

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO



INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**MASA DE MESONES Y BARIONES: UN TRATAMIENTO
UNIFICADO.**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA:
GUSTAVO PAREDES TORRES

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ADNAN BASHIR



CODIRECTOR DE TESIS:
DRA. LAURA XIOMARA GUTIÉRREZ GUERRERO

A mis padres.

Agradecimientos

Al pueblo de México que por medio de su trabajo, organismos como el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología en México, CONACYT, subsiste y realiza sus funciones. Gracias por el apoyo recibido estos dos años, en la realización de mis estudios de postgrado. Al Instituto de Física y Matemáticas, IFM, dependiente de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, UMSNH, por brindarme su apoyo para mis estudios de postgrado. Un agradecimiento especial a la Dra. Laura Xiomara Gutiérrez Guerrero y al Dr. Adnan Bashir por todo su apoyo y paciencia durante la elaboración de este proyecto de tesis. A mis padres por ser un gran apoyo en la vida. A mis compañeros y amigos por su apoyo y tiempo, en especial a Javier e Iván. Y a toda mi familia espiritual y de sangre.

Morelia MEX., 19 de febrero de 2021

Resumen

Este trabajo muestra cómo las masas de hadrones compuestos por quarks u , d , s , c y b se calculan en un modelo llamado Interacción de contacto (CI). La base matemática para este análisis se implementa mediante el uso de CI en las ecuaciones de Schwinger-Dyson (SDE) y las ecuaciones de Bethe-Salpeter (BS) para mesones y diquarks. Posteriormente este modelo se implementó en la ecuación de Faddeev para calcular la masa de los bariones utilizando una aproximación quark-diquark. Este estudio requiere el cálculo de las masas de las correlaciones de diquark, que se infieren resolviendo las ecuaciones de BS para los mesones correspondientes. Los diquarks son correlaciones quark-quark que se utilizan de forma novedosa. Los extensos estudios teóricos y experimentales de bariones que contienen quarks c y b han sido una fuente de investigación vigorosa en los últimos años. Actualmente existen programas experimentales activos en varios laboratorios (LHCb, BELLE, PANDA, JLAB) para estudiar hadrones pesados, sus masas, tiempos de vida y desintegraciones débiles. Nuestros resultados están de acuerdo con los datos experimentales existentes siempre que se pueda hacer una comparación, así como con las predicciones de otros enfoques teóricos razonables.

Palabras clave: Quark, mesón, diquark, barión, Faddeev.

Abstract

This work shows how the masses of hadrons composed of quarks u , d , s , c and b are calculated in a model called Contact Interaction (CI). The mathematical basis for this analysis is implemented through the use of CI in the Schwinger-Dyson equations (SDE) and the Bethe-Salpeter (BS) equations for mesons and diquarks. Later this model was implemented in the Faddeev equation to calculate the mass of the baryons using a quark-diquark approximation. This study requires the calculation of the masses of the diquark correlations, which are inferred by solving the BS equations for the corresponding mesons. Diquarks are quark-quark correlations used in a novel way. Extensive theoretical and experimental studies of baryons containing c and b quarks have been a source of vigorous research in recent years. Currently there are ongoing experimental programs active in various laboratories (LHCb, BELLE, PANDA, JLAB) to study heavy hadrons, their masses, lifetimes and weak decays. Our results are in agreement with existing experimental data whenever a comparison can be made, as well as with the predictions of other reasonable theoretical approaches.

Introducción

La Cromodinámica Cuántica (QCD por sus siglas en inglés) es la parte del Modelo Estándar de física de partícula (SM por sus siglas en inglés) que estudia las interacciones fuertes; interacciones que gobiernan la física nuclear/ hadrónica y que dan la mayor parte de la masa de la materia visible, donde los quarks y gluones son los grados elementales de libertad. Sin embargo, solo hadrones, como estados ligados de quarks y gluones, aparecen como partículas observables dentro de los laboratorios experimentales. Por este hecho, un estudio profundo de las propiedades de los hadrones es de gran importancia para entender la dinámica de quarks y gluones dentro de QCD. La herramienta que se utilizará en este trabajo para estudiar propiedades y estructura de hadrones es una combinación de ecuaciones de Schwinger-Dyson (SDE por sus siglas en inglés), las cuales son consideradas las ecuaciones de movimiento de una teoría cuántica de campos, de ecuaciones de Bethe-Salpeter (BS) y Faddeev, que describen a los hadrones como estados ligados de quarks. Este conjunto de ecuaciones conforman un método no perturbativo de QCD (también se pueden estudiar en teoría de perturbaciones) y nos proporcionan acceso a un rango completo de la escala de energías (ultravioleta e infrarroja), convirtiéndose en una herramienta importante para el estudio de la física hadrónica.

Quarks y gluones adquieren masa de manera efectiva y dinámica dentro de los hadrones, fenómeno conocido como ruptura dinámica de simetría quiral (DCSB por sus siglas en inglés), el 98 % de la masas visible del universo se debe a este mecanismo. La QCD es la parte del Modelo Estándar de física de partícula (SM por sus siglas en inglés) que estudia las interacciones fuertes; interacciones que gobiernan la física nuclear/ hadrónica y que dan la mayor parte de la masa de la materia visible. Una manera de abordar el estudio de QCD a nivel de quarks es a través de SDE: exactas, no perturbativas e invariantes de Poincaré; consistentes con confinamiento, DCSB y también QCD perturbativa. Para poder extraer información de la torre infinita de ecuaciones de las SDE y BS debemos buscar una forma de truncarlas, es decir, proponer la forma de algunas de las partes de la SDE, en este caso para el propagador del quark y el vértice quark-gluon. La forma que se utilice debe ser tal que no afecte la física tras las ecuaciones que se van a resolver. El modelo de Interacción de Contacto (CI por sus siglas en inglés) es un tratamiento vector $\times$ vector en donde se regularizan las divergencias ultravioletas para preservar las simetrías. Con este modelo se calculan las masas de los mesones y sus parejas diquarks para posteriormente calcular las de los bariones utilizando la ecuación de Faddeev. Los estudios han proporcionado fuertes indicios de que las correlaciones de quark-quark como diquark juegan un papel crucial en la física de hadrones. La teoría indica que la aparición de tales correlaciones es una consecuencia necesaria de la ruptura de la simetría quiral dinámica. La ecuación de Faddeev es una ecuación que describe, a la vez, todas las interacciones posibles en un sistema de tres partículas en una formulación mecánica completamente cuántica. Se pueden resolver de forma iterativa, en general, necesitan como entrada la descripción de la interacción entre las partículas constituyentes. En la aproximación de Faddeev, podemos despreciar a la interacción entre tres partículas. En ésta aproximación, podemos considerar interacción únicamente entre dos partículas individuales. Las amplitudes de Faddeev que describen tres partículas de espín-1/2, tienen 64 estructuras de Dirac, pero utilizando un modelo quark-diquark se reduce a 8 estructuras de Dirac las cuales se calculan utilizando las amplitudes de BS en el modelo CI. Se muestran los resultados de los mesones comparados con los valores experimentales para después calcular las propiedades de los diquarks en el modelo CI, como no se tiene con que comparar estos valores la forma de corroborar su veracidad es al calcular las masas de los bariones y compararla con otros enfoques y algunos valores experimentales. Se muestran buenos resultados para la masa de los bariones que están de acuerdo con varios otros enfoques y muestran que los resultados para los diquarks son correctos.

En la tabla {1} se presenta un listado de los hadrones calculados con el modelo CI.

Mesones	Diquarks
Pseudoescalares	Escalares

Tabla 1: Resultados en GeV de los hadrones obtenidos con el modelo CI.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	III
Abstract	V
Introducción	VII
1. Hadrones	3
1.1. Simetría de isospín	3
1.2. El Grupo SU(3)	7
1.3. mesones en SU(3)	11
1.4. Bariones en SU(3)	15
1.5. Masas y Ruptura de Simetría	16
1.6. Relación Entre Masas de Gell-Mann - Okubo	18
1.7. Simetría de Paridad	20
1.8. Conjugación de la Carga	21
1.9. SU(4)	22
2. Modelo de Interacción de Contacto	25
2.1. Ecuación de Schwinger-Dyson y Bethe-Salpeter	25
2.2. Interacción de Contacto y Aproximación Arcoíris	27
2.3. Masa Vestida de los Quarks	31
2.4. Identidad Vector-Axial de Ward-Green-Takahashi	32
2.5. Corolario de la Identidad Axial Ward-Green-Takahashi	35
2.6. Clasificación de las Amplitudes de BS	41
3. Ecuación de Bethe-Salpeter para mesones	43
3.1. Introducción	43
3.2. Amplitudes Bethe-Salpeter en el modelo CI	43
3.2.1. Kernel Pseudoescalar	44
3.3. Normalización de las Amplitudes de Bethe-Salpeter	47
3.3.1. Normalización del Kernel Pseudoescalar	48
3.4. Resultados	52
4. Diquarks	57
4.1. Introducción	57
4.2. Amplitud Bethe-Salpeter	58
4.3. Resultados	59
5. Bariones en un modelo quark-diquark	63
5.1. Introducción	63
5.2. Ecuación de Faddeev	64
5.3. Bariones espín 1/2 paridad positiva	69
5.3.1. Resultados	82
5.4. Bariones espín 3/2	83
5.4.1. Bariones espín 3/2 de paridad positiva	83
5.4.2. Bariones espín 3/2 de paridad negativa	88
5.4.3. Resultados	90

6. Conclusiones	95
A. Amplitudes de Bethe-Salpeter en el modelo CI	97
A.1. Kernel Vectorial	97
A.2. Kernel Escalar	98
A.3. Kernel Axial-Vector	99
B. Normalización de las Amplitudes de Bethe-Salpeter	101
B.1. Normalización del Kernel Vectorial	101
B.2. Normalización del Kernel Escalar	102
B.3. Normalización del Kernel Axial-Vector	103
C. Convención Euclidiana y Trazas	105
C.1. Convención Euclidiana	105
C.2. Matrices Gamma	105
C.3. Trazas	106
C.4. Hermiticidad	106
C.5. Notación Slash de Feynman	106
Bibliografía	109

Índice de figuras

1.1.	Mesón K^0 decayendo a $\pi^+ + \pi^-$.	5
1.2.	Operador de escalera $T_{\pm}$ en SU(2).	9
1.3.	Triplete de SU(3) en el plano T_3 vs Y .	9
1.4.	Anti-triplete de SU(3) en el plano T_3 vs Y .	9
1.5.	Operadores de espín en SU(3).	12
1.6.	Mesón $q\bar{q}$.	13
1.7.	Octeto de mesones en el plano I_3 vs Y .	13
1.8.	Base hexagonal de SU(3).	14
1.9.	El hexágono colapsa a un equilátero cuando p o q se desvanecen.	14
1.10.	Octeto de mesones $J^P = 1^-$.	15
1.11.	Barión constituido por tres quarks.	15
1.12.	Octeto de bariones espín 1/2.	16
1.13.	Decuplete bariónico espín 3/2.	16
1.14.	Carga, extrañeza e isospín del octeto de bariones ligeros.	19
1.15.	Propiedades del decuplete de bariones espín 3/2.	19
1.16.	Entidades centrales de los octetos mesónicos.	21
1.17.	Mesones en SU(4).	23
1.18.	Bariones en SU4.	23
2.1.	Representación diagramática de la ecuación de BS, donde $q_+ = k_+$ y $q_- = k_-$, por conservación del momento $q_+ + q_- = P$.	26
2.2.	SDE para el propagador del quark mostrada en la ec.(2.3)	26
2.3.	Propagador del gluon en la CI.	27
2.4.	SDE diagramática para el propagador del quark en la aproximación arcoíris.	27
2.5.	Vértice de la ecuación de SD.	33
2.6.	Vértice de la ecuación de SD con la aproximación RL.	33
3.1.	Polarización del vacío.	48
3.2.	Comparación de la masa de los mesones en los distintos canales. Rojo con rayas horizontales representa el canal Pseudoescalar, el color azul con estrellas representa el canal vectorial, el color verde con rayas verticales representa el canal escalar y el color amarillo con puntos representa el canal axial-vectorial.	55
3.3.	Resultados experimentales comparados con los obtenidos con CI.	55
3.4.	Resultados experimentales comparados con los obtenidos con CI.	56
5.1.	20 plete simétrico mixto. Todos los bariones en el estado fundamental de este multiplete tienen $J^P = (1/2)^+$. Contiene el octeto SU(3) en la capa más baja. Los bariones pesados se componen de un quark b y dos quarks ligeros (u, d, s), ubicados en la segunda capa. Los bariones doblemente pesados se colocan en la capa superior.	63
5.2.	Estados de bariones con espín 3/2 hechos de cuatro quarks u, d, s , y b . Los bariones doblemente pesados y los bariones triplemente pesados se localizan en las capas más altas.	64
5.3.	Amplitud de Faddeev.	65
5.4.	Amplitud de Faddeev en un modelo quark-diquark.	65
5.5.	Ecuación de Faddeev covariante de Poincare empleada para calcular las masas bariónicas.	65
5.6.	Diagrama de Feynman para el propagador del quark.	65
5.7.	Diagrama de Feynman para el propagador del diquark.	66

5.8. Diagrama de Feynman para el propagador del Mesón.	66
5.9. Diagrama esquemático del Nucleón que muestra los posibles diquarks que se pueden mostrar dentro del mismo.	71
5.10. Se gráfica la masa de Ω_{ccc} para las diferentes perspectivas mostradas en la tabla {5.4}, la línea azul representa el promedio de los datos. La sección sombreada muestra un 2 % de diferencia con el promedio.	92
5.11. Se gráfica la masa de Ω_{bbb} para las diferentes perspectivas mostradas en la tabla {5.4}, la línea azul representa el promedio de los datos. La sección sombreada muestra un 2 % de diferencia con el promedio.	92

Índice de tablas

1.	Resultados en GeV de los hadrones obtenidos con el modelo CI.	VIII
1.1.	Números cuánticos para algunas partículas.	7
1.2.	Nomenclatura según el isospín y la hipercarga.	7
1.3.	Características del protón y neutrón.	16
1.4.	Masas del octeto y decuplete de bariones mostrados en las figuras {1.12} y {1.13}. . .	17
1.5.	Diferencia entre las masas del octeto de bariones 1/2 y el decuplete 3/2.	17
1.6.	Relación de masa Gell-Mann-Okubo para los bariones del octeto {1.14}.	18
1.7.	Relación de masa Gell-Mann-Okubo para los bariones espín 3/2 del decuplete {1.15}. .	20
1.8.	Paridad.	20
1.9.	Números cuánticos que determinan la Paridad.	21
2.1.	Constante de acoplamiento adimensional $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_{ir}\Lambda_{uv}^2$, donde $\hat{\alpha}_{ir} = \alpha_{ir}/m_g$, $\alpha_{ir} = \alpha_{irL}/Z_H$ con $\alpha_{irL} = 1.14$, para CI, extraído de un mejor ajustarse a los datos, como se explica en [46]. Los parámetros fijos son $m_g = 0.500 \text{ GeV}$ reportado en [47] y el regulador infrarrojo $\Lambda_{IR} = 0.24 \text{ GeV}$. CI-LP representa los parámetros ligeros y CI-HP los parámetros pesados con siglas en inglés.	32
2.2.	Masas de los quarks vestidos y en el limite quiral calculadas en GeV usando los parámetros en {2.1}, requeridas como entrada para la ecuación de BS y Faddeev, donde m_f es la masa corriente del quark y M_f la masa vestida.	32
2.3.	Clasificación de los Mesones según sus números cuánticos.	41
3.1.	Masas obtenidas para los mesones pseudoescalares en (GeV) con los parámetros en {2.1} y {2.2}.	52
3.2.	Masas obtenidas para los mesones escalares en (GeV) con los parámetros en {2.1}, {2.2} y $g_{SO} = 0.32$	53
3.3.	Masas obtenidas para los mesones vectoriales en (GeV) con los parámetros en {2.1}, {2.2}.	53
3.4.	Masas obtenidas para los mesones axial vectoriales en (GeV) con los parámetros en {2.1}, {2.2} y $g_{SO} = 0.25$	53
3.5.	Resultados de las reglas de espaciado de las masas en las ecuaciones (3.64 - 3.72) comparando la masas experimental y la masa obtenida en este trabajo.	54
4.1.	Masa calculada para los diquarks escalares en (GeV) con los parámetros en {2.1}, {2.2}. .	60
4.2.	Masa calculada para los diquarks pseudoescalares en (GeV) con los parámetros en {2.1}, {2.2}. * representa los resultados utilizando $g_{SO} = 0.32 \times 1.8$	60
4.3.	Masa calculada para los diquarks axial-vectoriales en (GeV) con los parámetros en {2.1}, {2.2}.	61
4.4.	Masa calculada para los diquarks vectoriales en (GeV) con los parámetros en {2.1}, {2.2}. * representa los resultados utilizando $g_{SO} = 0.25 \times 1.8$	61
5.1.	Mesones y sus parejas de paridad en el nucleón.	70
5.2.	Masa calculada para los bariones espín 1/2 en (GeV) con los parámetros en {2.1}, {2.2}. .	82
5.3.	Amplitudes de Faddeev para los bariones espín 1/2, se cumple: $1 = s^2 + a_1^{+2} + a_1^{02} + a_2^{+2} + a_2^{02}$	82
5.4.	Comparación con otros enfoques de la masa (en GeV) de los bariones pesados de espín 3/2.	91

5.5.	Masas (en GeV) de los bariones con espín 3/2. (*) denota. La tercera parte de la tabla se presentan los resultados de la masa de los bariones en unidades de la masa de Ω_{ccc} , es decir, $M_B/M_{\Omega_{ccc}}$. Para g_B se usa (5.17). + denota la paridad positiva y - la paridad negativa.	93
5.6.	Amplitudes de Faddeev para los bariones espín 3/2, se cumple: $1 = d^{(q_1 q_2)^2} + d^{(q_2 q_2)^2}$	93
5.7.	Relación de masa pasiva de quark constituyente [25] para bariones espín 3/2.	94
5.8.	Relación de masa pasiva de quark constituyente [25] para mesones vectoriales.	94

Capítulo 1

Hadrones

En este capítulo se muestra una breve introducción a la física hadrónica donde se explica el modelo de quarks de Gell-Mann (premio Nobel de física 1969) y con ello como se clasifican los mesones y bariones en este modelo según sus números cuánticos como espín, paridad, momento angular, hipercarga, isospín etc. [1–6].

1.1. Simetría de isospín

Durante el siglo XX habían muchos esfuerzos por estudiar la estructura interna de las partículas compuestas empezando con los experimentos de Rutherford a través de la medición y cálculo de la sección eficaz de los procesos de dispersión usando potenciales de interacción adecuados.

Aunque el efecto Compton de la segunda década del siglo 20 no fue utilizado para ver la estructura interna de las partículas, es claramente uno de los primeros procesos de dispersión. Este efecto constituyó la demostración final de la naturaleza cuántica de la luz tras los estudios de Planck sobre el cuerpo negro y la explicación de Einstein del efecto fotoeléctrico. Compton descubrió este efecto al experimentar con rayos X, los cuales fueron dirigidos contra una de las caras de un bloque de carbón. Al chocar los rayos X con el bloque se difundieron en varias direcciones; a medida que el ángulo de los rayos difundidos aumentaba, también se incrementaba su longitud de onda. Con base en la teoría cuántica, Compton afirmó que el efecto se debía a que el cuanto de rayos X actúa como una partícula material al chocar contra el electrón, por lo cual la energía cinética que el cuanto le comunica al electrón le representa una pérdida en su energía original. Como consecuencia de estos estudios, Compton ganó el Premio Nobel de Física en 1927. Este efecto es de especial relevancia científica, ya que no puede ser explicado a través de la naturaleza ondulatoria de la luz. Esta debe comportarse como partícula para poder explicar dichas observaciones, por lo que adquiere una dualidad onda corpúsculo característica de la mecánica cuántica.

Los experimentos de Rutherford fueron una serie de experimentos históricos mediante los cuales los científicos descubrieron que cada átomo tiene un núcleo donde tiene las cargas positivas y la mayor parte de su masa se concentra. Ellos dedujeron esto midiendo cómo un haz de partículas alfa (α) se dispersa cuando golpea una delgada hoja metálica. Los experimentos se realizaron entre 1908 y 1924 por Hans Geiger y Ernest Marsden bajo la dirección de Ernest Rutherford en los laboratorios de la Universidad de Mánchester. Descubrimiento del núcleo a través de un proceso elástico de dispersión se puede considerar como nuestro primer encuentro con un hadron.

Aparte de los procesos de dispersión elásticos, también se pueden utilizar procesos inelásticos. Por ejemplo, en los experimentos de división Bothe y Becker bombardearon berilio con partículas enérgicas α . Estas partículas producían radiación neutra que era penetrante pero no ionizante. ¿Podría ser radiación gamma?. Curie y Joliot demostraron que esta radiación neutra, cuando se bombardeaba sobre parafina, expulsaba protones. El análisis de energía mostró que los rayos gamma no podían proporcionarla. Supusieron que era una partícula neutra: neutrón. Chadwick bombardeó boro con partículas α y estudió la interacción de neutrones con nitrógeno (cuyas masas eran conocidas) y calculó la masa de neutrones como 939.57 MeV .

Hasta aproximadamente 1930, el átomo era simplemente protones y electrones puntuales. Ninguna otra partícula estaba dentro del átomo. Se sabía que He es 4 veces más pesado que H con solo 2 electrones. Li tiene 3 electrones pero 7 veces más pesado que H , ¿Por qué es tan pesado?. No podrían estar todos los protones en el núcleo con algunos electrones necesarios para cancelar la carga adicional. Los electrones no pueden estar presentes dentro del núcleo. Los experimentos de Bothe y Becker, Curie y Joliot y Chadwick llevaron al descubrimiento de neutrones. Los protones y neutrones están unidos dentro de un nucleón a través de interacciones fuertes y tienen una masa casi idéntica. Aparecieron interacciones fuertes independientes de la carga eléctrica de p y n . Heisenberg propuso en 1932 que tanto p como n son manifestaciones del mismo estado: Nucleon. La **simetría** que los relaciona se llama **isospín**, como espín. Las interacciones fuertes son invariantes bajo una transformación que intercambia un protón y un neutrón. La propuesta de Heisenberg era identificar:

$$\begin{aligned} |p\rangle &= \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle, \\ |n\rangle &= \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned} \quad (1.1)$$

y llamarlo doblete de isospín. La estructura de grupo de los generadores de isospín T_i satisface el álgebra de Lie $SU(2)$:

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk} T_k \quad (1.2)$$

donde p y n forman un doblete $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ que cumple con:

$$\begin{aligned} T_3|p\rangle &= \frac{1}{2}|p\rangle, & T_3|n\rangle &= -\frac{1}{2}|n\rangle, \\ T_+|n\rangle &= |p\rangle, & T_-|p\rangle &= |n\rangle. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Dado que isospín es una simetría de las interacciones fuertes con Hamiltoniano H_s se cumple:

$$[T_i, H_s] = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.4)$$

Dado que los miembros del doblete de isospín tienen diferentes cargas eléctricas, no es una simetría de interacciones electromagnéticas. Por tanto, no es una simetría exacta. Para saber qué tan buena es esta simetría con respecto al Hamiltoniano total H notemos que si fuera exacta, los miembros serían degenerados en masa. Por tanto, la diferencia de masa puede proporcionar una estimación. Con $m_p = 938.27 \text{ MeV}$ y $m_n = 939.49 \text{ MeV}$:

$$\frac{m_n - m_p}{m_n + m_p} = 0.649 \times 10^{-3} \quad (1.5)$$

por lo tanto es una simetría muy buena y se puede escribir:

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_1, \\ [H_0, T_i] &= 0, \quad [H_1, T_i] \neq 0, \\ H_0 &\gg H_1. \end{aligned} \quad (1.6)$$

H_1 incluye las interacciones Electromagnéticas.

Posteriormente surgieron preguntas interesantes acerca de la estructura interna de los protones y de como estos se mantienen unidos dentro del átomo en una proximidad cercana dentro del núcleo. Se planteaba la existencia de una fuerza más fuerte que la repulsión electromagnética entre los protones y de corto alcance. En 1934 Yukawa propuso el intercambio de un bosón masivo entre nucleones, lo que explica el corto rango de las fuerzas fuertes, y su estimación de la masas de este bosón fue de $300 - 400 m_e$. Se le llamó mesón, “el peso medi”, los bariones (por ejemplo, Protones y neutrones) son “los pesos pesado” y los leptones (p. Ej., electrones) son los “pesos ligero”. Powell (Premio Nobel de Física de 1950) utilizó emulsiones fotográficas en las cimas de las montañas para observar la descomposición de los piones en muones observados al nivel del mar, su trabajo en 1946 lo llevo al descubrimiento del pión (mesón π), que resultó ser la partícula propuesta por Yukawa. Después se encontró que el pión viene en tres versiones, π^+ , π^- y π^0 los cuales se observan en los decaimientos:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu, \quad \pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu, \quad \pi^0 \rightarrow 2\gamma \quad (1.7)$$

Los piones tienen isospín 1:

$$|\pi^+\rangle = |1, +1\rangle, \quad |\pi^0\rangle = |1, 0\rangle, \quad |\pi^-\rangle = |1, -1\rangle. \quad (1.8)$$

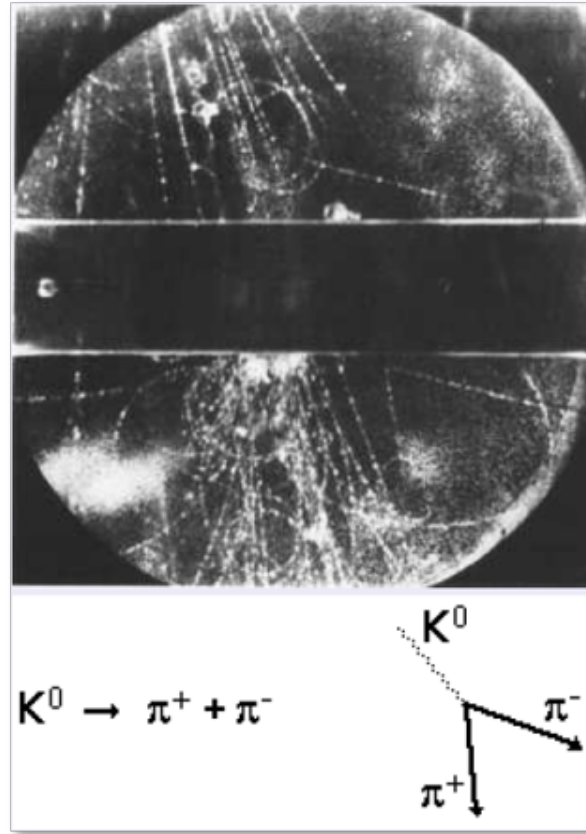


Figura 1.1: Mesón K^0 decayendo a $\pi^+ + \pi^-$.

De manera similar, los estados compuestos de n y p pueden estar en principio como iso-triplete e iso-singlete, pero no se encuentran estados nn o pp en la naturaleza, solo se encuentra el deuterón iso-singlete.

$$|d\rangle = |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|pn\rangle - |np\rangle]. \quad (1.9)$$

Se encuentra que el número cuántico de isospín se conserva en interacciones fuertes.

$$p + p \rightarrow d + \pi^+, \quad p + n \rightarrow d + \pi^0, \quad n + n \rightarrow d + \pi^-. \quad (1.10)$$

En 1947, Rochester y Butcher observaron la existencia de una nueva partícula (K^0) decayendo a dos piones π^+ y π^- , fig. {1.1}. La masa del K^0 tenía que ser al menos el doble que la de los piones, eran como piones pesados, pero vivían mucho más que los piones. Posteriormente en 1949 Powell descubrió el kaón cargado K^+ en el decaimiento:

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \quad (1.11)$$

fue hasta 1956 que se descubrió que K^+ pertenece a la misma categoría que K^0 , su masa tenía que ser más del triple de la masa del pión. Con el tiempo más mesones se fueron descubriendo, como η , φ , ω y ρ . En 1950 otra partícula fue descubierta en el decaimiento:

$$\Lambda \rightarrow p^+ + \pi^-. \quad (1.12)$$

Λ era más pesada que p , entonces fue categorizada como un barión. Surgió entonces la duda interesante de por qué otros bariones decaen pero el protón no decae. Antes de que se notara la violación del número de leptones, Stueckelberg propuso el número cuántico de barión para explicar esto. Entonces se hicieron las siguientes asignaciones referentes al número bariónico:

$$\begin{aligned} p = n = +1, \quad \bar{p} = \bar{n} = -1, \\ \text{mesones} = 0, \quad \text{leptones} = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

de esta manera el decaimiento beta estaba permitido por la conservación del número bariónico:

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (1.14)$$

También permite la reacción que condujo al descubrimiento del anti-protón:

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}. \quad (1.15)$$

El protón, que es el barión más ligero y no puede descomponerse en nada más ligero. Debido a los decaimientos observados (ver figuras 1.7 y 1.12) se concluyó que no existe un número conservado de mesones. Pronto quedó claro que las partículas extrañas (K 's y Λ 's) se producen abundantemente (escala de tiempo de 10^{-23} segundos) pero decaen lentamente (escala de tiempo de 10^{-10} segundos). Para interacciones fuertes se cumple:

$$\tau = r_0 \simeq 1 \text{ fm} \simeq 10^{-23} \text{ seg.} \quad (1.16)$$

Las interacciones electromagnéticas están alrededor de 10^{-17} segundos. Los tiempos de decaimiento de 10^{-10} segundos corresponden a la fuerza débil:

$$\begin{aligned} \alpha_w &= 10^{-6}, & \alpha_{em} &= 10^{-2}, & \alpha_s &= 1, \\ \tau_w &= 10^{-10} \text{ seg.} & \tau_{em} &= 10^{-17} \text{ seg.} & \tau_s &= 10^{-23} \text{ seg.} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Las partículas extrañas se producían en interacciones fuertes, se desintegraban a través de interacciones débiles y se produjeron en pares:

$$\begin{aligned} \pi^- + p &\rightarrow K^+ + \Sigma^- \\ &\rightarrow K^0 + \Sigma^0 \\ &\rightarrow K^0 + \Lambda. \end{aligned} \quad (1.18)$$

En 1953 Gell-Mann y Nishijima propusieron otro número cuántico llamado extrañeza " S " al cual le asignaron los siguientes valores:

$$K's = +1, \quad \Sigma's = \Lambda's = -1, \quad \pi, p, n = 0 \quad (1.19)$$

Se vio que la extrañeza se conservaba en interacciones fuertes y, por lo tanto, nunca se produjeron los decaimientos:

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \Sigma^- \rightarrow \pi^0 + \Lambda \rightarrow K^0 + n. \quad (1.20)$$

Las partículas extrañas se descomponen a través de interacciones débiles y no conservan la extrañeza:

$$\begin{aligned} \Lambda &\rightarrow p^+ + \pi^-, \\ \Sigma^+ &\rightarrow p^+ + \pi^0, \\ \Sigma^+ &\rightarrow n + \pi^+. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Gell-Mann y Nishijima observaron una relación entre los números cuánticos:

$$\begin{aligned} Q &= I_3 + \frac{1}{2} (B + S) \\ &= I_3 + \frac{1}{2} Y \end{aligned} \quad (1.22)$$

donde Q es la carga, I_3 es la tercer componente del isospín, B es el número bariónico, S es el número de extrañeza (no confundir con el espín) e $Y = B + S$ la hipercarga, ver figura {1.1}.

De esta manera en la tabla {1.2} se muestra la nomenclatura según los números cuánticos I e Y .

Muchas partículas tienen tiempos de vida prolongados ($\tau > 10^{-12}$ seg.) permitiendo ser observadas, muchas otras partículas tienen tiempos de vida mucho más cortos lo que hace su detección directa imposible por lo tanto su existencia es inferida indirectamente. Estas partículas transitorias aparecen como estados intermedios, normalmente se forman cuando chocan dos partículas y se desintegran muy rápidamente, son llamadas **resonancias**. Estas partículas respetan las leyes de conservación, por ejemplo, si el isospín de las partículas en colisión es $3/2$, la resonancia debe tener isospín $3/2$ como es el caso de la resonancia Δ . Como la interacción fuerte es invariante en el espacio de isospín, el Hamiltoniano conmuta con todos los componentes de isospín.

Tabla 1.1: Números cuánticos para algunas partículas.

Partícula	Masa GeV	I	I_3	$Y = B + S$
p	0.938	1/2	1/2	1
n	0.94	1/2	-1/2	1
Λ	1.116	0	0	0
σ^+	1.189	1	1	0
Σ^0	1.192	1	0	0
Σ^-	1.197	1	-1	0
Ξ^0	1.315	1/2	1/2	-1
Ξ^-	1.321	1/2	-1/2	-1

Nomenclatura	Ejemplos	I	Y
Iso-singletes	Λ, η	0	0
Iso-dobletes	$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}$	1/2	1
Iso-dobletes	$\begin{pmatrix} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K^- \\ \bar{K}^0 \end{pmatrix}$	1/2	-1
Iso-tripletes	$\begin{pmatrix} \Sigma^+ \\ \Sigma^0 \\ \Sigma^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}$	1	0

Tabla 1.2: Nomenclatura según el isospín y la hipercarga.

En la década de 1960 estaba claro que existían cientos de resonancias elementales. Todas tenían números cuánticos definidos, como espín, isospín, extrañeza, número de bariones, etc. Había una necesidad imperiosa de clasificar nuevas partículas y resonancias. Surgieron dudas sobre si estas partículas y resonancias eran elementales o estaban compuestas por otra capa de partículas elementales.

1.2. El Grupo SU(3)

El grupo SU(N) es el grupo de Lie de matrices unitarias $N \times N$ con determinante 1, tiene $N^2 - 1$ generadores por lo tanto SU(3) tiene 8 generadores. Los generadores no tienen traza y son Hermitianos lo que implica que los elementos del grupo son unitarios y tienen determinante igual a uno. De los 8 generadores, como máximo dos son diagonales. El número de generadores que conmutan es igual al rango del grupo. El rango de SU(N) es $N - 1$, para SU(3) el rango es 2, entonces hay dos operadores de Casimir. Para grupos de Lie el número de operadores de Casimir es igual al rango del grupo. La elección estándar de los generadores de las representaciones fundamentales son $F_i = \frac{1}{2}\lambda_i$, donde λ_i

son matrices de Gell-Mann:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (1.23)$$

λ_3 y λ_8 son las matrices diagonales, λ_1 , λ_2 y λ_3 generan el grupo SU(2) de las matrices de Pauli. Como una base para la representación fundamental en SU(3) se escogen los eigenestados de λ_3 y λ_8 :

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

donde u es el quark up (arriba), d es el quark down (abajo) y s es el quark strange (extraño), cuyos eigenvalores son:

$$\begin{aligned}\lambda_3|u\rangle &= |u\rangle & \lambda_8|u\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|u\rangle \\ \lambda_3|d\rangle &= -|d\rangle & \lambda_8|d\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|d\rangle \\ \lambda_3|s\rangle &= 0 & \lambda_8|s\rangle &= -\frac{2}{\sqrt{3}}|s\rangle\end{aligned}\quad (1.25)$$

Las propiedades del grupo SU(3) están definidas por el conmutador:

$$[F_i, F_j] = if_{ijk}F_k \quad (1.26)$$

donde f_{ijk} es la constante de estructura que es completamente anti-simétrica en los índices:

$$\begin{aligned}f_{123} &= 1, & f_{147} &= f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = \frac{1}{2} \\ f_{458} &= f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}, & f_{213} &= -1, \quad \text{el resto}=0,\end{aligned}\quad (1.27)$$

dado que $[F_3, F_8] = 0$, podemos etiquetar los estados con los eigenvalores de F_3 y F_8 . Los elementos del grupo SU(3) son de la forma:

$$U(\theta_i) = e^{-i\theta_i F_i}. \quad (1.28)$$

El grupo SU(3) se relaciona con los mesones y bariones a través de las F_i y sus números cuánticos, donde la tercera componente del isospín se relaciona con la matriz de isospín $T_3 = F_3$ y la hipercarga con F_8 de la forma $Y = \frac{2}{\sqrt{3}}F_8$. Donde los eigenvalores de T_3 e Y son:

$$\begin{aligned}T_3|u\rangle &= \frac{1}{2}|u\rangle & Y|u\rangle &= \frac{1}{3}|u\rangle \\ T_3|d\rangle &= -\frac{1}{2}|d\rangle & Y|d\rangle &= \frac{1}{3}|d\rangle \\ T_3|s\rangle &= 0 & Y|s\rangle &= -\frac{2}{3}|s\rangle.\end{aligned}\quad (1.29)$$

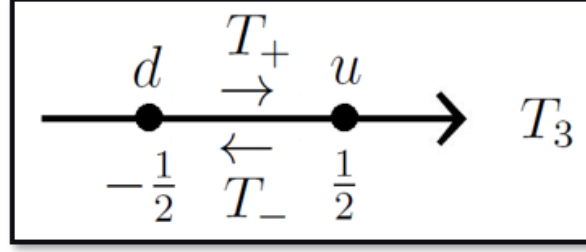
de la relación (1.22) se les asignan las siguientes cargas a los estados en (1.24):

$$Q|u\rangle = \frac{2}{3}|u\rangle \quad Q|d\rangle = -\frac{1}{3}|d\rangle \quad Q|s\rangle = -\frac{1}{3}|s\rangle. \quad (1.30)$$

Con estas propiedades se definen los operadores de escalera:

$$T_{\pm} = F_1 \pm iF_2, \quad U_{\pm} = F_6 \pm iF_7, \quad V_{\pm} = F_4 \pm iF_5, \quad (1.31)$$

con estos operadores podemos pasar de un estado a otro, por ejemplo en SU(2) T_+ pasa el estado $|d\rangle$ al estado $|u\rangle$ ver la figura {1.2}:

Figura 1.2: Operador de escalera $T_{\pm}$ en SU(2).

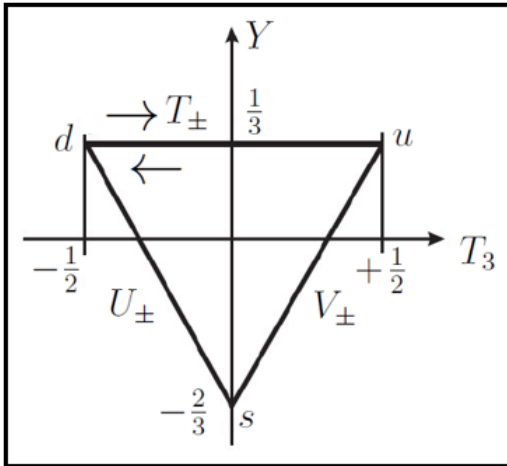
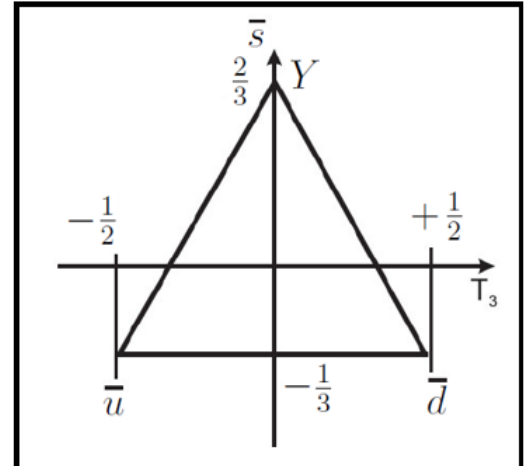
Esto lleva a definir:

$$S|u\rangle = 0 \quad S|d\rangle = 0 \quad S|s\rangle = -|s\rangle \quad (1.32)$$

y para todos los estados en (1.24) se tiene:

$$B|u\rangle = \frac{1}{3}|u\rangle \quad B|d\rangle = \frac{1}{3}|d\rangle \quad B|s\rangle = \frac{1}{3}|s\rangle \quad (1.33)$$

De esta manera el grupo SU(3) en el plano isospín vs hipercarga se muestra en la figura {1.3}. Para los anti-quarks los números cuánticos son los inversos de los quarks, por ejemplo para un anti-quark u , $\bar{u}$, $B = -\frac{1}{3}$, $T_3 = -\frac{1}{2}$, $Y = -\frac{1}{3}$, $Q = -\frac{2}{3}$ y un anti-quark s , $\bar{s}$ tiene extrañeza $S = +1$. Entonces los anti-quarks forman un anti-triplete. El anti-triplete de SU(3) en el espacio isospín vs hipercarga (T_3 vs Y) se muestra en la figura {1.4}.

Figura 1.3: Triplete de SU(3) en el plano T_3 vs Y .Figura 1.4: Anti-triplete de SU(3) en el plano T_3 vs Y .

Para el espacio de anti-triplete se escogen los estados base en el espacio como:

$$|\bar{u}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\bar{d}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\bar{s}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

Deben distinguirse los estados base del espacio del triplete y del espacio del anti-triplete. Los generadores en la representación conjugada son $\bar{F}_i = \frac{1}{2}\bar{\lambda}_i$. El isospín y la hipercarga de los quarks y anti-quarks se invierten, mientras que los estados están representados por los mismos vectores: $\bar{\lambda}_3 = -\lambda_3$, $\bar{\lambda}_8 = -\lambda_8$, de esta manera el álgebra de SU(3) fija las matrices restantes: $\bar{\lambda}_i = -(\lambda_i)^T = -\lambda_i^*$. Así, en la representación anti-triplete:

$$\bar{T}_3 = \frac{1}{2}\bar{\lambda}_3 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Y los operadores de escalera isospín son:

$$\bar{T}_{\pm} = \frac{1}{2}(\bar{\lambda}_1 \pm i\bar{\lambda}_2), \quad \bar{T}_+ = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{T}_- = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.36)$$

De esta manera se tienen las acciones:

$$\begin{aligned} \bar{T}_3|\bar{u}\rangle &= -\frac{1}{2}|\bar{u}\rangle, & \bar{T}_3|\bar{d}\rangle &= \frac{1}{2}|\bar{d}\rangle, \\ \bar{T}_+|\bar{u}\rangle &= -|\bar{d}\rangle, & \bar{T}_-|\bar{d}\rangle &= -|\bar{u}\rangle. \end{aligned} \quad (1.37)$$

El grupo SU(3) es importante dado que explica las generalidades que se deben tener en cuenta para posteriormente tomar el grupo SU(4) añadiendo el quarks c y después tomar el grupo SU(5) añadiendo el quark b .

1.3. mesones en SU(3)

En el modelo de quarks los mesones son hadrones constituidos por un quark y un anti-quark unidos mediante interacciones nucleares fuertes. Los multipletes de mesones son obtenidos al combinar los tripletes de sabor con los anti-tripletes de sabor, es decir, 3 y $\bar{3}$, el número bariónico de los mesones es $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$, el momento angular total es $J = L + S$, donde el espín toma los valores $S = 0, 1$, de esta manera los mesones tienen espín entero y por lo tanto son bosones.

Si solo consideramos los quarks u y d , es decir, SU(2), se puede construir un mesón con carga 1 al combinar un quark u y un anti-quark $\bar{d}$:

$$Q |u\bar{d}\rangle = Q[|u\rangle]|\bar{d}\rangle + |u\rangle Q[|\bar{d}\rangle] = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) |u\bar{d}\rangle \quad (1.38)$$

La proyección del isospín esta dada por:

$$T'_3 |u\bar{d}\rangle = T_3[|u\rangle]|\bar{d}\rangle + |u\rangle T_3[|\bar{d}\rangle] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) |u\bar{d}\rangle = |u\bar{d}\rangle \quad (1.39)$$

Dado que los quarks están en una base y los anti-quarks en otra, se debe distinguir T_3 de $\bar{T}_3$. Por tanto $|u\bar{d}\rangle$ pertenece al isotriplet $T = 1$:

$$\begin{aligned} |T = 1, T_3 = 1\rangle &= -|u\bar{d}\rangle, \\ |T = 1, T_3 = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle), \\ |T = 1, T_3 = -1\rangle &= |d\bar{u}\rangle, \end{aligned} \quad (1.40)$$

El estado $T = 0$ es ortogonal a $T = 1$ y a $T_3 = 0$, entonces el estado $T = 0$ es:

$$|T = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle) \quad (1.41)$$

Esto es una manifestación de $2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$. Los estados $T = 1$ se transforman entre sí mediante transformaciones de isospín. El estado de isospín $T = 0$ es invariante. Del estado $|T = 1, T_3 = 1\rangle$ se pueden obtener los otros dos utilizando los operadores de escalera $T_{\pm}$ teniendo en cuenta las diferentes bases:

Operadores de escalera $T_{\pm}$.

1.3.1

$$|T = 1, T_3 = 1\rangle = -|u\bar{d}\rangle$$

$$T_- |T = 1, T_3 = 1\rangle = -[T_{1-} + T_{2-}] |u\bar{d}\rangle$$

del lado izquierdo se tiene:

$$[(T + T_3)(T - T_3 + 1)]^{1/2} |T = 1, T_3 = 0\rangle$$

$$[(1 + 1)(1 - 1 + 1)]^{1/2} |T = 1, T_3 = 0\rangle$$

$$\sqrt{2} |T = 1, T_3 = 0\rangle$$

del lado derecho se tiene:

$$-[(T_{1-}|u\rangle)|\bar{d}\rangle + |u\rangle(T_{2-}|\bar{d}\rangle)]$$

$$-[(|d\rangle)|\bar{d}\rangle + |u\rangle(-|\bar{u}\rangle)]$$

$$|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle$$

entonces:

$$\sqrt{2} |T = 1, T_3 = 0\rangle = |u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle$$

En el grupo SU(3) se tienen los operadores de espín U y V además del operador de isospín T definidos

de la siguiente manera:

$$T_{\pm} = F_1 \pm iF_2, \quad U_{\pm} = F_6 \pm iF_7, \quad V_{\pm} = F_4 \pm iF_5. \quad (1.42)$$

T_+ incrementa T_3 en 1 y Y la hipercarga no cambia, U_+ decrece T_3 en 1/2 e incrementa Y en 1, V_+ incrementa T_3 en 1/2 e incrementa Y en 1, ver la figura {1.5} Se forman más mesones a partir de estados de un quark y un anti-quark de la forma $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$, se obtiene un octeto y un singlete.

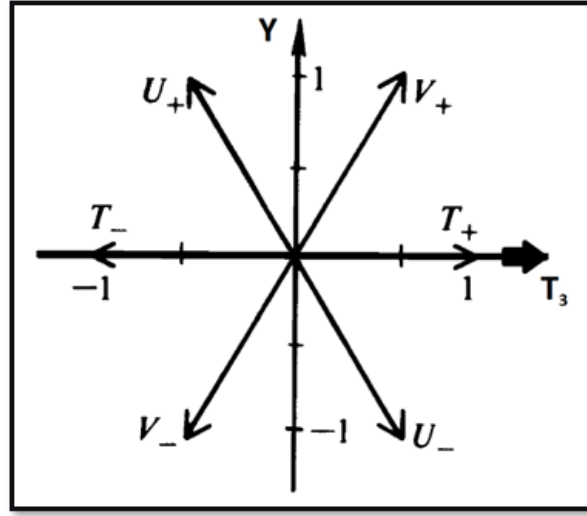
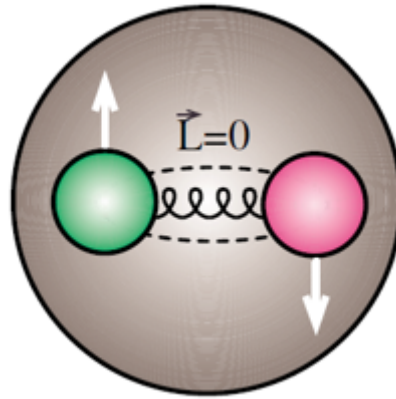
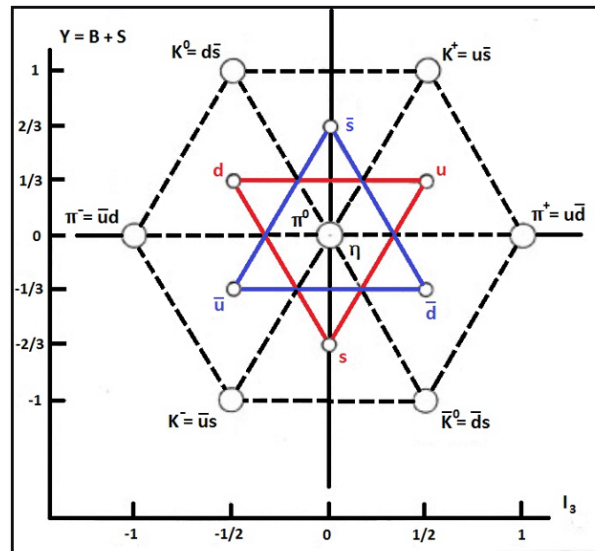


Figura 1.5: Operadores de espín en SU(3).

Estos operadores de espín y operadores de escalera tienen relaciones de conmutación bien definidas:

$$\begin{aligned} [T, T_{\pm}] &= \pm T_{\pm} & [Y, T_{\pm}] &= 0 \\ [T, U_{\pm}] &= \mp \frac{1}{2} U_{\pm} & [Y, U_{\pm}] &= \pm U_{\pm} \\ [T, V_{\pm}] &= \pm V_{\pm} & [Y, V_{\pm}] &= \pm V_{\pm} \\ [T_+, T_-] &= 2T_3 & [T_+, U_+] &= V_+ \\ [U_+, U_-] &= \frac{3}{2}Y - T_3 \equiv 2U_3 & [T_+, U_-] &= 0 \\ [V_+, V_-] &= \frac{3}{2}Y + T_3 \equiv 2V_3 & [T_+, V_+] &= 0 \\ [T_+, V_-] &= -U_- & [U_+, V_-] &= T_- \\ [U_+, V_+] &= 0 & [T_3, Y] &= 0 \end{aligned}$$

De esta manera los mesones $q\bar{q}$ {1.6} en el estado fundamental $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$ se muestran en la figura {1.7}.

Figura 1.6: Mesón $q\bar{q}$.Figura 1.7: Octeto de mesones en el plano I_3 vs Y .

La representación irreducible SU(2) se caracteriza por un número entero j . Es una línea recta de $2j$ unidades de longitud. Hay $2j+1$ sitios, cada uno de ellos ocupado individualmente por un estado. Cada representación irreducible de SU(3) se caracteriza por dos números enteros (p, q) . Gráficamente, está representado por una base hexagonal en el plano $T_3 - Y$, tres lados con longitud p y tres de longitud q tal como se muestra en la figura {1.8}.

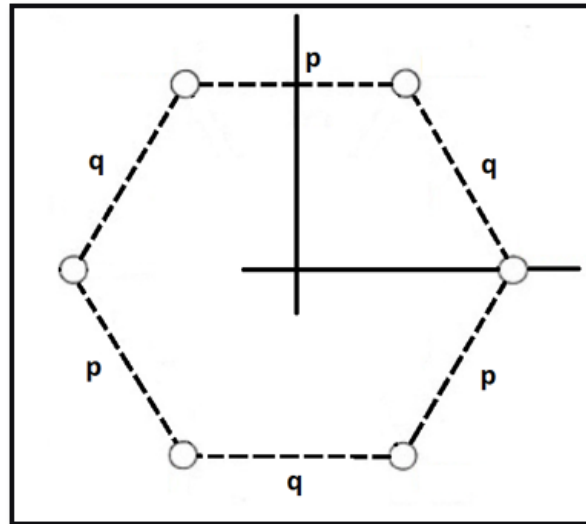
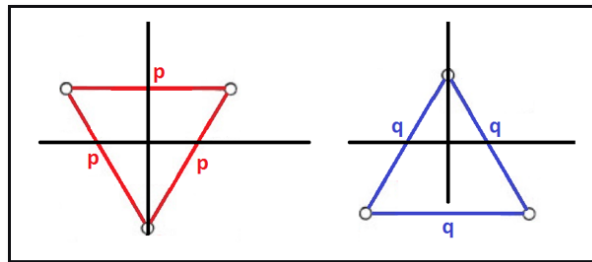


Figura 1.8: Base hexagonal de SU(3).

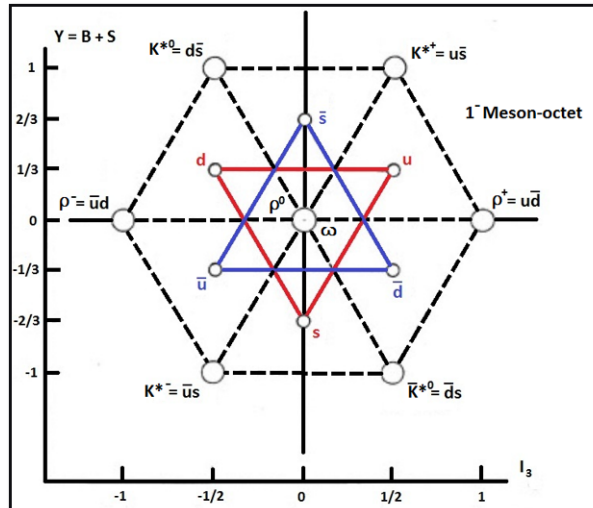
El hexágono colapsa a un equilátero cuando p o q desaparecen, ver figura {1.9}.

Figura 1.9: El hexágono colapsa a un equilátero cuando p o q se desvanecen.

Las dimensiones de la representación irreducible de SU(3) es:

$$d(p, q) = (p + 1)(q + 1)(p + q + 2)/2 \quad (1.43)$$

La representación del triplete 3 es (1, 0), la representación anti-triplete 3^* es (0, 1), la representación del octeto 8 es (1, 1), de esta manera se representa por (p, q) o su dimensionalidad. De esta manera el octeto de mesones, al igual que {1.7}, con $J^P = 1^-$ en SU(3) se obtiene de $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$ el cual se muestra en la figura {1.10}.

Figura 1.10: Octeto de mesones $J^P = 1^-$.

1.4. Bariones en SU(3)

En el modelo de quarks los bariones son hadrones constituidos por tres quarks fig. {1.11} unidos mediante interacciones nucleares fuertes. Son clasificados como fermiones dado que tienen un espín medio entero ($1/2$, $3/2$, etc.).

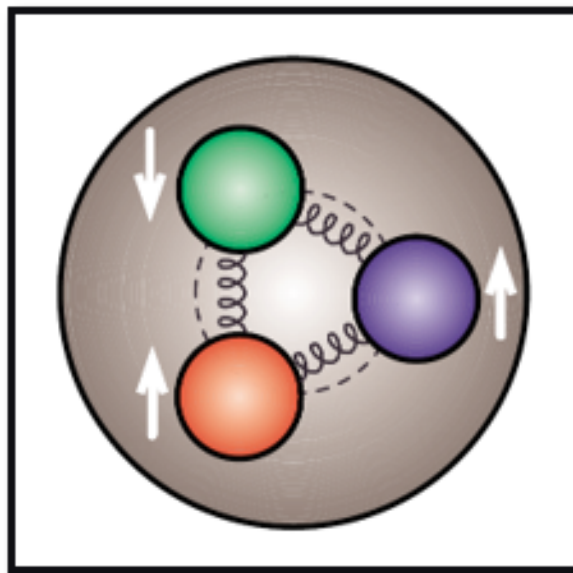


Figura 1.11: Barión constituido por tres quarks.

Las representaciones irreducibles donde viven los bariones se obtienen de $3 \otimes 3 \otimes 3 = (\bar{3} \oplus 6) \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$, el octeto de bariones $1/2$ en el plano T_3 vs Y se muestra en la figura {1.12}. El decuplete de bariones espín $3/2$ se muestra en la figura {1.13}.

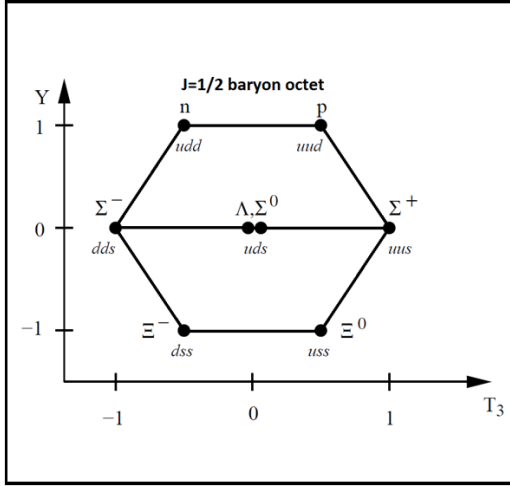


Figura 1.12: Octeto de bariones espín 1/2.

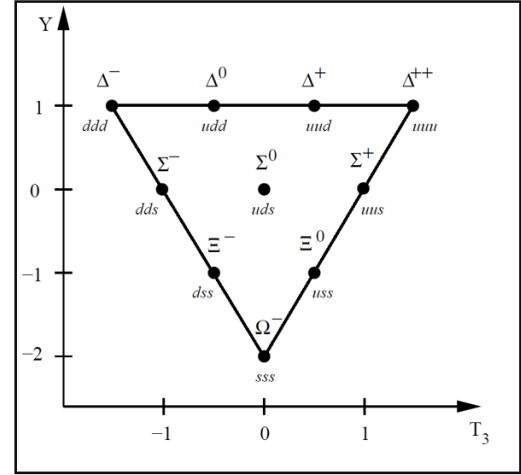


Figura 1.13: Decuplete bariónico espín 3/2.

1.5. Masas y Ruptura de Simetría

Entre el protón y neutrón existe poca diferencia entre sus masas, carga y contenido de quarks como se muestra en la tabla {1.3}.

	Protón	Neutrón
Masa	938.280 MeV	939.573 MeV
Espín	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
τ (Vida media)	$> 10^{32}$ años	898 ± 16 seg. [$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$]
Carga	+e	0
Estructura de quarks	uud ($\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}$)	udd ($\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}$)

Tabla 1.3: Características del protón y neutrón.

El protón difiere del neutrón en un quark $u \rightarrow d$ por ende la carga cambia de +e a 0, la diferencia más notoria es el tiempo de vida que es muy distinto, la diferencia de masas es muy poca $M_n - M_p = 1.293 \text{ MeV}$ esto muestra una excelente simetría de isospín dado que la masa del quark u y el quark d son casi iguales. $m_u \simeq m_d \simeq 0$. Las masas corrientes de los quarks son:

$$\begin{aligned}
 m_u &= 1.7 - 3.3 \text{ MeV}/c^2 & m_d &= 4.1 - 5.8 \text{ MeV}/c^2 & m_s &= 70 - 130 \text{ MeV}/c^2 \\
 m_c &= 1.1 - 1.4 \text{ GeV}/c^2 & m_b &= 4.1 - 4.4 \text{ GeV}/c^2 & m_t &= 174 \text{ GeV}/c^2
 \end{aligned}
 \tag{1.44}$$

La diferencia de masas a lo largo del eje Y en el octeto, mostrado en la figura {1.12}, y el decuplete, mostrado en la figura {1.13}, se muestran en la tabla {1.5}. Se observa que la diferencia entre las masas del octeto es aproximadamente 200 MeV. Todavía es mucho más pequeño que las propias masas, entonces todavía se tiene una simetría de sabor SU(3) aunque no tan buena como la simetría de isospín SU(2). La diferencia de masas entre bariones en líneas horizontales en el decuplete es aproximadamente 150 MeV. Con este modelo Gell-Mann predijo el barión Ω por lo cual gana el premio Nobel de física en 1969.

Barión	Masa en MeV
Octeto de bariones 1/2	
M_N	939
M_Λ	1115
M_Σ	1193
M_Ξ	1318
Decuplete de bariones 3/2	
M_Δ	1232
M_Σ	1385
M_Ξ	1530
M_{Ω^-}	1672

Tabla 1.4: Masas del octeto y decuplete de bariones mostrados en las figuras {1.12} y {1.13}.

Relaciones sobre el eje Y en el octeto fig.{1.12}	
$M_\Lambda - M_N = 177 \text{ MeV}$	$\approx 200 \text{ MeV}$
$M_\Sigma - M_N = 254 \text{ MeV}$	
$M_\Xi - M_\Lambda = 203 \text{ MeV}$	
Relaciones sobre el eje Y en el decuplete fig.{1.13}	
$M_{\Sigma(1385)} - M_\Delta = 153 \text{ MeV}$	$\approx 150 \text{ MeV}$
$M_{\Xi(1530)} - M_{\Sigma(1385)} = 145 \text{ MeV}$	
$M_{\Omega^-} - M_{\Xi(1530)} = 142 \text{ MeV}$	

Tabla 1.5: Diferencia entre las masas del octeto de bariones 1/2 y el decuplete 3/2.

1.6. Relación Entre Masas de Gell-Mann - Okubo

Las masas de los hadrones se estiman en el modelo de quarks asumiendo que una parte H_I del Hamiltoniano total $H_0 + H_I$ rompe la simetría $SU(3)$. Suponiendo que la simetría quiral permanece intacta, entonces $m_u = m_d$, que $H_I \sim Y$, además que la energía de enlace de los hadrones es independiente del sabor de los quarks y que la diferencia de masas se debe completamente a la diferencia de masas de los quarks. La fórmula de masa de Gell-Mann-Okubo proporciona una regla de suma para las masas de hadrones dentro de un multiplete específico, determinada por su isospín I y extrañeza S (o, alternativamente, hipercarga Y):

$$M = M_0 + aY + b \left[I(I+1) - \frac{Y^2}{4} \right] \quad (1.45)$$

donde M_0 , a y b son parámetros libres. De manera más completa la hipercarga (1.22) se define como:

$$Y = B + S + C + B', \quad (1.46)$$

donde:

- B es el número bariónico, $B = (N_q - N_{\bar{q}})/3$,
- S es la extrañeza, $S = N_{\bar{s}} - N_s$,
- C es el encanto, $C = N_{\bar{c}} - N_c$,
- B' es la inferioridad, $B' = N_{\bar{b}} - N_b$.

La fórmula de masa se obtuvo considerando las representaciones del álgebra de Lie del grupo $SU(3)$. En particular, el octeto del mesón corresponde al sistema de raíces de la representación adjunta. Sin embargo, la representación más simple y de menor dimensión de $SU(3)$ es la representación fundamental, que es tridimensional, y ahora se entiende que describe la simetría de sabor aproximada de los tres quarks u , d y s . Por lo tanto, el descubrimiento no solo de una simetría $SU(3)$, sino también de esta fórmula viable para el espectro de masas fue uno de los primeros indicadores de la existencia de los quarks. La regla fue formulada por primera vez por Gell-Mann en 1961 [9] y propuesta de forma independiente por Okubo en 1962 [8]. El isospín y la hipercarga son generadas por $SU(3)$, que puede ser representado por ocho matrices hermitianas y sin traza correspondientes a los “componentes” de isospín e hipercarga. Seis de las matrices corresponden al cambio de sabor y las dos últimas corresponden al tercer componente de la proyección de isospín y la hipercarga como se vio anteriormente. La fórmula se basa en la hipótesis de mejora del octeto, que atribuye el dominio de $SU(3)$ que se rompe al generador de hipercarga de $SU(3)$, $Y = \frac{2}{\sqrt{3}}F_8$, y a la masa relativamente más alta del quark s . Esta fórmula es fenomenológica, describe una relación aproximada entre las masas de los mesones y bariones, y ha sido usada como trabajo teórico en los avances de la cromodinámica cuántica. Para el octeto de bariones ligeros mostrados en la figura {1.14} se obtiene la tabla {1.6}:

Barión	Masa	I	Y	Ecuación
N	939 MeV	1/2	1	$M_0 + a + b/2$
Λ	1115 MeV	0	0	M_0
Σ	1193 MeV	1	0	$M_0 + 2b$
Ξ	1318 MeV	1/2	-1	$M_0 - a + b/2$

Tabla 1.6: Relación de masa Gell-Mann-Okubo para los bariones del octeto {1.14}.

De la tabla {1.6} resolviendo las ecuaciones tenemos que $a = (M_N - M_{\Xi})/2$ y $b = (M_{\Sigma} - M_{\Lambda})/2$ y al resolver el sistema se encuentra la relación para las masas de este octeto la cual es:

$$2(M_N + M_{\Xi}) = 3M_{\Lambda} + M_{\Sigma} \quad (1.47)$$

Utilizando los valores para las masas de esos bariones se obtiene:

$$\begin{aligned} 2(939 \text{ MeV} + 1318 \text{ MeV}) &= 3(1115 \text{ MeV}) + 1193 \text{ MeV} \\ 4514 \text{ MeV} &= 4538 \text{ MeV}, \end{aligned} \quad (1.48)$$

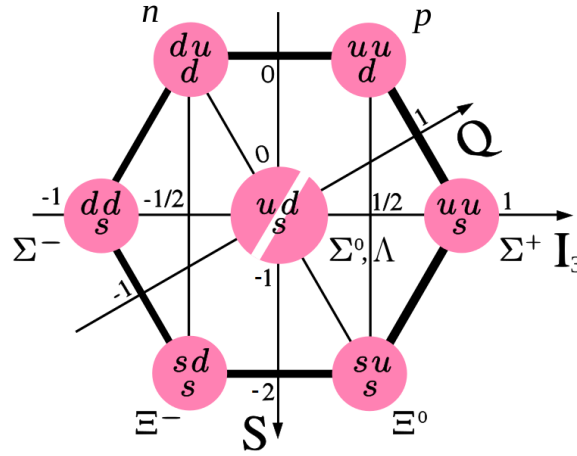


Figura 1.14: Carga, extrañeza e isospín del octeto de bariones ligeros.

lo cual representa un error porcentual del 0.52887 %, de la misma manera para los bariones del decuplete de la figura {1.15}. En la tabla {1.7} se muestran los resultados para el decuplete: Usando las

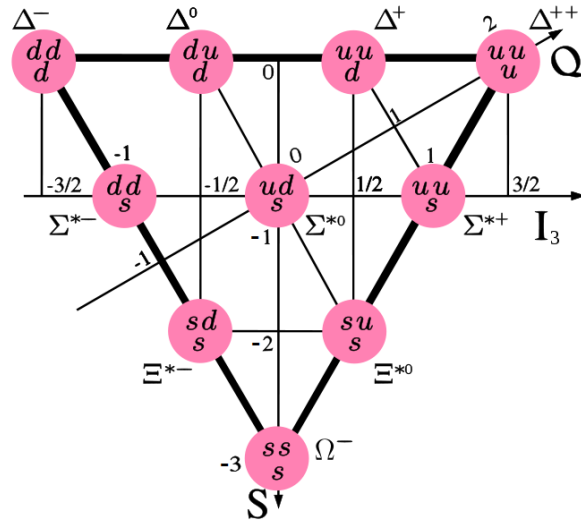


Figura 1.15: Propiedades del decuplete de bariones espín 3/2.

relaciones de masas antes vistas:

$$\begin{aligned} M_{\Sigma(1385)} - M_{\Delta} &= 153 \text{ MeV}, \\ M_{\Xi(1530)} - M_{\Sigma} &= 145 \text{ MeV}, \\ M_{\Omega^-} - M_{\Xi(1530)} &= 142 \text{ MeV}, \end{aligned} \quad (1.49)$$

de esta manera resolviendo las ecuaciones de la tabla {1.7} obtenemos la relación:

$$M_{\Sigma} - M_{\Delta} = M_{\Xi} - M_{\Sigma} = M_{\Omega} - M_{\Xi} \quad (1.50)$$

La relación (1.50) fue usada por Gell-Mann para predecir la existencia, naturaleza y masa de la partícula Ω . Procediendo de la misma manera para los distintos canales de los mesones (pseudoscalares, escalares etc.) y bariones en los distintos octetos y decupletes se encuentran relaciones de masa que son útiles para comprobar las masas de las partículas que no se han medido experimentalmente y tener un maco de referencia para estas partículas.

Tabla 1.7: Relación de masa Gell-Mann-Okubo para los bariones espín 3/2 del decuplete {1.15}.

Barión	Masa	I	Y	Ecuación
Δ	1232 MeV	3/2	1	$M_0 + a + 7b/2$
Σ	1385 MeV	1	0	$M_0 + 2b$
Ξ	1530 MeV	1/2	-1	$M_0 - a + b/2$
Ω	1672 MeV	0	-2	$M_0 - 2a - b$

1.7. Simetría de Paridad

Un mesón esta compuesto de dos quarks con espín 1/2 por lo tanto el espín del mesón puede ser 1 (espines paralelos) o 0 (espines anti-paralelos). El momento cuántico orbital L es debido al movimiento de un quark sobre otro. Estos números cuánticos (L y S) determinan la paridad P y la paridad de la carga conjugada C . La transformación de paridad, P , invierte todas las coordenadas espaciales del sistema; $P(t, \mathbf{x}) = (t, -\mathbf{x})$, $P^2 = I$, y por lo tanto los eigenvalores de P son ± 1 . Con estas características se cumple:

- Vector ordinario: $P(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$.
- Escalar de $\mathbf{v}$: $s = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$; $P(s) = P(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = (-\mathbf{v}) \cdot (-\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = s$.
- Producto cruz de dos vectores: $\mathbf{a} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$; $P(\mathbf{a}) = P(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (-\mathbf{v}) \times (-\mathbf{w}) = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = +\mathbf{a}$.
- Escalar de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{v}$: $p = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$; $P(p) = P(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) = (+\mathbf{a}) \cdot (-\mathbf{v}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = -p$.

Escalar	$P(s) = +s$
Pseudoescalar	$P(p) = -p$
Vector	$P(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$
Pseudovector	$P(\mathbf{a}) = +\mathbf{a}$

Tabla 1.8: Paridad.

Un sistema de dos cuerpos tiene paridad:

$$P\phi(12) = p_1 p_2 (-1)^l \phi(12) \quad (1.51)$$

el factor $(-1)^l$ viene de los armónicos esféricos dado que en el centro del marco de masa en el estado ligado la inversión de las partículas y antipartículas invertirá los vectores de desplazamiento.

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x})\bar{\psi}(-\mathbf{x}) &\sim Y_l^m(\theta, \varphi), \\ Y_l^m(\theta, \varphi) &\xrightarrow{P} Y_l^m(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Intrínsecamente las partículas fermiónicas y sus antipartículas tienen paridades opuestas. Los estados ligados como el positronio e^+e^- y los mesones $q\bar{q}$ tienen paridad:

$$(\pm 1)(\mp 1)(-1)^l = (-1)(-1)^l = \boxed{(-1)^{(l+1)}}. \quad (1.53)$$

La paridad es un número cuántico multiplicativo para todos los sistemas discretos y para los sistemas continuos es un número cuántico aditivo. Los quarks tienen espín 1/2 y paridad positiva y los anti-quarks tienen espín 1/2 y paridad negativa, por ende la paridad del mesón $u\bar{u}$ es $P(u\bar{u}) = p_u p_{\bar{u}} (-1)^l = (-1)^{l+1}$, el espín intrínseco S del mesón $u\bar{u}$ es 0 o 1 pero puede tener “cualquier” valor del momento angular orbital L , el valor de L y de S determina el canal de la partícula, la tabla {1.9} tiene unos ejemplos de estos números cuánticos y la tabla {2.3} es más completa.

Partícula	S	L	J^P	Canal
π^0	0	0	0^-	Pseudoescalar
ρ^0	1	0	1^-	Vector
$b_1(1235)$	0	1	1^+	Pseudovector

Tabla 1.9: Números cuánticos que determinan la Paridad.

1.8. Conjugación de la Carga

El operador de conjugación de carga actúa sobre una partícula e invierte todos sus números cuánticos para así obtener su antipartícula:

$$C|p\rangle = |\bar{p}\rangle \quad (1.54)$$

Invierte todos sus números cuánticos internos como número leptónico, número bariónico, extrañeza etc., dejando la energía, masa, momento, espín sin cambios. La mayoría de las partículas no son sus propias antipartículas.

$$C|\pi^+\rangle = |\pi^-\rangle \quad (1.55)$$

Algunas partículas son sus propias antipartículas, como los fotones, y las entidades en el centro de los octetos mesónicos mostrados en la figura {1.16}. La eigenecuación para C y sus eigenvalores son:

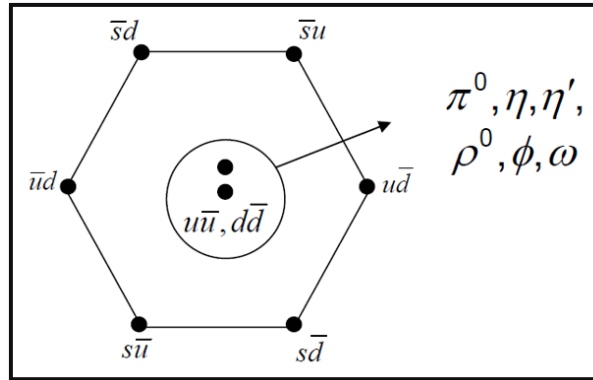


Figura 1.16: Entidades centrales de los octetos mesónicos.

$$\begin{aligned} C|\psi\rangle &= c|\psi\rangle \\ C^2|\psi\rangle &= c^2|\psi\rangle = |\psi\rangle \\ c^2 &= 1 \quad c = \pm 1. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Los fotones y bosones como entidades centrales de los octetos mesónicos son sus propias antipartículas, como los piones neutros:

$$u\bar{u} \xrightarrow{C} \bar{u}u \sim u\bar{u}. \quad (1.57)$$

Hay dos partes de la paridad C en un estado ligado de dos partículas (partícula-antipartícula), la parte orbital L y la parte de espín S . La acción de C en la parte orbital también tiene un factor $(-1)^L$ al igual que la paridad y por las mismas razones (1.52). El acoplamiento $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1$, $S = 0$ corresponde a un singlete y $S = 1$ corresponde a un triplete. Entonces, la regla es que para los fermiones, el espín impar es simétrico y el espín par es antisimétrico. La operación C cambiará el signo del estado de espín par pero no el estado de espín impar. Esto introduce un factor de $(-1)^{S+1}$. Los operadores de creación y aniquilación de fermiones anti-conmutación. Esto se debe al principio de Pauli: $b^\dagger d^\dagger = -d^\dagger b^\dagger$, cuando b y d son iguales la ecuación es cero tal como se espera del principio de Pauli. Por lo tanto hay otro factor (-1) que viene del intercambio de fermión-anti-fermión. De esta manera el factor total debido

al espín es $(-1)^{S+2} = (-1)^S$. Por lo tanto con las dos contribuciones la conjugación de carga de un sistema de dos cuerpos es:

$$C = (-1)^{L+S}, \quad (1.58)$$

con $J = L + S$ el momento angular total que va de $|L - S|$ a $|L + S|$. Los dos mesones más ligeros son el π (pión) y el ρ (rho) con momento angular ($L = 0$), ($S = 0$) para el pión y ($S = 1$) para el rho.

1.9. SU(4)

El grupo SU(4) fue propuesto para incorporar el mesón J/ψ el cual involucra al quark c , es un grupo unitario de matrices 4×4 con determinante +1, es un grupo de rango 3 con 15 generadores hermitianos y sin traza, de estos 15, solo 3 se pueden diagonalizar simultáneamente, la representación fundamental es un cuarteto:

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \\ c \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

Las matrices de Gell-Mann se extienden a un conjunto mayor de matrices generadoras las cuales son:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_9 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_{10} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_{14} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_{15} &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

Los multipletes de los mesones y bariones SU(4) se pueden construir, los nonetes de mesones ligeros ocupan el plano central, ver la figura {1.17}.

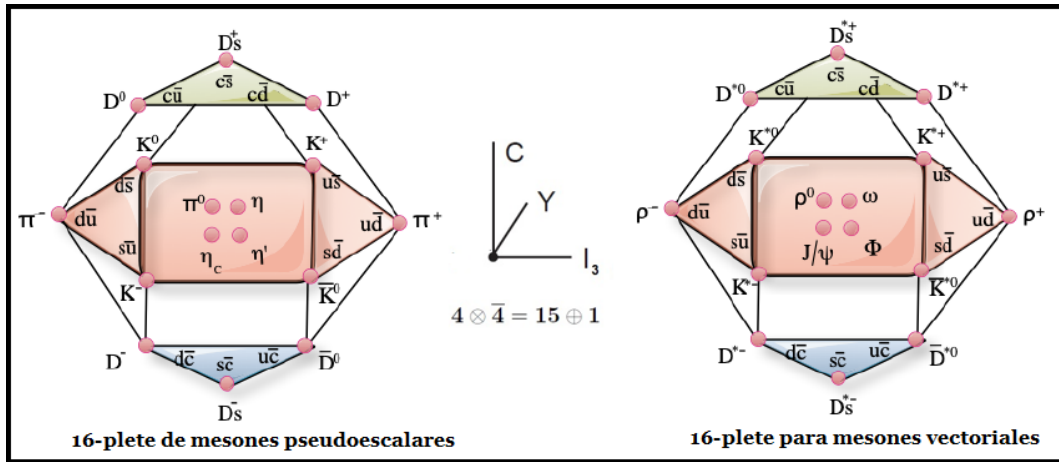


Figura 1.17: Mesones en SU(4).

Similarmente se pueden construir los multipletes de bariones en SU(4), ver la figura {1.18}.

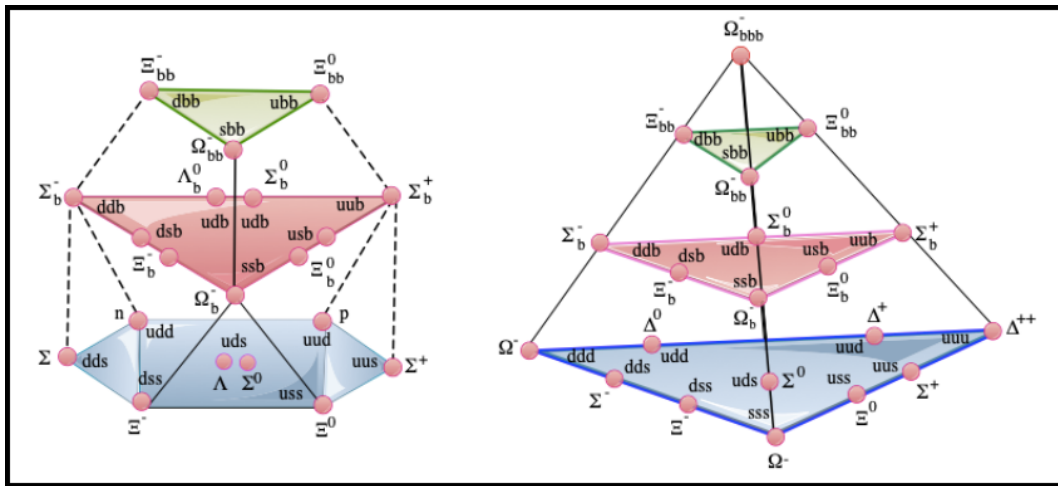


Figura 1.18: Bariones en SU4.

De manera similar se extiende al grupo SU(5) agregando el quark b . Los diagramas para el quark b son similares a los del quark c , solo se hace el cambio $c \rightarrow b$.

Capítulo 2

Modelo de Interacción de Contacto

En este capítulo se presenta el formalismo CI en las SDE para encontrar la masa vestida de los quarks generada por la ruptura de la simetría quiral y en la ecuación de BS para estados ligados de dos partículas para calcular la masa de los mesones en distintos canales J^P (Pseudoescalar, vectorial, escalar y axial-vector), este formalismo se presenta de forma detallada en las referencias [12, 13] donde se ha mostrado que este modelo es capaz de proveer una descripción de las propiedades estáticas de mesones la cual es comparable con las que se obtienen usando interacciones más sofisticadas [37, 38].

2.1. Ecuación de Schwinger-Dyson y Bethe-Salpeter

Los estados ligados de mesones aparecen como polos de una función de Green de 4 puntos. La aparición de esos polos en un canal particular J^{PC} se describe por la ecuación homogénea de BS [34], donde la covarianza de Poincaré implica que la Amplitud de BS (BSA) para un estado ligado de un quark vestido y antiquark toma la forma:

$$\Gamma_H^j(k; P) = \tau^j \gamma_5 \left[iE_H(k; P) + \gamma \cdot P F_H(k; P) + \gamma \cdot k G_H(k; P) + \sigma_{\mu\nu} k_\nu P_\mu D_H(k; P) \right] \quad (2.1)$$

donde k es momento relativo entre el quark y el antiquark, P es el momento total del mesón y $\{\tau^j, j = 1, 2, 3\}$ son las matrices de Pauli, el índice f_1 representa un quark con sabor f_1 y f_2 un quark con sabor f_2 . Utilizando una métrica Euclideana esta amplitud se determina por la ecuación homogénea de BS:

$$\left[\Gamma_H^{f_1 \bar{f}_2}(k; P) \right]_{tu} = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\chi_H^{f_1 \bar{f}_2}(q; P) \right]_{sr} K_{tu}^{rs}(q, k; P) \quad (2.2)$$

$$\chi_H^{f_1 \bar{f}_2}(q; P) = S_{f_1}(q_+) \Gamma_H^{f_1 \bar{f}_2}(q; P) S_{\bar{f}_2}(q_-)$$

donde se define:

- $\Gamma_H^{f_1 \bar{f}_2}(k; P)$ es la BSA; el vértice quark-mesón amputado e irreducible.
- $\chi_H^{f_1 \bar{f}_2}(q; P)$ corresponde a la función de onda BS.
- k es el momento relativo entre quark-antiquark.
- f_1 y $\bar{f}_2$ los correspondientes sabores, S_{f_1} es el propagador del quark vestido con sabor f_1 , $S_{\bar{f}_2}$ representa el propagador de quark vestido con sabor $\bar{f}_2$
- $q_+ = q + \eta P$ y $q_- = q - (1 - \eta)P$ son los momentos del quark y antiquark, $\eta \in [0, 1]$ es la fracción de momento total que comparten el quark y el antiquark. Ninguna observable física depende de su valor (usaremos $\eta = 1$ de aquí en más). $k(P)$ es el momento relativo total del sistema quark-antiquark.
- P es el momento total, tal que $P^2 = -M_H^2$, donde M_H es la masa del mesón.

- r, s, t, u representan los índices combinados de las matrices de color.
- H es la etiqueta que identifica al mesón. En particular, se suele escribir: Γ_5 para mesones **pseudoescalares**, Γ_μ para mesones **vectoriales**, Γ_1 para mesones **escalares** y $\Gamma_{5\mu}$ para mesones **pseudo vectoriales** o **axial-vector**, también conocidos como los canales **pseudoescalar**, **vectorial**, **escalar** y **axial-vector**. La estructura tensorial de las ABS depende del tipo de mesón (propiedades de transformación según sus números cuánticos).
- $K_{tu}^{rs}(q, k; P)$ es el kernel de dispersión: renormalizado, amputado e irreducible con respecto a cortes entre pares de líneas de quark-diquark. Este debe ser determinado consistentemente con el truncamiento de la ecuación de gap.

La ecuación de BS corresponde al diagrama de la figura {2.1}.

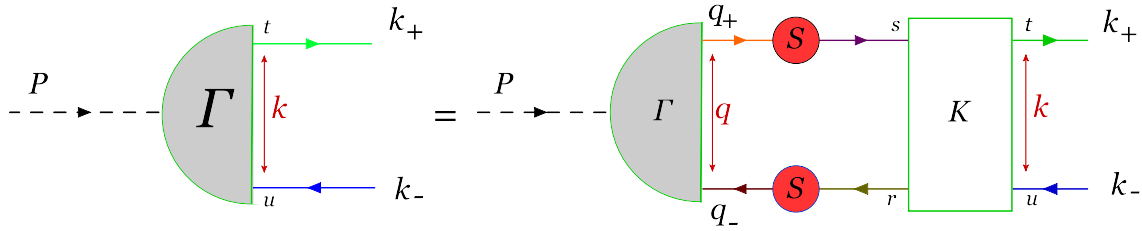


Figura 2.1: Representación diagramática de la ecuación de BS, donde $q_+ = k_+$ y $q_- = k_-$, por conservación del momento $q_+ + q_- = P$.

En la ecuación BS aparece el propagador vertido del quark, el cual se obtiene de la solución de la ecuación de SDE del quark, también conocida como ecuación de brecha o ecuación de gap, en [11] se muestra una deducción diagramática y en [35, 36] se muestra una derivación detallada, esta ecuación se escribe como:

$$S_{f_1}^{-1}(p) = i\gamma \cdot p + m_{f_1} + \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}(p-q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S_{f_1}(q) \Gamma_\nu(p, q) \quad (2.3)$$

donde:

- m_{f_1} es la masa corriente del quark de sabor f_1 .
- $D_{\mu\nu}(k)$ es el propagador vestido del gluon.
- Γ_ν^a es el vértice vestido quark-gluon.

La SDE (2.3) se muestra diagramáticamente en la figura {2.2}.

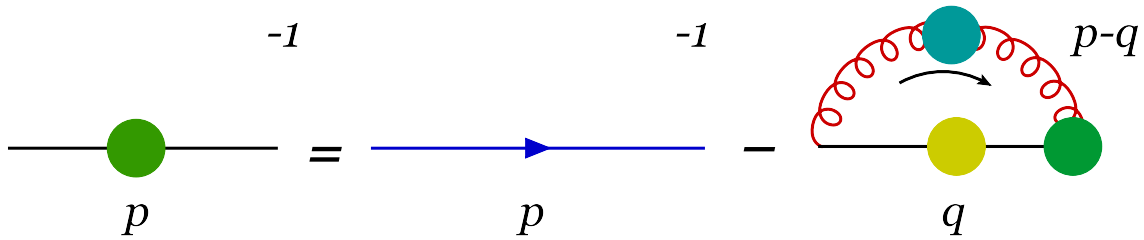


Figura 2.2: SDE para el propagador del quark mostrada en la ec.(2.3)

En la CI no es necesario introducir ninguna constante de renormalización a la ec. de gap dado que la función de 4 fermiones yendo a un punto no es renormalizable (ver ec.(2.18) en [11]), entonces se toman las constantes de renormalización iguales a 1. El límite quiral se obtiene colocando $m_{f_1} = 0$. Tanto $D_{\mu\nu}$ y Γ_ν^a satisfacen su propia SDE, las cuales están acopladas a funciones de n -puntos de grado mayor y así sucesivamente hasta infinito. Por lo tanto, la ecuación (2.3) es una del conjunto infinito de integrales acopladas no lineales las cuales podemos “resolver” una vez que se elige un esquema de truncamiento para el propagador del gluon y el vértice quark-gluon.

2.2. Interacción de Contacto y Aproximación Arcoíris

La CI es un tratamiento vector $\times$ vector en donde se regularizan las divergencias ultravioletas para preservar las simetrías de QCD. Se considera al propagador del gluon como una constante en el gauge de Landau en lugar de un gluon completo. Como el momento del gluon no interviene en la ecuación, pues en el diagrama de Feynman correspondiente a una dispersión ($q\bar{q}$) (ver figura {2.3}) no aparece el gluon que intercambian y simplemente se obtiene un diagrama con 4 puntas que corresponden a los quarks entrantes y salientes (4 fermiones van a 1 punto). Es una de las aproximaciones más drásticas de este modelo. Sin embargo, según nuestro conocimiento actual, el propagador de gluon si vuelve constante en el infrarrojo, por lo menos en el gauge de Landau. Por lo tanto, en el gauge de Landau es una muy buena aproximación para todos aquellos observables que sólo dependen de la física en el infrarrojo tal como masa de los hadrones. Para los observables dinámicos como los factores de forma elásticos y de transición, este modelo es más adecuado en el rango de momentos

El gauge de Landau es el punto fijo del grupo de renormalización, es el gauge por el cual la sensibilidad a las diferencias dependientes del modelo entre el ansatz para el vértice quark-gluon es menos notable y un gauge invariante que se implementa fácilmente en simulaciones numéricas de lattice QCD regularizado.

$$g^2 D_{\mu\nu}(k) = g^2 \left[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \frac{\delta_{ab}}{k^2} \rightarrow \frac{4\pi\alpha_{IR}}{m_g^2} \delta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \frac{1}{m_G^2} \quad (2.4)$$

donde:

- $m_g = 500 \text{ MeV}$ es la escala de masa generada dinámicamente en QCD [41, 42].
- α_{IR} es un parámetro que determina la fuerza de la interacción en el infrarrojo [43, 44].

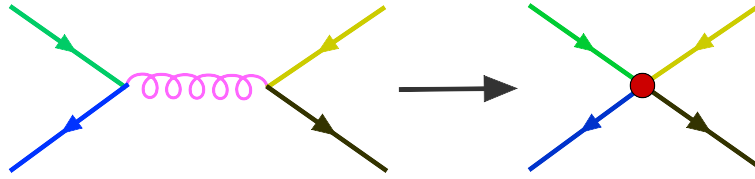


Figura 2.3: Propagador del gluon en la CI.

El vértice del quark-gluon se toma a nivel más bajo, es decir, no existen interacciones, esto se traduce como tomar el vértice desnudo en lugar del completo, es decir:

$$\Gamma_v^a(p, q; \mu) \rightarrow \frac{\lambda^a}{2} \gamma_v \quad (2.5)$$

Estas dos aproximaciones juntas, propagador del gluon (2.4) y vértice quark-gluon (2.5), son una aproximación de las SDE que preserva las simetrías y es conocida como **aproximación arcoíris**, (Rainbow-Ladder, RL por sus siglas en inglés) la cual se muestra en la figura {2.4}. Con este modelo se calcula la masa de los estados ligados ya que no depende del momento del gluon. También se pueden calcular las constantes de decaimiento, factores de forma, entre otras características y propiedades de los mesones, (ver [12, 13]).

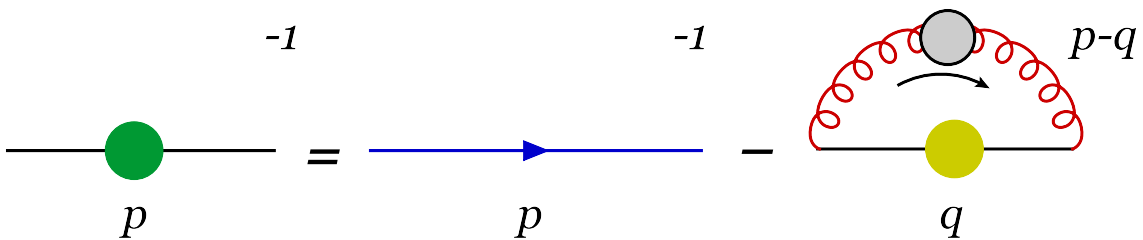


Figura 2.4: SDE diagramática para el propagador del quark en la aproximación arcoíris.

En el truncamiento RL, la identidad central que asegura la implementación correcta de la simetría quiral y su ruptura dinámica en un enfoque de estado ligado es la Identidad Axial-Vectorial de Ward-Green-Takahashi (AVWTI) [39]. Proporciona una relación entre la energía propia del quark y el núcleo quark-antiquark, el último de los cuales aparece en la ecuación de estado ligado del mesón. la identidad se expresa en la ecuación (2.18). Un kernel $q\bar{q}$ que preserva AVWTI asegura un pión en el límite quiral como el bosón de Goldstone relacionado con la ruptura de la simetría quiral dinámica. Además, AVWTI conduce a una generalización de la relación Gell Mann-Oakes-Renner para todos los mesones pseudoescalares y masas de quarks de corriente. Por lo tanto, es imperativo que cualquier truncamiento significativo del sistema de SDE y BS satisfaga esta identidad. En [40] se ha introducido un procedimiento sistemático para formular un núcleo $q\bar{q}$ que preserva el AVWTI a través de derivados funcionales de la auto-energía del quark. La configuración más simple que corresponde al orden más bajo en tal esquema de truncamiento que preserva la simetría es el truncamiento de escalera de arcoíris (RL). En este marco, el núcleo $q\bar{q}$ se expresa mediante un intercambio de escalera de gluones, que incluye el propagador de gluones desnudos y un vértice quark-gluon sin interacciones desnudo. Es conocido por ser preciso en el cálculo de observables de mesones pseudoescalares y vectoriales, además de que garantiza la conservación de la corriente electromagnética. En [12, 13], por ejemplo, se ha observado que RL es preciso para los mesones pseudoescalares Γ_5 . Con RL la ec.(2.3) se convierte en:

$$S^{-1}(p) = i\gamma \cdot p + m + \frac{3}{4} \frac{1}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S(q) \gamma_\mu \quad (2.6)$$

SDE en la aproximación RL. 2.2.1.

Tomamos la ec.(2.3):

$$S^{-1}(p) = i\gamma \cdot p + m + \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}(p-q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q) \Gamma_\nu(p, q)$$

Con RL:

$$g^2 D_{\mu\nu}(p-q) = \delta_{\mu\nu} \frac{1}{m_G^2}$$

$$\Gamma_\nu(p, q) = \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu$$

Recordamos las propiedades de las matrices de Gell-Mann: $\frac{\lambda^a}{2} = T^a$, $T^a T^a = C_F I$ con $C_F = \frac{4}{3}$, donde C_F es el operador de Casimir del grupo. Sustituimos RL en SDE:

$$\begin{aligned} S^{-1}(p) &= i\gamma \cdot p + m + \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \delta_{\mu\nu} \frac{1}{m_G^2} \frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q) \gamma_\nu \\ &= i\gamma \cdot p + m + \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \delta_{\mu\nu} \frac{1}{m_G^2} \frac{4}{3} \gamma_\mu S(q) \delta_{\mu\nu} \gamma_\nu \\ &= i\gamma \cdot p + m + \frac{4}{3m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S(q) \gamma_\mu \end{aligned}$$

donde se uso $\sum_{a=1}^8 \lambda^a \lambda^a = \frac{16}{3} I$.

La integral en ec. (2.6) posee una divergencia cuadrática, incluso en el límite quiral (“ $m = 0$ ”), si la divergencia se **regulariza** de manera covariante de Poincaré, la solución es:

$$S_{f1}^{-1}(p) = i\gamma \cdot p + M_{f1} \quad (2.7)$$

donde M es independiente del momento y esta determinada por:

$$M_{f_1} = m_{f_1} + \frac{M_{f_1}}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^\infty ds s \frac{1}{s + M_{f_1}^2} \quad (2.8)$$

a continuación se muestra el cálculo para obtener la ecuación (2.8). Comenzando con la representación más general para el propagador del quark:

$$S(p) = \frac{Z(p^2)}{i\gamma \cdot p + M(p^2)}$$

con $M(p^2)$ la función de masa del quark y $Z(p^2)$ la constante de renormalización. Con la notación $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \rightarrow \int_q$, se tiene entonces:

$$S^{-1}(p) = i\gamma \cdot p + m + \frac{4}{3m_G^2} \int_q \gamma_\mu S(q) \gamma_\mu$$

tomando la igualdad entre las definiciones del propagador del quark se tiene:

$$\frac{i\gamma \cdot p + M(p^2)}{Z(p^2)} = i\gamma \cdot p + m + \frac{4}{3m_G^2} \int_q \gamma_\mu S(q) \gamma_\mu \quad (2.9)$$

$Z(p^2)$ puede encontrarse multiplicando la ecuación (2.9) por $-i\gamma \cdot p = -i\not{p}$ y tomando a traza de la ec. resultante. Se observa que el integrando es impar en q así la integral desaparece dando $Z(p^2) = 1$, es decir:

$$\begin{aligned} -i\not{p} \left(\frac{i\not{p} + M}{Z} \right) &= -i\not{p} \left(i\not{p} + m + \int \right) \\ \frac{\not{p}^2 - i\not{p}M}{Z} &= \not{p}^2 - i\not{p}m - i\not{p} \int \end{aligned}$$

Usando las propiedades de las matrices gamma en el apéndice A y tomando la traza de la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[\frac{\not{p}^2 - i\not{p}M}{Z} \right] &= \text{Tr}[\not{p}^2], \\ \text{Tr} \left[\frac{\not{p}^2}{Z} \right] - i \frac{M}{Z} \text{Tr}[\not{p}] &= \text{Tr}[\not{p}^2], \\ \frac{4p^2}{Z} &= 4p^2 \rightarrow Z = 1. \end{aligned}$$

Para obtener $M(p^2)$ se toma la traza de la ecuación (2.9):

$$\begin{aligned} \text{Tr}[M(p^2)] &= \text{Tr}[m] + \frac{4}{3m_G^2} \int_q \text{Tr} \left[\gamma_\mu \left(\frac{1}{i\not{q} + M(q^2)} \gamma_\mu \right) \right] \\ &= \text{Tr}[m] + \frac{4}{3m_G^2} \int_q \text{Tr} \left[\gamma_\mu \left(\frac{-i\not{q} + M(q^2)}{q^2 + M^2(q^2)} \gamma_\mu \right) \right] \\ M(p^2) &= m + \frac{4}{3m_G^2} \int_q \frac{M(q^2)}{i\not{q} + M(q^2)} \end{aligned}$$

un vector en 4-D es:

$$q = |q|(\cos \phi \sin \theta \sin \beta, \sin \phi \sin \theta \sin \beta, \cos \theta \sin \beta, \cos \beta)$$

con $\beta \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi]$, además $q^3 dq = \frac{1}{2} q^2 dq^2$ y $dq^2 = 2dq q$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int d^4 q &= \int_q q^3 dq \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\pi \sin \beta^2 d\beta \\ &= \int_q q^3 dq 2\pi^2 = \pi^2 \int_q q^2 dq^2, \quad \Rightarrow \\ \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} &= \frac{1}{16\pi^4} \int d^4 q = \frac{1}{16\pi^2} \int_q q^2 dq^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

con el cambio $\int_q \rightarrow 4 \int_q^\Lambda$ que representa una regularización invariante traslacional, donde Λ es un parámetro de corte, entonces:

$$M(p) = m + \frac{4}{3m_G^2} \cdot 4 \int_q^\Lambda \frac{M(q^2)}{q^2 + M^2(q^2)} = m + \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda q^2 dq^2 \frac{M(q^2)}{q^2 + M^2(q^2)}$$

con el cambio $q^2 \rightarrow s$ y notando que $M(p) = M$ es una solución de la Gap, entonces:

$$M_{f_1} = m_{f_1} + \frac{M_{f_1}}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^\infty ds \frac{s}{s + M_{f_1}^2}$$

se nota que es una ecuación de masa constante, es decir, M no depende del momento del quark. Puesto que la integral en la ecuación (2.8) es divergente, es necesario especificar un esquema de regularización para calcular la integral. Usando el esquema de regularización del tiempo propio mostrado en [45], la cual es:

$$\frac{1}{s + M} = \int_0^\infty d\tau e^{-\tau(s+M^2)} \rightarrow \int_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} d\tau e^{-\tau(s+M^2)} = \frac{e^{-\tau_{uv}^2(s+M^2)} - e^{-\tau_{ir}^2(s+M^2)}}{s + M^2} \quad (2.11)$$

donde τ_{ir}, τ_{uv} son los límites infrarrojo y ultravioleta regulares. Un valor distinto de cero de $\tau_{ir} \equiv 1/\Lambda_{ir}$ implica el confinamiento garantizando la ausencia de umbrales de producción de quarks libres eliminando el polo cuando $s = -M_f^2$. Además, como la ecuación (2.4) no define una teoría renormalizable, entonces $\tau_{uv} \equiv 1/\Lambda_{uv}$ no se puede eliminar, si no que juega un papel dinámico y establece la escala de todas las cantidades dimensionales. Las integrales y por ende los resultados son muy sensibles a los valores de estos y otros parámetros que se verán más adelante.

Note que:

$$\begin{aligned} \int dx e^{-xa} &= -\frac{e^{-xa}}{a}, \\ \int_a^b dx e^{-x(s+M^2)} &= \frac{e^{-a(s+M^2)} - e^{-b(s+M^2)}}{s + M^2}, \\ \int_0^\infty d\tau e^{\tau(s+M^2)} &= \frac{1}{s + M^2} \end{aligned}$$

Considerando los cortes se tiene:

$$\int_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} d\tau e^{-\tau(s+M^2)} = \frac{\mathcal{Z}(s)}{s + M^2} = \frac{e^{-\tau_{uv}^2(s+M^2)} - e^{-\tau_{ir}^2(s+M^2)}}{s + M^2}$$

donde $\mathcal{Z}(s) = e^{-\tau_{uv}^2(s+M^2)} - e^{-\tau_{ir}^2(s+M^2)}$. De esta manera se sustituye la ecuación (2.11) en (2.8) y se obtiene:

$$M = m + \frac{M}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^\infty ds s \left[\frac{e^{-\tau_{uv}^2(s+M^2)} - e^{-\tau_{ir}^2(s+M^2)}}{s + M^2} \right] \quad (2.12)$$

Esta regularización tienen algunas consecuencias interesantes cuando $s + M^2 = 0 \Rightarrow \mathcal{Z}(s) = 0$. Esto

es como matar el polo en el propagador que conduce a su confinamiento. Por lo tanto el modelo correspondiente a este esquema de regularización es confiable. Sea:

$$I = \int_0^\infty ds s \left[\frac{e^{-\tau_{uv}^2(s+M^2)} - e^{-\tau_{ir}^2(s+M^2)}}{s + M^2} \right]$$

Con el cambio de variable $s + M^2 = s' \Rightarrow ds' = ds$ y $s = s' - M^2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} I &= \int_{M^2}^\infty ds' \frac{(s' - M^2)}{s'} \left[e^{-s' \tau_{uv}^2} - e^{-s' \tau_{ir}^2} \right] \\ &= \int_{M^2}^\infty ds' \left[e^{-s' \tau_{uv}^2} - e^{-s' \tau_{ir}^2} \right] - M^2 \int_{M^2}^\infty \frac{ds'}{s'} e^{-s' \tau_{uv}^2} + M^2 \int_{M^2}^\infty \frac{ds'}{s'} e^{-s' \tau_{ir}^2} \end{aligned}$$

Ahora con el cambio de variable $s' \tau_{ir/uv}^2 = t$, donde se denota $I = C(M, \tau_{ir}, \tau_{uv})$ por lo tanto:

$$C(M, \tau_{ir}, \tau_{uv}) = \int_{M^2 \tau_{uv}^2}^\infty \frac{dt}{\tau_{uv}^2} e^{-t} - \int_{M^2 \tau_{ir}^2}^\infty \frac{dt}{\tau_{ir}^2} e^{-t} - M^2 \int_{M^2 \tau_{uv}^2}^\infty dt t^{-1} e^{-t} + M^2 \int_{M^2 \tau_{ir}^2}^\infty dt t^{-1} e^{-t}$$

La función Gamma incompleta es:

$$\Gamma(\alpha, y) = \int_y^\infty dt t^{\alpha-1} e^{-t} \quad (2.13)$$

entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \Gamma(0, M^2 \tau_{ir/uv}^2) &= \int_{M^2 \tau_{ir/uv}^2}^\infty dt t^{-1} e^{-t}, \\ \Gamma(-1, M^2 \tau_{ir/uv}^2) &= \int_{M^2 \tau_{ir/uv}^2}^\infty dt t^{-2} e^{-t} = \frac{e^{-M^2 \tau_{ir/uv}^2}}{M^2 \tau_{ir/uv}^2} - \Gamma(0, M^2 \tau_{ir/uv}^2). \end{aligned}$$

De esta manera se concluye que:

$$\begin{aligned} C(M, \tau_{ir}, \tau_{uv}) &= M^2 \Gamma(-1, M^2 \tau_{uv}^2) - M^2 \Gamma(0, M^2 \tau_{ir}^2) - \frac{1}{\tau_{ir}^2} e^{-M^2 \tau_{ir}^2} \\ &= M^2 \Gamma(-1, M^2 \tau_{uv}^2) - M^2 \Gamma(-1, M^2 \tau_{ir}^2) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Por lo tanto la ecuación (2.12) se convierte en:

$$M_f = m_f + \frac{M_f}{3\pi^2 m_G^2} C(M_f, \tau_{ir}, \tau_{uv}) \quad (2.15)$$

donde M_f en general es una función de masa que funciona con una escala de momento, pero dentro del modelo CI es una masa vestida constante.

2.3. Masa Vestida de los Quarks

Se muestran los resultados usando los parámetros mostrados en la tabla {2.1}. Los parámetros se utilizan en los cálculos de masas de hadrones pesados y ligeros. Si se quiere ir más allá de predecir las masas de los hadrones y construir un modelo que también pueda predecir radios de carga y constantes de decaimiento, entonces el estudio del sector pesado requiere un cambio en los parámetros del modelo con respecto a los del sector ligero: un aumento del regulador ultravioleta y reducción de la fuerza de acoplamiento. Siguiendo [46] y guiados por [48, 49], definimos un acoplamiento adimensional $\hat{\alpha}$:

$$\hat{\alpha}(\Lambda_{uv}) = \hat{\alpha}_{ir} \Lambda_{uv}^2 \quad (2.16)$$

En estrecha analogía con el acoplamiento continuo de QCD con la escala de impulso a la que se mide, una curva logarítmica inversa puede describir la dependencia funcional de $\hat{\alpha}(\lambda_{uv})$ razonablemente

Quarks	Z_H	$\Lambda_{UV} [GeV]$
Parámetros ligeros (CI-LP)		
u, d, s, c, b	1	0.905
Parámetros pesados (CI-HP)		
u, d, s	1	0.905
c, d, s	3.034	1.322
c	13.122	2.305
b, u, s	16.473	2.522
b, c	59.056	4.131
b	165.848	6.559

Tabla 2.1: Constante de acoplamiento adimensional $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_{ir} \Lambda_{uv}^2$, donde $\hat{\alpha}_{ir} = \alpha_{ir}/m_g$. $\alpha_{ir} = \alpha_{irL}/Z_H$ con $\alpha_{irL} = 1.14$, para CI, extraído de un mejor ajustarse a los datos, como se explica en [46]. Los parámetros fijos son $m_g = 0.500 GeV$ reportado en [47] y el regulador infrarrojo $\Lambda_{IR} = 0.24 GeV$. CI-LP representa los parámetros ligeros y CI-HP los parámetros pesados con siglas en inglés.

bien:

$$\hat{\alpha}(\Lambda_{uv}) = a \ln(\Lambda_{uv}/\Lambda_0)^{-1} \quad (2.17)$$

donde $a = 0.92$ y $\Lambda_0 = 0.36 GeV$, ver la figura 1 en [46]. Con esta expresión se puede estimar el valor de la fuerza de acoplamiento $\hat{\alpha}(\lambda_{uv})$ una vez que se asigna el valor de Λ_{uv} .

Una característica de la ecuación (2.15) es que en el límite quiral, $m_f = m_0 = 0$, se obtiene una solución distinta de cero para $M_0 := \lim_{m_f \rightarrow 0} M_f$ siempre que α_{ir} exceda un valor mínimo. En la tabla {2.2} se presentan los valores obtenidos de la masa de los quarks u, s, c y b vestidos calculada a partir de (2.15).

Parámetros ligeros (CI-LP)				
$m_0 = 0$	$m_u = 0.007$	$m_s = 0.17$	$m_c = 1.58$	$m_b = 4.83$
$M_0 = 0.357$	$M_u = 0.367$	$M_s = 0.53$	$M_c = 1.60$	$M_b = 4.83$
Parámetros pesados (CI-HP)				
$m_0 = 0$	$m_u = 0.007$	$m_s = 0.17$	$m_c = 1.08$	$m_b = 3.92$
$M_0 = 0.357$	$M_u = 0.367$	$M_s = 0.53$	$M_c = 1.52$	$M_b = 4.68$

Tabla 2.2: Masas de los quarks vestidos y en el limite quiral calculadas en GeV usando los parámetros en {2.1}, requeridas como entrada para la ecuación de BS y Faddeev, donde m_f es la masa corriente del quark y M_f la masa vestida.

La simplicidad de CI permite calcular fácilmente observables hadrónicos, como masas, constantes de desintegración, radios de carga y factores de forma. El estudio de masas mesónicas debería proporcionar una forma de determinar las masas efectivas de los diquarks, que se supone que están confinados dentro de los bariones, y las propiedades de los bariones. De esta manera, más adelante, se describe y resuelve la ecuación BS para mesones y diquarks, para posteriormente resolver la ecuación de Faddeev para los bariones.

2.4. Identidad Vector-Axial de Ward-Green-Takahashi

Los estados ligados más simples en QCD están compuestos de un quark y un antiquark (Mesones). La correspondiente ecuación de BS depende de una parte no perturbativa que involucra el propagador del quark y el Kernel quark-antiquark.

Las características fenomenológicas de la simetría quiral y su rompimiento dinámico en QCD se pueden entender a través de la identidad Vector Axial Ward-Takahashi (AVWGTI) y la identidad vector Ward-Green-Takahashi (AWGTI). De esta manera entender los mesones es fundamental para entender la interacción fuerte. Una magnitud que se puede medir es la constante de decaimiento (f_π) del pión por ejemplo la cual es dimensionalmente una escala de energía y determina la fuerza de la ruptura de la simetría quiral, esta y la constante de renormalización canónica son proporcionales en el límite quiral si la (AVWGTI) se satisface, es decir, si $q_+ = q + P$. La identidad Axial-vector de Ward-Green-Takahashi en el límite quiral ($m=0$) se lee:

$$-iP_\mu \Gamma_{5\mu}(q, P) = S^{-1}(q_+) \gamma_5 + \gamma_5 S^{-1}(q) \quad (2.18)$$

La identidad Vector de Ward-Green-Takahashi en el límite quiral ($m=0$) se lee:

$$iP_\mu \Gamma_\mu(q, P) = S^{-1}(q_+) + S^{-1}(q) \quad (2.19)$$

La AVWGTI relaciona el vértice axial, $\Gamma_{5\mu}$, al vértice pseudoescalar, γ_5 y al propagador del quark. De esta manera se relacionan los kernels de la ecuación de BS y la DSE, esta relación se debe preservar sin importar el esquema de truncamiento que se utilice para el sistema acoplado DSE-BSE. La conservación de esta identidad determina las características del octeto de mesones pseudoescalares, al igual que para los demás canales, tales características como su masa pequeña, ausencia de masa en el límite quiral además de la masa de los hadrones. La WGTI expresa el curl (falta cita) y la divergencia (2.18) de los vértices. Las WGTI de los vértices en diferentes canales se acoplan, implican contribuciones de funciones de Green de alto orden. El vértice axial, $\Gamma_{5\mu}$, satisface su propia ESD;

$$\Gamma_{5\mu}(k, P) = \gamma_5 \gamma_\mu + \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K(k, q, P) \chi_{5\mu}(q, P) \quad (2.20)$$

Donde k es el kernel de la ecuación (2.2). El vértice pseudoescalar satisface una ecuación similar. Para comprobar AVWGTI se calcula primero el Kernel del diagrama de la ecuación SD del vértice de la figura {2.5, 2.6}:

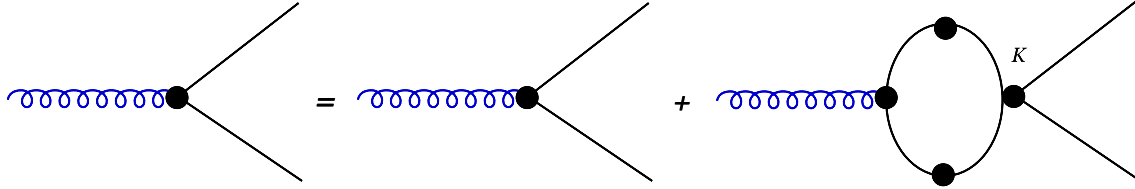


Figura 2.5: Vértice de la ecuación de SD.

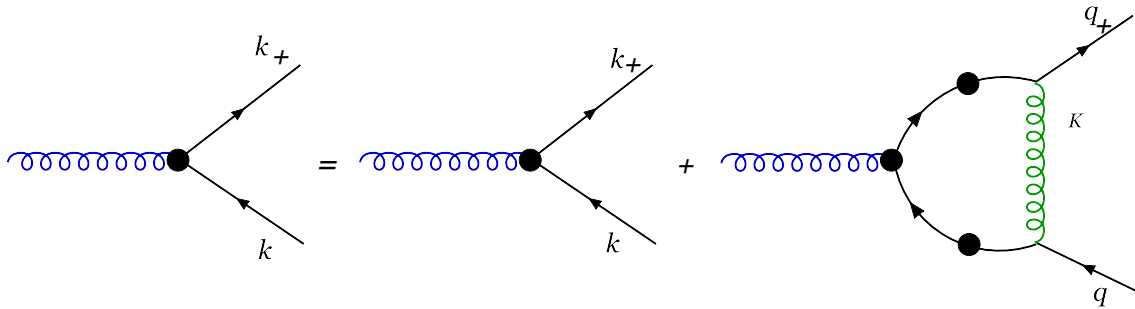


Figura 2.6: Vértice de la ecuación de SD con la aproximación RL.

Al combinar las SDE que satisfacen los vértices axiales y pseudoescalares con la AVWGTI se llega a:

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_{tu}^{rs}(k, q, P) [\gamma_5 S(q_-) + S(q_+) \gamma_5]_{rs} = [\Sigma(k_+) \gamma_5 + \gamma_5 \Sigma(k_-)]_{tu} \quad (2.21)$$

con lo que se establece el contenido del kernel de dispersión quark-antiquark K para que sea reproducido de una manera esencial. La ecuación (2.21) provee una manera de obtener el kernel de

dispersión del par quark-antiquark una vez que esta restricción sea resuelta con una expresión para la auto energía dada. Esto no siempre es posible, por lo tanto es necesario encontrar un modo alternativo para preservar las propiedades de simetría quiral de las interacciones fuertes, ver [50–52]. Para el modelo CI la ecuación (2.21) se cumple. Por lo tanto la aproximación para el kernel que resulta de esta propiedad AVWGTI se conoce como RL. De esta manera el Kernel es:

$$K(k, q, P)_{tu}^{rs} = -\frac{1}{m_G^2} \delta_{\mu\nu} \left[\frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \right] \left[\frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu \right]_{ru} \quad (2.22)$$

Usando las aproximaciones en las ecuaciones (2.4, 2.5), la ecuación BS (2.2) para un mesón se escribe de la siguiente manera:

$$\Gamma_H(k, P) = -\frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S_{f_1}(q + P) \Gamma_H S_{\bar{f}_2}(q) \gamma_\mu \quad (2.23)$$

Una regularización que preserva la simetría de la ecuación (2.23) dará soluciones independiente del momento relativo k . Entonces, si la interacción en (2.4) genera estados ligados este tendrá momento relativo entre el quark y el antiquark que pueden tener cualquier valor igualmente probable. Esta es una característica de una partícula puntual. Por lo tanto, la amplitud de BS no depende del impulso relativo, es decir, la ecuación (2.1) se escribe como:

$$\Gamma_H(P) = \gamma_5 \left[iE_H(P) + \frac{\gamma \cdot P}{2M} F_H(P) \right] \quad (2.24)$$

donde M es la masa vestida del quark y solo se agrega por razones dimensionales, es decir, para que las dimensiones de la ecuación sean las correctas. En la ecuación (2.20) se sustituye el Kernel en (2.22) y se calcula el vértice axial $\Gamma_{5\mu}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Gamma_{5\mu}(k_+, k) &= \gamma_5 \gamma_\mu - \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{m_G^2} \delta_{\mu\nu} \left[\frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \right] \left[\frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu \right]_{ru} \chi_{5\mu}(q_+, q), \\ &= \gamma_5 \gamma_\mu - \frac{16}{12} \frac{1}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \chi_{5\mu}(q_+, q) \gamma_\mu \\ &= \gamma_5 \gamma_\mu - \frac{1}{3m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\mu S_{f_1}(q_+) \Gamma_{5\mu}(q_+, q) S_{\bar{f}_2}(q) \gamma_\mu, \end{aligned}$$

donde se aplico el cambio en la integral:

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} = \frac{1}{4\pi^2} \int_q^\Lambda = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty dq^2 q^2, \quad (2.25)$$

se multiplica por P_μ entonces:

$$\begin{aligned} P_\mu \Gamma_{5\mu}(k_+, k) &= P_\mu \gamma_5 \gamma_\mu - \frac{1}{3m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\alpha S_{f_1}(q_+) P_\mu \Gamma_{5\mu}(q_+, q) S_{\bar{f}_2}(q) \gamma_\alpha, \\ P_\mu \Gamma_{5\mu}(k_+, k) - \gamma_5 P_\mu \gamma_\mu &= -\frac{1}{3m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\alpha S_{f_1}(q_+) P_\mu \Gamma_{5\mu}(q_+, q) S_{\bar{f}_2}(q) \gamma_\alpha \end{aligned}$$

ahora se sustituye la ec.(2.18) en la anterior y se obtiene:

$$\begin{aligned}
 P_\mu \Gamma_{5\mu}(k_+, k) - \gamma_5 \gamma \cdot P &= -\frac{1}{3m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\alpha S(q_+) \left[S^{-1}(q_+) i\gamma_5 + i\gamma_5 S^{-1}(q) \right] S(q) \gamma_\alpha, \\
 &= -\frac{1}{3m_G^2} \left[\int_q^\Lambda \gamma_\alpha S(q_+) S^{-1}(q_+) i\gamma_5 S(q) \gamma_\alpha + \int_q^\Lambda \gamma_\alpha S(q_+) i\gamma_5 S^{-1}(q) S(q) \gamma_\alpha \right], \\
 &= -\frac{1}{3m_G^2} \left[\int_q^\Lambda \gamma_\alpha i\gamma_5 S(q) \gamma_\alpha + \int_q^\Lambda \gamma_\alpha S(q_+) i\gamma_5 \gamma_\alpha \right], \\
 &= -\frac{1}{3m_G^2} \int_q^\Lambda i\gamma_\alpha \gamma_5 S(q) \gamma_\alpha - \frac{1}{3m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\alpha S(q_+) i\gamma_5 \gamma_\alpha, \\
 &= \frac{i\gamma_5}{3m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\alpha S(q) \gamma_\alpha + \frac{1}{3m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\alpha S(q_+) \gamma_\alpha i\gamma_5,
 \end{aligned}$$

donde se usan las propiedades de las matrices de Dirac (ver el apéndice A). Ahora se usa la ecuación (2.6) en el limite quiral ($m = 0$) de forma:

$$S^{-1}(q) - i\gamma \cdot q = \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\mu S(q) \gamma_\mu,$$

y se sustituye en la ecuación anterior para obtener:

$$\begin{aligned}
 P_\mu \Gamma_{5\mu}(k_+, k) - \gamma_5 \gamma \cdot P &= i\gamma_5 \left[S^{-1}(k) - i\gamma \cdot k \right] + \left[S^{-1}(k_+) - i\gamma \cdot k_+ \right] i\gamma_5, \\
 &= i\gamma_5 S^{-1}(k) + \cancel{\gamma_5 \gamma \cdot k} + iS^{-1}(k_+) \gamma_5 + \cancel{\gamma \cdot k_+ \gamma_5}, \\
 &= S^{-1}(k_+) i\gamma_5 + i\gamma_5 S^{-1}(k), \\
 P_\mu \Gamma_{5\mu}(k_+, k) &= \gamma_5 \gamma \cdot P + S^{-1}(k_+) i\gamma_5 + i\gamma_5 S^{-1}(k)
 \end{aligned}$$

esta identidad esta de acuerdo con la AVWGTI en (2.18) únicamente con $P = 0$. Note que $P^2 = 0$ no necesariamente implica que $P = 0$. En la teoría de Poincaré la condición $P = 0$ es imposible. Sin embargo, $P = 0$ implica $P^2 = 0$, lo cual garantiza un mesón (como el pión) sin masa. Esto, por supuesto, puede suceder en el limite quiral, de esta manera obtenemos la ecuación (2.18). Note que en el limite quiral $q_+ \cdot P = (q + P) \cdot P = q \cdot P + \cancel{P^2} = q \cdot P$.

2.5. Corolario de la Identidad Axial Ward-Green-Takahashi

Existen consecuencias no triviales de la conjugación de la AVWGTI y la IC. Para ver estas consecuencias comience con la ecuación:

$$P_\mu \Gamma_{5\mu}(k; P) = \gamma_5 \gamma \cdot P + \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K(k, q; P) P_\mu \chi_{5\mu}(q, P), \quad (2.26)$$

utilizando la aproximación RL y la CI la ecuación toma la forma:

$$P_\mu \Gamma_{5\mu}(k; P) = \gamma_5 \gamma \cdot P - \frac{4i}{3m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S_{f_1}^{-1}(q + P) P_\mu \Gamma_{5\mu}(q, P) S_{\bar{f}_2}^{-1}(q) \gamma_\mu, \quad (2.27)$$

se introduce (2.18) del lado derecho de (2.27) y se obtiene:

$$P_\mu \Gamma_{5\mu}(k; P) = \gamma_5 \gamma \cdot P - \frac{4i}{3m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S_{f_1}(q_+) \left[S_{f_1}^{-1}(q_+) \gamma_5 + \gamma_5 S_{\bar{f}_2}^{-1}(q) \right] S_{\bar{f}_2}^{-1}(q) \gamma_\mu, \quad (2.28)$$

trabajando con el integrando:

$$\begin{aligned}
 \gamma_\mu S_{f_1}(q_+) \left[S_{f_1}^{-1}(q_+) \gamma_5 + \gamma_5 S_{\bar{f}_2}^{-1}(q) \right] S_{\bar{f}_2}^{-1}(q) \gamma_\mu &= \left[\gamma_\mu \gamma_5 + \gamma_\mu S_{f_1}(q_+) \gamma_5 S_{\bar{f}_2}^{-1}(q) \right] S_{\bar{f}_2}^{-1}(q) \gamma_\mu \\
 &= \gamma_\mu \gamma_5 S_{\bar{f}_2}^{-1}(q) \gamma_\mu + \gamma_\mu S_{f_1}(q_+) \gamma_5 S_{\bar{f}_2}^{-1}(q) S_{\bar{f}_2}^{-1}(q) \gamma_\mu, \\
 &= \gamma_\mu \gamma_5 S_{\bar{f}_2}^{-1}(q) \gamma_\mu + \gamma_\mu S_{f_1}(q_+) \gamma_5 \gamma_\mu, \\
 &= - \left[\gamma_5 \gamma_\mu S_{\bar{f}_2}^{-1}(q) \gamma_\mu + \gamma_\mu S_{f_1}(q_+) \gamma_\mu \gamma_5 \right]
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

por lo tanto la ecuación (2.28) se transforma en:

$$P_\mu \Gamma_{5\mu}(k; P) = \gamma_5 \gamma \cdot P + \frac{4i}{3m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\gamma_5 \gamma_\mu S_{\bar{f}_2}^{-1}(q) \gamma_\mu + \gamma_\mu S_{f_1}(q_+) \gamma_\mu \gamma_5 \right], \tag{2.30}$$

recuerde que la forma del propagador del fermión en una CI se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 S_{f_1}(q) &= (-i\gamma \cdot q + M_{f_1}) \sigma_{v_{f_1}}(q^2), \\
 S_{f_1}^{-1}(q) &= i\gamma \cdot q + M_{f_1},
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

donde $\sigma_v(q^2) = 1/(q^2 + M^2)$ es la parte vectorial y $\sigma_s(q^2) = M/(q^2 + M^2)$ es la parte escalar. Por lo tanto se tiene:

$$\begin{aligned}
 P_\mu \Gamma_{5\mu}(k; P) &= \gamma_5 \gamma \cdot P + \frac{4i}{3m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\gamma_5 \gamma_\mu \left\{ (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \sigma_{v_{\bar{f}_2}}(q^2) \right\} \gamma_\mu + \gamma_\mu \left\{ (-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) \sigma_{v_{f_1}}(q_+^2) \right\} \gamma_\mu \gamma_5 \right], \\
 &= \gamma_5 \gamma \cdot P + i \frac{4}{3m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_5 \gamma_\mu \left[\left\{ (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \sigma_{v_{\bar{f}_2}}(q^2) \right\} + \left\{ (i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) \sigma_{v_{f_1}}(q_+^2) \right\} \right] \gamma_\mu,
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

ahora se trabaja con el integrando para separar las partes con M 's y σ 's.

$$\begin{aligned}
 P_\mu \Gamma_{5\mu}(k; P) &= \gamma_5 \gamma \cdot P + \frac{4i}{3m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_5 \gamma_\mu \left[\left\{ (i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \sigma_{v_{\bar{f}_2}}(q^2) \right\} + \left\{ (-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) \sigma_{v_{f_1}}(q_+^2) \right\} \right] \gamma_\mu, \\
 &= \gamma_5 \gamma \cdot P + \frac{4i}{3m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_5 \gamma_\mu \left[-i\gamma \cdot q \sigma_{v_{\bar{f}_2}}(q^2) + M_{\bar{f}_2} \sigma_{v_{\bar{f}_2}}(q^2) + i\gamma \cdot q_+ \sigma_{v_{f_1}}(q_+^2) + M_{f_1} \sigma_{v_{f_1}}(q_+^2) \right] \gamma_\mu, \\
 &= \gamma_5 \gamma \cdot P + \frac{4i}{3m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_5 \gamma_\mu \left[-i\gamma \cdot \left[-q_+ \sigma_{v_{f_1}}(q_+^2) + q \sigma_{v_{\bar{f}_2}}(q^2) \right] + M_{\bar{f}_2} \sigma_{v_{\bar{f}_2}}(q^2) + M_{f_1} \sigma_{v_{f_1}}(q_+^2) \right] \gamma_\mu, \\
 &= \gamma_5 \gamma \cdot P + \frac{4i}{3m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \gamma_5 \gamma_\mu \left[i\gamma \cdot \left(q_+ \sigma_{v_{f_1}}(q_+^2) - q \sigma_{v_{\bar{f}_2}}(q^2) \right) \right] \gamma_\mu + \gamma_5 \gamma_\mu \left[M_{\bar{f}_2} \sigma_{v_{\bar{f}_2}}(q^2) + M_{f_1} \sigma_{v_{f_1}}(q_+^2) \right] \gamma_\mu \right\}, \\
 &= \gamma_5 \gamma \cdot P - \frac{4}{3m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_5 \gamma_\mu \gamma \cdot \left[q_+ \sigma_{v_{f_1}}(q_+^2) - q \sigma_{v_{\bar{f}_2}}(q^2) \right] \gamma_\mu + \frac{4}{3m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} i\gamma_5 \gamma_\mu \left[M_{\bar{f}_2} \sigma_{v_{\bar{f}_2}}(q^2) + M_{f_1} \sigma_{v_{f_1}}(q_+^2) \right] \gamma_\mu, \\
 &= \gamma_5 \gamma \cdot P + \frac{4}{3m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \gamma_5 \gamma \cdot \left[q_+ \sigma_{v_{f_1}}(q_+^2) - q \sigma_{v_{\bar{f}_2}}(q^2) \right] \gamma_\mu + \frac{4}{3m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} i\gamma_5 \gamma_\mu \left[M_{\bar{f}_2} \sigma_{v_{\bar{f}_2}}(q^2) + M_{f_1} \sigma_{v_{f_1}}(q_+^2) \right] \gamma_\mu,
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

se sustituye (2.31) en (2.18):

$$\begin{aligned}
 P_\mu \Gamma_{5\mu}(q; P) &= S_{f_1}^{-1}(q_+) i\gamma_5 + i\gamma_5 S_{\bar{f}_2}^{-1}(q) = (i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) i\gamma_5 + i\gamma_5 (i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}), \\
 &= i\gamma_5 (i\gamma \cdot (q_+ + q)) + i\gamma_5 (M_{f_1} + M_{\bar{f}_2}), \\
 &= -\gamma_5 \gamma \cdot (q_+ + q) + i\gamma_5 (M_{f_1} + M_{\bar{f}_2}),
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

ahora comparando el resultado (2.34) con (2.33), para la parte de $i\gamma_5$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 M_{f_1} + M_{\bar{f}_2} &= \frac{4}{3m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \left[M_{\bar{f}_2} \sigma_{v_{\bar{f}_2}}(q^2) + M_{f_1} \sigma_{v_{f_1}}(q_+^2) \right] \gamma_\mu, \\
 &= \frac{16}{3m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[M_{\bar{f}_2} \sigma_{v_{\bar{f}_2}}(q^2) + M_{f_1} \sigma_{v_{f_1}}(q_+^2) \right],
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Para la parte $\gamma_5 \gamma$ se tiene:

$$-\gamma_5 \gamma \cdot (q_+ + q) = \gamma_5 \gamma \cdot P + \frac{4}{3m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \gamma_5 \gamma \cdot [q_+ \sigma_{v_{f_1}}(q_+^2) - q \sigma_{v_{\bar{f}_2}}(q^2)] \gamma_\mu$$

multiplicando por P y usando que $P^2 = 0$:

$$\begin{aligned} -\gamma_5 \gamma \cdot \underbrace{(q_+ + q)P}_{q \cdot P + P^2 - q \cdot P = 0} &= \gamma_5 \gamma \cdot P^2 + \frac{4}{3m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \gamma_5 \gamma \cdot [P \cdot q_+ \sigma_{v_{f_1}}(q_+^2) - P \cdot q \sigma_{v_{\bar{f}_2}}(q^2)] \gamma_\mu, \\ 0 &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} [P \cdot q_+ \sigma_{v_{f_1}}(q_+^2) - P \cdot q \sigma_{v_{\bar{f}_2}}(q^2)], \end{aligned} \quad (2.36)$$

de esta manera la ecuación (2.36) define el esquema de regularización que se usara, además, indica que la AVWGTI se satisface si y solo si el modelo esta regularizado de tal manera que no existan divergencias cuadráticas y/o logarítmicas. Se deben analizar correctamente los integrandos de (2.35 y 2.36), los cuales se pueden ver de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 0 &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\frac{P \cdot q_+}{q_+^2 + M_{f_1}^2} - \frac{P \cdot q}{q^2 + M_{\bar{f}_2}^2} \right], \\ 0 &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\frac{(P \cdot q_+)(q^2 + M_{\bar{f}_2}^2) - (P \cdot q)(q_+^2 + M_{f_1}^2)}{(q_+^2 + M_{f_1}^2)(q^2 + M_{\bar{f}_2}^2)} \right], \end{aligned} \quad (2.37)$$

el integrando de (2.37) se puede resolver utilizando una parametrización de Feynman, cuya forma más simple y la que se utilizara es;

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[ax + (1-x)b]^2}, \quad a, b > 0. \quad (2.38)$$

Donde se tomara $a = (q_+^2 + M_{f_1}^2)$ y $b = (q^2 + M_{\bar{f}_2}^2)$, desarrollando el denominador y completando los cuadrados perfectos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(q_+^2 + M_{f_1}^2)(q^2 + M_{\bar{f}_2}^2)} &= \int_0^1 \frac{dx}{\left[(q_+^2 + M_{f_1}^2)x + (1-x)(q^2 + M_{\bar{f}_2}^2) \right]^2}, \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\left[(q^2 + 2q \cdot P + P^2 + M_{f_1}^2)x + (1-x)(q^2 + M_{\bar{f}_2}^2) \right]^2}, \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\left[(q + xP)^2 + xM_{f_1}^2 + M_{\bar{f}_2}^2(1-x) + x(1-x)P^2 \right]^2}, \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{[(q + xP)^2 + \mathfrak{M}^2]^2} \xrightarrow{q' = q + xP} \int_0^1 \frac{dx}{(q'^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \xrightarrow{q' \rightarrow q} \int_0^1 \frac{dx}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \end{aligned}$$

donde se define:

$$\mathfrak{M}^2(x, M_{f_1}, M_{\bar{f}_2}, P) = xM_{f_1}^2 + M_{\bar{f}_2}^2(1-x) + x(1-x)P^2, \quad (2.39)$$

es necesario hacer el desplazamiento en q mediante el cambio de variable $q' = q + xP$, por lo tanto el numerador ($\mathcal{N}$) de (2.37) cambia de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= P \cdot q_+(q^2 + M_{f_2}^2) - P \cdot q(q^2 + M_{f_1}^2), \\ &= P \cdot (q + P)(q^2 + M_{f_2}^2) - P \cdot q((q + P)^2 + M_{f_1}^2), \\ &\vdots \quad q' = q + xP \Rightarrow q = q' - xP \\ &= (q' + (1 - x)P) \cdot P \left[(q' - xP)^2 + M_{f_2}^2 \right] - (q' - xP) \left[(q' - xP)^2 + 2(q' - xP) \cdot P + P^2 + M_{f_1}^2 \right],\end{aligned}$$

después de expandir los cuadrados y simplificar se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= (q' \cdot P) \left[M_{f_2}^2 - 2(q' \cdot P) + 2xP^2 - P^2 - M_{f_1}^2 \right] + (1 - x)P^2 \left[q'^2 - 2xq' \cdot P + x^2P^2 + M_{f_2}^2 \right] \\ &\quad + xP^2 \left[q'^2 - 2xq' \cdot P + x^2P^2 + 2q' \cdot P - 2xP^2 + P^2 + M_{f_1}^2 \right],\end{aligned}$$

debido a que se integra en todo el espacio, la integral se anula para las potencias impares de los términos de $(q' \cdot P)$, es decir, términos de la forma $(q' \cdot P)^{2n+1}$, por lo tanto el numerador ($\mathcal{N}$) se simplifica a:

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= -2(q' \cdot P)^2 + (1 - x)P^2 \left[q'^2 + x^2P^2 + M_{f_2}^2 \right] + xP^2 \left[q'^2 + x^2P^2 - 2xP^2 + P^2 + M_{f_1}^2 \right], \\ &\text{(simplificando)} \\ &= -2(q' \cdot P)^2 + P^2 \left[q'^2 + x^2P^2 + M_{f_2}^2 \right] + xP^2 \left[P^2 + M_{f_1}^2 - M_{f_2}^2 - 2xP^2 \right],\end{aligned}$$

se vuelve a la variable original (q) tomando $q' \rightarrow q$ tal como se realizó en la parametrización de Feynman dado que son variables mudas, y usando la propiedad de las integrales en (2.40):

$$\int_q^\Lambda \frac{(P \cdot q)^2}{(q^2 + s)^n} = \frac{1}{4} \int_q^\Lambda \frac{P^2 q^2}{(q^2 + s)^n} \quad (2.40)$$

el numerador se reduce a:

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= -2(q \cdot P)^2 + P^2 \left[q^2 + x^2P^2 + M_{f_2}^2 \right] + xP^2 \left[P^2 + M_{f_1}^2 - M_{f_2}^2 - 2xP^2 \right], \\ &= P^2 \left(\frac{1}{2}q^2 + M_{f_2}^2 + xM_{f_1}^2 - xM_{f_2}^2 + x(1 - x)P^2 \right), \\ &= P^2 \left(\frac{1}{2}q^2 + \mathfrak{M}^2 \right),\end{aligned}$$

finalmente con la parametrización de Feynman y ($\mathcal{N}$) la ecuación (2.37) se ve como:

$$0 = \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{P^2 \left(\frac{1}{2}q^2 + \mathfrak{M}^2 \right)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2}$$

quitando el factor P^2 resulta:

$$0 = \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{2}q^2 + \mathfrak{M}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \quad (2.41)$$

además, con $P^2 = 0 = m$ (limite quiral) y $M_{f_1} = M_{\bar{f}_2}$, (2.36) se escribe como:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{8}{3} \frac{M}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(q_+^2 + M^2) + (q^2 + M^2)}{(q_+^2 + M^2)(q^2 + M^2)}, \\
 &= \frac{8}{3} \frac{M}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{2q^2 + 2q \cdot \vec{P} + \vec{P}^2 + 2M^2}{(q_+^2 + M^2)(q^2 + M^2)}, \\
 &= \frac{16}{3} \frac{M}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q^2 + M^2}{(q^2 + M^2)^2}, \\
 &= \frac{16}{3} \frac{M}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q^2 + M^2}{(q^2 + M^2)^2}, \\
 M &= \frac{16}{3} \frac{M}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + M^2)}. \tag{2.42}
 \end{aligned}$$

Las restricciones (2.41) y (2.42) se implementan en todos cálculos de tal manera se preserve AVWG-TI. Estas ecuaciones se pueden regularizar por medio de la siguiente ecuación;

$$\frac{1}{s + M_{f_1}^2} = \frac{e^{-\tau_{uv}^2(s + M_{f_1}^2)} - e^{-\tau_{ir}^2(s + M_{f_1}^2)}}{s + M_{f_1}^2}$$

para ello se considera la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned}
 \frac{M^2}{(s + M^2)^2} &= -M^2 \frac{d}{dM^2} \frac{1}{s + M^2}, \\
 \frac{2}{(s + M^2)^3} &= \frac{d}{dM^2} \left(\frac{d}{dM^2} \frac{1}{s + M^2} \right)
 \end{aligned}$$

aplicando esta propiedad a (2.14), se tiene:

$$\begin{aligned}
 C'(M_{f_1}, \tau_{uv}, \tau_{ir}) &= -M_{f_1}^2 \frac{d}{dM_{f_1}^2} C(M_{f_1}, \tau_{uv}, \tau_{ir}), \\
 &= -M_{f_1}^2 \frac{d}{dM_{f_1}^2} \left[M_{f_1}^2 \left(\Gamma(0, M_{f_1}^2 \tau_{ir}^2) - \Gamma(0, M_{f_1}^2 \tau_{uv}^2) \right) + \frac{e^{-M_{f_1}^2 \tau_{uv}^2}}{\tau_{uv}^2} - \frac{e^{-M_{f_1}^2 \tau_{ir}^2}}{\tau_{ir}^2} \right], \\
 &= -M_{f_1}^2 \left(\Gamma(0, M_{f_1}^2 \tau_{ir}^2) - \Gamma(0, M_{f_1}^2 \tau_{uv}^2) \right)
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Insertando las ecuaciones (2.14) y (2.43) dentro de (2.41) se llega a la siguiente identidad:

$$0 = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[C(M_{f_1}, \tau_{uv}, \tau_{ir}) + C'(M_{f_1}, \tau_{uv}, \tau_{ir}) \right]. \tag{2.44}$$

Se puede notar que de manera general las funciones C 's se pueden escribir de manera general de la siguiente manera:

$$C_{\alpha\beta}(M_{f_1}, \tau_{uv}, \tau_{ir}) = \frac{(M^2)^\nu}{\Gamma(\beta)} \Gamma(\beta - 2, M_{f_1}^2 \tau_{uv}^2, M_{f_1}^2 \tau_{ir}^2), \tag{2.45}$$

donde $\nu = \alpha - (\beta - 2)$ y

$$\Gamma(\alpha, z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} dt t^{\alpha-1} e^{-t}$$

es la función Gamma incompleta generalizada. De esta manera se tiene:

$$\left. \begin{aligned}
 C_{01}(M, \tau_{uv}, \tau_{ir}) &= C(M, \tau_{uv}, \tau_{ir}) = \int_0^\infty dq^2 \frac{q^2}{q^2 + M^2} \stackrel{q^2 \rightarrow s}{=} \int_0^\infty ds \frac{s}{s + M^2}, \\
 &= M^2 \left(\Gamma(-1, M^2 \tau_{uv}^2) - \Gamma(-1, M^2 \tau_{ir}^2) \right), \\
 C_{02}(M, \tau_{uv}, \tau_{ir}) &= C'(M, \tau_{uv}, \tau_{ir}) = \int_0^\infty dq^2 \frac{q^2 M^2}{(q^2 + M^2)^2} \stackrel{q^2 \rightarrow s}{=} \int_0^\infty ds \frac{s M^2}{(s + M^2)^2}, \\
 &= -M^2 \frac{d}{dM^2} C(M, \tau_{uv}, \tau_{ir}), \\
 &= M^2 \left(\Gamma(0, M^2 \tau_{uv}^2) - \Gamma(0, M^2 \tau_{ir}^2) \right), \\
 C_{03}(M, \tau_{uv}, \tau_{ir}) &= C''(M, \tau_{uv}, \tau_{ir}) = \int_0^\infty dq^2 \frac{q^2 M^2}{(q^2 + M^2)^3} \stackrel{q^2 \rightarrow s}{=} \int_0^\infty ds \frac{s M^2}{(s + M^2)^3}, \\
 &= \frac{M^2}{2} \frac{d}{dM^2} \frac{d}{dM^2} C(M, \tau_{uv}, \tau_{ir}), \\
 &= \frac{1}{2} \left[-e^{-M^2 \tau_{ir}^2} + e^{-M^2 \tau_{uv}^2} \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

Se definen las siguiente expresiones que serán usadas más adelante.

$$\begin{aligned}
 \bar{C}'(M, \tau_{uv}, \tau_{ir}) &= \frac{C'(M, \tau_{uv}, \tau_{ir})}{M^2}, \\
 \bar{C}''(M, \tau_{uv}, \tau_{ir}) &= \frac{C''(M, \tau_{uv}, \tau_{ir})}{M^2}.
 \end{aligned} \quad (2.47)$$

Propiedad 2.44.

2.5.1

Para mostrar la propiedad (2.44) es importante notar que se debe implementar un truco que consiste en partir $\mathfrak{M}^2 = \frac{1}{2}\mathfrak{M}^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{M}^2$ en el numerador de la ecuación para poder aplicar las propiedades de (2.45):

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{2}q^2 + \mathfrak{M}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2}, \\
 &= \int_0^1 dx \frac{1}{16\pi^2} \int dq^2 q^2 \left[\frac{\frac{1}{2}q^2 + \mathfrak{M}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \right] = \int_0^1 dx \frac{1}{16\pi^2} \int dq^2 q^2 \left[\frac{\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{M}^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{M}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \right], \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int dq^2 q^2 \left[\frac{q^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \right] = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int dq^2 q^2 \left[\frac{q^2 + \mathfrak{M}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} + \frac{\mathfrak{M}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \right], \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[\int dq^2 \frac{q^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} + \int dq^2 \frac{q^2 \mathfrak{M}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \right], \quad q^2 \rightarrow s, \quad dq^2 \rightarrow ds, \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[\int ds \frac{s}{(s + \mathfrak{M}^2)^2} + \int ds \frac{s \mathfrak{M}^2}{(s + \mathfrak{M}^2)^2} \right], \\
 0 &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx [C + C']
 \end{aligned}$$

donde se uso

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{1}{16\pi^2} \int dq^2 q^2.$$

2.6. Clasificación de las Amplitudes de BS

Nos interesa calcular las propiedades estáticas de los diferentes tipos de mesones, por lo tanto se describirá la forma que toman las amplitudes de BS en CI de manera general. Comenzando describiendo los tipos de partículas (canales) mencionadas anteriormente en la descripción de (2.2) las cuales dependen de los números cuánticos de S (espín), P (paridad), L (momento angular), C (conjugación de la carga), entre otros del modelo de quarks de Gell-Mann, estas se resumen en la tabla {2.3}.

Tabla 2.3: Clasificación de los Mesones según sus números cuánticos.

Tipo	Form	Espín S	L	Paridad $((-1)^{L+1})$	J^{PC}
Escalar	$\bar{\psi}\psi$	0	1	+	0^{++}
Pseudoescalar	$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	0	0	-	0^{-+}
Vector	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	1	0	-	1^{--}
Axialvector	$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	1	1	+	$1^{++}, 1^{+-}$
Tensor	$\bar{\psi}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\psi$	2	1	+	2^{++}

P es paridad, $P = (-1)^{L+1}$.

$J = L + S$, Momento angular total, va de $|L - S|$ a $|L + S|$.

$C = (-1)^{L+S}$, denota la conjugación de carga.

Con la dependencia del momento relativo prohibida por CI las Amplitudes de BS para los mesones en la tabla {2.3} son (como en [53]):

$$\Gamma^{0^{++}}(P) = \mathbb{1}E^{0^{++}}(P), \quad (2.48)$$

$$\Gamma^{0^{-+}}(P) = \gamma_5 \left[iE^{0^{-+}}(P) + \frac{\gamma \cdot P}{2M_R} F^{0^{-+}}(P) \right], \quad (2.49)$$

$$\Gamma_\mu^{1^{--}}(P) = \gamma_\mu^T E^{1^{--}}(P) + \frac{1}{2M_R} \sigma_{\mu\nu} P_\nu F^{1^{--}}(P), \quad (2.50)$$

$$\Gamma_\mu^{1^{++}}(P) = \gamma_5 \left[\gamma_\mu^T E^{1^{++}}(P) + \frac{1}{2M_R} \sigma_{\mu\nu} P_\nu F^{1^{++}}(P) \right], \quad (2.51)$$

donde M es la escala de masa, los resultados no dependen de ella. Una ABS con conjugación de carga es:

$$\bar{\Gamma}_H(k, P) = C^\dagger \Gamma_H(-k, P)^T C \quad (2.52)$$

donde T denota la transpuesta de todos los índices matriciales y $C = \gamma_2\gamma_4$ es la matriz de conjugación de carga con $C^\dagger = -C$, $[C, \gamma_5] = 0$, la conjugación de carga de algunos elementos matriciales es:

$$\begin{aligned} C^\dagger \gamma_\mu^T C &= -\gamma_\mu, \\ C^\dagger \sigma_{\mu\nu}^T C &= -\sigma_{\mu\nu}, \\ C^\dagger \gamma_5^T C &= \gamma_5, \\ C^\dagger \gamma_5 \sigma_{\mu\nu}^T C &= -\gamma_5 \sigma_{\mu\nu}, \\ C^\dagger (\gamma_5 \sigma_{\mu\nu})^T C &= -\gamma_5 \sigma_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

de esta manera las ABS con conjugación de carga se escriben de la siguiente manera:

$$\bar{\Gamma}^{0^{++}}(P) = \Gamma^{0^{++}}(P), \quad (2.53)$$

$$\bar{\Gamma}^{0^{-+}}(P) = \Gamma^{0^{-+}}(P), \quad (2.54)$$

$$\bar{\Gamma}_\mu^{1^{--}}(P) = -\Gamma_\mu^{1^{--}}(P), \quad (2.55)$$

$$\bar{\Gamma}_\mu^{1^{++}}(P) = \Gamma_\mu^{1^{++}}(P), \quad (2.56)$$

Con todas estas herramientas en el capítulo siguiente se mostraran explícitamente las amplitudes de BS para posteriormente resolver la ecuación de BS y de esta manera encontrar la masa de los mesones de la tabla {2.3}.

Capítulo 3

Ecuación de Bethe-Salpeter para mesones

3.1. Introducción

En el capítulo anterior se describió la ecuación de Bethe-Salpeter para resolver estados ligados de dos partículas como lo son los mesones y los diquarks en este capítulo se presenta el desarrollo de las amplitudes de Bethe-Salpeter (ABS) para los distintos canales mostrados en la tabla {2.3}.

3.2. Amplitudes Bethe-Salpeter en el modelo CI

La masa y las amplitudes de Bethe-Salpeter se encuentran resolviendo la ecuación (2.2) la cual tiene solución para $P^2 = -M_{q\bar{q}}^2$. Al sustituir cada una de las Amplitudes de Bethe-Salpeter (2.48, 2.49, 2.50, 2.51) en (2.23) se obtiene la ecuación de Bethe-Salpeter para su respectivo canal, para resolverla se introduce el valor propio λ_H a la ecuación del estado ligado. La masa en el estado ligado en el canal particular $M_{q\bar{q}}$ sera tal que $\lambda_H(P^2 = -M_{q\bar{q}}^2) = 1$, donde P es el momento total del mesón. Para cualquier canal la forma de la BSE en el modelo CI es:

$$K_H(M_H) \cdot \Gamma_H(M_H) = \lambda_H(M_H) \Gamma_H(M_H) \quad (3.1)$$

con K_H una matriz 2×2 , de esta manera la ecuación (3.1) es una eigenecuación, una ecuación de valores propios del vector $\Gamma_H(M_H) = (E_H(M_H), F_H(M_H))^T$, la cual tiene soluciones para valores discreto de $P^2 = -M_H^2$. Una vez descritos los elementos de la eigenecuación de BS se debe resolver y tomar el resultado cuando el eigenvalor λ_H es idénticamente 1. Los elementos de la matriz de la BSE se pueden escribir en una notación conveniente:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_H^{ij}(P) &= -\frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}\{\mathcal{P}_H^i(P) \gamma_\mu S_{f_1}(q_+) \mathcal{D}_H^j(P) S_{\bar{f}_2}(q_-) \gamma_\mu\}}{(q_+^2 + M_{f_1}^2)(q_-^2 + M_{\bar{f}_2}^2)}, \\ &= -\frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}\{\mathcal{P}_H^i(P) \gamma_\mu S_{f_1}(q_+) \mathcal{D}_H^j(P) S_{\bar{f}_2}(q_-) \gamma_\mu\}_{q \rightarrow q-xP}}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2}, \\ &= \int \frac{\overline{\mathcal{K}}^{ij}}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde $\mathcal{D}_H^j$ y $\mathcal{P}_H^i$ son proyectores covariantes de Dirac que se ajustan a cada canal de mesones. Los proyectores $\mathcal{D}$ son los factores que multiplican a las amplitudes de BS E(P) y F(P), es decir:

$$\Gamma^{0^{++}}(P) = \underbrace{\gamma_5 i}_{\mathcal{D}^1} E^{0^{++}}(P) + \gamma_5 \underbrace{\frac{\gamma \cdot P}{2M_R}}_{\mathcal{D}^2} F^{0^{++}}(P)$$

y los proyectores $\mathcal{P}^i$ se escogen de tal manera que cumplan con:

$$\begin{aligned}\text{Tr}\{\mathcal{P}^1(P)\Gamma(P)\} &= E(P), \\ \text{Tr}\{\mathcal{P}^2(P)\Gamma(P)\} &= F(P), \\ \text{Tr}\{\mathcal{P}^1(P)\mathcal{D}^1(P)\} &= 1, \\ \text{Tr}\{\mathcal{P}^2(P)\mathcal{D}^2(P)\} &= 1,\end{aligned}\tag{3.3}$$

por lo tanto $\mathcal{P}^1(P) = \frac{-i}{4}\gamma_5$ y $\mathcal{P}^2(P) = -\frac{M_R}{2P^2}\gamma_5\gamma \cdot P$.

En la ecuación (3.2) se utilizó la parametrización de Feynman y la renormalización (2.44, 2.45). A continuación se muestra la manera de obtener los Kernel's de cada canal comenzando con el canal pseudoescalar.

3.2.1. Kernel Pseudoescalar

Para el kernel pseudoescalar se utilizan los siguientes proyectores de Dirac:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{0+}^1 &= i\gamma_5, & \mathcal{D}_{0+}^2 &= \frac{1}{2M}\gamma_5\gamma \cdot P, \\ \mathcal{P}_{0+}^1 &= -\frac{i}{4}\gamma_5, & \mathcal{P}_{0+}^2 &= -\frac{M}{2P^2}\gamma_5\gamma \cdot P,\end{aligned}\tag{3.4}$$

Después de calcular la traza del elemento de matriz para la amplitud $\overline{\mathcal{K}}_{0+}^{ij}$ según la ecuación (3.2):

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{K}}_{0+}^{11} &= \text{Tr}\left\{-\frac{i}{4}\gamma_5\gamma_\mu(-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1})(i\gamma_5)(-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2})\gamma_\mu\right\} \\ &= -4(q^2 + P \cdot q + M_{f_1}M_{\bar{f}_2}),\end{aligned}\tag{3.5}$$

ahora se hace el cambio de variable ($q \rightarrow q - xP$) para obtener:

$$\overline{\mathcal{K}}_{0+}^{11} = -4(M_{f_1}M_{\bar{f}_2} + P \cdot (q - xP) + (q - xP)^2),\tag{3.6}$$

desarrollando y eliminando los términos de la forma $(q \cdot P)^{2n+1}$ tal como se mostró en (2.40), después de simplificar se obtiene:

$$\overline{\mathcal{K}}_{0+}^{11} = -4(M_{f_1}M_{\bar{f}_2} - xP^2 + q^2 + x^2P^2),\tag{3.7}$$

de esta manera se obtiene:

$$\mathcal{K}_{0+}^{11} = \frac{16}{3} \frac{1}{m_G^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{M_{f_1}M_{\bar{f}_2} - xP^2 + q^2 + x^2P^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2},\tag{3.8}$$

ahora se debe regularizar usando (2.46), para ello se suma un 0 en el numerador de la forma $\mathfrak{M}^2 - \mathfrak{M}^2$:

$$\mathcal{K}_{0+}^{11} = \frac{16}{3} \frac{1}{m_G^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{M_{f_1}M_{\bar{f}_2} - xP^2 + q^2 + \mathfrak{M}^2 + x^2P^2 - \mathfrak{M}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2},\tag{3.9}$$

se usa (2.39) y (2.10) y se tiene:

$$\mathcal{K}_{0+}^{11} = \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^1 dx \int d^4q \, q^2 \left[\frac{M_{f_1}M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} + \frac{q^2 + \mathfrak{M}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \right],\tag{3.10}$$

con el cambio de variable $q^2 \rightarrow s$ se tiene:

$$\mathcal{K}_{0+}^{11} = \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^1 dx \left[(M_{f_1}M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}^2) \overline{C}'(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) + C(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) \right].\tag{3.11}$$

De la misma manera se procede para obtener $\mathcal{K}^{12}$:

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{K}}_{0^{+}}^{12} &= \text{Tr}\left\{-\frac{i}{4}\gamma_5\gamma_\mu(-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1})\left(\frac{\gamma_5\gamma \cdot P}{2M}\right)(-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2})\gamma_\mu\right\} \\ &= \frac{2}{M}\left[(M_{f_1} - M_{\bar{f}_2})P \cdot q - M_{\bar{f}_2}P^2\right],\end{aligned}\quad (3.12)$$

nuevamente con el cambio de variable $q \rightarrow q - xP$:

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{K}}_{0^{+}}^{12} &= \frac{2}{M}\left[(M_{f_1} - M_{\bar{f}_2})P \cdot (q - xP) - M_{\bar{f}_2}P^2\right], \\ &= -\frac{2P^2}{M}\left[M_{f_1}x + (1 - x)M_{\bar{f}_2}\right],\end{aligned}\quad (3.13)$$

regularizando como anteriormente con el cambio $q \rightarrow q - xP$ y después $q^2 \rightarrow s$:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{0^{+}}^{12} &= \frac{4}{3m_G^2} \int_0^1 dx \frac{1}{16\pi^2} \int dq^2 q^2 \frac{\frac{2P^2}{M}\left[M_{f_1}x + (1 - x)M_{\bar{f}_2}\right]}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2}, \\ &= \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \frac{P^2}{2M} \int_0^1 dx \int_0^\infty ds s \frac{\left[M_{f_1}x + (1 - x)M_{\bar{f}_2}\right]}{(s + \mathfrak{M}^2)^2},\end{aligned}\quad (3.14)$$

por lo tanto :

$$\mathcal{K}_{0^{+}}^{12} = \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \frac{P^2}{2M} \int_0^1 dx \left[M_{f_1}x + (1 - x)M_{\bar{f}_2}\right] \overline{\mathcal{C}}'(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}). \quad (3.15)$$

De la misma manera se procede para obtener $\mathcal{K}^{21}$:

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{K}}_{0^{+}}^{21} &= \text{Tr}\left\{-\left(\frac{M}{2P^2}\gamma_5\gamma \cdot P\right)\gamma_\mu(-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1})(i\gamma_5)(-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2})\gamma_\mu\right\}, \\ &= -\frac{4M}{P^2}\left[M_{f_1}P^2 + M_{\bar{f}_2}P \cdot q - M_{f_1}P \cdot q\right],\end{aligned}\quad (3.16)$$

como anteriormente con el cambio $q \rightarrow q - xP$ y eliminado términos de la forma $(P \cdot q)^{2n+1}$:

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{K}}_{0^{+}}^{21} &= -\frac{4M}{P^2}\left[M_{f_1}P^2 + M_{\bar{f}_2}P \cdot (q - xP) - M_{f_1}P \cdot (q - xP)\right], \\ &= -4M\left[(1 - x)M_{\bar{f}_2} + xM_{f_1}\right]\end{aligned}\quad (3.17)$$

después de regularizar se obtiene:

$$\mathcal{K}_{0^{+}}^{21} = \frac{M}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^1 dx \left[(1 - x)M_{\bar{f}_2} + xM_{f_1}\right] \overline{\mathcal{C}}'(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) \quad (3.18)$$

finalmente se obtiene $\mathcal{K}^{22}$:

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{K}}_{0^{+}}^{22} &= \text{Tr}\left\{-\left(\frac{M}{2P^2}\gamma_5\gamma \cdot P\right)\gamma_\mu(-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1})\left(\frac{\gamma_5\gamma \cdot P}{2M}\right)(-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2})\gamma_\mu\right\}, \\ &= -\frac{2}{P^2}\left[2(P \cdot q)^2 + P^2(P \cdot q - q^2 + M_{f_1}M_{\bar{f}_2})\right],\end{aligned}\quad (3.19)$$

con el cambio de variable $q \rightarrow q - xP$, eliminando los términos impares de $(q \cdot P)$ y usando la propiedad (2.40) para los términos pares de $(q \cdot P)$ se obtiene:

$$\overline{\mathcal{K}}_{0^{+}}^{22} = 2\left[\frac{1}{2}q^2 + P^2x^2 + M_{f_1}M_{\bar{f}_2} - P^2x\right], \quad (3.20)$$

por lo tanto se tiene:

$$\mathcal{K}_{0^{++}}^{22} = -\frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int dq^2 q^2 \frac{\left[\frac{1}{2}q^2 + P^2 x^2 + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - P^2 x\right]}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2}, \quad (3.21)$$

para regularizar correctamente debemos quitar el término $\frac{1}{2}q^2$ para ello se suma y resta $\mathfrak{M}^2$ de tal manera que se obtiene:

$$\mathcal{K}_{0^{++}}^{22} = -\frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int dq^2 q^2 \left[-\frac{\frac{1}{2}q^2 + \mathfrak{M}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} + \frac{\mathfrak{M}^2 - x(1-x)P^2 + M_{f_1} M_{\bar{f}_2}}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \right], \quad (3.22)$$

después de regularizar se obtiene:

$$\mathcal{K}_{0^{++}}^{22} = -\frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[\mathfrak{M}^2 - x(1-x)P^2 + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} \right] \bar{C}'(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}), \quad (3.23)$$

sustituyendo (2.39) en (3.23) al simplificar se obtiene:

$$\mathcal{K}_{0^{++}}^{22} = -\frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + M_{f_1}^2 x + M_{\bar{f}_2}^2 (1-x) \right] \bar{C}'(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}). \quad (3.24)$$

Reuniendo la información y con un cambio en la notación PS = Pseudoescalar = 0^{++} , $1 = E$ y $2 = F$ en los índices ij del kernel se tiene:

$$\mathcal{K}_{0^{++}}^{11} = \mathcal{K}_{PS}^{EE} = \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^1 dx \left[(M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}^2) \bar{C}'(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) + C(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) \right]. \quad (3.25)$$

$$\mathcal{K}_{0^{++}}^{12} = \mathcal{K}_{PS}^{EF} = \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \frac{P^2}{2M} \int_0^1 dx \left[M_{f_1} x + (1-x)M_{\bar{f}_2} \right] \bar{C}'(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}). \quad (3.26)$$

$$\mathcal{K}_{0^{++}}^{21} = \mathcal{K}_{PS}^{FE} = \frac{M}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^1 dx \left[(1-x)M_{\bar{f}_2} + xM_{f_1} \right] \bar{C}'(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) \quad (3.27)$$

$$\mathcal{K}_{0^{++}}^{22} = \mathcal{K}_{PS}^{FF} = -\frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + M_{f_1}^2 x + M_{\bar{f}_2}^2 (1-x) \right] \bar{C}'(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}). \quad (3.28)$$

por lo tanto la ecuación (3.1) toma la forma:

$$\begin{bmatrix} E_{PS}(P) \\ F_{PS}(P) \end{bmatrix} = \frac{4\hat{\alpha}_{IR}}{3\pi} \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{PS}^{EE} & \mathcal{K}_{PS}^{EF} \\ \mathcal{K}_{PS}^{FE} & \mathcal{K}_{PS}^{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{PS}(P) \\ F_{PS}(P) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

donde se tomo el factor común $\frac{1}{3\pi^2 m_G^2}$ de los Kernel's de las ecuaciones (3.25 a 3.28) y según (2.4) se tiene:

$$\frac{1}{3\pi^2 m_G^2} = \frac{4\pi\alpha_{IR}}{3\pi^2 m_g^2} = \frac{4\pi\hat{\alpha}_{IR}}{3\pi^2} = \frac{4\hat{\alpha}_{IR}}{3\pi}$$

con $\hat{\alpha}_{IR} = \alpha_{IR}/m_g^2$, además se define la masa reducida entre los quarks dentro del mesón como $M = M_R = (M_f M_g)/(M_f + M_g)$. Este es el cálculo de la eigen-ecuación para el Kernel pseudoescalar el cual tiene solución cuando el eigen-valor es 1 y eso corresponde a $P^2 = -M_{q\bar{q}}^2$. Entonces el eigen-vector asociado al eigen-valor 1 corresponde a las amplitudes de BS es decir a $E(P)$ y $F(P)$.

El Kernel para los canales restantes se muestran en el apéndice A.

3.3. Normalización de las Amplitudes de Bethe-Salpeter

En los cálculos de observables se debe emplear la normalización canónica de las amplitudes de BS para obtener $E(P)$ y $F(P)$, debido a que la rutina para resolver numéricamente la eigenecuación devuelve un eigenvector normalizado a uno, por ende es necesario normalizar las expresiones con una condición aparte. Esto con el fin de realizar un calculo consistente con las constantes de decaimiento leptónico y otros observables además de comparar con los resultados de otros trabajos que usan Schowinger-Dyson. De la ecuación (2.2) se obtiene una condición que debe cumplirse la cual es:

$$P_\mu = N_c \frac{\partial}{\partial P_\mu} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \{ \bar{\Gamma}_H(-Q) S(q_+) \Gamma_H(Q) S(q) \} \quad (3.30)$$

cuando $Q = P$, con $P^2 = -M_H^2$, lo cual asegura que el residuo en el polo de masa sea igual a 1. Esta ecuación garantiza, también, que el factor de forma electromagnético del pión sea uno para momento igual a cero. Aquí, Γ_H es la amplitud normalizada y $\bar{\Gamma}_H$ su versión con la carga conjugada. Para cada canal se reescala Γ_H de tal manera que la ecuación (3.29) se satisfaga. Así, reemplazando Γ_H por Γ_H/N_H , donde N_H es la constante de normalización y entonces Γ_H es la amplitud de BS no normalizada, que se obtiene al resolver la ecuación de BS homogénea ($\Gamma_H^C = \Gamma_H/N_H$). De esta manera N_H se obtiene:

$$N_H^2 P_\mu = N_c \frac{\partial}{\partial P_\mu} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \{ \bar{\Gamma}_H(-Q) S(q_+) \Gamma_H(Q) S(q) \} \quad (3.31)$$

donde como se ha dicho $q_+ = q + P$, $q=q$. Para los canales vectorial y axial hay un factor adicional de 1/3 al dado derecho de la ecuación (3.31), este factor se debe a que se toman en cuenta las 3 polarizaciones del mesón. Contrayendo (3.31) con P_μ y usando la propiedad de la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dP^2} = \frac{1}{2P^2} P_\mu \frac{\partial}{\partial P_\mu} \quad (3.32)$$

Normalización.

3.3.1

$$\begin{aligned} N_H^2 P_\mu &= N_c \frac{\partial}{\partial P_\mu} \Phi_H(Q, P), \\ N_H^2 P_\mu P_\mu &= N_H^2 P^2 = N_c P_\mu \frac{\partial}{\partial P_\mu} \Phi_H(Q, P), \\ N_H^2 &= N_c \frac{P_\mu}{P^2} \frac{\partial}{\partial P_\mu} \Phi_H(Q, P), \\ \frac{1}{2} N_H^2 &= N_c \underbrace{\frac{P_\mu}{2P^2} \frac{\partial}{\partial P_\mu}}_{(3.32)} \Phi_H(Q, P), \\ \frac{1}{2} N_H^2 &= N_c \frac{d}{dP^2} \Phi_H(Q, P), \\ N_H^2 &= 2N_c \frac{d}{dP^2} \Phi_H(Q, P), \\ N_H^2 &= \frac{d}{dP^2} \Pi_H(Q, P). \end{aligned}$$

Con

$$\Pi_H(Q, P) = 2N_c \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \{ \bar{\Gamma}_H(-Q) S(q_+) \Gamma_H(Q) S(q) \} \quad (3.33)$$

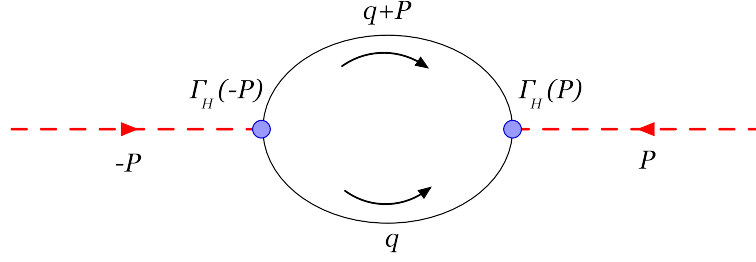


Figura 3.1: Polarización del vacío.

donde Γ_H es la amplitud no normalizada. Con $N_c = 3$ para mesones (para diquarks $N_c = 2$). La condición de normalización canónica es:

$$1 = \left. \frac{d}{dP^2} \Pi_H(Q, P) \right|_{Q=P} \quad (3.34)$$

entonces la ecuación a calcular es:

$$N_H^2 = \frac{d}{dP^2} \Pi_H(Q, P) \quad (3.35)$$

La razón de que se pueda identificar esto con la energía propia del pión se debe a que $\Pi_H(Q, P)$ es la polarización del vacío, ver figura {3.1}.

Como Γ_H tiene términos proporcionales a E^2 , F^2 y EF se debe calcular cada término, por esta razón la ecuación (3.35) se puede escribir como:

$$N_H^2 = \sum_{ij=1} N_H^{ij} A_H^i A_H^j, \quad A^1 = E, \quad A^2 = F. \quad (3.36)$$

Para calcular N_H se debe escribir la ecuación (3.35) de forma covariante de la siguiente manera:

$$N_H^{ij} = 2N_c \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} \left\{ \overline{\mathcal{D}}_H^i(-Q) \gamma_\mu S_{f_1}(q_+) \mathcal{D}_H^j(Q) S_{\bar{f}_2} \gamma_\mu \right\}}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2}. \quad (3.37)$$

3.3.1. Normalización del Kernel Pseudoescalar

Para resolver la ecuación (3.37) se utilizan los proyectores de Dirac mostrados en la ecuación (3.4) donde los proyectores de Dirac con la carga conjugada son:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{0^+}^1(P) &= i\gamma_5, & \mathcal{D}_{0^+}^2(P) &= \frac{1}{2M} \gamma_5 \gamma \cdot P, \\ \overline{\mathcal{D}}_{0^+}^1(P) &= i\gamma_5, & \overline{\mathcal{D}}_{0^+}^2(P) &= -\frac{M}{2P^2} \gamma_5 \gamma \cdot P, \end{aligned} \quad (3.38)$$

como se ha dicho, los términos impares de $P \cdot q$ se anulan, se usa la propiedad (2.40) y que el número de color es $N_c = 3$ (para mesones), de esta manera el término proporcional a E^2 es $\mathcal{N}^{11}$ el cual se calcula de la siguiente manera:

$$\mathcal{N}_{PS}^{11} = 2(3) \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} \left\{ i\gamma_5 \gamma_\mu (-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) (i\gamma_5) (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \right\}}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \Big|_{Q=P} \quad (3.39)$$

después de realizar la traza se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{PS}^{11} &= 6 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-4(P^2 x^2 - P^2 x + q^2 + M_{f_1} M_{\bar{f}_2})}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2}, \\ &= \frac{-24}{16\pi^2} \int_0^1 \int d^4 q \, q^2 \frac{d}{dP^2} \left[\frac{(-x(1-x)P^2 + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - \mathfrak{M}^2)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} + \frac{1}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \right],\end{aligned}\quad (3.40)$$

para realizar la derivada indicada se deben tener en cuenta las siguientes propiedades de $\mathfrak{M}^2$ en (2.39):

$$\begin{aligned}\frac{d \mathfrak{M}^2}{dP^2} &= x(1-x), \\ \frac{d}{dP^2} (q^2 + \mathfrak{M}^2) &= x(1-x), \\ \frac{d}{dP^2} (q^2 + \mathfrak{M}^2)^2 &= 2x(1-x)(q^2 + \mathfrak{M}^2)\end{aligned}\quad (3.41)$$

de esta manera (3.40) se convierte en:

$$\mathcal{N}_{PS}^{11} = -\frac{3}{2\pi^2} \int_0^1 \int d^4 q \, q^2 \left[\frac{-3}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} - \frac{2(M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}^2)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^3} \right] x(1-x), \quad (3.42)$$

por ultimo se regulariza según (2.46):

$$\mathcal{N}_{PS}^{11} = \frac{3}{2\pi^2} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left[3\overline{C}'(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) + 2(M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}^2) \overline{C}'(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) \right] x(1-x) \quad (3.43)$$

Ahora se calcula el término $\mathcal{N}^{12}$ que es proporcional a $E_H F_H$, donde se usa $\overline{\mathcal{D}}^1(-Q)$ y $\mathcal{D}^2(Q)$ según (3.38):

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^{12} &= 6 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}\{(i\gamma_5)(-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) \left(\frac{1}{2M} \gamma_5 \gamma \cdot Q \right) (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2})\}}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \Bigg|_{Q=P}, \\ &= 6 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\frac{2}{M} (M_{f_1} (q \cdot Q) - M_{\bar{f}_2} (P \cdot Q) - M_{\bar{f}_2} (q \cdot Q))}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \Bigg|_{Q=P},\end{aligned}\quad (3.44)$$

tomando el cambio $q \rightarrow q - xP$, anulando los términos impares de $P \cdot q$ y usando la propiedad (2.40) se tiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^{12} &= \frac{12}{M} \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\left(M_{f_1} \cancel{(q \cdot Q)}^0 - M_{f_1} x(P \cdot Q) - M_{\bar{f}_2} (P \cdot Q) - M_{\bar{f}_2} \cancel{(q \cdot Q)}^0 + M_{\bar{f}_2} x(P \cdot Q) \right)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \Bigg|_{Q=P}, \\ &= \frac{12}{M} \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(-M_{f_1} x(P \cdot Q) - M_{\bar{f}_2} (P \cdot Q) + M_{\bar{f}_2} x(P \cdot Q))}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \Bigg|_{Q=P}, \\ &= -\frac{12}{M} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d}{dP^2} \frac{[M_{f_1} x + M_{\bar{f}_2} - M_{\bar{f}_2} x](P \cdot Q)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \Bigg|_{Q=P},\end{aligned}\quad (3.45)$$

tomando la derivada en P y después de evaluar en $P = Q$ se tiene:

$$\mathcal{N}^{12} = -\frac{12}{M} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\frac{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2 [M_{f_1} x + M_{\bar{f}_2} - M_{\bar{f}_2} x] \frac{d}{dP^2} (P \cdot Q)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^4} - \frac{[M_{f_1} x + M_{\bar{f}_2} - M_{\bar{f}_2} x] 2x(1-x)(q^2 + \mathfrak{M}^2)(P \cdot Q)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^4} \right] \Bigg|_{Q=P} \quad (3.46)$$

para desarrollar la derivada note que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dP^2} (P \cdot Q) &= \frac{d}{dP^2} (\sqrt{P^2} \cdot Q) = \frac{d}{dP^2} (\sqrt{P^2}) \cdot Q + \sqrt{P^2} \cdot \frac{d}{dP^2} (Q), \\ &= \frac{1}{2\sqrt{P^2}} \frac{d(P^2)}{dP^2} \cdot Q = \frac{Q}{2P} \end{aligned} \quad (3.47)$$

sustituyendo la derivada (3.47) en (3.46) se obtiene:

$$\mathcal{N}^{12} = -\frac{12}{16\pi^2 M} \int_0^1 dx \int d^4 q \, q^2 [M_{f_1} x + M_{\bar{f}_2} - x M_{\bar{f}_2}] \left[\frac{Q}{2P(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} - \frac{2x(1-x)(P \cdot Q)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^3} \right] \Bigg|_{Q=P} \quad (3.48)$$

por ultimo se toma $Q = P$, se regulariza según (2.46) y se simplifica:

$$\mathcal{N}^{12} = -\frac{3}{8\pi^2 M} \int_0^1 dx (M_{f_1} x + M_{\bar{f}_2} - x M_{\bar{f}_2}) [\bar{C}'(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) - 4x(1-x)P^2 \bar{C}''(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv})] \quad (3.49)$$

El calculo de $\mathcal{N}^{21}$ arroja los mismos resultados que $\mathcal{N}^{12}$ debido a las propiedades de los operadores de Dirac en (3.38) y las propiedades de las matrices gamma. Por ende solo falta calcular el término proporcional a F_H^2 el cual es:

$$\mathcal{N}^{22} = 6 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} \left\{ \left(\frac{1}{2M} \gamma_5 \gamma \cdot Q \right) (-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) \left(\frac{1}{2M} \gamma_5 \gamma \cdot Q \right) (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \right\}}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \Bigg|_{Q=P}, \quad (3.50)$$

se trata la traza por separado dado que es más grande:

$$\begin{aligned} T &= \text{Tr} \left\{ \left(\frac{1}{2M} \gamma_5 \gamma \cdot Q \right) (-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) \left(\frac{1}{2M} \gamma_5 \gamma \cdot Q \right) (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \right\}, \\ &= -\frac{1}{M^2} (2(q \cdot Q)^2 + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} Q^2 + 2(P \cdot Q)(q \cdot Q) - Q^2(P \cdot q) - q^2 Q^2) \end{aligned} \quad (3.51)$$

con el cambio $q \rightarrow q - xP$:

$$T = -\frac{1}{M^2} (2(q \cdot Q - xP \cdot Q)^2 + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} Q^2 + 2(P \cdot Q)(q \cdot Q - xP \cdot Q) - Q^2(P \cdot q - xP^2) - (q^2 - 2xq \cdot P + x^2 P^2) Q^2) \quad (3.52)$$

se eliminan los términos impares de $q \cdot Q$:

$$\begin{aligned} T &= -\frac{1}{M^2} (2(q \cdot Q)^2 - 4x(q \cdot Q)(P \cdot Q) + 2x^2(P \cdot Q)^2 + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} Q^2 + 2(P \cdot Q)(q \cdot Q) \\ &\quad - 2x(P \cdot Q)^2 - Q^2(P \cdot q) + Q^2 x P^2 - q^2 Q^2 + 2xQ^2(q \cdot P) - x^2 P^2 Q^2) \end{aligned} \quad (3.53)$$

para los términos pares se usa (2.40) y al simplificar se tiene:

$$T = -\frac{1}{M^2} [Q^2 (M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + x(1-x)P^2) - 2x(1-x)(P \cdot Q)^2 - \frac{1}{2} q^2 Q^2] \quad (3.54)$$

sustituyendo (3.54) en (3.50):

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{22} &= 6 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-\frac{1}{M^2} \left[Q^2 (M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + x(1-x)P^2) - 2x(1-x)(P \cdot Q)^2 - \frac{1}{2}q^2 Q^2 \right]}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \Bigg|_{Q=P}, \\ &= -\frac{6}{16\pi^2 M^2} \int_0^1 dx \int d^4 q \, q^2 \frac{d}{dP^2} Q^2 \left[\frac{(M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + x(1-x)P^2) - 2x(1-x)\frac{(P \cdot Q)^2}{Q^2} - \frac{1}{2}q^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \right] \Bigg|_{Q=P}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

se suma 0 con $\mathfrak{M}^2 - \mathfrak{M}^2$ en el numerados para usar (2.41), después de realizar la derivada, sustituir $Q = P$ y regularizar según (2.46) se obtiene:

$$\mathcal{N}^{22} = -\frac{3}{4\pi^2} \frac{P^2}{M^2} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left[M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}^2 \right] \bar{C}''(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}), \quad (3.56)$$

donde se uso la derivada:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dP^2} \left(\frac{(P \cdot Q)^2}{Q^2} \right) &= \frac{1}{Q^2} \frac{d}{dP^2} (\sqrt{P^2} \cdot Q)^2 = \frac{2}{Q^2} (\sqrt{P^2} \cdot Q) \frac{d}{dP^2} (\sqrt{P^2} \cdot Q), \\ &= \frac{2}{Q^2} (\sqrt{P^2} \cdot Q) \frac{1 \cdot Q}{2\sqrt{P^2}} = \frac{2\sqrt{P^2} Q^2}{2Q^2 \sqrt{P^2}} = 1. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Resumiendo se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{PS}^{11} &= \frac{3}{2\pi^2} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left[3\bar{C}'(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) + 2(M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}^2) \bar{C}'(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) \right] x(1-x) \\ \mathcal{N}_{PS}^{12} = \mathcal{N}_{PS}^{21} &= -\frac{3}{8\pi^2 M} \int_0^1 dx \left(M_{f_1} x + M_{\bar{f}_2} - x M_{\bar{f}_2} \right) \left[\bar{C}'(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) - 4x(1-x)P^2 \bar{C}''(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) \right] \\ \mathcal{N}_{PS}^{22} &= -\frac{3}{4\pi^2} \frac{P^2}{M^2} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left[M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}^2 \right] \bar{C}''(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}), \end{aligned}$$

de manera general la constante de normalización general según (3.36) es:

$$N_H^2 = \mathcal{N}^{11} E_H^2 + 2\mathcal{N}^{12} E_H F_H + \mathcal{N}^{22} F_H^2 \quad (3.58)$$

por lo tanto, de manera general las amplitudes normalizadas son:

$$\begin{aligned} E^N &= \frac{E_H}{N_H^2}, \\ F^N &= \frac{F_H}{N_H^2}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

de esta manera para el canal pseudoescalar sustituyendo (3.43), (3.49) y (3.56) en (3.58) se obtiene:

$$N_{PS}^2 = \mathcal{N}^{11} E_{PS}^2 + 2\mathcal{N}^{12} E_{PS} F_{PS} + \mathcal{N}^{22} F_{PS}^2 \quad (3.60)$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} E_{PS}^N &= \frac{E_{PS}}{N_{PS}^2}, \\ F_{PS}^N &= \frac{F_{PS}}{N_{PS}^2}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

La normalización de las amplitudes restantes se muestran en el apéndice B.

3.4. Resultados

Las ecuaciones (3.29), (A.9), (A.15) y (A.23) tienen solución cuando $P^2 = -M_H^2$. Entonces, es el valor propio corresponde a la amplitud BS del mesón. Se consideran hadrones con cinco sabores (u , d , s , c , y b), donde se asume simetría de isospín en todo momento y no se considera el quark top dado que su masa es muy grande, aproximadamente $172.76 \pm 0.3 \text{ GeV}$, su tiempo de vida es alrededor de $(5 \times 10^{-25} \text{ s})$, es mas pequeño que la escala de tiempo para interacciones fuertes (1.17), por lo tanto, no forma hadrones. Desde hace mucho tiempo se sabe que el truncamiento Rainbow-Ladder (RL) describe muy bien los estados fundamentales del mesón vectorial y del mesón pseudoescalar no singlete, pero falla para sus parejas de paridad [18, 19]. Se encontró que DCSB genera un gran momento cromomagnético anómalo de quark vestido y, en consecuencia, que la separación espín-órbita entre los mesones del estado fundamental se mejora dramáticamente [20–22]. Este es el mecanismo responsable de una división magnificada entre las parejas de paridad; es decir, existen esencialmente correcciones DCSB no perturbativas para los Kernels de RL, que se cancelan en gran medida en los canales pseudoescalares y vectoriales, pero se agregan constructivamente en los canales escalares y vectoriales axiales. Es en este contexto, se introduce repulsión espín-órbita en los canales escalar y axial-vector a través del uso de un acoplamiento fenomenológico g_{SO}^2 tal como en [17], introducido como un factor común único multiplicando los núcleos definidos en las ecuaciones (A.15), (A.23). Los resultados numéricos para los mesones pseudoescalares se muestran en la tabla {3.1} y para los mesones escalares se muestran en la tabla {3.2}. Para los mesones escalares se uso $g_{SO} = 0.32$, este valor se elige para obtener el valor experimental de $\sigma(u\bar{d})$. Aunque los nombres de los mesones son los convencionales, el contenido de quarks también se muestra explícitamente.

Mesón	Masa Experimental	CI	E	F	Carga
$\pi(u\bar{d})$	0.139	0.14	3.60	0.47	1
$K(u\bar{s})$	0.493	0.49	3.81	0.59	1
$h_s(s\bar{s})$	–	0.69	4.04	0.74	0
$D^0(c\bar{u})$	1.86	1.87	3.03	0.37	0
$D_s^+(c\bar{s})$	1.97	1.96	3.24	0.51	1
$B^+(u\bar{b})$	5.28	5.28	1.50	0.09	1
$B_s^0(s\bar{b})$	5.37	5.37	1.59	0.13	0
$B_c^+(c\bar{b})$	6.27	6.29	0.73	0.11	1
$\eta_c(c\bar{c})$	2.98	2.98	2.16	0.41	0
$\eta_b(b\bar{b})$	9.40	9.40	0.48	0.10	0

Tabla 3.1: Masas obtenidas para los mesones pseudoescalares en (GeV) con los parámetros en {2.1} y {2.2}.

El análisis de las masas $\pi(u\bar{d})$ y $\sigma(u\bar{d})$ indica una diferencia de aproximadamente 1.061 GeV , sin embargo, esta diferencia es menos pronunciada para los mesones compuestos por dos quarks pesados, por ejemplo $\eta_b(b\bar{b})$ y $\eta_{b0}(b\bar{b})$ que tienen masas muy cercanas en este modelo IC. Una regla de espaciado para mesones pseudoescalares que contienen un quark pesado es [23–25]:

$$m_{D_s^+(c\bar{s})} - m_{D^0(c\bar{u})} + m_{B^+(u\bar{b})} - m_{B_s^0(s\bar{b})} = 0. \quad (3.62)$$

Utilizando las masas obtenidas en la ecuación (3.62) se cumple. En los mesones con una combinación de quarks ligeros y pesados (“heavy-light mesons” en inglés), la dinámica de los quarks ligeros está determinada principalmente por su masa y su interacción con el quark pesado casi estático. Encontrar un quark ligero lejos del núcleo central es mucho más probable que uno pesado.

Los mesones vectoriales y axial vectoriales se muestran en la tabla {3.3} y tabla {3.4} respectivamente. Una regla de espaciado para mesones vectoriales con el mismo contenido de quarks que en la ecuación (3.62):

$$m_{D_s^*(c\bar{s})} - m_{D^{0*}(c\bar{u})} + m_{B^{+*}(u\bar{b})} - m_{B_s^{0*}(s\bar{b})} = 0. \quad (3.63)$$

esta ecuación se cumple exactamente para las masas obtenidas, y para la masas experimentales se

Mesón	Masa Experimental	CI	E
$\sigma(u\bar{d})$	1.2	1.22	0.66
$K_0^*(u\bar{s})$	1.430	1.33	0.65
$f_0(s\bar{s})$	0.980	1.45	0.64
$D_0^*(c\bar{u})$	2.300	2.32	0.39
$D_{s0}^*(c\bar{s})$	2.317	2.43	0.37
$B_0^*(u\bar{b})$	—	5.50	0.21
$B_{s0}(s\bar{b})$	—	5.59	0.20
$B_{c0}(c\bar{b})$	—	6.45	0.08
$\chi_{c0}(c\bar{c})$	3.414	3.35	0.16
$\chi_{b0}(b\bar{b})$	9.859	9.50	0.04

Tabla 3.2: Masas obtenidas para los mesones escalares en (GeV) con los parámetros en {2.1}, {2.2} y $g_{SO} = 0.32$.

Mesón	Masa Experimental	CI	E
$\rho(u\bar{d})$	0.78	0.93	1.53
$K_1(u\bar{s})$	0.89	1.03	1.62
$\phi(s\bar{s})$	1.02	1.12	1.73
$D^{*0}(c\bar{u})$	2.01	2.06	1.23
$D_s^*(c\bar{s})$	2.11	2.14	1.32
$B^{*+}(u\bar{b})$	5.33	5.33	0.65
$B_s^{0*}(s\bar{b})$	5.42	5.41	0.67
$B_c^*(c\bar{b})$	—	6.32	0.27
$J/\Psi(c\bar{c})$	3.10	3.15	0.61
$\Upsilon(b\bar{b})$	9.46	9.42	0.15

Tabla 3.3: Masas obtenidas para los mesones vectoriales en (GeV) con los parámetros en {2.1}, {2.2}.

Mesón	Masa Experimental	CI	E
$a_1(u\bar{d})$	1.260	1.377	0.32
$K_1(u\bar{s})$	1.34	1.48	0.32
$f_1(s\bar{s})$	1.42	1.58	0.32
$D_1(c\bar{u})$	2.420	2.41	0.20
$D_{s1}(c\bar{s})$	2.460	2.51	0.19
$B_1(u\bar{b})$	5.721	5.55	0.11
$B_{s1}(s\bar{b})$	5.830	5.64	0.10
$B_{cb}(c\bar{b})$	—	6.48	0.04
$\chi_{c1}(c\bar{c})$	3.510	3.40	0.08
$\chi_{b1}(b\bar{b})$	9.892	9.52	0.02

Tabla 3.4: Masas obtenidas para los mesones axial vectoriales en (GeV) con los parámetros en {2.1}, {2.2} y $g_{SO} = 0.25$.

obtiene del lado derecho 0.01 GeV lo que representa un error del 1 %. En las mismas referencias [23–26] también se pueden encontrar relaciones de masa aproximadas que conectan mesones vectoriales

y pseudoescalares.

$$m_{B_c^*(c\bar{b})} - m_{B_s^{0*}(s\bar{b})} - m_{B_c^+(c\bar{b})} + m_{B_s^0(s\bar{b})} \approx 0, \quad (3.64)$$

$$m_{B_s^{0*}(s\bar{b})} - m_{B^{+*}(u\bar{b})} - m_{B_s^0(s\bar{b})} + m_{B^+(u\bar{b})} = 0, \quad (3.65)$$

$$m_{B_s^{0*}(s\bar{b})} - m_{B^{+*}(u\bar{b})} - m_{D_s^+(c\bar{s})} + m_{D^0(c\bar{u})} = 0, \quad (3.66)$$

$$m_{\eta_b(b\bar{b})} - m_{\eta_c(c\bar{c})} - 2m_{B_s^{0*}(s\bar{b})} + 2m_{D_s^+(c\bar{s})} \approx 0, \quad (3.67)$$

$$m_{\eta_b(b\bar{b})} - m_{\eta_c(c\bar{c})} - 2m_{B_s^0(s\bar{b})} + 2m_{D_s^+(c\bar{s})} = 0, \quad (3.68)$$

$$m_{B_s^{0*}(s\bar{b})} - m_{D_s^+(c\bar{s})} - m_{B_s^0(s\bar{b})} + m_{D_s^+(c\bar{s})} = 0, \quad (3.69)$$

$$m_{\Upsilon(b\bar{b})} - m_{J/\Psi(c\bar{c})} - 2m_{B_s^0(s\bar{b})} + 2m_{D_s^+(c\bar{s})} = 0, \quad (3.70)$$

$$m_{\Upsilon(b\bar{b})} - m_{J/\Psi(c\bar{c})} - m_{\eta_b(b\bar{b})} + m_{\eta_c(c\bar{c})} \approx 0, \quad (3.71)$$

$$m_{\Upsilon(b\bar{b})} - m_{J/\Psi(c\bar{c})} - 2m_{B_s^{0*}(s\bar{b})} + 2m_{D_s^{+*}(c\bar{s})} \approx 0. \quad (3.72)$$

Se probaron estas relaciones de masas, ecuaciones (3.64 - 3.72), contra el experimento, el valor obtenido en este trabajo y el valor que muestra cada ecuación como teórico del lado derecho de la ecuación. La desviación de estas relaciones de masa se enumera en la tabla {3.5}.

Regla de espaciado	CI	Masa experimental	Valor teórico
Ec. (3.64)	-0.01	$\Rightarrow B_c^+(c\bar{b}) \approx 6.32$	≈ 0
Ec. (3.65)	-0.01	0.0	$= 0$
Ec. (3.66)	-0.01	-0.02	$= 0$
Ec. (3.67)	-0.12	-0.02	≈ 0
Ec. (3.68)	-0.4	-0.38	$= 0$
Ec. (3.69)	-0.14	-0.09	$= 0$
Ec. (3.70)	-0.55	-0.44	$= 0$
Ec. (3.71)	-0.15	-0.06	$= 0$
Ec. (3.72)	-0.27	-0.26	≈ 0

Tabla 3.5: Resultados de las reglas de espaciado de las masas en las ecuaciones (3.64 - 3.72) comparando la masas experimental y la masa obtenida en este trabajo.

La separación de masa entre las parejas de paridad opuesta $\rho(u\bar{d}) - a_1(u\bar{d})$ es 440 MeV y 100 MeV para $\Upsilon(b\bar{b}) - \chi_{b1}(b\bar{b})$. Todos los demás valores calculados para los mesones pesados-ligeros en estado fundamental exhiben una diferencia de masa en comparación con sus parejas quirales, que disminuye al aumentar la masa del mesón. Luego de realizar las predicciones para mesones, se verifica que en todos los casos los mesones pseudoescalares son los más livianos y los mesones axial-vectoriales los más pesados, esta información esta en la figura {3.2}.

En las figuras {3.3, 3.4} se muestra una gráfica de la masa calculada vs la masa experimental donde se nota que el modelo da muy buenos resultados.

El cálculo de bariones con paridad negativa requiere las masas y amplitudes de los diquarks $J^P = 0^+, 1^+, 0^-$ y 1^- es por ello que se han calculado los mesones axial-vectoriales y escalares que nos darán una guía para calcular sus parejas diquarks (pseudoescalares y vectoriales) en el siguiente capítulo.

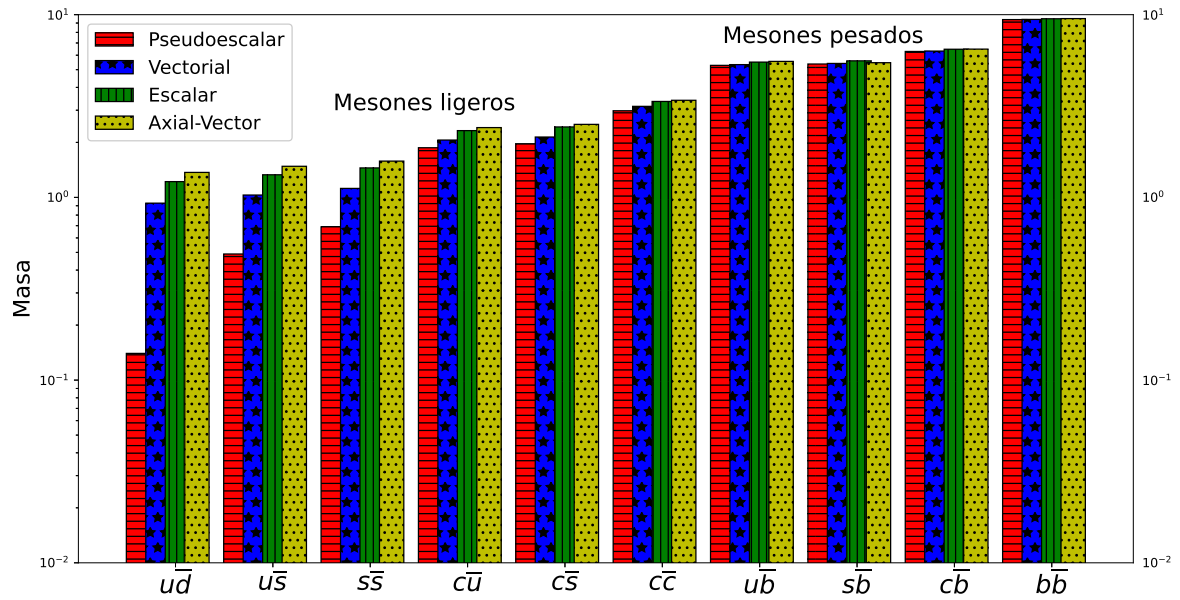


Figura 3.2: Comparación de la masa de los mesones en los distintos canales. Rojo con rayas horizontales representa el canal Pseudoescalar, el color azul con estrellas representa el canal vectorial, el color verde con rayas verticales representa el canal escalar y el color amarillo con puntos representa el canal axial-vectorial.

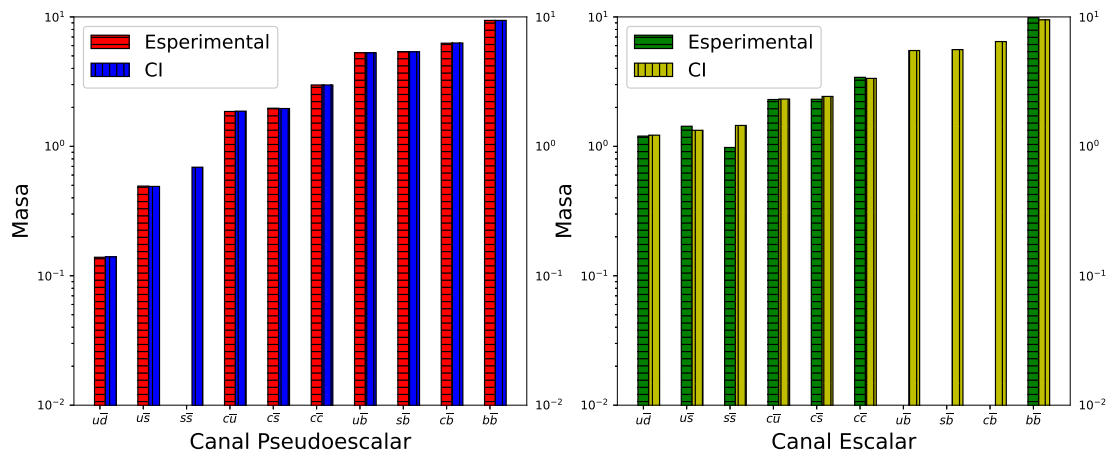


Figura 3.3: Resultados experimentales comparados con los obtenidos con CI.

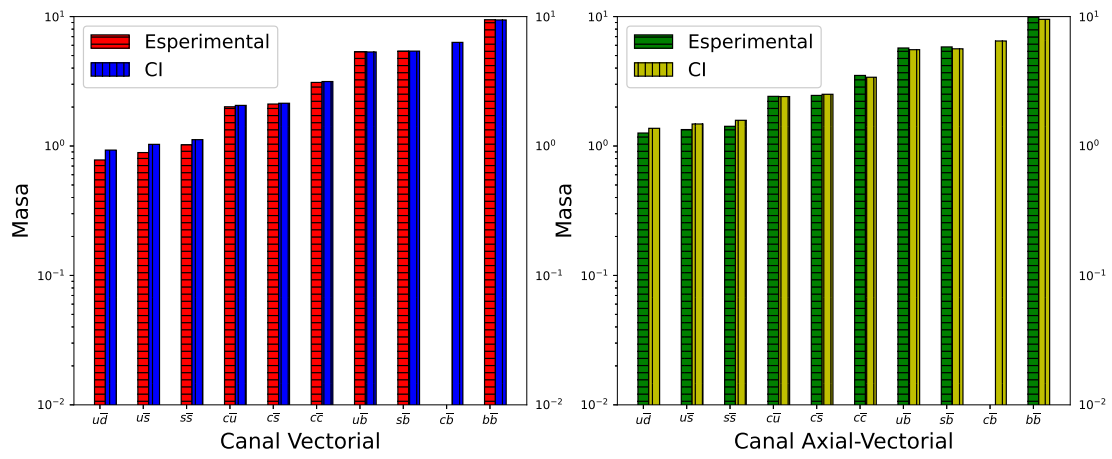


Figura 3.4: Resultados experimentales comparados con los obtenidos con CI.

Capítulo 4

Diquarks

4.1. Introducción

Las instalaciones experimentales modernas, las nuevas técnicas teóricas para el problema de estado ligado han cambiado la manera de entender la estructura interna de los hadrones. Los estudios han proporcionado fuertes indicios de que las correlaciones de quark-quark como diquark juegan un papel crucial en la física de hadrones. La teoría indica que la aparición de tales correlaciones es una consecuencia necesaria de la ruptura de la simetría quiral dinámica, a saber, un corolario de la masa hadrónica emergente que es responsable de casi toda la masa visible del universo; los experimentos han descubierto señales de tales correlaciones en la separación de sabores de los factores de forma electromagnéticos del protón; y la fenomenología sugiere que las correlaciones de diquark podrían ser críticas para la formación de hadrones exóticos tetra y penta-quark. De esta manera entender los diquarks dará pie a entender la estructura de hadrones mas complejas [57].

Los Diquarks tienen correlación con los mesones y por ello se pueden calcular sus propiedades a través de la ecuación de Bethe-Salpeter tomando en consideración algunos cambios a las ABS. Es importante la comparación de sus propiedades dado que los diquarks tienen un papel importante en la descripción de los bariones. Al conocer las características de los mesones y posteriormente la de los diquarks podemos tener una mejor idea de las características de los bariones considerados como la interacción de un diquark con un quark.

Un diquark es un estado hipotético de dos quarks agrupados dentro de un barión [54–57] que interactúa a través de la interacción fuerte con un tercer quark para formar el barión compuesto de tres quarks, los modelos que usan diquarks para explicar los bariones son comúnmente referidos como modelos quark-diquark. La existencia de los diquarks es controvertida dada su naturaleza pero es usada ya que describe bien algunas de las características de los bariones, como la masa, en la que estamos interesados en este trabajo ya que reproduce de manera confiable los datos experimentales de las masas de los bariones. Los diquarks están siendo cada vez mas usados en la literatura para describir diferentes estados de hadrones como mesones bariones y estados exóticos como tetraquarks, pentaquarks, etc. ver ([57]).

En teoría cuántica de campos (QFT) un barión aparece como un polo en la función de Green de seis puntos, el residuo del polo es proporcional a la amplitud de Faddeev [5], que es obtenida de la ecuación de Faddeev [56, 59, 60] que suma todas las posibles interacciones que pueden tener los quarks vestidos. Una transición de la ecuación de Faddeev esta basada en la observación de que una interacción que describe mesones también genera correlaciones de diquarks. Las correlaciones dominantes para el estado base de octetes y decupletes de bariones son diquarks escalares (0^+) y diquarks axial-vectoriales (1^+). Si usamos leading-order y una simetría que preserva la truncación de las SDE entonces unos cambios pequeños en las expresiones de los mesones nos dan las expresiones que describen a los diquarks, como sus masas y sus factores de forma de transición los cuales son fundamentales en el cálculo de las propiedades de los bariones. Por ello se estudian los mesones y su correlación con los diquarks para posteriormente tratar de explicar de manera unificada las propiedades de los bariones con el uso de una misma interacción [16].

4.2. Amplitud Bethe-Salpeter

Como se muestra en la tabla {2.3} los diquarks también existen en esos estados dependiendo de sus números cuánticos:

- 0^+ Diquarks Escalares.
- 0^- Diquarks Pseudoscalares.
- 1^+ Diquarks Axial Vectoriales.
- 1^- Diquarks Vectoriales.

Los diquarks 0^- y 1^- tienen paridad opuesta a la de un nucleón. El tercer quark dentro del barión debe tener un momento angular orbital $L = 0$ para obtener la paridad correcta del nucleón. Por lo tanto estos diquarks no contribuyen de manera significativa en determinar la estructura del mismo. Los diquarks 0^- y 1^- son mucho mas pesados que los diquarks 0^+ y 1^+ los cuales son parejas de paridad de los mesones π y ρ . De esta manera la amplitud de Bethe-Salpeter para los diquarks es muy similar que la de los mesones con diferencia de un factor de 2:

$$\Gamma_{f_1 f_2}(k, P) H^c = - \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}(p - q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S_{f_1}(q + P) \Gamma_{f_1 f_2}(q, P) H^c [S_{f_2}(-q)]^T \left[\frac{\lambda^a}{2} \right]^T [\gamma_\nu]^T \quad (4.1)$$

donde $c = 1, 2, 3$ es la etiqueta de color y $\{H^c\}$ son definidas en términos de las matrices anti-simétricas de Gell-Mann como:

$$\{H^1 = i\lambda^7, \quad H^2 = -i\lambda^5, \quad H^3 = i\lambda^2\}. \quad (4.2)$$

Usando las propiedades de las matrices de Dirac la ecuación (4.1) se convierte en:

$$\Gamma_{f_1 f_2}^c(k, P) C^\dagger = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}(p - q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S_{f_1}(q + P) \Gamma_{f_1 f_2}(q, P) C^\dagger S_{f_2}(q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu \quad (4.3)$$

Para un diquark ($J^P = 0^+$) Escalar la ABS es:

$$\begin{aligned} \Gamma_{[f_1 f_2]_{0^+}}^c(P) &= -\frac{2}{3} \frac{1}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \chi_{[f_1 f_2]_{0^+}}(q, P) \gamma_\mu, \\ \chi_{[f_1 f_2]_{0^+}}(q, P) &= S_{f_1}(q + P) \Gamma_{[f_1 f_2]_{0^+}}^c(P) S_{f_2}(q) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Por otro lado la ABS para un mesón Pseudoescalar ($J^P = 0^-$) (2.23) es:

$$\begin{aligned} \Gamma_{[f_1 \bar{f}_2]_{0^-}}(k, P) &= -\frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \chi_{[f_1 \bar{f}_2]_{0^-}}(q, P) \gamma_\mu, \\ \chi_{[f_1 \bar{f}_2]_{0^-}}(q, P) &= S_{f_1}(q + P) \Gamma_{[f_1 \bar{f}_2]_{0^-}}(P) S_{\bar{f}_2}(q). \end{aligned} \quad (4.5)$$

comparando (4.4) con (4.5) se observa:

$$\Gamma_{[f_1 f_2]_{0^+}}^c(P) = \frac{1}{2} \Gamma_{[f_1 \bar{f}_2]_{0^-}}(P) \quad (4.6)$$

donde:

$$\Gamma_{[f_1 f_2]_{0^+}}(P) = \gamma_5 \left[iE_{[f_1 f_2]_{0^+}}(P) + \frac{\gamma \cdot P}{2M} F_{[f_1 f_2]_{0^+}}(P) \right] \quad (4.7)$$

la ecuación (4.7) tiene la misma forma que (2.24). Dado que las ABS para mesones tienen la misma forma se usaran los resultados de los Kernel's para los diferentes canales de los mesones descritos en el capítulo [3] tomando solo algunos pequeños cambios en las constantes, tal como se ve en (4.6) la diferencia es un factor $1/2$. Por lo tanto para el Kernel del diquark escalar se usara el Kernel del mesón pseudoescalar (3.29):

$$\begin{bmatrix} E_{DS}(P) \\ F_{DS}(P) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{4\hat{\alpha}_{IR}}{3\pi} \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{PS}^{EE} & \mathcal{K}_{PS}^{EF} \\ \mathcal{K}_{PS}^{FE} & \mathcal{K}_{PS}^{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{DS}(P) \\ F_{DS}(P) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Para los Kernel's de los diquarks se usa la notación DS, DPS, DV y DAV para denotar los distintos canales escalares, pseudoscalares, vectoriales y axial-vectoriales respectivamente. Para los Kernel's de los mesones se usa (ver capítulo [3]) S, PS, V y AV para denotar los distintos canales escalares, pseudoscalares, vectoriales y axial-vectoriales respectivamente. Para especificar el canal de los diquarks se usará $[\cdot]_{J^P}$ con $J^P = 0^+$ para los escalares, $J^P = 0^-$ para los pseudoscalares, $\{\cdot\}_{J^P}$ con $J^P = 1^+$ para los axial-vectoriales y $J^P = 1^-$ para los vectoriales.

La relación entre los mesones y los diquarks nos permite ver que la diferencia es un factor de 1/2 en la eigenecuación (3.1).

De la relación entre diquarks y mesones se puede obtener la masa y las amplitudes para un diquark con J^P a partir de las ecuaciones de un mesón J^{-P} . El cambio en el signo de la paridad ocurre porque los fermiones y antifermiones tienen paridad opuesta. Como ya se ha mencionado las correlaciones de diquarks escalares y axial-vectoriales son dominantes en los estudios del nucleón, con este esquema de aproximación las Amplitudes de Bethe-Salpeter son:

$$\Gamma_{[f_1 f_2]_{0^+}}(P) = \gamma_5 \left[iE_{[f_1 f_2]_{0^+}}(P) + \frac{\gamma \cdot P}{2M} F_{[f_1 f_2]_{0^+}}(P) \right] \quad (4.9)$$

$$\Gamma_{\{f_1 f_2\}_{1^+}}(P) = \gamma_\mu^T E_{\{f_1 f_2\}_{1^+}}(P) \quad (4.10)$$

las cuales están relacionadas con (2.49) y (2.51) respectivamente. Al igual que los mesones los diquarks se renormalizan canónicamente mediante (3.30) con la consideración de que los diquarks tienen $N_c = 2$ en comparación con los mesones que tienen $N_c = 3$:

$$P_\mu = N_c \frac{\partial}{\partial P_\mu} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \{ \bar{\Gamma}_{f_1 f_2}(-Q) S(q_+) \Gamma_{f_1 f_2}(Q) S(q) \} \quad (4.11)$$

en este caso (al igual que para mesones (3.34)) la condición de normalización canónica es:

$$1 = \frac{d}{dP^2} \Pi_{f_1 f_2}(Q, P) \Big|_{Q=P}. \quad (4.12)$$

Con $\Pi_{f_1 f_2}(Q, P)$ igual que en (3.33) solo tomando el valor correcto de N_c , para mesones este factor es 6 y para diquarks es 4, entonces solo intercambiamos este factor para pasar en las constantes de normalización de los mesones a las constantes de normalización de los diquarks, es decir, cambiamos el factor 6 por un 4 en las expresiones para los distintos canales en (3.37). Usando los mismos argumentos que se usaron para el diquark escalar (ver [15–18]) el cual está relacionado con el mesón pseudoscalar podemos ver la relación de los mesones $(f_1 \bar{f}_2)$ vectoriales ($J^P = 1^-$) con los diquarks $(f_1 f_2)$ axial-vectoriales ($J^P = 1^+$), por lo tanto la masa del diquark se puede obtener de (A.9) con el factor 1/2:

$$1 = \frac{1}{2} \mathcal{K}_V^{11}(-M_{DAV}^2). \quad (4.13)$$

con $P^2 = -M_{DAV}^2$, donde M_{DAV} es la masa del diquark axial-vectorial, y $\mathcal{K}_V^{11}$ es el Kernel vectorial definido en (A.6). De esta manera se tiene que para los diquark's vectoriales y pseudoscalares se tiene:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} \mathcal{K}_{AV}^{11}(-M_{DV}^2), \\ 1 &= \frac{1}{2} \mathcal{K}_S^{11}(-M_{DPS}^2). \end{aligned} \quad (4.14)$$

con $\mathcal{K}_S^{11}$ definido en (A.14) y $\mathcal{K}_{AV}^{11}$ definido en (A.22).

4.3. Resultados

Las ecuaciones (4.8), (4.13) y (4.14) tienen solución cuando $P^2 = -M_H^2$, con M_H la masa del diquark en el canal H . Entonces, es el valor propio corresponde a la amplitud BS del diquark. se consideran diquarks con cinco sabores (u , d , s , c , y d), donde se asume simetría de isospín en todo momento.

Para los diquarks pseudoescalares y vectoriales se multiplico g_{SO} por un factor 1.8 como en [29] para obtener las masas correctas de los bariones con paridad negativa. Esta modificación genera menos repulsión. Físicamente, esto podría entenderse reconociendo que los quarks de valencia dentro de un diquark están más vagamente correlacionados que el par de quarks y antiquarks de valencia en un estado ligado de mesón y, en consecuencia, la repulsión de espín-órbita en diquarks debería ser menos pronunciada de lo que es en los mesones. Con las masas y amplitudes de diquark descritas en las tablas {4.1,4.2,4.3}, se pueden construir todos los Kernels de Faddeev asociados con los bariones del octeto y el decuplete del estado fundamental y sus parejas quirales.

Diquark	Masa	E	F
$[ud]_{0^+}$	0.77	2.74	0.31
$[us]_{0^+}$	0.92	2.88	0.39
$[ss]_{0^+}$	1.06	3.03	0.50
$[cu]_{0^+}$	2.08	2.00	0.23
$[cs]_{0^+}$	2.17	2.11	0.32
$[ub]_{0^+}$	5.37	0.99	0.06
$[sb]_{0^+}$	5.46	1.00	0.08
$[cb]_{0^+}$	6.35	0.42	0.07
$[cc]_{0^+}$	3.17	0.96	0.19
$[bb]_{0^+}$	9.43	0.23	0.05

Tabla 4.1: Masa calculada para los diquarks escalares en (GeV) con los parámetros en {2.1}, {2.2}.

Diquark	Masa	E	Masa*	E*
$[ud]_{0^-}$	1.30	0.54	1.15	1.06
$[us]_{0^-}$	1.41	0.54	1.27	1.05
$[ss]_{0^-}$	1.52	0.53	1.40	1.03
$[cu]_{0^-}$	2.37	0.32	2.28	0.64
$[cs]_{0^-}$	2.47	0.31	2.40	0.61
$[ub]_{0^-}$	5.53	0.18	5.47	0.34
$[sb]_{0^-}$	5.62	0.14	5.57	0.32
$[cb]_{0^-}$	6.47	0.07	6.44	0.13
$[cc]_{0^-}$	3.38	0.14	3.33	0.25
$[bb]_{0^-}$	9.51	0.04	9.50	0.07

Tabla 4.2: Masa calculada para los diquarks pseudoescalares en (GeV) con los parámetros en {2.1}, {2.2}. * representa los resultados utilizando $g_{SO} = 0.32 \times 1.8$.

	IC-HP		IC-LP	
Diquark	Masa	E	Masa	E
$\{ud\}_{1+}$	1.06	1.30	1.06	1.30
$\{us\}_{1+}$	1.16	1.36	1.16	1.36
$\{ss\}_{1+}$	1.25	1.42	1.25	1.42
$\{cu\}_{1+}$	2.16	0.93	2.09	1.83
$\{cs\}_{1+}$	2.25	0.95	2.19	1.90
$\{ub\}_{1+}$	5.39	0.48	5.26	2.97
$\{sb\}_{1+}$	5.47	0.48	5.36	3.05
$\{cb\}_{1+}$	6.35	0.20	6.31	3.08
$\{cc\}_{1+}$	3.22	0.41	3.12	2.28
$\{bb\}_{1+}$	9.44	0.11	9.53	3.02

Tabla 4.3: Masa calculada para los diquarks axial-vectoriales en (GeV) con los parámetros en {2.1}, {2.2}.

Diquark	Masa	E	Masa*	E*
$\{ud\}_{1-}$	1.44	0.28	1.33	0.50
$\{us\}_{1-}$	1.54	0.28	1.43	0.50
$\{ss\}_{1-}$	1.64	0.27	1.54	0.50
$\{cu\}_{1-}$	2.45	0.17	2.38	0.31
$\{cs\}_{1-}$	2.54	0.16	2.48	0.30
$\{ub\}_{1-}$	5.59	0.09	5.53	0.17
$\{sb\}_{1-}$	5.67	0.09	5.62	0.16
$\{cb\}_{1-}$	6.50	0.04	6.47	0.07
$\{cc\}_{1-}$	3.42	0.07	3.38	0.13
$\{bb\}_{1-}$	9.53	0.02	9.51	0.04

Tabla 4.4: Masa calculada para los diquarks vectoriales en (GeV) con los parámetros en {2.1}, {2.2}. * representa los resultados utilizando $g_{SO} = 0.25 \times 1.8$.

Con los valores de los diquarks ya se pueden entender las características y masa de los bariones en un modelo quak-diquark. En el siguiente capítulo se habla de este modelo para los bariones en CI.

Capítulo 5

Bariones en un modelo quark-diquark

5.1. Introducción

El grupo de sabor SU(5) incluye todos los tipos de bariones que contienen cero, uno, dos o tres quarks pesados. Los multipletes de bariones que surgen de $3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$, es decir, un decuplete 2 octetos y un singulete. La estructura correspondiente a un multiplete para SU(4) es $4 \otimes 4 \otimes 4 = 20_S \oplus 20_M \oplus 20_M \oplus 4_A$ donde S es de simétrico, M de mixto y A de antisimétrico en el sabor. Tenga en cuenta que las masas explicitas del quark (corriente) rompen la simetría de sabor. Cuanto mas grande es el grupo mayor la cantidad de ruptura. Sin embargo, el álgebra de grupos nos ayuda a identificar los bariones cuyas masas pueden ser calculadas. Como un ejemplo, presentamos tales multipletes de bariones con quarks **u**, **d**, **s**, **c** y **b** en las figuras {1.18, 5.1, 5.2}.

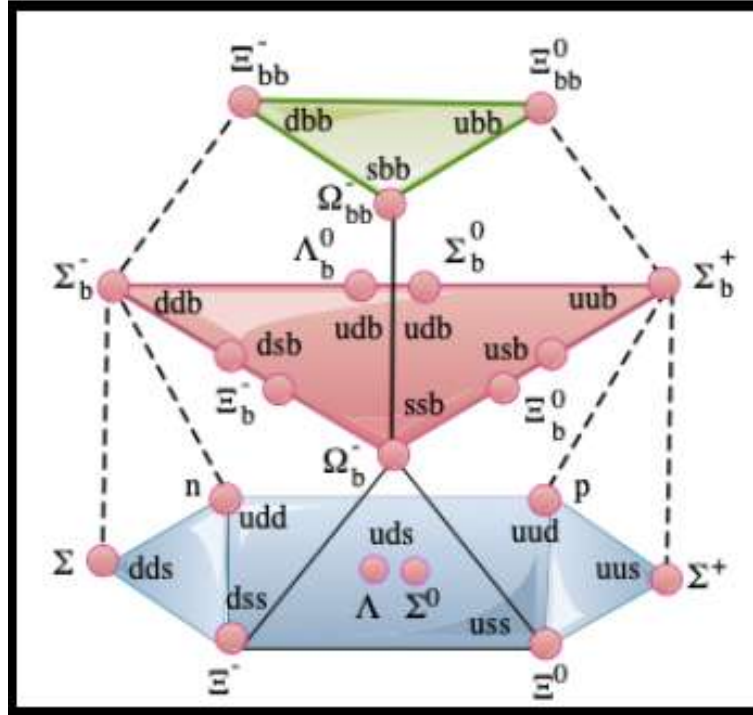


Figura 5.1: 20 plete simétrico mixto. Todos los bariones en el estado fundamental de este multiplete tienen $J^P = (1/2)^+$. Contiene el octeto SU(3) en la capa más baja. Los bariones pesados se componen de un quark **b** y dos quarks ligeros (**u**, **d**, **s**), ubicados en la segunda capa. Los bariones doblemente pesados se colocan en la capa superior.

El multiplete con quarks “**c**” es análogo al que tiene el quark “**b**”. Se consideran sistemas de tres quarks con uno, dos ó tres quarks pesados. Los bariones pesados del tipo “**bbb**” y “**ccc**” no se

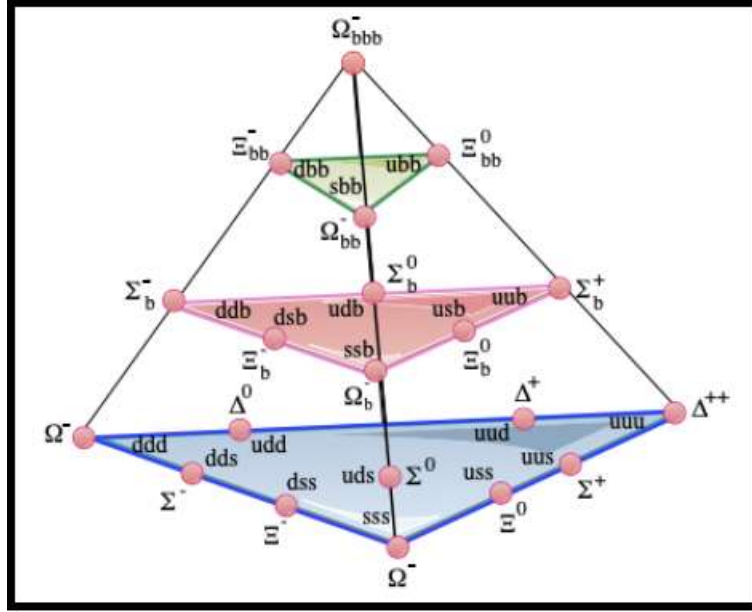


Figura 5.2: Estados de bariones con espín 3/2 hechos de cuatro quarks u , d , s , y b . Los bariones doblemente pesados y los bariones triplemente pesados se localizan en las capas más altas.

descubren todos aún. Mucha literatura está disponible con estudios teóricos concernientes al doblete e incluso triplete de bariones pesados con diferentes enfoques incluyendo análisis covariante de Poincaré (PC) de QCD continua [64], Estudios de Lattice [65], Formalismo de la ecuación de Faddeev [59, 60], Potenciales Variacionales de Coulomb y Cornell [66], El modelo Bag [67], Reglas de Conteo de quarks (QCR) [68], El modelo constituyente del quark (CQM1, CQM2) [69], Modelo del quark relativista (RQM) [70], Modelo del quark Instanton (IQM) [71], Modelo Hipercentral (HCM) [72], Reglas de suma de QCD (SR) [73], Fenomenología de Regge [74], QCD No Relativista (NRQCD) [75], entre otros. Del lado experimental, la colaboración SELEX [76] reportó la primera observación de un barión doblemente encantado Ξ_{cc}^+ en el modo de decaimiento $\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Lambda_c^+ K^- \pi^+$. Su masa fue determinada a ser $3519 \pm 1 \text{ MeV}$, trabajos adicionales identificaron su pareja de isospín Ξ_{cc}^{++} (3460). Hay grandes laboratorios tratando de medir estas partículas pesadas. La colaboración LHCb [77] está enfocada en estudiar partículas que contienen partículas con quarks c y b . En este reactor se observaron los bariones Ξ_{cc}^{++} en el decaimiento $\Lambda_c^+ K^- \pi^+ \pi^+$ y su masa fue determinada a ser $3621.40 \pm 0.72(\text{stat.}) \pm 0.27(\text{sist.}) \pm 0.14(\lambda_c^+) \text{ MeV}$ y el barión Σ_b . BELLE [78] ha hecho experimentos buscando las resonancias de Ξ_c y Ω_c , el laboratorio Jefferson [79] tiene un programa de QCD y Física hadrónica donde el objetivo es estudiar la estructura interna de mesones y bariones en términos de sus factores de forma de transición, el experimento PANDA (Pbar ANnihilations at Darmstadt) realiza experimentos buscando bariones con quarks s y c . Con los estudios en marcha tanto teóricos como experimentales se plantea un estudio de estos bariones extendiendo el modelo CI al sector de bariones pesados, calculando las masas de los bariones con paridad positiva y negativa de espín 1/2 y 3/2 compuestos de quarks u , d , s , c y b en un esquema quark-diquark empleando parámetros ligeros y pesados. La descripción de los estados ligados de bariones se basa en la ecuación de Faddeev (FE) [56, 58–60].

5.2. Ecuación de Faddeev

La ecuación de Faddeev es una ecuación que describe, a la vez, todas las interacciones posibles en un sistema de tres partículas en una formulación mecánica completamente cuántica. Se pueden resolver de forma iterativa, en general, necesitan como entrada la descripción de la interacción entre dos partículas individuales. Las ecuaciones de Faddeev son las formulaciones no perturbativas más utilizadas del problema de tres cuerpos de la mecánica cuántica. La amplitud de Faddeev tiene 64 estructuras de Dirac (ver figura {5.3}).

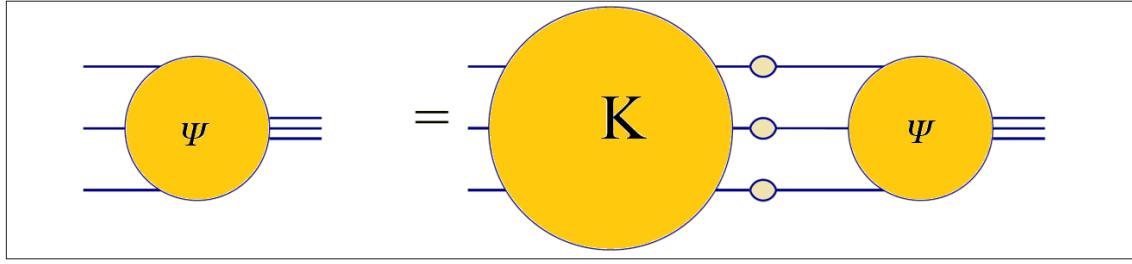


Figura 5.3: Amplitud de Faddeev.

En el modelo quark-diquark el barión está formado por un quark y un diquark que se intercambian constantemente, al considerar solo las posibilidades de combinación del diquark con el quark como en la figura {5.4} solo aparecen 8 estructuras de Dirac lo que reduce los cálculos considerablemente [58]. La ecuación de Faddeev [59, 60] reproduce la masa del nucleón con una diferencia del 5 %, se ilustra en la figura {5.5}.

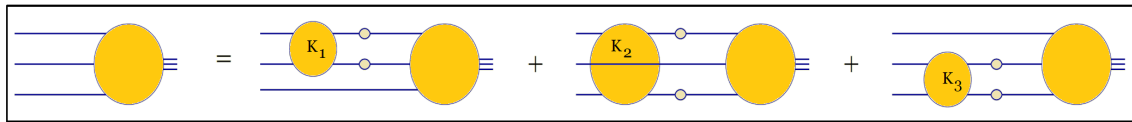


Figura 5.4: Amplitud de Faddeev en un modelo quark-diquark.

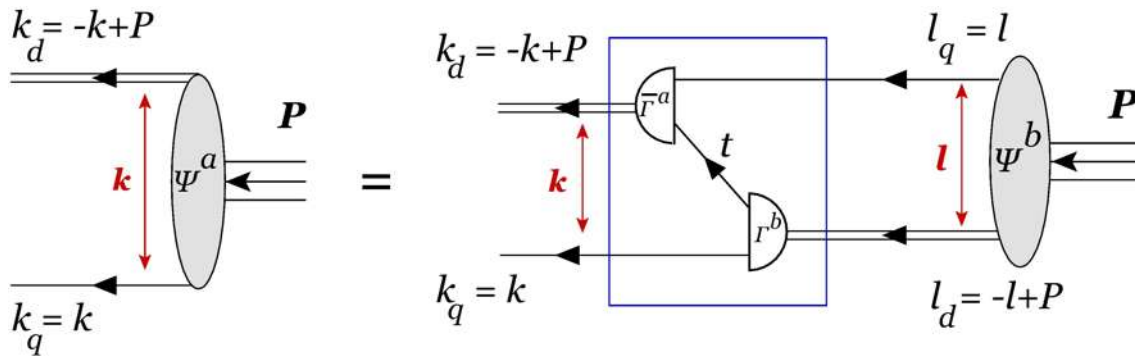


Figura 5.5: Ecuación de Faddeev covariante de Poincare empleada para calcular las masas bariónicas.

El cuadrado representa el Kernel de interacción quark-diquark, la línea simple denota el propagador de quarks vestido mostrado en la figura {5.6}, la línea doble es el propagador de diquark mostrado en la figura {5.7}, el propagador del barión se representa por tres líneas ver la figura {5.8}, mientras que Γ y Ψ son las amplitudes BS y Faddeev, respectivamente.

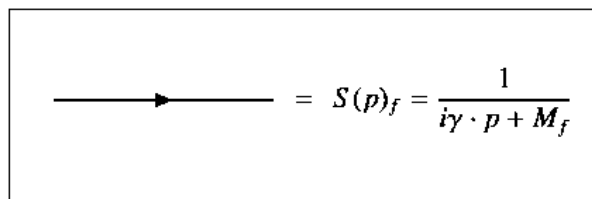


Figura 5.6: Diagrama de Feynman para el propagador del quark.



Figura 5.7: Diagrama de Feynman para el propagador del diquark.

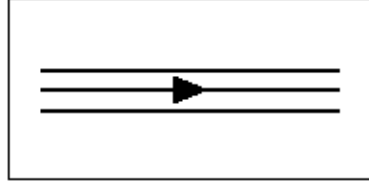


Figura 5.8: Diagrama de Feynman para el propagador del Mesón.

La conservación de momento demanda las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} k_q &= k + \eta P & k_{qq} &= -k + (1 - \eta)P & t_a &= k_{qq} - l_q \\ l_q &= l + \eta P & l_{qq} &= -l + (1 - \eta)P & t_b &= l_{qq} - k_q \end{aligned} \quad (5.1)$$

El parámetro de impulso $\eta \in [0, 1]$ para las amplitudes de diquarks y quark-diquark es arbitrario. Con $\eta = 1/3$ se maximiza el límite superior de la masas del nucleón con respecto a las restricciones de singularidad, esto para un problema y/o ecuación de 3 cuerpos. Los límites de los polos resultan de las estructuras de singularidad combinadas con los propagadores de quark y diquark (y, teóricamente, también de las amplitudes de diquark). η se puede mantener como una variable ya que se puede usar para relajar las restricciones. Para este trabajo usaremos $\eta = 0$ dado que genera buenos resultados [16–18] alrededor del 5 % de error que viene del formalismo de la ecuación de Faddeev. Como se vio en el capítulo 1 los bariones son de espín $1/2$ y $3/2$, la estructura general de las amplitudes de Faddeev para un barión con espín $1/2$ (ver [80]) se expresan como sigue:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 \quad (5.2)$$

donde el subíndice indica el quark espectador y, por ejemplo, $\Psi_{1,2}$ son obtenidos de Ψ_3 por una permutación cíclica de todas las etiquetas de quark. Usamos la representación realista mas simple de Ψ , entonces un octeto bariónico se compone de la suma de correlaciones de diquarks escalares y axial-vectoriales:

$$\Psi_3(p_j, \alpha_j, q_j) = \mathcal{N}_{\Psi_3}^{0+} + \mathcal{N}_{\Psi_3}^{1+} \quad (5.3)$$

con $(p_j, \alpha_j, \varphi_j)$ etiquetas de momento, espín y sabor de los quarks que constituyen el estado unido, y $P = p_1 + p_2 + p_3$ el momento total del sistema. Es concebible que los diquarks pseudoescalares y vectoriales puedan desempeñar un papel en las amplitudes de Faddeev de los bariones $J^P = (1/2)^+$. Sin embargo, tal relación tiene paridad opuesta y, por lo tanto, solo pueden aparecer en juego con un momento angular de quark distinto de cero. Dado que se puede esperar que los estados fundamentales posean la cantidad mínima posible de momento angular orbital de quark y estas correlaciones de diquark son significativamente mas masivas que las correlaciones escalares y axial vectoriales, pueden ignorarse con seguridad en las propiedades informáticas del estado fundamental. Para ayudar a explicar la estructura de las piezas de diquark en la caución (5.3) se define la representación fundamental en un quinteto de $SU(5)$:

$$t^u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t^d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t^c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t^b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

[illegible]
$$\begin{aligned} t^{\{q_1 q_2\}} &= \sqrt{t^{q_1} \cdot t^{q_2 T} + t^{q_1} \cdot t^{q_2 T}}, \\ t^{[q_1 q_2]} &= t^{q_1} \cdot t^{q_2 T} - t^{q_1} \cdot t^{q_2 T} \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde t^{q_1} y t^{q_2} son los sabores en (5.4), para diquarks escalares (0^+) se usan corchetes $[\cdot]$ y para los

axial-vectoriales (1^+) se usan llaves $\{\cdot\}$. Con las matrices de sabor de los diquarks la parte escalar de la ecuación (5.3) se puede escribir como:

$$\mathcal{N}_{\Psi_3}^{0+}(p_j, \alpha_j, q_j) = \sum_{[q_1 q_2] q_3 \in \Psi} \left[t^{[q_1 q_2]} \Gamma_{[q_1 q_2]}^{0+}(K) \right]_{\alpha_1 \alpha_2}^{q_1 q_2} \Delta_{[q_1 q_2]}^{0+}(K) \left[\mathcal{S}^\Psi(l, P) u^\Psi(P) \right]_{\alpha_3}^{q_3} \quad (5.7)$$

La parte axial-vectorial de la ecuación (5.3) se puede escribir como:

$$\mathcal{N}_{\Psi_3}^{1+}(p_j, \alpha_j, q_j) = \sum_{\{q_1 q_2\} q_3 \in \Psi} \left[t^{\{q_1 q_2\}} \Gamma_{\{q_1 q_2\}}^{1+}(K) \right]_{\alpha_1 \alpha_2}^{q_1 q_2} \Delta_{\mu\nu, \{q_1 q_2\}}^{1+}(K) \left[\mathcal{A}_\nu^\Psi(l, P) u^\Psi(P) \right]_{\alpha_3}^{q_3} \quad (5.8)$$

donde Δ^{0+} es el propagador del diquark escalar (5.9) formado por los quarks 1 y 2 con $m_{[q_1 q_2]}$ la escala de masa asociada a estos diquarks:

$$\Delta_{[q_1 q_2]}^{0+}(K) = \frac{1}{K^2 + m_{[q_1 q_2]}^2} \quad (5.9)$$

Δ^{1+} es el propagador del diquark axial-vectorial:

$$\Delta_{\mu\nu, \{q_1 q_2\}}^{1+}(K) = \frac{1}{K^2 + m_{\{q_1 q_2\}}^2} \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{K_\mu K_\nu}{K^2 + m_{\{q_1 q_2\}}^2} \right) \quad (5.10)$$

$\Gamma_{[q_1 q_2]}^{0+}$ es la normalización canónica de las amplitudes de Bethe-Salpeter para un diquark escalar y $\Gamma_{\{q_1 q_2\}}^{1+}$ es la normalización canónica de las amplitudes de Bethe-Salpeter para un diquark axial-vectorial describiendo la correlación de momento relativo entre los quarks; $\mathcal{S}$ y $\mathcal{A}$ son matrices de Dirac 4×4 que describen la correlación de momento relativo quark-diquark dentro del Barión; u^Ψ es el espinor que satisface:

$$(i\gamma \cdot P + M_\Psi) u^\Psi(P) = 0 = \bar{u}^\Psi(P) (i\gamma \cdot P + M_\Psi) \quad (5.11)$$

con M_Ψ la masa del barión obtenida al resolver la ecuación de Faddeev. Note que el espinor u^Ψ también posee otro grado de libertad como vector columna que contiene los elementos de las matrices $\mathcal{S}$ y $\mathcal{A}$ de la forma:

$$u^\Psi(P) = \begin{bmatrix} \mathcal{S}^\Psi(l; P) \\ \mathcal{A}_\nu^\Psi(l; P) \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

En comparación con los bariones del decuplete se nota que no es posible combinar un diquark de isospín cero con un quark de isospín 1/2 para obtener un isospín 3/2 y por lo tanto algunos bariones están compuestos únicamente de correlaciones de diquark axial-vector. De esta manera el patrón para los bariones del decuplete restante se puede expresar de la siguiente manera:

$$\Psi_3^{10}(p_j, \alpha_j, q_j) = \mathcal{D}_{\Psi_3^{10}}^{1+}(p_j, \alpha_j, q_j) \quad (5.13)$$

con:

$$\mathcal{D}_{\Psi_3^{10}}^{1+}(p_j, \alpha_j, q_j) = \sum_{\{q_1 q_2\} q_3 \in \Psi} \left[t^{\{q_1 q_2\}} \Gamma_{\{q_1 q_2\}}^{1+}(K) \right]_{\alpha_1 \alpha_2}^{q_1 q_2} \Delta_{\mu\nu, \{q_1 q_2\}}^{1+}(K) \left[\mathcal{D}_{\nu\rho}^{\Psi^{10}}(l, P) u_\rho^{\Psi^{10}}(P) \right]_{\alpha_3}^{q_3} \quad (5.14)$$

donde $u_\rho^{\Psi^{10}}(P)$ es el espinor de Rarita-Schwinger:

$$R_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \mathbb{1}_D - \frac{1}{3} \gamma_\mu \gamma_\nu + \frac{2}{3} \hat{P}_\mu \hat{P}_\nu \mathbb{1}_D - i \frac{1}{3} [\hat{P}_\mu \gamma_\nu - \hat{P}_\nu \gamma_\mu] \quad (5.15)$$

donde $\hat{P}^2 = -1$ ver (5.2.1):

Relación masa-momento del barión.**5.2.1**

La masa del barión cumple la relación $P^2 = -M_B^2$, de esta manera se cumple:

$$\hat{P}^2 = \hat{P} \cdot \hat{P} = \frac{P}{M_B} \cdot \frac{P}{M_B} = \frac{P^2}{M_B^2} = \frac{-M_B^2}{M_B^2} = -1.$$

La forma general de las matrices $\mathcal{S}^\Psi(l, P)$, $\mathcal{A}_v^\Psi(l, P)$ y $\mathcal{D}_{vp}^\Psi(l, P)$ que describen la correlación de espacio-momento entre el quark y el diquark en el octeto y decuplete de bariones, respectivamente, se describen en [81, 82]. De esta manera con las amplitudes de Bethe-Salpeter de manera detallada los propagadores de los quarks vestidos y los diquarks es posible escribir la ecuación de Faddeev para bariones. Como se muestra en la figura {5.5} el Kernel envuelve la ruptura y creación de un diquark a través del intercambio de un quark vestido, haciendo una simplificación en el propagador de este quark intercambiado la cual es una variante de la llamada “aproximación estática” [16–18, 83]:

$$S(p) \rightarrow S^T = \frac{g_B^2}{M_f} \quad (5.16)$$

donde el índice “T” indica la matriz transpuesta, f es el sabor del quark, se pueden discutir la naturaleza de las contribuciones de las resonancias a los estados ligados de bariones en conexión con las ecuaciones bariónicas de Faddeev y esto proporciona un medio por el cual fijar g_B en la ecuación, es decir, fórmulas como las de la Ref. [84] se puede utilizar para estimar el tamaño de las correcciones de loop de mesón a las masas de bariones calculadas utilizando las ecuaciones de Faddeev en este trabajo. La aplicación directa de tales expresiones, usando una escala de masa de factor de forma de mesón-barión común de 0.8 GeV lo cual produce un cambio de (-300 MeV) , de lo cual se puede inferir que las ecuaciones de Faddeev sin corregir deben producir $M_N = 1.24 \text{ GeV}$. Siguiendo estas observaciones se elige g_B de la siguiente manera:

$$g_{B=8=\text{Octeto}} = 1.18, \quad g_{B=10=\text{Decuplete}} = 1.56 \quad (5.17)$$

Una variación de (5.16) es implementada en [85]:

$$S(p) = \frac{1}{i\gamma \cdot p + M_f} \rightarrow \frac{g_{N\Delta}^2}{i\gamma \cdot p + M_f} \quad (5.18)$$

Usando las condiciones generadas por la ecuación (2.4) cuyas amplitudes de Bethe-Salpeter no dependen del momento relativo, la ecuación (5.16) genera los Kernels para la ecuación de Faddeev las cuales por si mismas son independientes del momento relativo quark-diquark.

5.3. Bariones espín 1/2 paridad positiva

La masa del estado fundamental del barión con espín 1/2 compuesto de los quarks (qqq_1) esta determinado por una ecuación matricial de Faddeev 5×5 :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{S}^\Psi(l; P) u^\Psi(P) \\ \mathcal{A}_\mu^\Psi(l; P) u^\Psi(P) \end{pmatrix} = -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathcal{M}(k, l, P) \begin{pmatrix} \mathcal{S}^\Psi(l; P) u^\Psi(P) \\ \mathcal{A}_\nu^\Psi(l; P) u^\Psi(P) \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Con el modelo de CI las matrices $\mathcal{S}$ y $\mathcal{A}$ no dependen del momento relativo quark-diquark y se simplifican considerablemente a:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^\Psi(l, P) &\rightarrow \mathcal{S}(P) = s(P) \mathbb{1}_D \\ \mathcal{A}_\mu^\Psi(l, P) &\rightarrow \mathcal{A}_\mu^i(P) = a_1^i(P) i\gamma_5 \gamma_\mu + a_2^i(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu. \end{aligned} \quad (5.20)$$

donde s , $a_{1,2}^i$ son escalares independientes del momento relativo quark-diquark, el superíndice i representa el sabor de los diquarks en (5.5) involucrados. De esta manera la amplitud de Faddeev (5.3)

tiene la forma:

$$\Psi^+(P) u(P) = \Gamma_{[q_1 q_2]_{0^+}}^1(l_{q_1 q_2}) \Delta_{[q_1 q_2]}^{0^+}(l_{q_1 q_2}) s(P) u(P) + \sum_{f=1,2} \Gamma_{[q_1 q_2]_{1^+}, \mu}^f(l_{q_1 q_2}) \Delta_{\mu\nu, \{q_1 q_2\}}^{1^+}(l_{q_1 q_2}) \mathcal{A}_\nu^{\pm f}(P) u(P) \quad (5.21)$$

Las amplitudes de Bethe-Salpeter para estos tipos de diquarks escalares y axial-vectoriales son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{[q_1 q_2]_{0^+}}(P) &= i\gamma_5 E_{[q_1 q_2]_{0^+}}(P) + \frac{1}{M_R} \gamma_5 \gamma \cdot P F_{[q_1 q_2]_{0^+}}(P), \\ \Gamma_{\{q_1 q_2\}_{1^+}}(P) &= \gamma_\mu^T E_{\{q_1 q_2\}_{1^+}}(P) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Dado que las ecuaciones de Faddeev se encargan de estudiar todas las posibles interacciones entre los tres quarks se deben analizar los tipos de diquarks que pueden formar el barión. Para analizar los tipos de diquarks que se pueden formar dentro de un barión se debe analizar y comparar la paridad y espín de los diquarks para obtener las características del barión, la masa de los diquarks debe ser “menor” que la del barión. Se estudia el protón y neutrón de manera conjunta en un nucleón por la simetría de isospín del quark u y d . Los diquarks escalar y axial vectorial tiene la misma paridad que los nucleones, por lo tanto se espera que formen un componente dominante en estos bariones. La contribución de los diquarks pseudoescalares 0^- y vectoriales 1^- se puede despreciar en la amplitud de Faddeev del nucleón. Una vez seleccionado el barión a estudiar y con las consideraciones anteriores se forma la función de onda de Faddeev con las combinaciones de diquarks que cumplen con (5.20). El nucleón puede tener los siguientes tipos de diquarks:

$$[ud], \quad \{ud\}, \quad \{uu\} \quad (5.23)$$

Los diquarks 0^+ y 1^+ son parejas de paridad de los mesones π y ρ como se muestra en la tabla {5.1}, por lo tanto usaremos la ecuación de BS de los diquarks correspondiente a estos mesones. La ecuación

Mesón	Diquark
π	$[ud]_{0^+}$
ρ	$\{ud\}_{1^+}$
σ	$\{ud\}_{1^-}$
a_1	$\{ud\}_{1^+}$

Tabla 5.1: Mesones y sus parejas de paridad en el nucleón.

de Faddeev (5.18) es del tipo eigenecuación $\Psi = K\Psi$ don el vector Ψ es:

$$\Psi(P) = \begin{pmatrix} S(P) \\ \mathcal{A}_\mu^i(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(P) \mathbb{1}_D \\ a_1^+(P) i\gamma_5 \gamma_\mu \\ a_1^0(P) i\gamma_5 \gamma_\mu \\ a_2^+(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu \\ a_2^0(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

Para encontrar la forma de la matriz $\mathcal{M}$ se trabaja con la ecuación (5.19) usando (5.24), de esta manera (5.19) se convierte en:

$$\Psi(P) u(P) = -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathcal{M}(k, l, P) \Psi(P) u(P) \quad (5.25)$$

usando el proyector de energía positiva $\Lambda_+(P)$ el cual cumple:

$$\Lambda_+(P) := \frac{1}{2M_B} \sum_{r=\pm} u(P, r) \bar{u}(P, r) = \frac{1}{2M_B} (-i\gamma \cdot P + M_B) \quad (5.26)$$

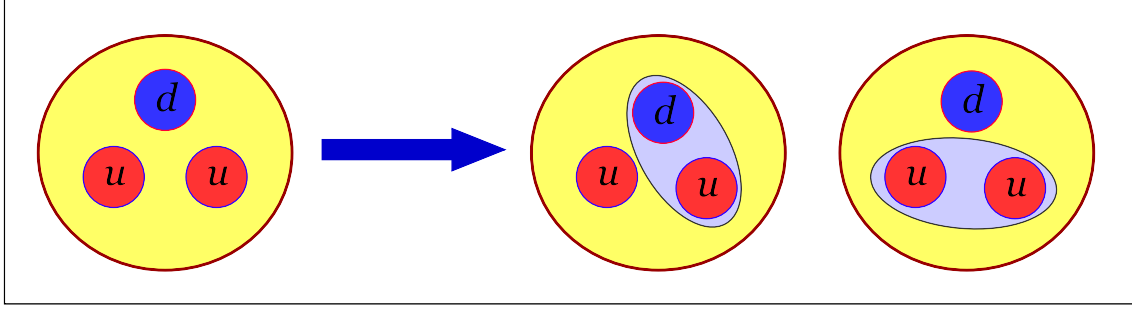


Figura 5.9: Diagrama esquemático del Nucleón que muestra los posibles diquarks que se pueden mostrar dentro del mismo.

donde se suma sobre todos los espines, con r el nivel de espín, está normalizado como:

$$u(P, r)\bar{u}(P, r) = 2M_B \quad (5.27)$$

el espinor de energía positiva satisface:

$$\bar{u}(P, r)(i\gamma \cdot P + M_B) = 0 = (i\gamma \cdot P + M_B) u(P, r) \quad (5.28)$$

entonces multiplicando (5.25) con $\bar{u}(P, r)$ por la derecha y sumando sobre todos los espines se obtiene:

$$\Psi(P) \Lambda_+(P) = -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathcal{M}(k, l, P) \Psi(P) \Lambda_+(P) \quad (5.29)$$

ahora se multiplica por $\Lambda_+(P)$ del lado izquierdo en (5.29) y se usa la propiedad (5.30)

$$\Lambda_+(P) \cdot \Lambda_+(P) \Big|_{P^2 = -M_B} = 2 \quad (5.30)$$

para obtener:

$$\Psi(P) = -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\Lambda_+(P) \mathcal{M}(k, l, P) \Psi(P) \Lambda_+(P)}{2} \quad (5.31)$$

lo que se puede escribir como:

$$\left(\begin{matrix} S(P) \\ \mathcal{A}_\mu^i(P) \end{matrix} \right) = -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\Lambda_+(P) \mathcal{M}(k, l, P) \left(\begin{matrix} S(P) \\ \mathcal{A}_\mu^i(P) \end{matrix} \right) \Lambda_+(P)}{2} \quad (5.32)$$

para el nucleón {5.9} la amplitud de Faddeev con los diquarks en (5.23) es:

$$u_N = \begin{bmatrix} [ud]u \\ \{uu\}d \\ \{ud\}u \\ \{uu\}d \\ \{ud\}u \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

la ecuación (5.32) es una eigenecuación de la forma $\Psi = \mathcal{M}\Psi$ entonces para obtener $\mathcal{M}$ se usa $\mathcal{M} = \Psi\Psi^T$:

$$\mathcal{M} = \left(\begin{matrix} S(P) \\ \mathcal{A}_\mu^i(P) \end{matrix} \right)_{5 \times 1} \cdot \left(S(P), \mathcal{A}_{nu}^j(P) \right)_{1 \times 5} \quad (5.34)$$

por lo tanto los elementos de la matriz $\mathcal{M}$ son de la forma:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_D s(P) s(P) \mathbb{1}_D & \mathbb{1}_D s(P) a_1^+(P) i\gamma_5 \gamma_\mu & \mathbb{1}_D s(P) a_1^0(P) i\gamma_5 \gamma_\mu & \mathbb{1}_D s(P) a_2^+(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu & \mathbb{1}_D s(P) a_2^0(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu \\ \gamma_5 \gamma_\mu i a_1^+(P) s(P) \mathbb{1}_D & \gamma_5 \gamma_\mu i a_1^+(P) a_1^+(P) i\gamma_5 \gamma_\mu & \gamma_5 \gamma_\mu i a_1^+(P) a_1^0(P) \gamma_5 \gamma_\mu i & \gamma_5 \gamma_\mu i a_1^+(P) a_2^+(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu & \gamma_5 \gamma_\mu i a_1^+(P) a_2^0(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu \\ \gamma_5 \gamma_\mu i a_1^0(P) s(P) \mathbb{1}_D & \gamma_5 \gamma_\mu i a_1^0(P) a_1^+(P) i\gamma_5 \gamma_\mu & \gamma_5 \gamma_\mu i a_1^0(P) a_1^0(P) \gamma_5 \gamma_\mu i & \gamma_5 \gamma_\mu i a_1^0(P) a_2^+(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu & \gamma_5 \gamma_\mu i a_1^0(P) a_2^0(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu \\ \gamma_5 \hat{P}_\mu a_2^+(P) s(P) \mathbb{1}_D & \gamma_5 \hat{P}_\mu a_2^+(P) a_1^+(P) i\gamma_5 \gamma_\mu & \gamma_5 \hat{P}_\mu a_2^+(P) a_1^0(P) \gamma_5 \gamma_\mu i & \gamma_5 \hat{P}_\mu a_2^+(P) a_2^+(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu & \gamma_5 \hat{P}_\mu a_2^+(P) a_2^0(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu \\ \gamma_5 \hat{P}_\mu a_2^0(P) s(P) \mathbb{1}_D & \gamma_5 \hat{P}_\mu a_2^0(P) a_1^+(P) i\gamma_5 \gamma_\mu & \gamma_5 \hat{P}_\mu a_2^0(P) a_1^0(P) \gamma_5 \gamma_\mu i & \gamma_5 \hat{P}_\mu a_2^0(P) a_2^+(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu & \gamma_5 \hat{P}_\mu a_2^0(P) a_2^0(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

para obtener los elementos matriciales de la caución (5.31) se obtienen como sigue:

$$\Psi(P) = -\frac{4}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \Lambda_+(P) \mathcal{M}^{ij} \Psi(P) \Lambda_+(P) \quad (5.36)$$

entrando a cada componte $\{ij\}$ de la ecuación anterior se analiza, por ejemplo, al elemento $\{11\}$:

$$s(P) = -\frac{4}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \Lambda_+(P) \mathbb{1}_D s(P) s(P) \mathbb{1}_D \Lambda_+(P) s(P) \quad (5.37)$$

dado que se toma la traza se analiza la parte que incluye matrices de Dirac:

$$s(P) = -\frac{4}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} s(P) s(P) (\Lambda_+(P) \mathbb{1}_D \mathbb{1}_D \Lambda_+(P) s(P)) \quad (5.38)$$

la parte a la que se le toma al traza cumple que:

$$\text{Tr} \left\{ \begin{pmatrix} s(P) \mathbb{1}_D \Lambda_+(P) \mathbb{1}_D \Lambda_+(P) \\ a_1^+(P) i\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda_+(P) \gamma_5 \gamma_\mu \Lambda_+(P) \\ a_1^0(P) i\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda_+(P) \gamma_5 \gamma_\mu \Lambda_+(P) \\ a_2^+(P) \Lambda_+(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu \gamma_5 \hat{P}_\mu \Lambda_+(P) \\ a_2^0(P) \Lambda_+(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu \gamma_5 \hat{P}_\mu \Lambda_+(P) \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} s(P)(2) \\ i a_1^+(P) (-6) \\ i a_1^0(P) (-6) \\ a_2^+(P) (-2) \\ a_2^0(P) (-2) \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

de esta manera se tiene como resultado:

$$\begin{pmatrix} s(P) \\ a_1^+(P) \\ a_1^0(P) \\ a_2^+(P) \\ a_2^0(P) \end{pmatrix} = -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathcal{M}^{ij} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s(P) \mathbb{1}_D \Lambda_+(P) \mathbb{1}_D \Lambda_+(P) \\ a_1^+(P) i\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda_+(P) i\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda_+(P) \\ a_1^0(P) i\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda_+(P) i\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda_+(P) \\ a_2^+(P) \Lambda_+(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu \gamma_5 \hat{P}_\mu \Lambda_+(P) \\ a_2^0(P) \Lambda_+(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu \gamma_5 \hat{P}_\mu \Lambda_+(P) \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

donde $\mathcal{M}^{ij} = t^f \mathcal{K}^{ij}$ y t^f es el término de sabor en términos de (5.6) y (5.4) el cual se describe mas adelante en (5.47), la cual es de la forma:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{ss}^{11} & \mathcal{M}_{sa_1^+}^{12} & \mathcal{M}_{sa_1^0}^{13} & \mathcal{M}_{sa_2^+}^{14} & \mathcal{M}_{sa_2^0}^{15} \\ \mathcal{M}_{a_1^+s}^{21} & \mathcal{M}_{a_1^+a_1^+}^{22} & \mathcal{M}_{a_1^+a_1^0}^{23} & \mathcal{M}_{a_1^+a_2^+}^{24} & \mathcal{M}_{a_1^+a_2^0}^{25} \\ \mathcal{M}_{a_1^0s}^{31} & \mathcal{M}_{a_1^0a_1^+}^{32} & \mathcal{M}_{a_1^0a_1^0}^{33} & \mathcal{M}_{a_1^0a_2^+}^{34} & \mathcal{M}_{a_1^0a_2^0}^{35} \\ \mathcal{M}_{a_2^+s}^{41} & \mathcal{M}_{a_2^+a_1^+}^{42} & \mathcal{M}_{a_2^+a_1^0}^{43} & \mathcal{M}_{a_2^+a_2^+}^{44} & \mathcal{M}_{a_2^+a_2^0}^{45} \\ \mathcal{M}_{a_2^0s}^{51} & \mathcal{M}_{a_2^0a_1^+}^{52} & \mathcal{M}_{a_2^0a_1^0}^{53} & \mathcal{M}_{a_2^0a_2^+}^{54} & \mathcal{M}_{a_2^0a_2^0}^{55} \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

donde los subíndices de $\mathcal{M}$ hacen referencia a los diquarks dentro del barión según el modelo en (5.20), $\mathcal{K}$ se describe mas adelante.

Agrupando la traza de toda la ecuación (5.40) en conjunto se tiene la matriz de eigenvalores:

$$\begin{pmatrix} s(P) \\ a_1^+(P) \\ a_1^0(P) \\ a_2^+(P) \\ a_2^0(P) \end{pmatrix} = t^{ij} \text{Tr} \{ \mathcal{F}^{ij} \} \begin{pmatrix} s(P) \\ a_1^+(P) \\ a_1^0(P) \\ a_2^+(P) \\ a_2^0(P) \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

de esta manera todas las trazas a calcular se encuentran en $\mathcal{F}$ al igual que la integral:

$$\mathcal{F}^{ij} = -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathcal{K}^{ij} \quad (5.43)$$

las $\mathcal{F}^{ij}$ para bariones espín 1/2 son de la forma:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}^{11} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\mathbb{1}_D \Lambda_+(P) \mathcal{K}^{11} \mathbb{1}_D \Lambda_+(P)}{2} = \mathbf{K}_{ss} & \mathcal{F}^{12} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\mathbb{1}_D \Lambda_+(P) \mathcal{K}_v^{12} i\gamma_5 \gamma_v \Lambda_+(P)}{2} = \mathbf{K}_{sa_1} \\ \mathcal{F}^{13} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\mathbb{1}_D \Lambda_+(P) \mathcal{K}_v^{13} i\gamma_5 \gamma_v \Lambda_+(P)}{2} = \mathbf{K}_{sa_1} & \mathcal{F}^{14} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\mathbb{1}_D \Lambda_+(P) \mathcal{K}_v^{14} \gamma_5 \hat{P}_v \Lambda_+(P)}{2} = \mathbf{K}_{sa_2} \\ \mathcal{F}^{15} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\mathbb{1}_D \Lambda_+(P) \mathcal{K}_v^{15} \gamma_5 \hat{P}_v \Lambda_+(P)}{2} = \mathbf{K}_{sa_2} \\ \mathcal{F}^{21} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{i\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda_+(P) \mathcal{K}_\mu^{21} \mathbb{1}_D \Lambda_+(P)}{2 \cdot (-3)} = \mathbf{K}_{a_1 s} & \mathcal{F}^{22} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{i\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda_+(P) \mathcal{K}_{\mu\nu}^{22} i\gamma_5 \gamma_\nu \Lambda_+(P)}{2 \cdot (-3)} = \mathbf{K}_{a_1 a_1} \\ \mathcal{F}^{23} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{i\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda_+(P) \mathcal{K}_{\mu\nu}^{23} i\gamma_5 \gamma_\nu \Lambda_+(P)}{2 \cdot (-3)} = \mathbf{K}_{a_1 a_1} & \mathcal{F}^{24} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{i\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda_+(P) \mathcal{K}_{\mu\nu}^{24} \gamma_5 \hat{P}_v \Lambda_+(P)}{2 \cdot (-3)} = \mathbf{K}_{a_1 a_2} \\ \mathcal{F}^{25} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{i\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda_+(P) \mathcal{K}_{\mu\nu}^{25} \gamma_5 \hat{P}_v \Lambda_+(P)}{2 \cdot (-3)} = \mathbf{K}_{a_1 a_2} \\ \mathcal{F}^{31} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{i\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda_+(P) \mathcal{K}_\mu^{31} \mathbb{1}_D \Lambda_+(P)}{2 \cdot (-3)} = \mathbf{K}_{a_1 s} & \mathcal{F}^{32} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{i\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda_+(P) \mathcal{K}_{\mu\nu}^{32} i\gamma_5 \gamma_\nu \Lambda_+(P)}{2 \cdot (-3)} = \mathbf{K}_{a_1 a_1} \\ \mathcal{F}^{33} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{i\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda_+(P) \mathcal{K}_{\mu\nu}^{33} i\gamma_5 \gamma_\nu \Lambda_+(P)}{2 \cdot (-3)} = \mathbf{K}_{a_1 a_1} & \mathcal{F}^{34} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{i\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda_+(P) \mathcal{K}_{\mu\nu}^{34} \gamma_5 \hat{P}_v \Lambda_+(P)}{2 \cdot (-3)} = \mathbf{K}_{a_1 a_2} \\ \mathcal{F}^{35} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{i\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda_+(P) \mathcal{K}_{\mu\nu}^{35} \gamma_5 \hat{P}_v \Lambda_+(P)}{2 \cdot (-3)} = \mathbf{K}_{a_1 a_2} \\ \mathcal{F}^{41} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\Lambda_+(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu \mathcal{K}_\mu^{41} \mathbb{1}_D \Lambda_+(P)}{-2} = \mathbf{K}_{a_2 s} & \mathcal{F}^{42} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\Lambda_+(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu \mathcal{K}_{\mu\nu}^{42} i\gamma_5 \gamma_\nu \Lambda_+(P)}{-2} = \mathbf{K}_{a_2 a_1} \\ \mathcal{F}^{43} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\Lambda_+(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu \mathcal{K}_{\mu\nu}^{43} i\gamma_5 \gamma_\nu \Lambda_+(P)}{-2} = \mathbf{K}_{a_2 a_1} & \mathcal{F}^{44} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\Lambda_+(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu \mathcal{K}_{\mu\nu}^{44} \gamma_5 \hat{P}_v \Lambda_+(P)}{-2} = \mathbf{K}_{a_2 a_2} \\ \mathcal{F}^{45} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\Lambda_+(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu \mathcal{K}_{\mu\nu}^{45} \gamma_5 \hat{P}_v \Lambda_+(P)}{-2} = \mathbf{K}_{a_2 a_2} \\ \mathcal{F}^{51} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\Lambda_+(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu \mathcal{K}_\mu^{51} \mathbb{1}_D \Lambda_+(P)}{-2} = \mathbf{K}_{a_2 s} & \mathcal{F}^{52} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\Lambda_+(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu \mathcal{K}_{\mu\nu}^{52} i\gamma_5 \gamma_\nu \Lambda_+(P)}{-2} = \mathbf{K}_{a_2 a_1} \\ \mathcal{F}^{53} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\Lambda_+(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu \mathcal{K}_{\mu\nu}^{53} i\gamma_5 \gamma_\nu \Lambda_+(P)}{-2} = \mathbf{K}_{a_2 a_1} & \mathcal{F}^{54} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\Lambda_+(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu \mathcal{K}_{\mu\nu}^{54} \gamma_5 \hat{P}_v \Lambda_+(P)}{-2} = \mathbf{K}_{a_2 a_2} \\ \mathcal{F}^{55} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\Lambda_+(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu \mathcal{K}_{\mu\nu}^{55} \gamma_5 \hat{P}_v \Lambda_+(P)}{-2} = \mathbf{K}_{a_2 a_2} \end{aligned} \right\} \quad (5.44)$$

varias de estas integrales son similares y se debe ser cuidadoso para hacer los menores cálculos. El elemento $\mathcal{M}^{ij}$ descrito en (5.41) de manera general como $\mathcal{M}_{[q_1 q_3][q_1 q_2]}$ que describe el rompimiento de un diquark $[q_1 q_2]$ a través de la emisión de un quark q_1 el cual se junta con un quark q_3 para formar un diquark $[q_1 q_3]$, donde (5.16) es el propagador del quark intercambiado, es decir, de q_1 y el propagador del quark al que se junta q_3 es el propagador para un quark vestido:

$$S_{q_3}(p) = \frac{1}{i\gamma \cdot p + M_{q_3}} \quad (5.45)$$

la estructura de cada elemento $\mathcal{M}^{ij}$ es la siguiente:

$$\mathcal{M}_{[q_1 q_3][q_1 q_2]} = \underbrace{t^{q_1 T} t^{[q_1 q_2]} t^{[q_1 q_3] T} t^{q_3}}_{t^f} \underbrace{\left[\Gamma_{[q_1 q_2]}(l_{q_1 q_2}) S_{q_1}^T \bar{\Gamma}_{[q_1 q_3]}(-k_{q_1 q_3}) S_{q_3}(l_{q_3}) \Delta_{[q_1 q_2]}(l_{q_1 q_2}) \right]}_{\mathcal{K}_{[q_1 q_3][q_1 q_2]}} \quad (5.46)$$

donde el término de sabor t^f se describe como $(t^{(\text{quark emitido}) T} t^{[\text{diquark roto}]} t^{[\text{diquark formado}]} T t^{(\text{quark al que se une})})$, después sigue la amplitud de BS para el diquark que se rompe, el propagador del quark que se emite,

amplitud de BS con la carga conjugada del diquark que se forma, propagador del quark al que se une el quark emitido para formar el nuevo diquark y por último el propagador del diquark roto. En t^f si el diquark roto y el formado son iguales los quarks emitido y con el que se junta son iguales, esto se puede resumir como:

$$t^f = \begin{bmatrix} t^{q_1 T} t^{[q_2 q_1]} t^{[q_2 q_1]^T} t^{q_1} & t^{q_1 T} t^{[q_1 q_1]} t^{[q_2 q_1]^T} t^{q_2} \\ t^{q_2 T} t^{[q_2 q_1]} t^{[q_1 q_1]^T} t^{q_1} & t^{q_2 T} t^{[q_1 q_1]} t^{[q_1 q_1]^T} t^{q_2} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

Para el nucleón con los quarks (uud) con los diquarks previamente descritos en (5.23) y el eigenvector (5.33) los elementos $\mathcal{M}^{ij}$ son:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{[ud][ud]} & \mathcal{M}_{[ud]\{uu\}} & \mathcal{M}_{[ud]\{ud\}} & \mathcal{M}_{[ud]\{uu\}} & \mathcal{M}_{[ud]\{ud\}} \\ \mathcal{M}_{\{uu\}[ud]} & \mathcal{M}_{\{uu\}\{uu\}} & \mathcal{M}_{\{uu\}\{ud\}} & \mathcal{M}_{\{uu\}\{uu\}} & \mathcal{M}_{\{uu\}\{ud\}} \\ \mathcal{M}_{[ud]\{ud\}} & \mathcal{M}_{[ud]\{uu\}} & \mathcal{M}_{[ud]\{ud\}} & \mathcal{M}_{[ud]\{uu\}} & \mathcal{M}_{[ud]\{ud\}} \\ \mathcal{M}_{\{uu\}[ud]} & \mathcal{M}_{\{uu\}\{uu\}} & \mathcal{M}_{\{uu\}\{ud\}} & \mathcal{M}_{\{uu\}\{uu\}} & \mathcal{M}_{\{uu\}\{ud\}} \\ \mathcal{M}_{[ud]\{ud\}} & \mathcal{M}_{[ud]\{uu\}} & \mathcal{M}_{[ud]\{ud\}} & \mathcal{M}_{[ud]\{uu\}} & \mathcal{M}_{[ud]\{ud\}} \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

La eigenecuación (5.40) para el nucleón es:

$$\begin{pmatrix} [ud]u \\ \{uu\}d \\ \{ud\}u \\ \{uu\}d \\ \{ud\}u \end{pmatrix} = -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{[ud][ud]} & \mathcal{M}_{[ud]\{uu\}} & \mathcal{M}_{[ud]\{ud\}} & \mathcal{M}_{[ud]\{uu\}} & \mathcal{M}_{[ud]\{ud\}} \\ \mathcal{M}_{\{uu\}[ud]} & \mathcal{M}_{\{uu\}\{uu\}} & \mathcal{M}_{\{uu\}\{ud\}} & \mathcal{M}_{\{uu\}\{uu\}} & \mathcal{M}_{\{uu\}\{ud\}} \\ \mathcal{M}_{[ud]\{ud\}} & \mathcal{M}_{[ud]\{uu\}} & \mathcal{M}_{[ud]\{ud\}} & \mathcal{M}_{[ud]\{uu\}} & \mathcal{M}_{[ud]\{ud\}} \\ \mathcal{M}_{\{uu\}[ud]} & \mathcal{M}_{\{uu\}\{uu\}} & \mathcal{M}_{\{uu\}\{ud\}} & \mathcal{M}_{\{uu\}\{uu\}} & \mathcal{M}_{\{uu\}\{ud\}} \\ \mathcal{M}_{[ud]\{ud\}} & \mathcal{M}_{[ud]\{uu\}} & \mathcal{M}_{[ud]\{ud\}} & \mathcal{M}_{[ud]\{uu\}} & \mathcal{M}_{[ud]\{ud\}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [ud]u \\ \{uu\}d \\ \{ud\}u \\ \{uu\}d \\ \{ud\}u \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

donde por ejemplo $\mathcal{M}_{\{uu\}[ud]}$ describe el rompimiento de un diquark escalar $[ud]$ a través de la emisión de un quark u el cual se junta con un quark u para formar un diquark axial-vector $\{uu\}$, dejando al quark d solo. Note que la columna 2 es idéntica a la columna 4 y la columna 3 es idéntica a la columna 5, además el renglón 2 es idéntico al renglón 4 y el renglón 3 al renglón 5, de esta manera solo vasta calcular las componentes $\mathcal{M}^{i'j'}$ con $(i', j' = 1, 2, 3)$. Cada una de las entradas se escribe explícitamente como:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M}_{[ud][ud]} &= t^{uT} t^{[ud]} t^{[ud]^T} t^u \left[\Gamma_{[ud]}^{0+}(l_{ud}) S_u^T \bar{\Gamma}_{[ud]}^{0+}(-k_{ud}) S_u(l_u) \Delta_{[ud]}^{0+}(l_{ud}) \right] = \mathcal{K}^{11} \\ \mathcal{M}_{[ud]\{uu\}} &= t^{uT} t^{\{uu\}} t^{[ud]^T} t^d \left[\Gamma_{\{uu\}, \mu}^{1+}(l_{uu}) S_u^T \bar{\Gamma}_{[ud]}^{0+}(-k_{ud}) S_d(l_d) \Delta_{\{uu\}, \mu\nu}^{1+}(l_{uu}) \right] = -\sqrt{2}\mathcal{K}^{12} \\ \mathcal{M}_{[ud]\{ud\}} &= t^{uT} t^{\{ud\}} t^{[ud]^T} t^u \left[\Gamma_{\{ud\}, \mu}^{1+}(l_{ud}) S_u^T \bar{\Gamma}_{[ud]}^{0+}(-k_{ud}) S_u(l_u) \Delta_{\{ud\}, \mu\nu}^{1+}(l_{ud}) \right] = \mathcal{K}_\nu^{13} \\ \mathcal{M}_{\{uu\}[ud]} &= t^{dT} t^{[ud]} t^{\{uu\}T} t^u \left[\Gamma_{[ud]}^{0+}(l_{ud}) S_d^T \bar{\Gamma}_{\{uu\}, \mu}^{1+}(-k_{uu}) S_u(l_u) \Delta_{[ud]}^{0+}(l_{ud}) \right] = -\sqrt{2}\mathcal{K}_\mu^{21} \\ \mathcal{M}_{\{uu\}\{uu\}} &= t^{dT} t^{\{uu\}} t^{\{uu\}T} t^u \left[\Gamma_{\{uu\}, \rho}^{1+}(l_{uu}) S_d^T \bar{\Gamma}_{\{uu\}, \mu}^{1+}(-k_{uu}) S_u(l_u) \Delta_{\{uu\}, \rho\nu}^{1+}(l_{uu}) \right] = 0\mathcal{K}_{\mu\nu}^{22} \\ \mathcal{M}_{\{uu\}\{ud\}} &= t^{dT} t^{\{ud\}} t^{\{uu\}T} t^u \left[\Gamma_{\{ud\}, \rho}^{1+}(l_{ud}) S_d^T \bar{\Gamma}_{\{uu\}, \mu}^{1+}(-k_{uu}) S_u(l_u) \Delta_{\{ud\}, \rho\nu}^{1+}(l_{ud}) \right] = \sqrt{2}\mathcal{K}_{\mu\nu}^{23} \\ \mathcal{M}_{\{ud\}[ud]} &= t^{uT} t^{[ud]} t^{\{ud\}T} t^u \left[\Gamma_{[ud]}^{0+}(l_{ud}) S_u^T \bar{\Gamma}_{\{ud\}, \mu}^{1+}(-k_{ud}) S_u(l_u) \Delta_{[ud]}^{0+}(l_{ud}) \right] = \mathcal{K}_\mu^{31} \\ \mathcal{M}_{\{ud\}\{uu\}} &= t^{uT} t^{\{uu\}} t^{\{ud\}T} t^d \left[\Gamma_{\{uu\}, \rho}^{1+}(l_{uu}) S_u^T \bar{\Gamma}_{\{ud\}, \mu}^{1+}(-k_{ud}) S_d(l_d) \Delta_{\{uu\}, \rho\nu}^{1+}(l_{uu}) \right] = \sqrt{2}\mathcal{K}_{\mu\nu}^{32} \\ \mathcal{M}_{\{ud\}\{ud\}} &= t^{uT} t^{\{ud\}} t^{\{ud\}T} t^u \left[\Gamma_{\{ud\}, \rho}^{1+}(l_{ud}) S_u^T \bar{\Gamma}_{\{ud\}, \mu}^{1+}(-k_{ud}) S_u(l_u) \Delta_{\{ud\}, \rho\nu}^{1+}(l_{ud}) \right] = \mathcal{K}_{\mu\nu}^{33} \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

entonces la ecuación de eigenvalores (5.42) es:

$$\begin{pmatrix} s(P) \\ a_1^+(P) \\ a_1^0(P) \\ a_2^+(P) \\ a_2^0(P) \end{pmatrix} = -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \begin{pmatrix} \mathcal{F}^{11} & -\sqrt{2}\mathcal{F}^{12} & \mathcal{F}^{13} & -\sqrt{2}\mathcal{F}^{14} & \mathcal{F}^{15} \\ -\sqrt{2}\mathcal{F}^{21} & 0\mathcal{F}^{22} & \sqrt{2}\mathcal{F}^{23} & 0\mathcal{F}^{24} & \sqrt{2}\mathcal{F}^{25} \\ \mathcal{F}^{31} & \sqrt{2}\mathcal{F}^{32} & \mathcal{F}^{33} & \sqrt{2}\mathcal{F}^{34} & \mathcal{F}^{35} \\ -\sqrt{2}\mathcal{F}^{41} & 0\mathcal{F}^{42} & \sqrt{2}\mathcal{F}^{43} & 0\mathcal{F}^{44} & \sqrt{2}\mathcal{F}^{45} \\ \mathcal{F}^{51} & \sqrt{2}\mathcal{F}^{52} & \mathcal{F}^{53} & \sqrt{2}\mathcal{F}^{54} & \mathcal{F}^{55} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s(P) \\ a_1^+(P) \\ a_1^0(P) \\ a_2^+(P) \\ a_2^0(P) \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

algunos términos son iguales y al hacer la multiplicación por el cero donde corresponde encontramos:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}^{11} & -\sqrt{2}\mathcal{F}^{12} & \mathcal{F}^{13} & -\sqrt{2}\mathcal{F}^{14} & \mathcal{F}^{15} \\ -\sqrt{2}\mathcal{F}^{21} & 0\mathcal{F}^{22} & \sqrt{2}\mathcal{F}^{23} & 0\mathcal{F}^{24} & \sqrt{2}\mathcal{F}^{25} \\ \mathcal{F}^{31} & \sqrt{2}\mathcal{F}^{32} & \mathcal{F}^{33} & \sqrt{2}\mathcal{F}^{34} & \mathcal{F}^{35} \\ -\sqrt{2}\mathcal{F}^{41} & 0\mathcal{F}^{42} & \sqrt{2}\mathcal{F}^{43} & 0\mathcal{F}^{44} & \sqrt{2}\mathcal{F}^{45} \\ \mathcal{F}^{51} & \sqrt{2}\mathcal{F}^{52} & \mathcal{F}^{53} & \sqrt{2}\mathcal{F}^{54} & \mathcal{F}^{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ss} & -\sqrt{2}\mathbf{K}_{sa_1} & \mathbf{K}_{sa_1} & -\sqrt{2}\mathbf{K}_{sa_2} & \mathbf{K}_{sa_2} \\ -\sqrt{2}\mathbf{K}_{a_1s} & 0 & \sqrt{2}\mathbf{K}_{a_1a_1} & 0 & \sqrt{2}\mathbf{K}_{a_1a_2} \\ \mathbf{K}_{a_1s} & \sqrt{2}\mathbf{K}_{a_1a_1} & \mathbf{K}_{a_1a_1} & \sqrt{2}\mathbf{K}_{a_1a_2} & \mathbf{K}_{a_1a_2} \\ -\sqrt{2}\mathbf{K}_{a_2s} & 0 & \sqrt{2}\mathbf{K}_{a_2a_1} & 0 & \sqrt{2}\mathbf{K}_{a_2a_2} \\ \mathbf{K}_{a_2s} & \sqrt{2}\mathbf{K}_{a_2a_1} & \mathbf{K}_{a_2a_1} & \sqrt{2}\mathbf{K}_{a_2a_2} & \mathbf{K}_{a_2a_2} \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

dado que varios elementos se repiten los únicos que se deben calcular son 9 de los 25 que en principio se tenían los cuales son: $\mathbf{K}_{ss}$, $\mathbf{K}_{sa_1}$, $\mathbf{K}_{sa_2}$, $\mathbf{K}_{a_1s}$, $\mathbf{K}_{a_1a_1}$, $\mathbf{K}_{a_1a_2}$, $\mathbf{K}_{a_2s}$, $\mathbf{K}_{a_2a_1}$ y $\mathbf{K}_{a_2a_2}$. Se resolverá cada uno de estos términos comenzando con $\mathbf{K}_{ss}$ utilizando la distribución de mementos (5.1) de la ecuación de Faddeev {5.5}, con $l_{q_1q_2} = -l + P$ y $k_{q_1q_2} = -k + P$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{[ud][ud]} &= t^{uT} t^{[ud]} t^{[ud]T} t^u \left[\Gamma_{[ud]}^{0+}(l_{ud}) S_u^T \bar{\Gamma}_{[ud]}^{0+}(-k_{ud}) S_u(l_u) \Delta_{[ud]}^{0+}(l_{ud}) \right] = \mathcal{K}^{11} \\ &= \Gamma_{[ud]}^{0+}(l_{ud}) S_u^T \bar{\Gamma}_{[ud]}^{0+}(-k_{ud}) S_u(l_u) \Delta_{[ud]}^{0+}(l_{ud}) \\ &= \left(i\gamma_5 E_{[ud]}^{0+} + \frac{1}{M_R} \gamma_5 \gamma \cdot (-l + P) F_{[ud]}^{0+} \right) \frac{g_N^2}{M_u} \left(i\gamma_5 E_{[ud]}^{0+} - \frac{1}{M_R} \gamma_5 \gamma \cdot (-k + P) F_{[ud]}^{0+} \right) \frac{(-i\gamma \cdot l + M_u)}{l^2 + M_u^2} \frac{1}{(-l + P)^2 + m_{[ud]}^2} \\ &= \left(i\gamma_5 E_{[ud]}^{0+} + \frac{1}{M_R} \gamma_5 \gamma \cdot (-l + P) F_{[ud]}^{0+} \right) \frac{g_N^2}{M_u} \left(i\gamma_5 E_{[ud]}^{0+} - \frac{1}{M_R} \gamma_5 \gamma \cdot (-k + P) F_{[ud]}^{0+} \right) \frac{-i\gamma \cdot l + M_u}{[(-l + P)^2 + m_{[ud]}^2][l^2 + M_u^2]} \\ &= \frac{g_N^2 \left(i\gamma_5 E_{[ud]}^{0+} + \frac{1}{M_R} \gamma_5 \gamma \cdot (-l + P) F_{[ud]}^{0+} \right) \left(i\gamma_5 E_{[ud]}^{0+} - \frac{1}{M_R} \gamma_5 \gamma \cdot (-k + P) F_{[ud]}^{0+} \right) (-i\gamma \cdot l + M_u)}{M_u [(-l + P)^2 + m_{[ud]}^2] [l^2 + M_u^2]} \end{aligned}$$

ahora se usa $\mathcal{K}^{\infty\infty}$ en el calculo de $\mathcal{F}^{11}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{11} &= -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\mathbb{1}_D \Lambda_+(P) \mathcal{K}^{11} \mathbb{1}_D \Lambda_+(P)}{2} \\ &= -\frac{4}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \Lambda_+(P) \frac{g_N^2 \left(i\gamma_5 E_{[ud]}^{0+} + \frac{1}{M_R} \gamma_5 \gamma \cdot (-l + P) F_{[ud]}^{0+} \right) \left(i\gamma_5 E_{[ud]}^{0+} - \frac{1}{M_R} \gamma_5 \gamma \cdot (-k + P) F_{[ud]}^{0+} \right) (-i\gamma \cdot l + M_u)}{M_u [(-l + P)^2 + m_{[ud]}^2] [l^2 + M_u^2]} \Lambda_+(P) \end{aligned} \quad (5.53)$$

se debe tomar la traza en la ecuación anterior, después de tomarla se obtienen para $\mathcal{K}^{11}$ tres términos, uno que es proporcional a $(E_{[ud]}^{0+})^2$, otro proporcional a $(E_{[ud]}^{0+} F_{[ud]}^{0+})$ y otro proporcional a $(F_{[ud]}^{0+})^2$. De esta manera se tiene una contribución por separado de la forma $\mathcal{F}^{11} = \mathcal{F}_{EE}^{11} + \mathcal{F}_{EF}^{11} + \mathcal{F}_{FF}^{11}$, después de tomar la traza de (5.53) se obtiene:

$$\mathcal{F}_{EE}^{11} = -\frac{4}{2} (E_{[ud]}^{0+})^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{g_N^2 (2l \cdot P M_N M_R^2 + 4P \cdot P M_R^2 M_u - M_N^2 M_R^2 M_u)}{M_u M_N^2 M_R^2 ((-l + P)^2 + m_{[ud]}^2) (l^2 + M_u^2)} \quad (5.54)$$

ahora se utiliza la parametrización de Feynman como en (2.38) donde $a = ((-l + P)^2 + m_{[ud]}^2)$ y $b = (l^2 + M_u^2)$ entonces:

$$\frac{1}{((-l + P)^2 + m_{[ud]}^2) (l^2 + M_u^2)} = \int_0^1 \frac{d\alpha}{[\alpha ((-l + P)^2 + m_{[ud]}^2) + (1 - \alpha) (l^2 + M_u^2)]^2} \quad (5.55)$$

desarrollando el denominador:

$$\begin{aligned}
& \alpha \left((-l + P)^2 + m_{[ud]}^2 \right) + (1 - \alpha) \left(l^2 + M_u^2 \right) \\
&= \cancel{\alpha l^2} - 2\alpha l \cdot P + \alpha P^2 + \alpha m_{[ud]}^2 + l^2 + M_u^2 - \cancel{\alpha l^2} - \alpha M_u^2 \\
&= l^2 - 2\alpha l \cdot P + \alpha P^2 + \alpha m_{[ud]}^2 + M_u^2(1 - \alpha) \\
&\text{Completando el binomio al cuadrado:} \\
&= l^2 - 2\alpha l \cdot P + \alpha^2 P^2 - \alpha^2 P^2 + \alpha P^2 + \alpha m_{[ud]}^2 + M_u^2(1 - \alpha) \\
&= (l - \alpha P)^2 + \alpha(1 - \alpha)P^2 + \alpha m_{[ud]}^2 + M_u^2(1 - \alpha) \\
&= (l - \alpha P)^2 + \sigma^{[ud]}(\alpha, M_u, m_{[ud]}, P)
\end{aligned}$$

donde:

$$\left. \begin{aligned}
\sigma^i(\alpha, M_{q_1}, m_i, P) &= \alpha(1 - \alpha)P^2 + \alpha m_i^2 + M_{q_1}^2(1 - \alpha) \\
&= -\alpha(1 - \alpha)M_N^2 + \alpha m_i^2 + M_{q_1}^2(1 - \alpha) \\
&= \sigma^i(\alpha, M_{q_1}, m_i, M_N) \\
&= \sigma_{q_1}^i(\alpha), \quad i = \begin{cases} [q_1 q_2] & \text{para } m_{[q_1 q_2]_{0^+}} \\ [q_1 q_2] & \text{para } m_{[q_1 q_2]_{1^+}} \end{cases}
\end{aligned} \right\} \quad (5.56)$$

donde se uso $P^2 = -M_N^2$, por lo tanto (5.55) es:

$$\frac{1}{((-l + P)^2 + m_{[ud]}^2)(l^2 + M_u^2)} = \int_0^1 \frac{d\alpha}{[(l - \alpha P)^2 + \sigma_u^{[ud]}(\alpha)]^2} \quad (5.57)$$

de esta manera es necesario hacer el desplazamiento en l mediante el cambio de variable $l' \rightarrow l - \alpha P$, se emplea un esquema de regularización que preserve la simetría, por lo tanto, el desplazamiento $l' = l - \alpha P$ esta permitido, después de lo cual la invariancia de $O(4)$ implica $[l' \cdot P = 0]$ lo que nos permite establecer las relaciones de momento de la ecuación de Faddeev. Usando las relaciones de momento (5.1) de la ecuación de Faddeev {5.5} donde l es el momento relativo quark-diquark interno, es el momento de integración, k es el momento relativo entre quark-diquark externo. Los quarks dentro del diquark se correlacionan mediante el intercambio de gluones, pero el Kernel en esta ecuación expresa la unión dentro del barión a través de la ruptura y reformación de un diquark, que esta mediada por el intercambio de un quark vestido con impulso t . De la parametrización de Feynman se tiene que:

$$l = l' + \alpha P \quad (5.58)$$

el momento del barión al cuadrado es el negativo de la masa del barión al cuadrado:

$$P^2 = -M_B^2 \quad (5.59)$$

lo mismo pasa con el diquark externo:

$$k_{qq} \cdot k_{qq} = -m_{qq}^2 \quad (5.60)$$

además, dado que los diquarks son tratados como partículas reales viviendo dentro de los hadrones las partículas se toman como partículas **on-shell**, esto tiene sentido dado que se asocian a una buena escala de masa, entonces: $[l_{qq} \cdot l_{qq} = -m_{qq}^2]$ y $[l_{qq} \cdot k_{qq} = -m_{qq}^2]$. Esto permite encontrar las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
l' \cdot P = 0 &= (l - \alpha P) \cdot P \\
&= l \cdot P - \alpha P^2 \\
\boxed{l \cdot P} &= \alpha P^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_{qq} \cdot P &= (-l + P) \cdot P \\
&= -(l' + \alpha P) + P \cdot P \\
&= -l' \cdot P - \alpha P^2 + P^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{l_{qq} \cdot P = (1 - \alpha)P^2}$$

$$\boxed{k_{qq} \cdot P = (1 - \alpha)P^2}$$

$$\begin{aligned}
l_{qq} \cdot l' &= (-l + P) \cdot l' \\
&= -(l' + \alpha P) + P \cdot l' \\
&= -l'^2 - \alpha P \cdot l' + P \cdot l'
\end{aligned}$$

$$l' \cdot l' = 0 \Rightarrow \boxed{l_{qq} \cdot l' = 0}$$

$$\begin{aligned}
l_{qq} \cdot l &= (-l + P) \cdot l \\
&= -l^2 + P \cdot l \\
&= -(l' + \alpha P)^2 + P \cdot (l' + \alpha P) \\
&= -l'^2 - 2\alpha l' \cdot P - \alpha^2 P^2 + l' \cdot P + \alpha P^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{l_{qq} \cdot l = \alpha(1 - \alpha)P^2}$$

$$\boxed{k_{qq} \cdot l = \alpha(1 - \alpha)P^2}$$

diferenciando entre el canal de los diquark se tiene:

$$\begin{aligned}
l_{\{qq\}} \cdot l_{[qq]} &= (-l + P) \cdot (-l + P) \\
&= l^2 - 2P \cdot l + P^2 \\
&= (l' + \alpha P)^2 - 2P \cdot (l' + \alpha P) + P^2 \\
&= l'^2 + 2\alpha l' \cdot P + \alpha^2 P^2 - 2P \cdot l' - 2\alpha P^2 + P^2 \\
&= (\alpha^2 - 2\alpha + 1)P^2 = (\alpha - 1)^2 P^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{l_{\{qq\}} \cdot l_{[qq]} = (\alpha - 1)^2 P^2}$$

De esta manera los momentos a sustituir después de obtener las trazas de (5.44) son:

$$\left. \begin{aligned}
l_{qq} \cdot P &= (1 - \alpha)P^2 & l_{qq} \cdot l_{qq} &= -m_{qq}^2 & l_{qq} \cdot l &= \alpha(1 - \alpha)P^2 \\
k_{qq} \cdot P &= (1 - \alpha)P^2 & k_{qq} \cdot k_{qq} &= -m_{qq}^2 & k_{qq} \cdot l &= \alpha(1 - \alpha)P^2 \\
l \cdot P &= \alpha P^2
\end{aligned} \right\} \quad (5.61)$$

para el producto $k_{qq} \cdot l_{qq}$ si los diquarks son del mismo tipo (escalares o axial-vectoriales) se escribe como $k_{[.]} \cdot l_{[.]} = -m_{[.]}^2$ y $k_{\{.\}} \cdot l_{\{.\}} = -m_{\{.\}}^2$, para el producto $k_{qq} \cdot l_{qq}$ se escriben como $k_{\{.\}} \cdot l_{[.]} = (1 - \alpha)P^2$ y $k_{[.]} \cdot l_{\{.\}} = (1 - \alpha)P^2$, además si el sabor de los diquark es distinto pero del mismo tipo se cumple: $k_{\{q_1 q_2\}} \cdot l_{\{q_2 q_1\}} = (1 - \alpha)P^2$ y $k_{\{q_1 q_2\}} \cdot l_{\{q_1 q_2\}} = -m_{\{q_1 q_2\}}^2$. El ultimo reemplazo que se hace en la traza es (5.59). Se debe tener cuidado con el sabor de los quarks involucrados en el barión dado que se tienen bariones del tipo (1/2), (3/2) y dentro de estos del tipo: tres quarks iguales pesados o ligeros (qqq), un quark distinto ligero y dos pesados ($q^l q^p q^p$), un quark distinto pesado y dos ligeros iguales ($q^l q^l q^p$) como por ejemplo $\Omega_c(ccc)$, $\Omega_b(bbb)$, $\Omega^{0*}(cbb)$, $\Omega^{+*}(ccb)$ y la amplitud de Faddeev cambia para cada uno de ellos al igual que los momentos a sustituir.

Después de sustituir las relaciones de los momentos (5.61) en (5.54) se obtiene:

$$\mathcal{F}_{EE}^{11} = -\frac{4}{2} \left(E_{[ud]}^{0+} \right)^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int_0^1 \frac{-g_N^2 2(M_N \alpha + M_u)}{\left[l'^2 + \sigma_u^{[ud]}(\alpha) \right]^2} d\alpha \quad (5.62)$$

simplificando un poco y usando (2.25) se tiene:

$$\mathcal{F}_{EE}^{11} = \frac{8}{2} \frac{g_N^2}{M_u} (E_{[ud]}^{0+})^2 \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 (\alpha M_N + M_u) \int_0^\infty \frac{dl'^2 l'^2}{[l'^2 + \sigma_u^{[ud]}(\alpha)]^2} d\alpha \quad (5.63)$$

dato que l' es una variable de integración se puede hacer $l' \rightarrow l$ solo por notación, usando (2.46) y (2.47) se tiene:

$$\mathcal{F}_{EE}^{11} = \frac{g_N^2}{4\pi^2 M_u} (E_{[ud]}^{0+})^2 \int_0^1 (\alpha M_N + M_u) \bar{C}'(\sigma_u^{[ud]}(\alpha), \tau_{uv}, \tau_{ir}) d\alpha \quad (5.64)$$

por comodidad se usa $\bar{C}'(\sigma_u^{[ud]}(\alpha), \tau_{uv}, \tau_{ir}) = \bar{C}'(\sigma_u^{[ud]}(\alpha))$ donde se omiten los cortes τ_{uv} y τ_{ir} solo por no escribir tanto, además se define:

$$c_B^f = \frac{g_B^2}{4\pi^2 M_f} \quad (5.65)$$

donde B denota al barión en cuestión y f el sabor del quark. De esta manera se obtiene finalmente:

$$\mathcal{F}_{EE}^{11} = c_N^u (E_{[ud]}^{0+})^2 \int_0^1 (\alpha M_N + M_u) \bar{C}'(\sigma_u^{[ud]}(\alpha)) d\alpha \quad (5.66)$$

de la misma manera se calcula los otros componentes de $\mathcal{F}^{11}$ proporcionales a $(E_{[ud]}^{0+} F_{[ud]}^{0+})$ y $(F_{[ud]}^{0+})^2$ teniendo en cuenta que $\bar{\Gamma}(k; P) = C^\dagger(\Gamma(-k; P))^T C$ entonces $\Gamma^{0+}(P) = \bar{\Gamma}^{0+}(P)$ y $\Gamma^{1+}(P) = \bar{\Gamma}^{1+}(P)$, así se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{11} &= \mathcal{F}_{EE}^{11} + \mathcal{F}_{EF}^{11} + \mathcal{F}_{FF}^{11} = \mathbf{K}_{ss} \\ \mathcal{F}_{EE}^{11} &= c_N^u (E_{[ud]}^{0+})^2 \int_0^1 (\alpha M_N + M_u) \bar{C}'(\sigma_u^{[ud]}(\alpha)) d\alpha \\ \mathcal{F}_{EF}^{11} &= -2c_N^u (E_{[ud]}^{0+} F_{[ud]}^{0+}) \frac{M_N}{M_R} \int_0^1 (1 - \alpha) (\alpha M_N + M_u) \bar{C}'(\sigma_u^{[ud]}(\alpha)) d\alpha \\ \mathcal{F}_{FF}^{11} &= c_N^u (F_{[ud]}^{0+})^2 \frac{m_{[ud]}^2}{M_R^2} \int_0^1 (\alpha M_N + M_u) \bar{C}'(\sigma_u^{[ud]}(\alpha)) d\alpha \end{aligned} \quad (5.67)$$

donde por simetría de isospín $M_R = M_u = M_d$. Ahora se calcula $\mathcal{F}^{12}$:

$$\mathcal{F}^{12} = -\frac{4}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathbb{1}_D \Lambda_+(P) \mathcal{K}_v^{12} i \gamma_5 \gamma_v \Lambda_+(P) = \mathbf{K}_{sa_1} \quad (5.68)$$

donde $\mathcal{K}^{12}$ esta descrita en (5.50) con la amplitud BS descrita en (5.22) y $\gamma_\mu^T(P)$ descrita en (A.1). Después de calcular la traza se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{12} &= \mathcal{F}_{E_{[uu]}^{1+} E_{[ud]}^{0+}}^{12} + \mathcal{F}_{E_{[ud]}^{1+} F_{[ud]}^{0+}}^{12} = \mathbf{K}_{sa_1} \\ \mathcal{F}_{E_{[uu]}^{1+} E_{[ud]}^{0+}}^{12} &= c_N^u \frac{E_{[uu]}^{1+} E_{[ud]}^{0+}}{m_{[uu]}^2} \int_0^1 (m_{[uu]}^2 (\alpha M_N + 3M_u) + 2\alpha(1 - \alpha)^2 M_N^3) \bar{C}'(\sigma_u^{[uu]}(\alpha)) d\alpha \\ \mathcal{F}_{E_{[uu]}^{1+} F_{[ud]}^{0+}}^{12} &= -c_N^u \frac{E_{[uu]}^{1+} F_{[ud]}^{0+}}{m_{[uu]}^2} \frac{M_N}{M_R} \int_0^1 (1 - \alpha) (m_{[uu]}^2 (M_u + 3\alpha M_N) + (1 - \alpha)^2 M_u M_N^2) \bar{C}'(\sigma_u^{[uu]}(\alpha)) d\alpha \end{aligned} \quad (5.69)$$

el siguiente a calcular es $\mathcal{F}^{14} = \mathbf{K}_{sa_2}$:

$$\mathcal{F}^{14} = -\frac{4}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathbb{1}_D \Lambda_+(P) \mathcal{K}_v^{14} \gamma_5 \hat{P}_v \Lambda_+(P) = \mathbf{K}_{sa_2} \quad (5.70)$$

después de tomar la traza se tiene:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{14} &= \mathcal{F}_{E_{\{uu\}}^{1+} E_{[ud]}^{0+}}^{14} + \mathcal{F}_{E_{\{uu\}}^{1+} F_{[ud]}^{0+}}^{14} = \mathbf{K}_{sa_2} \\
 \mathcal{F}_{E_{\{uu\}}^{1+} E_{[ud]}^{0+}}^{14} &= c_N^d \frac{E_{\{uu\}}^{1+} E_{[ud]}^{0+}}{m_{\{uu\}}^2} \int_0^1 (\alpha M_N - M_u) \left((1-\alpha)^2 M_N^2 - m_{\{uu\}}^2 \right) \overline{C}'(\sigma_d^{\{uu\}}(\alpha)) d\alpha \\
 \mathcal{F}_{E_{\{uu\}}^{1+} F_{[ud]}^{0+}}^{14} &= c_N^d \frac{E_{\{uu\}}^{1+} F_{[ud]}^{0+}}{m_{\{uu\}}^2} \frac{M_N}{M_u} \int_0^1 (1-\alpha) (\alpha M_N - M_u) \left((1-\alpha)^2 M_N^2 - m_{\{uu\}}^2 \right) \overline{C}'(\sigma_d^{\{uu\}}(\alpha)) d\alpha
 \end{aligned} \tag{5.71}$$

donde se uso que $l_{\{uu\}} \cdot l_{\{uu\}} = -m_{\{uu\}}^2$ y $k_{[ud]} \cdot l_{\{uu\}} = (1-\alpha)^2 P^2$.

El siguiente a calcular es $\mathcal{F}^{21} = \mathbf{K}_{a_1 s}$:

$$\mathcal{F}^{21} = \frac{-4}{-6} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} i\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda_+(P) \mathcal{K}_\mu^{21} \mathbb{1}_D \Lambda_+(P) = \mathbf{K}_{a_1 s} \tag{5.72}$$

después de tomar la traza se tiene:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{21} &= \mathcal{F}_{E_{[ud]}^{0+} E_{\{uu\}}^{1+}}^{21} + \mathcal{F}_{F_{[ud]}^{0+} E_{\{uu\}}^{1+}}^{21} = \mathbf{K}_{a_1 s} \\
 \mathcal{F}_{E_{[ud]}^{0+} E_{\{uu\}}^{1+}}^{21} &= \frac{1}{3} c_N^d \frac{E_{[ud]}^{0+} E_{\{uu\}}^{1+}}{m_{\{uu\}}^2} \int_0^1 (\alpha M_N + M_u) \left((1-\alpha)^2 M_N^2 + 2m_{\{uu\}}^2 \right) \overline{C}'(\sigma_u^{[ud]}(\alpha)) d\alpha \\
 \mathcal{F}_{F_{[ud]}^{0+} E_{\{uu\}}^{1+}}^{21} &= -\frac{1}{3} c_N^d \frac{F_{[ud]}^{0+} E_{\{uu\}}^{1+}}{m_{\{uu\}}^2} \frac{M_N}{M_u} \int_0^1 (1-\alpha) (\alpha M_N + M_u) \left((1-\alpha)^2 M_N^2 + 2m_{\{uu\}}^2 \right) \overline{C}'(\sigma_u^{[ud]}(\alpha)) d\alpha
 \end{aligned} \tag{5.73}$$

donde se uso $l_{[ud]} \cdot l_{[ud]} = -m_{[ud]}^2$, $k_{\{uu\}} \cdot k_{\{uu\}} = -m_{\{uu\}}^2$ y $k_{\{uu\}} \cdot l_{[ud]} = (1-\alpha)P^2$.

El siguiente a calcular es $\mathcal{F}^{23} = \mathbf{K}_{a_1 a_1}$:

$$\mathcal{F}^{23} = \frac{-4}{-6} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} i\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda_+(P) \mathcal{K}_{\mu\nu}^{23} i\gamma_5 \gamma_\nu \Lambda_+(P) = \mathbf{K}_{a_1 a_1} \tag{5.74}$$

después de tomar la traza se tiene:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{23} &= \mathcal{F}_{E_{[ud]}^{1+} E_{\{uu\}}^{1+}}^{23} = \mathbf{K}_{a_1 a_1} \\
 &= -\frac{1}{3} c_N^d \frac{E_{[ud]}^{1+} E_{\{uu\}}^{1+}}{m_{\{uu\}}^2} \int_0^1 \left(2m_{\{uu\}}^2 (M_u - \alpha M_N) + (1-\alpha)^2 M_N^2 (M_u + 5\alpha M_N) \right) \overline{C}'(\sigma_u^{\{ud\}}(\alpha)) d\alpha
 \end{aligned} \tag{5.75}$$

donde por simetría de isospín $\{ud\} = \{uu\}$, se uso $l_{\{ud\}} \cdot l_{\{ud\}} = -m_{\{ud\}}^2$, $k_{\{uu\}} \cdot k_{\{uu\}} = -m_{\{uu\}}^2$ y $k_{\{uu\}} \cdot l_{\{ud\}} = -m_{\{uu\}}^2$.

El siguiente a calcular es $\mathcal{F}^{25} = \mathbf{K}_{a_1 a_2}$:

$$\mathcal{F}^{25} = \frac{-4}{-6} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} i\gamma_5 \gamma_\mu \Lambda_+(P) \mathcal{K}_{\mu\nu}^{25} \gamma_5 \hat{P}_\nu \Lambda_+(P) = \mathbf{K}_{a_1 a_2} \tag{5.76}$$

después de tomar la traza se tiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{25} &= \mathcal{F}_{E_{\{ud\}}^{1+} E_{\{uu\}}^{1+}}^{25} = \mathbf{K}_{a_1 a_2} \\ &= -\frac{2}{3} c_N^d \frac{(E_{\{uu\}}^{1+})^2}{m_{\{uu\}}^2} \int_0^1 \left(-m_{\{uu\}}^2 + (1 - \alpha)^2 M_N \right) (\alpha M_N - M_u) \overline{C}'(\sigma_u^{\{ud\}}(\alpha)) d\alpha\end{aligned}\quad (5.77)$$

donde por simetría de isospín $\{ud\} = \{uu\}$, se uso $l_{\{ud\}} \cdot l_{\{ud\}} = -m_{\{ud\}}^2$, $k_{\{uu\}} \cdot k_{\{uu\}} = -m_{\{uu\}}^2$ y $k_{\{uu\}} \cdot l_{\{ud\}} = -m_{\{uu\}}^2 = -m_{\{ud\}}^2$.

El siguiente a calcular es $\mathcal{F}^{41} = \mathbf{K}_{a_2 s}$:

$$\mathcal{F}^{41} = \frac{-4}{-2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \gamma_5 \hat{P}_\mu \Lambda_+(P) \mathcal{K}_\mu^{41} \mathbb{1}_D \Lambda_+(P) = \mathbf{K}_{a_2 s} \quad (5.78)$$

después de tomar la traza se tiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{41} &= \mathcal{F}_{E_{\{ud\}}^{0+} E_{\{uu\}}^{1+}}^{41} + \mathcal{F}_{F_{\{ud\}}^{0+} E_{\{uu\}}^{1+}}^{41} = \mathbf{K}_{a_2 s} \\ \mathcal{F}_{E_{\{ud\}}^{0+} E_{\{uu\}}^{1+}}^{41} &= \frac{1}{3} c_N^d \frac{E_{\{ud\}}^{0+} E_{\{uu\}}^{1+}}{m_{\{uu\}}^2} \int_0^1 \left(m_{\{uu\}}^2 - 4(1 - \alpha)^2 M_N^2 \right) (\alpha M_N + M_u) \overline{C}'(\sigma_u^{\{ud\}}(\alpha)) d\alpha \\ \mathcal{F}_{F_{\{ud\}}^{0+} E_{\{uu\}}^{1+}}^{41} &= \frac{1}{3} c_N^d \frac{F_{\{ud\}}^{0+} E_{\{uu\}}^{1+}}{m_{\{uu\}}^2} \frac{M_N}{M_u} \int_0^1 (1 - \alpha) \left(5m_{\{uu\}}^2 - 2(1 - \alpha)^2 M_N^2 \right) (\alpha M_N + M_u) \overline{C}'(\sigma_u^{\{ud\}}(\alpha)) d\alpha\end{aligned}\quad (5.79)$$

El siguiente a calcular es $\mathcal{F}^{41} = \mathbf{K}_{a_2 s}$:

$$\mathcal{F}^{43} = \frac{-4}{-2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \Lambda_+(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu \mathcal{K}_{\mu\nu}^{43} i\gamma_5 \gamma_\nu \Lambda_+(P) = \mathbf{K}_{a_2 a_1} \quad (5.80)$$

después de tomar la traza se tiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{41} &= \mathcal{F}_{E_{\{uu\}}^{1+} E_{\{ud\}}^{1+}}^{41} = \mathbf{K}_{a_2 a_1} \\ &= \frac{1}{3} c_N^d \frac{(E_{\{uu\}}^{1+})^2}{m_{\{uu\}}^2} \int_0^1 \left(m_{\{uu\}}^2 (11\alpha M_N + M_u) - 2(1 - \alpha)^2 M_N^2 (7\alpha M_N + 2M_u) \right) \overline{C}'(\sigma_u^{\{ud\}}(\alpha)) d\alpha\end{aligned}\quad (5.81)$$

Por último se calcula $\mathcal{F}^{55} = \mathbf{K}_{a_2 a_2}$:

$$\mathcal{F}^{55} = \frac{-4}{-2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \Lambda_+(P) \gamma_5 \hat{P}_\mu \mathcal{K}_{\mu\nu}^{43} \gamma_5 \hat{P}_\nu \Lambda_+(P) = \mathbf{K}_{a_2 a_2} \quad (5.82)$$

después de tomar la traza se tiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{55} &= \mathcal{F}_{E_{\{ud\}}^{1+} E_{\{ud\}}^{1+}}^{55} = \mathbf{K}_{a_2 a_2} \\ &= -\frac{5}{3} c_N^u \frac{(E_{\{uu\}}^{1+})^2}{m_{\{uu\}}^2} \int_0^1 \left(m_{\{uu\}}^2 - (1 - \alpha)^2 M_N^2 (\alpha M_N - M_u) \right) \overline{C}'(\sigma_u^{\{ud\}}(\alpha)) d\alpha\end{aligned}\quad (5.83)$$

de esta manera se resuelve la eigenecuación matricial (5.51) para M_N la masa del neutrón cuando el eigenvalor es 1. En la implementación de este esquema se tiene la amplitud de Faddeev distintos bariones, en especial con la amplitud del Nucleón se pueden obtener la del barión $\Sigma(\bar{u}us)$ y el barión

$\Xi(u\bar{s}s)$ solo cambiando algunos quarks:

$$N(u\bar{u}d/udd) \quad d \rightarrow s \quad \Sigma(uus) \quad u \rightarrow s \quad \Xi(u\bar{s}s) \quad (5.84)$$

podemos diferenciar las amplitudes de Faddeev tomando en cuenta la cantidad de quarks pesados o ligeros que los componen, esto es importante tener en cuenta cuando se escriben los elementos de la matriz $\mathcal{M}$ en (5.41), de esta manera los distintos bariones espín 1/2 de la forma:

$$u = \begin{bmatrix} s \\ a_1^+ \\ a_1^0 \\ a_2^+ \\ a_2^0 \end{bmatrix}$$

se representan por las siguientes matrices columna:

Tipo 1: $u(q_1 q_2 q_1)$ dos quarks ligeros y uno mas pesado en ese orden, como lo son:

$$u_{(q_1 q_2 q_1)} = \begin{bmatrix} [q_1 q_2] q_1 \\ \{q_1 q_1\} q_2 \\ \{q_1 q_2\} q_1 \\ \{q_1 q_1\} q_2 \\ \{q_1 q_2\} q_1 \end{bmatrix}, \quad u_{P(udu)} = \begin{bmatrix} [ud] u \\ \{uu\} d \\ \{ud\} u \\ \{uu\} d \\ \{ud\} u \end{bmatrix}, \quad u_{\Sigma^+(usu)} = \begin{bmatrix} [us] u \\ \{uu\} s \\ \{us\} u \\ \{uu\} s \\ \{us\} u \end{bmatrix}, \quad (5.85)$$

Tipo 2: $u(q_1 q_2 q_2)$ dos quarks pesados y uno ligero en ese orden, como lo son:

$$u_{(q_1 q_2 q_2)} = \begin{bmatrix} [q_1 q_2] q_2 \\ \{q_2 q_2\} q_1 \\ \{q_1 q_2\} q_2 \\ \{q_2 q_2\} q_1 \\ \{q_1 q_2\} q_2 \end{bmatrix}, \quad u_{\Xi_{cc}^{++}(ucc)} = \begin{bmatrix} [uc] c \\ \{cc\} u \\ \{uc\} c \\ \{cc\} u \\ \{uc\} c \end{bmatrix}, \quad u_{\Omega_{cc}^+(scc)} = \begin{bmatrix} [sc] c \\ \{cc\} s \\ \{sc\} c \\ \{cc\} s \\ \{sc\} c \end{bmatrix}, \quad (5.86)$$

$$u_{\Xi_{bb}^0(ubb)} = \begin{bmatrix} [ub] b \\ \{bb\} u \\ \{ub\} b \\ \{bb\} u \\ \{ub\} b \end{bmatrix}, \quad u_{\Omega_{bb}^-(sbb)} = \begin{bmatrix} [sb] b \\ \{bb\} s \\ \{sb\} b \\ \{bb\} s \\ \{sb\} b \end{bmatrix}, \quad u_{\Omega(cbb)} = \begin{bmatrix} [cb] b \\ \{bb\} c \\ \{cb\} b \\ \{bb\} c \\ \{cb\} b \end{bmatrix},$$

Tipo 3: $u(q_1 q_1 q_2)$ dos quarks ligeros y uno pesado en ese orden, como lo son:

$$u_{(q_1 q_1 q_2)} = \begin{bmatrix} [q_1 q_2] q_1 \\ \{q_1 q_1\} q_2 \\ \{q_1 q_2\} q_1 \\ \{q_1 q_1\} q_2 \\ \{q_1 q_2\} q_1 \end{bmatrix}, \quad u_{\Omega_c^0(ssc)} = \begin{bmatrix} [sc] s \\ \{ss\} c \\ \{sc\} s \\ \{ss\} c \\ \{sc\} s \end{bmatrix}, \quad u_{\Sigma_c^{++}(uuc)} = \begin{bmatrix} [uc] u \\ \{uu\} c \\ \{uc\} u \\ \{uu\} c \\ \{uc\} u \end{bmatrix}, \quad (5.87)$$

$$u_{\Omega_b^-(ssb)} = \begin{bmatrix} [sb] s \\ \{ss\} b \\ \{sb\} s \\ \{ss\} b \\ \{sb\} s \end{bmatrix}, \quad u_{\Sigma_b^+(uub)} = \begin{bmatrix} [ub] u \\ \{uu\} b \\ \{ub\} u \\ \{uu\} b \\ \{ub\} u \end{bmatrix}, \quad u_{\Omega(ccb)} = \begin{bmatrix} [cb] c \\ \{cc\} b \\ \{cb\} c \\ \{cc\} b \\ \{cb\} c \end{bmatrix},$$

Tipo 4: $u(q_1 q_2 q_3)$ los tres quarks distintos, como el barión $\Lambda(uds)$.

Tipo 5: $u(q_1 q_1 q_1)$ los tres quarks iguales, como el barión $\Omega(ccc)$.

Esta forma depende de los tipos de diquarks según (5.21), para $\Xi(uss)$ se tiene:

$$u_{\Xi(uss)} = \begin{bmatrix} [us] s \\ \{us\} s \\ \{ss\} u \\ \{us\} s \\ \{ss\} u \end{bmatrix}$$

5.3.1. Resultados

En este trabajo se presentan los resultados para los bariones del octeto mostrados en la figura {1.12}, usando la simetría de isospín y la ecuación (5.84) su cálculo es más simple. Además, el tiempo designado para elaborar este trabajo de tesis concluyo. Los resultados de las masas para los bariones espín 1/2 se muestran junto a los experimentales [30] en la tabla {5.2}.

Barión	Exp. (P=+)	CI, (P=+)
$N(udu/udd)$	0.94	1.14
$\Sigma(usu)$	1.19	1.36
$\Xi(uss)$	1.31	1.43

Tabla 5.2: Masa calculada para los bariones espín 1/2 en (GeV) con los parámetros en {2.1}, {2.2}.

Se presentan las amplitudes de Faddeev correspondientes en la tabla {5.3} la cual muestra la contribución de cada diquark dentro del barión y el diquark dominante.

Barión	s	a_1^+	a_1^0	a_2^+	a_2^0	dominante
$N(udu/udd)$	0.88	-0.38	0.27	-0.06	0.04	$[ud]_{0^+}$ con 78 %
$\Sigma(usu)$	0.85	-0.45	0.26	0.12	0.02	$[us]_{0^+}$ con 72 %
$\Xi(uss)$	0.91	0.14	0.08	0.39	0.00	$[us]_{0^+}$ con 83 %

Tabla 5.3: Amplitudes de Faddeev para los bariones espín 1/2, se cumple: $1 = s^2 + a_1^{+2} + a_1^{02} + a_2^{+2} + a_2^{02}$.

5.4. Bariones espín 3/2

Los bariones con espín 3/2 son importantes porque pueden involucrar estados con tres quarks c y tres quarks b . Se describe el cálculo del espectro de bariones pesados, basados en el tratamiento de una interacción de contacto vector x vector. Para calcular las masas se observa que no es posible combinar un diquark de espín cero con un quark de espín 1/2 para obtener bariones con espín 3/2. Por tanto, dicho barión se compone únicamente de correlaciones vectoriales. La amplitud de Faddeev para el barión de energía positiva es:

$$\Psi_\mu = \psi_{\mu\nu}(P) u_\nu(P), \quad (5.88)$$

donde, como antes, P es el momento total del barión y $u_\nu(P)$ es un espinor de Rarita-Schwinger (RS):

$$\psi_{\mu\nu}(P) u_\nu(P) = \Gamma_{q_1 q_2, \mu}^{1+} \Delta_{\mu\nu, q_1 q_2}^{1+}(l_{q_1 q_2}) \mathcal{D}_{\nu\rho}(P) u_\rho(P), \quad (5.89)$$

con:

$$\mathcal{D}_{\nu\rho}(l, P) = \mathcal{S}(l, P) \delta_{\nu\rho} + \gamma_5 \mathcal{A}_\nu(l, P) l_\rho^\perp \quad (5.90)$$

Comprender la estructura de estos estados es más simple que la del nucleón. Se supone que la pareja de paridad de un barión dado se obtiene reemplazando la (s) correlación (es) de diquark involucradas por sus (sus) pareja (as) de paridad.

5.4.1. Bariones espín 3/2 de paridad positiva

Se considera al barión con dos posibilidades de estructuras: Tres quarks iguales (qqq) y ($q_1 q_2 q_3$).

Bariones tipo (qqq)

Existe una única combinación posible de diquarks para un barión compuesto por los tres quarks idénticos (qqq). Para este caso, la amplitud de Faddeev es:

$$\mathcal{D}_{\nu\rho}(l, P) u_\rho^B(P) = f^B(P) \mathbb{1}_D u_\nu^B(P). \quad (5.91)$$

Esto debido a que se observa que con un Kernel independiente del momento, la amplitud de Faddeev no puede depender del momento relativo y, para la resonancia Δ , Ω la ecuación (5.90) se convierte es (5.91). Por lo tanto se puede construir el Kernel asociado a un barión (qqq), tomando:

$$\Psi_\mu(P) = 4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathcal{M}_{\mu\nu}^B(l, P) \Psi_\nu \quad (5.92)$$

tomando:

$$\Psi_\mu(P) = \mathcal{D}_{\mu\nu}(P) u_\nu^B(P) = f^B(P) \mathbb{1}_D u_\mu^B(P), \quad (5.93)$$

se usa la aproximación (5.16) nuevamente, la ecuación (5.92) con (5.93) se convierte en:

$$f^B(P) u_\mu^B(P) = 4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathcal{M}_{\mu\nu}^B(l, P) f^B(P) u_\nu^B(P) \quad (5.94)$$

u cumple las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} (i\gamma \cdot P + M_B) u_\mu^B(P, r) &= 0 = \bar{u}_\mu^B(P, r) (i\gamma \cdot P + M_B), \\ \gamma_\mu u_\mu^B(P, r) &= 0, \\ P_\mu u_\mu^B(P, r) &= 0, \end{aligned} \quad (5.95)$$

además el espinor satisface:

$$\frac{1}{2M_B} \sum_{r=-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} f^B(P) u_\mu^B(P, r) \bar{u}_\beta^B(P, r) = \Lambda_+(P) \mathcal{R}_{\mu\beta}(P) \quad (5.96)$$

donde $\Lambda_+(P)$ es el proyector de energía positiva definido en (5.26) y $\mathcal{R}_{\mu\beta}(P)$ es el espinor de Rarita-Schwinger:

$$\mathcal{R}_{\mu\beta}(P) = \delta_{\mu\beta} \mathbb{1}_D - \frac{1}{3} \gamma_\mu \gamma_\beta + \frac{2}{3} \hat{P}_\mu \hat{P}_\beta \mathbb{1}_D - \frac{i}{3} [\hat{P}_\mu \gamma_\beta - \hat{P}_\beta \gamma_\mu]. \quad (5.97)$$

multiplicando (5.94) por $\bar{u}_\beta^B(P, r)$, sumar sobre todos los espines $r = -3/2, -1/2, 1/2, 3/2$ y usando las propiedades (5.95, 5.96 y 5.97) se obtiene:

$$\Lambda_+(P) \mathcal{R}_{\mu\beta}(P) = 4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathcal{M}_{\mu\nu}^B(l, P) \Lambda_+(P) \mathcal{R}_{\nu\beta}(P), \quad (5.98)$$

ahora se contrae con $\delta_{\mu\beta}$ y tomando la traza se obtiene:

$$4 = 4 \text{Tr} \left\{ \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathcal{M}_{\mu\nu}^B(l, P) \Lambda_+(P) \mathcal{R}_{\nu\mu}(P) \right\}, \quad (5.99)$$

donde se uso que $\mathcal{R}_{\nu\beta}(P) \delta_{\mu\beta} = \mathcal{R}_{\nu\mu}(P)$ y $\text{Tr} \{ \Lambda_+(P) \mathcal{R}_{\mu\beta}(P) \delta_{\mu\beta} \} = 4$. Como se mencionó anteriormente este tipo de bariones se componen de diquarks axial-vector, por lo tanto son de la forma $(\{qq\}q)$, $\mathcal{M}_{\mu\nu}^B(l, P)$ mantiene la forma de (5.46) y para este tipo de bariones es:

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^B(l, P) = t^{qT} t^{\{qq\}} t^{\{qq\}T} t^q \left[\Gamma_{\{qq\}, \rho}^{1+}(l_{qq}) S_q^T \bar{\Gamma}_{\{qq\}, \mu}^{1+}(-k_{qq}) S_q(l_q) \Delta_{\{qq\}, \rho\nu}^{1+}(l_{qq}) \right]. \quad (5.100)$$

Así, sin importar el quark que sea q , el término de sabor siempre es: $t^{qT} t^{\{qq\}} t^{\{qq\}T} t^q = 2$. Después de resolver la traza de (5.99) se usan los momentos:

$$\left. \begin{aligned} l_{qq} \cdot P &= (1 - \alpha) P^2 & l_{qq} \cdot l_{qq} &= -m_{qq}^2 & l_{qq} \cdot l &= \alpha(1 - \alpha) P^2 \\ k_{qq} \cdot P &= (1 - \alpha) P^2 & k_{qq} \cdot k_{qq} &= -m_{qq}^2 & k_{qq} \cdot l &= \alpha(1 - \alpha) P^2 \\ l \cdot P &= \alpha P^2 & l_{qq} \cdot k_{qq} &= -m_{qq}^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.101)$$

dado que los diquarks son del mismo tipo. De esta manera la ecuación (5.99) es:

$$1 = \frac{g_B^2}{M_q} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{8E_{\{qq\}1+}^2 (\alpha M_B + M_q) (m_{\{qq\}1+}^2 + (1 - \alpha)^2 M_B^2)}{m_{\{qq\}1+}^2 (l_{qq}^2 + m_{\{qq\}1+}^2) (l^2 + M_q)}, \quad (5.102)$$

tomando el cuanta la parametrización de Feynman en (5.55) siguiendo con el procedimiento en (5.56), (5.57) y usando las propiedades en (2.46) y (2.47) se tiene:

$$1 = \frac{g_B^2}{M_q} \frac{E_{\{qq\}1+}^2}{m_{\{qq\}1+}^2} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 (\alpha M_B + M_q) (m_{\{qq\}1+}^2 + (1 - \alpha)^2 M_B^2) \bar{C}'(\sigma_q^{\{qq\}1+}(\alpha)) d\alpha \quad (5.103)$$

A partir de la última expresión, se calcula la masa del barión constituida por tres quarks.

Los resultados de los bariones con espín 3/2 se presentan al final de este capítulo de manera unida con los demás tipos de bariones de paridad positiva y negativa.

Bariones tipo $(q_1 q_2 q_2)$

En este tipo de combinaciones de quarks es importante notar si q_1 es más pesado que q_2 o viceversa, por ejemplo, $\Sigma_c^{+++}(uuc)$ y $\Xi_c^{+++}(ucc)$.

Para un barión con la estructura $(q_1 q_2 q_2)$, hay dos posibles diquarks, $\{q_2 q_2\}$ y $\{q_1 q_2\}$. La amplitud de Faddeev para este tipo de bariones es:

$$\Psi_\nu(P) = \mathcal{D}_{\nu\mu}^B(P) u_\mu^B(P, r) = \sum_{i=\{q_1 q_2\}, \{q_2 q_2\}} d^i(P) \delta_{\nu\lambda} u_\lambda^B(P, r), \quad (5.104)$$

entonces la ecuación de Faddeev:

$$\Psi_\mu(P) = -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathcal{M}_{\mu\nu}^B(l, P) \Psi_\nu(P) \quad (5.105)$$

$$\begin{bmatrix} d^{(q_1 q_2)} \\ d^{(q_2 q_2)} \end{bmatrix} u_\mu^B(P, r) = -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{\mu\nu}^{(q_1 q_2), \{q_1 q_2\}}(l, P) & \mathcal{M}_{\mu\nu}^{(q_1 q_2), \{q_2 q_2\}}(l, P) \\ \mathcal{M}_{\mu\nu}^{(q_2 q_2), \{q_1 q_2\}}(l, P) & \mathcal{M}_{\mu\nu}^{(q_2 q_2), \{q_2 q_2\}}(l, P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^{(q_1 q_2)} \\ d^{(q_2 q_2)} \end{bmatrix} u_\nu^B(P, r) \quad (5.106)$$

multiplicando por (5.106) por $\bar{u}_\beta^B(P, r)$ y sumando sobre todos los espines se tiene:

$$\begin{bmatrix} d^{(q_1 q_2)} \\ d^{(q_2 q_2)} \end{bmatrix} \Lambda_+(P) \mathcal{R}_{\mu\beta}(P) = -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathcal{M}_{\mu\nu}^B(l, P) \Lambda_+(P) \mathcal{R}_{\nu\beta}(P) \begin{bmatrix} d^{(q_1 q_2)} \\ d^{(q_2 q_2)} \end{bmatrix} \quad (5.107)$$

se contrae con $\delta_{\mu\beta}$ se toma la traza y se obtiene:

$$\begin{bmatrix} d^{(q_1 q_2)} \\ d^{(q_2 q_2)} \end{bmatrix} = -\text{Tr} \left\{ \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathcal{M}_{\mu\nu}^B(l, P) \Lambda_+(P) \mathcal{R}_{\nu\beta}(P) \right\} \begin{bmatrix} d^{(q_1 q_2)} \\ d^{(q_2 q_2)} \end{bmatrix} \quad (5.108)$$

$\mathcal{M}$ mantiene la forma como (5.46).

Se tienen combinaciones de quarks pesados y ligeros como, Ω_{cbb}^{0*} , donde en $(q_1 q_2 q_2)$ el quark q_1 es más ligero que el quark q_2 , para este tipo de bariones se usa $\begin{bmatrix} d^{(q_1 q_2)} \\ d^{(q_2 q_2)} \end{bmatrix}$ al cual se llamara **tipo A**. Y otro tipo como $\Sigma_c^{++*}(uuc)$ donde en $(q_2 q_2 q_1)$ el quark q_2 es más ligero que el quark q_1 , para este tipo de bariones se usa $\begin{bmatrix} d^{(q_2 q_2)} \\ d^{(q_2 q_1)} \end{bmatrix}$, al cual se llamara **tipo B**.

Primero se toman bariones del **tipo A**, $(q_1 q_2 q_2)$, con $\begin{bmatrix} d^{(q_1 q_2)} \\ d^{(q_2 q_2)} \end{bmatrix}$, para este caso los elementos de $\mathcal{M}$ son:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{11} &= \mathcal{M}_{\mu\nu}^{(q_1 q_2), \{q_1 q_2\}} = t^{q_2 T} t^{(q_1 q_2)} t^{(q_1 q_2) T} t^{q_2} \left\{ \Gamma_{\{q_1 q_2\}, \rho}^{1+}(l_{q_1 q_2}) \frac{g_B^2}{M_{q_2}} \bar{\Gamma}_{\{q_1 q_2\}, \mu}^{1+}(-k_{q_1 q_2}) S_{q_2}(l_{q_2}) \Delta_{\{q_1 q_2\}, \rho\nu}^{1+}(l_{q_1 q_2}) \right\} \\ &= \left\{ \Gamma_{\{q_1 q_2\}, \rho}^{1+}(l_{q_1 q_2}) \frac{g_B^2}{M_{q_2}} \bar{\Gamma}_{\{q_1 q_2\}, \mu}^{1+}(-k_{q_1 q_2}) S_{q_2}(l_{q_2}) \Delta_{\{q_1 q_2\}, \rho\nu}^{1+}(l_{q_1 q_2}) \right\} \\ \mathcal{M}_{12} &= \mathcal{M}_{\mu\nu}^{(q_1 q_2), \{q_2 q_2\}} = t^{q_2 T} t^{(q_2 q_2)} t^{(q_1 q_2) T} t^{q_1} \left\{ \Gamma_{\{q_2 q_2\}, \rho}^{1+}(l_{q_2 q_2}) \frac{g_B^2}{M_{q_2}} \bar{\Gamma}_{\{q_1 q_2\}, \mu}^{1+}(-k_{q_1 q_2}) S_{q_1}(l_{q_1}) \Delta_{\{q_2 q_2\} 1+, \rho\nu}^{1+}(l_{q_2 q_2}) \right\} \\ &= \sqrt{2} \left\{ \Gamma_{\{q_2 q_2\}, \rho}^{1-}(l_{q_2 q_2}) \frac{g_B^2}{M_{q_2}} \bar{\Gamma}_{\{q_1 q_2\}, \mu}^{1+}(-k_{q_1 q_2}) S_{q_1}(l_{q_1}) \Delta_{\{q_2 q_2\}, \rho\nu}^{1+}(l_{q_2 q_2}) \right\} \quad (5.109) \\ \mathcal{M}_{21} &= \mathcal{M}_{\mu\nu}^{(q_2 q_2), \{q_1 q_2\}} = t^{q_1 T} t^{(q_1 q_2)} t^{(q_2 q_2) T} t^{q_2} \left\{ \Gamma_{\{q_1 q_2\}, \rho}^{1+}(l_{q_1 q_2}) \frac{g_B^2}{M_{q_1}} \bar{\Gamma}_{\{q_2 q_2\}, \mu}^{1+}(-k_{q_2 q_2}) S_{q_2}(l_{q_2}) \Delta_{\{q_1 q_2\}, \rho\nu}^{1+}(l_{q_1 q_2}) \right\} \\ &= \sqrt{2} \left\{ \Gamma_{\{q_1 q_2\}, \rho}^{1+}(l_{q_1 q_2}) \frac{g_B^2}{M_{q_1}} \bar{\Gamma}_{\{q_2 q_2\}, \mu}^{1+}(-k_{q_2 q_2}) S_{q_2}(l_{q_2}) \Delta_{\{q_1 q_2\}, \rho\nu}^{1+}(l_{q_1 q_2}) \right\} \\ \mathcal{M}_{22} &= \mathcal{M}_{\mu\nu}^{(q_2 q_2), \{q_2 q_2\}} = t^{q_1 T} t^{(q_2 q_2)} t^{(q_2 q_2) T} t^{q_1} \left\{ \Gamma_{\{q_2 q_2\}, \rho}^{1+}(l_{q_2 q_2}) \frac{g_B^2}{M_{q_1}} \bar{\Gamma}_{\{q_2 q_2\}, \mu}^{1+}(-k_{q_2 q_2}) S_{q_1}(l_{q_1}) \Delta_{\{q_2 q_2\}, \rho\nu}^{1+}(l_{q_2 q_2}) \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto se tiene la siguiente eigenecuación:

$$\begin{bmatrix} d^{[q_1 q_2]} \\ d^{[q_2 q_2]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}^{11} & \sqrt{2}\mathcal{F}^{12} \\ \sqrt{2}\mathcal{F}^{21} & 0\mathcal{F}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^{[q_1 q_2]} \\ d^{[q_2 q_2]} \end{bmatrix} \quad (5.110)$$

donde $\mathcal{F}^{ij}$ esta definido en (5.43), se usa nuevamente la parametrización de Feynman con (5.56) y (5.65), de esta manera los elementos $\mathcal{F}^{ij}$ de la eigenecuación (5.110) son:

$$\mathcal{F}^{11} = c_B \frac{E_{\{q_1 q_2\}_{1+}}^2}{m_{\{q_1 q_2\}_{1+}}^2} \int_0^1 (\alpha M_B + M_{q_2}) [(\alpha - 1)^2 M_B^2 + m_{\{q_1 q_2\}_{1+}}^2] \overline{C}'(\sigma_{q_2}^{\{q_1 q_2\}_{1+}}(\alpha)) d\alpha \quad (5.111)$$

los momentos utilizados para $\mathcal{F}^{11}$ son:

$$\left. \begin{aligned} l_{q_1 q_2} \cdot P &= (1 - \alpha)P^2 & l_{q_1 q_2} \cdot l_{q_1 q_2} &= -m_{q_1 q_2}^2 & l_{q_1 q_2} \cdot l &= \alpha(1 - \alpha)P^2 \\ k_{q_1 q_2} \cdot P &= (1 - \alpha)P^2 & k_{q_1 q_2} \cdot k_{q_1 q_2} &= -m_{q_1 q_2}^2 & k_{q_1 q_2} \cdot l &= \alpha(1 - \alpha)P^2 \\ l \cdot P &= \alpha P^2 & l_{q_1 q_2} \cdot k_{q_1 q_2} &= -m_{\{q_1 q_2\}}^2 & P^2 &= -M_B^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.112)$$

$$\mathcal{F}^{12} = \frac{c_B}{6} \frac{E_{\{q_1 q_2\}_{1+}} E_{\{q_2 q_2\}_{1+}}}{m_{\{q_1 q_2\}_{1+}}^2 m_{\{q_2 q_2\}_{1+}}^2} \int_0^1 (\alpha M_B + M_{q_1}) [3(\alpha - 1)^2 M_B^2 (m_{q_1 q_2}^2 + m_{\{q_2 q_2\}_{1+}}^2) + (\alpha - 1)^4 M_B^4 + 5m_{\{q_1 q_2\}_{1+}}^2 m_{\{q_2 q_2\}_{1+}}^2] \overline{C}'(\sigma_{q_1}^{\{q_2 q_2\}_{1+}}(\alpha)) d\alpha \quad (5.113)$$

los momentos utilizados para $\mathcal{F}^{12}$ son:

$$\left. \begin{aligned} l_{q_2 q_2} \cdot P &= (1 - \alpha)P^2 & l_{q_2 q_2} \cdot l_{q_2 q_2} &= -m_{q_2 q_2}^2 & l_{q_2 q_2} \cdot l &= \alpha(1 - \alpha)P^2 \\ k_{q_1 q_2} \cdot P &= (1 - \alpha)P^2 & k_{q_1 q_2} \cdot k_{q_1 q_2} &= -m_{q_1 q_2}^2 & k_{q_1 q_2} \cdot l &= \alpha(1 - \alpha)P^2 \\ l \cdot P &= \alpha P^2 & l_{q_2 q_2} \cdot k_{q_1 q_2} &= (1 - \alpha)^2 P^2 & P^2 &= -M_B^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.114)$$

$$\mathcal{F}^{21} = \frac{c_B}{6} \frac{E_{\{q_2 q_2\}_{1+}} E_{\{q_1 q_2\}_{1+}}}{m_{\{q_1 q_2\}_{1+}}^2 m_{\{q_2 q_2\}_{1+}}^2} \int_0^1 (\alpha M_B + M_{q_2}) [3(\alpha - 1)^2 M_B^2 (m_{q_1 q_2}^2 + m_{\{q_2 q_2\}_{1+}}^2) + (\alpha - 1)^4 M_B^4 + 5m_{\{q_1 q_2\}_{1+}}^2 m_{\{q_2 q_2\}_{1+}}^2] \overline{C}'(\sigma_{q_2}^{\{q_1 q_2\}_{1+}}(\alpha)) d\alpha \quad (5.115)$$

los momentos utilizados para $\mathcal{F}^{21}$ son:

$$\left. \begin{aligned} l_{q_1 q_2} \cdot P &= (1 - \alpha)P^2 & l_{q_1 q_2} \cdot l_{q_1 q_2} &= -m_{q_1 q_2}^2 & l_{q_1 q_2} \cdot l &= \alpha(1 - \alpha)P^2 \\ k_{q_2 q_2} \cdot P &= (1 - \alpha)P^2 & k_{q_2 q_2} \cdot k_{q_2 q_2} &= -m_{q_2 q_2}^2 & k_{q_2 q_2} \cdot l &= \alpha(1 - \alpha)P^2 \\ l \cdot P &= \alpha P^2 & l_{q_1 q_2} \cdot k_{q_2 q_2} &= (1 - \alpha)^2 P^2 & P^2 &= -M_B^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.116)$$

$$\mathcal{F}^{22} = c_B \frac{E_{\{q_2 q_2\}_{1+}}^2}{m_{\{q_2 q_2\}_{1+}}^2} \int_0^1 (\alpha M_B + M_{q_1}) [(\alpha - 1)^2 M_B^2 + m_{\{q_2 q_2\}_{1+}}^2] \overline{C}'(\sigma_{q_1}^{\{q_2 q_2\}_{1+}}(\alpha)) d\alpha \quad (5.117)$$

los momentos utilizados para $\mathcal{F}^{22}$ son:

$$\left. \begin{aligned} l_{q_2 q_2} \cdot P &= (1 - \alpha)P^2 & l_{q_2 q_2} \cdot l_{q_2 q_2} &= -m_{q_2 q_2}^2 & l_{q_2 q_2} \cdot l &= \alpha(1 - \alpha)P^2 \\ k_{q_2 q_2} \cdot P &= (1 - \alpha)P^2 & k_{q_2 q_2} \cdot k_{q_2 q_2} &= -m_{q_2 q_2}^2 & k_{q_2 q_2} \cdot l &= \alpha(1 - \alpha)P^2 \\ l \cdot P &= \alpha P^2 & l_{q_2 q_2} \cdot k_{q_2 q_2} &= -m_{\{q_2 q_2\}}^2 & P^2 &= -M_B^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.118)$$

Ahora se toman bariones del **tipo B**, $(q_2 q_2 q_1)$, con $\begin{bmatrix} d^{(q_2 q_2)} \\ d^{(q_2 q_1)} \end{bmatrix}$, para este caso los elementos de $\mathcal{M}$ son:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{11} &= \mathcal{M}_{\mu\nu}^{(q_2 q_2), (q_2 q_2)} = t^{q_1 T} t^{(q_2 q_2)} t^{(q_2 q_2) T} t^{q_1} \left\{ \Gamma_{\{q_2 q_2\}, \rho}^{1+}(l_{q_2 q_2}) \frac{g_B^2}{M_{q_1}} \bar{\Gamma}_{\{q_2 q_2\}, \mu}^{1+}(-k_{q_2 q_2}) S_{q_1}(l_{q_1}) \Delta_{\{q_2 q_2\}, \rho\nu}^{1+}(l_{q_2 q_2}) \right\} \\
 &= 0 \\
 \mathcal{M}_{12} &= \mathcal{M}_{\mu\nu}^{(q_2 q_2), (q_2 q_1)} = t^{q_1 T} t^{(q_2 q_1)} t^{(q_2 q_2) T} t^{q_2} \left\{ \Gamma_{\{q_2 q_1\}, \rho}^{1+}(l_{q_2 q_1}) \frac{g_B^2}{M_{q_1}} \bar{\Gamma}_{\{q_2 q_2\}, \mu}^{1+}(-k_{q_2 q_2}) S_{q_2}(l_{q_2}) \Delta_{\{q_2 q_1\}, \rho\nu}^{1+}(l_{q_2 q_1}) \right\} \\
 &= \sqrt{2} \left\{ \Gamma_{\{q_2 q_1\}, \rho}^{1+}(l_{q_2 q_1}) \frac{g_B^2}{M_{q_1}} \bar{\Gamma}_{\{q_2 q_2\}, \mu}^{1+}(-k_{q_2 q_2}) S_{q_2}(l_{q_2}) \Delta_{\{q_2 q_1\}, \rho\nu}^{1+}(l_{q_2 q_1}) \right\} \\
 \mathcal{M}_{21} &= \mathcal{M}_{\mu\nu}^{(q_2 q_1), (q_2 q_2)} = t^{q_2 T} t^{(q_2 q_2)} t^{(q_2 q_1) T} t^{q_1} \left\{ \Gamma_{\{q_2 q_2\}, \rho}^{1+}(l_{q_2 q_2}) \frac{g_B^2}{M_{q_2}} \bar{\Gamma}_{\{q_2 q_1\}, \mu}^{1+}(-k_{q_2 q_1}) S_{q_1}(l_{q_1}) \Delta_{\{q_2 q_2\}, \rho\nu}^{1+}(l_{q_2 q_2}) \right\} \\
 &= \sqrt{2} \left\{ \Gamma_{\{q_2 q_2\}, \rho}^{1+}(l_{q_2 q_2}) \frac{g_B^2}{M_{q_2}} \bar{\Gamma}_{\{q_2 q_1\}, \mu}^{1+}(-k_{q_2 q_1}) S_{q_1}(l_{q_1}) \Delta_{\{q_2 q_2\}, \rho\nu}^{1+}(l_{q_2 q_2}) \right\} \\
 \mathcal{M}_{22} &= \mathcal{M}_{\mu\nu}^{(q_2 q_1), (q_2 q_1)} = t^{q_2 T} t^{(q_2 q_1)} t^{(q_2 q_1) T} t^{q_2} \left\{ \Gamma_{\{q_2 q_1\}, \rho}^{1+}(l_{q_2 q_1}) \frac{g_B^2}{M_{q_2}} \bar{\Gamma}_{\{q_2 q_1\}, \mu}^{1+}(-k_{q_2 q_1}) S_{q_2}(l_{q_2}) \Delta_{\{q_2 q_1\}, \rho\nu}^{1+}(l_{q_2 q_1}) \right\} \\
 &= \left\{ \Gamma_{\{q_2 q_1\}, \rho}^{1+}(l_{q_2 q_1}) \frac{g_B^2}{M_{q_2}} \bar{\Gamma}_{\{q_2 q_1\}, \mu}^{1+}(-k_{q_2 q_1}) S_{q_2}(l_{q_2}) \Delta_{\{q_2 q_1\}, \rho\nu}^{1+}(l_{q_2 q_1}) \right\}
 \end{aligned} \tag{5.119}$$

por lo tanto se tiene la eigenecuación:

$$\begin{bmatrix} d^{(q_2 q_2)} \\ d^{(q_2 q_1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\mathcal{F}^{11} & \sqrt{2}\mathcal{F}^{12} \\ \sqrt{2}\mathcal{F}^{21} & \mathcal{F}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^{(q_2 q_2)} \\ d^{(q_2 q_1)} \end{bmatrix} \tag{5.120}$$

De la misma manera que antes se obtienen las amplitudes $\mathcal{F}^{ij}$ para este tipo de bariones.

$$\mathcal{F}^{11} = c_B^{q_1} \frac{E_{\{q_2 q_2\}1+}^2}{m_{\{q_2 q_2\}1+}^2} \int_0^1 (\alpha M_B + M_{q_1}) [(\alpha - 1)^2 M_B^2 + m_{\{q_2 q_2\}1+}^2] \bar{\mathcal{C}}'(\sigma_{q_1}^{\{q_2 q_2\}1+}(\alpha)) d\alpha \tag{5.121}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{12} &= \frac{c_B^{q_1}}{6} \frac{E_{\{q_2 q_2\}1+} E_{\{q_2 q_1\}1+}}{m_{\{q_2 q_2\}1+}^2 m_{\{q_2 q_1\}1+}^2} \int_0^1 (\alpha M_B + M_{q_2}) [3(\alpha - 1)^2 M_B^2 (m_{\{q_2 q_2\}1+}^2 + m_{\{q_2 q_1\}1+}^2) \\
 &\quad + (\alpha - 1)^4 M_B^4 + 5m_{\{q_2 q_2\}1+}^2 m_{\{q_2 q_1\}1+}^2] \bar{\mathcal{C}}'(\sigma_{q_2}^{\{q_2 q_1\}1+}(\alpha)) d\alpha
 \end{aligned} \tag{5.122}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{21} &= \frac{c_B^{q_2}}{6} \frac{E_{\{q_2 q_2\}1+} E_{\{q_2 q_1\}1+}}{m_{\{q_2 q_2\}1+}^2 m_{\{q_2 q_1\}1+}^2} \int_0^1 (\alpha M_B + M_{q_1}) [3(\alpha - 1)^2 M_B^2 (m_{\{q_2 q_2\}1+}^2 + m_{\{q_2 q_1\}1+}^2) \\
 &\quad + (\alpha - 1)^4 M_B^4 + 5m_{\{q_2 q_2\}1+}^2 m_{\{q_2 q_1\}1+}^2] \bar{\mathcal{C}}'(\sigma_{q_1}^{\{q_2 q_2\}1+}(\alpha)) d\alpha
 \end{aligned} \tag{5.123}$$

$$\mathcal{F}^{22} = c_B^{q_2} \frac{E_{\{q_2 q_1\}1+}^2}{m_{\{q_2 q_1\}1+}^2} \int_0^1 (\alpha M_B + M_{q_2}) [(\alpha - 1)^2 M_B^2 + m_{\{q_2 q_1\}1+}^2] \bar{\mathcal{C}}'(\sigma_{q_2}^{\{q_2 q_1\}1+}(\alpha)) d\alpha \tag{5.124}$$

Con las expresiones para estos subtipos de bariones de paridad positiva se calcula su masa la cual se

muestra al final de este capítulo. A continuación se calculan los bariones de paridad negativa con las estructuras ya calculadas.

5.4.2. Bariones espín 3/2 de paridad negativa

Se consideran las mismas estructuras de bariones de paridad positiva para trabajar ahora con paridad negativa.

Bariones (qqq) paridad negativa

Para este tipo de bariones ahora con paridad negativa la amplitud de Faddeev en (5.91) se agrega una γ_5 de tal manera que la amplitud de Faddeev para bariones (qqq) paridad negativa es:

$$\mathcal{D}_{\nu\rho}(l, P) u_\rho^B(P) = f^B(P) \gamma_5 u_\nu^B(P) \quad (5.125)$$

de esta manera la ecuación de Faddeev como en (5.94) con (5.125) es:

$$f^B(P) \gamma_5 u_\mu^B(P) = 4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathcal{M}_{\mu\nu}^B(l, P) f^B(P) \gamma_5 u_\nu^B(P), \quad (5.126)$$

multiplicando por $\bar{u}_\beta^B(P) \gamma_5$ del lado derecho y sumando sobre todos los espines como antes, se obtiene:

$$\gamma_5 \lambda_+(P) \mathcal{R}_{\mu\beta}(P) \gamma_5 = 4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathcal{M}_{\mu\nu}^B(l, P) \gamma_5 \lambda_+(P) \mathcal{R}_{\nu\beta}(P) \gamma_5, \quad (5.127)$$

finalmente se contrae con $\delta_{\mu\beta}$ y se toma la traza:

$$1 = \text{Tr} \left\{ \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathcal{M}_{\mu\nu}^B(l, P) \gamma_5 \lambda_+(P) \mathcal{R}_{\nu\beta}(P) \gamma_5 \delta_{\mu\beta} \right\}, \quad (5.128)$$

$\mathcal{M}_{\mu\nu}^B(l, P)$ mantiene la forma de (5.100) y para este tipo de bariones es:

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^B(l, P) = t^{qT} t^{\{qq\}} t^{\{qq\}T} t^q \left[\Gamma_{\{qq\}, \rho}^{1-}(l, q) S_q^T \bar{\Gamma}_{\{qq\}, \mu}^{1-}(-k_{qq}) S_q(l_q) \Delta_{\{qq\}, \rho\nu}^{1-}(l, q) \right]. \quad (5.129)$$

donde la amplitud $\Gamma^{1-}(P) = \gamma_5 \gamma_\mu^T(P) E^{1-}$ y $\bar{\Gamma}^{1-}(P) = \Gamma^{1-}(P)$. El término de sabor, $t^f = t^{qT} t^{\{qq\}} t^{\{qq\}T} t^q = 2$, utilizando los momentos en (5.101), después de calcular la traza se obtiene:

$$1 = \frac{g_B^2}{M_q} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{-8E_{\{qq\}1-} (M_q - \alpha M_B) ((\alpha - 1)^2 M_B^2 + m_{\{qq\}1-}^2)}{m_{\{qq\}1-}^2 (l_q^2 + m_{\{qq\}1-}^2) (l^2 + M_q^2)} \quad (5.130)$$

después de regularizar se tiene:

$$1 = \frac{g_B^2}{M_q} \frac{1}{2\pi^2} \frac{E_{\{qq\}1-}}{m_{\{qq\}1-}^2} \int_0^1 (\alpha M_B - M_q) ((\alpha - 1)^2 M_B^2 + m_{\{qq\}1-}^2) \bar{C}'(\sigma_q^{\{qq\}1-}(\alpha)) d\alpha. \quad (5.131)$$

Note que el cambio entre las ecuaciones (5.101) y (5.131), sin contar la paridad de los diquarks, es en el signo del término $(\alpha M_B^2 \pm M_{kq})$, + para paridad positiva y - para paridad negativa.

Bariones tipo $(q_1 q_2 q_2)$ paridad negativa

Para bariones con la estructura $(q_1 q_2 q_2)$, hay dos posibles diquarks, $\{q_2 q_2\}_{1-}$ y $\{q_1 q_2\}_{1-}$, la amplitud de Faddeev para estos bariones es similar a (5.104) solo se agrega una γ_5 :

$$\mathcal{D}_{\nu\mu}^B(P) u_\mu^B(P, r) = \sum_{i=\{q_1 q_2\}_{1-}, \{q_2 q_2\}_{1-}} d^i(P) \delta_{\nu\lambda} \gamma_5 u_\lambda^B(P, r), \quad (5.132)$$

la ecuación de Faddeev correspondiente es:

$$\begin{bmatrix} d^{\{q_1 q_2\}_{1-}} \\ d^{\{q_2 q_2\}_{1-}} \end{bmatrix} \gamma_5 u_\mu^B(P) = -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathcal{M}_{\mu\nu}^B(l, P) \begin{bmatrix} d^{\{q_1 q_2\}_{1-}} \\ d^{\{q_2 q_2\}_{1-}} \end{bmatrix} \gamma_5 u_\mu^B(P) \quad (5.133)$$

multiplicando por $\bar{u}_\beta^B(P) \gamma_5$ del lado derecho y sumando sobre todos los espines como antes, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} d^{\{q_1 q_2\}_{1-}} \\ d^{\{q_2 q_2\}_{1-}} \end{bmatrix} \gamma_5 \Lambda_+(P) \mathcal{R}_{\mu\beta}(P) \gamma_5 = -4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathcal{M}_{\mu\nu}^B(l, P) \begin{bmatrix} d^{\{q_1 q_2\}_{1-}} \\ d^{\{q_2 q_2\}_{1-}} \end{bmatrix} \gamma_5 u_\mu^B(P) \quad (5.134)$$

finalmente se contrae con $\delta_{\mu\beta}$ y se toma la traza:

$$\begin{bmatrix} d^{\{q_1 q_2\}_{1-}} \\ d^{\{q_2 q_2\}_{1-}} \end{bmatrix} = \text{Tr} \left\{ \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathcal{M}_{\mu\nu}^B(l, P) \gamma_5 \lambda_+(P) \mathcal{R}_{\nu\beta}(P) \gamma_5 \delta_{\mu\beta} \right\} \begin{bmatrix} d^{\{q_1 q_2\}_{1-}} \\ d^{\{q_2 q_2\}_{1-}} \end{bmatrix}, \quad (5.135)$$

$\mathcal{M}$ mantiene la forma como (5.46), para los bariones del tipo A se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{11} &= \mathcal{M}_{\mu\nu}^{\{q_1 q_2\}_{1-}, \{q_1 q_2\}_{1-}} = t^{q_2 T} t^{\{q_1 q_2\}} t^{\{q_1 q_2\} T} t^{q_2} \left\{ \Gamma_{\{q_1 q_2\}_{1-}, \rho}^{1-} (l_{q_1 q_2}) \frac{g_B^2}{M_{q_2}} \bar{\Gamma}_{\{q_1 q_2\}_{1-}, \mu}^{1-} (-k_{q_1 q_2}) S_{q_2}(l_{q_2}) \Delta_{\{q_1 q_2\}_{1-}, \rho\nu}^{1-} (l_{q_1 q_2}) \right\} \\ &= \left\{ \Gamma_{\{q_1 q_2\}_{1-}, \rho}^{1-} (l_{q_1 q_2}) \frac{g_B^2}{M_{q_2}} \bar{\Gamma}_{\{q_1 q_2\}_{1-}, \mu}^{1-} (-k_{q_1 q_2}) S_{q_2}(l_{q_2}) \Delta_{\{q_1 q_2\}_{1-}, \rho\nu}^{1-} (l_{q_1 q_2}) \right\} \\ \mathcal{M}_{12} &= \mathcal{M}_{\mu\nu}^{\{q_1 q_2\}_{1-}, \{q_2 q_2\}_{1-}} = t^{q_2 T} t^{\{q_2 q_2\}} t^{\{q_1 q_2\} T} t^{q_1} \left\{ \Gamma_{\{q_2 q_2\}_{1-}, \rho}^{1-} (l_{q_2 q_2}) \frac{g_B^2}{M_{q_2}} \bar{\Gamma}_{\{q_1 q_2\}_{1-}, \mu}^{1-} (-k_{q_1 q_2}) S_{q_1}(l_{q_1}) \Delta_{\{q_2 q_2\}_{1-}, \rho\nu}^{1-} (l_{q_2 q_2}) \right\} \\ &= \sqrt{2} \left\{ \Gamma_{\{q_2 q_2\}_{1-}, \rho}^{1-} (l_{q_2 q_2}) \frac{g_B^2}{M_{q_2}} \bar{\Gamma}_{\{q_1 q_2\}_{1-}, \mu}^{1-} (-k_{q_1 q_2}) S_{q_1}(l_{q_1}) \Delta_{\{q_2 q_2\}_{1-}, \rho\nu}^{1-} (l_{q_2 q_2}) \right\} \\ \mathcal{M}_{21} &= \mathcal{M}_{\mu\nu}^{\{q_2 q_2\}_{1-}, \{q_1 q_2\}_{1-}} = t^{q_1 T} t^{\{q_1 q_2\}} t^{\{q_2 q_2\} T} t^{q_2} \left\{ \Gamma_{\{q_1 q_2\}_{1-}, \rho}^{1-} (l_{q_1 q_2}) \frac{g_B^2}{M_{q_1}} \bar{\Gamma}_{\{q_2 q_2\}_{1-}, \mu}^{1-} (-k_{q_2 q_2}) S_{q_2}(l_{q_2}) \Delta_{\{q_1 q_2\}_{1-}, \rho\nu}^{1-} (l_{q_1 q_2}) \right\} \\ &= \sqrt{2} \left\{ \Gamma_{\{q_1 q_2\}_{1-}, \rho}^{1-} (l_{q_1 q_2}) \frac{g_B^2}{M_{q_1}} \bar{\Gamma}_{\{q_2 q_2\}_{1-}, \mu}^{1-} (-k_{q_2 q_2}) S_{q_2}(l_{q_2}) \Delta_{\{q_1 q_2\}_{1-}, \rho\nu}^{1-} (l_{q_1 q_2}) \right\} \\ \mathcal{M}_{22} &= \mathcal{M}_{\mu\nu}^{\{q_2 q_2\}_{1-}, \{q_2 q_2\}_{1-}} = t^{q_1 T} t^{\{q_2 q_2\}} t^{\{q_2 q_2\} T} t^{q_1} \left\{ \Gamma_{\{q_2 q_2\}_{1-}, \rho}^{1-} (l_{q_2 q_2}) \frac{g_B^2}{M_{q_1}} \bar{\Gamma}_{\{q_2 q_2\}_{1-}, \mu}^{1-} (-k_{q_2 q_2}) S_{q_1}(l_{q_1}) \Delta_{\{q_2 q_2\}_{1-}, \rho\nu}^{1-} (l_{q_2 q_2}) \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.136)$$

por lo tanto se tiene la siguiente eigenecuación:

$$\begin{bmatrix} d^{\{q_1 q_2\}_{1-}} \\ d^{\{q_2 q_2\}_{1-}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}^{11} & \sqrt{2}\mathcal{F}^{12} \\ \sqrt{2}\mathcal{F}^{21} & 0\mathcal{F}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^{\{q_1 q_2\}_{1-}} \\ d^{\{q_2 q_2\}_{1-}} \end{bmatrix} \quad (5.137)$$

donde $\mathcal{F}^{ij}$ esta definido en (5.43), se usa nuevamente la parametrización de Feynman con (5.56) y (5.65), de esta manera los elementos $\mathcal{F}^{ij}$ de la eigenecuación (5.137) son:

$$\mathcal{F}^{11} = c_B^{q_2} \frac{E_{\{q_1 q_2\}_{1-}}^2}{m_{\{q_1 q_2\}_{1-}}^2} \int_0^1 (\alpha M_B - M_{q_2}) [(\alpha - 1)^2 M_B^2 + m_{\{q_1 q_2\}_{1-}}^2] \bar{\mathcal{C}}'(\sigma_{q_2}^{\{q_1 q_2\}_{1-}}(\alpha)) d\alpha \quad (5.138)$$

$$\mathcal{F}^{12} = \frac{c_B^{q_2}}{6} \frac{E_{\{q_1 q_2\}_{1-}} E_{\{q_2 q_2\}_{1-}}}{m_{\{q_1 q_2\}_{1-}}^2 m_{\{q_2 q_2\}_{1-}}^2} \int_0^1 (\alpha M_B - M_{q_1}) [3(\alpha - 1)^2 M_B^2 (m_{\{q_1 q_2\}_{1-}}^2 + m_{\{q_2 q_2\}_{1-}}^2) + (\alpha - 1)^4 M_B^4 + 5m_{\{q_1 q_2\}_{1-}}^2 m_{\{q_2 q_2\}_{1-}}^2] \bar{\mathcal{C}}'(\sigma_{q_1}^{\{q_2 q_2\}_{1-}}(\alpha)) d\alpha \quad (5.139)$$

$$\mathcal{F}^{21} = \frac{c_B^{q_1}}{6} \frac{E_{\{q_2 q_2\}_{1-}} E_{\{q_1 q_2\}_{1-}}}{m_{\{q_1 q_2\}_{1-}}^2 m_{\{q_2 q_2\}_{1-}}^2} \int_0^1 \left(\alpha M_B - M_{q_2} \right) \left[3(\alpha - 1)^2 M_B^2 (m_{\{q_1 q_2\}_{1-}}^2 + m_{\{q_2 q_2\}_{1-}}^2) \right. \\ \left. + (\alpha - 1)^4 M_B^4 + 5m_{\{q_1 q_2\}_{1-}}^2 m_{\{q_2 q_2\}_{1-}}^2 \right] \overline{C}' \left(\sigma_{q_2}^{\{q_1 q_2\}_{1-}}(\alpha) \right) d\alpha \quad (5.140)$$

$$\mathcal{F}^{22} = c_B^{q_1} \frac{E_{\{q_2 q_2\}_{1-}}^2}{m_{\{q_2 q_2\}_{1-}}^2} \int_0^1 \left(\alpha M_B - M_{q_1} \right) \left[(\alpha - 1)^2 M_B^2 + m_{\{q_2 q_2\}_{1-}}^2 \right] \overline{C}' \left(\sigma_{q_1}^{\{q_2 q_2\}_{1-}}(\alpha) \right) d\alpha \quad (5.141)$$

Para los bariones del tipo **B** de paridad negativa se procede de la misma manera que los de tipo **A** y se obtiene la eigenecuación:

$$\begin{bmatrix} d^{\{q_2 q_2\}_{1-}} \\ d^{\{q_2 q_1\}_{1-}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\mathcal{F}^{11} & \sqrt{2}\mathcal{F}^{12} \\ \sqrt{2}\mathcal{F}^{21} & \mathcal{F}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^{\{q_2 q_2\}_{1-}} \\ d^{\{q_2 q_1\}_{1-}} \end{bmatrix} \quad (5.142)$$

De la misma manera que antes se obtienen las amplitudes $\mathcal{F}^{ij}$ para este tipo de bariones.

$$\mathcal{F}^{11} = c_B^{q_1} \frac{E_{\{q_2 q_2\}_{1-}}^2}{m_{\{q_2 q_2\}_{1-}}^2} \int_0^1 \left(\alpha M_B - M_{q_1} \right) \left[(\alpha - 1)^2 M_B^2 + m_{\{q_2 q_2\}_{1-}}^2 \right] \overline{C}' \left(\sigma_{q_1}^{\{q_2 q_2\}_{1-}}(\alpha) \right) d\alpha \quad (5.143)$$

$$\mathcal{F}^{12} = \frac{c_B^{q_1}}{6} \frac{E_{\{q_2 q_2\}_{1-}} E_{\{q_2 q_1\}_{1-}}}{m_{\{q_2 q_2\}_{1-}}^2 m_{\{q_2 q_1\}_{1-}}^2} \int_0^1 \left(\alpha M_B - M_{q_2} \right) \left[3(\alpha - 1)^2 M_B^2 (m_{\{q_2 q_2\}_{1-}}^2 + m_{\{q_2 q_1\}_{1-}}^2) \right. \\ \left. + (\alpha - 1)^4 M_B^4 + 5m_{\{q_2 q_2\}_{1-}}^2 m_{\{q_2 q_1\}_{1-}}^2 \right] \overline{C}' \left(\sigma_{q_2}^{\{q_2 q_1\}_{1-}}(\alpha) \right) d\alpha \quad (5.144)$$

$$\mathcal{F}^{21} = \frac{c_B^{q_2}}{6} \frac{E_{\{q_2 q_2\}_{1-}} E_{\{q_2 q_1\}_{1-}}}{m_{\{q_2 q_2\}_{1-}}^2 m_{\{q_2 q_1\}_{1-}}^2} \int_0^1 \left(\alpha M_B - M_{q_1} \right) \left[3(\alpha - 1)^2 M_B^2 (m_{\{q_2 q_2\}_{1-}}^2 + m_{\{q_2 q_1\}_{1-}}^2) \right. \\ \left. + (\alpha - 1)^4 M_B^4 + 5m_{\{q_2 q_2\}_{1-}}^2 m_{\{q_2 q_1\}_{1-}}^2 \right] \overline{C}' \left(\sigma_{q_1}^{\{q_2 q_2\}_{1-}}(\alpha) \right) d\alpha \quad (5.145)$$

$$\mathcal{F}^{22} = c_B^{q_2} \frac{E_{\{q_2 q_1\}_{1-}}^2}{m_{\{q_2 q_1\}_{1-}}^2} \int_0^1 \left(\alpha M_B - M_{q_2} \right) \left[(\alpha - 1)^2 M_B^2 + m_{\{q_2 q_1\}_{1-}}^2 \right] \overline{C}' \left(\sigma_{q_2}^{\{q_2 q_1\}_{1-}}(\alpha) \right) d\alpha \quad (5.146)$$

Con estas expresiones se calculan las masas de los distintos bariones, las cuales se muestran en la siguiente sección de resultados.

5.4.3. Resultados

Los estados ligados de singlete de color contruidos a partir de tres quarks pesados c/b de paridad positiva y negativa son:

$$\begin{aligned} u_{\Omega_{ccc}^{+++}} &= [\{cc\}_{1+}c], & u_{\Omega_{bbb}^{-*}} &= [\{bb\}_{1+}b], & u_{\Omega_{ccc}^{++}} &= [\{cc\}_{1-}c], & u_{\Omega_{bbb}^{-*}} &= [\{bb\}_{1-}b], \\ u_{\Omega_{ccb}^{++}} &= [\{cc\}_{1+}b], & u_{\Omega_{cbb}^{0*}} &= [\{cb\}_{1+}b], & u_{\Omega_{ccb}^{+*}} &= [\{cc\}_{1-}b], & u_{\Omega_{cbb}^{0*}} &= [\{cb\}_{1-}b], \\ u_{\Omega_{ccb}^{+*}} &= [\{cb\}_{1+}c], & & & u_{\Omega_{ccb}^{+*}} &= [\{cb\}_{1-}c], & & \end{aligned} \quad (5.147)$$

los vectores columna que representan bariones con un quark pesado y con dos quarks pesados son:

$$\begin{aligned}
u_{\Sigma_c^{++*}(uuc)} &= \begin{bmatrix} \{uu\}_{1+C} \\ \{uc\}_{1+u} \end{bmatrix}, & u_{\Omega_c^{0*}(ssc)} &= \begin{bmatrix} \{ss\}_{1+C} \\ \{sc\}_{1+s} \end{bmatrix}, & u_{\Sigma_b^{+*}(uub)} &= \begin{bmatrix} \{uu\}_{1+b} \\ \{ub\}_{1+u} \end{bmatrix}, & u_{\Omega_b^{-*}(ssb)} &= \begin{bmatrix} \{ss\}_{1+b} \\ \{sb\}_{1+s} \end{bmatrix}, \\
u_{\Sigma_c^{++*}(uuc)} &= \begin{bmatrix} \{uu\}_{1-C} \\ \{uc\}_{1-u} \end{bmatrix}, & u_{\Omega_c^{0*}(ssc)} &= \begin{bmatrix} \{ss\}_{1-C} \\ \{sc\}_{1-s} \end{bmatrix}, & u_{\Sigma_b^{+*}(uub)} &= \begin{bmatrix} \{uu\}_{1-b} \\ \{ub\}_{1-u} \end{bmatrix}, & u_{\Omega_b^{-*}(ssb)} &= \begin{bmatrix} \{ss\}_{1-b} \\ \{sb\}_{1-s} \end{bmatrix}, \\
u_{\Xi_{cc}^{++*}(ucc)} &= \begin{bmatrix} \{uc\}_{1+C} \\ \{cc\}_{1+u} \end{bmatrix}, & u_{\Omega_{cc}^{+*}(scc)} &= \begin{bmatrix} \{sc\}_{1+C} \\ \{cc\}_{1+s} \end{bmatrix}, & u_{\Sigma_{bb}^{0*}(ubb)} &= \begin{bmatrix} \{ub\}_{1+b} \\ \{bb\}_{1+u} \end{bmatrix}, & u_{\Omega_{bb}^{-*}(sbb)} &= \begin{bmatrix} \{sb\}_{1+b} \\ \{bb\}_{1+s} \end{bmatrix}, \\
u_{\Xi_{cc}^{++*}(ucc)} &= \begin{bmatrix} \{uc\}_{1-C} \\ \{cc\}_{1-u} \end{bmatrix}, & u_{\Omega_{cc}^{+*}(scc)} &= \begin{bmatrix} \{sc\}_{1-C} \\ \{cc\}_{1-s} \end{bmatrix}, & u_{\Sigma_{bb}^{0*}(ubb)} &= \begin{bmatrix} \{ub\}_{1-b} \\ \{bb\}_{1-u} \end{bmatrix}, & u_{\Omega_{bb}^{-*}(sbb)} &= \begin{bmatrix} \{sb\}_{1-b} \\ \{bb\}_{1-s} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.148}$$

Para los bariones con espín 3/2 se usa $g_B = 1$. Para bariones con quarks pesados se presenta una comparación con otros enfoques en la tabla {5.4}.

	Ω_{ccc}^{++*}	Ω_{bbb}^{-*}	Ω_{ccb}^{+*}	Ω_{cbb}^{0*}
CI-LP	4.78	14.39	8.03	11.10
CI-HP	4.93	14.23	8.03	11.12
PC	4.76	14.37	7.96	11.17
Lattice	4.80	14.37	8.01	11.20
Coulomb	4.76	14.37	7.98	11.19
Cornell	4.80	14.40	8.04	11.24
Fadv	4.80	14.40	8.02	11.22
BM	4.79	14.30	8.03	11.20
QCR	4.92	14.76	8.20	11.48
CQM1	4.97	14.83	8.26	11.55
CQM2	4.63			
RQM	4.80	14.57	8.02	11.29
IQM	4.77			
HCM	4.74	14.45	8.10	11.38
SR	4.67	13.28	7.44	10.46
Regee	4.82			
NRQCD	4.90	14.77	8.24	11.53

Tabla 5.4: Comparación con otros enfoques de la masa (en GeV) de los bariones pesados de espín 3/2.

Los resultados mostrados en la tabla {5.4} muestran que el modelo CI tiene una diferencia del 1 % para los parámetros ligeros (CI-LP) y del 3 % aproximadamente para los parámetros pesados (CI-HP). En las figuras {5.10} y {5.11} se muestran los resultados de la tabla {5.4}.

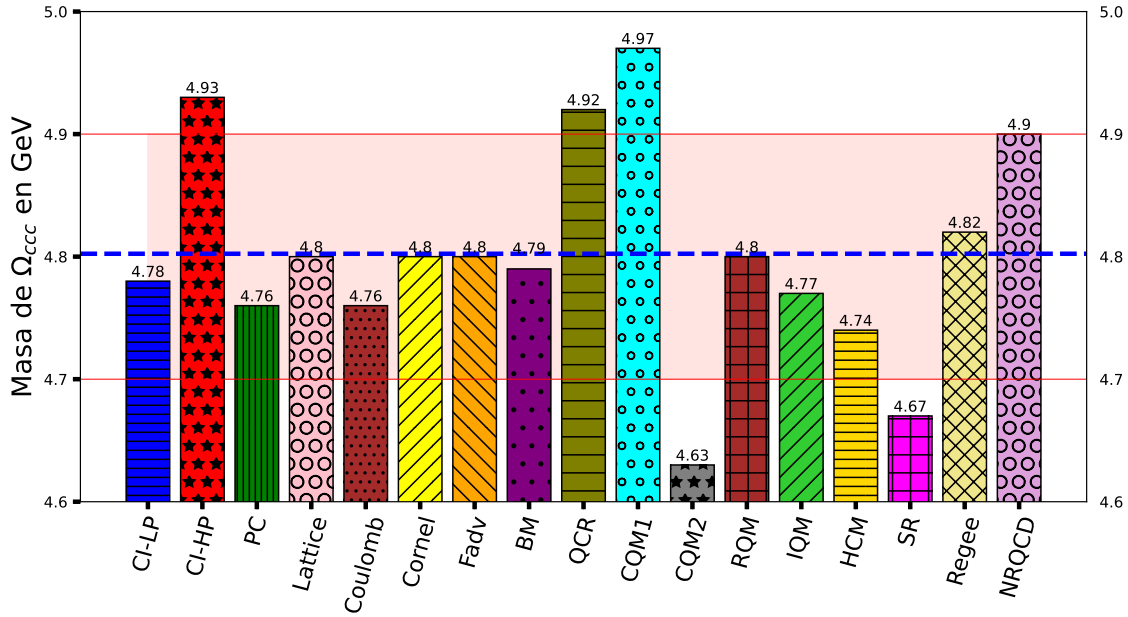


Figura 5.10: Se gráfica la masa de Ω_{ccc} para las diferentes perspectivas mostradas en la tabla {5.4}, la línea azul representa el promedio de los datos. La sección sombreada muestra un 2 % de diferencia con el promedio.

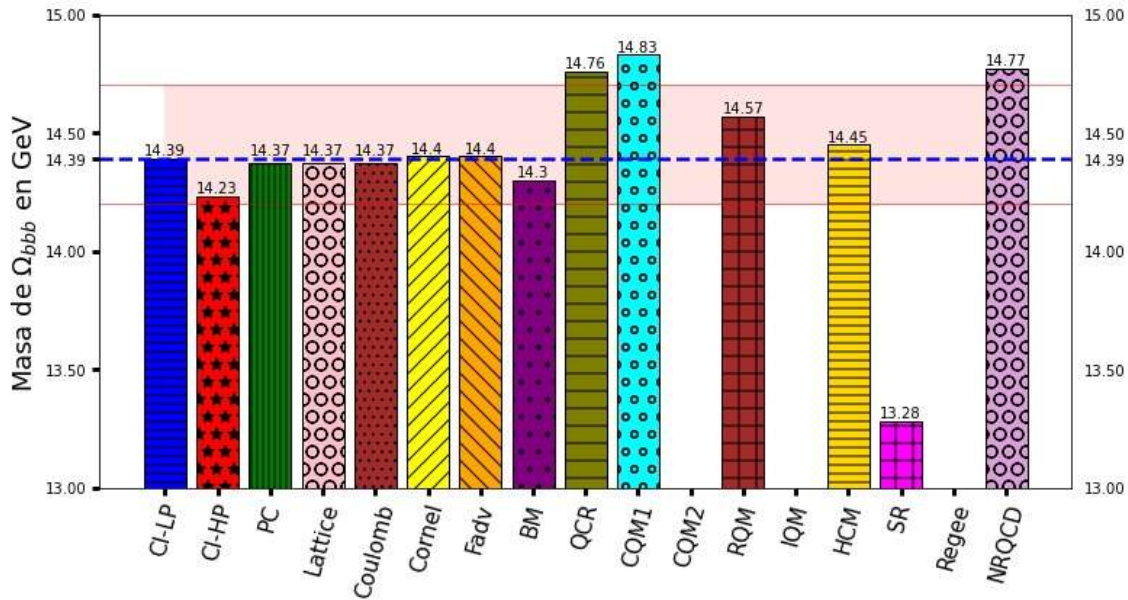


Figura 5.11: Se gráfica la masa de Ω_{bbb} para las diferentes perspectivas mostradas en la tabla {5.4}, la línea azul representa el promedio de los datos. La sección sombreada muestra un 2 % de diferencia con el promedio.

Se muestran las masas de los bariones en (5.148) con los parámetros en {2.1} y {2.2} en la tabla {5.5} donde los resultados de Lattice se toman de [86, 87], los resultados experimentales se toman de [88, 89] y los resultados obtenidos por QRS en [31].

Barión	Lattice, +	Exp. +	CI-LP, +	CI-HP, +	Exp. -	CI-HP, -	QRS, -
$\Delta(uuu)$	1.23*	–	1.39	1.39	1.65	2.07	1.726
$\Sigma^*(uus)$	1.39*	–	1.51	1.51	1.67	2.16	1.785
$\Xi^*(sus)$	1.53*	–	1.63	1.63	1.82	2.26	1.843
$\Omega(sss)$	1.67*	–	1.76	1.76	–	2.36	1.902
Ω_{ccc}^{++*}	4.80	–	4.78	4.93	–	5.28	5.027
Ω_{bbb}^{-*}	14.37	–	14.39	14.23	–	14.39	14.771
Ω_{ccb}^{+*}	8.01	–	8.03	8.03	–	11.35	11.523
Ω_{cbb}^{0*}	11.20	–	11.10	11.12	–	11.35	11.523
$\Sigma_c^{+++}(uuc)$	0.53*	0.53	0.55	0.57	–	0.67	0.59
$\Xi_{cc}^{+++}(ucc)$	0.53	–	0.77	0.79	–	0.89	0.83
$\Omega_c^{0*}(ssc)$	0.58*	0.58	0.59	0.57	–	0.72	0.63
$\Omega_{cc}^{+*}(scc)$	0.78	–	0.79	0.80	–	0.92	0.84
$\Sigma_b^{+*}(uub)$	1.21*	1.21	1.19	1.23	–	1.32	1.28
$\Xi_{bb}^{0*}(ubb)$	2.11	–	2.10	2.12	–	2.10	2.19
$\Omega_b^{-*}(sbb)$	1.26	–	1.25	1.28	–	1.52	1.30
$\Omega_{bb}^{-*}(sbb)$	2.14	–	2.13	2.10	–	2.10	2.20

Tabla 5.5: Masas (en GeV) de los bariones con espín 3/2. (*) denota. La tercera parte de la tabla se presentan los resultados de la masa de los bariones en unidades de la masa de Ω_{ccc} , es decir, $M_B/M_{\Omega_{ccc}}$. Para g_B se usa (5.17). + denota la paridad positiva y - la paridad negativa.

Se presentan las amplitudes de Faddeev correspondientes en la tabla {5.6} la cual muestra la contribución de cada diquark dentro del barión y el diquark dominante.

Barión		$d^{[qq]}$	$d^{[qq]}$	Dominante
$\Sigma^*(uus)$	CI-HP	-0.46	-0.89	{ uu } con 79.2 %
$\Xi^*(uss)$	CI-HP	0.74	0.67	{ us } con 54.7 %
Ω_{ccb}^{+*}	CI-LP	-0.26	-0.96	{ cc } con 92 %
	CI-HP	-0.09	-0.99	{ cc } con 98 %
Ω_{cbb}^{0*}	CI-LP	0.36	0.93	{ bb } con 86.5 %
	CI-HP	0.49	0.86	{ bb } con 74 %
$\Sigma_c^{+++}(uuc)$	CI-HP	-0.10	-0.99	{ uu } con 98 %
$\Sigma_{cc}^{+++}(ucc)$	CI-HP	0.48	0.87	{ cc } con 75.7 %
$\Omega_c^{0*}(ssc)$	CI-HP	0.15	0.99	{ ss } con 96 %
$\Omega_{cc}^{+*}(scc)$	CI-HP	0.61	0.79	{ cc } con 62.4 %
$\Sigma_b^{+*}(uub)$	CI-HP	-0.08	-0.99	{ uu } con 98 %
$\Xi_{bb}^{0*}(ubb)$	CI-HP	0.31	0.95	{ bb } con 90.2 %
$\Omega_b^{-*}(sbb)$	CI-HP	-0.02	-0.99	{ ss } con 98 %
$\Omega_{bb}^{-*}(sbb)$	CI-HP	0.42	0.91	{ bb } con 82.8 %

Tabla 5.6: Amplitudes de Faddeev para los bariones espín 3/2, se cumple: $1 = d^{[q_1 q_2]} + d^{[q_2 q_1]}$.

Las masas de los bariones con espín 3/2 con solo un quark pesado obedecen una regla de igual espaciado [24, 26, 28]:

$$m_{\Sigma_q} + m_{\Omega_q} = 2m_{\Xi_q}, \quad q = c, b, \quad (5.149)$$

esta relación, para los bariones correspondientes al quark c con los parámetros CI-LP da una masa de $m_{\Xi_{usc}} = 2.76 \text{ GeV}$ y con los parámetros CI-HP es $m_{\Xi_{usc}} = 2.83 \text{ GeV}$. El resultado experimental es $m_{\Xi_{usc}} = 2.467 \text{ GeV}$ reportado en [32], esto representa un 13 % de error aproximadamente. Para los bariones correspondientes al quark b , se obtiene $m_{\Xi_{usb}} = 5.86 \text{ GeV}$ para CI-LP y $m_{\Xi_{usb}} = 6.024 \text{ GeV}$ para CI-HP. La observación del barión $m_{\Xi_{usb}}$ fue reportada por la colaboración CMS con un valor de $m_{\Xi_{usb}} = 5.948 \text{ GeV}$ en [33], esto representa un 1.28 % de error para CI-LP y 1.48 % de error para CI-HP. Otras reglas de espaciado que combinan bariones con diferente espín se encuentran en [27]:

$$\begin{aligned} m_{\Xi_{cc}^{++}(ucc)} - m_{\Xi_{cc}^{++}(usc)} - m_{\Sigma_c^{++}(uuc)} + m_{\Sigma_c^{++}(uuc)} &= 0, \\ m_{\Omega_{cc}^{++}(scc)} - m_{\Omega_{cc}^{++}(ssc)} - m_{\Omega_c^{0*}(ssc)} + m_{\Omega_c^0(ssc)} &= 0, \\ m_{\Xi_{bb}^{0*}(ubb)} - m_{\Xi_{bb}^{0*}(ub\bar{b})} - m_{\Sigma_b^{+*}(uub)} + m_{\Sigma_b^{+*}(uub)} &= 0. \end{aligned} \quad (5.150)$$

Una vez que se calcule el espectro de bariones con espín 1/2 se tendrán los valores para estas reglas de espaciado de masas. Las reglas de espaciado motivan a definir una relación de masa pasiva de quark constituyente [25], a través de:

$$M_f^P = \frac{1}{3} m_{fff}. \quad (5.151)$$

Los resultados para los bariones 3/2 se muestran en la tabla {5.7}.

f	Enfoque	u/d	s	c	b
M_f^P	CI-LP	0.46	0.59	1.59	4.8
M_f		0.367	0.53	1.60	4.83
M_f^P	CI-HP	0.46	0.59	1.64	4.74
M_f		0.367	0.53	1.52	4.68

Tabla 5.7: Relación de masa pasiva de quark constituyente [25] para bariones espín 3/2.

La cantidad análoga definida a través de las masas de los mesones vectoriales en estado fundamental toma valores muy similares (en GeV) los cuales se muestran en la tabla {5.8}.

f	Enfoque	u/d	s	c	b
M_f^P	Exp.	0.39	0.51	1.55	4.73
M_f^P	CI-HP	0.465	0.56	1.57	4.71
M_f		0.367	0.53	1.52	4.68

Tabla 5.8: Relación de masa pasiva de quark constituyente [25] para mesones vectoriales.

Para los quarks pesados c y b los resultados para las masas pasivas de los quarks constituyentes son aproximadamente iguales, con un error aproximado del 0.625 % para bariones con los parámetros CI-LP para ambos quarks, 7 % para el quark c y 1.2 % para el quark b con CI-HP. Para los mesones vectoriales con los parámetros CI-HP se tiene un error del 3 % para el quark c y 0.637 % para el quark b .

Capítulo 6

Conclusiones

Se analizó el modelo de quarks propuesto por Gell-Mann para describir hadrones según sus números cuánticos, con este modelo Gell-Mann ganó el premio nobel de física en 1969 al predecir las características del barión Ω . Al estudiar este modelo se observa que existe una pequeña diferencia entre la masa del neutrón y el protón, son casi degenerados, y se les llama nucleones, esta es la simetría de isospín, esta simetría, al igual que las de la naturaleza, son aproximadas; es decir, solo existen bajo ciertas condiciones. Una de las simetrías más importantes es la quiral ya que su rompimiento da lugar a la generación de la mayor parte de la masa de la materia ordinaria. Se estudio el rompimiento espontáneo de simetría quiral (DCSB) a partir del propagador del quark, para ello se obtuvo la función de masa utilizando el modelo CI la cual muestra la transición de la masa corriente del quark a la masa vestida del quark. El modelo CI incorpora las características de QCD y se ha utilizado para estudiar las propiedades de los hadrones. En este trabajo se utiliza para calcular las masas y amplitudes de Bethe-Salpeter de los mesones y diquarks utilizando la masa vestida de los quarks y aprovechando las características entre los mesones y los diquarks en los distintos canales según sus números cuánticos. Las ecuaciones de Schwinger-Dyson y las ecuaciones de Bethe-Salpeter son una herramienta para el estudio de las propiedades de los hadrones, corresponden a un método no perturbativo, que nos proporciona acceso al ultra violeta y al infrarrojo al mismo tiempo. Para calcular estas masas se emplearon diferentes tipos de parámetros para notar las propiedades de los hadrones utilizando los mismos parámetros para todos o cambiándolos para cada hadrón según su contenido de quarks. Después de calcular las propiedades de los diquarks se utilizaron para calcular las masas de los bariones vistos como todas las posibles interacciones entre los quarks y los diquark dentro del barión. Esto es como tomar un problema de tres cuerpos como uno de dos utilizando los diquarks. El modelo CI nos permite aprender mucho sobre los hadrones. Las masas calculadas concuerdan muy bien con los resultados de otros enfoques y algunos resultados experimentales. Utilizando las relaciones de igual espaciado entre las masas dadas por Gell-Mann y Okubo podemos ver que tan buenas son los resultados de las masas, además de comprobar las masas de los hadrones con estas relaciones. Se muestran gráficas de las comparaciones entre los resultados con CI y otros enfoques. Se muestra una comparación entre las masas para los distintos canales de los mesones mostrando que el canal axial-vector es el mas pesado y el escalar el mas ligero. El cálculo de los diquarks es algo relativamente moderno por lo tanto la manera de comprobar su veracidad es a través de los resultados de los bariones los cuales son muy buenos. Se muestra una comparación entre los resultados obtenidos para los bariones compuestos de quarks pesados (*c* y *b*) mostrando que los resultados están muy de acuerdo con otras técnicas y resultados previos. La idea principal es trabajar con el mismo modelo y los mismo parámetros, tratando de incluir los menos posibles, para calcular los hadrones y posteriormente otros hadrones exóticos. Así como los factores de forma de todos estos estados.

Apéndice A

Amplitudes de Bethe-Salpeter en el modelo CI

En este apéndice se muestran los cálculos de los Kernel's para los canales vectoriales escalares y axial vectoriales.

A.1. Kernel Vectorial

La amplitud de BS para el Kernel vectorial en el modelo CI es (2.50), donde $\gamma_{mu}^T + \gamma_{\mu}^L = \gamma_{\mu}$, AVWGTI nos permite expandir el vértice en términos de la parte longitudinal y transversal (ver [61]), la parte transversal del vértice esta naturalmente limitada por:

$$P_{\mu} \gamma_{\mu}^T = 0 \quad (\text{A.1})$$

donde se produce una masa cuadrada para este canal, (A.1) implica que se puede escribir γ_{μ}^T de la siguiente manera:

$$\gamma_{\mu}^T(P) = \gamma_{\mu} - P_{\mu} \frac{\gamma \cdot P}{P^2}. \quad (\text{A.2})$$

Además, en la aproximación arcoíris (RL) $F^{1--}(P) = 0$, esto se debe al modelo IC. A pesar de usar el modelo CI $F^{1--}(P) \neq 0$ y la amplitud de BS contienen todos los términos covariantes de (2.50) justo cuando se añaden correcciones al vértice. Para este Kernel se usan los proyectores de Dirac:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_V^1(P) &= \gamma_{\mu}^T, & \mathcal{D}_V^2(P) &= \frac{1}{2M} \sigma_{\mu\nu} P_{\nu}, \\ \mathcal{P}_V^1(P) &= \frac{1}{12} \gamma_{\mu}^T, & \mathcal{P}_V^2(P) &= \frac{M}{6P^2} \sigma_{\mu\nu} P_{\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

con estos proyectores se calcula (3.2), primero se toma la traza:

$$\begin{aligned} T &= \text{Tr} \left\{ \frac{\gamma_{\mu}^T}{12} \gamma_{\mu} (-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) (\gamma_{\mu}^T) (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \gamma_{\mu} \right\}, \\ &= \frac{1}{3P^2} \left[2(P \cdot q)^2 + P^2 (3M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + 3(P \cdot q) + q^2) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

después se toma el cambio $q \rightarrow q - xP$, se eliminan los términos impares de $(P \cdot q)$ y en los términos pares se usa (2.40) para así obtener:

$$\mathcal{K}_V^{11} = -\frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{2} q^2 + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \quad (\text{A.5})$$

como se tiene un término q^2 se agrega 0 mediante $\mathfrak{M}^2 - \mathfrak{M}^2$ para poder usar (2.41) y por ultimo regularizar de acuerdo a (2.46):

$$\mathcal{K}_V^{11} = -\frac{1}{12\pi^2 m_G^2} \int_0^1 dx \left[M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}^2 \right] \bar{C}'(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) \quad (\text{A.6})$$

Para $\mathcal{K}^{12}$ después de hacer todo el procedimiento como antes se obtiene:

$$\mathcal{K}_V^{12} = -\frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \frac{P^2}{4M} \int_0^1 dx \left[M_{f_1} x + M_{\bar{f}_2} (1-x) \right] \bar{C}'(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) \quad (\text{A.7})$$

por las características del modelo y de que $F^{1--}(P) = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{21} &= 0, \\ \mathcal{K}^{22} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Al introducir estas ecuaciones en la eigen-ecuación (3.1) se puede simplificar y obtener:

$$1 = \mathcal{K}_V^{11}(-M_V^2). \quad (\text{A.9})$$

con $P^2 = -M_V^2$, donde M_V es la masa del mesón vectorial.

A.2. Kernel Escalar

La amplitud BS para el Kernel Escalar es (2.48), la única proyección que necesita es:

$$\mathcal{D}_S^1(P) = \mathbb{1}, \quad \mathcal{P}_S^1(P) = \frac{1}{4} \mathbb{1}. \quad (\text{A.10})$$

La traza para este Kernel es:

$$\begin{aligned} T &= \text{Tr} \left\{ \frac{\mathbb{1}}{4} \gamma_\mu (-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) \mathbb{1} (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \gamma_\mu \right\}, \\ &= 4(-P \cdot q - q^2 + M_{f_1} M_{\bar{f}_2}) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

se hace el cambio $q \rightarrow q - xP$ y se toman los términos impares ($P \cdot q = 0$):

$$\begin{aligned} T &= 4(-\cancel{P \cdot q} + P^2 x - q^2 + 2x\cancel{P \cdot q} - x^2 P^2 + M_{f_1} M_{\bar{f}_2}), \\ &= 4(M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + x(1-x)P^2 - q^2) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

de esta manera (3.2) es:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_S^{11} &= -\frac{4}{3m_G^2} \int_0^1 dx \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty dq^2 q^2 \frac{4[M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + x(1-x)P^2 - q^2]}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2}, \\ &= -\frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^1 dx \int_0^\infty dq^2 q^2 \left[\frac{M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} - \frac{q^2 + \mathfrak{M}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Es importante notar que la ecuación para el kernel Escalar y Axial-Vectorial llevan un factor $(g_{SO})^2$ debido al momento magnético anómalo (S0, Spin-Órbita) ver [14, 16, 18]. El valor de (g_{SO}) se especifica en los resultados, por lo general se usa ($g_{SO} = 0.35$).

Se regulariza según (2.46):

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_S^{11} &= -\frac{1}{3\pi^2 m_G^2} (g_{SO})^2 \int_0^1 dx \left[(M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}^2) \bar{C}'(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) - C(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) \right], \\ &= \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} (g_{SO})^2 \int_0^1 dx \left[C(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) - (M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}^2) \bar{C}'(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

sustituyendo (A.14) en (3.1) se obtiene:

$$1 = \mathcal{K}_S^{11}(-M_S^2) \quad (\text{A.15})$$

con M_S la masa del mesón escalar.

A.3. Kernel Axial-Vector

La amplitud de BS para el canal axial-vector es (2.51), se proyecta esta amplitud con los proyectores de Dirac:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{AV}^1(P) &= \gamma_5 \gamma_\mu^T, & \mathcal{D}_{AV}^2(P) &= \gamma_5 \frac{1}{2M} \sigma_{\mu\nu} P_\nu, \\ \mathcal{P}_{AV}^1(P) &= \frac{1}{12} \gamma_\mu^T \gamma_5, & \mathcal{P}_{AV}^2(P) &= \frac{M}{6P^2} \sigma_{\mu\nu} P_\nu \gamma_5, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Debido al modelo las proyecciones $\mathcal{K}_{AV}^{12} = \mathcal{K}_{AV}^{21} = \mathcal{K}_{AV}^{22} = 0$, por lo tanto solo se calcula $\mathcal{K}_{AV}^{11}$ según (3.2) es:

$$\mathcal{K}_{AV}^{11} = -\frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int_0^1 dx \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}\left[\left(\frac{1}{12} \gamma_\mu^T \gamma_5\right) (-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) (\gamma_5 \gamma_\mu^T) (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2})\right]}{(q^2 + m^2)^2} \quad (\text{A.17})$$

se analiza la traza por separado:

$$\begin{aligned} T &= \text{Tr}\left\{\left(\frac{1}{12} \gamma_\mu^T \gamma_5\right) (-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) (\gamma_5 \gamma_\mu^T) (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2})\right\}, \\ &= -\frac{4}{12} \left(-3M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + q^2 + (P \cdot q) \left(3 + \frac{2(P \cdot q)}{P^2}\right)\right) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

tomando el cambio $q \rightarrow q - xP$, eliminando los términos impares de $(P \cdot q)$ y en los términos pares se usa (2.41):

$$T = -\left(-M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + \frac{1}{2} q^2 - x(1-x)P^2\right) \quad (\text{A.19})$$

de esta manera la ecuación (A.17) se convierte en:

$$\mathcal{K}_{AV}^{11} = -\frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int_0^1 dx \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-\left(-M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + \frac{1}{2} q^2 - x(1-x)P^2\right)}{(q^2 + m^2)^2} \quad (\text{A.20})$$

dado que (A.20) tiene un término q^2 se suma cero de la forma $(\mathfrak{M}^2 - \mathfrak{M}^2)$ para poder usar (2.41):

$$\mathcal{K}_{AV}^{11} = \frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int_0^1 dx \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}^2}{(q^2 + m^2)^2} \quad (\text{A.21})$$

al igual que el Kernel Escalar el Kernel Axial-Vectorial también tiene un término $(g_{SO})^2$ debido al momento magnético anómalo, en este caso se usa $g_{SO} = 0.25$ (este valor se especifica en los resultados), por lo tanto después de regularizar según (2.46) la ecuación (A.21) es:

$$\mathcal{K}_{AV}^{11} = -\frac{(g_{SO})^2}{3\pi^2 m_G^2} \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left(M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}^2\right) \overline{C}'(\mathfrak{M}, \tau_{uv}, \tau_{ir}) \quad (\text{A.22})$$

de la ecuación (3.1) resulta:

$$1 = \mathcal{K}_{AV}^{11}(-M_{AV}^2) \quad (\text{A.23})$$

donde M_{AV} es la masa del mesón axial-vector.

Apéndice B

Normalización de las Amplitudes de Bethe-Salpeter

En este apéndice se muestra la normalización de las amplitudes de Bethe-Salpeter para los canales vectorial, escalar y axial vectorial.

B.1. Normalización del Kernel Vectorial

La amplitud BS para los mesones vectoriales es (2.50), esto significa que después de calcular la constante de normalización (3.37) se tendrán solo términos proporcionales de E_{1-}^2 esto debido a que $F^{1-}(P) = 0$, por ende basta con calcular $\mathcal{N}^{11}$, con:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{1-}^1(P) &= \gamma_\mu^T(P) = \gamma_\mu - P_\mu \frac{\gamma \cdot P}{P^2}, \\ \overline{\mathcal{D}}_{1-}^1(P) &= \overline{\gamma}_\mu^T(P) = P_\mu \frac{\gamma \cdot P}{P^2} - \gamma_\mu\end{aligned}\tag{B.1}$$

se cumple que $\overline{\gamma}_\mu^T(P) = -\gamma_\mu^T(P)$ y $\overline{\gamma}_\mu^T(-P) = \overline{\gamma}_\mu^T(P)$, por o tanto la ecuación (3.37) es:

$$\mathcal{N}_V^{11} = 6 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}\left\{\left(\overline{\gamma}_\mu^T(-Q)\right)(-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1})\left(\gamma_\mu^T(Q)\right)(-i\gamma \cdot q + M_{f_2})\right\}}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \Bigg|_{Q=P}\tag{B.2}$$

la traza obtenida es:

$$\begin{aligned}T &= -4 \left[3M_{f_1} M_{f_2} + P \cdot q + q^2 + \frac{2(q \cdot Q)(P \cdot Q) + 2(q \cdot Q)^2}{Q^2} \right], \\ &= -4 \left[3M_{f_1} M_{f_2} + P \cdot q + q^2 + \frac{2(q \cdot Q)(P \cdot Q + q \cdot Q)}{Q^2} \right],\end{aligned}\tag{B.3}$$

con el cambio $q \rightarrow q - xP$ y eliminando los términos impares de $(q \cdot P)$:

$$\mathcal{N}_V^{11} = 6 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-4 \left(3M_{f_1} M_{f_2} - xP^2 + q^2 + x^2 P^2 + \frac{2(q \cdot Q)^2 - 2x(P \cdot Q)^2 + 2x^2(P \cdot Q)^2}{Q^2} \right)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \Bigg|_{Q=P}\tag{B.4}$$

usando (2.40) en los términos pares ($(q \cdot Q)^2 = \frac{1}{4}q^2Q^2$) y sumando un cero ($3\mathfrak{M}^2 - 3\mathfrak{M}^2 = 0$) para usar (2.41):

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_V^{11} &= 6 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-4 \left(3M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 + q^2 + \frac{2q^2}{4} \frac{Q^2}{Q^2} - 2x(1-x) \frac{(P \cdot Q)^2}{Q^2} \right)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \Bigg|_{Q=P}, \\ &= 6 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-4 \left(3M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 + \frac{3}{2}q^2 + 3\mathfrak{M}^2 - 3\mathfrak{M}^2 - 2x(1-x) \frac{(P \cdot Q)^2}{Q^2} \right)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \Bigg|_{Q=P}, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Ahora se aplicara la derivada y note que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dP^2} \frac{(P \cdot Q)^2}{Q^2} &= \frac{2}{Q^2} (P \cdot Q) \frac{d}{dP^2} (\sqrt{P^2} \cdot Q), \\ &= \frac{2}{Q^2} (P \cdot Q) \left(\frac{P^{-1}}{2} \cdot Q \right), \quad P \rightarrow Q \\ &= \frac{2}{P^2} P^2 \frac{1}{2} = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

de esta manera al realizar la derivada en (B.5) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_V^{11} &= -24 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2 (-x(1-x) - 3x(1-x) - 2x(1-x))}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^4} - \frac{(3M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 - 3\mathfrak{M}^2 - 2x(1-x)P^2) 2x(1-x)(q^2 + \mathfrak{M}^2)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^4}, \\ &= -24 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{-6x(1-x)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} - \frac{(3M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - 3x(1-x)P^2 - 3\mathfrak{M}^2) 2x(1-x)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^3} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

por ultimo se regulariza según (2.46):

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_V^{11} &= \frac{24}{16\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left(6 \bar{C}'(\mathfrak{M}^2, \tau_{ir}, \tau_{uv}) + 2(3M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - 3x(1-x)P^2 - 3\mathfrak{M}^2) \bar{C}''(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) \right), \\ &= \frac{144}{16\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\bar{C}'(\mathfrak{M}^2, \tau_{ir}, \tau_{uv}) + (M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}^2) \bar{C}''(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) \right), \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Para esta normalización introducimos un factor $\frac{1}{3}$ derivado de las 3 polarizaciones que puede tener el espín [14]. De esta manera la constante de normalización para el Kernel vectorial es:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_V^{11} &= \frac{1}{3} \frac{144}{16\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\bar{C}'(\mathfrak{M}^2, \tau_{ir}, \tau_{uv}) + (M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}^2) \bar{C}''(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) \right), \\ &= \frac{48}{16\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\bar{C}'(\mathfrak{M}^2, \tau_{ir}, \tau_{uv}) + (M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}^2) \bar{C}''(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) \right), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

es decir, (3.36) es:

$$N_V = \sqrt{\mathcal{N}_V^{11} E_V^2} \quad (\text{B.10})$$

B.2. Normalización del Kernel Escalar

La amplitud del Kernel Escalar es (2.48), por ende solo tenemos el término de normalización para la amplitud $E_{E=0^{++}}^2$ usando el proyector de Dirac $\mathcal{D}_E^1(P) = \mathbb{1}$, con estas herramientas la ecuación de

normalización (3.37) es:

$$\mathcal{N}_E^{11} = 6 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} \left\{ \mathbb{1}(-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) \mathbb{1}(-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \right\}}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \Big|_{Q=P} \quad (\text{B.11})$$

Trabajando con la traza, tomando el cambio $q \rightarrow q - xP$, eliminando los términos impares de $(q \cdot P)$ y en los términos pares usando (2.41):

$$\begin{aligned} T &= \text{Tr} \left\{ \mathbb{1}(-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) \mathbb{1}(-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \right\}, \\ &= 4(M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - P \cdot q - q^2), \quad q \rightarrow q - xP, \\ &= 4(M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - P \cdot (q - xP) - (q - xP)^2), \\ &= 4(M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - \cancel{P \cdot q}^0 + xP^2 - q^2 + 2x\cancel{P \cdot q}^0 - x^2 P^2), \quad \text{sumamos cero:} \\ &= 4(M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + x(1-x)P^2 - q^2 - \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}^2) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

de esta manera la ecuación (B.11) es:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_E^{11} &= 6 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{4(M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + x(1-x)P^2 - q^2 - \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}^2)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \Big|_{Q=P}, \\ &= 24 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\frac{(M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}^2)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} - \frac{q^2 + \mathfrak{M}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \right] \Big|_{Q=P}, \\ &= 24 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d}{dP^2} \left[\frac{(M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}^2)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} - \frac{1}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)} \right] \Big|_{Q=P}, \\ &= 24 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\frac{x(1-x) + x(1-x)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} - \frac{(M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}^2)2x(1-x)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^3} + \frac{x(1-x)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

por ultimo se regulariza de acuerdo a (2.46):

$$\mathcal{N}_E^{11} = \frac{24}{16\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left[3\overline{C}'(\mathfrak{M}^2, \tau_{ir}, \tau_{uv}) - 2(M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}^2) \overline{C}''(\mathfrak{M}^2, \tau_{ir}, \tau_{uv}) \right] \quad (\text{B.14})$$

por lo tanto la ecuación (3.36) es:

$$N_E = \sqrt{\mathcal{N}_E^{11} E_E^2} \quad (\text{B.15})$$

B.3. Normalización del Kernel Axial-Vector

La amplitud del Kernel axial vector es (2.51), la proyectaremos solo para $\mathcal{N}^{11}$ proporcional a E_{AV}^2 dado que las $F_{AV}^2 = 0$ por las características del modelo IC, por lo tanto solo se emplean los proyectores de Dirac:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{1^{++}}^1(P) &= \mathcal{D}_{AV}^1(P) = \gamma_5 \gamma_\mu^T(P) = \gamma_5 \left(\gamma_\mu - P_\mu \frac{\gamma \cdot P}{P^2} \right), \\ \overline{\mathcal{D}}_{AV}^1(P) &= \overline{\gamma_5 \gamma_\mu^T(P)} = \left(P_\mu \frac{\gamma \cdot P}{P^2} - \gamma_\mu \right) \gamma_5, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

La traza de la ecuación (3.37) es:

$$\begin{aligned} T &= \left[\left(\overline{\gamma}_\mu^T(-Q) \right) (-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) \left(\gamma_\mu^T(Q) \right) (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \right], \\ &= 4 \left(-3M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + (P \cdot q) + q^2 + \frac{2(P \cdot Q)(P \cdot Q + q \cdot Q)}{Q^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

realizando el cambio $q \rightarrow q - xP$ y eliminando los términos impares de $(q \cdot Q)$ dado que al evaluar $Q = P$ estos términos se anulan según (2.40):

$$T = 4 \left(-3M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + \cancel{(P \cdot q)}^0 xP^2 + q^2 - 2xP \cdot \cancel{q}^0 + x^2 P^2 + \frac{2(q \cdot Q)(P \cdot Q)}{Q^2} + \frac{2(q \cdot Q)(q \cdot Q)}{Q^2} \right. \\ \left. + \frac{2(q \cdot Q)(-xP \cdot Q)}{Q^2} - \frac{2x(P \cdot Q)(P \cdot Q)}{Q^2} - \frac{2x(q \cdot Q)(P \cdot Q)}{Q^2} - \frac{2x(P \cdot Q)(-xP \cdot Q)}{Q^2} \right) \quad (\text{B.18})$$

Simplificando se obtiene:

$$T = 4 \left(-3M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 + \frac{2(q \cdot Q)^2 - 2x(P \cdot Q)^2 + 2x^2(P \cdot Q)^2}{Q^2} \right) \quad (\text{B.19})$$

sustituyendo (B.19) en (3.2) se tiene:

$$\mathcal{N}_{AV}^{11} = 6 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{4 \left(-3M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 + \frac{2(q \cdot Q)^2 - 2x(P \cdot Q)^2 + 2x^2(P \cdot Q)^2}{Q^2} \right)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \Bigg|_{Q=P}, \\ = 6 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d}{dP^2} \left[\frac{4 \left(-3M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 + q^2 + 2 \frac{(q \cdot P)^2 - x(1-x)(P \cdot Q)^2}{Q^2} \right)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \right] \Bigg|_{Q=P}, \\ = 6 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d}{dP^2} \left[\frac{4 \left(-3M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 + q^2 + \frac{2}{4} \frac{(q^2 P^2)}{P^2} - 2x(1-x) \frac{(P \cdot Q)^2}{Q^2} \right)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \right] \Bigg|_{Q=P}, \\ = 6 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d}{dP^2} \left[\frac{4 \left(-3M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 + \cancel{\frac{3}{2} q^2} + \cancel{3\mathfrak{M}^2} - 3\mathfrak{M}^2 - 2x(1-x) \frac{(P \cdot Q)^2}{Q^2} \right)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \right] \Bigg|_{Q=P}, \\ = 6 \cdot 4 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\frac{-x(1-x) - 3x(1-x) - 2x(1-x)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} - \frac{\left(-3M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 - 3\mathfrak{M}^2 - 2x(1-x)P^2 \right) 2x(1-x)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^3} \right], \\ = \frac{6 \cdot 4}{16\pi^2} \int_0^1 dx \, 6x(1-x) \left[\frac{-1}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} - \frac{\left(-M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}^2 \right)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^3} \right], \\ = \frac{144}{16\pi^2} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left[\left(-M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}^2 \right) \bar{C}''(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) - \bar{C}'(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) \right], \quad (\text{B.20})$$

El Kernel Axial Vectorial tiene un factor 1/3 debido a las 3 polarizaciones, de esa manera la normalización del Kernel resulta ser:

$$\mathcal{N}_{AV}^{11} = \frac{3}{\pi^2} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left[\left(-M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}^2 \right) \bar{C}''(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) - \bar{C}'(\mathfrak{M}, \tau_{ir}, \tau_{uv}) \right] \quad (\text{B.21})$$

por lo tanto la constante de normalización (3.36) se reduce a:

$$N_{AV}^2 = \mathcal{N}_{AV}^{11} E_{AV}^2. \quad (\text{B.22})$$

Apéndice C

Convención Euclidiana y Trazas

C.1. Convención Euclidiana

La mayoría de los cálculos en una QFT no perturbativa se realizan en la métrica Euclidiana (donde $a \cdot b = a_\mu \delta_{\mu\nu} b_\nu = \sum_{i=1}^4 a_i b_i$). A partir de los 4-vectores en el espacio de Minkowski se obtiene el espacio Euclidiano mediante la continuación analítica a tiempo imaginario. Para vectores espacio-tiempo y energía-momento:

$$t^E = it^M, \quad \vec{x}^E = \vec{x}^M \quad (C.1)$$

$$\varepsilon^E = i\varepsilon^M, \quad \vec{p}^E = \vec{p}^M \quad (C.2)$$

Los índices E, M denotan Euclidiano y Minkowski, respectivamente. Las matrices gamma son de la forma: $\gamma^{0E} = \gamma^{0M}$ y $\vec{\gamma}^E = -i\vec{\gamma}^M$; la métrica $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Además tenemos las siguientes relaciones:

$$\int d^4 k^M = -i \int d^4 k^E \quad (C.3)$$

$$\gamma^M \cdot p^M = -i\gamma^E \cdot p^E \quad (C.4)$$

$$q^M \cdot p^M = -iq^E \cdot p^E \quad (C.5)$$

$$x^M \cdot p^M = -x^E \cdot p^E \quad (C.6)$$

C.2. Matrices Gamma

Las matrices gamma Euclidianas tienen las siguientes propiedades. La propiedad que hace que las matrices gamma generen un álgebra de Clifford es la relación de anticonmutación:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\delta^{\mu\nu} \mathbb{1}. \quad (C.7)$$

Con $\{, \}$ el anticonmutador y $\delta^{\mu\nu}$ la métrica. La versión covariante están definidas por:

$$\gamma_\mu = \delta_{\mu\nu} \gamma^\nu \quad (C.8)$$

El producto de las 4 matrices gamma es:

$$\gamma^5 := i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3. \quad (C.9)$$

con $i\gamma^0 = \gamma^4$.

La matriz γ^5 cumple las siguientes propiedades:

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (C.10)$$

$$(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}, \quad (C.11)$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\nu\} = \gamma^5 \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^5 = 0. \quad (C.12)$$

Las matrices cumplen las siguientes identidades:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4\mathbb{1}, \quad (\text{C.13})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu, \quad (\text{C.14})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4\delta^{\nu\rho} \mathbb{1}, \quad (\text{C.15})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu, \quad (\text{C.16})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho = \delta^{\mu\nu} \gamma^\rho + \delta^{\nu\rho} \gamma^\mu - \delta^{\mu\rho} \gamma^\nu - i\epsilon^{\sigma\mu\nu\rho} \gamma_\sigma \gamma^5. \quad (\text{C.17})$$

C.3. Trazas

Propiedades de la traza:

$$\text{Tr}[A + B] = \text{Tr}[A] + \text{Tr}[B], \quad (\text{C.18})$$

$$\text{Tr}[rA] = r \text{Tr}[B], \quad (\text{C.19})$$

$$\text{Tr}[ABC] = \text{Tr}[BCA] = \text{Tr}[CAB]. \quad (\text{C.20})$$

Las matrices gamma obedecen las siguientes identidades de traza:

$$\text{Tr}[\gamma^\mu] = 0, \quad (\text{C.21})$$

$$\text{Tr}[\# \text{ impar de } \gamma' s] = 0, \quad (\text{C.22})$$

$$\text{Tr}[\text{producto de un } \# \text{ impar de } \gamma^\mu] = 0, \quad (\text{C.23})$$

$$\text{Tr}[\gamma^5 \text{ producto de un } \# \text{ impar de } \gamma^\mu] = 0, \quad (\text{C.24})$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4\delta^{\mu\nu}, \quad (\text{C.25})$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta] = 4(\delta^{\mu\nu} \delta^{\alpha\beta} - \delta^{\mu\alpha} \delta^{\nu\beta} + \delta^{\mu\beta} \delta^{\nu\alpha}), \quad (\text{C.26})$$

$$\text{Tr}[\sigma^{\mu\nu} \sigma^{\alpha\beta}] = 4(\delta^{\mu\alpha} \delta^{\nu\beta} - \delta^{\mu\beta} \delta^{\nu\alpha}), \quad (\text{C.27})$$

$$\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu] = \text{Tr}[\gamma^5] = 0, \quad (\text{C.28})$$

$$\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta] = 4i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (\text{C.29})$$

$$\text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}] = \text{Tr}[\gamma^{\mu_n} \dots \gamma^{\mu_1}], \quad (\text{C.30})$$

$$\epsilon^{4123} = 1. \quad (\text{C.31})$$

C.4. Hermiticidad

Se puede escoger la forma de las matrices gamma con condiciones adicionales de hermiticidad, restringidas por las relaciones de anticonmutación. Podemos imponer:

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \text{ compatible con } (\gamma^0)^2 = \mathbb{1}. \quad (\text{C.32})$$

Para el resto de las matrices ($k = 1, 2, 3$)

$$(\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k, \text{ compatible con } (\gamma^k)^2 = -\mathbb{1}. \quad (\text{C.33})$$

En general:

$$(\gamma^k)^\dagger = \gamma^0 \gamma^k \gamma^0. \quad (\text{C.34})$$

C.5. Notación Slash de Feynman

La notación slash de Feynman esta definida por:

$$\not{a} := \gamma^\mu a_\mu. \quad (\text{C.35})$$

Para cualquier cuadrivector a . Algunas identidades que involucran la notación slash son:

$$\not{a}\not{b} = a \cdot b - ia_\mu \sigma^{\mu\nu} b_\nu, \quad (\text{C.36})$$

$$\not{a}\not{a} = a^\mu a^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu = \frac{1}{2} a^\mu a^\nu (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) = \delta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = a^2, \quad (\text{C.37})$$

$$\text{Tr}[\not{a}\not{b}] = \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu a_\mu b_\nu] = a_\mu b_\nu \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = a_\mu b_\nu 4g^{\mu\nu} = 4(a \cdot b), \quad (\text{C.38})$$

$$\text{Tr}[\not{a}^2] = 4a^2, \quad (\text{C.39})$$

$$\text{Tr}[\not{p}] = 0, \quad (\text{C.40})$$

$$\text{Tr}[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}] = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)], \quad (\text{C.41})$$

$$\text{Tr}[\gamma^5 \not{a}\not{b}\not{c}\not{d}] = -4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a^\mu b^\nu c^\rho d^\sigma, \quad (\text{C.42})$$

$$\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2\not{a}, \quad (\text{C.43})$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu = 4a \cdot b, \quad (\text{C.44})$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu = -2\not{c} \not{b} \not{a}. \quad (\text{C.45})$$

Donde $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ es el símbolo de Levi-Civita y $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, con $[\cdot]$ el conmutador.

Bibliografía

- [1] D. Griffiths, Introduction to Elementary Particles.
- [2] F. Halzen & A Martin, Quarks and Leptons.
- [3] T. Chen & L. Li, Gauge Theory of Elementary Particles.
- [4] P. Pascual & R. Tarrach, Lecture Notes in Physics.
- [5] T. Muta, Foundations of Quantum Chromodynamics.
- [6] M. Peskin & D. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory.
- [7] P.A. Zyla et al. (Particle Data Group), Prog. Theor. Exp. Phys. 2020, 083C01 (2020).
- [8] Note on Unitary Symmetry in Strong Interactions Susumu Okubo. Progress of Theoretical Physics, Volume 27, Issue 5, May 1962, Pages 949–966, <https://doi.org/10.1143/PTP.27.949>
- [9] The Eightfold Way: A Theory of strong interaction symmetry Murray Gell-Mann(Caltech). Mar, 1961, 49 pages. DOI: 10.2172/4008239
- [10] Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory. <https://doi.org/10.1142/9371>. December 2018 Pages: 1196
- [11] Gustavo Paredes Torres: Ecuación De Gap Para Quarks: Soluciones E Implicaciones. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo Morelia Michoacán, Tesis de Licenciatura (2018).
- [12] L.X. Gutiérrez-Guerrero: Mesones Pion, Rho y los Diquarks: Factores de Forma, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Tesis Doctoral (2012).
- [13] Marco Antonio Bedolla Hernadéz: Quarkonia en una Interacción de Contacto. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Tesis Doctoral (2017).
- [14] Marco A. Bedolla, J. J. Cobos-Martínez, Adnan Bashir: Charmonia in a contact interaction. (Sep 24, 2015). Published in: Phys.Rev.D 92 (2015) 5, 054031.
- [15] L. X. Gutiérrez-Guerrero, A. Bashir, I. C. Cloët, and C. D. Roberts: Pion form factor from a contact interaction Phys. Rev. C 81, 065202 – Published 7 June 2010.
- [16] L. X. Gutiérrez-Guerrero, Adnan Bashir, Marco A. Bedolla, E. Santopinto. Masses of Light and Heavy Mesons and Baryons: A Unified Picture. Phys. Rev. D 100, 114032 (2019) DOI: 10.1103/PhysRevD.100.114032. Cite as: arXiv:1911.09213 [nucl-th].
- [17] H. L. L. Roberts, L. Chang, I. C. Cloet and C. D. Roberts, Few Body Syst. 51, 1 (2011) doi:10.1007/s00601-011-0225-x [arXiv:1101.4244 [nucl-th]].
- [18] C. Chen, L. Chang, C. D. Roberts, S.Wan and D. J. Wilson, Few Body Syst. 53, 293 (2012) doi:10.1007/s00601-012-0466-3 [arXiv:1204.2553 [nucl-th]].
- [19] S.-x. Qin, L. Chang, Y.-x. Liu, C. D. Roberts, and D. J. Wilson, Phys. Rev. C 85, 035202 (2012), 1109.3459.
- [20] L. Chang, Y.-X. Liu, and C. D. Roberts, Phys. Rev. Lett. 106, 072001 (2011), 1009.3458.
- [21] L. Chang and C. D. Roberts, Phys. Rev. C 85, 052201 (2012), 1104.4821.

- [22] L. Chang and C. D. Roberts, AIP Conf. Proc. 1361, 91 (2011), 1003.5006.
- [23] P. L. Yin, C. Chen, G. Krein, C. D. Roberts, J. Segovia and S. S. Xu, Phys. Rev. D 100, no. 3, 034008 (2019) doi:10.1103/PhysRevD.100.034008. [arXiv:1903.00160 [nucl-th]].
- [24] M. Gell-Mann, Phys. Rev. 125, 1067 (1962). Symmetries of Baryons and Mesons. doi:10.1103/PhysRev.125.1067
- [25] S. X. Qin, C. D. Roberts and S. M. Schmidt, Phys. Rev. D 97, no. 11, 114017 (2018). Poincaré-covariant analysis of heavy-quark baryons. doi:10.1103/PhysRevD.97.114017 [arXiv:1801.09697[nucl-th]].
- [26] S. Okubo, Prog. Theor. Phys. 27, 949 (1962). doi:10.1143/PTP.27.949
- [27] Q. X. Yu and X. H. Guo, doi:10.1016/j.nuclphysb.2019.114727 arXiv:1810.00437 [hep-ph].
- [28] D. Ebert, R. N. Faustov and V. O. Galkin, Phys. Rev. D 72, 034026 (2005) doi:10.1103/PhysRevD.72.034026 [hep-ph/0504112].
- [29] Y. Lu, C. Chen, C. D. Roberts, J. Segovia, S.-S. Xu, and H.-S. Zong, Phys. Rev. C 96, 015208 (2017), 1705.03988.
- [30] Tanabashi, M. et al. (2018) Review of Particle Physics. Phys. Rev. D, 98, 030001.
- [31] S.-x. Qin, C. D. Roberts, and S. M. Schmidt, Few Body Syst. 60, 26 (2019), 1902.00026.
- [32] M. Tanabashi et al. [Particle Data Group], Phys. Rev. D 98, no. 3, 030001 (2018). doi:10.1103/PhysRevD.98.030001
- [33] S. Chatrchyan et al. [CMS Collaboration], Phys. Rev. Lett. 108, 252002 (2012) doi:10.1103/PhysRevLett.108.252002 [arXiv:1204.5955 [hep-ex]].
- [34] E. E. Salpeter and H. A. Bethe, Phys. Rev. 84, 1232 (1951).
- [35] C. D. Roberts and A. G. Williams, Prog. Part. Nucl. Phys. 33 (1994) 477-575.
- [36] R. Alkofer and L. von Smekal, Phys. Rept. 353 (2001) 281.
- [37] P. Maris, AIP Conf. Proc. 892, 65 (2007), nucl-th/0611057.
- [38] A. Bashir, L. Chang, I. C. Cloet, B. El-Bennich, Y.-X. Liu, et al., Commun. Theor. Phys. 58, 79 (2012b), 1201.3366.
- [39] P. Maris, C. D. Roberts, and P. C. Tandy, Phys. Lett. B420 (1998) 267-273.
- [40] H. J. Munczek, Phys. Rev. D52 (1995) 4736-4740
- [41] P. Boucaud, J. P. Leroy, A. L. Yaouanc, J. Micheli, O. Pene and J. Rodriguez-Quintero, Few Body Syst. 53, 387 (2012) doi:10.1007/s00601-011-0301-2 [arXiv:1109.1936 [hep-ph]].
- [42] A. C. Aguilar, D. Binosi, C. T. Figueiredo and J. Papavassiliou, Eur. Phys. J. C 78, no. 3, 181 (2018) doi:10.1140/epjc/s10052-018-5679-2 [arXiv:1712.06926 [hep-ph]].
- [43] D. Binosi, C. Mezrag, J. Papavassiliou, C. D. Roberts and J. Rodriguez-Quintero, Phys. Rev. D 96, no. 5, 054026 (2017) doi:10.1103/PhysRevD.96.054026 [arXiv:1612.04835[nucl-th]].
- [44] A. Deur, S. J. Brodsky and G. F. de Teramond, Prog. Part. Nucl. Phys. 90, 1 (2016) doi:10.1016/j.ppnp.2016.04.003 [arXiv:1604.08082 [hep-ph]].
- [45] D. Ebert, T. Feldmann, and H. Reinhardt, Phys. Lett. B388, 154 (1996), hep-ph/9608223.
- [46] K. Raya, M. A. Bedolla, J. J. Cobos-Martinez and A. Bashir, Few Body Syst. 59, no. 6, 133 (2018) doi:10.1007/s00601-018-1455-y [arXiv:1711.00383 [nucl-th]].
- [47] F. Gao, S.-X. Qin, C. D. Roberts, and J. Rodriguez-Quintero, Phys. Rev. D97, 034010 (2018), 1706.04681.
- [48] R. L. S. Farias, G. Dallabona, G. Krein and O. A. Battistel, Phys. Rev. C 73, 018201 (2006). doi:10.1103/PhysRevC.73.018201 [hep-ph/0510145].

- [49] R. L. S. Farias, G. Dallabona, G. Krein and O. A. Battistel, Phys. Rev. C 77, 065201 (2008). doi:10.1103/PhysRevC.77.065201 [hep-ph/0604203].
- [50] C. S. Fischer, D. Nickel, and J. Wambach, Phys. Rev. D 76, 094009 (2007), 0705.4407.
- [51] H. J. Munczek, Phys. Rev. D 52, 4736 (1995), hep-th/9411239.
- [52] J. M. Cornwall, R. Jackiw, and E. Tomboulis, Phys. Rev. D 10, 2428 (1974).
- [53] C. H. Llewellyn-Smith, Ann. Phys. 53, 521 (1969).
- [54] D. B. Lichtenberg; W. Namgung; E. Predazzi; J. G. Wills (1982). "Baryon Masses In A Relativistic Quark-Diquark Model". Physical Review Letters. 48 (24): 1653–1656. Bibcode:1982PhRvL..48.1653L. doi:10.1103/PhysRevLett.48.1653.
- [55] R. Rapp; T. Schäfer; E. Shuryak; M. Velkovsky (1998). "Diquark bose condensates in high density matter and instantons". Physical Review Letters. 81 (1): 53–56. arXiv:hep-ph/9711396. Bibcode:1998PhRvL..81...53R. doi:10.1103/PhysRevLett.81.53. S2CID 89610959.
- [56] Gernot Eichmann: Hadron properties from QCD bound-state equations. Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften verfasst am Institut für Physik an der Karl-Franzens-Universität Graz Betreuer: Univ.-Prof. Dr. R. Alkofer Graz, 2009.
- [57] M.Yu. Barabanov, M.A. Bedolla, W.K. Brooks et al., Diquark correlations in hadron physics: Origin, impact and evidence, Progress in Particle and Nuclear Physics (2020) 103835, <https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2020.103835>.
- [58] G. Eichmann, Phys. Rev. D 84, 014014 (2011).
- [59] L. D. Faddeev, Sov. Phys. JETP 12 (1961) 1014-1019.
- [60] B. Silvestre-Brac, Few Body Syst. 20, 1 (1996). doi:10.1007/s006010050028.
- [61] L. Albino, A. Bashir, L.X.G. Guerrero, B.E. Bennich and E. Rojas, "Transverse Takahashi Identities and Their Implications for Gauge Independent Dynamical Chiral Symmetry Breaking," Phys. Rev. D **100** (2019) no.5, 054028, doi:10.1103/PhysRevD.100.054028 [arXiv:1812.02280 [nucl-th]].
- [62] M. Oettel, G. Hellstern, R. Alkofer and H. Reinhardt, Phys. Rev. C 58, 2459 (1998) doi:10.1103/PhysRevC.58.2459 [nucl-th/9805054].
- [63] Martin Oettel, Baryons as Relativistic Bound States of Quark and Diquark. PhD thesis, Tuebingen University, 156 pages. arXiv:nucl-th/0012067 or arXiv:nucl-th/0012067v1.
- [64] S.-X. Qin, C. D. Roberts, and S. M. Schmidt, Phys. Rev. D 97, 114017 (2018).
- [65] Z. S. Brown, W. Detmold, S. Meinel, and K. Orginos, Z. S. Brown, W. Detmold, S. Meinel, and K. Orginos, Phys. Rev. D 90, 094507 (2014).
- [66] Y. Jia, J. High Energy Phys. 10 (2006) 073.
- [67] P. Hasenfratz, R. R. Horgan, J. Kuti, and J. M. Richard, Phys. Lett. 94B, 401 (1980).
- [68] J. D. Bjorken, AIP Conf. Proc. 132, 390 (1985).
- [69] J. Vijande, H. Garcilazo, A. Valcarce, and F. Fernandez, Phys. Rev. D 70, 054022 (2004).
- [70] A. P. Martynenko, Phys. Lett. B 663, 317 (2008).
- [71] S. Migura, D. Merten, B. Metsch, and H.-R. Petry, Eur. Phys. J. A 28, 41 (2006).
- [72] B. Patel, A. Majethiya, and P. C. Vinodkumar, Pramana 72, 679 (2009).
- [73] J.-R. Zhang and M.-Q. Huang, Phys. Lett. B 674, 28 (2009).
- [74] X.-H. Guo, K.-W. Wei, and X.-H. Wu, Phys. Rev. D 78, 056005 (2008).
- [75] F. J. Llanes-Estrada, O. I. Pavlova, and R. Williams, Eur. Phys. J. C 72, 2019 (2012).

- [76] M. Mattson et al. [SELEX Collaboration], Phys. Rev. Lett. 89, 112001 (2002) doi:10.1103/PhysRevLett.89.112001 [hep-ex/0208014].
- [77] R. Aaij et al. (LHCb Collaboration), Phys. Rev. Lett. 122.
- [78] A.J. Schwartz, Proc. Sci., CHARM2016 (2017) 042 [arXiv:1701.07159].
- [79] G. Aznauryan et al., Int. J. Mod. Phys. E 22, 1330015 (2013).
- [80] R. T. Cahill, C. D. Roberts and J. Praschifka, Austral. J. Phys. 42, 129 (1989).
- [81] I. C. Cloët, A. Krassnigg and C. D. Roberts, (arXiv:0710.5746 [nucl-th]), In Proceedings of 11th International Conference on Meson-Nucleon Physics and the Structure of the Nucleon (MENU 2007), Jülich, Germany, 10-14 Sep 2007, eds. H. Machner and S. Krewald, paper 125.
- [82] M. Oettel, G. Hellstern, R. Alkofer and H. Reinhardt, Phys.Rev. C58, 2459 (1998).
- [83] A. Buck, R. Alkofer and H. Reinhardt, Phys. Lett. B286, 29 (1992).
- [84] R. D. Young, D. B. Leinweber, A. W. Thomas and S. V. Wright, Phys. Rev. D66, 094507 (2002).
- [85] S. S. Xu, C. Chen, I. C. Cloet, C. D. Roberts, J. Segovia and H. S. Zong, Phys. Rev. D 92, no. 11, 114034 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.92.114034. [arXiv:1509.03311 [nucl-th]].
- [86] Z. S. Brown, W. Detmold, S. Meinel and K. Orginos, Phys. Rev. D 90, no. 9, 094507 (2014) doi:10.1103/PhysRevD.90.094507 [arXiv:1409.0497 [hep-lat]].
- [87] N. Mathur, M. Padmanath and S. Mondal, Phys. Rev. Lett. 121, no. 20, 202002 (2018) doi:10.1103/PhysRevLett.121.202002 [arXiv:1806.04151 [hep-lat]].
- [88] C. Patrignani et al. [Particle Data Group], Chin. Phys. C 40, no. 10, 100001 (2016). doi:10.1088/1674-1137/40/10/100001
- [89] M. Tanabashi et al. [Particle Data Group], Phys. Rev. D 98, no. 3, 030001 (2018). doi:10.1103/PhysRevD.98.030001