



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS
DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ ”
Posgrado en Ciencias en Ingeniería Física

UN SISTEMA DINÁMICO Y CURVAS DE
WEGNER

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:
**MAESTRO EN CIENCIAS EN
INGENIERÍA FÍSICA**

PRESENTA:

Zharky Ali Valdes Garcia

ASESOR:

Dr. Homero Geovani Díaz Marín



Morelia, Mich., febrero 2022

Índice general

Resumen	III
Abstract	IV
1. Curvas de Wegner	2
2. Curvas cerradas	13
3. Sistema dinámico y curvas de Wegner	20
Bibliografía	33

Resumen

Problemas elásticos, límites de cuerpos bidimensionales que flotan en equilibrio y el problema de la bicicleta son algunos de los problemas que encuentran solución en ciertas clases de curvas, curvas cuya curvatura satisfacen la ecuación diferencial

$$\ddot{\kappa} + \frac{1}{2}\kappa^3 - \mu\kappa - \sigma = 0.$$

En este trabajo se estudiará la ecuación diferencial mencionada antes, comenzaremos con su deducción a partir de la curvatura de una curva parametrizada por longitud de arco. Introduciremos el concepto de *curva de Wegner*, un tipo de curvas que nos ayudará al estudio de dicha ecuación diferencial, después pasaremos a un sistema de ecuaciones para el análisis de curvas de Wegner.

Los resultados principales de este trabajo son dos, el primero clasifica cierto tipo de curvas cerradas y el otro relaciona dos sistemas de ecuaciones mediante una homotecia.

Palabras clave: Curvatura, curvas de Wegner, curvas cerradas, homotecia, sistema de ecuaciones diferenciales.

Abstract

Elastic problems, boundaries of two-dimensional bodies which can float in equilibrium and the bicycle problem are some of the problems that find their solution in certain types of curves, curves whose curvatures satisfy the differential equation $\ddot{\kappa} + \frac{1}{2}\kappa^3 - \mu\kappa - \sigma = 0$.

In this work the differential equation mentioned before will be studied, we will start with its deduction from the curvature of a curve parameterized by arc length. We will introduce the concept of *Wegner's curve*, a type of curves that will help us in the study of said differential equation, then we will move on to a system of equations for the analysis of Wegner's curves.

The main results of this work are two, the first classifies certain types of closed curves and the other relates two systems of equations through a homothety.

Capítulo 1

Curvas de Wegner

Las matemáticas tienen belleza y romance. El mundo de las matemáticas no es un lugar aburrido. Es un lugar extraordinario; vale la pena pasar tiempo allí.
Marcus du Sautoy.

Consideremos una curva en el plano parametrizada por longitud de arco, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, con curvatura κ . En la figura de abajo se muestra la curva $\alpha(s)$ y su distancia al origen r . También vemos la derivada de $\alpha(s)$ como τ y su descomposición en τ_r y τ_θ .

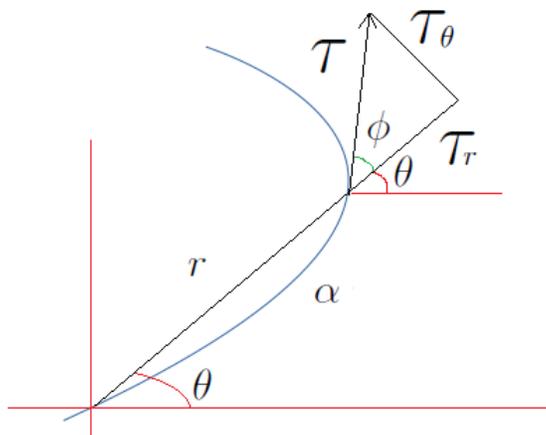


Figura 1.1

Definición 1.1. Sea $\alpha(s)$ una curva en el plano y r su distancia al origen. Decimos que $\alpha(s)$ es de Wegner si

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = ar^2 + b + \frac{c}{r^2},$$

donde a, b y c son constantes y r' es la derivada de r respecto al ángulo θ .

A continuación vamos a deducir algunas identidades de la imagen. Denotaremos la derivada de una función respecto al ángulo θ con un apóstrofo arriba de la función y

su derivada respecto a la longitud de arco s con un puntito también arriba de la función.

Al estar parametrizada por longitud de arco la velocidad de la curva es igual a 1, de modo que

$$\tau_\theta = \tau \operatorname{sen} \phi = \operatorname{sen} \phi = r\dot{\theta}, \quad \tau_r = \tau \cos \phi = \cos \phi = \dot{r}. \quad (1.1)$$

Proposición 1.1. *Una condición equivalente para que una curva $\alpha(s)$ sea de Wegner es que*

$$\dot{\theta} = ar^2 + b + \frac{c}{r^2}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} ar^2 + b + \frac{c}{r^2} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}} \\ &\rightarrow \frac{d\theta}{\sqrt{(rd\theta)^2 + (dr)^2}} = \frac{d\theta}{ds} = \dot{\theta} \\ &\rightarrow \dot{\theta} = ar^2 + b + \frac{c}{r^2}. \end{aligned}$$

□

Proposición 1.2. *Si $\alpha(s)$ es una curva de Wegner parametrizada por longitud de arco entonces su curvatura κ es*

$$\kappa = 4ar^2 + 2b.$$

Demostración. Primero derivemos el $\operatorname{sen} \phi$ y usemos las identidades de arriba,

$$\frac{d}{ds} \operatorname{sen} \phi = \cos \phi \dot{\phi} = \dot{r} \dot{\phi}$$

pero también

$$\frac{d}{ds} \operatorname{sen} \phi = \frac{d}{ds}(r\dot{\theta}) = \frac{d}{ds} \left(ar^3 + br + \frac{c}{r} \right) = 3ar^2\dot{r} + b\dot{r} - \frac{c}{r^2}\dot{r}$$

de modo que juntando los dos resultados de la derivada de $\operatorname{sen} \phi$ tenemos

$$\dot{r} \dot{\phi} = \dot{r} \left(3ar^2 + b - \frac{c}{r^2} \right) \Leftrightarrow \dot{\phi} = 3ar^2 + b - \frac{c}{r^2}.$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\kappa = \dot{\theta} + \dot{\phi}$ y sustituyendo los valores

$$\kappa = \dot{\theta} + \dot{\phi} = \left(ar^2 + b + \frac{c}{r^2} \right) + \left(3ar^2 + b - \frac{c}{r^2} \right) = 4ar^2 + 2b.$$

□

Proposición 1.3. *Sea $\kappa(s) = 4a|\alpha(s)|^2 + 2b = 4ar^2 + 2b$ y $\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = ar^2 + b + \frac{c}{r^2}$, entonces*

$$\ddot{\kappa} + \frac{1}{2}\kappa^3 - 2(b^2 - 4ac)\kappa - 8a = 0. \quad (1.2)$$

Este resultado así como su demostración se encuentran en [4], aquí solo se desarrollará.

Demostración. Usaremos las identidades anteriores a la proposición y las primeras derivadas de κ que son: $\dot{\kappa} = 8ar\dot{r} = 8ar \cos \phi$ y

$$\begin{aligned}\ddot{\kappa} &= -8ar \sin \phi \dot{\phi} + 8a\dot{r} \cos \phi = -8ar \sin \phi \dot{\phi} + 8a\dot{r}\dot{r} \\ &= 8a[\cos^2 \phi - (\kappa - \dot{\theta})r \sin \phi] = 8a[\cos^2 \phi - r\kappa \sin \phi + r\dot{\theta} \sin \phi] \\ &= 8a[\cos^2 \phi - r\kappa \sin \phi + \sin^2 \phi] = 8a[1 - \kappa r(ar^3 + br + \frac{c}{r})] \\ &= 8a[1 - \kappa(ar^4 + br^2 + c)],\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\ddot{\kappa} + \frac{1}{2}\kappa^3 &= 8a[1 - \kappa(ar^4 + br^2 + c)] + \frac{1}{2}(4ar^2 + 2b)^3 \\ &= 8a[1 - (4ar^2 + 2b)(ar^4 + br^2 + c)] + \frac{1}{2}(4ar^2 + 2b)^3 \\ &= 8a[1 - (4a^2r^6 + 6abr^4 + 4acr^2 + 2b^2r^2 + 2bc)] + 2^2b^3 + (3)2^3ab^2r^2 + (3)2^4a^2br^4 + 2^5a^3r^6 \\ &= 8a + 2^3ab^2r^2 - 2^5a^2cr^2 - 2^4abc + 2^2b^3 \\ &= (b^2 - 4ac)2(4ar^2 + 2b) + 8a = 2(b^2 - 4ac)\kappa + 8a \\ &\Leftrightarrow \ddot{\kappa} + \frac{1}{2}\kappa^3 - 2(b^2 - 4ac)\kappa - 8a = 0.\end{aligned}$$

□

Tomando $\mu = 2(b^2 - 4ac)$ y $\sigma = 8a$ la ecuación de la proposición anterior queda como

$$\ddot{\kappa} + \frac{1}{2}\kappa^3 - \mu\kappa - \sigma = 0. \quad (1.3)$$

Proposición 1.4. Sea $\alpha_\lambda(s)$ una curva homotecia de $\alpha(s)$, esto es $\alpha_\lambda(s) := \lambda\alpha(s)$ con $\lambda > 0$, entonces su longitud de arco es $S_\lambda = \lambda S$ y su curvatura es $\kappa_\lambda(s_\lambda) = \frac{1}{\lambda}\kappa(s)$.

Demostración. Primero calculemos las longitudes de arco. Para $\alpha(s)$

$$S = \int_a^b \|\alpha'(s)\| ds = \int_a^b 1 ds = b - a.$$

Para $\alpha_\lambda(s)$

$$S_\lambda = \int_a^b \|\alpha'_\lambda(s)\| ds = \int_a^b \lambda \cdot 1 ds = \lambda(b - a) = \lambda S,$$

por lo tanto $S_\lambda = \lambda S$ como se quería.

Ahora para las curvaturas. La curvatura de una curva plana regular $\alpha(t)$ se calcula mediante la ecuación

$$\kappa(t) = \frac{\langle \alpha''(t), J(\alpha'(t)) \rangle}{|\alpha'(t)|^3}.$$

La curvatura para la curva α_λ es

$$\begin{aligned}\kappa_\lambda(t) &= \frac{\langle \alpha_\lambda''(t), J(\alpha_\lambda'(t)) \rangle}{|\alpha_\lambda'(t)|^3} = \frac{\langle \lambda\alpha''(t), \lambda J(\alpha'(t)) \rangle}{|\lambda\alpha'(t)|^3} \\ &= \frac{\lambda^2 \langle \alpha''(t), J(\alpha'(t)) \rangle}{|\lambda|^3 |\alpha'(t)|^3} = \frac{\langle \alpha''(t), J(\alpha'(t)) \rangle}{\lambda |\alpha'(t)|^3} = \frac{1}{\lambda} \kappa(t),\end{aligned}$$

esto se cumple en particular para una curva parametrizada por longitud de arco, así tenemos lo deseado. \square

El siguiente resultado aparece implícitamente en [3].

Proposición 1.5. *Si la curva $\alpha(s)$ tiene curvatura κ tal que se cumple $\ddot{\kappa} + \frac{1}{2}\kappa^3 - \mu\kappa - \sigma = 0$, entonces la curva $\alpha_\lambda(s) = \lambda\alpha(s)$ tiene curvatura κ_λ que cumple*

$$\frac{d\kappa_\lambda^2}{ds_\lambda^2} + \frac{1}{2}\kappa_\lambda^3 - \mu_\lambda\kappa_\lambda - \sigma_\lambda = 0,$$

donde $\kappa_\lambda = \kappa/\lambda$, $\mu_\lambda = \mu/\lambda^2$ y $\sigma_\lambda = \sigma/\lambda^3$.

Demostración. Recordemos que para una curva $\alpha_\lambda = \lambda\alpha$ su curvatura y longitud de arco están dadas por $\kappa_\lambda = \kappa/\lambda$ y $S_\lambda = \lambda S$. De modo que

$$\frac{d(\kappa_\lambda)}{d(s_\lambda)} = \frac{d(\kappa/\lambda)}{d(\lambda s)} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d\kappa}{ds}.$$

Si $\frac{d\kappa}{ds} = \nu$ y como $\ddot{\kappa} = -\frac{1}{2}\kappa^3 + \mu\kappa + \sigma$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{d(\frac{\nu}{\lambda^2})}{d(\lambda s)} &= \frac{1}{\lambda^3} \frac{d\nu}{ds} = \frac{1}{\lambda^3} \left(-\frac{1}{2}\kappa^3 + \mu\kappa + \sigma \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{\lambda} \right)^3 + \frac{\mu}{\lambda^2} \frac{\kappa}{\lambda} + \frac{\sigma}{\lambda^3} = -\frac{1}{2}\kappa_\lambda^3 + \mu_\lambda\kappa_\lambda + \sigma_\lambda = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{d^2\kappa_\lambda}{ds_\lambda^2} + \frac{1}{2}\kappa_\lambda^3 - \mu_\lambda\kappa_\lambda - \sigma_\lambda = 0.\end{aligned}$$

\square

Observación 1.1. *Por la proposición anterior podemos encontrar una λ adecuada de manera que la ecuación $\ddot{\kappa} + \frac{1}{2}\kappa^3 - \mu\kappa - \sigma = 0$ con $\sigma > 0$ se convierta en*

$$\ddot{\kappa}_\lambda + \frac{1}{2}\kappa_\lambda^3 - \mu_\lambda\kappa_\lambda - 1 = 0.$$

Corolario 1.1. *Sea $\alpha(s)$ una curva de Wegner con curvatura κ , entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que la curvatura escalada $\alpha_\lambda(s) := \lambda\alpha(s)$ cumple*

$$\ddot{\kappa} + \frac{1}{2}\kappa^3 - \mu\kappa - 1 = 0. \quad (1.4)$$

Observación 1.2. *Módulo homotecia y una reflexión, podemos considerar curvas de Wegner con $\sigma = 1$ y $\lambda > 0$ respectivamente para su estudio. Nos interesa estudiar propiedades cualitativas de esta última ecuación.*

Proposición 1.6. Sea $\ddot{\kappa} + \frac{1}{2}\kappa^3 - \mu\kappa - 1 = 0$. Si $\eta = \dot{\kappa}$ entonces tenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{\kappa} = \eta \\ \dot{\eta} = -\frac{1}{2}\kappa^3 + \mu\kappa + 1 \end{cases}$$

que es un campo vectorial Hamiltoniano cuyas soluciones son las curvas de nivel de $H(\kappa, \eta) = \frac{\kappa^4}{8} + \frac{\eta^2}{2} - \frac{\mu}{2}\kappa^2 - \kappa$.

Demostración. Si $\eta = \dot{\kappa}$ entonces $\dot{\eta} = \ddot{\kappa}$. Luego,

$$\begin{aligned} \ddot{\kappa} + \frac{1}{2}\kappa^3 - \mu\kappa - 1 = 0 &\Leftrightarrow \ddot{\kappa} = -\frac{1}{2}\kappa^3 + \mu\kappa + 1 \\ &\rightarrow \dot{\eta} = -\frac{1}{2}\kappa^3 + \mu\kappa + 1 \end{aligned}$$

de modo que tenemos el sistema de ecuaciones. Para ver que es Hamiltoniano debe verificar que $\dot{\kappa} = \frac{\partial H(\kappa, \eta)}{\partial \eta}$ y $\dot{\eta} = -\frac{\partial H(\kappa, \eta)}{\partial \kappa}$ para alguna función polinomial $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

La función que buscamos es la dada $H(\kappa, \eta) = \frac{\kappa^4}{8} + \frac{\eta^2}{2} - \frac{\mu}{2}\kappa^2 - \kappa$ pues

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(\kappa, \eta)}{\partial \eta} &= \dot{\kappa} = \eta \\ -\frac{\partial H(\kappa, \eta)}{\partial \kappa} &= \dot{\eta} = -\frac{1}{2}\kappa^3 + \mu\kappa + 1. \end{aligned}$$

Para un sistema hamiltoniano, H es constante a lo largo de cada curva solución. Suponiendo que H no es constante en ningún conjunto abierto, simplemente trazamos las curvas de nivel $H(\kappa, \eta) = \text{cte}$. Las soluciones del sistema se encuentran en estos conjuntos de niveles. Los puntos de equilibrio para un sistema hamiltoniano ocurren en los puntos críticos de H . \square

Proposición 1.7. El número de puntos críticos de $H(\kappa, \eta) = \frac{\kappa^4}{8} + \frac{\eta^2}{2} - \frac{\mu}{2}\kappa^2 - \kappa$ dependen del valor de μ :

- Si $\mu > \frac{3}{2}$ entonces hay tres puntos críticos que corresponden a dos centros y a un punto silla de la ecuación diferencial (1.4).
- Si $\mu = \frac{3}{2}$ entonces hay dos puntos críticos, uno de ellos es centro y el otro es degenerado de la ecuación (1.4).
- Si $\mu < \frac{3}{2}$ entonces hay un punto crítico correspondiente a un centro de la ecuación (1.4).

Demostración. Notemos que el comportamiento del sistema y por lo tanto de H se puede obtener analizando las raíces del polinomio $-\kappa^3/2 + \mu\kappa + 1$. Las raíces del polinomio nos dan la abscisa κ de los puntos críticos de H (las ordenadas son $\eta = 0$), las curvas de nivel no diferenciables son las que pasan por estos puntos críticos. Para analizar el polinomio nos basaremos en [13].

Las soluciones para una ecuación cúbica simplificada $z^3 + pz + q = 0$ están dadas por la fórmula de *Tartaglia-Cardano*:

$$z = v + w = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{1/3} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{1/3}. \quad (1.5)$$

La relación $vw = -\frac{p}{3}$ permite encontrar con mayor facilidad las parejas de raíces cúbicas (v, w) cuya suma es la solución efectiva de la ecuación cúbica simplificada.

Puesto que los números dentro de los radicales pueden ser reales o complejos, lo cual depende del discriminante $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, las dos raíces cúbicas de (1.5) son complejas. Así pues, esta expresión es la suma de dos números complejos que toman, cada uno, tres valores distintos. Las tres raíces de la ecuación cúbica simplificada están entre las nueve posibles sumas. Finalmente basta volver a sustituir las indeterminadas para hallar las soluciones de la ecuación original.

En nuestro caso

$$-\frac{1}{2}z^3 + \mu z + 1 = 0 \rightarrow z^3 - 2\mu z - 2 = 0,$$

donde $p = -2\mu$ y $q = -2$ con determinante $\Delta = 1 - \frac{8}{27}\mu^3$. De modo que la fórmula de Tartaglia-Cardano es

$$z = v + w = \left(1 + \sqrt{1 - \frac{8}{27}\mu^3}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8}{27}\mu^3}\right)^{1/3}.$$

Dependiendo el valor de μ tenemos los tres casos:

Caso 1. $\Delta < 0 \Leftrightarrow \mu > \frac{3}{2}$ el polinomio tiene tres raíces reales y distintas.

Caso 2. $\Delta = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{2}$ el polinomio tiene tres raíces reales, dos de ellas iguales.

Caso 3. $\Delta > 0 \Leftrightarrow \mu < \frac{3}{2}$ el polinomio tiene una raíz real y dos complejas conjugadas. □

Ejemplo 1.1. *A continuación desarrollaremos un ejemplo donde se muestran los tres casos mencionados anteriormente. En cada caso se muestran dos imágenes, la primera es la gráfica del polinomio con sus raíces reales, en la segunda se muestra las curvas de nivel de H , sus puntos críticos y sus con niveles críticos (valores que resultan al evaluar estos puntos críticos en H).*

Caso 1 $\mu > \frac{3}{2}$. *En este caso se tienen 3 raíces reales y distintas.*

Tomando $\mu = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ tenemos

$$\begin{aligned} z = v + w &= \left(1 + \sqrt{1 - \frac{8}{27} \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right)^3}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8}{27} \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right)^3}\right)^{1/3} \\ &= (1 + \sqrt{1-2})^{1/3} + (1 - \sqrt{1-2})^{1/3} = (1 \pm i)^{1/3} + (1 \pm i)^{1/3}. \end{aligned}$$

Las raíces cúbicas de $1 + i$ son

$$\{2^{1/6}e^{\pi i/12}, 2^{1/6}e^{9\pi i/12}, 2^{1/6}e^{17\pi i/12}\}$$

y las de $1 - i$ son

$$\{2^{1/6}e^{-\pi i/12}, 2^{1/6}e^{7\pi i/12}, 2^{1/6}e^{15\pi i/12}\}.$$

Por la relación $vw = -\frac{p}{3} = \frac{2\mu}{3} = \frac{2}{3}\frac{3}{2}\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$, las raíces del polinomio son

$$z_1 = \sqrt[6]{2} \left[e^{\frac{\pi}{12}i} + e^{\frac{-\pi}{12}i} \right] = \sqrt[6]{2}(1.9318), \quad z_2 = \sqrt[6]{2} \left[e^{\frac{9\pi}{12}i} + e^{\frac{15\pi}{12}i} \right] = \sqrt[6]{2}(-1.4142)$$

$$z_3 = \sqrt[6]{2} \left[e^{\frac{17\pi}{12}i} + e^{\frac{7\pi}{12}i} \right] = \sqrt[6]{2}(-0.5176).$$

Así, los puntos críticos de H en este caso son $(2^{1/6}(1.9318), 0)$, $(-2^{1/6}(1.4142), 0)$ y $(-2^{1/6}(0.5176), 0)$ y pertenecen a las curvas de nivel $H(2^{1/6}(1.9318), 0) = -3.8479$, $H(-2^{1/6}(1.4142), 0) = 0$ y $H(-2^{1/6}(0.5176), 0) = 0.27626827$ respectivamente.

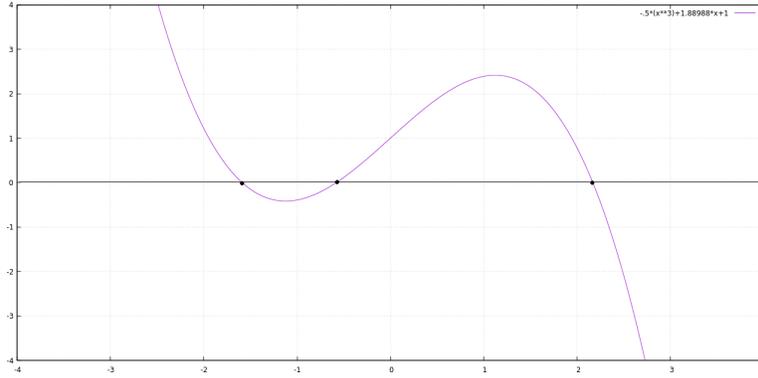


Figura 1.2: Las tres raíces reales en $\sqrt[6]{2}(1.9318)$, $\sqrt[6]{2}(-1.4142)$ y $\sqrt[6]{2}(-0.5176)$.

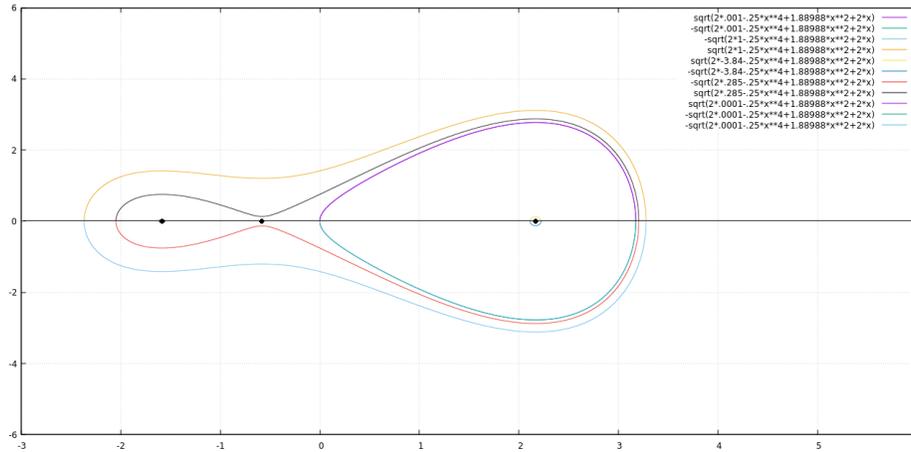


Figura 1.3: Curvas de nivel de H para valores $H = 13.84, 0.001, 0.0001, 0.285$ y 1 con $\mu = \frac{3}{2}2^{1/3}$.

Caso 2 $\mu = \frac{3}{2}$. En este caso tienen 3 raíces reales, dos de ellas iguales.

$$z = v + w = \left(1 + \sqrt{1 - \frac{8}{27} \left(\frac{3}{2} \right)^3} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8}{27} \left(\frac{3}{2} \right)^3} \right)^{1/3}$$

$$= (1 + \sqrt{1-1})^{1/3} + (1 - \sqrt{1-1})^{1/3} = (1)^{1/3} + (1)^{1/3}.$$

Las raíces cúbicas de 1 son

$$\{1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}\}$$

y usando la relación $vw = -\frac{v}{3} = \frac{2\mu}{3} = \frac{2 \cdot \frac{3}{2}}{3} = 1$ vemos el polinomio tiene por raíces

$$z_1 = 2 \quad y \quad z_2 = z_3 = e^{2\pi i/3} + e^{4\pi i/3} = -1.$$

Así, los puntos críticos de H en este caso son $(-1, 0)$ y $(2, 0)$ con sus respectivas curvas de nivel $H(-1, 0) = 0.375$ y $H(2, 0) = -3$.

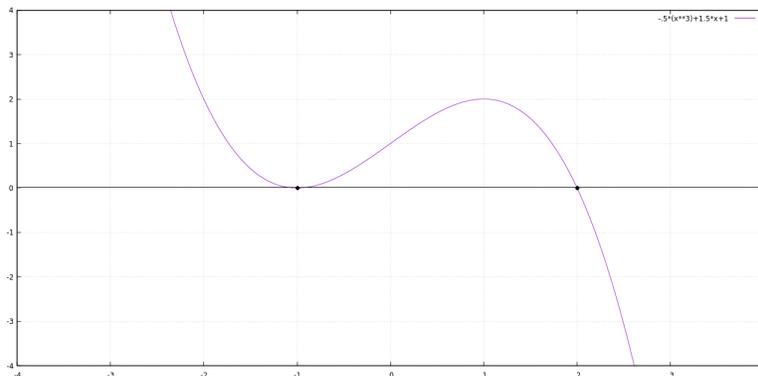


Figura 1.4: Una raíz múltiple real en -1 y otra raíz real en 2.

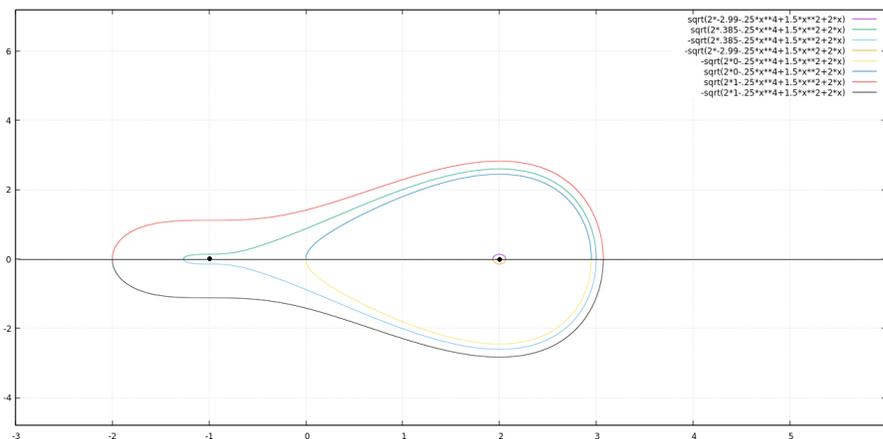


Figura 1.5: Curvas de nivel de H para valores $H = -2.99, 0, .385$ y 1 con $\mu = 3/2$.

Caso 3 $\mu < \frac{3}{2}$. En este caso se tiene 1 raíz real y dos complejas conjugadas. Tomando $\mu = 0$

$$\begin{aligned} z = v + w &= \left(1 + \sqrt{1 - \frac{8}{27}(0)}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8}{27}(0)}\right)^{1/3} \\ &= (1 + \sqrt{1})^{1/3} + (1 - \sqrt{1})^{1/3} = (1 \pm 1)^{1/3} + (1 \pm 1)^{1/3}, \end{aligned}$$

de modo que tenemos dos casos, cuando es 0 y cuando es $\sqrt[3]{2}$.

Las raíces cúbicas de 2 son $\{2^{1/3}, 2^{1/3}e^{2\pi i/3}, 2^{1/3}e^{4\pi i/3}\}$ que al usar la relación $vw = -\frac{p}{3} = \frac{2\mu}{3} = 0$ las raíces del polinomio son

$$z_1 = 2^{1/3}, \quad z_2 = 2^{1/3}e^{2\pi i/3}, \quad z_3 = 2^{1/3}e^{4\pi i/3} = 2^{1/3}e^{-2\pi i/3}.$$

Aquí el único punto crítico de H es $(2^{1/3}, 0)$ y su curva de nivel $H(2^{1/3}, 0) = -0.94494$

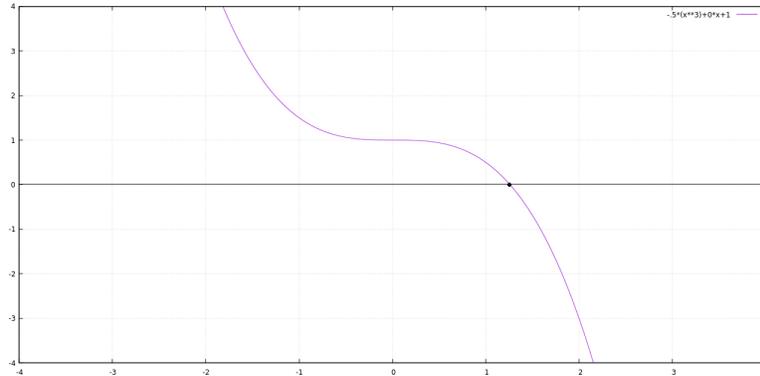


Figura 1.6: Una raíz real en $2^{1/3}$ y dos raíces complejas conjugadas.

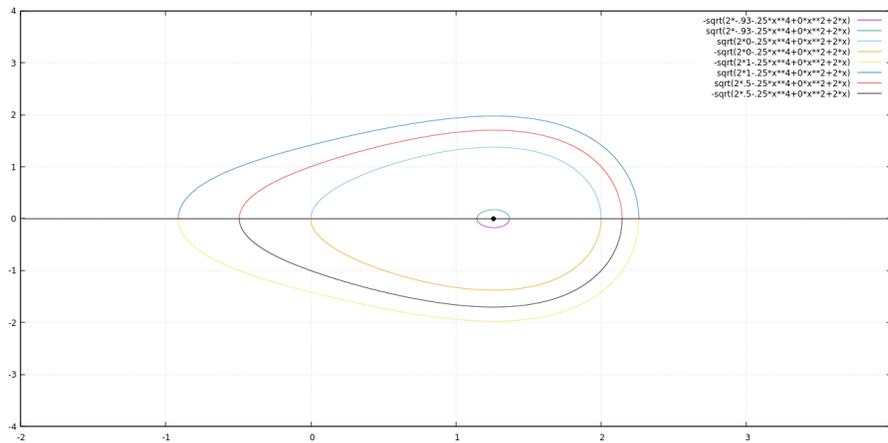


Figura 1.7: Curvas de nivel de H para valores $H = -0.93, 0, .5$ y 1 con $\mu = 0$.

Numéricamente se resolvió el sistema usando el programa Octave. Tomamos como condición inicial $(\kappa_0, \eta_0) = (r_M^2/2 + 2b, 0)$, donde r_M es la distancia máxima de la cual hablaremos más adelante.

Usando el mismo programa también se graficó la curva $\alpha(s)$ asociada a la curvatura $\kappa(s)$ usando las ecuaciones

$$\alpha(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos f(u) du, \int_{s_0}^s \sen f(u) du \right), \quad \text{donde } f(s) = \int_{s_0}^s \kappa(u) du. \quad (1.6)$$

En las imágenes de abajo se muestran estos resultados variando los valores de b , primero del lado izquierdo la curva solución $\kappa(s)$ del sistema en el plano $\kappa\eta$, del lado derecho se muestra $\alpha(s)$ en el plano xy . Notemos que no siempre las curvas $\alpha(s)$ son curvas cerradas.

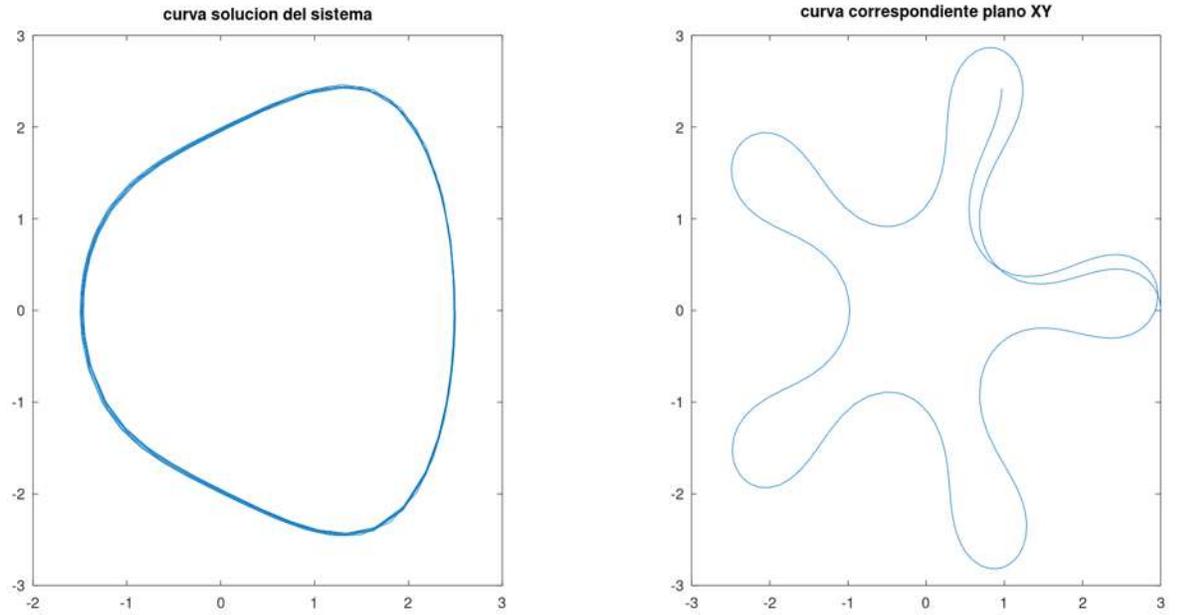


Figura 1.8: Gráficas con $r_M = 3$ y $b = -1$

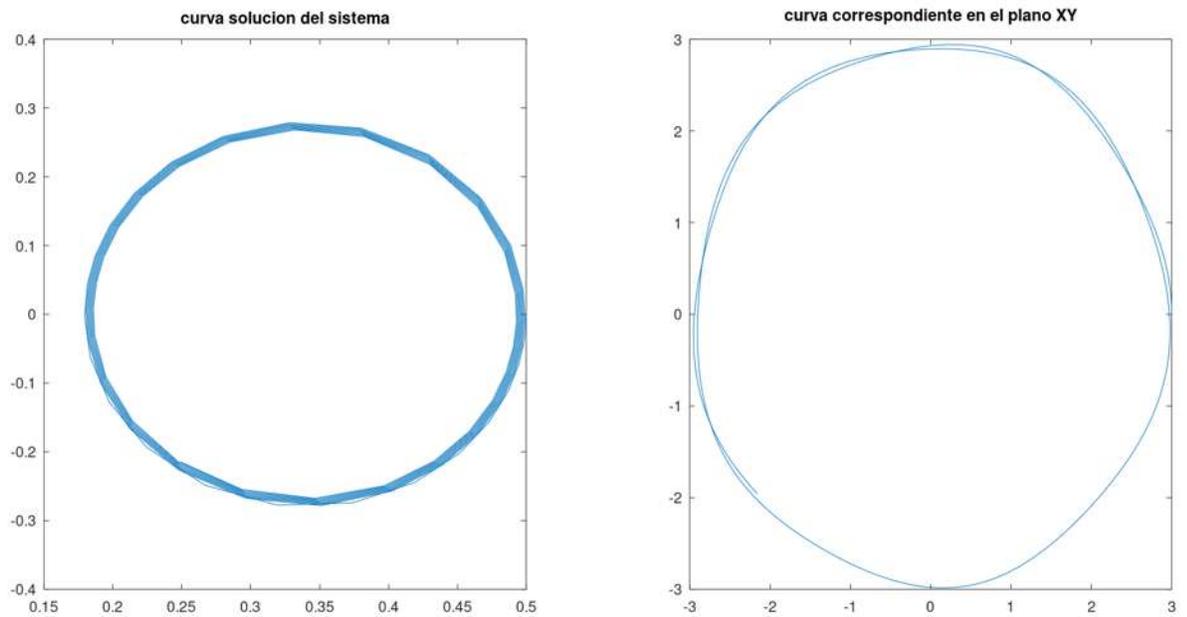


Figura 1.9: Gráficas con $r_M = 3$ y $b = -2$

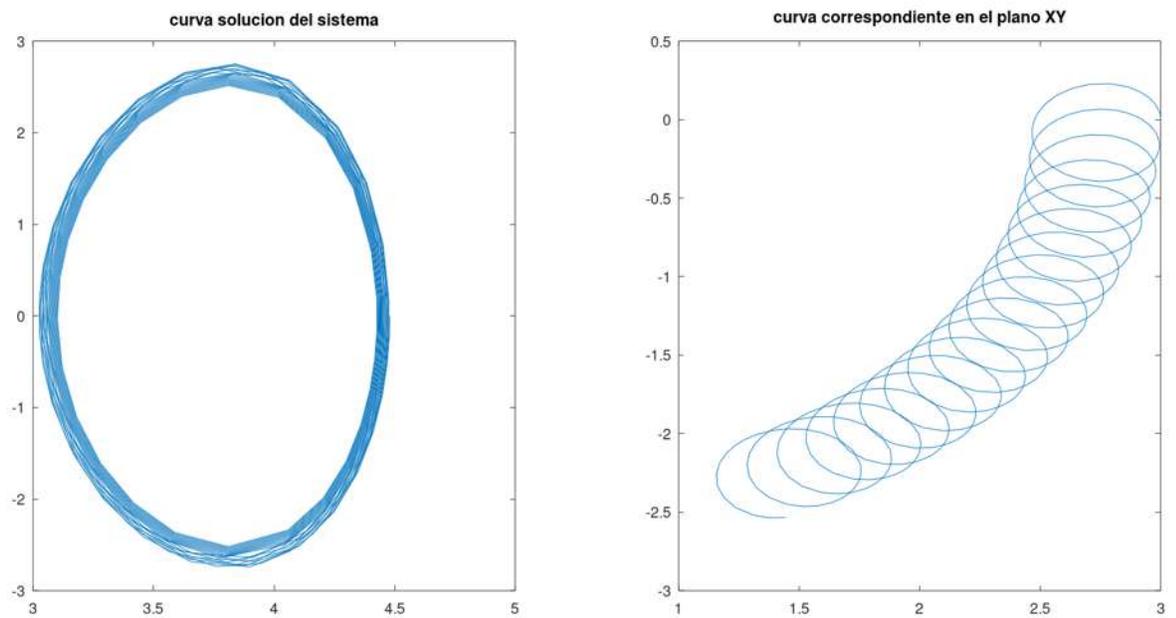


Figura 1.10: Gráficas con $r_M = 3$ y $b = -0.01$

Capítulo 2

Curvas cerradas

Es cierto, un matemático que no sea un poco poeta nunca será un matemático perfecto.
Karl Weierstrass.

En este capítulo mostraremos bajo que condiciones una curva de Wegner cuya curvatura es una solución periódica de $\ddot{\kappa} + \kappa^3/2 - \mu\kappa - 1 = 0$ es una curva cerrada. En primera instancia veamos unos resultados de variable compleja.

Definición 2.1. Sea τ una curva cerrada en el plano complejo que no pasa por el origen. El grado de τ respecto al origen, denotado por grado τ , está dado por:

$$\text{grado } \tau := \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau} \frac{dw}{w}.$$

Con esta definición podemos saber el número de vueltas que da la curva τ alrededor del origen, las vueltas se cuentan positiva o negativamente según el sentido de giro u orientación de la curva.

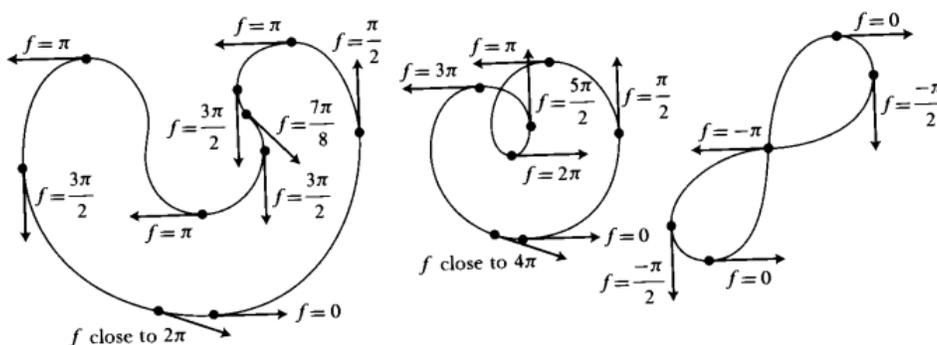


Figura 2.1: Imagen tomada de [11]

Lema 2.1. Dada la función $\tau : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^*$, admite un logaritmo diferenciable, es decir, existe una función $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ diferenciable y tal que $\tau(t) = e^{\varphi(t)} \forall t \in [a, b]$. Como consecuencia se tiene

$$\int_{\tau} \frac{dw}{w} = \varphi(b) - \varphi(a) \in \text{Log} \left(\frac{\tau(b)}{\tau(a)} \right). \quad (2.1)$$

Demostración. Primeramente podemos ver que la función buscada φ ha de ser una primitiva de τ'/τ . Como $\varphi(a)$ debe ser un logaritmo de $\tau(a)$, definimos φ como

$$\varphi(t) := \log \tau(a) + \int_a^t \frac{\tau'(s)}{\tau(s)} ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

Por el teorema fundamental del cálculo para la integral de Cauchy, φ es diferenciable en $[a, b]$ con

$$\varphi'(t) = \frac{\tau'(t)}{\tau(t)}. \quad (2.2)$$

Para comprobar que φ es el logaritmo que buscamos, definimos $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$h(t) := \tau(t)e^{-\varphi(t)} \quad \forall t \in [a, b]$$

con

$$h'(t) = \tau'(t)e^{-\varphi(t)} - \tau(t)\varphi'(t)e^{-\varphi(t)} = e^{-\varphi(t)} \left[\tau'(t) - \tau(t) \left(\frac{\tau'(t)}{\tau(t)} \right) \right] = 0$$

por lo que h es constante. Como $e^{\varphi(a)} = \tau(a)$

$$h(a) = \tau(a)e^{-\varphi(a)} = e^{\varphi(a)}e^{-\varphi(a)} = 1$$

de modo que $h(t) = 1$ para todo $t \in [a, b]$. Usando la definición de h obtenemos que φ es el logaritmo buscado, $\tau(t) = e^{\varphi(t)}$.

Lo mostrado sobre φ nos lleva a

$$\int_{\tau} \frac{dw}{w} = \int_a^b \frac{\tau'(t)}{\tau(t)} dt = \int_a^b \varphi'(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a) \in \text{Log} \left(\frac{\tau(b)}{\tau(a)} \right). \quad (2.3)$$

□

Observación 2.1. Suponiendo que el arco τ es cerrado, $\tau(a) = \tau(b)$. Entonces $\varphi(a)$ y $\varphi(b)$ son logaritmos del mismo número, tienen la misma parte real. Para calcular el grado de τ , sólo nos interesa la parte imaginaria $\text{Im } \varphi$, que es un argumento continuo de τ , es decir, una función continua $\Theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Theta(t) \in \text{Arg } \tau(t)$ para todo $t \in [a, b]$. De modo que tenemos

$$\text{grado } \tau = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi i} = \frac{\Theta(b) - \Theta(a)}{2\pi}, \quad (2.4)$$

donde $\Theta(a)$ y $\Theta(b)$ son argumentos del mismo número complejo por lo que difieren en un múltiplo entero de 2π , luego $\text{grado } \tau \in \mathbb{Z}$.

Suponiendo que el arco τ describe un movimiento, que no pasa por el origen, $\text{Arg } \tau(t)$ es el ángulo orientado entre la parte positiva del eje real y el vector de posición en cada instante $t \in [a, b]$. La continuidad de τ hace que este ángulo varíe de manera continua, de modo que podemos elegir para cada instante $t \in [a, b]$ un número real $\Theta(t)$ que mide dicho ángulo, obteniendo una función continua.

Nuestro argumento continuo aumenta o disminuye según el vector de posición gire en sentido positivo o negativo. Por tanto, la diferencia entre los valores final e inicial del argumento, se interpreta como el ángulo recorrido por el vector de posición en todo el movimiento. Vemos que el grado es el número neto de vueltas que da τ . Para ver más detalles sobre esta parte de variable compleja consultar [7], notas en las que nos apoyamos.

Proposición 2.1. *Sea $\tau : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva cerrada que no pasa por el origen, entonces el grado es un número entero:*

$$\text{grado } \tau \in \mathbb{Z}. \quad (2.5)$$

Demostración. Sea $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ una partición de $[a, b]$ tal que $\tau_k = \tau([t_{k-1}, t_k])$ es un arco. Aplicando el lema anterior para τ_k

$$\int_{\tau_k} \frac{dw}{w} \in \text{Log} \left(\frac{\tau(t_k)}{\tau(t_{k-1})} \right), \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

y por la propiedad de los logaritmos de un número complejo

$$\int_{\tau} \frac{dw}{w} = \sum_{k=1}^n \int_{\tau_k} \frac{dw}{w} \in \text{Log} \left(\prod_{k=1}^n \frac{\tau(t_k)}{\tau(t_{k-1})} \right) = \text{Log} \left(\frac{\tau(b)}{\tau(a)} \right) = \text{Log } 1.$$

Así, la integral anterior es un múltiplo entero de $2\pi i$, luego

$$\text{grado } \tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} (2\pi i n) = n \in \mathbb{Z}.$$

□

Definición 2.2. *Sea α una curva cerrada clase C^1 . Se define el índice de rotación de α denotado por $\text{ind } \alpha$, como el grado de $\dot{\alpha}$, es decir, tomamos $\tau = \dot{\alpha}$ como una curva en \mathbb{C}^**

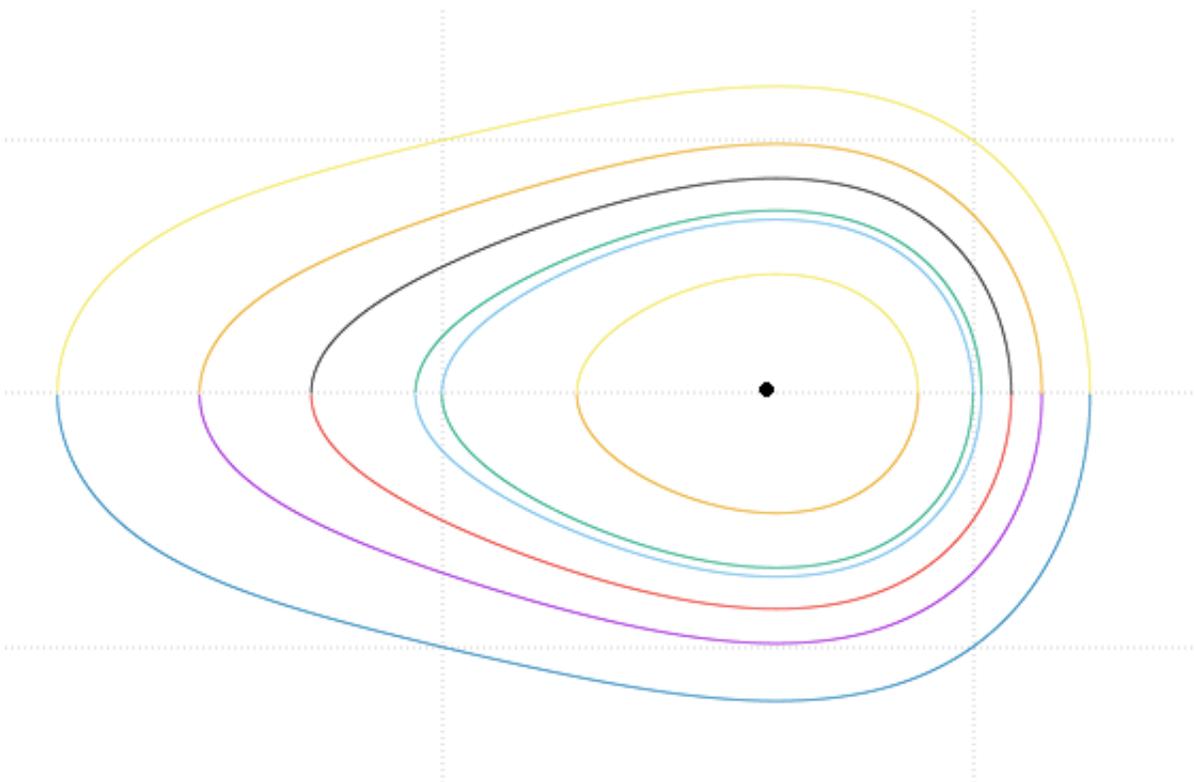
$$\text{ind } \alpha = \text{grado } \dot{\alpha}. \quad (2.6)$$

Proposición 2.2. *Una curva cerrada α de clase C^1 y longitud L tiene curvatura total*

$$\int_0^L \kappa(s) ds = 2\pi \text{ind } \alpha.$$

Para la demostración consultar [11].

Por otro lado, tomemos de ejemplo la imagen de abajo, vemos que dado un centro existe una región de órbitas periódicas $\kappa(s)$ que a su vez son las curvas de nivel de valor h de la función H . A cada una de estas órbitas $\kappa(s)$ se le asocia un único número real positivo $T(h)$ llamado *periodo*. Nos interesa estudiar estas órbitas $\kappa(s)$ que dan lugar a curvas cerradas $\alpha(s)$, curvas cerradas con propiedades interesantes como la enunciada a continuación.



Proposición 2.3. Sea $\alpha(s)$ una curva de Wegner cerrada y de longitud L , esto es

$$\alpha(0) = \alpha(L) \quad \text{y} \quad \dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}(L).$$

Si $\kappa(s)$ es la curvatura de $\alpha(s)$ y además solución de $\ddot{\kappa} + \frac{1}{2}\kappa^3 - \mu\kappa - 1 = 0$, entonces

$$\kappa(0) = \kappa(L) \quad \text{y} \quad \dot{\kappa}(0) = \dot{\kappa}(L), \quad (2.7)$$

es decir, $L = nT(h)$ con $n \in \mathbb{Z}$, donde $T(h)$ es el periodo de $\kappa(s)$ y h es el nivel $H(\kappa(s), \eta(s))$. Se cumple además que

$$\int_0^{nT(h)} \kappa(s) ds = 2\pi \text{ind } \alpha.$$

Demostración. Por ser $\alpha(s)$ una curva de Wegner su curvatura $\kappa(s) = 4ar^2 + 2b$ depende de r , que es la distancia del origen a la curva. Como la curva es cerrada, tiene la misma distancia r en $\alpha(0)$ y en $\alpha(L)$, de modo que $\kappa(0) = \kappa(L)$.

Para ver que $\dot{\kappa}(0) = \dot{\kappa}(L)$ recordemos que $\dot{\kappa}(s) = 8ar \cos \phi$, por lo que basta demostrar que el ángulo ϕ es el mismo para ambos casos.

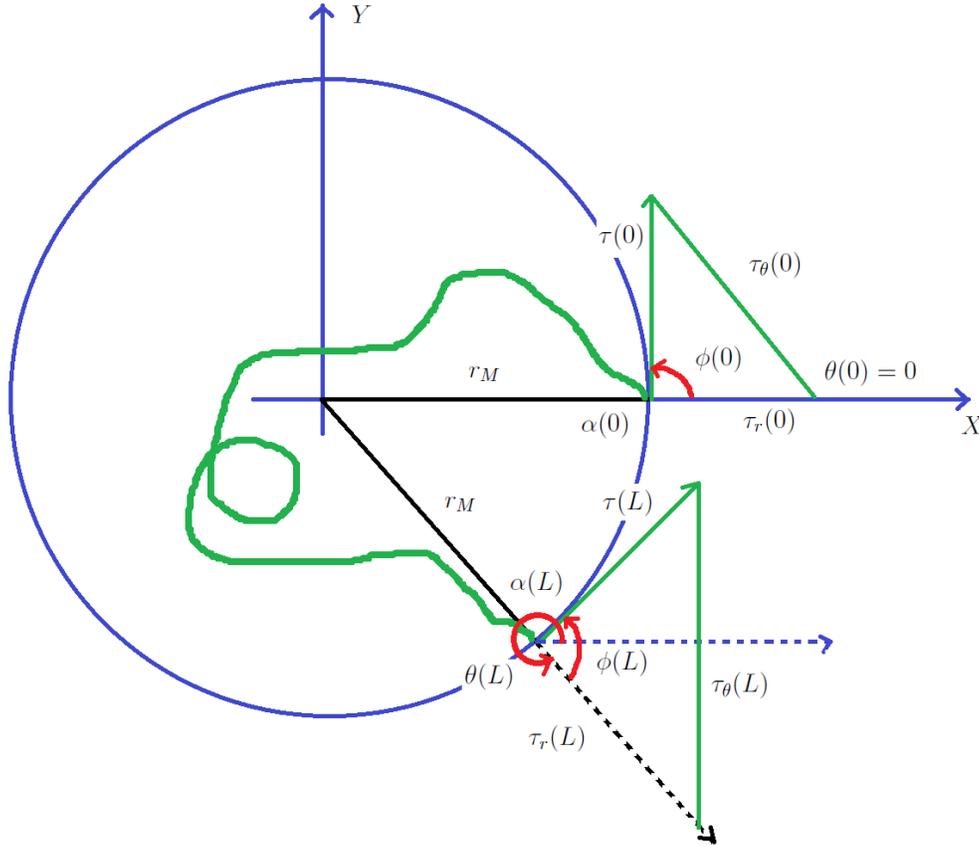
El ángulo ϕ es el formado por la derivada de la curva, τ y τ_r (ver figura 1). Como $\dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}(L)$, el ángulo ϕ es el mismo en los puntos $\alpha(0)$ y $\alpha(L)$ como se quería. \square

Proposición 2.4. Sea $\kappa(s)$ una curva solución de $\ddot{\kappa} + \frac{1}{2}\kappa^3 - \mu\kappa - 1 = 0$ de periodo $T(h)$ y tal que para algún $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_0^{nT(h)} \kappa(s) ds = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2.8)$$

Entonces la curva de Wegner correspondiente $\alpha(s)$ es cerrada, de longitud $L = nT(h)$ e índice $\text{ind } \alpha = m$.

Demostración. Para demostrar que $\alpha(s)$ es cerrada tenemos que ver que $\alpha(0) = \alpha(L)$ y $\dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}(L)$, para ello, comencemos trazando un círculo centrado en el origen tal que su radio r_M sea la distancia máxima del origen a $\alpha(s)$. Podemos suponer que $\alpha(0)$ se encuentra sobre el círculo de radio r_M y la parte positiva del eje x y $\alpha(L)$ también está sobre el círculo de radio r_M pues r depende de κ , esto es posible al aplicar traslaciones y rotaciones. En la imagen de abajo se muestra el sistema.



Como r_M es máximo

$$\frac{dr}{ds} = \dot{r} = \cos \phi = 0, \quad (2.9)$$

donde ϕ es el ángulo formado entre τ y τ_r .

Para que $\alpha(0) = \alpha(L)$ basta mostrar que $\theta(L)$ es múltiplo de 2π , es decir, $\alpha(L)$ regresa al punto donde partió, esto es a $\alpha(0)$. Al usar la ecuación (2.9) tenemos que

$$\cos \phi(L) = 0 \Leftrightarrow \phi(L) = 2\pi k_1 + \frac{\pi}{2}, \text{ con } k_1 \in \mathbb{Z}$$

de manera análoga, $\phi(0) = 2\pi k_2 + \frac{\pi}{2}$ pues $\alpha(0)$ y $\alpha(L)$ están a la misma distancia r_M . Luego, usando este último resultado y que $\kappa = \dot{\theta} + \dot{\phi}$ tenemos

$$\int_0^L \kappa(s) ds = \int_0^L (\dot{\theta} + \dot{\phi}) ds = \theta(L) - \theta(0) + \phi(L) - \phi(0) = 2\pi m. \quad (2.10)$$

Por construcción $\theta(0) = 0$, así sustituyendo valores en la ecuación (2.10)

$$\begin{aligned}\theta(L) - 0 + \left(2\pi k_1 + \frac{\pi}{2}\right) - \left(2\pi k_2 + \frac{\pi}{2}\right) &= \theta(L) + 2\pi(k_1 - k_2) = 2\pi m \\ \Leftrightarrow \theta(L) &= 2\pi(m + k_2 - k_1)\end{aligned}$$

como queríamos.

Como en $\alpha(0) = \alpha(L)$ se tiene el mismo vector tangente unitario la derivada es la misma $\dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}(L)$, lo que completa la demostración. \square

Observación 2.2. En la demostración anterior se usó el hecho de que la curva $\alpha(s)$ alcanza su radio máximo r_M , esto se analizará en el capítulo siguiente.

Observación 2.3. La Proposición anterior es válida para curvas de Wegner ya que en general, para que una curva sea cerrada, no basta que $\int_0^L \kappa(s) ds$ sea un múltiplo entero de 2π . Un ejemplo de esto es la espiral logarítmica $r(\theta) = ce^{a\theta}$ como mostraremos a continuación.

Dada la espiral logarítmica y usando la fórmula para calcular su curvatura tenemos

$$\kappa(\theta) = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} = \frac{1}{r} \frac{(1 - 2a^2 - a)}{(1 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{c} e^{-a\theta} \frac{(1 - 2a^2 - a)}{(1 + a^2)^{3/2}}.$$

Integrando la curvatura

$$\int_0^L \kappa(s) ds = \int_0^L \frac{1}{c} e^{-a\theta} \frac{(1 - 2a^2 - a)}{(1 + a^2)^{3/2}} d\theta = -\frac{1}{ac} \frac{(1 - 2a^2 - a)}{(1 + a^2)^{3/2}} [e^{-aL} - 1].$$

Si tomamos de longitud $L = \ln(2p\pi + 1)^{-1/a}$ con $p = q \frac{ac(1+a^2)^{3/2}}{a+2a^2-1}$ y $q \in \mathbb{Z}$ la integral anterior es

$$\int_0^L \kappa(s) ds = -\frac{1}{ac} \frac{(1 - 2a^2 - a)}{(1 + a^2)^{3/2}} \left[2\pi \left(q \frac{ac(1+a^2)^{3/2}}{(a+2a^2-1)} \right) + 1 - 1 \right] = 2\pi q.$$

Por lo tanto $\int_0^L \kappa(s) ds$ es múltiplo entero de 2π , pero lo cierto es que la espiral logarítmica $r(\theta) = ce^{a\theta}$ no es una curva cerrada.

Corolario 2.1. Sea $\kappa(s)$ una curva solución de $\ddot{\kappa} + \frac{1}{2}\kappa^3 - \mu\kappa - 1 = 0$ de periodo $T(h)$. Entonces, la curva de Wegner $\alpha(s)$ con curvatura $\kappa(s)$ es cerrada sí y sólo si

$$\int_0^{T(h)} \kappa(s) ds = 2\pi \frac{m}{n}, \quad n, m \in \mathbb{Z}. \quad (2.11)$$

Demostración. \Rightarrow Aplicando la proposición 1.9 a la curva $\alpha(s)$ tenemos que

$$\int_0^{nT(h)} \kappa(s) ds = 2\pi m.$$

Luego, por ser $\kappa(s)$ de periodo $T(h)$

$$\int_0^{nT(h)} \kappa(s) ds = n \int_0^{T(h)} \kappa(s) ds = 2\pi m$$

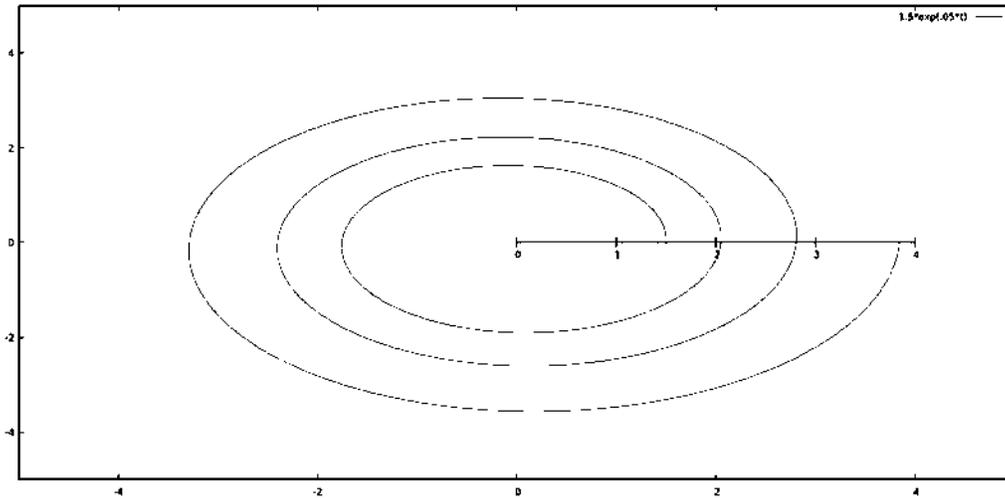


Figura 2.2: Espiral logarítmica $r(\theta) = 3/2 \exp(\theta/20)$.

y finalmente

$$n \int_0^{T(h)} \kappa(s) ds = 2\pi m \Leftrightarrow \int_0^{T(h)} \kappa(s) ds = 2\pi \frac{m}{n}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

como se quería.

\Leftrightarrow) Del mismo modo que en la primera parte, tenemos

$$\int_0^{T(h)} \kappa(s) ds = 2\pi \frac{m}{n} \Leftrightarrow \int_0^{nT(h)} \kappa(s) ds = 2\pi m.$$

Aplicamos la Proposición 2.4 y obtenemos que la curva $\alpha(s)$ es cerrada. \square

Capítulo 3

Sistema dinámico y curvas de Wegner

La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles.
Descartes.

En este capítulo estudiaremos un sistema dinámico relacionado con las identidades vistas en el Capítulo 1, las soluciones de este sistema dinámico y su relación con las curvas de Wegner.

Empecemos tomando algunas identidades vistas al inicio del capítulo uno,

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \kappa - \dot{\theta} = (4ar^2 + 2b) - \dot{\theta} \\ r\dot{\theta} &= \text{sen } \phi \Leftrightarrow \dot{\theta} = \frac{\text{sen } \phi}{r}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Sustituyendo $\dot{\theta}$ en $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} = 4ar^2 + 2b - \frac{\text{sen } \phi}{r}.$$

Esta última igualdad junto con $\dot{r} = \cos \phi$ y la ecuación (3.1) forman el siguiente sistema de ecuaciones

$$\dot{x} = \mathbf{F}(x, s; a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{r} = \cos \phi \\ \dot{\phi} = 4ar^2 + 2b - \frac{\text{sen } \phi}{r} \\ \dot{\theta} = \frac{\text{sen } \phi}{r} \end{cases}\tag{3.2}$$

donde $x = (r, \phi, \theta)$ y a y b son constantes fijas.

Proposición 3.1. *El sistema (3.2) tiene primera integral de movimiento $\Psi(r, \phi)$, es decir, $\Psi(r, \phi)$ es constante a lo largo de las soluciones de (3.2).*

Demostración. Tomemos las dos primeras ecuaciones del sistema y hagamos su cociente como sigue

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} &= \frac{4ar^2 + 2b - \frac{\text{sen } \phi}{r}}{\cos \phi} = \frac{4ar^3 + 2br - \text{sen } \phi}{r \cos \phi} \\ &\rightarrow (r \cos \phi)d\phi = (4ar^3 + 2br - \text{sen } \phi)dr \\ &\rightarrow (r \cos \phi)d\phi + (\text{sen } \phi - 4ar^3 - 2br)dr = 0.\end{aligned}$$

Esta última igualdad es una ecuación diferencial exacta las cuales se sabe que admiten primera integral. Finalmente, la primera integral de movimiento es

$$\Psi(r, \phi) = r \text{sen } \phi - ar^4 - br^2.$$

Para demostrar que es constante veremos que su derivada es cero,

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}(\phi, r) &= (\dot{r} \text{sen } \phi + r \cos \phi \dot{\phi}) - 4ar^3 \dot{r} - 2br \dot{r} \\ &= (\dot{r}r\dot{\theta} + r\dot{r}\dot{\phi}) - (4ar^3 \dot{r} + 2br \dot{r}) \\ &= \dot{r}r[(\dot{\theta} + \dot{\phi}) - (4ar^2 + 2b)] \\ &= \dot{r}r[\kappa - \kappa] = 0\end{aligned}$$

como se quería. □

Por simetría radial podemos trabajar solo con las 2 primeras ecuaciones del sistema (3.2) excluyendo $\dot{\theta} = \text{sen } \phi/r$ por tratarse de rotaciones y por no depender el sistema de θ .

A continuación se mostrarán algunos resultados interesantes sobre $\Psi(r, \phi)$.

Proposición 3.2. *La primera integral de movimiento $\Psi(r, \phi)$ es equivalente a la constante c en $\dot{\theta} = ar^2 + b + c/r^2$.*

Demostración. Tomando $\Psi(r, \phi)$ y la tercera ecuación de (3.2) vemos que

$$\begin{aligned}\Psi(r, \phi) &= r \text{sen } \phi - ar^4 - br^2 \\ &= r^2 \left(\frac{\text{sen } \phi}{r} \right) - ar^4 - br^2 \\ &= r^2 \dot{\theta} - ar^4 - br^2 \\ &\Leftrightarrow \dot{\theta} = ar^2 + b + \frac{\Psi(r, \phi)}{r^2}.\end{aligned}$$

□

De la proposición anterior tenemos que por cada condición inicial (r_0, ϕ_0) obtenemos un valor de c para a y b fijas, esto es

$$c = \Psi(r_0, \phi_0) = r_0 \text{sen } \phi_0 - ar_0^4 - br_0^2.$$

La dependencia de la constante c a la condición inicial implica la dependencia de otras ecuaciones sobre (r_0, ϕ_0) , entre ellas $\mu = 2(b^2 - 4ac)$.

Proposición 3.3. Para un nivel $\Psi(r, \phi) = c$ los radios críticos de la solución que corresponden a c se encuentran resolviendo el polinomio

$$aq^2 + \frac{b}{3}q - \frac{c}{3} = 0.$$

Demostración. Calculemos el gradiente de $\Psi(r, \phi)$.

$$\nabla\Psi(r, \phi) = (\text{sen } \phi - 4ar^3 - 2br, r \cos \phi)$$

que igualando a cero tenemos

$$\begin{cases} \text{sen } \phi - 4ar^3 - 2br = 0 \Leftrightarrow \text{sen } \phi = 4ar^3 + 2br \\ r \cos \phi = 0 \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \text{ ó } \phi = \frac{3\pi}{2} \text{ para } \phi \in (0, 2\pi]. \end{cases} \quad (3.3)$$

Por otro lado, de la ecuación (1.1) y la Proposición (1.1) tenemos

$$\text{sen } \phi = r \left(ar^2 + b + \frac{c}{r^2} \right) = ar^3 + br + \frac{c}{r}.$$

Igualando esta última ecuación con $\text{sen } \phi = 4ar^3 + 2br$ vemos que

$$\begin{aligned} ar^3 + br + \frac{c}{r} &= 4ar^3 + 2br \\ \Leftrightarrow r(ar^3 + br + \frac{c}{r} - 4ar^3 - 2br) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3ar^4 + br^2 - c &= 0 \\ \Leftrightarrow ar^4 + \frac{b}{3}r^2 - \frac{c}{3} &= 0, \end{aligned}$$

tomando $q = r^2$ nuestro polinomio es

$$aq^2 + \frac{b}{3}q - \frac{c}{3} = 0.$$

□

A continuación calcularemos los radios críticos para una c dada usando la proposición anterior.

Ejemplo 3.1. Sea $\Psi(r, \phi) = r \text{sen } \phi - ar^4 - br^2 = -18$. Por la Proposición 3.2 sabemos que $c = -18$, luego, tomando $a = 1/8$ y $b = 3$ y usando la proposición anterior para calcular los radios críticos tenemos el polinomio

$$\frac{q^2}{8} + q + 6 = 0.$$

usando la fórmula general para este tipo de polinomios vemos que

$$q_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(6)/8}}{2/8} = -4 \pm 8 \longrightarrow q_1 = -12, \quad q_2 = 4.$$

Como $q = r^2$ tenemos $r_1 = -\sqrt{-12}$, $r_2 = \sqrt{-12}$, $r_3 = -2$ y $r_4 = 2$. Dado que estamos buscando distancias, la única opción es $r = 2$.

Proposición 3.4. *Tomemos la familia uniparamétrica de las parábolas $y = aq^2 + bq + c$, donde a y b son fijas y $c \in \mathbb{R}$. Los radios de los puntos críticos de $\Psi(r, \phi)$ se encuentran en los puntos de tangencia de una parábola de la familia uniparamétrica con la parábola $y^2 = q$.*

Al decir puntos de tangencia nos referimos a los puntos donde una parábola de la familia intersecta a la parábola $y^2 = q$ y además tienen la misma derivada.

Demostración. Para ver los puntos críticos calculemos el gradiente de $\Psi(r, \phi)$.

$$\nabla \Psi(r, \phi) = (\sin \phi - 4ar^3 - 2br, r \cos \phi)$$

que igualando a cero tenemos

$$\begin{cases} \sin \phi - 4ar^3 - 2br = 0 \Leftrightarrow \sin \phi = 4ar^3 + 2br \\ r \cos \phi = 0 \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \text{ ó } \phi = \frac{3\pi}{2} \text{ para } \phi \in (0, 2\pi]. \end{cases}$$

Sustituyendo en $\sin \phi = 4ar^3 + 2br$ los valores de ϕ obtenidos arriba tenemos

$$\pm 1 = 4ar^3 + 2br = 2r(2ar^2 + b) \Leftrightarrow 1 = 4r^2(2ar^2 + b)^2$$

y tomando $q = r^2$ la ecuación para los radios de los puntos críticos es

$$1 = 4q(2aq + b)^2. \quad (3.4)$$

Por otra parte, igualemos la parábola $y^2 = q$ y una parábola $y = aq^2 + bq + c$ que pertenece a la familia uniparamétrica para obtener sus puntos de intersección, esto es

$$\pm\sqrt{q} = aq^2 + bq + c \Leftrightarrow q = (aq^2 + bq + c)^2.$$

Para ver que coinciden sus derivadas tomemos la última igualdad de arriba, la derivamos respecto de q y tenemos

$$\begin{aligned} 1 &= 2(aq^2 + bq + c)(2aq + b) \\ \Leftrightarrow 1 &= 4(aq^2 + bq + c)^2(2aq + b)^2 \\ \Leftrightarrow 1 &= 4q(2aq + b)^2 \end{aligned}$$

donde en la última equivalencia usamos la ecuación $q = (aq^2 + bq + c)^2$ la cual nos da los puntos de intersección de las parábolas.

Notemos que $1 = 4q(2aq + b)^2$ nos da los puntos donde las parábolas son iguales así como sus derivadas y además, es la misma ecuación que calculamos para los radios de puntos críticos. □

Proposición 3.5. *El número de puntos de tangencia referidos en la Proposición 3.4 es a lo más 3 según el valor de $2^3ab^3 + 3^3a^2$:*

- Si $2^3ab^3 + 3^3a^2 < 0$ entonces se tienen tres puntos de tangencia.
- Si $2^3ab^3 + 3^3a^2 = 0$ entonces se tienen dos puntos de tangencia.

- Si $2^3ab^3 + 3^3a^2 > 0$ entonces se tiene un punto de tangencia.

Demostración. Analicemos la ecuación para los puntos de tangencia

$$\begin{aligned}
1 &= 4q(2aq + b)^2 \\
&\Leftrightarrow 2^4a^2q^3 + 2^4abq^2 + 2^2b^2q - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow q^3 + \frac{b}{a}q^2 + \frac{1}{2^2}\frac{b^2}{a^2}q - \frac{1}{2^4a^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(q^3 + \frac{b}{a}q^2 + \frac{b^2}{3a^2}q + \frac{b^3}{3^3a^3}\right) - \frac{b^2}{3a^2}q - \frac{b^3}{3^3a^3} + \frac{1}{2^2}\frac{b^2}{a^2}q - \frac{1}{2^4a^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(q + \frac{1}{3}\frac{b}{a}\right)^3 + \frac{b^2}{a^2}q\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2^4}\frac{1}{a^2} + \frac{1}{3^3}\frac{b^3}{a^3}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(q + \frac{1}{3}\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{12}\frac{b^2}{a^2}q - \left(\frac{1}{2^4}\frac{1}{a^2} + \frac{1}{3^3}\frac{b^3}{a^3}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(q + \frac{b}{3a}\right)^3 - \frac{3^2}{12}\left(\frac{b^2}{3^2a^2}\right)q - \left(\frac{1}{2^4a^2} + \frac{b^3}{3^3a^3}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow (q + \alpha)^3 - \frac{3}{4}\alpha^2q - \left(\frac{1}{2^4a^2} + \alpha^3\right) = 0, \quad \text{con } \alpha = \frac{b}{3a} \\
&\Leftrightarrow p^3 + \beta p + \gamma = 0
\end{aligned}$$

donde

$$p = q + \alpha, \quad \beta = -\frac{3}{4}\alpha^2 \text{ y } \gamma = -\frac{1}{4}\alpha^3 - \frac{1}{2^4a^2}.$$

El determinante del polinomio $p^3 + \beta p + \gamma = 0$, equivalente al polinomio $4q(2aq + b)^2 - 1 = 0$, nos da el tipo de puntos de tangencia que existen.

Para dar solución a esta ecuación cúbica usaremos la fórmula de *Tartaglia-Cardano* como se hizo en el Capítulo 1 y basados en [13]. Primeramente calculemos el discriminante Δ del polinomio $p^3 + \beta p + \gamma = 0$,

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\gamma^2}{4} + \frac{\beta^3}{27} = \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{4}\alpha^3 - \frac{1}{2^4a^2} \right]^2 + \frac{1}{27} \left(-\frac{3}{4}\alpha^2 \right)^3 \\
&= \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2^4}\alpha^6 + \frac{2}{2^2}\alpha^3\frac{1}{2^4a^2} + \frac{1}{2^8a^4} \right) - \frac{3^3}{3^3}\frac{\alpha^6}{2^6} \\
&= \frac{\alpha^6}{2^6} + \frac{1}{2^7}\frac{\alpha^3}{a^2} + \frac{1}{2^{10}a^4} - \frac{\alpha^6}{2^6} \\
&= \frac{\alpha^3 2^3 a^2 + 1}{2^{10} a^4} \\
&= \frac{1}{2^{10} a^4} \left[\left(\frac{b}{3a} \right)^3 2^3 a^2 + 1 \right] \\
&= \frac{1}{2^{10} a^4} \left[\frac{2^3 b^3 + 3^3 a}{3^3 a} \right] = \frac{2^3 ab^3 + 3^3 a^2}{2^{10} 3^3 a^6}.
\end{aligned}$$

La fórmula de *Tartaglia-Cardano* expone que junto con la identidad $vw = -\beta/3$ las raíces vendrán dadas en los tres siguientes casos dependiendo Δ .

Caso 1. Si $\Delta < 0$ el polinomio tiene tres raíces reales y distintas.

Caso 2. Si $\Delta = 0$ el polinomio tiene tres raíces reales, dos de ellas iguales.

Caso 3. Si $\Delta > 0$ el polinomio tiene una raíz real y dos complejas conjugadas.

Como el determinante es un cociente cuyo denominador es siempre positivo basta analizar el numerador $2^3ab^3 + 3^3a^2$. \square

A continuación daremos un ejemplo donde se exponen los tres casos mencionados en la demostración anterior.

Ejemplo 3.2. Tomemos el polinomio $p^3 + \beta p + \gamma = 0$ mencionado arriba y su discriminante Δ .

Caso 1. Si $a(2^3b^3 + 3^3a) < 0$ tenemos

Caso 1.1. Cuando $a > 0$ y $2^3b^3 + 3^3a < 0 \Leftrightarrow b < -3\sqrt[3]{a}/2$. Tomamos $a = 1/8$ y $b = -3$.

$$\begin{aligned}
q = v + w &= \left[-\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\Delta}\right]^{1/3} + \left[-\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\Delta}\right]^{1/3} \\
&= \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{b}{3a}\right)^3 - \frac{1}{2^4a^2}\right) + \sqrt{\frac{2^3ab^3 + 3^3a^2}{2^{10}3^3a^6}}\right]^{1/3} \\
&\quad + \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{b}{3a}\right)^3 - \frac{1}{2^4a^2}\right) - \sqrt{\frac{2^3ab^3 + 3^3a^2}{2^{10}3^3a^6}}\right]^{1/3} \\
&= \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2^2} \left(\frac{-3}{3/8}\right)^3 - \frac{1}{2^4/8^2}\right) + \sqrt{\frac{-2^33^3/8 + 3^3/8^2}{2^{10}3^3/8^6}}\right]^{1/3} \\
&\quad + \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2^2} \left(\frac{-3}{3/8}\right)^3 - \frac{1}{2^4/8^2}\right) - \sqrt{\frac{-2^33^3/8 + 3^3/8^2}{2^{10}3^3/8^6}}\right]^{1/3} \\
&= \left[-2^6 + 2 + \sqrt{2^8(-1 + 1/2^6)}\right]^{1/3} + \left[-2^6 + 2 - \sqrt{2^8(-1 + 1/2^6)}\right]^{1/3} \\
&= \left[-62 + i6\sqrt{7}\right]^{1/3} + \left[-62 - i6\sqrt{7}\right]^{1/3}.
\end{aligned}$$

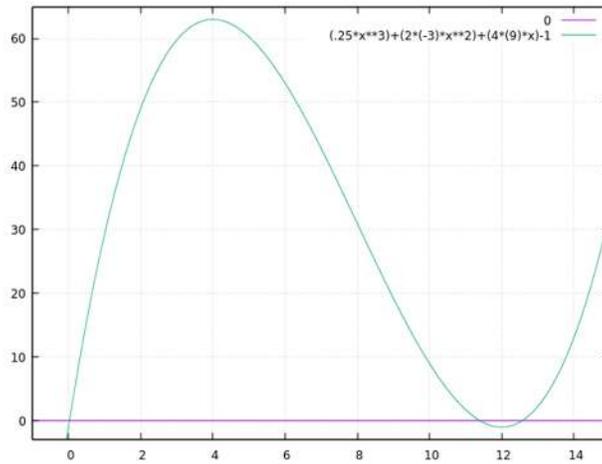
Las raíces cúbicas son:

$$\begin{aligned}
-62 + i6\sqrt{7} &: \{64^{1/3}e^{-.2506\pi i/3}, 64^{1/3}e^{-.2506+2\pi i/3}, 64^{1/3}e^{-.2506+4\pi i/3}\} \\
-62 - i6\sqrt{7} &: \{64^{1/3}e^{.2506\pi i/3}, 64^{1/3}e^{.2506+2\pi i/3}, 64^{1/3}e^{.2506+4\pi i/3}\}
\end{aligned}$$

Usando la identidad $vw = -\beta/3 = 2^4$ tenemos que las raíces buscadas son

$$\begin{aligned}
q_1 &= 64^{1/3} (e^{-.2506i/3} + e^{.2506i/3}), \quad q_2 = 64^{1/3} (e^{-.2506+2\pi i/3} + e^{.2506+2\pi i/3}), \\
q_3 &= 64^{1/3} (e^{-.2506+4\pi i/3} + e^{.2506+4\pi i/3}).
\end{aligned}$$

La gráfica del polinomio con los valores dados para este caso se muestran en la imagen de abajo.



Caso 1.2. Cuando $a > 0$ y $2^3b^3 + 3^3a < 0 \Leftrightarrow b < -3\sqrt[3]{a}/2$. Tomando a y b adecuados tenemos los mismos resultados que en el Caso 1.1.

Caso 2. Si $a(2^3b^3 + 3^3a) = 0 \Leftrightarrow b = -3\sqrt[3]{a}/2$. Tomando $a = 1/8$ y $b = -3/4$ tenemos

$$\begin{aligned}
 q = v + w &= \left[-\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\Delta}\right]^{1/3} + \left[-\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\Delta}\right]^{1/3} \\
 &= \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{b}{3a}\right)^3 - \frac{1}{2^4a^2}\right) + \sqrt{0}\right]^{1/3} + \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{b}{3a}\right)^3 - \frac{1}{2^4a^2}\right) - \sqrt{0}\right]^{1/3} \\
 &= \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2^2} \left(-\frac{83}{34}\right)^3 - \frac{8^2}{2^4}\right)\right]^{1/3} + \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2^2} \left(-\frac{83}{34}\right)^3 - \frac{8^2}{2^4}\right)\right]^{1/3} \\
 &= \left[-\frac{2^3}{2^3} + \frac{2^6}{2^5}\right]^{1/3} + \left[-\frac{2^3}{2^3} + \frac{2^6}{2^5}\right]^{1/3} = 1^{1/3} + 1^{1/3}
 \end{aligned}$$

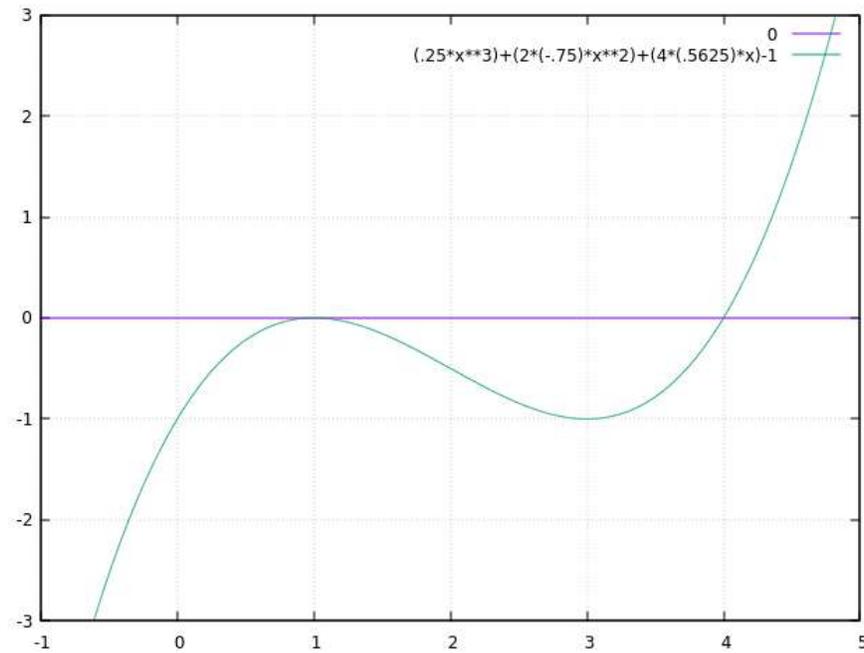
Las raíces cúbicas de 1 son:

$$\{e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}, e^{6\pi i/3}\}.$$

Usando la identidad $vw = -\beta/3 = 1$ tenemos que las raíces buscadas son

$$q_1 = q_2 = e^{2\pi i/3} + e^{4\pi i/3}, \quad q_3 = 2e^{6\pi i/3}.$$

La gráfica del polinomio con los valores dados para este caso se muestran en la imagen de abajo.



Caso 3. Si $a(2^3b^3 + 3^3a) > 0$ tenemos

Caso 3.1. Cuando $a > 0$ y $2^3b^3 + 3^3a > 0 \Leftrightarrow b > -3\sqrt[3]{a}/2$. Tomamos $a = 1/8$ y $b = 3$.

$$\begin{aligned}
 q = v + w &= \left[-\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\Delta}\right]^{1/3} + \left[-\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\Delta}\right]^{1/3} \\
 &= \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{b}{3a}\right)^3 - \frac{1}{2^4 a^2}\right) + \sqrt{\frac{2^3 ab^3 + 3^3 a^2}{2^{10} 3^3 a^6}}\right]^{1/3} \\
 &\quad + \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{b}{3a}\right)^3 - \frac{1}{2^4 a^2}\right) - \sqrt{\frac{2^3 ab^3 + 3^3 a^2}{2^{10} 3^3 a^6}}\right]^{1/3} \\
 &= \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2^2} \left(\frac{8}{3}\right)^3 - \frac{8^2}{2^4}\right) + \sqrt{\frac{2^3(3)^3/8 + 3^3/8^2}{2^{10} 3^3/8^6}}\right]^{1/3} \\
 &\quad + \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2^2} \left(\frac{8}{3}\right)^3 - \frac{8^2}{2^4}\right) - \sqrt{\frac{2^3(3)^3/8 + 3^3/8^2}{2^{10} 3^3/8^6}}\right]^{1/3} \\
 &= \left[2^6 + 2 + \sqrt{\frac{(2^6+1)/2^6}{1/2^8}}\right]^{1/3} + \left[2^6 + 2 - \sqrt{\frac{(2^6+1)/2^6}{1/2^8}}\right]^{1/3} \\
 &= \left[66 + 2\sqrt{65}\right]^{1/3} + \left[66 - 2\sqrt{65}\right]^{1/3}.
 \end{aligned}$$

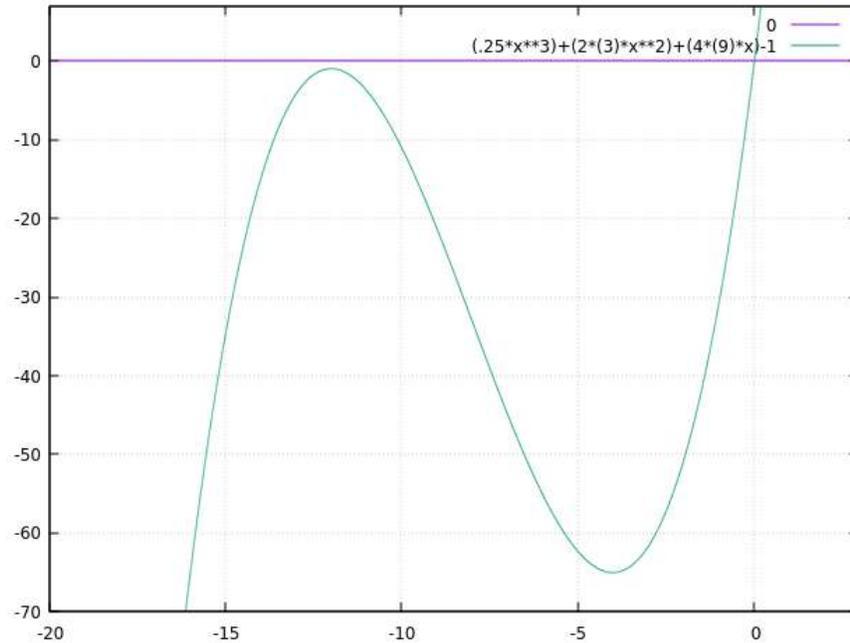
Las raíces cúbicas son:

$$\begin{aligned}
 66 - 2\sqrt{65} &: \left\{ (66 - 2\sqrt{65})^{1/3} e^{2\pi i/3}, (66 - 2\sqrt{65})^{1/3} e^{4\pi i/3}, (66 - 2\sqrt{65})^{1/3} e^{6\pi i/3} \right\} \\
 66 + 2\sqrt{65} &: \left\{ (66 + 2\sqrt{65})^{1/3} e^{2\pi i/3}, (66 + 2\sqrt{65})^{1/3} e^{4\pi i/3}, (66 + 2\sqrt{65})^{1/3} e^{6\pi i/3} \right\}
 \end{aligned}$$

Usando la identidad $vw = -\beta/3 = 16$ tenemos que las raíces buscadas son

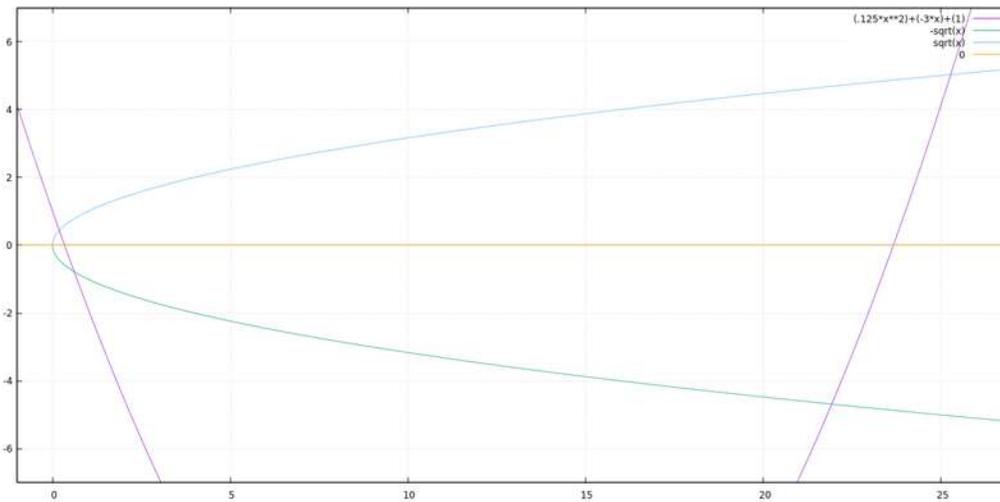
$$\begin{aligned} q_1 &= (66 - 2\sqrt{65})^{1/3} e^{2\pi i/3} + (66 + 2\sqrt{65})^{1/3} e^{4\pi i/3}, \\ q_2 &= (66 - 2\sqrt{65})^{1/3} e^{4\pi i/3} + (66 + 2\sqrt{65})^{1/3} e^{2\pi i/3}, \\ q_3 &= (66 - 2\sqrt{65})^{1/3} e^{6\pi i/3} + (66 + 2\sqrt{65})^{1/3} e^{6\pi i/3}. \end{aligned}$$

La gráfica del polinomio con los valores dados para este caso se muestran en la imagen de abajo.



Caso 3.2. Cuando $a > 0$ y $2^3b^3 + 3^3a > 0 \Leftrightarrow b > -3\sqrt[3]{a}/2$. Tomando a y b adecuados tenemos los mismos resultados que en el Caso 3.1.

La siguiente imagen muestran la intersección de las parábolas $y^2 = x$ y $y = x^2/8 - 3x + 1$ para el primer caso de este ejemplo. Notemos que existen 4 puntos de intersección aunque solo 3 de ellos son puntos de tangencia.



Ya vimos en los capítulos anteriores como se relacionan las curvas de Wegner con el sistema de la Proposición (1.6) y bajo que condiciones estas curvas son curvas cerradas. En seguida se mostrará un resultado que relaciona el sistema (3.2) con curvas de Wegner.

Teorema 3.1. *Toda curva solución del sistema mostrado abajo, sistema (3.2), es el levantamiento de una curva de Wegner.*

$$\dot{x} = \mathbf{F}(x, t; a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{r} = \cos \phi \\ \dot{\phi} = 4ar^2 + 2b - \frac{\text{sen } \phi}{r} \\ \dot{\theta} = \frac{\text{sen } \phi}{r} \end{cases}$$

Por levantamiento debemos entender una curva de Wegner en tres dimensiones cuya tercer coordenada es la componente ϕ que aparece en el sistema, es decir, una curva del tipo $\tilde{\alpha}(s) = (r(s), \theta(s), \phi(s))$.

Demostración. Mostraremos que por cada condición inicial para el sistema (3.2) podemos construir curvas de Wegner, para esto nos basamos en la construcción que se realizó en el Capítulo 1.

Tomemos una condición inicial (r_0, ϕ_0) del sistema dado. La Proposición 1.3 muestra la deducción de la ecuación diferencial

$$\ddot{\kappa} + \frac{1}{2}\kappa^3 - \mu\kappa - \sigma = 0.$$

Notemos que la ecuación diferencial depende de la condición inicial (r_0, ϕ_0) , pues la Proposición 3.2 nos dice que

$$\mu_0 = 2(b^2 - 4ac) = 2(b^2 - 4a\Psi(r_0, \phi_0))$$

de modo que podemos escribir la ecuación diferencial como

$$\ddot{\kappa} + \frac{1}{2}\kappa^3 - \mu_0\kappa - \sigma = 0. \quad (3.5)$$

En la ecuación pasada si $\eta = \dot{\kappa}$ tenemos el sistema

$$\begin{cases} \dot{\kappa} = \eta \\ \dot{\eta} = -\frac{1}{2}\kappa^3 + \mu_0\kappa + \sigma. \end{cases} \quad (3.6)$$

De manera similar a como se muestra en la Proposición 1.6, las soluciones del sistema son las curvas $H = H_0$, donde $H_0 = H(\kappa_0, 0)$ y $\kappa_0 = 4ar_0^2 + 2b$ es una condición inicial de (3.5).

Sea $\kappa(s)$ una solución de la ecuación diferencial (3.5). Tomando $\kappa(s)$ y usando las ecuaciones (1.6) construimos una curva $\alpha(s)$ tal que $\kappa(s)$ es su curvatura. Notemos que la curva $\alpha(s)$ y su curvatura $\kappa(s)$ dependen de la condición inicial y que $\alpha(s)$ es una curva de Wegner, esto por como se construyó la ecuación (3.5). Así, haciendo el levantamiento tenemos lo deseado. \square

Ahora daremos un resultado que relaciona los puntos críticos de la primera integral para el sistema (3.2) con el Hamiltoniano del sistema de la Proposición (1.6).

Proposición 3.6. *Sea (r_0, ϕ_0) un punto crítico de $\Psi(r, \phi)$. Si $\mu_0 = 2(b^2 - 4ac)$ y $\kappa_0 = 4ar_0 + 2b$ entonces $(\kappa_0, 0)$ es un punto crítico de $H_{\mu_0}(\kappa, \eta) = \frac{\kappa^4}{8} + \frac{\eta^2}{2} - \frac{\mu_0}{2}\kappa^2 - \kappa\sigma$.*

Demostración. Mostraremos que un punto crítico de H_{μ_0} se puede ver como punto crítico de Ψ .

Sabemos por la Proposición 3.4 que los puntos críticos de Ψ satisfacen el polinomio $1 = 4q(2aq + b)^2$, donde $q = r^2$. Al sustituir un punto crítico (r_0, ϕ_0) en Ψ tenemos

$$\begin{aligned} \Psi(r_0, \phi_0) &= r_0 \sin \phi_0 - (ar_0^4 + br_0^2) = \pm r_0 - (ar_0^4 + br_0^2) \\ \Leftrightarrow \pm r_0 &= ar_0^4 + br_0^2 + \Psi(r_0, \phi_0) \Leftrightarrow \pm r_0 = ar_0^4 + br_0^2 + c \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde la última equivalencia se da por la Proposición 3.2.

Por otra parte, para ver que $(\kappa_0, 0)$ es punto crítico de H_{μ_0} se debe cumplir

$$\begin{cases} 0 = \frac{\kappa^3}{2} - \mu_0\kappa - \sigma \Leftrightarrow \kappa \left(\frac{\kappa^2}{2} - \mu_0 \right) - \sigma = 0 \\ 0 = \eta. \end{cases}$$

Al sustituir los valores de κ_0 , μ_0 y σ tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= (4ar_0 + 2b) \left(\frac{(4ar_0 + 2b)^2}{2} - (2b^2 - 8ac) \right) - 8a \\ &= (4ar_0 + 2b) (16a^2r_0^4 + 16abr_0^2 + 4b^2 - 4b^2 + 16ac) - 16a \\ &= (4ar_0 + 2b)16a (ar_0^4 + br_0^2 + c) - 16a \\ &\Leftrightarrow 1 = (4ar_0 + 2b) (ar_0^4 + br_0^2 + c). \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (4.1) en la última igualdad

$$1 = (4ar_0 + 2b)(\pm r_0) \Leftrightarrow 1 = 4r_0^2(2ar_0 + b)^2.$$

Tomando $q = r_0^2$ tenemos la ecuación que cumplen los puntos críticos de Ψ como se quería. \square

Por otra parte, para estudiar el sistema reducido de (3.2) hagamos los siguientes cocientes con sus componentes.

$$\begin{aligned} r' &= \frac{dr}{d\theta} = \frac{\cos \phi}{\frac{\text{sen } \phi}{r}} = r \cot \phi. \\ \phi' &= \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{4ar^2 + 2b - \frac{\text{sen } \phi}{r}}{\frac{\text{sen } \phi}{r}} = \frac{4ar^3 + 2br}{\text{sen } \phi} - 1. \end{aligned}$$

Lo que nos arroja el sistema reducido

$$\dot{y} = \mathbf{G}(y, t; a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} r' = r \cot \phi \\ \phi' = \frac{4ar^3 + 2br}{\text{sen } \phi} - 1 \end{cases} \quad (3.8)$$

con $y = (r, \phi)$ y jacobiano

$$D\mathbf{G}(y) = \begin{pmatrix} \cot \phi & -r \csc^2 \phi \\ \frac{12ar^2 + 2b}{\text{sen } \phi} & -(4ar^3 + 2br) \csc \phi \cot \phi \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Al evaluar en un punto crítico $x_0 = (r_0, \phi_0)$ del sistema (3.2) tenemos

$$D\mathbf{G}(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & -r_0 \\ \pm 2(6ar_0^2 + b) & 0 \end{pmatrix},$$

cuyas raíces del polinomio característico satisfacen la siguiente ecuación

$$\lambda^2 \pm 2r_0(6ar_0^2 + b) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = \pm 2r_0(6ar_0^2 + b). \quad (3.10)$$

Notemos que para a, b y r_0 diferentes de cero $D\mathbf{G}(x_0) \neq 0$.

Para raíces reales, como $2r_0 > 0$ tenemos dos casos dependiendo $6ar_0^2 + b$, cuando $-(6ar_0^2 + b) > 0$ y cuando $6ar_0^2 + b > 0$. Del primer caso

$$0 < -(6ar_0^2 + b) \Leftrightarrow r_0^2 < -\frac{b}{6a} \Leftrightarrow r_0 < \pm \sqrt{-\frac{b}{6a}}.$$

En el segundo caso solo cambia el sentido de la desigualdad, esto es, $r_0 > \pm \sqrt{-b/6a}$. Como las distancias son reales positivas tenemos que a y b deben ser de signos opuestos. Para ejemplificar tomemos los valores $a = 1/8$ y $b = -3/4$ como en el Caso 2 del Ejemplo 3.1. Al sustituir los valores en $r_0 < \pm \sqrt{-b/6a}$ tenemos

$$r_0 < \pm \sqrt{-\frac{b}{6a}} = \pm \sqrt{-\left(\frac{-3}{4}\right)\left(\frac{8}{6}\right)} \Leftrightarrow r_0 < \pm 1 \rightarrow 0 < r_0 < 1.$$

Tomando $r_0 = 1/2$ y sustituyendo todos los valores vemos que

$$\lambda^2 = 2 \left(\frac{1}{2} \right) \left(- \left[\frac{6}{8} \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(-\frac{3}{4} \right) \right] \right) = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{3}{4}.$$

Enseguida mostraremos uno de los resultados principales de este trabajo, un teorema que relaciona dos sistemas bajo una función.

Teorema 3.2. *Si $\dot{x} = \mathbf{F}_\lambda(x, t; a_\lambda, b_\lambda)$ es un sistema análogo a $\dot{x} = \mathbf{F}(x, t; a, b)$ cuya única diferencia está dada por $a_\lambda = a/\lambda^3$ y $b_\lambda = b/\lambda$ con $\lambda > 0$, entonces $\mathbf{F}(x, t; a, b)$ y $\mathbf{F}_\lambda(x, t; a_\lambda, b_\lambda)$ son topológicamente equivalentes bajo una homotecia.*

Demostración. Para la demostración mostraremos que dada una solución de $\mathbf{F}(x, t; a, b)$ se puede convertir en una solución de $\mathbf{F}_\lambda(x, t; a_\lambda, b_\lambda)$ bajo $\Lambda(r)$, como se muestra en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}(x, t; a, b) & & \mathbf{F}_\lambda(x, t; a_\lambda, b_\lambda) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{\alpha} & \xrightarrow{\Lambda} & \tilde{\alpha}_\lambda \end{array}$$

Primero veremos como es la curva $\tilde{\alpha}_\lambda$. Sea $\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la homotecia $\Lambda(r) := \lambda r$ con $\lambda > 0$ y $\Psi_\lambda(\phi, r)$ la primera integral de $\mathbf{F}_\lambda(x, t; a_\lambda, b_\lambda)$. Haciendo el pullback siguiente vemos que

$$\begin{aligned} \Lambda^* \Psi_\lambda(\phi, r) &= \Psi_\lambda \circ \Lambda(r) = (\lambda r) \sin \phi - \frac{a}{\lambda^3} (\lambda r)^4 - \frac{b}{\lambda} (\lambda r)^2 \\ &= \lambda (r \sin \phi - ar^4 - br^2) = \lambda \Psi(\phi, r), \end{aligned}$$

donde $\Psi(\phi, r)$ es la primera integral de $\mathbf{F}(x, t; a, b)$. Ahora, por la Proposición 3.2, para cada condición inicial (r_0, ϕ_0) se tiene que $c_\lambda = \lambda c = \lambda \Psi(\phi_0, r_0)$.

Así con a_λ , b_λ y c_λ obtenemos nuevos valores de μ y en σ , los cuales denotaremos como sigue

$$\begin{aligned} \mu_\lambda &= 2(b_\lambda^2 - 4a_\lambda c_\lambda) = 2 \left(\frac{b^2}{\lambda^2} - 4 \frac{a}{\lambda^3} (\lambda c) \right) = \frac{2}{\lambda^2} (b^2 - 4ac) = \frac{1}{\lambda^2} \mu, \\ \sigma_\lambda &= 8a_\lambda = 8 \frac{a}{\lambda^3} = \frac{1}{\lambda^3} \sigma \end{aligned}$$

que por la Proposición 1.5 son coeficientes de

$$\ddot{\kappa}_\lambda + \frac{1}{2} \kappa_\lambda^3 - \mu_\lambda \kappa_\lambda - \sigma_\lambda = 0.$$

De la Proposición 1.6 tenemos que a la ecuación diferencial anterior se puede ver como un sistema de ecuaciones y este a su vez, le corresponde el Hamiltoniano

$$H(\kappa_\lambda, \eta_\lambda) = \frac{\kappa_\lambda^4}{8} + \frac{\eta_\lambda^2}{2} - \frac{\mu_\lambda}{2} \kappa_\lambda^2 - \sigma_\lambda \kappa_\lambda,$$

cuyas curvas de nivel $H(\kappa_{\lambda,0}, 0)$, con condición inicial $\kappa_{\lambda,0} = 4a_\lambda r_{\lambda,0}^2 + 2b_{\lambda,0}$ son soluciones de sistema mencionado antes.

También de la Proposición 1.5 tenemos que las soluciones κ_λ de la ecuación anterior son de la forma $\kappa_\lambda = \kappa/\lambda$, donde tanto κ_λ como κ son curvaturas de curvas de Wegner $\alpha_\lambda = \lambda\alpha$ y α respectivamente. Notemos también que la distancia del origen a la curva α_λ es

$$r_\lambda = \|\alpha_\lambda\| = \|\lambda\alpha\| = \lambda\|\alpha\| = \lambda r.$$

Hasta este punto hemos construido la curva α_λ como en el Capítulo 1 de acuerdo a nuestros requerimientos, con a_λ , b_λ y c_λ hasta llegar al Hamiltoniano H_λ .

Ahora, siguiendo la demostración del Teorema 3.1, podemos hacer el levantamiento de α_λ y así tener la curva $\tilde{\alpha}_\lambda(s) = (r_\lambda(s), \theta(s), \phi(s)) = (\lambda r(s), \theta(s), \phi(s))$, que por el Teorema 3.1 dicha curva es la solución del sistema $\mathbf{F}_\lambda(x, t; a_\lambda, b_\lambda)$.

Finalmente, tomemos una curva $\tilde{\alpha}(s)$ que es solución de $\mathbf{F}(x, t; a, b)$, haciendo el pullback de $\Lambda(r)$ con $\tilde{\alpha}(s)$ tenemos

$$\Lambda^*\tilde{\alpha}(r(s), \theta(s), \phi(s)) = \tilde{\alpha} \circ \Lambda(r) = \tilde{\alpha}(\lambda r(s), \theta(s), \phi(s)) = \tilde{\alpha}_\lambda(s),$$

así pasamos de curvas solución del sistema \mathbf{F} a las curvas solución de \mathbf{F}_λ a través de la homotecia.

Notemos que esta $\Lambda(r)$ preserva los puntos críticos pues únicamente altera a \mathbf{F} en r , es decir, cambia la distancia en que se encuentran los puntos críticos respecto al origen pero no el hecho de ser un punto silla o centro según sea el caso.

Ahora para ver como se relacionan \mathbf{F} y \mathbf{F}_λ tomemos la siguiente matriz

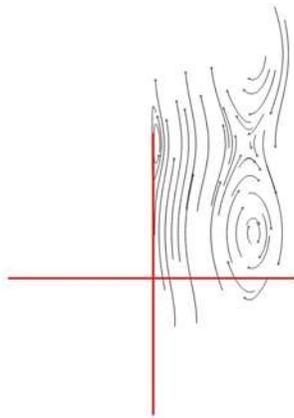
$$\Lambda_* := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al aplicar Λ_* a \mathbf{F} tenemos

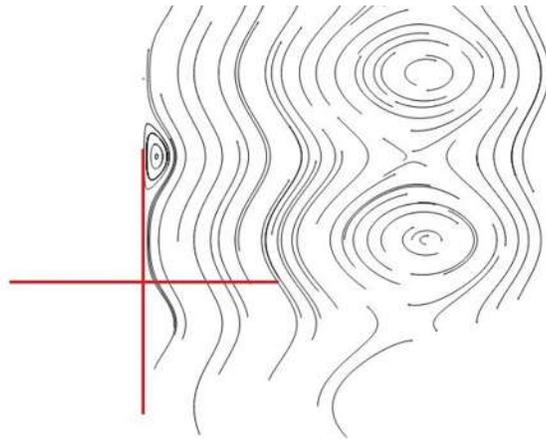
$$\Lambda_*\mathbf{F}(r, \theta, \phi) = \lambda\mathbf{F}_\lambda\Lambda((r, \theta, \phi)) = \lambda\mathbf{F}_\lambda(\lambda r, \theta, \phi),$$

que análogamente al caso de las curvas $\tilde{\alpha}(s)$ y $\tilde{\alpha}_\lambda(s)$, los campos se relacionan mediante λ como se quería, además si $\tilde{\alpha}(s)$ es una solución de \mathbf{F} con condición inicial $(r_0, 0, \phi_0)$ con $\dot{\alpha}(0) = (1, \phi_0)$ entonces $\Lambda \circ \tilde{\alpha}(s/\lambda)$ es solución de \mathbf{F}_λ con condición inicial $(\lambda r_0, 0, \phi_0)$. □

En las imagenes de abajo podemos ver un ejemplo de como actua $\Lambda(r)$ al mantener las características de los puntos críticos. Las imagenes muestran las curvas solución de \mathbf{F} y \mathbf{F}_λ en el plano $r\phi$. Se observa que para los puntos críticos la coordenada ϕ en ambas imagenes se mantiene pero la coordenada r aumenta en la segunda imagen respecto a la primera.



(a) \mathbf{F} con $a = 1/8$ y $b = -3$.
Gráficos hechos con el programa Runge.



(b) \mathbf{F}_λ con $\lambda = 3$.

Bibliografía

- [1] Arnold V. I., *On some problems in symplectic topology*. In: Topology and Geometry, Rohlin Seminar. Editor: O. Ya. Viro, Berlín: Springer, 1988, 1-5. (Lecture Notes in Math., 1346).
- [2] Franz Wegner, *From Elastica to Floating Bodies of Equilibrium*, arXiv:1909.12596.
- [3] Guillermo Arreaga y Riccardo Capovilla, Chryssomalis Chryssomalakos y Jemal Guven, *Area-constrained planar elastica*, physical review e, volume 65, 031801, 2002.
- [4] Gil Bor, Mark Levi, Ron Perline y Sergei Tabachnikov, *Tire Tracks and Integrable Curve Evolution*, International Mathematics Research Notices, Vol. 00, No. 0, pp. 1–71, doi:10.1093/imrn/rny087.
- [5] Serge Tabachnikov, *On the bicycle transformation and the filament equation: Results and conjectures*, Journal of Geometry and Physics 115 (2017) 116–123.
- [6] Franz Wegner, *Floating Bodies of Equilibrium in 2D, the Tire Track Problem and Electrons in a Parabolic Magnetic Field*, arXiv:physics/0701241.
- [7] Rafael Payá Albert, *Apuntes de variable compleja I*, Universidad de Granada, España. Disponible en <https://www.ugr.es/~rpaya/documentos/VariableCompleja/2016-17/FormaGeneralCauchy.pdf>.
- [8] Valdes Garcia, Z. A., *Teorema de Conley-Zehnder: partícula en campo magnético*, Tesis de Licenciatura, 2019.
- [9] M. de los Ángeles Hernández, J. A. Pastor, *Un curso de Geometría Diferencial*, CSIC, Madrid, 2010.
- [10] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 3ra. Ed., Elsevier, USA, 2004.
- [11] Michael Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. 2, 3ra. Ed., Publish or Perish, USA, 1999.
- [12] Ferdinand Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, 2da. Ed., 2000.
- [13] Arnold Oostra, *Sobre la solución de ecuaciones de tercer y cuarto grado*, Revista Tumbaga (2008), 3, 174-186.