



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO**



**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**PUNTOS FIJOS COMPLEJOS EN DIAGRAMAS DE
BIFURCACIÓN**

TESIS

Que para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

Presenta

Ana Laura Guerrero Ochoa

Dr. Juan José Flores Romero

Director de Tesis

Dr. Claudio Rubén Fuerte Esquivel

Co-Director de Tesis

Morelia, Michoacán

Julio 2016

PUNTOS FIJOS COMPLEJOS EN DIAGRAMAS DE BIFURCACIÓN

TESIS

Que para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

presenta

Ana Laura Guerrero Ochoa

Dr. Juan José Flores Romero

Director de Tesis

Dr. Claudio Rubén Fuerte Esquivel

Co-Director de Tesis

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Julio 2016



Puntos Fijos Complejos en Diagramas de Bifurcación

Los Miembros del Jurado de Examen de Grado aprueban la **Tesis de Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica** de *Ana Laura Guerrero Ochoa*

Dr. Jaime Cerda Jacobo
Presidente del Jurado

Dr. Juan José Flores Romero
Director de Tesis

Dr. Claudio Rubén Fuerte Esquivel
Co-director de Tesis

Dr. José Antonio Camarena Ibarrola
Vocal

Dr. Joaquin Estevez Delgado
Revisor Externo
Fac. Cs. Físico Matemáticas UMSNH

Dr. Félix Calderón Solorio
Jefe de la División de Estudios de Posgrado
de la Facultad de Ingeniería Eléctrica. UMSNH
(Por reconocimiento de firmas).

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
Junio 2016

Resumen

La presente tesis expone una alternativa para determinar además de los puntos fijos reales, los puntos fijos complejos de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's), esto permite visualizar diagramas de bifurcación complejos. Estos diagramas reflejan los comportamientos oscilatorios que sufre el sistema dinámico asociado a un sistema de EDO's. Para generar los diagramas de bifurcación complejos el problema de búsqueda de raíces de un sistema de ecuaciones se transforma a un problema de optimización. Este problema es abordado mediante el algoritmo de optimización por enjambre de partículas (PSO), que permite optimizar un problema a partir de una población de soluciones candidatas. PSO está adaptado con el propósito de crear una población inicial que sea capaz de explorar un espacio de soluciones en el plano complejo. Un problema aunado al cálculo de las raíces complejas incide en el aumento del número de dimensiones para proyectar en los diagramas de bifurcación. Esto debido a que el número de las variables de estado se duplica a causa del aumento de la parte imaginaria de éstas. Se propone la implementación de métodos de visualización de alta dimensionalidad para visualizar las soluciones o puntos fijos de un sistema de ecuaciones. Esto proporciona una alternativa a los habituales diagramas de bifurcación. Además, se presentan los diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos de diversos casos de estudio, en los cuales se muestran soluciones para ciertos valores de los parámetros de bifurcación que no se mostraban en los diagramas de bifurcación con puntos fijos reales.

Palabras clave: Sistemas dinámicos, puntos fijos, bifurcaciones, diagrama de bifurcación, PSO.

Abstract

The present work exposes an alternative to determine fixed points and complex fixed points of a system of ordinary differential equations (ODEs), this allows complex bifurcation diagrams display. These diagrams reflect an oscillatory behavior of the dynamical system associated with the system of ordinary differential equations. To generate complex bifurcation diagrams, the problem of search of roots of a system of equations is transformed to an optimization problem. This problem is solved by the algorithm of particle swarm optimization (PSO), which optimizes a problem as from a population of candidate solutions. PSO is adapted for the purpose of creating an initial population that is able to explore a solution space in the complex plane. A problem because the calculation of complex roots, is the increasing number of dimensions to project in bifurcation diagrams. This because the number of state variables is doubled because of the increase of the imaginary part of these. The implementation of methods of displaying high dimensionality is proposed to visualize the solutions or fixed points of a system of equations. This provides an alternative to the usual diagrams bifurcation. In addition, are presented the bifurcation diagrams with complex fixed points several case studies, in which are shown solutions for certain values of the bifurcation parameters that were not displayed in the bifurcation diagrams with real fixed points.

Contenido

Resumen	V
Abstract	VII
Contenido	IX
Lista de Figuras	XI
Lista de Tablas	XV
Lista de Símbolos	XVII
Lista de Acrónimos	XVIII
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema	3
1.2. Antecedentes	4
1.3. Objetivos de la tesis	6
1.3.1. Objetivo general	6
1.3.2. Objetivos particulares	6
1.4. Descripción de capítulos	7
1.5. Conclusiones	8
2. Teoría de bifurcaciones	9
2.1. Introducción	9
2.2. Sistemas dinámicos	10
2.2.1. Sistemas no autónomos	10
2.2.2. Sistemas autónomos	11
2.3. Puntos fijos y estabilidad	12
2.4. Bifurcaciones y diagramas de bifurcación	20
2.5. Tipos de bifurcaciones	22
2.5.1. Bifurcación silla-nodo	23
2.5.2. Bifurcación transcítica	24
2.5.3. Bifurcación pitchfork	24
2.6. Conclusiones	26
3. Producción de diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos	27
3.1. Introducción	27
3.2. Algoritmo de optimización PSO	28
3.2.1. Función objetivo	28

3.2.2.	Función de mapeo o función de aptitud	29
3.2.3.	Descripción del algoritmo	30
3.2.4.	Algoritmo de optimización PSO con nichos	32
3.3.	Puntos fijos complejos	34
3.3.1.	Representación de puntos fijos complejos en PSO nichos	34
3.3.2.	Diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos	37
3.4.	Conclusiones	40
4.	Métodos de visualización de alta dimensionalidad	41
4.1.	Introducción	41
4.2.	Gráfico RadViz	42
4.2.1.	Interpretación gráfica del mapeo de RadViz	45
4.2.2.	Ejemplos	48
4.3.	Diagrama de burbujas	51
4.4.	Coordenadas paralelas	53
4.5.	Conclusiones	55
5.	Resultados	57
5.1.	Introducción	57
5.2.	Sistemas dinámicos simples	58
5.2.1.	Caso 1	58
5.2.2.	Caso 2	60
5.2.3.	Caso 3	62
5.2.4.	Caso 4	66
5.3.	Aplicaciones	69
5.3.1.	Caso 1: Sistema eléctrico de potencia de tres nodos	69
5.3.2.	Caso 2: Sistema eléctrico de potencia con carga dinámica	77
5.4.	Conclusiones	83
6.	Conclusiones y trabajos futuros	85
6.1.	Conclusiones Generales	85
6.2.	Trabajos Futuros	86
	Referencias	89

Lista de Figuras

2.1.	Órbitas del sistema autónomo (2.3), con condiciones iniciales $[x_1, x_2]$ dadas por $[1, 1]$, $[0, -1.2]$, $[-1, -1]$ y $[0, 1.2]$ para $\omega^2 = 8$ y $\mu = 2$	12
2.2.	Modelo presa-depredador.	15
2.3.	Retrato de fase del modelo presa-depredador definido por el conjunto de Ecuaciones (2.10). Se observan tres puntos críticos inestables.	16
2.4.	Retrato de fase del Sistema (2.10). Se observa que el punto crítico $(-14.04, -9.36)$ es un punto silla inestable, debido a que cuando $t \rightarrow \infty$ dos trayectorias se acercan al mismo y otras dos salen.	17
2.5.	Retrato de fase del Sistema (2.10). Se observa que el punto crítico $(0, 0)$ es un nodo inestable, debido a que todas las trayectorias se alejan del origen.	17
2.6.	Retrato de fase del Sistema (2.10). Se observa que el punto crítico $(142.38, 94.92)$ es un foco o espiral inestable, debido a que todas las trayectorias son espirales que se alejan del punto crítico.	18
2.7.	Retrato de fase del Sistema (2.11) con $\omega = 0$. Se observa que el punto crítico $(0, 0)$ es un centro estable debido a que las trayectorias a su alrededor son cerradas.	19
2.8.	Diagrama de bifurcación de la Ecuación (2.14). Se observa una bifurcación silla-nodo.	23
2.9.	Diagrama de bifurcación de la Ecuación (2.15). Se observa una bifurcación transcítica.	24
2.10.	Diagrama de bifurcación de la Ecuación (2.16). Se observa una bifurcación pitchfork supercrítica.	25
2.11.	Diagrama de bifurcación de la Ecuación (2.17). Se observa una bifurcación pitchfork subcrítica.	26
3.1.	Diagramas de bifurcación silla-nodo de la Ecuación (3.17). En 3.1(a) y en 3.1(b) se observa que para cada valor de $\lambda < 0$ existe un punto fijo estable e inestable, cuando $\lambda = 0$ existe un sólo punto fijo semiestable, pero en 3.1(b) cuando $\lambda > 0$ comienzan a surgir puntos fijos imaginarios puros, los cuales no se observan en la Figura 3.1(a).	38

3.2.	Diagramas de bifurcación pitchfork supercrítica de la Ecuación (3.18). En 3.2(a) para cada valor de $\lambda < 0$ existe un punto fijo estable en el origen mientras que en 3.2(b) además de los puntos fijos en el origen, existen dos puntos fijos imaginarios puros inestables adyacentes al origen y cuando $\lambda = 0$ existe un punto fijo estable y ocurre la doble bifurcación pitchfork.	39
3.3.	Diagramas de bifurcación pitchfork subcrítica de la Ecuación (3.19). En 3.3(a) para cada valor de $\lambda > 0$ existe un punto fijo inestable en el origen mientras que en 3.3(b) además de los puntos fijos en el origen, existen dos puntos fijos imaginarios puros estables adyacentes al origen.	40
4.1.	Representación de las n dimensiones en una circunferencia RadViz.	42
4.2.	Mapeo de un punto n -dimensional a un punto bidimensional u_i	43
4.3.	Proyección de los vértices del cubo 4.3(a) en RadViz 4.3(b).	45
4.4.	Proyección de las aristas o bordes del cubo 4.4(a) en RadViz 4.4(b).	46
4.5.	Proyección de una región (marcada de color azul) del cubo 4.5(a) a una región de la circunferencia RadViz 4.5(b).	47
4.6.	Mapeo a RadViz del conjunto de puntos generados aleatoriamente dentro de la región azul.	48
4.7.	Se muestran los puntos fijos complejos de la Ecuación (4.4) en un espacio \mathbb{R}^3 mapeados a un plano bidimensional con el algoritmo RadViz.	49
4.8.	Diagramas de bifurcación de la Ecuación (4.5).	50
4.9.	La posición de las esferas están definidas por $h, r, Re[x]$, mientras que el radio está definido por $Im[x]$	52
4.10.	Las coordenadas de la esferas están definidas por $h, r, Im[x]$, mientras que el radio está definido por $Re[x]$	52
4.11.	Representación de las dimensiones de un punto fijo de un sistema de la forma $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$	53
4.12.	Coordenadas paralelas de las soluciones de la Ecuación (4.5).	54
5.1.	Diagrama de bifurcación con puntos fijos reales de la Ecuación (5.1).	59
5.2.	Diagrama de bifurcación con puntos fijos complejos de la Ecuación (5.1).	60
5.3.	Diagrama de bifurcación con punto fijos reales de la Ecuación (5.2).	61
5.4.	Diagrama de bifurcación con puntos fijos complejos de la Ecuación (5.2).	61
5.5.	Rebanadas del diagrama de bifurcación con puntos fijos reales de la Figura 5.6, para valores de $a = -1, 0$ y 1 . Cuando $a = 0$ existe una bifurcación pitchfork supercrítica y cuando $a \neq 0$ existen bifurcaciones imperfectas.	62
5.6.	Diagrama de bifurcación con puntos fijos reales de la Ecuación (5.3). Variando la variable de estado x en función de los parámetros r y a	63
5.7.	Diagrama de bifurcación con puntos fijos complejos de la Ecuación (5.3). Variando la variable de estado x en función del parámetro r	64
5.8.	Diagrama de bifurcación con puntos fijos complejos de la Ecuación (5.3). Variando la variable de estado x en función del parámetro a	64
5.9.	Comparación de los diagramas de bifurcación con puntos fijos reales y complejos respecto al parámetro de bifurcación r	65

5.10. Comparación de los diagramas de bifurcación con puntos fijos reales y complejos respecto al parámetro de bifurcación a	66
5.11. Diagrama de bifurcación con puntos fijos reales de la Ecuación (5.5). Variando la variable de estado x en función de los parámetros h y r	67
5.12. Diagrama de bifurcación con puntos fijos complejos de la Ecuación (5.5). Variando la variable de estado x en función del parámetro h	67
5.13. Diagrama de bifurcación con puntos fijos complejos de la Ecuación (5.5). Variando la variable de estado x en función del parámetro r	68
5.14. Comparación de los diagramas de bifurcación con puntos fijos reales y complejos respecto al parámetro de bifurcación h	68
5.15. Comparación de los diagramas de bifurcación con puntos fijos reales y complejos respecto al parámetro de bifurcación r	69
5.16. Sistema eléctrico de potencia de tres nodos.	70
5.17. Diagrama de bifurcación con puntos fijos reales del sistema eléctrico de tres nodos.	74
5.18. Diagrama de bifurcación con puntos fijos complejos del sistema eléctrico de tres nodos.	74
5.19. Diagrama de bifurcación con coordenadas paralelas del sistema eléctrico de tres nodos.	76
5.20. RadViz del sistema eléctrico de tres nodos.	76
5.21. Sistema eléctrico con carga dinámica.	77
5.22. Diagrama de bifurcación con puntos fijos reales del sistema eléctrico con carga dinámica.	79
5.23. Diagrama de bifurcación con puntos fijos complejos del sistema eléctrico con carga dinámica.	80
5.24. Diagrama de bifurcación con coordenadas paralelas del sistema eléctrico con carga dinámica.	81
5.25. RadViz del sistema eléctrico con carga dinámica.	82
5.26. RadViz del sistema eléctrico con carga dinámica con las dimensiones $Im(\delta)$, $Re(V)$ y $Im(V)$	82

Lista de Tablas

2.1. Clasificación de los puntos fijos en sistemas no lineales.	20
5.1. Constantes del sistema eléctrico de tres nodos.	72
5.2. Rangos de los parámetros de bifurcación para generar el diagrama de bifurcación del conjunto de Ecuaciones (5.6)-(5.9).	73
5.3. Rangos de búsqueda de las variables de estado del sistema eléctrico de tres nodos para PSO Nichos.	73
5.4. Constantes del sistema eléctrico con carga dinámica.	78
5.5. Rangos de búsqueda de las variables de estado del sistema eléctrico con carga dinámica tipo II.	79

Lista de Símbolos

t	Tiempo.
a	Parte real de un número complejo.
b	Parte imaginaria de un número complejo.
\mathbb{R}	Conjunto de los números reales.
\mathbb{C}	Conjunto de los números complejos.
\mathbf{x}	Vector de variables de estado de un sistema dinámico.
$\dot{\mathbf{x}}$	Vector de primeras derivadas respecto al tiempo del vector \mathbf{x} .
\mathbf{x}_0	Estado inicial de un sistema dinámico.
$\boldsymbol{\lambda}$	Vector de parámetros de bifurcación de un sistema dinámico.
\mathbf{f}	Vector de ecuaciones diferenciales ordinarias.
μ_1, μ_2	Eigenvalores de la matriz jacobiana del campo $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.
g	Función de mapeo.
p_i	La i -ésima partícula de un enjambre de partículas.
x_i	Posición actual de una partícula p_i .
x_{an}	Parte real de la n -ésima variable de estado.
x_{bn}	Parte imaginaria de la n -ésima variable de estado.
v_i	Velocidad a la cual se moverá la partícula p_i .
$fitness_{x_i}$	Fitness de la posición x_i .
P_{Best_i}	Posición con el mejor fitness registrado por la partícula p_i .
$fitness_{P_{Best_i}}$	Fitness de la mejor posición x_i .
P_{nBest}	Posición con el mejor fitness registrado por el enjambre.
c_1	Parámetro cognitivo.
c_2	Parámetro social.
r_1, r_2	Números aleatorios entre 0 y 1.
ϕ	Suma de los parámetros cognitivo y social.
ω	Peso de inercia de una partícula p_i .
χ	Factor de constricción.
r	Radio de los nichos.
S_j	Posición angular de la j -ésima ancla del gráfico RadViz.
y	Matriz de datos n -dimensionales a mapear.
u	Matriz de datos mapeados a un espacio bidimensional.
\mathbf{r}	Vector de radios de esferas.
$\bar{\mathbf{r}}$	Vector normalizado de radios de esferas.

T_A	Constante de tiempo del sistema de excitación.
V, V_L	Magnitud de voltaje en el nodo de carga.
P_m	Potencia mecánica de entrada al generador.
Q_1	Potencia reactiva en el nodo de carga.

Lista de Acrónimos

EDO's: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

MATLAB: MATrix LABoratory

PSO: Optimización por enjambre de partículas (del inglés: Particle Swarm Optimization)

PSONichos: Optimización por enjambre de partículas con nichos (del inglés: Niching Particle Swarm Optimization)

RadViz: Método de Visualización Radial (del inglés: Radial Visualization)

XPP/XPPAUT: X-Windows Phase Plane plus Auto

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas dinámicos describen ciertos fenómenos o comportamientos del mundo real; v.g. los sistemas climáticos, el crecimiento poblacional de una especie animal, modelos económicos, entre otros. Las leyes físicas que gobiernan los principios de operación de estos sistemas pueden resultar bastantes complejas para su estudio, por lo que es necesario una caracterización que aproxime el comportamiento de los sistemas dinámicos. Esta caracterización generalmente se lleva a cabo por medio de un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n . Este conjunto describe de forma aproximada el comportamiento que presentan los sistemas dinámicos, donde la evolución de su estado depende generalmente del tiempo. En ocasiones no es factible experimentar con el sistema físico, por lo cual se debe recurrir a medios alternativos o herramientas que ayuden al estudio y análisis de los sistemas dinámicos. Por ejemplo, la teoría de bifurcaciones es muy importante dentro de esta área, debido a que puede predecir cualitativamente comportamientos dinámicos muy complejos en la estructura del sistema dinámico, gracias a la variación de los parámetros del mismo [Strogatz94].

En diversas ocasiones se desea llegar a conocer los elementos o factores que condicionan el comportamiento de un sistema dinámico, dado el efecto de las perturbaciones, el efecto de la variación de parámetros, etc. Por tal motivo dentro de la teoría de bifurcaciones existe una herramienta importante que auxilia al análisis de estos sistemas: los diagramas de bi-

furcación; los cuales son el conjunto de todos los puntos fijos de un sistema dinámico. Estos diagramas agrupan los comportamientos cualitativos posibles de un sistema (i.e. agrupan los cambios en las propiedades y características del sistema) y las transiciones entre ellos ante la variación de los parámetros de los que depende el sistema dinámico. Así mismo, estos diagramas reflejan las diversas bifurcaciones que se pueden dar en el sistema, las cuales son un cambio del tipo topológico del sistema cuando sus parámetros pasan a través de un valor crítico [Kuznetsov98].

En la actualidad se cuentan con herramientas que ayudan en la generación de diagramas de bifurcación, por ejemplo XPPAUT [Ermentrout06] es un software que cuenta con diferentes herramientas para análisis de sistemas dinámicos. Una de esas herramientas son los diagramas de bifurcación, para generarlos utiliza una técnica de continuación, donde es necesario un punto inicial cerca de la solución para calcular las soluciones restantes. Otra forma de generar los diagramas de bifurcación consiste en utilizar algoritmos inteligentes, por ejemplo Julio Barrera [Barrera07] propuso la creación de diagramas de bifurcación por medio de métodos heurísticos, que determinan los puntos fijos del sistema sin la necesidad de proporcionar una solución inicial. Sin embargo, hasta el día de hoy no se conoce un medio para la producción de diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos. Además cabe destacar, que en la literatura sobre sistemas dinámicos y teoría de bifurcaciones es innimemente la ausencia de las soluciones complejas en los diagramas de bifurcación. Por tal motivo en el presente trabajo se propone la determinación de diagramas de bifurcación que muestren además de sus raíces reales, las raíces complejas. Esto implica una parte importante en el análisis dado que algunos sistemas bajo ciertos parámetros o condiciones no presentan raíces reales, no obstante, esto no es incentivo para afirmar que el sistema en cuestión no cuenta con soluciones, debido a que pueden presentarse en el plano complejo.

1.1. Planteamiento del problema

El presente trabajo aporta información a la comunidad educativa y científica en relación al análisis de los sistemas dinámicos. Uno de los medios más utilizados para este fin son los diagramas de bifurcación; existen herramientas que ayudan en la determinación de estos, no obstante el problema es que no muestran los diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos. Estos diagramas solo se limitan a mostrar las raíces reales del sistema de ecuaciones diferenciales, dando por sentado que cuando no se encuentran raíces reales el sistema no cuenta con soluciones.

Lo antes mencionado da sustento a la presente investigación, tratando con la búsqueda de raíces complejas. Por lo tanto, dado un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma (1.1):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}^n$ son las variables de estado y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}^m$ son los parámetros de control del sistema (parámetros de bifurcación), se busca generar de forma automatizada diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos. Esto es posible mediante la adición de componentes imaginarios a las posibles soluciones generadas por el algoritmo de optimización por enjambres de partículas (PSO), cuyas soluciones deben de satisfacer $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = 0$.

El aumento de los componentes imaginarios tiene como consecuencia el incremento de las dimensiones para proyectar en los diagramas, debido a que las variables de estado del sistema duplican su dimensión al pasar al plano complejo. Es decir, dado un sistema de ecuaciones de la forma (1.1), donde $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ y $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, el diagrama tendrá $2n + m$ dimensiones. Por ejemplo, considerando un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma (1.2):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \lambda_1) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \lambda_1)\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ se tiene un diagrama de bifurcación en tres dimensiones, pero si $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ no es posible visualizar el diagrama de bifurcación en una sola gráfica, debido a que se tienen cinco dimensiones que no pueden ser visualizadas de forma conjunta. A razón de esto surge la necesidad de implementar métodos de visualización multidimensionales que permitan observar la interacción entre las variables del sistema en un mismo gráfico.

1.2. Antecedentes

El estudio de los sistemas dinámicos ha tomado una importancia relevante en los últimos años, ya que es una disciplina matemática que intenta, por medio de técnicas cuantitativas y cualitativas, entender cualquier proceso en movimiento. Una de las herramientas más importantes utilizadas para este fin son los diagramas de bifurcación que aportan información sobre el comportamiento cualitativo del sistema. En la actualidad existen trabajos de investigación y herramientas de trabajo que auxilian a la producción de diagramas de bifurcación de sistemas de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo Julio Barrera en su tesis doctoral [Barrera07] propuso el uso de herramientas de inteligencia artificial como optimización por enjambre de partículas (PSO) para determinar los puntos fijos de un sistema de ecuaciones, trazando diagramas de bifurcación de forma no supervisada. Este método se probó por primera vez para obtener diagramas de bifurcación de las formas normales relacionados con bifurcaciones genéricas. Similar a este trabajo Aijia Ouyang [Ouyang09] propuso el uso de enjambre de partículas híbridas (HPSO), que combina las ventajas del método de Nelder-Mead simplex (SM) y la optimización de enjambre de partículas (PSO) para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. En el trabajo de investigación de Oscar Torres [Torres13] se desarrolló un software en Java basado también en una metaheurística, optimización por enjambre de partículas con nichos (PSO nichos) para localizar de manera eficaz múltiples soluciones óptimas. Rodrigo López [López10] generó de la misma manera diagramas de bifurcación, pero atacando los problemas relacionados con la búsqueda de raíces en sistemas de ecuaciones diferenciales trascendentales y ecuaciones que contienen

discontinuidades en sistemas. También se han resuelto ecuaciones trascendentales usando algoritmos genéticos [Aggarwal00].

La herramienta XPPAUT [Ermentrout06] proporciona una interfaz para el paquete de continuación llamado AUTO [Doedel94]. Entre sus características principales se encuentra el cálculo de puntos fijos, órbitas periódicas, problemas de contorno, entre otras. Para la creación de los diagramas de bifurcación utiliza una técnica de continuación donde una solución o punto fijo conocido es seguido para calcular las soluciones restantes, lo que implica el conocimiento previo del sistema dinámico en cuestión.

Sin embargo, ninguno de los trabajos de investigación o herramientas mencionadas anteriormente deriva en la producción de diagramas de bifurcación con raíces complejas, no obstante existen diversos métodos o herramientas que tratan el cálculo de las raíces complejas. Por ejemplo en el trabajo de investigación de Hernan Estrada [Estrada92] se calculan las raíces complejas de funciones analíticas por medio de un algoritmo basado en el método de Müller, el cual trabaja con la fórmula cuadrática haciendo posible localizar tanto raíces reales como raíces complejas. Los entornos MATLAB [Gilat06] y Mathematica [Wolfram03] también poseen la capacidad de calcular raíces reales y complejas de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Aunque el cálculo de estas raíces requieren una aproximación inicial cerca de las soluciones para poder resolver numéricamente las ecuaciones, dichas aproximaciones pueden ser obtenidas mediante forma gráfica o forma analítica. Esto se puede volver complicado en ciertos casos, debido a que en diversas ocasiones es difícil obtener una solución analítica del sistema de ecuaciones diferenciales. También existen trabajos donde se han interpretado gráficamente las raíces complejas de una ecuación cuadrática [Melliger07], [Weeks03], [Gleason10], las cuales se han calculado con alguno de los métodos mencionados anteriormente. A pesar de que existen métodos o herramientas para el cálculo de raíces complejas, en la actualidad no se presentan diagramas de bifurcación que muestren las raíces complejas de sistemas dinámicos gobernados por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias.

1.3. Objetivos de la tesis

Se presenta a continuación el objetivo principal de esta tesis, incluyendo los objetivos particulares que hacen posible el objetivo central de este trabajo de investigación.

1.3.1. Objetivo general

Generar diagramas de bifurcación que exhiban además de las raíces reales, las raíces complejas, esto mediante la adición de componentes imaginarios a las posibles soluciones generadas por el algoritmo de optimización por enjambres de partículas (PSO). Con esta aportación se proporciona una herramienta que tiene como finalidad coadyuvar al análisis y comprensión del comportamiento que presentan los sistemas dinámicos bajo ciertas condiciones.

1.3.2. Objetivos particulares

- Adaptar la representación de las partículas de manera que el algoritmo de PSO sea capaz de encontrar puntos fijos complejos del sistema en cuestión.
- Tratar los puntos fijos generados por PSO para graficar las raíces complejas en los diagramas de bifurcación.
- Implementar diferentes métodos de visualización multidimensionales para los diagramas de bifurcación complejos. El número de dimensiones en los diagramas aumenta a causa del incremento del componente imaginario en las variables de estado del sistema dinámico, causando que los diagramas no se puedan visualizar en 2 o 3 dimensiones. El objetivo de estos métodos es visualizar el conjunto total de las variables y parámetros que forman el sistema dinámico.
- Analizar las ventajas y desventajas de los métodos de visualización implementados, para así dar una referencia de la utilidad que pueden llegar a tener cada uno de estos para distintos sistemas dinámicos.

1.4. Descripción de capítulos

El presente trabajo de tesis se encuentra organizado en 6 capítulos.

- En el Capítulo 1 se presenta la introducción al trabajo de tesis, el cual presenta el problema a tratar y los objetivos del mismo. Además se hace una breve revisión de trabajos previos sobre el tema de estudio.
- En el Capítulo 2 se introducen formalmente los conceptos de sistemas dinámicos y la teoría de bifurcaciones, donde se explican los puntos de equilibrio así como su estabilidad. Además, se incluye una breve descripción de los diversos tipos de bifurcaciones.
- En el Capítulo 3 se detalla el desarrollo para generar los diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos. Se describe el algoritmo de optimización con enjambre de partículas (PSO) y las adaptaciones que fueron necesarias para determinar los puntos fijos complejos. Por ejemplo, la representación que se realizó de las soluciones complejas en el algoritmo de PSO.
- En el Capítulo 4 se describen los métodos de visualización alta dimensionalidad implementados. Estos métodos incluyen los diagramas de burbujas, coordenadas paralelas y el gráfico RadViz. Se explica el mapeo que se realiza a los datos para cada una de estas visualizaciones y se resaltan sus principales ventajas y desventajas. Además se presentan algunos ejemplos ilustrativos.
- En el Capítulo 5 se ilustra la aplicabilidad de los diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos. Se presentan diferentes casos de estudio donde se mostrarán los diagramas de bifurcación convencionales y los diagramas de bifurcación producidos en esta tesis.
- El Capítulo 6 presenta las conclusiones generales del trabajo, las aportaciones realizadas y las recomendaciones para futuras investigaciones en la misma línea de trabajo propuesta por la tesis.

1.5. Conclusiones

Se presentó el alcance y la idea general desarrollada de esta tesis, con el propósito principal de contextualizar e introducir lo que se expone en los capítulos siguientes. Se detalló el planteamiento del problema, los trabajos previos y los objetivos del trabajo de investigación. Se describió el contenido de la tesis para la comprensión y familiarización del tema de investigación. A continuación se presenta el apartado que describe los conceptos indispensables para el discernimiento de los mismos con el fin de adquirir los conocimientos necesarios para la comprensión de la lectura.

Capítulo 2

Teoría de bifurcaciones

2.1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales son modelos particularmente útiles para describir el comportamiento dinámico de sistemas en diversos campos (biológicos, mecánicos, económicos, circuitos electrónicos, etc.), los cuales presentan un cambio o evolución de su estado en un lapso de tiempo. El comportamiento en dicho estado se puede caracterizar determinando los límites de operación del sistema. Dentro de la teoría de bifurcaciones se estudia el comportamiento de familias de soluciones matemáticas, por ejemplo las curvas integrales de un campo vectorial, y las soluciones de una familia de ecuaciones diferenciales.

La teoría de bifurcaciones es una amplia área de estudio, por lo cual sólo nos limitaremos a los conceptos básicos de sistemas dinámicos y la teoría de bifurcaciones como los puntos de equilibrio, su estabilidad y los diferentes tipos de bifurcaciones. Además se describe el método tradicional para el trazado de los diagramas de bifurcación. Estos conceptos proporcionan las bases necesarias para el entendimiento de la construcción de los diagramas de bifurcación.

2.2. Sistemas dinámicos

Un sistema dinámico es un conjunto de elementos que interactúan entre sí, cuyo estado evoluciona o cambia con el tiempo. Los sistemas dinámicos son descritos por un conjunto de ecuaciones que modelan el proceso o sistema. Esta formulación permite predecir cualquier estado futuro del sistema, siempre y cuando se conozca la ley que rige su evolución y su estado inicial. La noción de un sistema dinámico incluye un conjunto de estados posibles (el espacio de estados) y una ley de la evolución del estado en el tiempo. La evolución es gobernada por un conjunto de reglas que especifican el estado del sistema para valores discretos o continuos de t [Nayfeh95]. La ley de evolución de un sistema dinámico genera un cambio de estado en un tiempo t ; esta ley determina el estado x_t del sistema dinámico a partir de un estado inicial x_0 . La ley de evolución se define en un espacio de estado X , el cual es el espacio donde se representan todos los posibles estados que puede presentar un sistema.

Los sistemas dinámicos se pueden clasificar en dos grupos: sistemas de tiempo discreto y de tiempo continuo, según la naturaleza de su variable independiente, el tiempo. Cuando dicha variable evoluciona en forma discontinua, el sistema dinámico se modela mediante un conjunto de ecuaciones en diferencias (recurrencias). Por el contrario, cuando evoluciona en forma continua, los sistemas dinámicos se representan mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales. A su vez estos sistemas pueden ser sistemas no autónomos o autónomos.

2.2.1. Sistemas no autónomos

Se considera un sistema no autónomo cuando éste presenta un estímulo externo al sistema, el cual fuerza el comportamiento natural de la dinámica del mismo. Un sistema dinámico no autónomo se modela mediante la ecuación diferencial ordinaria no autónoma o forzada (2.1), en donde la función \mathbf{f} depende explícitamente del tiempo t :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ representa un vector de dimensión n que contiene las variables de estado (éste describe el estado del sistema dinámico), $\dot{\mathbf{x}} = d[x_1, \dots, x_n]^T/dt \in \mathbb{R}^n$ y

$\mathbf{f} = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})]^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. El espacio \mathbb{R}^n en que \mathbf{x} evoluciona es llamado el espacio de estado.

En general, la proyección de la solución de la Ecuación (2.1) en el espacio de estado de dimensión n es referida como una trayectoria o una órbita del sistema. En otras palabras, la solución podría ser interpretada como un punto que se mueve a lo largo de la trayectoria, ocupando diferentes posiciones en diferentes tiempos similar a la forma del movimiento de un planeta a través del espacio [Nayfeh95].

2.2.2. Sistemas autónomos

Un sistema autónomo, a diferencia del no autónomo, no tiene ningún estímulo externo al sistema que fuerza el comportamiento natural del sistema. Estos sistemas se definen por una ecuación diferencial ordinaria autónoma o no forzada, en donde la función \mathbf{f} no depende explícitamente de la variable independiente t . Se considera entonces como sistema autónomo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

donde su espacio de estados es $X = \mathbb{R}^n$ y la función \mathbf{f} es suficientemente regular para garantizar la existencia y unicidad de las soluciones en, al menos, un subconjunto de \mathbb{R}^n . La ley de evolución del sistema está dado implícitamente en términos de $\dot{\mathbf{x}}$.

Si los componentes escalares de \mathbf{f} tienen primeras derivadas parciales continuas y acotadas con respecto a los componentes escalares de \mathbf{x} , entonces el Sistema (2.2) tiene una única solución para una condición inicial \mathbf{x}_0 dada. Como consecuencia de ello, no hay dos trayectorias u órbitas de un sistema autónomo que puedan intersectarse entre sí en el espacio de estados n -dimensional del sistema [Nayfeh95].

Un ejemplo de un sistema autónomo está dado por el conjunto de Ecuaciones (2.3):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 x_1 - 2\mu x_2\end{aligned}\tag{2.3}$$

En la Figura 2.1 se muestran las órbitas del conjunto de Ecuaciones (2.3) con cuatro diferentes condiciones iniciales $[x_1, x_2]$. Cuando $\omega^2 = 8$ y $\mu = 2$, se observa que las órbitas no se intersectan entre sí en ninguna parte del plano de fase conforme éstas se aproximan al origen, donde se unen [Nayfeh95]. Dado que los sistemas dinámicos gobernados por ecuaciones diferenciales ordinarias son deterministas, dos trayectorias que se intersectan en el diagrama de fase violarían este determinismo.

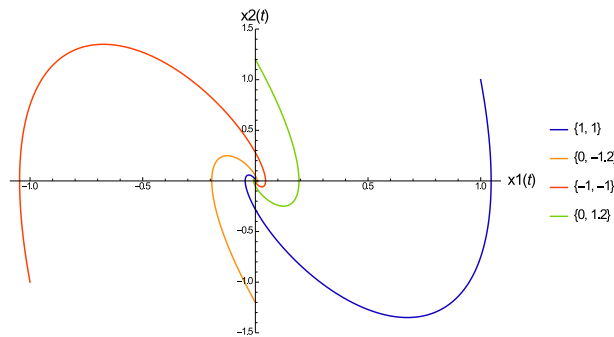


Figura 2.1: Órbitas del sistema autónomo (2.3), con condiciones iniciales $[x_1, x_2]$ dadas por $[1, 1]$, $[0, -1.2]$, $[-1, -1]$ y $[0, 1.2]$ para $\omega^2 = 8$ y $\mu = 2$.

2.3. Puntos fijos y estabilidad

Una solución estacionaria de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es una solución constante, es decir, una solución \mathbf{x} tal que:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0)\tag{2.4}$$

para todo t . La trayectoria de una solución estacionaria es un punto de \mathbb{R}^n que se denomina punto fijo, punto crítico, punto de equilibrio o punto estacionario del sistema de ecuaciones diferenciales [Molero07].

Para el sistema de la forma (2.2), los puntos \mathbf{x} donde:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \tag{2.5}$$

se denominan puntos fijos del sistema. Un punto fijo es un estado de equilibrio del sistema dinámico (todas sus derivadas, o razones de cambio son cero). Sin embargo, que el sistema esté en equilibrio no significa que el sistema esté en un estado estable. Un punto fijo se define como estable si las soluciones que están cerca de él ante cualquier perturbación se mantienen cerca del punto de equilibrio a lo largo del tiempo. Por el contrario, los puntos fijos son inestables, cuando las soluciones en sus cercanías no se mantienen cerca del punto, si no que éstas son alejadas ante cualquier perturbación aunque sea lo suficientemente pequeña [Strogatz94].

Los puntos fijos pueden ser entonces: estables, llamados generalmente atractores, e inestables, llamados generalmente repulsores. Un punto fijo se dice atractor si para cualquier trayectoria que se encuentra cerca de éste permanece próxima al punto para todo tiempo $t_0 > 0$, de otro modo el punto fijo es un repulsor, debido a que las trayectorias que empiezan cerca del punto de equilibrio se alejan de este punto a lo largo del tiempo. Una tercera clasificación aparece cuando se tiene un punto fijo que además de ser estable, las trayectorias son atraídas al él cuando el tiempo tiende a infinito. Entonces se dice que el punto fijo es asintóticamente estable.

De manera más formal, un punto fijo \mathbf{x}_0 del Sistema (2.2) es estable si, dado cualquier radio $\epsilon > 0$, existe una distancia $\delta > 0$ tal que cada solución $\mathbf{x} = \mathbf{y}(t)$ satisface [Boyce01]:

$$\|\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{x}_0\| < \delta \tag{2.6}$$

entonces, existe para todo t positivo y satisface:

$$\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}_0\| < \epsilon \tag{2.7}$$

Un punto fijo \mathbf{x}_0 es asintóticamente estable si es estable y si existe una distancia δ_0 , con $0 < \delta_0 < \delta$, tal que para cada solución $\mathbf{x} = \mathbf{y}(t)$ satisface [Boyce01]:

$$\|\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{x}_0\| < \delta_0 \tag{2.8}$$

entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_0 \quad (2.9)$$

Se ha explicado la estabilidad de los puntos fijos en base al comportamiento de las trayectorias a su alrededor, sin embargo para determinar numéricamente la estabilidad de los puntos fijos se utiliza el criterio de estabilidad de Lyapunov [Lyapunov92], el cual provee condiciones suficientes para establecer la estabilidad de los puntos de equilibrio. Este criterio toma en cuenta los eigenvalores del jacobiano del sistema de ecuaciones evaluado en la solución del sistema (ver Teorema 2.1).

Teorema 2.1 (Teorema de Lyapunov)

Sea $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ un sistema dinámico, donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y existe su derivada, \mathbf{x}_0 un punto crítico del sistema dinámico y $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ la matriz jacobiana del campo $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ evaluado en el punto (\mathbf{x}_0) .

- (a) Si todos los valores propios de $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ tienen parte real negativa, entonces \mathbf{x}_0 es un punto crítico asintóticamente estable (y por lo tanto, estable).
- (b) Si al menos un valor propio de $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ tiene parte real positiva, entonces \mathbf{x}_0 es un punto crítico inestable.

Los puntos críticos pueden ser hiperbólicos (ver Definición 2.1) y no hiperbólicos (i.e. cuando hay valores propios de la matriz jacobiana con parte real nula).

Definición 2.1 Un punto crítico \mathbf{x}_0 de un sistema dinámico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ es hiperbólico si la matriz jacobiana $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ en ese punto es hiperbólica, es decir, todos los valores propios de $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ tienen parte real no nula.

Los puntos críticos hiperbólicos se pueden clasificar en función del comportamiento de las trayectorias a su alrededor. Estos pueden clasificarse como un punto nodo, un punto de silla o un punto foco.

- El punto crítico es un **punto de silla** cuando los eigenvalores son reales y de distinto signo. Cuando $t \rightarrow \infty$ existen dos trayectorias rectas que se acercan al origen y otras

dos que se separan del origen. Esto nos permite concluir, que todo punto silla es inestable (Ver Figura 2.4).

- El punto crítico es un **nodo** cuando los eigenvalores son reales y del mismo signo. Si los eigenvalores son negativos todas las trayectorias se acercan al origen (asintóticamente estable), si los eigenvalores son positivos todas las trayectorias se alejan del origen (inestable). Ver Figura 2.5.
- El punto crítico se denomina espiral o **foco** cuando los eigenvalores son complejos conjugados y tienen parte real no nula. Las trayectorias alrededor de un foco son curvas en forma de espiral que, conforme $t \rightarrow \infty$ pueden presentar dos situaciones: si la parte real de los eigenvalores es negativa todas las trayectorias se acercan al origen (asintóticamente estable) o si la parte real de los eigenvalores es positiva todas las trayectorias se alejan del origen (inestable). Ver Figura 2.6.

Un ejemplo de un sistema dinámico que presenta los tres tipos de puntos críticos hiperbólicos (punto nodo, punto de silla y punto foco), es el sistema ecológico presa-depredador [Tanner75]. Este sistema modela el crecimiento de dos poblaciones (presa y depredador) que interactúan entre sí. La tasa de cambio de la población de presas está dado por h y la tasa de cambio de la población de depredadores está dado por p . La Figura 2.2 muestra el modelo dinámico presa-depredador basado en el libro *Modeling Biological Systems: Principles and Applications*. [Haefner05].



Figura 2.2: Modelo presa-depredador.

Este sistema ecológico es modelado por el conjunto de Ecuaciones (2.10):

$$\begin{aligned}\dot{h} &= rh\left(1 - \frac{h}{k}\right) - wp\frac{h}{h+d} \\ \dot{p} &= s\left(1 - \frac{p}{j}\right)p\end{aligned}\tag{2.10}$$

donde la velocidad natural de crecimiento de la presa es $r = 0.5$, la velocidad natural de crecimiento del depredador es $s = 0.1$, la capacidad de carga del medio ambiente es $k = 400$, la cantidad de presas necesarias para apoyar a un depredador en equilibrio es $j = 1.5$, la velocidad de depredación máxima es $w = 0.5$ y el tiempo de búsqueda de depredadores es $d = 5$. En la Figura 2.3 se muestran las trayectorias del plano de fase del modelo presa-depredador, en el cual podemos notar que presenta tres puntos de equilibrio hiperbólicos: punto de silla, nodo y foco. Se puede observar que, por el comportamiento de las trayectorias alrededor de cada uno de los puntos críticos, los puntos de equilibrio son inestables.

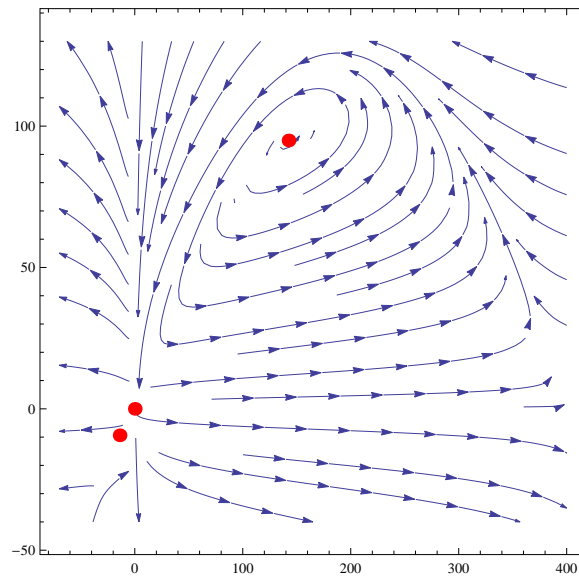


Figura 2.3: Retrato de fase del modelo presa-depredador definido por el conjunto de Ecuaciones (2.10). Se observan tres puntos críticos inestables.

La ampliación de los puntos críticos de la Figura 2.3; punto de silla, nodo y foco se observan en las Figuras 2.4, 2.5 y 2.6 respectivamente.

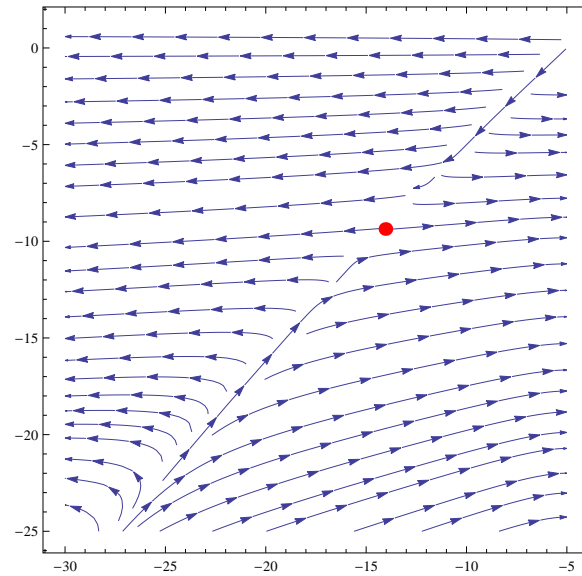


Figura 2.4: Retrato de fase del Sistema (2.10). Se observa que el punto crítico $(-14.04, -9.36)$ es un punto silla inestable, debido a que cuando $t \rightarrow \infty$ dos trayectorias se acercan al mismo y otras dos salen.

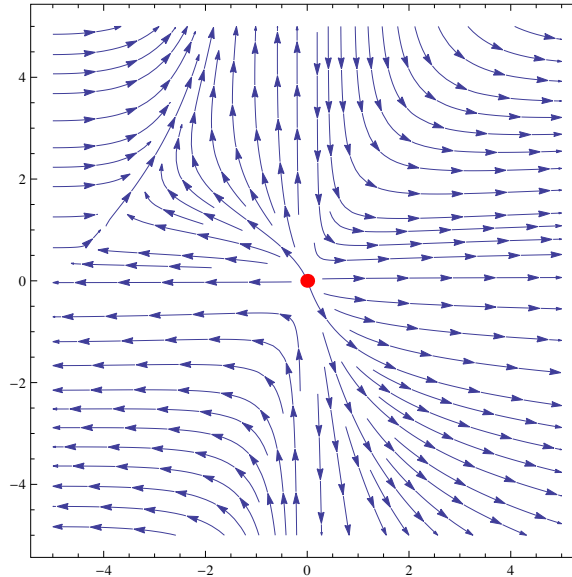


Figura 2.5: Retrato de fase del Sistema (2.10). Se observa que el punto crítico $(0, 0)$ es un nodo inestable, debido a que todas las trayectorias se alejan del origen.

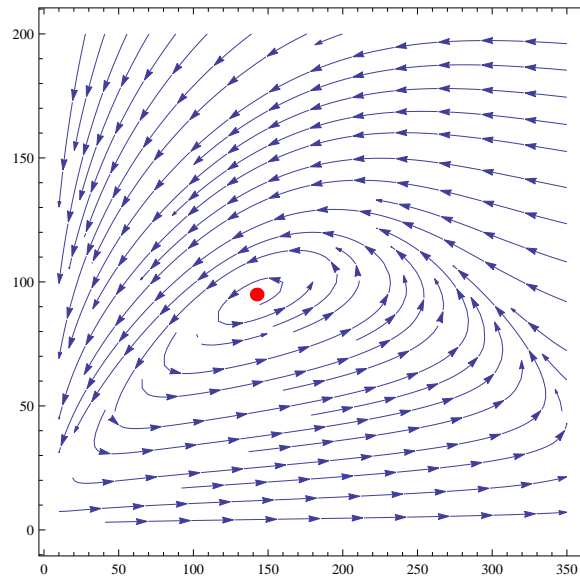


Figura 2.6: Retrato de fase del Sistema (2.10). Se observa que el punto crítico (142.38, 94.92) es un foco o espiral inestable, debido a que todas las trayectorias son espirales que se alejan del punto crítico.

Las propiedades de la estabilidad de puntos críticos hiperbólicos de un sistema no lineal son esencialmente las mismas de su aproximación lineal. El Teorema 2.2 [Nayfeh95] garantiza que para puntos críticos hiperbólicos el comportamiento del sistema no lineal cerca del punto es idéntico al del sistema lineal correspondiente.

Teorema 2.2 (Teorema de Hartman-Grobman) *Sea \mathbf{x}_0 un punto crítico hiperbólico del sistema dinámico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Entonces hay una vecindad de \mathbf{x}_0 en la cual $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ es topológicamente equivalente a su linealización $\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}$.*

Cuando los puntos críticos no hiperbólicos corresponden a un sistema lineal, se dice que el punto crítico es un centro. Las trayectorias alrededor de un centro son curvas cerradas que rodean al origen, de modo que ninguna trayectoria tiende a él cuando $t \rightarrow \infty$, por ello, el punto crítico es estable, pero no asintóticamente estable. No obstante cuando se trata de un punto crítico no hiperbólico de un sistema no lineal, es necesario utilizar otras técnicas para determinar el comportamiento de las trayectorias en relación con el punto crítico no hiperbólico. Dentro de estas técnicas se encuentra el Método Directo de Lya-

punov (MDL) [Lyapunov92], el cual es un método alternativo para verificar la estabilidad asintótica de los puntos críticos. En su forma general permite estudiar la estabilidad de sistemas no estacionarios o no lineales. Este método ataca el problema de la estabilidad directamente sobre el sistema de ecuaciones, en lugar de su linealización.

Un ejemplo de un sistema con puntos fijos no hiperbólicos es el descrito por el conjunto de Ecuaciones (2.11), donde ω es un parámetro que puede variar. El punto $(0, 0)$ es el único punto de equilibrio para el sistema, mostrado en la Figura 2.7.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \omega(x^2 + y^2)x \\ \dot{y} &= x + \omega(x^2 + y^2)y\end{aligned}\tag{2.11}$$

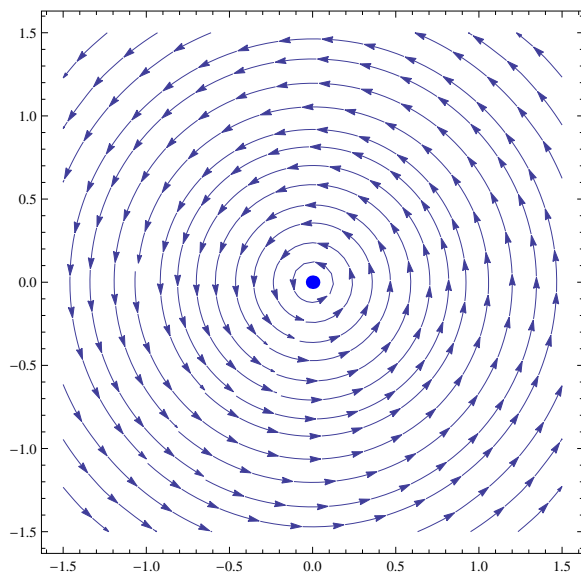


Figura 2.7: Retrato de fase del Sistema (2.11) con $\omega = 0$. Se observa que el punto crítico $(0, 0)$ es un centro estable debido a que las trayectorias a su alrededor son cerradas.

El resumen de la clasificación de los puntos de equilibrio se presenta en la Tabla 2.1, sean μ_1 y μ_2 los eigenvalores de la matriz jacobiana del campo $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ y sea asintóticamente estable (A.E.) e inestable (I.).

Tabla 2.1: Clasificación de los puntos fijos en sistemas no lineales.

Eigenvalores Df	Tipo de punto fijo	Estabilidad
Puntos fijos hiperbólicos		
$\mu_1 > \mu_2 > 0$	nodo	I.
$\mu_1 < \mu_2 < 0$	nodo	A.E.
$\mu_2 < 0 < \mu_1$	punto de silla	I.
$\mu_{1,2} = a \pm b i, a > 0$	foco	I.
$\mu_{1,2} = a \pm b i, a < 0$	foco	A.E.
Puntos fijos no hiperbólicos		
$\mu_{1,2} = \pm b i$	centro/foco	Calcular mediante MDL

2.4. Bifurcaciones y diagramas de bifurcación

Una bifurcación se da cuando una pequeña variación en los valores de los parámetros de un sistema (parámetros de bifurcación) causa un cambio cualitativo o topológico brusco en su comportamiento [Blanchard06]. En otras palabras, el momento en que el punto fijo cambia su estabilidad recibe el nombre de punto de bifurcación. Las bifurcaciones pueden producirse tanto en sistemas continuos como en sistemas discretos. En esta tesis se estudian las bifurcaciones para sistemas continuos.

Para el análisis de las bifurcaciones se considera el espacio formado por las variables de estado y los parámetros de bifurcación. Las variables de estado son aquellas variables que definen totalmente la condición del sistema y los parámetros de bifurcación son cantidades

que fijan ciertas características del proceso, estableciendo un marco al cual estará condicionado su comportamiento; estos se consideran fijos o varían paulatinamente.

Suponiendo ahora que el Sistema (2.2) depende de un cierto conjunto de parámetros escalares $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]^T$, entonces:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m \quad (2.12)$$

donde \mathbf{x} representa el estado del sistema (variables de estado) y $\boldsymbol{\lambda}$ representan características del sistema que asumimos constantes, o que varían cuasiestáticamente (parámetros de bifurcación). Con la Ecuación (2.12) se busca analizar el comportamiento de las soluciones cuando se varía el parámetro $\boldsymbol{\lambda}$. Las soluciones \mathbf{x} del Sistema (2.12) deben de satisfacer lo mostrado en la Ecuación (2.13).

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad (2.13)$$

Los puntos que satisfacen la Ecuación (2.13) son los puntos de equilibrio del sistema. Es muy común que para la Ecuación (2.12) exista un conjunto inicial de soluciones (llamados generalmente como soluciones triviales), sin embargo para ciertos valores de $\boldsymbol{\lambda}$ es posible que aparezcan nuevas soluciones. El conjunto de todas estas soluciones, convergen en los diagramas de bifurcación.

Los diagramas de bifurcación representan una herramienta importante para el análisis de los sistemas dinámicos y proporcionan información sobre los límites de operación estable de un sistema dinámico. En ellos se puede observar cualitativamente los distintos comportamientos del sistema para diferentes valores de los parámetros $\boldsymbol{\lambda}$. Es decir, observar como el comportamiento del sistema pasa de ser ordenado a ser caótico, en los diagramas de bifurcación se observa que hay una bifurcación si el comportamiento del sistema cambia cualitativamente al alcanzar $\boldsymbol{\lambda}$ un valor crítico.

El diagrama de bifurcación de un sistema dinámico es el conjunto de todas las soluciones \mathbf{x} de su espacio de parámetros $\boldsymbol{\lambda}$. Esto es, en cada capa o sección del diagrama se reflejan

las soluciones del sistema para una cierta combinación de parámetros λ , obteniendo una estratificación del comportamiento cualitativo del sistema.

La forma tradicional para trazar un diagrama de bifurcación se basa en métodos de continuación [Richter83]. Estos métodos calculan una curva unidimensional en \mathbb{R}^{n+1} definida por la Ecuación (2.13). La mayoría de estos métodos de continuación implementan métodos de predicción-corrección, que incluyen tres fases fundamentales [Kuznetsov98]:

1. Predicción del siguiente punto
2. Corrección
3. Control del paso

El método de continuación implica calcular una secuencia de puntos $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ que aproximan la curva unidimensional con precisión, en base a un punto y_0 que sea suficientemente cercano a la curva o pertenezca a ella. Es decir, para calcular los puntos fijos del Sistema (2.12), se conoce un punto de equilibrio $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ a partir del cual se pueden generar las soluciones restantes y así graficar todo el conjunto de los puntos fijos que formen el diagrama de bifurcación del Sistema (2.12). Tal punto $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ se puede calcular mediante algún método numérico. Sin embargo, existen trabajos [Barrera08] que trazan diagramas de bifurcación de manera no supervisada utilizando técnicas metaheurísticas, donde no es necesario proporcionar el punto inicial para el trazado de los diagramas de bifurcación.

2.5. Tipos de bifurcaciones

Las bifurcaciones pueden clasificarse como globales o locales. Una bifurcación global ocurre normalmente dentro de conjuntos invariantes más grandes del sistema. Por ejemplo, ciclos límite o trayectorias que se extienden a una distancia grande, por este motivo, no pueden ser detectados mediante un análisis de estabilidad local. Las bifurcaciones globales más típicas son la bifurcación homoclínica, la bifurcación heteroclínica y la bifurcación de periodo infinito.

Una bifurcación local ocurre cuando el cambio en los parámetros de bifurcación causa un cambio en las propiedades de la estabilidad local, como puntos de equilibrio, órbitas locales, entre otros. Las bifurcaciones locales más típicas son la bifurcación silla-nodo, la bifurcación pitchfork, la bifurcación transcítica y la bifurcación hopf. A continuación se definen las bifurcaciones silla-nodo, pitchfork y transcítica.

2.5.1. Bifurcación silla-nodo

Este tipo de bifurcación ocurre cuando dos puntos críticos colisionan a medida que el parámetro λ cambia y se anulan el uno con el otro. El ejemplo prototípico de una bifurcación silla-nodo se muestra en la Ecuación (2.14):

$$\dot{x} = \lambda + x^2 \quad (2.14)$$

cuando λ es negativo existe un punto fijo estable y un punto fijo inestable, cuando λ es igual a cero existe el punto de bifurcación silla-nodo, y cuando λ es positivo el sistema no tiene puntos fijos o raíces reales, como se aprecia en la Figura 2.8. En esta tesis se mostrarán de color azul los puntos fijos estables y de color rojo los puntos fijos inestables.

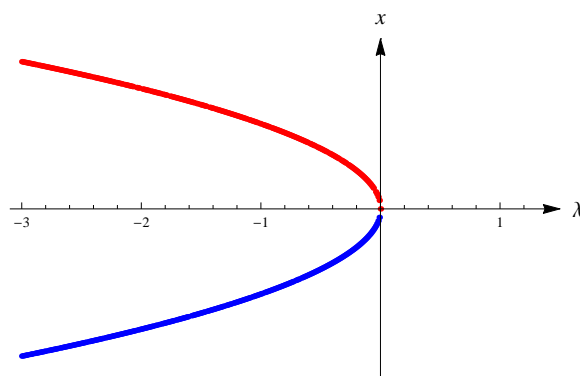


Figura 2.8: Diagrama de bifurcación de la Ecuación (2.14). Se observa una bifurcación silla-nodo.

2.5.2. Bifurcación transcítica

A diferencia de la bifurcación silla-nodo, en una bifurcación transcítica un punto crítico existe para todo valor del parámetro λ pero intercambian su estabilidad con otro punto crítico luego de la colisión entre ellos. La forma general de una bifurcación transcítica se muestra en la Ecuación (2.15):

$$\dot{x} = \lambda x - x^2 \quad (2.15)$$

si $\lambda > 0$ existe un punto de silla en $x^* = 0$ y un nodo asintóticamente estable en $x^* = \lambda$, cuando $\lambda = 0$ los nodos colisionan en uno solo siendo este punto fijo inestable no hiperbólico. Cuando $\lambda < 0$ la estabilidad se intercambia, $x^* = 0$ es un nodo asintóticamente estable y $x^* = \lambda$ es un punto de silla [Hale91]. El diagrama de bifurcación se aprecia en la Figura 2.9.

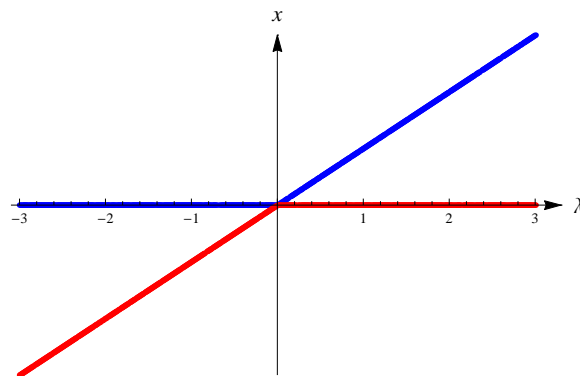


Figura 2.9: Diagrama de bifurcación de la Ecuación (2.15). Se observa una bifurcación transcítica.

2.5.3. Bifurcación pitchfork

Este tipo de bifurcaciones ocurre en sistemas dinámicos con simetría, el número de puntos de equilibrio pasa de 1 a 3 cuando el valor de bifurcación λ cambia de signo y la estabilidad del punto de equilibrio original cambia. Cuando los otros dos puntos de equilibrio que aparecen son estables la bifurcación se dice pitchfork supercrítica y se llama bifurcación pitchfork subcrítica cuando son inestables.

La forma general de una bifurcación pitchfork supercrítica se muestra en la Ecuación (2.16):

$$\dot{x} = \lambda x - x^3 \quad (2.16)$$

cuando λ es negativo existe un punto fijo estable en el origen y cuando λ es igual a cero el origen sigue siendo estable. Por último cuando λ es positivo el punto fijo pierde su estabilidad y aparecen dos nuevos puntos fijos estables ubicados simétricamente a cada lado del origen, como se muestra en la Figura 2.10.

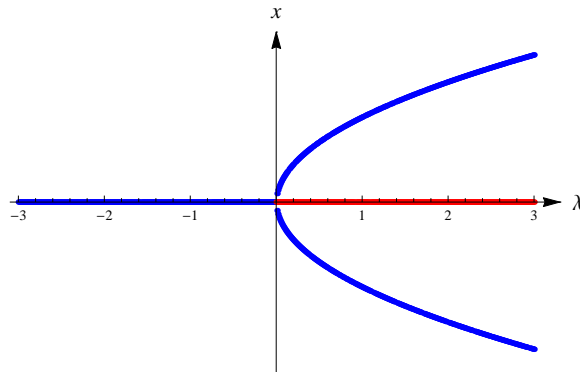


Figura 2.10: Diagrama de bifurcación de la Ecuación (2.16). Se observa una bifurcación pitchfork supercrítica.

La forma general de una bifurcación pitchfork subcrítica se muestra en la Ecuación (2.17):

$$\dot{x} = \lambda x + x^3 \quad (2.17)$$

cuando λ es negativo hay tres puntos fijos: un punto fijo estable en el origen y dos puntos fijos inestables adyacentes al origen. A medida que $\lambda \rightarrow 0$ los tres puntos fijos se acercan hasta que colisionan en $\lambda = 0$ y el origen sigue siendo estable. Por último cuando λ es positivo el único punto fijo es el origen y es inestable, como se muestra en la Figura 2.11.

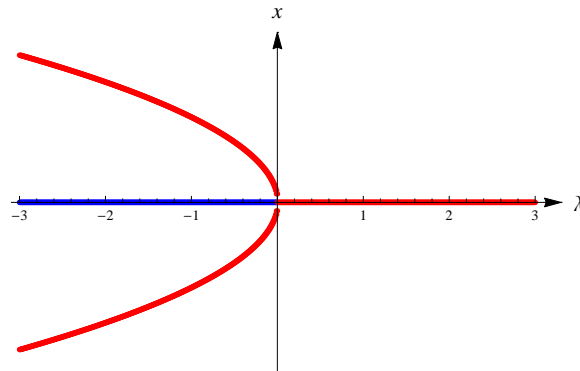


Figura 2.11: Diagrama de bifurcación de la Ecuación (2.17). Se observa una bifurcación pitchfork subcrítica.

2.6. Conclusiones

En este capítulo se han presentado algunos de los conceptos imprescindibles requeridos para el estudio de sistemas dinámicos y la teoría de bifurcaciones. Específicamente, la estabilidad de los puntos fijos y las formas normales de las bifurcaciones, así mismo se presentan sus respectivos diagramas de bifurcación; además se describió la forma tradicional para el trazado de los diagramas. El capítulo siguiente explica la forma no supervisada para generar los diagramas de bifurcación y la búsqueda de raíces complejas de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a partir de adaptaciones al algoritmo de inteligencia artificial. Por ejemplo para el diagrama de bifurcación silla-nodo cuando $\lambda > 0$ no presenta raíces reales, no obstante en el siguiente capítulo se muestra que si aparecen soluciones para valores de λ mayores que cero.

Capítulo 3

Producción de diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos

3.1. Introducción

En este capítulo se expone el desarrollo y procedimiento para la determinación de los diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos. El problema inicial de búsqueda de raíces para los diagramas de bifurcación se adaptó a un problema de búsqueda de raíces complejas. Para determinar las raíces complejas de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias se utilizó el algoritmo de optimización por enjambre de partículas (PSO), en el cual se extiende el espacio de búsqueda donde se explorarán las posibles soluciones del sistema de ecuaciones. Esto es, se incluyen componentes imaginarios a los individuos de PSO que representarán los puntos fijos del sistema de ecuaciones. Para un mejor entendimiento del proceso se describe el funcionamiento del algoritmo y la representación que se realizó dentro del mismo para las posibles soluciones complejas. El capítulo finaliza con la revisión de algunas de las bifurcaciones más comunes, comparando sus diagramas de bifurcación convencionales contra los diagramas producidos en esta tesis, haciendo énfasis en las diferencias que exhiben cada uno de ellos.

3.2. Algoritmo de optimización PSO

La optimización por enjambre de partículas (PSO) [Kennedy95] es un algoritmo de optimización que está inspirado en la conducta del vuelo de una parvada de aves. PSO ha sido aplicado en diversas áreas, como el diseño y la optimización de redes de comunicación, problemas de optimización combinatoria, aplicaciones de control, diseño y reestructuración de las redes eléctricas, entre otras [Poli08]. Esta metaheurística es útil para encontrar soluciones óptimas en un espacio de búsqueda muy complejo; donde cada individuo que simula el vuelo de una ave, vuela en el espacio de búsqueda con una velocidad que es ajustada de acuerdo a su propia experiencia de vuelo y la experiencia de vuelo de sus compañeros.

PSO permite optimizar un problema a partir de una población inicial de soluciones candidatas, dicha población se inicializa con una distribución aleatoria uniforme. Es decir, se asignan valores aleatorios a cada individuo de acuerdo a los rangos de búsqueda propuestos para cada uno de ellos. En la búsqueda de raíces para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, se inicializan las variables de estado del sistema con soluciones candidatas que son generadas con valores aleatorios. Para evaluar la evolución de cada individuo, esto es, saber que tan buena es una solución en particular se le asigna un indicador de desempeño, llamado comúnmente como aptitud que generalmente es un escalar.

3.2.1. Función objetivo

Para determinar la aptitud se considera la función objetivo, que es la ecuación que se desea optimizar. En este caso, se desea obtener los valores de \mathbf{x} que satisfagan el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir, lo mostrado en la Ecuación (3.1):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias asociado a un sistema dinámico, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ son las variables de estado del sistema de ecuaciones que son representadas como la posición de la partículas y $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ son los parámetros de control del sistema.

La función objetivo entonces, regresa un vector del tamaño del número de ecuaciones y ésta requiere ser un escalar. Para transformar la solución de la función objetivo se utiliza la función de mapeo g que transforma las soluciones de la forma (3.2)

$$g : R^n \rightarrow R \quad (3.2)$$

donde la función de mapeo recibe un vector de dimensión n y retorna un número real que indica el valor de la función objetivo.

3.2.2. Función de mapeo o función de aptitud

Para encontrar todos los puntos \mathbf{x} se transforma el problema de búsqueda de raíces a un problema de maximización, utilizando la función de mapeo mostrada en la Ecuación (3.3), propuesta por Aggarwal [Aggarwal00]. Además de transformar el problema, la Ecuación (3.3) devuelve sólo un escalar.

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})\|} \quad (3.3)$$

donde $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})\|$ es la norma del vector (Ecuación (3.4)) arrojado por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})^2} \quad (3.4)$$

La transformación convierte todos los puntos \mathbf{x} tal que cuando $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})\| = 0$, $g(\mathbf{x}) = 1$ y cuando $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})\| > 0$, $g(\mathbf{x}) < 1$, mapeando el dominio de la función $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ a $[0, 1]$. Esto hace que la función de aptitud regrese un escalar que determina la calificación de cada uno de los individuos (i.e. la aptitud de las soluciones \mathbf{x} encontradas por PSO).

3.2.3. Descripción del algoritmo

El algoritmo de PSO comienza creando un número determinado de partículas (población inicial), las cuales contienen características o atributos que las definen. Es decir, una partícula p_i posee características que ayudan a desempeñar la simulación de un ave en el espacio de búsqueda, como la posición actual x_i y un vector velocidad v_i que dirige su movimiento, el cual está guiado por las mejores partículas en el momento actual. Además de otras características que determinan la evolución de la partícula, como la aptitud. Por lo tanto, una partícula p_i se compone de los siguientes elementos: el vector x_i almacena la posición actual de la partícula, el vector P_{Best_i} almacena la mejor posición de la partícula encontrada hasta el momento, el vector v_i almacena la velocidad a la cual se moverá la partícula, el vector $fitness_x_i$ almacena la aptitud de la posición de la partícula actual y el vector $fitness_P_{Best_i}$ almacena la aptitud de la mejor posición de la partícula encontrada hasta el momento. De acuerdo a lo anterior, P_{Best_i} y $fitness_P_{Best_i}$ conforman la memoria de la partícula p_i . Las posiciones iniciales se generan aleatoriamente de acuerdo a un rango especificado según la variable representada. Durante el proceso iterativo las posiciones se actualizan de acuerdo a la velocidad calculada para cada una de ellas, con el fin de que las partículas exploren y exploten el espacio de búsqueda.

La posición actual de una partícula p_i se actualiza como se muestra en la Ecuación (3.5):

$$x_{new} = x_i + v_{new} \quad (3.5)$$

donde v_{new} es la nueva velocidad calculada para una partícula p_i :

$$v_{new} = \omega v_i + c_1 r_1 (P_{Best_i} - x_i) + c_2 r_2 (P_{nBest} - x_i) \quad (3.6)$$

donde c_1 es el parámetro cognitivo y c_2 el parámetro social, r_1 y r_2 son números aleatorios entre 0 y 1, P_{nBest} es la mejor posición recordada del enjambre y ω es el peso de inercia de la partícula, calculado con la Ecuación (3.7):

$$\omega = \omega_{max} - (\omega_{max} - \omega_{min}) \frac{g}{G} \quad (3.7)$$

donde g es el índice de la generación y G indica el número máximo de generaciones a los pesos máximos ω_{max} y mínimos ω_{min} .

Se desea evitar la exploración fuera del espacio de búsqueda controlando las velocidades de las partículas durante el proceso. En otras palabras, evitar que las partículas se salgan de los rangos permitidos para éstas. Para este fin se introduce a la ecuación de velocidad (Ecuación (3.6)) el parámetro χ , quedando la ecuación de velocidad de la siguiente forma:

$$v_{new} = \chi[v_i + c_1r_1(P_{Besti} - x_i) + c_2r_2(P_{nBest} - x_i)] \quad (3.8)$$

donde χ es el factor de constricción [Clerc02], [Li06] que controla la velocidad de las partículas. Éste es calculado por la Ecuación (3.9):

$$\chi = \frac{2k}{|2 - \phi - \sqrt{\phi(\phi - 4)}|} \quad (3.9)$$

donde $k \in [0, 1]$ y $\phi = c_1 + c_2 > 4$, ya que para valores de $\phi < 4$ el enjambre se acerca lentamente en espiral a la mejor posición encontrada pero sin garantía de convergencia mientras que para valores de $\phi > 4$ la convergencia es rápida y segura [Clerc99].

El algoritmo básico de PSO es mostrado en el Algoritmo 1, el cual recibe como parámetros los rangos del espacio de búsqueda donde se moverán las partículas (*rangos*), el número de partículas (*nPart*) y el número máximo de iteraciones (*mIter*). La función **generarEnjambre** inicializa el enjambre con *nPart* partículas generadas dentro de los rangos especificados. La función **evaluaciónInicial** obtiene la aptitud de las partículas del enjambre inicial, inicializa la velocidad en cero, y registra la posición y aptitud iniciales como las mejores hasta el momento. Se realizan *mIter* iteraciones para explorar el espacio búsqueda mediante las líneas 4, 5, 6 y 7. La función **calcularMáximoGlobal** obtiene la posición P_{nBest} con la mejor aptitud del enjambre. La función **calcularVelocidades** calcula la velocidad de cada una de las partículas de acuerdo a la Ecuación (3.8) en base a los parámetros recibidos. La función **actualizarPartículas** actualiza la posición actual de las partículas del enjambre de acuerdo a la Ecuación (3.5) y además verifica que la nueva posición de las partículas posean una aptitud mejor que la registrada en la memoria de la partícula. De ser así, se

actualiza la mejor posición de la partícula P_{Best_i} por la nueva posición y se actualiza la aptitud $fitness_{P_{Best_i}}$ por la aptitud $fitness_{x_i}$. Por último el Algoritmo 1 retorna el enjambre resultante de las $mIter$ iteraciones.

Algoritmo 1 PSO (rangos, nPart, mIter)

```

1: enjambre ← generarEnjambre(rangos, nPart)
2: evaluaciónInicial(enjambre)
3: for  $i \leftarrow 0$  to mIter do
4:   máximoGlobal ← calcularMáximoGlobal(enjambre)
5:   calcularVelocidades(enjambre, máximoGlobal)
6:   actualizarPartículas(enjambre)
7: end for
8: return enjambre

```

3.2.4. Algoritmo de optimización PSO con nichos

Los problemas multimodales cuentan con más de una solución óptima, como es el caso de búsqueda de múltiples raíces en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. PSO provee un conjunto de variantes y enfoques que posibilitan entre otros objetivos, evitar que las partículas se concentren en óptimos locales, asegurando así una amplia exploración del espacio de búsqueda. Uno de ellos, PSO con nichos, es un algoritmo para localizar de manera eficiente múltiples soluciones óptimas en problemas multimodales. Este algoritmo crea múltiples subenjambres a partir de un enjambre inicial de partículas, mediante el control de la aptitud de las partículas individuales [Brits02]. El algoritmo comienza creando una población inicial y evalúa cada una de las partículas para obtener su aptitud. Después selecciona la partícula con la mejor aptitud del enjambre y elige todas las partículas a su alrededor que tengan una distancia menor que un radio r para formar parte de un subenjambre o nicho. Después, las partículas que ya forman parte de un nicho son marcadas y se selecciona del enjambre restante la siguiente partícula con la mejor aptitud para repetir el proceso, esto se repite con todas las partículas del enjambre inicial. De esta manera se crean

los nichos a partir del enjambre inicial, que explorarán diferentes subregiones del espacio de búsqueda para encontrar múltiples soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

El algoritmo de PSO con nichos mostrado en el Algoritmo 2 recibe además de los parámetros de PSO básico (*rangos*, *nPart*, *mIter*), el radio *r* que determina el tamaño de los nichos o subenjambres y el número máximo de partículas que puede tener un nicho (*partNicho*). Las funciones **generarEnjambre**, **evaluacionInicial**, **actualizarPartículas** son las mismas funciones descritas anteriormente en el Algoritmo 1. La función **calcularNichos** crea los nichos de la forma mencionada anteriormente, para esto requiere el enjambre de partículas a partir del cual creará los nichos, el número de partículas por nicho *partNicho* y el radio *r*. Verifica que cada una de las partículas ya pertenezcan a un nicho, en caso contrario se agregan a un nicho siempre y cuando éste no haya alcanzado el número máximo de partículas *partNicho*. De lo contrario, las siguientes partículas son marcadas para ser reiniciadas aleatoriamente. La función **calcularVelocidadesNichos** calcula las nuevas velocidades de las partículas de los nichos. La función **reiniciarPartículasRechazadas** reinicializa aleatoriamente las posiciones de las partículas marcadas en la línea 4, además se les asignan una velocidad de cero y son evaluadas para obtener su aptitud. Por último el Algoritmo 2 regresa el enjambre resultante de las *mIter* iteraciones.

Algoritmo 2 PSONichos (*rangos*, *nPart*, *mIter*, *r*, *partNicho*)

```

1: enjambre ← generarEnjambre(rangos, nPart)
2: evaluaciónInicial(enjambre)
3: for i ← 0 to mIter do
4:   calcularNichos(enjambre, r, partNicho)
5:   calcularVelocidadesNichos(enjambre)
6:   actualizarPartículas(enjambre)
7:   reiniciarPartículasRechazadas(enjambre)
8: end for
9: return enjambre

```

3.3. Puntos fijos complejos

Para un λ dado los puntos \mathbf{x} donde:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) = 0 \quad (3.10)$$

se denominan puntos fijos del sistema y estos representan un estado de equilibrio de un sistema dinámico. El dominio de las variables de estado \mathbf{x} que satisface la Ecuación (3.10) puede ser \mathbb{C}^n . Un punto fijo \mathbf{x} que cumple con esta propiedad se dice que es un punto fijo complejo, es decir, x_1, x_2, \dots, x_n se definen por números complejos de la forma binómica:

$$z = a + b i \quad (3.11)$$

donde a es llamada la parte real y b es llamada la parte imaginaria. Los puntos fijos complejos tienen la propiedad de ser conjugados entre sí, es decir:

$$z = a \pm b i \quad (3.12)$$

Con los puntos fijos complejos es posible analizar el comportamiento estable, inestable u oscilatorio de los puntos de equilibrio un sistema dinámico. Por ejemplo, las soluciones reales denotan que el sistema presenta una tendencia al crecimiento exponencial y las soluciones complejas denotan los comportamientos o los fenómenos oscilatorios del sistema. Para generar los puntos fijos complejos del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, se adaptó el algoritmo PSO nichos para ser capaz de generar soluciones en el plano complejo. A continuación se detallan estas adaptaciones.

3.3.1. Representación de puntos fijos complejos en PSO nichos

Cada partícula tiene asociado un vector de posición \mathbf{x} , una velocidad v y una aptitud, en el problema de búsqueda de soluciones complejas para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, el vector de posición \mathbf{x} debe de representar una posible solución compleja.

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (2.12), este se puede reescribir de la forma (3.13):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m \quad (3.13)$$

donde cada variable de estado del sistema es una variable compleja, con el fin de obtener soluciones complejas para el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Sin embargo, en PSO al momento de generar el enjambre, \mathbf{x} no se define como un número complejo, sino de la forma (3.14), definiendo por separado la parte real a y la parte imaginaria b . Se asignan rangos de búsqueda para cada uno de ellos, esto implica que la dimensionalidad del problema aumente, debido a que cada variable de estado del sistema duplica su dimensión.

$$x = (a, b), \quad a \in [\text{mín}_a, \text{máx}_a], \quad b \in [\text{mín}_b, \text{máx}_b] \quad (3.14)$$

Para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con n variables de estado, una partícula p_i del enjambre inicial queda definida de la siguiente manera (usando la notación de Mathematica):

$$\begin{aligned} p_i [& x_i[\{x_{a1}, x_{b1}, x_{a2}, x_{b2}, \dots, x_{an}, x_{bn}\}], \\ & v_i[\{v_{a1}, v_{b1}, v_{a2}, v_{b2}, \dots, v_{an}, v_{bn}\}], \\ & fitness_x_i[\{f_x_i\}], \\ & P_{Best_i}[\{y_{a1}, y_{b1}, y_{a2}, y_{b2}, \dots, y_{an}, y_{bn}\}], \\ & fitness_P_{Best_i}[\{fb_x_i\}] \quad] \end{aligned}$$

De esta forma, el algoritmo crea las posiciones iniciales del doble del tamaño del número de variables de estado del sistema y comprende partículas que se pueden desplazar tanto en el eje real como en el imaginario. Estas son las posibles soluciones complejas del sistema de ecuaciones. Para ser evaluadas estas soluciones complejas en la función objetivo es necesario realizar una conversión de las posiciones a números complejos, puesto que si se cuenta con n variables de estado es indispensable contar con n posiciones, es decir, el sistema de ecuaciones evaluado en las probables soluciones complejas, tal que se cumpla lo mostrado en la Ecuación (3.15).

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 + 0 i \quad (3.15)$$

La función objetivo entonces regresará un vector del tamaño del número de ecuaciones, al cual se le aplica la función de mapeo (3.3) para transformar el vector en un escalar que define la aptitud de la partícula. Las posiciones sólo se convierten en complejos para ser evaluadas en la función de aptitud, por lo que en el proceso en PSO éstas mantienen la estructura definida por la Ecuación (3.14).

Para que las partículas se desplacen a través del espacio de búsqueda es imprescindible calcular la velocidad para cada una de ellas mediante la Ecuación (3.8), y después actualizar la posición de las partículas en el enjambre mediante la Ecuación (3.5), donde para cada valor de a y b de cada una de las variables de estado se calcula una velocidad.

Un diagrama de bifurcación es generado variando cuasiestáticamente los parámetros de bifurcación, λ , encontrando todas las soluciones para cada combinación de los parámetros λ . Cuando se termina de calcular las raíces para las distintas combinaciones de los parámetros de bifurcación se tiene por cada una de ellas un enjambre que fue iterado $mIter$ veces, los cuales pasan por un filtro para obtener los puntos fijos y eliminar soluciones espurias. Además, todas las soluciones de la última iteración se refinan con algún método de optimización basado en gradiente. Para esto la parte real a y la parte imaginaria b de las variables de estado son unidas en su forma binómica (Ecuación (3.11)), debido a que se requiere que el punto inicial para el refinamiento sea un sólo número, por lo tanto, las soluciones que devuelve el algoritmo de PSO son complejas.

Es posible que el algoritmo no encuentre el conjugado para cada una de las raíces complejas, por lo tanto, después de haber filtrado los puntos se calculan los conjugados restantes de las raíces complejas. Para determinar las estabilidad de los puntos fijos se aplica el Teorema 2.1 mencionado en la Sección 2.3.

Resumiendo lo antes descrito, los pasos para generar los diagramas de bifurcación con raíces complejas se muestran a continuación:

- 1: sistema \leftarrow **definirSistema**(EDO's, variablesEstado, parámetrosBifurcación)
- 2: experimento \leftarrow **definirExperimento**(sistema, parámetrosPSO)
- 3: diagramaBifurcación \leftarrow **crearDiagramaBifurcación**(experimento)

En el paso 1, se define el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's) y se declaran los rangos de búsqueda para las variables de estado y los rangos de los parámetros de bifurcación. En el paso 2 se define el experimento de PSO que requiere el número de partículas, el número máximo de iteraciones y el radio del nicho. Por último se procede a generar los diagramas de bifurcación mediante la función crearDiagramaBifurcación.

Algoritmo 3 crearDiagramaBifurcación(experimento)

- 1: **for** $j \leftarrow 1$ to combinaciónParámetrosBifurcación **do**
 - 2: enjambre \leftarrow **PSONichos**(experimento)
 - 3: enjambres \leftarrow **add**(enjambre)
 - 4: **end for**
 - 5: puntosFijos \leftarrow **filtrarPuntosFijos**(enjambres, experimento)
 - 6: puntosFijos \leftarrow **determinarConjugados**(puntosFijos)
 - 7: diagrama \leftarrow **determinarEstabilidad**(puntosFijos, experimento)
 - 8: **return** diagramaBifurcación
-

3.3.2. Diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos

A los diagramas de bifurcación que exhiben (además de las soluciones reales) soluciones complejas conjugadas y soluciones imaginarias puras del sistema de ecuaciones diferenciales se les llama diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos. Para un sistema que cumpla con la Ecuación (3.16) el diagrama es tridimensional, debido a que se grafica la variable de estado x de valor complejo contra el parámetro de bifurcación λ .

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{C}^1, \quad \lambda \in \mathbb{R}^1 \quad (3.16)$$

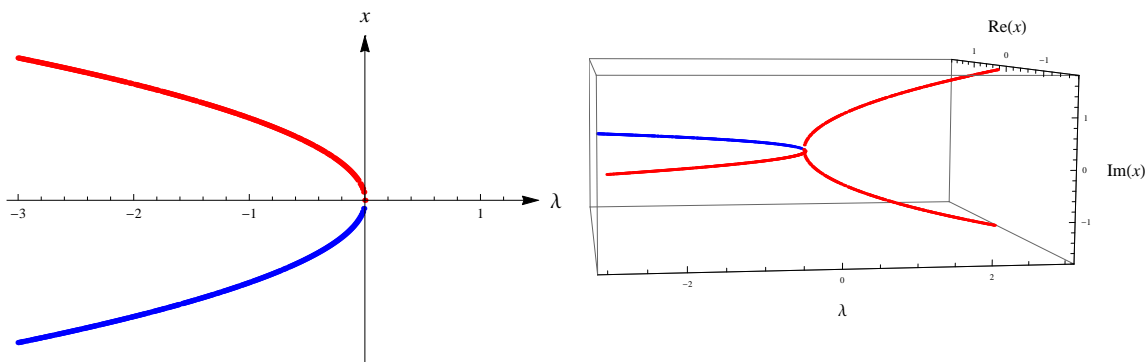
Por ejemplo, las formas normales de bifurcaciones cumplen con la Ecuación (3.16), mencionadas en la Sección 2.5 en donde se muestran sus respectivos diagramas de bifurcación con

puntos fijos reales. En esta sección se expone una comparación respecto a los diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos para las formas normales de bifurcaciones.

Bifurcación silla-nodo

En la Figura 3.1 se observa la comparación de los diagramas de bifurcación de la Ecuación (3.17) con puntos fijos reales y puntos fijos complejos. Se observa en la Figura 3.1(b) que después del punto de bifurcación surgen soluciones complejas, creándose una parábola que gira 90 grados con respecto al punto de bifurcación. Estos puntos fijos complejos no se mostraban en la Figura 3.1(a).

$$\dot{x} = \lambda + x^2 \quad (3.17)$$



(a) *Diagrama de bifurcación con puntos fijos reales.* (b) *Diagrama de bifurcación con puntos fijos complejos.*

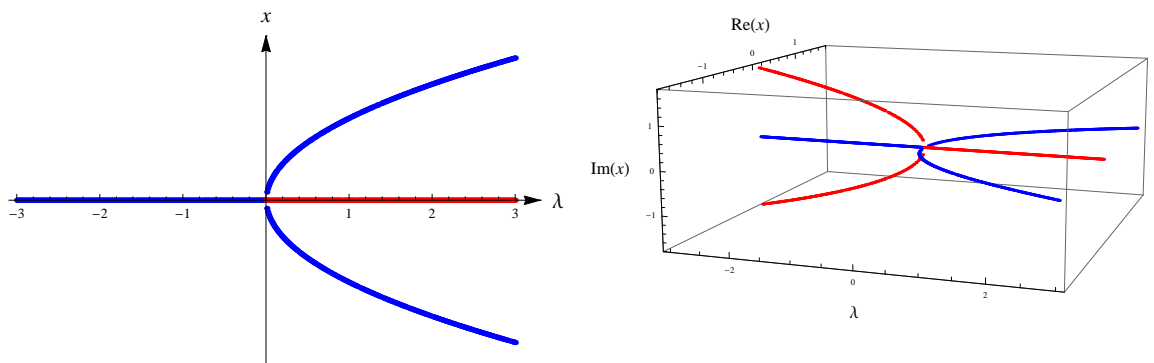
Figura 3.1: Diagramas de bifurcación silla-nodo de la Ecuación (3.17). En 3.1(a) y en 3.1(b) se observa que para cada valor de $\lambda < 0$ existe un punto fijo estable e inestable, cuando $\lambda = 0$ existe un sólo punto fijo semiestable, pero en 3.1(b) cuando $\lambda > 0$ comienzan a surgir puntos fijos imaginarios puros, los cuales no se observan en la Figura 3.1(a).

Bifurcación pitchfork supercrítica

La Figura 3.2 muestra los dos diagramas de bifurcación con puntos fijos reales y complejos respectivamente de la Ecuación (3.18). Se observa en la Figura 3.2(b) que para

$\lambda < 0$ aparece otra bifurcación pitchfork, cuando originalmente solo se visualizaba una línea en el origen en la Figura 3.2(a).

$$\dot{x} = \lambda x - x^3 \quad (3.18)$$



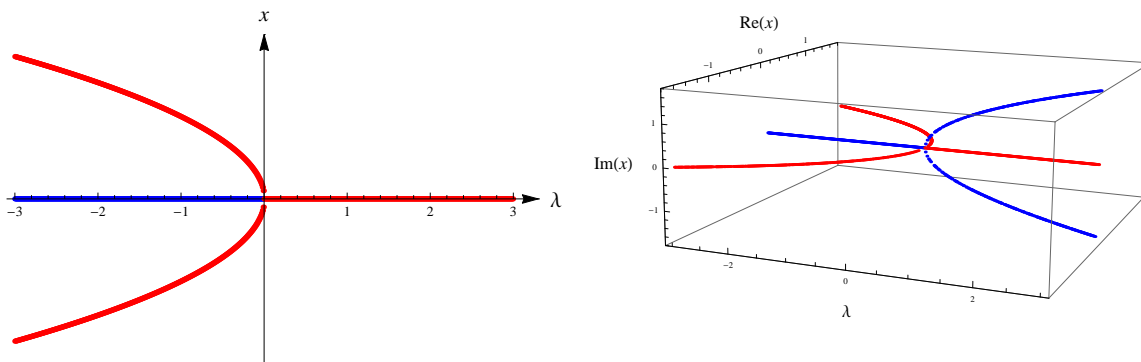
(a) *Diagrama de bifurcación con puntos fijos reales.* (b) *Diagrama de bifurcación con puntos fijos complejos.*

Figura 3.2: Diagramas de bifurcación pitchfork supercrítica de la Ecuación (3.18). En 3.2(a) para cada valor de $\lambda < 0$ existe un punto fijo estable en el origen mientras que en 3.2(b) además de los puntos fijos en el origen, existen dos puntos fijos imaginarios puros inestables adyacentes al origen y cuando $\lambda = 0$ existe un punto fijo estable y ocurre la doble bifurcación pitchfork.

Bifurcación pitchfork subcrítica

La Figura 3.3 muestra los diagramas de bifurcación de la Ecuación (3.19); se observa en la Figura 3.3(b) que cuando λ es positivo se crea una parábola formada por pares conjugados de puntos fijos imaginarios puros. A diferencia del diagrama de bifurcación pitchfork supercrítica (Figura 3.2(b)), donde la parábola está formada por puntos fijos reales. Cuando λ es negativo (Figura 3.3) se aprecia que los dos diagramas de bifurcación exhiben el mismo conjunto de puntos fijos.

$$\dot{x} = \lambda x + x^3 \quad (3.19)$$



(a) *Diagrama de bifurcación con puntos fijos reales* (b) *Diagrama de bifurcación con puntos fijos complejos*

Figura 3.3: Diagramas de bifurcación pitchfork subcrítica de la Ecuación (3.19). En 3.3(a) para cada valor de $\lambda > 0$ existe un punto fijo inestable en el origen mientras que en 3.3(b) además de los puntos fijos en el origen, existen dos puntos fijos imaginarios puros estables adyacentes al origen.

3.4. Conclusiones

Se explicó la generación de diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos, describiendo el funcionamiento del algoritmo de optimización por enjambre de partículas con nichos y las adaptaciones que sufrió el mismo para la búsqueda de las raíces complejas. Así mismo, se presentaron los diagramas con puntos fijos complejos de las formas normales de las bifurcaciones, mostrando que efectivamente poseen soluciones para ciertos valores donde no se observaban antes, pero estas soluciones son de naturaleza compleja. En el Capítulo 5 se presenta una serie de resultados con más detalle.

El capítulo siguiente expone diferentes métodos de visualización de alta dimensionalidad, con el fin de visualizar todas las variables un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en un mismo gráfico. Esto es necesario debido al incremento del componente imaginario de las variables de estado. Se ilustrará también la aplicabilidad de los mismos.

Capítulo 4

Métodos de visualización de alta dimensionalidad

4.1. Introducción

Debido al número de variables en un sistema dinámico, representar en los diagramas de bifurcación la relación que existe entre todas las variables no es posible con los métodos de visualización tradicionales, ya que sólo producen una visión parcial de la información. Por esta razón se decidió explorar la representación de los diagramas de bifurcación con diferentes métodos de visualización multidimensionales, con el fin de obtener información que los métodos tradicionales no aportan. La representación de los puntos fijos de un sistema de EDO's de la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$, donde $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, y $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, tiene $2n + m$ dimensiones. Esto es, cada variable de estado x representará dos dimensiones correspondientes a la parte real e imaginaria del mismo y cada parámetro de bifurcación λ representará una sola dimensión. A continuación se describen los diferentes métodos de visualización multidimensionales implementados, con el fin de encontrar patrones o alguna información importante para el análisis de los sistemas dinámicos. Es conveniente mencionar que no todos obtuvieron buenos resultados para este fin, pero siguen siendo excelentes métodos de visualización para grandes conjuntos de datos en diferentes áreas.

4.2. Gráfico RadViz

RadViz por sus siglas en inglés (Radial Visualization) [Nováková09], es un método para mapear un conjunto de puntos n -dimensionales a un espacio bidimensional. Este método utiliza la ley de Hooke, la cual establece que el alargamiento de un resorte es directamente proporcional al módulo de la fuerza que se le aplique, siempre y cuando dicho resorte no se deforme permanentemente. Los puntos mapeados se visualizan en una circunferencia de radio unitario, la cual se divide en las n dimensiones o variables de las observaciones. Alrededor de la circunferencia se trazan n puntos equidistantes que representan las dimensiones conocidas como anclas S_1, \dots, S_n , como se observa en la Figura 4.1.

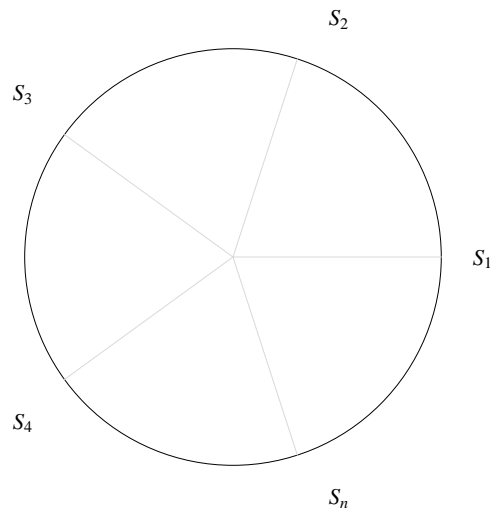


Figura 4.1: Representación de las n dimensiones en una circunferencia RadViz.

Considerando un punto $y_i = [y_1, \dots, y_n]$ de espacio n -dimensional, este es mapeado a un único punto u_i en la circunferencia de la Figura 4.1. De acuerdo a ley de Hooke por cada ancla S_j se supone que existe un resorte que ejerce cierta fuerza de atracción sobre el punto u_i , como se observa en la Figura 4.2. La fuerza del j -ésimo resorte estará determinada por el valor que toma el punto y_i en esa dimensión, es decir, la constante de alargamiento del j -ésimo resorte es y_{ij} . Donde y_{ij} es el valor de la dimensión j para el dato i , siendo y la matriz que contiene todos los puntos a mapear.

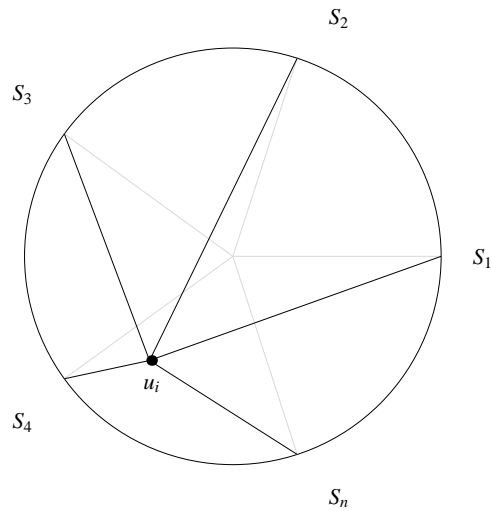


Figura 4.2: Mapeo de un punto n -dimensional a un punto bidimensional u_i .

El algoritmo básico de RadViz se presenta en el Algoritmo 4; recibe como parámetro la matriz y que almacena los datos a mapearse, d es el número de datos y n representa el número de dimensiones. Como resultado el algoritmo regresa una matriz u que contiene todos los datos transformados.

Algoritmo 4 RadViz(y)

```

1: for  $i \leftarrow 1$  to  $d$  do
2:   for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
3:      $\bar{y}_{ij} \leftarrow \text{normalizar}(y_{ij}, \text{mín}(y), \text{máx}(y))$ 
4:   end for
5: end for
6:  $S \leftarrow \text{calcularPosiciónAnclas}(n)$ 
7: for  $i \leftarrow 1$  to  $d$  do
8:    $u_i \leftarrow \text{mapearPunto}(\bar{y}_i, S)$ 
9: end for
10: return  $u$ 

```

La función **normalizar** normaliza cada uno de los datos y_{ij} de la matriz de datos y de acuerdo a la Ecuación (4.1), devolviendo \bar{y}_{ij} que es el valor de la dimensión j para el dato i normalizado.

$$\bar{y}_{ij} = \frac{(y_{ij} - \text{mín } y)}{\text{máx } y - \text{mín } y} \quad (4.1)$$

La función **calcularPosiciónAnclas** crea el vector S que almacena la posición angular de las anclas en la circunferencia de RadViz, desde $2\pi/n$ hasta 2π , donde n es el número de dimensiones. La función **mapearPunto** mapea un cierto punto \bar{y}_i a un punto bidimensional $u_i = (u_1, u_2)$, donde el valor de las posiciones u_1 y u_2 está dado por las Ecuaciones (4.2) y (4.3), respectivamente. S_j representa la posición angular de la ancla j correspondiente a la dimensión j en la circunferencia de RadViz.

$$u_1 = \frac{\sum_{j=1}^n \bar{y}_{ij} \cos(S_j)}{\sum_{j=1}^n \bar{y}_{ij}} \quad (4.2)$$

$$u_2 = \frac{\sum_{j=1}^n \bar{y}_{ij} \sin(S_j)}{\sum_{j=1}^n \bar{y}_{ij}} \quad (4.3)$$

RadViz es especialmente eficaz en la visualización de conjuntos de datos multidimensionales, debido a que varias dimensiones se pueden asignar a puntos de anclaje en la circunferencia del círculo. Esto lo hace particularmente útil en minería de datos como la identificación de clusters y la identificación y selección de palabras claves en un motor de búsqueda [Carey03]. Además ha sido útil en el análisis de datos biológicos, por ejemplo, en la detección del cáncer [McCarthy04].

4.2.1. Interpretación gráfica del mapeo de RadViz

La interpretación gráfica de la proyección de un espacio tridimensional (cuboide) a una circunferencia RadViz se presenta a continuación. Se mapean los vértices y aristas del cuboide con el fin de dividirlo en una región y proyectarla en el gráfico RadViz, obteniendo una idea general de como se proyectarán los puntos 3D de dicha región en la circunferencia de RadViz.

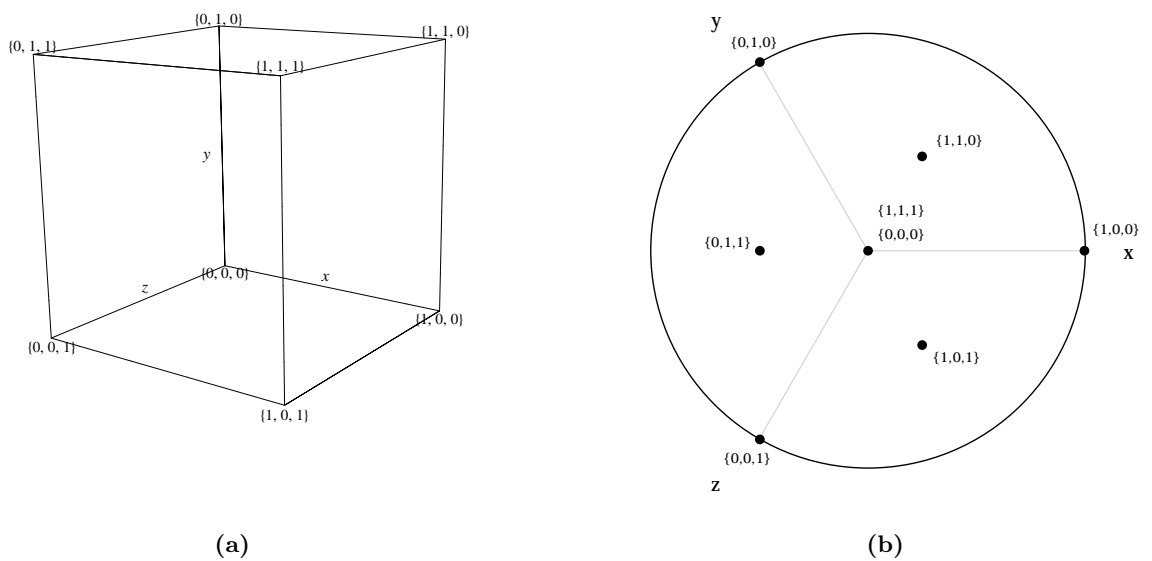


Figura 4.3: Proyección de los vértices del cubo 4.3(a) en RadViz 4.3(b).

En la Figura 4.3 se observan los vértices de un cubo unitario (Figura 4.3(a)) mapeados a RadViz los cuales son representados por puntos de color negro. Cuanto más alto sea el valor para una dimensión en particular el punto proyectado estará más cerca del anclaje correspondiente. Por ejemplo, el punto $\{x, y, z\} = \{0, 1, 0\}$ de la Figura 4.3(b) se encuentra situado exactamente en el ancla y . El punto $\{1, 0, 1\}$ de la misma figura está situado entre las anclas x y z , debido a que los valores de dichas dimensiones son mayores al valor de la dimensión y . En general, para que un punto 3D sea mapeado al punto antes mencionado se debe de cumplir que x y $z > y$ donde $x = z$ y $y = 0$. Los vértices $\{1, 1, 1\}$, $\{0, 0, 0\}$ se mapean al centro del círculo debido a que ninguna dimensión ejerce “más fuerza” que las

otras, dejando el punto en equilibrio. En general cuando se cumple que x, y y z son iguales los puntos son proyectados en la misma posición en el gráfico RadViz, dando lugar a una proyección con pérdidas.

En la Figura 4.4 se presenta la proyección de las aristas del cubo unitario 4.4(a) a la circunferencia RadViz las cuales son marcadas por etiquetas que contienen el caracter “*”, que indica la variación de una de las variables o dimensiones. Las aristas forman líneas rectas que se unen con los puntos que representan los vértices formando así una región triangular dividida en tres regiones. Esto significa que cualquier punto dentro del cubo se mapeará dentro de la región de color lila.

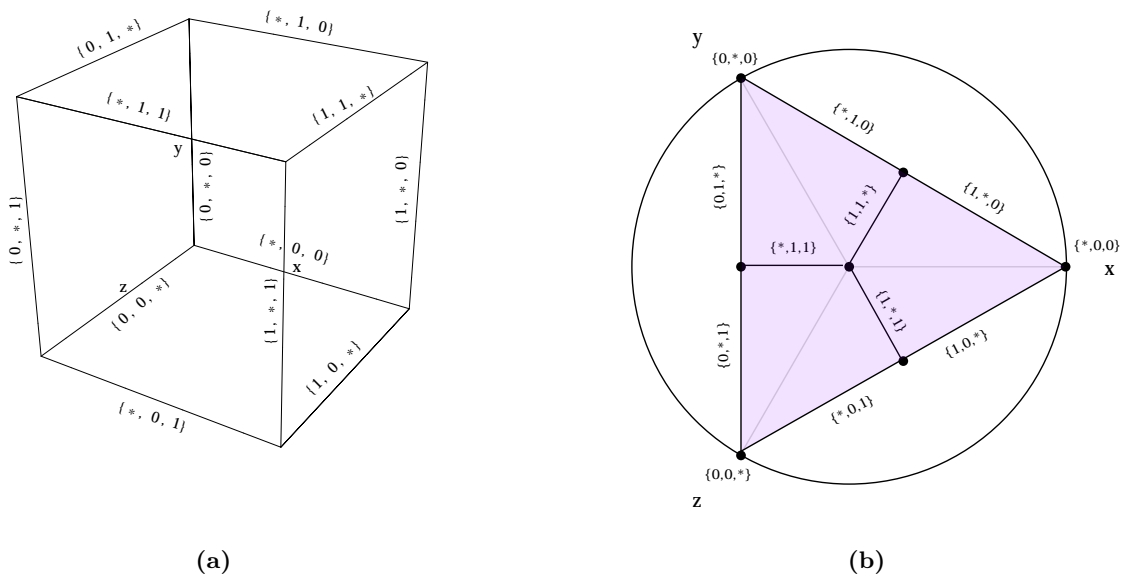


Figura 4.4: Proyección de las aristas o bordes del cubo 4.4(a) en RadViz 4.4(b).

En la Figura 4.5 se muestra donde se mapea la región de color azul de la Figura 4.5(a) al gráfico RadViz, dado que los vértices y aristas de la región piramidal del cubo se mapean a los puntos y líneas marcadas en la Figura 4.5(b). Esto delimita una subregión en el área triangular del RadViz, por lo tanto la región de color azul del cubo está comprendida en dicha subregión. Para comprobar lo antes mencionado, se genera una nube de puntos en

dicha región y se mapea a la circunferencia RadViz (ver Figura 4.6). Cualquier punto que se encuentre dentro de la región azul del cubo será mapeado a la región azul del área triangular de RadViz, cualquier otro punto que no esté dentro de la región piramidal será mapeado a la región restante del triángulo.

Este análisis ayuda a entender la forma en que se mapean los datos. Cabe destacar que en los trabajos de investigación donde hacen uso de este método de visualización no proporcionan el análisis detallado anteriormente. En esta tesis se contribuyó a esta parte del entendimiento de la proyección de los datos mapeados a RadViz.

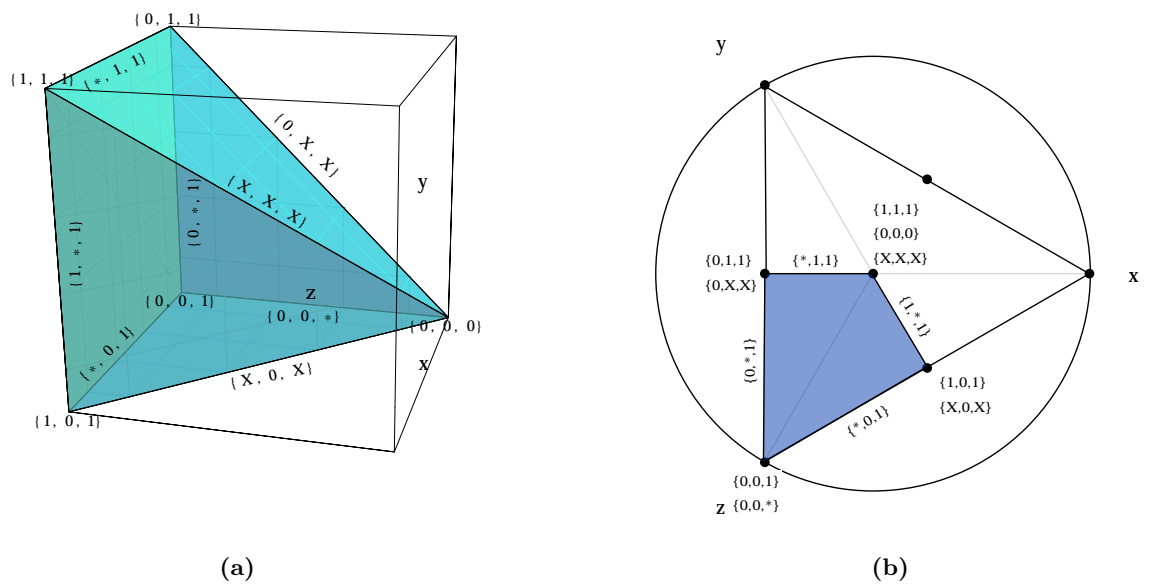


Figura 4.5: Proyección de una región (marcada de color azul) del cubo 4.5(a) a una región de la circunferencia RadViz 4.5(b).

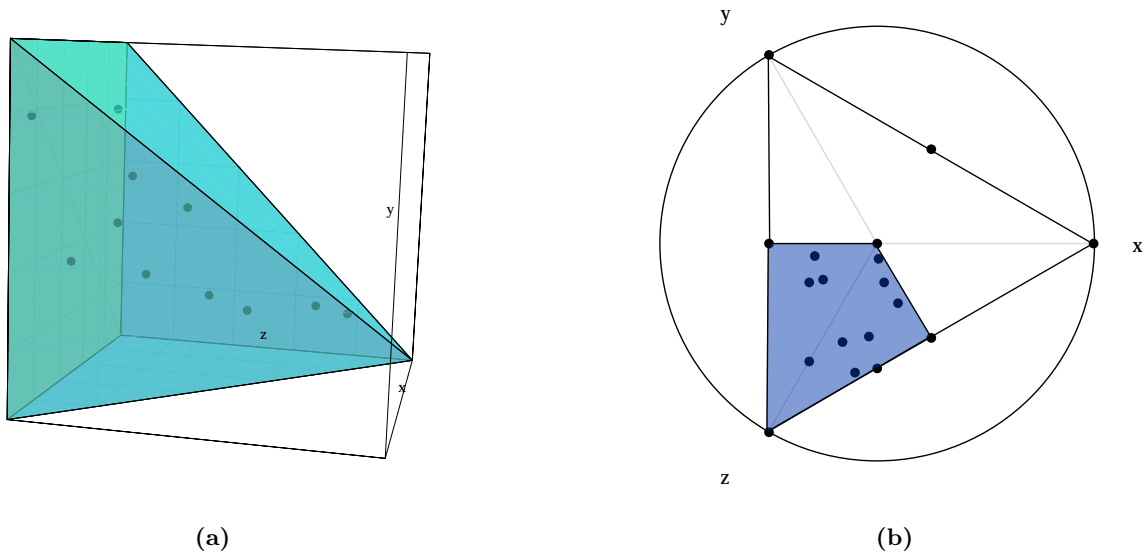


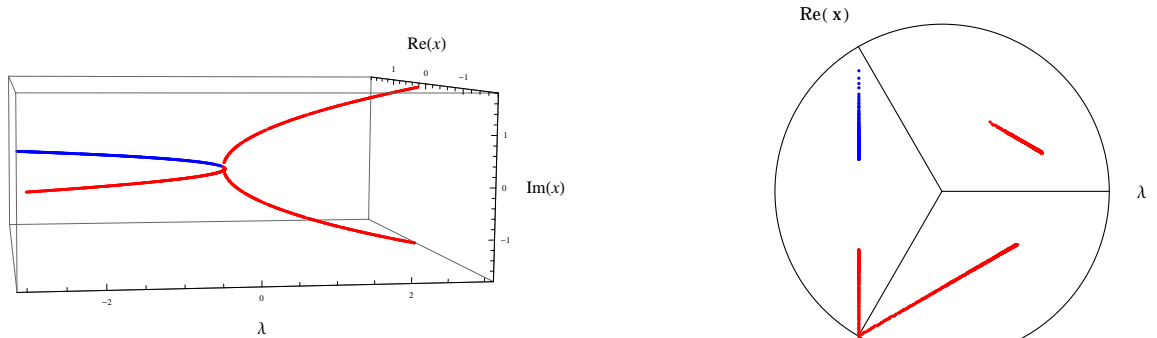
Figura 4.6: Mapeo a RadViz del conjunto de puntos generados aleatoriamente dentro de la región azul.

4.2.2. Ejemplos

En la presente tesis se implementó y aplicó el algoritmo RadViz al conjunto de datos multidimensionales formado por el espacio de variables de estado y los parámetros de bifurcación de un sistema de EDO's. Estas variables y estos parámetros serán las anclas que estarán alrededor de la circunferencia, con el fin de poder visualizar todas las variables en un mismo gráfico o tener una perspectiva diferente de un diagrama de bifurcación convencional.

El propósito principal de esta implementación, es visualizar diversas dimensiones en un mismo diagrama. Sin embargo, el ejemplo que se presenta a continuación ayuda a observar la relación que existe entre el diagrama de bifurcación de un sistema y el RadViz del mismo. Por ejemplo para la Ecuación (4.4), se observa en la Figura 4.7 la comparación entre el diagrama de bifurcación convencional y el diagrama mapeado a la circunferencia de RadViz.

$$\dot{x} = \lambda + x^2, \quad x \in \mathbb{C} \quad (4.4)$$



(a) *Diagrama de bifurcación con puntos fijos complejos.*

(b) *RadViz.*

Figura 4.7: Se muestran los puntos fijos complejos de la Ecuación (4.4) en un espacio \mathbb{R}^3 mapeados a un plano bidimensional con el algoritmo RadViz.

En el ejemplo anterior se observó la relación que existe entre un diagrama de bifurcación y su mapeo a una circunferencia RadViz. Para el caso siguiente se muestra el resultado de mapear datos 4D (correspondientes a puntos fijos de una ecuación) a una circunferencia RadViz. Las soluciones que presenta la Ecuación (4.5) están representadas por vectores de dimensión cuatro, por lo tanto no se puede mostrar una comparación entre los diagramas generados para la Ecuación (4.5). La Figura 4.8(a) muestra el diagrama de bifurcación con puntos fijos reales de dimensión tres y la Figura 4.8(b) el RadViz con puntos fijos complejos, esto es, se agregó la parte imaginaria de las soluciones.

$$\dot{x} = h + rx - x^3, \quad x \in \mathbb{C}, \quad h, r \in \mathbb{R} \quad (4.5)$$

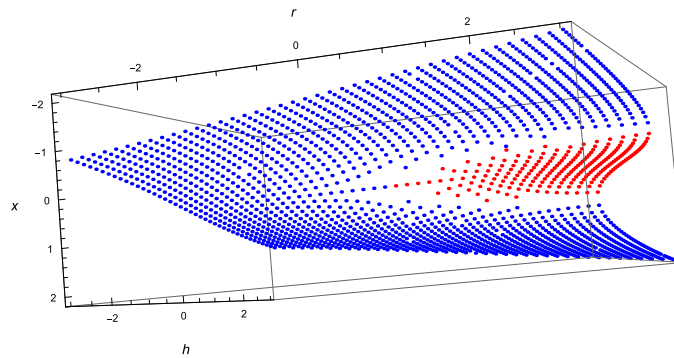
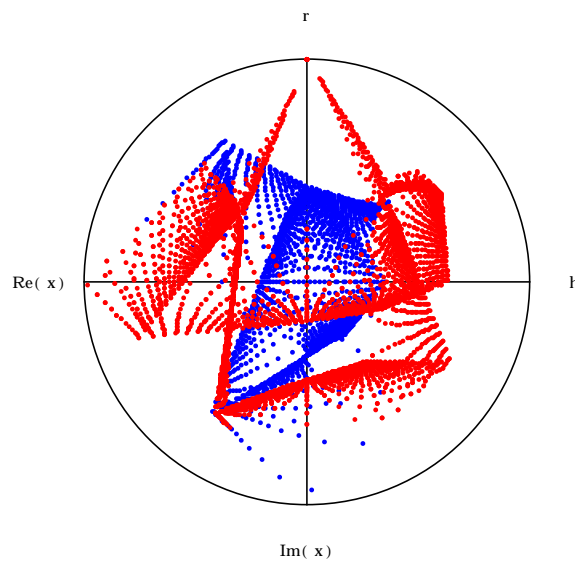
(a) *Diagrama de bifurcación con puntos fijos reales.*(b) *RadViz con puntos fijos complejos.*

Figura 4.8: Diagramas de bifurcación de la Ecuación (4.5).

Se observa en la Figura 4.8(b) el resultado de la transformación de los puntos fijos de la Ecuación (4.5), se muestra que generalmente los puntos fijos estables se encuentran más cercanos al centro de la circunferencia, por el contrario, los puntos fijos inestables se encuentran más lejos del centro. Además es posible visualizar que existe una semejanza entre la posición de los puntos fijos del lado izquierdo y del lado derecho del círculo. Sin embargo, una de las desventajas que posee este método de visualización es que la interpretación de los resultados se vuelve complicada.

4.3. Diagrama de burbujas

Se ha llamado diagrama de burbujas al gráfico 3D que presenta puntos tridimensionales que poseen una estructura de esferas o burbujas. El tamaño o el radio de las burbujas está determinado por el valor que toma una dimensión de las soluciones de un sistema de EDO's. El radio de la esferas ayudará a visualizar una dimensión más en un espacio tridimensional, dando una información complementaria a la original. Para este diagrama se seleccionan cuatro variables de las n dimensiones (variables de estados o parámetros de bifurcación), de las cuales tres de ellas representan el espacio tridimensional y la cuarta es representada por el radio de las esferas. Para el caso de un sistema que cuente con cuatro dimensiones (ver Ecuación (4.5)) el diagrama es suficiente para mostrar todas las relaciones entre ellas o la información global del sistema. En el caso de un sistema con más de cuatro variables es posible seleccionar cuatro del total de dimensiones e ir variando las dimensiones.

Para producir este tipo de diagrama se selecciona por cada punto fijo el valor correspondiente a la variable que se definió como el radio de las esferas, las cuales sus coordenadas estarán determinadas por las demás variables seleccionadas; por lo tanto, se cuenta con un vector \mathbf{r} que almacena los valores de los radios. A los valores de \mathbf{r} se les aplica la función de mapeo de la Ecuación (4.6), la cual retorna el vector de los radios normalizado $\bar{\mathbf{r}}$ en función del tamaño máximo *RadiusMax* y mínimo *RadiusMin* que puede tomar una esfera.

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{(\mathbf{r}_i - \text{mín } \mathbf{r})(\text{RadiusMax} - \text{RadiusMin})}{\text{máx } \mathbf{r} - \text{mín } \mathbf{r}} + \text{RadiusMin} \quad (4.6)$$

En las Figuras 4.9 y 4.10 se presentan los diagramas de bifurcación de la Ecuación (4.5), donde se aumentó la cuarta dimensión como el radio de las esferas.

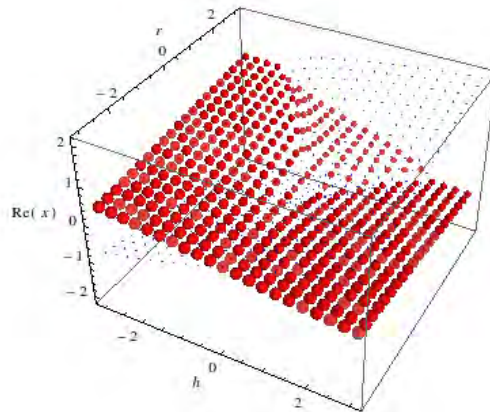


Figura 4.9: La posición de las esferas están definidas por $h, r, \text{Re}[x]$, mientras que el radio está definido por $\text{Im}[x]$.

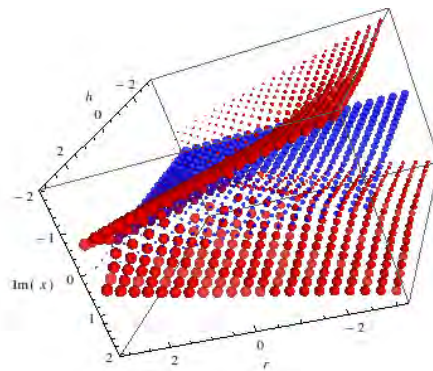


Figura 4.10: Las coordenadas de la esferas están definidas por $h, r, \text{Im}[x]$, mientras que el radio está definido por $\text{Re}[x]$.

En la Figura 4.9 el radio está determinado por la parte imaginaria de la variable de estado x , evidenciando que los puntos fijos estables no cuentan con parte imaginaria, es decir, son reales. Además, los puntos fijos que son complejos son los puntos fijos inestables, denotando como decrece el sistema mientras r aumenta. En la Figura 4.10 el radio está determinado por la parte real de x ; aquí se observa que la parte real de x de los puntos fijos inestables disminuye conforme h disminuye, al contrario para los puntos fijos estables, donde la parte real aumenta conforme h disminuye.

4.4. Coordenadas paralelas

Un gráfico de coordenadas paralelas es capaz de representar una considerable cantidad de variables o dimensiones. Cada una de estas dimensiones se representa como una línea o recta paralela al eje y que está equiespaciada en el eje x . En esta implementación, cada variable de estado y parámetro de bifurcación de un sistema de EDO's se representa en cada una de las rectas paralelas, con el objetivo de representar el conjunto total de las dimensiones o variables que forman las soluciones del sistema, como se muestra en la Figura 4.11.

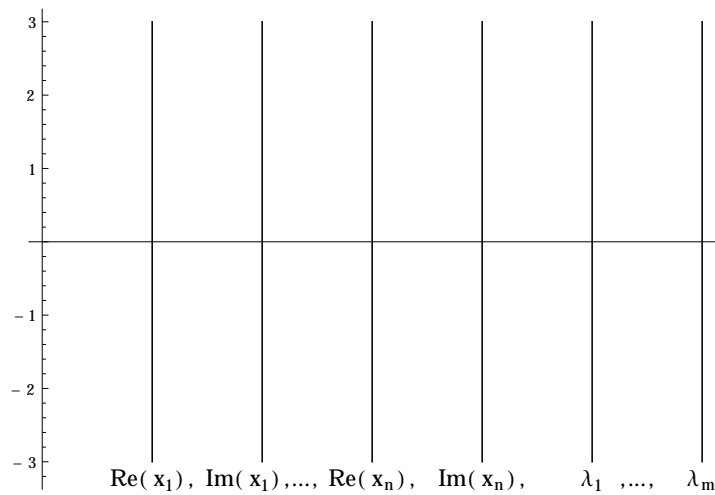
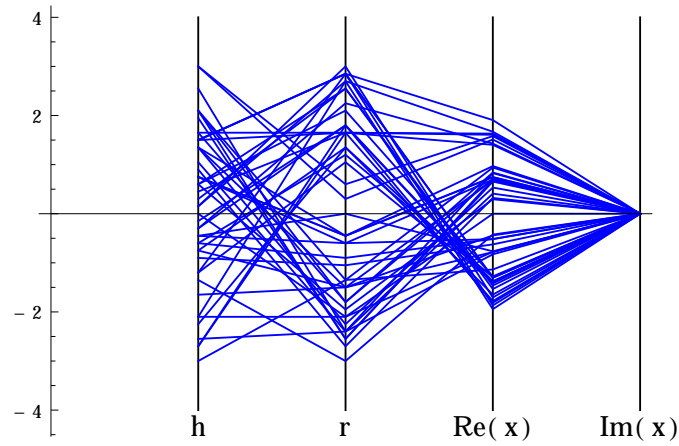


Figura 4.11: Representación de las dimensiones de un punto fijo de un sistema de la forma $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$.

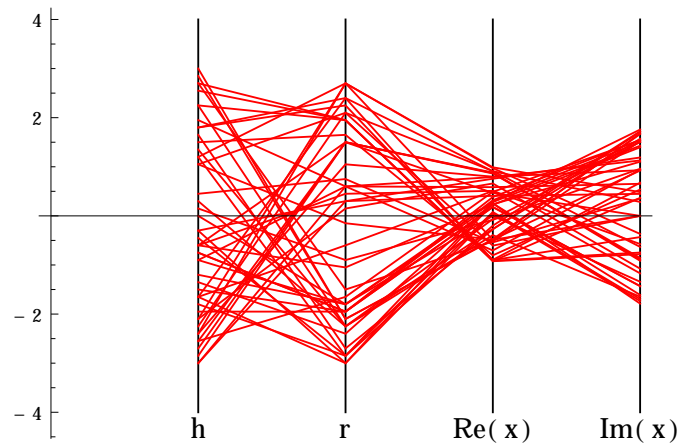
En cada una de las rectas paralelas se asigna el valor correspondiente de la dimensión representada, en este caso, se asigna el valor que toma cada variable o componente de un punto fijo. Estos valores son unidos para formar una línea que representará una solución o punto fijo del sistema, esto es, el número de soluciones del sistema se reflejará en el número de líneas del gráfico. La desventaja de esta forma de visualización es que entre mayor sea el número de puntos fijos que se quieren representar mayor es la oclusión, dando como resultado un gráfico difícil de interpretar.

Los puntos fijos de la Ecuación (4.5) se mapean al gráfico de coordenadas paralelas, el

resultado se muestra en la Figura 4.12.



(a) *Puntos fijos estables.*



(b) *Puntos fijos inestables.*

Figura 4.12: Coordenadas paralelas de las soluciones de la Ecuación (4.5).

En la Figura 4.12 se puede apreciar que los puntos fijos estables no cuentan con parte imaginaria debido a que las líneas en $Im(x)$ tienden a cero, mientras que los puntos fijos inestables son complejos, debido a que las líneas tiendan a valores no nulos de $Re(x)$ y $Im(x)$.

4.5. Conclusiones

Los métodos de visualización son una herramienta poderosa para representar grandes conjuntos de datos de dimensionalidad alta. Algunas funciones pueden ser analizadas de una manera más representativa a través de una gráfica que con las herramientas que proporciona el cálculo, con lo que se facilita la comprensión de conceptos más complicados.

RadViz es un método útil para mostrar grandes conjuntos de datos de múltiples dimensiones de una manera flexible. Sin embargo este tipo de visualización representa pérdida de información, esto debido a que varios puntos n -dimensionales son mapeados a mismo punto en la circunferencia de RadViz. Aún así ha tenido gran aplicabilidad en minería de datos.

El diagrama de burbujas, aunque no es precisamente un método de alta dimensionalidad (debido a que sólo se pueden visualizar cuatro dimensiones), es de gran ayuda cuando una cuarta dimensión juega un papel importante para el análisis de un sistema.

En el método gráfico de coordenadas paralelas se puede representar una gran cantidad de dimensiones, no obstante presenta una desventaja respecto a los demás métodos: no es útil cuando se cuenta con una gran cantidad de datos. Esto debido a que los datos (soluciones de un sistema de EDO's) se traslapan obstruyendo la visión clara de estos, es decir, provoca una oclusión de los datos.

El capítulo siguiente presenta una serie de casos de estudio, donde se ilustra la aplicabilidad de los diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos.

Capítulo 5

Resultados

5.1. Introducción

En este capítulo se presentan diferentes diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos de diferentes sistemas; el capítulo se divide en dos secciones: sistemas dinámicos simples y aplicaciones. En la sección sistemas dinámicos simples se presentan los diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos de diferentes tipos de bifurcaciones (silla-nodo, pitchfork, etc.). Les llamamos así a estos sistemas debido a que son sistemas de una sola ecuación, sin embargo tales ecuaciones poseen raíces reales y complejas. El comportamiento de estos sistemas se reflejan en los diagramas de bifurcación obtenidos para cada uno de ellos. Se realiza una comparación entre el diagrama con raíces reales y el diagrama con raíces complejas, resaltando las diferencias que exhiben cada uno de ellos. En la sección aplicaciones se presentan dos casos de estudio de sistemas eléctricos que involucran una serie de ecuaciones diferenciales, ecuaciones algebraicas y constantes que los definen. En el caso 1 se presenta un sistema multiparamétrico de tres nodos y en el caso 2 un sistema eléctrico con carga dinámica tipo II. Se analizan los resultados obtenidos y se comparan los diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos con los diagramas de bifurcación con puntos fijos reales. La finalidad es mostrar los fenómenos oscilatorios no lineales en las variables de estado del sistema ante pequeñas variaciones en sus parámetros de bifurcación.

5.2. Sistemas dinámicos simples

En esta tesis, llamaremos sistemas dinámicos simples a aquellos sistemas descritos por una sola ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Esa ecuación define toda la dinámica del sistema. Se presentan los diagramas de bifurcación de diferentes tipos de bifurcaciones, tales como silla-nodo, pitchfork y bifurcaciones imperfectas. Cabe destacar que, los sistemas dinámicos simples que a continuación se presentan, son ejemplos de la literatura estrictamente teóricos, es decir, no se asocian a fenómenos o sistemas del mundo real. Estos sistemas coadyuvan a ilustrar los diferentes comportamientos que pueden presentar distintos sistemas dinámicos de diversas áreas. En esta tesis, los puntos fijos estables estarán denotados por el color azul y los puntos fijos inestables estarán denotados por el color rojo.

5.2.1. Caso 1

El ejemplo canónico de un sistema con una bifurcación pitchfork subcrítica se define por la Ecuación (5.1). El diagrama de bifurcación con puntos fijos reales se muestra en la Figura 5.1 y el diagrama producido en esta tesis que muestra sus raíces complejas se observa en la Figura 5.2.

$$\dot{x} = rx + x^3 - x^5 \quad (5.1)$$

La Figura 5.1 muestra que el origen es localmente estable cuando $r < 0$, en $r = 0$ dos ramas simétricas de soluciones parten del origen hasta aproximadamente $r = -0.24$, donde el término x^5 hace que las ramas de soluciones de naturaleza inestable den la vuelta y cambien de estabilidad. Este cambio de estabilidad denota bifurcaciones silla-nodo, donde los puntos fijos estables se extienden al ir incrementando el valor de r . Además, la existencia de diferentes estados estables en el sistema permite la posibilidad de saltos e histéresis cuando r es variado. La histéresis se refiere a la falta de reversibilidad a un estado anterior del sistema cuando un parámetro es variado [Strogatz94].

En la Figura 5.2 se observa el diagrama de bifurcación con puntos fijos complejos, se muestra que los puntos fijos reales son un subconjunto de los puntos fijos complejos, debido a que se

observa claramente la bifurcación pitchfork de la Figura 5.1 en el diagrama de bifurcación con puntos fijos complejos. Se observan nuevas soluciones que antes no se mostraban en el diagrama de bifurcación convencional, por ejemplo cuando aproximadamente $r = -0.24$ (donde se localizan las bifurcaciones silla-nodo) comienzan a surgir pares de raíces complejas conjugadas inestables, esto nos dice que el sistema presentará oscilaciones inestables. En $r = 0$ y conforme r aumenta comienzan a surgir raíces imaginarias puras, lo que significa que el sistema presentará oscilaciones de amplitud constante. Cabe destacar que estos comportamientos oscilatorios del Sistema (5.1), antes no se podían observar en el diagrama con puntos fijos reales, lo que ilustra la utilidad de los diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos.

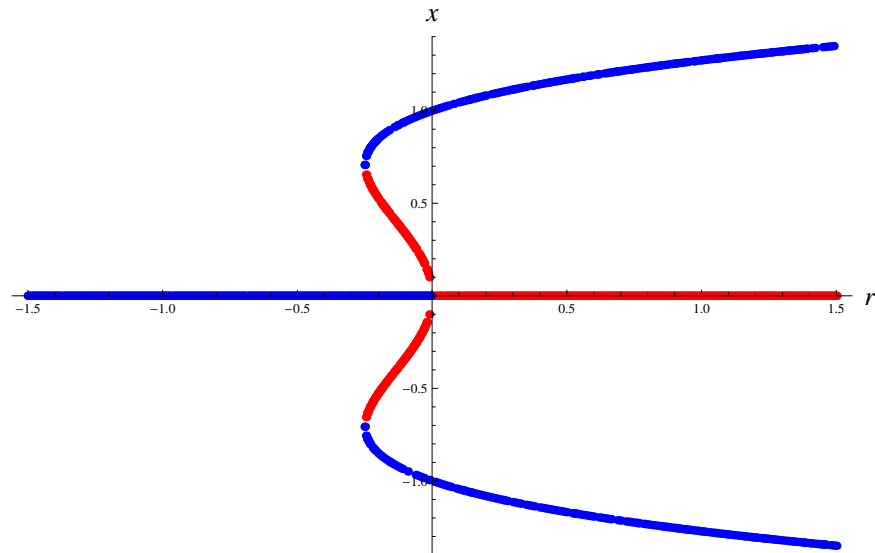


Figura 5.1: Diagrama de bifurcación con puntos fijos reales de la Ecuación (5.1).

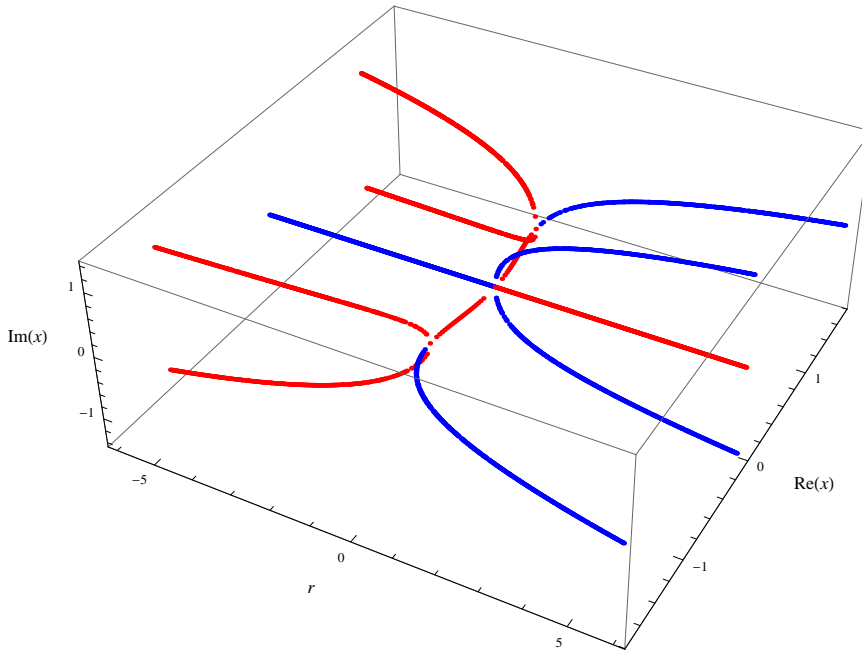


Figura 5.2: Diagrama de bifurcación con puntos fijos complejos de la Ecuación (5.1).

5.2.2. Caso 2

La Ecuación (5.2) presenta una bifurcación pitchfork subcrítica en $r = 1$, como se aprecia en la Figura 5.3. Cuando aproximadamente $r = -0.21$ se empieza a formar una onda senoidal a causa de la función trigonométrica $\sin(x)$, donde en cada pico de la onda senoidal la estabilidad de los puntos fijos cambia.

$$\dot{x} = rx - \sin(x) \quad (5.2)$$

La Figura 5.4 presenta el diagrama con puntos fijos complejos, donde se observa que este diagrama de bifurcación proporciona información nueva que no se mostraba en el diagrama con puntos fijos reales, por ejemplo, las parábolas que se forman por las raíces complejas conjugadas. En $r = 1$ nacen puntos fijos imaginarios puros estables conforme incrementa el valor de r , formando una parábola invertida respecto a la bifurcación pitchfork subcrítica, estas soluciones denotan que el sistema oscilará de forma estable. También se observa que en cada bifurcación silla-nodo de la onda senoidal, existe una parábola formada por puntos fijos complejos conjugados. Para $r < 0$ las soluciones de las parábolas se comportan de

manera oscilatoria inestable y para $r > 0$ se comportan de forma oscilatoria estable. Sin embargo, cuando el parámetro de bifurcación $r = 2$ y la variable de estado $x = 0$ el sistema se comportará de forma exponencial, debido a que esa solución es real.

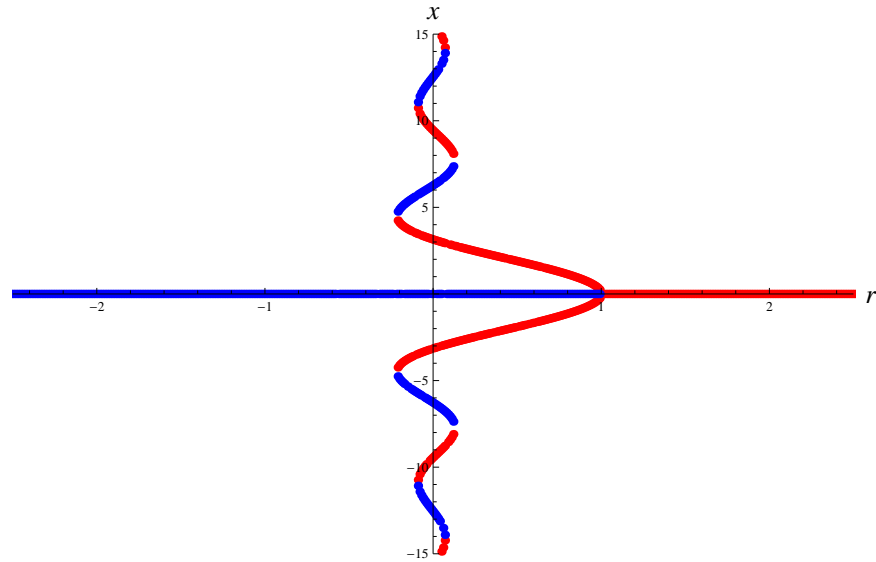


Figura 5.3: Diagrama de bifurcación con punto fijos reales de la Ecuación (5.2).

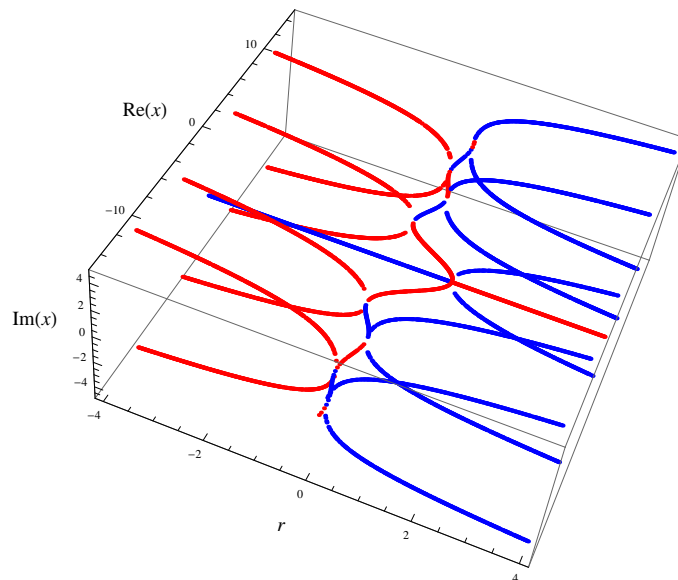


Figura 5.4: Diagrama de bifurcación con puntos fijos complejos de la Ecuación (5.2).

5.2.3. Caso 3

El sistema definido por la Ecuación (5.3), presenta bifurcaciones imperfectas, es decir, no existe una simetría como en una bifurcación pitchfork.

$$\dot{x} = rx + ax^2 - x^3 \quad (5.3)$$

Donde $\boldsymbol{\lambda} = [r, a]^T \in \mathbb{R}^2$ es el vector de parámetros bifurcación y $x \in \mathbb{C}$ es la variable de estado. Este sistema exhibe perturbaciones a la bifurcación pitchfork supercrítica. Cuando $a = 0$ existe la forma normal de una pitchfork supercrítica, sin embargo para valores de $a > 0$ las bifurcaciones pitchfork se empiezan a deformar conforme a incrementa, rompiendo la simetría existente. Para valores de $a < 0$ pasa exactamente lo mismo conforme a va decrementando, sin embargo la parábola que se va separando del origen se desplaza para valores negativos de x (ver Figura 5.5).

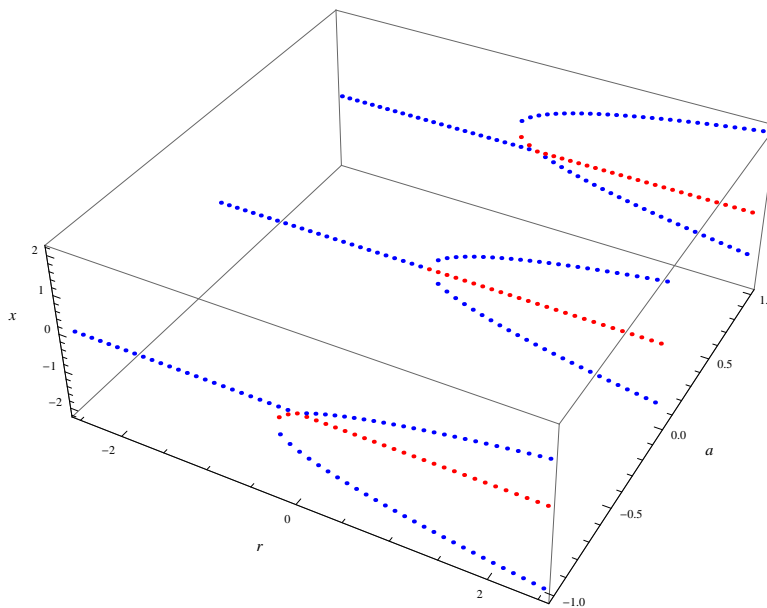


Figura 5.5: Rebanadas del diagrama de bifurcación con puntos fijos reales de la Figura 5.6, para valores de $a = -1, 0$ y 1 . Cuando $a = 0$ existe una bifurcación pitchfork supercrítica y cuando $a \neq 0$ existen bifurcaciones imperfectas.

El Sistema (5.3) es de la forma (5.4):

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}^m \quad (5.4)$$

lo que significa que las soluciones que presenta el sistema tiene $2n + m$ dimensiones, esto quiere decir que no es posible visualizar todas las dimensiones del sistema en un mismo gráfico. Por lo tanto se pueden visualizar proyecciones del diagrama de bifurcación con subconjuntos de variables de estado y parámetros de bifurcación. Las diferentes proyecciones del diagrama de bifurcación se aprecian en las Figuras 5.6, 5.7 y 5.8, en donde se pueden observar estructuras definidas. Al agregar el componente imaginario a la variable de estado x se tienen dos dimensiones (parte real e imaginaria), y se tienen otras dos dimensiones correspondientes a los parámetros de bifurcación r y a . Por lo tanto, las proyecciones que se presentan para este sistema son dos: se proyecta la variación de la variable de estado x en función de r (Figura 5.7) y la proyección de la variación de la variable de estado x en función de a (Figura 5.8).

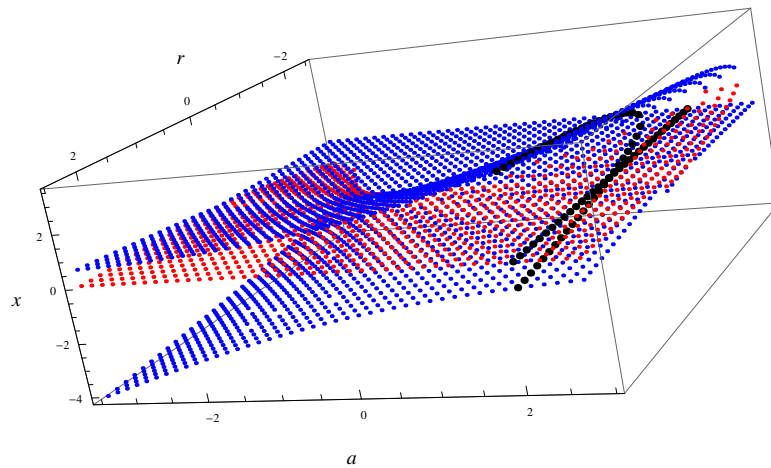


Figura 5.6: Diagrama de bifurcación con puntos fijos reales de la Ecuación (5.3). Variando la variable de estado x en función de los parámetros r y a .

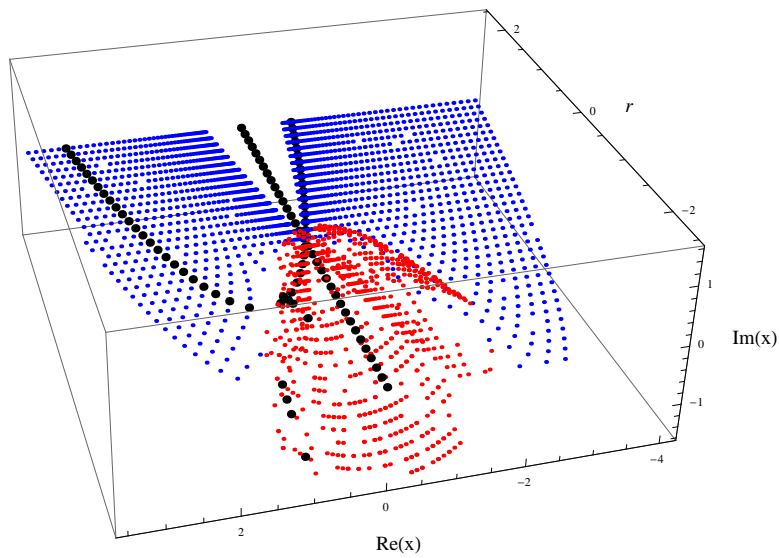


Figura 5.7: Diagrama de bifurcación con puntos fijos complejos de la Ecuación (5.3). Variando la variable de estado x en función del parámetro r .

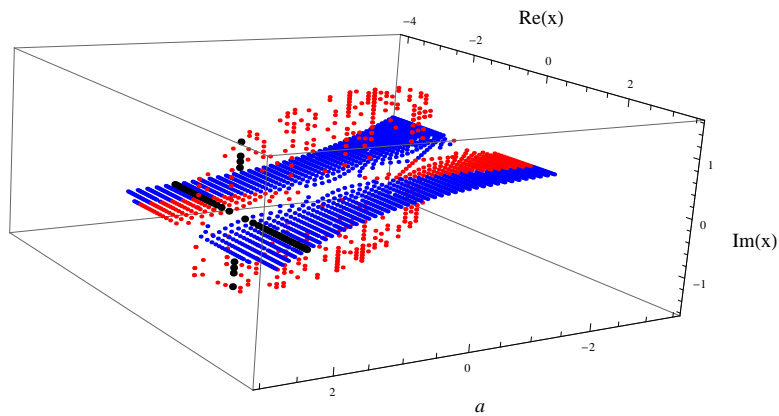
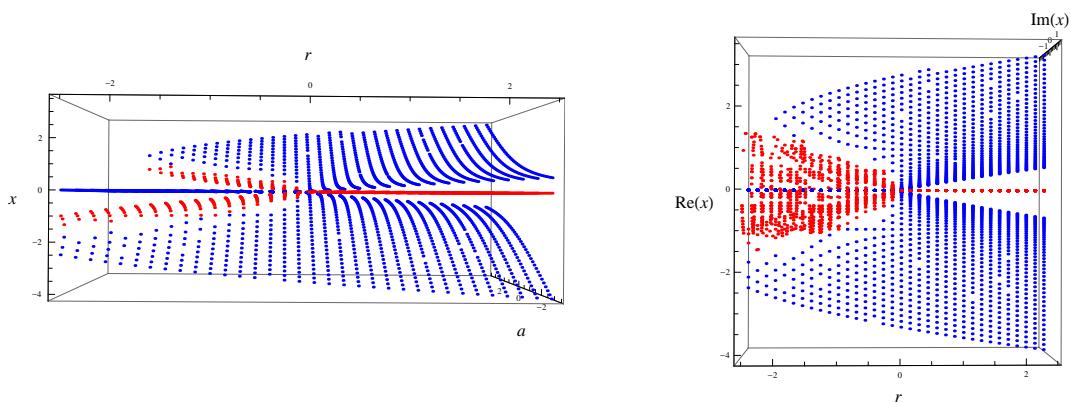


Figura 5.8: Diagrama de bifurcación con puntos fijos complejos de la Ecuación (5.3). Variando la variable de estado x en función del parámetro a .

Los puntos fijos complejos son una extensión de los puntos fijos reales, por lo tanto, $(x_i, \lambda_i)_{\mathbb{R}} \subset (x_i, \lambda_i)_{\mathbb{C}}$, es decir, el conjunto de todos los puntos fijos reales es un subconjunto del conjunto total de los puntos fijos complejos. Esto se observa claramente en los diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos de los casos anteriores de sistemas dinámicos simples. En este caso, debido a las proyecciones que se dan del diagrama de bifurcación es más complejo visualizar en ellos esta afirmación. Para mostrar dicha afirmación en este caso, se selecciona el conjunto de puntos fijos reales para valores de $a = 2$, estas soluciones son marcadas de color negro en la Figura 5.6. Dicho conjunto de soluciones se proyecta en los diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos (Figuras 5.7 y 5.8) con puntos de color negro. Se observa que efectivamente las soluciones reales existen en los diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos.

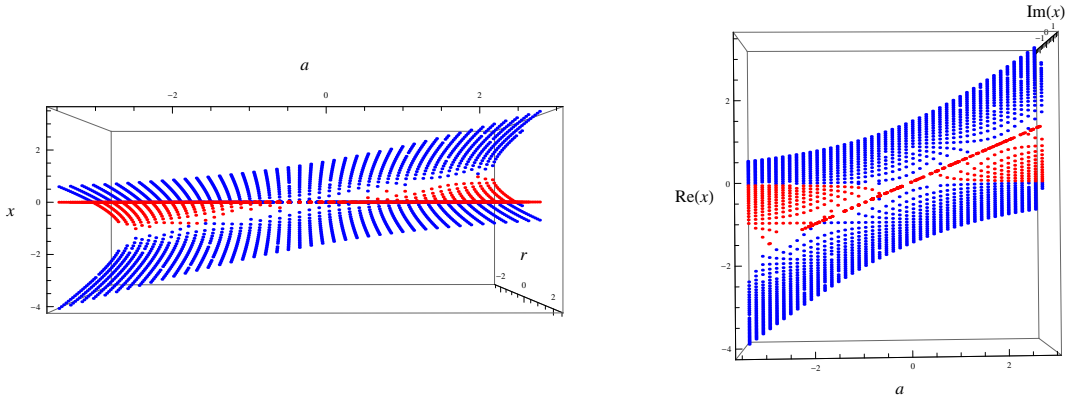
Para ilustrar lo anterior las Figuras 5.9 y 5.10 muestran el diagrama de la Figura 5.6 visto en diferentes perspectivas (Figuras 5.9(a) y 5.10(a)). Estas figuras muestran que la estructura de las raíces reales es igual a la estructura vista en los diagramas con raíces complejas, con la diferencia del componente imaginario que crea estructuras definidas en los diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos.



(a) Diagrama de bifurcación en función de los parámetros r y a con puntos fijos reales.

(b) Diagrama de bifurcación en función de r con puntos fijos complejos conjugados.

Figura 5.9: Comparación de los diagramas de bifurcación con puntos fijos reales y complejos respecto al parámetro de bifurcación r .



(a) Diagrama de bifurcación en función de los parámetros r y a con puntos fijos reales. (b) Diagrama de bifurcación en función de a con puntos fijos complejos conjugados.

Figura 5.10: Comparación de los diagramas de bifurcación con puntos fijos reales y complejos respecto al parámetro de bifurcación a .

5.2.4. Caso 4

Otro ejemplo de un sistema que presenta bifurcaciones imperfectas, está dado por la Ecuación (5.5):

$$\dot{x} = h + rx - x^3 \quad (5.5)$$

donde $\lambda = [h, r]^T \in \mathbb{R}^2$ es el vector de parámetros bifurcación y $x \in \mathbb{C}$ es la variable de estado. Cuando $h = 0$ aparece la forma normal de una bifurcación pitchfork, sin embargo esta simetría desaparece cuando $h \neq 0$, por esta razón h es llamado el parámetro imperfecto. En la Figuras 5.11, 5.12 y 5.13 se observan los digramas de bifurcación con soluciones reales y complejas. En la Figura 5.11 se muestra el diagrama de bifurcación con puntos fijos reales, proyectando λ contra x . En la Figura 5.12 se muestra la variación de la variable de estado x en función del parámetro de bifurcación h . La Figura 5.13 muestra la variación de la variable de estado x en función del parámetro de bifurcación r .

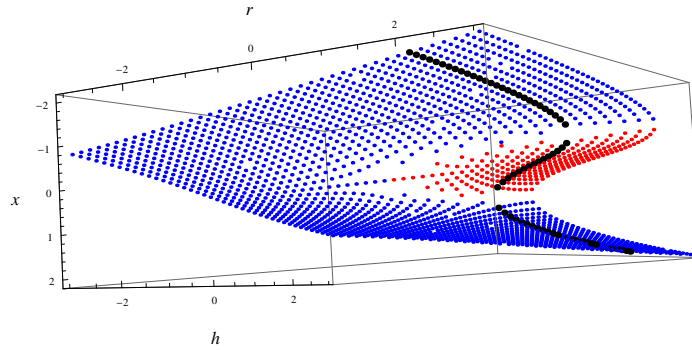


Figura 5.11: Diagrama de bifurcación con puntos fijos reales de la Ecuación (5.5). Variando la variable de estado x en función de los parámetros h y r .

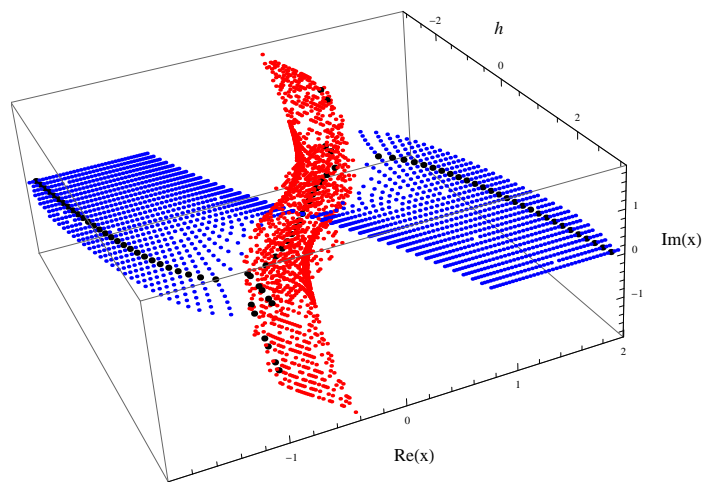


Figura 5.12: Diagrama de bifurcación con puntos fijos complejos de la Ecuación (5.5). Variando la variable de estado x en función del parámetro h .

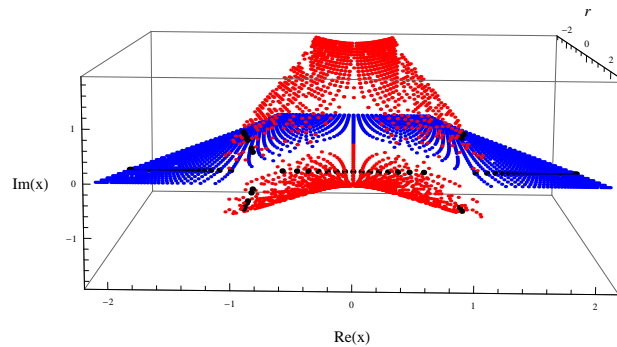
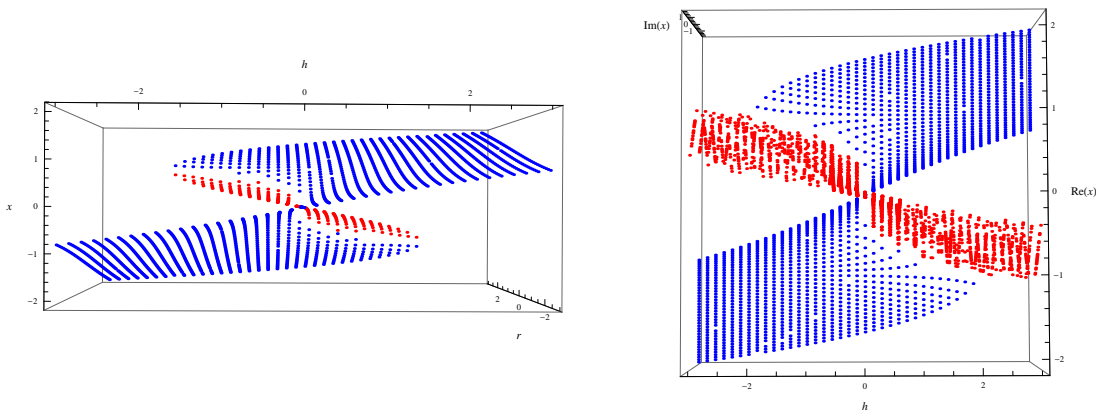


Figura 5.13: Diagrama de bifurcación con puntos fijos complejos de la Ecuación (5.5). Variando la variable de estado x en función del parámetro r .

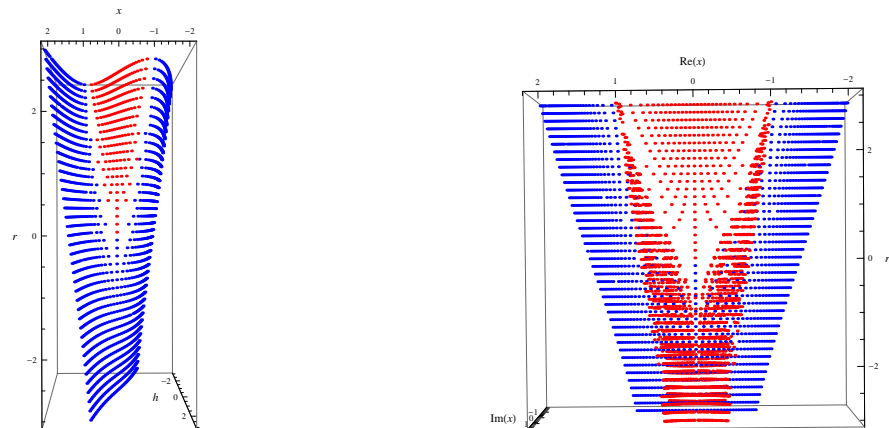
Como en el caso anterior, se muestra que las soluciones reales son un subconjunto de las soluciones complejas. Se seleccionan los puntos fijos reales para valores de $r = 2$, éstos se proyectan de color negro en los diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos (Figuras 5.12 y 5.13). Además se presentan las diferentes perspectivas del diagrama con puntos fijos reales respecto a los diagramas con puntos fijos complejos, de manera que se observe el subconjunto de los reales en los complejos.



(a) Diagrama de bifurcación en función de los parámetros h y r con puntos fijos reales.

(b) Diagrama de bifurcación en función de h con puntos fijos complejos conjugados.

Figura 5.14: Comparación de los diagramas de bifurcación con puntos fijos reales y complejos respecto al parámetro de bifurcación h .



(a) Diagrama de bifurcación en función de los parámetros h y r con puntos fijos reales.

(b) Diagrama de bifurcación en función de r con puntos fijos complejos conjugados.

Figura 5.15: Comparación de los diagramas de bifurcación con puntos fijos reales y complejos respecto al parámetro de bifurcación r .

5.3. Aplicaciones

A continuación se presentan dos casos de estudio, el primer caso es un sistema eléctrico de potencia de tres nodos y el segundo es un sistema eléctrico con carga dinámica tipo II. El equipo utilizado para generar los diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos cuenta con las siguientes propiedades: Equipo iMac OS X Yosemite (Versión 10.10.3), con Procesador 2.7 GHz Intel Core i5, memoria 8GB 1600 MHz DDR3 y 1 TB de memoria.

5.3.1. Caso 1: Sistema eléctrico de potencia de tres nodos

El sistema eléctrico mostrado en la Figura 5.16, es una red eléctrica de tres nodos que presenta una región de inestabilidad. Este sistema eléctrico ha sido estudiado en diversos trabajos de investigación [Kasusky02], [Pérez07], [López10], los cuales no presentan el diagrama de bifurcación con puntos fijos complejos del mismo.

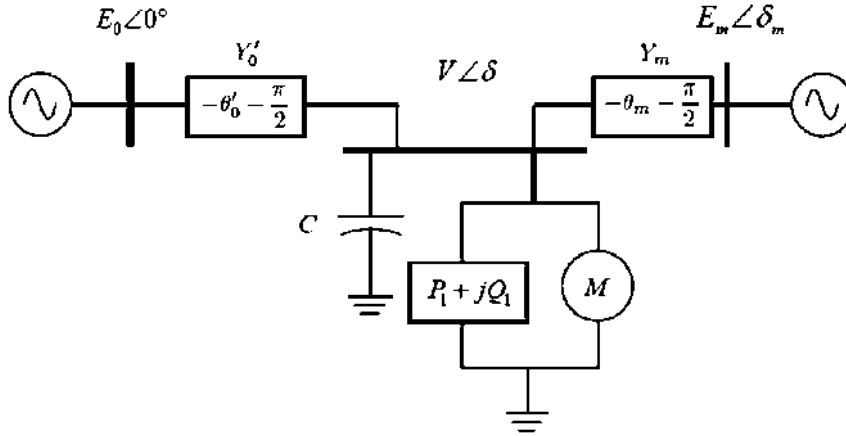


Figura 5.16: Sistema eléctrico de tres nodos.

El comportamiento del sistema eléctrico mostrado en la Figura 5.16 es descrito por el conjunto de Ecuaciones (5.6)-(5.9):

$$\dot{V}_L = P - P_{1d} - P_0 - P_1 \frac{\left[\frac{(Q - Q_{1d} - Q_0 - Q_2 V_L - (Q_3 - B_c) V_L^2)}{Q_1 - P_3 V_L} \right]}{P_2} \quad (5.6)$$

$$\dot{\delta}_m = \omega \omega_b \quad (5.7)$$

$$\dot{\omega} = \frac{[-D \omega + P_m - (E_{pq} I_q + E_{pd} I_d + (X_{pd} - X_{pq}) I_d I_q)]}{2H} \quad (5.8)$$

$$\dot{\delta}_L = \frac{Q - Q_{1d} - Q_0 - Q_2 V_L - (Q_3 - B_c) V_L^2}{Q_1} \quad (5.9)$$

$$\dot{E}_{fd} = \frac{-E_{fd} + K_A (V_{ref} - V_t)}{T_A} \quad (5.10)$$

$$\dot{E}_{pq} = \frac{-E_{pq} + (X_d + X_{pd} I_d) + E_{fd}}{T_{pd0}} \quad (5.11)$$

Donde V_L es la magnitud de voltaje en el nodo de carga, δ_m es el ángulo de voltaje en el nodo interno del generador en radianes, ω es el frecuencia angular del rotor en rad/seg , E_{pq} es la magnitud del voltaje interno transitorio del eje q , E_{fd} es la magnitud del voltaje de

campo y δ_L es el ángulo de voltaje en el nodo de carga en radianes. Estas variables son las variables de estado del sistema eléctrico de tres nodos. Los parámetros de bifurcación están dados por: T_A , K_A y P_m . Donde T_A es la constante de tiempo del sistema de excitación, K_A es la ganancia del sistema de excitación y P_m es la potencia mecánica de entrada al generador.

Las ecuaciones algebraicas (5.12) y (5.13), describen las potencias P y Q , que representan las cargas dinámicas que demanda el sistema.

$$P = V_t V_L Y_1 \cos(\delta_l - \theta - \phi_1) - V_L^2 Y_1 \cos(\phi_1) + E_b V_L Y_2 \cos(D_L - \phi_2) - V_L^2 Y_2 \cos(\phi_2) \quad (5.12)$$

$$Q = (V_t V_L Y_1 \sin(\delta_l - \theta - \phi_1) + V_L^2 Y_1 \sin(\phi_1) + E_b V_L Y_2 \sin(D_L - \phi_2) + V_L^2 Y_2 \sin(\phi_2)) \quad (5.13)$$

Las ecuaciones algebraicas (5.14)-(5.25) también definen parte del sistema eléctrico.

$$a = Y_1 V_L \cos(\delta_L - \delta_m - \phi + \phi_1) \quad (5.14)$$

$$b = Y_1 V_L \sin(\delta_L - \delta_m - \phi + \phi_1) \quad (5.15)$$

$$\omega_p = \frac{X_{pq} - X_q}{\cos(\phi)^2 - (\sin(\phi) - Y X_{pd})(Y X_{pq} - \sin(\phi))} \quad (5.16)$$

$$b_p = \sin(\phi_1) - y X_{pd} \quad (5.17)$$

$$E_{pd} = \left(\frac{1}{1 + \omega_p Y B_b} \right) (\omega_p ((Y \cos(\phi) E_{pq}) + (B B_p - a \cos(\phi)))) \quad (5.18)$$

$$I_q = \frac{\cos(\phi) Y E_{pq} - a \cos(\phi) - Y E_{pd} \sin(\phi) + b \sin(\phi) + Y^2 X_{pd} E_{pd} - b Y X_{pd}}{1 - \sin(\phi) Y X_{pd} - \sin(\phi) Y X_{pq} + Y^2 X_{pd} X_{pq}} \quad (5.19)$$

$$I_d = \frac{\sin(\phi) Y E_{pq} - a \sin(\phi) + Y E_{pd} \cos(\phi) - b \cos(\phi) - Y^2 X_{pq} E_{pq} + a Y X_{pq}}{1 - \sin(\phi) Y X_{pd} - \sin(\phi) Y X_{pq} + Y^2 X_{pd} X_{pq}} \quad (5.20)$$

$$V_q = E_{pq} + X_{pd} I_d \quad (5.21)$$

$$V_d = E_{pd} - X_{pq} I_q \quad (5.22)$$

$$V_t = \sqrt{V_q^2 + V_d^2} \quad (5.23)$$

$$V_i = \frac{V_d}{V_q} \quad (5.24)$$

$$\theta = \delta_m + \arctan(V_i) \quad (5.25)$$

En la Tabla 5.1 se muestran las constantes utilizadas en el sistema eléctrico.

Tabla 5.1: Constantes del sistema eléctrico de tres nodos.

$Y = 4.9752pu$	$X_{pd} = 0.169pu$	$Q_1 = -0.02pu$
$Y_1 = 4.9752pu$	$X_{pq} = 0.23pu$	$P_2 = 1.7pu$
$Y_2 = 1.6584pu$	$T_{pd0} = 4.3seg$	$Q_2 = -1.866pu$
$\phi = -1.4711rad$	$H = 2.894seg$	$P_3 = 0.2pu$
$\phi_1 = -1.4711rad$	$\omega_b = 377rad/seg$	$Q_3 = 1.6pu$
$\phi_2 = -1.4711rad$	$D = 0.05pu$	$Q_{1d} = 0pu$
$E_b = 1.0pu$	$P_0 = 0.4$	$P_{1d} = 0pu$
$X_d = 1.79pu$	$Q_0 = 0.8Pu$	$B_c = 0.2pu$
$X_q = 1.71pu$	$P_1 = 0.24pu$	$V_{ref} = 1.1223pu$

Para el análisis de las bifurcaciones del sistema dinámico descrito anteriormente se considera el espacio formado por las variables de estado y los parámetros de bifurcación, el vector de variables de estado es $\mathbf{x} = [V_L, \delta_m, \omega, E_{pq}, E_{fd}, \delta_L]^T \in \mathbb{C}^6$ y el vector de parámetros de bifurcación es $\boldsymbol{\lambda} = [P_m, T_A, K_A]^T \in \mathbb{R}^3$. Para obtener el diagrama de bifurcación, los parámetros de PSO utilizados fueron 500 partículas y 500 iteraciones, con un radio de nicho $r = 0.1$, las Tablas 5.2 y 5.3 contienen los rangos de los parámetros de bifurcación y los rangos de búsqueda utilizados para las variables de estado respectivamente. El tiempo de ejecución de PSO para determinar los puntos fijos reales y complejos del sistema eléctrico de potencia de tres nodos fue aproximadamente de un mes.

Tabla 5.2: Rangos de los parámetros de bifurcación para generar el diagrama de bifurcación del conjunto de Ecuaciones (5.6)-(5.9).

Parámetro de bifurcación	Rango de los parámetros	Incremento
P_m	[0.4, 2.4]	0.025
T_A	[0.05, 0.26]	0.01
K_A	[200, 200]	1

Tabla 5.3: Rangos de búsqueda de las variables de estado del sistema eléctrico de tres nodos para PSO Nichos.

Variable estado	Rango de búsqueda parte real	Rango de búsqueda parte imaginaria
V_L	[0, 5]	[-5, 5]
δ_m	[0.1, 10]	[-0.6, 10]
ω	[-0.6, 0.6]	[-0.6, 0.6]
E_{pq}	[0.5, 2.2]	[-1, 2.2]
E_{fd}	[1, 16]	[-6, 16]
δ_L	[-0.7, 10]	[-0.7, 10]

En la Figuras 5.17 y 5.18 se observan los diferentes diagramas de bifurcación producidos para este sistema eléctrico.

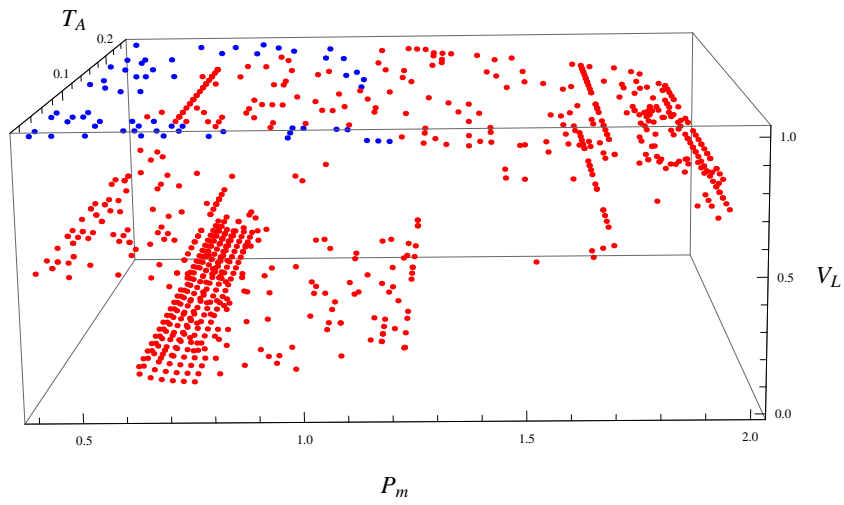


Figura 5.17: Diagrama de bifurcación con puntos fijos reales del sistema eléctrico de tres nodos.

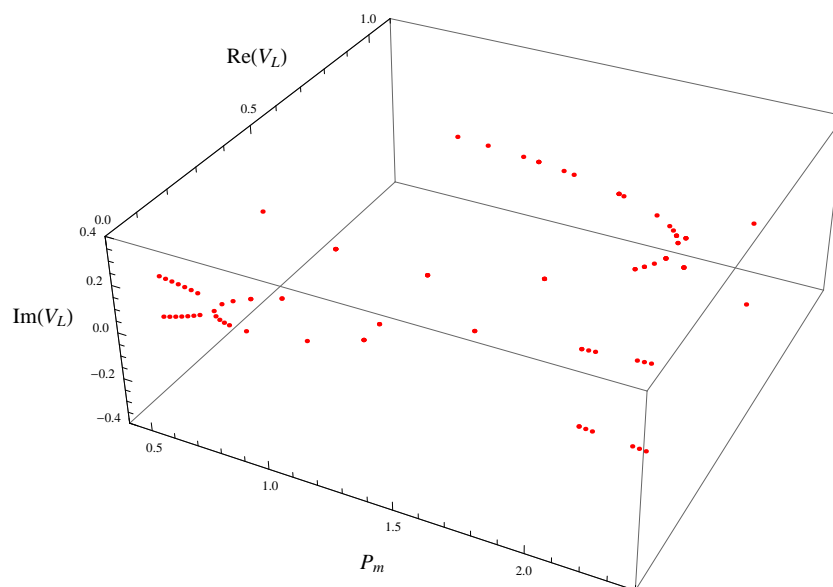
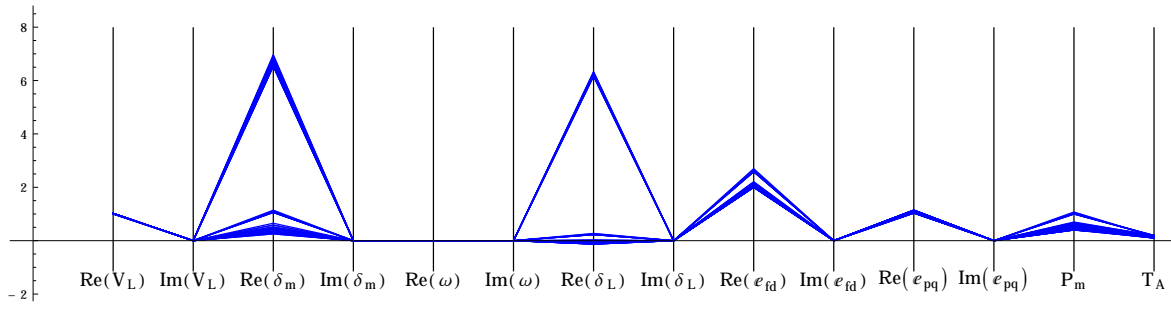


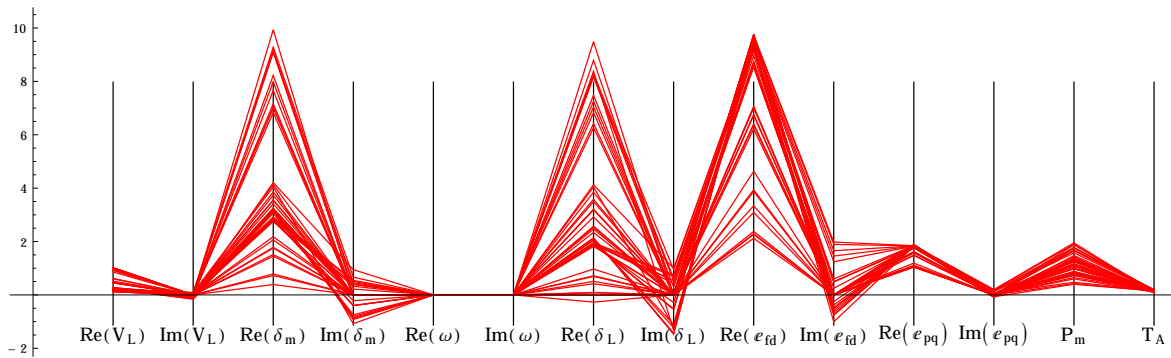
Figura 5.18: Diagrama de bifurcación con puntos fijos complejos del sistema eléctrico de tres nodos.

En la Figura 5.18 se observa que a partir de $P_m = 0.4 pu$ las soluciones son estables hasta aproximadamente $P_m = 0.6 pu$, donde las soluciones empiezan a convertirse en inestables. Cuando aproximadamente $P_m = 1.15 pu$ el sistema está en estado estable hasta aproximadamente el valor de $P_m = 1.19$ donde el sistema se vuelve inestable una vez más. Además cuando aproximadamente $V_L = 0.15$, comienzan a surgir puntos fijos complejos conjugados inestables a partir de $P_m = 0.4 pu$ hasta $P_m = 0.6 pu$, esto denota que el sistema para esos valores oscilará de forma inestable. Después, conforme V_L aumenta, aparecen puntos fijos reales, cuando $V_L = 0.225$ nuevamente aparecen puntos fijos complejos conjugados en aproximadamente $P_m = 1.25 pu$, conforme P_m aumenta siguen surgiendo pares de puntos fijos complejos conjugados. Cuando aproximadamente $P_m = 1.9$ y $V_L = 0.75$ existe una bifurcación silla-nodo, en donde también comienzan a surgir puntos fijos complejos conjugados.

A continuación se presentan los diagramas de bifurcación generados con los métodos de visualización de coordenadas paralelas y el gráfico RadViz. En la Figura 5.19 se observan los diagramas de bifurcación con el método de coordenadas paralelas del sistema eléctrico de tres nodos. En la Figura 5.19(a) se muestran los puntos fijos estables del sistema, se observa que para las variables de estado δ_m y δ_L las magnitudes son mayores que las demás variables de estado. Además se percibe que las variables de estado no poseen parte imaginaria como se observa en las variables de estado de la Figura 5.19(b). En la Figura 5.19(b) se muestran los puntos fijos inestables del sistema, se observa que los rangos de los puntos fijos son mayores que el rango de los puntos estables. En la Figura 5.20 se observa el RadViz del sistema, en el cual se aprecia que los puntos fijos se encuentran en una subregión del gráfico. Esto debido a que las magnitudes de las variables δ_m y δ_L mayores que el resto de las variables, lo que ocasiona que los puntos fijos se concentren en esa subregión del gráfico.



(a) *Puntos fijos estables.*



(b) *Puntos fijos inestables.*

Figura 5.19: Diagrama de bifurcación con coordenadas paralelas del sistema eléctrico de tres nodos.

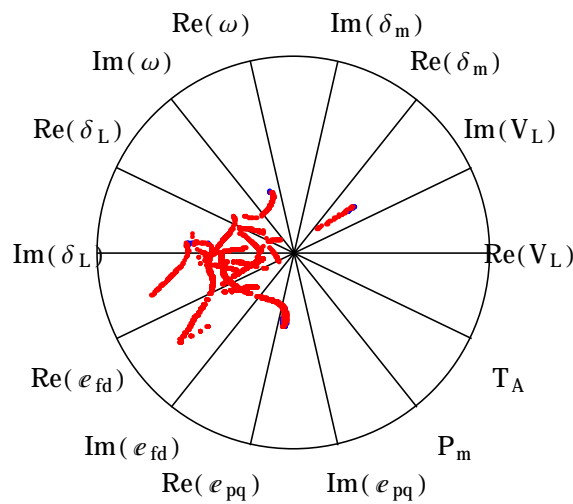


Figura 5.20: RadViz del sistema eléctrico de tres nodos.

5.3.2. Caso 2: Sistema eléctrico de potencia con carga dinámica

La red eléctrica mostrada en la Figura 5.21, es un sistema eléctrico compuesto por dos generadores, los cuales se consideran uno como nodo de referencia y el otro como una fuente de voltaje, la dinámica del sistema está decrita por el conjunto de Ecuaciones (5.26)-(5.29).

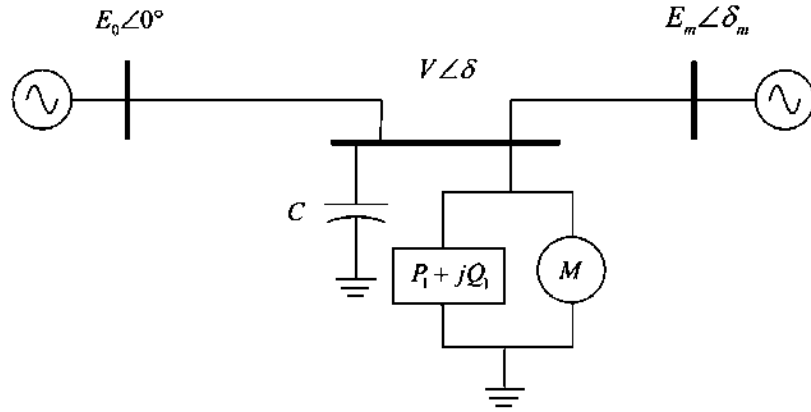


Figura 5.21: Sistema eléctrico con carga dinámica.

$$\dot{\delta}_m = \omega \quad (5.26)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{M}(P_m - D_m\omega + E_m V Y_m \sin(\delta - \delta_m - \theta_m) + E_m^2 Y_m \sin(\theta_m)) \quad (5.27)$$

$$\dot{\delta} = K_{qw}^{-1}(-k_{qv2}V^2 - k_{qv}V + Q - Q_0 - Q_1) \quad (5.28)$$

$$\dot{V} = \frac{1}{TK_{qw}K_{pv}}(-K_{qw}(P_0 + P_1 - P) + (K_{pw}K_{qv} - K_{qw}K_{pv})V + K_{pw}(Q_0 + Q_1 - Q) + K_{pw}K_{qv2}V^2) \quad (5.29)$$

Donde δ_m es el ángulo de carga, ω es la variación de velocidad del rotor con respecto a la velocidad de sincronismo, δ representa el ángulo del voltaje en el nodo de carga y V representa la magnitud del voltaje en el nodo de carga. Estas variables son las variables de estado del sistema. El parámetro de bifurcación del sistema es Q_1 , el cual representa

la potencia reactiva en el nodo de carga. Las ecuaciones algebraicas (5.30)-(5.31) también definen al sistema eléctrico con carga dinámica.

$$P = -VE'_0Y'_0 \sin(\delta + \theta'_0) - VE_mY_m \sin(\delta - \delta_m + \theta_m) + V^2(Y'_0 \sin(\theta'_0) + Y_m \sin(\theta_m)) \quad (5.30)$$

$$Q = VE'_0Y'_0 \cos(\delta + \theta'_0) + VE_mY_m \cos(\delta - \delta_m + \theta_m) - V^2(Y'_0 \cos(\theta'_0) + Y_m \cos(\theta_m)) \quad (5.31)$$

En la Tabla 5.4 se muestran todas las constantes que forman parte del sistema dinámico.

Tabla 5.4: Constantes del sistema eléctrico con carga dinámica.

$k_{pw} = 0.4pu$	$k_{pv} = 0.3pu$	$k_{qw} = -0.3pu$
$k_{qv} = 0 - 2.8pu$	$k_{qv2} = 2.1pu$	$T = 8.1pu$
$P_0 = 0.6pu$	$P_1 = 0pu$	$P_m = 1pu$
$Q_0 = 1.3pu$	$E'_0 = 2.5pu$	$E_m = 1pu$
$Y_m = 5pu$	$Y'_0 = 8pu$	$M = 0.3seg^2/rad$
$\theta'_0 = -0.2094rad/seg$	$\theta_m = -0.08726rad/seg$	$D_m = 0.05pu$

El espacio formado por las variables de estado es $\mathbf{x} = [\delta_m, \omega, \delta, V]^T \in \mathbb{C}^4$ y el parámetro de bifurcación es $\boldsymbol{\lambda} = [Q_1]^T \in \mathbb{R}$, el cual representa la potencia reactiva en el nodo de carga. Q_1 es variado de 10 hasta 14 con un incremento de 0.02. Para obtener el diagrama de bifurcación para el sistema descrito anteriormente, los parámetros de PSO utilizados fueron 100 partículas y 100 iteraciones; a diferencia del caso anterior en donde se utilizaron más partículas e iteraciones. Esto debido a que las iteraciones y el número de partículas fueron lo suficientemente buenas para explorar el espacio de búsqueda en donde se encontraban las soluciones del sistema eléctrico. El radio de nicho utilizado fue $r = 0.1$. El tiempo de ejecución de PSO para el sistema eléctrico con carga dinámica fue aproximadamente de 3 días. La Tabla 5.5 contiene los rangos de búsqueda utilizados en PSO para las variables de estado del sistema.

Tabla 5.5: Rangos de búsqueda de las variables de estado del sistema eléctrico con carga dinámica tipo II.

Variable estado	Rango de búsqueda parte real	Rango de búsqueda parte imaginaria
δ_m	$[-2, 2]$	$[-2, 2]$
ω	$[-1, 2]$	$[-1, 2]$
δ	$[-2, 2]$	$[-2, 2]$
V	$[0, 5]$	$[-5, 5]$

En la Figuras 5.22 y 5.23 se muestran los diagramas de bifurcación del sistema eléctrico con carga dinámica.

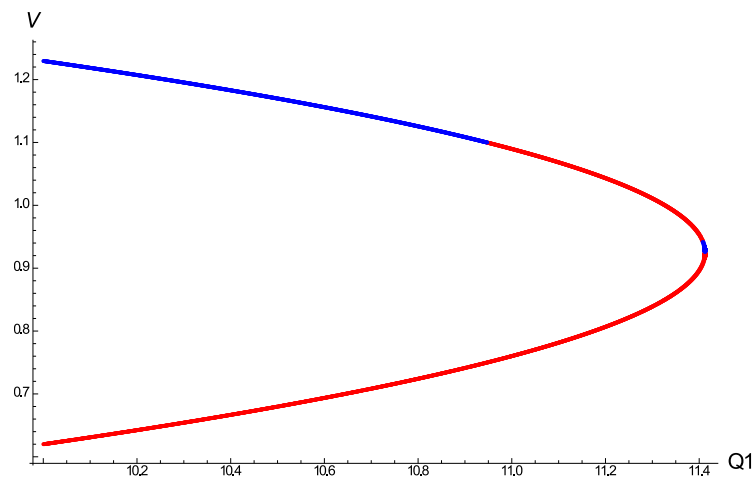


Figura 5.22: Diagrama de bifurcación con puntos fijos reales del sistema eléctrico con carga dinámica.

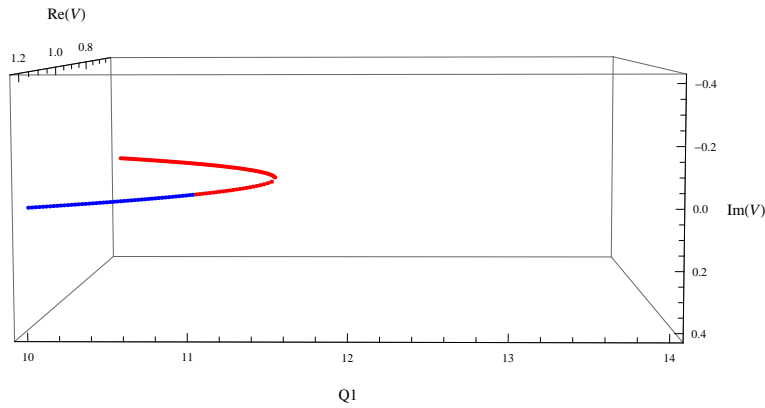


Figura 5.23: Diagrama de bifurcación con puntos fijos complejos del sistema eléctrico con carga dinámica.

Se observa en la Figura 5.22 que después del punto de bifurcación silla-nodo (cuando el parámetro de bifurcación $Q_1 = 11.4$) el sistema no tiene soluciones o puntos de equilibrio. Sin embargo, en la Figura 5.23 se observa que el sistema sí cuenta con soluciones después del punto de bifurcación, pero éstas son soluciones complejas conjugadas. Esto crea una parábola invertida que gira 90 grados respecto a la otra. Conforme Q_1 aumenta siguen surgiendo pares de raíces complejas conjugadas, lo que significa que el sistema se comportará de manera oscilatoria inestable.

A continuación se presentan los diagramas de bifurcación generados con los métodos de visualización de coordenadas paralelas y el gráfico RadViz. En la Figura 5.24 se observan los diagramas de bifurcación con el método de coordenadas paralelas del sistema eléctrico con carga dinámica. Se observa en los diagramas que el conjunto de los puntos fijos estables es menor que el conjunto de los puntos fijos inestables, también se observa que las variables de estado de los puntos fijos estables no cuentan con parte imaginaria.

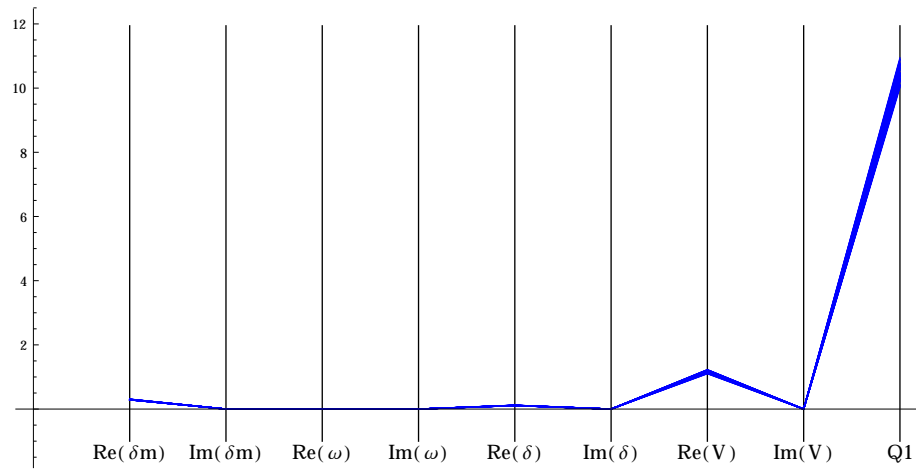
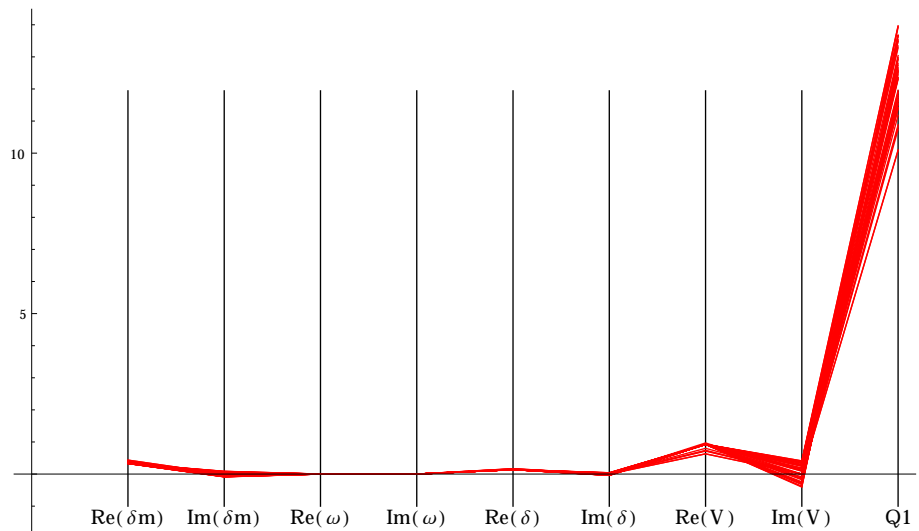
(a) *Puntos fijos estables.*(b) *Puntos fijos inestables.*

Figura 5.24: Diagrama de bifurcación con coordenadas paralelas del sistema eléctrico con carga dinámica.

En la Figura 5.25 se puede observar en que región del espacio 8 dimensional reside el diagrama de bifurcación. Se observa que todos los puntos fijos se encuentran entre los vértices correspondientes a las dimensiones $Im(\delta)$, $Re(V)$ y $Im(V)$ las cuales corresponden a los vértices de un hipercubo unitario $\{0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0\}$, $\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0\}$, $\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1\}$ y $\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$.

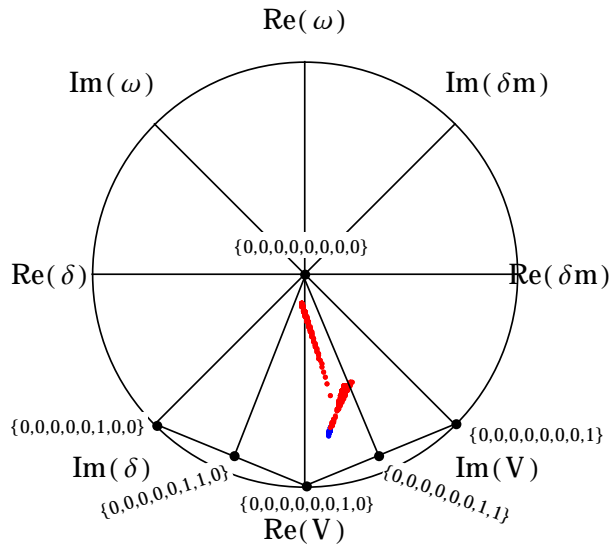


Figura 5.25: RadViz del sistema eléctrico con carga dinámica.

Realizando un diagrama RadViz que involucre sólo las dimensiones $Im(\delta)$, $Re(V)$ y $Im(V)$, se obtiene lo mostrado en la Figura 5.26. Se observa que la región en donde se encuentra el diagrama de bifurcación corresponde a una pirámide de la Figura 4.5 con vértices correspondientes a $\{1, 1, 1\}$, $\{0, 1, 1\}$, $\{0, 1, 0\}$, $\{1, 1, 0\}$ y $\{0, 0, 0\}$.

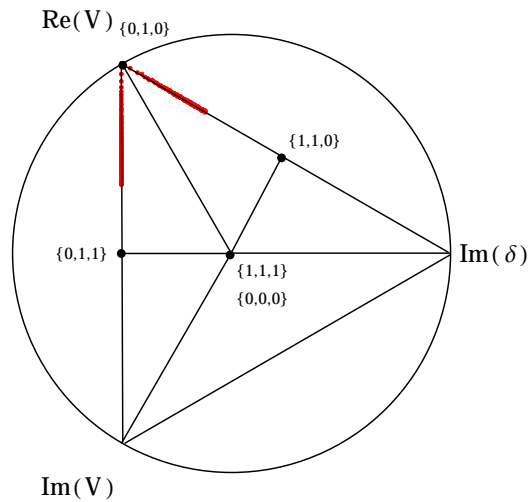


Figura 5.26: RadViz del sistema eléctrico con carga dinámica con las dimensiones $Im(\delta)$, $Re(V)$ y $Im(V)$.

La información obtenida de este análisis no podría haber sido deducida del análisis de los diagramas de bifurcación generados con cada variable de estado de manera independiente.

5.4. Conclusiones

En este capítulo se han presentado seis casos de estudio, de los cuales cuatro fueron sistemas dinámicos simples y dos fueron sistemas dinámicos más complejos. Cada uno de ellos exhibe las soluciones complejas del sistema de ecuaciones, gracias a esto se aprecian estructuras simétricas definidas por las raíces complejas conjugadas. Se observan en los diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos información que antes no se apreciaba en los diagramas de bifurcación convencionales, se observan los fenómenos oscilatorios que suceden dado ciertos parámetros de control de los sistemas. Los tiempos de ejecución de PSO van desde 30 minutos para las bifurcaciones normales (v.g. silla-nodo), hasta aproximadamente 30 días. Cabe destacar que dentro de este tiempo se incluye las interrupciones ocasionadas al proceso.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajos futuros

En este capítulo se presentan las observaciones y conclusiones generales del presente trabajo, además se sugieren líneas de investigación en la misma dirección que esta tesis que complementen el trabajo de investigación.

6.1. Conclusiones Generales

El algoritmo de optimización por enjambre de partículas (PSO), es un algoritmo de inteligencia artificial eficaz para encontrar soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con raíces reales y complejas. Mediante PSO podemos trazar diagramas de bifurcación con puntos fijos complejos que comúnmente no se presentan al momento de realizar análisis de sistemas dinámicos.

Los puntos fijos complejos mostrados en estos diagramas aportan información complementaria del comportamiento cualitativo de un sistema dinámico. Estos juegan un papel importante en sistemas eléctricos de potencia, debido a que ayudan a establecer a partir de que valores de los parámetros de control el sistema empieza a comportarse de manera oscilatoria estable o inestable. Estos comportamientos oscilatorios denotan la fluctuación en el tiempo de un sistema dinámico. Por ejemplo, cuando existe un punto fijo complejo indica oscilaciones que algún momento pueden llegar a una región de inestabilidad que conduzca a un colapso de voltaje.

Respecto a los tres métodos de visualización de alta dimensionalidad implementados en este trabajo de investigación, se lograron obtener diferentes perspectivas de un mismo diagrama de bifurcación, consiguiendo evidenciar alguna información implícita en los diagramas de bifurcación convencionales.

6.2. Trabajos Futuros

PSO demanda un costo computacional que depende de la función objetivo, entre más compleja sea esta función su costo computacional es mayor, esto debido a que es necesario incrementar el número de iteraciones para obtener un valor óptimo aceptable. Una forma de reducir ese costo computacional, es obtener el valor óptimo de la función fitness de forma temprana y así lograr una rápida convergencia. Por ejemplo, existen distintos métodos que se pueden implementar para calcular las velocidades de las partículas de PSO que mejoren la convergencia al óptimo. Uno de ellos, es la regresión exponencial de las posiciones de las partículas, que consiste en encontrar aquellos coeficientes pertenecientes a una función exponencial que satisfagan con la máxima aproximación posible a los puntos de interés [Azar15].

Otro problema de PSO, es la delimitación del espacio de búsqueda en donde las partículas de PSO explorarán, dado que es difícil determinar en donde se encontrarán soluciones. Un método que se ha probado obtener buenos resultados para este fin, es el método de paredes invisibles como condiciones de contorno [Robinson04]. Este tipo de condición permite a la partícula moverse sin restricciones físicas. Sin embargo, aquellas partículas que se salen del espacio de soluciones especificado no se evalúan. De esta manera se produce una considerable reducción del coste computacional mientras que no se interfiere en el movimiento natural del enjambre.

Es de gran interés para la comunidad científica y educativa visualizar la interacción entre todas las variables de un sistema dinámico en un mismo gráfico, debido a que se puede

descubrir información implícita que antes no se visualizaba. Por esta razón se plantea implementar y estudiar nuevos métodos de visualización de alta dimensionalidad diferentes a los presentados en esta tesis, con el fin de encontrar un método que proporcione información valiosa para el estudio de cualquier sistema dinámico.

En la práctica, se pueden encontrar retrasos puros en varios tipos de sistemas (v.g. sistemas con transmisiones hidráulicas, neumáticas o mecánicas). En estos sistemas la salida no comienza a responder a la entrada sino hasta después de un intervalo de tiempo dado. Por lo tanto, es de gran utilidad generar diagramas de bifurcación para sistemas de ecuaciones con retardo para su estudio. Por ejemplo, XPPAUT resuelve las ecuaciones con retardo por medio de una interpolación polinómica cúbica para obtener el valor retardado [Ermentrout06].

Referencias

- [Aggarwal00] Aggarwal, V. Solving trascendental equations using genetics algorithms. 2000.
- [Azar15] Azar, M. A., Paz, F. P., y Cagnetta, A. H. Optimización de algoritmos pso mediante regresión exponencial. *En ASAI 2015, 16° Simposio Argentino de Inteligencia Artificial*. 2015.
- [Barrera07] Barrera, J., Flores, J. J., y Esquivel, C. F. Generating complete bifurcation diagrams using a dynamic environment particle swarm optimization algorithm. *Journal of Artificial Evolution and Applications*, 2008, 2007.
- [Barrera08] Barrera, J. A. *Análisis de Sistemas Dinámicos utilizando Herramientas de Inteligencia Artificial*. Tesis Doctoral, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Posgrado de Ingeniería Eléctrica, 2008.
- [Blanchard06] Blanchard, P., Devaney, R., y Hall, G. *Differential Equations*. Thompson, 2006.
- [Boyce01] Boyce, W. E. y DiPrima, R. C. *Elementary Differential Equations*. John Wiley and Sons, Inc., 2001.
- [Brits02] Brits, R., Engelbrecht, A., y van den Bergh, F. A niching particle swarm optimizer. *En Proc. of the 4th Asia-Pacific Conference on Simulated Evolution and Learning 2002(SEAL 2002)*, págs. 692–696. 2002.
- [Carey03] Carey, M., Heesch, D. C., y Rüger, S. M. Info navigator: A visualization

- tool for document searching and browsing. *En 9th International Conference on Distributed Multimedia Systems*, págs. 24–26. 2003.
- [Clerc99] Clerc, M. The swarm and the queen: towards a deterministic and adaptive particle swarm optimization. *En Congress on Evolutionary Computation*. 1999.
- [Clerc02] Clerc, M. y Kennedy, J. The particle swarm - explosion, stability, and convergence in a multimodal complex space. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(1):58–73, 2002.
- [Doedel94] Doedel, E., Wang, X., y Fairgrieve, T. Software for continuation and bifurcation problems in ordinary differential equations. *En Technical report*. California Institute of Technology Pasadena, CA, 1994.
- [Ermentrout06] Ermentrout, B. *Simulating, Analyzing and Animating Dynamical Systems A Guide to XPPAUT for Researchers and Students*. 2006.
- [Estrada92] Estrada, H. Cálculo de raíces complejas de funciones analíticas. *MOMENTO Revista Depto. Física Universidad Nacional de Colombia*, 7, 1992.
- [Gilat06] Gilat, A. *MATLAB: An Introduction With Applications*. John Wiley and Sons, Inc., Hoboken (NJ), USA, 2006.
- [Gleason10] Gleason, R. E. A simple method for graphically obtaining the complex roots of a cubic equation. *Annals of Mathematics*, 1910.
- [Haefner05] Haefner, J. W. *Modeling Biological Systems: Principles and Applications*. Springer-Verlag New York, 2^a ed^{ón}., 2005.
- [Hale91] Hale, J. K. y Kocak, H. *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag, 1991.
- [Kasusky02] Kasusky, R. G. *Análisis de Inestabilidades en Sistemas Eléctricos de Potencia por Medio de la Teoría de Bifurcación*. Tesis de maestría, Instituto Tecnológico de Morelia, Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Octubre 2002.

- [Kennedy95] Kennedy, J. y Eberhart, R. C. Particle swarm optimization. *En Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks (ICNN'95)*, págs. 1942–1948. December 1995.
- [Kuznetsov98] Kuznetsov, Y. A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag New York, 2^a ed^{ón}., 1998.
- [Li06] Li, X., Branke, J., y Blackwell, T. Particle swarm with speciation and adaptation in a dynamic environment. *En Proceedings of the 8th Annual Conference Genetic and Evolutionary Computation (GECCO'06)*, tomo 1, págs. 51–58. 2006.
- [Lyapunov92] Lyapunov, A. M. *The General Problem of the Stability of Motion*. Mathematical Society of Kharkov, 1892.
- [López10] López, R. *Diagramas de bifurcación de funciones discontinuas o no diferenciables*. Tesis de maestría, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Posgrado de Ingeniería Eléctrica, 2010.
- [McCarthy04] McCarthy, J. F., Marx, K. A., Hoffman, P. E., Gee, A. G., O'Neil, P., Ujwal, M., y Hotchkiss, J. Applications of machine learning and high-dimensional visualization in cancer detection, diagnosis, and management. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 1020:239–262, 2004.
- [Melliger07] Melliger, C. How to graphically interpret the complex roots of a quadratic equation. *MAT Exam Expository Papers*, 2007.
- [Molero07] Molero, M., Salvador, A., Menarguez, T., y Garmendia, L. *Análisis Matemático para Ingeniería*. Prentice-Hall, 2007.
- [Nayfeh95] Nayfeh, A. H. y Balachandran, B. *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational and Experimental Methods*. John Wiley and Sons, 1995.
- [Nováková09] Nováková, L. y Stepánková, O. Radviz and identification of clusters in multidimensional data. *En 13th International Conference Information Visualization*. 2009.

- [Ouyang09] Ouyang, A., Zhou, Y.-Q., y Luo, Q. Hybrid particle swarm optimization algorithm for solving systems of nonlinear equations. *En The 2009 IEEE International Conference on Granular Computing, GrC 2009*. 2009.
- [Poli08] Poli, R. Analysis of the publications on the applications of particle swarm optimisation. *Journal of Artificial Evolution and Applications*, 2008.
- [Pérez07] Pérez, H. R. C. *Análisis Multiparamétrico de Bifurcaciones en Sistemas Eléctricos*. Tesis de maestría, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Posgrado de Ingeniería Eléctrica, 2007.
- [Richter83] Richter, S. L. y DeCarlo, R. A. Continuation methods: Theory and applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 28(6):660–665, 1983.
- [Robinson04] Robinson, J. y Rahmat-Sammi, Y. Particle swarm optimization in electromagnetics. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 52(2):397–407, 2004.
- [Strogatz94] Strogatz, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Perseus Books Publishing, L.L.C., 1994.
- [Tanner75] Tanner, J. T. The stability and the intrinsic growth rates of prey and predator populations. *Ecology*, 56(4):855–867, 1975.
- [Torres13] Torres, O. V., Jacobo, J. C., y Flores, J. J. A bifurcation diagram tool based on nichepso. *En Power, Electronics and Computing (ROPEC), 2013 IEEE International Autumn Meeting on*, págs. 1–5. Nov 2013.
- [Weeks03] Weeks, A. Connecting complex roots to a parabola’s graph. 2003.
- [Wolfram03] Wolfram, S. *The Mathematica book*. Wolfram Media, Inc., 5^a ed^{ón}., 2003.