



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO**



**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA**

**MODELADO Y SIMULACIÓN DE MISILES EN
BOND GRAPH**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA MECÁNICA**

PRESENTA:

I.M. LUIS FLAVIANO FERREYRA GARCÍA

ASESOR:

DR. GILBERTO GONZÁLEZ ÁVALOS

Morelia, Michoacán; Junio de 2021



*Para mi familia:
consanguínea y elegida.*

Que se merezca construir un legado.

AGRADECIMIENTOS

Principalmente a mi familia, que ha sabido acompañar el desarrollo académico de mi persona, alimentando la sed de curiosidad y el hambre de conocimiento.

Para amigos y colegas de profesión y de vida. El aporte de puntos de vista distintos al propio siempre es enriquecedor,

Para el comité tutorial encargado de la revisión de este trabajo, encabezado por el Dr. Gilberto González y el Dr. Víctor López. La búsqueda del conocimiento y la verdad implica también el encontrarse a uno mismo y no perderse entre las falacias de la *praxis*.

Para el Personal Administrativo de la División de Estudios de Posgrado. Que el progreso y mejora sean los vientos que muevan la nave.

De manera especial a los profesores del Programa de Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica, quienes tuvieron a bien contribuir a la formación integral más allá del ámbito académico. De todos los ejemplos se aprende.

A todos los que han estado, los que están y los que estarán: cada contribución cuenta.

RESUMEN

El estudio de sistemas aerodinámicos puede ser llevado a cabo en función del número de grados de libertad que representen sus movimientos; en el caso más general, los movimientos de rotación y traslación son descritos mediante un conjunto de seis ecuaciones diferenciales que involucran los seis grados de libertad del movimiento en el espacio euclidiano tridimensional, donde el teorema de separación permite tratar ambos movimientos de manera independiente.

Considerando que un sistema es una construcción subjetiva empleada para la mejor comprensión de un ente y sus interacciones, el análisis de éste puede llevarse a cabo desde la perspectiva de intercambio de potencia y su representación gráfica, la cual proporciona un lenguaje propio que permite operar con subsistemas que involucran distintos dominios físicos.

Tratando a un misil como un sistema aerodinámico de simetría rotacional en el cual se estudia su desempeño al desplazarse en un medio fluido, se tiene que el sistema involucra dos movimientos que, a su vez, consisten en la interacción energética del dominio mecánico traslacional y el dominio mecánico rotacional.

En el presente trabajo se muestra una aplicación del modelado matemático de la dinámica de vuelo de sistemas aerodinámicos, con el tratamiento del análisis de sistemas dinámicos definidos por sus estados desde la perspectiva de intercambio de potencia con el enfoque y notación de “Bond Graph”.

Palabras clave: Modelo matemático, intercambio de potencia, bond graph, sistemas aerodinámicos, movimiento tridimensional.

ABSTRACT

The study of aerodynamic systems can be carried out as a function of the number of degrees of freedom that their movements represent. In the most general case, the movements of rotation and translation are described by means of a set of six differential equations that involve the six degrees of freedom of the movement in three-dimensional Euclidean space, where the separation theorem allows treating both movements independently.

Considering that a system is a subjective construction used to the better understanding of an entity and its interactions, its analysis can be carried out from the perspective of power exchange and its graphic representation, which provides its own language that allows operating with subsystems that involve different physical domains.

Treating a missile as an aerodynamic rotational symmetry system in which its performance is studied when moving in a fluid environment, the system involves two movements that consist of the energetic interaction of the translational mechanical domain and the rotational mechanical domain.

In this work an application of the mathematical modeling of the flight dynamics of aerodynamic systems is shown, with the treatment of the analysis of dynamic systems defined by their states from the perspective of power exchange with the approach and notation of Bond Graph.

CONTENIDO

| | |
|---|-----------|
| ÍNDICE DE FIGURAS | 6 |
| ÍNDICE DE TABLAS | 9 |
| CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN | 11 |
| 1.1. Sistemas Aerodinámicos. | 11 |
| 1.2. Hipótesis. | 11 |
| 1.3. Objetivos. | 11 |
| 1.3.1. Objetivo General. | 11 |
| 1.3.2. Objetivos Específicos. | 11 |
| 1.4. Justificación. | 12 |
| 1.5. Metodología. | 12 |
| 1.6. Estado del Arte. | 13 |
| 1.7. Contribución. | 16 |
| 1.8. Contenido de la Tesis. | 16 |
| CAPÍTULO 2. MODELADO DE SISTEMAS AERODINÁMICOS | 18 |
| 2.1. Ingeniería Virtual. | 18 |
| 2.1.1. Generalidades del Modelado de Dinámica de Vuelo. | 19 |
| 2.1.2. Simulación de Vehículos Aeroespaciales. | 22 |
| 2.2. Modelado De Dinámica De Vuelo. | 23 |
| 2.2.1. Conceptos Matemáticos en Modelado. | 23 |
| 2.2.1.1. Mecánica Clásica. | 23 |
| 2.2.1.2. Elementos y axiomas de la Mecánica Clásica. | 23 |
| 2.2.1.3. Principio de indiferencia material. | 25 |
| 2.2.1.4. Bloques de construcción del modelado matemático. | 26 |
| 2.2.1.5. Notación. | 27 |
| 2.2.2. Elementos Tensoriales. | 28 |
| 2.2.2.1. Sistemas coordenados. | 29 |
| 2.2.2.2. Tensores cartesianos. | 32 |
| 2.2.2.3. Álgebra tensorial. | 37 |
| 2.2.3. Modelado de Geometría. | 42 |
| 2.2.3.1. Desplazamiento de puntos. | 42 |
| 2.2.3.2. Líneas rectas. | 42 |

| | | |
|------------|---|----|
| 2.2.3.3. | Plano. | 43 |
| 2.2.3.4. | Forma normal de un plano. | 44 |
| 2.2.3.5. | Tensor de proyección de plano. | 44 |
| 2.2.3.6. | Tensor de reflexión. | 45 |
| 2.3. | Marcos y Sistemas Coordinados. | 46 |
| 2.3.1. | Marcos. | 46 |
| 2.3.1.1. | Posicionamiento de marcos. | 46 |
| 2.3.1.2. | Marcos de referencia. | 48 |
| 2.3.1.2.1. | Marco heliocéntrico. | 48 |
| 2.3.1.2.2. | Marco geocéntrico inercial (J2000). | 49 |
| 2.3.1.2.3. | Marco terrestre. | 50 |
| 2.3.1.2.4. | Marco corporal. | 50 |
| 2.3.2. | Sistemas Coordinados. | 52 |
| 2.3.2.1. | Matriz de transformación de coordenadas. | 52 |
| 2.3.2.1.1. | Representación de vector base. | 52 |
| 2.3.2.1.2. | Matriz de transformación de cosenos directores. | 54 |
| 2.3.2.1.3. | Propiedades de las matrices de transformación. | 55 |
| 2.3.2.2. | Sistemas coordinados y sus transformaciones. | 56 |
| 2.3.2.2.1. | Sistemas coordinados heliocéntrico e inercial. | 57 |
| 2.3.2.2.2. | Sistema coordinado terrestre. | 58 |
| 2.3.2.2.3. | Sistema coordinado geográfico. | 59 |
| 2.3.2.2.4. | Sistema coordinado corporal. | 61 |
| 2.3.2.2.5. | Sistemas coordinados aéreos. | 63 |
| 2.3.2.2.6. | Sistema coordinado de ruta de vuelo. | 68 |
| 2.3.2.2.7. | Sistema coordinado de nivel local. | 69 |
| 2.4. | Cinemática de Traslación y Rotación. | 70 |
| 2.4.1. | Tensor de Rotación. | 71 |
| 2.4.1.1. | Propiedades del tensor de rotación. | 71 |
| 2.4.1.2. | Rotaciones especiales. | 72 |
| 2.4.1.2.1. | Rotaciones planas. | 72 |
| 2.4.1.2.2. | Rotación no plana. | 74 |
| 2.4.1.2.3. | Rotación general. | 74 |
| 2.4.1.2.4. | Tensor tetragonal. | 76 |

| | | |
|------------|--|-----|
| 2.4.1.3. | Eje y ángulo de rotación. _____ | 76 |
| 2.4.1.4. | Rotaciones pequeñas. _____ | 78 |
| 2.4.2. | Cinemática de Tiempo Cambiante. _____ | 80 |
| 2.4.2.1. | Derivada rotacional temporal. _____ | 81 |
| 2.4.2.2. | Velocidad y aceleración lineal. _____ | 84 |
| 2.4.2.3. | Velocidad angular. _____ | 85 |
| 2.4.2.4. | Transformación de Euler. _____ | 87 |
| 2.4.2.4.1. | Propiedades de velocidades angulares. _____ | 88 |
| 2.4.3. | Determinación de Actitud. _____ | 89 |
| 2.4.3.1. | Ecuaciones diferenciales del tensor de rotación. _____ | 90 |
| 2.4.3.2. | Ecuaciones diferenciales de ángulos de Euler. _____ | 92 |
| 2.4.3.3. | Ecuaciones diferenciales de cuaternios. _____ | 94 |
| 2.4.3.3.1. | Cuaternio de rotación. _____ | 95 |
| 2.5. | Dinámica Traslacional _____ | 96 |
| 2.5.1. | Cantidad de Movimiento Lineal. _____ | 96 |
| 2.5.2. | Dinámica Newtoniana. _____ | 97 |
| 2.5.3. | Segunda Ley de Newton. _____ | 97 |
| 2.5.4. | Implementación en Simulación. _____ | 100 |
| 2.5.4.1. | Simulaciones de tres grados de libertad. _____ | 100 |
| 2.5.4.2. | Simulaciones de cinco grados de libertad. _____ | 102 |
| 2.5.4.3. | Simulaciones de seis grados de libertad. _____ | 104 |
| 2.5.4.3.1. | Tierra redonda. _____ | 104 |
| 2.5.4.3.2. | Tierra plana. _____ | 105 |
| 2.6. | Dinámica De Actitud. _____ | 106 |
| 2.6.1. | Tensor de Inercia. _____ | 106 |
| 2.6.1.1. | Definición del tensor de momento de inercia. _____ | 106 |
| 2.6.1.2. | Teoremas de desplazamiento. _____ | 107 |
| 2.6.1.2.1. | Teorema de desplazamiento puntual. _____ | 107 |
| 2.6.1.2.2. | Teorema de ejes paralelos. _____ | 107 |
| 2.7. | Cantidad de Movimiento Angular. _____ | 108 |
| 2.7.1. | Definición de la Cantidad de Movimiento Angular. _____ | 108 |
| 2.7.2. | Cantidad de Movimiento Angular de Cuerpos Rígidos. _____ | 109 |
| 2.8. | Ley de Euler. _____ | 110 |

| | | |
|---|---|------------|
| 2.8.1. | Dos Enfoques. _____ | 110 |
| 2.8.1.1. | Ley de Euler de acuerdo con Truesdell. _____ | 110 |
| 2.8.1.2. | Ley de Euler de acuerdo con Goldstein. _____ | 111 |
| 2.8.2. | Vuelo Libre. _____ | 112 |
| 2.8.3. | Ecuaciones de Actitud para Simulaciones de Seis Grados de Libertad. _____ | 113 |
| CAPÍTULO 3. MODELADO DE SISTEMAS EN UN ENFOQUE DE BOND GRAPH | | 115 |
| 3.1. | Introducción. _____ | 115 |
| 3.1.1. | Modelos de Sistemas. _____ | 116 |
| 3.1.1.1. | Sistemas, subsistemas y componentes. _____ | 117 |
| 3.1.1.2. | Sistemas determinados por sus estados. _____ | 118 |
| 3.1.1.3. | Usos de modelos dinámicos. _____ | 119 |
| 3.2. | Variables Generalizadas y Elementos de Sistemas. _____ | 120 |
| 3.2.1. | Variables de Sistema. _____ | 121 |
| 3.2.2. | Esfuerzo y Flujo: Variables Generalizadas del Sistema. _____ | 122 |
| 3.2.3. | Potencia y Energía. _____ | 122 |
| 3.2.4. | Energía almacenada y estado. _____ | 123 |
| 3.3. | Elementos Básicos de Sistemas. _____ | 125 |
| 3.3.1. | Propiedades Constitutivas de Fuentes de Energía. _____ | 125 |
| 3.3.2. | Propiedades Constitutivas de Almacenadores de Energía. _____ | 126 |
| 3.3.3. | Propiedades Constitutivas De Disipadores De Energía. _____ | 128 |
| 3.4. | Elementos adicionales del sistema. _____ | 129 |
| 3.5. | Sistemas Multipuerto y Bond Graphs. _____ | 131 |
| 3.5.1. | Multipuertos en Ingeniería. _____ | 131 |
| 3.5.2. | Puertos, Bonds y Potencia. _____ | 137 |
| 3.5.3. | Bond Graphs. _____ | 139 |
| 3.5.4. | Entradas, Salidas y Señales. _____ | 141 |
| 3.6. | Modelos de Componentes Básicos. _____ | 144 |
| 3.6.1. | Elementos Básicos de Un Puerto. _____ | 144 |
| 3.6.2. | Elementos Básicos de Dos Puertos. _____ | 154 |
| 3.6.3. | Elementos de Unión de Tres Puertos. _____ | 159 |
| 3.6.4. | Consideraciones de Causalidad para Multipuertos Básicos. _____ | 165 |
| 3.6.4.1. | Causalidad para elementos básicos de un puerto. _____ | 165 |
| 3.6.4.2. | Causalidad para elementos básicos de dos y tres puertos. _____ | 167 |

MODELADO Y SIMULACIÓN DE MISILES EN BOND GRAPH

| | | |
|--|---|------------|
| 3.7. | Modelos de Sistemas y Simulación Automatizada por Computadora | 169 |
| 3.7.1. | Mecánica de Traslación. | 170 |
| 3.7.2. | Rotación en Torno a Un Eje Fijo. | 174 |
| 3.7.3. | Modelos de Transductores Simples. | 176 |
| 3.8. | Ecuaciones de Estado. | 177 |
| 3.8.1. | Forma Estándar para Sistemas de Ecuaciones. | 177 |
| 3.8.2. | Bond Graph Aumentado. | 178 |
| 3.8.3. | Formulación Básica y Reducción. | 182 |
| 3.8.4. | Espacio de Estado para Modelos de Sistemas Multipuerto. | 182 |
| 3.9. | Sistemas Mecánicos de Geometría No Lineal. | 186 |
| 3.9.1. | Dinámica Multidimensional. | 186 |
| CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA | | 189 |
| 4.1. | Modelo Bond Graph de Movimiento en Tres Dimensiones. | 189 |
| 4.1.1. | Obtención de Ecuaciones de Espacio de Estado. | 190 |
| 4.2. | Modelo de Misil en Bond Graph. | 197 |
| 4.2.1. | Modelo de Movimiento en Tres Dimensiones. | 197 |
| 4.2.2. | Modelo de Simetría Rotacional. | 203 |
| CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS | | 209 |
| 5.1. | Trayectoria de Corto Alcance. | 209 |
| 5.2. | Trayectoria de Largo Alcance. | 213 |
| CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES | | 216 |
| REFERENCIAS | | 219 |
| ACCIONES DE DIFUSIÓN | | 223 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|---|-----|
| Figura 1. Metodología | 13 |
| Figura 2.1. Marco “A” y sistema coordinado “A” [20]..... | 30 |
| Figura 2.2. Triángulo de vectores [20]. | 34 |
| Figura 2.3. Radio-vector [20]. | 35 |
| Figura 2.4. Suma de radio-vectores [20]. | 35 |
| Figura 2.5. Vector de desplazamiento [20]..... | 36 |
| Figura 2.6. Triángulo de vectores [20]. | 38 |
| Figura 2.7. Producto vectorial [20]..... | 39 |
| Figura 2.8. Proyección plana [20]. | 44 |
| Figura 2.9. Reflexión [20]. | 45 |
| Figura 2.10. Relación de marcos [20]..... | 47 |
| Figura 2.11. Localización [20]. | 47 |
| Figura 2.12. Orientación [20]. | 48 |
| Figura 2.13. Marco de referencia heliocéntrico [20]. | 49 |
| Figura 2.14. Marco de referencia inercial [20]. | 50 |
| Figura 2.15. Marco de referencia terrestre [20]. | 50 |
| Figura 2.16. Marco de referencia corporal [20]. | 51 |
| Figura 2.17. Triada “A” [20]..... | 53 |
| Figura 2.18. Cosenos directores [20]. | 54 |
| Figura 2.19. Sistemas coordinados, heliocéntrico e inercial [20]. | 57 |
| Figura 2.20. Sección del sistema coordinado heliocéntrico con respecto al inercial [20]. .. | 58 |
| Figura 2.21. Sistema coordinado terrestre e inercial [20]. | 59 |
| Figura 2.22. Coordenadas geográficas con respecto a las terrestres [20]. | 60 |
| Figura 2.23. Coordenadas corporales con respecto a las geográficas [20]. | 62 |
| Figura 2.24. Sistema coordinado aéreo con respecto al corporal [20]. | 64 |
| Figura 2.25. Sistema coordinado aerobalístico con respecto al corporal [20]. | 65 |
| Figura 2.26. Triángulo esférico [20]. | 67 |
| Figura 2.27. Coordenadas de ruta de vuelo con respecto a las geográficas [20]. | 68 |
| Figura 2.28. Marcos “A” y “B” con sus respectivas triadas [20]. | 71 |
| Figura 2.29. Rotación plana [20]. | 73 |
| Figura 2.30. Rotación no plana [20]. | 74 |
| Figura 2.31. Rotación pequeña [20]. | 78 |
| Figura 2.32. Velocidad lineal [20]. | 84 |
| Figura 2.33. Velocidad diferencial [20]. | 84 |
| Figura 2.34. Vector incremental [20]. | 85 |
| Figura 2.35. Rotación [20]. | 86 |
| Figura 2.36. Ecuaciones de velocidad angular de Euler [20]. | 93 |
| Figura 2.37. Números complejos [20]. | 94 |
| Figura 2.38. Los cuatro parámetros de Euler [20]. | 94 |
| Figura 2.39. Cantidad de movimiento lineal de una partícula [20]. | 96 |
| Figura 2.40. Eje de referencia cambiado [20]. | 108 |
| Figura 2.41. Ley de Euler para una partícula [20]. | 110 |
| Figura 3.1. Modelo general de un sistema dinámico [46]. | 119 |

| | |
|---|-----|
| Figura 3.2. Colección de multipuertos en ingeniería [46]. | 131 |
| Figura 3.3. Tetraedro de estado [46]. | 135 |
| Figura 3.4 Motor <i>c-d</i> de excitación separada [46]. | 137 |
| Figura 3.5. Sistema parcialmente ensamblado [46]. | 139 |
| Figura 3.6. Bond graph descriptivo del sistema de la Figura 3.5 [46]. | 139 |
| Figura 3.7. Diagrama esquemático y bond graph descriptivo para sistema de pedestal de antena de radar [46]. | 140 |
| Figura 3.8. Diagrama esquemático y bond graph descriptivo para un ejemplo de tren motriz [46]. | 141 |
| Figura 3.9. Prueba experimental para un motor <i>c-d</i> [46]. | 142 |
| Figura 3.10. Significado del trazo causal [46]. | 143 |
| Figura 3.11. Resistor de un puerto [46]. | 145 |
| Figura 3.12. Capacitor de un puerto [46]. | 147 |
| Figura 3.13. Interpretación de área de energía almacenada para el capacitor de un puerto [46]. | 149 |
| Figura 3.14. Inercia de un puerto [46]. | 150 |
| Figura 3.15. Interpretación de área de energía almacenada para la inercia de un puerto [46]. | 151 |
| Figura 3.16. Tetraedro de estado con los elementos de un puerto y las variables que relacionan [46]. | 153 |
| Figura 3.17. Transformadores [46]. | 155 |
| Figura 3.18. Giradores [46]. | 156 |
| Figura 3.19. Transformador de desplazamiento modulado [46]. | 158 |
| Figura 3.20. Elementos de tres puertos en varios dominios físicos [46]. | 160 |
| Figura 3.21. Ejemplos de sistemas que involucran elementos de tres puertos [46]. | 163 |
| Figura 3.22. Ejemplo de traslación mecánica [46]. | 171 |
| Figura 3.23. Reinterpretación del ejemplo de traslación mecánica [46]. | 173 |
| Figura 3.24. Modelo equivalente del ejemplo de traslación mecánica [46]. | 173 |
| Figura 3.25. Modelo de rueda de molienda [46]. | 175 |
| Figura 3.26. Oscilador no lineal [46]. | 176 |
| Figura 3.27. Diagrama de bloques de la estructura de unión de un modelo bond graph lineal. [49]. | 183 |
| Figura 3.28. Cuerpo en movimiento tridimensional general [46]. | 187 |
| Figura 4.1. Modelo bond graph del movimiento de traslación. | 189 |
| Figura 4.2. Modelo bond graph del movimiento de rotación. | 190 |
| Figura 4.3. Anillo de traslación, numerado. | 191 |
| Figura 4.4. Anillo de rotación, numerado. | 194 |
| Figura 4.5. Bond graph con modulaciones y ganancias de traslación. | 198 |
| Figura 4.6a. Sub-modelo para el suministro de señales a las fuentes de esfuerzo traslacional. | 199 |
| Figura 4.6b. Sub-modelo para el suministro de señales a las fuentes de esfuerzo rotacional. | 199 |
| Figura 4.7. Bond graph con modulaciones y ganancias de traslación y rotación. | 199 |
| Figura 4.8a. Simulación con " $F_x \neq 0 ; F_y = F_z = \tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$ ". | 200 |

| | |
|--|-----|
| Figura 4.8b. Simulación con “ $Fy \neq 0 ; Fx = Fz = \tau x = \tau y = \tau z = 0$ ” | 200 |
| Figura 4.8c. Simulación con “ $Fz \neq 0 ; Fx = Fy = \tau x = \tau y = \tau z = 0$ ” | 201 |
| Figura 4.8d. Simulación con “ $\tau x \neq 0 ; Fx = Fy = Fz = \tau y = \tau z = 0$ ” | 201 |
| Figura 4.8e. Simulación con “ $\tau y \neq 0 ; Fx = Fy = Fz = \tau x = \tau z = 0$ ” | 202 |
| Figura 4.8f. Simulación con “ $\tau z \neq 0 ; Fx = Fy = Fz = \tau x = \tau y = 0$ ” | 202 |
| Figura 4.9. Sub-modelo para tasas corporales. | 203 |
| Figura 4.10. Ecuaciones para cálculo de tasas corporales. | 204 |
| Figura 4.11. Sub-modelo para transformación de velocidades y coordenadas inerciales. | 204 |
| Figura 4.12. Ecuaciones para cálculo de velocidades y coordenadas inerciales. | 205 |
| Figura 4.13. Sub-modelo para transformación de velocidades corporales a aerobalísticas. | 206 |
| Figura 4.14. Sub-modelo de términos adicionales. | 206 |
| Figura 4.15. Ecuaciones para cálculo de términos adicionales. | 206 |
| Figura 4.16. Ecuaciones para transformación de componentes de velocidad corporales a inerciales. | 207 |
| Figura 4.17. Modelo para simulación de misiles en bond graph. | 208 |
| Figura 5.1. Ecuaciones para fuerzas en sistema coordenado corporal. | 210 |
| Figura 5.2. Ecuaciones para momentos en sistema coordenado corporal. | 210 |
| Figura 5.3. Carga de parámetros y condiciones iniciales para simulación de corto alcance. | 211 |
| Figura 5.4. Inicialización y ajustes de simulación. | 211 |
| Figura 5.5. Gráfica de altitud contra alcance. | 212 |
| Figura 5.6. Gráfica de altitud contra alcance [12]. | 212 |
| Figura 5.7. Carga de parámetros y condiciones iniciales para simulación de largo alcance. | 213 |
| Figura 5.8. Gráfica de alcance contra tiempo. | 214 |
| Figura 5.9. Gráfica de alcance contra tiempo [12]. | 214 |
| Figura 5.10. Gráfica de ángulo de cabeceo contra alcance. | 215 |
| Figura 5.11. Gráfica de ángulo de cabeceo contra alcance [12]. | 215 |

ÍNDICE DE TABLAS

| | |
|---|-----|
| Tabla 2.1. Resumen de marcos. | 51 |
| Tabla 2.2. Resumen de sistemas coordenados y sus ángulos de transformación. | 70 |
| Tabla 3.1. Algunas cantidades de esfuerzo y flujo. | 132 |
| Tabla 3.2. Variables de potencia y energía para sistemas mecánicos traslacionales. | 135 |
| Tabla 3.3. Variables de potencia y energía para puertos mecánicos rotacionales. | 136 |
| Tabla 3.4. Variables de potencia y energía para puertos hidráulicos. | 136 |
| Tabla 3.5. Variables de potencia y energía para puertos eléctricos. | 137 |
| Tabla 3.6. El resistor de un puerto. | 146 |
| Tabla 3.7. El capacitor de un puerto. | 149 |
| Tabla 3.8. La inercia de un puerto. | 152 |
| Tabla 3.9. Fuentes de un puerto. | 153 |
| Tabla 3.10. Interpretaciones físicas de uniones en bond graph. | 162 |
| Tabla 3.11. Formas causales para elementos básicos de un puerto. | 165 |
| Tabla 3.12. Formas causales para elementos de dos y tres puertos. | 168 |
| Tabla 4.1. Módulos de los giradores del anillo de traslación. | 191 |
| Tabla 4.2. Variables suministradas en el anillo de traslación. | 191 |
| Tabla 4.3. Módulos de los giradores del anillo de rotación. | 194 |
| Tabla 4.4. Parámetros inerciales en el anillo de rotación. | 194 |
| Tabla 4.5. Variables suministradas en el anillo de rotación. | 194 |

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1.1. Sistemas Aerodinámicos.

Partiendo de lo expuesto Adcock [1] se tiene que cualquier identificación particular de un sistema es una construcción humana empleada para ayudar a tener una mejor comprensión de un conjunto de cosas y sus interacciones embebidas, así como para compartir este entendimiento con otros. Lo anterior marca una trayectoria ordenada hacia la generación del conocimiento, desde el entendimiento y repercusión de conceptos y su posterior enriquecimiento.

Por otro lado, desde el campo de la física es posible definir la aerodinámica como el estudio del movimiento de los gases. Considerando un enfoque práctico, como el presentado por la Kazimieras Simonavicius University [2], se entiende a esta disciplina como la interacción entre un objeto en movimiento y su atmósfera circundante, causando un flujo de fluido alrededor del cuerpo. Como una disciplina de la física, la aerodinámica se basa en leyes generales, como las leyes de gases, la dinámica de fluidos y la propagación del sonido; de igual manera proporciona leyes que determinan las fuerzas actuantes en una aeronave y su comportamiento en interacción con la atmósfera.

De este modo es posible considerar a los sistemas aerodinámicos como aquellos sistemas reales, de acuerdo con Sillitto, *et al.* [3], en los cuales se estudia el desempeño de vehículos que se desplazan en un medio fluido gaseoso, así como su interacción mecánica con el mismo.

1.2. Hipótesis.

Es posible modelar sistemas aerodinámicos de tipo misil mediante Bond Graph. A partir de estos modelos, simulaciones que determinen el comportamiento del sistema serán mostrados y verificados con casos de estudio publicados.

1.3. Objetivos.

1.3.1. Objetivo General.

Modelar y simular mediante Bond Graph un sistema aerodinámico del tipo misil.

1.3.2. Objetivos Específicos.

- Modelar mediante Bond Graph sistemas físicos en diferentes sistemas de coordenadas.
- Modelar los movimientos de traslación y rotación de un misil.
- Simular y verificar los modelos de misiles en Bond Graph.

1.4. Justificación.

La metodología propuesta presenta ventajas importantes para el modelado y análisis de sistemas aerodinámicos:

- El enfoque basado en flujo de potencia proporciona una estructura natural para el desarrollo de modelos de este tipo de sistemas y permite la división en subsistemas, conformados, en su caso, con componentes de dominios físicos diferentes, sin alterar la naturaleza del modelo.
- La terminología unificada para los diversos dominios físicos, basada en la analogía de efectos físicos, permite desarrollar y aplicar herramientas en contextos diferentes.
- La representación gráfica permite visualizar directamente los flujos de energía, así como detectar relaciones causa-efecto entre variables y subsistemas.
- Por su característica gráfica, proporciona flexibilidad para agregar al modelo aspectos no considerados en una iteración previa sin tener que partir de cero.
- Proporciona una forma sistematizada para generar las ecuaciones diferenciales que describen al sistema directamente de su representación gráfica mediante Bond Graph.
- Ofrece una estructura sólida para el análisis de las propiedades de control del sistema.

Mediante la representación en Bond Graph se pueden estudiar directamente algunas características importantes de un sistema, por ejemplo, observabilidad estructural, controlabilidad estructural, determinación directa de la respuesta de estado estacionario, linealización de sistemas no-lineales, inversión de sistemas, representación de espacio de estado, etc. [4]. Estas son algunas de las ventajas para utilizar el modelado mediante Bond Graph.

1.5. Metodología.

La metodología propuesta para el desarrollo del presente trabajo se ilustra en la siguiente Figura 1. Ésta consiste de analizar el modelado de sistemas aerodinámicos así como el modelado de sistemas físicos en mediante Bond Graph. En seguida, se efectúa el modelado del sistema aerodinámico en cuestión empleando los sistemas de coordenadas correspondientes.

Posteriormente se precisa el modelado de un sistema aerodinámico sujeto a movimientos de traslación y de rotación para, a partir de estos elementos, obtener la representación del modelo, en Bond Graph, de un misil.

Finalmente, se genera y ejecuta la simulación del misil modelado en Bond Graph.

La comparación y comprobación de los resultados encontrados con casos de estudio publicados determinan la culminación del documento.

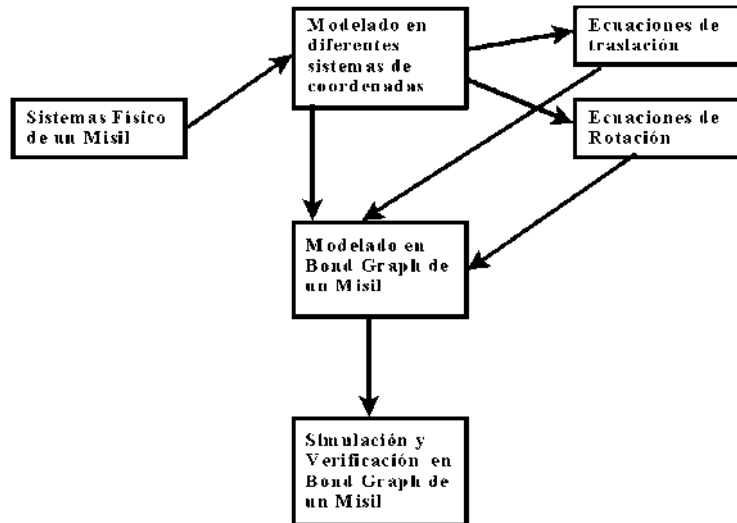


Figura 1. Metodología

1.6. Estado del Arte.

Previo al siglo XV se creía que los proyectiles se movían en trayectorias descritas por líneas rectas hasta que éstos perdían “ímpetu” y caían al suelo. Hasta mediados del siglo XVI el italiano Niccolo Tartaglia (citado por Cuomo [5]) documentó que los proyectiles en vuelo describían trayectorias curvas. El trabajo de Galileo Galilei (citado por Naylor [6]) generó la primera solución analítica sobre trayectorias de proyectiles y encontró que éstas eran parabólicas. Sus predicciones de trayectorias eran bastante precisas dado que los proyectiles primitivos eran pesados y lanzados con velocidades iniciales bajas. En 1711, Johann Bernoulli (citado por Parnovsky [7]) desarrolló la primera solución de trayectoria de proyectiles incluyendo el efecto del arrastre aerodinámico. El entendimiento de éste fenómeno en la trayectoria de un proyectil fue reforzado por la invención del péndulo balístico por Benjamin Robins (citado por Jhonson [8]) a principios del siglo XVIII. A partir de aportaciones como estas, distintas organizaciones fueron desarrollando funciones y ecuaciones que relacionan el movimiento de objetos en el aire con las fuerzas interactuantes con ellos.

La aplicación del modelado y simulación de cohetes ha permitido el desarrollo de herramientas didácticas como las proporcionadas por Vashon Industries, Inc. la cual presenta en [9] una guía práctica donde se explican, de manera general, conceptos relacionados a los cohetes de etapas múltiples, tales como la disposición en serie y en paralelo de etapas, así como la importancia de los centros de masa y de presión del vehículo en el cálculo del impulso del mismo; de igual manera se menciona la importancia de la temperatura ambiental durante un lanzamiento. Todo ello tomando como medio experimental práctico su propia serie de cohete llamado “Valkyrie”.

Dentro del ámbito académico, la aplicación de conceptos y la ejecución de modelos físicos ven su desarrollo completo mediante proyectos como el presentado en [10], en el cual se

describen las etapas de la realización de un cohete para participar en la categoría Avanzada en la 7^o Competición Intercolegial de Ingeniería de Cohetes (IREC, por sus siglas en inglés) presentada por la Asociación de Cohetes Sónicos Experimentales (ESRA, por sus siglas en inglés). De principal interés resulta la parte dedicada a la simulación del lanzamiento empleando “Rocksim” con el cual se desarrolla el análisis de vuelo del cohete, el cual permite, después de la construcción de la geometría del vehículo, generar una simulación del lanzamiento para tener una perspectiva del comportamiento del cohete durante el vuelo. Parámetros importantes que considera el software son, la geometría basada en Diseño Asistido por Computadora (CAD, por sus siglas en inglés), la magnitud de la masa en seco del cohete, ubicación del centro de gravedad del vehículo en conjunto, el tipo y cantidad de motores empleados para la propulsión, los parámetros temporales empleados para las secuencias de las fases y el despliegue de los paracaídas; de igual manera se consideran las condiciones ambientales como las condiciones del viento, altitud y ángulo de lanzamiento. A partir de estos parámetros la simulación es capaz de brindar valores de altitud alcanzada, velocidad y aceleración instantáneas, entre otros valores, con los cuales se puede inferir si se alcanzan de manera virtual los hitos marcados previamente por las condiciones y restricciones de la competencia; igualmente, es posible iterar el lanzamiento a partir de modificaciones a la geometría del modelo las cuales pueden ser consideradas, en su caso, para la manufactura del prototipo final.

De igual manera existen programas respaldados por organizaciones gubernamentales como el Programa de Modelos de Cohetes de la Patrulla Aérea Civil, Unidad Auxiliar de la Fuerza Aérea de los Estados Unidos de América. De especial interés es la etapa final del programa presentada en [11]. En esta fase del programa se exponen los conceptos básicos para el rastreo de cohetes y la física de la propulsión y el impulso relacionados con motores propulsión sólida empleados en cohetes a escala. Uno de los aspectos importantes mostrados es la designación de motores en función de sus especificaciones de impulso y sus respectivas curvas de tiempo contra propulsión para cada motor sugerido. Con ello, a partir de la geometría del modelo de cohete empleado, es posible estimar la altitud a lograr.

En los años recientes se han presentado propuestas para mejorar el análisis de partes específicas del modelado de vehículos aerodinámicos como el presentado por Hainz [12], en el cual muestra las ventajas de ciertas modificaciones al modelo de teoría lineal de proyectiles para reducir problemas de precisión en estimadores de punto de impacto presentados por otros métodos, conservando el bajo requerimiento de los sistemas computacionales abordado, mostrando resultados satisfactorios para trayectorias de corto y largo alcance para proyectiles distintamente estabilizados. Otro enfoque es el presentado por Bhattacharjee [13], en el cual se propone un modelo híbrido de guía para escenarios referenciados en tierra plana. Dicho modelo combina el modelo no lineal de control predictivo con un enfoque de cono de colisión.

El estudio de la dinámica de sistemas vehiculares de tipo misil puede enfocarse a profundidad en cualquiera de sus etapas. Un ejemplo de ello es el trabajo de Wang [14], en el cual, para estudiar la dinámica de un sistema de este tipo, así como para determinar las alteraciones

iniciales, desarrollaron un modelo llamado modelo dinámico de lanzamiento rígido-flexible-múltiple en el cual se emplea el método de matriz de transferencia para un sistema multi-cuerpo y la teoría de dinámica de lanzamiento. Donde la ecuación que gobierna el movimiento del sistema vehicular de tipo misil es obtenida empleando la ortogonalidad del eigenvector aumentado y las ecuaciones dinámicas corporales del sistema.

El modelado mediante Bond Graph fue desarrollado originalmente por el Profesor Paynter del Instituto Tecnológico de Massachusetts hacia finales de la década de 1950, sin embargo su impacto fue notable hasta la implementación de avances computacionales recientes y las herramientas derivadas de este desarrollo, permitiendo la completa utilización de las ventajas proporcionadas por esta metodología. En el campo de la ingeniería aeroespacial, trabajos como el de Granda [15], muestran los aportes de la implementación del modelado mediante bond graph en la industria aeroespacial, mostrando implementaciones desarrolladas tales como el sistema de detención de aterrizaje para porta-aviones, modelos de suspensión empleados para trenes de aterrizaje y dinámica de multi-cuerpos. De la misma manera se presentan avances en el progreso de la NASA en el modelado de la Estación Espacial Internacional empleando técnicas Bond Graph y sistemas de actuadores avanzados que emplean aleaciones con memoria de forma.

En otras áreas afines a la industria aeroespacial se tienen aportaciones relevantes como la de Fu y Mare [16], quienes presentan el modelado y simulación de un actuador electromecánico. En este trabajo consideran a este tipo de actuadores como elementos críticos de aeronaves con requerimientos cada vez mayores de seguridad y precisión. Para ello proponen un enfoque de modelado de dos grados de libertad considerando los movimientos traslacionales y rotacionales de un actuador electromecánico al descomponerlo en una serie de subcomponentes o multipuertos mecánicos que puedan describir estos movimientos. El enfoque propuesto es desarrollado con el uso intensivo de modelos Bond Graph lo cual permite que rodamientos, uniones y limitadores sean agregados para un análisis de desempeño a nivel de componentes.

Las ventajas de la metodología Bond Graph para ser empleada sin distinción de dominio energético se ve respaldada por trabajos como el presentado por Zanj [17], en el cual se menciona la complejidad del control de un sistema termo-mecánico, al ser un sistema multi-físico, dado que el comportamiento general de este tipo de sistemas es resultado de transacciones energéticas entre los subdominios físicos existentes en el sistema. El uso del enfoque de Bond Graph permite generar, de manera separada, el comportamiento dinámico de cada uno de los subdominios con respecto a las interacciones de sus propios componentes energéticos, para posterior mente ser acoplados a través de la generación de interacciones reversibles e irreversibles entre componentes que son contrapartes energéticas de diferentes subdominios.

Cuando se realiza el proceso de modelado de un sistema se tiende a cuestionar la validación respectiva, enfatizada hacia la relevancia de una simulación. En este sentido existen aportaciones como la provista por Schlesinger (citado por Kheir [18]) quien establece que la

verificación se refiere al proceso de confirmar que el modelo conceptual ha sido correctamente trasladado a un programa operacional y que los cálculos hechos por este programa utilizan datos correctos de entrada; por otro lado, la validación se refiere al proceso de confirmar que el modelo conceptual es útil o aplicable al demostrar una correspondencia aceptable entre los resultados computacionales del modelo y datos reales (en caso de haberlos) u otros datos teóricos.

Considerando las perspectivas proporcionadas por los trabajos mencionados en torno al modelado matemático de sistemas aerodinámicos y sus correspondientes procesos de verificación y validación, objetivos del presente trabajo, se observa un nicho de oportunidad para profundizar en la investigación de esta área, aprovechando las ventajas brindadas por el modelado indiferente a dominios energéticos de Bond Graph, así como el avance tecnológico de los recursos informáticos, para consecuentemente realizar aportaciones al quehacer científico en beneficio del desarrollo y generación de conocimiento.

1.7. Contribución.

En el presente trabajo se muestra una aplicación del modelado matemático de la dinámica de vuelo de sistemas aerodinámicos, con el tratamiento del análisis de sistemas dinámicos definidos por sus estados desde la perspectiva de intercambio de potencia con el enfoque y notación de “Bond Graph”.

Se presentan las bases teóricas del estudio analítico de los sistemas aerodinámicos en general para posteriormente centrarse en el estudio de los sistemas de simetría rotacional (misiles). En seguida se introduce la nomenclatura invariante bajo transformaciones de coordenadas que permite el modelado de sistemas aerodinámicos en el marco referencial más adecuado y transformarlo según se requiera.

Dentro del modelado mediante “Bond Graph” se muestra el uso de técnicas de análisis estructural de los modelos y la obtención de ecuaciones de estado a partir del modelo esquemático; así como de la implementación de modulaciones para elementos de transformación de potencia.

1.8. Contenido de la Tesis.

Este trabajo de tesis encuadra aspectos teóricos de extensión considerable, en su perspectiva particular de tratamiento académico, que se entienden necesarios para la delimitación del trabajo específico objetivo del proyecto de investigación. Se encuentra dividido en cinco capítulos:

El primer capítulo comprende una introducción general al trabajo de investigación que culmina con el desarrollo de la tesis titulada “Modelado y Simulación de Misiles en Bond Graph”, así como la presentación del estado del arte que enmarca al tema de investigación.

El segundo capítulo presenta los aspectos relevantes del modelado de sistemas aerodinámicos, fundamentados en la labor académica desarrollada en las últimas décadas y sujetos a una notación definida y sustentada en la literatura específica y en las contribuciones en el campo de la ingeniería aeroespacial.

El tercer capítulo muestra los aspectos esenciales del modelado de sistemas dinámicos desde el enfoque de “Bond Graph”, basado en el tratamiento de sistemas como intercambiadores de potencia. Se muestran las generalidades teóricas del lenguaje que logra unificar el modelado de sistemas en una misma nomenclatura y esquematización la cual permite que el dominio de un área específica de la ingeniería provea de las bases suficientes para comprender un modelo “Bond Graph” de otra área al identificar las variables generalizadas de potencia y energía.

El cuarto capítulo explica el desarrollo de la metodología realizada durante el proceso de modelado, incluyendo el desarrollo analítico general del modelo matemático del sistema en cuestión para compararlo con el obtenido empleando el enfoque de “Bond Graph”. Finalmente se desarrolla la simulación del modelo mediante software computacional a fin de verificar la consistencia del modelo.

En el quinto capítulo se muestran los resultados obtenidos y se realiza el análisis de las variables de estado involucradas en el sistema con la finalidad de identificar aquellas que son de mayor relevancia para el modelado de dinámica de vuelo de sistemas de simetría rotacional.

En el sexto capítulo se desglosan las conclusiones obtenidas del trabajo de investigación; de igual manera se muestra el posible trabajo a futuro dentro del modelado de sistemas aerodinámicos.

CAPÍTULO 2. MODELADO DE SISTEMAS AERODINÁMICOS

2.1. Ingeniería Virtual.

El significado de “virtual” implica a algo que es simulado por una computadora por razones de economía, conveniencia o desempeño, considerando la definición enmarcada en el diccionario mundial Encarta [19]. Por lo que se deduce que la ingeniería virtual es la ingeniería basada en la computación con la finalidad de aumentar la productividad. Esto desafía a la ingeniería a diseñar, construir y probar un prototipo sin materializarlo.

El modelado y la simulación son elementos importantes de la ingeniería virtual. No reemplazan a la creatividad pero permiten la definición de un diseño y explorar su desempeño. Con énfasis en sistemas dinámicos, el modelado significa la formulación de procesos dinámicos en lenguaje matemático. La simulación es la estructura terminada y programada para su ejecución en computadora. Con el modelo terminado y la simulación validada, se tienen herramientas para lograr tareas como las enunciadas por Zipfel [20]:

- 1) Desarrollar requerimientos de desempeño. Se simula una variedad de conceptos para emparejar requerimientos tecnológicos y definir especificaciones de desempeño preliminares.
- 2) Reducción de costos de pruebas. Una simulación, validada por una prueba de vuelo, se emplea para investigar otros puntos en el entorno de vuelo.
- 3) Práctica de procedimientos peligrosos. Fallas de sistemas, procedimientos abortivos y condiciones extremas de vuelo pueden probarse de manera segura en simuladores.
- 4) Obtener mayor percepción de las dinámicas de vuelo. Las variables dinámicas pueden rastrearse a través de la simulación y pueden identificarse restricciones de limitación.
- 5) Interacción de componentes. Entender cómo interactúan los subsistemas para conformar un vehículo funcional.

Con la introducción de las primeras computadoras analógicas a principios de la década de 1960, las ecuaciones linealizadas de movimiento de una aeronave pudieron resolverse electrónicamente, sin embargo, aún eran incapaces de resolver ecuaciones diferenciales. En la década de 1970 las computadoras analógicas fueron combinadas con computadoras digitales; éstos híbridos fueron capaces de simular movimientos no lineales de vehículos y cualquier otro subsistema de interés. Los movimientos de alta frecuencia como deflexiones estructurales, velocidad y lazos de control de aceleración fueron calculados mediante circuitería analógica, mientras que las ecuaciones de movimiento no lineales fueron resueltas mediante componentes digitales. Tales computadoras híbridas dominaron la industria de la simulación durante dos décadas; en la actualidad, los avances en la computación digital han dejado a las computadoras híbridas en la obsolescencia.

El incremento de las capacidades computacionales ha sido aprovechado a todos los niveles de diseño, prueba y administración. Una jerarquía para modelado y simulación ha congregado cuatro distintos niveles de actividades: ingeniería, acoplamiento, misión y

campana. A pesar de que los nombres tienen connotación militar, aplican igualmente a empresas civiles, como lo muestra de manera detallada Cloud [21].

La conjunción del modelado y la simulación es la simulación ingenieril, la cual establece el desempeño de sistemas individuales, basado en principios científicos. Los modelos científicos obedecen a principios administrativos, objetos inertes a la toma de decisiones humanas.

Con la implementación del modelado y la simulación en tantas disciplinas técnicas y administrativas, se cuestiona sobre si la simulación es verificada, validada y acreditada; si ha sido correctamente construida de acuerdo a las especificaciones del sistema y si sus resultados son confiables para la materialización del sistema. Tales requerimientos son complicados de satisfacer y, por lo general, el modelo probado y verdadero es aceptado de antemano.

Los principales científicos guían el proceso de modelado y simulación, y la alta fidelidad del mismo caracterizará los resultados.

2.1.1. Generalidades del Modelado de Dinámica de Vuelo.

La dinámica de vuelo es el estudio del movimiento de vehículos a través del aire o el espacio. A diferencia de los autos y trenes, éstos movimientos se dan en tres dimensiones, sin restricciones dadas por un camino o riel. La dinámica de vuelo tiene sus raíces en la mecánica clásica. Las leyes de Newton y de Euler son adecuadas para el cálculo de estos movimientos, siendo relegados los efectos relativísticos a perturbaciones minúsculas.

Un vehículo aeroespacial experimenta seis grados de libertad. Tres grados traslacionales describen el movimiento del centro de masa, también llamado “trayectoria”, y tres grados de rotación, o “actitud”, orientan al vehículo. Si el centro de masa del vehículo se usa como punto de referencia, los movimientos traslacional y rotacional pueden ser descritos de manera separada. “Rastrear un misil” significa registrar las coordenadas de posición de su centro de masa. Mantener la actitud de una aeronave requiere que el piloto observe detenidamente el indicador de actitud sin referencia de la posición de la aeronave.

La segunda ley de Newton gobierna los grados de libertad de traslación, y las leyes de Euler controlan las dinámicas de actitud. Ambas deben ser referidas a un marco de referencia inercial, el cual incluye no solo cantidad de movimiento lineal e inercial sino también sus derivadas respecto al tiempo. Mientras el sistema de coordenadas sea inercial las ecuaciones son simples, pero si se introducen coordenadas corporales aparecen términos adicionales que hacen los ajustes para las transformaciones de coordenadas dependientes del tiempo.

Es posible modelar dinámica de vuelo en una forma que sea invariante bajo transformaciones de coordenadas dependientes del tiempo. Para ello, los términos adicionales mencionados anteriormente deben suprimirse. Un operador de tiempo, la derivada rotacional temporal,

puede cumplir tal tarea. Con ella es posible formular las ecuaciones de movimiento en una forma de tensor invariante, independiente de sistemas coordenados.

Empleando la segunda ley de Newton, siendo “ p ” el vector de cantidad de movimiento lineal y “ f ” el vector de fuerzas externas, la razón de cambio respecto al tiempo de la cantidad de movimiento lineal es igual a la fuerza externa, de tal modo que:

$$\frac{dp}{dt} = f \quad (2.1)$$

Esto implica que la derivada respecto al tiempo es tomada respecto al marco de referencia inercial “ I ”. Si se requiere cambiar el marco de referencia al marco del cuerpo del vehículo “ B ”, la segunda ley de Newton se escribe como:

$$\left. \frac{dp}{dt} \right|_B + \omega \times p = f \quad (2.2)$$

Donde “ ω ” es la velocidad angular del cuerpo respecto al marco de referencia inercial. Para fines de programación, se tienen que coordinar ambas expresiones. Debido a las derivadas respecto al tiempo, se expresa la primera ecuación en coordenadas inerciales y la segunda en coordenadas corporales. Los corchetes y superíndices “ I ” y “ B ” indican los vectores coordenados:

$$\left[\frac{dp}{dt} \right]^I = [f]^I \quad (2.3)$$

$$\left[\frac{dp}{dt} \right]^B + [\Omega]^B [p]^B = [f]^B \quad (2.4)$$

Donde “[Ω] ^{B} ” es la forma anti-simétrica de “ ω ” expresada en coordenadas corporales. La derivada respecto al tiempo no es un concepto tensorial debido a que cambia su forma a medida que las coordenadas inerciales son reemplazadas por las coordenadas corporales. Esta no es invariante bajo la matriz de transformación “[T] ^{BI} ” de las coordenadas corporales respecto a las coordenadas inerciales, por lo que:

$$\left[\frac{dp}{dt} \right]^B + [\Omega]^B [p]^B \neq [T]^{BI} \left[\frac{dp}{dt} \right]^I \quad (2.5)$$

Si se introduce la derivada rotacional respecto al tiempo “ D^I ” relativa al marco de referencia inercial, la segunda ley de Newton tiene la misma forma en ambos sistemas de coordenadas:

$$[D^I p]^I = [f]^I \quad (2.6)$$

$$[D^I p]^B = [f]^B \quad (2.7)$$

La derivada rotacional respecto al tiempo se transforma como un tensor de primer orden:

$$[D^I p]^B = [T]^{BI} [D^I p]^I \quad (2.8)$$

Donde “[T]^{BI}” representa cualquier transformación de coordenadas temporales. Entonces, la segunda ley de Newton puede ser expresada en la forma de tensor invariante:

$$D^I p = f \quad (2.9)$$

La cual es válida para cualquier sistema coordenado. Esta formulación tensorial es la clave para el modelado invariante de dinámica de vuelo. Esto permite derivar el modelo matemático en primera instancia sin tomar en cuenta el sistema de coordenadas. Luego de realizar los cambios apropiados, se elige el sistema de coordenadas adecuado y se codifica la forma del componente.

La premisa “del modelado tensorial a la codificación matricial” establece la guía a través de la cinemática y la dinámica hacia la simulación de vehículos aeroespaciales. Con la hipótesis de que con puntos y marcos es suficiente para modelar problemas dinámicos, se genera una nomenclatura auto-descriptiva.

Los sistemas coordenados son entidades abstractas que relacionan los componentes de un vector con el espacio euclidiano; tienen magnitud y dirección pero no un origen común. Con estas condiciones, es posible generar modelos de tensores cartesianos como conceptos físicos, independientes de los sistemas coordenados.

Los marcos son modelos de objetos físicos que consisten en puntos mutuamente fijados, mientras que los sistemas de coordenadas no tienen realidad física. Éstos son abstracciones matemáticas. Se hace uso de las propiedades de las matrices de transformación entre sistemas de coordenadas cartesianos. Son ortogonales, y por lo tanto su inversa es su transpuesta.

No hay otra disciplina de ingeniería que tenga que lidiar con tantos sistemas de coordenadas como la mecánica de vuelo. Se trabaja con la mayoría de ellos: heliocéntricos, inerciales, terráqueos, geográficos, corporales, aéreos y de ruta de vuelo. Se distingue entre la tierra redonda y rotacional, y la tierra plana. En una simulación aeroespacial típica se puede encontrar que la mitad del esfuerzo consiste en obtener la geometría correcta.

Se describe la traslación de cuerpos mediante el vector de desplazamiento y su actitud mediante el vector de rotación. Sus derivadas respecto al tiempo son velocidades lineales y angulares. El pensamiento convencional dice que las ecuaciones de actitud son consecuencia de las leyes de Newton, sin embargo hay evidencia de que Leonhard Euler las desarrolló de forma independiente. Así como la cantidad de movimiento lineal es el centro de las leyes de Newton, la cantidad de movimiento angular lo es para las leyes de Euler. La ley de Euler establece que la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular respecto al tiempo es igual a los momentos externos aplicados.

Si se usa el centro de masa como punto de referencia, las ecuaciones de Euler se simplifican sobremanera y se desacoplan dinámicamente de las ecuaciones traslacionales. Siendo “ l ” la cantidad de movimiento angular y “ m ” el momento externo aplicado, se puede formular la ecuación de Euler y combinarla con la ecuación de Newton, obtenida previamente, para obtener las ecuaciones fundamentales de la dinámica de vuelo:

$$D^l p = f \tag{2.10}$$

$$D^l l = m \tag{2.11}$$

Todos los modelos de dinámica de vuelo comienzan con estas acciones; son la columna vertebral de las simulaciones de seis grados de libertad. Con el teorema de la energía se derivan dos integrales de movimiento, la conservación de la energía y la cantidad de movimiento angular, las cuales son fundamentales para la dinámica de satélites.

A pesar de que las ecuaciones de perturbación son rara vez usadas para el desarrollo de simulaciones, son importantes para investigaciones de estabilidad y diseño de sistemas de control.

2.1.2. Simulación de Vehículos Aeroespaciales.

El desarrollo óptimo de la simulación de dinámica de vuelo requiere que se esté familiarizado con aerodinámica, propulsión, navegación, dirección y control. Existen varios ambientes de simulación categorizados por lenguaje de programación. Según lo muestra Zipfel [20], los más maduros están basados en “FORTRAN”. Los más recientes en “VisSIM”, “MATLAB”, y “Simulink” los cuales usan gráficos interactivos para modelado y generación de código para programas ejecutables en lenguaje “C”. Dicho desarrollo ha generado otra tendencia llamada “Simulación programada directamente en C⁺⁺”, que es el lenguaje elegido por la mayoría de los desarrolladores.

Las ecuaciones cartesianas usan la posición inercial y las componentes de velocidad como variables de estado, mientras que las ecuaciones polares emplean velocidad geográfica, acimut y ángulos de ruta de vuelo. Las tres atmósferas estándar más importantes son: ARDC 1954, ISO 1962 Y US 1976. ISO 1962 es la más empleada para simulaciones endo-

atmosféricas. La ley de atracción gravitacional de Newton provee la aceleración gravitacional.

Se conoce como simulación de cinco pseudo-grados de libertad al suplemento de las ecuaciones traslacionales no lineales con las ecuaciones de actitud linealizadas; ésta tiene amplia aplicación en misiles. El estudio de los efectos del viento y turbulencia es un campo reservado para modelos de seis grados de libertad. Las simulaciones de vuelo modelan el comportamiento dinámico de vehículos aeroespaciales con involucramiento humano.

2.2. Modelado De Dinámica De Vuelo.

2.2.1. Conceptos Matemáticos en Modelado.

“Modelado” es un término amplio con muchas connotaciones. Un “modelo” es algo fuera de lo común o irreal; es la copia de un objeto. Los objetos tratados son aeronaves, naves espaciales y misiles. En lugar de construir réplicas a escala de estos vehículos se construyen modelos matemáticos de su comportamiento dinámico. El lenguaje matemático empleado consiste en tensores y matrices dado que los tensores son prácticos para modelar problemas geométricos.

2.2.1.1. Mecánica Clásica.

Durante el último siglo, los físicos pensaron que todas las leyes del universo físico eran conocidas. Durante tres siglos Galileo, Newton, Bernoulli, D’Alembert, Euler y Lagrange construyeron la estructura de la rama de la física conocida como “mecánica”. Después del desarrollo de las ciencias físicas contemporáneas, se hace referencia a esta rama como “mecánica clásica”. Los ingenieros la han explorado y aplicado desde el primer vuelo hasta el viaje a la luna.

2.2.1.2. Elementos y axiomas de la Mecánica Clásica.

De acuerdo al tratamiento axiomático de la mecánica realizado por Hamel [22], se enuncian los elementos básicos de la mecánica clásica:

- 1) Cuerpo material. Un cuerpo es un conjunto tridimensional diferenciable cuyos elementos se denominan “partículas”. Posee una magnitud escalar no negativa llamada “distribución de masa” del cuerpo. De manera particular, un cuerpo es llamado “rígido” si las distancias entre cada par de sus partículas es invariante.
- 2) Fuerza. La fuerza describe la acción del mundo exterior en un cuerpo y las interacciones entre diferentes partes del mismo. Se distingue entre fuerzas de volumen y fuerzas de superficie.
- 3) Espacio-tiempo Euclidiano. La interacción de fuerzas con el cuerpo material ocurre en un espacio y tiempo llamado “evento”. Estos eventos en mecánica clásica ocurren en el espacio-tiempo Euclidiano. El espacio Euclidiano presenta una métrica que

cumple, para desplazamientos infinitesimales “ ds ”, el teorema de Pitágoras sobre el espacio tridimensional “ $\{x_1, x_2, x_3\}$ ”, tal que:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2 \quad (2.12)$$

El concepto de “partícula” define un punto matemático con volumen y masa unidos a él. Es común que se le llame átomo o molécula, pero es preferible la noción matemática sobre la significación física. Mediante la acumulación de partículas se forman cuerpos materiales con volumen y masa. Si las partículas no tienen movimiento relativo entre sí, se tiene, entonces, el concepto de cuerpo rígido.

Sin la acción de fuerzas, de acuerdo con la primera ley de movimiento de Newton, un cuerpo permanecerá en reposo o continuará en movimiento rectilíneo. Sin embargo, es necesario modelar fuerzas. Existen fuerzas aerodinámicas y propulsivas actuando en el exterior del cuerpo como fuerzas superficiales. Se trabaja con efectos gravitacionales, los cuales son representados por fuerzas volumétricas, ya que actúan en todas las partículas y no sólo en aquellas ubicadas en la superficie.

En mecánica clásica, espacio y tiempo son entidades diferentes. El espacio tiene tres dimensiones, con extensiones positivas y negativas, pero el tiempo es una magnitud creciente de manera uniforme. Para ello el modelo de espacio-tiempo Galileano sería suficiente. Sin embargo, con el desarrollo de la Teoría Especial de la Relatividad por Albert Einstein en 1905, se revitalizó la física al tratar al tiempo como una cuarta dimensión.

Einstein no abolió las leyes de Newton, expandió el conocimiento de espacio y tiempo. Relegó tales leyes a una esfera donde las velocidades son mucho menores que la velocidad de la luz. Sin embargo, esta esfera engloba todos los movimientos dentro y cerca de la Tierra. Incluso el viaje planetario es representado adecuadamente mediante la dinámica Newtoniana, consignando los efectos relativísticos a pequeñas perturbaciones.

En el mismo documento, Hamel, entendiendo a la mecánica clásica como la investigación de las interacciones de cuerpos materiales y fuerzas en el espacio-tiempo Euclidiano, establece que ésta es gobernada por cuatro axiomas:

- 1) El tiempo y el espacio son homogéneos. No existe un instante principal en el tiempo o ubicación especial en el espacio. Todos los marcos de referencia son igualmente válidos y, por lo tanto, no hay una ubicación principal en el espacio. Del mismo modo, dado que el tiempo es una magnitud uniformemente creciente, cuyo origen no se sabe cuándo ocurrió, se tiene que todos los demás tiempos tienen el mismo valor. Por lo tanto, no existe un instante principal en el tiempo

- 2) El espacio es isotrópico. No existe una dirección principal en el espacio, es decir todas las direcciones en el espacio tienen la misma relevancia.
- 3) Cada efecto debe tener su causa mediante la cual es únicamente determinado. Esto se denomina “principio de causalidad” y todas las leyes de la mecánica clásica se rigen por él.
- 4) Ninguna longitud, velocidad o masa particular es singularizada. Esto contrasta con la acción humana de establecer patrones, sin embargo, la mecánica clásica no reconoce ninguno de estos esfuerzos.

La física moderna rompe con la tradición y viola al menos uno de estos axiomas. En la mecánica relativista el espacio no es homogéneo ni isotrópico (espacio de Riemann); la mecánica cuántica no reconoce el principio de causalidad; y la teoría de la relatividad singulariza la velocidad de la luz.

2.2.1.3. Principio de indiferencia material.

Los cuerpos materiales consisten en materia cuyo comportamiento es modelado mediante ecuaciones constitutivas. Dado que es imposible capturar todos los matices, se piensa en materiales ideales que se aproximen al fenómeno. Su comportamiento es gobernado por ecuaciones constitutivas.

Relacionado con principios de modelado de cuerpos materiales, Noll [23] hace referencia a la invariancia de las ecuaciones constitutivas. Estos fueron incluidos de posteriormente en una edición del trabajo previo de Hamel, en coautoría con Truesdell y Noll [24]. Estas ecuaciones constitutivas satisfacen tres principios:

- 1) Invariancia coordinada. Las ecuaciones constitutivas son independientes de sistemas de coordenadas.
- 2) Invariancia dimensional. Las ecuaciones constitutivas son independientes del sistema de unidades empleado.
- 3) Indiferencia material. Las ecuaciones constitutivas son independientes del observador, es decir, las ecuaciones constitutivas de materiales son invariantes bajo rotaciones y traslaciones rígidas.

Las interacciones materiales no dependen del sistema coordinado empleado para sus evaluaciones numéricas. Los fenómenos físicos trascienden la artificialidad de las unidades.

El principio de indiferencia material o, de manera más precisa, el principio de indiferencia de marco material, como lo llaman Truesdell y Noll, es equivalente a la teoría general de comportamiento material. Este afirma que “la respuesta de un material es la misma para todos los observadores”. Este principio es la piedra angular del modelado matemático de sistemas dinámicos, ya que permite formular las ecuaciones de movimiento de vehículos aeroespaciales de una forma invariante y permite probar varios teoremas.

2.2.1.4. Bloques de construcción del modelado matemático.

Se hace uso de dos nociones matemáticas fundamentales:

- Puntos. Modelos matemáticos de un objeto físico cuya extensión espacial es irrelevante.
- Marcos. Conjuntos de puntos continuos ilimitados sobre el espacio Euclidiano tridimensional cuyas distancias son invariantes en el tiempo, y los cuales poseen un subconjunto de, por lo menos, tres puntos no colineales.

Los puntos y marcos son considerados como objetos físicos idealizados que existen independientemente de observadores y sistemas coordenados. Un punto designa la ubicación de una partícula, pero no es una partícula en sí misma; carece de masa o volumen asociados.

Combinando al menos tres puntos no colineales, mutuamente en reposo, se crea un marco. Los marcos mejor conocidos son los marcos de referencia. Cualquier marco puede servir como marco de referencia, dado que puede fijar la posición de un cuerpo rígido, pero no es un cuerpo rígido en sí mismo. Puntos y marcos son objetos físicos idealizados; son los bloques de construcción para el modelado de la dinámica de vehículos aeroespaciales. Empleando ambos conceptos se puede formular cualquier problema de dinámica de vuelo.

Los tensores en su forma cartesiana simple existen de manera independiente a observadores y sistemas coordenados, y su contenido físico es invariante bajo transformaciones coordenadas, por lo que proporcionan una notación matemática adecuada para describir puntos y marcos y sus interacciones en el espacio-tiempo.

Los sistemas de coordenadas son requeridos para mediciones y solución de problemas numéricos. Establecen la relación entre tensores y números algebraicos y, además, son conceptos puramente matemáticos. Al respecto Truesdell advierte: “en particular, un marco de referencia no debe ser considerado como sinónimo de sistema coordenado”. Los marcos modelan objetos físicos, mientras que los sistemas coordenados incluyen números, llamados “coordenadas”.

Tales coordenadas son números ordenados, arreglados como matrices. Las “matrices” son arreglos algebraicos que presentan las coordenadas de tensores en una forma conveniente para manipulaciones algebraicas. La mayoría de simulaciones computacionales son generadas a partir de información contenida en matrices.

El modelado matemático de vehículos aeroespaciales es un proceso de tres etapas:

- 1) Formulación de la dinámica del vehículo en forma de tensores invariantes.
- 2) Introducción de sistemas coordenados para presentación de componentes.
- 3) Formulación de problemas en matrices para programación computacional y soluciones numéricas.

En primer lugar es necesario entender la física del problema: las leyes que gobiernan los movimientos del vehículo; los parámetros y variables que interactúan con cada uno; qué elementos son modelados mediante puntos y cuáles mediante marcos. Enseguida se introducen los tensores para las cantidades físicas y se modela la dinámica en una forma invariante, independientemente de sistemas coordinados; finalmente se manipulan las ecuaciones hasta que revelen las variables que se desea simular.

Desde la perspectiva de un físico, el proceso podría darse por terminado; desde el punto de vista ingenieril, es el punto inicial. Enseguida se elige el sistema de coordenadas apropiado para la examinación numérica, de tal manera que: sustente los datos de aerodinámica e impulso; se obtengan las coordenadas en las cuales están dados los momentos de inercia, y; se definan los requerimientos de coordenadas para los datos de salida. Es necesario delimitar las cuestiones que deben establecerse y trasladarse al marco matemático de sistemas de coordenadas.

Eventualmente todas las ecuaciones son coordinadas y enlazadas mediante transformaciones de coordenadas. Los tensores se tendrán transformados en matrices y estarán en condiciones de ser programados. La mayoría de los lenguajes de programación actuales permiten la programación de matrices de manera directa o permiten, por lo menos, crear objetos apropiados o subrutinas. Finalmente la simulación debería ser sencilla, aunque consuma tiempo considerable.

2.2.1.5. Notación.

La notación para el modelado de dinámica de vuelo de vehículos aeroespaciales debe ser concisa, autodefinida y adaptable a tensores y matrices. Se entiende como autodefinida que los símbolos expresen todas las características de la cantidad física en cuestión. Para cantidades intrincadas se requeriría varios subíndices y superíndices.

Dentro de la mecánica vectorial un vector puede representarse mediante diversos símbolos. En literatura acerca de física avanzada es más común encontrar la notación de tensores con subíndices, enfatizando las propiedades de transformación de los tensores.

El lenguaje a emplear se basa en el enfoque del modelado de tensores invariantes a matrices programables. La mecánica vectorial enfatiza lo simbólico, con notación independiente a coordenadas; la notación tensorial se enfoca en componentes. La unión de ambas notaciones permite emplear un estilo de caracteres para vectores (tensores de primer orden), otro para tensores (tensores de segundo orden) y otro para escalares (tensores de orden cero). Estos son los tres tipos de variables que concurren en el espacio Euclidiano de la mecánica Newtoniana.

Las posiciones de superíndice o subíndice inmediatamente después del símbolo principal están reservadas para especificaciones posteriores de la cantidad física en cuestión. Se emplea la siguiente convención: los subíndices se usan para puntos; lo superíndices para marcos, y para ambos se utilizan letras mayúsculas. Si se encuentran de manera adyacente dos

subíndices o superíndices, estos son leídos de izquierda a derecha unidos por la frase “*con respecto a*”.

Para expresar tensores en sistemas coordenados, se podría usar la notación encontrada en la mayor parte de textos acerca de la mecánica vectorial. Sin embargo, las posiciones de subíndices y superíndices se saturarían. Es preferible enfatizar el hecho de que el tensor se ha convertido en matriz (a través de la coordinación) mediante el uso de corchetes cuadrados, identificando el sistema coordenado particular mediante una letra mayúscula en la posición de superíndice.

De manera general, todas las variables son consideradas como tensores ya sea de orden cero, primero o segundo, empleando el término “vector” para hacer referencia a los tensores de primer orden. La transposición matricial se indica con una barra superior. Es importante distinguir de manera cuidadosa entre una derivada rotacional y una derivada ordinaria de tiempo.

La ventaja de la nomenclatura radica en la clara distinción entre la notación tensorial independiente de coordenadas (invariante) y la formulación matricial entre corchetes dependiente de coordenadas. El álgebra tensorial general, con su notación de subíndices y superíndices, enfatiza varios tipos de tensores (covariantes, contravariantes, delta de Kronecker, símbolo de permutación). Los índices mudos y la contracción (convención de suma) juegan una parte importante. Este lenguaje matemático fue creado para el mundo sofisticado de la relatividad general embebida en el espacio de Riemann. Nuestro mundo es Newtoniano y Euclidiano, por lo que los tensores cartesianos simples, son adecuados. Por lo tanto se emplea la notación tensorial con subíndices y superíndices en favor de los corchetes matriciales con el propósito de distinguir entre los sistemas de coordenadas empleados en la mecánica de vuelo.

2.2.2. Elementos Tensoriales.

Se atribuye el cálculo tensorial a los matemáticos italianos Ricci y Levi-Civita [25] quienes proporcionaron a Einstein el lenguaje de modelado para formular su Teoría de la Relatividad General [26]. Recientemente el cálculo tensorial ha penetrado en ciencias aplicadas e ingeniería. Algunas referencias a ello son los tres volúmenes de Duschek y Hochrainer [27], los cuales enfatizan la invariancia de coordenadas de cantidades físicas; el libro de Wrede [28] con su concepto de la derivada rotacional de tiempo; y los textos de ingeniería de Betten [29].

El mundo de la ingeniería es simple, mientras se mantenga dentro del sistema solar y se viaje a una fracción de la velocidad de la luz; su espacio es Euclidiano y tiene tres dimensiones, por lo que la mecánica Newtoniana es adecuada para describir los fenómenos dinámicos. En la mecánica de vuelo puede simplificarse la métrica Euclidiana a incrementos o diferencias finitas “ Δ ” mediante la llamada métrica cartesiana:

$$\Delta s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 = \sum_{i=1}^3 \Delta x_i^2 \quad (2.13)$$

Los elementos “ Δx_i ” son mutuamente ortogonales; la métrica expresa el teorema de Pitágoras para calcular la distancia finita “ Δs ”. En este mundo, los tensores son llamados tensores cartesianos.

Los elementos para el cálculo de tensores cartesianos incluyen conceptos tradicionales de mecánica vectorial en favor de un tratamiento moderno de modelado de vehículos aeroespaciales.

2.2.2.1. Sistemas coordenados.

Coordenadas. Son números algebraicos ordenados llamados tripletas o n -tuplas, si éstas forman un conjunto agrupado de “ n ” elementos.

Sistemas coordenados. Son entidades abstractas que establecen la correspondencia uno a uno entre elementos del espacio Euclidiano tridimensional y las coordenadas.

Sistemas coordenados cartesianos. Son sistemas coordenados en el espacio Euclidiano para los cuales la métrica cartesiana “ $\Delta s^2 = \sum_{i=1}^3 \Delta x_i^2$ ” se mantiene.

Ejes coordenados. Son las imágenes geométricas de escalas matemáticas de números algebraicos.

Transformación de coordenadas. Es el re-etiquetado para cada elemento del espacio Euclidiano con nuevas coordenadas de acuerdo a un algoritmo determinado. Un sistema coordenado está asociado a un marco si las coordenadas de los puntos del marco son invariantes en el tiempo. Todos los sistemas coordenados embebidos en un marco forman una clase cardinal transfinita. Todas las clases sobre todos los marcos forman la entidad conocida como “sistemas coordenados admisibles”.

Las coordenadas son arregladas como elementos matriciales numerados: las coordenadas de un vector, expresadas en un sistema coordenado determinado, conformando una tripleta ordenada –ya sea en forma de vector fila, o vector columna-; un tensor, expresado en un sistema coordenado determinado, muestra una 9-tupla de elementos ordenados.

No toda matriz y sus elementos constituyen las coordenadas de un tensor. Puede existir una correspondencia uno a uno entre el espacio Euclidiano tridimensional y las coordenadas, pero esto no es suficiente para definir las coordenadas de un tensor. Por ejemplo, las tres coordenadas del vector de velocidad están relacionadas con las tres direcciones ortogonales del espacio Euclidiano; mientras que el tensor de momentos de inercia, por otro lado, tiene dos direcciones asociadas con cada elemento.

Dado que se trata de cantidades físicas, las coordenadas numéricas implican ciertas unidades de medición y éstas se encuentran embebidas en cada coordenada. Este requerimiento de dar medida a las coordenadas lleva al concepto geométrico de los ejes coordenados. Estos pueden visualizarse como “reglas de medición” graduadas con las unidades de medición, indicando una dirección positiva.

Se ha definido un marco como una entidad física consistente en puntos sin movimiento relativo. Por otro lado, los sistemas coordenados son abstracciones matemáticas sin existencia física. Esta distinción es esencial. Citando a Truesdell: “es necesario distinguir claramente entre cambios de marco y transformación de sistemas coordenados”. Esta separación permite el modelado de la dinámica de vuelo de vehículos de forma independiente a las coordenadas, empleando puntos y marcos, y postergar la coordinación y la evaluación numérica hasta la construcción de la simulación.

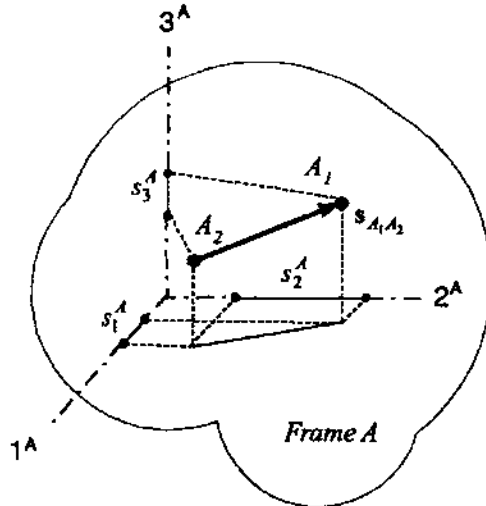


Figura 2.1. Marco “A” y sistema coordenado “A” [20].

El proceso de conversión se puede resumir en lo siguiente: dado el marco “A”, y dos de sus puntos “A₁” y “A₂” (ver Figura 2.1), el vector de desplazamiento del punto “A₁” con respecto al punto “A₂” es “s_{A₁A₂}”. Este vector es una cantidad definida sin referencia alguna a un sistema coordenado. Enseguida se crea el sistema coordenado cartesiano que establece las relaciones uno a uno entre el espacio euclidiano tridimensional y las coordenadas del vector de desplazamiento. Designando tal marco como “A”, se tiene una relación matricial particular del vector de desplazamiento:

$$[s_{A_1 A_2}]^A = \begin{bmatrix} s_1^A \\ s_2^A \\ s_3^A \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Las coordenadas se muestran en la Figura 2.1, superpuestas en los ejes coordenados. Se etiquetan los ejes de manera progresiva “1”, “2” y “3” con el nombre del sistema coordinado como superíndice. Si las coordenadas no cambian con el tiempo, se dice que el sistema coordinado “A” está asociado con el marco “A”. Se tiene, entonces, un número infinito de sistemas coordinados que tienen la misma característica. La asociación del sistema de coordenadas con el marco “A” forma una clase cardinal transfinita.

Existen otros sistemas de coordenadas. Se tiene, por ejemplo, una lanza “A” cuya línea de centros es modelada mediante el vector de desplazamiento “ $s_{A_1A_2}$ ”, siendo “ A_1 ” la punta de la lanza y “ A_2 ”, la cola. Previamente se tiene la coordinación en los sistemas coordinados asociados al marco “A”. Se supone un observador, modelado mediante el marco “B”, que percibe la lanza en vuelo. En un sistema coordinado “B”, asociado a tal observador, la línea de centros tendría las siguientes coordenadas:

$$[s_{A_1A_2}]^B = \begin{bmatrix} s_1^B \\ s_2^B \\ s_3^B \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Sin embargo, ahora las coordenadas son cambiantes en el tiempo. El marco del observador tiene una clase cardinal transfinita de tales sistemas coordinados, como el marco de la lanza. Puede haber muchos marcos presentes. Todas estas clases de sistemas coordinados forman una entidad denominada “sistemas coordinados admisibles”.

Convertir de un sistema coordinado a otro es un proceso de re-etiquetado:

$$\begin{bmatrix} s_1^B \\ s_2^B \\ s_3^B \end{bmatrix} \xleftarrow{\text{re - etiquetado}} \begin{bmatrix} s_1^A \\ s_2^A \\ s_3^A \end{bmatrix}$$

Dado que los sistemas coordinados empleados son Cartesianos, el algoritmo de re-etiquetado es la multiplicación de una matriz de 3×3 con las coordenadas del vector:

$$\begin{bmatrix} s_1^B \\ s_2^B \\ s_3^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^A \\ s_2^A \\ s_3^A \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Se simboliza la matriz de transformación mediante “[T]^{BA}”, lo cual indica que se establecen las coordenadas en “B” con respecto a las coordenadas en “A”. La expresión anterior puede abreviarse de la siguiente manera:

$$[S_{A_1 A_2}]^B = [T]^{BA} [S_{A_1 A_2}]^A \quad (2.17)$$

La sustancia de la lanza no ha cambiado; se han expresado las coordenadas de su línea de centros en dos diferentes sistemas coordenados. Si los sistemas coordenados son asociados con marcos que cambian su actitud relativa uno de otro, los elementos de “[$T(t)$]^{BA}”, son, para el ejemplo considerado, funciones del tiempo. Solamente si son parte del mismo marco u otros marcos fijos, los elementos son constantes.

Por conveniencia se emplean sistemas coordenados cartesianos de mano derecha. Esta terminología hace referencia al movimiento de la mano derecha, donde simbólicamente, el eje 1 rota hacia el eje 2 –la distancia más corta- mientras el dedo índice apunta en la dirección positiva del eje 3. Se emplean de manera exclusiva dado que tienen la característica matricial de que sus determinantes son iguales a la unidad y que su inversa es igual a su transpuesta.

Existen otros sistemas coordenados que satisfacen la métrica Euclidiana, los conocidos coloquialmente como coordenadas cilíndricas y esféricas. Son igualmente ortogonales en el sentido infinitesimal de la métrica Euclidiana. Sin embargo, solamente las coordenadas cartesianas satisfacen la ortogonalidad finita de la métrica cartesiana dentro del espacio Euclidiano.

2.2.2.2. Tensores cartesianos.

Un tensor de primer orden (vector) “ x ” es el conjunto de tripletas ordenadas, donde cualquiera de ellas satisface la siguiente ley de transformación:

$$[x]^B = [T]^{BA} [x]^A \quad (2.18)$$

Donde “ A ” y “ B ” son cualesquiera sistemas ordenados admisibles.

Un tensor de segundo orden (tensor) “ X ” es el conjunto de 9-tuplas ordenadas, donde cualquiera de ellas satisface la siguiente ley de transformación:

$$[X]^B = [T]^{BA} [X]^A [\bar{T}]^{BA} \quad (2.19)$$

Donde “ A ” y “ B ” son cualesquiera sistemas ordenados admisibles.

Por “conjunto” se hace referencia a la colección de todas las posibles transformaciones dentro de los sistemas coordenados admisibles. Esta clase puede contener un número infinito de transformaciones para cada marco entre un número infinito de marcos.

Esta definición con componentes infinitos es útil desde dos puntos de vista:

- 1) Punto de vista físico. Los tensores describen propiedades de objetos físicos o geométricos intrínsecos, por ejemplo, objetos que no dependen de la forma de presentación (sistema coordinado).
- 2) Punto de vista matemático. Dado que los tensores son el conjunto total de todas las n -tuplas ordenadas, éstos son definidos en todos los sistemas coordinados y, por lo tanto, no están sujetos a ninguno en particular.

Dado que se modelan sistemas aeroespaciales, se lidia con el mundo físico. Por lo tanto, se adopta el punto de vista físico y se interpretan estas definiciones en un sentido invariante o intrínseco. Las cantidades físicas existen *a priori*, con o sin coordenadas. La introducción de coordenadas es una conveniencia para la evaluación numérica.

Un “escalar” es un tensor particularmente simple. Se mantiene igual en cualquier sistema coordinado admisible, una característica útil en muchas pruebas. Se define un escalar como una cantidad física sin contenido direccional alguno, como la masa, densidad o presión. Partículas y puntos pertenecen a esta categoría.

Un punto puede tener cualquier posición en el espacio; en otro sentido, un punto carece de posición a menos que éste sea referido a otro punto, un postulado intuitivo que parte del principio Galileano de relatividad. La oración “parado en la Luna” emplea a la Luna como referencia. El solo decir “parado” no implica mayor significación. Suponiendo un observador modelado mediante el punto “B” y la huella de Neil Armstrong como el punto “A”, entonces el desplazamiento desde “A” está dado por el vector “ s_{BA} ” y el desplazamiento de la huella con respecto al observador es “ s_{AB} ”. Ambos desplazamientos están relacionados mediante “ $s_{BA} = -s_{AB}$ ”. Surge entonces la regla 1 para tensores cartesianos: el intercambio de subíndices cambia el signo. Si un segundo observador, ubicado en el punto “C”, quiere determinar la posición del primer observador mediante “ s_{BC} ”, pero conoce el desplazamiento de la huella desde él “ s_{AC} ” y el desplazamiento del primer observador desde la huella “ s_{BA} ”, es posible sumar dichos vectores y obtener:

$$s_{BC} = s_{BA} + s_{AC} \tag{2.20}$$

Se hace evidente la regla 2: la adición de vectores es una contracción de subíndices. Los subíndices “A” son eliminados para obtener la secuencia “BC”.

$$\underbrace{BA + AC}_{\text{contracción}} \rightarrow BC$$

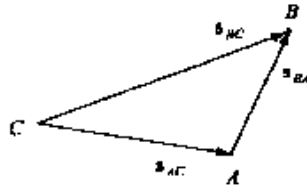


Figura 2.2. Triángulo de vectores [20].

Las orientaciones de las puntas de flecha en la Figura 2.2 se ubican siempre en el primer punto indicado en el subíndice. El desplazamiento del punto “B” con respecto al punto “C” es “ s_{BC} ” cuya punta de flecha se ubica en el punto “B”.

Para describir este escenario no es necesario referirse a algún sistema coordenado. Se modelan las tres entidades mediante puntos y se relacionan mediante vectores de desplazamiento invariantes. Para evaluación numérica, no obstante, se requiere elegir sistemas coordenados. Suponiendo que el segundo observador requiere emplear el sistema coordenado “C” asociado con su marco de referencia. Expresa, entonces, la relación vectorial en términos de las coordenadas en “C”:

$$[s_{BC}]^C = [s_{BA}]^C + [s_{AC}]^C \quad (2.21)$$

Sin embargo, el desplazamiento del primer observador desde la huella está dado en el sistema coordenado “B” asociado con el marco de referencia “B”. Por lo tanto, el segundo observador transforma las coordenadas del primero, del sistema “B” al “C” empleando la matriz de transformación “[T]^{CB}” de acuerdo a lo siguiente:

$$[s_{BA}]^C = [T]^{CB}[s_{BA}]^B \quad (2.22)$$

Sustituyendo junto con las coordenadas conocidas, se tiene:

$$[s_{BC}]^C = [T]^{CB}[s_{BA}]^B + [s_{AC}]^C \quad (2.23)$$

Si el segundo observador conoce la matriz de transformación “[T]^{CB}”, puede, entonces, calcular la posición del primer observador en coordenadas en “C”.

No se hace mención de algún origen del sistema coordenado. Los números resultantes de los cálculos tendrían sentido sin que el segundo observador se ubique en el origen. De esta manera surge la regla 3: los sistemas coordenados no tienen origen.

Sin orígenes, es necesario disponer de radio-vectores. Éstos se emplean en la mecánica vectorial para localizar puntos en sistemas coordenados. Haciendo esto, los orígenes se

convierten en puntos de referencia. Dado que los sistemas coordenados son entidades puramente matemáticas no es posible entremezclar tales puntos físicos de referencia.

Los radio-vectores no son vectores en el sentido de la definición de tensores de primer orden y, por lo tanto, no son recursos útiles para fines de modelado. Los vectores de desplazamiento, por otro lado, son tensores legítimos.

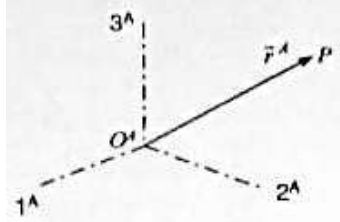


Figura 2.3. Radio-vector [20].

La Figura 2.3 muestra el radio-vector “ \vec{r}^A ” surgiendo desde el origen “ O^A ” del sistema coordenado “A” hacia el punto “P”. Dos radio-vectores asociados con dos sistemas coordenados “A” y “B” están relacionados mediante la adición vectorial

$$\vec{r}^B = \vec{r}^A + \vec{l}^B \tag{2.24}$$

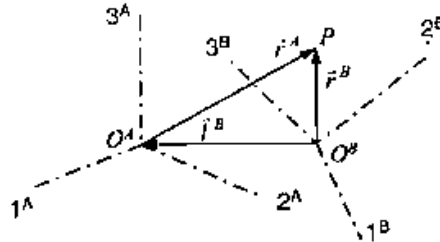


Figura 2.4. Suma de radio-vectores [20].

Donde “ \vec{l}^B ” es el radio-vector del origen “ O^A ” referenciado en el sistema coordenado “B” (ver Figura 2.4). Con “ $[T]^{BA}$ ”, la matriz de transformación de coordenadas en “B” con respecto a “A”, el radio-vector “ \vec{r}^A ” en el sistema coordenado “A”, transforma el radio-vector “ \vec{r}^B ” en el sistema coordenado “B”, como sigue:

$$\begin{bmatrix} r_1^B \\ r_2^B \\ r_3^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1^A \\ r_2^A \\ r_3^A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1^B \\ l_2^B \\ l_3^B \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

En notación matricial, se tiene:

$$[r^B]^B = [T]^{BA}[r^A]^A + [l]^B \quad (2.26)$$

Se compara esta transformación con la que define a un tensor. Debido al término adicional “[l]^B”, el radio-vector “ \vec{r}^A ” no se transforma en “ \vec{r}^B ” como un tensor de primer orden, y, por lo tanto, no es un tensor.

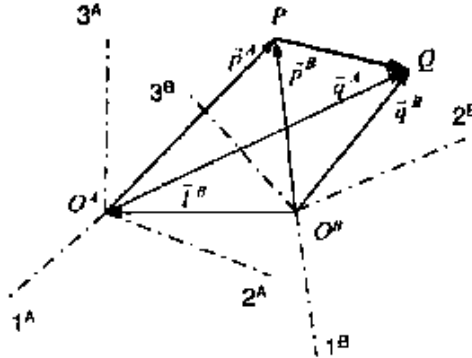


Figura 2.5. Vector de desplazamiento [20].

Por el contrario, los vectores de desplazamiento son tensores. Se introduce el vector “ s_{QP} ” como el desplazamiento del punto “ Q ” con respecto al punto “ P ” como se muestra en la Figura 2.5. Se relaciona con el radio-vector del sistema coordenado “ A ” mediante la siguiente relación:

$$[s_{QP}]^A = [q^A]^A - [p^A]^A \quad (2.27)$$

De manera análoga para aquellos en el sistema coordenado “ B ” mediante:

$$[s_{QP}]^B = [q^B]^B - [p^B]^B \quad (2.28)$$

Los radio-vectores “[q^B]^B” y “[p^B]^B” se transforman mediante lo siguiente:

$$[q^B]^B = [T]^{BA}[q^A]^A + [l]^B \quad (2.29)$$

$$[p^B]^B = [T]^{BA}[p^A]^A + [l]^B \quad (2.30)$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación que relaciona el vector “ s_{QP} ” con el radio-vector del sistema coordenado “ B ”, se tiene:

$$[s_{QP}]^B = [T]^{BA}([q^A]^A - [p^A]^A) = [T]^{BA}[s_{QP}]^A \quad (2.31)$$

Lo cual indica que el vector de desplazamiento “ s_{QP} ” se transforma como un tensor de primer orden.

$$[s_{QP}]^B = [T]^{BA}[s_{QP}]^A \quad (2.32)$$

Y, por lo tanto, es un tensor.

Lo anterior muestra la diferencia entre radio-vectores y vectores de desplazamiento. Dado que se desea emplear solamente conceptos tensoriales invariantes se incluye la regla 4: los radio-vectores no son empleados.

2.2.2.3. Álgebra tensorial.

Para trabajar con tensores se requiere saber sus propiedades aditivas y multiplicativas. Los tensores son manipulados como vectores y matrices.

Los tensores de primer orden (vectores) pueden ser sumados y restados, sujetos a la propiedad conmutativa:

$$s_{BC} = s_{BA} + s_{AC} = s_{AC} + s_{BA} \quad (2.33)$$

Igualmente a la propiedad asociativa:

$$(s_{BC} + s_{CA}) + s_{AB} = s_{BC} + (s_{CA} + s_{AB}) \quad (2.34)$$

En la expresión para la propiedad asociativa se forma el vector nulo “ s_{BB} ” en ambos miembros de la ecuación, el cual es caracterizado por ser un vector de desplazamiento cero. Esto se verifica mediante la contracción de subíndices.

La multiplicación de un vector “ s_{BC} ” con escalares “ α ” y “ β ” es conmutativa, asociativa y distributiva.

$$\alpha(\beta s_{BC}) = \beta(\alpha s_{BC}) = (\alpha\beta)s_{BC} \quad (2.35)$$

$$(\alpha + \beta)s_{BC} = \alpha s_{BC} + \beta s_{BC} \quad (2.36)$$

Respecto a la multiplicación de dos vectores existen tres posibilidades, distinguibles por sus resultados, los cuales pueden ser un escalar, un vector o un tensor. Por lo tanto, se denominan producto escalar, vectorial y diádico. El término “diádico” es tomado de la mecánica vectorial, el cual hace referencia a los tensores diádicos de esfuerzo e inercia. Se tienen dos

vectores representados por “[x]” y “[y]”, encerrados en corchetes para enfatizar las propiedades de matriz columna. Si no incluyen un subíndice para indicar el sistema coordenado, entonces se entiende que corresponden a algún sistema coordenado admisible y son, por lo tanto, símbolos de tensores de primer orden en su forma “x” y “y”.

- **Producto escalar.**

Si el transpuesto de un vector “x” es multiplicado por el vector “y”, se obtiene un escalar:

$$\bar{x}y = \text{escalar}$$

Este es el producto escalar del álgebra matricial. Si un vector se multiplica por sí mismo, el escalar resultante es el cuadrado de la longitud del vector. Dado que el escalar “|x|²” es invariante bajo transformaciones coordenadas, esta premisa se mantiene para todos los sistemas coordenados.

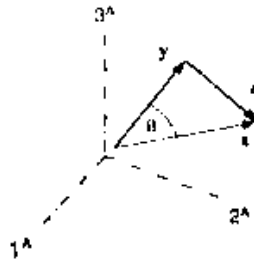


Figura 2.6. Triángulo de vectores [20].

Se considera el triángulo de vectores de la Figura 2.6. De la ley de cosenos, los cuadrados de las longitudes de los tres vectores están relacionados por la ley de cosenos:

$$|z|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \cos \theta \tag{2.37}$$

Por otro lado “|z|²” es igualmente obtenido a partir del producto escalar de la sustracción de vectores “z = x - y”:

$$|z|^2 = \bar{z}z = (\bar{x} - \bar{y})(x - y) = \bar{x}x + \bar{y}y - \bar{y}x - y\bar{x} = |x|^2 + |y|^2 - 2\bar{y}x \tag{2.38}$$

Comparando la ecuación anterior con la obtenida de la ley de cosenos se obtiene el valor del escalar. El producto escalar, es, por lo tanto:

$$\bar{y}x = |x||y| \cos \theta \tag{2.39}$$

El escalar es “ $|x|^2$ ” veces la proyección de “ y ” en “ x ” y asume el signo de “ $\cos \theta$ ”. En la ecuación anterior es posible intercambiar los símbolos sin cambiar el resultado de tal modo que:

$$\bar{x}y = \bar{y}x \quad (2.40)$$

- **Producto vectorial.**

Del álgebra matricial se sabe que un vector 3×1 es obtenido a partir de la multiplicación de una matriz 3×3 por un vector 3×1 , de manera que:

$$[X][y] = [z] \quad (2.41)$$

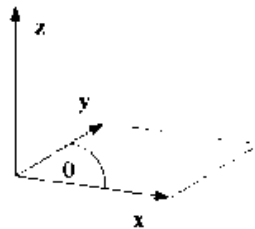


Figura 2.7. Producto vectorial [20].

El álgebra vectorial establece tres condiciones para un producto vectorial, visualizadas en la Figura 2.7:

- 1) “ z ” es normal a “ x ” y “ y ”.
- 2) “ $|z|$ ” es igual al área del paralelogramo creado por “ x ” y “ y ”.
- 3) Se atiende a la secuencia de la mano derecha “ $x \rightarrow y \rightarrow z$ ”

Estas condiciones llevan a la conclusión de que “[X]” es la forma anti-simétrica de “[x]”:

$$[x]^A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^A \leftrightarrow [X]^A = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}^A \quad (2.42)$$

Lo anterior es válido para cualquier sistema coordenado admisible “ A ”. Por lo tanto, el producto vectorial expresado en álgebra tensorial es:

$$Xy = z \quad (2.43)$$

Con el entendimiento de que “ X ” es un tensor anti-simétrico de “ x ”.

El producto vectorial de dos vectores “ x ” y “ y ” consiste en la multiplicación de la forma anti-simétrica del vector “ x ” con el vector “ y ”. En forma de coordenadas se ejecuta una multiplicación matricial.

Se introduce la multiplicación vectorial de forma simplificada, adhiriéndose a la mecánica vectorial en vez del álgebra tensorial. La convención de mano derecha elimina la necesidad de tensores de tercer orden, los cuales son requeridos para definir el producto vectorial de manera apropiada. Para el complemento del enfoque teórico se tiene la definición tensorial del producto vectorial. Sean “ x_j ”, “ y_k ” y “ z_i ” tres vectores en el espacio Euclidiano y “ ε_{ijk} ” el tensor de permutación de tercer orden, entonces el producto vectorial (incluyendo la convención de suma de índices mudos) está definido por:

$$z_i = \varepsilon_{ijk} x_j y_k \quad (2.44)$$

Esto es válido para cualquier tipo de sistema coordenado compatible con la métrica Euclidiana. Al emplear únicamente sistemas coordenados cartesianos de mano derecha y la convención de mano derecha para productos vectoriales, se pueden emplear definiciones más simples para describir el producto vectorial.

○ Triple producto vectorial.

Para cualesquiera tres vectores “ x ”, “ y ” y “ z ” con “ X ” y “ Y ” como las formas anti-simétricas de “ x ” y “ y ”, respectivamente, el triple producto vectorial se describe como:

$$XYZ = y\bar{x}z - z\bar{x}y \quad (2.45)$$

El cual puede ser interpretado como una multiplicación matricial:

$$[X][Y][z] = [y][\bar{x}][z] - [z][\bar{x}][y] \quad (2.46)$$

El lado izquierdo involucra dos productos vectoriales. “[w] = [Y][z]” y “[X][w]”. El lado derecho es la sustracción del vector “ z ” multiplicado por el escalar “[\bar{x}][y]” del vector “ y ” multiplicado por el escalar “[\bar{x}][z]”.

○ Triple producto escalar.

Para cualesquiera tres vectores “ x ”, “ y ” y “ z ” con “ X ” como la forma anti-simétrica de “ x ”, el triple producto escalar se define como:

$$V = (\overline{Xy})z = \bar{y}\bar{X}z \quad (2.47)$$

El cual implica la multiplicación matricial:

$$V = \overline{[X][y]}[z] = [\bar{y}][\bar{X}][z] \quad (2.48)$$

“V” es el resultado del producto escalar de dos vectores “[w] = [X][y]” y “z”, y es igual al volumen del paralelepípedo formado por los vectores “x”, “y” y “z”.

- **Producto diádico.**

La tercera posibilidad es la multiplicación del vector “x” con el transpuesto del vector “y” para obtener el tensor “Z”.

$$x\bar{y} = Z \quad (2.49)$$

El cual representa, para cualquier sistema coordenado admisible “A”, la multiplicación matricial:

$$[x]^A[\bar{y}]^A = [Z]^A \leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^A [y_1 \quad y_2 \quad y_3]^A = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{bmatrix}^A \quad (2.50)$$

El nombre de “producto diádico” proviene de la mecánica vectorial, la cual evita la descomposición de tensores en vectores, lo cual llama a esta composición híbrida como “diada”. No se requieren diadas en sí mismas, al emplear tensores para modelar mecánica de vuelo.

Si ambos vectores “x” y “y” son de magnitud uno, al igual que el vector unitario “u”, entonces el producto diádico produce el tensor de proyección “P”. Dado un vector cualquiera “t”, su proyección en la dirección “u” es el vector “r” expresado por:

$$r = Pt \quad (2.51)$$

Donde:

$$P = u\bar{u} \quad (2.52)$$

Sustituyendo la definición de “P” en la expresión para “r”, se tiene:

$$r = u\bar{u}t \quad (2.53)$$

Donde se tiene que el producto “ $\bar{u}t$ ” representa la longitud y “ u ” la dirección del vector “ r ”. Para cualquier sistema coordenado “ A ”, el tensor de proyección tiene la siguiente forma:

$$[P]^A = [u]^A[\bar{u}]^A = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_2 u_1 & u_2^2 & u_2 u_3 \\ u_3 u_1 & u_3 u_2 & u_3^2 \end{bmatrix}^A \quad (2.54)$$

Que es una matriz simétrica debido a que el producto escalar de coordenadas es conmutativo.

2.2.3. Modelado de Geometría.

Al trabajar en simulaciones de vehículos aeroespaciales, se invierte tiempo en tener la situación geométrica de manera correcta, dado que en situaciones particulares se debe rastrear vehículos en sistemas coordenados variados, éstos deben moverse a lo largo de líneas y debe ser de interés su proximidad a ciertos planos; algunos vectores deben proyectarse en nuevas direcciones y otros en planos; se debe incluso lidiar con simetrías rotacionales y de reflexión. Los modelos geométricos son parte indispensable del proceso de modelado.

2.2.3.1.Desplazamiento de puntos.

Recapitulando, la ubicación de un punto es irrelevante a menos que esté referido a un punto de referencia. Así, por ejemplo, la ubicación del centro de masa de un misil “ B ” debe estar relacionada con una estación de rastreo, el punto de lanzamiento o las coordenadas del objetivo. El término “desplazamiento” implica dicha relación mutua. Si el punto de referencia es “ R ”, entonces el vector de desplazamiento del misil es “ s_{BR} ”. Su dependencia del tiempo es expresada como “ $s_{BC}(t)$ ”. El desplazamiento de un punto es un concepto tensorial invariante, válido en cualquier sistema coordenado admisible. Para fines computacionales, este tensor de primer orden debe expresarse en un sistema coordenado para ser procesado numéricamente. Por ejemplo, el misil debe ser medido en las coordenadas de la estación de rastreo “ R ”. Entonces, las coordenadas del vector de desplazamiento son:

$$[s_{BC}(t)]^R = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

2.2.3.2.Líneas rectas.

Las líneas rectas se plantean como modelos de trayectorias rectas. Son consideradas de longitud infinita, pero contienen un vector de desplazamiento, cuyo punto final se mueve a lo largo de la línea.

Sea “ B ” un punto que se desliza a lo largo de la línea, empezando desde el punto inicial “ B_0 ”, manteniendo a “ R ” como un punto de referencia fijo. El proceso de deslizamiento es

generado por un parámetro escalar “ u ” el cual alarga o acorta el vector “ $s_{BB_0} = u s_{UB_0}$ ” sobre la línea. El vector “ s_{UB_0} ” establece la dirección de la línea y puede ser un vector de longitud unitaria.

Definición. Una línea recta, con dirección “ s_{UB_0} ” y anclado en “ s_{B_0R} ” es definida mediante el punto deslizante “ B ” referido al punto “ R ”.

$$s_{BR} = u s_{UB_0} + s_{B_0R} \quad (2.56)$$

Lo anterior describe a la línea como un colector unidimensional con parámetro “ u ”.

Se requieren tres puntos adicionales para describir al punto deslizante “ B ”: el punto de referencia “ R ” y dos puntos, “ U ” y “ B_0 ”, los cuales establecen la dirección de la línea. Si el punto de referencia estuviese en la línea, “ B_0 ” asumiría esta función.

2.2.3.3.Plano.

Los planos son colectores bidimensionales. En el espacio Euclidiano se habla de líneas rectas y planos lisos. La simulación debe definir tales elementos como planos de terreno, planos imaginarios o planos tangentes.

Sea “ B ” un punto que recorre un plano completo, comenzando en “ B_0 ” y manteniendo a “ R ” como punto de referencia. El movimiento sobre el plano es generado por dos parámetros: “ u ” y “ v ”, que modifican los dos vectores direccionales “ s_{UB_0} ” y “ s_{VB_0} ”.

Definición. Un plano ajustado entre “ s_{UB_0} ” y “ s_{VB_0} ”, es definido mediante el movimiento de barrido del vector de desplazamiento del punto “ B ”, referido al punto “ R ”

$$s_{BR} = u s_{UB_0} + v s_{VB_0} + s_{B_0R} \quad (2.57)$$

Lo anterior describe al plano como un colector bidimensional con parámetros “ u ” y “ v ”.

Los vectores embebidos “[s_{UB_0}]” y “[s_{VB_0}]” extienden el nivel del plano. No tienen que ser mutuamente ortogonales ni tienen que ser vectores unitarios. Se requieren cuatro puntos adicionales para describir el movimiento de barrido de “ B ”. Los tres puntos “ B_0 ”, “ U ” y “ V ” establecen la orientación del plano y “ R ” sirve como punto de referencia. Si “ R ” estuviera en el plano, “ B_0 ” asumiría esta función.

2.2.3.4. Forma normal de un plano.

La definición de un plano puede llegar a ser intimidante por su complejidad. Existe una formulación alternativa más simple, la cual es útil para el modelado de planos, llamada “forma normal”, dado que el vector unitario normal define su orientación.

Sea “ u ” el vector unitario normal a un plano. Multiplicando previamente la expresión para la definición de un plano mostrada en el apartado anterior por la transpuesta de “ u ”, se generan productos escalares en ambos lados de la ecuación.

$$\bar{u}s_{BR} = u\bar{u}s_{UB_0} + v\bar{u}s_{VB_0} + \bar{u}s_{B_0R} \quad (2.58)$$

Dado que “ \bar{u} ” es ortogonal a “ s_{UB_0} ” y “ s_{VB_0} ”, los primeros dos términos del segundo miembro de la ecuación son cero; y, siendo “ s_{B_0R} ” constante, se tiene la condición para que “ B ” realice el barrido del plano:

$$\bar{u}s_{BR} = \text{constante}$$

En la labor de modelar planos: si el plano está dado por puntos o vectores embebidos, se emplea la definición de plano; de otra manera, se emplea el vector unitario normal.

2.2.3.5. Tensor de proyección de plano.

Una simulación puede requerir que el vector de velocidad de una aeronave sea proyectado en el suelo o que la silueta de un misil sea plasmada en un arreglo plano de un dispositivo de carga acoplada (CCD, por sus siglas en inglés). Para estas situaciones se requiere el tensor de proyección de plano.

Previamente se analizó el tensor de proyección de línea “ P ”, el cual es formado por el producto diádico del vector unitario “ u ”: “ $P = u\bar{u}$ ”. De acuerdo con la ecuación para la proyección de vectores, “ P ” produce al vector “ r ” a partir de “ t ” al proyectarlo en “ u ”: “ $r = Pt$ ”. Ahora, “ u ” no solamente establece la dirección de una línea, sino que establece el vector unitario normal al plano.

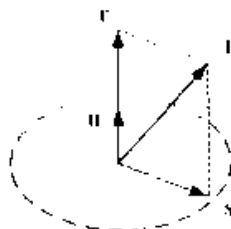


Figura 2.8. Proyección plana [20].

Se requiere, entonces, encontrar el tensor de proyección “ N ” que proyecte el vector “ t ” en el plano dado por “ u ”. El vector proyectado es etiquetado como “ s ”. A partir del triángulo de vectores de la Figura 2.8 se tiene:

$$s = t - r \tag{2.59}$$

Sustituyendo en lo anterior la definición del vector “ r ”, se tiene:

$$s = t - Pt = (E - P)t = (E - u\bar{u})t \tag{2.60}$$

Se define, entonces, el tensor de proyección de plano a partir del tensor unitario “ E ” y el vector unitario “ u ” normal al plano.

$$N = E - u\bar{u} \tag{2.61}$$

Al igual que el tensor de proyección de línea, el tensor de proyección de plano es simétrico.

2.2.3.6. Tensor de reflexión.

Un plano de simetría tiene las características de un espejo: un lado repite lo que hay en el otro. Cualquier aeronave refleja esta simetría de reflexión. Incluso las maniobras de mano derecha pueden reflejarse en maniobras de mano izquierda por manipulación geométrica. El tensor que hace esto posible, es llamado tensor de reflexión “ M ”.

Este tensor refleja el vector “ t ” en “ t' ” mediante un plano reflector con el vector unitario “ u ”. En primer lugar se proyecta “ t ” en “ u ” con el tensor de proyección “ $P = u\bar{u}$ ” para obtener “ $r = Pt$ ” y entonces derivar “ t' ” a partir del triángulo de vectores mostrado en la Figura 2.9.

$$t' = t - 2r = t - 2Pt = (E - 2P)t \tag{2.62}$$

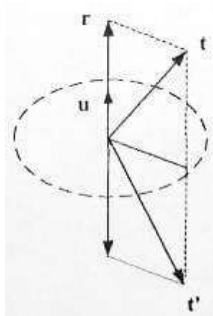


Figura 2.9. Reflexión [20].

El tensor de reflexión del plano reflector, con el vector unitario normal “ u ” y el tensor unitario “ E ”, es, por lo tanto:

$$M = E - 2u\bar{u} \quad (2.63)$$

El cual no es únicamente simétrico, sino también ortogonal.

El tensor de reflexión es importante para tratar con la existencia de derivadas aerodinámicas de orden superior de aeronaves que exhiben simetría de reflexión. Si el plano de reflexión está orientado en coordenadas corporales “ B ” de manera tal que su vector unitario normal tenga las coordenadas “[\bar{u}] $^B = [0 \ 1 \ 0]$ ” (ala derecha de la aeronave), entonces el tensor de reflexión tiene las siguientes coordenadas:

$$[M]^B = [E]^B - 2[u]^B [\bar{u}]^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

El tensor de reflexión, en este caso, cambia el signo de la segunda coordenada, pero conserva las restantes sin cambios.

2.3. Marcos y Sistemas Coordenados.

2.3.1. Marcos.

Un marco es un conjunto de puntos continuos ilimitados sobre el espacio Euclidiano tridimensional con distancias invariantes y el cual posee, como subconjunto, al menos tres puntos no colineales. El marco inercial es uno de tales conjuntos de puntos ilimitados. La Tierra, a pesar de poseer límites, tiene un marco asociado con ella. Teóricamente, el marco terrestre se extiende más allá de los confines del geoide, pero cuando se hace referencia a los puntos del marco terrestre, se mantiene en la Tierra. Un enfoque similar es tomado con el marco corporal. Estrictamente hablando, el cuerpo debe ser rígido para ser modelado mediante un marco. Para modelado elástico es una práctica común dividir el cuerpo en elementos rígidos finitos, cada uno de los cuales es representado mediante un marco.

Se deben identificar al menos tres puntos no colineales de un marco. De otro modo, el marco podría no representar a un colector tridimensional del espacio. En particular, se deben elegir tres puntos tales que, si se conectaran con un cuarto punto base, establecen una triada que define completamente la posición del marco.

2.3.1.1. Posicionamiento de marcos.

Sean “ A ” y “ B ” dos marcos que contienen tres puntos no colineales “ A_1 ”, “ A_2 ”, “ A_3 ”, y “ B_1 ”, “ B_2 ”, “ B_3 ”, respectivamente (ver Figura 2.10). La posición del marco “ B ” con respecto al

marco “A” es determinada mediante tres vectores de desplazamiento “ $s_{B_i A_i}$ ”, donde “ $i = 1,2,3$ ”. Los marcos tienen la propiedad de localización y orientación, mientras que el espacio tiene únicamente el atributo de localización.

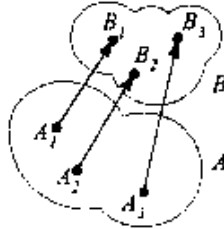


Figura 2.10. Relación de marcos [20].

- **Localización de un marco.**

Sean “A” y “B” dos puntos, denominados “puntos base”, de los marcos “A” y “B” respectivamente (ver Figura 2.11). El vector de desplazamiento “ s_{BA} ” determina la localización del marco “B” relativa al marco “A”. Un vector de desplazamiento puede relacionar únicamente un punto en cada marco. Este fija la localización del punto base pero deja al marco la libertad de orientación. Dos puntos adicionales no colineales y no coplanares, definen la localización y orientación del marco “B” con respecto al marco “A”. Sin embargo, se eligen tres puntos adicionales tales que formen los puntos finales de una triada de vectores ortonormales para así definir la orientación de un marco.

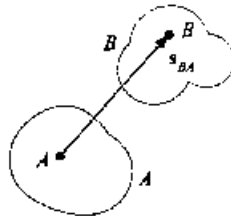


Figura 2.11. Localización [20].

- **Orientación de un marco.**

Se construye una triada a partir de un conjunto de tres vectores base ortonormales “ a_1 ”, “ a_2 ” y “ a_3 ”, (ver Figura 2.12), tales que:

$$\bar{a}_i a_j = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq j \\ 1 & \text{para } i = j \end{cases}$$

Donde: “ $i = 1,2,3$ ”; “ $j = 1,2,3$ ”.

Los vectores “ a_1 ”, “ a_2 ” y “ a_3 ” son de magnitud unitaria y conectan el punto base “A” con otros tres puntos del marco “A”. La orientación del marco está dada por esta triada.

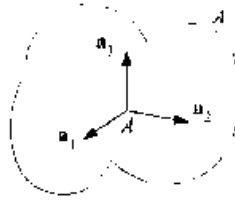


Figura 2.12. Orientación [20].

Así como la localización requiere de un punto de referencia, la orientación requiere un marco de referencia. Un vector de desplazamiento modela la localización, mientras que la orientación, es representada mediante el tensor de rotación. Ambas, localización y orientación, determinan la posición de un marco. Una triada, con su punto base y tres vectores, es suficiente para determinar un marco.

En la Figura 2.12 se podría reconocer un sistema familiar de ejes coordenados, pero no es así. Una triada es una entidad física, consistente de puntos y vectores, y no un sistema coordenado. Entre los sistemas coordenados asociados con cada marco, hay uno de manera particular que coordina los vectores base de manera simple “[a_1]^A = [1 0 0]”, “[a_2]^A = [0 1 0]” y “[a_3]^A = [0 0 1]”. Este es llamado “sistema coordenado principal” y es el más importante entre todos los sistemas coordenados posibles asociados con un marco.

2.3.1.2. Marcos de referencia.

En tiempos recientes, el lanzamiento de satélites y el viaje interplanetario de aeronaves han dado importancia práctica al entendimiento claro de marcos de referencia y sistemas coordenados. Vallado [30] proporciona un estado actualizado al respecto.

El marco centrado en el Sol (heliocéntrico) sirve para todo viaje en el espacio planetario, mientras que el marco centrado en la Tierra es suficiente para las trayectorias de trabajo de satélites terrestres. Ambos son considerados marcos inerciales en el sentido Newtoniano; la elección depende de la aplicación. Para vuelos dentro de los límites terrestres, la rotación de la Tierra puede despreciarse. Bajo estas circunstancias, el marco terrestre se convierte en referencia inercial. Incluso el cuerpo de un vehículo puede convertirse en un marco de referencia para la rotación de álabes de turbina, propulsores, etc. Deben definirse estos marcos a detalle empleando los conceptos de punto base y vectores base.

2.3.1.2.1. Marco heliocéntrico.

Desde una perspectiva terrestre, el Sol es el mayor marco de referencia. A medida que la Tierra gira alrededor del Sol, ésta escribe el plano eclíptico. Los astrónomos hablan de la eclíptica principal, la cual promedia algunas fluctuaciones periódicas menores. Dado que la Tierra se encuentra inclinada cerca de 23.5 grados respecto a la eclíptica, se generan las cuatro estaciones. La Figura 2.13 visualiza el ciclo anual.

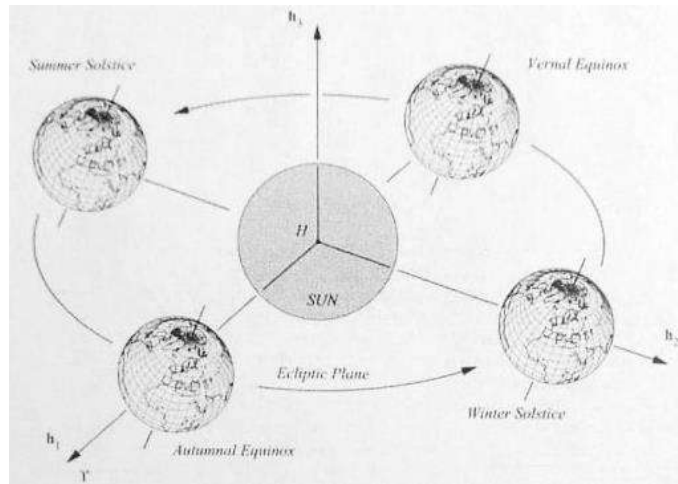


Figura 2.13. Marco de referencia heliocéntrico [20].

El sol no es sólido, sino gaseoso y posiblemente líquido por lo que no hay puntos de referencia mutuamente en reposo. Se elige el centro gravitacional como el punto base “ H ”. El tercer vector base “ h_3 ” es normal a la eclíptica, apuntando hacia arriba, basado en la dirección orbital de la Tierra, y el sentido del vector está sujeto a la regla de la mano derecha. El vector base restante para definir la triada es el primer vector base “ h_1 ”, el cual apunta hacia el primer punto de Aries (donde la constelación estelar estuvo durante la era de Cristo). Hoy en día, apunta en dirección de la constelación de Piscis.

Entonces, el marco heliocéntrico es modelado mediante el punto base “ H ” y los tres vectores base “ h_1 ”, “ h_2 ” y “ h_3 ”, con “ h_1 ” apuntando hacia Aries “ Y ”; “ h_3 ” es normal al plano eclíptico y “ h_2 ” completando la triada. Si alguna vez se viaja a Marte, se estaría familiarizado con este marco heliocéntrico. Sin embargo, de regreso al planeta Tierra se preferirá trabajar con el marco de referencia geocéntrico inercial.

2.3.1.2.2. Marco geocéntrico inercial (J2000).

Para describir este marco se toma como referencia a la Tierra, como se observa en la Figura 2.14. El marco de referencia inercial más utilizado es colocado en el centro de la Tierra, pero su orientación se mantiene fija en la eclíptica. La localización del marco está dada por el vector de desplazamiento “ s_{IH} ” del centro de la Tierra “ I ” con respecto al centro del Sol “ H ”. Su orientación es descrita mediante los vectores base “ i_1 ”, “ i_2 ” y “ i_3 ”.

Para definir el vector “ i_1 ” se visualiza una coraza sin rotación alrededor de la Tierra con el trazo del ecuador grabado en ella. La eclíptica, proyectada en la coraza, es la ruta del Sol durante el año, esta intersectará al ecuador en dos puntos. El punto cuando el Sol cruza el ecuador en primavera, llamado “equinoccio de primavera” (presentado en la Figura 2.13); el primer vector base “ i_1 ” se alinea con esta dirección. Este apunta a la constelación de Aries y por lo tanto se fija con las estrellas. El eje de rotación de la Tierra sirve como dirección y sentido para “ i_3 ”, y “ i_2 ” completa la triada de mano derecha.

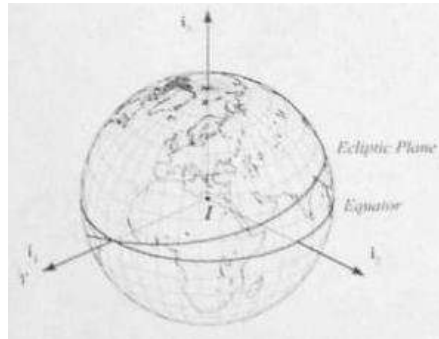


Figura 2.14. Marco de referencia inercial [20].

El plano ecuatorial se mueve ligeramente con el paso del tiempo; se puede hablar de un verdadero marco inercial si se hace referencia a su posición en una época particular. Por lo tanto, los astrónomos definieron el sistema J2000 que está basado en el “Fundamental Katalog” FK5 [31]. Este sistema es la mejor realización de un marco inercial ideal; es el fundamento para todo modelado y simulación cercano a la Tierra. En lo posterior, se referirá a este marco como “marco inercial”.

2.3.1.2.3. Marco terrestre.

De manera general se tiene noción de la Tierra como se muestra en la Figura 2.15; sus partículas forman el marco terrestre. El punto base “E” se ubica en el centro de la Tierra y la triada consiste en los vectores base “ e_1 ”, “ e_2 ” y “ e_3 ”. El meridiano principal se traza a través del Observatorio Real en Greenwich y su intersección con el ecuador establece el punto de penetración del primer vector base “ e_1 ”. El eje de rotación de la Tierra sirve como la dirección y sentido para el tercer vector base “ e_3 ”, y “ e_2 ” completa la triada.

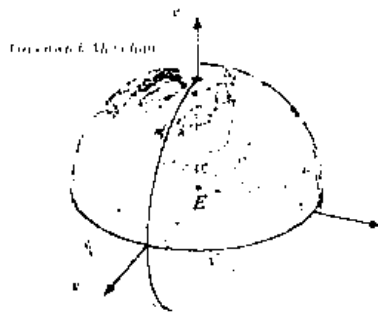


Figura 2.15. Marco de referencia terrestre [20].

2.3.1.2.4. Marco corporal.

Aeronaves, misiles y naves espaciales, si son considerados como cuerpos rígidos, pueden ser representados por un marco; entonces, se tienen los llamados “marcos corporales”. A pesar de que este tipo de marco no es usado comúnmente como referencia, es importante para el modelado de la localización y orientación de vehículos bajo estudio. Su punto base “B”

coincide con el centro de masa, y los vectores base “ b_1 ”, “ b_2 ” y “ b_3 ” están alineados con los ejes principales del tensor de momentos de inercia.

En ocasiones otras direcciones son más relevantes. Por ejemplo, el vector “ b_1 ” para una aeronave se alinea comúnmente con algún rasgo geométrico sobresaliente, como la punta de la nariz o la línea de cero elevación a un particular número de Mach (ver Figura 2.16). Sin embargo, para todos los vehículos “ b_2 ” es paralelo al segundo eje principal de momento de inercia.

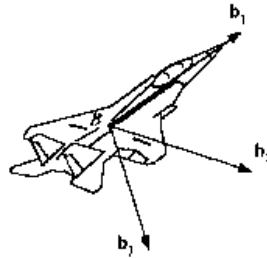


Figura 2.16. Marco de referencia corporal [20].

Para aeronaves, el sentido positivo de los vectores base es: “ b_1 ” hacia afuera de la nariz, “ b_2 ” fuera del ala derecha, y “ b_3 ” hacia abajo, completando la triada. Para misiles con simetría rotacional, cualquier dirección para “ b_2 ” y “ b_3 ” es un eje principal. Por lo tanto, las aletas de control o marcas geométricas pueden ser usadas para fijarlos.

Si se requiere modelar fenómenos elásticos, es necesario un marco corporal como referencia para los nodos sometidos a flexión o vibración. Este marco puede ser definido como aquel que coincide con el vehículo bajo condiciones de ausencia de carga, o, para el caso de “aleteo” de las alas, el fuselaje en sí mismo puede ser elegido como marco de referencia. En ocasiones el vehículo completo es dividido en varios sub-marcos de cuerpo rígido, y uno de ellos es elegido como referencia principal.

Tabla 2.1. Resumen de marcos.

| Marco | Punto base | Vectores base | Primera dirección | Tercera dirección |
|---------------|-------------------------|-----------------|-------------------------------|------------------------------------|
| Heliocéntrico | H centro del Sol | h_1, h_2, h_3 | h_1 Aries | h_3 normal a la elíptica |
| Inercial | I centro de la Tierra | i_1, i_2, i_3 | i_1 equinoccio de primavera | i_3 eje de rotación de la Tierra |
| Terrestre | E centro de la Tierra | e_1, e_2, e_3 | e_1 Greenwich | e_3 eje de rotación de la Tierra |
| Corporal | B centro de masa | b_1, b_2, b_3 | b_1 nariz | b_3 abajo |

La Tabla 2.1 resumen los cuatro marcos. La importancia de los planos eclíptico y ecuatorial radica en que sus vectores unitarios normales definen la dirección de tres vectores base (el

eje de rotación de la Tierra es normal al ecuador). Igualmente se identifica que el centro de la Tierra es el punto base para los marcos inercial y terrestre, como se ha detallado previamente. De todos los puntos del marco terrestre, el centro es el único punto compartido con el marco inercial.

2.3.2. Sistemas Coordinados.

La importancia de los sistemas coordinados es su habilidad de permitir cálculos numéricos de ecuaciones simbólicas. El modelado de vehículos aeroespaciales encuentra su desarrollo en simulaciones y las computadoras empleadas para ello procesan números y no letras simbólicas.

A medida de que se construyen las simulaciones, se requieren varios tipos de sistemas coordinados. En Alemania, el “LN Standard” [31] ha sido utilizado por muchos años. En el pasado se confiaba únicamente en un documento del “U.S. Navy” [32] para modelado aerobalístico. En 1992 la “A.I.A.A.” publicó, en colaboración con el Instituto Nacional Americano de Estándares (ANSI, por su siglas en inglés) el “Recommended Practice for Atmosphere and Space Vehicle Coordinate Systems” [33]. Con el paso de los años, muchos libros han servido como referencias: Etkin [34], Bate *et. al.* [35], Britting [36]; y más recientemente Pamadi [37], Vallado [30] y Chatfield [38].

A medida de que se hace la transición de marcos a sistemas coordinados, el sistema coordinado principal resalta en importancia. Si una triada ha sido definida para un marco, es conveniente elegir algún sistema que se alinee con los vectores base entre un número infinito de sistemas asociados.

Así como los marcos se refieren entre sí –estableciendo su posición relativa- los sistemas coordinados se relacionan mediante transformaciones coordinadas.

2.3.2.1. Matriz de transformación de coordenadas.

Los sistemas coordinados están relacionados mediante matrices de transformación de coordenadas que re-etiquetan las coordenadas de un tensor. Su composición se estudia mediante dos representaciones.

2.3.2.1.1. Representación de vector base.

Se tienen “ x ”, un tensor de primer orden, y dos sistemas coordinados admisibles “ A ” y “ B ”, siendo su matriz de transformación “ T^{BA} ”. De la definición de un tensor de primer orden se tiene:

$$[x]^B = [T]^{BA}[x]^A \quad (2.65)$$

Además, se tiene la triada “ a_1 ”, “ a_2 ” y “ a_3 ” (ver Figura 2.17) asociada con el marco “ A ”. Descomponiendo “ x ” en los vectores de la triada, se tiene:

$$x = x_1^A a_1 + x_2^A a_2 + x_3^A a_3 \quad (2.66)$$

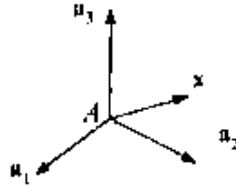


Figura 2.17. Triada "A" [20].

Donde " x_i ", con " $i = 1,2,3$ ", son las coordenadas y " $x_i^A a_i$ ", con " $i = 1,2,3$ ", son las componentes del vector. Ahora, expresando " x " en las coordenadas de " B ":

$$[x]^B = x_1^A [a_1]^B + x_2^A [a_2]^B + x_3^A [a_3]^B \quad (67)$$

Esta ecuación se puede reescribir como un producto escalar:

$$[x]^B = [[a_1]^B \quad [a_2]^B \quad [a_3]^B] \begin{bmatrix} x_1^A \\ x_2^A \\ x_3^A \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Si se elige el sistema "A" como principal entre todos los sistemas coordenados asociados, entonces el vector " x " es coordinado directamente como:

$$[x]^A = \begin{bmatrix} x_1^A \\ x_2^A \\ x_3^A \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Y, por lo tanto, la ecuación como producto escalar se transforma en:

$$[x]^B = [[a_1]^B \quad [a_2]^B \quad [a_3]^B] [x]^A \quad (2.70)$$

Comparando esta ecuación con la ecuación (2.65), se tiene la representación de la matriz de transformación de coordenadas.

$$[T]^{BA} = [[a_1]^B \quad [a_2]^B \quad [a_3]^B] \quad (2.71)$$

Sus columnas consisten en los vectores base del marco “A” coordinados en “B” orientado a emplear el sistema coordenado principal para el marco “A”.

Puede revertirse esta derivación y descomponer el vector “x” en la triada “b₁”, “b₂” y “b₃” del marco “B”; coordinándolo en el sistema “A”, resolviendo para “[x]^B” y comparando con la ecuación (2.65) se llega a otra representación para la matriz de transformación:

$$[T]^{BA} = \begin{bmatrix} [b_1]^A \\ [b_2]^A \\ [b_3]^A \end{bmatrix} \tag{2.72}$$

Las filas son los vectores base del marco “B” transpuestos como vectores fila y coordinados en el sistema “A”. Ambas representaciones pueden resumirse en el siguiente arreglo con elementos “t_{ij}” de “[T]^{BA}”

$$\begin{array}{ccc} & [a_1]^B & [a_2]^B & [a_3]^B \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ [b_1]^A \rightarrow & t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ [b_2]^A \rightarrow & t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ [b_3]^A \rightarrow & t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{array}$$

En resumen, la matriz de transformación de coordenadas consiste en los vectores base, coordinados en sus sistemas coordenados principales.

2.3.2.1.2. Matriz de transformación de cosenos directores.

Escribiendo las coordenadas de la ecuación (2.71), se tiene:

$$[T]^{BA} = \begin{bmatrix} a_{11}^B & a_{12}^B & a_{13}^B \\ a_{21}^B & a_{22}^B & a_{23}^B \\ a_{31}^B & a_{32}^B & a_{33}^B \end{bmatrix} \tag{2.73}$$

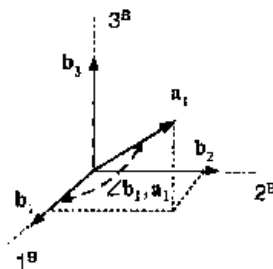


Figura 2.18. Cosenos directores [20].

Se puede interpretar cada elemento como el coseno del ángulo entre dos vectores base. El primer subíndice indica la triada “ b ” y el segundo, la triada “ a ”. Se emplea el elemento “ a_{11}^B ” para mostrarlo (ver Figura 2.18). Para calcular el coseno del ángulo entre los vectores base “ b_1 ” y “ a_1 ” se toma su producto escalar y se expresa en el sistema coordenado “ B ”.

$$\cos\angle(b_1, a_1) = [\bar{b}_1][a_1] = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} a_{11}^B \\ a_{21}^B \\ a_{31}^B \end{bmatrix} = a_{11}^B \quad (2.74)$$

Entonces, “ a_{11}^B ” es el coseno del ángulo entre dos vectores base. Se puede emplear igualmente la ecuación (2.72) y obtener la misma expresión. En general, para cualquier “ b_i ” y “ a_k ” se puede calcular el coseno del ángulo de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$\cos\angle(b_i, a_k) = a_{ik}^B = t_{ik} \quad (2.75)$$

Donde: “ $i = 1,2,3$ ”; “ $k = 1,2,3$ ”.

Dado que los elementos son cosenos entre dos direcciones, la matriz de transformación es también llamada “matriz de cosenos directores”, un término frecuentemente asignado a la matriz de transformación de un cuerpo con respecto a las coordenadas geográficas.

2.3.2.1.3. Propiedades de las matrices de transformación.

Propiedad 1. Las matrices de transformación son ortogonales.

$$[\bar{T}]^{BA} = ([T]^{BA})^{-1} \quad (2.76)$$

Propiedad 2. El determinante de la matriz de transformación es “ ± 1 ”.

$$|[T]^{BA}| = \pm 1 \quad (2.77)$$

Para mantener la condición de mano derecha se elige “ $|[T]^{BA}| = +1$ ”.

Propiedad 3. Tomar la transpuesta de la matriz de transformación corresponde a cambiar la secuencia de la transformación.

$$[\bar{T}]^{BA} = [T]^{AB} \quad (2.78)$$

Propiedad 4. Siendo “A”, “B” y “C” cualesquiera sistemas coordenados admisibles, entonces, transformaciones consecutivas se contraen cancelando los superíndices adyacentes.

$$[T]^{CA} = [T]^{CB}[T]^{BA} \quad (2.79)$$

La secuencia de combinación de matrices de transformación debe respetarse dado que involucra multiplicaciones matriciales y éstas no son conmutativas.

Propiedad 5. Las matrices de transformación no son tensores.

Si “[T]^{BA}” fuese un tensor, tendría que ser invariante bajo cualquier transformación coordenada. Si se tiene, por ejemplo, una matriz de transformación entre dos cualesquiera sistemas coordenados admisibles, por ejemplo “[T]^{CD}”, recordando que cualquier entidad como “[T]^{BA}” es un tensor de segundo orden si éste mantiene su característica bajo la transformación correspondiente, la transformación “[T]^{BA} = [T]^{CD}[T]^{BA}[T]^{CD}” presenta diferentes tipos de matrices a ambos lados de la ecuación. No es posible contraer los superíndices del segundo miembro para conformar lo expresado en el primero. Por lo tanto, “[T]^{BA}” no es un tensor.

2.3.2.2. Sistemas coordenados y sus transformaciones.

Los sistemas coordenados son intrínsecos de las simulaciones computacionales de vehículos aeroespaciales. En contraste con los marcos, con su punto y vectores base, los sistemas coordenados no tienen sustancia física, son esquemas matemáticos de re-etiquetado de coordenadas de tensores. Sin embargo, si los vectores base son expresados en los sistemas coordenados principales, toman una forma particularmente simple, por lo que es relevante mostrar geoméricamente la dirección y el sentido positivo de los ejes coordenados. Hay que recordar que los ejes coordenados no tienen que emanar del punto base, a pesar de que esto sea conveniente en la mayoría de los casos.

Se tiene conocimiento de las triadas de los marcos heliocéntrico, inercial, terrestre y corporal. Sobre estas triadas se superponen los sistemas coordenados principales con los mismos nombres. Los ejes se etiquetan como “1”, “2” y “3”, en vez de “x”, “y” y “z”, con una letra mayúscula en superíndice indicando el marco asociado. Se simula que los ejes coordenados perforan una esfera unitaria y se conectan los puntos de incisión para crear triángulos de superficie a manera de “cáscaras de naranja”.

En vez de presentar los sistemas coordenados de manera individual, se muestran en pares para mostrar relaciones mutuas que conducen a transformaciones coordenadas.

2.3.2.2.1. Sistemas coordenados heliocéntrico e inercial.

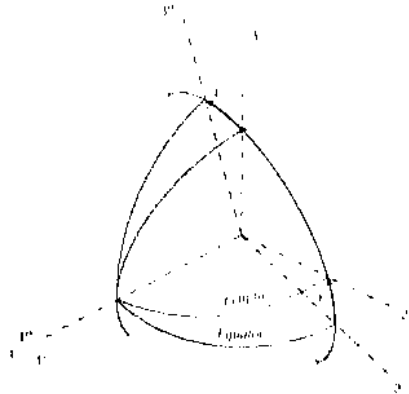


Figura 2.19. Sistemas coordenados, heliocéntrico e inercial [20].

Retomando las figuras 2.13 y 2.14, se elige el sistema coordenado principal para la triada del marco inercial “ i_1 ”, “ i_2 ” y “ i_3 ” (ver Figura 2.19). El eje inercial “ 1^I ” está alineado con el equinoccio de primavera y el eje “ 3^I ” con el polo norte. Los ejes “ 1^I ” y “ 2^I ” se cruzan con la línea del ecuador. Los ejes coordenados heliocéntricos están inclinados en medida de la oblicuidad de la eclíptica “ ε ”. Se construye la matriz de transformación “[T]^{HI}” del sistema coordenado heliocéntrico con respecto al inercial empleando la ecuación (2.72):

$$\begin{bmatrix} [\bar{h}_1]^I \\ [\bar{h}_2]^I \\ [\bar{h}_3]^I \end{bmatrix} = [T]^{HI} \quad (2.80)$$

Donde “[\bar{h}_i]^I”, con “ $i = 1,2,3$ ”, son los vectores base de la triada heliocéntrica coordinada en los ejes inerciales. Mediante inspección de la Figura 2.19 se verifica que:

$$\begin{bmatrix} [\bar{h}_1]^I \\ [\bar{h}_2]^I \\ [\bar{h}_3]^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \text{sen } \varepsilon \\ 0 & -\text{sen } \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix} = [T]^{HI} \quad (2.81)$$

El “1” que aparece en la posición “ t_{11} ” indica que la transformación tiene lugar en la dirección “1” sin cambio en las coordenadas. Las diagonales son el coseno del ángulo de transformación, como se verifica de la ecuación (2.75). Los elementos fuera de la diagonal son el seno del ángulo. Lo único a decidir es la posición del signo negativo. Una regla simple indica que el signo negativo aparece antes de la función seno, la cual se encuentra en la fila

superior a la fila que contiene el “1”. Si esta fila es la primera, como es el presente caso, se imaginan las filas siguientes en secuencia “3 – 2 – 1”.

Tomando las conexiones entre los puntos de incisión y mostrándolas en la Figura 2.20. Para facilitar la transición, se muestran los ejes coordenados.

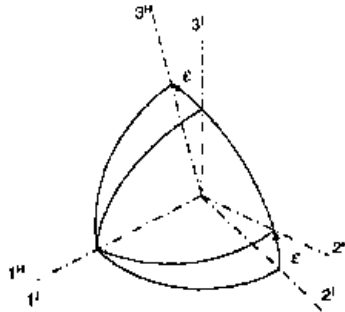


Figura 2.20. Sección del sistema coordenado heliocéntrico con respecto al inercial [20].

Transformando el sistema “ I ” en torno al eje “ 1^I ”, se toma el eje “ 2^I ” a través del ángulo “ ε ” para establecer el eje “ 2^H ” mediante el movimiento de mano derecha con el dedo índice apuntando en la dirección “ 1^I ”. Esta transformación se traduce como la transformación del sistema coordenado “ H ” con respecto al sistema coordenado “ I ” a través del ángulo “ ε ”. Que es equivalente a transformar desde “ I ” hacia “ H ” a través del ángulo “ ε ”. Tomando la transpuesta de la matriz de transformación, es decir “[\bar{T}] ^{HI} ”, cambia la secuencia de transformación a “[T] ^{IH} ” a través del ángulo negativo “ $-\varepsilon$ ”.

2.3.2.2.2. Sistema coordenado terrestre.

El sistema coordenado terrestre es el sistema coordenado principal de la triada del marco terrestre “ e_1 ”, “ e_2 ” y “ e_3 ” (ver Figura 2.15). El eje “ 1^E ” incide a través de la esfera unitaria en la intersección del ecuador con el meridiano de Greenwich. El eje “ 3^E ” se superpone al eje de rotación de la Tierra y el eje “ 2^E ” completa el sistema coordenado de mano derecha.

Para relacionar las coordenadas terrestres con las coordenadas inerciales se tiene que atender a la rotación de la Tierra. Cada 24 horas la Tierra presenta la misma cara al Sol, esto es llamado “día solar”. Sin embargo, una rotación completa de la Tierra relativa a las estrellas, llamado “día sideral”, es más corto en 4 minutos. La prolongación del día solar es debido a la progresión de la Tierra en la elíptica durante 24 horas. Para presentar la misma cara al Sol, la Tierra tiene que rotar más allá. De principal interés es el tiempo sideral transcurrido desde que el eje “ 1^E ” coincide con el eje “ 1^I ”. En lugar de usar el tiempo, se emplea una medida angular, equiparando 360° a un día sideral. El ángulo entre “ 1^E ” y “ 1^I ” es llamado “ángulo horario”, representado por la letra “ Ξ ”, y establece al meridiano de Greenwich relativo al meridiano del equinoccio de primavera.

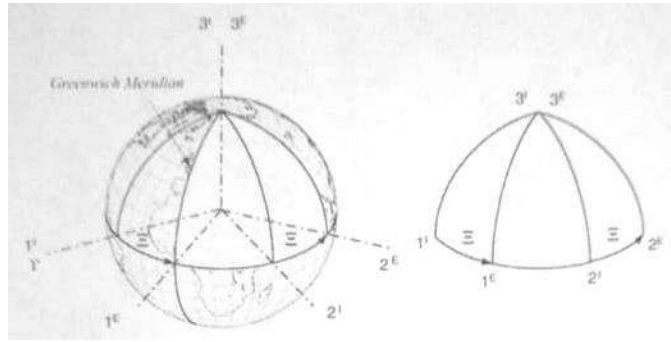


Figura 2.21. Sistema coordenado terrestre e inercial [20].

La matriz de transformación “[T]^{EI}” de las coordenadas terrestres respecto a las coordenadas inerciales se obtiene mediante inspección.

$$[T]^{EI} = \begin{bmatrix} \cos \Xi & \text{sen } \Xi & 0 \\ -\text{sen } \Xi & \cos \Xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

La Figura 2.21 muestra de manera esquematizada la información expresada anteriormente.

2.3.2.2.3. Sistema coordenado geográfico.

Mediante una malla, que consiste en líneas de longitud y latitud, que cubre la superficie de la Tierra, es posible determinar cualquier punto. La longitud es dividida en $\pm 180^\circ$ con la dirección positiva comenzando en el meridiano de Greenwich en dirección oriental. La latitud es medida desde el ecuador, positiva en dirección septentrional de 0 a 90° y negativa en dirección meridional.

En el ámbito de las simulaciones es preferible trabajar en radianes. La longitud se puede extender de 0 a 2π o $\pm\pi$ radianes y la latitud entre $\pm\pi/2$. Aun así, se puede permitir el ingreso de información en grados, minutos y segundos, y en respuesta se entregan los valores de salida en las mismas unidades. En un punto específico de la Tierra, de longitud “ l ” y latitud “ λ ”, el sistema coordenado geográfico “ G ” es definido de la siguiente manera: el eje “ 1^G ” apunta hacia el norte, el eje “ 3^G ” apunta hacia el centro de la Tierra, y el eje “ 2^G ”, apuntando al este, completa el sistema coordenado de mano derecha.

Para relacionar el sistema coordenado geográfico con el sistema terrestre se requiere de transformaciones secuenciales (ver Figura 2.22). La primera es del sistema “ E ” a un sistema intermedio “ X ” con el ángulo de longitud “ l ”, esta es una transformación de “ E ” a “ X ” a través del ángulo “ l ”; seguida de otro sistema intermedio “ Y ” obtenido a través del complemento del ángulo de latitud “ $90^\circ - \lambda$ ”, lo que es, una transformación de “ X ” a “ Y ” a través del ángulo “ $90^\circ - \lambda$ ”.

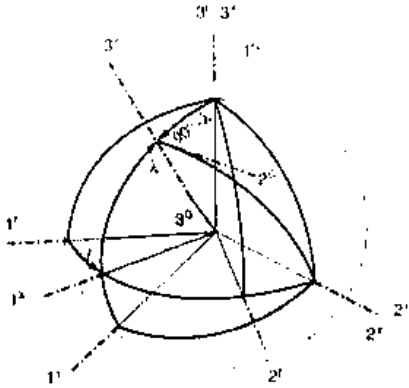


Figura 2.22. Coordenadas geográficas con respecto a las terrestres [20].

Antes de formular la transformación completa, se determina la matriz de transformación de los dos pasos anteriormente descritos:

$$[T]^{YE} = [T(90^\circ - \lambda)]^{YX} [T(l)]^{XE} \quad (2.83)$$

$$[T]^{YE} = \begin{bmatrix} \text{sen } \lambda & 0 & -\text{cos } \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{cos } \lambda & 0 & \text{sen } \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{cos } l & \text{sen } l & 0 \\ -\text{sen } l & \text{cos } l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

$$[T]^{YE} = \begin{bmatrix} \text{sen } \lambda \text{ cos } l & \text{sen } \lambda \text{ sen } l & -\text{cos } \lambda \\ -\text{sen } l & \text{cos } l & 0 \\ \text{cos } \lambda \text{ cos } l & \text{cos } \lambda \text{ sen } l & \text{sen } \lambda \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

La primera transformación “[T]^{XE}” es en torno al eje “3^E”, seguida de la transformación “[T]^{YX}” en torno al eje “2^X”.

Para alcanzar los ejes geométricos se tiene que hacer un giro de 180 grados. Los ejes “1^G” y “3^G” tienen una dirección opuesta a los ejes “1^Y” y “3^Y”, respectivamente, mientras que el eje “2^G” mantiene el mismo sentido que “2^Y”. Para determinar la matriz de transformación se retoma la ecuación (2.72) y se visualizan los vectores asociados con el sistema coordenado principal “G” siendo expresados en el sistema “Y”. Desde esta perspectiva se tiene la transformación del giro.

$$[T]^{GY} = \begin{bmatrix} [\bar{g}_1]^Y \\ [\bar{g}_2]^Y \\ [\bar{g}_3]^Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

Agrupando todas las transformaciones se tiene:

$$[T]^{GE} = [T(180^\circ)]^{GY}[T(90^\circ - \lambda)]^{YX}[T(l)]^{XE} \quad (2.87)$$

Lo cual conduce a la matriz de transformación de las coordenadas geométricas con respecto a las coordenadas terrestres:

$$[T]^{GE} = \begin{bmatrix} -\text{sen } \lambda \cos l & -\text{sen } \lambda \text{sen } l & \cos \lambda \\ -\text{sen } l & \cos l & 0 \\ -\cos \lambda \cos l & -\cos \lambda \text{sen } l & -\text{sen } \lambda \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

A medida que un vehículo se desplaza sobre la Tierra, sus coordenadas de longitud y latitud cambian, de igual manera lo hace la matriz de transformación “[T]^{GE}”. Este fenómeno ha conducido a la expresión empleada por Zipfel [20] “el sistema de coordenadas geográficas está ligado al vehículo y su origen se mueve con él”, una perspectiva que atribuye sustancia física a los sistemas de coordenadas.

Si se analiza la ecuación (2.88) todo lo que se distingue son ángulos de latitud y de longitud. La matriz de transformación, por lo tanto, no depende de un origen moviéndose con el vehículo y se requieren únicamente estos ángulos. A medida que se mueve sobre la Tierra las direcciones de los ejes coordenados cambian. No obstante, la altitud del vehículo es irrelevante, por lo tanto, no es necesario rastrear el origen coordenado desplazándose junto con el vehículo.

Los ejes “1^G” y “2^G” son tangenciales a la Tierra, a la longitud y latitud del vehículo. Al menos esto es cierto para la presente consideración de la Tierra esférica, la cual es adecuada para fines de modelado.

2.3.2.2.4. Sistema coordenado corporal.

El sistema coordenado corporal principal está alineado con la triada corporal mostrada en la Figura 2.16. El eje “1^B” apunta a través de la nariz del vehículo y yace junto con el eje “3^B”, que apunta hacia abajo, en el plano de simetría. El eje “2^B”, fuera del ala derecha, completa el sistema coordenado.

La transformación de coordenadas corporales con respecto a las coordenadas geográficas “[T]^{BG}” está compuesta de tres transformaciones mediante los llamados ángulos de Euler: guiñada, cabeceo y alabeo, o “ψ”, “θ” y “φ”, respectivamente. Se requieren dos sistemas intermedios “X” y “Y” para completar la cadena.

$$[T]^{BG} = [T(\phi)]^{BY}[T(\theta)]^{YX}[T(\psi)]^{XG} \quad (2.89)$$

Como se observa en la Figura 2.23 la esfera unitaria se encuentra más desordenada, el esquema de cáscaras de naranja muestra solo lo esencial.

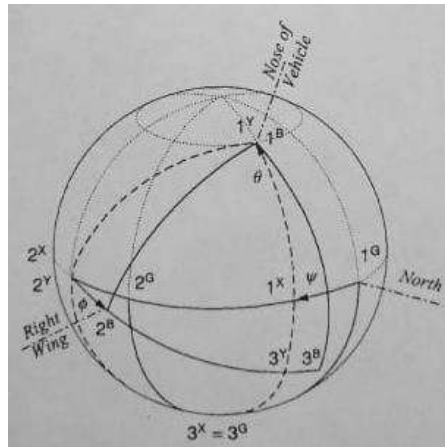


Figura 2.23. Coordenadas corporales con respecto a las geográficas [20].

Se comienza la cadena con el sistema geográfico hacia el primer sistema intermedio “X” a través del ángulo de guiñada “ ψ ”. La transformación ocurre en torno al eje “ 3^G ”. Por lo tanto se tiene el siguiente patrón:

$$[T]^{XG} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

La segunda transformación es en torno al eje “ 2^X ” a través del ángulo de cabeceo “ θ ” hacia el segundo sistema intermedio “Y”:

$$[T]^{YX} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Y la tercera transformación conduce a los ejes corporales a través del ángulo de alabeo en torno al eje “ 1^Y ”.

$$[T]^{BY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \text{sen } \phi \\ 0 & -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

Efectuando el producto matricial se obtiene la matriz de transformación de Euler,

$$[T]^{BG} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

Con frecuencia esta transformación es llamada matriz de cosenos directores.

En una simulación, esta matriz de transformación puede estar dada, y se requiere, entonces, calcular los ángulos de Euler. Mediante inspección de dicha matriz se deduce que, a partir del elemento “ t_{13} ”, el ángulo de cabeceo es:

$$\theta = \arcsen(-t_{13}) \quad (2.94)$$

A partir de los elementos “ t_{11} ” y “ t_{12} ” se obtiene el ángulo de guiñada:

$$\psi = \arctan\left(\frac{t_{12}}{t_{11}}\right) \quad (2.95)$$

A partir de los elementos “ t_{23} ” y “ t_{33} ” se obtiene el ángulo de alabeo:

$$\phi = \arctan\left(\frac{t_{23}}{t_{33}}\right) \quad (2.96)$$

2.3.2.2.5. Sistemas coordenados aéreos.

El efecto de la atmósfera se nota en el aire fluyendo alrededor del vehículo. Esta masa de aire puede estar en reposo o en movimiento con respecto a la Tierra. Se asume, sin embargo, que es monolítica, esto es, que las moléculas de aire se mantienen mutuamente fijas. Esta característica califica al aire para ser modelado como un marco “ A ”.

A medida que el vehículo se mueve a través de la masa de aire, este experimenta un viento relativo sobre su cuerpo, el cual da lugar a las fuerzas aerodinámicas. Se tiene, entonces, el sistema coordenado aéreo “ W ”. Solamente el eje “ 1^W ” es definido inequívocamente: es paralelo y en la dirección del vector de velocidad “ v_B^A ” del centro de masa del vehículo “ B ” con respecto al aire “ A ”; el tipo de vehículo determina los otros dos ejes. Se distingue entre aeronaves y misiles. Una simetría plana de una aeronave da lugar a los ángulos cartesianos de incidencia: ángulo de ataque “ α ” y el ángulo de desplazamiento lateral “ β ”, mientras que los misiles con simetría rotacional son frecuentemente modelados mediante ángulos aerobalísticos polares: ángulo total de ataque “ α' ” y ángulo de alabeo dinámico “ ϕ' ”. Se deben tratar las matrices de transformación aéreas con respecto a las coordenadas corporales para aeronaves y misiles de manera separada.

- **Ángulos de incidencia cartesianos para aeronaves.**

Para aeronaves, la matriz de transformación aérea con respecto a coordenadas polares “[T]^{WB}” consiste en dos transformaciones con el sistema coordenado de estabilidad, provisional, “S”. La secuencia de transformación es del sistema “B” al sistema “S” a través del ángulo “ $-\alpha$ ”, y del sistema “S” al sistema “W” a través del ángulo “ β ”, ver Figura 2.24. El sistema de estabilidad toma un sentido particular dado que ambas matrices se transformación “[$T(\alpha)$]^{BS}” y “[$T(\beta)$]^{WS}” son, desde su perspectiva, logradas mediante ángulos positivos. Por lo tanto, se han de derivar en primer lugar estas transformaciones individuales y después combinarlas para formar la matriz de transformación “[T]^{WB}”.

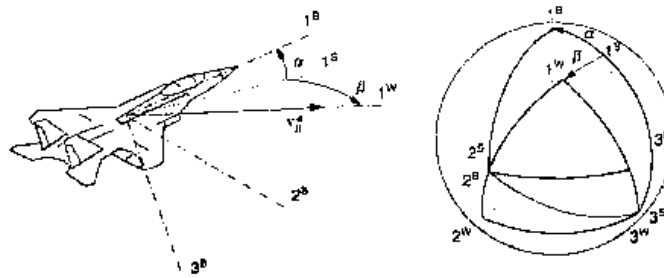


Figura 2.24. Sistema coordenado aéreo con respecto al corporal [20].

El sistema coordenado de estabilidad es definido mediante el eje “1^S” siendo paralelo y en dirección de la proyección del vector de velocidad “ v_B^A ” en el plano de simetría de “1^B” y “3^B”; el eje “2^S” se mantiene con “2^B”. La matriz de transformación “[T]^{WB}” se genera en torno a este eje “2^S” mediante el ángulo de ataque “ α ”.

$$[T]^{BS} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\text{sen } \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

La matriz de transformación “[T]^{WS}” conecta con los ejes aéreos mediante el ángulo de deslizamiento lateral “ β ” transformada en torno al eje “3^S”.

$$[T]^{WS} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \text{sen } \beta & 0 \\ -\text{sen } \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

Se realiza el producto matricial atendiendo a las propiedades de las matrices de transformación:

$$[T]^{WB} = [T]^{WS}[\bar{T}]^{BS} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \text{sen } \beta & \text{sen } \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \text{sen } \beta & \cos \beta & -\text{sen } \alpha \text{sen } \beta \\ -\text{sen } \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

Esta matriz de transformación se distingue por mantener el eje “3^W” en el plano de simetría de la aeronave y alineándolo con el eje “3^S” del sistema coordinado de estabilidad.

- **Ángulos de incidencia aerobalísticos polares para misiles.**

Para misiles con simetría rotacional, el plano de factor de carga es más importante que el plano de simetría corporal. Éste contiene el ángulo de incidencia total “α’” que da lugar a la fuerza aerodinámica. Así como los ejes de estabilidad subtienden el plano de simetría de la aeronave, del mismo modo lo hace el sistema coordinado aerobalístico “R” alineado con el plano de factor de carga (ver Figura 2.25). De manera particular, los ejes “1^R” y “3^R” yacen en el plano de factor de carga, donde “1^R” coincide con “1^B”. Para cambiar de coordenadas aerobalísticas a coordenadas corporales, el ángulo de alabeo dinámico “φ’” determina la transformación desde el sistema aerobalístico al sistema corporal a través del ángulo “φ’” en torno al eje “1^R”.

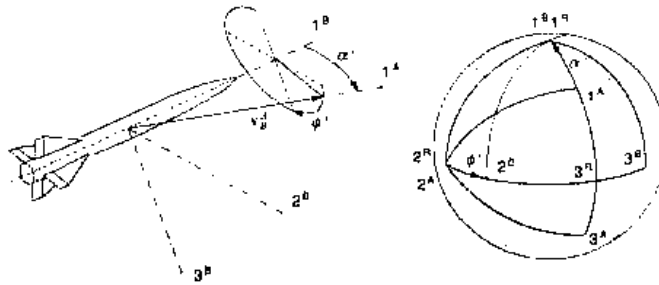


Figura 2.25. Sistema coordinado aerobalístico con respecto al corporal [20].

Dado que las coordenadas aéreas para misiles son diferentes que para aeronaves, se denominan como “coordenadas aéreas aerobalísticas” con la etiqueta “A”. El eje “1^A” es definido como lo es el eje “1^W” para aeronaves, es paralelo y en la dirección del vector de velocidad relativa “v_B^A”; el eje “3^A” yace en el plano de factor de carga, y el eje “2^A” permanece en el plano de “2^B” y “3^B”. La transformación de coordenadas aerobalísticas con respecto a las coordenadas aéreas aerobalísticas “[T]^{RA}” se realiza a través del ángulo total de ataque “α’” en torno al eje “2^A”. De la Figura 2.25 se deduce la matriz de transformación de las coordenadas corporales con respecto a las coordenadas aerobalísticas.

$$[T]^{BR} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi' & \text{sen } \phi' \\ 0 & -\text{sen } \phi' & \cos \phi' \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

La matriz de transformación de las coordenadas aerobalísticas con respecto a las coordenadas aéreas es:

$$[T]^{RA} = \begin{bmatrix} \cos \alpha' & 0 & -\text{sen } \alpha' \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \alpha' & 0 & \cos \alpha' \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

La matriz de transformación de las coordenadas aéreas aerobalísticas con respecto a las coordenadas corporales “[T]^{AB}” se obtiene combinando las dos transformaciones de manera que “[T]^{BA} = [T]^{BR}[T]^{RA}” y tomando la traspuesta “[T]^{AB} = [\bar{T}]^{BA} = [\bar{T}]^{RA}[\bar{T}]^{BR}”:

$$[T]^{AB} = \begin{bmatrix} \cos \alpha' & \text{sen } \alpha' \text{ sen } \phi' & \text{sen } \alpha' \cos \phi' \\ 0 & \cos \phi' & -\text{sen } \alpha' \\ -\text{sen } \alpha' & \cos \alpha' \text{ sen } \phi' & \cos \alpha' \cos \phi' \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

Comparando ambas matrices de transformación “[T]^{WB}” y “[T]^{AB}” se observa que sus ángulos de transformación no son similares –cartesianos contra polares- y los ejes aéreas se definen de manera diferente.

A partir de estas matrices de transformación se pueden derivar definiciones para los ángulos de incidencia en términos de las componentes de velocidad en coordenadas corporales “[\bar{v}_B^A]^B = [$u \ v \ w$]” y los ejes aéreas relativos para aeronaves “[\bar{v}_B^A]^W = [$V \ 0 \ 0$]” donde “ $V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ ”. El ángulo de ataque “ α ” resulta de la aplicación de la matriz de transformación “[T]^{WB}”.

$$\begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \text{sen } \beta & \text{sen } \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \text{ sen } \beta & \cos \beta & -\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \\ -\text{sen } \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

De la última fila se obtiene:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{w}{u}\right) \quad (2.104)$$

Para el ángulo de deslizamiento lateral “ β ” se emplean las dos primeras filas:

$$V = u \cos \alpha \cos \beta + v \text{ sen } \beta + w \text{ sen } \alpha \cos \beta \quad (2.105)$$

$$0 = -u \cos \alpha \text{ sen } \beta + v \cos \beta - w \text{ sen } \alpha \text{ sen } \beta \quad (2.106)$$

Multiplicando la primera ecuación por “sen β ” y la segunda por “cos β ”, y reduciendo ambas se obtiene la definición de “ β ”.

$$\beta = \arcsen\left(\frac{v}{V}\right) \quad (2.107)$$

Se procede de manera similar para los ángulos polares de incidencia para misiles:

$$\alpha' = \arccos\left(\frac{u}{V}\right) \quad (2.108)$$

$$\phi' = \arctan\left(\frac{v}{w}\right) \quad (2.109)$$

Las ecuaciones (2.107) y (2.108) no están definidas para “ $V = 0$ ”, pero “ $v = w = 0$ ” puede ocurrir en vuelo sin perturbaciones, provocando que “ ϕ' ” no esté definido de acuerdo con la ecuación (2.109).

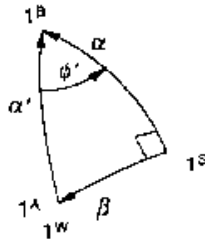


Figura 2.26. Triángulo esférico [20].

La relación entre los ángulos de incidencia Cartesianos y polares puede ser derivada del triángulo esférico que se forma en torno al eje “ 1^B ”, como se muestra en la Figura 2.26. Es un triángulo rectángulo esférico que acopla los cuatro ángulos de incidencia. De tal esquema se obtienen las siguientes relaciones:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \arccos(\cos \alpha \cos \beta) \\ \phi' &= \arctan\left(\frac{\tan \beta}{\sin \alpha}\right) \\ \alpha &= \arctan(\cos \phi' \tan \alpha') \\ \beta &= \arcsen(\sin \phi' \sin \alpha') \end{aligned} \right\} \quad (2.110)$$

2.3.2.2.6. Sistema coordenado de ruta de vuelo.

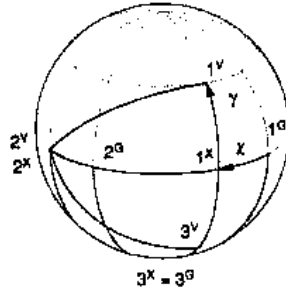


Figura 2.27. Coordenadas de ruta de vuelo con respecto a las geográficas [20].

El sistema coordenado de ruta de vuelo “V” relaciona el vector de velocidad del vehículo con respecto a la Tierra “ v_B^E ” con el sistema geográfico. (Si el aire se encuentra en reposo “ $A = E$ ” y los dos vectores de velocidad son iguales). El eje “ 1^V ” es paralelo y en dirección de “ v_B^E ” y el eje “ 2^V ” permanece en el plano horizontal subtendido por “ 1^G ” y “ 2^G ” (ver Figura 2.27). Dos ángulos relacionan las coordenadas de velocidad con el sistema geográfico. El ángulo de rumbo “ χ ” es medido desde el norte hacia la proyección de “ v_B^E ” en el plano tangente local y el ángulo de ruta de vuelo “ γ ” se mueve de manera vertical hacia “ v_B^E ”. La matriz de transformación consiste en dos transformaciones individuales

$$[T]^{VG} = [T(\gamma)]^{VX} [T(\chi)]^{XG} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\text{sen } \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \chi & \text{sen } \chi & 0 \\ -\text{sen } \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

Efectuando el producto matricial, se tiene:

$$[T]^{VG} = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \chi & \cos \gamma \text{sen } \chi & -\text{sen } \gamma \\ -\text{sen } \chi & \cos \chi & 0 \\ \text{sen } \gamma \cos \chi & \text{sen } \gamma \text{sen } \chi & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (2.112)$$

A partir de esta matriz de transformación se derivan definiciones para “ γ ” y “ χ ”. Siendo las componentes de la velocidad, en coordenadas geográficas “[\bar{v}_B^E]^G = [$u_G \ v_G \ w_G$]” y en coordenadas de velocidad “[\bar{v}_B^E]^V = [$V \ 0 \ 0$]”, esta matriz de transformación provee la siguiente relación: “[v_B^E]^V = [T]^{VG} [v_B^E]^G”.

$$\begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \chi & \cos \gamma \text{sen } \chi & -\text{sen } \gamma \\ -\text{sen } \chi & \cos \chi & 0 \\ \text{sen } \gamma \cos \chi & \text{sen } \gamma \text{sen } \chi & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_G \\ v_G \\ w_G \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

De la segunda fila se obtiene:

$$\chi = \arctan\left(\frac{v_G}{u_G}\right) \quad (2.114)$$

Del mismo modo para “ γ ”:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{-w_G}{\sqrt{u_G^2 + v_G^2}}\right) \quad (2.115)$$

2.3.2.2.7. Sistema coordenado de nivel local.

Este es un caso especial de coordenadas geográficas, adecuado para la mayoría de simulaciones de aeronaves y misiles. Si el vehículo vuela en la atmósfera con una velocidad menor a Mach 5 (debajo de la velocidad hipersónica), la Tierra puede asumirse como un marco de referencia inercial. Además, si la localización particular en el globo es irrelevante para la simulación, cualquier plano tangencial local puede servir como sistema coordenado geográfico, independiente de designaciones de longitud y latitud.

Este sistema coordenado especial es llamado “sistema coordenado de nivel local”. Este se mantiene fijo, a nivel de orientación, usualmente en el mismo sitio que el punto de lanzamiento, a pesar que el vehículo se desplace transversalmente al terreno; se visualiza el reticulado de longitud y latitud en este plano de nivel local. La trayectoria del vehículo es calculada relativa a este plano, y la altitud y la distancia al piso son descritas con precisión. Si se desea plasmar la trayectoria en el globo, se indican el rastreo respecto al terreno y la altitud sobre la curvatura de la Tierra y se asignan coordenadas de longitud y latitud.

El sistema coordenado de nivel local “ L ” plasma sus ejes “ 1^L ” y “ 2^L ”, en el plano horizontal y apunta el eje “ 3^L ” hacia abajo. La dirección de “ 1^L ” es arbitraria, pero, por convención, se dice que apunta hacia el norte y el eje “ 2^L ” apunta hacia el este. Por esta razón, este sistema es en ocasiones llamado “sistema coordenado norte-este-abajo” (NED, por sus siglas en inglés).

Para simulaciones sujetas a estas consideraciones, se puede reemplazar el sistema coordenado geográfico por el sistema coordenado de nivel local. La matriz de transformación corporal con respecto al sistema geográfico “[T]^{BG}” se convierte en “[T]^{BL}” con los mismos ángulos de Euler “ ψ ”, “ θ ” y “ ϕ ”.

$$[T]^{BL} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.116)$$

La matriz de transformación de velocidad con respecto al sistema geográfico “[T]^{VG}” es reemplazada por “[T]^{VL}” con los ángulo de ruta “γ” y “χ”

$$[T]^{VL} = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \chi & \cos \gamma \sin \chi & -\sin \gamma \\ -\sin \chi & \cos \chi & 0 \\ \sin \gamma \cos \chi & \sin \gamma \sin \chi & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (2.117)$$

Debe distinguirse cuidadosamente que el sistema “L” está asociado con el marco “E”, pero no es el sistema “G”.

En la Tabla 2.2 se resumen los sistemas coordenados y los ángulos de transformación tratados anteriormente.

Tabla 2.2. Resumen de sistemas coordenados y sus ángulos de transformación.

| Sistema | Direcciones | | | | Ángulos | | |
|----------------------|-------------|----------------|---|----------------|------------------------------|---------------------------------|----|
| Heliocéntrico | H | 1 ^H | Aries | 3 ^H | normal a la eclíptica | Oblicuidad de la eclíptica | ε |
| Inercial | I | 1 ^I | equinoccio de primavera | 3 ^I | eje de rotación de la Tierra | | |
| Terrestre | E | 1 ^E | Greenwich | 3 ^E | eje de rotación de la Tierra | Ángulo horario | Ξ |
| Geográfico | G | 1 ^G | Norte | 3 ^G | centro de la Tierra | Longitud | l |
| | | | | | | Latitud | λ |
| Corporal | B | 1 ^B | Nariz | 3 ^B | abajo | Guiñada | ψ |
| | | | | | | Cabeceo | θ |
| | | | | | | Alabeo | φ |
| | | | | | | Ángulo de ataque | α |
| Aéreo para aeronaves | W | 1 ^W | vector de velocidad v _B ^A | 3 ^W | plano de simetría | Ángulo de deslizamiento lateral | β |
| | | | | | | Ángulo de ataque | α' |
| Aéreo para misiles | A | 1 ^A | vector de velocidad v _B ^A | 3 ^A | plano de factor de carga | Ángulo de alabeo dinámico | φ' |
| | | | | | | Ángulo total de ataque | α' |
| De ruta de vuelo | V | 1 ^V | vector de velocidad v _B ^E | 2 ^V | plano horizontal | Ángulo de rumbo | χ |
| | | | | | | Ángulo de ruta de vuelo | γ |

2.4. Cinemática de Traslación y Rotación.

La “cinemática” es la rama de la mecánica que trata con el movimiento de cuerpos sin referencia de fuerza o masa. Si se observa un transbordador espacial despegar desde el Cabo y se rastrea su ganancia de altitud respecto al tiempo, el estudio es, entonces, la cinemática del lanzamiento.

Destaca el concepto del tensor de rotación, el cual define la orientación mutua de dos marcos, es el equivalente físico de la transformación coordenada. La formulación independiente de coordenadas de la cinemática y el uso de la derivada rotacional respecto al tiempo permiten la formulación de las leyes de Newton y Euler en forma invariante, válidas en cualquier sistema coordinado admisible; los conceptos cinemáticos son válidos en estos sistemas y, por tanto, son conceptos tensoriales verdaderos.

2.4.1. Tensor de Rotación.

Con el vector de desplazamiento “ s_{BA} ” se modela el desplazamiento del punto “ B ” con respecto al punto “ A ”. Para marcos debe de cerciorarse que el tensor de rotación “ R^{BA} ” hace referencia de la orientación del marco “ B ” con respecto al marco “ A ”.

Las propiedades del tensor de rotación, de acuerdo con lo mostrado por Zipfel [20], establecen la conexión con las transformaciones coordenadas. Las rotaciones especiales brindan una mayor percepción de la estructura del tensor de rotación y, de manera particular, el tensor de rotación reducido prueba su utilidad en perturbaciones. Finalmente, un tensor de rotación especial, el tensor tetragonal, modela la simetría tetragonal de misiles.

2.4.1.1. Propiedades del tensor de rotación.



Figura 2.28. Marcos “ A ” y “ B ” con sus respectivas triadas [20].

La orientación del marco “ A ” es modelada por su triada de vectores base ortonormales “ a_1 ”, “ a_2 ” y “ a_3 ”. La Figura 2.28 muestra los dos marcos “ A ” y “ B ” y sus respectivas triadas base. La orientación del marco “ B ” con respecto al marco “ A ” se establece mediante el tensor de rotación “ R^{BA} ”, el cual mapea los vectores base “ a_i ” en los vectores base “ b_i ”:

$$b_i = R^{BA} a_i \tag{2.118}$$

Donde: “ $i = 1,2,3$ ”.

Propiedad 1. El tensor de rotación “ R^{BA} ” del marco “ B ” con respecto al marco “ A ”, para cualesquiera dos sistemas coordinados admisibles “ A ” y “ B ”, con su matriz de transformación “ $[T]^{BA}$ ”, se transforma como un tensor de segundo orden.

$$[R^{BA}]^B = [T]^{BA} [R^{BA}]^A [\bar{T}]^{BA} \tag{2.119}$$

Propiedad 2. Rotaciones secuenciales son obtenidas mediante la multiplicación individual de tensores de rotación. Para tres marcos “A”, “B” y “C”, y los tensores de rotación “ R^{BA} ” y “ R^{CB} ”, el tensor de rotación “ R^{CA} ” del marco “C” con respecto al marco “A” es obtenido mediante:

$$R^{CA} = R^{CB}R^{BA} \quad (2.120)$$

Propiedad 3. Los tensores de rotación, coordinados en sistemas coordenados principales, están relacionados con sus matrices de transformación. Para cualesquiera dos triadas “ a_i ” y “ b_i ”, con su tensor de rotación “ R^{BA} ”, y los sistemas coordenados principales “A” y “B”, con su matriz de transformación “ $[T]^{BA}$ ”, se mantienen las siguientes relaciones:

$$[R^{BA}]^A = [R^{BA}]^B = [\bar{T}]^{AB} \quad (2.121)$$

El tensor de rotación tiene las mismas coordenadas en ambos sistemas coordenados principales. Además, la secuencia de rotación es la inversa de la secuencia de transformación. Esta inversión se aclara cuando se cambia el signo de transposición de la matriz de transformación por el inverso del orden de transformación: “ $[R^{BA}]^A = [R^{BA}]^B = [\bar{T}]^{BA}$ ”.

Propiedad 4. El tensor de rotación es ortogonal. El caso con el determinante “-1” hace referencia al tensor de reflexión

Propiedad 5. La transposición del tensor de rotación invierte la dirección de rotación: “ $\bar{R}^{BA} = R^{AB}$ ”.

El tensor de rotación representa un modelo absoluto de la orientación mutua de dos marcos. La nomenclatura “ R^{BA} ” expresa tal relación del marco “B” con respecto al marco “A”. Puede leerse como la orientación del marco “B” obtenida a partir del marco “A”, o solamente como la rotación de “B” con respecto a “A”. No se requiere punto de referencia: las rotaciones son independientes de puntos ya que solo involucran marcos.

2.4.1.2. Rotaciones especiales.

2.4.1.2.1. Rotaciones planas.

En la Figura 2.29 se muestran dos vectores unitarios “ b' ” y “ c' ” plasmados en el plano subtendido por los ejes “ 1^A ” y “ 2^A ” del sistema coordenado “A”. El vector unitario “ c' ” es obtenido al rotar el vector unitario “ b' ” a través de un ángulo “ ψ ”. Se determinan los elementos del tensor de rotación en el sistema coordenado “A”. A partir de la ecuación (2.65) se infiere, considerando los dos vectores como vectores base, que:

$$[c']^A = [R]^A [b']^A \quad (2.122)$$

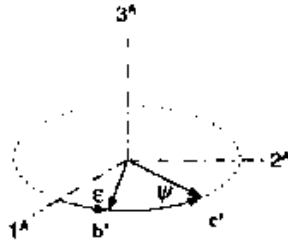


Figura 2.29. Rotación plana [20].

Para determinar “[R]^A”, primeramente se calculan los componentes de los dos vectores a partir de relaciones trigonométricas:

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{bmatrix}^A = \begin{bmatrix} \cos(\varepsilon + \psi) \\ \sin(\varepsilon + \psi) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \cos \psi - \sin \varepsilon \sin \psi \\ \sin \varepsilon \cos \psi + \cos \varepsilon \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

De igual manera:

$$\begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{bmatrix}^A = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ \sin \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

Sustituyendo ambas relaciones en la ecuación (2.67), se tiene:

$$\begin{bmatrix} \cos \varepsilon \cos \psi - \sin \varepsilon \sin \psi \\ \sin \varepsilon \cos \psi + \cos \varepsilon \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ \sin \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.125)$$

Mediante inspección se infieren las primeras dos columnas de elementos “r_{ij}”:

$$[R]^A = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & ? \\ \sin \psi & \cos \psi & ? \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

Para determinar la tercera columna, es necesario introducir la tercera dimensión.

2.4.1.2.2. Rotación no plana.

Se expande la Figura 2.29 a la tercera dimensión y se reinterpretan “b'” y “c'” como proyecciones de dos vectores “b” y “c” de igual altura (ver Figura 2.30.). Para determinar los elementos del tensor de rotación en el sistema coordenado “A”, en primer lugar se reorganiza de tal manera que los ejes coordenados “1^A” y “2^A” de los dos vectores “[c]^A” y “[b]^A” sean los mismos que aquellos del ejemplo mostrado para la rotación plana. En segundo lugar, para determinar la columna restante se aplica el hecho de que la tercer componente de “[c]^A” y “[b]^A” permanecen sin cambios. Entonces, se suplementa la ecuación (2.126) y se tiene el tensor de rotación tridimensional.

$$[R]^A = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\text{sen } \psi & 0 \\ \text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.127}$$

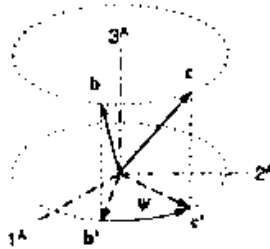


Figura 2.30. Rotación no plana [20].

Es evidente la similitud con la matriz de transformación de coordenadas, sin embargo, el signo negativo de la función seno está ubicado dos filas sobre el elemento “1” y no justo sobre de él, como es en el caso de las transformaciones coordenadas. Esta derivación es únicamente válida si la rotación es en torno a la tercera dirección.

2.4.1.2.3. Rotación general.

De acuerdo con el teorema acreditado a Euler [39] la rotación general de dos marcos puede expresarse mediante un ángulo en torno a un vector unitario de rotación. Se requieren los elementos del tensor de rotación en cualquier sistema coordenado admisible “B” expresados en términos del ángulo de rotación “ψ” y el vector unitario del eje de rotación “[n]^B”.

Siendo “[R]^A” el tensor de rotación especial de la ecuación (2.127) y el eje de rotación especial “[n]^A = [a₃]^A = [0 0 1]”, y transformando a cualquier sistema coordenado admisible, “B” por ejemplo, con la matriz de transformación “[T]^{BA}” se tiene que:

$$[R]^B = [T]^{BA}[R]^A[\bar{T}]^{BA} \tag{2.128}$$

$$[n]^B = [T]^{BA}[n]^A \quad (2.129)$$

Para expresar “[R]^B” de tal manera que sea función de “[n]^B” y “ ψ ” únicamente, se reescribe “[R]^A” de la ecuación (2.127) de la siguiente manera:

$$[R]^A = \cos \psi [E]^A + (1 - \cos \psi) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin \psi \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \overline{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \right) \quad (2.130)$$

Transformando a “[R]^B”:

$$[R]^B = \cos \psi [E]^B + (1 - \cos \psi) [T]^{BA} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\bar{T}]^{BA} + \sin \psi \left([T]^{BA} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\bar{T}]^{BA} - [T]^{BA} \overline{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} [\bar{T}]^{BA} \right) \quad (2.131)$$

Sustituyendo la ecuación (2.71), se involucran las coordenadas de los vectores base:

$$[R]^B = \cos \psi [E]^B + (1 - \cos \psi) [a_3]^B [\bar{a}_3]^B + \sin \psi ([a_2]^B [\bar{a}_1]^B - [a_1]^B [\bar{a}_2]^B) \quad (2.132)$$

Para expresar el último término encerrado entre paréntesis en la ecuación (2.132) se emplea la propiedad de triada “[a_3]^B = [A_1]^B [a_2]^B” siendo “[A_1]^B” la forma antisimétrica de “[a_1]^B”.

$$\begin{aligned} & ([a_2]^B [\bar{a}_1]^B - [a_1]^B [\bar{a}_2]^B) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -a_{11}^B a_{22}^B + a_{12}^B a_{21}^B & a_{12}^B a_{31}^B - a_{11}^B a_{32}^B \\ a_{11}^B a_{22}^B - a_{12}^B a_{21}^B & 0 & -a_{21}^B a_{32}^B + a_{22}^B a_{31}^B \\ -a_{12}^B a_{31}^B + a_{11}^B a_{32}^B & a_{21}^B a_{32}^B - a_{22}^B a_{31}^B & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -a_{33}^B & a_{23}^B \\ a_{33}^B & 0 & -a_{13}^B \\ -a_{23}^B & a_{13}^B & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.133)$$

La última matriz tiene la forma antisimétrica de “[a_3]^B”, el cual es igualmente el vector unitario de rotación “[A_3]^B = [N]^B”. Reemplazando “[a_3]^B” y “[A_3]^B”, por “[n]^B” y “[N]^B” en la ecuación (2.132), se tiene:

$$[R]^B = \cos \psi [E]^B + (1 - \cos \psi) [n]^B [\bar{n}]^B + \sin \psi [N]^B \quad (2.134)$$

Dado que “ B ” es cualquier sistema coordinado, esta ecuación se mantiene para todos los sistemas coordinados admisibles, y, por lo tanto, es la forma tensorial general de las rotaciones

$$R = \cos \psi E + (1 - \cos \psi)n\bar{n} + \text{sen } \psi N \quad (2.135)$$

De esta manera se confirma el teorema de Euler en el que el tensor de rotación es completamente definido por su ángulo de rotación “ ψ ” y el vector unitario de rotación “ n ”.

2.4.1.2.4. Tensor tetragonal.

Misiles con cuatro aletas poseen simetría tetragonal, esto es, su configuración externa se duplica después de cada rotación de 90° en torno a su eje de simetría. El tensor de rotación que modela estas réplicas es llamado “tensor tetragonal R_{90} ”. Se deriva directamente de la ecuación (2.135) al definir “ $\psi = 90^\circ$ ”:

$$R_{90} = n\bar{n} + N \quad (2.136)$$

El tensor tetragonal está compuesto del tensor de proyección “ $P = n\bar{n}$ ” y el tensor antisimétrico del vector unitario de rotación “ N ”.

2.4.1.3. Eje y ángulo de rotación.

Un tensor de rotación es ortogonal cuando el valor del determinante es “+1”. Por otro lado, todo tensor ortogonal de “ 3×3 ” con determinante “+1” representa una rotación rígida de mano derecha. Dado tal tensor de rotación se pueden calcular su eje y ángulo de rotación.

- Determinación del eje de rotación.

Sea “ n ” el eje del tensor de rotación “ R ”. Dado que rotar dicho vector en torno a sí mismo no cambia su dirección o longitud, se tiene que “ $n = Rn$ ”. La invariancia de “ n ” se mantiene incluso si el sentido de rotación es invertido: “ $n = \bar{R}n$ ”. Sustrayendo ambas ecuaciones se tiene “ $(R - \bar{R})n = 0$ ”. Entonces, para cualquier sistema coordinado admisible, por ejemplo “ A ”, se tiene que:

$$([R]^A - [\bar{R}]^A)[n]^A = [0]^A \quad (2.137)$$

Sustituyendo los elementos del tensor de rotación

$$[R]^A = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.138)$$

Se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & -(r_{21} - r_{12}) & (r_{13} - r_{31}) \\ (r_{21} - r_{12}) & 0 & -(r_{32} - r_{23}) \\ -(r_{13} - r_{31}) & (r_{32} - r_{23}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.139)$$

El primer miembro de la ecuación es un producto vectorial. Por lo tanto, para el caso no trivial el vector equivalente a “ $([R]^A - [\bar{R}]^A)$ ” es paralelo a “ $[n]^A$ ” con el factor de escala “ k ”:

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \quad (2.140)$$

Se elige “ k ” de tal modo que “ n ” sea un vector unitario apuntando en la dirección dada por la regla de la mano derecha. Como factor de escala, “ k ” es el mismo para todos los sistemas coordenados admisibles. Para calcularlo, se elige el sistema coordenado más conveniente, sea “ B ”, tal que:

$$[R]^B = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\text{sen } \psi & 0 \\ \text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; [n]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.141)$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación (2.140);

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \text{sen } \psi \end{bmatrix} \Rightarrow k = \frac{1}{2 \text{sen } \psi} \quad (2.142)$$

Si “ ψ ” fuese conocido, “ k ” podría determinarse y la ecuación (2.140) proporcionaría el vector unitario de rotación.

- **Determinación del ángulo de rotación.**

Determinar el ángulo de rotación es simplificado por el hecho de que la traza de un tensor se preserva bajo la transformación. Se toma la traza de la ecuación (2.141) y se iguala a los elementos diagonales del tensor de rotación general de la ecuación (2.138).

$$1 + 2 \text{sen } \psi = r_{11} + r_{22} + r_{33} \quad (2.143)$$

Resolviendo para “ ψ ” se obtiene:

$$\psi = \arccos \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 r_{ii} - \frac{1}{2} \right) \quad (2.144)$$

Para un tensor de rotación “[R]^A” coordinado en cualquier sistema coordinado admisible “A”, el ángulo y eje de rotación están dados por las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \arccos \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 r_{ii} - \frac{1}{2} \right) \\ [n]^A &= \frac{1}{2 \sin \psi} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.145)$$

Si “[R]^A = [E]” entonces “ $\psi = 0$ ”, y “[n]^A” es indefinido.

2.4.1.4. Rotaciones pequeñas.

La orientación entre dos marcos, a pesar de ser determinada por un vector unitario y un ángulo, requiere un tensor de rotación de segundo orden para su representación. Si se combinan varias rotaciones, la secuencia no es arbitraria dado que las multiplicaciones de tensores de segundo orden no son conmutativas. Ambos atributos son simplificados, sin embargo, si se trata con las llamadas “rotaciones pequeñas”, las cuales se reducen a vectores y pueden ser combinadas en cualquier orden. Las cantidades pequeñas son más fáciles de modelar dado que sus matemáticas son más simples.

El rotar el vector “ b ” desde su posición inicial “ $b(t_0)$ ” a través del tensor de rotación “ R ” a su posición actual se expresa como:

$$b(t) = Rb(t_0) \quad (2.146)$$

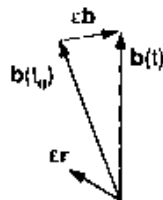


Figura 2.31. Rotación pequeña [20].

La diferencia “ εb ” entre dos vectores es, como se muestra en la Figura 2.31, “ $\varepsilon b = b(t) - b(t_0)$ ” y, sustituyendo en la ecuación (2.146):

$$\varepsilon b = (R - E)b(t_0) \quad (2.147)$$

Introduciendo la definición del tensor de perturbación de rotación “ $\varepsilon R = R - E$ ”, ecuación (2.148), en la ecuación (2.147) se tiene:

$$\varepsilon b = \varepsilon R b(t_0) \quad (2.149)$$

El vector de desplazamiento “ εb ” es el resultado de la multiplicación de un tensor “ εR ” con el vector inicial. Dado que “ R ” es ortogonal, “ $R\bar{R} = E$ ”, entonces, partiendo de la ecuación (2.148):

$$E = (\varepsilon\bar{R} + \bar{E})(\varepsilon R + E) = E + \varepsilon R + \varepsilon\bar{R} + \varepsilon + \varepsilon\bar{R}\varepsilon R \quad (2.150)$$

Ahora, se asume que “ ε ” indica una cantidad pequeña. Entonces, el último término es pequeño en comparación con el de segundo orden y con respecto a otros términos que pueden ser despreciados. De esta manera “ $\varepsilon R = -\varepsilon\bar{R}$ ”, esto es, el tensor de perturbación es antisimétrico, y, de este modo, puede ser representado por un vector. Para cualquier sistema coordinado admisible “ A ”, el tensor de perturbación tiene los siguientes componentes:

$$[\varepsilon R]^A = \begin{bmatrix} \varepsilon r_{11} & \varepsilon r_{12} & \varepsilon r_{13} \\ \varepsilon r_{21} & \varepsilon r_{22} & \varepsilon r_{23} \\ \varepsilon r_{31} & \varepsilon r_{32} & \varepsilon r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.151)$$

Sin embargo, si es antisimétrico, éste tiene solamente tres componentes independientes:

$$[\varepsilon R]^A = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon r_{12} & \varepsilon r_{13} \\ -\varepsilon r_{12} & 0 & \varepsilon r_{23} \\ -\varepsilon r_{13} & -\varepsilon r_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.152)$$

Del cual se obtiene, por contracción, el vector de rotaciones pequeñas:

$$[\varepsilon r]^A = \begin{bmatrix} \varepsilon r_1 \\ \varepsilon r_2 \\ \varepsilon r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varepsilon r_{23} \\ \varepsilon r_{13} \\ -\varepsilon r_{12} \end{bmatrix} \quad (2.153)$$

El tensor “ R ” para rotaciones pequeñas consiste, de acuerdo con la ecuación (2.148), en el tensor unitario y el tensor de perturbación mostrado en la ecuación (2.152). Expresado para cualquier sistema coordenado admisible “ A ”, se convierte en:

$$[R]^A = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon r_{12} & \varepsilon r_{13} \\ -\varepsilon r_{12} & 1 & \varepsilon r_{23} \\ -\varepsilon r_{13} & -\varepsilon r_{23} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.154)$$

El tensor de rotación para rotaciones pequeñas entre dos marcos, por ejemplo “ B ” con respecto a “ A ”, “ R^{BA} ”, consiste en el tensor identidad “ E ”, y el tensor de perturbación de rotación “ εR^{BA} ”

$$R^{BA} = E + \varepsilon R^{BA} \quad (2.155)$$

Donde “ εR^{BA} ” puede ser reducido al vector de rotaciones pequeñas “ εr ”.

Así como el vector de desplazamiento modela la localización del punto “ B ” con respecto al punto “ A ”, del mismo modo el tensor de rotación establece la orientación del marco “ B ” con respecto al marco “ A ”. El conjunto de ambos definen la posición del marco “ B ” con respecto al marco “ A ”.

2.4.2. Cinemática de Tiempo Cambiante.

Los movimientos son modelados por la inclusión de la dependencia del tiempo en el vector de desplazamiento y el tensor de rotación. Por lo tanto, si “ s_{BA} ” es el vector de desplazamiento del punto “ B ” con respecto al punto “ A ”, “ $s_{BA}(t)$ ” describe el movimiento del punto “ B ” con respecto al punto de referencia “ A ”. Así mismo, “ $R^{BA}(t)$ ” modela el cambio de orientación del marco “ B ” con respecto al marco de referencia “ A ”.

Otros conceptos cinemáticos están formados por la razón de cambio en el tiempo del desplazamiento y rotación: la velocidad lineal es la primera derivada y la aceleración la segunda derivada del desplazamiento respecto al tiempo; la velocidad angular es obtenida mediante la derivada temporal de la rotación. Sin embargo, estas entidades requieren escrutinio minucioso si se requiere que sean tensores. Mientras las transformaciones coordenadas son invariantes en el tiempo, la derivada respecto al tiempo no cambia la característica tensorial de su operando. No obstante, se requiere que tales derivadas de tiempo de tensores sean tensores en sí mismos, incluso bajo transformaciones coordenadas dependientes del tiempo.

Tomando cualquier libro de texto sobre mecánica, se encontrará el siguiente tratamiento de la derivada temporal del vector “ s ” transformada del sistema coordenado “ A ” al “ B ”:

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_A = \left. \frac{ds}{dt} \right|_B + \omega \times s \quad (2.156)$$

Donde “ ω ” es la velocidad angular entre “ B ” y “ A ”. Desafortunadamente, el segundo miembro de la ecuación tiene un término adicional y, de este modo, la derivada temporal pierde la propiedad tensorial de la derivada del tensor “ s ”.

Es posible pasar de la ecuación anterior a la nomenclatura matricial. Teniendo dos cualesquiera sistemas coordenados admisibles “ A ” y “ B ”, el vector “ s ” se transforma como un tensor de primer orden, “[s] ^{A} = [T] ^{AB} [s] ^{B} ”. Tomando la derivada temporal y aplicando la regla de la cadena, se tiene:

$$\left[\frac{ds}{dt} \right]^A = [T]^{AB} \left[\frac{ds}{dt} \right]^B + \left[\frac{dT}{dt} \right]^{AB} [s]^B = [T]^{AB} \left(\left[\frac{ds}{dt} \right]^B + [\bar{T}]^{AB} \left[\frac{dT}{dt} \right]^{AB} [s]^B \right) \quad (2.157)$$

Intercambiando la secuencia de transformación en el último término por transposición, se tiene:

$$\left[\frac{ds}{dt} \right]^A = [T]^{AB} \left(\left[\frac{ds}{dt} \right]^B + [T]^{BA} \left[\frac{dT}{dt} \right]^{BA} [s]^B \right) \quad (2.158)$$

En comparación con la ecuación (2.156), ambos lados de la ecuación están relacionados por la matriz de transformación “[T] ^{AB} ” y el vector “ ω ” corresponde al término “[T] ^{BA} [$\frac{dT}{dt}$] ^{BA} ”.

A partir de la ecuación (2.158) es claro que la derivada respecto al tiempo de “ s ” no se transforma como un tensor de primer orden. Sí, no obstante, se pudiera definir un operador de tiempo que pueda brindar a ambos miembros la misma forma, la propiedad tensorial podría mantenerse. Este operador existe y es llamado “derivada rotacional de tiempo” o “derivada rotacional temporal”.

Wrede [40] define una derivada rotacional temporal, cuya operación en tensores preserva su propiedad tensorial. Está sentado que es un concepto tensorial difícil de entender, sin embargo, aplicado a sistemas coordenados cartesianos de mano derecha, es un concepto más digerible. El trabajo de Wrede es precedido por la investigación de Wundheiler [41].

2.4.2.1. Derivada rotacional temporal.

- **Derivada rotacional temporal de tensores de primer orden.**

Definición. La derivada rotacional temporal de un tensor de primer orden “ x ” con respecto a cualquier marco “ A ”, “ $D^A x$ ”, y expresada en cualquier sistema coordenado admisible “ B ”, es definida como:

$$[D^A x]^B \equiv \left[\frac{dx}{dt} \right]^B + [T]^{BA} \left[\frac{dT}{dt} \right]^{BA} [x]^B \quad (2.159)$$

En “[$D^A x$]^B” aparecen el marco “ A ” y el sistema coordenado “ B ”. Ambos son arbitrarios, pero el sistema coordenado “ A ” de “[T]^{BA}” en el segundo miembro tiene que estar asociado con el marco “ A ”.

Aplicando la derivada rotacional en el primer miembro de la ecuación (2.158), siendo ahora el sistema coordenado “ A ”.

$$[D^A s]^A = \left[\frac{ds}{dt} \right]^A + [T]^{AA} \left[\frac{dT}{dt} \right]^{AA} [s]^A = \left[\frac{ds}{dt} \right]^A \quad (2.160)$$

La cual es, con la derivada de tiempo de la matriz unitaria igual a cero, exactamente en la forma deseada. Por lo tanto, la ecuación (2.158) puede reescribirse como:

$$[D^A s]^A = [T]^{AB} [D^A s]^B \quad (2.161)$$

Lo anterior se asemeja a una transformación de tensores. A pesar de que el sistema coordenado “ B ” es arbitrario, el sistema “ A ” es único por su asociación con el marco “ A ”. Para una verdadera forma tensorial cualquier sistema coordenado admisible debe ser permitido. Por lo tanto, considerando un sistema coordenado admisible arbitrario “ D ” para reemplazar al sistema “ A ” en el lado izquierdo de la ecuación (2.158), se tiene:

$$\left[\frac{ds}{dt} \right]^D + [T]^{DA} \left[\frac{dT}{dt} \right]^{DA} [s]^A = [T]^{DB} \left(\left[\frac{ds}{dt} \right]^B + [T]^{BA} \left[\frac{dT}{dt} \right]^{BA} [s]^B \right) \quad (2.162)$$

Por definición de la derivada rotacional, se obtiene una verdadera transformación tensorial:

$$[D^A s]^D = [T]^{DB} [D^A s]^B \quad (2.163)$$

Por lo tanto, la derivada rotacional de un vector se transforma como un tensor y “ $D^A s$ ” es un tensor.

- **Derivada rotacional temporal de tensores de segundo orden.**

Definición. La derivada rotacional temporal de un tensor de segundo orden “X” con respecto a cualquier marco “A”, “ $D^A X$ ” y expresado en cualquier sistema coordenado admisible “B”, es definida como:

$$[D^A X]^B = \left[\frac{dX}{dt} \right]^B + [T]^{BA} \left[\frac{dT}{dt} \right]^{BA} [X]^B + [X]^B \left[\frac{dT}{dt} \right]^{BA} [\bar{T}]^{BA} \quad (2.164)$$

La derivada rotacional de tensores se transforma como un tensor de segundo orden. Para cualesquiera dos sistemas coordenados admisibles “B” y “D”, se tiene:

$$[D^A X]^D = [T]^{DB} [D^A X]^B [\bar{T}]^{DB} \quad (2.165)$$

Por lo tanto, si “X” es un tensor de segundo orden, igualmente lo es “ $D^A X$ ”.

La derivada rotacional temporal presenta las siguientes propiedades:

Propiedad 1. La derivada rotacional con respecto a cualquier marco “A” es un operador lineal.

- 1) Para cualquier constante escalar “k” y vector “x”:

$$D^A(kx) = kD^A x \quad (2.166)$$

- 2) Para cualesquiera dos vectores “x” y “y”:

$$D^A(x + y) = D^A x + D^A y \quad (2.167)$$

Propiedad 2. La derivada rotacional temporal obedece a la regla de la cadena. Para cualquier tensor “Y” y vector “x”:

$$D^A(Yx) = (D^A Y)x + YD^A x \quad (2.168)$$

Se debe mantener el orden de las multiplicaciones de tensores; la derivada opera solamente sobre la variable adyacente.

La derivada rotacional fortalece el proceso de modelado de vehículos aeroespaciales. Esta permite la formulación de las leyes de Euler y Newton como invariantes bajo

transformaciones coordenadas dependientes del tiempo. Con el instrumento de un operador temporal invariante en la mano, se pueden crear velocidades lineales y angulares y sus aceleraciones.

2.4.2.2. Velocidad y aceleración lineal.

Dados el marco “A” y el vector de desplazamiento “ s_{BA} ”, donde “B” es cualquier punto y “A” es un punto del marco “A” (ver Figura 2.32). La velocidad lineal del punto “B” con respecto al marco “A” es obtenida a partir de la derivada rotacional temporal con respecto al marco “A”, aplicada al vector de desplazamiento “ s_{BA} ”:

$$v_B^A = D^A s_{BA} \tag{2.169}$$

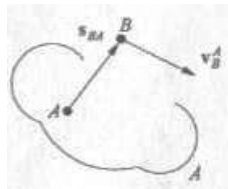


Figura 2.32. Velocidad lineal [20].

La notación del vector de velocidad lineal no hace referencia a la identidad del punto “A”, pero sí refiere al marco “A”.

La aceleración lineal “ a_B^A ” de un punto “B” con respecto al marco de referencia “A” es definido como la segunda derivada rotacional del vector de desplazamiento “ s_{BA} ”, o la primera derivada del vector de velocidad:

$$a_B^A = D^A D^A s_{BA} = D^A v_B^A \tag{2.170}$$

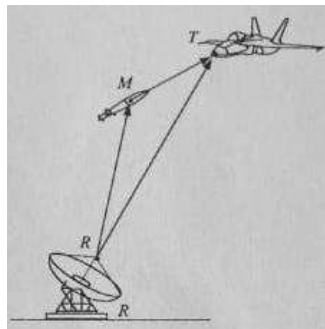


Figura 2.33. Velocidad diferencial [20].

Si el punto de referencia “A” es parte del marco de referencia “A”, cualquier punto de este marco puede ser usado, y así, la nomenclatura “ a_B^A ” no identifica de manera explícita al punto

de referencia “A”. Este tipo de aceleración, relativa al marco de referencia “A”, es también llamada “aceleración relativa”.

Haciendo referencia a la Figura 2.33, el concepto de aceleración diferencial es similar al de velocidad diferencial. Si se toma la segunda derivada rotacional del vector de desplazamiento en “ $s_{TM} = s_{TR} + s_{MR}$ ”, se obtiene:

$$D^R D^R s_{TM} = D^R D^R s_{TR} + D^R D^R s_{MR} \quad (2.171)$$

En el lado derecho, el punto de referencia “R” es parte del marco de referencia “R” y, por lo tanto, los dos términos son aceleraciones relativas “ $D^R D^R s_{TR} = a_T^R$ ” y “ $D^R D^R s_{MR} = a_M^R$ ”. El término del lado izquierdo contiene los puntos de referencia “T” y “M” que no pertenecen al marco “R”. Por tanto, se está tratando con la aceleración diferencial “ $D^R D^R s_{TM} = a_{TM}^R$ ” la cual es la diferencia de dos aceleraciones relativas:

$$a_{TM}^R = a_T^R - a_M^R \quad (2.172)$$

2.4.2.3. Velocidad angular.

La velocidad angular es derivada a partir del tensor de rotación mediante la derivada rotacional temporal. Para su análisis es posible tomar un enfoque de dos vías. El primero se fundamenta en la mecánica vectorial, con el enfoque clásico como el presentado por Goldstein [39]; y el segundo se muestra desde la perspectiva del desarrollo general a través de la derivada rotacional temporal.

- Enfoque clásico.

Sea “b” un vector de magnitud constante rotando en torno a su punto base fijo “B” (ver Figura 2.34). Al tiempo “t”, es desplazado desde su posición original en tiempo “ t_0 ” por:

$$\varepsilon b = b(t) - b(t_0) \quad (2.173)$$

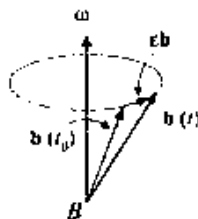


Figura 2.34. Vector incremental [20].

La razón de cambio temporal de “ εb ” es la velocidad punta “ v ” formada a partir del límite cuando “ $\Delta t \rightarrow 0$ ”

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{b(t) - b(t_0)}{\Delta t} = \frac{d(\varepsilon b)}{dt} \quad (2.174)$$

Sustituyendo la ecuación (2.149) en esta ecuación, se tiene:

$$v = \frac{d(\varepsilon R)}{dt} b(t_0) \quad (2.175)$$

Dado que “ εb ” es pequeño, “ εR ” y consecuentemente “[$d(\varepsilon R)/dt$]” son tensores antisimétricos. Por lo tanto, la ecuación (2.175) presenta el producto vectorial de la forma clásica “ $v = \omega \times b(t_0)$ ” con “ ω ” como la velocidad angular.

- **Desarrollo general mediante la derivada rotacional temporal.**

Se tienen el marco “ A ” asociado con la constante “ $b(t_0)$ ” y el marco “ B ” asociado con “ $b(t)$ ” (ver Figura 2.35). Ambos vectores están relacionados mediante el tensor de rotación “ R^{BA} ” del marco “ B ” con respecto al marco “ A ”:

$$b(t) = R^{BA} b(t_0) \quad (2.176)$$

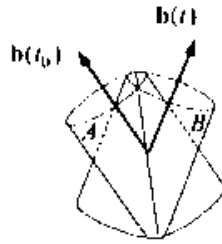


Figura 2.35. Rotación [20].

Para determinar la velocidad punta de “ $b(t)$ ” se toma la derivada rotacional con respecto al marco “ A ” y se aplica la ecuación (2.176) dos veces:

$$v_B^A = D^A b(t) = D^A R^{BA} b(t_0) = D^A R^{BA} \overline{R^{BA}} b(t) \quad (2.177)$$

Se define el tensor de velocidad angular del marco “ B ” con respecto al marco “ A ” de la siguiente manera:

$$\Omega^{BA} = D^A R^{BA} \overline{R^{BA}} \quad (2.178)$$

Obteniéndose la velocidad punta:

$$v_B^A = \Omega^{BA} b(t) \quad (2.179)$$

Comparando las ecuaciones (2.175) y (2.179), y asumiendo desplazamientos pequeños “ $b(t_0) \approx b(t)$ ” se puede relacionar la derivada temporal del tensor de perturbación de rotación con el tensor de velocidad angular:

$$\frac{d(\varepsilon R)}{dt} = \Omega^{BA} \quad (2.180)$$

Por lo que se concluye que, dado que “ εR ” es antisimétrico, igualmente lo es “ Ω^{BA} ”. El tensor de velocidad angular posee, por lo tanto, el vector equivalente “ ω^{BA} ”. Para cualquier sistema coordenado, por ejemplo “ C ”, se tiene la siguiente correspondencia:

$$[\Omega^{BA}]^C = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow [\omega^{BA}]^C = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.181)$$

A partir de un análisis sencillo se verifica que “ Ω^{BA} ” es antisimétrico y la nomenclatura empleada obedece al estándar establecido.

2.4.2.4. Transformación de Euler.

La derivada rotacional temporal es la clave para la formulación invariante de sistemas dinámicos escalonados en el tiempo. Al ser un operador que preserva la característica tensorial, este depende de un marco de referencia. En ocasiones es deseable cambiar este marco de referencia, por ejemplo, del marco inercial al corporal. La transformación generalizada de Euler gobierna este cambio de marco.

La transformación clásica de Euler se encuentra incorporada en la ecuación (2.156). Esta transforma la derivada temporal del marco “ A ” al marco “ B ”. Comparando con la ecuación (2.158) se conduce a la siguiente conjetura:

$$[T]^{BA} \left[\frac{dT}{dt} \right]^{BA} = [\Omega^{BA}]^B \quad (2.182)$$

De tal modo que el último término de la ecuación (2.158) refleja el producto vectorial “ $[\Omega^{BA}]^B [s]^B$ ”.

$$\left[\frac{ds}{dt}\right]^A = [T]^{AB} \left(\left[\frac{ds}{dt}\right]^B + [\Omega^{BA}]^B [s]^B \right) \quad (2.183)$$

Introduciendo las derivadas rotacionales temporales para los dos casos especiales, se tiene:

$$\left[\frac{ds}{dt}\right]^A = [D^A s]^A ; \left[\frac{ds}{dt}\right]^B = [D^B s]^B \quad (2.184)$$

Puede, entonces, formularse:

$$[D^A s]^A = [T]^{AB} ([D^B s]^B + [\Omega^{BA}]^B [s]^B) \quad (2.185)$$

Como está escrito, esta expresión se mantiene solo para los sistemas coordenados asociados “A” y “B”. Fortuitamente, puede ser generalizada para cualquier sistema coordenado admisible. Se denomina “transformación general de Euler” o simplemente “transformación de Euler”, la cual expresa que: dados “A” y “B” dos marcos arbitrarios relacionados por el tensor de velocidad angular “ Ω^{BA} ”. Entonces, para cualquier vector “x”, la siguiente transformación de las derivadas rotacionales de tiempo se mantiene:

$$D^A x = D^B x + \Omega^{BA} x \quad (2.186)$$

Con la transformación de Euler a disposición, se pueden modelar muchos fenómenos cinemáticos e igualmente es posible estudiar algunas propiedades de velocidades angulares.

2.4.2.4.1. Propiedades de velocidades angulares.

El tensor y el vector de velocidad angular tienen propiedades aditivas. Sus superíndices revelan la dirección de rotación, y estas refieren a transformaciones coordenadas de manera especial.

Propiedad 1. Las velocidades angulares son aditivas. Si el marco “B” revoluciona relativo al marco “A” con “ Ω^{BA} ” y el marco “C” con respecto al marco “B” con “ Ω^{CB} ”, entonces “C” revoluciona con respecto al marco “A” con el siguiente tensor de velocidad angular:

$$\Omega^{CA} = \Omega^{CB} + \Omega^{BA} \quad (2.187)$$

El vector equivalente es:

$$\omega^{CA} = \omega^{CB} + \omega^{BA} \quad (2.188)$$

Propiedad 2. Invertir la secuencia entre dos marcos cambia el signo del tensor de velocidad angular:

$$\Omega^{BA} = -\Omega^{AB} \quad (2.189)$$

El vector equivalente es:

$$\omega^{BA} = -\omega^{AB} \quad (2.190)$$

Propiedad 3. La derivada rotacional temporal del vector de velocidad angular entre dos marcos, puede ser referida a cualquier marco.

$$D^A \omega^{BA} = D^B \omega^{BA} \quad (2.191)$$

La ecuación anterior igualmente se mantiene para derivadas de tiempo regulares expresadas en los sistemas coordenados asociados “A” y “B”:

$$\left[\frac{d\omega^{BA}}{dt} \right]^A = [T]^{AB} \left[\frac{d\omega^{BA}}{dt} \right]^B \quad (2.192)$$

Propiedad 4. La velocidad angular coordinada puede ser calculada a partir de transformaciones coordenadas de dos sistemas coordenados asociados:

$$[\Omega^{BA}]^A = \left[\frac{dT}{dt} \right]^{BA} [T]^{BA} ; [\Omega^{BA}]^B = [T]^{BA} \left[\frac{dT}{dt} \right]^{BA} \quad (2.193)$$

2.4.3. Determinación de Actitud.

Este tema involucra al problema fundamental de la cinemática de vehículos voladores. En simulaciones de seis grados de libertad, la aplicación de las leyes de Euler reproduce las ecuaciones diferenciales de tasas corporales. De manera más precisa, la solución de las ecuaciones diferenciales conduce al vector de velocidad angular del marco del vehículo “B” con respecto al marco inercial “I”, expresado en coordenadas corporales “[ω^{BI}]^B”. Los especialistas las llaman las componentes “p”, “q” y “r”, es decir “[$\overline{\omega^{BI}}$]^B = [p q r]”.

El problema fundamental, a partir de la interpretación de Zipfel [20], se establece de la siguiente manera: dadas las tasas corporales “ $[\omega^{BI}]^B$ ”, determine la orientación del vehículo con respecto al marco inercial. La orientación puede ser expresada en términos del tensor de rotación, los ángulos de Euler o cuaternios. Dado que la orientación es removida de la velocidad angular por integración, la solución incorporará ecuaciones diferenciales.

2.4.3.1. Ecuaciones diferenciales del tensor de rotación.

El primer enfoque está basado en la definición del tensor de velocidad angular, referenciado al marco corporal “ B ”. Si se expresa en coordenadas corporales, la derivada rotacional se reduce a una derivada ordinaria de tiempo -ecuación (2.164)-.

$$[\Omega^{IB}]^B = [D^B R^{IB}]^B [\overline{R^{IB}}]^B = \left[\frac{dR^{IB}}{dt} \right]^B [\overline{R^{IB}}]^B \quad (2.194)$$

Resolviendo para la derivada temporal

$$\left[\frac{dR^{IB}}{dt} \right]^B = [\Omega^{IB}]^B [R^{IB}]^B \quad (2.195)$$

Invirtiendo la secuencia de marcos para conformar con las tasas corporales conocidas “ $[\Omega^{BI}]^B$ ”:

$$\left[\frac{d\overline{R^{BI}}}{dt} \right]^B = [\overline{\Omega^{BI}}]^B [\overline{R^{BI}}]^B \quad (2.196)$$

Tomando la transpuesta en ambos lados:

$$\left[\frac{dR^{BI}}{dt} \right]^B = [R^{BI}]^B [\Omega^{BI}]^B \quad (2.197)$$

De este modo se producen las ecuaciones diferenciales de los nueve elementos del tensor de rotación.

En simulaciones, en lugar de calcular el tensor de rotación, el enfoque es en la matriz de transformación del cuerpo con respecto a las coordenadas inerciales. La conexión es provista por la expresión “ $[T]^{BI} = [\overline{R^{BI}}]^B$ ”, la cual puede aplicarse directamente en la ecuación (2.148).

$$\left[\frac{dT}{dt} \right]^{BI} = [\overline{\Omega^{BI}}]^B [T]^{BI} \quad (2.198)$$

Estas son las denominadas “ecuaciones diferenciales de la matriz de cosenos directores”. En simulaciones más simples, cuando la Tierra sirve como un marco inercial “E”, se usa el sistema a nivel local. Por lo tanto, reemplazando “I” por “E”, se tiene:

$$\left[\frac{dT}{dt} \right]^{BL} = [\overline{\Omega^{BE}}]^B [T]^{BL} \quad (2.199)$$

Donde “[T]^{BL}” relaciona los ángulos de Euler de la ecuación (2.116). Si los ángulos de Euler son dados al momento del lanzamiento, se emplea la ecuación (2.116) para inicializar los nueve elementos.

Las nueve ecuaciones diferenciales no son independientes. Dado que la matriz de transformación está compuesta por tres vectores base ortonormales, solamente seis ecuaciones diferenciales deben ser resueltas y los tres elementos restantes pueden ser calculados a partir de condiciones de ortogonalidad. Expresando la matriz de cosenos directores en los tres vectores base del marco geográfico “[T]^{BG} = [[g₁]^B [g₂]^B [g₃]^{B}]” y sustituyendo en la ecuación diferencial de la ecuación (2.153), se tiene:}

$$\frac{d}{dt} [[g_1]^B \quad [g_2]^B \quad [g_3]^B] = [\overline{\Omega^{BE}}]^B [[g_1]^B \quad [g_2]^B \quad [g_3]^B] \quad (2.200)$$

Tomando las primeras dos columnas de manera individual, agregando una condición de ortogonalidad, se obtiene el conjunto de seis ecuaciones diferenciales y tres ecuaciones algebraicas:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} [g_1]^B &= [\overline{\Omega^{BE}}]^B [g_1]^B \\ \frac{d}{dt} [g_2]^B &= [\overline{\Omega^{BE}}]^B [g_2]^B \\ [g_3]^B &= [G_1]^B [g_2]^B \end{aligned} \right\} \quad (2.201)$$

Para recuperar los ángulos de Euler se emplean las ecuaciones (2.94) a (2.96) o una forma alternativa que es usada en simulaciones de vuelo:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \arcsen(-t_{13}) \\ \psi &= \arccos\left(\frac{t_{11}}{\cos \theta}\right) \text{sign}(t_{12}) \\ \phi &= \arccos\left(\frac{t_{33}}{\cos \theta}\right) \text{sign}(t_{23}) \end{aligned} \right\} \quad (2.202)$$

Donde “ t_{ij} ” son los elementos de la matriz de cosenos directores. La función signo “sign” (función intrínseca en FORTRAN “SIGN(A,B)”) controla el signo, como la función FORTRAN “ATAN2(A,B)”. El rango de los ángulos es “ $-\pi \leq \psi \leq \pi$ ”, “ $-\pi \leq \phi \leq \pi$ ”, y “ $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ”.

Con estos tipos de ángulos de Euler adoptados de mecánica de vuelo, las singularidades ocurren en “ $\theta = \pm \pi/2$ ” donde no es posible distinguir entre guiñada y alabeo. Estos corresponden a caída o ascenso vertical, situaciones raramente ocurridas en aeroplanos, pero importantes en lanzamiento de misiles. Re-secuenciar los ángulos de Euler puede colocar la singularidad en una actitud menos relevante. Afortunadamente, este comportamiento ocurre solamente en los cálculos de salida y no en las ecuaciones diferenciales en sí mismas.

Las soluciones del tensor de rotación y la matriz de cosenos directores tienen características superiores que se adaptan a aplicaciones computacionales. Las ecuaciones diferenciales son lineales, de buen comportamiento, y sin singularidades. Sobre todo, la matriz de cosenos directores es directamente computada. Sin embargo, dado que los ángulos de Euler son mucho más fáciles de visualizar, la inicialización y la salida deben ser convertidas. Para evitar esta conversión, los ángulos de Euler pueden ser integrados directamente.

2.4.3.2. Ecuaciones diferenciales de ángulos de Euler.

Se usa la Tierra como marco de referencia inercial y el sistema coordinado de nivel local. Comenzando con las tasas corporales “ $[\overline{\omega^{BE}}]^B = [p \quad q \quad r]$ ” se desarrollan las ecuaciones diferenciales de los tres ángulos de Euler “ ψ ”, “ θ ” y “ ϕ ”. Una solución general puede ser derivada de la ecuación (2.198), pero se emplea una derivación más simple basada en la propiedad de las tasas angulares de ser sumadas verticalmente. La Figura 2.36 muestra las tres tasas de Euler, las cuales componen las tasas corporales:

$$\omega^{BE} = \dot{\psi}x_3 + \dot{\theta}y_2 + \dot{\phi}y_1 \quad (2.203)$$

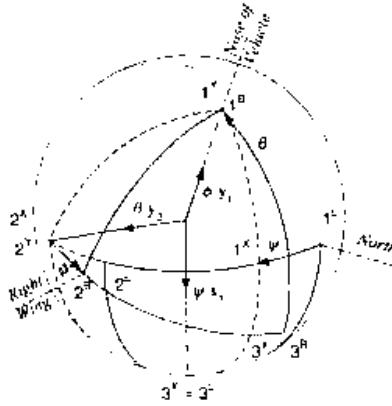


Figura 2.36. Ecuaciones de velocidad angular de Euler [20].

Seleccionando coordenadas corporales, se tiene:

$$[\omega^{BE}]^B = \psi[x_3]^B + \dot{\theta}[y_2]^B + \dot{\phi}[y_1]^B \quad (2.204)$$

Expresando los vectores base en sus sistemas coordenados principales

$$[x_3]^B = [T]^{BX}[x_3]^X \quad (2.205)$$

$$[y_2]^B = [T]^{BY}[y_2]^Y \quad (2.206)$$

$$[y_1]^B = [T]^{BY}[y_1]^Y \quad (2.207)$$

Con lo cual se obtiene la expresión conveniente para las tasas corporales.

$$[\omega^{BE}]^B = \psi[T]^{BX}[x_3]^X + [T]^{BY}(\dot{\theta}[y_2]^Y + \dot{\phi}[y_1]^Y) \quad (2.208)$$

Con las matrices de transformación que conducen a la ecuación (2.93) se pueden coordinar las tasas corporales. Resolviendo para las tasas angulares de Euler se tienen las ecuaciones diferenciales deseadas:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \text{sen } \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ 0 & \text{sen } \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.209)$$

Estas tres ecuaciones diferenciales no lineales, a pesar de ser compactas y de inicialización sencilla, sufren de singularidades de ascenso y descenso vertical. Aproximándose a estas

actitudes, la integración se deteriora y se rompe completamente en las singularidades. Con computadoras modernas de alto desempeño, la eficiencia computacional ha proporcionado precisión y flexibilidad.

2.4.3.3. Ecuaciones diferenciales de cuaternios.

La introducción de los cuaternios precedió a los vectores y tensores. Hamilton [42] publicó su álgebra de cuaternios, la cual contiene, vectores tridimensionales.

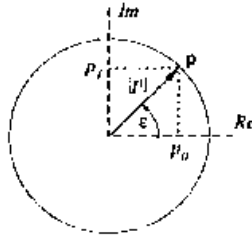


Figura 2.37. Números complejos [20].

Los cuaternios son vectores en el espacio de cuatro dimensiones. Una versión simple, de vectores complejos, son los expresados en dos dimensiones. En la Figura 2.37 se considera el número “1” en el eje real como el primer vector base y, en el eje imaginario, “i” como el segundo vector base. El vector bidimensional “p” puede ser expresado en forma de componentes “ $p = 1p_0 + ip_1$ ”. Con el ángulo de rotación “ε” y el valor absoluto “|p|” conocidos, puede representarse igualmente la variable compleja en la forma polar “ $p = |p|e^{iε}$ ”.

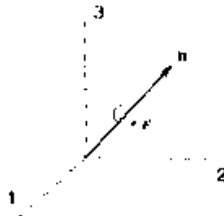


Figura 2.38. Los cuatro parámetros de Euler [20].

Se retoma el teorema de rotación de Euler, el cual establece que cuatro parámetros especifican una rotación rígida arbitraria. Hay tres componentes para los ejes de rotación “n” además del ángulo de rotación “ε” (ver Figura 2.38). Los cuaternios de norma unitaria representan tales rotaciones en el espacio tetradimensional. Hamilton generalizó el espacio bidimensional de los números complejos al agregar dos ejes imaginarios “j” y “k”. Incorporado en este espacio de cuatro dimensiones está el cuaternio de rotación en forma de componentes

$$q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \tag{2.210}$$

Donde “ $ij = k$ ”, “ $jk = i$ ”, “ $ki = j$ ” y “ $i^2 = j^2 = k^2 = 1$ ”; y su norma es “ $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ ”.

Hamilton creó un álgebra de cuaternios completa con vectores como un caso especial. Por tanto, no es sorprendente que muchos conceptos, los cuales se ha introducido en el espacio tridimensional, tengan su contraparte en el espacio de cuatro dimensiones. Para desarrollar las ecuaciones diferenciales de cuaternios, se hace uso de varias entidades. El cuaternio de rotación “ $\{q\}$ ”, el cuaternio-tensor de rotación del marco “ B ” con respecto al marco “ E ”, “ $\{Q^{BE}\}$ ”, y el cuaternio de velocidad angular del marco “ B ” con respecto al marco “ E ”, “ $\{\Omega^{BE}\}$ ”. El uso de llaves los identifica como tensores en el espacio tetradimensional, el cual, al ser coordinado, recibe el superíndice del sistema coordinado.

2.4.3.3.1. Cuaternio de rotación.

El cuaternio de rotación tiene cuatro coordenadas “ q_0 ”, “ q_1 ”, “ q_2 ” y “ q_3 ” con relación directa con los cuatro parámetros de Euler “ n ” y “ ε ”. En cualquier sistema coordinado, con llaves designando el espacio tetradimensional y los corchetes al espacio Euclidiano tridimensional.

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(\varepsilon/2) \\ \text{sen}(\varepsilon/2) \cdot n_1 \\ \text{sen}(\varepsilon/2) \cdot n_2 \\ \text{sen}(\varepsilon/2) \cdot n_3 \end{Bmatrix} ; [n] = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (2.211)$$

Esta relación nos proporciona una imagen de un cuaternio de rotación. La componente escalar “ $q_0 = \cos(\varepsilon/2)$ ” contiene la mitad del ángulo de rotación y la parte vectorial

$$[q] = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \text{sen} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (2.212)$$

Relaciona el vector de rotación unitario “[n]”. El misterio del espacio de cuatro dimensiones es explicado si se considera el cuaternio de rotación consistente de una parte escalar “ q_0 ” y un vector tridimensional “[q]”.

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_0 \\ \dots \\ [q] \end{Bmatrix} \quad (2.213)$$

2.5. Dinámica Traslacional

El enfoque empleado se centra en los movimientos del centro de masa asumiendo que toda la masa de un vehículo es localizada en ese punto. El centro de masa, sujeto a fuerzas, describe trayectorias en el espacio a medida que son registradas por un observador. Desde otra perspectiva, se modela al vehículo como un cuerpo y se observa rotar bajo la aplicación externa de momentos. Combinadas traslación y actitud conlleva a los seis grados de libertad del movimiento de vehículos.

La ley física que gobierna los movimientos de traslación es la segunda ley de Newton. La formulación empleada en aplicaciones de ingeniería es: la razón de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento lineal es igual a la fuerza externa aplicada.

2.5.1. Cantidad de Movimiento Lineal.

Definición. La cantidad de movimiento lineal “ p_i^R ” de una partícula “ i ” relativa al marco de referencia “ R ” es definida por la derivada rotacional temporal con respecto al marco “ R ” del vector de desplazamiento “ s_{iR} ” multiplicado por su masa “ m_i ” (ver Figura 2.39)



Figura 2.39. Cantidad de movimiento lineal de una partícula [20].

$$p_i^R = m_i D^R s_{iR} = m_i v_i^R \quad (2.214)$$

Dado que la derivada rotacional del vector de desplazamiento conduce a la velocidad lineal “ $v_i^R = D^R s_{iR}$ ”, es posible establecer que:

cantidad de movimiento lineal = masa × velocidad lineal

El vector de velocidad lineal imparte la dirección a la cantidad de movimiento lineal e igualmente su independencia de un punto de referencia específico. El subíndice “ i ” indica el punto de la partícula y el superíndice “ R ” indica un marco de referencia arbitrario.

Definición. La cantidad de movimiento lineal de una colección de partículas “ B ” relativa al marco de referencia “ R ” es la suma de la cantidad de movimiento lineal de cada partícula.

$$\sum_i p_i^R = \sum_i m_i D^R s_{iR} = \sum_i m_i v_i^R \quad (2.215)$$

Esta definición requiere del conocimiento de la velocidad de cada partícula. Si se define el centro de masa “ B ” de la colección de partículas “ B ”, con masa total “ m^B ” y especificando su velocidad “ v_B^R ”, entonces, la cantidad de movimiento lineal “ p_B^R ” del centro de masa “ B ” con respecto al marco de referencia “ R ” está dado por:

$$p_B^R = m^B D^R s_{BR} = m^B v_B^R \quad (2.216)$$

Solamente la masa total y el centro de masa del cuerpo “ B ” contribuyen a la cantidad de movimiento lineal. La forma y la actitud del cuerpo son irrelevantes. De hecho, la ecuación (2.216) puede ser interpretada como la cantidad de movimiento lineal de una partícula con masa “ m^B ” y velocidad lineal del punto “ B ”; solo debe tenerse presente que “ B ” tiene que ser el centro de masa.

La colección de partículas que forman al cuerpo “ B ” no tienen que estar mutuamente fijas. Mientras su centro de masa y su masa total sean conocidos, la cantidad de movimiento lineal puede ser calculada.

Es posible extender el cálculo a una colección de cuerpos “ B_K ”, “ $K = 1,2,3 \dots$ ”, dado que dichos cuerpos pueden ser considerados como partículas siempre que sus centros de masa individuales sean empleados como puntos representativos, es posible emplear la ecuación (2.215) para sumar sus contribuciones individuales y calcular la cantidad de movimiento lineal total.

2.5.2. Dinámica Newtoniana.

Sir Isaac Newton [43] postula lo siguiente: “la razón de cambio de cantidad de movimiento lineal es igual a la fuerza aplicada y está en la dirección en la cual la fuerza actúa”. Newton empleó el término “movimiento” en lugar de “cantidad de movimiento lineal” para definir su segunda ley, no obstante, el significado es el mismo.

2.5.3. Segunda Ley de Newton.

Esta ley gobierna los movimientos del centro de masa del vehículo sujeto a fuerzas externas. Para una partícula “ i ”, postula que:

$$D^I p_i^I = f_i \quad (2.217)$$

La ecuación establece que la razón de cambio en el tiempo con respecto al marco inercial “ I ” de la cantidad de movimiento lineal de una partícula “ i ” con respecto al marco inercial es

igual a la fuerza actuante en la partícula. Introduciendo la definición de cantidad de movimiento a partir de la ecuación (2.214), “ $p_i^I = m_i D^I s_{iI}$ ”, en el lado izquierdo de la ecuación (2.217), se tiene que:

$$D^I p_i^I = D^I (m_i D^I s_{iI}) = m_i D^I D^I s_{iI} + D^I m_i D^I s_{iI} \quad (2.218)$$

Donde el último término es cero dado que la masa de una partícula es invariante en el tiempo. Sumando todas las partículas del cuerpo “B”, las fuerzas internas se cancelan de acuerdo con la tercera ley de Newton, pero las fuerzas externas se mantienen.

$$\sum_i m_i D^I D^I s_{iI} = \sum_i f_i \quad (2.219)$$

Considerando el centro de masa “B” de la colección de partículas mostrada en la Figura 2.40 se tiene que:

$$s_{iI} = s_{iB} + s_{BI} \quad (2.220)$$

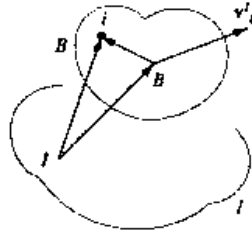


Figura 2.40. Partícula y centro de masa.

De lo cual se obtiene:

$$\sum_i m_i D^I D^I s_{iB} + \sum_i m_i D^I D^I s_{BI} = \sum_i f_i \quad (2.221)$$

Siendo constante la masa de cada partícula es posible colocarla dentro de la derivada rotacional y mover el signo de suma. Dado que “B” es el centro de masa de todas las partículas, el primer término desaparece:

$$\sum_i m_i D^I D^I s_{iB} = \sum_i D^I D^I (m_i s_{iB}) = D^I D^I \underbrace{\sum_i (m_i s_{iB})}_{=0} = 0 \quad (2.222)$$

Abreviando “ $\sum_i m_i = m^B$ ” y sumando todas las fuerzas “ $\sum_i f_i = f$ ”, se tiene la segunda ley de Newton para un cuerpo “ B ” relativa al marco inercial “ I ”:

$$m^B D^I D^I s_{BI} = f \quad (2.223)$$

La velocidad del centro de masa “ B ” con respecto al marco inercial “ I ” es “ $v_B^I = D^I s_{BI}$ ”. Entonces, la segunda ley de Newton se lee: la masa “ m^B ” del cuerpo “ B ” que multiplica la aceleración inercial “ $a_B^I = D^I v_B^I$ ” de su centro de masa “ B ” es igual a la fuerza externa resultante “ f ”

$$m^B D^I v_B^I = f \quad (2.224)$$

Entonces, el centro de masa “ B ” de un sistema de partículas “ m_i ” se mueve como una sola partícula “ B ” cuya masa es la masa total “ m^B ”, sujeta a la fuerza “ f ”. No se realiza la consideración de cuerpo rígido pesar de que la mayoría de aplicaciones lo hacen.

La segunda ley de Newton formulada en forma de tensor invariante puede expresarse en cualquier sistema coordenado admisible. En coordenadas inerciales “ I ” asociadas con el marco inercial “ I ”, se tiene la derivada ordinaria temporal.

$$m^B [D^I v_B^I]^I = [f]^I \Rightarrow m^B \left[\frac{dv_B^I}{dt} \right]^I = [f]^I \quad (2.225)$$

Para un sistema coordenado no inercial, “ B ”, por ejemplo, asociado con el marco corporal “ B ” se transforma la derivada rotacional temporal al marco “ B ” a través de la transformación de Euler para obtener la derivada ordinaria temporal en coordenadas “ B ”.

$$m^B [D^I v_B^I]^B = m^B [D^B v_B^I]^B + m^B [\Omega^{BI}]^B [v_B^I]^B = m^B \left[\frac{dv_B^I}{dt} \right]^B + m^B [\Omega^{BI}]^B [v_B^I]^B = [f]^B \quad (2.226)$$

La aceleración “ $[dv_B^I/dt]^B$ ” es la velocidad inercial, coordinada en ejes corporales, con sus componentes sujetas a todas a la derivada ordinaria temporal. El término adicional “ $[\Omega^{BI}]^B [v_B^I]^B$ ” es llamado “aceleración tangencial”.

En la formulación se asume que el cuerpo mantiene sujetas a todas sus partículas, es decir, su masa es invariante en el tiempo. Si hay partículas expulsadas, con en un motor de cohete, la cantidad de movimiento lineal cambia, resultando en una fuerza de propulsión. De manera tradicional, dicha fuerza es desplazada al segundo miembro de la ecuación de la segunda ley

de Newton y es considerada como una fuerza externa mientras que en el primer miembro la masa se convierte en función del tiempo.

2.5.4. Implementación en Simulación.

La fidelidad de una simulación es categorizada de acuerdo al número de grados de libertad que ésta modela. Un cuerpo rígido moviéndose a través del aire o el espacio tiene seis grados de libertad, tres grados traslacionales y tres rotacionales. Estos, en conjunto, proveen la mayor fidelidad.

Para estudios preliminares de trayectoria es adecuado modelar el vehículo como partícula. Dado que solamente se aplican las ecuaciones de traslación, la simulación es llamada modelo de tres grados de libertad. Si es necesario incluir movimientos de actitud, pero se carece de una base de datos completa, se emplea un modelo provisional llamado “simulación de cinco pseudo-grados de libertad” donde dos movimientos de actitud, ya sea cabeceo-guiñada o cabeceo-peralte, son agregados a los tres grados de libertad traslacionales.

2.5.4.1. Simulaciones de tres grados de libertad.

La segunda ley de Newton gobierna los tres grados de libertad traslacionales; las fuerzas aerodinámicas, propulsivas y gravitacionales deben ser dadas. La ley de Euler no es empleada para calcular las tasas corporales y actitudes; por lo tanto, no hay necesidad de obtener los momentos aerodinámicos y propulsivos.

Si se construye una simulación de tres grados de libertad para un vehículo supersónico, se emplea el marco inercial J2000 para la segunda ley de Newton. La posición inercial y las componentes de velocidad están integradas directamente, pero las fuerzas aerodinámicas de sustentación y arrastre están dadas en coordenadas de velocidad. Por tanto, se requiere una matriz de transformación de coordenadas de velocidad con respecto a las coordenadas inerciales para convertir las fuerzas a coordenadas inerciales.

Las ecuaciones de movimiento son derivadas a partir de la ley de Newton, ecuación (2.224):

$$mD^I v_B^I = f_{a,p} + mg \quad (2.227)$$

Donde “ m ” es la masa del vehículo y “ v_B^I ” es la velocidad del centro de masa del misil “ B ” con respecto al marco de referencia inercial “ I ”. Las fuerzas superficiales son las fuerzas aerodinámicas y propulsivas, “ $f_{a,p}$ ”, y la fuerza volumétrica gravitacional es “ mg ”. A pesar de que “ v_B^I ” es la velocidad inercial, se requiere de la velocidad geográfica “ v_B^E ” para calcular la sustentación y el arrastre.

La posición del marco de referencia inercial “ I ” está orientada en la eclíptica solar, y el punto “ I ” es colocado en el centro de la Tierra. El marco terrestre “ E ” se encuentra fijado en el geoide y rota con velocidad angular “ ω^{EI} ”. Por definición, la velocidad inercial es “ $v_B^I =$

$D^I s_{BI}$ ”, donde “ s_{BI} ” es la localización del centro de masa del vehículo con respecto al punto “ I ”. Para introducir la velocidad geográfica se cambia el marco de referencia al marco “ E ”:

$$D^I s_{BI} = D^E s_{BI} + \Omega^{EI} s_{BI} \quad (2.228)$$

Se introduce un punto de referencia cualquiera “ E ” en la Tierra, de forma tal que “ $s_{BI} = s_{BE} + s_{EI}$ ”, en el primer término del segundo miembro de la ecuación

$$D^I s_{BI} = D^E s_{BE} + D^E s_{EI} = D^E s_{BE} = v_B^E \quad (2.229)$$

Donde “ $D^E s_{EI}$ ” es cero dado que “ s_{EI} ” es constante en el marco terrestre. Sustituyendo en la ecuación (2.228) se obtiene una relación entre las velocidades inercial y geográfica:

$$v_B^I = v_B^E + \Omega^{EI} s_{BI} \quad (2.230)$$

Para implementación computacional la ecuación (2.227) es convertida a matrices al introducir sistemas coordenados. El lado izquierdo es integrado en coordenadas inerciales “ I ”, mientras que las fuerzas aerodinámicas y propulsivas son expresadas en coordenadas geográficas “ G ”. Deben distinguirse dos sistemas coordenados de velocidad: el asociado con la velocidad inercial “ v_B^I ” es llamado “ U ” y el sistema coordenado de la velocidad geográfica es “ V ”. Con estos requerimientos se tiene la forma de las ecuaciones traslacionales de movimiento:

$$m \left[\frac{dv_B^I}{dt} \right]^I = [T]^{IG} \left([T]^{GU} [f_{a,p}]^U + m[g]^G \right) \quad (2.231)$$

Estas son las primeras tres ecuaciones diferenciales que deben resolverse para las componentes de la velocidad inercial. El segundo conjunto de ecuaciones diferenciales calculan la posición inercial.

$$\left[\frac{ds_{BI}}{dt} \right]^I = [v_B^I]^I \quad (2.232)$$

Si el enfoque es cercano a la Tierra, es posible simplificar la simulación al sustituir el marco terrestre como el marco inercial. En las ecuaciones (2.231) y (2.232) se reemplazan, el marco “ I ” y el punto “ I ”, por el marco “ E ” y el punto “ E ”. De este modo desaparece la distinción entre la velocidad geográfica y la inercial, y el sistema coordenado geográfico es reemplazado por el sistema coordenado de nivel local “ L ”:

$$m \left[\frac{dv_B^E}{dt} \right]^L = [T]^{LV} [f_{a,p}]^V + m[g]^L \quad (2.233)$$

$$\left[\frac{ds_{BE}}{dt} \right]^L = [v_B^E]^L \quad (2.234)$$

2.5.4.2. Simulaciones de cinco grados de libertad.

Para un misil de giro por deslizamiento se agregan las dinámicas de actitud de cabeceo y guiñada; mientras que para una aeronave de giro por inclinación, se emplean los ángulos de cabeceo y peralte (alabeo). Para mantener las características simples de las simulaciones de tres grados de libertad y contar con dinámicas de actitud se agregan funciones de transferencia del piloto automático de lazo cerrado a la dinámica de masa-punto. Este enfoque con dinámica de actitud linealizada es llamado “simulación de cinco pseudo-grados de libertad”.

Esta implementación requiere las ecuaciones traslacionales de movimiento, formuladas a partir de la ley de Newton y expresadas en coordenadas de ruta de vuelo. Las variables de estado y sus derivadas son la velocidad del centro de masa del vehículo con respecto a la Tierra “ $v = |v_B^E|$ ” y “ dv/dt ”; el ángulo de rumbo “ χ ” y su tasa “ $d\chi/dt$ ”; y, el ángulo de ruta de vuelo “ γ ” y su tasa “ $d\gamma/dt$ ”. Una variable clave, la velocidad angular del vehículo con respecto al marco terrestre “ ω^{BE} ”, no está disponible directamente dado que no se ha resuelto las ecuaciones de Euler, por lo que debe construirse a partir de otros vectores:

$$\omega^{BE} = \omega^{BV} + \omega^{VE} \quad (2.235)$$

Donde “ V ” es el marco asociado con el vector de velocidad geográfica “ v_B^E ” del vehículo. Las dos velocidades angulares pueden calcularse dado que sus tasas angulares y ángulos están disponibles desde el piloto automático. Las tasas de incidencia se obtienen a partir del ángulo de ataque “ α ”, el ángulo de deslizamiento lateral “ β ” y el ángulo de inclinación (alabeo) “ ϕ ”:

$$\omega^{BV} = f(\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}) \quad (2.236a)$$

$$\omega^{BV} = f(\alpha, \dot{\alpha}, \phi, \dot{\phi}) \quad (2.236b)$$

Y las tasas del ángulo de ruta de vuelo

$$\omega^{VE} = f(\chi, \dot{\chi}, \gamma, \dot{\gamma}) \quad (2.237)$$

De esta manera, las soluciones de ecuaciones diferenciales de actitud son reemplazadas por cálculos cinemáticos.

Se formulan las ecuaciones traslacionales para trayectorias cercanas a la Tierra, considerando la perspectiva de Tierra plana y empleando el sistema coordenado de nivel local. De la aplicación de la ley de Newton se tiene:

$$mD^E v_B^E = f_{a,p} + mg \quad (2.238)$$

Considerando las fuerzas aerodinámicas, propulsivas y gravitacionales como fuerzas externamente aplicadas. La derivada rotacional temporal es tomada con respecto al marco inercial terrestre “E”. Empleando la transformación de Euler, se cambia al marco de velocidad “V”.

$$D^V v_B^E + \Omega^{VE} v_B^E = \frac{f_{a,p}}{m} + g \quad (2.239)$$

Empleando el sistema coordenado de velocidad para crear la matriz de ecuaciones

$$[D^V v_B^E]^V + [\Omega^{VE}]^V [v_B^E]^V = \frac{[f_{a,p}]^V}{m} + [g]^V \quad (2.240)$$

La derivada rotacional temporal en coordenadas de velocidad es:

$$[D^V v_B^E]^V = \begin{bmatrix} \dot{V} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.241)$$

Las fuerzas aerodinámicas y de propulsión están dadas en coordenadas corporales por lo que:

$$[f_{a,p}]^V = [T]^{VB} [f_{a,p}]^B \quad (2.242)$$

Mientras que la aceleración gravitacional es mejor expresada en coordenadas de nivel local “[g]^V = [T]^{VL}[g]^L”. Considerando estos términos y la velocidad angular descrita por

$$[\omega^{VE}]^V = \begin{bmatrix} -\dot{\chi} \operatorname{sen} \gamma \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\chi} \operatorname{cos} \gamma \end{bmatrix} \quad (2.243)$$

Es posible, entonces, resolver la ecuación (2.240) para las tres variables de estado “V”, “ χ ” y “ γ ”:

$$\begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\chi} V \operatorname{cos} \gamma \\ -\dot{\gamma} V \end{bmatrix} = [\bar{T}]^{BV} \frac{[f_{a,p}]^B}{m} + [T]^{VL} [g]^L \quad (2.244)$$

La posición del vehículo es calculada a partir de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\left[\frac{ds_{BE}}{dt} \right]^L = [\bar{T}]^{VL} \begin{bmatrix} \dot{V} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.245)$$

2.5.4.3. Simulaciones de seis grados de libertad.

Estas pueden ser categorizadas por el marco inercial (Tierra de rotación elíptica o Tierra plana estacionaria), por el tipo de vehículo (misil, aeronave, cohete giratorio o nave espacial) o por la arquitectura (estrechamente integrada, modular u orientada al objeto).

2.5.4.3.1. Tierra redonda.

Las ecuaciones traslacionales para Tierra redonda –sea esférica o elíptica- sigue la misma derivación empleada en modelos de tres grados de libertad, la trayectoria puede ser calculada como si el vehículo fuese un partícula. Entonces, la ley de Newton relacionada con el marco inercial J2000 y aplicada a un vehículo sujeto a fuerzas aerodinámicas, propulsivas y gravitacionales es:

$$mD^I v_B^I = f_{a,p} + mg \quad (2.246)$$

La integración es realizada en coordenadas inerciales, pero los datos aéreos y propulsivos son comúnmente dados en coordenadas corporales. Realizando estos ajustes junto con la expresión de la aceleración gravitacional en coordenadas geográficas, se tiene:

$$m[D^I v_B^I]^I = [\bar{T}]^{BI} [f_{a,p}]^B + m[\bar{T}]^{GI} [g]^G \quad (2.247)$$

La principal distinción con la formulación para tres grados de libertad radica en el manejo de las fuerzas aerodinámicas y propulsivas. Las simulaciones de seis grados de libertad modelan las complejas tablas aerodinámicas y las cubiertas de propulsión en coordenadas corporales, mientras que las correspondientes aproximaciones simples en simulaciones de tres grados de libertad pueden ser expresadas en coordenadas de velocidad.

Otro conjunto de ecuaciones diferenciales provee los rastros de posición:

$$\left[\frac{ds_{BI}}{dt} \right]^I = [v_B^I]^I \quad (2.248)$$

Las cuales tendrán que convertirse en coordenadas más significativas de longitud, latitud y altitud.

2.5.4.3.2. Tierra plana.

La Tierra se convierte en el marco inercial y el mallado de longitud y latitud es desenvuelto en un plano. La ley de Newton se expresa de la siguiente forma:

$$mD^E v_B^E = f_{a,p} + mg \quad (2.249)$$

La mayoría de los modelos de seis grados de libertad de Tierra plana expresan los términos en coordenadas corporales, excepto la aceleración gravitacional. Mediante este enfoque la velocidad geográfica en coordenadas corporales “[v_B^E]^B” puede ser empleada directamente para calcular los ángulos de incidencia. Entonces, transformando la derivada rotacional al marco corporal, se tiene:

$$mD^B v_B^E + m\Omega^{BE} v_B^E = f_{a,p} + mg \quad (2.250)$$

Realizando la coordinación correspondiente, se tiene:

$$\left[\frac{dv_B^E}{dt} \right]^B = -[\Omega^{BE}]^B [v_B^E]^B + \frac{1}{m} [f_{a,p}]^B + [T]^{BL} [g]^L \quad (2.251)$$

Una integración adicional completa el conjunto de ecuaciones

$$\left[\frac{ds_{BE}}{dt} \right]^L = [\bar{T}]^{BL} [v_B^E]^B \quad (2.252)$$

Las tasas corporales “[Ω^{BE}]^B” son provistas por las ecuaciones rotacionales, y la matriz de cosenos directores “[T]^{BL}”, es calculada por cualquiera de los métodos mostrados en la sección (2.4.3).

Los vectores “ $f_{a,p}$ ” y “ mg ” representan las fuerzas superficiales (aerodinámicas y propulsivas) y volumétricas (gravitacionales). Ambos deben ser aplicados al centro de masa del vehículo, entonces, el vehículo es tratado como partícula.

2.6. Dinámica De Actitud.

La dinámica de actitud tiene fuerte semejanza con la ley de Newton, mientras esta emplea masa, velocidad lineal y fuerza; la ley de Euler usa momento de inercia, velocidad angular y momento. Sin embargo, la masa es un simple escalar y el momento de inercia requiere de un tensor de segundo orden para ser descrito.

2.6.1. Tensor de Inercia.

2.6.1.1. Definición del tensor de momento de inercia.

Un cuerpo material es un colector de partículas tridimensional diferenciable que posee una medida escalar llamada “distribución de masa”. Integrando la distribución de masa sobre el volumen del cuerpo resulta en el escalar llamado “masa”. Si la integración incluye la distancia de las partículas relativa al punto de referencia, entonces se obtiene el tensor de primer orden que define la ubicación del centro de masa con respecto al punto de referencia. Si la distancia es elevada al cuadrado, la integración conduce a un tensor de segundo orden llamado “tensor de inercia”.

Definición. El tensor de inercia del cuerpo “ B ” referido a un punto arbitrario “ R ” es calculado a partir de la suma de la masa de cada una de las partículas “ m_i ” y su vector de desplazamiento “ s_{iR} ” de acuerdo con la siguiente definición:

$$I_R^B = \sum_i m_i (\bar{s}_{iR} s_{iR} E - s_{iR} \bar{s}_{iR}) = \sum_i m_i \bar{s}_{iR} S_{iR} \quad (2.253)$$

Donde “ S_{iR} ” es la forma anti-simétrica del vector de desplazamiento “ s_{iR} ”.

La notación “ I_R^B ” refleja el punto de referencia como el subíndice “ R ”, y el superíndice “ B ” como el marco corporal y la suma de todas las partículas. La expresión entre paréntesis, “ $\bar{s}_{iR} s_{iR} E - s_{iR} \bar{s}_{iR} = \bar{s}_{iR} S_{iR}$ ”, es una identidad tensorial, la cual puede ser probada al sustituir las componentes y realizar las multiplicaciones matriciales.

Para las coordenadas corporales “ B ” donde “[\bar{s}_{iR}]^B = [s_{iR_1} s_{iR_2} s_{iR_3}]”, el tensor de momento de inercia tiene las siguientes componentes:

$$[I_R^B]^B = \begin{bmatrix} \sum_i m_i (s_{iR_2}^2 + s_{iR_3}^2) & -\sum_i m_i s_{iR_1} s_{iR_2} & -\sum_i m_i s_{iR_1} s_{iR_3} \\ -\sum_i m_i s_{iR_1} s_{iR_2} & \sum_i m_i (s_{iR_1}^2 + s_{iR_3}^2) & -\sum_i m_i s_{iR_2} s_{iR_3} \\ -\sum_i m_i s_{iR_1} s_{iR_3} & -\sum_i m_i s_{iR_2} s_{iR_3} & \sum_i m_i (s_{iR_1}^2 + s_{iR_2}^2) \end{bmatrix} \quad (2.254)$$

El tensor de momento de inercia expresado en cualquier sistema coordenado admisible es una matriz simétrica real y tiene, por lo tanto, seis elementos independientes. Sus elementos diagonales son llamados “momentos axiales de inercia” y los elementos fuera de la diagonal, “productos de inercia”. Sus unidades son $[m^2Kg]$.

2.6.1.2. Teoremas de desplazamiento.

2.6.1.2.1. Teorema de desplazamiento puntual.

El momento de inercia del cuerpo “ B ” referido a un punto arbitrario “ R ” es igual al momento de inercia referido al centro de masa “ B ” sumado a un término calculado de manera que toda la masa “ m ” estuviese concentrada en el centro de masa.

$$I_R^B = I_B^B + m^B (\bar{s}_{BR} s_{BR} E - s_{BR} \bar{s}_{BR}) \quad (2.255)$$

De manera alternativa se tiene:

$$I_R^B = I_B^B + m^B \bar{s}_{BR} s_{BR} \quad (2.256)$$

Comparando el segundo término en el segundo miembro de cada una de las expresiones anteriores con la ecuación (2.253) se observa que son el momento de inercia de una partícula con masa “ m^B ” y el vector de desplazamiento “ s_{BR} ” entre los dos puntos de referencia.

Este teorema, conocido como “teorema de Huygen”, ayuda a construir el momento de inercia total de una aeronave a partir de sus partes individuales. En este caso “ R ” es el punto del centro de masa general mientras que “ B ” es el centro de masa de la parte individual.

2.6.1.2.2. Teorema de ejes paralelos.

El momento axial de inercia “ I_{Rn} ” de un cuerpo “ B ” en torno a cualquier eje dado “ n ” es el momento axial de inercia en torno a un eje paralelo a través del centro de masa “ B ” sumado a un término axial calculado de manera que toda la masa del cuerpo estuviese concentrada en el centro de masa “ B ” (ver Figura 2.40).

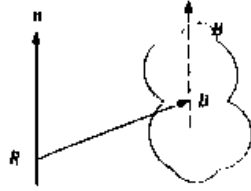


Figura 2.40. Eje de referencia cambiado [20].

$$I_{Rn} = \bar{n}I_B^B n + m^B \bar{n}(\bar{s}_{BR} s_{BR} E - s_{BR} \bar{s}_{BR}) n \quad (2.257)$$

Como cualquier momento axial de inercia, una vez que el eje ha sido definido, éste se convierte en un escalar con sus unidades correspondientes.

2.7. Cantidad de Movimiento Angular.

2.7.1. Definición de la Cantidad de Movimiento Angular.

Esta definición sigue el patrón establecido para la cantidad de movimiento lineal. Para definir la cantidad de movimiento angular de una partícula se identifican el punto que modela la partícula “*i*”, el punto de referencia “*R*” y el correspondiente marco de referencia “*R*”.

Definición. La cantidad de movimiento angular “ I_{iR}^R ” de una partícula “*i*” con masa “ m_i ” relativa al marco de referencia “*R*” y referida al punto de referencia “*R*”, es definida por el producto vectorial del vector de desplazamiento “ S_{iR} ” y su derivada “ $D^R S_{iR}$ ” multiplicados por su masa “ m_i ”:

$$I_{iR}^R = m_i S_{iR} D^R S_{iR} = m_i S_{iR} v_i^R \quad (2.258)$$

Dado que la derivada rotacional de “ s_{iR} ” es la velocidad lineal de la partícula “ $D^R s_{iR} = v_i^R$ ” y “ $m_i v_i^R = p_i^R$ ” es la cantidad de movimiento lineal, es posible expresar la cantidad de movimiento angular simplemente como el producto vectorial del tensor de desplazamiento y la cantidad de movimiento lineal:

$$I_{iR}^R = S_{iR} p_i^R \quad (2.259)$$

La dirección de la cantidad de movimiento angular es normal al plano subtendido por los vectores de desplazamiento y de cantidad de movimiento lineal. Cualquier partícula que no esté en reposo tiene cantidades de movimiento lineal y angular; es cuestión de perspectiva. Si la referencia consiste en un marco, ésta exhibe solamente propiedades de cantidad de movimiento lineal. Si se introduce un punto de referencia, ésta muestra también características de cantidad de movimiento angular.

Un cuerpo “ B ”, no necesariamente rígido, puede ser considerado una colección de partículas “ i ”. La cantidad de movimiento angular de este cuerpo “ B ” relativa al marco de referencia “ R ” y referida al punto de referencia “ R ” es definida como la suma de la cantidad de movimiento angular de todas las partículas.

$$I_R^{BR} = \sum_i I_{iR}^R = \sum_i m_i S_{iR} D^R S_{iR} = \sum_i m_i S_{iR} v_i^R = \sum_i S_{iR} p_i^R \quad (2.260)$$

El cambio de subíndice “ i ” en “ $\sum_i I_{iR}^R$ ” por el superíndice “ B ” en “ I_R^{BR} ” refleja el acopio de todas las partículas en el cuerpo “ B ”.

2.7.2. Cantidad de Movimiento Angular de Cuerpos Rígidos.

En la mayoría de aplicaciones se asume que las partículas en una colección se encuentran mutuamente fijas. Esta idealización, llamada “cuerpo rígido”, no es físicamente realista dado que las moléculas, incluso en materia sólida, se encuentran oscilando. Se requiere tener cuidado cuando las flexiones y vibraciones distorsionan el fuselaje a tal límite que las propiedades másicas y aerodinámicas sean significativamente modificadas.

Teorema. La cantidad de movimiento angular “ I_R^{BR} ” de un cuerpo rígido “ B ” con respecto a cualquier marco de referencia “ R ” y referido al punto de referencia “ R ”, puede ser calculada a partir de dos términos aditivos:

$$I_R^{BR} = I_B^B \omega^{BR} + m^B S_{BR} v_B^R \quad (2.261)$$

El primer término es la cantidad de movimiento angular “ I_R^{BR} ” del cuerpo “ B ” con respecto al marco de referencia “ R ” y referida a su propio centro de masa “ B ”, “ $I_B^{BR} = I_B^B \omega^{BR}$ ”; el segundo término es un factor de transferencia considerado por el hecho de que “ R ” no es el centro de masa. Reemplazando la velocidad lineal por su definición, resulta en otra formulación útil:

$$I_R^{BR} = I_B^B \omega^{BR} + m^B S_{BR} D^R S_{BR} \quad (2.262)$$

Esta expresión consiste en una partícula rotativa “ $I_B^B \omega^{BR}$ ” con velocidad angular “ ω^{BR} ” del cuerpo con respecto al marco de referencia, y a un término de transferencia “ $m^B S_{BR} D^R S_{BR}$ ” con toda la masa concentrada en el centro de masa. Si el punto de referencia es el centro de masa “ $S_{BR} = 0$ ”, por lo que el término de transferencia desaparece:

$$I_R^{BR} = I_B^B \omega^{BR} \quad (2.263)$$

Dado que el vector de desplazamiento “ s_{BR} ” ya no es parte de los cálculos, la cantidad de movimiento angular se ha vuelto independiente del movimiento traslacional “ v_B^R ” del centro de masa del cuerpo. El centro de masa como punto de referencia separa la dinámica traslacional de los movimientos de actitud.

Dado que el momento de inercia es un tensor de segundo orden, éste actúa como una transformación que convierte el vector de velocidad angular en el vector de cantidad de movimiento angular. Sin embargo, el momento de inercia, al ser un tensor, altera no solamente la dirección sino también la magnitud de “ ω^{BR} ”.

2.8.Ley de Euler.

2.8.1. Dos Enfoques.

Así como la segunda ley de Newton describe los grados de libertad traslacionales del vuelo de un vehículo, la ley de Euler gobierna los grados de libertad de actitud. Su origen es atribuido a Euler y es considerado como consecuencia de la ley de Newton (Goldstein) o como un principio fundamentalmente nuevo de la dinámica (Truesdell).

2.8.1.1.Ley de Euler de acuerdo con Truesdell.

Truesdell [44] concluyó que la ley de Euler partió de ideas indicadas por Bernoulli y formuló la ley de cantidad de movimiento angular como un principio independiente de la mecánica. En su forma elemental se establece para una (ver Figura 2.41).

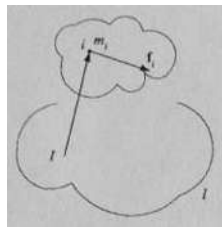


Figura 2.41. Ley de Euler para una partícula [20].

La razón de cambio temporal inercial de cantidad de movimiento angular en torno a un punto es igual y en la misma dirección que el momento aplicado en torno al mismo punto. Considerando una partícula “ m_i ”, desplazada del punto de referencia “ I ” por “ s_{iI} ” y moviéndose con velocidad lineal “ v_i^I ” con respecto al marco inercial “ I ”, su cantidad de movimiento angular es “ $l_{iI}^I = m_i s_{iI} v_i^I$ ” y el momento aplicado relativo al punto “ I ” es “ $m_{iI} = s_{iI} f_i$ ”, donde “ f_i ” es la fuerza actuando en la partícula.

La ley de Euler para tal partícula establece que la razón de cambio en el tiempo con respecto al marco inercial “ I ” de la cantidad de movimiento angular “ l_{iI}^I ” es igual al momento externo “ m_{iI} ”:

$$D^I l_{iI}^I = m_{iI} \quad (2.264)$$

De manera expandida:

$$D^I(m_i S_{iI} v_i^I) = S_{iI} f_i \quad (2.265)$$

En cada lado de la ecuación se tiene un producto vectorial del vector de desplazamiento “ s_{iI} ”: en un lado con la velocidad lineal “ v_i^I ” (relacionada con el vector de desplazamiento por “ $v_i^I = D^I s_{iI}$ ”); y por el otro con la fuerza “ f_i ”.

Se presenta un nuevo vector, el momento “ m_{iI} ” que actúa en la partícula “ i ” con respecto al punto “ I ”. No debe confundirse con el escalar “ m_i ”, la masa de la partícula “ i ”.

2.8.1.2. Ley de Euler de acuerdo con Goldstein.

De acuerdo con Goldstein [45], la ecuación de cantidad de movimiento angular puede derivarse de la ley de cantidad de movimiento lineal de Newton.

A partir de la ecuación (2.217) expresada para una partícula “ i ”, se multiplican ambos lados de la ecuación por la forma anti-simétrica del vector de desplazamiento “ S_{iI} ”

$$S_{iI} D^I(m_i v_i^I) = S_{iI} f_i \quad (2.266)$$

Aplicando la regla de la herradura al primer miembro de la ecuación (2.265):

$$D^I(m_i S_{iI} v_i^I) = m_i D^I S_{iI} v_i^I + S_{iI} D^I(m_i v_i^I) = m_i V_i^I v_i^I + S_{iI} D^I(m_i v_i^I) = S_{iI} D^I(m_i v_i^I) \quad (2.267)$$

Dado que el producto vectorial de “ v_i^I ” consigo mismo es igual a cero se establece la igualdad. Por lo tanto:

$$D^I(m_i S_{iI} v_i^I) = S_{iI} f_i \quad (2.268)$$

Empleando las definiciones de cantidad de movimiento angular “ $l_{iI}^I = m_i S_{iI} v_i^I$ ” y momento “ $m_{iI} = S_{iI} f_i$ ”, se obtiene la ley de Euler:

$$D^I l_{iI}^I = m_{iI} \quad (2.269)$$

Nuevamente se tiene la elección del marco inercial. Es conveniente realizar las consideraciones empleadas para la ley de Newton: para simulaciones cercanas a la Tierra se emplea el marco referencial J2000; si el vehículo se encuentra confinado en la Tierra se emplea el marco terrestre.

2.8.2. Vuelo Libre.

Sumando la ley de Euler de la ecuación (2.264) para todas las partículas de un cuerpo rígido, se tiene:

$$\sum_i D^I l_{iI}^I = \sum_i m_{iI} \quad (2.270)$$

Empleando la forma alternativa mostrada en la ecuación (2.265):

$$\sum_i D^I (m_i s_{iI} D^I s_{iI}) = \sum_i s_{iI} f_i \quad (2.271)$$

Donde todos los momentos internos se cancelan entre sí y se mantienen los momentos externos. La velocidad lineal es reemplazada por la derivada temporal del vector de desplazamiento “ s_{iI} ”. Se introduce un punto de referencia arbitrario “ R ” del cuerpo rígido “ B ”, de tal forma que

$$s_{iI} = s_{iR} + s_{RI} \quad (2.272)$$

Desarrollando la ecuación (2.271) se obtienen seis términos. Confinando el punto de referencia “ R ” al centro de masa “ B ” se desarrollan las ecuaciones de actitud para vuelo libre. Trabajando la ecuación (2.271), considerando lo anterior se obtiene:

$$D^I (I_B^B \omega^{BI}) = m_B \quad (2.273)$$

Donde, de acuerdo con la ecuación (2.263), “ $I_B^B \omega^{BI} = l_B^{BI}$ ” es la cantidad de movimiento angular del cuerpo “ B ” con respecto al marco inercial y referido al centro de masa. La ley de Euler para cuerpos rígidos establece, por lo tanto, que la razón de cambio temporal relativa al marco inercial de la cantidad de movimiento angular “ l_B^{BI} ” de un cuerpo rígido referido a su centro de masa es igual al momento externamente aplicado “ m_B ” con el centro de masa como punto de referencia.

$$D^I l_B^{BI} = m_B \quad (2.274)$$

La ecuación (2.273) no incluye referencia alguna a la velocidad o aceleración lineal del vehículo. La ley de Euler es aplicada como si el vehículo no se estuviese trasladando. Esta característica es referida como “teorema de separación”. Así como las cantidades de momento lineal y angular pueden ser calculadas de manera separada, de igual manera las ecuaciones de movimiento traslacionales pueden ser formuladas de manera separada de las ecuaciones de actitud. Las leyes de Newton y Euler proporcionan las ecuaciones fundamentales de la dinámica de vehículos aeroespaciales

$$m^B D^I v_B^I = f \quad (2.275)$$

$$D^I (I_B^B \omega^{BI}) = m_B \quad (2.276)$$

Empleando la nomenclatura compacta proporcionada por las cantidades de movimiento lineal y angular:

$$\left. \begin{aligned} D^I p_B^I &= f \\ D^I l_B^{BI} &= m_B \end{aligned} \right\} \quad (2.277)$$

La clave es el centro de masa “B”. Sirve como punto focal para la cantidad de movimiento lineal “ p_B^I ”, abarcando toda la masa del cuerpo “B” como si fuese una partícula. Para la cantidad de movimiento angular “ l_B^{BI} ”, este es el punto de referencia que separa los movimientos de actitud de los grados de libertad traslacionales. Sin el centro de masa como punto de referencia, las ecuaciones de movimiento de vehículos aeroespaciales son más complejas.

2.8.3. Ecuaciones de Actitud para Simulaciones de Seis Grados de Libertad.

Las simulaciones de misiles emplean las ecuaciones de Euler en una forma que acomoda los coeficientes de momento aerodinámico y el tensor de momento de inercia en coordenadas corporales. Transfiriendo la derivada rotacional temporal de la ecuación (2.273) al marco corporal “B”, se tiene:

$$D^B (I_B^B \omega^{BI}) + \Omega^{BI} I_B^B \omega^{BI} = m_B \quad (2.278)$$

Eligiendo coordenadas corporales “B”, se tiene:

$$D^B ([I_B^B]^B [\omega^{BI}]^B) + [\Omega^{BI}]^B [I_B^B]^B [\omega^{BI}]^B = [m_B]^B \quad (2.279)$$

Aplicando la regla de la cadena en el primer término teniendo en cuenta que el momento de inercia de un cuerpo rígido se mantiene invariante en el tiempo “ $[dI_B^B/dt]^B = [0]$ ”, se obtienen las ecuaciones deseadas en formato para programación:

$$[I_B^B]^B \left[\frac{d\omega^{BI}}{dt} \right]^B + [\Omega^{BI}]^B [I_B^B]^B [\omega^{BI}]^B = [m_B]^B \quad (2.280)$$

CAPÍTULO 3. MODELADO DE SISTEMAS EN UN ENFOQUE DE BOND GRAPH

3.1.Introducción.

El modelado de sistemas físicos dinámicos requiere que la dinámica del sistema en el cual se intercambia potencia y energía sea entendida a profundidad. Este enfoque presenta métodos para el modelado de sistemas reales, maneras para analizar sistemas con el propósito de destacar el comportamiento del sistema y desarrolla técnicas para el uso de computadoras para simular la respuesta dinámica de los sistemas a estímulos externos.

La palabra “sistema” es empleada de manera tal que es complicado dar una definición significativa para aglomerar sus diversos significados. El uso del término “sistema” implica las siguientes suposiciones:

1. Se asume al sistema como una entidad aislada del resto del universo (entorno del sistema) mediante una frontera física o conceptual. Esto implica que ha de definirse qué pertenece al sistema y qué representa una alteración externa o instrucción proveniente del exterior del sistema.
2. Un sistema es compuesto por sus partes interactuantes. La reticulación de un sistema en sus partes componentes requiere habilidad y arte, dado que la mayoría de los sistemas puede separarse en tantas partes que cualquier análisis podría saturarse de detalles irrelevantes.

Estos dos aspectos pueden reconocerse en situaciones de la vida diaria así como en aplicaciones específicas que son de interés del análisis de sistemas dinámicos.

La llamada “perspectiva del sistema” es lo que se observa del comportamiento operativo del sistema en su conjunto, en lugar de la observación de la operación de sus componentes. Un conjunto de “buenos componentes” pueden unirse en un sistema no satisfactorio.

En ingeniería, las tareas asociadas con el diseño u operación de un sistema se descomponen en partes, las cuales pueden ser trabajadas con algún grado de aislamiento. Todos los grupos separados trabajando en una tarea general deben trabajar de alguna manera que asegure que no sólo las partes del sistema trabajen, sino que también el sistema en conjunto desempeñe su función intencionada. En ocasiones, suposiciones sobre-simplificadas acerca de cómo pudiese operar el sistema son hechas por aquellos que trabajan en una parte pequeña del sistema. Cuando esto ocurre los resultados pueden ser poco satisfactorios.

El principal énfasis del presente capítulo radica en mostrar aspectos del comportamiento del sistema sobre el estudio de aspectos de componentes. Esto requiere conocimiento de los componentes del sistema de interés y conocimiento en ciertas áreas de ingeniería que son instruidas y practicadas de manera aislada de otras áreas de ingeniería. En los sistemas abordados se tocan temas relacionados con vibraciones, resistencia de materiales, dinámica, mecánica de fluidos, termodinámica, control automático y circuitos eléctricos. Es común para

un ingeniero el desempeñarse a lo largo de su carrera en una sola disciplina a pesar del hecho de que solo algunos proyectos de ingeniería ocupan a una disciplina singular. Los ingenieros en sistemas deben tener conocimiento razonable de varias ciencias ingenieriles, así como conocimiento pertinente del estudio de sistemas *per sé*.

A pesar de que muchos sistemas pueden ser diseñados satisfactoriamente mediante la cuidadosa atención de la operación estática o de estado estable, en las cuales las variables son asumidas para permanecer constantes en el tiempo, el interés se centra en sistemas dinámicos, que son aquellos cuyo comportamiento como función del tiempo es importante.

Generalmente, ningún sistema opera en verdadero estado estable o estático, y tanto cambios evolucionarios lentos en el sistema como efectos de transición de tiempo corto asociados con el arranque o paro del sistema son importantes. El análisis de sistemas dinámicos es más complejo que el análisis estático; no obstante, las decisiones basadas en estos últimos pueden ser engañosas. Los sistemas pueden nunca llegar a un posible estado estable debido a alteraciones externas o inestabilidades que aparecen cuando los sistemas dinámicos son tomados en cuenta. Sistemas de todo tipo pueden mostrar comportamiento contra-intuitivo cuando son considerados estáticamente. Un cambio en un sistema o una política de control puede parecer benéfica en el corto plazo a partir de consideraciones estáticas, pero puede tener repercusiones opuestas al efecto inicial a largo plazo. En ingeniería, es posible tener algún entendimiento de la respuesta dinámica de un sistema antes de realizar un estudio razonable del sistema con un enfoque estático.

3.1.1. Modelos de Sistemas.

La idea central involucrada en el estudio de la dinámica de sistemas reales es la idea de un “modelo” del sistema. Los modelos de sistemas son construcciones abstractas y simplificadas empleadas para predecir su comportamiento. Los modelos físicos a escala son comunes en ingeniería.

La característica de estos modelos es que algunos de los aspectos del sistema real son reflejados en el modelo. Los ingenieros asumen que algunos de los aspectos del sistema real son irrelevantes, así el modelo contiene solo aquellos que son importantes para analizar las características bajo estudio.

En esta sección se consideran los modelos matemáticos. A pesar de que estos pueden parecer más abstractos que los modelos físicos, existen similitudes fuertes entre ellos. El modelo matemático es empleado para predecir solo ciertos aspectos de la respuesta del sistema a entradas.

Dado que un modelo debe ser una simplificación de la realidad, hay un gran aspecto de arte en la construcción de modelos. Un modelo sumamente detallado y complejo puede contener parámetros virtualmente imposibles de estimar, puede ser prácticamente imposible de analizar y puede ocultar resultados importantes en una mezcla de detalles irrelevantes, si es que puede ser analizado. Un modelo sumamente simplificado no será capaz de exhibir efectos

importantes. Ningún sistema puede ser modelado con completa exactitud, y cualquier diseñador de componentes de sistemas necesita tener un procedimiento para construir una variedad de modelos de sistemas de complejidad variada a manera de encontrar el modelo más simple capaz de responder las cuestiones acerca del sistema bajo estudio.

El objetivo del presente tiene que ver con modelos de sistemas, con los procedimientos para construir modelos y en extraer características del sistema de los modelos. Los modelos serán modelos matemáticos en el sentido usual de la palabra, a pesar de que están representados mediante gráficos estilizados e impresiones computacionales en lugar del conjunto convencional de ecuaciones diferenciales.

Los modelos de sistemas son construidos empleando una notación uniforme para todos los tipos de sistemas físicos. Modelos basados en diversas ramas de la ingeniería pueden ser expresados usando la notación “Bond Graph” (enlace gráfico), basado en energía e información de flujo. Esto permite estudiar la estructura del modelo del sistema. La naturaleza de las partes del modelo y la manera en la cual estas interactúan pueden hacerse evidentes en un formato gráfico. De esta manera, son notorias las analogías entre varios tipos de sistemas y la experiencia en un campo puede extenderse a otros.

Usando el lenguaje de “bond graphs” se construyen modelos de sistemas mecánicos, eléctricos, térmicos, magnéticos, hidráulicos, neumáticos, entre otros, usando un conjunto pequeño de elementos ideales. Técnicas estandarizadas permiten transformar los modelos en ecuaciones diferenciales o en esquemas de simulación computacional. Históricamente los diagramas para representar modelos de sistemas dinámicos eran desarrollados de manera separada para cada tipo de sistema, cuyos elementos son representados por bocetos de los dispositivos a los que refieren.

Cuando se estudian sistemas mixtos o combinados, las maneras convencionales de representarlos son de menor grado de desarrollo. Solo algunos diagramas son lo suficientemente explícitos acerca de los efectos a incluir en el modelo. Un “bond graph” es más abstracto que tales diagramas. El lenguaje universal provisto por “bond graph” permite mostrar la estructura esencial del modelo de un sistema, incluso para sistemas mixtos.

3.1.1.1. Sistemas, subsistemas y componentes.

Para modelar un sistema es necesario descomponerlo en partes pequeñas que pueden ser modeladas y estudiadas experimentalmente para posteriormente ensamblar el modelo del sistema a partir de sus partes. En ocasiones la descomposición del sistema es lograda en varias etapas. En lo sucesivo, las partes más grandes del sistema se denominan “subsistemas” y las partes primitivas de los subsistemas se denominan “componentes”. La jerarquía de componentes, subsistemas y sistemas no es absoluta, dado que la parte más primitiva de un sistema puede ser modelada en un detalle tal que pudiera considerarse un subsistema complejo. En varias aplicaciones de ingeniería, las categorías de componentes y subsistemas son obvias.

Un subsistema es una parte de un sistema que puede modelarse como un solo sistema, a partir de sus componentes interactuantes. Un componente es modelado como una unidad y no es idealizado como si estuviese compuesto por partes más simples. Es necesario saber la forma en que los componentes interactúan entre sí y se debe tener una caracterización del componente, de otra manera un componente sería tratado como una caja negra sin la necesidad de saber qué es lo que provoca su funcionamiento.

Es posible tratar algunos subsistemas como componentes si sus interacciones con el resto del sistema pueden ser especificados sin conocimiento de su constitución interna.

3.1.1.2. Sistemas determinados por sus estados.

Los modelos determinados por sus estados son aquellos descritos mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias en términos de las denominadas “variables de estado” y un conjunto de ecuaciones algebraicas que relaciona otras variables de interés con las variables de estado. A pesar de que algunas técnicas de análisis y simulación computacional no requieren que se describan las ecuaciones de estado, desde una perspectiva matemática, todos los modelos de sistemas son determinados por sus estados.

El futuro de las variables asociadas con sistemas determinados por sus estados puede predecirse si:

- 1) Las variables de estado son conocidas en algún punto temporal inicial.
- 2) La historia futura de las cantidades de entrada del entorno es conocida.

Tales modelos tienen algunas implicaciones filosóficas. Los eventos en el futuro no afectan el estado presente del sistema. Esta implicación se correlaciona con la consideración de que el tiempo avanza en una sola dirección, de pasado a futuro. Que los modelos deban tener estas propiedades parece plausible, aun así es difícil el concebir una demostración de que los sistemas reales siempre tienen estas propiedades.

Claramente, la historia pasada puede tener un efecto en un sistema; aun así, la influencia del pasado se presenta de manera especial en sistemas determinados por sus estados. Toda la historia de un sistema determinado por sus estados está resumida en los valores presentes de sus variables de estado. Esto significa que muchas de las historias pasadas pudieron haber resultado en el mismo valor presente de las variables de estado y, en consecuencia, en el mismo comportamiento futuro del sistema. Esto igualmente indica que si se puede condicionar al sistema a entregar las variables de estado en algunos valores particulares, entonces la respuesta futura del sistema es determinada por futuras entradas y nada es importante acerca del pasado, excepto que las variables de estado fueron llevadas a tales valores.

Los experimentos científicos se llevan a cabo como si los sistemas bajo estudio fuesen determinados por sus estados. El sistema es inicializado a partir de condiciones controladas que son expresadas en términos de las variables cuidadosamente monitoreadas. Si el

experimento es repetible, entonces se asume que las variables de estado son inicializadas apropiadamente mediante las operaciones empleadas en la preparación del experimento. Si el experimento no es repetible, entonces se asume que alguna influencia importante no ha sido controlada. Esta influencia puede ser una variable de estado que no fue monitoreada e inicializada de manera apropiada o una cantidad de entrada no reconocida a través de la cual el entorno influye en el sistema.

Los modelos de sistemas determinados por sus estados han probado su utilidad. Para los sistemas macroscópicos encontrados en ingeniería, los modelos de sistemas determinados por sus estados son casi universales, y hay interés continuo en el desarrollo de tales modelos para sistemas sociales y económicos.

3.1.1.3. Usos de modelos dinámicos.

En la Figura 3.1 se muestra un modelo de sistema dinámico de forma esquemática. El sistema “ S ” es caracterizado mediante un conjunto de variables de estado indicado por “ X ” que son influenciadas por un conjunto de variables de entrada “ U ”, el cual representa la acción del entorno del sistema en el sistema. El conjunto de variables de salida “ Y ” son aspectos observables de la respuesta del sistema o efectos de retorno del sistema hacia el entorno. Este tipo de modelo de sistema dinámico puede ser empleado de tres maneras:

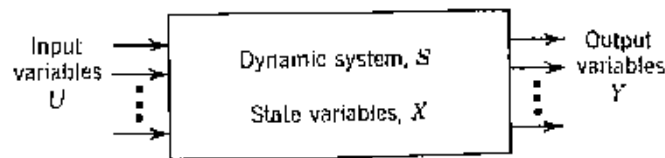


Figura 3.1. Modelo general de un sistema dinámico [46].

1. Análisis. Dados “ U ” para el futuro, “ X ” para el presente y el modelo “ S ”, predecir el futuro de “ Y ”. Asumiendo que el modelo del sistema es una representación aproximada del sistema real, las técnicas de análisis permiten predecir el comportamiento del sistema.
2. Identificación. Dadas las historias temporales de “ U ” y “ Y ”, usualmente mediante experimentación en sistemas reales, encontrar un modelo “ S ” y variables de estado “ X ” que sean consistentes con “ U ” y “ Y ”. Un “buen” modelo es aquel consistente con una gran variedad de conjuntos “ U ” y “ Y ”.
3. Síntesis. Dados “ U ” y algún valor “ Y ” deseado, encontrar “ S ” de tal manera que “ U ” actuando sobre “ S ” produzca “ Y ”. La mayor parte de la ingeniería trata con la síntesis, pero solo en contextos limitados existen métodos de síntesis directa. Con frecuencia es suficiente con lograr la síntesis de sistemas a través de procesos de prueba y error de análisis repetitivos de una serie de sistemas candidatos. Respecto a esto, los modelos dinámicos juegan un rol vital, dado que el progreso sería lento si se tuviese

que construir cada sistema candidato “en el metal” en orden de descubrir sus propiedades.

El presente se concentra en la preparación de modelos de sistemas y predecir el comportamiento de los sistemas usando técnicas analíticas o computacionales. De este modo se concentra en el análisis, pero es importante recordar que las técnicas son útiles para la identificación de problemas y que el mayor desafío para un ingeniero de sistemas es sintetizar los sistemas deseados. El análisis, excepto en servicio de la síntesis, no es más que una búsqueda estéril para un ingeniero.

Se introduce la idea de sistemas como dispositivos de manejo de energía. Se desarrollan conjuntos de variables de energía generalizadas y de elementos de sistemas.

Las ideas se especifican con referencia a sistemas eléctricos, mecánicos, hidráulicos, neumáticos y térmicos. Las restricciones energéticas introducidas por la interconexión de elementos de sistemas se usan para especificar ciertas constantes interconectivas básicas y, por lo tanto, obtener modelos matemáticos.

3.2. Variables Generalizadas y Elementos de Sistemas.

El objetivo del modelador de sistemas es obtener, en forma matemática, una descripción del comportamiento dinámico de un sistema en términos de variables físicas significativas. Así como la naturaleza del sistema cambia, las variables del sistema también lo hacen. Por ejemplo, las variables comúnmente usadas en sistemas eléctricos son el voltaje y la corriente eléctrica; en sistemas mecánicos, la fuerza y la velocidad; en sistemas de fluidos, la presión y el flujo volumétrico (caudal). A pesar de las diferencias en las variables físicas usadas para caracterizar sistemas en varias disciplinas, existen ciertas similitudes fundamentales, y es del interés del analista buscarlas y explotarlas de tal manera que la tarea del modelado sea facilitado y se incremente la visión general del desempeño dinámico de sistemas físicos.

Un concepto unificador empleado para este propósito es el de “energía”. Un sistema físico puede presentarse como aquel que opera sobre un par de variables cuyo producto es “potencia”. Los componentes físicos que forman parte del sistema pueden ser pensados como manipuladores de energía, los cuales, dependiendo de la manera en que estén interconectados, procesan la energía introducida al sistema de forma característica, la cual es observada como respuesta del sistema dinámico. De la misma manera, el comportamiento entrada-salida de un sistema se da si la energía puede considerarse como si fuera inyectada a un sistema a través de un puerto de energía, con un puerto similar aplicado para leer la respuesta del sistema.

Se identifica una clase de sistemas los cuales tienen un par de variables asociadas con la transferencia de energía. Las formas generalizadas de estas variables de sistema son las cantidades abstractas “esfuerzo” y “flujo”. Los elementos de sistemas son postulados para los fenómenos fundamentales de almacenamiento de energía, generación de energía y disipación de energía.

3.2.1. Variables de Sistema.

La idea de sistemas como manipuladores de energía, los cuales interactúan con entradas y salidas a través de puertos de energía, es un modelo conceptual el cual engloba un amplio rango de sistemas físicos. En orden de desarrollar esta noción, es necesario examinar el mecanismo de interacciones energéticas en términos de las denominadas “variables de sistema” las cuales determinan cómo y en qué sentido se transmite la energía. Un ejemplo simple de transmisión de energía es una fuente eléctrica conectada a una carga resistiva. El suministro de poder es una fuente de energía, el resistor es el sistema y el puerto de energía conectándolos es el par de cables conductores. La transmisión de potencia hacia el resistor es dada como el producto de las variables de sistema, voltaje “ v ” y corriente eléctrica “ i ”: “Potencia = vi ”. Donde la energía entregada entre el tiempo “ $t = 0$ ” y el tiempo “ t_1 ” es la integral respecto al tiempo de la potencia:

$$\varepsilon = \int_0^{t_1} vi dt \tag{3.1}$$

En un sistema de fluido, el fenómeno de transmisión de energía puede ser ilustrado mediante un esquema de generación hidroeléctrica. Un tanque de reserva conectado mediante tubería a una estación de generación de potencia. El tanque es la fuente de energía hidráulica conectado mediante un puerto de energía (tubería) a un sistema (la estación de generación de potencia). Las variables del sistema que dan la potencia suministrada a la estación de generación son el flujo volumétrico “ Q ” y la presión “ P ” medida en la entrada con respecto a alguna referencia de presión, de tal manera que: “Potencia = PQ ”.

De nuevo, la energía entregada entre el tiempo “ $t = 0$ ” y el tiempo “ t_1 ” es la misma integral de potencia:

$$\varepsilon = \int_0^{t_1} PQ dt \tag{3.2}$$

Un sistema mecánico simple es el descrito por un amortiguador mecánico anclado en un extremo, con el otro moviéndose a una velocidad “ V ” bajo la acción de una fuerza “ F ”. Las variables del sistema que determinan el intercambio energético son la fuerza en el vástago del amortiguador y la velocidad medida respecto a alguna referencia de velocidad. El puerto de energía es el vástago conectado a la entrada de fuerza y el amortiguador, y la energía entregada a través de este puerto, es:

$$\varepsilon = \int_0^{t_1} VF dt \tag{3.3}$$

3.2.2. Esfuerzo y Flujo: Variables Generalizadas del Sistema.

El acto de entrega de energía es asociado con una variable intensiva (por ejemplo, corriente o flujo de fluido) dando el cambio de flujo de energía, y una variable extensiva (por ejemplo, voltaje o presión) dando el paso a flujo de energía. En un sentido generalizado las dos variables de energía pueden ser pensadas como una variable de esfuerzo y una variable de flujo. En consecuencia, un puerto abstracto de energía puede ser esquematizado mediante un par de terminales con un par de variables generalizadas, esfuerzo “ e ” y flujo “ f ”, las cuales representan el mecanismo de transferencia de energía.

Una manera aproximada en la cual pueden racionalizarse las variables generalizadas de flujo y esfuerzo ha sido provista mediante la analogía de movilidad. Esto involucra la clasificación de variables de sistema de acuerdo al esquema de medición requerido para medirlas. Se requieren dos tipos de medición, uno transversal y otro longitudinal. El primero requiere una referencia respecto a la cual referir sus mediciones, en este sentido es un medidor de dos terminales, conectado transversalmente a dos puntos en el espacio y así medir una variable espacialmente extensiva. Ejemplos de medidores transversales son los voltímetros, manómetros, termómetros y transductores de velocidad. Un medidor longitudinal, por otro lado, no requiere un punto de referencia separado, es insertado dentro del sistema y mide la tasa de flujo a través de sí mismo, de una forma físicamente intensiva. Ejemplos de medidores longitudinales son los medidores de flujo, amperímetros y transductores de fuerza.

En términos de variables generalizadas, el esfuerzo es normalmente visualizado como una variable transversal (extensiva) y el flujo como una variable longitudinal (intensiva). En disciplinas específicas, sin embargo, la asignación de esfuerzo y flujo es (en un sentido formal) arbitrario, dado que hace una pequeña diferencia en el modelo matemático final. El concepto de variable longitudinal o transversal proporciona una manera uniforme de asignar variables de sistema, la cual, en la mayoría de los casos, consiste en intuición física.

La distinción entre variables espacialmente extensivas y físicamente intensivas suele hacerse mediante el uso de prefijos latinos. En este sentido, las variables transversales son “trans-variables” y las variables longitudinales, “per-variables”.

3.2.3. Potencia y Energía.

En el esquema generalizado de sistemas manipuladores de energía, el producto de la variable de flujo “ f ” y la variable de esfuerzo “ e ” es la potencia instantánea asociada con el puerto de energía o el par de terminales, caracterizados por dichas variables. La energía transferida entre un par de terminales “ a ” y “ b ” en el intervalo de tiempo de “ $t = 0$ ” a “ t_1 ” está dada por:

$$\varepsilon_{ab}(t_1) = \int_0^{t_1} ef dt \tag{3.4}$$

Potencia y energía son variables orientadas, cuyo signo depende de la convención de signos empleada para las variables de flujo y esfuerzo. Para el caso de la relación anterior, se tiene que “ e ” y “ f ” son asumidas positivas en el tiempo “ t ”, entonces, la potencia instantánea es positiva y dirigida de “ a ” a “ b ”. La energía indica la magnitud y sentido de la transferencia neta de energía en el intervalo de “ $t = 0$ ” a “ t_1 ”, pero debe considerarse con respecto a las convenciones para flujo y esfuerzo positivos.

3.2.4. Energía almacenada y estado.

Un sistema que no tiene memoria no tiene capacidad de almacenar información acerca de su historia pasada. Éste responderá de una manera determinada solamente debido a sus entradas instantáneas. Por observación práctica, es claro que tales sistemas existen solamente en situaciones idealizadas, para tal improbable implicación es que se da un sistema de memoria cero que responde instantáneamente a cambios en sus entradas. En la mayoría de los casos, por lo tanto, se encontrarán sistemas los cuales almacenan información acerca de sus comportamiento pasado tal que su respuesta a estímulos es una función de valores de entrada pasados y presentes.

En la interpretación energética del comportamiento del sistema, el almacenamiento de información es sinónimo de almacenamiento de energía, y la forma más simple de almacenamiento que puede concebirse es mediante una integración respecto al tiempo. En consecuencia, dicha energía almacenada está dada por:

$$\varepsilon = \int_0^t ef dt \tag{3.5}$$

Existen dos mecanismos fundamentales para el almacenamiento de energía. El primero es en términos del esfuerzo almacenado y el segundo en términos del flujo almacenado. Se definen dos nuevas variables para contabilizar la energía almacenada de esta manera. Para el esfuerzo acumulado, se define como acumulación de esfuerzo “ e_a ”, al asociado con una componente dada por:

$$e_a = \int_0^t e dt \tag{3.6}$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la empleada para la energía almacenada, se tiene que la energía asociada con la acumulación de esfuerzo es:

$$\varepsilon = \int_0^{e_a} f de_a \quad (3.7)$$

El flujo almacenado puede definirse como la acumulación de flujo “ f_a ” asociada con una componente del sistema dada por:

$$f_a = \int_0^t f dt \quad (3.8)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en aquella empleada para la energía almacenada, se tiene que la energía almacenada asociada con la acumulación de flujo es:

$$\varepsilon = \int_0^{f_a} e df_a \quad (3.9)$$

Las variables elementales de energía almacenada junto con los esfuerzos y flujos asociados especifican la historia en el tiempo del flujo de energía dentro de un sistema. De esta manera, la acumulación de esfuerzo y flujo se relacionan con el “estado” de un sistema dinámico. El comportamiento en el tiempo de un parámetro del sistema puede expresarse en términos de un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma:

$$\dot{x} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (3.10)$$

Con “ $i = 1, 2, \dots, n$ ”.

Donde “ \dot{x}_i ” son las denominadas variables de estado y, “ u_i ” son las entradas del sistema.

Las variables de energía almacenada (acumulación de esfuerzo y acumulación de flujo) forman un conjunto natural de variables de estado del sistema con las cuales se describe un sistema dinámico. Un sistema eléctrico, por ejemplo, puede idealizarse como una fuente de corriente “ i ” suministrando a un resistor. De esta forma el sistema no tiene memoria, dado que la variable del sistema “ v ” (el voltaje a través del resistor) responde de manera instantánea a la corriente suministrada de acuerdo a la ley de Ohm. Una manera de protección contra fallas o fluctuaciones en una fuente eléctrica es construir una memoria en el sistema en forma de un capacitor conectado transversalmente (en paralelo) a la fuente. Así, la variable del sistema “ v ” no responde inmediatamente a los cambios en “ i ”, dado que ahora es función de la entrada y de la energía almacenada en el capacitor. La variable acumulada en el

capacitor es la carga (integral respecto al tiempo de la corriente); y la carga en el capacitor forma una variable de estado natural del sistema.

3.3.Elementos Básicos de Sistemas.

Las variables físicas que interactúan en un sistema son el medio por el cual la energía es manipulada, y para una interpretación adecuada de las variables físicas, muchos sistemas pueden reducirse a una fundamentación básica de manipulación de energía. Para extender la idea de sistemas de manejo de energía, es necesario examinar los componentes que integran los sistemas físicos y clasificarlos de acuerdo a cómo procesan la energía. De esta manera, es posible generar un catálogo de elementos de sistemas con distintas propiedades de manejo de energía. A partir de un sistema físico simple pueden especularse los posibles roles de manejo de energía de elementos típicos.

Los elementos básicos de manejo de energía se clasifican de la siguiente manera:

1. Fuentes de energía. Existen dos tipos de fuentes generalizadas de energía: a) fuentes de variables transversales (extensivas) llamadas “fuentes de esfuerzo”; b) fuentes de variables longitudinales (intensivas) llamadas “fuentes de flujo”.
2. Almacenadores de energía. Existen dos tipos de almacenadores generalizados de energía: a) almacenadores de variables transversales llamados “almacenadores (acumuladores) de esfuerzo”; b) almacenadores de variables longitudinales llamados “almacenadores (acumuladores) de flujo”.
3. Disipadores de energía: sólo existe una forma de disipador y es llamado “disipador generalizado de energía”.

Estos cinco tipos de elementos generalizados de sistema forman el conjunto básico de elementos de manejo de energía con el cual pueden modelarse la mayoría de sistemas físicos. A pesar de que puede estandarizarse el tipo de elementos, el desempeño de componentes individuales de tipos similares puede diferir. El desempeño de dos dispositivos puede cuantificarse experimentalmente determinando su curva característica. Cualquier curva experimental o ley que especifique la característica física de un elemento de sistema es llamada “relación constitutiva” o “relación material”.

3.3.1. Propiedades Constitutivas de Fuentes de Energía.

Puede haber fuentes de flujo y fuentes de esfuerzo. Una fuente ideal de flujo entrega un flujo específico determinado por su relación constitutiva. La representación simbólica de una fuente ideal de flujo es el símbolo tomado de ingeniería eléctrica para las fuentes de corriente, y su relación constitutiva, en la práctica, es una función del tiempo, pero debe ser independiente al esfuerzo en las terminales.

La fuente ideal de esfuerzo entrega un esfuerzo determinado por la relación material específica, la cual puede ser una función arbitraria de tiempo, pero independiente del flujo

de la fuente. La potencia entregada por una fuente es el producto de las variables dirigidas de esfuerzo y flujo.

3.3.2. Propiedades Constitutivas de Almacenadores de Energía.

Un dispositivo que almacena energía mediante una integral respecto al tiempo, de acumulación de flujo, es denominado un almacenador de flujo. Si la acumulación de flujo se define como “ f_a ”, entonces, las propiedades físicas de un almacenador específico de flujo se determinan mediante una relación constitutiva que expresa la acumulación de flujo en un dispositivo como una función estática del esfuerzo en la salida del dispositivo:

$$f_a = \varphi(e) \tag{3.11}$$

Por lo general, las relaciones constitutivas de almacenadores de flujo no son lineales. El símbolo empleado para representarlos, es el del capacitor.

$$e = \varphi^{-1}(f_a) \tag{3.12}$$

La energía almacenada en un acumulador de flujo puede calcularse directamente de la relación constitutiva. Si se denomina como “ U ” a la energía de flujo almacenada, se tiene:

$$U = \int_0^t e f dt \tag{3.13}$$

Donde “ $U(t = 0) = 0$ ”, entonces, retomando la definición de acumulador de flujo, la relación anterior puede reescribirse como:

$$U = \int_0^{f_a} e df_a \tag{3.14}$$

Sustituyendo la relación constitutiva del almacenador:

$$U = \int_0^{f_a} \varphi^{-1}(f_a) df_a \tag{3.15}$$

La cual es la relación para la energía almacenada en un acumulador de flujo no lineal.

Para un almacenador lineal de flujo, se tiene:

$$f_a = Ce \tag{3.16}$$

Sustituyendo en la relación para energía almacenada, se tiene:

$$U = \frac{1}{2}Ce^2 \tag{3.17}$$

Si la energía de flujo es una función conocida de acumulación de flujo, la relación puede usarse para determinar el esfuerzo correspondiente:

$$e = \frac{\partial U}{\partial f_a} \tag{3.18}$$

Un dispositivo que almacena energía en términos de esfuerzo acumulado y cuyo flujo es una función de acumulación de esfuerzo, se denomina almacenador de esfuerzo. Un acumulador de esfuerzo general, no lineal, tiene una relación constitutiva que expresa la acumulación de esfuerzo como una función del flujo del dispositivo.

$$e_a = \varphi(f) \tag{3.19}$$

En términos del almacenador de esfuerzo generalizado se tiene que la relación constitutiva es:

$$f = \varphi^{-1}(e_a) \tag{3.20}$$

La energía almacenada en el acumulador de esfuerzo “ T ” puede ser evaluada a partir de la relación constitutiva de acuerdo con lo siguiente:

$$T = \int_0^t ef \, dt = \int_0^{e_a} f \, de_a = \int_0^{e_a} \varphi^{-1}(e_a) \, de_a \tag{3.21}$$

Para el caso de un acumulador lineal de esfuerzo, la energía almacenada es:

$$T = \frac{1}{2}Lf^2 \tag{3.22}$$

Si la energía asociada con el acumulador de esfuerzo es una función conocida de acumulación de esfuerzo, el flujo correspondiente está dado por:

$$f = \frac{\partial T}{\partial e_a} \quad (3.23)$$

3.3.3. Propiedades Constitutivas De Disipadores De Energía.

Sólo existe un dispositivo básico para disipar energía. Estrictamente no existe un verdadero disipador de energía, dado que los dispositivos que se modelan de esta forma son convertidores de energía que transforman energía en otra (usualmente térmica) la cual no es recuperable para el sistema. El disipador simple es un dispositivo cuya relación constitutiva relaciona estáticamente el dispositivo con las variables de esfuerzo y flujo.

La relación constitutiva general tiene la siguiente forma:

$$e = \varphi(f) \quad (3.24)$$

De forma lineal, se expresa como:

$$e = Rf \quad (3.25)$$

Por definición, un disipador no almacena energía, sin embargo, la potencia instantánea absorbida por un disipador está dado por:

$$ef = \int_0^f e df + \int_0^e f de = G + J \quad (3.26)$$

Si el contenido del disipador es una función conocida de flujo, entonces el esfuerzo está dado por:

$$e = \frac{\partial G}{\partial f} \quad (3.27)$$

De manera análoga, si el contenido del disipador es una función conocida de esfuerzo, el flujo está dado por:

$$f = \frac{\partial J}{\partial e} \quad (3.28)$$

Para un disipador lineal, las cantidades “ G ” y “ J ” son iguales, y tienen un valor igual a la mitad de la potencia absorbida por el disipador.

3.4.Elementos adicionales del sistema.

El conjunto de elementos generalizados del sistema considerados anteriormente son suficientes para describir una amplia gama de sistemas. Sin embargo, están limitados dado que no modelan funciones básicas de manipulación de energía como transformación de energía o acoplamiento de sub-sistemas. Las deficiencias de los elementos básicos radican en que son dispositivos de un puerto o dos terminales y, para representar transformación de energía o elementos de acoplamiento se requiere de dispositivos de dos o más puertos de energía. Un acumulador de esfuerzo es un elemento que se comunica mediante un puerto de energía o un par de terminales. Mientras que una caja de engranajes, por ejemplo, tiene dos puertos de energía, uno asociado con el torque “ τ_1 ” y la velocidad “ ω_1 ”, y otro asociado con el torque “ τ_2 ” y con la velocidad “ ω_2 ”. Además, los puertos de energía están, en el caso ideal, acoplados estáticamente mediante una relación constitutiva de la forma:

$$\omega_2 = n\omega_1 \tag{3.29}$$

$$\tau_1 = n\tau_2 \tag{3.30}$$

Donde “ n ” es la relación de engranaje de una caja de transmisión.

Una característica de una transmisión ideal es que no se disipa o almacena potencia en ella, dado que a la potencia en el puerto “1” siempre es igual a la potencia en el puerto “2”. Es improbable que un conjunto de almacenadores y disipadores pueda modelar una transmisión ideal ya que se requieren elementos multipuerto de sistemas para tal propósito.

El elemento generalizado de dos puertos (cuatro terminales) que satisface este propósito, es un elemento de conservación de potencia de dos puertos cuya relación constitutiva es:

$$e_2 = \varphi_1(e_1, f_1) \tag{3.31}$$

$$f_2 = \varphi_2(e_1, f_1) \tag{3.32}$$

Además, se establece la siguiente restricción de conservación de potencia entre las variables del sistema:

$$e_1f_1 = e_2f_2 \tag{3.33}$$

Este elemento transforma energía de acuerdo a las ecuaciones constitutivas no lineales descritas anteriormente, sin disipación intermedia, ni generación, ni almacenamiento de

energía. Un elemento conservativo lineal de este tipo tiene la siguiente relación constitutiva, donde la restricción de conservación de potencia es aplicable:

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Destacan dos formas específicas de conservadores de potencia de dos puertos: el transformador ideal y el girador ideal. El transformador ideal tiene una relación constitutiva de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Donde “ n ” es el módulo del transformador.

El girador ideal tiene una relación constitutiva de la forma:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r \\ r^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Donde “ r ” es el módulo del transformador.

Los elementos anteriormente descritos son ampliamente usados en el modelado de sistemas para representar fenómenos de transformación o transducción de potencia. Para transformación de potencia dentro de un medio energético específico, el girador se presenta con frecuencia. Giradores y transformadores se presentan con la misma probabilidad en el modelado de dispositivos transductores de energía de un dominio a otro.

En ciertos casos se emplea el método de redes para modelado de sistemas para separar los componentes de un sistema en conjuntos equivalentes de elementos de un puerto. Por esta razón, es conveniente representar transformadores y giradores ideales como pares de fuentes de energía acoplados entre sí.

Las variables generalizadas de sistemas y elementos discutidos proveen una base uniforme para el análisis de una amplia gama de sistemas físicos. Los elementos requeridos para modelar la mayoría de las funciones de manejo de energía se reduce a un conjunto de cinco dispositivos de un puerto, junto con un dispositivo simple de conservación de potencia para representar transformación y transducción energética. En ocasiones es necesario utilizar dispositivos multipuerto especiales para especificar componentes complejos de sistemas, los cuales requieren un análisis detallado.

3.5. Sistemas Multipuerto y Bond Graphs.

3.5.1. Multipuertos en Ingeniería.

En la Figura 3.2 se presenta una colección representativa de subsistemas o componentes empleados en sistemas ingenieriles. A pesar de que los subsistemas descritos son bastante elementales, introducen el concepto de un multipuerto ingenieril. El término “ingeniería” es empleado para implicar que los dispositivos son usados para la construcción de sistemas diseñados para cumplir objetivos específicos. “Multipuerto” hace referencia a un punto de vista tomado en la descripción de los subsistemas.

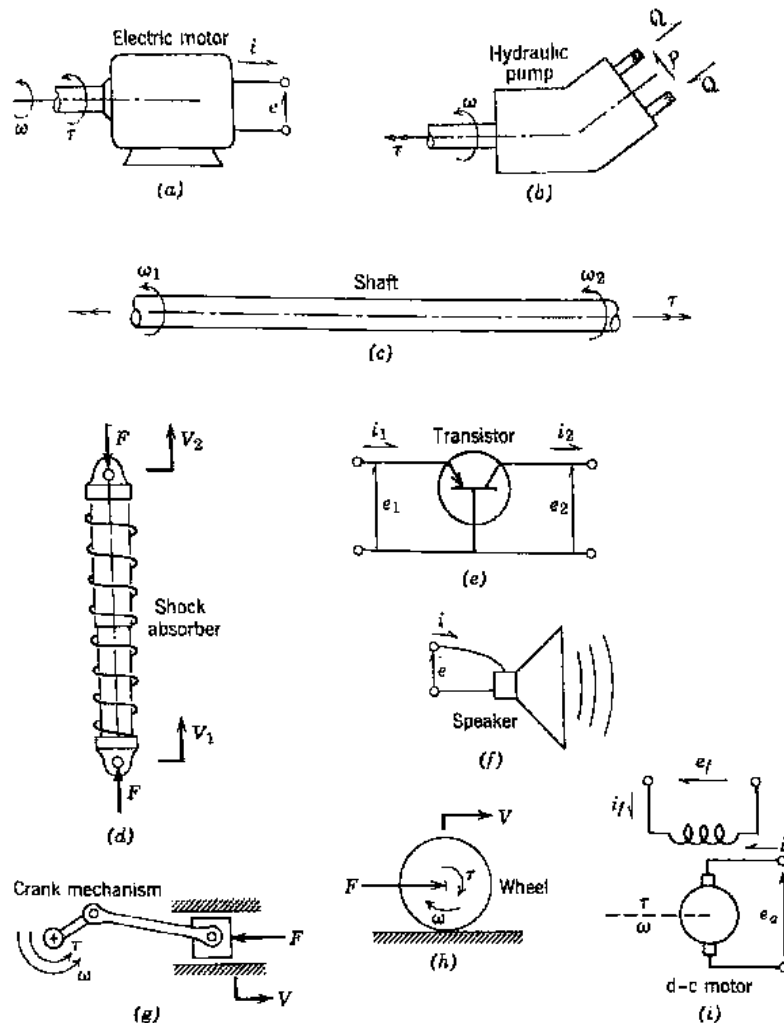


Figura 3.2. Colección de multipuertos en ingeniería [46].

En la Figura 3.2 se identifican algunas variables que han sido etiquetadas en los subsistemas. Estas son torques, velocidades angulares, fuerzas, velocidades, voltajes, corrientes, presiones y tasas de flujo volumétrico. Las variables ocurren en pares asociados con puntos en los

cuales los subsistemas pudieran conectarse con otros para formar un sistema. Es posible, entonces, acoplar la flecha de salida de un motor eléctrico a una terminal de una flecha conductora y la flecha de un motor hidráulico al otro extremo de la flecha conductora. Después del acoplamiento, el torque y la velocidad del motor serán idénticos al torque y la velocidad de un extremo de la flecha conductora. De manera similar el torque y la velocidad del otro extremo de la flecha conductora serán idénticos al torque y la velocidad de la bomba hidráulica. (Si la flecha conductora no fuese rígida, entonces las dos velocidades angulares “ ω_1 ” y “ ω_2 ” en los extremos de la flecha conductora no serían necesariamente iguales en cualquier instante). Generalmente cuando dos componentes o subsistemas son conectados de manera física, dos variables complementarias son simultáneamente restringidas a ser iguales para los dos subsistemas.

Los lugares en los cuales los subsistemas pueden interconectarse son aquellos en los que la potencia puede fluir mutuamente. Tales lugares son llamados “puertos”, y los sistemas físicos con uno o más puertos son llamados “multipuertos”. Un sistema con un solo puerto es llamado “1-puerto”, un sistema con dos puertos es llamado “2-puertos” y así consecutivamente. Los multipuertos en la Figura 3.2a-h son mostrados como de dos puertos. La Figura 3.2f es de un puerto mientras sea considerado como un elemento eléctrico y no como un elemento que acopla subsistemas eléctricos y acústicos. La Figura 3.2i es mostrada como un subsistema de tres puertos.

Las variables enlistadas para los multipuertos de la Figura 3.2 y aquellas que son forzadas a ser idénticas cuando dos multipuertos se conectan son llamadas “variables de potencia”, dado que el producto ambas variables, consideradas como funciones de tiempo, es la potencia instantánea fluyendo entre los dos multipuertos. Dado que la potencia puede fluir en cualquier dirección, se establece una convención de signos para las variables de potencia.

Tabla 3.1. Algunas cantidades de esfuerzo y flujo.

| Dominio | Esfuerzo $e(t)$ | Flujo $f(t)$ | | |
|-----------------------|----------------------|--------------|---------------------------------|-------------|
| Mecánico traslacional | Componente de fuerza | $F(t)$ | Componente de velocidad | $V(t)$ |
| Mecánico rotacional | Componente de torque | $\tau(t)$ | Componente de velocidad angular | $\omega(t)$ |
| Hidráulico | Presión | $P(t)$ | Tasa de flujo volumétrico | $Q(t)$ |
| Eléctrico | Voltaje | $e(t)$ | Corriente | $i(t)$ |

Dado que las interacciones de potencia están presentes cuando dos multipuertos se conectan, las diversas variables de potencia se clasifican en un esquema universal para describir todos los tipos de multipuertos en un solo lenguaje. Todas las variables de potencia pueden llamarse “esfuerzo” o “flujo”. La Tabla 3.1 muestra las variables de esfuerzo y flujo para varios tipos de intercambio de potencia. Como lo indica la tabla, los símbolos “ $e(t)$ ” y “ $f(t)$ ” son empleados para denotar cantidades de esfuerzo y flujo como funciones del tiempo. Para aplicaciones específicas se puede emplear notación más tradicional alusiva a la variable física involucrada. Una situación respecto al análisis de sistemas que se hace evidente a medida que los problemas involucran varios dominios de energía es que es difícil establecer una

notación que no entre en conflicto con la de uso convencional. En la Tabla 3.1, por ejemplo, una fuerza es una cantidad de esfuerzo “ $e(t)$ ”, a pesar de que el uso común de la letra “ F ” para denotar fuerza puede ser confundida con “ $f(t)$ ”, la cual se establece para una cantidad de flujo. Estas dificultades de notación son molestas pero no fundamentales, y no pueden evitarse a no ser que se use una notación completamente nueva. Se emplean, entonces, la notación generalizada de “ e ” y “ f ” y la notación física descrita en la Figura 3.2 y en la Tabla 2.1. El contexto en el cual se empleen los símbolos resolverá cualquier ambigüedad de significación. La potencia “ $P(t)$ ” que fluye hacia o desde un puerto puede ser expresada como el producto de una variable de esfuerzo y una de flujo y, de esta manera, en notación general, es dada por la siguiente expresión

$$P(t) = e(t)f(t) \tag{3.37}$$

En un sistema dinámico las variables de esfuerzo y flujo, y, en consecuencia, la potencia, fluctúan en el tiempo. Sobresalen otros dos tipos de variables en la descripción de sistemas dinámicos, llamadas comúnmente “variables de energía” son “cantidad de movimiento”, “ $p(t)$ ”, y “desplazamiento”, “ $q(t)$ ”, en notación generalizada.

La cantidad de movimiento es definida como la integral temporal de un esfuerzo. Lo cual es:

$$p(t) \equiv \int_{t_0}^t e(t)dt = p_0 + \int_{t_0}^t e(t)dt \tag{3.38}$$

Puede emplearse la integral temporal indefinida o puede definirse “ p_0 ” como la cantidad de movimiento inicial al tiempo “ t_0 ” y usar la integral definida de “ t_0 ” a “ t ”. De la misma manera la variable de desplazamiento es la integral temporal de una variable de flujo

$$q(t) \equiv \int_{t_0}^t f(t)dt = q_0 + \int_{t_0}^t f(t)dt \tag{3.39}$$

La segunda expresión integral indica que al tiempo “ t_0 ” el desplazamiento es “ q_0 ”.

Otra manera de escribir las definiciones anteriores es partir de la consideración diferencial en lugar de las formas integrales:

$$\frac{dp(t)}{dt} = e(t) \Rightarrow dp = e(t)dt \tag{3.38a}$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = f(t) \Rightarrow dq = f(t)dt \quad (3.39a)$$

La energía “ $E(t)$ ” que ha pasado hacia o desde un puerto es la integral temporal de la potencia “ $P(t)$ ”. De esta manera:

$$E(t) \equiv \int^t P(t)dt = \int^t e(t)f(t)dt \quad (3.40)$$

La razón de que “ p ” y “ q ” sean llamadas variables de energía es que puede escribirse “ edt ” como “ dp ” o “ $f dt$ ” como “ dq ” al usar las ecuaciones (3.38a) y (3.39a). Así se obtienen expresiones alternativas para “ E ”:

$$E(t) = \int^t e(t)dq(t) = \int^t f(t)dp(t) \quad (3.41)$$

Es posible encontrar casos en los cuales un esfuerzo es una función de un desplazamiento o un flujo es función de una cantidad de movimiento. Entonces la energía puede ser expresada no solo como función de tiempo sino también como función de alguna de las variables de energía. De tal manera que:

$$E(q) = \int^q e(q)dq \quad (3.41a)$$

O, de manera análoga:

$$E(p) = \int^p e(p)dp \quad (3.41b)$$

Esto provee la motivación de llamar a “ p ” y “ q ” como variables de energía en distinción de las variables de potencia “ e ” y “ f ”.

En la Figura 3.3 se muestra el recurso nemotécnico llamado “tetraedro de estado”. Los cuatro tipos de variables “ e ”, “ f ”, “ p ” y “ q ” son asociadas con los cuatro vértices del tetraedro. A lo largo de dos de las aristas del tetraedro se indican las relaciones entre “ e ” y “ p ”, y entre “ f ” y “ q ”.

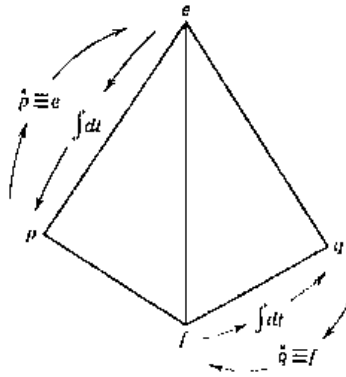


Figura 3.3. Tetraedro de estado [46].

Los únicos tipos de variables necesarios para modelar sistemas físicos están representados por las variables de potencia y las de energía, “e”, “f”, “p” y “q”.

La Tabla 3.2 presenta variables de potencia y energía para puertos de traslación mecánica. Dado que las variables de potencia son consideradas como primitivas, las unidades de las variables restantes provienen de una elección en las unidades para las variables de potencia. En el Sistema Internacional de Unidades (SI) la potencia es medida en newton-metros por segundo ($N \cdot m/s$) o los equivalentes watts (W). De manera similar, la energía es medida en newton-metros ($N \cdot m$) o los equivalentes joules (J). Así, si las variables “e”, “f”, “p” y “q” son dadas en unidades SI, no se requieren conversiones de unidades para contabilizar adecuadamente las interacciones de potencia y energía.

Tabla 3.2. Variables de potencia y energía para sistemas mecánicos traslacionales.

| Variables generalizadas | Traslación mecánica | | Unidades SI |
|-------------------------|---------------------|--------------------------------|-----------------------|
| Esfuerzo | <i>e</i> | Fuerza | <i>F</i> N |
| Flujo | <i>f</i> | Velocidad | <i>V</i> m/s |
| Cantidad de movimiento | <i>p</i> | Cantidad de movimiento | <i>P</i> N · s |
| Desplazamiento | <i>q</i> | Desplazamiento | <i>X</i> m |
| Potencia | <i>P</i> | $F(t)V(t)$ | N · m/s |
| Energía | <i>E</i> | $\int_x^x F dx; \int_p^p V dP$ | N · m |

La mayoría de los programas computacionales para procesamiento de “bond graphs” en sus ecuaciones diferenciales equivalentes, para el subsecuente análisis y simulación, son incapaces de incorporar factores de conversión y, por tanto, asumen de manera esencial que se ha empleado el SI. Después de que un análisis o simulación ha sido completado, es cuestión de convertir algunos resultados al sistema de unidades deseado.

Tabla 3.3. Variables de potencia y energía para puertos mecánicos rotacionales.

| Variables generalizadas | Traslación mecánica | | | Unidades SI |
|-------------------------|---------------------|--|----------|--|
| Esfuerzo | e | Torque | τ | $\text{N} \cdot \text{m}$ |
| Flujo | f | Velocidad angular | ω | rad/s |
| Cantidad de movimiento | p | Cantidad de movimiento angular | p_τ | $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$ |
| Desplazamiento | q | Ángulo | θ | rad |
| Potencia | P | $\tau(t)\omega(t)$ | | $\text{N} \cdot \text{m/s}$ |
| Energía | E | $\int \tau d\theta; \int \omega dp_\tau$ | | $\text{N} \cdot \text{m}$ |

La Tabla 3.3 muestra las variables de potencia y energía para puertos que involucran rotación mecánica.

Tabla 3.4. Variables de potencia y energía para puertos hidráulicos.

| Variables generalizadas | Variables hidráulicas | | | Unidades SI |
|-------------------------|-----------------------|-----------------------------------|-------|-------------------------------|
| Esfuerzo | e | Presión | P | N/m^2 |
| Flujo | f | Tasa de flujo volumétrico | Q | m^3/s |
| Cantidad de movimiento | p | Cantidad de movimiento de presión | p_p | $\text{N} \cdot \text{s/m}^2$ |
| Desplazamiento | q | Volumen | V | m^3 |
| Potencia | P | $P(t)Q(t)$ | | $\text{N} \cdot \text{m/s}$ |
| Energía | E | $\int P dV; \int Q dp_p$ | | $\text{N} \cdot \text{m}$ |

Las entradas en la Tabla 3.4 para potencia hidráulica están relacionadas con las variables empleadas en la mecánica de sólidos, pero son definidas algunas cantidades inusuales. La cantidad de movimiento es definida de acuerdo a la ecuación (3.38) como la integral del esfuerzo o, en este caso, de la presión. La cantidad de movimiento de presión no solo es una cantidad poco encontrada en la mecánica de fluidos convencional, igualmente es una cantidad sin símbolo obvio. El símbolo “ p_p ” se emplea para indicar una cantidad de movimiento que es integral de la presión “ $P_a(t)$ ”, como en la Tabla 3.5 “ p_τ ” es una cantidad de movimiento definida como la integral temporal del torque “ $\tau(t)$ ”. La falta de símbolos comúnmente aceptados para ciertas variables no es una desventaja seria. Las variables generalizadas “ e ”, “ f ”, “ p ” y “ q ”, pueden usarse para variables en todos los dominios de energía.

Finalmente, la Tabla 3.5 muestra las variables de potencia y energía para puertos eléctricos. La única cantidad que debe ser definida es la unidad de carga eléctrica, el culombio. Es común usar volts y amperios como unidades de voltaje y corriente en lugar de sus equivalentes en términos de culombios y unidades SI. La mayoría de las variables de la tabla lucen familiares, con la excepción de la cantidad de movimiento o variable de enlace de flujo “ λ ”.

Tabla 3.5. Variables de potencia y energía para puertos eléctricos.

| Variables generalizadas | Variables eléctricas | | Unidades SI |
|-------------------------|----------------------|------------------------------|-----------------------|
| Esfuerzo | e | Voltaje | e N · m/C |
| Flujo | f | Corriente | i C/s |
| Cantidad de movimiento | p | Variable de enlace de flujo | λ N · m · s/C |
| Desplazamiento | q | Carga | q C |
| Potencia | P | $e(t)i(t)$ | N · m/s |
| Energía | E | $\int e dq; \int i d\lambda$ | N · m |

Las tablas de variables presentadas dan evidencia de que las variables asociadas con una variedad de sistemas físicos pueden ajustarse al esquema de la Figura 3.3. La utilidad de este punto de vista se hace evidente a medida que los sistemas son modelados con mayor detalle.

3.5.2. Puertos, Bonds y Potencia.

Los dispositivos mostrados en la Figura 3.2 pueden ser tratados como elementos multipuerto que pueden ser conectados con otros para formar sistemas. La potencia puede fluir a través de los puertos conectados y ésta puede ser expresada como el producto de una cantidad de esfuerzo y una de flujo, como se muestra en las tablas 2.2-2.5.

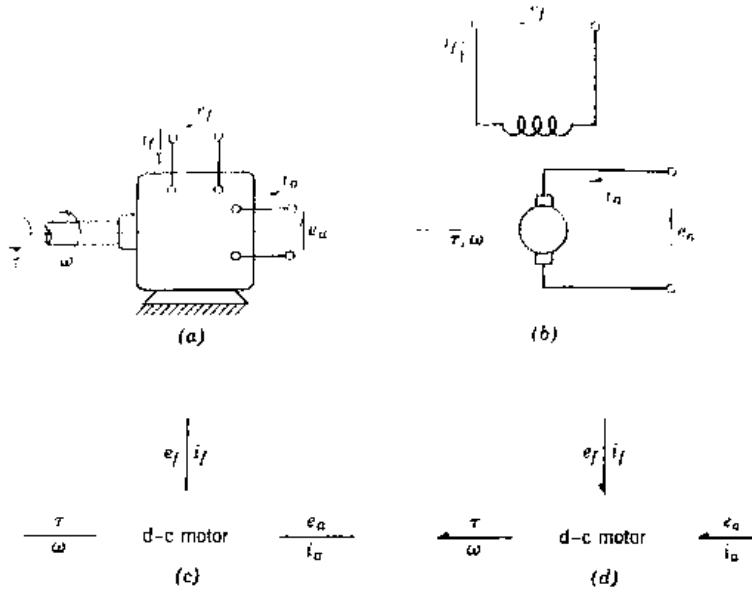


Figura 3.4 Motor *c-d* de excitación separada [46].

Considerando el motor *c-d* de excitación separada mostrado en la Figura 3.4. Físicamente, tales motores tienen tres puertos obvios. Los dos puertos eléctricos son representados por los pares terminales de armadura y de campo, y la flecha es un puerto de rotación mecánica como se muestra en la Figura 3.4a. La Figura 3.4b es un diagrama esquemático convencional en el cual la flecha mecánica es representada por una línea punteada, los embobinados de campo

son representados por un símbolo similar al símbolo de circuitería para una inductancia, y la armadura es representada por un esquema sencillo de un conmutador y escobillas. El diagrama esquemático no indica lo que compone al modelo interno de este subsistema. Para escribir las ecuaciones que describen al motor, un analista debe decidir qué tan detallado es necesario un modelo.

La Figura 3.4c representa un siguiente paso en la simplificación de este multipuerto. El nombre de “motor *c-d*” es empleado para este dispositivo, y los puertos son indicados de manera simple por líneas sencillas que emanan de la palabra que representa al dispositivo. Por conveniencia, las variables de esfuerzo y flujo son escritas junto a las líneas que representan los puertos. Sin importar qué líneas de puerto sean, horizontales o verticales, es útil seguir la siguiente convención:

- Los esfuerzos se indican ya sea arriba o a la izquierda de las líneas de puerto.
- Los flujos se indican ya sea abajo o a la derecha de las líneas de puerto.

Las figuras 3.4a-c contienen la misma información: el motor *c-d* es un multipuerto de tres puertos con variables de potencia “ τ ”, “ ω ”, “ e_f ”, “ i_f ”, “ e_a ” y “ i_a ”. En la Figura 3.4d se agrega una convención de signos: la punta de la semiflecha en una línea de puerto indica la dirección del flujo de potencia en cualquier instante de tiempo cuando ambas variables de esfuerzo y flujo son positivas.

Por ejemplo, si “ ω ” es positiva en la dirección mostrada en la Figura 3.4a y si “ τ ” es interpretada como el torque en la flecha del motor que resulta de la conexión a algún otro multipuerto y es positivo en la dirección mostrada en la Figura 3.4a, entonces cuando ambas “ τ ” y “ ω ” son positivas (o ambas negativas) el producto “ $\tau\omega$ ” es positivo y representa el flujo de potencia desde el motor a algún otro multipuerto acoplado a la flecha del motor. De este modo, la semiflecha en la Figura 3.4d apunta hacia afuera del motor *c-d*. De manera similar cuando “ e_f ”, “ i_f ”, “ e_a ” y “ i_a ” son positivas, la potencia fluye hacia el motor desde cualesquiera otros multipuertos conectados a las terminales de campo y de armadura. Por lo tanto, las semiflechas asociadas con los puertos de campo y de armadura apuntan hacia el motor.

En cualquier momento que se requiera especificar acerca de las características de un multipuerto, por ejemplo en forma de ecuación o en forma de datos tabulados, se requiere de una convención de signos. El establecimiento de convenciones de signos es sencillo para circuitos eléctricos o para las partes relacionadas a circuitería de representaciones de multipuertos como las mostradas en las figuras 3.4a-b. Para la definición de fuerzas y momentos en cuerpos rígidos interconectados usando diagramas de cuerpo libre, sin embargo, el establecimiento de convenciones de signos no es trivial. Las fuerzas de acción y reacción se muestran con direcciones opuestas en la mayoría de las representaciones. De este modo, en la Figura 3.4a se debe decidir si “ τ ” representa el torque de la flecha del motor o desde el motor hacia algún otro multipuerto. En diagramas como el de la Figura 3.4b, los signos mecánicos no son indicados frecuentemente, y es decisión del analista el insertar

signos positivo o negativo en las ecuaciones sin mayor apoyo del diagrama esquemático del sistema.

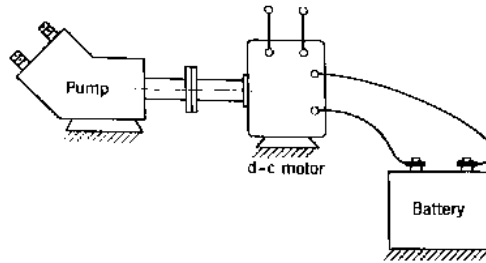


Figura 3.5. Sistema parcialmente ensamblado [46].

Cuando dos multipuertos son acoplados de modo que las variables de esfuerzo y flujo son idénticas, se dice que dos multipuertos tienen un enlace común o “bond”, en analogía con los enlaces entre partes componentes de moléculas. La Figura 3.5 muestra parte de un sistema consistente en tres multipuertos enlazados. El motor y la bomba tienen velocidad angular “ ω ” y torque “ τ ” comunes en el acoplamiento. La batería y el motor tienen voltaje y corriente comunes definidos en las terminales en las cuales la batería se conecta a la armadura del motor. Para representar este tipo de interconexión de subsistemas en la manera mostrada en las figuras 3.4c-d, las partes unidas se representan por una línea sencilla o enlace entre multipuertos. Esto se ha realizado en la Figura 3.6. La línea entre la bomba y el motor en la Figura 3.6 implica que un puerto del motor y un puerto de la bomba se han conectado, y, por lo tanto, un solo torque y una sola velocidad angular pertenecen a ambos, la bomba y el motor. La semiflecha en el enlace (bond) indica que la velocidad y el torque son definidos de manera tal que cuando su producto “ $\tau\omega$ ” es positivo, la potencia fluye del motor hacia la bomba. De este modo, las líneas asociadas con multipuertos aislados indican puertos o enlaces potenciales. Para multipuertos interconectados, una línea representa la conjunción de dos puertos, el cual es un “bond”.

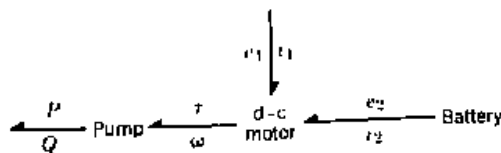


Figura 3.6. Bond graph descriptivo del sistema de la Figura 3.5 [46].

3.5.3. Bond Graphs.

El mecanismo empleado para estudiar sistemas dinámicos es el “bond graph” o “enlace gráfico”. Un bond graph consiste en subsistemas conectados por líneas que representan enlaces de potencia como en la Figura 3.6. Cuando subsistemas más grandes son representados por palabras, como en la Figura 3.6, entonces el gráfico es llamado “word bond graph” o “bond graph descriptivo”. Tal tipo de bond graph establece: la manera en la cual los subsistemas se enlazan, las variables de esfuerzo y flujo en los puertos, y las convenciones de signos para intercambios de potencia.

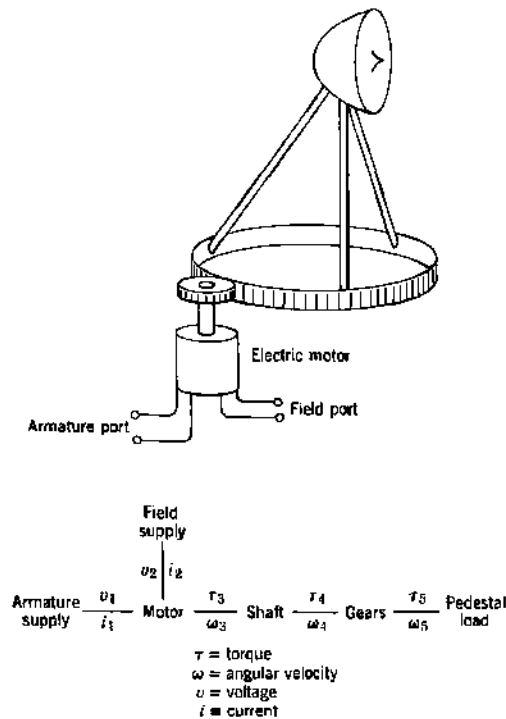


Figura 3.7. Diagrama esquemático y bond graph descriptivo para sistema de pedestal de antena de radar [46].

En la Figura 3.7 se muestra parte de un sistema de posicionamiento de una antena de radar. El bond graph descriptivo indica los subsistemas principales a considerar y los bonds con las variables de esfuerzo y flujo indicadas introducen algunas variables útiles para la caracterización de los subsistemas en una etapa posterior del análisis. Es importante asociar todos los esfuerzos y flujos en el bond graph con las cantidades físicas correspondientes con el sistema físico modelado.

En la Figura 3.8 se muestra otro sistema donde se observa que la construcción de un bond graph descriptivo para un sistema dinámico no sea tan obvio.

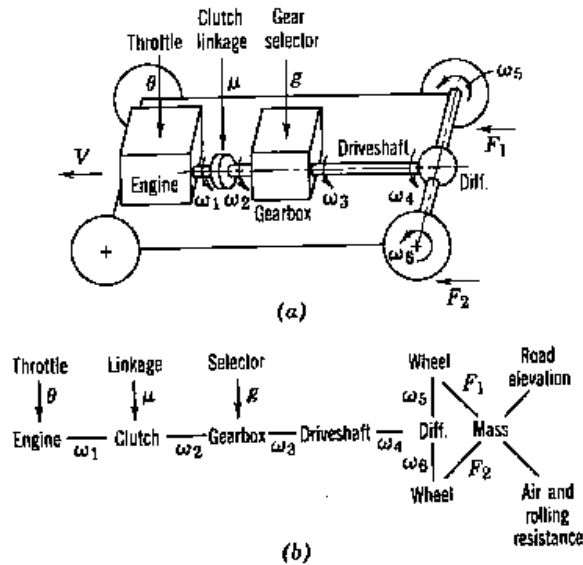


Figura 3.8. Diagrama esquemático y bond graph descriptivo para un ejemplo de tren motriz [46].

En la Figura 3.8 se nota que la influencia de la posición del acelerador, la posición del actuador del embrague y la posición del selector de marchas, es indicada usando un bond con una punta de flecha. Esta notación indica que una influencia en el sistema ocurre desde su entorno, esencialmente, a flujo de potencia nulo. En el presente ejemplo, el conductor del auto es parte del entorno del sistema y puede controlar el auto usando el pedal del acelerador, el pedal del embrague y la palanca de cambios usando poca potencia comparada con la potencia presente en el tren motriz. Un bond con una flecha completa es un “bond activo” e indica un flujo de señal a muy baja potencia. Se asume que los controles del auto pueden ser movidos por el operador a voluntad, y el modelo dinámico no se involucra con las fuerzas requeridas para mover los controles. Un bond graph descriptivo es útil para mostrar interacciones de potencia de las influencias de un sentido mediante bonds activos.

Los bond graphs se pueden usar para modelar subsistemas internamente a detalle. Para este propósito se desarrolla un conjunto de elementos multipuerto básicos denotados por letras y números. Los bond graphs detallados pueden sustituirse por los multipuertos diseñados por palabras en un bond graph descriptivo. A partir de un bond graph suficientemente detallado se pueden derivar ecuaciones de estado usando técnicas estandarizadas o pueden realizarse simulaciones computacionales de sistemas. Muchos programas computacionales aceptan bond graphs directamente y producen ya sea ecuaciones para el subsecuente análisis o predicciones de respuesta del sistema. Además, algunos tipos de análisis pueden desarrollarse en un bond graph sin la obtención de ecuaciones de estado o el uso de una computadora.

3.5.4. Entradas, Salidas y Señales.

Las características de sistemas multipuerto son determinadas por una combinación de métodos experimentales y teóricos. En el desarrollo de experimentos en un subsistema, surgen las nociones de “entrada” y “salida”, o, de manera equivalente “excitación” y

“respuesta”. Los mismos conceptos se retoman cuando los modelos matemáticos de subsistemas se ensamblan en el modelo del sistema.

En el desarrollo de experimentos en un multipuerto se debe decidir acerca de lo que debe hacerse en los puertos. En cada puerto, ambas variables de esfuerzo y flujo existen, y puede controlarse una pero no ambas variables de manera simultánea. Como ejemplo, considere el problema de determinar las características de estado estable de un motor c-d como en que se muestra en las figuras 3.4-3.6.

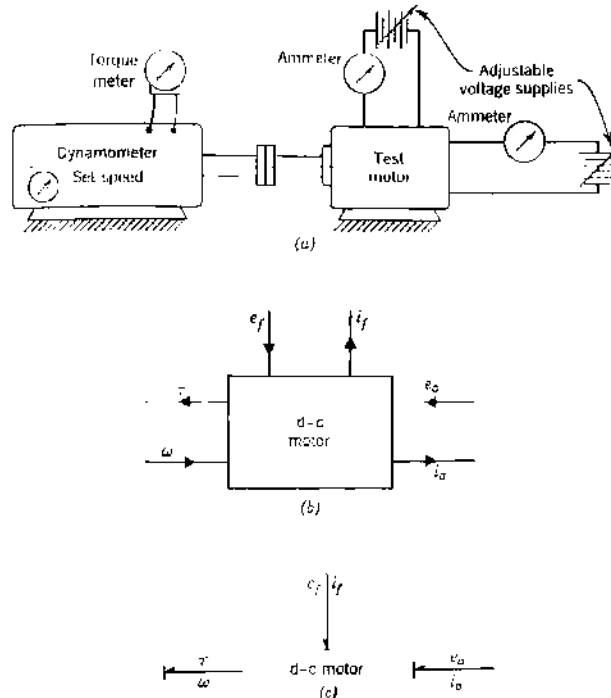


Figura 3.9. Prueba experimental para un motor *c-d* [46].

La Figura 3.9 muestra el esquema de un equipo que podría usarse en un experimento con un motor. Se supone que el dinamómetro es capaz de ajustar la velocidad del motor independientemente del torque entregado por el motor. Esta velocidad “ ω ” es, entonces, una variable de entrada del motor. El torque que es entregado por el motor es medido mediante un medidor de torque. El torque es, en consecuencia, una variable de salida del motor. Nótese que no es posible ajustar el dinamómetro para ambos torque y velocidad. La naturaleza del experimento es averiguar el torque del motor a una velocidad dada.

Si se suministran voltajes a los dos puertos eléctricos, esto es, si los voltajes son variables de entrada, entonces el motor responde a corrientes medibles, que son variables de salida del motor. La Figura 3.9b muestra el uso de líneas y flechas para mostrar cuáles cantidades son entradas hacia el motor y cuáles son salidas. La Figura 3.9c es un ejemplo de un diagrama de bloques, en el cual las líneas con flechas indican la dirección del flujo de señales. Cada puerto o bond tiene ambos, un esfuerzo y un flujo, y cuando estos dos tipos de variables son

representados como señales emparejadas, sólo es posible para una de estas señales ser una entrada y la otra será una salida.

Para saber cuál de las señales de esfuerzo y flujo en un puerto es la entrada del multipuerto, poca información debe agregarse a las figuras 3.4c-d, o 3.6. En bond graphs la manera en la cual se especifican las entradas y las salidas es mediante el “trazo causal”. El trazo causal es una línea recta, corta, perpendicular, en uno de los extremos del bond o línea de puerto. Este indica la dirección en la cual la señal de esfuerzo es dirigida. (Por implicación, el extremo del bond que no tiene el trazo causal es el extremo hacia donde la flecha de la señal de flujo apunta). En la Figura 3.10c se han agregado trazos causales a la representación multipuerto de la Figura 3.4d. Al comparar las figuras 3.9a-c, donde todas contienen la misma información respecto a variables de entrada y salida, se aprecia el significado de los trazos causales. Lo anterior se resume en la Figura 3.10 donde se muestran tanto bond graphs como diagramas de bloques. Nótese que, la convención de signo de la semiflecha para flujo de potencia y el trazo causal, son independientes. De este modo, usando “A” y “B” para establecer subsistemas como en la Figura 3.10, se tienen cuatro combinaciones de convención de signo y trazos causales.

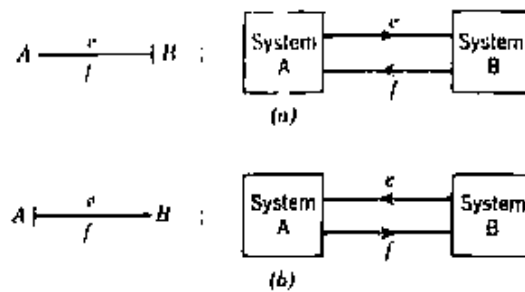


Figura 3.10. Significado del trazo causal [46].

El flujo de señal pura o transferencia de información con flujo de potencia despreciable se encuentra plasmado en el ejemplo de la Figura 3.8. En principio, los multipuertos transmiten potencia finita cuando se interconectan. Esto es correlacionando el hecho de que ambas variables de potencia existen cuando hay acoplamiento de multipuertos. De este modo, los sistemas están interconectados mediante el emparejamiento de un par de señales.

En muchos casos, los sistemas son diseñados para que solo una de las variables de potencia sea importante, esto es, que solo una señal es transmitida entre dos subsistemas. Ninguna información puede realmente ser transmitida a potencia cero, pero, de manera práctica, la información puede ser transmitida a niveles de potencia que son despreciables comparados con otros niveles de potencia del sistema. Cada instrumento es diseñado para extraer información acerca de alguna variable del sistema sin alterar seriamente el sistema al cual el instrumento ha sido agregado. Cuando un instrumento lee una variable de esfuerzo o flujo, con potencia despreciable, hay una señal de conexión entre subsistemas sin efecto de retorno asociado con la interacción de potencia.

Los diagramas de bloques de ingeniería de control o las gráficas de flujo de señal desarrolladas para sistemas eléctricos muestran el acoplamiento de señales. Cuando se consideran multipuertos, las interacciones de potencia requieren un par de señales orientadas de manera bilateral. El bond graph es una manera más eficiente de describir multipuertos que los recursos mencionados anteriormente. Cuando el sistema es dominado por interacciones de señal, debido a la presencia de instrumentos, cualquiera de las señales de esfuerzo o flujo puede suprimirse en múltiples puntos de interconexión. En tal caso, un bond se degrada a una señal simple y puede ser mostrado como un bond activo. La notación del bond activo es idéntica a la empleada para una señal en un diagrama de bloques. Cuando “ e ” es mostrada como señal (mediante la punta de flecha completa en el bond), la implicación es que el flujo, “ f ”, tiene un efecto de retorno despreciable.

Cuando los sistemas de control automático son agregados a los sistemas físicos, los sistemas de control reciben señales mediante instrumentos casi ideales y afectan a los sistemas a través de amplificadores casi ideales. El uso de bonds activos para tales casos simplifica el análisis de los sistemas. Usando bond graphs se asume que los multipuertos están acoplados con ambos efectos de avance y retroceso, a menos que una decisión específica de modelado sea tomada de modo que el efecto de retroceso sea despreciable.

El modelado detallado de subsistemas se realiza considerando un conjunto básico de multipuertos idealizados que pueden ser ensamblados para modelar los efectos físicos pertinentes en un subsistema. A este nivel, los parámetros físicos deben ser estimados y deben descubrirse las reglas de causalidad entre multipuertos ideales y obedecerse al ensamblar el modelo del subsistema a partir de multipuertos elementales.

3.6. Modelos de Componentes Básicos.

Estos multipuertos funcionan como componentes de modelos de subsistemas y sistemas; son versiones matemáticas idealizadas de componentes reales. En otros casos, los multipuertos básicos son empleados para modelar “efectos físicos” en un dispositivo y no pueden ser puestos en correspondencia uno a uno con componentes físicos del dispositivo.

Usando bond graphs y la clasificación de variables presentadas previamente, se requieren sólo unos tipos básicos de elementos multipuerto en orden de representar modelos en distintos dominios de energía. La notación de bond graph permite visualizar aspectos del sistema de manera más sencilla de lo que sería posible con las ecuaciones de estado, o con alguna otra notación gráfica diseñada para un solo dominio de energía, o para flujo de señal en vez de flujo de potencia.

3.6.1. Elementos Básicos de Un Puerto.

Un elemento de un puerto es dirigido a través de un solo puerto de potencia, y en tal puerto existe un solo par de variables de esfuerzo y flujo. Generalmente, un elemento de un puerto puede ser un subsistema muy complejo. Un tomacorriente eléctrico de pared ordinario puede representar el puerto de un elemento de un puerto en un análisis de sistemas. Este puerto

conecta con la vasta red de generación de potencia y equipo de distribución, a pesar de esto, desde el punto de vista de un modelo de sistema, una caracterización simple de lo que está detrás del tomacorriente de pared como un elemento de un puerto puede ser suficiente.

Se trata, entonces, con los elementos de un puerto más primitivos, considerando elementos que disipan potencia, almacenan energía y suministran potencia.

El “resistor de un puerto”, “ $\rightarrow R$ ”, es un elemento en el cual las variables en el puerto están relacionadas por una función estática. La Figura 3.11 muestra el símbolo en bond graph para el resistor, una gráfica de la relación constitutiva entre “ e ” y “ f ” y representaciones de resistores en algunos dominios de energía. Los resistores disipan energía, mediante resistores eléctricos simples, amortiguadores mecánicos o conjuntos cilindro-émbolo, conexiones porosas en líneas de fluido y otros elementos pasivos análogos. Nótese a partir de la Figura 3.11a que la potencia fluye hacia el puerto cuando el producto de “ e ” y “ f ” es positivo de acuerdo con la convención de signos mostrada, se puede deducir que la potencia es siempre disipada si la relación constitutiva entre “ e ” y “ f ” reside en el primer y tercer cuadrantes del plano “ $e - f$ ” como se muestra en la Figura 3.11b, para los cuales el producto “ ef ” es positivo.

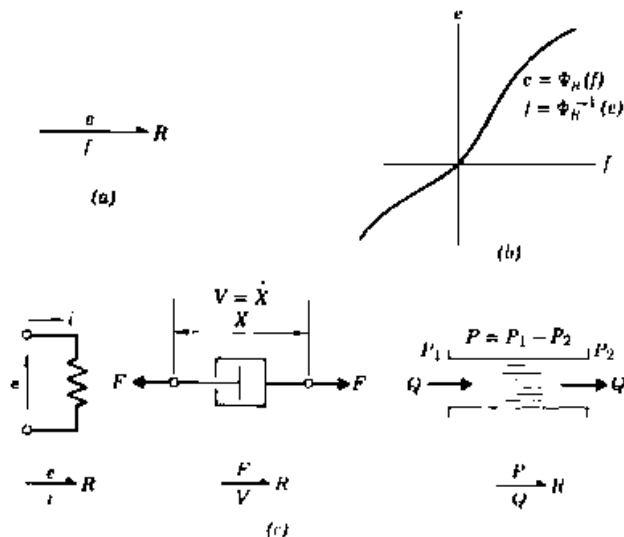


Figura 3.11. Resistor de un puerto [46].

Cuando la relación entre “ e ” y “ f ” para un resistor de un puerto representa una línea curva como en la Figura 3.11b, entonces el resistor es un elemento no lineal; si es una línea recta, es un resistor lineal. En el caso especial del resistor lineal, un coeficiente, la resistencia, o su inverso, la conductancia, debe definirse. Las relaciones de resistencia se resumen en las primeras líneas de la Tabla 3.7. Para resistores disipadores de potencia, con la convención de signos mostrada en la Figura 3.11 y en la Tabla 3.7, los parámetros de resistencia y conductancia, “ R ” y “ G ” respectivamente, son positivos.

Por simplicidad se establece que, para resistores pasivos, la convención de signo de potencia se representa mediante una semiflecha apuntando hacia el resistor. De esta manera los parámetros de resistencia serán positivos y las relaciones no lineales se ubican en el primer y tercer cuadrantes del plano “ $e - f$ ”.

Ocasionalmente, el resistor de un puerto puede ser usado para modelar una relación constitutiva entre “ e ” y “ f ” la cual surge de un sistema que puede tanto suministrar como disipar potencia. Por ejemplo, las características de torque-velocidad de motores y máquinas de combustión interna pueden ser representadas como en la Figura 3.11b. Con la convención de signo mencionada anteriormente, sin embargo, la relación constitutiva no residirá en el primer y tercer cuadrantes. De hecho, en la mayoría de regímenes de operación, un motor suministra potencia en vez de disiparla. Para tales resistores no pasivos la convención es la siguiente: la punta de la semiflecha apunta desde el resistor.

Tabla 3.6. El resistor de un puerto.

| | Relación general | Relación lineal | Unidades SI para el parámetro lineal de resistencia |
|-------------------------|------------------------------|------------------|---|
| Variables generalizadas | $e = \Phi_R(f)$ | $e = Rf$ | $R = e/f$ |
| | $f = \Phi_R^{-1}(e)$ | $f = Ge = e/R$ | |
| Traslación mecánica | $F = \Phi_R(V)$ | $F = bV$ | $b = N \cdot s/m$ |
| | $V = \Phi_R^{-1}(F)$ | | |
| Rotación mecánica | $\tau = \Phi_R(\omega)$ | $\tau = c\omega$ | $c = N \cdot m \cdot s$ |
| | $\omega = \Phi_R^{-1}(\tau)$ | | |
| Sistemas hidráulicos | $P = \Phi_R(Q)$ | $P = RQ$ | $R = N \cdot s/m^5$ |
| | $Q = \Phi_R^{-1}(P)$ | | |
| Sistemas eléctricos | $e = \Phi_R(i)$ | $e = Ri$ | $R = \Omega$ |
| | $i = \Phi_R^{-1}(e)$ | $i = Ge$ | |

La Tabla 3.6 muestra las relaciones de resistencia en términos de variables generalizadas y en términos de variables físicas. En la primer columna, “ Φ ” se establece para una función general que relaciona dos variables, como la mostrada en la Figura 3.11b. La función puede ser leída de dos maneras: el esfuerzo puede ser encontrado si el flujo es dado, o, el flujo puede ser encontrado si el esfuerzo es dado. Esto hace necesaria la definición de la función “ Φ ” y su inversa “ Φ^{-1} ”. En el caso lineal, la inversión de la función “ $e = Rf$ ”, involucra una simple inversión del parámetro “ R ”.

Dado que los modelos lineales son de gran utilidad, las versiones lineales de relaciones de resistencia en varios dominios de energía se muestran en la Tabla 3.7. Las unidades del parámetro de resistencia lineal son las unidades de esfuerzo divididas por las unidades de flujo. Algunas de las unidades mostradas en la Tabla 3.7 pueden no ser familiares. La única unidad de resistencia dignificada con su propio nombre es el ohmio eléctrico.

Enseguida, considérese un dispositivo de un puerto en el cual existe una relación constitutiva estática entre un esfuerzo y un desplazamiento. Tal dispositivo almacena y entrega energía

sin pérdidas. En terminología de bond graph, un elemento que relaciona “ e ” con “ q ” es llamado “capacitor de un puerto”, “ $\rightarrow C$ ”. En términos físicos, un capacitor es una idealización de dispositivos tales como resortes, barras de torsión, capacitores eléctricos, tanques de gravedad y acumuladores. El símbolo de bond graph, la relación constitutiva que lo define, y algunos ejemplos físicos se muestran en la Figura 3.12. Cuando una convención de signo similar a la empleada para el resistor pasivo es empleada para un elemento capacitivo, entonces “ ef ” representa la potencia que fluye hacia el capacitor.

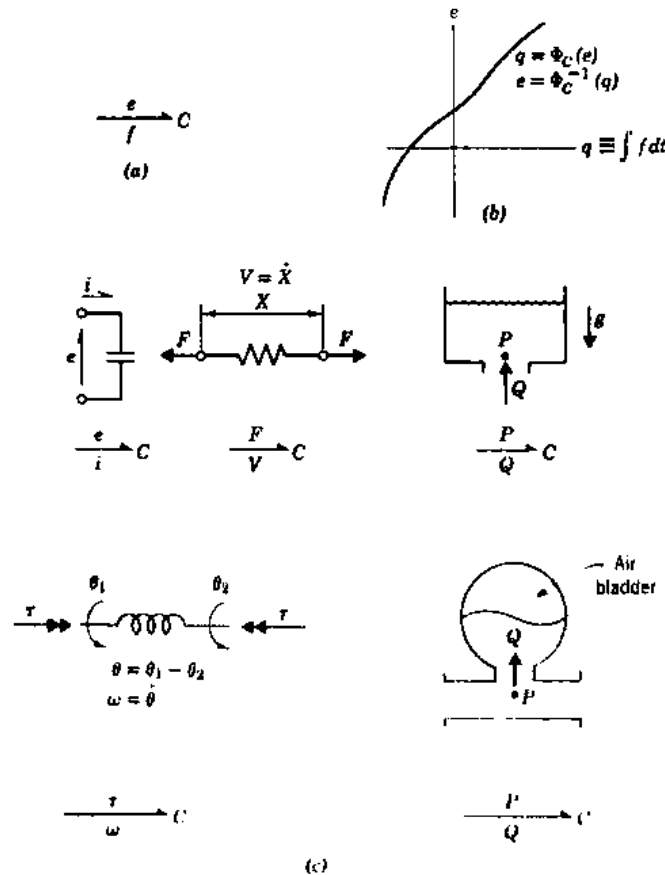


Figura 3.12. Capacitor de un puerto [46].

$$E(t) = \int_0^t e(t)f(t)dt + E_0 \tag{3.42}$$

La expresión anterior representa la energía almacenada en el capacitor en cualquier tiempo “ t ”. La energía almacenada inicialmente en “ $t = 0$ ”, de haber alguna, es llamada “ E_0 ”.

Dado que a partir de la ecuación (3.39a) el desplazamiento, “ q ”, es definido como “ $f dt \equiv dq$ ” y la relación constitutiva de un capacitor de un puerto implica que “ e ” es una función de “ q ”, esto es “ $e = e(q)$ ”, entonces, la ecuación (3.42) puede reescribirse como:

$$E(q) = \int_{q_0}^q e(q) dq + E_0 \quad (3.43)$$

Donde “ E_0 ” es la energía almacenada cuando “ $q = q_0$ ”. Es conveniente definir la energía almacenada como igual a cero cuando el esfuerzo es cero. Entonces, si “ q_0 ” es tal valor de “ q ” a cuyo “ $e = 0$ ” y “ $E_0 = 0$ ”, la ecuación (3.43) puede ser reescrita como:

$$E(q) = \int_{q_0}^q e(q) dq \quad (3.43a)$$

La operación indicada en la ecuación (3.43a) puede ser interpretada gráficamente como se muestra en la Figura 3.13. A medida que “ q ” varía, el área bajo la curva de “ e ” contra “ q ” varía, y esta es igual a “ E ”. Si “ q ” va de “ q_0 ” a “ q ” como en la Figura 3.13a, entonces la energía es almacenada; si “ q ” regresa a “ q_0 ”, el área sombreada desaparece y toda la energía almacenada desaparece. La potencia fluye hacia el puerto, lo cual resulta en el almacenamiento de energía; si es a la inversa, la potencia fluye hacia afuera del puerto. Durante el proceso no hay pérdida de energía.

La Tabla 3.7 resume las relaciones que caracterizan a los capacitores. Se dan las unidades para los parámetros de capacitancia lineal, y se muestra que solamente la unidad eléctrica tiene nombre, el faradio. Para sistemas mecánicos, es común usar la constante “ k ”, en vez de la conformidad o flexibilidad “ $C = 1/k$ ”, la cual es análoga a la capacitancia eléctrica y el parámetro “ C ” en variables generalizadas. En sistemas electromecánicos mixtos, es necesario tener cuidado si un parámetro numérico corresponde a “ C ” o a su inverso en un bond graph. Al igual que con los resistores de un puerto, algunas de las unidades mostradas pueden ser poco familiares.

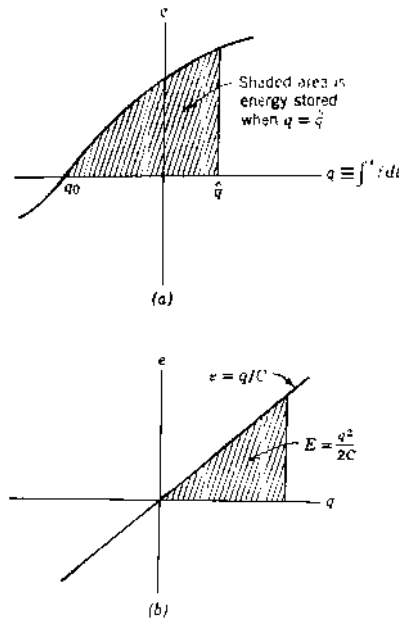


Figura 3.13. Interpretación de área de energía almacenada para el capacitor de un puerto [46].

Un segundo elemento de almacenamiento de energía de un puerto surge si la cantidad de movimiento, “ p ”, está relacionada mediante una ley constitutiva estática al flujo “ f ”. Tal elemento es llamado “inercia de un puerto”, “ $\rightarrow I$ ”, en terminología de bond graph. El símbolo de bond graph para una inercia, la relación constitutiva y algunos ejemplos físicos están mostrados en la Figura 3.14. La inercia es usada para modelar efectos de inductancia en sistemas eléctricos y masa, o efectos inerciales, en sistemas mecánicos o de fluidos.

Tabla 3.7. El capacitor de un puerto.

| | Relación general | Relación lineal | Unidades SI para el parámetro lineal de capacitancia |
|-------------------------|------------------------------|------------------|--|
| Variables generalizadas | $q = \Phi_C(e)$ | $q = Ce$ | $C = q/e$ |
| | $e = \Phi_C^{-1}(q)$ | $e = q/C$ | $1/C = e/q$ |
| Traslación mecánica | $X = \Phi_C(F)$ | $X = CF$ | $C = m/N$ |
| | $F = \Phi_C^{-1}(X)$ | $F = kX$ | $k = N/m$ |
| Rotación mecánica | $\theta = \Phi_C(\tau)$ | $\theta = C\tau$ | $C = \text{rad}/N \cdot m$ |
| | $\tau = \Phi_C^{-1}(\theta)$ | $\tau = k\theta$ | $k = N \cdot m/\text{rad}$ |
| Sistemas hidráulicos | $V = \Phi_C(P)$ | $V = CP$ | $C = m^5/N$ |
| | $P = \Phi_C^{-1}(V)$ | $P = V/C$ | |
| Sistemas eléctricos | $q = \Phi_C(e)$ | $q = Ce$ | $C = F$ |
| | $e = \Phi_C^{-1}(q)$ | $e = q/C$ | |

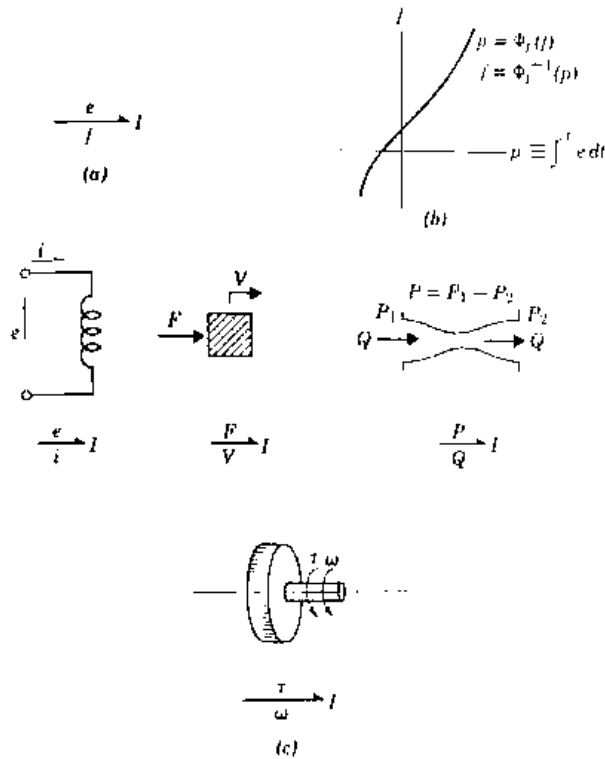


Figura 3.14. Inercia de un puerto [46].

Usando la convención de signo donde la semiflecha apunta hacia el elemento, se indica que la potencia fluye hacia la inercia y es dada por la expresión de la ecuación (3.42). En el presente caso, la ecuación (3.43a) permite escribir “ $edt \equiv dp$ ”, y, si se considera que “ $f = f(p)$ ”, entonces la ecuación (3.42) puede reescribirse como:

$$E(p) = \int_{p_0}^p f(p) dp + E_0 \quad (3.44)$$

Si la energía es definida a desaparecer cuando “ f ” desaparece y si “ p_0 ” corresponde a ese punto en la gráfica de “ f ” contra “ p ” en el cual “ $f = 0$ ”, entonces:

$$E(p) = \int_{p_0}^p f(p) dp \quad (3.44a)$$

Las similitudes entre las ecuaciones (3.43) y (3.44) son notorias. La energía asociada con un capacitor es llamada “energía potencial”, mientras que la energía asociada con una inercia es llamada “energía cinética”. Estos nombres son aplicados a sistemas mecánicos. En sistemas

eléctricos, las formas correspondientes de energía almacenada son llamadas “energía eléctrica” y “energía magnética”.

Si la relación constitutiva de la inercia es graficada, entonces se da una interpretación de área de la energía almacenada. Esta representación se muestra en la Figura 3.15 y es posible demostrar que cualquier energía almacenada en un elemento inercial puede ser recuperada sin pérdidas.

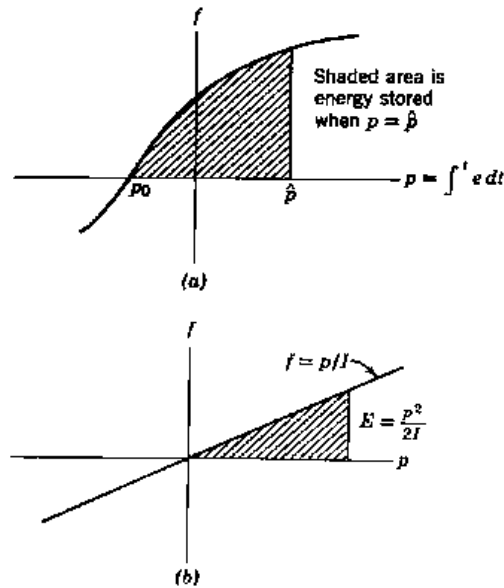


Figura 3.15. Interpretación de área de energía almacenada para la inercia de un puerto [46].

La Tabla 3.8 muestra las relaciones constitutivas para inercias y proporciona unidades para parámetros de inercia para el caso lineal. Dado que la mayoría de labores ingenieriles se logran satisfactoriamente empleando las leyes de Newton en lugar de emplear los postulados de relatividad, la relación entre velocidad y cantidad de movimiento es lineal y la masa o momento de inercia es un parámetro inercial. A pesar de que es común idealizar a la masa como la razón de fuerza respecto a la aceleración, la tabla proporciona la definición fundamental de la masa de acuerdo a lo siguiente:

$$p = mV \tag{3.45}$$

Donde:

$$\dot{p} \equiv F \tag{3.46}$$

Tabla 3.8. La inercia de un puerto.

| | Relación general | Relación lineal | Unidades SI para el parámetro lineal de inercia |
|-------------------------|--------------------------------|---------------------|---|
| Variables generalizadas | $p = \Phi_I(f)$ | $p = If$ | $I = p/f$ |
| | $f = \Phi_I^{-1}(p)$ | $f = p/I$ | $1/I = f/p$ |
| Traslación mecánica | $p = \Phi_I(V)$ | $p = mV$ | $m = N \cdot s^2/m$ |
| | $V = \Phi_I^{-1}(p)$ | $V = p/m$ | |
| Rotación mecánica | $p_\tau = \Phi_I(\omega)$ | $p_\tau = J\omega$ | $J = N \cdot m \cdot s^2$ |
| | $\omega = \Phi_I^{-1}(p_\tau)$ | $\omega = p_\tau/J$ | |
| Sistemas hidráulicos | $p_p = \Phi_I(Q)$ | $p_p = IQ$ | $I = N \cdot s^2/m^5$ |
| | $Q = \Phi_I^{-1}(p_p)$ | $Q = p_p/I$ | |
| Sistemas eléctricos | $\lambda = \Phi_I(i)$ | $\lambda = Li$ | $L = H$ |
| | $i = \Phi_I^{-1}(\lambda)$ | $i = \lambda/L$ | |

Si se reemplaza la ecuación (3.45) con una relación no lineal, se tiene:

$$p = \Phi_I(V) = \frac{mV}{\left(1 - V^2/c^2\right)^{1/2}} \quad (3.47)$$

Donde “ m ” es la masa en reposo y “ c ” es la velocidad de la luz, entonces las ecuaciones (3.44) y (3.45) se mantienen para la teoría especial de la relatividad. Crandall [47] presenta ejemplos demostrativos en este sentido. De esta manera, se justifican las relaciones constitutivas generales dadas por sistemas mecánicos, a pesar de que la ingeniería es ocupada con el caso lineal. Para sistemas eléctricos, sin embargo, la relación entre la variable de enlace de flujo (la integral temporal del voltaje) y la corriente en un inductor es no lineal en casos típicos. El uso del parámetro lineal “ L ” es el resultado de una decisión de modelado. Es más satisfactorio generalizar “ $\lambda = \Phi(i)$ ”, con “ $\dot{\lambda} = e$ ”, que tratar de generalizar la expresión “ $e = L di/dt$ ” para el caso no lineal.

Considerando las relaciones entre los elementos de un puerto, puede usarse una versión ampliada del tetraedro de estado presentado en la Figura 3.3 (ver la Figura 3.16). La sexta arista, la cual se extiende entre los vértices que representan “ p ” y “ q ”, se encuentra oculto a la vista en la Figura 3.6. Esto se debe a que no existe un elemento básico que relacione a “ p ” y “ q ”.

Finalmente se definen la fuente de esfuerzo y la fuente de flujo, fuentes de un puerto, las cuales son las versiones idealizadas de suministros de voltaje, fuentes de presión, agitadores, sistemas de flujo constante, etc. En cada caso, un esfuerzo o flujo es, o bien mantenido sensiblemente constante, independiente de la potencia suministrada o absorbida por la fuente, o restringida a alguna función particular del tiempo.

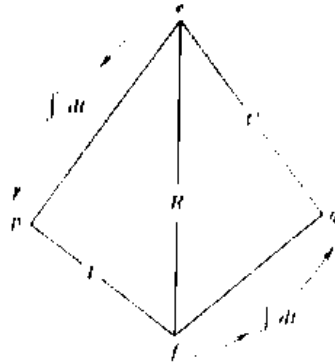


Figura 3.16. Tetraedro de estado con los elementos de un puerto y las variables que relacionan [46].

Como ejemplo de una fuente de esfuerzo constante, se considera la fuerza de gravedad en una masa. Cerca de la superficie de la Tierra, esta fuerza es esencialmente independiente de la velocidad de la masa. Como ejemplo de una fuente variante en el tiempo, se considera un tomacorriente eléctrico de pared. El tomacorriente de pared administra un voltaje sinusoidal a través de los cables del cordón de potencia de un electrodoméstico. Dentro de un rango considerable de corrientes, el voltaje es independiente de fluctuaciones en la corriente. El voltaje es afectado por grandes corrientes y un fusible puede explotar para proteger circuitos si corrientes muy grandes son suministradas, esto significa que la salida real no es modelada exactamente por una fuente ideal de esfuerzo.

Tabla 3.9. Fuentes de un puerto.

| | Símbolo de Bond Graph | Relación descriptiva |
|-------------------------|------------------------|--|
| Variables generalizadas | $S_e \rightarrow$ | $e(t)$ dada, $f(t)$ arbitraria |
| | $S_f \rightarrow$ | $f(t)$ dada, $e(t)$ arbitraria |
| Traslación mecánica | $S_F \rightarrow$ | $F(t)$ dada, $V(t)$ arbitraria |
| | $S_V \rightarrow$ | $V(t)$ dada, $F(t)$ arbitraria |
| Rotación mecánica | $S_\tau \rightarrow$ | $\tau(t)$ dada, $\omega(t)$ arbitraria |
| | $S_\omega \rightarrow$ | $\omega(t)$ dada, $\tau(t)$ arbitraria |
| Sistemas hidráulicos | $S_P \rightarrow$ | $P(t)$ dada, $Q(t)$ arbitraria |
| | $S_Q \rightarrow$ | $Q(t)$ dada, $P(t)$ arbitraria |
| Sistemas eléctricos | $S_e \rightarrow$ | $e(t)$ dada, $i(t)$ arbitraria |
| | $S_i \rightarrow$ | $i(t)$ dada, $e(t)$ arbitraria |

La Tabla 3.9 presenta los símbolos de bond graph y las relaciones descriptivas para fuentes, típicamente los elementos tipo fuente son pensados como si abasteciesen de potencia a un sistema. Esto corresponde con la convención de signo de semiflecha mostrada, la cual implica que cuando “ $e(t)f(t)$ ” es positivo, la potencia fluye desde la fuente hacia cualquier sistema conectado. Dado que una fuente mantiene constante una de las variables de potencia o una función de tiempo específica sin importar la magnitud de la otra variable, esta puede suministrar una cantidad indefinida de potencia. Esto es una suposición no realista y dispositivos reales no son fuentes a pesar de que sean modelados aproximadamente mediante ellas. Las fuentes ideales son útiles al modelar dispositivos reales pero no son modelos

realistas en todos los rangos de potencia a menos que sean suplementadas por otros multipuertos.

3.6.2. Elementos Básicos de Dos Puertos.

Los elementos de dos puertos son ideales en el sentido de conservación de potencia. Si algún elemento de dos puertos tiene la siguiente convención de signo “ $\rightarrow TP \rightarrow$ ”, donde:

$$\begin{array}{cc} e_1 & e_2 \\ \rightarrow TP \rightarrow & \\ f_1 & f_2 \end{array}$$

Entonces, la conservación de potencia indica que para cada instante de tiempo se cumple la siguiente relación:

$$e_1(t)f_1(t) = e_2(t)f_2(t) \tag{3.48}$$

La convención de signo de potencia implicada en la ecuación (3.48) y mostrada en el bond graph es un convención de signo de “potencia de paso” en el sentido que la potencia es idealizada como si fluyera a través del elemento de dos puertos. Esta ecuación establece que cualquier potencia que fluya por un lado del elemento de dos puertos está fluyendo de manera simultánea hacia afuera del otro lado.

Una manera en la cual se puede satisfacer la ecuación (3.48) se encuentra en el elemento conocido como “transformador”, dado por el símbolo “ $\rightarrow TF \rightarrow$ ”, cuyas leyes constitutivas son:

$$\left. \begin{array}{l} e_1 = me_2 \\ mf_1 = f_2 \end{array} \right\} \tag{3.49}$$

En las cuales el parámetro “ m ” es llamado “módulo del transformador” y los subíndices “1” y “2” corresponden a los dos puertos, como si muestra en la Figura 3.17a. Las ecuaciones (3.48) y (3.49) implican el uso de la convención de signo mostrada en la figura. Se muestran algunos dispositivos, modelados de forma idealizada como transformadores. En ningún caso se tiene un dispositivo físico que sea exactamente un transformador. La palanca en la Figura 3.17b sería un transformador si careciera de masa, fuese rígida y no tuviese fricción. Restricciones similares pueden hacerse sobre la validez del transformador como un modelo para otros dispositivos físicos. Modelos reales de dispositivos pueden hacerse usando el transformador ideal y otros multipuertos para dar cuenta de efectos no ideales en caso de que estos sean importantes en el sistema bajo estudio.

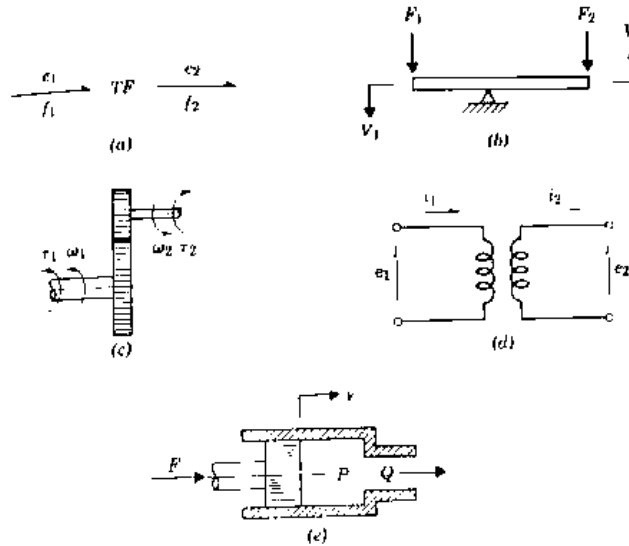


Figura 3.17. Transformadores [46].

En el dispositivo mostrado en la Figura 3.17e la potencia hidráulica es transducida en potencia mecánica. Las leyes constitutivas de la versión ideal de este dispositivo son:

$$\left. \begin{aligned} F &= AP \\ AV &= Q \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

En las cuales el área del pistón, “A”, funciona como el módulo del transformador, “m”. Las ecuaciones (3.50) pueden ser derivadas de manera separada a partir de consideraciones físicas, o si una es derivada, la otra surge debido a la conservación de potencia. El hecho de que sólo exista un módulo sirve como control útil en ecuaciones constitutivas.

Otra manera de satisfacer el balance de potencia de la ecuación (3.48) se encuentra incorporada en el “girador”, simbolizado como “→ GY →”, cuyas leyes constitutivas son:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= r f_2 \\ r f_1 &= e_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

En las cuales “r” es el “módulo del girador” y está implicada la convención de signos de la Figura 3.18a. En las ecuaciones (3.51) el esfuerzo y flujo en dos puertos diferentes están relacionados estáticamente.

La Figura 3.18 muestra algunos dispositivos aproximados a giradores. El símbolo de circuito eléctrico es usado para representar giradores en diagramas de red eléctrica. Los giradores eléctricos pueden hacerse usando el efecto Hall, y se requiere que el girador modele efectos en frecuencias de microondas, a pesar de que en ese caso no pueda ser identificado como un

dispositivo físico separado. Otro ejemplo es un giroscopio. Si el rotor de la Figura 3.18c gira rápidamente, un ligero empujón en la dirección de “ F_1 ” conducirá a una velocidad proporcional “ V_2 ”. De manera similar, una fuerza “ F_2 ” resultará en una velocidad “ V_1 ”. El comportamiento contra intuitivo del giroscopio se predice mediante las ecuaciones (3.51). Por ejemplo, si la fuerza de gravedad se encuentra en la dirección de “ F_2 ”, entonces el dispositivo describe un ruta horizontal. Si un giroscopio rota lentamente, o si son aplicadas alteraciones grandes, el giroscopio debe ser modelado como un cuerpo rígido. El bond graph, entonces, es más complejo que un girador simple, pero ciertamente contiene giradores en él. Para un rango restringido de velocidades de giro y fuerzas, el giroscopio es aproximadamente un girador y proporciona a éste su nombre.

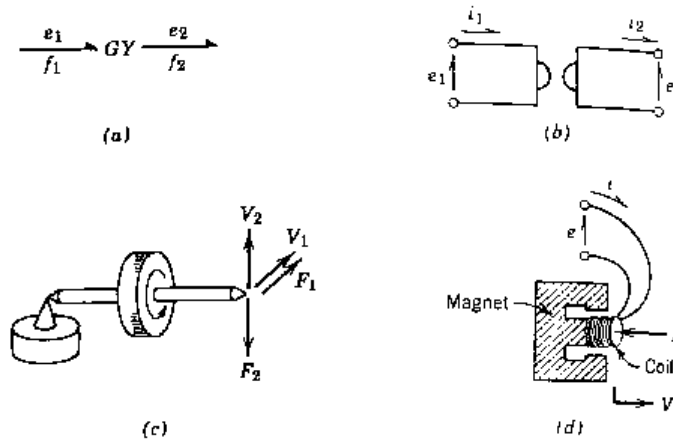


Figura 3.18. Giradores [46].

En casos especiales se puede aplicar la analogía entre variables eléctricas y mecánicas, o hidráulicas, de manera que el girador sea tratado como un transformador. En términos de bond graph, la bobina de voz (ver Figura 3.18d) es un transformador si se llama esfuerzo a la corriente y flujo al voltaje. Este cambio de identificación de variables es innecesario si se reconoce que los giradores son necesarios para dispositivos tales como los mostrados en las figuras 3.18b-c, en cualquier caso.

Un girador es un elemento más fundamental que un transformador. Dos giradores enlazados de manera consecutiva son equivalentes a un transformador:

$$\begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_1 & e_3 \\ \rightarrow GY_1 \rightarrow GY_2 \rightarrow & = & \rightarrow TF_3 \rightarrow \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_1 & f_3 \end{matrix}$$

Donde:

$$\begin{matrix} e_1 = r_1 f_2 \\ r_2 f_2 = e_3 \end{matrix} \rightarrow e_1 = (r_1/r_2) e_3 \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned} r_1 f_1 = e_2 &\rightarrow (r_1/r_2) f_1 = f_3 \\ e_2 = r_2 f_3 & \end{aligned} \quad (3.53)$$

En contraste, transformadores consecutivos son equivalentes a otro transformador:

$$\begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_1 & e_3 \\ \rightarrow TF_1 \rightarrow TF_2 \rightarrow & = & \rightarrow TF_3 \rightarrow & & \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_1 & f_3 \end{array}$$

Donde:

$$\begin{aligned} e_1 = m_1 e_2 \\ e_2 = m_2 e_3 &\rightarrow e_1 = m_1 m_2 e_3 \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} m_1 f_1 = f_2 \\ m_2 f_2 = f_3 &\rightarrow m_1 m_2 f_1 = f_3 \end{aligned} \quad (3.55)$$

De este modo puede considerarse cada transformador como una combinación consecutiva de dos giradores y representarla como un “TF” básico de dos puertos.

El girador intercambia los roles de esfuerzo y flujo. Esto puede verificarse al reemplazar “r” en la ecuación (3.51) por la unidad. Entonces, el esfuerzo en un puerto del girador es el flujo en el otro, y viceversa. De este modo, la combinación “→ GY → I” es equivalente a “→ C”; de manera similar “→ GY → C” es equivalente a “→ I”.

Un ejemplo de una deducción acerca de un sistema basado solamente en su representación bond graph es considerar la equivalencia “I₁ → GY → I₂ = I₁ → C”, en la cual “→ GY → I₂” ha sido reemplazado por “→ C”. Un elemento “I” enlazado con un elemento “C” es un oscilador. En términos físicos podría tratarse de un sistema masa-resorte o inductor-capacitor. Así, se observa que “I₁ → GY → I₂” (o, para dicho propósito, “C₁ → GY → C₂”) se comportará como un sistema inercia-capacitor.

Existe una generalización para transformadores y giradores basada en el hecho de que en ambas ecuaciones (3.49) y (3.51) la conservación de potencia entre dos puertos se mantiene incluso cuando los módulos “m” y “r” no son constantes. Esto conduce al “transformador modulado” y al “girador modulado”, denotados en simbología bond graph por:

$$\begin{array}{ccc} e_1 \downarrow m e_2 \\ \rightarrow MTF \rightarrow \\ f_1 \quad f_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} e_1 \downarrow r \ e_2 \\ \overrightarrow{MGY} \\ f_1 \quad f_2 \end{array}$$

“ m ” y “ r ” se muestran como señales en un bond activo. Esto significa que no existe potencia asociada con los cambios en “ m ” y “ r ” y que “ $e_1 f_1$ ” siempre es igual a “ $e_2 f_2$ ”, como lo es en el caso de los módulos constantes en “ TF ” y “ GY ”.

Muchos dispositivos físicos pueden ser modelados por elementos modulados de dos puertos. Por ejemplo, el transformador eléctrico contiene un actuador mecánico el cual, cuando se mueve, cambia la tasa de vueltas entre la bobina primaria y secundaria y, en consecuencia, se cambia la razón de transformación. Esta alteración no consume potencia (si se asume que la fricción mecánica es despreciable) y para cualquier posición del actuador el dispositivo conserva esencialmente la potencia eléctrica.

Ambos giradores en las figuras 3.18c-d tienen módulos que pueden ser variados sin cambiar el hecho de que la potencia se conserva en ambos puertos. En cada instante, la potencia es conservada en ambos puertos, pero cambian las características del dispositivo.

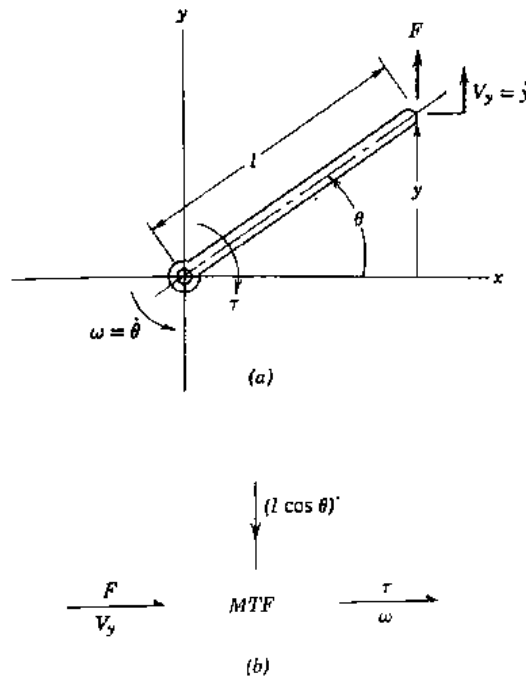


Figura 3.19. Transformador de desplazamiento modulado [46].

En mecánica, el transformador modulado “ MTF ” puede ser usado para representar transformaciones geométricas de conexiones cinemáticas. Como ejemplo se considera el brazo pivotante mostrado en la Figura 3.19. El brazo se encuentra en equilibrio bajo la acción del torque “ τ ” y la fuerza “ F ”, y esto provee una relación entre “ θ ” y “ y ”, es decir “ $\dot{\theta} \equiv \omega$ ”, y “ $y \equiv V_y$ ”. Escribiendo la relación de desplazamiento:

$$y = l \operatorname{sen} \theta \quad (3.56)$$

Diferenciando la relación anterior se conduce a una relación constitutiva para velocidades:

$$\dot{y} = (l \cos \theta) \dot{\theta} \quad (3.57)$$

Reescribiendo:

$$V_y = (l \cos \theta) \omega \quad (3.58)$$

La relación de equilibrio entre “ τ ” y “ F ” es:

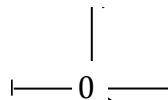
$$(l \cos \theta) F = \tau \quad (3.59)$$

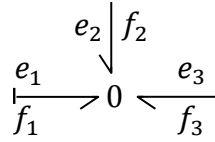
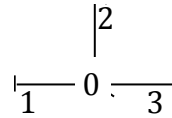
La presencia del término “ $l \cos \theta$ ” en ambas ecuaciones (3.58) y (3.59) atiende a la conservación de potencia. Estas ecuaciones están incorporadas en el bond graph de la Figura 3.19b. El elemento “*MTF*” es llamado “transformador de desplazamiento modulado” debido a que el módulo “*m*” es una función de la variable de desplazamiento “ θ ”. Tales transformadores permiten crear un bond graph para los complejos sistemas dinámicos asociados con el movimiento tridimensional de cuerpos rígidos.

3.6.3. Elementos de Unión de Tres Puertos.

Los componentes de tres puertos son igualmente conservadores de potencia. Estos elementos son llamados “uniones” dado que se emplean para interconectar otros multipuertos en subsistemas o modelos de sistemas. Estos representan una de las ideas fundamentales detrás del formalismo de bond graph, la cual es representar en forma de multipuertos los dos tipos de conexiones los cuales, en términos eléctricos, son llamados conexiones “en serie” y “en paralelo”. Tales conexiones ocurren realmente en todos los tipos de sistemas, a pesar de que los tratamientos tradicionales no reconozcan la existencia de las uniones como multipuertos.

En primer lugar se considera la “unión de flujo”, “unión-0 (cero)” o “unión de esfuerzo común”. El símbolo de esta unión es un “cero” con tres bonds que emanan de él (es posible extender la definición a versiones de cuatro, cinco o más puertos):





Usando la convención de signo de potencia interior mostrada en la última versión de la unión, las relaciones constitutivas pueden escribirse como:

$$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) \tag{3.60}$$

$$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0 \tag{3.61}$$

Los esfuerzos en todos los bonds de una unión-0 son siempre idénticos y la suma algebraica de los flujos es nula. Tomadas en conjunto, las ecuaciones implican que la suma de potencia de todos los bonds es cero:

$$e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_3 f_3 = 0 \tag{3.62}$$

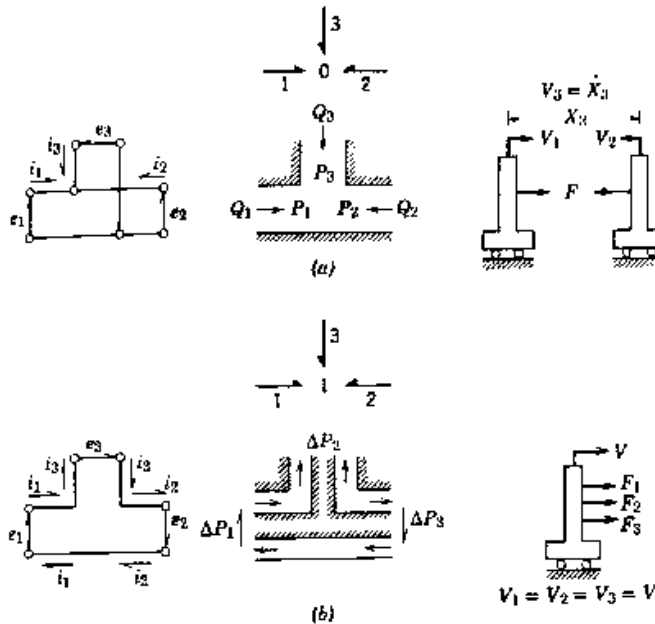
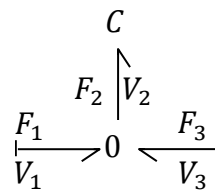


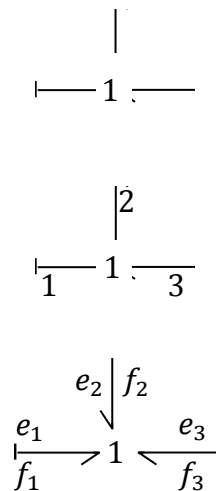
Figura 3.20. Elementos de tres puertos en varios dominios físicos [46].

Si la potencia fluye en la unión-0 por dos de los puertos, esta debe fluir fuera del tercer puerto.

El uso de la unión-0 es indicado en la Figura 3.20a. Los ejemplos de uniones-0 son los conductores eléctricos, conectados para proporcionar tres pares de terminales, y la conexión de tubería en “T”, la cual es una versión idealizada de la variedad encontrada en una ferretería. El ejemplo mecánico es menos evidente dado que es idealizado. Las uniones-0 mecánicas son tan necesarias como las eléctricas y las hidráulicas pero no aparecen en forma de dispositivo. Los dos carros en el ejemplo mecánico de la Figura 3.20a se suponen como rígidos y carentes de masa. La expresión “ $V_3 = -V_1 - V_2$ ” corresponde con la ecuación (3.61). Si “ F ” es la fuerza a través del claro, “ X_3 ”, entonces “ F ” es el puerto de esfuerzo para “ V_1 ”, “ V_2 ” y “ V_3 ” de acuerdo con la ecuación (3.60). Tal fuerza existiría si “ F ” fuese debida a un resorte carente de masa conectado entre los dos carros. Con el resorte conectado, un bond graph del sistema sería:



Enseguida se considera la contraparte de la unión-0, descrita por un multipuerto en el cual los roles de esfuerzo y flujo son intercambiados. Tal elemento es llamado “unión de esfuerzo”, “unión-1” o “unión de flujo común”. El símbolo para este multipuerto es un “uno” con tres bonds:



Con la convención de signo indicada, las relaciones constitutivas para este elemento son:

$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) \tag{3.63}$$

$$e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0 \tag{3.64}$$

Al igual que con la unión-0, las ecuaciones constitutivas para la unión-1 se combinan para asegurar la conservación de potencia en la forma de la ecuación (3.64).

La unión-1 tiene un solo flujo y la suma de las variables de esfuerzo en los bonds es nula. La Figura 3.20b muestra instancias en las cuales puede usarse una unión-1 para modelar situaciones físicas. Los conductores eléctricos y los pasos hidráulicos se muestran de manera tal que componentes de un puerto fuesen conectados a los puertos, de este modo puede describirse la conexión resultante como una conexión en serie. Una sola corriente o flujo volumétrico, y los voltajes y presiones en los puertos sumarían cero. En el ejemplo mecánico las tres fuerzas están asociadas con una velocidad común y las fuerzas deben sumar cero dado que se supone que el carro carece de masa.

La Tabla 3.10 identifica algunas interpretaciones físicas para las uniones en varios dominios físicos. La existencia de uniones “0” y “1” en sistemas complejos no siempre es obvia, no obstante se tienen técnicas formales para el modelado de sistemas empleando elementos básicos.

Tabla 3.10. Interpretaciones físicas de uniones en bond graph.

| | | |
|-----------------------------|---------|---|
| Circuitos eléctricos | -0- | Representa la ley de corriente de Kirchhoff para un nodo donde se unen tres conductores. |
| | -1- | Representa la ley de voltaje de Kirchhoff descrita a lo largo de un lazo en el cual una corriente fluye y experimenta tres caídas de voltaje. |
| Sistemas mecánicos | -0- | Representa compatibilidad geométrica para una situación que involucra una fuerza y tres velocidades cuya suma algebraica es cero. |
| | -1- | Representa el equilibrio dinámico de fuerzas asociadas con una velocidad –cuando se involucra un elemento inercial, la unión hace cumplir la de Newton para la masa del elemento. |
| Sistemas hidráulicos | -0- | Representa la conservación de tasa de flujo volumétrico en un punto donde concurren tres tuberías. |
| | -1- | Representa el requerimiento de que la suma de las caídas de presión alrededor de un circuito que involucra un solo flujo debe ser algebraicamente cero. |

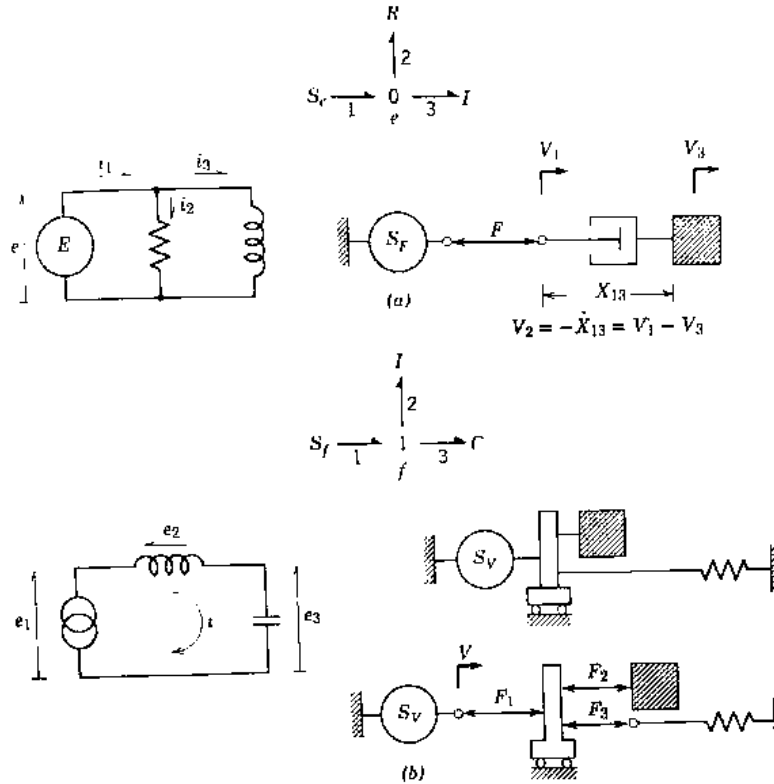
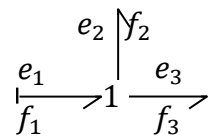


Figura 3.21. Ejemplos de sistemas que involucran elementos de tres puertos [46].

Se muestran cuatro sistemas elementales en la Figura 3.21 donde solo se involucran dos bond graphs. Los aspectos en serie y en paralelo para las uniones son más obvios en los casos eléctricos que en los mecánicos. Los elementos de un puerto tienen convenciones de signo como las presentadas en las secciones anteriores pero no todos los signos en las uniones presentan convención interior. Cuando las semiflechas de la convención de signo son cambiadas de sentido interior, las ecuaciones (3.61) y (3.64) deben modificarse con un signo negativo para cada puerto con el signo de sentido exterior. Las ecuaciones (3.60) y (3.63) se mantienen invariantes bajo el cambio en la convención de signo. Una unión-0 tiene un solo esfuerzo y una unión-1 tiene un solo flujo; independientemente de la convención de signo. Como ejemplo se considera:



Cuyas ecuaciones son:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= f_2 = f_3 \\ e_1 - e_2 - e_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.65)$$

Los sistemas y bond graphs son consistentes con ecuaciones como las (3.65).

En simbolismo de bond graph, dos elementos de tres puertos pueden combinarse en elementos de tres puertos tales que:

$$\begin{array}{c} | \\ - 0 - 0 - \\ | \end{array} = \begin{array}{c} | \\ - 0 - \\ | \end{array}$$

$$\begin{array}{c} | \\ - 1 - 1 - \\ | \end{array} = \begin{array}{c} | \\ - 1 - \\ | \end{array}$$

Una unión “0” o “1” de “n” puertos tiene un esfuerzo o flujo común en todos los bonds y la suma algebraica de las variables complementarias de potencia en los bonds son nulas. Uniones de dos puertos surgen de manera ocasional y, en algunos casos, estas son equivalentes a bonds simples. Por tanto se tienen las siguientes identidades válidas de bond graph:

$$\rightarrow 0 \rightarrow = \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 \rightarrow = \rightarrow$$

Por otro lado, con algunos patrones de signo, las uniones “0” y “1” sirven para invertir la definición de signo de un esfuerzo y flujo, por ejemplo:

$$\begin{array}{c} e_1 \quad e_2 \\ \rightarrow 0 \leftarrow \\ f_1 \quad f_2 \end{array} \text{ implica que: } e_1 = e_2 ; f_1 = -f_2$$

$$\begin{array}{c} e_1 \quad e_2 \\ \rightarrow 1 \leftarrow \\ f_1 \quad f_2 \end{array} \text{ implica que: } f_1 = f_2 ; e_1 = -e_2$$

Tales elementos de dos puertos son necesarios cuando se unen dos multipuertos con un bond, pero estos han sido definidos con signos que no son compatibles con un solo bond. Al conectar un resorte, “ $\rightarrow C$ ”, con una masa, “ $\rightarrow I$ ”, podría definirse una velocidad común al usar la unión “1” de dos puertos para expresar el hecho de que la fuerza del resorte es el negativo de la fuerza en la masa. El bond graph resultante sería “ $C \leftarrow 1 \rightarrow I$ ”, en el cual, los elementos pasivos de un puerto tienen la conveniente convención de signo interior.

3.6.4. Consideraciones de Causalidad para Multipuertos Básicos.

Algunos de los multipuertos básicos están restringidos con respecto a las causalidades posibles, algunos son relativamente indiferentes a la causalidad y algunos presentan leyes constitutivas en formas diferentes para diferentes causalidades.

3.6.4.1. Causalidad para elementos básicos de un puerto.

Las fuentes de esfuerzo y flujo son los elementos de discusión más simple desde un punto de vista causal, dado que, por definición, una fuente imprime una historia temporal ya sea de esfuerzo o flujo a cualquier sistema conectado a ella. De este modo, si se emplean símbolos “ S_e ” y “ S_f ” para las fuentes abstractas de esfuerzo y flujo, respectivamente, las únicas causalidades permisibles para estos elementos son:

$$S_e \rightarrow$$

$$S_f \vdash$$

Las formas causales para fuentes de esfuerzo y flujo están resumidas en las primeras dos filas de la Tabla 3.11.

Tabla 3.11. Formas causales para elementos básicos de un puerto.

| Elemento | Forma acausal | Forma causal | Relación causal |
|--------------------|-------------------|-------------------|--|
| Fuente de esfuerzo | $S_e \rightarrow$ | $S_e \rightarrow$ | $e(t) = E(t)$ |
| Fuente de flujo | $S_f \rightarrow$ | $S_f \vdash$ | $f(t) = F(t)$ |
| Resistor | $\rightarrow R$ | $\vdash R$ | $e = \Phi_R(f)$ |
| | | $\rightarrow R$ | $f = \Phi_R^{-1}(e)$ |
| Capacitor | $\rightarrow C$ | $\vdash C$ | $e = \Phi_C^{-1} \left(\int^t f dt \right)$ |
| | | $\rightarrow C$ | $f = \frac{d}{dt} \Phi_C(e)$ |
| Inercia | $\rightarrow I$ | $\rightarrow I$ | $f = \Phi_I^{-1} \left(\int^t e dt \right)$ |
| | | $\vdash I$ | $e = \frac{d}{dt} \Phi_I(f)$ |

El resistor de un puerto es indiferente a la causalidad impuesta sobre él. Las dos posibilidades pueden representarse en forma de ecuación de la siguiente manera:

$$e = \Phi_R(f) \tag{3.66}$$

$$f = \Phi_R^{-1}(e) \tag{3.67}$$

Donde la variable a la izquierda del signo de igualdad representa la salida del resistor (variable dependiente) y la que aparece en la función del lado derecho es la variable de entrada (independiente) para el elemento. Esta convención es comúnmente usada en ecuaciones escritas y corresponde a la notación empleada en programación computacional.

Las correspondencias entre las ecuaciones de causalidad interpretadas y los trazos causales en el bond del elemento resistivo “R” se muestran en la tercera fila de la Tabla 3.11. Mientras que ambas funciones “ Φ_R ” y “ Φ_R^{-1} ” existan y sean conocidas, no hay razón para preferir una causalidad sobre otra. Es posible, sin embargo, que la relación estática entre “e” y “f” mostrada en la Figura 3.11 sea multi-valuada en una dirección o la otra; esto es, cualquiera “ Φ_R ” o “ Φ_R^{-1} ” puede ser multivaluada. En tal caso, la causalidad univaluada sería preferible. En el caso lineal, con una pendiente finita de la característica “e – f”, el resistor de un puerto es indiferente a la causalidad impuesta sobre él.

Las leyes constitutivas de los elementos “C” e “I” son expresadas como relaciones estáticas, entre “e” y “ $q = \int^t f dt$ ”, y “f” y “ $p = \int^t e dt$ ”, respectivamente. Al expresar relaciones causales entre esfuerzos y flujos se encuentra que la relación de causalidad tiene un efecto importante. Tomando el capacitor, se pueden reescribir las relaciones de la Tabla 3.7 como sigue:

$$\left. \begin{aligned} e &= \Phi_C^{-1} \left(\int^t f dt \right) \\ f &= \frac{d}{dt} \Phi_C(e) \end{aligned} \right\} \tag{3.68}$$

En las cuales la causalidad se infiere mediante la forma de la ecuación. Cuando “f” es la entrada al elemento “C”, “e” es dada mediante una función estática de la integral temporal de “f”, pero cuando “e” es la entrada, “f” es la derivada temporal de una función estática de “e”. Las correspondencias entre estas ecuaciones causales y la notación de trazo causal para la capacitancia se muestran en la cuarta fila de la Tabla 3.11. Los dos tipos de causalidad son llamados “causalidad integral” y “causalidad derivativa”, respectivamente.

Dado que la inercia es el dual del capacitor, ocurren efectos similares con las dos elecciones de causalidad. Reescribiendo las relaciones del elemento inercial de la Tabla 3.8, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} f &= \Phi_I^{-1} \left(\int^t e dt \right) \\ e &= \frac{d}{dt} \Phi_I(f) \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

En este caso, la causalidad integral existe cuando “e” es la entrada a la inercia, y la causalidad derivativa existe cuando “f” es la entrada. Estas observaciones se resumen en la quinta fila de la Tabla 3.11. Las ecuaciones (3.68) y (3.69) son escritas de una forma adecuada para los elementos “C” e “I” no lineales, pero la distinción entre causalidad integral y derivativa se mantiene para el caso especial de elementos lineales.

3.6.4.2. Causalidad para elementos básicos de dos y tres puertos.

Existen dos asignaciones posibles de causalidad, como lo muestran las relaciones (128) y (130). A medida que uno de los esfuerzos o flujos ha sido asignado como una entrada al transformador, el otro está restringido a ser una salida. De este modo las únicas dos posibles elecciones para la causalidad para el transformador son:

$$\rightarrow TF \rightarrow$$

$$\vdash TF \vdash$$

Las posibles causalidades están tabuladas en la primera fila de la Tabla 3.12, en la cual se ha plasmado una nomenclatura simplificada para esfuerzos y flujos, conseguida al numerar los bonds; igualmente se presentan las ecuaciones causales equivalentes a la notación de trazo causal.

Para el girador, las ecuaciones (3.51) muestran que mientras la causalidad para un bond sea determinada, lo mismo ocurre para el otro. Así, las únicas elecciones causales permisibles para el girador son:

$$\rightarrow GY \vdash$$

$$\vdash GY \rightarrow$$

Las elecciones para la causalidad del girador se resumen en la segunda fila de la Tabla 3.12. Las propiedades causales de las uniones “0” y “1” de tres puertos son similares a aquellas para los elementos básicos de dos puertos. A pesar de que cada bond de un elemento de tres puertos, considerado de manera aislada, podría tener cualquiera de las dos asignaciones de causalidad, no todas las combinaciones de causalidad en bonds son permitidas por las relaciones constitutivas del elemento. Por ejemplo, las relaciones constitutivas para la unión-

0 indican que todos los esfuerzos en todos los bonds son iguales y que los flujos deben sumar cero. De este modo, si en algún bond el esfuerzo es una entrada a la unión-0 entonces todos los otros esfuerzos son determinados y en todos los otros bonds deben ser salidas de la unión.

Tabla 3.12. Formas causales para elementos de dos y tres puertos.

| Elemento | Forma acausal | Forma causal | Relación causal |
|---------------|--|---|---|
| Transformador | $\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \rightarrow TF \rightarrow \end{array}$ | $\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \leftarrow TF \leftarrow \end{array}$ | $e_1 = m e_2$ |
| | | $\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \rightarrow TF \leftarrow \end{array}$ | $f_2 = m f_1$ $f_1 = \frac{f_2}{m}$ $e_2 = \frac{e_1}{m}$ |
| Girador | $\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \rightarrow GY \rightarrow \end{array}$ | $\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \leftarrow GY \leftarrow \end{array}$ | $e_1 = r f_2$ |
| | | $\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \rightarrow GY \leftarrow \end{array}$ | $e_2 = r f_1$ $f_1 = \frac{e_2}{r}$ $f_2 = \frac{e_1}{r}$ |
| Unión-0 | $\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \rightarrow 0 \leftarrow \\ 3 \uparrow \end{array}$ | $\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \leftarrow 0 \leftarrow \\ 3 \uparrow \end{array}$ | $e_2 = e_1$ $e_3 = e_1$ $f_1 = -(f_2 + f_3)$ |
| Unión-1 | $\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \rightarrow 1 \leftarrow \\ 3 \uparrow \end{array}$ | $\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \leftarrow 1 \leftarrow \\ 3 \uparrow \end{array}$ | $f_2 = f_1$ $f_3 = f_1$ $e_1 = -(e_2 + e_3)$ |

Por el contrario, si todos los flujos en todos los bonds excepto uno son entradas a la unión-0, el flujo en el bond restante es determinado y debe ser una salida de la unión. Una causalidad permisible típica para una unión-0 se muestra en la quinta fila de la Tabla 3.12. En ese caso, el trazo causal en el extremo del bond “1” cercano a la unión-0 indica que “ e_1 ” es una entrada a la unión y que todos los otros bonds deben tener trazos causales en el extremo alejado de la unión. Interpretando el diagrama de otra manera, los flujos en los bonds “2” y “3” son entradas a la unión-0. Entonces, para una unión-0 de tres puertos existen solamente tres causalidades permisibles en las cuales cada uno de los tres bonds en sucesión desempeña el rol asignado al bond “1” en el ejemplo mostrado en la tabla. Para una unión-0 de “ n ” puertos esta descripción de las restricciones de causalidad es válida y existen solamente “ n ” diferentes asignaciones de causalidad permisibles.

Para una unión-1 se aplican las mismas consideraciones que para la unión-0 excepto que los roles de esfuerzos y flujos son intercambiados. Las relaciones constitutivas del elemento indican que los flujos en todos los bonds son iguales y que los esfuerzos suman cero. De esta manera, si el flujo de un solo bond es una entrada a la unión-1, los flujos de todos los otros bonds son determinados y deben considerarse como salidas de la unión. Por otro lado, cuando los esfuerzos en todos los bonds excepto en uno son entradas a la unión-1, el esfuerzo en el bond restante es determinado y debe ser una salida de la unión. Una causalidad permisible típica se muestra en la sexta fila de la Tabla 3.12. En este caso en bond “1” desempeña el rol especial de determinar el flujo común en la unión, y los bonds restantes suministran entradas de esfuerzo que determinan el esfuerzo en el bond “1”. Claramente hay tres causalidades permisibles para una unión-1 de tres puertos, y hay “ n ” diferentes asignaciones de causalidad permisibles para la unión-1 de “ n ” puertos.

A pesar de que las consideraciones causales han sido establecidas para todos los multipuertos básicos definidos hasta el momento (resumidas en las tablas 3.11 y 3.12) es complicado establecer con claridad cuáles son todas las implicaciones de causalidad. El estudio de la causalidad es muy importante y bond graph es adecuado para este estudio. No obstante, solamente cuando algunos modelos de sistemas reales son ensamblados se hace clara la importancia de la información causal. Usando las reglas de causalidad, es posible predecir características de sistemas incluso antes de decidir la caracterización exacta de los multipuertos. Por ejemplo, sería posible predecir el orden del modelo del sistema antes de escribir alguna ecuación, y antes debe tomarse la firme decisión sobre si el modelo debe ser lineal o no. Además las condiciones causales prueban su valía al escribir ecuaciones de estado o al preparar diagramas de bloques para computadora.

3.7. Modelos de Sistemas y Simulación Automatizada por Computadora

La representación de cualquier sistema en bond graph emplea un procedimiento de modelado directo y simple. Los sistemas a tratar involucran solamente un tipo de potencia dentro de un mismo dominio, por lo que se denominan como “sistemas de un solo dominio de energía”. Existen dispositivos que involucran dos (ocasionalmente más) tipos de potencia y éstos tienen elementos transductores (p. e. motores y bombas) que acoplan los diferentes dominios de energía. Los bond graphs son adecuados para estudiar sistemas de múltiples dominios de energía.

Uno de los principales usos de un modelo de sistema bond graph es la predicción de la respuesta dinámica de un sistema empleando simulación computacional. En ocasiones, el sistema en cuestión existe y es de interés mejorar el sistema mediante cambios en los parámetros del sistema o en su estructura básica, pero con frecuencia el modelo y la simulación son empleados para diseñar un sistema adecuado incluso antes de construir un prototipo.

El análisis del modelo en bond graph implica cómo derivar ecuaciones diferenciales a partir de un modelo bond graph, cómo analizar ciertos tipos de ecuaciones y cómo pueden manejarse sistemas no lineales complejos en una computadora. Los bond graphs son modelos

matemáticos precisos de sistemas los cuales pueden ser procesados automáticamente mediante un programa de computadora el cual puede, en muchos casos, conducir a historias temporales de variables interesantes casi de manera automática, requiriendo solamente la especificación de parámetros, condiciones iniciales y funciones de fuerza. Una variedad de programas están disponibles los cuales procesan bond graphs y colocan las ecuaciones implicadas en una forma adecuada para la solución computacional mediante un programa de simulación. El uso de gráficas de los resultados permite entender las respuestas dinámicas del modelo del sistema y permite entender las respuestas dinámicas del modelo del sistema y optimizar el sistema.

Esto implica que se requiere de un entendimiento de cómo operan los programas de simulación automatizada así como las dificultades matemáticas que pueden surgir de algunas decisiones de modelado. Después de que un modelo bond graph ha sido creado, en la mayoría de los casos conveniente llevar a cabo experimentos computacionales en el modelo y, de esta manera, dimensionar componentes o cambiar la configuración del sistema en caso de que la predicción del comportamiento del sistema no sea satisfactoria.

3.7.1. Mecánica de Traslación.

Los tipos comunes de sistemas en mecánica ingenieril involucran la traslación y rotación de cuerpos rígidos. El procedimiento sistemático de modelado para traslación mecánica es similar al método de construcción para redes eléctricas en muchos aspectos. En mecánica se pone cuidadosa atención a las componentes de velocidad (escalares) incluyendo la referencia inercial, denotando cada una de las velocidades por una unión-1. Debe tenerse cuidado de asegurar que las velocidades de los cuerpos sean definidas apropiadamente con respecto al espacio inercial. Los elementos que involucran fuerzas son encadenados entre los pares de velocidades apropiados empleando uniones-0, dando concreta realización al principio de acción-reacción de Newton. Las condiciones de velocidad son impuestas por fuentes de velocidad y la unión de la velocidad de referencia debe eliminarse junto con sus bonds. Entonces se tiene la simplificación.

Es conveniente revisar dos pasos antes de que un bond graph pueda ser analizado ya sea por un humano o por un programa de computadora. Primero se requiere una forma conveniente para referirse a todas las variables en el sistema. Una manera de hacer esto es asignar un número a cada bond. Esto permite que cualquier variable de esfuerzo, flujo, cantidad de movimiento o desplazamiento sea asignada a su correspondiente número de bond. Esto también permite referirse a todos los elementos de un puerto por su tipo y número de bond. La otra asignación importante es el signo de semiflecha para cada bond. Algunas reglas para esto son las siguientes:

1. Siempre apuntar semiflechas hacia los elementos “R”, “C” e “I”. Esto asegurará que las leyes constitutivas aparezcan en forma adecuada.
2. En la mayoría de los casos las fuentes son pensadas como suministros de potencia, así que, a menos que las direcciones de esfuerzo y flujo se especifiquen, las semiflechas en las fuentes deben apuntar hacia afuera de las fuentes.

- Para bond graphs ramificados sin lazos cerrados, las direcciones de los signos de los bonds restantes no son importantes y pueden ser asignados arbitrariamente.

Una vez que un bond graph ha sido etiquetado con números de bonds y semiflechas, está listo para el análisis a mayor detalle. Una parte de este es la obtención de ecuaciones con un proceso simple incluso para computadoras, al menos en forma simbólica. La mayoría de los programas procesadores automáticos de bond graph permite el ingreso gráfico de bond graphs a una computadora. Aun así se requiere algo más que la especificación de parámetros para permitir el cálculo de propiedades útiles del sistema. Dada información más detallada acerca de las fuentes y las condiciones iniciales de los capacitores e inercias, una computadora puede predecir cómo podría responder el sistema.

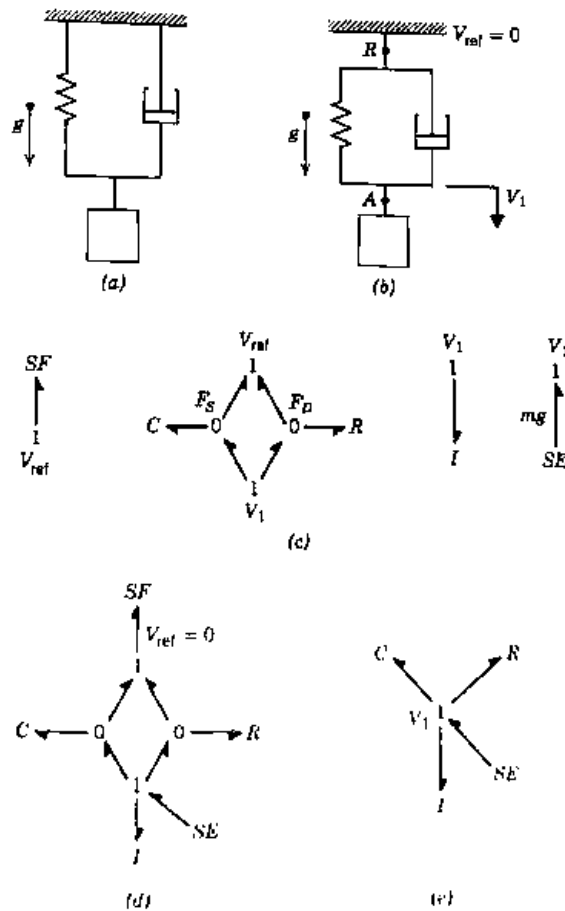


Figura 3.22. Ejemplo de translación mecánica [46].

A pesar de que la inspección es un método poderoso, se dan ocasiones en que un procedimiento más rutinario es más útil, y hay ocasiones en que la inspección no funciona. El enfoque básico es construir un bond graph que represente el sistema estructuralmente y luego simplificar el bond graph basado en propiedades seleccionadas del sistema.

La Figura 3.22a muestra un oscilador masa-resorte-amortiguador en un campo gravitacional. El esquema se replantea en la parte “b” para enfatizar la estructura fuerza-velocidad del sistema. La velocidad “ V_1 ” es definida con respecto al espacio inercial y la velocidad de referencia “ V_{ref} ” es proporcionada por una fuente de velocidad; el resorte genera una fuerza relacionada con la integral de la diferencia de velocidad entre “ V_{ref} ” y “ V_1 ” (el desplazamiento relativo); el amortiguador genera una fuerza relacionada con la misma diferencia de velocidad; y la masa se mueve con velocidad “ V_1 ” directamente, al igual que la fuerza de gravedad. Cuando la velocidad de referencia es eliminada y el esquema es simplificado, se obtiene el bond graph compacto resultante mostrado en la Figura 3.22e.

Muchos sistemas mecánicos requieren no más que una extensión del método directo empleado en orden de obtener un modelo bond graph. De hecho, con experiencia, es posible producir el resultado final directamente, evitando todos los pasos intermedios en casos simples. Sin embargo, existen sistemas que son complicados de reducir por inspección. Por lo tanto, se establece un método de construcción mecánico en cinco pasos:

Método de construcción de traslación mecánica.

1. Para cada velocidad distinta se establece una unión-1. Algunas uniones-1 representan velocidades absolutas y algunas, velocidades relativas.
2. Insertar elementos generadores de fuerza de un puerto entre pares apropiados de uniones-1 empleando uniones-0; de igual modo, agregar inercias a sus respectivas uniones-1 (se debe asegurar que estén definidas apropiadamente con respecto a un marco inercial).
3. Asignar todas las direcciones de potencia.
4. Eliminar cualquier unión-1 de velocidad cero y sus bonds.
5. Simplificar el esquema resultante al condensar uniones “0” y “1” de dos puertos en bonds.

En seguida se aplica este procedimiento al ejemplo considerado previamente (Figura 3.22b). La Figura 3.23a presenta nuevamente el esquema. En la parte “b” las uniones-1 han sido establecidas. Ambas uniones-1 representan velocidades absolutas. Los efectos del resorte y el amortiguador son insertados en la parte “c”, mientras que la inercia, gravedad, y las condiciones de referencia se agregan en la parte “d”. Éste es el mismo esquema que el mostrado en la Figura 3.22d y es simplificado en el mismo resultado que el mostrado en la Figura 3.22e.

Existe un esquema equivalente al mostrado en la Figura 3.23d pero es más simple en algunos aspectos. Se observa que la velocidad efectiva en el resorte es “ $V_1 - V_{ref}$ ” y la velocidad efectiva en el amortiguador es igualmente “ $V_1 - V_{ref}$ ”. Entonces puede usarse una sola unión-0 para “tomar la diferencia de velocidad” como se muestra en la Figura 3.24. Para “distribuir” la diferencia de velocidad común a ambos elementos “C” y “R”, se emplea una unión-1, como se muestra en la parte “b”. Esta última unión-1 representa una velocidad relativa. El bond graph tiene cuatro uniones, pero ahora tiene un bond menos y un lazo menos.

Muchos bond graphs puede simplificarse al usar este procedimiento de equivalencia cuando las direcciones de potencia (*id est*, los signos) lo permiten.

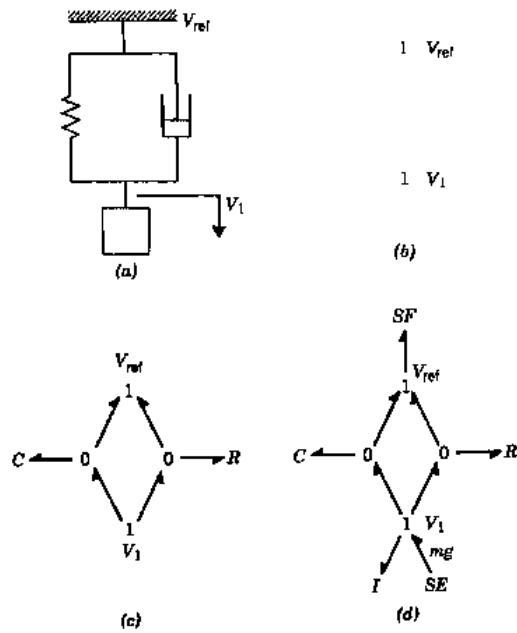


Figura 3.23. Reinterpretación del ejemplo de traslación mecánica [46].

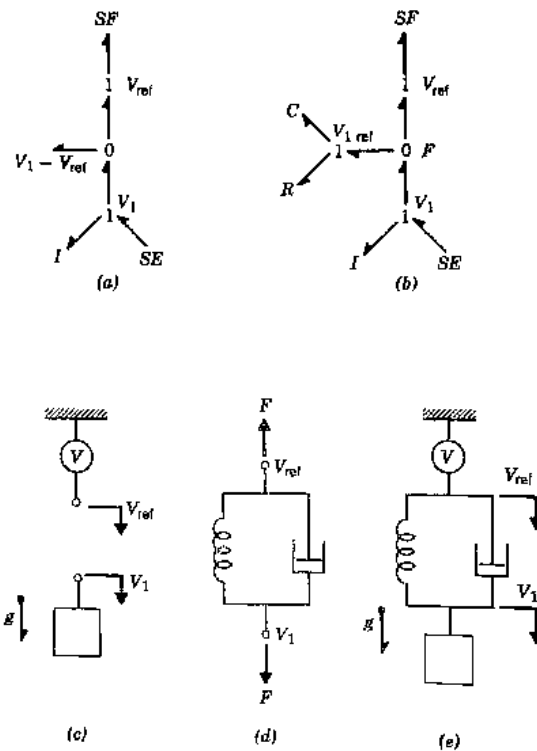


Figura 3.24. Modelo equivalente del ejemplo de traslación mecánica [46].

Por motivos de variación, el bond graph de la Figura 3.24b se reinterpreta en un ejemplo físico. Existe una velocidad inercial " V_1 ", con una inercia y una fuerza gravitatoria presentes. Existe una velocidad de referencia, " V_{ref} ", definida con respecto al marco inercial. Se pone como una fuente de velocidad como en la Figura 3.24c. Un resorte y un amortiguador comparten la misma velocidad (diferencia) y sus fuerzas se suman; la fuerza neta, " F ", actúa en " V_1 " y " V_{ref} ", como se muestra en la parte " d ". Lo que se obtiene cuando se ensamblan las piezas (Figura 3.24e) es una ligera generalización del sistema considerado originalmente. En adición a lo anterior, para sistemas mecánicos que presentan movimiento traslacional unidireccional, se requiere solo una extensión de los métodos mencionados para lidiar con sistemas traslacionales que contengan palancas, poleas y otros dispositivos simples de transformación fuerza-movimiento.

Un modelo matemático en términos gráficos puede ser modificado de manera sencilla. Para sistemas linealizados deben especificarse: para resortes, constantes de resorte; para inercias mecánicas, masa; y, para amortiguadores lineales, el coeficiente de amortiguación. Para calcular respuestas reales, la información extra necesaria es la historia temporal proporcionada por las fuentes y las condiciones iniciales de los elementos.

Los detalles de cómo deben ser especificados los parámetros, condiciones iniciales y las funciones de fuerza de las fuentes para un programa de simulación automático de bond graph varía de programa a programa, pero con el reconocimiento gráfico del bond graph se puede apreciar la poca manipulación humana involucrada. A medida que se obtiene conocimiento en la formulación de ecuaciones y métodos numéricos, se consigue una mayor apreciación acerca de los beneficios de programas de simulación automática así como la percepción de que siempre hay errores y dificultades numéricas que pueden ocurrir incluso en los programas más sofisticados.

3.7.2. Rotación en Torno a Un Eje Fijo.

Los sistemas mecánicos que involucran rotación en torno a un eje fijo ocurren en diversos tipos de maquinaria y son de suma importancia práctica. Para su modelado, el procedimiento de construcción empleado en traslación necesita ser ligeramente modificado para aplicarse a estos sistemas. Para este caso se omite la discusión del enfoque por inspección.

Método de construcción de rotación mecánica.

1. Para cada velocidad angular distinta se establece una unión-1. Algunas velocidades angulares son definidas con respecto al espacio inercial y algunas son velocidades angulares relativas.
2. Se insertan los elementos generadores de torque en el esquema empleando uniones-0; se agregan las inercias y las restricciones de velocidad directamente. Asegurarse de que las velocidades angulares asociadas con las inercias están definidas con respecto a un marco inercial.
3. Asignar direcciones de potencia.

4. Eliminar la referencia de terreno de velocidad cero y sus bonds.
5. Simplificar el bond graph.

Como ejemplo se considera una rueda de molienda en el extremo de un eje flexible como se muestra en la Figura 3.25a. Se proporciona un esquema en la parte “b” en la cual se asume que el motor actúa como una fuente de velocidad, el eje sólo tiene conformidad (elasticidad) y la acción de molienda es disipativa por naturaleza. Todas las velocidades angulares están definidas con respecto a una referencia inercial, de este modo el mostrar la referencia cero es hecho por conveniencia en la parte “c”. Los elementos se agregan en la parte “d” así como sus contrapartes traslacionales se han manejado previamente. El bond graph es simplificado y el resultado es la estructura compacta de la Figura 4.21e.

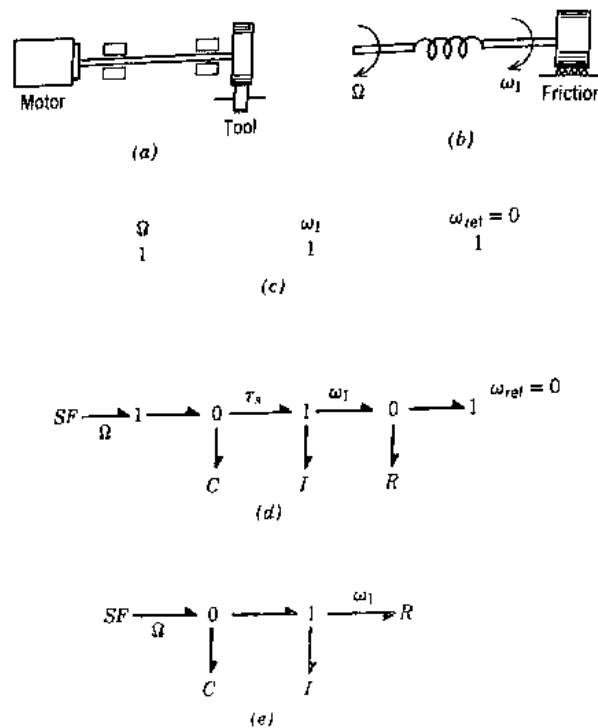


Figura 3.25. Modelo de rueda de molienda [46].

Enseguida se trata un sistema mecánico no lineal. En la Figura 3.26a se muestra una masa fija en el extremo de un eslabón que puede rotar en torno al punto “P” ubicado en el plano. La gravedad actúa para mover la masa hacia abajo y el resorte deslizante actúa para moverlo hacia arriba. Sin fricción el sistema puede oscilar de manera no lineal por un tiempo indefinido. En la parte “b” se muestran las tres distintas velocidades “ ω ”, “ V_y ” y “ V_0 ”. La parte “c” establece que la inercia rotatoria (“ mL^2 ”) se mueve con velocidad “ ω ”; la gravedad (“ mg ”) actúa con velocidad “ V_y ”, y el estado del resorte depende de ambas velocidades “ V_y ” y “ V_0 ”. Adicionalmente existe una relación geométrica entre “ V_y ” y “ ω ” que depende de “ θ ”.

$$y = L \cos \theta \tag{3.70}$$

$$\frac{dy}{dt} = V_y = (L \operatorname{sen} \theta) \frac{d\theta}{dt} \tag{3.71}$$

Esto es, “ V_y ” depende de “ ω ” en la manera usual que presenta un transformador, pero el módulo es función de “ θ ”, en vez de ser constante. Por lo tanto se designa “ MTF ” para el “transformador modulado” para relacionar “ ω ” y “ V_y ”. La simplificación reduce el bond graph al mostrado en la Figura 3.26d el cual puede ser reconocido como un oscilador no lineal con un término de fuerza. La notación “ $m(\theta)$ ” para el módulo del elemento “ MTF ” recuerda que no es una constante.

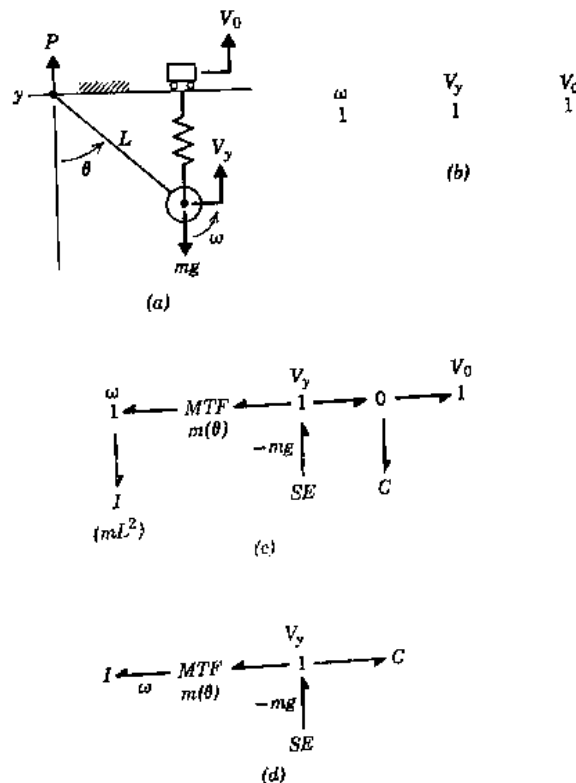


Figura 3.26. Oscilador no lineal [46].

3.7.3. Modelos de Transductores Simples.

Los transductores son dispositivos que acoplan distintos dominios de energía. Pueden tener dos o más puertos y pueden ser dispositivos activos o pasivos. Uno de los atributos del modelado mediante bond graph surge cuando se estudian sistemas electromecánicos, hidromecánicos u otros sistemas de dominios combinados, y reduce sus representaciones iniciales no homogéneas a una forma unificada de bond graph.

Es común para ingenieros en sistemas el estudiar sistemas complejos y descubrir que no se es familiar con alguno o más de los dispositivos involucrados. Sin embargo, los métodos ilustrados funcionan adecuadamente para describir la estructura general de sistemas en términos compatibles de bond graph. La especificación de modelos cuantitativos para las diversas partes podrían requerir estudio o consulta con especialistas, pero los resultados pueden coordinarse en un modelo de sistema unificado.

3.8.Ecuaciones de Estado.

3.8.1. Forma Estándar para Sistemas de Ecuaciones.

Una de las características más destacables de bond graph es que puede llevarse a cabo un estudio de formulación de ecuaciones previo a escribir alguna ecuación. Para entender esto se consideran algunas formas particulares de ecuaciones que son empleadas para representar un sistema y seleccionar una forma –del tipo “espacio de estado”, por ejemplo- como objetivo.

Un sistema de orden “ n ” puede ser representado mediante:

1. Una sola ecuación de orden “ n ” en términos de una sola variable desconocida;
2. “ n ” ecuaciones de primer orden acopladas en términos de “ n ” variables desconocidas; o
3. Varias combinaciones de incógnitas y ecuaciones de órdenes apropiados (no necesariamente iguales).

Muchos problemas importantes, métodos y resultados están organizados en términos de la primera forma. Al principio, la mayoría de las matemáticas en ingeniería eran presentadas en esta forma. La segunda tiene ciertas ventajas recomendadas para matemáticos para el desarrollo de teoría pero, desde el punto de vista de modelado de sistemas, es una forma conveniente para ser usada por analistas de sistemas ingenieriles, ingenieros de control y personas involucradas en estudios de computación digital y analógica. Un ejemplo interesante de la tercera forma se encuentra en los conjuntos de ecuaciones de segundo orden generados por el enfoque Lagrangiano de análisis de sistemas.

Es posible pasar de una de las formas dadas a cualquier otra, ya sea que el sistema sea lineal o no lineal. Sin embargo, para sistemas no lineales las transformaciones deseadas pueden ser complicadas de lograr. Si se comienza con una forma en especial, el elegir variables adicionales implica un proceso al azar a menos que se tenga percepción considerable acerca del sistema estudiado. Por otro lado, si un conjunto de variables físicamente significativas se encuentra disponible puede efectuarse una eliminación de variables indeseadas con perspectiva considerable.

El estudio de sistemas ingenieriles empleando bond graphs brinda una oportunidad de formulación en términos de las variables físicas significativas y de generar conjuntos

simultáneos de ecuaciones de primer orden a partir de bond graphs. Cuando el sistema bajo estudio es no lineal, la forma buscada está dada por:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r), \\ \dot{x}_2(t) &= \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r) \end{aligned} \right\} \quad (3.72)$$

Donde “ x_i ” son las variables de estado, “ \dot{x}_i ” son las derivadas temporales de “ x_i ”, “ u_i ” son las entradas al sistema y “ ϕ_i ” son un conjunto de funciones estáticas (o algebraicas). Es decir que, dados los valores de los argumentos en el segundo miembro de las ecuaciones (3.72), puede encontrarse un conjunto de valores para las derivadas por medios algebraicos.

Si el sistema es lineal, las ecuaciones (3.72) toman una forma más simple, como se muestra a continuación:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \dots + b_{1r}u_r \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \dots + b_{2r}u_r \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \dots + b_{nr}u_r \end{aligned} \right\} \quad (3.73)$$

Donde “ a_{ij} ” y “ b_{ij} ” son constantes en la mayoría de los casos. Para un sistema lineal variante en el tiempo, “ a_{ij} ” y “ b_{ij} ” pueden variar con el tiempo, pero no dependerán de las variables “ x ”.

La tarea consiste en seleccionar variables significativas de sistemas de entre las posibles y organizarlas en relaciones de la forma (3.72) y (3.73), según sea apropiado.

3.8.2. Bond Graph Aumentado.

Antes de escribir alguna ecuación es deseable preparar el bond graph con información adicional que permita la escritura de ecuaciones en una forma ordenada. Los pasos principales se enuncian a continuación:

1. Nombrar todos los bonds en el esquema (*id est*, numerarlos de manera consecutiva).
2. Asignar a cada bond una referencia de dirección de potencia.
3. Asignar a cada bond un sentido causal para el par de variables de potencia “ e ” y “ f ”.

Nombrar los bonds significa que es posible hacer referencia a cada variable en el sistema de manera directa y sin ambigüedades.

La asignación de direcciones de potencia, si no se realiza durante el proceso de modelado, puede realizarse de dos maneras básicas: elegir una dirección de referencia en el sistema

original para cada variable de potencia y transferir al bond graph las referencias de dirección de potencia implicadas, o, colocar las direcciones directamente en el bond graph e interpretar las implicaciones en el sistema original según sea requerido. La experiencia indica que con frecuencia el segundo enfoque es preferible por su facilidad y simplicidad, así como su alta correspondencia con la práctica en la ingeniería típica en la selección de direcciones de referencia.

Patrones comunes en direcciones de bonds y orientaciones en circuitería ocurren con frecuencia, lo que hace la transferencia de direcciones un proceso rutinario. Aspectos e interpretaciones similares pueden hacerse para direcciones de bond graph y orientación de variable mecánicas.

Es posible escribir ecuaciones de sistema para un bond graph que ha sido etiquetado y direccionado. Para un bond graph con " N " bonds existen " $2N$ " variables de bond (" N " esfuerzos y " N " flujos). Cada multipuerto de " n " puertos implica " n " restricciones entre sus variables de bond asociadas. Cada bond es adyacente a dos multipuertos. El número de variables de bond y de restricciones es siempre igual (dado que no hay bonds abiertos). Es posible escribir todas las restricciones para cada multipuerto y lograr un conjunto de ecuaciones de sistema, esencialmente desorganizado y sin clasificar, pero correcto. La manipulación de las ecuaciones resultantes para obtener perspectiva y lograr una forma útil es difícil en un sistema complicado en ausencia de algún algoritmo. Una razón es el número excesivo de variables usadas en la formulación inicial.

El tercer paso en el proceso de aumento es la asignación de causalidad. Se emplean las consideraciones básicas de causalidad para los diferentes elementos presentados previamente. Entonces es apropiado aplicar dicha información en el sistema de manera ordenada.

En un sentido causal, existen dos tipos distintos de elementos de bond graph. Las fuentes (elementos " S_e " y " S_f ") y elementos de unión (" 0 ", " 1 ", " TF ", y " GY ") deben corresponder a ciertas condiciones causales o sus definiciones básicas no serían válidas. Si una fuente no tiene una causalidad que muestre el tipo de variable que suministra al sistema al cual está conectada entonces no tiene significado. Cada elemento-fuente debe tener su forma causal apropiadamente asignada a él.

Para cada elemento de unión de dos puertos, " TF " y " GY ", hay dos formas causales posibles que preserven la definición básica del elemento. Si ninguna de estas formas puede ser asignada, el concepto de entrada y salida asociado con el elemento no es válido. En consecuencia se afirma que cada " TF " y " GY " debe tener una de las dos formas causales permisibles asignada a él. La elección de la forma será indicada generalmente por el sistema contiguo en base al resto de las consideraciones a discutir.

Cada unión “0” y “1” debe tener una de sus formas causales apropiadas asignadas a ella o la definición básica del elemento particular no será válida. La selección de una forma causal particular será motivada por otras consideraciones del sistema en general.

Si un sistema no puede satisfacer las condiciones causales anteriormente descritas, el modelo físico básico, en el cual se ha basado el bond graph, debe ser reestudiado. Las indicaciones son que una situación imposible ha sido creada y que no es susceptible de resolución matemática acertada. El siguiente paso depende del modelador de sistemas quien debe corregir el modelo de forma apropiada.

Continuando con la asignación de causalidad se consideran los elementos “C” e “I”. Las variables de energía en estos elementos (“p” en “I”, “q” en “C”) son la base de las variables de estado del sistema. Esto es, un conocimiento de los valores de un conjunto necesario y suficiente, junto con las entradas, permitirá predecir la respuesta del sistema en el tiempo. Las variables de energía pueden ser usadas para determinar la energía del sistema y su distribución y las restricciones estructurales de bond graph sirven para definir las potencias que causan el flujo de energía sujeto a condiciones de entrada, resultando en la dinámica particular del sistema.

No es posible hacer que los elementos “C” e “I” tengan siempre causalidad integral. Si un elemento de almacenamiento tiene causalidad derivativa forzada en él, el significado es que su variable de energía no es algebraicamente independiente de otras variables de energía y restricciones de fuentes. Por tanto, no es una variable de estado independiente y puede ser eliminada de las ecuaciones de estado finales.

A nivel del sistema, la causalidad asociada con los elementos “R” es un asunto de indiferencia. La principal excepción es en el caso de una ley constitutiva no lineal que no sea bi-única (p.e. fricción de Coulomb). Entonces la causalidad asociada con una relación única de entrada-salida para el elemento deberá ser empleada. De otro modo, los elementos “R” aceptan cualquier causalidad que les sea asignada.

El procedimiento básico de asignación de causalidad proporcionado por Karnopp [46] se resume a continuación:

1. Elegir cualquier fuente (“ S_e ”, “ S_f ”) y asignar su causalidad requerida. Inmediatamente extender las implicaciones causales a través del esquema tan lejos como sea posible empleando los elementos restrictivos (“0”, “1”, “TF”, “GY”).
2. Repetir el paso 1 hasta que todas las fuentes se hayan empleado.
3. Elegir cualquier elemento de almacenamiento (“C” o “I”) y asignar la causalidad preferida (integral). Inmediatamente extender las implicaciones causales a través del esquema tan lejos como sea posible empleando los elementos restrictivos (“0”, “1”, “TF”, “GY”).

4. Repetir el paso 3 hasta que se haya asignado una causalidad a todos los elementos de almacenamiento. En muchos casos prácticos todos los bonds estarán causalmente orientados en esta etapa. En algunos casos, sin embargo, ciertos bonds no tendrán asignación realizada. Entonces se procede con los siguientes pasos.
5. Elegir cualquier elemento “*R*” que no tenga asignación y asignar una causalidad (básicamente de manera arbitraria). Inmediatamente extender las implicaciones causales a través del esquema tan lejos como sea posible empleando los elementos restrictivos (“0”, “1”, “*TF*”, “*GY*”).
6. Repetir el paso 5 hasta que se hayan empleado todos los elementos “*R*”.
7. Elegir cualquier bond restante sin asignación (unido a dos elementos restrictivos) y asignarle una causalidad de manera arbitraria. Inmediatamente extender las implicaciones causales a través del esquema tan lejos como sea posible empleando los elementos restrictivos (“0”, “1”, “*TF*”, “*GY*”).
8. Repetir el paso 7 hasta que todos los bonds restantes se hayan empleado.

El procedimiento es simple y ordenado. Los elementos restrictivos representan los enlaces estructurales físicos en el sistema; asignarles la causalidad indica que pueden ser empleados de manera correcta en un modo particular de entrada-salida.

Existen situaciones que pueden surgir durante la aplicación de causalidad de acuerdo con el procedimiento citado. Éstas son:

- 1- Todos los elementos de almacenamiento tienen causalidad integral y el esquema se completa después del paso 4.
- 2- La causalidad se completa empleando los elementos “*R*” y los bonds como se indica en los pasos 5-8.
- 3- Algunos elementos de almacenamiento son forzados a tener causalidad derivativa en el paso 3.

Un bond graph sin causalidad es llamado “acausal”. Una vez que se tiene un bond graph etiquetado, con la asignación de causalidad realizada y la colocación de direcciones efectuada, el resultado es un bond graph completamente aumentado. Tal esquema puede proporcionar sus ecuaciones de estado sin mayor resistencia.

Pueden destacarse dos puntos con respecto al proceso de aumento de un bond graph. El primero es, respecto a la asignación de causalidad, los resultados no dependen del orden de los bonds elegido, excepto en circunstancias especiales. El segundo, las asignaciones de causalidad y de direcciones de potencia son dos operaciones independientes; cualquiera puede realizarse primero. Típicamente las direcciones de potencia se asignan primero, sin embargo, en ocasiones, no se realiza al estudiar aspectos de la estructura del sistema.

3.8.3. Formulación Básica y Reducción.

Una vez que se tiene disponible un modelo bond graph completamente aumentado, las ecuaciones para el sistema pueden ser desarrolladas de manera ordenada. Cuando el sistema es pequeño o sencillo en estructura, las ecuaciones de espacio de estado pueden ser escritas directamente. A medida que el tamaño y la complejidad del sistema aumentan se requiere de un procedimiento organizado para la generación de ecuaciones.

Se dispone de procedimientos para la producción de conjuntos de sistemas de ecuaciones. El proceso básico aplicable en la gran mayoría de casos encontrados en la práctica ingenieril involucran los siguientes pasos:

1. Seleccionar variables de entrada, energía y co-energía.
2. Formular el conjunto inicial de sistemas de ecuaciones.
3. Reducir las ecuaciones iniciales a la forma de espacio de estado.

La selección de entradas es simple: para cada elemento-fuente se escribe en el esquema la variable de entrada al sistema. Estas variables aparecerán en las ecuaciones finales de espacio de estado si tienen algún efecto en el comportamiento del sistema. La lista de variables de entrada se denomina “ u ”.

La selección de variables de estado es lograda al elegir la variable de energía para cada elemento de almacenamiento en el esquema. Cuando la causalidad integral puede ser asignada a todos los elementos “ C ” e “ I ”, se sabe que cada variable de energía es estáticamente independiente de todas las otras. Se eligen como variables de estado la variable “ p ” para cada elemento “ I ”, y la variable “ q ” para cada elemento “ C ”. La lista de variables de estado se denomina “ x ”. En el bond graph se tienen “ $e = \dot{p}$ ” y “ $f = \dot{q}$ ” en los bonds apropiados, representando los esfuerzos y flujos correspondientes para cada “ p ” y “ q ”.

El conjunto de variables de co-energía consiste en “ f ” para cada “ I ” y “ e ” para cada “ C ”. Estas variables aparecen en la formulación inicial y luego son eliminadas en el proceso de reducción.

3.8.4. Espacio de Estado para Modelos de Sistemas Multipuerto.

El modelado de sistemas mediante bond graphs permite el desarrollo, optimización y mejora de métodos estructurados para la obtención de las ecuaciones de estado. Tomando como base el trabajo de Rosenberg [48] en la formulación de espacio de estado para modelos bond graph multipuerto, y las aportaciones de Sueur y Dauphin-Tanguy relativas al análisis estructural de sistemas lineales de múltiples entradas y múltiples salidas [49], y de análisis de sistemas multi-temporales [50], se establece un método basado en la representación bond graph del sistema y la manipulación causal de las ecuaciones de campo.

Cualquier bond graph compuesto de elementos del conjunto básico puede ser organizado en la forma mostrada en la Figura 3.27.

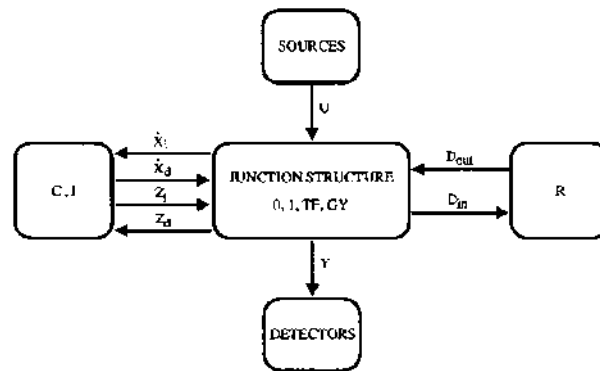


Figura 3.27. Diagrama de bloques de la estructura de unión de un modelo bond graph lineal. [49]

La colección de multipuertos “C” e “I” hace referencia al “campo de almacenamiento (de energía)” y el conjunto de puertos asociados con él, es comprendido por los puertos de almacenamiento. La colección de puertos “R” es llamada “campo de disipación o pérdidas” y su conjunto de puertos, puertos de disipación. La colección de elementos de suministro (“ S_e ” y “ S_f ”) comprende el “campo de suministro” y sus puertos asociados, son los puertos de suministro o fuentes. La colección de elementos del conjunto “{TF, GY, 0,1}” forma la “estructura de unión”, la cual es un multipuerto conservativo de potencia. Los puertos de la estructura de unión en un sistema son contabilizados por los campos descritos.

Cuando la causalidad es asignada al bond graph y se tiene que el esquema posee causalidad integral y causalidad derivativa asignadas a elementos de almacenamiento de energía, se tiene una situación de causalidad mezclada. Dependiendo de dicha causalidad, se identifican, para el puerto de cada campo característico –disipación, almacenamiento y suministro- las variables de entrada y salida correspondientes. La variable “x” en el campo de almacenamiento es la variable de energía real (cantidad de movimiento en una masa, carga en un capacitor, desplazamiento en un resorte) y su derivada temporal “ \dot{x} ” es tomada como entrada, con la variable de energía “z” como salida. Las salidas del campo de suministro son funciones de conducción independientes “u” (“e” para “ S_e ”; “f” para “ S_f ”).

Con base en las definiciones dadas para cada puerto de campo, el sistema completo puede ser representado en forma causal. Cada flecha en la Figura 3.27 representa un vector de variables y los conjuntos de vectores son emparejados de acuerdo a los tipos de campos. Los elementos “ x_i ” y “ z_i ” son variables complementarias. Del *i*-ésimo puerto de almacenamiento y los vectores “ \dot{X} ” y “Z” cubren todos los puertos de almacenamiento.

El desarrollo considerado es construido en torno a los vectores “ \dot{X} ”, “Z”, “ D_{in} ”, “ D_{out} ” y “U”, en un sistema cuyos elementos de almacenamiento se encuentran en causalidad integral, además del vector de energía “X”.

Se considera el caso de los campos lineales “C”, “I” y “R”. Para el caso del campo de almacenamiento se tiene:

$$Z = FX \tag{3.74}$$

Donde “ X ” es el vector de energía; “ Z ” es el vector de co-energía y “ F ” es una matriz cuadrada. En particular la ecuación (3.74) implica que los campos “ C ” e “ I ” están caracterizados “ $E_C = C^{-1}Q$ ” y “ $F_I = I^{-1}P$ ”, respectivamente. Donde “ Q ” es el vector de energía para “ C ”; “ E_C ” es el vector de co-energía para “ C ”; “ P ” es el vector de energía para “ I ”; “ F_I ” es el vector de co-energía para “ I ”; “ C^{-1} ” e “ I^{-1} ” son matrices cuadradas.

El campo de disipación está dado por:

$$D_{out} = LD_{in} \tag{3.75}$$

Donde “ D_{out} ” es el vector de salida; “ D_{in} ” es el vector de entrada; y, “ L ” es una matriz cuadrada. Ambos vectores “ D_{out} ” y “ D_{in} ” se encuentran mezclados en términos de las variables “ e ” y “ f ”, y los elementos de “ L ” son correspondientes a la forma de resistencia y conductancia.

La estructura de unión conduce a expresiones para los vectores “ \dot{X} ” y “ D_{in} ” en términos de las entradas a la estructura de unión, es decir “ Z ”, “ D_{in} ” y “ U ”. Asumiendo que los elementos “ TF ” y “ GY ” tienen módulos constantes, es posible escribir:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ D_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ D_{out} \\ U \end{bmatrix} \tag{3.76}$$

Es decir:

$$\dot{X} = S_{11}Z + S_{12}D_{out} + S_{13}U \tag{3.77}$$

$$D_{in} = S_{21}Z + S_{22}D_{out} + S_{23}U \tag{3.78}$$

Donde “ \dot{X} ” es la derivada temporal de “ X ”; “ Z ”, “ D_{out} ” y “ D_{in} ” han sido definidos previamente; “ U ” es el vector de suministro, y; las sub-matrices “ S_{ij} ” son las restricciones impuestas por la estructura de unión entre los conjuntos de puertos.

Con frecuencia, la sub-matriz “ S_{22} ” no está presente, un hecho que es predecible cuando la causalidad es asignada de manera secuencial. Las sub-matrices “ S_{11} ” y “ S_{22} ” son anti-simétricas y las matrices “ S_{12} ” y “ S_{21} ” son la transpuesta negativa, una de la otra; un conjunto de propiedades derivadas de la naturaleza de la conservación de potencia de la estructura de

unión. Estos hechos facilitan la verificación de la formulación antes de que ocurra una manipulación excesiva.

La reducción de las ecuaciones (3.74) a través de (3.78) a una sola ecuación de espacio de estado en la forma deseada puede ser lograda de manera directa. El patrón empleado puede ser generalizado para sistemas no lineales.

Siendo “ Σ ” un sistema continuo lineal constante de dimensiones finitas, su descripción en espacio de estado está dada por:

$$(\Sigma) = \{\dot{X} = AX + BU \quad (3.79)$$

Donde: “ A ” y “ B ” son matrices de números reales de dimensiones “ $n \times n$ ” y “ $n \times p$ ”, respectivamente. El vector de estados “ \dot{X} ” está compuesto por las variables de energía “ p ” y “ q ”, todos en causalidad integral. Las dimensiones de los vectores clave involucrados son “ $X \in \mathbb{R}^n$ ” y “ $U \in \mathbb{R}^p$ ”.

Del mismo modo se tienen las leyes elementales asociadas con los componentes:

$$\begin{cases} D_{out} = LD_{in} \\ Z = FX \end{cases} \quad (3.80)$$

Donde “ L ” es una matriz diagonal compuesta de coeficientes “ R ” y “ $1/R$ ” y “ F ” está compuesta por coeficientes “ $1/I$ ” y “ $1/C$ ”.

Las ecuaciones de estado se deducen a partir de (3.79) y (3.80) como:

$$\dot{X} = AX + BU \quad (3.81)$$

Con:

$$\begin{cases} A = (S_{11} + S_{12}MS_{21})F \\ B = S_{13} + S_{12}MS_{23} \end{cases} \quad (3.82)$$

Donde:

$$M = L(I - S_{22}L)^{-1} \quad (3.83)$$

Siendo “ I ” la matriz identidad.

Al aplicar el procedimiento, se tiene un par de propiedades que es necesario verificar para que la expresión final de espacio de estado sea válida:

1. “ S_{11} ” y “ S_{22} ” deben ser anti-simétricas o nulas.
2. “ $S_{12} = -S_{21}^T$ ”, *id est*, una sub-matriz es la transpuesta negativa de la otra.

En ocasiones, las variables de estado representativas del sistema son las variables de co-energía en vez de las variables de energía, por lo que es necesario efectuar una transformación simple. Esto es con el propósito de expresar las ecuaciones de estado en la forma que sea más conveniente según la naturaleza del sistema o el dominio energético.

Siendo “ F ” la matriz de transformación entre ambos dominios, se tiene que:

$$\dot{Z} = \bar{A}Z + \bar{B}U \tag{3.84}$$

Donde:

$$\begin{cases} \bar{A} = FAF^{-1} \\ \bar{B} = FB \end{cases} \tag{3.85}$$

Cuando se tienen sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas, así como causalidad mezclada, este procedimiento se extiende para abarcar los elementos en causalidad derivativa y las salidas del sistema. Igualmente permite el análisis de características del sistema como la derivación de información de propiedades de controlabilidad y observabilidad estructural tal como lo muestra Sueur [49].

3.9.Sistemas Mecánicos de Geometría No Lineal.

Los sistemas de vehículos son un ejemplo principal del uso en ingeniería de la mecánica no lineal. Es posible moldear la mecánica de cuerpos rígidos en un formato de bond graph tal que pueda ser usado en la construcción de modelos generales.

3.9.1. Dinámica Multidimensional.

La Figura 3.28 muestra un cuerpo rígido general que se traslada y rota en el espacio. Se muestran los ejes inerciales “ X ”, “ Y ” y “ Z ”, y los ejes “ x ”, “ y ” y “ z ” se encuentran unidos al cuerpo. Con respecto a estas coordenadas fijadas al cuerpo, las propiedades rotacionales inerciales permanecen invariantes y, por tanto, todos los productos de inercia son cero. Dado que estas coordenadas corporales no son la mejor manera de visualizar el movimiento del cuerpo, existen coordenadas prácticas para el cómputo del movimiento corporal.

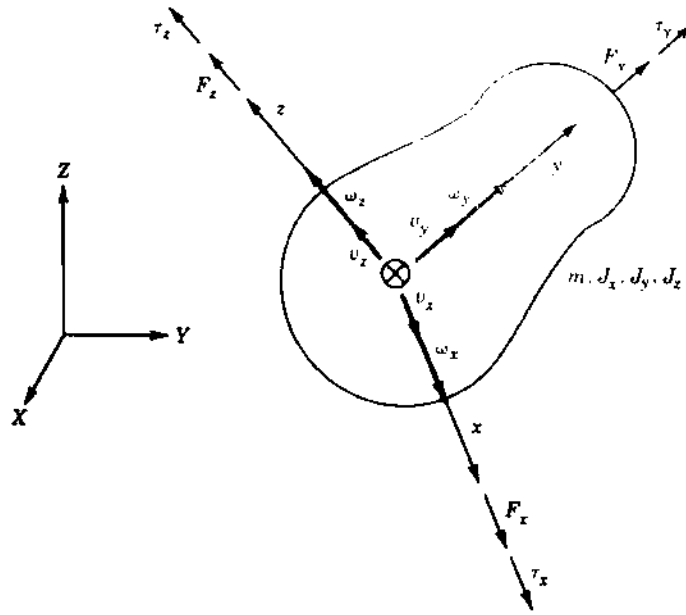


Figura 3.28. Cuerpo en movimiento tridimensional general [46].

En el instante mostrado, el cuerpo tiene velocidad absoluta “ v ” y velocidad angular absoluta “ ω ”. Estos vectores son descompuestos en sus tres componentes perpendiculares “ v_x ”, “ v_y ”, “ v_z ” y “ ω_x ”, “ ω_y ”, “ ω_z ”. Newton estableció que la fuerza neta “ F ” actuando en el cuerpo cambia su cantidad de movimiento.

$$F = \frac{d}{dt} p \tag{3.86}$$

Donde:

$$p = mv \tag{3.87}$$

Si “ v ” es expresada con respecto al marco rotacional, entonces:

$$F = \left. \frac{d}{dt} p \right|_{rel} + \omega \times p \tag{3.88}$$

Donde el primer término del segundo miembro de la ecuación indica la razón de cambio de la cantidad de movimiento relativa al marco en movimiento.

Una ley de cantidad de movimiento angular análoga a la ecuación (3.86) puede derivarse si el torque neto actuando en el cuerpo “ τ ” y el momento angular “ h ” son evaluados con respecto a cualquier punto fijo, si existe alguno para el cuerpo, o el centro de masa.

$$\tau = \frac{d}{dt}h \quad (3.89)$$

Si el sistema de ejes “ xyz ” se asume alineado con los ejes principales del cuerpo, entonces la cantidad de movimiento angular está relacionada con la velocidad angular mediante lo siguiente:

$$h = J\omega \quad (3.90)$$

En donde “ J ” es una matriz diagonal con los momentos de inercia principales “ J_x ”, “ J_y ” y “ J_z ”. Para “ h ”, expresado con respecto al marco rotacional, se tiene:

$$\tau = \left. \frac{d}{dt}h \right|_{rel} + \omega \times h \quad (3.91)$$

Usando la regla de la mano derecha se escriben las ecuaciones componentes para las ecuaciones (3.88) y (3.91) obteniéndose:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= m\dot{v}_x + m\omega_y v_z - m\omega_z v_y \\ F_y &= m\dot{v}_y + m\omega_z v_x - m\omega_x v_z \\ F_z &= m\dot{v}_z + m\omega_x v_y - m\omega_y v_x \end{aligned} \right\} \quad (3.92)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_x &= J_x \dot{\omega}_x + \omega_y J_z \omega_z - \omega_z J_y \omega_y \\ \tau_y &= J_y \dot{\omega}_y + \omega_z J_x \omega_x - \omega_x J_z \omega_z \\ \tau_z &= J_z \dot{\omega}_z + \omega_x J_y \omega_y - \omega_y J_x \omega_x \end{aligned} \right\} \quad (3.93)$$

Estas ecuaciones diferenciales no lineales son conocidas como ecuaciones de Euler. No tienen solución general y solo pueden ser resueltas de manera analítica para algunos casos especiales. Si estuviesen resueltas, entonces se conocerían “ v_x ”, “ v_y ”, “ v_z ”, “ ω_x ”, “ ω_y ”, “ ω_z ” con respecto a un marco que estaría apuntando en diferente dirección a cada instante, lo cual dificultaría la interpretación del movimiento del cuerpo. Además, las componentes de fuerza y torque (provenientes de sistemas fijos) deben estar alineadas con las coordenadas corporales en orden de usar estas ecuaciones. Esto no ocurre de manera natural, de modo que la utilidad de estas ecuaciones es cuestionable en etapas tempranas de desarrollo.

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA

4.1. Modelo Bond Graph de Movimiento en Tres Dimensiones.

La posibilidad presentada por el teorema de separación permite modelar en forma individual los movimientos de traslación y rotación. En este sentido es posible presentar dichos movimientos en esquemas bond graph compactos de los cuales se generan las ecuaciones diferenciales correspondientes. Dichos esquemas se presentan en las figuras 4.1 y 4.2.

El esquema de la Figura 4.1 es conocido como “anillo de traslación” o “anillo de Newton” debido a que integra las variables de potencia y energía contempladas en la segunda ley de Newton.

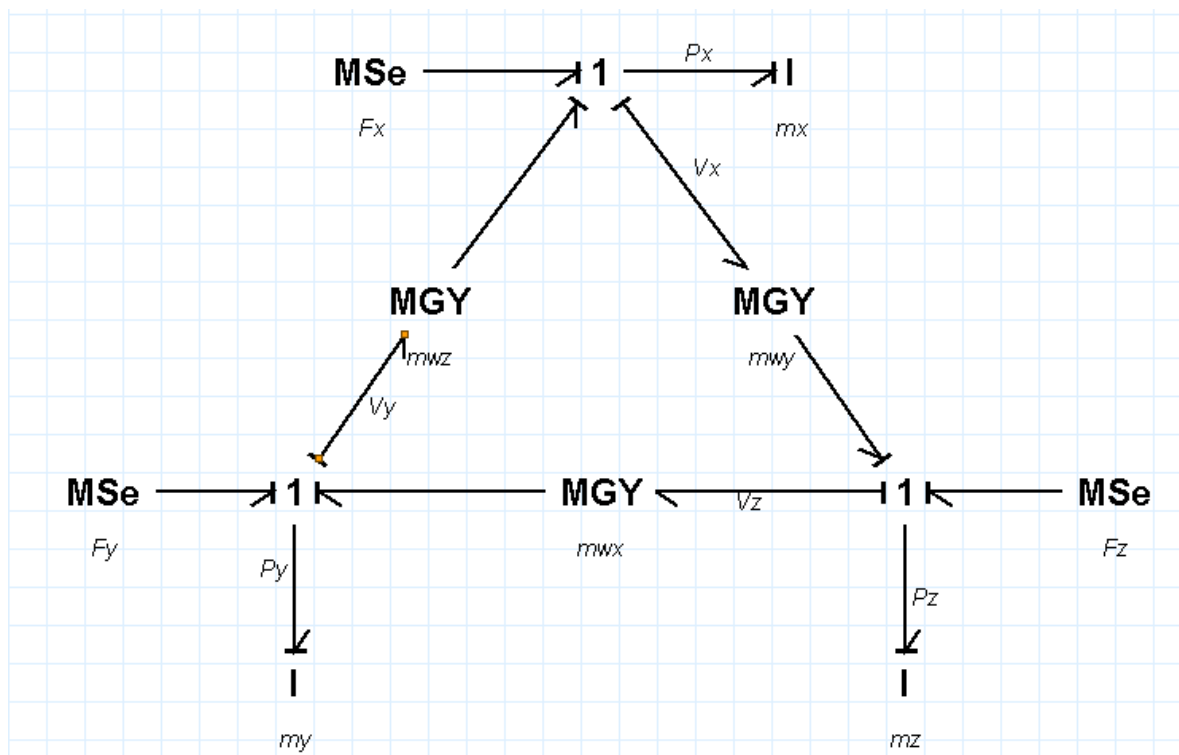


Figura 4.1. Modelo bond graph del movimiento de traslación.

El anillo consiste en tres de giradores modulados incorporando tres elementos de almacenamiento “I” y tres fuentes de esfuerzo modulado “MSe”.

Se indican las variables de potencia y energía involucradas en el esquema así como la asignación de causal que permite tener causalidad integral en todos los elementos de almacenamiento

El esquema de la Figura 4.2, análogo al de la Figura 4.1, es conocido como “anillo de rotación” o “anillo de Euler” debido a que integra las variables de potencia y energía

contempladas en la ley de Newton. Presenta la misma cantidad y tipos de elementos e, igualmente, indica las variables de potencia y energía involucradas en el movimiento de rotación; la asignación de causalidad permite tener, igualmente, un bond graph en causalidad integral.

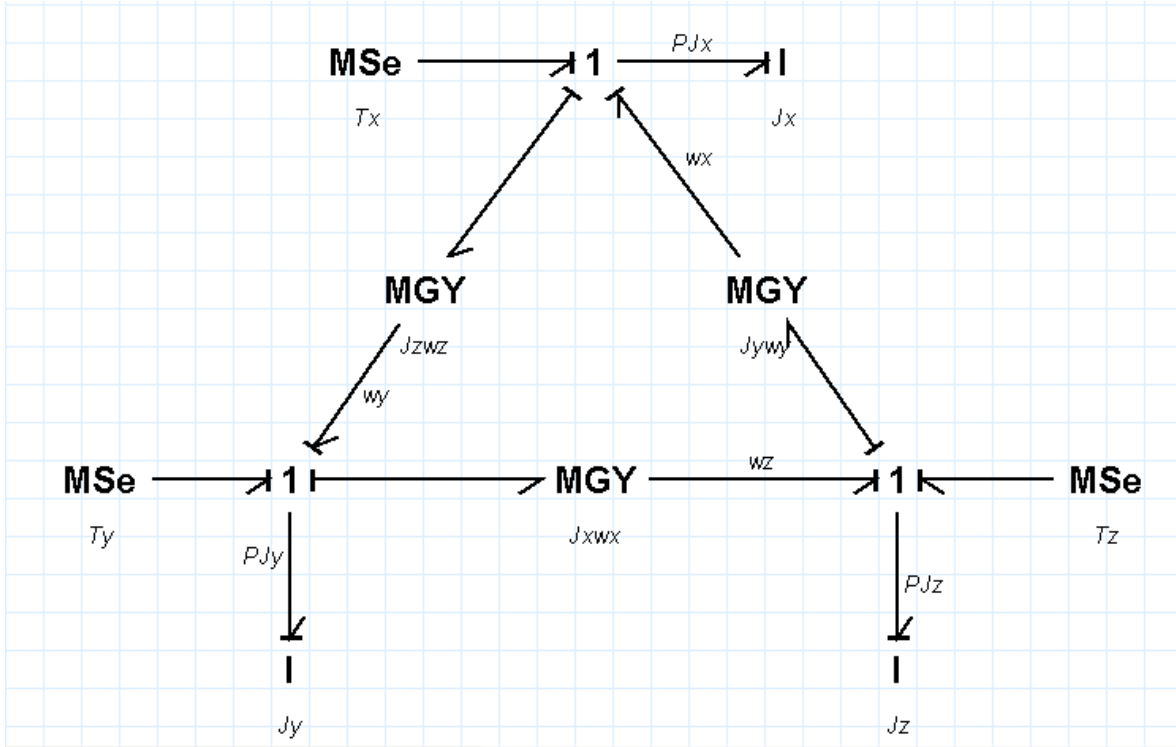


Figura 4.2. Modelo bond graph del movimiento de rotación.

4.1.1. Obtención de Ecuaciones de Espacio de Estado.

El obtener las ecuaciones diferenciales en el formato de espacio de estado de los esquemas presentados permite verificar que la aplicación de los métodos secuenciales de bond graph conduce a las ecuaciones mostradas por la bibliografía para la descripción del movimiento en tres dimensiones.

Partiendo del anillo de traslación, se efectúa la numeración de bonds, resultando en la representación mostrada en la Figura 4.3. El software empleado para el trazo de los esquemas de las figura 4.1-4.2 requiere el etiquetado de cada elemento para evitar ambigüedades; no obstante, para fines de modelado es necesario definir claramente los parámetros embebidos en cada elemento. Los módulos de los giradores se indican en la Tabla 4.1.

Los elementos inerciales hacen referencia a la masa del mismo cuerpo, por lo que todos son descritos por el parámetro inercial “ m ”. Las fuentes suministran esfuerzos distintos dependiendo del eje al que estén referidos, por lo que las variables de suministro son las mostradas en la Tabla 4.2.

Tabla 4.1. Módulos de los giradores del anillo de translación.

| Etiqueta en la Figura 4.3 | Módulo |
|---------------------------|-------------|
| mwx | $m\omega_x$ |
| mwy | $m\omega_y$ |
| m wz | $m\omega_z$ |

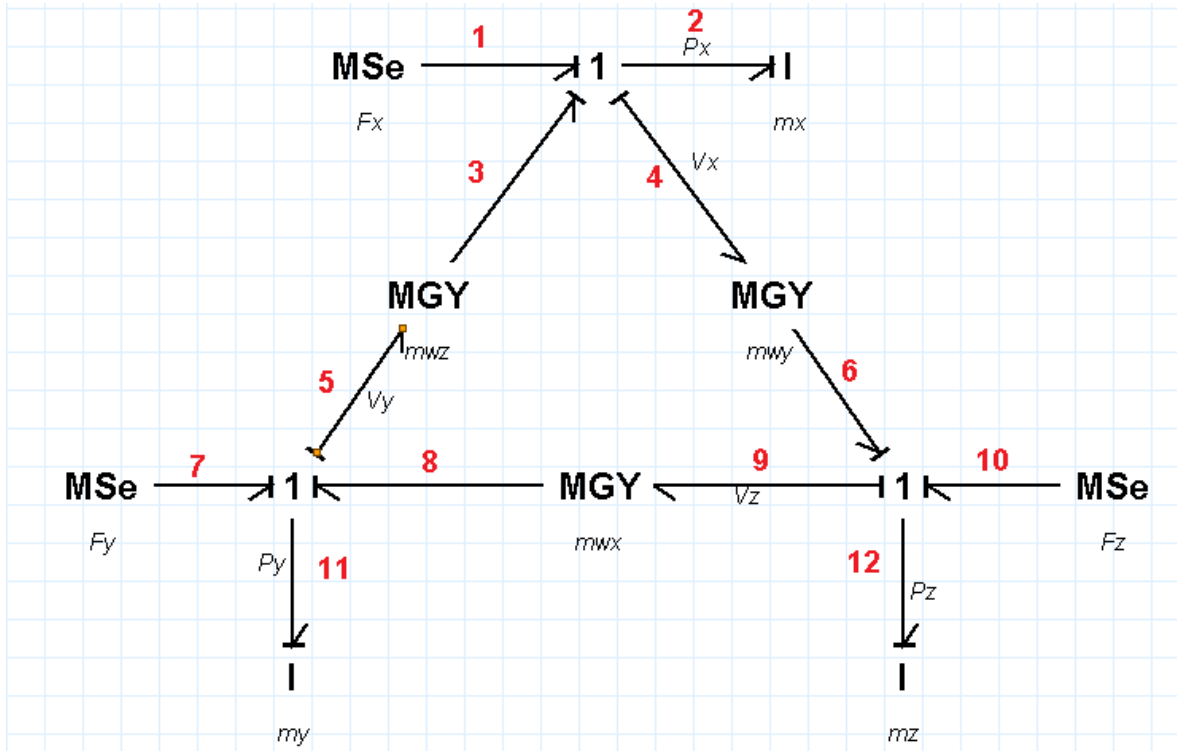


Figura 4.3. Anillo de translación, numerado.

Tabla 4.2. Variables suministradas en el anillo de translación.

| Etiqueta en la Figura 4.3 | Variable de esfuerzo |
|---------------------------|----------------------|
| F_x | F_x |
| F_y | F_y |
| F_z | F_z |

Las variables de energía de cada bond se definen de acuerdo la relación constitutiva de cada elemento involucrado. Las variables de estado son las variables de co-energía de los elementos de almacenamiento por lo que el conjunto de ecuaciones de espacio de estado se calcula de forma transformada. Tomando en cuenta lo anterior, se aplica el método de obtención de las ecuaciones de estado del anillo de translación.

Obteniendo los vectores clave, se tiene:

$$u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_7 \\ e_{10} \end{bmatrix}; x = \begin{bmatrix} p_2 \\ p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_{11} \\ f_{12} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Dado que no se cuenta con elementos disipativos:

$$D_{in} = D_{out} = L = 0 \quad (4.2)$$

A partir de los elementos de almacenamiento, se tiene:

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \frac{1}{m} \right\} \quad (4.3)$$

De las relaciones de esfuerzo y flujo en el esquema se tiene que:

$$e_2 = e_1 + m\omega_z f_{11} - m\omega_y f_{12} \quad (4.4)$$

$$e_{11} = e_7 + m\omega_x f_{12} - m\omega_z f_2 \quad (4.5)$$

$$e_{12} = e_{10} + m\omega_y f_2 - m\omega_x f_{11} \quad (4.6)$$

Construyendo la matriz de estructura de unión, se tiene:

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ e_{11} \\ e_{12} \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & m\omega_z & -m\omega_y & \vdots & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ -m\omega_z & 0 & m\omega_x & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ m\omega_y & -m\omega_x & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_{11} \\ f_{12} \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ e_1 \\ e_7 \\ e_{10} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

A partir de los elementos de las sub-matrices de “[S]”, se verifican las propiedades mencionadas en la sección 3.8.4., *id est*:

i) $S_{11} = -S_{11}^T$

- ii) $S_{12} = S_{21}^T$
 iii) $S_{22} = 0$

Se obtienen las matrices transformadas “ \bar{A} ” y “ \bar{B} ” a partir del conjunto de ecuaciones (3.85). Considerando que “ $S_{12} = 0$ ”, entonces:

$$A = F(S_{11}) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\bar{B} = FB = \begin{bmatrix} 1/m & 0 & 0 \\ 0 & 1/m & 0 \\ 0 & 0 & 1/m \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Construyendo el conjunto de ecuaciones transformadas de espacio de estado, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_2 \\ \dot{f}_{11} \\ \dot{f}_{12} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_{11} \\ f_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_{11} \\ f_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/m & 0 & 0 \\ 0 & 1/m & 0 \\ 0 & 0 & 1/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_7 \\ e_{10} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Sustituyendo las variables de suministro y las variables de esfuerzo en los elementos de almacenamiento, se tiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/m & 0 & 0 \\ 0 & 1/m & 0 \\ 0 & 0 & 1/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Trabajando algebraicamente la expresión anterior, se llega al conjunto de ecuaciones (3.92).

Continuando con el anillo de rotación, se efectúa la numeración de bonds, resultando en la representación mostrada en la Figura 4.4. Los módulos de los giradores se indican en la Tabla 4.3.

Los elementos inerciales hacen referencia a los momentos de inercia principales, por lo que todos son descritos por el parámetro inercial correspondiente al eje principal respectivo, tal como se muestran en la Tabla 4.4.

Tabla 4.3. Módulos de los giradores del anillo de rotación.

| Etiqueta en la Figura 4.4 | Módulo |
|---------------------------|----------------|
| Jxwx | $J_x \omega_x$ |
| Jywy | $J_y \omega_y$ |
| Jzwz | $J_z \omega_z$ |

Las fuentes suministran esfuerzos distintos dependiendo del eje al que estén referidos, por lo que las variables de suministro son las mostradas en la Tabla 4.5.

Tabla 4.4. Parámetros inerciales en el anillo de rotación.

| Etiqueta en la Figura 4.4 | Parámetro inercial |
|---------------------------|--------------------|
| Jx | J_x |
| Jy | J_y |
| Jz | J_z |

Tabla 4.5. Variables suministradas en el anillo de rotación.

| Etiqueta en la Figura 4.4 | Variable de esfuerzo |
|---------------------------|----------------------|
| Tx | τ_x |
| Ty | τ_y |
| Tz | τ_z |

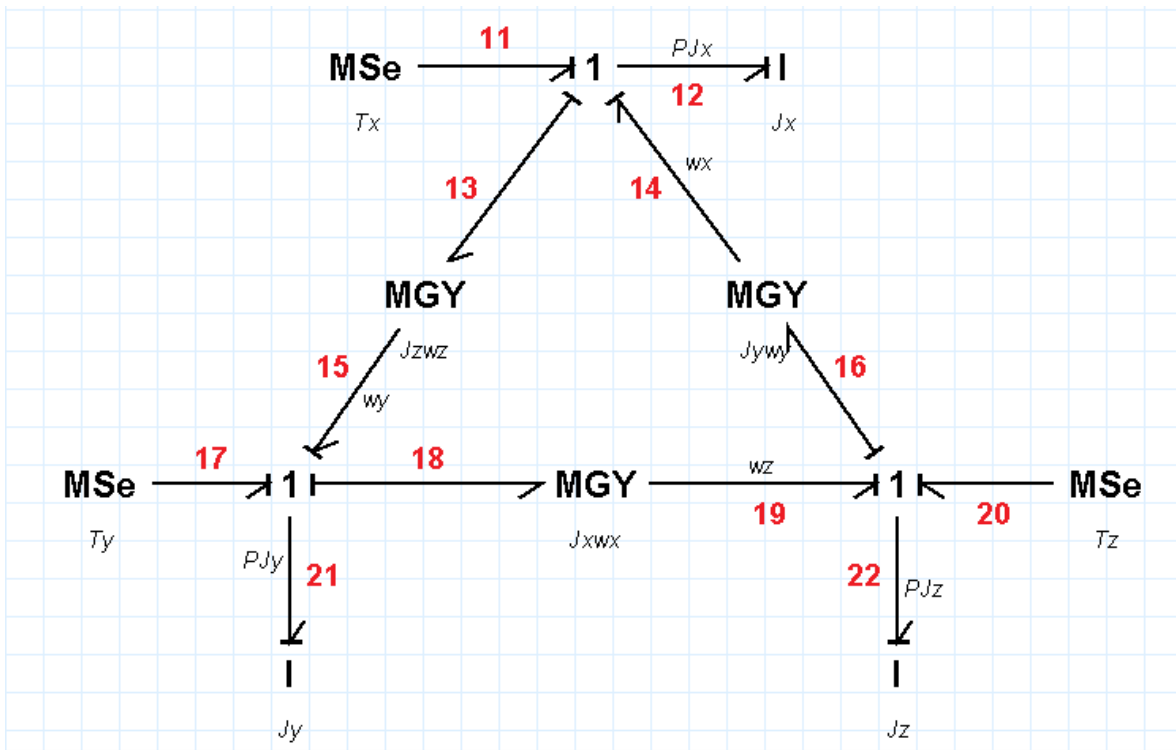


Figura 4.4. Anillo de rotación, numerado.

Al igual que con el anillo de traslación, las variables de energía de cada bond se definen de acuerdo la relación constitutiva de cada elemento involucrado y las variables de estado son las variables de co-energía de los elementos de almacenamiento. Se procede, entonces, a la obtención de las ecuaciones de estado del anillo de rotación.

Obteniendo los vectores clave, se tiene:

$$u = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{17} \\ e_{20} \end{bmatrix}; x = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{21} \\ e_{22} \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Dado que no se cuenta con elementos disipativos:

$$D_{in} = D_{out} = L = 0 \quad (4.13)$$

A partir de los elementos de almacenamiento, se tiene:

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{J_x}, \frac{1}{J_y}, \frac{1}{J_z} \right\} \quad (4.14)$$

De las relaciones de esfuerzo y flujo en el esquema se tiene que:

$$e_{12} = e_{11} + J_y \omega_y f_{22} - J_z \omega_z f_{21} \quad (4.15)$$

$$e_{21} = e_{17} + J_z \omega_z f_{12} - J_x \omega_x f_{22} \quad (4.16)$$

$$e_{22} = e_{20} + J_x \omega_x f_{21} - J_y \omega_y f_{12} \quad (4.17)$$

Construyendo la matriz de estructura de unión, se tiene:

$$\begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{21} \\ e_{22} \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -J_z \omega_z & J_y \omega_y & \vdots & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ J_z \omega_z & 0 & -J_x \omega_x & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -J_y \omega_y & J_x \omega_x & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ e_{11} \\ e_{17} \\ e_{20} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Se verifican las propiedades de las sub-matrices de “[S]”:

- i) $S_{11} = -S_{11}^T$
- ii) $S_{12} = S_{21}^T$
- iii) $S_{22} = 0$

Se obtienen las matrices transformadas “ \bar{A} ” y “ \bar{B} ”, considerando que “ $S_{12} = 0$ ”, entonces:

$$A = F(S_{11}) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{J_z \omega_z}{J_x} & \frac{J_y \omega_y}{J_x} \\ \frac{J_z \omega_z}{J_y} & 0 & -\frac{J_x \omega_x}{J_y} \\ -\frac{J_y \omega_y}{J_z} & \frac{J_x \omega_x}{J_z} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\bar{B} = FB = \begin{bmatrix} 1/J_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/J_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/J_z \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Construyendo el conjunto de ecuaciones transformadas de espacio de estado, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_{12} \\ \dot{f}_{21} \\ \dot{f}_{22} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{J_z \omega_z}{J_x} & \frac{J_y \omega_y}{J_x} \\ \frac{J_z \omega_z}{J_y} & 0 & -\frac{J_x \omega_x}{J_y} \\ -\frac{J_y \omega_y}{J_z} & \frac{J_x \omega_x}{J_z} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/J_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/J_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{17} \\ e_{20} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Sustituyendo las variables de suministro y las variables de esfuerzo en los elementos de almacenamiento, se tiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{J_z \omega_z}{J_x} & \frac{J_y \omega_y}{J_x} \\ \frac{J_z \omega_z}{J_y} & 0 & -\frac{J_x \omega_x}{J_y} \\ -\frac{J_y \omega_y}{J_z} & \frac{J_x \omega_x}{J_z} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/J_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/J_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Trabajando algebraicamente la expresión anterior, se llega al conjunto de ecuaciones (3.93).

4.2. Modelo de Misil en Bond Graph.

4.2.1. Modelo de Movimiento en Tres Dimensiones.

Para la elaboración del modelo en bond graph se trabaja en el software “20-Sim” [51] en su versión 4.0. Este software, desarrollado por “Controllab Products” en los Países Bajos, es un paquete de modelado y simulación para sistemas dinámicos que funciona a través de los sistemas operativos Windows más recientes. Mediante éste paquete informático es posible crear modelos en un entorno gráfico de manera similar al trazo de esquemas de ingeniería. Con estos modelos se analiza el comportamiento de sistemas dinámicos y posibilita el diseño de sistemas de control.

El software consiste en dos partes integradas: los modelos se crean en el editor, y la ejecución de la simulación y sus resultados se muestran y se exportan en el simulador. El editor contiene librerías de las cuales se toman los elementos para la construcción de modelos; se muestra como una interfaz gráfica o editor de texto dependiendo del modelo mostrado. Las librerías del editor contienen elementos para la elaboración de modelos bond graph completos.

Se parte, entonces, de los anillos mostrados en las figuras 4.1 y 4.2. La interconexión de estos se realiza mediante la modulación de los giradores. La modulación de todos los giradores está relacionada con la variable generalizada de cantidad de movimiento “ p ”, la cual es definida en ambos dominios, rotacional y traslacional, como el producto de dos parámetros. Se observa que los giradores de ambos anillos requieren de las velocidades angulares “ ω_i ” obtenidas del anillo de rotación.

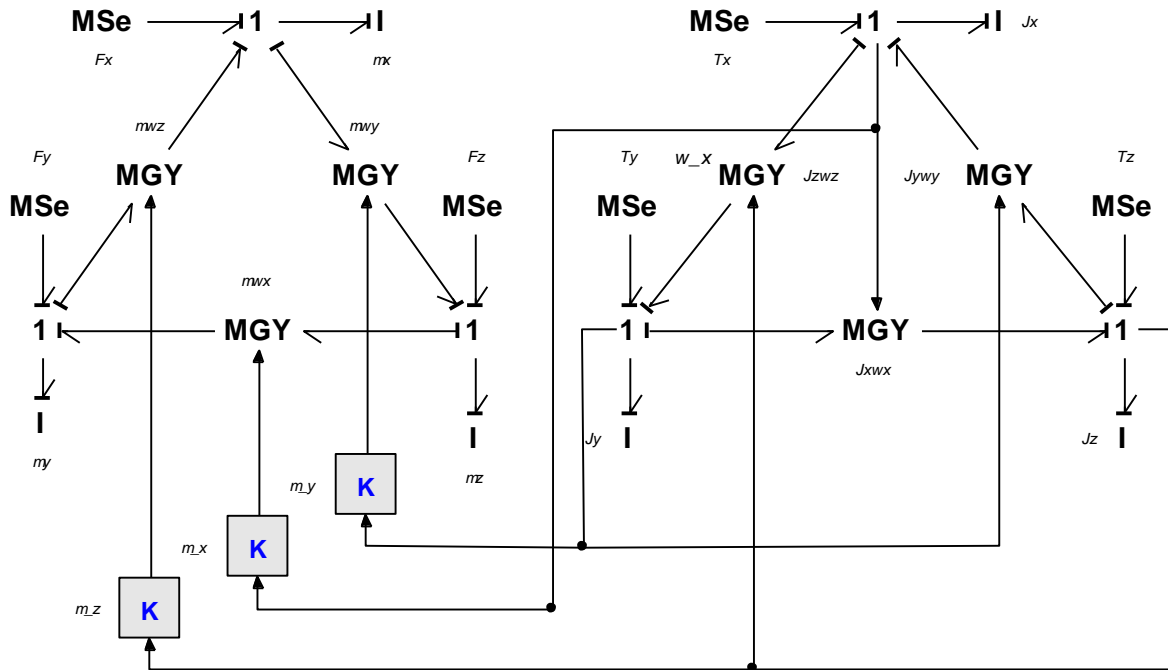


Figura 4.5. Bond graph con modulaciones y ganancias de traslación.

Las velocidades angulares se toman como señales mediante bonds activos provenientes de la unión de flujo común del elemento de almacenamiento involucrado, así, por ejemplo, la velocidad angular referente elemento inercial “ $I:J_x$ ”, dada por “ ω_x ”, es redirigida al girador llamado “ $MGY: mw_x$ ” en el anillo de traslación.

Los giradores del anillo de traslación requieren, entonces, el ingreso del segundo parámetro, representado, en el presente caso, por la masa del cuerpo “ m ”, éste es agregado mediante bloques de ganancia, los cuales son etiquetados según el eje corporal al que pertenece la variable de energía. Al tratarse de la masa del mismo cuerpo, el valor de esta ganancia es el mismo para todos los giradores del anillo de traslación. Ver Figura 4.5.

Para el caso de los giradores del anillo de rotación, el ingreso del segundo parámetro, representado, en este caso, por el respectivo momento principal de inercia “ J_i ”. Se agregan, igualmente, mediante bloques de ganancia etiquetados según el eje corporal al que pertenece la variable de energía. Ver Figura 4.7.

Las fuentes de esfuerzo para ambos anillos dependen de las fuerzas y momentos externos aplicados al cuerpo, por lo que, en esta etapa de diseño, es posible emplear valores constantes fijos para realizar corridas de prueba en el simulador, tomando como referencia los parámetros y condiciones empleados en [52]. Estos valores son ingresados al sistema mediante fuentes emisoras, ya sean desde bloques configurados para el suministro de algún tipo de señal en específico o desde sub-modelos donde se pueden modelar las señales en

forma de ecuaciones. Para este sistema se emplean dos bloques, mostrados en las figuras 4.6a-b, cuyas señales de salida se modifican en forma de ecuaciones. En las figuras se observan distintos puertos de entrada además de las señales de salidas necesarias, dichas señales de entrada se describen posteriormente.

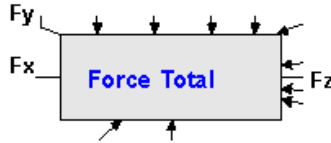


Figura 4.6a. Sub-modelo para el suministro de señales a las fuentes de esfuerzo traslacional.

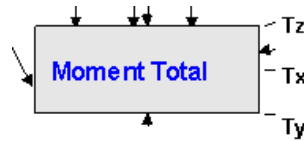


Figura 4.6b. Sub-modelo para el suministro de señales a las fuentes de esfuerzo rotacional.

Comparando las gráficas de las figura 4.7a-f con las mostradas en los resultados del artículo referido, se interpretan resultados similares, donde la mayor diferencia radica en que en el modelo empleado en [52] se usan elementos disipativos que permiten la estabilidad del sistema. Sin embargo, los comportamientos de las velocidades lineales y angulares en sus componentes cartesianas se muestran similares.

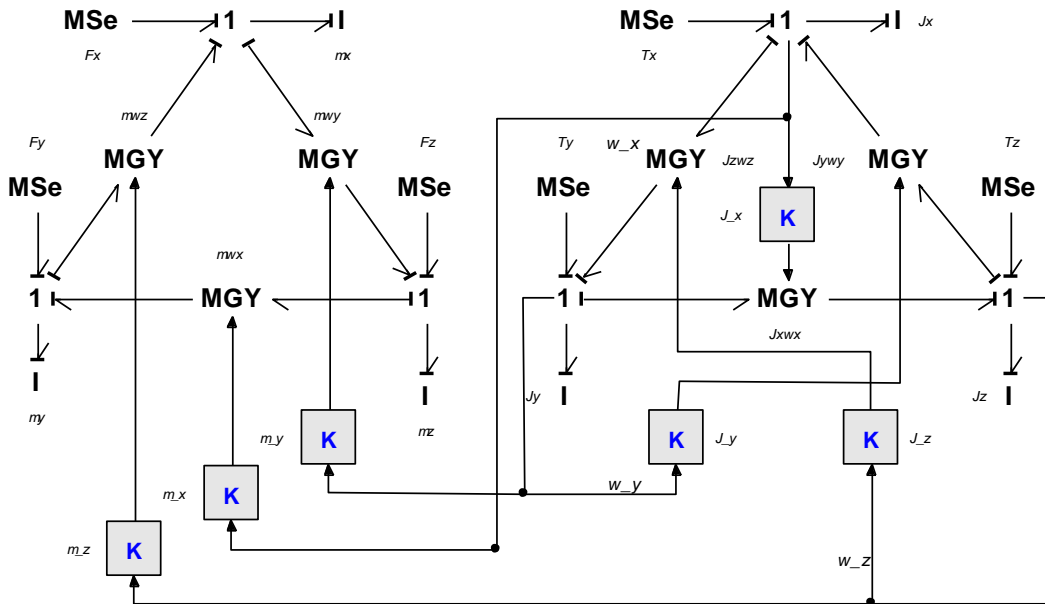


Figura 4.7. Bond graph con modulaciones y ganancias de traslación y rotación.

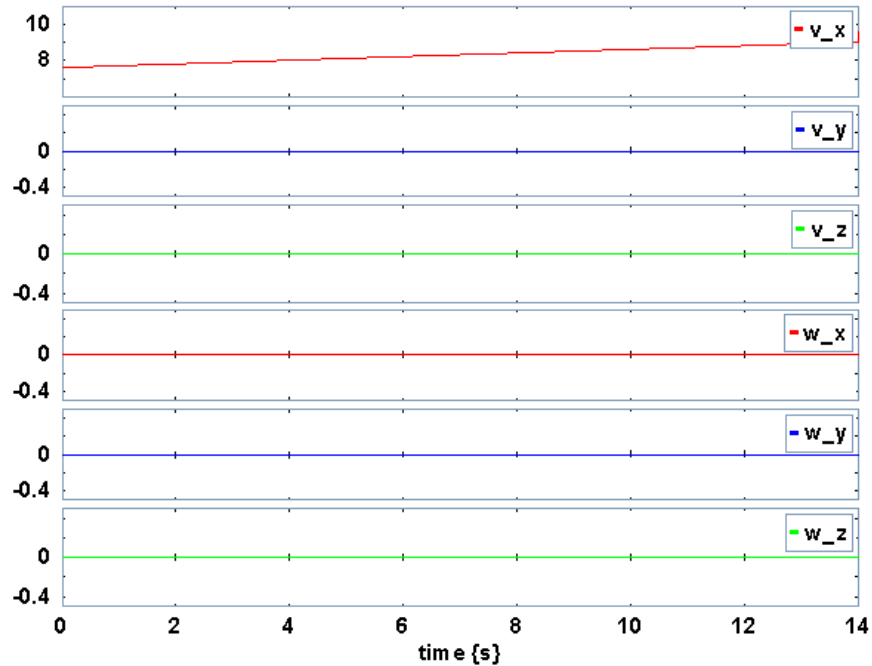


Figura 4.8a. Simulación con “ $F_x \neq 0 ; F_y = F_z = \tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$ ”.

En la Figura 4.8a se observa la aparición de la componente lineal “ v_x ” mientras que el resto de las velocidades son cero cuando “ $F_x \neq 0$ ”.

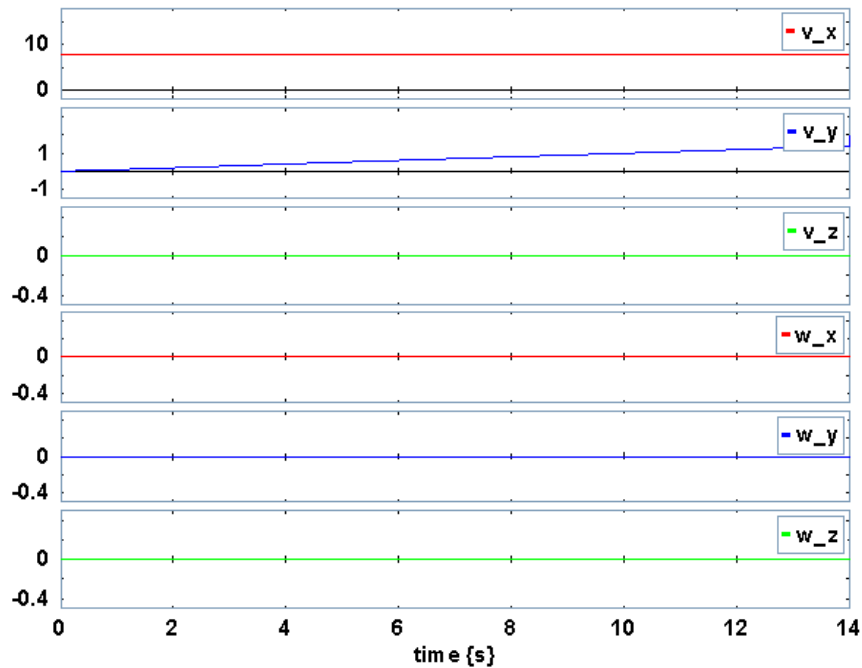


Figura 4.8b. Simulación con “ $F_y \neq 0 ; F_x = F_z = \tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$ ”.

En la Figura 4.8b se observa la aparición de las componentes lineales “ v_x ” y “ v_y ” mientras que el resto de las velocidades son cero cuando “ $F_y \neq 0$ ”.

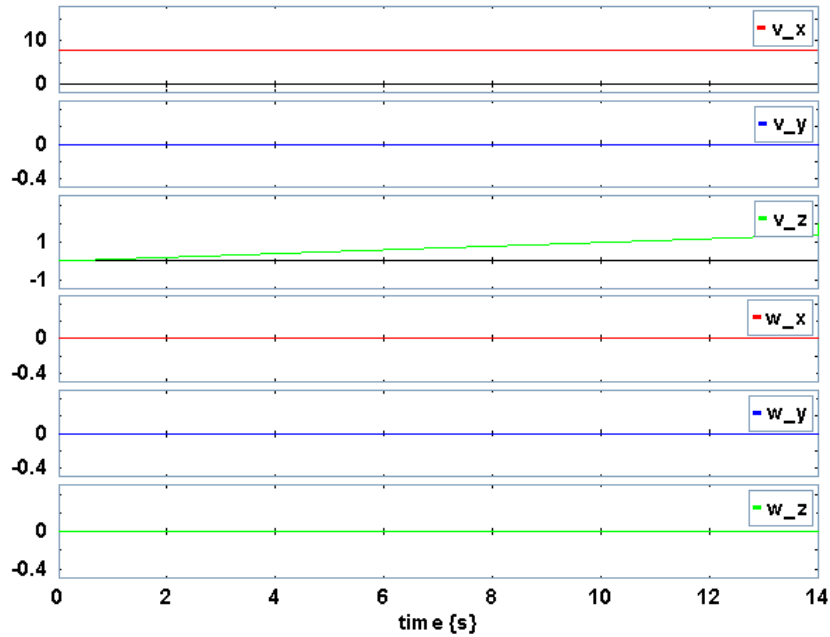


Figura 4.8c. Simulación con “ $F_z \neq 0 ; F_x = F_y = \tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$ ”.

En la Figura 4.8c se observa la aparición de las componentes lineales “ v_x ” y “ v_z ” mientras que el resto de las velocidades son cero cuando “ $F_z \neq 0$ ”.

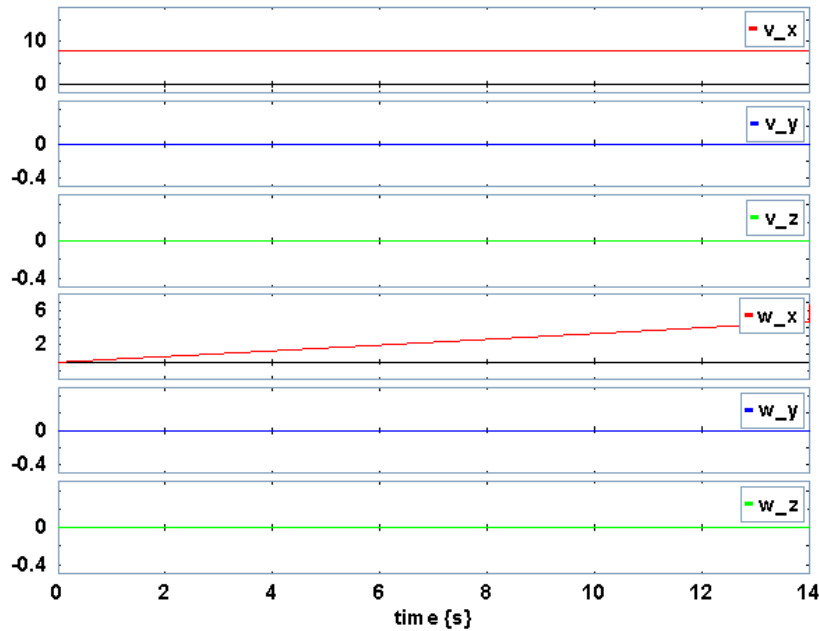


Figura 4.8d. Simulación con “ $\tau_x \neq 0 ; F_x = F_y = F_z = \tau_y = \tau_z = 0$ ”.

En la Figura 4.8d se observa la aparición de las componentes lineal “ v_x ” y angular “ ω_x ” mientras que el resto de las velocidades son cero cuando “ $\tau_x \neq 0$ ”.

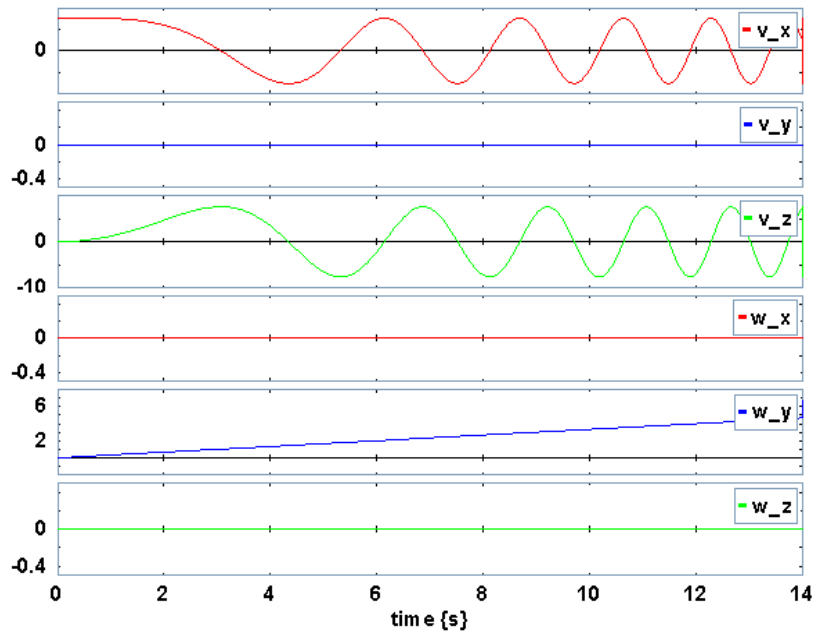


Figura 4.8e. Simulación con “ $\tau_y \neq 0 ; F_x = F_y = F_z = \tau_x = \tau_z = 0$ ”.

En la Figura 4.8e se observa la aparición de las componentes lineales “ v_x ” y “ v_z ”, y angular “ ω_y ” mientras que el resto de las velocidades son cero cuando “ $\tau_y \neq 0$ ”.

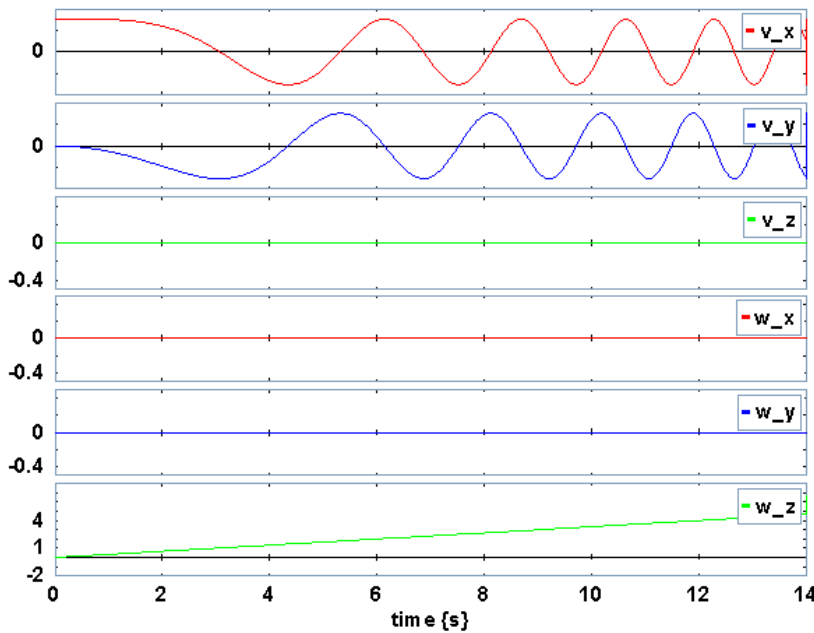


Figura 4.8f. Simulación con “ $\tau_z \neq 0 ; F_x = F_y = F_z = \tau_x = \tau_y = 0$ ”.

En la Figura 4.8f se observa la aparición de las componentes lineales “ v_x ” y “ v_y ”, y angular “ ω_z ” mientras que el resto de las velocidades son cero cuando “ $\tau_y \neq 0$ ”.

El modelo empleado hasta el momento representa el movimiento libre de un cuerpo en tres dimensiones, el cual representa el modelo de vuelo libre de un vehículo aerodinámico. La siguiente tarea consiste en realizar las modificaciones pertinentes para lograr la representación de un vehículo aerodinámico de tipo misil.

4.2.2. Modelo de Simetría Rotacional.

Al tratarse de un cuerpo que se traslada y rota en el espacio, es posible obtener las tasas corporales, así como los ángulos de Euler. En orden de extraer de manera directa tal información del modelo, se agrega un subsistema de tenga como entradas las velocidades angulares en los ejes corporales y que entregue como salidas las tasas corporales, de manera análoga a lo expresado en la ecuación (2.209).

De acuerdo con dicha ecuación, teniendo las velocidades angulares “ $p = \omega_x$ ”, “ $q = \omega_y$ ” y “ $r = \omega_z$ ”, se calculan las tasas corporales “ $\dot{\phi}$ ”, “ $\dot{\theta}$ ” y “ $\dot{\psi}$ ”. Las velocidades angulares son extraídas del modelo como señales, al igual que para realizar la modulación de los giradores, y se insertan al sub-modelo que las procesa para entregar las tasas corporales a manera de salidas. Las salidas se procesan mediante integradores para obtener los ángulos de Euler “ ϕ ”, “ θ ” y “ ψ ”, para finalmente ser reincorporados al sub-modelo según se requiera. El bloque empleado para tal propósito se muestra en la Figura 4.9. En la figura se muestran las señales de entrada, de salida y de realimentación empleadas para el cálculo. Las ecuaciones integradas en el bloque se muestran en la Figura 4.10.

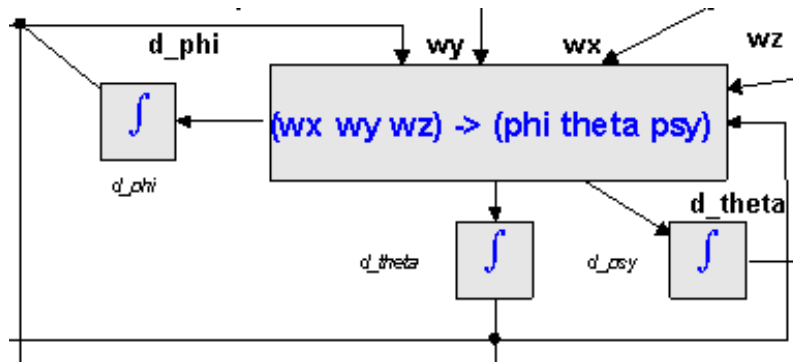


Figura 4.9. Sub-modelo para tasas corporales.

Al contar con los ángulos de Euler, es posible determinar las componentes del vector de velocidad respecto al sistema coordenado inercial e incluso determinar sus coordenadas rectangulares respecto al marco inercial. Para este propósito se crea un sub-modelo similar al empleado para las tasas corporales que permita emplear la transformación establecida por la ecuación (2.93).

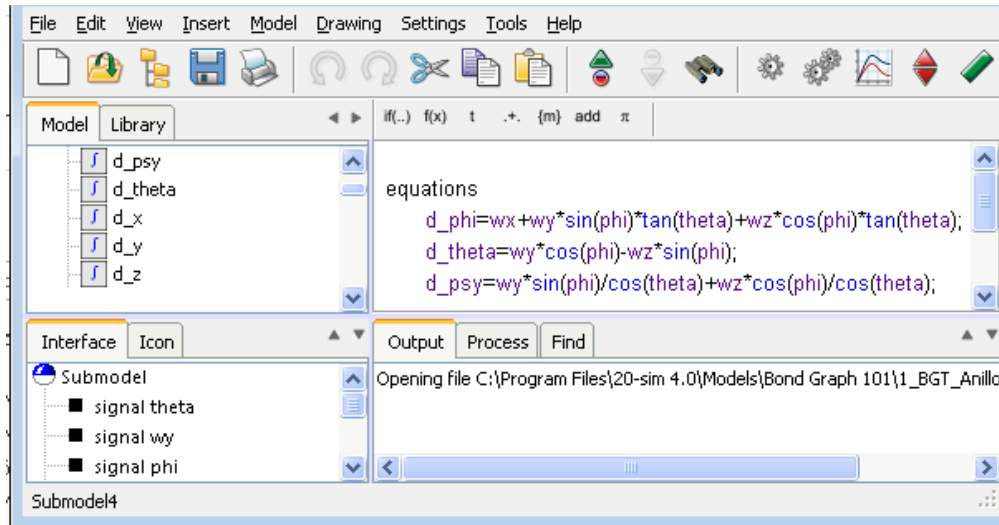


Figura 4.10. Ecuaciones para cálculo de tasas corporales.

De acuerdo con dicha ecuación, teniendo como entradas las velocidades lineales “ v_x ”, “ v_y ” y “ v_z ”, así como los ángulos de Euler, se obtienen como salidas las componentes de la velocidad lineal en coordenadas inerciales. Extrayendo esta información a manera de señales, se crea el sub-modelo mostrado en la Figura 4.11.

En la Figura 4.11 se muestran las señales de entrada y de salida empleadas para el cálculo. Tanto las componentes inerciales de velocidad como las coordenadas inerciales son extraídas mediante monitores de señal. Las ecuaciones empleadas en el sub-modelo son mostradas en la Figura 4.12.

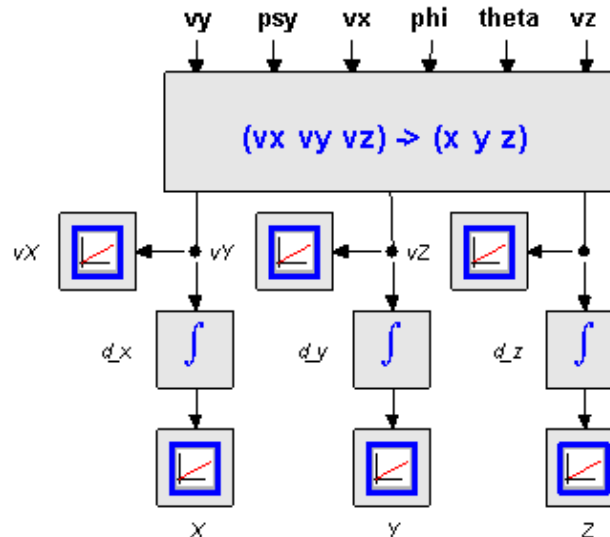


Figura 4.11. Sub-modelo para transformación de velocidades y coordenadas inerciales.

En base a lo expuesto en capítulo II, un vehículo aerodinámico que presenta simetría rotacional, como en el caso de misiles y cohetes, se adapta de mejor manera a un sistema de

referencia aerobalístico descrito mediante ángulos polares específicos. Del modelo presentado en la sección anterior, se obtiene el vector de velocidad del centro de masa del objeto en coordenadas corporales, por lo que, para fines de representación en el sistema coordinado aerobalístico polar, se requiere de una transformación de coordenadas.

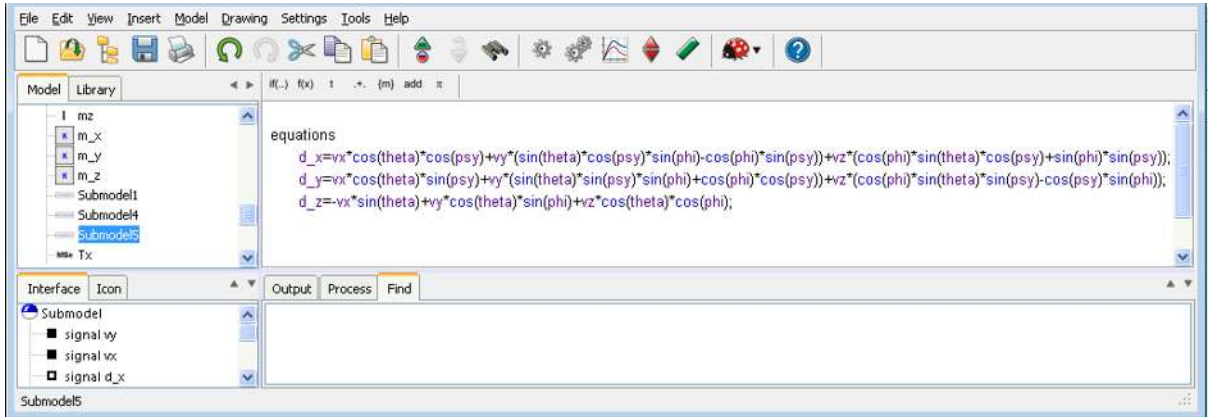


Figura 4.12. Ecuaciones para cálculo de velocidades y coordenadas inerciales.

Siendo “[v_B^A]” el vector de velocidad del centro de masa del objeto con respecto al marco aéreo “A” en coordenadas corporales, la transformación del sistema corporal al aerobalístico se realiza mediante la matriz de transformación de la ecuación (2.102), de modo tal que:

$$[v_B^A]^A = [T]^{AB}[v_B^A]^B \quad (4.23)$$

Las componentes del vector de velocidad “[v_B^A]” son obtenidas del modelo bond graph, *id est* “[\bar{v}_B^A]” = [$v_x \ v_y \ v_x$], re-etiquetando los nombres de las direcciones principales en referencia con las propuestas por Zipfel [20] para el marco corporal se tiene que “[\bar{v}_B^A]” = [$v_1^B \ v_2^B \ v_3^B$]. Lo cual implica que las componentes de velocidad en el marco aerobalístico son “[\bar{v}_B^A]” = [$v_1^A \ v_2^A \ v_3^A$].

La transformación se agrega mediante un sub-modelo que toma los parámetros necesarios, de manera similar a los sub-modelos anteriores, entregando las componentes de velocidad en el sistema deseado. Ver Figura 4.13.

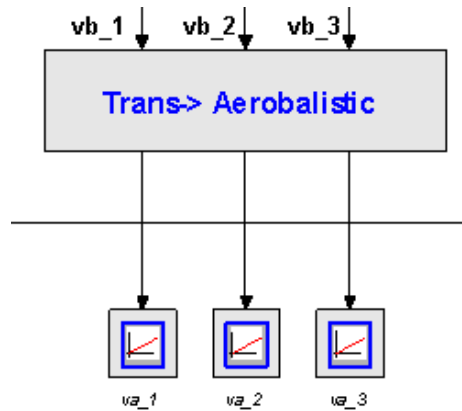


Figura 4.13. Sub-modelo para transformación de velocidades corporales a aerobalísticas.

Observando la ecuación (2.102) se distingue que se requieren tanto el ángulo de incidencia total “ α ” como el ángulo de alabeo dinámico “ ϕ ”. Sin embargo, teniendo las componentes de velocidad en coordenadas corporales, es posible calcular dichos ángulos a partir de las ecuaciones (2.108) y (2.109). Estas ecuaciones se agregan como un sub-modelo adicional alimentado por las componentes corporales de velocidad y entregando los valores de los ángulos como salidas. En la Figura 4.14 se muestra el sub-modelo auxiliar empleado y en la Figura 4.15 se muestran las ecuaciones auxiliares usadas.

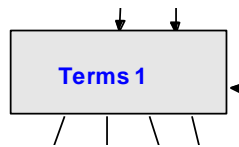


Figura 4.14. Sub-modelo de términos adicionales.

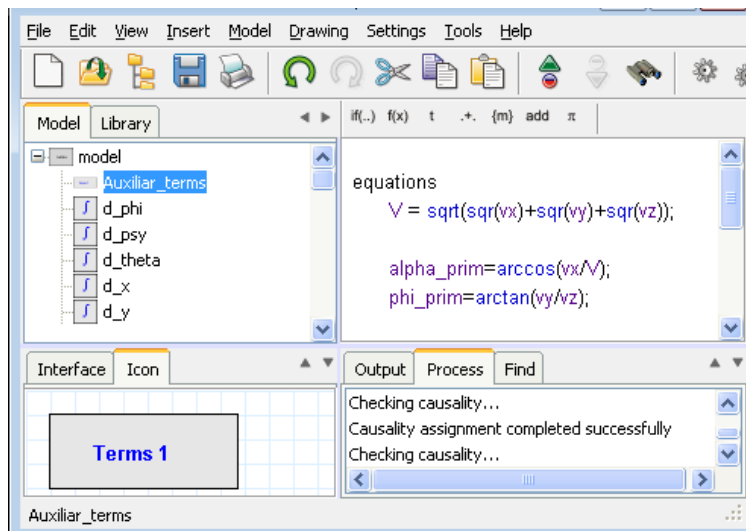


Figura 4.15. Ecuaciones para cálculo de términos adicionales.

En la Figura 4.16 se muestran las ecuaciones que permiten la transformación de coordenadas.

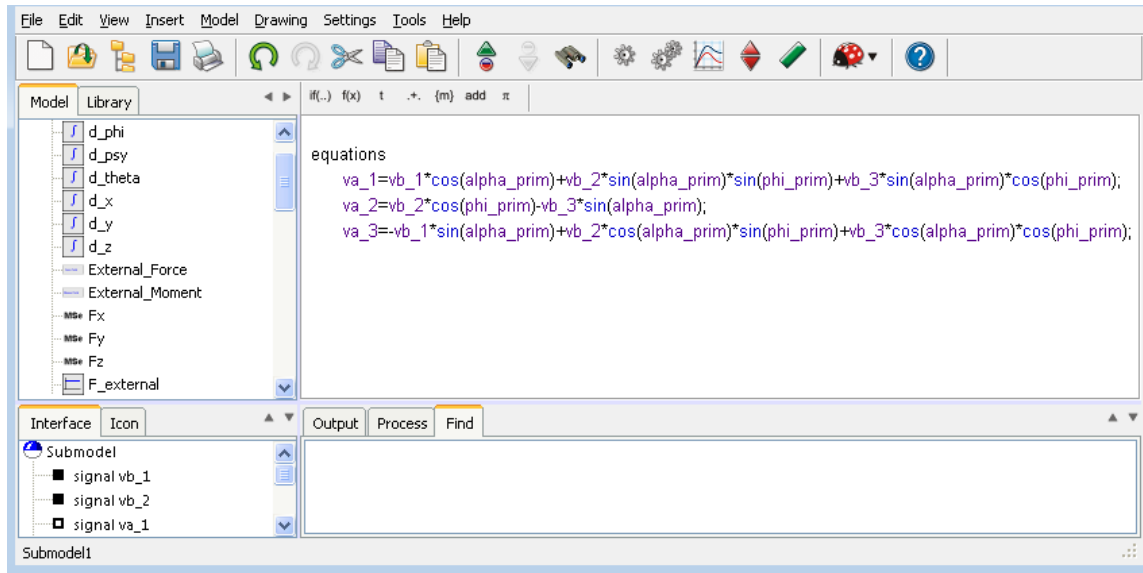


Figura 4.16. Ecuaciones para transformación de componentes de velocidad corporales a inerciales.

Hasta este punto el modelo está completo para realizar simulaciones de dinámica de vuelo de sistemas aerodinámicos de simetría rotacional. Para complementar el modelo considerando la cinemática de un vehículo se requiere de mayor detalle de información acerca de las fuerzas aerodinámicas, propulsivas y gravitacionales, así como de los momentos aerodinámicos y propulsivos actuantes sobre el vehículo a manera de tener un modelo más acercado a la realidad. Sin embargo, a pesar de que el propósito de este trabajo se limita solamente al modelado y simulación de la dinámica de vuelo, se cuenta con la estructura fundamental de un sistema completo en el cual, tras el análisis y delimitación respectivo de las fuerzas y momentos actuantes sobre el sistema, basta con agregar las ecuaciones que describan tales efectos así como su dependencia o correspondencia con los elementos dinámicos presentes en el modelo bond graph mostrado. El modelo completo del sistema en bond graph incluyendo los subsistemas y bloques mencionados se muestra en la Figura 4.16.

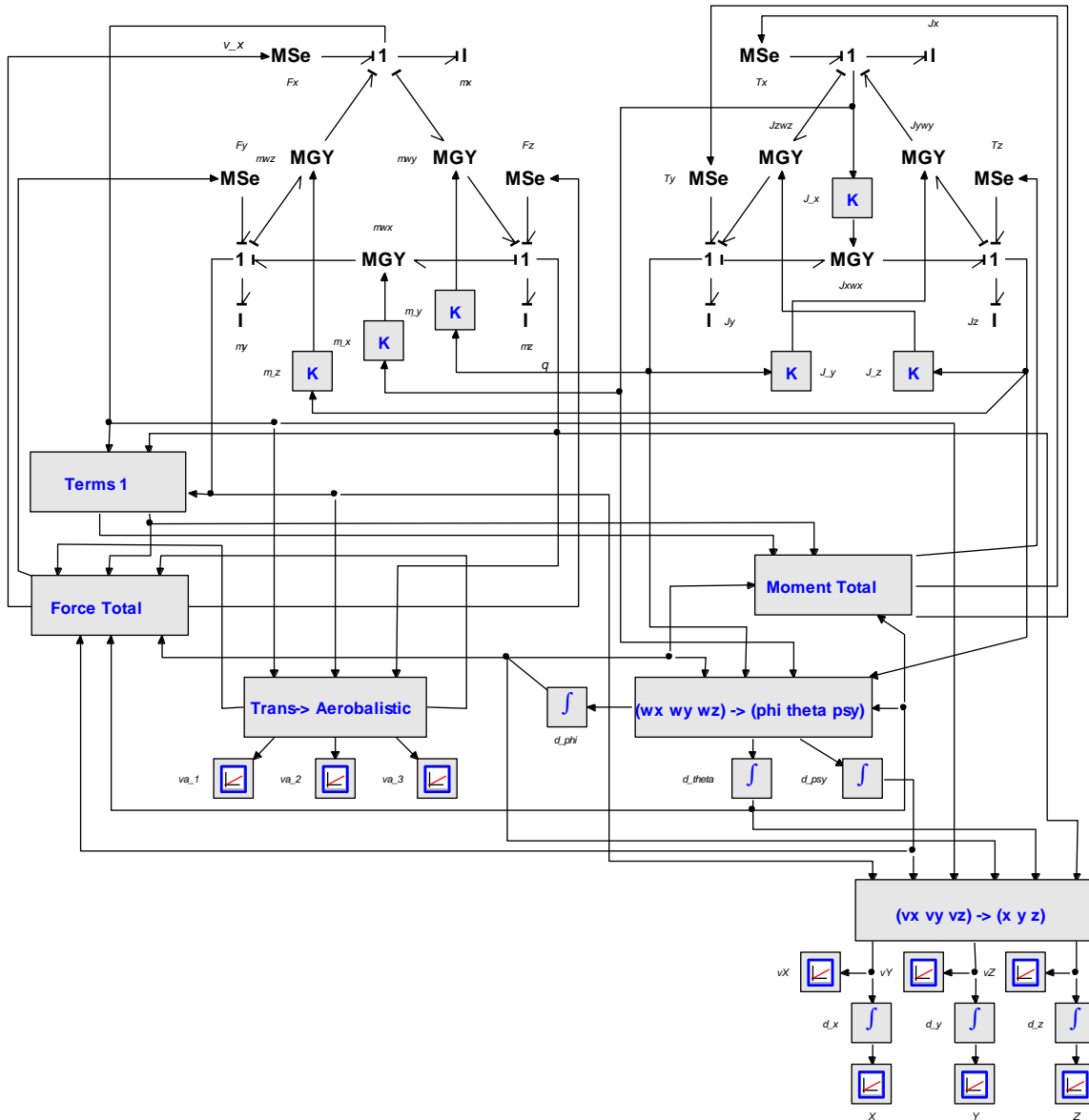


Figura 4.17. Modelo para simulación de misiles en bond graph.

CAPÍTULO 5. SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Partiendo de las consideraciones epistemológicas planteadas por Schlesinger (citado por Kheir [18]), se emplean resultados generados por modelos existentes que permitan tener una referencia de comparación. En primer caso se simula una trayectoria de corto alcance de un proyectil estabilizado por aletas lanzado con bajo ángulo de cabeceo. El segundo caso simula una trayectoria de largo alcance de un proyectil estabilizado por giro lanzado a alto ángulo de cabeceo.

Para cada caso, las trayectorias son computadas empleando la integración numérica de las ecuaciones de seis grados de libertad obtenidas del modelo bond graph propuesto. La simulación numérica no lineal de seis grados de libertad es empleada como modelo real para la validación del método bond graph, ya que dicho modelo dinámico de proyectiles ha mostrado correspondencia favorable como lo muestra el trabajo de Costello y Anderson [53].

5.1. Trayectoria de Corto Alcance.

El proyectil empleado en esta simulación es un proyectil representativo de disparo directo estabilizado por aletas, de 25mm de diámetro, 137mm de longitud. El peso del proyectil es 1.84N; el centro de masa medido a lo largo de la línea de estación es 0.118m; la inercia de alabeo es $1.15 \times 10^{-5} \text{kg} \cdot \text{m}^2$, y; la inercia de cabeceo es de $2.78 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2$. Las condiciones iniciales son: “ $x = 0\text{m}$ ”, “ $y = 0\text{m}$ ”, “ $z = 0\text{m}$ ”, “ $\phi = 0^\circ$ ”, “ $\theta = 2^\circ$ ”, “ $\psi = 0^\circ$ ”, “ $v_x = 762 \text{ m/s}$ ”, “ $v_y = 0 \text{ m/s}$ ”, “ $v_z = 0 \text{ m/s}$ ”, “ $\omega_x = 10 \text{ rad/s}$ ”, “ $\omega_y = 0 \text{ rad/s}$ ”, y “ $\omega_z = 0 \text{ rad/s}$ ”. El proyectil viaja a través de una atmósfera estándar sin viento atmosférico. Los detalles específicos acerca de las dimensiones del proyectil, propiedades másicas y parámetros descriptivos para fuerzas aerodinámicas, propulsivas y gravitacionales corresponden a lo consultado en [20], [54], [55] y [56].

En primer lugar se agregan las ecuaciones que describen las fuerzas actuantes en el sistema en el sub-modelo correspondiente. De acuerdo con [20] y [54], las fuerzas gravitacionales se obtienen directamente a partir del sistema coordinado de nivel local lo que implica una transformación del vector de fuerzas gravitacionales.

Las fuerzas aerodinámicas se describen en el sistema coordinado corporal, donde los coeficientes de sustentación y arrastre se ven afectados por los ángulos aerobalísticos polares, lo cual implica que éstos han de ser determinados a fin de agregarse en el sub-modelo. Las ecuaciones de fuerza descritas en el sistema coordinado inercial con respecto al sistema coordinado corporal, dependen de los ángulos de Euler, implican una transformación de coordenadas corporales a inerciales. Sin embargo, el modelo bond graph genera las ecuaciones del sistema desde el sistema coordinado corporal por lo que la única transformación de coordenadas es la referida a las fuerzas volumétricas. Las ecuaciones empleadas en el sub-modelo correspondiente se muestran en la Figura 5.1.

Para el caso de los momentos actuantes en el sistema, éstos se describen en el marco corporal, y los coeficientes aerodinámicos involucrados se ven afectados por los ángulos aerobalísticos

polares. Las ecuaciones empleadas en el sub-modelo correspondiente se muestran en la Figura 5.2.

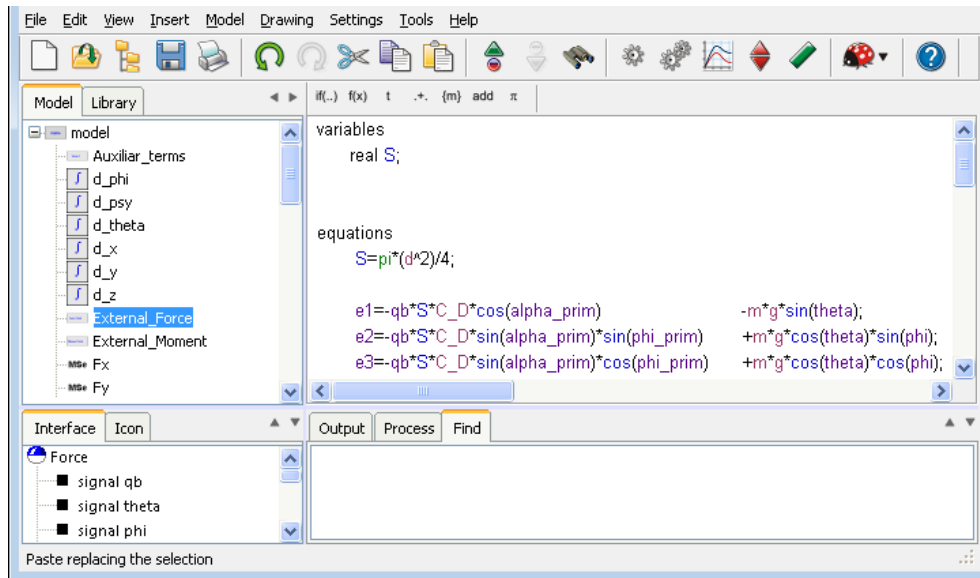


Figura 5.1. Ecuaciones para fuerzas en sistema coordenado corporal.

Los parámetros y condiciones iniciales del disparo son agregados al software recordando que se emplean unidades en sistema internacional. Tras efectuar los cálculos y conversiones requeridas, los datos se cargan como se muestra en la Figura 5.3.

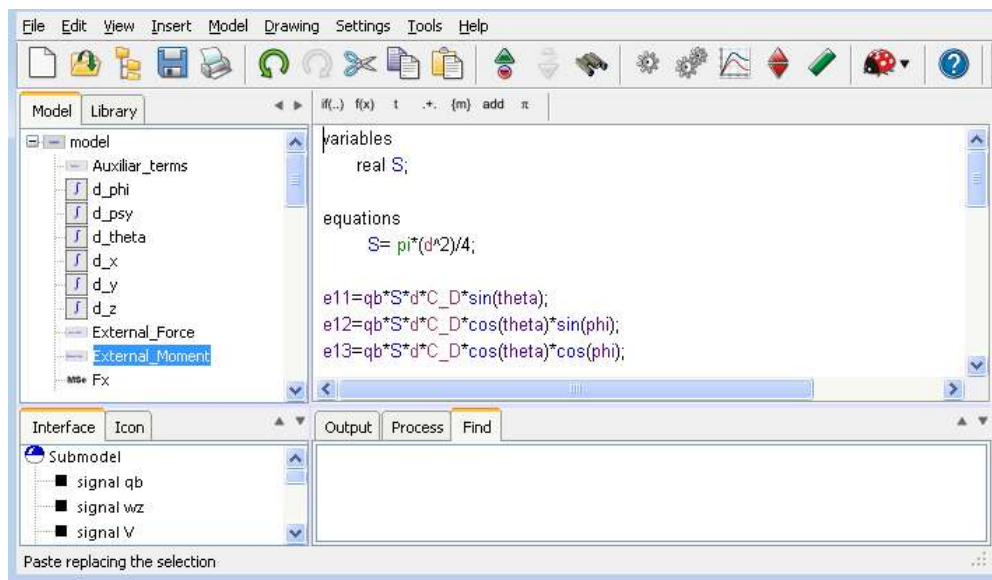


Figura 5.2. Ecuaciones para momentos en sistema coordenado corporal.

Para realizar la comparativa de resultados proporcionados en el trabajo de Hainz [12], se efectúan simulaciones a un tiempo de 90 segundos empleando el método de integración

predeterminado por el software llamado “Backward Differentiation Formula” como se muestra en la Figura 5.4.

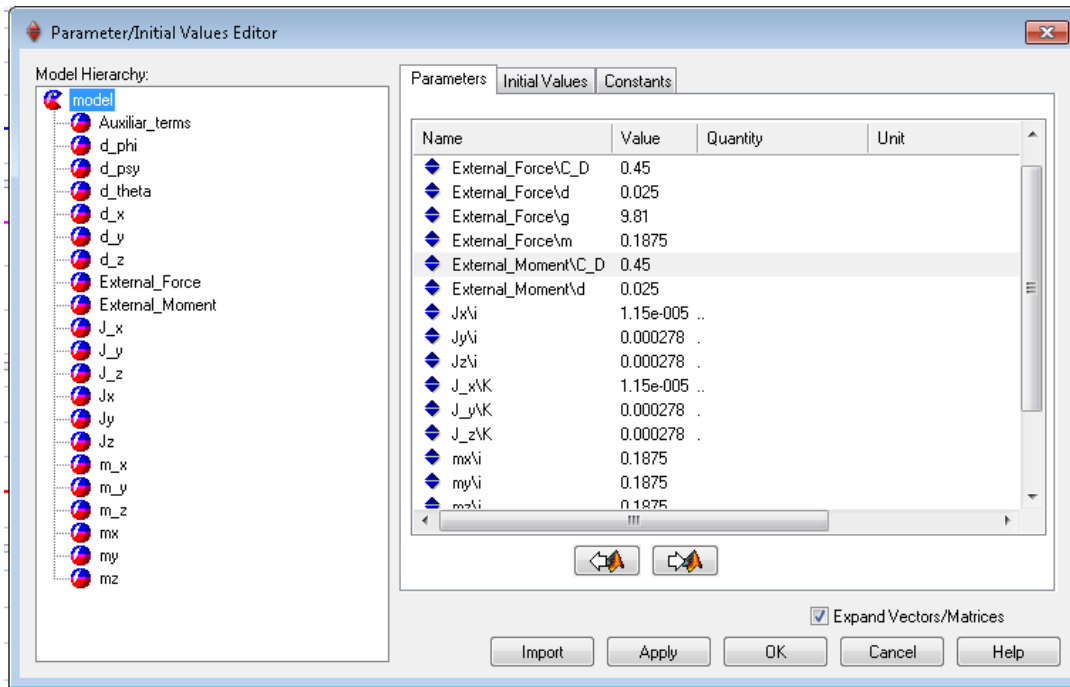


Figura 5.3. Carga de parámetros y condiciones iniciales para simulación de corto alcance.

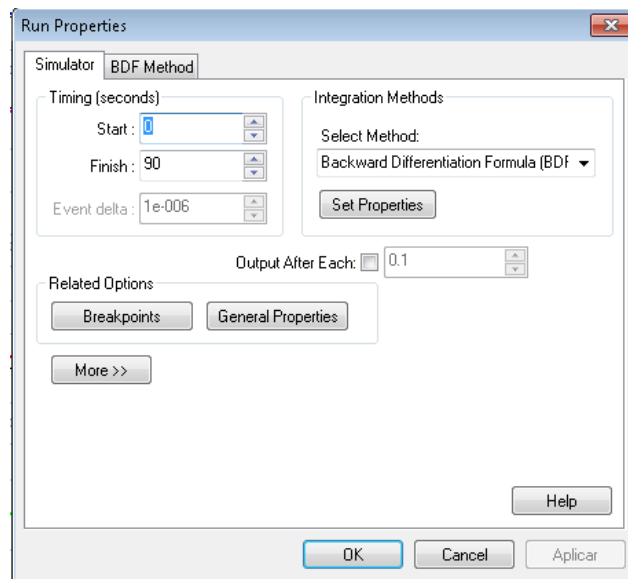


Figura 5.4. Inicialización y ajustes de simulación.

El software permite graficar de manera directa las variables a estudiar. A partir de las coordenadas del centro de masa con respecto al sistema coordenado inercial es posible obtener los valores de altitud y rango.

En la Figura 5.5 se muestra la gráfica de altitud contra alcance. En la Figura 5.6 se muestra la figura 3 de [12] en la cual se tiene una gráfica que involucra los mismos parámetros. Comparando ambas curvas se observa que mientras en el resultado obtenido del modelo de bond graph se obtiene una altitud máxima de 31.3537m a los 2087.9676m de alcance, en la referencia se observa una altitud máxima que sobrepasa los 21m a los 1000m de alcance. Igualmente se tiene que, mientras el cruce en cero de la curva de la Figura 5.5 se genera a los 3552.2211m, en la curva de referencia se presenta aproximadamente a los 1700m. En base a esto, se tiene que el modelo desarrollado logra un mayor alcance y una mayor altitud que el modelo empleado en la referencia.

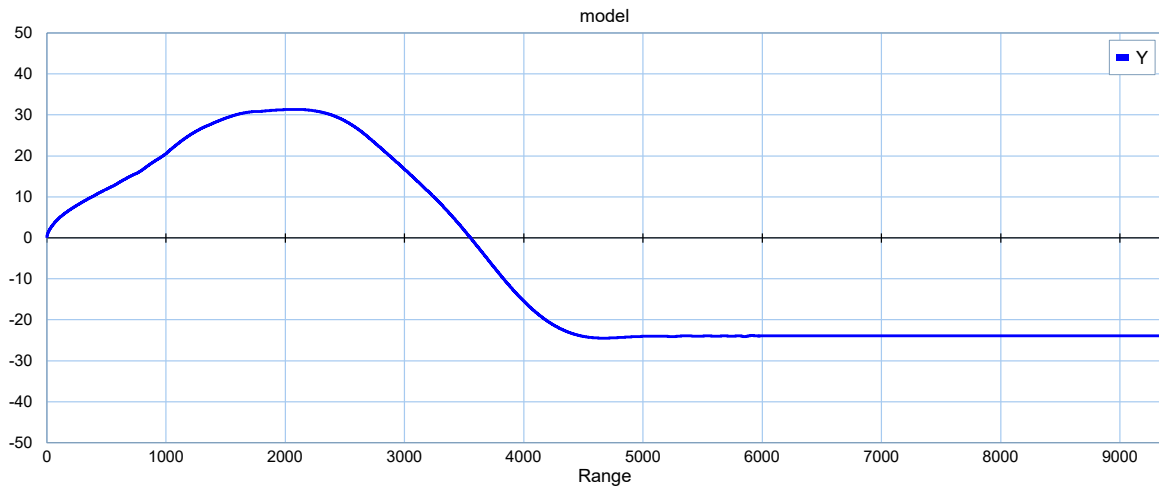


Figura 5.5. Gráfica de altitud contra alcance.

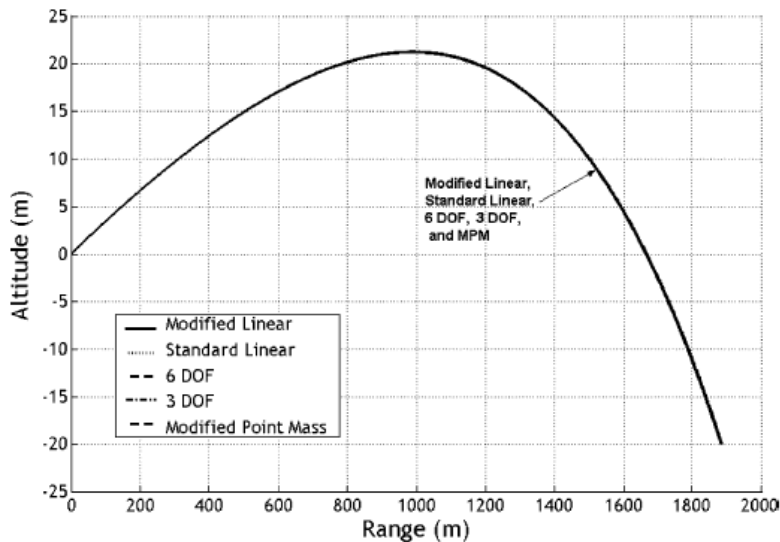


Figura 5.6. Gráfica de altitud contra alcance [12].

5.2. Trayectoria de Largo Alcance.

El proyectil empleado en esta simulación es un proyectil representativo de disparo indirecto estabilizado por giro, de 155mm de diámetro. El peso del proyectil es 422N; el centro de masa medido a lo largo de la línea de estación es 0.324m; la inercia de alabeo es $0.147\text{kg} \cdot \text{m}^2$, y; la inercia de cabeceo es de $1.893\text{kg} \cdot \text{m}^2$. Las condiciones iniciales son: “ $x = 0\text{m}$ ”, “ $y = 0\text{m}$ ”, “ $z = 0\text{m}$ ”, “ $\phi = 0^\circ$ ”, “ $\theta = 45^\circ$ ”, “ $\psi = 0^\circ$ ”, “ $v_x = 853.4\text{ m/s}$ ”, “ $v_y = 0\text{ m/s}$ ”, “ $v_z = 0\text{ m/s}$ ”, “ $\omega_x = 1800\text{ rad/s}$ ”, “ $\omega_y = 0\text{ rad/s}$ ”, y “ $\omega_z = 0\text{ rad/s}$ ”. El proyectil viaja a través de una atmósfera estándar con una velocidad de viento promedio de 6.1 m/s soplando con un ángulo de 57.3° desde la dirección inferior. Los detalles específicos acerca de las dimensiones del proyectil, propiedades másicas y parámetros descriptivos para fuerzas aerodinámicas, propulsivas y gravitacionales corresponden a lo consultado en [20], [54], [55] y [56].

La secuencia del proceso de simulación es idéntico al caso anterior ya que se emplean las mismas ecuaciones para momentos y fuerzas.

Los parámetros y condiciones iniciales del disparo son agregados al software. Tras efectuar los cálculos y conversiones requeridas, los datos se cargan como se muestra en la Figura 5.7.

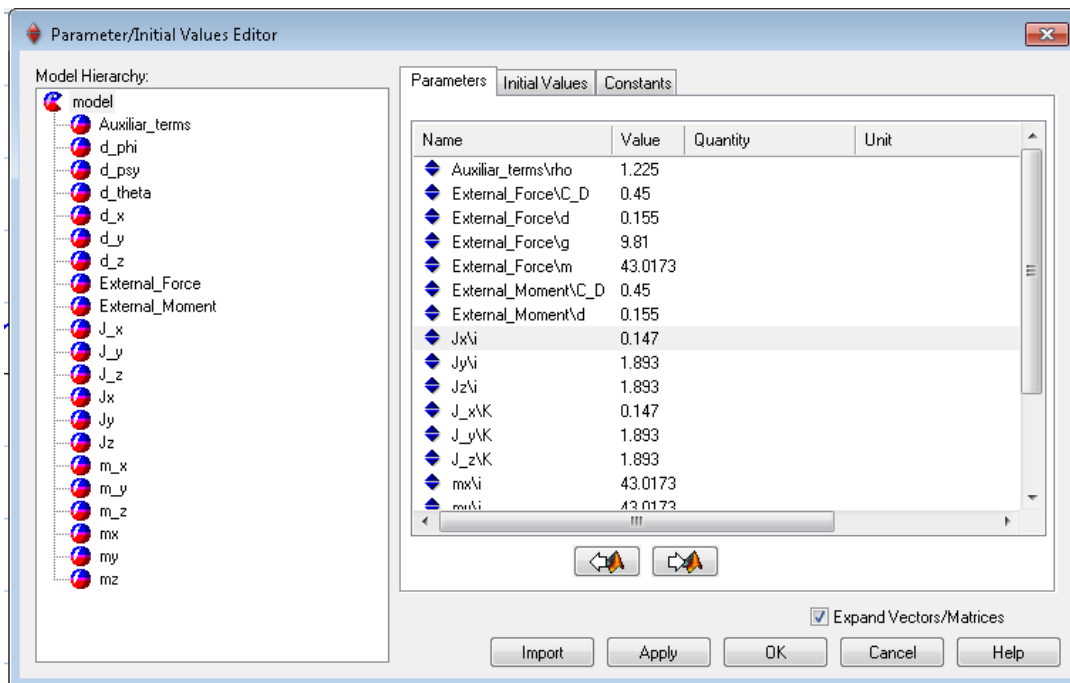


Figura 5.7. Carga de parámetros y condiciones iniciales para simulación de largo alcance.

En la Figura 5.8 se muestra la gráfica de altitud contra alcance. En la Figura 5.9 se muestra la figura 7 de [12] en la cual se tiene una gráfica que involucra los mismos parámetros. Comparando ambas curvas se observa que en la referencia se logra un alcance de 20000m a

los 60 segundos tiempo desde la inicialización, mientras que en la simulación del modelo bond graph empleado, éste alcance se logra a los 90 segundos. Por tanto, se tiene que el modelo desarrollado logra un menor alcance en un tiempo mayor que el modelo empleado en la referencia.

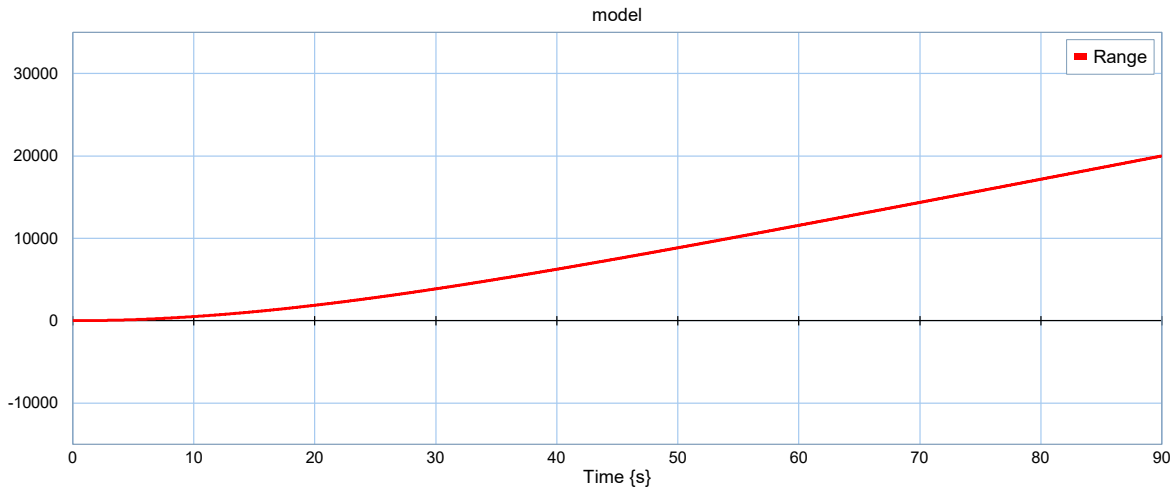


Figura 5.8. Gráfica de alcance contra tiempo.

En la Figura 5.10 se muestra la gráfica de ángulo de cabeceo contra alcance. En la Figura 5.11 se muestra la figura 10 de [12] en la cual se tiene una gráfica que involucra los mismos parámetros. En la curva obtenida de la simulación del modelo bond graph se tiene que el valor de ángulo de cabeceo a los 20000m de alcance es del orden de los -40° , mientras que en la gráfica mostrada en la referencia, el valor correspondiente al mismo alcance es de -23.89° .

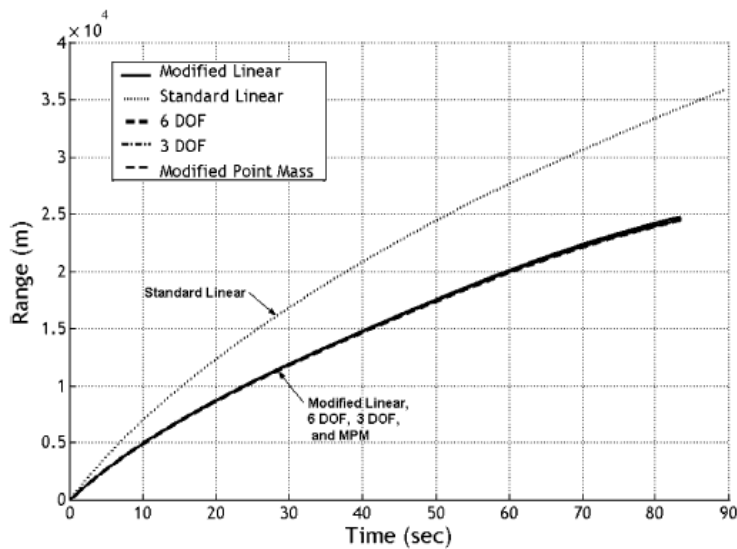


Figura 5.9. Gráfica de alcance contra tiempo [12].

Sin embargo, para este caso de simulación empleado, el aspecto más relevante se da en el perfil de ambas curvas obtenidas del modelo. Por un lado, en el gráfico de alcance contra tiempo, el perfil de la curva es menos pronunciado que el mostrado por Hainz. En contraste, para las curvas de ángulo de cabeceo contra alcance, el comportamiento de la curva es más suave en la referencia respecto al obtenido de la simulación del modelo bond graph propuesto.

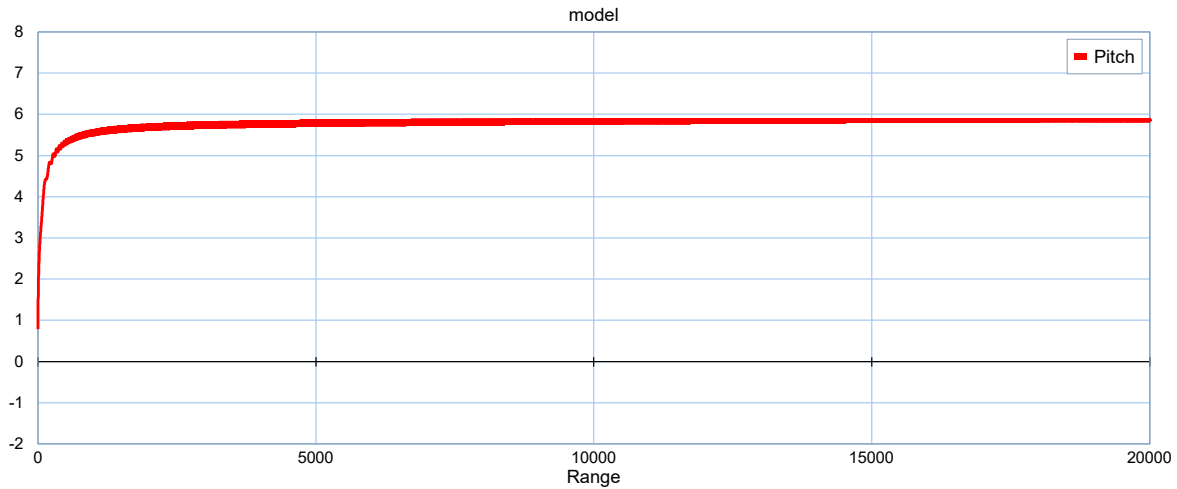


Figura 5.10. Gráfica de ángulo de cabeceo contra alcance.

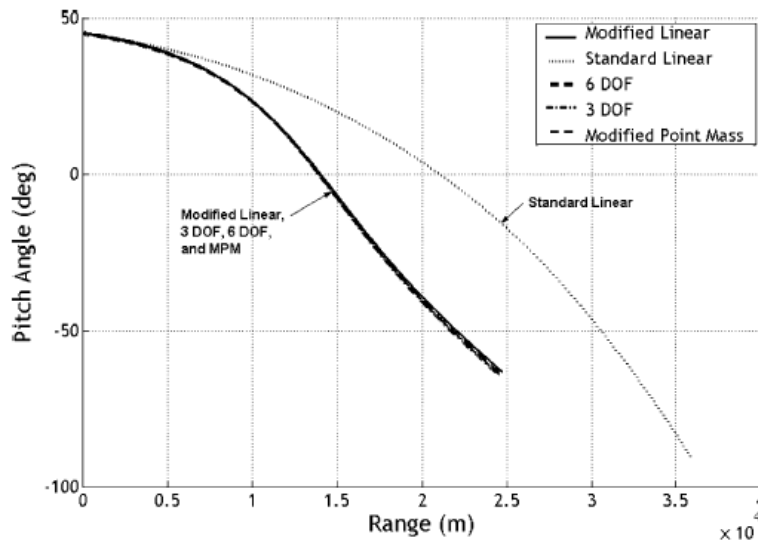


Figura 5.11. Gráfica de ángulo de cabeceo contra alcance [12].

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

Con la culminación satisfactoria del trabajo de investigación se llega a argumentos concluyentes los cuales se agrupan en los siguientes apartados:

Sobre la hipótesis y objetivos:

- El modelado de sistemas aerodinámicos parte de un esquema bond graph general de movimiento en tres dimensiones que separa los movimientos de rotación y traslación experimentados por un cuerpo material. La delimitación del movimiento para un vehículo de simetría rotacional se logra en la descripción cinemática del sistema y, en menor manera, en la descripción dinámica.
- Se logró el modelado del movimiento de un sistema con seis grados de libertad para posteriormente ajustarse a sistemas de simetría rotacional mediante las ecuaciones cinemáticas correspondientes.
- El modelado parte del sistema coordinado corporal ajustándose a los argumentos y restricciones encontrados en la literatura para posteriormente realizar las transformaciones coordinadas que requiera la aplicación del sistema involucrando al menos dos sistemas coordinados adicionales: el sistema coordinado aerobalístico polar y el sistema coordinado inercial.
- El modelado de los movimientos de rotación y traslación se muestra de manera práctica mediante la interpretación de sistemas de intercambio de potencia a través del entorno gráfico proporcionado por bond graph encontrando su fundamento matemático en el teorema de separación. Este enfoque permite analizar de manera clara los aspectos generales de cada tipo de movimiento así como los parámetros que permiten la interacción entre ellos.
- La simulación del modelo bond graph es posible mediante software dedicado, empleando el entorno gráfico proporcionado por la metodología y el ofrecido por el lenguaje de diagramas de bloques para interconectar aspectos específicos del sistema. Sin embargo, se requiere un mayor conocimiento y dominio en lenguaje de diagramas de bloques empleado en control para extraer y manipular información indispensable para la robustez y precisión del modelo.
- La verificación de resultados se ve comprometida por el carácter general del tema propuesto, ya que modelos encontrados en la literatura son desarrollados para técnicas más específicas o con perspectivas matemáticas de mayor detalle. Sin embargo, el modelo bond graph propuesto presenta la base para el ajuste específico para cualquier método.

Sobre la precisión del modelo:

- La descripción de las ecuaciones cinemáticas carecen de detalles específicos dado el enfoque dado sobre el comportamiento dinámico del sistema. Los aspectos de mayor

impacto para la descripción clara del modelado matemático de un sistema aerodinámico de simetría rotacional se presenta en la cinemática del sistema.

- El modelo carece de los elementos necesarios para incluir las condiciones iniciales para velocidades lineales y angulares, lo cual repercute en el vector de fuerzas aerodinámicas y propulsivas.
- El análisis cinemático del sistema puede permitir la inclusión de fuerzas aerodinámicas y propulsivas como elementos de bond graph. Esto posibilitaría la especificación detallada en el elemento multipuerto correspondiente y el uso de sub-modelos de ecuaciones más simples.

Sobre la comparación de resultados

- Las variaciones en resultados de la simulación del modelo en bond graph respecto a los resultados empleados con fines de comparación obtenidos por otros métodos, difieren, entre otras, debido a: 1) la falta de precisión con la que se realizó la descripción de las ecuaciones cinemáticas aplicadas al sistema; 2) los métodos de simulación empleados en las referencias son dedicados específicamente a estudios de trayectoria; 3) dichos modelos incluyen de manera precisa las condiciones del lanzamiento. Considerando que el propósito principal del presente es el modelado de la dinámica de vuelo, las referencias bibliográficas obtienen sus resultados de simulaciones que emplean ecuaciones tanto dinámicas como cinemáticas para perspectivas específicas.

Asimismo se tienen las siguientes perspectivas para el desarrollo futuro del tema:

- La descripción apropiada de fuerzas como elementos multipuerto de bond graph posibilita la inclusión de éstas en el modelo matemático intrínseco de bond graph a través de las leyes constitutivas apropiadas reduciendo la complejidad de las ecuaciones cinemáticas complementarias. Esto es posible debido a que ciertas fuerzas son restrictivas del movimiento y pueden ser representadas mediante elementos disipativos de energía.
- El vector de fuerzas aerodinámicas y propulsivas se describe de mejor manera incluyendo el efecto de fuerzas aerodinámicas debidas a efectos Magnus y Coriolis que son importantes en el movimiento rotacional de vehículos de simetría rotacional, así como la descripción detallada de las fuerzas propulsivas debidas a combustibles y/o propulsores y sus efectos en la masa del sistema.
- Las fuerzas aerodinámicas pueden especificarse de manera más precisa empleando coeficientes de sustentación y arrastre adecuados a las condiciones del lanzamiento, las condiciones atmosféricas actuantes, según sea el caso, y la geometría detallada de un proyectil.
- Los resultados del presente trabajo permiten un punto de partida para el ejercicio académico de la investigación y enseñanza del modelado matemático del movimiento en tres dimensiones desde el enfoque de intercambio de potencia aprovechando las ventajas de la metodología de bond graph. Con esto, es posible ahondar en los trabajos en diversas áreas de ingeniería y extender su aplicación a distintos grados de detalle.

- La adaptación correcta del modelo propuesto puede permitir el modelado paramétrico basado en geometrías que pueden ser obtenidas mediante recursos informáticos de diseño asistido por computadora y la implementación de técnicas de elemento finito.

REFERENCIAS

- [1] R. Adcock, «Systems Engineering Body of Knowledge,» 2016. [En línea]. Available: http://sebokwiki.org/wiki/What_is_a_System%3F. [Último acceso: 9 Julio 2020].
- [2] Kazimieras Simonavicius University, Basics Aerodynamics, Vilna: Category B1/B2, 2017.
- [3] H. Sillitto, «Defining "System": a Comprehensive Approach.,» 2017.
- [4] G. González y N. Barrera, «Quasi-Steady state model determination for systems with singular perturbations modelled by bond graphs,» *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems: Methods, Tools and Applications in Engineering and Related Sciences*.
- [5] S. Cuomo, «Niccoló tartaglia, mathematics, ballistics and the power of possession of knowledge,» *Endeavour*, vol. 22, p. 31–35, 1998.
- [6] R. H. Naylor, «Galileo's Theory of Projectile Motion,» *Isis*, vol. 4, n° 71, p. 550–570, 1980.
- [7] A. Parnovsky, «Some generalisations of brachistochrone problem,» *Lyceum No. 145 for Natural Sciences*, 1998.
- [8] W. Jhonson, «Benjamin Robins' new principles of gunnery,» *International Journal of Impact Engineering*, vol. 4, n° 4, p. 205–219, 1986.
- [9] I. Vashon Industries, «Multi-stage Rockets,» de *Valkyrie Report*, vol. 5105, Washington.
- [10] S. Bowman, «Two-stage, high-altitude rocket with internal skeleton designed entered in advance category of 7th ESRA IREC,» *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 2012.
- [11] «Model Rocketry Program,» de *Saturn Stage Three*, Civil Air Patrol U.S. Air Force Auxiliary.
- [12] L. Hainz, «Modified projectile linear theory for rapid trajectory prediction,» *Journal of guidance, control and dynamics*, vol. 28, n° 5, pp. 1006-1014, 2005.
- [13] D. Bhattacharjee, «Nonlinear Model Predictive Control and Collision-Cone-Based Missile Guidance Algorithm,» *Journal of guidance, control and dynamics*, 2021.
- [14] X. Wang, «Launch Dynamics Modeling and Simulation of Vehicular Missile System,» *Journal of guidance, control and dynamics*, vol. 41, n° 6, 2018.
- [15] J. Granda, «Automated Modeling and Simulation Using the Bond Graph Method for the Aerospace Industry,» *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit*, 2003.
- [16] J. M. J. Fu, «Advanced Modeling and Simulation of Electromechanical Actuator for Flight Control System Based on Two Degrees of Freedom (2-DoF) Bond-Graph Method,» *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference*, 2017.

- [17] A. Zanj, «Domain-Independent Thermoviscoelastic Modeling Framework: A Physical Approach on Thermoelasticity by Bond Graph ,» *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, vol. 32, n° 1, p. 61–79, 2018.
- [18] N. Kheir, «On validating simulation models of missile systems,» *Simulation*, vol. 30, n° 4, pp. 117-128, 1978.
- [19] M. Encarta, Encarta World English Dictionary, St. Martin's Press, 1999.
- [20] P. H. Zipfel, Modelling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics, AIAA education series, 2007.
- [21] D. J. a. R. Cloud, «Applied Modeling and Simulation: An Integrated Approach to Development and Operation,» de *Space Technology Series*, New York, McGraw-Hill, 1998.
- [22] G. Hamel, «Die Axiome der Physik,» de *Handbuch der Physik*, vol. 5, Berlin, Springer-Verlag, 1929.
- [23] W. Noll, «On the Continuity of the Solid and Fluid States,» de *Journal of Rational Mechanical Analysis*, vol. 4, 1955, p. 17.
- [24] C. a. N. W. Truesdell, «The Nonlinear Field Theories in Mechanics,» de *Handbuch der Physik*, vol. 3, S. Fluegge, Ed., Berlin, Springer-Verlag, 1965, pp. 36, 41,42.
- [25] G. a. L.-C. Ricci, «Methodes de Calcul Differentiel Absolu el Leurs Applications,» de *Mathematische Annalen*, vol. 54, 1901.
- [26] A. Einstein, «Die Grundlagen der Allgemeinen Relativitaetstheorie,» de *Annalen der Physik*, vol. 4, 1916, pp. 769-822.
- [27] A. a. H. A. Duschek, Tensorrechnung in Analytischer Darstellung, Vols. %1 de %21,2,3, Berlin: Springer-Verlag, 1965, 1968, 1970.
- [28] R. C. Wrede, Introduction to Vector and Tensor Analysis, New York: Wiley, 1963.
- [29] J. Betten, Elementary tensor calculus for engineers, Brunswick: Vieweg, 1977.
- [30] D. A. Vallado, «Fundamentals of Astrodynamics and Applications,» de *Space Technology Series*, New York, McGraw-Hill, 1997.
- [31] «Luftfahrt, Norm, LN 9300,» de *Flugmechanik*, Koeln, Beuth Vertriebe GmbH, 1970.
- [32] J. Wright, «A Compilation of Aerodynamic Nomenclature and Axes Systems,» de *NOLR 1241*, White Oak, U. S. Naval Ordenance Lab., 1962.
- [33] «Recommended Practice for Atmospheric and Space Vehicle Coordinate Systems,» de *American National Standard*, Washington, AIAA and ANSI, 1992.
- [34] B. Etkin, Dynamics of Atmospheric Flight, New York: Jhon Wiley, 1972.
- [35] R. R. Bate, Fundamentals of Astrodynamics, New York: Dover, 1971.
- [36] K. R. Britting, Inertial Navigation Systems Analysis, New York: Wiley-Interscience, 1971.
- [37] B. N. Pamadi, «Performance, Stability, Dynamics, and Control Applications,» de *AIAA Education Series*, Reston, AIAA, 1998.
- [38] A. B. Chatfield, «Fundamentals of High Accuracy Inertial Navigation,» de *Progress in Astronautics and Aeronautics*, Reston, AIAA, 1997.

- [39] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Reading, Massachusetts: Addison Wesley, Longman, 1965, p. 118.
- [40] R. C. Wrede, *Introduction to Vector and Tensor Analysis*, New York: Wiley, 1963, p. 169.
- [41] A. Wundheiler, *Kovariante Ableitung und die Cesaroschen Unbeweglichkeitsbedingungen*, vol. 36, Warsaw: *Mathematische Zeitschrift*, 1932, pp. 104-109.
- [42] W. R. Hamilton, «On a New Species of Imaginary Quantities Connected with Theory of Quaternions,» de *Dubling Proceedings*, vol. 2, 1843, pp. 424-434.
- [43] I. Newton, «*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*,» de *Jussu Societatis Regiae ac Typis Josephi Streater*, London, Prostat apud plures Bibliopolas, 1687.
- [44] C. Truesdell, «Die Entwicklung des Drallsatzes,» de *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 44, 1964, pp. 149-158.
- [45] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Reading: Addison Wesley, Longman, 1965, pp. 5, 6.
- [46] D. Karnopp, *System dynamics. Modeling and simulation of mechatronic systems*, New York: Wiley-Interscience, 2000.
- [47] S. H. Crandall, *Dynamics of Mechanical and Electromechanical Systems*, New York: McGraw-Hill, 1968.
- [48] R. C. Rosenberg, «State-Space Formulation for Bond Graph Models of Multiport Systems,» *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1971.
- [49] C. & D.-T. G. Sueur, «Bond-graph approach for structural analysis of MIMO linear systems,» *Journal of the Franklin Institute*, p. 55–70, 1991.
- [50] C. & D.-T. G. Sueur, «Bond graph approach to multi-time scale systems analysis,» *Journal of the Franklin Institute*, p. 1005–1026, 1991.
- [51] Controllab Products, «20-Sim,» [En línea]. Available: <https://www.20sim.com/overview/introduction/>.
- [52] L. Ferreyra y G. González, «Modelado de Sistemas 3D en un Enfoque de Bond Graph,» *Trabajos de Investigación en la Educación Superior - Morelia 2021*, 2021.
- [53] M. & A. D. Costello, «Effect of the Internal Mass Unbalance on the Terminal Accuracy an Stability of a Projectile,» *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, pp. 814-821, 1996.
- [54] R. McCoy, *Modern Exterior Ballistics. The Launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles*, Atglen: Schiffer Military History, 1999.
- [55] P. Plostins, «The Effect of Sabot Front Borerider Stiffness on the Launch Dynamics of Fin-Stabilized Kinetic Energy Ammunition,» *AIAA Aerospace Sciences Meeting*, 1990.
- [56] P. Plostins, «Launch Dynamics of APFSDS Ammunition,» *U.S. Army Ballistics Research*, 1984.

ACCIONES DE DIFUSIÓN

1. Certificado de participación en el Congreso Internacional de Investigación Academia Journals Morelia 2021.
2. Publicación del artículo “Modelado de Sistemas 3D en un Enfoque de Bond Graph” en “Memorias del Congreso Internacional de Investigación Academia Journals Morelia 2021”.
3. Publicación del artículo “Modelado de Sistemas 3D en un Enfoque de Bond Graph” en “Trabajos de Investigación en la Educación Superior -Morelia 2021”.



Universidad Nova Spain



PRODUCTOS Y SERVICIOS ESTRATÉGICOS
PARA INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
PYSEIP
CENTRO DE INVESTIGACIÓN

Memorias del Congreso Internacional de Investigación Academia Journals Morelia 2021



| Paper | Título | Autores | Primer Autor | Página |
|--------|--|--|-----------------|--------|
| MOR396 | Metodología de Optimización de Calidad para la Exportación de Aguacate Orgánico del Rancho Las Isabeles en Angangueo, Michoacán, 2018 - 2019 | M.C. Isabel Facio Esquivel Dr. David Augusto Trejo Aguilar Dr. Eloy Mendoza Machain Dr. Pedro López Eiroá Dr. Víctor Mendoza Martínez | Facio Esquivel | 569 |
| MOR287 | Caso de Éxito: "Sistema de Información para la Gestión del Curso en el ITCJ" | MSL Verónica Farías Veloz MSL Claudia Anglés Barrios Ing. José Luis Fong Betancourt MSL Anilú Flores Regalado MC Marisela Palacios Reyes Leslie Raquel Favela Gutiérrez | Farías Veloz | 575 |
| MOR014 | Funcionamiento de un Deareador | Dr. Tomás Fernández Gómez M.C. Francisco J. Miranda Sánchez Ing. Ángel Terrazas Carmona Ing. Hugo A. Morales Contreras Ing. Marco A. Alamillo Nieto Ing. Martínez Dueñas Jorge Hazael | Fernández Gómez | 581 |
| MOR347 | Modelado de Sistemas 3D en un Enfoque de Bond Graph | I.M. Luis Flaviano Ferreyra García Dr. Gilberto González Ávalos | Ferreyra García | 591 |
| MOR198 | Proceso de Atención de Enfermería Aplicado a la Persona con Diabetes Mellitus Tipo 2 / Hipertensión Arterial | Est. de la Lic. En Enfria: José Lino Figueroa Gomez L.E.I Ruth De La Cruz Castillo | Figueroa Gómez | 597 |
| MOR358 | El Incremento de Grasas Saturadas en la Dieta Induce Efectos Adversos sobre la Función Cerebral en Ratas con Retraso de Crecimiento Intrauterino | Dr en C. Flores-Mancilla Leopoldo Eduardo Dr en C Alejandro Ibáñez Salazar Dr en C. Noemi Gaytán Pacheco Dra en C. Elda Araceli García Mayorga | Flores Mancilla | 600 |
| MOR066 | Información y Alimentación Sobre el COVID-19 en Personas Mayores de Torreón Coahuila, México | Dra. Maria del Carmen Flores Ramirez Dra. Guillermina de la Cruz Jiménez Godínez Lic. TS Alma Ruth Silos Vaquera Mtra. Gabriela Perales García | Flores Ramirez | 606 |

Modelado de Sistemas 3D en un Enfoque de Bond Graph

I.M. Luis Flaviano Ferreyra García¹, Dr. Gilberto González Avalos²

Resumen— En el presente artículo se describe el modelado de sistemas en tres dimensiones (3D) en un enfoque de bond graph. Este tipo de sistemas determina una clase de sistemas no lineales. Así mismo, este modelo en bond graph permite introducir el movimiento traslacional y rotacional en los tres ejes (x , y , z) de una manera sencilla y directa, independientemente que su modelo matemático sea descrito por seis ecuaciones no lineales. Se introducen coeficientes de fricción en cada uno de los movimientos y en cada eje, sin requerir mayor análisis matemático. Para mostrar la validación del modelo en bond graph se muestran los resultados de las simulaciones en el software 20 Sim considerando la aplicación de una fuerza o un par en un eje y las restantes fuerzas y pares nulificadas. Este trabajo puede ser extendido al modelado y simulación de proyectiles, cohetes o de vehículos aeroespaciales en general.

Palabras clave—Bond graph, modelado, sistemas en 3D, traslación y rotación.

Introducción

Un bond graph es una representación de un sistema de interacciones de potencia. La metodología de bond graph, utilizada para el modelado de sistemas dinámicos multipuerto, fue creada por Paynter en 1959. Este enfoque fue motivado para generalizar el concepto de diagrama de circuitos eléctricos para desarrollar una teoría general para sistemas de ingeniería [1].

Hay tres aspectos importantes en el guiado de misiles, el modelado dinámico, los sistemas de control de vuelo y sistemas de navegación [2]. Así mismo, el problema de las dinámicas de cuerpos múltiples dentro de una atmósfera es complejo [3]. Con el incremento de la potencia de las computadoras, la simulación digital representa una herramienta esencial en el desarrollo de ingeniería. El uso de la simulación digital permite reducir los riesgos del costo asociado con el proyecto, así como mezclar varias configuraciones [4].

En este artículo se obtiene el modelo en bond graph de un sistema en tres dimensiones (3D) de sistemas con movimientos traslacional y rotacional, con este enfoque, la aplicación de nuevas fuerzas, coeficientes de fricción o desequilibrios del sistema es una característica sencilla y directa de llevar a cabo en sistemas modelados en bond graph.

Este artículo comprende, el movimiento 3D en enfoque tradicional. Posteriormente, se describen las bases del modelado en bond graph. Después, el modelado en 3D en bond graph es llevado a cabo y resultados de simulación en el software 20Sim son dados. Finalmente, se presentan las conclusiones.

Descripción del Método

En esta sección se aborda el problema de la mecánica de cuerpos rígidos multidimensionales y la inclusión de tal mecánica compleja en los modelos de sistema. La Figura 1 muestra un cuerpo rígido general rotando y trasladando en el espacio de ejes inerciales xyz mostrados; éstos son atados al cuerpo en su centro de masa y alineado con los principales ejes del mismo [5].

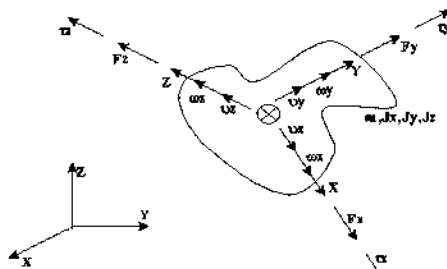


Figura 1. Cuerpo en multipuerto 3-D general.

En el instante mostrado, el cuerpo tiene una velocidad absoluta v y una velocidad angular absoluta ω . Newton estableció que la fuerza neta F actuando en el cuerpo cambia su *momentum*,

¹ Luis Flaviano Ferreyra García, Ingeniero Mecánico, es estudiante de Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica en la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán. flaviano.ferreyra@umich.mx (autor corresponsal)

² Gilberto González Avalos, Doctorado en Ingeniería Eléctrica, es profesor de Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica en la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán. gilmichga@yahoo.com.mx

ACADEMIA JOURNALS



OPUS PRO SCIENTIA ET STUDIUM

ELIBRO CON ISBN ONLINE

978-1-939982-65-0

TRABAJOS DE INVESTIGACIÓN EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR - MORELIA 2021

Mayo 12 al 14 de 2021

Trabajos de Investigación del
Congreso Internacional de
Investigación Academia Journals
Morelia 2021

www.academiajournals.com

| Paper | Título | Autores | Primer Autor | Página |
|--------|--|--|-----------------|--------|
| MOR396 | Metodología de Optimización de Calidad para la Exportación de Aguacate Orgánico del Rancho Las Isabeles en Angangueo, Michoacán, 2018 - 2019 | M.C. Isabel Facio Esquivel Dr. David Augusto Trejo Aguilar Dr. Eloy Mendoza Machain Dr. Pedro López Eiroá Dr. Víctor Mendoza Martínez | Facio Esquivel | 569 |
| MOR287 | Caso de Éxito: "Sistema de Información para la Gestión del Curso en el ITCJ" | MSL Verónica Farías Veloz MSL Claudia Anglés Barrios Ing. José Luis Fong Betancourt MSL Anilú Flores Regalado MC Marisela Palacios Reyes Leslie Raquel Favela Gutiérrez | Farías Veloz | 575 |
| MOR014 | Funcionamiento de un Deareador | Dr. Tomás Fernández Gómez M.C. Francisco J. Miranda Sánchez Ing. Ángel Terrazas Carmona Ing. Hugo A. Morales Contreras Ing. Marco A. Alamillo Nieto Ing. Martínez Dueñas Jorge Hazael | Fernández Gómez | 581 |
| MOR347 | Modelado de Sistemas 3D en un Enfoque de Bond Graph | I.M. Luis Flaviano Ferreyra García Dr. Gilberto González Ávalos | Ferreyra García | 591 |
| MOR198 | Proceso de Atención de Enfermería Aplicado a la Persona con Diabetes Mellitus Tipo 2 / Hipertensión Arterial | Est. de la Lic. En Enfria: José Lino Figueroa Gomez L.E.I Ruth De La Cruz Castillo | Figueroa Gómez | 597 |
| MOR358 | El Incremento de Grasas Saturadas en la Dieta Induce Efectos Adversos sobre la Función Cerebral en Ratas con Retraso de Crecimiento Intrauterino | Dr en C. Flores-Mancilla Leopoldo Eduardo Dr en C Alejandro Ibáñez Salazar Dr en C. Noemi Gaytán Pacheco Dra en C. Elda Araceli García Mayorga | Flores Mancilla | 600 |
| MOR066 | Información y Alimentación Sobre el COVID-19 en Personas Mayores de Torreón Coahuila, México | Dra. Maria del Carmen Flores Ramirez Dra. Guillermina de la Cruz Jiménez Godínez Lic. TS Alma Ruth Silos Vaquera Mtra. Gabriela Perales García | Flores Ramirez | 606 |

Modelado de Sistemas 3D en un Enfoque de Bond Graph

I.M. Luis Flaviano Ferreyra García¹, Dr. Gilberto González Avalos²

Resumen— En el presente artículo se describe el modelado de sistemas en tres dimensiones (3D) en un enfoque de bond graph. Este tipo de sistemas determina una clase de sistemas no lineales. Así mismo, este modelo en bond graph permite introducir el movimiento traslacional y rotacional en los tres ejes (x , y , z) de una manera sencilla y directa, independientemente que su modelo matemático sea descrito por seis ecuaciones no lineales. Se introducen coeficientes de fricción en cada uno de los movimientos y en cada eje, sin requerir mayor análisis matemático. Para mostrar la validación del modelo en bond graph se muestran los resultados de las simulaciones en el software 20 Sim considerando la aplicación de una fuerza o un par en un eje y las restantes fuerzas y pares nulificadas. Este trabajo puede ser extendido al modelado y simulación de proyectiles, cohetes o de vehículos aeroespaciales en general.

Palabras clave—Bond graph, modelado, sistemas en 3D, traslación y rotación.

Introducción

Un bond graph es una representación de un sistema de interacciones de potencia. La metodología de bond graph, utilizada para el modelado de sistemas dinámicos multipuerto, fue creada por Paynter en 1959. Este enfoque fue motivado para generalizar el concepto de diagrama de circuitos eléctricos para desarrollar una teoría general para sistemas de ingeniería [1].

Hay tres aspectos importantes en el guiado de misiles, el modelado dinámico, los sistemas de control de vuelo y sistemas de navegación [2]. Así mismo, el problema de las dinámicas de cuerpos múltiples dentro de una atmósfera es complejo [3]. Con el incremento de la potencia de las computadoras, la simulación digital representa una herramienta esencial en el desarrollo de ingeniería. El uso de la simulación digital permite reducir los riesgos del costo asociado con el proyecto, así como mezclar varias configuraciones [4].

En este artículo se obtiene el modelo en bond graph de un sistema en tres dimensiones (3D) de sistemas con movimientos traslacional y rotacional, con este enfoque, la aplicación de nuevas fuerzas, coeficientes de fricción o desequilibrios del sistema es una característica sencilla y directa de llevar a cabo en sistemas modelados en bond graph.

Este artículo comprende, el movimiento 3D en enfoque tradicional. Posteriormente, se describen las bases del modelado en bond graph. Después, el modelado en 3D en bond graph es llevado a cabo y resultados de simulación en el software 20Sim son dados. Finalmente, se presentan las conclusiones.

Descripción del Método

En esta sección se aborda el problema de la mecánica de cuerpos rígidos multidimensionales y la inclusión de tal mecánica compleja en los modelos de sistema. La Figura 1 muestra un cuerpo rígido general rotando y trasladando en el espacio de ejes inerciales xyz mostrados; éstos son atados al cuerpo en su centro de masa y alineado con los principales ejes del mismo [5].

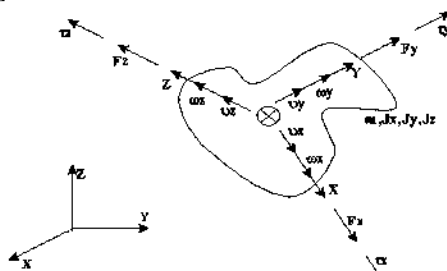


Figura 1. Cuerpo en multipuerto 3-D general.

En el instante mostrado, el cuerpo tiene una velocidad absoluta v y una velocidad angular absoluta ω . Newton estableció que la fuerza neta F actuando en el cuerpo cambia su *momentum*,

¹ Luis Flaviano Ferreyra García, Ingeniero Mecánico, es estudiante de Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica en la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán. flaviano.ferreyra@umich.mx (autor correspondiente)

² Gilberto González Avalos, Doctorado en Ingeniería Eléctrica, es profesor de Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica en la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán. gilmichga@yahoo.com.mx