UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN:

DISEÑO MECÁNICO Y CIENCIAS DE LOS MATERIALES EN INGENIERÍA

TESIS

DISEÑO ÓPTIMO DE LOS ÁLABES DE UNA TURBINA DE VIENTO EN FUNCIÓN DE SU FRECUENCIA NATURAL.

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA MECÁNICA

PRESENTA:
MIRIAM VÁZQUEZ PADILLA

ASESOR:
Dr. ERASMO CADENAS CALDERÓN

COASESOR:
LUIS BEJAR GÓMEZ

Noviembre de 2020, Morelia, Michoacán.

AGRADECIMIENTOS.

A **DIOS**, por obtener un logro más en mi vida.

A la **UMSNH** por toda la ayuda que me fue brindada en el desarrollo de esta investigación.

A **CONACYT** por todos los recursos brindados para la investigación.

A mi Asesor, el **Dr. Erasmo Cadenas Calderón** por su ayuda y sus atenciones para conmigo.

Al **Dr. Víctor López Garza**, por su ayuda, por sus enseñanzas y conocimientos, por todo el respaldo y apoyo que me dio durante mi estancia en la maestría.

A mi **FAMILA**, por estar siempre conmigo apoyándome, y ayudándome a ser cada día mejor, los amo.

RESUMEN

El presente trabajo de investigación consiste en generar un procedimiento de optimización del diseño de una turbina de viento de eje horizontal, utilizando la teoría BEM, el método del Elemento Finito, a la norma española UNE-EN 61400-2:2013 y, también, con la ayuda de modelos matemáticos. El objetivo general es obtener un diseño factible en función de la frecuencia natural, la velocidad específica y los esfuerzos máximos.

Se aplicó la metodología de diseño tradicional, bajo algunas condiciones para el diseño, como una velocidad del viento de 12 m/s, una variación en la velocidad especifica de 8, 9 y 10. Se utilizó un perfil aerodinámico NREL S 818 que fue elegido por sus características, como un buen rendimiento en su coeficiente de sustentación y su insensibilidad a los efectos de rugosidad. El software con el que modelaron los álabes, se simularon sus frecuencias naturales y los esfuerzos principales (Von Mises), utilizando el método del elemento finito fue ANSYS R19.0.

Para el análisis se propusieron tres diseños de álabes distintos, cada uno de ellos con tres materiales diferentes seleccionados convencionalmente; Madera Dalbergia Granadillo, Fibra de Vidrio/epoxy y Fibra de Carbono), Para los materiales de Fibra de Vidrio y Fibra de Carbono los diseños de las aspas fueron huecos, esto para que fueran lo suficientemente ligeros y permitieran que el rotor arrancará lo más pronto posible, reduciendo así, los esfuerzos inerciales.

Las fuerzas consideradas para la simulación fueron calculadas y sometidas de acuerdo con la norma UNE-EN 61400-2:2013.

Los resultados de las simulaciones en base al método del elemento finito fueron corroborados por gráficas de convergencia en relación del número de elementos de la malla y el esfuerzo principal (Von Mises). Con estos datos, velocidad específica, masa del álabe y esfuerzos principales, se obtuvo una función objetivo que permitirá la optimización de los álabes.

Palabras clave: diseño óptimo, álabes, turbina eólica, elemento finito, análisis modal.

ABSTRACT

The present research work consists of generating an optimization procedure for the design of a horizontal axis wind turbine, using the BEM theory, the Finite Element method, to the Spanish standard UNE-EN 61400-2: 2013 and, also, with the help of mathematical models. The general objective is to obtain a feasible design based on the natural frequency, the specific speed and the maximum efforts.

The traditional design methodology was applied, under some design conditions, such as a wind speed of 12 m / s, a variation in the specific speed of 8, 9 and 10. An aerodynamic profile NREL S 818 was used that was chosen due to its characteristics, such as good performance in its lift coefficient and its insensitivity to roughness effects. The software with which the blades were modeled, their natural frequencies and principal stresses were simulated (Von Mises), using the finite element method was ANSYS R19.0.

For the analysis, three different blade designs were proposed, each with three different conventionally selected materials; Dalbergia Granadillo Wood, Fiberglass / epoxy and Carbon Fiber), For the Fiberglass and Carbon Fiber materials the blade designs were hollow, this so that they were light enough and allowed the rotor to start as soon as possible possible, thus reducing the inertial forces.

The forces considered for the simulation were calculated and submitted in accordance with the UNE-EN 61400-2: 2013 standard.

The results of the simulations based on the finite element method were corroborated by convergence graphs in relation to the number of elements in the mesh and the principal stress (Von Mises). With these data, specific speed, blade mass and main forces, an objective function was obtained that will allow the optimization of the blades.

Keywords: optimal design, blades, wind turbine, finite element, modal analysis.

CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS. I
A DIOS, por obtener un logro más en mi vida. I
A la UMSNH por toda la ayuda que me fue brindada en el desarrollo de esta investigación. I
A CONACYT por todos los recursos brindados para la investigación. I
A mi Asesor, el Dr. Erasmo Cadenas Calderón por su ayuda y sus atenciones para conmigo. I
RESUMEN II
ABSTRACT III
ÍNDICE DE FIGURAS VIII
ÍNDICE DE TABLAS IX
OBJETIVOS. X
Objetivo general. X
Objetivos específicos. X
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA X
JUSTIFICACIÓN XI
HIPÓTESIS XI
INTRODUCCIÓN XII
CAPITULO I "ENERGÍA EÓLICA" 1
1.1 Origen de las turbinas eólicas. 1
1.2 Potencial eólico en México. 4
1.3 Conceptos básicos. 5
1.3.1 El viento. 5
1.3.2 Energía eólica. 6
1.3.3 Medida del viento. 7
1.4 Variación de la velocidad del viento con la altura. 8
1.5 Mecanismo de movimiento del viento. 8
CAPITULO II "DISEÑO AERODINÁMICO DE LOS ÁLABES DE UNA TURBINA DE VIENTO" 11
2.1 Introducción. 11
2.2 Volumen de control para una turbina de viento. 12
2.2.1 Relación entre sistema y volumen de control. 13
2.2.2 Conservación de la masa. 13
2.2.3 Cantidad de movimiento. 16

2.2.4 Conservación del momentum. 16
2.2.5 Conservación de la energía. 18
2.3 Parámetros de operación de las turbina eólicas. 22
2.3.1 Coeficiente de potencia. 22
2.3.2 Coeficiente de empuje. 26
2.4 Teoría del rotor. 28
2.4.1 Teoría de elemento pala (BEM). 29
2.4.2 Tubo de corriente anular. 30
2.4.3 Conservación de la masa. 30
2.4.4 Conservación del momento: 30
2.4.4 Conservación del momento angular. 31
2.4.5 Perfil aerodinámico y fuerzas actuando en elemento pala o álabe. 31
2.4.6 Factor de pérdida de punta de Prandtl. 36
Capitulo III Análisis Modal. 38
3.1 Introducción. 38
3.2 Vibración. 38
3.3 Materiales del diseño. 39
3.4 Selección del perfil aerodinámico. 40
3.5 Modelado de la geometría del perfil. 40
3.6 Mallado. 41
Capitulo IV Análisis estructural de los diseños aerodinámicos de los álabes de las turbinas de viento. 46
4.1 Análisis de elemento finito de los alabes de una turbina de viento para frecuencias naturales y esfuerzos principales. 46
4.2 Determinación de cargas mediante la norma. 46
4.3 Hipótesis de carga. 47
4.3 Relaciones generales. 49
4.4 Hipótesis de carga A: Operación Normal. 50
4.5 Hipótesis de carga B: Orientación 51
4.6 Cálculo de cargas sobre los álabes. 52
4.6.1 Calculo de Hipótesis de carga A y B. 54
4.7 Análisis por Elemento Finito. 55
4.7.1 Método del Elemento Finito (FEM). 55

4.8 Resultados de simulaciones (ANSYS R19.0). 60
Capitulo V. Diseño óptimo de los álabes de una turbina de viento. 63
5.1 El proceso de diseño. 63
5.2 Diseño y análisis de Ingeniería. 64
5.3 Comparación entre proceso de diseño óptimo y diseño convencional. 64
5.4 Formulación del problema de diseño óptimo. 65
5.5 Modelo matemático general para un diseño óptimo. 67
5.5.1 Modelo de optimización de diseño estándar. 67
5.5.2 Problema de maximización. 68
5.6 Conjunto factible. 69
5.7 Problemas de optimización. 70
5.8 Conceptos básicos de diseño óptimo: Condiciones de optimidad. 71
5.8.1 Mínimo global y mínimo local. 71
5.8.2 Máximos y mínimos. 71
5.9 Condiciones necesarias y suficientes. 73
5.9.1 Condición necesaria. 73
5.9.2 Condición suficiente. 73
5.10 Condiciones de optimidad: Problema sin restricciones. 73
5.10.1 Conceptos de condiciones de optimalidad. 74
5.11 Condiciones de optimidad para funciones de una sola variable. 74
5.11.1 Condición necesaria de primer orden. 74
5.11.2 Puntos estacionarios. 75
5.11.3 Condición suficiente. 75
5.11.4 Condición necesaria de segundo orden. 76
5.12 Condiciones de optimalidad para funciones de varias variables. 76
5.13 Condiciones necesarias y suficientes para un mínimo local. 77
5.14 Optimidad global. 78
5.15 Diseño óptimo de los álabes de una turbina de viento en función de su Frecuencia Natural. 78
5.16 Proceso de formulación del problema para el diseño de los álabes. 80
5.17 Obtención de la función objetivo del álabe de una turbina de viento. 81
5.18 Interpolación de distancia inversa ponderada. 82
5.19 Máximos y mínimos en la función objetivo del diseño de un álabe de una turbina de viento. 87

CONCLUSIONES 90
Anexos 91
Referencias.....94

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 Molino de viento de Heron……1
Figura 1.2 Molino de viento de Seistan……2
Figura 1.3 Turbina de viento Gedser……3
Figura 1.4 Turbina de viento Jacobs……3
Figura 1.5 Turbina de viento Smith-Putman……..4
Figura 1.6 Distribución de la capacidad eólica instalada en México en 2019……5
Figura 1.7 Circulación atmosférica general……6
Figura 1.8 Flujo de aire en áreas montañosas……..7
Figura 1.9 Anemómetro de cazoletas y veleta……..7
Figura 1.10 Perfil logarítmico de la velocidad de viento……8
Figura 1.11 Trayectoria de una partícula de viento geostrófico……..…10
Figura 2.1 Volumen de control para una turbina de viento de eje horizontal……..…12
Figura 2.2 Un elemento álabe barre un anillo anular……..30
Figura 2.3 Tubo de corriente anular cruzando un elemento pala……31
Figura 2.4 Nomenclatura general de un perfil aerodinámico……33
Figura 2.5 Fuerzas en un perfil aerodinámico……33
Figura 2.6 Velocidades y fuerzas de un elemento pala o álabe……..34
Figura 3.1 Perfil aerodinámico NREL S 818……..41
Figura 3.2 Perfil del álabe……..42
Figura 3.3 Malla final de los diseños de los álabes ……42
Figura 4.1 Diagrama de modelado y simulación de los diseños de los álabes……47
Figura 4.2 Sistemas de coordenadas de un aerogenerador de eje horizontal……..49
Figura 4.3 Formulación del elemento……..……..57
Figura 4.4 División del Elemento Finito…….……..57
Figura 4.5 Mallado de álabe en Análisis Estructural…….……59
Figura 4.6 Carga y empotramiento en el diseño del álabe…….……59
Figura 4.7 Esfuerzo equivalente máximo y mínimo del álabe……60
Figura 5.1 Comparación entre el proceso de diseño óptimo y diseño convencional……..62
Figura 5.2 Comparación entre la gráfica de un punto máximo (a) y la gráfica de un punto mínimo (b)……66
Figura 5.3 Representación de puntos óptimos. (a) El dominio de una función sin restricciones. (b) El dominio de una función con restricciones…….....70
Figura 5.4 Función Objetivo Fibra de Carbono……79
Figura 5.5 Función Objetivo Fibra de Vidrio……80
Figura 5.6 Ejemplo de interpolación de distancia ponderada……81
Figura 5.7 Interpolación polinómica en el programa Matlab (Curve Fitting Toolbox) Fibra de Carbono……..84
Figura 5.8 Interpolación polinómica en el programa Matlab (Curve Fitting Toolbox) Fibra de Vidrio……..84

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1 Propiedades mecánicas de los materiales……40
Tabla 3.2 Frecuencias Naturales Fibra de Carbono……44
Tabla 3.3 Frecuencias Naturales Fibra de Vidrio……45
Tabla 3.4 Resultados de la simulación Análisis Modal Fibra de Carbono……46
Tabla 3.5 Resultados de la simulación Análisis Modal Fibra de Vidrio……46
Tabla 4.1 Parámetros básicos para las clases de los aerogeneradores pequeños……48
Tabla 4.2 Hipótesis de carga de diseño para el método de cálculo de cargas simplificadas……..50
Tabla 4.3 Magnitudes básicas……53
Tabla 4.4 Centro de masa, masa y volumen de los álabes de Fibra de Carbono……54
Tabla 4.5 Centro de masa, masa y volumen de los álabes de Fibra de Vidrio……54
Tabla 4.6 Magnitudes de Hipótesis de carga A……..55
Tabla 4.7 Magnitudes de Hipótesis de carga B……...55
Tabla 4.8 Resultado de simulaciones en Fibra de Carbono……58
Tabla 4.9 Resultado de simulaciones en Fibra de Vidrio……59
Tabla 4.10 Coordenada de centros de masa respecto al eje x……59
Tabla 4.11 Valores de masa de los álabes……...60
Tabla 5.1 Coordenadas de la Función Objetivo Fibra de Carbono……82
Tabla 5.2 Coordenadas de la Función Objetivo Fibra de Vidrio……83

OBJETIVOS.

Objetivo general.

Desarrollar el diseño óptimo de los álabes de una turbina de viento, generando una función objetivo conformada por la frecuencia natural, la velocidad específica y los esfuerzos máximos de los álabes.

Objetivos específicos.

- Estudio conceptual de la energía eólica y las turbinas de viento.
- Estudio del proceso del diseño óptimo de elementos de máquinas.
- Diseño de los álabes de una turbina de viento.
- Cálculo de los parámetros de optimización de una turbina de viento.
- Generación de la función objetivo y optimización de los álabes de una turbina de viento.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Es conveniente investigar el efecto que tiene la frecuencia natural sobre el diseño óptimo de los álabes de una turbina de viento, debido a que la frecuencia natural depende a dos propiedades importantes del sistema, la rigidez y masa del material.

La rigidez es la capacidad de resistencia de un cuerpo a doblarse o torcerse debido a la acción de fuerzas exteriores que actúan sobre su superficie; la cantidad de energía captada por un rotor de un aerogenerador depende de la deformación que pueda tener los álabes debido a la fuerza del viento. Por otro lado, la masa es una magnitud física que indica la cantidad de materia que tiene un cuerpo; la importancia para nuestro estudio radica en la posibilidad de disminuir este parámetro, con la finalidad de obtener álabes con una masa mínima y la posibilidad de tener costos de producción reducidos.

JUSTIFICACIÓN

Los beneficios que se obtienen por la realización de esta investigación son optimizar el diseño de los álabes de turbinas de viento como disminuir sus costos de producción.

También es necesario seguir aprovechando al máximo las energías renovables, ya que con el paso del tiempo el hombre se ha dedicado a la explotación y agotamiento de los combustibles fósiles de una manera desmedida.

La búsqueda y aplicación de tecnologías para la explotación de nuevas fuentes de energía limpia se han incrementado actualmente, debido a esto, el principal beneficiario es el medio ambiente, sin tener algún tipo de impacto ecológico.

Es de gran importancia conocer que, los grandes o pequeños parques eólicos a nivel mundial, se dirigen a obtener cantidades considerables de potencia energética para satisfacer las demandas de pequeñas o medianas comunidades. También, dicho propósito se aplica en zonas aisladas para usos de iluminación o satisfacer algunos requerimientos en los hogares.

HIPÓTESIS

Se puede generar el diseño óptimo de los álabes de una turbina de viento, en función de su rigidez y si masa utilizando la frecuencia natural, la velocidad específica y el coeficiente de potencia.

INTRODUCCIÓN

El abastecimiento de energía se ha convertido en un elemento vital para el crecimiento de las economías de la mayoría de los países. Los altos costos de importación de hidrocarburos, y los problemas asociados al cambio climático, han impulsado el estudio de fuentes renovables y limpias para producir energía, siendo la industria eólica la que se ha consolidado como la mayor productora de energía renovable a nivel mundial.

El proceso de diseño y fabricación de sistemas se ha desarrollado a lo largo de los siglos, sin embargo, la evolución de tales sistemas ha sido lenta y todo el proceso requiere mucho tiempo y es costoso, ya que se necesitan considerables recursos humanos y materiales.

La ingeniería consiste en una serie de actividades bien establecidas, que incluyen análisis, diseño, fabricación, ventas, investigación y desarrollo de sistemas. El diseño de un sistema se puede formular como problema de optimización en el que se optimiza una medida de rendimiento, mientras se satisfacen todos los demás requisitos.

Se han desarrollado y utilizado muchos métodos numéricos de optimización para diseñar mejores sistemas. Cualquier problema en el que ciertos parámetros deben determinarse para satisfacer restricciones puede formularse como un problema de optimización.

El diseño de muchos sistemas de ingeniería puede ser un proceso complejo. Se deben hacer suposiciones para desarrollar modelos realistas, que puedan someterse al análisis matemático mediante los métodos disponibles, y los modelos deben verificarse mediante experimentos. Para la mayoría de las aplicaciones, todo el proyecto de diseño se debe dividir en varios subproblemas, que luego se tratan de manera un tanto independiente. Cada uno de los subproblemas puede plantearse como un problema de diseño óptimo. [1]

Actualmente, la energía eólica ha demostrado su viabilidad técnica y económica, siendo una tecnología madura. Varias razones hacen de la eólica una de las energías renovables con gran desarrollo en ellos últimos años.

Tras la invención del generador eléctrico, los ingenieros comenzaron a aprovechar energía eólica para producir electricidad. La generación de energía eólica tuvo éxito en el Reino Unido (Reino Unido) y los Estados Unidos en 1887-1888. Sin embargo, se dice que la energía eólica moderna comenzó en Dinamarca, donde las turbinas eólicas de eje horizontal se construyeron en Askov en 1891, y una turbina eólica de 22,8 metros para generación eléctrica comenzó a funcionar en 1897. Desde entonces, la generación eólica se ha extendido desde Europa y Estados Unidos al mundo. La mayoría de los nuevos proyectos de energía eólica tienen una capacidad de turbina de alrededor de 2 MW en tierra y 3-5 MW en tierra. La capacidad instalada mundial de generación eólica (incluida la capacidad tanto en tierra como en alta mar) ha aumentado casi 50 veces en las últimas dos décadas, de 7,5 GW en 1997 a más de 371 GW en 2014. [2]

Este trabajo está estructurado en **5 CAPITULOS**, en el Capítulo 1 se puede encontrar antecedentes de las turbinas de viento, su desarrollo en las diferentes épocas y los primeros aerogeneradores eléctricos, así como también conceptos básicos de la energía eólica. En el Capítulo 2 se desarrolla la metodología para los cálculos del diseño de los álabes de una turbina eólica, en el Capítulo 3 se

muestra el Análisis Modal, en el Capítulo 4 se habla de la norma del diseño de turbinas eólicas así como también las simulaciones mediante el método de Elemento Finito y por último, el Capítulo 5 se menciona el diseño óptimo de los álabes de las turbinas de viento finalmente, se encuentra las funciones objetivo que son el objeto de estudio de este trabajo.

CAPITULO I “ENERGÍA EÓLICA”

1.1 Origen de las turbinas eólicas.

La primera referencia histórica conocida a un molino de viento es “Heron of Alexandria”, en su obra Pneumatics (Woodcroft, 1851). Se creía que Hero vivió en el siglo I a.C. o el siglo I d. C. Su obra describe un dispositivo que proporciona aire a un órgano mediante medios de un molino de viento. Ha habido cierto debate sobre si tal molino de viento realmente existió.

Además del molino de viento de Heron, la siguiente referencia sobre el tema data del siglo IX. A.C. (Al Masudi según lo informado por Vowles, 1932) Los molinos de viento definitivamente estaban en uso en la región persa de Seistan (ahora Irán oriental). Al Masudi también contó una historia que indica que los molinos de viento estaban en uso en el año 644 d. C.

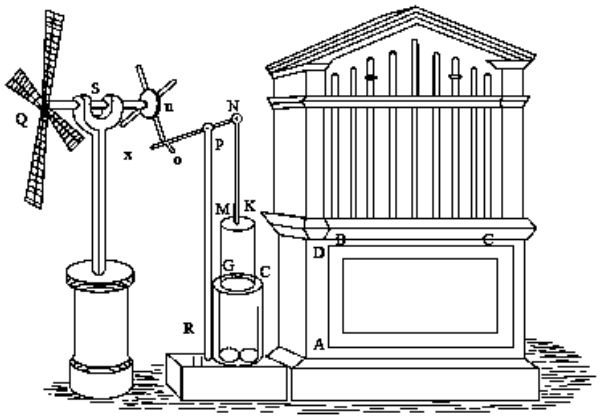


Figura 1.1 Molino de viento de Heron *[3]*

Los molinos de viento hicieron su primera aparición registrada en el norte de Europa (Inglaterra) en el siglo XII, pero probablemente llegó en el siglo X o XI (Vowles, 1930). Esos molinos de viento eran considerablemente diferentes en apariencia a los de Seistan, y ha habido considerables especulaciones sobre cómo las fábricas de Seistan podrían haber influido en las que aparecieron más tarde en Europa.

Una nota interesante de esta evolución temprana se refiere al cambio en el diseño del rotor, desde los molinos de viento de Seistan hasta los del norte de Europa. Los rotores de Seistan tenían ejes verticales y fueron impulsados por las fuerzas de arrastre, como tales, eran inherentemente ineficientes y particularmente susceptible a daños en vientos fuertes. Los diseños del norte de Europa tenían ejes horizontales y fueron impulsados por las fuerzas de elevación.

Los primeros molinos de viento del norte de Europa tenían ejes horizontales, fueron utilizados por casi cualquier tarea mecánica, incluyendo bombeo de agua, molienda de granos, aserrado de madera y alimentación, herramientas. Los primeros molinos se construyeron sobre postes, de modo que todo

el molino podría girarse para enfrentar el viento (o guiñada) cuando su dirección cambiaba. Estos molinos normalmente tenían cuatro cuchillas.

Figura 1.2 Molino de viento Seistan *[3]*

El viento continuó siendo una fuente importante de energía en Europa durante el período justo anterior a la revolución industrial, pero comenzó a retroceder en importancia después de ese tiempo. La razón que la energía eólica comenzó a desaparecer es principalmente a ser reemplazado por el carbón.

El carbón tenía muchas ventajas que el viento no poseía, podría ser transportado a donde se necesitaba y utilizado cuando se deseaba.

Cuando aparecieron los generadores eléctricos a fines del siglo XIX, era razonable que la gente trataría de girarlos con un rotor de molino de viento. En los Estados Unidos, un notable ejemplo temprano fue construido por Charles Brush en Cleveland, Ohio en 1888. La turbina de Brush no dio lugar a ninguna tendencia, pero en los años siguientes, los pequeños generadores eléctricos sí lo hicieron generalizarse. Estas pequeñas turbinas, desarrolladas principalmente por Marcellus Jacobs fueron, de alguna manera, los sucesores lógicos del bombeo de agua. También fueron significativos porque sus rotores tenían tres cuchillas con verdaderas formas aerodinámicas y comenzó a parecerse a las turbinas de hoy. Otra característica de la turbina Jacobs fue que se incorporó típicamente en un sistema de energía a escala residencial completo, que incluye batería almacenamiento. Se considera que la turbina Jacobs es un precursor directo tan pequeño y moderno de turbinas como las máquinas Bergey y Southwest Windpower. La expansión de la red eléctrica central bajo los auspicios de la Administración de Electrificación Rural durante la década de 1930 marcó el comienzo del fin del uso generalizado de pequeños generadores eólicos eléctricos.

Figura 1.3 Turbina de viento Gedser *[3]*

Juul erigió la turbina Gedser de 200kW, en el sureste de Dinamarca. Esta máquina de tres palas era particularmente innovadora en el sentido de que utilizaba un puesto aerodinámico para el control de potencia y usó un generador de inducción (tipo jaula de ardilla) en lugar del generador síncrono más convencional (en ese momento).

Uno de los pioneros en energía eólica en la década de 1950 fue Ulrich Hütter en Alemania (Dörner, 2002). Su trabajo se centró en la aplicación de la aerodinámica moderna, principios para el diseño de aerogeneradores.

Figura 1.4 Turbina de viento Jacobs *[3]*

En los Estados Unidos, la primera turbina grande más importante fue la máquina Smith– Putnam, construida en Vermont a fines de la década de 1930 (Putnam, 1948), con un diámetro de 53,3 m y una potencia nominal de 1.25MW, esta fue la turbina eólica más grande jamás construida hasta ese momento y durante muchos años a partir de entonces. Esta turbina, también fue significativa porque fue la primera turbina grande con dos palas. [3]

Figura 1.5 Turbina de viento Smith-Putnam *[3]*

1.2 Potencial eólico en México.

Según la Asociación Mexicana de Energía Eólica (AMDEE), México cuenta con un potencial eólico de más de 50 000 MW y que la capacidad instalada de energía eólica en el 2019 fue alrededor de 4951.9 MW distribuida en 13 Estados.

Las principales empresas que cuentan con la participación en el sector eólico del país, entre algunas son Gamesa, Vestas y Nordex-Acciona, siendo estas líderes en capacidad instalada con 38%, 33% y 18% respectivamente.

La situación actual del aprovechamiento de esta energía es bastante insignificante y concierne principalmente a abastecer necesidades propias de sus operadores. La capacidad de generación total de potencia radica básicamente en Oaxaca con 2756 MW de capacidad instalada, mientras que en el resto del país se distribuye según a la Figura 1.6. [4]

Figura 1.6 Distribución de capacidad eólica instalada en México en 2019 *[4]*

1.3 Conceptos básicos.

1.3.1 El viento.

Es un efecto de la radiación solar. Debido a la redondez de la Tierra se originan diferencias de temperatura entre distintos puntos del planeta, que dan lugar a diferentes zonas térmicas que provocan diferencias de densidad en las masas de aire. En el Ecuador, el aire al calentarse se hace más ligero (menos denso) y asciende a las capas altas de la atmósfera; en los Polos, el aire es más pesado (más denso) y desciende aumentando la presión. El aire que envuelve a la Tierra se mueve desde las zonas de mayor presión atmosférica (mayor densidad) a las de menor presión (baja densidad). Este aire en movimiento horizontal es el viento. En la figura 1.7 se muestra la circulación del aire en nuestro planeta.

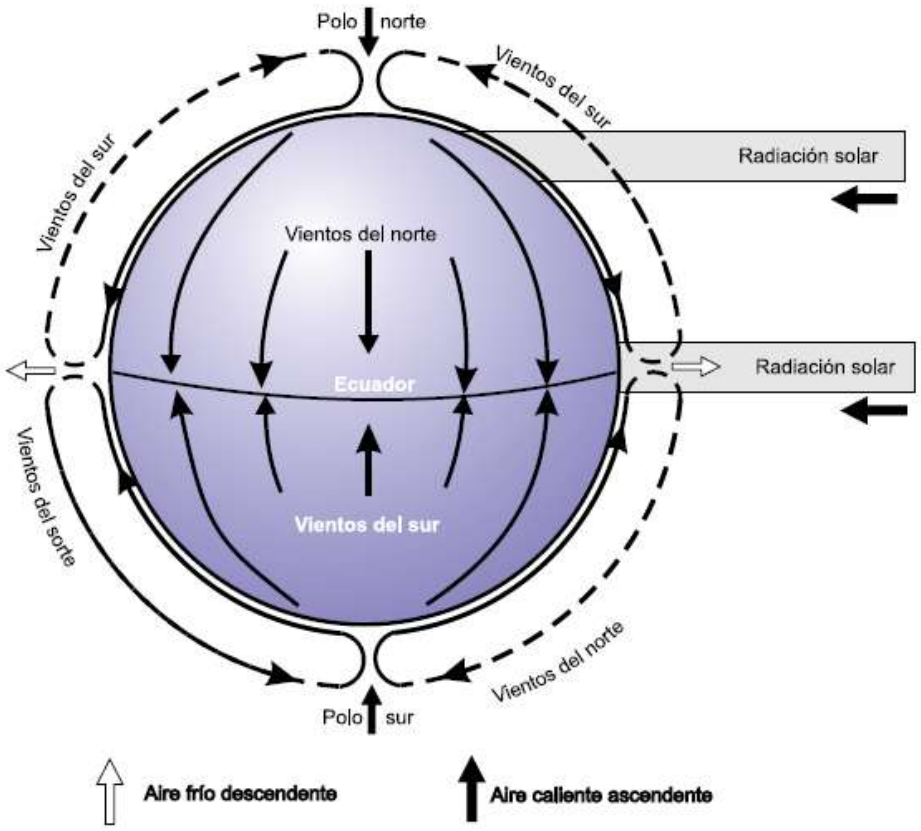


Figura 1.7 Circulación atmosférica general [5]

1.3.2 Energía eólica.

El origen de la energía eólica se encuentra sobre la Tierra de masa de aire a diferentes temperaturas, dadas por diferentes intensidades de radiación solar a nivel global o local, produciendo así corrientes ascendentes y descendentes, formando anillos de circulación de aire. Por lo tanto, la energía eólica es un pequeño porcentaje de energía solar incidente sobre el plantea, así como también, energía cinética del aire en movimiento. [5]

El teorema de Bernoulli establece que la velocidad de un fluido aumenta cuando la sección por la que pasa disminuye. Por tanto, en este caso, como la sección por la que discurre el aire entre las dos montañas es mucho más estrecha que fuera y las líneas de corriente están muy próximas, la velocidad aumenta. Por el mismo efecto de Bernoulli, encima de las montañas el viento aumenta de intensidad e inversamente, en un valle el viento disminuye, así como se muestra en la figura 1.8.

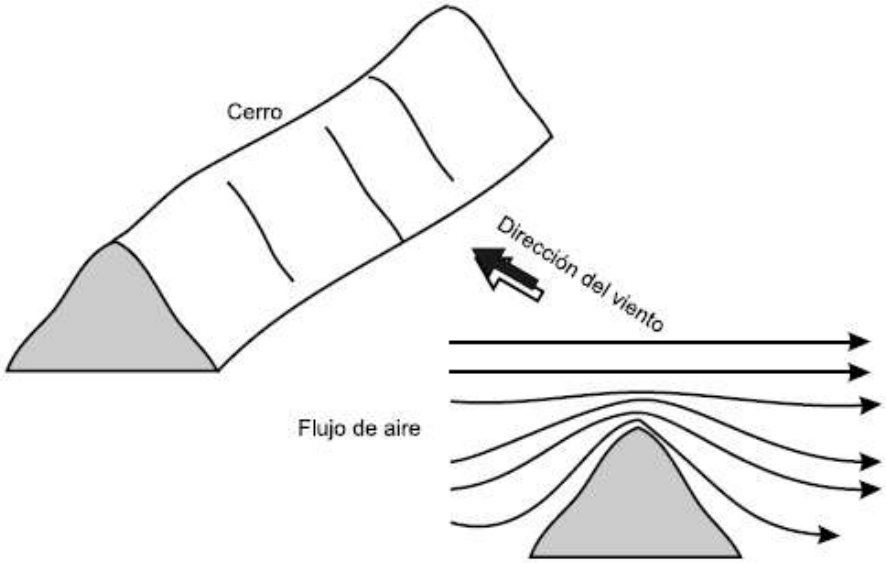


Figura 1.8 Flujo de aire en áreas montañosas. *[5]*

1.3.3 Medida del viento.

La velocidad del viento es un vector, por lo tanto, tiene magnitud, dirección y sentido. La magnitud indica la intensidad del viento y se expresa en (m/s), la dirección y sentido se expresan en grados sexagesimales.

Los instrumentos cuyos sensores miden el flujo del aire se llaman anemómetros (de rotación, de presión, etc.). En la figura 1.9 se muestran los anemómetros más conocidos y empleados en el análisis de la energía del viento, los de rotación con cazoletas de eje vertical.

Figura 1.9 Anemómetro de cazoletas y veleta, respectivamente. *[3]*

1.4 Variación de la velocidad del viento con la altura.

Como se muestra en la figura 1.10, la velocidad real del viento varía en el espacio y en el tiempo, velocidad que, en cualquier ubicación, también varía en el tiempo y la dirección en torno a su valor medio debido al efecto de la turbulencia. La figura 2.4 muestra de que manera la velocidad media del viento aumenta con la altura, lo que define el fenómeno llamado cizalladura del viento.

La cizalladura del viento influye tanto en la evaluación de los recursos eólicos como en el diseño de los aerogeneradores. En primer lugar, la evaluación de los recursos eólicos en una amplia área geográfica podría requerir que los datos del anemómetro de varias fuentes se corrijan a una elevación común. En segundo lugar, desde un aspecto de diseño, la vida de fatiga de los álabes del rotor se verá influenciada por las cargas cíclicas resultantes de la rotación a través de un campo de viento que varía en la dirección vertical. [3]

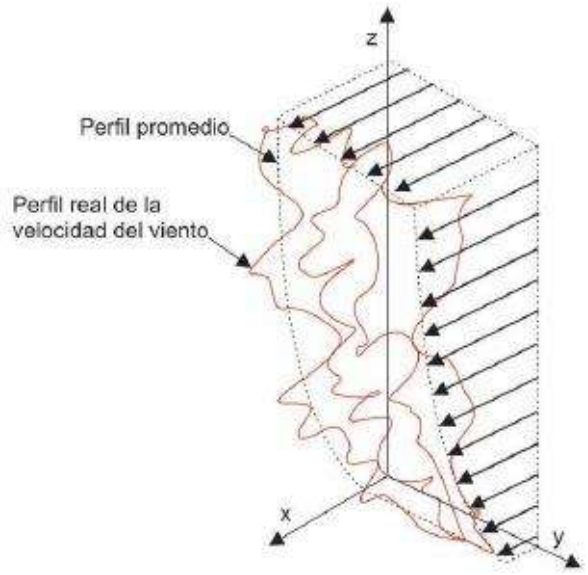


Figura 1.10 Perfil logarítmico de la velocidad del viento. *[3]*

1.5 Mecanismo de movimiento del viento.

En el mecanismo de movimiento del viento se pueden considerar cuatro fuerzas:

- Fuerza de presión (F_p), sobre el aire por unidad de masa:

$$F_p = \frac{-1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} \qquad (1)$$

Donde $\partial p/\partial n$ es el gradiente de presión normal a las líneas de presión constante o isóbaras.

- La fuerza de Coriolis (por unidad de masa), causada para la rotación de la Tierra, una fuerza ficticia causada por la medición con respecto a un marco de referencia giratorio (la Tierra) y está dada por:

$$F_c = fU_0 \tag{2}$$

Donde U_0 es la velocidad del viento y f es el parámetro de Coriolis:

$$f = 2w \sin \phi \tag{3}$$

Donde (ϕ) representa la latitud y w la rotación angular de la Tierra.

- La fuerza de fricción en la superficie de la tierra. La superficie de la tierra ejerce una fuerza horizontal sobre el aire en movimiento, cuyo efecto es retardar el flujo. Esta fuerza disminuye a medida que la altura sobre el suelo aumenta y se vuelve insignificante por encima de la capa límite (definida como la región cercana a la Tierra de la atmósfera donde las fuerzas viscosas son importantes). La fricción en la superficie hace que el viento se desvíe más hacia la región de baja presión.

La dirección de la fuerza Coriolis es perpendicular a la dirección de movimiento del aire. La resultante de estas dos fuerzas, llamado viento geostrófico, tiende a ser paralelo a las isóbaras. La magnitud del viento geostrófico U_g es una función del equilibrio de fuerzas y está dada por:

$$U_g = -\frac{1}{f\rho}\frac{\partial p}{\partial n} \tag{4}$$

En la figura 1.11 se muestra la trayectoria de una partícula de viento, que inicia su movimiento debido a la fuerza generada por la diferencia de presión entre los centros de alta y baja presión (F_p). La partícula, durante su trayectoria se ve afectada por la fuerza de Coriolis (F_c) quien la desvía (en el caso del hemisferio norte, a la derecha; para el caso del hemisferio sur a la izquierda) hasta que se establece un equilibrio de fuerzas entre la fuerza debida a la presión y la fuerza de Coriolis; originando así el viento geostrófico, el cual corre de manera paralela a las isóbaras. Es importante hacer notar que este modelo supone que las líneas de presión constante o isóbaras son rectas y no considera la aceleración centrípeta y las fuerzas de rozamiento. Esto último, trae como consecuencia que el viento geostrófico no tenga buena aproximación cerca de la superficie terrestre y tampoco en el caso de los ciclones o anticiclones. [3]

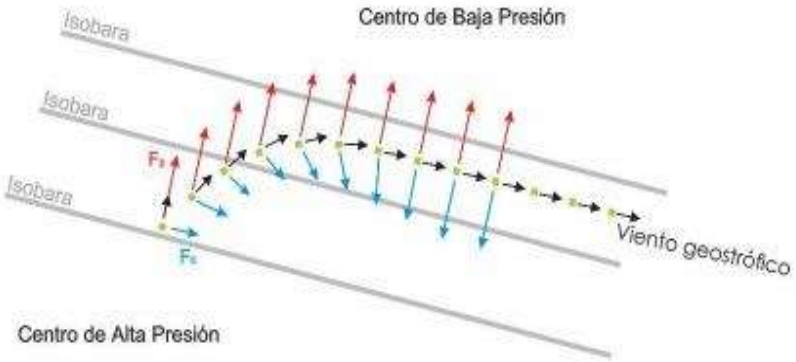


Figura 1.11 Trayectoria de una partícula de viento geostrófico. *[3]*

CAPITULO II “DISEÑO AERODINÁMICO DE LOS ÁLABES DE UNA TURBINA DE VIENTO”

2.1 Introducción.

Una turbina de viento (eólica), es una máquina que convierte la energía del viento en electricidad. Como generadoras de electricidad, las turbinas eólicas están conectadas a algunas redes eléctricas, estas redes incluyen circuitos de carga de baterías, alimentación a escala residencial, sistemas, redes aisladas o insulares y grandes redes de servicios públicos.

Para comprender el surgimiento de las turbinas de viento, podemos considerar varios factores:

- La necesidad, una conciencia emergente de la finitud de las reservas de los combustibles fósiles, así como también, el quemar estos combustibles para la obtención de energía.
- El potencial, el viento existe en todas las partes de la tierra, en algunos lugares con mayor densidad de energía.
- Capacidad tecnológica.

El diseño dominante en la tecnología de energía eólica en la actualidad, son los convertidores que tienen su eje de orientación en posición horizontal. La superioridad de este tipo de diseño hasta la fecha se debe a:

- En el diseño de la hélice, la velocidad del rotor y la potencia de salida pueden controlarse inclinando a las palas del rotor alrededor de su eje longitudinal.
- El cabeceo es la protección más efectiva contra la sobre velocidad y las velocidades extremas del viento.
- Capacidad de tecnología.
- La forma de la pala del rotor puede optimizarse aerodinámicamente y alcanzará su máxima eficiencia cuando la elevación aerodinámica se explote al máximo nivel.

El proceso de funcionamiento de una turbina eólica es que, utiliza la fuerza aerodinámica básica de elevación (del viento) para producir un par neto positivo en el eje de rotación, lo que resulta primero en la producción de energía mecánica y luego en su transformación a electricidad en un generador.

El componente principal de una turbina eólica es el convertidor de energía que transforma la energía cinética contenida en el aire en movimiento, en energía mecánica.

El crédito por haber reconocido este principio se le debe a Albert Betz. Entre 1922 y 1925, Betz publicó escritos en los que pudo demostrar eso, aplicando leyes físicas, la energía mecánica extraíble de una corriente de aire que pasa a través de un área transversal dada, está restringida a una cierta proporción fija de la energía o potencia contenida en la corriente de aire. Además, descubrió que la extracción óptima de energía sólo se realizará a una cierta relación entre la velocidad de flujo del aire frente a la energía convertidor y la velocidad del flujo detrás del convertidor. [6]

2.2 Volumen de control para una turbina de viento.

En la figura 2.1 se muestra un volumen de control (VC) para una turbina eólica, donde se ilustra la expansión del flujo antes de las aspas; (la expansión se mide por el área del al sección transversal del tubo delimitador y definido por el límite de línea de corriente), es por esto que, la turbina nunca puede convertir toda la energía cinética que pasa a través del área definida por las aspas en ausencia de estas. Considerando R_{vc}, como el radio del volumen de control el cual es más grande que el radio de la punta del aspa R, también la cara corriente abajo del volumen de control, se encuentra lo suficientemente lejana de tal manera que la velocidad de entrada al VC es U_0 y la presión del ambiente es presión manométrica igual a cero. Además se considera que las aspas no fluyen en el flujo de entrada de la cara de corriente abajo del VC. Si la turbina extrae energía del viento. Entonces la velocidad de la estela corriente arriba (U_∞) es menor que (U_0). Como se puede observar en la figura 2.1, la estela se expande formando un "tubo límite" definido por el límite de la línea de corriente, que separa a las líneas de corriente que cruzan por las aspas y las líneas externas que no pasan por las aspas pero que entran en el volumen de control. Dicho límite de corriente se puede considerar que puede soportar una discontinuidad en la velocidad y la presión a lo largo de la línea de límite. Es de notar, que el límite de corriente detrás del rotor en la realidad está compuesto por vórtices helicoidales que se arrastran desde las puntas de las aspas y pueden inducir un flujo axial. Estos vórtices que son una consecuencia del teorema de Kelvin que estable que la circulación debe ser continua en un fluido que de otro modo seria no visco, así la vorticidad "atada" de las aspas debe derramarse en las estelas, desprendimiento que se presenta tanto en las puntas de las aspas como en el cubo o hub, aunque en este último no tenga un efecto significante en el flujo principal.

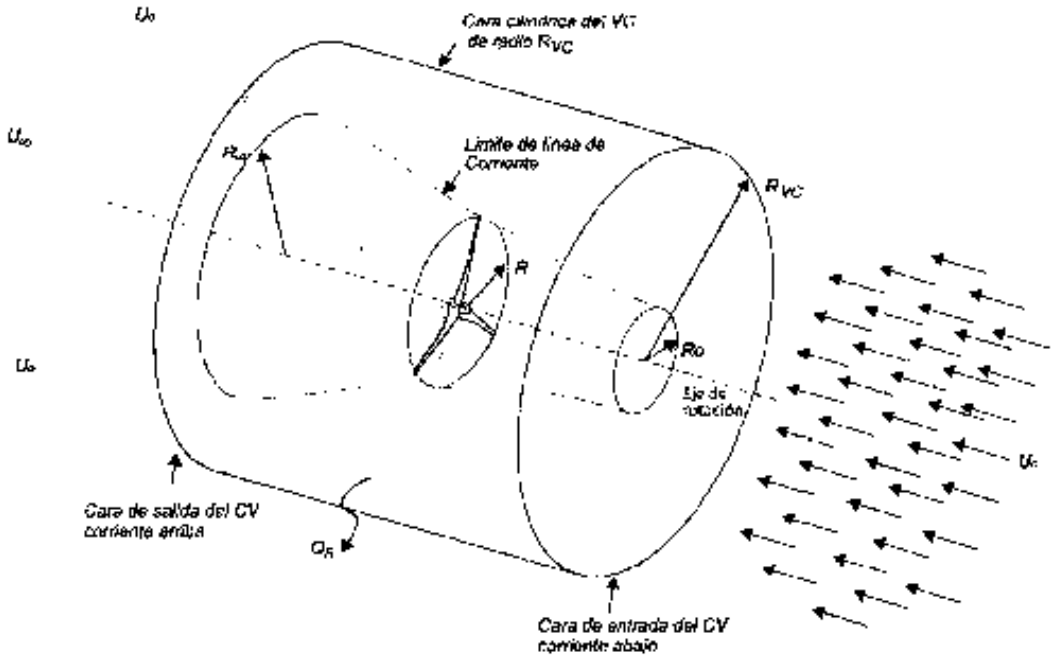


Figura 2.1 Volumen de control para una turbina de viento de eje horizontal. [7]

Se supone, además, que U_∞ y la presión en la estela lejana son uniformes, y que esta última es igual a la presión atmosférica. Se desprecia, además, la presencia de cualquier remolino, o velocidad circunferencial generada por las aspas, a pesar de que el par de torsión en las cuchillas debe dar como resultado un cambio en el momento angular del aire. En resumen, para los valores normales de la velocidad específica, λ de turbina eólica; la velocidad circunferencial es tan baja que puede despreciarse cuando se considera la conservación del momento y la energía y, en cualquier caso, no entra en la ecuación de la conservación de la masa. [7]

Para continuar con el análisis, se supone que el flujo es uniforme y constante lo que significa que no hay acumulación de masa, momento, momento angular y energía dentro del *VC*.

2.2.1 Relación entre sistema y volumen de control.

El teorema de transporte de Reynolds (TTR) plantea que existe una relación entre la formulación para un sistema y la formulación para un volumen de control que se representa a través de una ecuación:

$$\left.\frac{d\vec{N}}{dt}\right|_{sistema} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc}\eta\rho dv + \int_{sc}\eta\rho\vec{U}\cdot d\vec{A} \tag{5}$$

Donde N es cualquier propiedad extensiva del sistema, como la masa, la cantidad de movimiento el volumen y la energía, y η es la propiedad intensiva correspondiente como la temperatura, presión, velocidad o el volumen específico.

En la ecuación (5), el término de la izquierda representa el cambio total de la propiedad *N* en el sistema. El primer término en el lado derecho representa un cambio con respecto al tiempo de la propiedad dentro del volumen de control y el segundo término es el flujo de la propiedad a través de las fronteras del volumen de control.

2.2.2 Conservación de la masa.

La ley de la conservación de la masa en un sistema:

$$\left.\frac{dm}{dt}\right|_{sistema} = 0 \tag{6}$$

También:

$$m_{sistema} = \int_{sis} dm = \int_{sis}\rho dv \tag{7}$$

Con las ecuaciones (6) y (7) tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc}\rho dv + \int_{sc}\rho\vec{U}\cdot d\vec{A} = 0 \tag{8}$$

En la ecuación (8) el primer término representa la rapidez del cambio de la masa dentro del volumen de control, mientras que el segundo término representa el flujo neto de masa a través de la superficie de control. Lo que establece esta ecuación es simplemente que la rapidez de acumulamiento de masa en el volumen de control es igual a la diferencia entre la masa que entra y la que sale del mismo.

Por otro lado, para un flujo incompresible, en el cual la densidad permanece constante, la ecuación (8) se puede escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\int_{vc} dv + \rho\int_{sc}\vec{U}\cdot\vec{A} = 0 \tag{9}$$

Si la integral *dv* sobre el volumen de control es simplemente el volumen mismo, la ecuación (9) quedaría:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \rho\int_{sc}\vec{U}\cdot d\vec{A} = 0 \tag{10}$$

Ahora bien, si en un flujo incompresible la densidad no varía, por lo que es constante en todo el volumen de control y el tamaño del volumen de control es fijo (como el considerado en el presente análisis), el primer término de la ecuación (10) es igual a cero. Así, la ecuación de continuidad para flujo incompresible es:

$$\rho\int_{sc}\vec{U}\cdot d\vec{A} = 0 \tag{11}$$

Dividiendo la ecuación (11) entre la densidad ρ, que es contante, la forma vectorial de la ecuación de la conservación de la masa para un flujo constante es:

$$\int\vec{U}\cdot d\vec{A} = 0 \tag{12}$$

Donde $d\vec{A}$ indica un elemento vectorial del área perteneciente a las caras del *VC* y es, por convención, normal a ellas. Es importante recordar esta convención para determinar los signos de las contribuciones de cada cara. Se debe tener en cuenta que también, al igual que con todas las ecuaciones de conservación para flujo constante, los únicos términos de la ecuación (12) provienen de las caras del *VC*. Esto se debe a que no se puede acumular una cantidad conservada dentro del *VC*

para un flujo constante, esto es, en cada instante, la cantidad de aire que ingresa al *VC* por unidad de tiempo, debe equilibrarse en la misma cantidad, saliendo de una parte diferente del *VC*, nuevamente por unidad de tiempo.

En el *VC* de la figura 2.1, el aire ingresa desde la derecha, causando una contribución negativa a la ecuación (12), ello debido a que $d\vec{A}$ está en la dirección opuesta a *U*, y sale de la cara izquierda del *VC*, dando una contribución positiva, ya que $d\vec{A}$ está en la misma dirección que *U*. También hay una contribución positiva de la cara cilíndrica del *VC* en el radio R_{vc}.

Corriente arriba, la magnitud de la velocidad es constante e igual a U_0. Para reiterar: esta velocidad es opuesta a la dirección a la normal hacia afuera del área, de modo que $\vec{U} \cdot d\vec{A}$ será negativa y tendrá el valor de $-U_0 dA$ donde dA es ahora un elemento escalar de área. Por lo tanto, la contribución a la integral en la ecuación (12) es $-U_0 \pi {R^2}_{cv}$. Del mismo modo, la contribución aguas abajo es $U_0 \pi({R^2}_{cv} - {R^2}_{\infty}) + U_{\infty} \pi {R^2}_{\infty}$.

Todos estos términos tienen las unidades de velocidad por área o m^3/s, y generalmente se denominan "tasas de flujo volumétrico" porque dan el volumen de aire que pasa cada cara en particular. Por lo general, las tasas de flujo de volumen reciben el símbolo *Q*, pero este símbolo también se usa para el torque. Una *Q* con un subíndice representará una tasa de flujo volumétrico sólo para esta y las siguientes secciones. Si Q_R representa el caudal fuera de la cara cilíndrica del *CV*, entonces, la ecuación (12) queda:

$$-U_0 \pi R^2 + U_0 \pi({R^2}_{cv} - {R^2}_{\infty}) + U_{\infty} \pi {R^2}_{\infty} + Q_R = 0 \qquad (13)$$

De otra manera:

$$Q_R = (U_0 - U_{\infty}) \pi {R^2}_{\infty} \qquad (14)$$

Donde Q_R, debe ser debida a la velocidad radial. El valor promedio de la velocidad V_R, multiplicada por el área de flujo, será igual a Q_R. Si la longitud del *VC* es *x* (en la dirección del viento), el área de flujo es $2\pi R_{cv} x$, por lo que V_R se puede hacer arbitrariamente pequeña a través de incrementar R_{cv}.

Otra aplicación importante de la ecuación de conservación de la masa es fijar la tasa de flujo volumétrico dentro del tubo de la línea de corriente delimitadora. Mediante un cambio apropiado al *VC* que se muestra en la figura, es fácil deducir lo siguiente:

$$Q_0 = U_0 \pi {R^2}_0 = Q = U \pi R^2 = Q_{\infty} = U_{\infty} \pi {R^2}_{\infty} \qquad (15)$$

Con lo que se concluye que la velocidad de flujo volumétrico dentro del tubo de la corriente de límite en cualquier ubicación axial en el flujo es constante. [7]

2.2.3 Cantidad de movimiento.

Recordando que el movimiento de cualquier masa está gobernado por la segunda ley de Newton, la cual es aplicable tanto a un sistema de masa como a una partícula de fluido. Esta ley, establece que para que un sistema se mueva con relación a un marco de referencia inercial (sin aceleración con respecto a un sistema de coordenadas fijo), la suma de todas las fuerzas externas actuando sobre el sistema es igual a la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento del sistema, esto es:

$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_{sistema} \tag{16}$$

Y en la cual, la cantidad de movimiento lineal de sistema $\vec{P}$, está determinado por:

$$\vec{P}_{sistema} = \int_{masa\ (sist)} \vec{U} dm = \int_{v(sist)} \vec{U} \rho dv \tag{17}$$

Es importante notar que la fuerza resultante $\vec{F}$, incluye todas las fuerzas de superficie y de cuerpo que actúan sobre el sistema, esto es:

$$\vec{F} = \vec{F}_s + \vec{F}_c \tag{18}$$

2.2.4 Conservación del momentum.

El Teorema de Transportes de Reynolds también se aplica para obtener la ecuación de la conservación de la masa para el *VC*, esto es, a fin de transformar la ecuación de cantidad de movimiento para un sistema (16) a una forma más adecuada para el *VC*.

Para obtener entonces la formulación de la segunda Ley de Newton para un *VC* utilizando el Teorema de Transporte de Reynolds considerando que:

$$N = \vec{P} \quad \text{y} \quad \eta = \vec{U}$$

Sustituyendo en la ecuación (5):

$$\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_{sistema} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \vec{U}\rho dv + \int_{sc} \vec{U}\rho\vec{U}\cdot d\vec{A} \tag{19}$$

De la ecuación (16) se tiene:

$$\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_{sistema} = \vec{F}\big|_{sobre\ sistema} \tag{20}$$

Si al derivar la ecuación (5), el sistema y el volumen de control coinciden en el tiempo inicial, se tiene:

$$\vec{F}\big|_{sobre\ sistema} = \vec{F}\big|_{sobre\ vc} \tag{21}$$

Las ecuaciones (19) y (20) dan formulación a la segunda Ley de Newton para n volumen de control inercial (sin aceleración).

Retomando las ecuaciones (18), (19) y (21) se tiene:

$$\vec{F_s} + \vec{F_c} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \vec{U}\rho dv + \int_{sc} \vec{U}\rho\vec{U}\cdot d\vec{A} \tag{22}$$

La ecuación (22) define la conservación de momentum, o es simplemente la ecuación de movimiento, para un volumen e control inercial. Los dos términos de lado derecho de la ecuación son llamados términos inerciales ya que representan la resistencia inercial de la masa del fluido al cambio en su velocidad. El primer término es la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento lineal dentro del volumen de control y el segundo representa el cambio neto de la cantidad de movimiento lineal que cruza la superficie de control.

Si consideramos que el flujo es estable, es decir, que la presión dentro del *VC* no varía con el tiempo en un punto dado indicando (en la misma línea de flujo); esto es, que cada unidad de masa de aire retirada está siendo reemplaza por la misma cantidad de masa de aire que se adiciona al sistema, el primer término de la derecha de la ecuación (22) se puede omitir, quedando:

$$\vec{F_s} + \vec{F_c} = \int_{sc} \vec{U}\rho\vec{U}\cdot d\vec{A} \tag{23}$$

Se debe considerar que un flujo puede empezar no estacionario y hacerse estacionario con el tiempo, tal como ocurre en el funcionamiento de las turbinas eólicas. Además, si consideramos el flujo incompresible (lo cual es válido a las velocidades de viento relativo que trabajan las turbinas eólicas), en el cual la densidad permanece constante, la ecuación (23) se puede escribir como:

$$\vec{F_s} + \vec{F_c} = \rho\int_{sc} \vec{U}\vec{U}\cdot d\vec{A} \tag{24}$$

La ecuación (24), es la ley de Newton para el *VC* y determina la fuerza que actúa en el aire, que es la negativa de la fuerza (empuje) que actúa sobre las aspas, *T*, en forma de vector. Además, si retomamos nuevamente la ecuación (18), la ecuación para *T* quedaría:

$$T = -\rho \int_{sc} \vec{U}\vec{U} \cdot d\vec{A} \tag{25}$$

Centrándose únicamente en *T*, que es la fuerza en la dirección del viento, es más fácil volver al componente escalar de la ecuación (25) en la dirección del viento. La presión es constante e igual en todas las caras del *VC*, por lo que no contribuye a la ecuación de momento, como ya se ha supuesto por escrito en la ecuación (25). Además, las velocidades en las caras del *VC* son uniformes (incluso si la velocidad en la cara aguas abajo es discontinua en R_∞) Por lo que la aplicación de la ecuación (25) procede de la misma manera que para (25) [7]. El resultado es:

$$T = \rho U_0 U_0 \pi {R^2}_{vc} - \rho U_0 U_0 \pi ({R^2}_{vc} - {R^2}_{\infty}) - \rho U_\infty U_\infty \pi {R^2}_{\infty} - \rho U_0 Q_R \tag{26}$$

T, por lo tanto, es positivo en la dirección del viento. El último término de la ecuación (26), representa la eliminación del momentum (igual a U_0 por unidad de masa) por la tasa del flujo volumétrico (Q_R) fuera de la cara cilíndrica del *VC*.

Desarrollando y simplificando se tiene:

$$T = \rho U_\infty \pi {R^2}_{\infty} (U_0 - U_\infty) = \rho Q_\infty (U_0 - U_\infty) \tag{27}$$

Se puede obtener otra ecuación de *T* si reemplazamos los álabes por un “disco” circular delgado y uniforme por el cual la velocidad es continua mas no así la presión; por lo tanto, *T* puede resultar únicamente de la diferencia de presión $P_1 - P_2$. Donde P_1 actúa en la dirección del viento en el lado de barlovento del disco y P_2 actúa en contra del viento en el lado de sotavento. Como se sabe, idealizar los álabes como un disco poroso infinitamente delgado (conocido a menudo como "disco actuador") es común en el análisis de máquinas fluidas. Por lo tanto:

$$T = (P_1 - P_2)\pi R^2 \tag{28}$$

2.2.5 Conservación de la energía.

Una de las más importantes y fundamentales leyes de la naturaleza es el principio de conservación de la energía. Ésta expresa que, durante una interacción, la energía puede cambiar de forma a otra, pero su cantidad total permanece constante. La energía puede existir de varias formas: térmica, mecánica, cinética, potencial, eléctrica, magnética, química y nuclear, cuya suma conforma la energía total *E* de un sistema.

La energía que posee un sistema (cantidad de materia o una región en el espacio elegida para el análisis), despreciando efectos magnéticos, eléctricos y de tensión superficial, consta sólo de las energías cinética, potencia e interna, y se expresa como:

$$E = EC + EP + U = m\frac{v^2}{2} + mgz + U \tag{29}$$

Donde g, es la aceleración gravitacional y z la altura del centro de gravedad de un sistema con respecto a algún nivel de referencia elegido arbitrariamente. [8]

De manera similar el Teorema de Transporte de Reynolds se aplica para obtener la ecuación de la conservación de masa para el *VC*.

Si la primera Ley de la termodinámica plantea que $E = Q_0 - W$, tenemos:

$$\frac{dQ_0}{dt} - \frac{dW}{dt}\Big|_{sistema} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc}\left(\frac{v^2}{2} + gz + u\right)\rho dv + \int_{sc}\left(\frac{v^2}{2} + gz + u\right)\rho\vec{U}\cdot d\vec{A} \tag{30}$$

Si se considera además para el caso, que el sistema es adiabático, el flujo es estable e incompresible, que la diferencia de energía potencial entre el extremo inferior y el superior del área de barrido de la turbina es insignificante, así como que los cambios de la energía interna dentro del volumen de control también son despreciables, la ecuación queda:

$$\frac{dW}{dt}\Big|_{sistema} = \int_{sc}\left(\frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{U}\cdot d\vec{A} \tag{31}$$

Es importante aclarar que, para obtener de la ecuación (31) se supone también que la presión en la estela de rotación lejana es igual a la atmosférica (presión manométrica igual a cero) y por tanto la presión en todas las caras del *VC* es atmosférica. Lo anterior quiere decir que no hay trabajo hecho por las fuerzas de presión en el fluido en movimiento ya sea entrando o saliendo del *VC*, por tanto, la única forma de energía a considerar en un caso ideal es la energía cinética tal como lo muestra la ecuación.

Si para el caso $\vec{U} = \vec{v}$, además $dW/dt = \dot{W}$, esto es la potencia, por lo tanto, la ecuación queda:

$$-\dot{W} = \rho\int_{sc}\frac{1}{2}\vec{U}\vec{U}\cdot\overrightarrow{U}\cdot d\vec{A} \tag{32}$$

Ahora bien, si la ecuación (32) representa el trabajo por unidad de tiempo (la potencia) de la masa de aire en el volumen de control, la potencia de los álabes es igual a este (más adelante se tratarán importantes limitantes de esta consideración). Por lo tanto, la ecuación de la potencia es:

$$P = \rho \int \frac{1}{2} \vec{U}\vec{U} \cdot \vec{U} \cdot d\vec{A} \tag{33}$$

De manera similar a los análisis de conservación de masa y de momentum, es sencillo demostrar que:

$$P = \rho \frac{1}{2} {U_0}^2 U_0 \pi {R_{vc}}^2 - \rho \frac{1}{2} {U_0}^2 U_0 \pi \left({R_{vc}}^2 - {R_\infty}^2\right) - \rho \frac{1}{2} {U_\infty}^2 U_\infty \pi {R_\infty}^2 - \rho \frac{1}{2} {U_0}^2 Q_R \tag{34}$$

Sustituyendo la ecuación (14) en (34), desarrollando y simplificando se tiene:

$$P = \rho \frac{1}{2} U_\infty \pi R_\infty \left({U_0}^2 - {U_\infty}^2\right) = \rho \frac{1}{2} Q_\infty \left({U_0}^2 - {U_\infty}^2\right) \tag{35}$$

Otra forma de obtener la ecuación (35) es aplicar la ley de Bernoulli, esto es desde la cara aguas arriba del *VC* a una posición justo antes de la turbina (P_{1+}) (ver figura 2.1) lo cual lleva a:

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho {U_0}^2 + \rho g h = P_1 + \frac{1}{2} \rho {U_1}^2 + \rho g h \tag{36}$$

Del mismo modo, desde el momento después de la turbina (P_{1+}) hasta la estela lejana aguas abajo la ecuación queda:

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho {U_1}^2 + \rho g h = P_2 + \frac{1}{2} \rho {U_\infty}^2 + \rho g h \tag{37}$$

Ahora bien, considerando que la velocidad que sale del disco (la turbina) es la misma que la que ingresa; que no existe cambio de energía potencial y que la presión aguas arriba (P_0) y la presión en la estela lejana aguas abajo (P_2) son iguales, se tiene:

$$P_1 = \tfrac{1}{2} \rho \left({U_0}^2 - {U_1}^2\right) \text{ y } P_2 = \tfrac{1}{2} \rho \left({U_\infty}^2 - {U_1}^2\right) \tag{38}$$

Aplicando la Ecuación de Bernoulli:

$$P_1 - P_2 = \tfrac{1}{2} \rho \left({U_0}^2 - {U_1}^2\right) - \tfrac{1}{2} \rho \left({U_\infty}^2 - {U_1}^2\right) = \tfrac{1}{2} \rho \left({U_0}^2 - {U_\infty}^2\right) \tag{39}$$

Es importante notar que la ecuación de Bernoulli no se puede aplicar a través del disco ya que la energía extraída del aire altera la constante de Bernoulli en cada línea de corriente. [7]

Si reagrupamos la ecuación (35) se tiene:

$$P = Q_\infty \rho \frac{1}{2}\left({U_0}^2 - {U_\infty}^2\right) \tag{40}$$

Sustituyendo la ecuación (39):

$$P = Q_\infty (P_1 - P_2) \tag{41}$$

Si por la ecuación (15) $Q_\infty = Q_1$, además $Q_1 = U_1 \pi {R_1}^2$, queda:

$$P = U_1 \pi {R_1}^2 (P_1 - P_2) \tag{42}$$

Sustituyendo la ecuación (28) se tiene:

$$P = U_1 T \tag{43}$$

La ecuación (43) muestra que la potencia es el producto de la fuerza en el disco y la velocidad del aire a través de él y se aplica sólo a un flujo ideal. [7]

Para concluir el tema, se obtiene una relación interesante que, aunque sólo es aplicable para el caso del flujo ideal, es útil para comprender el fenómeno de la transformación de la energía en una turbina eólica en términos generales. De la ecuación (43) y la ecuación (27) se tiene: [9]

$$U_1 = \frac{P}{\rho Q_\infty (U_0 - U_\infty)} \tag{44}$$

Sustituyendo la ecuación (40) en (44), tenemos:

$$U_1 = \frac{\frac{1}{2}\rho Q_\infty \left({U_0}^2 - {U_\infty}^2\right)}{\rho Q_\infty (U_0 - U_\infty)} = \frac{1}{2}(U_0 + U_\infty) \tag{45}$$

La ecuación (45) también sólo es aplicable al flujo ideal y muestra que la mitad de la expansión del flujo en términos de cambios de velocidad ocurre antes de los álabes y la mitad en la estela, detrás de los álabes.

2.3 Parámetros de operación de las turbina eólicas.

2.3.1 Coeficiente de potencia.

El coeficiente de potencia es uno de los parámetros más importantes de las maquinas eólicas, y es común que se utilice como indicador de eficiencia de estas, aunque en sentido estricto no es una eficiencia. El análisis parte de considerar que el componente principal de una turbina es el rotor y que está formado por álabes que trasforman la energía cinética contenida en el aire en movimiento, en energía mecánica.

El coeficiente de potencia C_p es la relación que existe entre la potencia mecánica extraída por la turbina y la de la corriente de aire no perturbada. El crédito por haber reconocido este principio se debe a Albert Betz quien entre 1922 y 1925 publicó escritos en los que pudo demostrar que, aplicando leyes físicas elementales, la energía mecánica extraíble de una corriente de aire que pasa a través de una sección de área está restringida a una cierta proporción fija de la energía o potencia contenida en la corriente de aire (lo lleva a deducir que $0 \leq C_p < 1$). Además, descubrió que la extracción de potencia óptima sólo podía realizarse a una cierta relación entre la velocidad de flujo del aire frente a la hélice y la velocidad de flujo detrás de la hélice. [10]

Aunque la "teoría del momento" de Betz, supone una hélice que funciona sin pérdidas en un flujo de aire sin fricción y contiene simplificaciones, sus resultados son bastante útiles para realizar cálculos aproximados en ingeniería. Pero su verdadera importancia se basa en el hecho de que proporciona una base física común para la comprensión y el funcionamiento de máquinas de energía eólica de diversos tipos. [9]

Retomando la definición de coeficiente de potencia:

$$C_p = \frac{Potencia\ extraída}{Potencia\ del\ aire\ no\ perturbado} \tag{46}$$

Sabiendo que la potencia es igual a:

$$P = \frac{1}{2}\rho A {U_0}^3 \tag{47}$$

Podemos sustituir en la ecuación (46), tenemos:

$$C_p = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho A {U_0}^3} \tag{48}$$

Para obtener la potencia extraída en términos de la velocidad del viento U_0, consideramos la ecuación (40) y que de acuerdo a la ecuación (15) $Q_\infty = Q_1$, además $Q_1 = U_1 \pi {R_1}^2$, queda:

$$P = U_1 \pi {R_1}^2 \rho \frac{1}{2}\left({U_0}^2 - {U_\infty}^2\right) \tag{49}$$

Sustituyendo en la ecuación (45) en la ecuación (49), se obtiene:

$$P = \left(\frac{1}{2}(U_0 - U_\infty)\right) \pi {R_1}^2 \rho \frac{1}{2}\left({U_0}^2 - {U_\infty}^2\right) \tag{50}$$

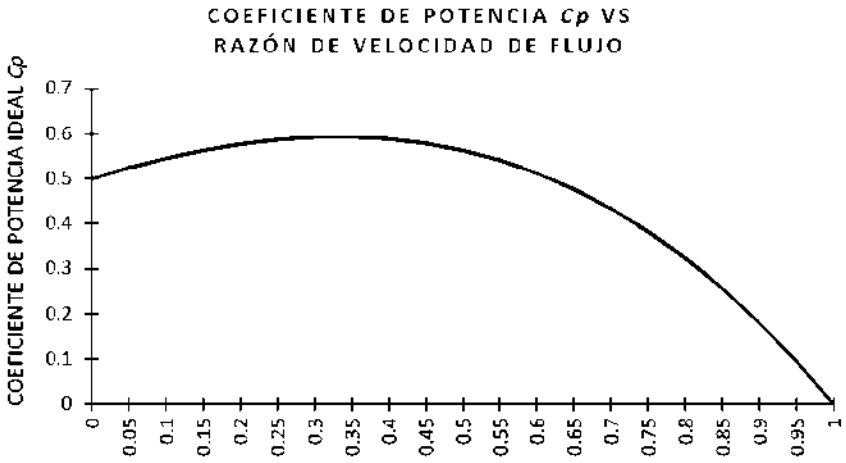
Considerando que $\pi {R_1}^2 = A_1$, la potencia extraída es igual:

$$P = \frac{1}{4} A_1 \rho (U_0 - U_\infty)\left({U_0}^2 - {U_\infty}^2\right) \tag{51}$$

Sustituyendo la ecuación (51) en (48), y sabiendo que la razón de velocidad de flujo es (U_∞ / U_0) se obtiene:

$$C_p = \frac{1}{2}\left|1 - \left(\frac{U_\infty}{U_0}\right)^2\right| \left|1 + \frac{U_\infty}{U_0}\right| \tag{52}$$

En la ecuación (52) el coeficiente de potencia depende únicamente de la razón de velocidades aguas arriba (U_0) y aguas abajo (U_∞). Esta relación es mostrada gráficamente en la figura 2.2.



Gráfica 2.1 Relación entre el coeficiente de potencia y la razón de la velocidad de flujo.

Como se muestra en la gráfica 2.1 cuando la relación $U_\infty/U_0 = 1/3$, el coeficiente de potencia ideal toma su valor máximo:

$$C_p = \frac{16}{27} = 0.593 \tag{53}$$

También conocido como el Límite de Betz o Factor de Betz (84) en honor al físico alemán Albert Betz quien fuera el primero en derivar este importante valor.

Lo anterior implica también, que con el coeficiente de potencia ideal máximo la reducción de la velocidad aguas abajo o detrás del convertidor o turbina es:

$$U_\infty = \frac{1}{3}U_0 \tag{54}$$

Lo que permite deducir que en las mismas condiciones ideales la velocidad en el convertidor o la turbina es:

$$U_1 = \frac{2}{3}U_0 \tag{55}$$

De las ecuaciones (53), (54) y (55) se deriva un parámetro de suma importancia en el diseño de turbinas eólicas, el factor de inducción axial, indica que cuanto mayor sea el valor de *a*, mayor será la desaceleración a medida que el aire atraviesa los álabes, y está definido por:

$$a = 1 - \frac{U_1}{U_0} \tag{56}$$

Otra forma de obtener el factor de inducción axial, es considerando la potencia útil que cede el viento a la turbina. Esto se puede representar de dos maneras. La primera, es la pérdida por unidad de tiempo de la energía cinética del viento al pasar por la turbina, expresada en la ecuación (49). La segunda, es el trabajo generado por unidad de tiempo debida a la fuerza del viento sobre el área de barrido de la turbina que se puede expresar como sigue, de la ecuación (43):

$$P = TU_1 = \pi {R_1}^2 \rho \frac{d}{\Delta t}(U_0 - U_\infty)U_1 = \pi {R_1}^2 \rho {U_1}^2 (U_0 - U_\infty) \tag{57}$$

Igualando la ecuación (49) y (57), tenemos:

$$\pi {R_1}^2 \rho \frac{1}{2}\left({U_0}^2 - {U_\infty}^2\right) = \pi {R_1}^2 \rho {U_1}^2 (U_0 - U_\infty) \tag{58}$$

Que es lo mismo:

$$\pi {R_1}^2 \rho \frac{1}{2}(U_0 - U_\infty)(U_0 - U_\infty) = \pi {R_1}^2 \rho {U_1}^2 (U_0 - U_\infty) \tag{59}$$

Obteniendo:

$$U_1 = \frac{U_0 - U_\infty}{2} \tag{60}$$

Demostrando así, para el modelo de Betz las ecuaciones (49) y (57) deben ser consistentes y esto se logra cuando la velocidad media del viento en el plano de la turbina es la media de las velocidades de viento aguas arriba y aguas abajo de la turbina. [9]

Retomando la determinación del coeficiente de Betz, si se sustituye la ecuación (60) en la ecuación (49), cambiando además $U_\infty = bU_0$, ello teniendo en cuenta, según la ecuación (55) que: 0 < b < 1.

$$P = U_1 \pi {R_1}^2 \rho \frac{1}{2}\left({U_0}^2 - {U_\infty}^2\right) = \pi {R_1}^2 \rho \frac{1}{2}\left(\frac{U_0 - bU_0}{2}\right)\left({U_0}^2 - b{U_0}^2\right) \tag{61}$$

Que es lo mismo:

$$P = \pi {R_1}^2 \rho \frac{1}{4} {U_0}^3 (1 + b)(1 - b^2) \tag{62}$$

Para encontrar el valor máximo de P, se deriva:

$$\frac{dP}{db} = 0 \tag{63}$$

Lo que resulta:

$$(1 + b^2) + (1 + b)(-2b) = (1 + b)(1 - 3b) = 0 \tag{64}$$

La ecuación (64) tiene dos soluciones:

- $b = 1$ Pero carece sentido físico
- $b = 1/3$ Que es igual a $U_\infty = \frac{1}{3}U_0$, es lo mismo que la ecuación (54).

Para obtener la potencia máxima, se sustituye el valor anterior de b en la ecuación (62), nos queda:

$$P = \left(\frac{16}{27}\right)\frac{1}{2}\rho {U_0}^3 \tag{65}$$

Obteniendo también, el límite de Betz.

Otra forma de expresar el coeficiente de potencia en términos del factor de inducción axial la expresan Burton et al. [11], donde toman las ecuaciones (43) y (27) y las sustituye en la ecuación (80):

$$C_p = \frac{4{U_1}^2(U_0 - U_1)}{{U_0}^3} = 4a(1-a)^2 \tag{66}$$

La derivación anterior, muestra que una turbina nunca puede capturar toda la energía cinética que fluiría más allá del disco de la turbina en ausencia de los álabes. Todo lo que posiblemente puede hacer, de acuerdo con la ecuación (56), es capturar dos tercios de ese viento (en términos de U_1/U_0), y convertir *8/9* partes en la potencia de salida debido a que $1 - (U_\infty/U_0)^2 = 8/9$. Para lograrlo, debe haber una expansión significativa del flujo; el área de la sección transversal de la estela lejana cuando $a = 1/3$ es el doble del área del disco del álabe y tres veces el área del viento capturada por los álabes. [11]

La derivación del límite de Betz-Joukowsky depende de grandes simplificaciones y suposiciones sobre el flujo de aire, principalmente en términos de estabilidad, uniformidad y desprecio de la viscosidad, que no puede ser estrictamente válido en la práctica. Sin embargo, ningún estudio bien documentado de la potencia de salida de la turbina eólica ha violado el límite de la ecuación (54). El valor de *Cp*, máximo para aerogeneradores modernos es de aproximadamente 0.50. Además, se deriva sin ninguna referencia a las propias palas de la turbina, por lo que es razonable afirmar que el primer trabajo de un diseñador de álabes es producir álabes que den como resultado un flujo de aire lo más cercano posible al ideal.

Es importante enfatizar que *Cp* no es, estrictamente, una eficiencia, por lo que el límite de Betz-Joukowsky no es un límite de eficiencia y el rendimiento mejorado sólo requiere un aumento en la cantidad de viento capturado por los álabes que compensa cualquier degradación en la eficiencia de la conversión. Se han propuesto varios métodos para aumentar la captura de flujo, de los cuales el "aumento de difusor" es probablemente el más prometedor. [7]

2.3.2 Coeficiente de empuje.

En una forma similar a (66), el coeficiente de empuje, C_T, puede derivarse de las ecuaciones (15) y (27), dando:

$$C_T = \frac{Empuje\ extraído}{Empuje\ del\ aire\ no\ perturbado} = \frac{T}{\frac{1}{2}\rho {U_0}^2} = \frac{\rho Q_\infty (U_0 - U_\infty)}{\frac{1}{2}\rho A {U_0}^2} = \frac{U_1 \pi {R_1}^2 (U_0 - U_\infty)}{\frac{1}{2}\pi {R_1}^2 {U_0}^2} \tag{67}$$

Después se sustituye la ecuación (60):

$$C_T = \frac{U_1(U_0 - U_\infty)}{\frac{1}{2}{U_0}^2} = \frac{U_1\big(U_0 - (2U_1 - U_0)\big)}{\frac{1}{2}{U_0}^3} = \frac{2U_1(U_0 - U_1)}{\frac{1}{2}{U_0}^2} \tag{68}$$

Se tiene:

$$C_T = \frac{4U_1(U_0 - U_1)}{{U_0}^2} = 4a(1 - a) \tag{69}$$

De modo que, con un rendimiento óptimo $C_T = 8/9$, y tiene un límite superior de unidad cuando $a = 1/2$ según la ecuación (69). En la práctica, parece que el C_T es de aproximadamente 0.9 en el rendimiento máximo, pero hay una serie de medidas de C_T que exceden la unidad cuando aumenta por encima de 1/3. Algunos de estos se muestran en la figura 2.3. El alto empuje coincide con la disminución del C_P hacia el valor de descontrol de cero y el aumento de la expansión de la estela. Un error adicional del análisis simple es que la ecuación (60) le da a $U_\infty = 0$ cuando $a = 1/2$, y U_∞ negativo para valores más grandes, pero, desafortunadamente, no hay mediciones detalladas disponibles para la región de alto empuje para sugerir una modificación apropiada a la ecuación (60). Los datos experimentales que se muestran en la figura son los datos suavizados. Las medidas se deben tratar con precaución, porque no se midió directamente, y el área de barrido del rotor era una fracción considerable del área de la sección transversal del túnel de viento, por lo que su bloqueo era alto. [9]

Ha habido una gran cantidad de "correcciones" sugeridas para la ecuación (69) a lo largo de los años, ninguno de los cuales se basa en una consideración física adecuada del origen para el empuje adicional o en la naturaleza de la estela. Una corrección comúnmente utilizada se debe a Glauert; consiste en reemplazar la ecuación (69) por:

$$C_T = 4a(a - 1) + 2 \tag{70}$$

Siempre que $a = 1/2$. Como se muestra en la figura 2.3, la ecuación (70) es la imagen especular de la ecuación (70) sobre la línea $C_T = 1$. [7]

Esta propuesta de curva parabólica de Glauert, proporciona una solución empírica al problema del empuje en una turbina muy cargada (un rotor que opera a un alto valor del factor de inducción de flujo axial). Es posible trazar una línea recta adecuada con ayuda de puntos experimentales.

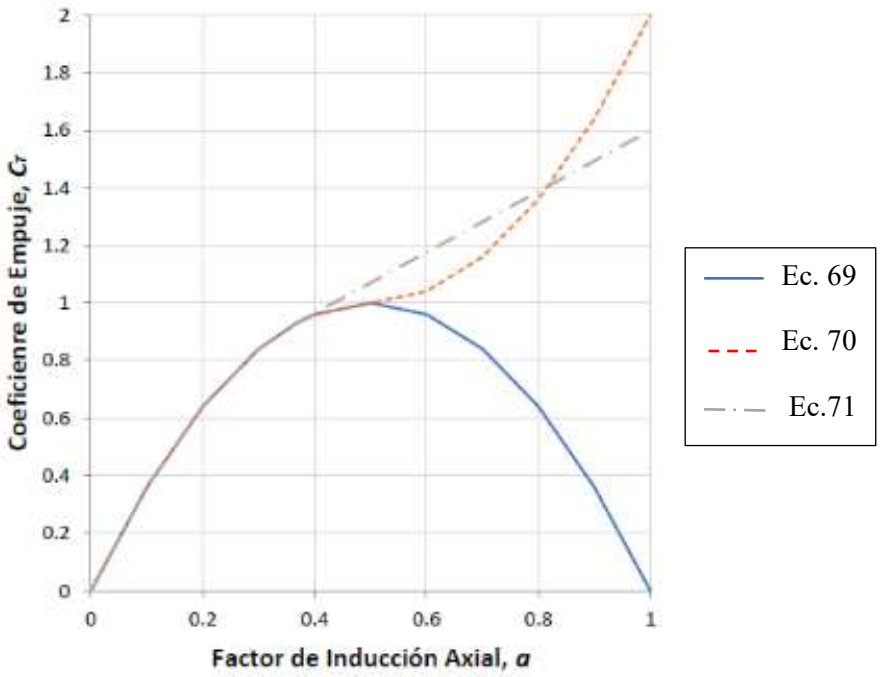
La mayoría de los autores, asumen que todo el empuje en el disco del rotor causa un cambio de momento axial. Por lo tanto, para que la línea empírica sea útil, debe suponerse que se aplica no sólo a todo el rotor sino también a cada tubo de corriente separado. Si C_1 es el valor empírico de C_T cuando $a = 1$. Entonces, como la línea recta debe ser una tangente a la parábola de la teoría de momento en el punto de transición, la ecuación para la línea es:

$$C_T = C_{T1} - 4\big(\sqrt{C_{T1}} - 1\big)(1 - a) \tag{71}$$

Y el valor de a en el punto de transición es:

$$a_T = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{C_{T1}} \tag{72}$$

Wilson y Lissaman (1974), proponen un valor de $C_{T1} = 1.6$.. Glauert ajusta a una curva parabólica a los datos que dan valores mucho más altos de C_{T1} a valores altos de a, pero consideraba el caso de una hélice en el estado del freno del molino de viento donde los ángulos de ataque son negativos. La gráfica 2.2, muestra los valores del C_T de la ecuación (71).



Gráfica 2.2 Factor de inducción axial vs Coeficiente de empuje

2.4 Teoría del rotor.

Suponiendo un elemento de álabe que barre un anillo anular en una turbina eólica como el que se muestra en la figura 2.2. Las fuerzas de sustentación aerodinámica y arrastre en los elementos de envergadura de radio r y longitud δr, de los varios álabes del rotor de turbina eólica son responsables de la velocidad de cambio del momento axial y angular de todo el aire que pasa a través el anillo barrido por los elementos del álabe. Además, la fuerza sobre los elementos del álabe, causada por la caída de la presión asociada con la velocidad de rotación en la estela, también debe ser proporcionada por la sustentación y el arrastre aerodinámicos. Debido a que no hay rotación del flujo que se aproxima al rotor, la presión reducida en el lado de sotavento del rotor, provocada por la rotación de la estela aparece como una caída de presión escalonada como la que causa el cambio en el momento

axial. Debido a que la estela todavía está girando en la estela lejana, la caída de presión causada por la rotación todavía está presente y por lo tanto no contribuye al cambio de momento axial. [11]

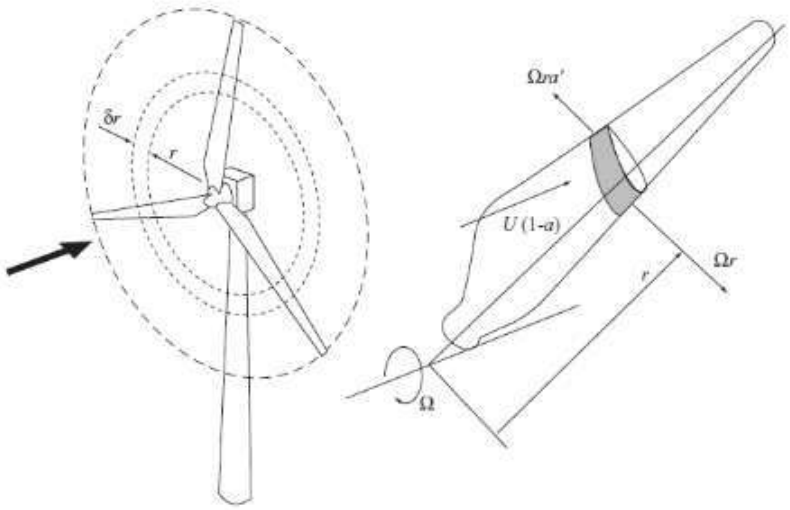


Figura 2.2 Un elemento álabe barre un anillo anular. [11]

2.4.1 Teoría de elemento pala (BEM).

La teoría de elemento pala supone algunos enunciados: [11]

- El flujo en cada tubo de corriente es independiente del de otros tubos de corriente.
- Las fuerzas que actúan sobre un elemento de pala (o álabe) se pueden calcular considerando a éste como un perfil aerodinámico bidimensional empleando el ángulo de ataque determinado a partir de la velocidad resultante en el plano de la sección transversal del elemento e ignorándose los efectos tridimensionales del flujo.

En comparación con el autor Wood [7], muestra muy claramente que las suposiciones anteriores pueden ser erróneas. Demuestra que la primera suposición se viola, ya que, si hay una variación radial en la velocidad a través de los álabes, esto causará un gradiente de presión radial y cada tubo de corriente ejercerá una fuerza sobre sus dos vecinos. Apunta, esta fuerza es redistributiva, es decir, suma cero en todo el flujo, por lo que ignorarla no debería causar un error demasiado grave. Respecto a la segunda suposición, Wood menciona que, si por definición un perfil aerodinámico es un cuerpo bidimensional inmerso en un flujo infinito que es uniforme, lejos de la región influenciada por el cuerpo, esta situación nunca puede ocurrir en una turbina eólica, porque las cuchillas siempre están separadas por una distancia finita en la dirección acimutal. Wood apunta, además, que el flujo sobre los elementos del álabe puede permanecer adherido a ángulos de ataque que podrían causar que el perfil entre en stall, es decir, que se pare. Este fenómeno es conocido como stall delay, o retardo de paro y aunque ocurre en la práctica sus causas aún no son del todo claras. Además, el stall delay se produce predominantemente hacia el centro de la turbina, por lo que es probable que la solidez, que suele ser mayor cerca del Hub y también retrasa la separación, es al menos parcialmente responsable.

Debido a que el stall delay no influye significativamente en el rendimiento óptimo de la turbina, sus efectos no se incluyen en los cálculos del elemento de pala. [9]

2.4.2 Tubo de corriente anular.

Analizamos un volumen de control en un tubo de corriente anular de radio r y de extensión radial dr, analizando el flujo por elemento del álabe, de acuerdo a la figura 2.3.

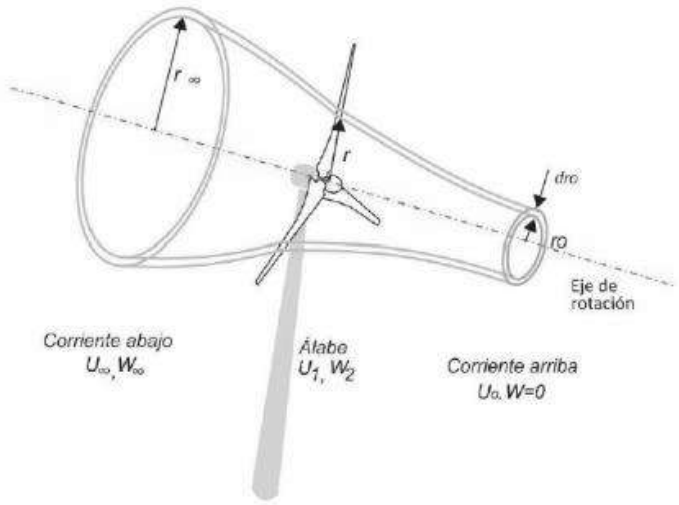


Figura 2.3 Tubo de corriente anular cruzando un elemento pala. [7]

Como se muestra en la figura 2.3, el radio de la punta del álabe es R, el espesor del tubo de la corriente es dr_0 corriente arriba, dr en los álabes y dr_∞. Se debe tener en cuenta que el tubo de corriente es anular y se supone que $dr \ll r$. Velocidades existentes en la dirección radial se ignoran, para la velocidad circunferencial o de remolino se debe incluir en el análisis. [7]

2.4.3 Conservación de la masa.

Si se divide la ecuación (12) (conservación de la masa) por la densidad y aplicándola al tubo de corriente anular cuya área de flujo es aproximadamente de $2\pi r dr$, tenemos:

$$U_0 2\pi r_0 dr_0 = U_1 2\pi r dr = U_\infty 2\pi r_\infty dr_\infty \tag{73}$$

Que es lo mismo:

$$U_0 r_0 dr_0 = U_1 r dr = U_\infty r_\infty dr_\infty \tag{74}$$

2.4.4 Conservación del momento:

La contribución al empuje axial T, para el tubo de corriente anular es:

$$dT = \rho U_0 U_0 2\pi r_0 dr_0 - \rho U_\infty U_\infty 2\pi r_\infty dr_\infty = 2\pi U_1 r(U_0 - U_\infty)dr \qquad (75)$$

Es importante tener en cuenta que esta es la fuerza total actuando sobre los N elementos de los álabes que se intersectan con el tubo de corriente anular. Si se tiene que $2U_1 = (U_0 - U_\infty)$ y que $U_1 = (1-a)U_0$, sustituyendo estas relaciones en la ecuación (75) se tiene:

$$dT = 4\pi r \rho {U_0}^2 a(1-a)dr \qquad (76)$$

2.4.4 Conservación del momento angular.

En forma de vector dQ, el torque que actúa sobre los elementos de pala o álabe dentro del tubo de corriente anular se puede obtener a partir de la ecuación $Q = -\rho \int_{sc} \vec{r} \times \vec{U}\vec{U} \cdot d\vec{A}$. De aquí, se puede deducir la ecuación escalar para la contribución al Q, el torque que actúa sobre el eje de rotación:

$$dQ = \rho r_\infty W_\infty U_\infty 2\pi r_\infty dr_\infty \qquad (77)$$

Si corriente abajo de los álabes el momento angular del tubo de corriente anular se conserva, se tiene que $rW_2 = r_\infty W_\infty$. Además, si de la ecuación (56) se tiene que: $U_1 = (1-a)U_0$, usando estas relaciones y la ecuación de la conservación de la masa se tiene:

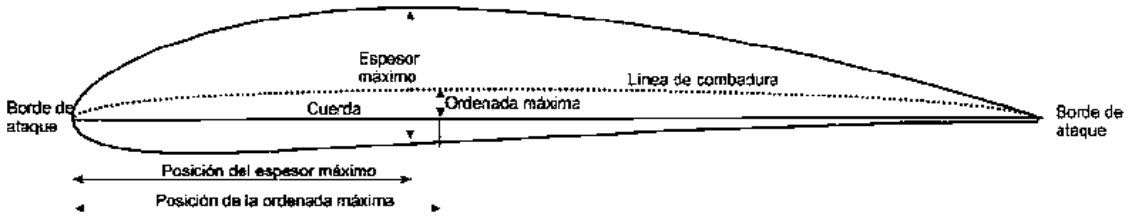
$$dQ = 2\pi\rho U_0(1-a)W_2 r^2 dr \qquad (78)$$

Donde $W_2 = 2a'\Omega r$ es el promedio de:

$$W = \frac{(W_0 - W_2)}{2} = \frac{W_2}{2} = a'\Omega r \qquad (79)$$

2.4.5 Perfil aerodinámico y fuerzas actuando en elemento pala o álabe.

Los perfiles aerodinámicos son geometrías con figuras específicas que son usados en las aspas de las turbinas con el objetivo de generar las fuerzas que mueven al rotor cuando el aire incide sobre estas estructuras [12]. El desempeño aerodinámico dicta cuáles serán las medidas del perfil como su ancho, largo, como también algunas de sus propiedades, y consideraciones sobre la fuerza. Un perfil



aerodinámico se conforma por características, como el ángulo de ataque, la cuerda, el borde delantero o borde de ataque, el borde de salida y la curvatura.

Figura 2.4 Nomenclatura general de un perfil aerodinámico. [7]

La corriente de viento sobre un perfil aerodinámico provoca ciertas fuerzas sobre su superficie. La velocidad del viento aumenta sobre la superficie convexa, teniendo una caída de presión sobre ese lado y del lado cóncavo se tiene un fenómeno opuesto con una sobrepresión.

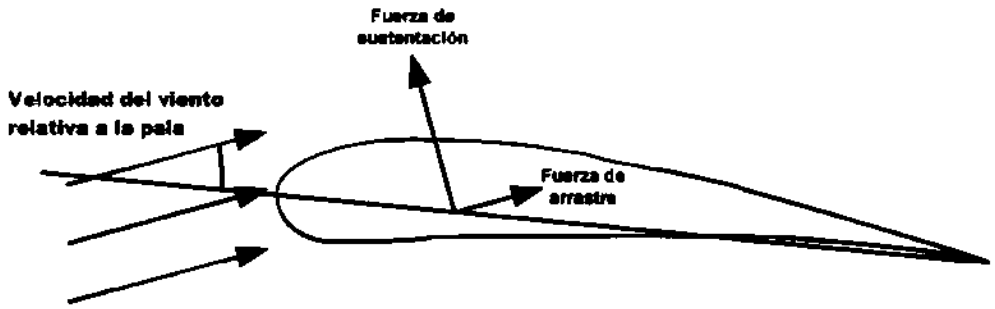


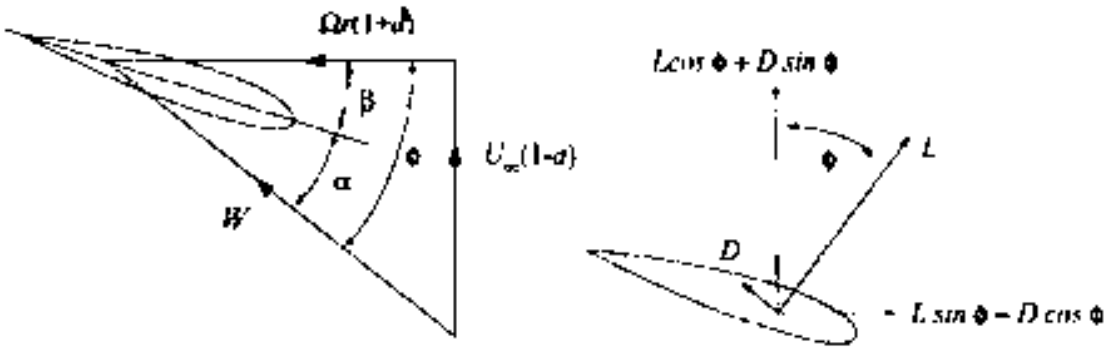
Figura 2.5 Fuerzas en un perfil aerodinámico. [11]

Fuerza de sustentación: se crea de las diferencias de presiones que se da entre las superficies del perfil aerodinámico y es perpendicular a la dirección la corriente de viento.

Fuerza de arrastre: esta fuerza se debe a la fuerza de fricción entre la superficie, y el fluido y a la diferencia de presión entre las superficies del perfil aerodinámico, y es paralela a la dirección de la corriente de viento.

Momento de Pitch: momento perpendicular a la sección transversal del perfil aerodinámico.

Considerando una turbina con N álabes de radio R, cada una con cuerda c (la cuerda es la distancia que hay de extremo a extremo del perfil aerodinámico) y ángulo de pitch o cabeceo β, medido entre la línea de sustentación cero del perfil aerodinámico y el plano del disco o rotación. Tanto la longitud de la cuerda como el ángulo de pitch pueden variar a lo largo de la envergadura del álabe. Considere que los álabes giran a la velocidad angular Ω y que la velocidad del viento es U_0. La velocidad tangencial Ωr, del elemento pala que se muestra en la figura 2.3 combinada con la velocidad



tangencial de la estela $a'\Omega r$ significa que la velocidad neta de flujo tangencial experimentada por el elemento de cuchilla es $(1 + a')\Omega r$. La figura 2.6, muestra las velocidades y fuerzas sobre el perfil aerodinámico relativas a la línea de cuerda del álabe en el radio *r*.

Figura 2.6 Velocidades y fuerzas de un elemento pala o álabe. [11]

De acuerdo a la figura 2.6 se deduce que la velocidad relativa resultante en el álabe (despreciando cualquier velocidad radial) es: [11]

$$U_T = \sqrt{{U_0}^2(1-a)^2 + \Omega^2 r^2 (1+a')^2} \tag{80}$$

Por su parte Wood [7], deduce de la misma figura, que la velocidad relativa resultante en el álabe (despreciando también cualquier velocidad radial) es:

$$U_T = \sqrt{(1-a)^2 + [\lambda^2(1+a')]^2} \tag{81}$$

Donde la velocidad específica del elemento pala es:

$$\lambda_r = \Omega r / U_0 \tag{82}$$

Y la velocidad angular:

$$\Omega = 2\pi rpm \tag{83}$$

De estas ecuaciones se tiene que U_T se denomina generalmente, como velocidad total o velocidad efectiva por el elemento pala, α es el ángulo de ataque, que en ocasiones se le llama ángulo de incidencia, β es el angulo de torision y comprende en el plano de rotación del álabe y la línea de cuerda del elemento, a veces β se denomina angulo de Pitch, finalmente el ángulo de $\emptyset$ es el ángulo del flujo y es el ángulo comprendido entre U_T y el plano de rotación. De la figura 2.6 se tiene:

$$\sin \emptyset = \frac{U_0(1-a)}{U_T} \tag{84}$$

$$\cos \emptyset = \frac{\Omega r(1+a')}{U_T} \tag{85}$$

El ángulo lo ataque es:

$$\alpha = \emptyset - \beta \tag{86}$$

Por lo tanto, la fuerza de sustentación en un elemento pala a lo largo de su longitud de envergadura en cada álabe, normal a la dirección de U_T , es:

$$\delta L = \frac{1}{2}\rho {U_T}^2 c C_l \delta r \tag{87}$$

Mientras que la fuerza de arrastre, en un elemento pala a lo largo de su longitud de envergadura, en cada álabe y paralela a U_T es:

$$\delta D = \frac{1}{2}\rho {U_T}^2 c C_d \delta r \tag{88}$$

Donde *c* es la cuerda del perfil, C_l y C_d son el coeficiente de sustentación y el coeficiente de arrastre correspondientemente, *L* la sustentación y *D* el arrastre.

Dado que, el propósito principal de las fuerzas en el elemento de pala es producir un par alrededor del eje de rotación, la figura 2.6 indica la necesidad de maximizar la sustentación y minimizar el arrastre. De manera muy simple, el arrastre actúa para reducir el torque producido por la sustentación: la clave para el rendimiento de la turbina eólica es la relación entre la sustentación y el arrastre, en lugar de los valores individuales.

De la figura 2.6, para una turbina *N* álabes, el empuje total en *N* elementos de pala es:

$$dT = \frac{1}{2}\rho {U_T}^2 cN(C_l \cos\emptyset + C_d \sin\emptyset)dr = \frac{1}{2}\rho {U_T}^2 cNC_a dr \tag{89}$$

Donde:

$$C_a = C_l \sin\emptyset + C_d \cos\emptyset \tag{90}$$

Por su parte el debido a la fuerza circunferencial es:

$$dQ = \frac{1}{2}\rho {U_T}^2 cN(C_l \sin\emptyset - C_d \cos\emptyset)rdr = \frac{1}{2}\rho {U_T}^2 cNC_{a'} rdr \tag{91}$$

Donde:

$$C_{a'} = C_l \sin\emptyset - C_d \cos\emptyset \tag{92}$$

También de la figura 2.6 podemos obtener:

$$\tan \emptyset = \frac{U_0(1-a)}{\Omega r(1+a')} = \frac{(1-a)}{\lambda_r(1+a')} \tag{93}$$

Donde la velocidad específica local:

$$\lambda_r = \Omega r / U_0 = \lambda(r/R) \tag{94}$$

La solidez local está definida por:

$$\sigma' = \frac{Nc}{2\pi r} \tag{95}$$

Manwell et al. [3], Propone dos métodos de solución al problema iterativo que se base únicamente en *a* hasta que los flujos del momento y el momento angular en el flujo sobre las palas equilibren el empuje y el torque, respectivamente, en un elemento de pala o álabe utilizando ecuaciones para *a*, *a'* y *Cl*, determinar las condiciones de flujo y las fuerzas en cada sección del álabe. El primero, utiliza las mediciones características del perfil y las ecuaciones de BEM para resolver directamente para *Cl* y *a*. Este método, se puede resolver numéricamente, pero también se presta a una solución gráfica que muestra claramente las condiciones de flujo en la pala y la existencia de múltiples soluciones. El segundo método de solución es un enfoque numérico iterativo que se extiende más fácilmente para condiciones de flujo con grandes factores de inducción axiales.

$$C_l = 4 \sin \emptyset \frac{(\cos \emptyset - \lambda_r \sin \emptyset)}{\sigma'(\sin \emptyset + \lambda_r \cos \emptyset)} \tag{96}$$

$$a = \frac{1}{\left[1 + \frac{4sin^2\emptyset}{\sigma' C_l \cos \emptyset}\right]} \tag{97}$$

$$a' = \frac{1}{\left[\left(\frac{4 \cos \emptyset}{\sigma' C_l}\right) - 1\right]} \tag{98}$$

Método 1:

Si $\emptyset = \alpha + \beta$, para una geometría de álabe y condiciones de operación determinadas, hay dos incógnitas en la ecuación (96) que se deben encontrar, C_l y a en cada sección. Para encontrar estos valores, se puede usar las curvas empíricas C_l vs α para el perfil aerodinámico elegido. Luego se encuentran el C_l y α de los datos empíricos que satisfacen la Ecuación (96). Esto se puede hacer de forma numérica o gráfica. Una vez que se han encontrado C_l y α, *a'* y *a* se pueden determinar a partir

de las ecuaciones (97) y (98). Se debe verificar que el factor de inducción axial en el punto de intersección de las curvas sea inferior a 0.5 para garantizar que el resultado sea válido.

Método 2. Solución iterativa para a y a'

Este método de solución equivalente comienza suponiendo valores para a y a', a partir de las cuales se calculan las condiciones de flujo y los nuevos factores de inducción.

Específicamente:

1. Se suponen valores de a y a'.

2. Se calcula el ángulo del viento relativo $\emptyset$, de la ecuación (93).

3. Se calcula el ángulo de ataque de $\alpha = \emptyset - \beta$ y luego $C_l\ (\alpha)$ y $C_d\ (\alpha)$.

4. Se actualiza a y a' de las Ecuaciones (97) y (98).

5. Si a y a' cambian más de cierta tolerancia, el proceso se repite hasta que los factores de inducción recién calculados se encuentren dentro de una tolerancia aceptable de los anteriores. Este método es especialmente útil para condiciones de rotor con estela turbulenta. [3]

2.4.6 Factor de pérdida de punta de Prandtl.

Existen dos suposiciones necesarias para la aplicación de la teoría BEM. La primera, es la independencia radial de todos los elementos anulares, y la segunda es que la fuerza de los álabes actuando sobre el flujo, es constante en cada uno de los elementos anulares. Desde luego, estas suposiciones no son totalmente ciertas. El factor de pérdida de punta de Prandtl es una relación empírica que corrige la segunda suposición. [13]

De acuerdo con la teoría de Glauert, el álabe óptimo se encuentra cuando la distribución de la circulación permanece constante a lo largo del álabe. Así, la vorticidad únicamente puede ser derramada en la raíz y la punta del álabe. Prandtl teorizó que la propela óptima derrama una hoja de vórtice helicoidal el cual se mueve como un cuerpo rígido mientras es convecta lejos del rotor. En los modelos de factor de pérdida de punta estas hojas de vórtices son una serie de planos paralelos con un espaciamiento uniforme. [13]

$$F = \frac{2}{\pi}\cos^{-1} e^{f} \tag{99}$$

$$f = -\frac{(N/2)\big(1-(r/R)\big)}{(r/R)\sin\emptyset} \tag{100}$$

Así, el factor de pérdida de punta (F) tiende a cero cerca de la punta. El empuje y el torque también decrecen cerca de la punta.

Capitulo III Análisis Modal.

3.1 Introducción.

Como parte del procedimiento de diseño y manufactura de los álabes, todos los prototipos de palas de turbinas eólicas se someten a un procedimiento de prueba experimental para garantizar que las palas de turbinas eólicas producidas cumplan con los requisitos de diseño reales. Además de las pruebas experimentales de la capacidad de carga bajo cargas extremas y las pruebas de resistencia a la fatiga, es una práctica común complementar con pruebas de las propiedades dinámicas básicas de las palas, como las frecuencias naturales y las propiedades de amortiguación, ya que son esenciales para el comportamiento dinámico y la integridad estructural de toda la turbina eólica.

Las palas de las turbinas eólicas son estructuras complejas dados los diversos campos científicos involucrados en su estudio, desde el análisis aerodinámico hasta el compuesto de fatiga y falla. La pala de la turbina eólica está sometida a un proceso de fuerzas acopladas, por lo que cuando tenemos la misma frecuencia natural para la pala y las fuerzas excitantes, se produce la resonancia. Lo que hace que el análisis modal de la pala sea de gran importancia.

3.2 Vibración.

El estudio de la vibración se refiere a los movimientos oscilatorios de los cuerpos y las fuerzas asociadas con ellos. Todos los cuerpos que poseen masa y elasticidad son capaces de vibrar. Así, la mayoría de las máquinas de ingeniería y las estructuras experimentan vibraciones hasta cierto punto, y su diseño en general requiere consideración de su comportamiento oscilatorio.

Hay dos clases generales de vibración, libre y forzada. La vibración libre ocurre cuando un sistema oscila bajo la acción de fuerzas inherentes al sistema mismo, y cuando las fuerzas externas impresas son ausentes. El sistema bajo vibración libre vibrará en una o más de sus frecuencias naturales, que son propiedades del sistema dinámico establecido por su distribución de masa y rigidez.

La vibración que tiene lugar bajo la excitación de fuerzas externas se llama vibración forzada. Cuando la excitación es oscilatoria, el sistema se ve obligado a vibrar a la frecuencia de excitación. Si la frecuencia de excitación coincide con una de las frecuencias naturales del sistema, se encuentra una condición de resonancia y pueden producirse oscilaciones peligrosamente grandes. La expresión siguiente define a la Frecuencia Natural. [14]

$$F_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{101}$$

Donde k es la rigidez del material y m corresponde a la masa del material.

La falla de estructuras importantes, en nuestro caso álabes, es una posibilidad bajo resonancia. Por lo tanto, el cálculo de las frecuencias naturales es de gran importancia en el estudio de las vibraciones.

3.3 Materiales del diseño.

Las palas de la turbina eólica son estructuras complejas hechas de superficies 3D que resultan del ensamblaje de secciones de superficie aerodinámica con varias longitudes de cuerda, diferentes ángulos de giro y ubicaciones de eje de inclinación. Por lo general, se construyen a partir de varias piezas compuestas (en nuestro caso) fibra de vidrio / epoxi y se pegan entre sí, y también en fibra de carbono y madera en algunas ocasiones especiales.

Como ya se mencionó, para esta investigación se utilizaron dos diferentes materiales para el diseño de los álabes; Fibra de Vidrio/epoxy y Fibra de Carbono [15].

Las propiedades necesarias para llevar a cabo la simulación se enumeran en la siguiente tabla:

Material	**Densidad ρ (Kg/m^3)**	**Módulo de Young G (GPa)**	**Coeficiente de Poisson ν**
Fibra de vidrio / epoxy	1900	4.1	0.26
Fibra de Carbono	1620	7.2	0.28

Tabla 3.1 Propiedades mecánicas de los materiales.

El diseño de los álabes se consideró hueco para los materiales de Fibra de Vidrio y Fibra de Carbono para que sean lo suficientemente ligeros y permitan que el rotor arranque lo más pronto posible, además de que así se reducen los esfuerzos inerciales.

3.4 Selección del perfil aerodinámico.

El proceso inicia con la selección de los parámetros del rotor y la selección del perfil aerodinámico. El diseño del aspa emplea las ecuaciones y relaciones de la teoría BEM (en nuestro caso se diseñaron tres álabes). Los parámetros generales de selección de un perfil aerodinámico son el Número de Reynolds, la velocidad de viento y las consideraciones estructurales, el perfil seleccionado en esta investigación fue el NRELS818, que forma parte de una familia de perfiles desarrollado por el Laboratorio Nacional de Energías Renovables (NREL). El perfil NRELS818 es elegido por sus grandes características como un buen rendimiento en su coeficiente de sustentación máxima e insensible a los efectos de rugosidad (NREL 2012), se muestra en la figura 3.1.

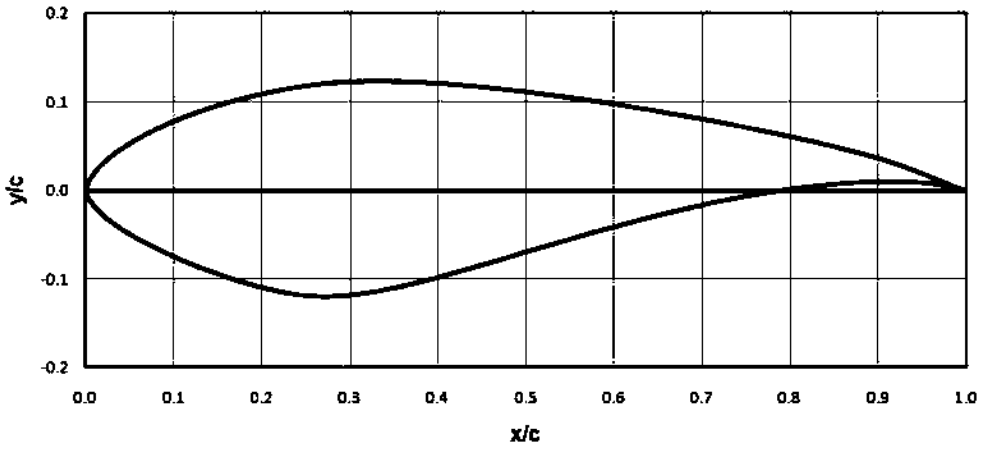


Figura 3.1 Perfil aerodinámico NRELS818. Cortesía NREL [16]

3.5 Modelado de la geometría del perfil.

Para modelar la geometría del perfil, fue necesario contar con el programa de simulación de Elemento Finito. Las estructuras, componentes o dominios reales son en general muy complejos y deben reducirse a una geometría manejable. Las partes curvas de la geometría y sus límites se pueden modelar utilizando curvas y superficies curvas. Debe tomarse en cuenta que la geometría se encuentra eventualmente representada por una colección de elementos, y las curvas tanto como las superficies se aproximan mediante líneas rectas por partes o superficies planas, si se utilizan elementos lineales. La precisión de la representación de las partes curvas está controlada por el número de elementos utilizados, entre más elementos son usados, la representación de las partes curvas por bordes rectos será más uniforme y precisa Pero desafortunadamente, entre más elementos se tengan, más tiempo de cálculo se requiere, debido a las limitaciones en hardware y software computacional, siempre es necesario limitar el número de elementos. Es posible realizar diferentes pruebas con diferentes números de elementos para comprobar el tiempo de consumo de la simulación. Las partes con detalles más finos de la geometría deben refinarse por áreas, pero solo si se requieren resultados muy precisos para esas regiones. [17] En la figura 3.2 se muestra el modelado de los perfiles del diseño de los álabes.

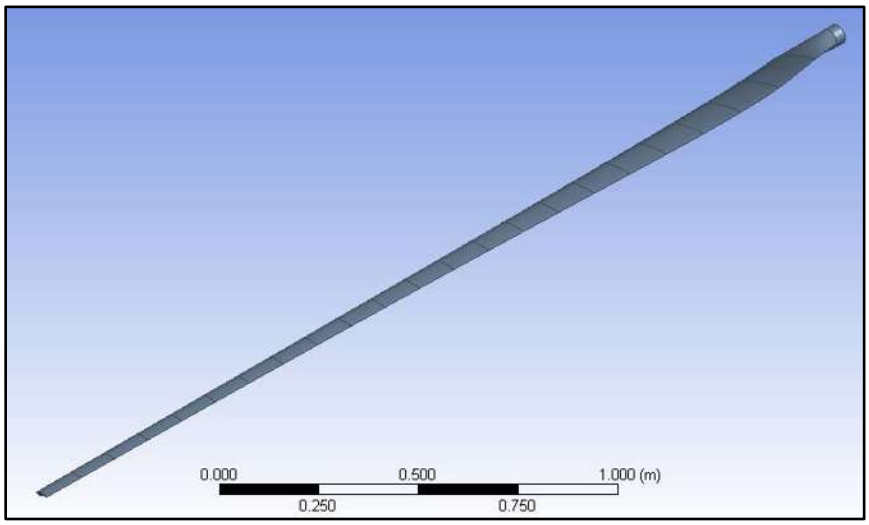


Figura 3.2 Perfil del álabe. [18]

3.6 Mallado.

El mallado se realiza para discretizar la geometría creada en pequeñas piezas llamadas elementos o celdas. La solución para un problema de ingeniería sería muy compleja y podría variar de una manera muy impredecible usando funciones en todo el dominio del problema. Pero si el dominio del problema se puede dividir (mallar) en pequeños elementos o celdas usando un conjunto de cuadrículas o nodos, la solución dentro de un elemento se puede aproximar muy fácilmente usando funciones simples como polinomios. Las soluciones para todos los elementos forman la solución para todo el dominio del problema. [19] En la figura 3.3 se muestra un ejemplo de la malla final de los diseños de los álabes.

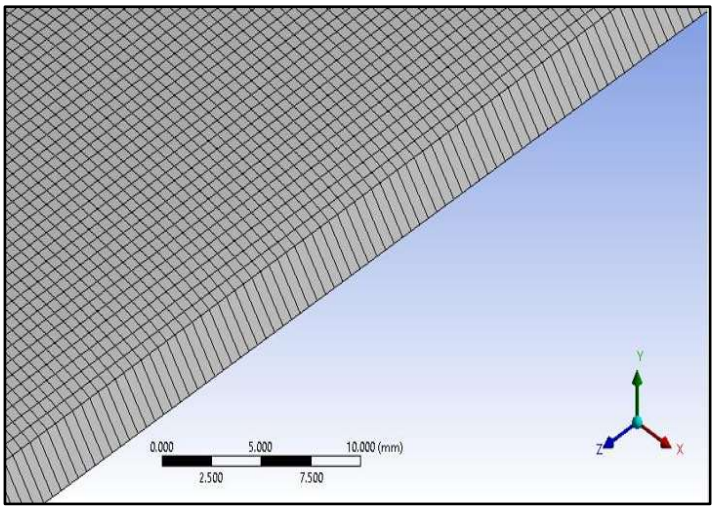
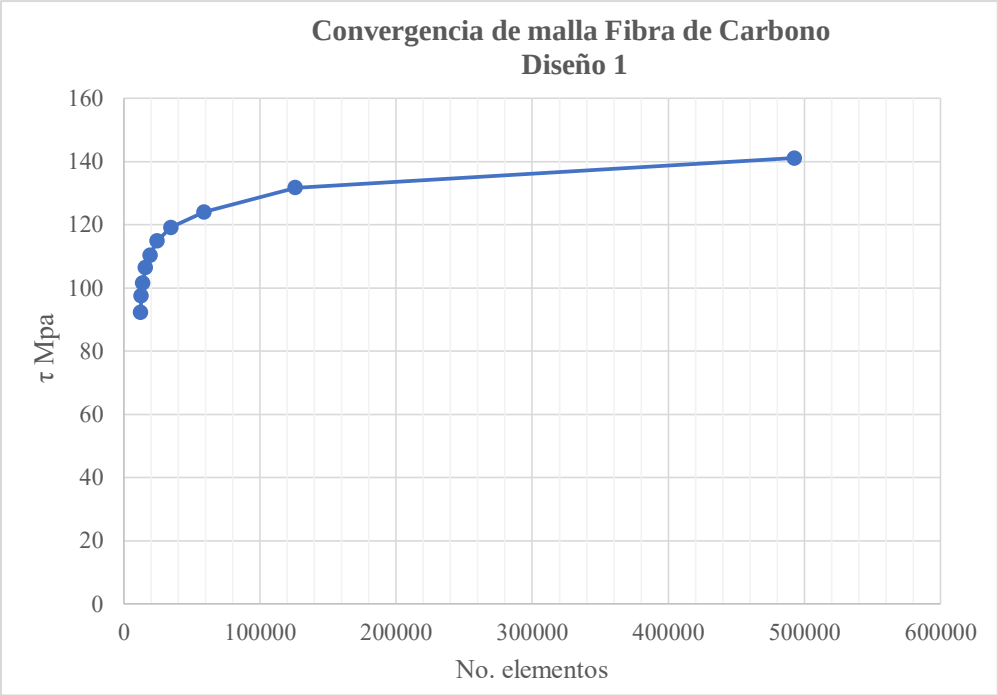


Figura 3.3 Malla final de los diseños de los álabes. [18]

Para llevar a cabo la malla de un elemento se necesitan teorías apropiadas para discretizar las ecuaciones diferenciales gobernantes basadas en los dominios discretizados. La generación de malla

es una tarea muy importante del pre-proceso. Los principales parámetros que se utilizaron en el método en todos los álabes en cada uno de los materiales fueron; la geometría en 3D, tipo del elemento: Hexaédrico, tamaño del elemento: 1 mm. En las siguientes graficas se aprecia la convergencia de malla respecto número de elementos y el esfuerzo máximo equivalente (Von Mises).

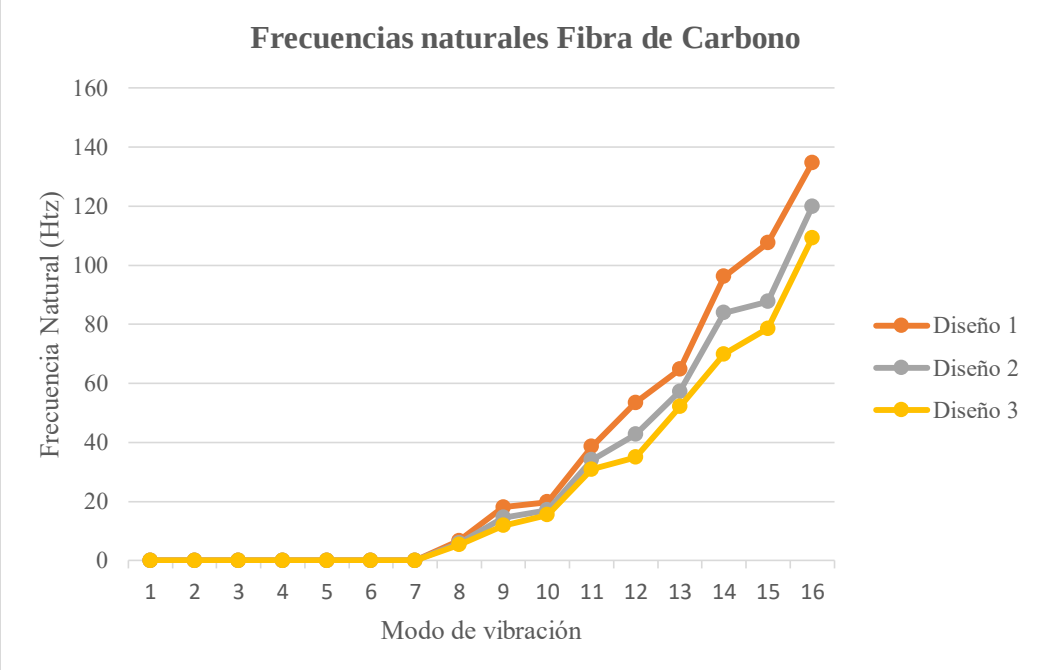


Gráfica 3.1 Convergencia de malla. Diseño 1, material Fibra de Carbono.

El número de elementos y nodos, varía respecto al material y al modelo del álabe. Se consideraron los álabes con propiedades de un medio continuo y como materiales isotrópicos, una variación en el valor de la velocidad especifica de 8, 9 y 10, cada uno de estos valores de velocidad especifica corresponden a un diseño respectivamente (diseño 1, diseño 2 y diseño 3), y la longitud del álabe de 2.79 m. En nuestro caso para la simulación y el cálculo de las frecuencias naturales no se toman en cuenta cargas externas al medio, ya que debe vibrar libremente para saber los modos de vibración a los cuales fallará y saber su frecuencia antes de aplicar una fuerza externa, así como también se tomaron sólo los primeros 15 modos de vibración, que a continuación se enumeran con su grafica correspondiente:

Frecuencia natural Fibra de Carbono (Htz)			
Modo	Diseño 1	Diseño 2	Diseño 3
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	1.40E-04	2.15E-04
5	0	2.20E-04	2.76E-04
6	7.55E-05	2.37E-04	3.15E-04
7	6.6504	5.8713	5.3538
8	18.047	14.558	11.874
9	19.738	17.106	15.487
10	38.588	34.044	30.872
11	53.495	42.754	34.984
12	64.787	57.243	52.068
13	96.182	83.916	69.899
14	107.53	87.708	78.578
15	134.63	119.82	109.16

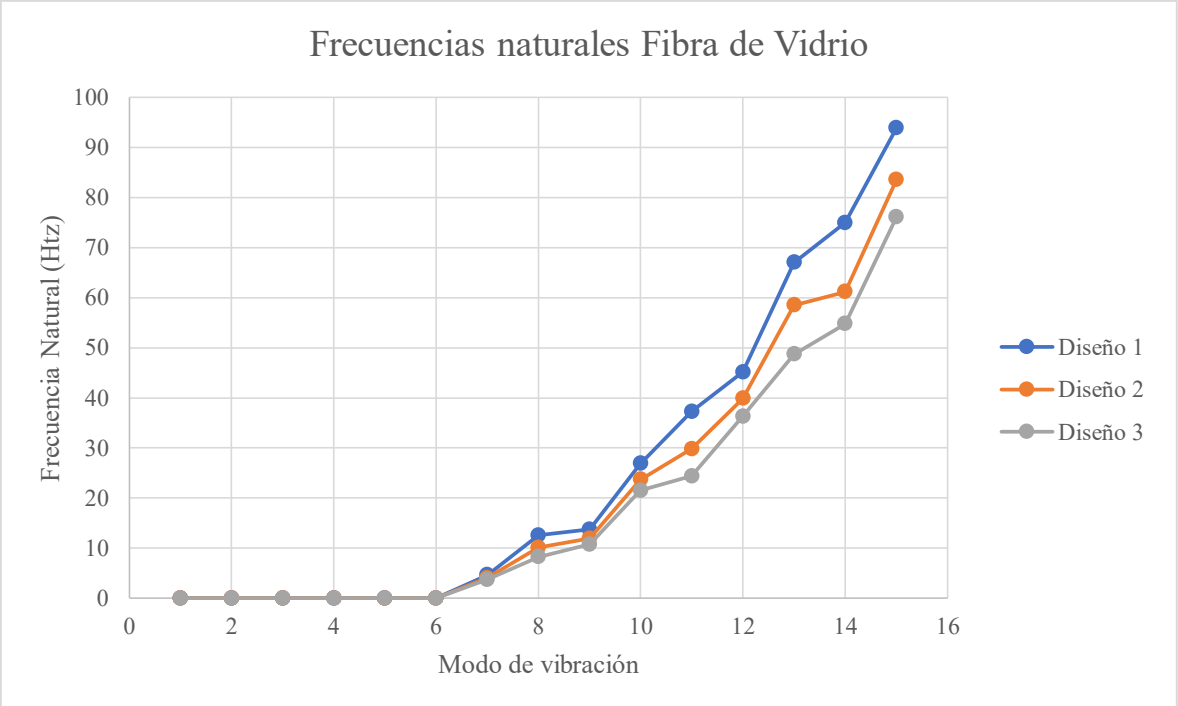
Tabla 3.2 Frecuencias Naturales Fibra de Carbono



Gráfica 3.2 Frecuencias Naturales Fibra de Carbono

Frecuencia natural Fibra de Vidrio (Htz)			
Modo	Diseño 1	Diseño 2	Diseño 3
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	1.00E-04	5.15E-05	0.00E+00
5	1.61E-04	1.13E-04	0.00E+00
6	1.90E-04	1.59E-04	4.64E-05
7	4.634	4.0911	3.7305
8	12.575	10.144	8.2741
9	13.753	11.919	10.792
10	26.889	23.722	21.511
11	37.277	29.792	24.377
12	45.145	39.887	36.281
13	67.023	58.475	48.708
14	74.933	61.119	54.755
15	93.824	83.494	76.065

Tabla 3.3 Frecuencias naturales Fibra de Vidrio



Gráfica 3.3 Frecuencias naturales Fibra de Vidrio.

Se observa también que, de acuerdo con los datos obtenidos, los primeros modos (1-3) se pueden despreciar ya que su magnitud en frecuencias naturales son cero y que no generan una cifra significativa en nuestros cálculos y que a partir del modo número 7 se obtienen las frecuencias significativas de importancia, de igual manera en modos superiores a los calculados (15 modos) son combinaciones lineales de los modos inferiores. También los modos de vibración dependen de las dimensiones del álabe, por ejemplo, en el diseño 3 que es más delgado en la extremidad del álabe, las frecuencias naturales son menores a comparación de los demás diseños.

Fibra de Carbono			
Velocidad específica	Frecuencia Natural (Htz)	Masa (Kg)	Rigidez K (N/m)
λ=8	6.6504	12.171	538.2968
λ=9	5.8713	9.8149	338.3408
λ=10	5.3538	8.0743	231.4351

Tabla 3.4 Resultados de la simulación análisis modal, Fibra de Carbono.

Fibra de Vidrio			
Velocidad específica	Frecuencia Natural (Htz)	Masa (Kg)	Rigidez K (N/m)
λ=8	4.634	14.275	306.5407
λ=9	4.0911	11.511	192.6607
λ=10	3.7305	9.4699	131.7891

Tabla 3.5 Resultados de la simulación análisis modal, Fibra de Vidrio.

En las tablas 3.4 y 3.5 se muestran los resultados de las simulaciones de análisis modal de los diseños de los álabes, es importante mencionar que la frecuencia natural de las tablas mencionadas corresponden a el modo de vibración número 7, la rigidez se calculó respecto a la frecuencia natural y a la masa obtenidas también de la misma simulación.

Capitulo IV Análisis estructural de los diseños aerodinámicos de los álabes de las turbinas de viento.

4.1 Análisis de elemento finito de los alabes de una turbina de viento para frecuencias naturales y esfuerzos principales.

En este apartado se muestra el procedimiento del modelado y simulación de acuerdo al método del elemento finito, de los diseños de los álabes supuestos, siguiendo así, el camino de la figura 4.1:

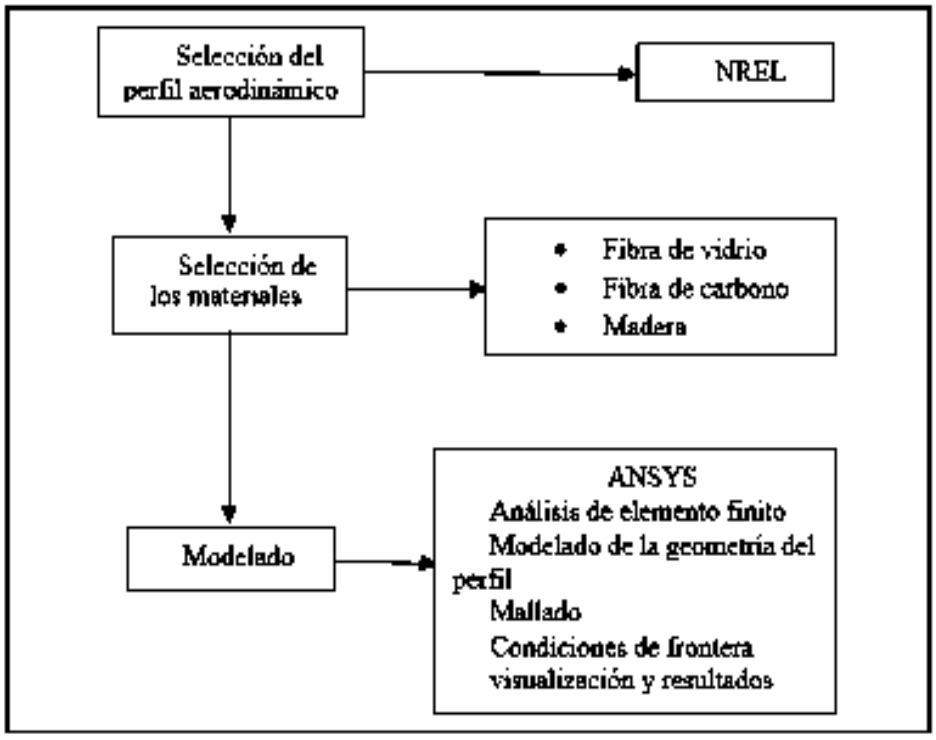


Figura 4.1 Diagrama de modelado y simulación de los diseños de los álabes.

4.2 Determinación de cargas mediante la norma.

La norma UNE-EN 61400-2, define una turbina pequeña con un área de barrido del rotor de menos de 200 m^2, que corresponde aproximadamente a una potencia nominal de menos de 50 kW. [7]

La UNE-EN 61400-2, permite el análisis de la seguridad de la turbina a través de tres mecanismos:

- El “Modelo de carga simple” (SLM):

Que combina ecuaciones sencillas y posiblemente simplistas para las cargas principales con factores de alta seguridad. Como su nombre lo indica, es la metodología de diseño más simple y se aplica a los álabes del presente proyecto de investigación.

- El modelado "aeroelástico":

Implica un modelado computarizado más preciso de las cargas de turbinas eólicas en respuesta a entradas estocásticas como los cambios en la dirección del viento y las ráfagas. Este método se usa habitualmente para aerogeneradores grandes.

- Mediciones de carga con extrapolaciones para condiciones extremas:

Obviamente, esto requiere pruebas de campo, mientras que las dos primeras metodologías se pueden usar en la etapa de diseño. Comúnmente, se emplean técnicas de extensometría para obtener los parámetros de deformación y esfuerzos que se requieren para la valoración de ingeniería.

El primer paso para aplicar el Modelo de carga simple (SLM), es definir la clase de turbina que se pretende evaluar. Teniendo en cuenta que la velocidad promedio del viento utilizada es de 12 m/s, para nuestro caso, la turbina diseñada es de clase I, la tabla 4.1 define las clases para los aerogeneradores pequeños. [20]

Clase de AP		**I**	**II**	**III**	**IV**	**S**
V_{ref}	(m/s)	50	42,5	37,5	30	Valores a especificar por el proyectista
V_{ave}	(m/s)	10	8,5	7,5	6	
I_{15} (Nota 2)	(-)	0,18	0,18	0,18	0,18	
a	(-)	2	2	2	2	

NOTA
1) Los valores se aplican a la altura del buje, y;
2) I_{15} es el valor característico adimensional de la intensidad de la turbulencia para 15 m/s, donde 0,18 es el valor mínimo que debe utilizarse, y el anexo M trata de la intensidad de la turbulencia;
3) α es el parámetro adimensional de la pendiente a utilizar en la ecuación (7).

Tabla 4.1 Parámetros básicos para las clases de aerogeneradores pequeños. [20]

4.3 Hipótesis de carga.

En el diseño de un aerogenerador es importante tomar en cuenta las condiciones a las que este estará sometido durante su operación. La norma española UNE-EN 61400-2 [20] considera aspectos como el montaje, el izado, mantenimiento y los modos de funcionamiento bajo condiciones extremas. Con ayuda de esta norma es posible generar expresiones para simular diferentes hipótesis de carga a las cuales se puede ver sometida una turbina de viento.

Para empezar a aplicar las hipótesis definidas de acuerdo a los requerimientos necesarios, es importante primero definir el sistema de coordenadas para ubicar las cargas de un aerogenerador de eje horizontal, esto es como se muestra en la figura 4.2

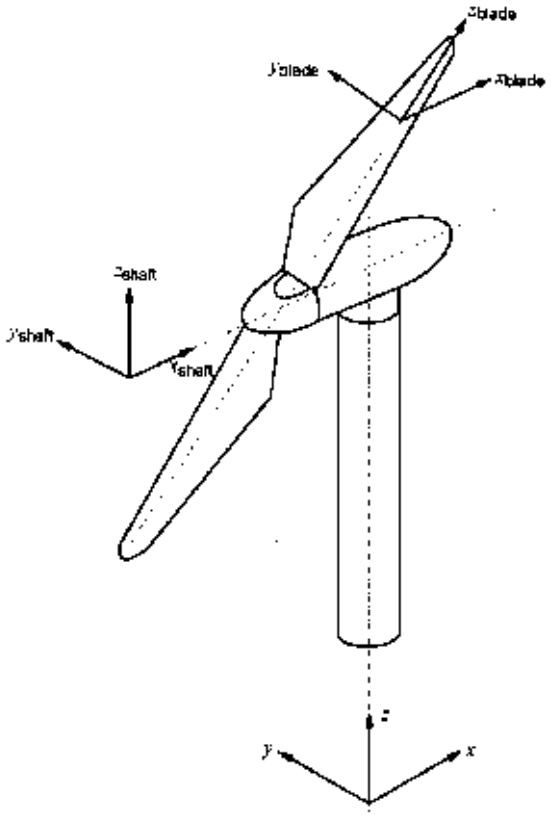


Figura 4.2 Sistemas de coordenadas de un aerogenerador de eje horizontal. [20]

Para los requerimientos de acuerdo a nuestro diseño, se seleccionó el método de cargas simplificadas descrito según la lo Norma Española UNE-EN 61400-2 [20]. Se deben de cumplir con configuraciones de aerogeneradores, que son las siguientes:

- Eje horizontal
- Rotor de tipo hélice
- Palas en voladizo
- Movimiento coordinado de las palas
- Buje rígido

La hipótesis de carga para la metodología de las cargas simplificadas se resume en la tabla 4.2. [20]

Situación de diseño	Hipótesis de carga		Flujo del viento	Tipo de análisis	Observaciones
Producción de energía	**A**	Operación normal		F	
	B	Orientación	$V_{hub} = V_{design}$	U	
	C	Error de orientación	$V_{hub} = V_{design}$	U	
	D	Empuje máximo	$V_{hub} = 2{,}5\ V_{ave}$	U	Rotación del rotor pero puede estar plegándose o aleteando
Producción de energía más ocurrencia de fallo	**E**	Velocidad de rotación máxima		U	
	F	Cortocircuito en la conexión de carga	$V_{hub} = V_{design}$	U	Par generador en cortocircuito máximo
Parada	**G**	Desconexión (frenado)	$V_{hub} = V_{design}$	U	
Carga extrema del viento	**H**	Carga extrema del viento	$V_{hub} = V_{e50}$	U	El aerogenerador puede estar inmovilizado (en ralentí o parada) o regulado. Ninguna intervención manual
Condiciones de inmovilización y de falta	**I**	Inmovilización con carga del viento y exposición máxima	$V_{hub} = V_{ref}$	U	El aerogenerador es cargado con la exposición más desfavorable
Transporte, montaje, mantenimiento y reparación	**J**	Deberá estar indicado por el fabricante		U	
Leyenda F análisis de cargas debidas a fatiga. U análisis de cargas críticas.					

Tabla 4.2 Hipótesis de carga de diseño para el método de cálculo de cargas simplificadas. [20]

Para nuestro caso las Hipótesis de carga A y las Hipótesis de carga B fueron utilizadas para el análisis de elemento finito, ya que estas son las que representan la mayoría de las condiciones a las cuales se ve expuesto el aerogenerador.

4.3 Relaciones generales.

A continuación se mencionan algunas relaciones y definiciones básicas e importantes para el cálculo y aplicación de las hipótesis de carga.

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \tag{102}$$

Donde:

n es la velocidad de rotación del rotor (rpm)

ω_n es la velocidad del rotor (rad/s)

$$\lambda = \frac{V_{tip}}{V_{hub}} = \frac{\omega_n R}{V_{hub}} = \frac{R}{V_{hub}} = \frac{\pi n}{30} \tag{103}$$

Donde:

λ es la relación de velocidad en punta de la pala

V_{tip} es la velocidad de la punta de la pala (m/s)

V_{hub} es la velocidad del viento a la altura del buje (m/s)

R es el radio del rotor (m)

$$Q = \frac{P_r}{\omega_n} = \frac{P}{\eta \omega_n} = \frac{30P}{\eta \pi n} \tag{104}$$

Donde:

Q es el par del rotor (Nm)

P_r es la potencia del rotor (W)

P es la potencia eléctrica (W)

También, se definen algunas variables de diseño para utilizarse en esta Norma IEC 61400-2 [20]:

V_{design} es la velocidad de viento de diseño

P_{design} y η_{design} son respectivamente, la potencia y la velocidad de rotación a V_{design}

4.4 Hipótesis de carga A: Operación Normal.

La hipótesis de carga A es una hipótesis de carga a fatiga con un rango constante. La idea básica de los rangos es que la velocidad de la turbina varía entre 0.5 y 1.5 del diseño. [20]

El rango de velocidad, mediante la variación de n desde $0.5\eta_{design}$ a $1.5\eta_{design}$ ofrece el siguiente rango de F_z (esto asume una velocidad del rotor variable):

$$\Delta F_{zB} = 2 m_B R_{cog} {\omega_n}^2 \tag{105}$$

Donde:

m_B es la masa de la pala

R_{cog} es la distancia entre el centro de gravedad de la pala y el centro del rotor

η_{design} es la velocidad del rotor de diseño definida como la velocidad del rotor a V_{design}

Para el momento de pandeo en los bordes (edgewise) el rango del momento en los bordes consiste en un término debido las variaciones del par (desde 1.5 Q_{design} a 0.5 Q_{design} igualmente divididos entre las B palas) y un término debido al momento del peso de la pala.

$$\Delta M_{xB} = \frac{Q_{design}}{B} + 2m_B g R_{cog} \tag{106}$$

Insertando V_{hub} de la ecuación (103) y P_r de la ecuación (104), tenemos:

$$F_{axial} = \frac{3}{2}\frac{30\lambda}{R\pi n}P_r = \frac{3}{2}\frac{30\lambda}{R\pi n}\frac{Q\pi n}{30} = \frac{3}{2}\frac{\lambda Q}{R} \tag{107}$$

Donde:

R es el radio del rotor (m)

P_r es la potencia del rotor (W)

Asumiendo que la carga se aplica a $2/3\,R$, y dividiendo entre el número de palas se tiene:

$$M_{yB} = \frac{\lambda Q}{B} \tag{108}$$

Esto asume que el ángulo del cono es suficientemente pequeño para despreciar las componentes centrifugas.

4.5 Hipótesis de carga B: Orientación

En esta hipótesis de carga el aerogenerador se orienta con $\omega_{yaw,máx}$ y el rotor girando a $\omega_{n,design}$. La fuerza centrífuga en la carga debido a rango de orientación, multiplicada por la distancia entre la raíz del rotor y el centro de masas de la pala: [20]

$$M_{yB,centrifugal} = m_B {\omega^2}_{yaw,máx} L_{rt} R_{cog} \tag{109}$$

Donde:

L_{rt} es la distancia entre el centro de la raíz de la pala y el eje de orientación (m)

4.6 Cálculo de cargas sobre los álabes.

Una vez analizada la teoría de falla (hipótesis de carga), teniendo en cuenta las siguientes magnitudes de conceptos necesarios, como se muestra en la tabla 4.3:

U ***V_{ave} (m/s)***	***P (W)***	***B (No. de palas)***	***λ (Velocidad específica)***	***η***	***ρ (densidad) (kg/m3)***	***Gravedad***	***L_{rt} (distancia del centro de la raiz al eje de orientación) (m)***	***μ (Viscosidad dinámica de viento) (Kg/m s)***
12	30000	3	8	0.98	1.28	9.81	1	1.849 e -5

Tabla 4.3 Magnitudes básicas.

De igual manera se procede con unos cálculos previos a las cargas de los álabes, cómo son:

- Factor de inducción axial (a):

$$a = \frac{1}{3}$$

- Número de Reynolds (Re):

$$Re = \frac{U\rho L}{\mu} = 830719.31$$

- Radio del rotor (r):

$$r = \sqrt{\frac{2P}{\pi\rho U^3}} = 2.9385\ m$$

- Área del álabe (área barrida por el rotor) (a):

$$A = \pi r^2 = 27.1267\ m^2$$

- Velocidad del rotor (n):

$$n = \frac{U\lambda}{r} = 32.6699\ (rad/s) = 311.9743\ (rpm)$$

- Par del rotor (Q):

$$Q = \frac{B}{n\eta} = 937.0177\ N \cdot m$$

- Velocidad de orientación máxima ($\omega_{yaw\ máx}$)

$$\omega_{yaw\ máx} = 3 - 0.01(\pi r^2 - 2) = 2.7487\ (rad/s)$$

- Carga axial (F_{axial}):

$$F_{axial} = \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda Q}{r}\right) = 3826.5306\ N$$

De acuerdo al sistema de coordenadas según la Norma UNE-EN 61400-2, se procede a encontrar el centro de masa de cada álabe, para así ubicar y aplicar la carga correspondiente, Teniendo así, los siguientes centros de masa que se muestran en las tablas 4.4 y 4.5:

Fibra de Carbono			
Velocidad específica	λ=8	λ=9	λ=10
Cx (m)	0.049874	0.041723	0.035252
Cy (m)	0.021848	0.016773	0.013088
Cz (m)	1.1531	1.1413	1.1323
Masa (Kg)	12.171	9.8149	8.0743
Volumen (m^3)	7.5129 e -3	6.0586 e -3	4.9841 e -3

Tabla 4.4 Centros de masa, masa y volumen de los álabes de Fibra de Carbono.

Fibra de Vidrio			
Velocidad específica	λ=8	λ=9	λ=10
Cx (m)	0.049874	0.041723	0.035252
Cy (m)	0.021848	0.016773	0.013088
Cz (m)	1.1531	1.1413	1.1323
Masa (Kg)	14.275	11.511	9.4699
Volumen (m^3)	7.5129 e -3	6.0586 e -3	4.9841 e -3

Tabla 4.5 Centros de masa, masa y volumen de los álabes de Fibra de Vidrio.

4.6.1 Calculo de Hipótesis de carga A y B.

Tomando en cuenta los datos anteriores se procede con el cálculo de las cargas que se aplicarán en los álabes, teniendo los siguientes resultados (tabla 4.6 y 4.7):

Hipótesis de carga A: Operación Normal				
Fibra de Carbono				
Velocidad específica	MxB	Fx	MyB	Fy
λ=8	587.6938	299.9981	2498.7138	1275.5102
λ=9	497.4131	253.9128	2498.7138	1275.5102
λ=10	429.2478	219.1167	2498.7138	1275.5102
Fibra de Vidrio				
Velocidad específica	MxB	Fx	MyB	Fy
λ=8	635.2943	324.2966	2498.7138	1275.5102
λ=9	535.3927	273.3002	2498.7138	1275.5102
λ=10	460.2521	234.9434	2498.7138	1275.5102

Tabla 4.6 Magnitudes de Hipótesis de carga A.

Hipótesis de carga B: Orientación		
Fibra de Carbono		
Velocidad específica	Mz	Fz
λ=8	106.0372	54.1285
λ=9	84.6351	43.2034
λ=10	69.0767	35.2613
Fibra de Vidrio		
Velocidad específica	Mz	Fz
λ=8	124.3678	63.4856
λ=9	99.2608	50.6693
λ=10	81.0162	41.3561

Tabla 4.7 Magnitudes de Hipótesis de carga B.

En las tablas 4.6 y 4.7 se muestran los resultados del cálculo de las Hipótesis de carga, en cada uno de los diseños correspondientes.

4.7 Análisis por Elemento Finito.

El análisis por elemento finito (FEA, Finite Element Anallysis) es una técnica de simulación por computadora que a su vez usa una técnica numérica llamada FEM o método de elementos finitos. Este análisis surge en 1943 por Richard Courant, él usaba el método de Ritz para obtener soluciones aproximadas en sistemas oscilatorios. Este método se basa en una investigación, que se dio principalmente en el área aeroespacial, surge del análisis estructural de matrices de desplazamiento. [21]

El método de elementos finitos (FEM) es un método numérico para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales complejas obteniendo una solución numérica aproximada sobre un objeto, las ecuaciones caracterizan el comportamiento físico del problema y lo divide en subdominios no intersectantes o "elementos finitos".

Estos elementos forman una parte del dominio conocida como discretización, cada elemento está conformado por puntos o nodos y al conjunto de nodos se le llama malla. La generación de la malla se hace en el pre-proceso mediante generadores de malla, teniendo una serie de nodos con sus respectivas conexiones a estas relaciones se les asigna un valor de un conjunto de variables incógnitas definidas en cada nodo llamadas grados de libertad.

Al conjunto de relaciones entre los valores de las variables entre nodos forma un sistema de ecuaciones lineales, formando una matriz de rigidez del sistema.

Al ser el FEA un método por aproximaciones su precisión depende de la discretización en el modelo esto se puede lograr al usar más cantidad de elementos y nodos. Este método es usado para determinar esfuerzos, problemas de transferencia de calor, dinámica de fluidos y electromagnetismo. El análisis por elementos finitos se divide en tres partes: [22]

1. Pre-procesamiento: Definición del modelo de elementos y factores que influyen en el Sistema.
2. Solución del análisis: Solución del modelo de elementos finitos.
3. Post-procesamiento: Visualización de resultados.

4.7.1 Método del Elemento Finito (FEM).

El método de los elementos finitos es un procedimiento numérico que se puede utilizar para obtener soluciones a una gran cantidad de problemas de ingeniería que involucran análisis de tensión, transferencia de calor, electromagnetismo y flujo de fluidos, así como también es una técnica para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales. Su aplicación encuentra en situaciones en las que la ecuación a resolver es compleja o la geometría en la que se desea la solución es compleja.

El proceso para resolver un problema utilizando el método de elementos finitos implica seis pasos principales:

1. **Establecer ecuaciones gobernantes y condiciones de frontera.**

Para generar una solución aproximada válida a un problema, se debe determinar la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento y las condiciones de contorno correspondientes para el problema. Una vez hecho esto, se puede utilizar la formulación de elementos finitos adecuada para generar la solución.

2. **Dividir el dominio de la solución en elementos.**

En este paso, todo el dominio de la solución se subdivide en elementos "pequeños". Se debe tener cuidado para asegurarse de que se incluyan suficientes elementos para capturar el comportamiento de la solución en todo el dominio. Las áreas de especial interés y cuidado son ubicaciones donde se esperan valores críticos, ubicaciones con grandes gradientes, ubicaciones donde la geometría cambia repentinamente, ubicaciones donde se aplican condiciones de contorno y cargas. Normalmente, cuanto mayor sea el número de elementos, mejor será la aproximación de la solución a la ecuación diferencial.

3. **Determinar las ecuaciones de elementos.**

Una vez formados los elementos, se desarrollan las ecuaciones algebraicas a resolver para cada elemento individual. La forma de las ecuaciones algebraicas para cada elemento será la misma.

Las diferencias de un elemento a otro se deben a cambios en el tamaño y las propiedades del elemento. Este es el poder del método de elementos finitos, las ecuaciones se pueden escribir una vez para un elemento general, luego solo necesitan ser modificadas para reflejar la geometría y propiedades de un elemento particular.

4. **Ensamblar ecuaciones globales.**

Una vez que se generan todas las ecuaciones de elementos, se unen para formar un sistema de ecuaciones para todo el dominio de la solución.

5. **Solución de ecuaciones globales.**

Este sistema de ecuaciones se resuelve para el valor de la variable dependiente en la ecuación diferencial original en puntos discretos a lo largo del dominio de la solución. Dependiendo del tipo de problema, puede haber cientos, miles, decenas de miles o incluso cientos de miles de puntos en los que se aproxima la solución de la ecuación diferencial.

6. **Verificación de la solución.**

La precisión de la solución debe verificarse antes de que los resultados puedan considerarse válidos.

Una forma de hacer esto es refinar la malla (aumentar el número de elementos) y volver a ejecutar la solución. Si el valor de la variable dependiente en los puntos discretos de la malla no cambia significativamente a medida que se refina la malla, se considera que la solución es precisa.

Habiendo establecido la ecuación gobernante y la condición de frontera, se puede abordar el desarrollo de una formulación de elementos finitos apropiada.

La formulación del elemento se establece considerando una pequeña sección del cuerpo en cuestión y considerando qué fuerzas se desarrollan en la sección como resultado de los desplazamientos en cada extremo de la sección. El proceso se maneja en tres pasos que se ilustran en la figura 4.3. [23]

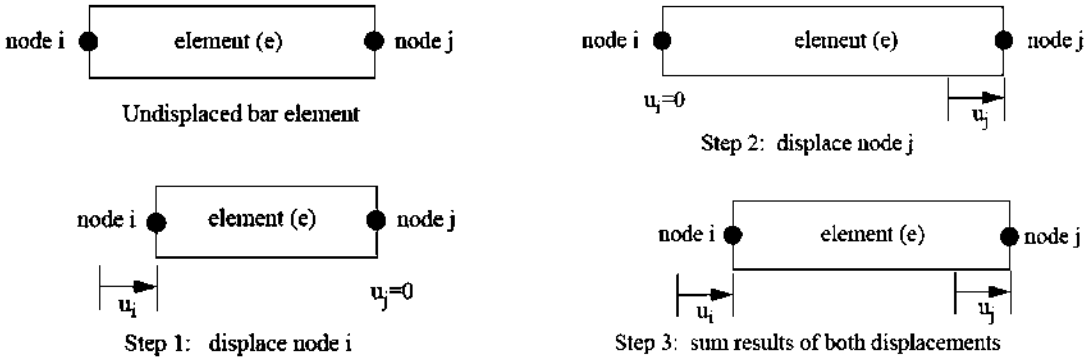


Figura 4.3 Formulación del elemento. [23]

En el primer paso, las reacciones internas del elemento *(e)* en los nodos *i* y *j* se determinan para un desplazamiento en el nodo *i*. La reacción en el nodo *i* es:

$$R_{ii} = k_{ii} u_i \tag{110}$$

Donde:

$$k_{ii} = \left(\frac{AE}{L}\right)_{(e)} \tag{111}$$

Ésta es la fuerza necesaria para provocar el desplazamiento u_i. Para que el elemento de barra esté en equilibrio debe haber una reacción correspondiente en el nodo *j*, que viene dada por:

$$\sum Fx = R_{ii} + R_{ji} = 0 \tag{112}$$

Entonces tenemos:

$$R_{ji} = -R_{ii} = -\left(\frac{AE}{L}\right)_{(e)} u_i \tag{113}$$

Donde:

R_{ii} es la reacción interna en el nodo i debido a un desplazamiento en el nodo i

R_{ji} es la reacción interna en el nodo j debido a un desplazamiento en el nodo i.

Una vez completado el primer paso del proceso de elementos finitos, se puede realizar el segundo paso de dividir el dominio de la solución en elementos. Para este ejemplo se utilizarán dos elementos. Esta subdivisión se muestra en la figura 4.4. [23]

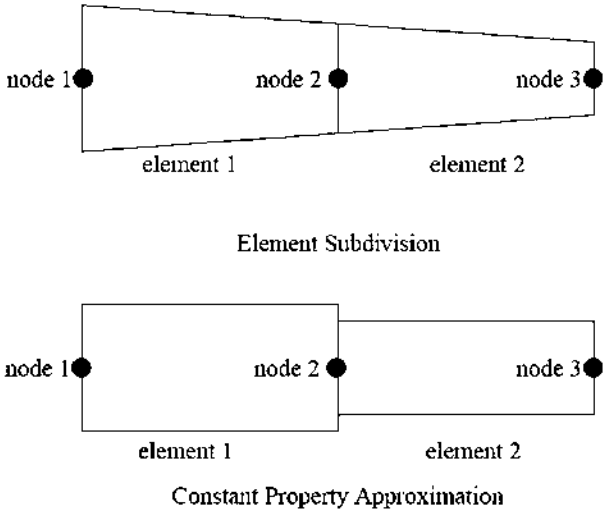


Figura 4.4 División del Elemento Finito. [23]

Podemos mostrar fácilmente que bajo cargas nodales adicionales y otras condiciones de frontera fijas, la relación dada se puede poner en la forma general:

$$\{R\} = \{K\}\{u\} - \{F\} \tag{114}$$

Que significa:

$$\begin{aligned} &\{Matriz\ de\ reacción\} \\ &\quad = \{Matriz\ de\ Rigidez\}\{Matriz\ de\ despazamiento\} \\ &\quad - \{Matriz\ de\ carga\} \end{aligned} \tag{115}$$

Como ya se mencionó en el capítulo anterior, en el mallado de los álabes se utilizó un tipo de malla hexaédrica, como se muestra en la figura 4.5.

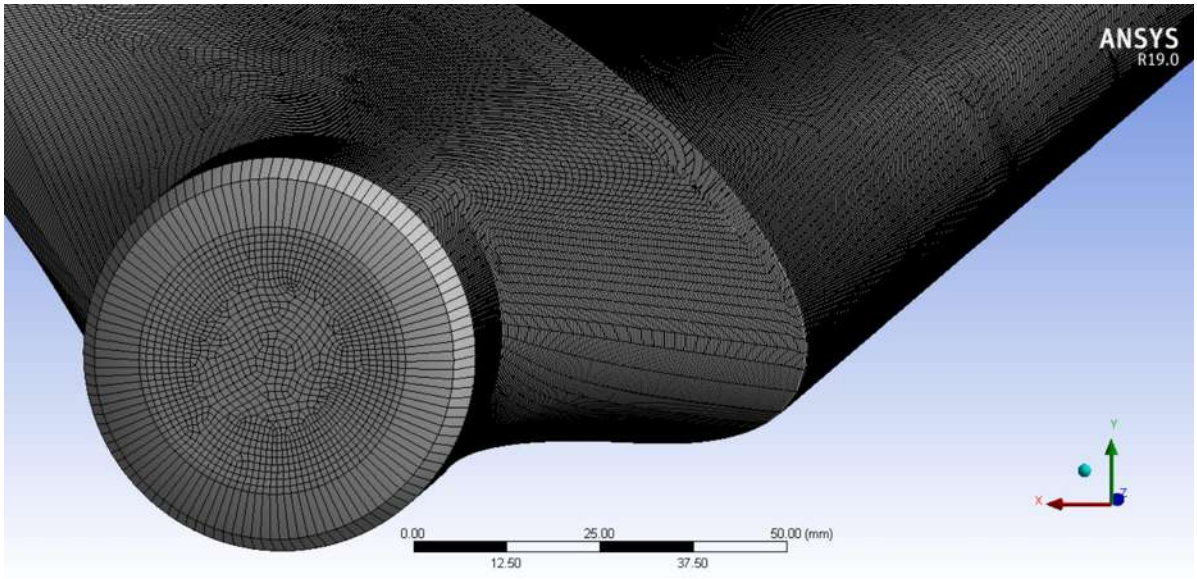


Figura 4.5 Mallado de álabe en Análisis Estructural. [18]

Una vez que el programa termina de generar la malla se procede a colocar ubicar las fuerzas, calculadas anteriormente, en los diseños de los álabes, teniendo en cuenta que los álabes están sujetos al Hub, entonces se consideran empotrados y que, la carga aplicada se ubica a 2/3 a lo largo de la pala. En la figura 4.6, se muestra la aplicación de la carga en dichos álabes (B) y el empotramiento (A):

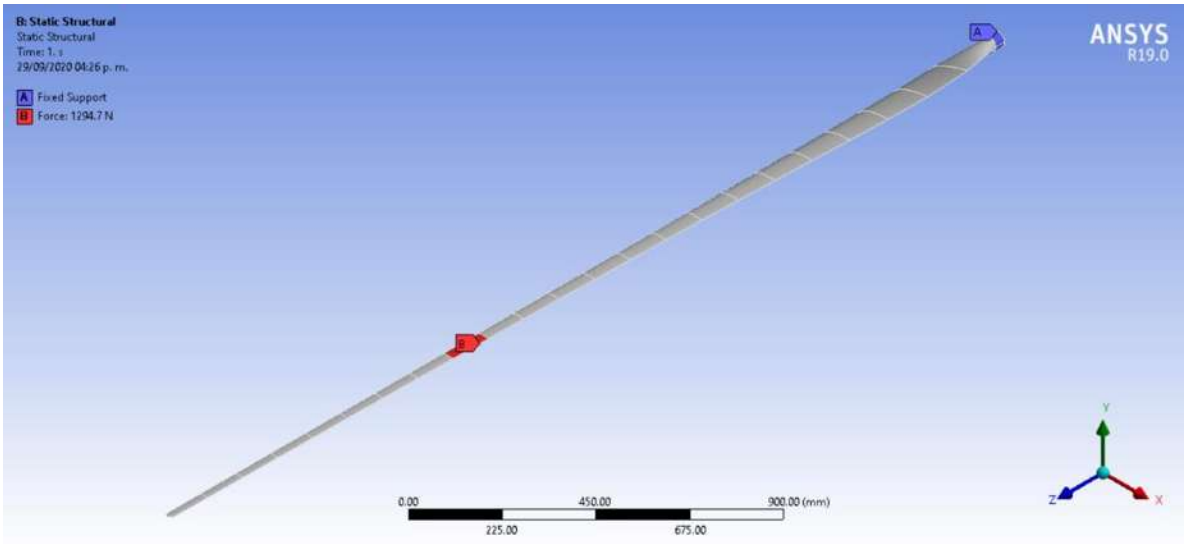


Figura 4.6 Carga y empotramiento en el diseño del álabe [18]

El esfuerzo de Von Mises nos indica cuando un elemento estructural falla debido al sobrepaso de su energía de distorsión [24].

La deformación total nos permite tener una medida de cuanto se llega a flexionar un objeto. Los esfuerzos principales, que actúan sobre los ejes y planos principales del objeto que se está analizando. Las soluciones obtenidas por cada carga suministrada son mostradas sobre el aspa como se muestra en la figura 4.7.

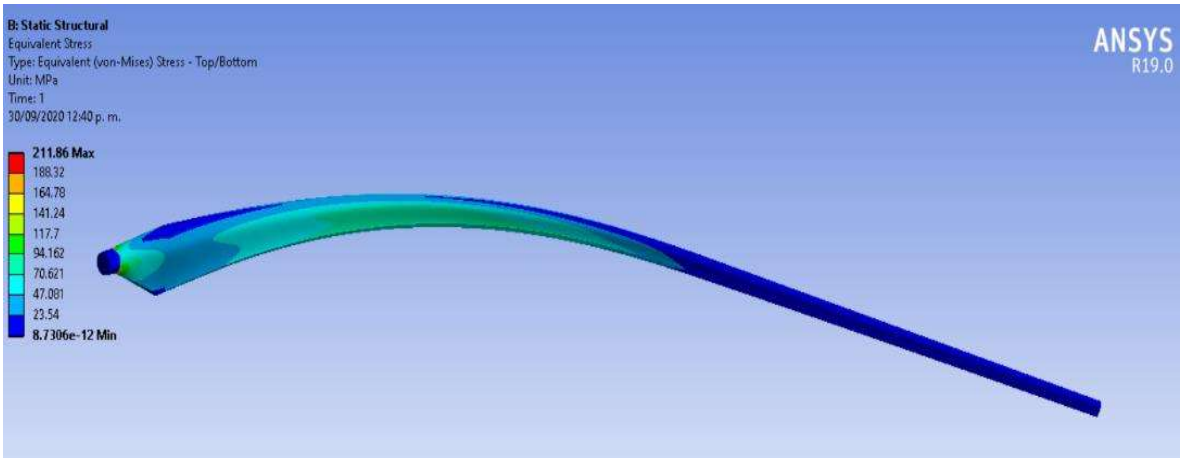


Figura 4.7 Esfuerzo equivalente máximo y mínimo del álabe. [18]

En la figura 4.7, se muestran el esfuerzo máximo y mínimo, expresados en MPa, a los que se ve sometido el álabe cuando se le aplica la fuerza ya antes calculada.

4.8 Resultados de simulaciones (ANSYS R19.0).

Los resultados de las simulaciones de las fuerzas aplicadas en los diferentes diseños de álabes fueron realizados en el software ANSYS R19.0. Cada simulación fue realizada en más de una ocasión, variando el tamaño de los elementos de la malla buscando resultados más exactos.

En la tablas 4.8 y 4.9 se muestran las configuraciones de cada simulación (tamaño y número elemento), teniendo en cuenta que en todas las simulaciones el tipo del elemento es hexaédrico, así como también los esfuerzos resultantes de cada álabe.

Fibra de Carbono			
Velocidad específica	Tamaño (mm)	Número de elementos	Esfuerzo equivalente (Von Mises MPa)
λ=8	1	492694	141.05
λ=9	1	394583	172.23
λ=10	1	326930	211.86

Tabla 4.8 Resultado de simulaciones en Fibra de Carbono.

Fibra de Vidrio			
Velocidad específica	Tamaño (mm)	Número de elementos	Esfuerzo equivalente (Von Mises MPa)
λ=8	1	492710	141.6
λ=9	2	102843	152.83
λ=10	4	29324	165.72

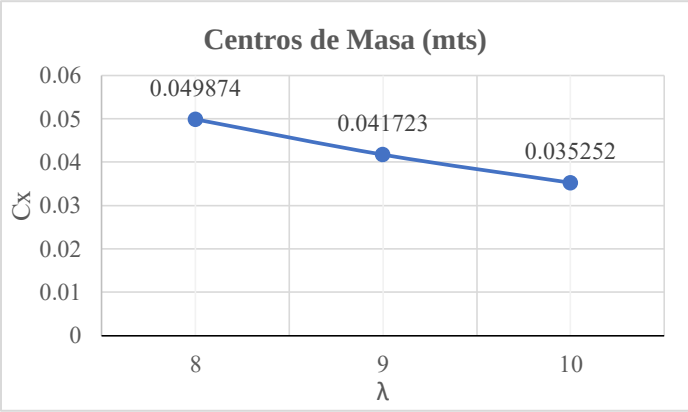
Tabla 4.9 Resultado de simulaciones en Fibra de Vidrio.

De acuerdo a la tabla 4.9 que corresponde al material Fibra de Vidrio, los resultados y enfocándose al tamaños del elemento, se observa que el elemento es un poco más grande (2 mm y 4 mm) en los diseños de velocidad especifica de λ=9 y de λ=10, comparándolos con el tamaño del elemento de Fibra de Carbono, esto es debido a las condiciones necesarias del equipo de cómputo para el programa ANSYS, ya que las simulaciones realizadas con el tamaño del elemento más pequeño fueron muy tardadas y con errores o en ocasiones no se ejecutaba la simulación, es por esto que esos diseños se optó por dejar el tamaño del elemento más pequeño en donde se pudiera realizar la simulación sin errores y confiable.

Es importante mencionar que, el esfuerzo que resulta de la simulación, también depende del centro de masa de los álabes, esto debido a que los alabes tienen distintas dimensiones, pero siendo así solo su coordenada de centro de masa es la que cambia en los tres diseños de los álabes en los dos distintos materiales utilizados, es así como a continuación en la tabla 4.8 y en la gráfica 4.1, se muestran la variación del centro de masa en la coordenada respecto al eje x (cx) de los álabes.

Centros de masa	
Velocidad específica	Cx (mts)
8	0.049874
9	0.041723
10	0.035252

Tabla 4.10 Coordenada de centros de masa respecto al eje x.

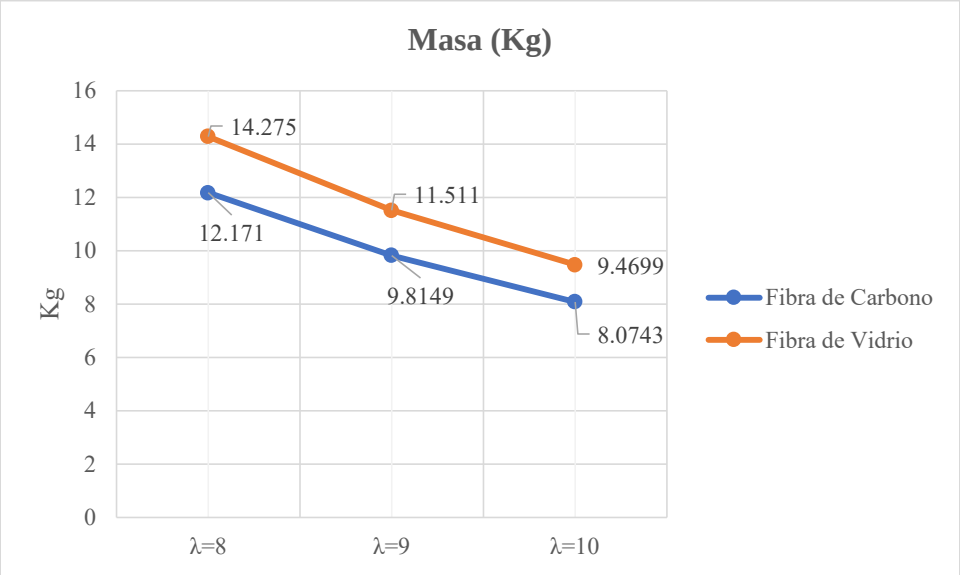


Gráfica 4.1 Variación de la coordenada de centro de masa respecto al eje x

Debido a que, el álabe se vuelve más esbelto sí aumenta la velocidad específica, por lo tanto la masa disminuye, es así como se muestra, en la tabla 4.11 y grafica 4.2, el cambio de la masa de los álabes.

Masa (Kg)		
Velocidad específica	Fibra de Carbono	Fibra de Vidrio
λ=8	12.171	14.275
λ=9	9.8149	11.511
λ=10	8.0743	9.4699

Tabla 4.11 Valores de masa de los álabes



Gráfica 4.2 Cambio de masa respecto de la velocidad específica.

Capitulo V. Diseño óptimo de los álabes de una turbina de viento.

5.1 El proceso de diseño.

Diseñar sistemas ingenieriles puede ser un proceso complejo, en algunas ocasiones deben hacerse suposiciones para desarrollar modelos realistas que pueden ser sometidos a análisis matemáticos por los métodos disponibles. En la fase de formulación del problema de optimización deben tomarse en cuenta muchas posibilidades y factores, los modelos necesitan ser verificados con experimentos. Para la mayoría de las aplicaciones, todo el proyecto de diseño debe desglosarse en varios sub-problemas, cada uno de los sub-problemas puede plantearse como un problema de diseño óptimo y trabajar en el de manera independiente. El diseño es un proceso iterativo, en donde se tienen que analizar varios diseños de prueba hasta obtener un diseño aceptable o el mejor diseño. En el proceso de diseño, el diseñador propone un diseño de prueba del sistema basado en la experiencia, la intuición y algunos análisis matemáticos. En el proceso de optimización, el diseño de prueba se analiza para determinar si es el mejor. Dependiendo de las especificaciones, "el mejor diseño" puede tener diferentes connotaciones para diferentes sistemas, por lo general, implica que un sistema es rentable, eficiente, confiable y duradero.

El proceso de diseño debe estar bien organizado, donde el proceso comienza con la identificación de una necesidad. Los cinco pasos del modelo de evolución de un sistema son: [25]

1. Definir las especificaciones del sistema. La comunicación e interacción entre el ingeniero y el patrocinador del proyecto para cuantificar las especificaciones del sistema.

2. Desarrollar un diseño preliminar del sistema estudiando diferentes conceptos del mismo usando modelos simplificados para ahorrar tiempo. Se identifican varios subsistemas y se estiman sus diseños preliminares.

3. Tener un diseño detallado para todos los subsistemas utilizando el proceso iterativo. Se deben identificar los parámetros de diseño para los subsistemas. Los subsistemas deben estar diseñados para maximizar el valor del sistema o para minimizar una medida del costo.

4. El cuarto paso fabricación del prototipo del sistema y quinto Pruebas del sistema, pueden no ser necesarios para todos los sistemas, depende en gran parte si el sistema será producido en masa o cuando hay vidas humanas involucradas. Pero pueden pasar que el sistema no funciona de acuerdo con las especificaciones durante la fase de prueba, en consecuencia, muchas veces las especificaciones tienen que ser modificadas u otros conceptos tienen que ser estudiados. La continua reexaminación es necesaria en cualquier etapa durante el proceso de diseño.

5.2 Diseño y análisis de Ingeniería.

El análisis determina el comportamiento de un sistema existente o un sistema de prueba diseñado para una tarea en específico. La determinación del comportamiento del sistema indica el cálculo de su respuesta a las entradas especificadas, permitiendo abordad en el análisis el tamaño de diferentes partes y sus configuraciones. El proceso de diseño calcula las dimensiones y formas de cada parte del sistema para cumplir con los requisitos de rendimiento. El diseño de un sistema es un proceso iterativo. Primero se estima un diseño de prueba, si el diseño funciona adecuadamente se tiene un diseño aceptable (factible), aunque es posible cambiarlo para mejorar su rendimiento. Si el diseño de prueba no funciona, se tienen que hacer modificaciones para obtener un sistema aceptable. En ambos casos, se debe contar con la capacidad de analizar los diseños para tomar decisiones adicionales. Por lo tanto, la capacidad de análisis debe estar disponible en el proceso de diseño.

5.3 Comparación entre proceso de diseño óptimo y diseño convencional.

En la figura 5.1 se ilustra un comparativo entre el proceso de diseño óptimo y el proceso de diseño convencional.

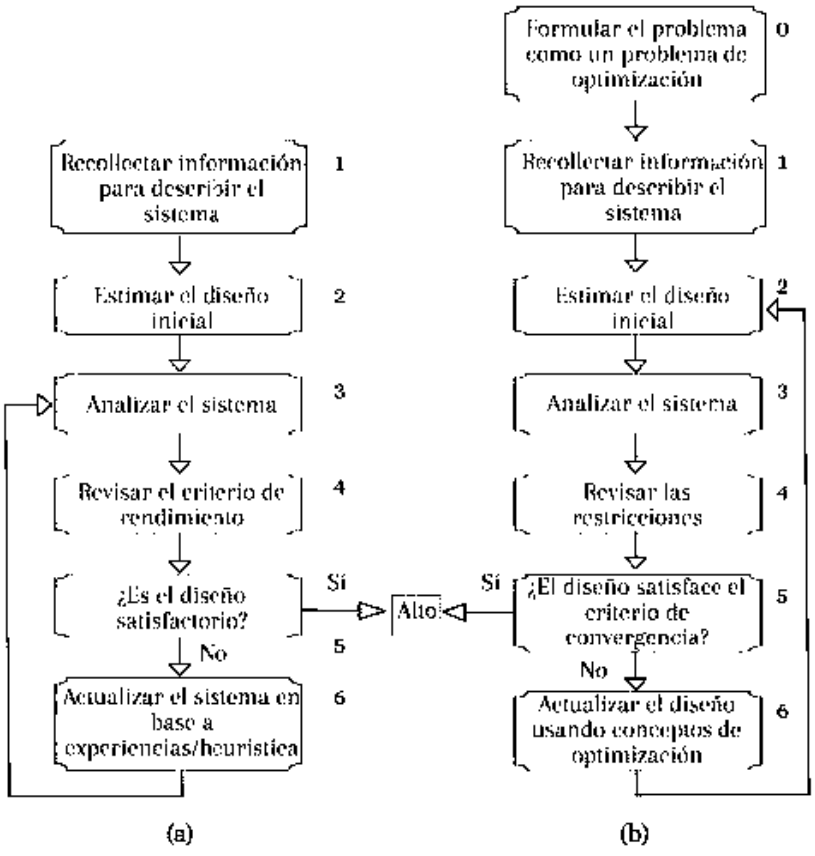


Figura 5.1 Comparación entre proceso de diseño óptimo y diseño convencional. [25]

En la Figura 5.1 se muestra de lado izquierdo (a), un diagrama del proceso convencional, y de lado derecho (b), un proceso de diseño óptimo. A continuación se describen ambos procesos:

0. El método de diseño óptimo tiene el bloque 0, donde el problema es formulado como un problema de optimización. Se define una función objetivo que mide los méritos de diferentes diseños.
1. Los dos métodos requieren información para describir el sistema en el bloque 1.
2. Ambos métodos requieren de un diseño inicial en el bloque 2.
3. Los dos métodos requieren el análisis del sistema en el bloque 3.
4. En el bloque 4, el método de diseño convencional verifica para garantizar que el criterio de rendimiento se cumple. En el método de diseño óptimo verifica la satisfacción de todas las restricciones para el problema formulado en el bloque 0.
5. En el bloque 5, en ambos métodos se verifica si los criterios ya se cumplen para el diseño ya están satisfechos, si es el caso, se detiene la iteración.
6. En el bloque 6, el método de diseño convencional actualiza el diseño según la experiencia e intuición del diseñador y usando información recopilada de uno o más diseños de prueba; En el método de diseño óptimo se utilizan conceptos y procedimientos de optimización para actualizar el diseño actual.

Las diferencias mostradas entre los dos enfoques de diseño indica que el proceso de diseño convencional es menos formal, ya que no se identifica una función objetivo que mida el mérito de un diseño. La información de tendencia generalmente no se calcula; ni se usa en el bloque 6 para tomar decisiones de diseño para mejorar el sistema. Por el contrario, el proceso de optimización es más formal y usa la información de tendencia para realizar cambios en el diseño.

5.4 Formulación del problema de diseño óptimo.

En el diseño óptimo la correcta formulación del problema juega un papel crítico, porque la solución óptima será tan buena como la formulación. Es importante no olvidar incluir restricciones críticas en la formulación, porque lo más probable es que la solución óptima la viole. También se pueden tener casos en donde se tengan demasiadas restricciones, o si son inconsistentes, puede que no haya solución para el problema. El desarrollo de una formulación adecuada para el diseño óptimo de problemas prácticos es un proceso iterativo, que en algunas ocasiones se llegan a necesitar de varias iteraciones para revisar la formulación antes de tener una aceptable. Los siguientes cinco pasos son usados para formular el problema en el diseño óptimo.

1. **Descripción del proyecto / problema.**

El proceso de formulación comienza desarrollando una declaración descriptiva para el proyecto / problema, describe los objetivos generales del proyecto y los requisitos que deben cumplirse.

2. **Recopilación de datos e información.**

Para desarrollar una formulación matemática para el problema, se necesita recopilar información sobre las propiedades del material, los requisitos de rendimiento, los límites de recursos, el costo de las materias primas, etc.

3. **Definición de variables de diseño.**

Identificar un conjunto de variables que describen el sistema, denominadas variables de diseño o variables de optimización:

- Estas se consideran libres para asignarles cualquier valor. Diferentes valores para las variables producen diferentes diseños, las variables de diseño deben ser independientes entre sí.
- Si son dependientes, sus valores no pueden especificarse independientemente porque existen restricciones entre ellos.
- El número de variables de diseño independientes otorga al diseño grados de libertad para el problema.
- Si no se seleccionan las variables de diseño adecuadas para un problema, la formulación será incorrecta o imposible.
- En la etapa inicial de la formulación del problema, se deben investigar todas las opciones para la especificación de las variables de diseño.
- Es deseable designar más variables de diseño que grados de libertad de diseño aparentes, esto le da mayor flexibilidad a la formulación de problemas.
- Si hay dificultad para identificar las variables de diseño de un problema, para estos casos se prepara una lista completa de todas las variables.
- Las variables de diseño deben ser independientes entre sí en la medida de lo posible. Si no lo son, debe haber algunas restricciones de igualdad entre ellas.
- Debe existir un número mínimo de variables de diseño para formular correctamente un problema de optimización del diseño.
- Se deben designar tantos parámetros independientes como sea posible como variables de diseño en la fase de formulación del problema. Después, a algunas de las variables se les pueden asignar valores fijos.
- Se debe dar un valor numérico a cada variable de diseño identificada para determinar si se especifica un diseño de prueba del sistema.

4. **Criterio de Optimización.**

El criterio debe ser una función escalar cuyo valor numérico se puede obtener una vez que se especifica un diseño; es decir, debe ser una función del vector de variable de diseño. Tal criterio se suele denominar función objetivo para el problema de diseño óptimo, y debe maximizarse o minimizarse según los requisitos del problema. Un criterio que se debe minimizar se suele llamar una función de costo, la función objetivo válida debe ser influenciada directa o indirectamente por las variables del problema de diseño; de lo contrario, no es una función objetiva significativa.

5. **Formulación de restricciones.**

Identificar todas las restricciones y desarrollar expresiones para ellas. Estas restricciones, deben depender de las variables de diseño, ya que solo entonces cambian sus valores con diferentes diseños de prueba; es decir, una restricción significativa debe ser una función de al menos una variable de diseño.

5.5 Modelo matemático general para un diseño óptimo.

Se necesita de un modelo matemático general para describir los conceptos y métodos de optimización. Este modelo se define como la minimización de una función costo en la que se satisfacen todas sus restricciones de igualdad y desigualdad. Las restricciones de desigualdad normalmente son representadas en el modelo usando signos " $\leq$ " a esto se le conoce como el modelo de optimización de diseño de estándar.

5.5.1 Modelo de optimización de diseño estándar.

Los problemas tienen un criterio de optimización que se puede usar para comparar varios diseños y determinar cuál es óptimo o el mejor. La mayoría de los problemas de diseño también deben satisfacer las restricciones de rendimiento y otras limitaciones. En algunos problemas de diseño solo tienen restricciones de desigualdad, otros solo tienen restricciones de igualdad y algunos tienen ambas. Se puede definir un modelo matemático general para un diseño óptimo que abarque todas estas posibilidades.

Un vector $n\ x = (x_1, x_2 \dots x_n)$ de variables diseño para minimizar la función costo:

$$f(x) = f(x_1, x_2 \dots x_n) \tag{116}$$

Que esté sujeto a las restricciones de igualdad p:

$$h_j(x) = h_j(x_1, x_2 \dots x_n) = 0; j = 1\ a\ p \tag{117}$$

Y las restricciones de desigualad m:

$$g_i(x) = g_i(x_1, x_2 \dots x_n) \leq 0; i = 1\ a\ m \tag{118}$$

5.5.2 Problema de maximización.

El modelo de diseño general trata solo los problemas de minimización. Pero esto no es restricción, ya que la maximización de una función $F(x)$ es lo mismo que la minimización de una función transformada $f(x) = -F(x)$.

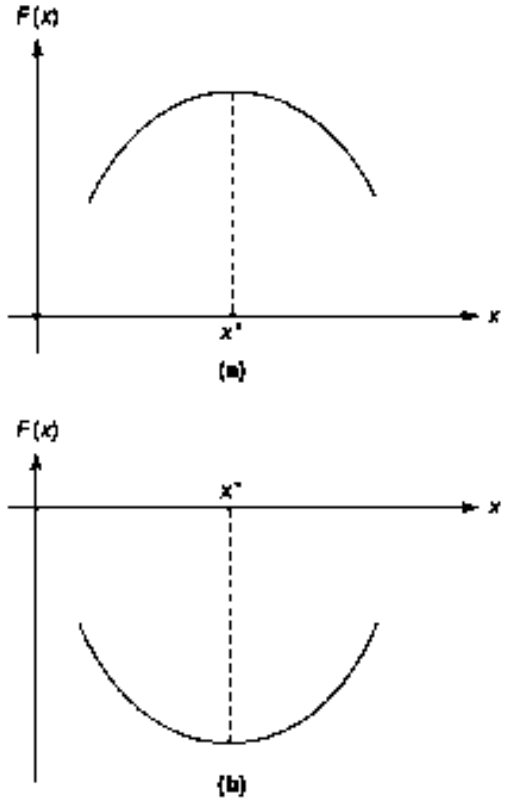


Figura 5.2 Comparación entre la gráfica de un punto máximo (a) y la gráfica de un punto mínimo (b). [25]

En la figura 5.2 se muestra (en la parte superior), la gráfica de una función de una variable $F(x)$, la función toma su valor máximo en el punto x^* . Después tenemos una gráfica de la función $f(x) = -F(x)$ (en la parte inferior). Puede observarse que $f(x)$ es un reflejo de $F(x)$ sobre el eje *x*. También se observa que, $f(x)$ adquiere u valor mínimo en el mismo punto x^* donde ocurre el máximo de $F(x)$, por lo tanto, la minimización de $f(x)$ es equivalente a la maximización de $F(x)$.

EL modelo de optimización estándar, cuenta con algunas características:

- **Dependencia de las funciones en las variables de diseño.**

Las funciones $f(x), h_j(x)$ y $g_i(x)$ deben depender, explícita o implícitamente, de algunas de las variables de diseño. Solo de esta forma estas variables son válidas para el problema de diseño. Las funciones que no dependen de ninguna variable no tienen relación con el problema y pueden ignorarse sin problema.

- **Número de restricciones de igualdad.**

El número de restricciones de igualdad independientes debe ser menor o, como máximo, igual al número de variables de diseño. Ya que de lo contrario tendríamos un sistema de ecuaciones sobre determinado. En ese caso no es posible una solución para el problema de diseño y la formulación del problema debe ser reexaminada.

- **Número de restricciones de desigualdad.**

Aunque existe una limitación en el número de restricciones de igualdad independientes, no hay restricción en el número de restricciones de desigualdad. Sin embargo, el número total de restricciones activas debe, en lo óptimo, ser menor o igual al número de variables de diseño.

- **Problemas sin restricciones.**

Algunos problemas de diseño pueden no tener restricciones. Estos se llaman sin restricciones; aquellos con restricciones se llaman restringidos.

- **Problemas de programación lineal.**

Sí todas las funciones $f(x), h_j(x)$ y $g_i(x)$ son lineales en las variables de diseño x, entonces el problema se llama problema de programación lineal. Si alguna de estas funciones es no lineal, el problema se llama un problema de programación no lineal.

- **Escalado de las funciones problemáticas.**

En el caso de que la función de costo se escala multiplicándola con una constante positiva, el diseño óptimo no cambia, pero el valor óptimo de la función de costo si cambia. Además, cualquier constante se puede agregar a la función de costo sin afectar el diseño óptimo. Del mismo modo, las restricciones de desigualdad se pueden escalar por cualquier constante positiva y las igualdades por cualquier constante. Esto no afectará la región factible y, por lo tanto, la solución óptima. Sin embargo, todas las transformaciones anteriores afectan los valores de los multiplicadores de LaGrange. Además, el rendimiento de los algoritmos numéricos para una solución al problema de optimización puede verse afectado por estas transformaciones. [25]

5.6 Conjunto factible.

Un conjunto factible para el problema del diseño es una colección de todos los diseños factibles. La letra S se usa para representar el conjunto factible. Matemáticamente, el conjunto S es una colección de puntos de diseño que satisfacen todas las restricciones:

$$S = \left(x | h_j(x) = 0, j = 1\ a\ p;\ g_i(x) \leq 0, i = 1\ a\ m\right) \tag{119}$$

El conjunto de diseños factibles a veces se denomina región factible, especialmente para problemas de optimización con dos variables de diseño. La región factible generalmente se reduce cuando se agregan más restricciones al modelo de diseño y se expande cuando se eliminan algunas restricciones. Cuando la región factible se reduce, se reduce el número de diseños posibles que pueden optimizar la función de costo; es decir, hay menos diseños factibles. En este caso, es probable que aumente el valor mínimo de la función de costo. El efecto es completamente opuesto cuando se eliminan algunas restricciones. [25]

5.7 Problemas de optimización.

El modelo de optimización de diseño estándar puede representar muchos tipos de problemas diferentes, ya que existen diferentes problemas de optimización que se encuentran en aplicaciones prácticas. Muchas veces estos problemas pueden transformarse en el modelo estándar y resolverse mediante los métodos de optimización.

- **Problemas de optimización continua / variable-discreta.**

Cuando las variables de diseño cuentan con cualquier valor numérico dentro de su rango permitido, el problema es conocido como un problema de optimización de variable continua. Cuando el problema solo tiene variables discretas / enteras, se denomina problema de optimización de variables discretas / enteras. Cuando el problema tiene variables continuas y discretas, se llama un problema de optimización de variables mixtas.

- **Problemas de optimización suaves / no suaves.**

Cuando sus funciones son continuas y diferenciables, el problema se denomina suave (diferenciable). Si las funciones del problema no son diferenciables o incluso discontinuas se denominan no suaves (no diferenciables).

- **Problemas con restricciones implícitas.**

Algunas restricciones son bastante simples, como los valores máximos y mínimos permitidos para las variables de diseño. Cuando existen funciones implícitas en la formulación del problema, no es posible formular las funciones del problema explícitamente solo en términos de variables de diseño. En cambio, se deben usar algunas variables intermedias en la formulación del problema.

- **Problemas de optimización de red.**

Una red o un gráfico constan de puntos y líneas que conectan pares de puntos. Dependiendo del tipo de aplicación, los problemas de optimización de la red se han clasificado como problemas de transporte, problemas de asignación, problemas de ruta más corta, problemas de flujo máximo, problemas de flujo de costo mínimo y problemas de ruta crítica.

- **Problemas de optimización de respuesta dinámica.**

Muchos sistemas prácticos están sujetos a cargas dinámicas transitorias. En tales casos, algunas de las limitaciones del problema dependen del tiempo cada una de estas restricciones debe imponerse durante todo el intervalo de tiempo de interés. Por lo tanto, cada uno representa un conjunto infinito de restricciones porque la restricción debe imponerse en cada punto de tiempo en el intervalo dado.

- **Variables de diseño como funciones.**

En algunas aplicaciones, las variables de diseño no son parámetros sino funciones de una, o más variables. Estas variables de diseño surgen en problemas de control óptimo en los que la entrada debe determinarse durante el intervalo de tiempo deseado para controlar el comportamiento del sistema. El tratamiento habitual de las funciones de diseño es parametrizarlas. Cada función se representa en

términos de algunas funciones conocidas y los parámetros que las multiplican. Los parámetros se tratan como variables de diseño. [25]

5.8 Conceptos básicos de diseño óptimo: Condiciones de optimidad.

En el diseño óptimo se tienen diferentes enfoques de optimización para cada tipo de problemas, se tienen dos puntos vista diferentes: los métodos de criterio de optimidad y los métodos de búsqueda.

- Métodos de criterios de optimidad: Los criterios de optimidad son condiciones que una función tiene que cumplir en su punto mínimo.
- Métodos de búsqueda: los métodos de búsqueda se basan en una filosofía diferente de buscar numéricamente el espacio de diseño para obtener diseños óptimos. Usualmente el diseño inicial no logra satisfacer los criterios de optimización; por lo tanto, se mejora iterativamente hasta que estén satisfechos.

5.8.1 Mínimo global y mínimo local.

Los conceptos de mínimos locales y globales se definen e ilustran utilizando el modelo matemático estándar. El problema de la optimización del diseño siempre se convierte en minimización de una función de costo sujeta a restricciones de igualdad y desigualdad. [25]

5.8.2 Máximos y mínimos.

En muchas ocasiones en los problemas de la optimización, el objetivo es encontrar un punto en el espacio de diseño factible que otorgue un valor mínimo a la función de costo. Existen dos tipos de puntos mínimos para una función: punto mínimo local y punto mínimo global.

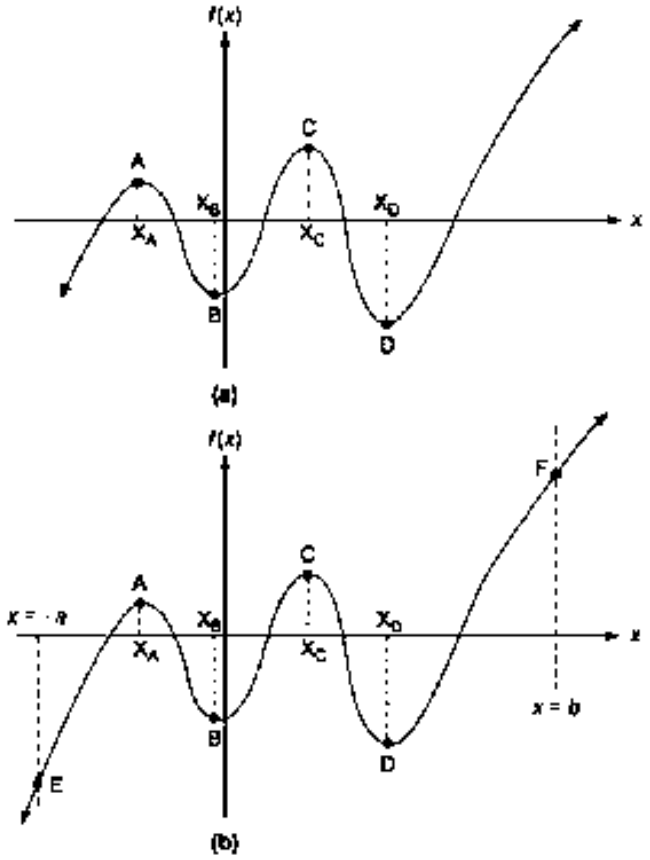


Figura 5.3 Representación de puntos óptimos. (a) El domino de una función sin restricciones. (b) El dominio de una función con restricciones. [25]

En la figura 5.3 (a) muestra las gráficas de una función $f(x)$ de una variable, dónde *x* está entre $-\infty$ e ∞ ($\infty \leq x \leq$), los puntos x_B y x_D. Al desplazarse en la gráfica a la izquierda o derecha de estos puntos, el valor de la función aumenta, se pueden encontrar otro tipo de puntos como x_A y x_c que son puntos de máximos locales para la función.

Para encontrar un punto mínimo global, es necesario examinar todo el dominio de la función y determinar si tiene el valor mínimo (máximo) sobre todo su dominio. En base a estas definiciones, no hay un mínimo o un máximo global para la función de la figura 5.3 (a) ya que el dominio y la función $f(x)$ no tienen límites; es decir, x y $f(x)$ pueden tener cualquier valor entre $-\infty$ e ∞ . Pero sí se restringe *x* para que se encuentre entre $-a$ y b, como en la figura 5.3 (b) entonces el punto x_E da el mínimo global y x_F el máximo global para la función.

- Un punto mínimo global (también llamado mínimo absoluto), es aquel en el que no hay otros puntos factibles con valores de función de mejor costo.
- Un punto mínimo local (también llamado mínimo relativo) es aquel en el que no hay otros puntos factibles "en sus proximidades" con mejores valores de función de costo. [25]
-

5.9 Condiciones necesarias y suficientes.

5.9.1 Condición necesaria.

Las condiciones de optimización se derivan haciendo un análisis en un punto óptimo, y luego analizando el comportamiento de las funciones y sus derivadas en ese punto. Las condiciones que deben cumplirse en el punto óptimo se denominan necesarias, es decir, si un punto no satisface las condiciones necesarias, no puede ser óptimo tomando en cuenta, que la satisfacción de las condiciones necesarias no garantiza la optimización del punto; es decir, puede haber puntos no óptimos que también satisfacen las mismas condiciones. Lo cual significa que el número de puntos que satisfacen las condiciones necesarias puede ser mayor que el número de puntos óptimos.

5.9.2 Condición suficiente.

Si un punto óptimo cumple la condición suficiente, entonces es un punto óptimo, pero si no se cumple la condición suficiente o no se puede utilizar, es posible que no podamos concluir que el diseño en ese punto no es óptimo. La conclusión dependerá de los supuestos y restricciones utilizados para derivar la condición suficiente, también es necesario llevar acabo un mejor análisis del problema u otras condiciones de orden superior para hacer una declaración definitiva sobre la optimización del punto que es candidato.

Resumen de las condiciones necesarias y suficientes:

1. Los puntos óptimos deben cumplir las condiciones necesarias y los puntos que no los satisfacen no pueden ser óptimos. Las condiciones de optimización necesarias de primer orden implican las primeras derivadas parciales de la función, y las condiciones necesarias de segundo orden implican las derivadas parciales de la función.
2. Un punto que satisface las condiciones necesarias no necesita ser óptimo; es decir, los puntos no óptimos también pueden satisfacer las condiciones necesarias.
3. Un punto que es candidato y que satisface una condición suficiente es considerado un punto óptimo. Estas condiciones implican derivadas parciales de segundo o mayor orden de la función.
4. Si la condición de suficiencia no se puede utilizar o no se cumple, es posible que no podamos sacar ninguna conclusión sobre la optimización del punto candidato.

5.10 Condiciones de optimidad: Problema sin restricciones.

Las condiciones de optimidad para problemas no restringidos o restringidos se pueden usar de dos formas:

1. Se pueden utilizar para verificar si un punto dado es un óptimo local para el problema.

2. Se pueden resolver para puntos óptimos locales. Es muy importante tomar en cuenta que las condiciones necesarias deben cumplirse en el punto mínimo; de lo contrario, no puede ser un punto mínimo. Sin embargo, estas condiciones también pueden satisfacerse con puntos que no son mínimos, un punto que satisface las condiciones necesarias es simplemente un candidato mínimo local. Las condiciones suficientes pueden distinguir los puntos mínimos de los puntos no mínimos.

5.10.1 Conceptos de condiciones de optimalidad.

El concepto básico para obtener condiciones de optimalidad local es asumir que estamos en un punto mínimo x^* y luego examinar su "vecindario" para estudiar las propiedades de la función y sus derivados. Básicamente, se utiliza la definición de un mínimo local. Como solo se examina un vecindario pequeño, las condiciones que son obtenidas se denominan condiciones de optimalidad local. En el caso de que x^* es un punto mínimo local para $f(x)$ Para investigar su vecindario, sea x cualquier punto cerca de x^*. Se definen los incrementos $\boldsymbol{d}$ y Δf en x^* y $f(x^*)$ como $d = x - x^*$ y $\Delta f = f(x) - f(x^*)$.

Como $f(x)$ tiene un mínimo local en x^*, no se reducirá más si nos alejamos un poco del punto x^* debe ser no negativo; es decir, el valor de la función debe permanecer constante o aumentar. Esta condición, también obtenida directamente de la definición de mínimo local dada, se puede expresar como la siguiente desigualdad:

$$\Delta f = f(x) - f(x^*) \geq 0 \tag{120}$$

5.11 Condiciones de optimidad para funciones de una sola variable.

5.11.1 Condición necesaria de primer orden.

Se considera a una función de una sola variable. Se desarrolla la expansión de Taylor de $f(x)$ en el punto x^*.

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)d + \frac{1}{2}f'(x^*)d_2 + R \tag{121}$$

Dónde $\boldsymbol{R}$ es el resto, que contiene términos de orden superior en $\boldsymbol{d}$ y "primos" que indican el orden de las derivadas. A partir de esta ecuación, el cambio en la función en x^*, es decir: $\Delta f = f(x) - f(x^*)$, se da cómo:

$$\Delta f(x) = f'(x^*)d + \frac{1}{2}f'(x^*)d_2 + R \tag{122}$$

La desigualdad (120) muestra que la expresión para Δf no debe ser negativa (≥ 0), porque x^* es un mínimo local para $f(x)$. Como "d" es pequeño, el término de primer orden $f'(x^*)d$ domina otros términos y, por lo tanto, Δf puede aproximarse como $\Delta f(x) = f'(x^*)d$. Hay que tomar en cuenta que Δf en esta ecuación puede ser positivo o negativo dependiendo del signo del término $f'(x^*)d$. Como d es arbitrario (un pequeño incremento en x^* puede ser positivo o negativo. Por lo tanto, si $f'(x^*) \neq 0$, el término $f'(x^*)d$ y Δf pueden ser negativos.

Para d_2, Δf se convierte en negativo, lo que viola la desigualdad (120). Por lo tanto, la cantidad $f'(x^*)d$ puede tener un valor negativo independientemente del signo de $f'(x^*)$, a menos que sea cero. La única forma en que puede ser no negativo para todas las d en una vecindad de x^* es cuando:

$$f'(x^*) = 0 \tag{123}$$

5.11.2 Puntos estacionarios.

La ecuación (123) es una condición necesaria de primer orden para el mínimo local de $f(x)$ en el punto x^* Se llama "primer orden" porque solo implica la primera derivada de la función. Por lo tanto, ya que los puntos que satisfacen la ecuación (123) pueden ser mínimos locales o máximos, o puntos de inflexión, a estos puntos se les denominan puntos estacionarios.

5.11.3 Condición suficiente.

Es necesario una condición suficiente para determinar cuáles, de los puntos estacionarios son realmente mínimos para la función. Como se mencionó anteriormente los puntos estacionarios satisfacen la condición necesaria $f'(x^*) = 0$, el cambio en la función Δf de la ecuación (121) se convierte en:

$$\Delta f(x) = \frac{1}{2} f''(x^*) d_2 + R \tag{124}$$

Dado que el término de segundo orden domina todos los demás términos de orden superior, se tiene que tomar en cuenta que el término puede ser positivo para todos $d \neq 0$ sí:

$$f''(x^*) > 0 \tag{125}$$

Los puntos estacionarios que satisfacen la desigualdad (125) deben ser al menos mínimos locales, porque satisfacen la desigualdad (120) $(\Delta f > 0)$. Es decir, la función tiene una curvatura positiva en los puntos mínimos. La desigualdad (125) es la condición suficiente para que x^* sea un mínimo local.

5.11.4 Condición necesaria de segundo orden.

Sí $f'(x^*) = 0$, no se puede concluir que x^* no es un punto mínimo. Sin dejar de lado las ecuaciones (120) y (124), que $f'(x^*)$ no puede ser un mínimo a menos que:

$$f''(x^*) \geq 0 \tag{126}$$

Si la segunda derivada (f'') y evaluado en el punto candidato x^* es menor que cero, entonces x^* no es un punto mínimo local. La desigualdad (126) es una condición necesaria de segundo orden, por lo que cualquier punto que la viole esta condición no puede ser un mínimo local sino que, en realidad, es un máximo local para la función. Si $f''(x^*) = 0$, es necesario evaluar derivadas de orden superior para determinar si el punto es un mínimo local.

En general, la derivada que es no nula más baja, debe ordenarse de manera uniforme para los puntos estacionarios y debe ser positiva para los puntos mínimos locales. Todas las derivadas de orden impar inferiores a la derivada de orden par distinto de cero deben ser cero como condición necesaria. Las condiciones necesarias deben cumplirse en el punto mínimo; de lo contrario, no puede ser un mínimo. [25]

1. Las condiciones necesarias de primer orden también pueden cumplirse con puntos que no son mínimos. Un punto que satisface las condiciones necesarias de primer orden es simplemente un mínimo local candidato.
2. Si se cumple la condición suficiente en un punto candidato, entonces es un punto mínimo.

5.12 Condiciones de optimalidad para funciones de varias variables.

Para el caso general de una función con varias variables $f(x)$ donde *x* es un vector *n*, se repite la derivación de las condiciones necesarias y suficientes utilizando la forma multidimensional de la expansión de Taylor:

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f(x^*)^T d + \frac{1}{2} d^T H(x^*) d + R \tag{127}$$

Alternativamente, un cambio en la función $\Delta f = f(x) - f(x^*)$ se da como:

$$\Delta f = \nabla f(x^*)^T d + \frac{1}{2} d^T H(x^*) d + R \tag{128}$$

Un mínimo local en x^*, Δf debe ser no negativo debido a la definición de un mínimo local, es decir, $\Delta f \geq 0$. Tomando en cuenta solo en el término de primer orden en la ecuación (128) puede observar que Δf puede ser no negativo para todos los $\boldsymbol{d}$ posibles a menos que:

$$\nabla f(x^*) = 0 \tag{129}$$

En otras palabras, el gradiente de la función en x^* ser cero. En la forma de componente, esta condición necesaria se convierte en:

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = 0; i = 1\ a\ n \tag{130}$$

Los puntos que satisfacen la ecuación (130). Considerando el segundo término en la ecuación (128) evaluado en un punto estacionario, el signo positivo de Δf está asegurado sí:

$$d^T H(x^*) d > 0 \tag{131}$$

Para todos los $d \neq 0$, se cumple, si la matriz Hessiana $H(x^*)$ es una matriz definida positiva, que es la condición suficiente para un mínimo local de $f(x)$ en x^*. Las condiciones (130) y (131) son el equivalente multidimensional de las condiciones (120) y (122), respectivamente Se resume el desarrollo de esta sección en el siguiente tema.

5.13 Condiciones necesarias y suficientes para un mínimo local.

Condición necesaria. Sí $f(x)$ tiene un mínimo local en x^* entonces:

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = 0; i = 1\ a\ n \tag{132}$$

Condición necesaria de segundo orden. Sí $f(x)$ tiene un mínimo local en x^*, entonces la matriz Hessiana es positiva en el punto x^*.

$$H(x^*) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}\right]_{(n \times n)} \tag{133}$$

Condición suficiente de segundo orden. Sí la matriz $H(x^*)$ es positiva en el punto x^*, entonces x^* es un mínimo local para la función $f(x)$.

Es importante tomar en cuenta que sí $H(x^*)$, en el punto estacionario x^* es indefinido, entonces x^* no es un punto mínimo local, ni un punto máximo local, porque la condición necesaria de segundo orden no se cumple en ambos casos. Esta clase de puntos estacionarios se denominan puntos de inflexión, también sí $H(x^*)$ es al menos semidireccional positivo, entonces x^* no puede ser un máximo local, ya que viola la condición necesaria de segundo orden para un máximo local de $f(x)$. Es decir, un punto no puede ser un mínimo local y un máximo local simultáneamente.

5.14 Optimidad global.

En el diseño óptimo de sistemas, la pregunta por el óptimo global de una solución siempre surge. En general, es difícil responder a esta cuestión de manera satisfactoria. Pero se puede llegar a una respuesta siguiendo dos caminos:

- Si la función de costo $f(x)$ es continua en un conjunto factible cerrado y acotado, entonces el Teorema de Weierstrass garantiza la existencia de un mínimo global. Por lo tanto, se pueden calcular todos los puntos mínimos locales para la función, el punto que da el menor valor a la función de costo puede seleccionarse como un mínimo global para la función, aunque esta opción es una búsqueda exhaustiva en el espacio de diseño factible.

- Si es posible demostrar que el problema de optimización es convexo, cualquier mínimo local también es un mínimo global. Pero este método necesita de otro tipo de condiciones adicionales para encontrar el punto mínimo.

Ambos procedimientos pueden involucrar cálculos computacionales, también la complejidad del problema puede resultar en el uso de funciones de costo más complejas para describir un sistema. Es por eso que los métodos numéricos en conjunto con la programación han tomado un papel importante en muchas disciplinas, y el caso del diseño óptimo no es la excepción, con la ayuda de sistemas computacionales la metodología del diseño óptimo puede tener un mejor rendimiento y se puede profundizar en problemas más complejos. [25]

5.15 Diseño óptimo de los álabes de una turbina de viento en función de su Frecuencia Natural.

El diseño de los álabes de una turbina cuenta con una gran cantidad de variables y parámetros. Como se ha mencionado en los capítulos anteriores, la teoría BEM es usada como base para el diseño de los 3 diseños de álabes, los cuales fueron ensamblados en modelos 3D en programas de Elemento Finito. Mediante estos programas es posible calcular características como el peso, centro de masa, momentos

de inercia de los diseños de los álabes. Con el método de elemento finito se simulan las condiciones de carga en los álabes siguiendo la norma UNE-EN 61400- 2 y así obtener los esfuerzos que soportan estos diseños. Con los diseños aerodinámicos en 3D y de los resultados de las simulaciones de elemento finito, se cuenta con una gran cantidad de variables e información que pueden ser usados en la metodología de diseño óptimo. [26]

En el diseño de los álabes de turbina viento, diferentes técnicas y teorías son usadas para lograr la máxima potencia de salida posible, también son empleados distintos programas de computadora o algoritmos para optimizar el diseño de las aspas. Gur y Rosen [27] proponen dos métodos para diseñar una turbina de viento, el primer método es el diseño clásico que se basa en la teoría de BEM para una turbina en función de su velocidad específica y el segundo diseño que también usa la teoría de BEM, pero usando métodos numéricos y funciones de costo para maximizar la producción anual de energía.

Existen otras formas para optimizar los alabes de una turbina de viento, Jureczko [28] implementaron un algoritmo genético para maximizar la potencia de salida reduciendo las vibraciones y el costo del material. Deborah [29] presentan un modelo para optimizar la distribución de la cuerda y el ángulo de torcimiento en las turbinas de eje horizontal, la optimización aerodinámica es obtenida al maximizar el coeficiente potencia mediante un algoritmo. Kaveh y Sabati [30] usan un algoritmo llamado "Colliding Bodies Optmization (CBO))" para optimizar la estructura de una turbina de viento offshore. Malawi y Negm [31] presentan un modelo de optimización para minimizar el peso y las vibraciones y maximizar la rigidez. Quang [32] implementaron un algoritmo PSO(particle swarm optimization), este algoritmo se basa en el comportamiento de las comunidades que tienen conductas sociales e individuales, similares a aves buscando comida, este algoritmo combinado con otro software es utilizado para optimizar los perfiles aerodinámicos. Longfuo [33] proponen un método para minimizar el costo de energía (COE) en turbinas de viento offshore, en donde ellos optimizan la velocidad del viento y el radio del rotor por medio de un algoritmo. Mohamed [34] usan un algoritmo evolucionario en combinación del software ANSYS, buscando el mejor coeficiente de potencia usando la optimización para encontrar la mejor forma del perfil aerodinámico. Ernesto y Andre [35] también usan un algoritmo evolucionario, orientado hacia un método de optimización multi-objetivo con la meta de lograr una maximización de la energía producida anualmente en un emplazamiento eólico y reducir el costo de energía. Mojtaba [36] usaron un algoritmo genético en una turbina de eje horizontal como método de optimización considerando la generación de potencia como su función objetivo, los algoritmos genéticos se basan en mecanismos de selección natural. Chalothorn [37] diseña una turbina óptima usando un código de computadora SuWit (Suranaree Wind Turbine) que es un código basado en la teoría BEM para encontrar el perfil aerodinámico óptimo. Jaehwan [38] proponen un método de optimización para encontrar la altura del Hub, su método usa la ganancia neta anual como función objetivo, a través de funciones matemáticas con sus restricciones encuentran la altura óptima para el Hub. Hicham Boudounit [39] hace un análisis modal de palas para aerogeneradores marinos. Peter Fuglsang [40] presenta el diseño y la verificación experimental de la familia de perfiles aerodinámicos Risø-B1 para aerogeneradores de tamaño MW con velocidad variable y control de paso. Georgina Lizeth González [41] menciona un pronóstico de generación de energía eléctrica de corto plazo en un parque eólico, utilizando técnicas de predicción del clima.

5.16 Proceso de formulación del problema para el diseño de los álabes.

El proceso de diseño óptimo en el diseño de los álabes de una turbina de viento, es desarrollado con los pasos de formulación del problema:

1. **Descripción del Proyecto/Problema**: El propósito de este proyecto es diseñar un álabe de una turbina de viento, respecto a su frecuencia natural y resistente a las condiciones de carga bajo diferentes condiciones de operación.

2. **Recopilación de datos e información:** En base a la teoría BEM se estableció una metodología para diseñar 3 álabes de turbina de viento usando el perfil aerodinámica NRELS818. Las condiciones consideradas para el diseño fueron: una velocidad de viento $(U) = 12\ m/s$, una densidad del aire promedio de $\rho = 1.28\ Kg/ms$, una potencia de diseño de $P = 30\ KW$, un número de Reynolds $R_e = 830719.31$ y una viscosidad dinámica de $\mu = 1.849 \times 10^{-5}\ Kg/ms$. En la metodología de diseño, el álabe de $r = 2..9385\ m$ de longitud, es dividido en 25 secciones, a cada álabe le fue asignado los materiales; Fibra de Carbono, con un Módulo de Young de 7.2 GPa, coeficiente de Poisson de 0.28 y una densidad de 1620 Kg/m^3, Fibra de Vidrio, con un Módulo de Young de 4.1 GPa, un Coeficiente de Poisson de 0.26 y una densidad de 1900 Kg/m^3.

3. **Definición de variables de diseño:** Se tienen 2 variables de diseño:

$$\tau = Esfuerzo\ equivalente\ (Von\ Mises), Mpa$$
$$\lambda = Velocidad\ especifica$$

4. **Criterio de Optimización:** La función objetivo es minimizar los esfuerzos del álabe, pero para encontrar esta función, se sigue una metodología diferente. Con los datos de los 3 diseños de álabes previamente generados (las constantes de rigidez, las velocidades específicas y los esfuerzos) y con ayuda de distintas herramientas matemáticas se obtiene una función objetivo.

5. **Formulación de restricciones:** Entre las restricciones designadas se tienen la velocidad específica, con un rango de 8-10 (siendo estos los valores más altos en velocidad específica para turbinas de viento) y el esfuerzo de Von Mises con rangos variables dependiendo del material. Estas dos variables son expresadas como restricciones de desigualdad.

5.17 Obtención de la función objetivo del álabe de una turbina de viento.

La función objetivo es el criterio con el cual se optimiza un sistema, este criterio tiene que ser una función escalar, donde un valor numérico es obtenido cuando el diseño satisface todas las restricciones. Para obtener la función para el diseño de un álabe de turbina de viento, se tienen 3 diseños iniciales, los cuales cuentan con diferentes características: la masa y por lo tanto las propiedades mecánicas de cada álabe también son diferentes. Los 3 diseños de álabes son graficados en términos de su constante de rigidez *(K),* velocidad especifica (λ) y de sus esfuerzos principales (Von Mises) *(τ).* Se obtiene una superficie en 3 dimensiones, esta superficie es la función objetivo.

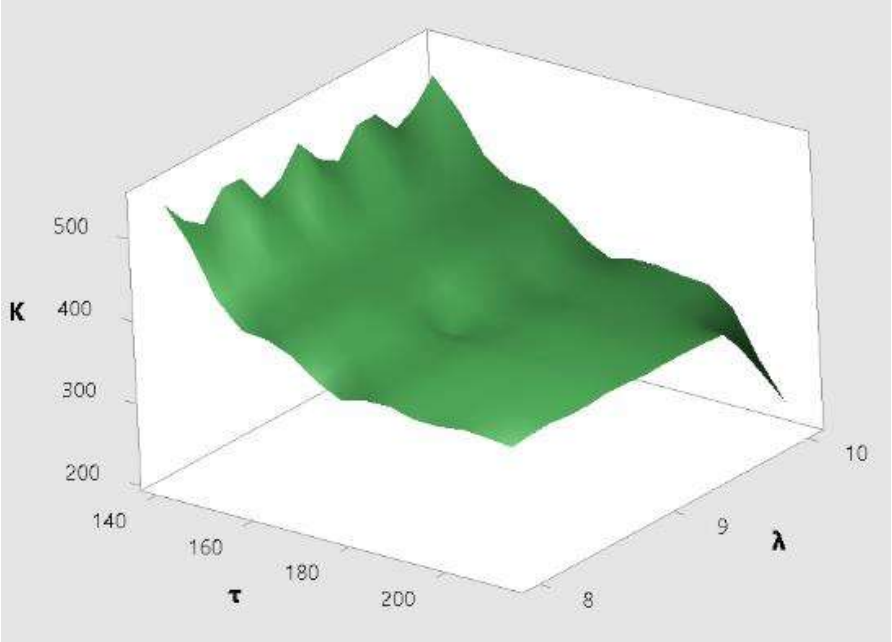


Figura 5.4 Función objetivo Fibra de Carbono. [42]

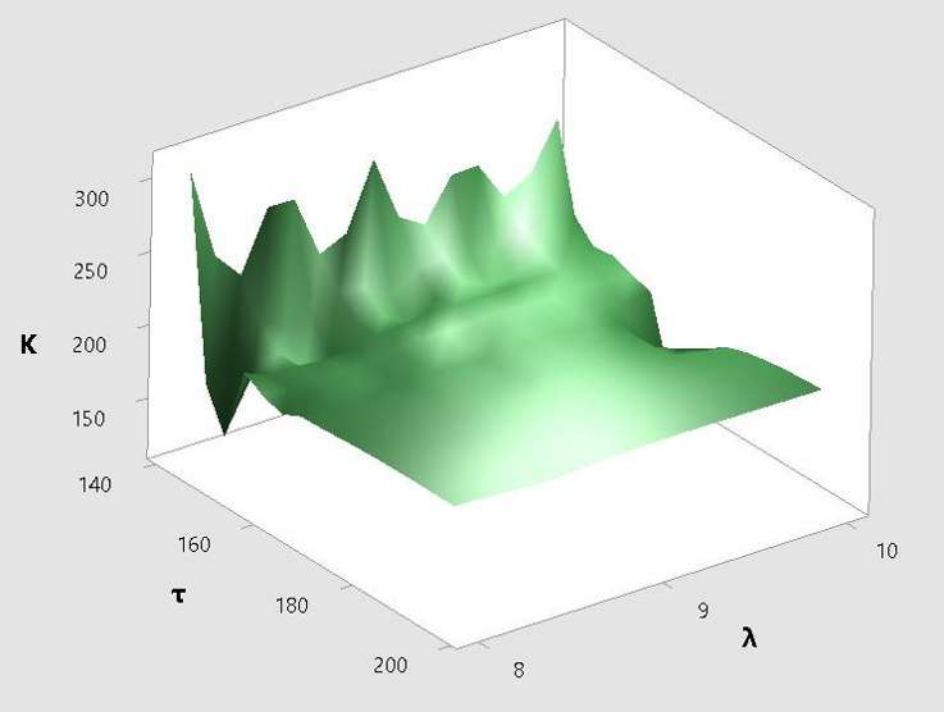


Figura 5.5 Función objetivo Fibra de Vidrio. [42]

En las figuras 5.4 y 5.5, se muestra la superficie de los 3 diseños con sus correspondientes valores de constante de rigidez *(K),* velocidad específica *(λ)* y esfuerzo *(τ);* delimitados por las restricciones establecidas. La ecuación de la función objetivo se obtiene al encontrar el polinomio que describe a ésta superficie. Al sólo contar con 3 diseños o puntos que son conocidos en la superficie de la función objetivo, es necesario encontrar más de estos puntos dentro de la superficie, de esta forma la aproximación del polinomio que describe a esta función será más certera.

5.18 Interpolación de distancia inversa ponderada.

La técnica de la distancia inversa ponderada permite obtener más puntos en la función objetivo. Esta técnica nos permite calcular la altura en áreas específicas; en este caso se busca obtener más valores de la constante de rigidez dentro de la función objetivo, para ello se comienza con 3 valores conocidos dentro de los límites de la función objetivo y los puntos desconocidos dentro de la función son estimados por medio de la interpolación. Contando con 3 puntos de los diseños iniciales, se pueden interpolar más puntos en el área delimitada por las restricciones de diseño. Este método matemático usa las distancias que hay del punto que se desea conocer, hacia los puntos con valores conocidos, tal como se muestra en la siguiente figura 5.6. [43]

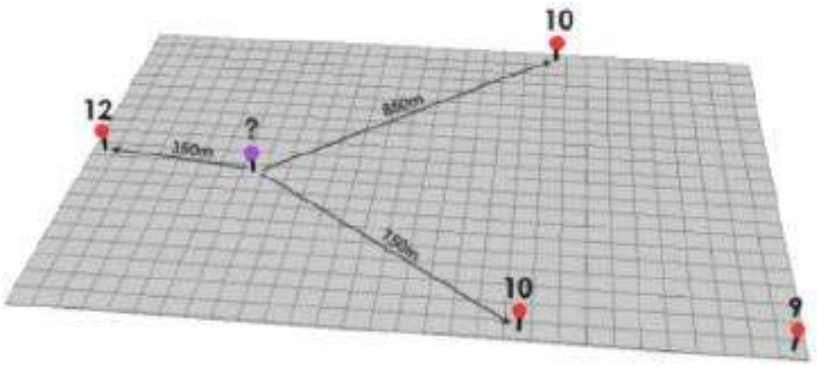


Figura 5.6 Ejemplo de interpolación de la distancia inversa ponderada. [43]

Entre más cercanos sean los puntos conocidos de los puntos que se desea encontrar, la aproximación será más exacta. La fórmula para la interpolación inversa ponderada es la siguiente:

$$z_p = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{z_i}{{d_i}^p}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{{d_i}^p}\right)} \tag{134}$$

En la ecuación (134), z_p es la nueva altura que se desea calcular. En el numerador se tiene una sumatoria de fracciones, de los puntos que son conocidos entre sus distancias al nuevo punto que se desea conocer. En el denominador se tiene otra sumatoria, del cociente de 1 entre las distancias de los 3 puntos conocidos. Usando la técnica de interpolación de la distancia inversa ponderada se obtienen 23 puntos adicionales, añadiendo los primeros 3 puntos que surgen de los diseños de álabes, se tienen en total 26 puntos (tabla 5.1 y tabla 5.2), los cuales se grafican nuevamente para obtener una nueva función objetivo.

Coordenada	τ	λ	K
A	141.05	8	538.296799
B	172.23	9	338.340839
C	211.86	10	231.435069
D	158.7525	8	405.50944
E	176.455	8	355.218027
F	194.1575	8	353.674034
G	211.86	8	353.91557
H	141.05	8.5	531.086915
I	158.7525	8.5	412.415326
J	176.455	8.5	358.091168
K	194.1575	8.5	353.505714
L	211.86	8.5	353.898158
M	141.05	9	524.445632
N	158.7525	9	401.296654
O	176.455	9	347.20612
P	194.1575	9	353.459839
Q	211.86	9	353.875952
R	141.05	9.5	518.258629
S	158.7525	9.5	407.714631
T	176.455	9.5	347.788405
U	194.1575	9.5	353.36499
V	211.86	9.5	353.851172
W	141.05	10	518.240618
X	158.7525	10	413.623688
Y	176.455	10	351.14996
Z	194.1575	10	353.156743

Tabla 5.1 Coordenadas de la Función objetivo Fibra de Carbono.

Coordenada	τ	λ	K
A	141.6	8	306.540722
B	147.63	8	119.262362
C	153.66	8	193.035288
D	159.69	8	179.178396
E	165.72	8	186.804748
F	141.6	8.5	288.316221
G	147.63	8.5	144.566647
H	153.66	8.5	184.356843
I	159.69	8.5	180.529219
J	195.72	8.5	185.817609
K	141.6	9	273.999078
L	147.63	9	157.591127
M	152.83	9	192.660749
N	153.66	9	195.857876
O	159.69	9	181.891086
P	165.72	9	185.163337
Q	141.6	9.5	262.254684
R	147.63	9.5	173.290065
S	153.66	9.5	193.655748
T	159.69	9.5	183.71825
U	165.72	9.5	184.828537
V	141.6	10	261.319909
W	147.63	10	185.99927
X	153.66	10	191.657268
Y	159.69	10	184.987586
Z	165.72	10	131.789097

Tabla 5.2 Coordenadas de la Función objetivo Fibra de Vidrio.

En la actualidad existen diferentes programas computacionales con una gran variedad de herramientas, las cuales permiten al usuario manejar una gran cantidad de datos, aplicar diferentes operaciones matemáticas y diferentes métodos de graficación, etc. Para este estudio se realiza una interpolación con la ayuda del software Matlab, entre sus aplicaciones se encuentra la aplicación Curve Fitting Toolbox, la cual permite realizar diferentes tipos de interpolaciones y regresiones. Con esta herramienta los 25 puntos son ingresados en forma de coordenadas en el programa. En la ventana de comandos, de manera rápida el programa muestra la gráfica de la función y las diferentes opciones para hacer el ajuste de la curva.

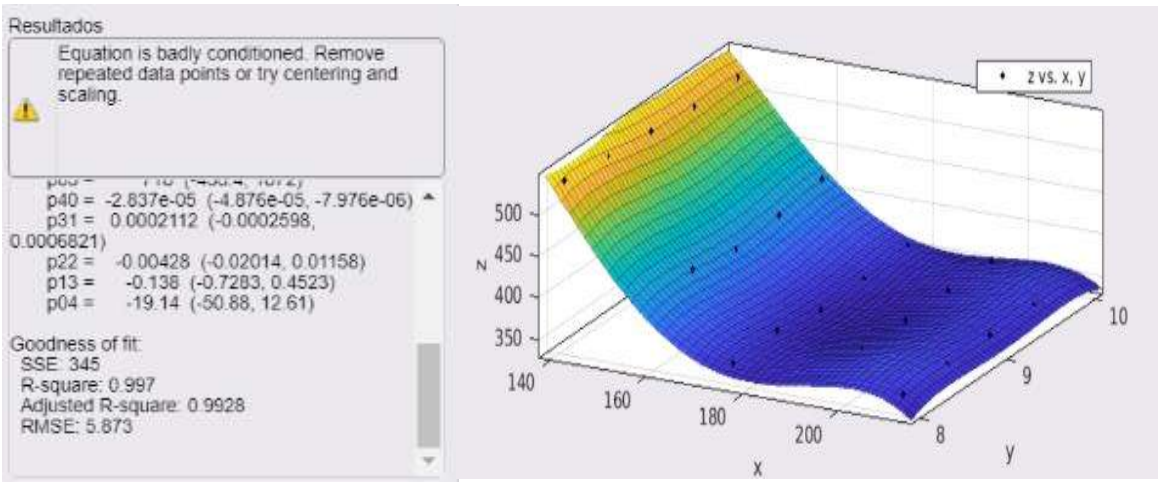


Figura 5.7 Interpolación polinómica en el programa Matlab (Curve Fitting Toolbox) Fibra de Carbono. [44]

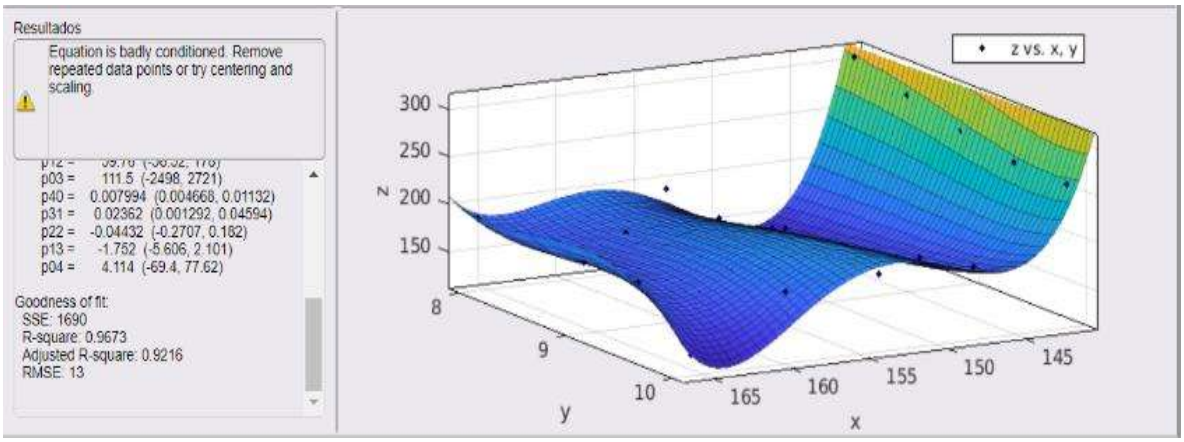


Figura 5.8 Interpolación polinómica en el programa Matlab (Curve Fitting Toolbox) Fibra de Vidrio. [44]

El ajuste realizado que mejor se acopla a los puntos de la superficie de la función objetivo es polinomial. En las variables “x” y “y”, con el mejor ajuste, resultan ser de cuarto grado, en las figuras 5.7 y 5.8 puede observarse que las variables de cuarto grado se ajustan bien a los puntos que describen a la función objetivo. Después de ajustar los datos con un modelo, es necesario evaluar la certeza del ajuste. Esto puede hacerse de manera visual, pero también se tienen otros indicadores que ayudan a determinar la exactitud del modelo. Dentro de la aplicación de Matlab, existen herramientas estadísticas que ayudan a revisar el ajuste de las funciones. Las siguientes ecuaciones muestran las expresiones estadísticas que son usadas por Curve Fitting Toolbox para el ajuste de curvas.

En base a los criterios de los resultados estadísticos que sigue cada uno de ellos, se puede concluir que el ajuste que realiza el programa es bastante bueno. Como parte de las ventajas de la aplicación de Matlab, una vez que el programa hace la aproximación, también obtiene los valores de los coeficientes del polinomio que representa a la función ajustada. Los polinomios de la función objetivo son los siguientes:

- **Fibra de Carbono:**

$$f(x,y) = -1.604 \times 10^5 + 516.2x + 6.315 \times 10^4 - 3.977x^2 - 37.61xy - 1.017 \times 10^4 y^2 + 0.01715x^3 - 0.03906x^2y + 5.132xy^2 + 718y^3 - 2.837 \times 10^{-5}x^4 + 0.0002112x^3y - .00428x^2y^2 - 0.138xy^3 - 19.14y^4 \quad (135)$$

- **Fibra de Vidrio:**

$$F(x,y) = 5.223 \times 10^6 - 1.331 \times 10^5 x - 2.321 \times 10^4 y + 1253x^2 + 1070xy - 5847y^2 - 5.178x^3 - 10.2x^2y + 60.45xy^2 + 104.8y^3 + .007985x^4 + .02338x^3y - .04597x^2y^2 - 1.758xy^3 + 4.328y^4 \quad (136)$$

Contando con los polinomios de las funciones objetivo, ya se tiene el criterio de optimización, el cual arroja valores que pueden medirse de acuerdo al criterio de optimización del diseño. Esta función puede ser maximizada o minimizada mediante métodos matemáticos. Algunos de estos métodos ya fueron explicados previamente en este capítulo, los cuales buscan encontrar los puntos críticos en una función, y saber cuáles son puntos mínimos o puntos máximos.

5.19 Máximos y mínimos en la función objetivo del diseño de un álabe de una turbina de viento.

En el diseño óptimo, la función objetivo de un sistema es una parte crucial dentro de la metodología, ya que esta es la que indicara al diseñador cuales son los puntos óptimos dentro de un área delimitada por restricciones. Existen diferentes formas de encontrar estos puntos óptimos, como fue mencionado anteriormente en este capítulo, se pueden encontrar desde la inspección gráfica del problema, o con el apoyo de métodos matemáticos, en donde las derivadas parciales de una función nos indican la presencia puntos máximos, mínimos, o silla en la función. Cabe mencionar que los métodos que involucran las derivadas parciales y la matriz Hessiana solo permiten encontrar, según sea el caso, mínimos o máximos locales. Para encontrar aquel punto con el valor más alto o con el valor más bajo, se habla de máximos o mínimos globales, los cuales pueden ser encontrados en una función continua y delimitada por restricciones. Siendo métodos que pueden llegar a ser extenuantes de realizar de manera manual, los sistemas computacionales nos ofrecen una gran variedad de programas de apoyo para realizar estas tareas. Tal es el caso que al tener un polinomio con 15 coeficientes, realizar el procedimiento de manera manual y sin cometer ningún error tomaría bastante tiempo. Se decide por usar programas computacionales, en este caso fue en la terminal Ubuntu con Fortan 90 y métodos matemáticos para encontrar los máximos y mínimos de la función objetivo.

Sabiendo que para encontrar máximos y mínimos de una función, se debe encontrar las derivadas parciales de dichas funciones, teniendo así:

- **Fibra de Carbono:**

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0.0002112x^3 + x^2(-0.00856y - 0.03906) + x(-0.414y^2 + 10.264y - 37.61) + y(-76.56y^2 + 2154y - 20340) \quad (137)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = -0.00011348x^3 + x^2(0.0006336y\ 0.05145) + x(-0.00856y^2 - 0.07812y - 7.954) - 0.138y^3 + 5.132y^2 - 37.61y + 516.2 \quad (138)$$

Obteniendo los siguientes puntos como máximos y mínimos de la función objetivo de Fibra de Carbono:

$$mínimo\ x = 197.5 \qquad y = 8.5$$

$$máximo\ x = 211.86 \quad y = 8.5$$

Dónde "*x"* se refiere a la velocidad específica y "*y"* se refiere al esfuerzo equivalente (MPa).

- **Fibra de Vidrio:**

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0.02338x^3 + x^2(-0.09194y - 10.2) + x(-5.274y^2 + 120.9y + 1070) + 17.312y^3 + 314.4y^2 - 11694y - 23210 \quad (139)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0.03194x^3 + x^2(0.07014y - 15.534) + x(-0.09194y^2 - 20.4y + 2506) - 1.758y^3 + 60.45y^2 + 1070y - 133100 \quad (140)$$

Obteniendo los siguientes puntos como máximos y mínimos de la función objetivo de Fibra de Vidrio:

$$mínimo\ \ x = 161.939 \qquad y = 8.57585$$

$$máximo\ \ x = 195.306 \quad y = 10.8511$$

Dónde “*x”* se refiere a la velocidad específica y “*y”* se refiere al esfuerzo equivalente (MPa).

CONCLUSIONES

Es evidente que la transición de fuentes de energía basadas en combustibles fósiles a las fuentes de energía sustentables, toma un mayor peso en la sociedad presente. Los efectos causados por el uso excesivo de los recursos no renovables, como el petróleo, han sido cada vez más notorios en las distintas partes del mundo, lo cual ha sido causa de estudio.

La metodología de diseño óptimo aplicado a los álabes de una turbina de viento, permitió generar en una función objetivo una gran cantidad de diseños dentro de la región factible,

La metodología permite cambiar las restricciones de diseño para generar una gran variedad de diseños, al ampliar o disminuir el área factible de diseño.

En este trabajo de investigación, de acuerdo con el diseño, al modelado de la geometría del perfil y a la simulación se llegó a la conclusión que es indispensable puntualizar la variabilidad de la velocidad de viento para obtener el diseño óptimo de turbinas eólicas, esto es, un mejor rendimiento en la generación de energía eléctrica.

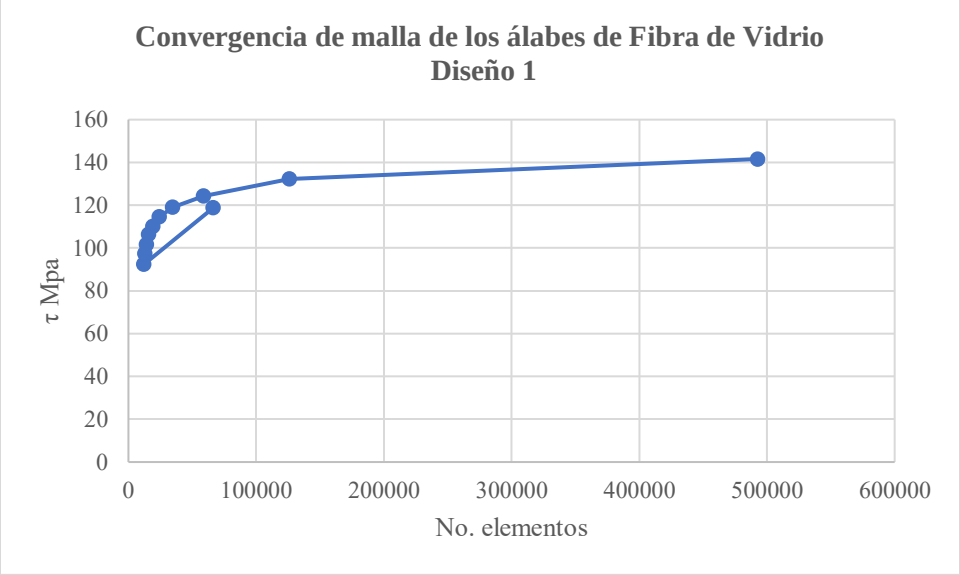
Los modos de vibración dependen de las dimensiones del álabe, así como también del material de manufactura.

A medida que la velocidad específica aumenta, incrementa el esfuerzo de la Teoría de falla de Von Mises y por lo tanto la rigidez disminuye, esto es debido a que el aspa se vuelve más esbelto (a menor masa).

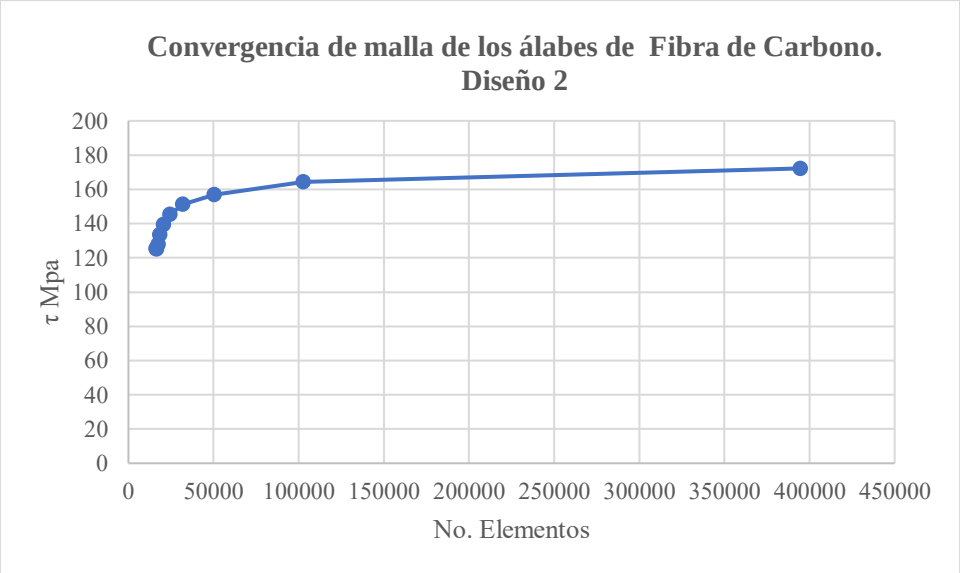
Se esperaría que el esfuerzo disminuyera de acuerdo a la disminución de la dimensión del aspa, pero el esfuerzo no sólo depende de la masa del cuerpo, sino de otras propiedades mecánicas.

En los análisis modales la constante de rigidez no cambia, lo haría si se aplicará una fuerza externa, pero para los análisis modales sólo actúa la fuerza inicial, la de excitación y se calcula así, porque es necesario saber en qué modos de vibración fallarán primero. Esto nos puede llevar a un modelo matemático que pueda predecir el modo de vibración en función de la velocidad específica.

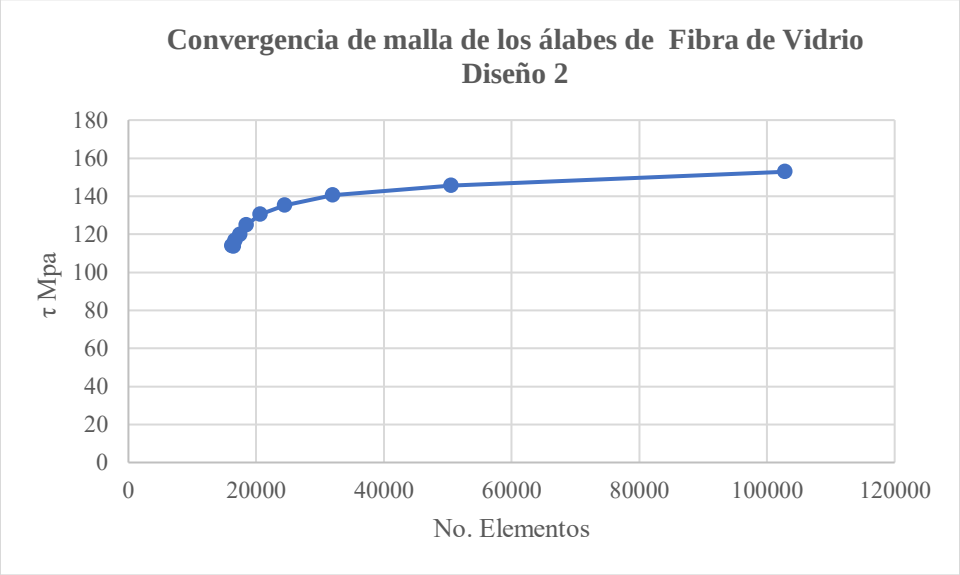
Anexos



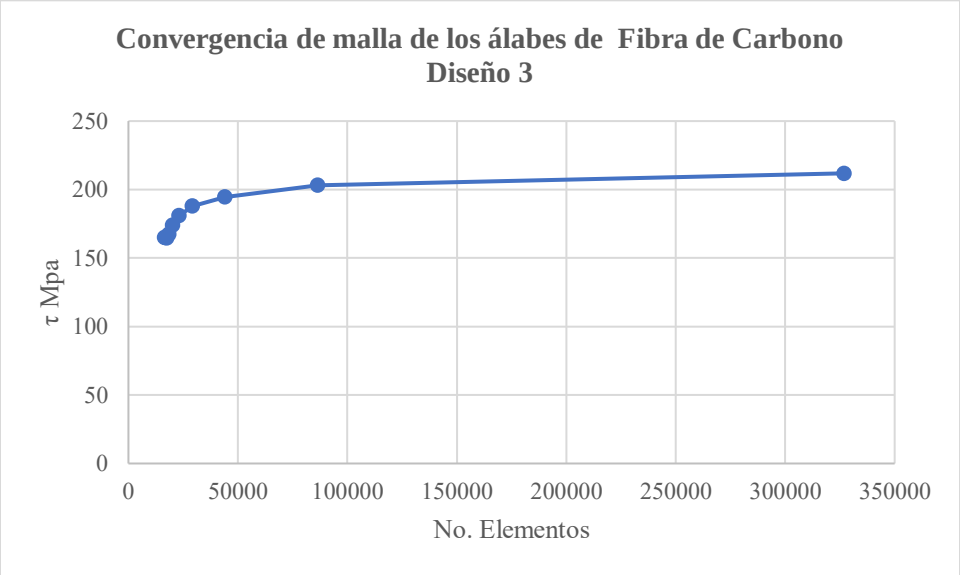
Gráfica 1A. Convergencia de malla. Diseño 1, material Fibra de Vidrio



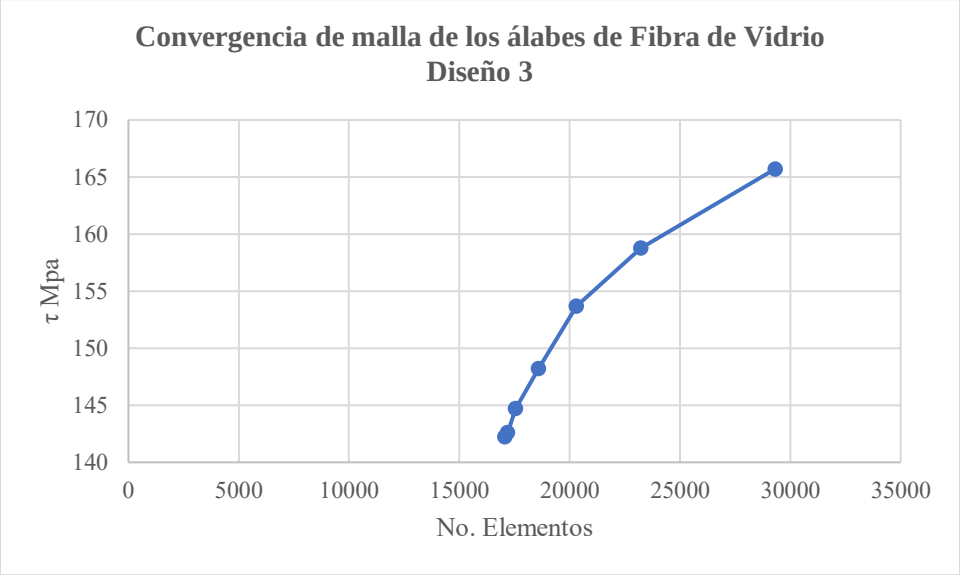
Gráfica 2A. Convergencia de malla. Diseño 2, material Fibra de Carbono



Gráfica 3A. Convergencia de malla. Diseño 2, material Fibra de Vidrio



Gráfica 4A. Convergencia de malla. Diseño 3, material Fibra de Carbono



Gráfica 5A. Convergencia de malla. Diseño 3, material Fibra de Vidrio

Referencias

[1] J. S. Arora, Introduction to optimum desing, Iowa: Elsevier, 2012.

[2] IRENA, Wind Power, Technology Brief, Abu Dhabi: International Renewable Energy Agency, 2016.

[3] J. F. Manwell, J. G. Mc Gowan y A. L. Rogers, Wind Energy Explained Theory, Design and Application, Chichester,: John Wiley & Sons, 2009.

[4] A. M. d. E. E. (AMDEE), «amdee,» [En línea]. Available: https://amdee.org/. [Último acceso: 29 Mayo 2020].

[5] J. A. Carta González, R. Calero Pérez, A. Colmenar Santos y M. A. Castro Gil, Centrales de energías renovables. Generación eléctrica con energías renovables, Madrid: PEARSON EDUCACIÓN, S.A, 2009.

[6] E. Hau, «Wind Turbines,» de *Fundamentals, Technologies, Application, Economics*, Berlin, Springer, 2006, p. 775.

[7] D. Wood, Small Wind turbines, Analysis, Design, and Application, London: Springer, 2011.

[8] Y. A. Cengel y M. A. Boles, Termodinámica, Mc Graw Hill, 2012.

[9] V. López Garza, Diseño y manufactura de álabes de turbinas de viento de eje horizontal de baja capacidad para bajas velocidades de viento, Santiago de Querétaro , 2020.

[10] N. S. Jens, General Momentum Theory for Horizontal Axis Wind Turbines, Switzerland: Springer International Publishing, 2016.

[11] T. Burton, D. Sharpe, N. Jenkins y E. Bossanyi, Wind Energy Handbook, Chichester: John Wiley & Sons, 2001.

[12] P. Fuglsang, C. Bak, M. Gaunaa y I. Antoniou, «Design and Verification of the Risø-B1 Airfoil Family for Wind Turbines,» *J Solar Energy,* nº 100210, p. 126, 2004.

[13] N. Arnalda Cencelli, Aerodynamic Optimization of a Small-Scale Wind Turbine Blade for Low Windspeed Conditions Thesis, South Africa, 2006.

[14] W. T. Thomson, Theory of Vibration with Applications, Santa Barbara, California: Georde Allen & Unwin LTD, 1981.

[15] R. Barnes, E. Morozov y K. Shankar, «Improved methodology for design of low wind speed specific wind turbine blades,» *Composite Structures,* vol. 10, nº 1016, pp. 677-684, 2014.

[16] NREL, «NWTC Information Portal,» 6 Julio 2012. [En línea]. Available: https://wind.nrel,gov/airfoils/. [Último acceso: 2019].

[17] C. Zhang y G. Zhou, «A view-based 3D CAD model reuse framwork enebling product lifecycle reuse,» *Advances in Engineering Sorftware,* nº 127, pp. 82-89, 2019.

[18] A. R19.0, ANSYS R19.0, 2019.

[19] B. T. J., «Mesh generation: Art or science,» *Progress in Aerospace,* nº 41, pp. 29-63, 2005.

[20] I. 61400.2-2013, «Wind Turbines - Design Requirements for Small Wind Turbines,,» 2013.

[21] A. Chakrabarty, S. Mannan y T. Cagin, «Finite Element Analysis in Process Safety,» *Multiscale Modeling for Process Safety Applications,* pp. 275-288, 2016.

[22] D. Hutton, Fundamentals of Finite Element Analysis, New York: Mc Graw Hill, 2004.

[23] S. Moaveni, FINITE ELEMENT ANALYSIS (Theory and application with ANSYS), Minnesota State University, Mankato: PRENTICE HALL, 1999.

[24] E. De la Fuente, «Von Mises stresses in random vibration of linear structures,» *Computer and Structures,* nº 87, pp. 1253-1262, 2009.

[25] S. J. Arora, INTRODUCTION TO OPTIMUM DESIGN, Oxford: ELSEVIER, 2012.

[26] J. J. Zavala, DISEÑO ÓPTIMO DE LOS ÁLABES DE UNA TURBINA DE VIENTO, Morelia, Michoacán, 2020.

[27] O. R. A. Gur, «Optimal Design of Horizontal Axis Wind Turbine Blades,» *Design; Tribology; Education.,* vol. 3, 2008.

[28] M. P. M. Jureczko y A. Mę zyk, «Optimization of Wind Tur-bine Blad,» *J. Mater. Process. Technol,* nº 167, p. 463–471, 2005.

[29] A. Déborah, R. Jerson, L. André, T. Joao y C. Antonio, «Optimum aerodynamic design for wind turbine blade with a Rankine vortex wake,» *Renewable Energy,* nº 55, pp. 296-304, 2013.

[30] A. Kaveth y S. Sabeti, «Optimal of Jacket Supporting Structures for Offshore Wind Turbines Using CBO and ECBO Algorithms,» *Periodica Polytechnica Civil Engineering,* 2017.

[31] Y. Karam y M. Hani, «Optimal frequency design of wind turbine blades,» *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics,* nº 90, pp. 961-986, 2002.

[32] W. Quan, W. Jun, S. Jinfeng, R. Jun y W. Qiong, «Optimal design of wind turbine airfoils based on functional integral and curvature smooth continuous theory,» *Aeropace Science and Technology,* nº 55, pp. 34-42, 2016.

[33] L. Longfu, Z. Xiaofeng, S. Dongran, T. Weiyi, Y. Jian, L. Li, T. Xiaoyu y W. W., «Optimal Design of Rated Wind Speed and Rotor Radius to Minimizing the Cost of Energy for Offshore Wind Turbines,» *Energies,* vol. 11, p. 2728; doi:10.3390/en11102728, 2018.

[34] M. Mohamed, E. Janiga, E. Pap y D. Thévenin, «Optimal blade shape of a modified Savonius turbine using an obstacle shielding the returning blade,» *Energy Conversion and Management,* nº 52, pp. 236-242, 2010.

[35] B. Ernesto y T. Andre, «Optimal Design of Horizontal-Axis Wind Turbines Using Blade-Element Theory and Evolutionary Computation,» *Journal of Solar Energy Engineering,* vol. 124, pp. 357-363, 2002.

[36] T. Mojtaba, S. Tahmine, R. Kiana y A. Pouria, «Aerodynamic optimal design of wind turbine blades using geneti algorithm,» *Energy Equipment ans Systems,* vol. 2, pp. 185-193, 2014.

[37] T. Chalothorn, «Optimum Blade Profiles for a Variable-Speed Wind Turbine in Low Wind Area,» *Science Direct,* vol. 75, pp. 651-657, 2015.

[38] L. Jaehwan, R. Dong y L. Kwan-Soo, «Optimum hub height of a wind turbine for maximizing annual net profit,» *Energy Conversion and Management,* vol. 100, pp. 90-96, 2015.

[39] B. Hicham, T. Mostapha y D. Saifaoui., «Modal analysis for optimal design of offshore wind turbine blades,» *Materials Today: Proceedings,* 2020.

[40] P. Fuglsang, C. Bak, M. Gaunaa y I. Antoniou, «Design and Verification of the Risø-B1 Airfoil Family for Wind Turbines,» *ASME JOURNAL OF SOLAR ENERGY ENGINEERING,* vol. 126, nº 4, pp. 1002-1010, 2004.

[41] G. G. L. González, M. A. Rodríguez, F. G. Cuevas y L. U. Lezama, «PRONÓSTICO DE GENERACIÓN ELÉCTRICA DE CORTO PLAZO DE UN PARQUE EÓLICO, UTILIZANDO TÉCNICAS NUMÉRICAS DE PREDICCIÓN DEL CLIMA,» *ITCELAYA,* vol. 40, nº 130, 2018.

[42] M. 17, MINITAB 17 STATISTICAL SOFTWARE, 2020.

[43] ArcGeek, «ArcGeek,» Mayo 2018. [En línea]. Available: https://acolita.com/interpolacion-con-la-distancia-inversa-ponderada-idw/#:~:text=La%20Distancia%20Inversa%20Ponderada%20(IDW)%20es%20matem%C3

%A1tica%20(determinista),IDW%20y%20d%C3%B3nde%20funciona%20mejor.. [Último acceso: 2020].

[44] M. R2017b, MATLAB R2017b, 2017.

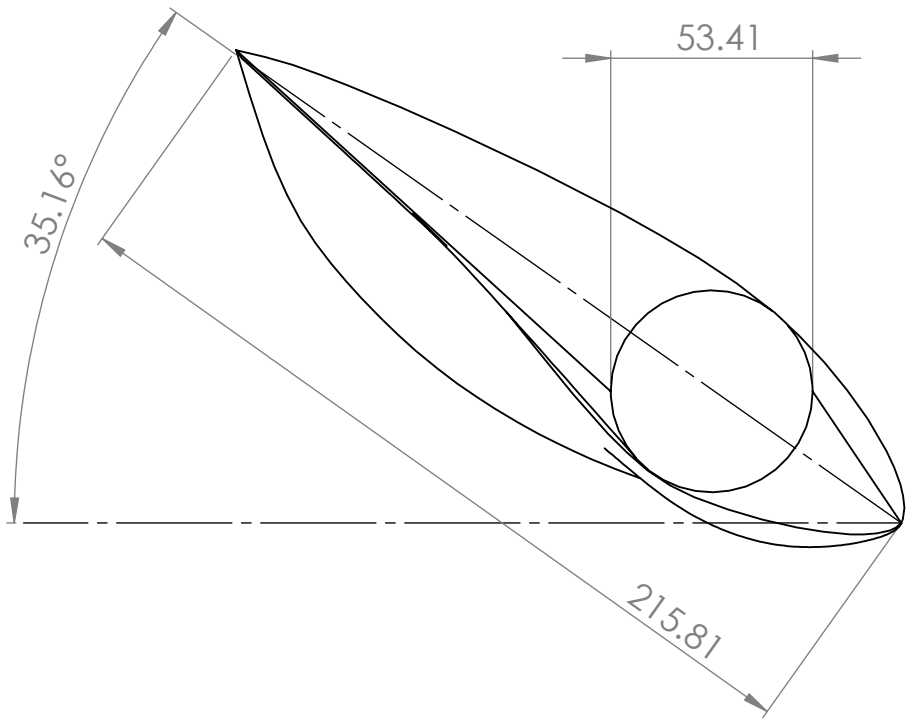
[45] J. C. V. d. Kuyper y S. Ramírez Morales , «Potencial y estado actual de la energía eolica en países latinoamericanos,» de *Fuentes de Energía, Renovables y No Renovables, Aplicaciones.*, México, Alfaomega, 2014, p. 696.

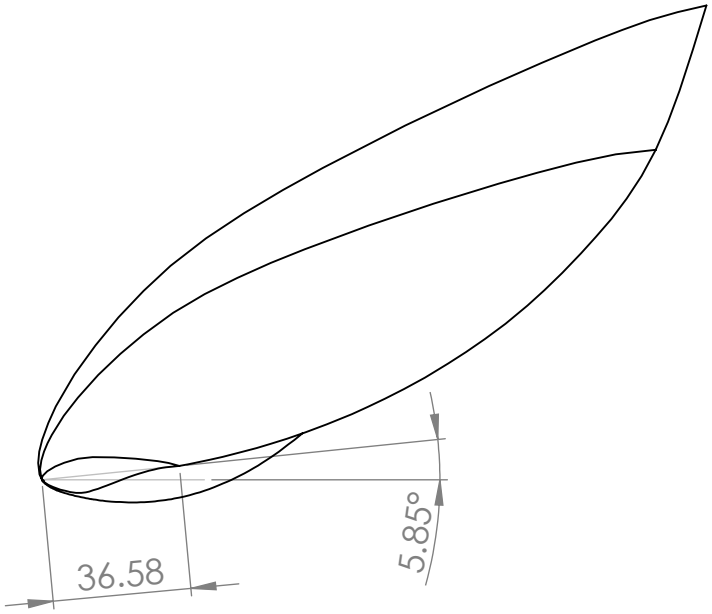
[46] L. G. Chr., H. M. H., B. A. y C. I., «Modal Analysis Of Wind Turbine Blade,» *DTU Library,* nº 1181, 2002.

[47] J. Mandell, D. Samborsky, L. Wang y N. Wahl, «New fatigue data for wind turbine blade materials,» de *ASME wind energy symposium*, Nevada USA, 2003.

[48] J. R. Sotomayor Castellanos y J. M. Villaseñor Aguilar, «Módulo de rigidez y módulo dinámico de la madera de Acer saccharum Marshall y Thuja plicata L.,» *Revista Forestal Mesoamericana Kurú ,* vol. 13, nº 33, pp. 20-28, 2016.

Vista Posterior





Vista Frontal

SI NO SE INDICA LO CONTRARIO: LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM ACABADO SUPERFICIAL: TOLERANCIAS: LINEAL: ANGULAR:	ACABADO:	REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS	Cotas: mm
			Esc: 1:2

	NOMBRE	FIRMA	FECHA
DIBUJ.			
VERIF.			
APROB.			
FABR.			
CALID.			

TÍTULO:

Vista Frontal y Posterior

MATERIAL:

N.º DE DIBUJO

Diseño 1

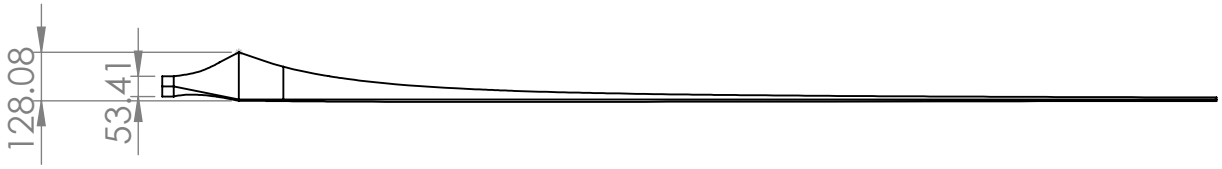
A4

PESO:

ESCALA:1:50

HOJA 1 DE 1

Vista Lateral Derecha



Vista Lateral Izquierda

SI NO SE INDICA LO CONTRARIO: LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM ACABADO SUPERFICIAL: TOLERANCIAS: LINEAL: ANGULAR:	ACABADO:	REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS	NO CAMBIE LA ESCALA / Cotas: mm Esc: 1:20

	NOMBRE	FIRMA	FECHA
DIBUJ.			
VERIF.			
APROB.			
FABR.			
CALID.			

TÍTULO:

Vistas Laterales

MATERIAL:

N.º DE DIBUJO

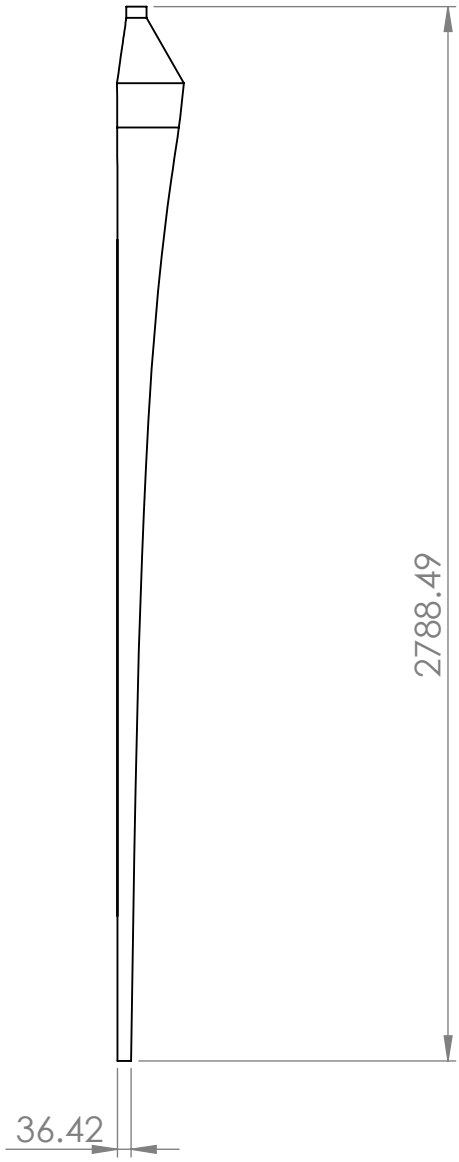
Diseño 1

A4

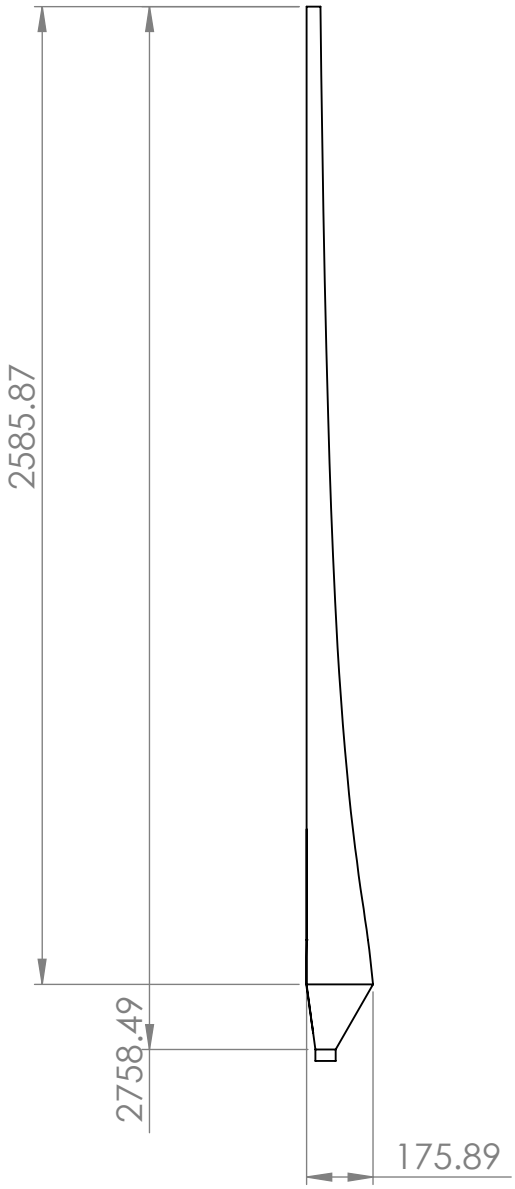
PESO:

ESCALA:1:50

HOJA 1 DE 1



Vista Superior



Vista Inferior

SI NO SE INDICA LO CONTRARIO: LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM ACABADO SUPERFICIAL: TOLERANCIAS: LINEAL: ANGULAR:	ACABADO:	REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS	NO CAMBIE LA ESCALA / Cotas: mm Esc: 1:20

	NOMBRE	FIRMA	FECHA
DIBUJ.			
VERIF.			
APROB.			
FABR.			
CALID.			

TÍTULO:

Vista Superior e Inferior

MATERIAL:

N.º DE DIBUJO

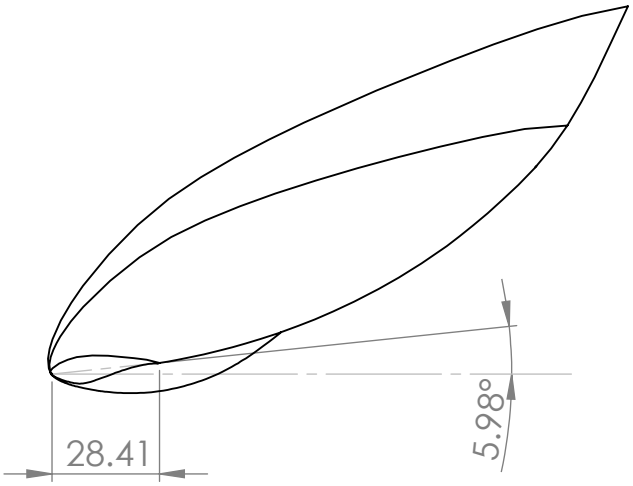
Diseño 1

A4

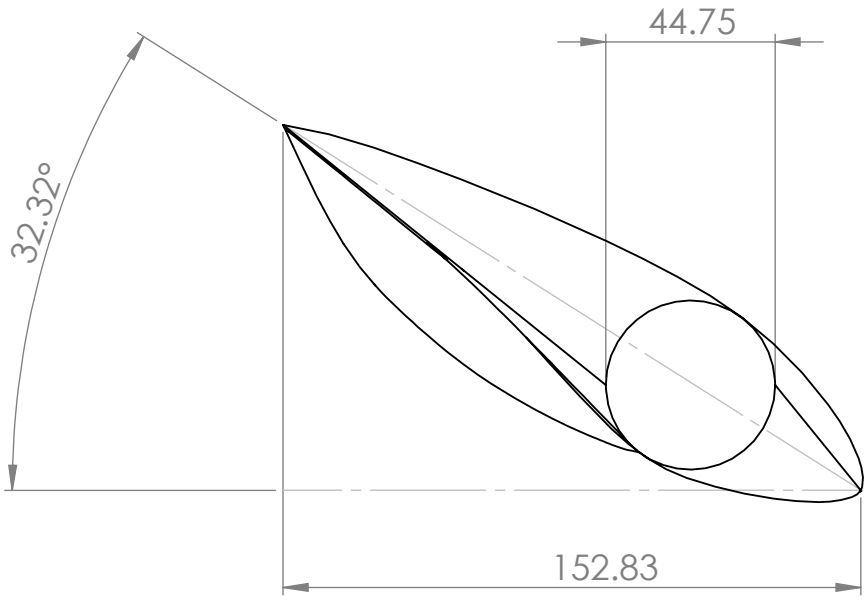
PESO:

ESCALA:1:50

HOJA 1 DE 1



Vista Frontal



Vista Posterior

SI NO SE INDICA LO CONTRARIO: LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM ACABADO SUPERFICIAL: TOLERANCIAS: LINEAL: ANGULAR:	ACABADO:	REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS	NO CAMBIE LA ESCALA / Cotas: mm Esc: 1:2

	NOMBRE	FIRMA	FECHA
DIBUJ.			
VERIF.			
APROB.			
FABR.			
CALID.			

TÍTULO:

Vista Forntal y Posterior

MATERIAL:

N.º DE DIBUJO

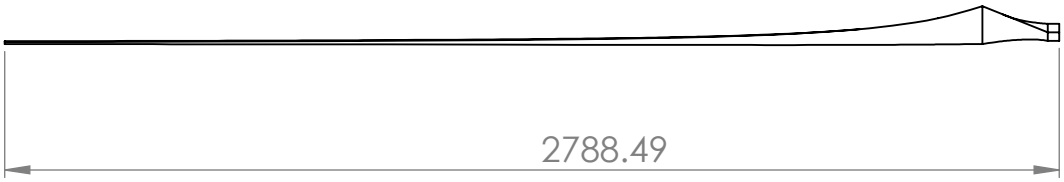
Diseño 2

A4

PESO:

ESCALA:1:50

HOJA 1 DE 1



Vista Lateral Derecha

Vista Lateral Izquierda

SI NO SE INDICA LO CONTRARIO: LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM ACABADO SUPERFICIAL: TOLERANCIAS: LINEAL: ANGULAR:	ACABADO:	REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS	NO CAMBIE LA ESCALA / Cotas: mm Esc: 1:20

	NOMBRE	FIRMA	FECHA
DIBUJ.			
VERIF.			
APROB.			
FABR.			
CALID.			

TÍTULO:

Vistas Laterales

MATERIAL:

N.º DE DIBUJO

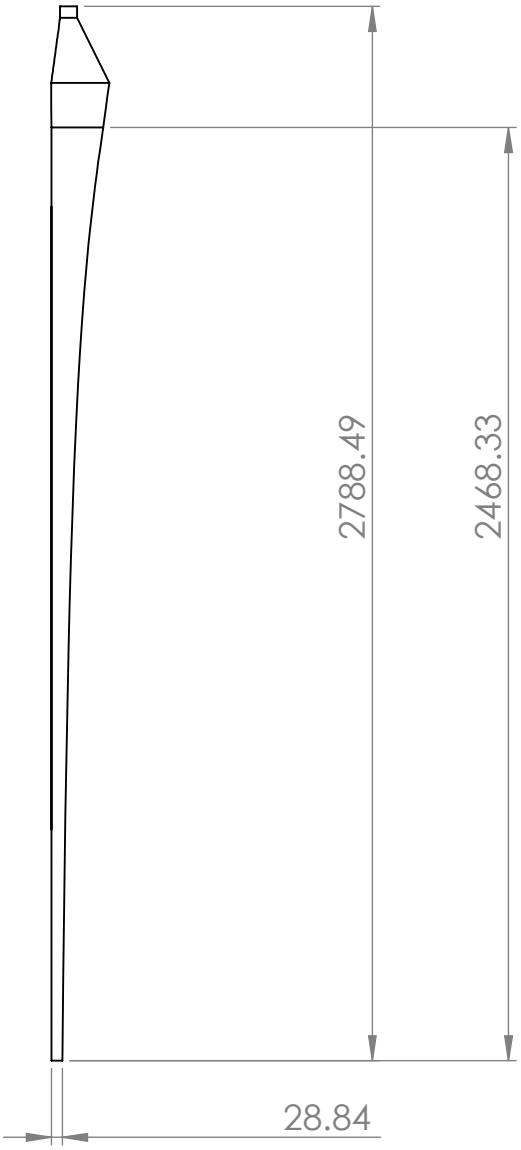
Diseño 2

A4

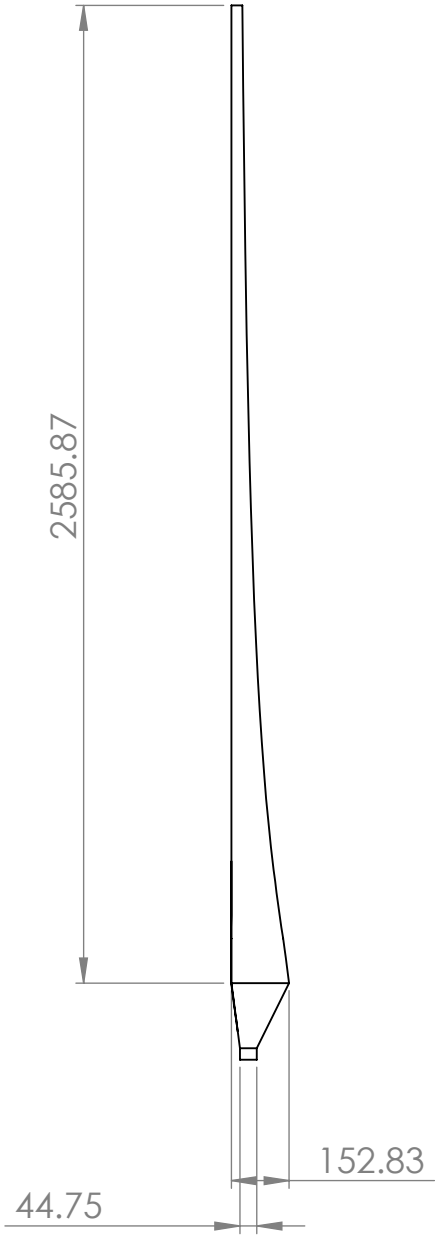
PESO:

ESCALA:1:50

HOJA 1 DE 1



Vista Superior



Vista Inferior

SI NO SE INDICA LO CONTRARIO: LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM ACABADO SUPERFICIAL: TOLERANCIAS: LINEAL: ANGULAR:	ACABADO:	REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS	NO CAMBIE LA ESCALA / Cotas: mm Esc: 1:20

	NOMBRE	FIRMA	FECHA
DIBUJ.			
VERIF.			
APROB.			
FABR.			
CALID.			

TÍTULO:

Vista Superior e Inferior

MATERIAL:

N.º DE DIBUJO

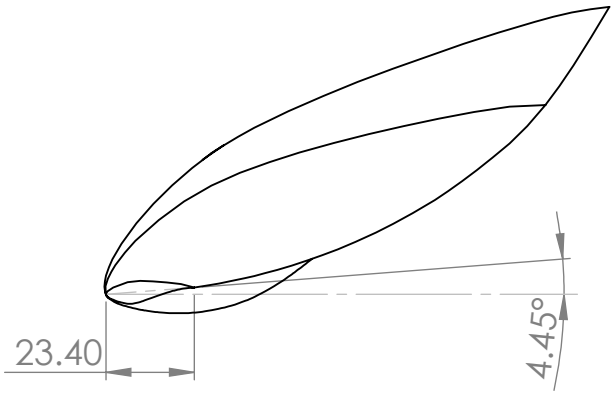
Diseño 2

A4

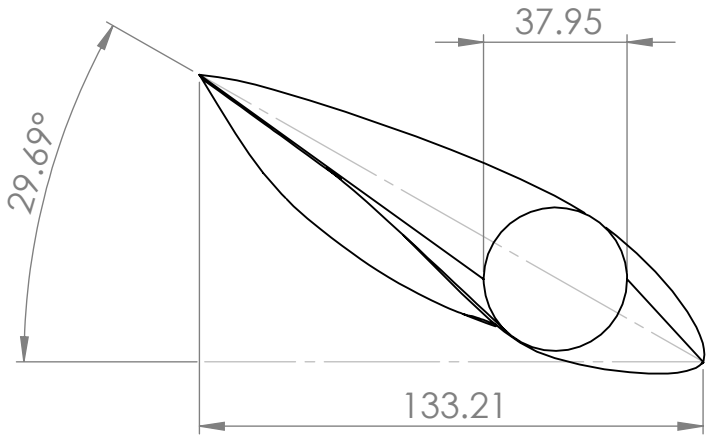
PESO:

ESCALA:1:50

HOJA 1 DE 1



Vista Frontal

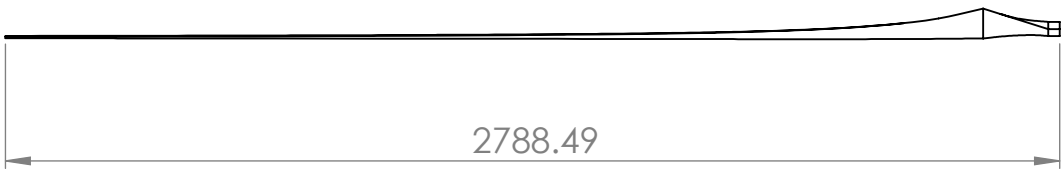


Vista Posterior

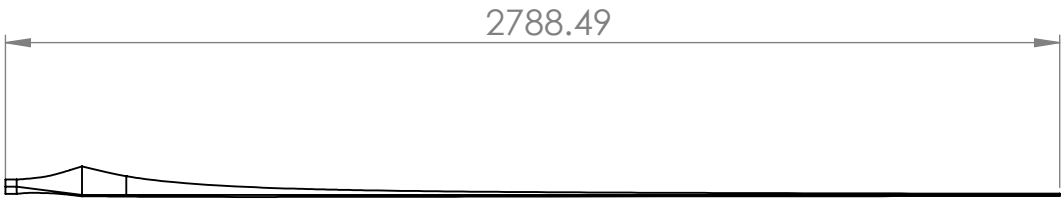
SI NO SE INDICA LO CONTRARIO: LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM ACABADO SUPERFICIAL: TOLERANCIAS: LINEAL: ANGULAR:	ACABADO:		REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS	NO CAMBIE LA ESCALA	Cotas: mm	
				Esc: 1:2		

	NOMBRE	FIRMA	FECHA			
DIBUJ.						
VERIF.						
APROB.						
FABR.						
CALID.				MATERIAL:		
				PESO:		

TÍTULO: Vista Frontal y Posterior		
N.º DE DIBUJO Diseño 3	A4	
ESCALA:1:50	HOJA 1 DE 1	



Vista Lateral Derecha



Vista Lateral Izquierda

SI NO SE INDICA LO CONTRARIO: LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM ACABADO SUPERFICIAL: TOLERANCIAS: LINEAL: ANGULAR:	ACABADO:		REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS		NO CAMBIE LA ESCALA	Cotas: mm
						Esc: 1:20

	NOMBRE	FIRMA	FECHA			
DIBUJ.						
VERIF.						
APROB.						
FABR.						
CALID.				MATERIAL:		
				PESO:		

TÍTULO:

Vistas Laterales

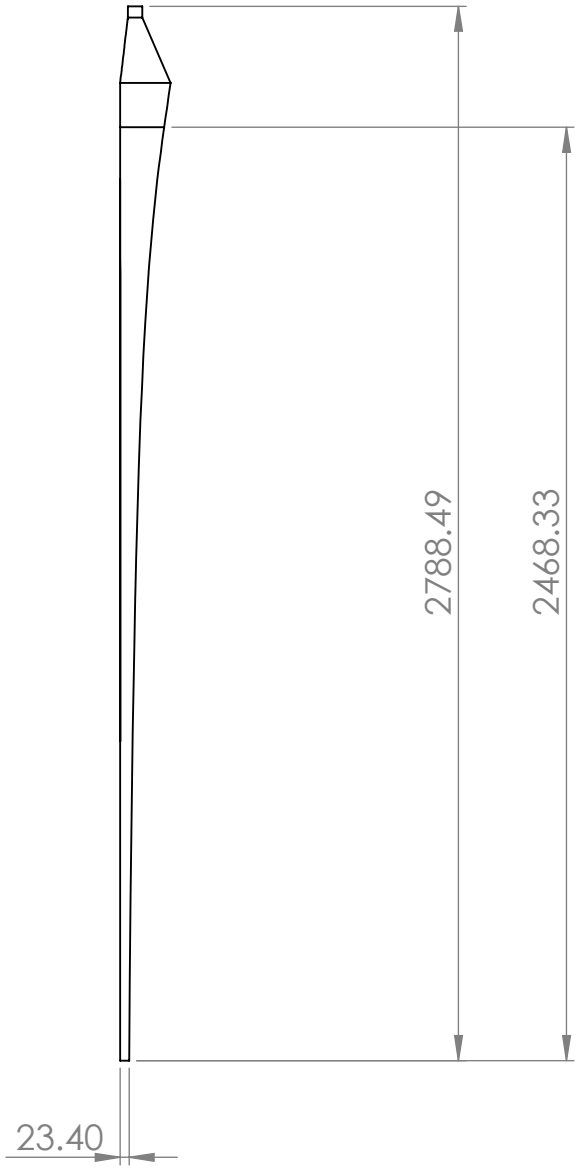
N.º DE DIBUJO

Diseño 3

A4

ESCALA:1:50

HOJA 1 DE 1



Vista Superior

Vista Inferior

SI NO SE INDICA LO CONTRARIO: LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM ACABADO SUPERFICIAL: TOLERANCIAS: LINEAL: ANGULAR:	ACABADO:	REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS	NO CAMBIE LA ESCALA / Cotas: mm Esc: 1:20

	NOMBRE	FIRMA	FECHA
DIBUJ.			
VERIF.			
APROB.			
FABR.			
CALID.			

TÍTULO:

Vista Superior e Inferior

MATERIAL:

N.º DE DIBUJO

Diseño 2

A4

PESO:

ESCALA:1:50

HOJA 1 DE 1