



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y
MATEMÁTICAS

DISPERSIÓN DE FOTONES
A NIVEL ÁRBOL USANDO
EL FORMALISMO LÍNEA DE
MUNDO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA

Lic. Luis Alejandro García Mora



DIRECTOR DEL TRABAJO:

DR. JUAN CARLOS ARTEAGA VELÁZQUEZ

CODIRECTOR DEL TRABAJO:

DR. JAMES PAUL EDWARDS

Morelia Michoacán, Diciembre 2021



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
GRUPO DE FORMALISMO LÍNEA DE MUNDO

Dispersión de fotones a nivel árbol usando el formalismo línea de mundo

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN EL
ÁREA DE FÍSICA PRESENTA

LIC. LUIS ALEJANDRO GARCÍA MORA

Asesor: Dr. Juan Carlos Arteaga Velázquez

Coasesor: Dr. James P. Edwards

Morelia, Michoacán, Diciembre 2021

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Resumen

En ésta tesis, hacemos uso del formalismo línea de mundo, y en específico de una nueva representación llamada R que manifiesta la invarianza de norma de la amplitud en la QED escalar para calcular dispersiones de fotones a nivel árbol, primero desarrollamos fórmulas generales, para después dar resultados explícitos para los casos de la dispersión de un electrón escalar con un número de fotones que van de uno a cuatro. Los resultados están escritos en términos de los tensores de Maxwell $f^{\mu\nu}$, que muestran la invarianza de norma de una forma explícita, éste objetivo lo conseguimos introduciendo unos vectores de referencia que en capa de masa se escriben como $r_i = p' + \frac{m^2}{2p' \cdot k_i} k_i$.

La forma en la que se consigue éste propósito, es obteniendo una expresión cerrada para la dispersión de N fotones con la ayuda de la fórmula general tipo Bern-Kosower a nivel árbol. Los diagramas de Feynman involucrados nos ayudan a realizar las integrales, de tal forma que desarrollando álgebra simple, para el caso $N = 4$ la amplitud se escribe como

$$\begin{aligned} D_4^{p'p} = 2e^4 \left\{ \left[\frac{p' \cdot f_2 \cdot p \cdot p' \cdot f_1 \cdot (p + k_2 + k_1)}{p' \cdot k_2} + \frac{p' \cdot f_1 \cdot p \cdot p' \cdot f_2 \cdot (p + k_1 + k_2)}{p' \cdot k_1} \right] \frac{1}{p \cdot (k_2 + k_1) + k_1 \cdot k_2} \right. \\ \left. + (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4) + (1 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 4) + (1 \leftrightarrow 3)(2 \leftrightarrow 4) \right. \\ \left. + \frac{p' \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot p' \cdot p' \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot p'}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_2} \left[\frac{1}{p' \cdot (k_1 + k_2) + k_1 \cdot k_2} + \frac{1}{p \cdot (k_1 + k_2) + k_1 \cdot k_2} \right] + (2 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 3) \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

Una vista detallada a todas las helicidades posibles correspondientes puede consultarse en la sección 4.

Por supuesto es posible calcular la dispersión de fotones usando el formalismo estándar con diagramas de Feynman o con relaciones de recurrencia [1], [2], [3], [4], [5], [6] sin embargo usando éste método, por ejemplo, logramos reducir los diagramas involucrados para $N = 3$, de 12 a 1 mas permutaciones, y para $N = 4$, de 72 a 4. Logrando entonces, calcular la dispersión para $N = 4$ de una manera clara, compacta y eficiente con diferentes asignaciones de helicidades. Generalizando así, los resultados obtenidos en la literatura para gluones o partículas escalares que interactúan con fermiones [1], [5], [4], [3], [7], [2], en los que se enfocan en casos particulares de helicidades.

Palabras clave

Formalismo línea de mundo, Formalismo de helicidad espinorial, Dispersión de fotones a nivel árbol, Formula maestra de Bern-Kosower.

Abstract

In this work, we make use of the worldline formalism, and in concrete, the R representation, a new one that manifests the gauge invariant in the amplitude focus on the scalar QED to obtain the scattering at tree level, first we developed general formulas, and then we precise the particular cases of one electron scattered by one to four photons. The results are writing in terms of the Maxwell's tensor $f^{\mu\nu}$, so the gauge invariance is show explicitly.

We achieve this goal by introducing a reference vectors on-shell that are writing as

$$r_i = p' + \frac{m^2}{2p' \cdot k_i} k_i.$$

The way that we follow to complete this goal, is based in the Bern-Kosower like master formula at tree level. The Feynman Diagrams involved in help us to perform the integrals, in such a way that making use of simple algebra, for $N = 4$ the scattering is writing as

$$\begin{aligned} D_4^{p'p} = 2e^4 & \left\{ \left[\frac{p' \cdot f_2 \cdot p}{p' \cdot k_2} \frac{p' \cdot f_1 \cdot (p + k_2 + k_1)}{p' \cdot k_1 p \cdot k_2} + \frac{p' \cdot f_1 \cdot p}{p' \cdot k_1} \frac{p' \cdot f_2 \cdot (p + k_1 + k_2)}{p' \cdot k_2 p \cdot k_1} \right] \frac{1}{p \cdot (k_2 + k_1) + k_1 \cdot k_2} \right. \\ & + (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4) + (1 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 4) + (1 \leftrightarrow 3)(2 \leftrightarrow 4) \\ & \left. + \frac{p' \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot p'}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_2} \frac{p' \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot p'}{p' \cdot k_3 p' \cdot k_4} \left[\frac{1}{p' \cdot (k_1 + k_2) + k_1 \cdot k_2} + \frac{1}{p \cdot (k_1 + k_2) + k_1 \cdot k_2} \right] + (2 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 3) \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

A closer look to all possible corresponding helicities can be found in section 4.

Of course, it is possible to obtain the photon scattering using the standard formalism or with recursive relations [1], [2], [3], [4], [5], [6], nevertheless using this method, we can reduce the diagrams involved, for $N = 3$ from 12 to 1 plus permutations, and for $N = 4$ from 74 to 4. Achieving then, calculate the scattering for $N = 4$ in a compact, clear and efficient way with all possible helicities. Generalizing the results displayed in the literature for gluons or scalar particles interacting with fermions, [1], [5], [4], [3], [7], [2], which are focused in particular cases of helicity.

Keywords

Worldline formalism (WL), spinor helicity formalism, tree level scattering, Bern-Kosower master formula.

*A mis amigos muertos.
Les dedico mi trabajo y éste pequeño poema.
Templo de la verdad es el que miras
no desoigas la voz que te advierte
que todo es ilusión, menos la muerte.*

Índice general

1. Antecedentes	7
1.1. Introducción a conceptos en la mecánica cuántica y teoría cuántica de campos . . .	7
1.1.1. Mecánica cuántica	7
1.1.2. Teoría cuántica de campos	8
1.2. Integrales de camino	9
1.2.1. Representación de la amplitud de transición mecánico-cuántica usando la integral de camino	12
1.2.2. Kernel de la partícula libre usando mecánica cuántica	15
1.2.3. Kernel de la partícula libre usando integrales de camino	15
1.2.4. Teoría de perturbación alrededor de la solución para la partícula libre . . .	17
1.3. Interacción con el campo electromagnético	20
1.4. Descripción histórica sobre dispersiones con fotones.	21
2. Introducción a la teoría cuántica de campos	27
2.1. Ecuación de Klein Gordon	27
2.1.1. Propagador de Feynman	28
2.1.2. Campos escalares en el formalismo estándar y la QED escalar	30
2.1.3. Matriz S de dispersión	33
2.1.4. Reglas de Feynman para la QED escalar	34
2.1.5. Dispersión de Compton en la QED escalar	37
2.2. Representación worldline de TCC	38
2.2.1. Integrales de camino relativista	39
2.2.2. Acoplamiento al campo electromagnético y la acción efectiva	41
2.2.3. Amplitud para N fotones en un lazo	42
2.2.4. Polarización del vacío en la QED escalar	47
2.3. Ecuación de Dirac y espinores de Weyl	49
2.3.1. Formalismo de helicidad spinorial para electrones, con énfasis en los vectores de polarización de los fotones	53
2.3.2. Spinores de Dirac	54
2.4. Formalismo de helicidad spinorial	55
2.4.1. Ejemplos de la teoría de Yukawa y QED escalar	56
2.4.2. Vectores sin masa, y ejemplos de la QED	61
2.4.3. Identidad de Ward y sus consecuencias	64

3. Nueva metodología	67
3.1. Formalismo worldline a nivel de árbol	67
3.1.1. Teoría escalar QED	68
3.1.2. Dispersiones para los primeros N	72
3.2. Invarianza de norma - cambio a la representación R	75
3.2.1. Fórmula maestra en la representación R	77
3.2.2. Ejemplos de R para N=1, 2, 3, 4	79
3.3. Formalismo de helicidad espinorial para los tensores $f^{\mu\nu}$ y sus propiedades	83
4. Resultados	89
4.1. Caso N=1, el vértice	89
4.2. Caso N=2. Dispersión de Compton escalar	90
4.2.1. Integrales sobre los parámetros.	91
4.2.2. Comparación con el formalismo estándar	94
4.2.3. Asignación de helicidades	95
4.3. Dispersión para 3 fotones, N=3	96
4.3.1. Integrales sobre los parámetros	96
4.3.2. Comparación con el formalismo estándar	98
4.3.3. Asignación de helicidades	99
4.4. Dispersión para 4 fotones, N=4	100
4.4.1. Integrales sobre los parámetros	101
4.4.2. Asignación de helicidades	103
4.4.3. Reglas para el caso general	106
Conclusions	111
Apéndices	115
A. Integrales Gaussianas	117
A.1. Integrales gaussianas para procesos escalares	117
B. Convenciones para el formalismo de helicidad espinorial en 4 dimensiones	121
Agradecimientos	123
Bibliografía	129

Capítulo 1

Antecedentes

Una breve introducción a los conceptos utilizados en ésta tesis es dada en éste capítulo. Empezando por una breve discusión acerca de la mecánica cuántica (MC) y la teoría cuántica de campos (TCC), continuaremos discutiendo los aspectos importantes de una representación alternativa propuesta por Feynman a dichas teorías por el método de integrales de camino, de donde surgiría el formalismo Worldline. A ésta, Feynman no le dio seguimiento pero, como veremos más adelante, se complementa muy bien con los diagramas de Feynman y permite conseguir resultados simples por métodos relativamente sencillos que nos costarían mucho trabajo si fuese de otra manera. Una descripción histórica que trata las dispersiones de fotones desde un punto de vista de la QED, así como un poco de información sobre la dispersión luz por luz es dada en la última sección de éste Capítulo

1.1. Introducción a conceptos en la mecánica cuántica y teoría cuántica de campos

1.1.1. Mecánica cuántica

La mecánica cuántica es, en principio, la herramienta matemática que nos permite predecir la función de onda de un sistema, a través de la cual podemos determinar las probabilidades de que diferentes procesos tengan lugar. Matemáticamente se puede entender con relativa familiaridad, sin embargo la parte intuitiva de la física que presenta sigue siendo controversial [8]. Quizá el único punto en el que los filósofos y físicos están de acuerdo, es que el mundo microscópico afecta al macroscópico, en nuestros instrumentos de medición por ejemplo. La pregunta es que tipo de mundo describe, es decir, cómo es el mundo de acuerdo a la mecánica cuántica y cómo esos aparatos pueden ser construidos de partes microscópicas del tipo que la teoría describe. Cuatro principios básicos de la mecánica cuántica son

1. **Estados físicos.** Cada estado físico está asociado a un espacio de Hilbert, cada vector en el espacio corresponde a un estado del sistema y viceversa.
2. **Cantidades Físicas.** Los operadores hermitianos en el espacio de Hilbert asociados con un sistema representan cantidades físicas, y sus eigenvalores representan los posibles resultados de medición de esas cantidades. Hay un operador llamado el Hamiltoniano, que juega un papel esencial en la teoría cuántica ya que la dinámica del sistema puede ser formulada

convenientemente simplemente rastreando su evolución. El hamiltoniano denotado por H o \hat{H} representa la energía total del sistema. Sus eigenvalores son los resultados medibles de la energía total. Está dado por la suma de la energía cinética y potencial de los componentes del sistema.

3. **Composición.** El espacio de Hilbert asociado con un sistema complejo es el producto tensorial de aquellos asociados con sistemas simples de los cuales está compuesto (partículas individuales).
4. **Dinámica** Dado un conjunto de estados a un tiempo t , y las fuerzas y constricciones a las que está sometido. Existe una ecuación (ecuación de Schrödinger) que nos da información del estado a cualquier otro tiempo $U|v_t\rangle \rightarrow |v_{t'}\rangle$. La propiedad mas importante de U es que es determinista, es decir que el estado al que lo lleva es único, también es unitaria (es decir que cumple que $UU^* = U^*U = I$), y es lineal, que quiere decir que si lleva un estado de $|A\rangle \rightarrow |A'\rangle$ y otro estado de $|B\rangle \rightarrow |B'\rangle$, entonces lleva cualquier estado de la forma $\alpha|A\rangle + \beta|B\rangle \rightarrow \alpha|A'\rangle + \beta|B'\rangle$. Por otro lado si llevamos a cabo una medida de un observable B sobre un estado del sistema $|A\rangle$ tiene el efecto de colapsar el sistema a un eigenestado $|B\rangle$ correspondiente al eigenvalor observado B , a que eigenestado B colapsa es una cuestión de probabilidad dada por la regla de Born

$$Pr(b_i) = |\langle A|B = b_i\rangle|^2 \quad (1.1)$$

1.1.2. Teoría cuántica de campos

La teoría cuántica de campos (TCC ó QFT) es un marco conceptual o matemático utilizado en la actualidad por los físicos que estudian las partículas, la materia condensada o la mecánica estadística. De manera informal podríamos decir que la TCC es una extensión de la mecánica cuántica, pero en lugar de lidiar con partículas, lo hace con campos, es decir sistemas con un número infinito de grados de libertad. Ante la dificultad de la ecuación de Schrödinger de obedecer invarianza frente a transformaciones de Lorentz, surgió una búsqueda que encontraría sus frutos en la ecuación de Klein-Gordon y la ecuación de Dirac. Teorías que pueden modelar procesos de dispersión, donde partículas de un tipo se destruyen mientras otras son creadas.

La estructura básica de la formulación convencional

El paso crucial hacia la TCC es hasta cierto punto, análoga a la cuantización en la MC, ésto es, promovemos los campos a operadores, de donde nacen las relaciones de conmutación. El punto inicial es una formulación usando el Lagrangiano, empezando por generalizar la noción de momento (momento canónico o conjugado) escrito como $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$, (donde \mathcal{L} es por supuesto el lagrangiano) a un momento conjugado para campos. Ésto es

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}. \quad (1.2)$$

En ambos casos (MC y TCC) se requiere que las variables canónicas satisfagan ciertas relaciones de conmutación. Desde un punto de vista físico ésto implica una restricción sobre los posibles

valores que una cantidad física puede tener (valores discretos). En la TCC las relaciones de conmutación para un campo ϕ y su correspondiente campo conjugado Π son

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{y}, t)] &= i\delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] &= [\Pi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{y}, t)] = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Donde es importante notar que éstas relaciones de conmutación se cumplen para un mismo tiempo t , además de que las relaciones aplican para campos bosónicos. Para campos fermiónicos debemos usar relaciones de anticonmutación.

Interacción

Para escribir interacciones tales como la dispersión de partículas en un colisionador, necesitamos la matriz de dispersión S , que contiene toda la información predictiva relevante acerca de, por ejemplo la sección eficaz de dispersión. Para describir interacciones, es conveniente cambiar a la imagen de interacción, en donde el hamiltoniano es dividido en una parte libre y otra de interacción $H = H_0 + H_{int}$, ésta interacción tiene la ventaja de que varios resultados usados para el campo libre pueden usarse en los campos de interacción.

Volviendo a la matriz de dispersión S , ésta va a expresar la conexión entre los estados dentro (in) y fuera (out) especificando la amplitud de transición. En la QED, un estado dentro describe una configuración particular de electrones, positrones y fotones, es decir, describe cuántas de éstas partículas hay con que momento, spin y polarización antes de la interacción. Después entra en juego la matriz S que nos da información acerca de lo que sucede con éstas partículas hasta que llegan al estado fuera, es decir, justamente la interacción a las cuales están sujetas, a partir de ésta matriz podemos extraer una probabilidad que puede ser medida por experimentos. Debe aclararse que éste formalismo sólo es aplicable en el caso de campos libres, ya que la inclusión de interacciones nos lleva a infinitos. Ya que muy pocos modelos realistas pueden ser resueltos de forma exacta, la teoría de perturbación es la que cubre la mayor parte de las publicaciones en la TCC [9].

1.2. Integrales de camino

La noción de integral de camino (llamada integral funcional, integral sobre las trayectorias etc) fue introducida por primera vez, en los años de 1920s por Norbert Wiener (1921 [10], 1923 [11], 1924 [12], 1930 [13]) como un método para resolver problemas en la teoría de difusión y movimiento Browniano. Fue reinventada por Richard Feynman (1942 (tesis doctoral) [14], 1948 [15]) para reformular la mecánica cuántica (una tercera formulación además de las ya existentes de Schrodinger y Heisenberg). Éstos artículos de Feynman están inspirados en algunos otros de Dirac (1933 [16]) cuyo protagonista resulta ser el principio de mínima acción y el lagrangiano, realizando una suma sobre todos los caminos posibles que puede recorrer la partícula cuántica, en lugar de escoger el que hace estacionaria a la acción, como lo haría clásicamente. Ésto eventualmente llevaría a Feynman a representar el propagador de la ecuación de Schrodinger por la integral de camino con valores complejos que ahora lleva su nombre.

A finales de los años cuarenta, Feynman (1950 [17], 1951 [18]) trabajó (basado en las integrales de camino), en una nueva formulación de la electrodinámica cuántica, donde desarrolló sus famosos diagramas. En los años cincuenta, las integrales de camino fueron estudiadas para resolver ecuaciones funcionales en la teoría cuántica de campos (TCC, QFT) llamadas las ecuaciones de Schwinger-Dyson, en honor a Julian Schwinger y Freeman Dyson, que son relaciones generales entre las funciones de Green en la TCC, es decir ecuaciones de movimiento para la función de Green, por lo que se les conoce también como las ecuaciones análogas de Euler-Lagrange en la TCC. Forman un conjunto de infinitas ecuaciones diferenciales funcionales, acopladas unas a las otras [19] [20]. La formulación funcional de la TCC fue considerada en los trabajos de Bogoliubov (1954 [21]) Gelfan y Minlos (1954 [22]), Fradkin (1954 [23]), Edwards y Peierls (1954 [24]), entre otros. Además de usarse para desarrollar la teoría que sustenta el movimiento Browniano en medios absorbentes (Wiegel 1975 [25]) así como la teoría de los superfluidos (Feynman 1953 [26], Kikuchi 1954 [27]), la teoría de transiciones de fase, superconductividad, modelo de Ising, óptica cuántica y física de plasmas. A principio de los años 1950s, Ozaki (en unas notas no publicadas de la universidad de Kyushi (1953)) comenzó con una acción para la partícula libre y la transformó de coordenadas cartesianas a polares, después Peak e Inomata (1969 [28]) calcularon explícitamente la integral radial para el oscilador armónico, éstos fueron los primeros intentos por ampliar las soluciones exactas.

Por los años de 1960's, apareció un nuevo campo de aplicaciones, llamadas la cuantización de los campos de gauge, por ejemplo, el campo electromagnético, gravitacional y el campo de Yang-Mills. Las propiedades específicas de la acción funcional en los campos gauge (su invariancia con respecto a las transformadas de gauge) deben ser tomadas cuando se cuantiza, de otra forma nos arrojaría resultados incorrectos. Ésto fue notado por primera vez por Feynman, quien mostró que la cuantización por vía directa usando el método de Fermi, en analogía con electrodinámica cuántica, viola la condición unitaria, después debido a los trabajos de De Witt (1967 [29]), Faddeev and Popov (1967 [30]), Fradkin and Tyutin (1969 [31]) y 't Hooft (1971 [32]), tal problema fue resuelto, y la integral de camino mostró ser la mejor herramienta para ésto, Berezin (1966 [33]) fue de crucial importancia al introducir la integración sobre las variables de Grassmann para describir fermiones, ya que más que ser un truco formal, abrió la vía para un tratamiento unificado de fermiones y bosones usando la aproximación de integrales de camino. En 1970's, Wilson (1974 [34]) formuló la teoría de campos para quarks y gluones (Cromodinámica cuántica) en un enrejado de espacio-tiempo euclideo, que puede ser considerada una forma discreta de la integral de camino. Años después, Fujikawa (1979 [35]) mostró cómo las anomalías cuánticas emergen de la integral de camino (aunque en éste caso se refiere a integrales de camino sobre configuraciones de campos, no de trayectorias de partículas), y se dio cuenta de que la "medida" en la integral de camino es la responsable de que no exista invariancia frente a cierto tipo de transformaciones de simetría.

Quizá, la característica mas cautivadora de las integrales de camino, es que proporciona una técnica unificadora al resolver problemas de diferentes ramas de la física teórica. De hecho, la forma general del objeto básico, llamada la amplitud de probabilidad $W(x_f, t_f; x_0, t_0)$, en la teoría de procesos estocásticos se escribe como

$$W(x_f, t_f; x_0, t_0) \sim \sum_{\substack{\text{todas las trayectorias} \\ \text{de } x_0 \text{ a } x_f}} \exp \left\{ -\frac{1}{4D} F[x(\tau)] \right\} \quad (1.4)$$

Donde x_0 denota el conjunto de coordenadas del sistema estocástico bajo la consideración de empezar al tiempo t_0 , y el valor absoluto al cuadrado de $W(x_f, t_f; x_0, t_0)$ nos da la amplitud de probabilidad del sistema de tener coordenadas x_f al tiempo final t_f . La forma explícita de la funcional $F[x(\tau)]$, con $t_0 \leq \tau \leq t_f$, así como el valor y el significado físico de la constante D depende de las propiedades del sistema y el medio que lo rodea.

Como veremos en mecánica cuántica el objeto de nuestro interés será la amplitud de transición cuya forma es muy parecida a la ecuación 1.4

Mientras que los valores esperados en el vacío (Funciones de Correlación) en la teoría cuántica de campos son expresiones del tipo

$$\langle 0 | \hat{A}(\hat{\phi}) | 0 \rangle \sim \sum_{\substack{\text{todas las trayectorias} \\ \text{de } x_0 \text{ a } x_f}} A(\phi) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[\phi] \right\} \quad (1.5)$$

Donde $\hat{A}(\hat{\phi})$ es un operador hecho de los operadores de campo $\hat{\phi}$ y del lado derecho de la ecuación $A(\phi)$ es la correspondiente cantidad clásica. Para quitarnos la parte imaginaria, hacemos una rotación del tiempo $t \rightarrow -it$, de tal forma que el valor esperado en el vacío tomará la forma

$$\langle 0 | \hat{A}(\hat{\phi}) | 0 \rangle \sim \sum_{\substack{\text{todas las configuraciones} \\ \text{de campo}}} A(\phi) \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} S[\phi] \right\} \quad (1.6)$$

Mientras que en la mecánica estadística clásica, el valor esperado se escribe como

$$\langle A(\phi) \rangle_{st.cl} \sim \sum_{\text{todas las configuraciones}} A(\phi) \exp \left\{ -\frac{1}{k_B T} E[\phi] \right\} \quad (1.7)$$

(k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura). Históricamente, la teoría cuántica de campos y la estadística tienen diferentes comienzos, la primera está relacionada íntimamente con la teoría electromagnética y física de partículas. Experimentalmente conectada con experimentos a altas energías en aceleradores de partículas, mientras que los orígenes de la mecánica estadística están relacionados con la teoría del calor, la irreversibilidad y la teoría cinética de los gases. Experimentalmente conectada a la calorimetría, calores específicos, transiciones de fase y difusión. Sin embargo observamos que las ecuaciones 1.6 y 1.7 son formalmente lo mismo, de tal forma que podemos tratarlas matemáticamente de la misma forma. Como parte final de ésta comparación, es necesario resaltar el hecho de que ambos sistemas tienen el problema de tratar con volúmenes infinitos, y por consiguiente, con un número de grados de libertad también infinito, de tal forma que en principio, éstas expresiones nos llevarían en el mejor de los casos a resultados tipo $\frac{\infty}{\infty}$. La forma en la que se resuelven éstos problemillas, en el caso de estadística es considerando al sistema dentro de un límite termodinámico, primero evaluando en un volumen finito y luego considerando el límite del tamaño de la caja a infinito. Algo similar sucede en la teoría cuántica de campos, en

donde también trabajamos con volúmenes infinitos, que por consiguiente nos genera divergencias. La forma en la que se resuelve éste problema en la teoría cuántica de campos, es a través de una renormalización [36].

Ya que podemos tratar a las ondas como partículas y viceversa en la MC, vamos a construir la amplitud de transición en mecánica cuántica con ayuda de la amplitud de onda en electromagnetismo, en éste último podemos descomponer la onda dispersada por múltiples rendijas, en la suma de ondas individuales generadas por cada rendija, donde cada onda se caracteriza por su propio camino óptico $I(x_i, x)$ que va del i -ésimo punto al punto x , de tal forma que la amplitud final está dada por $\sum_i e^{iI(x_i, x)}$, cuyo módulo al cuadrado describe los patrones de interferencia entre las ondas. En mecánica cuántica, el principio de superposición puede ser formulado en estricta analogía al electromagnetismo, en donde se postula la ecuación lineal de movimiento como la ecuación de Schrödinger. En estricta analogía reemplazamos la amplitud de onda electromagnética por una amplitud de transición entre los puntos inicial x' al tiempo 0 y final x al tiempo t , en donde el camino óptico es reemplazado por la acción clásica de ir de un punto x' a un punto x en un tiempo t (dividido entre \hbar , que tiene dimensiones de acción). La transición de amplitud total será una suma sobre todos los posibles caminos que conecten los puntos x' y x en un tiempo t :

$$K(x, x'; t) \sim \sum_{x(\tau)} e^{iS[x(\tau)]/\hbar}. \quad (1.8)$$

Vamos a separar el camino que sigue la partícula como la suma de un camino clásico $x_{cl}(\tau)$, más un camino que depende de una variación $q(\tau)$, notemos que el principio de acción aplicado a la acción clásica $S(x_{cl}(\tau))$ satisface las ecuaciones de Hamilton-Jacobi, de tal forma que

$$K(x, x'; t) \sim \sum_{q(\tau)} e^{iS[x_{cl}(\tau)+q(\tau)]/\hbar}, \quad (1.9)$$

donde x_{cl} representa un tipo de origen en el espacio de todos los caminos que conectan x' y x en un tiempo t , como se muestra en la Figura Fig. 1.1

1.2.1. Representación de la amplitud de transición mecánico-cuántica usando la integral de camino

Usando el formalismo de integrales de camino, vamos a obtener una expresión para el kernel de la siguiente forma. Primero, hacemos $\hbar = 1$ y dividimos el tiempo del operador evolución en N partes, cada una de igual tamaño $\epsilon = t/N$, y entre cada una de éstas partes, introducimos la identidad $\mathbb{1} = \int dx |x\rangle \langle x|$, $N - 1$ veces. Después, vamos a ir desde un punto inicial $x_i = x'$ a uno

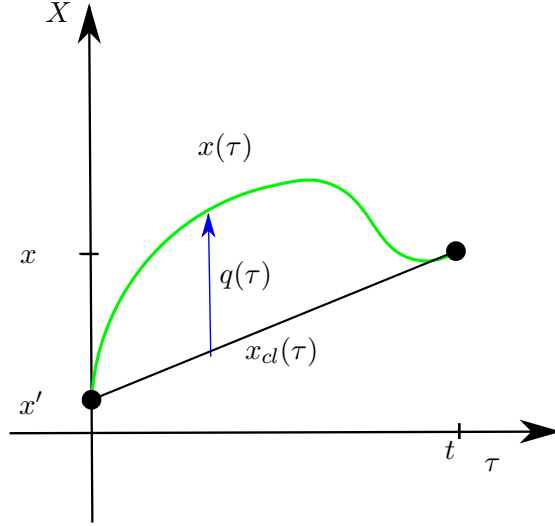


Figura 1.1: Parametrización del camino en uno clásico (de la partícula libre) más una variación representada por $q(\tau)$

final $x_f = x$, así vamos a escribir el kernel como

$$\begin{aligned}
 K(x, x'; t) &= \langle x | \hat{U}(t) | x' \rangle \\
 &= \langle x | e^{-iHt} | x' \rangle \\
 &= \langle x | e^{-iH \sum_1^N (\frac{t}{N})} | x' \rangle \\
 &= \langle x | e^{-iH \sum_1^N \epsilon} | x' \rangle \\
 &= \langle x | e^{-iH\epsilon} e^{-iH\epsilon} \dots e^{-iH\epsilon} | x' \rangle \\
 &= \int \left(\prod_{i=1}^{N-1} dx_i \right) \prod_{j=1}^N \langle x_j | e^{-iH\epsilon} | x_{j-1} \rangle \\
 &= \int \left(\prod_{i=1}^{N-1} dx_i \right) \left(\prod_{k=1}^N \frac{dp_k}{2\pi} \right) \prod_{j=1}^N \langle x_j | e^{-iH\epsilon} | p_j \rangle \langle p_j | x_{j-1} \rangle
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Ahora, si podemos separar el hamiltoniano en su parte cinética y potencial, haciendo una expansión de Taylor tenemos

$$e^{-\epsilon(T+V)} = e^{-\epsilon T} e^{-\epsilon V} + O(\epsilon^2) \tag{1.11}$$

donde el término a orden ϵ^2/N^2 es $A = \frac{1}{2}[V, T]$.

Si sólo nos quedamos con la parte lineal y recordando que $\langle p_j | x_{j-1} \rangle = e^{-ix_{j-1}p_j}$, además de que

$$\begin{aligned}
 \langle x_j | e^{-iH\epsilon} | p_j \rangle &= \int dx_j e^{-i\epsilon H(x_j, p_j)} e^{ix_j p_j} \\
 &= \int dx_j e^{i(x_j p_j - \epsilon H(x_j, p_j))},
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

que la ecuación 1.10 sigue como

$$\int \left(\prod_{i=1}^{N-1} dx_i \right) \left(\prod_{k=1}^N \frac{dp_k}{2\pi} \right) \prod_{j=1}^N e^{i(x_j p_j - \epsilon H(x_j, p_j))} e^{-i(x_{j-1} p_j)} \quad (1.13)$$

$$\int \left(\prod_{i=1}^{N-1} dx_i \right) \left(\prod_{k=1}^N \frac{dp_k}{2\pi} \right) \exp \left[i \sum_{j=1}^N \epsilon \left(p_j \frac{x_j - x_{j-1}}{\epsilon} - H(x_j, p_j) \right) \right]$$

Cuando N es muy grande, podemos escribir el kernel como

$$K(x, x'; t) = \int_{x(0)=x'}^{x(t)=x} Dx Dp \exp \left\{ i \int_0^t d\tau (p\dot{x} - H(x, p)) \right\} \quad (1.14)$$

$$Dx \equiv \prod_{0 < \tau < t} dx(\tau), \quad Dp \equiv \prod_{0 < \tau < t} dp(\tau) \quad (1.15)$$

Ahora, si escribimos el hamiltoniano como $H(x_j, p_j) = \frac{p_j^2}{2m} + V(x_j)$, y completamos el cuadrado, obtenemos que

$$\begin{aligned} p\dot{x} - \left(\frac{p^2}{2m} + V(x) \right) &= -\frac{1}{2m} (p^2 - 2mp\dot{x}) - V(x) \\ &= -\frac{1}{2m} (p - m\dot{x})^2 + \frac{m^2 \dot{x}^2}{2m} - V(x) \end{aligned} \quad (1.16)$$

por lo que la ecuación (1.14) toma la forma

$$K(x, x'; t) = \int_{x(0)=x'}^{x(t)=x} Dx \exp \left\{ i \int_0^t d\tau \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) \right) \right\} Dp \exp \left\{ -\frac{i}{2m} \int_0^t d\tau (p - m\dot{x})^2 \right\} \quad (1.17)$$

$$= A \int_{x(0)=x'}^{x(t)=x} Dx \exp \left\{ i \int_0^t \mathcal{L} d\tau \right\} \quad (1.18)$$

en donde hemos definido

$$A = \int Dp \exp \left\{ -\frac{i}{2m} \int_0^t d\tau (p - m\dot{x})^2 \right\} = \int D\hat{p} e^{-\frac{i}{2m} \int_0^t d\tau \hat{p}^2} \quad (1.19)$$

y además $\hat{p} = p - m\dot{x}$ y $\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x)$. De aquí se observa que p son los momentos conjugados y \mathcal{L} es el lagrangiano. Por simplicidad vamos a cambiar la notación $\hat{p} \rightarrow p$ y vamos a esconder A dentro de Dx , de tal forma que la ecuación para el kernel toma la forma final.

$$K(x, x'; t) = \int_{x(0)=x'}^{x(t)=x} Dx e^{\frac{i}{\hbar} S[x(\tau)]}. \quad (1.20)$$

Entonces, podemos interpretar éste resultado como si S fuera una especie de fase, y tenemos que sumar (integrar) todas las posibles interferencias que podría sufrir la partícula. Obviamente en el caso clásico, el promedio de las interferencias terminaría por ser cero, pero no es así en el caso cuántico, ya que cualquier partícula cuántica puede ser considerada como una onda, de tal forma que su posición y momento no pueden ser completamente determinados simultáneamente [37].

1.2.2. Kernel de la partícula libre usando mecánica cuántica

La amplitud de transición mecánico-cuántica para un operador hamiltoniano independiente del tiempo puede escribirse como

$$K(x, x'; t) = \langle x | e^{-itH} | x' \rangle \quad (1.21)$$

$$K(x, x'; 0) = \delta(x - x') \quad (1.22)$$

y describe la evolución de una función de onda de un tiempo 0 a un tiempo t

$$\psi(x, t) = \int dx' K(x, x'; t) \psi(x', 0) \quad (1.23)$$

Ésta función de onda satisface la ecuación de Schrödinger

$$i\partial_t K(x, x'; t) = H K(x, x'; t) \quad (1.24)$$

donde H es el hamiltoniano, que para una partícula no relativista se escribe como

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (1.25)$$

Para una partícula libre, usando las condiciones de frontera 1.22 en la ecuación 1.24, encontramos que

$$K_f(x, x'; t) = N_f(t) e^{iS_{cl}(x, x'; t)} \quad (1.26)$$

donde nombramos N_f a la normalización de la partícula libre, y S_{cl} a la acción clásica para una partícula libre

$$N_f(t) = \sqrt{\frac{m}{i2\pi t}}, \quad (1.27)$$

$$S_{cl}(x, x'; t) = m \frac{(x - x')^2}{2t}. \quad (1.28)$$

Un punto importante es que solamente podemos esperar obtener un término del tipo $e^{S[x_{cl}]}$ si la acción es cuadrática en x , como sucede en éste caso para el propagador libre (otra clara opción es el oscilador armónico).

1.2.3. Kernel de la partícula libre usando integrales de camino

Debemos en primer lugar, encontrar el resultado más simple posible usando el método de integrales de camino, no sólo para verificar que el método es consistente, si no, como se verá más adelante, por la necesidad de normalizar todas las integrales de camino dependientes de un potencial. Para comenzar, sabemos que el kernel se escribe como

$$K(x, x'; t) = \int_{x(0)=x'}^{x(t)=x} Dx e^{iS[x(t)]} \quad (1.29)$$

en donde la acción se puede escribir como

$$S[x(t)] = \int_0^t d\tau \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x(\tau)) \right) \quad (1.30)$$

con las condiciones iniciales $x(0) = x'$ y $x(t) = x$.

Por supuesto, para una partícula libre tenemos que, $V(x(\tau)) = 0$. De tal forma que al no existir un potencial, la partícula tendrá velocidad constante, lo que implica que clásicamente se mueve sobre una línea recta, para fines de simplicidad vamos a hacer un reescalamiento de $\tau \rightarrow t\tau$, de tal forma que la ecuación (1.30) toma la forma

$$S_f[x(t)] = \frac{m}{2t} \int_0^1 d\tau \dot{x}^2 \quad (1.31)$$

con las condiciones iniciales según nuestro nuevo reescalamiento $x(0) = x'$, $x(1) = x$. Donde x' , x son los puntos inicial y final de la línea recta respectivamente, por supuesto que para una partícula libre $\ddot{x} = 0$, por lo que la parametrización del camino será

$$x(\tau) = x_0(\tau) + q(\tau) \quad (1.32)$$

$$x_0(\tau) = x' + (x - x')\tau = x + (x' - x)(1 - \tau) \quad (1.33)$$

$$q(0) = q(1) = 0.$$

Vemos inmediatamente que las condiciones iniciales que se cumplen para nuestra parametrización dada por las ecuaciones 1.32 y 1.33 $x(0) = x'$ y $x(1) = x$, de tal forma que reescribiendo la acción, ésta toma la forma

$$S_f[x_0 + q] = \frac{m}{2t} \int_0^1 d\tau (\dot{x}_0^2 + \dot{q}^2 + 2\dot{x}_0\dot{q}) \quad (1.34)$$

$$= \frac{m}{2t} (x - x')^2 + \frac{m}{2t} \int_0^1 d\tau \dot{q}^2 \quad (1.35)$$

$$= S_f[x_0] + S_f[q] \quad (1.36)$$

que como podemos ver, es una suma de la acción clásica y una acción que depende del parámetro "q". Así la ecuación para el kernel (1.29) también puede separarse en un promedio clásico por una contribución de la desviación sobre los caminos

$$\begin{aligned} K_f(x, x'; t) &= e^{iS_f[x_0]} \int_{q(0)=0}^{q(1)=0} Dq e^{iS_f[q(\tau)]} \\ &= e^{i\frac{m}{2t}(x-x')^2} \int_{q(0)=0}^{q(1)=0} Dq e^{i\frac{m}{2t} \int_0^1 \dot{q}^2} \end{aligned} \quad (1.37)$$

De forma sencilla, lo único que hacemos ahora es una comparación con la ecuación 1.28, de tal forma que uno se da cuenta que para la partícula libre

$$\int_{q(0)=0}^{q(1)=0} Dq e^{i \frac{m}{2t} \int_0^1 \dot{q}^2} = \sqrt{\frac{m}{i2\pi t}} \quad (1.38)$$

Ésto nos resultará de gran utilidad, ya que si bien el comparar es una trivialidad, ésta es nuestra primera meta para encaminarnos a la resolución de problemas más complejos, en los que aparece algún potencial (electromagnético en nuestro caso). Veremos más adelante, que para encontrar una solución convergente, es necesario normalizar por un factor puramente cinético.

1.2.4. Teoría de perturbación alrededor de la solución para la partícula libre

Cuando tomamos en cuenta un potencial arbitrario, la integral de camino no tiene una solución exacta en la mayoría de los casos. Sin embargo si el potencial es pequeño comparado con el término cinético, se puede ocupar la teoría de perturbaciones alrededor de la solución libre. Considerando entonces la transición de amplitud usual (1.29) con una acción completa (1.30), vamos a partir el camino arbitrario en términos del camino clásico y una desviación $q(\tau)$.

Podemos reescribir la amplitud como

$$K(x, x'; t) = K_f(x, x'; t) \frac{\int_{q(0)=0}^{q(1)=0} Dq e^{i \int_0^1 \frac{m}{2t} \dot{q}^2 - tV(x_{cl}+q)}}{\int_{q(0)=0}^{q(1)=0} Dq e^{i \int_0^1 \frac{m}{2t} \dot{q}^2}} \quad (1.39)$$

Ahora hacemos una expansión de Taylor del potencial alrededor de la solución clásica

$$S_{int} = -t \int_0^1 d\tau \left(V(x_{cl}) + V'(x_{cl})q + \frac{1}{2!} V^{(2)}(x_{cl})q^2 + \dots \right) \quad (1.40)$$

Separamos entonces la parte cinética del exponente de la parte potencial, y después expandimos la exponencial $e^{iS_{int}}$ en su serie de Taylor, por lo que sólo nos quedan polinomios en q , dependiendo del orden de $V^n(x_{cl})$ elegido, por lo que sólo nos quedaran expresiones a determinar del tipo

$$\frac{\int_{q(0)=0}^{q(1)=0} Dq e^{i \int_0^1 \frac{m}{2t} \dot{q}^2} q(\tau_1)q(\tau_2)\dots q(\tau_n)}{\int_{q(0)=0}^{q(1)=0} Dq e^{i \int_0^1 \frac{m}{2t} \dot{q}^2}} \equiv \langle q(\tau_1)q(\tau_2)\dots q(\tau_n) \rangle \quad (1.41)$$

Definimos a las expresiones del tipo $\langle f(q) \rangle$ como funciones de correlación o valores esperados, que nos cuantifica la variación entre dos o más variables. Podemos además, escribir la llamada generatriz funcional, que nos ayuda a encontrar las funciones de correlación como

$$Z[j] \equiv e^{i \int_0^1 \frac{m}{2t} \dot{q}^2 + i \int_0^1 qj} = N_f(\tau) \langle e^{i \int_0^1 qj} \rangle \quad (1.42)$$

De tal forma que podemos encontrar las funciones de correlación con ayuda de la generatriz

funcional simplemente derivándola

$$\langle q(\tau_1)q(\tau_2)\dots q(\tau_n) \rangle = (-i)^n \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^n}{\delta j(\tau_1)\delta j(\tau_2)\dots\delta j(\tau_n)} Z[j] \Big|_{j=0} \quad (1.43)$$

Utilizando integración por partes en el término cinético y completando el cuadrado en la función generatriz 1.42 obtenemos

$$Z[j] = e^{\frac{i}{2} \int \int j(\tau)\Delta(\tau,\tau')j(\tau')} \int_{q(0)=0}^{q(1)=0} D\tilde{q} e^{i\frac{m}{2t} \int_0^1 \tilde{q}^2} \quad (1.44)$$

Donde Δ es la función de Green del operador cinético $D \equiv \partial_\tau^2$, o también llamado propagador

$$D\Delta(\tau, \tau') = \delta(\tau - \tau') \quad (1.45)$$

Usando condiciones de frontera de Dirichlet. Podemos ver lo anterior de la siguiente forma, si pensamos en que

$$\Delta(\tau, \tau') = \langle \tau | \partial_t^{-2} | \tau' \rangle \quad (1.46)$$

es decir, Δ es el operador representado por los elementos de matriz de ∂_t^{-2} , podemos pensar que

$$\partial_t^2 \Delta = I \quad (1.47)$$

de donde se ve claramente que Δ es el inverso del operador ∂_t^2 . Puede sonar revoltoso, rebuscado e innecesario, pero es importante notar que las analogías hechas se refieren a que hemos encontrado el inverso de un operador no discreto. Es decir que se pueden desarrollar fórmulas específicas para cada caso, una función de Green, inversa a cada operador "D". Para éste trabajo, será suficiente por ahora encontrar una forma específica para Δ . Volviendo entonces a $Z[j]$, recordemos que $\tilde{q}(\tau) = q(\tau) - \int_0^1 j(\tau')\Delta(\tau, \tau')d\tau'$ por lo que obtenemos

$$\bullet\bullet\Delta(\tau, \tau') = \delta(\tau - \tau') \quad (1.48)$$

donde el punto relleno \bullet a la izquierda (derecha) significa la derivada con respecto a τ (τ').

Usando las condiciones a la frontera e integrando dos veces obtenemos que

$$\Delta(\tau, \tau') = \frac{1}{2}|\tau - \tau'| - \frac{\tau + \tau'}{2} + \tau\tau' \quad (1.49)$$

donde $\Delta(\tau, \tau')$ satisface las propiedades de simetría y condiciones iniciales impuestas por construcción

$$\Delta(\tau, \tau') = \Delta(\tau', \tau) \quad (1.50)$$

$$\Delta(\tau, 0) = \Delta(\tau, 1) = 0 \quad (1.51)$$

de donde se infiere que $\tilde{q}(0) = \tilde{q}(1) = 0$, tal como esperábamos. Cambiando la variable de

integración en 1.44 de q a \tilde{q} obtenemos que la función generatriz puede ser reescrita como

$$Z[j] = N_f(t) e^{\frac{it}{2m} \int j \Delta j} \quad (1.52)$$

y obtener una expresión adecuada para las funciones de correlación dada por

$$\langle q(\tau_1) q(\tau_2) \dots q(\tau_n) \rangle = (-i)^n \frac{\delta^n}{\delta j(\tau_1) \delta j(\tau_2) \dots \delta j(\tau_n)} e^{\frac{it}{2m} \int j \Delta j} \Big|_{j=0} \quad (1.53)$$

Hasta aquí, es necesario detenernos para recalcar algunas propiedades importantes que nos van a ahorrar mucho tiempo en los cálculos

- 1. Las funciones de correlación de números impares se hacen nulas, debido a simetría de paridad. Ésto lo podemos ver directamente de la definición de la ecuación 1.53, si tenemos un número impar de derivadas sobre $j(\tau_i)$, la exponencial nos baja una j , de tal forma que al evaluar sobre $j = 0$, nos cancela los términos que se involucran. De manera explícita, tomemos el ejemplo para $j = 1$

$$\langle j(\tau_1) \rangle = (-i) \frac{\delta}{\delta j(\tau_1)} e^{\frac{it}{2m} \int j \Delta j} \Big|_{j=0} = (-i) \frac{it}{m} \Delta j e^{\frac{it}{2m} \int j \Delta j} \Big|_{j=0} = 0 \quad (1.54)$$

La razón física del porqué sucede ésto en TCC estándar, es debido a la simetría de conservación de carga, básicamente quiere decir que un sólo fotón no puede brotar o destruirse del estado vacío. Para el formalismo línea de mundo nos basta decir que el signo menos que brota a partir de la simetría de paridad, es suficiente para anular los términos impares, ya que $\langle q_1 \dots q_{2n+1} \rangle = -\langle q_1 \dots q_{2n+1} \rangle$. Lo cual se demuestra haciendo un cambio de variable $q(\tau_i) \rightarrow -q(\tau_i)$, ya que la acción es una función par $e^a \int \dot{q}^2$

- 2. La función que corresponde a $n = 2$ es simplemente el propagador. Lo vemos claramente si derivamos la expresión para 1.54 una segunda vez

$$\begin{aligned} \langle q(\tau_1) q(\tau_2) \rangle &= \frac{\delta}{\delta j(\tau_2)} (-i)^2 \frac{it}{m} \Delta j e^{\frac{it}{2m} \int j \Delta j} \Big|_{j=0} \\ &= \frac{-it}{m} e^{\frac{it}{2m} \int j \Delta j} \left\{ \Delta + \Delta j \left(\frac{it}{m} \Delta j \right) \right\} \Big|_{j=0} \end{aligned} \quad (1.55)$$

de tal forma que al evaluar en $j = 0$ obtenemos

$$\langle q(\tau_1) q(\tau_2) \rangle = -i \frac{t}{m} \Delta(\tau_1, \tau_2) = \frac{\tau_1}{m} \frac{\tau_2}{m}$$

- 3. Las funciones de correlación para n par, se obtienen haciendo todas las posibles contracciones por pares sin repetir, por ejemplo para $n = 4$, se obtiene

$$\langle q_1 q_2 q_3 q_4 \rangle = \left(\frac{-it}{m} \right)^2 (\Delta_{12} \Delta_{34} + \Delta_{13} \Delta_{24} + \Delta_{14} \Delta_{23}). \quad (1.56)$$

En donde hemos usado el teorema de Wick, en términos de diagramas se escribe

$$\langle q_1 q_2 q_3 q_4 \rangle = \begin{array}{c} \tau_1 \quad \tau_2 \\ | \quad | \\ \tau_3 \quad \tau_4 \end{array} + \begin{array}{c} \tau_1 \quad \tau_2 \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \tau_3 \quad \tau_4 \end{array} + \begin{array}{c} \tau_1 \quad \tau_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \tau_3 \quad \tau_4 \end{array}$$

1.3. Interacción con el campo electromagnético

Siguiendo la línea de la mecánica cuántica, el lagrangiano para una partícula cargada que interactúa con un campo magnético \mathbf{B} que viene de un vector potencial \mathbf{A} [36]

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.57)$$

y de un campo eléctrico \mathbf{E}

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.58)$$

se escribe como

$$L = \frac{1}{2}m \left(\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \right)^2 + \frac{e}{c} \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \mathbf{A} - V(x) \quad (1.59)$$

donde \mathbf{B} , \mathbf{A} , \mathbf{x} son vectores en tres dimensiones, c es la velocidad de la luz, e es la carga del electrón, en la acción escrita como una integral del lagrangiano, el término que depende del campo se escribe como

$$\int_{t_0}^t d\tau \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \mathbf{A} = \int_{x_0}^x d\mathbf{x} \mathbf{A} \quad (1.60)$$

por otro lado, la ecuación de Schrödinger para una partícula en un campo magnético es

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_A \psi \quad (1.61)$$

en donde

$$\hat{H}_A \equiv \frac{1}{2m} \left(\hat{p} - \frac{e}{c} \hat{A} \right)^2 + \hat{V}, \quad \hat{p} = -i\hbar \nabla \quad (1.62)$$

La forma específica del Hamiltoniano para una partícula en un campo magnético necesita ser invariante gauge. Ya que el campo magnético resulta ser el mismo para un conjunto de potenciales relacionados por las transformaciones gauge

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \nabla\alpha(\mathbf{x}) \quad (1.63)$$

donde $\alpha(\mathbf{x})$ es una función escalar arbitraria. De tal forma que cualquier cantidad física, por ejemplo el hamiltoniano, no nota alguna diferencia frente a la transformación del potencial, en particular, el hamiltoniano dado en la ecuación 1.62 es invariante frente al cambio 1.63, de donde tenemos que el estado ψ está también sujeto a su correspondiente transformación gauge

$$\psi(\mathbf{x}) \rightarrow \psi'(\mathbf{x}) = e^{-ie\alpha(\mathbf{x})/\hbar c} \psi(\mathbf{x}) \quad (1.64)$$

recordando que la fase de un estado no tiene un significado físico, ya que desaparece al tomar $|\psi|^2$, podemos medir solamente la fase relativa de diferentes vectores. En el límite continuo, la integral de camino para las amplitudes de evolución con un campo magnético se escriben como

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \int_{\mathcal{C}} \mathcal{D}x(\tau) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \left[\frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x}) + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{x}} A \right] \right\}. \quad (1.65)$$

Después de la transformación gauge para el potencial, un nuevo término aparece en la exponencial

$$\int_{x_0}^x d\mathbf{x} \nabla \alpha = \alpha(\mathbf{x}) - \alpha(\mathbf{x}_0) \quad (1.66)$$

de tal forma que inducimos una transformación en K :

$$\begin{aligned} K'(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) &= e^{ie\alpha(\mathbf{x})/\hbar c} K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) e^{-ie\alpha(\mathbf{x})/\hbar c} \\ &= e^{ie\alpha(\mathbf{x})/\hbar c} \langle \psi(\mathbf{x}, t) | \psi(\mathbf{x}_0, t_0) \rangle e^{-ie\alpha(\mathbf{x})/\hbar c} \end{aligned} \quad (1.67)$$

que se desvanece para lazos cerrados.

1.4. Descripción histórica sobre dispersiones con fotones.

Los fotones están implícitamente contenidos en los procesos de emisión y absorción, que son la estructura de las dispersiones. Éstos son postulados cuando por ejemplo, un electrón transiciona de un estado con más energía a uno con menor energía o vice versa. Sin embargo, sólo el formalismo en la Teoría Cuántica de Campos (TCC) contiene una descripción explícita de los fotones, de hecho la mayoría de los temas en un desarrollo temprano de la teoría cuántica estaban relacionados a la interacción de la materia con la radiación. Sin embargo la manera en la que se abordan los temas en la Mecánica Cuántica formulada por Dirac, Heisenberg y Schödinger empieza por el espectro atómico, y no se involucra demasiado en problemas relacionados a la radiación.

Surgieron entonces, pequeños grupos de físicos teóricos que trataban de extender los métodos de la MC a los campos electromagnéticos, por ejemplo, famoso artículo de M. Born, W. Heisenberg, and P. Jordan [38]. La analogía se encontraba representando al campo electromagnético por matrices de la misma forma en la que la MC representa la posición y el momento. Extendiendo las ideas de la MC a un número infinito de grados de libertad.

Aunque se suele considerar el nacimiento de la TCC con el famoso paper de Dirac de 1927 "The quantum theory of the emission and absorption of radiatio" [39]. En donde Dirac hace mención de la QED, cambiando de partículas a campos. Empleando la mecánica cuántica en el oscilador armónico, Dirac da una descripción teórica de como los fotones aparecen en la cuantización del campo electromagnético. P. Jordan introduce los operadores de creación siguiendo la estadística de Fermi - Dirac. La QED descansa sobre dos pilares [40]. El primero es la cuantización del campo electromagnético, es decir los cuantos del campo electromagnético, mientras que el segundo consiste en la teoría relativista del electrón, con la ecuación de Dirac en su centro.

De ésta forma uno de los procesos a los que puede ser aplicada la teoría, es la dispersión de la radiación por electrones libres, la colisión entre los mismos o la producción de los pares electrón-positrón debido a los fotones. Los cálculos a primer orden fueron un éxito, sin embargo,

algunos cálculos sobre los efectos de los rayos cósmicos diferían claramente de las medidas. Por otro lado, los cálculos teóricos a órdenes más altos daban resultados infinitos.

La formulación de la QED por Feynman es de interés desde un punto de vista filosófico. Ya que puede ser visualizada por los famosos diagramas de Feynman que parecen caminos que recorren las partículas. Hay dos formas de calcular las dispersiones, la primera sería siguiendo las reglas de Feynman para contruir la dispersión de amplitud. Un conjunto de reglas que puede ser derivado de tal forma que la probabilidad de un proceso de dispersión específico puede ser calculado dibujando un diagrama que represente dicho proceso, escribiendo las expresiones matemáticas para calcular dicha amplitud. Éstos diagramas proveen una manera efectiva de organizar y visualizar los términos en la serie de perturbación, y parecen desplegar el flujo de electrones y fotones durante el proceso de dispersión. Las líneas externas en los diagramas representan a las partículas salientes y entrantes, las líneas internas son las partículas virtuales y los vértices representan la interacción. Cada uno de éstos elementos está asociado con expresiones matemáticas que contribuyen a la amplitud total. Los diagramas son una forma elegante y eficiente para calcular la probabilidad de los procesos de dispersión [9]. La segunda desarrollada también por Feynman está basada en la formulación integral de la teoría de campos, es decir en integrales de camino.

Los procesos de dispersión normalmente se cortan a una primera aproximación, dando buenos resultados, sin embargo, podríamos agregar o extender éstos cálculos al nivel de un lazo etc.

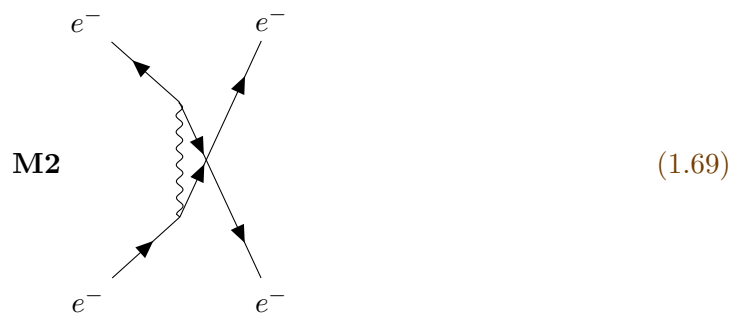
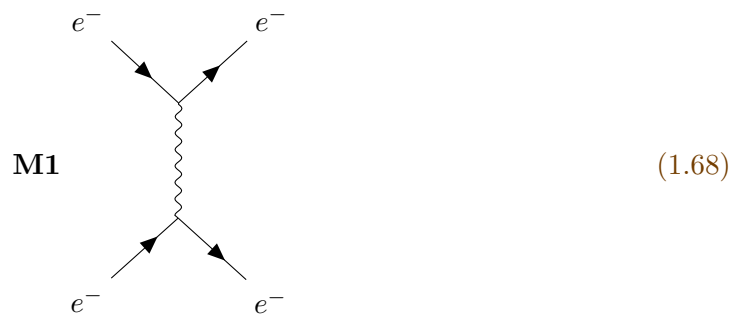
Algunos procesos de dispersión a ordenes mas bajos a nivel de árbol son

- Dispersión de Compton

En 1923, Compton publica un artículo en el que describe la dispersión entre electrones y rayos X [41], en él se describe la dispersión de un fotón interactuando con una partícula cargada. Si el fotón cede energía para disminuir el momento del electrón, se le llama efecto Compton. La dispersión de Compton inversa ocurre cuando una partícula cargada transfiere parte de su energía al fotón. El experimento fue muy popular en su tiempo, debido a que comprobaba que la luz puede ser tratada como partículas, o paquetes de energía llamados "fotones", lo que le hizo ganar el premio nobel en 1927. Un análisis del efecto Compton en la QED escalar puede encontrarse en éste trabajo en la sección [2.1.5](#)

- Dispersión de Møller

En la dispersión de Moller intervienen dos electrones, en la TCC puede representarse mediante los diagramas tal, el primero que corresponde al intercambio de un fotón por los electrones, y el segundo simplemente es un cambio de lugar de los electrones.

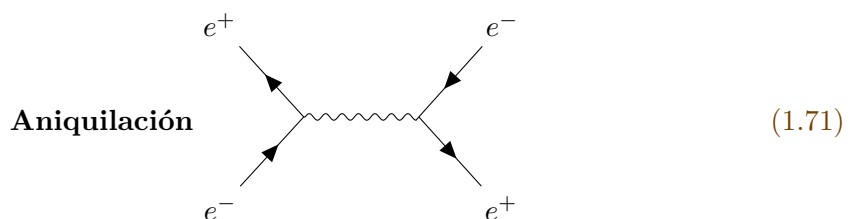


- Dispersión de Bhabha

Se conoce como la dispersión de Bhabha [42] a la primera aproximación en la que interviene el par electrón-positrón. Ya sea que se aniquilen o dispersen.

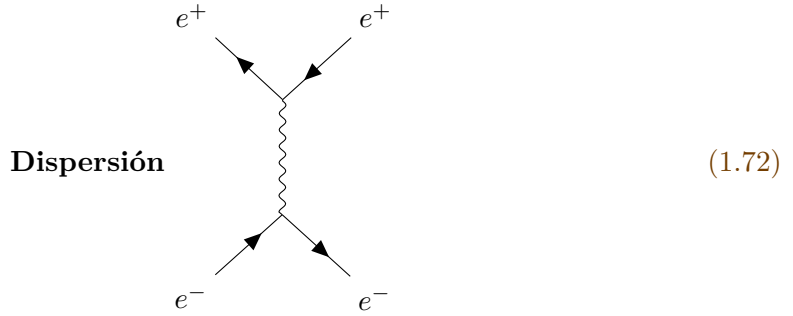
$$e^- e^+ \rightarrow e^+ e^- \tag{1.70}$$

Cuando se aniquilan, de ambos surge radiación y de esa misma radiación vuelve a resurgir el par electrón-positrón como se muestra en 1.71.



Mientras que cuando un positrón emite energía en forma de radiación, éste pierde momento,

mientras que el electrón absorbe esa energía, como se muestra en 1.72



Dispersión luz por luz

Después de que Dirac hiciera predicción del positrón [43], Euler-Heisenberg [44] calcularon su famoso lagrangiano que incluía correcciones a la linealidad de las ecuaciones de Maxwell en el vacío, que es una de sus principales características, tanto de las fuentes como de los campos, lo que impedía efectos tales como la dispersión de un fotón con otro o luz por luz $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$. En los principios de la QED se sabía que la dispersión de luz por luz esta relacionada a la polarización del vacío

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{dT}{T^3} e^{-m^2 T} \left\{ \frac{(eaT)(ebT)}{\tan(eaT) \tanh(ebT)} - \frac{2}{3}(eT)^2 \mathcal{F} - 1 \right\} \quad (1.73)$$

donde

$$a = \left(\sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2} - \mathcal{F} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad b = \left(\sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2} + \mathcal{F} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.74)$$

donde las invariantes del campo de Maxwell se escriben como

$$-2\mathcal{F} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \vec{E}^2 - \vec{B}^2, \quad (1.75)$$

$$-G = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (1.76)$$

Ya se había conjeturado por Halpern [45] y Wheeler [46] que en la teoría de Dirac debía existir la dispersión luz por luz. De tal forma que debería haber procesos en los que dos cuantos de luz crearan un par virtual (positrón electrón), que inmediatamente se convertiría en radiación otra vez, convirtiendo dos cuantos de luz iniciales en dos cuantos de luz finales y que esto pasaría cuando la energía para la creación de pares no fuera suficiente. Euler-Köckel [47] encontraron en 1935, valor de la sección de dispersión para pequeñas frecuencias $\hbar\omega \ll mc^2$ dado por

$$\sigma \sim \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^4 \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^4 \frac{1}{\lambda^2} \quad (1.77)$$

que resulta ser $10^{-28} cm^2$ para los rayos gamma, y alrededor de $10^{-76} cm^2$ para la luz visible, poco después Akhiezer et al. [48] encontraron el caso opuesto para largas frecuencias $\hbar\omega \gg mc^2$

obteniendo una expresión

$$\sigma = a\alpha^4 \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \quad (1.78)$$

donde $\alpha = e^2/\hbar c$.

Recientemente con ayuda del detector ATLAS [49] en el LHC, se encontró evidencia de la dispersión luz por luz en interacciones con fotones, con una desviación estándar de 4 (95%) que por supuesto resultó ser compatible con el modelo estándar. Aunque ésta medición pueden considerarse un poco indirecta, en el futuro conforme se desarrollen láseres más potentes e intensos se realizarán los experimentos de manera directa.

Capítulo 2

Introducción a la teoría cuántica de campos

En éste capítulo, vamos a tratar de los temas clave de la teoría cuántica de campos, a decir, la ecuación de Klein-Gordon, el propagador de Feynman, así como la ecuación de Dirac. Ésto nos va a servir como una base no de la que partir, si no comparar con el formalismo worldline, de tal forma que los resultados en dicho formalismo tienen que o bien, reproducir los mismos que en la teoría cuántica de campos, o ser escritos de una forma análoga a dicha teoría. Vamos a incluir también, como un preámbulo necesario, la derivación del kernel para la partícula libre en la mecánica cuántica, ya que como veremos después, éste nos será de vital importancia para "normalizar" nuestros cálculos posteriores.

2.1. Ecuación de Klein Gordon

Alrededor de 1926, los físicos trataban de encontrar una ecuación que describiera a los electrones viajando a velocidades relativistas, una de las ecuaciones, fue la propuesta por Oscar Klein y Walter Gordon. Hoy sabemos que la ecuación describe partículas escalares o de spin cero como los piones a bajas energías (a altas energías se logran ver los quarks de los que están hechos), partículas que no eran conocidas en ese momento. Además de que la ecuación que describe correctamente a los electrones relativistas (así como a los quarks) es la ecuación de Dirac. Sin embargo nos ayuda a entender desde una primera aproximación el comportamiento de las partículas ("sin espín"), lo cual resulta bastante útil. Veamos que forma tiene la ecuación.

Tratamos de hacer que partículas cuánticas tomen velocidades relativistas, tomemos entonces la ecuación de Schrödinger para una partícula libre escrita como

$$\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}\phi = \hat{E}\phi \quad (2.1)$$

donde $\hat{\mathbf{p}}$ es el operador momento $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ y $\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ es el operador de energía. Queremos ahora de alguna forma, compaginarla con la relatividad especial, tomamos entonces el espacio de Minkowsky con la signatura de la métrica $(-, +, +, +)$ en donde la energía se escribe como

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \quad (2.2)$$

Introduciendo los valores para los operadores de energía y momento de la partícula libre, podemos

escribir

$$((-i\hbar\nabla)^2 c^2 + m^2 c^4) \phi = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right) \phi \quad (2.3)$$

que puede simplificarse y escribirse como

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - \nabla^2 \phi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi = 0 \quad (2.4)$$

Observamos que todos los términos imaginarios han sido removidos de ésta ecuación, por lo que puede ser aplicada a campos reales o complejos. Usando el operador de D'Alembert $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ y el cambio de variable $\mu = \frac{mc}{\hbar}$, se escribe normalmente la ecuación de Klein Gordon como

$$(\square + \mu^2)\phi = 0 \quad (2.5)$$

2.1.1. Propagador de Feynman

A la función de Green para la ecuación de Klein-Gordon, se le llama el propagador en la teoría cuántica de campos. Tiene ese nombre debido a que nos da la amplitud de probabilidad de evolución entre las partículas que viajan.

Como un breve complemento a la sección anterior, vamos a encontrar la forma explícita que toma el propagador usando la acción para una partícula libre en teoría cuántica de campos, que se puede escribir como

$$S[\phi] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right] \quad (2.6)$$

En donde el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \quad (2.7)$$

Ahora, aplicando las ecuaciones de movimiento para campos $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)}$ obtenemos la ecuación de Klein-Gordon

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \quad (2.8)$$

Ahora bien, si pensamos en una función de Green que resuelva la ecuación diferencial 2.8, ésta tendría que cumplir

$$\partial_\mu \partial^\mu G(x, x') + m^2 G(x, x') = \delta^D(x - x') \quad (2.9)$$

Si ahora definimos $k^\mu = (\omega, \vec{k}) = (k^0, k^1, k^2, k^3)$, podemos escribir la delta de Dirac en cuatro

dimensiones como

$$\delta(x - x') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} \quad (2.10)$$

lo que nos da una pista para proceder a escribir la función de Green como una transformada de Fourier

$$G(x - x') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \hat{G}(k, x') e^{ik_\mu x^\mu} \quad (2.11)$$

Con ésto en mente, calculamos la derivada de la función de green

$$\begin{aligned} \partial^\mu G(x - x') &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \hat{G}(k, x') g^{\mu\alpha} \partial_\alpha e^{ik_\mu x^\mu} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} ik^\mu \hat{G}(k, x') e^{ik_\beta x^\beta} \end{aligned} \quad (2.12)$$

De tal forma que

$$\partial_\mu \partial^\mu G(x - x') = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (\omega^2 - \vec{k}^2) \hat{G}(k, x') e^{ik_\mu x^\mu} \quad (2.13)$$

Así podemos escribir la ecuación 2.9 como

$$(-\omega^2 + \vec{k}^2) \hat{G}(k, x') + m^2 \hat{G}(k, x') - e^{-ik_\mu x'^\mu} = 0 \quad (2.14)$$

de donde podemos resolver para la función de Green en la transformada de Fourier \hat{G} como

$$\hat{G}(k, x') = \frac{-e^{-ik_\beta x'^\beta}}{\omega^2 - \vec{k}^2 - m^2} \quad (2.15)$$

Regresando con otra transformada de Fourier, tenemos que nuestra solución para la función de Green se escribe finalmente como

$$G(x, x') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-e^{ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)}}{\omega^2 - \vec{k}^2 - m^2} \quad (2.16)$$

Una observación inmediata es que $G(x, x') = G(x - x')$, lo que nos dice que es invariante frente a traslaciones espacio temporales, o más general invariante poincaré. Si renombramos $y^\alpha = x^\alpha - x'^\alpha$ podemos escribir la ecuación 2.16, utilizando la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2 - b^2} dx = -\frac{i\pi}{b} e^{-ib|a|}$ como

$$\begin{aligned} G(y) &= - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{i\omega y^0}}{\omega^2 - \vec{k}^2 + m^2} \\ &= i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot y} \frac{1}{2\omega_k} e^{-\omega_k |y^0|} \end{aligned} \quad (2.17)$$

en donde hemos renombrado $\omega_k^2 = \vec{k}^2 + m^2$, y escogido el contorno de integración según la prescripción de Feynman dada por la Figura 2.1



Figura 2.1: Prescripción de Feynman para el propagador que pasa por debajo del polo $-\epsilon$ y por arriba de $+\epsilon$

Ahora si consideramos el valor absoluto, la función de Green de Feynman toma la forma

$$G(x - x') = \begin{cases} i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)}}{2\omega_k} & x^0 - x'^0 > 0 \\ i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)}}{2\omega_k} & x^0 - x'^0 < 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Por último, normalmente ocupamos la transformada de Fourier de los propagadores del espacio de posición para cambiarlos a propagadores en el espacio de impulso o momento. Estos tienen una forma más simple que los propagadores en el espacio de posición. En la mayoría de textos, aparece un ϵ explícito, como recordatorio sobre qué contorno de integración es apropiado. Para el cuadrimomento p , tenemos que el propagador toma la forma

$$\hat{G}_F(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.19)$$

Algunos autores escriben una i o cambian algunos signos, las convenciones varían.

Éste propagador por supuesto, representa el propagador en los Diagramas de Feynman que representan básicamente, todas las interacciones posibles entre las partículas [50], desglosadas en una serie perturbativa, por lo que el proceso físico total, es simplemente la suma de todos los diagramas de Feynman, lo que nos da una expresión para la sección eficaz de dispersión. La gran ventaja de éstos diagramas, es que simplifican enormemente los cálculos matemáticos, reduciéndolos a un algoritmo con reglas basadas en el lagrangiano, mediante las cuales se puede calcular dicho proceso, cada línea interna de los diagramas de Feynman corresponde a un factor del propagador de la partícula, se suelen usar líneas punteadas para representar a los propagadores escalares, y continuas para los que llevan un spin asociado, como se verá más adelante, la interacción con el spin es tratada mediante las matrices de Dirac; el vértice donde las líneas se unen da un factor que proviene de un término de interacción en el lagrangiano.

La gran desventaja es que en principio, se deberían de sumar todos los términos del desarrollo perturbativo, es decir, todas las contribuciones de los diagramas de Feynman, lo que genera problemas de convergencia.

La probabilidad de cada resultado entonces es obtenida sumando sobre todas tales posibilidades. Esto está en estrecha correlación con la formulación integral funcional de la mecánica cuántica, también inventada por Feynman, como vimos en la introducción.

2.1.2. Campos escalares en el formalismo estándar y la QED escalar

La teoría QED, o electrodinámica cuántica, describe la interacción entre electrones o partículas cargadas y fotones. Vamos a desarrollar brevemente los pasos para llegar a la QED escalar, es decir, un teoría que no toma en cuenta los espines de las partículas (como por ejemplo el electrón,

aunque el lagrangiano sí toma en cuenta las helicidades del fotón), como una aproximación a la realidad [51]. La forma en la que comenzaremos es cuantizando el campo de Maxwell de forma covariante, el lagrangiano se escribe como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (2.20)$$

donde ξ es un parámetro genérico. El efecto del segundo término en 2.20, llamado término de gauge fixing es romper la invarianza gauge del lagrangiano, haciendo que las reglas de conmutación entre los campos y el propagador dependan de ξ , pero los elementos de matriz de estados físicos para operadores que son invariantes de norma sean independientes de ξ . Cuando $\xi = 1$ se le llama gauge de 't Hooft-Feynman, $\xi = 0$ es el gauge de Landau y $\xi \rightarrow \infty$ es el gauge unitario. Vamos a aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange al lagrangiano dado por la ecuación 2.20, escribiendo los tensores electromagnéticos en términos del potencial tenemos que

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2\xi}g^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu \partial_\alpha A^\alpha \quad (2.21)$$

Así, aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 0$, tenemos

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi}\partial^\nu \partial^\mu A_\mu = 0 \quad (2.22)$$

Que escrito en términos del D'Alembertiano $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ es

$$\begin{aligned} \square A^\nu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu \partial^\nu A_\mu &= 0 \\ \left[g^{\mu\nu}\square - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu \partial^\nu\right] A_\mu &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Como hemos visto, el propagador es una función de Green que actúa sobre el campo. En el espacio de momentos el propagador del fotón será el inverso de

$$-k^2 g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)k^\mu k^\nu \quad (2.24)$$

de donde se puede mostrar que escogimos el parámetro ξ para que el operador dado por la ecuación 2.24 sea invertible, ya que $-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu$ es singular con autovalor nulo k^μ . Por supuesto el potencial correspondiente a la simetría gauge $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha$, es también una solución de $(g^{\mu\nu}\square - \partial^\mu \partial^\nu) A_\mu = 0$. El inverso de 2.24 es el propagador del fotón, escrito como

$$\tilde{D}_F(k) = \frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left[-g^{\mu\nu} + (1 - \xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] \quad (2.25)$$

efectivamente

$$\tilde{D}_F(k) \left[-k^2 g_{\nu\rho} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)k^\nu k_\rho \right] = i\delta_\rho^\mu \quad (2.26)$$

Si agregamos ahora los términos dinámicos al lagrangiano éste se escribe como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^2 + |D_\mu\phi|^2 - m^2|\phi|^2 \quad (2.27)$$

donde

$$\begin{aligned} D_\mu\phi &= \partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi \\ D_\mu\phi^* &= \partial_\mu\phi^* - ieA_\mu\phi^* \end{aligned} \quad (2.28)$$

Por supuesto los campos acoplados a A_μ deben ser complejos, esto es porque la carga está asociada a una simetría global bajo la cual

$$\phi \rightarrow e^{-i\alpha}\phi \quad (2.29)$$

Debemos notar que el lagrangiano electromagnético conserva la forma frente a una transformación de fase, sin embargo, el lagrangiano de la QED escalar no lo hace, debido a una derivada extra, es por eso que tomamos una derivada covariante en la que interviene el vector potencial, digamos

$$\begin{aligned} D_\mu\phi &= \partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi \rightarrow (\partial_\mu + ieA_\mu + iq\partial_\mu\alpha) e^{-i\alpha}\phi \\ &= e^{-i\alpha} (-i\partial_\mu\alpha + \partial_\mu + ieA_\mu + iq\partial_\mu\alpha) \phi = e^{-i\alpha} D_\mu\phi \end{aligned} \quad (2.30)$$

Éste lagrangiano nos genera las ecuaciones de movimiento

$$(\square + m^2)\phi = i(-eA_\mu)\partial_\mu\phi + i\partial_\mu(-eA_\mu\phi) + (-eA_\mu)^2\phi \quad (2.31)$$

$$(\square + m^2)\phi^* = i(eA_\mu)\partial_\mu\phi^* + i\partial_\mu(eA_\mu\phi^*) + (eA_\mu)^2\phi^* \quad (2.32)$$

De donde observamos que los campos escalares ϕ y ϕ^* están acoplados al campo electromagnético con carga opuesta, pero con la misma masa. Ahora el campo escalar real en términos de operadores de creación aniquilación se escribe como

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{ipx} \right) \quad (2.33)$$

Usamos la descomposición en términos de exponenciales imaginarias, ya que la solución general de las ecuaciones de movimiento son ondas planas.

El siguiente paso es cuantizarlo, esto lo hacemos cuantizando a_p y a_p^\dagger , es decir obteniendo las reglas de conmutación de éstos operadores. Escribiendo

$$a(p) = i \int d^3\mathbf{x} e^{ipx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \quad (2.34)$$

$$a^\dagger(p) = -i \int d^3\mathbf{x} e^{-ipx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \quad (2.35)$$

donde $a \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 b = a(\partial_0 b) - (\partial_0 a)b$, de ésta forma las relaciones de conmutación se escriben como

$$[a_p, a_{p'}] = [a_p^\dagger, a_{p'}^\dagger] = 0 \quad (2.36)$$

$$[a_p, a_{p'}^\dagger] = 2\pi^2 2w_p \delta(p - p') \quad (2.37)$$

ya que el campo escalar complejo debe ser diferente de su conjugado, debemos de introducir dos conjuntos de operadores de creación y aniquilación, y escribir

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(a_p e^{-ipx} + b_p^\dagger e^{ipx} \right) \quad (2.38)$$

de donde obtenemos el campo conjugado

$$\phi^*(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(a_p^\dagger e^{-ipx} + b_p e^{ipx} \right) \quad (2.39)$$

añadiendo la regla de conmutación

$$[b_p, b_{p'}^\dagger] = 2\pi^2 2w_p \delta(p - p') \quad (2.40)$$

y todas las otras posibles se hacen cero.

Así podemos concluir que b_p aniquila partículas de carga opuesta y con la misma masa de las que a_p aniquila, es decir b_p aniquila antipartículas. Por supuesto en ambos casos $\omega_p = \sqrt{p^2 + m^2} > 0$. Obviamente $a^\dagger \neq b^\dagger$ ya que éstos operadores crean partículas de carga opuesta. Entonces una simetría global bajo rotación de fase implica carga que a su vez implica campos escalares que a su vez implica antipartículas. Es decir, la materia acoplada a partículas sin masa de spin 1 automáticamente implica la existencia de antipartículas, que son partículas de masa idéntica pero carga opuesta.

2.1.3. Matriz S de dispersión

Nuestro objetivo es hallar la probabilidad de transición entre un estado inicial y otro final en un proceso de colisión o dispersión. En la imagen de Schrödinger los estados dependen del tiempo. Sea $|a(t)\rangle$ un estado que evoluciona de un estado inicial a un tiempo t_i que es autoestado de un conjunto de observables compatibles cuyos autovalores a sirven para etiquetarlo (como los momentos ó espines de las partículas incidentes). Sea $\langle b(t)|$ el estado que en un instante de tiempo t_f , tras la colisión, será autoestado con autovalores b . La probabilidad de que $\langle a|$ evolucione hasta $\langle b|$ será

$$\langle b| e^{-iH}(t_f - t_i) |a\rangle \quad (2.41)$$

Se llama matriz de dispersión S al operador de evolución $e^{-iH}(t_f - t_i)$ cuando $(t_f - t_i) \rightarrow \infty$, donde H es el hamiltoniano de la teoría de campos, la amplitud de dispersión viene dada por

$$\langle b| S |a\rangle = \lim_{(t_f - t_i) \rightarrow \infty} \langle b| e^{-iH}(t_f - t_i) |a\rangle \quad (2.42)$$

Nótese que si $\langle aa \rangle = 1$ y $\langle n|$ es una base completa de estados $\sum_n |n\rangle \langle n|$ tenemos

$$1 = \sum_n |\langle n| S |a\rangle|^2 = \sum_n \langle a| S^\dagger |n\rangle \langle n| S |a\rangle = \langle a| S^\dagger S |a\rangle \quad (2.43)$$

lo que significa que S es unitaria que representa la conservación de probabilidad. En la imagen de Heisenberg son los operadores los que dependen del tiempo (no los estados), lo cual es mas apropiado para la TQC en la que los campos son operadores $\phi(t, x)$. Los estados se escriben como $\langle a|_H = e^{iHt} \langle a(t)|$ y $\langle b|_H = e^{iHt} \langle b(t)|$ y son independientes del tiempo. Por tanto, definiendo los estados en la imagen de Heisenberg $\langle a; t_i| = e^{iHt_i} \langle a|$ y $\langle b; t_f| = e^{iHt_f} \langle b|$ la matriz S será

$$\langle b| S |a\rangle = \lim_{(t_f - t_i) \rightarrow \infty} \langle b| e^{-iH(t_f - t_i)} |a\rangle = \lim_{(t_f - t_i) \rightarrow \infty} \langle b; t_f | a; t_i \rangle \quad (2.44)$$

que nos da la amplitud para cualquier estado inicial de partículas separadas en el pasado evolucionando hacia otro estado de partículas separadas en el futuro.

2.1.4. Reglas de Feynman para la QED escalar

Expandiendo los términos del Lagrangiano dado por la ecuación 2.27 tenemos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu}^2 - \phi^* (\square + m^2) \phi - ie A_\mu [\phi^* (\partial_\mu \phi) - (\partial_\mu \phi^*) \phi] + e^2 A_\mu^2 |\phi|^2 \quad (2.45)$$

A partir del lagrangiano podemos establecer las reglas de Feynman, vamos a empezar por el propagador de partículas escalares

$$\begin{array}{c} p \\ \longrightarrow \blacksquare \end{array} = \frac{i}{p^2 + m^2 + i\epsilon} \quad (2.46)$$

Éste propagador es la transformada de Fourier de $\langle 0| \phi^*(x) \phi(0) |0\rangle$, es decir propaga la partícula y su antipartícula al mismo tiempo.

El propagador del fotón que fue obtenido previamente

$$\begin{array}{c} p \\ \sim\sim\sim \end{array} = \frac{-i}{p^2 + i\epsilon} \left[g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right] \quad (2.47)$$

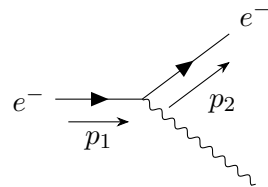
Para representar la interacción entre ϕ y A_μ . Un ϕ en la interacción implica la creación de una antipartícula o la aniquilación de una partícula, mientras ϕ^* implica la creación de una partícula o la aniquilación de una antipartícula, cuando una derivada actúa sobre éstos campos, nos arroja un factor de $\pm ip^\mu$, como se puede ver las ecuaciones 2.1.2 y 2.39, ya que la interacción tiene la forma

$$-ie A_\mu [\phi^* (\partial_\mu \phi) - (\partial_\mu \phi^*) \phi] \quad (2.48)$$

cada p^μ viene con un i , y a éste le agregamos un i de la expansión de $e^{i\mathcal{L}_{int}}$, de tal forma que tenemos un factor de $(-ie)i^2 = ie$ que multiplica a cualquier $\pm p^\mu$ que viene de la derivada. Hay 4 posibilidades, cada una que viene de la contribución de $A_\mu \phi^* (\partial_\mu \phi)$ y $-A_\mu \phi (\partial_\mu \phi^*)$, supongamos que a_p aniquila un electrón e^- y b_p aniquila un positrón e^+ las posibilidades son

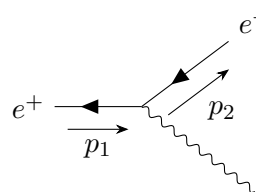
- Aniquilación de e^- y creación de e^- - dispersión de partículas

Aquí $\phi^*(\partial_\mu\phi)$ nos da un $-p_{1\mu}$ ya que e^- es aniquilado por ϕ , y $-\phi(\partial_\mu\phi^*)$ nos da $-(+p_{2\mu})$ ya que un e^- es creado por ϕ^*



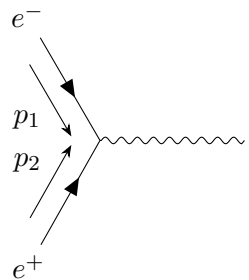
$$= ie(-p_{1\mu} - p_{2\mu}) \quad (2.49)$$

- Aniquilación de e^+ y creación de e^+ - dispersión de antipartículas Aquí $\phi^*(\partial_\mu\phi)$ crea un e^+ dando $p_{2\mu}$, y $-(\partial_\mu\phi^*)\phi$ aniquila un e^+ dando un $-(-p_{1\mu})$



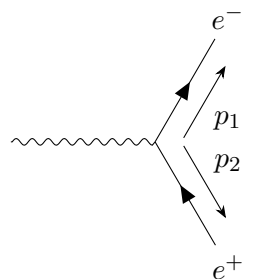
$$= ie(p_{1\mu} + p_{2\mu}) \quad (2.50)$$

- Aniquilación de e^- y aniquilación e^+ - Aniquilación de pares



$$= ie(-p_{1\mu} + p_{2\mu}) \quad (2.51)$$

- Creación de e^- y creación de e^+ - Creación de pares



$$= ie(-p_{1\mu} + p_{2\mu}) \quad (2.52)$$

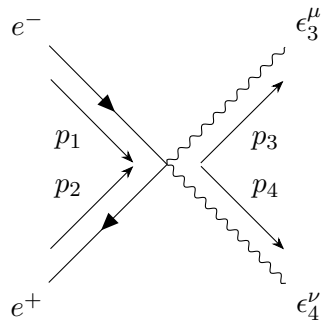
Primero debemos notar que sólo hay 4 formas en la que podemos construir los vértices. Es imposible que en un vértice se creen dos partículas con la misma carga, o en otras palabras, la carga debe conservarse en los diagramas de Feynman. Por otro lado, las líneas fuera de las líneas escalares representar el flujo de momento, que nos indican la dirección del momento, mientras que las flechas sobre la línea nos indican el flujo de las partículas, éstas van en la

misma dirección si son partículas (e^-) o en dirección opuesta si son antipartículas (e^+). Si observamos los vértices vamos a notar que si la flecha del flujo de partículas apunta a la derecha (izquierda), el vértice contiene un momento $-(+)iep^\mu$. En otras palabras

- Un vértice escalar en la QED nos da $-ie$ veces la suma de momentos de la partícula cuya flecha de flujo de partículas apuntan a la derecha de menos el momento de las partículas cuyas flechas apuntan a la izquierda
 - Las flechas que representan el flujo de las partículas siempre deben conectar caminos en los diagramas de Feynman. Para los loops o líneas cerradas el flujo puede apuntar a la derecha o izquierda siempre y cuando la dirección de las flechas sea consistente. Si el diagrama representa un proceso físico, el flujo de partículas va a la derecha mientras las antipartículas irán a la izquierda.
 - Para las partículas que no están cargadas, como los fotones o las partículas escalares podemos escoger cualquier dirección siempre y cuando el momento se conserve en cada vértice
- Finalmente no podemos olvidar el término que involucra 4 - vértices en la QED

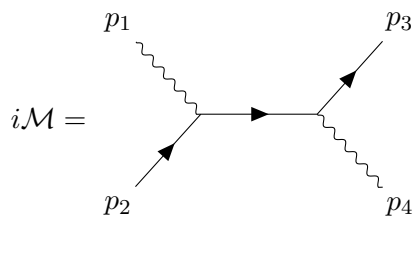
$$\mathcal{L}_{int} = e^2 A_\mu^2 |\phi|^2 \tag{2.53}$$

cuya regla de Feynman es



$$= 2ie^2 g_{\mu\nu} \tag{2.54}$$

Apliquemos las reglas en el siguiente ejemplo que representa una contribución a la dispersión de Compton.



$$i\mathcal{M} = (-ie)i\epsilon_{1\mu}(p_2^\mu + k^\mu) \frac{i}{k^2 + m^2 + i\epsilon} (-ie)(p_3^\nu + k^\nu) \epsilon_{4\nu}^* \tag{2.55}$$

Vemos que el propagador $k^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$. En el primer vértice, el primer foton $\epsilon_{1\mu}$ entrante es

contraído con el momento $p_2^\mu + k^\mu$, la otra polarización es saliente, representada por $\epsilon_{4\nu}^*$ y es contraída con el segundo vértice $p_3^\nu + k^\nu$.

2.1.5. Dispersión de Compton en la QED escalar

Vamos a realizar un pequeño ejercicio calculando la dispersión de Compton para una partícula escalar [52], se deben considerar 3 diagramas de Feynman llamados canal S, canal T y gaviota, representados en la Figura 2.2.

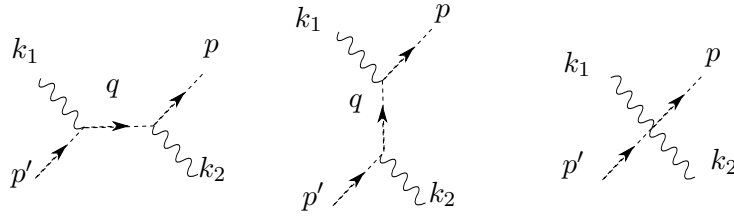


Figura 2.2: Diagramas de Feynman involucrados en la dispersión de Compton, de izquierda a derecha son el canal S, canal T y la gaviota respectivamente

Canal S

Siguiendo las reglas de Feynman, la matriz que debemos construir toma la forma

$$iM = (-ie) (p'^\mu + q^\mu) \epsilon_{1\mu} \frac{i}{q^2 + m^2} (-ie) (q^\nu + p^\nu) \epsilon_{2\nu}^* \quad (2.56)$$

usando conservación de momento $q^\mu = p'^\mu + k_1^\mu = -(p^\mu + k_2^\mu)$ y el hecho de que las polarizaciones son transversales al vector de propagación $k_i^\mu \epsilon_{i\mu} = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} iM &= \frac{-ie^2}{q^2 + m^2} (2p'^\mu + k_1^\mu) \epsilon_{1\mu} (2p^\nu + k_2^\nu) \epsilon_{2\nu}^* \\ &= \frac{-ie^2}{q^2 + m^2} (2p' \cdot \epsilon_1 + k_1 \cdot \epsilon_1) (2p \cdot \epsilon_2 + k_2 \cdot \epsilon_2) \\ &= \frac{-ie^2}{2p' \cdot k_1} (2p' \cdot \epsilon_1) (2p \cdot \epsilon_2) \end{aligned} \quad (2.57)$$

En donde hemos usado el hecho de que $p^2 = p'^2 = -m^2$ en capa de masa, y $k_i^2 = 0$

Canal T

Nuevamente de las reglas de Feynman obtenemos el término

$$iM = \epsilon_{1\mu} (-ie) (q^\mu + p^\mu) \left[\frac{i}{q^2 + m^2} \right] (-ie) (p'^\nu + q^\nu) \epsilon_{2\nu}^* \quad (2.58)$$

En ésta ocasión conservación de momento nos da $q^\mu = p'^\mu - k_2^\mu = p^\mu - k_1^\mu$, así

$$\begin{aligned} M &= -\frac{e^2}{2p \cdot k_1} (2p^\mu - k_1^\mu)(2p'^\nu - k_2^\nu) \epsilon_{1\mu} \epsilon_{2\nu}^* \\ &= -\frac{e^2}{2p \cdot k_1} (2p \cdot \epsilon_1)(2p' \cdot \epsilon_2) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Canal de la gaviota

Aquí la contribución es simplemente

$$M = -2e^2 g_{\mu\nu} \epsilon_1^\mu \epsilon_2^{\nu*} = -2e^2 \epsilon_1 \cdot \epsilon_2^* \quad (2.60)$$

por lo que la amplitud total es la suma de todas las contribuciones, es decir

$$M = -2e^2 \left[\epsilon_1 \cdot \epsilon_2^* + \frac{p' \cdot \epsilon_1 p \cdot \epsilon_2^*}{p' \cdot k_1} + \frac{p \cdot \epsilon_1 p' \cdot \epsilon_2^*}{p \cdot k_1} \right] \quad (2.61)$$

2.2. Representación worldline de TCC

La forma en la que trabaja la TCC se basa en encontrar las amplitudes de dispersión de una serie perturbativa, dado un campo libre en el vacío, y una acción funcional de interacción local. Se encuentran los resultados aplicando las reglas de Feynman a dichos términos de la interacción, basados por supuesto en la densidad Lagrangiana.

De forma alternativa, la base del formalismo worldline se sustenta en las funciones de correlación que representan los cuantos del campo en la TCC, obtenidas a partir de una integral de camino. De ésta manera en principio no es necesario escribir los diagramas de Feynman, por lo que el resultado puede obtenerse mediante métodos puramente algebraicos, con ayuda de teoremas importantes como el de Ward o Wick, que simplifican el trabajo enormemente, puede obtenerse resultados que nos tomaría mucho más tiempo usando los métodos estándar.

Matemáticamente, la clave está en introducir una transformada de Mellín, que transforma el propagador $\hat{G}_F = \Delta(\tau, \tau')$ en una integral para una partícula relativista que viaja de un punto x a un punto x' .

Aunque no es el propósito de éste trabajo, no podemos evitar mencionar la manera en la que entra en juego el formalismo worldline. Después de décadas de usar las reglas de Feynman, el formalismo de línea de mundo fue motivado a partir de resultados encontrados a través de la teoría de cuerdas, analizando las amplitudes de dispersión de las cuerdas [53], véase la Fig 2.3. Entonces Strassler [55] [56] aclaró la conexión entre la TCC y las nuevas reglas de Bern-Kosower para la teoría de cuerdas, de tal forma que logró calcular la acción efectiva para una vuelta en la teoría escalar, la teoría de los espinores de Dirac y los vectores bosónicos insertando un campo de fondo, ésto sin usar la teoría de cuerdas o los diagramas de Feynman. De ésta forma, abría las puertas de un nuevo método válido fuera de la capa de masa, invariante gauge y extendible a otras teorías de campos que no requería del álgebra usual, y que, como veremos más adelante, permitía encontrar de una forma más simple los resultados a órdenes altos de perturbación. [57].

El formalismo inspirado en cuerdas, ofrece la posibilidad de obtener los elementos de la matriz

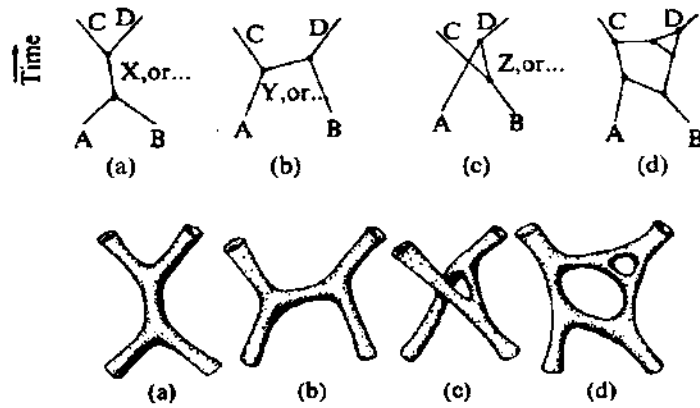


Figura 2.3: Analogía entre diagramas de Feynman basados en partículas puntuales (Teoría Cuántica de Campos)[primer renglón] o branas (Teoría de Cuerdas)[segundo renglón] [54]

S, así como la acción efectiva sin usar la segunda cuantización de la teoría estándar [58]. Una descripción más detallada de las descripciones y aplicaciones del formalismo línea de mundo puede consultarse en [59].

2.2.1. Integrales de camino relativista

El paso natural para establecer un método con integrales de camino, es escribir el propagador escalar, es decir, la solución a la ecuación de Klein Gordon, en términos de integrales. Usando la signatura de la métrica $(-, +, +, +)$ se escribe como

$$(-\square + m^2)\phi = 0 \quad (2.62)$$

En el espacio de posición, vamos a escribir la función de Green desde un punto inicial x' a un punto final x como

$$D_0^{xx'} = \langle x | \frac{1}{-\square + m^2} | x' \rangle. \quad (2.63)$$

Usando un parámetro "T", podemos escribir el propagador como una exponencial de la siguiente forma

$$D_0^{xx'} = \langle x | \int_0^\infty dT \exp[-T(-\square + m^2)] | x' \rangle \quad (2.64)$$

$$= \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \langle x | \exp[-T(-\square)] | x' \rangle \quad (2.65)$$

Ahora nos damos cuenta que tiene la misma forma que la ecuación 1.20, en donde $S[x(\tau)]$ es la acción de la partícula libre, escrita propiamente, la amplitud de transición para la partícula libre en la mecánica cuántica se escribe como

$$\langle \vec{x}, t | \vec{x}', 0 \rangle = \langle \vec{x} | e^{-i\hat{H}t} | \vec{x}' \rangle = \int_{x(0)=\vec{x}'}^{x(t)=\vec{x}} \mathcal{D}x(\tau) e^{i \int_0^t d\tau \frac{1}{2} m \dot{x}^2} \quad (2.66)$$

En donde hemos usado un hamiltoniano cinético $H = -\frac{1}{2m}\nabla^2$. Si hacemos los siguientes reemplazos

$$\begin{aligned}\nabla^2 &\rightarrow \square, \\ m &\rightarrow \frac{1}{2}, \\ \tau &\rightarrow -i\tau, \\ t &\rightarrow -iT\end{aligned}\tag{2.67}$$

Obtenemos que el propagador 2.65 pasa a tomar la forma

$$D_0^{xx'} = \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \frac{1}{4}\dot{x}^2}\tag{2.68}$$

Hemos encontrado la representación worldline de un propagador para una partícula relativista en un espacio euclidiano de x' a x , donde ahora $\dot{x}^2 = \sum_{i=1}^4 \dot{x}_i^2$. Lo que toca ahora, es calcular ésta integral, lo vamos a hacer usando la misma técnica de integrales de camino. Primero entonces, cambiamos de variable de $x(\tau)$ a $q(\tau)$ de la siguiente forma

$$x^\mu(\tau) = x_{cl}^\mu(\tau) + q^\mu(\tau) = \left[x'^\mu + \frac{\tau}{T}(x^\mu - x'^\mu) \right] + q^\mu(\tau)\tag{2.69}$$

En donde x_{cl} se ha parametrizado como una línea recta clásica que va del punto inicial $x_{cl}(0) = x'$ a un punto final $x_{cl}(T) = x$, y $q(\tau)$ es la variable cuántica que fluctúa alrededor de ella, y satisface las condiciones de frontera de Dirichlet (CFD)

$$q(0) = q(T) = 0\tag{2.70}$$

Podemos obtener de la ecuación 2.69 su derivada, escrita explícitamente

$$\dot{x}^\mu(\tau) = \frac{1}{T}(x^\mu - x'^\mu) + q'^\mu(\tau)\tag{2.71}$$

sustituyendo ésta expresión en el propagador de la partícula libre, y tomando en cuenta que $\int_0^T d\tau \dot{q}(\tau) = q(T) - q(0) = 0$ debido a las CFD, podemos escribir la integral como

$$\begin{aligned}\int_0^T d\tau \frac{1}{4}\dot{x}^2 &= \frac{1}{4} \left[\int_0^T d\tau \dot{q}^2 + \int_0^T d\tau \frac{(x - x')^2}{T^2} + \int_0^T 2\dot{q} \frac{x - x'}{T} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\int_0^T d\tau \dot{q}^2 + \frac{(x - x')^2}{T} \right]\end{aligned}\tag{2.72}$$

Tomando en cuenta además que $\mathcal{D}x = \mathcal{D}q$, obtenemos

$$D_0^{xx'} = \int_0^\infty dT e^{-mT^2} e^{-\frac{(x-x')^2}{4T}} \int_{CFD} \mathcal{D}q(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \frac{\dot{q}^2}{4}}\tag{2.73}$$

Observemos que x, x' son los puntos final e inicial respectivamente, y son constantes, por lo que nuestra integral sobre $q(\tau)$ ahora sólo depende de T , nuevamente debido a nuestro trabajo anterior, ya no es necesario calcular ésta integral, usando la ecuación 2.65 y las sustituciones 2.68,

el valor para la integral es

$$\int_{CFD} \mathcal{D}q(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \frac{\dot{q}^2}{4}} = (4\pi T)^{-D/2} \quad (2.74)$$

El propagador libre entonces toma la forma

$$D_0^{xx'} = \int_0^\infty dT (4\pi T)^{-D/2} e^{-mT^2} e^{-\frac{(x-x')^2}{4T}}. \quad (2.75)$$

Hemos encontrado, la forma del propagador libre en el espacio de posiciones, si se quiere ver en el espacio de momentos como normalmente se representa, nos basta con hacer una transformada de Fourier de la siguiente forma

$$\begin{aligned} D_0^{pp'} &= \int \int dx dx' e^{ip \cdot x} e^{ip' \cdot x'} D_0^{xx'} \\ &= \int_0^\infty dT (4\pi T)^{-D/2} e^{-mT^2} e^{-\frac{(x-x')^2}{4T}} \int \int dx dx' e^{ip \cdot x} e^{ip' \cdot x'} \\ &=_{x' \rightarrow x+x'} \int_0^\infty dT (4\pi T)^{-D/2} e^{-mT^2} \int dx e^{i(p+p') \cdot x} \int dx' e^{ip' \cdot x'} e^{-\frac{x'^2}{4T}} \\ &= \int_0^\infty dT (4\pi T)^{-D/2} e^{-mT^2} (2\pi)^D \delta^D(p+p') \int dx' e^{-\frac{1}{4T}(x'-2T ip' \cdot x')^2} e^{-Tp^2} \\ &= \int_0^\infty dT (4\pi T)^{-D/2} (4\pi T)^{D/2} (2\pi)^D \delta^D(p+p') e^{-T(p'^2+m^2)} \\ &= (2\pi)^D \delta^D(p+p') \frac{1}{p'^2+m^2} \end{aligned} \quad (2.76)$$

2.2.2. Acoplamiento al campo electromagnético y la acción efectiva

Llegados a éste punto, podemos pensar en qué pasaría si las partículas escalares interactúan con fotones, a esto se le conoce comúnmente como acoplamiento electromagnético. Vamos a tomar en cuenta sólo el término de interacción en el lagrangiano electromagnético clásico $A_\mu(x)$ mas el término cinético con el que ya trabajamos.

$$S[x(\tau)] = \int_0^T d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{4} + iq\dot{x} \cdot A(x(\tau)) \right) \quad (2.77)$$

Entonces tenemos un propagador de una partícula escalar, que interactúa continuamente con un campo electromagnético de fondo mientras se propaga del punto x' a x , escrito como

$$D^{xx'}[A] = \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left(\frac{1}{4} \dot{x}^2 + ie\dot{x} \cdot A(x(\tau)) \right)} \quad (2.78)$$

Llamaremos Γ a la representación en línea de mundo de una vuelta de la acción efectiva en la QED escalar, es decir que ahora trabajaremos como si la partícula estuviera confinada a viajar en un lazo cerrado, dando vueltas, éste lazo no es una cuerda física tangible, en lugar de eso, debe pensarse de forma análoga a la manera en como se atrapan partículas cargadas en un campo electromagnético, o partículas con masa y volumen en una corriente del océano. Una sola vuelta

tendrá una acción efectiva de la siguiente forma

$$\Gamma[A] = \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau (\frac{1}{4}\dot{x}^2 + ie\dot{x}\cdot A(x(\tau)))} \quad (2.79)$$

Donde notamos que para tomar en cuenta una vuelta sobre el círculo, debemos dividir por la longitud del círculo mismo $1/T$, debido a la simetría traslacional en la parametrización, además que las condiciones de frontera cambian, ya que, tras una vuelta completa llegamos al mismo punto. Es común pensar en que tipo de partículas hacen éstas trayectorias, que en la interpretación más ampliamente aceptada, corresponden a partículas virtuales, y no reales. Ésta acción efectiva, contiene los efectos cuánticos causados por el campo electromagnético de fondo sobre las partículas virtuales, lo que provoca que la electrodinámica se convierta en una teoría no lineal al nivel de un lazo o una vuelta, donde los fotones pueden interactuar con algún otro fotón de alguna manera indirecta.

2.2.3. Amplitud para N fotones en un lazo

Vamos a calcular la acción efectiva para el caso de un lazo, usando la QED escalar [60]. De forma intuitiva, lo que vamos a hacer es considerar una partícula escalar (un modelo en el que el electrón no tiene spin) mientras se mueve en una trayectoria circular cerrada en el espacio tiempo, mientras ésto sucede, la partícula absorbe y/o emite un número arbitrario pero fijo de N fotones, cada uno con su propia polarización ϵ_i y momento k . En la teoría de campos, consideramos que el potencial del campo electromagnético se puede descomponer como una suma de N ondas planas,

$$A^\mu(x) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i^\mu e^{ik_i \cdot x}, \quad (2.80)$$

de ésta forma podemos representar los fotones externos que interactúan con la partícula escalar.

En la ecuación que representa la acción efectiva 2.79 vamos a tomar el término de la exponencial que sólo depende de A , explícitamente es

$$e^{-\int_0^T d\tau ie\dot{x}\cdot A} \quad (2.81)$$

Lo expandimos en serie de Taylor y tomamos solamente el término de orden N , debido a que vamos a considerar únicamente los términos lineales en ϵ .

$$\frac{(-ie)^N}{N!} \left(\int_0^T d\tau \sum_{i=1}^N \epsilon_i \cdot \dot{x}(\tau) e^{ik \cdot x(\tau)} \right)^N \quad (2.82)$$

Tenemos una suma de N términos elevado a la N , es decir N^N términos. De éstos vamos a tomar las formas de ordenar N objetos distintos para elementos que no se repiten, es decir $N!$, por lo que se cancela con el denominador, y obtenemos.

$$(-ie)^N \int_0^T d\tau_1 \epsilon_1 \cdot \dot{x}(\tau_1) e^{ik_1 \cdot x(\tau_1)} \dots \int_0^T d\tau_N \epsilon_N \cdot \dot{x}(\tau_N) e^{ik_N \cdot x(\tau_N)} \quad (2.83)$$

que puede ser escrito como

$$(-ie)^N V_{scal}^\gamma[k_1, \epsilon_1] \cdots V_{scal}^\gamma[k_N, \epsilon_N] \quad (2.84)$$

En donde llamaremos a V_{scal} el operador de vértice del fotón, definido como

$$V_{scal}^\gamma[k, \epsilon] \equiv \int_0^T d\tau \epsilon \cdot \dot{x}(\tau) e^{ik \cdot x(\tau)}. \quad (2.85)$$

Éste operador de vértice representa la emisión o absorción de fotones por un vértice o nodo en diagramas de Feynman.

Escribiendo la acción efectiva con ésta sustitución, a la que llamaremos amplitud de N fotones como

$$\begin{aligned} \Gamma_{scal}(k_1, \epsilon_1; \dots; k_N, \epsilon_N) = & (-ie)^N \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \frac{1}{4} \dot{x}^2} \\ & \times V_{scal}^\gamma[k_1, \epsilon_1] \cdots V_{scal}^\gamma[k_N, \epsilon_N] \end{aligned} \quad (2.86)$$

Es importante señalar que cada operador de vértice representa la emisión o absorción de un solo fotón. Sin embargo el momento en el tiempo en el que ésto sucede, es un tiempo arbitrario que está dentro del intervalo de 0 a T , es por eso que se debe de integrar (sumar) sobre todo el espectro de tiempo de 0 a ∞ , como se verá más adelante al evaluar el límite en el infinito, nos deshacemos del término que depende de la exponencial, arrojándonos propagadores y funciones lineales que dependen de ϵ . Para realizar la integral, debemos de usar de algunos trucos, primero notamos que es de forma gaussiana si conseguimos subir los factores $\epsilon \cdot \dot{x}$, la manera de hacerlo es considerarlos como el elemento lineal de la serie de Taylor de la exponencial,

$$\epsilon_i \cdot x_i = e^{\epsilon_i \cdot x_i} \Big|_{lin(\epsilon_i)}. \quad (2.87)$$

Donde, por supuesto la notación $lin(\epsilon_i)$, nos indica que tomemos únicamente la parte lineal que depende de ϵ .

Con éste truco estamos listos para ponerlo en su forma gaussiana, observando además que

$$\begin{aligned} \int_0^T d\tau \dot{x}^2 &= x \dot{x} \Big|_0^T - \int_0^T d\tau x \ddot{x} \\ &= \int_0^T d\tau x \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} \right) x \end{aligned} \quad (2.88)$$

debido a las condiciones de frontera periódicas es que podemos eliminar el primer término. Observamos por supuesto, que tenemos una correspondencia con la matriz M del apéndice A.1 $M \leftrightarrow -\frac{d^2}{d\tau^2}$, por lo que ahora sólo necesitamos averiguar que significa el determinante y la inversa del operador "menos la segunda derivada". Con un poco de perspicacia, notamos que tenemos un ligero problema para las trayectorias cerradas en las que $x(\tau) = const$, lo que anularía el término cinético, por depender de la derivada, y correspondería a un eigenvalor cero de la matriz M , por lo tanto no tendría una inversa como tal. Para solucionarlo, vamos a definir una vuelta del centro

de masa, que se podría interpretar como una posición promedio como

$$x_0^\mu := \frac{1}{T} \int_0^T d\tau x^\mu(\tau) \quad (2.89)$$

donde tenemos las siguientes relaciones

$$x^\mu = x_0^\mu + q^\mu(\tau) \quad \int \mathcal{D}x(\tau) = \int d^D x_0 \int \mathcal{D}q(\tau) \quad (2.90)$$

Además de la periodicidad, debemos tomar en cuenta la ecuación de constricción para la variable $q^\mu(\tau)$ escrita como

$$\int_0^T d\tau q^\mu(\tau) = 0 \quad (2.91)$$

Con ésto en mente, la única integral que depende de x_0 es de la forma

$$\int d^D x_0 e^{i \sum_{i=1}^N k_i \cdot x_0} = (2\pi)^D \delta \left(\sum_{i=1}^N k_i \right) \quad (2.92)$$

Que pasa a representar la conservación de energía momento en D dimensiones. De ésta forma nos hemos librado del término que nos daba molestias, y ahora el espacio restante sobre las $q(\tau)$, el operador $M = -\frac{d^2}{d\tau^2}$ contiene solamente eigenvalores positivos, este operador tiene que cumplir con la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} M\psi &= \lambda\psi \\ -\frac{1}{4} \frac{d^2}{d\tau^2} \psi(\tau) &= \lambda\psi(\tau) \end{aligned} \quad (2.93)$$

Cuya solución es una suma de senos y cosenos que bajo las condiciones de frontera de Dirichlet toma la forma

$$\psi(\tau) = \sqrt{\frac{2}{T}} \text{sen} \left(\frac{n\pi\tau}{T} \right) \quad (2.94)$$

de donde deducimos que los eigenvalores del operador $-\frac{1}{4} \frac{d^2}{d\tau^2}$ son $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4T^2}$. Ahora definamos la función $\zeta_0(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-z}$, y observando que

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{d}{dz} \zeta_0(0)\right) &= \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} e^{-z \log \lambda_n} (-\log \lambda_n)\right) \Big|_{z=0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \log(\lambda_n) = \log \prod_{i=1}^{\infty} \lambda_n = \text{Det}(M) \end{aligned} \quad (2.95)$$

Usando los eigenvalores encontrados λ_n , podemos escribir la derivada de la función ζ_0 como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\zeta(0) &= \frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^z} \Big|_{z=0} = \frac{d}{dz} \left(\frac{2T}{\pi} \right)^{2z} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2z} \Big|_{z=0} \\ &= \frac{d}{dz} \left(\frac{2T}{\pi} \right)^{2z} \zeta(2z) \Big|_{z=0} = -\log \left(\frac{2T}{\pi} \right) - \log(2\pi) = -\log(4T) \end{aligned} \quad (2.96)$$

En donde hemos usado las propiedades de la función ζ de Riemann $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, y $\zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log(2\pi)$

$$\begin{aligned} \text{Det} \left[-\frac{1}{4} \frac{d^2}{d\tau^2} \right]_{CFD} &:= \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{4T} \right)^D = \exp \left[-D \frac{d}{dz} \left(\frac{d}{dz} \zeta_0(0) \right) \right] \\ &= \exp(\log(4T)^D) = (4T)^D. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Es importante notar aquí, que la función ζ de Riemann nos da la dependencia en el parámetro, pero puede fallar en determinar las constantes. Si comparamos con el kernel libre calculado usando la cuantización canónica, vamos a observar que un factor de π debe ser agregado a la solución para la normalización 2.97, por lo que el valor correcto para el determinante será

$$\text{Det} \left[-\frac{1}{4} \frac{d^2}{d\tau^2} \right]_{CFD} = (4\pi T)^D. \quad (2.98)$$

Encontremos ahora, la función de Green correspondiente a M, que satisface la siguiente ecuación [55]

$$\partial_{\tau}^2 G_B(\tau, \tau') = \delta(\tau - \tau') \quad (2.99)$$

bajo las condiciones de frontera y sobre la línea real debe de tener la forma

$$G_B(\tau, \tau') = \frac{1}{2} |\tau - \tau'| + A + B\tau \quad (2.100)$$

Para encontrar la función en un círculo de circunferencia T , notamos que la ecuación 2.99 no tiene solución sobre el lazo, sería como resolver la ecuación de Poisson para una carga para un espacio compacto, para el cuál el potencial es infinito, a menos que exista una carga de fondo que mantenga el espacio total en equilibrio. Ya que en éste caso se tiene una carga unitaria en τ' , debemos agregar una densidad de carga de fondo $-\frac{1}{T}$, por lo que la nueva ecuación de Green es

$$\partial_t^2 G_B(\tau, \tau') = \delta(\tau - \tau') - \frac{1}{T} \quad (2.101)$$

que imponiendo una condición de periodicidad $t \rightarrow t + T$ tiene una solución

$$G_B^c(\tau, \tau') \equiv 2 \langle \tau | \left(\frac{d^2}{d\tau^2} \right)^{-1} | \tau' \rangle = |\tau - \tau'| - \frac{(\tau - \tau')^2}{T} - T/6 \quad (2.102)$$

La cual es una función de $\tau - \tau'$, además se entiende que el subíndice B se refiere a bosones, y el c hace referencia a que se incluye una constante $-T/6$. Resulta que en el espacio plano, ésta

constante es irrelevante y puede ser omitida, por lo que en el espacio plano se suele escribir como

$$G_B(\tau, \tau') \equiv |\tau - \tau'| - \frac{(\tau - \tau')^2}{T} \quad (2.103)$$

Es importante mencionar que en espacios curvos, ésta función no funciona. Además vamos a necesitar la primera y la segunda derivada de la función de Green, escritas explícitamente como

$$\dot{G}_B(\tau, \tau') = \text{sign}(\tau - \tau') - 2\frac{\tau - \tau'}{T} \quad (2.104)$$

$$\ddot{G}_B(\tau, \tau') = 2\delta(\tau - \tau') - \frac{2}{T} \quad (2.105)$$

Ahora, para usar la fórmula gaussiana A.2, vamos a definir

$$j(\tau) \equiv \sum_{i=1}^N (i\delta(\tau - \tau_i)k_i - \delta'(\tau - \tau_i)\epsilon_i) \quad (2.106)$$

De tal forma que

$$e^{\sum_{i=1}^N (ik_i \cdot q_i)} = e^{\int_0^T d\tau j(\tau) \cdot q(\tau)} \quad (2.107)$$

donde es necesario notar que $\int_0^T d\tau \delta'(\tau - \tau')q(\tau) = -\dot{q}(\tau_i)$, aplicando pues, la ecuación A.2 obtenemos formalmente que

$$\begin{aligned} \frac{\int \mathcal{D}q(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \frac{1}{4}\dot{q}^2} e^{\sum_{i=1}^N (ik_i \cdot q_i + \epsilon_i \cdot \dot{q}_i)}}{\int \mathcal{D}q(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \frac{1}{4}\dot{q}^2}} &= \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^T d\tau \int_0^T d\tau' G_B(\tau, \tau') j(\tau) \cdot j(\tau') \right] \\ &= \exp \left[\sum_{i,j=1}^N \left(\frac{1}{2} G_{B_{ij}} k_i \cdot k_j - i\dot{G}_{B_{ij}} \epsilon_i \cdot k_j + \frac{1}{2} \ddot{G}_{B_{ij}} \epsilon_i \cdot \epsilon_j \right) \right] \end{aligned} \quad (2.108)$$

En donde se usó la notación para representar a $G_{B_{ij}} \equiv G_B(\tau_i, \tau_j)$, además de la antisimetría de $\dot{G}_{B_{ij}}$. Notamos aquí que la suma de una constante $-T/6$ no afecta en el resultado final, a excepción del primer término $G_{B_{ij}} k_i \cdot k_j$ que se desvanece debido a la conservación de momento. Finalmente, necesitamos la normalización de la integral de camino con ayuda de la ecuación A.1, que resulta ser la misma que para el caso en donde usamos las CFD.

$$\int \mathcal{D}q(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \frac{1}{4}\dot{q}^2} = (4\pi T)^{-\frac{D}{2}} \quad (2.109)$$

Con todos éstos ingredientes juntos, estamos listos para obtener la famosa "fórmula maestra de

Bern-Kosower"

$$\begin{aligned} \Gamma_{scal}(k_1, \epsilon_1; \dots; k_N, \epsilon_N) = & \quad (2.110) \\ & (-ie)^N (2\pi)^D \delta(\sum k_i) \int_0^\infty \frac{dT}{T} (4\pi T)^{-D/2} e^{-m^2 T} \prod_{i=1}^N \int_0^T d\tau_i \\ & \times \exp \left(\sum_{i,j=1}^N \left[\frac{1}{2} G_{B_{ij}} k_i \cdot k_j - i \dot{G}_{B_{ij}} \epsilon_i \cdot k_j + \frac{1}{2} \ddot{G}_{B_{ij}} \epsilon_i \cdot \epsilon_j \right] \right) \Big|_{lin(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)} \end{aligned}$$

Ésta fórmula fue por primera vez derivada por Bern y Kosower [53] para la teoría de cuerdas, y redescubierta usando integrales de camino por Strassler [55]. Tal como está escrito, representa la amplitud de una vuelta de N fotones en la teoría escalar de QED, pero Bern y Kosower derivaron también una serie de reglas que permitían a uno construir, empezando de ésta fórmula maestra utilizando solamente herramientas algebraicas, representaciones integrales para las amplitudes de una vuelta de fermiones, así como amplitudes de gluones que involucran un escalar. Sin embargo, hay una parte de esas reglas que es válida imponiendo condiciones sobre la capa de masa, mientras la fórmula maestra en sí misma, es válida completamente fuera de la capa de masa.

2.2.4. Polarización del vacío en la QED escalar

Otro caso simple en la QED escalar, es una función de dos puntos en la que se involucra el propagador fotónico o la polarización del vacío. Para $N = 2$ obtenemos de la fórmula maestra 2.111 que

$$\begin{aligned} \Gamma_{scal}(k_1, \epsilon_1; \dots; k_2, \epsilon_2) = & \quad (2.111) \\ & (-ie)^2 (2\pi)^D \delta(p_1 + p_2) \int_0^\infty \frac{dT}{T} (4\pi T)^{-D/2} e^{-m^2 T} \\ & \times \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 (-i)^2 P_2 e^{G_{B_{12}} k_1 \cdot k_2} \end{aligned}$$

donde se definió

$$P_2 = \dot{G}_{B_{12}} \epsilon_1 \cdot k_2 \dot{G}_{B_{21}} \epsilon_2 \cdot k_1 - \ddot{G}_{B_{12}} \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \quad (2.112)$$

Si utilizamos integración por partes para $\ddot{G}_{B_{12}}$, podemos transformar P_2 en Q_2 como

$$Q_2 = \dot{G}_{B_{12}} \dot{G}_{B_{21}} (\epsilon_1 \cdot k_2 \epsilon_2 \cdot k_1 - \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 k_1 \cdot k_2) \quad (2.113)$$

Usando ahora conservación de momento $k_1 = -k_2 \equiv k$, y escribiendo

$$\Gamma_{scal}(k_1, \epsilon_1; k_2, \epsilon_2) \equiv (2\pi)^D \delta(p_1 + p_2) \epsilon_1 \cdot \Pi_{scal} \cdot \epsilon_2 \quad (2.114)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \Pi_{scal}^{\mu\nu}(k) = & \quad (2.115) \\ & e^2 (\delta^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) \int_0^\infty \frac{dT}{T} (4\pi T)^{-D/2} e^{-m^2 T} \\ & \times \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 \dot{G}_{B_{12}} \dot{G}_{B_{21}} e^{G_{B_{12}} k_1 \cdot k_2} \end{aligned}$$

Es importante mencionar que la integral por partes ha tenido el efecto de sacar un factor del proyector transversal $\delta^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu$. Ahora reescalando al círculo unitario, $\tau_i = Tu$, $i = 1, 2$ y usando la invariancia translacional en τ para fijar el cero en el lugar del segundo vértice $u_2 = 0$, $u_1 = u$, tenemos que la función de green se escribe como

$$\begin{aligned} G_B(\tau_1, \tau_2) &= Tu(1-u) \\ \dot{G}_B(\tau_1, \tau_2) &= 1 - 2u \end{aligned} \quad (2.116)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{scal}^{\mu\nu}(k) &= -\frac{e^2}{(4\pi)^{D/2}}(\delta^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu) \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} T^{2-\frac{D}{2}} \\ &\times \int_0^1 du (1-2u)^2 e^{-Tu(1-u)k^2} \end{aligned} \quad (2.117)$$

Usando la integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} x^\lambda e^{-ax} = \Gamma(\lambda) a^{-\lambda} \quad (2.118)$$

para $a > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \Pi_{scal}^{\mu\nu}(k) &= -\frac{e^2}{(4\pi)^{D/2}}(\delta^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \\ &\times \int_0^1 du (1-2u)^2 [m^2 + u(1-u)k^2]^{\frac{D}{2}-2} \end{aligned} \quad (2.119)$$

Que corresponde a los diagramas de Feynman de la Figura 2.4.

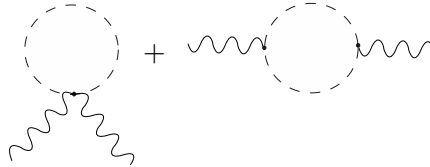


Figura 2.4: Diagramas de Feynman que representan la polarización del vacío en la teoría escalar de la QED

Finalmente, es importante resaltar que, aunque se puede poner cualquier integral gaussiana según la ecuación A.2 con los trucos exponenciales, no siempre es la manera más eficiente de proceder, para eso podemos usar una serie de reglas establecidas en donde usamos las contracciones de Wick, que involucran campos elementales, así como campos exponenciales:

- 1. La contracción más básica de Wick se debe a dos campos

$$\langle q^\mu(\tau_1) q^\mu(\tau_2) \rangle = -G_B(\tau_1, \tau_2) \delta^{\mu\nu} \quad (2.120)$$

- 2. Para cuatro campos, la contracción de Wick se escribe como

$$\begin{aligned} \langle q^k(\tau_1)q^\lambda(\tau_2)q^\mu(\tau_3)q^\nu(\tau_4) \rangle &= G_{B12}G_{B34}\delta^{k\lambda}\delta^{\mu\nu} + G_{B13}G_{B24}\delta^{k\mu}\delta^{\lambda\nu} \\ &+ G_{B14}G_{B23}\delta^{k\nu}\delta^{\lambda\mu} \end{aligned} \quad (2.121)$$

- 3. Vamos a contraer los campos exponenciales de acuerdo a

$$\langle q^\mu(\tau_1)e^{ik\cdot q(\tau_2)} \rangle = i \langle q^\mu(\tau_1)q^\nu(\tau_2) \rangle k_\nu e^{ik\cdot q(\tau_2)} \quad (2.122)$$

- 4. Una vez que hemos eliminado todos los campos del tipo $q^\mu(\tau)$, la contracción de los campos exponenciales que quedan se podrán escribir como

$$\begin{aligned} \langle e^{ik_1\cdot q_1} \dots e^{ik_N\cdot q_N} \rangle &= \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N k_{i\mu} \langle q^{\mu(\tau_i)} q^{\nu(\tau_j)} \rangle k_{j\nu} \right] \\ &= \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N G_{Bij} k_i \cdot k_j \right] \end{aligned} \quad (2.123)$$

Notemos por último, que no importa la integral de camino construida, el operador $\langle \rangle$ es lineal, de tal forma que conmuta si queremos tomar la derivada de los campos.

2.3. Ecuación de Dirac y espinores de Weyl

Supongamos que tenemos un conjunto de $n \times n$ matrices γ^μ que satisfacen las relaciones de anticonmutatividad

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \times I_{n \times n} \quad (2.124)$$

Entonces la forma de representar el álgebra de Lorentz será:

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (2.125)$$

ya que éstas relaciones son para cualquier dimensionalidad, se deben cumplir en particular para 3 dimensiones euclidianas, de donde tenemos que

$$\gamma^j \equiv i\sigma^j \quad (2.126)$$

donde σ^j son las matrices de pauli, de tal forma que el anticonmutador se cumple con la relación

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = -2\delta^{ij} \quad (2.127)$$

Entonces el álgebra de Lorentz representada por las matrices S (para i, j, k en tres dimensiones) será

$$S^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\sigma^k \quad (2.128)$$

que simplemente se reconoce como el grupo de rotación en dos dimensiones (es decir S es una matriz de 2×2).

Las matrices de Dirac γ^μ en un espacio de Minkowski en cuatro dimensiones pueden escribirse como una representación por bloques, es decir una matriz de 2×2 en donde cada entrada es a su vez, una matriz de 2×2 .

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.129)$$

que es llamada la representación quirál o de Weyl, la matriz está dada como $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \quad (2.130)$$

o en notación más compacta

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^\mu \equiv (1, \sigma^i), \quad \bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\sigma^i). \quad (2.131)$$

Entonces los generadores de rotación o Boost se escriben como

$$S^{0i} = \frac{i}{4} [\gamma^0, \gamma^i] = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} \quad (2.132)$$

y

$$S^{ij} = \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^j] = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\Sigma^k \quad (2.133)$$

Se puede verificar que

$$[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] = (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (2.134)$$

o equivalentemente

$$(1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma})\gamma^\mu(1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}) = (1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (2.135)$$

donde $\mathcal{J}^{\mu\nu} = i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)$. Podemos observar que la ecuación 2.135, simplemente es la expansión a primer orden (forma infinitesimal) de

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda_{\frac{1}{2}}^\mu_\nu\gamma^\nu, \quad (2.136)$$

donde $\Lambda_{\frac{1}{2}} = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)$ es la representación espinorial de la transformación de Lorentz Λ . La ecuación 2.136 nos dice que las matrices $\Lambda_{\nu}^{\mu}\gamma^{\nu}$ son invariantes bajo rotaciones simultáneas de sus índices vectoriales y espinoriales. La ecuación de Dirac se escribe como

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi(x) = 0 \quad (2.137)$$

que resulta ser invariante de Lorentz, ya que

$$\begin{aligned} [i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m]\psi(x) &\rightarrow [i\gamma^{\mu}(\Lambda^{-1})_{\mu}^{\nu}\partial_{\nu}]\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x) \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}[i\gamma^{\mu}(\Lambda^{-1})_{\mu}^{\nu}\partial_{\nu}]\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x) \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}}[i\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^{\mu}\Lambda_{\frac{1}{2}}(\Lambda^{-1})_{\mu}^{\nu}\partial_{\nu}]\psi(\Lambda^{-1}x) \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}}[i\Lambda_{\sigma}^{\mu}\gamma^{\sigma}(\Lambda^{-1})_{\mu}^{\nu}\partial_{\nu}]\psi(\Lambda^{-1}x) \end{aligned} \quad (2.138)$$

$$\begin{aligned} &= \Lambda_{\frac{1}{2}}[i\gamma^{\nu}\partial_{\nu} - m]\psi(\Lambda^{-1}x) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.139)$$

Por último, observemos que la ecuación de Dirac, implica necesariamente la ecuación de Klein-Gordon, multiplicando simplemente por $(-i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)$: tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= (-i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi \\ &= (\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu} + m^2)\psi \\ &= \left(\frac{1}{2}\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\}\partial_{\mu}\partial_{\nu} + m^2\right)\psi \\ &= (\partial^2 + m^2)\psi. \end{aligned} \quad (2.140)$$

La solución general para la ecuación de Dirac puede ser escrita como una combinación lineal de ondas planas. Las ondas con frecuencia positiva toman la forma

$$\psi(x) = u(\mathbf{p})e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad p^2 = m^2, \quad p^0 > 0 \quad (2.141)$$

que tiene dos soluciones independientes para $u(p)$, escritas de forma general como

$$u^s(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathbf{p}\cdot\vec{\sigma}}\xi^s \\ \sqrt{\mathbf{p}\cdot\vec{\sigma}}\xi^s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2 \quad (2.142)$$

Que normalizamos de la siguiente forma ¹

$$\bar{u}^r(\mathbf{p})u^s(\mathbf{p}) = 2m\delta^{rs} \quad o \quad u^{r\dagger}(\mathbf{p})u^s(\mathbf{p}) = 2E_{\mathbf{p}}\delta^{rs}. \quad (2.143)$$

¹La manera de encontrar la solución general es realizando un boost sobre la solución más simple para un marco de referencia en reposo

De forma análoga ² podemos encontrar las soluciones para una frecuencia negativa si escribimos

$$\psi(x) = v(\mathbf{p})e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad p^2 = m^2, \quad p^0 > 0. \quad (2.144)$$

Que tiene dos soluciones independientes para $v(\mathbf{p})$

$$v^s(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}\eta^s \\ -\sqrt{\mathbf{p}\cdot\bar{\boldsymbol{\sigma}}}\eta^s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2 \quad (2.145)$$

donde η^s es otra base de spinores de dos componentes. De la misma forma, éstos espinores pueden ser normalizados acorde a

$$\bar{v}^r(\mathbf{p})v^s(\mathbf{p}) = -2m\delta^{rs} \quad v^{r\dagger}(\mathbf{p})v^s(\mathbf{p}) = +2E_{\mathbf{p}}\delta^{rs} \quad (2.146)$$

además, los vectores u y v tienen la propiedad de ser ortogonales unos a otros

$$\bar{u}^r(\mathbf{p})v^s = \bar{v}^r(\mathbf{p})u^s(\mathbf{p}) = 0. \quad (2.147)$$

Lo que no se cumple es que $u^{r\dagger}(\mathbf{p})v^s(\mathbf{p}) \neq 0$ y $v^{r\dagger}(\mathbf{p})u^s(\mathbf{p}) \neq 0$, sin embargo, si cambiamos ligeramente las variables, veremos que

$$u^{r\dagger}(\mathbf{p})v^s(-\mathbf{p}) = v^{r\dagger}(-\mathbf{p})u^s(\mathbf{p}) = 0, \quad (2.148)$$

A partir de la ecuación de Dirac, podemos escribir dos representaciones (de dos dimensiones cada una) considerando ψ escrito como

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (2.149)$$

A los objetos $\psi_{R(L)}$ se les llama espinores de Weyl derecho (izquierdo). De tal forma que la ecuación de Dirac se escribe como

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = \begin{pmatrix} -m & i(\partial_0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla) \\ i(\partial_0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla) & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0 \quad (2.150)$$

De donde se observa que ambos términos están acoplados debido al término de masa m en la ecuación de Dirac. Pero si imponemos que $m = 0$, las ecuaciones para $\psi_{R(L)}$ se desacoplan, por lo que obtenemos dos ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} i(\partial_0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\psi_L &= 0 \\ i(\partial_0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\psi_R &= 0 \end{aligned} \quad (2.151)$$

Que son llamadas, las ecuaciones de Weyl, y se pueden escribir en una forma más compacta si

²Para hacer que u sea invariante de Lorentz, debemos definir $\bar{u}(\mathbf{p}) = u^\dagger(\mathbf{p})\gamma^0$

definimos

$$\sigma^\mu \equiv (1, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.152)$$

de tal forma que

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{ab} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{ab} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.153)$$

por lo que la ecuación de Dirac puede ser escrita como

$$\begin{pmatrix} -m & i\boldsymbol{\sigma} \cdot \partial \\ i\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\mu \cdot \partial & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0 \quad (2.154)$$

Y las ecuaciones de Weyl se escribirían de la forma [61]

$$i\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \partial \psi_L = 0 \quad i\boldsymbol{\sigma} \cdot \partial \psi_R = 0 \quad (2.155)$$

En la base de Weyl, las proyecciones toman una forma sencilla

$$\Psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\Psi = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \quad (2.156)$$

2.3.1. Formalismo de helicidad spinorial para electrones, con énfasis en los vectores de polarización de los fotones

En la teoría cuántica de campos, el observable que nos interesa es la sección de dispersión σ , que se obtiene integrando la sección diferencial de dispersión, que a su vez es proporcional a la amplitud de dispersión $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto |A|^2$. De tal forma que una vez encontradas las amplitudes A , podemos extraer la información que nos interesa, esto se hace sumando los diagramas de Feynman en una serie perturbativa, extrayéndolos a su vez de un lagrangiano, sin embargo éste método tienen una gran desventaja, que sale a relucir cuando las partículas involucradas en los procesos son más de cuatro o cinco, por ejemplo, para la dispersión de gluones a nivel de árbol tenemos

$$\begin{aligned} g + g &\rightarrow g + g && 4 \text{ diagramas} \\ g + g &\rightarrow g + g + g && 25 \text{ diagramas} \\ g + g &\rightarrow g + g + g + g && 220 \text{ diagramas} \end{aligned} \quad (2.157)$$

además de que cada diagrama se vuelve cada vez más complicado mientras el número de partículas externas crece, por lo que el cálculo se vuelve tedioso y muy complicado. Sin embargo, a pesar de las complicaciones, si uno llegase a calcular las amplitudes sobre la capa de masa, para un proceso multigluónico, se llegaría a una expresión increíblemente simple. Surge la pregunta obligada entonces, ¿Existe una manera más fácil de hacerlo?, la respuesta es un tímido si. Es tímido porque la teoría que lo simplifica es relativamente joven, y aún se siguen desarrollando nuevas fórmulas que simplifican el trabajo enormemente [62], aunque ya se ha establecido una

base bastante sólida, en la que se siguen construyendo nuevas ecuaciones que tratan de simplificar aún más los cálculos.

Vamos a introducir el formalismo espinorial tomando por contexto las reglas de Feynman, con las interacciones de Yukawa y la QED [63]. Ya que será una ayuda inmensa para escribir los vectores de polarización de una forma compacta, usando el álgebra que vamos a desarrollar en las siguientes secciones. Entonces empezaremos con los spinores de Dirac.

2.3.2. Spinores de Dirac

El lagrangiano para el campo de Dirac Ψ se escribe como

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \quad (2.158)$$

que nos arroja la ecuación de movimiento para $\bar{\Psi}$ con la ayuda de las ecuaciones de Euler-Lagrange para campos $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right)$

$$(-i\not{\partial} + m)\Psi = 0 \quad (2.159)$$

que multiplicando por $(i\not{\partial} + m)$ nos devuelve la ecuación de Klein-Gordon. La solución se obtiene con una expansión de ondas planas y es proporcional a

$$\Psi \sim u(p)e^{ip\cdot x} + v(p)e^{-ip\cdot x} \quad (2.160)$$

dado el cuadrimomento en la capa de masa $p^2 \equiv p^\mu p_\mu = -m^2$. $\Psi(x)$ también resuelve la ecuación de Dirac 2.159, siempre y cuando se cumpla que

$$(\not{p} + m)u(p) = 0 \quad \text{y} \quad (-\not{p} + m)v(p) = 0 \quad (2.161)$$

que resulta ser la forma en el espacio de momento de la ecuación de Dirac. Cada ecuación en 2.161 contiene dos soluciones independientes que se suelen representar con una etiqueta inferior $s = \pm$.

Podemos escribir la expansión general para Ψ como

$$\Psi(x) = \sum_{s=\pm} \int \tilde{d}p [b_s(p)u_s(p)e^{ip\cdot x} + d_s^\dagger(p)v_s(p)e^{-ip\cdot x}] \quad (2.162)$$

donde $\tilde{d}p = \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}$ es la medida de un momento en 3 dimensiones invariante de Lorentz. Obteniendo una expresión similar para $\bar{\Psi}$ en términos de $b_\pm^{(\dagger)}(p)$ y $d_\pm^{(\dagger)}(p)$, que resultan representar operadores de creación o aniquilación fermiónicos. Éstos operadores actúan en el vacío de tal forma que $b_\pm(p)|0\rangle = d_\pm(p)|0\rangle = 0$. Un estado entonces, es definido de forma tal que $u_\pm(p)$ y $v_\pm(p)$ son spinores de cuatro componentes que solucionan la ecuación 2.161.

De aquí se siguen las reglas de Feynman para fermiones externos, de donde se asocian las antipartículas externas a $v_\pm(p)$, y las partículas externas a $u_\pm(p)$, además podemos escoger una base en el sistema de referencia en reposo en donde u_\pm y v_\pm son eigenestados de la componente z de la matriz de spin, de tal forma que el subíndice \pm denota spin arriba o abajo. Para fermiones

sin masa, \pm denota la helicidad, que es la proyección del spin sobre el momento de la partícula. Comenzando con el cuadrimomento escrito como $p^\mu = (p^0, p^i) = (E, p^i)$ con $i = 1, 2, 3$ tenemos que $p^\mu p_\mu = -m^2$. Además si definimos la matriz gamma como

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{ab} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.163)$$

donde $(\sigma^\mu)_{ab} = (1, \sigma^i)_{ab}$, y $(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} = (1, -\sigma^i)^{\dot{a}b}$ con σ^i las matrices de pauli. Podemos definir

$$\not{p} = \begin{pmatrix} 0 & p_{ab} \\ p^{\dot{a}b} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.164)$$

usando

$$p_{ab} = p_\mu (\sigma^\mu)_{ab} = \begin{pmatrix} -p^0 + p^3 & p^1 - ip^2 \\ p^1 + ip^2 & -p^0 - p^3 \end{pmatrix} \quad (2.165)$$

y de forma análoga para $p^{\dot{a}b} = p_\mu (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b}$, que son matrices de 2×2 . Otra propiedad importante es que el determinante es invariante de Lorentz

$$\det p = -p^\mu p_\mu = m^2 \quad (2.166)$$

En la mayor parte del formalismo espinorial estudiado aquí, se van a considerar a las partículas sin masa, ésto se puede justificar si pensamos en el límite de altas energías, en donde la masa de los fermiones puede despreciarse.

2.4. Formalismo de helicidad spinorial

Cuando despreciamos la masa $m = 0$, la ecuación de Dirac para cuatro componentes se escribe

$$\not{p}v_\pm(p) = 0, \quad \bar{u}_\pm(p)\not{p} = 0. \quad (2.167)$$

Por supuesto $v_\pm(p)$ y $\bar{u}_\pm(p)$ son las funciones de onda asociadas a las antipartículas y partículas salientes, de tal forma que en el caso sin masa, las funciones de onda están relacionadas por $u_\pm = v_\mp$ y $\bar{v}_\pm = \bar{u}_\mp$. Entonces vamos a escribir las soluciones a la ecuación de Dirac 2.167 como

$$v_+(p) = \begin{pmatrix} |p\rangle_a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_-(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ |p\rangle^{\dot{a}} \end{pmatrix} \quad (2.168)$$

$$\bar{u}_-(p) = (0, \langle p|_{\dot{a}}), \quad \bar{u}_+(p) = ([p|^a, 0) \quad (2.169)$$

los spinores angulares y cuadrados, son entonces spinores de dos componentes que satisfacen la ecuación sin masa de Weyl

$$p^{\dot{a}b}|p\rangle_b = 0, \quad p_{ab}|p\rangle^{\dot{b}} = 0, \quad [p|^b p_{b\dot{a}} = 0, \quad \langle p|_{\dot{b}} p^{\dot{b}a} = 0 \quad (2.170)$$

por lo tanto podemos subir y bajar los índices con el tensor de Levi-Civitas en dos dimensiones.

Además si el momento p^μ es real, la manera de cambiar del spinor angular al cuadrado va a ser simplemente el conjugado

$$[p|^a = (|p\rangle^{\dot{a}})^* \quad \langle p|_{\dot{a}} = (|p]_a)^* \quad (2.171)$$

Una propiedad importante será la relación de completos para $m = 0$, que para $u(p)$ se escribe como $u_- \bar{u}_- + u_+ \bar{u}_+ = -\not{p}$, que puede ser escrito con la ayuda de la relación $\bar{u}_\mp = \bar{v}_\pm$ usando la notación de helicidad espinorial como

$$-\not{p} = |p\rangle [p| + |p] \langle p| \quad (2.172)$$

Es importante notar que el término de la izquierda en la ecuación 2.172 es una matriz cuadrada de cuatro componentes, mientras cada término a la derecha es un espinor de dos componentes, sin embargo como notará el lector, siempre que los ángulo de los espinores se encuentren pegados, el resultado será una matriz, justo como se trabaja con diadas, mientras que si los ángulos se encuentran cerrados, el resultado será un escalar. Propiamente hablando, tenemos que usar índices para hacer formalmente los cálculos, de tal forma que

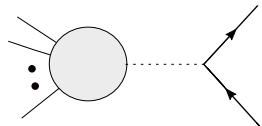
$$p_{ab} = -|p]_a \langle p|_b, \quad p^{\dot{a}\dot{b}} = -|p\rangle^{\dot{a}} [p]^{\dot{b}} \quad (2.173)$$

2.4.1. Ejemplos de la teoría de Yukawa y QED escalar

Consideremos un lagrangiano en el que interactúan fermiones de Dirac con un campo escalar ϕ a través del acoplamiento de Yukawa

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + g\phi\bar{\Psi}\Psi \quad (2.174)$$

El término de interacción $g\phi\bar{\Psi}\Psi$ nos dice que debemos tomar la regla de Feynman para 3 vértices. Por ejemplo, para un diagrama con dos fermiones de Dirac saliendo conectados al resto de las partículas a través de una línea escalar, las reglas de Feynman usuales nos da



$$= ig \bar{u}_{h_1}(p_1)v_{h_2}(p_2) \times \frac{-i}{(p_1+p_2)^2} \times (\text{resto})$$

Figura 2.5: .

En donde hemos contraído los índices y el círculo gris representa el resto del diagrama. Enfocémonos en algunas formas de obtener el producto espinorial para diferentes helicidad

$$\bar{u}_+(p_1)v_-(p_2) = ([1|^a, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ |2\rangle^{\dot{a}} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.175)$$

$$\bar{u}_-(p_1)v_-(p_2) = (0, \langle 1|_{\dot{a}}) \begin{pmatrix} 0 \\ |2\rangle^{\dot{a}} \end{pmatrix} \equiv \langle 12 \rangle \quad (2.176)$$

De tal forma que en el primer caso, el diagrama se hace cero, mientras que en el segundo, introducimos el braket angular espinorial $\langle 12 \rangle$. De manera análoga $\bar{u}_+(p_1)v_+(p_2) = [12]$. Como veremos más adelante, las amplitudes en el formalismo línea de mundo van a escribirse en términos de éstos espinores. Definidos formalmente para dos vectores con $m = 0$ como

$$\langle pq \rangle = \langle p|_{\dot{a}} |q\rangle^{\dot{a}}, \quad [pq] = [p|^a |q]_a \quad (2.177)$$

Ya que podemos levantar o bajar los índices con el tensor antisimétrico de Levi-Civitas, éstos productos tienen la propiedad de ser antisimétricos

$$\langle pq \rangle = -\langle qp \rangle \quad [pq] = -[qp] \quad (2.178)$$

Debido a la estructura vectorial de los "bra-kets", todos los brakets mixtos se desvanecen, por ejemplo $\langle p|q] = 0$

Vamos a demostrar algunas propiedades importantes, que son de mucha utilidad en los cálculos usando la teoría del formalismo espinorial

$$\begin{aligned} \langle pq \rangle [pq] &= \langle p|_{\dot{a}} |q\rangle^{\dot{a}} [p|^b |q]_b = \langle p|_{\dot{a}} \epsilon^{ba} |p]_a |q\rangle^{\dot{a}} \epsilon_{bc} [q]^c \\ &= |p]_a \langle p|_{\dot{a}} |q\rangle^{\dot{a}} [q]^c \epsilon^{bc} \epsilon_{bc} = p_{a\dot{a}} q^{\dot{a}c} (-\delta_c^a) \\ &= -p_{a\dot{a}} q^{\dot{a}a} = -p_\mu (\sigma_{a\dot{a}}^\mu) q_\mu (\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{a}a} \\ &= -p_\mu q_\nu (\sigma^\mu)_{a\dot{a}} (\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{a}a} = -p_\mu q_\nu \text{Tr}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu) \\ &= 2\eta^{\mu\nu} p_\mu q_\nu = 2p \cdot q \end{aligned} \quad (2.179)$$

de tal forma que para vectores nulos en donde se cumple $p^2 = 0$ tenemos que

$$(p + q)^2 = 2p \cdot q = \langle pq \rangle [pq] \quad (2.180)$$

entonces para nuestro ejemplo en la teoría de Yukawa 2.5 se puede escribir

$$g \langle 12 \rangle \times \frac{1}{2p_1 \cdot p_2} \times (\text{resto}) = g \langle 12 \rangle \times \frac{1}{\langle 12 \rangle [12]} \times (\text{resto}) = g \frac{1}{[12]} \times (\text{resto}). \quad (2.181)$$

La cancelación algebraica de $\langle 12 \rangle$ nos muestra en éste sencillo ejemplo, la fuerza de este formalismo, que como veremos con algunos ejemplos, simplifica enormemente los cálculos y nos arroja una expresión final bastante sencilla y elegante. Sin embargo, antes de pasar a los ejemplos, vamos a recalcar algunas propiedades del formalismo de helicidad espinorial.

1. Se tiene que $[k|\gamma^\mu |p\rangle = \langle p|\gamma^\mu |k]$.

Demostración

$$\begin{aligned}
 \langle p | \gamma^\mu | k \rangle &= (0, \langle p |_{\dot{a}}) \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{ab} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |k\rangle_b \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \langle p |_{\dot{a}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}b} |k\rangle_b = \epsilon_{ba} [k]^a \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}b} \epsilon_{\dot{a}\dot{c}} |p\rangle^{\dot{c}} \\
 &= \epsilon_{ba} \epsilon_{\dot{a}\dot{c}} \epsilon^{bc} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} [k]^a (\sigma^\mu)_{cb} |p\rangle^{\dot{b}} = \delta_{ac} \delta_{\dot{c}\dot{b}} [k]^a (\sigma^\mu)_{cb} |p\rangle^{\dot{c}} = [k]^a (\sigma^\mu)_{ab} |p\rangle^{\dot{b}} \\
 &= [k]^a, 0) \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{ab} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ |p\rangle^{\dot{b}} \end{pmatrix} = [k | \gamma^\mu | p \rangle
 \end{aligned} \tag{2.182}$$

2. Se puede ver inmediatamente, en términos matriciales que $\langle p | \gamma^\mu | k \rangle = 0 = [p | \gamma^\mu | k]$.
3. Vamos a definir $\langle p | P | k \rangle \equiv P_\mu \langle p | \gamma^\mu | k \rangle$. Recordaremos que p^μ y k^μ son cuadvectores en donde $m = 0$, sin embargo no hemos dicho nada aún acerca de P^μ . Sin embargo, si P^μ también es tipo luz, es decir $P^\mu P_\mu = 0$, tenemos que se cumple la siguiente relación

$$\langle p | P | k \rangle = \langle p |_{\dot{a}} P^{\dot{a}b} |k\rangle_b = \langle p |_{\dot{a}} (-|P\rangle^{\dot{a}} [P]^b) |k\rangle_b = -\langle p P \rangle [P k], \quad (P^2 = 0) \tag{2.183}$$

4. Una propiedad muy útil a considerar en los cálculos, es la identidad de Fierz

$$\langle 1 | \gamma^\mu | 2 \rangle \langle 3 | \gamma_\mu | 4 \rangle = 2 \langle 13 \rangle [24] \tag{2.184}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 \langle 1 | \gamma^\mu | 2 \rangle \langle 3 | \gamma_\mu | 4 \rangle &= \langle 1 |_{\dot{a}} \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{ab} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} & 0 \end{pmatrix} |2\rangle_b \langle 3 |_{\dot{c}} \begin{pmatrix} 0 & (\sigma_\mu)_{cd} \\ (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{c}d} & 0 \end{pmatrix} |4\rangle_d \\
 &= \langle 1 |_{\dot{a}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}b} |2\rangle_b \langle 3 |_{\dot{c}} \bar{\sigma}_\mu^{\dot{c}d} |4\rangle_d \langle 1 |_{\dot{a}} |3\rangle^{\dot{c}} \epsilon_{\dot{c}\dot{e}} [2]_{\epsilon fb} [4]_{\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}b} \bar{\sigma}_\mu^{\dot{c}d}}
 \end{aligned}$$

usando

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}b} &= \epsilon^{b\alpha} \epsilon^{\dot{a}\dot{\alpha}} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \\
 \bar{\sigma}_\mu^{\dot{c}d} &= \epsilon^{d\beta} \epsilon^{\dot{c}\dot{\beta}} (\sigma_\mu)_{\beta\dot{\beta}} \\
 (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} (\sigma_\mu)_{\beta\dot{\beta}} &= -2\epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}
 \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}b} \bar{\sigma}_\mu^{\dot{c}d} &= \epsilon^{b\alpha} \epsilon^{\dot{a}\dot{\alpha}} \epsilon^{d\beta} \epsilon^{\dot{c}\dot{\beta}} (-2\epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}) \\
 &= -2\delta_\alpha^d \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{c}} \epsilon^{b\alpha} \epsilon^{\dot{a}\dot{\alpha}} = -2\epsilon^{bd} \epsilon^{\dot{a}\dot{c}}
 \end{aligned} \tag{2.185}$$

por lo que finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}
 &-2 \langle 1 |_{\dot{a}} |3\rangle^{\dot{c}} [2]^f [4]_d \epsilon^{bd} \epsilon^{\dot{a}\dot{c}} \epsilon_{\dot{e}\dot{c}} \epsilon_{fb} \\
 &= 2 \langle 1 |_{\dot{a}} |3\rangle^{\dot{c}} [2]^f [4]_d \delta_{\dot{e}}^{\dot{c}} \delta_f^d = 2 \langle 13 \rangle [24]
 \end{aligned}$$

5. La identidad de Schouten. $|i\rangle \langle jk\rangle + |j\rangle \langle ki\rangle + |k\rangle \langle ij\rangle = 0$ Básicamente nos indica que tres vectores no pueden ser linealmente independientes en un plano de dos dimensiones. Entonces si tenemos tres vectores de dos componentes como $|i\rangle, |j\rangle$ y $|k\rangle$, podemos escribir uno en

términos de los dos restantes como una combinación lineal, digamos

$$|k\rangle = a|i\rangle + b|j\rangle \quad a, b \in \mathfrak{R} \quad (2.186)$$

Demostración.

Por un lado tenemos

$$\langle ik\rangle = a\langle ii\rangle + b\langle ij\rangle = b\langle ij\rangle \quad (2.187)$$

$$\langle jk\rangle = a\langle ji\rangle + b\langle jj\rangle = a\langle ji\rangle \quad (2.188)$$

$$a\langle ki\rangle + b\langle kj\rangle = 0 \quad (2.189)$$

De tal forma que

$$\begin{aligned} |i\rangle\langle jk\rangle + |j\rangle\langle ki\rangle + |k\rangle\langle ij\rangle &= |i\rangle a\langle ji\rangle - |j\rangle\langle ik\rangle + (a|i\rangle + b|j\rangle)\langle ij\rangle \\ &= a|i\rangle(\langle ji\rangle + \langle ij\rangle) + b|j\rangle(\langle ij\rangle - \langle ij\rangle) = 0 \end{aligned} \quad (2.190)$$

debido a la antisimetría de los brakets. Comúnmente se escribe con un cuarto espinor $\langle r|$ de la forma

$$\langle ri\rangle\langle jk\rangle + \langle rj\rangle\langle ki\rangle + \langle rk\rangle\langle ij\rangle = 0. \quad (2.191)$$

Una identidad de Schouten similar se obtiene para los espinores cuadrados

$$[ri][jk] + [rj][ki] + [rk][ij] = 0 \quad (2.192)$$

Veamos algunos ejemplos del formalismo de helicidad espinorial.

Para empezar, vamos a calcular la amplitud de 4 fermiones a nivel de árbol en la teoría de Yukawa $A_4(\bar{f}^{h_1} f^{h_2} \bar{f}^{h_3} f^{h_4})$. En ésta notación f denota un fermion que sale, y \bar{f} un antifermión que sale. los superíndices h_i indican la helicidad. El diagrama para un proceso de 4 fermiones es

$$= ig\bar{u}_4 v_3 \times \frac{-i}{(p_1+p_2)^2} \times ig\bar{u}_2 v_1$$

Figura 2.6: .

Como nos hemos dado cuenta, si ponemos los vectores asociados a \bar{u} y v , éste diagrama se hace cero, por lo que necesitamos que la helicidad sea la misma en las partículas 3 y 4, así como en la 1 y 2. En el formalismo espinorial, escribiríamos la ecuación que parece en la Figura 2.6 como

$$iA_4(\bar{f}^- f^- \bar{f}^+ f^+) = ig^2[43] \frac{1}{2p_1 \cdot p_2} \langle 21\rangle = ig^2[34] \frac{1}{\langle 12\rangle [12]} \langle 12\rangle = ig^2 \frac{[34]}{\langle 12\rangle} \quad (2.193)$$

Éste resultado es simplemente la razón entre los dos brakets espinoriales. Si además consideramos conservación de momento $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$ tenemos una relación entre los brakets para

2.4.2. Vectores sin masa, y ejemplos de la QED

Como sabemos los fotones son partículas bosónicas de spin 1, que poseen polarización. Cuando el haz de fotones está polarizado de forma circular, cada fotón tiene un momento angular asociado $\pm\hbar$, el signo puede ser positivo si el fotón gira a la izquierda y negativo si gira a la derecha, suponiendo que se mide desde el receptor (signos contrarios si el sistema de referencia es desde la fuente). Éste momento angular, que llamaremos helicidad va en la dirección de propagación del fotón y se dice que es positivo (negativa) si va en dirección paralela (antiparalela).

La forma en la que escribimos las helicidades en la notación de la teoría de helicidad espinorial es la siguiente

$$\epsilon_{-}^{\mu}(p; q) = -\frac{\langle p | \gamma^{\mu} | q \rangle}{\sqrt{2} \langle qp \rangle} \quad \epsilon_{+}^{\mu}(p; q) = -\frac{\langle q | \gamma^{\mu} | p \rangle}{\sqrt{2} \langle qp \rangle}, \quad (2.199)$$

en donde la única condición para que no existan divergencias es que $q \neq p$. A q se le conoce como un spinor de referencia arbitrario, y como veremos más adelante, escogiendo con cuidado la forma del mismo, podemos simplificar los cálculos enormemente, de tal forma que para cada boson, podemos escoger un $q_i \neq p_i$, aunque no podemos cambiar de espinor de referencia si se trata del mismo diagrama. Al sumar sobre todos los diagramas, el resultado final será independiente de la elección de q_i . Notemos que la ecuación de Weyl para masa $m = 0$ nos asegura que $p_{\mu} \epsilon_{\pm}^{\mu}(p) = 0$, que físicamente simplemente quiere decir que la polarización siempre es ortogonal a la dirección de propagación, es decir que en principio no existe una polarización longitudinal $\epsilon_{\pm}^{\mu}(p) \rightarrow \epsilon_{\pm}^{\mu}(p) + C p^{\mu}$.

Ejemplo de la forma de los espinores para la dirección del cuadrimomento en la dirección \hat{k}

Se puede demostrar que en coordenadas esféricas, el vector cuadrimomento puede escribirse como $p^{\mu} = E(1, \text{sen}\theta \cos\phi, \text{sen}\theta \text{sen}\phi, \cos\theta)$, usando el hecho de que

$$P_{ab} = p_{\mu} (\sigma^{\mu})_{ab} = -|p\rangle_a \langle p|_b \quad (2.200)$$

podemos obtener

$$|p\rangle^{\dot{a}} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \text{sen}(\theta/2) e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (2.201)$$

$$\langle p|_{\dot{b}} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} -\text{sen}(\theta/2) e^{i\phi}, \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (2.202)$$

$$|p\rangle^a = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2), \text{sen}(\theta/2) e^{-i\phi} \end{pmatrix} \quad (2.203)$$

$$|p\rangle_a = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \text{sen}(\theta/2) e^{-i\phi} \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (2.204)$$

Veamos que si escogemos el vector de momento en la dirección \hat{k} como $p^{\mu} = E(1, 0, 0, 1)$, y nuestro vector de referencia antiparalelo a p^{μ} como $q^{\mu} = (1, 0, 0, -1)$, tenemos $\theta = 0$ ó $\theta = \pi$, por lo que

nuestros espinores toman la forma

$$|p\rangle = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle q| = \sqrt{2}e^{i\phi}(-1, 0), \quad |p] = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.205)$$

Con lo que podemos obtener la polarización

$$\epsilon^{+\mu} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle q|\gamma^\mu|p]}{\langle qp\rangle} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{E}e^{i\phi} \\ -2\sqrt{E}e^{i\phi} \end{pmatrix} (-1, 0)\sigma^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.206)$$

donde usamos la misma definición para las matrices σ^μ dadas por la ecuación 2.152, de tal forma que

$$\vec{\epsilon}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0) \quad (2.207)$$

De manera análoga podemos obtener

$$\vec{\epsilon}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0) \quad (2.208)$$

Que corresponden a las polarizaciones circulares derecha o izquierda ya conocidas.

que son las helicidades del fotón $h = +1$, $h = -1$ respectivamente. Por supuesto la ecuación de Weyl sin masa nos asegura que $p_\mu \epsilon_{+-}^\mu = 0$.

Nos será de gran utilidad escribir las polarizaciones

$$\not{\epsilon}_-(p; q) = \frac{\sqrt{2}}{[qp]} (|p\rangle [q| + |q\rangle \langle p|), \quad \not{\epsilon}_+(p; q) = \frac{\sqrt{2}}{\langle qp\rangle} (|p] \langle q| + |q] \langle p|) \quad (2.209)$$

Ejemplos de amplitudes en la QED usando el formalismo de helicidad espinorial

Vamos a calcular algunas amplitudes en la QED para ilustrar el uso del formalismo de helicidad espinorial.

Partiendo del lagrangiano en la QED dado como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\Psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\Psi, \quad (2.210)$$

que describe la interacción entre los fermiones sin masa con un fotón dado por el término $A_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$, las reglas de Feynman en éste caso nos dicen que en cada vértice debemos poner un término $ie\gamma^\mu$

Como primer ejemplo, consideremos una amplitud en la que intervienen tres partículas $A_3(f^{h_1}\bar{f}^{h_2}\gamma^{h_3})$, y consideremos que $f = e^-$ y $\bar{f} = e^+$, además vamos a fijar las polarizaciones como $h_1 = -1/2$,

$h_2 = +1/2$, $h_3 = -1$. La amplitud se escribe entonces como

$$\begin{aligned}
 iA_3(f^- \bar{f}^+ \gamma^-) &= \begin{array}{c} \epsilon^- \\ | \\ \text{---} \\ / \quad \backslash \\ e^+ \quad e^- \end{array} \\
 &= \bar{u}_-(p_1) i e \gamma_\mu v_+(p_2) \epsilon_-^\mu(p_3; q_3) = -ie \langle 1 | \gamma_\mu | 2 \rangle = \sqrt{2} i e \frac{\langle 13 \rangle [2q_3]}{[3q_3]} \quad (2.211)
 \end{aligned}$$

En donde se ha usado en el último paso la identidad de Fierz 2.184. Podría pensarse que ésta expresión depende del vector de referencia q_3 , sin embargo no es así. Veamos de que manera podemos deshacernos de éste vector, usando simplemente álgebra espinorial.

- El primer paso para eliminar q_3 de la ecuación 2.211 es multiplicar por $1 = \langle 12 \rangle / \langle 12 \rangle$, de tal forma que en el numerador tenemos una expresión del tipo $\langle 13 \rangle \langle 12 \rangle [2q_3] = -\langle 13 \rangle \langle 1 | 2 | q_3 \rangle$, en donde hemos usando la ecuación 2.183. Ahora usando conservación de momento $p_2 = -p_1 - p_3$ y la ecuación de Weyl para $m = 0$ tenemos que

$$\langle 12 \rangle [2q] = -\langle 1 | p_2 | q_3 \rangle = \langle 1 | (p_1 + p_3) | q_3 \rangle = \langle 1 | 3 | q_3 \rangle = \langle 13 \rangle [3q_3] \quad (2.212)$$

de tal forma que el factor $[3q_3]$ se cancela con el mismo factor que aparece en el denominador de la ecuación 2.211 y nos deja con el resultado final

$$A_3(f^- \bar{f}^+ \gamma^-) = \sqrt{2} e \frac{\langle 13 \rangle}{2[12]} \quad (2.213)$$

En donde se ve claramente que es independiente de q_3

- La ecuación 2.213 depende únicamente de brakets angulares, ésto sucede debido a que vectores de tipo luz $p_\mu p^\mu = 0$ cumplen con $p_1^\mu + p_2^\mu + p_3^\mu = 0$, por lo que

$$\langle 12 \rangle [12] = 2p_1 \cdot p_2 = (p_1 + p_2)^2 = p_3^2 = 0 \quad (2.214)$$

de tal forma que o bien $\langle 12 \rangle = 0$ ó $[12] = 0$. Si suponemos que $\langle 12 \rangle$ es el término que no es igual a cero, entonces $\langle 12 \rangle [23] = \langle 1 | (p_1 + p_3) | 3 \rangle = 0$, de donde necesariamente $[23] = 0$. de forma similar podemos construir un argumento para $[13] = 0$, lo que significa que una amplitud de tres partículas sobre la capa de masa con partículas de tipo luz puede depender solamente de brakets angulares o cuadrados, pero nunca de ambos

Consideremos ahora la dispersión de Compton en la QED $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$, podemos considerar que la amplitud es $A_4(\bar{f} f \gamma \gamma)$ con todas las partículas saliendo y poniendo las etiquetas a los momentos que van de 1 - 4.

$$\begin{aligned}
 iA_4(\bar{f}f\gamma\gamma) &= \begin{array}{c} \text{Diagram 1: } \begin{array}{ccc} & 3 & 4 \\ & \text{wavy} & \text{wavy} \\ & \nearrow & \searrow \\ 1 & \text{---} & 2 \\ & \nwarrow & \nearrow \end{array} \\ &+ \begin{array}{c} \text{Diagram 2: } \begin{array}{ccc} & 4 & 3 \\ & \text{wavy} & \text{wavy} \\ & \nearrow & \searrow \\ 1 & \text{---} & 2 \\ & \nwarrow & \nearrow \end{array} \end{array} \\
 &= (ie)^2 \bar{u}_2 \not{\epsilon}_4 \frac{-i(\not{p}_1 + \not{p}_3)}{(p_1 + p_3)^2} \not{\epsilon}_3 v_1 + (3 \leftrightarrow 4) \quad (2.215)
 \end{aligned}$$

Notamos que tenemos un número impar de matrices gamma entre los dos espinores. Si \bar{f} y f tienen la misma helicidad, entonces el producto espinorial se hace cero, por ejemplo $\langle 2 | \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho | 1 \rangle = 0$, de tal forma que necesitamos que los fermiones tengan helicidades opuestas para que nuestro proceso no sea cero.

Supongamos que ambos fotones tienen helicidad negativa. Entonces el primer diagrama en la ecuación 2.215 involucra un término del tipo $(\not{\epsilon}_- v_{1+}) \propto |3\rangle [q_3 1]$. Si ahora hacemos $|q_3\rangle \propto |1\rangle$, éste diagrama desaparece. Similarmente podríamos escoger $|q_4\rangle \propto |1\rangle$ en el segundo diagrama, de tal forma que $A_4(\bar{f}^+ f^- \gamma^- \gamma^-) = 0$.

Ahora consideremos las helicidades de la forma $A_4(\bar{f}^+ f^- \gamma^+ \gamma^-)$, tenemos

$$A_4(\bar{f}^+ f^- \gamma^+ \gamma^-) = \frac{2e^2 \langle 24 \rangle [q_4 (-1) \langle 1 | - | 3 \rangle \langle 3 |] [q_3] [31]}{\langle 13 \rangle [13] \langle q_3 3 \rangle [q_4 4]} + \frac{2e^2 \langle 2q_3 \rangle [3 (-1) \langle 1 | - | 4 \rangle \langle 4 |] [4] [q_4 1]}{\langle 14 \rangle [14] \langle q_3 3 \rangle [q_4 4]} \quad (2.216)$$

Escogiendo $q_3 = q_4 = p_1$. El segundo diagrama se hace cero ($[q_4 1] = [11] = 0$) y la amplitud se escribe como

$$A_4(\bar{f}^+ f^- \gamma^+ \gamma^-) = -2e^2 \frac{\langle 24 \rangle [13] \langle 31 \rangle [31]}{\langle 13 \rangle [13] [13] [14]} = -2e^2 \frac{\langle 24 \rangle [13]}{\langle 13 \rangle [14]} \quad (2.217)$$

Usando la conservación de momento 2.196, que en éste caso nos dice $\langle 23 \rangle [13] = -\langle 24 \rangle [14]$, la amplitud es

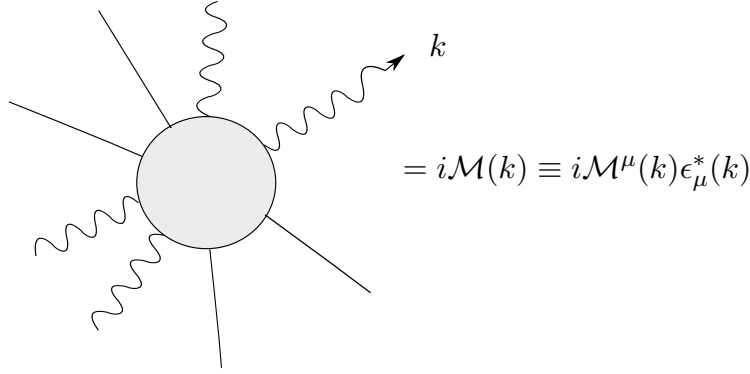
$$A_4(\bar{f}^+ f^- \gamma^+ \gamma^-) = 2e^2 \frac{\langle 24 \rangle^2}{\langle 13 \rangle \langle 23 \rangle} \quad (2.218)$$

La amplitud $A_4(\bar{f}^+ f^- \gamma^- \gamma^+)$ se obtiene intercambiando $(3 \leftrightarrow 4)$ en 2.218.

2.4.3. Identidad de Ward y sus consecuencias

Consideremos un proceso arbitrario en la QED que involucre un fotón que sale con momento k . Ya que la amplitud siempre contiene el término $\epsilon_\mu^*(k)$, hemos omitido éste factor y definimos $\mathcal{M}^\mu(k)$ simplemente como la amplitud \mathcal{M} , la sección transversal será proporcional a

$$\sum_\epsilon |\epsilon_\mu^*(k) \mathcal{M}^\mu(k)|^2 = \sum_\epsilon \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu \mathcal{M}^\mu(k) \mathcal{M}^{\nu*}(k). \quad (2.219)$$



Por simplicidad, vamos a orientar el vector k en el eje z escrito como $k^\mu = (k, 0, 0, k)$, de tal forma que los vectores de polarización sobre los que estamos sumando siempre son ortogonales, por lo que escogemos escribirlos como

$$\epsilon_1^\mu = (0, 1, 0, 0) \quad \epsilon_2^\mu = (0, 0, 1, 0)$$

Con éstas convenciones, podemos escribir la amplitud como la siguiente suma

$$\sum_{\epsilon} |\epsilon_\mu^*(k) \mathcal{M}^\mu(k)|^2 = |\mathcal{M}^1(k)|^2 + |\mathcal{M}^2(k)|^2 \quad (2.220)$$

Si además recordamos que los fotones externos son creados vía el término de interacción $\int d^4x e^{ik \cdot x} j^\mu A_\mu$, donde $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ es el vector corriente de Dirac. Por lo que esperamos que $\mathcal{M}^\mu(k)$ esté dado por los elementos de matriz del campo de Heisenberg j^μ :

$$\mathcal{M}^\mu(k) = \int d^4x e^{ik \cdot x} \langle f | j^\mu(x) | i \rangle \quad (2.221)$$

donde los estados inicial y final incluyen todas las partículas, excepto el fotón que sale. Además sabemos que ésta corriente se conserva $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$. Podemos entonces hacer el producto punto de la ecuación 2.221 con k para obtener

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu(k) = 0. \quad (2.222)$$

Entonces la amplitud \mathcal{M} se desvance cuando el vector de polarización $\epsilon_\mu(k)$ es sustituido por k_μ . A ésta famosa relación 2.222 se le conoce con el nombre de la identidad de Ward, que como hemos visto, es esencialmente un derivado de la conservación de corriente.

La consecuencia inmediata de ésta relación, se manifiesta cuando queremos encontrar la sección transversal dada por la ecuación 2.220, tomando $k = (k, 0, 0, k)$, la identidad de Ward toma la forma

$$k \mathcal{M}^0(k) - k \mathcal{M}^3(k) = 0 \quad (2.223)$$

Entonces $\mathcal{M}^0 = \mathcal{M}^3$, y tenemos

$$\begin{aligned}
 \sum_{\epsilon} \epsilon_{\mu}^* \epsilon_{\nu} \mathcal{M}^{\mu}(k) \mathcal{M}^{\nu*}(k) &= |\mathcal{M}^1|^2 + |\mathcal{M}^2|^2 \\
 &= |\mathcal{M}^1|^2 + |\mathcal{M}^2|^2 + |\mathcal{M}^3|^2 - |\mathcal{M}^0|^2 \\
 &= -g_{\mu\nu} \mathcal{M}^{\mu}(k) \mathcal{M}^{\nu*}(k)
 \end{aligned} \tag{2.224}$$

De donde se puede apreciar que podemos sumar sobre las polarizaciones de los fotones que salen reemplazando $\sum \epsilon_{\mu}^* \epsilon_{\nu}$ por $-g_{\mu\nu}$.

Una interpretación física notable puede extraerse, y es que los fotones longitudinales y de "tipo tiempo" pueden ser sistemáticamente omitidos de nuestros cálculos en la QED, ya que en cualquier evento, las amplitudes al cuadrado al tomar en cuenta éstos componentes, son las mismas que si no los tomáramos. Ésto está demostrado de manera explícita en el espacio de Minkowsky, en el que el signo negativo asociado al estado del fotón de "tipo tiempo" juega un papel esencial en ésta cancelación [61].

Capítulo 3

Nueva metodología

En éste capítulo vamos a profundizar en el formalismo Worldline a nivel árbol, sentado las bases que vamos a necesitar para desarrollar la dispersión de fotones. Empezaremos por describir la ecuación de Bern-Kosower para las líneas abiertas en la QED escalar, de ésta forma podemos empezar a desarrollar casos para diferentes números de fotones [64]. Posteriormente vamos a cambiar de representación, es decir, en lugar de usar las polarizaciones ϵ , vamos a cambiar a los tensores electromagnéticos $f^{\mu\nu}$ que tienen simetría gauge, es decir que son invariantes de norma. De ésta forma podemos desarrollar una fórmula maestra que, como veremos más adelante, nos permitirá conocer con relativa facilidad, la dispersión para un número de fotones incidentes. Por último, podemos imponerles helicidades a los fotones con la ayuda del formalismo de helicidad espinorial, cuya álgebra y resultados más importantes vamos a demostrar en la última sección de éste capítulo.

3.1. Formalismo worldline a nivel de árbol

Como hemos visto, hemos usado el método de integrales de camino para reproducir resultados de la teoría cuántica de campos que involucra diagramas de Feynman, entonces nos hemos enfocado hasta ahora en la aplicación del formalismo worldline para amplitudes de un lazo. Ésto lo hicimos principalmente extrayendo la información de la acción efectiva, que representa la suma sobre todos los posibles caminos, de tal forma que obtenemos una corrección cuántica al Lagrangiano clásico. Además de que, por supuesto, contiene la información para las amplitudes de dispersión. Éste tratamiento contiene ciertas ventajas, por ejemplo, lo único que necesitamos hacer son integrales de tipo gaussiano, usando métodos algebraicos relativamente simples y dividiendo sobre una normalización dada por el determinante.

Ahora, nos gustaría pensar en trayectorias que no son cerradas, por ejemplo la dispersión de Compton o procesos más complicados dados por diagramas de Feynman en los que entran partículas que interactúan con fotones u otras partículas. A éstos tipos de interacciones se les llaman a nivel árbol, por la forma que adoptan los diagramas de Feynman similar a las ramas de un árbol en donde por su puesto, el momento debe conservarse. Dicho de otra forma, son diagramas que no contienen lazos (o que los contienen siempre y cuando las piernas externas sean de partículas y no de fotones), de tal forma que las partículas escalares ahora participan como partículas externas, en lugar de ser partículas virtuales confinadas en lazos.

Entonces si queremos tomar en cuenta los niveles de árbol, el objeto fundamental de interés

será una integral de camino que va a representar el propagador entre dos puntos espaciales llamados x y x' . Así vamos a describir una integral funcional sobre todos los posibles caminos abiertos con puntos extremos fijos. De tal forma que el propagador es una función de éstos puntos, sin embargo, como veremos más adelante, éstos solo jugarán un papel constante en el cálculo, como valores en donde la integral debe ser evaluada. Si ahora le agregamos N cantidad de fotones emitidos o absorbidos por el propagador a lo largo de su camino, nos dará acceso a las amplitudes de dispersión a nivel árbol.

Adelantándonos un poco al cálculo, en algún momento se va a realizar una transformada de Fourier al espacio de momentos, en donde el propagador va a depender únicamente del momento incidente p , mientras el momento de los fotones va sobre la línea propagada. Cuando cambiamos la topología, es decir cuando abrimos los círculos que antes tratábamos, vamos a necesitar condiciones de frontera diferentes sobre la integral de camino, así como una función de Green adecuada. El lector se preguntará, cuales son las ventajas de usar éste formalismo. Una de ellas es, que al estudiar los procesos de árbol usando las técnicas de línea de mundo, podemos hacer un cálculo más eficiente de las amplitudes de dispersión sobre la capa de masa (on-shell), de tal forma que podemos determinar las correcciones a un orden más alto de $g - 2$, así como las autoenergías y su descomposición tensorial fuera de la capa de masa.

Es importante resaltar nuevamente que el objeto primordial para éste formalismo es el propagador, un ente que nos relaciona la interacción entre partículas con los fotones o con otras partículas, ya que es necesario para una descripción completa de las funciones de Green, además de que nos sentiríamos profundamente avergonzados de que éste formalismo no fuera capaz de describir los niveles de árbol, siendo así una teoría incompleta (cosa que no sucede).

Entonces procederemos como sigue, se empieza construyendo el propagador en la teoría escalar de la QED en el vacío, después vamos a extender el resultado obtenido al caso en donde agregamos un campo electromagnético constante de fondo.

3.1.1. Teoría escalar QED

La forma intuitiva de proceder es, pensando en cuantizar el propagador sobre una línea abierta que empieza en el punto x y va al punto x' en el espacio euclideo. La transición de amplitud se escribe como

$$\mathcal{D}^{xx'} = \langle x | [-D^2 + m^2]^{-1} | x' \rangle \tag{3.1}$$

Cuando acoplamos el propagador escalar a un campo electromagnético A^μ la derivada covariante tomará la forma $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. Podemos escribir esto como una integral, si exponenciamos el operador con un parámetro T , al que se llama tiempo propio de Schwinger. La idea es ir evaluando el propagador, en una serie en la que en cada término, interviene un número mayor de fotones, de tal forma que el primer término es el propagador libre, en el segundo término va a interactuar un fotón con la partícula etc. Podemos escribir esto con diagramas como

$$G_A(x, y) = \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \dots$$

Entonces, cuando integremos los campos, generaremos un conjunto infinito de interacciones

entre los otros campos. La clave por supuesto, es la identidad matemática

$$\frac{i}{A + i\epsilon} = \int_0^\infty ds e^{is(A+i\epsilon)} \quad (3.2)$$

Para $A \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$, de tal forma que el propagador toma la forma

$$\mathcal{D}^{xx'} = \int_0^\infty dT \langle x | e^{-T[-D^2+m^2]} | x' \rangle \quad (3.3)$$

Vemos ahora que el propagador es una integral de camino sobre todas las trayectorias de x' a x que puede recorrer la partícula en un tiempo T , si interactúa con un campo electromagnético de fondo, toma la forma de 2.78

$$D^{xx'}[A] = \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau [\dot{x}^2/4 + i\epsilon \dot{x} \cdot A[x(\tau)]]} \quad (3.4)$$

Eventualmente vamos a pasar al espacio de momentos, ya que el propagador toma una forma mucho más sencilla como hemos visto, lo cuál hacemos con una transformada de Fourier

$$D^{pp'}[A] := \int d^D x \int d^D x' D^{xx'}[A] e^{ip \cdot x + ip' \cdot x'} \quad (3.5)$$

Es importante notar las diferencias entre los propagadores, ya que ahora las condiciones de frontera cambian, ya que no estamos sobre una vuelta, no existe simetría con respecto a los puntos inicial y final $\tau = 0, T$, de tal forma que el factor $\frac{1}{T}$ ya no aparece. El campo potencial electromagnético va a tomar la forma

$$A_\mu[x(\tau)] = \sum_{i=1}^N \epsilon_{\mu i} e^{ik_i \cdot x(\tau)} \quad (3.6)$$

De ésta forma, igual que antes, vamos a calcular las amplitudes de dispersión para los fotones, pero ésta vez a nivel de árbol.

Tal como lo hacen en [65], vamos a escribir la relación que deriva una regla del tipo Bern-Kosower para la QED escalar, empezando de la teoría cuántica de campos, integrando sobre $x(\tau)$ y los términos resultantes estarán dados en términos de las funciones de correlación. Se usa la integración por partes para reducir el número de términos independientes antes de integrar sobre el tiempo propio. De ésta forma los términos sobre la superficie pueden ser omitidos, de tal forma que los términos escalares estarán sobre la capa.

Además nos daremos cuenta de la relación que existe entre la integral de camino y los diagramas de Feynman.

Si seguimos la metodología de las ecuaciones 2.81 - 2.89, llegaremos a una expresión similar para el propagador en el espacio de posiciones escrito como

$$\mathcal{D}^{xx'}[A] = (-i\epsilon)^N \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \frac{\dot{x}^2}{4}} \prod_{i=1}^N V_{scal}^\gamma[k_i, \epsilon_i] \quad (3.7)$$

Para las integrales de camino abiertas, al igual que para las trayectorias cerradas, vamos cambiar

las condiciones de frontera por un camino clásico con ayuda de una parametrización, esto lo hacemos expandiendo la trayectoria entre los puntos fijos x', x . El camino elegido será una línea recta entre los puntos inicial y final escrita como

$$x(\tau) = x' + (x - x')\frac{\tau}{T} + q(\tau) := \hat{x}(\tau) + q(\tau) \quad (3.8)$$

en donde $q(\tau)$ representa el desvío de la línea recta. De tal forma que cambiamos la integral de camino sobre $x(\tau)$ a una sobre $q(\tau)$, por supuesto exigimos que q se haga cero sobre el punto inicial y final $q(0) = 0 = q(T)$ (CFD)

$$\int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau)\Omega[x(\tau)] \rightarrow \int_{q(0)=0}^{q(T)=0} \mathcal{D}q(\tau)\Omega[\hat{x}(\tau) + q(\tau)] \quad (3.9)$$

Para cualquier trayectoria "bien comportada" $x(\tau)$.

El término cinético de la ecuación 3.7, con la parametrización de 3.8 se vuelve

$$-\int_0^T d\tau \frac{\dot{x}^2}{4} = -\frac{(x - x')^2}{4T} - \int_0^T d\tau \frac{\dot{q}^2}{4} \quad (3.10)$$

de donde se puede ver fácilmente que el término que involucra el producto $\hat{x}q$ es igual a cero, haciendo integración por partes e imponiendo las condiciones de frontera sobre q .

Además, escribiendo los vectores de polarización como una exponencial 2.87, podemos escribir

$$V_{scal}^\gamma[k, \epsilon] \rightarrow \int_0^T d\tau e^{ik \cdot \hat{x}(\tau) + \frac{\epsilon}{T} \cdot (x - x') + ik \cdot q(\tau) + \epsilon \cdot \dot{q}} \Big|_{lin \epsilon} \quad (3.11)$$

Así como lo hicimos en el lazo cerrado, los términos que no dependen de q pueden salir de la integral, mientras los términos lineales pueden ser reescritos con ayuda de una corriente $j(\tau) = \sum_{i=1}^N (i\delta(\tau - \tau_i)k_i - \delta'(\tau - \tau_i)\epsilon_i)$.

De tal forma que el propagador para N fotones se escribe como

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{xx'}[k_1, \epsilon_1; \dots; k_N, \epsilon_N] &= (-ie)^N \int_0^T dT e^{-m^2 T} e^{-\frac{(x-x')^2}{4T}} \prod_{i=1}^N \int_0^T d\tau_i e^{\sum_{i=1}^N [ik_i \hat{x}(\tau) + \frac{\epsilon_i}{T} \cdot (x - x')]} \\ &\int_{q(0)=0}^{q(T)=0} \mathcal{D}q(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left[\frac{\dot{q}^2}{4} - iej(\tau)q(\tau) \right]} \Big|_{lin \epsilon_1, \dots, \epsilon_N} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Aquí, $lin \epsilon_1, \dots, \epsilon_N$, nos dice que tenemos que tomar siempre y únicamente las partes lineales que contengan ϵ al término lineal y obviamente, dependiendo de N . De la misma forma que el caso de lazo cerrado, vamos a tener una normalización para la partícula libre, escrita como

$$\int_{q(0)=0}^{q(T)=0} \mathcal{D}q(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \frac{\dot{q}^2}{4}} = Det\left[-\frac{1}{4} \frac{d^2}{d\tau^2}\right]_{DBC} = (4\pi T)^{-\frac{D}{2}} \quad (3.13)$$

Además de que se debe cumplir

$$\langle q^\mu(\tau)q^\nu(\tau') \rangle = -2\delta^{\mu\nu} \Delta(\tau, \tau') \quad (3.14)$$

Donde Δ es una función relacionada con la función de Green salvo un factor de 2 escrita como

$$\Delta(\tau, \tau') := \frac{1}{2}|\tau - \tau'| - \frac{1}{2}(\tau + \tau') + \frac{\tau\tau'}{T} \quad (3.15)$$

Observamos también que satisface las condiciones de frontera al hacerse cero cuando imponemos las mismas. Es importante notar, que debido a que ya no tenemos simetría traslacional en la parametrización de la trayectoria (no del espacio tiempo), por no formar una trayectoria cerrada, las condiciones de frontera hacen que ésta función no dependa de $\tau - \tau'$, así que evaluando en $\tau = \tau'$ no se hace cero, $\Delta(\tau, \tau) = \tau \left(\frac{\tau}{T} - 1\right)$, lo que nos obliga a distinguir entre derivadas sobre $\tau(\tau')$ con un \bullet a la izquierda (derecha). Escrito explícitamente toma la forma

$$\bullet\Delta(\tau, \tau') = \frac{\tau'}{T} + \frac{1}{2}\sigma(\tau - \tau') - \frac{1}{2} \quad (3.16)$$

$$\bullet\Delta^\bullet(\tau, \tau') = -\delta(\tau - \tau') + \frac{1}{T} \quad (3.17)$$

donde $\sigma(\tau - \tau')$ es la función que nos da un signo sobre la variable mayor. Completando el cuadrado en 3.12 y siguiendo los mismos pasos dados por las ecuaciones 2.106 a 2.109 el propagador puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{xx'} &= (-ie)^N \int_0^T dT (4\pi T)^{-\frac{D}{2}} e^{-m^2 T} e^{-\frac{(x-x')^2}{4T}} \prod_{i=1}^N \int_0^T d\tau_i e^{\sum_{i=1}^N [ik_i \cdot (x' + (x-x')\frac{\tau_i}{T}) + \frac{\epsilon_i}{T} \cdot (x-x')]} \\ &\times e^{\sum_{i,j=1}^N [\Delta_{ij} k_i \cdot k_j - 2i^\bullet \Delta_{ij} \epsilon_i \cdot k_j - \bullet \Delta_{ij}^\bullet \epsilon_i \cdot \epsilon_j]} \Big|_{\text{lin } \epsilon_1 \dots \epsilon_N} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Donde se usa la notación $\Delta_{ij} := \Delta(\tau_i, \tau_j)$. Recordemos que es más fácil trabajar en el espacio de momento, ésto lo hacemos con la ayuda de la ecuación 3.5, además de hacer un cambio de variable que nos resultará útil dado por $x_- = x - x'$ y $x_+ = \frac{1}{2}(x + x')$ que representan un desplazamiento relativo entre los puntos extremos, y el punto medio de la línea respectivamente. Notando que $e^{ip \cdot x + ip' \cdot x'} = e^{2(ip \cdot x + ip' \cdot x')} = e^{2ix_+ \cdot (p+p') + ix_- \cdot (p-p')}$, y que

$$\int d^D x_+ e^{ix_+ \cdot (p+p' + \sum_{i=1}^N k_i)} = (2\pi)^D \delta^D(p + p' + K) \quad (3.19)$$

En donde definimos $K := \sum_{i=1}^N k_i$, físicamente estamos haciendo la integral sobre el centro de masa, que nos arroja simplemente una delta. Podemos escribir una fórmula maestra similar a la que encontramos para las amplitudes cerradas dada por la ecuación 2.111,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{pp'}[k_1, \epsilon_1; \dots; k_N, \epsilon_N] &= (2\pi)^D \delta^D(p + p' + K) (-ie)^N \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \prod_{i=1}^N \int_0^T d\tau_i e^{-T(p + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N (k_i \tau_i - i\epsilon_i))^2} \\ &\times e^{\sum_{i,j=1}^N [\Delta_{ij} k_i \cdot k_j - 2i^\bullet \Delta_{ij} \epsilon_i \cdot k_j - \bullet \Delta_{ij}^\bullet \epsilon_i \cdot \epsilon_j]} \Big|_{\text{lin } \epsilon_1 \dots \epsilon_N} \end{aligned} \quad (3.20)$$

En donde es importante notar que es una función de p , k_i y ϵ_i

3.1.2. Dispersiones para los primeros N

Vamos a probar el propagador dado por la ecuación 3.20 para los primeros $N = 0, 1, 2, 3$, y compararlos con el método estándar de TCC para encontrar la relación y verificar que el método que se ha desarrollado es efectivamente correcto. Veamos qué obtenemos cuando consideramos el propagador de momento con $N = 0$

$$\mathcal{D}^{pp'} = (2\pi)^D \delta^D(p + p') \int_0^\infty dT e^{-(p^2 + m^2)T} = \frac{(2\pi)^D \delta^D(p + p')}{p^2 + m^2} \quad (3.21)$$

Por supuesto, éste resultado, (ya que no interviene ningún fotón, al hacer el momento k_i de todos igual a cero) se interpreta como el propagador del vacío "con las piernas", de tal forma que podemos intuir, que en los próximos resultados, es decir para N mayores, vamos a obtener las piernas externas escalares, por lo que tendremos que multiplicar por las mismas para calcular las amplitudes de dispersión

$$i\hat{\mathcal{D}}^{pp'} := (p^2 + m^2)\mathcal{D}^{pp'}(p'^2 + m^2) \quad (3.22)$$

Como un adelanto, vamos a resaltar una cualidad del método formalismo de línea de mundo. Además de ser un método puramente algebraico en donde la pericia reside en la experiencia para manipular las integrales y descartar las que terminan por no influir en el cálculo, observaremos que se mantiene la simetría de permutación bajo el cambio en la posición de los fotones externos, lo que quiere decir que no tenemos que preocuparnos de la posición en la que vienen los fotones, como en el formalismo estándar, en donde calculamos diferentes diagramas que corresponden a distintos ordenamientos y luego sumamos sus contribuciones.

Vamos ahora para el caso $N = 1$, antes de comenzar vamos a recordar qué forma toman las ecuaciones 3.15, 3.16 y 3.17 para éste caso en particular, así como que implica conservación de momento para un fotón. Lo anterior puede escribirse en ecuaciones como

$$\Delta_{11} = \left(-\tau + \frac{\tau^2}{T}\right), \quad \bullet\Delta_{11} = \left(\frac{\tau}{T} - \frac{1}{2}\right), \quad \bullet\Delta_{11}^\bullet = \left(\delta(0) + \frac{1}{T}\right) \quad (3.23)$$

$$p + p + k = 0 \quad (3.24)$$

De tal forma que la ecuación para un fotón 3.20 toma la forma

$$D^{pp}[k, \epsilon] = (2\pi)^D \delta^D(p + p + k)(-ie) \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_0^T d\tau e^{-T(p + \frac{1}{T}(k\tau - i\epsilon))^2} \\ \times e^{\Delta_{11}k^2 - 2i\bullet\Delta_{11}\epsilon k - \bullet\Delta_{11}^\bullet\epsilon^2} \quad (3.25)$$

Haciendo simplificaciones en la exponencial e introduciendo las ecuaciones 3.23 y 3.24 en 3.25,

obtenemos que las integrales pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty dT e^{-m^2 T - T p^2 + i\epsilon 2p + i\epsilon k} \int_0^T d\tau e^{-\tau(k^2 + 2pk)} e^{-\epsilon^2 \delta(0)} \Big|_{\text{lin. } \epsilon} \\
 &= i\epsilon(2p + k) \int_0^\infty dT e^{-T(m^2 + p^2)} \int_0^T d\tau e^{-\tau((k+p)^2 - p^2)} \\
 &= i\epsilon(2p + k) \int_0^\infty dT \frac{e^{-T(m^2 + p^2)}}{p^2 - p'^2} \{e^{-T(p^2 - p'^2)} - 1\} \\
 &= \frac{i\epsilon(2p + k)}{(m^2 + p^2)(m^2 + p'^2)} \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

De donde observamos claramente que cortando las piernas exteriores, obtenemos la expresión para el vértice de un proceso escalar-fotón-escalar, representado por la figura de la izquierda en la Fig 3.1

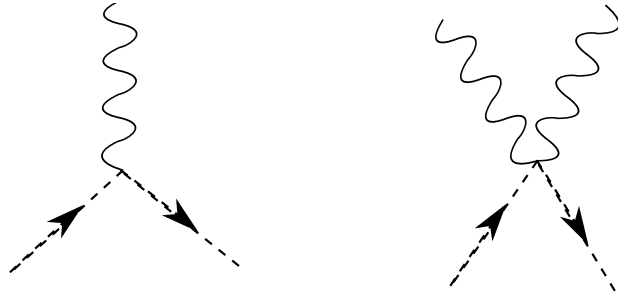


Figura 3.1: En ésta figura se muestra del lado izquierdo la dispersión de un proceso escalar-fotón-escalar, mientras del lado derecho interactúan dos fotones, mejor conocido como el diagrama de la gaviota

El siguiente paso es pensar en el proceso $N = 2$, aquí vamos a tomar ordenes lineales de ϵ $\mathcal{O}(\epsilon_1, \epsilon_2)$, es decir, los únicos términos que tenemos que tomar en cuenta son de la forma $\epsilon_1 \epsilon_2$, todos los demás términos ($\epsilon_1^2, \epsilon_1 \epsilon_2^2$, etc) van a ser descartados, según desarrollamos nuestra fórmula 3.20. Así entonces toma la forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_2^{pp'} &= -2e^2 \epsilon_{1\mu} \epsilon_{2\nu} \int_0^\infty dT \int_0^T \int_0^T d\tau_1 d\tau_2 \left[\delta^{\mu\nu} \delta_{12} - \frac{1}{2} (\Delta p + \sigma_{21} k_2)^\mu (\Delta p + \sigma_{12} k_1)^\nu \right] \\
 &\quad \times e^{-T(p^2 + m^2) + |\tau_1 - \tau_2| k_1 \cdot k_2 - \Delta p \cdot (\tau_1 k_1 + \tau_2 k_2)}, \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

donde $\Delta p := (p - p')$, $\delta_{ij} := \delta(\tau_i - \tau_j)$ y $\sigma_{ij} = \text{sign}(\tau_i - \tau_j)$ (el signo que resulta entre la diferencia $\tau_i - \tau_j$) son definidos para hacer más compacta la expresión matemática. Uno puede sentarse y desarrollar las siguientes integrales, que con un poco de paciencia y atención nos arrojan los

resultados (o con la ayuda de algún software especializado)

$$\int_0^\infty dT e^{-(m^2+p^2)T} \int_0^T d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 e^{k_1 \cdot k_2 (\tau_1 - \tau_2) - (p-p') \cdot (\tau_1 k_1 + \tau_2 k_2)} = \frac{1}{(m^2+p^2)[m^2+(p+k_1)^2](m^2+p'^2)} \quad (3.28)$$

$$\int_0^\infty dT e^{-(m^2+p^2)T} \int_0^T d\tau_1 \int_{\tau_1}^T d\tau_2 e^{k_1 \cdot k_2 (\tau_2 - \tau_1) - (p-p') \cdot (\tau_1 k_1 + \tau_2 k_2)} = \frac{1}{(m^2+p^2)[m^2+(p+k_2)^2](m^2+p'^2)} \quad (3.29)$$

$$\int_0^\infty dT e^{-(m^2+p^2)T} \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 \delta(\tau_1 - \tau_2) e^{k_1 \cdot k_2 |\tau_1 - \tau_2| - (p-p') \cdot (\tau_1 k_1 + \tau_2 k_2)} = \frac{1}{(m^2+p^2)(m^2+p'^2)} \quad (3.30)$$

que serán las necesarias para obtener una expresión en 3.27. Hasta aquí algunos comentarios importantes; el primero tiene que ver con la conservación del momento $p + p' + k_1 + k_2 = 0$, en donde consideramos todos los momentos entrantes, ésto es importante, ya que en el cálculo se requiere consenso en los signos, además de que se debe utilizar dicha conservación para anular términos, el segundo concierne a las integrales 3.28 - 3.30, que como se puede apreciar, no son más que los propagadores de Feynman escalares que forman la amplitud en la teoría TCC estándar, el tercer comentario tiene que ver con el proceso para 2 fotones, que es simplemente el efecto Compton a nivel de árbol. Truncando las piernas escalares externas, podemos escribir el propagador como

$$\begin{aligned} i\hat{\mathcal{D}}_2^{pp'} &= -2e^2 \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 + e^2 [\epsilon_1 \cdot \Delta p \epsilon_2 \cdot \Delta p - \epsilon_1 \cdot k_2 \epsilon_2 \cdot k_2] \left(\frac{1}{(p+k_1)^2 + m^2} + \frac{1}{(p+k_2)^2 + m^2} \right) \\ &\quad + e^2 [\epsilon_1 \cdot \Delta p \epsilon_2 \cdot \Delta p - \epsilon_1 \cdot k_2 \epsilon_2 \cdot k_2] \left(\frac{1}{(p+k_1)^2 + m^2} - \frac{1}{(p+k_2)^2 + m^2} \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

El primer término $-2e^2 \epsilon_1 \cdot \epsilon_2$ viene de la δ_{12} , y está relacionado con el diagrama de la gaviota 3.1. Ahora bien, nuestro cálculo puede reducirse aún mas sobre la capa de masa en donde $k_1^2 = k_2^2 = 0$ y $\epsilon_1 \cdot k_1 = k_2 \cdot \epsilon_2 = 0$, mientras $p^2 = -m^2 = p'^2$.

Usando las siguientes igualdades

$$p' + k_1 = -(p + k_2) \quad (3.32)$$

$$(p + k_1)^2 + m^2 = 2p \cdot k_1 \quad (3.33)$$

$$(p + k_2)^2 + m^2 = 2p \cdot k_2 \quad (3.34)$$

$$\epsilon_1 \cdot \Delta p \epsilon_2 \cdot \Delta p - \epsilon_1 \cdot k_2 \epsilon_2 \cdot \Delta p = 4\epsilon_1 \cdot p' \epsilon_2 \cdot p' + \epsilon_1 \cdot k_2 \epsilon_2 \cdot 2p' + \epsilon_1 \cdot 2p' \epsilon_2 \cdot k_1 \quad (3.35)$$

$$\epsilon_1 \cdot \Delta p \epsilon_2 \cdot k_1 - \epsilon_1 \cdot k_2 \epsilon_2 \cdot k_1 = \epsilon_2 \cdot 2p' \epsilon_1 \cdot k_2 - \epsilon_1 \cdot 2p' \epsilon_2 \cdot k_1 \quad (3.36)$$

$$p \cdot (k_2 + k_1) + p \cdot (k_2 - k_1) = 2p \cdot k_2 \quad (3.37)$$

$$p \cdot (k_2 + k_1) - p \cdot (k_2 - k_1) = 2p \cdot k_1 \quad (3.38)$$

La suma de los dos últimos términos dependientes de Δp es

$$\begin{aligned}
 & \frac{4}{2p \cdot k_1 2p \cdot k_2} (2\epsilon_1 \cdot p' \epsilon_2 \cdot p' + \epsilon_1 \cdot k_2 \epsilon_1 \cdot k_2 \epsilon_2 \cdot p' + \epsilon_1 \cdot p' \epsilon_2 \cdot k_1 p \cdot (k_2 + k_1)) \\
 & + (\epsilon_2 \cdot p' \epsilon_1 \cdot k_2 - \epsilon_1 \cdot p' \epsilon_2 \cdot k_1) p \cdot (k_2 - k_1) \\
 & = \frac{1}{p \cdot k_1 p \cdot k_2} \{2\epsilon_1 \cdot p' \epsilon_2 \cdot p' p \cdot (k_1 + k_2) + \epsilon_1 \cdot k_2 \epsilon_2 \cdot p' (p \cdot (k_2 + k_1) + p \cdot (k_2 - k_1)) \\
 & + \epsilon_1 \cdot p' \epsilon_2 \cdot k_2 (p \cdot (k_1 + k_2) - p \cdot (k_2 - k_1))\} \\
 & = 2 \left(\frac{\epsilon_1 \cdot p'}{p \cdot k_2} (\epsilon_2 \cdot (p' + k_1)) + \frac{\epsilon_2 \cdot p'}{p \cdot k_1} (\epsilon_1 \cdot (p' + k_2)) \right) \\
 & = -2 \left\{ \frac{\epsilon_1 \cdot p'}{p \cdot k_2} (\epsilon_2 \cdot p) + \frac{\epsilon_2 \cdot p'}{p \cdot k_1} (\epsilon_1 \cdot p') \right\} \tag{3.39}
 \end{aligned}$$

usando tensores, la ecuación 3.39 puede escribirse como

$$-2\epsilon_{1\mu} \left\{ \frac{p'^\mu p^\nu}{p \cdot k_2} + \frac{p^\mu p'^\nu}{p \cdot k_1} \right\} \epsilon_{2\nu} \tag{3.40}$$

Entonces, el término completo 3.32 se escribe

$$i\hat{\mathcal{D}}_2^{pp'} = -2e^2 \epsilon_{1\mu} \left[\frac{p'^\mu p^\nu}{p \cdot k_2} + \frac{p^\mu p'^\nu}{p \cdot k_1} + \eta^{\mu\nu} \right] \epsilon_{2\nu} \tag{3.41}$$

que concuerda con el resultado para la teoría cuántica de campos, escrita en la ecuación 2.61. Los diagramas de Feynman asociados corresponden a la Figura 4.2.

3.2. Invarianza de norma - cambio a la representación R

La idea central de ésta representación [62], es cambiar la dependencia de los operadores de vértice de ϵ_i a los tensores electromagnéticos f_i . Ya que el potencial electromagnético se escribe como una suma de ondas planas $A_\mu(x) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i^\mu e^{ik_i \cdot x}$ y tomamos únicamente las contribuciones lineales en ϵ_i . Los fotones involucrados en cada vértice en toda la trayectoria que recorre la partícula están representados matemáticamente por los operadores de vértice

$$V_{scal}[k, \epsilon] = \int_0^T d\tau \epsilon \cdot \dot{x}(\tau) e^{i \cdot x(\tau)} \tag{3.42}$$

entonces simplemente cambiamos la dependencia de cada uno de éstos operadores de vértice a términos que ahora van a depender del tensor de campo electromagnético, ya que tenemos libertad de norma en el potencial electromagnético por una derivada total $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Delta$, que es equivalente a escribir en términos de la polarización de los fotones como $\epsilon_\mu \rightarrow \epsilon_\mu + \lambda k_\mu$, donde λ es una constante y k_μ es el vector de momento del fotón, podemos escribir los operadores de

vértice con una derivada total extra como

$$\begin{aligned}
 V_{scal}[k, \epsilon; r] &:= V_{scal}[k, \epsilon] + c \int \frac{d}{d\tau} e^{ik \cdot x} d\tau \\
 &= V_{scal}[k, \epsilon] + ic \int k \cdot \dot{x} e^{ik \cdot x} d\tau \\
 &= (\epsilon + ick) \cdot \int \dot{x} e^{ik \cdot x} d\tau
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

si ahora escogemos $c = b\epsilon \cdot r$ con $b = cte$ tenemos

$$\begin{aligned}
 &= \int (\epsilon + ib\epsilon \cdot rk) \cdot \dot{x} e^{ik \cdot x} d\tau \\
 &= \int \left(\frac{\epsilon \cdot \dot{x} k \cdot r - \epsilon \cdot rk \cdot \dot{x}}{k \cdot r} \right) e^{ik \cdot x} d\tau \quad \text{en donde escogimos el valor de } b = i/k \cdot r \\
 &= \int \frac{r \cdot (k\epsilon - \epsilon k) \cdot \dot{x}}{k \cdot r} e^{ik \cdot x} d\tau = \int \frac{r \cdot f \cdot \dot{x}}{k \cdot r} e^{ik \cdot x} d\tau
 \end{aligned}$$

El argumento que es usado en el formalismo worldline para agregar una derivada total es algebraico, vemos que el término

$$\int_0^T \frac{d}{d\tau} e^{ik \cdot x} d\tau = e^{ik \cdot x'} - e^{ik \cdot x}, \tag{3.44}$$

en una trayectoria cerrada en donde $x = x'$ es igual a cero. En el caso de la línea abierta, es diferente de cero, sin embargo como veremos más adelante, este término no sobrevive cuando amputamos las piernas externas.

Para ilustrar el último punto, pensemos en la dispersión escrita como

$$\hat{D} = (p'^2 + m^2) \frac{A}{(p'^2 + m^2)(p^2 + m^2)} (p^2 + m^2) \tag{3.45}$$

El nuevo término con el vértice modificado en la línea abierta nos arroja dos términos extras cuando transformamos al espacio de Fourier

$$e^{ik_i \cdot x} \rightarrow \frac{B_1}{((p^2 + k_i)^2 + m^2)(p^2 + m^2)} \tag{3.46}$$

$$e^{ik_i \cdot x'} \rightarrow \frac{B_2}{((p^2 + k_i)^2 + m^2)(p^2 + m^2)} \tag{3.47}$$

Sin embargo, observemos que las nuevas contribuciones a la dispersión en la capa de masa $p^2 = p'^2 = -m^2$ son cero, ya que

$$\hat{D} = A + \frac{B_1(p^2 + m^2)}{((p^2 + k_i)^2 + m^2)} + \frac{B_2(p'^2 + m^2)}{((p'^2 + k_i)^2 + m^2)(p^2 + m^2)} = A \tag{3.48}$$

cuando imponemos las condiciones de capa de masa.

El vector r , llamado vector de referencia, es un vector arbitrario, con la única restricción de que $k \cdot r \neq 0$, éste vector de referencia parece tener una relación directa con los vectores $[q]$ en el formalismo de helicidad espinorial, aunque la relación explícita no entra en éste trabajo. Vemos

que podemos usar simplemente el cambio

$$\epsilon_i \rightarrow \frac{r \cdot f_i}{k \cdot r}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.49)$$

en el propagador escalar para N fotones $D_N^{pp'}$, de tal forma que la fórmula maestra tipo Bern Kosower, usando las siguientes definiciones $k_0 = p'$, $k_{N+1} = p$, $\tau_0 = T$, $\tau_{N+1} = \epsilon_0 = \epsilon_{N+1} = 0$ será

$$D_N^{p'p}(k_1, \epsilon_1; \dots; k_N; \epsilon_N) = (-ie)^N \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \quad (3.50)$$

$$\times \int_0^T \prod_{i=1}^N d\tau_i e^{\sum_{ij=0}^{N+1} \left[\frac{1}{2} |\tau_i - \tau_j| k_i \cdot k_j - i \text{sign}(\tau_i - \tau_j) \epsilon_i \cdot k_j + \delta(\tau_i - \tau_j) \epsilon_i \cdot \epsilon_j \right]} \Big|_{\epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_N}$$

que puede ser escrita en términos de los tensores f como

$$D_N^{p'p}(k_1, \epsilon_1; r_1 \dots; k_N; \epsilon_N, r_N) = (-ie)^N \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \quad (3.51)$$

$$\times \int_0^T \prod_{i=1}^N d\tau_i e^{\sum_{ij=0}^{N+1} \left[\frac{1}{2} |\tau_i - \tau_j| k_i \cdot k_j - i \text{sign}(\tau_i - \tau_j) \frac{r_i \cdot f_i \cdot k_j}{r_i \cdot k_i} - \delta(\tau_i - \tau_j) \frac{r_i \cdot f_i \cdot f_j \cdot r_j}{r_i \cdot k_i r_j \cdot k_j} \right]} \Big|_{f_1 f_2 \dots f_N}$$

Una fórmula en ésta representación para el caso de lazo cerrado puede ser la encontrada en [66].

3.2.1. Fórmula maestra en la representación \mathbf{R}

Vamos a simplificar la ecuación 3.51, centrándonos en la sumatoria y productoria, vamos a definir

$$e^{(\cdot)} \equiv e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{N+1} |\tau_i - \tau_j| k_i \cdot k_j} = e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{N+1} |\tau_{ij}| k_{ij}} \quad (3.52)$$

pero la sumatoria puede descomponerse usando las siguientes igualdades $\tau_0 = T$, $k_0 = p'$, $k_{N+1} = p$, $\tau_{N+1} = \epsilon_0 = \epsilon_{N+1} = 0$, con la convención de escribir un único término de la suma entre

paréntesis (i)

$$\sum_{i,j=0}^{N+1} |\tau_{ij}| k_{ij} = \left\{ \sum_{i=1}^N (j=0) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N + \sum_{i=1}^N (j=N+1) + (i=0) \sum_{j=0}^{N+1} + (i=N+1) \sum_{j=0}^{N+1} \right\} |\tau_{ij}| k_{ij} \quad (3.53)$$

$$= (A + B) |\tau_{ij}| k_{ij}$$

$$\text{donde } A = \sum_{i=1}^N (j=0) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N + \sum_{i=1}^N (j=N+1), \quad B = (i=0) \sum_{j=0}^{N+1} + (i=N+1) \sum_{j=0}^{N+1}$$

Entonces

$$\begin{aligned} A |\tau_{ij}| k_{ij} &= \sum_{i,j=1}^N |\tau_{ij}| k_{ij} + \sum_{i=1}^N |\tau_{ij}| k_{i0} + \sum_{i=1}^N |\tau_{i(N+1)}| k_{i(N+1)} \\ &= \sum_{i,j=1}^N |\tau_{ij}| k_{ij} + \sum_{i=1}^N |\tau_i - T| k_i \cdot p' + |\tau_i| k_i \cdot p \\ B |\tau_{ij}| k_{ij} &= \left\{ \sum_{j=1}^N (i=0 + i=N+1) + (i=0, j=0) + (i=0, j=N+1) + (j=0, i=N+1) + (j=N+1, i=N+1) \right\} |\tau_{ij}| k_{ij} \quad (3.54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^N |\tau_0 - \tau_j| k_0 \cdot k_j + \sum_{j=1}^N |\tau_{N+1} - \tau_j| k_{N+1} \cdot k_j \\ &\quad \times k_j + |\tau_0 - \tau_{N+1}| k_0 \cdot k_{N+1} + |\tau_{N+1} - \tau_0| k_{N+1} \cdot k_0 \\ &= \left(\sum_{j=1}^N |\tau_0 - \tau_j| k_0 \cdot k_j + \sum_{j=1}^N |\tau_{N+1} - \tau_j| k_{N+1} \cdot k_j \right) |T| p \cdot p' \end{aligned} \quad (3.55)$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} (A + B) |\tau_{ij}| k_{ij} &= \sum_{i,j=1}^N + 2 \left\{ \sum_{i=1}^N |\tau_i - T| k_i \cdot p' + |\tau_i - 0| k_i \cdot p + T p \cdot p' \right\} \\ &= \sum_{i,j=1}^N |\tau_i - \tau_j| k_i \cdot k_j + 2 \sum_{i=1}^N [\tau_i p + (T - \tau_i) p'] \cdot k_i + 2 T p \cdot p' \quad (3.56) \end{aligned}$$

Por último, observemos que usando conservación de momento $p = -p' - \sum k_i$ podemos escribir

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N [\tau_i p + (T - \tau_i) p'] \cdot k_i + T p \cdot p' \\ &= \sum \left\{ (\tau_i p + T p' - \tau_i p') \cdot k_i - T p' (p' + \sum k_i) \right\} \\ &= -T p'^2 + \sum \left\{ (\tau_i p + T p' - \tau_i p' - T p') \cdot k_i \right\} \\ &= -T p'^2 + \sum \tau_i (p - p') \cdot k_i \quad (3.57) \end{aligned}$$

Por lo que la ecuación 3.52 pasa a escribirse como

$$\begin{aligned} e^{(\cdot)} &= e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N |\tau_{ij}| k_{ij} + \sum_{i=1}^N [\tau_i p + (T - \tau_i) p'] \cdot k_i + T p \cdot p'} \\ &= e^{-T p'^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N |\tau_i - \tau_j| k_i \cdot k_j + (p - p') \cdot \sum_{i=1}^N k_i \tau_i} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Así, podemos reescribir la fórmula maestra 3.51 como

$$D_N^{p'p}(k_1, \epsilon_1; r_1 \cdots k_N, \epsilon_N; r_N) = (-e)^N \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_0^T \prod_{i=1}^N d\tau_i \bar{R}_N e^{(\cdot)} \quad (3.59)$$

donde por supuesto

$$\bar{R}_N = (i)^N e^{\sum_{i,j=0}^{N+1} \left[-i \operatorname{sign}(\tau_i - \tau_j) \frac{r_i \cdot f_i \cdot k_j}{r_i \cdot k_i} - \delta(\tau_i - \tau_j) \frac{r_i \cdot f_i \cdot f_j \cdot r_j}{r_i \cdot k_i r_j \cdot k_j} \right]} \Big|_{f_1 f_2 \cdots f_N} \quad (3.60)$$

Debemos aclarar que para simplificar los cálculos siguientes, en éste trabajo podemos usar indistintamente las siguientes igualdades para $\operatorname{sign}(\tau_i - \tau_j) = \sigma_{ij}$ y $\delta(\tau_i - \tau_j) = \delta_{ij}$

3.2.2. Ejemplos de R para N=1, 2, 3, 4

Obtengamos ahora, los primeros resultados para diferentes R_N , de tal forma que podamos calcular la dispersión de fotones con el formalismo worldline, y compararlo con la teoría estándar.

Comencemos aplicando la fórmula para encontrar el término que corresponde a

Caso N=1

$$\begin{aligned} \bar{R}_1 &= i e^{\sum_{i,j=0}^2 \left[-i \operatorname{sign}(\tau_i - \tau_j) \frac{r_i \cdot f_i \cdot k_j}{r_i \cdot k_i} - \delta(\tau_i - \tau_j) \frac{r_i \cdot f_i \cdot f_j \cdot r_j}{r_i \cdot k_i r_j \cdot k_j} \right]} \Big|_{f_1} \\ &= i \sum_{j=0}^2 \left[-i \operatorname{sign}(\tau_1 - \tau_j) \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_j}{r_1 \cdot k_1} \right] \\ &= \operatorname{sign}(\tau_1 - T) \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot p'}{r_1 \cdot k_1} + \operatorname{sign}(\tau_1) \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot p}{r_1 \cdot k_1} = \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot (p - p')}{r_1 \cdot k_1} \end{aligned} \quad (3.61)$$

ya que solamente tomamos la expansión de la exponencial sobre f_1 , nos fija la variable $i = 1$, además de que los términos cuadráticos de f involucrados en la δ desaparecen y $T > \tau_i \quad \forall \tau_i, \quad i = 0, \dots, N + 1$

Caso N=2

En ésta ocasión, tenemos que escoger únicamente los términos que involucren linealidad de cada uno de los f , es decir, términos del tipo $f_1 f_2$. Ésto se consigue haciendo una expansión lineal sobre f_1 y multiplicándola con la expansión lineal sobre f_2 , ambas provenientes de la exponencial. La segunda sumatoria que aparece en el último salto de renglón de la ecuación 3.62, viene de

distinguir entre índices mudos.

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_2 &= -e^{\sum_{i,j=0}^3 \left[-i \operatorname{sign}(\tau_i - \tau_j) \frac{r_i \cdot f_i \cdot k_j}{r_i \cdot k_i} - \delta(\tau_i - \tau_j) \frac{r_i \cdot f_i \cdot f_j \cdot r_j}{r_i \cdot k_i r_j \cdot k_j} \right]} \Big|_{f_1 f_2} \quad (3.62) \\
 &= -\exp \left\{ \sum_{j=0}^3 \left(-i \sigma_{1j} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_j}{r_1 \cdot k_1} - \delta_{1j} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_j \cdot r_j}{r_1 \cdot k_1 r_j \cdot k_j} - i \sigma_{2j} \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot k_j}{r_2 \cdot k_2} - \delta_{2j} \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot f_j \cdot r_j}{r_2 \cdot k_2 r_j \cdot k_j} \right) \right\} \Big|_{f_1 f_2} \\
 &= - \left(\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 (-i)^2 \sigma_{1i} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_i}{r_1 \cdot k_1} \sigma_{2j} \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot k_j}{r_2 \cdot k_2} \right) - \left(-\delta_{12} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} - \delta_{21} \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot f_1 \cdot r_1}{r_2 \cdot k_2 r_1 \cdot k_1} \right) \\
 &= \sum_{i,j=0}^3 \sigma_{1i} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_i}{r_1 \cdot k_1} \sigma_{2j} \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot k_j}{r_2 \cdot k_2} + 2\delta_{12} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} \quad (3.63)
 \end{aligned}$$

Caso N=3

Para éste caso en particular, veremos que los términos lineales nos dan los σ 's, mientras que un término con δ multiplicado con un σ nos arroja el segundo término importante para obtener expresiones del tipo $f_1 f_2 f_3$, el cálculo es como sigue

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_3 &= -i \exp \left(-i \sum_{j=0}^4 \left\{ \sigma_{1j} \frac{r_1 \cdot f_1}{r_1 \cdot k_1} \cdot k_j + \sigma_{2j} \frac{r_2 \cdot f_2}{r_2 \cdot k_2} \cdot k_j + \sigma_{3j} \frac{r_3 \cdot f_3}{r_3 \cdot k_3} \cdot k_j \right\} \right. \\
 &\quad - \delta_{12} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} - \delta_{13} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_3 \cdot r_3}{r_1 \cdot k_1 r_3 \cdot k_3} - \delta_{21} \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot f_1 \cdot r_1}{r_2 \cdot k_2 r_1 \cdot k_1} - \delta_{23} \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot r_3}{r_2 \cdot k_2 r_3 \cdot k_3} \\
 &\quad \left. - \delta_{31} \frac{r_3 \cdot f_3 \cdot f_1 \cdot r_1}{r_3 \cdot k_3 r_1 \cdot k_1} - \delta_{32} \frac{r_3 \cdot f_3 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_3 \cdot k_3 r_2 \cdot k_2} \right) \Big|_{f_1 f_2 f_3} \\
 &= -i \exp \left(-i \sum_{i=0}^4 \sigma_{1i} \frac{r_1 \cdot f_1}{r_1 \cdot k_1} \cdot k_i - i \sum_{j=0}^4 \sigma_{2j} \frac{r_2 \cdot f_2}{r_2 \cdot k_2} \cdot k_j - i \sum_{l=0}^4 \sigma_{3l} \frac{r_3 \cdot f_3}{r_3 \cdot k_3} \cdot k_l \right. \quad (3.64) \\
 &\quad \left. - 2 \left\{ \delta_{12} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} + \delta_{23} \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot r_3}{r_2 \cdot k_2 r_3 \cdot k_3} + \delta_{13} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_3 \cdot r_3}{r_1 \cdot k_1 r_3 \cdot k_3} \right\} \right)
 \end{aligned}$$

De forma que la expresión resulta ser

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_3 &= \sum_{i,j,l=0}^4 \sigma_{1i} \sigma_{2j} \sigma_{3l} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_i}{r_1 \cdot k_1} \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot k_j}{r_2 \cdot k_2} \frac{r_3 \cdot f_3 \cdot k_l}{r_3 \cdot k_3} \\
 &\quad + 2 \sum_{i=0}^4 \left\{ \delta_{23} \sigma_{1i} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_i}{r_1 \cdot k_1} \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot r_3}{r_2 \cdot k_2 r_3 \cdot k_3} + \delta_{13} \sigma_{2i} \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot k_i}{r_2 \cdot k_2} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_3 \cdot r_3}{r_1 \cdot k_1 r_3 \cdot k_3} + \right. \\
 &\quad \left. + \delta_{12} \sigma_{3i} \frac{r_3 \cdot f_3 \cdot k_i}{r_3 \cdot k_3} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} \right\} \quad (3.65)
 \end{aligned}$$

Como el lector avisado se habrá dado cuenta, lo único que tenemos que hacer es considerar términos en la ecuación general 3.60 que nos arrojen los términos lineales con los que estamos trabajando, el único signo importante es el signo global. Veamos un último ejemplos para $N = 4$, de ésa forma el lector podrá ver más claro, el mecanismo de permutaciones del que estamos hablando.

Caso N=4

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_4 = & \sum_{i,j,l,m=0}^5 \sigma_{1i}\sigma_{2j}\sigma_{3l}\sigma_{4m} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_i}{r_1 \cdot k_1} \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot k_j}{r_2 \cdot k_2} \frac{r_3 \cdot f_3 \cdot k_l}{r_3 \cdot k_3} \frac{r_4 \cdot f_4 \cdot k_m}{r_4 \cdot k_4} \\
 & + 2 \sum_{i,j=0}^5 \left\{ \sigma_{1i}\sigma_{2j} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_i}{r_1 \cdot k_1} \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot k_j}{r_2 \cdot k_2} \delta_{34} \frac{r_3 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot r_4}{r_3 \cdot k_3 r_4 \cdot k_4} \right. \\
 & + (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4) + (1 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 4) + (1 \leftrightarrow 3)(2 \leftrightarrow 4) \left. \right\} \\
 & + 2^2 \left\{ \delta_{12}\delta_{34} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} \frac{r_3 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot r_4}{r_3 \cdot k_3 r_4 \cdot k_4} + (2 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 3) \right\} \quad (3.66)
 \end{aligned}$$

Desarrollando una fórmula general para \bar{R}_N

La expresión para \bar{R}_N dependerá en principio, si N es par o impar, aunque tienen la misma estructura, quedará más claro si lo dividimos de ésta manera. Antes de escribir las expresiones, debemos de aclarar la notación que vamos a usar, así como la forma en la que fueron deducidas dichas expresiones. Pues bien, si uno hace los cálculos, se dará cuenta que por cada δ_{ij} aparece un factor multiplicativo de $\times 2$, que viene de la permutación de $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, por lo que el ordenamiento de los índices juega un papel importante. Dicho ésto, ya que necesitamos n - índices, simplemente vamos a correr el índice i de $1, \dots, N$, y vamos a considerar que $i_1 < i_2 < \dots < i_N$, ésto con la finalidad de que se entienda, que el término "permutación ordenada" hace referencia a que los índices en las δ s o σ s deben ir de menor a mayor, y no puede alterarse dicho orden. Por último un comentario concerniente al factor $(-ie)^N$, que justo nos permite deshacernos de todos los signos negativos y los factores imaginarios que resultan de la expansión lineal, para escribir al final, un

resultado positivo. Dicho ésto, la expresión para N par será

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_N &= \sum_{i_1, \dots, i_N=0}^{N+1} \sigma_{1i_1} \cdots \sigma_{Ni_N} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_{i_1}}{r_1 \cdot r_1} \cdots \frac{r_N \cdot f_N \cdot k_{i_N}}{r_1 \cdot r_1} \\
 &+ 2 \sum_{i_1, \dots, i_{N-2}=0}^{N+1} \sigma_{1i_1} \cdots \sigma_{(N-2)i_{N-2}} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_{i_1}}{r_1 \cdot r_1} \cdots \frac{r_{(N-2)} \cdot f_{(N-2)} \cdot k_{i_{(N-2)}}}{r_{(N-2)} \cdot r_{(N-2)}} \\
 &\times \delta_{N-1, N} \left(\frac{r_{N-1} \cdot f_{N-1} \cdot f_N \cdot r_N}{r_{N-1} \cdot k_{N-1} r_N \cdot k_N} \right) \\
 &+ (\text{permutaciones ordenadas}) \\
 &+ 2^2 \sum_{i_1, \dots, i_{N-4}=0}^{N+1} \sigma_{1i_1} \cdots \sigma_{(N-4)i_{N-4}} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_{i_1}}{r_1 \cdot r_1} \cdots \frac{r_{(N-4)} \cdot f_{(N-4)} \cdot k_{i_{(N-4)}}}{r_{(N-4)} \cdot r_{(N-2)}} \\
 &\times \delta_{N-3, N-2} \left(\frac{r_{N-3} \cdot f_{N-3} \cdot f_{N-2} \cdot r_{N-2}}{r_{N-3} \cdot k_{N-3} r_{N-2} \cdot k_{N-2}} \right) \delta_{N-1, N} \left(\frac{r_{N-1} \cdot f_{N-1} \cdot f_N \cdot r_N}{r_{N-1} \cdot k_{N-1} r_N \cdot k_N} \right) \\
 &+ (\text{permutaciones ordenadas}) \\
 &\vdots \\
 &2^{N/2} \delta_{1,2} \cdots \delta_{N-1, N} \left(\frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} \right) \cdots \left(\frac{r_{N-1} \cdot f_{N-1} \cdot f_N \cdot r_N}{r_{N-1} \cdot k_{N-1} r_N \cdot k_N} \right) \\
 &+ (\text{permutaciones ordenadas}) \tag{3.67}
 \end{aligned}$$

mientras que para N impar, sigue teniendo la misma estructura, aunque el número de σ s cambia a un número impar.

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_N &= \sum_{i_1, \dots, i_N=0}^{N+1} \sigma_{1i_1} \cdots \sigma_{Ni_N} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_{i_1}}{r_1 \cdot r_1} \cdots \frac{r_N \cdot f_N \cdot k_{i_N}}{r_1 \cdot r_1} \\
 &\vdots \\
 &+ 2^2 \sum_{i_{N-2}, i_{N-1}, i_N=0}^{N+1} \delta_{1,2} \left(\frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} \right) \cdots \delta_{N-4, N-3} \left(\frac{r_{N-4} \cdot f_{N-4} \cdot f_{N-3} \cdot r_{N-3}}{r_{N-4} \cdot k_{N-4} r_{N-3} \cdot k_{N-3}} \right) \\
 &\times \sigma_{(N-2)i_{N-2}} \sigma_{(N-1)i_{N-1}} \sigma_{(N)i_N} \frac{r_{N-2} \cdot f_{N-2} \cdot k_{i_{N-2}}}{r_{N-2} \cdot r_{N-2}} \frac{r_{N-1} \cdot f_{N-1} \cdot k_{i_{N-1}}}{r_{N-1} \cdot r_{N-1}} \frac{r_N \cdot f_N \cdot k_{i_N}}{r_N \cdot r_N} \\
 &+ (\text{permutaciones ordenadas}) \\
 &+ 2^{\frac{N+1}{2}} \delta_{1,2} \cdots \delta_{N-2, N-1} \left(\frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} \right) \cdots \left(\frac{r_{N-2} \cdot f_{N-2} \cdot f_{N-1} \cdot r_{N-1}}{r_{N-2} \cdot k_{N-2} r_{N-1} \cdot k_{N-1}} \right) \sigma_{Ni_N} \frac{r_N \cdot f_N \cdot K_{i_N}}{r_N \cdot K_N} \\
 &+ (\text{permutaciones ordenadas}) \tag{3.68}
 \end{aligned}$$

Ahora bien, para deshacernos de algunos términos, vamos a hacer uso de los vectores de referencia, escogiéndolos de tal forma que desaparezcan.

Podemos observar que siempre existe un término de la forma

$$\prod_{j=1}^N \left(\sum_{i=0}^{N+1} \sigma_{ji} \frac{r_j \cdot f_j \cdot k_i}{r_j \cdot k_j} \right) \tag{3.69}$$

que se transforma (escogiendo los vectores de referencia $r_j = p'$ para $j = 1, \dots, N$) en

$$\prod_{j=1}^N \frac{p' \cdot f_j \cdot \left(p + \sum_{i=1}^N \sigma_{ji} k_i \right)}{p' \cdot k_j} \quad (3.70)$$

con excepción por supuesto de $N = 1$, ya que $p' \cdot k_1 = 0$. Tomando el numerador de la ecuación 3.70, y observando que existe un orden en las variables τ_1, \dots, τ_N , podemos encontrar un valor j tal que

$$p' \cdot f_j \cdot \left(p + \sum_{i=1}^N \sigma_{ji} k_i \right) = p' \cdot f_j \cdot \left(p + \sum_{i=1, i \neq j}^N k_i \right) = -p' \cdot f_j \cdot (p' + k_j) = 0 \quad (3.71)$$

En donde hemos usados conservación de momento y el hecho de que

$$p' \cdot f_1 \cdot p' = p' \cdot k_1 \epsilon_1 \cdot p' - p' \cdot \epsilon_1 k_1 \cdot p' = 0 \quad (3.72)$$

$$f_j \cdot k_j = k_j \cdot f_j = 0 \quad \text{ortogonalidad} \quad (3.73)$$

$$k_i \cdot \epsilon_i = 0 \quad (3.74)$$

De tal forma que escogiendo apropiadamente el vector de referencia, podemos deshacernos del término 3.69, dejando únicamente las contribuciones en R_N que dependan de al menos un $\delta(\tau_i - \tau_j) = \delta_{ij}$. También es importante aclarar que el vector de referencia no puede escogerse diferente para cada término de la suma, éste debe ser global.

3.3. Formalismo de helicidad espinorial para los tensores $f^{\mu\nu}$ y sus propiedades

Veamos la forma de pasar de la representación basada en los vectores de polarización, a los tensores de campo electromagnético [62], y derivemos algunas fórmulas importantes que involucran a los fotones sobre la capa de masa con polarizaciones circulares dadas por la ecuación 2.199. Entonces el tensor de campo electromagnético para cada fotón se escribe como

$$f^{\pm\mu\nu} = k^\mu \epsilon^{\pm\nu} - \epsilon^{\pm\mu} k^\nu \quad (3.75)$$

relacionado con el tensor $F^{\mu\nu}$ por

$$F^{\mu\nu} = i \sum_{i=1}^N f^{\mu\nu} \quad (3.76)$$

Ya que hemos dicho que el momento q es sólo un vector de referencia, se puede ver que los tensores f pueden ser escritos en términos solamente de k en el formalismo espinorial como sigue

$$\begin{aligned} f^{+\mu\nu} &= -\frac{1}{4\sqrt{2}}[k|[\gamma^\mu, \gamma^\nu]|k] \\ f^{-\mu\nu} &= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\langle k|[\gamma^\mu, \gamma^\nu]|k\rangle \end{aligned} \quad (3.77)$$

A partir de aquí se pueden establecer las siguientes relaciones

- Conjugación hermitiana

$$\boxed{f^{+\dagger} = f^-} \quad (3.78)$$

- Los productos

$$\boxed{(f_1^+ f_2^+)^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[12][k_1|\gamma^\mu\gamma^\nu|k_2]} \quad (3.79)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} (f_1^+ f_2^+)^{\mu\nu} &= f_1^{+\mu\alpha} f_{2\alpha}^{+\nu} = \frac{1}{4^2 2} [k_1|[\gamma^\mu, \gamma_\alpha]|k_1][k_2|[\gamma_\alpha, \gamma^\nu]|k_2] \\ &= \frac{1}{4^2 2} \{ [k_1|^a(\gamma^\mu\gamma^\alpha)_a^b|k_1]_b [k_2|^c(\gamma_\alpha\gamma^\nu)_c^d|k_2]_d - [k_1|^a(\gamma^\alpha\gamma^\mu)_a^b|k_1]_b [k_2|^c(\gamma_\alpha\gamma^\nu)_c^d|k_2]_d \\ &\quad + [k_1|^a(\gamma^\alpha\gamma^\mu)_a^b|k_1]_b [k_2|^c(\gamma^\nu\gamma_\alpha)_c^d|k_2]_d - [k_1|^a(\gamma^\mu\gamma^\alpha)_a^b|k_1]_b [k_2|^c(\gamma^\nu\gamma_\alpha)_c^d|k_2]_d \} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Ahora vamos a utilizar las ecuaciones 2.168 y 2.169, además del hecho que

$$\gamma^\mu\gamma^\alpha = \begin{pmatrix} (\sigma^\mu\bar{\sigma}^\alpha) & 0 \\ 0 & (\bar{\sigma}^\mu\sigma^\alpha) \end{pmatrix}, \quad (3.81)$$

omitiendo la constante $1/4^2 2$, tenemos que el primer término de los cuatro de la ecuación 3.80 se escribe como

$$[k_1|^a(\sigma^\mu)_{a\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^\alpha)^{\dot{\beta}b}|k_1]_b [k_2|^c(\sigma_\alpha)_{c\dot{\gamma}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\gamma}d}|k_1]_d \quad (3.82)$$

pero

$$\begin{aligned} (\bar{\sigma}^\alpha)^{\dot{\beta}b}(\sigma^\alpha)_{c\dot{\gamma}} &= \epsilon^{b\rho}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\sigma}}(\sigma^\alpha)_{\rho\dot{\sigma}}(\sigma_\alpha)_{c\dot{\gamma}} \\ &= \epsilon^{b\rho}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\sigma}}(-2\epsilon_{\rho c}\epsilon^{\dot{\sigma}\dot{\gamma}}) = (-2)\delta_c^b\delta_{\dot{\gamma}}^{\dot{\beta}}, \end{aligned} \quad (3.83)$$

entonces la ecuación 3.82 se escribe como

$$\begin{aligned} [k_1|^a\sigma_{a\dot{\beta}}^\mu|k_1]_b [k_2|^c\bar{\sigma}^{\nu\dot{\gamma}d}|k_2]_d (-2)\delta_c^b\delta_{\dot{\gamma}}^{\dot{\beta}} &= -2[k_1|^a\sigma_{a\dot{\beta}}^\mu|k_1]_b [k_2|^b\bar{\sigma}^{\nu\dot{\beta}d}|k_2]_d \\ &= -2[12][k_1|\gamma^\mu\gamma^\nu|k_2] \end{aligned} \quad (3.84)$$

Se obtiene el mismo resultado para los siguientes términos, de tal forma que el factor global es -8 , con lo que se verifica la identidad. ■

$$\boxed{(f_1^- f_2^-)^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \langle 12 \rangle \langle k_1 | \gamma^\mu \gamma^\nu | k_2 \rangle} \quad (3.85)$$

Demostración

Es igual a la que usamos para demostrar la ecuación 3.79, cambiando $[q] \rightarrow \langle q|$, ya que es simplemente el conjugado 3.78

$$\begin{aligned} (f_1^- f_2^-)^{\mu\nu} &= f_1^{-\mu\alpha} f_2^{-\nu} = -\frac{1}{4^2 2} \langle k_1 | [\gamma^\mu, \gamma_\alpha] | k_1 \rangle \langle k_2 | [\gamma_\alpha, \gamma^\nu] | k_2 \rangle \\ &= -\frac{1}{8} \langle k_1 |_{\dot{a}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}\beta} (\sigma^\alpha)_{\beta\dot{b}} | k_1 \rangle^{\dot{b}} \langle k_2 |_{\dot{c}} (\bar{\sigma}_\alpha)^{\dot{c}\gamma} (\sigma^\nu)_{\gamma\dot{d}} | k_1 \rangle^{\dot{d}} \\ &= \frac{1}{4} \langle k_1 |_{\dot{a}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}\beta} | k_1 \rangle^{\dot{b}} \langle k_2 |_{\dot{b}} \sigma^\nu_{\beta\dot{d}} | k_2 \rangle^{\dot{d}} \\ &= \frac{1}{4} [12] \langle k_1 | \gamma^\mu \gamma^\nu | k_2 \rangle \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\boxed{(f_1^+ f_2^-)^{\mu\nu} = (f_2^- f_1^+)^{\mu\nu} = \frac{1}{4} [1|\gamma^\mu | 2] [1|\gamma^\nu | 2]} \quad (3.87)$$

Demostración.

De forma análoga tenemos

$$\begin{aligned} (f_1^+ f_2^-)^{\mu\nu} &= f_1^{+\mu\alpha} f_2^{-\nu} = -\frac{1}{4^2 2} [k_1 |^a [\gamma^\mu, \gamma_\alpha] | k_1]_b \langle k_2 |_{\dot{a}} [\gamma_\alpha, \gamma^\nu] | k_2 \rangle^{\dot{b}} \\ &= -\frac{1}{8} [k_1 |^a (\sigma^\mu)_{ac} (\bar{\sigma}^\alpha)^{\dot{c}b} | k_1]_b \langle k_2 |_{\dot{a}} (\bar{\sigma}_\alpha)_{\dot{a}c} (\sigma^\nu)_{cb} | k_2 \rangle^{\dot{b}} \\ &= \frac{1}{4} [k_1 |^a \sigma^\mu_{ac} | k_2 \rangle^{\dot{c}} [k_1 |^c \sigma^\nu_{cb} | k_2 \rangle^{\dot{b}} \\ &= \frac{1}{4} [1|\gamma^\mu | 2] [1|\gamma^\nu | 2] \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (3.88)$$

■ Los Anticonmutadores

$$\boxed{\{f_1^+, f_2^+\}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} [12]^2 \eta^{\mu\nu}} \quad (3.89)$$

Demostración.

Vamos a ocupar el resultado de la ecuación 3.79, y el hecho de que $(f_1 f_2)^T = (f_2 f_1)$

$$\begin{aligned} \{f_1^+, f_2^+\}^{\mu\nu} &= (f_1^+ f_2^+)^{\mu\nu} + (f_2^+ f_1^+)^{\mu\nu} = (f_1^+ f_2^+)^{\mu\nu} + (f_1^+ f_2^+)^{\nu\mu} \\ &= \frac{1}{4} [12] [k_1 | \gamma^\mu \gamma^\nu | k_2] + \frac{1}{4} [12] [k_1 | \gamma^\nu \gamma^\mu | k_2] = \frac{1}{4} [12] [k_1 | \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} | k_2] \\ &= \frac{1}{4} [12] [k_1 | (-2\eta^{\mu\nu}) | k_2] = -\frac{1}{2} [12]^2 \eta^{\mu\nu} \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\boxed{\{f_1^-, f_2^-\}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \langle 12 \rangle^2 \eta^{\mu\nu}} \quad (3.91)$$

Demostración.

Ésta demostración es similar, utilizando en ésta ocasión la ecuación 3.85 tenemos

$$\begin{aligned} \{f_1^-, f_2^-\}^{\mu\nu} &= (f_1^- f_2^-)^{\mu\nu} + (f_1^- f_2^-)^{\nu\mu} = \frac{1}{4} \langle 12 \rangle \langle k_1 | \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} | k_2 \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \langle 12 \rangle^2 \eta^{\mu\nu} \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (3.92)$$

Además de expresiones útiles para \bar{R}_1 y \bar{R}_2 escritos en el formalismo espinorial para el caso en el que r_i son vectores nulos, es decir $r_i r^i = r^2 = 0$

$$\boxed{\frac{r \cdot f^+ \cdot k_i}{r \cdot k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle r k_i \rangle [k_i k]}{\langle r k \rangle}} \quad (3.93)$$

Demostración

$$\begin{aligned} \frac{r \cdot f^+ \cdot k_i}{r \cdot k} &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{r_\mu [k_j | \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu | k_j] k_{i\nu}}{\langle r k \rangle [r k]} \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{[k_j | (\not{r} \not{k}_i - \not{k}_i \not{r}) | k_j]}{\langle r k \rangle [r k]} \end{aligned} \quad (3.94)$$

usando la propiedad $-\not{A} = |A\rangle [A] + |A\rangle \langle A|$, y además recordando que $\langle q_1 | q_2 \rangle = 0 = [q_1 | q_2]$, separamos la suma, de tal forma que el primer término nos da

$$\begin{aligned} \frac{[k_j | (\not{r} \not{k}_i) | k_j]}{\langle r k \rangle [r k]} &= \frac{[k_j | (|r\rangle [r] + |r\rangle \langle r|) (|k_i\rangle [k_i] + |k_i\rangle \langle k_i|) | k_j]}{\langle r k \rangle [r k]} \\ &= \frac{[k_j r_j] \langle r_j k_i \rangle [k_i k_j]}{\langle r k \rangle [r k]} = -\frac{\langle r_j k_i \rangle [k_i k_j]}{\langle r_i k_i \rangle} \end{aligned} \quad (3.95)$$

de forma análoga, el segundo término tiene la forma

$$\frac{[k_j | (\not{k}_i \not{r}) | k_j]}{\langle r k \rangle [r k]} = -\frac{[k_j k_i] \langle k_i r_j \rangle}{\langle r_i k_i \rangle} \quad (3.96)$$

en donde usamos el hecho de que $[q_1 q_2] = -[q_2 q_1]$ y $\langle q_1 q_2 \rangle = -\langle q_2 q_1 \rangle$. Por lo que la ecuación 3.94 se escribe como

$$\frac{r \cdot f^+ \cdot k_i}{r \cdot k} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{-2 \langle r_j k_i \rangle [k_i k_j]}{\langle r_j k_j \rangle} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\langle r_j k_i \rangle [k_i k_j]}{\langle r k \rangle} \quad \blacksquare \quad (3.97)$$

$$\boxed{\frac{r \cdot f^- \cdot k_i}{r \cdot k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[r k_i] \langle k_i k \rangle}{[r k]}} \quad (3.98)$$

Demostración.

Lo único que debemos hacer es cambiar el término en f^- , de $[k_j] \rightarrow \langle k_j |$, entonces tenemos

$$\frac{r \cdot f^- \cdot k_i}{r \cdot k} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{\langle k_j r_j \rangle [r_j k_i] \langle k_i k_j \rangle}{\langle r k \rangle [r k]} - \frac{\langle k_j k_i \rangle [k_i r_j] \langle r_j k_j \rangle}{\langle r k \rangle [r k]} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{[r_j k_i] \langle k_i k_j \rangle}{[r k]} \quad \blacksquare \quad (3.99)$$

$$\boxed{\frac{r_1 \cdot f_1^+ \cdot f_2^+ \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} = -\frac{\langle r_1 r_2 \rangle [k_1 k_2]}{\langle r_1 k_1 \rangle \langle r_2 k_2 \rangle}} \quad (3.100)$$

Demostración

En éste caso vamos a hacer uso de la ecuación 3.79, por lo que

$$\begin{aligned} \frac{r_1 \cdot f_1^+ \cdot f_2^+ \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} &= \frac{r_{1\mu} \frac{1}{4} [12] [k_1 | \gamma^\mu \gamma^\nu | k_2] r_{2\nu}}{\frac{1}{4} \langle r_1 k_1 \rangle [r_1 k_1] \langle r_2 k_2 \rangle [r_2 k_2]} = [12] \frac{[k_1 | r_1 r_2 | k_2]}{\langle r_1 k_1 \rangle [r_1 k_1] \langle r_2 k_2 \rangle [r_2 k_2]} \\ &= [12] \frac{[k_1 r_1] \langle r_1 r_2 \rangle [r_2 k_2]}{\langle r_1 k_1 \rangle [r_1 k_1] \langle r_2 k_2 \rangle [r_2 k_2]} = -\frac{[k_1 k_2] \langle r_1 r_2 \rangle}{\langle r_1 k_1 \rangle \langle r_2 k_2 \rangle} \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (3.101)$$

$$\boxed{\frac{r_1 \cdot f_1^- \cdot f_2^- \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} = -\frac{[r_1 r_2] \langle k_1 k_2 \rangle}{[r_1 k_1] [r_2 k_2]}} \quad (3.102)$$

Demostración.

Ahora utilizamos la ecuación 3.85, por lo que tenemos

$$\begin{aligned} \frac{r_1 \cdot f_1^- \cdot f_2^- \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} &= \frac{r_{1\mu} \frac{1}{4} \langle 12 \rangle \langle k_1 | \gamma^\mu \gamma^\nu | k_2 \rangle r_{2\nu}}{\frac{1}{4} \langle r_1 k_1 \rangle [r_1 k_1] \langle r_2 k_2 \rangle [r_2 k_2]} = \langle 12 \rangle \frac{\langle k_1 | r_1 r_2 | k_2 \rangle}{\langle r_1 k_1 \rangle [r_1 k_1] \langle r_2 k_2 \rangle [r_2 k_2]} \\ &= \langle 12 \rangle \frac{\langle k_1 r_1 \rangle [r_1 r_2] \langle r_2 k_2 \rangle}{\langle r_1 k_1 \rangle [r_1 k_1] \langle r_2 k_2 \rangle [r_2 k_2]} = -\frac{\langle k_1 k_2 \rangle [r_1 r_2]}{[r_1 k_1] [r_2 k_2]} \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (3.103)$$

$$\boxed{\frac{r_1 \cdot f_1^+ \cdot f_2^- \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} = \frac{\langle r_1 k_2 \rangle [k_1 r_2]}{\langle r_1 k_1 \rangle [k_2 r_2]}} \quad (3.104)$$

Demostración

Ahora utilizamos por supuesto la ecuación correspondiente, es decir 3.87, por lo que en éste caso tenemos

$$\begin{aligned} \frac{r_1 \cdot f_1^+ \cdot f_2^- \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} &= \frac{\frac{1}{4} r_{1\mu} [1 | \gamma^\mu | 2] [1 | \gamma^\nu | 2] r_{2\nu}}{\frac{1}{4} \langle r_1 k_1 \rangle [r_1 k_1] \langle r_2 k_2 \rangle [r_2 k_2]} = \frac{[1 | r_1 | 2] [1 | r_2 | 2]}{\langle r_1 k_1 \rangle [r_1 k_1] \langle r_2 k_2 \rangle [r_2 k_2]} \\ &= \frac{[1 r_1] \langle r_1 2 \rangle [1 r_2] \langle r_2 2 \rangle}{\langle r_1 k_1 \rangle [r_1 k_1] \langle r_2 k_2 \rangle [r_2 k_2]} = \frac{\langle r_1 k_2 \rangle [r_2 k_1]}{\langle r_1 k_1 \rangle [r_2 k_2]} \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$\boxed{\frac{r_1 \cdot f_1^- \cdot f_2^+ \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} = \frac{[r_1 k_2] \langle k_1 r_2 \rangle}{[r_1 k_1] \langle k_2 r_2 \rangle}} \quad (3.106)$$

Demostración.

De forma similar tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{r_1 \cdot f_1^- \cdot f_2^+ \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} &= \frac{\frac{1}{4} r_{1\mu} [2|\gamma^\mu|1\rangle [2|\gamma^\nu|1\rangle r_{2\nu}]}{\frac{1}{4} \langle r_1 k_1 \rangle [r_1 k_1] \langle r_2 k_2 \rangle [r_2 k_2]} = \frac{[2|r_1|1\rangle [2|r_2|1\rangle]}{\langle r_1 k_1 \rangle [r_1 k_1] \langle r_2 k_2 \rangle [r_2 k_2]} \\
 &= \frac{[2r_1] \langle r_1 1 \rangle [2r_2] \langle r_2 1 \rangle}{\langle r_1 k_1 \rangle [r_1 k_1] \langle r_2 k_2 \rangle [r_2 k_2]} = \frac{[r_1 k_2] \langle r_2 k_1 \rangle}{[r_1 k_1] \langle r_2 k_2 \rangle} \blacksquare
 \end{aligned} \tag{3.107}$$

Capítulo 4

Resultados

Este capítulo está basado en una serie de trabajos realizados por Ahmadienia, James P.

Edwards et al. **arXiv**

<https://arxiv.org/abs/2004.01391>

<https://arxiv.org/abs/2107.00199>

Resumen

En este capítulo nos vamos a centrar en describir los resultados obtenidos con el método basado en el formalismo worldline, además, los vamos a comparar con el método estándar hasta donde sea posible, de tal forma que vamos a mostrar las bondades y simplificaciones que tiene el método usado en este trabajo. Primero, utilizando las fórmulas derivadas en la sección 3.2.1, que nos reproduce la fórmula general de Bern-Kosower en la representación R para la QED escalar, vamos a tomar los primeros N , de tal forma que obtendremos resultados específicos para $N = 1$, o bien el vértice, para $N = 2$ que es la dispersión de Compton escalar, y por último $N = 3$ y $N = 4$ que bajo el método estándar empieza a complicarse. Después vamos a asignarles helicidades fijas, con ayuda del formalismo de helicidad espinorial o "spinor helicity formalism", usando los resultados de la sección 3.3.

4.1. Caso $N=1$, el vértice

Para empezar con este caso, tomemos el resultado obtenido para $R = 1$ de la sección 3.2.2, escrito explícitamente como

$$\bar{R}_1 = \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot (p - p')}{r_1 \cdot k_1} \quad (4.1)$$

donde

$$r_1 = p' + \frac{m^2}{2p' \cdot k_1} k_1 \quad (4.2)$$

por simplicidad vamos a escribir en éste caso particular $k_1 = k$. Así, con ayuda de nuestra fórmula maestra, y usando conservación de momento escrito como $p + p' + k = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 D_1^{p'p}(k_1, \epsilon_1; r_1) &= -e \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_0^T d\tau \bar{R}_1 e^{(\cdot)} \\
 &= -e \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_0^T d\tau \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot (p - p')}{r_1 \cdot k_1} e^{-T p'^2 + (p-p')k\tau} \\
 &= -e \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot (p - p')}{r_1 \cdot k_1} \int_0^\infty dT e^{-T(m^2 + p'^2)} \int_0^T d\tau e^{(p-p')k\tau} \\
 &= e \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot (p - p')}{r_1 \cdot k_1 (p^2 - p'^2)} \int_0^\infty dT \left\{ e^{-T(m^2 + p'^2 + (p^2 - p'^2))} - e^{-T(m^2 + p'^2)} \right\} \\
 &= e \frac{1}{m^2 + p^2} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot (2p' + k)}{r_1 \cdot k_1} \frac{1}{m^2 + p'^2}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Para obtener un resultado más prolijo, se suele considerar a la ecuación 4.3 sin los propagadores que surgen del momento inicial y final, como se muestra en la Figura 4.1, éste procedimiento ya se introdujo en el capítulo anterior como amputación o corte de piernas, viene del famoso teorema LSZ.

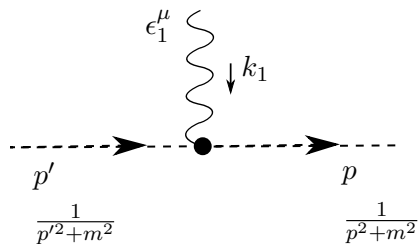


Figura 4.1: Diagrama de Feynman que representa la interacción de un fotón con polarización ϵ_1^μ y momento k_1 , con una partícula escalar de momento entrante p' y saliente p .

Por lo tanto nuestra solución es simplemente

$$D_1(k_1, \epsilon_1; r_1) = e \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot (2p' + k)}{r_1 \cdot k_1} \tag{4.4}$$

de donde se puede apreciar, es el mismo resultado obtenido en la ecuación 3.26. De manera directa si escribimos $f^{\mu\nu} = k^\mu \epsilon^\nu - \epsilon^\mu k^\nu$, podemos reescribir la ecuación 4.4 como

$$\begin{aligned}
 D_1(k_1, \epsilon_1; r_1) &= e \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot (2p' + k)}{r_1 \cdot k_1} = e \frac{r_1 \cdot k_1 \epsilon_1 \cdot (p' - p) - e r_1 \cdot \epsilon_1 k_1 \cdot (p' - p)}{r_1 \cdot k_1} \\
 &= e \epsilon_1 \cdot (p' - p) + e \frac{r_1 \cdot \epsilon_1 k_1 \cdot (p' - p)}{r_1 \cdot k_1} \\
 &= e \epsilon_1 \cdot (2p' + k_1)
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

debido a que $k_1 \cdot p = 0 = k_1 \cdot p'$

4.2. Caso N=2. Dispersión de Compton escalar

Una vez obtenido el resultado para $N = 1$, y observando que es idéntico al obtenido anteriormente, podemos caminar con más confianza hacia órdenes más altos de N . De ésta forma el

siguiente paso natural para la teoría escalar, es considerar la dispersión de Compton.

En ésta ocasión, vamos a considerar la suma de los diagramas posibles, representados en la Figura 4.2, para encontrar la dispersión de dos fotones en la representación R , posteriormente vamos a utilizar la teoría de helicidad espinorial para asignarle helicidades de polarización a los fotones, y así, nos arrojen una forma concreta para los tensores de Maxwell fijados a ciertas helicidades, ésto por supuesto, con la ayuda de la sección 3.3.

Entonces, para $N = 2$ tenemos que

$$D_2^{p'p}(k_1, \epsilon_1; r_1; k_2 \epsilon_2; r_2) = e^2 \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_0^T \prod_{i=1}^2 d\tau_i \bar{R}_2 e^{(\cdot)}, \quad (4.6)$$

de donde tenemos que tomar

$$\begin{aligned} e^{(\cdot)} &= e^{-Tp'^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 |\tau_i - \tau_j| k_i \cdot k_j + (p-p') \cdot \sum_{i=1}^2 k_i \tau_i} \\ &= e^{-Tp'^2 + \frac{1}{2} (|\tau_1 - \tau_2| + |\tau_2 - \tau_1|) k_1 \cdot k_2 + (p-p') \cdot (k_1 \tau_1 + k_2 \tau_2)} \\ &= e^{-Tp'^2 + |\tau_2 - \tau_1| k_1 \cdot k_2 + (p-p') \cdot (k_1 \tau_1 + k_2 \tau_2)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

y el \bar{R}_2 correspondiente, encontrado en la ecuación 3.63, escrito explícitamente como

$$\bar{R}_2 = \sum_{i,j=0}^3 \sigma_{1i} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_i}{r_1 \cdot k_1} \sigma_{2j} \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot k_j}{r_2 \cdot k_2} + 2\delta_{12} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} \quad (4.8)$$

bajo la convención $k_0 = p'$, $k_3 = p$, $\tau_0 = T$, $\tau_3 = 0 = \frac{r_0 \cdot f_0}{r_0 \cdot k_0} = \frac{r_3 \cdot f_3}{r_3 \cdot k_3}$

4.2.1. Integrales sobre los parámetros.

En ésto caso, a diferencia de $N = 1$, tenemos que tratar con cuidado las integrales sobre $d\tau_i$.

Centrándonos en las integrales tenemos que separarlas como

$$\int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 = \int_0^T d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 + \int_0^T d\tau_1 \int_{\tau_1}^T d\tau_2 \quad (4.9)$$

De tal forma que necesitamos integrar

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 e^{(\cdot)} \frac{1}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} \{ r_1 \cdot f_1 \cdot (p' - p) r_2 \cdot f_2 (p' - p) - \sigma_{12} r_1 \cdot f_1 \cdot k_2 r_2 \cdot f_2 \cdot (p' - p) \\ &\quad - \sigma_{21} r_1 \cdot f_1 \cdot (p' - p) r_2 \cdot f_2 \cdot k_1 - r_1 \cdot f_1 \cdot k_2 r_2 \cdot f_2 \cdot k_1 + 2\delta_{12} r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2 \} \\ &= \frac{1}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} \left\{ r_1 \cdot f_1 \cdot (p' - p) r_2 \cdot f_2 (p' - p) \left[\frac{1}{(p' + k_1)^2 + m^2} + \frac{1}{(p' + k_2)^2 + m^2} \right] \right. \\ &\quad - \sigma_{12} r_1 \cdot f_1 \cdot k_2 r_2 \cdot f_2 \cdot (p' - p) \left[\frac{1}{(p' + k_1)^2 + m^2} - \frac{1}{(p' + k_2)^2 + m^2} \right] \\ &\quad - \sigma_{21} r_1 \cdot f_1 \cdot (p' - p) r_2 \cdot f_2 \cdot k_1 \left[-\frac{1}{(p' + k_1)^2 + m^2} + \frac{1}{(p' + k_2)^2 + m^2} \right] \\ &\quad - r_1 \cdot f_1 \cdot k_2 r_2 \cdot f_2 \cdot k_1 \left[\frac{1}{(p' + k_1)^2 + m^2} + \frac{1}{(p' + k_2)^2 + m^2} \right] \\ &\quad \left. + 2r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2 \right\} \left(\frac{1}{p'^2 + m^2} \frac{1}{p^2 + m^2} \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

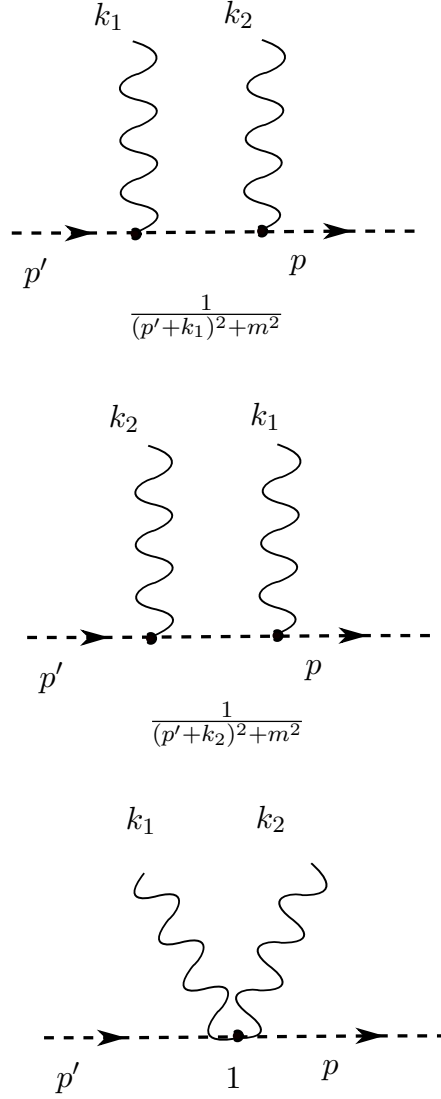


Figura 4.2: Diagrama de Feynman que representa la interacción de dos fotones con momento k_1 , k_2 con una partícula escalar de momento entrante p' y saliente p .

que resultan ser las mismas integrales que ya habíamos encontrado en las ecuaciones 3.28 - 3.30, haciendo un ligero cambio a los momentos entrantes y salientes $p \leftrightarrow p'$. Podemos acomodar los términos de la ecuación 4.10 de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} \frac{1}{p'^2 + m^2} \left\{ 2r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2 + \frac{1}{(p' + k_1)^2 + m^2} [r_1 \cdot f_1 \cdot (p' - p)r_2 \cdot f_2 \cdot (p' - p) \right. \\
 & \quad \left. - r_1 \cdot f_1 \cdot k_2 r_2 \cdot f_2 \cdot k_1 - r_1 \cdot f_1 \cdot k_2 r_2 \cdot f_2 \cdot (p - p') + r_1 \cdot f_1 \cdot (p' - p)r_2 \cdot f_2 \cdot k_1] \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{(p' + k_2)^2 + m^2} [r_1 \cdot f_1 \cdot (p' - p)r_2 \cdot f_2 \cdot (p' - p) - r_1 \cdot f_1 \cdot k_2 r_2 \cdot f_2 \cdot k_1 \right. \\
 & \quad \left. + r_1 \cdot f_1 \cdot k_2 r_2 \cdot f_2 \cdot (p' - p) - r_1 \cdot f_1 \cdot (p' - p)r_2 \cdot f_2 \cdot k_1] \right\} \frac{1}{p^2 + m^2} \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

Hasta aquí, vamos a notar la importancia del propagador libre como la solución a las integrales de diagramas de dispersión a nivel árbol. Con un diagrama muy sencillo que involucra 2

fotones, dado por la Figura 4.2, podemos observar que las integrales son simplemente la suma de los propagadores que contribuyen, multiplicados por un factor de helicidad o un tensor electromagnético. De ésta forma, construyendo los diagramas obtendremos una gran ayuda para conocer el resultado de las integrales que aparecen a órdenes más altos. Además de ésta enorme ayuda, aún tenemos la libertad de escoger nuestros vectores de referencia r , haciendo uso de la ecuación 3.71, de tal forma que podemos quitarnos algunos diagramas que simplifiquen aún más nuestros cálculos.

El álgebra detrás tiene que ver, como habíamos dicho, con los vectores de referencia, escogidos como

$$r_1^\mu = p'^\mu + \frac{m^2}{2p' \cdot k_1} k_1^\mu \quad (4.12)$$

$$r_2^\mu = p'^\mu + \frac{m^2}{2p' \cdot k_2} k_2^\mu \quad (4.13)$$

donde, por supuesto $r_1^2 = 0 = r_2^2$.

Vamos a mostrar explícitamente cómo el término en el que están presentes todas las σ 's se hace cero. De manera explícita tenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=0}^3 \sigma_{1i} \sigma_{2j} \frac{p' \cdot f_1 \cdot k_i}{p' \cdot k_1} \frac{p' \cdot f_2 \cdot k_j}{p' \cdot k_2} \\ &= \frac{p' \cdot f_1 \cdot (\sigma_{10} k_0 + \sigma_{12} k_2 + \sigma_{13} k_3)}{p' \cdot k_1} \frac{p' \cdot f_2 \cdot (\sigma_{20} k_0 + \sigma_{21} k_1 + \sigma_{23} k_3)}{p' \cdot k_2} \\ &= \frac{p' \cdot f_1 \cdot (\sigma_{10} k_0 + \sigma_{12} k_2 + \sigma_{13} k_3)}{p' \cdot k_1} \frac{p' \cdot f_2 \cdot (\sigma_{20} k_0 + \sigma_{21} k_1 + \sigma_{23} k_3)}{p' \cdot k_2} \\ &= \frac{p' \cdot f_1 \cdot (-p' + k_2 + p)}{p' \cdot k_1} \frac{p' \cdot f_2 \cdot (-p' - k_1 + p)}{p' \cdot k_2} \\ &= \frac{p' \cdot f_1 \cdot (-p' - (k_1 + p'))}{p' \cdot k_1} \frac{p' \cdot f_2 \cdot (k_2 + p + p)}{p' \cdot k_2} \\ &= -\frac{p' \cdot f_1 \cdot (2p' + k_1)}{p' \cdot k_1} \frac{p' \cdot f_2 \cdot (k_2 + 2p)}{p' \cdot k_2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

en donde hemos usado el hecho de que

$$p' \cdot f_1 \cdot p' = p' \cdot k_1 \epsilon_1 \cdot p' - p' \cdot \epsilon_1 k_1 \cdot p' = 0 \quad (4.15)$$

$$(k_1 \cdot f_1)_\nu = k_1^\mu f_{1\mu\nu} = k_1^\mu (k_{1\mu} \epsilon_{1\nu} - \epsilon_{1\mu} k_{1\nu}) = k^2 \epsilon_{1\nu} - k_1^\mu \epsilon_{1\mu} k_{1\nu} = 0 \quad (4.16)$$

ya que $k^2 = 0$ por ser la masa de los fotones igual a cero, y $k_1 \cdot \epsilon_1 = 0$ por ser ortogonales, tal como habíamos mostrado de forma general en la ecuación 3.71.

Finalmente obtenemos un resultado compacto debido a nuestras simplificaciones para la ecuación 4.6, que viene a ser

$$D_2^{pp'} = 2e^2 \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} \frac{1}{p'^2 + m^2}, \quad (4.17)$$

amputando las piernas de los propagadores externos, tenemos una expresión para la dispersión debida a dos fotones en la representación R para los tensores electromagnéticos $f^{\mu\nu}$, que será

$$\hat{D}_2^{pp'} = 2e^2 \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2}. \quad (4.18)$$

Donde los vectores de referencia están dados conforme a las ecuaciones 4.12 y 4.13.

4.2.2. Comparación con el formalismo estándar

Con fines ilustrativos, vamos a usar dichos vectores de referencia para cambiar de representación el propagador para dos fotones de $f \rightarrow \epsilon$, entonces

$$2e^2 \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} = 2e^2 \frac{\left(p' + \frac{m^2}{2p' \cdot k_1} k_1\right) \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \left(p' + \frac{m^2}{2p' \cdot k_2} k_2\right)}{\left(p' + \frac{m^2}{2p' \cdot k_1} k_1\right) \cdot k_1 \left(p' + \frac{m^2}{2p' \cdot k_2} k_2\right) \cdot k_2} \quad (4.19)$$

Ya que el proceso resulta un poco engorroso, vamos a tratar cada término por separado en la ecuación 4.19. Primero, observemos inmediatamente que

$$k^i \cdot k_i = 0 \quad i = 1, 2 \quad (4.20)$$

$$f_i \cdot k_i = (k_i \epsilon_i - \epsilon_i k_i) \cdot k_i = 0 \quad (4.21)$$

Debido a que k_i es un vector tipo luz $k^2 = 0$ además de ser ortogonal a la polarización $k_i \cdot \epsilon_i = 0$.

Ahora entonces, el denominador de la ecuación 4.19 simplemente toma la forma

$$\left(p' + \frac{m^2}{2p' \cdot k_1} k_1\right) \cdot k_1 \left(p' + \frac{m^2}{2p' \cdot k_2} k_2\right) \cdot k_2 = p' \cdot k_1 p' \cdot k_2 \quad (4.22)$$

mientras el numerador pasa a escribirse como

$$\begin{aligned} p' \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot p' &= p' \cdot (k_1 \epsilon_1 - \epsilon_1 k_1) \cdot (k_2 \epsilon_2 - \epsilon_2 k_2) \cdot p' \\ &= \epsilon_1 \cdot (k_2 p' \cdot k_1 p' + p' k_2 \cdot p' k_1 - p' \cdot k_1 p' \cdot k_2 - p' k_1 \cdot k_2 p') \cdot \epsilon_2 \\ &= -\epsilon_1 \cdot (k_1 + p + p') p' \cdot k_1 p' \cdot \epsilon_2 - \epsilon_1 \cdot p' k_2 \cdot p' (k_2 + p + p') \cdot \epsilon_2 \\ &\quad - \epsilon_1 \cdot p' k_1 \cdot k_2 p' \cdot \epsilon_2 - \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 p' \cdot k_1 p' \cdot k_2 \\ &= -\epsilon_1 \cdot p p' \cdot k_1 p' \cdot \epsilon_2 - \epsilon_1 \cdot p' k_2 \cdot p' p \cdot \epsilon_2 - \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 p' \cdot k_1 p' \cdot k_2 - \epsilon_1 \cdot p' (p' \cdot k_1 + k_2 \cdot p' + k_1 \cdot k_2) p' \cdot \epsilon_2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

pero

$$p' \cdot k_1 + k_2 \cdot p' + k_1 \cdot k_2 = (p + p') \cdot k_2 + k_1 \cdot k_2 = (p + p' + k_1) \cdot k_2 = -k_2 \cdot k_2 = 0 \quad (4.24)$$

donde hemos usado conservación de momento escrito como $p + p' + k_1 + k_2 = 0$ y la relación que viene de elevar al cuadrado conservación de momento $p' \cdot k_1 = p \cdot k_2$.

Por lo que podemos reescribir

$$\begin{aligned} 2e^2 \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} &= -2e^2 \epsilon_1 \cdot \left(\frac{pp'}{p' \cdot k_2} + \frac{p'p}{p' \cdot k_1} + \mathbf{1} \right) \cdot \epsilon_2 \\ &= -2e^2 \epsilon_1^\mu \left(\frac{p_\mu p'_\nu}{p' \cdot k_2} + \frac{p'_\mu p_\nu}{p' \cdot k_1} + \eta_{\mu\nu} \right) \epsilon_2^\nu \end{aligned} \quad (4.25)$$

De donde notamos que la ecuación 4.25 es la misma que la ecuación 3.41, además si comparamos nuestro resultado con la ecuación 2.61, que obtuvimos realizando los cálculos con los diagramas de Feynman, también concuerda, ya que $p \cdot k_1 = p' \cdot k_2$.

4.2.3. Asignación de helicidades

Vamos a especificar la forma de la dispersión dependiendo de las helicidades de los fotones, que simplemente serán $+$ ó $-$, y vamos a llamar por convención, a la matriz de dispersión $\mathcal{M} = \hat{D}$.

Entonces

$$\mathcal{M}^{p'p++} = \hat{D}_2^{p'p++} = 2e^2 \frac{r_1 \cdot f_1^+ \cdot f_2^+ \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2}. \quad (4.26)$$

Ahora, vamos a ayudarnos de las ecuaciones obtenidas en la sección 3.3, para escribir

$$\mathcal{M}^{p'p++} = 2e^2 \frac{p' \cdot f_1^+ \cdot f_2^+ \cdot p'}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_2} \quad (4.27)$$

En específico la ecuación 3.89, nos permite escribir

$$2p' \cdot f_1^+ \cdot f_2^+ \cdot p' = p' \cdot \{f_1^+, f_2^+\} \cdot p' = -\frac{1}{2}[12]^2 p'^2, \quad (4.28)$$

por lo que

$$\mathcal{M}^{p'p++} = \frac{e^2 m^2}{2} \frac{[12]^2}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_2} = 2e^2 m^2 \frac{[12]^2}{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (4.29)$$

en donde

$$\lambda_i = 2p' \cdot k_i. \quad (4.30)$$

De forma análoga tenemos una expresión para

$$\mathcal{M}^{p'p--} = 2e^2 \frac{p' \cdot f_1^- \cdot f_2^- \cdot p'}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_2} = 2e^2 m^2 \frac{\langle 12 \rangle^2}{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (4.31)$$

así como para las helicidades mixtas

$$\mathcal{M}^{p'p+-} = 2e^2 \frac{\langle r_1 k_2 \rangle [k_1 r_2]}{\langle r_1 k_1 \rangle [r_2 k_2]} \quad (4.32)$$

$$\mathcal{M}^{p'p-+} = 2e^2 \frac{\langle k_1 r_2 \rangle [r_1 k_2]}{\langle r_2 k_2 \rangle [r_1 k_1]}, \quad (4.33)$$

aplicando nuestros vectores de referencia favoritos dados en las ecuaciones 4.12 y 4.13, así como

la ecuación 3.87, tenemos que las helicidades mixtas pueden escribirse como

$$\mathcal{M}^{p'p+-} = 2e^2 \frac{p' \cdot f_1^+ \cdot f_2^- \cdot p'}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_2} = 2e \frac{[1|p'|2]^2}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (4.34)$$

$$\mathcal{M}^{p'p-+} = 2e^2 \frac{p' \cdot f_1^- \cdot f_2^+ \cdot p'}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_2} = 2e \frac{[2|p'|1]^2}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (4.35)$$

Las expresiones dadas por las ecuaciones 4.34 y 4.35, aunque más compactas, hacen uso de un vector de referencia escogido de tal forma que elimina ciertos términos, además de tener el detalle de incluir a p' dentro del resultado, éste quedará condicionado a la forma de p' y el sistema coordinado en el que se tome. Éstos resultados concuerdan con la literatura [67]

4.3. Dispersión para 3 fotones, N=3

Vamos a repetir los mismos pasos que para la dispersión de Compton con $N = 2$, pero ésta vez vamos a simplificar el trabajo con los trucos que hemos mostrado. Entonces vamos a escribir la dispersión para 3 fotones como

$$D_3^{p'p}(k_1, \epsilon_1; r_1; k_2 \epsilon_2; r_2, k_3, \epsilon_3; r_3) = e^3 \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_0^T \prod_{i=1}^3 d\tau_i \bar{R}_3 e^{(\cdot)}, \quad (4.36)$$

donde R_3 , según la ecuación 3.65, después de utilizar los vectores de referencia escritos como

$$r_i^\mu = p'^\mu + \frac{m^2}{2p' \cdot k_i} k_i^\mu \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.37)$$

toma la forma

$$\begin{aligned} \bar{R}_3 &= 2 \sum_{i=0}^4 \left\{ \delta_{23} \sigma_{1i} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_i}{r_1 \cdot k_1} \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot r_3}{r_2 \cdot k_2 r_3 \cdot k_3} + \delta_{13} \sigma_{2i} \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot k_i}{r_2 \cdot k_2} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_3 \cdot r_3}{r_1 \cdot k_1 r_3 \cdot k_3} \right. \\ &\quad \left. + \delta_{12} \sigma_{3i} \frac{r_3 \cdot f_3 \cdot k_i}{r_3 \cdot k_3} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} \right\} \\ &= 2 \sum_{i=0}^4 \left\{ \delta_{23} \sigma_{1i} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_i}{r_1 \cdot k_1} \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot r_3}{r_2 \cdot k_2 r_3 \cdot k_3} + (1 \leftrightarrow 2) + (1 \leftrightarrow 3) \right\} \end{aligned} \quad (4.38)$$

en donde hemos eliminado explícitamente el término correspondiente a la multiplicación de las σ 's, como lo hemos comentado usando la ecuación 3.71.

4.3.1. Integrales sobre los parámetros

Lo que necesitamos hacer ahora, es dibujar los diagramas de Feynman asociados a la dispersión con 3 fotones, para deducir, a partir de ellos, la forma que tendrán las integrales asociadas al factor

$e^{(\cdot)}$. Nos bastará con tomar el primer término de \bar{R}_3 escrito como

$$\bar{R}_3 \supset \sum_{i=0}^4 \sigma_{1i} \delta_{23} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_i}{r_1 \cdot k_1} \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot r_3}{r_2 \cdot k_2 r_3 \cdot k_3} = \delta_{23} \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot r_3}{r_2 \cdot k_2 r_3 \cdot k_3} \left\{ -\frac{r_1 \cdot f_1 \cdot p'}{r_1 \cdot k_1} + \sigma_{12} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_2}{r_1 \cdot k_1} + \sigma_{13} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_3}{r_1 \cdot k_1} + \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot p}{r_1 \cdot k_1} \right\} \quad (4.39)$$

ya que los otros términos simplemente son una permutación de índices. Con ayuda de la Figura 4.3 observamos que las integrales toman la forma de una suma de propagadores $\frac{1}{(p'+k_1)^2+m^2}$, $\frac{1}{(p'+k_2+k_3)^2+m^2}$.

El signo en el medio dependerá de la σ_{1i} , es decir del ordenamiento temporal de los fotones. Por lo que las integrales se reducen a encontrar el signo adecuado para los propagadores involucrados, en el caso de tres fotones, tenemos conservación de momento $p + p' + k_1 + k_2 + k_3 = 0$, $(p + k_1)^2 = (p' + k_2 + k_3)^2$ el resultado será

$$\begin{aligned} & \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot r_3}{r_2 \cdot k_2 r_3 \cdot k_3} \frac{r_1 \cdot f_1}{r_1 \cdot k_1} \cdot \left\{ (p - p') \left[\frac{1}{(p' + k_1)^2 + m^2} + \frac{1}{(p' + k_2 + k_3)^2 + m^2} \right] \right. \\ & \left. + k_2 \left[\frac{1}{(p' + k_1)^2 + m^2} - \frac{1}{(p' + k_2 + k_3)^2 + m^2} \right] + k_3 \left[\frac{1}{(p' + k_1)^2 + m^2} - \frac{1}{(p' + k_2 + k_3)^2 + m^2} \right] \right\} \\ & = \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot r_3}{r_2 \cdot k_2 r_3 \cdot k_3} \frac{r_1 \cdot f_1}{r_1 \cdot k_1} \cdot \left\{ \frac{p - p' + k_2 + k_3}{(p' + k_1)^2 + m^2} + \frac{(p - (p' + k_2 + k_3))}{(p' + k_2 + k_3)^2 + m^2} \right\} \\ & = \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot r_3}{r_2 \cdot k_2 r_3 \cdot k_3} \frac{r_1 \cdot f_1}{r_1 \cdot k_1} \cdot \left\{ \frac{2p + k_1}{2p \cdot k_1} - \frac{2p' + k_1}{2p' \cdot k_1} \right\} \\ & = 2 \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot r_3}{r_2 \cdot k_2 r_3 \cdot k_3} \frac{r_1 \cdot f_1}{r_1 \cdot k_1} \cdot \left\{ \frac{p}{2p \cdot k_1} - \frac{p'}{2p' \cdot k_1} \right\} \\ & = \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot r_3}{r_2 \cdot k_2 r_3 \cdot k_3} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot p}{r_1 \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_1} \end{aligned} \quad (4.40)$$

claro que ya hemos tomamos los vectores de referencia dados por la ecuación 4.37, es así como no hemos deshecho de los términos que involucraban por ejemplo $r_1 \cdot f_1 \cdot p' = 0$ entonces la dispersión para 3 fotones se escribe como

$$D_3^{pp'} = 2e^3 \frac{p' \cdot f_1 \cdot p}{p' \cdot k_1 p \cdot k_1} \frac{p' \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot p'}{p' \cdot k_2 p' \cdot k_3} + (1 \leftrightarrow 2) + (1 \leftrightarrow 3) \quad (4.41)$$

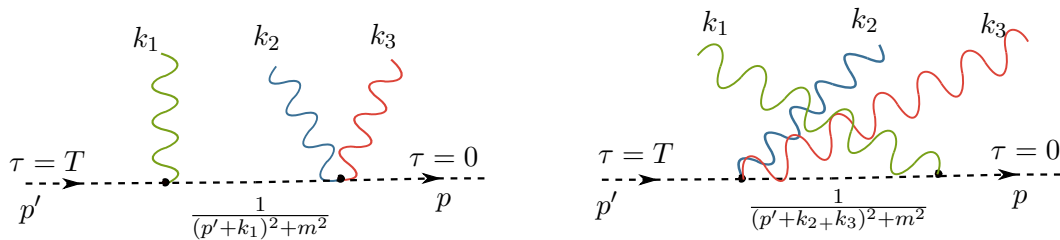


Figura 4.3: Diagrama de Feynman que representa la interacción de tres fotones con momento k_1 , k_2 y k_3 con una partícula escalar de momento entrante p' y saliente p .

4.3.2. Comparación con el formalismo estándar

Utilizando los diagramas de Feynman a nivel árbol dados por las Figuras 4.4 y 4.5, observamos que la dispersión para 3 fotones usando el formalismo estándar se escribe como

$$D_3^{pp'} = 2e^3 \left\{ \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 \left(\frac{\epsilon_1 \cdot p'}{p' \cdot k_1} - \frac{\epsilon_1 \cdot p}{p \cdot k_1} \right) + \frac{\epsilon_1 \cdot p \epsilon_2 \cdot (p' + k_3) \epsilon_3 \cdot p'}{p \cdot k_1 p' \cdot k_3} + \frac{\epsilon_1 \cdot p \epsilon_2 \cdot p' \epsilon_3 \cdot (p' + k_2)}{p \cdot k_1 p' \cdot k_2} \right\} + (1 \leftrightarrow 2) + (1 \leftrightarrow 3) \quad (4.42)$$

Para comparar nuestro resultado obtenido a través del formalismo Worldline, primero, vamos a escribir $f_1^{\mu\nu} = k^\mu \epsilon^\nu - \epsilon^\mu k^\nu$, de tal forma que 4.41 se escribe como

$$D_3^{pp'} = 2e^3 \left\{ \frac{\epsilon_1 \cdot p \epsilon_2 \cdot k_3 \epsilon_3 \cdot p'}{p \cdot k_1 p' \cdot k_3} - \frac{\epsilon_1 \cdot p \epsilon_2 \cdot \epsilon_3}{p \cdot k_1} - \frac{\epsilon_1 \cdot p \epsilon_2 \cdot p' k_2 \cdot k_3 \epsilon_3 \cdot p'}{p \cdot k_1 p' \cdot k_2 p' \cdot k_3} + \frac{\epsilon_1 \cdot p \epsilon_2 \cdot p' \epsilon_3 \cdot k_2}{p \cdot k_1 p' \cdot k_2} - \frac{\epsilon_1 \cdot p' \epsilon_2 \cdot k_3 \epsilon_3 \cdot p'}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_3} + \frac{\epsilon_1 \cdot p' \epsilon_2 \cdot \epsilon_3}{p' \cdot k_1} + \frac{\epsilon_1 \cdot p' \epsilon_2 \cdot p' k_2 \cdot k_3 \epsilon_3 \cdot p'}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_2 p' \cdot k_3} - \frac{\epsilon_1 \cdot p' \epsilon_2 \cdot p' \epsilon_3 \cdot k_2}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_2} \right\} + (1 \leftrightarrow 2) + (1 \leftrightarrow 3) \quad (4.43)$$

Los términos que dependen de $\epsilon_2 \cdot \epsilon_3$ se pueden identificar inmediatamente con los términos de las gaviotas en el formalismo estándar, es decir

$$\epsilon_2 \cdot \epsilon_3 \left(\frac{\epsilon_1 \cdot p'}{p' \cdot k_1} - \frac{\epsilon_1 \cdot p}{p \cdot k_1} \right) + (1 \leftrightarrow 2) + (1 \leftrightarrow 3) \quad (4.44)$$

Ahora, para conseguir los términos restantes, tenemos que usar conservación de momento escrito como

$$k_2 \cdot k_3 = p \cdot k_1 - p' \cdot (k_2 + k_3) \quad (4.45)$$

de tal forma que el término

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon_1 \cdot p \epsilon_2 \cdot k_3 \epsilon_3 \cdot p'}{p \cdot k_1 p' \cdot k_3} - \frac{\epsilon_1 \cdot p \epsilon_2 \cdot p' k_2 \cdot k_3 \epsilon_3 \cdot p'}{p \cdot k_1 p' \cdot k_2 p' \cdot k_3} + \frac{\epsilon_1 \cdot p \epsilon_2 \cdot p' \epsilon_3 \cdot k_2}{p \cdot k_1 p' \cdot k_2} = \\ & \frac{\epsilon_1 \cdot p \epsilon_2 \cdot k_3 \epsilon_3 \cdot p'}{p \cdot k_1 p' \cdot k_3} - \frac{\epsilon_1 \cdot p \epsilon_2 \cdot p' \epsilon_3 \cdot p'}{p' \cdot k_2 p' \cdot k_3} + \frac{\epsilon_1 \cdot p \epsilon_2 \cdot p' \epsilon_3 \cdot p'}{p \cdot k_1 p' \cdot k_3} + \frac{\epsilon_1 \cdot p \epsilon_2 \cdot p' \epsilon_3 \cdot p'}{p \cdot k_1 p' \cdot k_2} + \frac{\epsilon_1 \cdot p \epsilon_2 \cdot p' \epsilon_3 \cdot k_2}{p \cdot k_1 p' \cdot k_2} = \\ & \frac{\epsilon_1 \cdot p \epsilon_2 \cdot (p' + k_3) \epsilon_3 \cdot p'}{p \cdot k_1 p' \cdot k_3} + \frac{\epsilon_1 \cdot p \epsilon_2 \cdot p' \epsilon_3 \cdot (p' + k_2)}{p \cdot k_1 p' \cdot k_2} - \frac{\epsilon_1 \cdot p \epsilon_2 \cdot p' \epsilon_3 \cdot p'}{p' \cdot k_2 p' \cdot k_3} \end{aligned} \quad (4.46)$$

De donde se ve con claridad que los dos primeros términos de la ecuación 4.46 corresponden al formalismo estándar, con las respectivas suma de permutaciones $(1 \leftrightarrow 2) + (1 \leftrightarrow 3)$.

Por supuesto, nos resta demostrar que los siguientes términos se anulan

$$- \frac{\epsilon_1 \cdot p' \epsilon_2 \cdot k_3 \epsilon_3 \cdot p'}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_3} + \frac{\epsilon_1 \cdot p' \epsilon_2 \cdot p' k_2 \cdot k_3 \epsilon_3 \cdot p'}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_2 p' \cdot k_3} - \frac{\epsilon_1 \cdot p' \epsilon_2 \cdot p' \epsilon_3 \cdot k_2}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_2} - \frac{\epsilon_1 \cdot p \epsilon_2 \cdot p' \epsilon_3 \cdot p'}{p' \cdot k_2 p' \cdot k_3} + (1 \leftrightarrow 2) + (1 \leftrightarrow 3) = 0 \quad (4.47)$$

Escritos explícitamente tenemos

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\epsilon_1 \cdot p' \epsilon_2 \cdot k_3 \epsilon_3 \cdot p'}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_3} + \frac{\epsilon_1 \cdot p' \epsilon_2 \cdot p' k_2 \cdot k_3 \epsilon_3 \cdot p'}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_2 p' \cdot k_3} - \frac{\epsilon_1 \cdot p' \epsilon_2 \cdot p' \epsilon_3 \cdot k_2}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_2} - \frac{\epsilon_1 \cdot p \epsilon_2 \cdot p' \epsilon_3 \cdot p'}{p' \cdot k_2 p' \cdot k_3} \\
 & -\frac{\epsilon_2 \cdot p' \epsilon_1 \cdot k_3 \epsilon_3 \cdot p'}{p' \cdot k_2 p' \cdot k_3} + \frac{\epsilon_2 \cdot p' \epsilon_1 \cdot p' k_1 \cdot k_3 \epsilon_3 \cdot p'}{p' \cdot k_2 p' \cdot k_1 p' \cdot k_3} - \frac{\epsilon_2 \cdot p' \epsilon_1 \cdot p' \epsilon_3 \cdot k_1}{p' \cdot k_2 p' \cdot k_1} - \frac{\epsilon_2 \cdot p \epsilon_1 \cdot p' \epsilon_3 \cdot p'}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_3} \\
 & -\frac{\epsilon_3 \cdot p' \epsilon_2 \cdot k_1 \epsilon_1 \cdot p'}{p' \cdot k_3 p' \cdot k_1} + \frac{\epsilon_3 \cdot p' \epsilon_2 \cdot p' k_2 \cdot k_1 \epsilon_1 \cdot p'}{p' \cdot k_3 p' \cdot k_2 p' \cdot k_1} - \frac{\epsilon_3 \cdot p' \epsilon_2 \cdot p' \epsilon_1 \cdot k_2}{p' \cdot k_3 p' \cdot k_2} - \frac{\epsilon_3 \cdot p \epsilon_2 \cdot p' \epsilon_1 \cdot p'}{p' \cdot k_2 p' \cdot k_1}
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Agrupando términos, de la primera y tercera columna de la ecuación 4.48, así como los términos provenientes del cambio dado por la ecuación 4.45, utilizando conservación de momento $-p = p' + k_1 + k_2 + k_3$ y ortogonalidad $\epsilon_i \cdot k_i$ obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \frac{\epsilon_1 \cdot (p - p') \epsilon_2 \cdot p' \epsilon_3 \cdot p'}{p' \cdot k_2 p' \cdot k_3} + \frac{\epsilon_1 \cdot p' \epsilon_2 \cdot (p - p') \epsilon_3 \cdot p'}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_3} + \frac{\epsilon_1 \cdot p' \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 \cdot (p - p')}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_2} + \\
 & \frac{\epsilon_1 \cdot p' \epsilon_2 \cdot p' \epsilon_3 \cdot p' \cdot (k_1 + k_2 + k_3)}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_2 p' \cdot k_3} - \frac{\epsilon_1 \cdot p \epsilon_2 \cdot p' \epsilon_3 \cdot p'}{p' \cdot k_2 p' \cdot k_3} - \frac{\epsilon_2 \cdot p \epsilon_1 \cdot p' \epsilon_3 \cdot p'}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_3} - \frac{\epsilon_3 \cdot p \epsilon_2 \cdot p' \epsilon_1 \cdot p'}{p' \cdot k_2 p' \cdot k_1} = 0
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

ya que $p \cdot (k_1 + k_2 + k_3) = p' \cdot (k_1 + k_2 + k_3)$.

Por lo que queda demostrado que ambos cálculos, por diferentes métodos son equivalentes.

4.3.3. Asignación de helicidades

Para asignar helicidades necesitamos escribir el término $\frac{r \cdot f \cdot p}{r \cdot k}$ en forma de vectores nulos, y así poder ocupar las expresiones 3.93 y 3.98. Ésto lo hacemos definiendo un vector

$$\mathbf{r}_i^\mu = p^\mu + \frac{m^2}{2p \cdot k_i} k_i^\mu \quad i = 1, 2, 3 \tag{4.50}$$

que ahora depende de p , en lugar de p' como se ha propuesto para r en la ecuación 4.37.

De tal forma que

$$\frac{r_1 \cdot f_1 \cdot \mathbf{r}_1}{r_1 \cdot k_1} = \frac{p' \cdot f_1 \cdot p}{p' \cdot k_1} + \frac{m^2}{2p \cdot k_1} \frac{p' \cdot f_1 \cdot k_1}{p' \cdot k_1} = \frac{p' \cdot f_1 \cdot p}{p' \cdot k_1} \tag{4.51}$$

ya que $f_i \cdot k_i = 0$ como se había usado para el caso $N = 2$.

Sin escribir los términos que dependen de las permutaciones $(1 \leftrightarrow 2)$ y $(1 \leftrightarrow 3)$ las helicidades

toman la forma

$$\mathcal{M}_3^{+++} = 2\sqrt{2}e^3 \frac{\langle r_1 \mathbf{r}_1 \rangle [\mathbf{r}_1 1]}{\langle r_1 1 \rangle} \frac{m^2 [23]^2}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \quad (4.52)$$

$$\mathcal{M}_3^{++-} = 2\sqrt{2}e^2 \frac{\langle r_1 \mathbf{r}_1 \rangle [\mathbf{r}_1 1]}{\langle r_1 1 \rangle} \frac{[2|p' | 3]^2}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \quad (4.53)$$

$$\mathcal{M}_3^{+-+} = 2\sqrt{2}e \frac{\langle r_1 \mathbf{r}_1 \rangle [\mathbf{r}_1 1]}{\langle r_1 1 \rangle} \frac{[3|p' | 2]^2}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \quad (4.54)$$

$$\mathcal{M}_3^{-++} = 2\sqrt{2}e^3 \frac{[r_1 \mathbf{r}_1] \langle \mathbf{r}_1 1 \rangle}{[r_1 1]} \frac{m^2 [23]^2}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \quad (4.55)$$

$$\mathcal{M}_3^{+--} = 2\sqrt{2}e^3 \frac{\langle r_1 \mathbf{r}_1 \rangle [\mathbf{r}_1 1]}{\langle r_1 1 \rangle} \frac{m^2 \langle 23 \rangle^2}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \quad (4.56)$$

$$\mathcal{M}_3^{-+-} = 2\sqrt{2}e^2 \frac{[r_1 \mathbf{r}_1] \langle \mathbf{r}_1 1 \rangle}{[r_1 1]} \frac{[2|p' | 3]^2}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \quad (4.57)$$

$$\mathcal{M}_3^{--+} = 2\sqrt{2}e^2 \frac{[r_1 \mathbf{r}_1] \langle \mathbf{r}_1 1 \rangle}{[r_1 1]} \frac{[3|p' | 2]^2}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \quad (4.58)$$

$$\mathcal{M}_3^{---} = 2\sqrt{2}e^3 \frac{[r_1 \mathbf{r}_1] \langle \mathbf{r}_1 1 \rangle}{[r_1 1]} \frac{m^2 \langle 23 \rangle^2}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \quad (4.59)$$

Donde λ_i tiene la misma forma ya definida en 4.30, y $\lambda_i = 2p \cdot k_i$.

4.4. Dispersión para 4 fotones, N=4

De manera análoga, vamos a empezar por escribir la dispersión para cuatro fotones de manera explícita como

$$D_4^{p'p}(k_1, \epsilon_1; r_1 \cdots k_4, \epsilon_4; r_4) = (e)^4 \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_0^T \prod_{i=1}^4 d\tau_i \bar{R}_4 e^{(\cdot)} \quad (4.60)$$

con

$$\begin{aligned} \bar{R}_4 &= \sum_{i,j,l,m=0}^5 \sigma_{1i} \sigma_{2j} \sigma_{3l} \sigma_{4m} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_i}{r_1 \cdot k_1} \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot k_j}{r_2 \cdot k_2} \frac{r_3 \cdot f_3 \cdot k_l}{r_3 \cdot k_3} \frac{r_4 \cdot f_4 \cdot k_m}{r_4 \cdot k_4} \\ &+ 2 \sum_{i,j=0}^5 \left\{ \sigma_{1i} \sigma_{2j} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_i}{r_1 \cdot k_1} \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot k_j}{r_2 \cdot k_2} \delta_{34} \frac{r_3 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot r_4}{r_3 \cdot k_3 r_4 \cdot k_4} \right. \\ &+ (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4) + (1 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 4) + (1 \leftrightarrow 3)(2 \leftrightarrow 4) \left. \right\} \\ &+ 2^2 \left\{ \delta_{12} \delta_{34} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} \frac{r_3 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot r_4}{r_3 \cdot k_3 r_4 \cdot k_4} + (2 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 3) \right\} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Ahora sabemos que con la ayuda de los vectores de referencia adecuados dados por la siguiente ecuación

$$r_i^\mu = p'^\mu + \frac{m^2}{2p' \cdot k_i} k_i^\mu, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (4.62)$$

podemos eliminar el primer término de la ecuación de arriba, y tomar un subconjunto para realizar las integrales, ya que para obtener el resultado total basta con sumarle las permutaciones indicadas. De ésta forma tomemos

$$\begin{aligned} \bar{R}_4 \supset 2 \sum_{i,j=0}^5 \sigma_{1i} \sigma_{2j} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_i}{r_1 \cdot k_1} \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot k_j}{r_2 \cdot k_2} \delta_{34} \frac{r_3 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot r_4}{r_3 \cdot k_3 r_4 \cdot k_4} \\ + 2^2 \delta_{12} \delta_{34} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} \frac{r_3 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot r_4}{r_3 \cdot k_3 r_4 \cdot k_4} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Por supuesto, las permutaciones faltantes podemos obtenerlas inmediatamente de la ecuación 4.61, que serán sumadas al resultado obtenido.

4.4.1. Integrales sobre los parámetros

Como se puede notar, en ésta ocasión tenemos dos términos que contribuyen, así que necesitamos dibujar los diagramas de Feynman correspondientes para poder extraer de ahí, el valor de las integrales que será como sabemos, la suma de los propagadores correspondientes. Vamos a calcular primero, las contribuciones que vienen de los términos en donde existe algún σ_{Ni} involucrado, para ahorrar espacio, vamos a empezar por renombrar

$$\varepsilon_i = \frac{r_i \cdot f_i}{r_i \cdot k_i} \quad (4.64)$$

Por supuesto ε no son las polarizaciones $\varepsilon \neq \epsilon$. Lo que sigue ahora es desarrollar las sumas de la ecuación 4.63 para ir asignando el signo correspondiente derivado de $\sigma_{1i} \sigma_{2j}$, llamémosle $\bar{R}_{4\sigma}$

$$\bar{R}_{4\sigma} = 2 \sum_{i,j=0}^5 \sigma_{1i} \sigma_{2j} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_i}{r_1 \cdot k_1} \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot k_j}{r_2 \cdot k_2} \quad (4.65)$$

Ahora con ayuda de la Figura 4.6 y usando el hecho de que $\varepsilon_i \cdot k_i = 0$ tenemos que los términos involucrados son

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon_1 \cdot (p - p') [\varepsilon_2 \cdot k_1 (-I + II - III + IV - V + VI) \\
 & \quad + \varepsilon_2 \cdot k_3 (+I + II - III + IV - V - VI) \\
 & \quad + \varepsilon_2 \cdot k_4 (+I + II - III + IV - V - VI)] \\
 & + \varepsilon_2 \cdot (p - p') [\varepsilon_1 \cdot k_2 (+I - II + III - IV + V - VI) \\
 & \quad + \varepsilon_1 \cdot k_3 (+I + II + III - IV - V - VI) \\
 & \quad + \varepsilon_1 \cdot k_4 (+I + II + III - IV - V - VI)] \\
 & + \varepsilon_1 \cdot k_2 \varepsilon_2 \cdot k_1 (-I - II - III - IV - V - VI) \\
 & + \varepsilon_1 \cdot k_2 \varepsilon_2 \cdot k_3 (+I - II - III - IV - V + VI) \\
 & + \varepsilon_1 \cdot k_2 \varepsilon_2 \cdot k_4 (+I - II - III - IV - V + VI) \\
 & + \varepsilon_1 \cdot k_3 \varepsilon_2 \cdot k_1 (-I + II - III - IV + V - VI) \\
 & + \varepsilon_1 \cdot k_3 \varepsilon_2 \cdot k_3 (+I + II - III - IV + V + VI) \\
 & + \varepsilon_1 \cdot k_3 \varepsilon_2 \cdot k_4 (+I + II - III - IV + V + VI) \\
 & + \varepsilon_1 \cdot k_4 \varepsilon_2 \cdot k_1 (-I + II - III - IV + V - VI) \\
 & + \varepsilon_1 \cdot k_4 \varepsilon_2 \cdot k_3 (+I + II - III - IV + V + VI) \\
 & + \varepsilon_1 \cdot k_4 \varepsilon_2 \cdot k_4 (+I + II - III - IV + V + VI) \\
 & + \varepsilon_1 \cdot \left(\frac{\{p', p'\} + \{p, p\}}{2} + \{p', p\} \right) \cdot \varepsilon_2 (+I + II + III + IV + V + VI) \tag{4.66}
 \end{aligned}$$

donde $\varepsilon_1 \{A, B\} \varepsilon_2 = \varepsilon_1^\mu (A_\mu B_\nu + A_\nu B_\mu) \varepsilon_2^\nu$. Por supuesto si recordamos que también $\varepsilon_i \cdot p' = 0$ para nuestros vectores de referencia 4.62 podemos simplificar el último término de la ecuación 4.66

$$\varepsilon_1 \cdot \left(\frac{\{p', p'\} + \{p, p\}}{2} + \{p', p\} \right) \cdot \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cdot p \varepsilon_2 \cdot p \tag{4.67}$$

Ahora parece que tenemos muchos términos involucrados, pero en realidad la mayoría se hacen cero. De ésto nos aseguramos factorizando cada número romano por separado, vamos a mostrar de forma explícita que factorizando I de la ecuación 4.66 resulta en el término

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon_1 \cdot p \varepsilon_2 \cdot (-k_1 + k_3 + k_4) + \varepsilon_2 \cdot p \varepsilon_1 \cdot (k_2 + k_3 + k_4) + \varepsilon_1 \cdot k_2 \varepsilon_2 \cdot (-k_1 + k_3 + k_4) \\
 & + \varepsilon_1 \cdot k_3 \varepsilon_2 \cdot (-k_1 + k_3 + k_4) + \varepsilon_1 \cdot k_4 \varepsilon_2 \cdot (-k_1 + k_3 + k_4) + \varepsilon_1 \cdot p \varepsilon_2 \cdot p \\
 & = \varepsilon_1 \cdot p \varepsilon_2 \cdot (-2k_1 - p - p') - \varepsilon_2 \cdot p \varepsilon_1 \cdot p + \varepsilon_1 \cdot k_2 \varepsilon_2 \cdot (-2k_1 - p - p') + \varepsilon_1 \cdot p \varepsilon_2 \cdot p \\
 & = -\varepsilon_2 \cdot (2k_1 + p + p') \varepsilon_1 \cdot (p - p' + k_2 + k_3 + k_4) \\
 & = \varepsilon_2 \cdot (2k_1 + p + p') \varepsilon_1 \cdot (2p' + k_1) = 0 \tag{4.68}
 \end{aligned}$$

En donde hemos usado conservación de momento a discreción $p + p' + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$.

Se puede mostrar que los términos involucrados en II , III , IV son todos también cero, y que los únicos términos que contribuyen son V y VI , los cuales son simétricos, entonces la contribución que viene del término con $\bar{R}_{4\sigma}$ se escribe como

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_0^T \prod_{i=1}^4 d\tau_i \bar{R}_{4\sigma} e^{(\cdot)} &= 2 \left[\frac{2^2 \varepsilon_2 \cdot p \varepsilon_1 \cdot (p + k_2)}{2p \cdot k_2 2(p \cdot (k_1 + k_2) + k_1 \cdot k_2)} + \frac{2^2 \varepsilon_1 \cdot p \varepsilon_2 \cdot (p + k_1)}{2p \cdot k_1 2(p \cdot (k_1 + k_2) + k_1 \cdot k_2)} \right] \\
 &= 2 \left[\frac{\varepsilon_2 \cdot p \varepsilon_1 \cdot (p + k_2 + k_1)}{p \cdot k_2 (p \cdot (k_1 + k_2) + k_1 \cdot k_2)} + \frac{\varepsilon_1 \cdot p \varepsilon_2 \cdot (p + k_1 + k_2)}{p \cdot k_1 (p \cdot (k_1 + k_2) + k_1 \cdot k_2)} \right] \\
 &= 2 \left[\frac{p' \cdot f_2 \cdot p}{p' \cdot k_2} \frac{p' \cdot f_1 \cdot (p + k_2 + k_1)}{p' \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot k_2} \frac{1}{p \cdot (k_1 + k_2) + k_1 \cdot k_2} \right] \\
 &\quad + 2 \left[\frac{p' \cdot f_1 \cdot p}{p' \cdot k_1} \frac{p' \cdot f_2 \cdot (p + k_1 + k_2)}{p' \cdot k_2} \frac{1}{p \cdot k_1} \frac{1}{p \cdot (k_2 + k_1) + k_1 \cdot k_2} \right]
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

En donde hemos introducido los vectores 4.62 y un k_1 ó k_2 que no altera la igualdad para mostrar la simetría de bosones de forma más clara.

Al término que involucra dos δ 's vamos a llamarle

$$\bar{R}_{4\delta} = 2^2 \delta_{12} \delta_{34} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} \frac{r_3 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot r_4}{r_3 \cdot k_3 r_4 \cdot k_4} \tag{4.70}$$

En base a la Figura 4.7 la integral simplemente nos da

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_0^T \prod_{i=1}^4 d\tau_i \bar{R}_{4\delta} e^{(\cdot)} &= 2^2 \frac{p' \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot p'}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_2} \frac{p' \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot p'}{p' \cdot k_3 p' \cdot k_4} \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{(p' + k_1 + k_2)^2 + m^2} + \frac{1}{(p' + k_3 + k_4)^2 + m^2} \right] \\
 &= 2 \frac{p' \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot p'}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_2} \frac{p' \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot p'}{p' \cdot k_3 p' \cdot k_4} \left[\frac{1}{p' \cdot (k_1 + k_2) + k_1 \cdot k_2} + \frac{1}{p \cdot (k_1 + k_2) + k_1 \cdot k_2} \right]
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

Por lo que la forma completa de dispersión para cuatro fotones, se escribe como

$$\begin{aligned}
 D_4^{p'p} &= 2e^4 \left\{ \left[\frac{p' \cdot f_2 \cdot p}{p' \cdot k_2} \frac{p' \cdot f_1 \cdot (p + k_2 + k_1)}{p' \cdot k_1 p \cdot k_2} + \frac{p' \cdot f_1 \cdot p}{p' \cdot k_1} \frac{p' \cdot f_2 \cdot (p + k_1 + k_2)}{p' \cdot k_2 p \cdot k_1} \right] \frac{1}{p \cdot (k_2 + k_1) + k_1 \cdot k_2} \right. \\
 &\quad \times \frac{r_3 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot r_4}{r_3 \cdot k_3 r_4 \cdot k_4} + (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4) + (1 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 4) + (1 \leftrightarrow 3)(2 \leftrightarrow 4) \\
 &\quad \left. + \frac{p' \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot p'}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_2} \frac{p' \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot p'}{p' \cdot k_3 p' \cdot k_4} \left[\frac{1}{p' \cdot (k_1 + k_2) + k_1 \cdot k_2} + \frac{1}{p \cdot (k_1 + k_2) + k_1 \cdot k_2} \right] + (2 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 3) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

4.4.2. Asignación de helicidades

De forma análoga al caso para 3 fotones, definimos un vector

$$\mathbf{v}_i^\mu = p^\mu + \frac{m^2}{2p \cdot k_i} k_i^\mu \quad i = 1, \dots, 4 \tag{4.73}$$

Utilizando las ecuaciones 3.93, 3.98, 3.85, 3.79, definiendo $\varkappa_i = 2p \cdot k_i$ vamos a simplificar el término para la dispersión de cuatro fotones, sin escribir las conmutaciones de forma explícita ,

tenemos

$$D_{\alpha^4}^{p'p} = 2e^4 \left\{ \left[\frac{p' \cdot f_2 \cdot p p' \cdot f_1 \cdot (p + k_2 + k_1)}{p' \cdot k_2 p' \cdot k_1 p \cdot k_2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \frac{1}{p \cdot (k_2 + k_1) + k_1 \cdot k_2} \frac{r_3 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot r_4}{r_3 \cdot k_3 r_4 \cdot k_4} \right. \\ \left. + \frac{p' \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot p' p' \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot p'}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_2 p' \cdot k_3 p' \cdot k_4} \left[\frac{1}{p' \cdot (k_1 + k_2) + k_1 \cdot k_2} + \frac{1}{p \cdot (k_1 + k_2) + k_1 \cdot k_2} \right] \right\} \quad (4.74)$$

Por lo que las helicidades son

$$\mathcal{M}_4^{++++} = 2e^4 \left\{ \frac{\langle r_2 \mathbf{r}_2 \rangle [\mathbf{r}_2 2]}{\langle r_2 2 \rangle} \left[\frac{\langle r_1 \mathbf{r}_1 \rangle [\mathbf{r}_1 1] + \langle r_1 2 \rangle [21]}{\langle r_1 1 \rangle \kappa_2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \frac{m^2 [34]^2}{\lambda_3 \lambda_4} \frac{2}{\kappa_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right. \\ \left. + \frac{m^4 [12]^2 [34]^2}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \left[\frac{2}{\kappa_1 + \kappa_2 + \langle 12 \rangle [12]} + \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right] \right\} \quad (4.75)$$

$$\mathcal{M}_4^{+++-} = 2e^4 \left\{ \frac{\langle r_2 \mathbf{r}_2 \rangle [\mathbf{r}_2 2]}{\langle r_2 2 \rangle} \left[\frac{\langle r_1 \mathbf{r}_1 \rangle [\mathbf{r}_1 1] + \langle r_1 2 \rangle [21]}{\langle r_1 1 \rangle \kappa_2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \frac{[3|p'|4]^2}{e \lambda_3 \lambda_4} \frac{2}{\kappa_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right. \\ \left. + \frac{m^2 [12]^2 [3|p'|4]^2}{e \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \left[\frac{2}{\kappa_1 + \kappa_2 + \langle 12 \rangle [12]} + \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right] \right\} \quad (4.76)$$

$$\mathcal{M}_4^{++-+} = 2e^4 \left\{ \frac{\langle r_2 \mathbf{r}_2 \rangle [\mathbf{r}_2 2]}{\langle r_2 2 \rangle} \left[\frac{\langle r_1 \mathbf{r}_1 \rangle [\mathbf{r}_1 1] + \langle r_1 2 \rangle [21]}{\langle r_1 1 \rangle \kappa_2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \frac{[4|p'|3]^2}{e \lambda_3 \lambda_4} \frac{2}{\kappa_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right. \\ \left. + \frac{m^2 [12]^2 [4|p'|3]^2}{e \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \left[\frac{2}{\kappa_1 + \kappa_2 + \langle 12 \rangle [12]} + \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right] \right\} \quad (4.77)$$

$$\mathcal{M}_4^{+-++} = 2e^4 \left\{ \frac{[r_2 \mathbf{r}_2] \langle \mathbf{r}_2 2 \rangle}{[r_2 2]} \left[\frac{\langle r_1 \mathbf{r}_1 \rangle [\mathbf{r}_1 1] + \langle r_1 2 \rangle [21]}{\langle r_1 1 \rangle \kappa_2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \frac{m^2 [34]^2}{\lambda_3 \lambda_4} \frac{2}{\kappa_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right. \\ \left. + \frac{m^2 [34]^2 [1|p'|2]^2}{e \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \left[\frac{2}{\kappa_1 + \kappa_2 + \langle 12 \rangle [12]} + \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right] \right\} \quad (4.78)$$

$$\mathcal{M}_4^{-+++} = 2e^4 \left\{ \frac{\langle r_2 \mathbf{r}_2 \rangle [\mathbf{r}_2 2]}{\langle r_2 2 \rangle} \left[\frac{[r_1 \mathbf{r}_1] \langle \mathbf{r}_1 1 \rangle + [r_1 2] \langle 21 \rangle}{[r_1 1] \kappa_2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \frac{[34]^2}{e \lambda_3 \lambda_4} \frac{2}{\kappa_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right. \\ \left. + \frac{m^2 [34]^2 [2|p'|1]^2}{e \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \left[\frac{2}{\kappa_1 + \kappa_2 + \langle 12 \rangle [12]} + \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right] \right\} \quad (4.79)$$

$$\mathcal{M}_4^{+--+} = 2e^4 \left\{ \frac{\langle r_2 \mathbf{r}_2 \rangle [\mathbf{r}_2 2]}{\langle r_2 2 \rangle} \left[\frac{\langle r_1 \mathbf{r}_1 \rangle [\mathbf{r}_1 1] + \langle r_1 2 \rangle [21]}{\langle r_1 1 \rangle \kappa_2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \frac{m^2 \langle 34 \rangle^2}{\lambda_3 \lambda_4} \frac{2}{\kappa_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right. \\ \left. + \frac{m^4 [12]^2 \langle 34 \rangle^2}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \left[\frac{2}{\kappa_1 + \kappa_2 + \langle 12 \rangle [12]} + \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right] \right\} \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4^{+---} &= 2e^4 \left\{ \frac{\langle r_2 \mathbf{r}_2 \rangle [\mathbf{r}_2 2]}{\langle r_2 2 \rangle} \left[\frac{[r_1 \mathbf{r}_1] \langle \mathbf{r}_1 1 \rangle + [r_1 2] \langle 21 \rangle}{[r_1 1] \kappa_2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \frac{[4|\mathcal{P}'|3]^2}{e\lambda_3\lambda_4} \frac{2}{\kappa_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2 \langle 12 \rangle^2 [4|\mathcal{P}'|3]^2}{e\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} \left[\frac{2}{\kappa_1 + \kappa_2 + \langle 12 \rangle [12]} + \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4^{-+++} &= 2e^4 \left\{ \frac{[r_2 \mathbf{r}_2] \langle \mathbf{r}_2 2 \rangle}{[r_2 2]} \left[\frac{[r_2 \mathbf{r}_2] \langle \mathbf{r}_1 1 \rangle + [r_1 2] \langle 21 \rangle}{[r_1 1] \kappa_2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \frac{m^2 [34]^2}{\lambda_3\lambda_4} \frac{2}{\kappa_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^4 \langle 12 \rangle^2 [34]^2}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} \left[\frac{2}{\kappa_1 + \kappa_2 + \langle 12 \rangle [12]} + \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4^{+--+} &= 2e^4 \left\{ \frac{\langle r_2 \mathbf{r}_2 \rangle [\mathbf{r}_2 2]}{\langle r_2 2 \rangle} \left[\frac{[r_1 \mathbf{r}_1] \langle \mathbf{r}_1 1 \rangle + [r_1 2] \langle 21 \rangle}{[r_1 1] \kappa_2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \frac{[3|\mathcal{P}'|4]^2}{e\lambda_3\lambda_4} \frac{2}{\kappa_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2 \langle 12 \rangle^2 [3|\mathcal{P}'|4]^2}{e\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} \left[\frac{2}{\kappa_1 + \kappa_2 + \langle 12 \rangle [12]} + \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4^{-++-} &= 2e^4 \left\{ \frac{[r_2 \mathbf{r}_2] \langle \mathbf{r}_2 2 \rangle}{[r_2 2]} \left[\frac{\langle r_1 \mathbf{r}_1 \rangle [\mathbf{r}_1 1] + \langle r_1 2 \rangle [21]}{\langle r_1 1 \rangle \kappa_2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \frac{[4|\mathcal{P}'|3]^2}{e\lambda_3\lambda_4} \frac{2}{\kappa_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2 [12]^2 [4|\mathcal{P}'|3]^2}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} \left[\frac{2}{\kappa_1 + \kappa_2 + \langle 12 \rangle [12]} + \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4^{-+-+} &= 2e^4 \left\{ \frac{[r_2 \mathbf{r}_2] \langle \mathbf{r}_2 2 \rangle}{[r_2 2]} \left[\frac{\langle r_1 \mathbf{r}_1 \rangle [\mathbf{r}_1 1] + \langle r_1 2 \rangle [21]}{\langle r_1 1 \rangle \kappa_2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \frac{[3|\mathcal{P}'|4]^2}{e\lambda_3\lambda_4} \frac{2}{\kappa_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2 [12]^2 [3|\mathcal{P}'|4]^2}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} \left[\frac{2}{\kappa_1 + \kappa_2 + \langle 12 \rangle [12]} + \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4^{+---} &= 2e^4 \left\{ \frac{[r_2 \mathbf{r}_2] \langle \mathbf{r}_2 2 \rangle}{[r_2 2]} \left[\frac{\langle r_1 \mathbf{r}_1 \rangle [\mathbf{r}_1 1] + \langle r_1 2 \rangle [21]}{\langle r_1 1 \rangle \kappa_2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \frac{m^2 \langle 34 \rangle^2}{\lambda_3\lambda_4} \frac{2}{\kappa_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2 [1|\mathcal{P}'|2]^2 \langle 34 \rangle^2}{e\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} \left[\frac{2}{\kappa_1 + \kappa_2 + \langle 12 \rangle [12]} + \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4^{-+++} &= 2e^4 \left\{ \frac{\langle r_2 \mathbf{r}_2 \rangle [\mathbf{r}_2 2]}{\langle r_2 2 \rangle} \left[\frac{[r_1 \mathbf{r}_1] \langle \mathbf{r}_1 1 \rangle + [r_1 2] \langle 21 \rangle}{[r_1 1] \kappa_2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \frac{m^2 \langle 34 \rangle^2}{\lambda_3\lambda_4} \frac{2}{\kappa_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2 [2|\mathcal{P}'|1]^2 \langle 34 \rangle^2}{e\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} \left[\frac{2}{\kappa_1 + \kappa_2 + \langle 12 \rangle [12]} + \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4^{-+-+} &= 2e^4 \left\{ \frac{[r_2 \mathbf{r}_2] \langle \mathbf{r}_2 2 \rangle}{[r_2 2]} \left[\frac{[r_1 \mathbf{r}_1] \langle \mathbf{r}_1 1 \rangle + [r_1 2] \langle 21 \rangle}{[r_1 1] \kappa_2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \frac{[3|\mathcal{P}'|4]^2}{e\lambda_3\lambda_4} \frac{2}{\kappa_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2 \langle 12 \rangle^2 [3|\mathcal{P}'|4]^2}{e\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} \left[\frac{2}{\kappa_1 + \kappa_2 + \langle 12 \rangle [12]} + \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4^{-+++} &= 2e^4 \left\{ \frac{[r_2 \mathbf{r}_2] \langle \mathbf{r}_2 2 \rangle}{[r_2 2]} \left[\frac{[r_1 \mathbf{r}_1] \langle \mathbf{r}_1 1 \rangle + [r_1 2] \langle 21 \rangle}{[r_1 1] \kappa_2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \frac{[4|p'|3]^2}{e\lambda_3\lambda_4} \frac{2}{\kappa_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2 \langle 12 \rangle^2 [4|p'|3]^2}{e\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} \left[\frac{2}{\kappa_1 + \kappa_2 + \langle 12 \rangle [12]} + \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4^{----} &= 2e^4 \left\{ \frac{[r_2 \mathbf{r}_2] \langle \mathbf{r}_2 2 \rangle}{[r_2 2]} \left[\frac{[r_1 \mathbf{r}_1] \langle \mathbf{r}_1 1 \rangle + [r_1 2] \langle 21 \rangle}{[r_1 1] \kappa_2} + (1 \leftrightarrow 2) \right] \frac{m^2 \langle 34 \rangle^2}{\lambda_3\lambda_4} \frac{2}{\kappa_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^4 \langle 12 \rangle^2 \langle 34 \rangle^2}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} \left[\frac{2}{\kappa_1 + \kappa_2 + \langle 12 \rangle [12]} + \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \langle 12 \rangle [12]} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.90)$$

4.4.3. Reglas para el caso general

Para el caso general debemos seguir los mismos pasos, es decir, para $N = i$ tenemos que

1. Tomar la representación R_i dada por la ecuación 3.67 ó 3.68.
2. Deshacernos del término que no involucra diagramas gaviota, o dicho de otro modo, el término donde dos fotones no se encuentran en un vértice $\sigma_1 \cdots \sigma_i$. Ésto lo conseguimos tomando nuestros vectores de referencia

$$r_i^\mu = p'^\mu + \frac{m^2}{2p \cdot k_i} k_i^\mu \quad i = 1, \dots, 4 \quad (4.91)$$

3. Tomar un subconjunto del término R_i en el que no se involucren las permutaciones (por simplicidad), éstas serán incluidas en el resultado final. Es importante notar que para un número grande de fotones, por comodidad, podemos separar los términos involucrados y trabajar con cada uno de ellos por separado, para sumarlos al final.
4. Dibujar los diagramas de Feynman en donde los términos gaviota aparecen al inicio del mismo, todos los otros serán cero al sumarlos en la capa de masa.
5. Desarrollar las sumas en R , y con la ayuda de los diagramas de Feynman, escribir los signos correspondientes que vienen de los términos $\sigma_l \cdots \sigma_m$, que sólo depende de la posición del fotón i, m en cada diagrama. No olvide incluir los propagadores que vienen con los diagramas.
6. Utilizar capa de masa $p^2 = p'^2 = -m^2$ y invarianza de norma de los tensores $f^{\mu\nu}$, es decir $k_i \cdot f_i = f_i \cdot k_i = 0$, así como la antisimetría del tensor electromagnético $p' \cdot f \cdot p' = 0$ para deshacernos de la mayor cantidad de términos posibles
7. Repetir los pasos con cada término involucrado, sumandolos al final para obtener la dispersión para i fotones a nivel árbol en la QED escalar (no se olvide de agregar las constantes y las permutaciones ordenadas).
8. Asignar las helicidades con ayuda del formalismo de helicidad spinorial

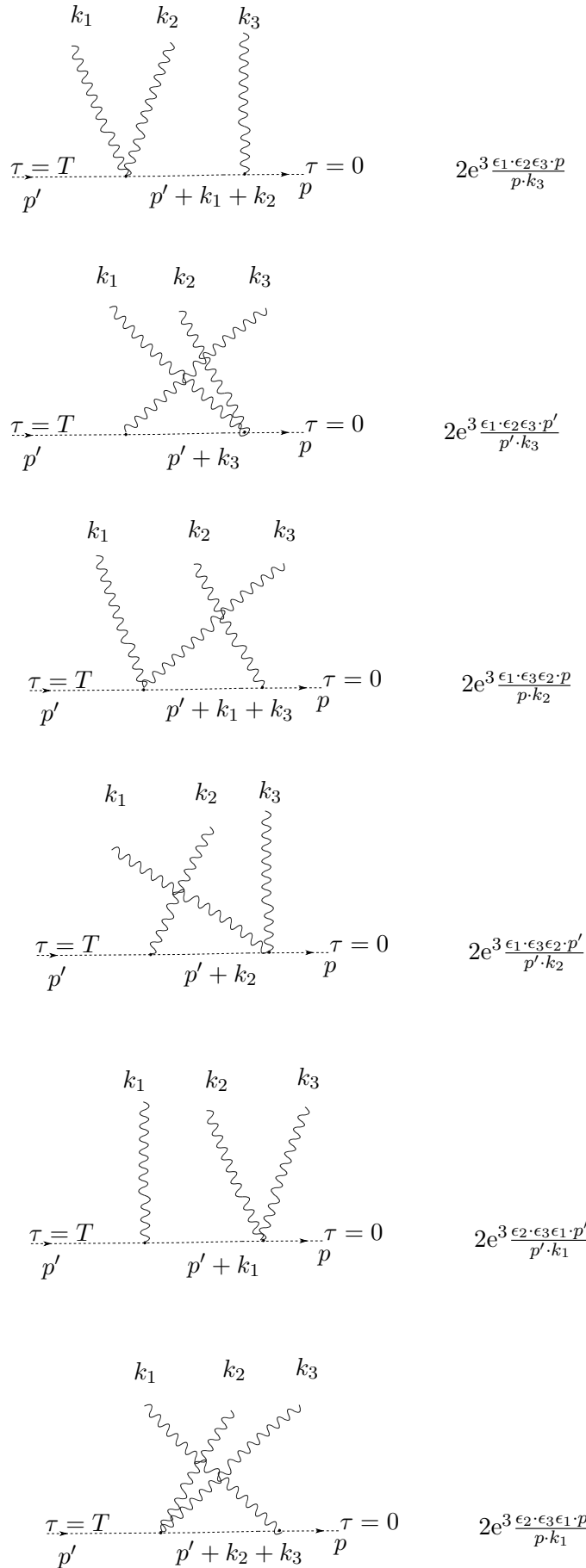


Figura 4.4: Diagramas de Feynman asociados a la dispersión de 3 fotones a nivel árbol.

$$\begin{aligned}
 & -e^3 \frac{\epsilon_1 \cdot (2p' + k_1) \epsilon_2 \cdot (2p' + 2k_1 + k_2) \epsilon_3 \cdot (p' + k_1 + k_2 - p)}{((p' + k_1)^2 + m^2)((p'^2 + k_1 + k_2)^2 + m^2)} \\
 & = 2e^2 \frac{\epsilon_1 \cdot p' \epsilon_2 \cdot (p' + k_1) \epsilon_3 \cdot p}{p' \cdot k_1 p \cdot k_3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2e^3 \frac{\epsilon_1 \cdot (p' + k_2) \epsilon_2 \cdot p' \epsilon_3 \cdot p}{p' \cdot k_2 p \cdot k_3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2e^3 \frac{\epsilon_1 \cdot p' \epsilon_2 \cdot p \epsilon_3 \cdot (p' + k_1)}{p' \cdot k_1 p \cdot k_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2e^3 \frac{\epsilon_1 \cdot p \epsilon_2 \cdot p' \epsilon_3 \cdot (p' + k_2)}{p' \cdot k_2 p \cdot k_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2e^3 \frac{\epsilon_1 \cdot p \epsilon_2 \cdot (p' + k_3) \epsilon_3 \cdot p'}{p' \cdot k_3 p \cdot k_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2e^3 \frac{\epsilon_1 \cdot (p' + k_3) \epsilon_2 \cdot p \epsilon_3 \cdot p'}{p' \cdot k_3 p \cdot k_2}
 \end{aligned}$$

Figura 4.5: Diagramas de Feynman asociados a la dispersión de 3 fotones a nivel árbol.

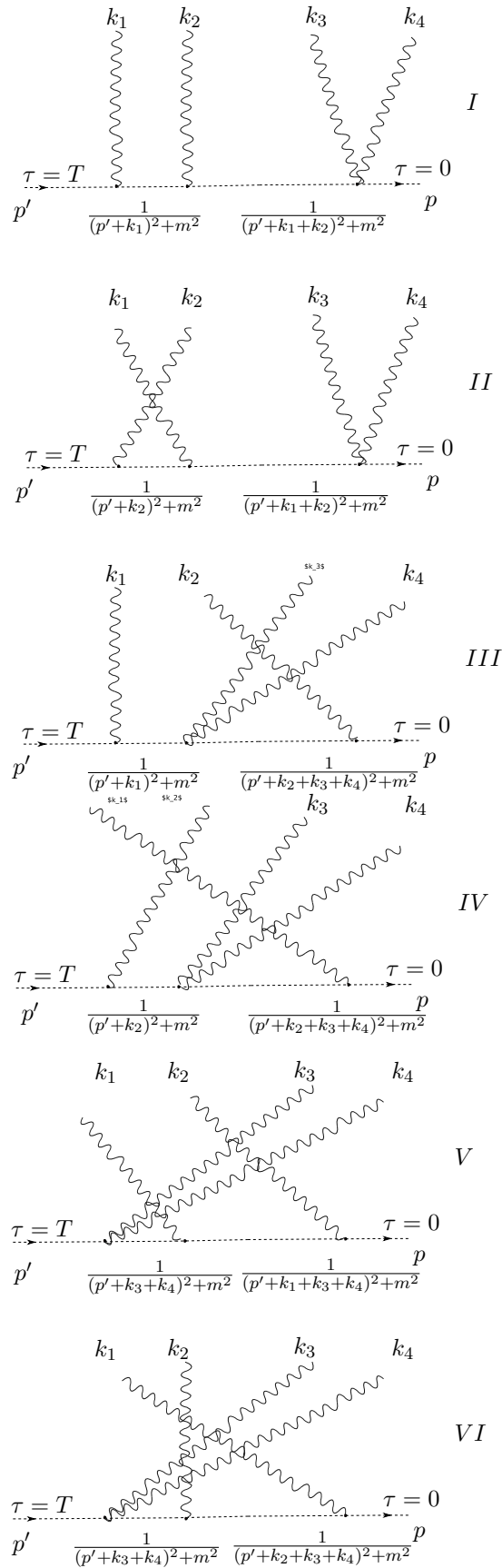


Figura 4.6: Diagramas de Feynman asociados a la dispersión de 4 fotones del término $\bar{R}_{4\sigma}$.

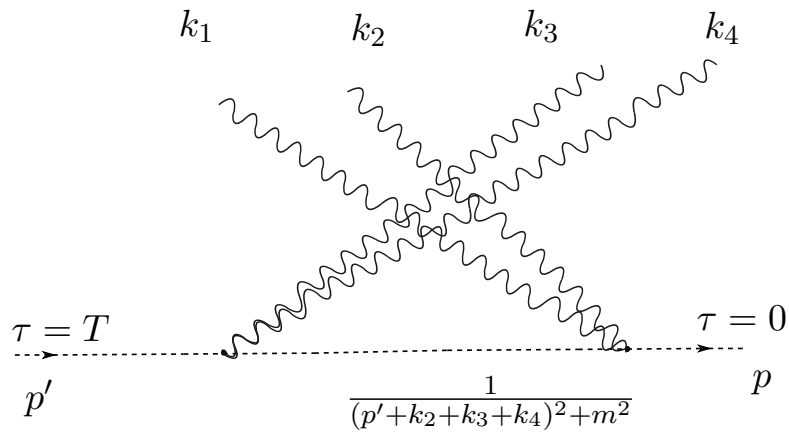
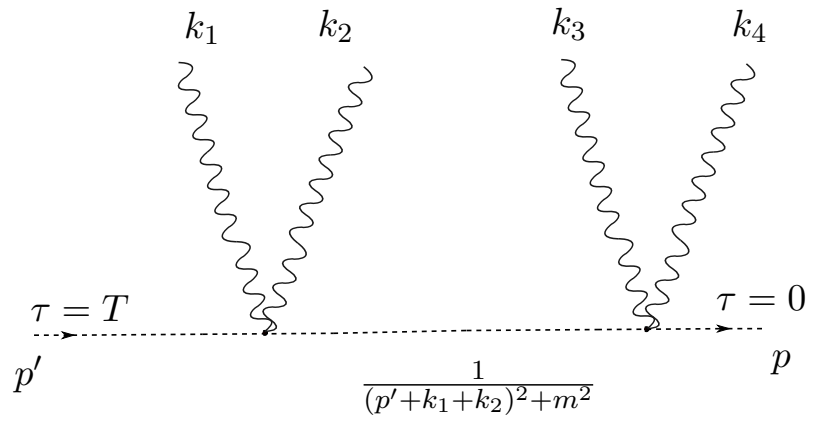


Figura 4.7:

Diagramas de Feynman asociados a la dispersión de 4 fotones del término $\bar{R}_{4\delta}$.

Conclusions

Hemos utilizado el formalismo línea de mundo, en específico la fórmula maestra de Bern-Kosower adaptada a la línea abierta en la QED escalar para encontrar fórmulas maestras que nos dan la dispersión de fotones, e inmediatamente después, hemos encontrado expresiones específicas para las helicidades expresadas con ayuda del formalismo de helicidad espinorial. Lo hicimos explícitamente para un número de fotones que van de $N = 1, \dots, 4$. Obteniendo los resultados esperados en el caso de 1, 2 y 3 según la TCC estándar. Resaltamos el hecho de que este método está desarrollado explícitamente para el caso capa de masa (on-shell), en el cuál hemos demostrado como generar las amplitudes de manera invariante de la norma, es decir en términos de los tensores de Maxwell $f^{\mu\nu}$.

Podemos enumerar las conclusiones mas notables como sigue:

- i. Se ha mostrado que el formalismo línea de mundo, utilizado para desarrollar una fórmula maestra para dispersiones a nivel árbol, es una poderosa herramienta que nos permite reducir enormemente los cálculos para encontrar las dispersiones de fotones. Ya que los diagramas de Feynman asociados al número de fotones involucrados en la dispersión, nos dan la forma explícita de la integral sin necesidad de recurrir a ningún cálculo complejo.

Nos basta con encontrar los signos asociados a cada diagrama según la representación R , para multiplicarlo por un coeficiente escrito en términos de vectores de referencia. La importancia de ésta representación radica en que expresa de manera clara la invarianza gauge, al contrario de la expresión escrita en término puramente de helicidades ϵ .

- ii. Los vectores de referencia simplifican enormemente los cálculos en la capa de masa, escogidos de tal forma que podemos eliminar el término más complicado de la representación R para N fotones. Así que los únicos términos involucrados son los que contienen dentro un diagrama gaviota, representado matemáticamente por una δ de Dirac. Con ayuda de éstas consideraciones encontramos expresiones para una dispersión de $N = 3$ y $N = 4$ fotones, así como sus respectivas helicidades.
- iii. Como se muestra en el cálculo para cuatro fotones, debido a que la cantidad de diagramas involucrados y los términos del cálculo debido a la representación R no son lineales en su incremento. El proceso se vuelve cada vez más engorroso y complicado algebraicamente. Aunque debemos destacar que parece haber una simetría de Bose-Einstein, que no consideramos explícitamente que podría ayudarnos a escoger los diagramas que no se van a anular, y de esta forma quizá escribir una solución para N fotones de forma explícita. Lo que podemos notar es, que en todos nuestros ejemplos sólo sobreviven los diagramas en los que el término gaviota está antes que todos, es decir que ocupa el lugar de la izquierda, en otras palabras, es el primer término con el que interactúa la partícula incidente. Por supuesto a

pesar de la combinatoria explícita que tenemos que realizar, ésta formulación sigue siendo mucho más sencilla que el método estándar de obtener las dispersiones.

Trabajo futuro

Como trabajo futuro, hay diferentes vertientes a las que podríamos encaminar éste proyecto.

- Para empezar, una generalización a la QED spinorial en el formalismo línea de mundo sería casi obligada [60] [62], ya que nos permitiría introducir el spin de la partícula dispersada y así, obtener información más acorde a la verdadera naturaleza de la física.

A grandes rasgos, lo que se hace es reescribir el propagador como

$$S^{x'x}[A] = \langle x' | [m - i\mathcal{D}]^{-1} | x \rangle = \langle x' | [m - i\mathcal{D} + eA]^{-1} | x \rangle = \langle x' | [m + \not{p} + eA]^{-1} | x \rangle \quad (4.92)$$

usando la identidad de Gordon

$$\mathcal{D}^2 = -D_\mu D^\mu + \frac{i}{2} e \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu} \quad (4.93)$$

para reescribir

$$\begin{aligned} [m - i\mathcal{D}]^{-1} &= [m + i\mathcal{D}][m + i\mathcal{D}]^{-1}[m - i\mathcal{D}]^{-1} \\ &= [m + i\mathcal{D}][m^2 - D_\mu D^\mu + \frac{i}{2} e \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu}]^{-1} \end{aligned} \quad (4.94)$$

de donde obtenemos la representación de la integral de camino para el Kernel

$$K^{xx'}[A] = \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x}^{x(T)=x'} \mathcal{P} e^{-\int_0^T d\tau (\frac{1}{4} \dot{x}^2 + ie\dot{x}\cdot A + \frac{i}{2} e \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu})} \quad (4.95)$$

que generaliza la integral de camino en el espacio de posición para la línea abierta.

Podemos cambiar el ordenamiento de camino \mathcal{P} con la ayuda de variables grassman antisimétricas ψ como

$$\mathcal{P} e^{-\int_0^T d\tau \frac{i}{2} e \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu}} = 2^{-\frac{D}{2}} \text{symb}^{-1} \int_A D\psi e^{-\int_0^T d\tau [\frac{1}{2} \psi_\mu \dot{\psi}^\mu - ie F_{\mu\nu} (\psi + \eta)^\mu (\psi + \eta)^\nu]} \quad (4.96)$$

donde

$$\text{symb}(\gamma^{\alpha_1 \dots \alpha_n}) \equiv (-i\sqrt{2})^n \eta^{\alpha_1} \dots \eta^{\alpha_n} \quad (4.97)$$

con el productor antisimétrico de las matrices γ definido como

$$\gamma^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \equiv \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \gamma^{\alpha_{\pi(1)}} \dots \gamma^{\alpha_{\pi(n)}} \quad (4.98)$$

Se puede demostrar que en el espacio de momentos, el Kernel toma la forma

$$K_N^{pp'}(k_1, \epsilon_1; \dots k_N, \epsilon_N) = (-ie)^N \text{symb}^{-1} \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_0^T d\tau_1 \dots \int d\theta_N \\ \times e^{-\sqrt{2}\eta \cdot \sum_{i=1}^N (\epsilon_i + i\theta_i) + \sum_{i,j=0}^{N+1} [\hat{g}_{ij} k_i \cdot k_j + 2i D_i \hat{g}_{ij} \epsilon_i \cdot k_j + D_i D_j \hat{g}_{ij} \epsilon_i \cdot \epsilon_j]} \Big|_{\epsilon_1 \dots \epsilon_N} \quad (4.99)$$

donde

$$\hat{g}(\tau, ; \tau', \theta') \equiv \frac{1}{2} (|\tau - \tau'| + \theta\theta' \text{sign}(\tau - \tau')) \quad (4.100)$$

$$D_i \hat{g}_{ij} = -\frac{1}{2} (\theta_i - \theta_j) \sigma_{ij} \quad (4.101)$$

$$D_i D_j \hat{g}_{ij} = -\frac{1}{2} (\sigma_{ij} + 2\theta_i \theta_j \delta_{ij}) \quad (4.102)$$

Agregando el spin, el operador de vértice representa la interacción del fotón con un fermión en dos pasos. El primero es igual a la forma escalar, es decir, representa una interacción con los grados de libertad orbital del fermión, mientras que el segundo implementa la interacción con el spin, por lo que podemos descomponer el Kernel en el número de interacciones

$$K_N = \sum_{S=0}^N K_{NS} \quad (4.103)$$

Donde K_{NS} representa la interacción con spin S y una interacción $N - S$ orbital, de tal forma que K_{N0} coincide con la QED escalar.

- También podríamos destacar el hecho de que es posible de forma relativamente sencilla, desarrollar un programa basado en algoritmos de diagramas de Feynman, que nos permita encontrar las amplitudes a órdenes más altos. Ya que únicamente tenemos que realizar cálculos algebraicos simples, debido a que la forma de encontrar la dispersión se basa en asignar signos a los diagramas de Feynman, para después sumarlos.

De forma similar analizaríamos las helicidades.

- Por último, quizá podríamos agregar procesos a nivel de un lazo, usando la representación P , que es válida fuera de la capa de masa, ya que la representación R sólo es válida en capa de masa. O bien, llevar los cálculos a la QCD, donde el formalismo Worldline ha tenido mucho éxito recientemente [68] [69] [70] [71] [72].

Apéndice

Integrales Gaussianas

A.1. Integrales gaussianas para procesos escalares

Existen 3 formas disponibles con las que se pueden resolver las integrales de tipo Gaussiano encontradas en las ecuaciones 2.78 y 2.79.

- La forma analítica, basada en el uso de funciones de Green en línea de mundo, que consiste en hacer trucos matemáticos para ordenar las integrales de forma tal que puedan escribirse como integrales de tipo gaussiano.
- La aproximación semiclásica, basada en una trayectoria estacionaria (instanton de línea de mundo), que en éste trabajo sólo se le hace referencia, sin embargo no se dirá en todo el presente trabajo, ni una palabra más del tema, con el permiso del lector, le refiero la siguiente cita [73] si necesita o le interesa más información.
- Un cálculo numérico directo de la integral de camino ("Monte Carlo de línea de mundo"), en donde se discretizan las trayectorias con respecto al tiempo, pero se mantiene un espectro continuo en el espacio, es un método cuyas características destacables son la rapidez y la generación no recursiva de un conjunto de trayectorias independientes del potencial, tal como lo describen en la referencia [74].

Trataremos únicamente de la forma analítica. En ésta, todas las integrales son puestas de una forma gaussiana. Usualmente se necesita de una expansión en series de Taylor truncada hasta el término necesario, a partir de ahí, se calculan con fórmulas que extienden la integración gaussiana de n dimensiones a dimensión infinita. Recordando en n dimensiones tenemos las siguientes fórmulas

$$\int d^n x e^{-\frac{1}{4}x \cdot M \cdot x} = \frac{(4\pi)^{n/2}}{(\det M)^{1/2}} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\int d^n x e^{-\frac{1}{4}x \cdot M \cdot x + x \cdot j}}{\int d^n x e^{-\frac{1}{4}x \cdot M \cdot x}} = e^{j \cdot M^{-1} \cdot j} \quad (\text{A.2})$$

Donde la matriz M es una matriz cuadrada, simétrica y definida positiva. Y el determinante

de un operador \mathcal{O} puede encontrarse como

$$\text{Det}(\mathcal{O}) \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \exp\left(-\frac{d}{dz}\zeta_{\mathcal{O}}(0)\right) \quad (\text{A.3})$$

$$\zeta_{\mathcal{O}}(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-z} \quad (\text{A.4})$$

Además diferenciando con respecto a los componentes del vector j , obtenemos

$$\frac{\int d^n x x_i x_j e^{-\frac{1}{4}x \cdot M \cdot x}}{\int d^n x e^{-\frac{1}{4}x \cdot M \cdot x}} = 2M_{ij}^{-1}, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\int d^n x x_i x_j x_k x_l e^{-\frac{1}{4}x \cdot M \cdot x}}{\int d^n x e^{-\frac{1}{4}x \cdot M \cdot x}} = 4 \left(M_{ij}^{-1} M_{kl}^{-1} + M_{ik}^{-1} M_{jl}^{-1} + M_{il}^{-1} M_{jk}^{-1} \right) \quad (\text{A.6})$$

Obsérvese que un número impar de x_i nos da como resultado cero, debido a que la integral es antisimétrica y calculamos sobre todo el espacio. También podemos ver que el resultado simplemente es la agrupación por pares de las diferentes combinaciones de índices. A ésta agrupación se le conoce como la "contracción de Wick". En términos de la función de green $G^{\mu\nu}(\tau_1, \tau_2)$, las ecuaciones (A.1-A.6) se escriben como el siguiente conjunto de reglas

1. La contracción de Wick básica para dos campos es simplemente la función de Green

$$\langle q^\mu(\tau_1) q^\nu(\tau_2) \rangle = G^{\mu\nu}(\tau_1, \tau_2) \equiv G_{12}^{\mu\nu} \quad (\text{A.7})$$

2. Las contracciones de Wick de los campos se suman siempre sobre pares, por ejemplo

$$\langle q^\kappa(\tau_1) q^\lambda(\tau_2) q^\mu(\tau_3) q^\nu(\tau_4) \rangle = G_{12}^{\kappa\lambda} G_{34}^{\mu\nu} + G_{13}^{\kappa\mu} G_{24}^{\lambda\nu} + G_{14}^{\kappa\nu} G_{23}^{\lambda\mu}. \quad (\text{A.8})$$

3. Las contracciones con exponentiales son de forma que el campo desaparece, mientras la exponencial se mantiene.

$$\langle q^\mu(\tau_1) e^{ip \cdot q(\tau_2)} \rangle = i G_{12}^{\mu\nu} p_\nu e^{ip \cdot q(\tau_2)} \quad (\text{A.9})$$

4. Una vez que todos los campos elementales (lineales) han sido eliminados, la contracción en las exponenciales que quedan nos da el factor universal

$$\langle e^{ip_1 \cdot q_1} \dots e^{ip_N \cdot q_N} \rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N p_{i\mu} G_{ij}^{\mu\nu} p_{j\nu} \right] \quad (\text{A.10})$$

En donde, como ya se dijo anteriormente $G^{\mu\nu}(\tau, \tau')$ es la función de Green de línea de mundo, que resulta ser el inverso del operador cinético

$$\int_0^\tau d\tau' K_{\mu\nu}(\tau, \tau') G^{\nu\lambda}(\tau', \tau'') = \delta_\mu^\lambda \delta(\tau - \tau'') \quad (\text{A.11})$$

Ya que la mayor parte del tiempo la parte cinética de la acción worldline es simplemente

$$S_{cin} = \frac{1}{4} \int_0^T d\tau \dot{q}^2 = -\frac{1}{4} \int_0^T d\tau q \cdot \ddot{q} \quad (\text{A.12})$$

de donde K se escribe como

$$K_{\mu\nu}(\tau, \tau') \equiv -\frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \frac{d^2}{d\tau^2} \delta(\tau - \tau') \quad (\text{A.13})$$

Sin embargo, la forma explícita de la función de Green $G^{\mu\nu}(\tau, \tau')$ dependerá no sólo de K , si no de las condiciones de frontera impuestas sobre $q^\mu(\tau)$ [75]

Apéndice **B**

Convenciones para el formalismo de helicidad espinorial en 4 dimensiones

Se usa la métrica $\eta_{\nu\mu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ que define

$$(\sigma^\mu)_{\dot{a}\dot{b}} = (\mathbf{1}, \sigma^i)_{\dot{a}\dot{b}}, \quad (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}\dot{b}} = (\mathbf{1}, -\sigma^i)^{\dot{a}\dot{b}} \quad (\text{B.1})$$

con las matrices de pauli escritas como

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Los índices de espinores pueden subir o bajar usando

$$\varepsilon^{ab} = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \quad (\text{B.3})$$

que obedece $\varepsilon_{ab}\varepsilon^{bc} = \delta_a^c$. Enlistamos las siguientes propiedades

$$(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}\dot{a}} = \varepsilon^{ab}\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}(\sigma^\mu)_{\dot{b}\dot{b}}, \quad (\text{B.4})$$

$$(\sigma^\mu)_{\dot{a}\dot{a}}(\sigma_\mu)^{\dot{b}\dot{b}} = -2\varepsilon_{ab}\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}, \quad (\text{B.5})$$

$$(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_a^b = -2\eta^{\mu\nu}\delta_a^b, \quad (\text{B.6})$$

$$(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu) = (\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu) = -2\eta^{\mu\nu} \quad (\text{B.7})$$

Define las matrices γ

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{\dot{a}\dot{b}} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}\dot{b}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu} \quad (\text{B.8})$$

y

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \quad (\text{B.9})$$

Para un momento 4-vector $p^\mu = (p^0, p^i) = (E, p^i)$ con $p^\mu p_\mu = -m^2$, definiendo los momentos spinores

$$p_{a\dot{b}} \equiv p_\mu (\sigma^\mu)^{a\dot{b}}, \quad p^{\dot{a}b} \equiv p_\mu (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} \quad (\text{B.10})$$

por ejemplo

$$p_{a\dot{b}} = \begin{pmatrix} -p^0 + p^3 & p^1 - ip^2 \\ p^1 + ip^2 & -p^0 - p^3 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Tomando el determinante de ésta matriz 2×2 nos da

$$\det p = -p^\mu p_\mu = m^2 \quad (\text{B.12})$$

También se enlistan una serie de identidades muy útiles para el formalismo de helicidad spinorial

$$\begin{aligned} [p]^a &= \epsilon^{ab} [p]_b & [p]_a &= \epsilon_{ab} [p]^b \\ [p]^{\dot{a}} &= \epsilon^{\dot{a}b} \langle p \rangle_b & \langle p \rangle_a &= \epsilon_{\dot{a}b} [p]^b \\ p_{a\dot{b}} &= -[p]_a \langle p \rangle_{\dot{b}} & p^{\dot{a}b} &= -[p]^a [p]^b \\ [p]^a &= (\langle p \rangle_{\dot{a}})^* & \langle p \rangle_{\dot{a}} &= ([p]^a)^* \\ \langle pq \rangle &= \langle p \rangle_{\dot{a}} [q]^{\dot{a}} & [pq] &= [p]^a [q]_a \\ \langle pq \rangle [pq] &= 2p \cdot q = (p + q)^2 & & \\ [k|\gamma^\mu|p\rangle &= \langle p|\gamma^\mu|k\rangle & [k|\gamma^\mu|p\rangle^* &= [p|\gamma^\mu|k\rangle \\ \langle p|P|k\rangle &= \langle p \rangle_{\dot{a}} P^{\dot{a}b} [k]_b & \langle p|y_1 y_2|k\rangle &= \langle p \rangle_{\dot{a}} (y_1)^{\dot{a}b} (y_2)_{b\dot{c}} [k]^{\dot{c}} \\ \langle p|q|k\rangle &= \langle pq \rangle [qk] & \langle 1|\gamma^\mu|2\rangle \langle 3|\gamma_\mu|4\rangle &= 2 \langle 13 \rangle [24] \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Agradecimientos

Primero, me gustaría agradecer al Dr. James P. Edwards, por dirigir la tesis, por atender cada pregunta minuciosa y específica de éste y otros temas, por el empeño y profesionalismo con que atiende sus clases. Pero por encima de eso, le agradezco por ser un ser humano amable y atento, respetuoso hacia los demás, honesto y capaz. Si cada ciudadano (incluyéndome) de este país o cualquier otro se esforzara en alcanzar una virtud humana similar, este mundo sería completamente diferente.

Debo agradecer a mi madre Celia María Mora Eligio, por apoyarme cuando me quedo sin dinero y por dejarme vivir en su casa con mis perros. Pienso que no seguiría estudiando si ese enorme pilar faltara en mi vida.

También es necesario agradecer al programa de Becas de excelencia que otorga el CONACyT, sin ese dinero mis estudios simplemente no hubieran podido continuar.

Quiero darle las gracias al Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo por haberme dado la oportunidad de estudiar con tan excelentes profesores. En particular quisiera agradecer a los Doctores Axel Weber, Ricardo Becerril Bárcenas, Alfredo Raya Montaña y Olivier Charles Albert Sarbach, quienes me hicieron los exámenes de admisión para entrar al programa de maestría y me recibieron con una tórrida bienvenida.

Por último y más importante, le agradezco a mis amigos, quizá nunca lean lo que escribo pero sé que me quieren, estudie una maestría o sea vagabundo, espero poder pagarles algún día de alguna forma todo lo que han hecho por mí.

Morelia, Michoacán, Noviembre 2021

Lic. Luis Alejandro García Mora

Bibliografía

- [1] P. Ferrario, G. Rodrigo, and P. Talavera, “Compact multigluonic scattering amplitudes with heavy scalars and fermions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, p. 182001, 2006.
- [2] A. Hall, “Massive Quark-Gluon Scattering Amplitudes at Tree Level,” *Phys. Rev. D*, vol. 77, p. 025011, 2008.
- [3] A. Ochirov, “Scattering amplitudes in gauge theories with and without supersymmetry,” Ph.D. dissertation, Ecole Polytechnique, 2014.
- [4] —, “Helicity amplitudes for QCD with massive quarks,” *JHEP*, vol. 04, p. 089, 2018.
- [5] S. Ballav and A. Manna, “Recursion relations for scattering amplitudes with massive particles,” *JHEP*, vol. 03, p. 295, 2021.
- [6] R. Britto and A. Ochirov, “On-shell recursion for massive fermion currents,” *JHEP*, vol. 01, p. 002, 2013.
- [7] J.-H. Huang and W. Wang, “Multigluon tree amplitudes with a pair of massive fermions,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 72, p. 2050, 2012.
- [8] J. Ismael, “Quantum Mechanics,” in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Winter 2020 ed., E. N. Zalta, Ed. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2020.
- [9] M. Kuhlmann, “Quantum Field Theory,” in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Fall 2020 ed., E. N. Zalta, Ed. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2020.
- [10] N. Wiener, “The average of an analytic functional and the brownian movement,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 7, no. 10, pp. 294–298, 1921. [Online]. Available: <https://www.pnas.org/content/7/10/294>
- [11] —, “Differential-space,” *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 2, no. 1-4, pp. 131–174, 1923. [Online]. Available: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/sapm192321131>
- [12] —, “The average value of a functional*,” *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. s2-22, no. 1, pp. 454–467, 1924. [Online]. Available: <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/plms/s2-22.1.454>
- [13] —, “Generalized harmonic analysis,” *Acta Math.*, vol. 55, pp. 117–258, 1930. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/BF02546511>
- [14] R. Feynman, “The principle of least action in quantum mechanics,” Ph.D. dissertation, Université de Princeton, 1942.

- [15] R. P. Feynman, “Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 20, pp. 367–387, 1948.
- [16] P. A. M. Dirac, “The Lagrangian in quantum mechanics,” *Phys. Z. Sowjetunion*, vol. 3, pp. 64–72, 1933.
- [17] R. P. Feynman, “Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction,” *Phys. Rev.*, vol. 80, pp. 440–457, Nov 1950. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.80.440>
- [18] —, “An operator calculus having applications in quantum electrodynamics,” *Phys. Rev.*, vol. 84, pp. 108–128, Oct 1951. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.84.108>
- [19] F. J. Dyson, “The s matrix in quantum electrodynamics,” *Phys. Rev.*, vol. 75, pp. 1736–1755, Jun 1949. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.75.1736>
- [20] J. Schwinger, “On the Green’s Functions of Quantized Fields. I,” *Proceedings of the National Academy of Science*, vol. 37, no. 7, pp. 452–455, Jul. 1951.
- [21] N. Bogoliubov, “On representation of green-schwingers function with the help of functional integrals,” in *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 99, 1954, p. 225.
- [22] I. Gelfand and R. Minlos, “Solution of equations of quantized fields,” in *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 97, no. 2, 1954, pp. 209–212.
- [23] E. Fradkin, “The green function for the interaction of nucleons with mesons,” in *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 98, 1954.
- [24] S. F. Edwards and R. E. Peierls, “Field equations in functional form,” vol. 224, no. 1156, pp. 24–33, Jun. 1954. [Online]. Available: <https://ui.adsabs.harvard.edu/#abs/1954RSPSA.224...24E>
- [25] F. W. Wiegel, “An exactly solvable two-dimensional biomembrane model,” vol. 13, no. 6, pp. 515–530, Dec. 1975. [Online]. Available: <http://link.springer.com/article/10.1007/BF01013148>
- [26] R. P. Feynman, “Atomic theory of liquid helium near absolute zero,” vol. 91, no. 6, pp. 1301–1308, Sep. 1953.
- [27] R. Kikuchi, “ λ transition of liquid helium,” *Phys. Rev.*, vol. 96, pp. 563–568, Nov 1954. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.96.563>
- [28] D. Peak and A. Inomata, “Summation over feynman histories in polar coordinates,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 10, 08 1969.
- [29] B. S. DeWitt, “Quantum theory of gravity. i. the canonical theory,” *Phys. Rev.*, vol. 160, pp. 1113–1148, Aug 1967. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.160.1113>

- [30] L. D. Faddeev and V. N. Popov, “Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field,” *Phys. Lett. B*, vol. 25, pp. 29–30, 1967.
- [31] E. Fradkin and I. Tyutin, “Feynman rules for the massless yang-mills field renormalizability of the theory of the massive yang-mills field,” *Physics Letters B*, vol. 30, no. 8, pp. 562 – 563, 1969. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269369904572>
- [32] G. Hooft, “Renormalizable lagrangians for massive yang-mills fields,” *Nuclear Physics B*, vol. 35, no. 1, pp. 167 – 188, 1971. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321371901398>
- [33] F. A. Berezin, *The method of second quantization, by F.A. Berezin. Translated by Nobumichi Mugibayashi and Alan Jeffrey.* Academic Press New York, 1966.
- [34] K. G. Wilson and J. Kogut, “The renormalization group and the expansion,” *Physics Reports*, vol. 12, no. 2, pp. 75 – 199, 1974. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157374900234>
- [35] K. Fujikawa, “Heavy fermions in the standard sequential scheme,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 61, pp. 1186–1196, 1979.
- [36] M. Chaichian and A. Demichev, *Path Integrals in Physics: Volume I Stochastic Processes and Quantum Mechanics*, 01 2001.
- [37] G. Bertone and D. Hooper, “A History of Dark Matter,” *Submitted to: Rev. Mod. Phys.*, 2016.
- [38] M. Born, W. Heisenberg, and P. Jordan, “Zur Quantenmechanik. II.” *Z. Phys.*, vol. 35, no. 8-9, pp. 557–615, 1926.
- [39] P. A. M. Dirac, “Quantum theory of emission and absorption of radiation,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, vol. 114, p. 243, 1927.
- [40] G. Scharf, *A Finite Quantum Electrodynamics.* Berlin, Heidelberg: Springer, 1995.
- [41] A. H. Compton, “A quantum theory of the scattering of x-rays by light elements,” *Phys. Rev.*, vol. 21, pp. 483–502, May 1923. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.21.483>
- [42] H. J. Bhabha, “The Scattering of Positrons by Electrons with Exchange on Dirac’s Theory of the Positron,” *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, vol. 154, no. 881, pp. 195–206, Mar. 1936.
- [43] P. A. M. Dirac, “The quantum theory of the electron,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, vol. 117, pp. 610–624, 1928.
- [44] W. Heisenberg and H. Euler, “Consequences of Dirac Theory of the Positron,” *arXiv e-prints*, p. physics/0605038, May 2006.

- [45] O. Halpern, “Scattering processes produced by electrons in negative energy states,” *Phys. Rev.*, vol. 44, pp. 855–856, Nov 1933. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.44.855.2>
- [46] G. Breit and J. A. Wheeler, “Collision of two light quanta,” *Phys. Rev.*, vol. 46, pp. 1087–1091, Dec 1934. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.46.1087>
- [47] H. Euler and B. Kockel, “The scattering of light by light in Dirac’s theory,” *Naturwiss.*, vol. 23, no. 15, pp. 246–247, 1935.
- [48] A. Akhiezer, L. Landau, and I. Pomeranchuk, “Scattering of light by light,” *Nature*, vol. 138, no. 3483, p. 206.1, 1936.
- [49] “Evidence for light-by-light scattering in heavy-ion collisions with the atlas detector at the lhc,” *Nature Physics*, vol. 13, no. 9, p. 852858, Aug 2017. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1038/nphys4208>
- [50] R. P. Feynman, “Space-time approach to quantum electrodynamics,” *Phys. Rev.*, vol. 76, pp. 769–789, Sep 1949. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.76.769>
- [51] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 3 2014.
- [52] C. Johnson. (2015) Compton scattering in scalar qed. [Online]. Available: http://scipp.ucsc.edu/~profumo/teaching/phys217_15/HW7.pdf
- [53] Z. Bern and D. A. Kosower, “Efficient calculation of one-loop qed amplitudes,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 66, pp. 1669–1672, Apr 1991. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.66.1669>
- [54] “String theory: a theory o quantum gravity,” <https://benjaminjurke.com/content/articles/2010/string-theory/>, accessed: 2021-05-5.
- [55] M. J. Strassler, “Field theory without feynman diagrams: One-loop effective actions,” *Nuclear Physics B*, vol. 385, no. 1-2, p. 145184, Oct 1992. [Online]. Available: [http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(92\)90098-V](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(92)90098-V)
- [56] —, “The Bern-Kosower rules and their relation to quantum field theory,” Other thesis, 1993.
- [57] “worldline formalism,” <https://ncatlab.org/nlab/show/worldline+formalism#Strassler92>, accessed: 2021-05-5.
- [58] C. Schubert, “Perturbative quantum field theory in the string inspired formalism,” *Phys. Rept.*, vol. 355, pp. 73–234, 2001.
- [59] J. P. Edwards and C. Schubert, “Quantum mechanical path integrals in the first quantised approach to quantum field theory,” 12 2019.

- [60] N. Ahmadinia, C. Lopez-Arcos, M. A. Lopez-Lopez, and C. Schubert, “The qed four – photon amplitudes off-shell: part 1,” 2020.
- [61] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995.
- [62] N. Ahmadinia, V. M. B. Guzman, F. Bastianelli, O. Corradini, J. P. Edwards, and C. Schubert, “Worldline master formulas for the dressed electron propagator, part 2: On-shell amplitudes,” 2021.
- [63] H. Elvang and Y. tin Huang, “Scattering amplitudes,” 2014.
- [64] O. Corradini and C. Schubert, “Spinning particles in quantum mechanics and quantum field theory,” 2015.
- [65] K. Daikouji, M. Shino, and Y. Sumino, “Bern-Kosower rule for scalar QED,” , vol. 53, no. 8, pp. 4598–4615, Apr. 1996.
- [66] N. Ahmadinia, C. Schubert, and V. M. Villanueva, “String-inspired representations of photon/gluon amplitudes,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2013, no. 1, Jan 2013. [Online]. Available: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP01\(2013\)132](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP01(2013)132)
- [67] S. D. Badger and J. M. Henn, “Compact qed tree-level amplitudes from dressed bcfw recursion relations,” *Physics Letters B*, vol. 692, no. 2, p. 143151, Aug 2010. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2010.07.021>
- [68] F. Bastianelli, R. Bonezzi, O. Corradini, E. Latini, and K. H. Ould-Lahoucine, “A worldline approach to colored particles,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1208, no. 1, p. 012004, 2019.
- [69] F. Bastianelli, R. Bonezzi, O. Corradini, and E. Latini, “Particles with non abelian charges,” *JHEP*, vol. 10, p. 098, 2013.
- [70] N. Ahmadinia, O. Corradini, J. P. Edwards, and P. Pisani, “ $U(N)$ Yang-Mills in non-commutative space time,” *JHEP*, vol. 04, p. 067, 2019.
- [71] J. P. Edwards and O. Corradini, “Worldline colour fields and non-Abelian quantum field theory,” *EPJ Web Conf.*, vol. 182, p. 02038, 2018.
- [72] —, “Mixed symmetry Wilson-loop interactions in the worldline formalism,” *JHEP*, vol. 09, p. 081, 2016.
- [73] C. Schneider, “Worldline instantons and the sauter-schwinger effect.” Ph.D. dissertation, Universität Duisburg-Essen, 2018.
- [74] J. P. Edwards, U. Gerber, C. Schubert, M. A. Trejo, T. Tsiftsi, and A. Weber, “Applications of the worldline monte carlo formalism in quantum mechanics,” *Annals of Physics*, vol. 411, p. 167966, Dec 2019. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2019.167966>
- [75] J. P. Edwards and C. Schubert, “The worldline formalism,” Septiembre 2020.

