



Universidad Nacional Autónoma de México  
y  
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas  
UNAM-UMSNH

**Triple espectral de Dolbeault-Dirac sobre la variedad de  
bandera cuántica de tipo  $B_2$ .**

---

T E S I S

Que para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas  
Presenta:

**Fredy Díaz García**

*Director:* Dr. Elmar Wagner

---



Morelia, Michoacán junio de 2021.

**Agradecimientos**

Agradezco no sólo por este trabajo que es muy simbólico, si no a todos los que se vieron involucrados directa o indirectamente para la realización de esta tesis. A todos mis profesores, al personal escolar y compañeros de posgrado. Agradezco a mi asesor y director de tesis Dr. Elmar Wagner y a Dr. Réamonn Ó Buachalla quien también ha contribuido de manera considerable a mi formación. Agradezco también el apoyo del Proyecto PAPIIT IN100119 “Rigidez Geométrica y de acciones” para la terminación de esta tesis. Y sobre todo y de manera muy especial agradezco a mi madre Elena García Hernández.



## Índice general

Agradecimientos	I
Abstract	v
Resumen	v
Introducción	vii
Capítulo 1. Preliminares	1
1. El álgebra cuántica $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$	1
2. El álgebra cuántica $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$	2
3. La variedad bandera cuántica irreducible de tipo $B_2$	7
4. Representaciones irreducibles del factor Levi $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$	10
5. Cálculo diferencial equivariante	11
Capítulo 2. Construcción del operador de Dolbeault-Dirac	13
1. Cálculo diferencial inducido por la resolución de Bernstein-Gelfand-Gelfand	13
2. Reglas de ramificación	17
3. El espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\Omega^{0,\bullet})$	23
Capítulo 3. Valores propios de $\bar{\partial}_j^\dagger \bar{\partial}_j$ y $\bar{\partial}_j \bar{\partial}_j^\dagger$	31
1. Espectro de $\bar{\partial} + \bar{\partial}^\dagger$	31
2. Valores propios de $\bar{\partial}_0^\dagger \bar{\partial}_0$	33
3. Valores propios de $\bar{\partial}_1^\dagger \bar{\partial}_1$	39
4. Valores propios de $\bar{\partial}_1 \bar{\partial}_1^\dagger$	46
5. Valores propios de $\bar{\partial}_2 \bar{\partial}_2^\dagger$	53
6. Cálculo de los valores propios de $\bar{\partial}_0^\dagger \bar{\partial}_0$ and $\bar{\partial}_2 \bar{\partial}_2^\dagger$ mediante un operador Casimir	57
Capítulo 4. El triple espectral de Dolbeault-Dirac	63
1. Triple espectral equivariante	63
2. Conclusiones y problemas futuros	67
Bibliografía	69



### Abstract

Noncommutative geometry of quantum groups and quantum spaces is an area in mathematics that has been in intense activity over the past 30 years. The theory of quantum groups provides a large family of very interesting examples, namely the quantum flag manifolds, which seem to fit well into Conne's framework of noncommutative geometry. This approach requires the construction of a differential calculus on the corresponding coordinate algebra as well as the study of the associated Dirac operator.

In this thesis we introduced and investigate the Dolbeault-Dirac operator associated to the irreducible quantum flag manifold of type  $B_2$ . The main ingredients are the quantum group version of the Bernstein-Gelfand-Gelfand resolution and the representation theory of the quantum group  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ . An explicit calculation and complete description of the spectrum of the Dirac operator is established and it is shown that this allows us to construct a  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))^{\text{cop}}$ -equivariant,  $0^+$ -summable, even spectral triple for the underlying quantum flag manifold.

### Resumen

La geometría no conmutativa de grupos cuánticos y espacios cuánticos es una área en matemáticas que ha estado en intensa actividad durante los últimos 30 años. La teoría de grupos cuánticos proporciona una extensa familia de ejemplos muy interesantes, a saber, las variedades bandera cuánticas, las cuales parecen encajar bien en el marco de geometría no conmutativa de Connes. Este enfoque requiere la construcción de un cálculo diferencial sobre la correspondiente álgebra coordinada así como también el estudio del operador de Dirac asociado.

En esta tesis introducimos e investigamos el operador de Dolbeault-Dirac asociado a la variedad bandera cuántica irreducible de tipo  $B_2$ . Los ingredientes principales son la versión cuántica de la resolución de Bernstein-Gelfand-Gelfand y la teoría de representación del grupo cuántico  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ . Un cálculo explícito y descripción completa del espectro del operador de Dirac es establecido y es mostrado que esto nos permite construir un triple espectral par,  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))^{\text{cop}}$ -equivariante,  $0^+$ -sumable para la variedad bandera cuántica subyacente.

Palabras clave: Grupos cuánticos, resolución de Bernstein-Gelfand-Gelfand, cálculo diferencial, operador de Dirac.



## Introducción

Desde el surgimiento de los grupos cuánticos en los 1980's, estos objetos han atraído significativa atención en las matemáticas en el sentido de que se ha buscado una manera de incluir o encajar estos objetos en la geometría no conmutativa de A. Connes. En geometría no conmutativa de Connes, triples espectrales generalizan las variedades Riemannianas spin y sus operadores de Dirac asociados al contexto no conmutativo, ver [1], [15]. Entonces de esto surge la pregunta de cómo construir triples espectrales para grupos y espacios cuánticos, pero resulta que construir operadores diferenciales  $q$ -deformados ha sido una tarea muy difícil. Desde entonces varias construcciones de operadores de Dirac sobre espacios cuánticos han sido hechas, ver por ejemplo [8], [9], [10], [11], [27], [32], [35]. Sin embargo, resulta que no hay un consenso aún de como construir un triple espectral para grupos cuánticos de manera canónica.

Un enfoque que ha perdurado hasta la fecha para la construcción de operadores diferenciales deformados sobre espacios cuánticos ha sido la teoría de cálculo diferencial covariante, es decir, un cálculo diferencial que es compatible con la acción del grupo. Este tuvo sus orígenes con los trabajos de S. L. Woronowicz [39], [40], ver también [28]. A pesar de estos destacables trabajos resulta que tampoco existe una construcción canónica de un cálculo diferencial covariante para espacios cuánticos en general.

Como resultado de todos estos esfuerzos ha sido descubierto que los espacios homogéneos cuánticos son más tratables para este tipo de investigación que los grupos cuánticos en si mismos, es decir, no tomar el grupo cuántico si no considerar ciertos “cocientes” de este que resultan ser muy similares a su contraparte clásico. Para ser más precisos, la construcción de un cálculo diferencial covariante ha tenido mejor éxito en el estudio de las variedades bandera cuánticas, estas últimas siendo espacios homogéneos cuánticos que  $q$ -deforman los anillos coordenados de las variedades bandera clásicas  $G/L_S$ , ver por ejemplo [13] para una definición precisa. En esta dirección, el primer paso fue hacer una teoría de cálculo diferencial de primer orden sobre espacios homogéneos cuánticos, esto fue hecho por I. Heckenberger y S. Kolb en [16], cuya clasificación fue después hecha en [17] para las variedades bandera cuánticas irreducibles. De hecho ellos lograron demostrar que, para estas variedades bandera cuánticas, existen precisamente dos cálculos diferenciales covariantes irreducibles de primer orden  $(\Omega^{(1,0)}, \partial)$  y  $(\Omega^{(0,1)}, \bar{\partial})$ . Si  $(\Omega^{(\bullet,0)}, \partial)$  y  $(\Omega^{(0,\bullet)}, \bar{\partial})$  son



los cálculos diferenciales universales correspondientes a  $(\Omega^{(1,0)}, \partial)$  y  $(\Omega^{(0,1)}, \bar{\partial})$ , respectivamente, entonces el producto exterior  $(\Omega^{(\bullet,\bullet)} = \Omega^{(\bullet,0)} \wedge \Omega^{(0,\bullet)}, d = \partial \oplus \bar{\partial})$  define un complejo de Rham  $q$ -deformado [18], siendo este uno de los resultados más destacables en la geometría no conmutativa de grupos cuánticos.

Recalquemos que en el caso clásico, un triple espectral es dado por

$$(C^\infty(M), D_{\bar{\partial}}, L^2(\Omega^{(0,\bullet)}))$$

donde  $M$  es variedad Hermitiana compacta y  $D_{\bar{\partial}}$  es su operador de Dolbeault-Dirac asociado. Para una presentación del operador de Dolbeault-Dirac clásico de una variedad Hermitiana como triple espectral ver [14]. Esto nos motiva a investigar el análogo no conmutativo, es decir, si  $\Omega^{(0,\bullet)}$  está provisto con un producto interno, entonces podemos considerar el adjunto  $\bar{\partial}^\dagger$  de  $\bar{\partial}$  y análogamente al caso clásico podemos definir el operador de Dolbeault-Dirac  $D := \bar{\partial} + \bar{\partial}^\dagger$ , el cual viene siendo un candidato natural para darnos un operador de Dirac no conmutativo. Por ejemplo en [7], los autores asocian a una estructura Hermitiana  $(\Omega^{(\bullet,\bullet)}, \kappa)$  sobre un espacio homogéneo cuántico  $B$  un espacio de Hilbert  $L^2(\Omega^{(0,\bullet)})$  junto con una  $*$ -representación acotada  $\rho$  de  $B$  tal que operador  $D_{\bar{\partial}} = \bar{\partial} + \bar{\partial}^\dagger$  es autoadjunto y tiene conmutadores acotados  $[D_{\bar{\partial}}, \rho(b)]$  para todo  $b \in B$ . Entonces un triple espectral es dado por  $(B, L^2(\Omega^{(0,\bullet)}), D_{\bar{\partial}})$  si podemos demostrar que  $D_{\bar{\partial}}$  tiene resolvente compacto.

Antes de describir los contenidos de esta tesis mencionaremos un poco de la literatura sobre construcción de operadores de Dolbeault-Dirac sobre variedades de bandera cuánticas. Uno de los ejemplos más simples de variedad bandera cuántica es la esfera Podleś estándar, que resulta ser la  $q$ -deformación de la presentación de la fibración de Hopf de la 2-esfera  $S^2$ . En [8] es mostrado que la esfera Podleś admite un triple espectral canónico el cual  $q$ -deforma el operador de Dirac clásico del espacio proyectivo  $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$  [35]. Este también fue descubierto por S. Majid como operador correspondiente a una estructura compleja [30]. Casi al mismo tiempo U. Krähmer [26] introdujo un operador de Dirac algebraico para las variedades bandera cuánticas irreducibles donde el cálculo diferencial de Heckenberger-Kolb es recuperado del operador de Dirac. Subsecuentemente triples espectrales para los espacios proyectivos cuánticos fueron construidos por L. Dąbrowski y F. D'Andrea [11]. Por último R. Ó Buachalla y P. Somberg demuestran la condición resolvente compacto de  $D_{\bar{\partial}}$  para el caso de los proyectivos cuánticos [6].

El espacio homogéneo cuántico en consideración en esta tesis es la variedad bandera irreducible de tipo  $B_2$ . Daremos una breve descripción de este objeto. Consideremos  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  el álgebra envolvente  $q$ -deformada del álgebra envolvente del álgebra de Lie simple  $\mathfrak{so}(5)$ . El Levi factor es definido por la  $*$ -subálgebra de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$

$$\mathcal{U}_q(\mathfrak{l}) = \langle E_2, F_2, K_i : i = 1, 2 \rangle$$

Para las propiedades de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$  ver [27]. Por otro lado tenemos el álgebra  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  la cual puede verse como una  $q$ -deformación del álgebra coordenada del grupo de Lie  $\mathrm{SO}(5)$ , ver [17], [28]. Entonces la variedad de bandera cuántica irreducible de tipo  $B_2$  es definida por

$$\mathcal{B} := \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))^{\mathrm{inv}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{l}))} = \{a \in \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) : a_{(1)}\langle X, a_{(2)} \rangle = \varepsilon(X)a \text{ para todo } X \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{l})\}.$$

es decir,  $\mathcal{B}$  viene siendo un espacio de coinvariantes (definiciones precisas serán dadas en sección 3 de capítulo 1). Esta tesis consiste en la construcción y el estudio del espectro del operador de Dolbeault-Dirac  $D = \bar{\partial} + \bar{\partial}^\dagger$  sobre la variedad bandera cuántica  $\mathcal{B}$ . Para esto usaremos el enfoque de la resolución Berstein-Gelfand-Gelfand (BGG) [20]

$$0 \longrightarrow \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5)) \otimes_{\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})} M(\lambda_3) \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_0} \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5)) \otimes_{\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})} M(0) \xrightarrow{\varepsilon \otimes \mathrm{id}} \mathbb{C} \longrightarrow 0,$$

donde los  $\varphi_i$  son mapeos de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ -módulos y los  $M(\lambda_i)$  serán definidos en capítulo 2. Es demostrado en [20] que un cálculo diferencial  $(\Omega^{(0,\bullet)}, \bar{\partial})$  es obtenido al tomar el dual localmente finito de esta resolución y resulta ser isomorfo al cálculo diferencial construido en [18] con  $\Omega^{(0,0)} = \mathcal{B}$ . Nuestro punto de partida es dar una descripción explícita de los morfismos  $\varphi_i$  para después tomar duales y obtener también fórmulas explícitas para los mapeos  $\bar{\partial}_i$ , estas siendo útiles para cálculos del espectro.

Un hecho importante aquí es la conservación de la teoría de representación de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  bajo la  $q$ -deformación, donde  $q$  no es una raíz de la unidad. La teoría de representación de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  y del Levi factor  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$  así como la descomposición de Peter-Weyl para el grupo cuántico  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  desempeñarán un papel importante para estudiar los espacios de formas  $\Omega^{(0,k)}$ . Por otro lado el estado de Haar de  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  será una herramienta clave para definir un producto interno sobre  $\Omega^{(0,\bullet)}$ .

La tesis está organizada como sigue: en Capítulo 1 recalamos la teoría básica de álgebras de Lie necesaria para capítulos subsecuentes así como la definición del algebra envolvente cuantizada  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  y el grupo cuántico  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$ . La definición precisa de la variedad bandera subyacente es dada con una breve motivación clásica. También hechos elementales de la teoría de representación del Levi factor  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$  son recalados, finalizando con la definición de cálculo diferencial equivariante.

En Capítulo 2 comenzamos calculando fórmulas explícitas para la resolución BGG así como para su dual localmente finito. Subsecuentemente se procede a investigar las reglas de ramificación para la inclusión  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l}) \hookrightarrow \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  en nuestros casos de interés. Finalizando con la construcción del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}(\Omega^{(0,\bullet)})$  y la definición de los operadores auxiliares  $\delta$  y  $\delta^\dagger$ , los cuales serán útiles para calcular los valores propios de  $D_{\bar{\partial}}$ .

El Capítulo 3 es dedicado al cálculo de valores propios de  $D_{\bar{\partial}}$  por calculando los valores propios de los llamados “Laplacianos”  $\bar{\partial}_k \bar{\partial}_k^\dagger$  y  $\bar{\partial}_k^\dagger \bar{\partial}_k$ . Con la finalidad de hacer este texto más accesible, cada sección es dedicada a calcular los valores propios de cada Laplaciano. Finalizamos dando un cálculo alternativo de los valores propios de los Laplacianos sobre 0 y 3 formas mediante operadores Casimir.

En Capítulo 4 todos los resultados de capítulos anteriores son reunidos para demostrar que un triple espectral par,  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))^{\text{cop}}$ -equivariante,  $0^+$ -sumable es dado por  $(B, \mathcal{H}(\Omega^{0,\bullet}), D_{\bar{\partial}}, \gamma)$ , donde  $\gamma$  es un operador de graduación.

## Capítulo 1

### Preliminares

En este capítulo damos los requisitos necesarios sobre el álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(5)$  y su álgebra envolvente cuántica  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ . La teoría de representación de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  y del Levi factor  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$  es recalcada así como también se fijará la notación que es utilizada en capítulos subsecuentes. La variedad bandera irreducible cuántica de  $B_2$  es definida dando la motivación clásica. Seguiremos las convenciones de [28] para la mayor parte de este capítulo.

#### 1. El álgebra cuántica $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$

Comenzamos recalcando algunos hechos generales acerca del álgebra de Lie simple  $\mathfrak{so}(5)$ . Ya que  $\mathfrak{so}(5)$  tiene rango 2, una subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(5)$  es 2-dimensional. Sea  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$  un conjunto de raíces simples correspondientes a  $\mathfrak{h}$  tal que  $(\alpha_1, \alpha_1) = 2$  y  $(\alpha_2, \alpha_2) = 1$ , donde  $(\cdot, \cdot)$  denota la forma bilineal simétrica sobre el dual  $\mathfrak{h}'$  de  $\mathfrak{h}$  inducida por la forma Killing. Esta forma bilineal puede ser deducida de la matriz de Cartan de  $\mathfrak{so}(5)$ :

$$(1.1) \quad \left( \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \right)_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Una base fundamental de pesos  $\{\omega_1, \omega_2\} \subset \mathfrak{h}'$  satisfaciendo  $\frac{2(\omega_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \delta_{ij}$  (delta de Kronecker) es dado por  $\omega_1 = \alpha_1 + \alpha_2$  y  $\omega_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2)$ . Usaremos coordenadas Cartesianas para describir la latice de pesos  $\mathcal{P} := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ , es decir,  $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$  representa  $n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \in \mathcal{P}$ . En estas coordenadas, el conjunto de raíces positivas es dado por

$$(1.2) \quad R^+ := \{\alpha_1 = (2, -2), \alpha_2 = (-1, 2), \alpha_1 + \alpha_2 = (1, 0), \alpha_1 + 2\alpha_2 = (0, 2)\}.$$

Escribimos  $\mathcal{P}^+ := \mathbb{N}_0\omega_1 + \mathbb{N}_0\omega_2 \cong \mathbb{N}_0^2$  para el conjunto de pesos dominantes. Este contiene a la cámara de Weyl fundamental  $\mathcal{P}^{++} := \mathbb{N}\omega_1 + \mathbb{N}\omega_2$ . Decimos que un peso  $\mu \in \mathcal{P}$  es más alto que  $\nu \in \mathcal{P}$  si  $\mu - \nu \in \mathbb{N}_0\alpha_1 + \mathbb{N}_0\alpha_2$ .

El grupo de Weyl  $W$  es generado por las reflexiones  $w_\alpha : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ ,  $\alpha \in R^+$ , donde  $w_\alpha(\mu) := \mu - 2\frac{(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$ . Por ejemplo, la reflexión  $w_{\alpha_2}$  es dada por

$$(1.3) \quad w_{\alpha_2}(x, y) = (x + y, -y), \quad (x, y) \in \mathcal{P}.$$

En esta tesis,  $q$  representa un número real del intervalo  $(0, 1)$ . Sean  $q_1 := q$ ,  $q_2 := \sqrt{q}$ , y

$$(1.4) \quad [n]_1 := \frac{q_1^n - q_1^{-n}}{q_1 - q_1^{-1}} = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \quad [n]_2 := \frac{q_2^n - q_2^{-n}}{q_2 - q_2^{-1}} = \frac{q^{n/2} - q^{-n/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}, \quad n \in \mathbb{R}.$$

El álgebra envolvente cuántica  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  es definida como la  $*$ -álgebra compleja generada por  $K_1^{\pm 1}, K_2^{\pm 1}, E_1, E_2, F_1, F_2$  con relaciones como en [28]:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} K_1 E_1 &= q_1^2 E_1 K_1, \quad K_1 E_2 = q_1^{-1} E_2 K_1, \quad K_1 F_1 = q_1^{-2} F_1 K_1, \quad K_1 F_2 = q_1 F_2 K_1, \\ K_2 E_1 &= q_2^{-2} E_1 K_2, \quad K_2 E_2 = q_2^2 E_2 K_2, \quad K_2 F_1 = q_2^2 F_1 K_2, \quad K_2 F_2 = q_2^{-2} F_2 K_2, \\ K_i K_j &= K_j K_i, \quad K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1, \quad E_1 F_2 = F_2 E_1, \quad E_2 F_1 = F_1 E_2, \quad i, j = 1, 2, \\ E_1 F_1 - F_1 E_1 &= \frac{1}{q_1 - q_1^{-1}} (K_1 - K_1^{-1}), \quad E_2 F_2 - F_2 E_2 = \frac{1}{q_2 - q_2^{-1}} (K_2 - K_2^{-1}), \end{aligned}$$

con relaciones de Serre

$$(1.6) \quad 0 = E_2^3 E_1 - [3]_2 E_2^2 E_1 E_2 + [3]_2 E_2 E_1 E_2^2 - E_1 E_2^3, \quad 0 = E_1^2 E_2 - [2]_1 E_1 E_2 E_1 + E_2 E_1^2,$$

$$(1.7) \quad 0 = F_2^3 F_1 - [3]_2 F_2^2 F_1 F_2 + [3]_2 F_2 F_1 F_2^2 - F_1 F_2^3, \quad 0 = F_1^2 F_2 - [2]_1 F_1 F_2 F_1 + F_2 F_1^2,$$

e involución

$$(1.8) \quad \begin{aligned} K_1^* &= K_1, \quad E_1^* = q_1 K_1 F_1, \quad F_1^* = q_1^{-1} E_1 K_1^{-1}, \\ K_2^* &= K_2, \quad E_2^* = q_1 K_2 F_2, \quad F_2^* = q_1^{-1} E_2 K_2^{-1}. \end{aligned}$$

Esta es una  $*$ -álgebra de Hopf con coproducto  $\Delta$ , counidad  $\varepsilon$  y antipoda  $S$  determinada por

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \Delta(K_i^{\pm 1}) &= K_i^{\pm 1} \otimes K_i^{\pm 1}, \quad \Delta(E_i) = E_i \otimes K_i + 1 \otimes E_i, \quad \Delta(F_i) = F_i \otimes 1 + K_i^{-1} \otimes F_i, \\ \varepsilon(K_i) &= 1, \quad \varepsilon(E_i) = \varepsilon(F_i) = 0, \\ S(K_i) &= K_i^{-1}, \quad S(E_i) = -E_i K_i^{-1}, \quad S(F_i) = -K_i F_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Notemos que  $q_1$  y  $q_2$  fueron elegidos de tal manera que las potencias en la relación de conmutación de  $K_1$  y  $E_j$  en (1.5) coincidan con la matriz de Cartan (1.1). De ahora en adelante escribiremos solo  $q$  en lugar de  $q_1$  y  $q_2^2$ . Además, usaremos la notación de Sweedler  $\Delta(X) = X_{(1)} \otimes X_{(2)}$  para coproductos.

## 2. El álgebra cuántica $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$

La correspondiente teoría de representación de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  es muy similar en muchos aspectos a la teoría de Lie clásica. Un ejemplo de esto es la construcción de los  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ -módulos irreducibles finito dimensionales para pesos dominantes en  $\mathcal{P}^+$ , es decir, para cada  $(m, n) \in \mathcal{P}^+$  existe un  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ -módulo irreducible finito dimensional el cual denotamos por  $V^{(m,n)}$  de peso más alto  $(m, n)$ , tales representaciones son llamadas de tipo 1 [28]. La conservación fórmula de caracter de Weyl será utilizado más adelante. Ver [28] para una explicación detallada de estos resultados.

Por  $\mathcal{U}_q(\mathrm{so}(5))^\circ$  denotamos el álgebra de Hopf dual de  $\mathcal{U}_q(\mathrm{so}(5))$  [28, Sección 1.2.8]. Entonces  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \subset \mathcal{U}_q(\mathrm{so}(5))^\circ$  es la subálgebra de Hopf generada por los coeficientes matriciales de la  $\mathcal{U}_q(\mathrm{so}(5))$ -representación irreducible 5-dimensional de peso más alto  $(1, 0)$ , es decir,  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  es generada por coeficientes matriciales de representaciones irreducibles finito dimensionales  $V(\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathcal{P}^+$  [28], [17]. Denotando los coeficientes matriciales por  $u^i_j$ ,  $i, j = 1, \dots, 5$ , estos satisfacen las relaciones

$$(1.10) \quad \sum_{k,l=1,\dots,5} R_{kl}^{ij} u_m^k u_n^l = \sum_{k,l=1,\dots,5} u_k^j u_l^i R_{mn}^{lk}, \quad i, j, m, n = 1, \dots, 5, \quad \mathcal{D}_q = 1,$$

$$(1.11) \quad \sum_{i,j,k=1,\dots,5} C_j^i (C^{-1})_m^k u_i^n u_j^k = \sum_{i,j,k=1,\dots,5} C_i^n (C^{-1})_k^j u_i^j u_m^k = \delta_{nm}, \quad m, n = 1, \dots, 5,$$

con los coeficientes  $R_{kl}^{ij} \in \mathbb{R}$  de la R-matriz, los coeficientes  $C_j^i \in \mathbb{R}$  de la C-matriz y el determinante cuántico  $\mathcal{D}_q \in \mathrm{alg}\{u_j^k : j, k = 1, \dots, 5\}$  dados en [28, Section 9.3], y  $\delta_{nm}$  denota la delta de Kronecker. El álgebra  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  viene siendo una \*-álgebra de Hopf, donde los mapeos de estructura son determinados por

$$(1.12) \quad \Delta(u_l^k) = \sum_i u_i^k \otimes u_l^i, \quad \varepsilon(u_l^k) = \delta_{kl}, \quad S(u_l^k) = \sum_{i,j} C_i^k (C^{-1})_l^j u_i^j, \quad (u_l^k)^* = S(u_l^k).$$

Es conocido que existe un apareamiento dual  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{U}_q(\mathrm{so}(5)) \times \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \rightarrow \mathbb{C}$  no degenerado tal que  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  viene siendo una \*-álgebra  $\mathcal{U}_q(\mathrm{so}(5))$ -módulo izquierdo y derecho con respecto a la acción izquierda  $\nu_L : \mathcal{U}_q(\mathrm{so}(5)) \otimes \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \rightarrow \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$ ,  $\nu_L(X \otimes a) := X \triangleright a$ , y la acción derecha  $\nu_R : \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \otimes \mathcal{U}_q(\mathrm{so}(5)) \rightarrow \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$ ,  $\nu_R(a \otimes X) := a \triangleleft X$ , definida por  $X \triangleright a := a_{(1)} \langle X, a_{(2)} \rangle$  y  $a \triangleleft X = \langle X, a_{(1)} \rangle a_{(2)}$ . Aquí, \*-álgebra módulo significa que estas acciones satisfacen, para todo  $a, b \in \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  y  $X \in \mathcal{U}_q(\mathrm{so}(5))$ ,

$$(1.13) \quad X \triangleright (ab) = (X_{(1)} \triangleright a)(X_{(2)} \triangleright b), \quad (X \triangleright a)^* = S(X)^* \triangleright a^*,$$

$$(1.14) \quad (ab) \triangleleft X = (a \triangleleft X_{(1)})(b \triangleleft X_{(2)}), \quad (a \triangleleft X)^* = a^* \triangleleft S(X)^*.$$

Como una consecuencia, es suficiente especificar las acciones sobre generadores, las cuales son dadas como sigue:

$$(1.15) \quad \begin{aligned} K_1 \triangleright u_1^k &= q^{-1} u_1^k, & K_1 \triangleright u_2^k &= q u_2^k, & K_1 \triangleright u_3^k &= u_3^k, & K_1 \triangleright u_4^k &= q^{-1} u_4^k, & K_1 \triangleright u_5^k &= q u_5^k, \\ E_1 \triangleright u_1^k &= u_2^k, & E_1 \triangleright u_4^k &= -u_5^k, & F_1 \triangleright u_2^k &= u_1^k, & F_1 \triangleright u_5^k &= -u_4^k, \\ K_2 \triangleright u_1^k &= u_1^k, & K_2 \triangleright u_2^k &= q^{-1} u_2^k, & K_2 \triangleright u_3^k &= u_3^k, & K_2 \triangleright u_4^k &= q u_4^k, & K_2 \triangleright u_5^k &= u_5^k, \\ E_2 \triangleright u_2^k &= \sqrt{[2]_2} u_3^k, & E_2 \triangleright u_3^k &= -q_2 \sqrt{[2]_2} u_4^k, \\ F_2 \triangleright u_3^k &= \sqrt{[2]_2} u_2^k, & F_2 \triangleright u_4^k &= -q_2^{-1} \sqrt{[2]_2} u_3^k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1.16) \quad & u_k^1 \triangleleft K_1 = q^{-1}u_k^1, \quad u_k^2 \triangleleft K_1 = qu_k^2, \quad u_k^3 \triangleleft K_1 = u_k^3, \quad u_k^4 \triangleleft K_1 = q^{-1}u_k^4, \quad u_k^5 \triangleleft K_1 = qu_k^5, \\
& u_k^2 \triangleleft E_1 = u_k^1, \quad u_k^5 \triangleleft E_1 = -u_k^4, \quad u_k^1 \triangleleft F_1 = u_k^2, \quad u_k^4 \triangleleft F_1 = -u_k^5, \\
& u_k^1 \triangleleft K_2 = u_k^1, \quad u_k^2 \triangleleft K_2 = q^{-1}u_k^2, \quad u_k^3 \triangleleft K_2 = u_k^3, \quad u_k^4 \triangleleft K_2 = qu_k^4, \quad u_k^5 \triangleleft K_2 = u_k^5, \\
& u_k^3 \triangleleft E_2 = \sqrt{[2]_2}u_k^2, \quad u_k^4 \triangleleft E_2 = -q_2 \sqrt{[2]_2}u_k^3, \\
& u_k^2 \triangleleft F_2 = \sqrt{[2]_2}u_k^3, \quad u_k^3 \triangleleft F_2 = -q_2^{-1} \sqrt{[2]_2}u_k^4,
\end{aligned}$$

para  $k = 1, \dots, 5$ , y cero en los otros casos. El apareamiento dual sobre generadores puede ser obtenido de (1.15) por aplicar la counidad  $\varepsilon$  y observando que

$$\varepsilon(X \triangleright a) = \varepsilon(a_{(1)}) \langle X, a_{(2)} \rangle = \langle X, a \rangle, \quad X \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5)), \quad a \in \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)).$$

Es conocido que  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  admite un estado de Haar, es decir, un funcional que es positivo, fiel y  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ -invariante,

$$(1.17) \quad h : \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \longrightarrow \mathbb{C},$$

donde  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ -invariante significa

$$(1.18) \quad h(X \triangleright a) = h(a \triangleleft X) = \varepsilon(X)h(a), \quad X \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5)), \quad a \in \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)).$$

Como  $h$  es positivo y fiel, este dota a  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  con un producto interno definido y una norma por

$$(1.19) \quad \langle a, b \rangle_h := h(a^*b), \quad \|a\|_h := \sqrt{\langle a, a \rangle_h} \quad a, b \in \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)).$$

Además, puede demostrarse usando (1.18) que la representación regular izquierda  $\pi_L$  y la representación regular derecha  $\pi_R$  de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  sobre  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$ , dada por

$$(1.20) \quad \pi_L(X)(a) := X \triangleright a, \quad \pi_R(X)(a) := a \triangleleft S^{-1}(X), \quad X \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5)), \quad a \in \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)),$$

son \*-representaciones con respecto al producto interno definido en (1.19). Sólo demostraremos esta compatibilidad para  $\pi_R$  ya que la demostración para  $\pi_L$  es similar. Usando (1.13) y (1.18), calculamos para  $a, b \in \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  y  $X \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$

$$\begin{aligned}
(1.21) \quad & \langle \pi_R(X)(a), b \rangle_h = h((a^* \triangleleft X^*)b) \\
& = \varepsilon(S^{-1}(X_{(1)}^*)) h((a^* \triangleleft X_{(2)}^*)b) \\
& = h(((a^* \triangleleft X_{(2)}^*)b) \triangleleft S^{-1}(X_{(1)}^*)) \\
& = h((a^* \triangleleft X_{(3)}^*)S^{-1}(X_{(2)}^*)) (b \triangleleft S^{-1}(X_{(1)}^*)) \\
& = h(a^* (b \triangleleft S^{-1}(X_{(1)}^*) \varepsilon(X_{(2)}^*))) \\
& = h(a^* (b \triangleleft S^{-1}(X^*))) \\
& = \langle a, \pi_R(X^*)(b) \rangle_h.
\end{aligned}$$

En general, escribiremos  $X \triangleright a$  para la representación regular izquierda.

Con el fin de hacer este texto más accesible al lector, finalizamos esta sección con un lema que reúne aquellas relaciones de los generadores de  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  que son más frecuentemente usadas en esta tesis.

LEMA 1.1. *Los generadores  $u^i$ ,  $i, j = 1, \dots, 5$  de  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  satisfacen las siguientes relaciones:*

$$(1.22) \quad u^i_1 u^i_5 = q^2 u^i_5 u^i_1, \quad i \neq 3, \quad u^i_l u^i_k = q u^i_k u^i_l, \quad l < k, \quad l \neq k', \quad i \neq 3,$$

$$(1.23) \quad u^j_l u^i_k = u^i_k u^j_l, \quad i < j, \quad l < k, \quad i \neq j', \quad k \neq l',$$

$$(1.24) \quad u^i_5 u^j_1 = q^{-1} u^j_1 u^i_5, \quad u^i_1 u^j_5 = q u^j_5 u^i_1 + (q^2 - 1) u^i_5 u^j_1 \quad i < j, \quad i \neq j',$$

$$(1.25) \quad u^i_k u^j_l = u^j_l u^i_k - (q^{-1} - q) u^j_k u^i_l, \quad i < j, \quad k < l, \quad i \neq j', \quad k \neq l',$$

$$(1.26) \quad u^i_4 u^i_2 = q^{-2} u^i_2 u^i_4 + (q^{-3} - q^{-1}) u^i_1 u^i_5, \quad i \neq 3,$$

$$(1.27) \quad u^i_3 u^i_3 = -[2]_2 q^{-1} u^i_2 u^i_4 - [2]_2 q^{-2} u^i_1 u^i_5, \quad i \neq 3,$$

$$(1.28) \quad u^1_3 u^2_3 = u^2_3 u^1_3 + (q^{-1} - q) q^{-1/2} u^2_2 u^1_4 + (q^{-1} - q) q^{-3/2} u^2_1 u^1_5,$$

$$(1.29) \quad u^2_3 u^1_3 + (q - q^{-1}) u^3_3 u^3_3 = u^3_3 u^3_3 + (q^{-1} - q) q^{-1/2} u^2_2 u^1_4 + (q^{-1} - q) q^{-3/2} u^1_1 u^2_5,$$

$$(1.30) \quad u^1_3 u^2_3 - q u^2_3 u^1_3 = (q^{1/2} - q^{-1/2})(u^1_2 u^2_4 - q u^2_2 u^1_4) + (q^{-1/2} - q^{-3/2})(u^1_1 u^2_5 - q u^2_1 u^1_5),$$

$$(1.31) \quad u^i_k u^j_k = q u^j_k u^i_k \quad k \neq 3, \quad i < j, \quad i \neq j',$$

$$(1.32) \quad u^1_1 (u^1_1 u^2_5 - q u^2_1 u^1_5) = q (u^1_1 u^2_5 - q u^2_1 u^1_5) u^1_1,$$

$$(1.33) \quad u^1_5 (u^1_1 u^2_5 - q u^2_1 u^1_5) = q^{-1} (u^1_1 u^2_5 - q u^2_1 u^1_5) u^1_5,$$

$$(1.34) \quad u^1_1 (u^1_1 u^j_2 - q u^2_1 u^j_1) = (u^1_1 u^j_2 - q u^2_1 u^j_1) u^1_1, \quad j = 2, 3, 4,$$

$$(1.35) \quad u^1_5 (u^j_1 u^2_5 - q u^2_j u^1_5) = (u^j_1 u^2_5 - q u^2_j u^1_5) u^1_5, \quad j = 2, 3, 4,$$

$$(1.36) \quad u^1_1 (u^j_1 u^2_5 - q u^2_j u^1_5) = q^2 (u^j_1 u^2_5 - q u^2_j u^1_5) u^1_1, \quad j = 2, 3, 4,$$

$$(1.37) \quad u^1_5 (u^1_1 u^j_2 - q u^2_1 u^j_1) = q^{-2} (u^1_1 u^j_2 - q u^2_1 u^j_1) u^1_5, \quad j = 2, 3, 4,$$

$$(1.38) \quad u^2_5 (u^1_1 u^j_2 - q u^2_1 u^j_1) = q^{-2} (u^1_1 u^j_2 - q u^2_1 u^j_1) u^2_5, \quad j = 2, 3, 4,$$

$$(1.39) \quad u^2_5 (u^j_1 u^2_5 - q u^2_j u^1_5) = (u^j_1 u^2_5 - q u^2_j u^1_5) u^2_5, \quad j = 2, 3, 4,$$

$$(1.40) \quad (u^1_1 u^2_4 - q u^2_1 u^1_4) u^1_5 = q (u^1_1 u^2_5 - q u^2_1 u^1_5) u^1_4 - q^3 (u^1_4 u^2_5 - q u^2_4 u^1_5) u^1_1,$$

$$(1.41) \quad (u^1_1 u^1_4)(u^1_1 u^1_5) = q^2 (u^1_1 u^1_5)(u^1_1 u^1_4),$$

$$(1.42) \quad (u^1_1 u^1_5)(u^1_2 u^1_5) = q^2 (u^1_2 u^1_5)(u^1_1 u^1_5),$$



$$(1.43) \quad u_1^1 u_5^1 (u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) = (u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) u_1^1 u_5^1,$$

$$(1.44) \quad u_1^1 u_5^1 (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) = q^{-2} (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_1^1 u_5^1,$$

$$(1.45) \quad u_1^1 u_5^1 (u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) = q^2 (u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_1^1 u_5^1,$$

$$(1.46) \quad (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) (u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) = q^2 (u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1),$$

$$(1.47) \quad (u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) (u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) = q^2 (u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) (u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1),$$

$$(1.48) \quad u_1^1 u_4^1 (u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) = (u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) u_1^1 u_4^1 - (1 - q^2) u_1^1 u_5^1 (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1),$$

$$(1.49) \quad u_2^1 u_5^1 (u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) = (u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) u_2^1 u_5^1 + (1 - q^2) (u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_1^1 u_5^1.$$

DEMOSTRACIÓN. Las ecuaciones (1.22)–(1.29) se siguen directamente de las relaciones (1.10). Ecuación (1.30) es obtenida por restar  $q$  veces (1.28) de (1.29) y entonces dividiendo ambos lados por  $-(q^{-1} + 1)$ . Eligiendo  $k = l + 1 \in \{2, 5\}$  en (1.23) y actuando sobre ambos lados por  $E_1$  o  $F_1$  por la izquierda muestra (1.31). Las relaciones ya demostradas implican (1.32), (1.33), (1.41) y (1.42) por cálculos elementales. Por ejemplo, (1.22), (1.24) y (1.31) dan

$$u_1^1 (u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) = u_1^1 (q u_5^2 u_1^1 - q^{-1} u_1^2 u_5^1) = q (u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) u_1^1,$$

lo cual demuestra (1.32). De (1.32), obtenemos (1.34) por actuando primero sobre ambos lados por la izquierda con  $F_1$ , y entonces por  $F_2$ . De la misma manera, obtenemos (1.35) de (1.33) por actuar con  $E_1$  y  $E_2$ . Ahora, usando (1.22)–(1.25), calculamos

$$\begin{aligned} u_5^2 (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) &= q^{-1} (u_1^1 u_5^2 + (q - q^{-1}) u_1^2 u_5^1) u_4^2 - q^{-1} u_1^2 u_5^2 u_4^1 \\ &= q^{-1} (u_1^1 u_5^2 + (q - q^{-1}) u_1^2 u_5^1) u_4^2 - q^{-1} u_1^2 (u_4^1 u_5^2 + (q - q^{-1}) u_4^2 u_5^1) = q^{-2} (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_5^2. \end{aligned}$$

Esto prueba (1.38) para  $j = 4$ , y actuando sobre ambos lados por la izquierda con  $F_2$  nos da (1.38) para  $j = 2, 3$ . Las demostraciones de (1.36), (1.37) y (1.39) son similares. Análogamente, (1.40) se sigue de

$$\begin{aligned} (u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) u_4^1 &= u_1^1 u_4^1 u_5^2 + (q^{-1} - q) u_1^1 u_4^2 u_5^1 - u_1^2 u_4^1 u_5^1 \\ &= u_1^1 (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) + q^{-1} (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_5^1 = q^2 (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_1^1 + q^{-1} (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_5^1, \end{aligned}$$

donde hemos aplicado (1.22) y (1.25) en la primera igualdad, y (1.36) en la tercera.

Las ecuaciones (1.32)–(1.37) implican inmediatamente las relaciones en (1.43)–(1.45). Las relaciones de conmutación de  $u_1^2$  con  $u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1$  y  $u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1$  pueden ser fácilmente deducidas de (1.22)–(1.24) y (1.31), y las relaciones de conmutación de  $u_1^1$ ,  $u_5^1$  y  $u_5^2$  con  $u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1$  y  $u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1$  son usadas en (1.43)–(1.39). Combinando estos resultados obtenemos (1.46) y (1.47).

Actuando sobre ambos lados de (1.33) por la izquierda con  $F_1$  nos da

$$u_4^1(u_1^1u_5^2 - qu_1^2u_5^1) + u_5^1(u_1^1u_4^2 - qu_1^2u_4^1) = (u_1^1u_4^2 - qu_1^2u_4^1)u_5^1 + q^{-1}(u_1^1u_5^2 - qu_1^2u_5^1)u_4^1.$$

Por lo tanto, por (1.37),

$$u_4^1(u_1^1u_5^2 - qu_1^2u_5^1) = q^{-1}(u_1^1u_5^2 - qu_1^2u_5^1)u_4^1 - (1 - q^2)u_5^1(u_1^1u_4^2 - qu_1^2u_4^1).$$

Multiplicando esta relación por  $u_1^1$  por la izquierda y aplicando (1.32) obtenemos (1.48). Ecuación (1.49) es demostrada en la misma manera por actuar con  $E_1$  sobre (1.32).  $\square$

### 3. La variedad bandera cuántica irreducible de tipo $B_2$

Ahora procedemos a dar una breve motivación clásica para definir las variedades bandera cuánticas en un contexto general. Para esto empezaremos introduciendo un poco de notación de la teoría de álgebras de Lie [23], [29].

Supongamos que  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie compleja simple de rango  $r$  y sea  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  una subálgebra de Cartan fija. Ya que  $\mathfrak{g}$  es un  $\mathfrak{g}$ -módulo con respecto a la representación adjunta, entonces esto nos da la conocida descomposición de Cartan

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$$

donde  $R$  es el conjunto de raíces asociado a  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ . Sea  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$  una base de raíces simples para  $R$  y sea  $R^+$  (resp.  $R^-$ ) el conjunto de raíces positivas (resp. negativas) con respecto a  $\Pi$ . Además a estos conjuntos asociamos los subespacios  $\mathfrak{n}_\pm = \bigoplus_{\beta \in R^\pm} \mathfrak{g}_\beta$ . Ahora supongamos que  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$  es una subálgebra de Lie parabólica estándar, es decir,  $\mathfrak{p}$  contiene a la subálgebra de Borel  $\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ . Entonces la forma de  $\mathfrak{p}$  y de su factor de Levi  $\mathfrak{l}_S$  son

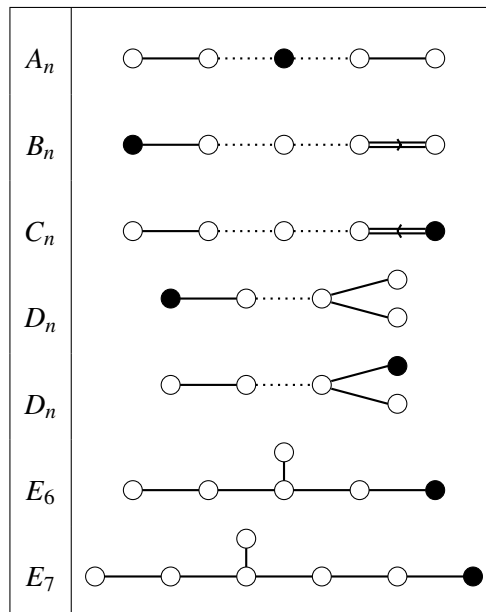
$$\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Gamma_S} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{l}_S = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Gamma_S \cap (-\Gamma_S)} \mathfrak{g}_\alpha,$$

respectivamente, donde  $S \subset \Pi$  es un conjunto de raíces simples,  $\Gamma_S = R^+ \cup \{\alpha \in R \mid \alpha \in \text{Lin}(S)\}$ . Para las propiedades de las subálgebras parabólicas y de su factor de Levi, ver [29], [22].

En geometría clásica una variedad bandera compleja generalizada es un espacio homogéneo de la forma  $G/P$  donde  $G$  es un grupo de Lie complejo conexo con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  (de acuerdo a [21, Sección X.6]) y  $P$  es un subgrupo parabólico de  $G$ , es decir,  $P$  es un subgrupo de  $G$  cuya álgebra de Lie  $\mathfrak{p}$  es parabólica respecto a definición de párrafo anterior. Es conocido que  $G/P \cong G_0/L$  como variedades reales, donde  $G_0$  es la forma real compacta de  $G$  y  $L := G_0 \cap L_S$ , aquí  $L_S$  es el subgrupo de Lie de  $G$  correspondiente al factor de Levi  $\mathfrak{l}_S$ , ver [2]. En ese caso se tiene que  $G/P$  es una variedad Hermitiana compacta [21].

Ya que estamos asumiendo que  $\mathfrak{g}$  es simple, entonces la representación adjunta de  $\mathfrak{g}$  es irreducible. En tal caso por descomposición de Cartan esta tiene un peso más alto  $\theta$  que viene siendo una raíz de  $\mathfrak{g}$ , y es llamada la raíz más alta de  $\mathfrak{g}$ . Decimos que  $\mathfrak{p}$  es de tipo irreducible si  $S = \Pi \setminus \{\alpha_s\}$  donde  $\alpha_s$  tiene coeficiente 1 en la raíz más alta de  $\mathfrak{g}$ . Esta condición permite clasificar las subálgebras parabólicas de tipo irreducible de álgebras de Lie simples en términos de diagramas de Dynkin. En tabla 1.1 damos la lista completa de los casos de tipo irreducible, donde la raíz simple  $\alpha_s$  es indicada por el nodo relleno. Para las caracterizaciones de subálgebras parabólicas de tipo irreducible ver [27]. Cuando  $P$  es de tipo irreducible,  $G/P$  viene siendo un espacio simétrico Hermitiano compacto [21]. En este caso  $G/P$  es también llamada una variedad bandera irreducible, ver [2] para una discusión más detallada.

TABLA 1.1. Diagramas de Dynkin para caso irreducible, nodos enumerados de acuerdo a [22, §11.4].



Ahora pasemos a definir el análogo cuántico de  $G/P$ . Para esto consideremos  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie simple compleja finito dimensional de rango  $r$  y  $S$  un subconjunto de raíces simples. Sea  $G$  un grupo Lie conexo cuya álgebra de Lie real es  $\mathfrak{g}$  de acuerdo a tabla IV. Sección X.6 de [21]. Sea  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  la correspondiente álgebra envolvente  $q$ -deformada. En [17] los autores definen  $\mathcal{O}_q(G)$  como la subálgebra de Hopf de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})^\circ$  generada por coeficientes matriciales de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ -representaciones irreducibles finito dimensionales  $V(\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathcal{P}^+$  el conjunto de pesos entero dominantes asociado a  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ . La forma real compacta del álgebra de Hopf  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  induce una  $*$ -estructura de álgebra

de Hopf sobre  $O_q(G)$ . El álgebra  $O_q(G)$  es llamada el álgebra coordenada  $q$ -deformada de  $G$  y  $O_q(G)$  junto con  $*$  es considerada como la  $q$ -deformación del algebra coordenada de la forma real compacta  $G_0$  de  $G$ .

Como se menciono antes  $G/P \cong G_0/L$ . Entonces podemos considerar la  $q$ -deformación  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l}_S)$  del factor de Levi. Este es definido como la  $*$ -subálgebra de Hopf

$$\mathcal{U}_q(\mathfrak{l}_S) := \langle K_i, E_j, F_j \mid i = 1, \dots, r; j \in S \rangle \subset \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}).$$

El embebimiento  $\iota : \mathcal{U}_q(\mathfrak{l}_S) \rightarrow \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  induce un mapeo de  $*$ -álgebras de Hopf

$$\iota^\circ : \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})^\circ \rightarrow \mathcal{U}_q(\mathfrak{l}_S)^\circ.$$

Ya que  $O_q(G) \subset \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})^\circ$  podemos considerar la restricción

$$\pi_S : \iota^\circ|_{O_q(G)} : O_q(G) \rightarrow \mathcal{U}_q(\mathfrak{l}_S)^\circ$$

y la  $*$ -subálgebra de Hopf  $O_q(L_S) := \pi_S(O_q(G))$  (la cual consideramos como la  $q$ -deformación de  $L$ ). Entonces la variedad bandera cuántica asociada a  $S$  es definida como el espacio homogéneo cuántico

$$(1.50) \quad \begin{aligned} O_q(G/L_S) = O_q(G)^{co(O_q(L_S))} &:= \{a \in O_q(G) \mid (\text{id} \otimes \pi_S)\Delta(a) = a \otimes 1\} \\ &= \{a \in O_q(G) \mid X \triangleright a = \varepsilon(X)a \quad \forall X \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{l}_S)\}. \end{aligned}$$

Esto definición nos lleva a considerar a  $O(G/L_S)$  como el álgebra de funciones  $q$ -deformada de  $G/L_S$ , es decir, como el análogo cuántico de funciones sobre  $G$  que son invariantes bajo la traslación derecha por elementos de  $L_S$ . Los artículos seminales [17], [18] y [20] de I. Heckenberger y S. Kolb tratan con la  $q$ -deformación  $O_q(G/L_S)$  de  $G_0/L$ .

Si  $S = \Pi \setminus \{\alpha_i\}$  donde  $\alpha_i$  tiene coeficiente 1 en la raíz más alta de  $\mathfrak{g}$ , entonces decimos que la variedad bandera cuántica asociada es de tipo simétrico Hermitiano. De nuestra discusión anterior del caso clásico nos motiva a considerarlos como *espacios simétricos Hermitianos compactos cuánticos* o *variedades bandera irreducibles cuánticas*.

Regresando a nuestro caso particular, estamos interesados en la variedad bandera irreducible cuántica de tipo  $B_2$ , es decir, la variedad bandera cuántica asociada a  $S = \{\alpha_2\}$  de acuerdo a la tabla 1.1. En este caso  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l}_S)$  es la  $*$ -subálgebra generada por  $K_1^{\pm 1}, K_2^{\pm 1}, E_2, F_2$ , la cual denotaremos sólo por  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$ . Esto motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.2. Con  $O(\text{SO}_q(5))$  y  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$  definidos como antes, la variedad bandera irreducible cuántica de tipo  $B_2$  es dada por

$$(1.51) \quad O(\text{SO}_q(5))^{\text{inv}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{l}))} = \{a \in O(\text{SO}_q(5)) : X \triangleright a = \varepsilon(X)a \text{ para todo } X \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{l})\}.$$

y la denotaremos simplemente por  $\mathcal{B}$ .

Siguiendo las convenciones de [17] y [18] esta definición viene siendo un análogo cuántico del anillo coordenado de la variedad bandera generalizada  $SO(5)/(SO(2) \times SO(3))$ . Por último notemos que  $\mathcal{B}$  es una \*-subálgebra unital de  $O(SO_q(5))$  y que

$$(1.52) \quad X \triangleright (ab) = (X \triangleright a)b + a(X \triangleright b), \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{n}^+ \cup \mathfrak{n}^-, \quad a, b \in \mathcal{B},$$

donde  $\mathfrak{n}^+ := \text{Lin}\{E_1, E_2E_1, E_2^2E_1\}$  y  $\mathfrak{n}^- := \text{Lin}\{F_1, F_2F_1, F_2^2F_1\}$ .

#### 4. Representaciones irreducibles del factor Levi $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$

Recalquemos que el factor de Levi  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l}) \subset \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  es la \*-subálgebra de Hopf generada por los elementos  $K_1^{\pm 1}, K_2^{\pm 1}, E_2, F_2$ . De la clasificación de representaciones, ver por ejemplo [28], las representaciones irreducibles finito dimensionales de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$  son parametrizadas por pesos  $(n, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$ , más precisamente, un peso  $(n, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$  define una  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$ -representación irreducible sobre el espacio  $(l+1)$ -dimensional  $V^{(n,l)} := \text{Lin}\{v_{(n,l)-j(-1,2)} : j = 0, 1, \dots, l\}$  dada por

$$(1.53) \quad \begin{aligned} K_1 v_{(\mu_1, \mu_2)} &= q_1^\mu v_{(\mu_1, \mu_2)}, & K_2 v_{(\mu_1, \mu_2)} &= q_2^\mu v_{(\mu_1, \mu_2)}, & E_2(v_{(\mu_1, \mu_2)}) &= v_{(\mu_1-1, \mu_2+2)}, \\ F_2(v_{(\mu_1, \mu_2)}) &= \left[\frac{1}{2}(l + \mu_2)\right]_2 \left[\frac{1}{2}(l - \mu_2) + 1\right]_2 v_{(\mu_1+1, \mu_2-2)}. \end{aligned}$$

Por ejemplo, sobre  $V^{(n,2)} = \text{Lin}\{v^{-1} := v_{(n+2,-2)}, v^0 := v_{(n+1,0)}, v^1 := v_{(n,2)}\}$ , tenemos

$$(1.54) \quad K_1 v^j = q^{n-j+1} v^j, \quad K_2 v^j = q^j v^j, \quad E_2 v^j = v^{j+1}, \quad F_2 v^j = [2]_2 v^{j-1},$$

y sobre  $V^{(n,0)} = \text{Lin}\{u^0 := v_{(n,0)}\}$ , tenemos

$$(1.55) \quad K_1 u^0 = q^n u^0, \quad K_2 u^0 = u^0, \quad E_2 u^0 = 0, \quad F_2 u^0 = 0.$$

Para  $(n, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$  y  $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,  $V_{(\mu_1, \mu_2)}^{(n,l)}$  denota el subespacio de vectores de peso  $\mu$  en  $V^{(n,l)}$ , es decir,

$$V_{(\mu_1, \mu_2)}^{(n,l)} := \{v \in V^{(n,l)} : K_i(v) = q_i^{\mu_i} v, \quad i = 1, 2\}.$$

Supongamos que  $v_{(n,2)}^{(n,2)} \oplus v_{(n,2)}^{(n-1,4)} \in V_{(n,2)}^{(n,2)} \oplus V_{(n,2)}^{(n-1,4)}$ . Entonces, por (1.53), tenemos  $F_2 E_2(v_{(n,2)}^{(n,2)}) = 0$  y  $F_2 E_2(v_{(n,2)}^{(n-1,4)}) = [4]_2 v_{(n,2)}^{(n-1,4)}$ , entonces

$$(1.56) \quad \text{pr}_{(n,2)} := \left(1 - \frac{1}{[4]_2} F_2 E_2\right) : V_{(n,2)}^{(n,2)} \oplus V_{(n,2)}^{(n-1,4)} \longrightarrow V_{(n,2)}^{(n,2)},$$

es decir,  $\text{pr}_{(n,2)}(v_{(n,2)}^{(n,2)} \oplus v_{(n,2)}^{(n-1,4)}) = v_{(n,2)}^{(n,2)}$ , coincide con la proyección (orthogonal) sobre la primera componente.

Similarmente, se sigue de calculaciones elementales usando (1.53) que la proyección (ortogonal)  $\text{pr}_{(n,0)} : V_{(n,0)}^{(n,0)} \oplus V_{(n,0)}^{(n-1,2)} \oplus V_{(n,0)}^{(n-2,4)} \longrightarrow V_{(n,0)}^{(n,0)}$ ,

$$(1.57) \quad \text{pr}_{(n,0)}(v_{(n,0)}^{(n,0)} \oplus v_{(n,0)}^{(n-1,2)} \oplus v_{(n,0)}^{(n-2,4)}) = v_{(n,0)}^{(n,0)},$$

es dado por

$$(1.58) \quad \text{pr}_{(n,0)} = (1 - \frac{1}{[2]_2} F_2 E_2 + \frac{1}{[2]_2^2 [3]_2} F_2^2 E_2^2) = (1 - \frac{1}{[2]_2} E_2 F_2 + \frac{1}{[2]_2^2 [3]_2} E_2^2 F_2^2).$$

Finalizamos esta sección con un lema básico que será de gran importancia en cálculos subsecuentes.

**LEMA 1.3.** Sean  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\text{pr}_{(n,2)}$  y  $\text{pr}_{(n,0)}$  las proyecciones definidas en (1.56) y (1.60). Entonces para todo  $a, b \in \mathcal{B}$ ,

$$(1.59) \quad \text{pr}_{(n,2)}(avb) = a \text{pr}_{(0,2)}(v)b, \quad v \in V_{(n,2)}^{(n,2)} \oplus V_{(n,2)}^{(n-1,4)} \subset \mathcal{O}(\text{SO}_q(5)),$$

$$(1.60) \quad \text{pr}_{(n,0)}(avb) = a \text{pr}_{(n,0)}(v)b, \quad v \in V_{(n,0)}^{(n,0)} \oplus V_{(n,0)}^{(n-1,2)} \oplus V_{(n,0)}^{(n-2,4)} \subset \mathcal{O}(\text{SO}_q(5)).$$

**DEMOSTRACIÓN.** Se sigue de (1.56), (1.13) y definición de  $\mathcal{B}$

$$\text{pr}_{(n,2)}(avb) = (1 - \frac{1}{[4]_2} F_2 E_2) \triangleright avb = a((1 - \frac{1}{[4]_2} F_2 E_2) \triangleright v)b = a \text{pr}_{(n,2)}(v)b.$$

La demostración de (1.60) es análoga.  $\square$

## 5. Cálculo diferencial equivariante

La noción de cálculo diferencial covariante será de gran importancia en capítulos subsecuentes, principalmente para la construcción del operador de Dirac. Como en geometría clásica se tiene el complejo de De Rham  $(\Omega^\bullet(M), d)$  para una variedad suave compacta finito dimensional  $M$ , donde  $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$  y  $d$  es la diferencial exterior. Esta noción se traslada al contexto de espacios cuánticos. Daremos una breve definición aquí, para una explicación y construcciones más detalladas ver por ejemplo [37].

**DEFINICIÓN 1.4.** Un cálculo diferencial sobre un álgebra  $\mathcal{A}$  es un par  $(\Omega^\bullet, d)$  que consiste de un álgebra graduada  $\Omega^\bullet = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \Omega^n$  con producto  $\wedge$  y un mapeo lineal  $d : \Omega^\bullet \longrightarrow \Omega^\bullet$  de grado uno (es decir,  $d : \Omega^n \longrightarrow \Omega^{n+1}$ ) tal que

1.  $d^2 = 0$ ,
2.  $d$  satisface la regla de Leibniz

$$d(\omega v) = d(\omega)v + (-1)^n \omega d(v) \quad \text{para } \omega \in \Omega^n \text{ y } v \in \Omega^\bullet,$$

3.  $\Omega^0 = \mathcal{A}$  y  $\Omega^n = \text{Lin}\{\omega_0 d\omega_1 \wedge \cdots \wedge d\omega_n : \omega_0, \dots, \omega_n \in \mathcal{A}\}$  para  $n \in \mathbb{N}$ .

La construcción de un cálculo diferencial sobre  $\mathcal{B}$  será dado en el siguiente capítulo. De hecho se hará la construcción de un cálculo diferencial equivariante. Para definir lo que es equivariante supongamos que  $\mathcal{U}$  es una álgebra de Hopf y  $\mathcal{A}$  es un álgebra  $\mathcal{U}$ -módulo izquierdo, entonces decimos que el cálculo diferencial  $(\Omega^\bullet, d)$  es equivariante si la  $\mathcal{U}$ -acción sobre  $\mathcal{A}$  extiende a una acción sobre cada  $\Omega^n$  que es compatible con la diferencial, es decir,  $u \triangleright d(\omega) = d(u \triangleright \omega)$  para todo  $u \in \mathcal{U}$ ,  $\omega \in \Omega^n$ . Por último decimos que un cálculo diferencial  $(\Omega^\bullet, d)$  es de grado  $n$  si  $\Omega^n \neq 0$  y  $\Omega^m = 0$  para todo  $m > n$ .

COMENTARIO 1.5. Notemos que la noción de equivariante aquí es equivalente a lo que covariante significa en [18] y [20], la demostración de este hecho puede ser encontrada en [20].





donde hemos usado la relación de Serre (1.6), la tercera ecuación en (1.54) y  $E_2^3\omega^{-1} = 0$ . Con  $\alpha_1 := 1$ , obtenemos  $\alpha_0 = -1$  y  $\alpha_{-1} = [3]_2^{-1}$ , entonces

$$(2.3) \quad \varphi_2(Z \underline{\otimes} v^0) = \frac{1}{[3]_2} ZX_1 \underline{\otimes} \omega^{-1} - ZX_0 \underline{\otimes} \omega^0 + ZX_{-1} \underline{\otimes} \omega^1, \quad Z \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5)).$$

Análogamente, para encontrar una expresión para  $\varphi_1$ , tenemos por equivarianza y preservación de pesos que

$$\varphi_1(1 \underline{\otimes} \omega^1) = \beta_0 X_1 \underline{\otimes} v^0 + \beta_1 X_0 \underline{\otimes} v^1,$$

y aplicando  $E_2$  al vector de peso más alto  $\omega^1$  obtenemos

$$0 = \varphi_1(1 \underline{\otimes} E_2 \omega^1) = \beta_0 E_2^3 E_1 \underline{\otimes} v^0 + \beta_1 E_2^2 E_1 \underline{\otimes} v^1 = (\beta_1 + [3]_2 \beta_0) E_2^2 E_1 \underline{\otimes} v^1.$$

Eligiendo  $\beta_1 := [3]_2$  y  $\beta_0 := -1$  nos da

$$(2.4) \quad \varphi_1(Z \underline{\otimes} \omega^1) = -ZX_1 \underline{\otimes} v^0 + [3]_2 ZX_0 \underline{\otimes} v^1, \quad Z \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5)).$$

Usando la equivarianza de  $\varphi_1$  y las relaciones de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ , calculamos

$$\begin{aligned} \varphi_1(1 \underline{\otimes} \omega^0) &= \frac{1}{[2]_2} \varphi_1(1 \underline{\otimes} F_2 \omega^1) = \frac{-1}{[2]_2} F_2 E_2^2 E_1 \underline{\otimes} v^0 + \frac{[3]_2}{[2]_2} F_2 E_2 E_1 \underline{\otimes} v^1 \\ &= \frac{-1}{[2]_2} \left( E_2^2 E_1 \underline{\otimes} F_2 v^0 - E_2 E_1 \underline{\otimes} \frac{K_2 - K_2^{-1}}{q_2 - q_2^{-1}} v^0 - E_2 E_1 \underline{\otimes} \frac{q^{-1} K_2 - q K_2^{-1}}{q_2 - q_2^{-1}} v^0 \right) \\ &\quad + \frac{[3]_2}{[2]_2} \left( E_2 E_1 \underline{\otimes} F_2 v^1 - E_1 \underline{\otimes} \frac{q^{-1} K_2 - q K_2^{-1}}{q_2 - q_2^{-1}} v^1 \right) \\ &= -E_2^2 E_1 \underline{\otimes} v^{-1} + [2]_1 E_2 E_1 \underline{\otimes} v^0, \end{aligned}$$

donde hemos usado (1.54) y  $[3]_2 - 1 = q + q^{-1} = [2]_1$ . Entonces

$$(2.5) \quad \varphi_1(Z \underline{\otimes} \omega^0) = -ZX_1 \underline{\otimes} v^{-1} + [2]_1 ZX_0 \underline{\otimes} v^0, \quad Z \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5)).$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \varphi_1(1 \underline{\otimes} \omega^{-1}) &= \frac{1}{[2]_2} \varphi_1(1 \underline{\otimes} F_2 \omega^0) = -\frac{1}{[2]_2} F_2 E_2^2 E_1 \underline{\otimes} v^{-1} + \frac{[2]_1}{[2]_2} F_2 E_2 E_1 \underline{\otimes} v^0 \\ &= \left( -1 - \frac{[4]_2}{[2]_2} + [2]_1 \right) E_2 E_1 \underline{\otimes} v^{-1} + [2]_1 E_1 \underline{\otimes} v^0. \end{aligned}$$

Ya que  $[2]_1 - \frac{[4]_2}{[2]_2} = q + q^{-1} - \frac{q^2 - q^{-2}}{q - q^{-1}} = 0$ , obtenemos

$$(2.6) \quad \varphi_1(Z \underline{\otimes} \omega^{-1}) = -ZX_0 \underline{\otimes} v^{-1} + [2]_1 ZX_{-1} \underline{\otimes} v^0, \quad Z \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5)).$$

Finalmente, definimos

$$\varphi_0(1 \underline{\otimes} v^1) := X_1 \underline{\otimes} 1$$

ya que  $1 \otimes v^1 \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5)) \otimes_{\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})} M(0, 2)$  y  $X_1 \otimes 1 \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5)) \otimes_{\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})} M(0, 0)$  son ambos vectores de peso más alto de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$ -módulos irreducibles con los mismos pesos. En el último caso, esto se sigue de la relación de Serre (1.6). De hecho,

$$\begin{aligned} E_2(X_0 \otimes 1) &= X_1 \otimes 1 = \varphi_0(1 \otimes v^1) = \varphi_0(1 \otimes E_2 v^0) = E_2 \varphi_0(1 \otimes v^0), \\ E_2(X_{-1} \otimes 1) &= X_0 \otimes 1 = \varphi_0(1 \otimes v^0) = \varphi_0(1 \otimes E_2 v^{-1}) = E_2 \varphi_0(1 \otimes v^{-1}), \end{aligned}$$

de lo cual concluimos que para todo  $Z_{-1}, Z_0, Z_1 \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ ,

$$(2.7) \quad \varphi_0(Z_{-1} \otimes v^{-1} + Z_0 \otimes v^0 + Z_1 \otimes v^1) = (Z_{-1} X_{-1} + Z_0 X_0 + Z_1 X_1) \otimes 1.$$

Podemos verificar ahora directamente que  $\varphi_{j-1} \circ \varphi_j = 0$ . Además,  $(\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \varphi_0 = 0$  lo cual prueba que (2.1) es un complejo. De hecho, por [19, section 3.4], este es exacto.

Para obtener un cálculo diferencial sobre  $\mathcal{B} = \mathcal{O}(\text{SO}_q(5))^{\text{inv}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{l}))}$ , consideraremos los duales localmente finitos del complejo (2.1). Primero recalquemos que el dual  $M'$  de un  $\mathcal{U}$ -módulo  $M$  izquierdo viene siendo un  $\mathcal{U}$ -módulo derecho y el dual  $N'$  de un  $\mathcal{U}$ -módulo derecho  $N$  viene siendo un  $\mathcal{U}$ -módulo izquierdo con acciones dadas por

$$(2.8) \quad (f \triangleleft X)(m) := f(Xm) \quad \text{y} \quad (X \triangleright g)(n) := g(nX)$$

respectivamente, donde  $m \in M$ ,  $f \in M'$ ,  $n \in N$ ,  $g \in N'$  y  $X \in \mathcal{U}$ . Para  $k = 0, \dots, 3$ , definimos

$$(2.9) \quad \Omega^{(0,k)} := \{f \in (\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5)) \otimes_{\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})} M(\lambda_k))' : \dim(f \triangleleft \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))) < \infty\},$$

donde

$$(2.10) \quad \lambda_0 := (0, 0), \quad \lambda_1 := (0, 2), \quad \lambda_2 := (1, 2), \quad \lambda_3 := (3, 0).$$

La condición de finitud en (2.9) es lo que se conoce como la parte localmente finita, ver [17], [20].

De [20, Lemma 6.4], se sigue que

$$\Omega^{(0,k)} \subset \mathcal{O}(\text{SO}_q(5)) \otimes M(\lambda_k)', \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

y

$$(2.11) \quad \Omega^{(0,0)} \cong \{b \in \mathcal{O}(\text{SO}_q(5)) : X \triangleright b = \varepsilon(X)b \text{ para todo } X \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{l})\} = \mathcal{B}.$$

Sean  $\{\nu_0\}$ ,  $\{\omega_{-1}, \omega_0, \omega_1\}$  y  $\{\nu_{-1}, \nu_0, \nu_1\}$  las bases duales de  $\{\nu^0\}$ ,  $\{\omega^{-1}, \omega^0, \omega^1\}$  y  $\{\nu^{-1}, \nu^0, \nu^1\}$ , respectivamente. Entonces, por (2.8) y (2.9), un elemento  $\sum_{j=-1,0,1} a_j \otimes v_j \in \mathcal{O}(\text{SO}_q(5)) \otimes M(\lambda_k)'$  pertenece a  $\Omega^{(0,k)}$  si y sólo si  $\sum_{j=-1,0,1} (X \triangleright a_j) \otimes v_j = \sum_{j=-1,0,1} a_j \otimes (v_j \triangleleft X)$ . De (1.54) y (2.8), obtenemos

$v_j \triangleleft K_1 = q^{1-j}v^j$ ,  $v_j \triangleleft K_2 = q^jv^j$ ,  $v_j \triangleleft E_2 = v_{j-1}$  y  $v_j \triangleleft F_2 = [2]_2v_{j+1}$ , por lo tanto

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \Omega^{(0,1)} &= \left\{ \sum_{j=-1}^1 a_j \otimes v_j \in \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \otimes M(0, 2)' : \right. \\ &\quad \left. K_1 \triangleright a_j = q^{1-j}a_j, K_2 \triangleright a_j = q^j a_j, E_2 \triangleright a_j = a_{j+1}, F_2 \triangleright a_j = [2]_2 a_{j-1} \right\} \end{aligned}$$

Análogamente,

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \Omega^{(0,2)} &= \left\{ \sum_{j=-1}^1 b_j \otimes \omega_j \in \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \otimes M(1, 2)' : \right. \\ &\quad \left. K_1 \triangleright b_j = q^{2-j}b_j, K_2 \triangleright b_j = q^j b_j, E_2 \triangleright b_j = b_{j+1}, F_2 \triangleright b_j = [2]_2 b_{j-1} \right\} \end{aligned}$$

y bajo el isomorfismo  $a \otimes v_0 \mapsto a$ , análogamente tenemos

$$(2.14) \quad \Omega^{(0,3)} \cong \{a \in \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) : K_1 \triangleright a = q^3 a, K_2 \triangleright a = a, E_2 \triangleright a = F_2 \triangleright a = 0\}.$$

Note que  $\Omega^{(0,k)}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , son  $\mathcal{B}$ -bimódulos con la estructura de  $\mathcal{B}$ -módulo izquierdo y derecho dado por la multiplicación por la izquierda y derecha sobre el factor tensor izquierdo, respectivamente. Ya que  $K_i \triangleright (b_1 a b_2) = b_1 (K_i \triangleright a) b_2$ ,  $E_2 \triangleright (b_1 a b_2) = b_1 (E_2 \triangleright a) b_2$ ,  $F_2 \triangleright (b_1 a b_2) = b_1 (F_2 \triangleright a) b_2$  para todo  $a \in \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$ ,  $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$  y  $i = 1, 2$ , se sigue de (1.13) y  $K_i \triangleright b = b$ ,  $E_2 \triangleright b = 0 = F_2 \triangleright b$  para todo  $b \in \mathcal{B}$ , que la estructura de  $\mathcal{B}$ -módulo está bien definida.

Por supuesto, pudimos haber definido  $\Omega^{(0,k)}$  de manera mas concisa por un producto cotensor como en [20]. Sin embargo, la descripción explicita usando una base fija de  $M(\lambda_k)'$  será útil para calcular el espectro del operador de Dolbeault-Dirac.

Ahora, consideremos los llamados pull-backs

$$\bar{\partial}_k := \varphi_k^* : \Omega^{(0,k)} \longrightarrow (\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5)) \otimes_{\mathcal{U}_q(1)} M(\lambda_{k+1}))', \quad \bar{\partial}_k(f)(x) = f(\varphi_k(x)).$$

Ya que estamos interesados en fórmulas explícitas, calculamos para todo  $Z_{-1}, Z_0, Z_1 \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_0(b)(Z_{-1} \underline{\otimes} v^{-1} + Z_0 \underline{\otimes} v^0 + Z_1 \underline{\otimes} v^1) &= b(Z_{-1} X_{-1} + Z_0 X_0 + Z_1 X_1) \\ &= (X_{-1} \triangleright b \otimes v_{-1} + X_0 \triangleright b \otimes v_0 + X_1 \triangleright b \otimes v_1)(Z_{-1} \underline{\otimes} v^{-1} + Z_0 \underline{\otimes} v^0 + Z_1 \underline{\otimes} v^1), \end{aligned}$$

entonces, para todo  $b \in \mathcal{B}$ ,

$$(2.15) \quad \bar{\partial}_0(b) = X_{-1} \triangleright b \otimes v_{-1} + X_0 \triangleright b \otimes v_0 + X_1 \triangleright b \otimes v_1.$$

Un cálculo similar muestra que

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \bar{\partial}_1(a_{-1} \otimes v_{-1} + a_0 \otimes v_0 + a_1 \otimes v_1) &= \left(-\frac{1}{[3]_2} X_0 \triangleright a_{-1} + \frac{[2]_1}{[3]_2} X_{-1} \triangleright a_0\right) \otimes \omega_{-1} \\ &+ \left(-\frac{1}{[3]_2} X_1 \triangleright a_{-1} + \frac{[2]_1}{[3]_2} X_0 \triangleright a_0\right) \otimes \omega_0 + \left(-\frac{1}{[3]_2} X_1 \triangleright a_0 + X_0 \triangleright a_1\right) \otimes \omega_1, \end{aligned}$$

y

$$(2.17) \quad \bar{\partial}_2(b_{-1} \otimes v_{-1} + b_0 \otimes v_0 + b_1 \otimes v_1) = \left(\frac{1}{[3]_2} X_1 \triangleright b_{-1} - X_0 \triangleright b_0 + X_{-1} \triangleright b_1\right) \otimes v_0.$$

Haciendo la composición con el isomorfismo  $a \otimes v_0 \mapsto a$ , (2.17) se puede escribir como

$$(2.18) \quad \bar{\partial}_2(b_{-1} \otimes v_{-1} + b_0 \otimes v_0 + b_1 \otimes v_1) = \frac{1}{[3]_2} X_1 \triangleright b_{-1} - X_0 \triangleright b_0 + X_{-1} \triangleright b_1.$$

En particular, ya que las  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ -acciones izquierda y derecha sobre  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  conmutan, se sigue de (2.9) y (2.15)–(2.18) que  $\bar{\partial}_k(\Omega^{(0,k)}) \subset \Omega^{(0,k+1)}$ . Por lo tanto obtenemos un complejo

$$(2.19) \quad 0 \longrightarrow \Omega^{(0,0)} \xrightarrow{\bar{\partial}_0} \Omega^{(0,1)} \xrightarrow{\bar{\partial}_1} \Omega^{(0,2)} \xrightarrow{\bar{\partial}_2} \Omega^{(0,3)} \longrightarrow 0.$$

Además, el análogo de [20, Lemma 7.4] muestra que

$$(2.20) \quad \Omega^{(0,k)} = \mathrm{Lin}\{a_0 \bar{\partial}(a_1) \wedge \dots \wedge \bar{\partial}_k(a_k) : a_0, \dots, a_k \in \mathcal{B}\},$$

donde el producto cuña es determinado por

$$\begin{aligned} a \bar{\partial}_0(b) \wedge \omega_k &= a \bar{\partial}_k(b \omega_k) - ab \bar{\partial}_k(\omega_k), \quad \omega_k \in \Omega^{(0,k)}, \quad k = 0, 1, 2, \\ (a_0 \bar{\partial}_0(a_1) \wedge \bar{\partial}_0(a_2)) \wedge a_3 \bar{\partial}(a_4) &= a_0 \bar{\partial}_0(a_1) \wedge (\bar{\partial}_0(a_2) \wedge a_3 \bar{\partial}(a_4)), \quad a_0, \dots, a_4 \in \mathcal{B}, \end{aligned}$$

y  $\omega_k \wedge \omega_j = 0$  para  $\omega_k \in \Omega^{(0,k)}$  y  $\omega_j \in \Omega^{(0,j)}$  con  $k + j > 3$ . Entonces tenemos un cálculo diferencial sobre  $\mathcal{B}$  de grado 3 de acuerdo con la definición 1.4, [37]. Se sigue ahora de [20, Section 7.3], que este cálculo diferencial (2.19) es isomorfo al cálculo diferencial  $\Gamma_{\bar{\partial}, u}^\wedge$  de [18, Section 3.3.2].

## 2. Reglas de ramificación

Para distinguir entre representaciones irreducibles de peso más alto de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  y  $\mathcal{U}_q(1)$ , usaremos doble paréntesis para designar a una representación irreducible de peso más alto de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ . En lo subsecuente,  $\langle\langle m, j \rangle\rangle V$  denota un subespacio de  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  tal que la restricción de  $\pi_R$  a  $\langle\langle m, j \rangle\rangle V$  nos da una  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ -representación irreducible de peso  $(m, j)$  con respecto a la representación regular derecha  $\pi_R$ , análogamente por  $V^{\langle\langle m, j \rangle\rangle} \subset \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  denotamos un subespacio de  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  tal que la restricción de  $\pi_L$  a  $V^{\langle\langle m, j \rangle\rangle}$  nos da una  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ -representación irreducible de peso  $(m, j)$  con respecto a la representación regular izquierda  $\pi_L$ , ver (1.20). Del teorema de Peter-Weyl para grupos cuánticos compactos, ver por ejemplo [28], es conocido que

$$(2.21) \quad \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \cong \bigoplus_{(m,j) \in \mathbb{N}_0 \times 2\mathbb{N}_0} \langle\langle m, j \rangle\rangle V \otimes V^{\langle\langle m, j \rangle\rangle}.$$

El subespacio de  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  isomorfo a  $\langle\langle m, j \rangle\rangle V \otimes V^{\langle\langle m, j \rangle\rangle}$  es generado por los coeficientes matriciales  $t_{\lambda, \mu}^{(m, j)}$  de una  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$ -corepresentación irreducible sobre si mismo tal que el espacio vectorial generado por los coeficientes matriciales  $t_{\lambda, \mu}^{(m, j)}$  para  $\mu$  fijo es isomorfo a  $\langle\langle m, j \rangle\rangle V$  y el espacio vectorial generado por los coeficientes matriciales  $t_{\lambda, \mu}^{(m, j)}$  para  $\lambda$  fijo es isomorfo a  $V^{\langle\langle m, j \rangle\rangle}$ .

Las descripciones de  $\Omega^{(0,0)}, \dots, \Omega^{(0,3)}$  en ecuaciones (2.11)–(2.14) muestran que existe un elemento no trivial en  $\Omega^{(0,k)}$  siempre y cuando la representación de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$  sobre  $V^{(m,j)}$  contiene una subrepresentación (irreducible) determinada por el correspondiente peso más alto  $\lambda_k$  de (2.10), y que todas las  $(0, k)$ -formas son dadas por combinaciones lineales de elementos de esta forma. Esto nos lleva a las llamadas reglas de ramificación, es decir, el problema de determinar si una cierta representación irreducible de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$  ocurre como una subrepresentación de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  sobre  $V^{(m,j)}$  y con que multiplicidad.

Por  $V_\mu^{(m,j)} \subset V^{(m,j)}$  denotamos el subespacio de vectores de peso  $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ , es decir,  $v_\mu \in V_\mu^{(m,j)}$  si y sólo si  $v_\mu \in V^{(m,j)}$  y  $K_i \triangleright v_\mu = q^{\mu_i} v_\mu$ ,  $i = 1, 2$ . Entonces la regla de ramificación para  $\lambda \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$  puede ser resuelto por determinar el espacio de vectores de peso más alto en  $V_\lambda^{(m,j)}$  para la  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$ -representación, esto es, los vectores  $v_\lambda \in V_\lambda^{(m,j)}$  tal que  $E_2 \triangleright v_\lambda = 0$ . En particular, las multiplicidades son dadas por  $\dim(\ker(E_2 \upharpoonright_{V_\lambda^{(m,j)}}))$ . La ecuación (1.53) muestra que  $F_2 v_{(\mu_1, \mu_2)} \neq 0$  para  $v_{(\mu_1, \mu_2)} \in V_{(\mu_1, \mu_2)}^{(m,j)} \setminus \{0\}$  siempre que  $\mu_2 > 0$  y que en este caso,  $E_2 F_2 v_{(\mu_1, \mu_2)} \neq 0$ . Por lo tanto  $E_2 : F_2(V_{\lambda+\alpha_2}^{(m,j)}) \rightarrow V_{\lambda+\alpha_2}^{(m,j)}$  es un isomorfismo, entonces las multiplicidades son iguales a  $\dim(V_\lambda^{(m,j)}) - \dim(V_{\lambda+\alpha_2}^{(m,j)})$ . Esta diferencia puede fácilmente ser calculada por fórmula de multiplicidad de Kostant (ver [22]),

$$\dim(V_\lambda^\mu) = \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} \#\Pi(w(\mu + \delta) - (\lambda + \delta)),$$

donde  $\delta$  denota la semisuma de raíces positivas,  $W$  el grupo de Weyl de  $\mathfrak{so}(5)$ ,  $\ell(w)$  la longitud de un elemento  $w$  de  $W$ , y  $\mathbb{Z}^2 \ni \nu \mapsto \#\Pi(\nu)$  corresponde a la función partición, es decir el número de todas las maneras posibles de escribir  $\nu$  como una suma de raíces positivas. En nuestra situación,  $\delta = (1, 1)$  y  $\#\Pi(\nu)$  es igual al número de elementos del conjunto

$$(2.22) \quad \Pi(\nu) := \{(n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{N}_0^4 \mid \nu = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + n_3(\alpha_1 + \alpha_2) + n_4(\alpha_1 + 2\alpha_2)\},$$

ver (1.2). Definiendo

$$d(\nu) := \#\Pi(\nu) - \#\Pi(\nu - \alpha_2), \quad \nu \in \mathbb{Z}^2,$$

obtenemos

$$(2.23) \quad \dim(V_{\lambda_k}^{(\mu)}) - \dim(V_{\lambda_k+\alpha_2}^{(\mu)}) = \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} d(w(\mu + \delta) - (\lambda_k + \delta)), \quad k = 0, \dots, 3,$$

donde los paréntesis en la expresión  $(\mu)$  indican que  $V^{(\mu)}$  denota el espacio vectorial subyacente de una  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ -representación irreducible de peso  $\mu$ . El valor de  $d(\nu)$  es fácilmente derivado de consideraciones combinatorias. En el siguiente lema calculamos aquellos casos que son de nuestro interés.

LEMA 2.1. *Por  $[x]$  denotamos la parte entera de  $x \geq 0$ . Entonces*

$$1. \ d(k, 2l) = 1 + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \text{ para } (k, l) \in \mathbb{N}_0 \times 2\mathbb{N}_0.$$

2.  $d(k, -2l) = 1 + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - l$  para  $(k, l) \in \mathbb{N}_0 \times 2\mathbb{N}_0$  y  $k \geq 2l$ .
3.  $d(k, 2l) = 0$  if  $(k, 2l) \in \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$  tal que  $k < 0$ , o  $k \geq 0$  y  $-2l > k$ .

DEMOSTRACIÓN. Obviamente, para todo  $\xi \in \Pi(\nu - \alpha_2)$ , tenemos  $\xi + \alpha_2 \in \Pi(\nu)$ . Por otro lado, si  $\kappa = (n_1, n_2, n_3, n_4) \in \Pi(\nu)$  tal que  $\kappa - \alpha_2 \in \Pi(\nu - \alpha_2)$ , entonces  $n_2 > 0$ . Por lo tanto,

$$d(\nu) = \#\Pi(\nu) - \#\Pi(\nu - \alpha_2) = \#\{(n_1, n_2, n_3, n_4) \in \Pi(\nu) \mid n_2 = 0\}.$$

Entonces  $d(\nu)$  es igual al número de soluciones de  $\nu = n_1\alpha_1 + n_3(\alpha_1 + \alpha_2) + n_4(\alpha_1 + 2\alpha_2)$  con  $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}_0$ . Para  $\nu = (x, 2y) \in \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ ,  $\alpha_1 = (2, -2)$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = (1, 0)$  y  $\alpha_1 + 2\alpha_2 = (0, 2)$ , necesitamos determinar el número de soluciones de

$$x = 2n_1 + n_3, \quad y = -n_1 + n_4, \quad n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}_0.$$

Claramente, no existe solución si  $x < 0$  o si  $x + 2y < 0$ . Esto implica 3.

Si  $x \geq 0$ , entonces  $n_3 = x - 2n_1$  y  $n_4 = y + n_1$ , de tal manera que  $n_3$  y  $n_4$  son únicamente determinados por  $n_1$ . Entonces sólo es suficiente el número de posibles  $n_1 \in \mathbb{N}_0$ . Para  $x \in \mathbb{N}_0$  y  $y \in \mathbb{N}_0$ , existe una única solución si y sólo si  $n_1 \leq \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ . Esto prueba 1. Dado  $x \in \mathbb{N}_0$  and  $y \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$ , existe una única solución si y sólo si  $|y| \leq n_1 \leq \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ , lo cual implica 2.  $\square$

Las multiplicidades de las representaciones irreducibles del factor de Levi sobre  $V^{(m,j)}$  pueden ser ahora calculadas por aplicar el Lema 2.1 a (2.23).

PROPOSICIÓN 2.2. Para  $(n, l) \in \mathbb{N}_0^2$ , sea  $V^{(n,l)}$  un espacio vectorial subyacente a una  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ -representación irreducible de peso más alto  $(n, l)$ , y por  $V^{(n,l)}$  denotamos el espacio vectorial de la  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$ -representación irreducible como se describió en (1.53).

1. La representación trivial  $V^{(0,0)}$  del factor de Levi  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$  ocurre en  $V^{(n,l)}$  con las siguientes multiplicidades:
  - (I) multiplicidad 1 en  $V^{(2n,2l)}$ ,
  - (II) multiplicidad 0 en los otros casos.
2. La representación irreducible  $V^{(0,2)}$  del factor de Levi  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$  ocurre en  $V^{(n,l)}$  con las siguientes multiplicidades:
  - (I) multiplicidad 2 en  $V^{(2n+2,2l+2)}$ ,
  - (II) multiplicidad 1 en  $V^{(2n+2,0)}$ ,
  - (III) multiplicidad 1 en  $V^{(0,2l+2)}$ ,
  - (IV) multiplicidad 1 en  $V^{(2n+1,2l+2)}$ ,
  - (V) multiplicidad 0 en los otros casos.

3. La representación irreducible  $V^{(1,2)}$  del factor de Levi  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$  ocurre en  $V^{(n,l)}$  con las siguientes multiplicidades:
- (I) multiplicidad 1 en  $V^{(2n+2,2l+2)}$ ,
  - (II) multiplicidad 1 en  $V^{(2n+3,0)}$ ,
  - (III) multiplicidad 1 en  $V^{(1,2l+2)}$ ,
  - (IV) multiplicidad 2 en  $V^{(2n+3,2l+2)}$ ,
  - (v) multiplicidad 0 en los otros casos.
4. La representación irreducible  $V^{(3,0)}$  del factor de Levi  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$  ocurre en  $V^{(n,l)}$  con las siguientes multiplicidades:
- (I) multiplicidad 1 en  $V^{(2n+3,2l)}$ ,
  - (II) multiplicidad 0 en los otros casos.

DEMOSTRACIÓN. Claramente, a fin de que una multiplicidad no cero de  $V^\lambda$  en  $V^{(m,j)}$  exista,  $(m, j)$  debe ser más alto que  $\lambda$ . Además, ya que  $\lambda_k \in \mathbb{N}_0 \times 2\mathbb{N}_0$  para todo  $\lambda_k$  de (2.10), la multiplicidad de  $V^{\lambda_k}$  en  $V^{(m,j)}$  es 0 siempre que  $j \notin 2\mathbb{N}_0$ .

Consideremos  $\mathcal{P}^+$ ,  $\mathcal{P}^{++}$  y  $w_{\alpha_2} \in W$  como se definieron en Sección 1 del Capítulo 1. Notemos que los conjuntos en Lema 2.1 1. y 2. están contenidos en  $\mathcal{P}^+$  y  $w_{\alpha_2}(\mathcal{P}^+)$ , respectivamente. Entonces se sigue de Lema 2.1 que, para  $\nu \in \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ ,  $d(\nu) = 0$  si  $\nu \notin \mathcal{P}^+ \cup w_{\alpha_2}(\mathcal{P}^+)$ . Como  $\delta \in \mathcal{P}^{++}$ , tenemos  $\mu + \delta \in \mathcal{P}^{++}$  para todo  $\mu \in \mathcal{P}^+$  y  $\lambda_k + \delta \in \mathcal{P}^{++}$  para  $k = 0, \dots, 3$ . Por Lema 2.1 3, lo último implica que  $d(\nu - (\lambda_k + \delta)) = 0$  si  $d(\nu) = 0$ . Por lo tanto la fórmula en (2.23) se reduce a

$$\dim(V_{\lambda_k}^{(\mu)}) - \dim(V_{\lambda_k + \alpha_2}^{(\mu)}) = d(\mu - \lambda_k) - d(w_{\alpha_2}(\mu + \delta) - (\lambda_k + \delta)).$$

Como se explicó antes de Lema 2.1, esta diferencia nos da la multiplicidad de una  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$ -representación irreducible de peso más alto  $\lambda_k$  en una  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ -representación irreducible de peso más alto  $\mu \in \mathbb{N}_0 \times 2\mathbb{N}_0$ . Estos números son fácilmente calculados por aplicar la ecuación (1.3) y Lema 2.1. Los resultados son presentados en las siguientes tablas.

1(I)	$d((2n, 2l)) - d((2n+2l+1, -2l-2)) = n - (n+l) + (l+1) = 1$
1(II)	$d((2n+1, 2l)) - d((2n+2l+2, -2l-2)) = n - (n+l+1) + (l+1) = 0$

2(I)	$d((2n, 2l-2)) - d((2n+2l+1, -2l-4)) = n - (n+l) + (l+2) = 2$
2(II)	$d((2n, -2)) - d((2n+1, -4)) = n - 1 - n + 2 = 1$
2(III)	$d((0, 2l-2)) - d((2l+1, -2l-4)) = 1 - 0 = 1$
2(IV)	$d((2n+1, 2l-2)) - d((2n+2l+2, -2l-4)) = n - (n+l+1) + (l+2) = 1$

3(i)	$d((2n-1, 2l-2)) - d((2n+2l, -2l-4)) = n-1-(n+l)+(l+2) = 1$
3(ii)	$d((2n, -2)) - d((2n+1, -4)) = n-1-n+2 = 1$
3(iii)	$d((0, 2l-2)) - d((2l+1, -2l-4)) = 1-0 = 1$
3(iv)	$d((2n, 2l-2)) - d((2n+2l+1, -2l-4)) = n-(n+l)+(l+2) = 2$

4(i)	$d((2n-2, 2l)) - d((2n+2l-1, -2l-2)) = n-1-(n+l-1)+(l+1) = 1$
4(ii)	$d((2n-3, 2l)) - d((2n+2l-2, -2l-2)) = n-2-(n+l-1)+(l+1) = 0$

En la fórmula en 3(ii) asumimos que  $n > 1$ . Para  $n = 1$ , tenemos  $(3, -4) \notin \mathcal{P}^+ \cup w_{\alpha_2}(\mathcal{P}^+)$  de tal manera que  $d((2, -2)) - d((3, -4)) = d((2, -2)) = 1$ . Esto completa la demostración.  $\square$

Ahora nuestro siguiente objetivo es proporcionar una descripción explícita de los elementos en  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  los cuales generan los subespacios que satisfacen las reglas de ramificación de la Proposición 2.2. Ya que el espacio vectorial de una representación irreducible de peso más alto de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  (resp.  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$ ) es generada por actuar con elementos de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  (resp.  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$ ) sobre un vector de peso más alto no cero, será suficiente restringir nuestra atención a vectores de peso más alto.

Por un ligero abuso de notación como se explicó en párrafo siguiendo ecuación (2.21), podemos considerar  ${}^{(n,l)}V \otimes V^{(n,l)}$  como  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ -subbimódulo de  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$ . Entonces por

$${}^{(n,l)}V^{(m,j)} \subset {}^{(n,l)}V \otimes V^{(n,l)} \subset \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$$

denotamos el espacio vectorial de todos los elementos en  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  que pertenecen a una representación de peso más alto  $(n, l)$  con respecto a la representación regular izquierda  $\pi_L$  y derecha  $\pi_R$  de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  sobre  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$ , y a una representación de peso más alto  $(m, j)$  con respecto a la  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$ -acción izquierda sobre  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$ . Notemos que no estamos asumiendo que la representación de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$  sobre  ${}^{(n,l)}V^{(m,j)}$  es irreducible. Además, por

$$(2.24) \quad {}^{(n,l)}V_{(s_1, s_2)}^{(m,j)} := \{v \in {}^{(n,l)}V^{(m,j)} : K_i \triangleright v = q_i^{s_i} v, \quad i = 1, 2\},$$

$$(2.25) \quad {}^{(n,l)}V_{(r_1, r_2)}^{(m,j)} := \{v \in {}^{(n,l)}V^{(m,j)} : \pi_R(K_i)(v) = q_i^{r_i} v, \quad K_i \triangleright v = q_i^{s_i} v, \quad i = 1, 2\}$$

denotamos los espacios vectoriales de vectores de peso  $(s_1, s_2)$  con respecto a la  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$ -acción izquierda sobre  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  y, en el segundo caso, también de peso  $(r_1, r_2)$  con respecto a la representación regular derecha de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ . En particular,  ${}^{(n,l)}V_{(m,j)}^{(m,j)}$  es el espacio vectorial de vectores de peso más alto con respecto a ambas representaciones. Estos vectores de peso más alto determinan todo el espacio  ${}^{(n,l)}V^{(m,j)}$  de la representación ya que

$${}^{(n,l)}V^{(m,j)} = \pi_R(\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))) (\mathcal{U}_q(\mathfrak{l}) \triangleright {}^{(n,l)}V_{(m,j)}^{(m,j)}) = \mathcal{U}_q(\mathfrak{l}) \triangleright (\pi_R(\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))) {}^{(n,l)}V_{(m,j)}^{(m,j)}).$$



Una lista completa de vectores de peso más alto en los casos de interés serán dados en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 2.3. Sean  $u^i$  con  $i, j = 1, \dots, 5$  los generadores of  $O(\text{SO}_q(5))$ . Definimos

$$z_1 := u_1^1 u_5^1, \quad z_2 := u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1.$$

Entonces, para  $n, l \in \mathbb{N}_0$ ,

1. (I)  $\binom{(2n, 2l)}{(2n, 2l)} V_{(0,0)}^{(0,0)} = \text{Lin}\{z_2^l z_1^n\}$ .
2. (I)  $\binom{(2n+2, 2l+2)}{(2n+2, 2l+2)} V_{(0,2)}^{(0,2)} = \text{Lin}\{z_2^{l+1} u_4^1 u_5^1 z_1^n, z_2^l (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) z_1^{n+1}\}$ ,  
 (II)  $\binom{(2n+2, 0)}{(2n+2, 0)} V_{(0,2)}^{(0,2)} = \text{Lin}\{u_4^1 u_5^1 z_1^n\}$ ,  
 (III)  $\binom{(0, 2l+2)}{(0, 2l+2)} V_{(0,2)}^{(0,2)} = \text{Lin}\{z_2^l (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1)\}$ ,  
 (IV)  $\binom{(2n+1, 2l+2)}{(2n+1, 2l+2)} V_{(0,2)}^{(0,2)} = \text{Lin}\{z_2^l (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_5^1 z_1^n\}$ .
3. (I)  $\binom{(2n+2, 2l+2)}{(2n+2, 2l+2)} V_{(1,2)}^{(1,2)} = \text{Lin}\{z_2^l (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) (u_5^1)^2 z_1^n\}$ ,  
 (II)  $\binom{(1, 2l+2)}{(1, 2l+2)} V_{(1,2)}^{(1,2)} = \text{Lin}\{z_2^l (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_5^1\}$ ,  
 (III)  $\binom{(2n+3, 0)}{(2n+3, 0)} V_{(1,2)}^{(1,2)} = \text{Lin}\{u_4^1 (u_5^1)^2 z_1^n\}$ ,  
 (IV)  $\binom{(2n+3, 2l+2)}{(2n+3, 2l+2)} V_{(1,2)}^{(1,2)} = \text{Lin}\{z_2^{l+1} u_4^1 (u_5^1)^2 z_1^n, z_2^l (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_5^1 z_1^{n+1}\}$ .
4. (I)  $\binom{(2n+3, 2l)}{(2n+3, 2l)} V_{(3,0)}^{(3,0)} = \text{Lin}\{z_2^l (u_5^1)^3 z_1^n\}$ .

DEMOSTRACIÓN. Primero observemos que el número generadores en Proposición 2.3 coincide con las multiplicidades en Proposición 2.2. Por lo tanto es suficiente mostrar que el conjunto de vectores generadores son vectores de peso más alto de los correspondientes pesos y que son linealmente independientes.

Usando las fórmulas dadas en (1.15) y (1.16), cálculos elementales muestran que los siguientes elementos son vectores de peso más alto para la representación regular derecha de  $\mathcal{U}_q(\text{so}(5))$  y la acción izquierda  $\mathcal{U}_q(1)$ :

$$z_1 = u_1^1 u_5^1, \quad z_2 = u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1, \quad u_4^1, \quad u_5^1, \quad u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1, \quad u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1.$$

Ya que, por (1.9), (1.13) y (1.14), el producto de vectores de peso más alto es también un vector de peso más alto, donde el peso resultante es la suma de los pesos individuales, se sigue que todos los elementos en la lista de Proposición 2.3 son vectores de peso más alto que pertenecen a los correspondientes espacios.

Ahora, necesitamos probar que ninguno de los vectores es cero. Ya que  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  es un dominio (ver [3]), es suficiente verificar esto para  $u_1^1 u_5^2 - qu_1^2 u_5^1$ ,  $u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1$  and  $u_3^1 u_4^2 - qu_3^2 u_4^1$ .

Cálculos elementales muestran que  $u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1$  es el único (hasta factor escalar) vector de peso más alto de la representación  ${}^{(0,2)}V \otimes V^{(0,2)}$  de la descomposición de Peter-Weyl (2.21), por lo tanto no puede ser cero. Ya que  $E_2^2 E_1(u_1^1 u_5^2 - qu_1^2 u_5^1)$  nos lleva a un múltiplo no cero de  $u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1$ , tenemos necesariamente  $z_2 = u_1^1 u_5^2 - qu_1^2 u_5^1 \neq 0$ . Análogamente,  $E_2 E_1(u_3^1 u_4^2 - qu_3^2 u_4^1)$  es múltiplo no cero de  $u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1$ , entonces  $u_3^1 u_4^2 - qu_3^2 u_4^1 \neq 0$ .

Sólo queda probar que los dos vectores generadores son linealmente independientes cuando la multiplicidad es igual a 2. Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tal que

$$(2.26) \quad \begin{aligned} 0 &= \alpha z_2^{l+1} u_4^1 u_5^1 z_1^n + \beta z_2^l (u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1) z_1^{n+1} \\ &= z^l (\alpha (u_1^1 u_5^2 - qu_1^2 u_5^1) u_4^1 + \beta (u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1) u_1^1) u_5^1 z^n. \end{aligned}$$

Entonces  $\alpha (u_1^1 u_5^2 - qu_1^2 u_5^1) u_4^1 + \beta (u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1) u_1^1 = 0$  ya que  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  es un dominio. Actuando sobre esta expresión con  $F_1$  por la izquierda nos lleva

$$0 = -\alpha q (u_1^1 u_4^2 - qu_1^2 u_4^1) u_4^1 - \beta q (u_4^1 u_4^2 - qu_4^2 u_4^1) u_1^1 = -\alpha q (u_1^1 u_4^2 - qu_1^2 u_4^1) u_4^1$$

donde hemos usado que  $u_4^1 u_4^2 - qu_4^2 u_4^1 = 0$  por (1.31). Por otro lado, el único elemento (hasta una constante) en  ${}^{(0,2)}V \otimes V^{(0,2)}$ , el cual es un vector de peso más alto con respecto a la representación regular derecha y un vector de peso más bajo con respecto a la representación regular izquierda, es dado por  $u_1^1 u_2^2 - qu_1^2 u_2^1 = -q_2 [2]_2^{-1} F_2^2 (u_1^1 u_4^2 - qu_1^2 u_4^1)$ . Por lo tanto  $u_1^1 u_4^2 - qu_1^2 u_4^1 \neq 0$ , entonces  $\alpha = 0$  y consecuentemente también  $\beta = 0$ . Esto prueba que los dos vectores sobre el lado derecho de 2.(i) son linealmente independientes.

En el Caso 3.(iv), si  $\alpha z_2^{l+1} u_4^1 (u_5^1)^2 z_1^n + \beta z_2^l (u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1) u_5^1 z_1^{n+1} = 0$ , entonces

$$0 = z^l (\alpha (u_1^1 u_5^2 - qu_1^2 u_5^1) u_4^1 + q^{-2} \beta (u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1) u_1^1) (u_5^1)^2 z^n,$$

y por lo tanto  $\alpha = \beta = 0$  por el mismo razonamiento anterior, ver (2.26).  $\square$

### 3. El espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\Omega^{(0,\bullet)})$

El primer paso de esta sección es dotar a  $\Omega^{(0,\bullet)}$  de un producto interno. Como en el caso clásico el producto interno es dado por integración sobre secciones de  $\Omega^{(0,\bullet)}$  con respecto a una medida de Haar, el papel de la integral en este contexto no conmutativo lo desempeñará el estado de Haar de  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$ . Para esto asignaremos un producto interno “natural” a cada espacio de  $(0, k)$ -formas.

Por (2.11) y (2.14), podemos considerar  $\Omega^{(0,0)}$  y  $\Omega^{(0,3)}$  como subespacios de  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$ . Por lo tanto es natural definir

$$(2.27) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_0 : \Omega^{(0,0)} \times \Omega^{(0,0)} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle b_1, b_2 \rangle_0 := c_0 h(b_1^* b_2),$$

$$(2.28) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_3 : \Omega^{(0,3)} \times \Omega^{(0,3)} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle a_1, a_2 \rangle_3 := c_3 h(a_1^* a_2),$$

donde  $h$  denota el estado de Haar de (1.17) y  $c_0, c_3 \in (0, \infty)$ . Además, por (2.12) y (2.13), tenemos  $\Omega^{(0,k)} \subset \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \otimes M(\lambda_k)' \cong \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \otimes \mathbb{C}^3$ ,  $k = 1, 2$ . Tomando en cuenta que  $K_1$  y  $K_2$  deben actuar como operadores autoadjuntos, requerimos que  $\mathrm{Lin}\{\nu_{-1}, \nu_0, \nu_1\} \subset M(0, 2)'$  y  $\mathrm{Lin}\{\omega_{-1}, \omega_0, \omega_1\} \subset M(1, 2)'$  sean bases ortogonales. Por esta razón, primero definimos

$$(2.29) \quad \langle \nu_i, \nu_j \rangle_{\lambda_1} := c_{1j} \delta_{ij}, \quad \langle \omega_i, \omega_j \rangle_{\lambda_2} := c_{2j} \delta_{ij},$$

donde  $\delta_{ij}$  denota la delta Kronecker y  $c_{1j}, c_{2j} \in (0, \infty)$ , y entonces podemos considerar el producto interno sobre el producto tensorial  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \otimes M(\lambda_k)'$ ,  $k = 1, 2$ , dado por

$$(2.30) \quad \left\langle \sum_{i=-1}^1 a_i \otimes \nu_i, \sum_{j=-1}^1 b_j \otimes \nu_j \right\rangle_1 = \sum_{j=-1}^1 c_{1j} h(a_j^* b_j),$$

$$(2.31) \quad \left\langle \sum_{i=-1}^1 x_i \otimes \omega_i, \sum_{j=-1}^1 y_j \otimes \omega_j \right\rangle_2 = \sum_{j=-1}^1 c_{2j} h(x_j^* y_j).$$

El producto interno sobre  $(0, 1)$  y  $(0, 2)$ -formas será dado por la restricción de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  a  $\Omega^{(0,1)} \subset \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \otimes M(0, 2)'$  y  $\Omega^{(0,2)} \subset \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \otimes M(1, 2)'$ , respectivamente. Que los  $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$  son realmente productos internos se sigue de las propiedades del estado de Haar  $h$  [28, Sección 11.2]. Definimos  $\mathcal{H}(\Omega^{(0,\bullet)})$  como el espacio de Hilbert completación de  $\Omega^{(0,0)} \oplus \Omega^{(0,1)} \oplus \Omega^{(0,2)} \oplus \Omega^{(0,3)}$  con respecto a este producto interno. Ahora nuestro siguiente objetivo es estudiar el operador de Dobeault-Dirac  $\bar{\partial} + \bar{\partial}^\dagger$  sobre el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}(\Omega^{(0,\bullet)})$  donde  $\bar{\partial} = \bar{\partial}_0 \oplus \bar{\partial}_1 \oplus \bar{\partial}_2$  y por  $\bar{\partial}^\dagger$  denotamos el adjunto de  $\bar{\partial}$ .

Desde luego, el espectro del operador de Dirac podría depender sobre los números reales positivos  $c_0, c_{1j}, c_{2j}$  y  $c_3$ . Una dependencia similar sobre un factor escalar fue observada en la definición de los diferenciales  $\bar{\partial}_k$ . La dependencia del espectro del operador de Dirac sobre estos parámetros será discutido más adelante.

Por la definición de  $\Omega^{(0,k)}$  como un subespacio de  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \otimes M(\lambda_k)'$ , la representación regular derecha de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  sobre el primer factor tensorial de  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \otimes M(0, k)'$  restringe a  $\Omega^{(0,k)}$  ya que este actúa sólo sobre el factor tensor izquierdo en la descomposición de Peter-Weyl (2.21). El siguiente lema muestra que el complejo diferencial (2.19) es equivariante con respecto a la representación regular derecha.

**LEMA 2.4.** *Sobre  $\Omega^{(0,k)} \subset \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \otimes M(\lambda_k)'$ , consideremos la representación regular derecha de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  dada por  $\pi_R(X)(a \otimes v) := a \triangleleft S^{-1}(X) \otimes v$  para  $a \in \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$ ,  $v \in M(\lambda_k)'$  y  $X \in$*

$\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ . Entonces  $\pi_R$  define una \*-representación de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  on  $\Omega^{(0,k)}$  tal que  $\pi_R(X)\bar{\partial}_k(\omega_k) = \bar{\partial}_k(\pi_R(X)(\omega_k))$  para todo  $\omega_k \in \Omega^{(0,k)}$ .

Sobre la subálgebra  $\mathcal{B} = \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))^{\mathrm{inv}(\mathcal{U}_q(1))}$  de  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$ , consideremos la  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ -acción izquierda definida por  $X \triangleright b := b \triangleleft S^{-1}(X)$  para  $b \in \mathcal{B}$  y  $X \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ . Entonces

$$(2.32) \quad \pi_R(X)(b\omega_k) = (X_{(2)} \triangleright b)\pi_R(X_{(1)})(\omega_k)$$

para todo  $X \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ ,  $b \in \mathcal{B}$  y  $\omega_k \in \Omega^{(0,k)}$ .

DEMOSTRACIÓN. Ya que para todo  $a \in \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  y  $X, Y \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ ,

$$(2.33) \quad Y \triangleright (\pi_R(X)(a)) = Y \triangleright a \triangleleft S^{-1}(X) = \pi_R(X)(Y \triangleright a),$$

se sigue de (2.11)–(2.14) que  $\pi_R(X) : \Omega^{(0,k)} \rightarrow \Omega^{(0,k)}$  está bien definido. Como  $\pi_R$  es una \*-representación con respecto al producto interno sobre  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  definido por el estado de Haar, es decir,  $h((\pi_R(X)(a))^*b) = h(a^*(\pi_R(X)(b)))$  para todo  $a, b \in \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$ , concluimos de (1.21) y (2.27)–(2.31) que  $\pi_R$  nos da una \*-representación sobre  $\Omega^{(0,k)}$ . Notemos que la definición de  $\bar{\partial}_k$  involucra sólo la  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ -acción izquierda. Por lo tanto (2.33) implica que  $\pi_R(X)$  y  $\bar{\partial}_k$  conmutan para todo  $X \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  y  $k = 0, 1, 2$ .

Como  $\mathcal{B} = \Omega^{(0,0)}$  y  $\pi_R(X) : \Omega^{(0,0)} \rightarrow \Omega^{(0,0)}$ , ya hemos demostrado que  $\mathcal{B}$  es invariante bajo la acción  $\triangleright$ . Además, para todo  $a \otimes v \in \Omega^{(0,k)} \subset \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \otimes M(\lambda_k)'$  y todo  $X \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ , usando (1.14) tenemos

$$\begin{aligned} \pi_R(X)(ba \otimes v) &= (ba) \triangleleft S^{-1}(X) \otimes v = (b \triangleleft S^{-1}(X_{(2)})(a \triangleleft S^{-1}(X_{(1)})) \otimes v \\ &= (X_{(2)} \triangleright b)\pi_R(X_{(1)})(a \otimes v), \end{aligned}$$

lo cual prueba la segunda parte del lema.  $\square$

Como en Sección 2 del Capítulo 2,  ${}^{(n,l)}\Omega^{(0,k)}$  denota el espacio de vectores que pertenecen a una representación irreducible de peso más alto  $(n, l)$  con respecto a la representación regular derecha y por  ${}^{(n,l)}\Omega^{(0,k)} \subset {}^{(n,l)}\Omega^{(0,k)}$  denotamos el subespacio de vectores de peso  $(r, s)$ . Por la descomposición de Peter-Weyl (2.21), los elementos de  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  que pertenecen a representaciones irreducibles de diferentes pesos más altos son ortogonales con respecto al producto interno dado por el estado Haar. Por lo tanto, de las ecuaciones (2.11)–(2.14), (2.25) y Proposición 2.3, obtenemos la descomposición ortogonal

$$(2.34) \quad \Omega^{(0,k)} = \bigoplus \left\{ {}^{(n,l)}\Omega^{(0,k)} : n \in \mathbb{N}_0, l \in 2\mathbb{N}_0, \dim({}^{(n,l)}V_{\lambda_k}^{\lambda_k}) \neq 0 \right\},$$

donde

$$(2.35) \quad {}^{(n,l)}\Omega^{(0,k)} = \pi_R(\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5)))({}^{(n,l)}\Omega^{(0,k)})$$

y, para  $n, m \in \mathbb{N}_0$  y  $l \in 2\mathbb{N}_0$ ,

$$(2.36) \quad \begin{matrix} (2n,2m) \\ (2n,2m) \end{matrix} \Omega^{(0,0)} = \begin{matrix} (2n,2m) \\ (2n,2m) \end{matrix} V_{(0,0)}^{(0,0)}, \quad \begin{matrix} (2n+3,2m) \\ (2n+3,2m) \end{matrix} \Omega^{(0,3)} = \begin{matrix} (2n+3,2m) \\ (2n+3,2m) \end{matrix} V_{(3,0)}^{(3,0)} \otimes \nu^0,$$

$$(2.37) \quad \begin{matrix} (n,l) \\ (n,l) \end{matrix} \Omega^{(0,1)} = \left\{ \frac{1}{[2]_2} F_2^2 \triangleright a_1 \otimes \nu_{-1} + \frac{1}{[2]_2} F_2 \triangleright a_1 \otimes \nu_0 + a_1 \otimes \nu_1 : a_1 \in \begin{matrix} (n,l) \\ (n,l) \end{matrix} V_{(0,2)}^{(0,2)} \right\},$$

$$(2.38) \quad \begin{matrix} (n,l) \\ (n,l) \end{matrix} \Omega^{(0,2)} = \left\{ \frac{1}{[2]_2} F_2^2 \triangleright b_1 \otimes \omega_{-1} + \frac{1}{[2]_2} F_2 \triangleright b_1 \otimes \omega_0 + b_1 \otimes \omega_1 : b_1 \in \begin{matrix} (n,l) \\ (n,l) \end{matrix} V_{(1,2)}^{(1,2)} \right\}.$$

Notemos que  $\begin{matrix} (n,l) \\ (n,l) \end{matrix} \Omega^{(0,k)}$  está únicamente determinado por  $\begin{matrix} (n,l) \\ (n,l) \end{matrix} V_{\lambda_k}^{\lambda_k}$ . En el siguiente lema se establecen isomorfismos unitarios explícitos entre estos espacios.

LEMA 2.5. *Sobre los subespacios lineales  $\begin{matrix} (\mu) \\ \mu \end{matrix} V_{\lambda_k}^{\lambda_k} \subset \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  de Proposición 2.3, consideremos el producto interno (1.19) dado por el estado de Haar sobre  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$ . Sean  $c_0$  y  $c_3$  las constantes de (2.27) y (2.28), respectivamente. Con las constantes  $c_{kj}$  de (2.29), definimos*

$$(2.39) \quad c_k := \sqrt{\frac{c_{k,-1}}{q[2]_2^2} + \frac{c_{k,0}}{q[2]_2} + c_{k,1}}, \quad k = 1, 2,$$

Entonces los operadores lineales

$$\begin{aligned} J_0 &: \begin{matrix} (\mu) \\ \mu \end{matrix} V_{(0,0)}^{(0,0)} \longrightarrow \begin{matrix} (\mu) \\ \mu \end{matrix} \Omega^{(0,0)}, & J_0(a) &:= \frac{1}{c_0} a, \\ J_1 &: \begin{matrix} (\mu) \\ \mu \end{matrix} V_{(0,2)}^{(0,2)} \longrightarrow \begin{matrix} (\mu) \\ \mu \end{matrix} \Omega^{(0,1)}, & J_1(a) &:= \frac{1}{c_1} \left( \frac{1}{[2]_2} F_2^2 \triangleright a \otimes \nu_{-1} + \frac{1}{[2]_2} F_2 \triangleright a \otimes \nu_0 + a \otimes \nu_1 \right), \\ J_2 &: \begin{matrix} (\mu) \\ \mu \end{matrix} V_{(1,2)}^{(1,2)} \longrightarrow \begin{matrix} (\mu) \\ \mu \end{matrix} \Omega^{(0,2)}, & J_2(a) &:= \frac{1}{c_2} \left( \frac{1}{[2]_2} F_2^2 \triangleright a \otimes \omega_{-1} + \frac{1}{[2]_2} F_2 \triangleright a \otimes \omega_0 + a \otimes \omega_1 \right), \\ J_3 &: \begin{matrix} (\mu) \\ \mu \end{matrix} V_{(3,0)}^{(3,0)} \longrightarrow \begin{matrix} (\mu) \\ \mu \end{matrix} \Omega^{(0,3)}, & J_3(a) &:= \frac{1}{c_3} a \otimes \nu^0. \end{aligned}$$

son isomorfismos unitarios.

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos el lema para  $J_1$ . Para  $J_2$ , la demostración es similar y para  $J_0$  y  $J_3$ , la prueba es aún más elemental. De (2.37), se sigue que  $J_1$  define un isomorfismo lineal. Notemos que, por (1.54),  $\frac{1}{[2]_2^2} E_2^2 F_2^2 \triangleright a = \frac{1}{[2]_2} E_2 F_2 \triangleright a = a$  para todo  $a \in \begin{matrix} (\mu) \\ \mu \end{matrix} V_{(0,2)}^{(0,2)}$ . Sean  $a_1, a_2 \in \begin{matrix} (\mu) \\ \mu \end{matrix} V_{(0,2)}^{(0,2)}$ . Entonces

$$\begin{aligned} &\langle J_1(a_1), J_1(a_2) \rangle_1 \\ &= \frac{1}{c_1^2} \left( \frac{c_{1,-1}}{[2]_2^4} h((F_2^2 \triangleright a_1)^*(F_2^2 \triangleright a_2)) + \frac{c_{1,0}}{[2]_2} h((F_2 \triangleright a_1)^*(F_2 \triangleright a_2)) + c_{1,1} h(a_1^* a_2) \right) \\ &= \frac{1}{c_1^2} \left( \frac{c_{1,-1}}{[2]_2^4} h(a_1^*((K_2^{-1} E_2)^2 F_2^2 \triangleright a_2)) + \frac{c_{1,0}}{[2]_2} h(a_1^*(K_2^{-1} E_2 F_2 \triangleright a_2)) + c_{1,1} h(a_1^* a_2) \right) \\ &= \frac{1}{c_1^2} \left( \frac{c_{1,-1}}{q[2]_2^2} + \frac{c_{1,0}}{q[2]_2} + c_{1,1} \right) h(a_1^* a_2) = h(a_1^* a_2), \end{aligned}$$

donde hemos usado la definición de  $J_1$  y (2.30) en la primera igualdad, el hecho de que  $\pi_L$  de (1.20) es una \*-representación en la segunda igualdad, las relaciones de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  y (1.54) en la tercera igualdad, y (2.39) en la última igualdad. Entonces el isomorfismo lineal  $J_1$  es también isométrico lo cual implica que es unitario.  $\square$

El Lema 2.5 y ecuaciones (2.34)–(2.38) muestran que el operador  $\bar{\partial}_k$  está únicamente determinado por la acción unitariamente equivalente sobre el espacio de vectores de peso más alto  ${}^{(\mu)}V_{\lambda_k}^{\lambda_k}$ . El siguiente corolario nos da fórmulas explícitas.

**COROLARIO 2.6.** *Las restricciones de  $\bar{\partial}_k$  a los espacios de vectores de peso más alto,*

$$(2.40) \quad \bar{\partial}_k : {}^{(\mu)}\Omega^{(0,k)} \longrightarrow {}^{(\mu)}\Omega^{(0,k+1)}, \quad \mu \in \mathbb{N}_0 \times 2\mathbb{N}_0, \quad k = 0, 1, 2,$$

*son unitariamente equivalentes a*

$$(2.41) \quad \delta_0 := J_1^* \circ \bar{\partial}_0 \circ J_0 : {}^{(\mu)}V_{(0,0)}^{(0,0)} \longrightarrow {}^{(\mu)}V_{(0,2)}^{(0,2)}, \quad \delta_0(v) = \frac{c_1}{c_0} X_1(v),$$

$$(2.42) \quad \delta_1 := J_2^* \circ \bar{\partial}_1 \circ J_1 : {}^{(\mu)}V_{(0,2)}^{(0,2)} \longrightarrow {}^{(\mu)}V_{(1,2)}^{(1,2)}, \quad \delta_1(v) = \frac{c_2}{c_1} \frac{[3]_2 - 1}{[3]_2} \text{pr}_{(1,2)} \circ X_0(v),$$

$$(2.43) \quad \delta_2 := J_3^* \circ \bar{\partial}_2 \circ J_2 : {}^{(\mu)}V_{(1,2)}^{(1,2)} \longrightarrow {}^{(\mu)}V_{(3,0)}^{(3,0)}, \quad \delta_2(v) = \frac{c_3}{c_2} \text{pr}_{(3,0)} \circ X_{-1}(v),$$

donde  $\text{pr}_{(1,2)}$  y  $\text{pr}_{(3,0)}$  son definidos en (1.56) and (1.58), respectivamente.

**DEMOSTRACIÓN.** Por la propiedad equivariante mostrada en Lema 2.4, el operador  $\bar{\partial}_k$  lleva vectores de peso más alto de peso  $\mu \in \mathbb{N}_0 \times 2\mathbb{N}_0$  a vectores de peso más alto del mismo peso, entonces (2.40) se satisface. Del Lema 2.5 y (2.15), se sigue que, para todo  $v \in {}^{(\mu)}V_{(0,0)}^{(0,0)}$ ,

$$\delta_0(v) = \frac{1}{c_0} J_1^{-1}(X_{-1} \triangleright v \otimes u_{-1} + X_0 \triangleright v \otimes u_0 + X_1 \triangleright v \otimes u_1) = \frac{c_1}{c_0} X_1 \triangleright v.$$

Similarmente, Lema 2.5 y (2.16) nos da

$$\begin{aligned} \delta_1(v) &= \frac{c_2}{c_1} \left( \frac{-1}{[2]_2[3]_2} X_1 F_2 \triangleright v + X_0 \triangleright v \right) = \frac{c_2}{c_1} \left( \frac{-1}{[2]_2[3]_2} E_2^2 E_1 F_2 \triangleright v + E_2 E_1 \triangleright v \right) \\ &= \frac{c_2}{c_1} \left( \frac{-1}{[2]_2[3]_2} (F_2 E_2^2 E_1 \triangleright v + E_2 \frac{K_2 - K_2^{-1}}{q_2 - q_2^{-1}} E_1 \triangleright v + \frac{K_2 - K_2^{-1}}{q_2 - q_2^{-1}} E_2 E_1 \triangleright v) + E_2 E_1 \triangleright v \right) \\ &= \frac{c_2}{c_1} \left( 1 - \frac{1}{[3]_2} - \frac{1}{[2]_2[3]_2} F_2 E_2 \right) E_2 E_1 \triangleright v = \frac{c_2}{c_1} \frac{[3]_2 - 1}{[3]_2} \left( 1 - \frac{1}{[4]_2} F_2 E_2 \right) E_2 E_1 \triangleright v \\ &= \frac{c_2}{c_1} \frac{[3]_2 - 1}{[3]_2} \text{pr}_{(1,2)} \circ X_0(v), \end{aligned}$$

donde hemos aplicado las relaciones de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ ,  $K_2 \triangleright v = q_2^2 v$ ,  $[2]_2([3]_2 - 1) = [4]_2$  y (1.56). Antes de usar (1.56), es importante notar que  $F_2^3 E_1 \triangleright v = E_1 F_2^3 \triangleright v = 0$  para todo  $v \in {}^{(\mu)}V_{(0,2)}^{(0,2)}$ , de tal manera que  $E_1 \triangleright v \in {}^{(\mu)}V_{(2,0)}^{(2,0)} \oplus {}^{(\mu)}V_{(2,0)}^{(1,2)} \oplus {}^{(\mu)}V_{(2,0)}^{(0,4)}$ , y entonces  $E_2 E_1 \triangleright v \in {}^{(\mu)}V_{(1,2)}^{(1,2)} \oplus {}^{(\mu)}V_{(1,2)}^{(0,4)}$ .

De la misma manera, por Lema 2.5 y (2.18),

$$\begin{aligned} \delta_2(v) &= \frac{c_3}{c_2} \left( \frac{1}{[2]_2^2[3]_2} X_1 F_2^2 \triangleright v - \frac{1}{[2]_2} X_0 F_2 \triangleright v + X_{-1} \triangleright v \right) \\ &= \frac{c_3}{c_2} \left( \frac{1}{[2]_2^2[3]_2} E_2^2 E_1 F_2^2 \triangleright v - \frac{1}{[2]_2} E_2 E_1 F_2 \triangleright v + E_1 \triangleright v \right) \\ &= \frac{c_3}{c_2} \left( \frac{1}{[2]_2^2[3]_2} E_2^2 F_2^2 - \frac{1}{[2]_2} E_2 F_2 + 1 \right) E_1 \triangleright v \\ &= \frac{c_3}{c_2} \text{pr}_{(3,0)} \circ X_{-1}(v) \end{aligned}$$

donde usamos el hecho que  $F_2^3 E_1 \triangleright v = 0$  para  $v \in {}^{(\mu)}V_{(1,2)}^{(1,2)}$  lo cual implica que  $E_1 \triangleright v$  pertenece a  ${}^{(\mu)}V_{(3,0)}^{(3,0)} \oplus {}^{(\mu)}V_{(3,0)}^{(2,2)} \oplus {}^{(\mu)}V_{(3,0)}^{(1,4)}$  de tal manera que (1.58) puede ser aplicado.  $\square$

COMENTARIO 2.7. La razón del por qué no aparece la proyección  $\text{pr}_{(0,2)}$  en (2.41) es que  $F_2 E_1 \triangleright v = E_1 F_2 \triangleright v = 0$  lo cual implica que  $E_1 \triangleright v \in {}^{(\mu)}V_{(2,-2)}^{(0,2)}$  es un vector de peso mas bajo para  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$ , entonces  $X_1 \triangleright v = E_2^2 E_1 \triangleright v$  ya pertenece a  ${}^{(\mu)}V_{(0,2)}^{(0,2)}$ .

Para determinar el espectro del operador de Dirac definido como la cerradura del operador  $\bar{\partial} + \bar{\partial}^\dagger$ , comenzamos con el cálculo de los valores propios de  $\bar{\partial}_j^\dagger \bar{\partial}_j$  and  $\bar{\partial}_j \bar{\partial}_j^\dagger$ . Para esto, necesitamos una descripción explícita del adjunto  $\bar{\partial}_j^\dagger$  de  $\bar{\partial}_j$ . Recalquemos que los operadores  $\bar{\partial}_j$  en el Corolario 2.6 son descritos por acciones de elementos de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  y que el producto interno sobre  ${}^{(\mu)}V_{\lambda_k}^{\lambda_k}$  es dado por el estado de Haar. Como se mencionó en la Sección 1, el adjunto con respecto a la representación regular izquierda  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  sobre  $\mathcal{O}(\text{SO}_q(5))$  coincide con el elemento conjugado en la \*-álgebra  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ . Sin embargo, no podemos simplemente aplicar la involución de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  a  $\bar{\partial}_j$  ya que, en general, estos elementos adjuntos de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  no dejan el complemento ortogonal  $({}^{(\mu)}V_{\lambda_k}^{\lambda_k})^\perp \subset \mathcal{O}(\text{SO}_q(5))$  invariante. En este caso, será necesario hacer la proyección sobre el espacio de peso correcto. El siguiente lema establece fórmulas explícitas para los adjuntos de los  $\bar{\partial}_j$ ,  $j = 0, 1, 2$ , usando la proyección de (1.56) y (1.58).

LEMA 2.8. *Los adjuntos de los operadores  $\bar{\partial}_0$ ,  $\bar{\partial}_1$  y  $\bar{\partial}_2$  del Corolario 2.6 son dados por*

$$(2.44) \quad \bar{\partial}_0^\dagger : {}^{(\mu)}V_{(0,2)}^{(0,2)} \longrightarrow {}^{(\mu)}V_{(0,0)}^{(0,0)}, \quad \bar{\partial}_0^\dagger(v) = q^2 \frac{c_1}{c_0} \text{pr}_{(0,0)} \circ F_1 F_2^2 \triangleright v,$$

$$(2.45) \quad \bar{\partial}_1^\dagger : {}^{(\mu)}V_{(1,2)}^{(1,2)} \longrightarrow {}^{(\mu)}V_{(0,2)}^{(0,2)}, \quad \bar{\partial}_1^\dagger(v) = q^2 \frac{c_2}{c_1} \frac{[3]_2 - 1}{[3]_2} \text{pr}_{(0,2)} \circ F_1 F_2 \triangleright v,$$

$$(2.46) \quad \bar{\partial}_2^\dagger : {}^{(\mu)}V_{(3,0)}^{(3,0)} \longrightarrow {}^{(\mu)}V_{(1,2)}^{(1,2)}, \quad \bar{\partial}_2^\dagger(v) = q^2 \frac{c_3}{c_2} F_1 \triangleright v.$$

DEMOSTRACIÓN. Del hecho de que la  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ -acción izquierda sobre  $\mathcal{O}(\text{SO}_q(5))$  define una \*-representación de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  con respecto al producto interno (1.19), las relaciones de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  y (1.54), obtenemos para todo  $v_0 \in {}^{(\mu)}V_{(0,0)}^{(0,0)}$  y  $v_1 \in {}^{(\mu)}V_{(0,2)}^{(0,2)}$

$$(2.47) \quad \langle v_1, X_1 \triangleright v_0 \rangle_h = \langle X_1^* \triangleright v_1, v_0 \rangle_h = q^{-1} \langle F_1 K_1 (F_2 K_2)^2 \triangleright v_1, v_0 \rangle_h = q^2 \langle F_1 F_2^2 \triangleright v_1, v_0 \rangle_h.$$

Ya que  $E_2^3 F_1 F_2^2 \triangleright v_1 = F_1 E_2^3 F_2^2 \triangleright v_1 = [2]_2^2 F_1 E_2 \triangleright v_1 = 0$  por (1.5) y (1.54), se sigue que  $F_1 F_2^2 \triangleright v_1 \in {}^{(\mu)}V_{(0,0)}^{(0,0)} \oplus {}^{(\mu)}V_{(0,0)}^{(-1,2)} \oplus {}^{(\mu)}V_{(0,0)}^{(-2,4)}$ , donde la ortogonalidad de la descomposición resulta del teorema de Peter-Weyl. Para elegir el elemento en  ${}^{(\mu)}V_{(0,0)}^{(0,0)}$  sin alterar el producto interno (2.47), aplicamos la proyección ortogonal  $\text{pr}_{(0,0)}$  de (1.58) y obtenemos  $\langle v_1, \bar{\partial}_0 v_0 \rangle_h = \frac{c_1}{c_0} q^2 \langle \text{pr}_{(0,0)} \circ F_1 F_2^2 \triangleright v_1, v_0 \rangle_h$  lo cual prueba (2.44).

De la ortogonalidad de la descomposición de Peter-Weyl y la definición de  $\text{pr}_{(1,2)}$  después de la ecuación (1.56), se sigue que  $\langle v_2, \text{pr}_{(1,2)} \circ X_0 \triangleright v_1 \rangle_h = \langle v_2, X_0 \triangleright v_1 \rangle_h$  para todo  $v_1 \in {}^{(\mu)}V_{(0,2)}^{(0,2)}$  y  $v_2 \in$

${}^{(\mu)}V_{(1,2)}^{(1,2)}$ . Como en el párrafo previo, necesitamos combinar la acción de  $X_0^* = F_1 F_2 K_1 K_2$  sobre  $v_2$  con la proyección ortogonal sobre  ${}^{(\mu)}V_{(0,2)}^{(0,2)}$ . Ya que  $E_2^2 F_1 F_2 \triangleright v_2 = [2]_2 F_1 E_2 v_2 = 0$ , concluimos que  $F_1 F_2 \triangleright v_2 \in {}^{(\mu)}V_{(0,2)}^{(0,2)} \oplus {}^{(\mu)}V_{(0,2)}^{(-1,4)}$  de tal manera que podemos aplicar la proyección ortogonal  $\text{pr}_{(0,2)}$  de (1.56). Esto nos lleva a

$$\langle v_2, \check{\delta}_1 v_1 \rangle_h = \frac{c_2}{c_1} \frac{[3]_2 - 1}{[3]_2} q^2 \langle \text{pr}_{(0,2)} \circ F_1 F_2 \triangleright v_2, v_1 \rangle_h$$

por lo tanto (2.45) se cumple.

Análogamente, tenemos para todo  $v_2 \in {}^{(\mu)}V_{(1,2)}^{(1,2)}$  y  $v_3 \in {}^{(\mu)}V_{(3,0)}^{(3,0)}$

$$(2.48) \quad \langle v_3, \check{\delta}_2 v_2 \rangle_h = \frac{c_3}{c_2} \langle v_3, \text{pr}_{(3,0)} \circ X_{-1} \triangleright v_2 \rangle_h = \frac{c_3}{c_2} \langle v_3, X_{-1} \triangleright v_2 \rangle_h = q^2 \frac{c_3}{c_2} \langle F_1 \triangleright v_3, v_2 \rangle_h.$$

Ya que  $E_2 F_1 \triangleright v_3 = F_1 E_2 \triangleright v_3 = 0$ , se sigue que  $F_1 \triangleright v_3 \in {}^{(\mu)}V_{(1,2)}^{(1,2)}$ , por lo tanto no necesitamos aplicar una proyección ortogonal y consecuentemente (2.48) nos lleva a (2.46).  $\square$

COMENTARIO 2.9. Notemos que  $\bar{\partial}^\dagger$  es densamente definido ya que si  $u \in \binom{(n,l)}{(n,l)}\Omega^{(0,k)}$  y  $v \in \binom{(m,s)}{(m,s)}\Omega^{(0,r)}$ , entonces por Lema 2.5, Corolario 2.6 y Lema 2.8

$$\langle \bar{\partial}(u), v \rangle = \langle \bar{\partial} J_k(a), J_r(b) \rangle = \delta_{k+1,r} \langle J_r^* \bar{\partial} J_k(a), b \rangle = \delta_{k+1,r} \langle \check{\delta}_k(a), b \rangle = \delta_{k+1,r} \langle a, \check{\delta}_k^\dagger b \rangle = \delta_{k+1,r} \langle u, J_k \check{\delta}_k^\dagger J_r^* v \rangle,$$

donde  $a \in \binom{(n,l)}{(n,l)}V_{\lambda_k}^{\lambda_k}$  y  $b \in \binom{(m,s)}{(m,s)}V_{\lambda_r}^{\lambda_r}$ . Además el Lema 2.4 implica que  $\bar{\partial}_k^\dagger$  es también equivariante respecto a  $\pi_R$ .





## Capítulo 3

### Valores propios de $\delta_j^\dagger \delta_j$ y $\delta_j \delta_j^\dagger$

El objetivo principal de este capítulo es calcular los valores propios de los operadores autoadjuntos  $\delta_k^\dagger \delta_k$  y  $\delta_k \delta_k^\dagger$  actuando sobre los espacios de Hilbert 1-dimensionales de vectores de peso más alto. El cálculo de valores propios mediante el Casimir es también incluido ya que fue parte de nuestra investigación y podría ser útil en ejemplos parecidos.

#### 1. Espectro de $\bar{\delta} + \bar{\delta}^\dagger$

Ya que las proyecciones y por lo tanto todos los operadores apareciendo en Corolario 2.6 y Lema 2.8 pueden ser expresados por actuar con elementos de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ , podemos calcular los valores propios directamente por actuar con estos operadores sobre los vectores de peso más alto de la Proposición 2.3. El siguiente lema muestra que es suficiente calcular los valores propios de  $\delta_j \delta_j^\dagger$  y  $\delta_j^\dagger \delta_j$  sobre una cierta colección de espacios 1-dimensionales de la Proposición 2.3, los otros valores propios pueden ser deducidos de estos.

**LEMA 3.1.** *a) En la notación de la Proposición 2.3 y con  $\lambda_k$  definida en (2.10), sea  $\mu \in \mathbb{N}_0 \times 2\mathbb{N}_0$  tal que  $\dim({}^{(\mu)}V_{\lambda_k}^{\lambda_k}) = \dim({}^{(\mu)}V_{\lambda_{k+1}}^{\lambda_{k+1}}) = 1$ . Entonces los operadores 1-dimensionales  $\delta_k^\dagger \delta_k : {}^{(\mu)}V_{\lambda_k}^{\lambda_k} \rightarrow {}^{(\mu)}V_{\lambda_k}^{\lambda_k}$  y  $\delta_k \delta_k^\dagger : {}^{(\mu)}V_{\lambda_{k+1}}^{\lambda_{k+1}} \rightarrow {}^{(\mu)}V_{\lambda_{k+1}}^{\lambda_{k+1}}$  tienen el mismo valor propio.*

*b) Sea  $\mu \in \mathbb{N}_0 \times 2\mathbb{N}_0$  y  $k \in \{1, 2\}$  tal que  $\dim({}^{(\mu)}V_{\lambda_k}^{\lambda_k}) = 2$ . Asumimos que  $\delta_{k-1}^\dagger \delta_{k-1}$  y  $\delta_k \delta_k^\dagger$  tiene los valores propios no cero  $c_\mu^{k-1}$  y  $d_\mu^{k+1}$  sobre  ${}^{(\mu)}V_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_{k-1}}$  y  ${}^{(\mu)}V_{\lambda_{k+1}}^{\lambda_{k+1}}$ , respectivamente. Entonces existe una base ortogonal  $\{a, b\} \subset {}^{(\mu)}V_{\lambda_k}^{\lambda_k}$  tal que*

$$\delta_{k-1}^\dagger \delta_{k-1}^\dagger(a) = c_\mu^{k-1} a, \quad \delta_{k-1}^\dagger \delta_{k-1}^\dagger(b) = 0, \quad \delta_k^\dagger \delta_k(a) = 0, \quad \delta_k^\dagger \delta_k(b) = d_\mu^{k+1} b.$$

**DEMOSTRACIÓN.**a) Es conocido que  $\text{spec}(T^*T) \setminus \{0\} = \text{spec}(TT^*) \setminus \{0\}$  para todos los operadores  $T$  de la  $C^*$ -álgebra  $B(\mathcal{H})$ . Al considerar el espacio de Hilbert  $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ , no es difícil ver que lo mismo se cumple para operadores  $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ . Ya que  $\dim({}^{(\mu)}V_{\lambda_k}^{\lambda_k}) = \dim({}^{(\mu)}V_{\lambda_{k+1}}^{\lambda_{k+1}}) = 1$ , los valores propios de  $\delta_k^\dagger \delta_k$  y  $\delta_k \delta_k^\dagger$  son o ambos zero, o ambos no zero e iguales.

b) Si  $\dim({}^{(\mu)}V_{\lambda_k}^{\lambda_k}) = 2$ , entonces  $\dim({}^{(\mu)}V_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_{k-1}}) = \dim({}^{(\mu)}V_{\lambda_{k+1}}^{\lambda_{k+1}}) = 1$  por Proposición 2.3. Considerando los operadores 1-dimensionales  $\delta_{k-1} : {}^{(\mu)}V_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_{k-1}} \rightarrow \text{im}(\delta_{k-1}) \subset {}^{(\mu)}V_{\lambda_k}^{\lambda_k}$  y  $\delta_k^\dagger : {}^{(\mu)}V_{\lambda_{k+1}}^{\lambda_{k+1}} \rightarrow \text{im}(\delta_k^\dagger) \subset {}^{(\mu)}V_{\lambda_k}^{\lambda_k}$  se sigue de los mismos argumentos como en la demostración de la parte a) que

$\delta_{k-1} \delta_{k-1}^\dagger(a) = c_\mu^{k-1} a$  para todo  $a \in \text{im}(\delta_{k-1})$  y  $\delta_k^\dagger \delta_k(b) = d_\mu^{k+1} b$  para todo  $b \in \text{im}(\delta_k^\dagger)$ . Además,  $\text{im}(\delta_{k-1}) \neq \{0\}$  y  $\text{im}(\delta_k^\dagger) \neq \{0\}$  ya que los valores propios  $c_\mu^{k-1}$  y  $d_\mu^{k+1}$  son no cero. Como (2.19) es un complejo, tenemos  $\text{im}(\delta_{k-1}) \subset \ker(\delta_k) = \text{im}(\delta_k^\dagger)^\perp$ . Por lo tanto cualquier par de elementos no cero  $a \in \text{im}(\delta_{k-1})$  y  $b \in \text{im}(\delta_k^\dagger)$  nos llevan a la base ortogonal requerida.  $\square$

El siguiente lema muestra como los valores y vectores propios de los ‘‘Laplacianos’’  $\delta_k^\dagger \delta_k$  y  $\delta_k \delta_k^\dagger$  determinan los valores y vectores propios del operador de Dolbeault-Dirac  $D := \bar{\partial} + \bar{\partial}^\dagger$ .

LEMA 3.2. a) Sean  $\mu \in \mathbb{N}_0 \times 2\mathbb{N}_0$  y  $k \in \{0, 1, 2\}$  dados tal que  $\dim({}^{(\mu)}V_{\lambda_k}^{\lambda_k}) = 1$  y  $\delta_k^\dagger \delta_k(u) = c_\mu^k u$  para  $u \in {}^{(\mu)}V_{\lambda_k}^{\lambda_k}$ , donde  $c_\mu^k > 0$ . Entonces existe una base ortonormal  $\{u_-, u_+\} \subset {}^{(\mu)}\Omega^{(0,k)} \oplus \bar{\partial}_k({}^{(\mu)}\Omega^{(0,k)})$  tal que  $Du_- = -\sqrt{c_\mu^k} u_-$  y  $Du_+ = \sqrt{c_\mu^k} u_+$ .

b) Sean  $\mu \in \mathbb{N}_0 \times 2\mathbb{N}_0$  y  $k \in \{1, 2, 3\}$  dados tal que  $\dim({}^{(\mu)}V_{\lambda_k}^{\lambda_k}) = 1$  y  $\delta_{k-1} \delta_{k-1}^\dagger(v) = d_\mu^k v$  para  $v \in {}^{(\mu)}V_{\lambda_k}^{\lambda_k}$ , donde  $d_\mu^k > 0$ . Entonces existe una base ortonormal  $\{v_-, v_+\} \subset \bar{\partial}_{k-1}^\dagger({}^{(\mu)}\Omega^{(0,k)}) \oplus {}^{(\mu)}\Omega^{(0,k)}$  tal que  $Dv_- = -\sqrt{d_\mu^k} v_-$  y  $Dv_+ = \sqrt{d_\mu^k} v_+$ .

c) Sean  $\mu \in \mathbb{N}_0 \times 2\mathbb{N}_0$  y  $k \in \{1, 2\}$  dados tal que  $\dim({}^{(\mu)}V_{\lambda_k}^{\lambda_k}) = 2$  y asumimos que  $\delta_{k-1}^\dagger \delta_{k-1}(u) = c_\mu^{k-1} u$  para  $u \in {}^{(\mu)}V_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_{k-1}}$  y  $\delta_{k+1} \delta_{k+1}^\dagger(v) = d_\mu^{k+1} v$  para  $v \in {}^{(\mu)}V_{\lambda_{k+1}}^{\lambda_{k+1}}$  con  $c_\mu^{k-1} > 0$  y  $d_\mu^{k+1} > 0$ . Entonces existe una base ortonormal  $\{u_-, u_+, v_-, v_+\}$  en  ${}^{(\mu)}\Omega^{(0,k-1)} \oplus {}^{(\mu)}\Omega^{(0,k)} \oplus {}^{(\mu)}\Omega^{(0,k+1)}$  tal que  $Du_\pm = \pm \sqrt{c_\mu^{k-1}} u_\pm$  y  $Dv_\pm = \pm \sqrt{d_\mu^{k+1}} v_\pm$ .

DEMOSTRACIÓN.a) Consideremos  $u \in {}^{(\mu)}V_{\lambda_k}^{\lambda_k} \setminus \{0\}$ . Con el operador unitario  $J_k$  del Lema 2.5, sean  $\tilde{u} := J_k(u) \in {}^{(\mu)}\Omega^{(0,k)}$  y  $\tilde{w} := \bar{\partial}_k(\tilde{u}) \in {}^{(\mu)}\Omega^{(0,k+1)}$ . Entonces

$$\bar{\partial}_k^\dagger(\tilde{w}) = J_k J_k^* \bar{\partial}_k^\dagger \bar{\partial}_k J_k(u) = J_k \delta_k^\dagger \delta_k(u) = c_\mu^k J_k(u) = c_\mu^k \tilde{u}.$$

En particular,  $\tilde{w} \neq 0$  ya que  $c_\mu^k \neq 0$  y  $\tilde{u} \neq 0$ . Además,  $\pm \sqrt{c_\mu^k} \tilde{u} + \tilde{w} \neq 0$  ya que  $\tilde{u} \perp \tilde{w}$ , y  $\bar{\partial}_{k+1}(\tilde{w}) = \bar{\partial}_{k+1} \bar{\partial}_k(\tilde{u}) = 0 = \frac{1}{c_\mu^k} \bar{\partial}_{k-1}^\dagger \bar{\partial}_k^\dagger(\tilde{w}) = \bar{\partial}_{k-1}^\dagger(\tilde{u})$  ya que (2.19) es un complejo y  $\bar{\partial}_{k-1}^\dagger \bar{\partial}_k^\dagger \subseteq (\bar{\partial}_k \bar{\partial}_{k-1})^\dagger$ . Por lo tanto,

$$D(\pm \sqrt{c_\mu^k} \tilde{u} + \tilde{w}) = \pm \sqrt{c_\mu^k} \bar{\partial}_k(\tilde{u}) + \bar{\partial}_k^\dagger(\tilde{w}) = \pm \sqrt{c_\mu^k} \tilde{w} + c_\mu^k \tilde{u} = \pm \sqrt{c_\mu^k} (\pm \sqrt{c_\mu^k} \tilde{u} + \tilde{w}).$$

En particular,  $\sqrt{c_\mu^k} \tilde{u} + \tilde{w}$  y  $-\sqrt{c_\mu^k} \tilde{u} + \tilde{w}$  son ortogonales por que son vectores propios correspondientes a distintos valores propios del operador simétrico  $D = \bar{\partial} + \bar{\partial}^\dagger$ . Finalmente, definiendo  $u_\pm := \frac{1}{\|\pm \sqrt{c_\mu^k} \tilde{u} + \tilde{w}\|} (\pm \sqrt{c_\mu^k} \tilde{u} + \tilde{w})$  nos da la base ortonormal requerida.

b) Para  $v \in {}^{(\mu)}V_{\lambda_k} \setminus \{0\}$ , sea  $v_\pm := \frac{1}{\|\bar{\partial}_{k-1}^\dagger(J_k(v)) \pm \sqrt{d_\mu^k} J_k(v)\|} (\bar{\partial}_{k-1}^\dagger J_k(v)) \pm \sqrt{d_\mu^k} J_k(v)$ . Por argumentos similares como en a), puede ser mostrado que  $\{v_-, v_+\}$  es una base ortonormal de  $\bar{\partial}^\dagger({}^{(\mu)}\Omega^{(0,k)}) \oplus {}^{(\mu)}\Omega^{(0,k)}$  tal que  $Dv_\pm = \pm \sqrt{d_\mu^k} v_\pm$ .

c) Si  $\dim({}^{(\mu)}V_{\lambda_k}) = 2$ , entonces  $\dim({}^{(\mu)}V_{\lambda_{k-1}}) = \dim({}^{(\mu)}V_{\lambda_{k+1}}) = 1$  por Proposición 2.3. Aplicando a) y b) a  $u \in {}^{(\mu)}V_{\lambda_{k-1}} \setminus \{0\}$  y  $v \in {}^{(\mu)}V_{\lambda_{k+1}} \setminus \{0\}$  nos da una base ortonormal  $\{u_-, u_+\} \subset {}^{(\mu)}\Omega^{(0,k-1)} \oplus \bar{\partial}_{k-1}({}^{(\mu)}\Omega^{(0,k-1)})$  correspondiente a los valores propios  $\pm \sqrt{c_\mu^{k-1}}$  y también una base ortonormal  $\{v_-, v_+\} \subset \bar{\partial}_k^\dagger({}^{(\mu)}\Omega^{(0,k+1)}) \oplus {}^{(\mu)}\Omega^{(0,k+1)}$  correspondiente a los valores propios  $\pm \sqrt{d_\mu^{k+1}}$ . Como  $\text{im}(\bar{\partial}_{k-1}) \subset \ker(\bar{\partial}_k) \perp \text{im}(\bar{\partial}_k^\dagger)$ , concluimos que  $\{u_-, u_+\} \perp \{v_-, v_+\}$ , entonces la unión  $\{u_-, u_+, v_-, v_+\}$  es una base ortonormal del espacio 4-dimensional  ${}^{(\mu)}\Omega^{(0,k-1)} \oplus {}^{(\mu)}\Omega^{(0,k)} \oplus {}^{(\mu)}\Omega^{(0,k+1)}$ .  $\square$

El lema previo nos permite deducir una lista completa de vectores propios y multiplicidades del operador de Dolbeault-Dirac a partir de los valores propios de los ‘‘Laplacianos’’  $\delta_k^\dagger \delta_k$  y  $\delta_k \delta_k^\dagger$  sobre espacios de peso más alto 1-dimensionales. Las siguientes secciones son dedicadas a calcular los valores propios sobre estos espacios.

## 2. Valores propios de $\delta_0^\dagger \delta_0$

Recalquemos que  $z_1 = u_1^1 u_5^1$  y  $z_2 = u_1^1 u_5^2 - qu_1^2 u_5^1$  y por (1.43) tenemos

$$(3.1) \quad z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

Además, definimos

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \acute{z}_1 &:= E_1(z_1) = qu_2^1 u_5^1, & \acute{z}_2 &:= E_1(z_2) = q(u_2^1 u_5^2 - qu_2^2 u_5^1), \\ \grave{z}_1 &:= F_1(z_1) = -qu_1^1 u_4^1, & \grave{z}_2 &:= F_1(z_2) = -q(u_1^1 u_4^2 - qu_1^2 u_4^1). \end{aligned}$$

Entonces

$$(3.3) \quad z_1 \acute{z}_1 = q^2 \acute{z}_1 z_1, \quad z_1 \acute{z}_2 = q^2 \acute{z}_2 z_1, \quad z_2 \acute{z}_1 = \acute{z}_1 z_2 - (1 - q^2) \acute{z}_2 z_1, \quad z_2 \acute{z}_2 = q^2 \acute{z}_2 z_2,$$

$$(3.4) \quad \acute{z}_1 \grave{z}_1 = q^2 \acute{z}_1 \grave{z}_1, \quad \acute{z}_2 \grave{z}_1 = q^2 \acute{z}_1 \grave{z}_2, \quad \acute{z}_1 \grave{z}_2 = \acute{z}_2 \grave{z}_1 - (1 - q^2) \acute{z}_1 \grave{z}_2, \quad \acute{z}_2 \grave{z}_2 = q^2 \acute{z}_2 \grave{z}_2.$$

La primera, segunda y cuarta ecuación en (3.3) y (3.4) ha sido demostrada en Lema 1.1. Usando estas relaciones, la tercera ecuación en (3.3) y (3.4) se sigue por actuar con  $E_1$  y  $F_1$  sobre ambos lados de (3.1), respectivamente. Antes de pasar con el cálculo de los valores propios se darán dos lemas auxiliares.

LEMA 3.3. Sean  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{N}_0 \times 2\mathbb{N}_0$ ,  $(m, j), (r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$  y sean  $v \in \binom{(\mu_1)}{\mu_1} V_{(m,j)}^{(m,j)}$  y  $w \in \binom{(\mu_2)}{\mu_2} V_{(r,s)}^{(r-1,s+2)}$ , entonces

$$(3.5) \quad wv, vw \in \binom{(\mu_1+\mu_2)}{\mu_1+\mu_2} V_{(m+r,j+s)}^{(m+r,j+s)} \oplus \binom{(\mu_1+\mu_2)}{\mu_1+\mu_2} V_{(m+r,j+s)}^{(m+r-1,j+s+2)}.$$

Similarmente, si  $w \in \binom{(\mu_2)}{\mu_2} V_{(r,s)}^{(r-2,s+4)}$ , entonces

$$(3.6) \quad wv, vw \in \binom{(\mu_1+\mu_2)}{\mu_1+\mu_2} V_{(m+r,j+s)}^{(m+r,j+s)} \oplus \binom{(\mu_1+\mu_2)}{\mu_1+\mu_2} V_{(m+r,j+s)}^{(m+r-1,j+s+2)} \oplus \binom{(\mu_1+\mu_2)}{\mu_1+\mu_2} V_{(m+r,j+s)}^{(m+r-2,j+s+4)},$$

y si  $w \in \binom{(\mu_2)}{\mu_2} V_{(r,s)}^{(r,s)}$ , entonces

$$(3.7) \quad wv, vw \in \binom{(\mu_1+\mu_2)}{\mu_1+\mu_2} V_{(m+r,j+s)}^{(m+r,j+s)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Solo demostraremos (3.5) ya que la demostración de (3.6) y (3.7) es análoga. Ya que el peso del producto es la suma de los pesos individuales, tenemos que  $wv$  es un vector de peso más alto de peso  $\mu_1 + \mu_2$  con respecto a la representación regular derecha y un vector de peso  $(m+r, j+s)$  con respecto a la  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$ -representación izquierda. Por otro lado  $E_2 \triangleright v = 0$  y  $E_2^2 \triangleright w = 0$  implican

$$E_2^2 \triangleright (wv) = (E_2^2 \triangleright w)(K_2^2 \triangleright v) + (E_2 \triangleright w)(E_2 K_2 \triangleright v) + (E_2 \triangleright w)(K_2 E_2 \triangleright v) + w(E_2^2 \triangleright v) = 0.$$

Por un argumento similar al párrafo siguiendo ecuación (2.47) obtenemos (3.5).  $\square$

En el siguiente Lema damos las proyecciones necesarias para calcular los valores propios sobre  $\binom{(2n,2l)}{(2n,2l)} V_{(0,0)}^{(0,0)}$ .

LEMA 3.4. Con la notación anterior y la proyección  $\text{pr}_{(0,0)}$  definida en (1.58),

$$(3.8) \quad \text{pr}_{(0,0)}(\hat{z}_1 \hat{z}_1) = q^{-3/2} \frac{[2]_2}{[3]_2} z_1^2,$$

$$(3.9) \quad \text{pr}_{(0,0)}(\hat{z}_2 \hat{z}_2) = \frac{q^4}{[3]_2} z_2^2,$$

$$(3.10) \quad \text{pr}_{(0,0)}(\hat{z}_2 \hat{z}_1) = \frac{q^{-2}}{[3]_2} z_2 z_1,$$

$$(3.11) \quad \text{pr}_{(0,0)}(\hat{z}_2 \hat{z}_1) = \frac{q^4}{[3]_2} z_2 z_1,$$

$$(3.12) \quad \text{pr}_{(0,0)}(F_1(\hat{z}_1)) = \frac{[5]_2}{[3]_2} z_1,$$

$$(3.13) \quad \text{pr}_{(0,0)}(F_1(\hat{z}_2)) = ([2]_1 - 1) z_2.$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que  $\hat{z}_1 \hat{z}_1 = -u_2^1 u_4^1 z_1$ , donde  $u_2^1 u_4^1 \in \binom{(2,0)}{(2,0)} V$  tiene peso  $(0,0)$  con respecto a la  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ -acción izquierda. Además, el espacio de vectores de peso  $(0,0)$  en  $\binom{(2,0)}{(2,0)} V$  tiene dimensión 2 y es dado por la suma ortogonal  $\binom{(2,0)}{(2,0)} V_{(0,0)}^{(0,0)} \oplus \binom{(2,0)}{(2,0)} V_{(0,0)}^{(-2,4)}$  de espacios 1-dimensionales. Por lo tanto, por Lema 1.3,

$$(3.14) \quad \text{pr}_{(0,0)}(\hat{z}_1 \hat{z}_1) = -\text{pr}_{(0,0)}(u_2^1 u_4^1) z_1.$$

El único vector de peso más alto en  $\binom{(2,0)}{(2,0)} V_{(-2,4)}^{(-2,4)}$  es dado por  $(u_4^1)^2$ . Entonces  $\binom{(2,0)}{(2,0)} V_{(0,0)}^{(-2,4)}$  es generado por  $F_2^2((u_4^1)^2)$ . Aplicando (1.13), (1.15) y usando las relaciones de conmutación (1.22) y (1.27) tenemos que  $F_2((u_4^1)^2) = q^{-1/2} [2]_2^{1/2} (1 + q^{-2}) u_3^1 u_4^1$  y

$$\begin{aligned} \frac{1}{[2]_2^{1/2}} F_2(u_3^1 u_4^1) &= u_2^1 u_4^1 - q^{-1/2} u_3^1 u_3^1 = (1 + q^{-1} + q^{-2}) u_2^1 u_4^1 + q^{-5/2} [2]_2 u_1^1 u_5^1 \\ &= q^{-1} [3]_2 (u_2^1 u_4^1 + q^{-3/2} \frac{[2]_2}{[3]_2} u_1^1 u_5^1). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\binom{(2,0)}{(2,0)} V_{(0,0)}^{(-2,4)} = \text{Lin}\{u_2^1 u_4^1 + q^{-3/2} \frac{[2]_2}{[3]_2} u_1^1 u_5^1\}$  y

$$u_2^1 u_4^1 = -q^{-3/2} \frac{[2]_2}{[3]_2} u_1^1 u_5^1 \oplus (u_2^1 u_4^1 + q^{-3/2} \frac{[2]_2}{[3]_2} u_1^1 u_5^1) \in \binom{(2,0)}{(2,0)} V_{(0,0)}^{(0,0)} \oplus \binom{(2,0)}{(2,0)} V_{(0,0)}^{(-2,4)},$$

entonces

$$(3.15) \quad \text{pr}_{(0,0)}(u_2^1 u_4^1) = -q^{-3/2} \frac{[2]_2}{[3]_2} u_1^1 u_5^1 = -q^{-3/2} \frac{[2]_2}{[3]_2} z_1$$

y por (3.14), tenemos

$$\text{pr}_{(0,0)}(\zeta_1 \zeta_1) = q^{-3/2} \frac{[2]_2}{[3]_2} z_1^2,$$

lo cual prueba (3.8).

Además,  $F_1(\zeta_1) = q F_1(u_2^1 u_5^1) = q u_1^1 u_5^1 - u_2^1 u_4^1$  de tal manera que podemos aplicar (3.15) y obtener

$$\text{pr}_{(0,0)}(F_1(\zeta_1)) = (q + q^{-3/2} \frac{[2]_2}{[3]_2}) z_1 = \frac{[5]_2}{[3]_2} z_1.$$

Análogamente,  $F_1(\zeta_2) \in \binom{(0,2)}{(0,2)} V = \binom{(0,2)}{(0,2)} V_{(0,0)}^{(0,0)} \oplus \binom{(0,2)}{(0,2)} V_{(0,0)}^{(-1,2)}$ , donde los espacios en la suma ortogonal son 1-dimensionales. Ya que  $u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1$  es el único vector de peso más alto en  $\binom{(0,2)}{(0,2)} V_{(-1,2)}^{(-1,2)}$ , se sigue que  $\binom{(0,2)}{(0,2)} V_{(0,0)}^{(-1,2)}$  es generado por

$$\begin{aligned} \frac{q}{[2]_2^{1/2}} F_2(u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) &= q(u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1) - q^{1/2} (u_3^1 u_3^2 - q u_3^2 u_3^1) \\ (3.16) \quad &= (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1) + (q^{-1} - 1) z_2, \end{aligned}$$

donde hemos usado (1.30) y la definición de  $z_2$  en la última ecuación. Por lo tanto

$$\begin{aligned} F_1(\zeta_2) &= q(u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) - (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1) \\ &= ([2]_1 - 1) z_2 \oplus (-1)(u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1) + (q^{-1} - 1) z_2, \end{aligned}$$

lo cual nos lleva a  $\text{pr}_{(0,0)}(F_1(\zeta_2)) = ([2]_1 - 1) z_2$ .

Para calcular  $\text{pr}_{(0,0)}(\zeta_2 \zeta_1)$  primero notemos que  $\zeta_2 \in \binom{(0,2)}{(0,2)} V_{(-2,2)}^{(-2,2)}$  y  $\zeta_1 \in \binom{(2,0)}{(2,0)} V_{(2,-2)}^{(0,2)}$ , entonces por Lema 3.3 el producto  $\zeta_2 \zeta_1 \in \binom{(2,2)}{(2,2)} V_{(0,0)}^{(0,0)} \oplus \binom{(2,2)}{(2,2)} V_{(0,0)}^{(-1,2)} \oplus \binom{(2,2)}{(2,2)} V_{(0,0)}^{(-2,4)}$  y

$$(3.17) \quad -q^{-2} \text{pr}_{(0,0)}(\zeta_2 \zeta_1) = \text{pr}_{(0,0)}((u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_2^1 u_5^1) \in \binom{(2,2)}{(2,2)} V_{(0,0)}^{(0,0)}.$$

Calculamos

$$F_2 E_2((u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_2^1 u_5^1) = q^{-1} [2]_2 (-q^{1/2} (u_1^1 u_3^2 - q u_1^2 u_3^1) u_3^1 u_5^1 + (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_2^1 u_5^1),$$

$$F_2^2 E_2^2((u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_2^1 u_5^1) = [2]_2^2((u_1^1 u_2^2 - q u_1^2 u_2^1) u_4^1 u_5^1 - q^{-1/2}(u_1^1 u_3^2 - q u_1^2 u_3^1) u_3^1 u_5^1 \\ - q^{-3/2}(u_1^1 u_3^2 - q u_1^2 u_3^1) u_3^1 u_5^1 + q^{-2}(u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_2^1 u_5^1).$$

Entonces

$$-q^{-2} \text{pr}_{(0,0)}(\dot{z}_2 \dot{z}_1) = (1 - q^{-1} + \frac{q^{-2}}{[3]_2})(u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_2^1 u_5^1 + (q^{-1/2} - \frac{(q^{-1/2} + q^{-3/2})}{[3]_2})(u_1^1 u_3^2 - q u_1^2 u_3^1) u_3^1 u_5^1 \\ (3.18) \quad + \frac{1}{[3]_2}(u_1^1 u_2^2 - q u_1^2 u_2^1) u_4^1 u_5^1.$$

Por Proposición 2.3 tenemos  $\binom{(2,2)}{(2,2)} V_{(0,0)}^{(0,0)} = \text{Lin}\{z_2 z_1\}$  y por lo tanto

$$(1 - q^{-1} + \frac{q^{-2}}{[3]_2})(u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_2^1 u_5^1 + (q^{-1/2} - \frac{(q^{-1/2} + q^{-3/2})}{[3]_2})(u_1^1 u_3^2 - q u_1^2 u_3^1) u_3^1 u_5^1 \\ (3.19) \quad + \frac{1}{[3]_2}(u_1^1 u_2^2 - q u_1^2 u_2^1) u_4^1 u_5^1 = \alpha(u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) u_1^1 u_5^1.$$

para algún  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Como  $O_q(SO(5))$  es un dominio, este es equivalente a

$$(1 - q^{-1} + \frac{q^{-2}}{[3]_2})(u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_2^1 + (q^{-1/2} - \frac{(q^{-1/2} + q^{-3/2})}{[3]_2})(u_1^1 u_3^2 - q u_1^2 u_3^1) u_3^1 \\ (3.20) \quad - \frac{1}{[3]_2}(u_1^1 u_2^2 - q u_1^2 u_2^1) u_4^1 = \alpha(u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) u_1^1.$$

Actuando con  $F_1$  sobre ambos lados de (3.20) obtenemos

$$q^2(1 - q^{-1} + \frac{q^{-2}}{[3]_2})(u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_1^1 = -q\alpha(u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_1^1.$$

lo cual implica

$$\alpha = -q(1 - q^{-1} + \frac{q^{-2}}{[3]_2}) = \frac{-q^2}{[3]_2}.$$

Esto nos da (3.11).

Similarmente para el cálculo de  $\text{pr}_{(0,0)}(\dot{z}_2 \dot{z}_1)$  observemos que  $\dot{z}_2 \in \binom{(0,2)}{(0,2)} V_{(2,-2)}^{(0,2)}$  y  $\dot{z}_1 \in \binom{(2,0)}{(2,0)} V_{(-2,2)}^{(-2,2)}$ . El Lema 3.3 nos da  $\dot{z}_2 \dot{z}_1 \in \binom{(2,2)}{(2,2)} V_{(0,0)}^{(0,0)} \oplus \binom{(2,2)}{(2,2)} V_{(0,0)}^{(-1,2)} \oplus \binom{(2,2)}{(2,2)} V_{(0,0)}^{(-2,4)}$  y por lo tanto

$$(3.21) \quad \text{pr}_{(0,0)}(\dot{z}_2 \dot{z}_1) = -q^2 \text{pr}_{(0,0)}((u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_1^1 u_4^1) \in \binom{(2,2)}{(2,2)} V_{(0,0)}^{(0,0)}.$$

Calculando las acciones

$$F_2 E_2((u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_1^1 u_4^1) = q[2]_2((u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_1^1 u_4^1 - q^{-1/2}(u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_1^1 u_3^1),$$

$$F_2^2 E_2^2((u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_1^1 u_4^1) = q^2[2]_2^2((u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_1^1 u_4^1 - q^{-1/2}(u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_1^1 u_3^1 \\ - q^{-3/2}(u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_1^1 u_3^1 + q^{-2}(u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_1^1 u_2^1).$$

Entonces

$$-q^{-2} \text{pr}_{(0,0)}(\dot{z}_2 \dot{z}_1) = (1 - q + \frac{q^2}{[3]_2})(u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_1^1 u_4^1 + (q^{1/2} - \frac{(q^{3/2} + q^{1/2})}{[3]_2})(u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_1^1 u_3^1 \\ (3.22) \quad + \frac{1}{[3]_2}(u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_1^1 u_2^1.$$

Ya que  ${}_{(2,2)}^{(2,2)}V_{(0,0)}^{(0,0)} = \text{Lin}\{z_2 z_1\}$  tenemos

$$(3.23) \quad \begin{aligned} & (1 - q + \frac{q^2}{[3]_2})(u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_1^1 u_4^1 + (q^{1/2} - \frac{(q^{3/2} + q^{1/2})}{[3]_2})(u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_1^1 u_3^1 \\ & + \frac{1}{[3]_2}(u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_1^1 u_2^1 = \alpha(u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) u_1^1 u_5^1, \end{aligned}$$

para algún  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Como  $\mathcal{O}(SO_q(5))$  es un dominio (3.23) es equivalente a

$$(3.24) \quad \begin{aligned} & (1 - q + \frac{q^2}{[3]_2})(u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_4^1 + (q^{1/2} - \frac{(q^{3/2} + q^{1/2})}{[3]_2})(u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_3^1 \\ & + \frac{1}{[3]_2}(u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_2^1 = q\alpha(u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) u_5^1. \end{aligned}$$

Actuando con  $E_1$  en ambos lados obtenemos

$$(3.25) \quad -(1 - q + \frac{q^2}{[3]_2})(u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_5^1 = q^3 \alpha(u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_5^1,$$

lo cual implica  $\alpha = -\frac{q^{-4}}{[3]_2}$  y junto con (3.21) nos lleva a (3.10).

Finalmente para demostrar (3.9) tenemos que  $\hat{z}_2 \in {}_{(0,2)}^{(0,2)}V_{(-2,2)}^{(-2,2)}$  y  $\hat{z}_2 \in {}_{(0,2)}^{(0,2)}V_{(2,-2)}^{(0,2)}$ . Entonces Lema 3.3 nos da

$$\hat{z}_2 \hat{z}_2 = -q^2(u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1)(u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) \in {}_{(0,4)}^{(0,4)}V_{(0,0)}^{(0,0)} \oplus {}_{(0,4)}^{(0,4)}V_{(0,0)}^{(-1,2)} \oplus {}_{(0,4)}^{(0,4)}V_{(0,0)}^{(-2,4)}.$$

Calculando las acciones

$$\begin{aligned} & F_2 E_2((u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1)(u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1)) \\ & = [2]_2(-q^{-1/2}(u_1^1 u_3^2 - q u_1^2 u_3^1)(u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) + q^{-1}(u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1)(u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & F_2^2 E_2^2((u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1)(u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1)) = [2]_2^2((u_1^1 u_2^2 - q u_1^2 u_2^1)(u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) \\ & - (q^{-1/2} + q^{-3/2})(u_1^1 u_3^2 - q u_1^2 u_3^1)(u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) + q^{-2}(u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1)(u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1)). \end{aligned}$$

Ya que  $\text{pr}_{(0,0)}(\hat{z}_2 \hat{z}_2) \in {}_{(0,4)}^{(0,4)}V_{(0,0)}^{(0,0)} = \text{Lin}\{z_2^2\}$  tenemos

$$(3.26) \quad \begin{aligned} & (1 - q^{-1} + \frac{q^{-2}}{[3]_2})(u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1)(u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) + (q^{-1/2} - \frac{(q^{-1/2} + q^{-3/2})}{[3]_2})(u_1^1 u_3^2 - q u_1^2 u_3^1)(u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) \\ & + \frac{1}{[3]_2}(u_1^1 u_2^2 - q u_1^2 u_2^1)(u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) = \theta z_2^2, \end{aligned}$$

para algún  $\theta \in \mathbb{C}$ . Ahora aplicando  $E_1^2$  a ambos lados de (3.26) obtenemos

$$-q^4(1 - q^{-1} + \frac{q^{-2}}{[3]_2})(q^{-1} + q)(u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1)^2 = q^2(1 + q^2)\theta(u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1)^2,$$

lo cual implica  $\theta = -q(1 - q^{-1} + \frac{q^{-2}}{[3]_2}) = -\frac{q^2}{[3]_2}$ .  $\square$

**PROPOSICIÓN 3.5.** Sean  $n, l \in \mathbb{N}_0$ . Entonces

$$(3.27) \quad \delta_0^\dagger \delta_0(u_0) = \frac{q^2 c_1^2 [2]_2^2}{c_0^2} \frac{([n+l+2]_1 [n+l]_1 + [n+1]_1 [n]_1)}{[3]_2} u_0, \quad u_0 \in {}_{(2n,2l)}^{(2n,2l)}V_{(0,0)}^{(0,0)} \setminus \{0\}.$$



DEMOSTRACIÓN. Actuando nuevamente en ambos lados de las relaciones en (3.3) por  $E_2$ , y usando  $E_2(z) = 0$  y  $K_2(z) = z$  para todo  $z \in \mathcal{B}$ , obtenemos para  $j = -1, 0, 1$

$$(3.28) \quad \begin{aligned} z_1 X_j(z_1) &= q^2 X_j(z_1) z_1, & z_1 X_j(z_2) &= q^2 X_j(z_2) z_1, \\ z_2 X_j(z_1) &= X_j(z_1) z_2 - (1 - q^2) X_j(z_2) z_1, & z_2 X_j(z_2) &= q^2 X_j(z_2) z_2, \end{aligned}$$

De Proposición 2.3, sabemos que  $z_2^l z_1^n$  genera  $\binom{(2n, 2l)}{(2n, 2l)} V_{(0,0)}^{(0,0)}$ . De (1.52) y (3.28), se sigue que

$$(3.29) \quad \begin{aligned} \frac{c_0}{c_1} \delta_0(z_2^l z_1^n) &= X_1(z_2^l z_1^n) = \sum_{k=0}^{l-1} z_2^k X_1(z_2) z_2^{l-k-1} z_1^n + \sum_{j=0}^{n-1} z_2^l z_1^j X_1(z_1) z_1^{n-j-1} \\ &= \sum_{k=0}^{l-1} q^{-2k} z_2^{l-1} X_1(z_2) z_1^n + \sum_{j=0}^{n-1} q^{2j} z_2^l X_1(z_1) z_1^{n-1} \\ &= q^{-l+1} [l]_1 z_2^{l-1} X_1(z_2) z_1^n + q^{n-1} [n]_1 z_2^l X_1(z_1) z_1^{n-1}. \end{aligned}$$

Como  $\hat{z}_1 = E_1(z_1) \in \binom{(2,0)}{(2,0)} V_{(2,-2)}^{(2,0)}$  y  $\hat{z}_2 = E(z_2) \in \binom{(0,2)}{(0,2)} V_{(2,-2)}^{(0,2)}$ , obtenemos de (1.13), (1.54) y la propiedad invariante de los elementos en  $\mathcal{B}$

$$(3.30) \quad \begin{aligned} F_2^2(z_2^{l-1} X_1(z_2) z_1^n) &= z_2^{l-1} F_2^2 E_2^2 E_1(z_2) z_1^n = [2]_2^2 z_2^{l-1} \hat{z}_2 z_1^n, \\ F_2^2(z_2^l X_1(z_1) z_1^{n-1}) &= z_2^l F_2^2 E_2^2 E_1(z_1) z_1^{n-1} = [2]_2^2 z_2^l \hat{z}_1 z_1^{n-1}. \end{aligned}$$

Además, por los mismos argumentos junto con  $K_1^{-1}(\hat{z}_i) = q^{-2} \hat{z}_i$ , tenemos

$$(3.31) \quad \begin{aligned} F_1(z_2^{l-1} \hat{z}_2 z_1^n) &= F_1(z_2^{l-1}) \hat{z}_2 z_1^n + z_2^{l-1} F_1(\hat{z}_2) z_1^n + q^{-2} z_2^{l-1} \hat{z}_2 F_1(z_1^n) \\ F_1(z_2^l \hat{z}_1 z_1^{n-1}) &= F_1(z_2^l) \hat{z}_1 z_1^{n-1} + z_2^l F_1(\hat{z}_1) z_1^{n-1} + q^{-2} z_2^l \hat{z}_1 F_1(z_1^{n-1}). \end{aligned}$$

Por otro lado, similar a (3.29), obtenemos de (3.4) las siguientes identidades

$$(3.32) \quad \begin{aligned} F_1(z_1^n) &= \sum_{k=1}^n z_1^{k-1} \hat{z}_1 z_1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} q^{-2k} \hat{z}_1 z_1^{n-1} = q^{-n+1} [n]_1 \hat{z}_1 z_1^{n-1} \\ F_1(z_2^l) &= \sum_{k=1}^l z_2^{k-1} \hat{z}_2 z_2^{l-k} = \sum_{k=0}^{l-1} q^{2k} z_2^{l-1} \hat{z}_2 = q^{l-1} [l]_1 z_2^{l-1} \hat{z}_2. \end{aligned}$$

Combinando (3.29)–(3.32) y aplicando Lema 1.3 obtenemos

$$(3.33) \quad \begin{aligned} \frac{q^{-2} c_0^2}{c_1^2 [2]_2^2} \delta_0^\dagger \delta_0(z_2^l z_1^n) &= q^{-1} [l]_1 [l-1]_1 z_2^{l-2} \text{pr}_{(0,0)}(\hat{z}_2 \hat{z}_2) z_1^n + q^{-l+1} [l]_1 z_2^{l-1} \text{pr}_{(0,0)}(F_1(\hat{z}_2)) z_1^n \\ &+ q^{-l-n} [l]_1 [n]_1 z_2^{l-1} \text{pr}_{(0,0)}(\hat{z}_2 \hat{z}_1) z_1^{n-1} + q^{n+l-2} [l]_1 [n]_1 z_2^{l-1} \text{pr}_{(0,0)}(\hat{z}_2 \hat{z}_1) z_1^{n-1} \\ &+ q^{n-1} [n]_1 z_2^l \text{pr}_{(0,0)}(F_1(\hat{z}_1)) z_1^{n-1} + q^{-1} [n]_1 [n-1]_1 z_2 \text{pr}_{(0,0)}(\hat{z}_1 \hat{z}_1) z_1^{n-2}. \end{aligned}$$

Esta última ecuación y Lema 3.4 implican

$$(3.34) \quad \frac{c_0^2}{q^2 c_1^2 [2]_2^2} \delta_0^\dagger \delta_0(z_2^l z_1^n) = \mu_{l,n} z_2^l z_1^n$$

donde

$$(3.35) \quad \begin{aligned} \mu_{l,n} = & \frac{q^3}{[3]_2} [l]_1 [l-1]_1 + ([2]_1 - 1) q^{-l+1} [l]_1 + \frac{q^{-l-n-2}}{[3]_2} [l]_1 [n]_1 \\ & + \frac{q^{n+l+2}}{[3]_2} [l]_1 [n]_1 + \frac{[5]_2}{[3]_2} q^{n-1} [n]_1 + q^{-5/2} \frac{[2]_2}{[3]_2} [n]_1 [n-1]_1. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados de (3.35) por  $(q - q^{-1})^2 [3]_2$  y escribiendo  $\mu_{l,n}$  en potencias de  $q$  tenemos

$$\begin{aligned} (q - q^{-1})^2 [3]_2 \mu_{l,n} = & q^3 (q^l - q^{-l})(q^{l-1} - q^{-l+1}) + q^{-l+1} (q + q^{-1} + 1)(q + q^{-1} - 1)(q - q^{-1})(q^l - q^{-l}) \\ & + q^{-l-n-2} (q^l - q^{-l})(q^n - q^{-n}) + q^{n+l+2} (q^l - q^{-l})(q^n - q^{-n}) \\ & + q^{n-1} (q^{-2} + q^{-1} + 1 + q + q^2)(q - q^{-1})(q^n - q^{-n}) + q^{-1} (q^{-1} + q^{-2})(q^n - q^{-n})(q^{n-1} - q^{-n+1}) \\ = & (q^{2l+2} + q^{-2l+4} - q^2 - q^4) + (q^4 + q^{-2l-2} - q^{-2} - q^{-2l+4}) + (q^{-2} + q^{-2l-2n-2} - q^{-2l-2} - q^{-2n-2}) \\ & + (q^{2n+2l+2} + q^2 - q^{2n+2} - q^{2l+2}) + (q^{2n+2} + q^{2n+1} - q^{2n-3} - q^{2n-4}) \\ & + (q^{-4} + q^{-3} - q - q^2) + (q^{2n-3} + q^{-2n-1} - q^{-3} - q^{-1}) + (q^{2n-4} + q^{-2n-2} - q^{-4} - q^{-2}) \\ = & q^{2n+2l+2} + q^{-2l-2n-2} - q^2 - q^{-2} + q^{2n+1} + q^{-2n-1} - q - q^{-1}, \end{aligned}$$

es decir,

$$(3.36) \quad \mu_{l,n} = \frac{[n+l+2]_1 [n+l]_1 + [n+1]_1 [n]_1}{[3]_2}.$$

Esto último y (3.34) implican (3.27).  $\square$

### 3. Valores propios de $\delta_1^\dagger \delta_1$

Similarmente como en la sección anterior, para calcular el valor propio de  $\delta_1^\dagger \delta_1$  se dará un lema auxiliar de proyecciones.

LEMA 3.6. Denotemos  $b_1 := (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_5^1$ . Entonces

$$(3.37) \quad \text{pr}_{(1,2)}(b_1 X_0(z_1)) = [2]_2^{1/2} \left( -\frac{q^{-1/2}}{[2]_1} z_2 u_4^1 (u_5^1)^2 + \frac{q^{7/2}(q+1)}{[2]_1} (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_5^1 z_1 \right),$$

$$(3.38) \quad \text{pr}_{(1,2)}(X_0(z_2) b_1) = \frac{[2]_2^{1/2}}{q^{5/2} [2]_1} z_2 (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_5^1,$$

$$(3.39) \quad \text{pr}_{(0,2)}(\check{z}_2 (u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_5^1) = -\frac{q^3}{[2]_1} z_2 b_1,$$

$$(3.40) \quad \text{pr}_{(0,2)}((u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_4^1) = \frac{q^{-2}}{[2]_1} b_1,$$

$$(3.41) \quad \text{pr}_{(0,2)}((u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_5^1 \check{z}_1) = -\frac{q^{-3}}{[2]_1} b_1 z_1,$$

$$(3.42) \quad \text{pr}_{(0,2)}(\check{z}_2 u_3^1 (u_5^1)^2) = -\frac{q^5}{[2]_1} b_1 z_1.$$

DEMOSTRACIÓN. Primero notemos que  $b_1 \in \binom{(1,2)}{(1,2)} V_{(0,2)}^{(0,2)}$  y  $X_0(z_1) \in \binom{(2,0)}{(2,0)} V_{(1,0)}^{(0,2)}$ . Lema 3.3 implica que  $b_1 X_0(z_1) \in \binom{(3,2)}{(3,2)} V_{(1,2)}^{(1,2)} \oplus \binom{(2,2)}{(2,2)} V_{(1,2)}^{(0,4)}$ . Ya que  $u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1 \in V_{(-1,2)}^{(-1,2)}$  es un vector de peso más alto para una  $\mathcal{U}_q(1)$ -representación irreducible, tenemos  $E_2(u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) = 0$ . Entonces, por (1.15), (1.31) y (3.16),

$$\begin{aligned} F_2 E_2((u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_3^1 (u_5^1)^2) &= -q^{1/2} [2]_2^{1/2} F_2((u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_4^1 (u_5^1)^2) \\ &= -q^{-1/2} [2]_2((u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1) + (q^{-1} - 1) z_2) u_4^1 (u_5^1)^2 + q^{-1} [2]_2(u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_3^1 (u_5^1)^2, \end{aligned}$$

por lo tanto, usando  $\frac{[2]_2}{[4]_2} = \frac{1}{q+q^{-1}} = \frac{1}{[2]_1}$ ,

$$\begin{aligned} \text{pr}_{(1,2)}((u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_3^1 (u_5^1)^2) &= (1 - \frac{1}{[4]_2} F_2 E_2)((u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_3^1 (u_5^1)^2) \\ (3.43) \quad &= \frac{q}{[2]_1} (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_3^1 (u_5^1)^2 + \frac{q^{-1/2}}{[2]_1} (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1) u_4^1 (u_5^1)^2 + \frac{(q^{-3/2} - q^{-1/2})}{[2]_1} z_2 u_4^1 (u_5^1)^2. \end{aligned}$$

Claramente,  $z_2 u_4^1 (u_5^1)^2 \in \binom{(3,2)}{(3,2)} V_{(1,2)}^{(1,2)}$ . Ya que ambos lados de esta última ecuación pertenecen a  $\binom{(3,2)}{(3,2)} V_{(1,2)}^{(1,2)} = \text{Lin}\{(u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_5^1 z_1, z_2 u_4^1 (u_5^1)^2\}$ , existen  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tal que

$$\begin{aligned} q^{3/2} (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_3^1 (u_5^1)^2 + (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1) u_4^1 (u_5^1)^2 \\ (3.44) \quad = \alpha q^{-2} (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_1^1 (u_5^1)^2 + \beta (u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) u_4^1 (u_5^1)^2. \end{aligned}$$

Como  $\mathcal{O}(\text{SO}_q(5))$  es un dominio, esto es equivalente a

$$\begin{aligned} q^{3/2} (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_3^1 + (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1) u_4^1 \\ (3.45) \quad = \alpha q^{-2} (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_1^1 + \beta (u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) u_4^1. \end{aligned}$$

Actuando con  $F_1$  en ambos lados de (3.45) nos da

$$(u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_4^1 = -\beta q (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_4^1,$$

es decir,  $\beta = -q^{-1}$ . Ahora actuando con  $E_1 F_2^2$  en ambos lados de (3.45) obtenemos

$$\begin{aligned} -q^{3/2} (q+1) (u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_2^1 + q^{1/2} (u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_2^1 \\ = -\alpha q^{-5/2} (u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_2^1 - \beta q^{3/2} (u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_2^1, \end{aligned}$$

lo cual implica  $\alpha = q^4 (q+1)$ . Sustituyendo  $\alpha$  y  $\beta$  en (3.44), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{q}{[2]_1} (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_3^1 (u_5^1)^2 + \frac{q^{-1/2}}{[2]_1} (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1) u_4^1 (u_5^1)^2 \\ = \frac{q^{7/2} (q+1)}{[2]_1} (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_5^1 z_1 - \frac{q^{-3/2}}{[2]_1} z_2 u_4^1 (u_5^1)^2. \end{aligned}$$

Combinando la última ecuación con (3.43) obtenemos (3.37).

Ahora notemos que

$$(3.46) \quad X_0(z_2) b_1 = q [2]_2^{1/2} (u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_5^1.$$

Ya que  $X_0(z_2) \in \begin{smallmatrix} (0,2) \\ (0,2) \end{smallmatrix} V_{(1,0)}^{(0,2)}$ , Lema 3.3 implica que  $X_0(z_2)b_1 \in \begin{smallmatrix} (1,4) \\ (1,4) \end{smallmatrix} V_{(1,2)}^{(1,2)} \oplus \begin{smallmatrix} (1,4) \\ (1,4) \end{smallmatrix} V_{(1,2)}^{(0,4)}$ . Entonces calcularemos la proyección

$$\text{pr}_{(1,2)}((u_3^1 u_5^2 - qu_3^2 u_5^1)(u_3^1 u_4^2 - qu_3^2 u_4^1)u_5^1) \in \begin{smallmatrix} (1,4) \\ (1,4) \end{smallmatrix} V_{(1,2)}^{(1,2)}.$$

Calculando la acción

$$\begin{aligned} F_2 E_2((u_3^1 u_5^2 - qu_3^2 u_5^1)(u_3^1 u_4^2 - qu_3^2 u_4^1)u_5^1) &= -q^{3/2} [2]_2^{1/2} F_2((u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1)(u_3^1 u_4^2 - qu_3^2 u_4^1)u_5^1) \\ &= -q^{3/2} [2]_2^{1/2} \left( -q^{-1/2} [2]_2^{1/2} (u_3^1 u_5^2 - qu_3^2 u_5^1)(u_3^1 u_4^2 - qu_3^2 u_4^1)u_5^1 \right. \\ &\quad \left. + q^{-1} [2]_2^{1/2} (u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1)(u_2^1 u_4^2 - qu_2^2 u_4^1 - q^{-1/2}(u_3^1 u_3^2 - qu_3^2 u_3^1))u_5^1 \right). \end{aligned}$$

Ya que  $\begin{smallmatrix} (1,4) \\ (1,4) \end{smallmatrix} V_{(1,2)}^{(1,2)} = \text{Lin}\{(u_1^1 u_5^2 - qu_1^2 u_5^1)(u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1)u_5^1\}$ , debemos tener

$$\text{pr}_{(1,2)}((u_3^1 u_5^2 - qu_3^2 u_5^1)(u_3^1 u_4^2 - qu_3^2 u_4^1)u_5^1) = \alpha(u_1^1 u_5^2 - qu_1^2 u_5^1)(u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1)u_5^1.$$

para algún  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \alpha(u_1^1 u_5^2 - qu_1^2 u_5^1)(u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1)u_5^1 &= \frac{q^{-1}}{[2]_1} (u_3^1 u_5^2 - qu_3^2 u_5^1)(u_3^1 u_4^2 - qu_3^2 u_4^1)u_5^1 \\ (3.47) \quad &+ \frac{q^{1/2}}{[2]_1} (u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1) \left( (u_2^1 u_4^2 - qu_2^2 u_4^1) - q^{-1/2}(u_3^1 u_3^2 - qu_3^2 u_3^1) \right) u_5^1. \end{aligned}$$

Cancelando  $u_5^1$  y después actuando con  $E_1$  obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha q(u_2^1 u_5^2 - qu_2^2 u_5^1)(u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1) &= -\frac{q^{-1}}{[2]_1} (u_3^1 u_5^2 - qu_3^2 u_5^1)^2 \\ (3.48) \quad &- \frac{q^{1/2}}{[2]_1} (u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1)(u_2^1 u_5^2 - qu_2^2 u_5^1). \end{aligned}$$

Ahora actuando con  $E_2^2$  en ambos lados de (3.48) tenemos

$$-q^{7/2} \alpha (u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1)^2 = -\frac{q^{-1}}{[2]_1} (q^2 + q)(u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1)^2 + \frac{q}{[2]_1} (u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1)^2,$$

lo cual implica

$$\alpha = q^{-5/2} \left( \frac{q^{-1}}{[2]_1} (q + 1) - \frac{1}{[2]_1} \right) = \frac{q^{-7/2}}{[2]_1}.$$

Esto último junto con (3.46) nos da (3.38).

Ahora pasamos con la demostración de (3.39), como en los casos anteriores primero notemos que  $\tilde{z}_2 \in \begin{smallmatrix} (0,2) \\ (0,2) \end{smallmatrix} V_{(-2,2)}^{(-2,2)}$  y  $(u_3^1 u_5^2 - qu_3^2 u_5^1)u_5^1 \in \begin{smallmatrix} (1,2) \\ (1,2) \end{smallmatrix} V_{(2,0)}^{(1,2)}$ . Entonces Lema 3.3 nos da  $\tilde{z}_2(u_3^1 u_5^2 - qu_3^2 u_5^1)u_5^1 \in \begin{smallmatrix} (1,4) \\ (1,4) \end{smallmatrix} V_{(0,2)}^{(0,2)} \oplus \begin{smallmatrix} (1,4) \\ (1,4) \end{smallmatrix} V_{(0,2)}^{(-1,4)}$ . Calculando la acción

$$\begin{aligned} F_2 E_2((u_1^1 u_4^2 - qu_1^2 u_4^1)(u_3^1 u_5^2 - qu_3^2 u_5^1)u_5^1) &= -q^{1/2} [2]_2^{1/2} F_2((u_1^1 u_4^2 - qu_1^2 u_4^1)(u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1)u_5^1) \\ &= [2]_2((u_1^1 u_3^2 - qu_1^2 u_3^1)(u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1)u_5^1 + q^{-1}(u_1^1 u_4^2 - qu_1^2 u_4^1)(u_3^1 u_5^2 - qu_3^2 u_5^1)u_5^1). \end{aligned}$$

Entonces

$$(3.49) \quad \begin{aligned} \text{pr}_{(0,2)}((u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1)(u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1)u_5^1) &= \frac{q}{[2]_1}(u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1)(u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1)u_5^1 \\ &\quad - \frac{1}{[2]_1}(u_1^1 u_3^2 - q u_1^2 u_3^1)(u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1)u_5^1. \end{aligned}$$

Ya que  $\text{pr}_{(0,2)}((u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1)(u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1)u_5^1) \in \binom{(1,4)}{(1,4)} V_{(0,2)}^{(0,2)} = \text{Lin}\{z_2(u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1)u_5^1\}$  tenemos

$$(3.50) \quad \begin{aligned} \frac{q}{[2]_1}(u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1)(u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1)u_5^1 - \frac{1}{[2]_1}(u_1^1 u_3^2 - q u_1^2 u_3^1)(u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1)u_5^1 \\ = \alpha(u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1)(u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1)u_5^1. \end{aligned}$$

para  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Cancelando  $u_5^1$  en ambos lados

$$(3.51) \quad \begin{aligned} \frac{q}{[2]_1}(u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1)(u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) - \frac{1}{[2]_1}(u_1^1 u_3^2 - q u_1^2 u_3^1)(u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) \\ = \alpha(u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1)(u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1). \end{aligned}$$

Actuando con  $F_1$  en ambos lados obtenemos

$$\frac{q^3}{[2]_1}(u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1)(u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) = q\alpha(u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1)(u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1),$$

lo cual implica  $\alpha = \frac{q^2}{[2]_1}$ .

Ahora procedemos con la demostración de (3.40). Primero notemos que  $u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1 \in \binom{(0,2)}{(0,2)} V_{(1,0)}^{(0,2)}$  y  $u_4^1 \in \binom{(1,0)}{(1,0)} V_{(-1,2)}^{(-1,2)}$ , lo cual por Lema 3.3 implica  $(u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1)u_4^1 \in \binom{(1,2)}{(1,2)} V_{(0,2)}^{(0,2)} \oplus \binom{(1,0)}{(1,0)} V_{(0,2)}^{(-1,4)}$ . Calculando

$$\begin{aligned} F_2 E_2((u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1)u_4^1) &= -q^{3/2} [2]_2^{1/2} F_2((u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1)u_4^1) \\ &= q[2]_2((u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1)u_4^1 + q^{-1}(u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1)u_3^1). \end{aligned}$$

Entonces

$$\text{pr}_{(0,2)}((u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1)u_4^1) = \frac{q^{-1}}{[2]_1}(u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1)u_4^1 - \frac{1}{[2]_1}(u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1)u_3^1.$$

Como  $\text{pr}_{(0,2)}((u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1)u_4^1) \in \binom{(1,2)}{(1,2)} V_{(0,2)}^{(0,2)} = \text{Lin}\{(u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1)u_5^1\}$  debemos tener

$$(3.52) \quad \frac{q^{-1}}{[2]_1}(u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1)u_4^1 - \frac{1}{[2]_1}(u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1)u_3^1 = \alpha(u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1)u_5^1.$$

para algún  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Actuando con  $F_1$  obtenemos

$$-\frac{q^{-1}}{[2]_1}(u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1)u_4^1 = -q\alpha(u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1)u_4^1,$$

lo cual implica  $\alpha = \frac{q^{-2}}{[2]_1}$ .

Ya que  $u_5^1 z_1 = -q^{-1} u_4^1 z_1$  entonces (3.40) y Lema 1.3 nos dan (3.41). Finalmente para demostrar (3.42) notemos que  $z_2 \in \binom{(0,2)}{(0,2)} V_{(-2,2)}^{(-2,2)}$  y  $u_3^1 (u_5^1)^2 \in \binom{(3,0)}{(3,0)} V_{(2,0)}^{(1,2)}$  y entonces por Lema 3.3 tenemos

$\mathbb{z}_2 u_3^1 (u_5^1)^2 \in \binom{(3,2)}{(3,2)} V_{(0,2)}^{(0,2)} \oplus \binom{(3,2)}{(3,2)} V_{(0,2)}^{(-1,4)}$ . Calculando

$$\begin{aligned} F_2 E_2((u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_3^1 (u_5^1)^2) &= -q^{1/2} [2]_2^{1/2} F_2((u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_4^1 (u_5^1)^2) \\ &= [2]_2((u_1^1 u_3^2 - q u_1^2 u_3^1) u_4^1 (u_5^1)^2 + q^{-1} (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_3^1 (u_5^1)^2). \end{aligned}$$

Entonces

$$\text{pr}_{(0,2)}((u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_3^1 (u_5^1)^2) = \frac{q}{[2]_1} (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_3^1 (u_5^1)^2 - \frac{1}{[2]_1} (u_1^1 u_3^2 - q u_1^2 u_3^1) u_4^1 (u_5^1)^2.$$

Ya que  $\text{pr}_{(0,2)}((u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_3^1 (u_5^1)^2) \in \binom{(3,2)}{(3,2)} V_{(0,2)}^{(0,2)} = \text{Lin}\{(u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_5^1 z_1\}$  y  $u_5^1 z_1 = q^{-2} u_1^1 (u_5^1)^2$  tenemos

$$(3.53) \quad \frac{q}{[2]_1} (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_3^1 (u_5^1)^2 - \frac{1}{[2]_1} (u_1^1 u_3^2 - q u_1^2 u_3^1) u_4^1 (u_5^1)^2 = \alpha q^{-2} (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_1^1 (u_5^1)^2.$$

Eliminando  $(u_5^1)^2$  en ambos lados la ecuación anterior es equivalente a

$$(3.54) \quad \frac{q}{[2]_1} (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_3^1 - \frac{1}{[2]_1} (u_1^1 u_3^2 - q u_1^2 u_3^1) u_4^1 = \alpha q^{-2} (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_1^1.$$

Ahora aplicando  $F_1 F_2$  en ambos lados de (3.54) obtenemos

$$[2]_2^{1/2} \frac{q^2}{[2]_1} (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_1^1 = \alpha q^{-2} [2]_2^{1/2} (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_1^1,$$

lo cual nos da  $\alpha = \frac{q^4}{[2]_1}$ .  $\square$

Con las proyecciones ya establecidas podemos proceder a calcular los valores propios de  $\delta_1^\dagger \delta_1$ . Notemos que  $\delta_1^\dagger \delta_1$  se anula sobre los espacios  $\binom{(2n,0)}{(2n,0)} V_{(0,2)}^{(0,2)}$  y  $\binom{(0,2l)}{(0,2l)} V_{(0,2)}^{(0,2)}$  ya que  $\binom{(2n,0)}{(2n,0)} V_{(1,2)}^{(1,2)} = \binom{(0,2l)}{(0,2l)} V_{(1,2)}^{(1,2)} = \{0\}$  de acuerdo con Proposición 2.3. Por lo tanto solo tenemos que calcular los valores propios sobre  $\binom{(2n+1,2l+2)}{(2n+1,2l+2)} V_{(0,2)}^{(0,2)}$ . Esto será hecho en la siguiente Proposición.

**PROPOSICIÓN 3.7.** Sean  $n, l \in \mathbb{N}_0$ . Entonces

$$(3.55) \quad \delta_1^\dagger \delta_1(u_1) = \frac{q^2 c_2^2 [2]_2 ([3]_2 - 1)^2}{c_1^2 [3]_2^2} \frac{([n+l+3]_1 [n+l+2]_1 + [n+2]_1 [n]_1)}{[2]_1^2} u_1, \quad u_1 \in \binom{(2n+1,2l+2)}{(2n+1,2l+2)} V_{(0,2)}^{(0,2)} \setminus \{0\}.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Recalquemos que  $b_1 := (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_5^1$ . Por Proposición 2.3 sabemos que  $z_2^l b_1 z_1^n$  genera  $\binom{(2n+1,2l+2)}{(2n+1,2l+2)} V_{(0,2)}^{(0,2)}$ . Análogo a (3.29), obtenemos de (3.28)

$$\begin{aligned} X_0(z_2^l b_1 z_1^n) &= \sum_{k=0}^{l-1} z_2^k X_0(z_2) z_2^{l-k-1} K_2 K_1(b_1) z_1^n + z_2^l X_0(b_1) z_1^n + \sum_{j=0}^{n-1} z_2^l b_1 z_1^j X_0(z_1) z_1^{n-j-1} \\ &= q \sum_{k=0}^{l-1} q^{-2k} z_2^{l-1-k} X_0(z_2) b_1 z_1^n + z_2^l X_0(b_1) z_1^n + \sum_{j=0}^{n-1} q^{2j} z_2^l b_1 X_0(z_1) z_1^{n-1} \\ (3.56) \quad &= q^{-l+2} [l]_1 z_2^{l-1} X_0(z_2) b_1 z_1^n + z_2^l X_0(b_1) z_1^n + q^{n-1} [n]_1 z_2^l b_1 X_0(z_1) z_1^{n-1}. \end{aligned}$$

Ya que  $X_0(b_1) = E_2 E_1((u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_5^1) = q^{3/2} [2]_2^{1/2} (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_5^1 \in \binom{(1,2)}{(1,2)} V_{(1,2)}^{(1,2)}$ , por (1.59) tenemos que  $\text{pr}_{(1,2)}(z_2^l X_0(b_1) z_1^n) = z_2^l \text{pr}_{(1,2)}(X_0(b_1)) z_1^n = z_2^l X_0(b_1) z_1^n$ . Entonces, nuevamente por (1.59), para calcular  $\text{pr}_{(1,2)}(X_0(z_2^l b_1 z_1^n))$  necesitamos conocer las proyecciones  $\text{pr}_{(1,2)}(X_0(z_2) b_1)$  y  $\text{pr}_{(1,2)}(b_1 X_0(z_1))$ .

Sustituyendo  $\text{pr}_{(1,2)}(b_1 X_0(z_1))$  y  $\text{pr}_{(1,2)}(X_0(z_2) b_1)$  de Lema 3.4 nos da

$$\begin{aligned} \frac{c_1}{c_2} \frac{[3]_2}{[3]_2 - 1} \delta_1(z_2^l b_1 z_1^n) &= \text{pr}_{(1,2)} \circ X_0(z_2^l b_1 z_1^n) \\ &= (q^{3/2} [2]_2^{1/2} + q^{-l} [l]_1 \frac{[2]_2^{1/2}}{q^{l/2} [2]_1} + q^{n+3} [n]_1 \frac{[2]_2^{3/2}}{[2]_1}) z_2^l (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_5^1 z_1^n \\ &\quad - q^{-n-1} [n]_1 \frac{[2]_2^{1/2}}{q^{l/2} [2]_1} z_2^{l+1} u_4^1 (u_5^1)^2 z_1^{n-1}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Entonces

$$\begin{aligned} F_2(\text{pr}_{(1,2)} \circ X_0(z_2^l b_1 z_1^n)) &= -[2]_2 (q + \frac{q^{-l-1}}{[2]_1} [l]_1 + \frac{q^{n+2}(q+1)}{[2]_1} [n]_1) z_2^l (u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_5^1 z_1^n \\ &\quad + \frac{q^{-n-2}}{[2]_1} [2]_2 [n]_1 z_2^{l+1} u_3^1 (u_5^1)^2 z_1^{n-1}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

De (3.32) obtenemos

$$\begin{aligned} F_1(z_2^l (u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_5^1 z_1^n) &= q^{l-1} [l]_1 z_2^{l-1} \check{z}_2 (u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_5^1 z_1^n - z_2^l (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_5^1 z_1^n \\ &\quad - q^{-1} z_2^l (u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_4^1 z_1^n + q^{-n-1} [n]_1 z_2^l (u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_5^1 \check{z}_1 z_1^{n-1}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} F_1(z_2^{l+1} u_3^1 (u_5^1)^2 z_1^{n-1}) &= q^l [l+1]_1 z_2^l \check{z}_2 u_3^1 (u_5^1)^2 z_1^{n-1} - q^{-1} [2]_1 z_2^{l+1} u_3^1 (u_4^1 u_5^1) z_1^{n-1} \\ &\quad + q^{-n} [n-1]_1 z_2^{l+1} u_3^1 (u_5^1)^2 \check{z}_1 z_1^{n-2} \\ &= q^l [l+1]_1 z_2^l \check{z}_2 u_3^1 (u_5^1)^2 z_1^{n-1} - (q^{-1} [2]_1 + q^{-n-2} [n-1]_1) z_2^{l+1} u_3^1 u_4^1 u_5^1 z_1^{n-1}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

donde hemos aplicado Lema 1.1 en la segunda igualdad. Como  $u_3^1 \in \binom{(1,0)}{(1,0)} V_{(0,0)}^{(-1,2)}$  y  $u_4^1 u_5^1 \in \binom{(2,0)}{(2,0)} V_{(0,2)}^{(0,2)}$ , entonces por Lema 3.3 tenemos  $u_3^1 u_4^1 u_5^1 \in \binom{(3,0)}{(3,0)} V_{(0,2)}^{(0,2)} \oplus \binom{(3,0)}{(3,0)} V_{(0,2)}^{(-1,4)}$ . Por otro lado la Proposición 2.2 nos dice que  $\binom{(3,0)}{(3,0)} V_{(0,2)}^{(0,2)} = \{0\}$  y por lo tanto  $\text{pr}_{(0,2)}(u_3^1 u_4^1 u_5^1) = 0$ . Aplicando  $\text{pr}_{(0,2)}$  a (3.59) y (3.60) obtenemos

$$\begin{aligned} \text{pr}_{(0,2)}(F_1(z_2^l (u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_5^1 z_1^n)) &= q^{l-1} [l]_1 z_2^{l-1} \text{pr}_{(0,2)}(\check{z}_2 (u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_5^1 z_1^n) \\ &\quad - z_2^l \text{pr}_{(0,2)}((u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_5^1) z_1^n - q^{-1} z_2^l \text{pr}_{(0,2)}((u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_4^1) z_1^n \\ &\quad + q^{-n-1} [n]_1 z_2^l \text{pr}_{(0,2)}((u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_5^1 \check{z}_1) z_1^{n-1}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\text{pr}_{(0,2)}(F_1(z_2^{l+1} u_3^1 (u_5^1)^2 z_1^{n-1})) = q^l [l+1]_1 z_2^l \text{pr}_{(0,2)}(\check{z}_2 u_3^1 (u_5^1)^2) z_1^{n-1}. \quad (3.62)$$

Ahora sustituyendo las proyecciones de Lema 3.6 y  $\text{pr}_{(0,2)}(b_1) = b_1$  en (3.61) y (3.62) obtenemos

$$\text{pr}_{(0,2)}(F_1(z_2^l (u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_5^1 z_1^n)) = -(\frac{q^{l+2}}{[2]_1} [l]_1 + 1 + \frac{q^{-3}}{[2]_1} + \frac{q^{-n-4}}{[2]_1} [n]_1) z_2^l (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_5^1 z_1^n, \quad (3.63)$$

$$\text{pr}_{(0,2)}(F_1(z_2^{l+1} u_3^1 (u_5^1)^2 z_1^{n-1})) = -\frac{q^{l+5}}{[2]_1} [l+1]_1 z_2^l (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_5^1 z_1^n. \quad (3.64)$$

Combinando (3.58), (3.63) y (3.64) obtenemos

$$(3.65) \quad \frac{1}{[2]_2} \left( \frac{qc_2}{c_1} \frac{[3]_2 - 1}{[3]_2} \right)^{-2} \delta_1^\dagger \delta_1 (z_2^l b_1 z_1^n) = \lambda_{l,n} z_2^l b_1 z_1^n$$

donde

$$(3.66) \quad \lambda_{l,n} = \left( q + \frac{q^{-l-1}}{[2]_1} [l]_1 + \frac{q^{n+2}(q+1)}{[2]_1} [n]_1 \right) \left( \frac{q^{l+2}}{[2]_1} [l]_1 + 1 + \frac{q^{-3}}{[2]_1} + \frac{q^{-n-4}}{[2]_1} [n]_1 \right) - \frac{q^{n+l+3}}{[2]_1^2} [n]_1 [l+1]_1.$$

Multiplicando ambos lados de (3.66) por  $(q - q^{-1})^2 [2]_1^2$  y escribiendo en potencias de  $q$  tenemos

$$\begin{aligned} (q - q^{-1})^2 [2]_1^2 \lambda_{l,n} &= (q(q^2 - q^{-2}) + q^{-l-1}(q^l - q^{-l}) + q^n(q^3 + q^2)(q^n - q^{-n})) \\ &\quad \times (q^{l+2}(q^l - q^{-l}) + q^2 - q^{-2} + q^{-3}(q - q^{-1}) + q^{-n-4}(q^n - q^{-n})) \\ &\quad - q^{n+l+3}(q^n - q^{-n})(q^{l+1} - q^{-l-1}) \\ &= (-q^{-2l-1} + q^{2n+3} + q^{2n+2} - q^2)(q^{2l+2} - q^{-2n-4}) \\ &\quad - q^{n+l+3}(q^{n+l+1} + q^{-n-l-1} - q^{l-n+1} - q^{n-l-1}) \\ &= -(q - q^{-2n-2l-5}) + (q^{2n+2l+5} - q^{-1}) + (q^{2n+2l+4} - q^{-2}) \\ &\quad - (q^{2l+4} - q^{-2n-2}) - (q^{2n+2l+4} + q^2 - q^{2l+4} - q^{2n+2}) \\ &= q^{2n+2l+5} + q^{-2n-2l-5} - q - q^{-1} + q^{2n+2} + q^{-2n-2} - q^2 - q^{-2}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\lambda_{l,n} = \frac{[n+l+3]_1 [n+l+2]_1 + [n+2]_1 [n]_1}{[2]_1^2}.$$

Esto último junto con (3.65) nos da (3.55), lo cual completa la demostración.  $\square$

**COMENTARIO 3.8.** Notemos que el valor propio de  $\delta_0^\dagger \delta_0$  sobre  $\begin{smallmatrix} (2n+2,0) \\ (2n+2,0) \end{smallmatrix} V_{(0,2)}^{(0,2)}$  y  $\begin{smallmatrix} (0,2l+2) \\ (0,2l+2) \end{smallmatrix} V_{(0,2)}^{(0,2)}$  coincide con el valor propio de  $\delta_0^\dagger \delta_0$  sobre  $\begin{smallmatrix} (2n+2,0) \\ (2n+2,0) \end{smallmatrix} V_{(0,0)}^{(0,0)}$  y  $\begin{smallmatrix} (0,2l+2) \\ (0,2l+2) \end{smallmatrix} V_{(0,0)}^{(0,0)}$  respectivamente por Lema 3.1. Además  $\delta_0^\dagger \delta_0$  se anula sobre  $\begin{smallmatrix} (2n+1,2l+2) \\ (2n+1,2l+2) \end{smallmatrix} V_{(0,2)}^{(0,2)}$  ya que  $\begin{smallmatrix} (2n+1,2l+2) \\ (2n+1,2l+2) \end{smallmatrix} V_{(0,0)}^{(0,0)} = \{0\}$  de acuerdo a Proposición 2.3. Es por eso que los valores propios de  $\delta_0^\dagger \delta_0$  sobre los  $\begin{smallmatrix} (\mu) \\ \mu \end{smallmatrix} V_{(0,2)}^{(0,2)}$  1-dimensionales no son calculados.



#### 4. Valores propios de $\delta_1 \delta_1^\dagger$

LEMA 3.9. Denotamos  $e_1 := (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1)(u_5^1)^2$ . Entonces

$$(3.67) \quad \text{pr}_{(0,2)}(\tilde{z}_2 F_2(e_1)) = -q[2]_2^{1/2} \left( -\frac{q^3}{[2]_1} z_2^2 u_4^1 u_5^1 + \frac{q^5}{[2]_1} z_2 (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) z_1 \right),$$

$$(3.68) \quad \text{pr}_{(0,2)}(F_2(e_1) \tilde{z}_1) = -q^{-2} [2]_2^{1/2} \left( -\frac{q^{-2}}{[2]_1} z_2 u_4^1 u_5^1 z_1 + \frac{(1+q)}{[2]_1} (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) z_1^2 \right),$$

$$(3.69) \quad \text{pr}_{(0,2)}(F_1 F_2(e_1)) = [2]_2^{1/2} \left( (q + q^{-3}) z_2 u_4^1 u_5^1 - (1 + q^{-1} + q^3) (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) z_1 \right),$$

$$(3.70) \quad \text{pr}_{(1,2)}((u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_4^1 u_5^1) = \frac{q^{-2}}{[2]_1} e_1,$$

$$(3.71) \quad \text{pr}_{(1,2)}((u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_3^1 u_5^1) = -\frac{q^{-1}}{[2]_1} e_1.$$

DEMOSTRACIÓN. Primero calculamos

$$(3.72) \quad \begin{aligned} -q^{-1} \tilde{z}_2 F_2(e_1) &= (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) F_2((u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1)(u_5^1)^2) \\ &= [2]_2^{1/2} (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1 - q^{-1/2} (u_3^1 u_3^2 - q u_3^2 u_3^1)) (u_5^1)^2 \\ &= [2]_2^{1/2} (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) (q^{-1} (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1) - (q^{-1} - q^{-2}) z_2) (u_5^1)^2. \end{aligned}$$

donde hemos utilizado (1.30) en la última igualdad. De cálculos anteriores y de 3.(r) de la Proposición 2.3 sabemos que  $\tilde{z}_2 \in \begin{smallmatrix} (0,2) \\ (0,2) \end{smallmatrix} V_{(-2,2)}^{(-2,2)}$  y  $F_2(e_1) \in \begin{smallmatrix} (2,2) \\ (2,2) \end{smallmatrix} V_{(2,0)}^{(1,2)}$ . Entonces el Lema 3.3 puede ser aplicado para darnos  $\tilde{z}_2 F_2(e_1) \in \begin{smallmatrix} (2,4) \\ (2,4) \end{smallmatrix} V_{(0,2)}^{(0,2)} \oplus \begin{smallmatrix} (2,4) \\ (2,4) \end{smallmatrix} V_{(0,2)}^{(-1,4)}$ . Calculando

$$\begin{aligned} F_2 E_2 \left( (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) (q^{-1} (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1) - (q^{-1} - q^{-2}) z_2) (u_5^1)^2 \right) \\ = [2]_2^{1/2} F_2 \left( (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) (u_5^1)^2 \right) \\ = [2]_2 \left( -q^{-1/2} (u_1^1 u_3^2 - q u_1^2 u_3^1) (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) \right. \\ \left. + q^{-1} (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1 - q^{-1/2} (u_3^1 u_3^2 - q u_3^2 u_3^1)) \right) (u_5^1)^2, \end{aligned}$$

esto y  $q^{-1} (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1) - (q^{-1} - q^{-2}) z_2 = u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1 - q^{-1/2} (u_3^1 u_3^2 - q u_3^2 u_3^1)$  nos da

$$(3.73) \quad \begin{aligned} \text{pr}_{(0,2)} \left( (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1 - q^{-1/2} (u_3^1 u_3^2 - q u_3^2 u_3^1)) (u_5^1)^2 \right) \\ = \frac{q}{[2]_1} (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1 - q^{-1/2} (u_3^1 u_3^2 - q u_3^2 u_3^1)) (u_5^1)^2 \\ + \frac{q^{-1/2}}{[2]_1} (u_1^1 u_3^2 - q u_1^2 u_3^1) (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) (u_5^1)^2. \end{aligned}$$

Ya que  $\text{pr}_{(0,2)} \left( (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1 - q^{-1/2} (u_3^1 u_3^2 - q u_3^2 u_3^1)) (u_5^1)^2 \right) \in \begin{smallmatrix} (2,4) \\ (2,4) \end{smallmatrix} V_{(0,2)}^{(0,2)}$ , y por Proposición 2.3 tenemos  $\begin{smallmatrix} (2,4) \\ (2,4) \end{smallmatrix} V_{(0,2)}^{(0,2)} = \text{Lin}\{z_2^2 u_4^1 u_5^1, z_2 (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) z_1\}$ , entonces deben existir  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tal que

$$(3.74) \quad \begin{aligned} \frac{q}{[2]_1} (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1 - q^{-1/2} (u_3^1 u_3^2 - q u_3^2 u_3^1)) (u_5^1)^2 \\ + \frac{q^{-1/2}}{[2]_1} (u_1^1 u_3^2 - q u_1^2 u_3^1) (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) (u_5^1)^2 \\ = \alpha (u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1)^2 u_4^1 u_5^1 + \beta (u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_1^1 u_5^1. \end{aligned}$$

Cancelando  $u_5^1$  de ambos lados obtenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{q}{[2]_1} (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1 - q^{-1/2} (u_3^1 u_3^2 - q u_3^2 u_3^1)) u_5^1 \\
& \quad + \frac{q^{-1/2}}{[2]_1} (u_1^1 u_3^2 - q u_1^2 u_3^1) (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_5^1 \\
(3.75) \quad & = \alpha (u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1)^2 u_4^1 + \beta (u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_1^1.
\end{aligned}$$

Actuando con  $F_1^2$  en ambos lados de (3.75) obtenemos

$$-\frac{q}{[2]_1} (q^6 + q^4) (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1)^2 u_4^1 = (q^4 + q^2) \alpha (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1)^2 u_4^1.$$

Esto implica  $\alpha = -\frac{q^3}{[2]_1}$ .

Ahora actuando con  $E_1^2 F_2^2$  en ambos lados de (3.75), el lado izquierdo se anula y obtenemos

$$0 = -(q^2 + q^4) q^{3/2} [2]_2 \alpha (u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1)^2 u_2^1 - (q^2 + q^4) q^{-1/2} [2]_2 \beta (u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1)^2 u_2^1.$$

o equivalentemente

$$0 = (q^2 \alpha + \beta) (u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1)^2 u_2^1,$$

lo cual implica  $\beta = -q^2 \alpha = \frac{q^5}{[2]_1}$ . Sustituyendo  $\alpha$  y  $\beta$  en (3.74) y combinando con (3.72) nos da (3.67).

Similarmente tenemos que

$$\begin{aligned}
F_2(e_1) \tilde{z}_1 &= -q [2]_2^{1/2} (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1 - q^{-1/2} (u_3^1 u_3^2 - q u_3^2 u_3^1)) (u_5^1)^2 u_1^1 u_4^1 \\
(3.76) \quad &= -q^{-2} [2]_2^{1/2} (q^{-1} (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1) - (q^{-1} - q^{-2}) z_2) u_4^1 u_5^1 z_1,
\end{aligned}$$

donde hemos usado relaciones de Lema 1.1 en la segunda igualdad. Ya que  $u_4^1 u_5^1 \in \binom{(2,0)}{(2,0)} V_{(0,2)}^{(0,2)}$  y  $q^{-1} (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1) - (q^{-1} - q^{-2}) z_2 \in \binom{(0,2)}{(0,2)} V_{(0,0)}^{(0,0)} \oplus \binom{(0,2)}{(0,2)} V_{(0,0)}^{(-1,2)}$ , entonces Lema 3.3 implica

$$(3.77) \quad (q^{-1} (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1) - (q^{-1} - q^{-2}) z_2) u_4^1 u_5^1 \in \binom{(2,2)}{(2,2)} V_{(0,2)}^{(0,2)} \oplus \binom{(2,2)}{(2,2)} V_{(0,2)}^{(-1,4)}.$$

Calculando

$$\begin{aligned}
F_2 E_2 \left( (q^{-1} (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1) - (q^{-1} - q^{-2}) z_2) u_4^1 u_5^1 \right) &= q [2]_2^{1/2} F_2 \left( (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_4^1 u_5^1 \right) \\
&= q [2]_2 \left( (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1 - q^{-1/2} (u_3^1 u_3^2 - q u_3^2 u_3^1)) u_4^1 - q^{-3/2} (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_3^1 \right) u_5^1 \\
&= q [2]_2 \left( (q^{-1} (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1) - (q^{-1} - q^{-2}) z_2) u_4^1 u_5^1 - q^{-3/2} (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_3^1 u_5^1 \right),
\end{aligned}$$

y aplicando la proyección  $\text{pr}_{(0,2)}$  nos da

$$\begin{aligned}
(3.78) \quad & \text{pr}_{(0,2)} \left( (q^{-1} (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1) - (q^{-1} - q^{-2}) z_2) u_4^1 u_5^1 \right) \\
&= \frac{q^{-1}}{[2]_1} (q^{-1} (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1) u_4^1 u_5^1 - (q^{-1} - q^{-2}) z_2 u_4^1 u_5^1) + \frac{q^{-1/2}}{[2]_1} (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_3^1 u_5^1.
\end{aligned}$$

Ya que  $\text{pr}_{(0,2)}((u_2^1 u_4^2 - qu_2^2 u_4^1 - q^{-1/2}(u_3^1 u_3^2 - qu_3^2 u_3^1))u_4^1 u_5^1) \in \binom{(2,2)}{(2,2)} V_{(0,2)}^{(0,2)}$  y por Proposición 2.3 sabemos que  $\binom{(2,2)}{(2,2)} V_{(0,2)}^{(0,2)} = \text{Lin}\{z_2 u_4^1 u_5^1, (u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1)z_1\}$ , entonces existen  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tal que

$$(3.79) \quad \begin{aligned} & \frac{q^{-2}}{[2]_1} (u_2^1 u_4^2 - qu_2^2 u_4^1) u_4^1 u_5^1 + \frac{q^{-1/2}}{[2]_1} (u_3^1 u_4^2 - qu_3^2 u_4^1) u_3^1 u_5^1 \\ & = \alpha (u_1^1 u_5^2 - qu_1^2 u_5^1) u_4^1 u_5^1 + \beta (u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1) u_1^1 u_5^1. \end{aligned}$$

Cancelando  $u_5^1$  tenemos

$$(3.80) \quad \begin{aligned} & \frac{q^{-2}}{[2]_1} (u_2^1 u_4^2 - qu_2^2 u_4^1) u_4^1 + \frac{q^{-1/2}}{[2]_1} (u_3^1 u_4^2 - qu_3^2 u_4^1) u_3^1 \\ & = \alpha (u_1^1 u_5^2 - qu_1^2 u_5^1) u_4^1 + \beta (u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1) u_1^1. \end{aligned}$$

Actuando con  $F_1$  en ambos lados de (3.80) obtenemos

$$\frac{q^{-2}}{[2]_1} (u_1^1 u_4^2 - qu_1^2 u_4^1) u_4^1 = -\alpha q (u_1^1 u_4^2 - qu_1^2 u_4^1) u_4^1,$$

es decir,  $\alpha = \frac{-q^{-3}}{[2]_1}$ . Ahora actuando con  $E_1 F_2^2$  en ambos lados de (3.80) obtenemos

$$(3.81) \quad \begin{aligned} & \frac{q^{-2}}{[2]_1} q^{1/2} [2]_2 (u_2^1 u_5^2 - qu_2^2 u_5^1) u_2^1 - \frac{q^{-1/2}}{[2]_1} [2]_2 (q+1) (u_2^1 u_5^2 - qu_2^2 u_5^1) u_2^1 \\ & = -q^{-1/2} [2]_2 q^2 \alpha (u_2^1 u_5^2 - qu_2^2 u_5^1) u_2^1 - q^{-1/2} [2]_2 \beta (u_2^1 u_5^2 - qu_2^2 u_5^1) u_2^1. \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{[2]_1} (q^{-1} - 1 - q) = -q^2 \alpha - \beta.$$

Sustituyendo  $\alpha$  en esta última ecuación obtenemos  $\beta = \frac{1+q}{[2]_1}$ . Sustituyendo  $\alpha$  y  $\beta$  en ecuación (3.79) y combinando con (3.76) y (3.78) nos da (3.68).

De manera análoga tenemos

$$\begin{aligned} F_1 F_2(e_1) &= F_1 F_2((u_3^1 u_4^2 - qu_3^2 u_4^1)(u_5^1)^2) \\ &= [2]_2^{1/2} F_1((u_2^1 u_4^2 - qu_2^2 u_4^1 - q^{-1/2}(u_3^1 u_3^2 - qu_3^2 u_3^1))(u_5^1)^2) \\ &= [2]_2^{1/2} \left( (u_1^1 u_4^2 - qu_1^2 u_4^1)(u_5^1)^2 - q^{-1} [2]_1 (u_2^1 u_4^2 - qu_2^2 u_4^1 - q^{-1/2}(u_3^1 u_3^2 - qu_3^2 u_3^1)) u_4^1 u_5^1 \right). \end{aligned}$$

Ahora notemos que  $F_1 F_2(e_1)$  es un vector de peso más alto de peso  $(2, 2)$  con respecto a la  $\mathcal{U}_q(\text{so}(5))$ -representación derecha y de peso  $(0, 2)$  con respecto a la  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{l})$ -representación izquierda.

Por otro lado por relaciones (1.5) tenemos que  $E_2^2 F_1 F_2(e_1) = F_1 E_2^2 F_2(e_1) = [2]_2 F_1 E_2(e_1) = 0$  y por lo tanto  $F_1 F_2(e_1) \in \binom{(2,2)}{(2,2)} V_{(0,2)}^{(0,2)} \oplus \binom{(2,2)}{(2,2)} V_{(0,2)}^{(-1,4)}$ . Por otro lado calculamos

$$\begin{aligned} F_2 E_2 F_1 F_2(e_1) &= F_2 F_1 E_2 F_2(e_1) = [2]_2 F_2 F_1(e_1) = -[2]_2 [2]_1 F_2((u_3^1 u_4^2 - qu_3^2 u_4^1) u_4^1 u_5^1) \\ &= -[2]_2^{3/2} [2]_1 \left( (u_2^1 u_4^2 - qu_2^2 u_4^1 - q^{-1/2}(u_3^1 u_3^2 - qu_3^2 u_3^1)) u_4^1 u_5^1 - q^{-3/2} (u_3^1 u_4^2 - qu_3^2 u_4^1) u_3^1 u_5^1 \right). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{pr}_{(0,2)}(F_1 F_2(e_1)) &= -[2]_2^{1/2} q^{-2} (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1 - q^{-1/2} (u_3^1 u_3^2 - q u_3^2 u_3^1)) u_4^1 u_5^1 \\ &\quad + [2]_2^{1/2} (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) (u_5^1)^2 - q^{-3/2} [2]_2^{1/2} (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_3^1 u_5^1. \end{aligned}$$

Ya que  $\text{pr}_{(0,2)}(F_1 F_2(e_1)) \in \binom{(2,2)}{(2,2)} V_{(0,2)}^{(0,2)} = \text{Lin}\{z_2 u_4^1 u_5^1, (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) z_1\}$  tenemos

$$\begin{aligned} &- [2]_2^{1/2} q^{-2} (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1 - q^{-1/2} (u_3^1 u_3^2 - q u_3^2 u_3^1)) u_4^1 u_5^1 + [2]_2^{1/2} (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) (u_5^1)^2 \\ &\quad - q^{-3/2} [2]_2^{1/2} (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_3^1 u_5^1 \\ (3.82) \quad &= \alpha (u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) u_4^1 u_5^1 + \beta (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_1^1 u_5^1. \end{aligned}$$

Cancelando  $u_5^1$  tenemos

$$\begin{aligned} &- [2]_2^{1/2} q^{-2} (u_2^1 u_4^2 - q u_2^2 u_4^1 - q^{-1/2} (u_3^1 u_3^2 - q u_3^2 u_3^1)) u_4^1 + [2]_2^{1/2} (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_5^1 \\ &\quad - q^{-3/2} [2]_2^{1/2} (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_3^1 \\ (3.83) \quad &= \alpha (u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) u_4^1 + \beta (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_1^1. \end{aligned}$$

Actuando con  $F_1$  en ambos lados de (3.83) obtenemos

$$- [2]_2^{1/2} q^{-2} (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_4^1 - [2]_2^{1/2} q^2 (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_4^1 = -q \alpha (u_1^1 u_4^2 - q u_1^2 u_4^1) u_4^1.$$

Esto implica  $\alpha = [2]_2^{1/2} (q + q^{-3})$ .

Ahora actuando con  $E_1 F_2^2$  en ambos lados de (3.83) obtenemos

$$\begin{aligned} &- [2]_2^{3/2} q^{-2} q^{1/2} (u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_2^1 + q^{-3/2} [2]_2^{3/2} (1 + q) (u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_2^1 \\ &= -q^{-1/2} [2]_2 q^2 \alpha (u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_2^1 - q^{-1/2} [2]_2 \beta (u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_2^1. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\alpha$  en esta última ecuación obtenemos  $\beta = -[2]_2^{1/2} (1 + q^{-1} + q^3)$ , lo cual implica (3.69).

Ya que  $u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1 \in \binom{(0,2)}{(0,2)} V_{(1,0)}^{(0,2)}$  y  $u_4^1 u_5^1 \in \binom{(2,0)}{(2,0)} V_{(0,2)}^{(0,2)}$ , Lema 3.3 implica  $(u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_4^1 u_5^1 \in \binom{(2,2)}{(2,2)} V_{(1,2)}^{(1,2)} \oplus \binom{(2,2)}{(2,2)} V_{(1,2)}^{(0,4)}$ . Por otro lado

$$\begin{aligned} F_2 E_2((u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_4^1 u_5^1) &= -q^{3/2} [2]_2^{1/2} F_2((u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_4^1 u_5^1) \\ &= q [2]_2((u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_4^1 u_5^1 + q^{-1} (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_3^1 u_5^1). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{pr}_{(1,2)}((u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_4^1 u_5^1) &= (1 - \frac{1}{[4]_2} F_2 E_2)((u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_4^1 u_5^1) \\ (3.84) \quad &= \frac{q^{-1}}{[2]_1} (u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_4^1 u_5^1 - \frac{1}{[2]_1} (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_3^1 u_5^1. \end{aligned}$$

Ya que  $\text{pr}_{(1,2)}((u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_4^1 u_5^1) \in \binom{(2,2)}{(2,2)} V_{(1,2)}^{(1,2)} = \text{Lin}\{(u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) (u_5^1)^2\}$  tenemos

$$(3.85) \quad \frac{q^{-1}}{[2]_1} (u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_4^1 u_5^1 - \frac{1}{[2]_1} (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_3^1 u_5^1 = \alpha (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) (u_5^1)^2$$

para algún  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Cancelando  $u_5^1$  de ambos lados de la ecuación anterior obtenemos

$$(3.86) \quad \frac{q^{-1}}{[2]_1} (u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_4^1 - \frac{1}{[2]_1} (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_3^1 = \alpha (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_5^1.$$

Actuando con  $F_1$  en ambos lados de (3.86) tenemos

$$- \frac{q^{-1}}{[2]_1} (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_4^1 = -q \alpha (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) u_4^1.$$

Esto implica  $\alpha = \frac{q^{-2}}{[2]_1}$ , lo cual nos da (3.70).

Análogamente para demostrar (3.71) primero notemos que  $u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1 \in \binom{(0,2)}{(0,2)} V_{(0,2)}^{(0,2)}$  y  $u_3^1 u_5^1 \in \binom{(2,0)}{(2,0)} V_{(1,0)}^{(0,2)}$ . Lema 3.3 implica  $(u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_3^1 u_5^1 \in \binom{(2,2)}{(2,2)} V_{(1,2)}^{(1,2)} \oplus \binom{(2,2)}{(2,2)} V_{(1,2)}^{(0,4)}$ . Calculamos

$$\begin{aligned} F_2 E_2 ((u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_3^1 u_5^1) &= -q^{1/2} [2]_2^{1/2} F_2 ((u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_4^1 u_5^1) \\ &= [2]_2 ((u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_4^1 u_5^1 + q^{-1} (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_3^1 u_5^1). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{pr}_{(1,2)}((u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_3^1 u_5^1) &= (1 - \frac{1}{[4]_2} F_2 E_2) ((u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_3^1 u_5^1) \\ &= \frac{q}{[2]_1} (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_3^1 u_5^1 - \frac{1}{[2]_1} (u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_4^1 u_5^1 \\ &= -q \text{pr}_{(1,2)}((u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_4^1 u_5^1) \\ &= -\frac{q^{-1}}{[2]_1} e_1 \end{aligned}$$

por (3.84) y (3.70).  $\square$

Teniendo ya las proyecciones necesarias el siguiente paso ahora es calcular los valores propios de  $\delta_1 \delta_1^\dagger$ . Primero notemos que  $\delta_1 \delta_1^\dagger$  se anula en  $\binom{(2n+3,0)}{(2n+3,0)} V_{(1,2)}^{(1,2)}$  ya que  $\binom{(2n+3,0)}{(2n+3,0)} V_{(0,2)}^{(0,2)} = \{0\}$  de acuerdo a Proposición 2.3. Por otro lado por Lema 3.1, el valor propio de  $\delta_1 \delta_1^\dagger$  sobre  $\binom{(1,2l+2)}{(1,2l+2)} V_{(1,2)}^{(1,2)}$  coincide con el valor propio de  $\delta_1^\dagger \delta_1$  sobre  $\binom{(1,2l+2)}{(1,2l+2)} V_{(0,2)}^{(0,2)}$  y este ya ha sido calculado en la sección anterior. Por lo tanto solo necesitamos calcular el valor propio de  $\delta_1 \delta_1^\dagger$  sobre  $\binom{(2n+2,2l+2)}{(2n+2,2l+2)} V_{(1,2)}^{(1,2)}$ . Esto será hecho en la siguiente Proposición.

PROPOSICIÓN 3.10. Sean  $n, l \in \mathbb{N}_0$ . Entonces

$$(3.87) \quad \delta_1 \delta_1^\dagger (v_1) = \frac{q^2 c_2^2 [2]_2 ([3]_2 - 1)^2}{c_1^2 [3]_2^2} \frac{([n+l+4]_1 [n+l+2]_1 + [n+2]_1 [n+1]_1)}{[2]_1^2} v_1, \quad v_1 \in \binom{(2n+2,2l+2)}{(2n+2,2l+2)} V_{(1,2)}^{(1,2)} \setminus \{0\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Recalquemos que  $e_1 := (u_3^1 u_4^2 - q u_3^2 u_4^1) (u_5^1)^2$ . Por Proposición 2.3, el vector  $z_2^l e_1 z_1^n$  genera el espacio  $\binom{(2n+2,2l+2)}{(2n+2,2l+2)} V_{(1,2)}^{(1,2)}$ . Similarmente a (3.32) obtenemos de (3.2) y (3.3) las identidades

$$(3.88) \quad E_1(z_2^l) = q^{-l+1} [l]_1 z_2^{l-1} z_2, \quad E_1(z_1^n) = q^{n-1} [n]_1 z_1^{n-1} z_1.$$

Por (3.32) tenemos

$$\begin{aligned}
F_1 F_2(z_2^l e_1 z_1^n) &= F_1(z_2^l F_2(e_1) z_1^n) \\
&= F_1(z_2^l) F_2(e_1) z_1^n + z_2^l F_1 F_2(e_1) z_1^n + q^{-2} z_2^l F_2(e_1) F_1(z_1^n) \\
(3.89) \quad &= q^{l-1} [l]_1 z_2^{l-1} \check{z}_2 F_2(e_1) z_1^n + z_2^l F_1 F_2(e_1) z_1^n + q^{-n-1} [n]_1 z_2^l F_2(e_1) \check{z}_1 z_1^{n-1}.
\end{aligned}$$

Denotemos  $\gamma_1 := \frac{c_1}{q^2 c_2} \frac{[3]_2}{[3]_2 - 1}$ . Por Lema 1.3, Lema 2.8 y Lema 3.9 tenemos

$$\begin{aligned}
\gamma_1 \delta_1^\dagger(z_2^l e_1 z_1^n) &= \text{pr}_{(0,2)}(F_1 F_2(z_2^l e_1 z_1^n)) = q^{l-1} [l]_1 z_2^{l-1} \text{pr}_{(0,2)}(\check{z}_2 F_2(e_1)) z_1^n \\
&\quad + z_2^l \text{pr}_{(0,2)}(F_1 F_2(e_1)) z_1^n + q^{-n-1} [n]_1 z_2^l \text{pr}_{(0,2)}(F_2(e_1) \check{z}_1) z_1^{n-1} \\
&= -q^l [2]_2^{1/2} [l]_1 z_2^{l-1} \left( -\frac{q^3}{[2]_1} z_2^2 u_4^1 u_5^1 + \frac{q^5}{[2]_1} z_2 (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) z_1 \right) z_1^n \\
&\quad + [2]_2^{1/2} z_2^l \left( (q + q^{-3}) z_2 u_4^1 u_5^1 - (1 + q^{-1} + q^3) (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) z_1 \right) z_1^n \\
&\quad - q^{-n-3} [2]_2^{1/2} [n]_1 z_2^l \left( -\frac{q^{-2}}{[2]_1} z_2 u_4^1 u_5^1 z_1 + \frac{(1+q)}{[2]_1} (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) z_1^2 \right) z_1^{n-1} \\
(3.90) \quad &= \frac{[2]_2^{1/2}}{[2]_1} \left( q^{l+3} [l]_1 + q^2 + 1 + q^{-2} + q^{-4} + q^{-n-5} [n]_1 \right) z_2^{l+1} u_4^1 u_5^1 z_1^n \\
&\quad - \frac{[2]_2^{1/2}}{[2]_1} \left( q^{l+5} [l]_1 + (q + q^{-1})(1 + q^{-1} + q^3) + (q^{-3} + q^{-2}) q^{-n} [n]_1 \right) z_2^l (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) z_1^{n+1}.
\end{aligned}$$

Por (3.88) y  $E_2(z_2^{l+1} (u_5^1)^2 z_1^n) = 0$  tenemos

$$\begin{aligned}
E_2 E_1(z_2^{l+1} u_4^1 u_5^1 z_1^n) &= q^{-l} [l + 1]_1 z_2^l E_2(\check{z}_2 u_4^1 u_5^1) z_1^n + q^{n-1} [n]_1 z_2^{l+1} E_2(u_4^1 u_5^1 \check{z}_1) z_1^{n-1} \\
(3.91) \quad &= q^{-l+2} [l + 1]_1 [2]_2^{1/2} z_2^l (u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_4^1 u_5^1 z_1^n + q^n [n]_1 [2]_2^{1/2} z_2^{l+1} u_4^1 u_5^1 u_3^1 u_5^1 z_1^{n-1}
\end{aligned}$$

y análogamente

$$\begin{aligned}
E_2 E_1(z_2^l (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) z_1^{n+1}) &= q^{-l+1} [l]_1 z_2^{l-1} E_2(\check{z}_2 (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1)) z_1^{n+1} \\
&\quad + q^n [n + 1]_1 z_2^l E_2((u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) \check{z}_1) z_1^n \\
(3.92) \quad &= q^{-l+3} [2]_2^{1/2} [l]_1 z_2^{l-1} (u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) z_1^{n+1} \\
&\quad + q^{n+1} [2]_2^{1/2} [n + 1]_1 z_2^l (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_3^1 u_5^1 z_1^n.
\end{aligned}$$

Ahora notemos que  $u_4^1 u_5^1 \in \binom{(2,0)}{(2,0)} V_{(0,2)}^{(0,2)}$ ,  $u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1 \in \binom{(0,2)}{(0,2)} V_{(0,2)}^{(0,2)}$ ,  $u_3^1 u_5^1 \in \binom{(2,0)}{(2,0)} V_{(1,0)}^{(0,2)}$  y  $u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1 \in \binom{(0,2)}{(0,2)} V_{(1,0)}^{(0,2)}$ . Lema 3.3 implica que

$$u_4^1 u_5^1 u_3^1 u_5^1 \in \binom{(4,0)}{(4,0)} V_{(1,2)}^{(1,2)} \oplus \binom{(4,0)}{(4,0)} V_{(1,2)}^{(0,4)} \quad \text{y} \quad (u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) \in \binom{(0,4)}{(0,4)} V_{(1,2)}^{(1,2)} \oplus \binom{(0,4)}{(0,4)} V_{(1,2)}^{(0,4)}.$$

Por otro lado la Proposición 2.2 nos dice que  $\binom{(4,0)}{(4,0)} V_{(1,2)}^{(1,2)} = \binom{(0,4)}{(0,4)} V_{(1,2)}^{(1,2)} = \{0\}$ , lo cual implica

$$(3.93) \quad \text{pr}_{(1,2)}(u_4^1 u_5^1 u_3^1 u_5^1) = \text{pr}_{(1,2)}((u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1)) = 0.$$

Combinando (3.90)-(3.93) obtenemos

$$(3.94) \quad \begin{aligned} q^2 \gamma_1^2 \delta_1^\dagger \delta_1^\dagger (z_2^l e_1 z_1^n) &= \frac{q^{-l} [2]_2 [l+1]_1 (q^{l+5} [l]_1 + q^4 + q^2 + 1 + q^{-2} + q^{-n-3} [n]_1)}{[2]_1} z_2^l \text{pr}_{(1,2)} ((u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_4^1 u_5^1) z_1^n \\ &- \frac{q^n [2]_2 [n+1]_1 (q^{l+6} [l]_1 + (1+q^2)(1+q^{-1}+q^3) + (q^{-2}+q^{-1})q^{-n} [n]_1)}{[2]_1} z_2^l \text{pr}_{(1,2)} ((u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_3^1 u_5^1) z_1^n. \end{aligned}$$

Sustituyendo las proyecciones del Lema 3.9 en (3.94) obtenemos

$$(3.95) \quad \frac{[2]_1^2}{[2]_2} q^2 \gamma_1^2 \delta_1^\dagger \delta_1^\dagger (z_2^l e_1 z_1^n) = v_{l,n} z_2^l e_1 z_1^n,$$

donde

$$(3.96) \quad \begin{aligned} v_{l,n} &= q^3 [l]_1 [l+1]_1 + q^{-l} (q^2 + 1 + q^{-2} + q^{-4}) [l+1]_1 + q^{-l-n-5} [n]_1 [l+1]_1 \\ &+ q^{l+n+5} [l]_1 [n+1]_1 + q^n (q + q^{-1}) (1 + q^{-1} + q^3) [n+1]_1 + (q^{-3} + q^{-2}) [n]_1 [n+1]_1. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por  $(q - q^{-1})^2$  y desarrollando en potencias de  $q$  nos da

$$\begin{aligned} (q - q^{-1})^2 v_{l,n} &= q^3 (q^l - q^{-l}) (q^{l+1} - q^{-l-1}) + q^{-l} (q^3 - q^{-5}) (q^{l+1} - q^{-l-1}) \\ &+ q^{-l-n-5} (q^n - q^{-n}) (q^{l+1} - q^{-l-1}) + q^{l+n+5} (q^l - q^{-l}) (q^{n+1} - q^{-n-1}) \\ &+ q^n (q^5 + q^2 - q^{-2} - q^{-3}) (q^{n+1} - q^{-n-1}) + (q^{-3} + q^{-2}) (q^n - q^{-n}) (q^{n+1} - q^{-n-1}) \\ &= q^{2l+4} + q^{-2l+2} - q^4 - q^2 + q^4 - q^{-4} - q^{-2l+2} + q^{-2l-6} \\ &+ q^{-4} - q^{-2n-4} - q^{-2l-6} + q^{-2n-2l-6} + q^{2l+2n+6} - q^{2n+6} - q^{2l+4} + q^4 \\ &+ q^{2n+6} + q^{2n+3} - q^{2n-1} - q^{2n-2} - q^4 - q + q^{-3} + q^{-4} \\ &+ q^{2n-2} - q^{-2} - q^{-4} + q^{-2n-4} + q^{2n-1} - q^{-1} - q^{-3} + q^{-2n-3} \\ &= q^{2l+2n+6} - q^2 - q^{-2} + q^{-2n-2l-6} + q^{2n+3} - q - q^{-1} + q^{-2n-3}, \end{aligned}$$

es decir,

$$v_{l,n} = [n+l+4]_1 [n+l+2]_1 + [n+2]_1 [n+1]_1.$$

Esta última ecuación junto con (3.95) implica (3.87), lo cual completa la demostración.  $\square$

**COMENTARIO 3.11.** Notemos que  $\delta_2^\dagger \delta_2$  se anula sobre los espacios  $\begin{smallmatrix} (2n+2, 2l+2) \\ (2n+2, 2l+2) \end{smallmatrix} V_{(1,2)}^{(1,2)}$  y  $\begin{smallmatrix} (1, 2l+2) \\ (1, 2l+2) \end{smallmatrix} V_{(1,2)}^{(1,2)}$  ya que  $\begin{smallmatrix} (2n+2, 2l+2) \\ (2n+2, 2l+2) \end{smallmatrix} V_{(3,0)}^{(3,0)} = \begin{smallmatrix} (1, 2l+2) \\ (1, 2l+2) \end{smallmatrix} V_{(3,0)}^{(3,0)} = \{0\}$ . Por otro lado, por Lema 3.1, el valor propio de  $\delta_2^\dagger \delta_2$  sobre  $\begin{smallmatrix} (2n+3, 0) \\ (2n+3, 0) \end{smallmatrix} V_{(1,2)}^{(1,2)}$  coincide con el valor propio de  $\delta_2 \delta_2^\dagger$  sobre  $\begin{smallmatrix} (2n+3, 0) \\ (2n+3, 0) \end{smallmatrix} V_{(3,0)}^{(3,0)}$  y este será calculado en la siguiente sección. Es por esto que los valores propios de  $\delta_2^\dagger \delta_2$  sobre los  $\begin{smallmatrix} \mu \\ \mu \end{smallmatrix} V_{(1,2)}^{(1,2)}$  1-dimensionales no son calculados.

### 5. Valores propios de $\delta_2 \delta_2^\dagger$

LEMA 3.12. *Tenemos las proyecciones*

$$(3.97) \quad \text{pr}_{(3,0)}(u_4^1(u_5^1)^2 z_1) = -\frac{(q^4+q^5)}{[3]_2} (u_5^1)^3 z_1,$$

$$(3.98) \quad \text{pr}_{(3,0)}((u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_5^1 z_1) = -\frac{q^{-2}}{[3]_2} z_2 (u_5^1)^3,$$

$$(3.99) \quad \text{pr}_{(3,0)}(z_2 u_4^1 (u_5^1)^2) = -\frac{q^{-2}}{[3]_2} z_2 (u_5^1)^3,$$

$$(3.100) \quad \text{pr}_{(3,0)}(z_2 (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_5^1) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Por Lema 1.1 tenemos

$$(3.101) \quad u_4^1 (u_5^1)^2 z_1 = q^5 (u_5^1)^3 u_4^1 u_2^1.$$

Como  $u_2^1 \in \binom{(1,0)}{(1,0)} V_{(1,-2)}^{(-1,2)}$  y  $(u_5^1)^3 u_4^1 \in \binom{(4,0)}{(4,0)} V_{(2,2)}^{(2,2)}$ , Lema 3.3 implica

$$(u_5^1)^3 u_4^1 u_2^1 \in \binom{(5,0)}{(5,0)} V_{(3,0)}^{(3,0)} \oplus \binom{(5,0)}{(5,0)} V_{(3,0)}^{(2,2)} \oplus \binom{(5,0)}{(5,0)} V_{(3,0)}^{(1,4)}.$$

Calculando las acciones

$$F_2 E_2 ((u_5^1)^3 u_4^1 u_2^1) = (u_5^1)^3 [2]_2^{1/2} F_2 (u_4^1 u_3^1) = (u_5^1)^3 [2]_2 (-q^{-1/2} u_3^1 u_3^1 + q^{-1} u_4^1 u_2^1),$$

$$\begin{aligned} F_2^2 E_2^2 ((u_5^1)^3 u_4^1 u_2^1) &= -(u_5^1)^3 q^{1/2} [2]_2 F_2^2 (u_4^1 u_4^1) = (u_5^1)^3 [2]_2^{3/2} F_2 (u_3^1 u_4^1 + q^{-1} u_4^1 u_3^1) \\ &= (u_5^1)^3 [2]_2^2 (u_2^1 u_4^1 - q^{-1/2} u_3^1 u_3^1 - q^{-3/2} u_3^1 u_3^1 + q^{-2} u_4^1 u_2^1). \end{aligned}$$

Entonces, por (1.58),

$$(3.102) \quad \text{pr}_{(3,0)}((u_5^1)^3 u_4^1 u_2^1) = (u_5^1)^3 \left( (1 - q^{-1} + \frac{q^{-2}}{[3]_2}) u_4^1 u_2^1 + (q^{-1/2} - \frac{q^{-1/2} + q^{-3/2}}{[3]_2}) u_3^1 u_3^1 + \frac{1}{[3]_2} u_2^1 u_4^1 \right).$$

Ya que  $\text{pr}_{(3,0)}((u_5^1)^2 u_4^1 z_1) \in \binom{(5,0)}{(5,0)} V_{(3,0)}^{(3,0)} = \text{Lin}\{(u_5^1)^3 z_1\}$ , debe existir  $\alpha \in \mathbb{C}$  tal que

$$(u_5^1)^3 \left( (1 - q^{-1} + \frac{q^{-2}}{[3]_2}) u_4^1 u_2^1 + (q^{-1/2} - \frac{q^{-1/2} + q^{-3/2}}{[3]_2}) u_3^1 u_3^1 + \frac{1}{[3]_2} u_2^1 u_4^1 \right) = \alpha (u_5^1)^3 u_1^1 u_5^1.$$

Cancelando  $(u_5^1)^3$  en ambos lados

$$(3.103) \quad (1 - q^{-1} + \frac{q^{-2}}{[3]_2}) u_4^1 u_2^1 + (q^{-1/2} - \frac{q^{-1/2} + q^{-3/2}}{[3]_2}) u_3^1 u_3^1 + \frac{1}{[3]_2} u_2^1 u_4^1 = \alpha u_1^1 u_5^1.$$

Actuando en ambos lados con  $E_1$  y utilizando la relación (1.22) obtenemos

$$-(1 - q^{-1} + \frac{q^{-2}}{[3]_2} + \frac{1}{[3]_2}) u_2^1 u_5^1 = q \alpha u_2^1 u_5^1.$$

Entonces  $\alpha = -\frac{q^{-1}}{[3]_2} ((q+1+q^{-1})(1-q^{-1})+q^{-2}+1) = -\frac{(1+q^{-1})}{[3]_2}$ . Esto junto con (3.101) implica (3.97).

Por Lema 1.1 tenemos que  $(u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_5^1 z_1 = (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_2^1 (u_5^1)^2$ . Como  $u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1 \in \binom{(0,2)}{(0,2)} V_{(0,2)}^{(0,2)}$  y  $u_2^1 (u_5^1)^2 \in \binom{(3,0)}{(3,0)} V_{(3,-2)}^{(1,2)}$ , entonces Lema 3.3 nos da

$$(u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_2^1 (u_5^1)^2 \in \binom{(3,2)}{(3,2)} V_{(3,0)}^{(3,0)} \oplus \binom{(3,2)}{(3,2)} V_{(3,0)}^{(2,2)} \oplus \binom{(3,2)}{(3,2)} V_{(3,0)}^{(1,4)}.$$



Calculando las acciones

$$\begin{aligned} F_2 E_2((u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_2^1 (u_5^1)^2) &= F_2 E_2((u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_2^1) (u_5^1)^2 \\ &= q^{-1} [2]_2 (-q^{1/2} (u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_3^1 + (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_2^1) (u_5^1)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2^2 E_2^2((u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_2^1 (u_5^1)^2) &= -q^{1/2} [2]_2 F_2^2((u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_4^1) (u_5^1)^2 \\ &= [2]_2^{3/2} F_2((u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_4^1 + q^{-1} (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_3^1) (u_5^1)^2 \\ &= [2]_2^2 ((u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_4^1 - (q^{-1/2} + q^{-3/2}) (u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_3^1 + q^{-2} (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_2^1) (u_5^1)^2. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{pr}_{(3,0)}((u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_2^1 (u_5^1)^2) &= ((1 - q^{-1} + \frac{q^{-2}}{[3]_2})(u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_2^1 \\ &\quad + (q^{-1/2} - \frac{(q^{-1/2} + q^{-3/2})}{[3]_2})(u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_3^1 + \frac{1}{[3]_2} (u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_4^1) (u_5^1)^2. \end{aligned}$$

Ya que  $\text{pr}_{(3,0)}((u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_2^1 (u_5^1)^2) \in \binom{(3,2)}{(3,2)} V_{(3,0)}^{(3,0)} = \text{Lin}\{z_2(u_5^1)^3\}$  existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  tal que

$$\begin{aligned} ((1 - q^{-1} + \frac{q^{-2}}{[3]_2})(u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_2^1 + (q^{-1/2} - \frac{(q^{-1/2} + q^{-3/2})}{[3]_2})(u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_3^1 \\ (3.104) \quad + \frac{1}{[3]_2} (u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_4^1) (u_5^1)^2 = \alpha (u_1^1 u_5^2 - q u_1^2 u_5^1) (u_5^1)^3. \end{aligned}$$

Luego actuando con  $E_1$  en ambos lados obtenemos

$$-\frac{q^2}{[3]_2} (u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) (u_5^1)^3 = q^4 \alpha (u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) (u_5^1)^3.$$

Entonces  $\alpha = -\frac{q^{-2}}{[3]_2}$ , lo cual nos da (3.98).

Recalquemos que  $\hat{z}_2 u_4^1 (u_5^1)^2 = q(u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_4^1 (u_5^1)^2$  y notemos que  $u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1 \in \binom{(0,2)}{(0,2)} V_{(2,-2)}^{(0,2)}$  y  $u_4^1 (u_5^1)^2 \in \binom{(3,0)}{(3,0)} V_{(1,2)}^{(1,2)}$ . Entonces Lema 3.3 nos da

$$(u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_4^1 (u_5^1)^2 \in \binom{(3,2)}{(3,2)} V_{(3,0)}^{(3,0)} \oplus \binom{(3,2)}{(3,2)} V_{(3,0)}^{(2,2)} \oplus \binom{(3,2)}{(3,2)} V_{(3,0)}^{(1,4)}.$$

Calculando las acciones

$$\begin{aligned} F_2 E_2((u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_4^1 (u_5^1)^2) &= q [2]_2^{1/2} F_2((u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_4^1) (u_5^1)^2 \\ &= q [2]_2 ((u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_4^1 - q^{-1/2} (u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_3^1) (u_5^1)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2^2 E_2^2((u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_4^1 (u_5^1)^2) &= -q^2 q^{1/2} [2]_2 F_2^2((u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_4^1) (u_5^1)^2 \\ &= q^2 [2]_2^{3/2} F_2((u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_4^1 + q^{-1} (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_3^1) (u_5^1)^2 \\ &= q^2 [2]_2^2 ((u_2^1 u_5^2 - q u_2^2 u_5^1) u_4^1 - (q^{-1/2} + q^{-3/2}) (u_3^1 u_5^2 - q u_3^2 u_5^1) u_3^1 \\ &\quad + q^{-2} (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_2^1) (u_5^1)^2, \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \text{pr}_{(3,0)}((u_2^1 u_5^2 - qu_2^2 u_5^1)u_4^1 (u_5^1)^2) &= \left( (1 - q + \frac{q^2}{[3]_2})(u_2^1 u_5^2 - qu_2^2 u_5^1)u_4^1 \right. \\ &\quad \left. + (q^{1/2} - \frac{q^{3/2} + q^{1/2}}{[3]_2})(u_3^1 u_5^2 - qu_3^2 u_5^1)u_3^1 + \frac{1}{[3]_2}(u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1)u_2^1 \right) (u_5^1)^2. \end{aligned}$$

Ya que  $\text{pr}_{(3,0)}(\dot{z}_2 u_4^1 (u_5^1)^2) \in \binom{(3,2)}{(3,2)} V_{(3,0)}^{(3,0)} = \text{Lin}\{z_2 (u_5^1)^3\}$  debemos tener

$$\begin{aligned} (3.105) \quad &\left( (1 - q + \frac{q^2}{[3]_2})(u_2^1 u_5^2 - qu_2^2 u_5^1)u_4^1 + (q^{1/2} - \frac{q^{3/2} + q^{1/2}}{[3]_2})(u_3^1 u_5^2 - qu_3^2 u_5^1)u_3^1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{[3]_2}(u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1)u_2^1 \right) (u_5^1)^2 = \alpha z_2 (u_5^1)^3 \end{aligned}$$

para algún  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Actuando con  $E_1$  en ambos lados de la ecuación anterior obtenemos

$$(3.106) \quad -q^2(1 - q + \frac{q^2}{[3]_2})(u_2^1 u_5^2 - qu_2^2 u_5^1)(u_5^1)^3 = \alpha q^4 (u_2^1 u_5^2 - qu_2^2 u_5^1)(u_5^1)^3.$$

Entonces  $\alpha = -q^{-2}(1 - q + \frac{q^2}{[3]_2}) = -\frac{q^{-3}}{[3]_2}$ . Esto nos da (3.99).

Por último ya que  $\dot{z}_2 \in \binom{(0,2)}{(0,2)} V_{(2,-2)}^{(0,2)}$  y  $(u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1)u_5^1 \in \binom{(1,2)}{(1,2)} V_{(1,2)}^{(1,2)}$ , Lema 3.3 implica que

$$\dot{z}_2(u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1)u_5^1 \in \binom{(1,4)}{(1,4)} V_{(3,0)}^{(3,0)} \oplus \binom{(1,4)}{(1,4)} V_{(3,0)}^{(2,2)} \oplus \binom{(1,4)}{(1,4)} V_{(3,0)}^{(1,4)}.$$

Por otro lado  $\text{pr}_{(3,0)}(\dot{z}_2(u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1)u_5^1) \in \binom{(1,4)}{(1,4)} V_{(3,0)}^{(3,0)}$  y  $\binom{(1,4)}{(1,4)} V_{(3,0)}^{(3,0)} = \{0\}$  por Proposición 2.2, por lo tanto (3.100) su cumple.  $\square$

Teniendo en mano las proyecciones del lema anterior podemos proceder a calcular los valores propios de  $\delta_2 \delta_2^\dagger$ .

PROPOSICIÓN 3.13. Sean  $n, l \in \mathbb{N}_0$ . Entonces

$$(3.107) \quad \delta_2 \delta_2^\dagger(v_2) = \frac{q^2 c_3^2}{c_2^2} \frac{([n+l+3]_1 [n+l+2]_1 + [n+3]_1 [n+1]_1)}{[3]_2} v_2, \quad v_2 \in \binom{(2n+3,2l)}{(2n+3,2l)} V_{(3,0)}^{(3,0)} \setminus \{0\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por Lema 1.1, Ecuación (1.40), obtenemos

$$\dot{z}_2 (u_5^1)^3 = -q(u_1^1 u_4^2 - qu_1^2 u_4^1)(u_5^1)^3 = -q^2 z_2 u_4^1 (u_5^1)^2 + q^6 (u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1)u_5^1 z_1,$$

y  $(u_5^1)^3 \dot{z}_1 = -q(u_5^1)^3 u_1^1 u_4^1 = -q^{-3} u_4^1 (u_5^1)^2 z_1$ . Usando estas dos identidades y (3.32) tenemos

$$\begin{aligned} (3.108) \quad &\frac{c_2}{q^2 c_3} \delta_2^\dagger(z_2^l (u_5^1)^3 z_1^n) = F_1(z_2^l (u_5^1)^3 z_1^n) \\ &= F_1(z_2^l) (u_5^1)^3 z_1^n + z_2^l F_1((u_5^1)^3) z_1^n + q^{-3} z_2^l (u_5^1)^3 F_1(z_1^n) \\ &= q^{l-1} [l]_1 z_2^{l-1} \dot{z}_2 (u_5^1)^3 z_1^n - q^{-2} [3]_1 z_2^l u_4^1 (u_5^1)^2 z_1^n + q^{-n-2} [n]_1 z_2^l (u_5^1)^3 \dot{z}_1 z_1^{n-1} \\ &= q^{l+5} [l]_1 z_2^{l-1} (u_4^1 u_5^2 - qu_4^2 u_5^1)u_5^1 z_1^{n+1} - (q^{l+1} [l]_1 + q^{-2} [3]_1 + q^{-n-5} [n]_1) z_2^l u_4^1 (u_5^1)^2 z_1^n. \end{aligned}$$

Denotamos  $\tau = q^{l+1}[l]_1 + q^{-2}[3]_1 + q^{-n-5}[n]_1$ . Ahora, aplicando  $E_1$  a (3.108),

$$\begin{aligned} \frac{c_2}{q^2 c_3} E_1(\delta_2^\dagger(z_2^l(u_5^1)^3 z_1^n)) &= q^{l+6}[l]_1 E_1(z_2^{l-1})(u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_5^1 z_1^{n+1} + q^{l+5}[l]_1 z_2^{l-1} (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_5^1 E_1(z_1^{n+1}) \\ &\quad - \tau(q E_1(z_2^l) u_4^1 (u_5^1)^2 z_1^n - q^2 z_2^l (u_5^1)^3 z_1^n + z_2^l u_4^1 (u_5^1)^2 E_1(z_1^n)) \\ &= q^8 [l]_1 [l-1]_1 z_2^{l-2} \dot{z}_2 (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_5^1 z_1^{n+1} + q^{n+l+5} [n+1]_1 [l]_1 z_2^{l-1} (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_5^1 \dot{z}_1 z_1^n \\ &\quad - \tau(q^{-l+2} [l]_1 z_2^{l-1} \dot{z}_2 u_4^1 (u_5^1)^2 z_1^n - q^2 z_2^l (u_5^1)^3 z_1^n + q^{n-1} [n]_1 z_2^l u_4^1 (u_5^1)^2 \dot{z}_1 z_1^{n-1}). \end{aligned}$$

Por (1.60) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{c_2}{q^2 c_3} \delta_2 \delta_2^\dagger(z_2^l(u_5^1)^3 z_1^n) &= q^8 [l]_1 [l-1]_1 z_2^{l-2} \text{pr}_{(3,0)}(\dot{z}_2 (u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_5^1) z_1^{n+1} \\ &\quad + q^{n+l+5} [n+1]_1 [l]_1 z_2^{l-1} \text{pr}_{(3,0)}((u_4^1 u_5^2 - q u_4^2 u_5^1) u_5^1 \dot{z}_1) z_1^n \\ (3.109) \quad &- \tau(q^{-l+2} [l]_1 z_2^{l-1} \text{pr}_{(3,0)}(\dot{z}_2 u_4^1 (u_5^1)^2) z_1^n - q^2 z_2^l (u_5^1)^3 z_1^n + q^{n-1} [n]_1 z_2^l \text{pr}_{(3,0)}(u_4^1 (u_5^1)^2 \dot{z}_1) z_1^{n-1}) \end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo las proyecciones del Lema 3.12 en (3.109), obtenemos

$$(3.110) \quad \frac{c_2}{q^2 c_3} \delta_2 \delta_2^\dagger(z_2^l(u_5^1)^3 z_1^n) = \gamma_{l,n} z_2^l (u_5^1)^3 z_1^n,$$

donde

$$\gamma_{l,n} = -\frac{q^{n+l+3}}{[3]_2} [n+1]_1 [l]_1 + (q^{l+1}[l]_1 + q^{-2}[3]_1 + q^{-n-5}[n]_1) \left( \frac{q^{-l}}{[3]_2} [l]_1 + q^2 + \frac{q^{n-1}(q^4+q^5)}{[3]_2} [n]_1 \right).$$

Multiplicando ambos lados por  $(q - q^{-1})^2 [3]_2$  y escribiendo en potencias de  $q$ ,

$$\begin{aligned} (q - q^{-1})^2 [3]_2 \gamma_{l,n} &= -q^{n+l+3} (q^{n+1} - q^{-n-1}) (q^l - q^{-l}) \\ &\quad + (q^{l+1} (q^l - q^{-l}) + q^{-2} (q^3 - q^{-3}) + q^{-n-5} (q^n - q^{-n})) \\ &\quad \times (q^{-l} (q^l - q^{-l}) + q^2 (q - q^{-1}) (q^{-1} + 1 + q) + q^{n-1} (q^4 + q^5) (q^n - q^{-n})) \\ &= -q^{2n+2l+4} + q^{2l+2} + q^{2n+4} - q^2 \\ &\quad + (q^{2l+1} - q + q - q^{-5} + q^{-5} - q^{-2n-5}) (1 - q^{-2l} + q^4 + q^3 - q - 1 + q^{2n+3} + q^{2n+4} - q^3 - q^4) \\ &= -q^{2n+2l+4} + q^{2l+2} + q^{2n+4} - q^2 + (q^{2l+1} - q^{-2n-5}) (q^{2n+4} + q^{2n+3} - q^{-2l} - q) \\ &= -q^{2n+2l+4} + q^{2l+2} + q^{2n+4} - q^2 + q^{2n+2l+5} + q^{2n+2l+4} - q - q^{2l+2} - q^{-1} - q^{-2} + q^{-2n-2l-5} + q^{-2n-4} \\ &= q^{2n+2l+5} - q - q^{-1} + q^{-2n-2l-5} + q^{2n+4} - q^2 - q^{-2} + q^{-2n-4}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\gamma_{l,n} = \frac{[n+l+3]_1 [n+l+2]_1 + [n+3]_1 [n+1]_1}{[3]_2}$$

Esto último junto con (3.110) nos da (3.107).  $\square$

## 6. Cálculo de los valores propios de $\delta_0^\dagger \delta_0$ and $\delta_2 \delta_2^\dagger$ mediante un operador Casimir

En esta sección se dará una manera diferente de calcular los valores propios de  $\delta_0^\dagger \delta_0$  y  $\delta_2 \delta_2^\dagger$  la cual podría aplicar en los casos más generales para investigar los valores propios sobre 0 y  $n$ -formas, además de ser interesante en si misma.

Ya que la matriz de Cartan del álgebra de Lie  $\mathfrak{sp}(4)$  es la transpuesta de la matriz de Cartan de  $\mathfrak{so}(5)$  presentada en (1.1), se sigue de las definiciones en [28] que las \*-álgebras de Hopf son isomorfas. El \*-isomorfismo  $\Phi : \mathcal{U}_{q^{1/2}}(\mathfrak{sp}(4)) \rightarrow \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$  con respecto a la involución considerada en [31] es dado por

$$(3.111) \quad \begin{aligned} \Phi(K_1) &= K_2^{-1}, & \Phi(E_1) &= q_2 F_2, & \Phi(F_1) &= q_2^{-1} E_2, \\ \Phi(K_2) &= K_1^{-1}, & \Phi(E_2) &= q_2 F_1, & \Phi(F_2) &= q_2^{-1} E_1. \end{aligned}$$

Siguiendo la notación [31, Lemma 3.2] los elementos

$$(3.112) \quad \begin{aligned} E_{\beta_1} &= E_1, & E_{\beta_2} &= \frac{1}{[2]_2} E_1^2 E_2 - q_2^{-1} E_1 E_2 E_1 + \frac{q_2^{-2}}{[2]_2} E_2 E_1^2, \\ E_{\beta_3} &= E_1 E_2 - q_2^{-2} E_2 E_1, & E_{\beta_4} &= E_2 \end{aligned}$$

y

$$(3.113) \quad \begin{aligned} F_{\beta_1} &= F_1, & F_{\beta_2} &= \frac{1}{[2]_2} F_2 F_1^2 - q_2 F_1 F_2 F_1 + \frac{q_2^2}{[2]_2} F_1^2 F_2, \\ F_{\beta_3} &= F_2 F_1 - q_2^2 F_1 F_2, & F_{\beta_4} &= F_2. \end{aligned}$$

son llamados los vectores raices positivos y negativos de  $U_{q^{1/2}}(\mathfrak{sp}(4))$  respectivamente. Los correspondientes elementos de Cartan de [31] son dados por

$$K_{2\lambda_1} = K_1^2 K_2, \quad K_{2\lambda_2} = K_2.$$

Definimos

$$(3.114) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}_1 &:= \Phi(q_2^{-1} E_{\beta_1}) = F_2, & \mathcal{F}_2 &:= \Phi(q_2^{-3} [2]_2 E_{\beta_2}) = F_2^2 F_1 - q_2^{-1} [2]_2 F_2 F_1 F_2 + q_2^{-2} F_1 F_2^2, \\ \mathcal{F}_3 &:= \Phi(q_2^{-2} E_{\beta_3}) = F_2 F_1 - q_2^{-2} F_1 F_2, & \mathcal{F}_4 &:= \Phi(q_2^{-1} E_{\beta_4}) = F_1, \\ \mathcal{K}_1 &:= \Phi(K_{2\lambda_1}) = K_2^{-2} K_1^{-1}, & \mathcal{K}_2 &:= \Phi(K_{2\lambda_2}) = K_1^{-1}. \end{aligned}$$

Aplicando el \*-isomorfismo definido en (3.111), el elemento central  $C$  en [31, Proposition 6.6] puede ser escrito como

$$(3.115) \quad \begin{aligned} C &= \frac{1}{(q_2 - q_2^{-1})^2} (q_2^{-2} \mathcal{K}_1^{-1} + q_2^{-1} \mathcal{K}_2^{-1} + q_2 \mathcal{K}_2 + q_2^2 \mathcal{K}_1) + (q_2^{-3} \mathcal{K}_1^{-1} + q_2^3 \mathcal{K}_2) \mathcal{F}_1^* \mathcal{F}_1 + \mathcal{K}_1^{-1} \mathcal{F}_2^* \mathcal{F}_2 \\ &+ (q_2^{-3} \mathcal{K}_1^{-1} + q_2^3 \mathcal{K}_2^{-1}) \mathcal{F}_3^* \mathcal{F}_3 + q_2^{-2} [2]_2^2 \mathcal{K}_2^{-1} \mathcal{F}_4^* \mathcal{F}_4 - (q_2 - q_2^{-1}) [2]_2^2 q_2 \mathcal{K}_1^{-1} (\mathcal{F}_1^* \mathcal{F}_3^* \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_2^* \mathcal{F}_3 \mathcal{F}_1) \\ &- (q_2 - q_2^{-1}) [2]_2 q_2^{-3} \mathcal{K}_1^{-1} (\mathcal{F}_1^* \mathcal{F}_4^* \mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_3^* \mathcal{F}_4 \mathcal{F}_1) + (q_2 - q_2^{-1})^2 q_2^2 \mathcal{K}_1^{-1} \mathcal{F}_1^* \mathcal{F}_3^* \mathcal{F}_3 \mathcal{F}_1 \\ &+ (q_2 - q_2^{-1})^2 q_2^{-3} [2]_2^2 \mathcal{K}_1^{-1} \mathcal{F}_1^* \mathcal{F}_4^* \mathcal{F}_4 \mathcal{F}_1. \end{aligned}$$

Ahora definimos

$$(3.116) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}_1 &:= E_2 = \Phi(q_2 F_{\beta_1}), & \mathcal{E}_2 &:= E_1 E_2^2 - q_2 [2]_2 E_2 E_1 E_2 + q_2^2 E_2^2 E_1 = \Phi(q_2^3 [2]_2 F_{\beta_2}), \\ \mathcal{E}_3 &:= E_1 E_2 - q_2^2 E_2 E_1 = \Phi(q_2^2 F_{\beta_3}), & \mathcal{E}_4 &:= E_1 = \Phi(q_2 F_{\beta_4}). \end{aligned}$$

Cálculos directos nos dan las siguientes identidades:

$$(3.117) \quad \begin{aligned} \mathcal{K}_1^* &= K_1^{-1} K_2^{-2}, & \mathcal{K}_2^* &= K_1^{-1}, & \mathcal{F}_1^* &= K_2^{-1} E_2, & \mathcal{F}_4^* &= q K_1^{-1} E_1 \\ \mathcal{F}_2^* &= K_1^{-1} K_2^{-2} (E_1 E_2^2 - (1 + q^{-1}) E_2 E_1 E_2 + q^{-1} E_2^2 E_1), \\ \mathcal{F}_3^* &= K_1^{-1} K_2^{-1} (E_1 E_2 - q^{-1} E_2 E_1), \end{aligned}$$

$$(3.118) \quad \begin{aligned} \mathcal{K}_1^* &= \mathcal{K}_1, & \mathcal{K}_2 &= \mathcal{K}_2^*, & \mathcal{E}_1^* &= q K_2 F_2 = F_2 K_2, & \mathcal{E}_4^* &= q K_1 F_1 = q^{-1} F_1 K_1 \\ \mathcal{E}_2^* &= q^2 K_1 K_2^2 (F_2^2 F_1 - (1 + q) F_2 F_1 F_2 + q F_1 F_2^2), & \mathcal{E}_3^* &= q K_1 K_2 (F_2 F_1 - q F_1 F_2), \end{aligned}$$

y

$$(3.119) \quad \begin{aligned} S(\mathcal{F}_1) &= -q^{-1} \mathcal{E}_1^*, & S(\mathcal{F}_1^*) &= -\mathcal{E}_1, & S(\mathcal{F}_2) &= -q^{-4} \mathcal{E}_2^*, & S(\mathcal{F}_2^*) &= -\mathcal{E}_2, \\ S(\mathcal{F}_3) &= -q^{-3} \mathcal{E}_3^*, & S(\mathcal{F}_3^*) &= -\mathcal{E}_3, & S(\mathcal{F}_4) &= -q^{-1} \mathcal{E}_4^*, & S(\mathcal{F}_4^*) &= -q \mathcal{E}_4. \end{aligned}$$

Por (3.115) y (3.119) podemos obtener otra versión de un elemento central por aplicar la antipoda  $S$  a  $C$

$$(3.120) \quad \begin{aligned} S(C) &= \frac{1}{(q_2 - q_2^{-1})^2} (q^{-2} \mathcal{K}_1 + q^{-1} \mathcal{K}_2 + q \mathcal{K}_2^{-1} + q^2 \mathcal{K}_1^{-1}) + q^{-1} (q_2^{-3} \mathcal{K}_1 + q_2^3 \mathcal{K}_2^{-1}) \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_1 \\ &+ q^{-4} \mathcal{K}_1 \mathcal{E}_2^* \mathcal{E}_2 + (q_2^{-3} \mathcal{K}_1 + q_2^3 \mathcal{K}_2) q^{-3} \mathcal{E}_3^* \mathcal{E}_3 + q_2^{-2} [2]_2^2 \mathcal{K}_2 \mathcal{E}_4^* \mathcal{E}_4 \\ &+ (q_2 - q_2^{-1}) [2]_2^2 q_2 q^{-4} \mathcal{K}_1 (\mathcal{E}_2^* \mathcal{E}_3 \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_3^* \mathcal{E}_2) + (q_2 - q_2^{-1}) [2]_2 q_2^{-3} q^{-2} \mathcal{K}_1 (\mathcal{E}_3^* \mathcal{E}_4 \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_4^* \mathcal{E}_3) \\ &+ (q_2 - q_2^{-1})^2 q_2^2 q^{-4} \mathcal{K}_1 \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_3^* \mathcal{E}_3 \mathcal{E}_1 + (q_2 - q_2^{-1})^2 q_2^{-3} [2]_2^2 q^{-1} \mathcal{K}_1 \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_4^* \mathcal{E}_4 \mathcal{E}_1. \end{aligned}$$

Teniendo los operadores Casimir ya definidos podemos proceder a calcular los valores propios de  $\delta_0^\dagger \delta_0$  y  $\delta_2 \delta_2^\dagger$ .

PROPOSICIÓN 3.14. Para  $u \in \binom{(2n, 2l)}{(2n, 2l)} V_{(0,0)}^{(0,0)}$ , tenemos

$$(3.121) \quad \delta_0^\dagger \delta_0(u) = \frac{c_1^2}{c_0^2} \frac{q^2 [2]_2^2 ([n+l+2]_1 [n+l]_1 + [l+1]_1 [l]_1)}{[3]_2} u,$$

y para  $v \in \binom{(2n+3, 2l)}{(2n+3, 2l)} V_{(3,0)}^{(3,0)}$ , tenemos

$$(3.122) \quad \delta_2 \delta_2^\dagger(v) = \frac{c_3^2}{c_2^2} \frac{q^2 ([n+l+3]_1 [n+l+2]_1 + [n+3]_1 [n+1]_1)}{[3]_2} v.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $u \in \binom{(2n, 2l)}{(2n, 2l)} V_{(0,0)}^{(0,0)}$  tal que  $\|u\| = 1$ . Como  $\delta_0^\dagger \delta_0(u) \in \binom{(2n, 2l)}{(2n, 2l)} V_{(0,0)}^{(0,0)} = \text{Lin}\{u\}$ , es claro que  $\delta_0^\dagger \delta_0(u) = \lambda u$  con  $\lambda = \langle u, \delta_0^\dagger \delta_0(u) \rangle$ . Ya que  $\text{pr}_{(0,0)}$  es una proyección ortogonal, tenemos para

todo  $v \in \frac{\langle(2n, 2l)\rangle}{\langle(2n, 2l)\rangle} V_{(0, 2)}^{(0, 2)}$ ,

$$(3.123) \quad \frac{c_0}{q^2 c_1} \langle u, \delta_0^\dagger(v) \rangle = \langle u, \text{pr}_{(0,0)}(F_1 F_2^2(v)) \rangle = \langle \text{pr}_{(0,0)}(u), F_1 F_2^2(v) \rangle = \langle u, F_1 F_2^2(v) \rangle.$$

Por (1.5) y (1.55),  $F_2 E_1(u) = E_1 F_2(u) = 0$ , entonces  $E_1(u)$  es un vector de peso más bajo con peso  $\alpha_1 = (2, -2)$  y por lo tanto  $E_1(u) \in \frac{\langle(2n, 2l)\rangle}{\langle(2n, 2l)\rangle} V_{(2, -2)}^{(0, 2)}$ . Aplicando ahora (1.54) y (3.123), obtenemos

$$(3.124) \quad \frac{c_0^2}{q^2 c_1^2} \langle u, \delta_0^\dagger \delta_0(u) \rangle = \langle u, F_1 F_2^2 E_2^2 E_1(u) \rangle = [2]_2 \langle u, F_1 F_2 E_2 E_1(u) \rangle = [2]_2^2 \langle u, F_1 E_1(u) \rangle.$$

Nuevamente por (1.55),  $\mathcal{K}_i^*(u) = \mathcal{K}_i(u) = u$  para  $i = 1, 2$  y  $\mathcal{E}_1(u) = E_2(u) = F_2^*(u) = 0$ . Entonces

$$(3.125) \quad \langle u, \mathcal{K}_i^{\pm 1} Z(u) \rangle = \langle u, K_i^{\pm 1} Z(u) \rangle = \langle u, Z(u) \rangle, \quad i = 1, 2,$$

y

$$(3.126) \quad \langle u, Z \mathcal{E}_1(u) \rangle = \langle u, \mathcal{E}_1^* Z(u) \rangle = \langle u, Z E_2(u) \rangle = \langle u, F_2 Z(u) \rangle = 0$$

para todo  $Z \in \mathcal{U}_q(\text{so}(5))$ . Las ecuaciones (3.116), (3.118), (3.124), (3.125) y (3.126) implican

$$(3.127) \quad \langle u, \mathcal{E}_2^* \mathcal{E}_2(u) \rangle = q^4 \langle u, F_1 F_2^2 E_2^2 E_1(u) \rangle = \frac{q^2 c_0^2}{c_1^2} \langle u, \delta_0^\dagger \delta_0(u) \rangle,$$

$$(3.128) \quad \langle u, \mathcal{E}_3^* \mathcal{E}_3(u) \rangle = q^3 \langle u, F_1 F_2 E_2 E_1(u) \rangle = \frac{q c_0^2}{[2]_2 c_1^2} \langle u, \delta_0^\dagger \delta_0(u) \rangle,$$

$$(3.129) \quad \langle u, \mathcal{E}_4^* \mathcal{E}_4(u) \rangle = q \langle u, F_1 E_1(u) \rangle = \frac{c_0^2}{q [2]_2^2 c_1^2} \langle u, \delta_0^\dagger \delta_0(u) \rangle.$$

Sustituyendo (3.120) en  $\langle u, S(C)(u) \rangle$  y usando (3.125)–(3.129) nos da

$$(3.130) \quad \langle u, S(C)(u) \rangle = \frac{q^{-2} + q^{-1} + q + q^2}{(q_2 - q_2^{-1})^2} + \frac{c_0^2}{q^2 [2]_2 c_1^2} \left( [2]_2 + (q_2^{-3} + q_2^3) + [2]_2 \right) \langle u, \delta_0^\dagger \delta_0(u) \rangle.$$

Por otro lado,  $S(C) = \lambda_{(2n, 2l)} \text{id}$  on  $\frac{\langle(2n, 2l)\rangle}{\langle(2n, 2l)\rangle} V^{(0, 0)} \subset \frac{\langle(2n, 2l)\rangle}{\langle(2n, 2l)\rangle} V \otimes V^{(2n, 2l)}$ . Elijiendo un vector unitario  $u_0 \in \frac{\langle(2n, 2l)\rangle}{\langle(2n, 2l)\rangle} V \otimes V^{(2n, 2l)}$ , el cual es un vector de peso más alto  $(2n, 2l)$  para la representación regular izquierda de  $\mathcal{U}_q(\text{so}(5))$ , tenemos  $\mathcal{K}_1(u_0) = q^{-2n-2l} u_0$ ,  $\mathcal{K}_2(u_0) = q^{-2n} u_0$  y  $E_1(u_0) = E_2(u_0) = 0$ , de tal manera que

$$(3.131) \quad \lambda_{(2n, 2l)} = \langle u, S(C)(u) \rangle = \langle u_0, S(C)(u_0) \rangle = \frac{q^{-2n-2l-2} + q^{-2n-1} + q^{2n+1} + q^{2n+2l+2}}{(q_2 - q_2^{-1})^2}.$$

Cálculos directos muestran

$$(3.132) \quad [2]_2 + (q_2^{-3} + q_2^3) + [2]_2 = [4]_2 + [2]_2 = [3]_2 [2]_2,$$

$$(3.133) \quad \frac{q^{-2n-2l-2} + q^{-2n-1} + q^{2n+1} + q^{2n+2l+2} - q^{-2} - q^{-1} - q - q^2}{(q_2 - q_2^{-1})^2} = [2]_2^2 ([n+l+2]_1 [n+l]_1 + [n+1]_1 [n]_1).$$

De (3.130)–(3.133), finalmente obtenemos

$$(3.134) \quad \begin{aligned} \lambda = \langle u, \delta_0^\dagger \delta_0(u) \rangle &= \frac{q^2 c_1^2}{[3]_2 c_0^2} \left( \langle u, S(C)(u) \rangle - \frac{q^{-2} + q^{-1} + q + q^2}{(q_2 - q_2^{-1})^2} \right) \\ &= \frac{c_1^2}{c_0^2} \frac{q^2 [2]_2^2 ([n+l+2]_1 [n+l]_1 + [n+1]_1 [n]_1)}{[3]_2}. \end{aligned}$$

Los valores propios de  $\delta_2 \delta_2^\dagger$  pueden ser determinados de la misma manera. Sea  $v \in \binom{(2n+3,2l)}{(2n+3,2l)} V_{(3,0)}^{(3,0)}$  tal que  $\|v\| = 1$ . Ya que  $\binom{(2n+3,2l)}{(2n+3,2l)} V_{(3,0)}^{(3,0)}$  es 1-dimensional, tenemos  $\delta_2 \delta_2^\dagger(v) = \mu v$  con  $\mu = \langle v, \delta_2 \delta_2^\dagger(v) \rangle$ . Como en (3.123),

$$(3.135) \quad \frac{c_2}{c_3} \langle v, \delta_2(w) \rangle = \langle v, \text{pr}_{(3,0)}(E_1(w)) \rangle = \langle \text{pr}_{(3,0)}(v), E_1(w) \rangle = \langle v, E_1(w) \rangle$$

para todo  $w \in \binom{(2n+3,2l)}{(2n+3,2l)} V_{(1,2)}^{(1,2)}$ . Por (2.46),  $\delta_2^\dagger(v) = q^2 \frac{c_3}{c_2} F_1(v) \in \binom{(2n+3,2l)}{(2n+3,2l)} V_{(1,2)}^{(1,2)}$  es un vector de peso más alto con peso (1, 2), por lo tanto

$$(3.136) \quad \frac{c_2^2}{q^2 c_3^2} \langle v, \delta_2 \delta_2^\dagger(v) \rangle = \langle v, E_1 F_1(v) \rangle = \frac{1}{[2]_2} \langle v, E_1 E_2 F_2 F_1(v) \rangle = \frac{1}{[2]_2^2} \langle v, E_1 E_2^2 F_2^2 F_1(v) \rangle.$$

Luego,  $K_1(v) = q^3 v$ ,  $K_2(v) = v$  y  $K_i^* = K_i$  implican

$$(3.137) \quad \langle v, K_1^{\pm 1} Z(v) \rangle = q^{\pm 3} \langle v, Z(v) \rangle, \quad \langle v, K_2^{\pm 1} Z(v) \rangle = \langle v, Z(v) \rangle,$$

$$(3.138) \quad \langle v, \mathcal{K}_1^{\pm 1} Z(v) \rangle = \langle v, \mathcal{K}_2^{\pm 1} Z(v) \rangle = q^{\mp 3} \langle v, Z(v) \rangle,$$

y  $\mathcal{F}_1(v) = F_2(v) = E_2^*(v) = 0$  nos da

$$(3.139) \quad \langle v, Z \mathcal{F}_1(v) \rangle = \langle v, \mathcal{F}_1^* Z(v) \rangle = \langle v, Z F_2(v) \rangle = \langle v, E_2 Z(v) \rangle = 0$$

para todo  $Z \in \mathcal{U}_q(\text{so}(5))$ . Además, análogamente a (3.127)–(3.129), deducimos de las relaciones previas que

$$(3.140) \quad \langle v, \mathcal{F}_2^* \mathcal{F}_2(v) \rangle = \langle v, K_1^{-1} K_2^{-2} E_1 E_2^2 F_2^2 F_1(v) \rangle = \frac{[2]_2^2 c_2^2}{q^5 c_3^2} \langle v, \delta_2 \delta_2^\dagger(v) \rangle,$$

$$(3.141) \quad \langle v, \mathcal{F}_3^* \mathcal{F}_3(v) \rangle = \langle v, K_1^{-1} K_2^{-1} E_1 E_2 F_2 F_1(v) \rangle = \frac{[2]_2 c_2^2}{q^5 c_3^2} \langle v, \delta_2 \delta_2^\dagger(v) \rangle,$$

$$(3.142) \quad \langle v, \mathcal{F}_4^* \mathcal{F}_4(v) \rangle = \langle v, q K_1^{-1} E_1 F_1(v) \rangle = \frac{c_2^2}{q^4 c_3^2} \langle v, \delta_2 \delta_2^\dagger(v) \rangle.$$

De (3.138)–(3.142) y (3.132), se sigue que

$$(3.143) \quad \begin{aligned} \langle v, C(v) \rangle &= \frac{q+q^2+q^{-2}+q^{-1}}{(q_2-q_2^{-1})^2} + \frac{[2]_2 c_2^2}{q^2 c_3^2} ([2]_2 + (q_2^{-3} + q_2^3) + [2]_2) \langle v, \delta_2 \delta_2^\dagger(v) \rangle \\ &= \frac{q+q^2+q^{-2}+q^{-1}}{(q_2-q_2^{-1})^2} + \frac{[3]_2 [2]_2^2 c_2^2}{q^2 c_3^2} \langle v, \delta_2 \delta_2^\dagger(v) \rangle. \end{aligned}$$

Para determinar  $\langle v, C(v) \rangle$ , usamos nuevamente el hecho que  $C = c \text{id}$  sobre  $\binom{(2n+3,2l)}{(2n+3,2l)} V \otimes V^{(2n+3,2l)}$  y evaluamos  $C$  sobre un vector de peso más bajo  $v_0 \in \binom{(2n+3,2l)}{(2n+3,2l)} V \otimes V_{(-2n+3,-2l)}^{(2n+3,2l)}$  para el cual  $F_1(v_0) = F_2(v_0) = 0$ . Asumiendo  $\|v_0\| = 1$  y sustituyendo (3.115) en  $\langle v_0, C(v_0) \rangle$  obtenemos

$$(3.144) \quad \langle v, C(v) \rangle = \langle v_0, C(v_0) \rangle = \frac{q^{-2n-2l-5} + q^{-2n-4} + q^{2n+4} + q^{2n+2l+5}}{(q_2 - q_2^{-1})^2}.$$

Similarmente a (3.133), tenemos

$$(3.145) \quad \frac{q^{-2n-2l-5} + q^{-2n-4} + q^{2n+4} + q^{2n+2l+5} - q - q^2 - q^{-2} - q^{-1}}{(q_2 - q_2^{-1})^2} = [2]_2^2 ([n+l+3]_1 [n+l+2]_1 + [n+3]_1 [n+1]_1).$$

Combinando (3.143)–(3.145) tenemos

$$\langle \nu, \delta_2 \delta_2^\dagger(\nu) \rangle = \frac{c_3^2}{c_2^2} \frac{q^2([n+l+3]_1 [n+l+2]_1 + [n+3]_1 [n+1]_1)}{[3]_2}.$$

Esto completa la demostración.  $\square$





## El triple espectral de Dolbeault-Dirac

### 1. Triple espectral equivariante

Combinando los resultados de los capítulos anteriores nos da los ingredientes necesarios para la construcción de un triple espectral el cual llamaremos el triple espectral de Dobeault-Dirac. Este es el último paso en la demostración del resultado principal de esta tesis, pero antes daremos una lista completa de los valores propios del operador de Dolbeault-Dirac junto con sus respectivas multiplicidades.

PROPOSICIÓN 4.1. *Por  $D_{\bar{\partial}}$  denotamos la cerradura del operador densamente definido, simétrico  $\bar{\partial} + \bar{\partial}^\dagger$  sobre el dominio  $\Omega^{(0,\bullet)} := \Omega^{(0,0)} \oplus \Omega^{(0,1)} \oplus \Omega^{(0,2)} \oplus \Omega^{(0,3)}$ . Definimos*

$$\begin{aligned} c_{(2n,2l)}^0 &:= \frac{c_1^2}{c_0^2} \frac{q^2 [2]_2^2 ([n+l+2]_1 [n+l]_1 + [n+1]_1 [n]_1)}{[3]_2}, & n, l \in \mathbb{N}_0, \\ c_{(2n+1,2l)}^1 &:= \frac{c_2^2}{c_1^2} \frac{q^2 [2]_2 ([3]_2 - 1)^2 ([n+l+2]_1 [n+l+1]_1 + [n+2]_1 [n]_1)}{[3]_2^2 [2]_1^2}, & n \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}, \\ d_{(2n,2l)}^2 &:= \frac{c_2^2}{c_1^2} \frac{q^2 [2]_2 ([3]_2 - 1)^2 ([n+l+2]_1 [n+l]_1 + [n+1]_1 [n]_1)}{[3]_2^2 [2]_1^2}, & n, l \in \mathbb{N}, \\ d_{(2n+1,2l)}^3 &:= \frac{c_3^2}{c_2^2} \frac{q^2 ([n+l+2]_1 [n+l+1]_1 + [n+2]_1 [n]_1)}{[3]_2}, & n \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

los valores propios de  $\bar{\partial}_0^\dagger \bar{\partial}_0$ ,  $\bar{\partial}_1^\dagger \bar{\partial}_1$ ,  $\bar{\partial}_1 \bar{\partial}_1^\dagger$  y  $\bar{\partial}_2 \bar{\partial}_2^\dagger$  sobre los espacios  $\binom{(2n,2l)}{(2n,2l)} V_{(0,0)}^{(0,0)}$ ,  $\binom{(2n+1,2l)}{(2n+1,2l)} V_{(0,2)}^{(0,2)}$ ,  $\binom{(2n,2l)}{(2n,2l)} V_{(1,2)}^{(1,2)}$  y  $\binom{(2n+1,2l)}{(2n+1,2l)} V_{(0,3)}^{(0,3)}$ , respectivamente. Entonces  $D_{\bar{\partial}}$  es autoadjunto y tiene espectro

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \text{spec}(D_{\bar{\partial}}) &= \left\{ \pm \sqrt{c_{(2n,2l)}^0} : n, l \in \mathbb{N}_0, n+l > 0 \right\} \cup \left\{ \pm \sqrt{c_{(2n+1,2l)}^1} : n \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N} \right\} \\ &\cup \left\{ \pm \sqrt{d_{(2n,2l)}^2} : n, l \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \pm \sqrt{d_{(2n+1,2l)}^3} : n \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}_0 \right\} \cup \{0\} \end{aligned}$$

con las siguientes multiplicidades:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} (2n+1)(2l+1)(n+l+1)(4n+2l+3) &\text{ para los valores propios } \pm \sqrt{c_{(2n,2l)}^0} \text{ y } \pm \sqrt{d_{(2n,2l)}^2}, \\ \frac{1}{3} (n+1)(2l+1)(2n+2l+3)(4n+2l+5) &\text{ para los valores propios } \pm \sqrt{c_{(2n+1,2l)}^1} \text{ y } \pm \sqrt{d_{(2n+1,2l)}^3}. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Por Comentario 2.9 concluimos que  $\Omega^{(0,\bullet)}$  está contenido en el dominio de  $\bar{\partial}^\dagger$ . Entonces  $D_{\bar{\partial}}$  es densamente definido y simétrico.

Sea  $n, l \in \mathbb{N}$ . De Proposición 2.2, ecuaciones (2.36)–(2.38) y Lema 3.2, se sigue que

$$\binom{(2n,2l)}{(2n,2l)}(\Omega^{(0,0)} \oplus \Omega^{(0,1)} \oplus \Omega^{(0,2)} \oplus \Omega^{(0,3)}) = \binom{(2n,2l)}{(2n,2l)}\Omega^{(0,0)} \oplus \binom{(2n,2l)}{(2n,2l)}\Omega^{(0,1)} \oplus \binom{(2n,2l)}{(2n,2l)}\Omega^{(0,2)}$$

tiene una base ortonormal dada por 4 vectores propios de  $D_{\bar{\partial}}$  correspondientes a los valores propios  $\pm \sqrt{c_{(2n,2l)}^0}$  y  $\pm \sqrt{d_{(2n,2l)}^2}$ . Por Lema 2.4 y ecuación (2.35), cada uno de estos vectores propios generan una  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ -representación irreducible de peso más alto  $(2n, 2m)$  consistiendo de vectores propios correspondientes al mismo valor propio. Entonces la multiplicidad de este valor propio es dado por  $\dim(\binom{(2n,2l)}{(2n,2l)}V)$ , donde  $\binom{(m,k)}{(m,k)}V$  denota el espacio vectorial de una  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ -representación irreducible de peso más alto  $(m, k)$ . De acuerdo a la fórmula de dimensión de Weyl,  $\dim(\binom{(m,k)}{(m,k)}V) = \frac{1}{6}(m+1)(k+1)(m+k+2)(2m+k+3)$ , ver [22]. Sustituyendo en esta fórmula  $(m, k) = (2n, 2l)$  obtenemos las multiplicidades establecidas para los valores propios  $\pm \sqrt{c_{(2n,2l)}^0}$  y  $\pm \sqrt{d_{(2n,2l)}^2}$ . Además, todos estos vectores propios generan el espacio vectorial  $\binom{(2n,2l)}{(2n,2l)}(\Omega^{(0,0)} \oplus \Omega^{(0,1)} \oplus \Omega^{(0,2)} \oplus \Omega^{(0,3)})$  por (2.35).

Análogamente,

$$\binom{(2n+1,2l)}{(2n+1,2l)}(\Omega^{(0,0)} \oplus \Omega^{(0,1)} \oplus \Omega^{(0,2)} \oplus \Omega^{(0,3)}) = \binom{(2n+1,2l)}{(2n+1,2l)}\Omega^{(0,1)} \oplus \binom{(2n+1,2l)}{(2n+1,2l)}\Omega^{(0,2)} \oplus \binom{(2n+1,2l)}{(2n+1,2l)}\Omega^{(0,3)}$$

es generado por 4 vectores propios ortogonales correspondientes a los valores propios  $\pm \sqrt{c_{(2n+1,2l)}^1}$  y  $\pm \sqrt{d_{(2n+1,2l)}^3}$ . Por el mismo razonamiento como el anterior, cada valor propio tiene la multiplicidad  $\dim(\binom{(2n+1,2l)}{(2n+1,2l)}V)$  en  $\binom{(2n+1,2l)}{(2n+1,2l)}(\Omega^{(0,0)} \oplus \Omega^{(0,1)} \oplus \Omega^{(0,2)} \oplus \Omega^{(0,3)})$ , y aplicando la fórmula de dimensión de Weyl nos da el resultado. Los casos  $n = 0$  o  $l = 0$  son tratados de manera similar tomando en cuenta que ciertos valores propios no aparecen si los correspondientes espacios de pesos más altos tienen dimensión cero de acuerdo con Proposición 2.3. Para el caso  $n = l = 0$  tenemos que  $\binom{(0,0)}{(0,0)}\Omega^{(0,\bullet)} = \mathbb{C}1 = \text{Ker}(D_{\bar{\partial}})$ , lo cual implica que el valor propio  $c_{(0,0)}^0$  también satisface la fórmula de multiplicidad.

Finalmente, Proposición 2.2 y ecuación (2.34) muestran que

$$\Omega^{(0,0)} \oplus \Omega^{(0,1)} \oplus \Omega^{(0,2)} \oplus \Omega^{(0,3)} = \bigoplus_{(m,k) \in \mathbb{N}_0 \times 2\mathbb{N}_0} \binom{(m,k)}{(m,k)}(\Omega^{(0,0)} \oplus \Omega^{(0,1)} \oplus \Omega^{(0,2)} \oplus \Omega^{(0,3)}).$$

Entonces los vectores propios considerados de  $D_{\bar{\partial}}$  forman una base ortonormal completa del espacio de Hilbert completación  $\mathcal{H}(\Omega^{(0,\bullet)})$ . Esto prueba primero que la restricción de  $D_{\bar{\partial}}$  al dominio  $\Omega^{(0,0)} \oplus \Omega^{(0,1)} \oplus \Omega^{(0,2)} \oplus \Omega^{(0,3)}$  es esencialmente autoadjunto y finalmente que su espectro es dado por el conjunto ya descrito en (4.1) ya que los valores propios tienden a infinito cuando  $n, l \rightarrow \infty$  y por lo tanto no tienen punto de acumulación finito.  $\square$

Para la demostración del resultado principal de esta tesis, daremos un lema auxiliar sobre conmutadores acotados.

LEMA 4.2. Sea  $D = \bar{\delta} + \bar{\delta}^\dagger$ . Entonces para cada  $b \in \mathcal{B}$  el conmutador  $[D, b]$  es acotado.

DEMOSTRACIÓN. Para probar que  $D$  tiene conmutadores acotados con los elementos de  $\mathcal{B}$ , consideremos los embebimientos  $\Omega^{(0,k)} \subset \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \otimes M(\lambda_k)'$  con los productos internos dados por (2.27)–(2.31) y consideremos  $\bar{\delta}_k$  como un operador de  $\Omega^{(0,k)}$  a  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \otimes M(\lambda_{k+1})'$ . Notando que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \otimes M(\lambda_k)' &\cong \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \otimes \mathbb{C} \cong \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)), & k = 0, 3, \\ \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \otimes M(\lambda_k)' &\cong \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \otimes \mathbb{C}^3 \cong \bigoplus_{i=1}^3 \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)), & k = 1, 2, \end{aligned}$$

podemos expresar  $\bar{\delta}_k$  en la siguiente notación matricial

$$(4.2) \quad \bar{\delta}_0 = \begin{pmatrix} X_{-1} \\ X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\delta}_1 = \frac{1}{[3]_2} \begin{pmatrix} -X_0 & [2]_1 X_{-1} & 0 \\ -X_1 & [2]_1 X_0 & 0 \\ 0 & -X_1 & [3]_2 X_0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\delta}_2 = \left( \frac{1}{[3]_2} X_1, -X_0, X_{-1} \right).$$

Además, la acción de  $b \in \mathcal{B}$  es representada por una matriz diagonal con  $b$  en cada entrada diagonal. Considerando los operadores en (4.2) como una suma finita de matrices con exactamente una entrada no cero, es suficiente demostrar que los conmutadores son acotados cuando conmutamos con matrices teniendo sólo una entrada no cero  $X_j$ . Demostraremos esto para

$$(4.3) \quad \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ X_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a_{-1} \\ a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X_1 \triangleright (ba_{-1}) - b(X_1 \triangleright a_{-1}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde  $a := \sum_{i=-1}^1 a_i \otimes v_i \in \Omega^{(0,1)} \subset \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5)) \otimes M((0, 2))'$ . La demostración de los otros casos es similar y más simple.

Como  $a \in \Omega^{(0,1)}$ , tenemos  $K_1 \triangleright a_j = q^{1-j} a_j$ ,  $K_2 \triangleright a_j = q^j a_j$  y  $E_2 \triangleright a_j = a_{j+1}$  por (1.54) y (2.12). Además,  $K_1 \triangleright b = b = K_2 \triangleright b$  y  $E_2 \triangleright b = 0$  para todo  $b \in \mathcal{B}$ . De esto y (1.13), se sigue que

$$X_1 \triangleright (ba_{-1}) - b(X_1 \triangleright a_{-1}) = (E_2^2 E_1 \triangleright b) a_{-1} + (q + q^2)(E_2 E_1 \triangleright b) a_0 + q^2 (E_1 \triangleright b) a_1.$$

Ya que  $h(x^* y^* y x) \leq \|y\|_{GNS}^2 h(x^* x)$  para todo  $x, y \in \mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$ , donde  $\|\cdot\|_{GNS}$  denota la norma dada por la GNS-representación del grupo cuántico  $\mathcal{O}(\mathrm{SO}_q(5))$  asociado al estado de Haar  $h$ , obtenemos de (2.29) que

$$\|X_1 \triangleright (ba_{-1}) - b(X_1 \triangleright a_{-1})\|_h \leq \sqrt{\frac{\|E_2^2 E_1 \triangleright b\|_{GNS}^2}{c_{1,-1}} + \frac{(q+q^2)^2 \|E_2 E_1 \triangleright b\|_{GNS}^2}{c_{1,0}} + \frac{q^4 \|E_1 \triangleright b\|_{GNS}^2}{c_{1,1}}} \|a\|.$$

Consecuentemente, el conmutador en (4.3) es acotado. Además, el hecho de que  $[\bar{\delta}, b]$  es acotado implica que  $[\bar{\delta}^\dagger, b] \subset -[\bar{\delta}, b^*]^\dagger$  es también acotado, esto a su vez implica que  $[D, b]$  es acotado para todo  $b \in \mathcal{B}$  ya que  $[D, b] = [\bar{\delta}, b] + [\bar{\delta}^\dagger, b]$ .  $\square$

Antes de pasar al resultado principal de esta sección se recalcará lo que es un triple espectral equivariante. En nuestro teorema final, el cual presenta los resultados principales de esta tesis, mostramos que el operador de Dobeault-Dirac  $D_{\bar{\partial}} := \bar{\partial} + \bar{\partial}^\dagger$  define un triple espectral par y resumimos algunas de sus propiedades.

**DEFINICIÓN 4.3.** Recalquemos [15] que un triple espectral par  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D, \gamma)$  es dado por una \*-álgebra  $\mathcal{A}$ , un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , una \*-representación fiel de  $\mathcal{A}$  como operadores acotados sobre  $\mathcal{H}$ , un operador autoadjunto  $D$  sobre  $\mathcal{H}$  con resolvente compacto y un operador de graduación autoadjunto  $\gamma$  satisfaciendo las siguientes condiciones:

1.  $\gamma^2 = \text{id}$ ,  $\gamma D = -D\gamma$ ,  $\gamma a = a\gamma$ ,
2.  $[D, a]$  es densamente definido y acotado para todo  $a \in \mathcal{A}$ .

En 2. identificamos (por un ligero abuso notación) a un elemento de  $\mathcal{A}$  con el operador acotado que lo representa. El triple espectral es llamado  $0^+$ -sumable si  $(1 + |D|)^{-t}$  nos da un operador de clase traza para todo  $t > 0$ .

Si  $\mathcal{U}$  es una \*-álgebra de Hopf y  $B$  es un álgebra  $\mathcal{U}$ -módulo izquierdo con acción izquierda  $\triangleright$ , entonces decimos que el triple espectral es  $\mathcal{U}$ -equivariante si existe una \*-representación  $\pi$  de  $\mathcal{U}$  sobre  $\mathcal{H}$  tal que  $\pi(X)D(h) = D\pi(X)(h)$  y  $\pi(X)(ah) = (X_{(1)} \triangleright a)\pi(X_{(2)})(h)$  para todo  $X \in \mathcal{U}$ ,  $a \in \mathcal{A}$  y  $h$  en un dominio denso de  $\mathcal{H}$ , ver [36].

Recalquemos que para un álgebra de Hopf  $\mathcal{U}$  con antipoda invertible,  $\mathcal{U}^{\text{cop}}$  representa el algebra de Hopf co-opuesta con el coproducto opuesto  $\Delta^{\text{cop}}(X) := X_{(2)} \otimes X_{(1)}$ .

**TEOREMA 4.4.** Sean  $\Omega^{(0,k)}$  y  $\bar{\partial}_j$  dados como en Sección 1 del Capítulo 2. Con el producto interno sobre  $\Omega^{(0,k)}$  definido en Sección 3 del Capítulo 2, recalquemos que por  $\mathcal{H}(\Omega^{(0,\bullet)})$  denotamos el espacio de Hilbert completación de  $\Omega^{(0,0)} \oplus \Omega^{(0,1)} \oplus \Omega^{(0,2)} \oplus \Omega^{(0,3)}$  y extendemos la multiplicación de módulo de  $\mathcal{B} = \Omega^{(0,0)}$  sobre  $\Omega^{(0,k)}$  a una representación sobre el espacio de Hilbert. Consideremos el operador  $\bar{\partial} := \bar{\partial}_0 \oplus \bar{\partial}_1 \oplus \bar{\partial}_2$  sobre el dominio  $\Omega^{(0,\bullet)} := \Omega^{(0,0)} \oplus \Omega^{(0,1)} \oplus \Omega^{(0,2)} \oplus \Omega^{(0,3)}$ , y denotemos por  $D_{\bar{\partial}}$  la cerradura del operador simétrico y densamente definido  $\bar{\partial} + \bar{\partial}^\dagger$  sobre  $\Omega^{(0,\bullet)}$ .

Entonces  $D_{\bar{\partial}}$  es un operador autoadjunto sobre el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}(\Omega^{(0,\bullet)})$ , con espectro dado en Proposición 4.1, y  $(\mathcal{B}, \mathcal{H}(\Omega^{(0,\bullet)}), D_{\bar{\partial}}, \gamma)$  es un triple espectral par,  $\mathcal{U}_q(\text{so}(5))^{\text{cop}}$ -equivariante y  $0^+$ -sumable, donde el operador graduación  $\gamma$  actúa sobre  $\Omega^{(0,k)}$  al multiplicar por  $(-1)^k$  y la \*-representación de  $\mathcal{U}_q(\text{so}(5))$  sobre  $\Omega^{(0,\bullet)} \subset \mathcal{H}(\Omega^{(0,\bullet)})$  es la que ha sido definida en Lema 2.4.

**DEMOSTRACIÓN.** Por Lema 4.2,  $D_{\bar{\partial}}$  tiene conmutadores acotados con cada elemento de  $\mathcal{B}$ . El hecho de que la multiplicación izquierda de módulo de  $\mathcal{B}$  define una \*-representación se sigue de la definición del producto interno y  $h((bx)^*y) = h(x^*(b^*y))$  para todo  $b \in \mathcal{B}$  y  $x, y \in \mathcal{O}(\text{SO}_q(5))$ .

Por Lema 2.4,  $\bar{\partial}$  conmuta con todos los operadores  $\pi_R(X)$ ,  $X \in \mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))$ , y por lo tanto también con  $\bar{\partial}^\dagger$  y  $D_{\bar{\partial}}$  ya que  $\pi_R$  es una \*-representación para la cual el dominio  $\Omega^{(0,\bullet)}$  es invariante. La propiedad  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}(5))^{\text{cop}}$ -equivariante sobre el dominio  $\Omega^{(0,\bullet)}$  puede ser derivado del Lema 2.4 y  $\bar{\partial}^\dagger \pi_R(X)(\omega) = (\pi_R(X^*)\bar{\partial})^\dagger(\omega) = (\bar{\partial} \pi_R(X^*))^\dagger(\omega) = \pi_R(X)\bar{\partial}^\dagger(\omega)$  para todo  $\omega \in \Omega^{(0,\bullet)}$ . Que  $D_{\bar{\partial}}$  es autoadjunto junto con el espectro y las multiplicidades de los valores propios son el contenido de la Proposición 4.1.

Por otro lado notemos que  $[n+l+k] = q^{-(n+l+k)} \frac{1-q^{2n+2l+2k}}{q^{-1}-q}$  con  $q^{2n+2l+k} \rightarrow 0$  cuando  $n, l \rightarrow \infty$  y fijo  $k$ . De esto vemos que los valores propios tienen crecimiento exponencial y ya que las multiplicidades no crecen asintóticamente más rápido que  $n^3 l^3$  se sigue que la traza del operador positivo  $(1+|D|)^{-1}$  existe, es decir, es finita para todo  $t > 0$ . De esto se sigue que  $D_{\bar{\partial}}$  tiene resolvente compacto y cumple la condición de ser  $0^+$ -sumable.

Es claro que  $\gamma$  definido por  $\gamma(\omega_k) = (-1)^k \omega_k$  para todo  $\omega_k \in \Omega^{(0,k)}$  satisface  $\gamma^\dagger = \gamma$ ,  $\gamma^2 = 1$ ,  $\gamma b = b\gamma$  y  $\gamma D_{\bar{\partial}} = -D_{\bar{\partial}}\gamma$ , entonces  $(\mathcal{B}, \mathcal{H}(\Omega^{(0,\bullet)}), D_{\bar{\partial}}, \gamma)$  nos da un triple espectral par.  $\square$

COMENTARIO 4.5. El espectro del operador de Dolbeault-Dirac  $D_{\bar{\partial}}$  en el Teorema 4.4 depende de los factores positivos de escalamiento  $\frac{c_1}{c_0}$ ,  $\frac{c_2}{c_1}$  y  $\frac{c_3}{c_2}$ , donde las constantes  $c_k$  están relacionados con el producto interno sobre  $\Omega^{(0,k)}$ , ver Lema 2.5. Por otro lado, la resolución de Bernstein-Gelfand-Gelfand (2.1) es única hasta un factor escalar no cero, es decir, los mapeos  $\varphi_i$  haciendo la sucesión exacta son únicos hasta un factor escalar. Corolario 2.6 y Proposición 4.1 muestran que un rescalamiento de los operadores de Dolbeault  $\bar{\partial}_k$  por constantes no cero tendrán el mismo efecto sobre el espectro de  $D$ , es decir, los mismos conjuntos de valores propios serán rescalados por una constante positiva. Por lo tanto, el aspecto de los factores escalares pueden ser vistos como un rescalamiento de los productos internos sobre  $(0,k)$ -formas o como un rescalamiento de los operadores de Dolbeault  $\bar{\partial}_k$ .

## 2. Conclusiones y problemas futuros

Vale la pena mencionar que la investigación aquí dada del operador  $D_{\bar{\partial}}$  es un pequeño pero importante paso en el estudio de la geometría no conmutativa de variedades bandera cuánticas considerando que este operador ya fue estudiado en [6] para los espacios proyectivos cuánticos, es decir, las variedades de bandera irreducibles de tipo  $A_n$ . Como abordar una investigación análoga del operador de Dolbeault-Dirac  $D_{\bar{\partial}}$  para la variedad bandera cuántica de tipo  $B_n$  en el caso general aún no es claro, el cual por supuesto, es considerado como problema futuro. A conveniencia del lector daremos nuevamente la descripción pictórica de las subálgebras de Levi que definen las

variedades bandera irreducibles cuánticas en términos de diagramas de Dynkin en la cual mencionaremos también los nombres y símbolos dados por expertos para estos espacios cuánticos. En un diagrama de rango  $n$  como en la tabla 4.1 abajo, cada nodo representa una raíz simple y al nodo relleno asociamos el conjunto  $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \setminus \{\alpha_i\}$  donde  $\alpha_i$  tiene coeficiente 1 en la raíz más alta de  $\mathfrak{g}$ . Para  $S$  consideremos la  $*$ -subálgebra de Hopf de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$

$$\mathcal{U}_q(\mathfrak{l}) := \langle K_i, E_j, F_j \mid i = 1, \dots, n; j \in S \rangle.$$

Entonces la variedad bandera cuántica irreducible asociada a  $S$  es definida como en (1.50).

Como fue mencionado en la introducción, es demostrado en [18] que estas variedades cuánticas admiten un complejo de De Rham  $q$ -deformado  $(\Omega^{(\bullet, \bullet)}, \bar{\partial})$  y  $(\Omega^{(\bullet, 0)}, \partial)$  y por lo tanto el operador de Dolbeault-Dirac  $D_{\bar{\partial}}$  puede ser construido. De hecho demostrar que el espectro del operador  $D_{\bar{\partial}}$  tiende infinito para las otras variedades bandera irreducibles de la tabla 4.1 aún sigue siendo un problema abierto. Por otro lado la investigación de los axiomas de Connes (ver por ejemplo [15]) para este triple espectral puede ser también considerado como se ha hecho para otros triples espectrales, por ejemplo como en [9], [10], [12], [35] y [38].

TABLA 4.1. Variedades bandera cuánticas irreducibles: organizadas por serie, con nodos enumerados de acuerdo a [22, §11.4], símbolo y nombre.

$A_n$		$\mathcal{O}_q(\text{Gr}_{s, n+1})$	quantum Grassmannian
$B_n$		$\mathcal{O}_q(\mathbb{Q}_{2n+1})$	odd quantum quadric
$C_n$		$\mathcal{O}_q(\mathbb{L}_n)$	quantum Lagrangian Grassmannian
$D_n$		$\mathcal{O}_q(\mathbb{Q}_{2n})$	even quantum quadric
$D_n$		$\mathcal{O}_q(\mathbb{S}_n)$	quantum spinor variety
$E_6$		$\mathcal{O}_q(\mathbb{O}\mathbb{P}^2)$	quantum Caley plane
$E_7$		$\mathcal{O}_q(\mathbb{F})$	quantum Freudenthal variety

## Bibliografía

- [1] A. Connes: *Noncommutative Geometry*. Academic Press, San Diego, 1994.
- [2] R. J. Baston, M. G. Eastwood: *The Penrose transform*. Oxford University Press, Oxford, 1989.
- [3] K.A. Brown, K.R. Goodearl: *Lectures on Algebraic Quantum Groups*. Advanced Courses in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Berlin, 2002.
- [4] E. Beggs, S. Majid: *Spectral triples from bimodule connections and Chern connections*. J. Noncommut. Geom. 11, 669–701, 2017.
- [5] R.W. Carter: *Lie Algebras of Finite and Affine Type*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, New York, 2005.
- [6] B. Das, R. Ó Buachalla, P. Somberg: *A Dolbeault-Dirac spectral triple for the quantum projective space*. Doc. Math. 25, 1079–1157, 2020.
- [7] B. Das, R. Ó Buachalla, P. Somberg: *Dolbeault-Dirac Fredholm operators for quantum homogeneous spaces*. arXiv preprint math.QA/1910.14007.
- [8] L. Dąbrowski, A. Sitarz: *Dirac operator on the standard Podleś quantum sphere*. Banach Center Publ. 61, 49–58, 2003.
- [9] L. Dąbrowski, F. D’Andrea, G. Landi, E. Wagner: *Dirac operators on all the Podleś quantum spheres*. J. Noncomm. Geom. 1, 213–239, 2007.
- [10] L. Dąbrowski, G. Landi, A. Sitarz, W. van Suijlekom, J.C. Várilly: *Dirac operator on  $SU_q(2)$* . Commun. Math. Phys. 259, 729–759, 2005.
- [11] F. D’Andrea, L. Dąbrowski: *Dirac operators on quantum projective spaces*. Commun. Math. Phys. 295, 731–790, 2010.
- [12] F. Díaz, E. Wagner: *A spectral triple for noncommutative compact surfaces*. Banach Center Publ. 120, 121–134, 2020.
- [13] M.S. Dijkhuizen, J. Stokman: *Quantum flag manifolds and irreducible  $*$ -representations*. Commun. Math. Phys. 203, 297–324, 1999.
- [14] T. Friedrich: *Dirac operators in Riemannian geometry*. Graduate Studies in Mathematics 25, American Mathematical Society, Providence, 2000.
- [15] J.M. Gracia-Bondía, H. Figuearola, J.C. Várilly: *Elements of Noncommutative Geometry*. Birkhäuser, Boston, 2001.
- [16] I. Heckenberger, S. Kolb: *Differential calculus on quantum homogeneous spaces*. Lett Math Phys. 63, 255–264, 2003.
- [17] I. Heckenberger, S. Kolb: *The locally finite part of the dual coalgebra of quantized irreducible flag manifolds*. Proc. London Math. Soc. 89, 457–484, 2004.
- [18] I. Heckenberger, S. Kolb: *The Rham complex for quantized irreducible flag manifolds*. J. Algebra 305, 704–741, 2006.



- [19] I. Heckenberger, S. Kolb: *On the Bernstein-Gelfand-Gelfand resolution for Kac-Moody algebras and quantized enveloping algebras*. Transform. Groups 12, 647–655, 2007.
- [20] I. Heckenberger, S. Kolb: *Differential forms via the Bernstein-Gelfand-Gelfand resolution for quantized irreducible flag manifolds*. J. Geom. Phys. 57, 2316–2344, 2007.
- [21] S. Helgason: *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*. Pure and Applied Mathematics, vol 80, Academic Press, New York, 1978.
- [22] J. E. Humphreys: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer-Verlag, New York, 1972.
- [23] J. E. Humphreys: *Representations of Semisimple Lie Algebras in the BGG Category  $O$* . Graduate Studies in Mathematics 94, American Mathematical Society, New York, 2008.
- [24] D. Huybrechts: *Complex Geometry: An Introduction*. Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [25] J.C. Jantzen: *Lectures on Quantum Groups*. Graduate Studies in Mathematics 6, American Mathematical Society, 1996.
- [26] U. Krähmer: *Dirac operators on quantum flag manifolds*. Lett. Math. Phys. 67, 49–59, 2004.
- [27] U. Krähmer, M. Tucker-Simmons: *On the Dolbeault-Dirac operator of quantized symmetric spaces*. Trans. London Math. Soc. 2, 33–56, 2015.
- [28] A. Klimyk, K. Schmüdgen: *Quantum Groups and Their Representations*. Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [29] A. W. Knap: *Lie groups, beyond an introduction*. Progress in Mathematics, vol 140, Birkhauser Boston Inc., Boston, 2002.
- [30] S. Majid: *Noncommutative Riemannian and spin geometry of the standard  $q$ -sphere*. Commun. Math. Phys. 256, 255–285, 2005.
- [31] M. Matassa: *The Parthasarathy formula and a spectral triple for the quantum Lagrangian Grassmannian of rank two*. Lett. Math. Phys. 109, 1703–1734, 2019.
- [32] S. Neshveyev, L. Tuset: *The Dirac operator on compact quantum groups*. J. Reine Angew. Math. 641, 1–20, 2010.
- [33] R. Ó Buachalla: *Noncommutative Kähler structures on quantum homogenous spaces*. Adv. Math. 322, 892–939, 2017.
- [34] K. Schmüdgen: *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2012.
- [35] K. Schmüdgen, E. Wagner: *Dirac operator and a twisted cyclic cocycle on the standard Podleś quantum sphere*. J. Reine Angew. Math. 574, 219–235, 2004.
- [36] A. Sitarz: *Equivariant spectral triples*. Banach Center Publ. 61, 231–263, 2003.
- [37] S. B. Sontz: *Principal Bundles, The Quantum Case*. Universitext, Springer, New York, 2015.
- [38] E. Wagner: *On the noncommutative spin geometry of the standard Podleś sphere and index computations*. J. Geom. Phys. 59, 998–1016, 2009.
- [39] S. L. Woronowicz: *Compact matrix pseudogroups*. Commun. Math. Phys. 111, 613–665, 1987.
- [40] S. L. Woronowicz: *Twisted  $SU(2)$  group. An example of noncommutative differential calculus*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 23, 117–181, 1987.