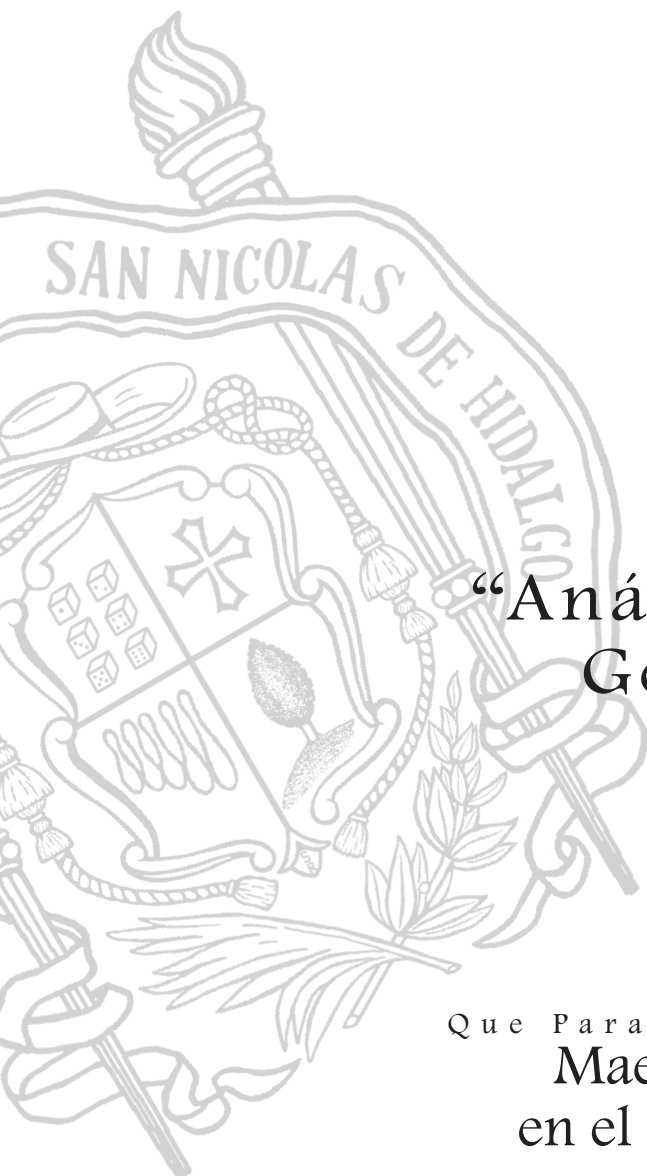


Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo



División de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Civil



TESIS

“Análisis No Lineal Geométrico”

Que Para Obtener el Grado de:
Maestro en Ingeniería
en el Área de Estructuras
Presenta:

A n t o n i o M a n z a n o T o r r e s

Director de tesis:
M. en C. Rafael Rojas Rojas

Enero

Morelia
Michoacán
2007

Índice

	Pág.
Introducción	1
Antecedentes	3
Objetivo	5
Capítulo 1 Introducción a la no linealidad	
1.1 Definición de no linealidad	6
1.2 Tipos de no linealidad	7
1.2.1 No linealidad del material	8
1.2.2 No linealidad geométrica	11
1.3 Fuentes de no linealidad	13
1.4 Niveles de análisis	14
Capítulo 2 Método de las rigideces	
2.1 Generalidades	18
2.1.1 Sistemas de referencia	19
2.1.2 Matriz de rotación	21
2.2 Matriz de rigideces	24
2.2.1 Elementos sujetos a fuerza axial	25
2.2.2 Elementos sujetos a fuerza axial y flexión	35
Capítulo 3 Programa de cómputo para el análisis de estructuras considerando la no linealidad geométrica	
3.1 Introducción	47
3.2 Características del programa	48
3.3 Diagrama de flujo	49
3.4 Guía del usuario	52

	Pág.
3.4.1 Generalidades	52
3.4.2 Recomendaciones iniciales	53
3.4.3 Introducción de los datos	54
3.4.4 Resultados finales	60
3.5 Ejemplo de un archivo de datos	60
 Capítulo 4 Ejemplos de aplicación	
4.1 Ejemplo de una armadura plana	65
4.2 Ejemplo de una armadura en el espacio tridimensional	76
4.3 Ejemplo de un marco plano	98
4.4 Ejemplo de una retícula	101
 Conclusiones	104
 Líneas futuras de investigación	106
 Bibliografía	107
 Anexo A Método numérico para la solución del sistema lineal de ecuaciones	108
 Anexo B Módulos de elasticidad y módulos de Poisson para diferentes materiales	112
 Índice de tablas	113
 Índice de figuras	114

Glosario

<i>Símbolo</i>	<i>Definición</i>
A	Área de la sección transversal
$\{d\}$	Vector de desplazamientos en el sistema local
$\{d'\}$	Vector de desplazamientos en el sistema global
du	Incremento de deformación en x
$d\varepsilon$	Incremento de deformación unitaria
dx, dy	Dimensiones del elemento diferencial
E	Módulo de elasticidad o módulo de Young
E_T	Módulo de elasticidad tangente
F	Fuerza axial
$\{F\}$	Vector de fuerzas nodales en el sistema local
$\{F'\}$	Vector de fuerzas nodales en el sistema global
G	Módulo de elasticidad al corte

Símbolo	Definición
I	Momento de inercia
J	Momento polar de inercia
$[k_e]$	Matriz de rigidez elástica de la estructura
$[k_g]$	Matriz de rigidez geométrica de la estructura
L	Longitud del elemento
l, m, n	Cosenos directores
M	Momento torsionante o flexionante
$[N_u]$	Funciones de forma para la dirección x
$[N_v]$	Funciones de forma para la dirección y
$\{P\}$	Vector de cargas en el sistema local
$\{P'\}$	Vector de cargas en el sistema global
P	Fuerza axial
P_{x2}	Fuerza axial en el extremo 2 (final) de la barra
r	Radio de giro
$[T]$	Matriz de rotación
$[T]^T$	Transpuesta de la matriz de rotación
$\{u_n\}$	Vector de desplazamientos nodales en dirección x
u, v, w	Componentes del desplazamiento
$\{v_n\}$	Vector de desplazamientos nodales
vol	Volumen
W_{ext}	Trabajo virtual externo
W_{int}	Trabajo virtual interno
x, y, z	Coordenadas cartesianas en el sistema local
x', y', z'	Coordenadas cartesianas en el sistema global

Símbolos griegos

<i>Símbolo</i>	<i>Definición</i>
α, θ, φ	Ángulos directores
δ	Operador virtual
Δd	Valores incrementales de los desplazamientos nodales
Δp	Valores incrementales de las cargas nodales
ε	Deformación lineal unitaria por carga axial
ε_{total}	Deformación total
ε_x	Deformación por flexión
ϕ	Giro
τ	Esfuerzo cortante
σ	Esfuerzo normal
σ_y	Esfuerzo en el límite de fluencia

Resumen

En el presente trabajo se desarrolla un programa de computadora para determinar el comportamiento de estructuras considerando la no linealidad geométrica empleando el método de las rigideces. Mediante este tipo de análisis se pretende evaluar la magnitud de los desplazamientos lineales y angulares que se presentan el sistema cuando se toma en cuenta la influencia significativa de estos y de la deformación en su determinación. Lo anterior se logra al verificar el equilibrio en la configuración de referencia deformada. Se modificó un programa existente para el análisis de estructuras, a fin de incluir tanto el cálculo de la matriz elástica como la geométrica y su operación iterativa.

Abstract

In this document, a software solution is developed for use in the analysis of structures by means of the method of rigidities considering geometric nonlinearity. This type of analysis tries to describe a structure when it shows a non linear behavior incorporating on its analysis the significative influence of displacements and deformations, all this by taking into account the balance on the deformed real configuration. An existing software program used in structural analysis that relies on the method of rigidities was modified, so as to allow the inclusion of the geometric matrix and its iterative operation.

Índice

	Pág.
Introducción	1
Antecedentes	3
Objetivo	5
Capítulo 1 Introducción a la no linealidad	
1.1 Definición de no linealidad	6
1.2 Tipos de no linealidad	7
1.2.1 No linealidad del material	8
1.2.2 No linealidad geométrica	11
1.3 Fuentes de no linealidad	13
1.4 Niveles de análisis	14
Capítulo 2 Método de las rigideces	
2.1 Generalidades	18
2.1.1 Sistemas de referencia	19
2.1.2 Matriz de rotación	21
2.2 Matriz de rigideces	24
2.2.1 Elementos sujetos a fuerza axial	25
2.2.2 Elementos sujetos a fuerza axial y flexión	35
Capítulo 3 Programa de cómputo para el análisis de estructuras considerando la no linealidad geométrica	
3.1 Introducción	47
3.2 Características del programa	48
3.3 Diagrama de flujo	49
3.4 Guía del usuario	52

	Pág.
3.4.1 Generalidades	52
3.4.2 Recomendaciones iniciales	53
3.4.3 Introducción de los datos	54
3.4.4 Resultados finales	60
3.5 Ejemplo de un archivo de datos	60
 Capítulo 4 Ejemplos de aplicación	
4.1 Ejemplo de una armadura plana	65
4.2 Ejemplo de una armadura en el espacio tridimensional	76
4.3 Ejemplo de un marco plano	98
4.4 Ejemplo de una retícula	101
 Conclusiones	104
 Líneas futuras de investigación	106
 Bibliografía	107
 Anexo A Método numérico para la solución del sistema lineal de ecuaciones	108
 Anexo B Módulos de elasticidad y módulos de Poisson para diferentes materiales	112
 Índice de tablas	113
 Índice de figuras	114

Introducción

La gran mayoría de las estructuras en Ingeniería Civil deben estructurarse y dimensionarse para cumplir eficientemente con las solicitaciones impuestas debido a las cargas; además de satisfacer los requerimientos económicos durante la vida útil de la estructura y los estados límite de servicio y resistencia. La parte medular del análisis radica en determinar los elementos mecánicos y desplazamientos reales que se generarán en la edificación y que causarán esfuerzos y deformaciones. El objetivo del presente trabajo es realizar un programa de cómputo que permita describir el comportamiento de una estructura mediante un análisis geométrico no lineal.

De manera general se ha usado el análisis lineal para valorar los efectos sobre las estructuras cuando estas están sujetas a cargas de servicios, dando en general buenos resultados, sin embargo, cuando las cargas actuantes son las accidentales la gran mayoría

de las estructuras tienen comportamientos no lineales, que en algunos casos, llegan a ser del mismo orden o mayores que los efectos elásticos lineales.

Antes de contar con la computadora como herramienta para el análisis estructural, el análisis se realizaba con métodos aproximados. En la década de los 70 con la aparición de las computadoras personales, el método directo de las rigideces para análisis lineal de estructuras tiene gran aceptación y empiezan a surgir programas educativos y comerciales utilizando este método. Sin embargo en los últimos años en diferentes investigaciones se ha encontrado que la mayor parte de las estructuras antes de alcanzar su carga límite, incursionan de alguna forma dentro del rango no lineal; una forma de no linealidad es la no linealidad geométrica, que es cuando los desplazamientos y deformaciones tienen influencia significativa en el comportamiento de la misma.

En el presente trabajo se desarrolla un programa para el análisis geométrico no lineal de estructuras por el método de las rigideces. Se propone un enfoque matricial para la no linealidad geométrica que permitirá su implementación y programación. Para dar solución a la ecuación fuerza desplazamiento se recurrió al método de descomposición matricial LU de Crout.

El programa base fue desarrollado originalmente para realizar análisis lineales y se han agregado y modificado algunas subrutinas a fin de considerar la no linealidad geométrica.

Confiamos en que dicho programa constituya una herramienta de bajo costo para la comunidad estudiantil y el sector privado, y que pueda despertar el interés para incursionar en otros campos del conocimiento que hasta ahora están sólo disponibles en paquetes de análisis especializados de alto costo.

Antecedentes

Alrededor de 1920, como resultado de los esfuerzos de *Maney* en los Estados Unidos y por *Ostenfeld* en Dinamarca, las ideas básicas para el análisis de vigas y marcos basados en los desplazamientos como incógnita tomaron forma. Estas ideas representan los precursores de los conceptos del análisis estructural matricial.

El campo del análisis no lineal ha captado la atención de muchos científicos e investigadores desde hace algún tiempo. Sin embargo los niveles de actividad durante la era previa a la computadora fueron inferiores comparativamente hablando a los realizados en la era computacional, a pesar de que las soluciones exactas para algunos problemas ya habían sido desarrolladas algún tiempo atrás, contamos solamente con soluciones aproximadas para la mayoría de los problemas no lineales, particularmente en el caso de de la mecánica estructural.

Sin duda uno de los trabajos que impulsó la investigación en el área de la mecánica no lineal fue la serie de lecturas publicadas por *Von Karman* en 1940 titulada "*The Engineer Grapples with Non-linear Problems*". Libros como los publicados por *Kryloff* y *Bogoliuboff* (1943), *Minorsky* (1947), *Novozhilov* (1953), *Stoker* (1968), entre otros han sentado las bases para la realización de trabajos extensos de investigación en el área de la mecánica no lineal de sólidos. En los últimos 30 años o más, el nivel de actividad en el campo de estudio de la no linealidad se ha venido incrementando significativamente, este hecho se ve avalado por el gran número de trabajos de investigación y publicaciones disponibles.

Objetivo

El objetivo del presente trabajo es realizar un programa de computadora para realizar análisis no lineal geométrico de una estructura de manera matricial utilizando el método de las rigideces o de los desplazamientos. Las estructuras que se podrán analizar con este programa son: armaduras planas, armaduras en el espacio tridimensional, vigas, retículas, marcos planos y marcos en el espacio tridimensional. Los tipos de cargas permitidas en el análisis son la carga estática de tipo puntual nodal, estática puntual a lo largo del elemento y carga uniformemente distribuida.

Capítulo 1

Introducción a la no linealidad

1.1. Definición de no linealidad

En casi todas las formulaciones de ecuaciones de movimiento, se asume que el comportamiento del material es elástico lineal, y que los desplazamientos y deformaciones en el sistema estructural, causados por las cargas aplicadas, son pequeños y no tienen influencia significativa en el comportamiento de la estructura, por lo que el equilibrio y la compatibilidad se plantean en la estructura sin deformar, esto hace que el análisis elástico lineal sea un problema analítico que tiene solución única.

Este tipo de análisis es lo suficientemente preciso para muchos casos prácticos. Sin embargo, algunas estructuras, tales como redes, mallas de cables, y en general estructuras

esbeltas pueden presentar desplazamientos y deformaciones tales que pueden contribuir significativamente en el comportamiento de los mismos, por lo que la formulación del equilibrio debe hacerse incluyendo los efectos de los desplazamientos y deformaciones del sistema estructural, lo cual da origen al análisis no lineal geométrico.

La no linealidad puede surgir también por la no linealidad del material que se manifiesta por el cambio de las propiedades del material por efecto de la carga.

1.2. Tipos de no linealidad

El fenómeno de no linealidad en mecánica estructural se manifiesta en una multiplicidad de formas en sistemas físicos, sin embargo, por conveniencia, el análisis no lineal puede ser categorizado dentro de tres clasificaciones básicas: (1) no linealidad del material, (2) no linealidad geométrica, y (3) una combinación de las dos anteriores. La *tabla 1* resume los tipos del análisis no lineal considerando por separado los efectos no lineales del material y los efectos no lineales geométricos.

Tabla 1. Tipos de no linealidad

Tipo de análisis	Descripción
No linealidad del material	• Desplazamientos y deformaciones pequeñas • Relación esfuerzo deformación no lineal • Ecuaciones de equilibrio en la estructura sin deformar • Deformación plástica del acero • Agrietamiento o flujo plástico del concreto reforzado • Interacción elástica de la fuerza axial, flexión y tensión
No linealidad geométrica	• Desplazamientos y deformaciones pequeñas • Relación esfuerzo deformación lineal • Ecuaciones de equilibrio en la geometría deformada • Efecto $P-\Delta$ • Efecto $\sigma -\delta$
No linealidad del material y geométrica	• Desplazamientos y deformaciones pequeñas • Relación esfuerzo deformación lineal o no lineal • Combinación de lo anterior

La no linealidad física o del material se presenta cuando el comportamiento esfuerzo deformación del material es no lineal, invalidando con ello la ley generalizada de *Hooke*. En

este tipo de no linealidad las ecuaciones de equilibrio se plantean en la estructura sin deformar. La no linealidad geométrica se basa en las deformaciones de un cuerpo elástico e involucra a los desplazamientos y deformaciones en el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio. Existe también la no linealidad geométrica y del material que es el resultado combinado de ambos tipos de no linealidad. Es bien conocido que la respuesta estática y dinámica de una estructura en la que se incluyen la no linealidad complica la solución del sistema de ecuaciones que gobiernan el problema, por lo cual se debe de tener cuidado en la elección del tipo de no linealidad a considerar, tomando en cuenta que el sistema de ecuaciones sea relativamente fácil de resolver.

1.2.1. No linealidad del material

El tratar de hacer un análisis estructural que se apegue más al comportamiento real de las estructuras ha generado gran interés en las técnicas de análisis no lineal. Estas técnicas en conjunto con la disponibilidad de computadoras de alta velocidad han hecho que la solución a problemas de no linealidad del material sea relativamente fáciles de manejar. El efecto de la no linealidad del material en el comportamiento de los componentes estructurales es una consideración importante en el análisis de sistemas estructurales cuando se desea tomar en cuenta la ventaja que ofrecen algunos materiales de soportar cargas más allá de su esfuerzo de fluencia, por lo que comparativamente el análisis elástico podría ser conservador. Los efectos inelásticos deben considerarse a fin de tener una mejor perspectiva de la respuesta física de la estructura. Desafortunadamente, existen pocas investigaciones al respecto. La formulación básica del problema para incluir la no linealidad del material no representa grandes dificultades cuando la deformación es pequeña, pues basta con incluir la no linealidad del material. Sin embargo, a medida que las deformaciones crecen, cambia la configuración del sistema y se introducen esfuerzos adicionales que se asocian a la geometría deformada de la estructura, lo que hace necesario incluir la no linealidad geométrica también.

Una amplia gama de materiales usados en ingeniería exhiben comportamiento esfuerzo-deformación no lineal bajo condiciones variadas de carga. Los metales y polímeros, por

ejemplo, se deforman en esta forma cuando fluyen plásticamente introduciendo relaciones no lineales esfuerzo-deformación en las ecuaciones gobernantes.

En el proceso de diseño de una estructura sismo resistente el análisis no lineal (cuando se utiliza) toma en cuenta únicamente la no linealidad del material. En un análisis de este tipo se excluye generalmente la no linealidad geométrica y el efecto reside únicamente en las relaciones no lineales esfuerzos-deformación. Debido a que los desplazamientos y deformaciones son relativamente pequeños, los esfuerzos convencionales usados en ingeniería y las medidas de la deformación pueden ser empleados para describir de buena manera la respuesta de la estructura. Si la relación esfuerzos-deformación es no lineal, pero elástica, hay una relación única entre esfuerzos y deformaciones. Sin embargo, si existen deformaciones inelásticas, la relación esfuerzos-deformación depende de un patrón no único.

Consideremos una viga uniforme con área de sección transversal A y longitud L , sujeta a una fuerza que varía con el tiempo $F(t)$ como se muestra la *figura 1.1.a*.

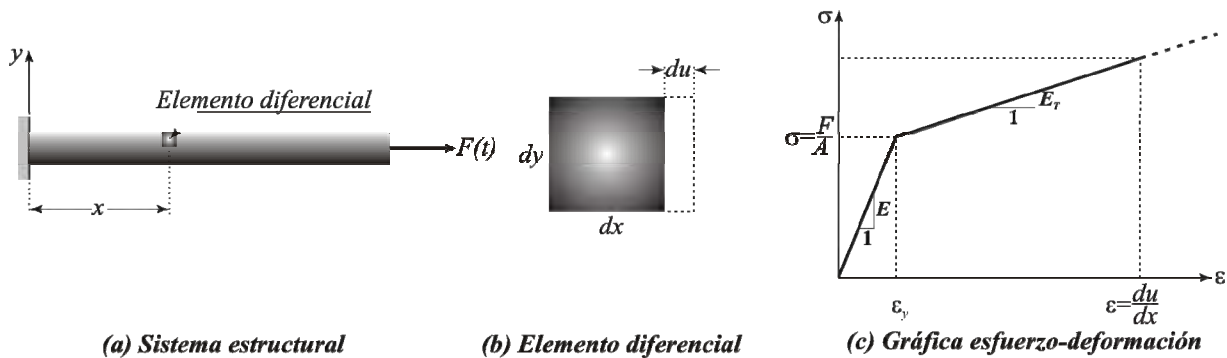


Figura 1.1. No linealidad del material (NLM) desplazamientos pequeños.

Cuando la barra se elonga en el sentido de la aplicación de la fuerza, el elemento diferencial de la barra experimenta una deformación du (*figura 1.1.b*). El esfuerzo en el elemento en cualquier instante de tiempo es simplemente:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (1.1)$$

y la deformación unitaria ϵ en el elemento queda descrita por la relación no lineal esfuerzo-

deformación que se muestra la *figura 1.1.c*. Si el esfuerzo es menor que el esfuerzo de fluencia σ_y , entonces la respuesta es elástica lineal y la deformación está regida por la ley de *Hooke*. Sin embargo, si $\sigma > \sigma_y$, entonces la respuesta es no lineal y la deformación se determina por:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma - \sigma_y}{E_T} \quad (1.2)$$

Donde E es el módulo elástico, E_T es el módulo tangente. Algunos modelos de materiales típicos que pueden ser empleados en este tipo de análisis se presentan en la *tabla 2*.

Tabla 2. Modelos típicos de materiales

Modelo del material	Características	Ejemplos
Elástico lineal o no lineal	- El esfuerzo es función solamente de la deformación; mismo patrón de esfuerzo bajo carga y descarga - Elástico lineal: $\sigma = E\varepsilon$, E es constante - Elástico no lineal: E varía como función de la deformación	Casi todos los materiales presentan deformaciones pequeños: acero, hierro colado, vidrio, concreto, madera, etc., antes de la fluencia o fractura
Hiper elástico	El esfuerzo es calculado del funcional de deformación	Goma parecida al hule, que se ajustan a los modelos de <i>Mooney-Rivlin</i> y <i>Ogden</i>
Hipo elástico	- Los incrementos de esfuerzo son calculados de los incrementos de deformación $d\sigma = E d\varepsilon$ - El módulo E del material se define como función del esfuerzo, deformación, modo de fractura, parámetros de carga y descarga, esfuerzo máximo alcanzado, etc.	Roca, y modelos de mampostería
Elastoplástico	Comportamiento elástico hasta la fluencia, uso de la condición de fluencia, regla de flujo, y regla de endurecimiento para calcular el esfuerzo e incrementos de deformación plástico; los incrementos de deformación plástica son instantáneos	Metales, suelos, roca cuando se someten a grandes esfuerzos

1.2.2. No linealidad geométrica

Este es el tipo de no linealidad tratado más ampliamente en la literatura. Como una consecuencia directa de las relaciones deformación-desplazamiento, las ecuaciones diferenciales gobernantes serán no lineales. Esto es cierto a pesar del hecho de que las relaciones entre los componentes de deformación y desplazamiento se asumen lineales.

La característica esencial de la no linealidad geométrica es que las ecuaciones equilibrio deben escribirse con respecto a la geometría deformada, característica que aún no se conoce. En sistemas multigrados de libertad (especialmente modelos grandes de elemento finito), los problemas con grandes desplazamientos pueden ser analizados en coordenadas Lagrangianas (en este sistema, los cambios ulteriores de posición o propiedades de las partículas son cambios que "siguen al movimiento") o bien en coordenadas Eulerianas (cualquier sistema de coordenadas en el que las propiedades se asignan a puntos determinados del espacio en cada momento dado, sin tratar de identificar por separado las partículas de un momento al siguiente). La formulación Lagrangiana es más conveniente para la solución de problemas de mecánica estructural que la formulación Euleriana.

Existen dos formulaciones básicas Lagrangianas, la Lagrangiana Total (LT) y la Lagrangiana Actualizada (LA). En la formulación cinemática LT , la referencia original del marco permanece estacionaria y todos los desplazamientos, diferenciaciones e integraciones son con respecto a este origen de referencia. En la formulación LA , la referencia en el marco se mueve cuando el cuerpo se deforma. Las diferenciaciones e integraciones se hacen con respecto al estado deformado actual del marco. De este modo la única diferencia teórica entre las dos formulaciones es la elección de la configuración de referencia para las variables. En la práctica, elegir una u otra formulación depende únicamente del tipo de estructura por analizar y de la ley constitutiva empleada.

Para ilustrar el concepto de no linealidad geométrica, consideré una viga en cantiliver como la que se muestra en la *figura 1.2.a*. Para el caso más simple en el que el elemento está sujeto únicamente a fuerza axial, el elemento diferencial (*figura 1.2.b*) sufre una

deformación a lo largo de su eje longitudinal mientras sufre grandes desplazamientos de cuerpo rígido referenciados en base a su configuración deformada (x' , y') como se ilustra en la *figura 1.2.c*.

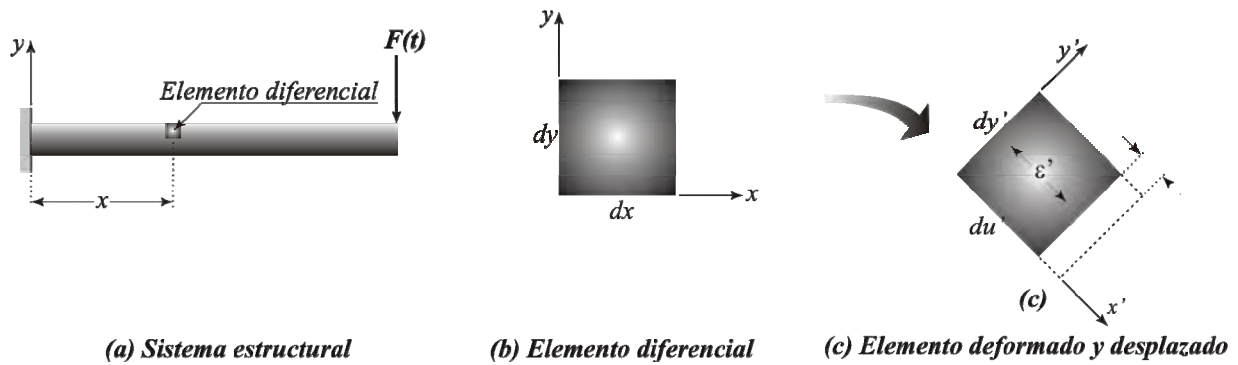


Figura 1.2. No linealidad geométrica.

La relación esfuerzo-deformación del material de la barra puede ser lineal o no lineal, mientras que la magnitud de la deformación unitaria en su configuración deformada permanecerá pequeña, es decir:

$$\varepsilon' = \frac{du'}{dx} \quad (1.3)$$

Para el caso de una barra sujeta a fuerza axial y flexión que es el caso más general de no linealidad geométrica, el elemento diferencial se tuerce significativamente en su configuración deformada como se aprecia en la *figura 1.3.b*. experimentando grandes desplazamientos de cuerpo rígido además de deformación unitaria. El hecho de que el elemento diferencial se tuerza hace que el elemento diferencial presente usualmente una relación esfuerzo-deformación unitaria de tipo no lineal.

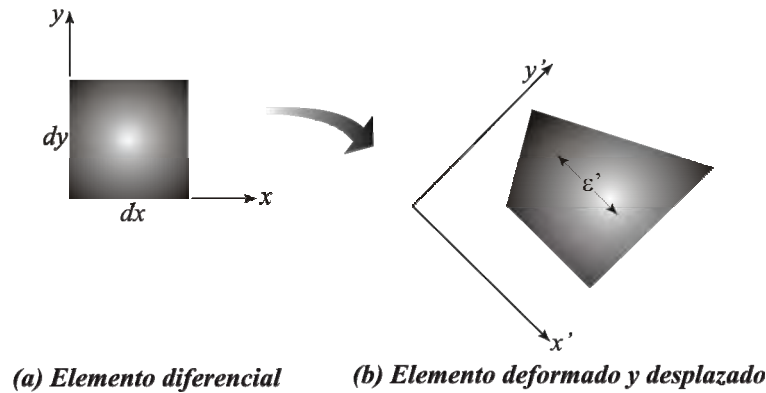


Figura 1.3. No linealidad geométrica generalizada.

1.3. Fuentes de no linealidad

En el análisis elástico se asume que el material no fluye y que sus propiedades permanecen constantes, por tanto las ecuaciones de equilibrio son formuladas sobre la geometría de la estructura sin deformar y para el caso de estructuras pre-esforzadas, referida a la condición inicial. Las deformaciones subsecuentes que tendrá el sistema se consideran muy pequeñas como para afectar de manera significativa al equilibrio y a la manera en la que responde el sistema. Como consecuencia de lo anterior, la carga axial, los momentos flexionantes y los momentos torsionantes se consideran como acciones desacopladas en el desarrollo de las ecuaciones de rigidez.

El comportamiento no lineal se presenta cuando se incluyen los efectos de las deformaciones y los desplazamientos en la formulación de las ecuaciones de equilibrio dando como resultado la no linealidad geométrica. En este tipo de análisis el comportamiento del material seguirá siendo elástico. En la no linealidad del material consideraremos el efecto de los cambios en las propiedades del material bajo la acción de las cargas. En una tercera opción general, podemos incluir en el análisis tanto los efectos de no linealidad geométrica como los de no linealidad del material. En cada caso, deberá tomarse en cuenta la posibilidad de acoplamiento de la carga axial, la flexión y torsión.

Entre las diversas fuentes que causan la no linealidad están las siguientes:

Efectos geométricos:

- Imperfecciones iniciales tales como deflexiones iniciales o desplomes en la erección de los elementos que componen la estructura.
- El efecto $P-\Delta$, un momento desequilibrante igual a la carga de gravedad veces el desplazamiento horizontal que sufre como resultado del desplazamiento lateral de la estructura de soporte.
- El efecto $P-\delta$, como resultado de la fuerza axial sobre la rigidez de flexión de un miembro individual.

Efectos del material:

- Deformaciones plásticas en estructuras de acero.
- Agrietamiento o flujo plástico en estructuras de concreto reforzado.
- Interacción inelástica de la fuerza axial, momento flexionante y torsión.

Efectos combinados:

- Cualquier combinación entre los efectos anteriores más los efectos $P-\Delta$ o $P-\delta$.
- Deformaciones de las conexiones.
- Deformaciones en la zona de panel.
- Contribuciones de discontinuidades por huecos y sistemas secundarios en esfuerzos y deformaciones.

1.4. Niveles de análisis

Si fuera posible modelar todas las fuentes de no linealidad para definir el comportamiento de una estructura en la práctica en todo su detalle, el problema sería el seleccionar el nivel de análisis que refleje el ideal en una o en otra forma pero que proporcione una simulación analítica adecuada de la estructura en estudio.

Los niveles más comunes de análisis se presentan en la *figura 1.4* mediante la gráfica de respuesta esquemática carga-desplazamiento de un marco cargado estáticamente. El grado en que estos niveles pueden describir el comportamiento de la estructura difiere, pero cada uno de ellos proporciona información de diferente tipo al ingeniero diseñador o estructurista.

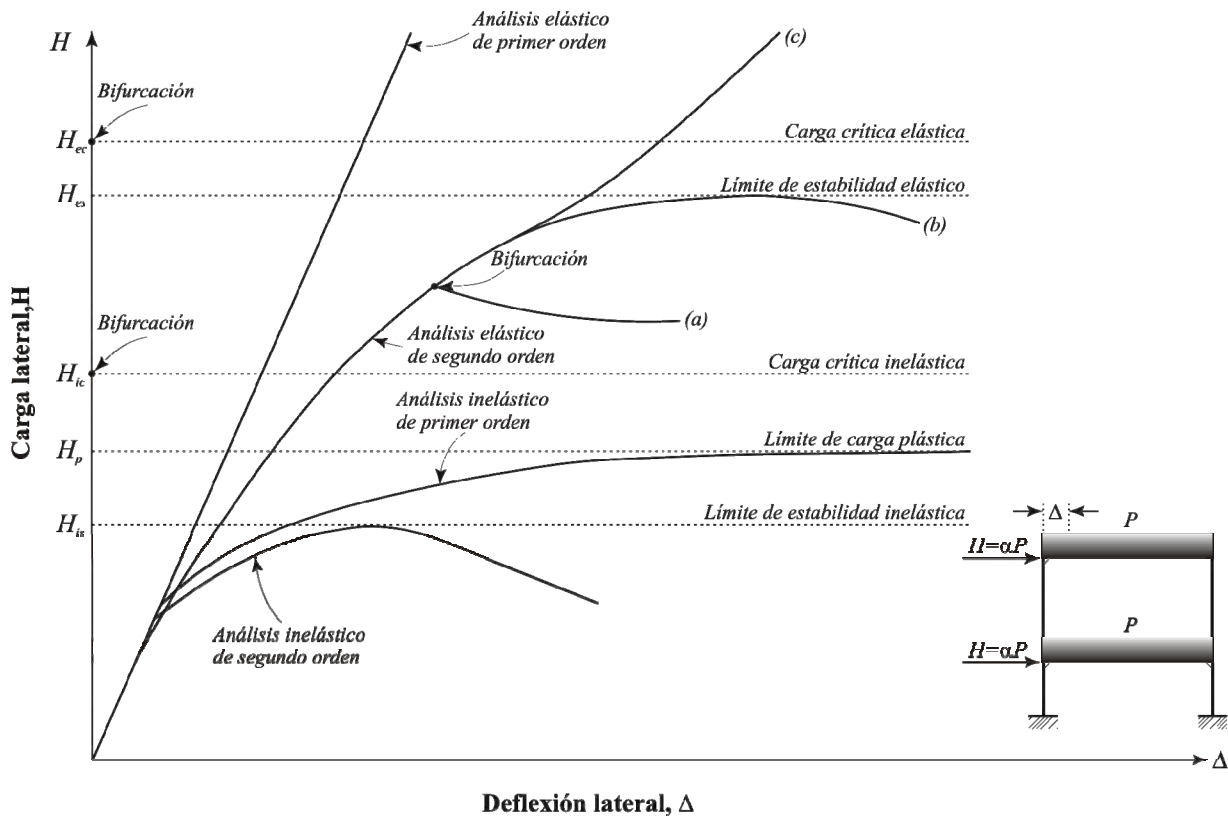


Figura 1.4. Gráfica carga-desplazamiento para los diferentes niveles de análisis.

Por definición, el *análisis elástico (lineal) de primer orden* excluye la no linealidad y es especialmente adecuado para estados límite de servicio aunque también es válido para estados límite últimos en vigas continuas y marcos indesplazables, en los que el efecto del desplazamiento transversal de los nudos puede despreciarse desde el punto de vista de la estabilidad del conjunto y para obtener esfuerzos de primer orden en marcos desplazables, en los que los efectos de segundo orden sean despreciables.

La *carga elástica crítica* es la carga en la cual tanto el patrón original de carga como uno alternativo son válidos matemáticamente y puede mostrarse que el patrón tomado desde este punto es alternativo. La carga se determina comúnmente mediante un *análisis de eigenvalores* de un modelo elástico idealizado de la estructura. El análisis también produce el *Eigenvector* que proporciona la configuración de la forma que asume el sistema en el estado post-crítico, sin determinar su amplitud. La *carga crítica inelástica* se define y calcula de manera similar, pero en esta se considera en el análisis la posibilidad de comportamiento pre-crítico inelástico en el material. El análisis para la determinación de la carga crítica puede no incluir el fenómeno no lineal que debe ser tomado en cuenta para determinar de manera precisa la magnitud de la carga capaz de producir la falla, en la mayoría de los casos este tipo de análisis proporciona una idea bastante adecuada del posible tipo de falla de la estructura.

En un *análisis elástico de segundo orden* el efecto de las deformaciones finitas y desplazamientos del sistema se incluyen al plantear las ecuaciones de equilibrio. Un análisis de este tipo puede producir una representación excelente de la influencia desestabilizadora del efecto $P-\Delta$, pero no incluye la no linealidad del material. En la *figura 1.4* se muestran varios de los posibles modos de comportamiento elástico no lineal como: (a) la bifurcación del patrón de carga seguido de un patrón alterno en el estado post-crítico; (b) el incremento gradual de no linealidad culminando en inestabilidad elástica en el punto límite; y (c) el incremento de rigidez debido a la carga, seguida de un periodo de ablandamiento gradual.

En el *análisis inelástico de primer orden* las ecuaciones de equilibrio se escriben en términos de la geometría de la estructura sin deformar. Las regiones inelásticas pueden desarrollarse gradualmente o mediante cambios abruptos en la respuesta de la estructura, si se adopta el concepto de articulación plástica. Cuando los efectos desestabilizantes de los desplazamientos finitos son insignificantes, el análisis inelástico de primero orden produce una buena representación del comportamiento elasto-plástico y su falla a través de los mecanismos colapso.

En el *análisis inelástico de segundo orden* las ecuaciones de equilibrio se escriben en términos de la geometría deformada del sistema. Esto tiene el potencial de considerar los

factores geométricos, elásticos, y del material que influyen en la respuesta de la estructura. Así, en principio y en un sentido determinista permite la preparación de modelos analíticos capaces de simular fielmente el comportamiento real y calcular el límite de estabilidad inelástico, es decir, el punto en el cual se agota la capacidad de un sistema para resistir carga adicional mientras que la deformación continua derivando en una disminución de la capacidad de resistencia a la carga.

Probablemente el modo de falla más común en estructuras es el que sigue un patrón de respuesta elástica o inelástica no lineal que culmina en la inestabilidad del sistema, una vez que se han formado los mecanismos de colapso.

Capítulo 2

Método de las rigideces

2.1. Generalidades

El método de las rigideces es un método de análisis general que permite modelar estructuras bidimensionales y tridimensionales mediante el uso de elementos barra. El método es conocido también como el método de los desplazamientos debido a que en su formulación las incógnitas son los desplazamientos.

El método consiste en restringir los desplazamientos de la estructura a fin de analizar cada elemento en forma individual (*solución primaria*). Al restringir los desplazamientos incurrimos en la violación de las condiciones de equilibrio, mismo que debe ser restablecido al calcular la magnitud de los desplazamientos (*solución complementaria*).

Lo anterior se logra al establecer a través de los principios de elasticidad y condiciones de equilibrio la relación existente entre las cargas externas y los desplazamientos que éstas generan en los elementos de la estructura, y a partir de esta relación determinar los desplazamientos en cada uno de los nodos y con ello los elementos mecánicos en cada una de las barras que forman la estructura.

El método presenta varias ventajas de entre las que destacan su aplicación a estructuras estáticamente determinadas e indeterminadas, sin embargo, la ventaja más significativa es la relativa facilidad con la que puede ser programado.

2.1.1. Sistemas de referencia

Trabajaremos con un sistema coordenado derecho de ejes ortogonales identificado por los símbolos x , y y z como se muestra en la *figura 2.1*. en la que los ejes permanecen fijos mientras se deforma la estructura.

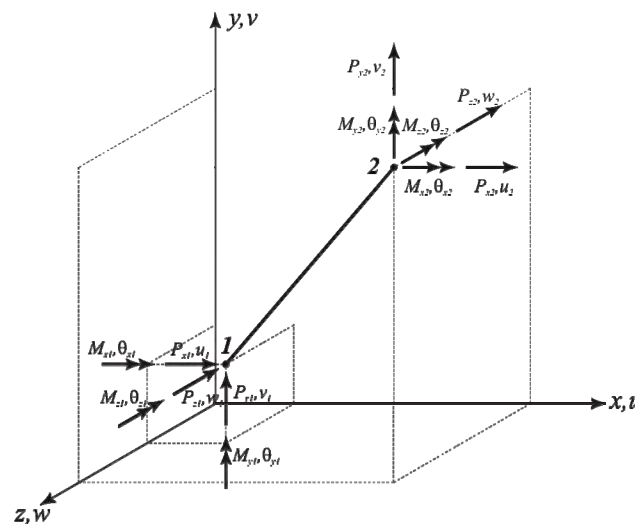


Figura 2.1. Sistema coordenado derecho.

Distinguiremos entre *sistema coordenado global* y *local*. El sistema global se establece para la estructura completa (x' , y' , z'). El sistema local (x , y , z) permanece fijo con

respecto a cada elemento, este sistema diferirá de elemento a elemento debido a que la orientación de los elementos difieren unos a otros dentro de la estructura, para establecer el sistema local se parte de que el eje x coincidirá con el eje longitudinal de la barra y el eje y se establece acorde con la regla de la mano derecha.

En la figura 2.2 se muestran los dos sistemas de referencia para una estructura.

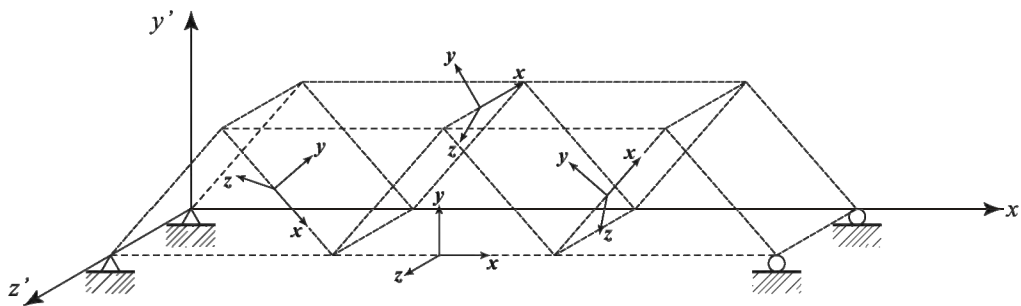


Figura 2.2. Sistema de referencia local y global.

Para ilustrar el hecho de que toda estructura deberá de cumplir con las condiciones de equilibrio y compatibilidad, considérese un nodo " i " de una estructura cualquiera al que concurren varias barras y que está sujeto a un vector de cargas $\{P_i\}$ como se ilustra en la figura 2.3.

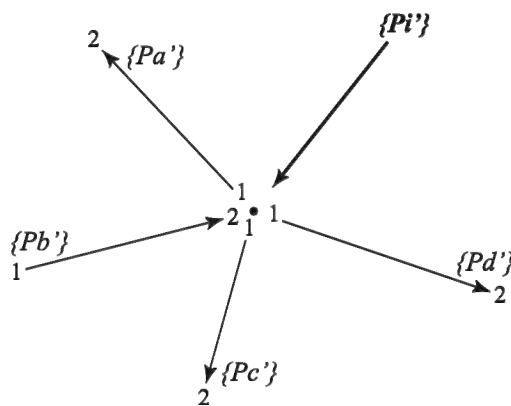


Figura 2.3. Estudio del equilibrio en el nodo i .

Por equilibrio, la carga aplicada debe ser igual a la suma de las fuerzas internas actuando en las barras que convergen en el nodo " i "

$$\{P'_i\} = \{P'_{1a}\} + \{P'_{2b}\} + \{P'_{1c}\} + \{P'_{1d}\} \quad (2.1)$$

Por compatibilidad de desplazamientos, el desplazamiento que ocurre en el extremo de las barras que concurren al nodo “i” debe ser igual al desplazamiento en dicho nodo $\{d'_i\}$.

$$\{d'_i\} = \{d'_{1a}\} = \{d'_{2b}\} = \{d'_{1c}\} = \{d'_{1d}\} \quad (2.2)$$

Acoplando el vector de cargas y desplazamientos en forma matricial, podemos establecer una relación entre estos dos vectores para cualquier estructura mediante una matriz de coeficientes definida, tal que:

$$\{P\} = [k]\{d\} \quad (2.3)$$

donde $[k]$ es la matriz de rigideces de la estructura y $\{P\}$ y $\{d\}$ son respectivamente los vectores de carga y desplazamientos. Un término individual de la matriz $[k]$, k_{ij} es un elemento de la matriz de coeficientes. Si imponemos un valor unitario al desplazamiento $\{d_i\}$ mientras que todos los demás grados de libertad permanecen restringidos contra el movimiento ($\{d_k\}=0$ para $k \neq i$) entonces la fuerza P_j es igual en valor a k_{ij}

Si en cualquier tipo de estructura las relaciones fuerza desplazamiento de la ecuación 2.3 satisfacen de manera adecuada las leyes del material (*relaciones constitutivas*) y los requerimientos de equilibrio dentro de los elementos, y si además se asignan los soportes adecuados (*condiciones de frontera*) al ensamble de la estructura, entonces se satisfacen todos los elementos para una solución exacta.

2.1.2. Matriz de rotación

Recordemos que podemos representar a los desplazamientos (traslaciones y rotaciones) mediante vectores exactamente de la misma forma que a las fuerzas (fuerzas directas y momentos) por lo que las reglas de transformación para fuerzas y desplazamientos es idéntica. En la *figura 2.4* se muestra el vector de cargas generalizado en el sistema local y en la *figura 2.5* los ángulos formados entre los sistemas local y global.

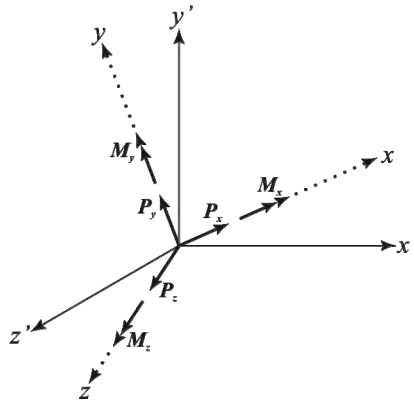


Figura 2.4. Vector de cargas generalizado.

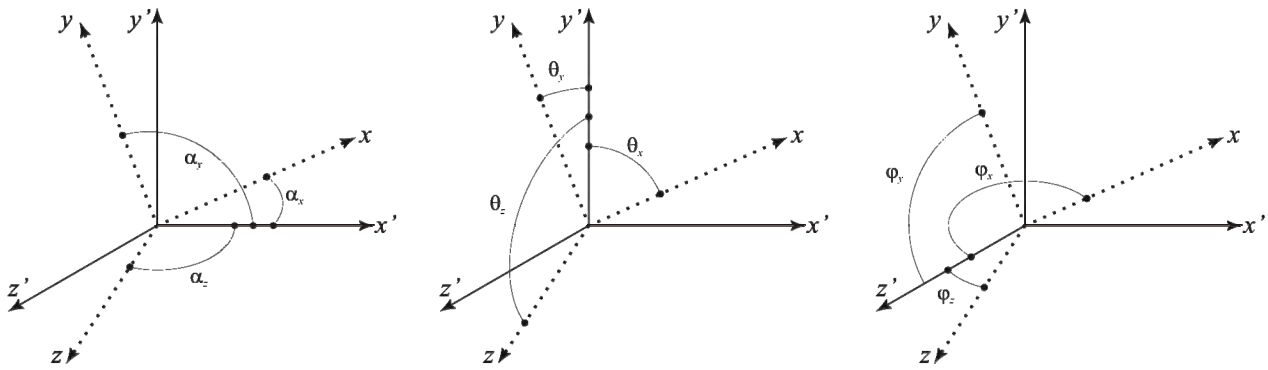


Figura 2.5. Ángulos entre el sistema local y global.

La rotación se lleva a cabo mediante cosenos directores. Para las componentes globales de las cargas:

$$P_{x'} = P_x \cos \alpha_x + P_y \cos \alpha_y + P_z \cos \alpha_z \quad (2.4)$$

$$P_{y'} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z$$

$$P_{z'} = P_x \cos \varphi_x + P_y \cos \varphi_y + P_z \cos \varphi_z$$

y para los momentos

$$M_{x'} = M_x \cos \alpha_x + M_y \cos \alpha_y + M_z \cos \alpha_z \quad (2.5)$$

$$M_{y'} = M_x \cos \theta_x + M_y \cos \theta_y + M_z \cos \theta_z$$

$$M_{z'} = M_x \cos \varphi_x + M_y \cos \varphi_y + M_z \cos \varphi_z$$

Usando los símbolos l , m y n con los subíndices apropiados para designar los cosenos directores de las nueve direcciones angulares entre los ejes locales y globales en las expresiones 2.4 y 2.5 usando notación matricial:

$$\begin{Bmatrix} P_{x'} \\ P_{y'} \\ P_{z'} \\ M_{x'} \\ M_{y'} \\ M_{z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z & 0 & 0 & 0 \\ m_x & m_y & m_z & 0 & 0 & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_x & l_y & l_z \\ 0 & 0 & 0 & m_x & m_y & m_z \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

en forma simplificada

$$\{P'\} = [T]\{P\} \text{ o por transposición } \{P\} = [T]^T \{P'\} \quad (2.7)$$

donde:

$\{P'\}$ = vector de cargas en el sistema global

$[T]$ = matriz de rotación

$\{P\}$ = vector de cargas en el sistema local

La representación de los desplazamientos mediante vectores tal como si se trataran de fuerzas nos conduce al uso del mismo procedimiento de transformación para estos.

$$\{d\} = [T]^T \{d'\} \text{ o por transposición } \{d'\} = [T]\{d\} \quad (2.8)$$

Las ecuaciones 2.7 y 2.8 reciben el nombre de "Principio de contragradencia" y su interés principal es que si la rotación de fuerza se define primero como en la ecuación 2.7, entonces la matriz de rotación de desplazamientos de la ecuación 2.8 se da mediante la transposición de la matriz de rotación de fuerzas de la ecuación 2.7.

Para la determinación de la matriz de rigideces en el sistema global partamos de la ecuación 2.3

$$\{P\} = [k]\{d\}$$

premultiplicando la expresión anterior por la matriz de rotación $[T]$ y sustituyendo la ecuación 2.8,

$$[T]\{P\} = [T][k][T]^T \{d'\} \quad (2.9)$$

sustituyendo la ecuación 2.7

$$\{P'\} = [T][k][T]^T \{d'\} \quad (2.10)$$

podemos ver que tanto el vector de carga como el de desplazamiento se encuentran en el sistema global, por lo que concluimos que:

$$[k'] = [T][k][T]^T \quad (2.11)$$

esta ecuación representa la rotación de la matriz de rigideces del sistema local al global.

2.2. Matriz de rigideces

Tratándose de análisis no lineal geométrico la matriz de rigideces total está formada por la matriz de rigideces elástica k_e más la matriz de rigideces geométrica k_g , es decir:

$$[k] = [k_e] + [k_g] \quad (2.12)$$

Para la determinación de la matriz de rigideces haremos uso del principio de los trabajos virtuales y funciones de forma para un elemento prismático de sección transversal constante sujeto a la acción de una fuerza axial, cortante y flexión respecto al eje z , despreciando la deformación por cortante. Este elemento y su carga proporcionan un claro ejemplo de la formulación de las propiedades de rigidez para el análisis geométrico no lineal. Para una barra sujeta a los seis elementos mecánicos la formulación se hará de manera similar.

2.2.1. Elementos sujetos a fuerza axial

Primeramente trataremos el caso en el que no existe flexión considerando deformaciones pequeñas finitas sobre un elemento diferencial de longitud dx . Asumimos que el elemento es recto y que se deforma libremente en el sistema de referencia y, debido a que consideramos únicamente deformaciones axiales, podremos tratar el problema como unidimensional *figura 2.6*.

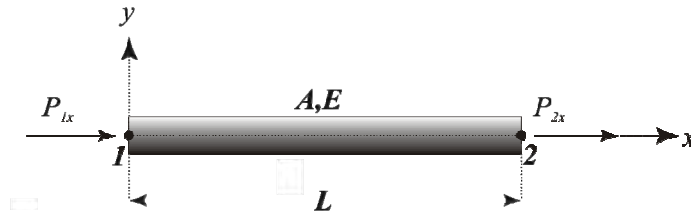


Figura 2.6 Elemento sujeto a fuerza axial

Si estudiamos un elemento diferencial ab como el de la *figura 2.7*, su longitud después del desplazamiento y la deformación axial es:

$$a'b' = \sqrt{\left(dx + \frac{du}{dx} dx\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} dx\right)^2}$$

desarrollando

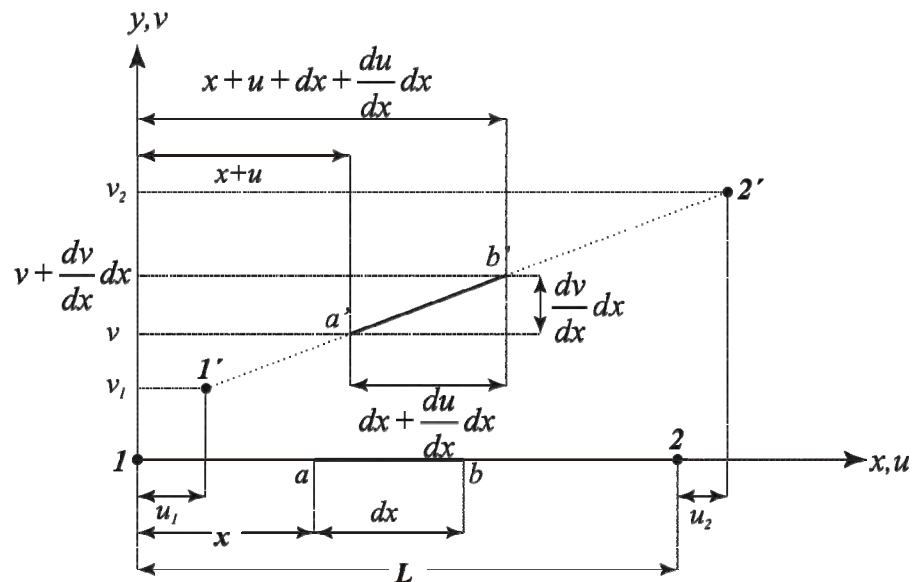


Figura 2.7 Desplazamiento y deformación del elemento diferencial ab

$$a'b' = \sqrt{\left(1 + \frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} dx$$

$$a'b' = \sqrt{1 + 2\frac{du}{dx} + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} dx \quad (2.13)$$

si llamamos

$$2\frac{du}{dx} + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = d_{ab}$$

$$\frac{a'b'}{dx} = (1 + d_{ab})^{1/2}$$

expandiendo mediante el teorema del binomio de una potencia m , el cual establece

$$(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2!} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \dots$$

y despreciando los términos de orden superior

$$\frac{a'b'}{dx} = 1 + \frac{1}{2}d_{ab}$$

$$\frac{a'b'}{dx} = 1 + \frac{1}{2}\left[2\frac{du}{dx} + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]$$

$$\frac{a'b'}{dx} = 1 + \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right] \quad (2.14)$$

la deformación lineal unitaria queda definida como:

$$\varepsilon = \frac{a'b' - ab}{ab}$$

pero

$$ab = dx$$

con lo cual

$$\varepsilon = \frac{a'b' - dx}{dx}$$

$$\varepsilon = \frac{a'b'}{dx} - 1$$

sustituyendo en la ecuación 2.14

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] \quad (2.15)$$

aplicando el principio del trabajo virtual, el incremento del trabajo interno se determina como:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{\text{vol}} \delta \varepsilon \sigma_x d\text{vol} \quad (2.16)$$

sustituyendo la ecuación 2.15 en la ecuación 2.16

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{\text{vol}} \delta \left\{ \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] \right\} \sigma_x d\text{vol}$$

considerando que el área A de la sección transversal es constante

$$d\text{vol} = A dx$$

integrando sobre la longitud del elemento, obtenemos:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^L \left(\frac{\delta du}{dx} \right) \sigma_x A dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left[\delta \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \delta \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] \sigma_x A dx \quad (2.17)$$

considerando para la primer integral de la ecuación 2.17 que:

$$\delta \left(\frac{du}{dx} \right) = \left(\frac{d \delta u}{dx} \right)$$

lo cual es válido para desplazamientos pequeños, tenemos

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^L \left(\frac{d \delta u}{dx} \right) \sigma_x A dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left[\delta \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \delta \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] \sigma_x A dx \quad (2.18)$$

utilizando para la primera integral la relación esfuerzo deformación

$$\sigma_x = E\varepsilon$$

$$\sigma_x = E \frac{du}{dx}$$

y considerando para la segunda

$$\sigma_x A = P_{x2}$$

podemos escribir la ecuación 2.18 como:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^L \left(\frac{d\delta u}{dx} \right) EA \left(\frac{du}{dx} \right) dx + \frac{1}{2} P_{x2} \int_0^L \left[\delta \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \delta \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (2.19)$$

el operador virtual δ puede tratarse como un operador diferencial con respecto a $\frac{du}{dx}$ y $\frac{dv}{dx}$,

por tanto, el incremento del trabajo interno puede escribirse como:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^L \frac{d\delta u}{dx} EA \frac{du}{dx} dx + P_{x2} \int_0^L \left[\frac{d\delta u}{dx} \frac{du}{dx} + \frac{d\delta v}{dx} \frac{dv}{dx} \right] dx \quad (2.20)$$

considerando que la primera integral produce la matriz de rigidez elástica $[k_e]$ y la segunda la matriz de rigidez geométrica $[k_g]$, trabajaremos cada una de ellas por separado; así para la primera integral el incremento del trabajo interno puede escribirse como:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^L \frac{d\delta u}{dx} EA \frac{du}{dx} dx \quad (2.21)$$

por otro lado, partiendo de que podemos conocer los desplazamientos en cualquier punto de la barra a partir de los desplazamientos nodales mediante las funciones de forma, es decir,

$$u = [N_u] \{u_n\} \quad (2.22)$$

donde:

u = desplazamiento en cualquier punto de la barra

$[N_u]$ = Funciones de forma

$\{u_n\}$ = vector de desplazamientos nodales en dirección x

derivando la ecuación 2.22 respecto a x

$$\frac{du}{dx} = \left[\frac{dN_u}{dx} \right] \{u_n\} \quad (2.23)$$

de la misma ecuación 2.22,

$$\delta u = [N_u] \{\delta u_n\}$$

derivando

$$\frac{d\delta u}{dx} = \left[\frac{dN_u}{dx} \right] \{\delta u_n\}$$

la ecuación anterior se puede escribir:

$$\frac{d\delta u}{dx} = \{\delta u_n\}^T \left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T \quad (2.24)$$

sustituyendo las ecuaciones 2.23 y 2.24 en la ecuación 2.21

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^L \{\delta u_n\}^T \left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T EA \left[\frac{dN_u}{dx} \right] \{u_n\} dx \quad (2.25)$$

Por otro lado, el incremento del trabajo virtual externo puede expresarse como:

$$\delta W_{\text{ext}} = -\{\delta u_n\}^T \{P_n\} \quad (2.26)$$

aplicando el principio del trabajo virtual:

$$\delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = 0 \quad (2.27)$$

sustituyendo las ecuaciones 2.25 y 2.26 en la ecuación 2.27:

$$\int_0^L \{\delta u_n\}^T \left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T EA \left[\frac{dN_u}{dx} \right] \{u_n\} dx = \{\delta u_n\}^T \{P_n\}$$

como el incremento en los desplazamientos nodales no es función de x, se puede escribir:

$$\{\delta u_n\}^T \left(\int_0^L \left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T EA \left[\frac{dN_u}{dx} \right] dx \right) \{u_n\} = \{\delta u_n\}^T \{P_n\} \quad (2.28)$$

de donde:

$$\left(\int_0^L \left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T EA \left[\frac{dN_u}{dx} \right] dx \right) \{u_n\} = \{P_n\} \quad (2.29)$$

comparando la ecuación 2.29 con la ecuación fuerza desplazamiento, concluimos que:

$$[k_e] = \int_0^L \left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T EA \left[\frac{dN_u}{dx} \right] dx \quad (2.30)$$

La figura 2.8 muestra los desplazamientos nodales en dirección x

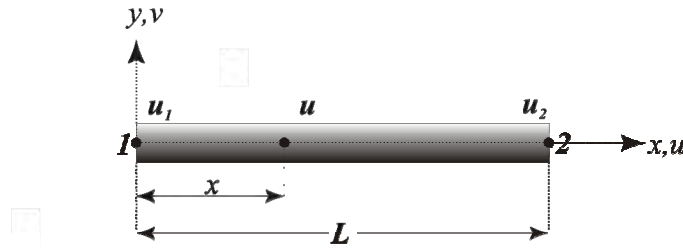


Figura 2.8 Desplazamientos nodales en dirección x

El desplazamiento en cualquier punto de la barra se puede expresar a través de un polinomio de interpolación como:

$$u = ax + b \quad (2.31)$$

aplicando condiciones iniciales,

$$\text{si } x=0 \quad u_{x=0} = u_1$$

$$\text{si } x=L \quad u_{x=L} = u_2$$

sustituyendo en la ecuación 2.31

$$u_1 = b$$

$$u_2 = aL + b$$

arreglando en forma matricial

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$$

solucionando para a y b

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

arreglando en forma matricial la ecuación 2.31

$$u = \begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

sustituyendo la ecuación 2.32 en la 2.33

$$u = \begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

desarrollando el producto

$$u = \begin{bmatrix} -\frac{x}{L} + 1 & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

comparando término a término la ecuación 2.22 con la ecuación 2.34, podemos ver que las funciones de forma $[N_u]$ quedan definidas como:

$$[N_u] = \begin{bmatrix} -\frac{x}{L} + 1 & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

derivando respecto a x

$$\left[\frac{dN_u}{dx} \right] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

sustituyendo la ecuación 2.36 en 2.30

$$[k_e] = \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx$$

desarrollando el producto e integrando término a término

$$[k_e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

aplicando un proceso similar para la segunda integral de la ecuación 2.20

$$\delta W_{\text{int}} = P_{x2} \int_0^L \left[\frac{d\delta u}{dx} \frac{du}{dx} + \frac{d\delta v}{dx} \frac{dv}{dx} \right] dx \quad (2.38)$$

los desplazamientos en la dirección v se pueden escribir en función de los desplazamientos nodales y de las funciones de forma como:

$$v = [N_v] \{v_n\} \quad (2.39)$$

donde:

v = desplazamiento en cualquier punto de la barra

$[N_v]$ = Funciones de forma

$\{v_n\}$ = vector de desplazamientos nodales en dirección y

derivando la ecuación 2.39 respecto a x

$$\frac{dv}{dx} = \left[\frac{dN_v}{dx} \right] \{v_n\} \quad (2.40)$$

de la ecuación 2.39 se puede obtener

$$\delta v = [N_v] \{\delta v_n\}$$

derivando

$$\frac{d\delta v}{dx} = \left[\frac{dN_v}{dx} \right] \{\delta v_n\}$$

la expresión anterior se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{d\delta v}{dx} = \{\delta v_n\}^T \left[\frac{dN_v}{dx} \right]^T \quad (2.41)$$

sustituyendo las ecuaciones 2.23, 2.24, 2.40 y 2.41 en la ecuación 2.38

$$\delta W_{\text{int}} = P_{x2} \int_0^L \left(\{\delta u_n\}^T \left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_u}{dx} \right] \{u_n\} + \{\delta v_n\}^T \left[\frac{dN_v}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_v}{dx} \right] \{v_n\} \right) dx \quad (2.42)$$

por otro lado, el incremento del trabajo virtual externo puede expresarse como:

$$\delta W_{ext} = -\{\delta u_n\}^T \{P_{nu}\} - \{\delta v_n\}^T \{P_{nv}\} \quad (2.43)$$

aplicando el principio del trabajo virtual

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0$$

sustituyendo las ecuaciones 2.42 y 2.43

$$P_{x2} \int_0^L \left(\{\delta u_n\}^T \left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T \frac{dN_u}{dx} \{u_n\} + \{\delta v_n\}^T \left[\frac{dN_v}{dx} \right]^T \frac{dN_v}{dx} \{v_n\} \right) dx = \{\delta u_n\}^T \{P_{nu}\} + \{\delta v_n\}^T \{P_{nv}\} \quad (2.44)$$

de donde se puede concluir

$$[k_{gu}] = P_{x2} \int_0^L \left[\frac{dN_u}{dx} \right]^T \frac{dN_u}{dx} dx \quad (2.45)$$

$$[k_{gv}] = P_{x2} \int_0^L \left[\frac{dN_v}{dx} \right]^T \frac{dN_v}{dx} dx \quad (2.46)$$

utilizando el mismo polinomio de interpolación para los desplazamientos en la dirección v

$$v = ax + b \quad (2.47)$$

aplicando condiciones iniciales,

$$\text{si } x = 0 \quad v_{x=0} = v_1$$

$$\text{si } x = L \quad v_{x=L} = v_2$$

sustituyendo en la ecuación 2.47

$$v_1 = b$$

$$v_2 = aL + b$$

arreglando en forma matricial

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$$

solucionando para a y b

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

escribiendo la ecuación 2.47 en forma matricial

$$v = \begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

sustituyendo la ecuación 2.48 en 2.49 y desarrollando el producto

$$v = \begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} -\frac{x}{L} + 1 & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

comparando término a término la ecuación 2.50 con la ecuación 2.39, podemos ver que las funciones de forma $[N_v]$ quedan definidas como:

$$[N_v] = \begin{bmatrix} -\frac{x}{L} + 1 & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

derivando respecto a x

$$\left[\frac{dN_v}{dx} \right] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

sustituyendo las ecuaciones 2.36 y 2.52 en 2.45 y 2.46 respectivamente

$$[k_{gu}] = P_{x2} \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx$$

$$[k_{gu}] = \frac{P_{x2}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$$[k_{gv}] = P_{x2} \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx$$

$$[k_{gv}] = \frac{P_{x2}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

reorganizando los grados de libertad, podemos escribir la matriz de rigideces geométrica como:

$$[k_g] = \frac{P_{x2}}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

de tal manera que la matriz de rigidez geométrica es función solamente de la fuerza axial actuando sobre el elemento en la configuración de referencia.

2.2.2. Elementos sujetos a fuerza axial y flexión

Para determinar la matriz de rigideces, debemos considerar la deformación por carga axial y por flexión.

De mecánica de materiales sabemos que la deformación por flexión se expresa como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} \\ \sigma_x &= -\frac{M_z y}{I_z} \\ \varepsilon_x &= -\frac{M_z y}{EI_z} \end{aligned}$$

pero

$$\frac{M_z}{EI_z} = \frac{d^2 v}{dx^2}$$

sustituyendo las expresiones anteriores

$$\varepsilon_x = -y \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (2.56)$$

La ecuación 2.56 nos permite valorar la deformación por flexión. La deformación total ε_{total} se determina como la suma de la deformación por carga axial ε , ecuación 2.15, más la deformación por flexión ε_x , ecuación 2.56

$$\varepsilon_{total} = \varepsilon + \varepsilon_x$$

sustituyendo las ecuaciones 2.15 y 2.56

$$\varepsilon_{total} = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] - y \frac{d^2v}{dx^2}$$

reordenando

$$\varepsilon_{total} = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] \quad (2.57)$$

por otro lado, el incremento de trabajo virtual interno esta dado por:

$$\delta W_{int} = \int_{vol} \delta \varepsilon \sigma_x dvol \quad (2.58)$$

sustituyendo la ecuación 2.57 en la 2.58

$$\delta W_{int} = \int_{vol} \left\{ \delta \frac{du}{dx} - y \delta \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{2} \delta \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] \right\} \sigma_x dvol \quad (2.59)$$

considerando que el área A de la sección transversal es constante e integrando sobre la longitud, y que el operador virtual δ puede tratarse como un operador diferencial con respecto a $\frac{du}{dx}$ y $\frac{dv}{dx}$, tal que,

$$\delta \left(\frac{dv}{dx} \right) = \frac{d\delta v}{dx}$$

$$\delta \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right) = \frac{d^2\delta v}{dx^2}$$

el incremento de trabajo virtual interno puede escribirse como:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^L \frac{d\delta u}{dx} \sigma_x A dx - \int_0^L \int_A y \frac{d^2 \delta v}{dx^2} \sigma_x dA dx + \frac{1}{2} \int_0^L \delta \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] \sigma_x A dx \quad (2.60)$$

considerando para la segunda integral de la ecuación 2.60 que:

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z}$$

$$\int_A y^2 dA = I_z$$

el incremento de trabajo virtual interno será:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^L \frac{d\delta u}{dx} \sigma_x A dx + \int_0^L \frac{d^2 \delta v}{dx^2} M_z dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left[\delta \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \delta \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] \sigma_x A dx$$

sustituyendo para la primera, segunda y tercera integral respectivamente

$$\sigma_x = E \frac{du}{dx}$$

$$M_z = \frac{d^2 v}{dx^2} EI$$

$$\sigma_x = \frac{P_{x2}}{A}$$

obtenemos:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^L \frac{d\delta u}{dx} EA \frac{du}{dx} dx + \int_0^L \frac{d^2 \delta v}{dx^2} EI \frac{d^2 v}{dx^2} dx + \frac{1}{2} P_{x2} \int_0^L \left[\delta \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \delta \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (2.61)$$

De la primera integral se obtiene la matriz elástica por carga axial $[k_e]$, de la segunda integral, la matriz de rigideces elástica por flexión y cortante $[k_e]$ y de la tercera integral, la matriz de rigideces geométrica por carga axial, flexión y cortante $[k_g]$.

La segunda integral que corresponde a la matriz de rigideces elástica por flexión y cortante, queda definida por:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^L \frac{d^2 \delta v}{dx^2} EI \frac{d^2 v}{dx^2} dx \quad (2.62)$$

el desplazamiento vertical en cualquier punto de la barra en dirección v puede determinarse a partir de los desplazamientos nodales y las funciones de forma como:

$$v = [N_v] \{v_n\} \quad (2.63)$$

con el siguiente vector de desplazamientos

$$\{v_n\}^T = \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}$$

calculando la segunda derivada de la *ecuación 2.63* respecto a x

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \left[\frac{d^2 N_v}{dx^2} \right] \{v_n\} \quad (2.64)$$

de la misma *ecuación 2.63*

$$\begin{aligned} \delta v &= [N_v] \{\delta v_n\} \\ \frac{d \delta^2 v}{dx^2} &= \left[\frac{d^2 N_v}{dx^2} \right] \{\delta v_n\} \end{aligned}$$

o bien,

$$\frac{d \delta^2 v}{dx^2} = \{\delta v_n\}^T \left[\frac{d^2 N_v}{dx^2} \right]^T \quad (2.65)$$

sustituyendo las *ecuaciones 2.64 y 2.65* en la *ecuación 2.62*

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^L \{\delta v_n\}^T \left[\frac{d^2 N_v}{dx^2} \right]^T EI \left[\frac{d^2 N_v}{dx^2} \right] \{v_n\} dx$$

por otro lado, el incremento de trabajo virtual externo esta dado por

$$\delta W_{\text{ext}} = -\{\delta v_n\}^T \{P_n\}$$

aplicando el principio del trabajo virtual

$$\delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = 0$$

sustituyendo

$$\int_0^L \{\delta v_n\}^T \left[\frac{d^2 N_v}{dx^2} \right]^T EI \left[\frac{d^2 N_v}{dx^2} \right] \{v_n\} dx = \{\delta v_n\}^T \{P_n\}$$

como el incremento en los desplazamientos nodales no es función de x , se puede escribir:

$$\{\delta u_n\}^T \left(\int_0^L \left[\frac{d^2 N_v}{dx^2} \right]^T EI \left[\frac{d^2 N_v}{dx^2} \right] dx \right) \{v_n\} = \{\delta u_n\}^T \{P_n\} \quad (2.66)$$

de donde:

$$\left(\int_0^L \left[\frac{d^2 N_v}{dx^2} \right]^T EI \left[\frac{d^2 N_v}{dx^2} \right] dx \right) \{v_n\} = \{P_n\} \quad (2.67)$$

comparando término a término la ecuación 2.67 con la ecuación fuerza desplazamiento, concluimos que:

$$[k_e] = \int_0^L \left[\frac{d^2 N_v}{dx^2} \right]^T EI \left[\frac{d^2 N_v}{dx^2} \right] dx \quad (2.68)$$

para determinar las funciones de forma $[n_v]$ el desplazamiento v puede expresarse como función de un polinomio de interpolación como:

$$v = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (2.69)$$

derivando la ecuación 2.70, se obtiene el desplazamiento angular

$$\phi = 3ax^2 + 2bx + c \quad (2.70)$$

aplicando condiciones de apoyo

$$\text{si } x=0 \quad v_{x=0} = v_1 \quad \phi_{x=0} = \phi_1$$

$$\text{si } x=L \quad v_{x=L} = v_2 \quad \phi_{x=L} = \phi_2$$

sustituyendo en las ecuaciones 2.69 y 2.70

$$v_1 = d$$

$$\phi_1 = c$$

$$v_2 = aL^3 + bL^2 + cL + d$$

$$\phi_2 = 3aL^2 + 2bL + c$$

solucionando para a , b , c y d y escribiendo en forma matricial

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^3} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (2.71)$$

escribiendo la ecuación 2.69 en forma matricial

$$v = \begin{bmatrix} x_3 & x_2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} \quad (2.72)$$

sustituyendo la ecuación 2.71 en la 2.72

$$v = \begin{bmatrix} x_3 & x_2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^3} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}$$

desarrollando el producto

$$v = \left[\frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1 \quad \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x \quad -\frac{2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2} \quad \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \right] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (2.73)$$

comparando término a término la ecuación 2.63 con la ecuación 2.73

$$[N_v] = \left[\frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1 \quad \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x \quad -\frac{2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2} \quad \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \right]$$

calculando la primera y segunda derivadas:

$$\left[\frac{dN_v}{dx} \right] = \left[\frac{6x^2}{L^3} - \frac{6x}{L^2} \quad \frac{3x^2}{L^2} - \frac{4x}{L} + 1 \quad -\frac{6x^2}{L^3} + \frac{6x}{L^2} \quad \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x}{L} \right] \quad (2.74)$$

$$\left[\frac{d^2 N_v}{dx^2} \right] = \left[\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \quad -\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2} \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right] \quad (2.75)$$

sustituyendo la ecuación 2.75 en la ecuación 2.68

$$[k_e] = \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \\ -\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} EI_z \left[\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \quad -\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2} \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right] dx$$

desarrollando el producto e integrando término a término

$$[k_e] = \frac{2EI_z}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} & \frac{3}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{3}{L} \\ \frac{3}{L} & 2 & -\frac{3}{L} & 1 \\ -\frac{6}{L^2} & -\frac{3}{L} & \frac{6}{L^2} & -\frac{3}{L} \\ \frac{3}{L} & 1 & -\frac{3}{L} & 2 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

reorganizando la matriz de rigideces elástica incorporando la carga axial y flexión, podemos escribir

$$[k_e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

para el cálculo de la matriz de rigideces geométrica analizaremos la tercer integral de la ecuación 2.61

$$\delta W_{\text{int}} = \frac{1}{2} P_{x2} \int_0^L \left[\delta \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \delta \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dx$$

considerando que el operador virtual δ funciona como un operador diferencial, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} &= P_{x2} \int_0^L \left(\frac{d\delta u}{dx} \frac{du}{dx} + \frac{d\delta v}{dx} \frac{dv}{dx} \right) dx \\ \delta W_{\text{int}} &= P_{x2} \int_0^L \frac{d\delta u}{dx} \frac{du}{dx} dx + P_{x2} \int_0^L \frac{d\delta v}{dx} \frac{dv}{dx} dx \end{aligned} \quad (2.78)$$

La primer integral de la ecuación 2.78 corresponde a la matriz de rigideces geométrica por carga axial en dirección x definida anteriormente por la ecuación 2.54 como:

$$[k_{gu}] = \frac{P_{x2}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La segunda integral corresponde a la matriz de rigideces geométrica por cortante y flexión

$$\delta W_{\text{int}} = P_{x2} \int_0^L \frac{d\delta v}{dx} \frac{dv}{dx} dx \quad (2.79)$$

de la ecuación 2.63

$$\frac{dv}{dx} = \left[\frac{dN_v}{dx} \right] \{v_n\} \quad (2.80)$$

de la misma ecuación 2.63

$$\begin{aligned} \delta v &= [N_v] \{\delta v_n\} \\ \frac{d\delta v}{dx} &= \left[\frac{dN_v}{dx} \right] \{\delta v_n\} \end{aligned}$$

también puede escribirse,

$$\frac{d\delta v}{dx} = \{\delta v_n\}^T \left[\frac{dN_v}{dx} \right]^T \quad (2.81)$$

sustituyendo la ecuación 2.80 y la ecuación 2.81 en la 2.79

$$\delta W_{\text{int}} = P_{x2} \int_0^L \{\delta v_n\}^T \left[\frac{dN_v}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_v}{dx} \right] \{v_n\} dx$$

sabemos que el incremento de trabajo virtual externo es:

$$\delta W_{\text{ext}} = -\{\delta v_n\}^T \{P_n\}$$

aplicando el principio del trabajo virtual

$$\delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = 0$$

sustituyendo

$$P_{x2} \int_0^L \{\delta v_n\}^T \left[\frac{dN_v}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_v}{dx} \right] \{v_n\} dx = \{\delta v_n\}^T \{P_n\}$$

como el incremento en los desplazamientos nodales no es función de x, se puede escribir:

$$\{\delta v_n\}^T \left(P_{x2} \int_0^L \left[\frac{dN_v}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_v}{dx} \right] dx \right) \{v_n\} = \{\delta v_n\}^T \{P_n\} \quad (2.82)$$

de donde:

$$\left(P_{x2} \int_0^L \left[\frac{dN_v}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_v}{dx} \right] dx \right) \{v_n\} = \{P_n\} \quad (2.83)$$

comparando la ecuación 2.83 con la ecuación fuerza desplazamiento, concluimos que:

$$[k_{gu}] = P_{x2} \int_0^L \left[\frac{dN_v}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_v}{dx} \right] dx \quad (2.84)$$

sustituyendo la ecuación 2.74 en 2.84

$$[k_{gv}] = P_{x2} \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{6x^2}{L^3} - \frac{6x}{L^2} \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{4x}{L} + 1 \\ -\frac{6x^2}{L^3} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x}{L} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{6x^2}{L^3} - \frac{6x}{L^2} & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{4x}{L} + 1 & -\frac{6x^2}{L^3} + \frac{6x}{L^2} & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x}{L} \end{bmatrix} dx$$

efectuando el producto e integrando término a término

$$[k_{gv}] = \frac{P_{x2}}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

reorganizando la matriz de rigideces geométrica incorporando la carga axial, cortante y flexión, podemos escribir

$$[k_g] = \frac{P_{x2}}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

Si procedemos de forma análoga para una barra tridimensional, obtenemos las matrices de rigidez elástica (ecuación 2.87) y geométrica (ecuación 2.88) que se muestran a continuación:

$$[k_c] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{-12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

$$[k_g] = \frac{P_{x2}}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & \frac{-6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{-L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6}{5} & 0 & \frac{-L}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-J}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-L}{10} & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & \frac{-L^2}{30} & 0 \\ 0 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 & \frac{-L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{-L^2}{30} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{-L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{-L}{10} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} & 0 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{L}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-J}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-L}{10} & 0 & \frac{-L^2}{30} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 \\ 0 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{-L^2}{30} & 0 & \frac{-L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

De acuerdo a la *ecuación 2.88*, la matriz de rigidez geométrica, es función de la fuerza axial actuando en el extremo final de la barra como resultado de las cargas externas, lo que nos lleva a una ecuación no lineal que será resuelta de manera incremental, bajo este considerando los desplazamientos son valores incrementales referidos a su configuración de referencia, entonces la ecuación fuerza-desplazamiento quedará expresada como:

$$\{\Delta P\} = [k_e + k_g] \{\Delta d\} \quad (2.89)$$

Capítulo 3

Programa de cómputo para el análisis de estructuras considerando la no linealidad geométrica

3.1. Introducción

En el presente capítulo se describen las características del programa de cómputo para el análisis de estructuras considerando la no linealidad geométrica, se presenta un diagrama de flujo en el cual se ilustra de manera gráfica la secuencia que sigue el programa en el proceso de análisis y solución de la ecuación fuerza-desplazamiento para un sistema estructural seleccionado y la correspondiente creación del archivo de resultados en forma tabular.

Se describe paso a paso cómo introducir los datos ya sea para la elaboración del archivo de datos, o bien para la alimentación manual.

También se describe de manera detallada el programa principal y algunas de las subrutinas de mayor interés del programa.

El capítulo concluye con la guía del usuario y un ejemplo de cómo crear un archivo de entrada de datos.

3.2. Características del programa

El programa de cómputo para análisis no lineal de estructuras se desarrollo en Compaq Visual Fortran 6.6.C y puede analizar los siguientes tipos de estructuras:

- Armaduras planas
- Armaduras en el espacio tridimensional
- Marcos planos
- Vigas
- Retículas y
- Marcos en el espacio tridimensional

Se requiere al menos una máquina PC con procesador Pentium a 233 MHz o más rápido (500 Mhz recomendado), sistema operativo Windows 2000, Windows NT o Windows XP, un mínimo 128 Mb de memoria RAM (se recomiendan 256 Mb de memoria RAM) y al menos 2.0 Mb de espacio en disco duro para los archivos temporales y de resultados.

El programa puede analizar prácticamente cualquier tamaño de estructura, el tamaño de ésta dependerá únicamente de la cantidad de memoria instalada en la computadora.

Las cargas admitidas serán únicamente de tipo estático y deberán estar acorde con el tipo de estructura a analizar según se muestra en la *tabla 3*.

Tabla 3. Tipos de carga

Tipo de estructura	Tipo de carga
Armadura plana	• Cargas puntuales nodales
Armadura en el espacio tridimensional	• Cargas puntuales nodales
Marco plano	• Cargas puntuales nodales y a lo largo del elemento • Cargas uniformemente distribuidas • Momentos concentrados
Viga	• Cargas puntuales nodales y a lo largo del elemento • Cargas uniformemente distribuidas • Momentos concentrados
Retícula	• Cargas puntuales nodales y a lo largo del elemento • Cargas uniformemente distribuidas • Momentos concentrados
Marco en el espacio tridimensional	• Cargas puntuales nodales y a lo largo del elemento • Cargas uniformemente distribuidas • Momentos concentrados

3.3. Diagrama de flujo

La *figura 3.1* muestra el diagrama esquemático del programa de cómputo para el análisis no lineal geométrico de estructuras en el que están resumidas las etapas fundamentales asociadas a este. Cada una de las etapas se describen a continuación a detalle.

El programa inicia solicitando al usuario el tipo de análisis por analizar de entre tres posibles, [1] elástico lineal, [2] elástico lineal paso a paso y [3] no lineal geométrico, posteriormente deben ingresarse los nombres de los archivos de datos y de resultados respectivamente y si se trata de los casos dos y tres el número de ciclos necesarios para llegar a la carga final así como el número del nodo del que deseamos conocer sus desplazamientos. Finalmente debemos seleccionar la forma en la que serán ingresados los datos de la estructura por analizar, esto es, directamente por teclado o mediante un archivo de datos previamente elaborado.

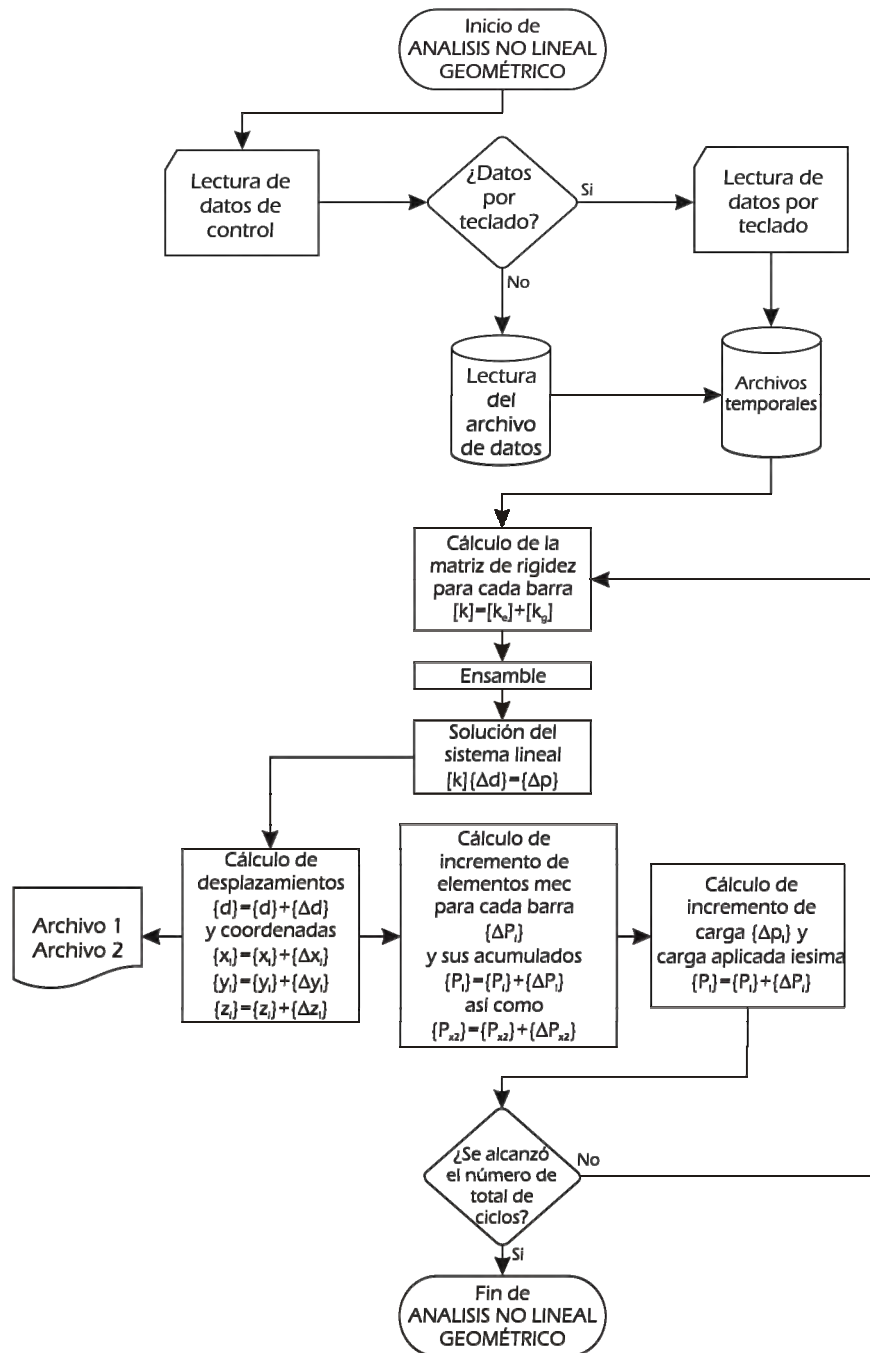


Figura 3.1. Diagrama esquemático del programa de cómputo de análisis no lineal geométrico

Las subrutinas que intervienen en el programa se enlistan a continuación de acuerdo al diagrama de flujo anterior:

1. Menú para la entrada de datos de control (subrutina *MENU*). Esta subrutina es la encargada de solicitar al usuario el tipo de análisis a realizar, los nombres de los archivos de datos y resultados, el número de ciclos necesarios para alcanzar el nivel de carga total aplicada, el número del nodo del que deseamos conocer sus desplazamientos y si la entrada se realizará mediante un archivo de datos previamente elaborado o si se elaborará capturando los datos mediante el teclado.
2. Elaboración del archivo de datos por teclado (subrutina *ENTRADA_MANUAL*). En caso de haber seleccionado la alternativa por teclado, el archivo de datos de la estructura se creará con la información proporcionada en pantalla, en caso contrario, se realizará la lectura del archivo de datos.
3. Asignación de espacio en memoria (subrutina *ASIGNA*). Aquí se leen los datos generales de control de la estructura (primera fila) y se crean las matrices que almacenarán las fuerzas en el extremo final de cada barra en la dirección X y las coordenadas de los nodos.
4. Lecto escritura de datos (subrutina *LEE_ESCRIBE_DATOS*). Se crea el archivo de resultados del análisis y los archivos temporales que almacenarán los datos de barras, apoyos y las fuerzas de empotramiento perfecto.
5. Ensamble de la matriz de rigideces (subrutina *ENSAMBLE*). Aquí se calcula la matriz de rigidez correspondiente a cada uno de los elementos que forman el sistema estructural $[k]=[k_e]+[k_g]$ y se realiza el ensamble para obtener la matriz de rigideces del conjunto.
6. Solución del sistema lineal de ecuaciones (subrutina *CROUT*). Una vez conocida la matriz de coeficientes $[k]$ y los vectores de fuerzas nodales $\{\Delta P\}$ se resuelve el sistema para obtener los desplazamientos nodales $\{\Delta d\}$ mediante el método de eliminación directa denominado factorización de Crout.
7. Desplazamientos nodales y su incremento (subrutina *DESPLA*). Se calculan los desplazamientos en los diferentes nudos y el incremento de desplazamiento para actualizar las coordenadas del sistema de referencia para el ciclo siguiente.

8. Cálculo de elementos mecánicos en las barras (subrutina *FZAS_REACC*). Se calcula el incremento de las fuerzas internas de cada barra asociados a los desplazamientos nodales y las fuerzas internas totales para cada barra y se almacena el valor de la fuerza axial en el extremo final de cada barra P_{x2} .
9. El procedimiento anterior desde el punto 3 hasta el 8 se repite hasta alcanzar el nivel de carga deseado controlado por el número de ciclos a ejecutar.

3.4. Guía del usuario

La presente guía tiene por objeto ayudar al usuario en el desarrollo de un archivo de datos que contiene información general sobre el tipo de estructura a analizar, su geometría, interconectividad, propiedades elastogeométricas, restricciones, tipos de cargas y su punto de aplicación. Se asume que el usuario maneja cualquier editor de textos.

3.4.1. Generalidades

Para su funcionamiento el programa requiere de la elaboración de un archivo de datos (origen) cuyo nombre debe seguir las reglas de *MS-DOS* para nombrar archivos. Se recomiendan las extensiones *.txt* o *.dat* para el archivo de datos y *.res* para el de resultados respectivamente.

Una vez realizado el archivo de datos, bastará con ejecutar el programa, seleccionar el tipo de análisis a realizar, introducir en la línea de comando el nombre de archivo de datos (*origen*), el nombre del archivo de resultados (*destino*) y el número de ciclos por realizar si es el caso y el número del nodo del que se desean conocer sus desplazamientos lineales y angulares.

El programa genera por cada corrida dos archivos auxiliares temporales llamados *FEP.TXT* y *TEMP.TXT*; en el primero están almacenadas las fuerzas de empotramiento perfecto, mientras que en el segundo las restricciones de los nudos y las propiedades

elastogeométricas de cada barra, mismos que serán eliminados al terminar la ejecución normal del programa.

Adicionalmente se crean también, un archivo de resultados que contiene la información general de la estructura, coordenadas, propiedades de las barras, incidencias, apoyos y cargas sobre actuantes sobre esta y un archivo que contiene los desplazamientos lineales y angulares de un nodo particular en el archivo *DESPLAZAMIENTOS.TXT*, ambos archivos puede leerse e imprimirse utilizando un editor de textos o procesador de palabras y para el último una hoja de cálculo.

Los datos deben ser introducidos en seis secciones diferentes que se describen en los apartados siguientes, cada dato deberá separarse al menos por un espacio en blanco o tabulador. Se recomienda separar cada sección mediante una línea en blanco, a fin de tener un mejor control sobre los datos de entrada.

El programado permite el modelado de apoyos elásticos, diferenciado estos únicamente por los valores de la rigidez al desplazamiento lineal y angular introducidos al definir cada una de las restricciones del sistema.

3.4.2. Recomendaciones iniciales

Antes de iniciar con la creación del archivo de datos o la entrada manual, se recomienda realizar un dibujo de la estructura por analizar en donde estén claramente definidos sus nudos, coordenadas, número de barras, magnitud y punto de aplicación de las cargas estáticas puntuales y uniformemente distribuidas. Se recomienda que la numeración de los nudos sea de tal forma que la diferencia entre estos sea mínima, a fin de tener el menor ancho de banda posible.

Se deben hacer los cálculos del área de las diferentes secciones transversales (A), módulos de elasticidad (E), momentos de inercia (I), módulo de elasticidad al corte (G) y momento polar de inercia (J) acordes con el tipo y calidad del material seleccionado para los

diferentes elementos que formarán parte de la estructura. Se recomienda también revisar que todas las unidades a emplear sean consistentes.

3.4.3. Introducción de los datos

La introducción de los datos, que definen las características propias de cada estructura, puede hacerse a través de dos vías; la primera mediante el uso de un archivo de datos previamente elaborado en un procesador de textos conforme a los requisitos que se definirán a continuación y la segunda directamente por teclado durante la ejecución del programa. Se han incluido los dos procedimientos debido a que cada uno de ellos ofrece ciertas ventajas sobre todo cuando se desea analizar una estructura que conserva su geometría y que sufre cambios en cargas, propiedades o tipos de apoyos. La estructura base podrá realizarse por teclado siguiendo el orden en el que la máquina irá solicitando la información al usuario para posteriormente realizar los cambios necesarios, sin la necesidad de recapturar toda la información de la estructura nuevamente.

Ambos procedimientos de ingreso de datos obedecen a un orden único que se especifica a continuación.

Tipo de análisis: [por teclado] Debemos seleccionar el tipo de análisis que el usuario desea realizar: [1] Análisis elástico lineal, [2] Análisis elástico lineal paso a paso o [3] análisis no lineal geométrico.

Nombre del Archivo de Datos: [por teclado] Alusivo al archivo que contiene la información referente a la estructura por analizar, en caso de haber elegido la opción de usar un archivo de datos previamente elaborado; o que se desea crear y analizar, en caso de haber elegido la opción de crear un archivo de datos de manera directa mediante teclado.

Nombre del Archivo de Resultados: [por teclado] Es el archivo en el que se almacenarán los resultados generados por el programa durante su ejecución. Este archivo podrá tener o no una extensión; en caso de que tenga, se recomienda que esta sea del tipo *.txt*, *.dat*, o *.res*.

Número de ciclos: [por teclado] Número entero que indica el número de ciclos que efectuará el programa para alcanzar el nivel de carga total aplicada, este valor podrá ingresarse únicamente para tipos de análisis dos y tres.

Numero del nudo del que se desea conoce el desplazamiento: [por teclado] Corresponde al número de nudo del que se desean conocer sus desplazamientos lineales y angulares y cuyos valores serán escritos en el archivo *DESPLAZAMIENTOS.TXT*.

Sección 1 Datos generales (dos líneas)

PRIMERA FILA

TE NN NB NA NP NC

TE Tipo de estructura. Se refiere al tipo de estructura que se quiere calcular.

- 1 Armaduras planas
- 2 Armaduras en el espacio tridimensional
- 3 Vigas y marcos planos
- 4 Retículas
- 5 Marcos en el espacio tridimensional

NN Número de nudos

NB Número de barras

NA Número de apoyos

NP Número de las diferentes propiedades de la estructura. El programa es capaz de manejar diferentes propiedades elastogeométricas para cada una de las diferentes barras que forman parte de la estructura.

NC Número de nudos cargados (carga nodal)

SEGUNDA FILA (sólo para estructuras tipo 3, 4 y 5)

CC CD

CC Número de barras con cargas concentradas

CD Número de barras con carga distribuida

Importante: todos los datos anteriores deberán ser números enteros, por lo que no se permitirá la introducción de otro tipo de número.

Sección 2 Coordenadas (una línea por cada nudo)

NUDO COORDX COORDY COORDZ

NUDO Número del nudo del cual se ingresan las coordenadas. Debe iniciar en 1 y terminar en el valor del número de nudos almacenados en **NN**.

COORDX Coordenada X

COORDY Coordenada Y

COORDZ Coordenada Z

En este apartado se ingresarán las coordenadas de cada uno de los nudos que forman parte de la estructura teniendo en cuenta la forma en la que se establecieron los sistemas de referencia y si se trata de una estructura bidimensional o tridimensional a fin de considerar dos o tres coordenadas. Los valores para el campo *NUDO* deberán ser números enteros, mientras que los de las coordenadas *COORDX*, *COORDY* y *COORDZ* valores en formato decimal.

Sección 3 Propiedades de las barras (una línea por cada tipo de propiedad diferente)

Para estructuras tipo 1 y 2

PROP A E

Para estructuras tipo 3

PROP A E I_z

Para estructuras tipo 4

PROP A E I_G J

Para estructuras tipo 5

PROP A E I_y I_z G J

<i>PROP</i>	Establece el número de propiedad que define las características particulares de una o más barras
<i>A</i>	Área de la sección transversal
<i>E</i>	Módulo de elasticidad del material
<i>I_z</i>	Momento de inercia respecto de z
<i>I_y</i>	Momento de inercia respecto de y
<i>G</i>	Módulo de elasticidad al corte
<i>J</i>	Momento polar de inercia

Este bloque define las propiedades elastogeométricas para cada barra de la estructura. Tal como se presenta el orden para cada caso, así se deben escribir en el archivo de datos los valores correspondientes para cada tipo de propiedad. Los valores aceptables para *PROP* son únicamente valores enteros y para las variables *A*, *E*, I_y , I_z , *G*, y *J* valores de tipo decimal. El número total de renglones será igual al número de propiedades diferentes *NP* ingresado en la *sección 1*, mientras que el número de columnas dependerá del tipo de estructura que se analiza.

Sección 4 Incidencia de barras y tipo de propiedad (una línea por cada barra)

BARRA NI NF PROP

BARRA Número de la barra de la cual se ingresa su conectividad y propiedades. Debe iniciar en 1 y terminar en un valor igual al de la variable *NB*.

<i>NI</i>	Nudo inicial
<i>NF</i>	Nudo final
<i>PROP</i>	Tipo de propiedad a la que pertenece la barra

En este apartado se aceptan solamente números del tipo entero. Cada barra queda definida como el elemento que une dos nudos. Para cada elemento deberá definirse en orden creciente la variable *BARRA* desde uno hasta el número de barras *NB* definida en la sección uno seguida por el nudo inicial *NI*, nudo final *NF* y el tipo de propiedad controlado por *PROP* con valores que irán desde uno hasta el número de propiedades *NP* definido con anterioridad también en la *sección 1*. Este bloque debe tener igual número de filas que barras de la estructura y un número de columnas siempre igual a cuatro.

Sección 5 Apoyos elásticos (una línea por cada nudo restringido o apoyo)

Para estructuras tipo 1

APO RX RY

Para estructuras tipo 2

APO RX RY RZ

Para estructuras tipo 3

APO RX RY RMZ

Para estructuras tipo 4

APO RY RMX RMZ

Para estructuras tipo 5

APO RX RY RZ RMX RMY RMZ

APO Número de nudo con cualquier tipo de apoyo. El número total de apoyos debe ser igual a *NA*.

RX Restricción al desplazamiento lineal en *X*

RY Restricción al desplazamiento lineal en *Y*

RZ Restricción al desplazamiento lineal en *Z*

RMX Restricción al desplazamiento angular alrededor de *X*

RMY Restricción al desplazamiento angular alrededor de *Y*

RMZ Restricción al desplazamiento angular alrededor de *Z*

Este bloque define los apoyos de tipo elástico presentes en la estructura. Para el número de nudo controlado por la variable *APO* se deben usar valores del tipo entero mientras que para las restricciones al desplazamiento lineal *RX*, *RY* y *RZ* y al desplazamiento angular *RMX*, *RMY* y *RMZ* valores exponenciales que van desde cero para apoyos que permiten el desplazamiento libre hasta valores infinitos para apoyos totalmente restringidos. El número de filas deberá ser igual equivalente al número de nudos restringido o apoyos *NA* definido en la *sección 1*, y con igual número de columnas que restricciones dependiendo del tipo de estructura en consideración.

Sección 6 Cargas nodales (una línea por cada nudo cargado)*Para estructuras tipo 1***NUDO PX PY***Para estructuras tipo 2***NUDO PX PY PZ***Para estructuras tipo 3***NUDO PX PY MZ***Para estructuras tipo 4***NUDO PY MX MZ***Para estructuras tipo 5***NUDO PX PY PZ MX MY MZ**

NUDO Número de nudo cargado. El número total de nudos cargados debe ser igual al valor de la variable *NC*.

PX Carga nodal en dirección *X*

PY Carga nodal en dirección *Y*

PZ Carga nodal en dirección *Z*

MX Momento alrededor del eje *X*

MY Momento alrededor del eje *Y*

MZ Momento alrededor del eje *Z*

En esta sección se definen las cargas aplicadas de manera directa en los nudos presentes en la estructura ya sea de tipo carga puntual o momento flexionante. El primer campo se refiere al número de nudo en el que se encuentran actuando las cargas y que se almacenará en la variable *NUDO* que deberá ser de tipo entero. Los campos siguientes *PX*, *PY* y *PZ* corresponden al valor de la magnitud de las cargas puntuales, mientras que los campos *MX*, *MY* y *MZ* son los valores de las magnitudes de los momentos concentrados; ambos campos deben ser de tipo decimal. Esta sección tendrá un número igual de filas que número de nudos cargados y un número de columnas que dependerá del tipo de estructura por analizar.

Sección 7 Cargas concentradas en las barras (una línea por cada barra con carga)**BARRA a P**

BARRA Número de barra en la que se tiene carga concentrada. El número total de barras cargadas debe ser igual al valor almacenado en la variable *CC*.

a Es la distancia del nudo inicial de la barra a la carga concentrada. El valor almacenado en esta variable debe ser menor que la longitud total de la barra

P Carga en dirección perpendicular a la barra cuyo signo dependerá de la convención adoptada y de la orientación de la barra.

Aquí se definen todas aquellas barras que presentan carga concentrada, esta sección solo es aplicable para estructuras del tipo tres, cuatro y cinco. El valor almacenado en el campo *BARRA* debe ser un número de tipo entero, mientras que para las variables *a* y *P* los valores serán de tipo decimal. La forma en que deben medirse ambos valores se ilustra en la *figura 3.2*. El número de filas de este bloque debe ser igual al número de barras con carga concentrada *CC* definido en la *sección 1*, y el número de columnas siempre será de tres.

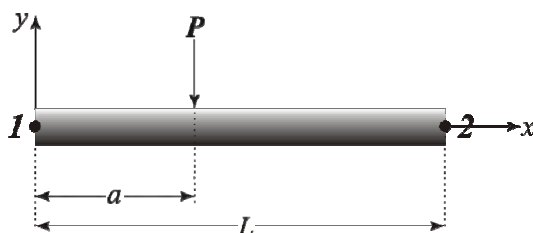


Figura 3.2. Carga concentrada en las barras

Sección 8 Cargas uniformemente distribuidas (una línea por cada barra con carga)

BARRA a b W

<i>BARRA</i>	Número de barra en la que se tiene carga distribuida. El número total de barras cargadas debe ser igual al valor de la variable <i>CD</i> .
<i>a</i>	Distancia del nudo inicial de la barra al inicio de la carga distribuida
<i>b</i>	Distancia del nudo final de la barra al final de la carga distribuida
<i>W</i>	Intensidad de la carga en dirección perpendicular a la barra cuyo signo dependerá de la convención adoptada.

En este apartado se describe como modelar carga distribuida sobre una barra, proceso solo aplicable a estructuras tipo tres, cuatro y cinco. El campo *BARRA* debe ser un número de tipo entero y los siguientes tres campos *a*, *b* y *W* de tipo decimal. El número de filas de este apartado debe ser igual al número de barras con cargada uniformemente distribuida almacenado en la variable *CD* y el número de columnas es siempre de cuatro. En caso de que la carga distribuida se encuentre en toda la longitud de la barra, el valor de las distancias *a* y *b* serán iguales a cero y deberán ser incluidas. De manera esquemática se ilustra como deben ser medidos los valores de las magnitudes para las variables *a*, *b* y *W* en la *figura 3.3* siguiente.

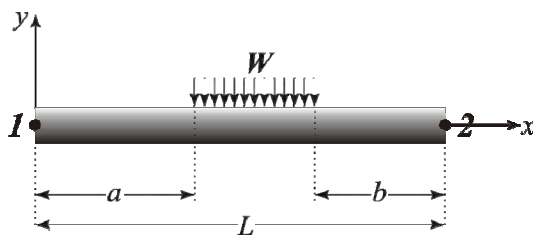


Figura 3.3. Carga uniformemente distribuida en las barras

3.4.4. Resultados finales

Los resultados del análisis no lineal geométrico de estructuras a través de este programa se presentan en dos archivos de resultados; el primero definido por el usuario (*archres*) y que contiene en forma tabular tanto los datos generales de la estructura como los desplazamientos sufridos por cada uno de los nudos, así como los elementos mecánicos de cada barra; mientras que el segundo de nombre *DESPLAZAMIENTOS.TXT* contendrá los desplazamientos sufridos por un nudo en particular. Ambos archivos se localizarán en la misma carpeta en la cual se ejecute el programa

3.5. Ejemplo de un archivo de datos

A fin de mostrar la forma en la que debe realizarse el archivo de datos o su correspondiente entrada por teclado, se modelará la estructura en acero que se muestra en la *figura 3.4*. Las cargas mostradas corresponden a cargas de tipo puntual aplicadas en los nudos y a lo largo de una barra. Las cotas están a ejes colocados en el centroide de la sección transversal de cada uno de los elementos que conforman la estructura, el origen del sistema de ejes coordenados x' y y' se considerará colocado en el *nudo 1*, se muestra además la numeración de los nudos y barras, el sentido de estas, el tipo de apoyos, la magnitud y localización de las cargas aplicadas, así como también las propiedades elastogeométricas de cada barra.

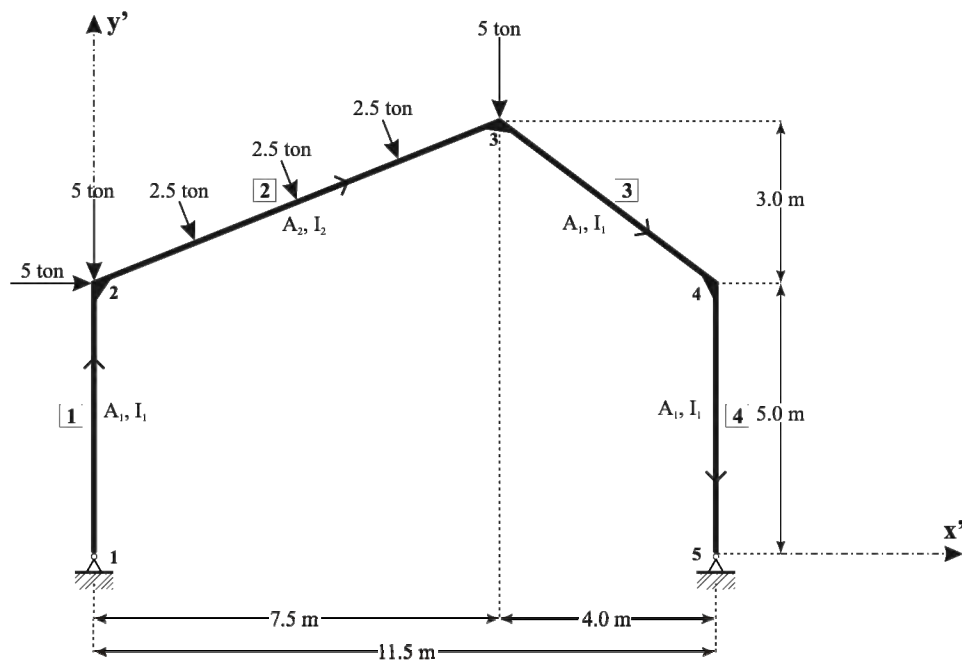


Figura 3.4. Estructura a analizar

El sistema estará simplemente apoyado y tendrá las propiedades elasto-geométricas mostradas en la *tabla 4*, se realizarán 100 intervalos de carga para la estructura tipo marco plano y se adoptarán como unidades de medición y análisis centímetros y toneladas.

Tabla 4. Propiedades elasto-geométricas

Barra 1	Barra 2
$A_1 = 40.00 \text{ cm}^2$	$A_2 = 60.00 \text{ cm}^2$
$E_{\text{ACERO}} = 2,038.9019 \text{ ton/cm}^2$	$E_{\text{ACERO}} = 2,038.9019 \text{ ton/cm}^2$
$I_1 = 5,000.00 \text{ cm}^4$	$I_2 = 20,000.00 \text{ cm}^4$

A la estructura por analizar le corresponde un tipo de estructura 3 (marco plano), está formada por 5 nudos, 4 barras, 2 apoyos, 2 nudos cargados, 1 barra con 3 cargas puntuales y no existe carga uniformemente distribuida, por tanto, la *sección 1* quedará:

3 5 4 2 2 2

3 0

A continuación se capturarán el número de nudo y sus correspondientes coordenadas x y y para formar la *sección 2*.

1	0	0
2	0	500
3	750	800
4	1050	500
5	1150	0

Las propiedades elastogeométricas formarán la *sección 3*, debido a que existen dos tipos de propiedades distintas deberá introducirse por separado en dos renglones, uno para cada una de ellas.

1	40	2038.9019	5000
2	60	2038.9019	20000

La *sección 4* está constituida por la incidencia entre barras y el tipo de propiedad existente en ellas. Por simplicidad la numeración de las barras seguirá el orden de los nudos, es decir, la barra uno será la que se forme entre los nudos 1 y 2, la barra 2 por los nudos 2 y 3, la barra 3 por los nudos 3 y 4 y finalmente la barra 4 por los nudos 4 y 5.

1	1	2	1
2	2	3	2
3	3	4	1
4	4	5	1

El tipo de apoyos dará origen a la *sección 5*. Para modelar apoyos elásticos del tipo articulado consideraremos valores del orden de 9×10^{30} para restringir el desplazamiento lineal en sentido x' y y' respectivamente y un valor de 0 para la rigidez al desplazamiento angular debido a que puede girar libremente.

1	9e30	9e30	0
5	9e30	9e30	0

Se considerarán 100 intervalos o ciclos de análisis, por lo que la magnitud de las cargas será la que resulte de dividir la carga total aplicada entre el número de intervalos, esto es, $5 \text{ ton}/100 = 0.050 \text{ ton}$ y $2.5 \text{ ton}/100 = 0.025 \text{ ton}$ respectivamente. La *sección 6* quedará.

2	.05	-.05	0
3	0	-.05	0

Para la aplicación de las cargas puntuales sobre la barra 2 comprendida entre los nudos 2 y 3 del marco deberá calcularse la longitud total de la barra y la correspondiente distancia a cada una de las cargas aplicadas. Es importante señalar que para que el programa considere las tres cargas puntuales actuantes sobre la barra, estas deberán ingresarse una en cada línea y el número de cargas puntuales en la barra asignarse también en tres.

2	201.9437	-.025
2	403.8874	-.025
2	605.8310	-.025

El archivo de datos completo para esta estructura se muestra a continuación.

3	5	4	2	2	2
3	0				
1	0	0			
2	0	500			
3	750	800			
4	1050	500			
5	1150	0			
1	40	2038.9019	5000		
2	60	2038.9019	20000		
1	1	2	1		
2	2	3	2		
3	3	4	1		
4	4	5	1		
1	9e30	9e30	0		
5	9e30	9e30	0		
2	.05	-.05	0		
3	0	-.05	0		
2	201.9437	-.025			
2	403.8874	-.025			
2	605.8310	-.025			

Capítulo 4

Ejemplos de aplicación

En el presente capítulo se presentan algunos ejemplos que muestran el uso del programa. Se analizarán un total de cinco estructuras, una de cada tipo, variando sus propiedades geométricas, partiendo de una estructura considerada esbelta con la finalidad de ilustrar el comportamiento de estas considerando la no linealidad geométrica.

A fin de tener puntos de comparación, se realizará la grafica carga-desplazamiento que sufre un nudo en particular de cada estructura.

Con la finalidad de introducir al usuario en el estudio de estructuras considerando la no linealidad geométrica, se presenta la solución manual.

4.1 Ejemplo de aplicación número 1, ARMADURA PLANA.

En la *figura 4.14* se muestra geometría de la armadura por analizar. La estructura se considerará elaborada de acero con módulo de elasticidad $E=2,038,000 \text{ kg/cm}^2$, y áreas de la sección transversal de 1, 2, 3, 4, 5 y 25 cm^2 para todas las barras e incrementos de carga $\Delta P = 100 \text{ kg}$ para el análisis.

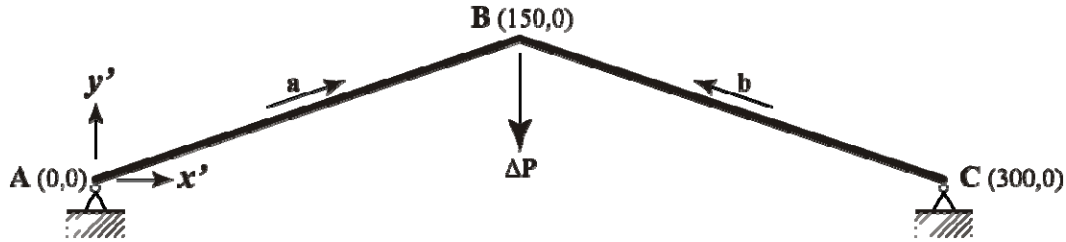


Figura 4.1. Armadura plana.

La ecuación fuerza desplazamiento de la estructura es:

$$[k'_{22a} + k'_{22b}]\{\Delta d'_B\} = \{\Delta P'_B\}$$

de la *ecuación 2.12* sabemos que:

$$[k] = [k_e] + [k_g]$$

$$[k'_{22,i}] = [k'_{e22,i}] + [k'_{g22,i}]$$

aplicando la *ecuación 2.11* para realizar la rotación del sistema local al global de las *ecuaciones 2.37* y *2.53* tenemos:

$$[k'_{e22,i}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm \\ lm & m^2 \end{bmatrix}$$

$$[k'_{g22,i}] = \frac{P_{x2}}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm \\ lm & m^2 \end{bmatrix}$$

Los respectivos vectores de incremento de carga y desplazamiento son:

$$\{\Delta P'_B\} = \begin{Bmatrix} \Delta P'_{xB} \\ \Delta P'_{yB} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -100 \end{Bmatrix} \quad \{\Delta d'_B\} = \begin{Bmatrix} \Delta d'_{xB} \\ \Delta d'_{yB} \end{Bmatrix}$$

Resolviendo de manera iterativa la ecuación fuerza desplazamiento del sistema tendremos:

Primera iteración

Barra a

$$A_1 = 1 \text{ cm}^2$$

$$P_{x2a} = 0$$

$$L_a = \sqrt{(150-0)^2 + (50-0)^2} = 158.113883 \text{ cm}$$

$$l_a = \frac{150-0}{158.113883} = 0.948683$$

$$m_a = \frac{50-0}{158.113883} = 0.316228$$

Sustituyendo los valores anteriores y las propiedades elastogeométricas, las matrices resultantes en el sistema global son:

$$[k'_{e2,2a}] = \frac{(1)2,038,000}{158.113883} \begin{bmatrix} (0.948683)^2 & 0.316228(0.948683) \\ 0.316228(0.948683) & (0.316228)^2 \end{bmatrix}$$

$$[k'_{e2,2a}] = \begin{bmatrix} 11,600.499369 & 3,866.833123 \\ 3,866.833123 & 1,288.944374 \end{bmatrix}$$

$$[k'_{g2,2a}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por tanto:

$$[k'_{2,2a}] = \begin{bmatrix} 11,600.499369 & 3,866.833123 \\ 3,866.833123 & 1,288.944374 \end{bmatrix}$$

Barra b

$$A_1 = 1 \text{ cm}^2$$

$$P_{x2b} = 0$$

$$L_b = \sqrt{(150-300)^2 + (50-0)^2} = 158.113883 \text{ cm}$$

$$l_b = \frac{150-300}{158.113883} = -0.948683$$

$$m_b = \frac{50-0}{158.113883} = 0.316228$$

Sustituyendo los valores anteriores y las propiedades elastogeométricas, las matrices resultantes en el sistema global para la barra b son:

$$[k'_{e2,2b}] = \frac{(1)2,038,000}{158.113883} \begin{bmatrix} (-0.948683)^2 & 0.316228(-0.948683) \\ 0.316228(-0.948683) & (0.316228)^2 \end{bmatrix}$$

$$[k'_{e2,2b}] = \begin{bmatrix} 11,600.499369 & -3,866.833123 \\ -3,866.833123 & 1,288.944374 \end{bmatrix}$$

$$[k'_{g2,2b}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por tanto:

$$[k'_{2,2b}] = \begin{bmatrix} 11,600.499369 & -3,866.833123 \\ -3,866.833123 & 1,288.944374 \end{bmatrix}$$

sustituyendo en la ecuación fuerza desplazamiento

$$\begin{bmatrix} 23,200.998737 & 0 \\ 0 & 2,577.888749 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta d'_{xB} \\ \Delta d'_{yB} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -100 \end{Bmatrix}$$

resolviendo el sistema

$$\begin{Bmatrix} \Delta d'_{xB} \\ \Delta d'_{yB} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.00000000 \\ -0.03879143 \end{Bmatrix}$$

Aplicando el método directo de las rigideces para el cálculo de las cargas nodales en los extremos 1 y 2.

Por compatibilidad.

$$\{\Delta d'_{1a}\} = \{0\} \qquad \{\Delta d'_{2a}\} = \{\Delta d'_B\}$$

$$\{\Delta d'_{1b}\} = \{0\} \qquad \{\Delta d'_{2b}\} = \{\Delta d'_B\}$$

Barra a

$$\{\Delta P'_{1a}\} = [k'_{1,1a}]\{0\} + [k'_{1,2a}]\{\Delta d'_B\}$$

$$\{\Delta P'_{1a}\} = \begin{bmatrix} -11,600.499369 & -3,866.833123 \\ -3,866.833123 & -1,288.944374 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.00000000 \\ -0.03879143 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{1a}\} = \begin{Bmatrix} 150 \\ 50 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{2a}\} = [k'_{2,1a}]\{0\} + [k'_{2,2a}]\{\Delta d'_B\}$$

$$\{\Delta P'_{2a}\} = \begin{bmatrix} 11,600.499369 & 3,866.833123 \\ 3,866.833123 & 1,288.944374 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.00000000 \\ -0.03879143 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{2a}\} = \begin{Bmatrix} -150 \\ -50 \end{Bmatrix}$$

Barra b

$$\{\Delta P'_{1b}\} = [k'_{1,1b}]\{0\} + [k'_{1,2b}]\{\Delta d'_B\}$$

$$\{\Delta P'_{1b}\} = \begin{bmatrix} -11,600.499369 & 3,866.833123 \\ 3,866.833123 & -1,288.944374 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.00000000 \\ -0.03879143 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{1b}\} = \begin{Bmatrix} -150 \\ 50 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{2b}\} = [k'_{2,1b}]\{0\} + [k'_{2,2b}]\{\Delta d'_B\}$$

$$\{\Delta P'_{2b}\} = \begin{bmatrix} 11,600.499369 & -3,866.833123 \\ -3,866.833123 & 1,288.944374 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.00000000 \\ -0.03879143 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{2b}\} = \begin{Bmatrix} 150 \\ -50 \end{Bmatrix}$$

Las fuerzas en el sistema local serán:

$$\{\Delta P\} = [T]^T \{\Delta P'\}$$

Barra a

Extremo 1

$$\Delta P_{1a} = [0.948683 \quad 0.316228]^T \begin{Bmatrix} 150 \\ 50 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{1a} = 158.113883 \text{ kg}$$

Extremo 2

$$\Delta P_{2a} = [0.948683 \quad 0.316228]^T \begin{Bmatrix} -150 \\ -50 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{2a} = -158.113883 \text{ kg}$$

Barra b

Extremo 1

$$\Delta P_{1b} = [-0.948683 \quad 0.316228]^T \begin{Bmatrix} -150 \\ 50 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{1b} = 158.113883 \text{ kg}$$

Extremo 2

$$\Delta P_{2b} = [-0.948683 \quad 0.316228]^T \begin{Bmatrix} 150 \\ -50 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{2b} = -158.113883 \text{ kg}$$

Hasta este momento la estructura se ha sometido a una carga $P=100 \text{ kg}$, misma que ha generado el siguiente vector de incremento de desplazamientos en el nudo B

$$\begin{Bmatrix} \Delta d'_{xB} \\ \Delta d'_{yB} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.00000000 \\ -0.03879143 \end{Bmatrix} \text{ cm}$$

y un vector de incremento de carga en el extremo 2 de las barras igual a:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P_{x2a} \\ \Delta P_{x2b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -158.113883 \\ -158.113883 \end{Bmatrix} \text{ kg}$$

De esta manera el vector de desplazamientos y el de cargas al final del primer ciclo quedarán:

$$\begin{Bmatrix} d'_{xB} \\ d'_{yB} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.00000000 \\ -0.03879143 \end{Bmatrix} \text{ cm}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{x2a} \\ P_{x2b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -158.113883 \\ -158.113883 \end{Bmatrix} \text{ kg}$$

Con la información al final del primer ciclo se calcularán las coordenadas de la nueva estructura de referencia o geometría deformada para el siguiente ciclo.

La configuración de la estructura para la segunda iteración, así como las fuerzas en el extremo dos de las barras se muestra en la *figura 4.2* siguiente.

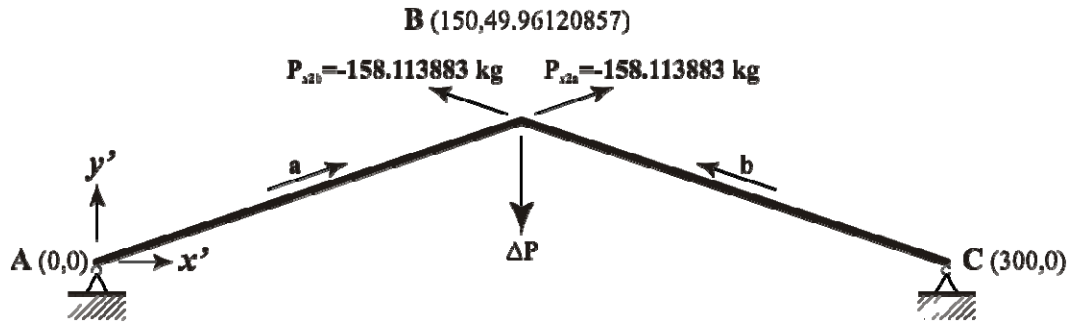


Figura 4.2. Configuración de la armadura para la segunda iteración.

Segunda iteración

Barra a

$$A_1 = 1 \text{ cm}^2$$

$$P_{x2a} = -158.113883 \text{ kg}$$

$$L_a = \sqrt{(150-0)^2 + (49.961209-0)^2} = 158.101620 \text{ cm}$$

$$l_a = \frac{150-0}{158.101620} = 0.948757$$

$$m_a = \frac{49.961209-0}{158.101620} = 0.316007$$

Sustituyendo los valores anteriores y las propiedades elastogeométricas, las matrices resultantes en el sistema global son:

$$[k'_{e2,2a}] = \frac{(1)2,038,000}{158.101620} \begin{bmatrix} (0.948757)^2 & 0.316228(0.948757) \\ 0.316007(0.948757) & (0.316007)^2 \end{bmatrix}$$

$$[k'_{e2,2a}] = \begin{bmatrix} 11,603.198845 & 3,864.732250 \\ 3,864.732250 & 1,287.244627 \end{bmatrix}$$

$$[k'_{g2,2a}] = \begin{bmatrix} -0.900209 & -0.299837 \\ -0.299837 & -0.099868 \end{bmatrix}$$

por tanto:

$$[k'_{2,2a}] = \begin{bmatrix} 11,602.298635 & 3,864.432413 \\ 3,864.432413 & 1,287.144759 \end{bmatrix}$$

Barra b

$$A_1 = 1 \text{ cm}^2$$

$$P_{x2b} = -158.113883 \text{ kg}$$

$$L_b = \sqrt{(150 - 300)^2 + (49.961209 - 0)^2} = 158.101620 \text{ cm}$$

$$l_b = \frac{150 - 300}{158.101620} = -0.948757$$

$$m_b = \frac{49.961209 - 0}{158.101620} = 0.316007$$

Sustituyendo los valores anteriores y las propiedades elastogeométricas, las matrices resultantes en el sistema global para la barra b son:

$$[k'_{e2,2b}] = \frac{(1)2,038,000}{158.101620} \begin{bmatrix} (-0.948757)^2 & 0.316007(-0.948757) \\ 0.316007(-0.948757) & (0.316007)^2 \end{bmatrix}$$

$$[k'_{e2,2b}] = \begin{bmatrix} 11,603.198845 & -3,864.732250 \\ -3,864.732250 & 1,287.244627 \end{bmatrix}$$

$$[k'_{g2,2b}] = \begin{bmatrix} -0.900209 & 0.299837 \\ 0.299837 & -0.099868 \end{bmatrix}$$

por tanto:

$$[k'_{2,2b}] = \begin{bmatrix} 11,602.298635 & -3,864.432413 \\ -3,864.432413 & 1,286.144759 \end{bmatrix}$$

sustituyendo en la ecuación fuerza desplazamiento

$$\begin{bmatrix} 23,204.597270 & 0 \\ 0 & 2,574.289517 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta d'_{xB} \\ \Delta d'_{yB} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -100 \end{Bmatrix}$$

resolviendo el sistema

$$\begin{Bmatrix} \Delta d'_{xB} \\ \Delta d'_{yB} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.00000000 \\ -0.03884567 \end{Bmatrix}$$

Aplicando el método directo de las rigideces para el cálculo de las cargas nodales en los extremos 1 y 2.

Por compatibilidad.

$$\begin{aligned}\{\Delta d'_{1a}\} &= \{0\} & \{\Delta d'_{2a}\} &= \{\Delta d'_B\} \\ \{\Delta d'_{1b}\} &= \{0\} & \{\Delta d'_{2b}\} &= \{\Delta d'_B\}\end{aligned}$$

Barra a

$$\begin{aligned}\{\Delta P'_{1a}\} &= [k'_{e1,1a}]\{0\} + [k'_{e1,2a}]\{\Delta d'_B\} \\ \{\Delta P'_{1a}\} &= \begin{bmatrix} -11,602.298635 & -3,864.432413 \\ -3,864.432413 & -1,287.144759 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.00000000 \\ -0.03884567 \end{Bmatrix} \\ \{\Delta P'_{1a}\} &= \begin{Bmatrix} 150.116465 \\ 50.000000 \end{Bmatrix} \\ \{\Delta P'_{2a}\} &= [k'_{e2,1a}]\{0\} + [k'_{e2,2a}]\{\Delta d'_B\} \\ \{\Delta P'_{2a}\} &= \begin{bmatrix} 11,602.298635 & 3,864.432413 \\ 3,864.432413 & 1,287.144759 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.00000000 \\ -0.03884567 \end{Bmatrix} \\ \{\Delta P'_{2a}\} &= \begin{Bmatrix} -150.116465 \\ -50.000000 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

Barra b

$$\begin{aligned}\{\Delta P'_{1b}\} &= [k'_{e1,1b}]\{0\} + [k'_{e1,2b}]\{\Delta d'_B\} \\ \{\Delta P'_{1b}\} &= \begin{bmatrix} -11,602.298635 & 3,864.432413 \\ 3,864.432413 & -1,287.144759 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.00000000 \\ -0.03884567 \end{Bmatrix} \\ \{\Delta P'_{1b}\} &= \begin{Bmatrix} -150.116465 \\ 50.000000 \end{Bmatrix} \\ \{\Delta P'_{2b}\} &= [k'_{e2,1b}]\{0\} + [k'_{e2,2b}]\{\Delta d'_B\} \\ \{\Delta P'_{2b}\} &= \begin{bmatrix} 11,602.298635 & -3,864.432413 \\ -3,864.432413 & 1,287.144759 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.00000000 \\ -0.03884567 \end{Bmatrix} \\ \{\Delta P'_{2b}\} &= \begin{Bmatrix} 150.116465 \\ -50.000000 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

Las fuerzas en el sistema local serán:

$$\{\Delta P\} = [T]^T \{\Delta P'\}$$

Barra a

Extremo 1

$$\Delta P_{1a} = [0.948757 \quad 0.316007]^T \begin{Bmatrix} 150.116465 \\ 50.000000 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{1a} = 158.224375 \text{ kg}$$

Extremo 2

$$\Delta P_{2a} = [0.948757 \quad 0.316007]^T \begin{Bmatrix} -150.116465 \\ -50.000000 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{2a} = -158.224375 \text{ kg}$$

Barra b

Extremo 1

$$\Delta P_{1b} = [-0.948757 \quad 0.316007]^T \begin{Bmatrix} -150.116465 \\ 50.000000 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{1b} = 158.224375 \text{ kg}$$

Extremo 2

$$\Delta P_{2b} = [-0.948757 \quad 0.316007]^T \begin{Bmatrix} 150.116465 \\ -50.000000 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{2b} = -158.224375 \text{ kg}$$

Hasta este momento la estructura se ha sometido a una carga $P=200 \text{ kg}$, misma que ha generado el siguiente vector de incremento de desplazamientos en el nudo B

$$\begin{Bmatrix} \Delta d'_{xB} \\ \Delta d'_{yB} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.00000000 \\ -0.03884567 \end{Bmatrix} \text{ cm}$$

y un vector de incremento de carga en el extremo 2 de las barras igual a:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P_{x2a} \\ \Delta P_{x2b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -158.224375 \\ -158.224375 \end{Bmatrix} \text{ kg}$$

De esta manera el vector de desplazamientos y el de cargas al final del segundo ciclo quedarán:

$$\begin{Bmatrix} d'_{xB} \\ d'_{yB} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.00000000 \\ -0.07763710 \end{Bmatrix} \text{ cm}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{x2a} \\ P_{x2b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -316.338258 \\ -316.338258 \end{Bmatrix} \text{ kg}$$

Con la información al final del segundo ciclo se calcularán las coordenadas de la nueva estructura de referencia o geometría deformada para el siguiente ciclo, mismas que se ilustran en la *figura 4.3* siguiente.

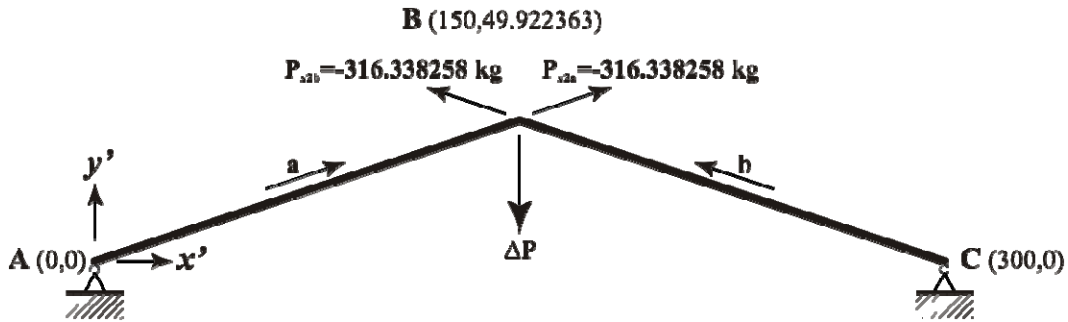


Figura 4.3. Configuración de la armadura para la tercera iteración.

Una vez definido el nuevo estado de referencia se repite el proceso hasta alcanzar el nivel de carga deseado.

En la *figura 4.4* muestra la gráfica carga-desplazamiento de la estructura para diferentes geometrías observando que en la medida de que la estructura se va haciendo esbelta, el comportamiento no lineal se manifiesta en una forma clara. Se han graficado también los desplazamientos producto de un análisis elástico lineal para el mismo nivel de carga, geometría y propiedades elásticas con línea punteada.

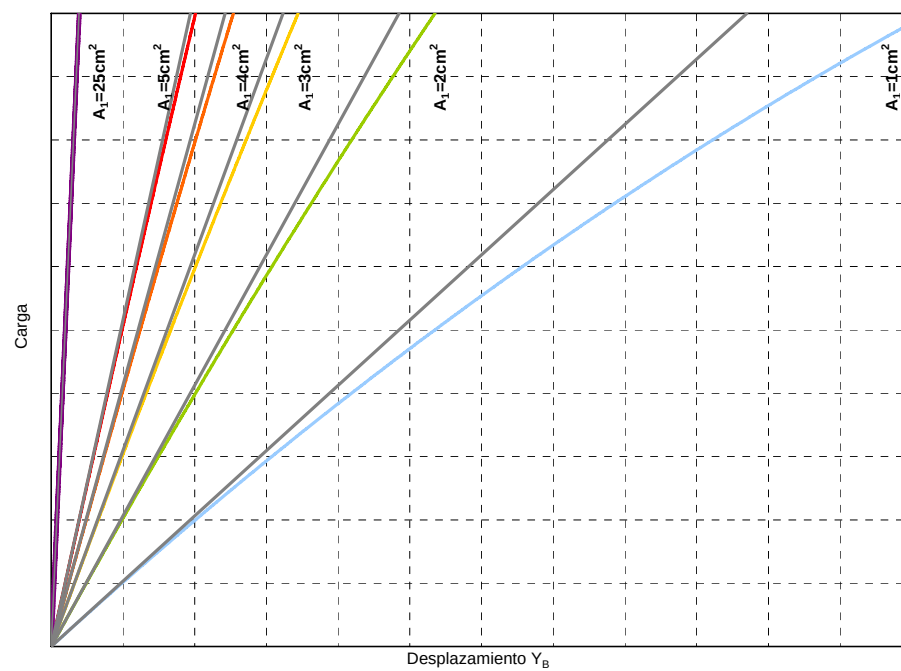


Figura 4.4. Gráfica carga-desplazamiento lineal Y para los casos de estudio.

4.2 Ejemplo de aplicación número 2 ARMADURA EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

Se realizará un análisis geométrico no lineal de la armadura plana en el espacio tridimensional que se muestra en la *figura 4.5*. Para el análisis se consideró un módulo de elasticidad $E=2,038,000 \text{ kg/cm}^2$ y para todas las barras una sección transversal de 1, 2, 3, 4,5 y 25 cm^2 respectivamente

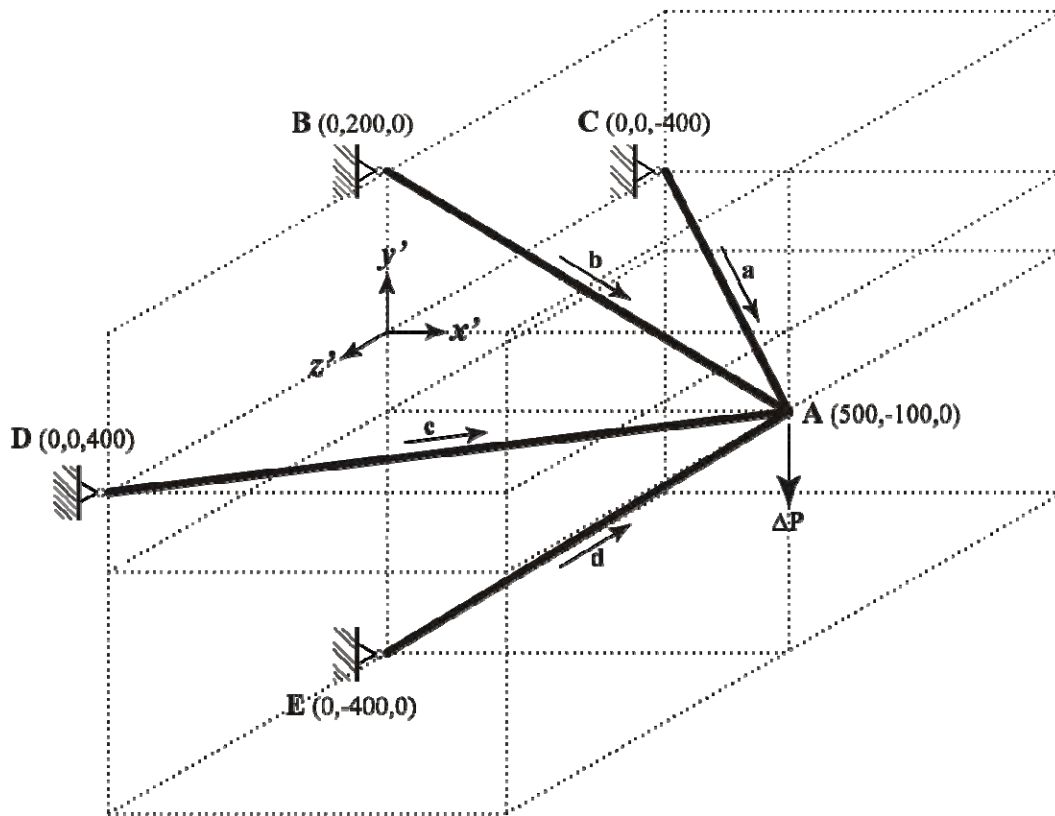


Figura 4.5. Armadura en el espacio tridimensional.

La ecuación fuerza desplazamiento de la estructura es:

$$[k'_{22a} + k'_{22b} + k'_{22c} + k'_{22d}] \{\Delta d'_A\} = \{\Delta P'_A\}$$

de la ecuación 2.12 sabemos que:

$$[k] = [k_e] + [k_g]$$

$$[k'_{22,i}] = [k'_{e22,i}] + [k'_{g22,i}]$$

aplicando la ecuación 2.11 para realizar la rotación del sistema local al global de las ecuaciones 2.37 y 2.53 tenemos:

$$[k'_{e22,i}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & ml & nl \\ ml & m^2 & mn \\ nl & mn & n^2 \end{bmatrix}$$

$$[k'_{g22,i}] = \frac{P_{x2}}{L} \begin{bmatrix} l^2 & ml & nl \\ ml & m^2 & mn \\ nl & mn & n^2 \end{bmatrix}$$

Los respectivos vectores de incremento de carga y desplazamiento son:

$$\{\Delta P'_A\} = \begin{Bmatrix} \Delta P'_{xA} \\ \Delta P'_{yA} \\ \Delta P'_{zA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{\Delta d'_A\} = \begin{Bmatrix} \Delta d'_{xA} \\ \Delta d'_{yA} \\ \Delta d'_{zA} \end{Bmatrix}$$

Resolviendo de manera iterativa la ecuación fuerza desplazamiento del sistema tendremos:

Primera iteración

Barra a

$$A_a = 1 \text{ cm}^2$$

$$P_{x2a} = 0$$

$$L_a = \sqrt{(500-0)^2 + (-100-0)^2 + (0-(-400))^2} = 648.074070 \text{ cm}$$

$$l_a = \frac{500-0}{648.074070} = 0.771517$$

$$m_a = \frac{-100-0}{648.074070} = -0.154303$$

$$n_a = \frac{0-(-400)}{648.074070} = 0.617213$$

Sustituyendo los valores anteriores y las propiedades elastogeométricas, las matrices resultantes en el sistema global son:

$$[k'_{e2,2a}] = \frac{(1)2,038,000}{648.074070} \begin{bmatrix} (0.7715)^2 & (-0.1543)(0.7715) & (0.6172)(0.7715) \\ (-0.1543)(0.7715) & (-0.1543)^2 & (-0.1543)(0.6172) \\ (0.6172)(0.7715) & (-0.1543)(0.6172) & (0.6172)^2 \end{bmatrix}$$

$$[k'_{e2,2a}] = \begin{bmatrix} 1,871.85 & -374.37 & 1,497.48 \\ -374.37 & 74.87 & -299.50 \\ 1,497.48 & -299.50 & 1,197.98 \end{bmatrix}$$

$$[k'_{g2,2a}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por tanto:

$$[k'_{2,2a}] = \begin{bmatrix} 1,871.85 & -374.37 & 1,497.48 \\ -374.37 & 74.87 & -299.50 \\ 1,497.48 & -299.50 & 1,197.98 \end{bmatrix}$$

Barra b

$$A_b = 1 \text{ cm}^2$$

$$P_{x2b} = 0$$

$$L_b = \sqrt{(500-0)^2 + (-100-200)^2 + (0-0)^2} = 583.095189 \text{ cm}$$

$$l_b = \frac{500-0}{583.095189} = 0.857493$$

$$m_b = \frac{-100-200}{583.095189} = -0.514496$$

$$n_b = \frac{0-0}{583.095189} = 0$$

Sustituyendo los valores anteriores y las propiedades elastogeométricas, las matrices resultantes en el sistema global para la barra b son:

$$[k'_{e2,2b}] = \frac{(1)2,038,000}{583.095189} \begin{bmatrix} (0.8575)^2 & (-0.5145)(0.8575) & (0)(0.8575) \\ (-0.5145)(0.8575) & (-0.5145)^2 & (-0.5145)(0) \\ (0)(0.8575) & (-0.5145)(0) & (0)^2 \end{bmatrix}$$

$$[k'_{e2,2b}] = \begin{bmatrix} 2,569.96 & -1,541.97 & 0 \\ -1,541.97 & 925.18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k'_{g2,2b}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por tanto:

$$[k'_{2,2b}] = \begin{bmatrix} 2,569.96 & -1,541.97 & 0 \\ -1,541.97 & 925.18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Barra c

$$A_c = 1 \text{ cm}^2$$

$$P_{x2c} = 0$$

$$L_c = \sqrt{(500-0)^2 + (-100-0)^2 + (0-400)^2} = 648.074070 \text{ cm}$$

$$l_c = \frac{500-0}{648.074070} = 0.771517$$

$$m_c = \frac{-100-0}{648.074070} = -0.154303$$

$$n_c = \frac{0-400}{648.074070} = -0.617213$$

Sustituyendo los valores anteriores y las propiedades elastogeométricas, las matrices resultantes en el sistema global son:

$$[k'_{e2,2c}] = \frac{(1)2,038,000}{648.074070} \begin{bmatrix} (0.7715)^2 & (-0.1543)(0.7715) & (-0.6172)(0.7715) \\ (-0.1543)(0.7715) & (-0.1543)^2 & (-0.1543)(-0.6172) \\ (-0.6172)(0.7715) & (-0.1543)(-0.6172) & (-0.6172)^2 \end{bmatrix}$$

$$[k'_{e2,2c}] = \begin{bmatrix} 1,871.85 & -374.37 & -1,497.48 \\ -374.37 & 74.87 & 299.50 \\ -1,497.48 & 299.50 & 1,197.98 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k'_{g2,2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por tanto:

$$\begin{bmatrix} k'_{2,2c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,871.85 & -374.37 & -1,497.48 \\ -374.37 & 74.87 & 299.50 \\ -1,497.48 & 299.50 & 1,197.98 \end{bmatrix}$$

Barra d

$$A_d = 1 \text{ cm}^2$$

$$P_{x2d} = 0$$

$$L_d = \sqrt{(500-0)^2 + (-100-(-400))^2 + (0-0)^2} = 583.095189 \text{ cm}$$

$$l_d = \frac{500-0}{583.095189} = 0.857493$$

$$m_d = \frac{-100-(-400)}{583.095189} = 0.514496$$

$$n_d = \frac{0-0}{583.095189} = 0$$

Sustituyendo los valores anteriores y las propiedades elastogeométricas, las matrices resultantes en el sistema global son:

$$\begin{bmatrix} k'_{e2,2d} \end{bmatrix} = \frac{(1)2,038,000}{583.095189} \begin{bmatrix} (0.8575)^2 & (0.8575)(0.5145) & (0)(0.8575) \\ (0.8575)(0.5145) & (0.5145)^2 & (0.5145)(0) \\ (0)(0.8575) & (0.5145)(0) & (0)^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k'_{e2,2d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,569.96 & 1,541.97 & 0 \\ 1,541.97 & 925.18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k'_{g2,2d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por tanto:

$$[k'_{2,2d}] = \begin{bmatrix} 2,569.96 & 1,541.97 & 0 \\ 1,541.97 & 925.18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sustituyendo en la ecuación fuerza desplazamiento

$$\begin{bmatrix} 8,883.61 & -748.74 & 0 \\ -748.74 & 2,000.12 & 0 \\ 0 & 0 & 2,395.96 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta d'_{xA} \\ \Delta d'_{yA} \\ \Delta d'_{zA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

resolviendo el sistema

$$\begin{Bmatrix} \Delta d'_{xA} \\ \Delta d'_{yA} \\ \Delta d'_{zA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.00435120 \\ -0.05162595 \\ 0.00000000 \end{Bmatrix}$$

Aplicando el método directo de las rigideces para el cálculo de las cargas nodales en los extremos 1 y 2 para cada una de las barras que forman la estructura.

Por compatibilidad.

$$\begin{aligned} \{\Delta d'_{1a}\} &= \{0\} & \{\Delta d'_{2a}\} &= \{\Delta d'_A\} \\ \{\Delta d'_{1b}\} &= \{0\} & \{\Delta d'_{2b}\} &= \{\Delta d'_A\} \\ \{\Delta d'_{1c}\} &= \{0\} & \{\Delta d'_{2c}\} &= \{\Delta d'_A\} \\ \{\Delta d'_{1d}\} &= \{0\} & \{\Delta d'_{2d}\} &= \{\Delta d'_A\} \end{aligned}$$

Barra a

$$\begin{aligned} \{\Delta P'_{1a}\} &= [k'_{1,1a}]\{0\} + [k'_{1,2a}]\{\Delta d'_A\} \\ \{\Delta P'_{1a}\} &= \begin{bmatrix} -1,871.8466 & 374.3693 & -1,497.4773 \\ 374.3693 & -74.8739 & 299.4955 \\ -1,497.4773 & 299.4955 & -1,197.9818 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.00435120 \\ -0.05162595 \\ 0.00000000 \end{Bmatrix} \\ \{\Delta P'_{1a}\} &= \begin{Bmatrix} -11.182393 \\ 2.236479 \\ -8.945915 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\{\Delta P'_{2a}\} = [k'_{2,1a}]\{0\} + [k'_{2,2a}]\{\Delta d'_A\}$$

$$\{\Delta P'_{2a}\} = \begin{bmatrix} 1,871.8466 & -374.3693 & 1,497.4773 \\ -374.3693 & 74.8739 & -299.4955 \\ 1,497.4773 & -299.4955 & 1,197.9818 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.00435120 \\ -0.05162595 \\ 0.00000000 \end{bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{2a}\} = \begin{bmatrix} 11.182393 \\ -2.236479 \\ 8.945915 \end{bmatrix}$$

Barra b

$$\{\Delta P'_{1b}\} = [k'_{1,1b}]\{0\} + [k'_{1,2b}]\{\Delta d'_A\}$$

$$\{\Delta P'_{1b}\} = \begin{bmatrix} -2,569.9567 & 1,541.9740 & 0 \\ 1,541.9740 & -925.1844 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.00435120 \\ -0.05162595 \\ 0.00000000 \end{bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{1b}\} = \begin{bmatrix} -68.423476 \\ 41.054085 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{2b}\} = [k'_{2,1b}]\{0\} + [k'_{2,2b}]\{\Delta d'_A\}$$

$$\{\Delta P'_{2b}\} = \begin{bmatrix} 2,569.9567 & -1,541.9740 & 0 \\ -1,541.9740 & 925.1844 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.00435120 \\ -0.05162595 \\ 0.00000000 \end{bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{2b}\} = \begin{bmatrix} 68.423476 \\ -41.054085 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Barra c

$$\{\Delta P'_{1c}\} = [k'_{1,1c}]\{0\} + [k'_{1,2c}]\{\Delta d'_A\}$$

$$\{\Delta P'_{1c}\} = \begin{bmatrix} -1,871.8466 & 374.3693 & 1,497.4773 \\ 374.3693 & -74.8739 & -299.4955 \\ 1,497.4773 & -299.4955 & -1,197.9818 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.00435120 \\ -0.05162595 \\ 0.00000000 \end{bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{1c}\} = \begin{Bmatrix} -11.182393 \\ 2.236479 \\ 8.945915 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{2c}\} = [k'_{2,1c}]\{0\} + [k'_{2,2c}]\{\Delta d'_A\}$$

$$\{\Delta P'_{2c}\} = \begin{bmatrix} 1,871.8466 & -374.3693 & -1,497.4773 \\ -374.3693 & 74.8739 & 299.4955 \\ -1,497.4773 & 299.4955 & 1,197.9818 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.00435120 \\ -0.05162595 \\ 0.00000000 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{2c}\} = \begin{Bmatrix} 11.182393 \\ -2.236479 \\ -8.945915 \end{Bmatrix}$$

Barra d

$$\{\Delta P'_{1d}\} = [k'_{1,1d}]\{0\} + [k'_{1,2d}]\{\Delta d'_A\}$$

$$\{\Delta P'_{1d}\} = \begin{bmatrix} -2,569.9567 & -1,541.9740 & 0 \\ -1,541.9740 & -925.1844 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.00435120 \\ -0.05162595 \\ 0.00000000 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{1d}\} = \begin{Bmatrix} 90.788262 \\ 54.472957 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{2d}\} = [k'_{2,1d}]\{0\} + [k'_{2,2d}]\{\Delta d'_A\}$$

$$\{\Delta P'_{2d}\} = \begin{bmatrix} 2,569.9567 & 1,541.9740 & 0 \\ 1,541.9740 & 925.1844 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.00435120 \\ -0.05162595 \\ 0.00000000 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{2d}\} = \begin{Bmatrix} -90.788262 \\ -54.472957 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Las fuerzas en el sistema local serán:

$$\{\Delta P\} = [T]^T \{\Delta P'\}$$

Barra a

Extremo 1

$$\Delta P_{1a} = \begin{bmatrix} 0.7715 & -0.1543 & 0.6172 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} -11.182393 \\ 2.236479 \\ -8.945915 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{1a} = -14.494038 \text{ kg}$$

Extremo 2

$$\Delta P_{2a} = \begin{bmatrix} 0.7715 & -0.1543 & 0.6172 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 11.182393 \\ -2.236479 \\ 8.945915 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{1a} = 14.494038 \text{ kg}$$

Barra b

Extremo 1

$$\Delta P_{1b} = \begin{bmatrix} 0.8575 & -0.5145 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} -68.423476 \\ 41.054085 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{1b} = -79.794799 \text{ kg}$$

Extremo 2

$$\Delta P_{2b} = \begin{bmatrix} 0.8575 & -0.5145 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 68.423476 \\ -41.054085 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{2b} = 79.794799 \text{ kg}$$

Barra c

Extremo 1

$$\Delta P_{1c} = \begin{bmatrix} 0.7715 & -0.1543 & -0.6172 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} -11.182393 \\ 2.236479 \\ 8.945915 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{1c} = -14.494038 \text{ kg}$$

Extremo 2

$$\Delta P_{2c} = \begin{bmatrix} 0.7715 & -0.1543 & -0.6172 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 11.182393 \\ -2.236479 \\ -8.945915 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{2c} = 14.494038 \text{ kg}$$

Barra d

Extremo 1

$$\Delta P_{1d} = \begin{bmatrix} 0.8575 & 0.5145 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 90.788262 \\ 54.472957 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{1d} = 105.876398 \text{ kg}$$

Extremo 2

$$\Delta P_{2d} = \begin{bmatrix} 0.8575 & 0.5145 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} -90.788262 \\ -54.472957 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{2d} = -105.876398 \text{ kg}$$

Hasta este momento la estructura se ha sometido a una carga $P=100 \text{ kg}$, misma que ha generado el siguiente vector de incremento de desplazamientos en el nudo A

$$\begin{Bmatrix} \Delta d'_{xA} \\ \Delta d'_{yA} \\ \Delta d'_{zA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.00435120 \\ -0.05162595 \\ 0.00000000 \end{Bmatrix} \text{ cm}$$

y un vector de incremento de carga en el extremo 2 de las barras igual a:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P_{x2a} \\ \Delta P_{x2b} \\ \Delta P_{x2c} \\ \Delta P_{x2d} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.494038 \\ 79.794799 \\ 14.494038 \\ -105.876398 \end{Bmatrix} \text{ kg}$$

De esta manera el vector de desplazamientos y el de cargas al final del primer ciclo quedarán:

$$\begin{Bmatrix} d'_{xA} \\ d'_{yA} \\ d'_{zA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.00435120 \\ -0.05162595 \\ 0.00000000 \end{Bmatrix} \text{ cm}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{x2a} \\ P_{x2b} \\ P_{x2c} \\ P_{x2d} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.494038 \\ 79.794799 \\ 14.494038 \\ -105.876398 \end{Bmatrix} \text{ kg}$$

Con la información al final del primer ciclo se calcularán las coordenadas de la nueva estructura de referencia o geometría deformada para el siguiente ciclo.

La configuración de la estructura para la segunda iteración, así como las fuerzas en el extremo dos de las barras se muestra en la *figura 4.6* siguiente.

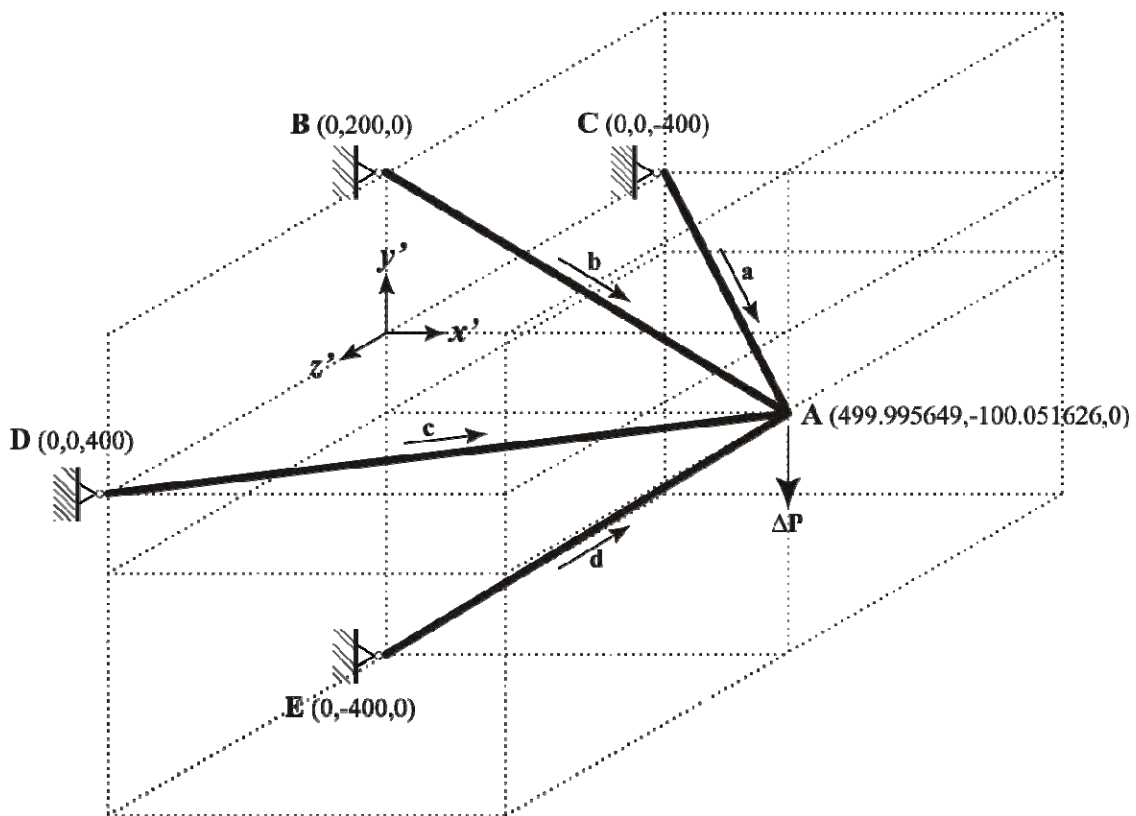


Figura 4.6. Configuración de la armadura para la segunda iteración.

Segunda iteración**Barra a**

$$A_a = 1 \text{ cm}^2$$

$$P_{x2a} = 14.494038 \text{ kg}$$

$$L_a = \sqrt{(499.995649 - 0)^2 + (-100.051626 - 0)^2 + (0 - (-400))^2} = 648.078681 \text{ cm}$$

$$l_a = \frac{499.995649 - 0}{648.078681} = 0.771505$$

$$m_a = \frac{-100.051626 - 0}{648.078681} = -0.154382$$

$$n_a = \frac{0 - (-400)}{648.078681} = 0.617209$$

Sustituyendo los valores anteriores y las propiedades elastogeométricas, las matrices resultantes en el sistema global son:

$$[k'_{e2,2a}] = \frac{(1)2,038,000}{648.078681} \begin{bmatrix} (0.7715)^2 & (-0.1543)(0.7715) & (0.6172)(0.7715) \\ (-0.1543)(0.7715) & (-0.1543)^2 & (-0.1543)(0.6172) \\ (0.6172)(0.7715) & (-0.1543)(0.6172) & (0.6172)^2 \end{bmatrix}$$

$$[k'_{e2,2a}] = \begin{bmatrix} 1,871.7741 & -374.5513 & 1,497.4323 \\ -374.5513 & 74.9496 & -299.6437 \\ 1,497.4323 & -299.6437 & 1,197.9562 \end{bmatrix}$$

$$[k'_{g2,2a}] = \begin{bmatrix} 0.0133 & -0.0027 & 0.0106 \\ -0.0027 & 0.0005 & -0.0021 \\ 0.0106 & -0.0021 & 0.0085 \end{bmatrix}$$

por tanto:

$$[k'_{2,2a}] = \begin{bmatrix} 1,871.7874 & -374.5540 & 1,497.4429 \\ -374.5540 & 74.9501 & -299.6458 \\ 1,497.4429 & -299.6458 & 1,197.9648 \end{bmatrix}$$

Barra b

$$A_b = 1 \text{ cm}^2$$

$$P_{x2b} = 79.794799 \text{ kg}$$

$$L_b = \sqrt{(499.995649 - 0)^2 + (-100.051626 - 200)^2 + (0 - 0)^2} = 583.118022 \text{ cm}$$

$$l_b = \frac{499.995649 - 0}{583.118022} = 0.857452$$

$$m_b = \frac{-100.051626 - 200}{583.118022} = -0.514564$$

$$n_b = \frac{0 - 0}{583.118022} = 0$$

Sustituyendo los valores anteriores y las propiedades elastogeométricas, las matrices resultantes en el sistema global para la barra b son:

$$[k'_{e2,2b}] = \frac{(1)2,038,000}{583.118022} \begin{bmatrix} (0.8575)^2 & (-0.5146)(0.8575) & (0)(0.8575) \\ (-0.5146)(0.8575) & (-0.5146)^2 & (-0.5145)(0) \\ (0)(0.8575) & (-0.5146)(0) & (0)^2 \end{bmatrix}$$

$$[k'_{e2,2b}] = \begin{bmatrix} 2,569.6101 & -1,542.0448 & 0 \\ -1,542.0448 & 925.3942 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k'_{g2,2b}] = \begin{bmatrix} 0.1006 & -0.0604 & 0 \\ -0.0604 & 0.0362 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por tanto:

$$[k'_{2,2b}] = \begin{bmatrix} 2,569.7108 & -1,542.1052 & 0 \\ -1,542.1052 & 925.4304 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Barra c

$$A_c = 1 \text{ cm}^2$$

$$P_{x2c} = 14.494038 \text{ kg}$$

$$L_c = \sqrt{(499.995649 - 0)^2 + (-100.051626 - 0)^2 + (0 - 400)^2} = 648.078681 \text{ cm}$$

$$l_c = \frac{499.995649 - 0}{648.078681} = 0.771505$$

$$m_c = \frac{-100.051626 - 0}{648.078681} = -0.154382$$

$$n_c = \frac{0 - 400}{648.078681} = -0.617209$$

Sustituyendo los valores anteriores y las propiedades elastogeométricas, las matrices resultantes en el sistema global son:

$$[k'_{e2,2c}] = \frac{(1)2,038,000}{648.078681} \begin{bmatrix} (0.7715)^2 & (-0.1543)(0.7715) & (0.6172)(0.7715) \\ (-0.1543)(0.7715) & (-0.1543)^2 & (-0.1543)(-0.6172) \\ (0.6172)(0.7715) & (-0.1543)(-0.6172) & (-0.6172)^2 \end{bmatrix}$$

$$[k'_{e2,2ac}] = \begin{bmatrix} 1,871.7741 & -374.5513 & -1,497.4323 \\ -374.5513 & 74.9496 & 299.6437 \\ -1,497.4323 & 299.6437 & 1,197.9562 \end{bmatrix}$$

$$[k'_{g2,2c}] = \begin{bmatrix} 0.0133 & -0.0027 & -0.0106 \\ -0.0027 & 0.0005 & 0.0021 \\ -0.0106 & 0.0021 & 0.0085 \end{bmatrix}$$

por tanto:

$$[k'_{2,2c}] = \begin{bmatrix} 1,871.7874 & -374.5540 & -1,497.4429 \\ -374.5540 & 74.9501 & 299.6458 \\ -1,497.4429 & 299.6458 & 1,197.9648 \end{bmatrix}$$

Barra d

$$A_d = 1 \text{ cm}^2$$

$$P_{x2d} = 105.876398 \text{ kg}$$

$$L_d = \sqrt{(499.995649 - 0)^2 + (-100.051626 - (-400))^2 + (0 - 0)^2} = 583.064899 \text{ cm}$$

$$l_d = \frac{499.995649 - 0}{583.064899} = 0.857530$$

$$m_d = \frac{-100.051626 - (-400)}{583.064899} = 0.514434$$

$$n_d = \frac{0 - 0}{583.064899} = 0$$

Sustituyendo los valores anteriores y las propiedades elastogeométricas, las matrices resultantes en el sistema global son:

$$[k'_{e2,2d}] = \frac{(1)2,038,000}{583.064899} \begin{bmatrix} (0.8575)^2 & (0.8575)(0.5144) & (0)(0.8575) \\ (0.8575)(0.5144) & (0.5144)^2 & (0.5144)(0) \\ (0)(0.8575) & (0.5144)(0) & (0)^2 \end{bmatrix}$$

$$[k'_{e2,2d}] = \begin{bmatrix} 2,570.3126 & 1,541.9356 & 0 \\ 1,541.9356 & 925.0102 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k'_{g2,2d}] = \begin{bmatrix} -0.1335 & -0.0801 & 0 \\ -0.0801 & -0.0481 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por tanto:

$$[k'_{2,2d}] = \begin{bmatrix} 2,570.1790 & 1,541.8555 & 0 \\ 1,541.8555 & 924.9621 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sustituyendo en la ecuación fuerza desplazamiento

$$\begin{bmatrix} 8,883.4645 & -749.3577 & 0 \\ -749.3577 & 2,000.2928 & 0 \\ 0 & 0 & 2,395.9295 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta d'_{xA} \\ \Delta d'_{yA} \\ \Delta d'_{zA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

resolviendo el sistema

$$\begin{Bmatrix} \Delta d'_{xA} \\ \Delta d'_{yA} \\ \Delta d'_{zA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.00435471 \\ -0.05162406 \\ 0.00000000 \end{Bmatrix}$$

Aplicando el método directo de las rigideces para el cálculo de las cargas nodales en los extremos 1 y 2 para cada una de las barras que forman la estructura.

Por compatibilidad.

$$\begin{aligned} \{\Delta d'_{1a}\} &= \{0\} & \{\Delta d'_{2a}\} &= \{\Delta d'_A\} \\ \{\Delta d'_{1b}\} &= \{0\} & \{\Delta d'_{2b}\} &= \{\Delta d'_A\} \\ \{\Delta d'_{1c}\} &= \{0\} & \{\Delta d'_{2c}\} &= \{\Delta d'_A\} \end{aligned}$$

$$\{\Delta d'_{1d}\} = \{0\}$$

$$\{\Delta d'_{2d}\} = \{\Delta d'_A\}$$

Barra a

$$\{\Delta P'_{1a}\} = [k'_{1,1a}]\{0\} + [k'_{1,2a}]\{\Delta d'_A\}$$

$$\{\Delta P'_{1a}\} = \begin{bmatrix} -1,871.7874 & 374.5540 & -1,497.4429 \\ 374.5540 & -74.9501 & 299.6458 \\ -1,497.4429 & 299.6458 & -1,197.9648 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.00435471 \\ -0.05162406 \\ 0.00000000 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{1a}\} = \begin{Bmatrix} -11.184912 \\ 2.238157 \\ -8.948007 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{2a}\} = [k'_{2,1a}]\{0\} + [k'_{2,2a}]\{\Delta d'_A\}$$

$$\{\Delta P'_{2a}\} = \begin{bmatrix} 1,871.7874 & -374.5540 & 1,497.4429 \\ -374.5540 & 74.9501 & -299.6458 \\ 1,497.4429 & -299.6458 & 1,197.9648 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.00435471 \\ -0.05162406 \\ 0.00000000 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{2a}\} = \begin{Bmatrix} 11.184912 \\ -2.238157 \\ 8.948007 \end{Bmatrix}$$

Barra b

$$\{\Delta P'_{1b}\} = [k'_{1,1b}]\{0\} + [k'_{1,2b}]\{\Delta d'_A\}$$

$$\{\Delta P'_{1b}\} = \begin{bmatrix} -2,569.7108 & 1,542.1052 & 0 \\ 1,542.1052 & -925.4304 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.00435471 \\ -0.05162406 \\ 0.00000000 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{1b}\} = \begin{Bmatrix} -68.419393 \\ 41.059057 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{2b}\} = [k'_{2,1b}]\{0\} + [k'_{2,2b}]\{\Delta d'_A\}$$

$$\{\Delta P'_{2b}\} = \begin{bmatrix} 2,569.7108 & -1,542.1052 & 0 \\ -1,542.1052 & 925.4304 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.00435471 \\ -0.05162406 \\ 0.00000000 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{2b}\} = \begin{Bmatrix} 68.419393 \\ -41.059057 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Barra c

$$\{\Delta P'_{1c}\} = [k'_{1,1c}]\{0\} + [k'_{1,2c}]\{\Delta d'_A\}$$

$$\{\Delta P'_{1c}\} = \begin{bmatrix} -1,871.7874 & 374.5540 & 1,497.4429 \\ 374.5540 & -74.9501 & -299.6458 \\ 1,497.4429 & -299.6458 & -1,197.9648 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.00435471 \\ -0.05162406 \\ 0.00000000 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{1c}\} = \begin{Bmatrix} -11.184912 \\ 2.238157 \\ 8.948007 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{2c}\} = [k'_{2,1c}]\{0\} + [k'_{2,2c}]\{\Delta d'_A\}$$

$$\{\Delta P'_{2c}\} = \begin{bmatrix} 1,871.7874 & -374.5540 & -1,497.4429 \\ -374.5540 & 74.9501 & 299.6458 \\ -1,497.4429 & 299.6458 & 1,197.9648 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.00435471 \\ -0.05162406 \\ 0.00000000 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{2c}\} = \begin{Bmatrix} 11.184912 \\ -2.238157 \\ -8.948007 \end{Bmatrix}$$

Barra d

$$\{\Delta P'_{1d}\} = [k'_{1,1d}]\{0\} + [k'_{1,2d}]\{\Delta d'_A\}$$

$$\{\Delta P'_{1d}\} = \begin{bmatrix} -2,570.1790 & -1,541.8555 & 0 \\ -1,541.8555 & -924.9621 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.00435471 \\ -0.05162406 \\ 0.00000000 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{1d}\} = \begin{Bmatrix} 90.789216 \\ 54.464629 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{2d}\} = [k'_{2,1d}]\{0\} + [k'_{2,2d}]\{\Delta d'_A\}$$

$$\{\Delta P'_{2d}\} = \begin{bmatrix} 2,570.1790 & 1,541.8555 & 0 \\ 1,541.8555 & 924.9621 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.00435471 \\ -0.05162406 \\ 0.00000000 \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta P'_{2d}\} = \begin{Bmatrix} -90.789216 \\ -54.464629 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Las fuerzas en el sistema local serán:

$$\{\Delta P\} = [T]^T \{\Delta P'\}$$

Barra a

Extremo 1

$$\Delta P_{1a} = [0.7715 \quad -0.1544 \quad 0.6172]^T \begin{Bmatrix} -11.184912 \\ 2.238157 \\ -8.948007 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{1a} = -14.497532 \text{ kg}$$

Extremo 2

$$\Delta P_{2a} = [0.7715 \quad -0.1544 \quad 0.6172]^T \begin{Bmatrix} 11.184912 \\ -2.238157 \\ 8.948007 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{1a} = 14.497532 \text{ kg}$$

Barra b

Extremo 1

$$\Delta P_{1b} = [0.8575 \quad -0.5146 \quad 0]^T \begin{Bmatrix} -68.419393 \\ 41.059057 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{1b} = -79.793856 \text{ kg}$$

Extremo 2

$$\Delta P_{2b} = \begin{bmatrix} 0.8575 & -0.5146 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 68.419393 \\ -41.059057 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{1b} = 79.793856 \text{ kg}$$

Barra c

Extremo 1

$$\Delta P_{1c} = \begin{bmatrix} 0.7715 & -0.1544 & -0.6172 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} -11.184912 \\ 2.238157 \\ 8.948007 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{1c} = -14.497532 \text{ kg}$$

Extremo 2

$$\Delta P_{2c} = \begin{bmatrix} 0.7715 & -0.1544 & -0.6172 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 11.184912 \\ -2.238157 \\ -8.948007 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{2c} = 14.497532 \text{ kg}$$

Barra d

Extremo 1

$$\Delta P_{1d} = \begin{bmatrix} 0.8575 & 0.51445 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 90.789216 \\ 54.464629 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{1d} = 105.872931 \text{ kg}$$

Extremo 2

$$\Delta P_{2d} = \begin{bmatrix} 0.8575 & 0.5145 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} -90.789216 \\ -54.464629 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta P_{2d} = -105.872931 \text{ kg}$$

Hasta este momento la estructura se ha sometido a una carga $P=100$ kg, misma que ha generado el siguiente vector de incremento de desplazamientos en el nudo A

$$\begin{Bmatrix} \Delta d'_{xA} \\ \Delta d'_{yA} \\ \Delta d'_{zA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.00435471 \\ -0.05162406 \\ 0.00000000 \end{Bmatrix} \text{ cm}$$

y un vector de incremento de carga en el extremo 2 de las barras igual a:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P_{x2a} \\ \Delta P_{x2b} \\ \Delta P_{x2c} \\ \Delta P_{x2d} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.497532 \\ 79.793856 \\ 14.497532 \\ -105.872931 \end{Bmatrix} \text{ kg}$$

De esta manera el vector de desplazamientos y el de cargas al final del segundo ciclo quedarán:

$$\begin{Bmatrix} d'_{xA} \\ d'_{yA} \\ d'_{zA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.00870591 \\ -0.10325001 \\ 0.00000000 \end{Bmatrix} \text{ cm}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{x2a} \\ P_{x2b} \\ P_{x2c} \\ P_{x2d} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 28.991570 \\ 159.588655 \\ 28.991570 \\ -211.749329 \end{Bmatrix} \text{ kg}$$

Con la información al final del segundo ciclo se calcularán las coordenadas de la nueva estructura de referencia con geometría deformada para el ciclo siguiente. Esta configuración se ilustra en la *figura 4.7* siguiente.

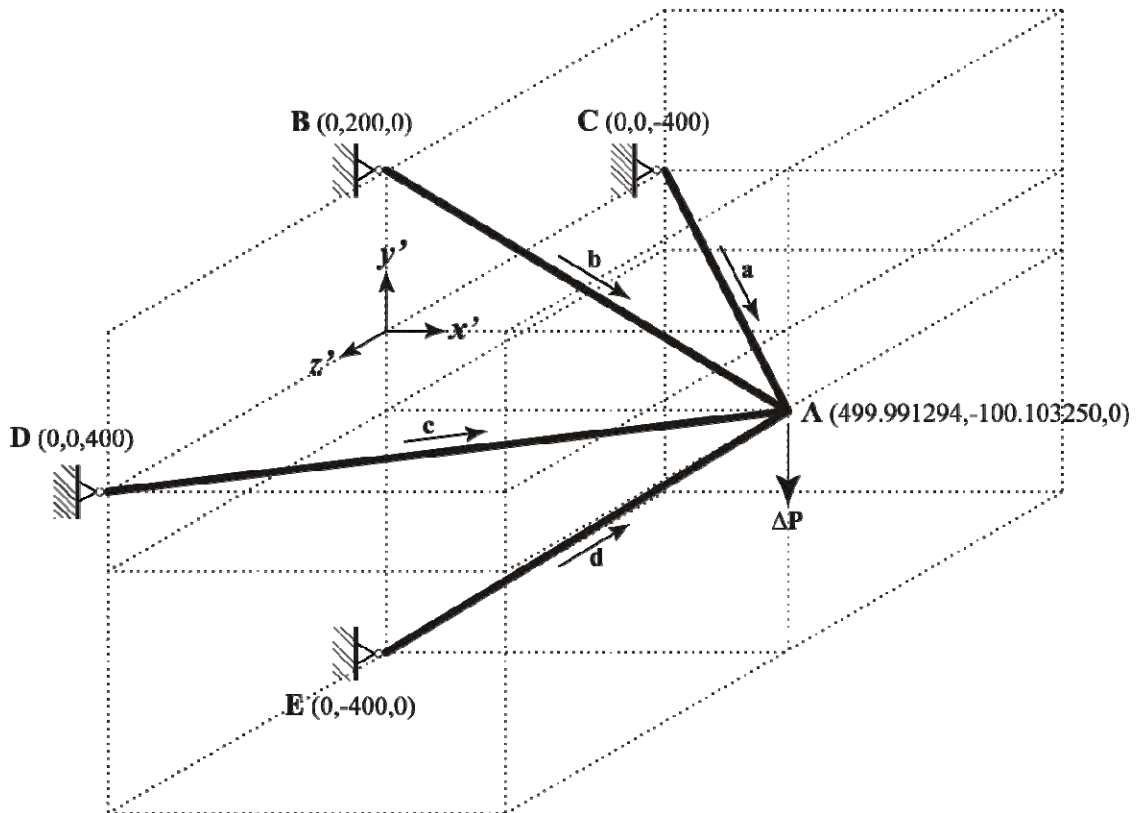


Figura 4.7. Configuración de la armadura para la tercera iteración.

Una vez definido el nuevo estado de referencia se repite el proceso hasta alcanzar el nivel de carga deseado.

En la figura 4.8 y figura 4.9 se muestra la gráfica carga-desplazamiento de la estructura para el *nodo A* en dirección *X* y *Y* para diferentes geometrías observando que en la medida de que la estructura se va haciendo esbelta, el comportamiento no lineal se manifiesta en una forma clara. También se han graficado los desplazamientos para el mismo nivel de carga, geometría y propiedades elásticas mediante un análisis lineal con línea.

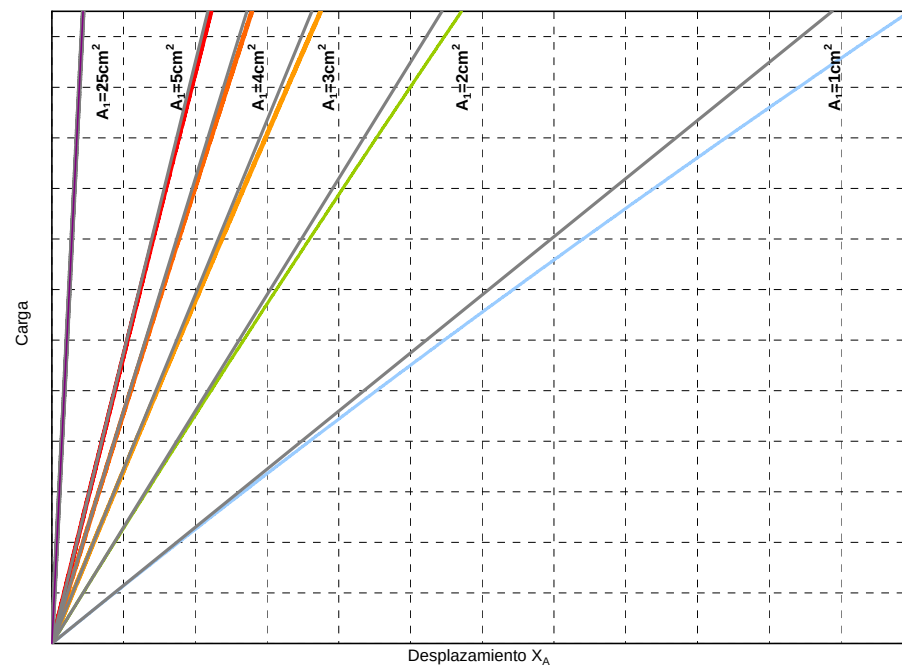


Figura 4.8. Gráfica carga-desplazamiento lineal en sentido X para los casos de estudio.

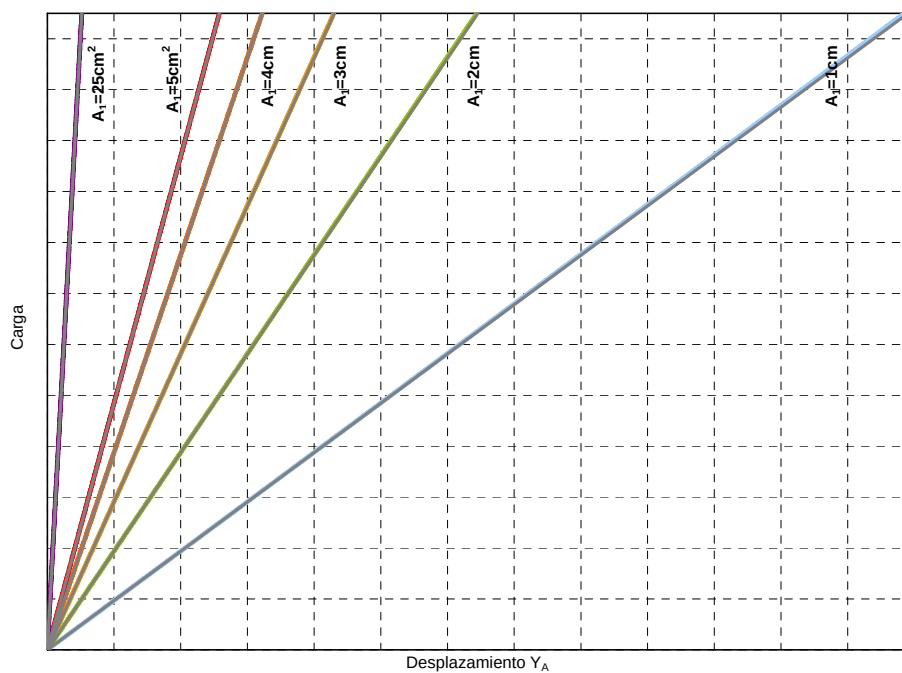


Figura 4.9. Gráfica carga-desplazamiento lineal en sentido Y para los casos de estudio.

4.3 Ejemplo de aplicación número 3 MARCO PLANO.

Se realizará un análisis geométrico no lineal del marco plano formado por dos barras que se muestra en la *figura 4.10.a* Considere para el análisis un módulo de elasticidad $E=2,038,000 \text{ kg/cm}^2$ y para todas las barras una sección transversal cuadrada de 30x30 cm, 32.5x32.5 cm, 35x35 cm, 37.5x37.5 cm, 40x40 cm y 50x50 cm respectivamente.

En la *figura 4.10.b* se muestra la configuración de referencia inicial al final del primer ciclo y en la *figura 4.10.c* la configuración deformada después del segundo ciclo.

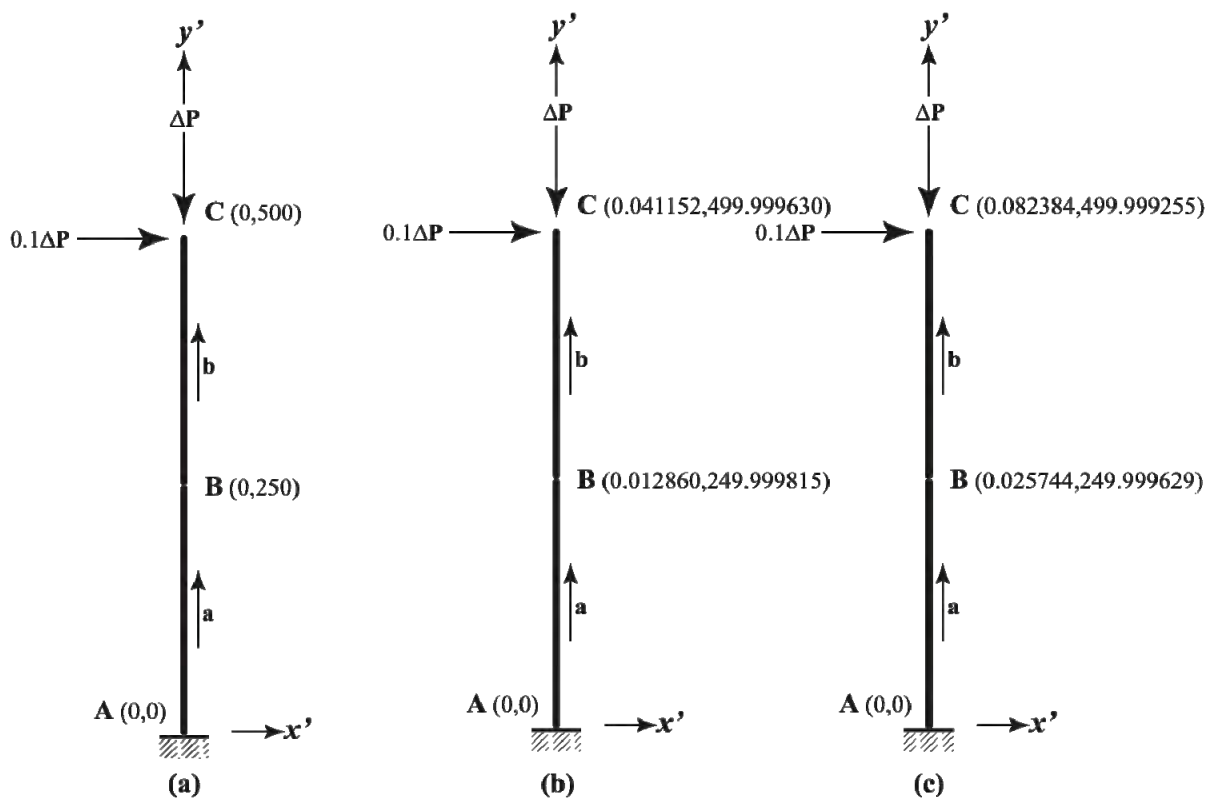


Figura 4.10. Marco plano.

Las gráficas carga-desplazamiento se ilustran en las figuras 4.11 a la 4.13 respectivamente, en ellas se muestran los desplazamientos lineales y angulares sufridos en el *nodo B*. También se han graficado con línea punteada los desplazamientos obtenidos de un análisis elástico lineal para el mismo nivel de carga, geometría y propiedades elásticas.

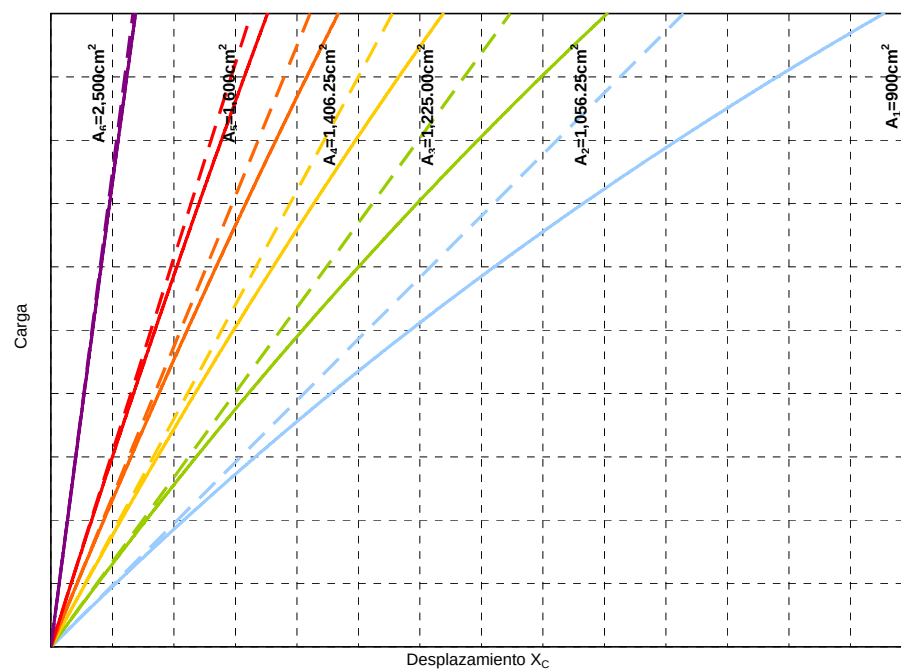


Figura 4.11. Gráfica carga-desplazamiento lineal en sentido X para los casos de estudio.

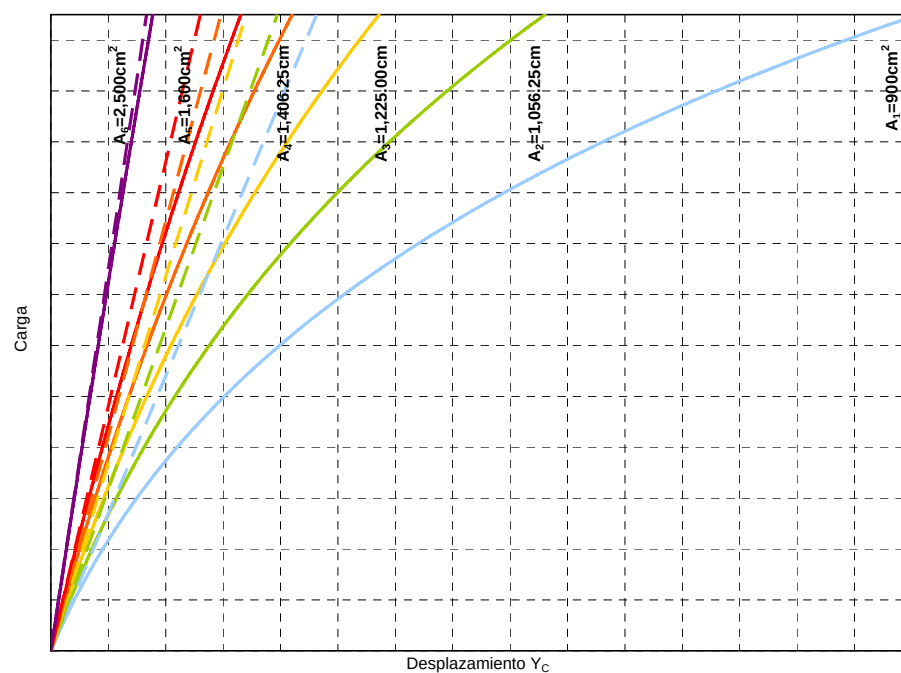


Figura 4.12. Gráfica carga-desplazamiento lineal en sentido Y para los casos de estudio.

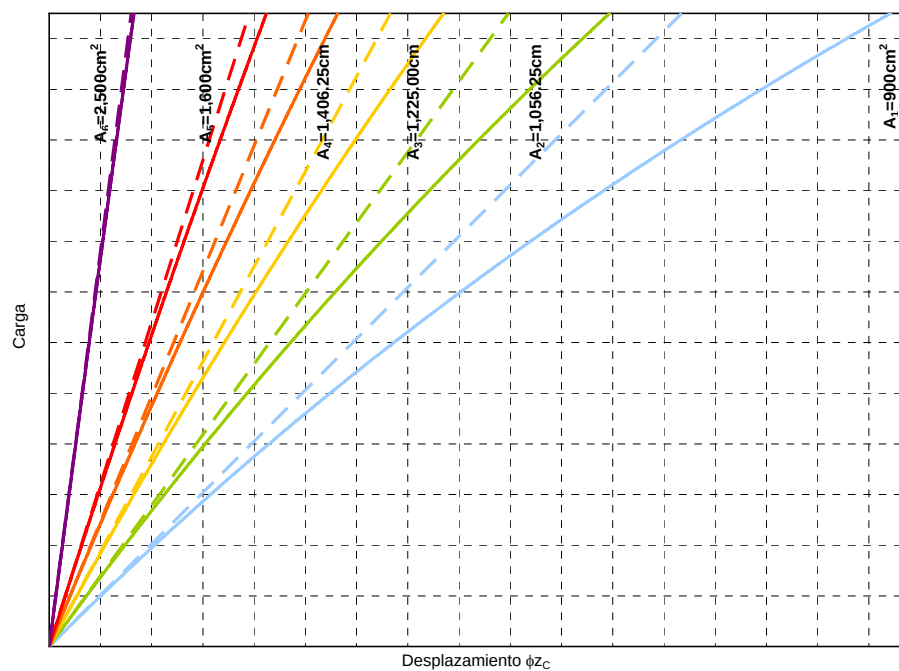


Figura 4.13. Gráfica carga-desplazamiento angular en dirección Z para los casos de estudio.

4.4 Ejemplo de aplicación número 4 RETICULA.

Se realizará un análisis geométrico no lineal de la retícula plana que se muestra en la *figura 4.14*. Se consideró un módulo de elasticidad $E=2038,000 \text{ kg/cm}^2$ para el análisis y una sección transversal rectangular para todas las barras de 8x16 cm, 9x18 cm, 10x20 cm, 12x24 cm, 14x28 cm y 16x32 cm respectivamente. Los apoyos para el nodo A y C son empotramientos, por lo que se modelaron con valores de la rigidez lineal y angular de $9e30$ respectivamente.

La carga total aplicada al sistema es de 25,000 kg en 250 intervalos de carga de 100 kgs cada uno y las unidades empleadas fueron los kilogramos y los centímetros.

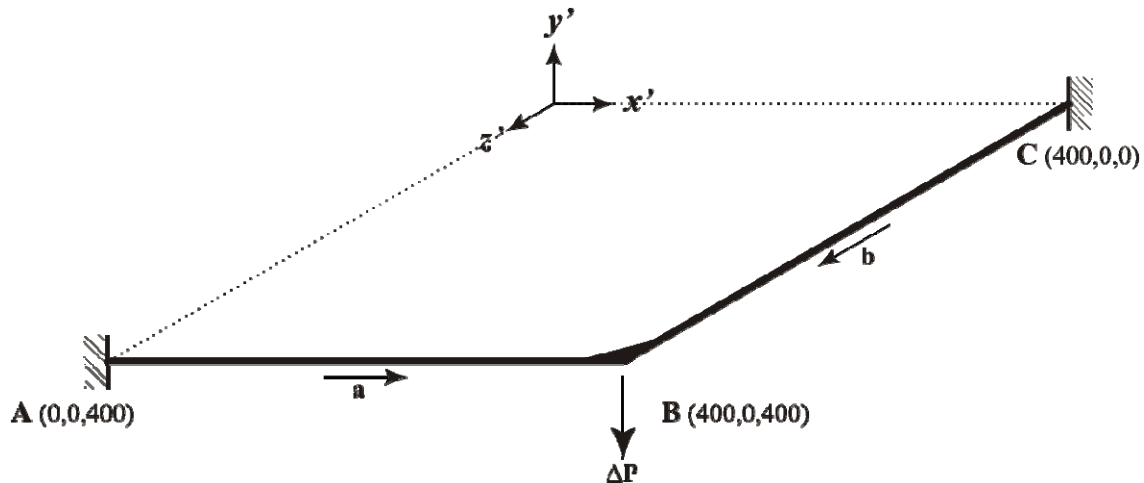


Figura 4.14. Retícula.

Las gráficas carga-desplazamiento que describen el comportamiento se ilustran en las *figuras 4.15* a la *4.17* respectivamente, en ellas se muestran los desplazamientos lineales y angulares sufridos en el *nodo B* para el nivel total de carga. Puede apreciarse que tanto el análisis elástico lineal como el geométrico no lineal reportan iguales valores para los desplazamientos, por lo que las curvas se superponen perfectamente.

Es importante señalar que la matriz de rigidez para una retícula no toma en cuenta los efectos axiales y por ende el valor de P_{x2} tiene valor de cero haciendo que la contribución de la matriz de rigidez geométrica sea nula.

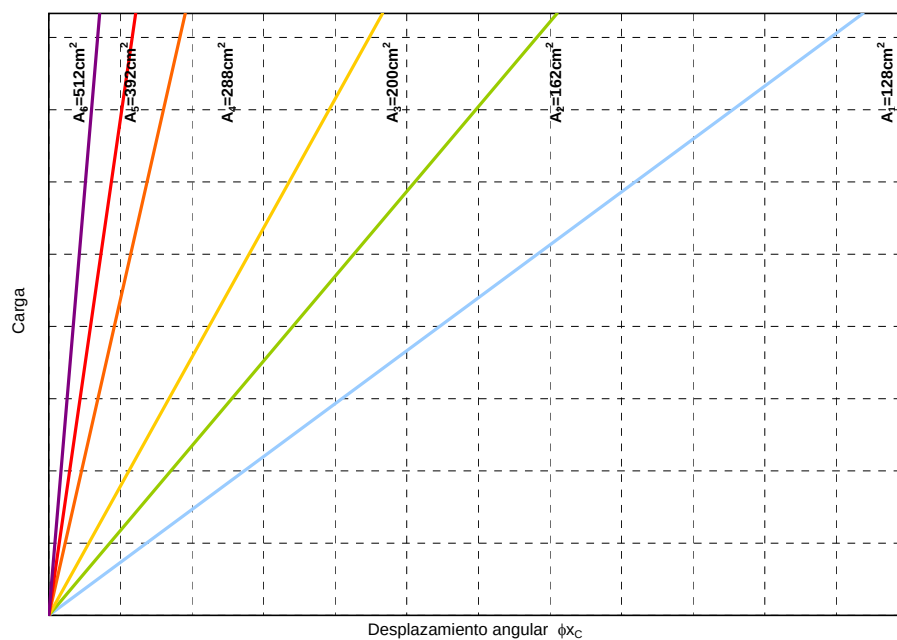


Figura 4.15. Gráfica carga-desplazamiento angular en dirección X para los casos de estudio.

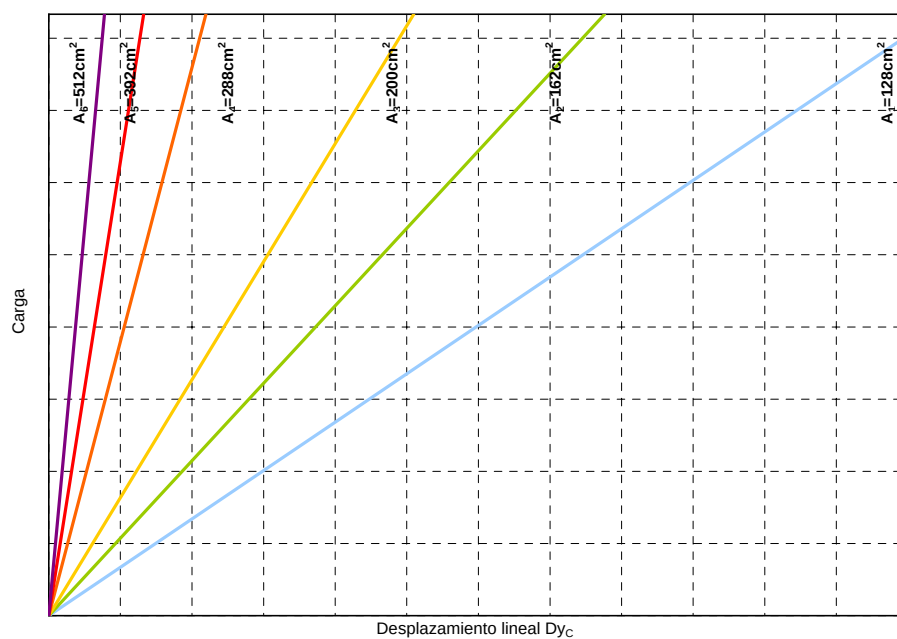


Figura 4.16. Gráfica carga-desplazamiento lineal en sentido Y para los casos de estudio.

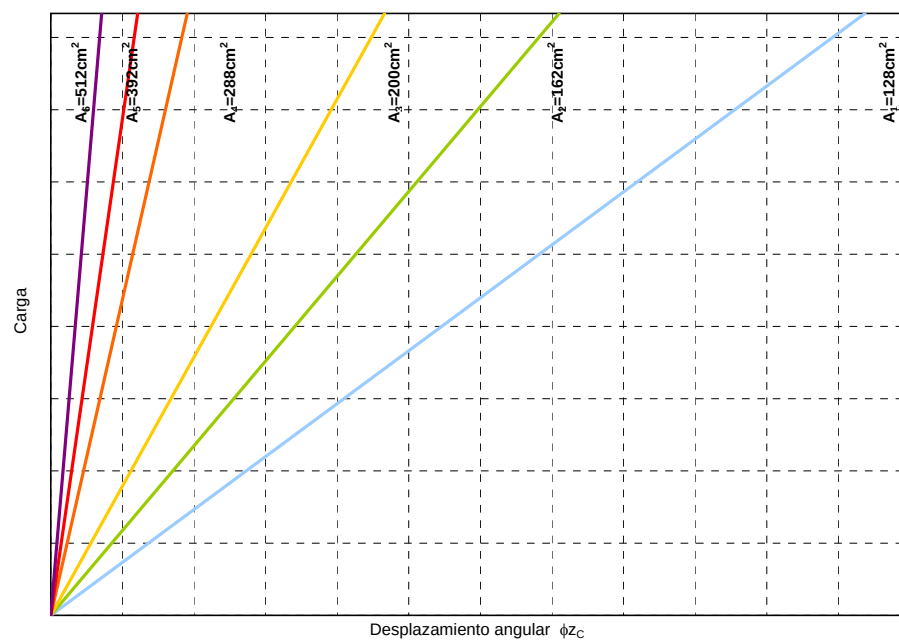


Figura 4.17. Gráfica carga-desplazamiento angular en dirección Z para los casos de estudio.

Conclusiones

El análisis geométrico no lineal ha sido utilizado con mayor frecuencia en los últimos años por algunos sectores de la industria debido al creciente uso de elementos esbeltos y ligeros para reproducir de una mejor manera su comportamiento. Sin embargo, su implementación ha estado limitada durante años debido, entre otras razones, al trabajo de cálculo necesario para analizar una estructura. Esta limitación ha inspirado a investigadores de todo el mundo a estudiar el comportamiento no lineal de estructuras y desarrollar metodologías que permitan su fácil manejo y consecuentemente el análisis de aquellas estructuras que presenten comportamientos no lineales.

El objetivo principal de este trabajo es contribuir al avance en el conocimiento del análisis no lineal desarrollando una herramienta capaz de reproducir el comportamiento de una estructura mediante el análisis de esta, sujeta tanto a cargas de servicio como a cargas

accidentales. Dicho trabajo queda plasmado en el programa de computadora elaborado para tal fin.

El trabajo se centra en el desarrollo de un programa de computadora que permite la realización del análisis geométrico no lineal basado en el método de las rigideces o de los desplazamientos. Los tipos de cargas permitidas en el análisis son la carga estática de tipo puntual nodal, estática puntual a lo largo del elemento y carga uniformemente distribuida.

Los resultados obtenidos con el programa se corroboraron resolviendo manualmente varios ejemplos obteniendo prácticamente iguales resultados, lo que valida el correcto funcionamiento del mismo.

Tras la realización de varios modelos se realizó un minucioso análisis de los resultados obtenidos para los diferentes tipos de estructuras modeladas llegando de este modo a las siguientes conclusiones generales.

El análisis elástico lineal representa el calcular la estructura a sollicitación constante, es decir, exigir el equilibrio de la estructura para una condición definida de carga considerando como única incógnita el valor de los desplazamientos.

El análisis elástico considerando la no linealidad geométrica produce desplazamientos lineales y angulares mayores a los obtenidos mediante un análisis elástico lineal, además de que estos siguen una traza no lineal; lo anterior es particularmente cierto salvo en el caso de las estructuras modeladas como tipo retícula, donde no existe influencia alguna de los desplazamientos y deformaciones en la matriz de rigidez, por lo que este tipo de estructura podría ser modelada mediante un análisis elástico lineal obteniendo los mismos resultados que al hacerlo tomando en consideración la no linealidad geométrica.

El programa desarrollado en el presente trabajo es una buena alternativa para el análisis no lineal geométrico de estructuras.

BIBLIOGRAFÍA

- C1** Chapra, S.C., Canale, R.P., *Numerical Methods for Engineers with Programming and Software Applications*, 3ª. Ed., McGraw Hill, 1998.
- E1** Etzel, K., Dickinson, K, *Digital Visual Fortran Programmer's Guide*, Digital Press
- F1** Felton, L.P., Nelson, R.B., *Matrix Structural Analysis*, John Wiley & Sons
- G1** Ghail, A., Neville, A.M., *Análisis Estructural*, Cuarta Edición, Imcyc, 2004
- H1** Hoit, M., *Computer-Assisted Structural Analysis and Modeling*, Prentice Hall.
- L1** Ladeveze, P., *Nonlinear Computational Structural Mechanics*, Springer
- L2** Levy, R., Spillers, W.R., *Analysis of Geometrically Nonlinear Structures*, Chapman & Hall, 1995.
- M1** McGuire, W., Gallagher, R.H., Ziemian, R.D. *Matrix Structural Analysis*, 2ª. Ed., John Wiley and Sons, Inc., 2000.
- S1** Sathyamoorthy, M., *Nonlinear Analysis of Structures*, CRC Press, 1998
- Y1** Yang, Y., Kuo, S., *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*, Prentice Hall, 1994.

Anexo A

Método numérico para la solución del sistema lineal de ecuaciones

El problema del análisis numérico central consiste en resolver la ecuación fuerza desplazamiento escrita como

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (A.1)$$

de manera eficiente, en donde los elementos de $[A]$ y $\{b\}$ son conocidos y las incógnitas son las $\{x\}$. La matriz de coeficientes $[A]$ es además cuadrada, no singular y no necesariamente simétrica.

Los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones se pueden dividir en dos grandes grupos:

1. Los *Métodos de eliminación directa* o algoritmos finitos que permiten obtener la solución del sistema de manera directa, y
2. Los *Métodos aproximados* que utilizan algoritmos iterativos e infinitos y que calculan las solución del sistema por aproximaciones sucesivas

Nos enfocaremos en los métodos de eliminación directa, en el cual se emplea el concepto de factorización de la matriz $[A]$. Supongamos que la matriz $[A]$ se puede factorizar como el producto de una matriz triangular inferior L con una matriz triangular superior U , tal que:

$$[A] = LU \quad (A.2)$$

en este caso, el sistema de ecuaciones dado por la ecuación A.1 podría representarse en la forma:

$$LU\{x\} = \{b\} \quad (A.3)$$

si denominamos z a la matriz columna de n filas resultado del producto de las matrices $U\{x\}$, tenemos que la ecuación A.3 se puede reescribir del siguiente modo:

$$Lz = \{b\} \quad (A.4)$$

a partir de las ecuaciones A.3 y A.4, es posible plantear un algoritmo para resolver el sistema de ecuaciones empleando dos etapas:

1. Primero obtenemos z aplicando el algoritmo de sustitución hacia adelante en la ecuación A.4.
2. Posteriormente obtenemos los valores de $\{x\}$ aplicando el algoritmo de sustitución regresiva a la ecuación $U\{x\} = z$

El análisis anterior nos muestra lo fácil que es resolver estos dos sistemas de ecuaciones triangulares y lo útil que resultaría disponer de un método que nos permitiera llevar a cabo la factorización $A = LU$.

Sea A una matriz de orden $N \times N$, nuestro interés es calcular aquellas matrices:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & l_{N3} & \cdots & l_{NN} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1N} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2N} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{NN} \end{bmatrix}$$

tales que cumplan la ecuación A.2. Cuando esto es posible, decimos que A tiene una descomposición LU . Se puede ver que la ecuación anterior no determina de forma única a L y a U . De hecho, para cada i podemos asignar un valor distinto de cero a l_{ii} o u_{ii} (aunque no ambos). Por ejemplo, una elección simple es fijar $l_{ii}=1$ para $i=1, 2, \dots, n$ haciendo de este modo que L sea una matriz triangular inferior unitaria. Otra elección es hacer U una matriz triangular superior unitaria (tomando $u_{ii}=1$ para cada i).

Para deducir un algoritmo que nos permita la factorización LU de A partiremos de la fórmula para la multiplicación de matrices:

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^n l_{is} u_{sj}$$

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^{\min(i,j)} l_{is} u_{sj} \quad (\text{A.5})$$

en donde nos hemos valido del hecho de que $l_{is}=0$ para $s > i$ y $u_{sj}=0$ para $s > j$.

En este proceso, cada paso determina una nueva fila de U y una nueva columna de L .

En el paso k , podemos suponer que ya se calcularon las filas $1, 2, \dots, k-1$ de U , al igual que las columnas $1, 2, \dots, k-1$ de L . Haciendo $i=j=k$ en la ecuación A.5 obtenemos:

$$a_{kk} = l_{kk} u_{kk} + \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks} u_{sk} \quad (\text{A.6})$$

si especificamos un valor para l_{kk} (o para u_{kk}), a partir de la ecuación A.6 es posible determinar un valor para el otro término. Conocidas u_{kk} y l_{kk} y a partir de la ecuación A.5 podemos escribir las expresiones para la k -ésima fila ($i=k$) y para la k -ésima columna ($j=k$), respectivamente:

$$a_{kj} = l_{kk}u_{kj} + \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sj} \text{ para } (k+1 \leq j \leq n) \quad (\text{A.7})$$

$$a_{ik} = l_{ik}u_{kk} + \sum_{s=1}^{k-1} l_{is}u_{sk} \text{ para } (k+1 \leq i \leq n) \quad (\text{A.8})$$

Es decir, las ecuaciones A.7 y A.8 se pueden emplear para encontrar los elementos u_{kj} y l_{ik} .

El algoritmo basado en el análisis anterior se denomina factorización de Crout cuando se toman los términos $u_{ii}=1$ (U triangular superior unitaria).

Además de que consiste en pocos ciclos concisos, la aproximación anterior tiene también el beneficio de economizar espacio de almacenamiento, ya que no hay necesidad de guardar los unos que están sobre la diagonal de $[U]$ o los ceros para $[L]$ o $[U]$, pues estos son dados en el método. En consecuencia, los valores de $[U]$ se pueden guardar en el espacio cero de $[L]$. Además de un examen cuidadoso de la derivación anterior se observa que después de que se emplea cada elemento de $[A]$, este no vuelve a ser usado. Por tanto, como cada elemento de $[L]$ y $[U]$ se calcula, se puede sustituir por el elemento correspondiente de $[A]$.

Anexo B

Módulos de elasticidad y módulos de Poisson para diferentes materiales

Material	Módulo de elasticidad E kg/cm ²	Módulo de rigidez al corte G kg/cm ²	Módulo de Poisson
Hule	0.0070-0.0040	0.0020-0.0100	0.45-0.50
Plásticos			
Polietileno	7-14		0.40
Nylon	21-34		0.40
Madera (flexión)			
Roble	110-120		

Material	Módulo de elasticidad E kg/cm ²	Módulo de rigidez al corte G kg/cm ²	Módulo de Poisson
Pino Douglas	110-130		
Pino del sur	110-140		
Concreto (compresión)	170-310		0.10-0.20
Piedra (compresión)			
Caliza, arenisca	200-700		0.20-0.30
Granito, mármol, cuarzo	400-1,000		0.20-0.30
Aleaciones de magnesio	410-450	150-170	0.35
Vidrio	480-830	190-350	0.17-0.27
Aleaciones de aluminio	700-790	260-300	0.33
6061-T6	700	260	0.33
7075-T6	720	270	0.33
2014-T6	730	280	0.33
Hierro fundido	830-1,700	320-690	0.20-0.30
Latón	960-1,100	360-410	0.34
Bronce	960-1,200	360-440	0.34
Aleaciones de titanio	1,000-1,200	390-440	0.33
Cobre y aleaciones de cobre	1,100-1,200	400-470	0.33-0.36
Monel (67%Ni, 30%Cu)	1,700	660	0.32
Acero	1,900-2,100	750-800	0.27-0.30
Níquel	2,100	800	0.31
Tungsteno	3,400-3,800	1,400-1,600	0.20

Índice de tablas

	Pág.
<i>Tabla 1.</i> Tipos de no linealidad.	7
<i>Tabla 2.</i> Modelos típicos de materiales.	10
<i>Tabla 3.</i> Tipos de carga	49
<i>Tabla 4.</i> Propiedades elastogeométricas	61

Índice de figuras

	Pág.
<i>Figura 1.1.</i> No linealidad del material (NLM) desplazamientos pequeños	9
<i>Figura 1.2.</i> No linealidad geométrica.	12
<i>Figura 1.3.</i> No linealidad geométrica generalizada.	13
<i>Figura 1.4.</i> Gráfica carga-desplazamiento para los diferentes niveles de análisis.	15
<i>Figura 2.1.</i> Sistema coordenado derecho.	19
<i>Figura 2.2.</i> Sistema de referencia local y global.	20
<i>Figura 2.3.</i> Estudio del equilibrio en el nodo i .	20
<i>Figura 2.4.</i> Vector de cargas generalizado.	22
<i>Figura 2.5.</i> Ángulos entre el sistema local y global.	22
<i>Figura 2.6.</i> Elemento sujeto a fuerza axial.	25
<i>Figura 2.7.</i> Desplazamiento y deformación del elemento diferencial ab .	25
<i>Figura 2.8.</i> Desplazamientos nodales en dirección x .	30
<i>Figura 3.1.</i> Diagrama esquemático del programa de cómputo de análisis no lineal geométrico	50
<i>Figura 3.2.</i> Carga concentrada en las barras	59
<i>Figura 3.3.</i> Carga uniformemente distribuida en las barras	60
<i>Figura 3.4.</i> Estructura a analizar	61
<i>Figura 4.1.</i> Armadura plana	65
<i>Figura 4.2.</i> Configuración de la armadura para la segunda iteración	70
<i>Figura 4.3.</i> Configuración de la armadura para la tercera iteración	74
<i>Figura 4.4.</i> Gráfica carga-desplazamiento lineal Y para los casos de estudio	75
<i>Figura 4.5.</i> Armadura en el espacio tridimensional	76
<i>Figura 4.6.</i> Configuración de la armadura para la segunda iteración	86
<i>Figura 4.7.</i> Configuración de la armadura para la tercera iteración	96
<i>Figura 4.8.</i> Gráfica carga-desplazamiento lineal en sentido X para los casos de estudio	97

	Pág.
<i>Figura 4.9.</i> Gráfica carga-desplazamiento lineal en sentido Y para los casos de estudio	97
<i>Figura 4.10</i> Marco plano	98
<i>Figura 4.11</i> Gráfica carga-desplazamiento lineal en sentido X para los casos de estudio	99
<i>Figura 4.12</i> Gráfica carga-desplazamiento lineal en sentido Y para los casos de estudio	99
<i>Figura 4.13</i> Gráfica carga-desplazamiento angular en dirección Z para los casos de estudio	100
<i>Figura 4.14</i> Retícula	101
<i>Figura 4.15</i> Gráfica carga-desplazamiento angular en dirección X para los casos de estudio	102
<i>Figura 4.16</i> Gráfica carga-desplazamiento lineal en sentido Y para los casos de estudio	102
<i>Figura 4.17</i> Gráfica carga-desplazamiento angular en dirección Z para los casos de estudio	103