



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica

Modelado, análisis y control de columnas de destilación con integración de energía

Tesis que para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecánica

Presenta:

Juancarlos Méndez Barriga

Asesores de tesis:

Dr. Gilberto González Avalos

Dr. Carlos Rubio Maya

Morelia, Michoacán, abril de 2018.



Resumen

Modelado, análisis y control de columnas de destilación con integración de energía

Tesis que presenta

Juancarlos Méndez Barriga

como parte de los requisitos para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA MECÁNICA

Facultad de Ingeniería Mecánica, U.M.S.N.H.

Morelia, Michoacán.

En el presente trabajo se propone un esquema de control por retroalimentación total de estados para una columna de destilación con integración de energía (CDIE). El comportamiento dinámico de las columnas de destilación, en especial las que cuentan con integración de energía, es altamente no lineal y presenta retos importantes para una operación eficiente y sin interrupciones. Como una primera aproximación a la simulación y control de las CDIE se propone un modelo matemático no lineal para una columna binaria ideal de cinco etapas. Este modelo se toma como base de comparación para su versión linealizada en representación en espacio de estados (REE), aplicando ambas aproximaciones a la simulación del estado transitorio de la columna, obteniendo resultados satisfactorios dentro del dominio de la linealización. Posteriormente el modelo linealizado en REE se usó para la simulación y análisis de control del sistema en lazo abierto y lazo cerrado con retroalimentación total de estados, con la correspondiente comparación de desempeño entre ambos lazos para diferentes cambios en las variables de entrada.

Palabras clave: Integración, energía, retroalimentación, total, estados

Abstract:

This thesis presents a full-state feedback control scheme for Heat Integrated Distillation Columns (HiDC). Distillation column dynamic behavior, and HiDC in particular, is highly nonlinear and offers serious challenges to maintain trouble and interruption-free operation. As a first attempt to HiDC simulation and control, a non-linear mathematical model was developed for an ideal, binary, five-stage distillation column. This model serves as benchmark to evaluate a linearized version of the State-Space Representation (SSR) of the system. Both developments were applied to the simulation of the distillation column in unsteady state conditions, with good results for the linearized model, provided that the simulation data is kept inside the linearization domain. The SSR linearized model was used in the simulation and analysis of the open-loop and full-state feedback closed-loop control schemes for the distillation column. The performance of both control schemes was evaluated and compared for step variations in all the input variables.

A la memoria de mi papá, Sabino Méndez López, que cada vez que me veía me abrazaba, preguntaba por la familia, y el avance de la tesis, en ese orden. Siempre un padre amoroso, sobre todo cuando no entendía a sus hijos.

A la muy activa presencia de mi mamá, Margarita Barriga Ruíz, que no deja de mostrarme lo que significan en la práctica valor, carácter, perseverancia, dedicación y que la brillantez sin ellos no basta para sacar el buey de la barranca.

A Lety, cuya laboriosidad, empatía, calidez y deseos de ayudar a los demás me llenan de admiración, aunque no apruebe su insistencia en ocultar sus capacidades al mundo.

A mis adorados polluelos: Juancarlos, Fabiola Yunuén y Wendy María; que nunca han necesitado hacer nada para que los quiera, pues son mis hijos y quererlos estaba en el contrato, pero siendo congruentes con sus respectivos valores y personalidades hacen que los quiera más, y además me llena orgullo saber que todos los días se gradúan con honores en la vida.

En mi formación, en cuanto a profesores ha habido de todo y esperaba que se mantuviera el mismo patrón en el posgrado, tal vez con mayor calidad que en la licenciatura, pero básicamente lo mismo. Fue una grata sorpresa ver que la planta docente, además de su calidad profesional, se distingue por su generosidad para compartir sus conocimientos, su calidad humana y su compromiso para convertir sus clases en una fuente renovable de energía. Esto se notó desde el propedéutico, donde los Dres. Galván y Soriano se esforzaron por hacer ver la luz a un alma descarriada, mientras el M.C. Víctor López me mostró la enorme diferencia en su visión de la termodinámica que tienen ingenieros químicos y mecánicos, concepto que amplió en un orden de magnitud el Dr. Pacheco. La Dra. Laura Ibarra y el Dr. Pablo Martínez dieron una profundidad inesperada a sus materias, profundidad que resultó imprescindible para poder realizar este trabajo.

Mis compañeros: Javi, Chuchín, Albores, Marcelo, Tututi, Piñón, Alex, Christian, Beto y Angel hicieron muy estimulante y divertido mi paso por la maestría. La vida no es la misma cuando no se tiene un grupo de discusión para analizar un problema de Miedo Continuo a las tres de la mañana. Karen Ocampo me ayudó a entender aspectos sutiles en la teoría del método científico y la Sra. Vero con recomendaciones, advertencias y oportunos jalones de oreja para cumplir con trámites y requisitos en tiempo y forma.

Mención aparte merecen mis asesores, Dres. Gilberto González Ávalos y Carlos Rubio Maya por haber dedicado tantas horas a clases personalizadas y al seguimiento del trabajo necesario, incluso estando a medio mundo de distancia o de vacaciones, siempre con amabilidad, agudeza y paciencia para mis excursiones intelectuales por callejones sin salida, y con el tacto necesario salicarme de ellos sin lastimar demasiado mi amor propio. Sin ellos no hubiera podido salir del laberinto.

Gracias a todos.

Índice general

Índice de figuras	v
1. Introducción	2
1.1. Importancia de las columnas de destilación	2
1.2. Objetivo	4
1.2.1. Objetivo general	4
1.2.2. Objetivo específico	5
1.3. Estado del arte	5
1.4. Contribución	8
1.5. Estructura de la tesis	10
2. Descripción general de las columnas de destilación	11
2.1. Introducción	11
2.1.1. Volatilidad y equilibrio termodinámico	13
2.1.2. Destilación simple	16
2.2. Integración de procesos	17
2.3. Modelado y control	19
2.3.1. Variables de diseño y operación	19
2.3.2. Modelo matemático	23
2.3.3. Descripción del modelo	25
2.3.4. Modelo dinámico simplificado	33
2.3.5. Modelo simplificado en estado estable	35
2.3.6. Solución del modelo en estado estable para un caso de la literatura	36
2.3.7. Solución del modelo en estado transitorio para un caso de la literatura	43
3. Linealización del modelo en estado transitorio	47
3.1. Espacio de Estados	47

3.2.	Linealización del modelo dinámico con n etapas	50
3.2.1.	Matriz de linealización de las variables de estado	52
3.2.2.	Matriz de linealización de las variables de entrada	56
3.2.3.	Linealización de la ecuación para las variables de salida	59
3.2.4.	Linealización para el caso de la literatura	61
3.2.5.	Expresión para la solución analítica	68
3.2.6.	Valores numéricos de las matrices de linealización	69
4.	Consideraciones de control para la columna de destilación en Espacio de Estados	72
4.1.	Estabilidad	74
4.1.1.	Estabilidad para el caso de estudio	80
4.1.2.	Control mediante retroalimentación de estados y ubicación de polos.	84
4.1.3.	Control con retroalimentación de estados para el caso de estudio	87
4.2.	Controlabilidad	92
4.2.1.	Análisis de controlabilidad para el caso de estudio.	94
4.3.	Observabilidad	97
4.3.1.	Análisis de observabilidad para el caso de estudio.	98
5.	Simulación y comportamiento de una CDIE	101
5.1.	Simulación del modelo no lineal en estado transitorio.	103
5.2.	Simulación del modelo linealizado en estado inestable	114
5.3.	Simulación del modelo de control de lazo cerrado con retroalimentación total de estados	120
5.4.	Comparación del control en lazo cerrado contra el lazo abierto.	137
6.	Conclusiones y recomendaciones	144
6.1.	Conclusiones	144
6.2.	Recomendaciones	146
6.3.	Posibles líneas de investigación y trabajo futuro.	148
7.	Bibliografía	150

Índice de figuras

2.1. Columna tradicional n etapas	28
2.2. Columna integrada simple n etapas	29
2.3. Etapa de alimentación	32
2.4. Condensador	32
2.5. Rehervidor	33
2.6. Columna tradicional 5 etapas	36
5.1. Curva de equilibrio líquido-vapor en cada etapa	104
5.2. Modificación en escalón para el reflujo de destilado a la columna a t=30 min, modelo no lineal	105
5.3. Modificación en escalón para el reflujo de destilado a la columna a t=30 min	106
5.4. Modificación en escalón para el retorno de fondos al rehervidor a t=40 min	107
5.5. Modificación en escalón para el retorno de fondos al rehervidor a t=40 min	108
5.6. Modificación en escalón para la fracción de componente ligero en la alimentación a t=20 min	109
5.7. Modificación en escalón para la fracción de componente ligero en la alimentación a t=20 min	110
5.8. Modificación en escalón para el flujo de alimentación a t=10 min . . .	111
5.9. Modificación en escalón para el flujo de alimentación a t=10 min, modelo no lineal.	112
5.10. Desviación acumulada respecto al estado estable al perturbar todas las entradas	113
5.11. Modificación en escalón para el reflujo de destilado a t=30 min, modelo linealizado.	116
5.12. Comparación del modelo linealizado contra el modelo no lineal al variar el reflujo de destilado	116
5.13. Modelo linealizado, cambio negativo en el reflujo de destilado	117

5.14. Comparación de los modelos. Cambio negativo en el reflujo de destilado	118
5.15. Modelo linealizado, cambio positivo en el retorno de fondos.	119
5.16. Comparación de modelos, cambio positivo en el retorno de fondos . . .	120
5.17. Modelo linealizado, cambio negativo en el retorno de fondos.	121
5.18. Comparación de modelos, cambio negativo en el retorno de fondos. . .	122
5.19. Modelo linealizado, cambio positivo en la composición de alimentación.	123
5.20. Comparación de modelos, cambio positivo en la composición de ali- mentación.	124
5.21. Modelo linealizado, cambio negativo en la composición de alimentación.	124
5.22. Comparación de modelos, cambio negativo en la composición de ali- mentación.	125
5.23. Modelo linealizado, cambio positivo en el flujo de alimentación.	126
5.24. Comparación de modelos, cambio positivo en el flujo de alimentación.	127
5.25. Modelo linealizado, cambio negativo en el flujo de alimentación. . . .	128
5.26. Comparación de modelos, cambio negativo en el flujo de alimentación.	129
5.27. Modelo linealizado, acumulación de cambios en sentido positivo para todas las entradas.	130
5.28. Comparación de modelos, acumulación de cambios en sentido positivo para todas las entradas.	130
5.29. LCRTE. Respuesta de ligeros en el destilado y fondos como variable desviada ante un cambio del 10 % en el reflujo de destilado	131
5.30. LCRTE. concentración de ligeros en el destilado y fondos como variable de estado ante un cambio del 10 % en el reflujo de destilado.	131
5.31. LCRTE como variable desviada ante un cambio del -10 % en el reflujo de destilado	132
5.32. LCRTE como variable de estado ante un cambio del -10 % en el reflujo de destilado	132
5.33. LCRTE como variable desviada ante un cambio del 10 % en el retorno de fondos	133
5.34. LCRTE como variable de estado ante un cambio del 10 % en el retorno de fondos	133
5.35. LCRTE como variable desviada ante un cambio del -10 % en el retorno de fondos	134
5.36. LCRTE como variable de estado ante un cambio de -10 % en el retorno de fondos	134
5.37. LCRTE como variable desviada ante un cambio del 10 % en la com- posición de la alimentación	135
5.38. LCRTE como variable desviada ante un cambio del -10 % en la com- posición de la alimentación	135
5.39. LCRTE como variable desviada ante un cambio del 10 % en el flujo del alimentación	136

5.40. LCRTE como variable desviada ante un cambio del -10 % en el flujo de alimentación	136
5.41. Comparación de lazo abierto vs LCRTE con cambio de 10 % en reflujo de destilado.	138
5.42. Lazo abierto vs LCRTE con cambio de -10 % en reflujo de destilado. .	139
5.43. Comparación de lazo abierto vs LCRTE con cambio de 10 % en retorno de fondos.	140
5.44. Comparación de lazo abierto vs LCRTE con cambio de -10 % en retorno de fondos.	140
5.45. Comparación de lazo abierto vs LCRTE con cambio de 10 % en la composición de alimentación	141
5.46. Comparación de lazo abierto vs LCRTE con cambio de -10 % en la composición de alimentación	142
5.47. Comparación de lazo abierto vs LCRTE con cambio de 10 % en el flujo de alimentación	142
5.48. Comparación de lazo abierto vs LCRTE con cambio de -10 % en el flujo de alimentación	143

"Hay tres escuelas de magia:

La primera postula una tautología y rodea sus variaciones con corolarios: Esta es la filosofía.

La segunda recopila muchos datos, trata de encontrar un patrón y con éste hace una predicción, frecuentemente errónea, del siguiente dato: Esa es la ciencia.

En la tercera se da por supuesto que vivimos en un universo malicioso controlado por la ley de Murphy, que en ocasiones se ve compensado por el factor de Brewster: Esa es la ingeniería."

Robert A. Heinlein

Capítulo 1

Introducción

1.1. Importancia de las columnas de destilación

Las columnas de destilación (CD) son los equipos con los que se realiza la más frecuente de las operaciones de separación. Cuando se habla de destilación lo primero que viene a la mente de la mayoría de las personas son las enormes "granjas" de torres de una refinería de petróleo. La separación del petróleo crudo en fracciones es una operación relativamente directa, ya que la materia prima se puede alimentar casi sin pre-procesamiento y las fracciones separadas salen del equipo en puntos predefinidos, pero es el volumen de producción y los múltiples usos de las diferentes fracciones (gasolinas, keroseno, etc.) lo que da una importancia especial.

No es raro encontrar en una misma línea de producción tres o cuatro tipos diferentes de destilador: tanques flash, columnas con reacción, fraccionadoras, destiladores batch, etc., cada uno con una función específica que no pueden realizar las otras unidades y que tienen que hacerse en ese punto del proceso y no en otro.

Hay plantas en las que virtualmente se podría colocar un equipo de destilación después de cada etapa de reacción, por ejemplo en una planta de biodiesel se puede usar para eliminar metanol, monoglicéridos o metales ligeros en diferentes puntos del

proceso. Para algunos campos se ha vuelto práctica normal la venta de equipo de destilación *a la medida* ya que, en el mismo campo del biodiesel, dependiendo de la materia prima empleada y de la calidad, puede haber residuos resinosos, depositación de sólidos o formación de jabón en los equipos. Cada tipo de materia prima e impurezas requiere una combinación particular de equipos de pretratamiento, reacción y separación y la mezcla óptima para una planta, puede ser una pésima elección para otra, aún con pequeños cambios en la materia prima para el mismo producto final (Kotrba, 2013).

La dominancia de la destilación como proceso de separación se basa, sobre todo, en su versatilidad, en ventajas económicas permitiendo realizar ciertas separaciones que no se pueden hacer por otro medio o se hacen a menor costo que en las operaciones competitivas. Aunque los principios básicos no cambian, la tecnología, materia prima, especificaciones y condiciones del mercado lo hacen continuamente. Entre 2004 y 2013 la especificación ASTM D67514 para el biodiesel cambió en 14 ocasiones. Cada cambio de especificaciones de producto representa un nuevo conjunto de parámetros de cumplimiento obligatorio que requieren cambios en los procesos, partiendo de materias primas diversas, que ha podido lograrse mediante el uso de las CD.

Otra industria donde proliferan las CD es la de las bebidas alcohólicas destiladas, donde se espera que a nivel mundial se consuman durante el año 2018 cerca de 29 millones de toneladas de estas bebidas y cada una de ellas, desde el aguardiente más humilde al más lujoso cognac, pasa al menos una vez por una secuencia de destilación, y no es raro encontrar mezcal artesanal tridestilado.

Se puede afirmar sin temor a exagerar que la industria actual, en la que se basa mucho de nuestro estilo de vida, no podría sostenerse sin columnas de destilación, aún con los serios inconvenientes asociados a su operación, como su alta demanda de energía e impacto ambiental.

Cabe mencionar que en el presente trabajo se hace uso frecuente de la Representación en Espacio de Estados (REE), que es una forma de expresar el modelo

matemático de un sistema dinámico como matrices de variables de entrada, salida y parámetros del sistema, relacionadas mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, que en muchas ocasiones permite aplicar notación compacta y simplifica el análisis del modelo. El estado de un sistema es su situación en un momento dado, que normalmente corresponde a la descripción total de su estado físico para muchas aplicaciones de ingeniería, pero en este trabajo el término se refiere concretamente estado termodinámico del sistema. La REE y su aplicación al control se estudian con más detalle en los capítulos 3 y 4.

1.2. Objetivo

El control de una columna de destilación con integración energética (CDIE) es inherentemente no lineal, al igual que el modelo matemático que describe las relaciones de equilibrio entre fases en cada etapa y la dinámica de los equipos de intercambio de calor. En esencia se puede ver al sistema como una extensión del problema de control de una columna estándar y, por tanto, se propone una solución basada en el desarrollo del modelo para el sistema no lineal. Posteriormente, aplicando técnicas de linealización, se espera controlar el sistema desde el modelo linealizado en lugar de su contraparte no lineal.

1.2.1. Objetivo general

Desarrollar esquemas viables de control para columnas de destilación con integración de energía que permitan cumplir con sus especificaciones de producción a través de la linealización del modelo dinámico no lineal y la aplicación de las acciones de control sobre ese sistema linealizado.

1.2.2. Objetivo específico

Desarrollar esquemas de control para una columna de destilación con integración energética (CDIE) de cinco etapas, considerando al sistema como una extensión del problema de control en una columna estándar no lineal. Se propone una solución basada en la linealización del modelo para el sistema tradicional y un sistema de control que utiliza la variante linealizada en vez de su contraparte real. Aplicar los esquemas de control propuestos y comparar su desempeño con el del sistema usando control tradicional.

1.3. Estado del arte

Los elementos básicos de la teoría de la destilación se conocen desde el primer tercio del siglo pasado, lo que cambia constantemente es la herramienta disponible y la forma en que se usan técnicas que dejaron de aplicarse al ser reemplazada su plataforma tecnológica (o que no se aplicaron al momento de ser descubiertos por estar conceptualmente adelante de esas plataformas).

Los primeros trabajos sistemáticos para la integración energética datan de principios de los sesentas (Valero et al., 1994); (Linnhoff y Flower, 1978); (Rathore, Van Wormer y Powers, 1974) y su sistematización, bajo diferentes filosofías se fue consolidando en los ochentas y noventas. De hecho el problema específico de controlar una planta con integración energética parcial, bajo el nombre de “con recuperación”, se resolvía en los ochentas mediante reglas heurísticas (Walas, 1988); (Branan, 2005) , que en cierto modo son predecesoras de los sistemas expertos. Varios de los investigadores de mayor prestigio en el campo de control de torres de destilación han dicho que cada 15 a 20 años se tiene que redescubrir las bondades de algunos sistemas básicos de control, pues ofrecen la solución más adecuada para la nueva variante del mismo problema.

Con una periodicidad similar se ha visto a la investigación en el control de colum-

nas de destilación alternativamente como un campo maduro en el que casi todo se ha descubierto o un área prometedora en expansión (Skogestad, 1997), puntos de vista que expresa de nueva cuenta dicho autor en su reevaluación de los avances en el campo de la dinámica y control en columnas de destilación publicado en 2017 (Skogestad, 2017). Al parecer el intervalo entre las publicaciones y la reiteración del enfoque no son casualidad sino el reflejo de una realidad que se aprecia al revisar la literatura reciente en el campo.

La revisión de la bibliografía revela un patrón histórico razonablemente consistente en la investigación y aunque en cualquier momento hay publicaciones que no caen en él, parece haber un orden típico:

- Descubrimiento de un nuevo campo de aplicación para la destilación o avance tecnológico que da nueva vida a una aplicación madura
- Diseño y control de columnas para ese campo. Normalmente estas publicaciones están mucho más enfocadas al diseño y las consideraciones de control son muy superficiales.
- Técnicas de control para las columnas basadas en soluciones tradicionales.
- Modelado y control de esos sistemas.
- Optimización de la operación y control.

Para las columnas de destilación integradas, el proceso ha sido más prolongado debido a la interacción de la investigación en equipo de intercambio de calor, determinación de objetivos energéticos, técnicas para lograr los objetivos fijados y diseño de equipo de intercambio.

Aunque se observa interés reciente en la destilación, está orientado sobre todo hacia la comparación de los diferentes métodos para lograr una separación dada desde

el punto de vista energético, mencionando el problema y proponiendo con frecuencia estrategias de control, pero hay poco análisis a detalle de los esquemas respectivos, y el estudio de controlabilidad de las diferentes arquitecturas es también escasa (Kim, 2016); (Shankar, Aneesh y Sivasubramanian, 2015); (Vázquez Castillo, Segovia Hernández y Ponce Ortega, 2015).

En cierto modo, pareciera que se trata de un momento de calma relativa en este campo: en el 27th European Symposium on Computer Aided Process Engineering – ESCAPE 27, celebrado en octubre de 2017, y uno de los foros de mayor prestigio para la difusión de investigación de ese tipo, solo hubo tres artículos o ponencias tratando temas de destilación y ninguno sobre control de CDIE: El primero describe un método corto de diseño de columnas ni ideales, el segundo trata sobre diseño y optimización para columnas de destilación con integración de energía y el tercero trata un análisis preliminar sobre control óptimo para destilación batch binaria.

En cambio, para el 26th European Symposium on Computer Aided Process Engineering (ESCAPE 26), se presentaron once artículos sobre destilación, pero ninguno sobre control de columnas integradas. No se encontró la publicación correspondiente a 2015, pero en 2014 fueron cinco, seis en 2013, cinco en 2012, once en 2011 y cuatro en 2010. En ninguno de estos años se publicaron artículos sobre control en CDIE. En todos estos eventos se presentaron numerosos artículos de integración energética y aplicaciones de control a otras áreas y en consecuencia no se trata de que sean temas ajenos a su área de investigación, y se puede suponer que, de haber publicaciones sobre Modelado y Control en columnas integradas, son poco numerosas, al menos en años recientes. Cabe hacer notar que, de la secuencia histórica típica de investigación y publicación anteriormente, las áreas previas a Modelado y Control (Diseño y Técnicas de Control Tradicional) están bien representadas en la bibliografía, dando la impresión que esta etapa apenas está llegando a la escena.

Ante la ausencia de fuentes en el tema específico, la columna vertebral del trabajo está basada en textos clásicos de control y destilación (Bequette,2002; Gorak y Olujic,

2014; Skogestad y Morari, 1987), pero además se consultaron publicaciones de control (Ogata, 2010), control en destilación (Luyben,2014) e integración de energía (Kemp y Linnhoff, 2007), en especial las publicaciones sobre control en destilación son numerosas y con una gama de temas muy variada. Como es de suponerse, los artículos consultados son demasiado numerosos para citarlos, por lo que se mencionan solo algunas publicaciones de especial relevancia.

En el área de diseño hay numerosas propuestas para la configuración, estructura y construcción de las CDIE, pero solo tocan tangencialmente los problemas de control para estos equipos (Shenvi, Shah y Agrawal,2012); (Mustafa et al., 2014); (Wu et al., 2012).

El problema principal en el modelado de columnas es el opuesto: Hay tanta variedad que resulta muy difícil revisar, aún superficialemnte, una fracción mínima de los modelos propuestos. Tan solo la descripción de las opciones disponibles para la simulación del equilibrio de fases en equilibrio líquido vapor requiere varios capítulos de cualquier texto de termodinámica para ingeniería química (Sandler,2006); (Luyben,2014).

El conjunto de publicaciones de control para columnas de destilación es muy extenso, pero generalmente enfocado a control clásico y lazos individuales, con pocas publicaciones referentes a retroalimentación total de estados (Barroso, 2009).

1.4. Contribución

La aportación principal de este trabajo está en el desarrollo de un lazo cerrado de control con retroalimentación total de estados (RTE) para la columna intergada. Para lograrlo se generó un modelo no lineal para describir el comportamiento dinámico en una columna de destilación binaria ideal, este modelo se puede resolver sin problemas para la simulación dinámica del sistema, pero su no linealidad lo hace poco conveniente para aplicaciones de control. En el proceso de desarrollo del modelo se encontraron

algunas dificultades para la solución numérica del sistema de ecuaciones que describe el estado estable debidas a la configuración de la matriz de coeficientes que no reportados anteriormente en la literatura. Los problemas se resolvieron introduciendo en la secuencia de solución un árbol de decisiones para manejar las situaciones que generan la no convergencia. Este trabajo dio lugar a una publicación en el VII Congreso Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería.

Para poder emplear el modelo en aplicaciones de control se reordenó en representación en espacio de estados (REE) y posteriormente se linealizó, obteniendo un modelo linealizado en REE. El punto de linealización es el estado estable en las condiciones de diseño. Para comprobar si el desarrollo es válido, se ejecutaron las mismas simulaciones en estado transitorio que con el modelo no lineal, con resultados satisfactorios.

La representación en espacio de estados, en especial en el dominio del tiempo, sin ser inusitada en el control en ingeniería de procesos, es poco frecuente. Se optó por esa representación del modelo porque está especialmente bien condicionada para simular la respuesta física de sistemas y el análisis de control de los mismos, y por tanto de particular utilidad para el objetivo deseado.

Ante esto, el modelo linealizado en REE se usó para la simulación y análisis de control del sistema en lazo abierto y lazo cerrado con retroalimentación total de estados. Los lazos con retroalimentación total de estados son extremadamente raros en columnas de destilación (Chen et al., 2010); la configuración de control favorecida es emplear lazos PID independientes para cada par de variables entrada/salida.

Se compararon los resultados del desempeño para ambos lazos (abierto y cerrado con retroalimentación de estado) ante los mismos cambios en las variables de entrada. Los resultados se muestran en el capítulo 5. El análisis de los lazos de control abarcó estabilidad, controlabilidad y observabilidad, todos aplicados sobre la REE de cada lazo.

1.5. Estructura de la tesis

El presente trabajo se divide en seis capítulos, que se describen a continuación:

Capítulo 1. Introducción, que incluye objetivos, estado del arte, aportaciones del trabajo y la estructura.

Capítulo 2. Descripción general de las columnas de destilación y sus elementos más importantes; en él se explica también la integración de procesos y se desarrolla el modelo no lineal.

Capítulo 3. Se explican y desarrollan las técnicas de linealización a aplicar al modelo no lineal; así como la representación en espacio de estados y a continuación se obtiene el modelo linealizado correspondiente.

Capítulo 4. En él se desarrolla y explica el control por retroalimentación total de estados; hacen los análisis de estabilidad, controlabilidad y observabilidad para los lazos de control.

Capítulo 5. Aquí se muestran y analizan los resultados de las simulaciones de los modelos no lineal y linealizado, lazo abierto y cerrado para cambios predefinidos en todas las variables de entrada.

Capítulo 6. Conclusiones y recomendaciones pertinentes así como posibles líneas de trabajo a desarrollar.

Capítulo 2

Descripción general de las columnas de destilación

2.1. Introducción

La destilación es el proceso de separación dominante en las industrias de refinación, procesos químicos y bioquímica, en parte porque permite purificar con relativa facilidad mezclas fluidas de dos o más componentes, los principios en los que se basa son bien conocidos y sobre todo, porque su costo es menor que el de otras técnicas capaces de lograr un resultado equivalente.

Más de la mitad de la energía empleada mundialmente en la destilación va a la refinación de hidrocarburos; en la industria química se usa ampliamente para la separación de compuestos orgánicos con cadenas de 2 a 20 átomos de carbono y en la bioquímica para separar o purificar pequeñas moléculas como alcoholes, ácidos grasos, cetonas y la purificación de bio-combustibles. Casi nunca se usa para separar metabolitos, polímeros ni otros compuestos de alto peso molecular por el riesgo de degradación térmica antes de alcanzar su punto de ebullición (Roper, Seader y Henley, 2010).

Las columnas de destilación (CD) son una parte importante de cualquier industria de procesos, su función típica es separar una mezcla líquida aplicando calentamiento para generar dos corrientes de composición diferente a la original, con el componente más volátil concentrándose en la parte superior (ligeros) y el menos volátil por la parte baja (pesados, residuo o fondos).

Se trata de una tecnología muy antigua: se sabe con seguridad de su uso en el siglo I A.C. y según algunas fuentes tuvo precedentes rudimentarios desde hace 5000 años; claro que sin una base teórica y casi siempre limitada a purificar agua, obtener aceites esenciales para perfumes o aumentar la concentración alcohólica de bebidas fermentadas (Halvorsen y Skogerstad, 2000).

A lo largo del siglo XIX y principios del XX se empezó a diversificar su uso, aumentando sus áreas de aplicación a la destilación de licores fuertes y para obtener derivados del alquitrán de hulla; con un campo aún estrecho pero con avances tecnológicos de importancia. El crecimiento pasó de paulatino a explosivo cuando se aplicó a la separación de las fracciones de petróleo. El estudio sistemático de sus principios comenzó a dar resultados prácticos hacia 1889 (Gentry, 1995) y sigue sin interrupción hasta hoy, sin dar la impresión de que esté próximo el fin de la investigación en este campo.

Debido a ese crecimiento y a la multitud de usos que se le han dado, hay casi tantas técnicas de destilación como aplicaciones y se pueden dividir en destilación continua o por lotes; destilación simple, por etapas o extractiva; binaria o multicomponente; destilación reactiva; atmosférica, a vacío, a presión positiva y de alta presión; destilación por arrastre de vapor, con inyección de vapor y otras (Roper et al. 2010). Tan solo en la destilación fraccionada por etapas, éstas pueden estar formadas por platos físicos con rebosadero, cachucha, válvula, tapa de borboteo o por empaque - estructurado y no estructurado- con multitud de fabricantes, cada uno con varias líneas de empaque según el servicio (Gorak & Olujić, 2014).

2.1.1. Volatilidad y equilibrio termodinámico

Todas las variantes de destilación mencionadas con anterioridad aprovechan la diferencia de volatilidad entre los componentes de la mezcla (casi siempre líquida) para lograr su separación diferenciada en líquido y vapor; aplicando el concepto de etapa de equilibrio para estimar las composiciones de las dos fases generadas.

La diferencia en las volatilidades de los compuestos de la mezcla determina el grado de dificultad de la separación y en buena medida la complejidad del equipo a utilizar, cuando las diferencias son grandes puede bastar con una etapa de equilibrio, conocida como destilación flash. Si el grado de separación no es satisfactorio se colocan etapas en serie hasta lograr el resultado deseado, si su número se hace muy grande -cien, por ejemplo- se acostumbra introducir una sustancia miscible de baja volatilidad para promover una mayor separación de los componentes y se conoce como destilación extractiva. Dependiendo de las características propias de cada separación se hacen los cambios necesarios para que su operación sea viable; que es lo que ha generado tal multiplicidad de variantes sobre el mismo principio básico.

En cuanto al concepto de etapa de equilibrio, es una idealización que permite estimar las composiciones del líquido y el vapor que se encuentran en contacto en un segmento dado de la columna. Si se saben o pueden estimar esas composiciones, junto con la presión y temperatura dentro de la torre, solo sería necesario aplicar los balances de materia y energía pertinentes para diseñar el equipo y su sistema de control, sin necesidad de conocer de antemano los patrones de flujo o velocidades de transferencia de calor dentro de él. El estado de equilibrio termodinámico es una condición estática donde las propiedades macroscópicas de un sistema aislado de sus alrededores no cambian con el tiempo y debe cumplir con las siguientes características:

- Dentro de él no hay gradientes de temperatura, presión, velocidad o concentración o está formado por subsistemas que cumplen con estas condiciones. En términos del proceso de separación significa que para un sistema líquido-vapor

las dos fases están a la misma presión y temperatura, ya que el sistema está inmóvil y que la composición dentro de cada fase es uniforme. Aunque la composición de las fases sea diferente, dentro de ellas no hay gradientes de concentración.

- No existen flujos de masa, calor y trabajo entre el sistema y sus alrededores.
- La velocidad neta de cualquier reacción dentro del sistema es cero. Este requisito unido al primero exigen que las concentraciones de los componentes en cada fase se mantengan sin cambios.

Estas restricciones formales al estado de equilibrio dan la impresión de que es algo muy difícil de encontrar, cuando en la realidad la mayoría de los sistemas se desplazan hacia él espontáneamente y siempre será el estado final en sistemas aislados. Incluso si una vez alcanzado el estado final se alteran las condiciones, con el tiempo se alcanzará un nuevo punto de equilibrio (Sandler, 2006).

Para un sistema cerrado con una mezcla líquido-vapor en equilibrio, las fuerzas impulsoras en las dos fases están perfectamente balanceadas y no hay tendencia al cambio entre ellas. La temperatura y presión se han igualado y las composiciones de cada fase se mantienen fijas. Aún así a nivel molecular las condiciones nunca son estáticas. Las moléculas dentro del líquido en un momento dado no necesariamente son las mismas que un instante después. Muchas moléculas de la interfase la cruzan y se integran a la otra pero la velocidad de transferencia en las dos direcciones será la misma y el transporte total entre fases es nulo.

Esa condición flujo continuo a nivel molecular -cuando a nivel macroscópico no se observa tal flujo- se puede usar para proponer que los sistemas abiertos (con flujo de materia o energía) también pueden presentar condiciones de equilibrio, pero sujeta a que su interacción con los alrededores permita considerar que el sistema no tiene cambio neto. Si no hay flujo de materia y el medio ambiente tiene diferente

temperatura, presión o volumen, la evolución hacia el equilibrio es prácticamente automática.

En el caso de la temperatura, al haber diferencia de temperatura en la frontera, como el sistema no está aislado, habrá transferencia de calor hasta que las temperaturas se igualen, alcanzando un equilibrio estable. Cuando la interacción es por flujo de masa y energía entrando y saliendo del sistema, como en una barra calentándose en un extremo o el bombeo de un fluido a un tanque, el sistema solo se podrá considerar en equilibrio si esos flujos no cambian en función al tiempo, que es la definición de operación en estado estable. Incluso en algunos casos de estado estable donde el sistema no es uniforme, por haber gradientes de concentración, presión o temperatura en su interior, se puede estimar su comportamiento usando el equilibrio como condición límite.

En el caso de la destilación, se considera una sección donde se tiene contacto entre líquido y vapor, a la misma presión y temperatura, con intercambio libre de materia entre ellas, como puede ser en la charola de un plato de destilación, donde el vapor circula a través del líquido con máximo contacto entre las fases. En esas condiciones el componente menos volátil se desplaza hacia el líquido mientras el compuesto más volátil se desprende de él, cruzan la interfase y se concentra en el vapor.

Es evidente que un plato dentro de una columna no cumple varios de los requisitos de equilibrio, pero si el flujo de vapor a través del líquido es lo bastante lento para que se tenga una mezcla perfecta de las fases, la suposición es aceptable y con ella la hipótesis de que la cantidad de material que se evapora de cada componente es igual a la que condensa, de modo que sus composiciones no cambian con el tiempo.

Las masas de líquido y vapor con sus composiciones a las condiciones locales de presión y temperatura en el segmento considerado constituyen una etapa de equilibrio. La suposición de equilibrio para cálculos de ingeniería solo se justifica cuando los resultados que arroja son tan cercanos a la realidad física que el error generado no es significativo o puede ajustarse con un factor de eficiencia conocido de casos

similares. Considerar un plato de una columna como una etapa de equilibrio es una simplificación que podría parecer excesiva, pero que se justifica por los resultados obtenidos.

En la descripción previa, se menciona con frecuencia la composición e intuitivamente sabemos que se trata de una medición de la aportación de cada elemento a una mezcla. En la destilación es una variable de importancia y para el modelado es imprescindible tener una idea clara de su significado físico. Las formas más comunes de expresar la composición son la fracción masa, fracción mol y la concentración molar. La fracción masa y fracción mol se definen como la relación entre la masa o el número de moles de un componente en una mezcla o solución sobre la masa total o los moles totales en la mezcla o solución.

Si el subíndice i denota a un cierto componente de la mezcla, sus fracciones masa y mol son: $w_i = \frac{m_i}{m}$ y $x_i = \frac{n_i}{n}$

Donde el número de moles de una sustancia se obtiene dividiendo su masa entre su peso molecular, ambos expresados en gramos $n_i = \frac{m_i}{PM_i}$.

La suma de las fracciones de todos los componentes de la mezcla, tanto masa como mol es igual a uno $\sum_i w_i = 1$, $\sum_i x_i = 1$.

La concentración molar se define como la relación de la fracción mol de una especie química dentro de una mezcla o solución sobre el volumen molar de la mezcla $C_i = \frac{x_i}{V}$.

Las fracciones masa y mol tienen unidades de $\frac{\text{masa}}{\text{masa}_{\text{total}}}$ y $\frac{\text{moles}}{\text{moles}_{\text{totales}}}$, pero en general se manejan como adimensionales, la concentración tiene unidades de mol/volumen unitario.

2.1.2. Destilación simple

Como ya se ha mencionado, hay variedad de arreglos y modificaciones que hacen versátil a la destilación, pero para entender sus aspectos fundamentales basta con analizar, de inicio al menos, la destilación simple por etapas, como la mostrada en la figura 2.1 es la variante más sencilla que ya incluye accesorios usados en columnas

realmente complejas.

El material a separar se alimenta como líquido, o mezcla líquido-vapor, en algún punto cerca del centro de la columna, que por lo mismo se conoce como “etapa o plato de alimentación” y entra en contacto con el líquido y vapor ya en la charola, si se trata un plato físico, o del volumen equivalente si es un plato teórico. La fracción no vaporizada de la alimentación baja con el resto del líquido en el plato hacia las etapas siguientes, ganando pequeñas fracciones de componentes pesados y cediendo ligeros en cada una.

En el fondo de la columna se encuentra el rehervidor, también llamado reboiler, que es donde se suministra la energía necesaria para lograr la separación.

El vapor generado fluye hacia arriba y en cada etapa va ganando un poco más de los componentes ligeros. El vapor abandona la columna por la parte superior y se condensa en su totalidad. El líquido obtenido se separa en producto destilado (de aquí en adelante se le mencionará solo como destilado) y reflujo a la torre.

El líquido que sale por el fondo se divide en dos corrientes: Una parte se retorna hacia el rehervidor y la otra es el producto pesado que se extrae del sistema.

2.2. Integración de procesos

El principal inconveniente de la destilación es su demanda intensiva de energía, con sus problemas asociados: alta inversión en equipo de intercambio de calor, alto consumo de combustibles e impacto ambiental significativo. Para reducirlo, en las últimas décadas se ha generado multitud de diseños para ahorrar energía (Mustafa et al., 2014) pero, como en otros campos, una de las mejores opciones para no contaminar es no desperdiciar y en el contexto industrial una aplicación directa de ese concepto es la Integración de Procesos (IP); (Staine & Favrat, 1996).

Hay varias escuelas de análisis y aplicación de la integración, pero en esencia todas buscan la mejor forma de usar las corrientes calientes de salida (que se desea

enfriar) para calentar los materiales fríos que entran al proceso o para generar vapor y energía eléctrica en equipos de cogeneración para así reducir el consumo de energía y servicios de enfriamiento en el total de la planta. Es obvio que la aplicación de la IP representa beneficios en varios niveles: ahorro de combustibles y servicios de calentamiento innecesarios, costo de bombeo y tratamiento de agua de enfriamiento; reducción de emisiones contaminantes y del impacto ambiental general al bajar la contaminación térmica descargada a la atmósfera en las torres de enfriamiento, entre otras cosas. En una de sus primeras aplicaciones -en Imperial Chemical Industries, 1980- se lograron ahorros de energía del 30 % respecto al diseño tradicional, con resultados similares en varios proyectos que le siguieron; con lo que se validó de inmediato la aplicación práctica del concepto teórico (Kemp y Linnhoff, 2007); (Sorin y Paris, 1997).

Como era de esperarse, también hay inconvenientes en la integración y uno de ellos es el riesgo de inestabilidad implícito en el cruce corrientes de distintas áreas de operación, como es el caso cuando un problema menor, en un punto normalmente aislado, al darse la interacción entre corrientes puede extenderse por todo el sistema hasta detener la operación. Aún en los casos menos serios pueden presentarse lazos de control anidados que no siempre se pueden desacoplar, y se hace difícil mantener estable la operación.

Además de la interacción entre corrientes calientes y frías, la mayor parte del equipo de intercambio tiene comportamiento no lineal (Rubio Maya et al., 2009), igual que los modelos de predicción de propiedades termodinámicas y los de estimación del equilibrio de fases (Gundersen, 1982). Cada uno de estos aspectos por sí solo garantiza la no linealidad de una operación que, irónicamente, por su misma complejidad requiere en mayor grado la aplicación de modelado y predicción del comportamiento de las variables de control que permitan operarla.

En cierto modo la integración es una faceta adicional de un problema que se ha venido resolviendo de una forma u otra desde finales del siglo XIX, y por ello como

una extensión manejable del mismo.

2.3. Modelado y control

2.3.1. Variables de diseño y operación

Al estudiar un sistema con fines de diseño o control se debe ser capaz de responder una serie de preguntas, como podrían ser:

- ¿Cuál es el objetivo del proceso? ¿Separación total o parcial? ¿Un cambio específico en la concentración de una corriente?
- ¿Cuales son los objetivos de operación que el sistema de control debe cumplir?

Puede ser que se busque asegurar la estabilidad del proceso, suprimir el efecto de perturbaciones externas o mejorar el desempeño económico de la planta. En una torre de destilación lo más frecuente es que se desee lograr cierta recuperación o fracción de uno de los componentes en una de las corrientes - el destilado, por ejemplo- y el sistema de control debería ser capaz de mantenerla a pesar de las perturbaciones externas. Para lograr esos objetivos hay otras cuestiones que se deben plantear y resolver:

- ¿Qué variables se desea medir? ¿puede hacerse? ¿hay valores específicos entre los que deben mantenerse? ¿que condiciones de operación o variables de proceso es posible especificar? ¿se puede especificar alguna o se deberá aceptar lo que entregue el equipo?
- ¿Como se pretende monitorear el desempeño del proceso? ¿Qué variables reflejan ese desempeño?
- El proceso, tal como es ¿resulta estable? ¿necesita control retroalimentado para serlo? ¿cuántos lazos de control se necesitan?

- ¿Puede mejorarse el proceso con una elección diferente de variables o cambiando las condiciones de operación?
- ¿Cuáles son los parámetros del sistema?
- ¿Hay fuentes evidentes de comportamiento no lineal?

Esta es solo una muestra, pero basta para dar una idea de que en el diseño y operación de una columna de destilación se debe tener en cuenta un gran número de variables. Muchas de ellas se definen durante la etapa de diseño y se convierten en parámetros del equipo, otras vienen a ser los objetivos de operación o control, otras más son las variables que se deben manipular para lograr esos objetivos y aún otras serán perturbaciones externas sobre las que no se tiene ningún control, pero cuyos efectos han de considerarse.

Algunas de las más importantes son:

- 1. Alimentación: Flujo, composición, fase, temperatura, presión.
- 2. Separación deseada, sea como concentración de uno de los componentes en una de las corrientes o como recuperación del mismo en una de las corrientes.
- 3. Presión de operación del equipo.
- 4. Caída de presión en la columna.
- 5. Reflujo de destilado (mínimo y de operación).
- 6. Retorno de pesados al fondo de la torre o flujo de fondos extraído.
- 7. Carga térmica al rehedidor y condensador (calor suministrado al rehedidor y calor retirado del condensador).
- 8. Número de etapas para la separación (mínimo y de diseño).
- 9. Tipo de condensador.

10. Estado del condensado (saturado, grado de subenfriamiento).
11. Tipo y área del rehervidor.
12. Tipo de etapa (Platos, empaque, etc.).
13. Altura y diámetro de la columna.
14. Etapa de alimentación.
15. Internos y materiales de construcción de la columna.

Claramente, de las primeras siete se espera que vayan cambiando en función de las condiciones generales del proceso y se conocen como variables de operación. Se deben definir o estimar para poder diseñar el equipo, pero sabiendo de antemano que algunas, como el flujo y composición de la alimentación, dependen del comportamiento de los procesos previos. El valor asignado en el diseño sirve para establecer la capacidad de producción máxima o mínima esperada.

Otras como el retorno de destilado a la columna deberán modificarse para lograr la separación deseada y aún otras, como la composición del destilado, dependen de influencias externas y de las condiciones de operación vigentes. El resto de las variables mencionadas se definen o se calculan al diseñar la planta - como el área de transferencia del rehervidor- acotando así lo que será posible obtener del equipo como entidad física. Una vez que se construye el equipo, para fines de control, estas dejan de ser variables y se convierten en parámetros del sistema.

Para diseñar un equipo, el número de variables intensivas (aquellas que no dependen del tamaño del sistema) que deben especificarse está determinado por el análisis de grados de libertad del sistema, que en esencia es un conteo donde se restan las incógnitas presentes del total de ecuaciones que lo describen, incluyendo relaciones entre fases (Pham, 1994).

El procedimiento de evaluación para torres multietapas es directo, pero muy engoroso y no vale la pena analizarlo a detalle; lo importante del caso es que algo

tan complejo como una columna de destilación pueda diseñarse, y su comportamiento predecirse, debido a que la mayoría de las propiedades y variables del sistema se relacionan unas con otras en forma conocida, o que se puede estimar con bastante seguridad.

Ya se ha explicado que la forma en que se dividen los componentes de una mezcla al aplicarle calentamiento depende tanto de la naturaleza de estos, como de la presión y temperatura a que se encuentre el sistema. Los flujos de alimentación, destilado y fondos están relacionados entre sí, dependiendo también de esas relaciones de separación y de la energía total suministrada al rehervidor. Como el cumplimiento con las relaciones de separación en equilibrio y con las ecuaciones de balance de materia y energía se da en todo el sistema, deben formar parte de cualquier intento de describirlo.

Como ya se ha visto, para poder operar la planta se debe identificar las variables que se van a manipular para obtener los resultados planteados en el diseño (Luyben, 1996). Esto presupone la existencia de una relación funcional entre ellas o al menos de reglas de asociación que se puedan aplicar consistentemente para dirigir el equipo hacia los objetivos de diseño y operación. A primera vista parece un asunto trivial, sabiendo que todas las variables se relacionan, y si solo se requiriera eso, sería trivial, pero se ocupa más que relación funcional. Lo que se necesita es identificar casos de fuerte dependencia donde una o más de las variables cumplan con los objetivos expresados mientras que la variable de la que dependen puede modificarse con facilidad.

Buena cantidad de las propuestas para variables de control encontradas en la literatura carecen de sentido en la práctica. Por ejemplo, casi nunca se puede especificar la composición de la alimentación, al estar dada por la operación de otro equipo o varía con el arribo de materia prima. Otro caso es la carga térmica (flujo de calor suministrado) al rehervidor: Si ya se hizo el gasto en un calentador con cierta área de intercambio, lo que se busca es obtener la máxima producción que se pueda obtener de él y no es deseable reducir el flujo del medio de calentamiento en tanto se pueda

recurrir a otra variable para obtener el mismo resultado.

Para entender como funciona una columna de destilación, describir su comportamiento y tal vez estimarlo, se necesita una estructura que haga uso de las variables, funciones y reglas de asociación descritas y entregue resultados análogos a los del sistema analizado. Esa estructura es el modelo matemático del sistema.

2.3.2. Modelo matemático

Se debe mantener siempre a la vista que el modelo de proceso es una abstracción matemática que pretende describir una entidad física. Las ecuaciones que lo forman son tan solo una aproximación de la realidad y nunca incluirán todas sus características.

En aplicaciones de ingeniería los modelos matemáticos se expresan como una o más ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales y de frontera suficientes y necesarias para su solución. Es deseable que estas ecuaciones se obtengan de leyes y principios básicos de la naturaleza aplicados a un sistema o volumen de control (Moaveni, 1999), pero la mayoría de las veces es necesario usar ecuaciones de correlación, ya sea para aportar mayor precisión, por falta de formas aplicables de leyes fundamentales o carencia de datos experimentales confiables en el rango de interés.

El modelado implica un delicado balance entre el grado de detalle que se desea y la complejidad de los cálculos para resolverlo: a mayor detalle, mayor el esfuerzo de cálculo.

Para una columna de destilación tradicional, el modelo matemático suele incluir las ecuaciones de balance de masa y energía -generales y por etapa-, las ecuaciones de equilibrio entre fases, la relación de retorno de pesados en el fondo y el reflujo de destilado, entre otras. En un modelo orientado a diseño, lo normal es plantearlo para el estado estacionario -o estado estable- con base en velocidades de flujo promedio sobre un tiempo prolongado y donde no hay términos de acumulación. También aplica en casos donde las variaciones de la masa total del sistema son pequeñas o donde la

acumulación de energía en el sistema, debida a sus interacciones de calentamiento y enfriamiento, no es relevante (Bequette, 1998).

En cambio para simulación y control, deben aplicarse las ecuaciones de balance en función del tiempo, considerando términos de acumulación de masa y energía. A estos se les conoce como balances dinámicos del sistema y al modelo resultante como modelo dinámico.

Para describir el estado estable basta con un sistema de ecuaciones algebraicas, ya que al usar condiciones promediadas en el tiempo, los términos de acumulación - derivadas respecto al tiempo- son cero; mientras que para describir ese mismo sistema con referencia al tiempo, es necesario emplear ecuaciones diferenciales ordinarias, y si se toman en cuenta gradientes de composición, temperatura, presión o velocidad de flujo por sección podrá necesitar de ecuaciones diferenciales parciales para desarrollar las ecuaciones de balance en estado inestable, además de las algebraicas correspondientes.

En un sistema lineal las predicciones que se obtienen son bastante confiables, complicándose gradualmente al aumentar el grado de las ecuaciones diferenciales. En su forma más sencilla el modelo se expresa como un sistema de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de primer orden, del tipo:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, p_1, \dots, p_r) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, p_1, \dots, p_r) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, p_1, \dots, p_r)\end{aligned}$$

El sistema anterior representa la configuración del sistema al tiempo t , donde x_i puede ser cualquiera característica del sistema que depende del tiempo, como el nivel en un tanque o la temperatura en un reactor para un momento en particular (t). El mismo

conjunto de ecuaciones puede expresarse en forma vectorial compacta como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es el vector de variables de estado, $\dot{\mathbf{x}}$ su derivada, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ es el vector de variables de entrada y $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_r)$ es el vector de parámetros del sistema.

Las dificultades comienzan cuando se debe considerar aspectos relacionados con la no linealidad de los sistemas, tales como la fricción, turbulencia o la interacción térmica de corrientes. En realidad todos los sistemas reales son no lineales y es raro que se pueda expresar el modelo con ecuaciones diferenciales lineales, en la mayor parte de los casos se opta por una linealización del modelo. Cuando esto no da una descripción adecuada, no queda más que resolver los modelos no lineales (Bequette, 2002).

La composición de los productos o el grado de separación de los componentes de la mezcla original puede estar definido por condiciones de mercado o de optimización global de la planta, un objetivo probable del sistema de control sería mantener la composición estable y tan cerca del valor de diseño como sea posible (Skogestad y Morari, 1987).

2.3.3. Descripción del modelo

En una columna típica, como la mostrada en la figura 2.1, la alimentación se da en un punto cerca a la mitad del cuerpo de la torre en lo que se llama etapa de alimentación (h). El vapor fluye de etapa a etapa hacia la parte alta de la columna y el líquido hace lo propio derramándose de una etapa a la siguiente. El vapor que sale del domo de la columna se hace pasar por un condensador total, donde se convierte en líquido saturado. Una parte se recircula a la columna y el líquido restante es el producto destilado, que debe contener una proporción elevada de los componentes más ligeros. En el fondo de la torre el líquido también se divide: una parte se retira como

producto de fondos, con una concentración sustancialmente mayor del componente pesado y el resto se vaporiza en el rehervidor y retorna a la columna.

Para fines de exposición se supone que las etapas están formadas por charolas de platos con rebosadero donde la configuración del plato promueve que el vapor que sube de la etapa inmediata inferior se mezcle perfectamente con el líquido y así considerar que las concentraciones de los componentes en el líquido y vapor en cada etapa no presentan gradientes de composición y se puede hablar de una sola concentración para cada componente y un solo flujo para cada fase en cada etapa.

Por ejemplo: si se cumplen las condiciones de mezcla perfecta en una etapa cualquiera, denotada como "etapa p ", se puede decir que el flujo de vapor saliendo de ella es V_p , su fracción mol del componente i es y_i ; el flujo de líquido que sale es L_p , y la fracción mol de i en él es x_i , descartando posibles cambios de la concentración de los componentes a diferentes profundidades de líquido en la charola.

Para el caso especial de destilación de una mezcla binaria, como la suma de las fracciones mol y masa en una mezcla es igual a uno, siempre se puede expresar la fracción del componente pesado (componente 2) en términos del componente ligero (componente 1) como $x_2 = 1 - x_1$.

En el caso considerado se muestra una columna que consta de n platos de equilibrio, incluyendo el rehervidor y condensador total. Para la numeración de las etapas se puede empezar desde el condensador o desde el rehervidor, pero es un poco más frecuente que se tome el condensador y tanque de destilado como etapa 1 y el rehervidor como etapa n y es la que usaremos para el desarrollo de los modelos.

Suponiendo que la alimentación ingresa a la columna en lo que se conoce como plato de alimentación (h) con dos componentes, al ingresar a la charola entra en contacto con el vapor y líquido que se encuentran ahí. Si el mezclado es adecuado se puede seguir con la hipótesis de que el líquido que cae y el vapor que sale de esa etapa está en equilibrio, pero considerando la aportación de la corriente alimentada a la composición de la mezcla en el plato.

Si todo el calor aportado al sistema entra en el rehervidor, el vapor producido ahí fluye en la forma ya descrita hacia el domo y conforme sube se enriquece progresivamente en el componente ligero mientras que en cada etapa cede una parte del componente pesado al líquido con el que se cruza.

El vapor abandona la columna por la parte de arriba, donde se condensa y se divide en el producto destilado (D) y el reflujo, que regresa a la columna como líquido. Este líquido fluye hacia la parte baja aumentando su contenido de componentes pesados y deshaciéndose de su fracción de ligeros. Ese líquido deja la torre por la parte baja para evaporarse en el rehervidor, parte del líquido se retira como producto de fondos y el resto se recircula a la torre. La pérdida y ganancia mencionadas se dan en cada etapa, donde líquido y vapor se ponen en contacto para alcanzar el equilibrio de fases.

Durante la operación, la columna debe cumplir con los objetivos de proceso en presencia de perturbaciones externas. Esos objetivos suelen ser la fracción de recuperación de un componente clave -destilado o de fondos- o cierta composición mínima de un componente en esas mismas corrientes. Para entender como interactúan las variables de proceso, describir su comportamiento en conjunto y tal vez estimarlo, se necesita una estructura que haga uso de las variables, funciones y reglas de asociación descritas y entregue resultados análogos a los del sistema analizado, que en este caso es su modelo termodinámico.

Para una columna tradicional, como la mostrada en la figura 2.1, el modelo matemático suele incluir las ecuaciones de balance de masa y energía (generales y por etapa), las ecuaciones de equilibrio entre fases, la relación de retorno de pesados en el fondo y el reflujo de destilado, entre otras. En el caso de simulación y control, deben aplicarse las ecuaciones de balance en función del tiempo, considerando términos de acumulación de masa y energía. A estos se les conoce como balances dinámicos del sistema y al modelo resultante como modelo dinámico. Para describir el estado estable basta un sistema de ecuaciones algebraicas ya que al tomar condiciones promediadas en el tiempo los términos de acumulación, derivadas respecto al tiempo, son

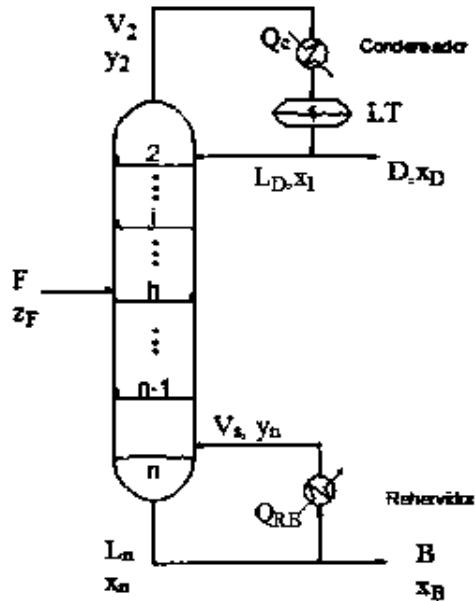


Figura 2.1: Columna tradicional n etapas

ceros; mientras que para describir ese mismo sistema en estado transitorio es necesario emplear ecuaciones diferenciales ordinarias, y si se toman en cuenta gradientes de composición, temperatura, presión o velocidad de flujo por sección podrá necesitar de ecuaciones diferenciales parciales para desarrollar las ecuaciones de balance en estado inestable, además de las algebraicas correspondientes.

Para fines de exposición se supone que las etapas están formadas por charolas de platos perforados que permiten el paso del vapor y con rebosadero para la salida de líquido. La columna consta de n etapas numeradas desde el condensador -etapa 1- hasta el rehervidor parcial -etapa n - y la de alimentación es la etapa h .

Si la alimentación tiene nc componentes el balance de masa global para la etapa de alimentación es:

$$\frac{dm_f}{dt} = L_{h-1} + V_{h+1} + F - L_h + V_h \quad (2.1)$$

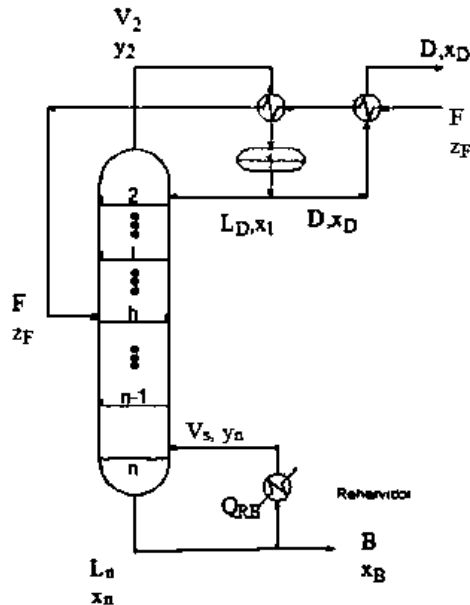


Figura 2.2: Columna integrada simple n etapas

El balance para cada componente j entre $j = 1$ y $nc - 1$:

$$\frac{dx_{f,j}m_f}{dt} = L_{h-1}x_{h-1,j} + V_{h+1}y_{h+1,j} + Fz_{F,j} - L_hx_{h,j} + V_hy_{h,j} \quad (2.2)$$

El balance de energía para la etapa:

$$\frac{d(m_F h_F)}{dt} = L_{h-1}h_{h-1} + V_{h+1}h_{h+1} + Fh_F - L_hh_h + V_hh_h \quad (2.3)$$

donde m_f es la masa retenida en la etapa y la derivada representa su variación respecto al tiempo.

El flujo molar de vapor y líquido se denotan con V y L . Los subíndices $h - 1$, h y $h + 1$ se refieren a la etapa de donde sale la corriente; $x_{k,j}$ es la fracción mol de componente j en el líquido saliendo de la etapa k .

Si se tratara de una mezcla de cincuenta hidrocarburos estaríamos viendo, solo en la alimentación, cincuenta y una ecuaciones de balance y cincuenta relaciones de equilibrio entre las composiciones en el líquido y vapor. Para hacer manejable el análisis se hace necesario introducir algunas consideraciones y simplificaciones:

- La alimentación tiene dos componentes y se trata en consecuencia de destilación binaria. Como la suma de fracciones mol es igual a uno, los balance se expresarán en términos del componente ligero y la fracción del componente pesado (componente 2) se obtiene por diferencia.
- Suponiendo que la alimentación entra a la columna en lo que se conoce como plato de alimentación (h) con dos componentes, al ingresar a la charola entra en contacto con el vapor y líquido que se encuentran ahí. Si el mezclado es adecuado se puede seguir con la hipótesis de que el líquido que cae y el vapor que sale de esa etapa está en equilibrio, pero tomando en cuenta la aportación de la corriente alimentada a la composición de la mezcla en el plato.
- Si el calor latente de vaporización de los dos componentes es similar se puede considerar que el componente pesado que condensa en cada etapa produce la evaporación de una cantidad igual del componente ligero.
- No hay retención de vapor en ninguna etapa.
- El volumen molar de líquido en cada etapa es el mismo.
- Si la columna está bien aislada, se alimenta energía al sistema solo en el rehervidor y se retira solo en el condensador, se pueden obviar los balances de energía por etapa.
- El calor retirado en el condensador lleva al destilado a líquido saturado, sin subenfriar.
- Como se están definiendo las ecuaciones de balance en el condensador y rehervidor en términos de material condensado y vaporizado, el sistema es directamente aplicable a columnas con integración de energía. En cada caso se hace necesario encontrar la relación funcional $F = f(V_S, L_D)$, que es la forma en que

la alimentación depende del reflujo de destilado y del retorno de fondos en el rehervidor.

- El volumen de líquido en el tanque de destilado es constante.
- No hay acumulación de líquido en el rehervidor.
- El estado de fase de la alimentación se define con la calidad de la alimentación: q_F que varía de 1 para el líquido saturado a 0 para el vapor saturado

La etapa de alimentación h divide efectivamente la destilación en dos secciones bien diferenciadas: encima de la alimentación está la zona de rectificación o enriquecimiento, por debajo de ella está la zona de agotamiento.

Debido a las condiciones de no retención de vapor en ninguna etapa y al no haber acumulación de líquido en ellas, el flujo de vapor y líquido en las secciones de rectificación y agotamiento es constante de una etapa a otra, y la diferencia en los flujos entre rectificación y agotamiento debido a la condición de saturación - o calidad- de la corriente alimentada. Para cualquier etapa i :

$$V_i = V_{i+1} = V_{i-1} \quad (2.4)$$

$$L_i = L_{i+1} = L_{i-1} \quad (2.5)$$

Para comenzar el desarrollo del modelo es necesario expresar los balances de materia y energía del sistema.

El balance global está dado por:

$$F = D + B \quad (2.6)$$

Balance en la etapa de Alimentación

En la etapa de alimentación, mostrada en la figura (2.3), el flujo molar de vapor que sale de ella es:

$$V_h = V_{h+1} + F(1 - q_F) \quad (2.7)$$

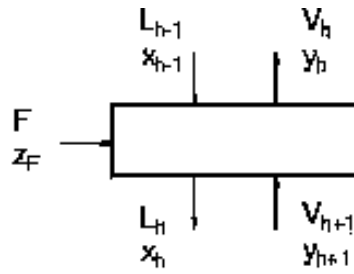


Figura 2.3: Etapa de alimentación

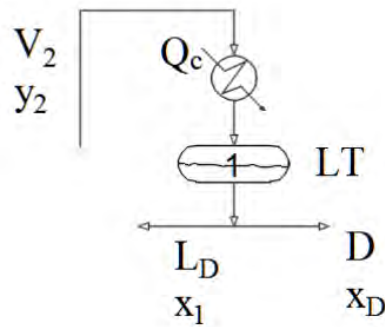


Figura 2.4: Condensador

y el flujo de líquido saliendo:

$$L_h = L_{h-1} + Fq_F \quad (2.8)$$

Balance en el Condensador

De acuerdo con la figura (2.4) el balance se expresa:

$$L_D + D = L_2 \quad (2.9)$$

Rehervidor

De acuerdo con la figura (2.5) el balance se expresa como:

$$B = L_{n-1} - V_s \quad (2.10)$$

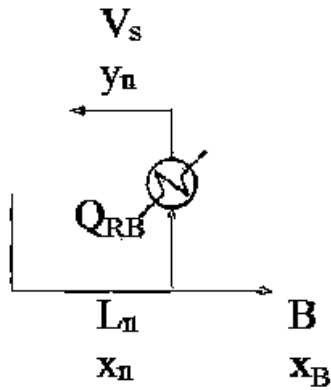


Figura 2.5: Rehervidor

Zona de rectificación

El balance para la zona de rectificación está dado por:

$$L_i = L_R = L_D \quad (2.11)$$

$$V_R = V_S + F(1 - q_F) \quad (2.12)$$

Zona de agotamiento

El balance para la zona de agotamiento está dado por:

$$L_i = L_S = L_R + Fq_F \quad (2.13)$$

$$V_S = V_{RB} \quad (2.14)$$

Los subíndices S , R y RB se refieren a flujos molares en la zona de enriquecimiento, agotamiento y en el rehervidor, respectivamente.

2.3.4. Modelo dinámico simplificado

Las ecuaciones de balance del componente ligero en cada sección se expresan según el desarrollo mostrado a continuación:

Condensador-Tanque de destilado (etapa 1):

$$m_1 \frac{dx_1}{dt} = V_R(y_2 - x_1) \quad (2.15)$$

Poniendo la derivada en forma explícita:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{V_R}{m_1}(y_2 - x_1) \quad (2.16)$$

Zona de rectificación (etapas $i = 2$ a $h - 1$):

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{L_R}{m_i}(x_{i-1} - x_i) + \frac{V_R}{m_i}(y_{i+1} - y_i) \quad (2.17)$$

Alimentación (etapa $i = h$):

$$\frac{dx_h}{dt} = \frac{L_R}{m_h}x_{h-1} - \frac{L_S}{m_h}x_h + \frac{V_S}{m_h}y_{h+1} - \frac{V_R}{m_h}y_h + \frac{F}{m_h}z_F \quad (2.18)$$

Agotamiento (etapas $i = h + 1$ a $n - 1$):

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{L_S}{m_i}(x_{i-1} - x_i) + \frac{V_S}{m_i}(y_{i+1} - y_i) \quad (2.19)$$

Rehervidor:

$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{L_S}{m_{RB}}x_{n-1} - \frac{B}{m_{RB}}x_n - \frac{V_S}{m_{RB}}y_n \quad (2.20)$$

De (2.10)

$$B = L_s - V_s \quad (2.21)$$

que sustituyendo y reordenando queda

$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{L_S}{m_{RB}}(x_{n-1} - x_n) + \frac{V_s}{m_{RB}}(x_n - y_n) \quad (2.22)$$

La relación entre la fracción mol en el vapor y la del líquido para una etapa en equilibrio está dada por:

$$y_i = \frac{\alpha x_i}{1 + (\alpha - 1)x_i} \quad (2.23)$$

donde α es la volatilidad relativa entre los dos componentes. Esta consideración es muy delicada ya que la relación solo es constante para soluciones ideales donde ambos componentes tienen el mismo calor latente de vaporización. Cuando los calores

latentes difieren en forma significativa esta simplificación deja de ser válida y hay que recurrir a otras expresiones, que no se consideran de momento.

El modelo es un sistema de ecuaciones diferenciales, que para resolverse requiere un conjunto consistente de condiciones iniciales.

2.3.5. Modelo simplificado en estado estable

Cuando el comportamiento del sistema no varía con el tiempo los términos de acumulación (derivadas respecto al tiempo) se hacen cero y las ecuaciones de balance de componente ligero en cada sección son:

Condensador-Tanque de destilado (etapa 1):

$$V_R(y_2 - x_1) = 0 \quad (2.24)$$

Zona de rectificación (etapas $i = 2$ a $h - 1$):

$$L_R(x_{i-1} - x_i) + V_R(y_{i+1} - y_i) = 0 \quad (2.25)$$

Alimentación:

$$L_R x_{h-1} - L_S x_h + V_S y_{h+1} - V_R y_h + F z_F = 0 \quad (2.26)$$

Agotamiento (etapas $i = h + 1$ a $n - 1$):

$$L_S(x_{i-1} - x_i) + V_S(y_{i+1} - y_i) = 0 \quad (2.27)$$

Rehervidor:

$$L_S x_{n-1} - B x_n - V_S y_n \quad (2.28)$$

La relación entre la fracción mol en el vapor y la del líquido para una etapa en equilibrio sigue siendo:

$$y_i = \frac{\alpha x_i}{1 + (\alpha - 1)x_i} \quad (2.29)$$

A primera vista parece un sistema de ecuaciones lineales, pero no es así, dado que y es no lineal respecto a la variable de estado y aparece en todas las ecuaciones, haciendo el sistema no lineal incluso cuando α es constante.

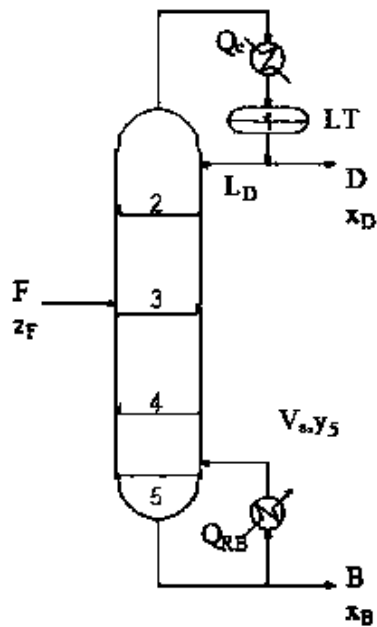


Figura 2.6: Columna tradicional 5 etapas

2.3.6. Solución del modelo en estado estable para un caso de la literatura

Para una mejor comprensión del modelo, sus limitaciones y peculiaridades es conveniente resolver y analizar un caso concreto. Aunque el mínimo absoluto es de una etapa, si se incluyen todas las secciones consideradas en el desarrollo, el número mínimo es de cinco -una para cada sección- y es el punto de partida para el equipo a estudiar. Aplicando el desarrollo en estado estable a una columna de cinco etapas con datos tomados de un caso típico de la literatura (Skogestad y Morari, 1988).

Alimentación $F = 1$ mol/min, fracción de componente ligero en la alimentación $z_F = 0.5$, volatilidad $\alpha=1.5$, reflujo de destilado a la torre $L_D = 2.706$ mol/min, flujo producto destilado $D = 0.5$ mol/min y fracción de líquido saturado en la alimentación $q_F = 1.0$. Se debe encontrar la composición y flujos del líquido y vapor en cada etapa y en cada corriente no dada explícitamente.

El sistema simplificado para cinco etapas queda:

$$f_1 = -x_1 + y_2 \quad (2.30)$$

$$f_2 = L_R x_1 - L_R x_2 - V_R y_2 + V_R y_3$$

$$f_3 = 0 + L_R x_2 - L_S x_3 - V_R y_3 + V_S y_4 + F z_F$$

$$f_4 = 0 + 0 + L_S x_3 - L_S x_4 - V_S y_4 + V_S y_5$$

$$f_5 = 0 + 0 + 0 + L_S x_4 - B x_5 - V_S y_5$$

$$y_i = \frac{\alpha x_i}{1 + (\alpha - 1)x_i} \quad (2.31)$$

$$f_i = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq 5 \quad (2.32)$$

Se ponen los términos en cero únicamente para mostrar que es prácticamente un sistema tridiagonal, pero con términos no lineales sobre la diagonal principal y un término constante fuera del esquema, por lo que debe resolverse mediante algún método numérico para sistemas de ecuaciones no lineales.

En el método de Newton multivariable se busca un vector de valores de \mathbf{x} que force la condición:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.33)$$

mediante el algoritmo

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{J}_k^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \quad (2.34)$$

donde el Jacobiano se define como:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdot & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

\mathbf{x}_k es el vector de valores de composición del líquido, \mathbf{J}_k^{-1} es la inversa del Jacobiano y $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$ los valores de las funciones que forman el sistema, todos evaluados con los datos de la iteración k .

Casi cualquier paquete de software matemático tiene una función estándar para resolver sistemas no lineales con este método. Estas rutinas suelen ser confiables dentro de su zona de aplicación, pero cuando falla el algoritmo, las indicaciones para encontrar el problema origen son limitadas. Para columnas de destilación (integradas o tradicionales) en estado estable el sistema de ecuaciones generado presenta peculiaridades que, para ciertos valores de reflujo de destilado y de fondos, generan zonas donde no hay convergencia y la paquetería no da información acerca de la causa de falla, que para un sistema de control puede ser fatal.

De no poder resolver el sistema por ese camino, se puede atacar el problema usando una variante del mismo método de Newton multivariable con el algoritmo:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{J}_k(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) = \mathbf{0} \quad (2.36)$$

En este, cada iteración forma un sistema de ecuaciones lineales, donde se conocen los valores de \mathbf{x}_k , $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$ y \mathbf{J}_k , con \mathbf{x}_{k+1} como incógnita. Cada paso se puede resolver usando cualquiera de los métodos clásicos como Gauss simple, Gauss Jordan, Gauss Seidel, Jacobi, etc. y el vector \mathbf{x}_{k+1} obtenido se sustituye como el nuevo \mathbf{x}_k hasta alcanzar la convergencia.

Para el sistema de ecuaciones de la columna de cinco etapas:

$$\mathbf{J}_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} & \frac{\partial f_1}{\partial x_5} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2}{\partial x_5} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} & \frac{\partial f_3}{\partial x_5} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} & \frac{\partial f_4}{\partial x_5} \\ \frac{\partial f_5}{\partial x_1} & \frac{\partial f_5}{\partial x_2} & \frac{\partial f_5}{\partial x_3} & \frac{\partial f_5}{\partial x_4} & \frac{\partial f_5}{\partial x_5} \end{bmatrix}_k \quad (2.37)$$

Si se obtienen las derivadas parciales del primer renglón:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \frac{\alpha}{[1 + (\alpha - 1)x_2]^2}$$

siguiendo con el resto de las derivadas parciales, el Jacobiano completo queda:

$$\mathbf{J}_k = \begin{bmatrix} -1 & \zeta_2 & 0 & 0 & 0 \\ L_R & -L_R - V_R\zeta_2 & V_R\zeta_3 & 0 & 0 \\ 0 & L_R & -L_s - V_R\zeta_3 & V_S\zeta_4 & 0 \\ 0 & 0 & L_s & -L_s - V_S\zeta_4 & V_S\zeta_5 \\ 0 & 0 & 0 & L_s & -B - V_S\zeta_5 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

con

$$\zeta_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \text{ y } \frac{\partial y_i}{\partial x_i} = \frac{\alpha}{[1 + (\alpha - 1)x_i]^2} \quad (2.39)$$

Resolviendo para los valores del ejemplo: $F = 1$ mol/min, $z_F = 0.5$, $\alpha = 1.5$, $L_D = 2.706$ mol/min, $D = 0.5$ mol/min y $q_F = 1.0$. Del balance global (2.6) se tiene:

$$B = 1 - 0.5 = 0.5 \text{ mol/mín} \quad (2.40)$$

Para la zona de rectificación de (2.11) y (2.12):

$$L_R = L_D = 2.706 \text{ mol/mín} \quad (2.41)$$

$$V_R = 3.206 \text{ mol/mín} \quad (2.42)$$

Para la zona de agotamiento de (2.13) y (2.14):

$$L_S = 3.706 \text{ mol/mín} \quad (2.43)$$

$$V_S = 3.206 \text{ mol/mín} \quad (2.44)$$

Sustituyendo estos valores en (2.30) se obtienen las siguientes expresiones para f_i :

$$f_1 = -x_1 + y_2 = 0 \quad (2.45)$$

$$f_2 = 2.706x_1 - 2.706x_2 - 3.206y_2 + 3.206y_3 = 0$$

$$f_3 = 0 + 2.706x_2 - 3.706x_3 - 3.206y_3 + 3.206y_4 + 0.5 = 0$$

$$f_4 = 0 + 0 + 3.706x_3 - 3.706x_4 - 3.206y_4 + 3.206y_5 = 0$$

$$f_5 = 0 + 0 + 0 + 3.706x_4 - 0.5x_5 - 3.206y_5 = 0$$

en (2.29):

$$\begin{aligned}
 y_2 &= \frac{1.5x_2}{1 + 0.5x_2} \\
 y_3 &= \frac{1.5x_3}{1 + 0.5x_3} \\
 y_4 &= \frac{1.5x_4}{1 + 0.5x_4} \\
 y_5 &= \frac{1.5x_5}{1 + 0.5x_5}
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

en (2.38):

$$\mathbf{J}_k = \begin{bmatrix} -1 & \zeta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 2.706 & -2.706 - 3.206\zeta_2 & 3.206\zeta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 2.706 & -2.706 - 3.206\zeta_3 & 3.206\zeta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 3.706 & -3.706 - 3.206\zeta_4 & 3.206\zeta_5 \\ 0 & 0 & 0 & 3.706 & -0.5 - 3.206\zeta_5 \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

recordando que ζ_i se define mediante:

$$\zeta_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \text{ y } \frac{\partial y_i}{\partial x_i} = \frac{\alpha}{[1 + (\alpha - 1)x_i]^2}$$

en (2.39):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial y_2}{\partial x_2} &= \frac{1.5}{[1 + 0.5x_2]^2} \\
 \frac{\partial y_3}{\partial x_3} &= \frac{1.5}{[1 + 0.5x_3]^2} \\
 \frac{\partial y_4}{\partial x_4} &= \frac{1.5}{[1 + 0.5x_4]^2} \\
 \frac{\partial y_5}{\partial x_5} &= \frac{1.5}{[1 + 0.5x_5]^2}
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

El vector de valores iniciales \mathbf{x}_0 son las composiciones supuestas del componente ligero en la fase líquida para cada una de las etapas. Como la fracción de este es máxima en el condensador, mínima en el rehervidor y sus valores están acotados entre cero

y uno, se genera el vector inicial asignando un valor ligeramente mayor de cero a la fracción de ligero en la corriente de fondos, ligeramente menor a uno a la fracción en el destilado e interpolando linealmente para los valores de las etapas intermedias. Para las cinco etapas el vector sería:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.990 \\ 0.745 \\ 0.500 \\ 0.255 \\ 0.010 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Sustituyendo este vector en (2.45),(2.46),(2.47) y (2.48) para el primer paso del algoritmo:

$$y_2 = 0.8142 \quad (2.50)$$

$$y_3 = 0.6000$$

$$y_4 = 0.3392$$

$$y_5 = 0.0149$$

$$f_1 = -0.1758$$

$$f_2 = -0.2376 \quad (2.51)$$

$$f_3 = -0.17315$$

$$f_4 = -0.13174$$

$$f_5 = 0.89226$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0.79628 \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial y_3}{\partial x_3} = 0.96$$

$$\frac{\partial y_4}{\partial x_4} = 1.1799$$

$$\frac{\partial y_5}{\partial x_5} = 1.4851$$

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0.79628 & 0 & 0 & 0 \\ 2.706 & -5.2589 & 3.0778 & 0 & 0 \\ 0 & 2.706 & -5.7838 & 3.7828 & 0 \\ 0 & 0 & 3.706 & -7.4888 & 4.7612 \\ 0 & 0 & 0 & 3.706 & -5.2612 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Que cuando se sustituye en el algoritmo

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{J}_k(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) = \mathbf{0} \quad (2.54)$$

queda como:

$$\begin{bmatrix} -0.1758 \\ -0.2376 \\ -0.17315 \\ -0.13174 \\ 0.89226 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0.79628 & 0 & 0 & 0 \\ 2.706 & -5.2589 & 3.0778 & 0 & 0 \\ 0 & 2.706 & -5.7838 & 3.7828 & 0 \\ 0 & 0 & 3.706 & -7.4888 & 4.7612 \\ 0 & 0 & 0 & 3.706 & -5.2612 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_1 - \begin{bmatrix} 0.990 \\ 0.745 \\ 0.500 \\ 0.255 \\ 0.010 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$\begin{bmatrix} -0.1758 \\ -0.2376 \\ -0.17315 \\ -0.13174 \\ 0.89226 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0.79628 & 0 & 0 & 0 \\ 2.706 & -5.2589 & 3.0778 & 0 & 0 \\ 0 & 2.706 & -5.7838 & 3.7828 & 0 \\ 0 & 0 & 3.706 & -7.4888 & 4.7612 \\ 0 & 0 & 0 & 3.706 & -5.2612 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 - 0.99 \\ x_2 - 0.745 \\ x_3 - 0.5 \\ x_4 - 0.255 \\ x_5 - 0.01 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$\begin{bmatrix} -0.1758 \\ -0.2376 \\ -0.17315 \\ -0.13174 \\ 0.89226 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.79628x_2 - x_1 + 0.39677 \\ 2.706x_1 - 5.2589x_2 + 3.0778x_3 - 0.29996 \\ 2.706x_2 - 5.7838x_3 + 3.7828x_4 - 8.8684 \times 10^{-2} \\ 3.706x_3 - 7.4888x_4 + 4.7612x_5 + 9.032 \times 10^{-3} \\ 3.706x_4 - 5.2612x_5 - 0.89242 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

que finalmente se reduce al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 0.79628x_2 - x_1 + 0.22097 \\ 2.706x_1 - 5.2589x_2 + 3.0778x_3 - 0.53756 \\ 2.706x_2 - 5.7838x_3 + 3.7828x_4 - 0.26183 \\ 3.706x_3 - 7.4888x_4 + 4.7612x_5 - 0.12271 \\ 3.706x_4 - 5.2612x_5 - 0.00016 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Resolviéndolo se obtiene

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.2568 \\ 0.0450 \\ 0.0258 \\ -0.0025 \\ 0.0018 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Con este vector se reemplaza x_k en el algoritmo para calcular un nuevo x_{k+1} , hasta que finalmente se alcanza la convergencia cuando

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.6693 \\ 0.5743 \\ 0.4887 \\ 0.4129 \\ 0.3307 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

con sus composiciones correspondientes de la fase vapor

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0.7522 \\ 0.6693 \\ 0.5891 \\ 0.5133 \\ 0.4225 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

2.3.7. Solución del modelo en estado transitorio para un caso de la literatura

El modelo dinámico general desarrollado es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y para resolverse es necesario conocer los valores de todos los parámetros y variables de la columna y las condiciones iniciales del sistema. El caso de estudio es el mismo del estado estable, la columna de destilación binaria ideal de cinco etapas con la alimentación definida por completo (flujo, composición y condición de saturación),

también se tiene como datos la volatilidad, el flujo de retorno y de producto destilado. Con estos datos se deben evaluar todos los flujos de líquido y vapor internos de la columna, definir por completo la corriente de fondos y las composiciones de cada una de ellas. Para el modelo dinámico también se debe saber la cantidad de material almacenado en cada etapa y las condiciones iniciales del sistema.

El modelo simplificado para la columna de cinco etapas en forma explícita es:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{V_R}{m_1}(-x_1 + y_2) \quad (2.62)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{L_R}{m_2}x_1 - \frac{L_R}{m_2}x_2 - \frac{V_R}{m_2}y_2 + \frac{V_R}{m_2}y_3 \quad (2.63)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{L_R}{m_3}x_2 - \frac{L_S}{m_3}x_3 - \frac{V_R}{m_3}y_3 + \frac{V_S}{m_3}y_4 + \frac{F}{m_3}z_F \quad (2.64)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = \frac{L_S}{m_4}x_3 - \frac{L_S}{m_4}x_4 - \frac{V_S}{m_4}y_4 + \frac{V_S}{m_4}y_5 \quad (2.65)$$

$$\frac{dx_5}{dt} = \frac{L_S}{m_5}x_4 - \frac{B}{m_5}x_5 - \frac{V_S}{m_5}y_5 \quad (2.66)$$

$$y_i = \frac{\alpha x_i}{1 + (\alpha - 1)x_i} \quad (2.67)$$

Tomando los valores para el mismo ejemplo del caso en estado estable (Skogestad y Morari, 1988): Alimentación $F = 1$ mol/min, fracción de componente ligero en la alimentación $z_F = 0.5$, volatilidad $\alpha = 1.5$, reflujo inicial de destilado a la torre $L_D = 2.706$ mol/min, flujo producto destilado $D = 0.5$ mol/min y fracción de líquido saturado en la alimentación $q_F = 1.0$.

Por otro lado, de condiciones de diseño se sabe que se tiene una retención de 5.0 mol entre el condensador total y el tanque acumulador, 5.0 mol entre el fondo de la columna y el rehervidor y cada etapa tiene un plato con rebosadero con capacidad para 0.5 mol. Las condiciones iniciales son las fracciones molares de componente ligero en el líquido de cada etapa obtenidas para el estado estable (2.60).

Sustituyendo $F = 1$ mol/min, $z_F = 0.5$, $\alpha = 1.5$, $L_D = 2.706$ mol/min, $D = 0.5$ mol/min y $q_F = 1.0$; $m_1 = 5$ mol, $m_2 = m_3 = m_4 = 0.5$ mol y $m_5 = 5$ mol y

resolviendo los balances correspondientes, se tiene del balance global (2.6):

$$B = F - D = 1 - 0.5 = 0.5 \text{ mol/ min} \quad (2.68)$$

Para la zona de rectificación de (2.11)

$$L_R = L_D = 2.706 \text{ mol/ min} \quad (2.69)$$

Para la zona de agotamiento de (2.13)

$$L_S = L_R + Fq_F = 3.706 \text{ mol/ min} \quad (2.70)$$

El flujo de vapor en la sección de agotamiento (2.14)

$$V_R = V_{RB} = L_S - B = 3.206 \text{ mol/ min} \quad (2.71)$$

y para la sección de rectificación (2.12)

$$V_s = V_R + F(1 - q_F) = 3.206 \text{ mol/ min} \quad (2.72)$$

El sistema se transforma entonces en:

$$\frac{dx_1}{dt} = 0.6412(-x_1 + y_2) \quad (2.73)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 5.412x_1 - 5.412x_2 - 6.412y_2 + 6.412y_3 \quad (2.74)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 5.412x_2 - 7.412x_3 - 6.412y_3 + 6.412y_4 + 0.5 \quad (2.75)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = 7.412x_3 - 7.412x_4 - 6.412y_4 + 6.412y_5 \quad (2.76)$$

$$\frac{dx_5}{dt} = 0.7412x_4 - 0.1x_5 - 0.6412y_5 \quad (2.77)$$

$$y_2 = \frac{1.5x_2}{1 + 0.5x_2} \quad (2.78)$$

$$y_3 = \frac{1.5x_3}{1 + 0.5x_3} \quad (2.79)$$

$$y_4 = \frac{1.5x_4}{1 + 0.5x_4} \quad (2.80)$$

$$y_5 = \frac{1.5x_5}{1 + 0.5x_5} \quad (2.81)$$

En tanto no haya una perturbación, la solución es $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0)$ pero lo que se pretende es precisamente evaluar su comportamiento ante cambios diversos y el procedimiento habitual es resolver el sistema de EDO. Las perturbaciones se generan mediante cambios en escalón para cada variable de interés a tiempos predefinidos -manteniendo el resto de las entradas en sus valores del estado estable- para después pasar a cambios simultáneos de dos o más variables. Si este procedimiento se aplica para el análisis del sistema con fines de control, se requiere una enorme cantidad de simulaciones para determinar las zonas de inestabilidad, saturación, interacciones de las entradas y otras limitaciones del modelo, simplemente porque al tratarse de análogos de puntos de inflexión o discontinuidades en la solución numérica de un modelo multivariable, ubicarlas requiere resolver el modelo con pequeños incrementos en cada variable de control hasta alcanzar las posibles discontinuidades y una vez ubicados los límites para cada entrada, repetir el procedimiento con todos los posibles pares de variables de control para determinar discontinuidades por interacción entre ellas.

En la teoría clásica de control se ha usado la linealización de las ecuaciones diferenciales y solución mediante transformadas de Laplace, pero en este trabajo se aplica linealización mediante Jacobianos para mantener el modelo en el dominio del tiempo. El método se presenta en el capítulo 3.

Capítulo 3

Linealización del modelo en estado transitorio

3.1. Espacio de Estados

En aplicaciones de control, en esencia se pretende modificar el comportamiento de un sistema dinámico mediante la manipulación de algunas variables (entradas) de modo que las salidas del sistema (variables controladas) sigan ciertos valores de referencia, que pueden ser fijos o no.

Los métodos de control en ingeniería de procesos suelen partir del modelado de un proceso cuyo comportamiento depende del tiempo, de los valores que tomen las variables de entrada y las condiciones del sistema en un momento determinado, con cambios en su estado respecto al tiempo y esto casi siempre requiere el uso de ecuaciones diferenciales. Las características de estas definen en buena medida la forma en que debe resolverse el modelo matemático (Marlin, 2000). Como se ha visto, se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, p_1, \dots, p_r) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, p_1, \dots, p_r) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, p_1, \dots, p_r)
\end{aligned}$$

Los sistemas de ecuaciones diferenciales generados suelen incluir múltiples entradas, parámetros propios del equipo, variables controladas e interacciones de gran complejidad tales que para su análisis se hace necesario el uso de herramientas matemáticas que faciliten su visualización global y permitan identificar tendencias o características especiales en su comportamiento, es decir, hay que reducir la complejidad de la formulación.

Si se define como variable de sistema a cualquier variable que responde, o es en si misma, una de sus entradas o condiciones iniciales y variables de estado al subconjunto mínimo de variables de sistema tal que, conociendo sus valores y los de sus funciones de forzamiento en un momento dado, determinan el valor de todas las demás variables del sistema en cualquier punto en el tiempo. Una restricción adicional es que las variables de este subconjunto mínimo deben ir asociadas con características que varían con el tiempo y ser linealmente independientes. Bajo estas condiciones, el número de variables de estado es fijo y debe ser igual al orden del sistema (Nise, 2010). Aunque el número de variables de estado para un sistema sea fijo, el conjunto de variables de estado no es único.

La representación en Espacio de Estados (REE) surgió como un procedimiento matemático para poder expresar las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior que forman un modelo como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (Sontag, 1998), pero es igualmente aplicable a casos en que de entrada se tiene el modelo como un sistema de este tipo. En ella, las variables de estado se consideran como elementos de un vector (vector de estados), y lo mismo se hace con sus derivadas.

de primer orden respecto al tiempo, las variables de control (entradas) y controladas (salidas).

Muchos modelos en ingeniería de procesos, y en particular el modelo dinámico para la destilación, están especialmente bien condicionados para el uso de esta representación, pues las variables que describen el comportamiento dinámico de las variables conservativas (p. ej. los términos de acumulación en los balances de materia y energía) son la elección lógica para tomarlas como variables de estado (Hangos, 2004).

Al aplicar la REE a sistemas lineales donde los coeficientes de derivadas y variables no dependen del tiempo, estos se pueden agrupar en matrices, que junto con los vectores de estados, entradas y salidas permiten compactar las ecuaciones del modelo en una ecuación diferencial matricial de primer orden :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{t}) \quad (3.1)$$

complementada por la relación

$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{C}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{D}\mathbf{u}(\mathbf{t}) \quad (3.2)$$

donde $\mathbf{x}(\mathbf{t})$, $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ y $\mathbf{y}(\mathbf{t})$ son los vectores correspondientes a las variables de estado, entrada y salida respectivamente; $\dot{\mathbf{x}}$ es la derivada respecto al tiempo del vector de variables de estado; \mathbf{A} es la matriz del sistema -que contiene los coeficientes de las variables de estado- y \mathbf{B} es la correspondiente para las variables de entrada.

La ecuación (3.2) es necesaria porque muchas de las variables de estado no resultan de interés para el control del sistema y la matriz \mathbf{C} identifica los estados que realmente afectan a las salidas. La matriz \mathbf{D} cumple la misma función para las entradas. En sistemas físicos suele suceder que las entradas no tienen influencia directa sobre las variables controladas pues, de haberla, su efecto se manifiesta a través de las variables de estado, así, en la mayoría de los sistemas de proceso \mathbf{D} es nula.

La gran ventaja al usar la REE es que se mantiene la formulación compacta sin importar el número de variables de estado, entradas, etc.: La ecuación general es

la misma -lo que cambia son las matrices- ya sea que se trate de una columna de destilación de tres o de cien etapas, facilitando el análisis conceptual del sistema (Ogata, 2010; Seborg, Edgar, Mellicamp y Doyle, 2011).

La forma matricial de representar los modelos normalmente se aplica en sistemas lineales, aunque la representación en espacio de estados es usada en control no lineal.

3.2. Linealización del modelo dinámico con n etapas

Cuando se trata con modelos lineales, es relativamente fácil llegar a una solución analítica que proporcione directamente información general sobre el comportamiento del sistema en diferentes condiciones, aplicando directamente teoría de control lineal, que es ampliamente conocida y aplicada.

Si se considera que para describir casi cualquier fenómeno físico se debe usar ecuaciones diferenciales no lineales - ordinarias o parciales- a veces de orden superior, la ausencia de técnicas analíticas de solución de aplicación general, impide emplear técnicas equivalentes a las del control lineal. Aunque hoy día se tiene la opción de usar programas para obtener soluciones numéricas en puntos específicos, para entender adecuadamente un fenómeno es necesario correr muchas simulaciones, usando variación secuenciada de diversos parámetros y entradas, muchas veces sin obtener la comprensión deseada de la interacción de variables más que para estrechos rangos de observación.

Cuando el área de estudio es una región cercana a un punto estable y se buscan en ella soluciones del sistema, puede resultar preferible el uso de herramientas de linealización para hacerlo. Para el caso específico de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales (EDOL) con coeficientes invariantes en el tiempo, se puede hacer uso de herramientas matemáticas de aplicación general, como las transformadas integrales de Laplace, Fourier o Z; diagrama de Bode y diversos criterios de estabilidad.

Estas técnicas constituyen la columna vertebral del Control Clásico, pero en general solo son aplicables a sistemas lineales, por lo que es conveniente usar la aproximación lineal donde es válida.

Para un modelo dinámico del tipo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

o

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{aligned}$$

es posible considerar el sistema en términos de variables de desviación respecto a un estado de referencia (Bequette, 1998; Marlin, 2000; Seborg, Edgar, Mellicamp y Doyle, 2011) que para el control de una columna de destilación sería el estado estable. Una forma de expresarlo es:

$$\omega_\delta = \omega - \omega_s \tag{3.3}$$

donde ω es una variable de interés cualquiera, ω_s es su valor en el estado estable y ω_δ la desviación de la variable respecto al mismo.

La representación en Espacio de Estados, para los casos en que $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ y \mathbf{D} son invariantes con el tiempo y donde las variables de estado, entrada y salida se expresan como variables de desviación es:

$$\dot{\mathbf{x}}_\delta = \mathbf{A}\mathbf{x}_\delta(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_\delta(t) \tag{3.4}$$

$$\mathbf{y}_\delta = \mathbf{C}\mathbf{x}_\delta(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}_\delta(t) \tag{3.5}$$

que a su vez se puede linealizar haciendo

$$\dot{\mathbf{x}}_\delta(t) = \mathbf{A}_L\mathbf{x}_\delta(t) + \mathbf{B}_L\mathbf{u}_\delta(t) \tag{3.6}$$

$$\mathbf{A}_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdot & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdot & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Donde las matrices \mathbf{A} y \mathbf{A}_L siempre deben tener el mismo número de renglones y columnas, mientras que \mathbf{B} y \mathbf{B}_L pueden ser cuadradas, pero no es un requisito.

Debe hacerse notar que como $\frac{dx_s}{dt} = 0$, $\dot{\mathbf{x}}_s = \dot{\mathbf{x}}$ pero las ecuaciones de linealización se expresan en términos de $\dot{\mathbf{x}}_s$ con fines de uniformidad en la nomenclatura y de modo que la solución del sistema sea directamente en términos de variable de desviación.

3.2.1. Matriz de linealización de las variables de estado

Para el modelo de la columna de destilación generado, la variable de estado es la composición de la fase líquida en cada etapa y se tomaron como variables de entrada el flujo y composición de la alimentación y los reflujos hacia la columna en el condensador y rehervidor. Es importante hacer notar que en realidad el retorno de fondos no es una variable independiente, pero se puede considerar como tal con base en el siguiente tren de razonamiento: En varias aplicaciones con especificaciones o carga variable, suele suceder que al aumentar la demanda se trate de elevar la producción aumentando la carga térmica al rehervidor o aumentar el calentamiento directo al equipo que suministra el fluido de calefacción al rehervidor. Casi siempre es mala idea, porque cada columna se diseña para condiciones concretas de flujo interno y siempre habrá una condición de flujo máximo alcanzable en el interior y este a su vez define la carga térmica máxima que se puede entregar al rehervidor.

Si se excede esta carga máxima, el flujo de vapores ascendiendo arrastrará gotas de pesados hacia el destilado, y esos pesados son precisamente el material que se desea evitar en el destilado. Estas consideraciones en cierto modo facilitan la simulación, pues en vez de usar la carga térmica como variable de entrada, se usa la carga máxima para definir el flujo máximo de retorno que es capaz de evaporar el rehervidor y cualquier flujo por debajo de él es físicamente posible y permite obtener la carga al rehervidor mediante un balance de energía en ese equipo. Es por eso que la variable elegida es el flujo de retorno y los balances de energía se consideran como dependientes de los flujos dados.

Así los vectores que definen las variables de estado y entrada, respectivamente son:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} L_R \\ V_S \\ F \\ Z_F \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Para las matrices de linealización del modelo de la columna (3.7) y (3.8), cada renglón corresponde a una etapa. Para las variables de estado y entrada ya definidas

$$\mathbf{A}_L = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdot & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdot & A_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n,1} & \cdot & \cdot & A_{n,n} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

donde evidentemente

$$A_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (3.11)$$

El primer renglón de \mathbf{A}_L corresponde al condensador y el renglón n al rehervidor. Calculando las derivadas parciales correspondientes para cada sección:

Condensador

$$f_1 = \frac{V_R}{m_1}(y_2 - x_1) \quad (3.12)$$

$$A_{1,1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \quad (3.13)$$

$$A_{1,1} = -\frac{V_R}{m_1} \quad (3.14)$$

$$A_{1,2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \quad (3.15)$$

$$A_{1,2} = \frac{V_R}{m_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \quad (3.16)$$

recordando que

$$\zeta_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_i}$$

$$A_{1,2} = \zeta_2 \frac{V_R}{m_1} \quad (3.17)$$

dado que

$$f_1 = f(x_1, x_2)$$

$$A_{1,j} = 0 \quad | \quad j > 2 \quad (3.18)$$

Para la zona de rectificación (etapas 2 hasta h - 1)

$$f_i = \frac{L_R}{m_i}(x_{i-1} - x_i) + \frac{V_R}{m_i}(y_{i+1} - y_i), \quad 2 \leq i \leq h - 1 \quad (3.19)$$

$$A_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (3.20)$$

En la función (3.19) para cada etapa de esta zona, los índices de la variable de estado son los de la propia etapa y los de las dos etapas adyacentes, o sea $j = (i - 1, i, i + 1)$, en consecuencia son las derivadas respecto a x_{i-1}, x_i y x_{i+1} las que pueden generar coeficientes diferentes de cero, y el mismo caso se presenta a todo lo largo de la columna y

$$A_{i,j} = 0 \quad | \quad i - 2 \geq j \geq i + 2. \quad (3.21)$$

Para los coeficientes que pueden ser diferentes de cero:

$$A_{i,i-1} = \frac{\partial f_i}{\partial x_{i-1}} \quad (3.22)$$

$$A_{i,i-1} = \frac{L_R}{m_i} \quad (3.23)$$

$$A_{i,i} = -\frac{L_R + V_R \zeta_i}{m_i} \quad (3.24)$$

$$A_{i,i+1} = \frac{V_R \zeta_{i+1}}{m_i} \quad (3.25)$$

En la etapa de Alimentación (etapa h)

$$f_i = \frac{L_R}{m_i} x_{i-1} - \frac{L_S}{m_i} x_i + \frac{V_S}{m_i} y_{i+1} - \frac{V_R}{m_i} y_i + \frac{F z_F}{m_i}, \quad i = h \quad (3.26)$$

$$A_{i,i-1} = \frac{\partial f_i}{\partial x_{i-1}} \quad (3.27)$$

$$A_{i,i-1} = \frac{L_R}{m_i} \quad (3.28)$$

$$A_{i,i} = -\frac{L_S + V_R \zeta_i}{m_i} \quad (3.29)$$

$$A_{h,h+1} = \frac{V_S \zeta_{i+1}}{m_i} \quad (3.30)$$

Para la zona de Agotamiento (etapas $h + 1$ hasta $n - 1$)

$$f_i = \frac{L_S}{m_i} (x_{i-1} - x_i) + \frac{V_S}{m_i} (y_{i+1} - y_i); \quad h + 1 \leq i \leq n - 1 \quad (3.31)$$

$$A_{i,i-1} = \frac{L_S}{m_i} \quad (3.32)$$

$$A_{i,i} = -\frac{L_S + V_S \zeta_i}{m_i} \quad (3.33)$$

$$A_{i,i+1} = \frac{V_S \zeta_{i+1}}{m_i} \quad (3.34)$$

Rehervidor (etapa n)

$$f_i = \frac{L_S}{m_{RB}} x_{i-1} - \frac{B}{m_{RB}} x_i - \frac{V_S}{m_{RB}} y_i, \quad i = n \quad (3.35)$$

como

$$B = L_S - V_S \quad (3.36)$$

$$f_n = \frac{L_S}{m_{RB}}x_{n-1} - \frac{L_S - V_S}{m_{RB}}x_n - \frac{V_S}{m_{RB}}y_n \quad (3.37)$$

reordenando términos

$$f_n = \frac{L_S}{m_{RB}}(x_{n-1} - x_n) + \frac{V_S}{m_{RB}}(x_n - y_n) \quad (3.38)$$

de ahí que

$$A_{n,n-1} = \frac{L_S}{m_{RB}} \quad (3.39)$$

$$A_{n,n} = -\frac{L_S + V_S(\zeta_n - 1)}{m_{RB}} \quad (3.40)$$

o expresado con la corriente de fondos (B) explícita

$$A_{n,n} = -\frac{B + V_S\zeta_n}{m_{RB}} \quad (3.41)$$

3.2.2. Matriz de linealización de las variables de entrada

De forma análoga a la matriz de estados, se obtiene la linealización para las variables de entrada mediante la matriz

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \frac{\partial f_1}{\partial u_3} & \frac{\partial f_1}{\partial u_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \frac{\partial f_2}{\partial u_3} & \frac{\partial f_2}{\partial u_4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \frac{\partial f_n}{\partial u_3} & \frac{\partial f_n}{\partial u_4} \end{bmatrix} \text{ donde } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} L_R \\ V_S \\ F \\ z_F \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Como ya se mencionó, el primer renglón de \mathbf{B}_L corresponde al condensador y el n al rehervidor. Calculando las derivadas parciales correspondientes para cada sección:

Condensador

$$f_1 = \frac{V_R}{m_1}(y_2 - x_1) \quad (3.43)$$

$$B_{1,1} = \frac{\partial f_1}{\partial L_R} \quad (3.44)$$

$$B_{1,1} = 0 \quad (3.45)$$

$$B_{1,2} = \frac{\partial f_1}{\partial V_S} \quad (3.46)$$

$$B_{1,2} = \frac{(y_2 - x_1)}{m_1} \frac{\partial V_R}{\partial V_S} \quad (3.47)$$

de acuerdo con (2.12)

$$\begin{aligned} V_R &= V_S + F(1 - q_F) \\ \therefore \frac{\partial V_R}{\partial V_S} &= 1 \end{aligned} \quad (3.48)$$

y

$$B_{1,2} = \frac{(y_2 - x_1)}{m_1} \quad (3.49)$$

$$B_{1,3} = \frac{\partial f_1}{\partial F} \quad (3.50)$$

$$B_{1,3} = \frac{(y_2 - x_1)}{m_1} \frac{\partial V_R}{\partial F} \quad (3.51)$$

e igualmente por (2.12)

$$\frac{\partial V_R}{\partial F} = (1 - q_F) \quad (3.52)$$

$$B_{1,3} = \frac{(y_2 - x_1)}{m_1} (1 - q_F) \quad (3.53)$$

$$B_{1,4} = \frac{\partial f_1}{\partial Z_F}, \quad B_{1,4} = \frac{(y_2 - x_1)}{m_1} \frac{\partial V_R}{\partial z_F} \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial V_R}{\partial z_F} = 0 \quad (3.55)$$

$$B_{1,4} = 0 \quad (3.56)$$

Para la zona de rectificación (etapas 2 hasta h - 1)

$$f_i = \frac{L_R}{m_i} (x_{i-1} - x_i) + \frac{V_R}{m_i} (y_{i+1} - y_i), \quad 2 \leq i \leq h - 1 \quad (3.57)$$

$$B_{i,1} = \frac{\partial f_i}{\partial L_R} \quad (3.58)$$

$$B_{i,1} = \frac{(x_{i-1} - x_i)}{m_i} \quad (3.59)$$

$$B_{i,2} = \frac{(y_{i+1} - y_i)}{m_i} \quad (3.60)$$

$$B_{i,3} = \frac{(y_{i+1} - y_i)}{m_i} (1 - q_F) \quad (3.61)$$

$$B_{i,4} = 0 \quad (3.62)$$

En la etapa de Alimentación (etapa h)

$$f_i = \frac{L_R}{m_i} x_{i-1} - \frac{L_S}{m_i} x_i + \frac{V_S}{m_i} y_{i+1} - \frac{V_R}{m_i} y_i + \frac{F z_F}{m_i}, i = h \quad (3.63)$$

$$B_{i,1} = \frac{(x_{i-1} - x_i)}{m_i} \quad (3.64)$$

$$B_{i,2} = \frac{(y_{i+1} - y_i)}{m_i} \quad (3.65)$$

$$B_{i,3} = \frac{x_{i-1}}{m_i} \frac{\partial L_R}{\partial F} - \frac{x_i}{m_i} \frac{\partial L_S}{\partial F} + \frac{y_{i+1}}{m_i} \frac{\partial V_S}{\partial F} - \frac{y_i}{m_i} \frac{\partial V_R}{\partial F} + \frac{z_F}{m_i} \frac{\partial F}{\partial F} \quad (3.66)$$

de acuerdo con (2.12) y (2.13)

$$L_S = L_R + F q_F$$

$$V_R = V_S + F(1 - q_F)$$

de ahí que

$$\frac{\partial L_R}{\partial F} = 0 \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial L_S}{\partial F} = q_F \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial V_S}{\partial F} = 0 \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial V_R}{\partial F} = 1 - q_F \quad (3.70)$$

$$B_{i,3} = -\frac{x_i}{m_i} q_F - \frac{y_i}{m_i} (1 - q_F) + \frac{z_F}{m_i} \quad (3.71)$$

o

$$B_{i,3} = \frac{z_F - x_i q_F - y_i (1 - q_F)}{m_i} \quad (3.72)$$

$$B_{i,4} = \frac{F}{m_i} \quad (3.73)$$

Zona de agotamiento (etapas $h + 1$ hasta $n - 1$)

$$f_i = \frac{L_S}{m_i}(x_{i-1} - x_i) + \frac{V_S}{m_i}(y_{i+1} - y_i); h + 1 \leq i \leq n - 1 \quad (3.74)$$

$$B_{i,1} = \frac{(x_{i-1} - x_i)}{m_i} \quad (3.75)$$

$$B_{i,2} = \frac{(y_{i+1} - y_i)}{m_i} \quad (3.76)$$

$$B_{i,3} = \frac{(x_{i-1} - x_i)}{m_i} q_F \quad (3.77)$$

$$B_{i,4} = 0 \quad (3.78)$$

Rehervidor (etapa n)

$$f_i = \frac{L_S}{m_{RB}}x_{i-1} - \frac{B}{m_{RB}}x_i - \frac{V_S}{m_{RB}}y_i, i = n \quad (3.79)$$

como

$$B = L_S - V_S \quad (3.80)$$

$$f_n = \frac{L_S}{m_{RB}}(x_{n-1} - x_n) + \frac{V_S}{m_{RB}}(x_n - y_n) \quad (3.81)$$

$$B_{n,1} = \frac{x_{n-1} - x_n}{m_{RB}} \quad (3.82)$$

$$B_{n,2} = \frac{x_n - y_n}{m_{RB}} \quad (3.83)$$

$$B_{n,3} = \frac{(x_{n-1} - x_n)}{m_{RB}} q_F \quad (3.84)$$

$$B_{n,4} = 0 \quad (3.85)$$

3.2.3. Linealización de la ecuación para las variables de salida

Para el control de la columna, las variables de interés son las composiciones en el destilado y corriente de fondos, que para el caso simplificado viene a ser la fracción mol del componente ligero en ellas: x_D y x_B (o lo que es lo mismo x_1 y x_n). La ecuación general para las salidas es:

$$\mathbf{y}_\delta = \mathbf{C}_L \mathbf{x}_\delta(\mathbf{t}) + \mathbf{D}_L \mathbf{u}_\delta(\mathbf{t}) \quad (3.86)$$

$$\mathbf{y}_\delta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix}_\delta \quad (3.87)$$

donde

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix}_\delta = \begin{bmatrix} x_1 - x_{1,s} \\ x_n - x_{n,s} \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

$$g_1(x) = x_1 - x_{1,s} \quad (3.89)$$

$$g_2(x) = x_n - x_{n,s} \quad (3.90)$$

en consecuencia \mathbf{C}_L y \mathbf{D}_L se definen por

$$\mathbf{C}_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

$$\mathbf{D}_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial u_n} \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

que para este caso viene a ser:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix}_\delta = \mathbf{C}_L \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}_\delta + \mathbf{D}_L \begin{bmatrix} L_R \\ V_S \\ F \\ z_F \end{bmatrix}_\delta \quad (3.93)$$

A pesar de que las variables de salida son funciones de \mathbf{u} , esta relación se manifiesta implícitamente en (3.4), por lo que debe omitirse el término de entradas en (3.93) y

al anularse la matriz \mathbf{D}_L la ecuación se convierte en

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix}_\delta = \mathbf{C}_L \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}_\delta \quad (3.94)$$

donde

$$\mathbf{C}_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

que de acuerdo a (3.89) y (3.90) implica que:

$$C_{1,1} = 1, C_{1,j} = 0 \mid j \neq 1 \quad (3.96)$$

$$C_{2,n} = 1, C_{2,j} = 0 \mid j \neq n \quad (3.97)$$

3.2.4. Linealización para el caso de la literatura

En esta sección se presenta la aplicación de la técnica de linealización para la columna de cinco etapas que se ha estado estudiando. Como el modelo está formado por las cinco EDO que describen cada etapa, cinco variables de estado (la composición de la fase líquida en cada etapa) y cuatro entradas, las matrices de linealización tendrán la forma:

$$\mathbf{A}_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} & \frac{\partial f_1}{\partial x_5} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2}{\partial x_5} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} & \frac{\partial f_3}{\partial x_5} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} & \frac{\partial f_4}{\partial x_5} \\ \frac{\partial f_5}{\partial x_1} & \frac{\partial f_5}{\partial x_2} & \frac{\partial f_5}{\partial x_3} & \frac{\partial f_5}{\partial x_4} & \frac{\partial f_5}{\partial x_5} \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \frac{\partial f_1}{\partial u_3} & \frac{\partial f_1}{\partial u_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \frac{\partial f_2}{\partial u_3} & \frac{\partial f_2}{\partial u_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2} & \frac{\partial f_3}{\partial u_3} & \frac{\partial f_3}{\partial u_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u_1} & \frac{\partial f_4}{\partial u_2} & \frac{\partial f_4}{\partial u_3} & \frac{\partial f_4}{\partial u_4} \\ \frac{\partial f_5}{\partial u_1} & \frac{\partial f_5}{\partial u_2} & \frac{\partial f_5}{\partial u_3} & \frac{\partial f_5}{\partial u_4} \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

donde las entradas y salidas corresponden a los vectores

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} L_R \\ V_S \\ F \\ z_F \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

para obtener los valores numéricos de las matrices de linealización es necesario obtener las derivadas parciales indicadas en (3.98) y (3.99) para posteriormente sustituir en ellas la información ya conocida o calculada y así determinar cada elemento de dichas matrices.

Cálculo de los coeficientes de la matriz de estados

Condensador: El cálculo de los coeficientes del condensador es el que corresponde al primer renglón de la matriz, por ser la primera etapa:

$$f_1 = \frac{V_R}{m_1}(y_2 - x_1) \quad (3.101)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -\frac{V_R}{m_1} \quad (3.102)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \zeta_2 \frac{V_R}{m_1} \quad (3.103)$$

recordando que

$$\zeta_i = \frac{\alpha}{[1 + (\alpha - 1)x_i]^2}$$

$$\zeta_2 = \frac{\alpha}{[1 + (\alpha - 1)x_2]^2} \quad (3.104)$$

Para el resto de las derivadas de la etapa:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial f_1}{\partial x_4} = 0, \frac{\partial f_1}{\partial x_5} = 0 \quad (3.105)$$

Para la zona de rectificación (etapa 2)

$$f_2 = \frac{L_R}{m_2}(x_1 - x_2) + \frac{V_R}{m_2}(y_3 - y_2) \quad (3.106)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{L_R}{m_2} \quad (3.107)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{L_R + V_R\zeta_2}{m_2} \quad (3.108)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{V_R}{m_2}\zeta_3 \quad (3.109)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_4} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial x_5} = 0 \quad (3.110)$$

En la etapa de Alimentación (etapa 3)

$$f_3 = \frac{L_R}{m_3}x_2 - \frac{L_S}{m_3}x_3 + \frac{V_S}{m_3}y_4 - \frac{V_R}{m_3}y_3 + \frac{Fz_F}{m_3} \quad (3.111)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0 \quad (3.112)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{L_R}{m_3} \quad (3.113)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = -\frac{L_S + V_R\zeta_3}{m_3} \quad (3.114)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_4} = \frac{V_S}{m_3}\zeta_4 \quad (3.115)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_5} = 0 \quad (3.116)$$

Para la zona de Agotamiento (etapa 4)

$$f_4 = \frac{L_S}{m_4}(x_3 - x_4) + \frac{V_S}{m_4}(y_5 - y_4) \quad (3.117)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = 0 \quad (3.118)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_2} = 0 \quad (3.119)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_3} = \frac{L_S}{m_4} \quad (3.120)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_4} = -\frac{L_S + V_S \zeta_4}{m_4} \quad (3.121)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_5} = \frac{V_S}{m_4} \zeta_5 \quad (3.122)$$

Rehervidor (etapa 5)

$$f_5 = \frac{L_S}{m_5} x_4 - \frac{B}{m_5} x_5 - \frac{V_S}{m_5} y_5 \quad (3.123)$$

o bien

$$f_5 = \frac{L_S}{m_5} (x_4 - x_5) + \frac{V_S}{m_5} (x_5 - y_5) \quad (3.124)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_1} = 0 \quad (3.125)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_2} = 0 \quad (3.126)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_3} = 0 \quad (3.127)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_4} = \frac{L_S}{m_5} \quad (3.128)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_5} = -\frac{L_S + V_S(1 - \zeta_5)}{m_5} \quad (3.129)$$

o

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_5} = -\frac{B + V_S \zeta_5}{m_5} \quad (3.130)$$

Por lo tanto, la expresión de la matriz de linealización (Jacobiano de linealización) para las variables de estado es

$$\mathbf{A}_L = \begin{bmatrix} -\frac{V_R}{m_1} & \zeta_2 \frac{V_R}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_R}{m_2} & -\frac{L_R + V_R \zeta_2}{m_2} & \frac{V_R}{m_2} \zeta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_R}{m_3} & -\frac{L_S + V_R \zeta_3}{m_3} & \frac{V_S}{m_3} \zeta_4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_S}{m_4} & -\frac{L_S + V_S \zeta_4}{m_4} & \frac{V_S}{m_4} \zeta_5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_S}{m_5} & -\frac{L_S + V_S(1 - \zeta_5)}{m_5} \end{bmatrix} \quad (3.131)$$

Cálculo de los coeficientes de la matriz de entradas

De forma análoga a la matriz de estados, se procede a desarrollar las expresiones para las derivadas parciales indicadas en la matriz de linealización de entradas: (3.99)

Condensador

$$f_1 = \frac{V_R}{m_1}(y_2 - x_1)$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial L_R} = 0 \quad (3.132)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial V_S} = \frac{(y_2 - x_1)}{m_1} \quad (3.133)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial F} = \frac{(y_2 - x_1)}{m_1}(1 - q_F) \quad (3.134)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_F} = 0 \quad (3.135)$$

Para la zona de rectificación (etapa 2)

$$f_2 = \frac{L_R}{m_2}(x_1 - x_2) + \frac{V_R}{m_2}(y_3 - y_2)$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial L_R} = \frac{(x_1 - x_2)}{m_2} \quad (3.136)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial V_S} = \frac{(y_3 - y_2)}{m_2} \quad (3.137)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial F} = \frac{(y_3 - y_2)}{m_2}(1 - q_F) \quad (3.138)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z_F} = 0 \quad (3.139)$$

En la etapa de Alimentación (etapa 3)

$$f_3 = \frac{L_R}{m_3}x_2 - \frac{L_S}{m_3}x_3 + \frac{V_S}{m_3}y_4 - \frac{V_R}{m_3}y_3 + \frac{Fz_F}{m_3}$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial L_R} = \frac{(x_2 - x_3)}{m_3} \quad (3.140)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial V_S} = \frac{(y_4 - y_3)}{m_3} \quad (3.141)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial F} = \frac{z_F - x_3 q_F - y_3(1 - q_F)}{m_3} \quad (3.142)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z_F} = \frac{F}{m_3} \quad (3.143)$$

Zona de agotamiento (etapa 4)

$$f_4 = \frac{L_S}{m_4}(x_3 - x_4) + \frac{V_S}{m_4}(y_5 - y_4) \quad (3.144)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial L_R} = \frac{(x_3 - x_4)}{m_4} \quad (3.145)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial V_S} = \frac{(y_5 - y_4)}{m_4} \quad (3.146)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial F} = \frac{(x_3 - x_4)}{m_4} q_F \quad (3.147)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial z_F} = 0 \quad (3.148)$$

Rehervidor (etapa 5)

$$f_5 = \frac{L_S}{m_5}(x_4 - x_5) + \frac{V_S}{m_5}(x_5 - y_5) \quad (3.149)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial L_R} = \frac{x_4 - x_5}{m_5} \quad (3.150)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial V_S} = \frac{x_5 - y_5}{m_5} \quad (3.151)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial F} = \frac{x_4 - x_5}{m_5} q_F \quad (3.152)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial z_F} = 0 \quad (3.153)$$

Así, la expresión de la matriz de linealización para las entradas es:

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(y_2 - x_1)}{m_1} & \frac{(y_2 - x_1)}{m_1}(1 - q_F) & 0 \\ \frac{(x_1 - x_2)}{m_2} & \frac{(y_3 - y_2)}{m_2} & \frac{(y_3 - y_2)}{m_2}(1 - q_F) & 0 \\ \frac{(x_2 - x_3)}{m_3} & \frac{(y_4 - y_3)}{m_3} & \frac{z_F - x_3 q_F - y_3(1 - q_F)}{m_3} & \frac{F}{m_3} \\ \frac{(x_3 - x_4)}{m_4} & \frac{(y_5 - y_4)}{m_4} & \frac{(x_3 - x_4)}{m_4} q_F & 0 \\ \frac{(x_4 - x_5)}{m_5} & \frac{(x_5 - y_5)}{m_5} & \frac{(x_4 - x_5)}{m_5} q_F & 0 \end{bmatrix} \quad (3.154)$$

En la ecuación general para las salidas

$$\mathbf{y}_\delta = \mathbf{C}_L \mathbf{x}_\delta(t) \quad (3.155)$$

donde

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix}_\delta = \begin{bmatrix} x_1 - x_{1,s} \\ x_5 - x_{5,s} \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

$$g_1(x) = x_1 - x_{1,s} \quad (3.157)$$

$$g_2(x) = x_5 - x_{5,s} \quad (3.158)$$

$$\mathbf{C}_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \frac{\partial g_1}{\partial x_4} & \frac{\partial g_1}{\partial x_5} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} & \frac{\partial g_2}{\partial x_4} & \frac{\partial g_2}{\partial x_5} \end{bmatrix} \quad (3.159)$$

$$\mathbf{C}_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.160)$$

$$\mathbf{y}_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_\delta \quad (3.161)$$

$$\mathbf{y}_\delta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix}_\delta \quad (3.162)$$

N.B. En las columnas en operación suele ser muy problemática, e incluso imposible, la medición de las composiciones en tiempo real. La práctica normal es estimarlas en forma indirecta a través de otras variables, como la temperatura de la etapa.

3.2.5. Expresión para la solución analítica

En principio, una vez linealizado el modelo es posible obtener una solución analítica de la forma.

$$\mathbf{x}_\delta(\mathbf{t}) = e^{\mathbf{A}_L(\mathbf{t}-\tau)}\mathbf{x}_\delta(\tau) + \int_{\tau}^{\mathbf{t}} e^{\mathbf{A}_L(\mathbf{t}-\lambda)}\mathbf{B}_L\mathbf{u}_\delta(\lambda)d\lambda \quad (3.163)$$

$$\mathbf{y}_\delta(\mathbf{t}) = \mathbf{C}_L e^{\mathbf{A}_L(\mathbf{t}-\tau)}\mathbf{x}_\delta(\tau) + \int_{\tau}^{\mathbf{t}} \mathbf{C}_L e^{\mathbf{A}_L(\mathbf{t}-\lambda)}\mathbf{B}_L\mathbf{u}_\delta(\lambda)d\lambda \quad (3.164)$$

para un sistema donde se conocen las condiciones en el tiempo inicial τ y λ es una variable de interacción que representa al tiempo.

La expresión equivalente en el dominio de Laplace con condiciones iniciales en $\tau = \mathbf{0}$ es:

$$\mathbf{X}(s) = [(s * \mathbf{I} - \mathbf{A}_L)^{-1} \mathbf{B}_L] \mathbf{U}(s) \quad (3.165)$$

$$\mathbf{Y}(s) = [(s * \mathbf{I} - \mathbf{A}_L)^{-1} \mathbf{B}_L] \mathbf{U}(s) \quad (3.166)$$

Sin embargo, casi nunca se usa la solución analítica por la complejidad de las expresiones y se prefiere emplear técnicas numéricas de solución.

3.2.6. Valores numéricos de las matrices de linealización

Sustituyendo \mathbf{A}_L , \mathbf{B}_L y \mathbf{C}_L en (3.6) y (3.94) se tienen las expresiones linealizadas de la ecuación de estados y de la relación de entradas a salidas.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{V_R}{m_1} & \frac{V_R}{m_1}\zeta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_R}{m_2} & -\frac{L_R+V_R\zeta_2}{m_2} & \frac{V_R}{m_2}\zeta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_R}{m_3} & -\frac{L_S+V_R\zeta_3}{m_3} & \frac{V_R}{m_3}\zeta_4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_S}{m_4} & -\frac{L_S+V_S\zeta_4}{m_4} & \frac{V_S}{m_4}\zeta_5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_S}{m_5} & -\frac{L_S+V_S(1-\zeta_5)}{m_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_\delta \quad (3.167)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{(y_2-x_1)}{m_1} & \frac{(y_2-x_1)}{m_1}(1-q_F) & 0 \\ \frac{(x_1-x_2)}{m_2} & \frac{(y_3-y_2)}{m_2} & \frac{(y_3-y_2)}{m_2}(1-q_F) & 0 \\ \frac{(x_2-x_3)}{m_3} & \frac{(y_4-y_3)}{m_3} & \frac{z_F-x_3q_F-y_3(1-q_F)}{m_3} & \frac{F}{m_3} \\ \frac{(x_3-x_4)}{m_4} & \frac{(y_5-y_4)}{m_4} & \frac{(x_3-x_4)}{m_4}q_F & 0 \\ \frac{(x_4-x_5)}{m_5} & \frac{(x_5-y_5)}{m_5} & \frac{(x_4-x_5)}{m_5}q_F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_R \\ V_S \\ F \\ z_F \end{bmatrix}_\delta$$

$$\mathbf{y}_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_\delta \quad (3.168)$$

Para obtener su valor numérico es necesario calcular todos los coeficientes de las matrices en el estado estable, sustituyendo en ellas los valores correspondientes de cada variable conocida: $F = 1$ mol/min, $z_F = 0.5$, $\alpha = 1.5$, $L_D = 2.706$ mol/min, $D = 0.5$ mol/min y $q_F = 1.0$.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.6693 \\ 0.5743 \\ 0.4887 \\ 0.4129 \\ 0.3307 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0.7522 \\ 0.6693 \\ 0.5891 \\ 0.5133 \\ 0.4257 \end{bmatrix} \quad (3.169)$$

Como

$$\begin{aligned} \zeta_2 &= \frac{1.5}{[1 + 0.5x_2]^2} \\ \zeta_3 &= \frac{1.5}{[1 + 0.5x_3]^2} \\ \zeta_4 &= \frac{1.5}{[1 + 0.5x_4]^2} \\ \zeta_5 &= \frac{1.5}{[1 + 0.5x_5]^2} \end{aligned} \quad (3.170)$$

Sustituyendo en ζ_2 :

$$\begin{aligned} \zeta_2 &= \frac{1.5}{[1 + 0.5(0.5743)]^2} \\ \zeta_2 &= 0.9054 \end{aligned} \quad (3.171)$$

De esa manera se obtiene el vector

$$\zeta = \begin{bmatrix} 0.8421 \\ 0.9054 \\ 0.9687 \\ 1.0306 \\ 1.1045 \end{bmatrix} \quad (3.172)$$

Para el modelo dinámico se aplica: $m_1 = 5$ mol , $m_2 = m_3 = m_4 = 0.5$ mol y $m_5 = 5$ mol. Del balance global en el mismo caso -(2.69) y siguientes- se tiene que: $L_R = 2.706$, $L_S = 2.706$, $V_S = 3.206$, $V_R = 3.206$. Cuando estos valores se sustituyen

en la ecuación de linealización, se transforma en:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -0.6412 & 0.5805 & 0 & 0 & 0 \\ 5.412 & -11.2174 & 6.2113 & 0 & 0 \\ 0 & 5.412 & -11.6233 & 6.6082 & 0 \\ 0 & 0 & 5.412 & -12.0202 & 7.0821 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5412 & -0.4742 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_\delta \quad (3.173)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.19 & -0.1604 & 0 & 0 \\ 0.1712 & -0.1516 & 0.0226 & 2 \\ 0.1516 & -0.1752 & 0.1516 & 0 \\ 0.01644 & -0.019 & 0.01644 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_R \\ V_S \\ F \\ z_F \end{bmatrix}_\delta$$

que es la expresión linealizada para el caso de estudio. La ecuación general para las salidas queda:

$$\mathbf{y}_\delta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix}_\delta \quad (3.174)$$

Los valores de los coeficientes del primer renglón de \mathbf{B}_L muestran que en tanto se opere la columna con un condensador total, la composición del vapor que llega al él será la misma que la del líquido que sale y ninguna de las variables de entrada, sean de control o perturbaciones, afectan la respuesta de la primera etapa.

Capítulo 4

Consideraciones de control para la columna de destilación en Espacio de Estados

Al analizar un sistema dinámico se desea entender mejor su comportamiento en condiciones muy variadas, no solo ejecutar una simulación o resolver un sistema de ecuaciones para ciertos parámetros y valores de variables de entrada. Frecuentemente se desea saber la respuesta de una variable de proceso al cambiar un parámetro del sistema, por ejemplo: ¿como cambia la composición de fondos al modificar el flujo de alimentación?

Dado que el modelo matemático es solo una aproximación del proceso real no se puede hablar de un modelo único para describirlo en forma de espacio de estados, dadas las consideraciones y simplificaciones aplicadas; se trata de un caso particular entre una infinidad de variantes posibles.

Se puede comprender la interacción entre parámetros del sistema, variables de entrada y salidas corriendo muchas simulaciones en las que se hace cambiar el valor del

parámetro de interés o bien definiendo mediante análisis del proceso qué parámetros y variables pueden cambiar y usar técnicas adecuadas para determinar si puede presentarse un cambio cualitativo en el comportamiento, como el número de soluciones en la región de estudio o la estabilidad en cierta región específica (Bequette, 1998).

Cuando se introducen modificaciones en un sistema mediante la manipulación de las entradas, se desea obtener cierto comportamiento en las salidas. Suponiendo que el equipo estuviera operando en estado estable, pero el producto obtenido no estuviera cumpliendo con las especificaciones deseadas, se deben introducir cambios en las entradas para cumplir con ellas, pero surgen varias preguntas ¿Qué cambio en las entradas acercan el sistema al objetivo? De lograrse ¿los cambios se mantendrán en el punto deseado o el sistema se vuelve inestable?, ¿Se puede controlar con las variables disponibles?, ¿como se sabe que el cambio fue el adecuado?.

Para contestar esas incógnitas es necesario realizar un análisis de control del sistema y como la espina dorsal de la teoría clásica se basa en técnicas desarrolladas para sistemas lineales, se pueden aplicar al sistema linealizado desarrollado con anterioridad.

En control clásico la respuesta a estas preguntas se da mediante un estudio del sistema y su comportamiento en el dominio de Laplace, enfocándose sobre todo a lazos independientes con retroalimentación. Los arreglos más populares para el control tradicional de columnas de destilación se basan en lazos PID (con acción proporcional, integral derivativa) en pares variable de control/variable controlada. En cambio, para corregir desviaciones en las variables de salida, el esquema propuesto es este trabajo se basa en la retroalimentación total de estado dentro de un lazo cerrado para la totalidad del sistema. Otra diferencia básica es que la mayor parte del estudio se hace en el dominio del tiempo y no en el dominio de Laplace.

4.1. Estabilidad

En el contexto de control, un sistema estable es aquel que, al presentarse una perturbación, se desplaza hacia a una nueva posición de equilibrio en la que las variables de estado no sufren cambios espontáneamente, aunque los nuevos valores alcanzados no sean los buscados.

Para saber si un proceso es estable o no se comienza por hacer un análisis del lazo abierto, y después se hace lo propio con el lazo cerrado correspondiente. Para la representación en espacio de estados con variables de desviación

$$\dot{\mathbf{x}}_{\delta} = \mathbf{A}_L \mathbf{x}_{\delta}(t) + \mathbf{B}_L \mathbf{u}_{\delta}(t) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y}_{\delta} = \mathbf{C}_L \mathbf{x}_{\delta}(t) + \mathbf{D}_L \mathbf{u}_{\delta}(t) \quad (4.2)$$

Si se considera que las entradas se mantienen en sus valores correspondientes al estado estable y que las variables de estado han sido perturbadas ligeramente al inicio de la observación, $\mathbf{u}_{\delta}(t) = \mathbf{0}$ anulando el segundo término de la ecuación de estados, que toma la forma

$$\dot{\mathbf{x}}_{\delta} = \mathbf{A}_L \mathbf{x}_{\delta}(t) \quad (4.3)$$

que se conoce como modelo linealizado sin entradas, al no estar sujeto a perturbaciones externas, refleja el comportamiento dinámico de las variables de estado y la estabilidad inherente del proceso. La solución de la ecuación diferencial escalar equivalente

$$\dot{x} = ax \quad (4.4)$$

es:

$$\int \frac{dx}{x} = a \int dt \quad (4.5)$$

$$x(t) = ke^{at} \quad (4.6)$$

Para

$$t = 0, \quad x(0) = k \quad (4.7)$$

y en consecuencia

$$x(t) = x(0)e^{at} \quad (4.8)$$

Si $a < 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(0)e^{at} = x(0) \quad (4.9)$$

con el paso del tiempo la función se aproxima asintóticamente a $x(0)$, en cambio cuando $a > 0$ el límite tiende al infinito

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(0)e^{at} = x(0) \quad (4.10)$$

y para el caso (4.9) y (4.10) sirven como definiciones matemáticas informales de estabilidad e inestabilidad de una función escalar, respectivamente

De forma análoga, para

$$\dot{\mathbf{x}}_{\delta} = \mathbf{A}_L \mathbf{x}_{\delta}(\mathbf{t}) \quad (4.11)$$

$$\mathbf{x}_{\delta}(\mathbf{t}) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_L \mathbf{t}} \mathbf{x}_{\delta}(0) \quad (4.12)$$

Para que el comportamiento de (4.12) sea estable se requiere una condición similar, pero en vez de ser un escalar negativo, los todos valores principales del Jacobiano de linealización \mathbf{A}_L deben ser negativos.

Para el análisis de estabilidad de las columnas de destilación (y procesos similares de etapas en serie) conviene revisar algunas similitudes de sus modelos termodinámicos con los tensores empleados en el estudio de la Mecánica de Medio Continuo (Mase y Mase, 1999).

Para tensores de segundo orden en el espacio físico ordinario una base está definida por tres vectores y un vector en este espacio queda completamente especificado por sus tres componentes en las direcciones de esos vectores.

Bajo las reglas de notación indicial, cuando un índice no se repite en un término se entiende que es mismo tomará los valores $1, 2, \dots, n$ donde n es un entero especificado que determina el rango del índice. El grado tensorial de un término dado es igual al número de índices libres en el término (índices no repetidos).

Como los vectores en el espacio físico quedan definidos por tres componentes, un vector que se representa como a_i en espacio ordinario automáticamente se entiende que tiene un rango de tres y sus componentes se denotan a_1 , a_2 , y a_3 .

Para un rango de tres y dos índices, el símbolo $A_{i,j}$ representa los nueve componentes de la diádica A (tensor de segundo orden). Este tensor también se representa explícitamente como una matriz cuadrada

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

En general para un tensor de orden n y rango N se tendrán N^n componentes.

Siguiendo el mismo principio, el Jacobiano de linealización (\mathbf{A}_L) de la matriz de estados (\mathbf{A}), que es una matriz $n \times n$ podría considerarse como la expresión matricial de un tensor de segundo orden con rango n , y por tanto con n^2 componentes (n corresponde al número de etapas en la columna). Para es caso de la literatura sería un tensor de segundo orden y rango cinco, con 25 componentes.

En el estudio de Mecánica del Medio Continuo para un tensor simétrico $T_{i,j}$ definido por un punto en el espacio, para cada dirección hay un vector -especificado por su normal unitaria a n_i -definido por $v_i = T_{i,j}n_j$ en ese contexto:

$$(T - \lambda I) \cdot n = \vec{0} \quad (4.14)$$

$$(T_{i,j} - \lambda \delta_{i,j})n_j = 0 \quad (4.15)$$

Esto es solo como aproximación conceptual, ya que la matriz de estados no es simétrica, como puede verse en los valores numéricos de los coeficientes del caso de estudio. El caso general para la determinación de eigenvalores y eigenvectores (valores y vectores principales) de una matriz dada \mathbf{A} básicamente consiste en encontrar un vector desconocido \mathbf{x} diferente de cero y un escalar también desconocido λ que cumplen con la condición (Greenberg, 1998):

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (4.16)$$

Como en la nomenclatura usada \mathbf{x} representa a las variables de estado, es preferible cambiarla por otro símbolo no usado previamente, que en lo sucesivo será el vector $\boldsymbol{\xi}$ (ksi), con lo que la ecuación anterior queda

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi} \quad (4.17)$$

Introduciendo una matriz unitaria para mantener la consistencia en los siguientes pasos

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda I\boldsymbol{\xi} \quad (4.18)$$

$$(\mathbf{A} - \lambda I)\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \quad (4.19)$$

que viene a ser un sistema homogéneo de n ecuaciones y n incógnitas donde se debe encontrar los valores λ_i que dan la solución no trivial $(\mathbf{A} - \lambda I) = \mathbf{0}$. El sistema cumple con la solución no trivial si y solo si:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0 \quad (4.20)$$

Al polinomio que se obtiene de $\det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0$ se le conoce como ecuación característica del sistema.

Una vez que se determinan los eigenvalores λ_i se utilizan para obtener los vectores $\boldsymbol{\xi}_i$ correspondientes. En condiciones normales una matriz $n \times n$ contiene n eigenvalores y sus correspondientes n eigenvectores (sin descartar la posible existencia de multiplicidad de raíces en la ecuación característica).

Regresando a la consideración de estabilidad, ya se ha comentado que para que la respuesta de la función

$$\mathbf{x}_\delta(\mathbf{t}) = e^{\mathbf{A}_L \mathbf{t}} \mathbf{x}_\delta(0) \quad (4.21)$$

sea estable se requiere que la parte real de todos sus eigenvalores sea negativa, pues si es positiva en al menos uno de ellos, el sistema es inestable. Cabe mencionar que cuando las raíces son complejos conjugados el comportamiento es oscilatorio y cuando solo tienen parte real es monotónico.

Una pregunta que surge de la analogía entre la solución de las ecuaciones $\dot{x} = ax$ y $\dot{\mathbf{x}}_\delta = \mathbf{A}_L \mathbf{x}_\delta(t)$ es: ¿Por que deben ser negativos los eigenvalores de \mathbf{A}_L para que el sistema sea estable y no la matriz en su totalidad?. La explicación es que si los autovalores y vectores principales se ordenan es dos matrices de modo que \mathbf{V} sea la matriz de eigenvectores ξ_i de \mathbf{A} y $\mathbf{\Lambda}$ su correspondiente matriz diagonal con los eigenvalores λ_i

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,n} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \cdots & v_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{n,1} & v_{n,2} & \cdots & v_{n,n} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

y como

$$\xi_i = \begin{bmatrix} v_{1,i} \\ \cdots \\ v_{n,i} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Se puede considerar que

$$\mathbf{V} = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_n] \quad (4.25)$$

la primera columna de \mathbf{V} es el eigenvector ξ_1 asociado con el primer valor principal λ_1 y por definición se cumple que

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda} \quad (4.26)$$

Si se multiplica por \mathbf{V}^{-1} y por el tiempo en ambos lados de la ecuación se obtiene

$$\mathbf{A}t = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}t\mathbf{V}^{-1} \quad (4.27)$$

con la manipulación adicional

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \mathbf{V}\mathbf{e}^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{V}^{-1} \quad (4.28)$$

donde

$$\mathbf{e}^{\mathbf{\Lambda}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

La expresión para la solución de la ecuación de estados sin entradas queda

$$\mathbf{x}_\delta(\mathbf{t}) = \mathbf{V}\mathbf{e}^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_\delta(0) \quad (4.30)$$

y con ello se demuestra que el requisito de estabilidad se basa en los eigenvalores de la matriz, y no en el signo de ella.

Las primeras aplicaciones de estos conceptos para el control de procesos se dieron en el entorno del Control Clásico, donde privan las expresiones de modelos en el dominio de Laplace y el análisis a través de sus funciones de transferencia. Parte de la nomenclatura y expresiones nacidas en ese ambiente persisten hasta la fecha en las técnicas de control moderno, que típicamente usan análisis en el dominio del tiempo.

Para el análisis de estabilidad, en vez de expresiones como $(\mathbf{A}-\lambda I)\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ y $\det(\mathbf{A}-\lambda I) = 0$ se prefiere usar $((s * \mathbf{I}) - \mathbf{A})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ y $\det((s * \mathbf{I}) - \mathbf{A}) = 0$ independientemente del origen de la expresión y los eigenvalores de la matriz de estado son los polos del sistema.

4.1.1. Estabilidad para el caso de estudio

Para el caso de la columna de destilación de cinco etapas que se ha venido estudiando, el modelo linealizado obtenido es

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{V_R}{m_1} & \frac{V_R}{m_1}\zeta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_R}{m_2} & -\frac{L_R+V_R\zeta_2}{m_2} & \frac{V_R}{m_2}\zeta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_R}{m_3} & -\frac{L_S+V_R\zeta_3}{m_3} & \frac{V_R}{m_3}\zeta_4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_S}{m_4} & -\frac{L_S+V_S\zeta_4}{m_4} & \frac{V_S}{m_4}\zeta_5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_S}{m_5} & -\frac{L_S+V_S(1-\zeta_5)}{m_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_\delta \quad (4.31)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{(y_2-x_1)}{m_1} & \frac{(y_2-x_1)}{m_1}(1-q_F) & 0 \\ \frac{(x_1-x_2)}{m_2} & \frac{(y_3-y_2)}{m_2} & \frac{(y_3-y_2)}{m_2}(1-q_F) & 0 \\ \frac{(x_2-x_3)}{m_3} & \frac{(y_4-y_3)}{m_3} & \frac{z_F-x_3q_F-y_3(1-q_F)}{m_3} & \frac{F}{m_3} \\ \frac{(x_3-x_4)}{m_4} & \frac{(y_5-y_4)}{m_4} & \frac{(x_3-x_4)}{m_4}q_F & 0 \\ \frac{(x_4-x_5)}{m_5} & \frac{(x_5-y_5)}{m_5} & \frac{(x_4-x_5)}{m_5}q_F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_R \\ V_S \\ F \\ z_F \end{bmatrix}_\delta \quad (4.32)$$

$$\mathbf{y}_\delta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix}_\delta$$

y para el mismo conjunto de datos: $m_1 = 5$ mol , $m_2 = m_3 = m_4 = 0.5$ mol y $m_5 = 5$; $L_R = 2.706$, $L_S = 2.706$, $V_S = 3.206$, $V_R = 3.206$ se llegó a las expresiones de la

ecuación de estado linealizada

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -0.6412 & 0.5805 & 0 & 0 & 0 \\ 5.412 & -11.2174 & 6.2113 & 0 & 0 \\ 0 & 5.412 & -11.6233 & 6.6082 & 0 \\ 0 & 0 & 5.412 & -12.0202 & 7.0821 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5412 & -0.4742 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_\delta \quad (4.33)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.19 & -0.1604 & 0 & 0 \\ 0.1712 & -0.1516 & 0.0226 & 2 \\ 0.1516 & -0.1752 & 0.1516 & 0 \\ 0.01644 & -0.019 & 0.01644 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_R \\ V_S \\ F \\ z_F \end{bmatrix}_\delta$$

la ecuación general para las salidas es

$$\mathbf{y}_\delta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix}_\delta \quad (4.34)$$

y su ecuación de estado linealizada sin entradas es:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -0.6412 & 0.5805 & 0 & 0 & 0 \\ 5.412 & -11.2174 & 6.2113 & 0 & 0 \\ 0 & 5.412 & -11.6233 & 6.6082 & 0 \\ 0 & 0 & 5.412 & -12.0202 & 7.0821 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5412 & -0.4742 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_\delta \quad (4.35)$$

el desarrollo del estudio de estabilidad para la columna de cinco etapas es

$$s * \mathbf{I} = \mathbf{s} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$(s * \mathbf{I}) - \mathbf{A}_L = \begin{bmatrix} s + 0.6412 & -0.58053126 & 0 & 0 & 0 \\ -5.412 & s + 11.217313 & -6.2114897 & 0 & 0 \\ 0 & -5.412 & s + 13.62349 & -6.6080245 & 0 \\ 0 & 0 & -7.412 & s + 14.020024 & -7.0820893 \\ 0 & 0 & 0 & -0.7412 & s + 0.80820893 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\det((s * \mathbf{I}) - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} s + 0.6412 & -0.58053126 & 0 & 0 & 0 \\ -5.412 & s + 11.217313 & -6.2114897 & 0 & 0 \\ 0 & -5.412 & s + 13.62349 & -6.6080245 & 0 \\ 0 & 0 & -7.412 & s + 14.020024 & -7.0820893 \\ 0 & 0 & 0 & -0.7412 & s + 0.80820893 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$\det((s * \mathbf{I}) - \mathbf{A}) = s^5 + 40.310236s^4 + 466.94472s^3 + 1525.3642s^2 + 633.58883s + 44.184652 \quad (4.39)$$

$$s^5 + 40.310236s^4 + 466.94472s^3 + 1525.3642s^2 + 633.58883s + 44.184652 = 0 \quad (4.40)$$

Al no haber solución analítica para el polinomio de quinto grado, las raíces se ubican mediante algún método numérico, que en este caso fue mediante paquetería estándar (MATLAB, Wolfram Mathematica y Scientific WorkPlace) y el resultado expresado como matriz cuadrada es

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -22.5435 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12.7155 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.5801 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0878 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3833 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Una vez determinados los polos, se usa sucesivamente cada λ_i en la expresión

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \text{ o su equivalente } \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_i = \lambda_i \boldsymbol{\xi}_i \quad (4.42)$$

para determinar el vector $\boldsymbol{\xi}_i$ asociado con su polo λ_i específico. No es necesario, pero si conveniente expresar $\boldsymbol{\xi}_i$ como vector unitario. Los vectores principales del Jacobiano de linealización (\mathbf{A}_L), expresados con relación a su polo, pero sin un orden específico,

son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} 0.476\ 646\ 13 \\ 0.454\ 368\ 47 \\ 0.398\ 823\ 83 \\ 0.444\ 809\ 62 \\ 0.457\ 648\ 02 \end{array} \right] \end{array} \right\} \leftrightarrow -8.780\ 182\ 3 \times 10^{-2} \quad (4.43)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} 0.637\ 427\ 83 \\ 0.283\ 179\ 97 \\ -6.146\ 398\ 8 \times 10^{-2} \\ -0.355\ 078\ 15 \\ -0.619\ 384\ 01 \end{array} \right] \end{array} \right\} \leftrightarrow -0.383\ 296\ 56 \quad (4.44)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} 8.302\ 536\ 7 \times 10^{-2} \\ -0.563\ 331\ 00 \\ -0.674\ 276\ 77 \\ -0.461\ 405\ 53 \\ 9.066\ 828\ 8 \times 10^{-2} \end{array} \right] \end{array} \right\} \leftrightarrow -4.580\ 131\ 7 \quad (4.45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} 3.622\ 936\ 5 \times 10^{-2} \\ -0.753\ 524\ 43 \\ 0.150\ 181\ 8 \\ 0.637\ 775\ 59 \\ -3.969\ 996\ 0 \times 10^{-2} \end{array} \right] \end{array} \right\} \leftrightarrow -12.715\ 507 \quad (4.46)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} 1.013\ 393\ 5 \times 10^{-2} \\ -0.382\ 333\ 38 \\ 0.688\ 326\ 64 \\ -0.616\ 022\ 42 \\ 2.100\ 711\ 9 \times 10^{-2} \end{array} \right] \end{array} \right\} \leftrightarrow -22.543\ 498 \quad (4.47)$$

Expresándolos como matriz, en el orden debido respecto a $\mathbf{\Lambda}$ sería

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -0.0101 & 0.0362 & -0.0830 & -0.4766 & -0.6374 \\ 0.3823 & -0.7535 & 0.5633 & -0.4544 & -0.2832 \\ -0.6883 & 0.1502 & 0.6743 & -0.3988 & 0.0615 \\ 0.6160 & 0.6378 & 0.4614 & -0.4448 & 0.3551 \\ -0.0210 & -0.0397 & -0.0907 & -0.4576 & 0.6194 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Como todos los polos son reales y negativos, se cumple la condición necesaria y suficiente para tener un sistema estable en lazo de control abierto.

Una observación importante es que el modelo linealizado desarrollado muestra un comportamiento inherentemente estable. Al probarlo en columnas de diferente tamaño y diversos puntos de alimentación se ve el mismo comportamiento de los polos. Al revisar la forma del Jacobiano de linealización para la columna de n etapas, se observa que, sin importar las relaciones de flujo líquido- vapor dentro de la torre, el signo de los coeficientes de la diagonal principal siempre es negativo, condición necesaria para generar una ecuación característica con polos estables.

4.1.2. Control mediante retroalimentación de estados y ubicación de polos.

El control por retroalimentación se basa en la determinación de la diferencia entre el valor de una variables y un valor de referencia, esta diferencia se usa para generar un cambios en una variable de entrada definida con anterioridad de modo que se anule la diferencia medida.

Para el caso de la retroalimentación de estados la medición se da sobre el total de variables que definen un estado y las diferencias entre ellas y sus puntos de referencia se emplean para alterar el vector de entradas. La forma más simple de control por retroalimentación de estados es una forma análoga al control proporcional, donde el vector de entradas se obtiene de multiplicar la desviación de las variables de estado por una matriz de ganancia del proceso que funge como constante de proporcionalidad.

Desde el punto de vista de teoría de control, la retroalimentación total de estados es un método para aumentar la estabilidad del lazo cerrado mediante la reubicación de sus polos a lugares predefinidos, en su forma original expresado como predefinidos en el plano s para sistemas en que su lazo de control está dado en términos de su función de transferencia y estos fijan la ganancia.

En el dominio del tiempo no se usa la transformada de Laplace para obtener una función de transferencia, pero la definición de la matriz de ganancia tampoco es arbitraria, está definida a partir de los eigenvalores de la matriz de estados. Como los polos describen el comportamiento de los sistemas dinámicos lineales, varias de las características deseables en un lazo de control, como estabilidad, velocidad de respuesta, oscilación y sobretiro limitados, etc. están íntimamente relacionados con los valores de los polos del sistema, en lo sucesivo denotados como p . Si son reales negativos el sistema es monotónicamente estable; si uno o más de ellos son reales positivos, el sistema es monotónicamente inestable; si se tienen polos complejos conjugados con la parte real negativa, el sistema tendrá un comportamiento estable, pero oscilatorio, en tanto que si la parte real es positiva seguirá siendo oscilatorio, pero inestable. Así se podría seguir enumerando características dependientes del valor de los polos, pero lo importante es que la relación existe y que cuando cambian sus valores implica que las condiciones del sistema también lo han hecho.

Para aprovechar esta propiedad se ha desarrollado la técnica de ubicación de polos, que esencialmente usa el camino opuesto: Una vez calculados los eigenvalores de la matriz de estados del sistema (o su Jacobiano de linealización) se determinan los valores deseados en los polos y se cambian las condiciones del sistema mediante retroalimentación de estado.

La forma de hacerlo es decidir donde deben estar los polos y forzar las condiciones del sistema para obtenerlos ajustando la ganancia del control retroalimentado -a esto también se le llama forzar los polos- (Okada, 2010).

Para el modelo linealizado en espacio de estados

$$\dot{\mathbf{x}}_{\delta} = \mathbf{A}_L \mathbf{x}_{\delta}(t) + \mathbf{B}_L \mathbf{u}_{\delta}(t) \quad (4.49)$$

$$\mathbf{y}_{\delta} = \mathbf{C}_L \mathbf{x}_{\delta}(t) + \mathbf{D}_L \mathbf{u}_{\delta}(t) \quad (4.50)$$

con los polos definidos por los eigenvalores de \mathbf{A}_L . Si se elige el control mediante retroalimentación total de estados de modo que:

$$\mathbf{u}_{\delta} = \mathbf{v}_{\delta} + \mathbf{K} \mathbf{x}_{\delta} \quad (4.51)$$

donde \mathbf{v}_{δ} se refiere al vector de entradas de la ecuación de estados original.

$$\dot{\mathbf{x}}_{\delta} = \mathbf{A}_L \mathbf{x}_{\delta}(t) + \mathbf{B}_L (\mathbf{v}_{\delta} + \mathbf{K} \mathbf{x}_{\delta}) \quad (4.52)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{\delta} = \mathbf{A}_L \mathbf{x}_{\delta}(t) + \mathbf{B}_L \mathbf{v}_{\delta} + \mathbf{B}_L \mathbf{K} \mathbf{x}_{\delta} \quad (4.53)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{\delta} = (\mathbf{A}_L + \mathbf{B}_L \mathbf{K}) \mathbf{x}_{\delta}(t) + \mathbf{B}_L \mathbf{v}_{\delta} \quad (4.54)$$

Si se hace

$$\mathbf{A}_K = \mathbf{A}_L + \mathbf{B}_L \mathbf{K} \quad (4.55)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{\delta} = \mathbf{A}_K \mathbf{x}_{\delta}(t) + \mathbf{B}_L \mathbf{v}_{\delta} \quad (4.56)$$

Como se ha definido la posición de los polos deseados $p_{d,i}$ y estos deben ser iguales a los valores principales de \mathbf{A}_K

$$\det((s * \mathbf{I}) - \mathbf{A}_K) = (s - p_{d,1})(s - p_{d,2}) \cdots (s - p_{d,n}) \quad (4.57)$$

O lo que es igual

$$\det((s * \mathbf{I}) - (\mathbf{A}_L + \mathbf{B}_L \mathbf{K})) = (s - p_{d,1})(s - p_{d,2}) \cdots (s - p_{d,n}) \quad (4.58)$$

En esta expresión se conoce \mathbf{A}_L , \mathbf{B}_L y se ha definido los valores de $p_{d,i}$, por lo que al desarrollar las expresiones para los dos lados de la igualdad se pueden obtener los elementos de la matriz \mathbf{K} . Se trata de un sistema de ecuaciones simultáneas lineales,

cuya solución no debería dar muchos problemas, incluso en procesos con muchas etapas, pero como $\det((s * \mathbf{I}) - (\mathbf{A}_L + \mathbf{B}_L \mathbf{K}))$ genera expresiones que dependen de los coeficientes del Jacobiano de linealización y de la matriz de entradas, su forma suele ser muy complicada y solo es viable resolverlas mediante métodos numéricos, preferentemente con rutinas específicas para control.

4.1.3. Control con retroalimentación de estados para el caso de estudio

Como se ha comentado repetidamente, para que el sistema sea estable es necesario que los eigenvalores sean negativos, y al aumentar su valor absoluto igualmente lo hace la velocidad de respuesta del lazo de control. Cuando uno de ellos se encuentra muy cerca de cero, existe el riesgo de que ante un efecto de retroalimentación no buscado, el polo se desplace ligeramente y pase de negativo a positivo, desestabilizando el sistema.

Para la columna estudiada

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -22.5435 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12.7155 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.5801 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0878 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3833 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

se puede ver que dos de los polos están cerca del cero, en especial uno de ellos, por lo que convendría reubicar al menos $\lambda_{4,4}$ para mejorar la estabilidad. y mantener en mente que tal vez sea necesario mover también $\lambda_{5,5}$, pero salvo que posteriormente se observe inestabilidad en el lazo de control, se considera suficiente trabajar sobre $\lambda_{4,4}$.

Si se fija arbitrariamente $\Delta\lambda_{4,4} = -0.2$, la matriz de polos deseados será

$$\mathbf{\Lambda}_D = \begin{bmatrix} -22.5435 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12.7155 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.5801 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2878 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3833 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Para aplicar la reubicación de polos a la misma columna de destilación de cinco etapas, la matriz de estados para el controlador queda definida por:

$$\mathbf{A}_K = \mathbf{A}_L + \mathbf{B}_L \mathbf{K} \quad (4.61)$$

5×5 5×5 5×4 4×5

el cálculo de sus polos viene dado por:

$$\lambda_i = \det((s * \mathbf{I}) - \mathbf{A}_K) = 0 \quad (4.62)$$

y la nueva ecuación característica deberá igualarse con su expresión correspondiente basada en los polos que se desea obtener, que viene a ser:

$$\lambda_{iD} = \det((s * \mathbf{I}) - \mathbf{A}_K) = (s - pd_1)(s - pd_2)(s - pd_3)(s - pd_4)(s - pd_5) \quad (4.63)$$

Como estos ya han sido definidos la expresión sustituida es:

$$\lambda_{iD} = (s + 22.5435)(s + 12.7155)(s + 4.5801)(s + 0.2878)(s + 0.3833) \quad (4.64)$$

Que una vez desarrollada

$$\lambda_{iD} = s^5 + 40.5102s^4 + 474.98795s^3 + 1618.0369s^2 + 930.51951s + 144.83027 \quad (4.65)$$

se resuelve igualándola con la ecuación característica de la matriz de estados del lazo de control.

Como se han calculado previamente el Jacobiano de linealización y la matriz de coeficientes de entradas, de las variables que aparecen en (4.61) la única incógnita es

la matriz de ganancia del lazo cerrado, y sus coeficientes quedarán definidos al resolver el sistema que resulta de igualar (4.65) y (4.62)

Si la ganancia está dada por la matriz

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & k_{2,5} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

$$B_L * K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.189\,94k_{1,1} & 0.189\,94k_{1,2} & 0.189\,94k_{1,3} & 0.189\,94k_{1,4} & 0.189\,94k_{1,5} \\ -0.160\,32k_{2,1} & -0.160\,32k_{2,2} & -0.160\,32k_{2,3} & -0.160\,32k_{2,4} & -0.160\,32k_{2,5} \\ 0.171\,18k_{1,1} & 0.171\,18k_{1,2} & 0.171\,18k_{1,3} & 0.171\,18k_{1,4} & 0.171\,18k_{1,5} \\ -0.151\,53k_{2,1} & -0.151\,53k_{2,2} & -0.151\,53k_{2,3} & -0.151\,53k_{2,4} & -0.151\,53k_{2,5} \\ +0.022\,578\,k_{3,1} & +0.022\,578\,k_{3,2} & +0.022\,578\,k_{3,3} & +0.022\,578\,k_{3,4} & +0.022\,578\,k_{3,5} \\ +2.0k_{4,1} & +2.0k_{4,2} & +2.0k_{4,3} & +2.0k_{4,4} & +2.0k_{4,5} \\ 0.151\,65k_{1,1} & 0.151\,65k_{1,2} & 0.151\,65k_{1,3} & 0.151\,65k_{1,4} & 0.151\,65k_{1,5} \\ -0.175\,3k_{2,1} & -0.175\,3k_{2,2} & -0.175\,3k_{2,3} & -0.175\,3k_{2,4} & -0.175\,3k_{2,5} \\ +0.151\,65k_{3,1} & +0.151\,65k_{3,2} & +0.151\,65k_{3,3} & +0.151\,65k_{3,4} & +0.151\,65k_{3,5} \\ 0.016\,431\,k_{1,1} & 0.016\,431\,k_{1,2} & 0.016\,431\,k_{1,3} & 0.016\,431\,k_{1,4} & 0.016\,431\,k_{1,5} \\ -0.018\,994\,k_{2,1} & -0.018\,994\,k_{2,2} & -0.018\,994\,k_{2,3} & -0.018\,994\,k_{2,4} & -0.018\,994\,k_{2,5} \\ +0.016\,431\,k_{3,1} & +0.016\,431\,k_{3,2} & +0.016\,431\,k_{3,3} & +0.016\,431\,k_{3,4} & +0.016\,431\,k_{3,5} \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$$A_L - (B_L * K) = \begin{bmatrix} -0.641\,2 & 0.580\,531\,26 & 0 & 0 & 0 \\ 0.160\,32k_{2,1} & 0.160\,32k_{2,2} & 0.160\,32k_{2,3} & 0.160\,32k_{2,4} & 0.160\,32k_{2,5} \\ -0.189\,94k_{1,1} & -0.189\,94k_{1,2} & -0.189\,94k_{1,3} & -0.189\,94k_{1,4} & -0.189\,94k_{1,5} \\ +5.412 & -11.217\,313 & +6.211\,489\,7 & -0.189\,94k_{1,4} & -0.189\,94k_{1,5} \\ 0.151\,53k_{2,1} & 0.151\,53k_{2,2} & 0.151\,53k_{2,3} & 0.151\,53k_{2,4} & 0.151\,53k_{2,5} \\ -0.171\,18k_{1,1} & -0.171\,18k_{1,2} & -0.171\,18k_{1,3} & -0.171\,18k_{1,4} & -0.171\,18k_{1,5} \\ -0.022\,578\,k_{3,1} & -0.022\,578\,k_{3,2} & -0.022\,578\,k_{3,3} & -0.022\,578\,k_{3,4} & -0.022\,578\,k_{3,5} \\ -2.0k_{4,1} & -2.0k_{4,2} & -2.0k_{4,3} & -2.0k_{4,4} & -2.0k_{4,5} \\ +5.412 & +5.412 & -13.623\,49 & +6.608\,024\,5 & -2.0k_{4,5} \\ 0.175\,3k_{2,1} & 0.175\,3k_{2,2} & 0.175\,3k_{2,3} & 0.175\,3k_{2,4} & 0.175\,3k_{2,5} \\ -0.151\,65k_{1,1} & -0.151\,65k_{1,2} & -0.151\,65k_{1,3} & -0.151\,65k_{1,4} & -0.151\,65k_{1,5} \\ -0.151\,65k_{3,1} & -0.151\,65k_{3,2} & -0.151\,65k_{3,3} & -0.151\,65k_{3,4} & -0.151\,65k_{3,5} \\ +7.412 & +7.412 & -14.020\,024 & +7.082\,089\,3 & +7.082\,089\,3 \\ 0.018\,994\,k_{2,1} & 0.018\,994\,k_{2,2} & 0.018\,994\,k_{2,3} & 0.018\,994\,k_{2,4} & 0.018\,994\,k_{2,5} \\ -0.016\,431\,k_{1,1} & -0.016\,431\,k_{1,2} & -0.016\,431\,k_{1,3} & -0.016\,431\,k_{1,4} & -0.016\,431\,k_{1,5} \\ -0.016\,431\,k_{3,1} & -0.016\,431\,k_{3,2} & -0.016\,431\,k_{3,3} & -0.016\,431\,k_{3,4} & -0.016\,431\,k_{3,5} \\ +0.741\,2 & +0.741\,2 & -0.808\,208\,93 & -0.808\,208\,93 & -0.808\,208\,93 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

$$A_L - (B_L * K) = \begin{bmatrix} -0.6412 & 0.58053126 & 0 & 0 & 0 \\ 0.16032k_{2,1} & 0.16032k_{2,2} & 0.16032k_{2,3} & 0.16032k_{2,4} & 0.16032k_{2,5} \\ -0.18994k_{1,1} & 0.18994k_{1,2} & -0.18994k_{1,3} & -0.18994k_{1,4} & -0.18994k_{1,5} \\ +5.412 & -11.217313 & +6.2114897 & & \\ 0.15153k_{2,1} & 0.15153k_{2,2} & 0.15153k_{2,3} & 0.15153k_{2,4} & 0.15153k_{2,5} \\ -0.17118k_{1,1} & -0.17118k_{1,2} & -0.17118k_{1,3} & -0.17118k_{1,4} & -0.17118k_{1,5} \\ -0.022578k_{3,1} & -0.022578k_{3,2} & 0.022578k_{3,3} & -0.022578k_{3,4} & -0.022578k_{3,5} \\ -2.0k_{4,1} & -2.0k_{4,2} & -2.0k_{4,3} & -2.0k_{4,4} & -2.0k_{4,5} \\ & +5.412 & -13.62349 & +6.6080245 & \\ 0.1753k_{2,1} & 0.1753k_{2,2} & 0.1753k_{2,3} & 0.1753k_{2,4} & 0.1753k_{2,5} \\ -0.15165k_{1,1} & -0.15165k_{1,2} & -0.15165k_{1,3} & -0.15165k_{1,4} & -0.15165k_{1,5} \\ -0.15165k_{3,1} & -0.15165k_{3,2} & -0.15165k_{3,3} & -0.15165k_{3,4} & -0.15165k_{3,5} \\ & & +7.412 & -14.020024 & +7.0820893 \\ 0.018994k_{2,1} & 0.018994k_{2,2} & 0.018994k_{2,3} & 0.018994k_{2,4} & 0.018994k_{2,5} \\ -0.016431k_{1,1} & -0.016431k_{1,2} & -0.016431k_{1,3} & -0.016431k_{1,4} & -0.016431k_{1,5} \\ -0.016431k_{3,1} & -0.016431k_{3,2} & -0.016431k_{3,3} & -0.016431k_{3,4} & -0.016431k_{3,5} \\ & & & +0.7412 & -0.80820893 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

$$(s*I) - (A_L - (B_L * K)) = \begin{bmatrix} s + 0.6412 & -0.5805312 & 0 & 0 & 0 \\ 0.18994k_{1,1} & s + 0.1899k_{1,2} & 0.18994k_{1,3} & 0.18994k_{1,4} & 0.18994k_{1,5} \\ -0.16032k_{2,1} & -0.16032k_{2,2} & -0.16032k_{2,3} & -0.16032k_{2,4} & -0.16032k_{2,5} \\ -5.412 & +11.21731 & -6.2114897 & & \\ 0.17118k_{1,1} & 0.17118k_{1,2} & s + 0.17118k_{1,3} & 0.17118k_{1,4} & 0.17118k_{1,5} \\ -0.15153k_{2,1} & -0.15153k_{2,2} & -0.15153k_{2,3} & -0.15153k_{2,4} & -0.15153k_{2,5} \\ +0.022578k_{3,1} & +0.022578k_{3,2} & +0.022578k_{3,3} & +0.022578k_{3,4} & +0.022578k_{3,5} \\ +2.0k_{4,1} & +2.0k_{4,2} & +2.0k_{4,3} & +2.0k_{4,4} & +2.0k_{4,5} \\ & -5.412 & +13.62349 & -6.6080245 & \\ 0.15165k_{1,1} & 0.15165k_{1,2} & 0.15165k_{1,3} & s + 0.15165k_{1,4} & 0.15165k_{1,5} \\ -0.1753k_{2,1} & -0.1753k_{2,2} & -0.1753k_{2,3} & -0.1753k_{2,4} & -0.1753k_{2,5} \\ +0.15165k_{3,1} & +0.15165k_{3,2} & +0.15165k_{3,3} & +0.15165k_{3,4} & +0.15165k_{3,5} \\ & & -7.412 & +14.02002 & -7.082089 \\ 0.016431k_{1,1} & 0.016431k_{1,2} & 0.016431k_{1,3} & 0.016431k_{1,4} & s + 0.01641k_{1,5} \\ -0.018994k_{2,1} & -0.018994k_{2,2} & -0.018994k_{2,3} & -0.018994k_{2,4} & -0.018994k_{2,5} \\ +0.01643k_{3,1} & +0.01643k_{3,2} & +0.01643k_{3,3} & +0.01643k_{3,4} & +0.01643k_{3,5} \\ & & & -0.7412 & +0.808209 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Definiendo la matriz de estados para el lazo de control como:

$$A_K = (A_L - (B_L * K)) \quad (4.71)$$

Su expresión numérica es:

$$A_K = \begin{bmatrix} -0.6412 & 0.58053126 & 0 & 0 & 0 \\ 0.16032k_{2,1} & 0.16032k_{2,2} & 0.16032k_{2,3} & 0.16032k_{2,4} & 0.16032k_{2,5} \\ -0.18994k_{1,1} & -0.18994k_{1,2} & -0.18994k_{1,3} & -0.18994k_{1,4} & -0.18994k_{1,5} \\ +5.412 & -11.217313 & +6.2114897 & & \\ 0.15153k_{2,1} & 0.15153k_{2,2} & 0.15153k_{2,3} & 0.15153k_{2,4} & 0.15153k_{2,5} \\ -0.17118k_{1,1} & -0.17118k_{1,2} & -0.17118k_{1,3} & -0.17118k_{1,4} & -0.17118k_{1,5} \\ -0.022578k_{3,1} & -0.022578k_{3,2} & -0.022578k_{3,3} & -0.022578k_{3,4} & -0.022578k_{3,5} \\ -2.0k_{4,1} & -2.0k_{4,2} & -2.0k_{4,3} & -2.0k_{4,4} & -2.0k_{4,5} \\ & +5.412 & -13.62349 & +6.6080245 & \\ 0.1753k_{2,1} & 0.1753k_{2,2} & 0.1753k_{2,3} & 0.1753k_{2,4} & 0.1753k_{2,5} \\ -0.15165k_{1,1} & -0.15165k_{1,2} & -0.15165k_{1,3} & -0.15165k_{1,4} & -0.15165k_{1,5} \\ -0.15165k_{3,1} & -0.15165k_{3,2} & -0.15165k_{3,3} & -0.15165k_{3,4} & -0.15165k_{3,5} \\ & & +7.412 & -14.020024 & +7.0820893 \\ 0.018994k_{2,1} & 0.018994k_{2,2} & 0.018994k_{2,3} & 0.018994k_{2,4} & 0.018994k_{2,5} \\ -0.016431k_{1,1} & -0.016431k_{1,2} & -0.016431k_{1,3} & -0.016431k_{1,4} & -0.016431k_{1,5} \\ -0.016431k_{3,1} & -0.016431k_{3,2} & -0.016431k_{3,3} & -0.016431k_{3,4} & -0.016431k_{3,5} \\ & & & +0.7412 & -0.80820893 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

Por razones obvias se omite la expresión para el determinante y la solución de la igualdad de este con la expresión de los polos deseados (4.65).

El cálculo de la matriz de ganancia se hizo aplicando el algoritmo de Kautsky-Nichols (Kautsky, Nichols y Van Doreen, 1985) aplicando directamente las funciones estándar de Matlab relativas al caso, y así se genera una matriz de ganancia que minimiza la sensibilidad de los eigenvalores a cambios en los parámetros y perturbaciones en el sistema.

La matriz de ganancia resultante es

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -3.2397 & -0.0078 & 0.2511 & -0.7145 & 0.5638 \\ -3.8383 & -0.0092 & 0.2975 & -0.8465 & 0.6680 \\ -1.1972 & -0.0029 & 0.0928 & -0.2640 & 0.2084 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * 10^{12} \quad (4.73)$$

Claramente su orden de magnitud es demasiado grande y, a pesar de ser teóricamente aplicable, presenta inconvenientes importantes, el principal es que pequeños cambios en la matriz de entradas o perturbaciones en los parámetros pueden derivar en cambios muy grandes en las variables de estado. La generación de una matriz de ganancia tan grande es una característica propia de los algoritmos disponibles al aplicarse en sistemas de orden superior (He,Laub y Mehrmann. 1995). Dado que todos los ejemplos de aplicación de este y otros algoritmos similares muestran sistemas de dos o tres ecuaciones, se infiere que "orden superior" significa mayor tres.

Como el objetivo no es un conjunto específico de polos, sino la estabilización del sistema manteniéndolos en cierta región del plano s , se aplicó un re-escalamiento a esta matriz de ganancia y después se ajustaron sus elementos mediante una aproximación de fuerza bruta, de forma que se mantuviera el perfil de la curva de control y los polos se mantuvieran cerca de los valores deseados.

La matriz de ganancia final es:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -3.2397 & -0.0078 & 0.2511 & -0.7145 & 0.5638 \\ -3.8383 & -0.0092 & 0.2975 & -0.8465 & 0.6680 \\ -1.1972 & -0.0029 & 0.0928 & -0.2640 & 0.2084 \\ 1.0000 & 0 & 0.4000 & 0.5000 & -0.0500 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

y los polos asociados:

$$\mathbf{\Lambda}_K = \begin{bmatrix} -22.5072 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12.8663 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5.1312 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3683 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2372 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

y se cumple así con el objetivo de alejar el polo crítico del origen.

4.2. Controlabilidad

La definición de Controlabilidad varía dependiendo de la disciplina donde se aplique y, siendo específicas a un campo, introducen limitaciones en el concepto. Por ejemplo, para plantas de proceso en operación continua capaces de operar en el estado estable, el sistema es controlable si las variables de salida se pueden mantener en el set point (que se entiende coincide con el estado estable) a pesar de las perturbaciones al proceso (Marlin, 2000). Esta definición resulta un tanto restrictiva porque, entre otras cosas, genera la impresión de que el set point de un proceso es una característica intrínseca del mismo y no una variable sujeta a consideraciones económicas y operativas, reforzando la conveniencia de usar una definición más general.

El problema para elegir una definición general no radica en la carencia de estas, sino en que el problema combinado de *Observabilidad* y *Controlabilidad*, presenta gran complejidad y ha sido investigado a profundidad pero mucho del trabajo realizado es

tan complicado que deja de ser aplicable a casos prácticos (Aisagaliev y Sevryugin, 2017) y se debe tomar un camino intermedio balanceando rigor con aplicabilidad.

Con el modelo dinámico desarrollado, si se dispone de los valores de todas las variables de estado y sus funciones de forzamiento para un tiempo específico - que pueden ser los del estado estable o las condiciones al comenzar el seguimiento -, debería ser posible conocer el estado del sistema en cualquier momento posterior y seguir la trayectoria de las variables de estado en función de perturbaciones externas o manipulación de las variables de control. Considerando los cambios de estado como puntos de esa línea, la Controlabilidad, puede decirse que es la capacidad de desplazar el sistema de un estado $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ a otro $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$ en un tiempo finito $t_1 - t_0$ manipulando el vector de entradas, o bien que para un sistema controlable, se puede encontrar un vector de entradas que lo lleve de \mathbf{x}_0 a \mathbf{x}_1 . Otro aspecto a considerar es que se habla de alcanzar el estado x_1 , pero sin garantía de que se logre estabilizar ahí el sistema, sin embargo para procesos capaces de operar en estado estable. La condición de poder llevar el sistema de un estado de desviación al de referencia es un caso particular de la definición general de Controlabilidad.

La expresión analítica formal para un sistema lineal - o linealizado en este caso - con coeficientes invariantes en el tiempo del tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{t}) \quad (4.76)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{C}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{D}\mathbf{u}(\mathbf{t}) \quad (4.77)$$

establece que un sistema es controlable si el Wronskiano

$$\mathbf{W}_1(\mathbf{t}) = \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T \tau} d\tau \quad (4.78)$$

es no singular para cualquier tiempo $t > 0$. Es decir $\det(\mathbf{W}_1(\mathbf{t})) \neq \mathbf{0}$ (Ogata, 2010; Hangos, Bokor y Szederkényi, 2004). Esta expresión analítica es muy difícil de aplicar en la práctica porque requiere obtener las integrales de los productos matriciales y

al ser $\mathbf{W}_1(\mathbf{t})$ una matriz del mismo tamaño de \mathbf{A} , el desarrollo del determinante cualquier \mathbf{A} con $n > 3$ puede ser una tarea realmente complicada.

Como alternativa se tiene el análisis de rango, que es una condición basada en la definición formal, pero de aplicación práctica directa y se hace mediante la evaluación del rango de la matriz de controlabilidad.

El rango de una matriz es la dimensión del espacio vectorial comprendida por sus columnas e igual a la de sus renglones, en su forma más simple viene a ser el menor entre el número columnas y renglones linealmente independientes. Una matriz cuadrada es de rango completo si todos sus renglones y columnas son linealmente independientes; para otras matrices el rango completo se define si su rango es igual al número menor entre renglones y columnas o si el rango es igual al número de variables de estado.

Para que el sistema en REE, sea controlable es necesario generar la matriz

$$\mathbf{C}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

y determinar su rango. Si \mathbf{C}_n es de rango completo, el sistema descrito es controlable, y de acuerdo con las reglas de multiplicación de matrices, debe tener rango n que es el de la matriz de estados \mathbf{A} . Esta forma de determinar la controlabilidad del sistema es perfectamente consistente con la analítica y su fundamentación viene descrita en varios textos clásicos de control, como (Ogata, 2010) o (Nise, 2010) entre otros; con la diferencia respecto a la forma analítica de que es relativamente fácil obtener el rango de la matriz de controlabilidad. Un aspecto relevante de esto es que solo depende de las matrices de la ecuación de estados \mathbf{A} y \mathbf{B} , sin involucrar a la de entradas/salidas.

4.2.1. Análisis de controlabilidad para el caso de estudio.

Tomando la ecuación de estados de la REE linealizada en términos de variable de desviación

$$\dot{\mathbf{x}}_\delta = \mathbf{A}_L \mathbf{x}_\delta(\mathbf{t}) + \mathbf{B}_L \mathbf{u}_\delta(\mathbf{t}) \quad (4.80)$$

para la columna de cinco etapas y el modelo desarrollado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{V_R}{m_1} & \frac{V_R}{m_1}\zeta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_R}{m_2} & -\frac{L_R+V_R\zeta_2}{m_2} & \frac{V_R}{m_2}\zeta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_R}{m_3} & -\frac{L_S+V_R\zeta_3}{m_3} & \frac{V_R}{m_3}\zeta_4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_S}{m_4} & -\frac{L_S+V_S\zeta_4}{m_4} & \frac{V_S}{m_4}\zeta_5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_S}{m_5} & -\frac{L_S+V_S(1-\zeta_5)}{m_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{(y_2-x_1)}{m_1} & \frac{(y_2-x_1)}{m_1}(1-q_F) & 0 \\ \frac{(x_1-x_2)}{m_2} & \frac{(y_3-y_2)}{m_2} & \frac{(y_3-y_2)}{m_2}(1-q_F) & 0 \\ \frac{(x_2-x_3)}{m_3} & \frac{(y_4-y_3)}{m_3} & \frac{z_F-x_3q_F-y_3(1-q_F)}{m_3} & \frac{F}{m_3} \\ \frac{(x_3-x_4)}{m_4} & \frac{(y_5-y_4)}{m_4} & \frac{(x_3-x_4)}{m_4}q_F & 0 \\ \frac{x_4-x_5}{m_5} & \frac{x_5-y_5}{m_5} & \frac{x_4-x_5}{m_5}q_F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_R \\ V_S \\ F \\ z_F \end{bmatrix} \delta$$

La matriz de controlabilidad a desarrollar es:

$$\mathbf{C}_n = \left[\mathbf{B}_L \quad \mathbf{A}_L\mathbf{B}_L \quad \mathbf{A}_L^2\mathbf{B}_L \quad \mathbf{A}_L^3\mathbf{B}_L \quad \mathbf{A}_L^4\mathbf{B}_L \right] \quad (4.82)$$

Haciendo un breve análisis por inspección para la estructura de la matriz de controlabilidad en función de la estructura de la matriz de estados:

$$\mathbf{A}_L = \begin{bmatrix} -\frac{V_R}{m_1} & \frac{V_R}{m_1}\zeta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_R}{m_2} & -\frac{L_R+V_R\zeta_2}{m_2} & \frac{V_R}{m_2}\zeta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_R}{m_3} & -\frac{L_S+V_R\zeta_3}{m_3} & \frac{V_R}{m_3}\zeta_4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_S}{m_4} & -\frac{L_S+V_S\zeta_4}{m_4} & \frac{V_S}{m_4}\zeta_5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_S}{m_5} & -\frac{L_S+V_S(1-\zeta_5)}{m_5} \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

Utilizando \mathbf{A}_L y \mathbf{B}_L con los valores numéricos correspondientes al caso de estudio.

$$\mathbf{A}_L = \begin{bmatrix} -0.6412 & 0.5805 & 0 & 0 & 0 \\ 5.412 & -11.2174 & 6.2113 & 0 & 0 \\ 0 & 5.412 & -11.6233 & 6.6082 & 0 \\ 0 & 0 & 5.412 & -12.0202 & 7.0821 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5412 & -0.4742 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

$$\mathbf{A}_L^2 = \begin{bmatrix} 3.5529726 & -6.8842375 & 3.6059639 & 0 & 0 \\ -64.178272 & 162.58653 & -154.29839 & 41.045676 & 0 \\ 29.289744 & -134.43843 & 268.19474 & -182.66902 & 46.798620 \\ 0 & 40.113744 & -204.89373 & 250.78900 & -105.01487 \\ 0 & 0 & 5.4937744 & -10.990686 & 5.9024463 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

$$\mathbf{A}_L^3 = \begin{bmatrix} -39.535659 & 98.800735 & -91.887184 & 23.828298 & 0 \\ 921.06940 & -2696.1044 & 3416.2177 & -1595.0689 & 290.68914 \\ -746.36134 & 2976.5114 & -5842.754 & 4367.9486 & -1331.5014 \\ 217.09558 & -1558.8533 & 4899.3818 & -4947.8475 & 1860.984 \\ 0 & 29.732307 & -156.30735 & 194.76757 & -82.607431 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

$$\mathbf{A}_L^4 = \begin{bmatrix} 560.05984 & -1628.5239 & 2042.1392 & -941.26607 & 168.75413 \\ -15181.907 & 49266.326 & -75110.283 & 45152.814 & -11531.358 \\ 16587.447 & -65442.731 & 130462.51 & -100834.71 & 32010.333 \\ -8575.7156 & 44127.630 & -113102.93 & 103123.54 & -36545.162 \\ 160.91125 & -1179.4520 & 3757.7508 & -3824.7575 & 1446.1254 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

Se aprecia que \mathbf{A}_L es una matriz tridiagonal y al elevarla al cuadrado \mathbf{A}_L^2 presenta dos diagonales adicionales llenas. Al elevar al cubo se tienen ceros solo en $A(5, 1)$ y $A(1, 5)$ mientras que en \mathbf{A}_L^4 no hay elementos nulos. Esta estructura prácticamente garantiza que no habrá renglones ni columnas linealmente dependientes en \mathbf{C}_n y es de esperarse que tenga rango completo.

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.19 & -0.1604 & 0 & 0 \\ 0.1712 & -0.1516 & 0.0226 & 2 \\ 0.1516 & -0.1752 & 0.1516 & 0 \\ 0.01644 & -0.019 & 0.01644 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

Al hacer la determinación de rango mediante las funciones correspondientes en MATLAB se obtiene que el rango de \mathbf{C}_n es 5 , con lo que se demuestra que tiene rango completo y que el sistema es controlable.

4.3. Observabilidad

Para utilizar la retroalimentación total de estado en control de lazo cerrado, es necesario que el controlador tenga acceso permanente a los valores de las variables de estado, pero puede suceder que algunas de ellas no sean directamente medibles - ya sea por falta de sensores adecuados o por estar en un lugar inaccesible para la medición - y sea necesario calcularlas o estimarlas con base a la información disponible para ese punto particular. Por la misma naturaleza de las especificaciones de operación, lo que siempre debe estar sujeto a medición son las variables de salida.

La observabilidad en principio viene a ser la capacidad de reconstruir el estado inicial del sistema conociendo el modelo y sus salidas, aunque la definición formal enuncia que un sistema es observable si es posible reconstruir las variables de estado para $t_0 = 0$ conociendo los vectores de entrada y salida para una sucesión de estados en un tiempo finito, o hacerlo para un tiempo t cualquiera partiendo del estado inicial

x_0 y los vectores de entrada y salida para la sucesión de estados mencionada.

Un sistema con representación en espacio de estados es completamente observable si la matriz de observabilidad

$$O_n = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

es de rango completo e igual al número de variables de estado.

Como se puede apreciar en la expresión anterior, del mismo modo que la controlabilidad está dada por las matrices de la ecuación de estados \mathbf{A} y \mathbf{B} , la observabilidad queda definida por las matrices de estados \mathbf{A} y \mathbf{C} , sin considerar las matrices correspondientes a las entradas.

4.3.1. Análisis de observabilidad para el caso de estudio.

El desarrollo es muy parecido al de la controlabilidad y para la REE de la columna de cinco etapas en términos de variable de desviación con matriz \mathbf{D} nula

$$\dot{\mathbf{x}}_\delta = \mathbf{A}_L \mathbf{x}_\delta(\mathbf{t}) + \mathbf{B}_L \mathbf{u}_\delta(\mathbf{t}) \quad (4.90)$$

$$\mathbf{y}_\delta = \mathbf{C}_L \mathbf{x}_\delta(\mathbf{t}) \quad (4.91)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{V_R}{m_1} & \frac{V_R}{m_1}\zeta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_R}{m_2} & -\frac{L_R+V_R\zeta_2}{m_2} & \frac{V_R}{m_2}\zeta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_R}{m_3} & -\frac{L_S+V_R\zeta_3}{m_3} & \frac{V_R}{m_3}\zeta_4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_S}{m_4} & -\frac{L_S+V_S\zeta_4}{m_4} & \frac{V_S}{m_4}\zeta_5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_S}{m_5} & -\frac{L_S+V_S(1-\zeta_5)}{m_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_\delta \quad (4.92)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{(y_2-x_1)}{m_1} & \frac{(y_2-x_1)}{m_1}(1-q_F) & 0 \\ \frac{(x_1-x_2)}{m_2} & \frac{(y_3-y_2)}{m_2} & \frac{(y_3-y_2)}{m_2}(1-q_F) & 0 \\ \frac{(x_2-x_3)}{m_3} & \frac{(y_4-y_3)}{m_3} & \frac{z_F-x_3q_F-y_3(1-q_F)}{m_3} & \frac{F}{m_3} \\ \frac{(x_3-x_4)}{m_4} & \frac{(y_5-y_4)}{m_4} & \frac{(x_3-x_4)}{m_4}q_F & 0 \\ \frac{(x_4-x_5)}{m_5} & \frac{(x_5-y_5)}{m_5} & \frac{(x_4-x_5)}{m_5}q_F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_R \\ V_S \\ F \\ z_F \end{bmatrix}_\delta$$

$$\mathbf{y}_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_\delta \quad (4.93)$$

La matriz de observabilidad a desarrollar es:

$$O_n = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_L \\ \mathbf{C}_L \mathbf{A}_L \\ \mathbf{C}_L \mathbf{A}_L^2 \\ \mathbf{C}_L \mathbf{A}_L^3 \\ \mathbf{C}_L \mathbf{A}_L^4 \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Capítulo 5

Simulación y comportamiento de una CDIE

Se sabe que en Ingeniería de Procesos y en Control de Procesos se parte de la existencia de relaciones causa-efecto entre las variables, aunque no siempre resulte clara la naturaleza de esa relación. Se puede considerar que una planta en funcionamiento es una calculadora analógica de grados de libertad, porque una vez que está operado, si se alteran los parámetros de operación, puntos de ajuste o se presentan perturbaciones, el mismo comportamiento del sistema indica si realmente había grados de libertad disponibles o desde otro enfoque muestra si, al alterar una variable, esta produce cambios en otras, el tipo de cambio y mediante pruebas repetidas, estimar la magnitud de las variaciones generadas.

Por otro lado, los imperativos del mundo real imponen severas restricciones a un proceso analógico e iterativo como el descrito para el control de procesos. Es una práctica común manejar los lazos de control en forma manual o mixta durante el arranque en columnas de destilación, hasta alcanzar condiciones estables de proceso, sobre todo cuando se sabe que el producto obtenido durante el arranque se mandará a reproceso o si es tan poco que no afecta la calidad del producto final. Una vez en operación

normal se suele operar con lazos independientes para los diversos apareamientos de variables de entrada seleccionados, sintonizando cada lazo de control automático por separado, admitiendo control manual de algunas variables.

Como ya se ha visto, la interacción de las variables para plantas integradas es mucho mayor que en una columna tradicional y si se pretende controlarla mediante retroalimentación total de estado, es imperativo hacerlo a través de un sistema computarizado basado en el modelo para el sistema específico de que se trate.

Igual de importante es hacer simulaciones previas para un amplio rango de condiciones de operación que permitan prever condiciones irregulares en el modelo de control, o peor aún, en la operación del equipo.

Para fines de este trabajo, la simulación es la solución del modelo matemático en estado inestable del sistema -una columna de destilación binaria ideal en operación continua- para un conjunto de parámetros predefinidos y otro de variables de control.

Al hablar de columnas integradas se tiene la impresión que se trata de una familia de equipos con una estructura definida, o al menos una filosofía de diseño uniforme. En la realidad hay varias escuelas de diseño y evaluación de la eficiencia energética de este. Aunque la forma de llegar a ellos difiera mucho, los resultados obtenidos en la práctica son notablemente parecidos y la mayor parte de las CDIE caen en una de tres categorías:

a) Recuperación de energía de las corrientes de salida usándolas para calentar las corrientes de entrada, principalmente en el condensador.

b) Condensar el destilado que llega al condensador mediante una corriente externa de gran demanda energética, como puede ser el agua de alimentación a calderas y usar su calor sensible remanente para precalentar la alimentación. El calor sensible remanente es la energía disponible asociada a la diferencia de temperatura entre el destilado y la alimentación, ajustada por la ΔT requerida por los equipos de intercambio de calor.

c) Columnas sin condensador, en las que el destilado se condensa mediante in-

tercambio a contra corriente por contacto de fases entre los vapores de destilado y el líquido alimentado. Esto se da en el interior de la columna y obliga a que la alimentación se dé en el primer plato de la columna o su equivalente teórico para columnas sin platos.

El modelo desarrollado anteriormente es aplicable a las dos primeras categorías en tanto se hagan los cálculos de balance de energía en una envolvente del modelo y sus resultados se le alimenten en términos de los flujos de materia que cumplen con ellos. El modelo de control se resuelve dentro de esa misma envolvente.

5.1. Simulación del modelo no lineal en estado transitorio.

El primer paso para ejecutar la simulación es definir el estado estable y la relación entre las composiciones de componente ligero en el líquido y vapor de cada etapa. El estado estable es la condición en que no hay acumulación en ninguna parte del sistema y se obtiene de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales cuando los términos de acumulación de cada etapa (las derivadas respecto al tiempo) se hacen cero (2.45)

Las relaciones de equilibrio líquido vapor se obtienen a partir de las composiciones del líquido en el estado estable mediante la ecuación (2.29) y la curva de equilibrio resultante se muestra en la figura 5.1.

La línea azul con círculos sobre la curva muestra la fracción de componente ligero saliendo de cada etapa (líquido) y la naranja con asteriscos la fracción del ligero en fase vapor que se encuentra en equilibrio con ella.

Una vez resuelto el sistema para el estado estable se puede correr la simulación, que para fines de comparación se aplica como saltos en escalón del 10% de la magnitud de la variable en ese punto para todas las entradas.

Para evaluar la respuesta del sistema ante el salto en cada entrada, las simulaciones

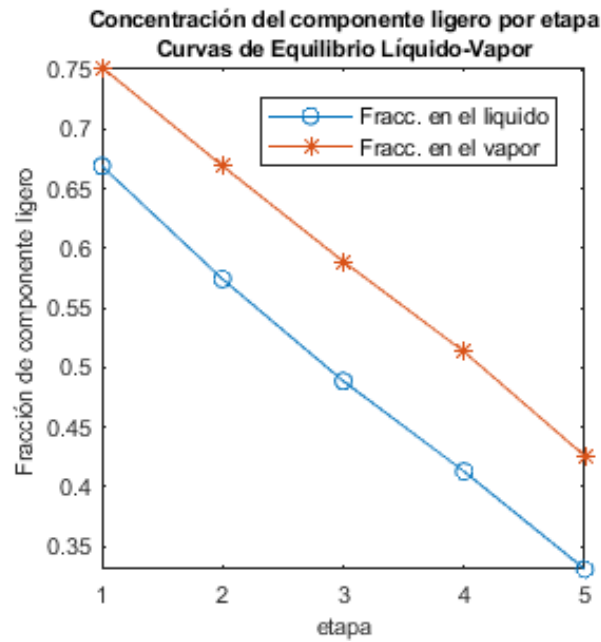


Figura 5.1: Curva de equilibrio líquido-vapor en cada etapa

se hacen por separado. El vector de entradas en el estado estable es:

$$\begin{bmatrix} L_R \\ V_S \\ F \\ z_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.706 \\ 3.206 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Las desviaciones introducidas en las variables de entrada:

$$\begin{bmatrix} L_R \\ V_S \\ F \\ z_F \end{bmatrix}_\delta = \pm \begin{bmatrix} 0.2706 \\ 0.3206 \\ 0.1 \\ 0.05 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

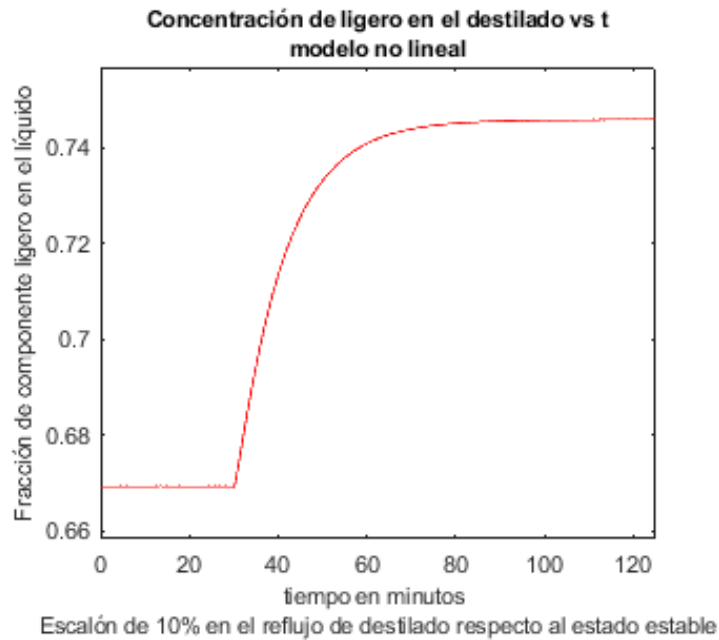


Figura 5.2: Modificación en escalón para el reflujo de destilado a la columna a $t=30$ min, modelo no lineal

y los tiempos (en minutos) a que se presentan los cambios en cada entrada son

$$\begin{bmatrix} t_{L_R,\delta} \\ t_{V_S,\delta} \\ t_{F,\delta} \\ t_{z_F,\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

La secuencia de perturbaciones en las variables de entrada se mantiene a lo largo de todas las simulaciones, y es evidente que primero cambia el flujo de alimentación, después la composición de alimentación seguida del reflujo de destilado y finalmente el retorno de fondos al rehervidor. Aunque se podrían introducir en cualquier momento la secuencia se maneja así porque es más frecuente que las dos primeras sean perturbaciones externas y las dos últimas se alteren para compensar su efecto.

La primera simulación corresponde a un cambio del 10 % en el reflujo de destilado a $t = 30$ min que se muestra en la figura 5.2.

Cabe mencionar también que, aunque la elección de una magnitud del 10% del valor de la variable en el estado estable para los escalones de las variables de entrada es completamente arbitrario, el valor está dentro de lo normal para los flujos. Para la composición resulta un poco alto, pero se optó por ese valor para poder apreciar el impacto de cada variable en el estado transitorio con cambios relativos del mismo orden.

La simulación siguiente es para la misma variable con cambio de -10% en el reflujo de destilado a $t = 30$ min mostrada en la figura 5.3.

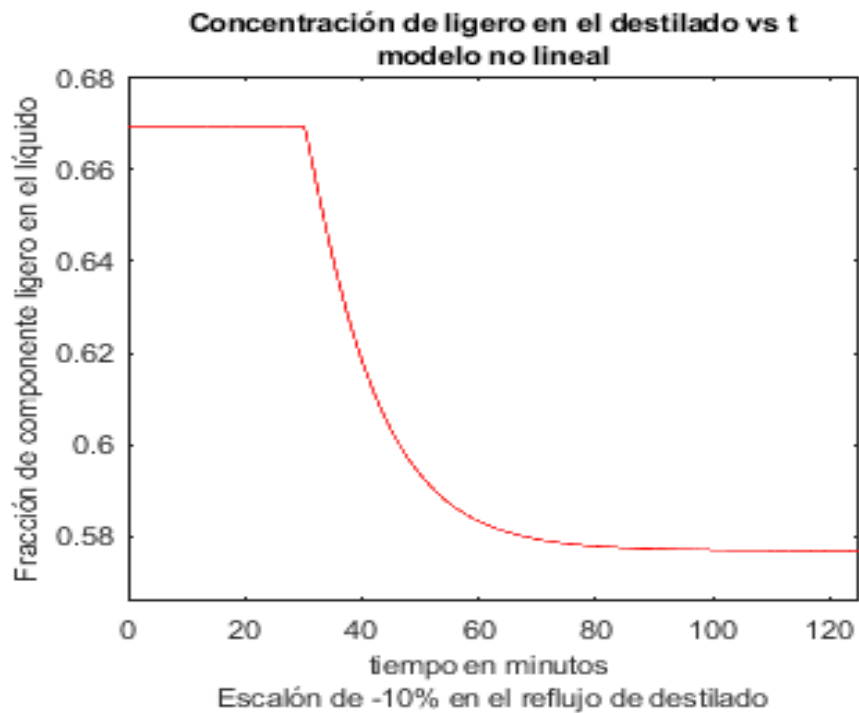


Figura 5.3: Modificación en escalón para el reflujo de destilado a la columna a $t=30$ min

Se puede apreciar que el efecto del cambio de signo en el escalón es perfectamente simétrico en la composición de ligero en el destilado. Esta es una peculiaridad debida a la composición de la alimentación ($z_F = 0.5$) y al número de etapas del equipo. Para la mayoría de los casos el posible incremento en la composición del destilado

al aumentar el reflujo es menor que el descenso en la concentración asociado con la reducción en el reflujo y aunque la apariencia siga siendo relativamente simétrica, habrá un desplazamiento mayor cuando baja el reflujo.

El comportamiento de la simulación para el cambio del 10 % en el retorno de fondos al rehervidor se muestra en la figura 5.4. El comportamiento de la simulación para el

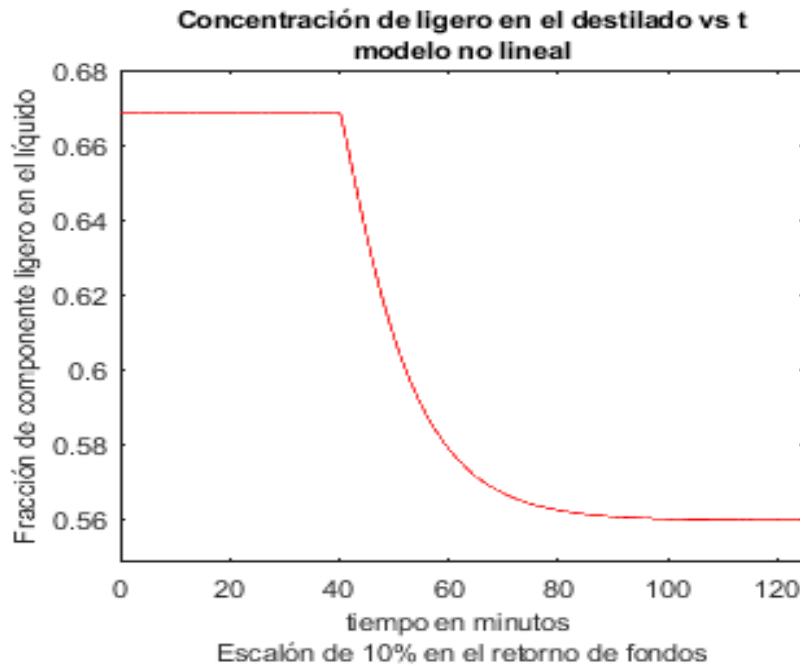


Figura 5.4: Modificación en escalón para el retorno de fondos al rehervidor a $t=40$ min

cambio del -10% en el retorno de fondos al rehervidor puede verse en la figura 5.5. En la figura 5.6 se muestra la respuesta a un 10% de cambio en la fracción de ligero en la alimentación. En la figura 5.7 se muestra la respuesta con -10% en z_F . Igualmente en la figura 5.8 se aprecia la respuesta con 10% en el flujo de alimentación. Y finalmente en la figura 5.9 se muestra la el comportamiento para un -10% en F . Si se realiza una simulación que incluya todos los cambios en escalón, dando el tiempo necesario para que se estabilice el sistema antes del siguiente cambio, pero manteniendo los escalones en el mismo 10% respecto al valor de la variable en el estado estable el gráfico

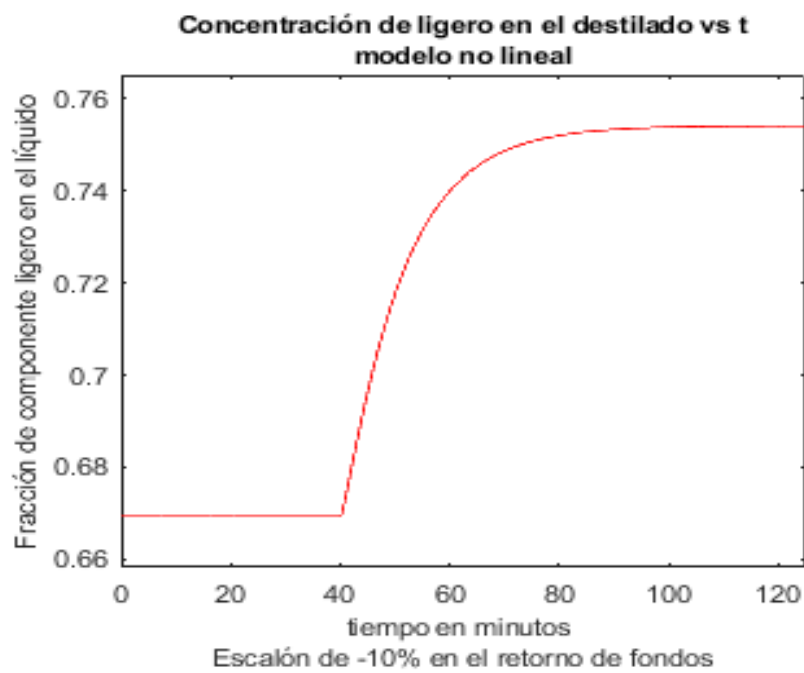


Figura 5.5: Modificación en escalón para el retorno de fondos al rehervidor a $t=40$ min

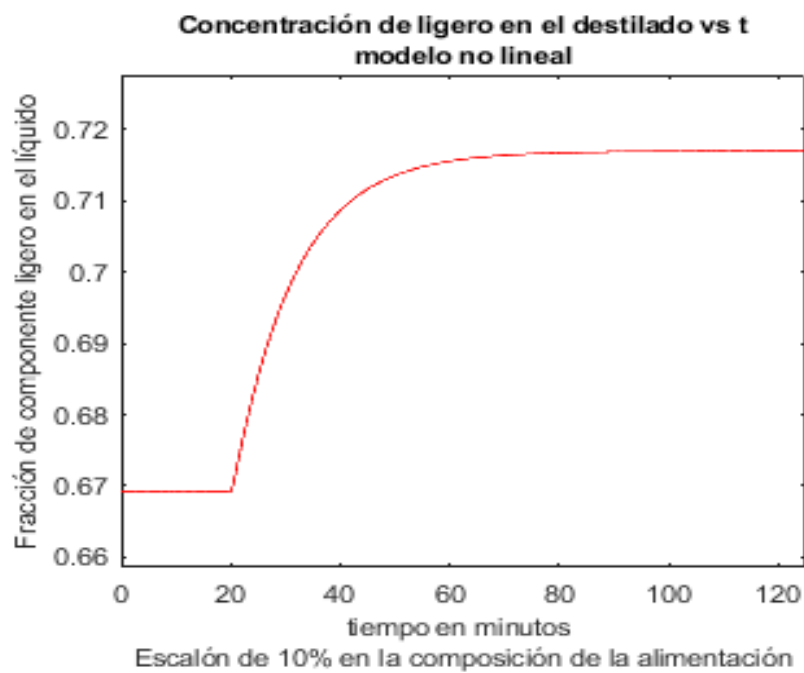


Figura 5.6: Modificación en escalón para la fracción de componente ligero en la alimentación a $t=20$ min

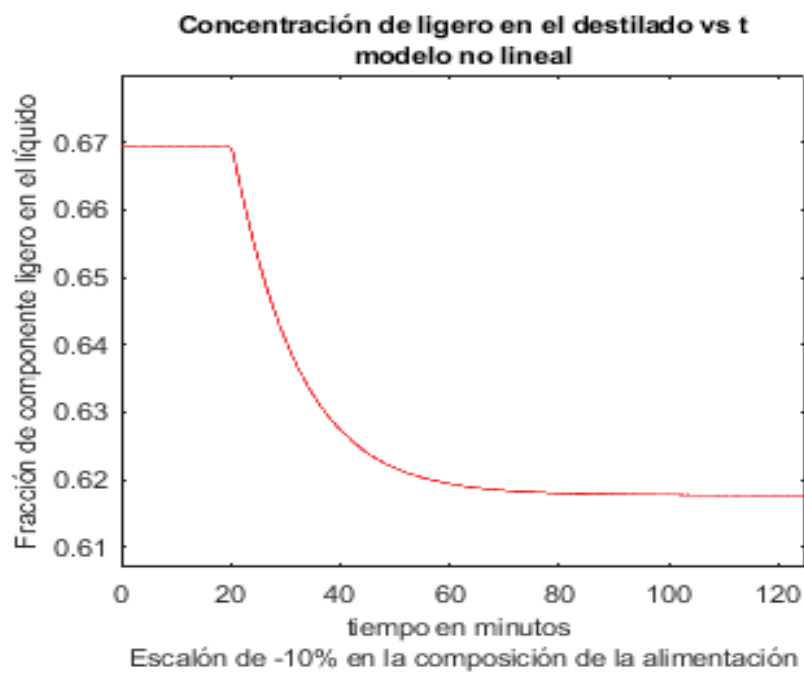


Figura 5.7: Modificación en escalón para la fracción de componente ligero en la alimentación a $t=20$ min

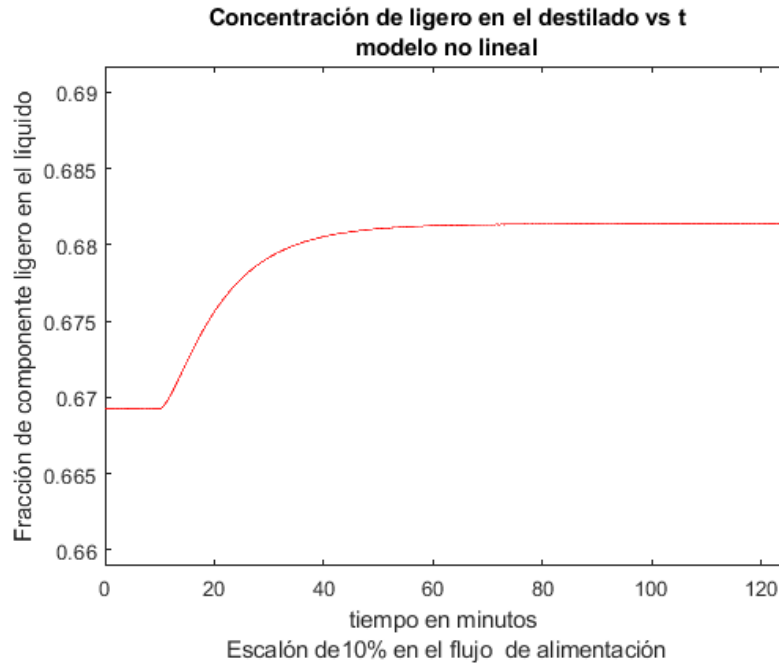


Figura 5.8: Modificación en escalón para el flujo de alimentación a $t=10$ min

resultante es el que se muestra en la figura 5.10. El objetivo de esta simulación es tener un marco de referencia del impacto relativo de cada entrada en el comportamiento del sistema. Todos los cambios son de signo positivo su secuencia es la misma que en las simulaciones individuales: Composición de la alimentación, flujo de alimentación, reflujo de destilado y retorno de fondos.

La composición de la alimentación es casi siempre una perturbación y está definida por procesos aguas arriba de la destilación, pero los flujos de alimentación y reflujos se regulan mediante válvulas de control.

Se aprecia que el impacto de la variación en el flujo de alimentación es bastante menor al de las otras entradas, que son de orden similar. Las alteraciones en los reflujos de destilado y fondos provocan cambios mayores que el de la fracción de ligero en la alimentación. El mayor impacto de todos, como era previsible, lo tiene el cambio en el retorno de fondos, que es quien regula el nivel total de agotamiento en el sistema.

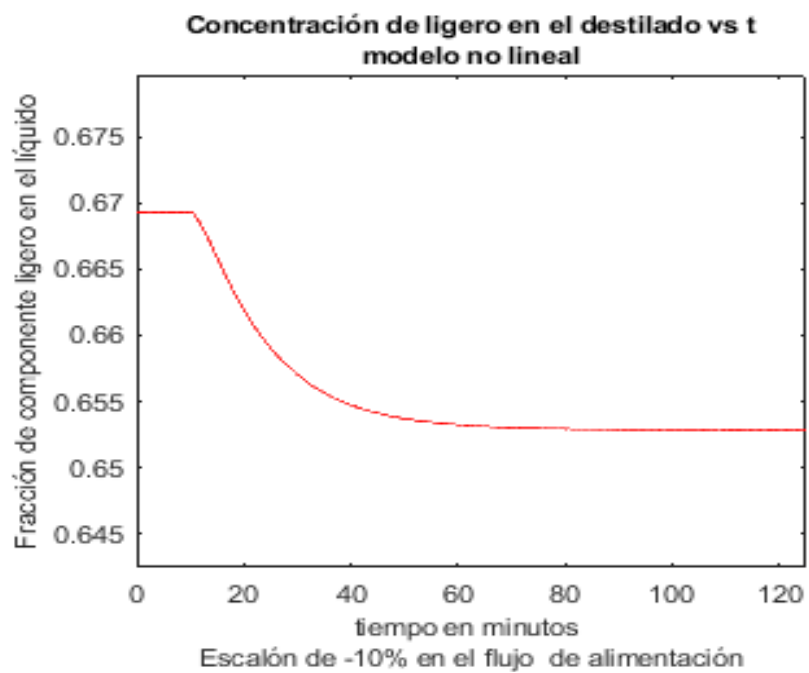


Figura 5.9: Modificación en escalón para el flujo de alimentación a $t=10$ min, modelo no lineal.

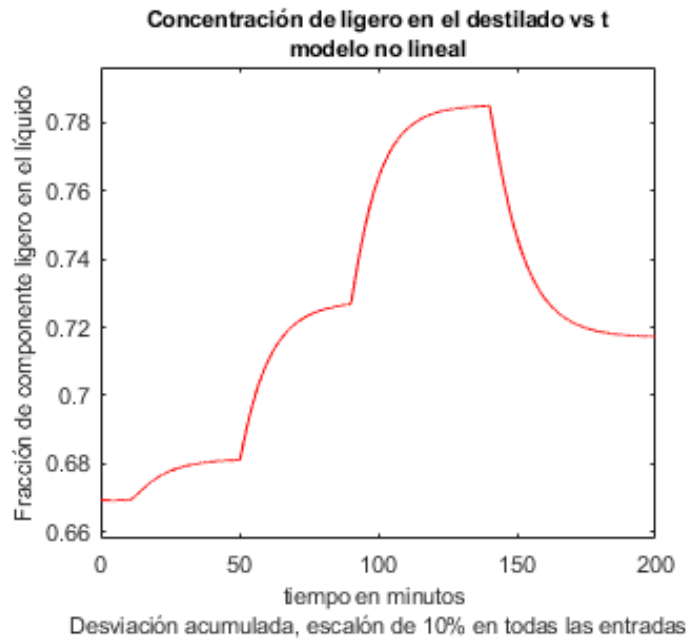


Figura 5.10: Desviación acumulada respecto al estado estable al perturbar todas las entradas

Los cambios inducidos por las perturbaciones en el retorno de fondos son en sentido opuesto a los que provocan las perturbaciones en el flujo de alimentación, reflujo de destilado y composición de la alimentación del mismo signo, por lo que se hace evidente la forma en que se deben usar los cambios en las entradas para compensar el efecto de los cambios en la salida.

Un hallazgo inesperado en las simulaciones es que el modelo no lineal, siendo de quinto orden, se comporta como un sistema autorregulado de primer orden. Al tratar de entender el fenómeno se encontró que cada una de las etapas de un proceso en serie es un sistema de primer orden, cada una con su propio polo (Marlin, 2000; Seborg, Edgar, Mellicamp y Doyle, 2011). Como el modelo que describe cada etapa de equilibrio, especialmente en las secciones de agotamiento y rectificación, es básicamente el mismo, y los parámetros que la definen dependen de los de las etapas adyacentes, mientras no se presenten problemas de flujo interno entre las etapas, retornos a la

columna fuera de la capacidad física del sistema y que los parámetros del sistema no sufran cambios sustanciales, el proceso tenderá a alcanzar un nuevo estado de equilibrio, aunque normalmente no será el estado estable deseado.

Al estudiar la estabilidad del modelo linealizado ya se veían los primeros indicios de esta peculiaridad, al notar que la estructura que se presenta en la matriz de estados es inherentemente estable, pues una condición necesaria, pero no suficiente, para que el sistema sea estable es que su diagonal principal esté formada por elementos de signo negativo y la diagonal principal de la columna de cinco etapas será siempre negativa si se cumplen las condiciones básicas de operabilidad mencionadas anteriormente.

Otro aspecto curioso ya comentado es la simetría de las simulaciones para el cambio en los flujos de retorno de destilado y fondos, que suele tener una variación mayor en la curva descendente, sobre todo si la fracción de ligero en el destilado es muy cercana a 1.0, pues el margen para elevar su composición es casi nulo mientras se maximiza la capacidad de hacerla bajar. En este caso las curvas son prácticamente imágenes especulares mientras que el efecto de cambios en el reflujo de destilado y de retorno de fondos al rehervidor son inversos y casi simétricos -esto en particular sí era de esperarse- debido a que la fracción de ligero en la alimentación es 0.5 y el número de etapas es insuficiente para alcanzar una gran separación, por lo que la diferencia en composición entre destilado y fondos es significativa, pero no muy grande con fracciones extremas del ligero de 0.75 en el destilado y 0.33 en los fondos, contra fracciones de [0.99, 0.01] que podrían obtenerse con un equipo con más de treinta etapas.

5.2. Simulación del modelo linealizado en estado inestable

Para estas simulaciones se parte de los mismos vectores de composiciones, entradas y parámetros en el estado estable que los usados para el modelo no lineal. Como en

la linealización se emplea como punto de referencia el estado estable y los valores de las variables de entrada y de estado no se alejan mucho de él, se esperaba que los resultados fueran muy semejantes.

Los cambios en escalón para las entradas y la secuencia de estos es la misma que para el modelo no lineal.

$$\begin{bmatrix} L_R \\ V_S \\ F \\ z_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.706 \\ 3.206 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$\begin{bmatrix} L_R \\ V_S \\ F \\ z_F \end{bmatrix}_\delta = \pm \begin{bmatrix} 0.2706 \\ 0.3206 \\ 0.1 \\ 0.05 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$\begin{bmatrix} t_{L_R,\delta} \\ t_{V_S,\delta} \\ t_{F,\delta} \\ t_{z_F,\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

La primera simulación corresponde a un cambio del 10 % en el reflujo de destilado a $t = 30$ min. y el resultado se muestra en la figura 5.11. Fácilmente se puede apreciar la similitud entre la curva generada mediante el modelo linealizado y la del modelo no lineal. Para una mejor comparación se sobreponen las curvas en una misma gráfica en la figura 5.12.

Aquí se puede ver que la aproximación del modelo linealizado es muy cercana a los resultados del no linealizado. No se incluyen curvas para otras condiciones de reflujo, pero el modelo sigue dando resultados adecuados mientras el cambio en escalón mantiene el reflujo de destilado dentro de los límites físicos de la variable ($L_{R,\delta} \leq 0.5$). Debido a las características de las variables de entrada y demás parámetros físicos del

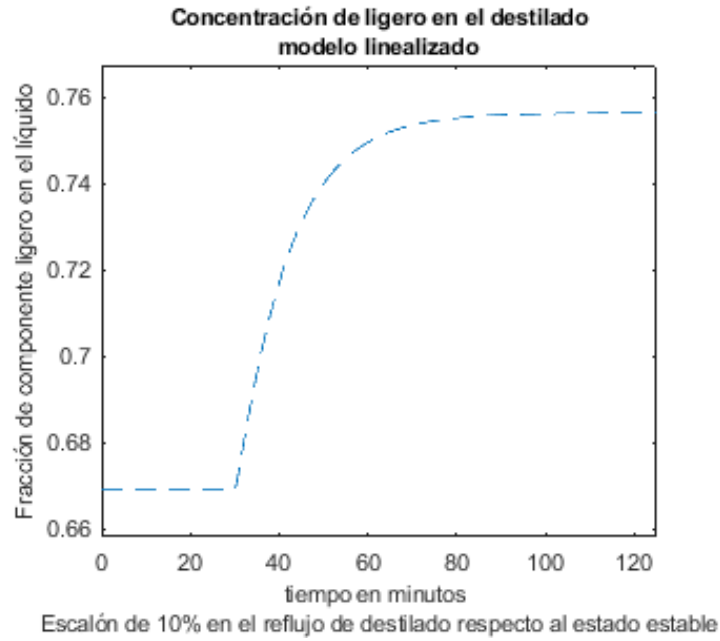


Figura 5.11: Modificación en escalón para el reflujo de destilado a $t=30$ min, modelo linealizado.

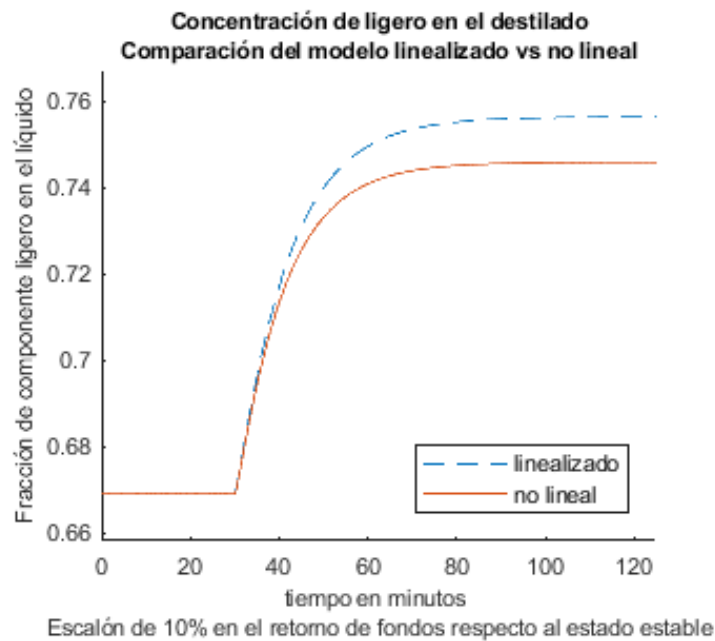


Figura 5.12: Comparación del modelo linealizado contra el modelo no lineal al variar el reflujo de destilado

sistema, los límites físicos de las variables de entrada obligan a que estas mantengan valores cercanos al punto de linealización, y en consecuencia las condiciones requeridas por el método empleado seguirán siendo válidas para todo el rango de valores del retorno de destilado.

En la figura 5.13 se muestra la respuesta a un cambio en la -10% en el reflujo de destilado a $t = 30$ min.

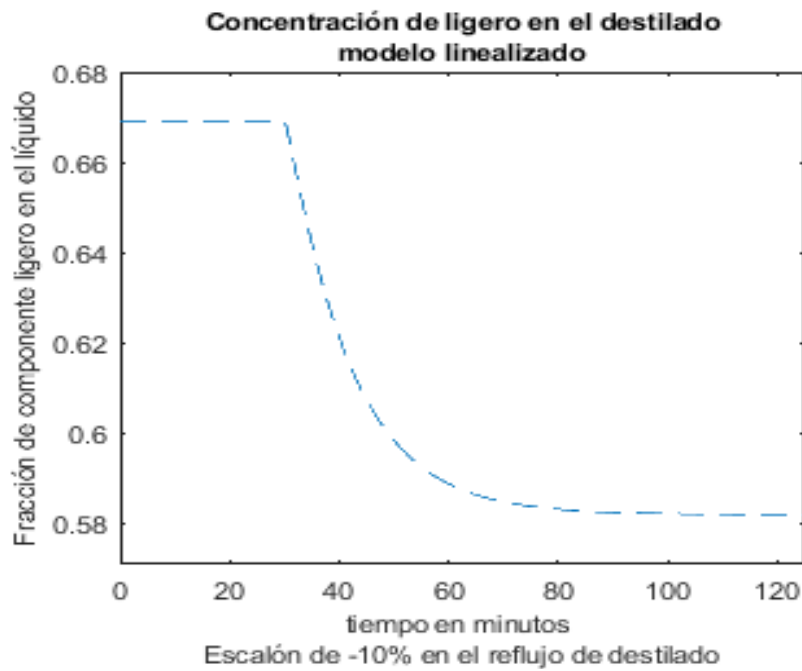


Figura 5.13: Modelo linealizado, cambio negativo en el reflujo de destilado

Para la simulación con cambio de signo en el reflujo de destilado se vuelve a apreciar la simetría mostrada por la composición en el destilado en el caso original y por los mismos motivos relacionados con la composición de la alimentación y tamaño de la columna. La comparación de los dos modelos se aprecia en la figura 5.14. La cercanía en las estimaciones y la simetría se mantienen para todas las variables, como se ve en las simulaciones siguientes. En la figura 5.15 se aprecia la respuesta a un 10% en el retorno de fondos al rehervidor y la comparación entre los modelos en la figura

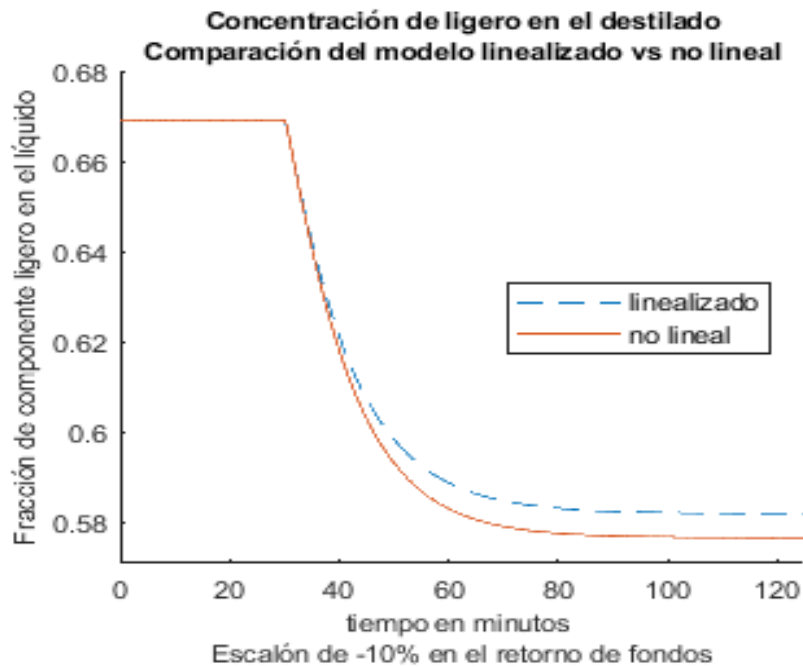


Figura 5.14: Comparación de los modelos. Cambio negativo en el reflujo de destilado

5.16. En la figura 5.17 se muestra la respuesta a un -10% en el retorno de fondos al rehervidor y la comparación entre los modelos en la figura 5.18. En la figura 5.19 se muestra la respuesta a un 10% de cambio en la fracción de ligero en la alimentación y la comparación entre los modelos en la figura 5.20.

En la figura 5.21 se muestra la respuesta a un -10% de cambio en la fracción de ligero en la alimentación y la comparación entre los modelos en la figura 5.22. En la figura 5.23 se muestra la respuesta a un 10% de cambio en el flujo de alimentación y la comparación entre los modelos en la figura 5.24. Finalmente en la figura 5.25 se muestra la respuesta a un -10% de cambio en el flujo de alimentación, la comparación entre los modelos se puede ver en la figura 5.26.

Realizando el mismo ejercicio de simulación con todos los cambios en escalón que se aplicó al modelo no linealizado, dando el tiempo necesario para que se estabilice el sistema antes de la modificación a las entradas, pero manteniendo los escalones en el mismo 10% respecto al valor de la variable en el estado estable, el gráfico se

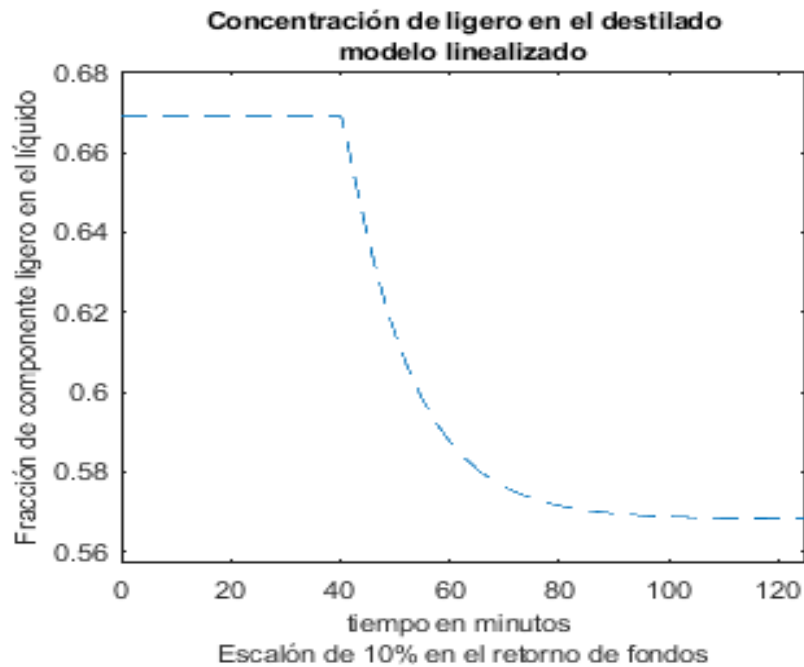


Figura 5.15: Modelo linealizado, cambio positivo en el retorno de fondos.

muestra en la figura 5.27 y la comparación de modelos en la figura 5.28. Todos los resultados obtenidos reafirman la observación de que el modelo linealizado da una estimación adecuada del comportamiento del sistema y se requiere una sucesión de cambios en las variables de entrada, y que produzcan desviaciones en la salida en la misma dirección, para que el resultado se aleje en forma significativa respecto a la predicción del modelo no lineal. Todo ello sin olvidar las limitaciones impuestas desde el desarrollo del modelo original, que son significativas. Mientras se emplee el modelo dentro de las condiciones para las que fue diseñado, el resultado de la linealización se puede considerar tan efectivo, o casi, como el modelo no lineal.

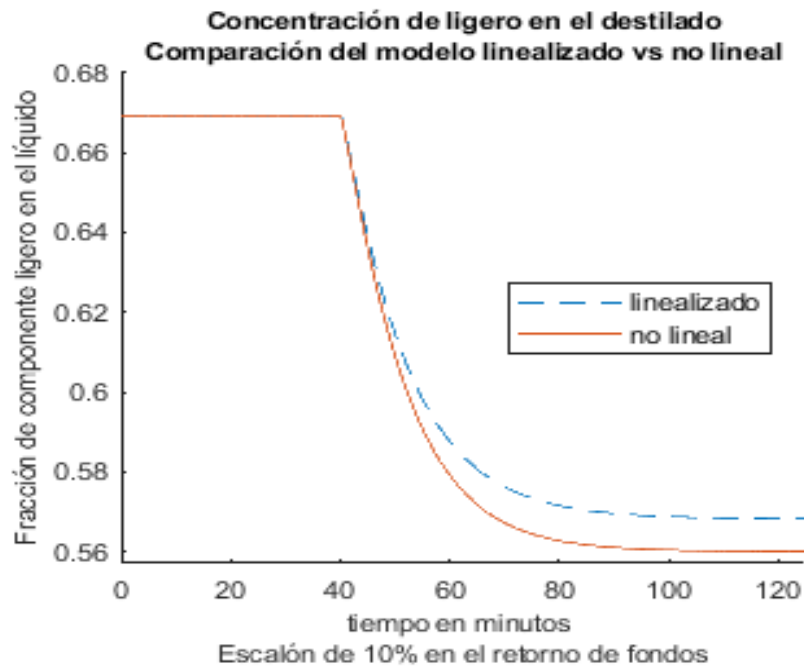


Figura 5.16: Comparación de modelos, cambio positivo en el retorno de fondos

5.3. Simulación del modelo de control de lazo cerrado con retroalimentación total de estados

Para las simulaciones del lazo cerrado se parte de los mismos vectores de composiciones, entradas y parámetros en el estado estable que los usados anteriormente. El objetivo del lazo cerrado es corregir las desviaciones en las salidas (respecto a los valores deseados) retroalimentando el vector de estados que se obtiene al alterar el sistema para neutralizar las divergencias respecto al punto de referencia. En aplicaciones de control el punto de referencia es el estado estable.

Nuevamente los cambios en escalón para las entradas y la secuencia en que se presentan los cambios es la misma que se usó para el modelo no lineal.

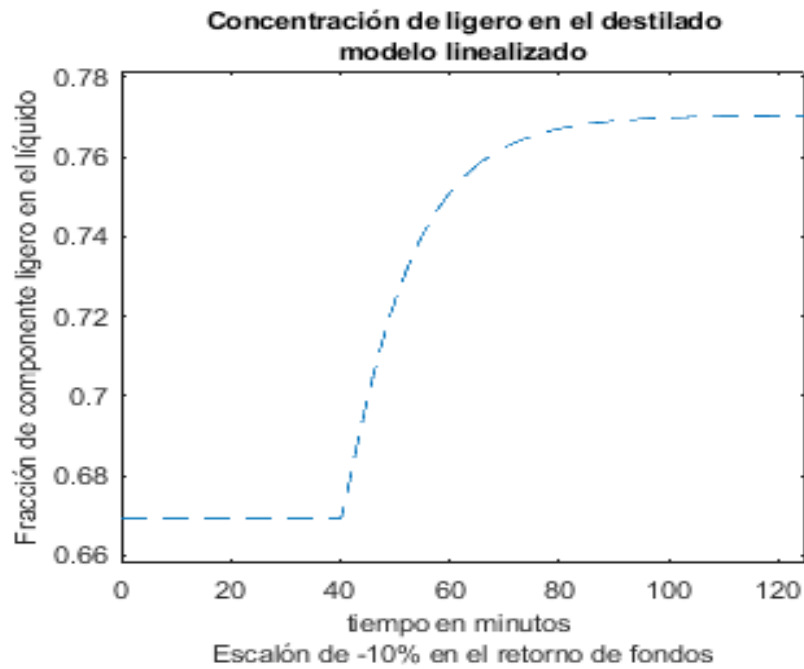


Figura 5.17: Modelo linealizado, cambio negativo en el retorno de fondos.

$$\begin{bmatrix} L_R \\ V_S \\ F \\ z_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.706 \\ 3.206 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\begin{bmatrix} L_R \\ V_S \\ F \\ z_F \end{bmatrix}_\delta = \pm \begin{bmatrix} 0.2706 \\ 0.3206 \\ 0.1 \\ 0.05 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$\begin{bmatrix} t_{L_R,\delta} \\ t_{V_S,\delta} \\ t_{F,\delta} \\ t_{z_F,\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

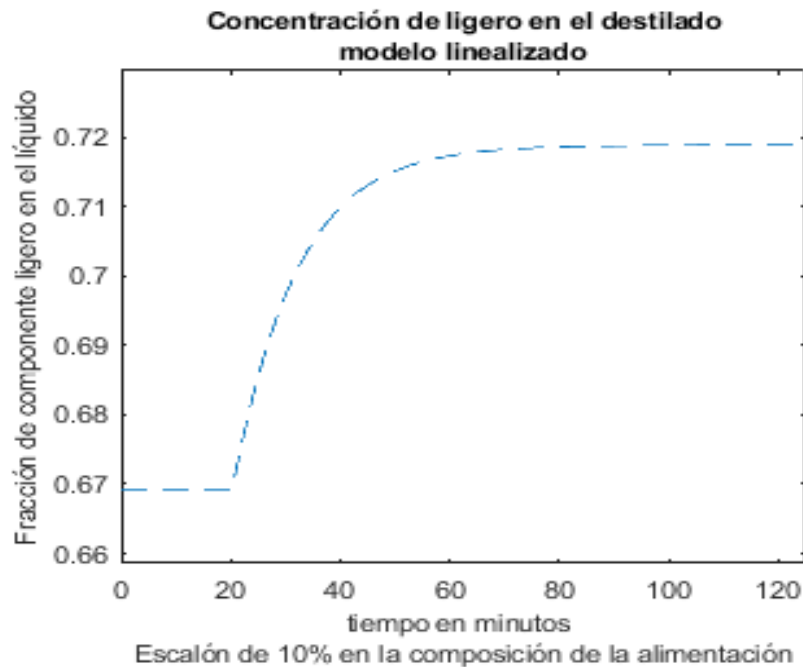


Figura 5.19: Modelo linealizado, cambio positivo en la composición de alimentación.

respecto al estado estable.

Como era de esperarse, ante el cambio en escalón del reflujo de destilado se produce un cambio en las variables de salida, pero el la RTE las hace volver al estado estable en un tiempo aproximado de 20 minutos. En términos de variable de estado la gráfica es la figura 5.30. La escala en este caso no puede reducirse a menos que se muestren las salidas por separado, pero aún sin ser lo ideal, se puede apreciar que el comportamiento de las dos variables está sincronizado y no hay desplazamiento entre ellas. En columnas de mayor tamaño y con alimentación descentrada siempre hay desplazamiento en la respuesta de las variables de salida por los diferentes tiempos totales de retención en las secciones de agotamiento y rectificación.

La simulación siguiente es para la misma variable con cambio de -10% en el reflujo de destilado a $t = 30$ min y puede verse en las figuras 5.31 y 5.32. Se puede apreciar en las simulaciones con cambio en el reflujo de destilado que ante el cambio de signo

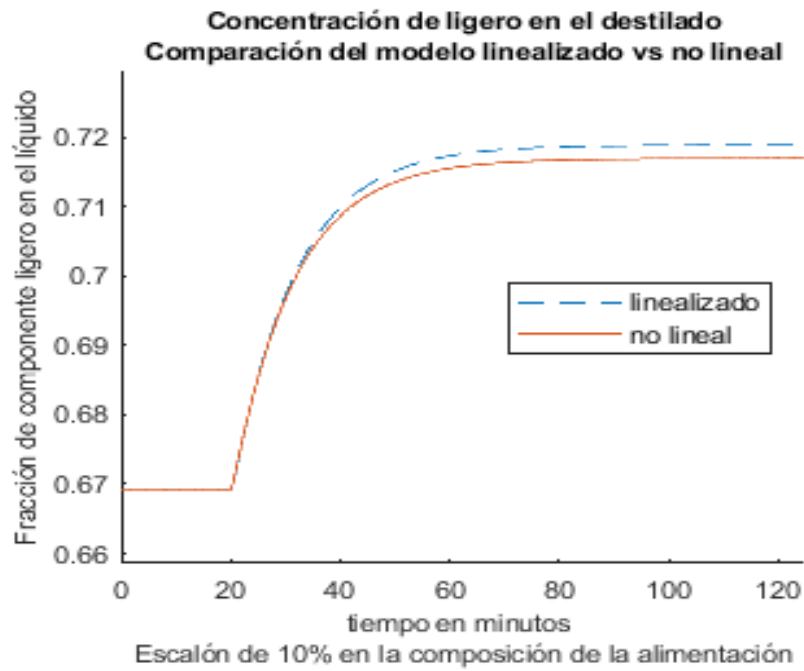


Figura 5.20: Comparación de modelos, cambio positivo en la composición de alimentación.

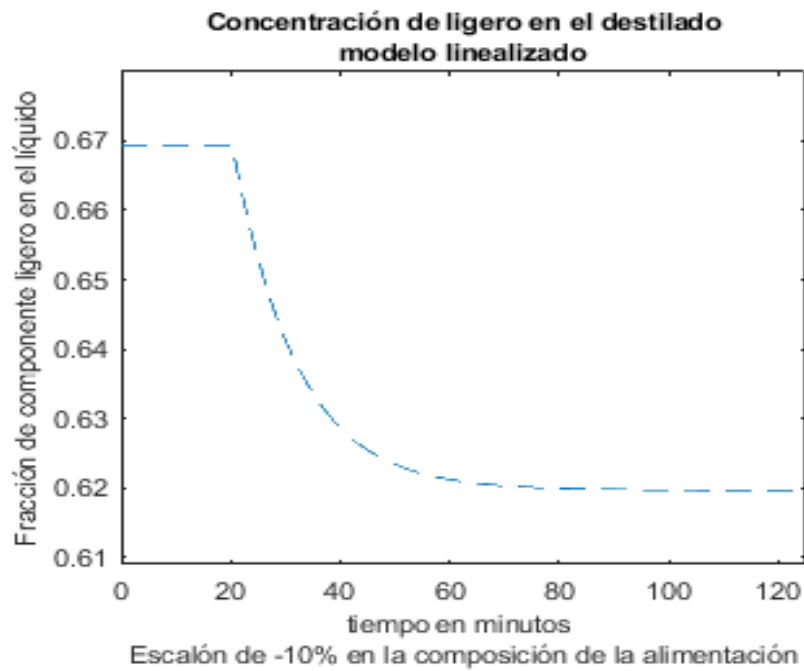


Figura 5.21: Modelo linealizado, cambio negativo en la composición de alimentación.

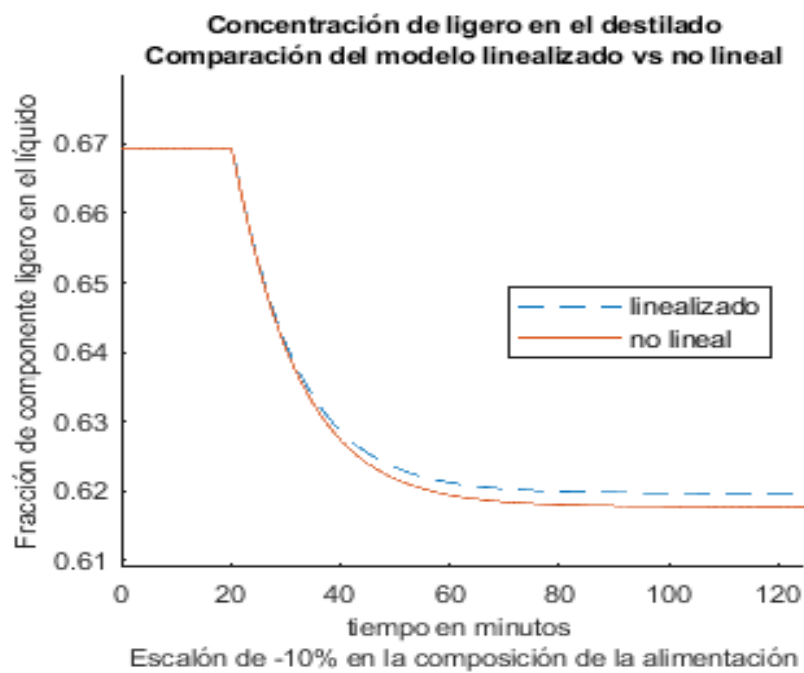


Figura 5.22: Comparación de modelos, cambio negativo en la composición de alimentación.

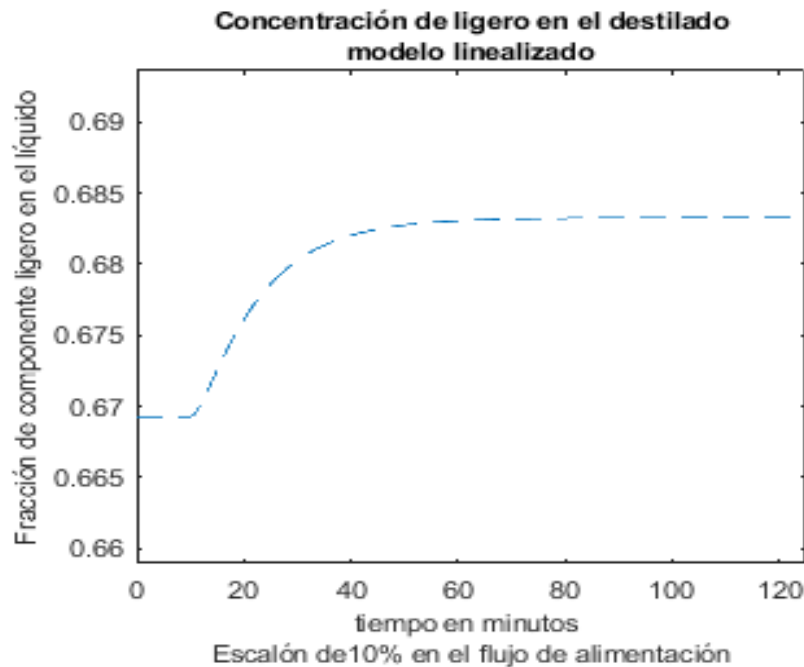


Figura 5.23: Modelo linealizado, cambio positivo en el flujo de alimentación.

en el escalón se mantiene la simetría en las salidas, que al igual que la sincronización de la composición de destilado y fondos se debe a la composición de la alimentación y a la configuración del equipo.

Para el 10% en el retorno de fondos al rehervidor los resultados se muestran en las figuras 5.33 y 5.34.

Para -10% en el retorno de fondos al rehervidor ver las figuras 5.35 y 5.36.

Para un cambio en escalón del 10% en la fracción de ligero en la alimentación, los resultados se muestran en la figura 5.37.

Para -10% en z_F los resultados se pueden ver en la figura 5.35.

Para 10% en el flujo de alimentación ver la figura 5.39.

LCRTE como variable desviada ante un cambio del 10% en el flujo de alimentación- Finalmente para el escalón de -10% en F ver la figura 5.40 y ?? . Todas las simu-

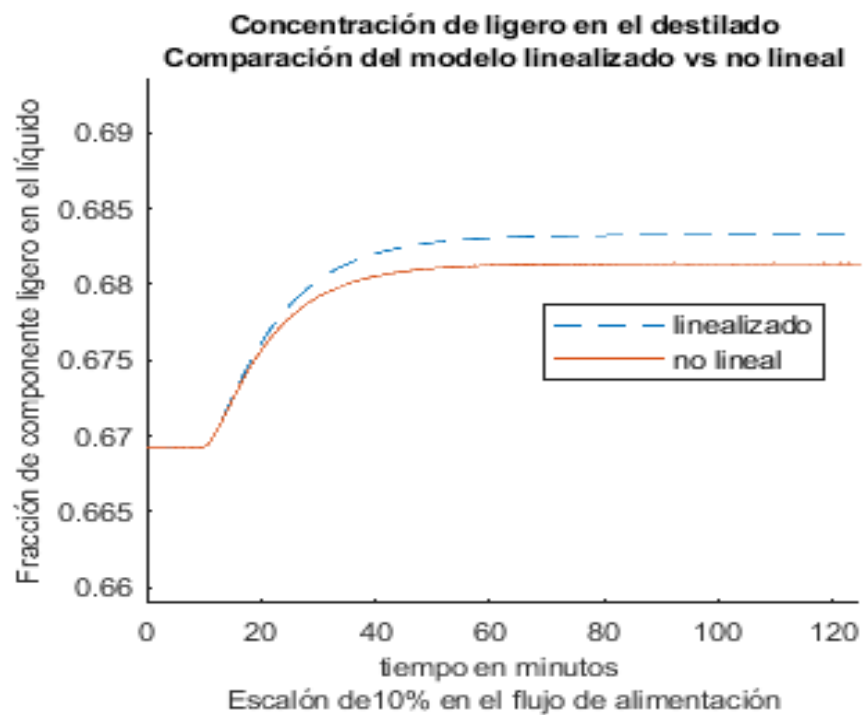


Figura 5.24: Comparación de modelos, cambio positivo en el flujo de alimentación.

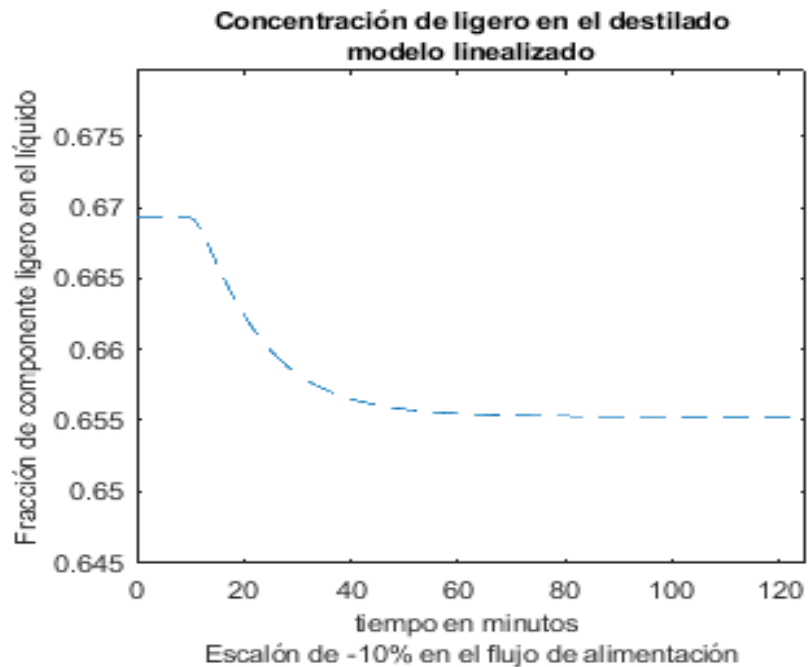


Figura 5.25: Modelo linealizado, cambio negativo en el flujo de alimentación.

laciones presentan características similares, como son una mayor desviación en las composiciones de fondos que en el destilado, rápida respuesta del lazo cerrado ante las desviaciones, simetría, sincronización en las salidas y regreso total del sistema al estado estable. El origen de las primeras está bien identificado, pero el regreso de cada variable al punto de ajuste es un resultado deseado, pero en cierto modo inesperado, porque el lazo empleado es retroalimentación proporcional, que cuando se aplica al control de variables individuales se caracteriza por ser incapaz de alcanzar el estado inicial del sistema.

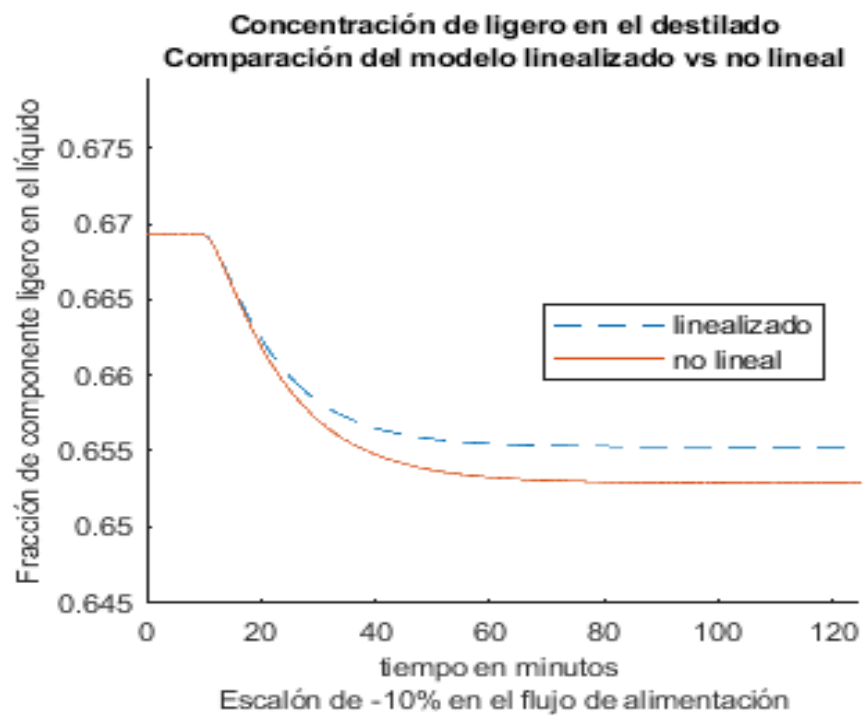


Figura 5.26: Comparación de modelos, cambio negativo en el flujo de alimentación.

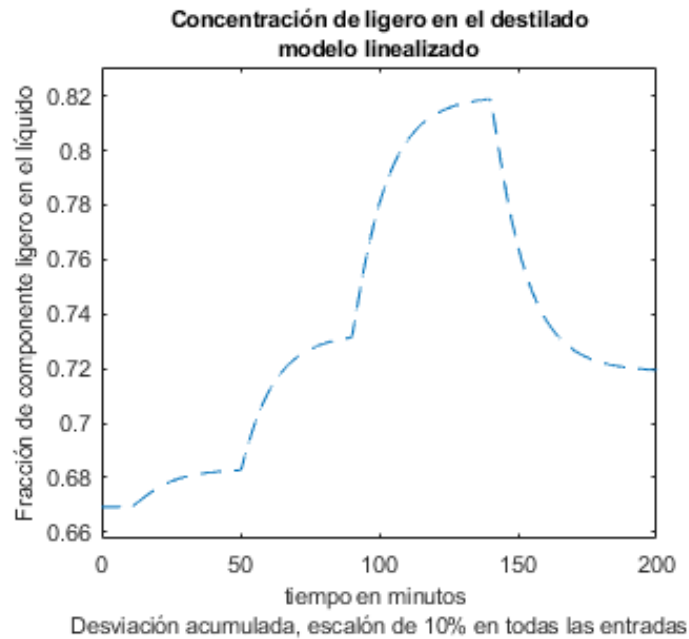


Figura 5.27: Modelo linealizado, acumulación de cambios en sentido positivo para todas las entradas.

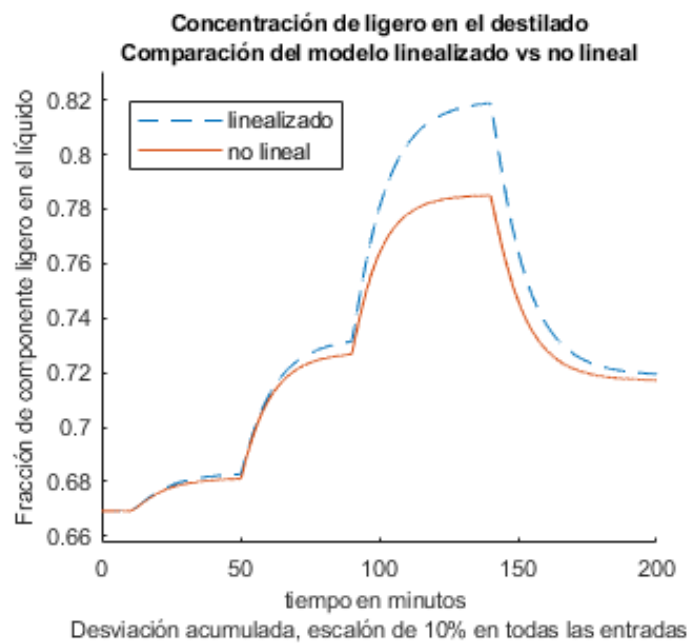


Figura 5.28: Comparación de modelos, acumulación de cambios en sentido positivo para todas las entradas.



Figura 5.29: LCRTE. Respuesta de ligeros en el destilado y fondos como variable desviada ante un cambio del 10% en el reflujo de destilado

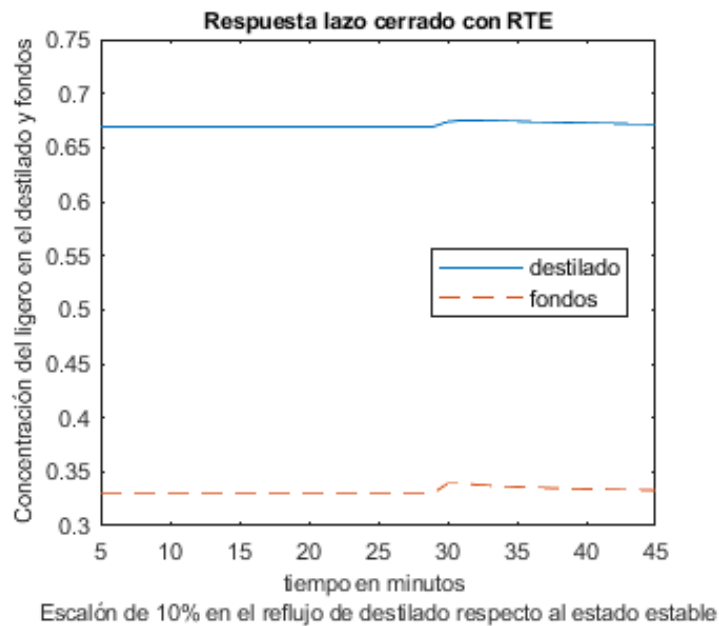


Figura 5.30: LCRTE. concentración de ligeros en el destilado y fondos como variable de estado ante un cambio del 10% en el reflujo de destilado.

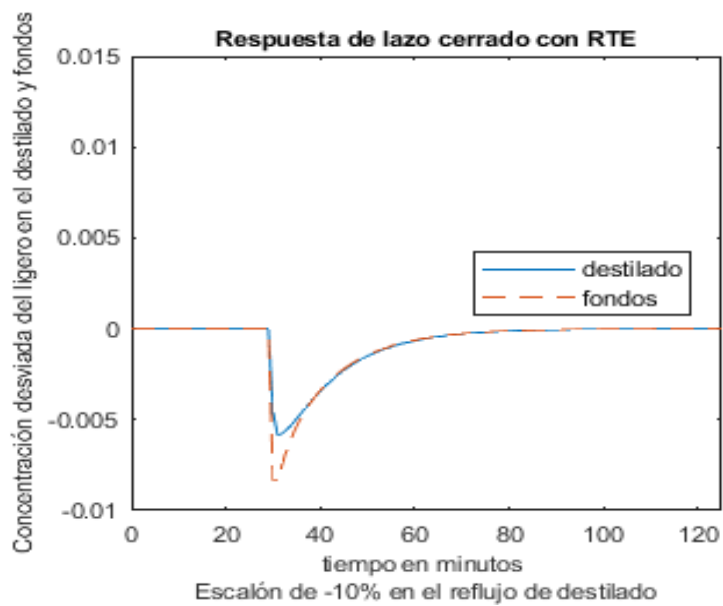


Figura 5.31: LCRTE como variable desviada ante un cambio del -10% en el reflujo de destilado

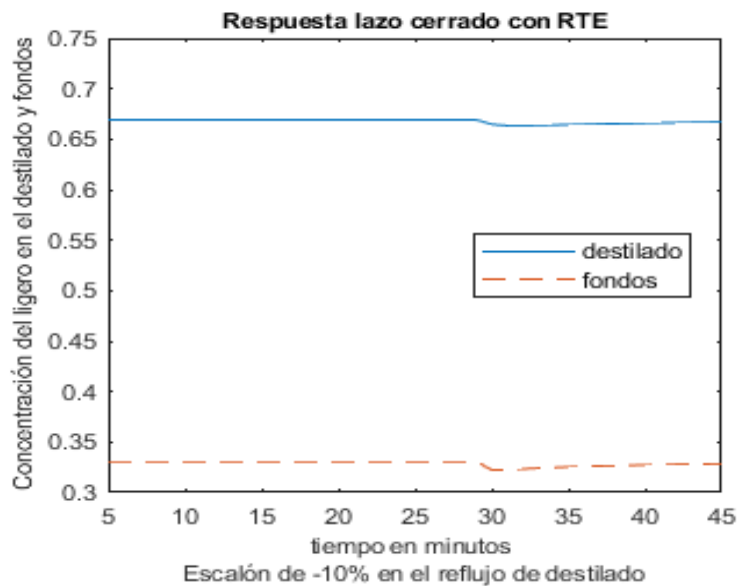


Figura 5.32: LCRTE como variable de estado ante un cambio del -10% en el reflujo de destilado

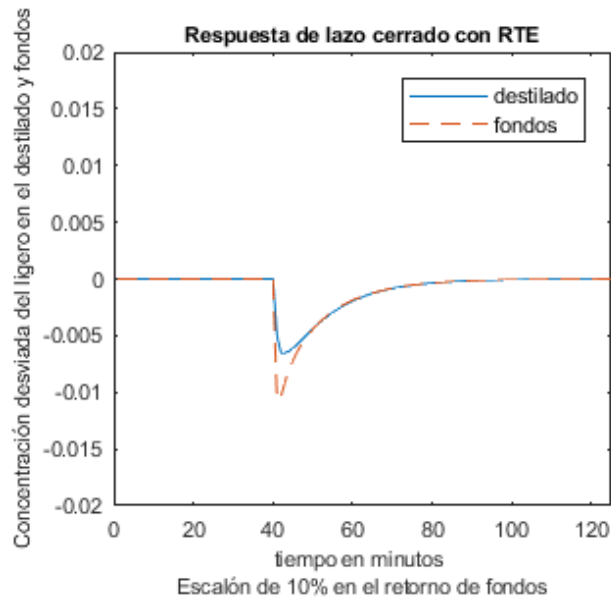


Figura 5.33: LCRTE como variable desviada ante un cambio del 10% en el retorno de fondos

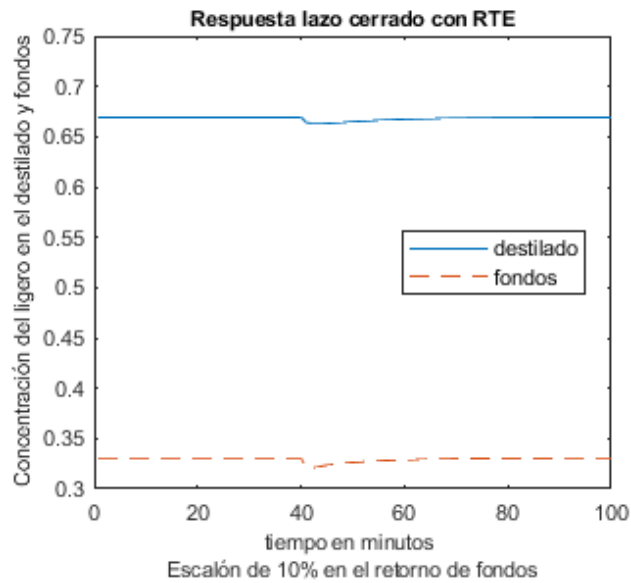


Figura 5.34: LCRTE como variable de estado ante un cambio del 10% en el retorno de fondos

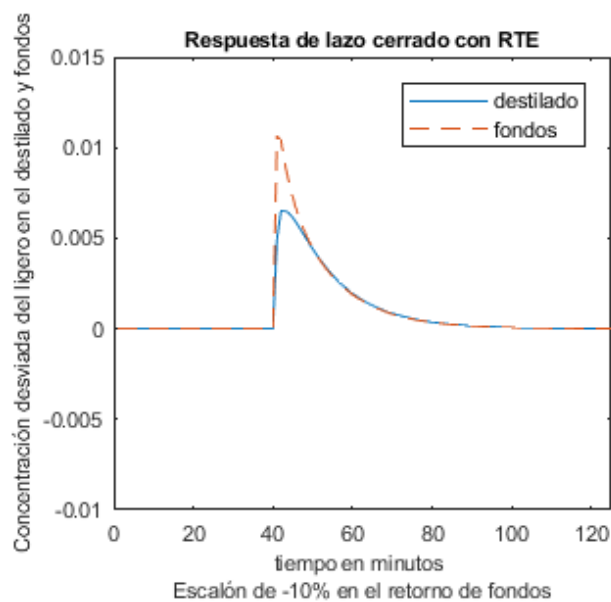


Figura 5.35: LCRTE como variable desviada ante un cambio del -10% en el retorno de fondos

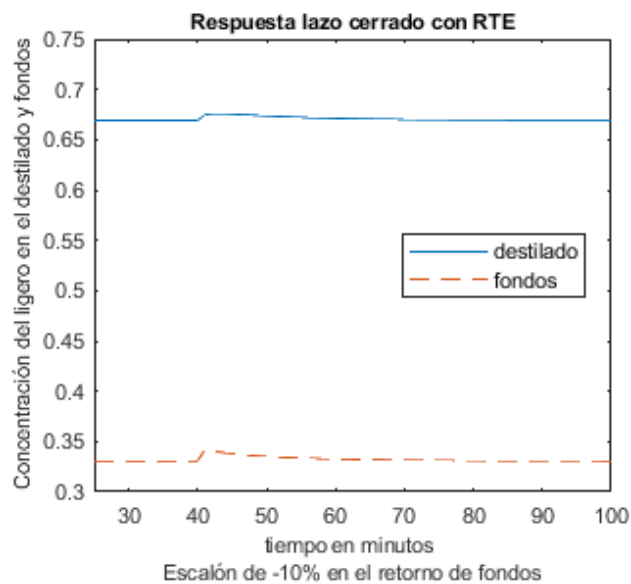


Figura 5.36: LCRTE como variable de estado ante un cambio de -10% en el retorno de fondos

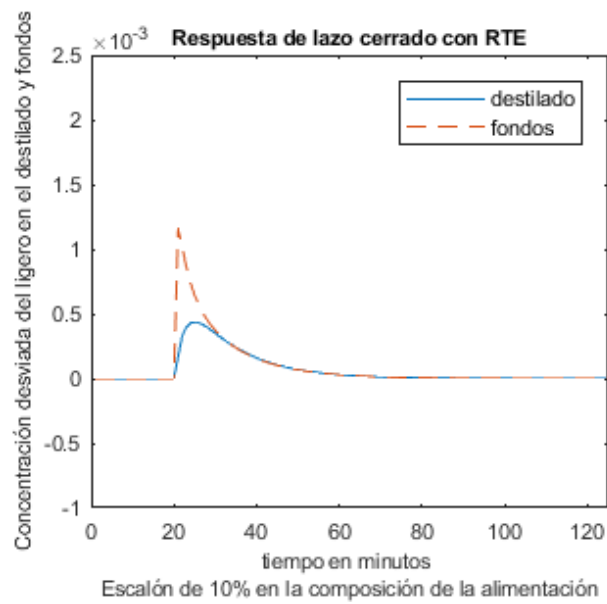


Figura 5.37: LCRTE como variable desviada ante un cambio del 10% en la composición de la alimentación

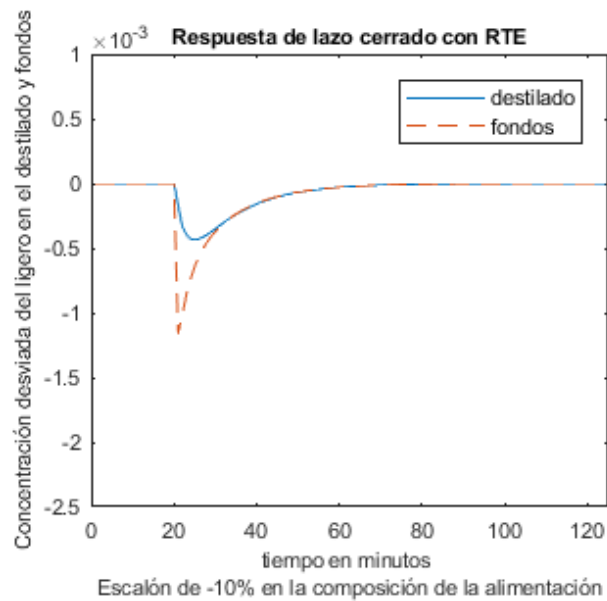


Figura 5.38: LCRTE como variable desviada ante un cambio del -10% en la composición de la alimentación

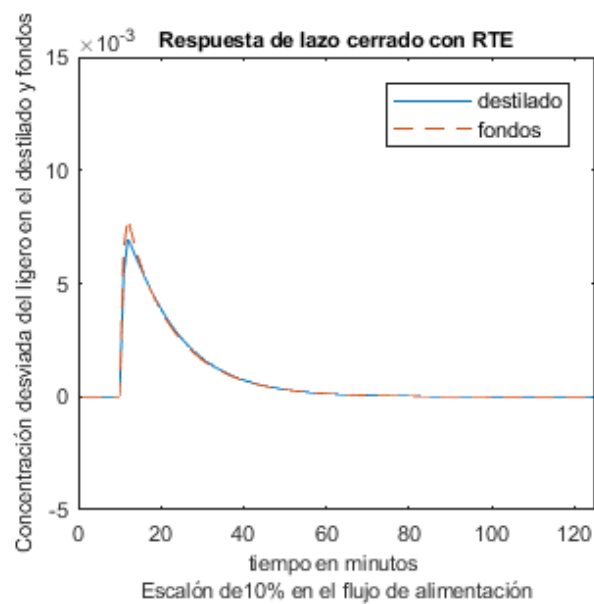


Figura 5.39: LCRTE como variable desviada ante un cambio del 10% en el flujo de alimentación

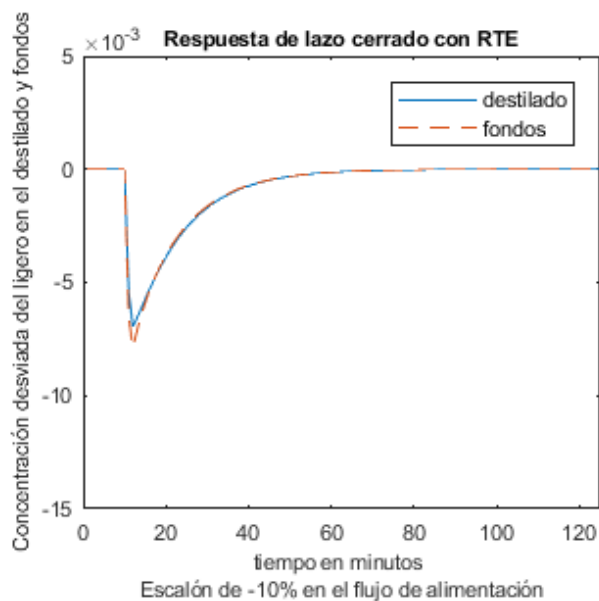


Figura 5.40: LCRTE como variable desviada ante un cambio del -10% en el flujo de alimentación

5.4. Comparación del control en lazo cerrado contra el lazo abierto.

Es conveniente contrastar el comportamiento de los lazos de control, pues al estudiar el modelo no lineal se demostró que se puede controlar el vector de variables de salida manipulando las entradas y pudiera pensarse que la respuesta del sistema es similar ante variaciones similares en las entradas. Que se puede emplear lazos individuales para llevar el sistema en una dirección específica no está en discusión, pues es la forma en que se han controlado las columnas de destilación por más de un siglo, lo que falta por definir es si el manejo con un lazo cerrado con retroalimentación total de estado (LCRTE) ofrece alguna ventaja y que tan grande es esta.

Entre otros inconvenientes, para el control en lazo abierto se requiere conocer a fondo la trayectoria (dirección, velocidad de cambio y magnitud) que siguen las variables controladas ante diferentes perturbaciones y el efecto que tiene en ellas la manipulación de las variables de control; también es imperativo conocer el tiempo que tarda en estabilizarse el sistema y su comportamiento ante variaciones simultáneas de perturbaciones y variables de control.

Para fines prácticos, en las representaciones siguientes se muestran en la misma gráfica las simulaciones del modelo linealizado en lazo abierto y LCRTE para los cambios en escalón analizados anteriormente. En las simulaciones se usan los mismos vectores de composiciones, entradas y parámetros en el estado estable que en los casos anteriores.

$$\begin{bmatrix} L_R \\ V_S \\ F \\ z_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.706 \\ 3.206 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$\begin{bmatrix} L_R \\ V_S \\ F \\ z_F \end{bmatrix}_\delta = \pm \begin{bmatrix} 0.2706 \\ 0.3206 \\ 0.1 \\ 0.05 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$\begin{bmatrix} t_{L_R,\delta} \\ t_{V_S,\delta} \\ t_{F,\delta} \\ t_{z_F,\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

La primera simulación corresponde a un cambio del 10 % en el reflujo de destilado a $t = 30$ min y se muestra en la figura 5.41. La simulación siguiente es para la misma

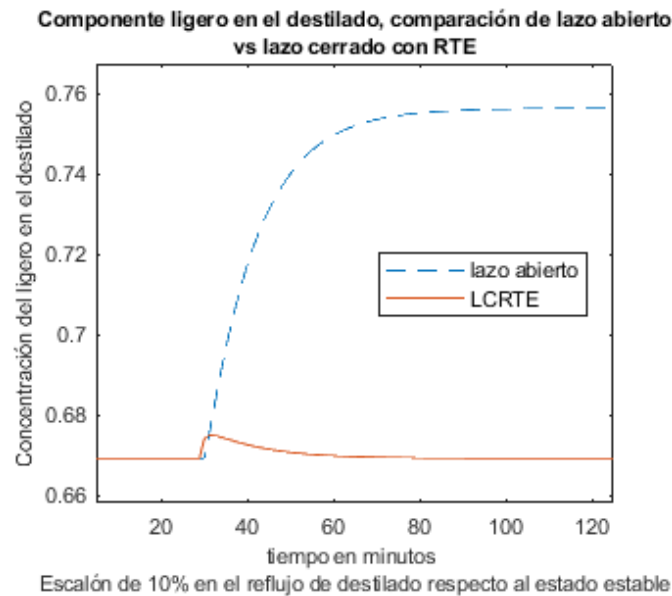


Figura 5.41: Comparación de lazo abierto vs LCRTE con cambio de 10 % en reflujo de destilado.

variable con cambio de -10% en el reflujo de destilado a $t = 30$ min y se muestra en la figura 5.42. Como ya se comentaba, el lazo cerrado reacciona con rapidez ante la variación introducida y mediante la acción combinada de las entradas hace volver el sistema al estado estable en un tiempo mucho menor que el que tarda el lazo abierto

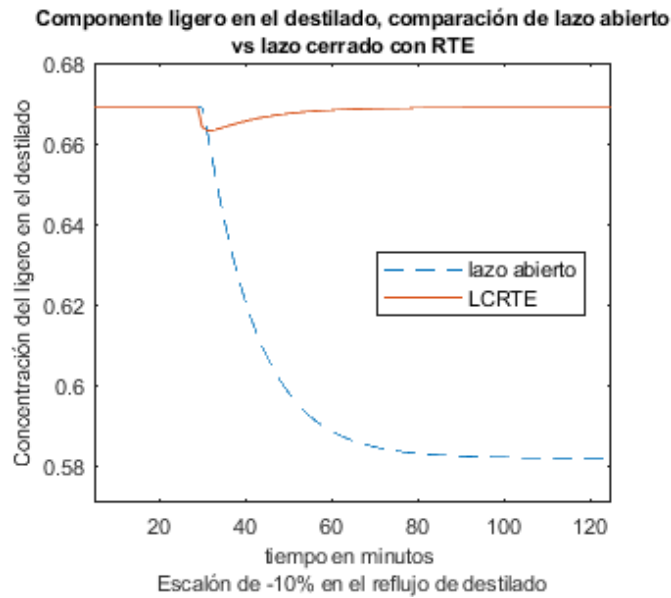


Figura 5.42: Lazo abierto vs LCRTE con cambio de -10 % en reflujo de destilado.

en alcanzar la estabilidad y los cambios en las salidas difieren aproximadamente en un orden de magnitud, que si se enfoca desde la perspectiva de producto fuera de especificación generado, puede ser crítico para el proceso. Se mantienen las características ya observadas de simetría y sincronización ya comentadas previamente.

Se muestra la comparación para los cambios en las diferentes entradas para comprobar si se trata de una tendencia general o es un caso particular para el reflujo de destilado. Para el 10 % en el retorno de fondos al rehervidor la simulación se muestra en la figura 5.43. Para -10 % en el retorno de fondos al rehervidor la simulación se muestra en la figura 5.44. Para el retorno de fondos al rehervidor el comportamiento es en sentido opuesto al del reflujo de destilado, pero básicamente el mismo en cuanto a la relación de magnitud de la desviación máxima y los tiempos de estabilización. Como se vió en la simulación combinada, estas son las variables de control de mayor impacto sobre las salidas.

Para 10 % en la fracción de ligero en la alimentación ver la figura 5.45 y la 5.46

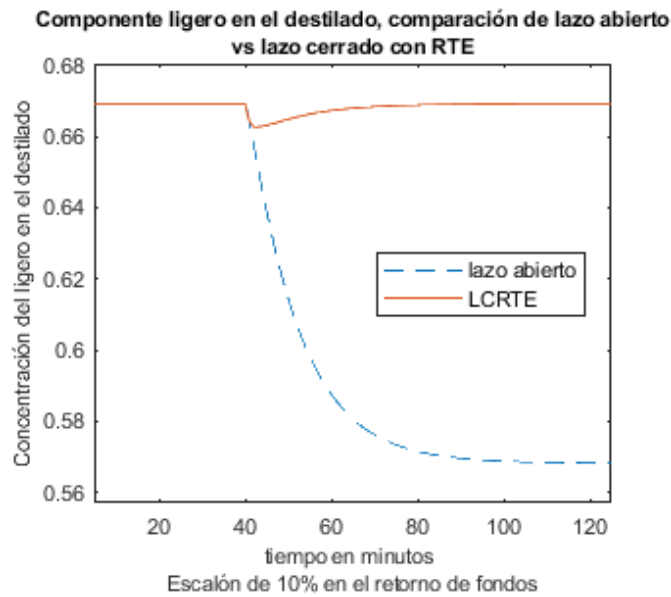


Figura 5.43: Comparación de lazo abierto vs LCRTE con cambio de 10% en retorno de fondos.

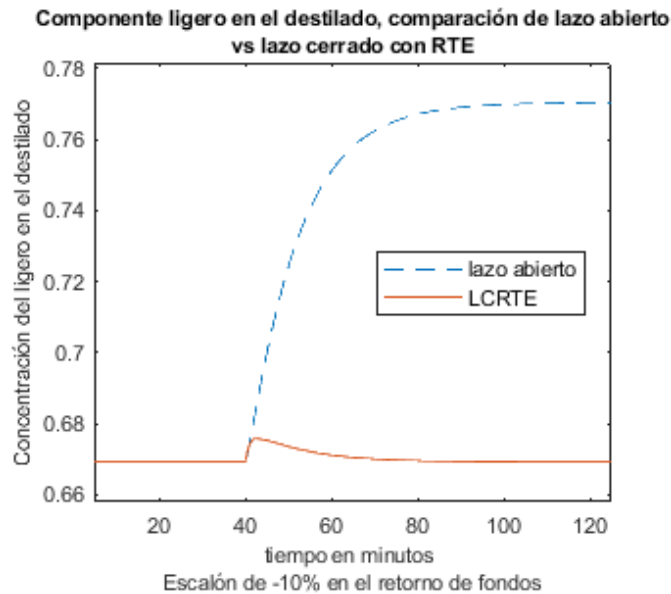


Figura 5.44: Comparación de lazo abierto vs LCRTE con cambio de -10% en retorno de fondos.

para el salto de signo opuesto. Las diferencias entre los lazos de control para cambios

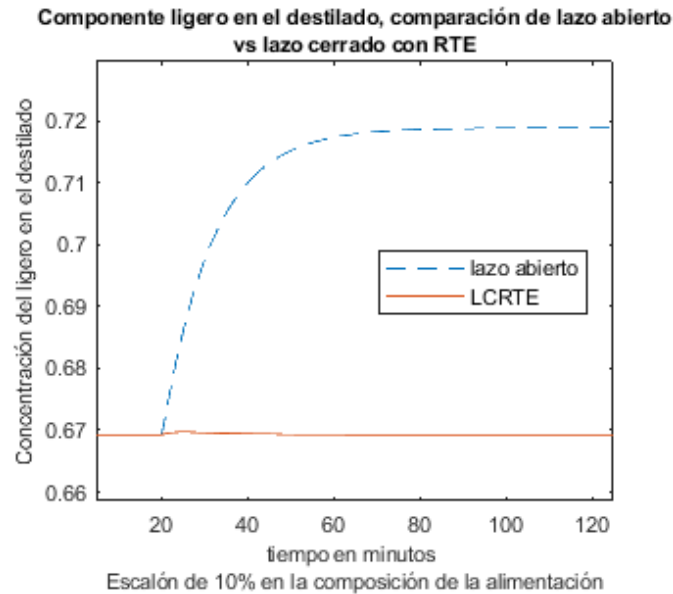


Figura 5.45: Comparación de lazo abierto vs LCRTE con cambio de 10% en la composición de alimentación

en la composición de alimentación son aún mayores que para los flujos. Tomando en consideración la naturaleza de esta variable, la observación más relevante del gráfico es que, ante cambios externos, el LCRTE es capaz de compensarlo eficazmente, con una respuesta muy rápida y desviación mínima respecto al estado de referencia.

Para 10% en el flujo de alimentación favor de ver la figura 5.47 y la 5.48 para el salto de signo opuesto.

Para las variaciones en el flujo de alimentación el efecto del cambio en escalón, en términos absolutos es pequeño, aunque la diferencia en magnitudes entre los dos esquemas es menor que para cualquiera de las otras variables, sigue siendo muy grande y se mantiene la relación entre los tiempos de estabilización.

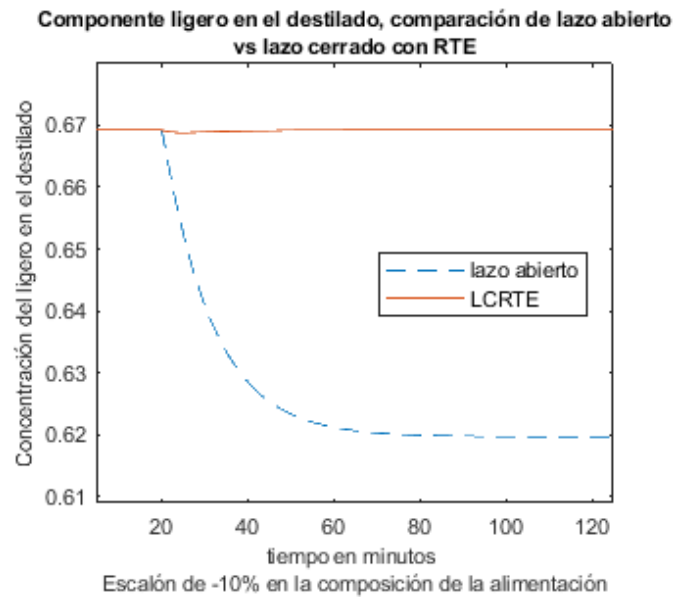


Figura 5.46: Comparación de lazo abierto vs LCRTE con cambio de -10% en la composición de alimentación

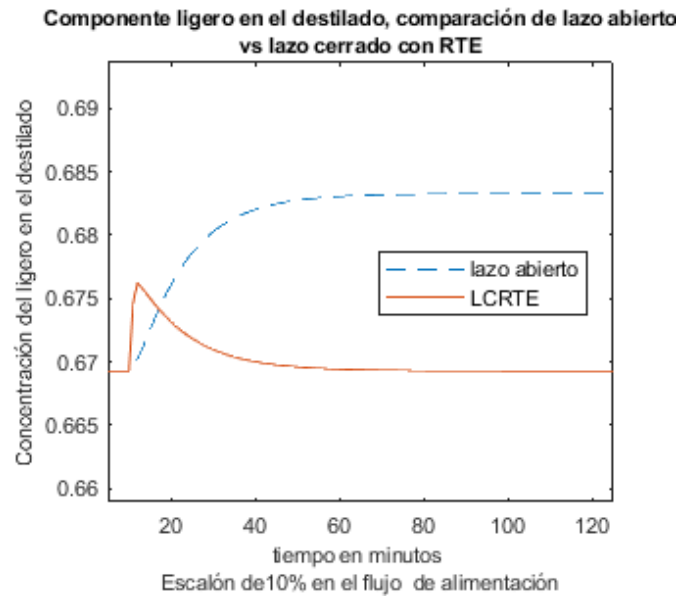


Figura 5.47: Comparación de lazo abierto vs LCRTE con cambio de 10% en el flujo de alimentación

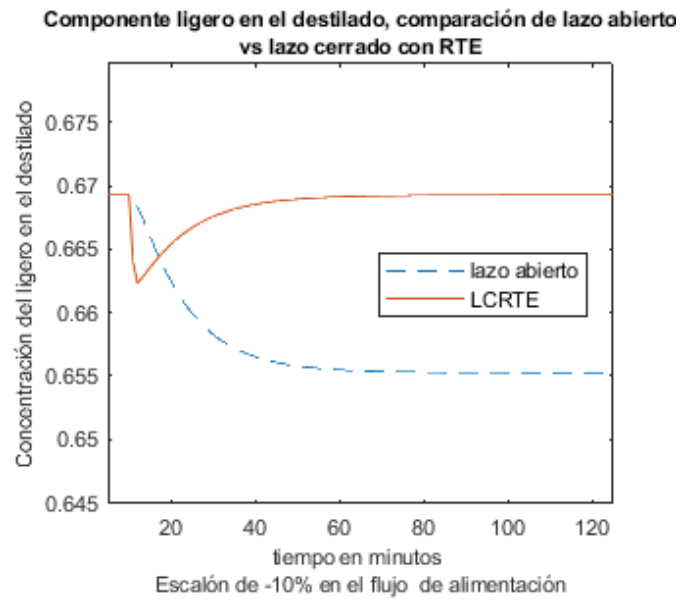


Figura 5.48: Comparación de lazo abierto vs LCRTE con cambio de -10% en el flujo de alimentación

Capítulo 6

Conclusiones y recomendaciones

6.1. Conclusiones

El modelo linealizado tiene una estructura que, dentro de los valores físicamente posibles de las variables de entrada y parámetros variables del sistema, resulta estable desde el punto de vista de control en lazo abierto y cerrado. Es concebible la existencia de condiciones de flujo dentro del equipo y del vector de entradas que generen inestabilidad, pero el modelo es inherentemente estable.

Además de la estabilidad, el modelo desarrollado es controlable y observable para las condiciones del caso de estudio y en lo general presenta una estructura que es muy favorable para mantener simultáneamente estabilidad, observabilidad y controlabilidad en sistemas con diferentes parámetros, en tanto se aseguren valores de flujos y condiciones de operación dentro de los límites físicos de cada equipo.

La forma en que se modelaron las etapas hace que el sistema se comporte como un proceso autorregulado de primer orden, independientemente del número de etapas y de las condiciones del estado estacionario. Estas propiedades hacen que en lazo abierto el sistema alcance estados de equilibrio relativamente cerca del punto de referencia, aún sin aplicar acciones de control, aunque el nuevo estado de equilibrio

alcanzado nunca será igual al estado estable original. Esto es consistente con la práctica tradicional de control en lazos PID individuales para los posibles apareamientos variable de control/variable controlada, que resultan aplicables también para columnas de destilación con integración de energía.

El control en lazo abierto para columnas de destilación presenta limitaciones severas, entre otros inconvenientes requiere conocer a fondo la magnitud, dirección y velocidad de cambio en las variables controladas ante diferentes perturbaciones y el efecto que tiene en ellas la manipulación de las variables de control, el tiempo que tarda en estabilizarse el sistema y su comportamiento ante variaciones simultáneas de perturbaciones y variables de control, de modo que el lazo abierto solo sirve como base para la aplicación de otros esquemas.

El estudio muestra el potencial de los lazos de control con retroalimentación total de estado para minimizar las desviaciones y el tiempo requerido para regresar las variables de salida a sus valores deseados. El inconveniente del control en LCRTE basado en el modelo matemático, es que para su aplicación práctica requiere control computarizado, como mínimo un controlador lógico programable (PLC) capaz de centralizar la información de los elementos primarios de medición y aplicar el algoritmo de control a alta velocidad.

Por otra parte debe recordarse que se aplicaron consideraciones y simplificaciones importantes en el desarrollo de el modelo matemático para hacerlo manejable como primera aproximación y estas tienen penalizaciones que limitan su aplicabilidad. Entre las más delicadas está la relación de equilibrio de fases usada, que es extremadamente simple y solo es aplicable a sustancias no polares y estructuralmente semejantes.

Un caso especial donde se aplicó exitosamente el modelo, pero no se incluyó en el presente trabajo por su extensión, es en una columna de destilación de ácidos grasos. Los ácidos grasos son sustancias altamente polares en mezclas multicomponente, con estructuras de cadena lineal de entre catorce y veinte átomos de carbono que, en esencia, no cumplen ninguna de las condiciones mencionadas para aplicarlo. Lo que

hizo posible su aplicación es que en este caso no se busca separar ácidos individuales de la mezcla, sino separar en bloque los ácidos obtenidos por hidrólisis de triglicéridos (grasa animal o aceite vegetal) de los triglicéridos no reaccionados, con lo que se tiene una mezcla multicomponente que se comporta como binaria, ya que los triglicéridos tienen un peso molecular promedio de más del triple respecto a sus correspondientes ácidos grasos y en consecuencia, en las condiciones normales para destilar los ácidos, el triglicérido se mantiene en fase líquida sin generar vapores. Al no destilarse, el triglicérido no debería encontrarse en el destilado, pero invariablemente hay pequeñas cantidades de él en el producto destilado. El triglicérido no llega ahí por destilación, lo hace por arrastre mecánico, que depende de las condiciones de flujo de las fases en el interior de la columna, por lo que permite considerar la volatilidad como constante.

Salvo consideraciones similares, la aplicación del modelo debe estar limitada a sistemas donde se cumplen las condiciones de similitud entre los componentes de la mezcla a separar.

6.2. Recomendaciones

Las recomendaciones directas son de sentido común: No usar el modelo para estimar el comportamiento de sistemas alejados de las condiciones para las que fue desarrollado.

Solo es capaz de manejar mezclas binarias o aquellas que permitan considerarse como tales, de baja polaridad y con propiedades termofísicas muy semejantes.

Muchas de las observaciones más interesantes de la aplicación de estas técnicas no se incluyeron en el cuerpo de este trabajo, por no caer estrictamente dentro del alcance considerado, pero son pertinentes para poder hacer recomendaciones sobre el uso y desempeño de los modelos generados.

El comportamiento del modelo linealizado, dentro de las limitaciones impuestas en su desarrollo, es bastante robusto para la columna de cinco etapas, pero al em-

plearlo para columnas con mayor número de etapas, en especial cuando la etapa de alimentación está hacia el centro de la columna (a más de tres etapas de separación del rehervidor o del condensador) se vuelve menos confiable: En el límite donde $n_{etapas} > 11$ empiezan a aparecer estados no observables o no controlables y a partir de $n_{etapas} > 14$ se presentan ambos casos, independientemente de la configuración del equipo, a pesar de que el programa siga reportando resultados aparentemente consistentes. Al aplicarlo a columnas con 25 o más etapas, bajo ciertas condiciones, los resultados obtenidos son notoriamente erróneos, dado que las composiciones calculadas tienen valores mayores a 1.0 y las fracciones mol, por definición, están acotadas entre 0 y 1. Este comportamiento se repitió en forma consistente para grandes variaciones de los parámetros del equipo y variables de operación, con la salvedad de que el umbral de incertidumbre puede alcanzarse incluso en columnas de menor tamaño usando valores extremos de los parámetros del sistema. Un aspecto notable es que se la controlabilidad del sistema es mucho más sensible que la observabilidad ante cambios de configuración y ambas son notoriamente robustas ante cambios en los parámetros del modelo en tanto los elementos de la matriz de estados sean todos negativos.

Debido a que la técnica de linealización es una variante de la expansión en serie de Taylor multivariable, con truncamiento en el segundo término, es de esperarse que el desempeño se degrade al alejarse del punto de referencia, que en este caso es el estado estable, y efectivamente se aprecia este efecto cuando las entradas se alejan del estado estable.

Aunque no aparezca explícitamente en el proceso de linealización, el modelo parte de la estimación del comportamiento del proceso en las secciones de rectificación y agotamiento, pues los datos conocidos del sistema inicial invariablemente están relacionados con las composiciones y flujos de las corrientes de alimentación y producto o a la capacidad del equipo de intercambio de calor, incluyendo condensador y rehervidor.

El tipo de información disponible implica que, sin importar la complejidad del

método de estimación, el cálculo de las condiciones en las zonas de agotamiento y rectificación siempre es un proceso de interpolación entre las condiciones de la etapa de alimentación, del rehervidor y condensador. Aún sin tener un estudio detallado del fenómeno, es perfectamente entendible el comportamiento al aumentar el número de etapas o al alejarse la etapa de alimentación de las etapas extremas. Si además se considera que se está aplicando una linealización del modelo simplificado, en términos reales se está empleando extrapolación desde las condiciones de las corrientes de alimentación y producto para las etapas intermedias y en consecuencia el modelo opera fuera de la vecindad donde es válido.

La variable de entrada de mayor impacto en el flujo de retorno de fondos al rehervidor, que se ha manejado como variable independiente del sistema, pero en la práctica no lo es.

6.3. Posibles líneas de investigación y trabajo futuro.

Aunque se pueda regular el flujo de fondos retornado y este a su vez defina el grado de agotamiento global en el sistema, V_S no es el flujo que puede retornarse al rehervidor, sino el vapor que este pueda generar, y es la variable considerada en los balances internos. En rigor V_S es una función compleja de la capacidad de intercambio en el rehervidor, con todas las variables que la afectan (área de intercambio, coeficiente global de transferencia, resistencias transitorias, etc.); el grado de agotamiento generado por la apertura de la válvula de salida de fondos y la capacidad del equipo que entrega el medio de calentamiento al rehervidor. De ahí que en muchos casos $V_S = V_s(Q_{RB}, A_{RB}, U_{RB}, B, \Delta H_{vap, fondos}, \Delta T_{ml, RB})$.

Una forma común de simplificar su manejo y que se aplica en la mayoría de los casos es calcular V_S en función de la capacidad de intercambio del rehervidor y tomando

ese valor como el máximo posible, con lo que todos los valores que se elijan para el retorno de fondos estarán dentro de la capacidad real de intercambio del equipo. Otra opción, de mayor complejidad, es generar una función mixta que incluya como entradas locales la salida de fondos del sistema (regulada por el nivel del rehervidor) y la carga térmica entregada al rehervidor, medida a través de la presión de fluido de calentamiento en la caldera, temperatura del fluido de calefacción en el calentador) y mediante esa función estimar el flujo de retorno vaporizado en el rehervidor. Esto haría necesaria una linealización local donde el retorno de fondos fungiría como salida de la función mixta mencionada y como entrada del modelo global.

Todas estas observaciones apuntan a una misma dirección: Para aplicaciones prácticas con mayor número de etapas, polaridad en los componentes o sistemas donde no se pueda generar una envolvente para el manejo de los balances de energía, etc., el modelo linealizado es insuficiente para describir el proceso y sería conveniente extender el trabajo para un modelo más detallado que invariablemente requerirá otro tipo de herramientas, como control no lineal.

Capítulo 7

Bibliografía

- 1. Aisagaliev, S.A.; Sevryugin, I.V.(2017) Controllability of Process Described by Linear System of Ordinary Differential Equations TWMS J. Pure Appl. Math., V.8, N.2, 2017, pp.170-185
- 2. Bequette, B. W. (1998). Process Dynamics. Modeling, Analysis and Simulation. Prentice Hall PTR Prentice-Hall,.
- 3. Bequette, B. W. (2002). Process Control: Modeling, Desing, and Simulation. Prentice Hall PTR Prentice-Hall,.
- 4. Branan, C.R. (2005). Branan's Rules of Thumb for Chemical Engineers. Butterworth-Heinemann. <http://doi.org/10.1016/B978-075067856-8/50015-3>
- 5. Barroso J.D.C. (2009). Modeling and Intelligent Control of a Distillation Column. Ph.D. Thesis, Technical University of Lisbon, Lisbon, Portugal, October 2009.Computer Aided Chemical Engineering
- 6. Chen, Z.; Henson, M.A.; Belanger, P,; Lawrence, M. (2010). Nonlinear Model Predictive Control of High Purity Distillation Columns for Cryogenic Air Separation. IEEE Transactions on Control Systems Technology,

vol. 18, no. 4, pp. 811-821, July. doi: 10.1109/TCST.2009.2029087

7. Espuña, A. ; Graells, M. y Puigjaner, Luis. (2017) Proceedings of the 27 European Symposium on Computer Aided Process Engineering, Volume 40, Pages 1-2996
8. Fruehauf, P. S. y Mahoney, D. P. (1993). Distillation column control design using steady state models: Usefulness and limitations design using steady state and dynamic simulation. *ISA Transactions* 32(2), 157–175.
9. Fruehauf, P.S. y Mahoney, D.P. (1997). An Integrated Approach for Distillation Column Control Design Using Steady State and Dynamic Simulation. *Aspentech technical articles*, March 1997. www.aspeutech.com/corporate/press/publications.
10. Gentry, J. W. (1995). The 19th Century Legacy to Distillation from Kidd to Young. *Chemical Engineering Education*, 250–255.
11. Gorak, A.; Olujic, Z. (2014). *Distillation Equipment and Processes*. (A. Górak Z. Olujic, Eds.) (1st ed.). Academic Press.
12. Greenberg, M.D. (1998). *Advanced Engineering Mathematics*. 2nd Edition. Pearson.
13. Gundersen, T. (1982). Numerical aspects of the implementation of cubic equations of state in flash calculation routines. *Computers and Chemical Engineering*, 6(3), 245–255. [http://doi.org/10.1016/0098-1354\(82\)80015-X](http://doi.org/10.1016/0098-1354(82)80015-X)
14. Halvorsen, Ivar J.; Skogerstad, S. (2000). Distillation Theory. In I. Wilson (Ed.), *Encyclopedia of Separation Science* (First, pp. 1117–1134). Academic Press.
15. Hangos, K.M.; Bokor, J.; Szederkényi, G. (2004). *Analysis and control of nonlinear process systems* Springer.
16. He, Chunyang; Laub, Alan J. and Mehrmann, Volker. Placing Plenty of Poles is Pretty Preposterous. (1995). Preprint SPC 95-17, Forschergruppe

‘Scientific Parallel Computing’, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz-Zwickau

17. Kautsky, Jaroslav; Nichols, K. N.; Van Doreen P.(1985). Robust Pole Assignment in Linear State Feedback. *Int. J. Control, International Journal of Control*. May. 1129-1155. DOI: 10.1080/0020718508961188
18. Kemp, I. C.; Linnhoff, B. (2007). *Pinch Analysis and Process Integration*.(Second Edition). Butterworth-Heinemann.
19. Kim, Y. H. (2016). Design and control of energy-efficient distillation columns. *Korean Journal of Chemical Engineering*, 33(9), 2513–2521.
<http://doi.org/10.1007/s11814-016-0124-4>
20. Kotrba, Ron. (2013) The Many Faces of distillation. *Biodiesel Magazine*. March 12.
21. Linnhoff, B.; Flower, J. R. (1978). Synthesis of heat exchanger networks: II. Evolutionary generation of networks with various criteria of optimality. *AIChE Journal*, 24(4), 642–654.
<http://doi.org/10.1002/aic.690240412>
22. Luyben, W. L. (1996). Design and Control Degrees of Freedom. *Industrial Engineering Chemistry Research*, 35(7), 2204–2214.
<http://doi.org/10.1021/ie960038d>
23. Luyben, W. L. (2014). *Distillation Control In Distillation* . Elsevier.
<http://doi.org/10.1016/B978-0-12-386876-3.00001-6>
24. Marlin, Thomas. E. (2000) *Process Control* (2nd Ed.) McGraw-Hill.
25. Mase, G. Thomas; Mase, George Edward (1999). *Continuum Mechanics for Engineers*(Second Edition) CRC Press
26. Moaveni, S. (1999). *Finite Element Analysis. Theory and applications with Ansys*. Prentice Hall PTR.

27. Mustafa, M. F., Ibrahim, N., Fazli, N. A., Samad, A., Ibrahim, K. A., Kamaruddin, M., Hamid, A. B. D. (2014). Design of Energy Efficient Distillation Columns for Separation of Oxygenates Process. In ISIGMA (Vol. 1, pp. 1–8).
28. Nise, Norman S. (2010) Control Systems Engineering (6th ed) John Wiley and Sons.
29. Ogata, K. (2010). Modern control engineering (5th ed.). Prentice Hall.
30. Pham, Q. T. (1994). Degrees of freedom of equipment and processes. Chemical Engineering Science, 49(15), 2507–2512. [http://doi.org/10.1016/0009-2509\(94\)E0056-V](http://doi.org/10.1016/0009-2509(94)E0056-V)
31. Rathore, R. N. S., Van Wormer, K. A.; Powers, G. J. (1974). Synthesis strategies for multicomponent separation systems with energy integration. AIChE Journal, 20(3), 491–502. <http://doi.org/10.1002/aic.690200309>
32. Roper, Keith D.; Seader, J.D.; Henley, E. J. (2010). Separation Process Principles. (3rd Ed.). John Wiley & Sons, Inc.
33. Rubio Maya, C.; Pacheco Ibarra, J. J.; Gutiérrez Sanchez, H. C.; Mendoza Covarrubias, C.; Martínez Patiño, J.; Picón Nuñez, M. (2009). Aproximaciones de la diferencia media logarítmica de temperatura (DMLT) en problemas de optimización matemática, aplicación al problema CGAM. 1. Memorias del XV Congreso Internacional Anual de la SOMIM, 1024–1030.
34. Sandler, S. I. (2006). Chemical Biochemical And Engineering Thermodynamics. John Wiley & Sons, Inc. (Fourth Ed.).
35. Seborg, Dale E.; Mellichamp, D. ; Edgar, T. ; Doyle, F., (2011). Process Dynamics and Control. John Wiley & Sons, Inc. (Third Ed.). ISBN 13 978-0-470-64610-6
36. Shankar, N.; Aneesh, V.; Sivasubramanian, V. (2015). Aspen Hysys based

- Simulation and Analysis of Crude Distillation Unit. *International Journal of Current Engineering and Technology*, 5(4), 283–2837.
37. Skogestad, S. (1997). Dynamics and Control of Distillation Columns. *Chemical Engineering Research and Design*. <http://doi.org/10.1205/026387697524092>
 38. Skogestad, S. (2017). Dynamics and Control of Distillation Columns. Researchgate <https://www.researchgate.net/publication/41719786>
 39. Skogestad, S. y Morari, M. (1987). Control configuration selection for distillation columns. *AIChE Journal*, 33(10), 1620–1635. <http://doi.org/10.1002/aic.690331006>
 40. Skogestad, S. y Morari, M. (1988). Understanding the Dynamic Behavior of Distillation Columns. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, Vol. 27, No. 10, pp. 1848-1862. doi:10.1021/ie00082a018
 41. Sontag, E. D. (1998) *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*. Springer. (Second Ed.), ISBN 0-387-984895)
 42. Sorin, M., Paris, J. (1997). Combined exergy and pinch approach to process analysis. *Computers and Chemical Engineering*, 21(97), S23–S28. [http://doi.org/10.1016/S0098-1354\(97\)87473-X](http://doi.org/10.1016/S0098-1354(97)87473-X)
 43. Shenvi, A. A.; Shah, V. H. y Agrawal, R. (2013). New Multicomponent Distillation Configurations with Simultaneous Heat and Mass Integration. *American Institute of Chemical Engineers AIChE J*, 59: 272–282.
 44. Staine, F. y Favrat, D. (1996). Energy Integration of Industrial Processes Based on the Pinch Analysis Method Extended to Include Exergy Factors, 16(6), 497–507.
 45. Valero, A.; Lozano, M. A.; Serra, L.; Tsatsaronis, G.; Pisa, J.; Frangopoulos, C.; von Spakovsky, M. R. (1994). CGAM problem: Definition and conventional solution. *Energy*, 19(3), 279–286. [http://doi.org/10.1016/0360-5442\(94\)90112-0](http://doi.org/10.1016/0360-5442(94)90112-0)

46. Vázquez-Castillo, J. A.; Segovia-Hernández, J. G.; Ponce-Ortega, J. M. (2015). Multiobjective Optimization Approach for Integrating Design and Control in Multicomponent Distillation Sequences. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 54(49), 12320–12330.
<http://doi.org/10.1021/acs.iecr.5b01611>.
47. Wu, G.; Huang, K.; Chen, H.; Wang, S.; Wei N. y Wang, S. (2012) Simplified design and control of an ideal heat-integrated distillation column (ideal HiDiC). *Asia-Pac. J. Chem. Eng.*; 7: 912–927