



UNIVERSIDAD MICHUACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA
FACULTAD INGENIERÍA MECÁNICA

“ANÁLISIS ENERGÉTICO DE SISTEMAS
MODELADOS EN BOND GRAPH”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA MECÁNICA

PRESENTA:

LCFM BLANCA DE JESÚS GÓMEZ OROZCO



ASESOR:
DR. GILBERTO GONZÁLEZ AVALOS

MORELIA, MICHUACÁN, AGOSTO 2019



*Dedicado a mi
familia y amigos*

Agradecimientos

Estoy muy agradecida con Dios por quererme y poner en mi camino gente bonita de buen corazón, amigos y familia.

No puedo expresar lo agradecida que estoy con mi familia: primero mis padres, Ofelia y José, después mis hermanos, José, Antonio, Adrián, Carlos y René, al final mis hermanas, Gloria, Carmen, Diana y Brenda, todos ustedes han colaborado de alguna u otra manera, ya sea aconsejando, ayudando, acompañando, regañando, guiando... gracias por su confianza y apoyo tanto moral como económico.

Agradezco a mis compañeros de maestría. Ha sido una dicha poder estudiar al lado de ustedes.

Quiero reconocer a las personas que me hicieron correcciones a la redacción y contenido, Misha, Maritza y Karen.

A todos mis profesores que fueron parte de mi formación y orientación, por la paciencia y tolerancia que me han tenido.

Agradezco a mi asesor Dr. Gilberto González Avalos, por su esfuerzo, dedicación y atención que prestó para la realización de esta tesis.

Además, quiero agradecer a Conacyt por hacerme privilegiada con uno de sus apoyos económicos para estudiar la maestría.

Por último, también quisiera agradecer a los revisores y sinodales: Dr. Gerardo Ayala Jaimes, Dr. Erasmo Cadenas Calderón, Dra. Laura Alicia Ibarra Bracamontes y Dra. Alicia Aguilar Corona por el tiempo dedicado a mi tesis.

Resumen

Antes de describir el presente trabajo de tesis, es oportuno indicar el planteamiento del problema:

La ley de la conservación de la energía afirma que la energía no se crea ni se destruye, sólo se transforma de una forma a otra (interna, cinética, potencial, etc.).

En el balance de energía se deben de tomar en cuenta sólo las variables que interactúan en el sistema, ya que en el proceso de simplificar de la ecuación general, se contemplan términos con variables que no están presentes o se ignoran las variables que sí están presentes, permitiendo que se cometan errores en la ecuación.

Por la razón mencionada la presente investigación pretende hacer el balance energético de sistemas modelados en Bond Graph. El balance de potencia propuesto tiene la ventaja de aun cuando existe el bond activo que se utiliza como señal, el balance de potencia se cumple y el sistema es conservativo de potencia. Esto no sucedía con otros balances por la razón de que no se cumplen las propiedades de sistema conservativo de potencia en presencia de bond activos.

Como resultado se obtiene otra forma de calcular el balance de potencia en un sistema modelado en Bond Graph.

1. Resultados de la tesis.

- a) Se analizaron las propiedades de las submatrices de la matriz de estructura de unión de la metodología de Bond Graph.
- b) Se verificó el principio de conservación en la metodología de Bond Graph.
- c) Se proporcionaron las funciones de energía en la metodología de Bond Graph.

2. Resultados nuevos.

- a) El resultado principal de la tesis es un nuevo balance de potencia para sistemas modelados en Bond Graph, que consiste en calcular el producto de las dos variables de potencia, esfuerzo y flujo en forma general y en forma matricial. Cuando el producto de las matrices es igual a cero $P = e \cdot f = 0$, se puede afirmar que el sistema es conservativo de potencia.

- b) La ventaja de este balance es que cuando existe el bond activo que se utiliza como señal ya sea para incrementar esfuerzo, flujo o la potencia, el balance de potencia se cumple y el sistema es conservativo de potencia. Esto no sucedía con otros balances por la razón de que no se cumplen las propiedades de sistema conservativo de potencia en presencia de bond activos.
- c) Otro resultado importante es en la estabilidad, se proporcionan las funciones de energía para sistemas modelados en Bond Graph y como consecuencia la ecuación de Lyapunov. Los teoremas sólo nos dicen que existe dicha función, pero no como encontrarla.

Palabras clave: Bond Graph, Balance de Energía, Función de Energía, Estabilidad de Lyapunov.

Abstract

Before describing this thesis work, it is appropriate to indicate the problem statement:

The law of conservation of energy affirms that energy is not created or destroyed, it only transforms from one form to another (internal, kinetic, potential, etc.).

In the energy balance should be taken into account only the variables that are interacting in the system, since in the process of simplifying of the general equation, terms with variables that are not present are considered, or variables that are present are ignored, letting mistakes in the equation.

For the reason mentioned, this research aims to make the energy balance of systems modelled by Bond Graph. The proposed power balance has the advantage of even when there is the active link that is used as a signal, the power balance is known and the system is power conservative. This did not happen with other balances for the reason that the properties of the power conservative system are not present in the presence of active bonds. As a result, another way of calculating the power balance in a System modelled by Bond Graph. is obtained.

1. Results of the thesis.

- a) The properties of the sub-matrices of the bond structure matrix of the Bond Graph methodology were analyzed.
- b) The conservation principle was verified in the Bond Graph methodology.
- c) Energy functions are provided in the Bond Graph methodology.

2. New results.

- a) The main result of the thesis is a new balance of power for systems modeled in Bond Graph, which consists in calculating the product of the two variables of power, effort and flow in general and matrix form. When the product of the matrices is equal to zero $P = e \cdot f = 0$, it can be affirmed that the system is conservative of power.
- b) The advantage of this balance is, when the active link that is used either a signals to increase the effort, flowers or power, the power balance is met and the system is

conservative of power. This did not happen with other balances for the reason that the properties of the power conservative system are not present in the presence of active bonds.

- c) Another important result is onto the stability, the energy functions are given for modeled system in Bond Graph, in consequence the Lyapunov equation. The theorems only says that such function exist but not how to find it.

Keywords: Bond Graph, Energy Balance, Energy Function, Lyapunov Stability.

Índice general

Agradecimientos	v
Resumen	vii
Abstract	ix
Índice general	xi
Índice de figuras	xv
Índice de tablas	xix
1. Introducción	1
1.1. Balance Energético de Sistemas	1
1.2. Objetivo	1
1.3. Estado del arte	2
1.4. Contribución	10
1.5. Estructura de la Tesis	10
2. Modelado de Sistemas en Bond Graph	13
2.1. Introducción	13
2.1.1. Puertos	15
2.1.2. Causalidad	18
2.1.3. Vectores clave	22
2.1.4. Bond activo	23
2.1.5. Relaciones constitutivas	24
2.1.6. Matriz de estructura unión	24
2.1.7. Análisis de trayectorias causales	25
2.2. Algunas propiedades de los campos	29
2.2.1. Propiedades de la estructura de unión	29
2.2.2. Propiedades de campo de disipación	32
2.3. Modelado sistemas mecánicos	33
2.3.1. Ejemplo 1	34
2.3.2. Ejemplo 2	35
2.3.3. Ejemplo 3	36

3. Balance de Energía de Sistemas en Bond Graph	37
3.1. Introducción	37
3.2. Balance de potencia tradicionales	38
3.2.1. Balance de potencia mediante el Bond Graph	38
3.3. Balance de potencia método nuevo	41
3.3.1. Matriz basada en la estructura de unión para el cálculo de potencia	42
3.3.2. Obtención de las matrices e y f del Bond Graph	44
3.3.3. Las matrices e y f indican un Bond Graph conservativo	48
3.4. Relaciones constitutivas.	48
3.5. Ejemplos mecánicos	50
3.5.1. Ejemplo sistema mecánico 1	50
3.5.2. Ejemplo sistema mecánico 2	54
3.5.3. Ejemplo sistema mecánico 3	60
3.6. Bond activo y Bond adaptado	64
3.6.1. Bond activo	64
3.6.2. Bond adaptado	64
3.6.3. Ejemplo 1	66
3.6.4. Ejemplo 2	71
3.6.5. Ejemplo 3	77
3.6.6. Ejemplo 4	83
4. Funciones de Energía y Estabilidad	93
4.1. La importancia de la estabilidad	93
4.2. Funciones de Lyapunov	93
4.2.1. Método indirecto de Lyapunov	94
4.2.2. Método directo de Lyapunov	95
4.3. Condiciones de estabilidad para sistemas modelados en Bond Graph	96
4.3.1. Condición básica	96
4.3.2. Condición general	97
4.4. Criterio de estabilidad en Bond Graph	98
4.4.1. Obtención de la función de energía $V(x)$ en el Bond Graph	100
4.5. Forma general de la ecuación de Lyapunov	101
4.5.1. Ecuación de Lyapunov $\dot{V}(x)$, derivada de la función de energía en el Bond Graph	102
4.6. Casos de estudio	104
4.6.1. Sistema mecánico 1	104
4.6.2. Sistema mecánico 2	106
4.6.3. Sistema mecánico 3	109
4.7. Ejemplos con bond activo y bond adaptado	111
4.7.1. Ejemplo 1	111
4.7.2. Ejemplo 2	114
4.7.3. Ejemplo 3	117

5. Conclusiones y Recomendaciones	121
5.1. Conclusiones	121
5.2. Recomendaciones	121
A. Publicaciones	123
Bibliografía	137

Índice de figuras

2.1. Diagrama de objetivos completa.	13
2.2. Tetraedro de estado.	14
2.3. Bond.	14
2.4. Bond de potencia generalizado.	15
2.5. Puertos-1.	15
2.6. Puertos-2.	16
2.7. Puertos-3.	16
2.8. Regla de simplificación.	17
2.9. Circuito RCI.	17
2.10. Pasos modelado del Bond Graph del circuito RCI.	18
2.11. Causalidad en esfuerzo.	19
2.12. Causalidad en flujo.	19
2.13. Causalidad necesaria.	19
2.14. Causalidad restrictiva a puertos-2.	19
2.15. Causalidad restrictiva a puertos-3.	20
2.16. Causalidad integral.	20
2.17. Causalidad derivativa.	20
2.18. Causalidad arbitraria.	21
2.19. Bond Graph con causalidad del circuito RCI.	21
2.20. Diagrama de la estructura de unión.	22
2.21. Bond Graph enumerado del circuito RCI.	23
2.22. Trayectoria causal simple.	26
2.23. Trayectoria mezclada directa.	26
2.24. Trayectoria mezclada indirecta.	27
2.25. Cambios de orientación de los bonds en las uniones-0.	27
2.26. Cambios de orientación de los bonds en las uniones-1.	28
2.27. Conexiones causales y transmitancia.	28
2.28. Sistema mecánico ejemplo 1.	34
2.29. Pasos modelado del Bond Graph de ejemplo 1.	34
2.30. Sistema mecánico ejemplo 2.	35
2.31. Pasos modelado del Bond Graph de ejemplo 2.	35
2.32. Sistema mecánico ejemplo 3.	36

2.33. Pasos modelado del Bond Graph de ejemplo 3.	36
3.1. Circuito RCI, Bond Graph y potencia.	38
3.2. Potencia del Bond Graph de circuito RCI.	39
3.3. Potencia de elementos del circuito RCI, $t = 5$ seg.	40
3.4. Potencia de elementos del circuito RCI, $t = 1.2$ seg.	41
3.5. Objetivos de balance de potencia.	42
3.6. Sistema mecánico y Bond Graph, ejemplo 1.	50
3.7. Balance de potencia de sistema mecánico tiempo $t = 1.2$ seg, ejemplo 1. . . .	52
3.8. Sistema mecánico y Bond Graph, ejemplo 2.	54
3.9. Balance de potencia de sistema mecánico tiempo $t = 5$ seg, ejemplo 2.	58
3.10. Balance de potencia de sistema mecánico tiempo $t = 1.2$ seg, ejemplo 2. . . .	59
3.11. Sistema mecánico y Bond Graph, ejemplo 3.	60
3.12. Balance de potencia de sistema mecánico tiempo $t = 1.2$ seg y $t = 10$ seg, ejemplo 3.	62
3.13. Bond activo.	64
3.14. Bond activo como señal.	64
3.15. Bond adaptado.	64
3.16. Reglas bond adaptado.	65
3.17. Bond activo y bond adaptado.	65
3.18. Esquema del sistema físico con amplificador electrónico.	66
3.19. Bond Graph con bond activo y bond adaptado ejemplo 1.	66
3.20. Balance de potencia (junto) de sistema con bond adaptado, ejemplo 1. . . .	68
3.21. Balance de potencia de sistema con bond adaptado, ejemplo 1.	69
3.22. Esquema del sistema físico con amplificador electrónico y retroalimentación.	71
3.23. Bond Graph con bond activo y bond adaptado ejemplo 2.	71
3.24. Balance de potencia de sistema con bond adaptado, ejemplo 2.	74
3.25. Balance de potencia (junto) de sistema con bond adaptado, ejemplo 2. . . .	75
3.26. Esquema del circuito eléctrico con fuentes dependientes.	77
3.27. Bond Graph con bond activo y bond adaptado ejemplo 3.	77
3.28. Balance de potencia de sistema con bond adaptado, ejemplo 3.	80
3.29. Balance de potencia (junto) de sistema con bond adaptado, ejemplo 3. . . .	81
3.30. Esquema del sistema físico del motor de CD.	83
3.31. Bond Graph del motor de CD especificando partes del sistema.	83
3.32. Diagrama de bloques del sistema del ejemplo 4.	84
3.33. Velocidades ejemplo 4.	84
3.34. Bond Graph con bond activo y bond adaptado ejemplo 4.	85
3.35. Balance de potencia (junto) de sistema con bond adaptado, ejemplo 4. . . .	88
3.36. Balance de potencia de sistema con bond adaptado, ejemplo 4.	89
4.1. Circuito RCI y Bond Graph.	102
4.2. Sistema mecánico y Bond Graph del ejemplo 1.	104
4.3. Sistema mecánico y Bond Graph del ejemplo 2.	106

4.4. Sistema mecánico y Bond Graph del ejemplo 3.	109
4.5. Circuito eléctrico con fuentes dependientes y Bond Graph.	111
4.6. Sistema físico del motor de CD y Bond Graph.	114
4.7. Sistema físico del motor de CD y Bond Graph modificado.	117

Índice de tablas

2.1. Variables generalizadas.	15
3.1. Variables de potencia generalizada.	37
3.2. Variables de energía.	38
3.3. Potencia de elementos del circuito RCI en tiempo $t = 5$ seg.	39
3.4. Potencia de elementos del circuito RCI en tiempo $t = 1.2$ seg.	39
3.5. Potencia de elementos de sistema mecánico 1 en diferentes tiempos.	53
3.6. Potencia de elementos de sistema mecánico 2 en diferentes tiempos.	57
3.7. Potencia de elementos de sistema mecánico 3 en diferentes tiempos.	63
3.8. Potencia de elementos de sistema 1 con bond adaptado en diferentes tiempos.	70
3.9. Potencia de elementos de sistema 2 con bond adaptado en diferentes tiempos.	76
3.10. Potencia de elementos de sistema 3 con bond adaptado en diferentes tiempos.	81
3.11. Potencia de elementos de sistema 4 con bond adaptado en diferentes tiempos.	90

Capítulo 1

Introducción

1.1. Balance Energético de Sistemas

La energía tiene diversas definiciones, relacionadas con el uso ya sea de transformar, surgir o poner en movimiento. En tecnología y economía, “energía” se refiere a un recurso natural (incluyendo a su tecnología asociada) para poder extraerla, transformarla y darle un uso industrial o económico. En física, energía se define como la capacidad para realizar un trabajo. En las diversas disciplinas de la física y la ciencia, se dan varias definiciones de energía, todas coherentes y complementarias entre sí, por ejemplo: en energía mecánica se tiene energía cinética y energía potencial. En electromagnetismo se tiene a la energía electromagnética, energía radiante y energía calórica. En la termodinámica están energía interna, energía térmica y el potencial termodinámico. En química están energía de ionización y la energía de enlace, ver [7].

La primera ley de la termodinámica es en esencia una expresión del principio de conservación de la energía, llamado también balance de energía. Es posible expresar los balances de energía generales para cualquier sistema que experimenta algún proceso debido a que la energía puede existir en varias formas: térmica, mecánica, cinética, potencial, eléctrica, magnética, química y nuclear, incluso la masa puede ser considerada una forma de energía cuya suma conforma la energía total de un sistema, ver [10].

1.2. Objetivo

Objetivo general.

Realizar un análisis energético por balance energético de sistemas modelados en Bond Graph.

Objetivos específicos.

1. Analizar las propiedades la Matriz de Estructura de Unión.
2. Verificar el principio de conservación de energía por medio de las propiedades de la Matriz de Estructura de Unión.

3. Proporcionar las funciones de energía candidatas de Lyapunov.

1.3. Estado del arte

Entre los años 1959 y 1961, Henry Paynter incorporó la noción de un puerto de energía en su metodología a partir de esto el Bond Graph fue desarrollado. Posteriormente, en 1983 y 1990 se formaliza la metodología, por Karnopp y Rosenberg. Los promotores destacados de las técnicas del modelado de Bond Graph fueron J. Thoma en el año 1975 y Breedveld en el año 1984.

Peter C. Breedveld en [5] en el año 1982 introduce un nuevo marco utilizando los conceptos de Bond Graph para eliminar la brecha estructural en el dominio térmico de la teoría actual de sistemas físicos donde muestra que no existe una inercia térmica aislada, ya que es inconsistente con la **segunda ley de la termodinámica**. Usa Bond Graph termodinámicos que son el resultado de la síntesis de los métodos utilizados en la termodinámica y en la mecánica. Con los Bond Graph termodinámicos, el autor intentó con éxito adaptar la mecánica a un nuevo sistema de representación (Bond Graph termodinámico), basado en una forma generalizada de termodinámica.

Shoureshi Rahmatallah y McLaughlin Kevin en [38] en el año 1984 presentan el modelado de intercambiadores de calor usando Bond Graph con temperatura y tasa de cambio de entropía como variables de potencia. Se muestran las técnicas utilizadas para modelar las irreversibilidades y los flujos compresibles. Los resultados de los modelos se comparan con los resultados experimentales. La investigación muestra qué tan bien un modelo puede predecir la dinámica de una inversión real del flujo.

Karnopp Dean en [29] en el año 1990 estudia los modelos Bond Graph para la cinética química, donde se extiende a los sistemas electroquímicos. Aunque se puede considerar que muchos sistemas electroquímicos funcionan en un entorno de temperatura constante, los sistemas de almacenamiento de energía de alta energía, como las baterías de vehículos eléctricos, experimentan cambios drásticos en la temperatura durante el funcionamiento. Por lo tanto, los Bond Graph también son eléctricos. Los Bond Graph electroquímico-térmico son modelos de los componentes eléctricos y mecánicos de un sistema general, como un vehículo eléctrico. Dado que los modelos de Bond Graph se pueden hacer para todo tipo de sistemas mecánicos, electromecánicos y otros sistemas físicos, los modelos de sistemas de almacenamiento de energía electroquímicos pueden ser accesibles a los modelos dinámicos de los sistemas. Los Bond Graph son útiles en la construcción de un modelo de dos maneras distintas. En primer lugar, ayudan a comprender los principios básicos y la teoría de una manera gráfica.

E.P. Fahrenthold y J.D. Wargo en [20] en el año 1991 trabajaron sobre el uso eficiente de técnicas de modelado de Bond Graph donde vieron que fue obstaculizado por la complejidad topológica de los modelos de sistemas típicos. En vista de la complejidad geométrica de muchos problemas mecánicos, la investigación ha delineado el desarrollo de modelos de unión basados en vectores y tensores medios continuos. Las estructuras de Bond Graph utilizados para modelar sistemas discretos y continuos adoptan formas muy similares y hacen uso de

los principios físicos y matemáticos del análisis de tensores. Sin embargo, se dirigen específicamente a consideraciones geométricas y por lo tanto se aplican a una clase más limitada de problemas. Sin la importancia de las preocupaciones geométricas, se puede encontrar una amplia gama de problemas de ingeniería.

Cormerais Hervé y Buisson Jean en [12] en el año 2000 utilizando el formalismo Bond Graph en sistemas dinámicos híbridos obtienen un sistema de topología variable. Si el sistema tiene n leyes válidas, tenemos diferentes leyes y estados. Su propósito era establecer el equilibrio efectivo en el momento de la conmutación y comparar el enfoque ideal. Han demostrado que, en el caso de leyes constitutivas lineales para los componentes del sistema el equilibrio energético se puede resolver analíticamente utilizando un modelo ideal para los interruptores. Mientras que si se adopta un modelo resistivo para los interruptores, el equilibrio energético conduce al cálculo de la integral de las variables de estado. Para un modelo ideal se deduce el **balance energético**.

Heny Carlos et. al. en [25] en el año 2000 desarrollan y validan un modelo dinámico que permite representar el comportamiento de un reactor de tanque agitado continuo (CSTR) para la saponificación de acetato de etilo con hidróxido de sodio. El modelo se basa en la técnica del Bond Graph, que permite representar los equilibrios molar y energético del sistema. Se muestra la facilidad y las ventajas del uso de la técnica de Bond Graph para la simulación de sistemas químicos y termodinámicos. Una de las ventajas más importantes es la representación gráfica, en la que la relación entre los diferentes elementos y variables del sistema se percibe mejor dando una idea clara del funcionamiento del sistema. Esta ventaja es aún más importante cuando se considera la interconexión de elementos de diferente naturaleza (química y térmica).

Buisson, Jean et. al. en [8] en el año 2002 tratan en su investigación sobre el modelado de sistemas físicos híbridos. La metodología de Bond Graph se usa para establecer su modelo de conocimiento, basado en una representación ideal de los interruptores. Estos componentes se modelan por flujo o por esfuerzo según su estado y por lo tanto, modifican la topología del circuito en los tiempos de conmutación. Se lleva a cabo una comparación entre el enfoque de modelado ideal elegido y el enfoque no ideal más común utilizando la teoría de perturbaciones singulares. Discuten algunas propiedades de modelos ideales para la parte continua de sistemas físicos lineales híbridos utilizando la noción de una relación de estructura de unión implícita. Proponen una solución para calcular la estructura de unión implícita y luego la ecuación de estado implícita para cada modo. Esos dos últimos puntos ofrecen una alternativa para la simulación de sistemas híbridos. Este método lo aplicaron con éxito a la simulación de un sistema grande que consiste en un motor asíncrono conectado a un arrancador.

Bouamama Belkacem Ould en [4] en el año 2003 presenta una metodología basada en análisis de Bond Graph causales y de comportamiento para construir una biblioteca de modelos de íconos dinámicos en procesos de termofluido continuo. El enfoque desarrollado se implementa utilizando el software SYMBOLS y se aplica a una instalación compleja de generador de vapor. La metodología se ofrece como una herramienta auxiliar, se propone para que el diseñador industrial pueda construir fácilmente un modelo termofluido de los procesos más tecnológicos. El Bond Graph es una herramienta de simulación y modelado

que ofrece muchas posibilidades.

Yu B y Van Paassen AHC en [40] en el año 2004 estudian los modelos dinámicos de los sistemas de calefacción, ventilación y aire acondicionado (HVAC) de edificios, útiles para el diseño del controlador, la puesta en servicio y la detección y el diagnóstico de fallas. Las diferentes aplicaciones tienen diferentes requisitos en los modelos y se pueden aplicar diferentes enfoques de modelado. Discuten el modelado matemático con dos enfoques diferentes, el Simulink en bloque y el Bond Graph. Expresan ventajas y desventajas de ambos enfoques.

Couenne F et. al. en [14] en el año 2006 presentaron un modelo de Bond Graph de un reactor de tanque de reacción continuo que representa la cinética de reacción, así como los fenómenos de transporte de calor y masa en el reactor. Las consecuencias de la reticulación de los fenómenos y de la utilización sistemática de las variables de potencia conjugada en la formulación de las propiedades termodinámicas, se muestran las cinéticas de reacción y la energía y el transporte de masas. Discuten las principales diferencias del enfoque de modelado de Bond Graph con respecto a los modelos clásicos de ingeniería química.

Françoise Couenne en [13] en el año 2007 presenta brevemente el lenguaje Bond Graph y las ventajas que uno puede obtener de su uso. Menciona que siempre que los softwares estén disponibles, uno puede manipular y reutilizar fácilmente los submodelos y conectarlos a través de estos puertos, además el lenguaje Bond Graph se desarrolló en primer lugar para el modelado de sistemas de dimensiones finitas en ingeniería mecatrónica y eléctrica, pero también a sistemas de dimensiones infinitas, como a sistemas de ingeniería química, relacionada con los conceptos de **termodinámica** irreversible.

W. Borutzky en [3] en el año 2009 presenta una metodología gráfica de modelización asistida por computadora que es particularmente adecuada para el diseño concurrente de sistemas multidisciplinarios, a saber de sistemas de ingeniería con componentes mecánicos, eléctricos, hidráulicos o neumáticos, incluidas las interacciones de efectos físicos de diversos dominios de **energía**. Se muestra cómo se pueden construir sistemas multicuerpo de forma sistemática y alienta a los lectores a echar un vistazo a la gran bóveda de la metodología de Bond Graph.

J.L. Baliño en [1] en el año 2009 utiliza una metodología de Bond Graph para modelar flujos de fluido incompresibles con efectos viscosos y térmicos. El Bond Graph resultante muestra el acoplamiento entre los dominios de **energía** térmica y mecánica a través del término de disipación viscosa. Todo tipo de condiciones de contorno se manejan de manera consistente y se pueden representar como esfuerzo generalizado o fuentes de flujo. Se deriva un procedimiento para la asignación de causalidad para el gráfico resultante, que satisface el segundo principio de la **termodinámica**. Con esta contribución muestra que partir de las ecuaciones diferenciales parciales gobernantes y usando técnicas de discretización provenientes de CFD es la estrategia correcta para generar modelos generales, enmarcados dentro de la teoría de los Bond Graph, para sistemas dinámicos de fluidos.

Rodrigo D. Castro et. al. en [9] en el año 2015 presentan una metodología general para modelar sistemas complejos. Adoptan el concepto de conceptualización de la energía (energía) que todas las transformaciones de energía requieren para ejecutar un proceso. Por lo tanto, la energía en cualquier proceso dentro de un sistema es invasiva para apoyar. Estas ideas se

implementaron en el marco de Bond Graph, un paradigma de modelado donde las variables físicas se verifican explícitamente para observar los principios de **conservación de energía**. Los resultados son un nuevo marco de modelado de energía ecológica Bond Graph (EcoBG) bajo el modelo estándar de codificación de Modelica. Este modelado basado en la energía para sistemas dinámicos complejos con un enfoque en la sostenibilidad y el empoderamiento de los flujos. EcoBG puede comprobar la viabilidad termodinámica de los modelos y dar para valores de entalpía específica desconocida en todo el sistema interno que no violen los principios de conservación de energía. Lo cual es muy atractivo para estudiar la sostenibilidad de los sistemas.

Vasilyev Andrey et. al. en [39] en el año 2017 presentan un modelo basado en componentes de PEMFC desarrollado utilizando la técnica de Bond Graph. Los resultados experimentales y de simulación muestran una fuerte correlación entre ellos. Aclaran que los Bond Graph son muy adecuados para modular dispositivos de pila de combustible, el modelo diseñado se basa en una representación gráfica pseudo-bond de fenómenos termofluidos y se implementa en el lenguaje de modelado Modelica.

Meshram RV et. al. en [33] en el año 2018 presentan la investigación sobre el modelado basado en energía apropiado para el modelado de sistemas físicos para el desarrollo y análisis del sistema dinámico multidominio. Una de esas herramientas para el modelado del sistema es un Bond Graph, que permite modelar un sistema complejo, con reglas claras de interconexión y preservación de la estructura física del sistema. Proponen el uso del enfoque Bond Graph para comprender la energía de la microrred y muestran cómo modelar sistemas complejos en un dominio de Bond Graph. Además desarrollan una Teoría matemática del Bond Graph para subsistemas relacionados y para SST integrado. A partir de la asociación entre la estructura de unión y estructura de Dirac, forma matemática se deduce a partir de modelos Bond Graph de subsistema y observan el **balance de energía** en los subsistemas. Indican el comportamiento de una parte del sistema con respecto al procesamiento de energía.

G Gonzalez en [22] en el año 2012 propone un nuevo tipo de bond diseñado como un bond adaptado. Este bond se puede considerar en la transición de un bond activo a un bond de potencia. Este enfoque permite conocer el efecto de carga de la planta del controlador y las conexiones de realimentación. Para determinar el efecto de carga del sistema de bucle cerrado, se presenta la función de transferencia que utiliza rutas causales y bucles causales del sistema en el dominio físico. Sin embargo, este bond adaptado propuesto debe usarse en casos de falla. Finalmente, se dan algunos ejemplos de sistemas modelados en Bond Graph en sistemas de circuito abierto y cerrado.

Dauphin-Tanguy et. al. en [18] en el año 1995 utilizan una forma sistemática, basada en el modelado Bond Graph, para determinar la energía total almacenada en el sistema y su derivada de tiempo, que es la potencia suministrada a los elementos dinámicos. Con un ejemplo no lineal de suspensión de automóvil muestran cómo las dos variables satisfacen las condiciones necesarias y suficientes para que el sistema sea asintóticamente estable, que se establecen en la Parte I.

Dauphin-Tanguy et. al. en [19] en el año 1999 en su artículo se muestran e ilustran mediante un ejemplo de estabilidad energética asintótica monótona estricta de un nivel

nominal de un tanque de flujo continuo, que se lleva a cabo aplicando el modelado de Bond Graph. El resultado principal es el teorema sobre la relación general entre el derivado euleriano de la energía total del sistema, la potencia suministrada al sistema y la potencia suministrada en elementos disipativos de calor. Las aplicaciones de la teoría de la estabilidad asintótica monotónica estricta desarrollada en la primera parte requieren la determinación de la potencia y la energía del sistema y las pruebas de sus propiedades. El modelado de Bond Graph parece ser un enfoque adecuado y efectivo para resolver estos problemas.

Sergio Junco en [28] en el año 1993 presenta un conjunto de métodos basados en la energía para el cálculo de equilibrios, el análisis de su estabilidad y la síntesis de las leyes de control de estabilización. Todos ellos son una transliteración al lenguaje de modelado de Bond Graph de los métodos que generalmente se realizan en las ecuaciones de estado del sistema. Mientras que el cálculo del equilibrio explota la circunstancia de que en tal estado no fluye energía hacia los elementos de almacenamiento, los métodos relacionados con su estabilidad se basan en el hecho de que, al elegir (una función de) la energía almacenada en el sistema como (candidato) función Lyapunov, su derivada orbital se puede evaluar directamente en términos del flujo de potencia a través de bonds. Las leyes de control de voltaje y campo para una máquina de CC se derivan como aplicaciones de los métodos.

Cuijpers et. al en [16] en el año 2008 presentan una representación completa de diferentes aspectos del comportamiento de modelos físicos que deben basarse en principios físicos tales como la conservación de la energía y la continuidad de la potencia. Sin embargo, a menudo, los componentes físicos pueden modelarse mejor como partes continuas con cambios discretos de modo, lo que conduce a una violación de los principios de continuidad. Los Bond Graph facilitan una estructura de modelo dinámica, dando como resultado Bond Graph híbrido. El comportamiento de un Bond Graph híbrido se puede estudiar utilizando una representación uniforme mientras se mantiene una correspondencia directa con los elementos del Bond Graph. Adicionalmente, el no determinismo puede ser incluido en Bond Graph híbridos que puede aliviar la tarea de modelado sin ser perjudicial para los análisis requeridos.

Pieter Mosterman en [34] en el año 2002 documenta la herramienta HYBRISIM para el modelado y simulación de Bond Graph híbridos implementada en Java. Realiza la detección y ubicación de eventos en base a una búsqueda biseccional, maneja los cambios de causalidad en tiempo de ejecución, incluida la causalidad derivativa, realiza (re) inicialización físicamente consistente y admite dos tipos de iteración de eventos debido al acoplamiento dinámico. Exporta modelos de Bond Graphs híbridos en Java y código C / C++ que incluye discontinuidades como ecuaciones conmutadas (es decir, no se requiere la enumeración previa). Los Bond Graph son un formalismo poderoso para modelar dinámicas continuas de sistemas físicos. Los Bond Graph híbridos introducen un elemento de conmutación ideal, la unión controlada, para aproximar el comportamiento continuo que es demasiado complejo para el análisis numérico (por ejemplo, debido a no linealidades o gradientes pronunciados).

Gruyitch et. al. en [24] en el año 1999. El concepto de estabilidad dinámica asintótica monótona estricta (SMAES, por sus siglas en inglés) de un estado de equilibrio de un sistema dinámico no lineal invariante en el tiempo se introduce definiendo también la estabilidad energética, la atracción energética y la atracción energética monótona estricta, así como sus

dominios, en el sentido de Lyapunov. El concepto es importante porque es el intercambio de energía que crea movimientos de sistemas. También es importante desde el punto de vista del consumo de energía y/o la minimización de la disipación de energía.

Dauphin-Tanguy et. al en [19] en el año 1999. Las aplicaciones de la teoría de la estabilidad energética asintótica monótona estricta desarrollada en la primera parte requieren la determinación de la potencia y la energía del sistema y las pruebas de sus propiedades. El modelado de Bond Graph parece ser un enfoque adecuado y efectivo para resolver estos problemas. Esto se muestra en el documento y se ilustra mediante un ejemplo de estabilidad energética asintótica monótona estricta de un nivel nominal de un tanque de flujo continuo, que se lleva a cabo aplicando la teoría del Bond Graph. El resultado principal es el teorema sobre la relación general entre la derivada euleriana de la energía total del sistema, la potencia suministrada al sistema y la potencia suministrada en elementos disipativos de calor.

Fahrenthold y Wargo en [21] en el año 1991 propone simplificaciones necesarias que pueden lograr mediante la introducción de nuevas estructuras Bond Graph que expresan en forma libre de coordenadas las relaciones de impulso y balance de energía y las restricciones cinemáticas que se encuentran comúnmente en la dinámica del sistema mecánico. La utilidad de los métodos de Bond Graph existentes en el análisis de sistemas mecánicos complejos se ha visto limitada significativamente por la ausencia de una metodología de modelado vectorial basada en tensor. Se necesitan simplificaciones topológicas para recuperar la eficiencia del trabajo de formulación de modelos gráficos para mecanismos complejos.

Brown en [6] en el año 1991 proponen los enlaces que tienen dos variables de esfuerzo o potencial y una variable de flujo para representar la interacción de elementos del sistema que involucran el flujo de una sustancia pura, particularmente cuando esa sustancia es compresible. Los significados de las uniones tradicionales 0 y 1, el elemento RS de dos puertos y el elemento C multipuerto se generalizan para acomodar estos enlaces y se introduce un nuevo elemento de transferencia de calor. La causalidad bilateral todavía se aplica a los enlaces y se aplica fácilmente a los modelos del sistema. Se introducen ciertos elementos macro que agilizan el cómputo. Los gráficos son compatibles con los Bond Graph convencionales.

Couenne et. al. en [15] en el año 2008 presentan el lenguaje de Bond Graph mediante el uso de algunos sistemas dinámicos bastante simples como ejemplos tutoriales y mostrar las potencialidades de este lenguaje para construir modelos dinámicos a partir de submodelos reutilizables. Siempre que haya herramientas de software disponibles para manipular este lenguaje, que ya es el caso de los modelos de dimensión finita a nivel comercial y de los modelos de dimensión infinita a nivel de investigación, puede ser una solución al problema de la gestión del modelo de proceso durante el proceso. La representación Bond Graph es un lenguaje gráfico basado en energía que se desarrolló por primera vez para el modelado dinámico de sistemas mecánicos, hidráulicos y eléctricos de dimensión finita. Como tal, este enfoque de modelado interdisciplinario fue un enfoque “mecatrónico vanguardista”. También se ha aplicado a sistemas de ingeniería química y más recientemente, a modelos de sistemas de dimensión infinita. Dicha aplicación está más directamente relacionada con los conceptos de termodinámica (irreversible), aunque todos los campos de aplicación satisfacen

implícitamente los principios básicos de la termodinámica.

Beaman y Breedveld en [2] en el año 1988 muestran que los sistemas abiertos, en los que la materia puede entrar y salir, no son incompatibles con la topología del Bond Graph, como se informa comúnmente. El modelado efectivo de estos sistemas requiere que se preste atención al acoplamiento convectivo entre los sistemas y el entorno que intercambian materia. Los modelos de convección propuestos no requieren el uso de enlaces activos (que no sean señales de modulación), fuentes controladas, elementos ad hoc o cualquier otro artefacto de Bond Graphs especiales.

Kwatny et. al. en [32] en el año 1985 presentan un concepto de fuerte estabilidad de un punto de equilibrio de un sistema de energía eléctrica. Se muestra que casi todos los equilibrios estables del modelo de estabilidad transitoria estándar son fuertemente estables y que la estabilidad fuerte es una condición necesaria y suficiente para la existencia de una función de Lyapunov similar a la energía local para todas las pequeñas perturbaciones del sistema nominal. Tal función de Lyapunov se construye explícitamente. Se proporciona un análisis local completo de la estabilidad de los equilibrios del sistema de potencia en presencia de conductancias de transferencia.

Chang et.al. en [11] en el año 1995 presentan una base teórica de métodos directos tanto para modelos de sistemas de energía de reducción de red como de preservación de red. Además de una visión general, se ofrecen nuevos resultados. Proponen un procedimiento sistemático de construcción de funciones de energía para los modelos de sistemas de energía tanto de reducción de red como de conservación de red. Un método avanzado, denominado método BCU, para calcular el punto de equilibrio inestable y se presenta un controlador con su fundamento teórico. Proporcionan algoritmos de solución numérica capaces de soportar aplicaciones en línea de métodos directos. Describen demostraciones prácticas del uso de métodos directos y el método BCU para evaluaciones de estabilidad transitoria en línea en dos sistemas de energía. Otras posibles mejoras y otras aplicaciones de métodos directos se describen. Los programas de análisis de estabilidad son una herramienta principal que utilizan los ingenieros de planificación y operación del sistema eléctrico para predecir la respuesta del sistema a diversas perturbaciones. Se toman conclusiones y decisiones importantes basadas en los resultados de los estudios de estabilidad.

Daafouz et. al. en [17] en el año 2002 abordan el problema del análisis de estabilidad y la síntesis de control de sistemas conmutados en el dominio de tiempo discreto. Examinan la existencia de una función de Lyapunov cuadrática conmutada para verificar la estabilidad asintótica del sistema conmutado en consideración. Dos condiciones diferentes basadas en la desigualdad de la matriz lineal permiten verificar la existencia de dicha función de Lyapunov. El primero es clásico, mientras que el segundo es nuevo y utiliza una variable de holgura, lo que lo hace útil para los problemas de diseño. Estas dos condiciones han demostrado ser equivalentes para el análisis de estabilidad. Al investigar el problema del control de retroalimentación de salida estática, mostramos que la segunda condición es, en este caso, menos conservadora. La reducción del conservadurismo se ilustra mediante una evaluación numérica.

Hill y Moylan en [26] en el año 1976 presentan una técnica para generar funciones de

Lyapunov para una amplia clase de sistemas no lineales representados por ecuaciones de estado. Se supone que el sistema, para el cual se requiere una función de Lyapunov, tiene una propiedad llamada disipatividad. En términos generales, esto significa que el sistema absorbe más energía del mundo externo que la que suministra. Se pueden considerar diferentes tipos de disipatividad dependiendo de cómo se elija definir “entrada de potencia”. Se muestra que la disipatividad se caracteriza por la existencia de una función computable que puede interpretarse como la “energía almacenada” del sistema. Bajo ciertas condiciones, esta función de energía es una función de Lyapunov que establece la estabilidad y en algunos casos la estabilidad asintótica, del sistema aislado.

Perillo-Marcone et. al. en [35] en el año 1997 presentan una metodología para obtener las ecuaciones dinámicas de brazos robot o cadenas cinemáticas genéricas de n grados de libertad (GDL) utilizando la técnica de Multibond Graph. El procedimiento se basa en emplear una estructura de Bond Graph que modela cada eslabón de manera general y se repite tantas veces como el número de eslabones, aprovechando así la monotonía del sistema. Estas estructuras se unen entre sí de forma también general y mediante la definición de un par de variables por cada unión se selecciona el tipo de vínculo que existe (articulación plana o prismática). Para comprobar la efectividad del método,

se analizó un brazo robot de dos GDL y se observó que las ecuaciones generadas fueron exactamente las mismas que las obtenidas a partir de otras formulaciones, tales como, el método de Newton, las ecuaciones de Lagrange, el método de Euler-Lagrange y las ecuaciones de Kane. Estas ecuaciones fueron integradas numéricamente seleccionando los valores de los parámetros del robot arbitrariamente y la respuesta graficada fue respuesta la posición, velocidad, aceleración y trayectoria de los eslabones.

Grujić y Dauphin-Tanguy en [23] en el año 1995 consideran una gran clase de sistemas físicos dinámicos no lineales. Las soluciones completas para la estabilidad asintótica de un estado y para que un conjunto sea el dominio de la estabilidad asintótica se analizan, en términos de la potencia y la energía del sistema. Se permite que la potencia sea semi-definida. Las condiciones necesarias y suficientes se imponen a la energía. Esto refleja una nueva metodología de prueba de la estabilidad asintótica. Es esencialmente inverso en relación con la metodología ampliamente utilizada de la aplicación del método Lyapunov a sistemas no lineales. La primera parte de este documento de dos partes presenta los fundamentos teóricos de la nueva metodología y los criterios.

Dauphin-Tanguy y Grujić en [18] en el año 1995 utilizan una forma sistemática, basada en el modelado de Bond Graph, para determinar la energía total almacenada en el sistema y su derivada de tiempo, que es la potencia suministrada a los elementos dinámicos. Un ejemplo no lineal de suspensión de automóvil muestra cómo las dos variables satisfacen las condiciones necesarias y suficientes para que el sistema sea asintóticamente estable, que se establecen en la Parte I.

Basándonos en la descripción de los antecedentes científicos es fácil notar que a pesar del gran trabajo que se ha realizado enfocado hacia el análisis energético mediante Bond Graph, los estudios que se han realizado en análisis y modelado de sistemas, no son suficientes lo cual se presenta como una excelente área de oportunidad para la investigación sobre el principio

de conservación de energía en sistemas modelados en Bond Graph.

1.4. Contribución

En esta tesis se presenta un avance en el balance de potencia que consiste en verificar las propiedades de las **submatrices** de la matriz de estructura de unión para que el sistema sea conservativo de potencia con la metodología en Bond Graph, ya que al trabajar en presencia de los **bond activos**, las propiedades no se satisfacen. Se propone un **balance de potencia** en el cual se satisfagan o no la propiedades de las submatrices, el balance de potencia se cumple, además hacemos uso de un bond diseñado como un **bond adaptado** que utiliza en casos de falla y se puede considerar en la transición de un bond activo a un bond de potencia.

Se proponen las **funciones de energía** candidatas de Lyapunov en la metodología de Bond Graph, consiguiendo de esta manera, la ecuación de Lyapunov para garantizar la **estabilidad** del sistema modelado en Bond Graph.

Finalmente, las contribuciones de este trabajo de tesis se enumeran a continuación:

1. Prueba submatrices s_{11} y s_{22}
2. Bond adaptado
3. Balance de potencia
4. Función de Energía
5. Estabilidad

1.5. Estructura de la Tesis

En la presente tesis titulada “Análisis energético de sistemas modelados en Bond Graph” se compone de cinco capítulos, estructurados de la siguiente manera, en el capítulo 1 titulado “Introducción” se presentan los objetivos a los que se desea llegar, el estado del arte donde se hace una reseña histórica sobre las contribuciones referentes al tema. Además se mencionan las contribuciones y la estructuración de esta tesis.

En el siguiente capítulo 2 titulado “Modelado de Sistemas en Bond Graph”, hace referencia a los antecedentes y conceptos básicos que se requieren en Bond Graph. Así mismo, se explica el modelado de sistemas físicos con la metodología Bond Graph con los sistemas eléctricos y mecánicos.

En el capítulo 3 titulado “Balance de Energía de Sistemas en Bond Graph”, se abarcan dos de los tres objetivos particulares los cuales tratan brevemente sobre el balance de los sistemas físicos en un enfoque tradicional, obteniendo el balance de potencia elemento a elemento. Además, con la metodología Bond Graph se propone y explica en que consiste el balance de potencia propuesto y se aplica a los casos de estudio.

El capítulo 4 titulado “Funciones de Energía y Estabilidad”, abarca el tercer objetivo particular el cual consiste en proponer un función de energía candidata a Lyapunov. Primero se describe los métodos de Lyapunov posteriormente se describe condicones de estabilidad en la metodología Bond Graph. Finalmente se propone la función de energía y además se calcula la ecuación de Lyapunov.

Además, en el capítulo 5 “Conclusiones y Recomendaciones” se abordan las deducciones y conclusiones obtenidas durante el desarrollo de esta tesis. Así mismo, se proponen recomendaciones para trabajos futuros sobre este tema de Análisis de sistemas modelados en Bond Graph.

Capítulo 2

Modelado de Sistemas en Bond Graph

2.1. Introducción

Un Bond Graph es una representación gráfica de un sistema dinámico físico. Permite la conversión del sistema en una representación de espacio de estado. Es similar a un diagrama de bloques o gráfico de flujo de señales, con la gran diferencia de que los arcos en los Bond Graph representan el intercambio bidireccional de energía física, mientras que los de los diagramas de bloques y los gráficos de flujo de señales representan un flujo de información unidireccional. Los Bond Graph son de dominio multienergía (por ejemplo, mecánico, eléctrico, hidráulico, etc.) y dominio neutral, ver figura 2.1. Esto significa que un Bond Graph puede incorporar múltiples dominios sin problemas. Ver [30] y [37].

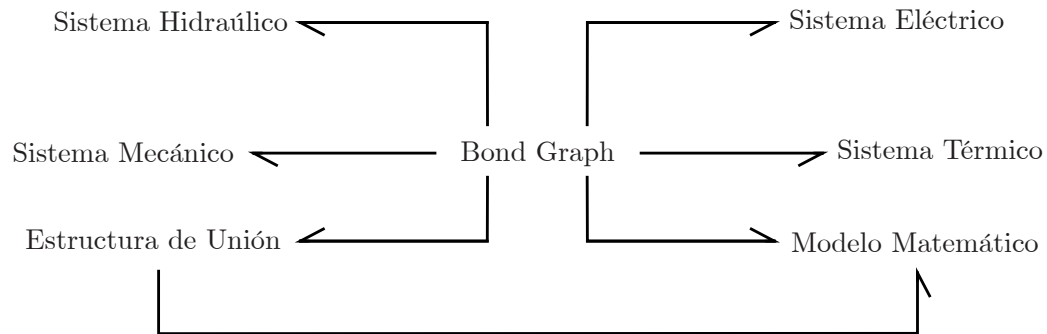


Figura 2.1: Diagrama de objetivos completa.

El Bond Graph se compone de los “bonds” que unen los elementos. Cada bond representa el flujo instantáneo de energía ($\frac{d}{dt}e$) o potencia. El flujo en cada bond se denota mediante un par de variables llamadas variables de potencia, cuyo producto es la potencia instantánea

del bond. Las variables de potencia se dividen en dos partes: flujo y esfuerzo. Por ejemplo, para la unión de un sistema eléctrico, el flujo es la corriente, mientras que el esfuerzo es el voltaje. Al multiplicar la corriente y el voltaje en este ejemplo, puede obtener la potencia instantánea del bond.

Un bond tiene otras dos características que se describen brevemente aquí, y se discuten con más detalle a continuación. Una es la convención de signos de “media flecha”. Esto define la dirección asumida del flujo de energía positiva. Al igual que con los diagramas de circuitos eléctricos y diagramas de cuerpo libre, la elección de la dirección positiva es arbitraria, con la advertencia de que el analista debe ser coherente en todo con la definición elegida. La otra característica es la “causalidad”. Esta es una barra vertical colocada en sólo un extremo del bond. No es arbitrario. Como se describe a continuación, existen reglas para asignar la causalidad adecuada a un puerto determinado y reglas para la precedencia entre puertos. La causalidad explica la relación matemática entre el esfuerzo y el flujo. Las posiciones de las causalidades muestran cuales de las variables de potencia son dependientes y cuales son independientes.

El tetraedro de estado muestra gráficamente la conversión entre esfuerzo y flujo. La figura 2.2 muestra el tetraedro en su forma generalizada. Usando el tetraedro de estado, uno puede encontrar una relación matemática entre cualquier variable en el tetraedro.

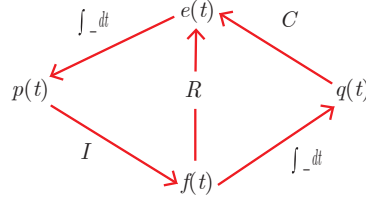


Figura 2.2: Tetraedro de estado.

Esto se hace siguiendo las flechas alrededor del diagrama y multiplicando las constantes en el camino. Por ejemplo, si quisiera encontrar la relación entre flujo generalizado y desplazamiento generalizado, comenzaría en $f(t)$ y luego lo integraría para obtener $q(t)$.

$$A \xrightarrow{\text{Bond}} B$$

Figura 2.3: Bond.

Estas variables generalizadas pueden ser utilizadas en todos los dominios de energía, por ejemplo para sistemas eléctricos, mecánico e hidráulicos tenemos la generalización en la tabla 2.1.

Donde e y f son las variables de potencia generalizada, ver figura 2.4

Tabla 2.1: Variables generalizadas.

Variable	Sistema mecánico		Sistema eléctrico	Sistema hidráulico
	Traslación	Rotación		
Esfuerzo $e(t)$	Fuerza F	Torque τ	Voltaje e	Presión P
Flujo $f(t)$	Velocidad V	Velocidad angular ω	Corriente i	Caudal Q



Figura 2.4: Bond de potencia generalizado.

Variables de energía

$$p \longrightarrow \text{momento} \quad e = \frac{dp}{dt} \quad p = \int e dt$$

$$q \longrightarrow \text{desplazamiento} \quad f = \frac{dq}{dt} \quad q = \int f dt$$

2.1.1. Puertos

■ Puertos-1

Se les conoce como Puertos-1 pasivos a los elementos pasivos son aquellos que representan disipación de potencia. Se les conoce como Puertos-1 activos a los elementos que introducen energía al sistema son llamados fuentes, ver figura 2.5.



Figura 2.5: Puertos-1.

■ Puertos-2

Existen dos elementos del Puerto-2, transformador TF y girador GY , son sistemas lineales que cambian la relación entre las variables de flujo y esfuerzo, ver figura 2.6.

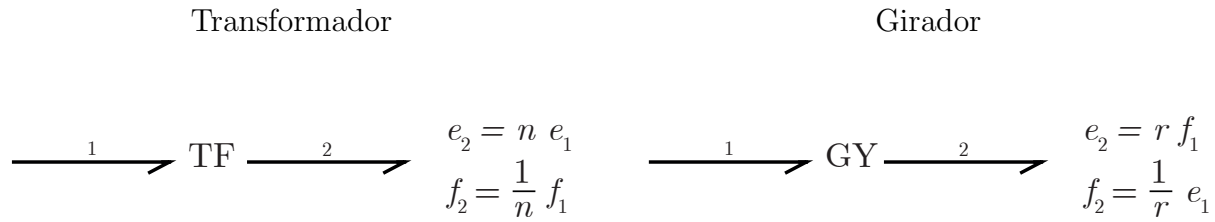


Figura 2.6: Puertos-2.

■ Puertos-3 o uniones

Los Puertos-3 se llaman uniones, sirven para interconectar tres o más puertos de energía dentro de un subsistema, hay dos tipos de uniones, Unión-1 y Unión-0, ver figura 2.7.

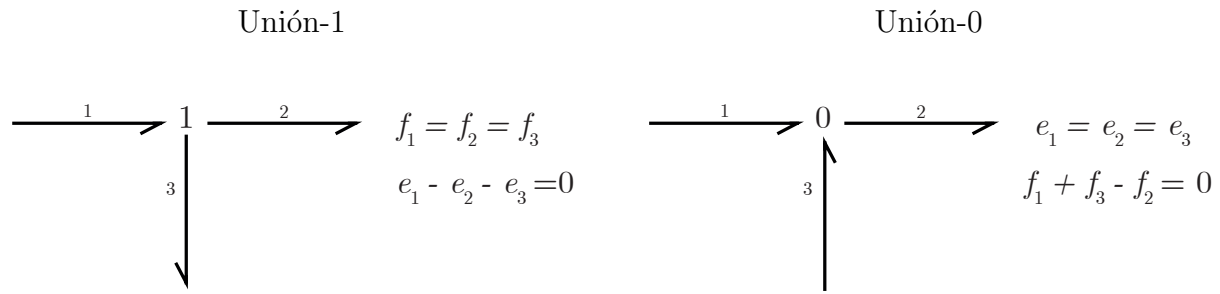


Figura 2.7: Puertos-3.

Modelado sistema eléctrico

Pasos para crear el Bond Graph. Ver figura 2.10.

1. Crear una unión-0 por cada nodo del circuito.
2. Para cada elemento del circuito crear una unión-1.
3. Adicionarle a la unión-1 un bond que represente al elemento y enlazar la unión con las dos uniones-0 correspondientes a los nodos entre los que está conectado el elemento.
4. Asignar las direcciones de potencia a los bonds. Si hay un nodo de referencia, eliminar la unión-0 correspondiente y los bonds adyacentes.
5. Simplificar los bonds, tomando en cuenta la regla de la figura 2.8.

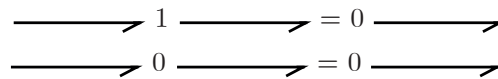


Figura 2.8: Regla de simplificación.

Se aplica el procedimiento descrito a el circuito de la figura 2.9.

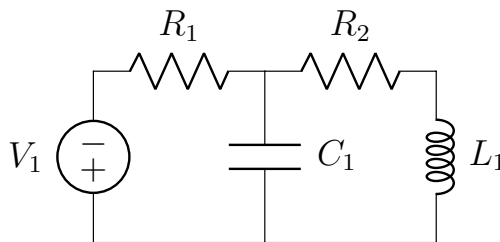


Figura 2.9: Circuito RCI.

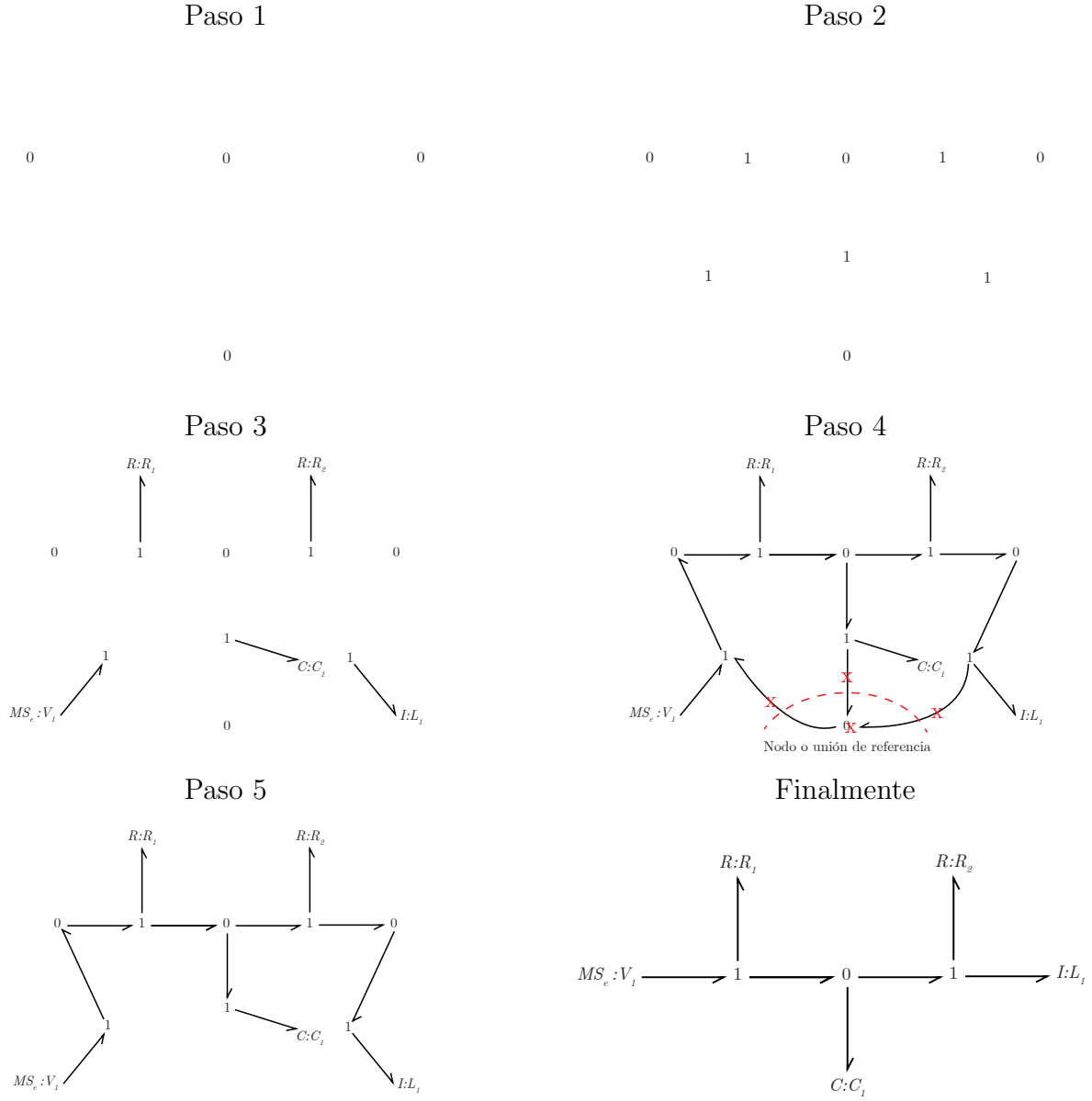


Figura 2.10: Pasos modelado del Bond Graph del circuito RCI.

2.1.2. Causalidad

La causalidad o relación causa-efecto para esfuerzos y flujos son representadas en direcciones opuestas. El trazo causal es una marca que indica cómo $e(t)$ y $f(t)$ simultáneamente son determinados causalmente en un bond.

El esfuerzo entra en un bond en el mismo sentido del trazo causal y por consecuencia el flujo va en dirección contraria.

Las diferentes maneras de expresar la causalidad se pueden ver en figuras 2.11 y 2.12.

Entra esfuerzo sale flujo:



Figura 2.11: Causalidad en esfuerzo.

Entra flujo sale esfuerzo:



Figura 2.12: Causalidad en flujo.

Causalidad necesaria

Se aplica en los puertos-1, pero sólo a los elementos activos o fuentes. Ver figura 2.13.

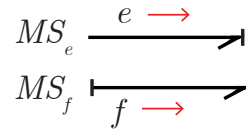


Figura 2.13: Causalidad necesaria.

Causalidad restrictiva

Se aplica en los puertos-2 y puertos-3. Ver figura 2.14 y figura 2.15.

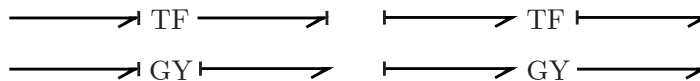


Figura 2.14: Causalidad restrictiva a puertos-2.

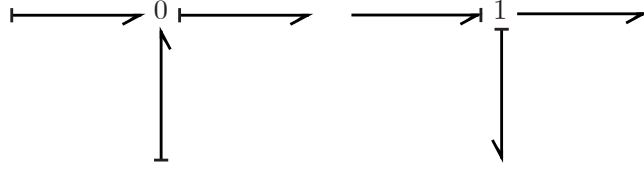
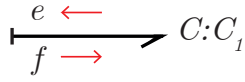


Figura 2.15: Causalidad restrictiva a puertos-3.

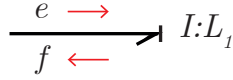
Causalidad integral

Se aplica en los puertos-1, pero sólo a los elementos pasivos (C , I). Ver figura 2.16. Consideramos las ecuaciones

$$q = Ce; \quad f = \frac{dq}{dt} \quad p = Lf; \quad e = \frac{dp}{dt}$$



$$e = \frac{1}{C}q = \frac{1}{C} \int f dt$$



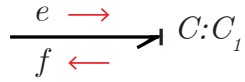
$$f = \frac{1}{L}p = \frac{1}{L} \int e dt$$

Figura 2.16: Causalidad integral.

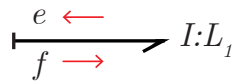
Causalidad derivativa

Se aplica en los puertos-1, pero sólo a los elementos pasivos (C , I). Ver figura 2.17. Consideramos las ecuaciones

$$q = Ce; \quad f = \frac{dq}{dt} \quad p = Lf; \quad e = \frac{dp}{dt}$$



$$e = L \frac{df}{dt}$$



$$f = C \frac{de}{dt}$$

Figura 2.17: Causalidad derivativa.

Causalidad arbitraria

Se aplica en los puertos-1, al elemento pasivo R . Ver figura 2.18.
Consideramos las ecuaciones

$$e = R_1 f \quad f = \frac{1}{R_1} e_1$$



Figura 2.18: Causalidad arbitraria.

Asignación de causalidad

Es necesario aplicar las relaciones de causalidad para los multipuertos básicos establecidas anteriormente seguir el siguiente procedimiento en orden estricto:

1. Asignar **causalidad necesaria** e inmediatamente extender las implicaciones causales, usando **causalidad restrictivas** de 0, 1, TF y GY .
2. Asignar **causalidad integral** a los elementos (C, I) e inmediatamente extender las implicaciones causales, usando **causalidad restrictivas** de 0, 1, TF y GY .
3. Asignar **causalidad arbitraria** a cualquier elemento R que no esté asignado y extender las implicaciones causales, usando **causalidad restrictivas** de 0, 1, TF y GY .

En la figura 2.19 se muestra la causalidad del ejemplo del circuito RCI de la figura 2.9.

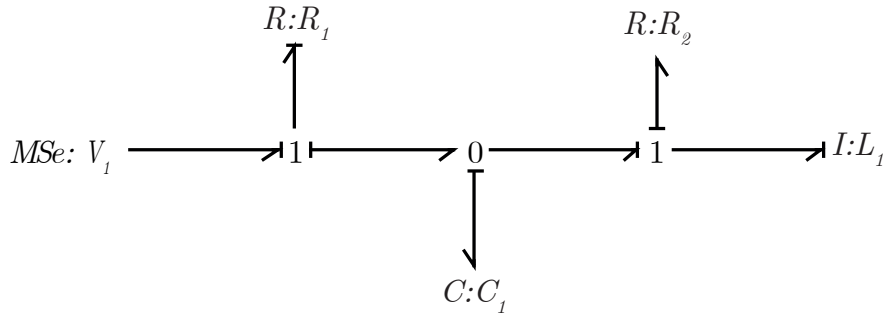


Figura 2.19: Bond Graph con causalidad del circuito RCI.

2.1.3. Vectores clave

El conjunto de todos los componentes que conforman el modelado de Bond Graph pueden clasificarse en cinco grupos o campos de acuerdo a su potencia o las propiedades de la energía, ver figura 2.20:

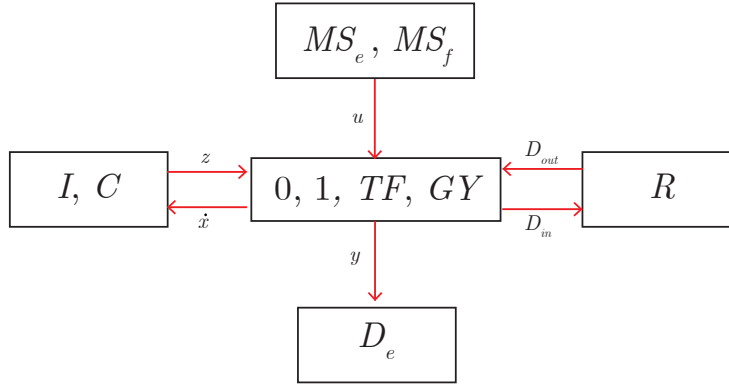


Figura 2.20: Diagrama de la estructura de unión.

Al vínculo que conecta los campos a la estructura de cruce MS_e, MS_f, R, I, C se llaman bonds externos y los bonds que se unen a un elemento de la estructura de unión $0, 1, TF, GY$ son llamados bonds internos, D_e son los detectores. Además R campo de la disipación, en el que se pierde la energía del sistema, I, C el campo de almacenamiento, que son la energía conservativa, $0, 1, TF, GY$, que conserva la energía, los campos de origen MS_e, MS_f . Los vectores clave asociados al diagrama son

1. x es el vector de estado, debido a los elementos de almacenamiento: I, C .
2. $\dot{x}$ es el vector de derivadas, debido a los elementos de almacenamiento: I, C .
3. z es el vector de estado de coenergía, debido a los elementos de almacenamiento: I, C .
4. u es el vector de entradas, debido a las fuentes: MS_e, MS_f .
5. D_{in} es el vector de entrada, debido a los elementos disipativos: R .
6. D_{out} es el vector de salida, debido a los elementos disipativos: R .
7. y es el vector de salida, debido a los detectores: D_e .

Para causalidad derivativa se tienen además los siguientes vectores:

1. x_d es el vector de estado.

2. $\dot{x}_d$ es el vector de derivadas.

3. z_d es el vector de estado de coenergía.

Para obtención de los vectores x , $\dot{x}$ y z se toma en cuenta la tabla:

	I	C		I	C		I	C
x	p	q	$\dot{x}$	e	f	z	f	e

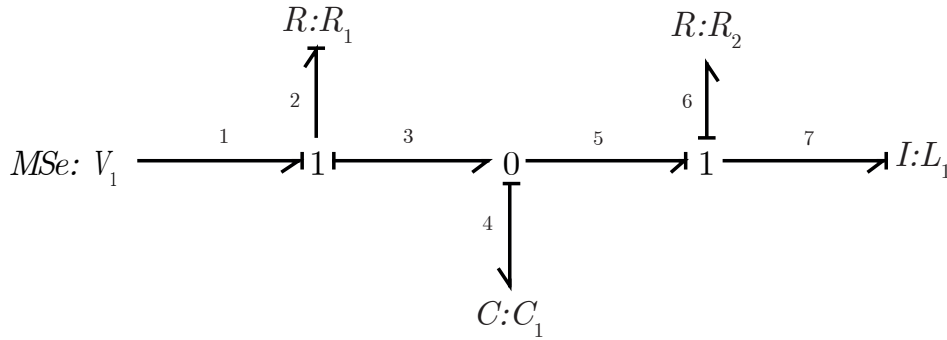


Figura 2.21: Bond Graph enumerado del circuito RCI.

En la figura 2.21 se muestra el Bond Graph enumerado del circuito del ejemplo de la figura 2.9, para sacar los vectores clave, los cuales son:

$$u = e_1, \quad x = \begin{pmatrix} q_4 \\ p_7 \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} f_4 \\ e_7 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} e_4 \\ f_7 \end{pmatrix},$$

$$D_{in} = \begin{pmatrix} e_2 \\ f_6 \end{pmatrix}, \quad D_{out} = \begin{pmatrix} f_2 \\ e_6 \end{pmatrix}, \quad y = e_8.$$

2.1.4. Bond activo

Este es un bond de señal que tiene como característica un flujo de potencia cero. Se utiliza para mandar una señal de salida al detector (D_e o D_f), si sale de unión-0 se obtiene esfuerzo, si sale de unión-1 se obtiene flujo.

2.1.5. Relaciones constitutivas

Las relaciones constitutivas se obtienen de: $z = Fx$ y $D_{out} = LD_{in}$, donde las matrices F y L son matrices a determinar, siendo L es una matriz diagonal con entradas de los elementos R o R^{-1} ; F es una matriz diagonal con entradas de los elementos C e I .

Para el circuito del ejemplo de la figura 2.9, las relaciones constitutivas son:

$$\begin{pmatrix} e_4 \\ f_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_4 \\ p_7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_2 \\ e_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ f_6 \end{pmatrix}$$

Así de esta manera tenemos las matrices F y L .

2.1.6. Matriz de estructura unión

Estructura unión

La relación que tienen los vectores dentro del diagrama de la Estructura de Unión es la Matriz de la Estructura de Unión.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{pmatrix} = [S] \begin{pmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{pmatrix}$$

expresando la matriz S como submatrices tenemos

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$$

sustituyendo en la primera tenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{pmatrix}$$

Los elementos que conforman la matriz S toman valores dentro del conjunto $0, \pm 1, \pm r, \pm n$ donde $\pm n$ y $\pm r$ son los módulos del transformador y girador.

Las submatrices de la matriz de estructura unión tienen dos propiedades principales: s_{11} y s_{22} son matrices cuadradas antisimétricas y s_{12} es la traspuesta negativa de s_{21} o viceversa. Estas dos propiedades están basadas en el principio de conservación de energía.

Haciendo el producto de las matrices tenemos

$$\dot{x} = s_{11}z + s_{12}D_{out} + s_{13}u$$

$$D_{in} = s_{21}z + s_{22}D_{out} + s_{23}u$$

$$y = s_{31}z + s_{32}D_{out} + s_{33}u$$

Haciendo las operaciones despejamos D_{in} de $D_{out} = LD_{in}$, para sustituir tanto en $\dot{x}$ como en y . Obtenemos las expresiones

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu. \\ y = Cx + Du. \end{cases}$$

Donde A , B , C y D son matrices y cumplen las siguientes formas:

$$\begin{aligned} A &= (s_{11} + s_{12}Ms_{21})F & B &= (s_{13} + s_{12}Ms_{23}) \\ C &= (s_{31} + s_{32}Ms_{21})F & D &= (s_{33} + s_{32}Ms_{23}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

La matriz M tiene la siguiente forma $M = L(I - s_{22}L)^{-1}$.

Para el circuito del ejemplo de la figura 2.9 la matriz de estructura de unión es:

$$\begin{pmatrix} f_4 \\ e_7 \\ e_2 \\ f_6 \\ f_1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} e_4 \\ f_7 \\ f_2 \\ e_6 \\ e_1 \end{pmatrix}$$

y las matrices son A , B , C , D son:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_2}{L_1} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \end{pmatrix} \quad D = 0.$$

Por lo tanto, la representación en variables de estado es :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_2}{L_1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{pmatrix} u. \\ y = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \end{pmatrix} x. \end{cases}$$

2.1.7. Análisis de trayectorias causales

Un Bond Graph muestra no sólo estructuras topológicas de un sistema sino también la organización causal, la cual indica las relaciones de causa y efecto, esta estructura causal da la noción de trayectoria causal.

Una trayectoria causal de una estructura de unión es una secuencia alternante de bonds y nodos tal que:

1. Para una gráfica que no tiene la causalidad aplicada a sus elementos o bonds, la secuencia forma una cadena sencilla.

2. Todos los nodos en la secuencia tienen una completa y correcta causalidad.
3. Dos bonds de una trayectoria causal tienen en el mismo nodo orientaciones causales opuestas.

Una trayectoria causal simple, si a través de la misma, sigue solamente una misma variable, ya sea por esfuerzo o por flujo, ver figura 2.22.

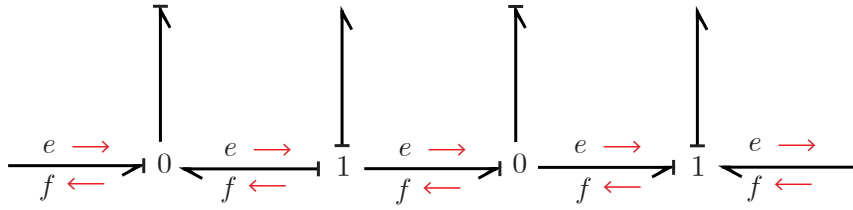


Figura 2.22: Trayectoria causal simple.

Una trayectoria causal es mezclada si un cambio de variable es requerido a través de la secuencia causal. Si el cambio se debe a la presencia de un *GY*, la trayectoria causal es llamada mezclada directa (ver figura 2.23) y cuando pasa la trayectoria a través de algún elemento *R*, *C*, o *I* a trayectoria causal es llamada mezclada indirecta (ver figura 2.24).

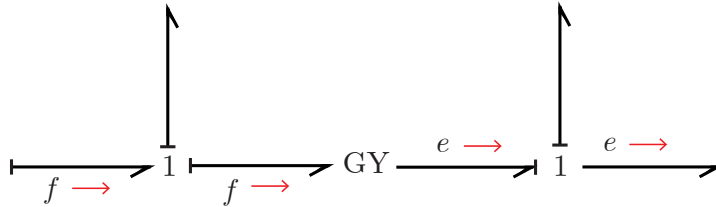


Figura 2.23: Trayectoria mezclada directa.

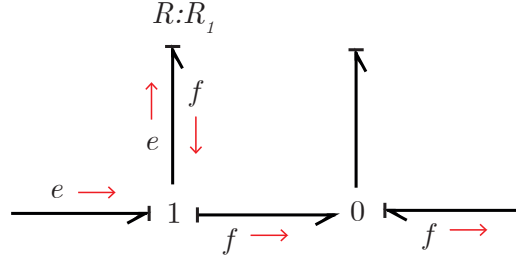


Figura 2.24: Trayectoria mezclada indirecta.

Una trayectoria directa es una trayectoria causal entre una entrada y un detector.

La función característica de una trayectoria causal está definida como la función la cual enlaza la variable de salida del elemento correspondiente al origen de la trayectoria, a la variable de entrada del elemento formando el fin de la trayectoria.

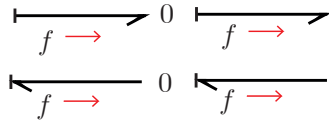
La función característica, indexada i , para una trayectoria causal directa mezclada o simple es:

$$T_i = \begin{cases} TF \text{ y } GY & (-1)^{n_0+n_1} \prod_{j,k} \left(m_j \circ \frac{1}{m_j} \right) \left(r_k \circ \frac{1}{r_k} \right) \\ TF & (-1)^{n_0+n_1} \prod_{j,k} \left(m_j \circ \frac{1}{m_j} \right) \\ GY & (-1)^{n_0+n_1} \prod_{j,k} \left(r_k \circ \frac{1}{r_k} \right) \end{cases}$$

donde

- n_0 representa el número total de cambios de orientación de los bonds en las uniones-0, mientras se sigue la variable de flujo, ver figura 2.25.

$n_0 = 0$



$n_0 = 1$

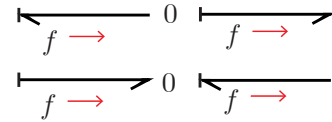


Figura 2.25: Cambios de orientación de los bonds en las uniones-0.

- n_1 representa el número total de cambios de orientación de los bonds en las uniones-1 mientras se sigue la variable de esfuerzo, ver figura 2.26.



Figura 2.26: Cambios de orientación de los bonds en las uniones-1.

- m_j o $\frac{1}{m_j}$ son los módulos de los elementos TF los cuales intervienen en la trayectoria causal, dependiendo de sus causalidades.
- r_k o $\frac{1}{r_k}$ son los módulos de los elementos GY los cuales intervienen en la trayectoria causal, dependiendo de sus causalidades.

Cuando la trayectoria causal es indirecta significa que pasa a través de elementos R , C o I , las relaciones constitutivas de estos elementos deben ser tomadas en cuenta. También es necesario tomar en cuenta las conexiones causales y sus correspondientes transmitancias, ver figura 2.27.

Conexión causal

Transmitancia

$C \longleftarrow 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow R$	$-\frac{1}{RCs}$
$I \longleftarrow 1 \longrightarrow \dots \longrightarrow R$	$-\frac{R}{Is}$
$I \longleftarrow 1 \longrightarrow \dots \longrightarrow C$	$-\frac{1}{ICs^2}$
$R_1 \longleftarrow 1 \longrightarrow \dots \longrightarrow R_2$	$-\frac{R_2}{R_1}$
$C \longleftarrow 0 \longrightarrow TF \longrightarrow \dots \longrightarrow R$	$-\frac{1}{RCsm^2}$
$C \longleftarrow 0 \longrightarrow GY \longrightarrow \dots \longrightarrow R$	$-\frac{R}{Csr^2}$

Figura 2.27: Conexiones causales y transmitancia.

Un lazo causal es una trayectoria causal sencilla cerrada; la trayectoria comienza en un elemento almacenamiento pasando por un elemento disipativo y regresa al elemento de almacenamiento de inicio.

Un lazo Mason es un lazo causal de la salida de un puerto a la entrada del mismo sin trazar el mismo bond en la misma dirección más de una vez.

El polinomio característico está dado por:

$$D(s) = 1 - \sum_{j=1} L_{1j}(s) + \sum_{k=1} L_{2k}(s) - \sum_{l=1} L_{3l}(s) + \dots$$

donde $L_{rk}(s)$ es el producto de las ganancias de lazo del k^{th} conjunto del r^{th} lazo de Mason, los cuales no se tocan unos con otros.

La $L_{1j}(s)$ ganancias del j^{th} lazo de Mason está definida por

$$L_{1j}(s) = (-1)^{n_0+n_1} \prod_{j,k} \left(m_j \circ \frac{1}{m_j} \right)^2 \left(r_k \circ \frac{1}{r_k} \right)^2 \prod_h G_h$$

- n_0 , representan el número total de cambios de orientación de los bonds en las uniones-0, al seguir a la variable de flujo;
- n_1 , representan el número total de cambios de orientación de los bonds en las uniones-1 al seguir a la variable de esfuerzo;
- $\prod_{j,k}$ denota el producto de $m_j \circ \frac{1}{m_j}$ y $r_k \circ \frac{1}{r_k}$, módulos de los elementos de TF y GY , los cuales son incluidos en la trayectoria causal, dependiendo de sus causalidades;
- $\prod_h$ designa el producto de ganancias de los elementos que componen el lazo.

2.2. Algunas propiedades de los campos

Los ejemplos de este capítulo, la cual incluye campos de almacenamiento, campos disipativos y estructuras de unión, características interesantes que despliegan algunas de las matrices para el caso lineal. Aquí, presentamos algunas propiedades generales útiles que pueden servir, como checar en la exactitud de resultados en derivar ecuaciones de campo. [37].

2.2.1. Propiedades de la estructura de unión

Suponer una estructura de unión dada por una ecuación de entrada-salida

$$V_o = S V_i \tag{2.2}$$

donde

V_o = vector de salida

V_i = vector de entrada

S = matriz de estructura de unión de tamaño propio.

Asumir que todos los puertos de potencia de la estructura de unión están dirigidos al mismo sentido (hacia adentro ó hacia afuera). También, asumir que V_o y V_i están relacionadas por los puertos; es decir, el mismo elemento de cada vector refiere al mismo puerto. Entonces, la siguiente ecuación es cierta:

$$P(t) = V_o^T V_i = 0 \quad (2.3)$$

Esto es, el producto de potencia neta en cualquier instante debe ser cero (a partir de que la estructura de unión es conservadora de potencia), y el producto vectorial mostrado expresará la sumatoria neta de los puertos de potencia.

1. En particular, considerar un puerto-2. Tenemos

$$P(t) = [v_{o1} \ v_{o2}] \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \end{bmatrix} = v_{o1}v_{i1} + v_{o2}v_{i2} = 0. \quad (2.4)$$

Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} v_{o1} \\ v_{o2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Ahora la condición de potencia puede ser escrita como

$$P(t) = V_o^T V_i = V_i^T S^T V_i. \quad (2.6)$$

Utilizando (2.5) en (2.6) y expandiendo, obtenemos

$$P(t) = s_{11}v_{i1}^2 + (s_{21} + s_{12})v_{i1}v_{i2} + s_{22}v_{i2}^2 = 0. \quad (2.7)$$

Desde que debe ser idénticamente cierto (bajo todas las condiciones de puerto entrado posible y para todos los valores de s_{ij}), concluimos que

$$s_{11} = 0; \quad s_{22} = 0 \quad \text{y} \quad s_{21} = -s_{12}.$$

En otras palabras, la matriz (o su transpuesta) debe ser antisimétrica para asegurar la condición de conservación de potencia. Este resultado importante es cierto para estructuras de unión de cualquier tamaño provisto de puertos de potencia que están orientados en el mismo sentido. Sirve como un conveniente medio para checar las matrices de estructura de unión.

a) Si consideramos elementos de almacenamiento (C, I). Tenemos

$$P(t) = [v_{o1} \ v_{o2}] \begin{bmatrix} v_{i1} \\ 0 \end{bmatrix} = v_{o1}v_{i1} + v_{o2}0 = 0. \quad (2.8)$$

Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} v_{o1} \\ v_{o2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i1} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Ahora la condición de potencia puede ser escrita como

$$P(t) = V_o^T V_i = V_i^T S^T V_i. \quad (2.10)$$

Utilizando (2.5) en (2.6) y expandiendo, obtenemos

$$P(t) = s_{11} v_{i1}^2 = 0. \quad (2.11)$$

Desde que debe ser idénticamente cierto (bajo todas las condiciones de puerto entrado posible y para todos los valores de s_{ij}), concluimos que

$$s_{11} = 0.$$

Por lo tanto s_{11} es antisimétrica.

b) Si consideramos elementos de disipación (R). Tenemos

$$P(t) = [v_{o1} \ v_{o2}] \begin{bmatrix} 0 \\ v_{i2} \end{bmatrix} = v_{o1} 0 + v_{o2} v_{i2} = 0. \quad (2.12)$$

Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} v_{o1} \\ v_{o2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v_{i2} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Ahora la condición de potencia puede ser escrita como

$$P(t) = V_o^T V_i = V_i^T S^T V_i. \quad (2.14)$$

Utilizando (2.5) en (2.6) y expandiendo, obtenemos

$$P(t) = s_{22} v_{i2}^2 = 0. \quad (2.15)$$

Desde que debe ser idénticamente cierto (bajo todas las condiciones de puerto entrado posible y para todos los valores de s_{ij}), concluimos que

$$s_{22} = 0.$$

Por lo tanto s_{22} es antisimétrica.

2. Si $S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}$ es antisimétrica, entonces

$$s_{11} = s_{22} = 0$$

ya que estas submatrices son la diagonal principal y

$$s_{21} = -s_{12}$$

son las diagonales secundarias.

2.2.2. Propiedades de campo de disipación

Ahora centraremos nuestra atención para campos- R . Considerar un campo lineal R en causalidad de resistencia completa, tal que

$$e = Rf \quad (2.16)$$

donde

e es el vector de salidas de esfuerzo

f es el vector de entradas de flujo

R es la matriz cuadrada de resistencias de tamaño propio.

Para un campo- R todas las potencias en los puertos están dirigidas convenientes en el campo desde que el campo disipa potencia. Entonces, la potencia total en el campo- R es cualquier instante está dada por

$$P_d(t) = f^T e = f^T R f. \quad (2.17)$$

Apesar que hemos escrito la potencia como $f^T e$, podría también haber sido escrito como $e^T f$. Para un campo de puerto-2 la expresión es:

$$P_d = r_{11}f_1^2 + (r_{21} + r_{12})f_1f_2 + r_{22}f_2^2 > 0. \quad (2.18)$$

Que es lo que necesitamos para determinar las condiciones en R tal que si f_1 o f_2 o ambas son diferentes de cero, P_d es positiva. Esto garantiza que la potencia será disipada para cualquier actividad posible en los puertos de campo- R . Claramente, a partir de (2.18), si ambos f_1 y f_2 son cero, P_d es igual a cero, el cual es sensible.

Imaginar que R es antisimétrica. Entonces $r_{11} = r_{22} = 0$ y $r_{21} = -r_{12}$, así $P_d = 0$ independiente de la actividad del puerto. (Ya hemos visto que esto fuera cierto a partir de las propiedades de la estructura de unión). Ahora, observamos que si una matriz R dada es particionada en sus partes simétricas y antisimétricas, la parte antisimétrica no contribuye a la potencia disipada. Por lo tanto, podemos examinar solamente la parte simétrica de la matriz para ver si obedece ó no la propiedad de la ecuación (2.18), la cual es llamada definida positiva. La generalización de la ecuación (2.18) es que P_d , como dado por la ecuación (2.17) debería ser una cantidad definida positiva para cualquier campo- R el cual creemos debe disipar potencia bajo todas las condiciones.

Para asegurar ésta condición en potencia, examinamos la matriz- R a si misma para definida positiva. El camino más sencillo es utilizar el criterio de Sylvestre, el cual aplica a una matriz simétrica. Formar los principales discriminantes sucesivos $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, donde Δ_1 denota r_{11} , Δ_2 el determinante de la submatriz superior izquierda de 2×2 , Δ_3 el determinante de la submatriz superior izquierda de 3×3 , etc., Δ_n es, de seguro el determinante de R . La prueba es sencilla. Un campo- R de puerto- n es definido positivo si (y sólo si) cada Δ_i es positivo, $i = 1, \dots, n$.

2.3. Modelado sistemas mecánicos

Pasos para crear el Bond Graph.

1. Crear una unión-1 por cada velocidad del sistema.
2. Para cada elemento del circuito crear una unión-0.
3. Adicionarle a la unión-1 un bond que represente al elemento y enlazar la unión con las dos uniones-0 correspondientes a los nodos entre los que está conectado el elemento. Añadir un elemento inercia a la unión-1 .
4. Asignar las direcciones de potencia a los bonds. Si hay un nodo de referencia, eliminar la unión-1 correspondiente y los bonds adyacentes.
5. Simplificar los bonds, tomando en cuenta la regla de la figura 2.8.

Se hará el procedimiento con los siguientes sistemas mecánicos.

2.3.1. Ejemplo 1

Sistema mecánico el cual tiene un resorte y un amortiguador conectados en paralelo, entonces la fuerza actúa en los dos elementos y es la suma de la fuerza del amortiguador y la fuerza del resorte. En la figura 2.28 se muestra el diagrama del sistema. En la figura 2.29 se muestran los pasos del modelado y el Bond Graph del sistema.

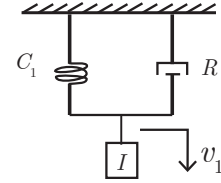


Figura 2.28: Sistema mecánico ejemplo 1.

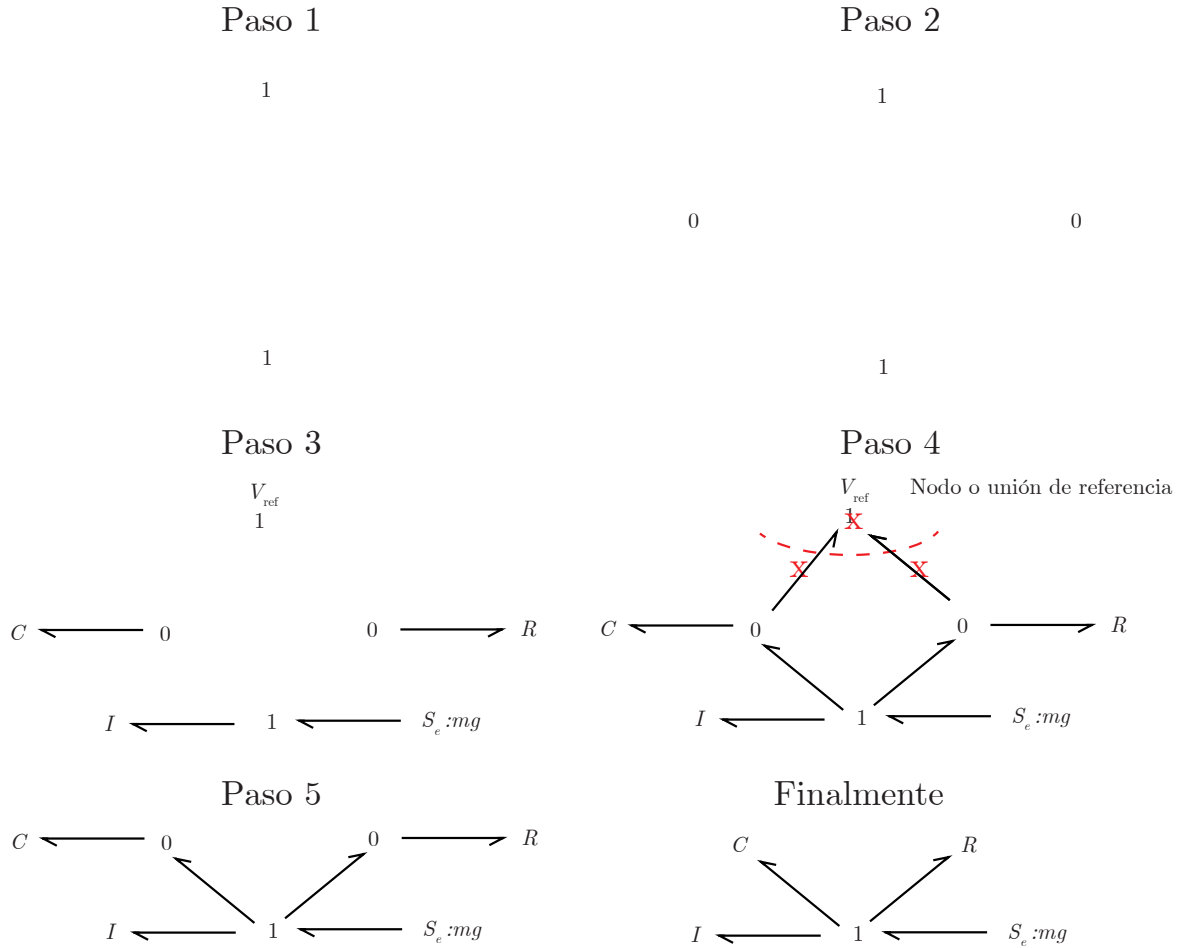


Figura 2.29: Pasos modelado del Bond Graph de ejemplo 1.

2.3.2. Ejemplo 2

Sistema mecánico conocido como masa-resorte-amortiguador, el cual tiene tres masas, tres resortes y tres amortiguadores conectados. En la figura 2.30 se muestra el diagrama del sistema. En la figura 2.31 se muestran los pasos del modelado y el Bond Graph del sistema.

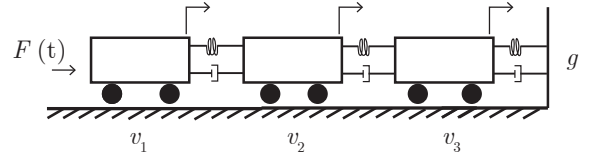


Figura 2.30: Sistema mecánico ejemplo 2.

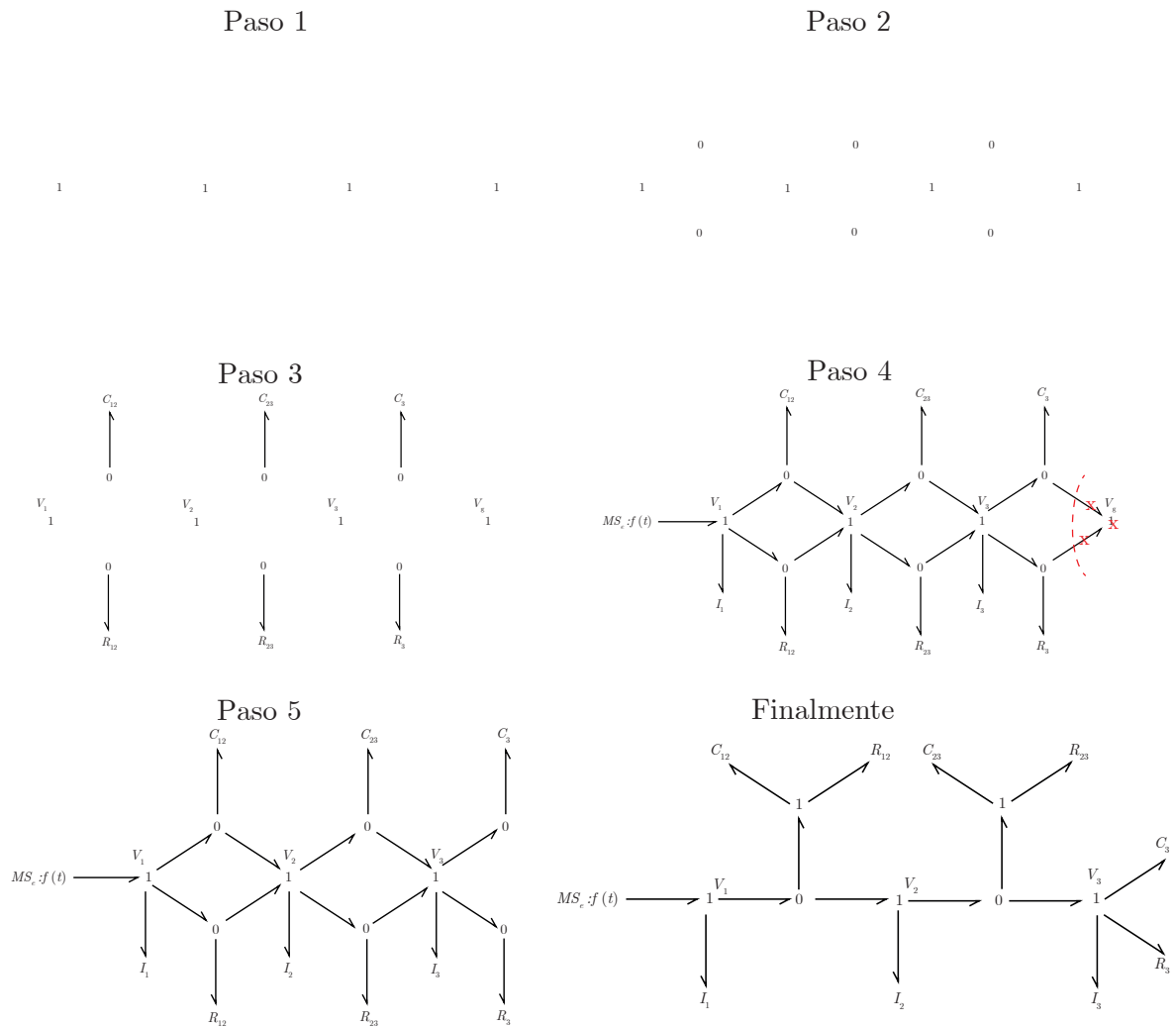


Figura 2.31: Pasos modelado del Bond Graph de ejemplo 2.

2.3.3. Ejemplo 3

Sistema mecánico translacional con varias velocidades, dos resortes y un amortiguador, además de un arreglo de polea y cables. En la figura 2.32 se muestra el diagrama del sistema. En la figura 2.33 se muestran los pasos del modelado y el Bond Graph del sistema.

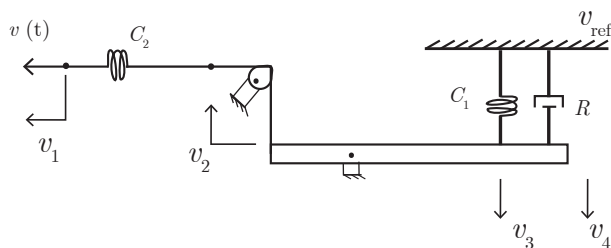


Figura 2.32: Sistema mecánico ejemplo 3.

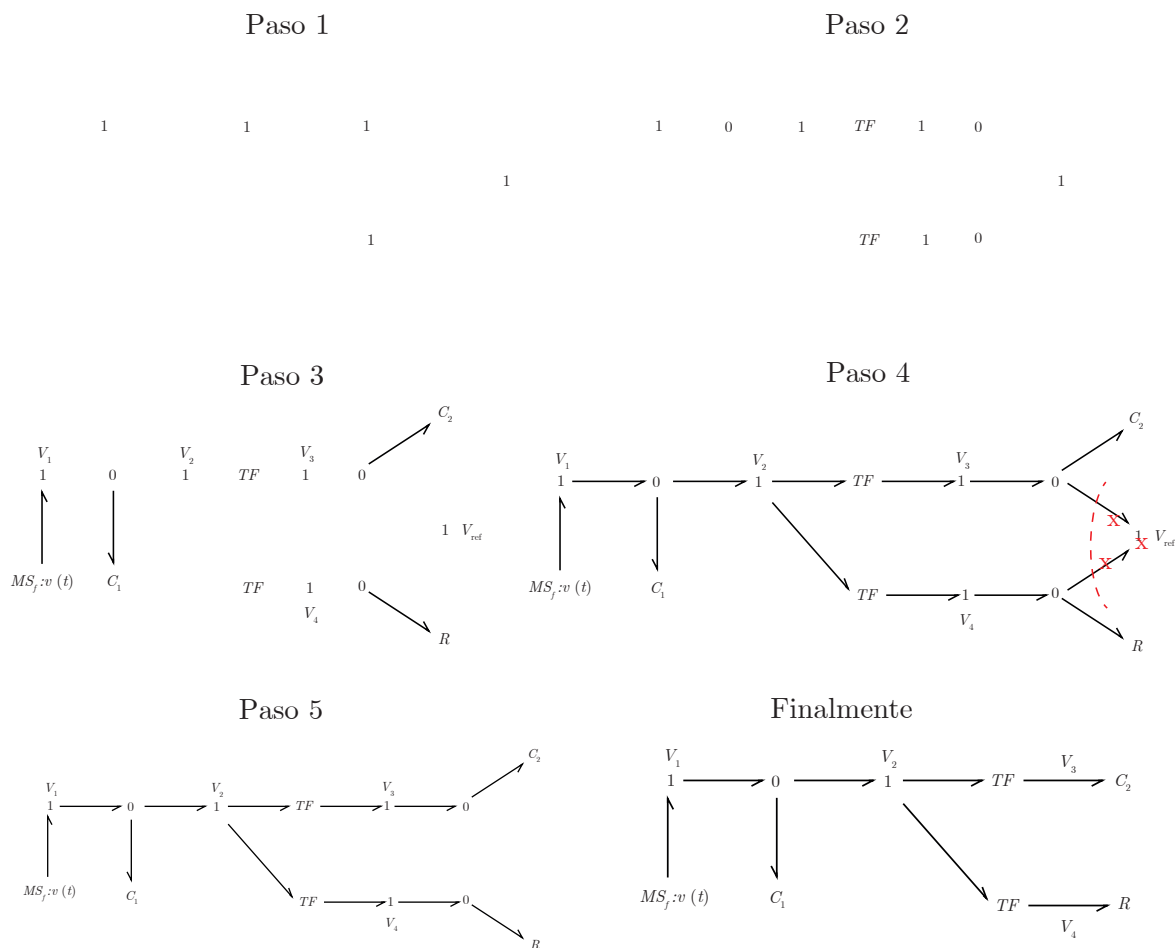


Figura 2.33: Pasos modelado del Bond Graph de ejemplo 3.

Capítulo 3

Balance de Energía de Sistemas en Bond Graph

3.1. Introducción

Una de las más importantes y fundamentales leyes de la naturaleza es el principio de conservación de la energía. Este expresa que durante una interacción de elementos, componentes, la energía puede cambiar de una forma a otra pero su cantidad total permanece constante.

El cambio en el contenido energético de cualquier sistema es igual a la diferencia entre la entrada y la salida de energía y el balance energético se expresa como $E_{entrada} - E_{salida} = \Delta E$.

Esta relación es más conocida como balance de energía y es aplicable a cualquier tipo de sistema que experimenta cualquier clase de proceso.

En Bond Graph sólo se requiere conocer cuatro variables básicas. Ellas son esfuerzo e , flujo f (variables de potencia generalizada) ver tabla 3.1 y sus respectivas integrales en el tiempo, las cuales son llamadas momento p y desplazamiento q (variables de energía).

La notación generalizada será usada para todos los dominios de energía. Integramos las variables p y q , que son llamadas variables de energía porque la energía almacenada puede expresarse en términos de ellas ver tabla 3.2.

Tabla 3.1: Variables de potencia generalizada.

Variable	Relación
Esfuerzo	$e(t)$
Flujo	$f(t)$
Momento	$p \equiv \int e dt$
Desplazamiento	$q \equiv \int f dt$

Tabla 3.2: Variables de energía.

Variable	Relación
Potencia	$P(t) = e(t) f(t)$
Energía	$E(p) = \int f dp$
	$E(q) = \int e dq$

3.2. Balance de potencia tradicionales

Uno de los balances de potencia tradicionales es mediante la matriz de estructura de unión, que se trató en el capítulo anterior, donde las submatrices de la matriz de estructura de unión debe cumplir las propiedades dadas en [30] y [37], para que un sistema modelado en Bond Graph sea conservativo de potencia, las cuales son:

1. s_{11} y s_{22} son antisimétricas.
2. $s_{12} = -s_{21}^T$

Para la demostración ver sección 2.2.

El otro balance de potencia es el que se hace elemento a elemento, lo realizaremos mediante el modelado de Bond Graph en la siguiente sección.

3.2.1. Balance de potencia mediante el Bond Graph

En la figura 3.1 retomamos el ejemplo del circuito de la figura 2.9, donde se muestra la potencia de cada uno de los elementos.

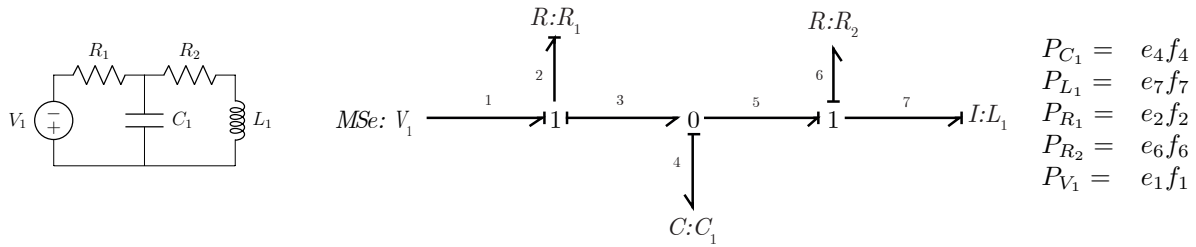


Figura 3.1: Circuito RCI, Bond Graph y potencia.

La potencia de cada uno de los elementos se muestran en la figura 3.2.

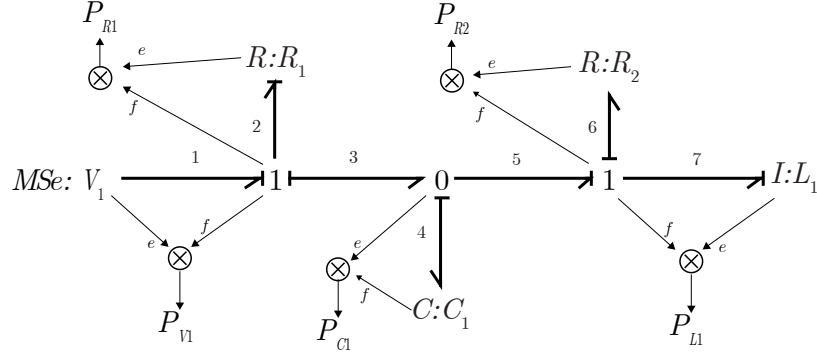


Figura 3.2: Potencia del Bond Graph de circuito RCI.

Para verificar el balance de potencia, hacemos uso del programa de simulación *20SIM*, con los siguientes valores numéricos para los elementos, $V_1 = 0.1v$, $R_1 = 10\Omega$, $C_1 = 9.1f$, $R_2 = 9\Omega$ y $L_1 = 0.1H$, en la tabla 3.3 muestra la potencia de cada elemento con tiempo $t = 5$ seg y en la tabla 3.4 muestra la potencia de cada elemento con tiempo $t = 1.2$ seg.

Tabla 3.3: Potencia de elementos del circuito RCI en tiempo $t = 5$ seg.

	V_1	R_1	C_1	R_2	L_1
Esfuerzo	0.1	0.0052632	0.052632	0.00526329	0.0052632
Flujo	0.0052632	0.0473685	4.4317×10^{-7}	0.0526315	4.5282×10^{-8}
Potencia	0.0005263	0.0002493	2.33247×10^{-8}	0.000277	2.3833×10^{-10}

Efectivamente, se da el balance de potencia entre los elementos de entrada con el resto de elementos:

$$\sum \text{Potencia}_{\text{fuente}} = \sum \text{Potencia}_{\text{resto elementos}}$$

$$0.0005263 = 0.0002493 + 2.33247 \times 10^{-8} + 0.000277 + 2.3833 \times 10^{-10}.$$

Tabla 3.4: Potencia de elementos del circuito RCI en tiempo $t = 1.2$ seg.

	V_1	R_1	C_1	R_2	L_1
Esfuerzo	0.1	0.0057112	0.0526316	0.00526329	0.0057112
Flujo	0.0057112	0.0473666	7.943×10^{-4}	4.471×10^{-2}	7.466×10^{-5}
Potencia	0.000571127	0.000293567	0.0000418043	0.000235329	4.26381×10^{-7}

Comportamiento de los elementos.

En la figura 3.3, se muestra la gráfica de las potencias de los elementos del circuito, primero juntas y después separadas, en un intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 5$ segundos. En la figura 3.4, se muestra la gráfica de las potencias separadas de los elementos del circuito, en un intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 1.2$ segundos.

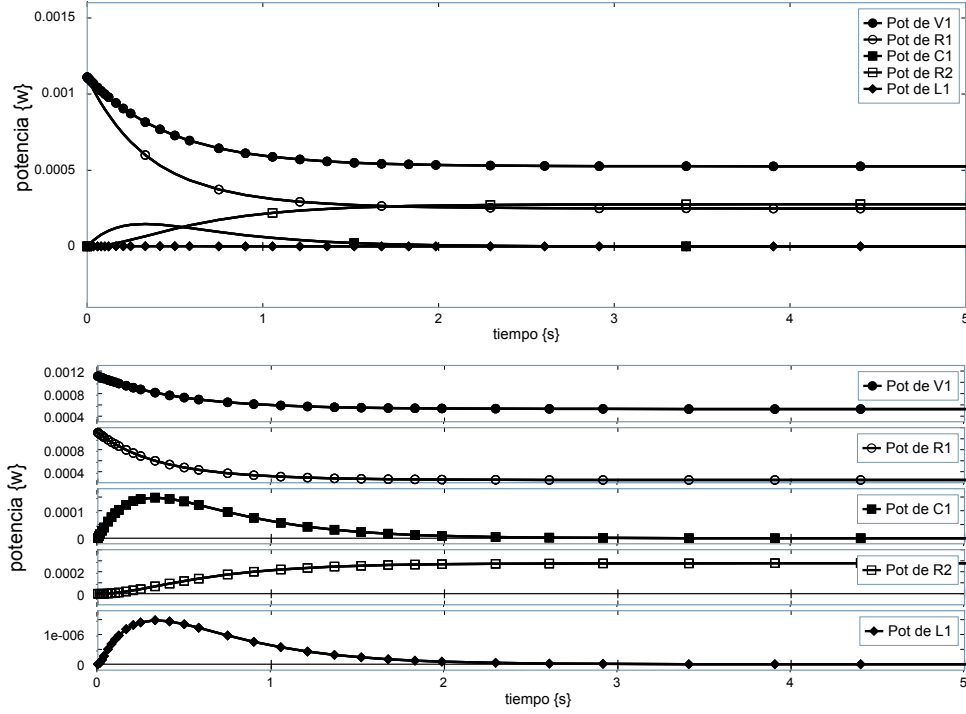


Figura 3.3: Potencia de elementos del circuito RCI, $t = 5$ seg.

En la figura 3.3 se muestra la variación de la potencia de cada elemento del sistema.

1. En la gráfica de la potencia (Pot) de V_1 correspondiente al voltaje de entrada, se puede ver que la trayectoria decrece en el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 2$ segundos para después mantenerse constante.
2. En la gráfica de la Pot de R_1 correspondiente a una resistencia, se puede ver que la trayectoria decrece en el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 2$ segundos para después mantenerse constante.
3. En la gráfica de la Pot de C_1 correspondiente al capacitor, se puede ver que la trayectoria tiene un máximo en el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 2$ segundos, que es cuando se cargó totalmente después se empieza a descargar y simultáneamente con la Pot de V_1 se mantienen constantes.

4. En la gráfica de la Pot de R_2 correspondiente a la otra resistencia, se puede ver que la trayectoria crece en el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 2$ segundos para después mantenerse constante.
5. En la gráfica de la Pot de L_1 correspondiente al inductor, se puede ver que la trayectoria es similar a la del capacitor pero en menor intensidad.

Toda la potencia en el sistema reside en uno de los elementos del sistema. Al principio cuando la corriente fluye, la potencia se divide entre el capacitor, el inductor y una resistencia, en un instante arbitrario la potencia se divide o reside en todos los elementos del sistema. Cumpliéndose así el balance de potencia.

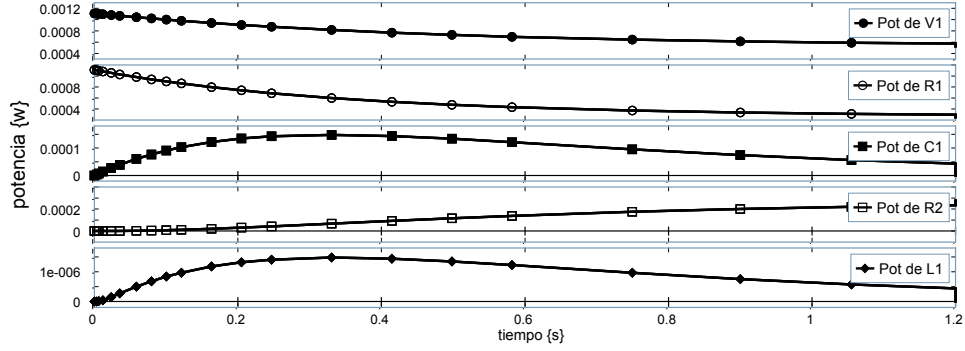


Figura 3.4: Potencia de elementos del circuito RCI, $t = 1.2$ seg.

3.3. Balance de potencia método nuevo

En esta sección se proponen diferentes métodos para realizar el balance de potencia, las opciones están basadas en:

1. Matriz de estructura de unión, S .
2. Bond Graph.
3. Representación espacio estado (ecuación diferencial).

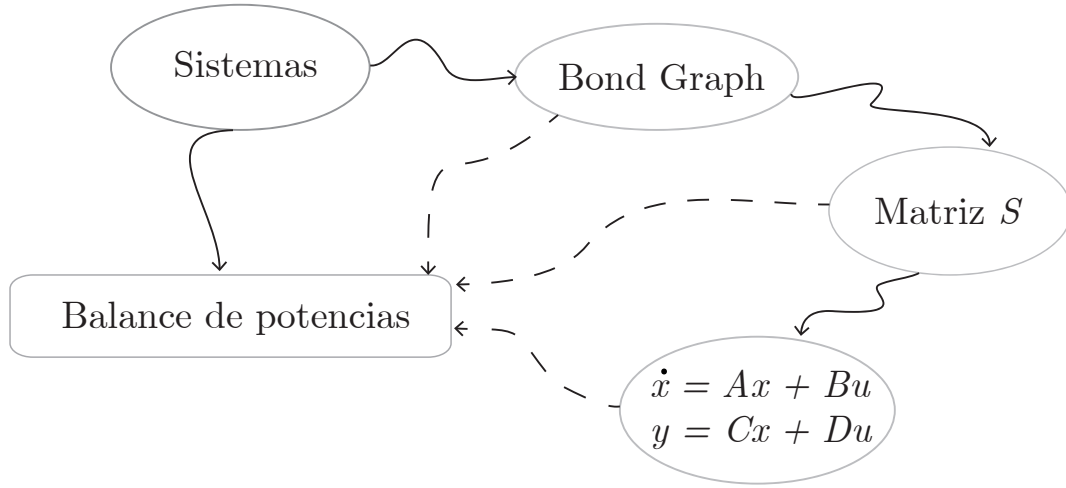


Figura 3.5: Objetivos de balance de potencia.

El diagrama de la figura 3.5 muestra el objetivo de la sección, que es llegar al balance de potencia por caminos diferentes que son las opciones anteriormente mencionadas, dado un sistema físico ya sea mecánico, eléctrico, hidráulico, se desea calcular el balance de potencia, como primer paso se modela el sistema por la metodología de Bond Graph, ya teniendo el modelo, directamente del Bond Graph, calcular el balance de potencia, la otra opción es del modelo en Bond Graph, obtener la matriz de estructura de unión S y calcular el balance de potencia, para la última opción es de la representación espacio estado calcular el balance de potencia. Nos vamos a enfocar en las opciones que son mediante el modelado en Bond Graph.

3.3.1. Matriz basada en la estructura de unión para el cálculo de potencia

La matriz de estructura de unión para un sistema modelado en Bond Graph está definida como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{pmatrix}$$

la cual se puede reducir a

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{pmatrix}$$

ya que la variable de salida no tiene implicaciones en el balance energético.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \end{pmatrix} = [S] \begin{pmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{pmatrix}$$

donde

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \end{pmatrix}.$$

Lema 3.3.1. Sea S la matriz de estructura unión, entonces existen dos matrices e y f , tal que

$$S = e + f.$$

$$S = \begin{pmatrix} s_{11_e} & s_{12_e} & s_{13_e} \\ s_{21_e} & s_{22_e} & s_{23_e} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_{11_f} & s_{12_f} & s_{13_f} \\ s_{21_f} & s_{22_f} & s_{23_f} \end{pmatrix}.$$

Prueba. La matriz e , considera los esfuerzos de entrada con valores de $\pm 1, \pm n, \pm r$, la matriz f considera los flujos de entrada con valores de $\pm 1, \pm n, \pm r$, es decir, para la matriz e si el renglón i -ésimo en presencia de flujo en el vector de entrada, este será un renglón de ceros, para la matriz f será renglón cero en presencia de esfuerzo en el vector de entrada. La suma de matrices es elemento a elemento, por lo tanto, para probar que $S = e + f$, notemos que para el renglón de la matriz e de ceros, para la matriz f ese renglón tendrá valores de $0, \pm 1, \pm n, \pm r$ y para el renglón de la matriz e con valores de $0, \pm 1, \pm n, \pm r$, ese mismo renglón de la matriz f será de ceros. Entonces para cada uno de los renglones de la matriz S , el renglón i -ésimo es la suma de renglón i -ésimo de la matriz e con el renglón i -ésimo de la matriz f , finalmente se reduce a que la suma es el renglón i -ésimo de la matriz e o es el renglón i -ésimo de la matriz f , ya que uno de los dos es renglón cero. Por lo tanto, la matriz S se puede escribir como suma de las matrices $e + f$ y se prueba el lema propuesto.

Cabe mencionar que las submatrices serán de la siguiente forma:

$$s_{11} = s_{11_e} + s_{11_f}, \quad s_{12} = s_{12_e} + s_{12_f}, \quad s_{13} = s_{13_e} + s_{13_f}.$$

$$s_{21} = s_{21_e} + s_{21_f}, \quad s_{22} = s_{22_e} + s_{22_f}, \quad s_{23} = s_{23_e} + s_{23_f}.$$

Corolario 3.3.2. Sean e y f matrices como en lema 3.3.1, entonces

$$e^T \cdot f = f^T \cdot e = 0.$$

Prueba. La potencia se obtiene como el producto de las dos matrices e y f . Por ser complementarias las matrices tenemos que el producto punto es cero, $P = e \cdot f = 0$.

Ejemplo 1

En el ejemplo del circuito de la figura 2.9, obtenemos la matriz S .

$$S = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Se realiza la separación de matrices y por lo tanto tenemos de la matriz S , las matrices e y f , respectivamente.

$$e = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad f = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Realizamos el producto como en el Corolario 3.3.2, $e^T \cdot f$ y $f^T \cdot e$.

$$e^T \cdot f = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = 0$$

$$f^T \cdot e = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = 0$$

El resultado de las matrices es en realidad una matriz de cero, donde las entradas es la suma de los productos de los elementos de la fila i de primer matriz por los elementos de la columna i de la segunda matriz respectivamente.

$$\sum_{i=1}^n e_i^T \cdot f_i = \sum_{i=1}^n f_i^T \cdot e_i.$$

Lo cual nos indica que la potencia es cero, cumpliendo el balance de potencia.

3.3.2. Obtención de las matrices e y f del Bond Graph

En el ejemplo del circuito de la figura 2.9, obtenemos las matrices e y f del lema 3.3.1 siguiendo las trayectorias directamente del Bond Graph, teniendo en cuenta las trayectoria causales como en la sección 2.1.7.

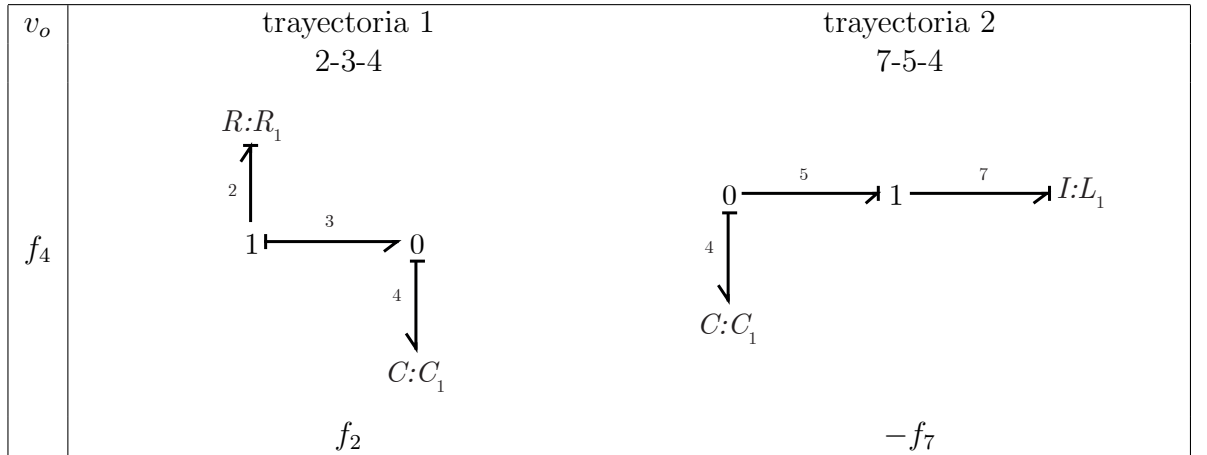
Si escribimos la matriz de estructura de unión dada por la ecuación 2.2, el vector v_0 y la potencia de cada elemento son:

$$v_0 = \begin{pmatrix} f_4 \\ e_7 \\ e_2 \\ f_6 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} P_{C_1} &= e_4 f_4 \\ P_{L_1} &= e_7 f_7 \\ P_{R_1} &= e_2 f_2 \\ P_{R_2} &= e_6 f_6 \end{aligned}$$

Las trayectorias a seguir son las de los elementos del vector v_0 : f_4 , e_7 , e_2 y f_6 , tomando en cuenta las figuras 2.12 y 2.11 de la causalidad.

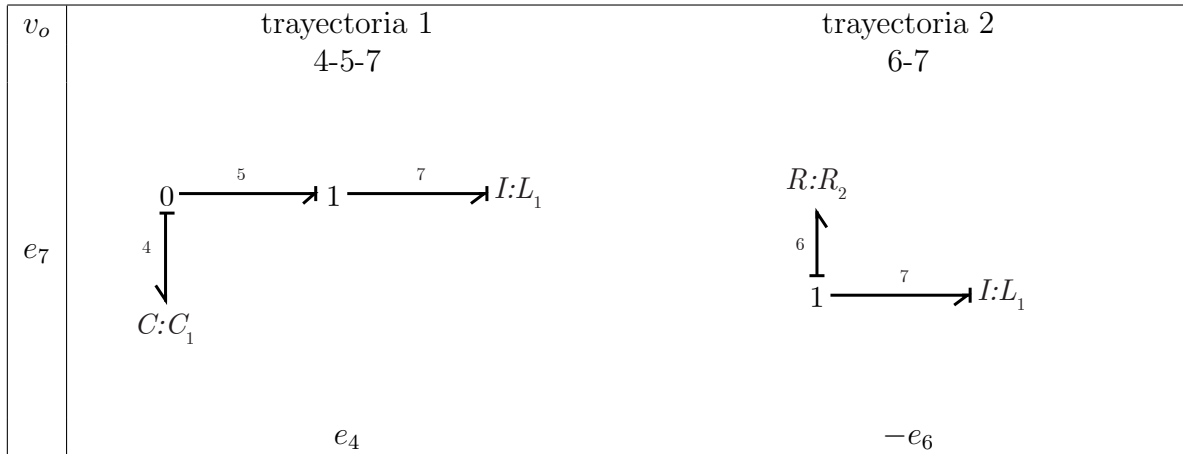
1. Para obtener f_4 , seguimos flujo de otros elementos al elemento C_1 , para el signo ver la sección 2.1.7.

- a) Elemento R_1 : flujo del bond 2, flujo del bond 3, flujo del bond 4, (f_2).
- b) Elemento L_1 : flujo del bond 7, flujo del bond 5, flujo del bond 4, ($-f_7$).



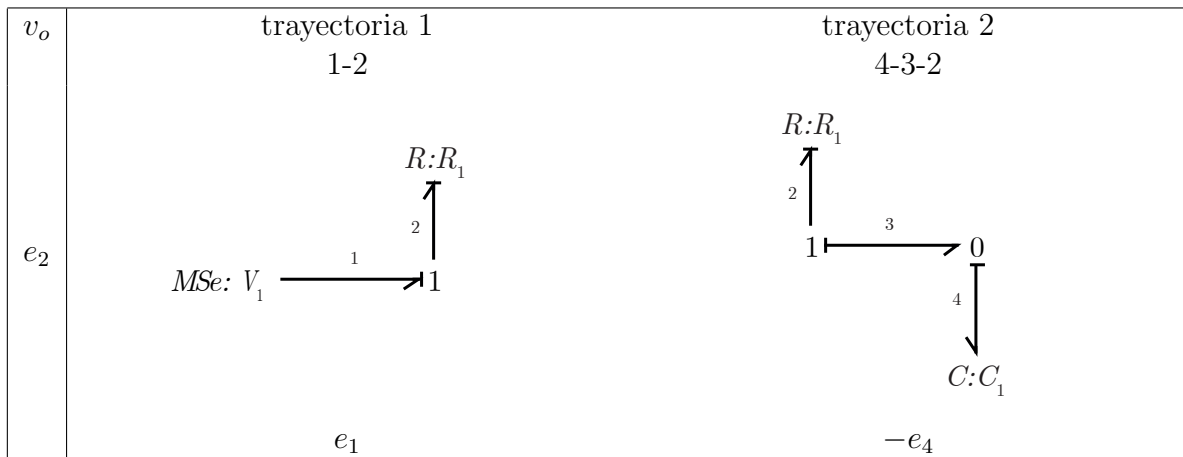
2. Para obtener e_7 , seguimos esfuerzo de otros elementos al elemento L_1 , para el signo ver la sección 2.1.7.

- a) Elemento C_1 : esfuerzo del bond 4, esfuerzo del bond 5, esfuerzo del bond 7, (e_4).
- b) Elemento R_2 : esfuerzo del bond 6, esfuerzo del bond 7, ($-e_6$).



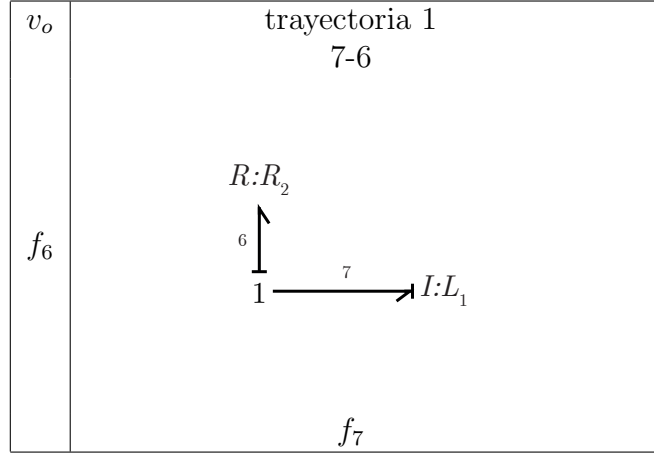
3. Para obtener e_2 , seguimos esfuerzo de otros elementos al elemento R_1 , para el signo ver la sección 2.1.7.

- a) Elemento V_1 : esfuerzo del bond 1, esfuerzo del bond 2, (e_1).
- b) Elemento C_1 : esfuerzo del bond 4, esfuerzo del bond 3, esfuerzo del bond 2, ($-e_4$).



4. Para obtener f_6 , seguimos flujo de otros elementos al elemento R_2 , para el signo ver la sección 2.1.7.

- a) Elemento L_1 : flujo del bond 7, flujo del bond 6, (f_7).



Por lo tanto, de las trayectorias tenemos las siguientes igualdades y las expresamos en forma matricial:

$$\begin{aligned}
 f_4 &= f_2 - f_7 \\
 e_7 &= e_4 - e_6 \\
 e_2 &= e_1 - e_4 \\
 f_6 &= f_7
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{pmatrix} f_4 \\ e_7 \\ e_2 \\ f_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_4 \\ f_7 \\ f_2 \\ e_6 \\ e_1 \end{pmatrix}.$$

Se realiza la separación de matrices, de la matriz S tenemos las matrices e y f , respectivamente.

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_4 \\ f_7 \\ f_2 \\ e_6 \\ e_1 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_4 \\ f_7 \\ f_2 \\ e_6 \\ e_1 \end{pmatrix}.$$

No hacemos el producto ya que son las mismas matrices obtenidas con la opción anterior.

Las matrices e y f individualmente en forma general

En el ejemplo del circuito de la figura 2.9, obtenemos las matrices e y f elemento a elemento, considerando las relaciones de las uniones-0 y uniones-1.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{unión-1} & \text{unión-0} & \text{unión-1} \\
 \underline{f_1} = \underline{f_2} = \underline{f_3} & e_3 = e_4 = e_5 & \underline{f_5} = \underline{f_6} = \underline{f_7} \\
 e_1 - \underline{e_2} - e_3 = 0 & \underline{f_3} - \underline{f_4} - \underline{f_5} = 0 & e_5 - e_6 - \underline{e_7} = 0
 \end{array}$$

Tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
 f_4 &= f_2 - f_7 \\
 e_7 &= e_4 - e_6 \\
 e_2 &= e_1 - e_4 \\
 f_6 &= f_7
 \end{aligned}$$

De igual forma se expresan en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} f_4 \\ e_7 \\ e_2 \\ f_6 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} e_4 \\ f_7 \\ f_2 \\ e_6 \\ e_1 \end{pmatrix}$$

$$S = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Se realiza la separación de matrices:

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

No hacemos el producto ya que son las mismas matrices obtenidas con las opciones anteriores.

3.3.3. Las matrices e y f indican un Bond Graph conservativo

Propiedad

$$f = -e^T$$

$$e = -f^T$$

Para demostrar que es un Bond Graph conservativo, sumamos la propiedad, tenemos:

$$S = -S^T.$$

Propiedad de matrices antisimétricas.

3.4. Relaciones constitutivas.

Las relaciones constitutivas $z = Fx$ y $D_{out} = LD_{in}$, establecen que tanto la matriz F y la matriz L son definidas positivas, entonces surge la siguiente pregunta:

¿Cambiando posiblemente la orientación de algún/algunos bonds, podría cambiar el signo de alguna relación constitutiva?

Considerando la expresión para la matriz A , dada en (2.1)

$$A = (s_{11} + s_{12}Ms_{21})F = s_{11}F + s_{12}Ms_{21}F$$

Suponemos que F, M son definidas positivas ($F > 0$ y $M = L > 0$).

Tenemos de cada término, los dos casos siguientes.

1. $s_{11}F$ a) Si $s_{11}F > 0$, entonces $s_{11} > 0$.b) Si $s_{11}F < 0$, entonces $s_{11} < 0$.2. $s_{12}Ls_{21}F$ a) $s_{12}Ls_{21}F > 0$ 1) Si $s_{12}Ls_{21}F > 0$, entonces $s_{12} > 0$ y $s_{21} > 0$.2) Si $s_{12}Ls_{21}F > 0$, entonces $s_{12} < 0$ y $s_{21} < 0$.b) $s_{12}Ls_{21}F < 0$ 1) Si $s_{12}Ls_{21}F < 0$, entonces $s_{12} < 0$ y $s_{21} > 0$.2) Si $s_{12}Ls_{21}F < 0$, entonces $s_{12} > 0$ y $s_{21} < 0$.

Los casos de la desigualdad menor que cero, no se considera, sólo se analiza los casos de la igualdad de mayor que cero, así $s_{11}F + s_{12}Ls_{21}F > 0$, por los incisos anteriores tenemos dos opciones, una donde las tres submatrices son positivas: $s_{11} > 0$, $s_{12} > 0$ y $s_{21} > 0$, la otra donde las submatrices s_{12} y s_{21} son negativas: $s_{11} > 0$, $s_{12} < 0$ y $s_{21} < 0$.

3.5. Ejemplos mecánicos

Se retoman los ejemplos modelados en el capítulo anterior, con la finalidad de realizar el balance de potencia por las tres opciones, el primero con las propiedades de las submatrices de la matriz de estructura de unión S , el segundo con el método nuevo, separando la matriz de estructura de unión S y por último del Bond Graph mediante simulación con el programa 20SIM.

3.5.1. Ejemplo sistema mecánico 1

Un Bond Graph de un sistema mecánico dado en el capítulo anterior, se ilustra en la figura 3.6.

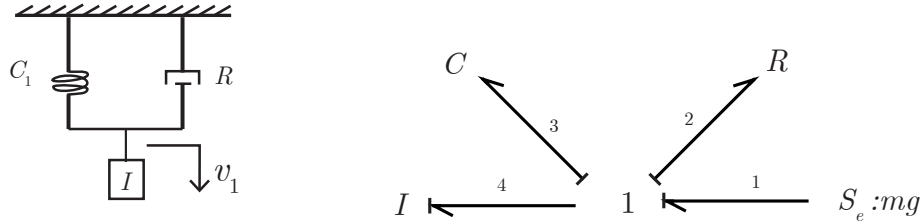


Figura 3.6: Sistema mecánico y Bond Graph, ejemplo 1.

Balance analítico

Los vectores clave son:

$$u = e_1, \quad x = \begin{pmatrix} q_3 \\ p_4 \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} f_3 \\ e_4 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} e_3 \\ f_4 \end{pmatrix}, \quad D_{in} = f_2, \quad D_{out} = e_2.$$

Las relaciones constitutivas son:

$$e_2 = R_2 f_2 \quad \begin{pmatrix} e_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$$

Así, de esta manera tenemos las matrices L y la matriz F .

La matriz de estructura de unión es

$$\begin{pmatrix} f_3 \\ e_4 \\ f_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} e_3 \\ f_4 \\ e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}$$

1. Balance de potencia por medio de las propiedades de la matriz S .

Comprobar que las submatrices s_{11} y s_{22} son antisimétricas y $s_{12} = -s_{21}^T$.

$$s_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{22} = 0, \quad s_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad s_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectivamente, la submatriz s_{11} es antisimétrica y la submatriz s_{21} es la transpuesta negativa de s_{12} , por lo tanto, se cumple el balance de potencia.

2. Método nuevo. Balance de potencia por medio de la matriz S .

Se realiza la separación de matrices y por lo tanto tenemos las matrices e y f , respectivamente.

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e + f.$$

Realizamos el producto como en el Corolario 3.3.2, $e^T \cdot f$ y $f^T \cdot e$.

$$e^T \cdot f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$f^T \cdot e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Por lo tanto, se cumple el balance de potencia.

3. Balance de potencia por simulación.

Haciendo uso del programa de simulación con los siguientes valores numéricos del sistema: $V1 = 0.5m/s$, $R = 10Ns/m$, $C = 0.1m/N$, $I = 0.2Ns^2/m$, el tiempo de respuesta del sistema se muestra en la figura 3.7.

En la figura 3.7, se muestra la gráfica de las potencias de los elementos del circuito, primero juntas y después separadas, en un intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 1.2$ segundos.

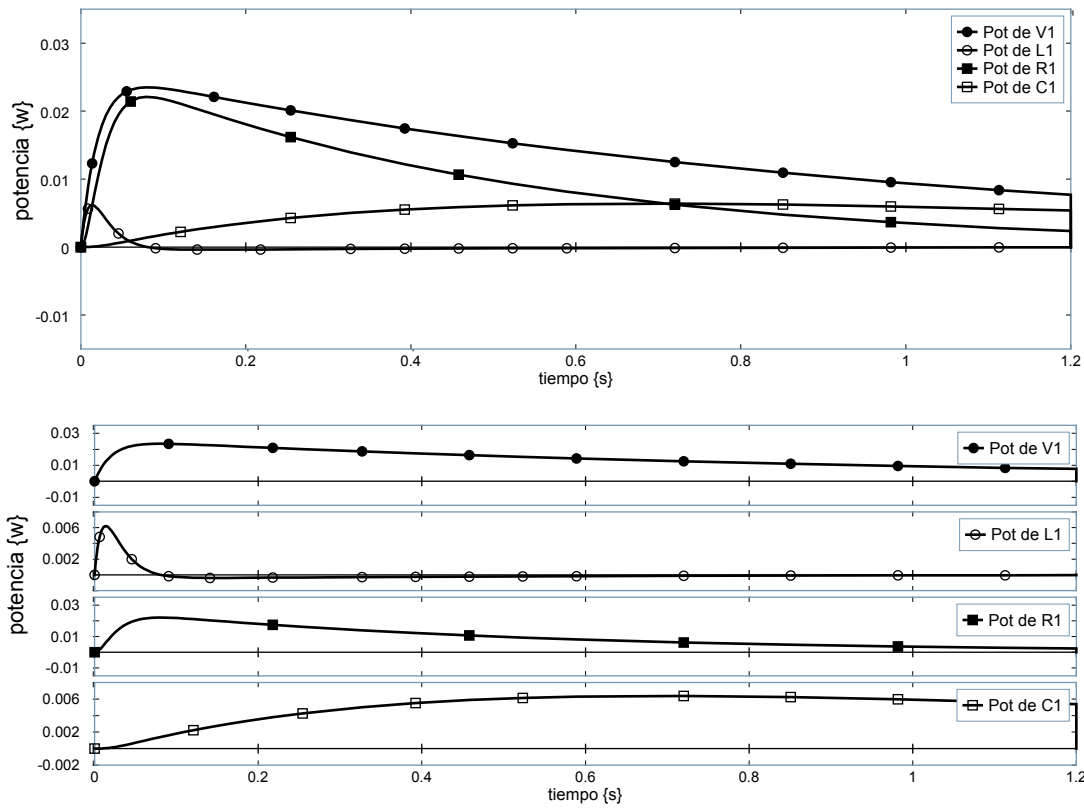


Figura 3.7: Balance de potencia de sistema mecánico tiempo $t = 1.2$ seg, ejemplo 1.

Comportamiento de los elementos.

En la figura 3.7 se muestra la variación de la potencia de cada elemento del sistema.

- En la gráfica de la Pot de V_1 correspondiente a la fuerza aplicada de entrada, se puede ver que la trayectoria crece aproximadamente en el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 0.1$ segundos, que es cuando se aplicó la fuerza total, en el momento en el que ésta comienza a disminuir la trayectoria comienza a decrecer.
- En la gráfica de la Pot de L_1 correspondiente a la masa, se puede ver que la trayectoria tiene un máximo en el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 0.1$ segundos, generado por la altura del bloque, medida desde la posición inicial a la final, los valores negativos son por la altura que revaso la posición inicial.
- En la gráfica de la Pot de R_1 correspondiente al amortiguador, se puede ver que la trayectoria crece aproximadamente en el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 0.1$ segundos, que es cuando la fuerza es aplicada en el momento en el que ésta comienza a disminuir la trayectoria comienza a decrecer.

- d) En la gráfica de la Pot de C_1 correspondiente al resorte, se puede ver que la trayectoria comienza creciendo debido al estiramiento de éste, después tiene un máximo en el intervalo de tiempo de $t = 0.6$ a $t = 0.8$ segundos, que es cuando se igualan las fuerzas con el amortiguador.

Toda la potencia en el sistema reside en uno de los elementos del sistema. Al principio cuando se suelta el bloque, se ejerce una fuerza hacia abajo, la mayor parte de la potencia reside en la masa, en un instante arbitrario la potencia se divide o reside en todos los elementos del sistema. Cumpliéndose así el balance de potencia.

En la tabla 3.5 se muestra la potencia de los elementos del sistema mecánico en diferentes tiempos, en un rango de $t = 0.2$ segundos hasta $t = 10$ segundos.

Tabla 3.5: Potencia de elementos de sistema mecánico 1 en diferentes tiempos.

Tiempo (seg)	R_1	C_1	V_1	L_1
0.2	0.0174184	0.00380472	0.0208677	-0.000355428
1.2	0.00214045	0.00521839	0.00731513	-0.0000437004
2	0.000329878	0.00254861	0.00287175	-6.73489×10^{-6}
3	0.0000509955	0.00107916	0.00112911	-1.04113×10^{-6}
5	2.2868×10^{-6}	0.000236862	0.000239102	-4.66917×10^{-8}
10	4.1401×10^{-11}	1.01732×10^{-6}	1.01736×10^{-6}	-8.45286×10^{-13}

Efectivamente, se da el balance de potencia entre el elemento de entrada con el resto de elementos.

3.5.2. Ejemplo sistema mecánico 2

Un Bond Graph de un sistema mecánico dado en el capítulo anterior, se ilustra en la figura 3.8.

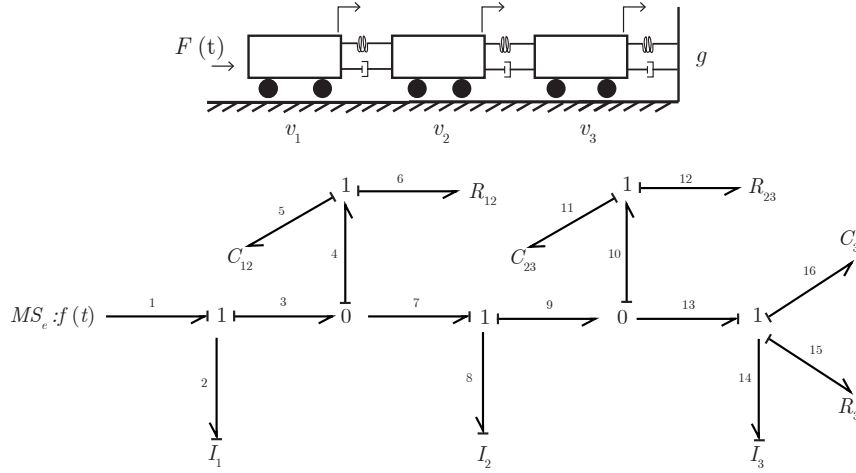


Figura 3.8: Sistema mecánico y Bond Graph, ejemplo 2.

Los vectores clave son:

$$u = e_1, \quad x = \begin{pmatrix} p_2 \\ q_5 \\ p_8 \\ q_{11} \\ p_{14} \\ q_{16} \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} e_2 \\ f_5 \\ e_8 \\ f_{11} \\ e_{14} \\ f_{16} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} f_2 \\ e_5 \\ f_8 \\ e_{11} \\ f_{14} \\ e_{16} \end{pmatrix},$$

$$D_{in} = \begin{pmatrix} f_6 \\ f_{12} \\ f_{15} \end{pmatrix}, \quad D_{out} = \begin{pmatrix} e_6 \\ e_{12} \\ e_{15} \end{pmatrix}.$$

Las relaciones constitutivas son:

$$\begin{pmatrix} e_6 \\ e_{12} \\ e_{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{12} & 0 & 0 \\ 0 & R_{23} & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_6 \\ f_{12} \\ f_{15} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_2 \\ e_5 \\ f_8 \\ e_{11} \\ f_{14} \\ e_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ q_5 \\ p_8 \\ q_{11} \\ p_{14} \\ q_{16} \end{pmatrix}$$

Así de esta manera tenemos las matrices L y F .

La matriz de estructura de unión es:

$$\begin{pmatrix} e_2 \\ f_5 \\ e_8 \\ f_{11} \\ e_{14} \\ f_{16} \\ f_6 \\ f_{12} \\ f_{15} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccccc|cccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} f_2 \\ e_5 \\ f_8 \\ e_{11} \\ f_{14} \\ e_{16} \\ e_6 \\ e_{12} \\ e_{15} \\ e_1 \end{pmatrix}$$

1. Balance de potencia por medio de las propiedades de la matriz S .

Comprobar que las submatrices s_{11} y s_{22} son antisimétricas y $s_{12} = -s_{21}^T$.

$$s_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad s_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Efectivamente, la submatriz s_{11} es antisimétrica y la submatriz s_{21} es la transpuesta negativa de s_{12} , por lo tanto, se cumple el balance de potencia.

2. Método nuevo. Balance de potencia por medio de la matriz S .

Se realiza la separación de matrices y por lo tanto tenemos las matrices e y f , respectivamente.

$$S = \left(\begin{array}{cccccc|cccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se realiza la separación de matrices y por lo tanto tenemos de la matriz S , las matrices e y f , respectivamente.

$$e = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Realizamos el producto como en el Corolario 3.3.2, $e^T \cdot f$ y $f^T \cdot e$

$$e^T \cdot f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$f^T \cdot e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Por lo tanto, se cumple el balance de potencia.

3. Balance de potencia por simulación.

Haciendo uso del programa de simulación con los siguientes valores numéricos del sistema: $f = 0.5N$, $I_1 = 0.3Ns^2/m$, $I_2 = 0.3Ns^2/m$, $I_3 = 0.3Ns^2/m$, $C_1 = 0.1m/N$, $C_2 = 0.1m/N$, $C_3 = 0.2m/N$, $R_1 = 8Ns/m$, $R_2 = 9Ns/m$, $R_3 = 10Ns/m$, el tiempo de respuesta del sistema se muestran en las figuras 3.9 y 3.10.

En la figura 3.9, en la parte superior se grafican las potencias juntas, en la parte inferior se grafican las potencias por separado, en un intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 5$ segundos.

En la figura 3.10, en la parte superior se grafican las potencias juntas, en la parte inferior se grafican las potencias por separado, en un intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 1.2$ segundos.

Comportamiento de los elementos.

En la figura 3.9 se muestra la variación de la potencia de cada elemento del sistema.

- En la gráfica de la Pot de V_1 correspondiente a la fuerza aplicada de entrada, se puede ver que la trayectoria crece aproximadamente en el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 1$ segundos, que es cuando se aplicó la fuerza total, en el momento en el que ésta comienza a disminuir la trayectoria comienza a decrecer.
- En las graficas de Pot de L_{12} , Pot de L_{23} , y Pot de L_3 correspondientes a la masas, se puede ver que las trayectorias tienen un máximo en el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 0.5$ segundos, generado por la desplazamiento de los bloques, medida desde la posición inicial a la final, los valores negativos son por los desplazamientos que revasan la posición inicial.

- c) En las graficas de Pot de C_{12} , Pot de C_{23} , y Pot de C_3 correspondientes a los resortes, se puede ver que las trayectorias comienzan creciendo debido al estiramiento de éstos, después tienen un máximo en el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 1$ segundos, que es cuando se igualan las fuerzas con los amortiguadores.
- d) En las graficas de Pot de R_{12} , Pot de R_{23} , y Pot de R_3 correspondientes a los amortiguadores, se puede ver que las trayectorias crecen aproximadamente en el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 0.5$ segundos, que es cuando la fuerza es aplicada, en el momento en el que ésta comienza a disminuir las trayectorias comienzan a decrecer.

Toda la potencia en el sistema reside en uno de los elementos del sistema. Al principio cuando se aplica la fuerza, la mayor parte de la potencia reside en las masas, en un instante arbitrario la potencia se divide o reside en todos los elementos del sistema. Similar al ejemplo anterior a diferencia que este son tres mecanismos acoplados. Cumpliéndose así el balance de potencia.

En la tabla 3.6 se muestra la potencia de los elementos del sistema mecánico en diferentes tiempos, en un rango de $t = 0.2$ segundos hasta $t = 5$ segundos.

Tabla 3.6: Potencia de elementos de sistema mecánico 2 en diferentes tiempos.

Tiempo	f_1	L_1	C_1	R_1	L_2
0.2 seg	0.059577	0.00616005	0.00377184	0.0167276	0.00363123
1.2 seg	0.035147	-0.00144021	0.00645899	0.00222896	-0.000723661
2 seg	0.0154022	-0.000256718	0.00223051	0.000179871	-0.000162432
5 seg	0.00160536	-2.04864×10^{-6}	4.39175×10^{-6}	6.15801×10^{-10}	-1.97717×10^{-6}
Tiempo	C_2	R_2	L_3	R_3	C_3
0.2 seg	0.0016833	0.0123112	0.00123542	0.0132294	0.000826913
1.2 seg	0.00654666	0.00363699	-0.000237607	0.0107316	0.00794526
2 seg	0.00301227	0.000453696	-0.0000731497	0.00336176	0.00665636
5 seg	0.0000629637	1.58579×10^{-7}	-1.70185×10^{-6}	0.000085157	0.00145842

Efectivamente, se da el balance de potencia entre los elementos de entrada con el resto de elementos.

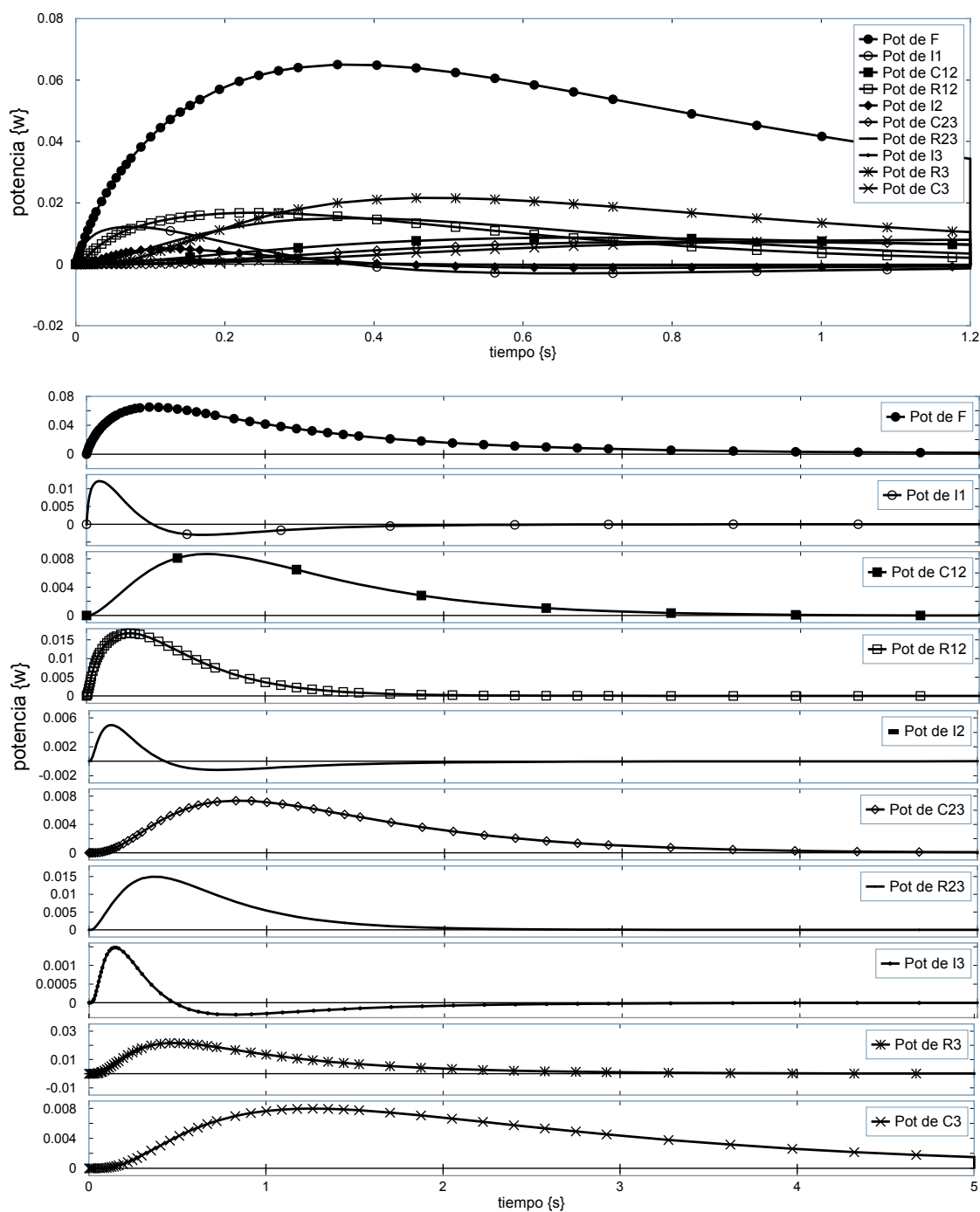


Figura 3.9: Balance de potencia de sistema mecánico tiempo $t = 5$ seg, ejemplo 2.

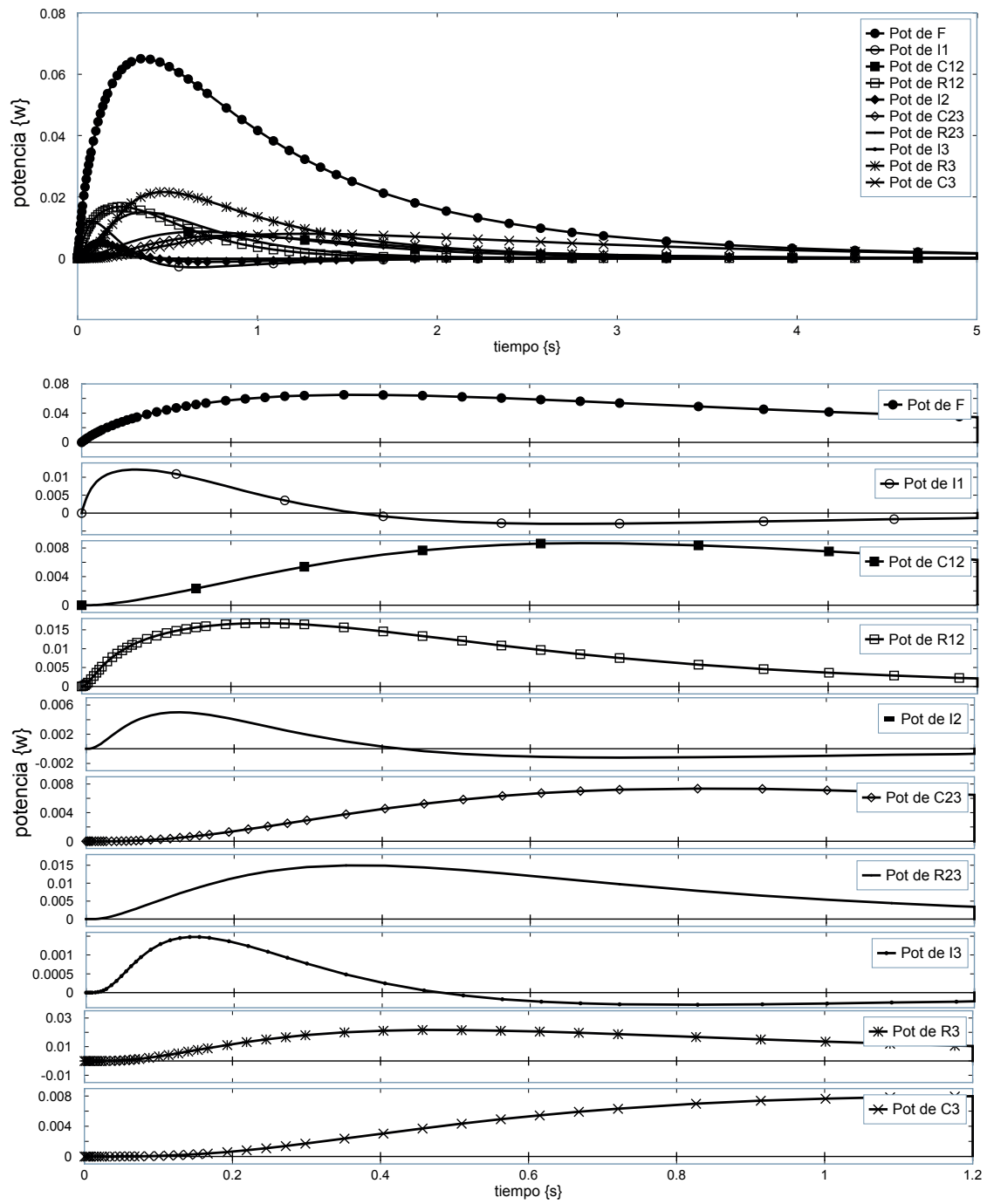


Figura 3.10: Balance de potencia de sistema mecánico tiempo $t = 1.2$ seg, ejemplo 2.

3.5.3. Ejemplo sistema mecánico 3

Otro ejemplo de un sistema mecánico y su correspondiente Bond Graph dado en el capítulo anterior, se ilustra en la figura 3.11.

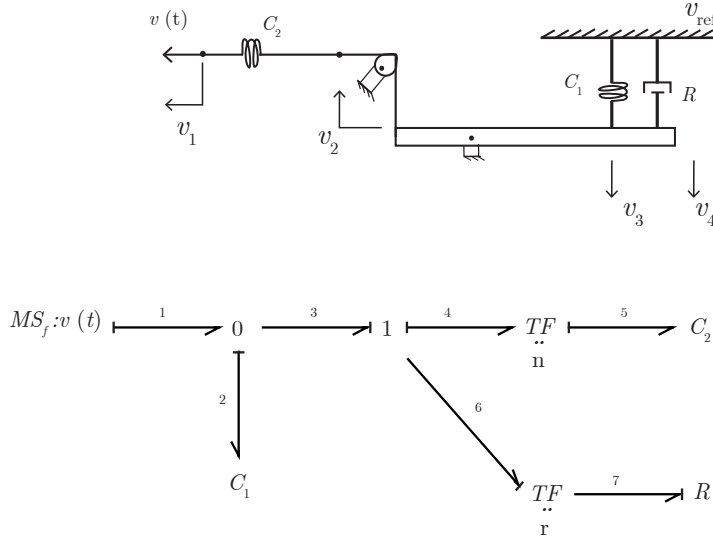


Figura 3.11: Sistema mecánico y Bond Graph, ejemplo 3.

Los vectores clave son:

$$u = f_1, \quad x = \begin{pmatrix} q_2 \\ q_5 \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_5 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} e_2 \\ e_5 \end{pmatrix}, \quad D_{in} = e_7, \quad D_{out} = f_7.$$

Las relaciones constitutivas son:

$$f_7 = \frac{1}{R_4} e_7 \quad \begin{pmatrix} e_2 \\ e_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \\ f_5 \end{pmatrix}$$

Así de esta manera tenemos la matrices L y F . La matriz de estructura de unión es:

$$\begin{pmatrix} f_2 \\ f_5 \\ e_7 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & 0 & -\frac{1}{r} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{n}{r} & 0 \\ \hline \frac{1}{r} & -\frac{n}{r} & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} e_2 \\ e_5 \\ f_7 \\ e_1 \end{pmatrix}$$

1. Balance de potencia por medio de las propiedades de la matriz S .

Comprobar que las submatrices s_{11} y s_{22} son antisimétricas y $s_{12} = -s_{21}^T$.

$$s_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{22} = 0, \quad s_{12} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} \\ \frac{n}{r} \end{pmatrix} \quad s_{21} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & -\frac{n}{r} \end{pmatrix}$$

Efectivamente, la submatriz s_{21} es la transpuesta negativa de s_{12} , por lo tanto, se cumple el balance de potencia.

2. Método nuevo. Balance de potencia por medio de la matriz S .

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{r} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{n}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & -\frac{n}{r} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & -\frac{n}{r} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{r} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{n}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se realiza la separación de matrices y por lo tanto tenemos de la matriz S , las matrices e y f , respectivamente.

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & -\frac{n}{r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{r} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{n}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Realizamos el producto como en el Corolario 3.3.2, $e^T \cdot f$ y $f^T \cdot e$.

$$e^T \cdot f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{r} \\ 0 & 0 & \frac{n}{r} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{r} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{n}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$f^T \cdot e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r} & \frac{n}{r} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & -\frac{n}{r} & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Por lo tanto, se cumple el balance de potencia.

3. Balance de potencia por simulación.

Haciendo uso del programa de simulación con los siguientes valores numéricos del sistema: $V_1 = 0.5N$, $C_1 = 0.2m/N$, $C_2 = 0.1m/N$, $R = 9Ns/m$, $n = 10$, $r = 10$, el tiempo de respuesta del sistema se muestran en la figura 3.12.

En la figura 3.12, en la parte superior se grafican las potencias, en un intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 10$ segundos, en la parte inferior se grafican las potencias, en un intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 1.2$ segundos.

Comportamiento de los elementos.

En la figura 3.12 se muestra la variación de la potencia de cada elemento en función del tiempo.

- a) En la gráfica de la Pot de V_1 correspondiente a la velocidad aplicada al inicio, se puede ver que la trayectoria es creciente.

- b) En la gráfica de la Pot de R correspondiente al amortiguador se puede ver que la trayectoria crece y se mantiene constante debido a que la fuerza del amortiguador es proporcional a la velocidad.
- c) En las graficas de la Pot de C_1 y Pot de C_2 se puede ver que las trayectorias son crecientes debido a que son los resortes quienes almacenan la energía.

Toda la potencia en el sistema reside en uno de los elementos del sistema. Al principio cuando se aplica la velocidad, la mayor parte de la potencia reside en el amortiguador, en un instante arbitrario la potencia se divide o reside en todos los elementos del sistema. Cumpliéndose así el balance de potencia.

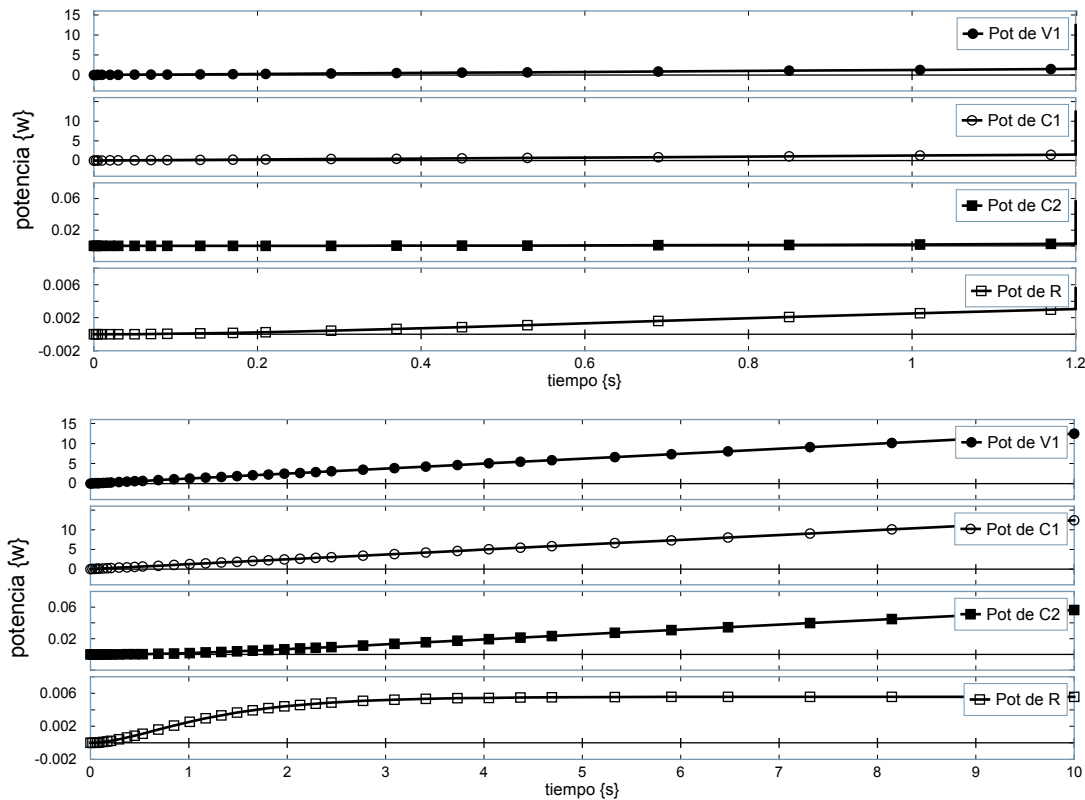


Figura 3.12: Balance de potencia de sistema mecánico tiempo $t = 1.2$ seg y $t = 10$ seg, ejemplo 3.

En la tabla 3.7 se muestra la potencia de los elementos del sistema mecánico en diferentes tiempos, en un rango de $t = 0.2$ segundos hasta $t = 10$ segundos.

Tabla 3.7: Potencia de elementos de sistema mecánico 3 en diferentes tiempos.

Tiempo(seg)	f_1	C_1	C_2	R
0.2	0.262159	0.261887	0.000030246	0.000241169
1.2	1.45909	1.4538	0.00233205	0.00296147
2	2.65411	2.64213	0.00739629	0.00458553
3	3.84848	3.82995	0.0133157	0.00521863
5	6.63471	6.60179	0.0273838	0.00554093
10	12.4434	12.3815	0.0563368	0.00556886

Efectivamente, se da el balance de potencia entre el elemento de entrada con el resto de elementos.

3.6. Bond activo y Bond adaptado

3.6.1. Bond activo

Un bond normal tiene dos señales: esfuerzo $e(t)$ y $f(t)$. A diferencia de un bond activo que comunica una de las dos señales posibles en una sola dirección. Un bond activo se representa por una flecha completa como se muestra en la figura 3.13 indicando un flujo de potencia cero.



Figura 3.13: Bond activo.

Un bond activo se utiliza como una señal en un Bond Graph, la cual conecta a otros sin consumir energía como se ilustra en la figura 3.14 indicando un flujo de potencia cero.



Figura 3.14: Bond activo como señal.

Además, se utiliza para mandar una señal de salida llamado detector D_e , que dependiendo si se coloca en una unión-0 se obtiene esfuerzo o bien si se coloca en una unión-1 se obtiene flujo.

3.6.2. Bond adaptado

En [22] se propone un bond adaptado para cuando se utilizan bond activos. Cuando un sistema está dominado por interacciones de señal debidas a la presencia de instrumentos, amplificadores de aislamiento y similares, entonces se puede suprimir un efecto o una señal de flujo en muchos puntos de interconexión. En tal caso, un bond se degenera en una señal y puede mostrarse como un bond activo. Para analizar el comportamiento de un sistema con efectos de carga, se propone un nuevo bond, el bond adaptado, en Bond Graph. El símbolo de un bond adaptado está formado por dos componentes: la línea continua es la parte de un bond típico y la línea discontinua es la parte aproximada del bond, como se muestra en la figura 3.15.

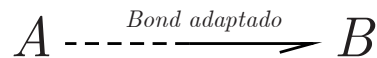


Figura 3.15: Bond adaptado.

El subsistema B tiene un efecto de carga sobre el subsistema A , por lo que hay dos casos que se muestran en figura 3.16.

$$\begin{array}{ccc}
 \xrightarrow[f_1]{e_1} & 0 & \text{---} \xrightarrow[\xi f_2]{e_2} & \begin{array}{l} f_1 = \xi f_2 \\ e_1 = e_2 \end{array} \\
 \xrightarrow[f_1]{e_1} & 1 & \text{---} \xrightarrow[f_2]{\xi e_2} & \begin{array}{l} f_1 = f_2 \\ e_1 = \xi e_2 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 3.16: Reglas bond adaptado.

El intervalo de la variable del bond adaptado ξ se define en $[0,1]$. Para este tipo de bonds, es posible tener dos casos límite:

1. Si $\xi = 0$ entonces el bond adaptado será un bond activo.
2. Si $\xi = 1$ entonces el bond adaptado será un bond de potencia.

En los siguientes sistemas se ejemplifica como pasar de bond activos a bond adaptados, ver figura 3.17.

$$\begin{array}{ccc}
 \longrightarrow MSe \longrightarrow & = & \text{---} \longrightarrow \\
 \longrightarrow MSf \longrightarrow & = & \text{---} \longrightarrow
 \end{array}$$

Figura 3.17: Bond activo y bond adaptado.

Las propiedades s_{11} y s_{22} antisimétricas; $s_{12} = -s_{21}^T$ solamente son válidas para bonds de potencia, si el modelo tiene bonds activos, este resultado indica que el sistema no es conservativo de potencia(o energía), entonces ¿es o no es conservativo? En las siguientes secciones presentamos algunos ejemplos con bond activos.

3.6.3. Ejemplo 1

Para probar el balance de potencia pero considerando bond activos, se presenta el Bond Graph de un amplificador electrónico, el cual tiene la función de incrementar la intensidad de corriente, la tensión o la potencia de la señal que se le aplica a su entrada; obteniéndose la señal aumentada a la salida. En la figura 3.18 se muestra el esquema del sistema.

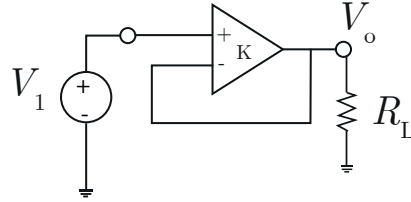


Figura 3.18: Esquema del sistema físico con amplificador electrónico.

En la figura 3.19 se muestran los Bond Graph, en la parte superior se encuentra el Bond Graph con bond activo, en la parte inferior se encuentra el Bond Graph con bond adaptado. K es la ganancia del amplificador, R_i y R_o son las resistencias de entrada y salida, respectivamente.

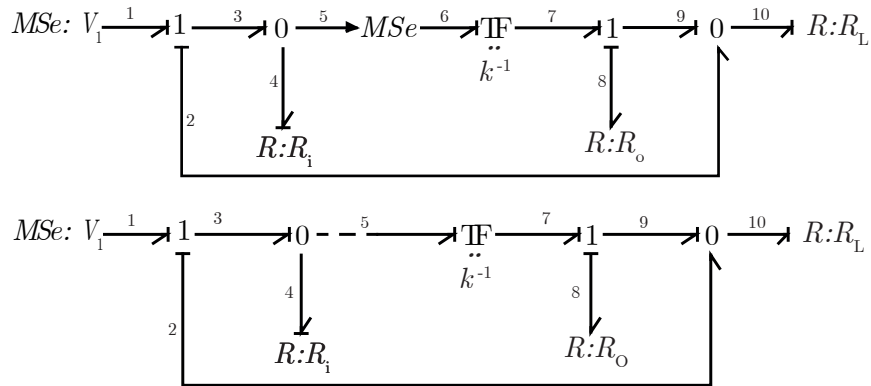


Figura 3.19: Bond Graph con bond activo y bond adaptado ejemplo 1.

Los vectores clave son:

$$u = e_1, \quad x = 0, \quad \dot{x} = 0, \quad z = 0, \quad D_{in} = \begin{pmatrix} e_4 \\ f_8 \\ e_{10} \end{pmatrix}, \quad D_{out} = \begin{pmatrix} f_4 \\ e_8 \\ f_{10} \end{pmatrix}.$$

Las relaciones constitutivas son:

$$\begin{pmatrix} f_4 \\ e_8 \\ f_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_i} & 0 & 0 \\ 0 & R_o & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_4 \\ f_8 \\ e_{10} \end{pmatrix}$$

Así de esta manera tenemos la matriz L , la matriz F no se presenta en este ejemplo, ya que es cero, debido a que no hay elementos de almacenamiento en el sistema.

Tenemos la matriz de estructura de unión,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ e_4 \\ f_8 \\ e_{10} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+k} & 0 & \frac{1}{1+k} \\ 0 & -\frac{1}{1+\xi k} & 0 & \frac{1}{1+\xi k} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1+k} & 0 & \frac{k}{1+k} \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ f_4 \\ e_8 \\ f_{10} \\ e_1 \end{pmatrix}$$

1. Balance de potencia por medio de las propiedades de la matriz S .

Comprobar que las submatrices s_{11} y s_{22} son antisimétricas y $s_{12} = -s_{21}^T$.

$$s_{11} = 0, \quad s_{22} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1+k} & 0 \\ -\frac{1}{1+\xi k} & 0 & \frac{1}{1+\xi k} \\ 0 & -\frac{1}{1+k} & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las submatrices s_{11} , s_{21} y s_{12} son cero y la submatriz s_{22} no es antisimétrica, por lo tanto, no se cumple el balance de potencia.

Para que la submatriz s_{22} sea antisimétrica, necesitamos que el valor de ξ sea de 1, el cual convertirá al bond adaptado en bond de potencia.

2. Método nuevo.

Balance de potencia por medio de la matriz S .

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{1+k} & 0 & \frac{1}{1+k} \\ 0 & -\frac{1}{1+\xi k} & 0 & \frac{1}{1+\xi k} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1+k} & 0 & \frac{k}{1+k} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{1+k} & 0 & \frac{1}{1+k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1+k} & 0 & \frac{k}{1+k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1+\xi k} & 0 & \frac{1}{1+\xi k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se realiza la separación de matrices y por lo tanto tenemos de la matriz S , las matrices e y f , respectivamente.

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{1+k} & 0 & \frac{1}{1+k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1+k} & 0 & \frac{k}{1+k} \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1+\xi k} & 0 & \frac{1}{1+\xi k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Realizamos el producto como en el Corolario 3.3.2, $e^T \cdot f$ y $f^T \cdot e$.

$$e^T \cdot f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1+k} & 0 & -\frac{1}{1+k} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1+k} & 0 & \frac{k}{1+k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1+\xi k} & 0 & \frac{1}{1+\xi k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$f^T \cdot e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1+\xi k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\xi k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{1+k} & 0 & \frac{1}{1+k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1+k} & 0 & \frac{k}{1+k} \end{pmatrix} = 0.$$

Vemos que si se cumple el lema 3.3.1 sin importar si hay o no bond activos, adaptados, independientemente de esto el Bond Graph sigue siendo conservativo.

Por lo tanto, se cumple el balance de potencia.

3. Balance de potencia por simulación.

Haciendo uso del programa de simulación con los siguientes valores numéricos del sistema: $V_1 = 0.1v$, $R_i = 8\Omega$, $R_o = 10\Omega$, $R_L = 9\Omega$, $k = 1$, el tiempo de respuesta del sistema se muestran en las figuras 3.20 y 3.21.

En la figura 3.20 se muestra la gráfica de las potencias juntas de los elementos del sistema en un intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 5$ segundos.

En la figura 3.21 se muestra la gráfica de las potencias separadas de los elementos del sistema en un intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 5$ segundos.

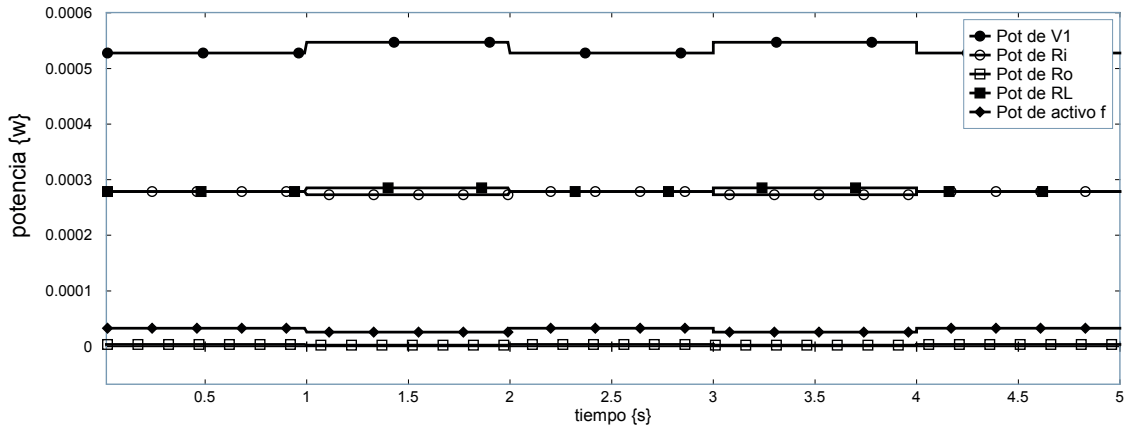


Figura 3.20: Balance de potencia (juntos) de sistema con bond adaptado, ejemplo 1.

Comportamiento de los elementos.

En la figura 3.21 se muestra la variación de la potencia de cada elemento del sistema.

- En la gráfica de la Pot de V_1 correspondiente al voltaje de entrada, se puede ver que la trayectoria después de un segundo da un salto hacia arriba e inmediatamente regresa a como inició y repite esta trayectoria.
- En la gráfica de la Pot de R_o y Pot de R_i correspondientes a las resistencias del amplificador, se puede ver que las trayectorias dan saltos opuestos a la trayectoria del elemento V_1 , ya que la corriente es directamente proporcional al voltaje aplicado e inversamente proporcional a la resistencia.
- En la gráfica de la Pot de R_L correspondiente a una resistencia, se puede ver que la trayectoria da saltos similar a la trayectoria de V_1 .
- En la gráfica de la Pot de adaptado f correspondiente al bond adaptado, se puede ver que la trayectoria después de un segundo da un salto hacia abajo e inmediatamente regresa a como inició y repite esta trayectoria, la trayectoria es opuesta a la trayectoria V_1 .

Toda la potencia en el sistema se divide o reside en todos los elementos del sistema. Cumpliéndose así el balance de potencia.

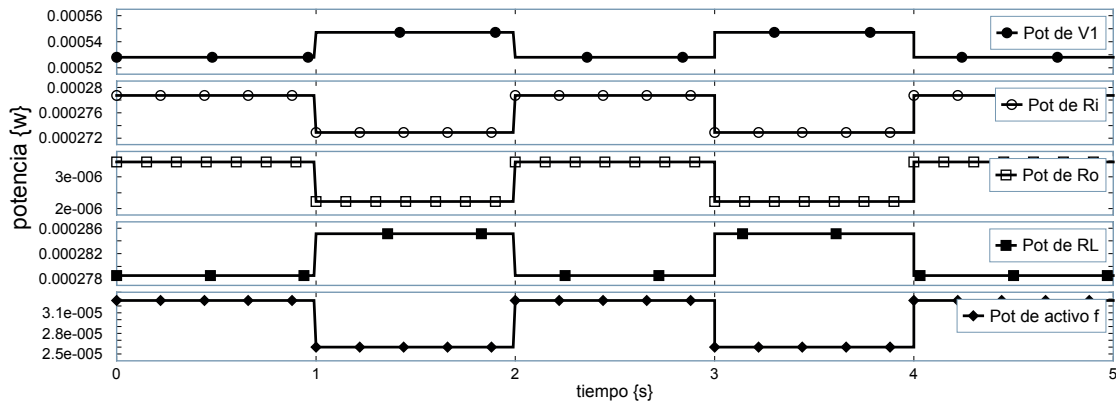


Figura 3.21: Balance de potencia de sistema con bond adaptado, ejemplo 1.

En la tabla 3.8 se muestra la potencia de los elementos del sistema mecánico en diferentes tiempos, en un rango de $t = 0.2$ segundos hasta $t = 10$ segundos.

Tabla 3.8: Potencia de elementos de sistema 1 con bond adaptado en diferentes tiempos.

Tiempo(seg)	V_1	R_i	R_o	R_L	Activo f
0.2	0.0052795	0.052795	0.00559006	0.047205	0.052795
1.2	0.00547264	0.0522388	0.00447761	0.0477612	0.0522388
2	0.0052795	0.052795	0.00559006	0.047205	0.052795
3	0.00547264	0.0522388	0.00447761	0.0477612	0.0522388
5	0.0052795	0.052795	0.00559006	0.047205	0.052795
10	0.0052795	0.052795	0.00559006	0.047205	0.052795

Efectivamente, se da el balance de potencia entre el elemento de entrada con el resto de elementos.

3.6.4. Ejemplo 2

Se presenta el Bond Graph de un amplificador electrónico con retroalimentación de estados. En la figura 3.22 se muestra el esquema del sistema.

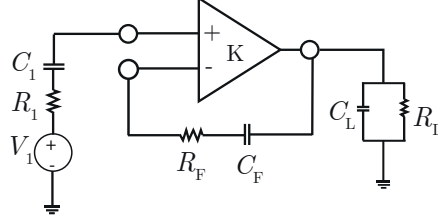


Figura 3.22: Esquema del sistema físico con amplificador electrónico y retroalimentación.

En la figura 3.23 se muestran los Bond Graph, en la parte superior se encuentra el Bond Graph con bond activo, en la parte inferior se encuentra el Bond Graph con bond adaptado. Nuevamente, K es la ganancia del amplificador, R_i y R_o son las resistencias de entrada y salida, respectivamente.

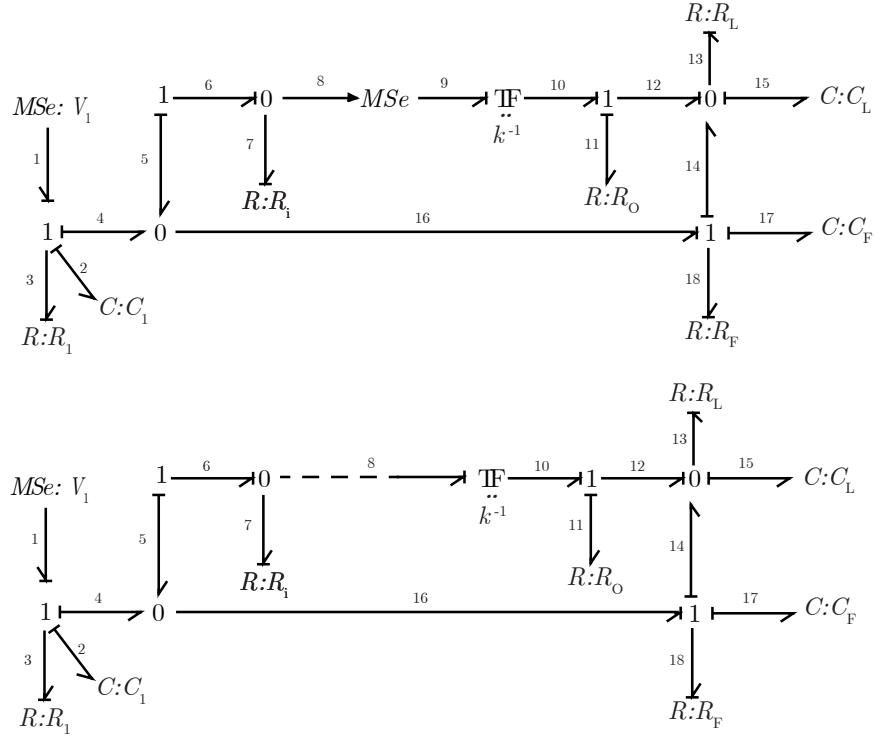


Figura 3.23: Bond Graph con bond activo y bond adaptado ejemplo 2.

Los vectores clave son:

$$u = e_1, \quad x = \begin{pmatrix} q_2 \\ q_{15} \\ q_{17} \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_{15} \\ f_{17} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} e_2 \\ e_{15} \\ e_{17} \end{pmatrix}, \quad D_{in} = \begin{pmatrix} e_3 \\ e_7 \\ e_{11} \\ e_{13} \\ f_{18} \end{pmatrix}, \quad D_{out} = \begin{pmatrix} f_3 \\ f_7 \\ f_{11} \\ f_{13} \\ e_{18} \end{pmatrix}.$$

Las relaciones constitutivas son:

$$\begin{pmatrix} f_3 \\ f_7 \\ f_{11} \\ f_{13} \\ e_{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_o} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_3 \\ e_7 \\ e_{11} \\ e_{13} \\ f_{18} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_2 \\ e_{15} \\ e_{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ q_{15} \\ q_{17} \end{pmatrix}$$

Así de esta manera tenemos las matrices F y L .

La Matriz de estructura unión es:

$$\begin{pmatrix} f_2 \\ f_{15} \\ f_{17} \\ e_3 \\ e_7 \\ e_{11} \\ e_{13} \\ f_{18} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 + \xi k & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \xi k & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 - k & -k & 0 & 0 & 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \xi k & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} e_2 \\ e_{15} \\ e_{17} \\ f_3 \\ f_7 \\ f_{11} \\ f_{13} \\ e_{18} \\ e_1 \end{pmatrix}$$

1. Balance de potencia por medio de las propiedades de la matriz S .

Comprobar que las submatrices s_{11} y s_{22} son antisimétricas y $s_{12} = -s_{21}^T$.

$$s_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad s_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \xi k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 + \xi k & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \xi k & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad s_{21} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 - k & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Efectivamente, la submatriz s_{11} es antisimétrica, pero la submatriz s_{21} no es la transpuesta negativa de s_{12} , y la submatrices s_{22} no es antisimétrica, por lo tanto, no se cumple el balance de potencia.

Para que se cumplan las propiedades, necesitamos que el valor de ξ sea de 1, el cual convertirá al bond adaptado en bond de potencia, de acuerdo a este criterio ya publicado.

2. Método nuevo.

Balance de potencia por medio de la matriz S .

Tenemos la matriz S .

$$S = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 + \xi k & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \xi k & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 - k & -k & 0 & 0 & 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \xi k & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 - k & -k & 0 & 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 + \xi k & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \xi k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \xi k & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Se realiza la separación de matrices y por lo tanto tenemos de la matriz S , las matrices e y f , respectivamente.

$$e = \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 - k & -k & 0 & 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad f = \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 + \xi k & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \xi k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \xi k & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Realizamos el producto como en el Corolario 3.3.2, $e^T \cdot f$ y $f^T \cdot e$.

$$e^T \cdot f = \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 - k \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 + \xi k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \xi k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \xi k \end{array} \right) = 0.$$

$$f^T \cdot e = \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \xi k & \xi k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - k & -k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = 0.$$

Vemos que si se cumple el lema 3.3.1 independientemente si hay o no bond activos, entonces independientemente de esto el Bond Graph sigue siendo conservativo.

Por lo tanto, se cumple el balance de potencia.

3. Balance de potencia por simulación.

Haciendo uso del programa de simulación con los siguientes valores numéricos del sistema: $V_1 = 0.5v$, $C_1 = 0.1F$, $R_1 = 10\Omega$, $R_i = 10\Omega$, $R_o = 9\Omega$, $k = 9$, $C_L = 0.1F$, $R_L = 10\Omega$, $C_F = 0.1F$, $R_F = 9\Omega$, el tiempo de respuesta del sistema se muestran en las figuras 3.24 y 3.25.

En la figura 3.24 se muestra la gráfica de las potencias juntas de los elementos del sistema en un intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 8$ segundos.

En la figura 3.25 se muestra la gráfica de las potencias separadas de los elementos del sistema en un intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 5$ segundos.

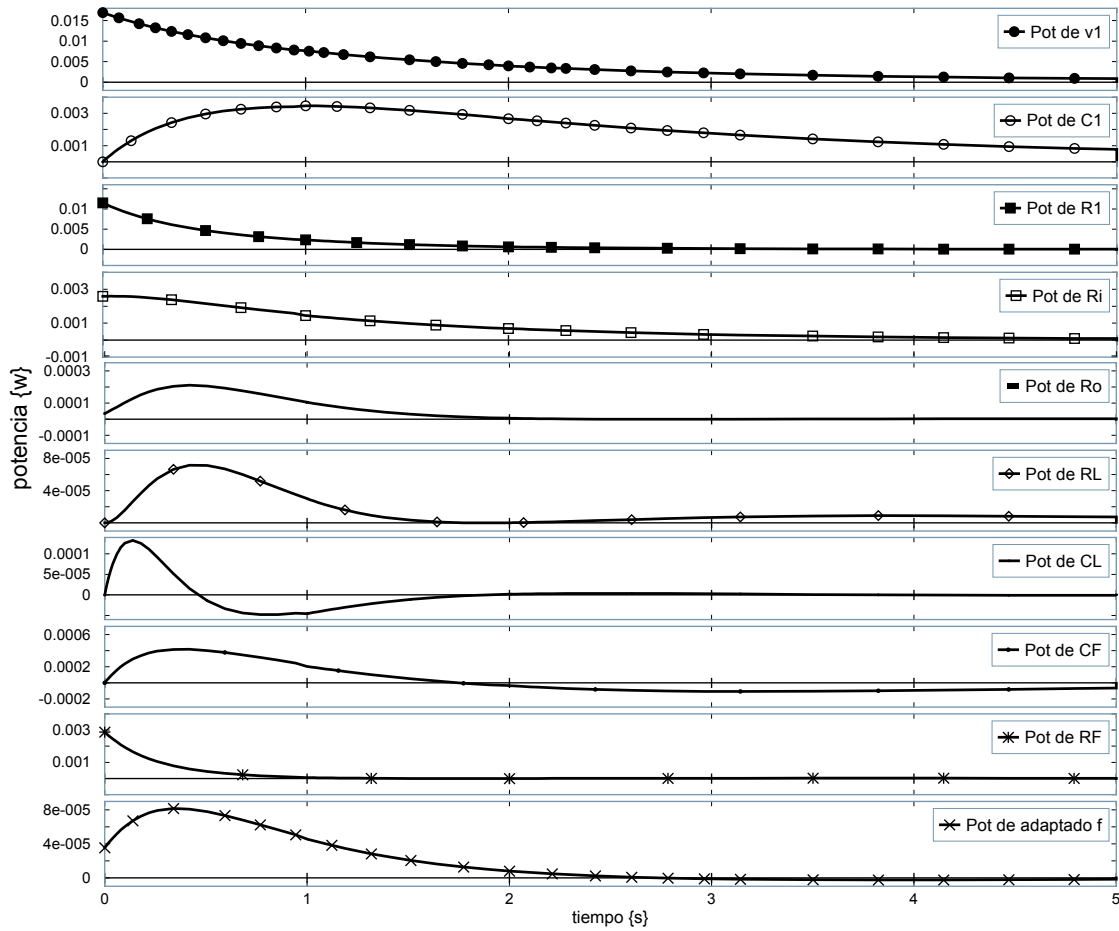


Figura 3.24: Balance de potencia de sistema con bond adaptado, ejemplo 2.

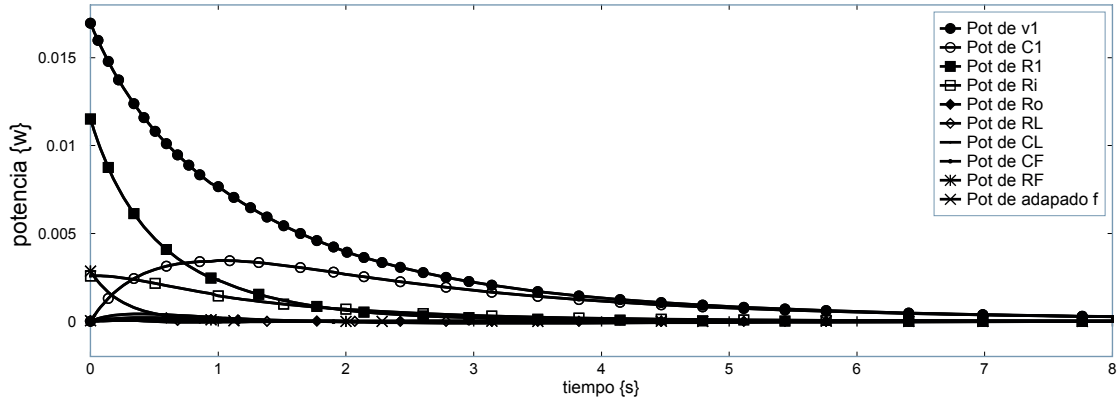


Figura 3.25: Balance de potencia (junto) de sistema con bond adaptado, ejemplo 2.

Comportamiento de los elementos.

En la figura 3.24 se muestra la variación de la potencia de cada elemento en función del tiempo.

- En la gráfica de la Pot de V_1 correspondiente al voltaje de entrada, se puede ver que la trayectoria es decreciente.
- En la gráfica de la Pot de C_1 correspondiente a un capacitor, se puede ver que la trayectoria tiene un máximo en el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 2$ segundos, que es cuando se cargó totalmente, después se empieza a descargar y simultáneamente con la Pot de V_1 se mantienen decrecientes.
- En la gráfica de la Pot de R_1 correspondiente a una resistencia, se puede ver que la trayectoria decrece en el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 2$ segundos para después mantenerse decreciente.
- En las graficas de la Pot de R_i y Pot de R_o correspondientes a las resistencias del amplificador, se puede ver que las trayectorias decrecen en el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 2$ segundos.
- En la gráfica de la Pot de R_L correspondiente a una resistencia, se puede ver que la trayectoria tiene un máximo en el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 2$ segundos, estando en paralelo con C_L deben tener el mismo voltaje.
- En la gráfica de la Pot de C_L correspondiente a un capacitor, se puede ver que la trayectoria tiene un máximo en el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 0.5$ segundos.
- En la gráfica de la Pot de C_F correspondiente a un capacitor, se puede ver que la trayectoria tiene un máximo en el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 2$ segundos, que es cuando se cargó totalmente, después se empieza a descargar.

- h) En la gráfica de la Pot de R_F correspondiente a una resistencia, se puede ver que la trayectoria decrece en el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 1$ segundo para después mantenerse decreciente.
- i) En la gráfica de la Pot de adaptado f correspondiente al bond adaptado, se puede ver que la trayectoria tiene un máximo en el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 2$ segundos.

Toda la potencia en el sistema se divide o reside en todos los elementos del sistema. Al final la mayor parte de la potencia se almacena en los capacitores. Cumpliéndose así el balance de potencia.

En la tabla 3.9 se muestra la potencia de los elementos del sistema mecánico en diferentes tiempos, en un rango de $t = 0.2$ segundos hasta $t = 5$ segundos.

Tabla 3.9: Potencia de elementos de sistema 2 con bond adaptado en diferentes tiempos.

Tiempo(seg)	v_1	C_1	R_1	R_i	R_o
0.2	0.0137411	0.00183899	0.00755272	0.0025047	0.000170386
1.2	0.00646475	0.00338054	0.00167172	0.00119345	0.0000603992
2	0.00395337	0.00267234	0.000625164	0.000688059	6.62888×10^{-6}
5	0.000800334	0.00072884	0.0000256214	0.0000821298	2.95674×10^{-6}
Tiempo	R_L	C_L	C_F	R_F	Adaptado
0.2	0.0000465475	0.000111055	0.000370471	0.00122275	0.0000765122
1.2	0.0000124919	-0.000025471	0.000121783	0.000018386	0.0000314452
2	2.22789×10^{-7}	1.63764×10^{-6}	-0.0000341371	1.35632×10^{-6}	7.90987×10^{-6}
5	6.96025×10^{-6}	-1.1871×10^{-6}	-0.0000612182	0.0000144057	-1.82513×10^{-6}

Efectivamente, se da el balance de potencia entre los elementos de entrada con el resto de elementos.

3.6.5. Ejemplo 3

Se presenta un circuito eléctrico con fuentes dependientes, el cual se muestra en la figura 3.26.

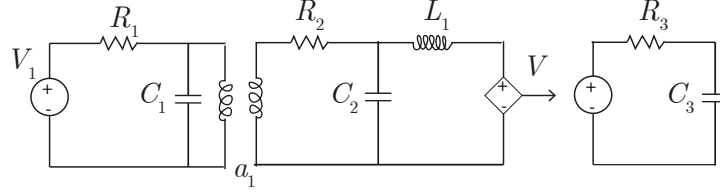


Figura 3.26: Esquema del circuito eléctrico con fuentes dependientes.

En la figura 3.27 se muestran los Bond Graph, en la parte superior se encuentra el Bond Graph con bond activo, en la parte inferior se encuentra el Bond Graph con bond adaptado.

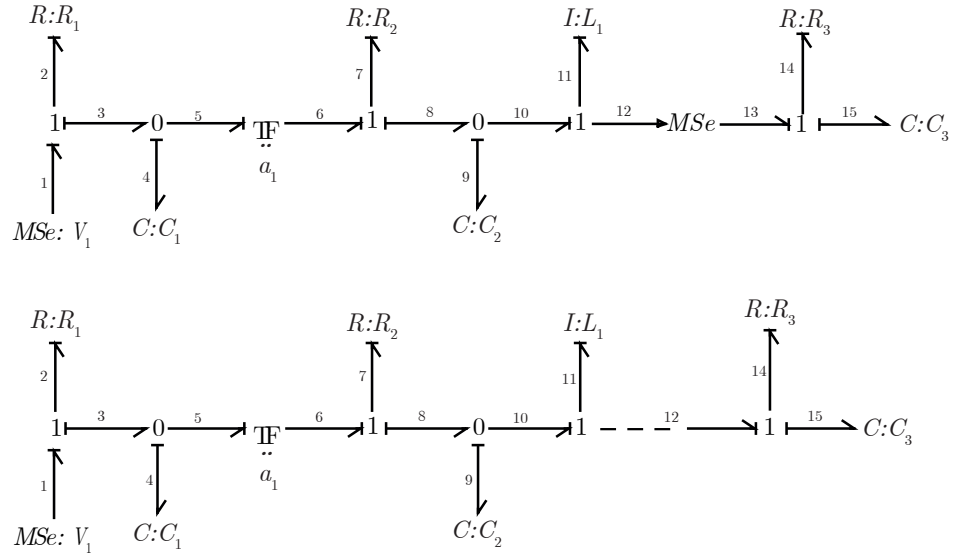


Figura 3.27: Bond Graph con bond activo y bond adaptado ejemplo 3.

Los vectores clave son:

$$u = e_1, \quad x = \begin{pmatrix} q_4 \\ q_9 \\ p_{11} \\ q_{15} \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} f_4 \\ f_9 \\ e_{11} \\ f_{15} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} e_4 \\ e_9 \\ f_{11} \\ e_{15} \end{pmatrix}, \quad D_{in} = \begin{pmatrix} e_2 \\ e_7 \\ f_{14} \end{pmatrix}, \quad D_{out} = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_7 \\ e_{14} \end{pmatrix}.$$

Las relaciones constitutivas son:

$$\begin{pmatrix} f_2 \\ f_7 \\ e_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_7 \\ f_{14} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_4 \\ e_9 \\ f_{11} \\ e_{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_4 \\ q_9 \\ p_{11} \\ q_{15} \end{pmatrix}$$

Así de esta manera tenemos las matrices F y L .

La Matriz de estructura unión es:

$$\begin{pmatrix} f_4 \\ f_9 \\ e_{11} \\ f_{15} \\ e_2 \\ e_7 \\ f_{14} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\xi & 0 & 0 & -\xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{a_1} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} e_4 \\ e_9 \\ f_{11} \\ e_{15} \\ f_2 \\ f_7 \\ e_{14} \\ e_1 \end{pmatrix}$$

1. Balance de potencia por medio de las propiedades de la matriz S .

Comprobar que las submatrices s_{11} y s_{22} son antisimétricas y $s_{12} = -s_{21}^T$.

$$s_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\xi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad s_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s_{12} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{a_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad s_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Efectivamente, la submatriz s_{22} es antisimétrica, pero la submatriz s_{21} no es la transpuesta negativa de s_{12} , y la submatriz s_{11} no es antisimétrica, por lo tanto, no se cumple el balance de potencia.

Para que se cumplan las propiedades, necesitamos que el valor de ξ sea de 1, el cual convertirá al bond adaptado en bond de potencia.

2. Método nuevo.

Balance de potencia por medio de la matriz S .

Tenemos la matriz S .

$$S = \left(\begin{array}{cccc|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\xi & 0 & 0 & -\xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{a_1} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\xi & 0 & 0 & -\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{a_1} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Se realiza la separación de matrices y por lo tanto tenemos de la matriz S , las matrices e y f , respectivamente.

$$e = \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\xi & 0 & 0 & -\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{a_1} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad f = \left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Realizamos el producto como en el Corolario 3.3.2, $e^T \cdot f$ y $f^T \cdot e$.

$$e^T \cdot f = \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_1} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = 0.$$

$$f^T \cdot e = \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a_1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\xi & 0 & 0 & -\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_1} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = 0.$$

Vemos que si se cumple el lema 3.3.1 sin importar si hay o no bond activos, adaptados, entonces independientemente de esto el Bond Graph sigue siendo conservativo.

Por lo tanto, se cumple el balance de potencia.

3. Balance de potencia por simulación.

Haciendo uso del programa de simulación con los siguientes valores numéricos del sistema: $V_1 = 0.1v$, $R_1 = 10\Omega$, $C_1 = 0.1f$, $a_1 = 9$, $R_2 = 10\Omega$, $C_2 = 0.1f$, $L_1 = 0.1H$, $R_3 = 10\Omega$, $C_3 = 0.1f$, el tiempo de respuesta del sistema se muestran en las figuras 3.28 y 3.29.

En la figura 3.28, se muestra la gráfica de las potencias separadas de los elementos del circuito, en un intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 10$ segundos.

En la figura 3.29, se muestra la gráfica de las potencias juntas de los elementos del circuito, en un intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 10$ segundos.

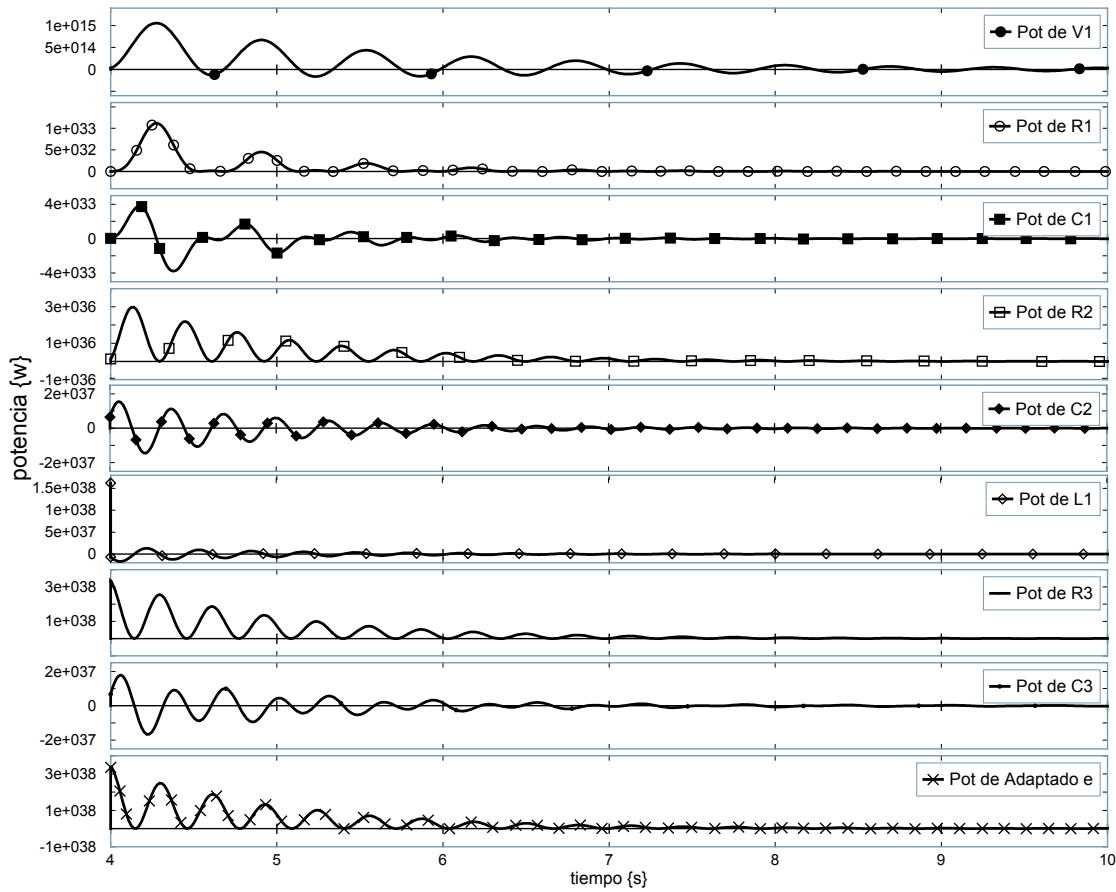


Figura 3.28: Balance de potencia de sistema con bond adaptado, ejemplo 3.

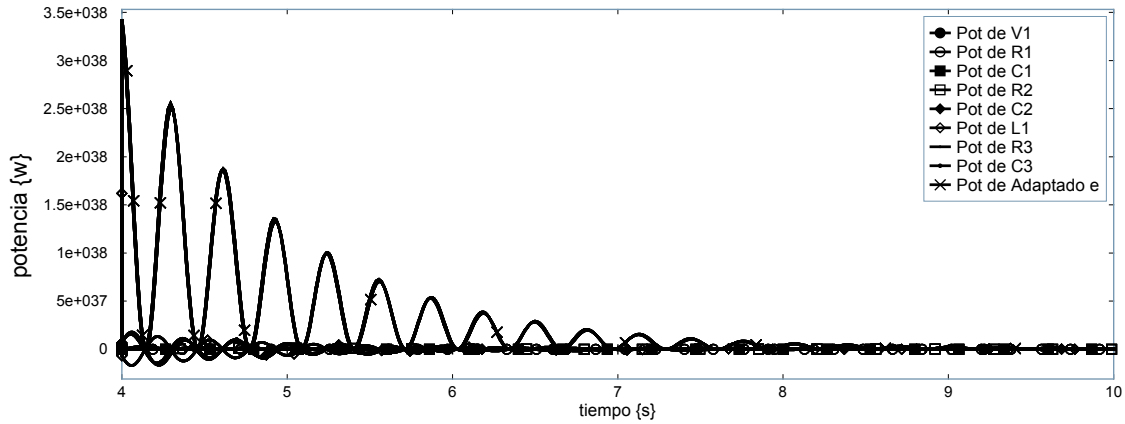


Figura 3.29: Balance de potencia (junto) de sistema con bond adaptado, ejemplo 3.

En la tabla 3.10 se muestra la potencia de los elementos del sistema mecánico en diferentes tiempos, en un rango de $t = 4$ segundos hasta $t = 10$ segundos.

Tabla 3.10: Potencia de elementos de sistema 3 con bond adaptado en diferentes tiempos.

Tiempo	v_1	R_1	C_1	R_2	C_2
4 seg	2.57463×10^{13}	6.62874×10^{29}	3.24946×10^{31}	1.34344×10^{35}	6.58763×10^{36}
5 seg	504543712046076	2.54564×10^{32}	-1.65735×10^{33}	6.26139×10^{35}	5.99159×10^{36}
8 seg	8.21271×10^{13}	6.74486×10^{30}	3.93573×10^{31}	2.55244×10^{34}	-3.21655×10^{35}
9 seg	-4.91364×10^{13}	2.41439×10^{30}	-1.10911×10^{30}	5.71589×10^{31}	-1.17213×10^{34}
10 seg	3.02643×10^{13}	9.15929×10^{29}	-5.01986×10^{30}	1.48944×10^{33}	3.15137×10^{34}
Tiempo(seg)	L_1	R_3	C_3	Adaptado	
4	-6.72201×10^{36}	3.3617×10^{38}	6.8591×10^{36}	3.43035×10^{38}	
5	-6.61633×10^{36}	7.02281×10^{37}	4.32824×10^{36}	7.45564×10^{37}	
8	2.96084×10^{35}	3.42221×10^{36}	-6.79131×10^{35}	2.74308×10^{36}	
9	1.16628×10^{34}	2.27463×10^{36}	2.49909×10^{35}	2.52454×10^{36}	
10	-3.29991×10^{34}	7.35151×10^{35}	-1.35977×10^{35}	5.99174×10^{35}	

Comportamiento de los elementos.

En la figura 3.28 se muestra la variación de la potencia de cada elemento en función del tiempo.

- a) En la gráfica de la Pot de V_1 correspondiente al voltaje de entrada, se puede ver que la trayectoria comienza creciendo y oscila con amplitudes decrecientes.

- b) En la gráfica de la Pot de R_1 correspondiente a una resistencia, se puede ver que la trayectoria crece y oscila con amplitudes decrecientes similar a la trayectoria de V_1 .
- c) En la gráfica de la Pot de C_1 correspondiente a un capacitor, se puede ver que la trayectoria crece y oscila con amplitudes decrecientes similar a la trayectoria de R_1 . que es cuando se cargó totalmente, después se empieza a descargar y simultáneamente con la Pot de V_1 se mantienen oscilando.
- d) En la gráfica de la Pot de R_2 correspondiente a una resistencia, se puede ver que la trayectoria crece y oscila con amplitudes decrecientes similar a la trayectoria de R_1 .
- e) En la grafica de la Pot de C_2 correspondiente a un capacitor, se puede ver que la trayectoria crece y oscila con amplitudes decrecientes similar a la trayectoria de R_1 . que es cuando se cargó totalmente, después se empieza a descargar y simultáneamente con la trayectoria de C_1 se mantienen oscilando.
- f) En la gráfica de la Pot de L_1 correspondientes al inductor, se puede ver que la trayectoria empieza por arriba del origen, comienza decreciendo y oscila alrededor del origen con amplitudes decrecientes.
- g) En la gráfica de la Pot de R_3 correspondiente a una resistencia, se puede ver que la trayectoria decrece y oscila con amplitudes decrecientes, contrario a las otras resistencias.
- h) En la gráfica de la Pot de C_3 correspondiente a un capacitor, se puede ver que la trayectoria crece y oscila con amplitudes decrecientes similar a la trayectoria de C_2 .
- i) En la gráfica de la Pot de adaptado e correspondiente al bond adaptado, se puede ver que la trayectoria decrece y oscila con amplitudes decrecientes similar a las trayectorias de C_3 y R_3 .

Dado que el circuito no es un modelo real, los valores de los elementos fueron escogidos de manera aleatoria y por eso genera valores grandes. Toda la potencia en el sistema reside en uno de los elementos del sistema. Desde el principio hasta el final cuando la corriente fluye, la potencia se divide o reside en todos los elementos del sistema. Cumpliéndose así el balance de potencia.

Efectivamente, se da el balance de potencia entre los elementos de entrada con el resto de elementos.

3.6.6. Ejemplo 4

Se presenta el modelo en Bond Graph de un motor de corriente directa con retroalimentación de estado, para llevar a cabo el control de velocidad del motor mediante un controlador PI , el cual convierte energía mecánica en energía eléctrica. En la figura 3.30 se muestra el esquema del sistema.

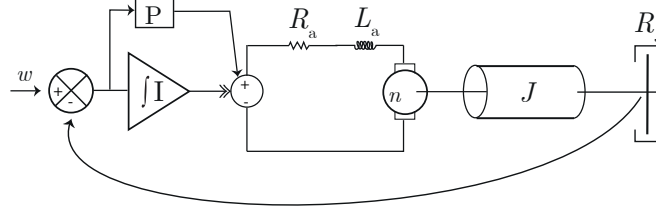


Figura 3.30: Esquema del sistema físico del motor de CD.

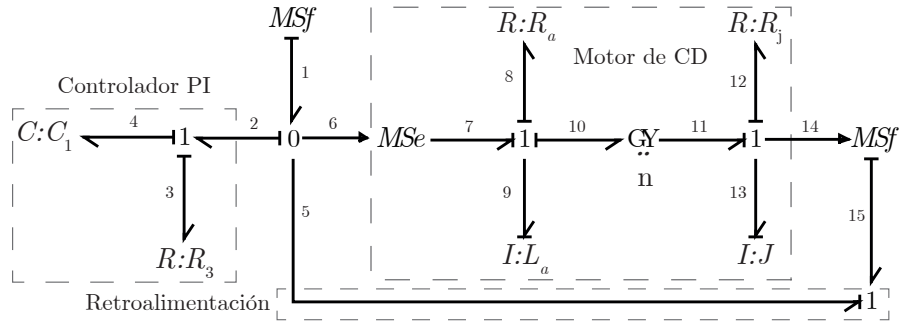


Figura 3.31: Bond Graph del motor de CD especificando partes del sistema.

En la figura 3.31 se muestra el Bond Graph del motor de corriente continua especificando las partes que conforman el sistema, el controlador PI , el motor de corriente continua y la retroalimentación del sistema.

Las ecuaciones del comportamiento dinámico del sistema son:

Unión 1 del controlador PI	Unión 0	
$f_3 = f_4 = f_2$	$f_2 = f_1 - f_5$	$e_6 = R_3 f_2 + \frac{1}{C_1} \int f_2 dt$
$e_2 = e_3 + e_4 = R_3 f_3 + \frac{1}{C_1} \int f_4 dt$	$e_6 = e_2$	

$$e_6 = u(s) = R_3 f_2(s) + \frac{1}{sC_1} f_2(s)$$

$$w(s) = (P + \frac{1}{sI}) E(s)$$

$$E(s) = f_2(s) = f_1(s) - f_5(s)$$

$$u(t) = Pe(t) + \frac{1}{I} \int e(t) dt$$

$$w(s) = (R_3 + \frac{1}{sC_1}) E(s)$$

$$E(s) = w_{ref}(s) - w(s)$$

En la figura 3.32 se muestra el comportamiento dinámico del sistema mediante las ecuaciones y el diagrama de bloques.

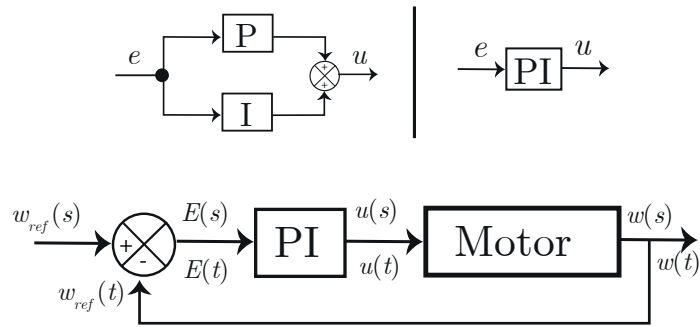


Figura 3.32: Diagrama de bloques del sistema del ejemplo 4.

En la figura 3.33 se muestra la gráfica de la velocidad de referencia con la velocidad del motor. La primera gráfica tiene una velocidad de referencia $w_{ref} = -0.2m/s$ y la segunda gráfica tiene una velocidad de referencia de $w_{ref} = 0.1m/s$, en ambas vemos que la velocidad del motor alcanza la velocidad de referencia.

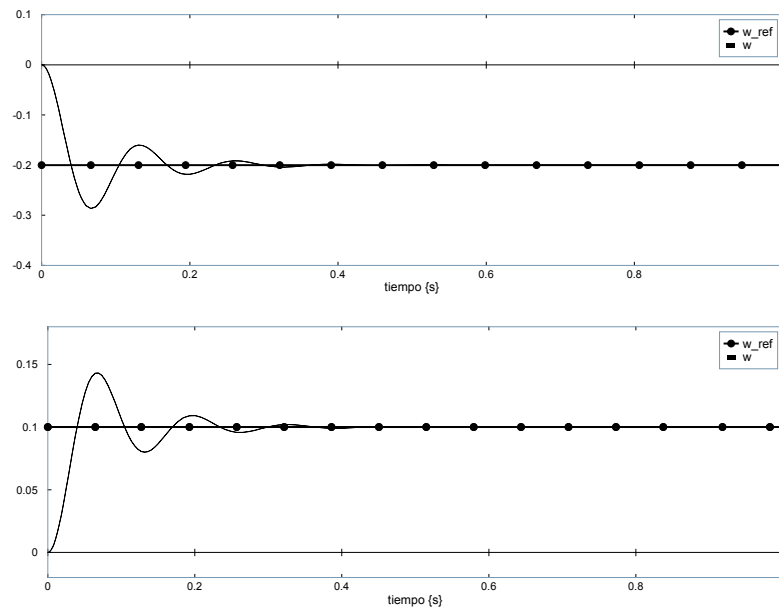


Figura 3.33: Velocidades ejemplo 4.

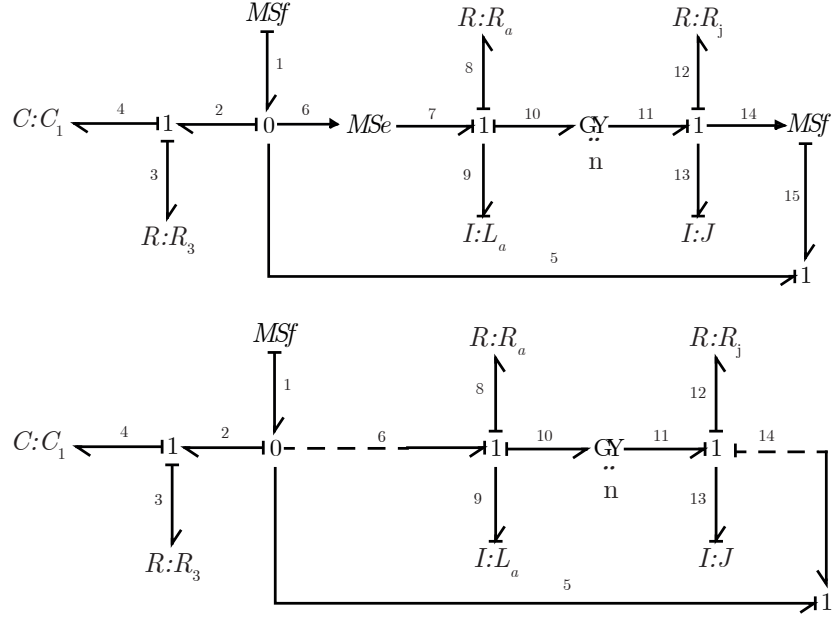


Figura 3.34: Bond Graph con bond activo y bond adaptado ejemplo 4.

En la figura 3.34 se muestran los Bond Graph, en la parte superior se encuentra el Bond Graph con bond activos, en la parte inferior se encuentra el Bond Graph con bond adaptados.

Los vectores clave son:

$$u = f_1, \quad x = \begin{pmatrix} q_4 \\ p_9 \\ p_{13} \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} f_4 \\ e_9 \\ e_{13} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} e_4 \\ f_9 \\ f_{13} \end{pmatrix}, \quad D_{in} = \begin{pmatrix} f_3 \\ f_8 \\ f_{12} \end{pmatrix}, \quad D_{out} = \begin{pmatrix} e_3 \\ e_8 \\ e_{12} \end{pmatrix}.$$

Las relaciones constitutivas son:

$$\begin{pmatrix} e_4 \\ f_9 \\ f_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_4 \\ p_9 \\ p_{13} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_3 \\ e_8 \\ e_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_3 & 0 & 0 \\ 0 & R_a & 0 \\ 0 & 0 & R_J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_3 \\ f_8 \\ f_{12} \end{pmatrix}$$

Así de esta manera tenemos las matrices F y L .

La Matriz de estructura unión es:

$$\begin{pmatrix} f_4 \\ e_9 \\ \frac{e_{13}}{f_3} \\ f_8 \\ f_{12} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & -1 & -\xi & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -n & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \xi & n & 0 & \xi & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -\xi & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \frac{e_4}{f_9} \\ \frac{f_{13}}{e_3} \\ e_8 \\ \frac{e_{12}}{f_1} \end{pmatrix}$$

1. Balance de potencia por medio de las propiedades de la matriz S .

Comprobar que las submatrices s_{11} y s_{22} son antisimétricas y $s_{12} = -s_{21}^T$.

$$s_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -\xi & -1 \\ 1 & 0 & -n \\ \xi & n & 0 \end{pmatrix} \quad s_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \xi & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad s_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -\xi & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectivamente, la submatriz s_{22} es antisimétrica, pero la submatriz s_{21} no es la transpuesta negativa de s_{12} , la submatriz s_{11} no es antisimétrica por lo tanto, no se cumple el balance de potencia.

Para que se cumplan las propiedades, necesitamos que el valor de ξ sea de 1, el cual convertirá al bond adaptado en bond de potencia.

2. Método nuevo.

Balance de potencia por medio de la matriz S .

Tenemos la matriz S .

$$S = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & -\xi & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -n & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \xi & n & 0 & \xi & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -\xi & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -n & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \xi & n & 0 & \xi & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\xi & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se realiza la separación de matrices y por lo tanto tenemos de la matriz S , las matrices e y f , respectivamente.

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -n & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \xi & n & 0 & \xi & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 0 & -\xi & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Realizamos el producto como en el Corolario 3.3.2, $e^T \cdot f$ y $f^T \cdot e$.

$$e^T \cdot f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\xi & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$f^T \cdot e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\xi & 0 & 0 & -\xi & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -n & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \xi & n & 0 & \xi & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Vemos que si se cumple el lema 3.3.1 sin importar si hay o no bond activos, entonces independientemente de esto el Bond Graph sigue siendo conservativo.

Por lo tanto, se cumple el balance de potencia.

3. Balance de potencia por simulación.

Haciendo uso del programa de simulación con los siguientes valores numéricos del sistema: $f = 0.1A$, $R_3 = 2\Omega$, $C_1 = 0.001F$, $R_a = 10\Omega$, $L_a = 0.1H$, $R_j = 10Ns/m$, $L_j = 0.5Ns^2/m$, $n = 10$ el tiempo de respuesta del sistema se muestran en las figuras 3.35 y 3.36.

En la figura 3.35 se muestra la gráfica de las potencias juntas de los elementos del circuito, con diferentes intervalos de tiempo.

En el inciso a) se grafican las potencias en un intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 10$ segundos.

En el inciso b) se grafican las potencias en un intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 0.5$ segundos.

En el inciso c) se grafican las potencias en un intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 0.09$ segundos.

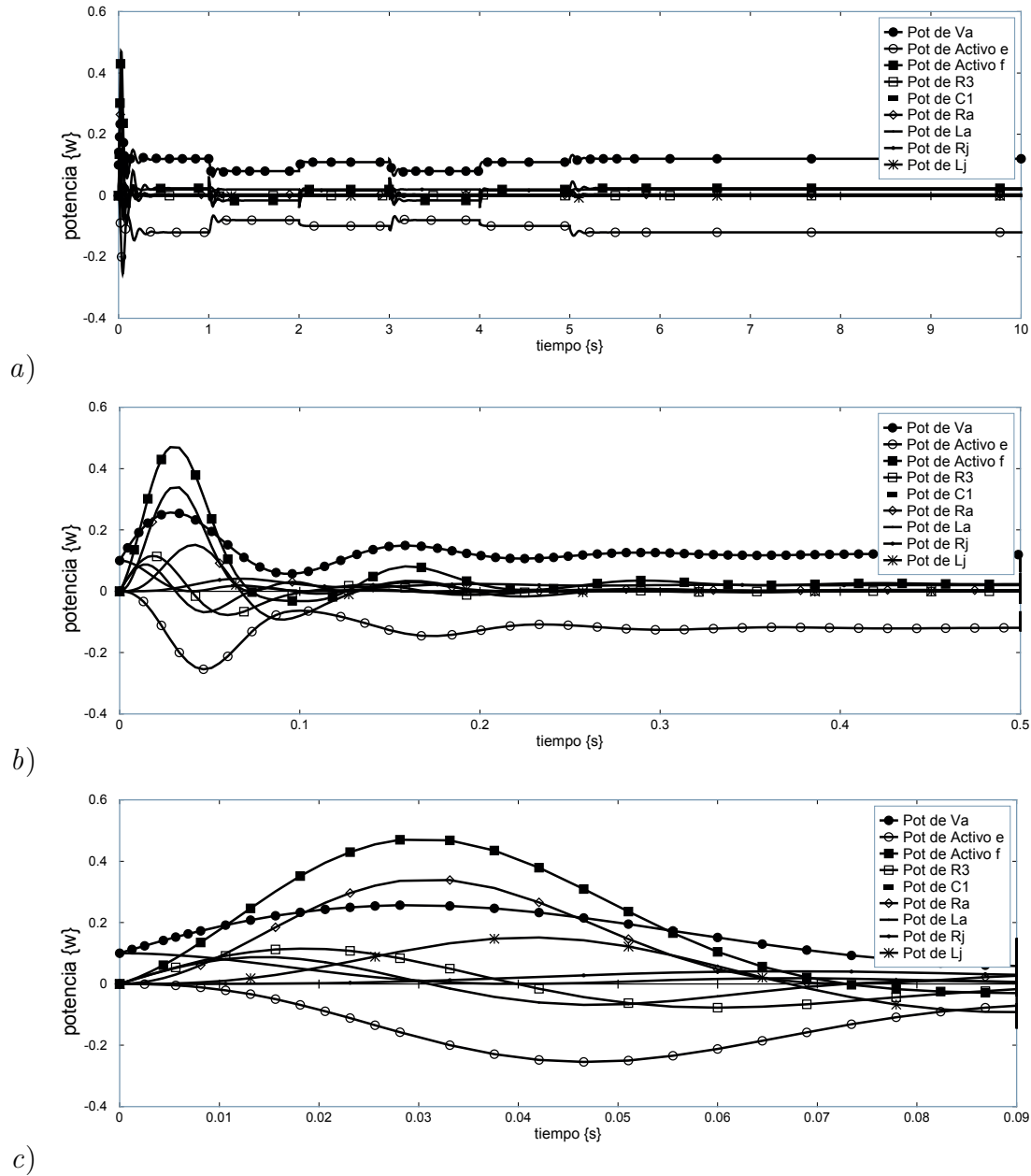


Figura 3.35: Balance de potencia (junto) de sistema con bond adaptado, ejemplo 4.

En la figura 3.36 se muestra la gráfica de las potencias separadas de los elementos del circuito, en un intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 0.09$ segundos.

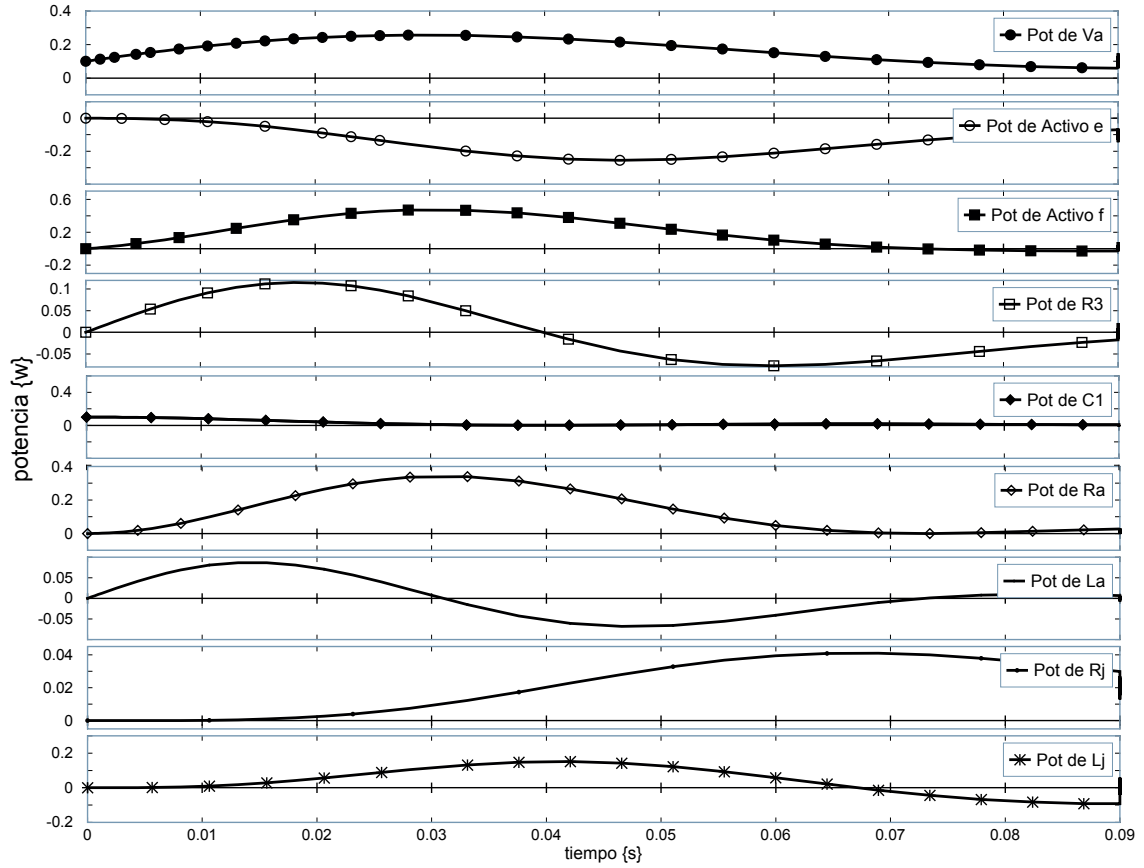


Figura 3.36: Balance de potencia de sistema con bond adaptado, ejemplo 4.

Comportamiento de los elementos.

En la figura 3.36 se muestra la variación de la potencia de cada elemento en función del tiempo.

- En la gráfica de la Pot de V_a correspondiente a la corriente de entrada, se puede ver que la trayectoria comienza creciendo y oscila con amplitudes decrecientes.
- En la gráfica de la Pot de adaptado e correspondiente al bond adaptado, se puede ver que la trayectoria decrece y oscila con amplitudes decrecientes opuesto a la trayectoria de V_a , pero en menor intensidad.
- En la gráfica de la Pot de adaptado f correspondiente al bond adaptado, se puede ver que la trayectoria crece y oscila con amplitudes decrecientes opuesto a la trayectoria del adaptado e .
- En la gráfica de la Pot de R_3 correspondiente a una resistencia, se puede ver que la trayectoria crece y oscila con amplitudes decrecientes, se opone el flujo de

corriente de V_a .

- e) En la gráfica de la Pot de C_1 correspondiente a un capacitor, se puede ver que la trayectoria crece en un intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 0.02$ segundos que es cuando se cargó totalmente, después se empieza a descargar y se mantiene constante.
- f) En la gráfica de la Pot de R_a correspondiente a una resistencia, se puede ver que la trayectoria crece y oscila con amplitudes decrecientes similar a la trayectoria del adaptado f .
- g) En la gráfica de la Pot de L_a correspondiente a un inductor, se puede ver que la trayectoria crece y oscila con amplitudes decrecientes similar a la trayectoria del adaptado e .
- h) En la gráfica de la Pot de R_j correspondiente a una resistencia, se puede ver que la trayectoria empieza a crecer hasta el tiempo $t = 0.02$ segundos y oscila con amplitudes similar a la trayectoria de L_j .
- i) En la gráfica de la Pot de L_j correspondiente a un inductor, se puede ver que la trayectoria empieza a crecer hasta el tiempo $t = 0.02$ y oscila con amplitudes decrecientes similar a la trayectoria de R_j .

Toda la potencia en el sistema reside en uno de los elementos del sistema. Desde el principio hasta el final cuando la corriente fluye, la potencia se divide o reside en todos los elementos del sistema. Cumpliéndose así el balance de potencia.

Tabla 3.11: Potencia de elementos de sistema 4 con bond adaptado en diferentes tiempos.

Tiempo(seg)	v_a	C_1	R_3	R_a	L_a
0.03	0.254346	0.0500129	0.00461253	0.33883	-0.015187
0.2	0.116175	-0.0113968	0.000827663	0.00309006	-0.00184594
1	0.119997	-1.40685×10^{-6}	1.3745×10^{-11}	0.00399873	-1.57754×10^{-7}
5	0.0800206	0.00001631	4.1565×10^{-9}	0.00399984	-8.11491×10^{-6}
Tiempo(seg)	R_j	L_j	Activo e	Activo f	
0.03	0.0123318	0.132208	-0.199721	0.468183	
0.2	0.0238046	-0.00462677	-0.126744	0.0204219	
1	0.0200005	-3.40102×10^{-6}	-0.119999	0.0239956	
5	0.0199918	-0.0399874	-0.0800043	-0.0160038	

En la tabla 3.11 se muestra la potencia de los elementos del sistema mecánico en diferentes tiempos, en un rango de $t = 0.2$ segundos hasta $t = 5$ segundos.

Efectivamente, se da el balance de potencia entre los elementos de entrada con el resto de elementos.

El balance de potencia mediante la representación de estado se ve en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Funciones de Energía y Estabilidad

4.1. La importancia de la estabilidad

Dentro de la ciencia, matemáticas y la ingenierías, un sistema de control es un conjunto de dispositivos encargados de administrar, ordenar, dirigir o regular el comportamiento de otro sistema, con el fin de reducir las probabilidades de fallo y obtener los resultados deseados. Una de las propiedades de cualquier sistema de control es la estabilidad, la cual tiene por objetivo conseguir que el sistema sea estable y robustos frente a perturbaciones. Un sistema es estable desde un punto de vista, si se mantiene en estado estacionario, es decir, igual en el tiempo y una modificación pequeña de las condiciones iniciales no altera significativamente el futuro del sistema.

Definición 4.1.1. Una matriz cuadrada A es llamada matriz de estabilidad o matriz de Hurwitz si cada valor propio de A tiene una parte real estrictamente negativa, es decir:

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0.$$

donde los valores propios se obtienen de

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

cuando el sistema es modelado en variables de estado por $\dot{x} = Ax + Bu$.

4.2. Funciones de Lyapunov

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = f(x) \tag{4.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $f : W \mapsto \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto y f una función continua.

Donde W , subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ significa que siempre se puede tomar un punto del conjunto W , el cual se considera el centro de una circunferencia de radio $r > 0$ y la circunferencia esta dentro del conjunto W .

Definición 4.2.1. Un punto $x_0 \in W$ se llama punto de equilibrio del sistema (4.1) si $f(x_0) = 0$.

El análisis de las soluciones del sistema (4.1) cerca de los puntos de equilibrio es uno de los principales objetivos en el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. Un punto de equilibrio, sin embargo, ha de satisfacer un cierto criterio de estabilidad para ser relevante físicamente.

Definición 4.2.2. Sea $x_0 \in W$ un punto de equilibrio del sistema (4.1). Se dice que:

1. x_0 es **estable** según Lyapunov (o simplemente estable) si para toda vecindad U de x_0 existe una vecindad $U_1 \subset U$ de x_0 tal que toda solución $x(t)$ con x_0 en U_1 está definida y permanece en U para todo $t > 0$.
2. x_0 es **asintóticamente estable** si es estable y cada vecindad U_1 se puede elegir de modo que para toda solución $x(t)$ con $x(0)$ en U_1 se cumple $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$.
3. x_0 es **inestable** si no es estable.

Para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio x_0 del sistema (4.1), se utilizan los métodos indirecto y directo de Lyapunov.

4.2.1. Método indirecto de Lyapunov

El método indirecto de Lyapunov permite analizar la estabilidad en el punto de equilibrio x_0 mediante la linealización del sistema (4.1), alrededor de x_0 , esto es, estudiando la estabilidad cerca del origen del sistema lineal

$$\dot{x} = Ax \tag{4.2}$$

donde $A = \frac{\partial f}{\partial x} f(x)|_{x=x_0}$. El sistema lineal (4.2) tiene al origen $x = 0$ como punto de equilibrio y el comportamiento de las soluciones de este sistema está completamente determinado por los valores propios de la matriz A . En particular se tiene que el origen es asintóticamente estable si y sólo si todos los valores propios de la matriz A tienen parte real negativa.

Si una matriz A tiene todos sus valores propios con parte real negativa, entonces A es llamada matriz de Hurwitz. Por lo tanto, el origen del sistema (4.2) es asintóticamente estable si y sólo si A es de Hurwitz.

Teorema 4.2.3. (*Método indirecto de Lyapunov*)

El punto de equilibrio x_0 del sistema no lineal (4.1) es asintóticamente estable si el origen del sistema lineal (4.2) es asintóticamente estable, esto es, si todos los valores propios de la matriz A tienen parte real negativa. El punto de equilibrio x_0 es inestable si al menos un valor propio de A tiene parte real positiva.

Notemos que el método indirecto de Lyapunov no establece condición alguna para cuando algún valor propio de la matriz A tiene parte real igual a cero, en este caso la linealización no es suficiente para determinar la estabilidad del punto de equilibrio del sistema no lineal. En la siguiente sección describiremos otro método, desarrollado también por Lyapunov, que en algunas ocasiones resuelve esta dificultad.

4.2.2. Método directo de Lyapunov

A finales del siglo XIX Lyapunov desarrolló otro método para el análisis de la estabilidad en los puntos de equilibrio del sistema (4.1), este método considera una nueva función con ayuda de la cual se establece si el sistema estudiado es estable o asintóticamente estable, el cual fué denominado método directo de Lyapunov o también conocido como teorema de Lyapunov sobre la estabilidad.

Teorema 4.2.4. (*Método directo de Lyapunov*)

Sea $x_0 \in W$ un punto de equilibrio del sistema (4.1). Si existe $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida en una vecindad $U \subset W$ de x_0 , derivable en $U \setminus x_0$, tal que:

1. $V(x_0) = 0$, $V(x) > 0$ en $U \setminus x_0$

2. $\dot{V}|_{((4.1))} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k} f_k \leq 0$ en $U \setminus x_0$, entonces x_0 es estable, si además

3. $\dot{V}|_{((4.1))} < 0$ en $U \setminus x_0$, entonces x_0 es asintóticamente estable.

Donde $\setminus$ denota quitar el elemento, entonces $U \setminus x_0$ es el conjunto U menos el elemento x_0 .

Definición 4.2.5. Una función $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface las condiciones 1) y 2) del teorema 4.2.4, se llama función de Lyapunov para x_0 . Una función V que satisface la condición 1) del teorema con $x_0 = 0$ se dice que es definida positiva.

Los métodos directo e indirecto de Lyapunov son clásicos, su demostración puede consultarse en la mayoría de los textos de ecuaciones diferenciales ordinarias, ver por ejemplo [27], [31], [36].

Una desventaja que se presenta al tratar de aplicar el método directo de Lyapunov es que no existe un método generalizado para hallar funciones de Lyapunov, por lo que es necesario proponer una función definida positiva y probar si ésta cumple las condiciones 2) o 3) del Teorema 4.2.4. Para sistemas lineales, las funciones definidas positivas V más simples, que son buenas candidatas a ser funciones de Lyapunov, son las formas cuadráticas definidas positivas, esto es,

$$V(x) = x^T P x$$

donde $P \in \mathbf{M}(n, n)$ simétrica y definida positiva. Recordemos que una matriz P es definida positiva y escribimos $P > 0$ si y sólo si todos los valores propios de P son positivos, de manera equivalente si y sólo si todos sus menores principales son positivos.

La estabilidad asintótica del sistema (4.2) también puede ser estudiada usando el método directo de Lyapunov. Consideremos una función cuadrática definida positiva $V(x) = x^T P x$. La derivada de V respecto del sistema (4.2) está dada por:

$$\dot{V}(x)|_{(4.2)} = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T (A^T P + P A) x = -x^T Q x$$

donde Q es la matriz simétrica definida por:

$$A^T P + P A = -Q. \quad (4.3)$$

Si Q es definida positiva, el origen es asintóticamente estable. La ecuación (4.3) es llamada ecuación de Lyapunov. El siguiente teorema caracteriza la estabilidad asintótica del origen del sistema lineal (4.2) en términos de la solución de la ecuación de Lyapunov.

Teorema 4.2.6. *Una matriz A es Hurwitz si y sólo si dada cualquier matriz simétrica y definida positiva Q existe una matriz simétrica y definida positiva P , tales que satisfacen la ecuación de Lyapunov (4.3). Además, si A es Hurwitz, entonces P es la única solución de (4.3).*

La prueba de este teorema puede consultarse en [31].

4.3. Condiciones de estabilidad para sistemas modelados en Bond Graph

La expresión de un sistema modelado en Bond Graph en espacio de estado es:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

donde A , B son matrices y cumplen las siguientes formas.

$$A = (s_{11} + s_{12} M s_{21}) F, \quad B = (s_{13} + s_{12} M s_{23}).$$

La matriz M tiene la siguiente forma $M = L(I - s_{22} L)^{-1}$. La matriz F es diagonal.

Analizamos dos condiciones, la condición básica y la condición general.

4.3.1. Condición básica

La condición básica para la estabilidad de un sistema lineal que se utilizaba antes de la condición de Lyapunov, está definida por

$$A^T + A > 0$$

en términos de las submatrices de la estructura de unión de un sistema lineal modelado en Bond Graph es:

$$[(s_{11} + s_{12} M s_{21}) F]^T + (s_{11} + s_{12} M s_{21}) F > 0$$

Simplificando

$$F^T(s_{11} + s_{12}Ms_{21})^T + (s_{11} + s_{12}Ms_{21})F > 0$$

$$F^T s_{11}^T + F^T s_{21}^T M^T s_{12}^T + s_{11}F + s_{12}Ms_{21}F > 0$$

Las matrices F , F^T y M son definidas positivas, ($F \geq 0$, $F^T \geq 0$ y $M \geq 0$). Entonces tenemos las siguientes opciones:

$$\begin{array}{ccccccc} F^T s_{11}^T & + & F^T s_{21}^T M^T s_{12}^T & + & s_{11}F & + & s_{12}Ms_{21}F & > 0 \\ (+)(+) & + & (+)(-)(+)(+) & + & (+)(+) & + & (-)(+)(+)(+) & \\ & & (+)(+)(+)(-) & & & & (+)(+)(-)(+) & \end{array}$$

para que la anterior expresión se cumpla, se requiere las siguientes condiciones:

1. $s_{11}^T > 0$
2. $s_{21}^T = -s_{12}$
3. $s_{11} > 0$
4. $s_{12}^T = -s_{21}$.

4.3.2. Condición general

La función de energía es dada por la ecuación:

$$V(x) = x^T P x.$$

donde la matriz P es simétrica y definida positiva.

La condición general fue dada en la ecuación (4.3), llamada ecuación de Lyapunov, para sistemas lineales,

$$A^T P + P A > 0.$$

Sustituyendo las matrices y realizando los productos.

$$[(s_{11} + s_{12}Ms_{21})F]^T P + P(s_{11} + s_{12}Ms_{21})F > 0.$$

$$F^T(s_{11} + s_{12}Ms_{21})^T P + P(s_{11} + s_{12}Ms_{21})F > 0.$$

$$F s_{11}^T P + F s_{21}^T M^T s_{12}^T P + P s_{11} F + P s_{12} M s_{21} F > 0.$$

Las matrices F y M son definidas positivas, ($F \geq 0$, $M \geq 0$ $M^T \geq 0$). Entonces tenemos las siguientes opciones:

$$\begin{array}{ccccccc} F s_{11}^T P & + & F s_{21}^T M^T s_{12}^T P & + & P s_{11} F & + & P s_{12} M s_{21} F & > 0 \\ (+)(+)(+) & + & (+)(-)(+)(+)(+) & + & (+)(+)(+) & + & (+)(-)(+)(+)(+) & \\ & & (+)(+)(+)(-)(+) & & & & (+)(+)(+)(-)(+) & \end{array}$$

nuevamente, para que la anterior expresión se cumpla, se requiere las siguientes condiciones:

1. $s_{11}^T > 0$
2. $s_{21}^T = -s_{12}$
3. $s_{11} > 0$
4. $s_{12}^T = -s_{21}$.

4.4. Criterio de estabilidad en Bond Graph

En esta sección, se determinan la función de energía y la ecuación de Lyapunov en forma general para sistemas modelados en Bond Graph, considerando el ejemplo del circuito de la figura 2.9, el resultado encontrado se aplica en la determinación de la estabilidad de esos casos de estudio.

Lema 4.4.1. *Sea la matriz F de la ecuación constitutiva $z = Fx$, luego*

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} f_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_n^2 \end{pmatrix}$$

entonces la matriz $P = F^{-2}$ satisface la ecuación de energía $V(z) = z^T P z$.

Prueba. La función de energía para sistemas modelados en Bond Graph, se deduce a partir de la relación constitutiva de los elementos de almacenamiento, $z = Fx$, de donde $x = F^{-1}z$, la matriz F es una matriz diagonal, entonces F^{-1} es diagonal y $F^{-1} = (F^{-1})^T$, sin pérdida de generalidad proponemos la matriz de 2×2 ,

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix},$$

donde se propone una matriz P de la siguiente forma,

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

ahora sustituimos en la función de energía:

$$\begin{aligned} V(x) &= x^T P x \\ &= z^T (F^{-1})^T P F^{-1} z = z^T F^{-1} P F^{-1} z \\ &= z^T \begin{pmatrix} a f_1 & b \\ c & d f_2 \end{pmatrix} F^{-1} z = z^T \begin{pmatrix} a f_1^2 & b \\ c & d f_2^2 \end{pmatrix} z. \end{aligned}$$

donde la matriz

$$\begin{pmatrix} a f_1^2 & b \\ c & d f_2^2 \end{pmatrix},$$

debe ser simétrica y definida positiva, por lo tanto $c = b = 0$ y $a = d \geq 1$. Por lo tanto, la forma cuadrática de la función de energía es:

$$\begin{aligned} V(x) &= x^T P x \\ &= z^T \begin{pmatrix} f_1^2 & 0 \\ 0 & f_2^2 \end{pmatrix} z. \end{aligned}$$

Así, se propone una matriz $P \in \mathbb{R}^2$ de la forma:

$$P = \begin{pmatrix} f_1^2 & 0 \\ 0 & f_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}^2 = (F^{-1})^2 = F^{-2}.$$

Por lo tanto, la matriz P se puede calcular apartir de la matriz inversa de la matriz F elevada al cuadrado, ya que en la función de energía $V(x) = z^T F^{-2} z$

$$P = (F^{-1})^2 = F^{-2}.$$

En forma general, $P \in \mathbb{R}^n$, se propone:

$$P = \begin{pmatrix} f_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_n^2 \end{pmatrix}.$$

Corolario 4.4.2. Sea P la matriz como en lema 4.4.1 y sea A la matriz del sistema, entonces la notación indicial $A_{ij}P_i + A_{ji}P_j$ satisface la ecuación de Lyapunov $\dot{V}(x) = A^T P + P A$,

Prueba. Una matriz $m \times n$ es la que tiene m filas (horizontales) y n columnas (verticales) de elementos. En el símbolo A_{ij} , usado para representar a un elemento típico de la matriz, el primer subíndice indica la fila y el segundo la columna ocupada por el elemento. El agrupamiento rectangular de elementos indicado por

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

La función de energía en forma general es $V(x) = x^T P x$, donde

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_n \end{pmatrix}.$$

La ecuación de Lyapunov esta dada por $\dot{V}(x) = A^T P + P A$, la notación indicial es:

$$\dot{V}(x) = A_{ij}P_i + A_{ji}P_j.$$

1. Para el valor de $i = j = 1$, tenemos $\dot{V}(x) = A_{11}P_1 + A_{11}P_1 = 2A_{11}P_1$.
2. Para el valor de $i = j = 2$, tenemos

$$\dot{V}(x) = \begin{pmatrix} 2A_{11}P_1 & A_{12}P_1 + A_{21}P_2 \\ A_{21}P_2 + A_{12}P_1 & 2A_{22}P_2 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

3. En general para el valor de $i = j = n$, tenemos

$$\dot{V}(x) = \begin{pmatrix} 2A_{11}P_1 & A_{12}P_1 + A_{21}P_2 & \cdots & A_{1n}P_1 + A_{n1}P_n \\ A_{21}P_2 + A_{12}P_1 & 2A_{22}P_2 & \cdots & A_{2n}P_2 + A_{n2}P_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}P_n + A_{1n}P_1 & A_{n2}P_n + A_{2n}P_2 & \cdots & 2A_{nn}P_n \end{pmatrix}$$

4.4.1. Obtención de la función de energía $V(x)$ en el Bond Graph

Primeramente, se plantea el problema: como determinar la función de energía $V(x)$ de un sistema modelado en Bond Graph

La función de energía propuesta para sistemas modelados en Bond Graph, se deduce a partir de la relación constitutiva de los elementos de almacenamiento, $z = Fx$, de donde $x = F^{-1}z$, la matriz F es matriz diagonal, entonces F^{-1} es diagonal y $F^{-1} = (F^{-1})^T$, sin pérdida de generalidad proponemos la matriz de 2×2 ,

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix},$$

donde se propone una matriz P de la siguiente forma,

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

ahora sustituimos en la función de energía:

$$\begin{aligned} V(x) &= x^T P x \\ &= z^T (F^{-1})^T P F^{-1} z = z^T F^{-1} P F^{-1} z \\ &= z^T \begin{pmatrix} af_1^2 & b \\ c & df_2^2 \end{pmatrix} F^{-1} z = z^T \begin{pmatrix} af_1^2 & b \\ c & df_2^2 \end{pmatrix} z. \end{aligned}$$

donde la matriz

$$\begin{pmatrix} af_1^2 & b \\ c & df_2^2 \end{pmatrix},$$

debe ser simétrica y definida positiva, por lo tanto $c = b = 0$ y $a = d \geq 1$. Por lo tanto, la forma cuadrática de la función de energía es:

$$\begin{aligned} V(x) &= x^T P x \\ &= z^T \begin{pmatrix} f_1^2 & 0 \\ 0 & f_2^2 \end{pmatrix} z. \end{aligned}$$

Así, se propone una matriz $P \in \mathbb{R}^2$ de la forma:

$$P = \begin{pmatrix} f_1^2 & 0 \\ 0 & f_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}^2 = (F^{-1})^2 = F^{-2}.$$

Por lo tanto, la matriz P se puede calcular apartir de la matriz inversa de la matriz F elevada al cuadrado, ya que en la función de energía $V(x) = z^T F^{-2} z$

$$P = (F^{-1})^2 = F^{-2}.$$

En forma general, $P \in \mathbb{R}^n$, se propone:

$$P = \begin{pmatrix} f_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_n^2 \end{pmatrix}.$$

4.5. Forma general de la ecuación de Lyapunov

Una matriz $m \times n$ es la que tiene m filas (horizontales) y n columnas (verticales) de elementos. En el símbolo A_{ij} , usado para representar a un elemento típico de la matriz, el primer subíndice indica la fila y el segundo la columna ocupada por el elemento. El agrupamiento rectangular de elementos indicado por

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

La función de energía en forma general es $V(x) = x^T P x$, donde

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_n \end{pmatrix}.$$

La ecuación de Lyapunov esta dada por $\dot{V}(x) = A^T P + P A$, la notación indicial es:

$$\dot{V}(x) = A_{ij} P_i + A_{ji} P_j.$$

1. Para el valor de $i = j = 1$, tenemos $\dot{V}(x) = A_{11}P_1 + A_{11}P_1 = 2A_{11}P_1$.
2. Para el valor de $i = j = 2$, tenemos

$$\dot{V}(x) = \begin{pmatrix} 2A_{11}P_1 & A_{12}P_1 + A_{21}P_2 \\ A_{21}P_2 + A_{12}P_1 & 2A_{22}P_2 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

3. En general para el valor de $i = j = n$, tenemos

$$\dot{V}(x) = \begin{pmatrix} 2A_{11}P_1 & A_{12}P_1 + A_{21}P_2 & \cdots & A_{1n}P_1 + A_{n1}P_n \\ A_{21}P_2 + A_{12}P_1 & 2A_{22}P_2 & \cdots & A_{2n}P_2 + A_{n2}P_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}P_n + A_{1n}P_1 & A_{n2}P_n + A_{2n}P_2 & \cdots & 2A_{nn}P_n \end{pmatrix}$$

4.5.1. Ecuación de Lyapunov $\dot{V}(x)$, derivada de la función de energía en el Bond Graph

En la figura 4.1 retomamos el ejemplo del circuito RCI, donde mostramos su Bond Graph.

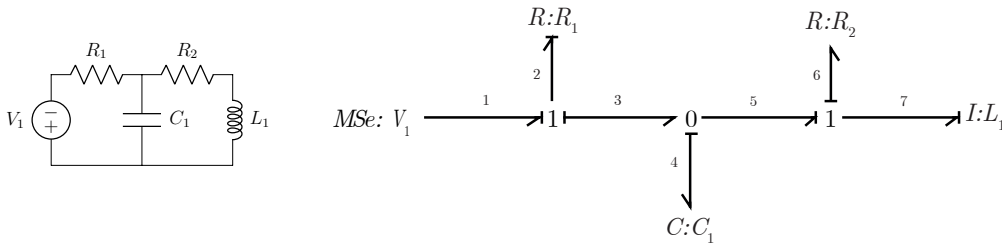


Figura 4.1: Circuito RCI y Bond Graph.

La matriz de estados A es:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_2}{L_1} \end{pmatrix}$$

donde la matriz F es

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{pmatrix}$$

La función de energía es:

$$P = (F^{-1})^2 = \begin{pmatrix} C_1^2 & 0 \\ 0 & L_1^2 \end{pmatrix}.$$

La ecuación de Lyapunov relacionada con el Teorema 4.2.4 es:

$$A^T P + P A = \begin{pmatrix} -\frac{2C_1}{R_1} & \frac{L_1^2}{C_1} - \frac{C_1^2}{L_1} \\ \frac{L_1^2}{C_1} - \frac{C_1^2}{L_1} & -2L_1 R_2 \end{pmatrix}.$$

¿La matriz A representa un sistema estable?

Para saber si la matriz A es matriz de estabilidad o matriz de Hurwitz, hacemos uso de la definición 4.1.1. Recordamos los valores para los elementos del circuito dados en la simulación, $R_1 = 10\Omega$, $C_1 = 9.1f$, $R_2 = 9\Omega$ y $L_1 = 0.1H$, sustituyendo en la matriz A , tenemos:

$$\begin{pmatrix} -0.010989 & -10 \\ 0.10989 & -90 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico se obtiene de $\det(\lambda I - A) = 0$, es $2.08791 + 90.011\lambda + \lambda^2$ y sus valores propios son $\lambda_1 = -89.9878$, $\lambda_2 = -0.0232022$, los dos valores son negativos, por lo tanto, la matriz A si representa un sistema estable.

4.6. Casos de estudio

Considerando los ejemplos del capítulo dos, a los cuales se calcula la función de energía y la ecuación de Lyapunov.

4.6.1. Sistema mecánico 1

Bond Graph de un sistema mecánico dado en el capítulo dos, se ilustra en la figura 4.2.

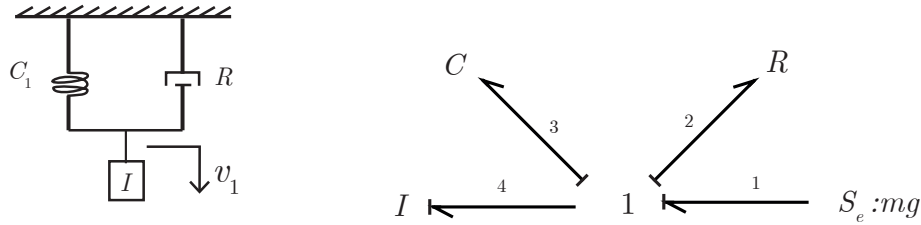


Figura 4.2: Sistema mecánico y Bond Graph del ejemplo 1.

La matriz de estructura de unión

$$\begin{pmatrix} f_3 \\ e_4 \\ \frac{e_4}{f_2} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} e_3 \\ f_4 \\ \frac{e_2}{e_1} \end{pmatrix} \quad s_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad s_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ s_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad s_{22} = 0.$$

Relaciones constitutivas

Las relaciones constitutivas de los elementos que forman parte el sistema son:

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \quad M = L = R, \Rightarrow s_{22} = 0.$$

Matriz de estados, A

La matriz de estados A se determina por:

$$A = (s_{11} + s_{12}Ms_{21})F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}$$

Función de energía

La función de energía se calcula elevando al cuadrado a la matriz inversa de F .

$$P = (F^{-1})^2 = \begin{pmatrix} C^2 & 0 \\ 0 & L^2 \end{pmatrix}$$

Ecuación de Lyapunov

La ecuación de Lyapunov se calcula de la siguiente manera:

$$A^T P + P A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{C^2}{L} - \frac{L^2}{C} \\ \frac{C^2}{L} - \frac{L^2}{C} & -2LR \end{pmatrix}$$

¿La matriz A representa un sistema estable?

Para saber si la matriz A es matriz de estabilidad o matriz de Hurwitz, hacemos uso de la definición 4.1.1. Recordamos los valores para los elementos del circuito dados en la simulación, $R = 10Ns/m$, $C = 0.1m/N$ y $L = 0.2Ns^2/m$, sustituyendo en la matriz A , tenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -10 & -50 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico se obtiene de $\det(\lambda I - A) = 0$, es $\lambda^2 + 50\lambda + 50$ y sus valores propios son $\lambda_1 = -48.9792$, $\lambda_2 = -1.02084$, los dos valores son negativos, por lo tanto, la matriz A si representa un sistema estable.

4.6.2. Sistema mecánico 2

Un Bond Graph de un sistema mecánico dado en el capítulo dos, se ilustra en la figura 4.3.

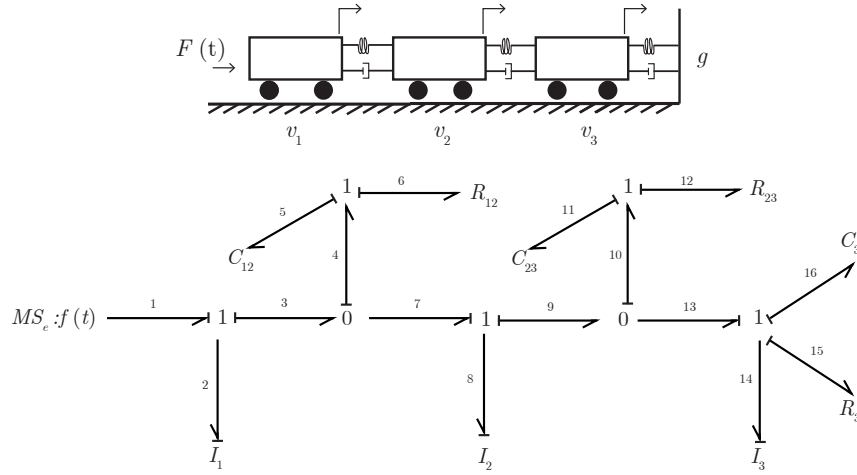


Figura 4.3: Sistema mecánico y Bond Graph del ejemplo 2.

La matriz de estructura de unión

$$\begin{pmatrix} e_2 \\ f_5 \\ e_8 \\ f_{11} \\ e_{14} \\ f_{16} \\ \hline f_6 \\ f_{12} \\ f_{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \\ e_5 \\ f_8 \\ e_{11} \\ f_{14} \\ e_{16} \\ \hline e_6 \\ e_{12} \\ e_{15} \\ e_1 \end{pmatrix}$$

$$s_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad s_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad s_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Relaciones constitutivas

Las relaciones constitutivas de los elementos que forman parte el sistema son:

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \end{pmatrix} \quad M = L = \begin{pmatrix} R_{12} & 0 & 0 \\ 0 & R_{23} & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{pmatrix} \Rightarrow s_{22} = 0.$$

Matriz de estados, A

La matriz de estados A se determina por:

$$A = (s_{11} + s_{12}Ms_{21})F = \begin{pmatrix} -\frac{R_{12}}{I_1} & -\frac{1}{C_{12}} & \frac{R_{12}}{I_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_1} & 0 & -\frac{1}{I_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{R_{12}}{I_1} & \frac{1}{C_{12}} & -\frac{R_{12}+R_{23}}{I_2} & -\frac{1}{C_{23}} & \frac{R_{23}}{I_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_2} & 0 & -\frac{1}{I_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_{23}}{I_2} & \frac{1}{C_{23}} & -\frac{R_{23}+R_3}{I_3} & -\frac{1}{C_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_3} & 0 \end{pmatrix}$$

Función de energía

La función de energía se calcula elevando al cuadrado a la matriz inversa de F .

$$P = (F^{-1})^2 = \begin{pmatrix} I_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{12}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{23}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_3^2 \end{pmatrix}$$

Ecuación de Lyapunov

La ecuación de Lyapunov se calcula de la siguiente manera:

$$A^T P + P A = \begin{pmatrix} -2I_1 R_{12} & \frac{C_{12}^2}{I_1} - \frac{I_1^2}{C_{12}} & \frac{R_{12}I_1^2}{I_2} + \frac{I_2^2 R_{12}}{I_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{C_{12}^2}{I_1} - \frac{I_1^2}{C_{12}} & 0 & \frac{I_2^2}{C_{12}} - \frac{C_{12}^2}{I_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{R_{12}I_1^2}{I_2} + \frac{I_2^2 R_{12}}{I_1} & \frac{I_2^2}{C_{12}} - \frac{C_{12}^2}{I_2} & -2I_2(R_{12} + R_{23}) & \frac{C_{23}^2}{I_2} - \frac{I_2^2}{C_{23}} & \frac{R_{23}I_2^2}{I_3} + \frac{I_3^2 R_{23}}{I_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_{23}^2}{I_2} - \frac{I_2^2}{C_{23}} & 0 & \frac{I_3^2}{C_{23}} - \frac{C_{23}^2}{I_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_{23}I_2^2}{I_3} + \frac{I_3^2 R_{23}}{I_2} & \frac{I_3^2}{C_{23}} - \frac{C_{23}^2}{I_3} & -2I_3(R_{23} + R_3) & \frac{C_3^2}{I_3} - \frac{I_3^2}{C_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_3^2}{I_3} - \frac{I_3^2}{C_3} & 0 \end{pmatrix}$$

¿La matriz A representa un sistema estable?

Para saber si la matriz A es matriz de estabilidad o matriz de Hurwitz, hacemos uso de la definición 4.1.1. Recordamos los valores para los elementos del circuito dados en la simulación, $I_1 = 0.3Ns^2/m$, $I_2 = 0.3Ns^2/m$, $I_3 = 0.3Ns^2/m$, $C_{12} = 0.1m/N$, $C_{23} = 0.1m/N$,

$C_3 = 0.2m/N$, $R_{12} = 8Ns/m$, $R_{23} = 9Ns/m$, $R_3 = 10Ns/m$, sustituyendo en la matriz A , tenemos:

$$\begin{pmatrix} -26.6667 & -10 & 26.6667 & 0 & 0 & 0 \\ 3.33333 & 0 & 3.33333 & 0 & 0 & 0 \\ 26.6667 & 10 & -56.6667 & -10 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 3.33333 & 0 & -3.33333 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 10 & -63.3333 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.33333 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico se obtiene de $\det(\lambda I - A) = 0$, es $\lambda^6 + 146.667\lambda^5 + 5261.11\lambda^4 + 32833.3\lambda^3 + 77963\lambda^2 + 68518.5\lambda + 18518.5$ y sus valores propios son $\lambda_1 = -94.6616$, $\lambda_2 = -44.8634$, $\lambda_3 = -2.83569 + 0.983835i$, $\lambda_4 = -2.83569 - 0.983835i$, $\lambda_5 = -0.972624$, $\lambda_6 = -0.497641$, la parte real de los valores propios son negativos, por lo tanto, la matriz A si representa un sistema estable.

4.6.3. Sistema mecánico 3

Otro ejemplo de un sistema mecánico y su correspondiente Bond Graph dado en el capítulo dos, se ilustra en la figura 4.4.

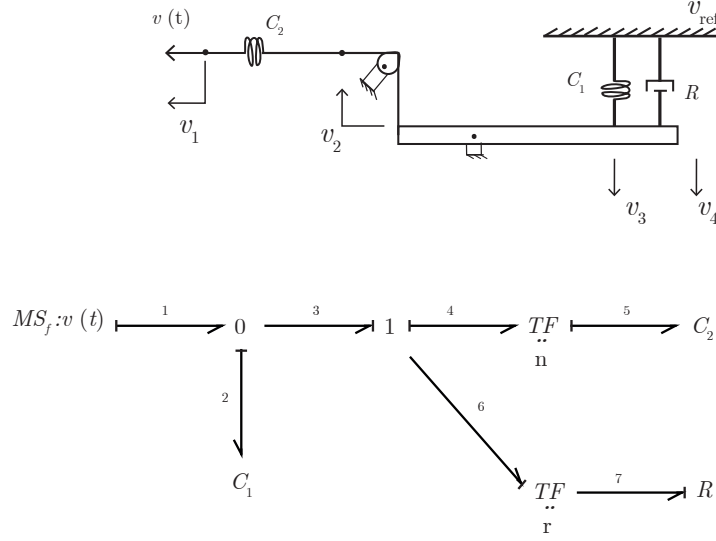


Figura 4.4: Sistema mecánico y Bond Graph del ejemplo 3.

La matriz de estructura de unión

$$\begin{pmatrix} f_2 \\ f_5 \\ e_7 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & 0 & -\frac{1}{r} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{n}{r} & 0 \\ \hline \frac{1}{r} & -\frac{n}{r} & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} e_2 \\ e_5 \\ f_7 \\ e_1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} s_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & s_{12} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} \\ \frac{n}{r} \end{pmatrix} \\ s_{21} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & -\frac{n}{r} \end{pmatrix} & s_{22} = 0. \end{matrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{pmatrix} \quad M = L = \frac{1}{R}$$

Matriz de estados, A

La matriz de estados A se determina por:

$$A = (s_{11} + s_{12}Ms_{21})F = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1r^2R} & \frac{n}{C_2r^2R} \\ \frac{n}{C_1r^2R} & -\frac{n^2}{C_2r^2R} \end{pmatrix}$$

Función de energía

La función de energía se calcula elevando al cuadrado a la matriz inversa de F .

$$P = (F^{-1})^2 = \begin{pmatrix} C_1^2 & 0 \\ 0 & C_2^2 \end{pmatrix}$$

Ecuación de Lyapunov

La ecuación de Lyapunov se calcula de la siguiente manera:

$$A^T P + P A = \begin{pmatrix} -\frac{2C_1}{r^2 R} & \frac{nC_1^2}{C_2 r^2 R} + \frac{C_2^2 n}{r^2 R C_1} \\ \frac{nC_1^2}{C_2 r^2 R} + \frac{C_2^2 n}{r^2 R C_1} & -\frac{2C_2 n^2}{r^2 R} \end{pmatrix}$$

¿La matriz A representa un sistema estable?

Para saber si la matriz A es matriz de estabilidad o matriz de Hurwitz, hacemos uso de la definición 4.1.1. Recordamos los valores para los elementos del circuito dados en la simulación, $V_1 = 0.5N$, $C_1 = 0.2m/N$, $C_2 = 0.1m/N$, $R = 9Ns/m$, $n = 10$ y $r = 10$, sustituyendo en la matriz A , tenemos:

$$\begin{pmatrix} -0.00555556 & 0.111111 \\ 0.0555556 & -1.11111 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico se obtiene de $\det(\lambda I - A) = 0$, es $\lambda^2 + 1.11667\lambda$ y sus valores propios son $\lambda_1 = -1.11667$, $\lambda_2 = 0$, el cual sólo uno de los dos valores propios es negativo, por lo tanto, debemos verificar si la matriz Q es definida positiva.

$$Q = \begin{pmatrix} 0.000444444 & -0.005 \\ -0.005 & 0.0222222 \end{pmatrix}$$

La matriz Q no es definida positiva, por lo tanto la matriz A no representa un sistema estable.

Cambiando el valor en $n = 0.1$, se tiene la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -0.00555556 & 0.00111111 \\ 0.000555556 & -0.000111111 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico es $\lambda^2 + 0.00566667\lambda + 1.53595 \times 10^{-22}$ y sus valores propios son $\lambda_1 = -0.00566667$, $\lambda_2 = -2.71051 \times 10^{-20}$, los dos valores propios son negativos, por lo tanto, la matriz A si representa un sistema estable.

4.7. Ejemplos con bond activo y bond adaptado

4.7.1. Ejemplo 1

Se presenta un circuito eléctrico con fuentes dependientes, del capítulo tres, el cual se muestra en la figura 4.5.

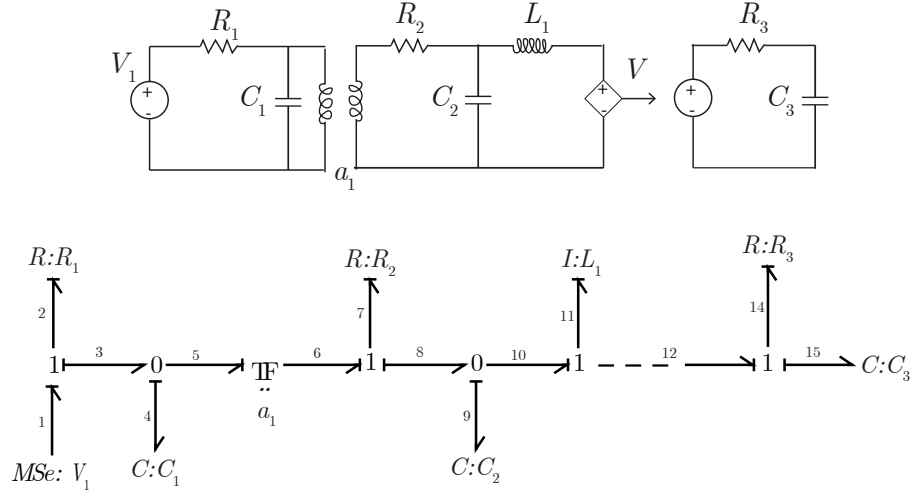


Figura 4.5: Circuito eléctrico con fuentes dependientes y Bond Graph.

La matriz de estructura de unión

La matriz de estructura de unión del sistema es

$$\begin{pmatrix} f_4 \\ f_9 \\ e_{11} \\ f_{15} \\ e_2 \\ e_7 \\ f_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\xi & 0 & 0 & -\xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{a_1} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_4 \\ e_9 \\ f_{11} \\ e_{15} \\ f_2 \\ f_7 \\ e_{14} \\ e_1 \end{pmatrix}.$$

Se identifican las submatrices, las cuales son:

$$s_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\xi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad s_{12} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{a_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad s_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \end{pmatrix} \quad M = L = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{pmatrix}$$

Matriz de estados, A

La matriz de estados A se determina por:

$$A = (s_{11} + s_{12}Ms_{21})F = \begin{pmatrix} -\frac{R_2a_1^2+R_1}{a_1^2C_1R_1R_2} & \frac{1}{a_1C_2R_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_1C_1R_2} & -\frac{1}{C_2R_2} & -\frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & -\frac{\xi}{L_1R_3} & -\frac{\xi}{C_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & 0 \end{pmatrix}$$

Función de energía

La función de energía se calcula elevando al cuadrado a la matriz inversa de F .

$$P = (F^{-1})^2 = \begin{pmatrix} C_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_3^2 \end{pmatrix}$$

Ecuación de Lyapunov

La ecuación de Lyapunov se calcula de la siguiente manera:

$$A^TP + PA = \begin{pmatrix} -\frac{2C_1(R_2a_1^2+R_1)}{a_1^2R_1R_2} & \frac{C_1^2}{a_1C_2R_2} + \frac{C_2^2}{a_1R_2C_1} & 0 & 0 \\ \frac{C_1^2}{a_1C_2R_2} + \frac{C_2^2}{a_1R_2C_1} & -\frac{2C_2}{R_2} & \frac{L_1^2}{C_2} - \frac{C_2^2}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{L_1^2}{C_2} - \frac{C_2^2}{L_1} & -\frac{2\xi L_1}{R_3} & \frac{C_3^2}{L_1} - \frac{\xi L_1^2}{C_3} \\ 0 & 0 & \frac{C_3^2}{L_1} - \frac{\xi L_1^2}{C_3} & 0 \end{pmatrix}$$

¿La matriz A representa un sistema estable?

Para saber si la matriz A es matriz de estabilidad o matriz de Hurwitz, hacemos uso de la definición 4.1.1. Recordamos los valores para los elementos del circuito dados en la simulación, $R_1 = 10\Omega$, $C_1 = 0.1f$, $a_1 = 9$, $R_2 = 10\Omega$, $C_2 = 0.1f$, $L_1 = 0.1H$, $R_3 = 10\Omega$, $C_3 = 0.1f$, sustituyendo en la matriz A , tenemos:

1. Con el valor de $\xi = 0$,

$$\begin{pmatrix} -1.01235 & 0.111111 & 0 & 0 \\ 0.111111 & -1 & -10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico se obtiene de $\det(\lambda I - A) = 0$, es $\lambda^4 + 2.01235\lambda^3 + 101.\lambda^2 + 101.235\lambda$ y sus valores propios son $\lambda_1 = -0.499938 + 9.98688i$, $\lambda_2 = -0.499938 - 9.98688i$, $\lambda_3 = -1.01247$, $\lambda_4 = 0$, la parte real de los valores propios son negativos, por lo tanto, la matriz A si representa un sistema estable.

2. Con el valor de $\xi = 1$,

$$\begin{pmatrix} -1.01235 & 0.111111 & 0 & 0 \\ 0.111111 & -1 & -10 & 0 \\ 0 & 10 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico se obtiene de $\det(\lambda I - A) = 0$, es $\lambda^4 + 3.01235\lambda^3 + 203.012\lambda^2 + 303.469\lambda + 100$ y sus valores propios son $\lambda_1 = -0.750297 + 14.1309i$, $\lambda_2 = -0.750297 - 14.1309i$, $\lambda_3 = -1.02413$, $\lambda_4 = -0.487625$, la parte real de los valores propios son negativos, por lo tanto, la matriz A si representa un sistema estable.

4.7.2. Ejemplo 2

Se presenta el Bond Graph del motor de corriente directa con retroalimentación de estado, del capítulo tres, se muestra en 4.6.

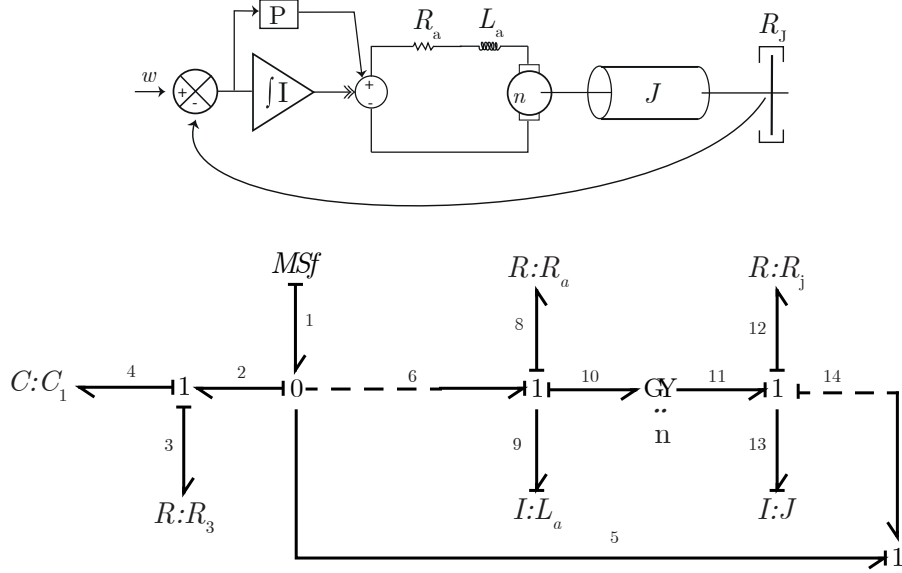


Figura 4.6: Sistema físico del motor de CD y Bond Graph.

La matriz de estructura de unión

$$\begin{pmatrix} f_4 \\ e_9 \\ e_{13} \\ f_3 \\ f_8 \\ f_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\xi & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -n & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \xi & n & 0 & \xi & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\xi & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_4 \\ f_9 \\ f_{13} \\ e_3 \\ e_8 \\ e_{12} \\ f_1 \end{pmatrix}$$

$$s_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\xi \\ 1 & 0 & -n \\ \xi & n & 0 \end{pmatrix} \quad s_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \xi & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad s_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -\xi & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_J} \end{pmatrix} \quad M = L = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_J} \end{pmatrix}$$

Matriz de estados, A

La matriz de estados A se determina por:

$$A = (s_{11} + s_{12}Ms_{21})F = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L_a} & -\frac{\xi}{L_J} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_3+\xi R_a}{L_a R_3 R_a} & -\frac{nR_3+1}{L_J R_3} \\ \frac{\xi}{C_1} & \frac{nR_3-\xi^2}{L_a R_3} & -\frac{R_3+\xi R_J}{L_J R_3 R_J} \end{pmatrix}$$

Función de energía

La función de energía se calcula elevando al cuadrado a la matriz inversa de F .

$$P = (F^{-1})^2 = \begin{pmatrix} C_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & L_a^2 & 0 \\ 0 & 0 & L_J^2 \end{pmatrix}$$

Ecuación de Lyapunov

La ecuación de Lyapunov se calcula de la siguiente manera:

$$A^T P + P A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{L_a^2}{C_1} - \frac{C_1^2}{L_a} & \frac{\xi L_J^2}{C_1} - \frac{C_1^2 \xi}{L_J} \\ \frac{L_a^2}{C_1} - \frac{C_1^2}{L_a} & -\frac{2L_a(R_3+\xi R_a)}{R_3 R_a} & \frac{L_J^2(nR_3-\xi^2)}{L_a R_3} - \frac{L_a^2(nR_3+1)}{L_J R_3} \\ \frac{\xi L_J^2}{C_1} - \frac{C_1^2 \xi}{L_J} & \frac{L_J^2(nR_3-\xi^2)}{L_a R_3} - \frac{L_a^2(nR_3+1)}{L_J R_3} & -\frac{2L_J(R_3+\xi R_J)}{R_3 R_J} \end{pmatrix}$$

¿La matriz A representa un sistema estable?

Para saber si la matriz A es matriz de estabilidad o matriz de Hurwitz, hacemos uso de la definición 4.1.1. Recordamos los valores para los elementos del circuito dados en la simulación, $R_3 = 2Ns/m$, $C_1 = 0.001m/N$, $R_a = 10\Omega$, $L_a = 0.1H$, $R_J = 10radNsm$, $L_J = 0.5Kg/m^2$, $n = 10$, sustituyendo en la matriz, tenemos:

1. Con el valor de $\xi = 0$,

$$\begin{pmatrix} 0 & -10 & 0 \\ 1000 & -1 & -21 \\ 0 & 100 & -0.2 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico se obtiene de $\det(\lambda I - A) = 0$, es $-\lambda^3 - 1.2\lambda^2 - 12100.2\lambda - 2000$ y sus valores propios son $\lambda_1 = -0.517356 + 109.999i$, $\lambda_2 = -0.517356 - 109.999i$, $\lambda_3 = -0.165289$, la parte real de los valores propios son negativos, por lo tanto, la matriz A si representa un sistema estable.

2. Con el valor de $\xi = 1$,

$$\begin{pmatrix} 0 & -10 & -2 \\ 1000 & -6 & -21 \\ 1000 & 95 & -1.2 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico se obtiene de $\det(\lambda I - A) = 0$, es $-\lambda^3 - 7.2\lambda^2 - 14002.2\lambda - 4000$ y sus valores propios son $\lambda_1 = -3.45715 + 118.272i$, $\lambda_2 = -3.45715 - 118.272i$, $\lambda_3 = -0.28571$, la parte real de los valores propios son negativos, por lo tanto, la matriz A si representa un sistema estable.

4.7.3. Ejemplo 3

Se presenta el Bond Graph del motor de corriente directa con retroalimentación de estado, del capítulo tres, pero con cambio de orientación en el bond número 5, se muestra en 4.7.

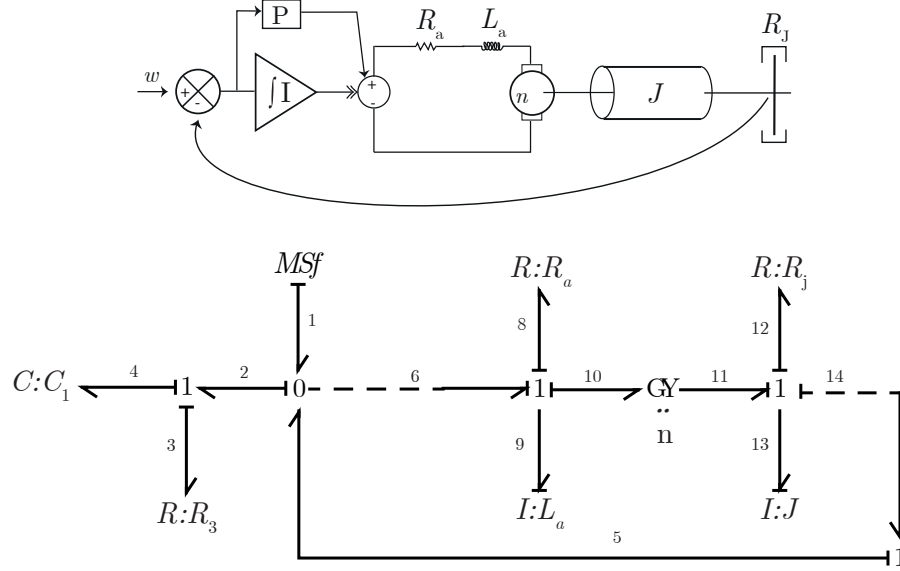


Figura 4.7: Sistema físico del motor de CD y Bond Graph modificado.

La matriz de estructura de unión

$$\begin{pmatrix} f_4 \\ e_9 \\ e_{13} \\ f_3 \\ f_8 \\ f_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \xi & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -n & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\xi & n & 0 & -\xi & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\xi & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_4 \\ f_9 \\ f_{13} \\ e_3 \\ e_8 \\ e_{12} \\ f_1 \end{pmatrix}$$

$$s_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \xi \\ 1 & 0 & -n \\ -\xi & n & 0 \end{pmatrix} \quad s_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\xi & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad s_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -\xi & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_J} \end{pmatrix} \quad M = L = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_J} \end{pmatrix}$$

Matriz de estados, A

La matriz de estados A se determina por:

$$A = (s_{11} + s_{12}Ms_{21})F = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L_a} & \frac{\xi}{L_J} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_3+\xi R_a}{L_a R_3 R_a} & -\frac{nR_3-1}{L_J R_3} \\ -\frac{\xi}{C_1} & \frac{nR_3+\xi^2}{L_a R_3} & -\frac{R_3+\xi R_J}{L_J R_3 R_J} \end{pmatrix}$$

Función de energía

La función de energía se calcula elevando al cuadrado a la matriz inversa de F .

$$P = (F^{-1})^2 = \begin{pmatrix} C_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & L_a^2 & 0 \\ 0 & 0 & L_J^2 \end{pmatrix}$$

Ecuación de Lyapunov

La ecuación de Lyapunov se calcula de la siguiente manera:

$$A^T P + P A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{L_a^2}{C_1} - \frac{C_1^2}{L_a} & -\frac{\xi L_J^2}{C_1} + \frac{C_1^2 \xi}{L_J} \\ \frac{L_a^2}{C_1} - \frac{C_1^2}{L_a} & -\frac{2L_a(R_3+\xi R_a)}{R_3 R_a} & \frac{L_J^2(nR_3+\xi^2)}{L_a R_3} - \frac{L_a^2(nR_3-1)}{L_J R_3} \\ \frac{\xi L_J^2}{C_1} - \frac{C_1^2 \xi}{L_J} & \frac{L_J^2(nR_3-\xi^2)}{L_a R_3} - \frac{L_a^2(nR_3+1)}{L_J R_3} & -\frac{2L_J(R_3+\xi R_J)}{R_3 R_J} \end{pmatrix}$$

¿La matriz A representa un sistema estable?

Para saber si la matriz A es matriz de estabilidad o matriz de Hurwitz, hacemos uso de la definición 4.1.1. Recordamos los valores para los elementos del circuito dados en la simulación, $R_3 = 2Ns/m$, $C_1 = 0.001m/N$, $R_a = 10\Omega$, $L_a = 0.1H$, $R_J = 10radNsm$, $L_J = 0.5Kg/m^2$, $n = 10$, sustituyendo en la matriz, tenemos:

1. Con el valor de $\xi = 0$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 9.9 & 0 \\ 9.9 & -0.02 & 9999.9 \\ 0 & 9999.9 & -2 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico se obtiene de $\det(\lambda I - A) = 0$, es $-\lambda^3 - 2.02\lambda^2 + 9.9 \times 10^7\lambda + 200$ y sus valores propios son $\lambda_1 = -10001$, $\lambda_2 = 9998.9$, $\lambda_3 = -2 \times 10^{-6}$, la parte real de los valores propios, sólo dos son negativos, por lo tanto, la matriz A no representa un sistema estable.

2. Con el valor de $\xi = 1$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 9.9 & -100000 \\ 9.9 & -0.12 & 10500 \\ -100000 & 10500 & -12 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico se obtiene de $\det(\lambda I - A) = 0$, es $-\lambda^3 - 12.12\lambda^2 + 1.01 \times 10^{10}\lambda - 1.98 \times 10^{10}$ y sus valores propios son $\lambda_1 = -100557$, $\lambda_2 = 100543$, $\lambda_3 = 1.9584$, la parte real de los valores propios sólo uno es negativo, por lo tanto, la matriz A no representa un sistema estable.

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

5.1. Conclusiones

En esta tesis se realizó el análisis energético por balance energético de sistemas lineales e invariantes en el tiempo modelados en Bond Graph. Se analizaron las propiedades de las **submatrices** de la matriz de estructura de unión con el fin de verificar si el sistema es conservativo de potencia, en otras palabras se verificó el principio de conservación de la energía se aplicó a sistemas tanto eléctricos como mecánicos en los cuales se satisfacen las propiedades.

Para sistemas físicos en los cuales las propiedades no se satisfacen por la presencia de los **bond activos** se recurrió al uso de un bond diseñado como un **bond adaptado** que utiliza en casos de falla y se puede considerar en la transición de un bond activo a un bond de potencia. Una de aportaciones en esta tesis ya mencionada es la propuesta de un **balance de potencia** de sistemas físicos modelados en Bond Graph, el cual se satisfagan o no la propiedades de las submatrices, el balance de potencia se cumple, además de que se hace en forma matricial y general; de los cuales se proponen el Lema 3.3.1 y Corolario 3.3.2, que consisten en calcular la matriz e y la matriz f , y realizar el producto matricial de e y f . Finalmente, se propone la determinación de las condiciones de estabilidad de un sistema lineal e invariante en el tiempo modelados en Bond Graph; esta propuesta consiste en la obtención de las funciones de energía del sistema y posteriormente indicar si es o no estable con las características dadas en el Lema 4.4.1 y el Corolario 4.4.2.

5.2. Recomendaciones

Una vez concluida la tesis, se consideran trabajos a futuro sobre análisis energético y sistemas modelados en Bond Graph, se enumeran algunos de ellos.

1. Una posibilidad es indicar donde se encuentran las submatrices que satisfacen las propiedades para que un sistema sea conservativo de potencia dentro de las dos matrices

propuestas.

2. Otro trabajo a futuro es aplicar los resultados de esta tesis a sistemas no lineales.
3. Una investigación a sistemas con un nuevo enfoque como una aeronave en vuelo, un misil en su trayectoria, un barco o submarino en marcha en el mar, un vehículo en movimiento en tierra, etc, con la intención verificar el balance de potencia.
4. Finalmente, otra investigación más ambiciosa sería la de obtener un Bond Graph donde contenga y se pueda obtener directamente la función de energía y la función de Lyapunov.

Apéndice A

Publicaciones

En el presente apéndice se incluyen artículos realizados durante la estancia en maestría y derivados del presente trabajo, etc.

1. Academia Journals Morelia 2019
2. Academia Journals Celaya 2018

BALANCE ENERGÉTICO DE SISTEMAS MODELADOS EN BOND GRAPH

Blanca de Jesús Gómez Orozco¹, Gilberto González Ávalos²

Resumen— En el presente artículo se propone analizar el balance energético de un sistema modelado en bond graph. La plataforma de modelado de bond graph determina un modelo gráfico del sistema, a partir del cual se pueden obtener, la realización en espacio de estado, funciones de transferencia, estado estacionario, controlabilidad, observabilidad y estabilidad estructural, así como el diseño de controladores. Así mismo, mediante bond graph se puede modelar sistemas que contengan diversos dominios de energía (eléctrico, mecánico, magnético, hidráulico y térmico). El balance de potencia propuesto tiene la ventaja de aun cuando existe el bond activo que se utiliza como señal ya sea para incrementar la esfuerzo, flujo o la potencia, el balance de potencia se cumple y el sistema es conservativo de potencia, lo cual no sucedía con los otros balances mencionados por la razón de que no se cumplían las propiedades de sistema conservativo de potencia.

Palabras clave—Bond graph, modelado, balance, esfuerzo y flujo.

Introducción

Una de las más importantes y fundamentales leyes de la naturaleza es el principio de conservación de la energía. Este expresa que, durante una interacción de elementos, componentes, la energía puede cambiar de una forma a otra, pero su cantidad total permanece constante. El cambio en el contenido energético de cualquier sistema es igual a la diferencia entre la entrada y la salida de energía, y el balance de ésta se expresa como $E_{entrada} - E_{salida} = \Delta E$. Esta relación es más conocida como balance de energía y es aplicable a cualquier tipo de sistema que experimenta cualquier clase de proceso.

Uno de los balances de potencia tradicionales en el modelado de Bond Graph consiste en analizar elemento a elemento la potencia P_i , esta potencia es el producto de dos variables, un esfuerzo e_i y un flujo f_i . La potencia total del sistema es la suma del producto de cada elemento. Otro balance de potencia analiza las propiedades de las submatrices de la matriz de estructura de unión S . Este estudio pretende comprobar que un sistema en bond graph es un sistema conservativo de potencia con la matriz de estructura de unión S . Para esto se analiza las propiedades de las submatrices de la matriz de estructura de unión, las cuales cumplen con el principio de conservación de energía si se satisfacen las siguientes propiedades: (1) s_{11} y s_{22} son antisimétricas y (2) $s_{12} = -s_{21}^T$. Como resultado se obtiene otra forma de calcular el balance de potencia en un Sistema modelado en bond graph. Este consiste en calcular el producto de las dos variables de potencia, esfuerzo y flujo en forma general y en forma matricial. Cuando el producto de las matrices es igual a cero $P = e \cdot f = 0$, se puede afirmar que el sistema es conservativo de potencia.

Modelado de Sistemas en Bond Graph

Antecedentes

El modelado de Bond Graph fue creada por Henry Paynter en los años 1959 y 1961, él incorpora la noción de puerto de energía en su metodología posteriormente se formaliza por Karnopp y Rosenberg en los años 1983 y 1990, (Karnopp & Rosenberg, 1975). Los promotores destacados del modelado de Bond Graph fueron J. Thoma en el año 1975 y Breedveld en el año 1984, (Karnopp, 1990).

El modelado en Bond Graph es una herramienta gráfica para el modelado de sistemas de ingeniería, especialmente cuando existen diferentes dominios físicos involucrados. Bond Graph permite construir modelos de sistemas físicos como eléctricos, mecánicos, hidráulicos, etc., utilizando solamente un pequeño conjunto de elementos

A continuación, se da una introducción de los elementos y conceptos básicos del modelado en Bond Graph.

¹Blanca de Jesús Gómez Orozco, Licenciada en Ciencias Físico Matemáticas es estudiante de Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica en la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán. blajego@gmail.com (**autor correspondiente**)

² Gilberto González Ávalos, Doctorado en Ingeniería eléctrica, es profesor de Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica en la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán. gilmichga@yahoo.com.mx

Conceptos básicos

Bond Graph es una representación gráfica de un sistema dinámico físico. El componente fundamental en el sistema describe cómo fluye la potencia a través de puertos de energía, llamado bond de energía. Un bond es dibujado como un borde con una media flecha como se puede apreciar en la Figura 1.

$$A \xrightarrow{\text{Bond}} B$$

Figura 1. Bond.

Las variables que describen la unión de dos puertos son llamadas variables de potencia, las cuales son esfuerzo $e(t)$ y flujo $f(t)$. Estas variables también son llamadas variables de bond generalizadas debido a que pueden ser utilizadas en todos los dominios de energía (ver Cuadro 1).

Variable	Sistema mecánico		Sistema eléctrico	Sistema hidráulico
	Traslación	Rotación		
Esfuerzo $e(t)$	Fuerza F	Torque τ	Voltaje e	Presión P
Flujo $f(t)$	Velocidad V	Velocidad angular ω	Corriente i	Caudal Q

Cuadro 1. Variables generalizadas para sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos.

La causalidad es una propiedad muy importante en esta técnica, nos da la relación causa-efecto. Las relaciones de causa-efecto para esfuerzos y flujos son representadas en direcciones opuestas. Una marca en un bond, llamada trazo causal (barra vertical al inicio o fin de un bond) indica como esfuerzo $e(t)$ y un flujo $f(t)$ son determinados causalmente en un bond (ver Figura 2).

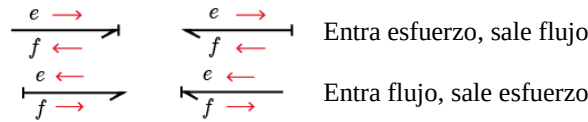


Figura 2. Causalidad en esfuerzo y flujo.

Los elementos que conforman un Bond Graph se pueden clasificar en cinco grupos o campos de acuerdo a su poder o las propiedades de la energía (ver Figura 3):

- El campo de la disipación de R , en el que se pierde la energía del sistema.
- El campo de almacenamiento de C e I , que son la energía conservativa.
- El grupo general de conexiones de estructura 0, 1, TF y GY , que conserva la energía.
- El campo fuente o de origen s_e y s_f .
- El campo D_e que es el detector.

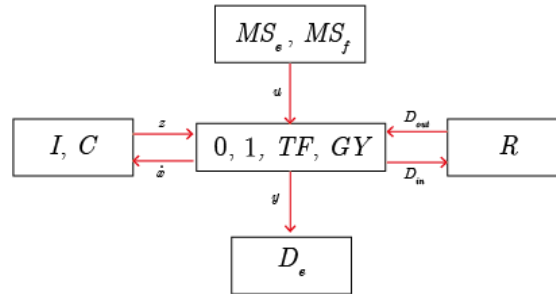


Figura 3. Diagrama de la estructura de unión.

Al vínculo que conecta los campos a la estructura de cruce con los campos fuente, campos de disipación y campos de almacenamiento se llaman bonds externos y los bonds que se unen a un elemento de la estructura de unión 0, 1, TF y GY , son llamados bonds internos. Los vectores claves asociados al diagrama de la Figura 1, son:

- x es el vector de estado (p en I , q en C).
- $\dot{x}$ es el vector de derivadas de x en función del tiempo.
- z es el vector de coenergía (f en I , e en C).
- u es el vector de la fuente de salidas (e en s_e , f en s_f).
- D_{in} es el vector de entrada al campo R .
- D_{out} es el vector de salida al campo R .
- y es el vector de salida.

Las relaciones constitutivas de los campos de almacenamiento y disipación son $z = Fx$ y $D_{out} = L D_{in}$. La relación que tienen los vectores dentro de la estructura de unión, llamada matriz de estructura de unión es (Sueur & Dauphin-Tanguy, 1991):

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ Din \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ Dout \\ u \end{pmatrix} \quad (1)$$

Los elementos que conforman la matriz toman valores dentro del conjunto $\{0, \pm 1, \pm n, \pm r\}$ donde n y r son los módulos de transformadores y giradores, s_{11} y s_{22} son antisimétricas y $s_{12} = -s_{21}^T$. La dinámica del sistema en ecuación de estado está dada por:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (2)$$

Donde cada matriz, se relaciona con las submatrices de la matriz de estructura de unión por:

$$\begin{aligned} A &= (s_{11} + s_{12}M s_{21})F & B &= (s_{13} + s_{12}M s_{21}) \\ C &= (s_{31} + s_{32}M s_{21})F & D &= (s_{33} + s_{32}M s_{21}) \end{aligned} \quad (3)$$

La matriz M tiene la siguiente forma $M = L(I - s_{22}L)^{-1}$, que describe los lazos algebraicos del sistema.

Balance Energético en Bond Graph

Balance de potencia por medio de las propiedades de la matriz de estructura de unión

Uno de los balances de potencia tradicionales es mediante la matriz de estructura de unión, de la ecuación (1) se debe cumplir las siguientes propiedades:

Balance de potencia por medio de las propiedades de la matriz de estructura de unión

El balance de potencia por medio de las propiedades de la matriz de estructura de unión, a partir de la ecuación (1), el balance consiste en verificar las siguientes propiedades:

1. s_{11} y s_{22} son antisimétricas.
2. $s_{12} = -s_{21}^T$.

Para la demostración ver (Rosenberg & Karnopp, 1983).

Si se cumplen las dos propiedades, se satisface el principio de conservación de energía y se dice que el sistema es conservativo de potencia.

Balance de potencia propuesto

La matriz de estructura de unión para un sistema modelado en Bond Graph está definida por la ecuación (1) la cual se puede reducir a

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ Din \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ Dout \\ u \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Ya que la variable de salida no tiene implicaciones en el balance energético. Denotamos a la matriz $\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \end{pmatrix} = S$.

Lema 1. Sea S la matriz de estructura de unión (4), entonces existen dos matrices e y f , tal que $S = e + f$.

Prueba: Para la matriz e , sólo toma en cuenta los esfuerzos de entrada con valores de $\{\pm 1, \pm n, \pm r\}$, la matriz f toma en cuenta sólo los flujos de entrada con valores de $\{\pm 1, \pm n, \pm r\}$, es decir para la matriz e si el renglón i -ésimo en presencia de flujo en el vector de entrada, este será un renglón de ceros, para la matriz f será renglón cero en presencia de esfuerzo en el vector de entrada.

La suma de matrices es elemento a elemento, por lo tanto, para probar que $S = e + f$, notemos que para el renglón de la matriz e de ceros, para la matriz f ese renglón tendrá valores de $\{0, \pm 1, \pm n, \pm r\}$ y para el renglón de la matriz e con valores de $\{0, \pm 1, \pm n, \pm r\}$, ese mismo renglón de la matriz f será de ceros.

Entonces para cada uno de los renglones de la matriz S , el renglón i -ésimo es la suma de renglón i -ésimo de la matriz e con el renglón i -ésimo de la matriz f , finalmente se reduce a que la suma es el renglón i -ésimo de la matriz e o es el renglón i -ésimo de la matriz f , ya que uno de los dos es renglón cero.

Por lo tanto, la matriz S se puede escribir como suma de las matrices $e + f$.

Corolario 2. Sean e y f matrices como en Lema 1, entonces $e^T \cdot f = f^T \cdot e = 0$.

Prueba. La potencia se obtiene como el producto de las dos matrices e y f . Por ser complementarias las matrices tenemos que el producto punto es cero. $P = e \cdot f = 0$.

Ejemplos ilustrativos

Esta sección describe un par de ejemplos donde se aplican los dos balances de potencia y una simulación para de manera gráfica ver los que ocurre en el sistema, aplicamos primeramente el balance que consiste en verificar las

propiedades de las submatrices de la matriz de estructura de unión, después aplicamos el balance de potencia propuesto, para al final hacer la simulación mediante el programa 20-sim.

Ejemplo mecánico

Se presenta el Bond Graph de un sistema mecánico, el cual tiene un resorte y un amortiguador conectados en paralelo, entonces la fuerza actúa en los dos elementos es la suma de la fuerza del amortiguador y la fuerza del resorte. En la Figura 4 se muestra el diagrama del sistema, el bond graph, vectores clave y la matriz de estructura de unión en la parte derecha.

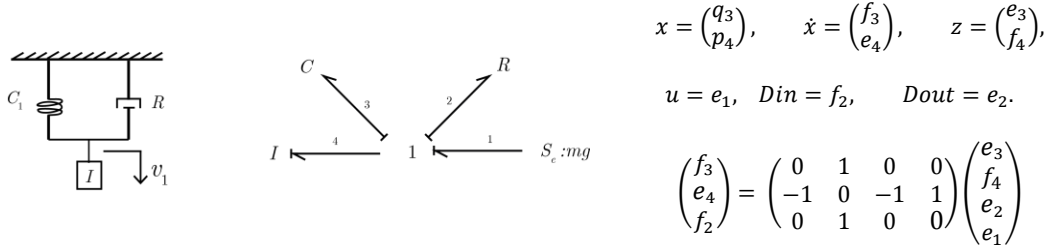


Figura 4. Sistema, bond graph, vectores clave y matriz de estructura de unión de sistema mecánico.

- *Balance de potencia por medio de las propiedades de la matriz de estructura de unión.*
Comprobar que las submatrices s_{11} y s_{22} son antisimétricas y $s_{12} = -s_{21}^T$.

$$s_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{22} = 0, \quad s_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Efectivamente s_{11} es antisimétrica, la submatriz s_{12} es la transpuesta negativa de s_{21} , por lo tanto, se cumple con el principio de conservación de energía.

- *Balance de potencia propuesto.*

Se realiza la separación de matrices de la matriz S y por lo tanto tenemos:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obteniendo el producto propuesto en el Corolario 2.

$$f^T \cdot e = e^T f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

El producto del esfuerzo con el flujo da como resultado cero, entonces el bond graph es conservativo y el sistema satisface el balance de potencia.

- *Balance de potencia por simulación*

Haciendo uso del programa de simulación con los siguientes valores numéricos del sistema: $V_1 = 0.5 \text{ m/s}$, $R = 10 \text{ N s/m}$, $C = 0.1 \text{ N/m}$, $I = 0.2 \text{ N s}^2/\text{m}$, el tiempo de respuesta del sistema se muestra en la Figura 5.

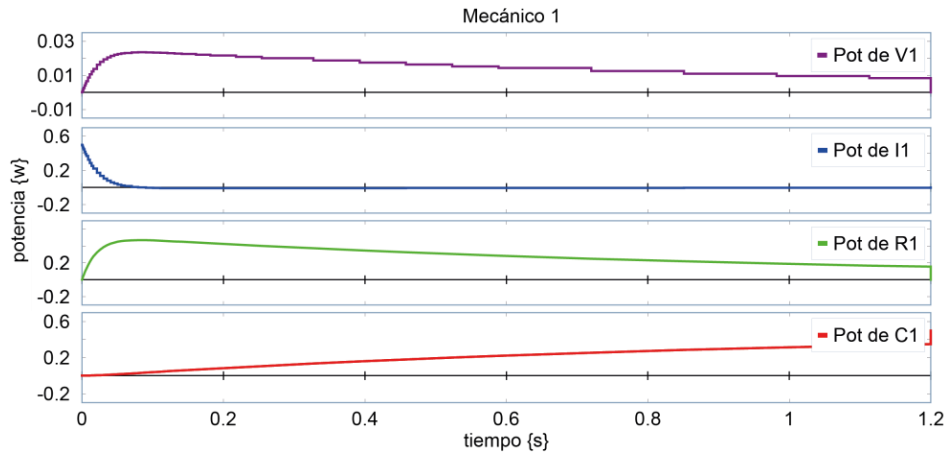


Figura 5. Gráfica de la simulación de potencia del ejemplo mecánico.

La figura 5 muestra la dinámica del sistema, las potencias de cada elemento por separado, además de la potencia de la fuente y de la bond activo, en el cuadro 2, se muestran el producto de las potencias de cada uno de los elementos, en cual se puede verificar de una forma más sencilla el balance con los elementos de entra y el resto de los elementos.

	V_1	R	C	I
Flujo $f(t)$	0.5	-4.15E-07	2.03E-05	0.49998007
Esfuerzo $e(t)$	2.03E-06	2.03E-06	2.03E-06	2.03E-06
Potencia	1.02E-06	-8.45E-13	4.14E-11	1.02E-06

Cuadro 2. Valor numérico de las potencias elemento a elemento.

Efectivamente se da el balance de potencia: $\sum Pot_{fuentes} = \sum Pot_{resto de elementos}$
 $Pot V_1 = Pot R + Pot C + Pot I = 1.01744E - 06$

Ejemplo mecánico con bond activo

Esta sección describe un ejemplo donde se aplican los dos balances de potencia, aplicamos primeramente el balance que consiste en verificar las propiedades de las submatrices de la matriz de estructura de unión, después aplicamos el balance de potencia propuesto.

Para probar el balance de potencia con bond activos, se presenta el Bond Graph de un amplificador electrónico, el cual tiene la función de incrementar la intensidad de corriente, la tensión o la potencia de la señal que se le aplica a su entrada; obteniéndose la señal aumentada a la salida. En la Figura 6 se muestra el bond graph, vectores clave y la matriz de estructura de unión en la parte derecha.

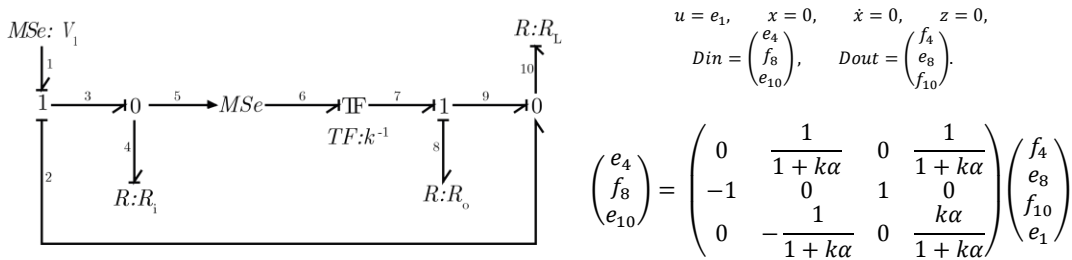


Figura 6. Bond graph, vectores clave y matriz de estructura de unión de un amplificador.

- *Balance de potencia por medio de las propiedades de la matriz de estructura de unión.*
Comprobar que las submatrices s_{11} y s_{22} son antisimétricas y $s_{12} = -s_{21}^T$.

$$s_{11} = 0, \quad s_{22} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1+k\alpha} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{1+k\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Efectivamente s_{11} es antisimétrica, la submatriz s_{12} es la traspuesta negativa de s_{21} , pero la matriz s_{22} no es antisimétrica, por lo tanto, no cumple con el principio de conservación de energía.

- *Balance de potencia propuesto.*

Se realiza la separación de matrices de la matriz S y por lo tanto tenemos:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1+k\alpha} & 0 & \frac{1}{1+k\alpha} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1+k\alpha} & 0 & \frac{k\alpha}{1+k\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1+k\alpha} & 0 & \frac{1}{1+k\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1+k\alpha} & 0 & \frac{k\alpha}{1+k\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obteniendo el producto propuesto en el Corolario 2.

$$f^T \cdot e = e^T f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1+k\alpha} & 0 & -\frac{1}{1+k\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k\alpha \\ 1+k\alpha & 0 & 1+k\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

El producto del esfuerzo con el flujo da como resultado cero, entonces el bond graph es conservativo y el sistema satisface el balance de potencia.

- *Balance de potencia por simulación*

Haciendo uso del programa de simulación con los siguientes valores numéricos del sistema: $V_1 = 0.1v$, $R_i = 10\Omega$, $R_o = 9\Omega$, $R_L = 8\Omega$ y $k = 1$, el tiempo de respuesta del sistema se muestra en la Figura 7.

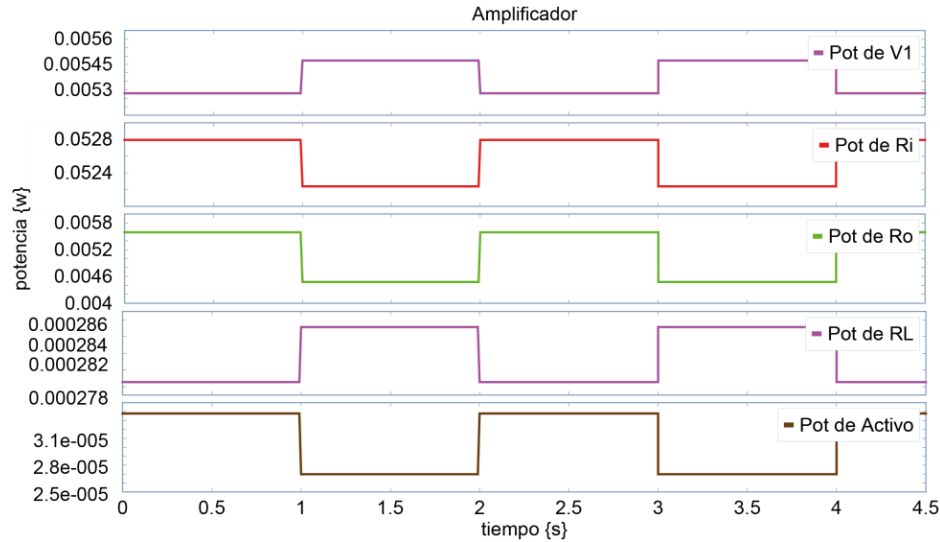


Figura 7. Gráfica de la simulación de potencia del amplificador.

La figura 7 muestra la dinámica del sistema, las potencias de cada elemento por separado, además de la potencia de la fuente y de la bond activo, en el cuadro 3, se muestran el producto de las potencias de cada uno de los elementos, en cual se puede verificar de una forma más sencilla el balance con los elementos de entra y el resto de los elementos.

	V_1	R_i	R_o	R_L	Activo
Flujo $f(t)$	0.005279503	5.28E-02	5.59E-03	4.72E-02	5.28E-02
Esfuerzo $e(t)$	1.00E-01	5.28E-03	6.21E-04	5.90E-03	6.21E-04
Potencia	5.28E-04	2.79E-04	3.47E-06	2.79E-04	3.28E-05

Cuadro 3. Valor numérico de las potencias elemento a elemento.

Efectivamente se da el balance de potencia: $\sum Pot_{fuentes} = \sum Pot_{resto de elementos}$
 $Pot V_1 + Pot activo = Pot R_i + Pot R_o + Pot R_L = 5.61E - 04$.

Comentarios Finales

Resumen de resultados

En este trabajo de investigación se estudió el balance energético de sistemas modelados en bond graph, un nuevo balance fue propuesto. El método propuesto parte de la matriz de estructura de unión al igual que el balance con el que ya se trabajaba, con la diferencia que aplica en la existencia de bond activos.

Conclusiones

Los resultados de los ejemplos demuestran la ventaja de este balance propuesto ya que en presencia de los bond activos el balance de potencia que consiste en verificar las propiedades de las submatrices de la matriz de estructura de unión para que el sistema sea conservativo de potencia, no se satisfacen. Fue quizás inesperado el haber encontrado que el balance de potencia se cumpla para bond activos.

Referencias

- González Avalos, G. (2012). *Analysis of loading effect of systems in a bond graph approach with application to a synchronous machine*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering 226.
- Karnopp, D. (1990). *Bond graph models for electrochemical energy storage: electrical, chemical and thermal effects*. Journal of the Franklin Institute 327.
- Karnopp, D., & Rosenberg, R. (1975). *Systems dynamics: a unified approach*. John Wiley & Sons.
- Rosenberg, R., & Karnopp, D. (1983). *Introduction to physical system dynamics*. McGraw-Hill, Inc.
- Sueur, C., & Dauphin-Tanguy, G. (1991). *Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems* (Vol. 328). Journal of the franklin institute.



Universidad
Nova Spania



CONGRESO

INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN ACADEMIA JOURNALS MORELIA 2019

CERTIFICADO

otorgado a

Blanca de Jesús Gómez Orozco
Gilberto González Avalos

por su artículo intitulado

Balance Energético de Sistemas Modelados en Bond Graph

(Artículo No. MRL0484)

el cual fue presentado en el congreso desarrollado del 15 al 17 de mayo de 2019
en Morelia, Michoacán, México y publicado (1) en el portal de Internet *AcademiaJournals.com*,
con ISSN 1946-5351, Vol. 11, #2, 2019 online e indización en la base de datos Fuente Académica
Plus de EBSCOhost y (2) en el libro electrónico online intitulado
Investigación en la Educación Superior: Morelia 2019 con ISBN 978-1-939982-48-3.

Rafael Moras, Ph.D. P.E.
Editor, Academia Journals
Profesor de Ing. Industrial, St. Mary's University

Comparación de programas del método de los elementos finitos en análisis estático

M.C. Miguel Galindo Villagómez¹, LCFM Blanca de Jesús Gómez Orozco², Ing. Arianna Bastos Martínez³, L.S.C. Joel Carreño Urrutia⁴

Resumen: Se presenta los resultados comparativos de la aplicación del método de elementos finitos de un análisis estático entre dos barras fijas con diferentes geometrías y diferentes programas; Tomando un software desarrollado con un programa libre y uno comercial, SimScale y Comsol respectivamente. Dicha investigación se realizó en la Maestría en Ciencias de la Ingeniería Mecánica en donde se diseñaron las geometrías y se sometieron a mismas condiciones de análisis por el método antes descrito.

Palabras clave: Método de elementos finitos, análisis estático.

Comparison of finite element method programs in static analysis

Abstract: It presents the comparative results of the application of the finite element method of a static analysis between two fixed bars with different geometries and different software; Taking software developed with free software and one commercial, SimScale and Comsol. This research was carried out in the Master of Science in Mechanical Engineering where the geometries were designed and subjected to the same analysis conditions by the method described above.

Keywords: Finite element, Static Analysis, Structural Analysis, Simulation, CAD Software.

Introducción

El método de los elementos finitos (MEF) es un método numérico general para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales muy complejas utilizado en diversos problemas de ingeniería y física.

El MEF está pensado para ser usado en computadoras y permite resolver ecuaciones diferenciales asociadas a un problema físico sobre geometrías complicadas. Es utilizado en el diseño y mejora de productos y aplicaciones industriales, así como en la simulación de sistemas físicos y biológicos complejos. La variedad de problemas a los que puede aplicarse ha crecido enormemente, siendo el requisito básico que las ecuaciones constitutivas y ecuaciones de evolución temporal del problema sean conocidas de antemano.

En este trabajo se realiza la comparación de los resultados obtenidos de un análisis estático entre dos barras fijas con diferentes geometrías utilizando el método de elemento finito. Una vez obtenidos estos resultados también se realiza una comparación basándonos en la aplicación de un programa libre (SimScale) y un programa comercial (Comsol).

Primeramente, se hace una comparación entre ambos programas, en la cual se analizan diferentes aspectos buscando una caracterización general de los mismos.

Posteriormente se desarrolla un caso de estudio (estructural) en diferentes geometrías comparando los resultados arrojados por cada uno de los programas para cada geometría, y luego se realiza la comparación de resultados obtenidos de ambos programas.

Finalmente se concluye acerca del desempeño y exactitud de ambos programas para aplicaciones de análisis por elementos finitos.

Desarrollo

Método de los elementos finitos (MEF)

El método de los elementos finitos (MEF) ha adquirido con el uso de los ordenadores una gran importancia en la solución de problemas de ingeniería, física, etc., ya que permite resolver casos que hasta hace poco tiempo eran

¹ El M.C. Miguel Galindo Villagómez, es Profesor de la facultad de Ingeniería Mecánica (UMSMH), Morelia, Michoacán, México, miguel.villagomez.galindo@gmail.com (autor correspondiente)

² LCFM Blanca de Jesús Gómez Orozco, es alumna de la maestría en ciencias de Ingeniería Mecánica de la facultad de Ingeniería Mecánica (UMSMH), Morelia, Michoacán, México, blajego@gmail.com

³ Ing. Arianna Bastos Martínez, es alumna de la maestría en ciencias de Ingeniería Mecánica de la facultad de Ingeniería Mecánica (UMSMH), Morelia, Michoacán, México, ariannabm21@gmail.com

⁴ L.S.C. Joel Carreño Urrutia, es alumno de la maestría en ciencias de Ingeniería Mecánica de la facultad de Ingeniería Mecánica (UMSMH), Morelia, Michoacán, México, joelcarrenourrutia@gmail.com

prácticamente imposibles de resolver por métodos matemáticos tradicionales. Esta circunstancia obligaba a realizar prototipos, ensayarlos e ir realizando mejoras de forma iterativa, lo que traía consigo un elevado coste tanto económico como en tiempo de desarrollo.

El MEF permite obtener una solución numérica aproximada sobre un cuerpo, estructura o dominio (medio continuo) sobre el que están definidas ciertas ecuaciones diferenciales en forma débil o integral que caracterizan el comportamiento físico del problema dividiéndolo en un número elevado de subdominios no-intersectantes entre sí denominados “elementos finitos”.

El conjunto de elementos finitos forma una partición del dominio también denominada discretización. Dentro de cada elemento se distinguen una serie de puntos representativos llamados “nodos”. Dos nodos son adyacentes si pertenecen al mismo elemento finito; además, un nodo sobre la frontera de un elemento finito puede pertenecer a varios elementos. El conjunto de nodos considerando sus relaciones de adyacencia se llama “mallá”.

Típicamente el análisis de los elementos finitos se programa computacionalmente para calcular el campo de desplazamientos y, posteriormente, a través de relaciones cinemáticas y constitutivas las deformaciones y tensiones respectivamente, cuando se trata de un problema de mecánica de sólidos deformables o más generalmente un problema de mecánica de medios continuos. El método de los elementos finitos es muy usado debido a su generalidad y a la facilidad de introducir dominios de cálculo complejos (en dos o tres dimensiones). Además el método es fácilmente adaptable a problemas de transmisión de calor, de mecánica de fluidos para calcular campos de velocidades y presiones (mecánica de fluidos computacional, CFD) o de campo electromagnético. Dada la imposibilidad práctica de encontrar la solución analítica de estos problemas, con frecuencia en la práctica ingenieril los métodos numéricos y, en particular, los elementos finitos, se convierten en la única alternativa práctica de cálculo.

Una importante propiedad del método es la convergencia; si se consideran particiones de elementos finitos sucesivamente más finas, la solución numérica calculada converge rápidamente hacia la solución exacta del sistema de ecuaciones.

Breve Historia del MEF

Aunque el nombre del MEF se ha establecido recientemente, el concepto se ha usado desde hace varios siglos. El empleo de métodos de discretizado espacial y temporal y la aproximación numérica para encontrar soluciones a problemas de ingeniería o física es conocido desde antiguo. Para encontrar vestigios de este tipo de cálculos podríamos remontarnos a la época de la construcción de las pirámides egipcias. Los egipcios empleaban métodos de discretizado para determinar el volumen de las pirámides.

Arquímedes (287-212 a.C.) empleaba el mismo método para calcular el volumen de todo tipo de sólidos o la superficie de áreas. En oriente también aparecen métodos de aproximación para realizar cálculos. Así el matemático chino Lui Hui (300 d.C.) empleaba un polígono regular de 3072 lados para calcular longitudes de circunferencias con lo que conseguía una aproximación al número Pi de 3.1416.

El MEF fue al principio desarrollado en 1943 por Richard Courant, quien utilizó el método de Ritz de análisis numérico y minimización de las variables de cálculo para obtener soluciones aproximadas a un sistema de vibración. Poco después, un documento publicado en 1956 por M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, y L. J. Topp estableció una definición más amplia del análisis numérico. El documento se centró en “la rigidez y deformación de estructuras complejas”. Con la llegada de los primeros ordenadores instaura el cálculo matricial de estructuras. Este parte de la discretización de la estructura en elementos lineales tipo barra de los que se conoce su rigidez frente a los desplazamientos de sus nodos. Se plantea entonces un sistema de ecuaciones resultado de aplicar las ecuaciones de equilibrio a los nodos de la estructura. Este sistema de ecuaciones se esquematiza de la siguiente manera:

$$f = K * u$$

Donde las incógnitas son los desplazamientos en los nodos (vector u) que se hallan a partir de las fuerzas en los nodos (vector f) y de la rigidez de las barras (matriz de rigidez K). Conocidos dichos desplazamientos es posible determinar los esfuerzos en las barras. La solución obtenida es exacta.

Procedimiento de trabajo del MEF

Desde el punto de vista de la programación algorítmica modular las tareas necesarias para llevar a cabo un cálculo mediante un programa MEF se dividen en:

- Pre-proceso, que consiste en la definición de geometría, generación de la mallá, las condiciones de contorno y asignación de propiedades a los materiales y otras propiedades. En ocasiones existen operaciones cosméticas de regularización de la mallá y pre-condicionamiento para garantizar una mejor aproximación o una mejor convergencia del cálculo.
- Proceso, el resultado del pre-proceso, en un problema simple no-dependiente del tiempo, permite generar un conjunto de N -ecuaciones y N -incógnitas, que puede ser resuelto con cualquier algoritmo para la resolución de

sistemas de ecuaciones lineales. Cuando el problema a tratar es un problema no lineal o un problema dependiente del tiempo a veces el cálculo consiste en una sucesión finita de sistemas de N-ecuaciones y N-incógnitas que deben resolverse uno a continuación de otro, y cuya entrada depende del resultado del paso anterior.

- Post-proceso, el cálculo proporciona valores de cierto conjunto de funciones en los nodos de la malla que define la discretización, en el postproceso se calculan magnitudes derivadas de los valores obtenidos para los nodos, y en ocasiones se aplican operaciones de suavizado, interpolación e incluso determinación de errores de aproximación.

Tipos de análisis ingenieriles

Algunos tipos de análisis ingenieriles comunes que usan el método de los elementos finitos son:

- Análisis estático se emplea cuando la estructura está sometida a acciones estáticas, es decir, no dependientes del tiempo.
- Análisis vibracional es usado para analizar la estructura sometido a vibraciones aleatorias, choques e impactos. Cada uno de estas acciones puede actuar en la frecuencia natural de la estructura y causar resonancia y el consecuente fallo.
- Análisis de fatiga ayuda a los diseñadores a predecir la vida del material o de la estructura, prediciendo el efecto de los ciclos de carga sobre el espécimen. Este análisis puede mostrar las áreas donde es más probable que se presente una grieta. El análisis por fatiga puede también predecir la tolerancia al fallo del material.

Análisis estático

El objetivo principal del análisis de resistencia estática de las estructuras es la evaluación de un estado de estrés de una estructura sometida a fuerzas constante en el tiempo (estáticos). Esta evaluación del estado de estrés se realiza generalmente con el fin de sondear las características de diseño adoptadas contra el criterio de resistencia. Los diversos tipos de problemas estáticos resueltos usando MEF en este campo incluyen análisis elástico, elastoplástico y viscoplástico de viga, marco, armadura, placa, armazón y estructura sólida. Por lo general, el análisis estático incluye análisis de tensión, deformación y desplazamiento bajo carga estática para problemas de uno, dos o tres dimensiones.

COMSOL Multiphysics

COMSOL Multiphysics (antes conocido como FEMLAB) es un paquete de programas de análisis y resolución por elementos finitos para varias aplicaciones físicas y de ingeniería, especialmente fenómenos acoplados, o multifísicos. Es un programa ingeniería asistida por computadora (Computer-aided engineering, CAE) para modelado, análisis y simulación de fenómenos físicos 3D en ingeniería, como problemas con fluidos, estructurales, térmicos, electromecánicos entre otros, que permite definir la geometría 3D especificando el mallado, cargas y la visualización previa del análisis para luego ejecutar el postproceso y ver reportes finales.

Tiene interfases con diferentes programas de diseño asistido por computadora (CAD) y MATLAB que proporcionan una amplia variedad de posibilidades de programación, pre-procesado y post-procesado. Los paquetes son multiplataforma (Windows, Mac, Linux, Unix.).

SimScale

SimScale es un servicio de programa alojado en la web, creado por la empresa SimScale (United States) que ofrece herramientas especializadas de CAE para diseñadores y empresas, grandes o pequeñas. Soporta numerosos tipos de simulación incluyendo la mecánica de sólidos, dinámica de fluidos (CFD), la termodinámica y más. Es una plataforma, que es totalmente accesible a través de un navegador web estándar, y aprovecha el poder de la tecnología de la nube y la simulación de vanguardia para construir no sólo un programa de simulación, sino un ecosistema en el que la funcionalidad de simulación, el contenido y las personas se reúnen en un solo lugar, pues además del sofisticado entorno gráfico de transformación y modelado, también brinda acceso a una comunidad pública más amplia. Simula, comparte y colabora dentro de una base de usuarios de más de 70 000 profesionales de ingeniería, aprovechando las plantillas públicas existentes para llevar a cabo nuevos proyectos de simulación.

Permite realizar una serie de simulaciones en modelos CAD, lo que proporciona una gran cantidad de comentarios gráficos y visualizaciones dentro del navegador web.

Pruebas y resultados

En este trabajo se analizó el análisis estático de un par de geometrías realizadas en Onshape y exportadas a SimScale y a Comsol. Las geometrías evaluadas por análisis de elemento finito cubren las siguientes características:

Característica de la geometría	Placa con rombo	Placa con Elipse
Ancho (in)	10	10
Alto (in)	5	5
Dimensión figura central(in)	2	Eje mayor 2, eje menor 4
Posición	Centrada	Centrada
Material	Aluminio	Aluminio
Comportamiento	Lineal Elástico	Lineal Elástico
Dependencia direccional	Isotrópico	Isotrópico
Modulo de Young psi	10150000	10150000
Radio de Poission	0.34	0.34
Densidad lbm/pulgada3	0.09754	0.09754

Característica de la malla	SimScale		Comsol	
	Placa con rombo	Placa con Elipse	Placa con rombo	Placa con Elipse
Tipo de Mallado	Tetraédrico Dominante	Tetraédrico Dominante	Physics - Controlled Mesh	Physics - Controlled Mesh
Finesa de la malla	4 – Fine	4 – Fine	3 –Finer	3 – Finer
Número de Núcleos	16	16	8	8

Características de la simulación	SimScale		Comsol	
	Placa con rombo	Placa con rombo	Placa con elipse	Placa con elipse
Pseudo tiempo de pasada	Paso simple	Paso simple	Paso simple	Paso simple
Número de Cores	16	16	8	8
Máximo tiempo de corrida	3600s	3600s	-	-

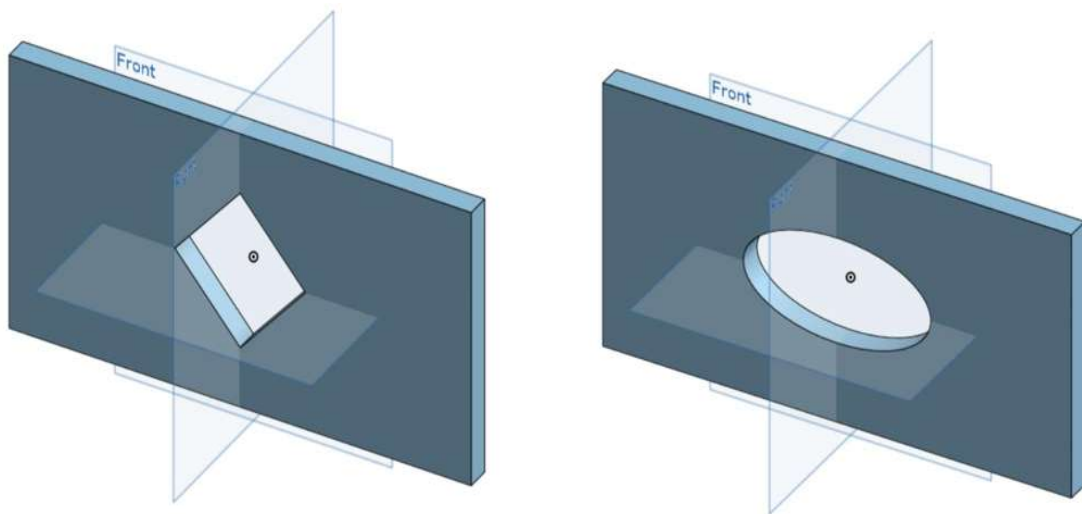


Figura 1.- Geometrías. a) Barra con Rombo b) Barra con Elipse

Resultados en SimScale

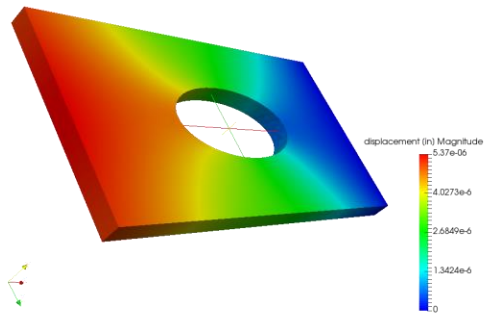


Figura 2.- Desplazamiento Barra con Elipse

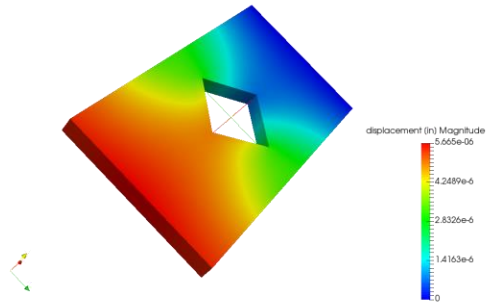


Figura 3.- Desplazamiento Barra con Rombo

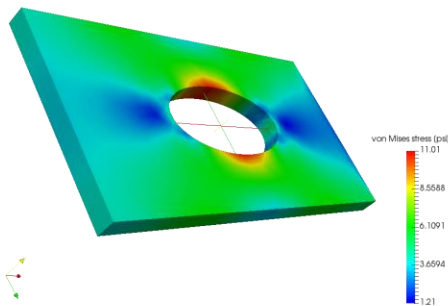


Figura 4.- Esfuerzo Barra con Elipse

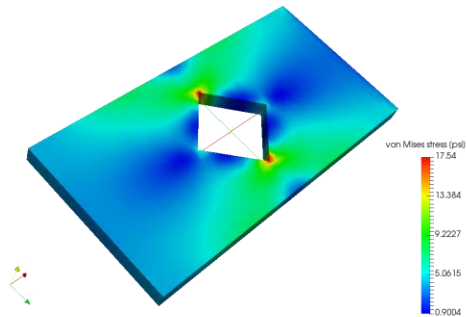


Figura 5.- Esfuerzo Barra con Rombo

Resultados en Comsol

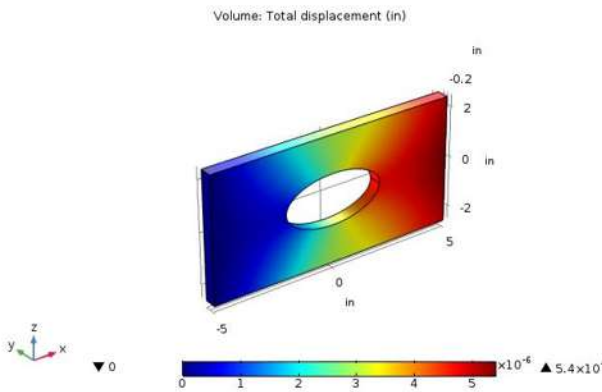


Figura 2.- Desplazamiento Barra con Elipse

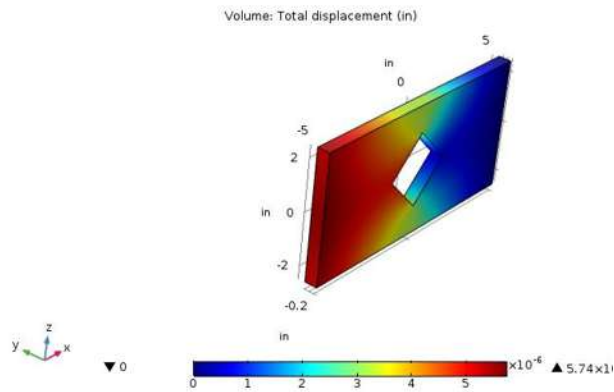


Figura 3.- Desplazamiento Barra con Rombo

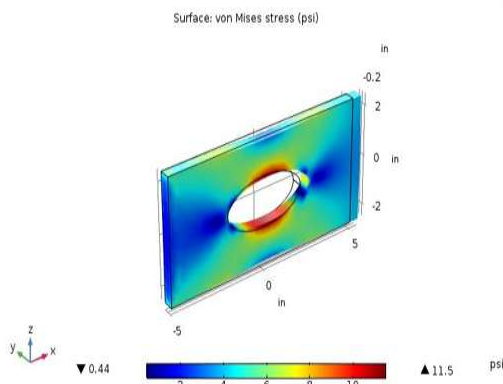


Figura 4.- Esfuerzo Barra con Elipse

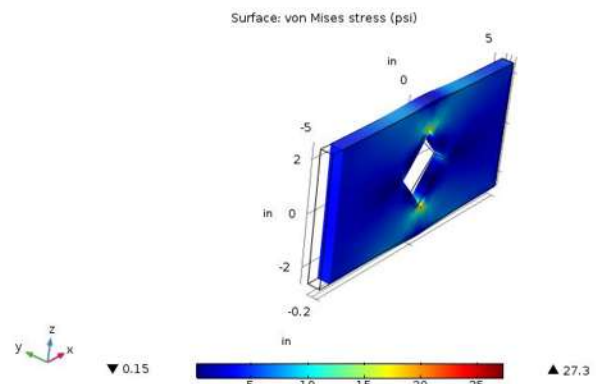


Figura 5.- Esfuerzo Barra con Rombo

Comparativa de simulaciones entre programas

Tipo de análisis	Ovalo		Rombo	
	Comsol	SimScale	Comsol	SimScale
Esfuerzo (psi)	11.05	11.01	27.3	17.54
Deformación (in)	5.4×10^{-6}	5.37×10^{-6}	5.74×10^{-6}	5.665×10^{-6}

Conclusiones

Después de estudiar y comparar los resultados obtenidos del procesamiento realizados en los programas SimScale y Comsol, se pueden plantear las siguientes conclusiones:

- Se observan resultados similares tanto de un programa como de otro, tomando en cuenta el análisis de deformación para las dos geometrías estudiadas. No siendo así en el caso del análisis de esfuerzos que mostro una gran diferencia para la geometría de la barra con perforación en forma de rombo de un programa con respecto a otro.
- Para obtener los resultados esperados es importante tener en cuenta el tipo de malla a utilizar en un programa en particular; así como también a la hora de comparar ambos programas, ya que las mismas son relativas para cada programa.
- Es importante tener en cuenta al utilizar estos programas sus características en cuanto al tipo de almacenamiento que cada uno emplea, ya que en el caso de SimScale este trabaja desde una nube, por lo que no consume espacio de almacenamiento en tu PC, ni requiere de un equipo computacional potente, pero si de una conexión a internet. No siendo así para el caso del programa COMSOL que, si requiere de un equipo computacional potente, pero no es necesaria una conexión a internet.
- En el caso del programa COMSOL, este a diferencia del SimScale donde la formulación de los elementos esta establecida de antemano, permiten una gran flexibilidad en el estudio de problemas de diferentes naturalezas, pues admiten la formulación de modelos no tradicionales a partir de la definición de la ecuación diferencial parcial asociada al fenómeno que se desea estudiar. Característica que tiene un fuerte impacto en la metodología de trabajo y en la adaptación al manejo del programa.

Referencias

- Galeano, C. (Noviembre de 2007). HERRAMIENTAS DE SOFTWARE CON LICENCIA PÚBLICA GENERAL PARA EL MODELADO POR ELEMENTOS FINITOS. *Dyna*(153), 313-324. Recuperado el Julio de 2018
- Neupane, D. (2014). *COMPARISON OF SOME FEM CODES IN STATIC ANALYSIS*. Bachelor's thesis, University of Applied Sciences, Mechanical Engineering and Production Technology, Riihimäki.

Bibliografía

- [1] BALIÑO, J. L. Galerkin finite element method for incompressible thermofluid flows framed within the bond graph theory. *Simulation Modelling Practice and Theory* 17, 1 (2009), 35 – 49. Bond Graph Modelling.
- [2] BEAMAN, J., AND BREEDVELD, P. Physical modeling with eulerian frames and bond graphs. *Journal of dynamic systems, measurement, and control* 110, 2 (1988), 182–188.
- [3] BORUTZKY, W. Bond graph modelling and simulation of multidisciplinary systems-an introduction. *Simulation Modelling Practice and Theory* 17, 1 (2009), 3 – 21. Bond Graph Modelling.
- [4] BOUAMAMA, B. O. Bond graph approach as analysis tool in thermofluid model library conception. *Journal of the Franklin Institute* 340, 1 (2003), 1–23.
- [5] BREEDVELD, P. C. Thermodynamic bond graphs and the problem of thermal inertance. *Journal of the Franklin Institute* 314, 1 (1982), 15 – 40.
- [6] BROWN, F. T. Convection bonds and bond graphs. *Journal of the Franklin Institute* 328, 5-6 (1991), 871–886.
- [7] BUECHE, F. J., HECHT, E., CASTELLANOS, J. H. P., AND LUNA, R. H. H. *Física general*. No. 968-422-795-7. 04-A1 LU. CG-08. McGraw-Hill, 1991.
- [8] BUISSON, J., CORMERAIS, H., AND RICHARD, P.-Y. Analysis of the bond graph model of hybrid physical systems with ideal switches. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering* 216, 1 (2002), 47–63.
- [9] CASTRO, R. D., CELLIER, F. E., AND FISCHLIN, A. Sustainability analysis of complex dynamic systems using embodied energy flows: The eco-bond graphs modeling and simulation framework. *Journal of Computational Science* 10 (2015), 108 – 125.
- [10] ÇENGEL, Y. A., BOLES, M. A., PEDRAZA, C. R. C., CHÁVEZ, N. A. M., AND CÁRDENAS, J. L. *Termodinámica*, vol. 10. McGraw-Hill São Paulo, 2006.

- [11] CHANG, H.-D., CHU, C.-C., AND CAULEY, G. Direct stability analysis of electric power systems using energy functions: theory, applications, and perspective. *Proceedings of the IEEE* 83, 11 (1995), 1497–1529.
- [12] CORMERAIS, H., AND BUISSON, J. Energetic balance in hybrid systems using bond graph. In *IMACS World congress* (2000).
- [13] COUENNE, F., JALLUT, C., LEFÈVRE, L., GORREC, Y. L., AND MASCHKE, B. Basis for bond-graph modeling in chemical engineering. *Computer Aided Chemical Engineering, 17th European Symposium on Computer Aided Process Engineering* 24 (2007), 69 – 74.
- [14] COUENNE, F., JALLUT, C., MASCHKE, B., BREEDVELD, P. C., AND TAYAKOUT, M. Bond graph modelling for chemical reactors. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems* 12, 2-3 (2006), 159–174.
- [15] COUENNE, F., JALLUT, C., MASCHKE, B., TAYAKOUT, M., AND BREEDVELD, P. Bond graph for dynamic modelling in chemical engineering. *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification* 47, 11 (2008), 1994–2003.
- [16] CUIJPERS, P. J., BROENINK, J. F., AND MOSTERMAN, P. J. Constitutive hybrid processes: a process-algebraic semantics for hybrid bond graphs. *Simulation* 84, 7 (2008), 339–358.
- [17] DAAFOUZ, J., RIEDINGER, P., AND IUNG, C. Stability analysis and control synthesis for switched systems: a switched lyapunov function approach. *IEEE transactions on automatic control* 47, 11 (2002), 1883–1887.
- [18] DAUPHIN-TANGUY, G., AND GRUJIĆ, L. T. Asymptotic stability via energy and power: Part ii: Bond-graph bridging for non linear systems. *IFAC Proceedings Volumes* 28, 8 (1995), 91–96.
- [19] DAUPHIN-TANGUY, G., AND GRUYITCH, L. T. Strict monotonous asymptotic energetic stability part ii: Bond graph resolutions. *IFAC Proceedings Volumes* 32, 2 (1999), 2012–2017.
- [20] FAHRENTHOLD, E., AND WARGO, J. Vector and tensor based bond graphs for physical systems modeling. *Journal of the Franklin Institute* 328, 5 (1991), 833 – 853.
- [21] FAHRENTHOLD, E. P., AND WARGO, J. Vector bond graph analysis of mechanical systems. *Journal of dynamic systems, measurement, and control* 113, 3 (1991), 344–353.
- [22] GONZÁLEZ, G. Analysis of loading effect of systems in a bond graph approach with application to a synchronous machine. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering* 226, 2 (2012), 243–255.

-
- [23] GRUJIĆ, L. T., AND DAUPHIN-TANGUY, G. Asymptotic stability via energy and power. part i: new lyapunov methodology for nonlinear systems. *IFAC Proceedings Volumes* 28, 8 (1995), 497–502.
 - [24] GRUYITCH, L. T., AND DAUPHIN-TANGUY, G. Strict monotonous asymptotic energetic stability. part i: Theory. *IFAC Proceedings Volumes* 32, 2 (1999), 2006–2011.
 - [25] HENY, C., SIMANCA, D., AND DELGADO, M. Pseudo-bond graph model and simulation of a continuous stirred tank reactor. *Journal of the Franklin Institute* 337, 1 (2000), 21–42.
 - [26] HILL, D., AND MOYLAN, P. The stability of nonlinear dissipative systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 21, 5 (1976), 708–711.
 - [27] HIRSCH M. W., S. S. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. 1974.
 - [28] JUNCO, S. Stability analysis and stabilizing control synthesis via lyapunov’s second method directly on bond graphs of nonlinear systems. 2065–2069.
 - [29] KARNOPP, D. Bond graph models for electrochemical energy storage: electrical, chemical and thermal effects. *Journal of the Franklin Institute* 327, 6 (1990), 983–992.
 - [30] KARNOPP, D., MARGOLIS, D. L., AND ROSENBERG, R. C. *System Dynamics: A Unified Approach, 2nd*. 1990.
 - [31] KHALIL, H. *Nonlinear Systems, Third Edition*. 2002.
 - [32] KWATNY, H., BAHAR, L., AND PASRIJA, A. Energy-like lyapunov functions for power system stability analysis. *IEEE transactions on circuits and systems* 32, 11 (1985), 1140–1149.
 - [33] MESHAM, R., KHADE, S., WAGH, S., SINGH, N., AND STANKOVIĆ, A. Bond graph approach for port-controlled hamiltonian modeling for sst. *Electric Power Systems Research* 158 (2018), 105–114.
 - [34] MOSTERMAN, P. J. HYBRISIM a modelling and simulation environment for hybrid bond graphs. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering* 216, 1 (2002), 35–46.
 - [35] PERILLO-MARCONE, A., MULLER-KARGER, C. M., MONTBRUN-DI FILIPPO, J., AND DELGADO, M. Modelaje de sistemas mecanicos de multiples cuerpos utilizando el metodo de bond graphs. *Mecanica Computacional* 18, 877–884.
 - [36] PERKO, L. *Differential equations and dynamical systems*, vol. 7. Springer Science & Business Media, 2013.

- [37] ROSENBERG, R. R., AND KARNOPP, D. C. *Introduction to physical system dynamics*. McGraw-Hill, Inc., 1983.
- [38] SHOURESHI, R., AND MCCLAUGHLIN, K. M. Analytical and experimental investigation of flow-reversible heat exchangers using temperature-entropy bond graphs. *Journal of dynamic systems, measurement, and control* 106, 2 (1984), 170–175.
- [39] VASILYEV, A., ANDREWS, J., JACKSON, L. M., DUNNETT, S. J., AND DAVIES, B. Component-based modelling of pem fuel cells with bond graphs. *international journal of hydrogen energy* 42, 49 (2017), 29406–29421.
- [40] YU, B., AND VAN PAASSEN, A. Simulink and bond graph modeling of an air-conditioned room. *Simulation modelling Practice and theory* 12, 1 (2004), 61–76.