



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO**
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



**ESTABILIDAD DE SOLUCIONES PERIÓDICAS EN
SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA USANDO EL
MÉTODO POINCARÉ-KRYLOV SIN JACOBIANO**

TESIS

Que para obtener el grado de
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

Presenta

MARÍA LUISA ROMERO MUÑOZ

NORBERTO GARCÍA BARRIGA

Director de tesis

ENRIQUE ACHA DAZA

Codirector de tesis

Morelia, Michoacán
Noviembre 2020

**ESTABILIDAD DE SOLUCIONES PERIÓDICAS EN
SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA USANDO EL
MÉTODO POINCARÉ-KRYLOV SIN JACOBIANO**

TESIS

Que para obtener el grado de
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

presenta

María Luisa Romero Muñoz

Dr. Norberto García Barriga

Director de Tesis

Dr. Enrique Acha Daza

Co-Director de Tesis

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

noviembre 2020

Esta tesis se la dedico a mi mamá Adriana, a mi hijo Christyan y a mis hermanos Leonardo, Miriam y Adrián.

Agradezco a todas las personas que me han brindado su valioso apoyo y compañía, en especial:

- A mi mamá, mis abuelos y mis hermanos, por estar siempre a mi lado, demostrar incondicionalmente su amor hacia mi y apoyarme en todos los aspectos.
- A mis compañeros y amigos Juan Manuel, Carlos, Cindy, Mary y Jorge por su constante ayuda y apoyo.
- A mis profesores, que a lo largo de mis estudios de posgrado me brindaron su conocimiento y guía.
- A mi asesor de tesis, el Dr. Norberto, por todo su apoyo y paciencia.

Agradezco a Dios por permitirme construir un peldaño más en mi formación profesional y personal, y por otorgarme el gusto por el aprendizaje.

Resumen

En esta tesis se propone un nuevo método en el dominio del tiempo basado en el subespacio de Krylov para el estudio de la estabilidad de soluciones periódicas de redes eléctricas no lineales. Este método, denominado Poincaré-Krylov sin Jacobiano (PKSJ-QR), utiliza el método del mapa de Poincaré para el cálculo de la solución periódica del sistema, en donde se usa un método Newton para resolver las ecuaciones algebraicas no lineales resultantes. Se aplica el método de subespacios de Krylov basado en el algoritmo iterativo del Residuo Mínimo Generalizado (GMRES) para resolver las ecuaciones de corrección del método Newton. Además, la matriz de Hessenberg en GMRES se transforma en una matriz triangular superior mediante una factorización QR basada en rotaciones Givens para resolver redes eléctricas de gran escala de forma eficiente.

Más importante aún, el método de subespacios de Krylov sin jacobiano presentado en este trabajo evita calcular la matriz de transición de estado, reduciendo la complejidad computacional del análisis. Además, la estabilidad de las soluciones periódicas se determina con un nuevo procedimiento que calcula los multiplicadores de Floquet mediante los valores Ritz y la matriz de Hessenberg que surge de forma natural en GMRES.

El método numérico propuesto, tanto para el cálculo de las soluciones periódicas como para la determinación de la estabilidad de la red eléctrica, se valida con los resultados obtenidos mediante la simulación en PSCAD/EMTDC y el método del mapa de Poincaré estándar. Los casos de estudio corresponden a un generador síncrono conectado a un bus infinito, una versión trifásica modificada del sistema IEEE 9-nodos y una versión trifásica modificada del sistema IEEE 118-nodos con un generador síncrono de turbina hidráulica y un convertidor de electrónica de potencia conectado a la red.

Los resultados demuestran que el método propuesto calcula la solución periódica del sistema y los multiplicadores de Floquet de forma precisa. Se alcanzan factores de aceleración de hasta 8 veces con el método PKSJ-QR respecto al método de mapa de Poincaré estándar. Esta propuesta abre la oportunidad de explorar una implementación alternativa del método del mapa de Poincaré para sistemas de potencia a gran escala en el marco de referencia del dominio del tiempo.

Palabras clave: estado estable, GMRES, máquina síncrona, multiplicadores de Floquet, mapa de Poincaré.

Abstract

A new method in the time domain frame of reference based on the Krylov subspaces for the study of the stability of periodic solutions of non-linear electrical networks is presented in this thesis. This method, called Jacobian Free Poincaré-Krylov, uses the Poincaré map method to calculate the periodic solution of the system, where a Newton method is used to solve the non-linear algebraic equations. The Krylov subspace method based on an iterative GMRES algorithm (Generalized Minimal Residual method) is applied to solve the correction equations of the Newton method instead of applying a direct method of the Gaussian elimination type. Further, a QR factorization of the Hessenberg matrix involved in the GMRES least square problem is implemented using Givens rotations in order to improve even further the solution of large-scale power networks.

More importantly, the Jacobian Free Krylov subspace method presented in this work avoids calculating the state transition matrix, reducing the computational complexity of the analysis. In addition, the stability of the periodic solution is determined by calculating the Floquet multipliers using the Ritz values and the Hessenberg matrix, which arises naturally as a product of the Krylov subspace.

The proposed numerical method, both for the calculation of the periodic steady-state solution and for the determination of the stability of the electrical network, is validated with the standard Poincaré map method and results obtained through a PSCAD / EMTDC program. The study cases are a synchronous generator connected to an infinite bus, a modified three-phase version of the IEEE 9-node system and a modified three-phase version of the IEEE 118-node system with a hydraulic turbine synchronous generator and a grid-connected power electronics converter.

Results show that the proposed method calculates the periodic solution of the system and the Floquet multipliers accurately. Furthermore, acceleration factors of up to 8 times are achieved with the Jacobian-Free Poincaré-Krylov method compared to the standard Poincaré map method. This proposal opens the opportunity to explore an alternative implementation of the Poincaré map method for large-scale power systems in the time domain frame of reference.

Contenido

Dedicatoria	III
Resumen	V
Abstract	VII
Contenido	IX
Lista de Figuras	XI
Lista de Tablas	XIII
1. Introducción	1
1.1. Descripción del problema	1
1.2. Estado del arte	2
1.3. Objetivo de la tesis	7
1.4. Hipótesis	7
1.5. Aportaciones	8
1.6. Justificación	8
1.7. Metodología	9
1.8. Descripción por capítulos	10
2. Método del mapa de Poincaré	13
2.1. Soluciones periódicas	13
2.1.1. Mapa de Poincaré	14
2.1.2. El método del mapa de Poincaré	15
2.1.3. Método de diferenciación numérica	16
2.2. Sumario	17
3. Subespacios de Krylov	19
3.1. Proyecciones sobre subespacios	19
3.2. Algoritmo de Arnoldi	21
3.2.1. Ortogonalización Gram-Schmidt	22
3.3. Método del residuo mínimo generalizado (GMRES)	23
3.4. Rotaciones Givens	25
3.5. Propiedades del algoritmo de Arnoldi	29
3.6. Sumario	30

4. Método Poincaré-Krylov sin Jacobiano	31
4.1. Fundamentos	31
4.2. Producto Matriz-Vector	32
4.2.1. Proceso de discretización	33
4.2.2. Proceso de diferenciación	33
4.3. Algoritmo Poincaré-Krylov sin jacobiano	34
4.4. Estabilidad de la solución periódica	37
4.4.1. Estimación de multiplicadores de Floquet	37
4.5. Sumario	38
5. Casos de estudio	41
5.1. Máquina síncrona conectada a bus infinito	42
5.1.1. Estimación de los multiplicadores de Floquet	47
5.2. Sistema de prueba de 9 nodos del IEEE modificado	48
5.2.1. Estimación de los multiplicadores de Floquet	52
5.3. Sistema IEEE 118-nodos	54
5.3.1. Estimación de los multiplicadores de Floquet	59
5.3.2. Propagación Armónica	61
5.4. Caso de estudio: sistema inestable	65
5.5. Conclusiones	67
6. Conclusiones	69
6.1. Conclusiones	70
6.2. Trabajos futuros	71
A. Modelo VBR de la máquina íncrona	73
B. Solución detallada del caso de estudio 1 con el método PKSJ-QR	75
C. Datos del sistema IEEE de 9 nodos	81
D. Datos del sistema IEEE de 118 nodos	83
Referencias	93

Lista de Figuras

2.1.	Discretización de un sistema no-autónomo periódico.	15
2.2.	Diagrama de flujo del método del mapa de Poincaré estándar.	18
3.1.	Interpretación de la condición de ortogonalidad.	21
3.2.	Diagrama del algoritmo básico del GMRES usando rotaciones Givens. . . .	28
4.1.	Diagrama de flujo del método PKSJ-QR.	36
5.1.	Forma de onda del estado estable de la corriente trifásica en el estator al aplicar MMP (línea continua) y PKSJ-QR (línea punteada).	46
5.2.	Multiplicadores de Floquet para la máquina síncrona conectada a bus infinito.	47
5.3.	Diagrama del sistema de 9 nodos.	49
5.4.	Forma de onda del estado estable de la corriente de la fase A de la rama 1-4.	52
5.5.	Multiplicadores de Floquet para el sistema IEEE 9-nodos.	53
5.6.	Sistema IEEE de 118 nodos modificado.	55
5.7.	Comparación de las formas de onda del estado estable de la corriente en la rama 25-GS y voltaje del nodo 100 obtenidas al aplicar MMP y PKSJ-QR	58
5.8.	Multiplicadores de Floquet del sistema IEEE 118-nodos, escenario A.	59
5.9.	Transitorio del voltaje trifásico en el nodo 25, correspondiente al escenario C.	63
5.10.	Detalle del voltaje en el nodo 25.	64
5.11.	Forma de onda de la corriente en el nodo 25 al aplicar la falla dle escenario C.	64
5.12.	Detalles de la forma de onda de la corriente en el nodo 25.	65
5.13.	Multiplicadores de Floquet del generador síncrono del caso 5.1 en condiciones de operación inestable.	65
5.14.	Corriente de la fase A de la máquina síncrona en condiciones de operación inestables.	66

Lista de Tablas

5.1. Parámetros del generador síncrono con turbina hidráulica.	43
5.2. Errores máximos durante convergencia, tiempo de cómputo y factores de aceleración para el sistema IEEE 118-nodos.	45
5.3. Número de iteraciones GMRES	46
5.4. Comparación de los multiplicadores de Floquet para la máquina síncrona. .	48
5.5. Errores máximos durante convergencia, tiempo de cómputo y factores de aceleración para el sistema IEEE 9-nodos.	51
5.6. Número de iteraciones GMRES	52
5.7. Comparación de los multiplicadores de Floquet para el sistema IEEE 9-nodos.	53
5.8. Parámetros del generador síncrono.	54
5.9. Parámetros del convertidor de potencia conectado a la red.	55
5.10. Errores máximos durante convergencia, tiempo de cómputo y factores de aceleración para el sistema IEEE 118-nodos.	57
5.11. Número de iteraciones GMRES	58
5.12. Comparación de los multiplicadores de Floquet.	60
5.13. Componente fundamental y % THD para el escenario B del sistema IEEE de 118 nodos para: a).- voltajes nodales and b).- corrientes en rama.	62
C.1. Datos de líneas del sistema de 9 nodos.	81
C.2. Datos de las cargas del sistema de 9 nodos	81
C.3. Datos de los generadores.	82
D.2. Datos de las líneas de transmisión del sistema IEEE 118-nodos	83
D.1. Configuración de algunos generadores del sistema IEEE 118-nodos	91

List of Algorithms

1.	Algoritmo de Arnoldi	23
2.	GMRES	25
3.	Algoritmo del método PKSJ-QR	35

Capítulo 1

Introducción

Un aspecto importante en el estudio de los sistemas eléctricos de potencia actuales es el uso de técnicas analíticas y prácticas que permitan conocer su comportamiento en condiciones operativas de estado estable y anticipar su respuesta ante situaciones anormales o perturbaciones que lo lleven a condiciones de inestabilidad o colapso. El diseño, investigación y mantenimiento de redes eléctricas inteligentes, redes de potencia futuras, super-redes e infraestructura asociadas a energías renovables requiere del desarrollo de algoritmos eficientes y precisos. Los métodos iterativos basados en subespacios de Krylov ofrecen ventajas que se ajustan a las necesidades de las redes eléctricas actuales. En este trabajo se demuestra que técnicas numéricas basadas en el subespacio de Krylov pueden reducir el esfuerzo de cómputo para estudiar la estabilidad de la solución periódica de estado estable de los sistemas de potencia.

1.1. Descripción del problema

Durante las últimas décadas, los sistemas de potencia han experimentado cambios significativos vinculados a la cantidad de potencia consumida así como también la complejidad de la red. Inestabilidades de voltaje tienden a aparecer en sistemas de potencia que presentan un alto nivel de carga o bajo condiciones de falla. Existen varios indicadores vinculados a la inestabilidad de voltaje, los cuales dependen de la estructura de la red, de la dinámica de la carga y del generador [Kundur94]. La detección oportuna de oscilaciones

no lineales y la determinación del tipo de oscilación se debe realizar oportunamente para evitar una condición de operación dañina del sistema de potencia.

El estudio de la estabilidad de las soluciones periódicas se basa en la identificación de una matriz de transición. Las características de la matriz de transición están directamente relacionadas con el comportamiento de la solución periódica y determinadas por sus valores propios. Sin embargo, el cálculo de la matriz de transición puede representar una carga computacional formidable porque la dimensión de los sistemas de potencia puede alcanzar fácilmente el orden de varios miles de variables de estado. Además, los requisitos de memoria y esfuerzo computacional para resolver el sistema de ecuaciones lineales obtenido con el método de Newton es capaz de desafiar seriamente al más eficiente de los métodos de solución directa.

1.2. Estado del arte

En el área de los sistemas eléctricos de potencia la estabilidad puede ser estudiada desde diversos aspectos y con una amplia gama de factores. Sin embargo, el problema de estabilidad es único: se refiere a la propiedad del sistema que le permite mantenerse en un estado de operación en equilibrio bajo condiciones operativas normales y recuperar un nuevo estado de equilibrio después de haber sido sometido a una perturbación [Kundur94].

Las oscilaciones no lineales son una característica intrínseca de los sistemas de potencia. Los métodos de Lyapunov representan una alternativa para el estudio de la estabilidad de sistemas dinámicos no lineales, los cuales han sido aplicados en el área de sistemas eléctricos de potencia. Las funciones de energía son una extensión de las funciones de Lyapunov, y se han propuesto para el análisis directo de estabilidad de sistemas eléctricos [Chiang89]. El papel de la función de energía es evaluar directamente si un punto de operación se encuentra dentro de la región de estabilidad de un punto de equilibrio estable posterior a una falla, sin realizar una integración numérica. En [Chang95] se analiza a detalle como se aplican los métodos directos basados en funciones de energía al análisis de estabilidad transitoria, se propone un procedimiento para construir la función de energía y además se introduce un método de funciones de energía para el cálculo del punto de equili-

brio inestable. Por su parte, el máximo exponente de Lyapunov es un índice de estabilidad que está fuertemente conectado con la fluctuación de los datos y ha sido utilizado en el análisis de series de tiempo de sistemas de potencia [Dasgupta12]. El máximo exponente de Lyapunov es un indicador de la estabilidad de un sistema no lineal: si el máximo exponente de Lyapunov es negativo entonces el sistema es estable. En [Yan11] se propone un método que usa el máximo exponente de Lyapunov para el monitoreo del ángulo del rotor y establecen un criterio de estabilidad de acuerdo a la relación entre el exponente y el ángulo basado en mediciones de PMU. En [Wang16] se usa el máximo exponente de Lyapunov para predecir la pérdida de sincronismo basado también en mediciones de PMU.

Por otra parte, el estudio de la estabilidad del comportamiento oscilatorio no lineal de los sistemas de potencia se puede realizar mediante la teoría de Floquet. Los multiplicadores de Floquet son los valores propios de la matriz de transición que determinan la estabilidad de la solución periódica del sistema de potencia. Una solución es estable cuando el módulo de los valores característicos de la matriz de transición es menor de la unidad [Parker89]. Los multiplicadores de Floquet se pueden calcular utilizando un método en el dominio de la frecuencia [Traversa08], el cual se basa en la técnica del balance armónico y explota la matriz jacobiana del sistema no lineal utilizada en el proceso iterativo de Newton para calcular la solución periódica. En [Brambilla09] se propone un enfoque para el cálculo de todos los multiplicadores de Floquet explotando algunas propiedades de agrupamiento de todo el conjunto de multiplicadores. Este enfoque es desarrollado a partir de la formulación del balance armónico adaptado para el cálculo de la solución de estado estable. La técnica del balance armónico es usada comúnmente para la determinación de soluciones periódicas debido a su eficiencia numérica, relacionada con el hecho de que la solución de estado estable se determina directamente, evitando el cálculo de la parte transitoria.

En el marco de referencia del dominio del tiempo, se ha usado un concepto geométrico denominado mapa de Poincaré y un esquema de continuación secuencial para estudiar algunos comportamientos de soluciones periódicas en términos de multiplicadores de Floquet para enlaces asíncronos basados en transformadores de frecuencia variable [Contreras-Aguilar11]. El cálculo del punto de operación en estado estacionario se realiza mediante un método de Newton y el mapa de Poincaré, el cual es particularmente útil para

la determinación rápida del estado estable de sistemas con máquinas eléctricas cuya inercia es inherentemente grande y que pueden causar una respuesta transitoria prolongada después de una perturbación en el sistema. En [Ramirez11] se desarrolla un procedimiento y un modelo matemático para soluciones de estado estable, trayectorias transitorias y estabilidad local de un manejador de velocidad ajustable (MVA). Se utiliza el método del mapa de Poincaré y expansiones exponenciales discretas para calcular la matriz de transición de estado y se aplica la teoría de Floquet para análisis de la estabilidad del MVA, partiendo directamente de los valores propios del jacobiano del mapa de Poincaré.

Para los enfoques antes mencionados desarrollados dentro del marco de referencia del dominio del tiempo, el estudio de la estabilidad de las soluciones periódicas se basa en la identificación de una matriz de transición. Las características de la matriz de transición están directamente relacionadas con el comportamiento de la solución periódica y determinadas por sus valores propios. Sin embargo, el cálculo de la matriz de transición puede representar una carga computacional formidable para los métodos convencionales porque la dimensión de los sistemas de energía puede alcanzar fácilmente el orden de varios miles de variables de estado. Además, los requerimientos de memoria y esfuerzo de cómputo necesarios para resolver el sistema de ecuaciones lineales y densas resultantes del método Newton pueden representar un reto importante para los métodos directos de solución de sistemas de ecuaciones.

El desarrollo de técnicas modernas de álgebra lineal, basadas en los métodos de Krylov y Arnoldi [Schultz86], ha permitido el estudio de problemas a gran escala. Desde la perspectiva de los sistemas eléctricos de potencia, los métodos iterativos basados en el subespacio de Krylov se han aplicado con éxito para acelerar la solución de problemas de grandes dimensiones. La motivación principal en todos los casos es la capacidad de realizar una iteración Newton sin formar el jacobiano.

Una primera aplicación de los métodos iterativos basados en subespacios de Krylov en el área de sistemas de potencia se presenta en [Galiana94], en donde se utilizan algoritmos basados en el método del gradiente conjugado con pre-condicionamiento en el problema de flujos de potencia. Se demuestra que para ciertas clases de sistemas dispersos de grandes dimensiones el método que proponen es significativamente más eficiente que las

técnicas directas y ofrece importantes ahorros en el tiempo de cómputo. Existen contribuciones en la literatura en donde se utilizan diferentes versiones del gradiente conjugado para resolver sistemas de ecuaciones en simulaciones dinámicas, requeridas en el análisis de estabilidad transitoria de sistemas de potencia [Decker96], [Alves99]. En el primero utilizan procesamiento en paralelo, mientras que en el segundo comparan el desempeño en la solución de sistemas lineales del gradiente conjugado con métodos directos basados en eliminación Gaussiana y desarrollan un nuevo esquema de ordenamiento que disminuye el número de iteraciones requeridas por los métodos iterativos para alcanzar la convergencia. En [Dag03] utilizan otra variante del método de Krylov del gradiente conjugado aplicado al problema de flujos de potencia desacoplado, desarrollando un técnica de pre-condicionamiento basado en multiplicaciones matriciales. En otros trabajos como en [Ying Chen06] y [Xu13] utilizan el Método del Mínimo Residuo Generalizado (GMRES, por sus siglas en inglés) aplicado al problema de flujos de potencia y proponen diferentes técnicas de pre-condicionamiento para el método Newton-GMRES, demostrando que pueden ser más eficientes y robustos que otros métodos rápidos de solución de sistemas de ecuaciones convencionales.

En [Semlyen96] se analiza a detalle la aplicación de los métodos basados en subespacios de Krylov en el problema de flujos de potencia, ya sea con aproximaciones del jacobiano, o sin formarlo explícitamente. Se demuestra que es particularmente eficiente para sistemas grandes y se prueba un método que utiliza GMRES en la solución de los sistemas de ecuaciones no lineales del problema de flujos de potencia. Además, se demuestra que la eficiencia del método tiene que ver con el hecho de que requiere únicamente multiplicaciones de matrices por vectores en sus cálculos y no hace factorizaciones matriciales como en flujos de potencia convencional. En [Flueck98] se utiliza un método de Newton inexacto que utiliza GMRES con pre-condicionamiento para resolver los sistemas de ecuaciones en flujos de potencia. El método propuesto es comparado con un método Newton directo que usa factorizaciones LU y reportan resultados favorables en tiempo y esfuerzo de cómputo.

El uso del algoritmo GMRES para el cálculo de la solución de estado estable usando métodos de disparo para aceleración de la convergencia en circuitos electrónicos se reportó por primera vez en [Telichevsky95]. Se demuestra que el método propuesto reduce el tiempo de simulación al compararlo con otros métodos de aceleración. GMRES ha sido

utilizado en el área de sistemas de potencia para resolver sistemas de ecuaciones en métodos de simulación dinámica [Chaniotis00], aplicándolo a sistemas de 9 y 68 nodos, además proponen modificaciones que mejoran la convergencia del método. Además, en [Yu14] se propone un método para resolver sistemas de ecuaciones no lineales basado en un algoritmo Newton y GMRES aplicado a acelerar la simulación dinámica en sistemas de potencia de grandes dimensiones. Esta propuesta se implementó en una unidad de procesamiento gráfico.

Respecto al cálculo de la solución periódica de estado estable, en [Araujo17] se desarrolla un algoritmo para la simulación de la respuesta de estado estable de redes eléctricas en condiciones no sinusoidales en el dominio del tiempo. El algoritmo utiliza el método Runge-Kutta de cuarto orden para integrar los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y el método de diferenciación numérica para acelerar el proceso de convergencia de las variables de estado a la solución periódica de estado estable, combinado con un método de interpolación cúbica para reducir el tiempo de cómputo y con técnicas de procesamiento en paralelo basado en GPUs. En [Godínez-Delgado20] se propone un método de extrapolación al ciclo límite (solución periódica de estado estable) basado en un proceso de diferenciación numérica, orientado a calcular de forma rápida la solución periódica de estado estable de redes eléctricas monofásicas no lineales que incorporan sistemas fotovoltaicos en condiciones de distorsión armónica. Este método de solución se basa en la determinación de conjuntos de ecuaciones diferenciales discretas, obtenidos por análisis nodal y el proceso de solución se obtiene de forma iterativa mediante la descomposición LU. En estos trabajos se identifica la matriz de transición mediante algoritmos de diferenciación numérica para determinar la solución periódica de estado estable y no se aplican métodos iterativos basados en el subespacio de Krylov.

La revisión de la literatura en el área de sistemas de potencia revela que no se ha explorado la solución de flujo de potencia óptimos ni el estudio de la estabilidad de las soluciones periódicas mediante el uso de métodos iterativos de Krylov. En los estudios de estabilidad de soluciones periódicas en redes eléctricas no lineales, la mayor parte del esfuerzo de cómputo se emplea en calcular el jacobiano del mapa de Poincaré, la cual es una matriz llena. Además, el sistema de ecuaciones lineales de la iteración Newton se resuelve mediante métodos directos. Sin embargo, la aplicación a problemas de grandes dimensiones

no es una tarea trivial. Para estos casos, los métodos iterativos sin Jacobiano se pueden aplicar para reducir tanto el tiempo como los requerimientos de memoria.

1.3. Objetivo de la tesis

El objetivo de esta tesis es proponer un nuevo método basado en el método del mapa de Poincaré y el subespacio de Krylov para estudiar la estabilidad de soluciones periódicas en sistemas eléctricos de potencia.

Los objetivos particulares son:

- Proponer una metodología para acelerar la convergencia a la solución periódica de estado estable basada en el mapa de Poincaré y el subespacio de Krylov.
- Resolver el sistema de ecuaciones lineales resultante del método Newton mediante una metodología GMRES para matrices no-simétricas.
- Desarrollar el sub-espacio de Krylov mediante el producto matriz-vector basado en un proceso de discretización y diferenciación del sistema continuo en el tiempo.
- Estudiar la estabilidad mediante multiplicadores de Floquet calculados con los valores Ritz de la matriz Hessenberg, obtenida con un algoritmo GMRES.
- Resolver casos de estudio de redes eléctricas con presencia de componentes no lineales tales como máquinas eléctricas y convertidores de electrónica de potencia.

1.4. Hipótesis

El estudio de la estabilidad mediante técnicas iterativas basadas en el subespacio de Krylov, valores Ritz y teoría de Floquet permitirá analizar de forma eficiente la existencia de soluciones periódicas estables o inestables en redes eléctricas de potencia, sin la necesidad del cálculo de todos los multiplicadores de Floquet.

1.5. Aportaciones

Las aportaciones de esta tesis al campo de investigación de los sistemas eléctricos de potencia son:

- Aplicación del método Poincaré Krylov Sin Jacobiano (PKSJ-QR) al estudio de la estabilidad de la solución periódica de estado estable mediante los multiplicadores de Floquet estimados a partir de los valores Ritz de la matriz Hessenberg formada en GMRES.
- El cálculo de la solución periódica de estado estable se realiza mediante la combinación del método del mapa de Poincaré y subespacios de Krylov incorporando herramientas de álgebra lineal, tales como las rotaciones Givens y el producto matriz-vector para formar el subespacio de Krylov.

1.6. Justificación

El desarrollo de las redes eléctricas inteligentes trae consigo un conjunto de requisitos de eficiencia, seguridad y economía, los cuales representan un reto para las técnicas y métodos de estudio tradicionales. El sistema eléctrico actual debe ser capaz de integrar tecnologías de medición avanzada, comunicación, cálculo y control. Por lo tanto, la implementación de algoritmos de pronóstico y control, y la capacidad de llevar a cabo el procesamiento en tiempo real de una gran cantidad de información resultan relevantes para garantizar la eficiencia, seguridad y confiabilidad del sistema eléctrico. Esto hace evidente la aplicación de algoritmos que solucionen de forma precisa y eficiente los problemas que requieren un gran esfuerzo de cómputo.

La motivación de esta tesis radica en el estudio de oscilaciones en sistemas eléctricos de potencia, en particular, la estabilidad de soluciones periódicas. Las oscilaciones periódicas en las redes de potencia se encuentran vinculadas a equipo electromagnético, convertidores de electrónica de potencia y máquinas rotatorias.

Una motivación adicional de este trabajo es contribuir en el área del cálculo de soluciones periódicas de estado-estable en redes de potencia. En particular, en esta tesis

se persigue eliminar la dependencia de los métodos estándar para el cálculo de la solución periódica de estado-estable que requieren identificar la matriz de transición. Por lo tanto, en este trabajo se propone desarrollar un nuevo método basado en el mapa de Poincaré y el subespacio de Krylov que permita aplicar métodos iterativos de solución de sistemas de ecuaciones lineales y evitar el cálculo del Jacobiano del mapa de Poincaré necesario en los métodos convencionales para calcular soluciones periódicas.

1.7. Metodología

La implementación del método Poincaré-Krylov sin jacobiano para el cálculo de la estabilidad de la solución periódica de estado estable se realizará con base en dos herramientas matemáticas principales: el método del mapa de Poincaré para el cálculo de la solución periódica y GMRES basado en subespacios de Krylov para resolver de forma iterativa las correcciones tipo Newton y estimar los multiplicadores de Floquet que determinan la estabilidad del sistema de potencia. Ambas herramientas requieren a su vez de procesos internos importantes, entre los cuales destaca el algoritmo de Arnoldi que construye el subespacio de Krylov y la matriz Hessenberg de la que se obtienen los multiplicadores de Floquet. Estas matrices se forman utilizando el método de ortogonalización Gram-Schmidt modificado. Este método da forma a los vectores ortogonales base del subespacio de Krylov, a partir de los vectores columna de la matriz original. Dos procesos importantes más son las rotaciones de Givens para la descomposición de la matriz Hessenberg en una representación QR y el producto matriz-vector.

El algoritmo del producto matriz-vector se utiliza directamente en el GMRES para formar el subespacio de Krylov. Este algoritmo se implementa desde un enfoque discreto, el cual consiste en aproximar el sistema continuo en el tiempo por un sistema discreto no lineal y luego diferenciar el sistema discreto con respecto a las variables de estado.

El método Poincaré-Krylov sin jacobiano se aplicará para calcular la estabilidad de la solución de estado estable de tres sistemas eléctricos: un generador síncrono conectado a bus infinito y los sistemas de prueba del IEEE de 9 y 118 nodos, modificados para incluir un generador síncrono y un convertidor de fuente de voltaje (CFV). La incorporación

del generador síncrono a los sistemas del IEEE agrega un nivel considerable de no linealidad y transitorios prolongados en la operación del sistema, mientras que el convertidor de electrónica de potencia introduce contenido armónico a la red.

Los programas del método Poincaré-Krylov sin jacobiano se implementarán en Matlab. Las ecuaciones diferenciales ordinarias del sistema eléctrico se discretizarán con un método de integración multipaso. De esta forma se determinará el ciclo base, el cual proporciona las condiciones iniciales del proceso de aceleración que utiliza el mapa de Poincaré e iteraciones de un método Newton. Además, los arreglos matriciales generados en el ciclo base se almacenan para ser reutilizados al implementar los productos matriz-vector en la formación del subespacio de Krylov. Los resultados obtenidos con el método Poincaré-Krylov sin Jacobiano en términos de convergencia a la solución periódica, tiempos de cómputo, formas de onda en el tiempo, contenido armónico y multiplicadores de Floquet se comparan con el método de mapa de Poincaré estándar y se validan mediante la solución obtenida con el software comercial especializado PSCAD/EMTDC.

1.8. Descripción por capítulos

La descripción de los capítulos de esta tesis se presenta a continuación.

El capítulo 2 aborda el método del mapa de Poincaré para el cálculo de la solución periódica. Se describe el procedimiento convencional para identificar la matriz de transición.

En el capítulo 3 se analiza los métodos basados en subespacios de Krylov y se detalla el método GMRES para la solución iterativa de sistemas de ecuaciones.

El capítulo 4 se presenta el método Poincaré-Krylov sin Jacobiano (PKSJ-QR) aplicado al análisis de estabilidad de la solución periódica de estado estable. Se presenta la implementación del producto matriz-vector y su aplicación en GMRES para formar los vectores del subespacio de Krylov.

En el capítulo 5 se analizan los resultados obtenidos al aplicar el método PKSJ-QR a tres casos de estudio que incluyen una máquina síncrona y un convertidor de electrónica de potencia. Se comparan los resultados con un método de aceleración convencional y el cálculo por fuerza bruta. Además, se validan los resultados obtenidos para la solución periódica de

estado estable, transitoria y para el estudio de estabilidad por medio del software comercial PSCAD/EMTDC.

El capítulo 6 presenta las conclusiones del trabajo y enumera varias líneas de investigación a manera de trabajos futuros en las cuales se puede ampliar la funcionalidad del método Poincaré-Krylov sin Jacobiano.

Capítulo 2

Método del mapa de Poincaré

Generalmente los sistemas continuos en el tiempo se analizan mediante métodos que permiten manejar el sistema continuo como un sistema discreto. El método del mapa de Poincaré es un método de discretización introducido por Henry Poincaré en 1881 [Poincare99]. Este método reemplaza la trayectoria del sistema continuo de orden n por un sistema discreto de orden $n - 1$, utilizando superficies ubicadas adecuadamente en el espacio de estados. Estas superficies se denominan secciones de Poincaré. En este capítulo se describen los fundamentos del método del mapa de Poincaré para determinar la solución periódica de estado estable. Además, se describe el procedimiento para calcular la matriz de transición asociada al Jacobiano del mapa de Poincaré.

2.1. Soluciones periódicas

Un sistema de orden n continuo en el tiempo se define como

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.1)$$

en donde $\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/dt$ y $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$. La solución general del sistema (2.1) puede representarse como $\phi_t(\mathbf{x}, t)$.

El sistema (2.1) es periódico en el tiempo con periodo T si para todo \mathbf{x} y todo t existe un periodo $T > 0$ tal que $f(\mathbf{x}, t + T) = f(\mathbf{x}, t)$.

La solución $\phi_t(\mathbf{x}, t_0)$ es la solución periódica del sistema si, para todo t y $T > 0$

$$\phi_t(\mathbf{x}, t_0) = \phi_{t+T}(\mathbf{x}, t_0) \quad (2.2)$$

El estado estable de un sistema puede calcularse integrando (2.1) en el tiempo hasta que se alcanza el estado estable. A este método se le llama método de fuerza bruta [Parker89]. Una de las ventajas de utilizar éste método es su fácil programación, ya que únicamente requiere la rutina de integración del sistema de ecuaciones diferenciales. El método de fuerza bruta finaliza una vez que se alcanza cierta tolerancia al error entre la última solución periódica y la anterior, en este caso, se ha encontrado la solución de estado estable. Sin embargo, la convergencia por fuerza bruta es lenta para sistemas pobremente amortiguados, y para sistemas de ecuaciones de grandes dimensiones podría requerir un gran tiempo y esfuerzo de cómputo.

Existe un conjunto de métodos que aceleran la convergencia a la solución periódica de estado estable. Algunos de estos métodos determinan la solución de estado estable buscando los ceros de un sistema de ecuaciones no lineales, en donde uno de los más utilizados es el método Newton-Raphson ya que converge rápidamente.

2.1.1. Mapa de Poincaré

Si se considera que la trayectoria del sistema continuo en el tiempo (2.1) cruza un hiperplano Σ de dimensión $n - 1$, transversal a la trayectoria del sistema, cada T segundos, como se ilustra en la Figura 2.1, las variables de estado pueden ser muestreadas cada vez que la trayectoria cruza el hiperplano. Estos hiperplanos son llamados secciones de Poincaré. El resultado del muestreo da como resultado un sistema discreto en el tiempo llamado mapa de Poincaré, definido como

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}_0) = \phi_{t_0+T}(\mathbf{x}_0, t_0) \quad (2.3)$$

El mapa de Poincaré transforma las variables de estado en el tiempo t a variables de estado en el tiempo $t + T$. El sistema discreto resultante se describe en forma general en la ecuación (2.3). El punto \mathbf{x}^* sobre el mapa de Poincaré corresponde a la solución periódica

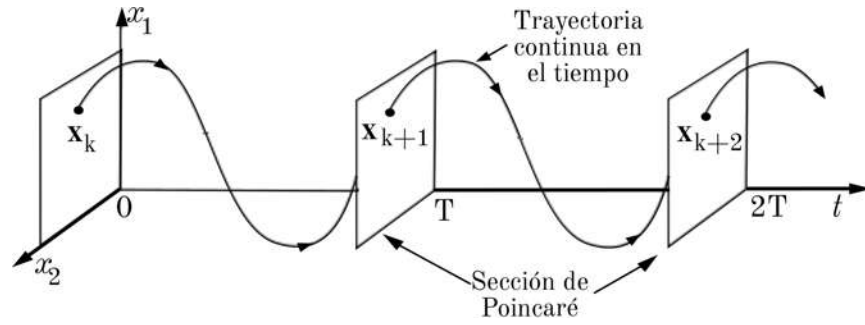


Figura 2.1: Discretización de un sistema no-autónomo periódico.

del sistema, por lo tanto, se puede determinar aplicando un método Newton a los puntos de intersección \mathbf{x}^* sobre el mapa de Poincaré.

Existen métodos que permiten obtener soluciones de estado estable de una forma más eficiente que el método de fuerza bruta, acelerando la convergencia del sistema. Los métodos que utilizan el método Newton y mapa de Poincaré son comúnmente utilizados en los procesos de aceleración, como se describe a continuación.

2.1.2. El método del mapa de Poincaré

La solución periódica de un sistema corresponde a un punto fijo del mapa de Poincaré. La solución periódica puede definirse como aquella solución que satisface

$$\mathbf{x}_0 - \mathbf{P}(\mathbf{x}_0) = 0 \quad (2.4)$$

en donde \mathbf{x}_0 son las variables de estado al inicio del ciclo en $t_0 = 0$ y $\mathbf{P}(\mathbf{x}_0)$ corresponde a las variables de estado en $t = T$. Los puntos donde la trayectoria del sistema continuo intersecta el hiperplano, corresponden a los ceros de (2.4).

La iteración Newton-Raphson para resolver (2.4) es $\mathbf{x}_\infty^* := \mathbf{x}_\infty$ como

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \Delta \mathbf{x}_j \quad (2.5)$$

en donde, $\Delta \mathbf{x}$ se obtiene de,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{D}\mathbf{P}(\mathbf{x}_j))\Delta \mathbf{x}_j = -(\mathbf{x}_j - \mathbf{P}(\mathbf{x}_j)) \quad (2.6)$$

en donde \mathbf{x}_{j+1} es la solución periódica de estado estable del sistema, \mathbf{x}_j corresponde a las variables de estado utilizadas como condiciones iniciales del ciclo de integración previo, es decir, del ciclo base, y $\mathbf{P}(\mathbf{x}_j)$ son las variables de estado al final del mismo. La matriz jacobiana del mapa de Poincaré se define como

$$\mathbf{DP}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} \quad (2.7)$$

en donde $\mathbf{x}_0 = [x_{0_1}, x_{0_2}, \dots, x_{0_n}]$. El jacobiano del mapa de Poincaré \mathbf{DP} se conoce también como matriz de transición de estados Φ , y su dimensión es n , es decir, la dimensión del sistema.

Sustituyendo (2.3) en (2.7) se obtiene

$$\mathbf{DP} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi(x_0, t_0)}{\partial x_{0_1}} & \frac{\partial \phi(x_0, t_0)}{\partial x_{0_2}} & \dots & \frac{\partial \phi(x_0, t_0)}{\partial x_{0_n}} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Es importante calcular esta matriz con suficiente exactitud y de forma eficiente, puesto que crece con el tamaño del sistema. Dos métodos usados con este fin son el método de diferenciación numérica y el método de aproximación directa [Semlyen95]. Ambos enfoques calculan la matriz de transición columna por columna, perturbando las variables de estado de manera secuencial, por lo que se requieren n ciclos de integración, uno por cada columna de Φ .

2.1.3. Método de diferenciación numérica

El método de diferenciación numérica (ND), calcula el i -ésimo vector-columna de \mathbf{DP} , perturbando secuencialmente las variables de estado obtenidas en el ciclo base. La perturbación se define como

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_0 + \xi \mathbf{e}_i \quad (2.9)$$

en donde \mathbf{x}_i son las variables de estado perturbadas, \mathbf{x}_0 son las variables de estado al inicio del ciclo base, \mathbf{e}_i corresponde al i -ésimo vector canónico y ξ es un valor alrededor de $1e^{-6}$ pu.

Este método requiere integrar (2.1) tomando como valor inicial las variables de estado perturbadas \mathbf{x}_i , para obtener la solución $\mathbf{x}'_i = \phi(\mathbf{x}_i)$. Esta integración es adicional

al proceso de integración de (2.1) con la condición inicial \mathbf{x}_0 en el ciclo base, en el que se obtuvo la solución $\mathbf{x}'_0 = \phi(\mathbf{x}_0)$. La i -ésima columna de la matriz \mathbf{DP} se define como,

$$\mathbf{DP}(:, i) = \frac{\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_0}{\xi} \quad (2.10)$$

En la Figura 2.2 se presenta el diagrama de flujo del método del mapa de Poincaré convencional utilizando diferenciación numérica para calcular la matriz de transición de estados.

El proceso se inicia definiendo las condiciones iniciales y el número de ecuaciones e integrado un ciclo base. Después se aplica la perturbación (2.9) y se vuelve a integrar el sistema de ecuaciones n veces para calcular cada una de las n columnas de \mathbf{DP} . Una vez construida esta matriz, se puede resolver (2.6) para encontrar las variables de estado en el ciclo límite, es decir, la solución periódica del sistema.

2.2. Sumario

El método del mapa de Poincaré acelera la convergencia al estado estable de forma efectiva. Este método requiere de n ciclos de integración para identificar el Jacobiano del mapa de Poincaré. Sin embargo, el esfuerzo de cómputo y el tiempo requerido para llegar a la solución de estado estable, crecen con el tamaño del sistema de ecuaciones.

Una alternativa para resolver (2.6) es tratar el problema como un sistema de ecuaciones de forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Los métodos basados en subespacios de Krylov son usados comúnmente para este fin, puesto que ofrecen la posibilidad de resolver (2.6) sin calcular \mathbf{DP} . En el siguiente capítulo se analiza el concepto de subespacios de Krylov y el proceso de solución del problema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

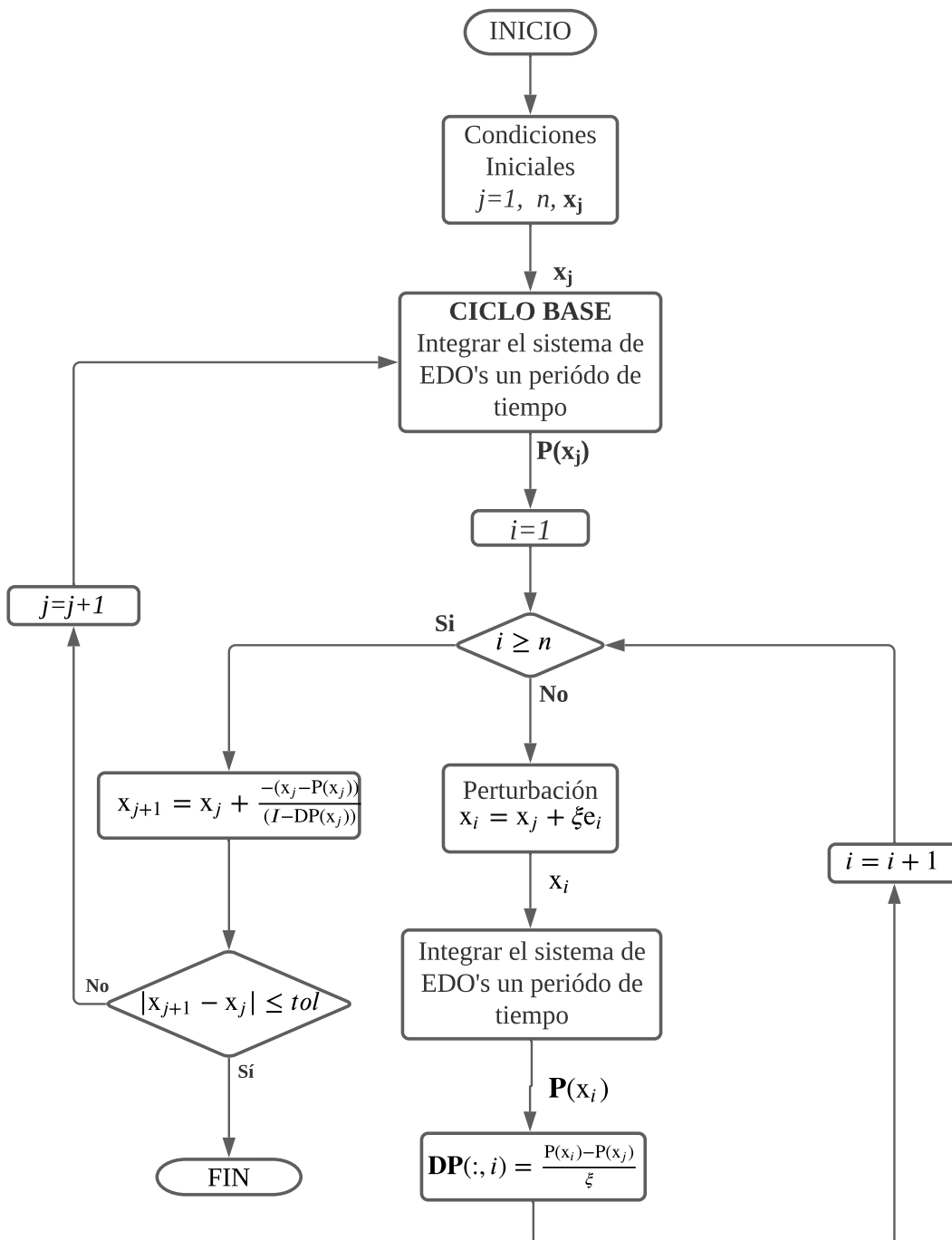


Figura 2.2: Diagrama de flujo del método del mapa de Poincaré estándar.

Capítulo 3

Subespacios de Krylov

La mayoría de los métodos iterativos usados para aproximar la solución de grandes sistemas de ecuaciones lineales utilizan métodos de proyecciones de una forma u otra. Los procesos de proyección obtienen una aproximación a la solución del sistema, extrayéndola de un subespacio. En la práctica, los métodos de proyección en subespacios de Krylov son los más utilizados [Saad03]. Estos métodos se basan en la idea de la proyección de un sistema de dimensión n en otro sistema de dimensión menor llamado subespacio de Krylov, como se describe en la sección siguiente.

3.1. Proyecciones sobre subespacios

Para un sistema de n ecuaciones lineales de forma

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{3.1}$$

en donde la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, no-singular, los métodos de proyección aproximan una solución $\tilde{\mathbf{x}}$ extrayéndola de un subespacio de \mathbb{R}^n . Si a ese subespacio se le llama \mathcal{K} , con dimensión k y sus vectores son linealmente independientes, entonces deben existir k restricciones para extraer la solución aproximada $\tilde{\mathbf{x}}$. Esas restricciones o condiciones se llaman condiciones de ortogonalidad, y especifican que el vector de residuos está condicionado a ser ortogonal a los k vectores [Saad03]. La condición de ortogonalidad es entonces

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \perp \mathcal{K}_k \quad (3.2)$$

y la solución aproximada de (3.1) es

$$\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}_0 + \mathcal{K}_k \quad (3.3)$$

donde \mathbf{x}_0 es la condición inicial y \mathcal{K}_k es el subespacio de dimensión k de \mathbb{R}^n . Si se conoce una condición inicial \mathbf{x}_0 entonces la aproximación $\tilde{\mathbf{x}}$ se escribe como $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0 + \delta$, en donde $\delta \in \mathcal{K}$, la condición (3.2) toma la forma

$$\mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \delta) \perp \mathcal{K}_k \quad (3.4)$$

Definiendo un residuo inicial

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \quad (3.5)$$

ahora la condición (3.4) es

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\delta \perp \mathcal{K}_k \quad (3.6)$$

La condición de ortogonalidad (3.6) se ilustra en la Figura 3.1, la cual representa también el primer paso del proceso de proyecciones. El vector $\mathbf{A}\delta$ corresponde a la proyección ortogonal del vector \mathbf{r}_0 en el subespacio \mathcal{K} . Los métodos de proyección realizan sucesiones de la proyección básica mostrada en la Figura 3.1.

Los métodos de subespacio de Krylov son aquellos métodos en los que el subespacio \mathcal{K}_k corresponde al subespacio definido como

$$\mathcal{K}_k(\mathbf{A}, \mathbf{r}_0) = \text{span}\{\mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{r}_0, \mathbf{A}^2\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{r}_0\} \quad \text{para } k \geq 1 \quad (3.7)$$

y es llamado subespacio de Krylov. El proceso de construcción de la base ortogonal de \mathcal{K}_k puede realizarse mediante el algoritmo de Arnoldi, el cual se expone en el siguiente sección.

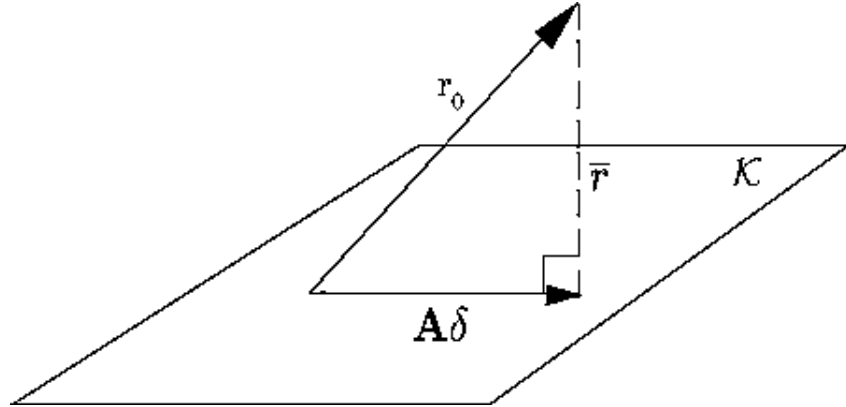


Figura 3.1: Interpretación de la condición de ortogonalidad.

3.2. Algoritmo de Arnoldi

El algoritmo de Arnoldi [Arnoldi51] introducido en 1951, construye una base ortogonal del subespacio de Krylov \mathcal{K}_k . Este proceso forma, una a una, columnas ortogonales, que permiten expresar la matriz \mathbf{A} respecto a las bases que forman estas columnas.

El proceso de Arnoldi propone factorizar la matriz A en dos matrices \mathbf{V} y \mathbf{H} , tales que

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_{k+1}\bar{\mathbf{H}}_k \quad (3.8)$$

en donde \mathbf{V} es una matriz de $n \times k$ con vectores columna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ y $\bar{\mathbf{H}}$ es una matriz triangular superior tipo Hessenberg de dimensión $(k+1) \times k$. La definición de una matriz Hessenberg corresponde a una matriz triangular superior que tiene elementos diferentes de cero en la subdiagonal debajo de la diagonal principal. En forma matricial

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1k} \\ h_{12} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & h_{kk} \\ h_{k+1,k} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

El proceso de Arnoldi se inicia eligiendo un vector \mathbf{v}_1 tal que $\|\mathbf{v}_1\|_2 = 1$. Por lo tanto se define

$$v_1 = \frac{r_0}{\|r_0\|_2} \quad (3.10)$$

Además, se define $\beta = \|\mathbf{r}_0\|_2$ y, por lo tanto, de (3.10) se tiene

$$v_1 = \frac{r_0}{\beta} \quad (3.11)$$

El algoritmo de Arnoldi utiliza el método de ortogonalización Gram-Schmidt (GS) para factorizar la matriz \mathbf{A} y construir la base ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ de

$$\mathcal{K}_k = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{A}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{v}_1\} \quad (3.12)$$

3.2.1. Ortogonalización Gram-Schmidt

Gram-Schmidt es un proceso de ortogonalización de matrices que utiliza una factorización matricial QR. Sin embargo, cuando se utiliza aritmética de punto flotante el algoritmo Gram-Schmidt clásico produce un conjunto de vectores que no son exactamente ortogonales, por lo que en la práctica se utiliza el método Gram-Schmidt modificado (GSM) [Saad03].

El método de Arnoldi basado en el algoritmo Gram-Schmidt modificado se implementa de la siguiente manera

$$v_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^k h_{ik} v_i = v_k - \sum_{i=1}^k ((Av_k)^T v_i) v_i \quad (3.13)$$

La implementación del algoritmo de Arnoldi queda entonces como

Algoritmo 1 Algoritmo de Arnoldi

-
1. Elegir un vector v_1 tal que $\|v_1\| = 1$
 2. For $k = 1, 2, 3, \dots$
 3. $w_k = Av_k$
 4. For $i = 1$ to k
 5. $h_{ik} = w_k^T v_i$
 6. $w_k = w_k - h_{ik}v_i$
 7. EndFor
 8. $h_{k+1,k} = \|w\|_2$ Si $h_{k+1,k} = 0$ Parar
 9. $v_{k+1} = w/h_{k+1,k}$
 10. EndFor
-

Al terminar el proceso descrito en el algoritmo 1, se tiene la matriz \mathbf{V}_k con columnas ortonormales $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ y la matriz Hessenberg $\bar{\mathbf{H}}_k$ de dimensión $k+1 \times k$, de la cual se obtiene una matriz \mathbf{H}_k de $k \times k$, al borrar su última fila. La matriz \mathbf{H}_k se forma con los coeficientes h calculados en el proceso.

En (3.8) la matriz \mathbf{H}_k se interpreta como la representación en las bases $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ de la proyección ortogonal de \mathbf{A} sobre \mathcal{K}_k .

3.3. Método del residuo mínimo generalizado (GMRES)

El método del residuo mínimo generalizado (GMRES) [Schultz86] fue propuesto en 1986 como un método iterativo para resolver sistemas lineales no simétricos. GMRES busca aproximar una solución $\tilde{\mathbf{x}}$ en la iteración k , mediante un vector $\mathbf{x}_k \in \mathcal{K}$ tal que minimice la norma del residuo [Trefethen97], es decir

$$\text{minimizar } \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}_0 + \mathcal{K}_k \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}\|_2 \quad (3.14)$$

El método GMRES plantea que cualquier solución $\tilde{\mathbf{x}}$ en $\mathbf{x}_0 + \mathcal{K}$, se puede escribir como

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_k \mathbf{y}_k \quad (3.15)$$

en donde \mathbf{y}_k es un vector de dimensión k . Se tiene un vector de residuos

$$\tilde{\mathbf{r}} = \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}\|_2 \quad (3.16)$$

por lo que sustituyendo (3.15) en (3.16) se tiene,

$$\|\tilde{\mathbf{r}}\|_2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_k\mathbf{y}_k)\|_2 \quad (3.17)$$

Simplificando, considerando (3.5)

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_k\mathbf{y}_k)\|_2 = \|\mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\mathbf{V}_k\mathbf{y}_k\|_2 \quad (3.18)$$

Sustituyendo (3.8) y (3.11) en (3.18)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\mathbf{V}_k\mathbf{y}_k\|_2 &= \|\beta\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_{k+1}\tilde{\mathbf{H}}_k\mathbf{y}_k\|_2 \\ &= \|\mathbf{V}_{k+1}(\beta\mathbf{e}_1 - \tilde{\mathbf{H}}_k\mathbf{y}_k)\|_2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$(3.20)$$

Además, las columnas de \mathbf{V}_{k+1} son ortonormales, por lo tanto (3.19) se simplifica

a

$$\|\mathbf{r}\|_2 = \|\beta\mathbf{e}_1 - \tilde{\mathbf{H}}_k\mathbf{y}_k\|_2 \quad (3.21)$$

Por lo que la aproximación buscada por GMRES es

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_k\mathbf{y}_k \quad (3.22)$$

en donde

$$\mathbf{y}_k = \operatorname{argmin}_y \|\beta\mathbf{e}_1 - \tilde{\mathbf{H}}_k\mathbf{y}\|_2 \quad (3.23)$$

El algoritmo 2 muestra la implementación del algoritmo básico del GMRES.

Algoritmo 2 GMRES

-
1. Calcular $r_0 = b - Ax_0$, $\beta := \|r_0\|_2$ and $v_1 := r_0/\beta$
 2. For $j = 1 \dots k$
 3. $w_j := Av_j$
 4. For $i = 1$ to j
 5. $h_{ij} = w_j^T v_i$
 6. $w_j = w_j - h_{ij}v_i$
 7. EndFor
 8. $h_{j+1,j} = \|w_j\|_2$, si $h_{j+1,j} = 0$ salir del *for*
 9. $v_{j+1} = w_j/h_{j+1,j}$
 10. EndFor
 11. Calcular y_k que minimice $\|\beta e_1 - \bar{H}_k y\|_2$
 12. Calcular $x_k = x_0 + V_k y_k$
-

Para resolver el problema de mínimos cuadrados

$$\min_y \|\beta \mathbf{e}_1 - \bar{\mathbf{H}}_k \mathbf{y}\|_2 \quad (3.24)$$

es preferible transformar la matriz $\bar{\mathbf{H}}$ en una matriz triangular superior mediante factorización QR [Saad03]. Dos métodos importantes de factorización QR son las reflexiones de Householder y las rotaciones de Givens, ambos son procesos que triangularizan una matriz mediante transformaciones ortogonales o unitarias. En algunas ocasiones se prefiere utilizar la reducción de Householder debido a que realiza un menor de operaciones. Sin embargo, cuando las matrices contienen patrones de ceros el proceso de Householder elimina la mayoría de los ceros, por lo que resulta más adecuado utilizar rotaciones de Givens, ya que mantiene los ceros intactos. En la siguiente sección se describe este proceso.

3.4. Rotaciones Givens

El proceso de rotaciones de Givens se utiliza para factorizar la matriz $\bar{\mathbf{H}}$ que está en $\mathbb{R}^{(k+1) \times k}$, en una matriz ortogonal $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{(k+1) \times (k+1)}$ y una matriz \mathbf{R} triangular superior en $\mathbb{R}^{(k+1) \times (k)}$ tal que

$$\mathbf{Q}_k \bar{\mathbf{H}}_k = \mathbf{R}_k \quad (3.25)$$

Para resolver (3.24) mediante el método GMRES, la matriz \mathbf{H} debe transformarse en una matriz triangular premultiplicando \mathbf{H} por matrices llamadas rotaciones Givens, de la siguiente forma

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{G}_k(c_k, s_k) \dots \mathbf{G}_1(c_1, s_1) \quad (3.26)$$

El proceso de esta operación puede ilustrarse mediante el siguiente ejemplo para una matriz Hessenberg de 5×5 :

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{G_1} \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{G_2} \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{G_3} \\
 \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{G_4} \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Las matrices de rotación Givens, son matrices $\mathbf{G}_i(\mathbf{c}, \mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$ que contienen un bloque de 2×2 que tiene la forma

$$\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

donde $s = \text{sen}(\theta)$ y $c = \text{cos}(\theta)$ para algún ángulo $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Una rotación Givens de $n \times n$ coloca el bloque (3.27) en el renglón i y la columna $i + 1$ de la matriz identidad de $n \times n$, entonces

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & \cdots & \cdots & & 0 \\
 0 & \ddots & \ddots & & & \\
 & \ddots & c_i & -s_i & & \vdots \\
 \vdots & & s_i & c_i & 0 & \vdots \\
 \vdots & & & 0 & 1 & \ddots \\
 & & & & \ddots & \ddots & 0 \\
 0 & \cdots & \cdots & & 0 & 1
 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Los coeficientes c_i y s_i para la i -ésima rotación Givens se definen como

$$s_i = \frac{h_{i+1,i}}{\sqrt{(h_{ii}^{(i-1)})^2 + h_{i+1,i}^2}}, \quad c_i = \frac{h_{ii}^{(i-1)}}{\sqrt{(h_{ii}^{(i-1)})^2 + h_{i+1,i}^2}} \quad (3.29)$$

El problema de mínimos cuadrados (3.24), se resuelve aplicando la factorización QR como sigue,

$$\|\beta \mathbf{e}_1 - \mathbf{H}_k \mathbf{y}_k\|_2 = \|\mathbf{Q}_k (\beta \mathbf{e}_1 - \mathbf{H}_k \mathbf{y}_k)\|_2 = \|\mathbf{g} - \mathbf{R}_k \mathbf{y}_k\|_2 \quad (3.30)$$

se observa que $\mathbf{g} = \mathbf{Q}_k \beta \mathbf{e}_1$.

Para encontrar \mathbf{y}_k es necesario resolver el sistema de ecuaciones dado en (3.30)

$$\mathbf{g} = \mathbf{R}_k \mathbf{y}_k \quad (3.31)$$

y encontrar la solución \mathbf{x}_k con (3.22).

En la Figura 3.2 se presenta el diagrama de flujo del algoritmo básico de GMRES incluyendo las rotaciones Givens. Se puede apreciar que una vez calculados los vectores \mathbf{v}_{k+1} y \mathbf{h}_{k+1} se aplica la k -ésima rotación Givens para factorizar $\overline{\mathbf{H}}_k$ según se van calculando sus columnas. Una vez alcanzada la tolerancia al error (tol) la iteración k termina y se resuelve el problema de minimización (3.30) y se calcula la solución aproximada (3.22).

Es necesario resaltar que la convergencia de GMRES se da en $k < n$. En cada iteración GMRES

$$\|r_{k+1}\|_2 \leq \|r_k\|_2 \quad (3.32)$$

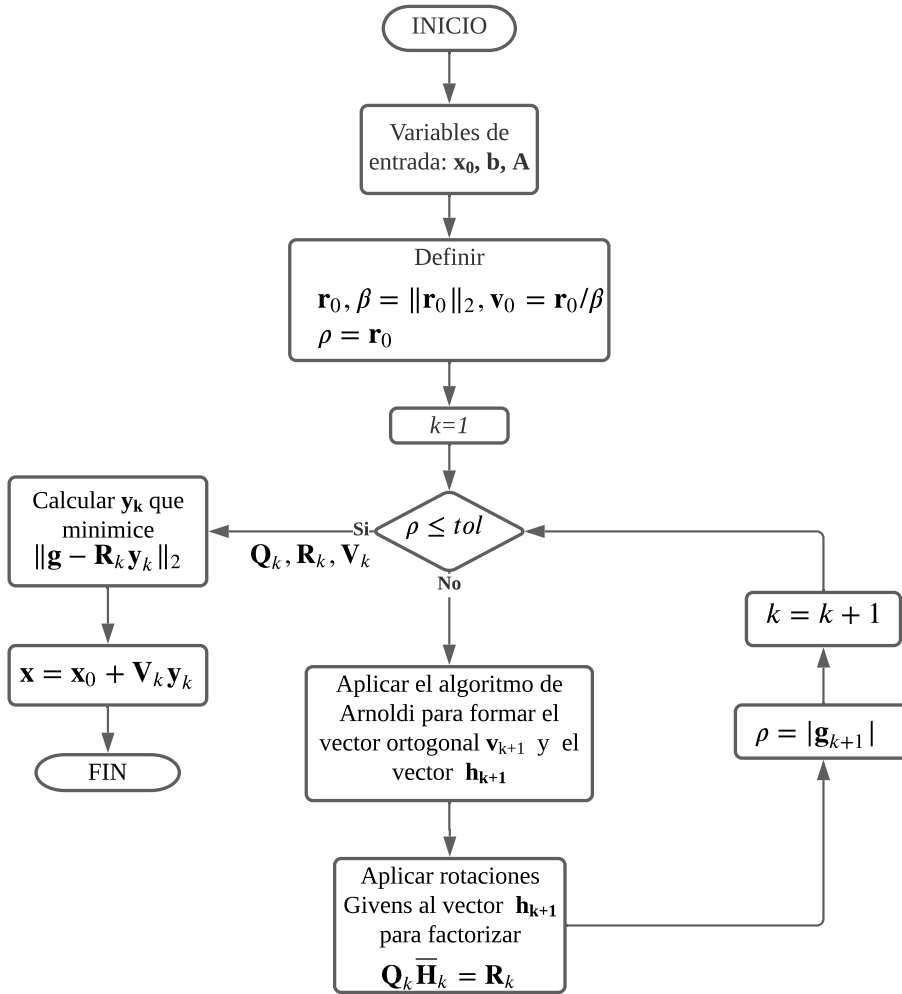


Figura 3.2: Diagrama del algoritmo básico del GMRES usando rotaciones Givens.

Esto es debido a que al formar el subespacio \mathcal{K}_k , $\|r_k\|_2$ debe ser lo más pequeño posible, así, cuando se aumenta el tamaño de \mathcal{K}_k a \mathcal{K}_{k+1} la norma del residuo solo puede decrecer o mantenerse igual. Generalmente, si se llega al paso n se tendrá $\|r_n\|_2 = 0$, esto debido a que \mathcal{K}_n está en el mismo subespacio que el vector b , de hecho, en algunos casos el vector b se forma directamente en \mathcal{K}_k , para algún $k \ll n$, y la convergencia ocurre más rápido [Trefethen97].

Como se ha visto en esta sección, el algoritmo 2 calcula $\mathbf{w}_j = \mathbf{A}\mathbf{v}_j$ y el residuo $\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}$, es decir, en realidad no necesita explícitamente la matriz \mathbf{A} , sino únicamente el producto matriz-vector $\mathbf{A}\mathbf{v}_j$ para cada operación. Por esta razón GMRES es uno de los

llamados métodos "matrix-free", y es efectivo al resolver el sistema de ecuaciones (2.6) ahorrando esfuerzo de cómputo.

3.5. Propiedades del algoritmo de Arnoldi

Como se ha visto en las secciones anteriores, el algoritmo de Arnoldi produce las matrices \mathbf{V} y \mathbf{H} que se relacionan con la matriz \mathbf{A} de acuerdo a (3.8). La matriz \mathbf{V} corresponde al subespacio de Krylov generado, mientras que la matriz \mathbf{H} es la representación en las bases $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ de la proyección ortogonal de \mathbf{A} sobre \mathcal{K}_k . Por lo tanto, siendo \mathbf{H} una proyección de \mathbf{A} , sus valores propios deben ser una aproximación a los valores propios de \mathbf{A} .

Sin embargo, \mathbf{A} es de dimensión n y tiene n valores propios $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, mientras que \mathbf{H} es de dimensión k , con k valores propios $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}$, y como $k < n$ e incluso $k \ll n$, entonces los k valores propios de \mathbf{H} son una aproximación a los valores propios más relevantes del espectro de \mathbf{A} . Estos k números son llamados estimaciones de Arnoldi o valores de Ritz de \mathbf{A} [Trefethen97].

El algoritmo de Arnoldi posee además las siguientes propiedades importantes:

1. **Propiedad de invariancia traslacional:** Si \mathbf{A} se cambia a $\mathbf{A} + \sigma\mathbf{I}$ para algún $\sigma \in \mathbb{C}$, los valores de Ritz $\{\theta_j\}$ cambian a $\{\theta_j + \sigma\}$.
2. **Propiedad de invariancia escalar:** Si \mathbf{A} se cambia a $\sigma\mathbf{A}$ para algún $\sigma \in \mathbb{C}$, los valores de Ritz $\{\theta_j\}$ cambian a $\{\sigma\theta_j\}$.

El método Poincaré-Krylov sin jacobiano propuesto en este trabajo se basa en estas propiedades para calcular la estabilidad de la solución periódica a partir de los valores de Ritz. Este método utiliza una combinación del mapa de Poincaré y el método GMRES. Además aplica una alternativa para calcular el producto matriz-vector en GMRES, como se describe en el siguiente capítulo.

3.6. Sumario

GMRES es un método basado en subespacios de Krylov que se utiliza para aproximar la solución de un sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Este método utiliza el algoritmo de Arnoldi para crear la base ortogonal del subespacio de Krylov. En este proceso se forma también la matriz \mathbf{H} , la cual corresponde a la proyección de \mathbf{A} sobre el subespacio de Krylov. Por lo tanto, los valores propios de \mathbf{H} corresponden a los valores propios más significativos de \mathbf{A} , y pueden ser usados para estudios de estabilidad.

Capítulo 4

Método Poincaré-Krylov sin Jacobiano

El método Poincaré-Krylov sin Jacobiano (PKSJ-QR) se propone en este trabajo como un método eficiente para calcular la estabilidad de la solución periódica de estado estable de los sistemas eléctricos de potencia. El método PKSJ-QR consta de dos lazos de iteración anidados. El lazo exterior contiene la corrección Newton, mientras el lazo interior construye el subespacio de Krylov. La característica principal del PKSJ-QR es la capacidad de calcular la solución periódica sin formar la matriz de transición del sistema y, por lo tanto, la habilidad de reducir el costo computacional que conlleva para los sistemas de potencia de gran escala. Este método aprovecha las propiedades naturales del algoritmo de Arnoldi para calcular los multiplicadores de Floquet. En este capítulo se describe el método PKSJ-QR.

4.1. Fundamentos

En el segundo lazo de iteración del método PKSJ-QR, el procedimiento GMRES se aplica para resolver el sistema lineal de ecuaciones de la corrección Newton,

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \Delta \mathbf{x}_j \quad (4.1)$$

A partir de (2.6) se define el residuo inicial de la siguiente manera

$$\mathbf{r} = -(\mathbf{x}_j - \mathbf{P}(\mathbf{x}_j)) - (\mathbf{I} - \mathbf{DP}(\mathbf{x}_j)) \Delta \mathbf{x}_j \quad (4.2)$$

La expresión que se debe minimizar en la k -ésima iteración GMRES es

$$\| -(\mathbf{x}_j - \mathbf{P}(\mathbf{x}_j)) - (\mathbf{I} - \mathbf{DP}(\mathbf{x}_j)) \Delta \mathbf{x}_j \|_2 \quad (4.3)$$

El vector $\Delta \mathbf{x}_j$ estará dado por el subespacio generado a partir del subespacio de Krylov

$$\left\{ \mathbf{r}_0, (\mathbf{I} - \mathbf{DP}(\mathbf{x}_j)) \mathbf{r}_0, (\mathbf{I} - \mathbf{DP}(\mathbf{x}_j))^2 \mathbf{r}_0, \dots, (\mathbf{I} - \mathbf{DP}(\mathbf{x}_j))^{k-1} \mathbf{r}_0 \right\} \quad (4.4)$$

donde el residuo inicial \mathbf{r}_0 se define de (3.5) de la siguiente manera

$$\mathbf{r}_0 = -(\mathbf{x}_j - \mathbf{P}(\mathbf{x}_j)) - (\mathbf{I} - \mathbf{DP}(\mathbf{x}_j)) \mathbf{x}_j \quad (4.5)$$

o bien

$$\mathbf{r}_0 = -(\mathbf{x}_j - \mathbf{P}(\mathbf{x}_j)) - (\mathbf{x}_j - \mathbf{DP}(\mathbf{x}_j) \mathbf{x}_j) \quad (4.6)$$

4.2. Producto Matriz-Vector

Analizando la expresión (4.4), puede observarse que el método GMRES requiere de la aplicación del jacobiano $(\mathbf{I} - \mathbf{DP}(\mathbf{x}_j))$, únicamente como el producto matriz-vector

$$(\mathbf{I} - \mathbf{DP}(\mathbf{x}_j)) \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0 - \mathbf{DP}(\mathbf{x}_j) \mathbf{r}_0 \quad (4.7)$$

Cada producto (4.4) se calcula como una combinación de la matriz identidad y el jacobiano del mapa de Poincaré con \mathbf{r}_0 .

El producto matriz-vector $\mathbf{DP}(\mathbf{x}) \mathbf{r}_0$ en 4.7 se implementa en esta tesis usando una aproximación discreta, la cual consiste en aproximar el sistema continuo en el tiempo (2.1) con un sistema discreto no lineal y después diferenciar el sistema discreto con respecto a los parámetros.

4.2.1. Proceso de discretización

En general, un método de integración numérica implícito multi-paso se define como [Chua75]

$$\mathbf{x}_{m+1} = \sum_{i=0}^p [a_i \mathbf{x}_{m-i} + hb_i f(\mathbf{x}_{m-i}, t_{m-i})] + hb_{-1} f(\mathbf{x}_{m+1}, t_{m+1}) \quad (4.8)$$

en donde M es el número de pasos de integración, $m = 1, 2, \dots, M$, $h = \frac{T}{M}$ es el tamaño del paso, T es el periodo de integración, p indica el orden del algoritmo y a_i, b_i, b_{-1} son los coeficientes del método iterativo elegido.

El sistema continuo (2.1) puede ser reemplazado por un sistema discreto en el tiempo aplicando cualquier método de integración numérica. Por lo tanto, la versión discreta de (2.1) tiene la forma general

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{x}_{m+1} - \sum_{i=0}^p a_i \mathbf{x}_{m-i}}{hb_{-1}} - \sum_{i=0}^p \frac{b_i}{b_{-1}} f(\mathbf{x}_{m-i}, t_{m-i}) - f(\mathbf{x}_{m+1}, t_{m+1}) = 0 \quad (4.9)$$

Este es un sistema de ecuaciones no lineales que son resueltas de forma iterativa en cada paso de integración utilizando un método Newton. Las ecuaciones linealizadas toman la forma

$$\mathbf{J}_g(\mathbf{x}_{m+1} + \mathbf{x}_m) = -\mathbf{g} \quad (4.10)$$

en donde \mathbf{J}_g es la matriz jacobiana del sistema, de dimensión $n \times n$ y se evalúa en cada paso de integración en el punto $(\mathbf{x}_{m+1}, t_{m+1})$. Esta matriz esta dada por

$$\mathbf{J}_g = \left[\frac{1}{hb_{-1}} \mathbf{I} - \frac{\partial f(\mathbf{x}_{m+1}, t_{m+1})}{\partial \mathbf{x}_{m+1}} \right] \quad (4.11)$$

en donde $\partial f / \partial x$ es una matriz dispersa que contiene las derivadas parciales del sistema (2.1).

4.2.2. Proceso de diferenciación

Diferenciando (4.9) con respecto a \mathbf{x}_0 se tiene

$$\left[\frac{1}{hb_{-1}} \mathbf{I} - \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_{m+1}, t_{m+1})}{\partial \mathbf{x}_{m+1}} \right] \frac{\partial \mathbf{x}_{m+1}}{\partial \mathbf{x}_0} = \sum_{i=0}^p \left[\frac{a_i}{hb_{-1}} \mathbf{I} + \frac{b_i}{b_{-1}} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_{m-i}, t_{m-i})}{\partial \mathbf{x}_{m-i}} \right] \frac{\partial \mathbf{x}_{m-i}}{\partial \mathbf{x}_0} \quad (4.12)$$

Nótese que $\partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{x}$ se requiere tanto en (4.10) como en (4.12). Por lo tanto, el producto matriz-vector se puede determinar mas eficientemente factorizando $\partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{x}$ una vez y usándola en ambos cálculos.

En este trabajo se utiliza el método de integración Euler hacia atrás, haciendo los coeficientes $a_0 = 1$ y $b_{-1} = 1$ en (4.8). Entonces (4.12) se simplifica como

$$\left[\frac{1}{h} \mathbf{I} - \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_{m+1}, t_{m+1})}{\partial \mathbf{x}_{m+1}} \right] \frac{\partial \mathbf{x}_{m+1}}{\partial \mathbf{x}_0} = \left[\frac{1}{h} \mathbf{I} \right] \frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial \mathbf{x}_0} \quad (4.13)$$

En términos del jacobiano J_g , (4.13) se describe como

$$[J_g] \frac{\partial \mathbf{x}_{m+1}}{\partial \mathbf{x}_0} = \left[\frac{1}{h} \mathbf{I} \right] \frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial \mathbf{x}_0} \quad (4.14)$$

En cada iteración de Krylov, $\partial \mathbf{x}_m/\partial \mathbf{x}_0$ es usado como condición inicial para calcular $\partial \mathbf{x}_{m+1}/\partial \mathbf{x}_0$, resolviendo el sistema de ecuaciones en un periodo de tiempo. Cuando se tiene el paso $m = M$ entonces se está determinando el producto matriz-vector $\mathbf{DP}(\mathbf{x})\mathbf{r}_0$, es decir,

$$\mathbf{DP}(\mathbf{x}_j)\mathbf{r}_0 = \frac{\partial \mathbf{x}_M}{\partial \mathbf{x}_0} \quad (4.15)$$

Con el propósito de determinar los productos matriz-vector $\mathbf{DP}(\mathbf{x})\mathbf{r}_0$ en (4.7), el sistema de ecuaciones (4.13) se resuelve con las siguientes condiciones iniciales

$$\frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial \mathbf{x}_0} = \left\{ \mathbf{r}_0, (\mathbf{I} - \mathbf{DP}(\mathbf{x}_j))\mathbf{r}_0, (\mathbf{I} - \mathbf{DP}(\mathbf{x}_j))^2\mathbf{r}_0, \dots, (\mathbf{I} - \mathbf{DP}(\mathbf{x}_j))^{k-1}\mathbf{r}_0 \right\} \quad (4.16)$$

4.3. Algoritmo Poincaré-Krylov sin jacobiano

La estructura general del método Poincaré-Krylov sin Jacobiano se describe en el algoritmo 3. Además la Figura 4.1 presenta el diagrama de flujo del mismo.

El primer paso consiste en definir la condición inicial de las variables de estado del sistema, el número de pasos de integración M deseados y el periodo T . En la iteración Newton se resuelve el sistema de ecuaciones con algún método de integración numérica. En este trabajo se usa Euler hacia atrás, con $\mathbf{x}(t_m) = \mathbf{x}_m$ y $t_m = m * h$ y se almacena el jacobiano \mathbf{J}_g utilizado.

Algoritmo 3 Algoritmo del método PKSJ-QR

1. Inicializar \mathbf{x}_0, M, T
 2. For $j = 1, 2, \dots$ hasta converger **-Iteración Newton-**
 3. Resolver (2.1) con $\mathbf{x}(t_m) = \mathbf{x}_m$ y $t_m = m * h$ usando el algoritmo (4.10) y guardar \mathbf{J}_g
 4. Establecer $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}(t_0), \mathbf{P}(\mathbf{x}_j) = \mathbf{x}(t_M)$
 5. Calcular $\mathbf{r}_0 = -(\mathbf{x}_j - \mathbf{P}(\mathbf{x}_j)) - (\mathbf{I} - \mathbf{DP}(\mathbf{x}_j)) \Delta \mathbf{x}_j, \beta = \|\mathbf{r}_0\|_2, \mathbf{v}_0 = \mathbf{r}_0/\beta$
 6. For $k = 1, 2, \dots$ hasta converger **-Iteración GMRES-**
 7. Calcular el producto matriz-vector $\mathbf{DP}(\mathbf{x}_j) \mathbf{r}_0 = \frac{\partial \mathbf{x}_M}{\partial \mathbf{x}_0}$, es decir, el vector \mathbf{v}_k del subespacio de Krylov, usando (4.13)
 8. Utilizar Gram-Schmidt Modificado para ortogonalizar \mathbf{v}_k y generar la base ortogonal \mathbf{V}_k y la matriz \mathbf{H}_k
 9. Calcular la factorización QR de \mathbf{H}_k usando rotaciones Givens
 10. EndFor
 11. Calcular \mathbf{y}_k que minimiza $\|\mathbf{g} - \mathbf{R}_k \mathbf{y}_k\|_2$
 12. Calcular $\Delta \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j + \mathbf{V}_k \mathbf{y}_k$
 13. Calcular $\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \Delta \mathbf{x}_j$
 14. EndFor
-

Para iniciar la iteración GMRES el siguiente paso consiste en establecer $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}(t_0)$ y el mapa de Poincaré $P(\mathbf{x}_j) = \mathbf{x}(t_M)$, y calcular el residuo inicial \mathbf{r}_0, β y la columna base inicial \mathbf{v}_1 . Una vez iniciada la iteración GMRES se aplica el algoritmo de Arnoldi y las rotaciones Givens para generar la base ortogonal V_k y la matriz Hessenberg H_k . A esta matriz \mathbf{H}_k se le aplica factorización QR para calcular \mathbf{y}_k que minimiza la expresión (4.3) una vez que GMRES converge.

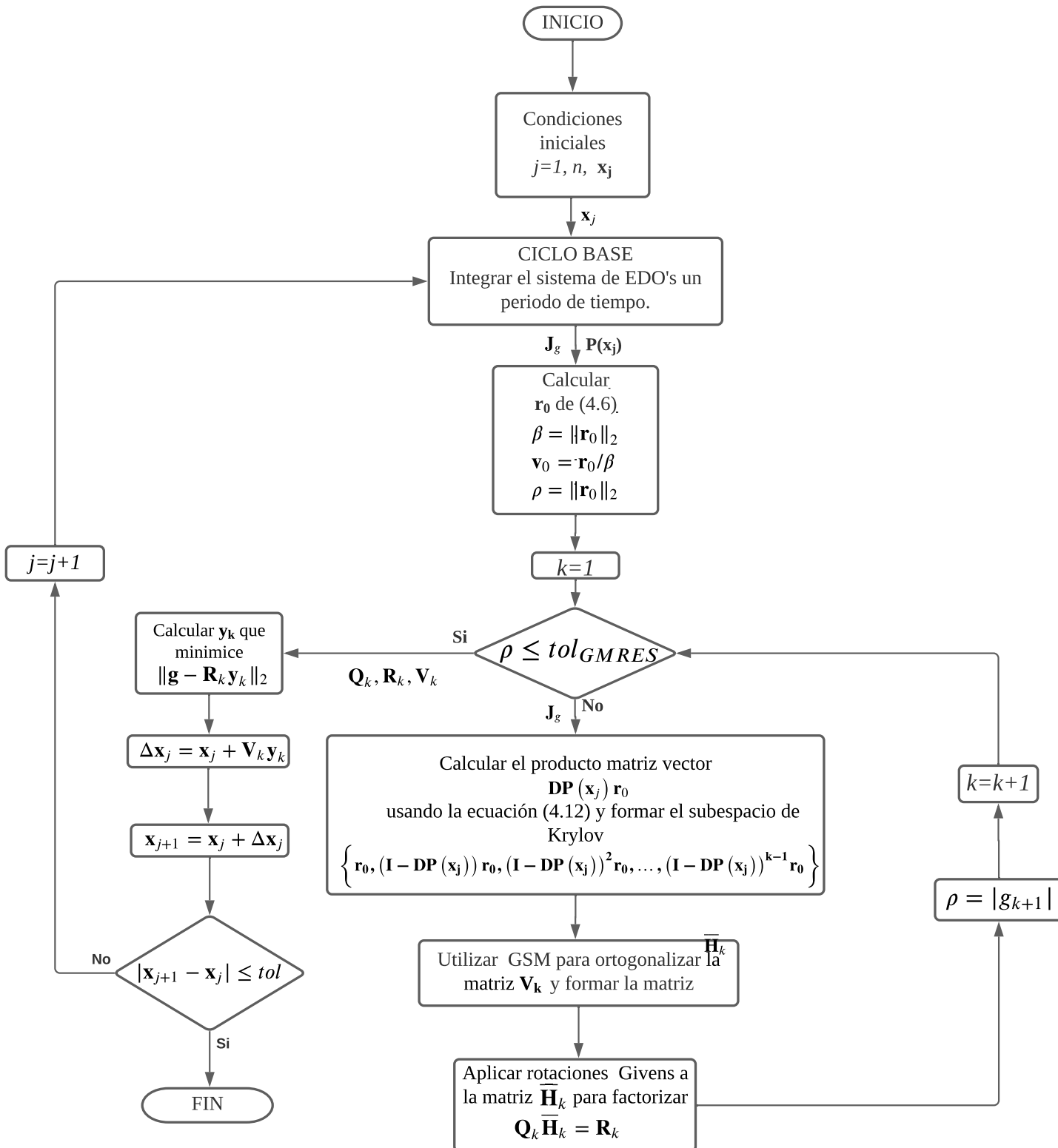


Figura 4.1: Diagrama de flujo del método PKSJ-QR.

La iteración j finaliza resolviendo la corrección de Newton para encontrar (4.1). El proceso termina cuando se ha encontrado la solución de estado estable y entonces se puede calcular la estabilidad de la solución periódica.

4.4. Estabilidad de la solución periódica

La estabilidad de la solución periódica (4.1) puede calcularse usando los valores propios $\{m_i\}$ del jacobiano del mapa de Poincaré, llamados multiplicadores de Floquet, puesto que se trata de la órbita periódica de un sistema discreto.

Si $|m_i| < 1$ para todo m_i , entonces todos los valores propios de **DP** se ubican dentro de un círculo unitario del plano complejo y se dice que la órbita es asintóticamente estable. Si $|m_i| > 1$ para todo m_i , entonces la solución es inestable. Si existe algún j y algún i tales que $|m_j| < 1$ y $|m_i| > 1$ entonces la solución es no-estable [Parker89]. Este enfoque requiere obtener los multiplicadores de Floquet directamente de la matriz de transición. En este trabajo se propone una alternativa para obtener los multiplicadores de Floquet directamente de la matriz Hessenberg construida dentro de GMRES.

4.4.1. Estimación de multiplicadores de Floquet

En el capítulo 3 se analizaron algunas propiedades del algoritmo de Arnoldi. Una de ellas es que la matriz Hessenberg \mathbf{H}_k formada en el proceso tiene k valores propios, llamados valores de Ritz, que son una aproximación muy exacta de los valores propios mas relevantes del sistema. Usando este enfoque, los multiplicadores de Floquet de la matriz de transición pueden reemplazarse por los valores de Ritz.

La determinación de la estabilidad propuesta en este trabajo se realiza en tres pasos principales:

1. Calcular la solución periódica usando el método PKSJ-QR.
2. Calcular los valores de característicos de la matriz \mathbf{H}_k

$$\{\theta_j\} = \{\text{Valores característicos de la matriz } \mathbf{H}\}$$

3. Se tiene que

$$\mathbf{DP} = \mathbf{I} - \mathbf{A} = \sigma_T \mathbf{I} + \sigma_S \mathbf{A} \quad (4.17)$$

en donde se observa que $\sigma_T = 1$ y $\sigma_S = -1$.

De acuerdo a las propiedades de invariancia de la iteración de Arnoldi, los multiplicadores de Floquet de la matriz \mathbf{DP} se pueden estimar con los valores de Ritz $\{\theta_j\}$ de la matriz $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{DP}$ de la siguiente manera

$$\{m_j\} = \{\sigma_T + \sigma_S \theta_j\} \quad (4.18)$$

en donde $\{m_j\}$ son los multiplicadores de Floquet de la matriz \mathbf{DP} y $j = 1, 2, \dots, k$.

En virtud que $k \ll n$, es evidente que el procedimiento propuesto no permite calcular todos los multiplicadores de Floquet de la matriz \mathbf{DP} . Este procedimiento encuentra los multiplicadores de Floquet extremos, los cuales se localizan cerca de la orilla del círculo unitario. Afortunadamente, estos son precisamente los multiplicadores de Floquet de mayor interés debido a que el estudio de estabilidad y bifurcaciones depende de cuando y donde los multiplicadores de Floquet cruzan el círculo unitario.

4.5. Sumario

El método PKSJ-QR se basa en la creación de un subespacio de Krylov de dimensión k con GMRES para resolver los sistemas de ecuaciones que surgen de aplicar el método del mapa de Poincaré. El cálculo de la solución periódica de estado estable requiere únicamente un conjunto de vectores ortogonales que se obtienen mediante el producto matriz-vector. La estabilidad de la solución periódica puede analizarse a partir de los multiplicadores de Floquet, estimando los multiplicadores extremos mediante los valores de Ritz de la matriz Hessenberg.

En el siguiente capítulo se aplica el método PKSJ-QR para calcular la solución periódica de estado estable de algunos sistemas eléctricos que tienen un comportamiento no lineal. Una vez que el método converge a la solución periódica se encuentran los valores de

Ritz de \mathbf{H}_k . Los resultados se comparan con métodos convencionales de aceleración de la convergencia.

Capítulo 5

Casos de estudio

El método Poincaré-Krylov sin jacobiano (PKSJ-QR) descrito en el capítulo anterior se aplica en este trabajo a tres casos de sistemas eléctricos que incluyen componentes no lineales como un generador síncrono y un convertidor de electrónica de potencia. La máquina síncrona es uno de los elementos eléctricos más estudiados debido a su importancia práctica en los sistemas eléctricos de potencia. El análisis de su comportamiento dinámico desde el arranque hasta que alcanza el estado estable, así como cuando ocurren perturbaciones, requiere un esfuerzo de cómputo importante debido a las constantes de tiempo implícitas en su funcionamiento y al alto nivel de no-linealidad de sus modelos. Este comportamiento de la máquina con transitorios prolongados, resulta ideal para probar el método propuesto en esta tesis, sobre todo cuando se analiza dentro de modelos de sistemas eléctricos de potencia con una cantidad de nodos considerable.

Los casos de prueba propuestos en esta tesis son:

1. Un generador síncrono conectado a un bus infinito.
2. La versión trifásica del sistema de prueba de 9 nodos del IEEE.
3. La versión trifásica del sistema de prueba de 118 nodos del IEEE.

Los dos últimos casos son modificados de su versión original al cambiar una de las fuentes por un generador síncrono en uno de los nodos y un convertidor de fuente de voltaje trifásico (CFV) en otro nodo.

Para cada caso de estudio se realiza el cálculo de la solución periódica de estado estable usando el método de mapa de Poincaré estándar (MMP) y el método Poincaré-Krylov sin Jacobiano (PKSJ-QR). La estimación de los multiplicadores de Floquet se realiza a partir de los valores de Ritz de la matriz Hessenberg y se comparan con los multiplicadores de Floquet obtenidos mediante la matriz jacobiana del mapa de Poincaré DP del método convencional.

En todos los casos se toma el ciclo base (CB) después de integrar 300 ciclos cada sistema de ecuaciones, utilizando el método de integración implícito tipo Euler hacia atrás. Se utilizaron 4096 pasos de integración para todos los escenarios, es decir, a frecuencia fundamental $f = 60Hz$, con un periodo $T = 1/60$, el tamaño del paso es de $4.0690\mu s$. La tolerancia al error establecida en la iteración Newton (IN) es $(\mathbf{x}(T) - \mathbf{x}(0)) \leq 10^{-10}$. En cada iteración Newton se resuelve la iteración GMRES, con una tolerancia al error de $r_0 < 10^{-9} \|\mathbf{x}_j - P(\mathbf{x}_j)\|$. Los resultados se presentan en tablas que contienen los máximos errores obtenidos en cada caso para los métodos aplicados y el tiempo que le toma a cada uno converger a la solución.

El costo computacional para el cálculo de la solución periódica de estado estable del método PKSJ-QR se analiza mediante tablas que resumen el rendimiento del método PKSJ-QR en términos del número de iteraciones de Newton (N_N), iteraciones de GMRES (N_G) y factores de aceleración para cada uno de los escenarios. El factor de aceleración se define como $S = \frac{T_{ref}}{T_{PKSJ-QR}}$, en donde T_{ref} es el tiempo de reloj de un algoritmo de referencia y $T_{PKSJ-QR}$ es el tiempo transcurrido exigido por el método PKSJ-QR.

5.1. Máquina síncrona conectada a bus infinito

El primer caso de prueba corresponde a una máquina síncrona de turbina hidráulica conectada a bus infinito. El modelo utilizado es un modelo voltage-behind-reactance (VBR) [Pekarek98], probado eficientemente en el cálculo de la solución periódica usando el método del mapa de Poincaré [Garcia13]. Este modelo simplifica la complejidad de la máquina síncrona expresando las ecuaciones en espacio de estado en términos de las reactancias de la máquina, y no de las inductancias como en otros modelos. Con el fin de utilizar el mo-

delo VBR para el cálculo de la solución de estado estable de la máquina mediante métodos que aceleran la convergencia se utiliza el modelo VBR en pu por unidad [Garcia13]. El modelo VBR en pu de la máquina síncrona se detalla en el apéndice A. Las variables de estado calculadas son las corrientes en el estator (i_{abc}), los enlaces de flujo en los devanados del rotor (Ψ_{kq2} , Ψ_{fd} , Ψ_{kd}), la desviación de velocidad ($\frac{\Delta\omega_r}{\omega_b}$) y el ángulo del rotor (δ). El vector de estados es entonces

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{abc} \\ \Psi_{kq2} \\ \Psi_{fd} \\ \Psi_{kd} \\ \frac{\Delta\omega_r}{\omega_b} \\ \delta \end{bmatrix}$$

Durante las pruebas se utilizaron los parámetros de un generador síncrono con turbina hidráulica detallados en [Krause13]. Dichos parámetros se muestran en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1: Parámetros del generador síncrono con turbina hidráulica.

$V_{LL} = 20\text{KV}$	$S = 325\text{MVA}$
Polos=64	$H = 7.5\text{s}$
FP=0.85	$f = 60\text{Hz}$
$R_s = 0.0019$	$X_{ls} = 0.120$
$X_q = 0.480$	$X_d = 0.850$
$R'_{fd} = 0.00041$	$X'_{lfd} = 0.2049$
$R'_{kd} = 0.0141$	$X'_{lkd} = 0.160$
$R'_{kq2} = 0.0136$	$X'_{lkq2} = 0.1029$

Se considera que el generador está conectado a un bus infinito representado por una fuente trifásica de voltaje con frecuencia constante dada por

$$V_{abc} = \left[V \cos(\omega_b t) \quad V \cos(\omega_b t - \frac{2\pi}{3}) \quad V \cos(\omega_b t + \frac{2\pi}{3}) \right] \quad (5.1)$$

La convergencia a la solución periódica de estado estable se realiza para tres escenarios diferentes:

- **Escenario A.** Se simula el arranque de la máquina síncrona considerando la potencia mecánica que entrega la turbina igual a cero $P_m = 0$. El voltaje de excitación se mantiene constante.
- **Escenario B.** Se aplica un cambio súbito en la potencia mecánica aplicada al generador síncrono. La potencia mecánica cambia de $P_m = 0$ a $P_m = P_{nom}$ en $t = 0.05s$. P_{nom} corresponde la potencia mecánica nominal.
- **Escenario C.** Con la máquina trabajando en condiciones de estado estable y $P_m = P_{nom}$, se simula una falla de fase a tierra en la fase A en terminales del generador. La falla se aplica en $t = 0.05s$ y se libera en $t = 0.1s$.

El método PKSJ-QR se aplica para aproximar la solución periódica de estado estable a los escenarios A,B y C. En el apéndice B se presenta el detalle de la solución para el escenario A. En la Tabla 5.2 (a) se presentan los resultados de aplicar MMP y el método PKSJ-QR. Además, se comparan los resultados de utilizar 2 variantes del método PKSJ-QR: utilizando rotaciones Givens (PKSJ-QR) y sin utilizar esta herramienta (PKSJ). Se observa que la convergencia para los métodos probados ocurre en 3 iteraciones Newton para los tres escenarios. La convergencia es similar en ambos métodos al comparar con MMP, pero el tiempo requerido en el proceso es menor al utilizar en sus dos variantes. El tiempo requerido por el método PKSJ-QR es cerca de la mitad del tiempo que necesita el MMP en el escenario A, B y C.

Comparando el método PKSJ-QR al utilizar rotaciones Givens y sin estas, el tiempo se reduce para todos los escenarios, sin embargo, para el escenario C la convergencia ocurre en aproximadamente la mitad de tiempo al usar esta herramienta.

En la Tabla 5.2 (b) se reportan los factores de aceleración y la relación del número total de iteraciones Newton (N_N) y de las iteraciones GMRES al utilizar rotaciones Givens (N_G) y sin ellas (N_{G-QR}). Se observa que se obtienen factores de aceleración de 688, 521 y 223 comparando PKSJ-QR con respecto al método de fuerza bruta y factores de 1.8729, 1.8890 y 1.7236 con respecto al mapa de Poincaré para los escenarios A, B y C, respectivamente. Para este caso el método PKSJ-QR converge a la solución casi 2 veces más rápido

Tabla 5.2: Errores máximos durante convergencia, tiempo de cómputo y factores de aceleración para el sistema IEEE 118-nodos.

IN	Case A				Case B				Case C			
	MMP	PKSJ	PKSJ-QR	MMP	PKSJ	PKSJ-QR	MMP	PKSJ-QR	MMP	PKSJ-QR	PKSJ-QR	PKSJ-QR
CB	2.6245e-03	2.6245e-03	2.6245e-03	1.9105e-04	1.9104e-04	1.9104e-04	1.9393e-04	1.9397e-04	1.9397e-04	1.9397e-04	1.9397e-04	1.9397e-04
1	2.8537e-05	2.6740e-05	2.6740e-05	7.0892e-06	7.3656e-06	7.3656e-06	5.6324e-06	1.7876e-07	5.6324e-06	1.7876e-07	5.8748e-06	5.8748e-06
2	1.0311e-08	1.0829e-08	1.0829e-08	3.1810e-09	2.8173e-08	2.8112e-08	1.9167e-09	2.1620e-8	1.9167e-09	2.1620e-8	2.2547e-08	2.2547e-08
3	7.6900e-14	1.0579e-13	9.9204e-14	1.4622e-13	6.7633e-12	6.9104e-12	4.6407e-14	1.6032e-12	4.6407e-14	1.6032e-12	4.7627e-12	4.7627e-12
Tiempo (s)	38.8068	15.4540	15.4300	35.5289	17.2470	17.2050	34.7610	19.3460	34.7610	19.3460	17.5130	17.5130

Escenario	Variables de Estado	Iteraciones			Iteraciones GMRES (N_G)	GMRES-QR per Newton (N_G - QR / N_N)	GMRES per Newton (N_G / N_N)	Factores de aceleración		
		Newton (N_N)	GMRES-QR (N_G - QR)	Newton (N_N)				$\frac{T_{BF}}{T_{PKSJ}}$	$\frac{T_{BF}}{T_{PKSJ-QR}}$	$\frac{T_{MMP}}{T_{PKSJ}}$
A	8	3	23	23	7.6666	7.6666	686.9657	688.0342	1.9935	1.9966
B	8	3	25	24	8.3333	8.0000	520.5205	521.7912	2.0600	2.0650
C	8	3	24	25	8.0000	8.3333	202.3941	223.5777	1.7968	1.9849

que el método del mapa de Poincaré convencional. Estos factores de aceleración disminuyen cuando se no se utilizan rotaciones Givens.

Además, en la Tabla 5.3 se muestra el número de iteraciones GMRES que se requirieron en cada iteración Newton (IN). Este número corresponde a la dimensión k del subespacio de Krylov generado en cada iteración Newton. Se puede apreciar que el número de iteraciones GMRES cambia durante la convergencia a la solución periódica.

Tabla 5.3: Número de iteraciones GMRES

IN	Escenario A	Escenario B	Escenario C
1	7	8	8
2	8	8	8
3	8	8	9

La formas de onda del estado estable de la corriente trifásica en el estator para el escenario C se presentan en la Figura 5.1. Se compara la solución obtenida mediante el método del mapa de Poincaré convencional (MMP) y el método PKSJ-QR, y se observa que ambas forman de onda coinciden de forma bastante similar.

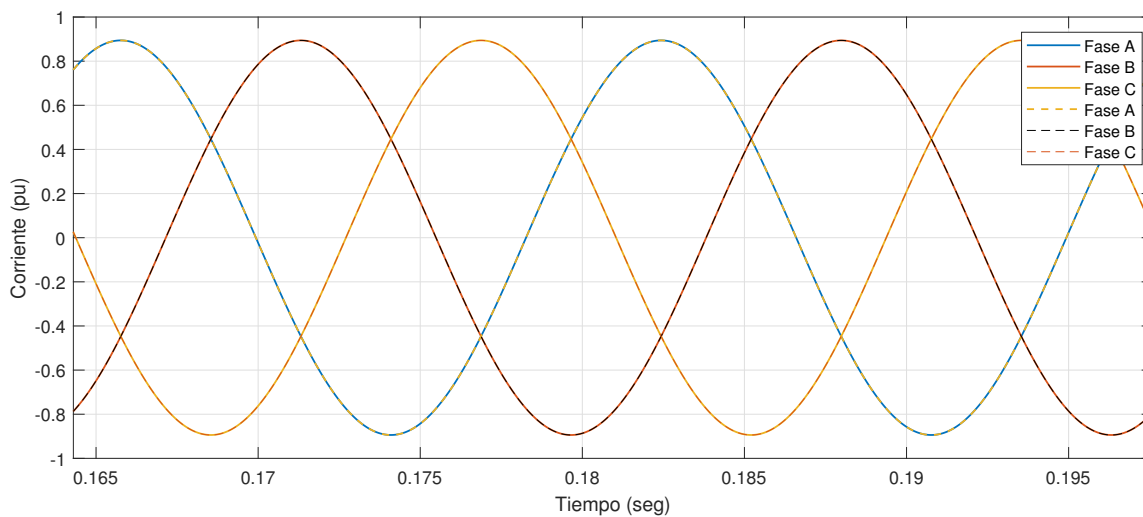


Figura 5.1: Forma de onda del estado estable de la corriente trifásica en el estator al aplicar MMP (línea continua) y PKSJ-QR (línea punteada).

5.1.1. Estimación de los multiplicadores de Floquet

Los multiplicadores de Floquet son estimados mediante los valores de Ritz de la matriz Hessenberg que se obtiene en la última iteración Newton para el escenario B.

En la Figura 5.2 se presentan las estimaciones de los multiplicadores de Floquet. Se puede apreciar que todos los multiplicadores de Floquet se encuentran dentro del círculo unitario, por lo tanto, la solución periódica de estado estacionario es estable. Se observa que la mayoría de los valores se agrupan sobre el eje real del mapa de coordenadas.

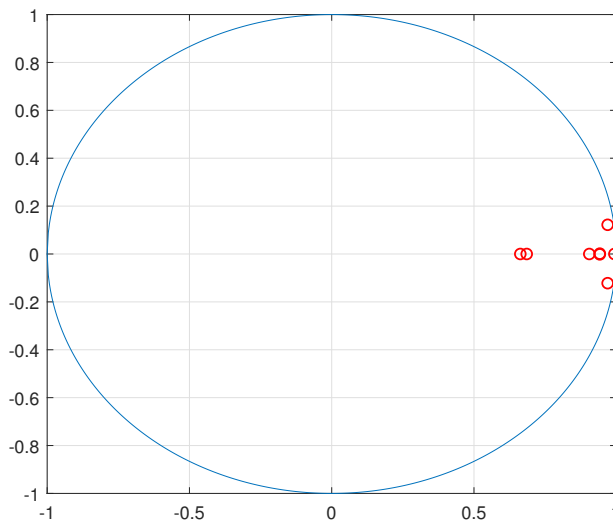


Figura 5.2: Multiplicadores de Floquet para la máquina síncrona conectada a bus infinito.

Para este caso de estudio la dimensión del subespacio de Krylov corresponde a la dimensión del sistema, por lo tanto, la matriz Hessenberg tiene 8 valores de Ritz y se pueden estimar todos los multiplicadores de Floquet.

Tabla 5.4: Comparación de los multiplicadores de Floquet para la máquina síncrona.

m_{DP}	m_H	Error relativo
9.9349e-01 + 0.0000e+00i	9.9349e-01 + 0.0000e+00i	4.2385e-07
9.6977e-01 + 1.2192e-01i	9.6976e-01 + 1.2192e-01i	1.3503e-05
9.6977e-01 - 1.2192e-01i	9.6976e-01 - 1.2192e-01i	1.3503e-05
9.4212e-01 + 1.5230e-03i	9.4212e-01 + 1.5230e-03i	2.2274e-07
9.4212e-01 - 1.5230e-03i	9.4212e-01 - 1.5230e-03i	2.2274e-07
9.0531e-01 + 0.0000e+00i	9.0531e-01 + 0.0000e+00i	7.2399e-08
6.8534e-01 + 0.0000e+00i	6.8534e-01 + 0.0000e+00i	7.0667e-06
6.6289e-01 + 0.0000e+00i	6.6289e-01 + 0.0000e+00i	1.0624e-05

La Tabla 5.4 muestra el valor de los multiplicadores de Floquet estimados mediante la matriz Jacobiana del mapa de Poincaré en el método convencional (m_{DP}) y con la matriz Hessenberg en el método PKSJ-QR (m_H). Se puede observar que los multiplicadores de Floquet obtenidos con ambos métodos son muy similares. El error relativo, definido como la diferencia entre ambos valores $\|m_{DP} - m_H\|$, es muy pequeño, y alcanza un valor máximo de 1.3503e-05.

5.2. Sistema de prueba de 9 nodos del IEEE modificado

El sistema de prueba de 9 nodos del IEEE original tiene generadores en los nodos 1, 2 y 3, cargas constantes en los nodos 5, 6 y 8, 3 transformadores y 6 líneas de transmisión. Los niveles de voltaje en los nodos de generación son 16.5kV, 18kV y 13.8kV respectivamente, mientras que el resto de los nodos operan a un voltaje de 230kV. Los parámetros del sistema IEEE de 9 nodos se reportan en el apéndice C.

En el sistema original los generadores son representados como fuentes de voltaje convencionales, con los datos que se muestran en el apéndice C. En este trabajo el sistema de 9 nodos se modifica agregando un generador síncrono en el nodo 2 y un convertidor de fuente de voltaje (VSC) con una estrategia de conmutación PWM en el nodo 3. El generador en el nodo 1 permanece como en el modelo original. El diagrama unifilar del sistema modificado se muestra en la Figura 5.3.

El sistema modificado se modela con 62 ecuaciones diferenciales ordinarias, que

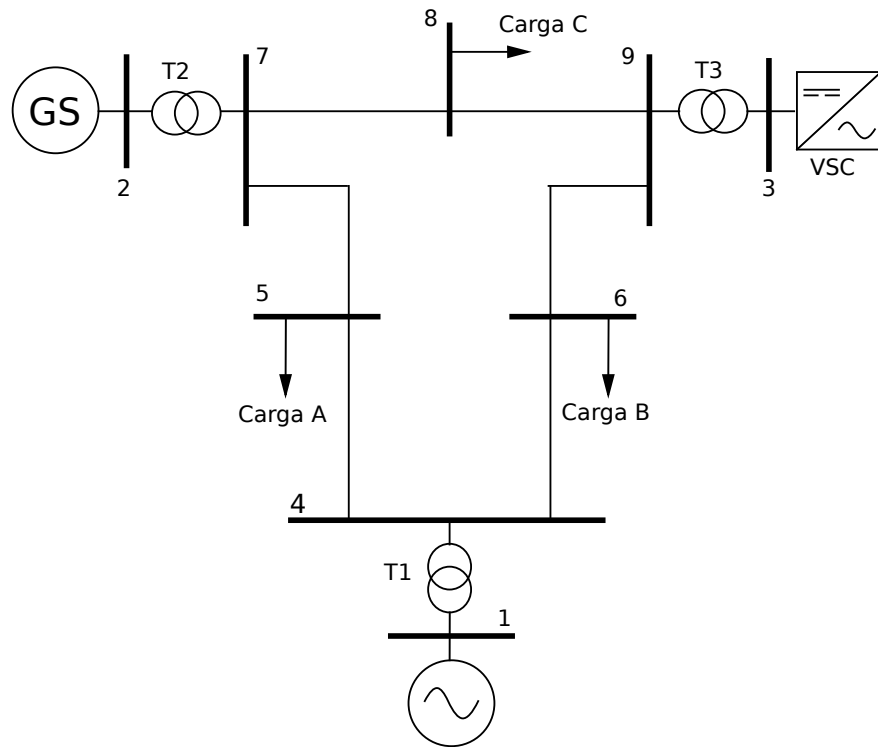


Figura 5.3: Diagrama del sistema de 9 nodos.

incluyen ecuaciones de voltajes y corrientes en los nodos, las 8 ecuaciones del modelo VBR de la máquina síncrona descrito en el apéndice A y las ecuaciones del convertidor de fuente de voltaje trifásico en el nodo 3.

Para este caso de estudio se determina la solución periódica de estado estable para los siguientes tres escenarios:

- **Escenario A.** Para este caso la potencia mecánica que entrega la turbina al generador síncrono del nodo 2 es $P_m = 0$.
- **Escenario B.** Se aplica un cambio súbito en la potencia mecánica aplicada al generador síncrono. En $t = 0.05s$, la potencia mecánica cambia de $P_m = 0$ a $P_m = P_{nom}$.
- **Escenario C.** Con el sistema trabajando en condiciones de estado estable se simula una falla de fase a tierra en la fase A del nodo 1. La falla se aplica en $t = 0.05s$ y se libera en $t = 0.1s$.

La convergencia a la solución periódica de estado estable usando los métodos MMP y PKSJ-QR se muestran en la Tabla 5.5 (a). Además, se comparan los resultados de utilizar 2 variantes del método PKSJ-QR: utilizando rotaciones Givens (PKSJ-QR) y sin utilizar esta herramienta (PKSJ). Se observa que para el escenario A se tiene una convergencia similar en 4 aplicaciones, con un tiempo de 1,026 segundos para el MMP y 355.54 para el método PKSJ-QR. Para el escenario B se converge en 3 iteraciones Newton. Sin embargo, el tiempo que le toma al MMP es 2.3 veces mayor que el tiempo del método PKSJ-QR. Para el escenario C ambos métodos requieren solo 2 aplicaciones, mientras que el tiempo de cómputo es de 538 y 222 segundos para el método MMP y PKSJ-QR, respectivamente.

Comparando el método PKSJ-QR al utilizar rotaciones Givens y sin estas, el tiempo se reduce para todos los escenarios, sin embargo, para el escenario C la convergencia ocurre en aproximadamente la mitad de tiempo al usar esta herramienta.

En la Tabla 5.2 (b) se reportan los factores de aceleración y la relación del número total de iteraciones Newton (N_N) y de las iteraciones GMRES al utilizar rotaciones Givens (N_G) y sin ellas (N_{G-QR}). Se observa que se tienen factores de aceleración de 45, 52 y 38 con respecto al método de fuerza bruta y factores de 2.8857, 2.3052 y 2.4202 con respecto al mapa de Poincaré para los escenarios A, B y C respectivamente. Para este caso el método PKSJ-QR converge a la solución periódica casi 3 veces más rápido que el método convencional. Estos factores de aceleración disminuyen cuando no se utilizan rotaciones Givens.

En la Tabla 5.6 se muestra el número de iteraciones GMRES que se requirieron en cada iteración Newton. Se puede apreciar que la dimensión del subespacio de Krylov es en todo momento $k < n$. Sin embargo, en la última iteración Newton, la dimensión del subespacio aumenta a 72.

En la Figura 5.4 se observan las forma de onda de las corriente en la fase A de la rama 1-4 en el escenario C, obtenida al aplicar el método PKSJ-QR y comparada con la forma de onda obtenida al aplicar MMP. Se aprecia que ambas formas de onda coinciden casi exactamente.

Tabla 5.5: Errores máximos durante convergencia, tiempo de cómputo y factores de aceleración para el sistema IEEE 9-nodos.

IN	Case A			Case B			Case C		
	MMP	PKSJ	PKSJ-QR	MMP	PKSJ	PKSJ-QR	MMP	PKSJ	PKSJ-QR
CB	8.1263e-03	8.1263e-03	8.1263e-03	7.7000e-03	7.7000e-03	7.7000e-03	5.0589e-04	5.0589e-04	5.0589e-04
1	9.8164e-03	1.0056e-03	9.9627e-03	1.6000e-03	2.4563e-03	1.6000e-03	2.3979e-07	2.3332e-07	2.3332e-07
2	2.7735e-05	2.5947e-05	2.5951e-05	5.5222e-07	6.4276e-07	2.5288e-07	9.1394e-13	5.9858e-11	5.5664e-11
3	3.2782e-10	2.9440e-10	2.9608e-10	3.5909e-11	2.8333e-11	2.5269e-11			
4	1.2107e-13	8.0752e-12	1.5596e-12						
Time (s)	1,026.0	892.5830	355.54	1,104.3	912.43	479.03	538.17	199.56	178.10

Escenario	Variables de Estado	Iteraciones		Iteraciones GMRES (N_G)	GMRES-QR per Newton (N_G-QR/N_N)		Factores de aceleración			
		Newton (N_N)	GMRES-QR (N_G-QR)		GMRES per Newton (N_G/N_N)	Newton (N_G/N_N)	$\frac{T_{BF}}{T_{PKSJ}}$	$\frac{T_{MMP}}{T_{PKSJ}}$	$\frac{T_{MMP}}{T_{PKSJ-QR}}$	
A	62	4	349	161	87.2500	40.2500	18.1467	45.5816	1.1495	2.8857
B	62	3	360	161	120	53.6667	27.6931	52.7483	1.2103	2.3052
C	62	2	62	65	31	32.5000	34.0253	38.1252	2.6968	2.4202

Tabla 5.6: Número de iteraciones GMRES

IN	Escenario A	Escenario B	Escenario C
1	29	29	31
2	29	29	34
3	31	31	
4	72	72	

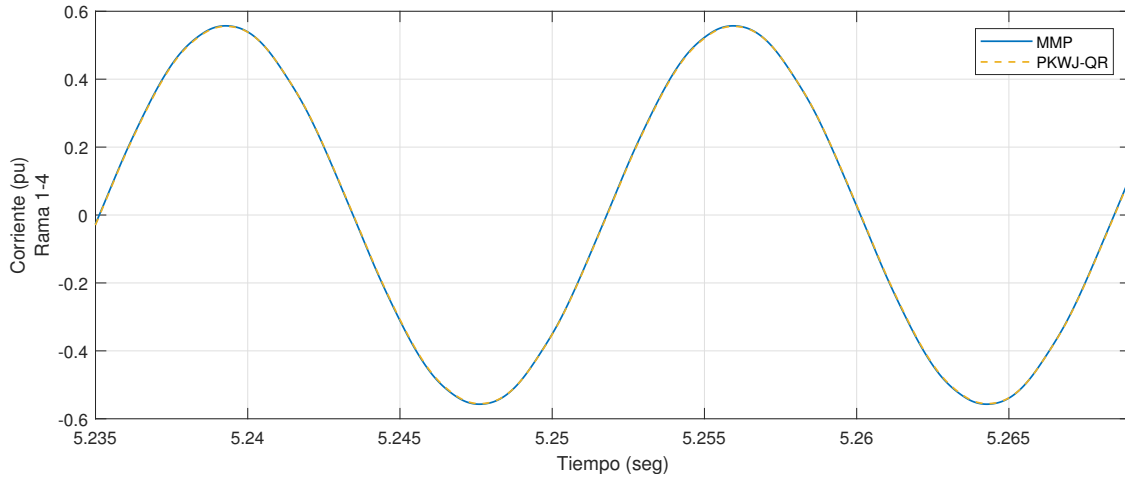


Figura 5.4: Forma de onda del estado estable de la corriente de la fase A de la rama 1-4.

5.2.1. Estimación de los multiplicadores de Floquet

En la Figura 5.5 se muestran los multiplicadores de Floquet del sistema de 9 nodos modificado cuando se tiene el escenario B. La matrix Hessenberg formada en GMRES tiene la misma dimensión del sistema y pueden estimarse todos los multiplicadores de Floquet. En la figura se observa que todos los multiplicadores se encuentran dentro del círculo unitario, por lo tanto, la solución periódica de estado estacionario es estable.

En la Tabla 5.7 se muestran los primeros 22 multiplicadores de Floquet calculados mediante el jacobiano del mapa de Poincaré (m_{DP}) y a partir de la matriz Hessenberg del método PKSJ-QR (m_H), así como el error relativo entre ambos. Se observa que la estimación de los multiplicadores mediante el método PKSJ-QR se compara muy bien con respecto a los valores del método de aceleración convencional. El error relativo mas grande es de $1.3e-05$.

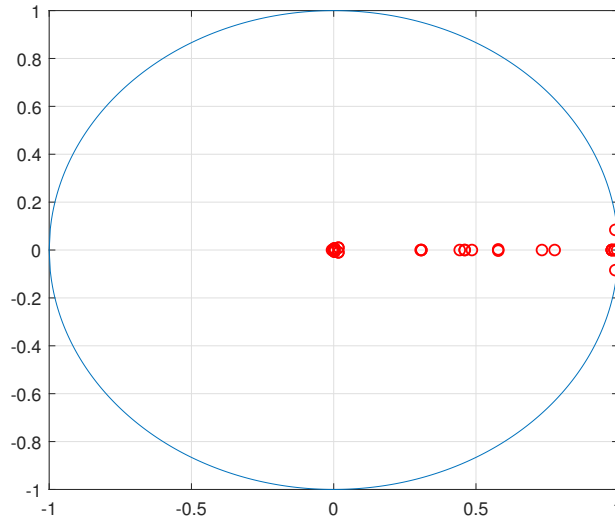


Figura 5.5: Multiplicadores de Floquet para el sistema IEEE 9-nodos.

Tabla 5.7: Comparación de los multiplicadores de Floquet para el sistema IEEE 9-nodos.

m_{DP}	m_H	Error relativo
$9.9603e-01 + 0.0000e+00i$	$9.9603e-01 + 0.0000e+00i$	0.0000
$9.8971e-01 + 8.4107e-02i$	$9.8971e-01 + 8.4094e-02i$	1.3000e-05
$9.8971e-01 - 8.4107e-02i$	$9.8971e-01 - 8.4094e-02i$	1.3000e-05
$9.8737e-01 + 0.0000e+00i$	$9.8738e-01 + 0.0000e+00i$	1.0000e-05
$9.8695e-01 + 2.1718e-06i$	$9.8695e-01 + 2.1879e-06i$	1.6100e-08
$9.8695e-01 - 2.1718e-06i$	$9.8695e-01 - 2.1879e-06i$	1.6100e-08
$9.7772e-01 + 1.0211e-06i$	$9.7772e-01 + 1.0090e-06i$	1.2100e-08
$9.7772e-01 - 1.0211e-06i$	$9.7772e-01 - 1.0090e-06i$	1.2100e-08
$9.7725e-01 + 1.6574e-07$	$9.7725e-01 + 1.5975e-07i$	5.9900e-09
$9.7725e-01 - 1.6574e-07i$	$9.7725e-01 - 1.5975e-07i$	2.3020e-07
$7.7658e-01 + 0.0000e+00i$	$7.7657e-01 + 0.0000e+00i$	1.0000e-05
$7.3191e-01 + 0.0000e+00i$	$7.3191e-01 + 0.0000e+00i$	0.0000
$5.7819e-01 + 2.6959e-03i$	$5.7819e-01 + 2.6960e-03i$	1.0000e-07
$5.7819e-01 - 2.6959e-03i$	$5.7819e-01 - 2.6960e-03i$	1.0000e-07
$4.8560e-01 + 0.0000e+00i$	$4.8560e-01 + 0.0000e+00i$	0.0000
$4.6033e-01 + 9.2465e-05i$	$4.6033e-01 + 9.2519e-05i$	5.4000e-08
$4.6033e-01 - 9.2465e-05i$	$4.6033e-01 - 9.2519e-05i$	5.4000e-08
$4.4288e-01 + 0.0000e+00i$	$4.4288e-01 + 0.0000e+00i$	0.0000
$3.0809e-01 + 3.5674e-05i$	$3.0809e-01 + 3.5661e-05i$	1.3000e-08
$3.0809e-01 - 3.5674e-05i$	$3.0809e-01 - 3.5661e-05i$	1.3000e-08
$3.0549e-01 + 0.0000e+00i$	$3.0549e-01 + 0.0000e+00i$	0.0000
$1.6396e-02 + 9.7429e-03i$	$1.6396e-02 + 9.7429e-03i$	0.0000
⋮	⋮	⋮

5.3. Sistema IEEE 118-nodos

El sistema de 118 nodos del IEEE es un sistema eléctrico comúnmente utilizado para realizar estudios en el área de sistemas eléctricos de potencia. Contiene 33 generadores, 179 líneas y 9 transformadores [Psc18]. Además se tienen 91 cargas constantes y 35 bancos de capacitores. En el sistema original de 118 nodos los generadores se representan como fuentes de voltaje convencionales. Los parámetros del sistema IEEE 118-nodos se presentan en el apéndice D. El sistema se modificó reemplazando el generador original del nodo 25 por un generador síncrono, con parámetros dados en la Tabla 5.8. La potencia que entrega este generador es de 220MW. Además, la fuente de voltaje convencional en el nodo 100 se cambió por un convertidor de electrónica de potencia basado en un convertidor de fuente de voltaje trifásico (VSC) con un esquema de conmutación PWM, que entrega una potencia de 252 MW. Los parámetros del VSC se presentan en la Tabla 5.9.

Además se adoptan las siguientes consideraciones para el modelado de la red eléctrica:

- Líneas de transmisión.- Se modelan con un circuito π en cada fase.
- Cargas.- Se representan con un equivalente paralelo $R_L - X_L$.
- Bancos de capacitores.- Se consideran como elementos pasivos.
- Transformadores.- Se consideran como elementos lineales y se modelan como un equivalente serie $R_T - X_T$.

Tabla 5.8: Parámetros del generador síncrono.

Máquina Síncrona	
$S = 3.25$	$H = 24.375 \text{ s}$
$V_{LL} = 20 \text{ kV}$	$f = 60\text{Hz}$
$R_s = 5.8462e - 04$	$X_{ls} = 0.0369$
$X_q = 0.48$	$X_d = 0.85$
$R'_{fd} = 1.2615e - 04$	$X'_{lfd} = 0.0630$
$R'_{kd} = 0.0043$	$X'_{lkd} = 0.0492$
$R'_{kq2} = 0.0042$	$X'_{lkq2} = 0.0317$
Transformador	
$S = 3.45 \text{ pu}$	20kV/138kV
$X_{tra} = 0.005 \text{ pu}$	

Tabla 5.9: Parámetros del convertidor de potencia conectado a la red.

Inversor	
$P = 2.52$ pu	$f_s = 1.98$ kHz
$V_{DC} = 2.5$ pu	
Transformador	
$S_{tran} = 2.70$ pu	138kV/13.8kV
$X_{tra} = 0.1$ pu	

La Figura 5.6 muestra el sistema IEEE de 118 nodos modificado. El modelo se representa mediante un conjunto de 1337 ecuaciones diferenciales, que incluyen las ecuaciones de la máquina síncrona y del VSC.

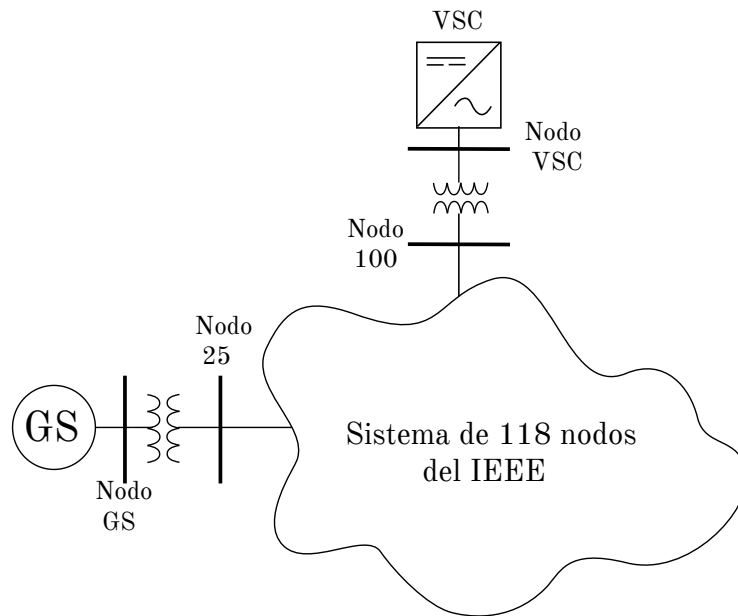


Figura 5.6: Sistema IEEE de 118 nodos modificado.

A continuación se presentan estudios comparativos de la convergencia a la solución periódica de estado estable, propagación armónica y estimación de los multiplicadores de Floquet usando el método de mapa de Poincaré estándar y el método Poincaré-Krylov sin Jacobiano. El sistema IEEE de 118 nodos se resuelve para los siguientes tres escenarios:

- **Escenario A.** Para este caso la potencia mecánica que entrega la turbina al generador síncrono del nodo 25 es $P_m = 0$.

- **Escenario B.** Se aplica un cambio súbito en la potencia mecánica aplicada al generador síncrono. De $P_m = 0$ se incrementa a $P_m = 220$ MW en $t = 0.05$ s.
- **Escenario C.** Con el sistema trabajando en condiciones de estado estable se simula una falla de fase a tierra en la fase A del nodo 27. La falla se aplica en $t = 0.05$ y se libera en $t = 0.1$.

En la Tabla 5.10 (a) se presentan los resultados de aplicar MMP y el método PKSJ-QR. Además, se comparan los resultados de utilizar 2 variantes del método PKSJ-QR: utilizando rotaciones Givens (PKSJ-QR) y sin utilizar esta herramienta (PKSJ). Se observa que la convergencia para los métodos probados ocurre en 3, 3 y 2 iteraciones Newton para los escenarios A, B y C, respectivamente. La convergencia es similar en ambos métodos al comparar con MMP, pero el tiempo requerido en el proceso es menor al utilizar PKSJ-QR en sus dos variantes. Comparando el método PKSJ-QR al utilizar rotaciones Givens y sin estas, el tiempo se reduce para todos los escenarios, sin embargo, para el escenario C la convergencia ocurre en aproximadamente la mitad de tiempo al usar esta herramienta.

En la Tabla 5.10 (b) se reportan los factores de aceleración y la relación del número total de iteraciones Newton (N_N) y de las iteraciones GMRES al utilizar rotaciones Givens (N_G) y sin ellas (N_{G-QR}). Se observa que se obtienen factores de aceleración de 21.0973, 19.5674 y 27.6999 comparando PKSJ-QR con respecto al método de fuerza bruta y factores de 8.0410, 7.4542 y 9.0162 con respecto al mapa de Poincaré para los escenarios A, B y C, respectivamente. Para este caso el método PKSJ-QR converge a la solución hasta 9 veces más rápido que el método del mapa de Poincaré convencional. Estos factores de aceleración disminuyen cuando se no se utilizan rotaciones Givens.

En la Tabla 5.11 se presenta el número de iteraciones GMRES, es decir, la dimensión k del subespacio de Krylov generado en cada iteración Newton. Se puede apreciar que $N_G < n$ en todo momento y que N_G cambia en cada iteración.

En la Figura 5.7 se observan las forma de onda del estado estable de la corriente en la fase A de la rama que está entre el nodo 25 y el generador síncrono (rama 25-GS) y el voltaje de la fase A del nodo 100, todas en el escenario C, al aplicar el método PKSJ-QR y el método del mapa de Poincaré convencional. Se aprecia que ambas formas de onda coinciden

Tabla 5.10: Errores máximos durante convergencia, tiempo de cómputo y factores de aceleración para el sistema IEEE 118-nodos.

IN	Case A			Case B			Case C		
	MMP	PKSJ	PKSJ-QR	MMP	PKSJ	PKSJ-QR	MMP	PKSJ	PKSJ-QR
BC	1.2835e-02	1.2835e-02	1.2835e-02	4.2417e-04	4.2417e-04	4.2417e-04	3.3590e-05	3.3590e-05	3.3590e-05
1	2.3456e-03	2.1979e-05	2.3872e-03	2.1979e-05	2.2421e-05	2.2421e-05	1.8658e-08	4.8440e-08	4.8440e-08
2	3.2239e-07	1.8514e-07	1.8460e-07	4.3541e-10	1.2857e-08	1.2892e-08	1.4597e-12	1.1445e-11	2.0342e-11
3	6.9176e-11	6.4996e-11	5.4014e-11	8.3067e-13	1.2553e-11	2.9452e-11			
Time (s)	279,490.0	37,894.0	34,758.0	282.470	39,358.0	37,894.0	187,780.0	41,839	20,827.0

Escenario	Variables de Estado	Iteraciones Newton (N_N)		Iteraciones GMRES-QR (N_G)		Iteraciones GMRES (N_G)		GMRES per Newton (N_G/N_N)		Factores de aceleración				
		3	3	587	614	529	414	195.6666	204.6666	176.3333	$\frac{T_{BF}}{T_{PKSJ}}$	$\frac{T_{BF}}{T_{PKSJ-QR}}$	$\frac{T_{MMP}}{T_{PKSJ-QR}}$	
A	1337	3	3	587	614	529	414	195.6666	204.6666	176.3333	19.6711	21.0973	7.4975	8.0410
B	1337	3	3	614	800	414	294	204.6666	400	138	18.8396	19.5674	7.1769	7.4542
C	1337	2	2	800		294		400	147	147	13.7871	27.6966	4.4882	9.0162

Tabla 5.11: Número de iteraciones GMRES

IN	Escenario A	Escenario B	Escenario C
1	113	116	154
2	114	138	140
3	302	360	

de forma bastante similar. En la forma de onda del voltaje en el nodo 100 se observa que se presenta distorsión armónica, ya que en este nodo es donde se encuentra el VSC.

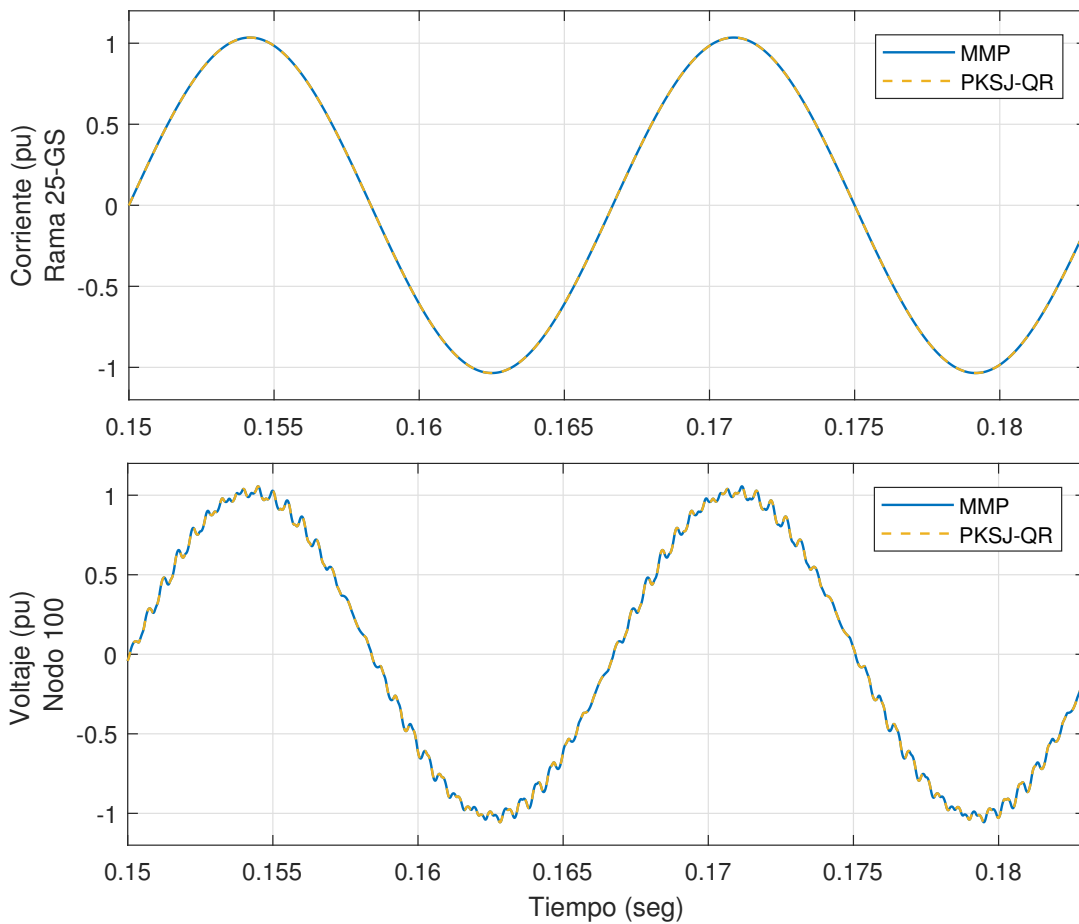


Figura 5.7: Comparación de las formas de onda del estado estable de la corriente en la rama 25-GS y voltaje del nodo 100 obtenidas al aplicar MMP y PKSJ-QR .

5.3.1. Estimación de los multiplicadores de Floquet

En la Figura 5.8 se muestran los multiplicadores de Floquet del sistema de 118 nodos para el escenario A. En este caso la matriz Hessenberg obtenida mediante GMRES tiene una dimensión de 302×302 , por lo tanto, se pueden estimar 302 multiplicadores de Floquet. Se observa que la solución periódica del sistema es estable para este caso, ya que todos los multiplicadores de Floquet estimados se encuentran dentro del círculo unitario.

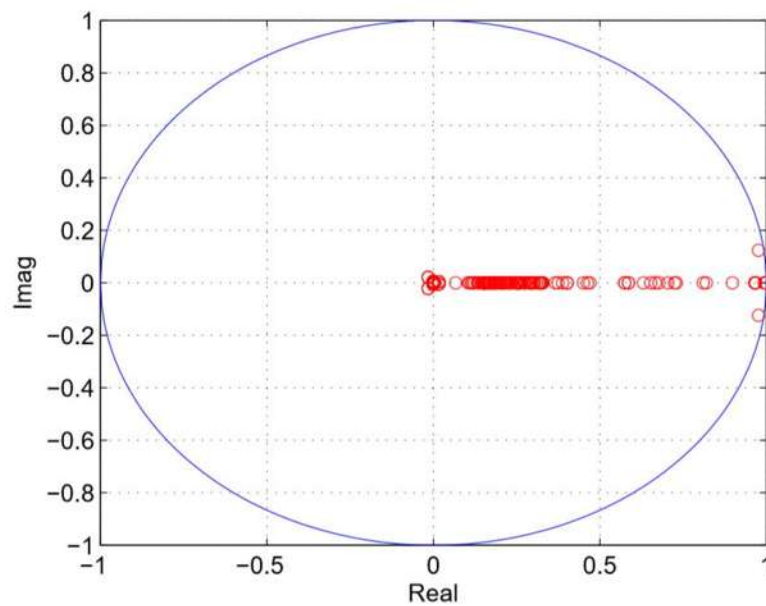


Figura 5.8: Multiplicadores de Floquet del sistema IEEE 118-nodos, escenario A.

Se puede observar la agrupación de los multiplicadores de Floquet a lo largo del eje real positivo. Además, la mayoría de los multiplicadores se encuentran cerca del origen y corresponden a los modos del sistema que se disipan rápidamente. De hecho, el 79% de los multiplicadores de Floquet se ubican por debajo de 0.25. El resto de los multiplicadores corresponden a las oscilaciones dominantes que no se disipan rápidamente y dominan en el tiempo. El multiplicador de Floquet de valor $0.9763 \pm 0.1238i$ corresponde al generador síncrono de turbina hidráulica, el cual oscila alrededor de la solución periódica de estado estable.

A medida que aumenta la dimensión del subespacio de Krylov, los multiplicadores de Floquet estimados convergen a los valores propios extremos, que corresponden a las

Tabla 5.12: Comparación de los multiplicadores de Floquet.

m_{DP}	m_H	Error relativo
9.9998e-01 + 4.1441e-09i	9.9998e-01 + 0.0000e+00i	4.1441e-09
9.9998e-01 - 4.1441e-09i	9.9998e-01 + 0.0000e+00i	4.1441e-09
9.9998e-01 + 0.0000e+00i	9.9998e-01 + 0.0000e+00i	0.0000e+00
9.9868e-01 + 0.0000e+00i	9.9868e-01 + 0.0000e+00i	0.0000e+00
9.9868e-01 + 0.0000e+00i	9.9868e-01 + 0.0000e+00i	0.0000e+00
9.9868e-01 + 0.0000e+00i	9.9868e-01 + 0.0000e+00i	0.0000e+00
9.9793e-01 + 6.1212e-09i	9.9793e-01 + 0.0000e+00i	6.1212e-09
9.9793e-01 - 6.1212e-09i	9.9793e-01 + 0.0000e+00i	6.1212e-09
9.9793e-01 + 0.0000e+00i	9.9793e-01 + 0.0000e+00i	6.1212e-09
9.9742e-01 + 0.0000e+00i	9.9742e-01 + 0.0000e+00i	0.0000e+00
9.9321e-01 + 0.0000e+00i	9.9321e-01 + 0.0000e+00i	0.0000e+00
9.7630e-01 + 1.2380e-01i	9.7630e-01 + 1.2380e-01i	0.0000e+00
9.7630e-01 - 1.2380e-01i	9.7630e-01 - 1.2380e-01i	0.0000e+00
9.6760e-01 + 0.0000e+00i	9.6760e-01 + 6.3305e-09i	6.3305e-09
9.6760e-01 + 0.0000e+00i	9.6760e-01 - 6.3305e-09i	6.3305e-09
9.6760e-01 + 0.0000e+00i	9.6760e-01 + 0.0000e+00i	0.0000e+00
9.6630e-01 + 6.7084e-04i	9.6630e-01 + 6.7156e-04i	7.2000e-07
9.6630e-01 - 6.7084e-04i	9.6630e-01 - 6.7156e-04i	7.2000e-07
9.6466e-01 + 3.6278e-09i	9.6466e-01 + 0.0000e+00i	3.6278e-09
9.6466e-01 - 3.6278e-09i	9.6466e-01 + 0.0000e+00i	3.6278e-09
9.6372e-01 + 1.2657e-08i	9.6372e-01 + 0.0000e+00i	1.2657e-08
9.6372e-01 - 1.2657e-08i	9.6372e-01 + 0.0000e+00i	1.2657e-08
9.6372e-01 + 1.2657e-08i	9.6372e-01 + 0.0000e+00i	1.2657e-08
9.6057e-01 + 0.0000e+00i	9.6057e-01 + 0.0000e+00i	0.0000e+00
9.6057e-01 + 0.0000e+00i	9.6057e-01 + 0.0000e+00i	0.0000e+00
9.6057e-01 + 0.0000e+00i	9.6057e-01 + 0.0000e+00i	0.0000e+00
8.9780e-01 + 0.0000e+00i	8.9780e-01 + 1.4539e-06	1.4539e-06
8.9780e-01 + 0.0000e+00i	8.9780e-01 + 1.4539e-06	1.4539e-06
8.9780e-01 + 0.0000e+00i	8.9780e-01 + 1.4539e-06	1.4539e-06
8.1933e-01 + 0.0000e+00i	8.1933e-01 + 0.0000e+00i	0.0000e+00
8.1933e-01 + 0.0000e+00i	8.1933e-01 + 0.0000e+00i	0.0000e+00
8.1933e-01 + 0.0000e+00i	8.1933e-01 + 0.0000e+00i	0.0000e+00
8.0998e-01 + 8.8768e-09i	8.0998e-01 + 8.3532e-09i	5.2360e-10
8.0998e-01 + 8.8768e-09i	8.0998e-01 + 8.3532e-09i	5.2360e-10
8.0998e-01 + 8.8768e-09i	8.0998e-01 + 8.3532e-09i	5.2360e-10
7.5216e-01 + 0.0000e+00i	7.5216e-01 + 0.0000e+00i	0.0000e+00
7.5216e-01 + 0.0000e+00i	7.5216e-01 + 0.0000e+00i	0.0000e+00
7.5216e-01 + 0.0000e+00i	7.5216e-01 + 0.0000e+00i	0.0000e+00
7.2932e-01 + 0.0000e+00i	7.2932e-01 + 0.0000e+00i	0.0000e+00
7.2932e-01 + 0.0000e+00i	7.2932e-01 + 0.0000e+00i	0.0000e+00
7.2932e-01 + 0.0000e+00i	7.2932e-01 + 0.0000e+00i	0.0000e+00
⋮	⋮	⋮

oscilaciones dominantes que no se disipan rápidamente en el tiempo. Dado que el subespacio de Krylov se define como una serie de potencias (ver Ec. 3.12), entonces los valores de Ritz y, por lo tanto, los multiplicadores de Floquet estimados convergen en valores propios ubicados más lejos de (0,0). Nótese que el algoritmo GMRES converge de forma eficiente a la solución periódica de estado estable debido a la habilidad de discriminar entre las oscilaciones dominantes y no dominantes.

En la Tabla 5.12 se reportan los primeros 50 multiplicadores de Floquet calculados mediante el jacobiano del mapa de Poincaré (m_{DP}), y por la matriz Hessenberg (m_H). Se indica también el error relativo correspondiente. Los multiplicadores de Floquet están ordenados de acuerdo a sus valores absolutos, en orden de magnitud decreciente. Se puede apreciar que los multiplicadores de Floquet obtenidos con ambas matrices son casi idénticos. El error relativo, definido como la magnitud de la diferencia entre los dos multiplicadores de Floquet $\|m_{DP} - m_H\|$, está por debajo de 1.4539e-06.

5.3.2. Propagación Armónica

En esta sección se compara la solución periódica de estado estable calculada mediante el método PKSJ-QR con los resultados obtenidos en el paquete de simulación PSCAD/EMTDC para el escenario B. Los resultados se muestran en la Tabla 5.13, en donde se presentan las magnitudes y ángulos de fase de la componente fundamental de voltaje, así como también el % THD para los nodos que se ubican cerca de la máquina síncrona y el VSC. Además se reportan también la magnitud y ángulo de fase de la componente fundamental de la corriente en la línea de transmisión del nodo 25 al generador síncrono, del nodo 100 al VSC y otras líneas cercanas.

Se utiliza la Transformada Rápida de Fourier para transformar la solución periódica de estado estable obtenida con el PKSJ-QR al dominio de la frecuencia y se compara con el %THD obtenido mediante la simulación en el software PSCAD/EMTDC.

Se observa que la magnitud y el ángulo de fase tanto de voltaje como de la corriente obtenidos mediante el método PKSJ-QR son muy similares a los resultados de la simulación en PSCAD. Se puede apreciar que el porcentaje de error para la magnitud y ángulo de fase de la componente fundamental calculado con $\% \varepsilon = \|X_{PSCAD} - X_{PKSJ-QR}\|$ se encuentra

Tabla 5.13: Componente fundamental y% THD para el escenario B del sistema IEEE de 118 nodos para: a).- voltajes nodales and b).- corrientes en rama.

Nodo	PSCAD			PKSJ-QR			Error relativo		
	V_1 , [pu]	θ_1 , [rad]	THD [%]	V_1 , [pu]	θ_1 , [rad]	THD [%]	V_1 , [pu]	θ_1 , [rad]	THD [%]
1	9.5381e-01	-3.3136e-01	4.0605e-06	9.5382e-01	-3.3136e-01	3.1675e-07	1.0000e-05	0	3.7438e-06
25	1.0444e+00	-3.0247e-02	0.8000e-04	1.0480e+00	-3.0970e-02	1.0778e-05	3.6000e-03	7.2300e-04	6.9222e-05
69	1.0350e+00	2.2633e-04	4.5970e-03	1.0350e+00	2.6613e-05	5.3863e-03	0	1.9972e-04	7.8930e-04
88	9.8725e-01	1.0017e-01	1.3425e-01	9.8725e-01	1.0004e-01	1.4170e-01	0	1.3000e-04	7.4500e-03
93	9.8704e-01	1.5305e-02	2.4910e+00	9.8741e-01	1.5503e-02	2.5114e+00	3.7000e-04	1.9800e-04	2.0400e-02
100	1.0159e+00	-3.3137e-02	3.7937e+00	1.0173e+00	-3.2221e-02	3.8280e+00	1.4000e-03	9.1600e-04	3.4300e-02
102	9.9088e-01	4.1390e-02	2.6504e+00	9.9121e-01	4.1566e-02	2.6857e+00	3.3000e-04	1.7600e-04	3.5300e-02

(a)

Rama	PSCAD			PKSJ-QR			Error relativo		
	I_1 , [pu]	θ_1 , [rad]	THD [%]	I_1 , [pu]	θ_1 , [rad]	THD [%]	I_1 , [pu]	θ_1 , [rad]	THD [%]
25-SG	2.1370e+00	-6.8079e-01	9.5000e-05	2.1511e+00	-7.6478e-01	6.5300e-06	1.4100e-02	8.3990e-02	8.8470e-05
47-69	5.7209e-01	1.0606e-01	1.0500e-03	5.7170e-01	1.0905e-01	1.2747e-03	3.9000e-04	2.9900e-03	2.2470e-04
1-3	4.6031e-01	-7.5532e-01	2.5000e-04	4.6011e-01	-7.5547e-01	8.0313e-06	2.0000e-04	1.5000e-04	2.4197e-04
100-VSC	2.7196e+00	-3.5636e+00	6.9603e+00	2.7693e+00	-3.5603e+00	6.7575e+00	4.9700e-02	3.3000e-03	2.0280e-01
85-88	5.2405e-01	-2.9362e+00	6.8450e-02	5.2264e-01	-2.9400e+00	7.2648e-02	1.4100e-03	3.8000e-03	4.1980e-03
92-93	5.8547e-01	2.3642e-01	1.2995e+00	5.8335e-01	2.4144e-01	1.3240e+00	2.1200e-03	5.0200e-03	2.4500e-02
101-102	4.0561e-01	-2.8825e+00	1.9322e+00	4.0307e-01	-2.8444e+00	2.0003e+00	2.5400e-03	3.8100e-02	6.8100e-02

(b)

por debajo de $4.9700e-02$ y $8.3990e-02$, respectivamente.

En cuanto al %THD puede observarse que los resultados obtenidos con PKSJ-QR coinciden muy bien con los resultados de PSCAD. Los mayores niveles de distorsión armónica en voltaje y corriente son detectados cerca del nodo 100, donde se ubica el convertidor de electrónica de potencia, operando con un esquema PWM. Se observa que el %THD de voltaje se encuentra por debajo del 4%, mientras que para la corriente es menos del 7%. Se puede observar también que el porcentaje se reduce a 2% y 3% para el %THD de voltaje en los nodos cercanos al nodo 100, mientras que el %THD de corriente se reduce a un rango de entre 1% y 2%. Los niveles de %THD se reducen a valores mucho menores para los nodos mas alejados.

La Figura 5.9 muestra las formas de onda en el dominio del tiempo del voltaje en el nodo 25 obtenidas con la simulación de PSCAD (línea continua) y con el método PKSJ-QR (línea punteada). Se observa que la fase A presenta una depresión de voltaje de 32% durante el tiempo que dura la falla. En la Figura 5.10 se reporta un acercamiento de las formas de onda del voltaje en las tres fases. Se observa que la forma de onda obtenida con el método PKSJ-QR y con PSCAD son muy similares.

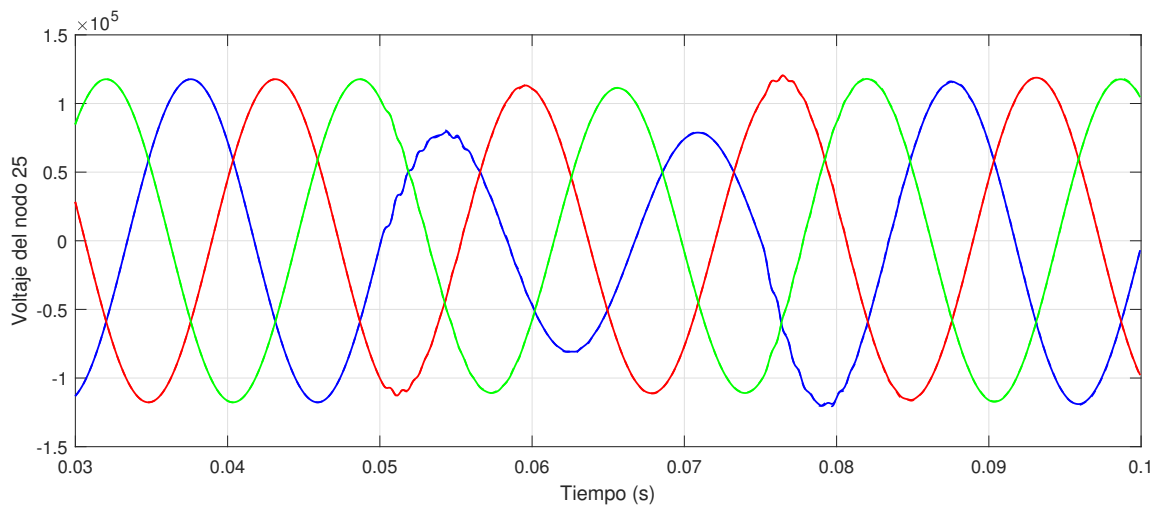


Figura 5.9: Transitorio del voltaje trifásico en el nodo 25, correspondiente al escenario C.

En la Figura 5.11 aparecen las formas de onda en el dominio del tiempo de la corriente en cada fase del nodo 25, comparando las respuestas del método PKSJ-QR y PS-

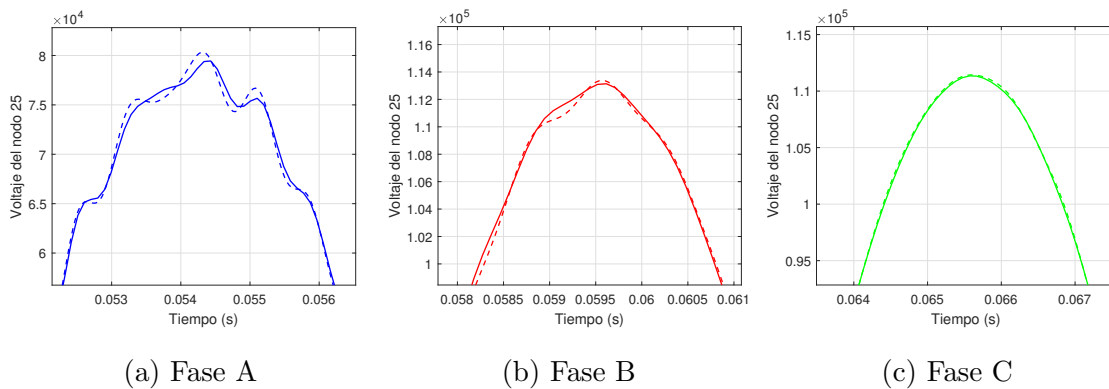


Figura 5.10: Detalle del voltaje en el nodo 25.

CAD. Se aprecia que al aplicar la falla las corrientes presentan oscilaciones que se sostienen durante el tiempo de la falla y aún después de que ésta se ha retirado. Las oscilaciones continúan durante un tiempo considerable, hasta regresar a la condición periódica de estado estable.

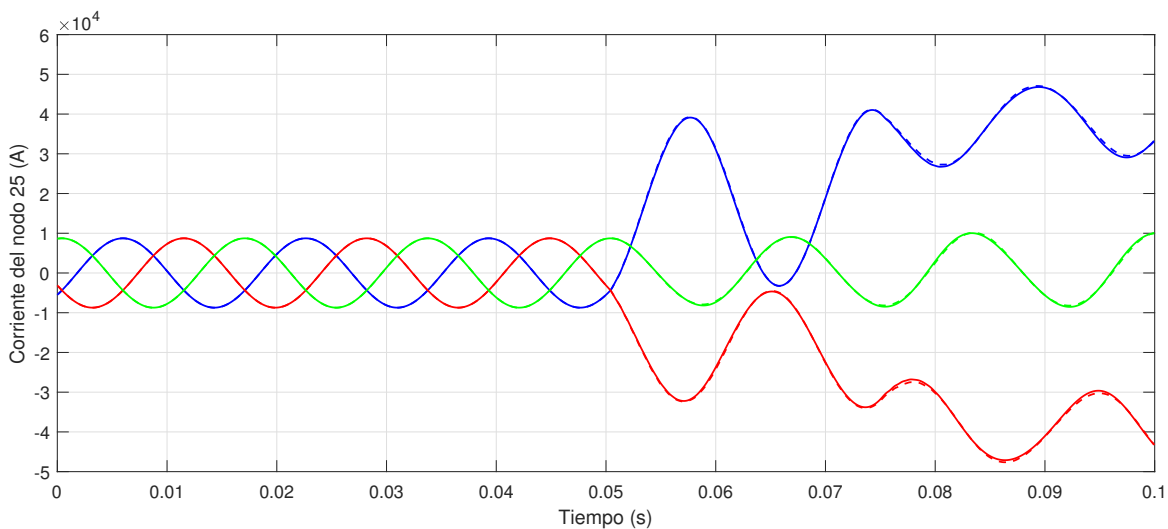


Figura 5.11: Forma de onda de la corriente en el nodo 25 al aplicar la falla dle escenario C.

En las Figuras 5.12 se presenta un acercamiento a las fases A, B y C de la corriente en el nodo 25. Se observan las pequeñas discrepancias entre las trayectorias obtenidas mediante PSCAD y PKSJ-QR. Sin embargo, las formas de onda obtenidas son muy similares.

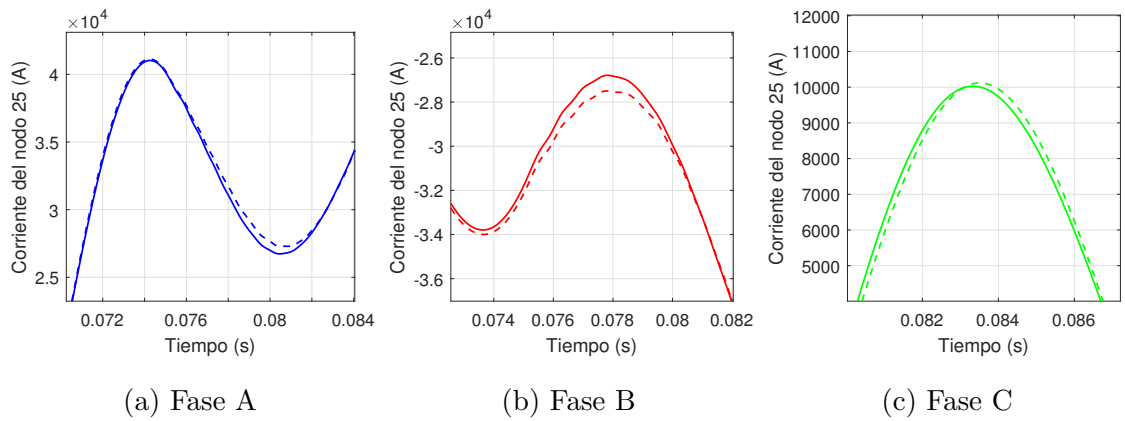


Figura 5.12: Detalles de la forma de onda de la corriente en el nodo 25.

5.4. Caso de estudio: sistema inestable

En este caso se utiliza la misma máquina síncrona del caso de la sección 5.1 operada en un escenario en el cual el sistema presenta un comportamiento inestable.

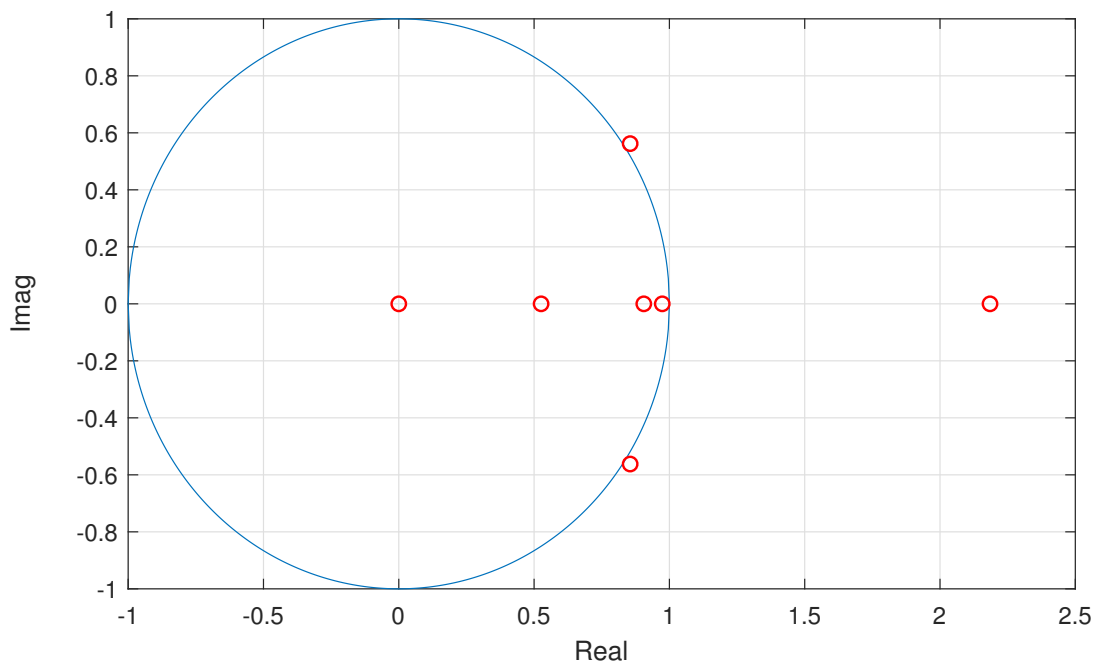


Figura 5.13: Multiplicadores de Floquet del generador síncrono del caso 5.1 en condiciones de operación inestable.

La simulación se inicia con el generador síncrono operando en condiciones iniciales de estado estable. Cuando $t = 0.05$ se aplica una falla trifásica en terminales de la máquina. La falla se remueve en $t = 0.5$. Al aplicar el método PKSJ-QR para acelerar la convergencia a la solución periódica de estado estable se observa que no se converge a una solución.

Los multiplicadores de Floquet calculados a partir de la matriz Hessenberg se presentan en la Figura 5.13. Se observa que tres de los multiplicadores están afuera del círculo unitario, por lo tanto se tienen una solución inestable.

Al aplicar el método de fuerza bruta se genera la forma de onda que corresponde a la corriente en por unidad de la fase A de la máquina síncrona de la Figura ???. Se aprecia que el estado estable de operación cambia cuando se aplica la falla trifásica, sin embargo, el estado estable no se recupera cuando se libera la falla. La forma de onda continúa con el mismo comportamiento durante un tiempo indefinido.

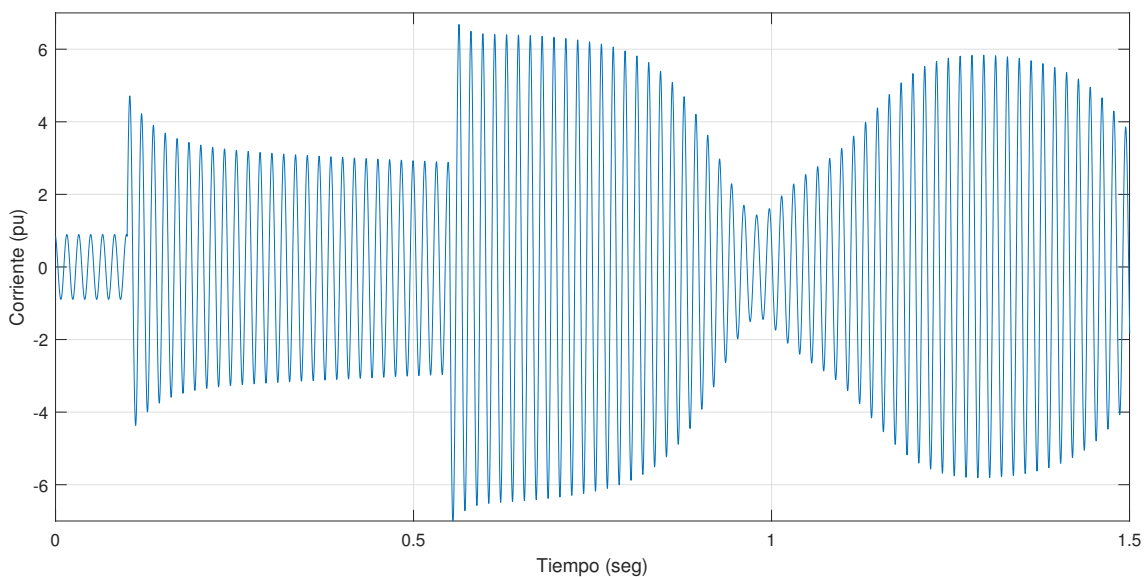


Figura 5.14: Corriente de la fase A de la máquina síncrona en condiciones de operación inestables.

5.5. Conclusiones

En este capítulo se presentaron los resultados de aplicar el método PKSJ-QR a tres casos de estudio. Al aplicar el método PKSJ-QR para calcular la estabilidad de la solución periódica de estado estable a los tres sistemas, se observa que converge a la solución de forma similar al método del mapa de Poincaré convencional, sin necesidad de formar el jacobiano del mapa de Poincaré. El cálculo de la solución periódica de estado estable requiere únicamente un conjunto de vectores ortogonales que se obtienen mediante el producto matriz-vector. En todos los casos el tiempo de cómputo es menor respecto al método del mapa de Poincaré estándar. Por ejemplo, para el sistema de prueba de mayor dimensión se tienen factores de aceleración máximos respecto al método del mapa de Poincaré de 7.5 y 9.0 con el método PKSJ y PKSJ-QR, respectivamente. Por lo tanto se puede apreciar que el método propuesto en este trabajo provee un factor de aceleración adicional en el orden del 20%. Además, la dimensión del subespacio de Krylov no es constante, sino que cambia en cada iteración Newton. Particularmente en el caso de estudio basado en el sistema IEEE 118-nodos la dimensión k es considerablemente menor que n , por lo que se tiene una mayor eficiencia en la convergencia a la solución.

El estudio de estabilidad de la solución periódica se lleva a cabo usando las propiedades de estabilidad del algoritmo de Arnoldi. Los k valores propios de la matriz Hessenberg, llamados valores de Ritz proveen una muy buena aproximación de los primeros k multiplicadores de Floquet dominantes del sistema, es decir, los mas cercanos al círculo unitario. El cálculo de estos valores representa un esfuerzo de cómputo mínimo, ya que la matriz Hessenberg surge de forma natural en el proceso del GMRES.

Los resultados de magnitud y ángulo de voltaje y corriente del sistema son muy similares a los resultados obtenidos mediante PSCAD. Estos resultados permiten obtener el porcentaje de distorsión armónica presente en las formas de onda, tanto de voltaje como de corriente de forma adecuada. De acuerdo a los resultados obtenidos, se observa que el método propuesto permite calcular también trayectorias transitorias. El método es capaz de detectar con precisión eventos transitorios ocurridos en presencia de fallas en la operación del sistema, y proporciona formas de onda muy similares a los resultados en PSCAD.

Capítulo 6

Conclusiones

Los métodos propuestos en las últimas décadas para determinar la solución periódica de estado estable y estudiar estabilidad en el dominio del tiempo han utilizado métodos directos, basados en eliminación Gaussiana, para resolver los sistemas de ecuaciones resultantes. En este sentido, el enfoque de investigación de esta tesis consistió en incorporar métodos iterativos en los métodos de solución en el dominio del tiempo. Los métodos iterativos poseen la ventaja de reducir el tamaño de los arreglos matriciales y el esfuerzo de cómputo, lo cual representa un buen complemento para los métodos de solución en el dominio del tiempo.

En esta tesis se presenta por primera vez un método basado en el subespacio de Krylov para estudiar la estabilidad de la solución periódica de estado estable de sistemas eléctricos de potencia. Este método se basa en la combinación de un método Newton para resolver las ecuaciones algebraicas no lineales que surgen de aplicar el método del mapa de Poincaré y el algoritmo GMRES basado en subespacios de Krylov para resolver de forma iterativa las ecuaciones de corrección del método Newton. De esta forma, el método propuesto, denominado método Poincaré-Krylov sin Jacobiano, resuelve iterativamente el sistema de ecuaciones y evita el cálculo de la matriz de transición de estados para acelerar la convergencia a la solución periódica de estado estable.

Enseguida se presentan las conclusiones principales de este trabajo y posibles trabajos futuros.

6.1. Conclusiones

En este trabajo de tesis se ha presentado el método PKSJ-QR para el estudio de la estabilidad de la solución periódica de sistemas eléctricos de potencia. Este método se basa en la creación de un subespacio de Krylov de dimensión k , en donde dicha dimensión del espacio de Krylov permite resolver el sistema de ecuaciones con cierta precisión pre-establecida. Por lo tanto, este método es particularmente eficiente cuando la dimensión del subespacio de Krylov k es mucho menor que la dimensión del sistema eléctrico.

Este nuevo enfoque calcula la solución periódica de estado estable mediante la aplicación del subespacio de Krylov basado en un algoritmo GMRES al método del mapa de Poincaré. Mientras que el método Newton se usa para resolver el sistema de ecuaciones resultante del método del mapa de Poincaré, el método GMRES resuelve las correcciones tipo Newton de forma iterativa. Es decir, el método PKSJ-QR posee una estructura de dos lazos iterativos anidados. Debido a que el enfoque iterativo basado en el subespacio de Krylov no requiere determinar el Jacobiano del mapa de Poincaré, el cálculo de la solución periódica de estado estable requiere únicamente un conjunto de vectores ortogonales que se obtienen mediante el producto matriz-vector. En todos los casos el tiempo de cómputo es menor respecto al método del mapa de Poincaré convencional. Por ejemplo, para el sistema de prueba de mayor dimensión se tienen factores de aceleración máximos respecto al método del mapa de Poincaré de 7.5 y 9.0 con el método PKSJ y PKSJ-QR, respectivamente. Por lo tanto se puede apreciar que el método propuesto en este trabajo provee un factor de aceleración adicional en el orden del 20 %.

La efectividad del método PKSJ-QR para determinar la solución periódica de estado estable se ha demostrado mediante el estudio de tres sistemas eléctricos no lineales de pequeña y mediana escala: una máquina síncrona conectada a un bus infinito, una versión modificada del sistema IEEE 9-nodos y el sistema IEEE 118-nodos modificado con presencia de no linealidades en máquinas rotatorias y convertidores de electrónica de potencia. Los resultados indican que el método PKSJ-QR converge de forma similar al método del mapa de Poincaré convencional. Además, los resultados obtenidos indican que la dimensión del subespacio de Krylov no es constante y varía en cada iteración del método Newton.

La validez de los resultados se demostró mediante la comparación con el método del mapa de Poincaré estándar y simulaciones obtenidas con PSCAD/EMTDC. Se observa que la solución obtenida con el método del subespacio de Krylov permite determinar adecuadamente no solo la solución periódica sino también las trayectorias transitorias.

Uno de los pasos importantes en el desarrollo del método PKSJ-QR consiste en la formación del subespacio de Krylov mediante el producto matriz-vector. En esta tesis, el producto matriz-vector se desarrolla mediante un esquema de discretización del sistema eléctrico en el tiempo continuo y la diferenciación del sistema discreto respecto de los parámetros del sistema. Se ha demostrado que utilizar este producto para formar los vectores ortogonales necesarios en GMRES se reduce el tiempo de cómputo del proceso, ya que requiere de un número menor de operaciones, respecto a otros métodos de solución.

El estudio de la estabilidad de la solución periódica de estado estable se realiza aplicando un enfoque nuevo y eficiente basado en el subespacio de Krylov y teoría de Floquet. Los multiplicadores de Floquet se determinan a partir de los valores de Ritz de la matriz de Hessenberg, la cual representa un sub-producto del proceso para calcular la solución periódica. Se ha demostrado que esta alternativa determina de forma precisa y con un mínimo de esfuerzo de cómputo los primeros k multiplicadores de Floquet dominantes y más cercanos al círculo unitario. Por lo tanto, las estimaciones de los multiplicadores de Floquet obtenidos a partir de la matriz de Hessenberg son útiles para determinar los puntos de bifurcación sobre el círculo unitario en donde la solución periódica se vuelve inestable.

6.2. Trabajos futuros

La implementación del método PKSJ-QR abre la posibilidad de realizar estudios de la estabilidad de la solución periódica de estado estable en el dominio del tiempo de sistemas eléctricos de potencia de gran escala, en el contexto de las redes eléctricas inteligentes. Algunos puntos a explorar a manera de trabajos futuros son:

- Utilizar GMRES con preconditionamiento. Generalmente los métodos de subespacios de Krylov convergen a la solución rápidamente sin preconditionamiento. Sin embargo, explorar esta opción y los diversos métodos de preconditionamiento que existen

podría contribuir a seguir mejorando la eficiencia del método en cuanto al esfuerzo de cómputo.

- Usar el producto matriz-vector utilizado en GMRES para resolver aquellos problemas donde se requiere una operación matricial similar dentro del algoritmo PKSJ-QR.
- Utilizar otros métodos propuestos en la literatura para realizar el producto matriz-vector en GMRES, así como proponer nuevas alternativas de solución de este producto.
- Explorar opciones que permitan definir con anticipación el tamaño del subespacio de Krylov y por consiguiente el número de valores de Ritz que se desea calcular.
- Aplicar el método PKSJ-QR para estudios de estabilidad de la solución periódica de estado estable a sistemas eléctricos de potencia que incorporen generadores de energías renovables.

Apéndice A

Modelo VBR de la máquina íncrona

En este trabajo se utiliza el modelo VBR de un generador síncrono cuyo rotor tiene un devanado de campo y dos devanados de amortiguamiento, el eje directo contiene los devanados fd y fq y el eje q comprende el devanado $lkq2$. El modelo consiste el siguiente sistema de 8 ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{dt}i_{abc} = \omega_b \left[\frac{-V_{abc} - \left[R''_{abcs} + \frac{1}{\omega_b} \dot{X}''_{abcs}(\theta_r) \right] i_{abcs} + e''_{abcs}}{X''_{abcs}} \right] \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{d}{dt}\psi_{fd} = \omega_b \left[-\frac{R'_{fd}}{X'_{lfd}}(\psi_{fd} - \psi_{md}) + V_f \right] \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{d}{dt}\psi_{kd} = \omega_b \left[-\frac{R'_{kd}}{X'_{lkd}}(\psi_{kd} - \psi_{md}) \right] \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{d}{dt}\psi_{kq2} = \omega_b \left[-\frac{R'_{kq2}}{X'_{lkq2}}(\psi_{kq2} - \psi_{mq}) \right] \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta\omega_r}{\omega_b} \right) = \frac{T_m - T_e}{2H} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{d}{dt}\delta = \omega_b \left(\frac{\Delta\omega_r}{\omega_b} \right) \quad (\text{A.6})$$

En espacio de estados el sistema de ecuaciones se representa como

$$\dot{x} = Ax + F(x) + Bu \quad (\text{A.7})$$

Expandiendo (A.7) se tiene

$$\frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{abc} \\ \Psi_{kq2} \\ \Psi_{fd} \\ \Psi_{kd} \\ \frac{\Delta\omega_r}{\omega_b} \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R'_{kq2}}{X'_{lkq2}} \left[\frac{X''_{mq}}{X'_{lkq2}} - 1 \right] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R'_{fd}}{X'_{lfd}} \left[\frac{X''_{md}}{X'_{lfd}} - 1 \right] & \frac{R'_{fd}}{X'_{lfd}} \frac{X''_{md}}{X'_{lkd}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R'_{kd}}{X'_{lkd}} \frac{X''_{md}}{X'_{lfd}} & \frac{R'_{kd}}{X'_{lkd}} \left[\frac{X''_{md}}{X'_{lkd}} - 1 \right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_{abc} \\ \Psi_{kq2} \\ \Psi_{fd} \\ \Psi_{kd} \\ \frac{\Delta\omega_r}{\omega_b} \\ \delta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{(R_{abcs} + X''_{abcs})i_{abcs} - e''_{abcs}}{X''_{abcs}} \\ \frac{R'_{kq2} X''_{mq} i_{qs}}{X'_{lkq2}} \\ \frac{R'_{fd} X''_{md} i_{ds}}{X'_{lfd}} \\ \frac{R'_{kd} X''_{md} i_{ds}}{X'_{lkd}} \\ \frac{T_e}{2H\omega_b} \\ 0 \end{bmatrix} + \text{diag} \begin{pmatrix} \frac{-1}{X''_{abcs}} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2H\omega_b\omega_r} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{abcs} \\ 0 \\ V_f \\ 0 \\ P_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

en donde se observa que la matriz A contiene la parte lineal del sistema, los elementos no lineales están en la matriz F y las entradas B .

Apéndice B

Solución detallada del caso de estudio 1 con el método PKSJ-QR

Al aplicar el método PKSJ-QR para el escenario A, el primer paso del algoritmo 3 consiste en definir un vector con las condiciones iniciales de las variables de estado \mathbf{x}_0 , el paso de integración M y el periodo T .

Una vez calculado el ciclo base, integrando el sistema de ecuaciones (A.8) un periodo se obtienen los vectores:

$$\mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} 8.4492e - 01 \\ -1.9720e - 01 \\ -6.4773e - 01 \\ -3.1530e - 01 \\ 1.2070e + 00 \\ 9.2356e - 01 \\ 5.5891e - 06 \\ 4.3365e - 01 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}(\mathbf{x}_j) = \begin{bmatrix} 8.4497e - 01 \\ -1.9705e - 01 \\ -6.4792e - 01 \\ -3.1531e - 01 \\ 1.2070e + 00 \\ 9.2354e - 01 \\ 6.7208e - 06 \\ 4.3369e - 01 \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}(t_0)$$

Se inicializa la iteración Newton con $j = 1$ y se definen las condiciones iniciales para la iteración GMRES:

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} -9.9931e-02 \\ 2.4169e-01 \\ -1.4176e-01 \\ 2.1876e-02 \\ -9.4696e-03 \\ -1.9980e-01 \\ -3.0094e-03 \\ -1.4630e-02 \end{bmatrix}, \quad \beta = \|\mathbf{r}_0\|_2 = 3.5946e-01, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2.7801e-01 \\ 6.7238e-01 \\ -3.9437e-01 \\ 6.0860e-02 \\ -2.6344e-02 \\ -5.5585e-01 \\ -8.3723e-03 \\ -4.0702e-02 \end{bmatrix}$$

La iteración GMRES inicia con $k = 1$. Se construyen los vectores ortogonales v_{k+1} y los vectores h_{k+1} en cada iteración k hasta que el residuo converge a una tolerancia al error especificada. Para cada iteración k las matrices \mathbf{V}_k y $\bar{\mathbf{H}}_k$ son:

Con $k = 1$

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} -2.7801e-01 \\ 6.7238e-01 \\ -3.9437e-01 \\ 6.0860e-02 \\ -2.6344e-02 \\ -5.5585e-01 \\ -8.3723e-03 \\ -4.0702e-02 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{H}}_1 = \begin{bmatrix} 0.4500 \\ 0.3258 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con $k = 2$

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} -0.2780 & 0.6447 \\ 0.6724 & 0.0532 \\ -0.3944 & -0.6979 \\ 0.0609 & -0.0621 \\ -0.0263 & 0.0405 \\ -0.5558 & 0.2130 \\ -0.0084 & 0.0095 \\ -0.0407 & 0.2087 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{H}}_2 = \begin{bmatrix} 0.4500 & -0.1267 \\ 0.3258 & -0.1513 \\ 0 & 0.0667 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con $k = 3$

$$\mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} -0.2780 & 0.6447 & -0.1981 \\ 0.6724 & 0.0532 & 0.3224 \\ -0.3944 & -0.6979 & -0.1242 \\ 0.0609 & -0.0621 & 0.4742 \\ -0.0263 & 0.0405 & 0.0454 \\ -0.5558 & 0.2130 & 0.6578 \\ -0.0084 & 0.0095 & 0.0230 \\ -0.0407 & 0.2087 & -0.4257 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{H}}_3 = \begin{bmatrix} 0.4500 & -0.1267 & -0.2798 \\ 0.3258 & -0.1513 & -0.4200 \\ 0 & 0.0667 & 0.1640 \\ 0 & 0 & 0.0112 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

⋮

Con $k = 8$

$$\mathbf{V}_8 = \begin{bmatrix} -0.2780 & 0.6447 & -0.1981 & -0.3479 & 0.0605 & -0.0055 & -0.0991 & 0.5774 \\ 0.6724 & 0.0532 & 0.3224 & 0.3250 & -0.0397 & -0.0200 & 0.0153 & 0.5774 \\ -0.3944 & -0.6979 & -0.1242 & 0.0229 & -0.0208 & 0.0254 & 0.0838 & 0.5773 \\ 0.0609 & -0.0621 & 0.4742 & -0.5943 & 0.1070 & 0.1308 & 0.6211 & -0.0000 \\ -0.0263 & 0.0405 & 0.0454 & -0.0214 & -0.6257 & 0.7701 & -0.1029 & 0.0000 \\ -0.5558 & 0.2130 & 0.6578 & 0.4571 & -0.0068 & -0.0586 & 0.0244 & -0.0000 \\ -0.0084 & 0.0095 & 0.0230 & -0.1436 & -0.7673 & -0.6150 & 0.1086 & -0.0000 \\ -0.0407 & 0.2087 & -0.4257 & 0.4355 & -0.0516 & 0.0843 & 0.7577 & -0.0000 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_8 = \begin{bmatrix} 0.4500 & -0.1267 & -0.2798 & -1.4383 & -5.4290 & -3.7920 & 0.5503 & 0.0000 \\ 0.3258 & -0.1513 & -0.4200 & 3.8192 & 23.1064 & 18.7397 & -1.7959 & -0.0000 \\ 0 & 0.0667 & 0.1640 & -1.3818 & -7.1295 & -5.5835 & 1.0215 & -0.0000 \\ 0 & 0 & 0.0112 & -1.2165 & -7.3728 & -5.8318 & 0.2826 & 0.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2515 & 1.5072 & 1.1895 & -0.0653 & -0.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0256 & 0.0245 & 0.0168 & -0.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0073 & 0.0569 & 0.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0.0947 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

Eliminando la última fila de $\bar{\mathbf{H}}_8$ se obtiene \mathbf{H} . Al aplicar rotaciones Givens a \mathbf{H} se obtiene la matriz triangular superior:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.5556 & -0.1914 & -0.4729 & 1.0744 & 9.1515 & 7.9170 & -0.6074 & -0.0000 \\ 0 & 0.0823 & 0.2361 & -3.4275 & -18.6146 & -14.7258 & 1.8695 & 0.0000 \\ 0 & 0 & 0.0479 & -2.5987 & -14.9150 & -11.8927 & 0.8840 & 0.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6726 & 4.2570 & 3.3449 & -0.0960 & -0.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0945 & 0.0700 & 0.0351 & -0.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0093 & 0.0496 & 0.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0288 & 0.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0947 \end{bmatrix}$$

Con estas matrices se calcula el vector \mathbf{y}_k que minimiza (3.30) y se calcula la corrección Newton $\Delta \mathbf{x}$

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 0.7233 \\ -1.3218 \\ -0.1756 \\ -0.3892 \\ 0.7507 \\ -0.8628 \\ 0.1114 \\ -0.0000 \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} 0.0010 \\ 0.0248 \\ -0.0258 \\ -0.0045 \\ -0.0108 \\ -0.0053 \\ -0.0000 \\ 0.0067 \end{bmatrix}$$

La solución para la primera iteración Newton es:

$$\mathbf{x}_{j+1} = \begin{bmatrix} 0.8459 \\ -0.1724 \\ -0.6735 \\ -0.3198 \\ 1.1963 \\ 0.9183 \\ -0.0000 \\ 0.4403 \end{bmatrix}$$

El máximo error $|\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j| = 7.3656e - 06$ es mayor que la tolerancia especificada, por lo que se inicia una nueva iteración Newton. El proceso se repite 2 iteraciones Newton más. La solución en la última iteración Newton con $j = 3$ es:

$$\mathbf{x}_{j+1} = \begin{bmatrix} 0.8459 \\ -0.1723 \\ -0.6737 \\ -0.3199 \\ 1.1962 \\ 0.9182 \\ -0.0000 \\ 0.4404 \end{bmatrix}$$

Apéndice C

Datos del sistema IEEE de 9 nodos

Los datos de las líneas del sistema de 9 nodos del IEEE se muestran en la Tabla C.1, mientras que los datos de las cargas están en la Tabla C.2. La potencia base utilizada es 100 MVA.

Tabla C.1: Datos de líneas del sistema de 9 nodos.

Linea		R[pu/m]	X[pu/m]	B[pu/m]
Nodo de salida	Nodo de entrada			
4	5	0.0100	0.0680	0.0880
4	6	0.0170	0.0920	0.0790
5	7	0.0320	0.1610	0.1530
6	9	0.0390	0.1738	0.1790
7	8	0.0085	0.0576	0.0745
8	9	0.0119	0.1008	0.1045

Tabla C.2: Datos de las cargas del sistema de 9 nodos

Bus	R(pu)	x(pu)
5	0.8000	2.0000
6	1.1111	3.3333
8	1.0000	2.8571

Tabla C.3: Datos de los generadores.

Bus	V(pu)	δ (grados)	P(pu)	Q(pu)
1	1.040	0	0.7163	0.2791
2	1.025	9.3507	1.6300	0.0490
3	1.025	5.1420	0.8500	-0.1145

Apéndice D

Datos del sistema IEEE de 118 nodos

En la Tabla D.1 se muestra la configuración de 22 generadores del sistema IEEE 118-nodos original. Los datos de algunas líneas del sistema IEEE 118-nodos se presentan en la Tabla D.2.

Tabla D.2: Datos de las líneas de transmisión del sistema IEEE 118-nodos

Línea	Nodo de salida	Nodo de entrada	R (pu)	X (pu)	B (pu)
1	1	2	0.0303	0.0999	0.0254
2	1	3	0.0129	0.0424	0.01082
3	4	5	0.00176	0.00798	0.0021
4	3	5	0.0241	0.108	0.0284
5	5	6	0.0119	0.054	0.01426
6	6	7	0.00459	0.0208	0.0055
7	8	9	0.00244	0.0305	1.162
8	8	5	0	0.0267	0
9	9	10	0.00258	0.0322	1.23
10	4	11	0.0209	0.0688	0.01748
11	5	11	0.0203	0.0682	0.01738

12	11	12	0.00595	0.0196	0.00502
13	2	12	0.0187	0.0616	0.01572
14	3	12	0.0484	0.16	0.0406
15	7	12	0.00862	0.034	0.00874
16	11	13	0.02225	0.0731	0.01876
17	12	14	0.0215	0.0707	0.01816
18	13	15	0.0744	0.2444	0.06268
19	14	15	0.0595	0.195	0.0502
20	12	16	0.0212	0.0834	0.0214
21	15	17	0.0132	0.0437	0.0444
22	16	17	0.0454	0.1801	0.0466
23	17	18	0.0123	0.0505	0.01298
24	18	19	0.01119	0.0493	0.01142
25	19	20	0.0252	0.117	0.0298
26	15	19	0.012	0.0394	0.0101
27	20	21	0.0183	0.0849	0.0216
28	21	22	0.0209	0.097	0.0246
29	22	23	0.0342	0.159	0.0404
30	23	24	0.0135	0.0492	0.0498
31	23	25	0.0156	0.08	0.0864
32	26	25	0	0.0382	0
33	25	27	0.0318	0.163	0.1764
34	27	28	0.01913	0.0855	0.0216
35	28	29	0.0237	0.0943	0.0238
36	30	17	0	0.0388	0
37	8	30	0.00431	0.0504	0.514
38	26	30	0.00799	0.086	0.908
39	17	31	0.0474	0.1563	0.0399

40	29	31	0.0108	0.0331	0.0083
41	23	32	0.0317	0.1153	0.1173
42	31	32	0.0298	0.0985	0.0251
43	27	32	0.0229	0.0755	0.01926
44	15	33	0.038	0.1244	0.03194
45	19	34	0.0752	0.247	0.0632
46	35	36	0.00224	0.0102	0.00268
47	35	37	0.011	0.0497	0.01318
48	33	37	0.0415	0.142	0.0366
49	34	36	0.00871	0.0268	0.00568
50	34	37	0.00256	0.0094	0.00984
51	38	37	0	0.0375	0
52	37	39	0.0321	0.106	0.027
53	37	40	0.0593	0.168	0.042
54	30	38	0.00464	0.054	0.422
55	39	40	0.0184	0.0605	0.01552
56	40	41	0.0145	0.0487	0.01222
57	40	42	0.0555	0.183	0.0466
58	41	42	0.041	0.135	0.0344
59	43	44	0.0608	0.2454	0.06068
60	34	43	0.0413	0.1681	0.04226
61	44	45	0.0224	0.0901	0.0224
62	45	46	0.04	0.1356	0.0332
63	46	47	0.038	0.127	0.0316
64	46	48	0.0601	0.189	0.0472
65	47	49	0.0191	0.0625	0.01604
66	42	49	0.0715	0.323	0.086
67	42	49	0.0715	0.323	0.086

68	45	49	0.0684	0.186	0.0444
69	48	49	0.0179	0.0505	0.01258
70	49	50	0.0267	0.0752	0.01874
71	49	51	0.0486	0.137	0.0342
72	51	52	0.0203	0.0588	0.01396
73	52	53	0.0405	0.1635	0.04058
74	53	54	0.0263	0.122	0.031
75	49	54	0.073	0.289	0.0738
76	49	54	0.0869	0.291	0.073
77	54	55	0.0169	0.0707	0.0202
78	54	56	0.00275	0.00955	0.00732
79	55	56	0.00488	0.0151	0.00374
80	56	57	0.0343	0.0966	0.0242
81	50	57	0.0474	0.134	0.0332
82	56	58	0.0343	0.0966	0.0242
83	51	58	0.0255	0.0719	0.01788
84	54	59	0.0503	0.2293	0.0598
85	56	59	0.0825	0.251	0.0569
86	56	59	0.0803	0.239	0.0536
87	55	59	0.04739	0.2158	0.05646
88	59	60	0.0317	0.145	0.0376
89	59	61	0.0328	0.15	0.0388
90	60	61	0.00264	0.0135	0.01456
91	60	62	0.0123	0.0561	0.01468
92	61	62	0.00824	0.0376	0.0098
93	63	59	0	0.0386	0
94	63	64	0.00172	0.02	0.216
95	64	61	0	0.0268	0

96	38	65	0.00901	0.0986	1.046
97	64	65	0.00269	0.0302	0.38
98	49	66	0.018	0.0919	0.0248
99	49	66	0.018	0.0919	0.0248
100	62	66	0.0482	0.218	0.0578
101	62	67	0.0258	0.117	0.031
102	65	66	0	0.037	0
103	66	67	0.0224	0.1015	0.02682
104	65	68	0.00138	0.016	0.638
105	47	69	0.0844	0.2778	0.07092
106	49	69	0.0985	0.324	0.0828
107	68	69	0	0.037	0
108	69	70	0.03	0.127	0.122
109	24	70	0.00221	0.4115	0.10198
110	70	71	0.00882	0.0355	0.00878
111	24	72	0.0488	0.196	0.0488
112	71	72	0.0446	0.18	0.04444
113	71	73	0.00866	0.0454	0.01178
114	70	74	0.0401	0.1323	0.03368
115	70	75	0.0428	0.141	0.036
116	69	75	0.0405	0.122	0.124
117	74	75	0.0123	0.0406	0.01034
118	76	77	0.0444	0.148	0.0368
119	69	77	0.0309	0.101	0.1038
120	75	77	0.0601	0.1999	0.04978
121	77	78	0.00376	0.0124	0.01264
122	78	79	0.00546	0.0244	0.00648
123	77	80	0.017	0.0485	0.0472

124	77	80	0.0294	0.105	0.0228
125	79	80	0.0156	0.0704	0.0187
126	68	81	0.00175	0.0202	0.808
127	81	80	0	0.037	0
128	77	82	0.0298	0.0853	0.08174
129	82	83	0.0112	0.03665	0.03796
130	83	84	0.0625	0.132	0.0258
131	83	85	0.043	0.148	0.0348
132	84	85	0.0302	0.0641	0.01234
133	85	86	0.035	0.123	0.0276
134	86	87	0.02828	0.2074	0.0445
135	85	88	0.02	0.102	0.0276
136	85	89	0.0239	0.173	0.047
137	88	89	0.0139	0.0712	0.01934
138	89	90	0.0518	0.188	0.0528
139	89	90	0.0238	0.0997	0.106
140	90	91	0.0254	0.0836	0.0214
141	89	92	0.0099	0.0505	0.0548
142	89	92	0.0393	0.1581	0.0414
143	91	92	0.0387	0.1272	0.03268
144	92	93	0.0258	0.0848	0.0218
145	92	94	0.0481	0.158	0.0406
146	93	94	0.0223	0.0732	0.01876
147	94	95	0.0132	0.0434	0.0111
148	80	96	0.0356	0.182	0.0494
149	82	96	0.0162	0.053	0.0544
150	94	96	0.0269	0.0869	0.023
151	80	97	0.0183	0.0934	0.0254

152	80	98	0.0238	0.108	0.0286
153	80	99	0.0454	0.206	0.0546
154	92	100	0.0648	0.295	0.0472
155	94	100	0.0178	0.058	0.0604
156	95	96	0.0171	0.0547	0.01474
157	96	97	0.0173	0.0885	0.024
158	98	100	0.0397	0.179	0.0476
159	99	100	0.018	0.0813	0.0216
160	100	101	0.0277	0.1262	0.0328
161	92	102	0.0123	0.0559	0.01464
162	101	102	0.0246	0.112	0.0294
163	100	103	0.016	0.0525	0.0536
164	100	104	0.0451	0.204	0.0541
165	103	104	0.0466	0.1584	0.0407
166	103	105	0.0535	0.1625	0.0408
167	100	106	0.0605	0.229	0.062
168	104	105	0.00994	0.0378	0.00986
169	105	106	0.014	0.0547	0.01434
170	105	107	0.053	0.183	0.0472
171	105	108	0.0261	0.0703	0.01844
172	106	107	0.053	0.183	0.0472
173	108	109	0.0105	0.0288	0.0076
174	103	110	0.03906	0.1813	0.0461
175	109	110	0.0278	0.0762	0.0202
176	110	111	0.022	0.0755	0.02
177	110	112	0.0247	0.064	0.062
178	17	113	0.00913	0.0301	0.00768
179	32	113	0.0615	0.203	0.0518

180	32	114	0.0135	0.0612	0.01628
181	27	115	0.0164	0.0741	0.01972
182	114	115	0.0023	0.0104	0.00276
183	68	116	0.00034	0.00405	0.164
184	12	117	0.0329	0.14	0.0358
185	75	118	0.0145	0.0481	0.01198

Tabla D.1: Configuración de algunos generadores del sistema IEEE 118-nodos

Nodo	V (pu)	δ (grados)	P (pu)	Q (pu)
31	0.9989	-24.69	0.30	0.12
113	1.0206	-21.32	1.00	-0.3000
32	1.0121	-23.46	1.00	0.3000
12	1.0249	-25.37	3.00	1.2000
72	1.0200	-8.060	0.30	-0.0776
65	1.0400	0.000	5.47	0.3994
34	1.0188	-16.52	0.30	0.1500
73	1.0321	-2.630	0.30	0.1200
70	1.0177	-2.880	0.80	0.3200
36	1.0226	-16.10	1.00	0.3000
46	1.0200	-1.770	1.00	-0.0639
76	0.9980	-14.83	0.30	0.3000
77	1.0084	3.550	1.00	0.3000
40	0.9980	-14.83	0.30	0.1500
80	1.0200	4.620	3.00	0.2613
92	1.0300	21.55	3.00	-0.3155
110	1.0270	24.08	0.50	0.2300
100	1.0300	18.78	3.00	0.6672
54	1.0300	-4.150	2.50	0.7249
112	1.0400	26.74	1.00	0.0360
105	1.0172	20.41	1.00	0.2300
107	1.0196	19.25	0.20	0.1500

Referencias

- [Alves99] Alves, A. B., Asada, E. N., y Monticelli, A. Critical evaluation of direct and iterative methods for solving $ax=b$ systems in power flow calculations and contingency analysis. *En Proceedings of the 21st International Conference on Power Industry Computer Applications. Connecting Utilities. PICA 99. To the Millennium and Beyond (Cat. No.99CH36351)*, págs. 15–21. 1999.
- [Araujo17] Araujo, M. H. D., Rios, A. M., y Lemus, E. M. Periodic steady state of power networks using limit cycle extrapolation, spline interpolation and parallel processing based on gpus. *En 2017 International Conference on Computational Science and Computational Intelligence (CSCI)*, págs. 1606–1611. 2017. doi:10.1109/CSCI.2017.279.
- [Arnoldi51] Arnoldi, W. E. The principle of minimized iteration in the solution of the matrix eigenvalue problem. *Quart. Appl. Math*, 1951.
- [Brambilla09] Brambilla, A., Gruosso, G., y Gajani, G. S. Determination of floquet exponents for small-signal analysis of nonlinear periodic circuits. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 28(3):447–451, 2009.
- [Chang95] Chang, H.-D., Chia-Chi Chu, y Cauley, G. Direct stability analysis of electric power systems using energy functions: theory, applications, and perspective. *Proceedings of the IEEE*, 83(11):1497–1529, 1995.

- [Chaniotis00] Chaniotis, D. y Pai, M. A. Iterative solver techniques in the dynamic simulation of power systems. *En 2000 Power Engineering Society Summer Meeting (Cat. No.00CH37134)*, tomo 1, págs. 609–613 vol. 1. 2000.
- [Chiang89] Chiang, H. . Study of the existence of energy functions for power systems with losses. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 36(11):1423–1429, 1989.
- [Chua75] Chua, L. y Lin, P. *Computer-aided analysis of electronic circuits: algorithms and computational techniques*. Prentice-Hall,, New Jersey, 1975.
- [Contreras-Aguilar11] Contreras-Aguilar, L. y Garcia, N. Stability analyses of a vft park using a sequential continuation scheme and the limit cycle method. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 26(3):1499–1507, 2011.
- [Dag03] Dag, H. y Semlyen, A. A new preconditioned conjugate gradient power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, 18(4):1248–1255, 2003.
- [Dasgupta12] Dasgupta, S., Paramasivam, M., Vaidya, U., y Ajjarapu, V. Pmu-based model-free approach for short term voltage stability monitoring. *En 2012 IEEE Power and Energy Society General Meeting*, págs. 1–8. 2012.
- [Decker96] Decker, I. C., Falcao, D. M., y Kaszkurewicz, E. Conjugate gradient methods for power system dynamic simulation on parallel computers. *IEEE Transactions on Power Systems*, 11(3):1218–1227, 1996.
- [Flueck98] Flueck, A. J. y Hsiao-Dong Chiang. Solving the nonlinear power flow equations with an inexact newton method using gmres. *IEEE Transactions on Power Systems*, 13(2):267–273, 1998.

- [Galiana94] Galiana, F. D., Javidi, H., y McFee, S. On the application of a pre-conditioned conjugate gradient algorithm to power network analysis. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9(2):629–636, 1994.
- [Garcia13] Garcia, N. y Acha, E. Periodic steady-state solution of a synchronous generator based on a voltage-behind-reactance formulation and the poincaré map method. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, 51:311 – 320, 2013.
- [Godínez-Delgado20] Godínez-Delgado, J. C., Medina-Rios, A., y Tapia-Sánchez, R. A time-domain companion-circuit newton-based methodology applied to the harmonic analysis of electrical networks with pv systems. *IEEE Access*, 8:129108–129122, 2020. doi:10.1109/ACCESS.2020.3005671.
- [Krause13] Krause, P., Wasynczuk, O., Sudhoff, S., y Pekarek, S. *Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*. IEEE Press Series on Power Engineering. Wiley, 2013.
- [Kundur94] Kundur, P. *Power System Stability and Control*. Electric Power Research Institute, Power System Engineering Series. McGraw-Hill, 1994.
- [Parker89] Parker, T. S. y Chua, L. O. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag, 1ª ed^{ón}., 1989.
- [Pekarek98] Pekarek, S. D., Wasynczuk, O., y Hegner, H. J. An efficient and accurate model for the simulation and analysis of synchronous machine/converter systems. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 13(1):42–48, 1998.
- [Poincare99] Poincare, H. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*. Gauthier-Villars, París, 1899.
- [Psc18] *IEEE 118 Bus System*, 2018. https://www.pscad.com/uploads/knowledge_base/ieee_118_bus_technical_note.pdf.

- [Ramirez11] Ramirez, J. S., Barcenas, E., Medina, A., y Cardenas, V. Steady-state and dynamic state-space model for fast and efficient solution and stability assessment of asds. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 58(7):2836–2847, 2011.
- [Saad03] Saad, Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM, 2^a ed^{ón}., 2003.
- [Schultz86] Schultz, M. H. y Saad, Y. Gmres: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM, Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7:856–869, 1986.
- [Semlyen95] Semlyen, A. y Medina, A. Computation of the periodic steady state in systems with nonlinear components using a hybrid time and frequency domain methodology. *IEEE Transactions on Power Systems*, 10(3):1498–1504, 1995.
- [Semlyen96] Semlyen, A. Fundamental concepts of a krylov subspace power flow methodology. *IEEE Transactions on Power Systems*, 11(3):1528–1537, 1996.
- [Telichevesky95] Telichevesky, R., Kundert, K., y White, J. Efficient steady-state analysis based on matrix-free krylov-subspace methods. *En 32nd Design Automation Conference*, págs. 480–484. 1995.
- [Traversa08] Traversa, F. L., Bonani, F., y Guerrieri, S. D. A frequency-domain approach to the analysis of stability and bifurcations in nonlinear systems described by differential-algebraic equations. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 36:421–439, 2008.
- [Trefethen97] Trefethen, L. N. *Numerical Linear Algebra*. SIAM, 1^a ed^{ón}., 1997.
- [Wang16] Wang, G., Liu, C., Patel, M., y Farantatos, E. Pmu-based monitoring of power system stability incorporating load and voltage dy-

- namics. *En 2016 IEEE Power and Energy Society General Meeting (PESGM)*, págs. 1–5. 2016.
- [Xu13] Xu, W. y Li, W. Efficient preconditioners for newton-gmres method with application to power flow study. *IEEE Transactions on Power Systems*, 28(4):4173–4180, 2013.
- [Yan11] Yan, J., Liu, C., y Vaidya, U. Pmu-based monitoring of rotor angle dynamics. *IEEE Transactions on Power Systems*, 26(4):2125–2133, 2011.
- [Ying Chen06] Ying Chen y Chen Shen. A jacobian-free newton-gmres(m) method with adaptive preconditioner and its application for power flow calculations. *IEEE Transactions on Power Systems*, 21(3):1096–1103, 2006.
- [Yu14] Yu, Z., Huang, S., Shi, L., y Chen, Y. Gpu-based jfng method for power system transient dynamic simulation. *En 2014 International Conference on Power System Technology*, págs. 969–975. 2014. doi: 10.1109/POWERCON.2014.6993929.