Universidad Nacional Autónoma de México y Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UMSNH-UNAM

Familias independientes generalizadas

T E S I N A

que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

presenta

Carlos López Callejas

Asesor:
Dr. Fernando Hernández Hernández

Morelia, Michoacán, México
Junio, 2021

Índice

Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar algunas de las diferentes generalizaciones que admite el concepto clásico de familia independiente y describir las relaciones que existen entre los distintos tipos de familias que surgen en cada caso.

Al comienzo se presentan las familias conocidas como fuertemente independientes y se muestra cómo la existencia de estas familias sobre ciertos cardinales tiene una fuerte relación con la Hipótesis del Continuo (CH) y la Hipótesis Generalizada del Continuo (GCH), además se demuestra que la existencia de sucesiones $\diamond^*$ implica la existencia de familias fuertemente independientes, lo cual mejora un resultado recientemente establecido por Fischer y Montoya.

Posteriormente definimos las familias a las cuales hemos llamado familias $\mathcal{F}$-independientes y $\mathcal{J}$-independientes, en donde $\mathcal{F}$ es un filtro y $\mathcal{J}$ un ideal. Nos concentramos principalmente en las familias $\mathcal{C}$-independientes, en donde $\mathcal{C}$ es el filtro de los conjuntos cerrados y no acotados sobre un cardinal κ y vemos que estas familias cumplen muchas propiedades análogas a las de las familias independientes clásicas. En el caso de las familias $\mathcal{J}$-independientes observamos que la existencia de estas depende en gran medida de la saturación del ideal $\mathcal{J}$.

Palabras claves: Independencia, Hipótesis del Continuo, Sucesión diamante, Filtro de clubs, Ideales saturados.

Abstract

The objective of this work is to study some different generalizations supported by the classical concept of independent families and to describe the relationship that exist between the different types of families that arise in each case.

At the beginning we present the families known as strongly independent and it is shown how the existence of these families on certain cardinals has a strong relationship with the Continuum Hypothesis (CH) and the Generalized Continuum Hypothesis (GCH), it is also shown that the existence of sequences $\diamond^*$ implies the existence of strongly independent families, which improves a result recently established by Fischer and Montoya.

Later we define families which we have called $\mathcal{F}$-independent families and $\mathcal{J}$-independets families, where $\mathcal{F}$ is a filter and $\mathcal{J}$ an ideal. We focus mainly in the $\mathcal{C}$-independents families, where $\mathcal{C}$ is the filter of closed and unbounded sets on a cardinal κ and we see that these families have many properties analogous to classical independent families. In the case of the $\mathcal{J}$-independence families we show that the existence of these families depends to a great extent on the saturation of the ideal $\mathcal{J}$.

Introducción

Las familias independientes son objetos con fuertes propiedades combinatorias, desde su aparición en [4], dichas familias han tenido relación con muchos otros objetos, como lo son las familias casi disjuntas, los ultrafiltros o los ideales.

Las familias independientes están naturalmente definidas sobre el conjunto de los enteros no negativos ω, sin embargo no es clara cuál debería ser su generalización natural a cardinales más grandes. Una *familia independiente* sobre ω es una familia $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ tal que si $S, T \subseteq \mathcal{I}$ son subfamilias finitas y disjuntas entonces $\bigcap S \setminus \bigcup T$ es infinito (a dicho conjunto le llamamos una combinación booleana finita de $\mathcal{I}$); al conjunto cuyos elementos son las combinaciones booleanas finitas de $\mathcal{I}$ le llamamos el envolvente de $\mathcal{I}$ y lo denotamos por $ENV(\mathcal{I})$ o por $bc(\mathcal{I})$.

Por lo tanto, sobre ω, una familia es independiente si todas sus combinaciones booleanas finitas son infinitas. Cuando se pasa al caso de un cardinal arbitrario κ la noción de independencia se podría generalizar al menos de dos maneras distintas: la primera sería pidiendo que se permita tomar combinaciones booleanas más grandes, es decir, no sólo combinaciones booleanas finitas sino de longitud menor o igual a λ para algún λ dado y la segunda forma sería pedir que las combinaciones booleanas finitas no sólo tengan cardinalidad infinita (o cardinalidad κ) sino que cumplan alguna noción de *grandeza*.

La primera de dichas generalizaciones es lo que normalmente se conoce en la literatura como familias fuertemente independientes y éstas han sido estudiadas recientemente por Vera Fischer y Diana Montoya en [2]. En la primera sección presentamos dichas familias, justificamos la razón para considerar combinaciones booleanas de longitud menor que κ y damos una caracterización de la Hipótesis del Continuo en términos de la existencia de una de dichas familias sobre ω_1, más aún, mostramos que $2^\kappa = \kappa^+$ también es equivalente a la existencia de ciertas familias fuertemente independientes sobre κ. Quizás el resultado más importante de esta sección sea el hecho de que la existencia de una sucesión $\diamond^*$ implica la existencia de familias fuertemente independientes sobre ω_1 de cardinalidad 2^{ω_1}. También en dicha sección mostramos una relación entre la existencia de algunas de dichas familias y la existencia de un cardinal fuertemente inaccesible.

En la segunda sección de la tesina estudiamos la segunda generalización de las familias independientes, lo que nosotros hemos llamado familias $\mathcal{F}$-independientes o $\mathcal{J}$-independientes, con $\mathcal{F}$ un filtro o $\mathcal{J}$ un ideal. Decimos que una familia es $\mathcal{F}$-independiente (o $\mathcal{J}$-independiente) si toda combinación booleana finita está en $\mathcal{F}^+$ (o en $\mathcal{J}^+$ respectivamente). Para un filtro $\mathcal{F}$ se muestran algunas condiciones sobre esté para que existan familias $\mathcal{F}$-independientes; en esta misma dirección mostramos que también pueden existir familias fuertemente $\mathcal{F}$-independientes, es decir, una especie de doble generalización de las familias independientes clásicas. Posteriormente nos concentramos en el caso del filtro de *clubs*, conjuntos cerrados y no acotados, en ω_1 y mostramos algunas similitudes de esta nueva noción de independencia con la noción clásica. Por último, para un ideal $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$, mostramos una relación que existe entre la existencia (o no existencia) de familias $\mathcal{J}$-independientes con la saturación de $\mathcal{J}$ y por lo tanto con algunas propiedades del cardinal κ.

1. Familias fuertemente independientes

Para un cardinal κ y $A \subseteq \kappa$, usaremos la notación usual, introducida por Shelah en [8], para denotar a A por A^0 y a $\kappa \setminus A$ por A^1, es decir, $A^0 = A$ y $A^1 = \kappa \setminus A$. Además, si X y Y son conjuntos y s es una función, usaremos la notación $s; X \to Y$ para expresar que s es una función parcial de X en Y; es decir, $dom(s) \subseteq X$ y s toma valores en Y. Dada una familia $\mathcal{I}$ denotaremos por $FF(\mathcal{I})$ al conjunto $\{s; \mathcal{I} \to 2 \mid |s| < \omega\}$. El resto de la terminología es canónica y es la que sigue la literatura moderna en el área de la teoría de conjuntos.

Definición 1.1. *Si $\mathcal{I}$ es una familia de subconjuntos de un cardinal κ y $h; \mathcal{I} \to 2$, entonces $\mathcal{I}^h = \bigcap_{I \in dom(h)} I^{h(I)}$ es la combinación booleana de $\mathcal{I}$ determinada por h. Si h es finita entonces decimos que $\mathcal{I}^h$ es una combinación booleana finita y si h tiene cardinalidad λ decimos que $\mathcal{I}^h$ es una combinación booleana de longitud λ.*

Definición 1.2. *Una familia $\mathcal{I}$ de subconjuntos de un cardinal κ es independiente si toda combinación booleana finita de $\mathcal{I}$ es de tamaño κ.*

Definición 1.3. *Una familia $\mathcal{I}$ de subconjuntos de un cardinal κ es fuertemente independiente si toda combinación booleana de longitud menor que κ de $\mathcal{I}$ es de tamaño κ.*

Ejemplo 1.4. *Sean p_n el n-ésimo número primo y $C_n = \{mp_n \mid m \in \omega\}$. La familia $\mathcal{I} = \{C_n \mid n \in \omega\}$ es independiente.*

En efecto, sean $X_0, \ldots, X_l, Y_0, \ldots, Y_k \in \mathcal{I}$ distintos. Sabemos que existen números primos $p_{n_1}, \ldots, p_{n_l}, q_{n_1}, \ldots, q_{n_k}$ distintos tales que $X_i = \{mp_{n_i} \mid m \in \omega\}$ y $Y_j = \{mq_{n_j} \mid m \in \omega\}$.

Ahora, eligiendo $m = p_{n_1} \cdots p_{n_l}$, se tiene que:

$$m \in X_0 \cap \cdots \cap X_n \cap (\omega \setminus Y_0) \cap \cdots \cap (\omega \setminus Y_m).$$

De hecho cualquier potencia de m también está en $X_0 \cap \cdots \cap X_n \cap (\omega \setminus Y_0) \cap \cdots \cap (\omega \setminus Y_m)$, y como $m > 1$, este conjunto es infinito.

La familia del ejemplo anterior es una familia independiente tal que para cualquier combinación booleana infinita $h; \omega \to 2$ tal que $h^{-1}[\{0\}]$ es infinito se cumple que $\mathcal{I}^h = \emptyset$, ya que no hay un número natural que sea múltiplo de infinitos primos, sin embargo esto no significa que no sea fuertemente independiente, ya que en el caso de $\kappa = \omega$ la independencia y la independencia fuerte coinciden (y además es en el único cardinal donde lo hacen).

Como veremos en la siguiente observación, el hecho de que para la familia del ejemplo anterior exista $h \in 2^\omega$ tal que $\mathcal{I}^h = \emptyset$ no es algo particular de dicha familia, sin embargo, dicho ejemplo será usado varias veces para crear otras familias *independientes*.

Observación 1.5. *Para toda familia $\mathcal{I}$ independiente infinita sobre ω existe $h; \mathcal{I} \to 2$ infinita tal que $\mathcal{I}^h = \emptyset$.*

En efecto, tomemos $I_0 \in \mathcal{I}$ cualquiera; si $0 \in I_0$ sea $h(0) = 1$ y en otro caso $h(0) = 0$. Ahora sea $k \in \omega$ y supongamos definido I_l y $h(l)$ para todo $l \in k$. Tomemos I_k distinto de cada I_l para $l \in k$ (el cual existe pues $\mathcal{I}$ es infinita) y si $k \in I_k$ sea $h(k) = 1$ y en caso contrario $h(k) = 0$. Ahora notemos que de esta forma para todo $n \in \omega$ se cumple que $n \notin I_n^{h(n)}$, por lo tanto:

$$\mathcal{I}^h = \bigcap_{n \in \omega} I_n^{h(n)} = \emptyset,$$

que era lo que se quería.

En general uno se pregunta por qué en la Definición 1.3 nos restringimos a combinaciones booleanas de longitud menor que κ, y la razón es precisamente el hecho de que si $\mathcal{I}$ es una familia independiente de cardinalidad κ sobre κ, existe $h : \mathcal{I} \to 2$, con $|h| = \kappa$, tal que $\mathcal{I}^h = \emptyset$, y la prueba es simplemente haciendo la recursión análoga para κ que hemos hecho en la Observación 1.5.

Surge entonces naturalmente la pregunta de para cuáles cardinales existe (o podría existir) una familia fuertemente independiente y más aún: ¿para qué cardinales κ existen familias fuertemente independientes *grandes*, es decir, de cardinalidad 2^κ? Fischer y Montoya en [2] dieron una respuesta parcial a esta pregunta, la cual nos ha inspirado a usar un principio de adivinanza para construir familias fuertemente independientes.

Definición 1.6. *(Jensen [5]) Sea κ un cardinal regular. Decimos que una sucesión $(S_\alpha)_{\alpha \in \kappa}$ es una sucesión $\diamond^*(\kappa)$ si sucede que:*

(1) Para todo $\alpha \in \kappa$ se cumple que $S_\alpha \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$ y $|S_\alpha| < \kappa$.

(2) Para todo $X \subseteq \kappa$ sucede que el conjunto $\{\alpha \in \kappa \mid X \cap \alpha \in S_\alpha\}$ es club en κ.

La existencia de una sucesión $\diamond^*(\kappa)$ la denotaremos simplemente como $\diamond^*(\kappa)$.

Proposición 1.7. *Sean κ y λ cardinales tales que $\lambda < \kappa$ y κ es regular. Entonces $\diamond^*(\kappa)$ implica que $2^\lambda \leq \kappa$.*

Demostración. Notemos que si $X \subseteq \lambda$ y $\alpha > \lambda$, entonces $X \cap \alpha = X$, por lo tanto, como $\{\alpha \in \kappa \mid X \cap \alpha \in S_\alpha\}$ es club, $C_X = \{\alpha \in \kappa \mid X \in S_\alpha\}$ también lo es, en particular $C_X \neq \emptyset$. Ahora notemos que:

$$\left| \bigcup_{\lambda < \alpha < \kappa} S_\alpha \right| = \sum_{\lambda < \alpha < \kappa} |S_\alpha| = \kappa,$$

pero por lo anterior, todo $X \subseteq \lambda$ cumple que $X \in \bigcup_{\lambda<\alpha<\kappa} S_\alpha$, así $\mathcal{P}(\lambda) \subseteq \bigcup_{\lambda<\alpha<\kappa} S_\alpha$ y por lo tanto $2^\lambda \leq \kappa$. $\square$

Teorema 1.8. *Sea κ regular. Entonces $\diamond^*(\kappa)$ implica la existencia de una familia fuertemente independiente sobre κ de cardinalidad 2^κ.*

Demostración. Sea $(S_\alpha)_{\alpha \in \kappa}$ una sucesión $\diamond^*(\kappa)$ y sea C definido como sigue:

$$C = \{(\gamma, A) \mid \gamma \in \kappa \wedge A \subseteq S_\gamma\}.$$

Note que como para cada $\alpha \in \kappa$, $|S_\alpha| < \kappa$ entonces, usando la Proposición 1.7, se tiene que:

$$|C| = \sum_{\alpha\in\kappa} 2^{|S_\alpha|} \leq \sum_{\alpha\in\kappa} \kappa = \kappa$$

y puesto que resulta claro que $\kappa \leq |C|$, se concluye que $|C| = \kappa$; por lo tanto es equivalente construir una familia fuertemente independiente sobre κ a hacerlo sobre C. Para cada $X \subseteq \kappa$ sea Y_X definido como sigue:

$$Y_X = \{(\gamma, A) \in C \mid X \cap \gamma \in A\}.$$

Para probar que $\mathcal{I} = \{Y_X \mid X \subseteq \kappa\}$ es fuertemente independiente sean $\{X_i \mid i \in I_0\}, \{Z_j \mid j \in I_1\} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ dos colecciones ajenas, con $|I_0|, |I_1| < \kappa$.

Para cada par $i, i' \in I_0$ con $i \neq i'$ sea $\gamma_{i,i'} \in \kappa$ tal que

$$X_i \cap \gamma_{i,i'} \neq X_{i'} \cap \gamma_{i,i'}.$$

Obsérvese que si $\gamma \geq \gamma_{i,i'}$ entonces $X_i \cap \gamma \neq X_{i'} \cap \gamma$; análogamente para $j, j' \in I_1$, con $j \neq j'$ sea $\alpha_{j,j'}$ tal que

$$Z_j \cap \alpha_{j,j'} \neq Z_{j'} \cap \alpha_{j,j'}.$$

Por último si $i \in I_0$ y $j \in I_1$, sea $\beta_{i,j} \in \kappa$ tal que

$$X_i \cap \beta_{i,j} \neq Z_j \cap \beta_{i,j}.$$

Si definimos $B \subseteq \kappa$ como:

$$B = \{\gamma_{i,i'} \mid i, i' \in I_0 \wedge i \neq i'\} \cup \{\gamma_{j,j'} \mid j, j' \in I_1 \wedge j \neq j'\} \cup \{\gamma_{i,j} \mid i \in I_0 \wedge j \in I_1\},$$

resulta claro que $|B| < \kappa$ y, como κ es regular, existe $\gamma_0 \in \kappa$ tal que acota a B. Ahora, si $\gamma \in \kappa$ es mayor que γ_0, entonces esté satisface que:

(1) $X_i \cap \gamma \neq X_{i'} \cap \gamma$ si $i, i' \in I_0$ con $i \neq i'$.

(2) $Z_j \cap \gamma \neq Z_{j'} \cap \gamma$ si $j, j' \in I_1$ con $j \neq j'$.

(3) $X_i \cap \gamma \neq Z_j \cap \gamma$ si $i \in I_0$ y $j \in I_1$.

Para cada $i \in I_0$ considere $D_i = \{\gamma \in \kappa \mid X_i \cap \gamma \in S_\gamma\}$, el cual es club. Ahora sean $D = \bigcap_{i\in I_0} D_n$ y $\gamma \in D$ tal que $\gamma > \gamma_0$.

Sea $A_\gamma \subseteq S_\gamma$ definido como:

$$A_\gamma = \{X_i \cap \gamma \mid i \in I_0\}.$$

Así tenemos que $(\gamma, A_\gamma) \in Y_{X_i}$ para todo $i \in I_0$ y $(\gamma, A_\gamma) \notin Y_{Z_j}$ para todo $j \in I_1$. Esto prueba que:

$$(\gamma, A_\gamma) \in \bigcap_{i\in I_0} Y_{X_i} \setminus \bigcup_{j\in I_1} Y_{Z_j}$$

y como esto sucede para cada $\gamma \in D$ tal que $\gamma > \gamma_0$, entonces:

$$\left| \bigcap_{i \in I_0} Y_{X_i} \setminus \bigcup_{j \in I_1} Y_{Z_j} \right| = \kappa,$$

lo cual termina la demostración. □

Si κ es fuertemente inaccesible entonces $(\mathcal{P}(\alpha))_{\alpha\in\kappa}$ resulta ser una sucesión $\diamond^*(\kappa)$, por lo tanto el teorema anterior en particular implica que para todo cardinal fuertemente inaccesible existe una familia fuertemente independiente *grande* sobre él, el cual es un resultado que, como ya se había anticipado, fue obtenido por Fischer y Montoya en [2], sin embargo, el Teorema 1.8 brinda todo una espectro mucho más amplio de cardinales para los que consistentemente existen familias fuertemente independientes *grandes*, por ejemplo bajo $V = L$ resulta que $\diamond^*(\omega_1)$ es verdadera, lo cual es sorprendente, pues esto último, aunado al Teorema 1.8, implica que las familias fuertemente independientes grandes no sólo existen (consistentemente), sino que existen en el primer lugar donde podrían existir, ω_1. De hecho en [5] Jensen probó mucho más:

Teorema 1.9. *(Jensen [5]) $V = L$ implica $\diamond^*(\kappa)$ para todo κ cardinal sucesor.*

Corolario 1.10. *$V = L$ implica que para todo cardinal sucesor κ existe una familia fuertemente independiente de cardinalidad 2^κ.*

Por otro lado, y como veremos a continuación, la existencia de familias fuertemente independientes sobre cardinales sucesores está también muy relacionada con la Hipótesis Generalizada del Continuo.

Teorema 1.11. *Sea κ cardinal infinito. Las siguientes dos condiciones son equivalentes.*

(1) Existe una familia fuertemente independiente sobre κ^+ de cardinalidad κ.

(2) La igualdad $2^\kappa = \kappa^+$ es verdadera.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $\mathcal{I} = \{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$. Ahora como $\mathcal{I}$ es una familia fuertemente independiente sobre κ^+, para toda $h \in 2^\kappa$ se tiene que $\mathcal{I}^h$ tiene cardinalidad κ^+ y es claro que si $h, g \in 2^\kappa$ son distintas entonces $\mathcal{I}^h$ y $\mathcal{I}^g$ son ajenos. Para cada $h \in 2^\kappa$ sea $x_h \in \mathcal{I}^h$; entonces el conjunto $\{x_h \mid h \in 2^\kappa\}$ es subconjunto de κ^+ y tiene cardinalidad 2^κ, así $2^\kappa \leq \kappa^+$ y por lo tanto $2^\kappa = \kappa^+$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sea $f : \kappa^+ \to 2^\kappa \times \kappa^+$ una biyección (considerando a 2^κ como el conjunto de todas las funciones que van de κ en 2). Para cada $h \in 2^\kappa$ sea $X_h = f^{-1}(\{h\} \times \kappa^+)$ y para cada $\alpha \in \kappa$ sea I_α definido como sigue:

$$I_\alpha = \bigcup \{X_h \mid h \in 2^\kappa (h(\alpha) = 0)\}.$$

Sea $\mathcal{I} = \{I_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$. Es claro que si $h \in 2^\kappa$ entonces $\mathcal{I}^h \supseteq X_h$ y como $|X_h| = \kappa^+$ entonces $|\mathcal{I}^h| = \kappa^+$, lo cual prueba que $\mathcal{I}$ es fuertemente independiente. □

Los siguientes resultados son simples corolarios del Teorema 1.11.

Corolario 1.12. *Existe una familia fuertemente independiente infinita sobre* ω_1 *si y sólo si se satisface* CH.

Corolario 1.13. *La existencia de una familia fuertemente independiente infinita sobre* ω_1 *es independiente de* ZFC.

Corolario 1.14. *Sea* κ *un cardinal inaccesible (límite y regular) tal que para todo cardinal infinito* $\lambda < \kappa$ *existe una familia fuertemente independiente sobre* λ^+ *de cardinalidad* λ, *entonces* κ *es fuertemente inaccesible.*

Demostración. Lo único que debemos verificar es que κ es un cardinal límite fuerte. Sea $\lambda \in \kappa$; como κ es límite se cumple que $\lambda^+ < \kappa$. Por otro lado como existe una familia fuertemente independiente de cardinalidad λ sobre λ^+, entonces, por el Teorema 1.11, $2^\lambda = \lambda^+$ y así $2^\lambda < \kappa$, lo cual termina la prueba. $\square$

Corolario 1.15. *Si* κ *es inaccesible y para todo* $\lambda < \kappa$ *hay una familia fuertemente independiente de cardinalidad* λ *sobre* λ, *entonces* κ *es fuertemente inaccesible.*

Aunque ya sabemos algunas condiciones suficientes para la existencia de familias fuertemente independientes, una parte muy interesante de éstas es que no satisfacen las condiciones para aplicar el Lema de Zorn (a diferencia, por ejemplo, de las familias independientes clásicas), el cual es la vía estándar para probar que los objetos maximales con alguna propiedad existen, es por lo tanto de mucho interés saber para cuáles cardinales existen familias fuertemente independientes maximales, sin embargo, aún no se sabe si dichas familias existen para algún cardinal, lo único que se tiene hasta el momento son resultados sobre la *no maximalidad.*

Definición 1.16. *Una familia fuertemente independiente* $\mathcal{I}$ *sobre un cardinal* κ *es maximal si no existe otra familia fuertemente independiente sobre* κ *que la extienda propiamente.*

Teorema 1.17. *Sobre cualquier cardinal infinito* $\kappa > \omega$ *existe una familia independiente que no es fuertemente independiente.*

Demostración. Sabemos que existe una biyección entre κ y $\omega \times \kappa$, entonces vamos a construir la familia independiente buscada sobre $\kappa \times \omega$. Para cada $n \in \omega$ sea $I_n = \kappa \times C_n$, donde los C_n son como en el Ejemplo 1.4 y sea $\mathcal{I} = \{I_n \mid n \in \omega\}$.

Claramente si $h; \omega \to 2$ es finita, entonces para todo $\alpha \in \kappa$ se tiene que $(\{\alpha\} \times \omega) \cap \mathcal{I}^h$ es infinito, así en particular $\mathcal{I}^h$ tiene tamaño κ. Por otro lado, si $h : \omega \to 2$ es tal que $h^{-1}[\{0\}]$ es infinito, entonces para todo $\alpha \in \kappa$ se tiene que $(\{\alpha\} \times \omega) \cap \mathcal{I}^h = \emptyset$, lo cual implica que $\mathcal{I}^h = \emptyset$ y así $\mathcal{I}$ no es fuertemente independiente. $\square$

Observe que la familia construida en la demostración del teorema anterior se puede extender a una familia independiente maximal $\mathcal{J}$, y puesto que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ entonces $\mathcal{J}$ tampoco es fuertemente independiente, es decir, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.18. *Para todo cardinal infinito κ existe una familia independiente maximal sobre κ que no es fuertemente independiente.*

Igual que en el caso clásico de las familias independientes sabemos que las familias fuertemente independientes pequeñas en cardinalidad no son maximales.

Proposición 1.19. *Si $\mathcal{I}$ es una familia fuertemente independiente sobre un cardinal κ tal que $|\mathcal{I}| < \kappa$ entonces $\mathcal{I}$ no es maximal.*

Demostración. Escribamos a $\mathcal{I}$ como $\{I_\alpha \mid \alpha \in \gamma\}$ y para cada $h : \gamma \to 2$ sea $X_h = \mathcal{I}^h$. Ahora cada conjunto X_h es de cardinalidad κ y si $h, g \in 2^\gamma$ son distintos entonces $X_h \cap X_g = \emptyset$, esto implica que $2^\gamma \leq \kappa$. Sea entonces $(Y_\alpha)_{\alpha \in \kappa}$ una enumeración de $\{X_h \mid h \in 2^\gamma\}$ tal que cada X_h aparece κ veces. Sean $a_0, b_0 \in Y_0$ tales que $a_0 < b_0$ y supongamos que para todo $\beta < \alpha$ se han definido a_β y b_β. Entonces como Y_α tiene cardinalidad κ entonces existen $a_\alpha, b_\alpha \in Y_\alpha$ tales que para todo $\beta \in \alpha$ se cumple que $a_\beta, b_\beta < a_\alpha$ y además $a_\alpha < b_\alpha$. Ahora sea $Z = \{a_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$. Por la construcción de Z se tiene que $Z \cap X_h$ y $(\kappa \setminus Z) \cap X_h$ tienen cardinalidad κ para todo $h \in 2^\gamma$, es decir, $\mathscr{I} \cup \{Z\}$ es una familia fuertemente independiente. □

Note que la demostración anterior no se aplica para familias fuertemente independientes de cardinalidad κ.

Lo siguiente muestra, en la misma linea de la Proposición 1.19, que otra clase de familias fuertemente independientes tampoco son maximales.

Definición 1.20. *Sea κ un cardinal infinito.*

(1) Dada una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ y $X \subseteq \kappa$ decimos que X divide a $\mathcal{F}$ si $Y \cap X$ y $Y \setminus X$ tienen cardinalidad κ para todo $Y \in \mathcal{F}$.

(2) Una familia $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ es indivisible (o segada) si no existe $X \subseteq \kappa$ que divida a $\mathcal{R}$.

(3) $\mathfrak{r}(\kappa)$ es la mínima cardinalidad de una familia indivisible sobre κ.

Teorema 1.21. *(Fischer-Montoya [2]) Sea κ un cardinal regular infinito. Si $\mathcal{I}$ es una familia fuertemente independiente sobre κ tal que $|\{\mathcal{I}^h \mid h; \mathcal{I} \to 2 \wedge |h| < \kappa\}| < \mathfrak{r}(\kappa)$ entonces $\mathcal{I}$ no es maximal.*

Demostración. Es suficiente notar que, como $|\{\mathcal{I}^h \mid h; \mathcal{I} \to 2 \wedge |h| < \kappa\}| < \mathfrak{r}(\kappa)$, existe $X \subseteq \kappa$ tal que divide a dicha familia y esto implica que $\mathcal{I} \cup \{X\}$ es fuertemente independiente. □

2. Familias $\mathcal{F}$-independientes

Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre κ. Un subconjunto $X \subseteq \kappa$ es $\mathcal{F}$-positivo si $X \cap Y \neq \emptyset$ para todo $Y \in \mathcal{F}$; a la familia de los subconjuntos $\mathcal{F}$-positivos la denotamos por $\mathcal{F}^+$. Si $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ es un ideal entonces $\mathcal{J}^+ = \{X \subseteq \kappa \mid X \notin \mathcal{J}\}$.

Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre un cardinal κ, denotamos por $\mathcal{F}^*$ a su ideal dual, es decir, al conjunto $\{X \subseteq \kappa \mid \kappa \setminus X \in \mathcal{F}\}$

Definición 2.1. *Una familia $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ es $\mathcal{F}$-independiente si para toda combinación booleana finita de $\mathcal{I}$ está en $\mathcal{F}^+$. Análogamente si $\mathcal{J}$ es un ideal entonces $\mathcal{I}$ es $\mathcal{J}$-independiente si toda combinación booleana finita de $\mathcal{I}$ está en $\mathcal{J}^+$.*

Note que una familia es $\mathcal{F}$-independiente si y sólo si es $\mathcal{F}^*$-independiente. Por otra parte, si $\mathcal{F}_r$ es el filtro de Fréchet, entonces una familia es $\mathcal{F}_r$-independiente si y sólo si es independiente. También resulta claro que si $\mathcal{I}$ es una familia $\mathcal{F}$-independiente sobre κ y $X \in \mathcal{I}$, X es $\mathcal{F}$-*doble positivo*, es decir, $X, \kappa \setminus X \in \mathcal{F}^+$, consecuentemente si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, no existen familias $\mathcal{F}$-independientes (ya que no existen los conjuntos $\mathcal{F}$-doble positivos, pues para todo $X \subseteq \kappa$ se tiene que $X \in \mathcal{F}$ o $\kappa \setminus X \in \mathcal{F}$, pero no ambos). Surge así la pregunta natural de saber para cuáles filtros (o ideales) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ (además del de Fréchet) existe una familia $\mathcal{F}$-independiente.

Proposición 2.2. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro de la forma $\mathcal{F} = \{A \subseteq \kappa \mid B \subseteq A\}$ para algún $B \subseteq \kappa$.*

(1) Si B es finito entonces no existen familias $\mathcal{F}$-independientes infinitas, más aún, si $|B| = n$ entonces no existen familias $\mathcal{F}$-independientes de cardinalidad n.

(2) Si $|B| = \lambda$ con λ infinito, existen familias $\mathcal{F}$-independientes de cardinalidad 2^λ pero no de cardinalidad $(2^\lambda)^+$

Demostración. (1) Notemos que $\mathcal{F}^+ = \{X \subseteq \kappa \mid X \cap B \neq \emptyset\}$. Supongamos que $B = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ y que $X_0, \ldots, X_{n-1} \in \mathcal{I}$ son todos distintos, donde $\mathcal{I}$ es $\mathcal{F}$-independiente. Para cada $i \in n$ si $x_i \in X_i$ sea $h(i) = 1$ y $h(i) = 0$ en otro caso; así tenemos que $x_i \notin X_i^{h(i)}$. Notemos entonces que para todo $x \in B$ se cumple que:

$$x \notin \bigcap_{i \in n} X_i^{h(i)} = \mathcal{I}^h$$

y así $\mathcal{I}^h \cap B = \emptyset$ y por lo tanto $\mathcal{I}^h \notin \mathcal{F}^+$, lo cual es una contradicción a que $\mathcal{I}$ es $\mathcal{F}$-independiente.

(2) Nuevamente notemos que $\mathcal{F}^+ = \{X \subseteq \kappa \mid X \cap B \neq \emptyset\}$. Ahora sea $\mathcal{I} = \{X_\alpha \mid \alpha \in 2^\lambda\}$ una familia independiente sobre B y para cada $\alpha \in 2^\lambda$ sea $Y_\alpha = X_\alpha \cup (\kappa \setminus B)$ y sea $\widehat{\mathcal{I}} = \{Y_\alpha \mid \alpha \in 2^\lambda\}$. Claramente si $h; 2^\lambda \to 2$ finita entonces $\mathcal{I}^h \subseteq \widehat{\mathcal{I}}^h$ y como $\mathcal{I}$ es independiente sobre B entonces:

$$\emptyset \neq B \cap \mathcal{I}^h = B \cap \widehat{\mathcal{I}}^h,$$

lo que prueba que $\widehat{\mathcal{I}}^h \in \mathcal{F}^+$ y por lo tanto $\widehat{\mathcal{I}}$ es $\mathcal{F}$-independiente.

Si $\mathcal{I} \subseteq \kappa$ tiene cardinalidad $(2^\lambda)^+$, como $|B| = \lambda$, existen $X, Y \in \mathcal{I}$ distintos tales que $X \cap B = Y \cap B$, pero entonces $(X \setminus Y) \cap B = \emptyset$, lo cual prueba que $X \setminus Y \notin \mathcal{F}^+$ y por lo tanto $\mathcal{I}$ no es $\mathcal{F}$-independiente. □

Como se había anticipado, las dos generalizaciones de la independencia estudiadas en este trabajo son compatibles entre sí, es decir, podemos *fusionar* las dos nociones para así obtener familias con más propiedades combinatorias.

Definición 2.3. *Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ un filtro (respec. $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ un ideal). Una familia $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ es fuertemente $\mathcal{F}$-independiente (respec. fuertemente $\mathcal{J}$-independiente) si toda combinación booleana de longitud menor que κ de $\mathcal{I}$ está en $\mathcal{F}^+$ (respec. en $\mathcal{J}^+$).*

Estudiaremos un poco de dichas familias en las siguientes secciones.

2.1. Familias $\mathcal{C}$-independientes

Para cada cardinal κ regular sea $\mathcal{C}_\kappa \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ el filtro de clubs, es decir, el filtro generado por los conjuntos cerrados y no acotados (cuando quede claro el contexto simplemente llamaremos $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}_\kappa$). Sucede que $\mathcal{C}_{\omega_1}$ es un filtro muy importante en el estudio de la combinatoria de ω_1, por lo tanto surgen naturalmente un par de preguntas:

Pregunta 2.4. *¿Existen familias $\mathcal{C}_{\omega_1}$-independientes?*

Pregunta 2.5. *¿Toda familia $\mathcal{C}$-independiente maximal es fuertemente $\mathcal{C}$-independiente?*

Las respuestas a estas preguntas están contestadas por los Corolarios 2.8 y 2.9 respectivamente.

Antes que nada, notemos que como para todo filtro $\mathcal{F}$, la unión de familias $\mathcal{F}$-independientes es $\mathcal{F}$-independiente, entonces si existen las familias $\mathcal{F}$-independientes entonces existen las familias $\mathcal{F}$-independientes maximales (por el Lema de Zorn).

Recuerde que a los conjuntos $\mathcal{C}$-positivos se les llama conjuntos *estacionarios*; uno de los resultados básicos más importantes acerca de la combinatoria de los conjuntos estacionarios es el siguiente:

Lema 2.6. *(Solovay [9], [6]) Para cada cardinal regular no numerable κ se tiene que κ es la unión de tantos como κ conjuntos estacionarios disjuntos.*

Corolario 2.7. *Para cada cardinal regular no numerable κ y cada $\gamma \leq \kappa$ se tiene que κ es la unión de γ conjuntos estacionarios disjuntos.*

Los siguientes dos resultados son consecuencias de éste último corolario y siguen el mismo esquema de demostración que el Teorema 1.11.

Corolario 2.8. *Para todo cardinal regular no numerable κ existe una familia $\mathcal{C}$-independiente infinita.*

Demostración. Por el Corolario 2.7 existe una colección numerable de subconjuntos estacionarios disjuntos, digamos que esta colección está indexada con el conjunto $2^{<\omega}$, es decir, $\{X_s \mid s \in 2^{<\omega}\}$ es la familia de estacionarios disjuntos.

Ahora, para cada $n \in \omega$, sea $I_n \subseteq \kappa$ definido como sigue:

$$I_n = \bigcup\{X_s \mid s \in 2^{<\omega} \wedge n \in dom(s) \wedge s(n) = 0\}.$$

Resulta que $\mathcal{I} = \{I_n \mid n \in \omega\}$ es una familia $\mathcal{C}$-independiente, pues toda combinación booleana finita de $\mathcal{I}$ contiene a alguna combinación de la forma

$$\bigcap_{n \in dom(s)} I_n^{s(n)}$$

para alguna $s \in 2^{<\omega}$ y además:

$$X_s \subseteq \bigcap_{n \in dom(s)} I_n^{s(n)},$$

lo que prueba que toda combinación booleana finita de $\mathcal{I}$ contiene a un estacionario y por lo tanto es estacionaria. □

Corolario 2.9. *Sobre todo cardinal $\kappa \geq \omega_1$ existe una familia $\mathcal{C}$-independiente maximal que no es fuertemente $\mathcal{C}$-independiente.*

Demostración. Sea $\{X_m \mid m \in \omega\}$ una partición de κ en estacionarios disjuntos. Ahora para cada $n \in \omega$ sea $Y_n = \bigcup\{X_m \mid m \in C_n\}$, donde los C_n's son como en el Ejemplo 1.4. Consideremos $\mathcal{I} = \{Y_n \mid n \in \omega\}$; $\mathcal{I}$ es $\mathcal{C}$-independiente pero para $h; \omega \to 2$ tal que $h^{-1}[\{0\}]$ es infinito se cumple que $\mathcal{I}^h = \emptyset$, lo cual prueba que $\mathcal{I}$ no es fuertemente $\mathcal{C}$-independiente. Extendiendo $\mathcal{I}$ a una familia $\mathcal{C}$-independiente maximal obtenemos el resultado. □

Lema 2.10. CH *implica que sobre ω_1 existe una familia fuertemente $\mathcal{C}$-independiente infinita.*

Demostración. Sea $\{X_f \mid f : \omega \to 2\}$ una partición de ω_1 en estacionarios disjuntos y para cada $n \in \omega$ sea I_n definido como sigue:

$$I_n = \bigcup \{X_f \mid f : \omega \to 2(f(n) = 0)\}.$$

Sea $\mathcal{I} = \{I_n \mid n \in \omega\}$. Es claro que si $h : \omega \to 2$ entonces $\mathcal{I}^h \supseteq X_h$ y como X_h es estacionario entonces $\mathcal{I}^h$ también lo es, lo cual prueba que $\mathcal{I}$ es fuertemente $\mathcal{C}$-independiente. □

Sabemos entonces que existen las familias $\mathcal{C}$-independientes numerables sobre ω_1, ¿será que existen familias $\mathcal{C}$-independientes no numerables sobre ω_1? O más aún, ¿existen familias $\mathcal{C}$-independientes de cardinalidad 2^{ω_1}?

Teorema 2.11. *Sean κ y λ cardinales tales que $\omega \leq \lambda \leq 2^\kappa$. Entonces, sobre κ, existe una familia $\mathcal{C}$-independiente de cardinalidad λ.*

Demostración. Sea $\{X_\beta \mid \beta \in \kappa\}$ una partición de κ en conjuntos estacionarios. Ahora sea $\mathcal{I} = \{I_\alpha \mid \alpha \in \lambda\}$ una familia independiente de cardinalidad λ sobre κ. Para cada $\alpha \in \lambda$, sea $\widehat{I_\alpha} \subseteq \kappa$ definido como sigue:

$$\widehat{I_\alpha} = \bigcup\{X_\beta \mid \beta \in J_\alpha\}.$$

Ahora sea $\widehat{\mathcal{I}} = \{\widehat{I_\alpha} \mid \alpha \in \lambda\}$. Claramente $\widehat{\mathcal{I}}$ tiene cardinalidad λ, luego lo único que resta probar es que es una familia $\mathcal{C}$-independiente. Sea $s; \lambda \to 2$ finita, queremos ver que $\widehat{\mathcal{I}}^s$ es estacionario. Como $\mathcal{I}$ es independiente entonces existe $\beta \in \mathcal{I}^s$, pero esto se traduce a que si $s(\alpha) = 0$ entonces $X_\beta \subseteq \widehat{I_\alpha}$ y si $s(\alpha) = 1$ entonces $X_\beta \cap \widehat{I_\alpha} = \emptyset$, es decir, $X_\beta \subseteq \widehat{\mathcal{I}}^s$, y como X_β es estacionario entonces $\widehat{\mathcal{I}}^s$ también lo es. □

Al igual que en el caso clásico de las familias independientes, uno esperaría que las familias $\mathcal{C}$-independientes numerables no sean maximales; sin embargo, este parece ser un problema bastante complicado. Algunas ideas que se han intentado son tratar de generalizar la prueba clásica para las familias independientes, tratar de hacer un refinamiento disjunto del envolvente de la familia o usar una sucesión diamante para al menos probar la consistencia de dicha conjetura. Todas nuestras ideas han sucumbido pero algunas han inspirado otros resultados.

Las familias $\mathcal{C}$-independientes maximales cumplen, sin embargo, muchas propiedades análogas a las que cumplen las independientes maximales en el caso clásico, como lo que veremos en la siguiente sección; de cualquier modo, lo que sí es fácil es que si $\mathcal{I}$ es $\mathcal{C}$-independiente y finita entonces no es maximal. En efecto, digamos que $\mathcal{I} = \{I_i \mid i \in n\}$ para algún $n \in \omega$ y notemos que para cada $s : n \to 2$, el conjunto $\mathcal{I}^s = \bigcap_{i \in n} I^{s(i)}$ es estacionario; más aún, si $s, t : n \to 2$ son distintas, $\mathcal{I}^s$ y $\mathcal{I}^t$ son disjuntos. Para cada $s : n \to 2$ sean A_s y B_s una partición de $\mathcal{I}^s$ en dos estacionarios disjuntos y sea $A = \bigcup\{A_s \mid s : n \to 2\}$. Es claro que $A \notin \mathcal{I}$ y además $\mathcal{I} \cup \{A\}$ es $\mathcal{C}$-independiente.

Note que, dado que siempre podemos partir un conjunto estacionario en dos subconjuntos estacionarios, lo anterior garantiza que podemos ir construyendo recursivamente familias $\mathcal{C}$-independientes de cardinalidad $n \in \omega$ y así obtener una familia $\mathcal{C}$-independiente numerable. La ventaja de este método es que únicamente requiere el hecho de que un estacionario se pueda partir en dos estacionarios y no necesariamente en infinitos estacionarios.

Permanece abierta, sin embargo, la siguiente pregunta:

Pregunta 2.12. *¿Existe sobre ω_1 una familia $\mathcal{C}$-independiente numerable maximal?*

2.1.1. Familias $\mathcal{C}$-independientes densas

Todas las propiedades que aquí se muestran para familias $\mathcal{C}$-independientes fueron probadas para el caso clásico de independencia por Goldstern y Shelah en [3], esto prueba que las familias $\mathcal{C}$-independientes sobre ω_1 se comportan de manera muy parecida a las independientes sobre ω.

Definición 2.13. *Si $\mathcal{I}$ es $\mathcal{C}$-independiente entonces definimos el ideal asociado a $\mathcal{I}$ como:*

$$\mathcal{J}_{\mathcal{I}} = \{A \subseteq \omega_1 \mid (\forall f \in FF(\mathcal{I}))(\exists g \in FF(\mathcal{I}))(g \supseteq f \wedge \mathcal{I}^g \cap A \textit{ no es estacionario})\}.$$

Claramente $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}$ es un ideal que contiene al ideal de los no estacionarios.

Definición 2.14. *(1) Si $X, Y \subseteq \omega_1$ diremos que X está casi contenido en Y si $X \setminus Y$ no es estacionario y denotaremos esto por $X \subseteq^* Y$.*

(2) Dada una familia $\mathcal{X}$ de subconjuntos de ω_1 y $Y \subseteq \omega_1$, decimos que Y es pseudointersección de $\mathcal{X}$ si $Y \subseteq^* X$ para todo $X \in \mathcal{X}$.

Definición 2.15. *Una familia $\mathcal{C}$-independiente maximal es densa si para todo $A \in \mathcal{J}_{\mathcal{I}}^+$ existe $g \in FF(\mathcal{I})$ tal que $\mathcal{I}^g \subseteq^* A$.*

Lo anterior se puede interpretar de la siguiente manera: una familia $\mathcal{C}$-independiente es densa si el envolvente de $\mathcal{I}$ es una *base* de $\mathcal{J_I}^+$; notemos además de que para toda $f \in FF(\mathcal{I})$ se tiene que $\mathcal{I}^f \in \mathcal{J_I}^+$, pues la propia f es testigo de esto.

Lema 2.16. *Si $\mathcal{I}$ es una familia $\mathcal{C}$-independiente maximal, existe $f \in FF(\mathcal{I})$ de modo que para toda $g \in FF(\mathcal{I})$, tal que $g \supseteq f$, se cumple que $\mathcal{I} \restriction \mathcal{I}^g$ es maximal.*

Demostración. Sea $\{f_n \mid n \in \omega\}$ una familia maximal con las siguientes propiedades:

(1) Si $n \neq m$, f_n y f_m son incompatibles.

(2) $\mathcal{I} \restriction \mathcal{I}^{f_n}$ no es maximal para todo $n \in \omega$.

Note que por la condición 1) y dado que $FF(\mathcal{I})$ es ccc, dicha colección maximal es a lo más numerable (en principio podría ser finita pero asumamos sin pérdida de generalidad que es numerable).

Ahora, para cada $n \in \omega$, sea $A_n \subseteq \mathcal{I}^{f_n}$ tal que $\mathcal{I} \restriction \mathcal{I}^{f_n} \cup \{A_n\}$ es $\mathcal{C}$-independiente sobre $\mathcal{I}^{f_n}$ y sea $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$. Como $\mathcal{I}$ es maximal entonces existe $f \in FF(\mathcal{I})$ tal que $\mathcal{I}^f \cap A$ o $\mathcal{I}^f \setminus A$ es no estacionario. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\mathcal{I}^f \cap A$ es no estacionario. Afirmamos que f es incompatible con cada f_n; para ver esto, supongamos que f y f_n son compatibles; es decir, que $f \cup f_n$ es función. Esto en particular implica que $\mathcal{I}^{f\cup f_n} \in bc(\mathcal{I} \restriction \mathcal{I}^{f_n})$, en particular tendríamos que:

$$\mathcal{I}^f \cap A \supseteq \mathcal{I}^{f\cup f_n} \cap A \supseteq \mathcal{I}^{f\cup f_n} \cap A_n,$$

pero esto es imposible, ya que en tal caso $\mathcal{I}^{f\cup f_n} \cap A_n$ es estacionario mientras que $\mathcal{I}^f \cap A$ no lo es.

Como f es incompatible con cada f_n entonces también lo es toda $g \in FF(\mathcal{I})$ tal que $g \subseteq f$, por lo tanto $\mathcal{I} \restriction \mathcal{I}^g$ es maximal, ya que en otro caso se contradice la maximalidad de $\{f_n \mid n \in \omega\}$. $\square$

Lema 2.17. *Si $\mathcal{I}$ es $\mathcal{C}$-independiente maximal tal que para todo $f \in FF(\mathcal{I})$ $\mathcal{I} \restriction \mathcal{I}^f$ es maximal, entonces $\mathcal{I}$ es densa.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{J_I}^+$, esto significa que existe $f \in FF(\mathcal{I})$ tal que para todo $g \in FF(\mathcal{I})$ que extienda a f se cumple que $\mathcal{I}^g \cap A$ es estacionario. Pero $\mathcal{I} \restriction \mathcal{I}^f$ es maximal, esto implica que existe $g \in FF(\mathcal{I})$, $g \supseteq f$ tal que alguno entre $\mathcal{I}^g \cap A$ e $\mathcal{I}^g \setminus A$ no es estacionario, pero sabemos que $\mathcal{I}^g \cap A$ sí lo es, por lo tanto necesariamente $\mathcal{I}^g \setminus A$ no es estacionario, es decir $\mathcal{I}^g \subseteq^* A$, que era lo que se quería. $\square$

Lema 2.18. *Si $\mathcal{I}$ es una familia $\mathcal{C}$-independiente maximal densa entonces $\frac{P(\omega_1)}{\mathcal{J_I}}$ es ccc.*

Demostración. Por contradicción. Supongamos que $\{X_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\} \subseteq \mathcal{J_I}^+$ es tal que si $\alpha \neq \beta$ entonces $X_\alpha \cap X_\beta \in \mathcal{J_I}$. Como la familia $\mathcal{I}$ es densa entonces para cada $\alpha \in \omega_1$ existe $f_\alpha \in FF(\mathcal{I})$ tal que $\mathcal{I}^{f_\alpha} \subseteq^* X_\alpha$. Ahora si $\alpha \neq \beta$ entonces f_α y f_β son incompatibles, ya que en otro caso $\mathcal{I}^{f_\alpha \cup f_\beta} = \mathcal{I}^{f_\alpha} \cap \mathcal{I}^{f_\beta} \subseteq^* X_\alpha \cap X_\beta \in \mathcal{J_I}$. Pero entonces $\mathcal{I}^{f_\alpha \cup f_\beta} \in \mathcal{J_I}$ (pues $\mathcal{J_I}$ contiene a los no estacionarios), lo cual es una contradicción pues $bc(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{J_I}^+$.

Entonces todos los f_α's son incompatibles, pero esto es una contradicción al hecho de que $FF(\mathcal{I})$ es ccc. $\square$

2.1.2. Familias fuertemente $\mathcal{C}$-independientes

Lema 2.19. *Sea $\mathcal{E} = \{E_n \mid n \in \omega\}$ una colección anidada de conjuntos estacionarios, es decir, para todo $n \in \omega$, se cumple que $E_{n+1} \subseteq E_n$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\mathcal{E}$ admite una pseudointersección estacionaria, es decir, existe X estacionario tal que, para todo $n \in \omega$, se cumple que $X \setminus E_n$ no es estacionario.

(2) $\bigcap\limits_{n\in\omega} E_n$ es estacionario.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Notemos que

$$X = (X \cap \bigcap_{n\in\omega} E_n) \cup (X \cap (\omega_1 \setminus \bigcap_{n\in\omega} E_n))$$

y alguno de los dos uniendos debe ser estacionario. Por otro lado:

$$X \cap (\omega_1 \setminus \bigcap_{n\in\omega} E_n) = X \cap (\bigcup_{n\in\omega} \omega_1 \setminus E_n) = \bigcup_{n\in\omega} X \cap (\omega_1 \setminus E_n) = \bigcup_{n\in\omega} X \setminus E_n,$$

y como cada $X \setminus E_n$ no es estacionario, entonces $\bigcup_{n\in\omega} X \setminus E_n$ tampoco lo es, es decir, $X \cap (\omega_1 \setminus \bigcap_{n\in\omega} E_n)$ no es estacionario y por lo tanto necesariamente $X \cap \bigcap_{n\in\omega} E_n$ lo es y consecuentemente $\bigcap_{n\in\omega} E_n$ lo es.

(2) $\Rightarrow$ (1) Aquí es suficiente tomar $X = \bigcap_{n\in\omega} E_n$. □

Corolario 2.20. *Sea $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\omega_1)$ una familia $\mathcal{C}$-independiente. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\mathcal{I}$ es fuertemente $\mathcal{C}$-independiente.

(2) Para toda $f; \mathcal{I} \to 2$ con f numerable, la colección $\{\mathcal{I}^{f\restriction n} \mid n \in \omega\}$ admite una pseudointersección estacionaria[1].

Proposición 2.21. *Una familia fuertemente $\mathcal{C}$-independiente numerable no es maximal ni como familia fuertemente $\mathcal{C}$-independiente ni como familia $\mathcal{C}$-independiente.*

Demostración. Sea $\mathcal{I} = \{I_n \mid n \in \omega\}$ una familia $\mathcal{C}$-independiente. Para cada $f \in 2^\omega$ considere $X_f = \mathcal{I}^f$. Si $f \neq g$ entonces $X_f \cap X_g = \emptyset$. Ahora sea A_f, B_f una partición de X_f en estacionarios y definamos A como sigue:

$$A = \bigcup_{f\in 2^\omega} A_f.$$

Veamos que $\mathcal{I} \cup \{A\}$ es fuertemente $\mathcal{C}$-independiente. Para esto basta que para todo $f \in 2^\omega$ se cumpla que $X_f \cap A$ y $X_f \setminus A$ sean estacionarios, pero $X_f \cap A = A_f$ y $X_f \setminus A = B_f$ y estos dos son estacionarios. □

[1] Para que $f \restriction n$ tenga sentido basta numerar el dominio de f y así se puede interpretar a f como una función en 2^ω.

Como ya hemos visto, existen familias $\mathcal{C}$-independientes numerables que son fuertemente $\mathcal{C}$-independientes, sin embargo, existen familias numerables $\mathcal{C}$-independientes que están *muy lejos* de ser fuertes: existe $\mathcal{I} = \{I_n \mid n \in \omega\} \subseteq \mathcal{P}(\omega_1)$ que es $\mathcal{C}$-independiente pero que para toda $h \in 2^\omega$ tal que $|h^{-1}(\{0\})| = \omega$ se cumple que $\mathcal{I}^h = \emptyset$. En efecto, basta tomar $\{X_n \mid n \in \omega\}$ una partición de ω_1 en estacionarios y definir I_n como:

$$I_n = \bigcup_{m \in C_n} X_m,$$

donde los C_n son como en el Ejemplo 1.4.

3. Ideales saturados y familias $\mathcal{J}$-independientes

La saturación de los ideales es algo que ha estado estrechamente relacionada con el estudio de grandes cardinales y por lo tanto constituye, como veremos en esta sección, un puente entre dichos cardinales y la existencia de familias $\mathcal{J}$-independientes sobre ellos.

Definición 3.1. *Sea $\mathcal{J}$ un ideal sobre un cardinal κ. Entonces:*

1. *$\mathcal{J}$ es λ-saturado si para toda colección $\{X_\alpha \mid \alpha \in \lambda\} \subseteq \mathcal{J}^+$ existen $\beta < \gamma < \lambda$ tales que $X_\beta \cap X_\gamma \in \mathcal{J}^+$.*

2. *$sat(\mathcal{J})$ es el mínimo λ tal que $\mathcal{J}$ es λ-saturado.*

Lema 3.2. *Sea $\mathcal{J}$ un ideal sobre un cardinal κ tal que $sat(\mathcal{J}) > \lambda$ para algún cardinal λ. Entonces existe una familia $\mathcal{J}$-independiente sobre κ de cardinalidad 2^λ.*

Demostración. Como $\mathcal{J}$ no es λ-saturado, existe una colección $\{X_\beta \mid \beta \in \lambda\} \subseteq \mathcal{J}^+$ tal que $X_\beta \cap X_\gamma \in \mathcal{J}$ si $\beta \neq \gamma$. Ahora sea $\mathcal{I} = \{I_\alpha \mid \alpha \in 2^\lambda\}$ una familia independiente de cardinalidad 2^λ sobre λ. Para cada $\alpha \in 2^\lambda$ sea $\widehat{I_\alpha} \subseteq \kappa$ definido como sigue:

$$\widehat{I_\alpha} = \bigcup \{X_\beta \mid \beta \in I_\alpha\}.$$

Ahora sea $\widehat{\mathcal{I}} = \{\widehat{I_\alpha} \mid \alpha \in \kappa\}$. Claramente $\widehat{\mathcal{I}}$ tiene cardinalidad 2^λ, luego lo único que resta probar es que es una familia $\mathcal{J}$-independiente.

Sea $s; 2^\lambda \to 2$ con $|s| < \omega$. Queremos ver que $\widehat{\mathcal{I}}^s \in \mathcal{J}^+$. Como $\mathcal{I}$ es independiente entonces existe $\beta \in \mathcal{I}^s$, pero esto se traduce a que $X_\beta \subseteq \widehat{I_\alpha}$ para los α tales que $s(\alpha) = 0$ y $X_\beta \cap \widehat{I_\alpha} \in \mathcal{J}$ para los α tales que $s(\alpha) = 1$, es decir, $X_\beta \subseteq^* \widehat{\mathcal{I}}^s$ y, como $X_\beta \in \mathcal{J}^+$, se sigue que $\widehat{\mathcal{I}}^s \in \mathcal{J}^+$, lo cual termina la demostración. □

A continuación veremos algunas relaciones que hay entre la no existencia de familias fuertemente $\mathcal{J}$-independientes y la existencia de grandes cardinales.

Definición 3.3. *Si $\mathcal{J}$ es un ideal sobre κ decimos que $\mathcal{J}$ es κ-completo si para toda subfamilia $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{J}$ tal que $|\mathcal{H}| < \kappa$ se cumple que $\bigcup \mathcal{H} \in \mathcal{J}$.*

Teorema 3.4. *([6]) Supongamos que $\mathcal{J}$ es un ideal κ-completo sobre κ.*

1. *(Tarski [10]) Si $\mathcal{J}$ es λ-saturado con $2^{<\lambda} < \kappa$, entonces κ es medible.*
2. *(Levy-Silver [6]) Si $\mathcal{J}$ es κ-saturado y κ es débilmente compacto, entonces κ es medible.*
3. *(Kurepa [7]) Si $\mathcal{J}$ es λ-saturado con $\lambda < \kappa$, entonces κ tiene la propiedad del árbol.*

Corolario 3.5. *Supongamos que $\mathcal{J}$ es un ideal κ-completo sobre κ.*

1. *Si $\lambda < \kappa$, $2^{<\lambda} < \kappa$ y no existe una familia $\mathcal{J}$-independiente de cardinalidad 2^{λ}, entonces κ es medible.*
2. *Si no existe una familia $\mathcal{J}$-independiente de cardinalidad 2^{κ} y κ es débilmente compacto, entonces κ es medible.*
3. *Si $\lambda < \kappa$ y no existe una familia $\mathcal{J}$-independiente de cardinalidad 2^{λ}, entonces κ tiene la propiedad del árbol.*

Demostración. Sólo vamos a probar la parte 1, las otras dos son análogas.

Como no existe una familia $\mathcal{J}$-independiente de cardinalidad 2^{λ}, entonces, por el Lema 3.2, tenemos que $sat(\mathcal{J}) \leq \lambda$, es decir, $\mathcal{J}$ es λ-saturado, luego por la parte 1 del Teorema 3.4 se tiene el resultado. □

También la saturación del ideal está relacionada con la existencia de familias fuertemente $\mathcal{J}$-independientes.

Lema 3.6. *Sea $\mathcal{J}$ un ideal sobre κ y supongamos que existe una familia fuertemente $\mathcal{J}$-independiente $\mathcal{I}$ de cardinalidad κ. Entonces $sat(\mathcal{J}) \geq \kappa$. Más aún, si κ es regular entonces κ es fuertemente inaccesible.*

Demostración. Sean $\lambda < \kappa$ y sea $\mathcal{I}_\lambda \subseteq \mathcal{I}$ tal que $|\mathcal{I}_\lambda| = \lambda$. Entonces para toda $h : \lambda \to 2$ se tiene que $\mathcal{I}_\lambda^h \in \mathcal{J}^+$ y si $h \neq g$ entonces $\mathcal{I}_\lambda^h \cap \mathcal{I}_\lambda{}^g = \emptyset$, lo cual prueba que $sat(\mathcal{J}) > 2^{\lambda} > \lambda$, lo cual termina la demostración. □

El método de la demostración anterior tiene la ventaja de que ilustra el hecho de que κ es límite fuerte, sin embargo la existencia de una familia fuertemente $\mathcal{J}$-independiente de cardinalidad κ dice aún más de la saturación de $\mathcal{J}$:

Observación 3.7. *Sea $\mathcal{J}$ un ideal sobre κ y supongamos que existe una familia fuertemente $\mathcal{J}$-independiente $\mathcal{I}$ de cardinalidad κ. Entonces $sat(\mathcal{J}) > \kappa$.*

En efecto, supongamos que $\mathcal{I} = \{X_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ y para cada $\beta \in \kappa$ sea $Y_\beta = X_\beta \setminus \bigcup_{\alpha\in\beta} X_\alpha$. Note que, dado que $\mathcal{I}$ es fuertemente $\mathcal{J}$-independiente, $Y_\beta \in \mathcal{J}^+$, y si $\beta < \gamma < \kappa$ entonces $Y_\beta \cap Y_\gamma = \emptyset$. Esto prueba que $\mathcal{J}$ no es κ-saturado (pues $\{Y_\beta \mid \beta \in \kappa\}$ atestigua esto).

Agradecimientos

Estoy muy agradecido con el CONACyT por haberme apoyado estos últimos dos años con la beca con número 733921. Asimismo quiero agradecer a todos los profesores del PCCM por contribuir a mi formación, principalmente a mi asesor Fernando Hernández Hernández, de quien aprendo cada día más. Por último, agradezco a mis padres, por impulsarme y apoyarme incondicionalmente.

Referencias

[1] Keith J. Devlin. Variations on $\diamondsuit$. *J. Symbolic Logic*, 44(1):51–58, 1979.

[2] Vera Fischer and Diana Carolina Montoya. Higher independence. *arXiv preprint arXiv:1909.11623*, 2019.

[3] M. Goldstern and S. Shelah. Ramsey ultrafilters and the reaping number—Con($\mathfrak{r} < \mathfrak{u}$). *Ann. Pure Appl. Logic*, 49(2):121–142, 1990.

[4] Felix Hausdorff. Über zwei sätze von G. Fichtenholz und L. Kantorovitch. In *Gesammelte Werke*, pages 529–538. Springer, 2008.

[5] R. Björn Jensen. The fine structure of the constructible hierarchy. *Ann. Math. Logic*, 4:229–308; erratum, ibid. 4 (1972), 443, 1972. With a section by Jack Silver.

[6] Akihiro Kanamori. *The higher infinite*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1994. Large cardinals in set theory from their beginnings.

[7] Georges Kurepa. *Ensembles ordonnées et ramifiés*. NUMDAM, [place of publication not identified], 1935.

[8] Saharon Shelah. CON($\mathfrak{u} > \mathfrak{i}$). *Arch. Math. Logic*, 31(6):433–443, 1992.

[9] Robert M. Solovay. Real-valued measurable cardinals. In *Axiomatic set theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1967)*, pages 397–428, 1971.

[10] Alfred Tarski. Ideale in vollständigen Mengenkörpern. II. *Fund. Math.*, 33:51–65, 1945.