductancias y resistencias que representan las líneas de transmisión, y una fuente de voltaje conectada al nodo 1.

La dinámica del sistema se representa por un conjunto de 7 ED, las cuales se presentan en el Apéndice C. Se ha elegido como variables de estado los enlaces de flujo en las ramas magnetizantes y líneas, así como los voltajes en los capacitores.

En la Figura 4.2 se muestra el comportamiento del flujo en la rama magnetizante conectada al nodo 2 del circuito de la Figura 4.1. Se eligió este nodo debido a que tiene conectada una rama magnetizante no lineal.

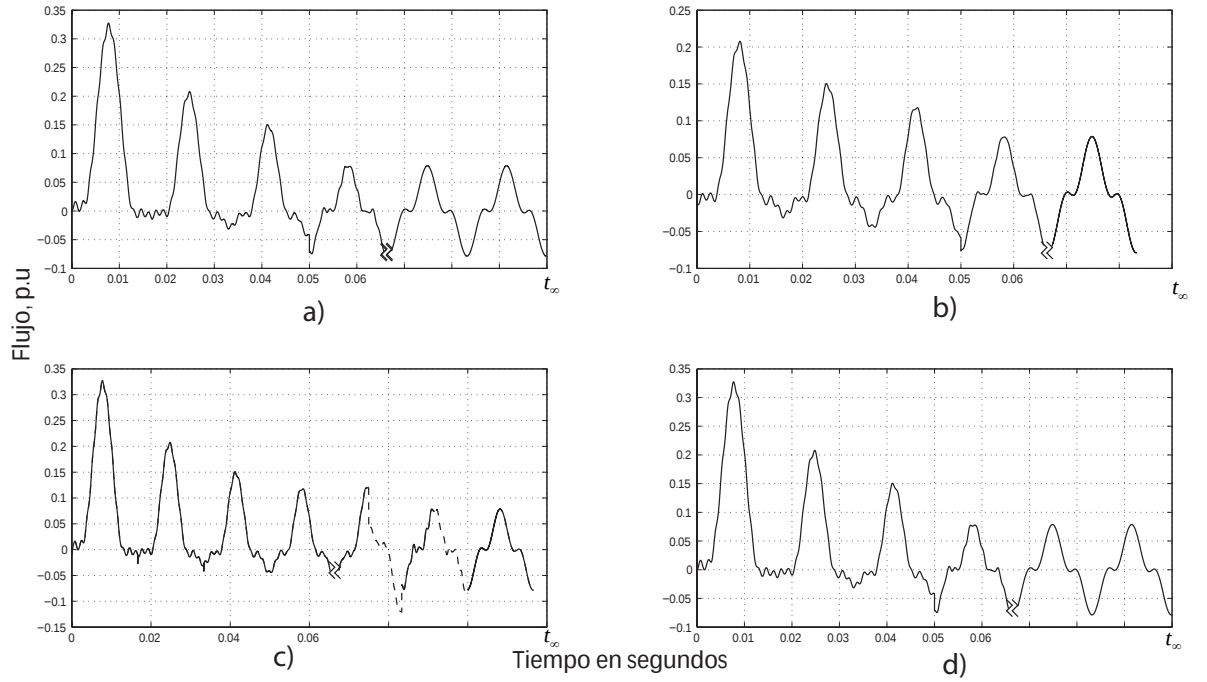


Figura 4.2: Comportamiento del flujo de la rama magnetizante conectada al nodo 2 del circuito de la Figura 4.1 a) DN, b) DN-SC, c) MDN, d) PV.

Para este caso Figura 4.2 a), en donde se presenta el comportamiento de la variable de estado ψ_1 , al método de DN le tomó a todo el sistema 49 ciclos completos para llegar al estado estacionario, ya que el sistema de la Figura 4.2 cuenta con 7 variables de estado. En el caso particular de la variable ψ_1 le tomo 6 ciclos completos de estos, tres son los ciclos iniciales, un ciclo base y dos requeridos por el método DN para alcanzar la solución con la tolerancia especificada según se muestra en la Figura 4.2 a). Lo anterior se obtuvo utilizando un paso de integración de $\Delta t = 1.62 \times 10^{-5}$ o $N_p = 1024$. En todos los casos de estudio se utiliza éste paso de integración en el método de DN.

Por otro lado, utilizando el método de DN-SC se llega al estado estacionario periódico en 35 ciclos completos. En el caso particular de la variable de estado ψ_1

presentada en la Figura 4.2 b) obtiene el estado estacionario periódico en 5 ciclos completos, siendo 3 ciclos iniciales, 1 ciclo base y 1 en estado estacionario periódico. Ésto se logra utilizando el 20 % de 1024, utilizado por el método de DN.

En la Figura 4.2 c) se presenta el comportamiento de la variable de estado ψ_1 , obtenido mediante el método MDN. Como se observa en la Figura 4.2 c), se tienen 3 ciclos completos iniciales, 1 ciclo base completo y 3 ciclos utilizando las propiedades de simetría de media onda. Esto se obtuvo con un paso de integración de $\Delta t = 1.62 \times 10^{-5}$ o $N_p = 1024$. Destacando el hecho de que en estado estacionario periódico solo se integró la mitad del ciclo utilizando $N_p = 512$. En todos los casos de estudio se utiliza éste paso de integración en el método de MDN. En estado estacionario periódico las líneas ocultas representan la otra mitad del periodo.

En la Figura 4.2 d) se presenta la forma de onda obtenida por el método de PV. Con este método en particular se propone un paso de integración mínimo y máximo de $\Delta t_{min} = 1.62 \times 10^{-5}$ o $N_p = 1024$ y $\Delta t_{max} = 2 \times \Delta t_{min}$ respectivamente. Este método tiene la ventaja de variar el paso de integración dependiendo de las características de suavidad de la forma de onda en cuestión, ver Capítulo 3.2. En los siguientes casos de estudio se observará este comportamiento.

Aplicando la Transformada Discreta de Fourier descrita en el Apéndice D, se obtiene el contenido armónico de las formas de ondas obtenidas según se muestra en la Figura 4.3. Se muestra la magnitud de 15 armónicos en por ciento de la fundamental. Los armonicos de mayor magnitud son el 3ro, 5to y 7mo, los demás armónicos son de magnitud despreciable.

Los resultados mostrados en la Figura 4.3 muestran que la respuesta obtenida con los métodos DN, DN-SC y DNM son identicas. El error máximo de estos métodos con el método PV es aproximadamente de 0.34 %. Los tiempos de cómputo que le tomó a cada método llegar al estado estacionario periódico se muestra en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Tiempo de CPU de métodos DN, DN-SC, MDN y PV. Sistema de prueba, 4.1.

<i>Método</i>	<i>Tiempo en segundos</i>	N_p
DN	4.13	1024
DN-SC	0.5	102
MDN	2.5	512
PV	11.3	514

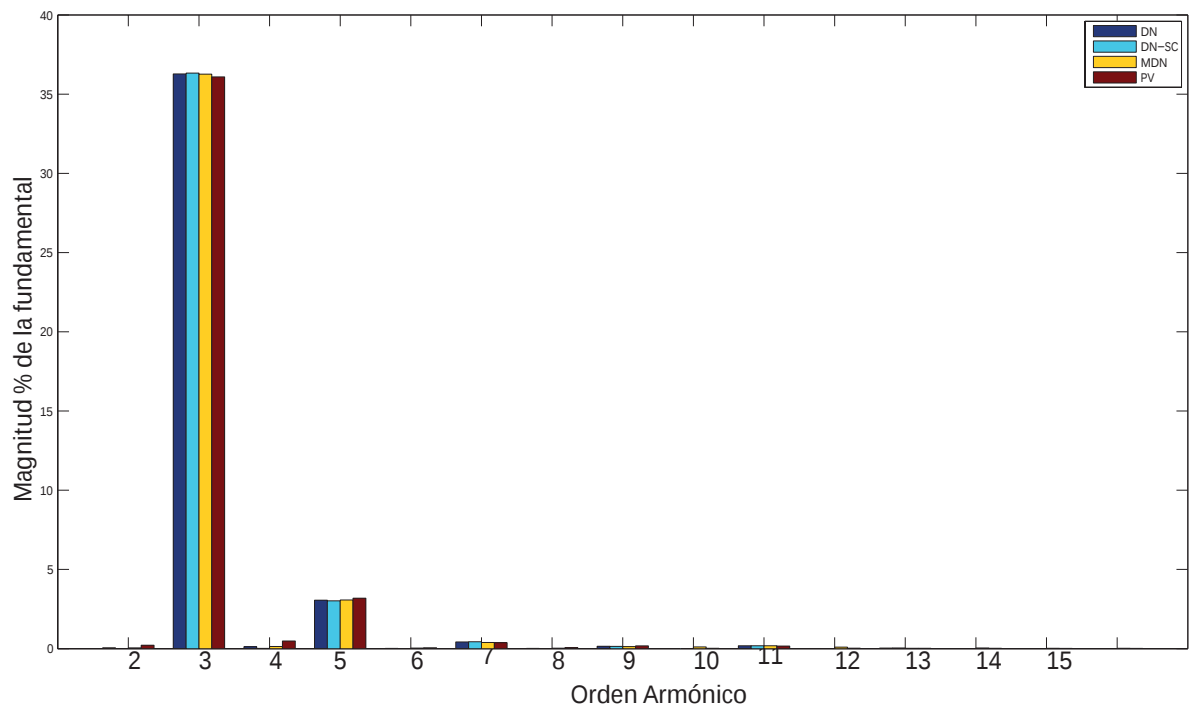


Figura 4.3: Espectro armónico de un período completo en estado estacionario de la forma de onda de la Figura 4.2.

La Figura 4.4 muestra la evolución en el tiempo de la forma de onda del voltaje en el nodo 2 hasta el ciclo base, obtenida con los métodos de DN, DN-SC, MDN y PV. La Figura 4.5 ilustra su contenido armónico. Obsérvese de la Figura 4.5 la buena aproximación obtenida entre los métodos DN, DN-SC y MDN. En este caso particular se observa una desviación, aproximadamente del 0.28 %, con respecto a la respuesta obtenida con el método PV para la 3^{ra} armónica.

En las Figuras 4.2 y 4.4 se observa como los 4 métodos llegan al estado estacionario periódico del circuito presentado en la Figura 4.1. Lo anterior se aprecia mejor en la Figura 4.3 y Figura 4.5 las cuales presentan el contenido armónico de las formas de onda obtenidas por los 4 métodos.

De estos resultados se observa que el método propuesto DN-SC es 8.26, 5 y 22.6 veces más rápido que los métodos DN, MDN y PV, respectivamente.

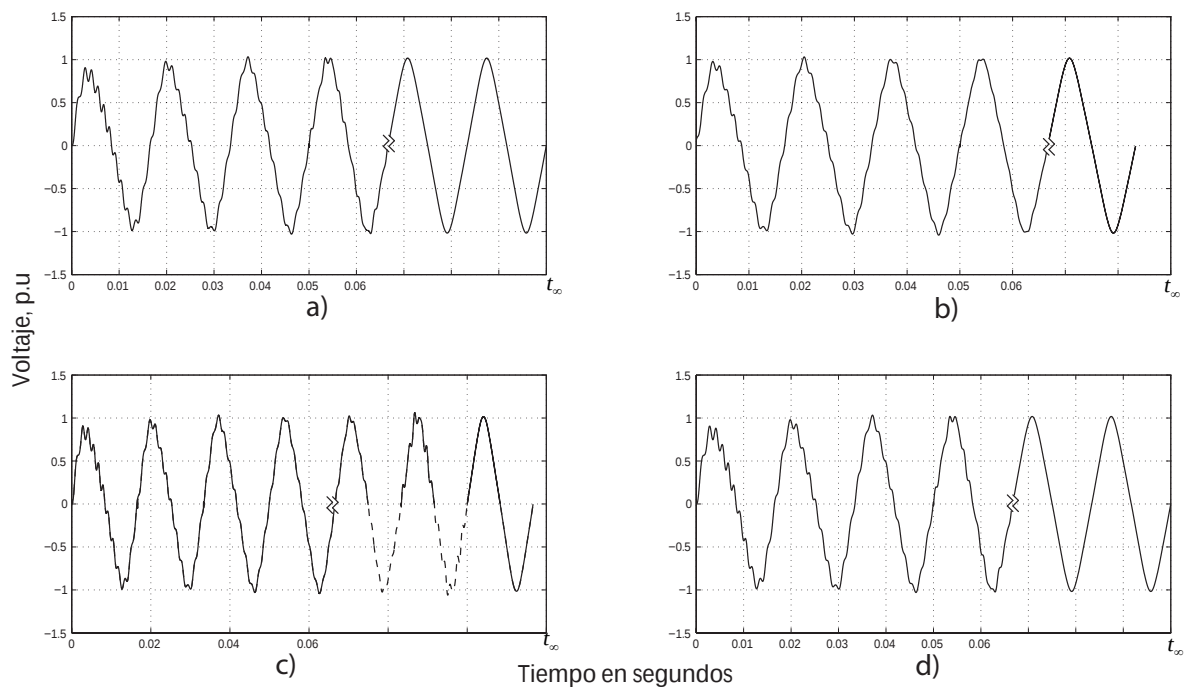


Figura 4.4: Comportamiento del voltaje medido en el nodo 2 del circuito de la Figura 4.1. a) DN, b) DN-SC, c) MDN, d) PV.

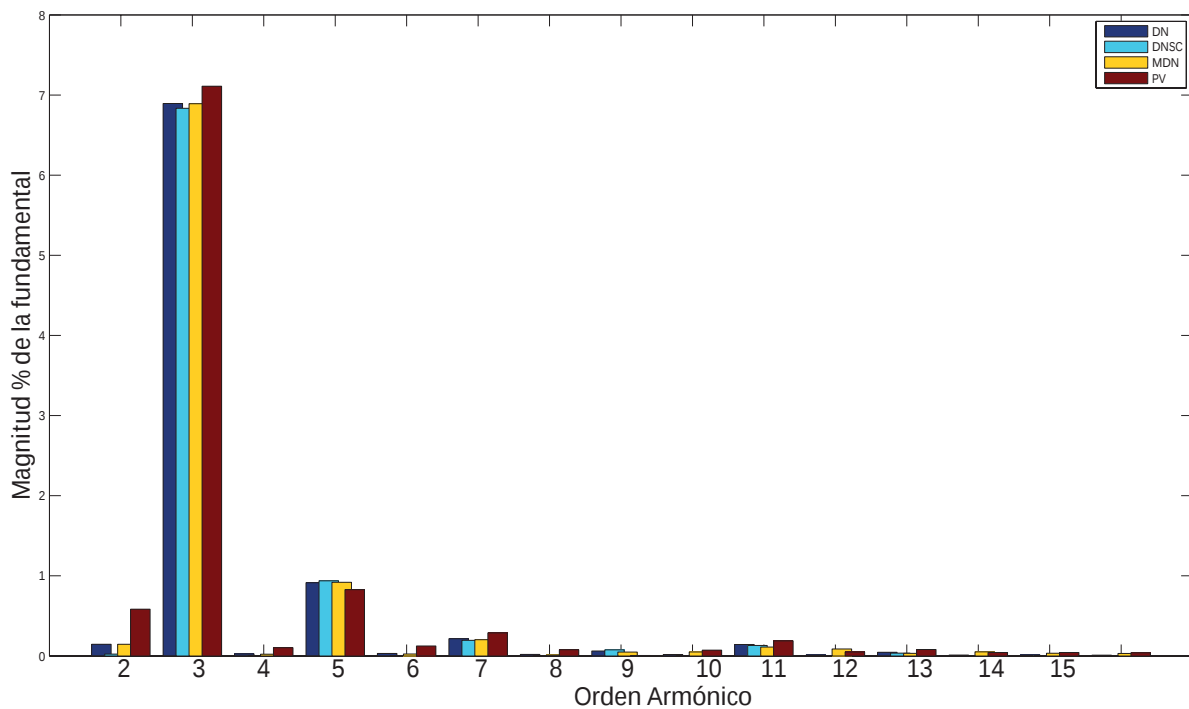


Figura 4.5: Espectro armónico de un período completo en estado estacionario de la forma de onda de la Figura 4.4.

4.3. Sistema Modificado IEEE-14 Nodos

La Figura 4.6 muestra el sistema de prueba IEEE de 14 nodos modificado. Este sistema cuenta con 20 líneas de transmisión, 14 capacitores, dos generadores conectados a los nodos 1 y 2 respectivamente, y dos ramas magnetizantes conectadas a los nodos 2 y 10 respectivamente.

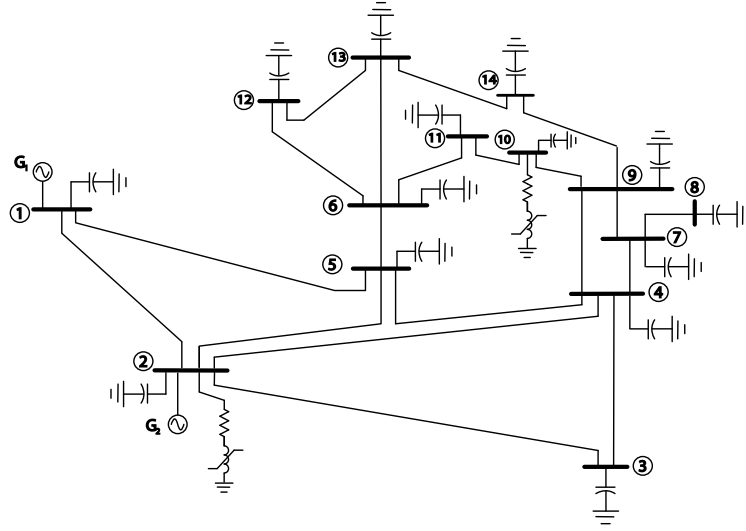


Figura 4.6: Sistema de 14 nodos de la IEEE modificado.

El comportamiento de este sistema lo describe el conjunto de 38 variables de estado que se reportan en el Apéndice C. Estas variables están relacionadas con los flujos de corriente en las líneas de transmisión, así como los flujos en las ramas magnetizantes y los voltajes en los nodos.

En la Figura 4.7 se muestra el comportamiento de la variable de estado ψ_{18} que corresponde al flujo de la rama magnetizante conectada al nodo 10, ver Figura 4.6, en que se encuentra conectado un elemento no lineal.

El método de DN-SC requirió de 190 ciclos completos para llegar al estado estacionario periódico, considerando que el sistema de la Figura 4.6 contiene 38 variables de estado. En el caso particular de la variable de estado ψ_{18} requirió de 5 ciclos completos como se observa en la Figura 4.7 b). Lo anterior se logró utilizando un paso de integración de $\Delta t = 8.16 \times 10^{-5}$ o $N_p = 204$.

Los métodos de DN y PV, en el caso particular de la variable de estado ψ_{18} requirieron de 6 ciclos completos para alcanzar el estado estacionario periódico como se observa en la Figura 4.7 a) y d).

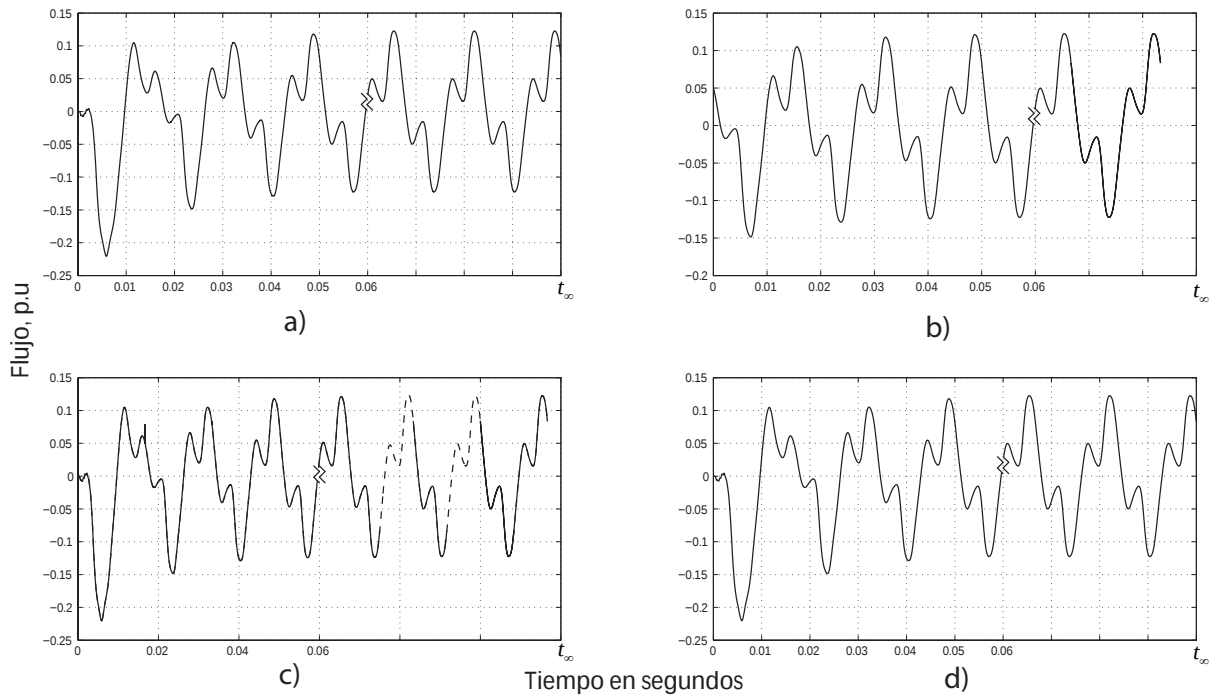


Figura 4.7: Comportamiento del flujo de la rama magnetizante conectada al nodo 10 del circuito de la Figura 4.6. a) DN, b) DN-SC, c) MDN, d) PV.

Por su parte el método de MDN, en el caso particular de la variable de estado ψ_{18} requirió de 7 ciclos para llegar al estado estacionario periódico, de estos se tienen 3 ciclos iniciales completos, 1 ciclo base completo y 3 ciclos utilizando las propiedades de simetría de media onda. Como se observa en la Figura 4.7 c).

En la Figura 4.8 se muestra el contenido del espectro armónico de la forma de onda en estado estacionario del flujo en la rama magnetizante conectada al nodo 10, generadas por los 4 métodos en cuestión. Los armónicos de mayor magnitud son de 58.11 %, 7.82 %, 3.25 % y 3.12 %, corresponden al 3^{ro}, 5^{to}, 7^{mo} y 9^{no} orden respectivamente. Los 4 métodos presentan armónicos de idénticas magnitudes.

Obsérvese de la Tabla 4.2, que en términos de eficiencia computacional, el método DN-SC es notoriamente superior a los métodos DN, MDN y PV, siendo 6, 4 y 18.6 veces más rápido, respectivamente.

La Figura 4.9 muestra el voltaje distorsionado en el nodo 10. La distorsión de la forma de onda se debe principalmente al elemento no lineal conectado al nodo 10. La Figura 4.10 muestra el contenido armónico obtenido con los 4 métodos considerados. Obsérvese de la Figura 4.10 que el contenido armónico obtenido con los cuatro métodos es idéntico en magnitud.

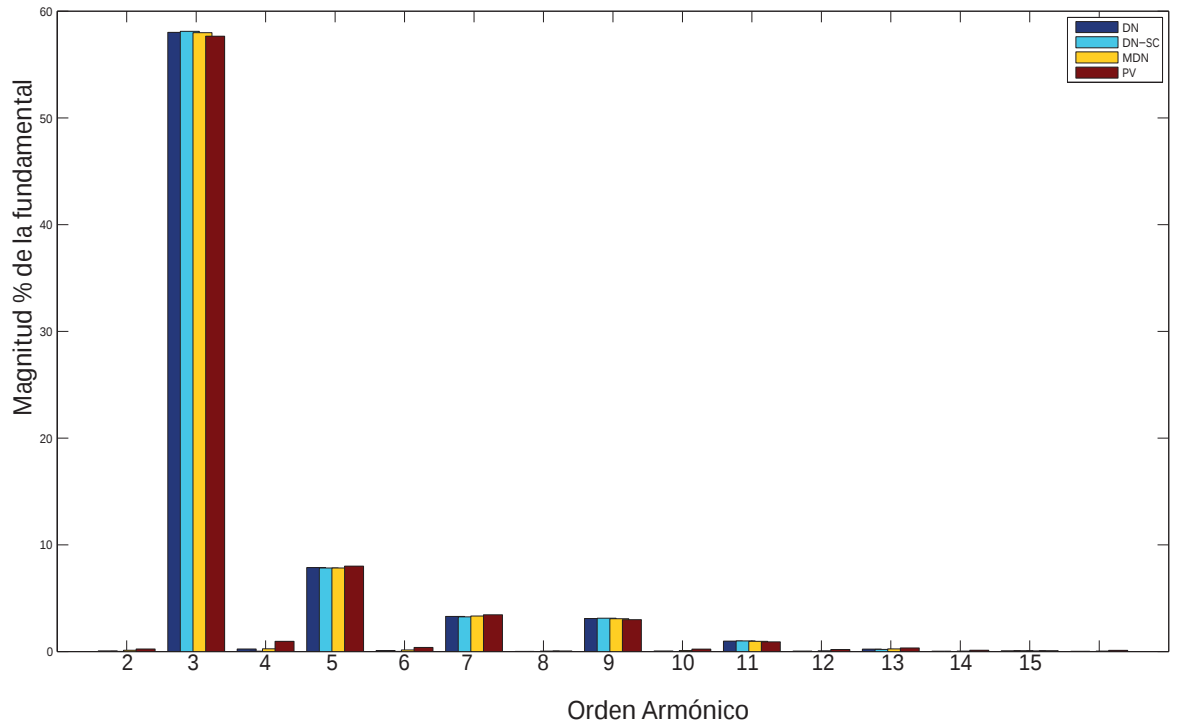


Figura 4.8: Espectro armónico de un periodo completo en estado estacionario de la forma de onda de ψ_{18} .

Tabla 4.2: Tiempos de CPU de métodos DN, DN-SC, MDN y PV. Sistema de prueba, Figura 4.6.

<i>Método</i>	<i>Tiempo en segundos</i>	N_p
DN	12.77	1024
DN-SC	2.09	204
MDN	8.83	512
PV	39.00	514

Cabe resaltar el hecho de que el método DN-SC permite determinar la solución en estado estacionario periódico utilizando el 20 % de pasos de integración de aquellos requeridos por el método de DN.

4.4. Sistema Modificado IEEE-57 Nodos

El siguiente caso de estudio es el sistema modificado IEEE de 57 nodos. Este cuenta con 78 líneas de transmisión, se consideran 7 generadores y una rama magnetizante conectada en el nodo 57. En total este sistema cuenta con 143 variables de estado. Los parametros del sistema de ED que describe la dinámica de esta red

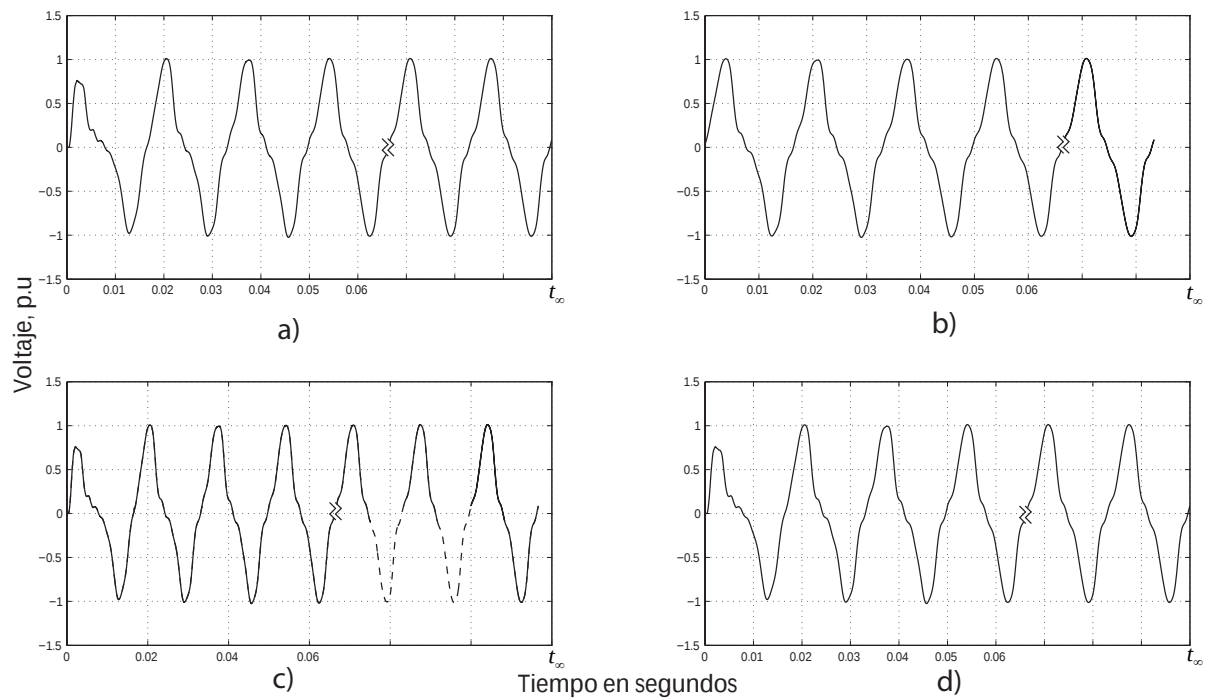


Figura 4.9: Comportamiento del voltaje medido en el nodo 10 del circuito de la Figura 4.6. a) DN, b) DN-SC, c) MDN, d) PV.

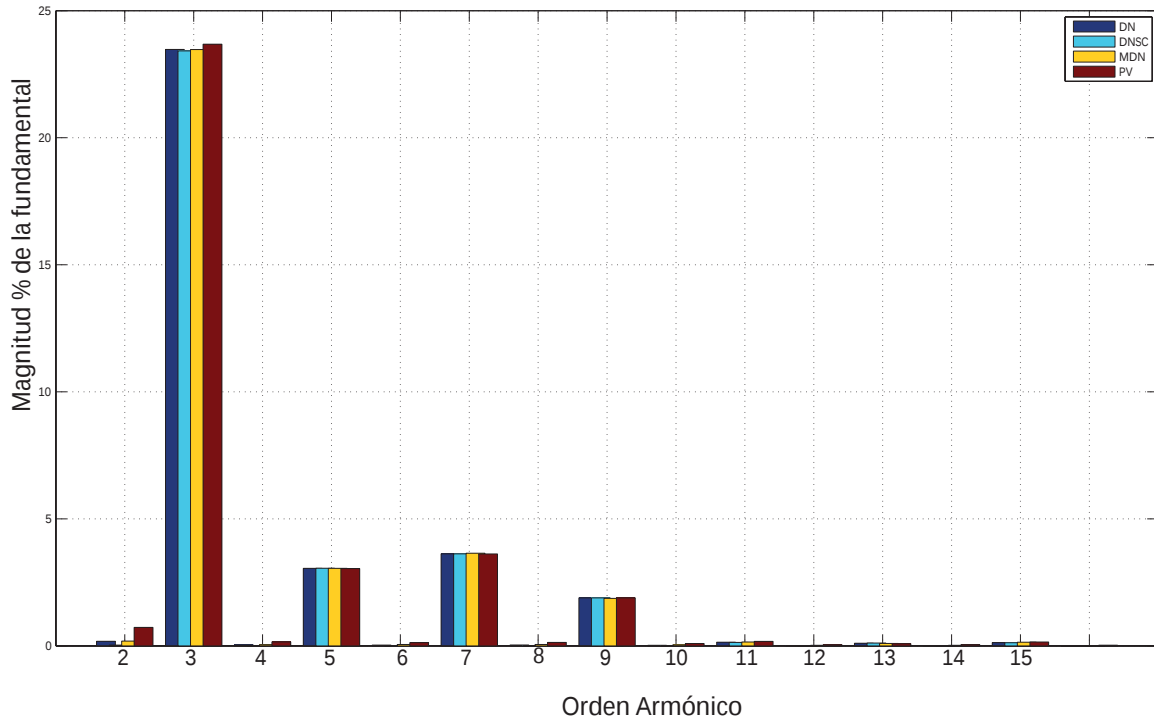


Figura 4.10: Espectro armónico de un periodo completo en estado estacionario de la forma de onda de v_{30} .

se muestra en el Apéndice C.

En la Figura 4.11 se muestra la evaluación en el tiempo del flujo en la rama magnetizante ψ_{136} conectada en el nodo 57, obtenido por los metodos de DN, DN-SC, MDN y PV. En el método de PV se utilizó un paso de integración máximo $\Delta t_{max} = 1.62 \times 10^{-5}$ y mínimo $\Delta t_{min} = \Delta t_{max}/2$.

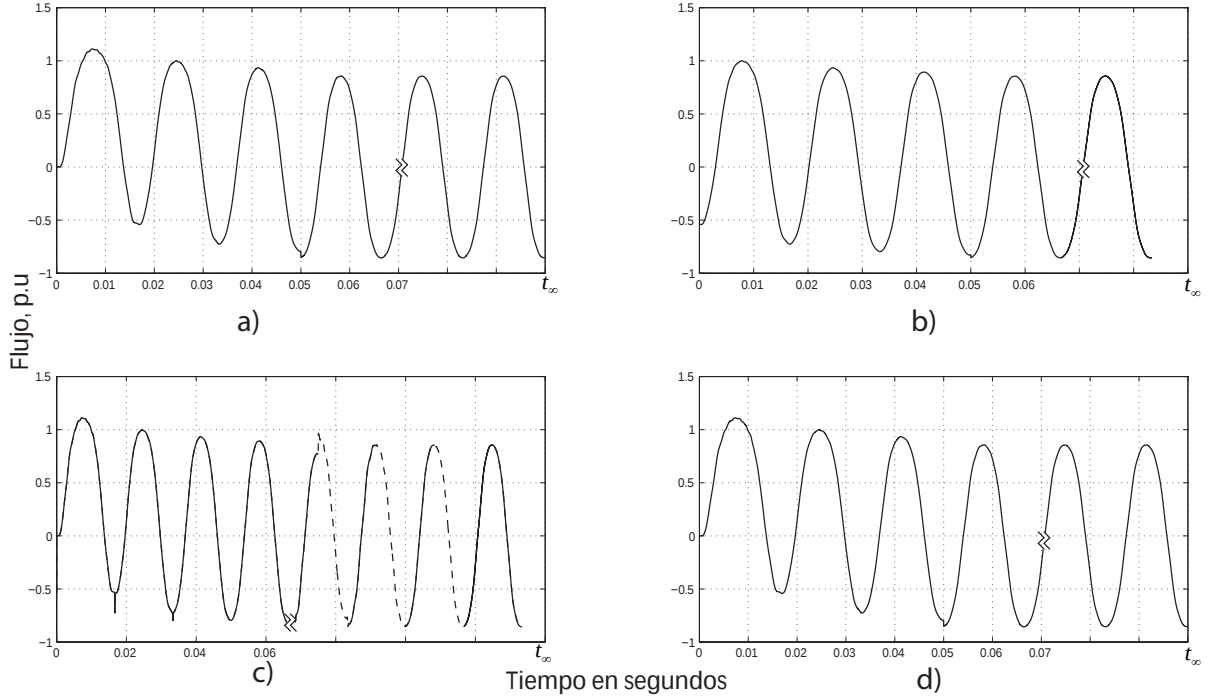


Figura 4.11: Comportamiento del flujo de la rama magnetizante ψ_{136} . a) DN, b) DN-SC, c) MDN, d) PV.

Como se observa en la Figura 4.11 b), al método de DN-SC le toma menos ciclos para llegar al estado estacionario periódico, ya que sólo se consideran 3 ciclos iniciales, 1 ciclo base y 1 ciclo en estado estacionario periódico, siendo un total de 5 ciclos completos.

La Figura 4.12 muestra el contenido armónico de las formas de onda de la Figura 4.11, obtenido con los cuatro métodos; nuevamente los resultados obtenidos son coincidentes. Sin embargo, el método de PV reporta un 2^{do} armónico de magnitud 0.17 %, esto se debe a que el método de PV introduce un error numérico en la solución del estado estacionario periódico del sistema.

En la Tabla 4.3 se lista el tiempo de CPU que requirió cada método para llegar al estado estacionario periódico, así como el número de pasos de integración

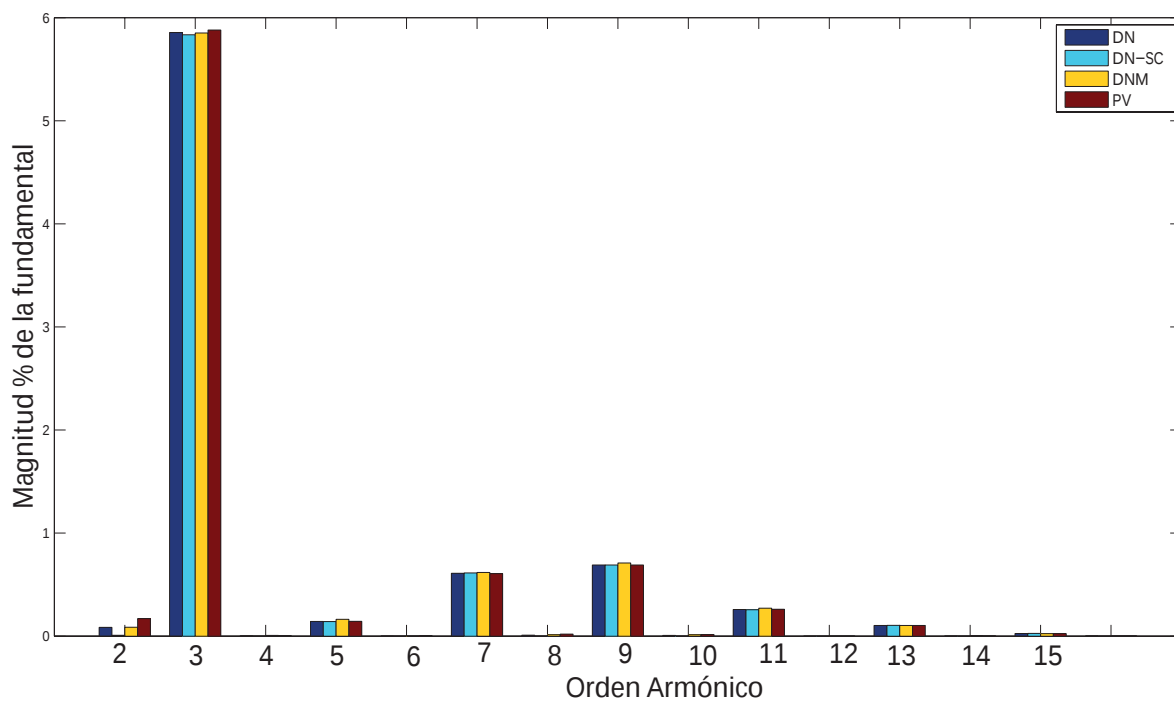


Figura 4.12: Espectro armónico de un período completo en estado estacionario de la forma de onda de ψ_{136} .

utilizado.

Tabla 4.3: Tiempos de CPU de métodos DN, DN-SC, MDN y PV. Sistema de prueba modificado IEEE 57 nodos.

Método	Tiempo en segundos	N_p
DN	47.63	1024
DN-SC	10.0	204
MDN	37.62	512
PV	235.14	1026

En la Figura 4.13 se presenta la forma de onda del voltaje en el nodo 57 obtenida con los cuatro métodos.

La Figura 4.14 muestra el espectro armónico del voltaje de un periodo completo en estado estacionario. Los armónicos de mayor magnitud son el 3^{ro}, 5^{to}, 7^{mo}, 9^{no} y 11^{vo} siendo de 27.36 %, 0.94 %, 5.65 %, 6.89 % y 3.20 %, respectivamente. Para este caso en particular, se presenta una elevada saturación de la rama magnetizante, reflejada en las elevadas magnitudes de armónicos individuales, incluyendo aquellos de orden superior tales como el 9^{no} y 11^{vo}.

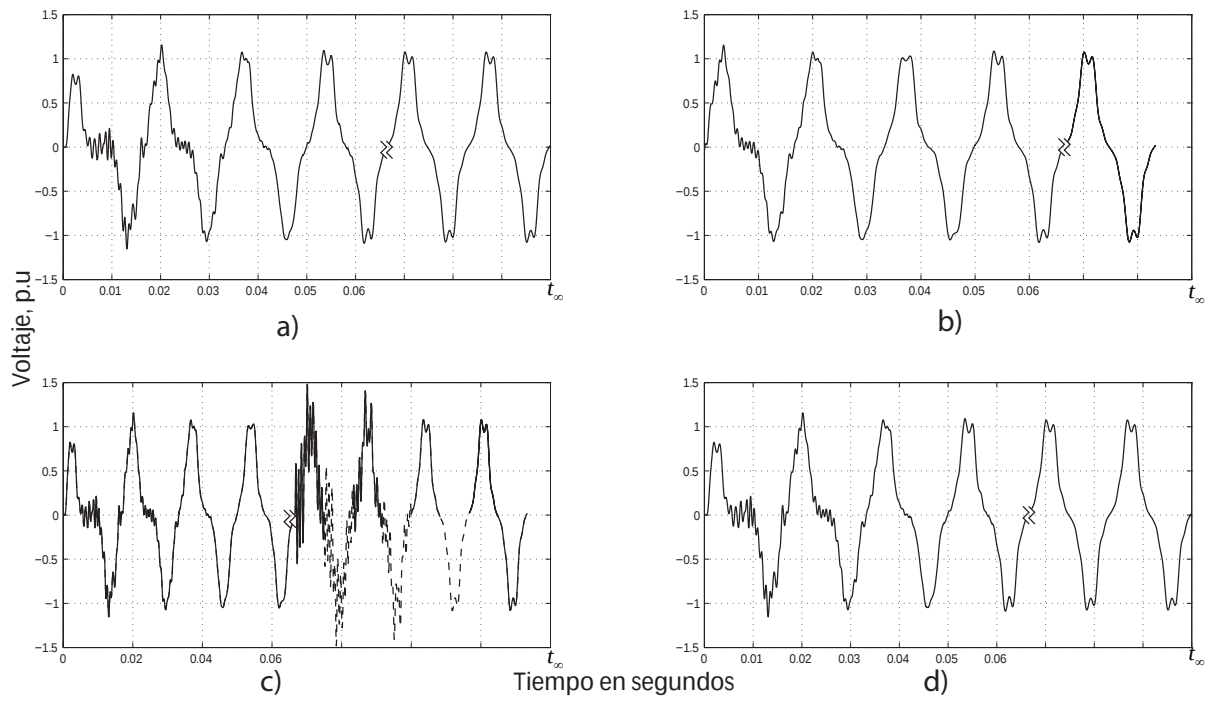


Figura 4.13: Comportamiento del voltaje en el nodo 57. a) DN, b) DN-SC, c) MDN, d) PV.

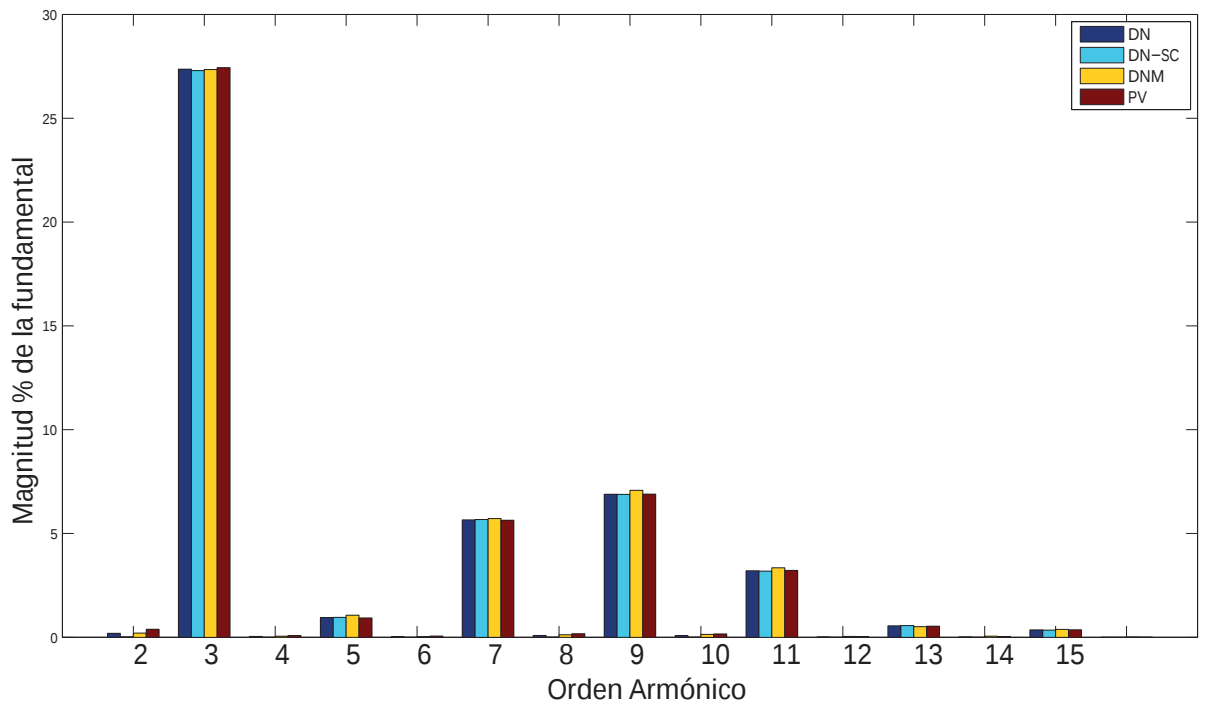


Figura 4.14: Espectro armónico de un período completo en estado estacionario de la forma de onda de v_{135} .

En relación a la eficiencia computacional, de la Tabla 4.3 se observa que el método de DN-SC es 4 veces más rápido que el método DN y 3 veces más que

el método MDN. El método DN-SC requiere procesar únicamente el 20 % de los pasos de integración requeridos por el método DN.

4.5. Sistema Modificado IEEE-118 Nodos

Como último caso de estudio se presenta el sistema modificado IEEE de 118 nodos. Este sistema cuenta con 184 líneas de transmisión, 53 generadores y 9 ramas magnetizantes. En total se tiene un sistema con 364 variables de estado. Debido a sus dimensiones esta red no se muestran en esta tesis. En la Figura 4.15 se presenta la evaluación en el tiempo hasta el ciclo base de la forma de onda del voltaje en el nodo 1 del sistema. Como se observa en la Figura 4.15 los cuatro métodos obtienen una respuesta idéntica, siendo el método de DN-SC el que requiere de menos ciclos completos para llegar al estado estacionario periódico.

Aplicando la Transformada Discreta de Fourier descrita en el Apéndice D, se obtiene el contenido armónico de un periodo completo en estado estacionario periódico de las formas de onda de la Figura 4.15. En este caso particular se observa una desviación, aproximadamente del 0.23 %, con respecto a la respuesta obtenida con el método de PV para la 3^{ra} armónica. Además, nuevamente el método de PV introduce un error numérico en la solución del estado estacionario periódico del sistema, este error se refleja en un 2^{do} armónico de magnitud 0.28 % de la fundamental, como se observa en la Figura 4.16.

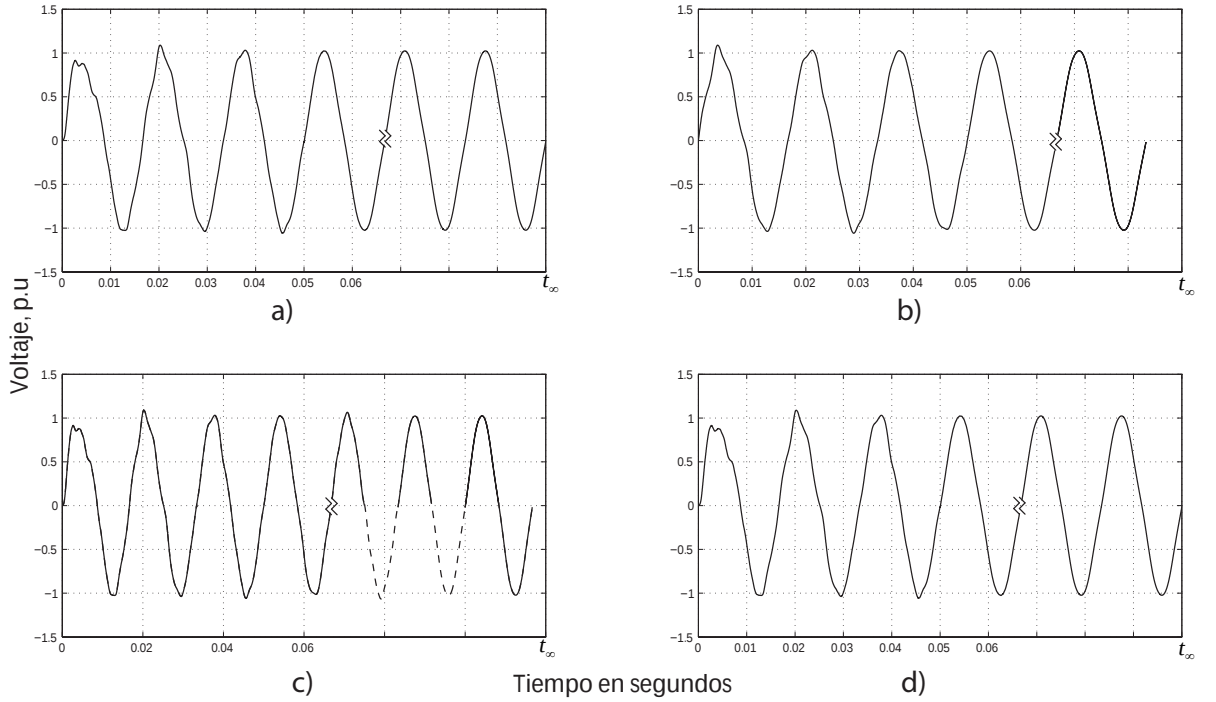


Figura 4.15: Comportamiento del voltaje en el nodo 1. a) DN, b) DN-SC, c) MDN, d) PV.

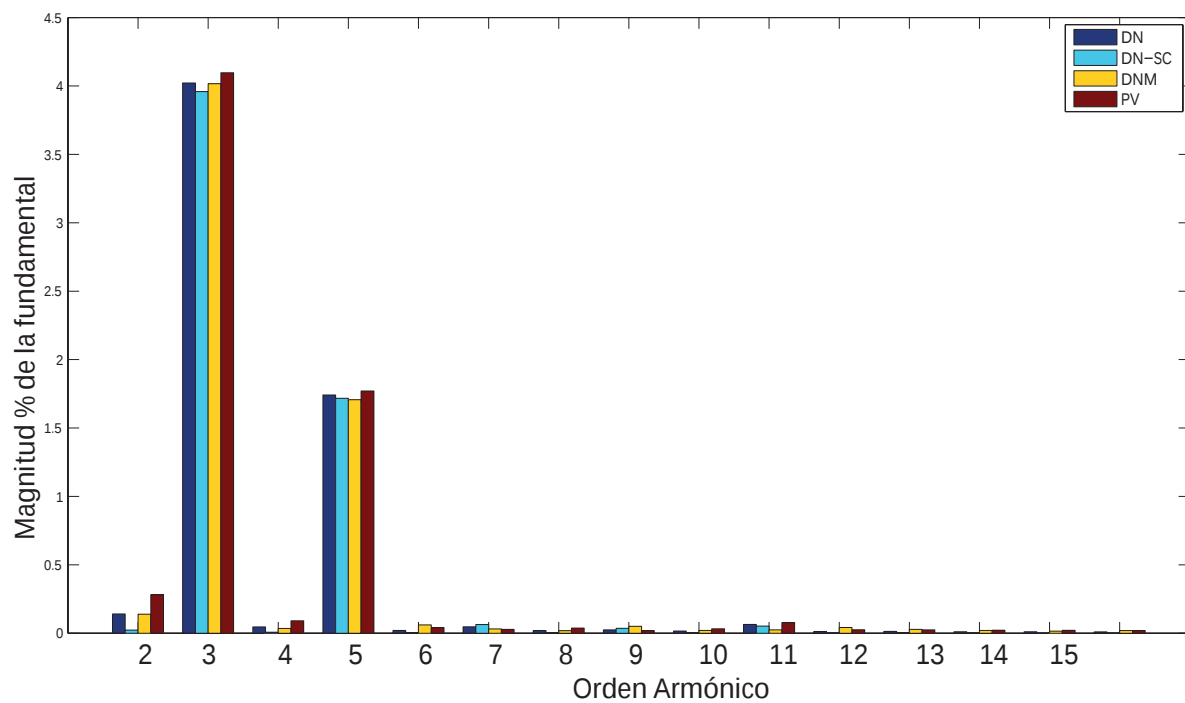


Figura 4.16: Espectro armónico de un período completo en estado estacionario de la forma de onda de la Figura 4.15.

La Tabla 4.4, muestra que en relación al esfuerzo computacional requerido por los métodos considerados, el método DN-SC es 7.3, 5.8 y 26 veces más rápido que los métodos DN, MDN y PV, respectivamente.

Tabla 4.4: Tiempos de CPU de métodos DN, DN-SC, MDN y PV. Sistema de prueba modificado IEEE 118 nodos.

Método	Tiempo en segundos	N_p
DN	224.62	1024
DN-SC	30.73	204
MDN	180.73	512
PV	801.38	1026

Un comportamiento similar al del voltaje se puede apreciar de la Figura 4.17 en donde se muestra la evolución en el tiempo del enlace de flujo ψ_{303} en la rama magnetizante.

En a Figura 4.18 se muestra su contenido armónico, de donde se observa un comportamiento similar al de la Figura 4.16.

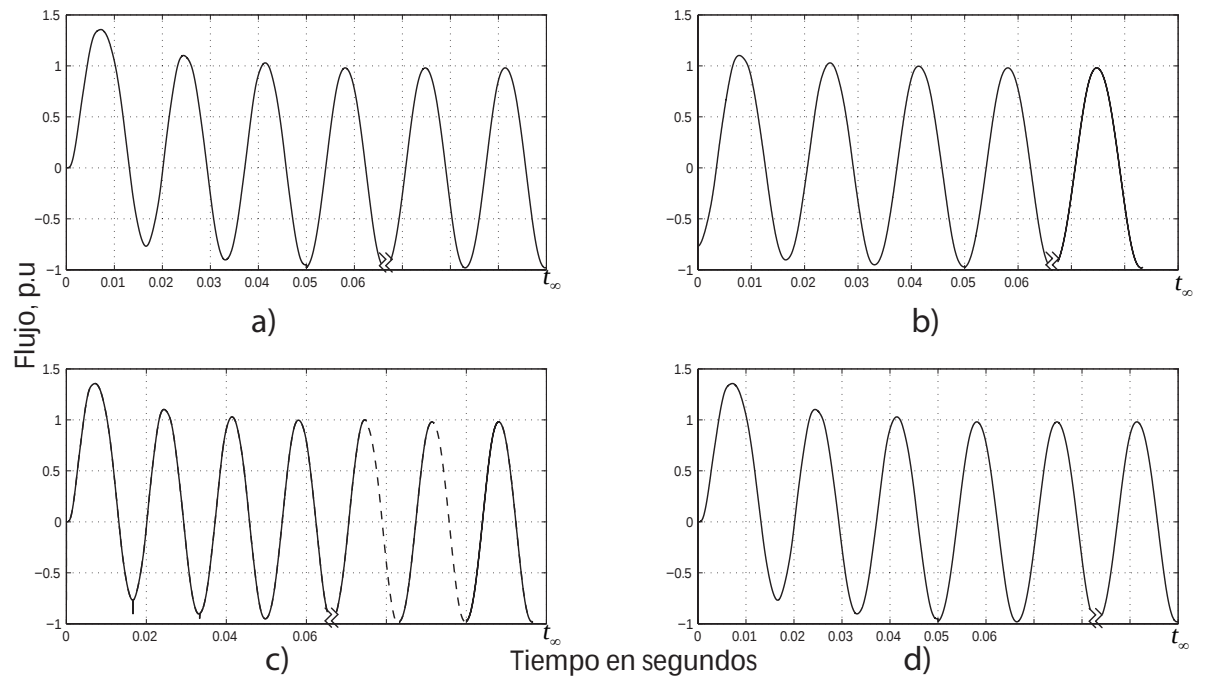


Figura 4.17: Comportamiento del flujo de una rama magnetizante. a) DN, b) DN-SC, c) MDN, d) PV.

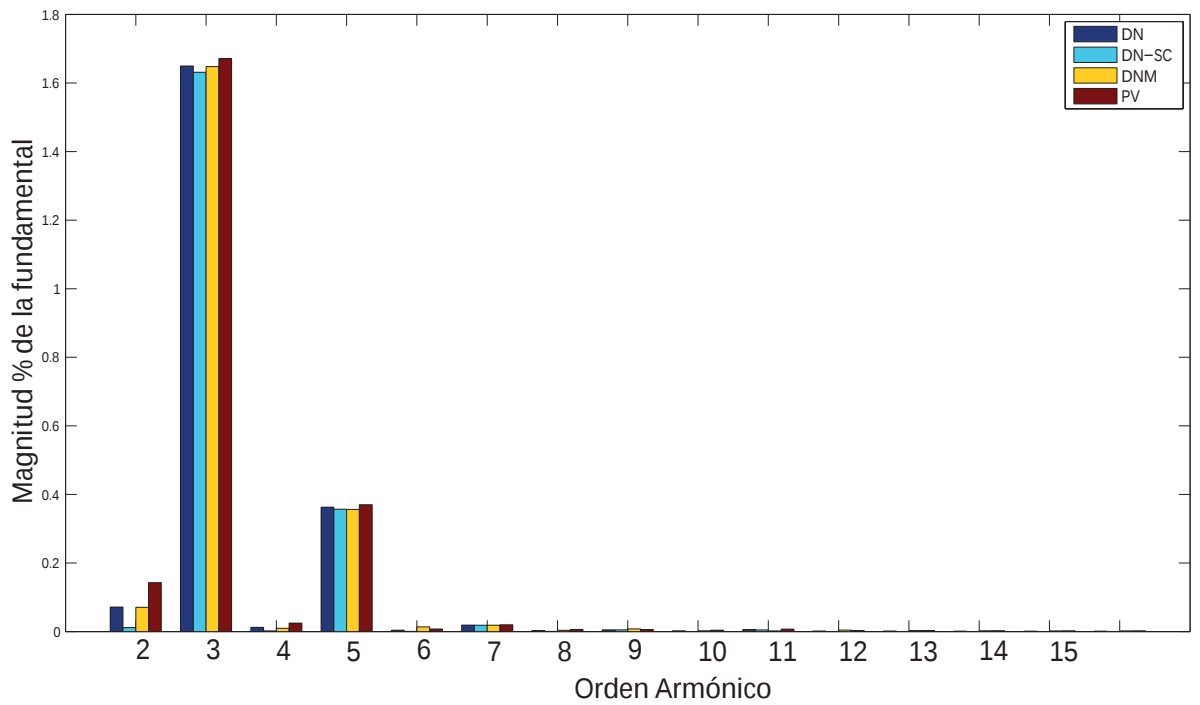


Figura 4.18: Espectro armónico de un período completo en estado estacionario de la forma de onda de ψ_{303} .

4.6. Conclusiones

El método propuesto de DN-SC presenta resultados satisfactorios, obteniendo el estado estacionario periódico. Como se mostró en los casos de estudio presentados en este capítulo el método de DN-SC obtuvo en todos los casos de estudio el menor tiempo, así como el menor número de puntos de integración por periodo.

En todos los casos de estudio presentados en esta tesis se observa que el método de DN-SC obtiene el estado estacionario periódico en 5 ciclos completos. Esto se debe a que sólo se consideró 3 ciclos iniciales, 1 ciclo base y 1 ciclo en estado estacionario periódico en el que se aplica la metodología de los Splines Cúbicos. El error máximo del método DN-SC con respecto al método de DN fue de 0.1 %.

De los resultados obtenidos en los casos de estudio reportados en este capítulo, se puede concluir que en promedio, el método DN-SC fué 6 , 4 y 18 veces más rápido que los métodos DN, MDN y PV, respectivamente, reflejándose en una notable superioridad en la eficiencia computacional asociada con el cálculo de la solución periódica en estado estacionario de las redes eléctricas analizadas y, por lo tanto, en una notoria reducción en el esfuerzo computacional requerido por el proceso de solución.

El método de PV introduce un error numérico en la respuesta obtenida por los sistemas IEEE de 57 y 118 nodos, este error se presenta en un 2^{do} armónico siendo en algunos casos de magnitud considerable. Como se observa en las Figuras 4.12, 4.14 y las Figuras 4.18, 4.16 respectivamente. Este error se debe a que el método internamente varía el paso de integración entre Δt_{min} y Δt_{max} . Un caso particular es el sistema IEEE de 57 nodos, en donde el método obtiene el estado estacionario periódico con $N_p=1026$.

Conclusiones Generales y Trabajos Futuros

5.1. Conclusiones Generales

Una vez concluida la investigación reportada en esta tesis, se presentan las siguientes conclusiones, que son resultado de la experiencia recabada por el autor de esta tesis, durante su desarrollo.

- En esta tesis se ha propuesto una combinación del método de DN y SC para obtener el estado estacionario periódico de redes de potencia utilizando sólo un número reducido de pasos de integración; en comparación al requerido por métodos convencionales para solución numérica.
- Se ha reducido considerablemente el tiempo de cómputo para llegar al estado estacionario periódico, respecto a los otros métodos citados.
- De los resultados obtenidos en los casos de estudio reportados en este capítulo, se puede concluir que en promedio, el método DN-SC fue 6 , 4 y 18 veces más rápido que los métodos DN, DNM y PV, respectivamente, reflejándose en una notable superioridad en la eficiencia computacional asociada con el cálculo de la solución periodica en estado estacionario de las redes eléctricas analizadas y, por lo tanto, en una notoria reducción en el esfuerzo computacional requerido por el proceso de solución.
- El error máximo del método DN-SC con respecto al método de DN fue de 0.1 %.

- Se ha propuesto la aplicación del método de interpolación por Splines Cúbicos para suavizar la forma de onda en estado estacionario periódico obtenida por el método DN-SC.

5.2. Trabajos Futuros

Durante la realización de esta tesis surgieron algunas inquietudes que pudieran ayudar a expandir esta investigación, las cuales se presentan a continuación algunas sugerencias de posibles trabajos de investigación a desarrollar en el mismo campo del conocimiento,

- Aplicación de tecnología de procesamiento en paralelo al método DN-SC propuesto en esta tesis, con la finalidad de reducir el tiempo de cómputo.
- En la actualidad existe una vasta literatura de métodos de interpolación, por lo que, resulta natural probar con otros metodos de interpolación. Eligiendo este método acorde al tipo de problema y de respuesta que se espera obtener.
- Aplicación de SC al método DNM para obtener el método DNM-SC que potencialmente podría resultar en un método mejorado del DN-SC propuesto en esta tesis.

Método Newton

El Método Newton es uno de los métodos mas poderosos y bien conocidos para resolver el problema de encontrar la raíz de una ecuación no lineal. Hay muchas maneras de introducir al método Newton [Burden y Faires, 2001]. Si solo queremos un algoritmo, podemos considerar la técnica gráfica como se hace a menudo en cálculo. Otra posibilidad es tratar el Método Newton como una técnica para obtener una rápida convergencia, la cual ofrece en comparación con otros métodos numéricos. Una tercera forma de introducir el Método Newton es como se describe a continuación, esta se basa en la expansión en serie de Taylor.

Supongamos que tenemos una función $f \in [a, b]$. Sea $\bar{x} \in [a, b]$ una aproximación a p tal que $f(p) = 0$, $f(\bar{x}) \neq 0$, $|p - \bar{x}|$ es un valor muy pequeño. Consideremos la expansión en serie de Taylor de $f(x)$ cerca de $\bar{x}$,

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2}f''(\xi(x)), \quad (\text{A.1})$$

de donde $\xi(x)$ se encuentra en medio de x y $\bar{x}$. De ahí que $f(p) = 0$, esta ecuación con $x = p$ da

$$0 = f(\bar{x}) + (p - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(p - \bar{x})^2}{2}f''(\xi(p)). \quad (\text{A.2})$$

El Método Newton surge de asumir que $|p - \bar{x}|$ es pequeño, entonces el término $(p - \bar{x})^2$ es más pequeño, de modo que de la expresión anterior solo nos queda

$$0 \approx f(\bar{x}) + (p - \bar{x})f'(\bar{x}). \quad (\text{A.3})$$

Despejando p de la ecuación anterior tenemos,

$$p \approx \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}. \quad (\text{A.4})$$

La expresión anterior se conoce como el Método Newton, el cual comienza con una aproximación inicial p_0 y genera la secuencia $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, mediante

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \quad n \geq 1. \quad (\text{A.5})$$

Usando una aproximación similar para el caso de n -dimensiones, se tiene de forma matricial

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{J}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.6})$$

de la ecuación anterior reconocemos el jacobiano como $\mathbf{J}(\mathbf{x})$. A la expresión anterior se le conoce como el Método Newton para sistemas no lineales [Nocedal y Wright, 1999] y se espera tenga una convergencia cuadrática.

Apéndice B

Modelado de Elementos

Línea de Transmisión

El modelo de la línea de transmisión utilizado en esta tesis, lo forman una resistencia R en serie con una inductancia L , tal como se muestra en la Figura B.1.



Figura B.1: Modelo de la Línea de Transmisión.

Aplicando la Ley de Voltaje de Kirchhoff (LVK) al circuito de la Figura B.1, se tiene:

$$\frac{di}{dt} = \frac{V_A - V_B}{L} - \frac{iR}{L} \quad (\text{B.1})$$

Generador

El siguiente modelo corresponde al del generador el cual está representado por una fuente de voltaje senoidal en serie con un inductor, en la Figura B.2 se presenta el modelo del generador

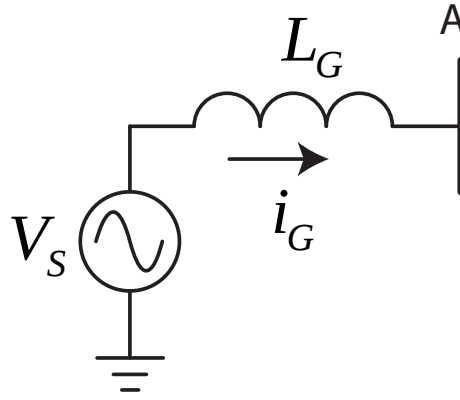


Figura B.2: Modelo del Generador.

Aplicando la LVK al circuito de la Figura B.2, y despejando di_G se obtiene:

$$\frac{di_G}{dt} = \frac{V_S - V_A}{L_G} \quad (\text{B.2})$$

El voltaje en terminales del generador esta determinada por la siguiente ecuación

$$V_S = M \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{B.3})$$

de donde: M representa el valor pico del voltaje. ϕ ángulo de fase del voltaje. ω representa la velocidad angular.

Banco de Capacitores

El modelo del banco de capacitores se considera conectado a un nodo del sistema como se muestra en la Figura B.3, en este se consideran las corrientes que llegan al nodo, así como las corrientes que salen del nodo, a excepción de la corriente en el capacitor.

de donde: $\sum i_{in}$ es la suma de corrientes que inciden en el nodo. $\sum i_{out}$ suma de corrientes que salen del nodo.

Aplicando la Ley de Corriente de Kirchhoff (LCK) en el nodo, tenemos

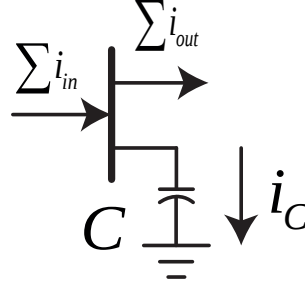


Figura B.3: Modelo del banco de capacitores.

$$\sum i_{in} = \sum i_{out} + i_C \quad (\text{B.4})$$

de la ecuación anterior tenemos la expresión para el voltaje

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{\sum i_{in} - \sum i_{out}}{C} \quad (\text{B.5})$$

Rama Magnetizante

En la Figura B.4 se presenta el modelo de la rama magnetizante conectada a un nodo del sistema.

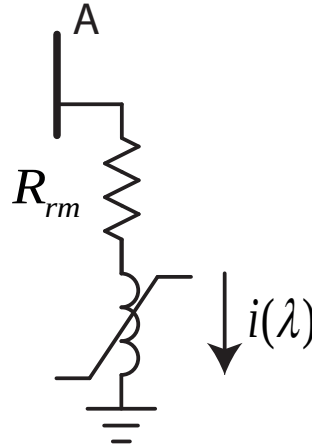


Figura B.4: Modelo de la Rama Magnetizante.

Con la ayuda de la LVK aplicada al circuito de la Figura B.4, tenemos que

$$V_A = V_R + V_L \quad (\text{B.6})$$

pero sabemos que,

$$V_R = R_{rm}i(\lambda) \quad (\text{B.7})$$

y también que

$$V_L = \frac{d\lambda}{dt}. \quad (\text{B.8})$$

Sustituyendo la ecuación (B.7) y (B.8) en la ecuación (B.6) y despejando $d\lambda/dt$ tenemos

$$\frac{d\lambda}{dt} = V_A - R_{rm}i(\lambda)$$

El efecto de la saturación en la rama magnetizante es representado por un polinomio de grado n . El comportamiento no lineal de la rama magnetizante está expresado por medio de la siguiente relación

$$i(\lambda) = \lambda^n. \quad (\text{B.9})$$

En todos los casos de estudio donde consideramos ramas magnetizantes n tiene un valor de 5.

Datos de los Casos de Estudio

En esta sección se muestran la representación en variables de estados de los casos de estudio con los que se trabaja en esta tesis. Todos los sistemas ya están reportados en la literatura, algunos de ellos son sistemas modificados de la IEEE. Los valores de los elementos asociados a los sistemas estan en p.u.

Sistema con 5 Variables de Estados

El primer sistema de EDOs describe el comportamiento de una pequeña red Figura 2.1 reportada en [Ramirez, 2011], de este sistema x_1 y x_3 representan las corrientes en los inductores L_o y L respectivamente. x_2 y x_4 son los voltajes en los capacitores. Se considera una carga no lineal como φ .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_o}{L_o} & -\frac{1}{L_o} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 & -\frac{1}{C} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & -\frac{1+\varphi^2}{C} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_o} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e. \quad (C.1)$$

El sistema anterior tiene una representación en espacio de estados $\dot{x} = Ax + Bu$. Con los siguientes parámetros en p.u: $R_o = 0.1$, $L_o = 0.03$, $R = L = C = 0.2$, $w_o = 2\pi 60$ y una fuente $e = \sin(w_o t)$. La carga no lineal se toma como una relación de corriente/flujo $i(t) = \varphi + \varphi^3$.

Sistema de 3 Nodos

El siguiente sistema es una pequeña red mostrada en la Figura 4.1. Esta cuenta con tres nodos y tres líneas de transmisión en las cuales interesa conocer los enlaces de flujo, representados por las variables de estado ψ_1, ψ_2 y ψ_3 . Las variables ψ_4 y ψ_5 representan los enlaces de flujo en las ramas magnetizantes. También se tiene dos capacitores en los cuales medimos el voltaje v_{C1} y v_{C2} . Finalmente se tiene un generador representado por $v_s = \text{sen}(wt)$ con $w = 2\pi 60$.

La carga no lineal se toma como una relación de corriente/flujo $i(t) = \varphi^3$.

El sistema de EDOs que genera esta red también tiene una representación en espacio de estados, como se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \\ \dot{\psi}_3 \\ \dot{\psi}_4 \\ \dot{\psi}_5 \\ \dot{v}_{C1} \\ \dot{v}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{R_3}{L_3} & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4\psi_4^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -R_5\psi_5^2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{C_1 L_1} & 0 & -\frac{1}{C_1 L_3} & -\frac{\psi_4^2}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2 L_2} & -\frac{1}{C_2 L_3} & 0 & -\frac{\psi_5^2}{C_2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_s \\ v_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Los parámetros del sistema anterior se presentan en la Tabla C.1.

Tabla C.1: Parametros en p.u. del sistema de 3 nodos.

Resistencia	Inductancia	Capacitor
$R_1 = 0,01$	$L_1 = 0,1$	$C_1 = 0,08$
$R_2 = 0,005$	$L_2 = 0,15$	$C_2 = 0,07$
$R_3 = 0,015$	$L_3 = 0,2$	
$R_4 = 0,05$		
$R_5 = 0,08$		

Sistema Modificado IEE-14 Nodos

El siguiente caso de estudio es un sistema de la IEEE de 14 nodos modificado, este cuenta con 20 líneas de transmisión en las cuales medimos el flujo de corriente que va de ψ_1 a ψ_{20} . También tiene 14 capacitores y en estos medimos el voltaje representado por las variables v_{C21} a v_{C34} . Dos elementos no lineales representados por ramas magnetizantes se encuentran conectados en los nodos 2 y 10, en estas nos interesa conocer los enlaces de flujo ψ_{35} y ψ_{36} en las inductancias no lineales. La carga no lineal se toma como una relación de corriente/flujo $i(t) = \varphi^3$. Finalmente se tienen 2 generadores conectados en los nodos 1 y 2.

Los parámetros del sistema se presentan en la Tabla C.2, en donde la columna de Elementos tenemos:

- 1.- Líneas de Transmisión
- 2.- Capacitores
- 3.- Ramas Magnetizantes
- 4.- Generadores

Sistema de la IEE-57 Nodos Modificado

El caso de estudio en turno es uno de la IEEE de 57 nodos modificado, este cuenta con 78 líneas de transmisión que van de ψ_1 a ψ_{78} . También cuenta con 56 capacitores de los cuales nos interesa conocer el voltaje de v_{C79} a v_{C135} . Una rama magnetizante en la que nos interesa conocer el flujo de corriente que circula por el inductor no lineal ψ_{136} y 7 generadores en los que nos interesa conocer el voltaje que va de v_{S137} a v_{S143} .

La carga no lineal se toma como una relación de corriente/flujo $i(t) = \varphi^3$.

Los parámetros del sistema se presentan en la Tabla C.3, en donde la columna de Elementos tenemos:

- 1.- Líneas de Transmisión
- 2.- Capacitores
- 3.- Ramas Magnetizantes
- 4.- Generadores

Tabla C.2: Parametros en pu del sistema Modificado IEEE-14 nodos.

<i>Elemento</i>	<i>Nodo 1</i>	<i>Nodo 2</i>	<i>R</i>	<i>X_L</i>	<i>X_C</i>
1	1	2	0.01938	0.05917	
1	1	5	0.05403	0.22304	
1	2	3	0.04699	0.19797	
1	2	4	0.05811	0.17632	
1	2	5	0.05695	0.17388	
1	3	4	0.06701	0.17103	
1	4	5	0.01335	0.04211	
1	4	7	0.00001	0.1	
1	4	9	0.01	0.1	
1	5	6	0.01	0.1	
1	6	11	0.09498	0.1989	
1	6	12	0.12291	0.25581	
1	6	13	0.06615	0.13027	
1	7	8	0.01	0.1	
1	7	9	0.01	0.1	
1	9	10	0.03181	0.0845	
1	9	14	0.12711	0.27038	
1	10	11	0.08205	0.19207	
1	12	13	0.22092	0.19988	
1	13	14	0.17093	0.34802	
2	1	0	0.1		
2	2	0	0.1		
2	3	0	0.1		
2	4	0	0.01		
2	5	0	0.01		
2	6	0	0.1		
2	7	0	0.1		
2	8	0	0.1		
2	9	0	0.01		
2	10	0	0.1		
2	11	0	0.1		
2	12	0	0.1		
2	13	0	0.1		
2	14	0	0.1		
3	10	0	0.1	0.1	3
3	11	0	0.1	0.1	3
3	12	0	0.1	0.1	3
3	13	0	0.1	0.1	3
4	1	0	1	0	0.001
4	2	0	1	0	0.001
4	3	0	1	0	0.001
4	6	0	1	0	0.001
4	8	0	1	0	0.001

Tabla C.3: Parametros en pu del sistema Modificado IEEE-57 nodos.

<i>Elemento</i>	<i>Nodo 1</i>	<i>Nodo 2</i>	<i>R</i>	<i>X_L</i>	<i>X_C</i>
1	1	2	0.0083	0.028	
1	1	15	0.0178	0.091	
1	1	16	0.0454	0.206	
1	1	17	0.0238	0.108	
1	2	3	0.0298	0.085	
1	3	4	0.0112	0.0366	
1	3	15	0.0162	0.053	
1	4	5	0.0625	0.132	
1	4	6	0.043	0.148	
1	4	18	0.01	0.555	
1	5	6	0.0302	0.0641	
1	6	7	0.02	0.102	
1	6	8	0.0339	0.173	
1	7	8	0.0139	0.0712	
1	7	29	0.01	0.0648	
1	8	9	0.0099	0.0505	
1	9	10	0.0369	0.1679	
1	9	11	0.0258	0.0848	
1	9	12	0.0648	0.295	
1	9	13	0.0481	0.158	
1	9	55	0.01	0.1205	
1	10	12	0.0277	0.1262	
1	10	51	0.01	0.0712	
1	11	13	0.0223	0.0732	
1	11	41	0.01	0.749	
1	11	43	0.01	0.153	
1	12	13	0.0178	0.058	
1	12	16	0.018	0.0813	
1	12	17	0.0397	0.179	
1	13	14	0.0132	0.0434	
1	13	15	0.0269	0.0869	
1	13	49	0.01	0.191	
1	14	15	0.0171	0.0547	
1	14	46	0.01	0.0735	
1	15	45	0.01	0.1042	
1	18	19	0.461	0.685	
1	19	20	0.283	0.434	
1	20	21	0.01	0.7767	
1	21	22	0.0736	0.117	
1	22	23	0.0099	0.0152	
1	22	38	0.0192	0.0295	
1	23	24	0.166	0.256	
1	24	25	0.01	1.182	
1	24	26	0.01	0.0473	
1	25	30	0.135	0.202	
1	26	27	0.165	0.254	
1	27	28	0.0618	0.0954	
1	28	29	0.0418	0.0587	

<i>Elemento</i>	<i>Nodo 1</i>	<i>Nodo 2</i>	<i>R</i>	<i>X_L</i>	<i>X_C</i>
1	29	52	0.1442	0.187	
1	30	31	0.326	0.497	
1	31	32	0.507	0.755	
1	32	33	0.0392	0.036	
1	32	34	0.01	0.953	
1	34	35	0.052	0.078	
1	35	36	0.043	0.0537	
1	36	37	0.029	0.0366	
1	36	40	0.03	0.0466	
1	37	38	0.0651	0.1009	
1	37	39	0.0239	0.0379	
1	38	44	0.0289	0.0585	
1	38	48	0.0312	0.0482	
1	38	49	0.115	0.177	
1	39	57	0.01	1.355	
1	40	56	0.01	1.195	
1	41	42	0.207	0.352	
1	41	43	0.01	0.412	
1	41	56	0.553	0.549	
1	42	56	0.2125	0.354	
1	44	45	0.0624	0.1242	
1	46	47	0.023	0.068	
1	47	48	0.0182	0.0233	
1	48	49	0.0834	0.129	
1	49	50	0.0801	0.128	
1	50	51	0.1386	0.22	
1	52	53	0.0762	0.0984	
1	53	54	0.1878	0.232	
1	54	55	0.1732	0.2265	
1	56	57	0.174	0.26	
2	1	0	0.1		
2	2	0	0.1		
2	3	0	0.1		
2	4	0	0.1		
2	5	0	0.1		
2	6	0	0.1		
2	7	0	0.1		
2	8	0	0.1		
2	9	0	0.1		
2	10	0	0.1		
2	11	0	0.1		
2	12	0	0.1		
2	13	0	0.1		
2	14	0	0.1		
2	15	0	0.1		
2	16	0	0.1		
2	17	0	0.1		
2	18	0	0.1		
2	19	0	0.1		
2	20	0	0.1		

<i>Elemento</i>	<i>Nodo 1</i>	<i>Nodo 2</i>	<i>R</i>	<i>X_L</i>	<i>X_C</i>
2	21	0	0.1		
2	22	0	0.1		
2	23	0	0.1		
2	24	0	0.1		
2	25	0	0.1		
2	26	0	0.1		
2	27	0	0.1		
2	28	0	0.1		
2	29	0	0.1		
2	30	0	0.1		
2	31	0	0.1		
2	32	0	0.1		
2	33	0	0.1		
2	34	0	0.1		
2	35	0	0.1		
2	36	0	0.1		
2	37	0	0.1		
2	38	0	0.1		
2	39	0	0.1		
2	40	0	0.1		
2	41	0	0.1		
2	42	0	0.1		
2	43	0	0.1		
2	44	0	0.1		
2	45	0	0.1		
2	46	0	0.1		
2	47	0	0.1		
2	48	0	0.1		
2	49	0	0.1		
2	50	0	0.1		
2	51	0	0.1		
2	52	0	0.1		
2	53	0	0.1		
2	54	0	0.1		
2	55	0	0.1		
2	56	0	0.1		
2	57	0	0.1		
3	57	0	0.1	0.1	3
4	1	0	1	0	0.001
4	2	0	1.01	0	0.001
4	3	0	0.985	0	0.001
4	6	0	0.98	0	0.001
4	8	0	1.005	0	0.001
4	9	0	0.98	0	0.001
4	12	0	1.015	0	0.001

La Transformada de Fourier

Las series de Fourier reciben su nombre en honor a Jean Baptise Joseph Fourier (1768-1830) [Stuart, 1965]. En 1822, Fourier llegó a la conclusión de que cualquier función periódica práctica puede representarse como una suma de senoides. Tal representación, junto con el teorema de superposición, permite encontrar la respuesta de circuitos a entradas periódicas arbitrarias utilizando técnicas fasoriales.

Series de Fourier

Se dice que una función $f(t)$ tiene periodo T o que es periódica de periodo T si para todo t , $f(t + nT) = f(t)$, siendo T una constante positiva y n un entero. El mínimo valor de $T > 0$ se llama periodo mínimo o simplemente periodo de $f(t)$ [R y Spiegel, 1991].

Ejemplo D.1. La función $f(t) = \text{sen}(t)$ tiene periodos en $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$, puesto que $\text{sen}(t + 2\pi)$, $\text{sen}(t + 4\pi)$, $\text{sen}(t + 6\pi)$, ..., son todos iguales a $\text{sen}(t)$. Como se observa en la Figura D.1.

Sea $f(t)$ definida en el intervalo $[-L, L]$ y fuera de este intervalo por $f(t + 2L) = f(t)$, esto es, supóngase que $f(t)$ tiene periodo $2L$. Por lo tanto, la serie de Fourier de $f(t)$ con frecuencia ω_0 se puede expresar como

$$\begin{aligned} f(t) = & a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \text{sen } \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \text{sen } 2\omega_0 t + \\ & a_3 \cos 3\omega_0 t + b_3 \text{sen } 3\omega_0 t + \dots + a_n \cos n\omega_0 t + b_n \text{sen } n\omega_0 t. \end{aligned}$$

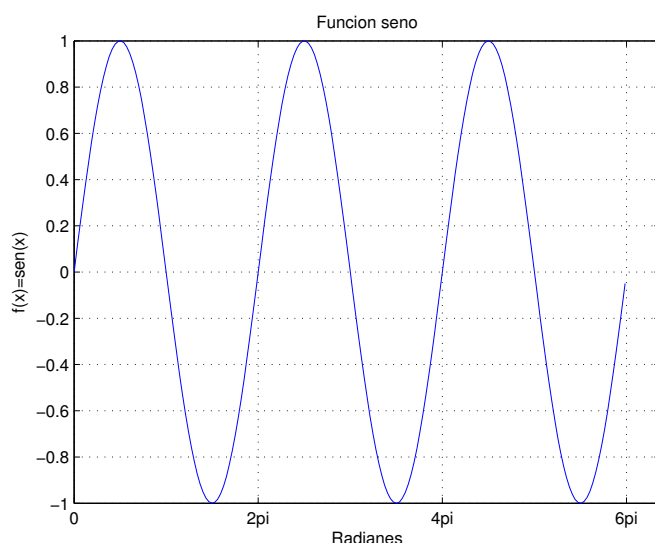


Figura D.1: Función periódica $f(x) = \text{sen}(x)$

Lo anterior se puede reescribir de la siguiente manera,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \text{sen } n\omega_0 t) \quad (\text{D.1})$$

con $\omega_0 = 2\pi/T$ ($T = 1/f$), que es la frecuencia fundamental en radianes por segundo. Los terminos $\cos n\omega_0 t$ y $\text{sen } n\omega_0 t$ corresponden a las armónicas n -ésimas de $f(t)$: ésta es una armónica impar si n es impar y es armónica par si n es par. Las constantes a_n y b_n son los *coeficientes de Fourier*

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (\text{D.2})$$

y

$$b_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \text{sen } n\omega_0 t dt \quad (\text{D.3})$$

con $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$. El coeficiente a_0 es la componente de *cd* o el valor promedio de $f(t)$ y se calcula como sigue

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (\text{D.4})$$

La ecuación (D.1) recibe el nombre de *serie trigonométrica de Fourier* de $f(t)$.

Una función que puede representarse mediante una serie de Fourier como en la

ecuación (D.1), debe cumplir ciertas condiciones, debido a que la serie de la ecuación (D.1) puede o no converger. Estas condiciones se verán en la sección que sigue.

Condiciones de Dirichlet

Supóngase que

1. $f(t)$ está definida y es uniforme excepto posiblemente en un número finito de puntos de $[-L, L]$.
2. $f(t)$ es periódica fuera de $[-L, L]$ con periodo $2L$.
3. $f(t)$ y $f'(t)$ son casicontinuas en $[-L, L]$.

Entonces la serie D.1 con coeficientes (D.2, D.3) y (D.4) convergen hacia

- a) $f(t)$ si t es un punto de continuidad
- b) hacia $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$ si t es punto de discontinuidad.

$f(t+0)$ y $f(t-0)$ son límites a la derecha y a la izquierda de $f(t)$ en t y representan $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} f(t+\epsilon)$ y $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} f(t-\epsilon)$, respectivamente. Las condiciones 1, 2 y 3 impuestas a $f(t)$ son suficientes, pero no necesarias, y en la práctica se cumplen por lo general. No se conocen todavía condiciones necesarias y suficientes para la convergencia de las series de Fourier y es interesante que la continuidad de $f(t)$ sola no sea bastante para asegurar la convergencia de una serie de Fourier.

Una forma alternativa de la ecuación (D.1) es la de *amplitud-fase*

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \quad (\text{D.5})$$

con

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \phi_n = \tan^{-1} \left(-\frac{b_n}{a_n} \right). \quad (\text{D.6})$$

También mediante las identidades de Euler

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta, \quad e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta \quad (\text{D.7})$$

la serie de Fourier para $f(t)$ se puede escribir como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (\text{D.8})$$

con

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (\text{D.9})$$

La igualdad D.8 supone que las condiciones de Dirichlet se cumplen y además que $f(t)$ es continua en t .

Integrales de Fourier

Supóngase las condiciones siguientes para $f(x)$:

1. $f(x)$ satisface las condiciones de Dirichlet en todo el intervalo finito $[-L, L]$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ converge, es decir, $f(x)$ es absolutamente integrable en $[-\infty, \infty]$.

El *teorema de la integral de Fourier* establece entonces que

$$f(x) = \int_0^{\infty} (A(\alpha) \cos(\alpha x) + B(\alpha) \sin(\alpha x)) d\alpha \quad (\text{D.10})$$

con

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx \quad (\text{D.11})$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx \quad (\text{D.12})$$

$$(\text{D.13})$$

(1) es válido si x es un punto de continuidad de $f(x)$. Si x es punto de discontinuidad hay que cambiar $f(x)$ por $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ como en el caso de las series de Fourier. Nótese que las condiciones anteriores son suficientes, pero no necesarias.

Transformada de Fourier

Considérese la forma exponencial de una serie de Fourier como en (D.8), es decir

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (\text{D.14})$$

donde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (\text{D.15})$$

con frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$. Sustituyendo C_n en (D.14)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t}. \quad (\text{D.16})$$

En el límite, cuando $T \rightarrow \infty$ la suma se convierte en una integral, el intervalo del incremento $\Delta\omega$ se vuelve la diferencial $d\omega$, y la frecuencia armónica discreta $n\omega_0$ se vuelve la frecuencia continua ω . Conforme $T \rightarrow \infty$, por lo que la ecuación anterior se convierte en

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega. \quad (\text{D.17})$$

El término entre corchetes se conoce como la *transformada de Fourier* de $f(t)$ y se representa como $F(\omega)$

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{D.18})$$

de donde $\mathcal{F}$ es el operador de la transformada de Fourier. Es claro que la transformada de Fourier es una transformación integral de $f(t)$ del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.

La expresión (D.17) puede escribirse en términos de $F(\omega)$, y se obtiene la *transformada inversa de Fourier* como

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{D.19})$$

La transformada de Fourier $F(\omega)$ existe cuando la integral de Fourier (D.10) en la ecuación (D.17) converge.

Bibliografía

- [Aplevich, 2000] Aplevich J.D. (2000). *Essentials of Linear State-Space Systems*. John Wiley & Sons. ISBN 0471241334.
- [Aprille y Trick, 1972a] Aprille T.J. y Trick T.N. (1972a). A computer algorithm to determine the steady state response of nonlinear oscillators. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 19(4):354–360.
- [Aprille y Trick, 1972b] Aprille T.J. y Trick T.N. (1972b). Steady-state analysis of nonlinear circuits with periodic inputs. *Proceedings of the IEEE*, 60(1):108–114.
- [Arrillaga *et al.*, 1995] Arrillaga J., Medina A., Lisboa M., Cavia M., y Sánchez P. (1995). The harmonic domain. a frame of reference for power system harmonic analysis. *IEEE*, 10(1):433 – 440.
- [Boor, 2001] Boor C.D. (2001). *A Practical Guide to Splines*. Springer. ISBN 0387953663.
- [Boyce y DiPrima, 2000] Boyce W.E. y DiPrima R.C. (2000). *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*. Limusa-Wiley. ISBN 9681849744.
- [Burden y Faires, 2001] Burden R.L. y Faires J.D. (2001). *Numerical Analysis*. Brooks-Cole. ISBN 0534382169.
- [Butcher, 2008] Butcher J. (2008). *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons. ISBN 9780470723357.
- [Chavez *et al.*, 2010] Chavez J., Ramirez A., Dinavahi V. nd Iravani R., Martinez J., Jatskevich J., y Chang G. (2010). Interfacing techniques for time-domain

- and frequency-domain simulation methods. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 25:1796–1807.
- [Conte y de Boor, 1980] Conte S.D. y de Boor C. (1980). *Elementary Numerical Analysis*. McGraw-Hill. ISBN 0070124477.
- [Dominguez *et al.*, 1994] Dominguez M., Coope I., Arrillaga J., y Watson N. (1994). An adaptive scheme for the derivation of harmonic impedance contours. *Transactions on Power Delivery*, 9(2):879–886.
- [Dommel, 1969] Dommel H.W. (1969). Digital computer solution of electromagnetic transients in single and multiphase networks. *IEEE Transactions on Power Delivery*, PAS-88(4):388–399.
- [García y Acha, 2004] García N. y Acha E. (2004). Periodic steady state analysis of large scale electric systems using poincaré map and parallel processing. *Transactions on Power Systems, IEEE*, 19(4):1784–1793.
- [García y Medina, 2000] García N. y Medina A. (2000). Fast periodic steady state solution of systems containing thyristor switched capacitors. *Power Engineering Society Summer Meeting, IEEE*, 2(1):1127–1132.
- [Geist *et al.*, 1994] Geist, A B., y J D. (1994). Pvm: Parallel virtual machine. *MIT Press*.
- [Heath, 2002] Heath M.T. (2002). *Scientific Computing An Introductory Survey*. McGraw-Hill. ISBN 0072399104.
- [Herman *et al.*, 1979] Herman G., Stuart W.R., y Mann-may Y. (1979). A comparative study of the use of linear and modified cubic spline interpolation for image reconstruction. *Nuclear Science, IEEE Transactions*, 26(2):2879–2894.
- [Hornbeck, 1975] Hornbeck R.W. (1975). *Numerical Methods*. Quantum Publishers.
- [Kleiman *et al.*, 1992] Kleiman, B S., y D S.D.S. (1992). Writing multithreading code in solaris. *In Proceedings of the 1992 IEEE International Conference, COMPCON*, páginas 187–192.
- [Kovacs, 2011] Kovacs T. (2011). Genetics-based machine learning. En G. Rozenberg, T. Bäck, y J. Kok, editores, *Handbook of Natural Computing: Theory, Experiments, and Applications*. Springer Verlag.

- [Lian y Noda, 2010] Lian K.L. y Noda T. (2010). A time-domain harmonic power-flow algorithm for obtaining nonsinusoidal steady-state solutions. *IEEE*, 25(3):1888–1898.
- [Madrigal y Acha, 2001] Madrigal M. y Acha E. (2001). *Power Systems Harmonics*. WILEY. ISBN 0471521752.
- [Mahmoud y Shultz, 1982] Mahmoud A.A. y Shultz R.D. (1982). A method for analyzing harmonic distribution in a.c. power systems. *IEEE*, 101(6).
- [Medina, 1992] Medina A. (1992). *Power Systems Modelling in the Harmonic Domain*. Tesis Doctoral, University of Canterbury Christchurch, New Zealand.
- [Medina, 2010] Medina A. (2010). Fast steady state parallel solution of the induction machine. *International Conference on Electrical Machines*, páginas 1–5.
- [Medina y García, 1999] Medina A. y García N. (1999). Newton methods for the fast computation of the periodic steady-state solution of systems with nonlinear and time-varying components. *Power Engineering Society Summer Meeting, IEEE*, 2(1):664–669.
- [Medina *et al.*, 2002a] Medina A., Paz A.R., y Esquivel C.R.F. (2002a). Efficient computation of the periodic steady state solution of systems with nonlinear components applying parallel multi processing. *Power Engineering Society Summer Meeting, 2002 IEEE*, 3(1):1483–1487.
- [Medina *et al.*, 2002b] Medina A., Paz A.R., y Esquivel C.R.F. (2002b). Fast periodic steady state solution of systems containing tcscs. *Harmonics and Quality of Power, IEEE*, 2(1):694–697.
- [Medina *et al.*, 2003] Medina A., Paz A.R., y Esquivel C.R.F. (2003). Periodic steady state solution of electric systems with nonlinear components using parallel processing. *Transactions on Power Systems, IEEE*, 18(2):963–965.
- [Medina *et al.*, 2006] Medina A., Paz A.R., y Esquivel C.R.F. (2006). Efficient computation of the periodic steady state solution of nonlinear electric systems applying parallel processing techniques. *The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 25(4):900–9015.

- [Medina *et al.*, 2008] Medina A., Rafael, Anaya-Lara O., y McDonald J.R. (2008). Fast steady-state solution of the induction machine following disturbance conditions. *Delivery of Electrical Energy, IEEE*, páginas 1–5.
- [Medina *et al.*, 2013] Medina A., Segundo-Ramirez J., Ribeiro P., Xu W., Lian K.L., Chang G.W., Dinavahi V., y Watson N.R. (2013). Harmonic analysis in frequency and time domain. *IEEE Transactions on Power Delivery*, páginas 1–9.
- [Moler, 2008] Moler C. (2008). *Numerical Computing with matlab*. Mathworks.
- [Nocedal y Wright, 1999] Nocedal J. y Wright S. (1999). *Numerical Optimization*. Springer. ISBN 0387987932.
- [Pai, 1981] Pai M.A. (1981). *Power System Stability Analysis by the direct method of Lyapunov*. North Holland Publish Company, Amsterdam-New York-Oxford.
- [Parker y Chua, 1989] Parker T.S. y Chua L.O. (1989). *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag. ISBN 0387966897.
- [Paz, 2002] Paz A.R. (2002). *Aplicación de Técnicas de Procesamiento en Paralelo a la Solución Eficiente en Estado Estacionario en el Dominio del Tiempo de Sistemas Eléctricos no Lineales y Variantes en el Tiempo*. Proyecto Fin de Carrera, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
- [Paz, 2007] Paz A.R. (2007). *Técnica para la Generación Automática de Ecuaciones Diferenciales No Autónomas para Representar el Comportamiento Dinámico de Sistemas Eléctricos No-Lineales Incorporando Herramientas Avanzadas de Computo*. Tesis Doctoral, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
- [R y Spiegel, 1991] R M. y Spiegel (1991). *Advanced Calculus*. McGRAW-HILL, Inc., USA. ISBN 0-07-091871-6.
- [Ramirez, 2011] Ramirez A. (2011). The modified harmonic domain: Interharmonics. *Transactions on Power Delivery*, 26(1):235–241.
- [Ramírez, 2011] Ramírez F.G.O. (2011). *Determinación del Estado Estacionario Periódico de Sistemas Eléctricos No-Lineales Mediante un Método Newton Basado en la Matrix Exponencial Discreta, Incorporando Técnicas de Dispersidad y Procesamiento en Paralelo*. Proyecto Fin de Carrera, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

- [Ramírez, 2010] Ramírez J.S. (2010). *Nonlinear Analysis of Power including FACTS and Custom Power Devices Based on Bifurcation Theory and Newton Methods*. Tesis Doctoral, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
- [Segundo y Medina, 2010] Segundo y Medina (2010). An enhanced process for the fast periodic steady state solution of nonlinear systems by poincar map and extrapolation to the limit cycle. *International Journal of Nonlinear Sciences & Numerical Simulation*, 11(8):661–670.
- [Segundo y Medina, 2008] Segundo J. y Medina A. (2008). Periodic steady-state solution of electric systems including upfcs by extrapolation to the limit cycle. *Transactions on Power Delivery, IEEE*, 23(3):1506–1512.
- [Semlyen y Medina, 1995] Semlyen A. y Medina A. (1995). Computation of the periodic steady state in systems with nonlinear components using a hybrid time and frequency domain methodology. *IEEE*, 11(3):1498–1504.
- [Stuart, 1965] Stuart R.D. (1965). *Introducción al Análisis de Fourier*. UTEHA. ISBN 192.
- [Xia y Heydt, 1982] Xia D. y Heydt G.T. (1982). Harmonic power flow studies part i - formulation and solution. *IEEE*, 101(6).
- [Xu et al., 1991] Xu W.W., Dommel H.W., y Marti J.R. (1991). A synchronous machine model for three-phase harmonic analysis and emtp initialization. *IEEE*, 6(4):1530–1538.