



UNIVERSIDAD
MICHOACANA DE SAN NICOLÁS
DE HIDALGO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL

“CÁLCULO DE DEFORMACIONES EN
ESTRUCTURAS”

TESINA

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO CIVIL

PRESENTA:
ARTURO GALVÁN CHÁVEZ

ASESOR:
DR. J. JESÚS ÁLVAREZ SERENO

MORELIA MICHOACÁN, ABRIL DE 2006



AGRADEZCO:

A DIOS:

Por darme la oportunidad de la vida y estar siempre conmigo.

A MIS QUERIDOS PADRES:

Armando Galván Leonardo
Ma. Elena Chávez Ruiz.

Por darme el ser, su amor y su comprensión incondicional en los momentos buenos y malos; con mi eterno agradecimiento por sus sabios consejos y dirección; y por proporcionarme la oportunidad de realizar una carrera universitaria.

A MIS QUERIDOS HERMANOS:

Ma. Elena y Sergio.

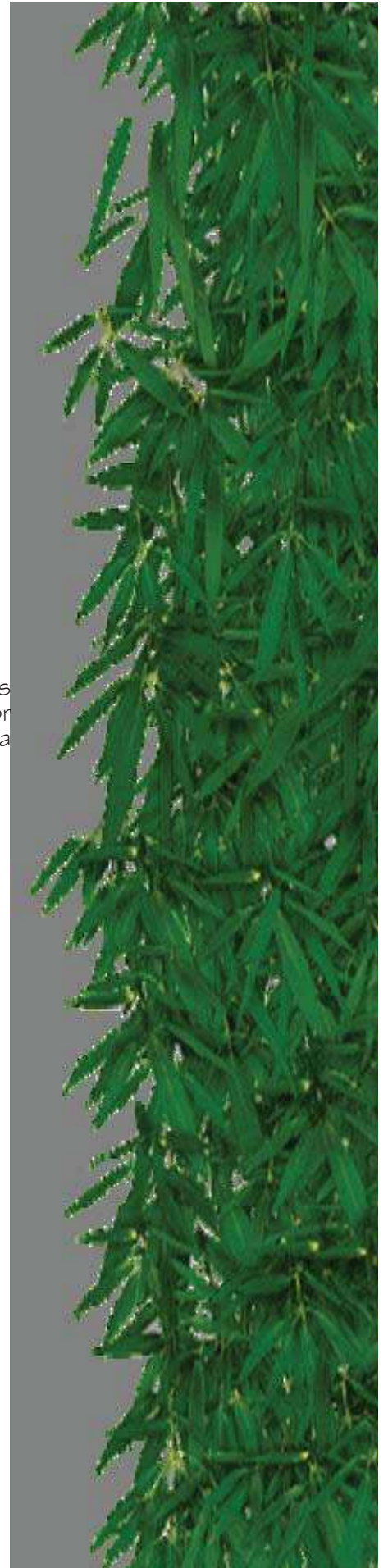
Con cariño y agradecimiento por brindarme su solidaridad y estímulo.

A MIS AMIGOS Y PROFESORES:

Por su amistad y apoyo, cuando algún día necesite de un consejo y de su presencia.

AL DR. J. JESÚS ÁLVAREZ SERENO:

Mi agradecimiento por brindarme todas las facilidades para la realización de esta tesina.





ÍNDICE.

INTRODUCCIÓN..... 1

OBJETIVO.....2

CAPÍTULO I.....3
Ecuación diferencial de la elástica.

CAPÍTULO II.....8
Método de la doble integración.

CAPÍTULO III.....9
Teoremas de Mohr.

CAPÍTULO IV..... 14
Viga conjugada.

CAPÍTULO V..... 19
Trabajo virtual.

CAPÍTULO VI.....24
Problemas resueltos para la aplicación de los métodos.
Problema 124
Problema 2.....26
Problema 3.....35
Problema 4.....39
Problema 5.....42
Problema 6.....46
Problema 7.....49

CONCLUSIONES..... 52

BIBLIOGRAFÍA.....53

INTRODUCCIÓN



INTRODUCCIÓN.

Si tenemos una viga con eje longitudinal recto y ésta se ve sometida a fuerzas en su plano, el eje longitudinal se deforma tomando la forma de una curva; a esta curva se le denomina o se le conoce como “curva elástica”.

Para calcular las deflexiones que experimentan las estructuras se han desarrollado procedimientos como el método de la doble integración, el método de la viga conjugada, el método del área de momentos (Teoremas de Mohr) y el método de la carga ficticia (Trabajo virtual) los cuales se estudiarán en el transcurso de este trabajo. El cálculo de éstas es una parte importante del análisis y diseño estructural; por ejemplo, la determinación de deflexiones es muy útil para plantear ecuaciones de deformación en el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas.

Se calculan las deflexiones para comprobar que ellas estén dentro de límites tolerables; por ejemplo, las especificaciones para el diseño de edificios suelen fijar límites permisibles de las deflexiones máximas. Las deflexiones grandes en edificios dan mal aspecto y generan inseguridad en los ocupantes y pueden causar agrietamientos en elementos estructurales y no estructurales.

Las deflexiones también son importantes en el análisis dinámico, como cuando se investigan las respuestas de edificios a sismos. En el diseño de máquinas y aviones, las especificaciones pueden limitar las deflexiones para evitar vibraciones indeseables.

OBJETIVO



OBJETIVO.

El objetivo de este trabajo es presentar el desarrollo teórico de los diferentes métodos para calcular deflexiones arriba señalados, y mostrar su aplicación en la solución de problemas particulares que enfrenta el ingeniero civil en análisis de estructuras.

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA ELÁSTICA

CAPÍTULO I



CAPÍTULO I.

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA ELÁSTICA.

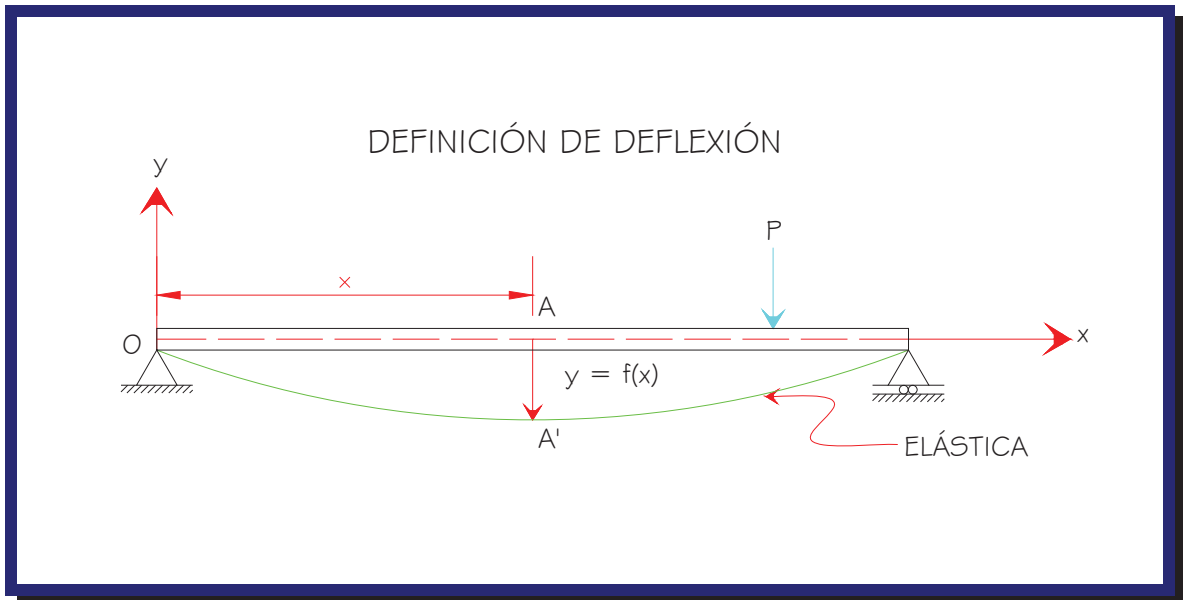


Figura I.1

$y = f(x)$ es la ordenada de la elástica en " x ". Se le llama deflexión o flecha en " x ".

Para desarrollar la teoría de las deflexiones en vigas, se debe considerar la geometría o la cinemática de la deformación de un elemento de viga. La hipótesis cinemática fundamental de que las secciones planas permanecen planas después de la deformación proporciona la base de la teoría. Este tratamiento desprecia la deformación por corte de una viga. Además resulta conveniente comentar que las deflexiones son por lo general muy pequeñas.

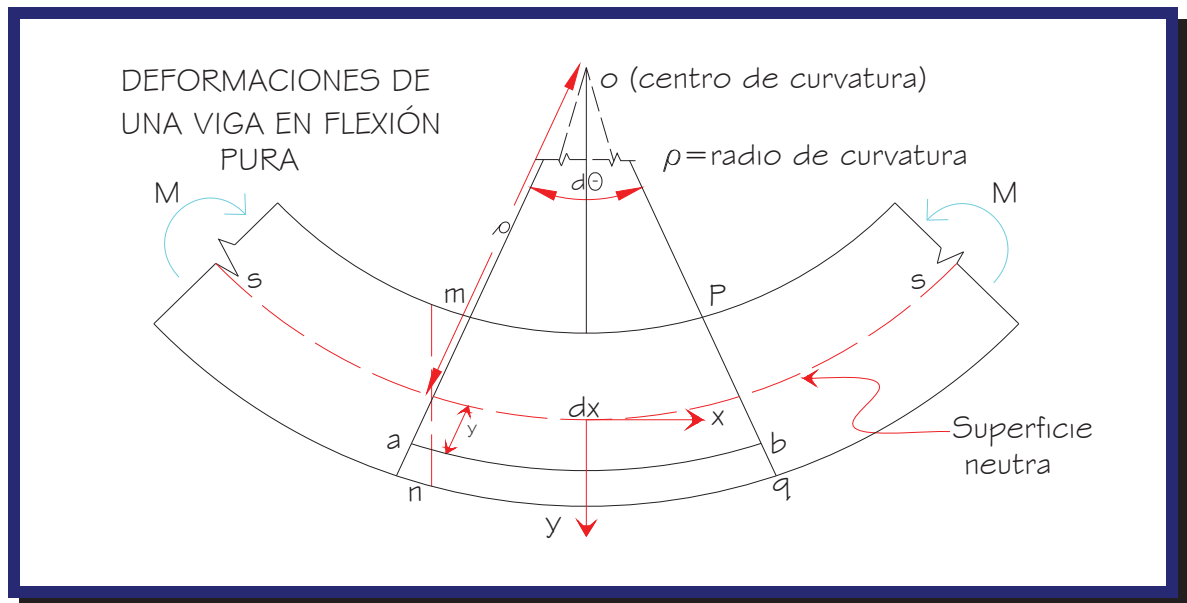


Figura 1.2

De la figura 1.2 tenemos:

$$d\theta = \frac{dx}{\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = k = \frac{d\theta}{dx}$$

Donde:

k = Curvatura

ρ = Radio de curvatura

La longitud total de la fibra a-b es $(\rho + y)d\theta = \left(1 + \frac{y}{\rho}\right)dx$. Como la longitud original era dx su alargamiento total será $\frac{ydx}{\rho}$ y la deformación unitaria vale:

$$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho} = k y$$

Para una viga de material elástico lineal se tiene que:

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{Ley de Hooke}$$

Donde: σ = Esfuerzo axial.

E = Módulo de elasticidad del material.

ε = Deformación unitaria axial.

Con lo que podemos desarrollar la siguiente ecuación:

$$\sigma_x = k E y$$

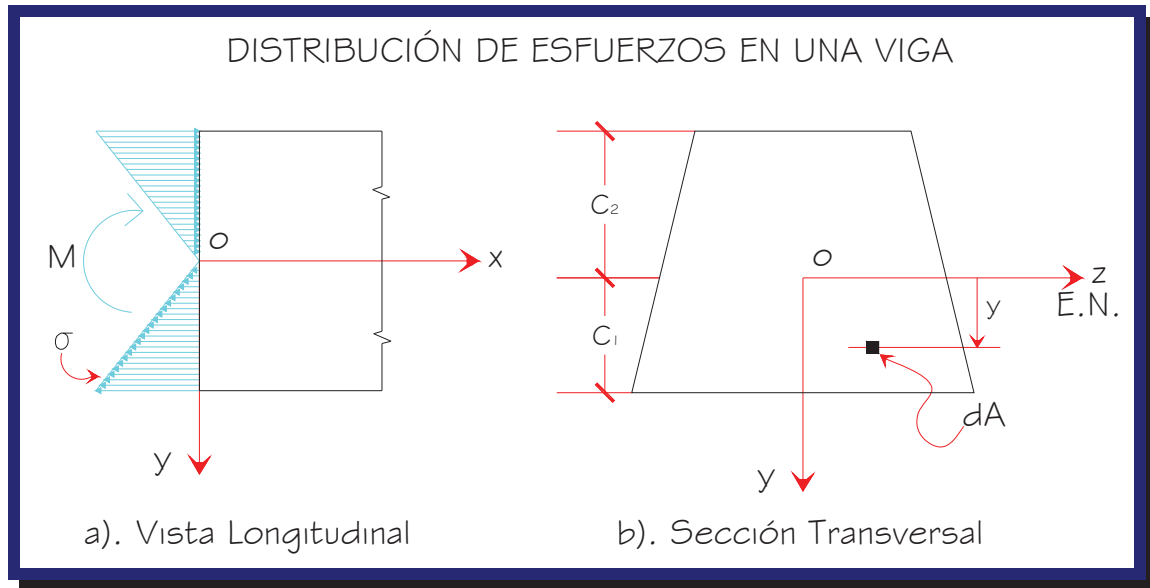


Figura 1.3

En la figura 1.3 la fuerza en dA vale $\sigma_x dA$. Como $N=0$ en la sección transversal, debe cumplirse que:

$$\int \sigma_x dA = \int k E y dA = 0$$

Como "k" y "E" son constantes se puede concluir que:

$$\int y dA = 0$$

La ecuación anterior establece que el momento estático del área de la sección transversal con respecto a su eje neutro (eje z) es igual a cero. Por lo tanto el eje neutro pasa por el centroide de la sección; los ejes "y" y "z" son centroidales y principales.

El momento de la fuerza elemental $\sigma_x dA$ con respecto al eje neutro (EN) es $\sigma_x y dA$. La integral en toda el área debe ser igual al momento interno "M" que actúa en la sección, de modo que:

$$M = \int \sigma_x y dA = k E \int y^2 dA = k E I_z$$

La ecuación dada también se puede escribir de la siguiente manera:

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z} \dots\dots\dots \text{Ecuación 1}$$

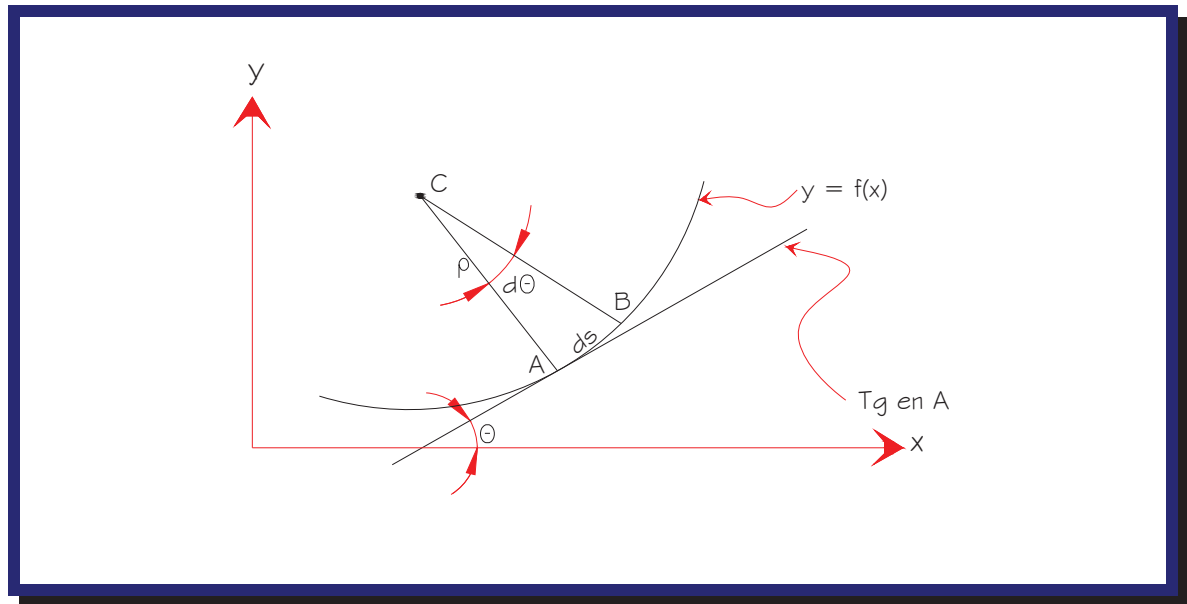


Figura 1.4

En la figura 1.4 se tiene que $\text{tg } \theta = \text{pendiente en } A = \frac{dy}{dx} = y'$ (Interpretación geométrica de la derivada).

Por lo tanto $\theta = \text{arctg } y'$

Derivando con respecto a "x":

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{y''}{1+(y')^2} \dots\dots\dots \text{Ecuación 2}$$

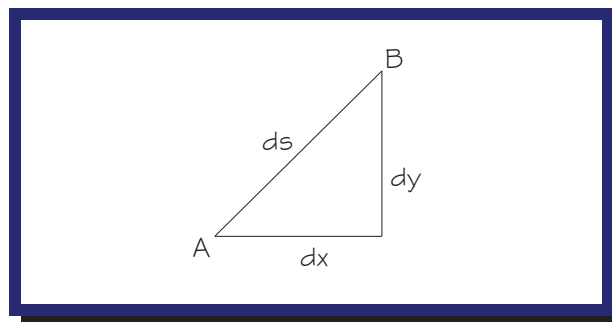


Figura 1.5

De la figura 1.5: $ds^2 = dx^2 + dy^2$

Dividiendo entre dx^2 se tiene:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + (y')^2$$



$$\frac{ds}{dx} = [1 + (y')^2]^{1/2} \dots\dots\dots \text{Ecuación 3}$$

Dividiendo la ecuación 2 entre la ecuación 3:

$$\frac{\frac{d\theta}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\frac{y''}{1 + (y')^2}}{[1 + (y')^2]^{1/2}}$$

Pero se sabe que $ds = \rho d\theta$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{\rho d\theta} = \frac{1}{\rho} = k = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \dots\dots\dots \text{Ecuación 4}$$

Igualando la ecuación 1 con la ecuación 4:

$$\frac{M}{EI_z} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \dots\dots\dots \text{Ecuación 5}$$

Debido a que las elásticas son curvas "suaves", se puede considerar que:

$$(y')^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \approx 0$$

Por lo que la ecuación 5 se reduce a:

$$\frac{M}{EI_z} = y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \dots\dots\dots \text{Ecuación 6}$$

Que es la ecuación diferencial de la elástica.

MÉTODO DE LA DOBLE INTEGRACIÓN

CAPÍTULO II

**CAPÍTULO II.****MÉTODO DE LA DOBLE INTEGRACIÓN.**

El método de la doble integración consiste en la solución de la ecuación diferencial de la elástica.

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

La cual se puede escribir como:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M = M(x)$$

$$EI \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = M(x)$$

$$EI d \left(\frac{dy}{dx} \right) = M(x) dx$$

Integrando:

$$\int EI d \left(\frac{dy}{dx} \right) = \int M(x) dx + C_1$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \int M(x) dx + C_1$$

Para deformaciones pequeñas $\frac{dy}{dx} = \text{pendiente} \approx \theta(x)$ Angulo de inclinación de la tangente.

$$EI \frac{dy}{dx} = EI\theta(x) = \int M(x) dx + C_1 \dots\dots\dots \text{Ecuación de pendientes}$$

La ecuación anterior se puede escribir como:

$$EI dy = \left[\int M(x) dx + C_1 \right] dx$$

Integrado nuevamente:

$$\int EI dy = \int \left[\int M(x) dx + C_1 \right] dx$$

$$EI y = \int \int M(x) dx dx + C_1 x + C_2 \dots\dots\dots \text{Ecuación de deflexiones}$$

CAPÍTULO III

TEOREMAS DE MOHR

**CAPÍTULO III.****TEOREMAS DE MOHR.**

En muchas aplicaciones de ingeniería en que se deben determinar deflexiones de vigas, las cargas son complejas, y la sección transversal de la viga puede variar. Esto es usual en ejes de máquinas, donde se tienen variaciones graduales o por pasos en el diámetro de los ejes para poder montar rotores, collarines, cojinetes, retenes, etc. Asimismo se suelen emplear vigas ahusadas en estructuras aeronáuticas y de puentes. Interpretando semigráficamente las operaciones matemáticas para resolver la ecuación diferencial que rija, se ha obtenido un procedimiento efectivo para obtener deflexiones en casos complicados. Si se utiliza este procedimiento se halla que problemas con discontinuidades de carga y variaciones arbitrarias en las características de inercia del área transversal de una viga no tienen mayores complicaciones y requieren solo algo más de trabajo aritmético para su resolución. En este capítulo, el cual es acerca de los teoremas de Mohr, el objetivo será la resolución de tales problemas.

El método que se va a presentar, desarrollado por Mohr, se suele emplear para obtener el desplazamiento y la rotación en un solo punto de un elemento estructural. Se puede utilizar para determinar la ecuación de la curva elástica, pero no se obtiene ninguna ventaja en relación con la resolución directa de la ecuación diferencial. Sin embargo, con frecuencia es la deflexión ó la desviación angular de la curva elástica en un punto particular de una viga, o bien ambas cantidades, lo que es de mayor interés en la resolución de problemas prácticos.

Este método es un procedimiento alternativo para resolver el problema de la deflexión. Tiene las mismas limitaciones y aproximaciones en relación con la solución de la ecuación diferencial de la elástica. Mediante su aplicación se determina sólo la deflexión debida a la flexión de una viga, y se desprecia la deflexión correspondiente a la fuerza cortante.

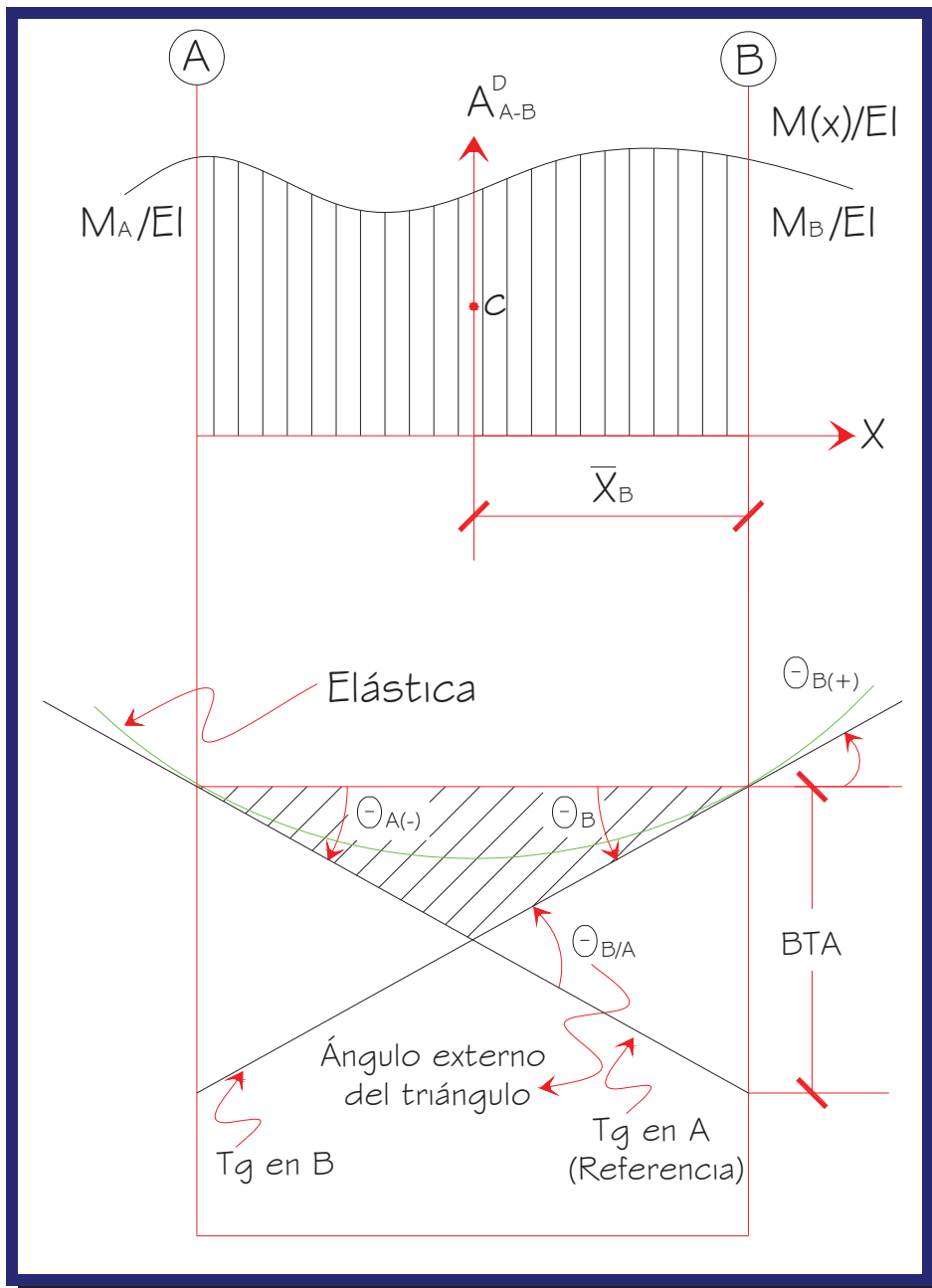


Figura 3.1

Teorema I

$$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A = A^D_{A-B}$$

Teorema II

$$BTA = Q^D_{A-B} = A^D_{A-B} \bar{X}_B$$



Los teoremas anteriores también se conocen como “Método del Área de Momentos”; el Método fue introducido por Saint-Venant y desarrollado más cabalmente por Mohr y Greene.

En la figura 3.1 :

$\theta_{B/A}$ = Ángulo que forma la tangente en B con la tangente en A.

BTA = Distancia vertical medida desde la tangente en A hasta B.

A está a la izquierda de B.

Demostración del teorema I.

La ecuación diferencial de la elástica establece que

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = \frac{M(x)}{EI}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \theta(x) = \frac{M(x)}{EI}$$

$$d \theta(x) = \frac{M(x)}{EI} dx$$

Integrando la ecuación anterior entre las secciones A y B:

$$\int_A^B d \theta(x) = \int_A^B \frac{M(x)}{EI} dx$$

$$[\theta(x)]_A^B = \int_A^B \frac{M(x)}{EI} dx$$

$$\theta(B) - \theta(A) = \int_A^B \frac{M(x)}{EI} dx$$

Pero: $\theta(B) - \theta(A) = \theta_{B/A}$ = Ángulo que forma la tangente en B con la tangente en A.

$\theta_{B/A}$ = Ángulo externo del triángulo = suma de los ángulos internos no adyacentes

$$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A$$

Por otro lado tenemos que:

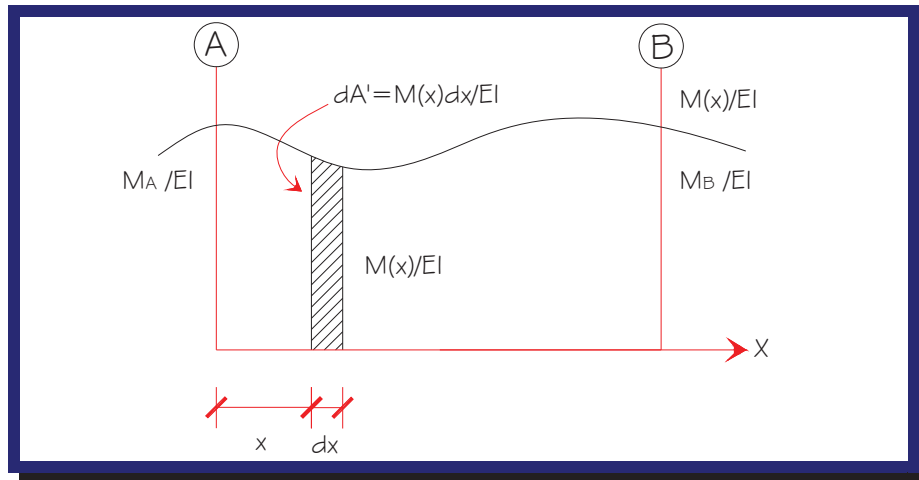


Figura 3.2

La integral $\int_A^B \frac{M(x)}{EI} dx$ representa la suma de los elementos diferenciales dA^D desde A hasta B, por lo que:

$$\int_A^B \frac{M(x)}{EI} dx = A^D_{A-B}$$

Sustituyendo:

$$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A = A^D_{A-B} \quad \text{Teorema I Demostrado}$$

Demostración del teorema II. Sea:

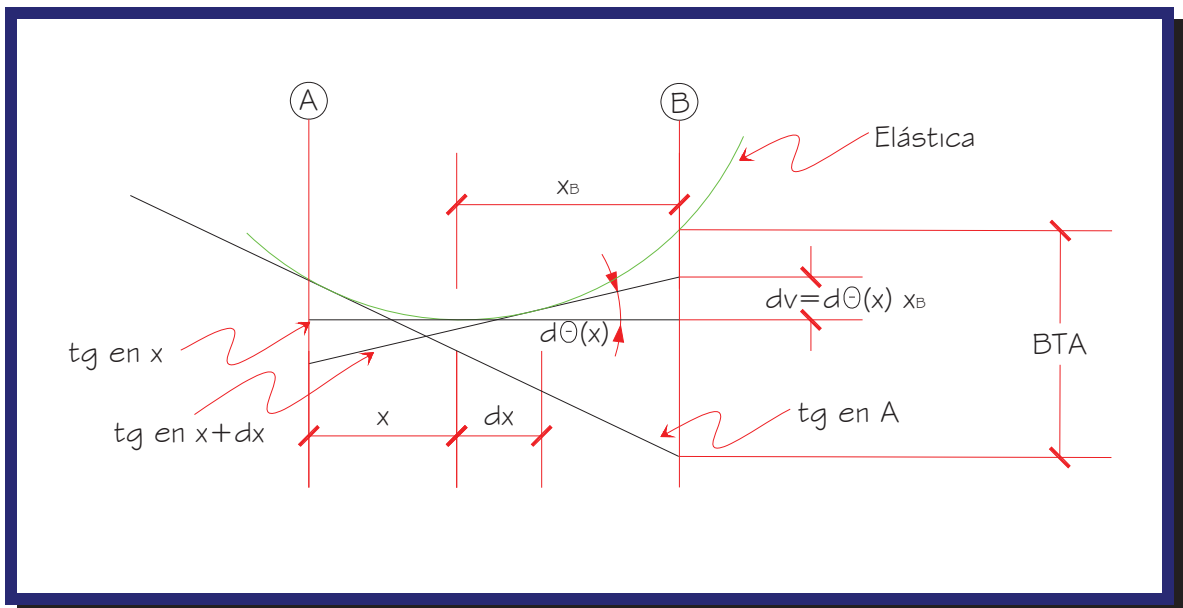


Figura 3.3



De la figura 3.3: $dv = d\theta(x)X_B$.

En las páginas 11 y 12 se había obtenido que:

$$d\theta(x) = \frac{M(x)}{EI} dx = dA^D$$

Sustituyendo:

$$dv = dA^D X_B = \text{Momento estático de } dA^D \text{ con respecto a B} = dQ^D$$

$$\therefore BTA = \int_A^B dv = \int_A^B dQ^D = Q^D_{A-B}$$

$$BTA = Q^D_{A-B} \quad \text{Teorema II Demostrado}$$

CAPÍTULO IV VIGA CONJUGADA



CAPÍTULO IV.

VIGA CONJUGADA.

Considere la siguiente figura:

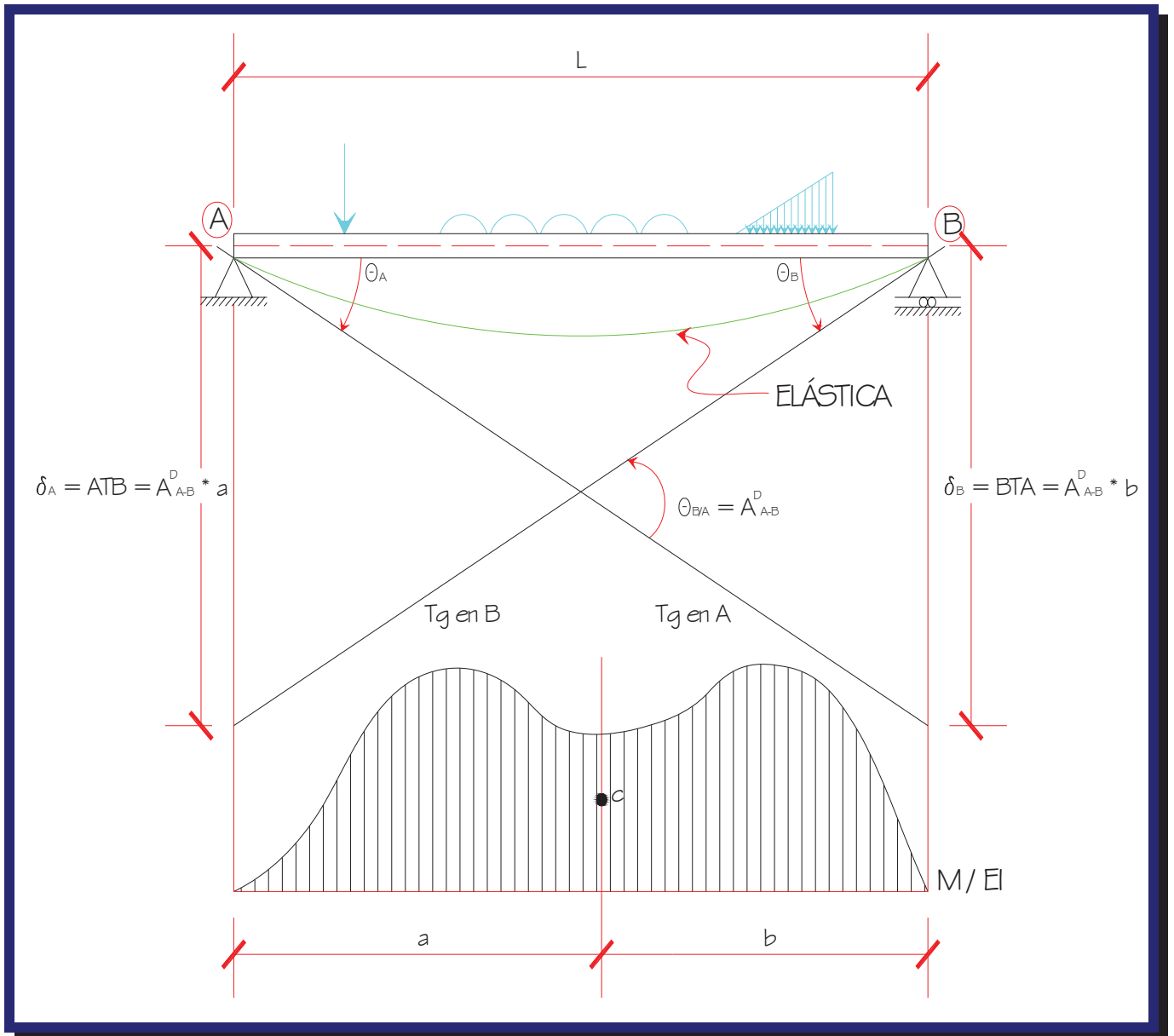


Figura 4.1

De la figura 4.1: $\theta_A = \frac{\delta_B}{L}$ y $\theta_B = \frac{\delta_A}{L}$



Es decir: $\theta_A = \frac{A^D_{A-B} b}{L}$ y $\theta_B = \frac{A^D_{A-B} a}{L}$ de acuerdo con el teorema II.

Si se aplica a una viga imaginaria (viga conjugada), una "carga elástica" con la forma del diagrama M/EI y se calculan las reacciones:

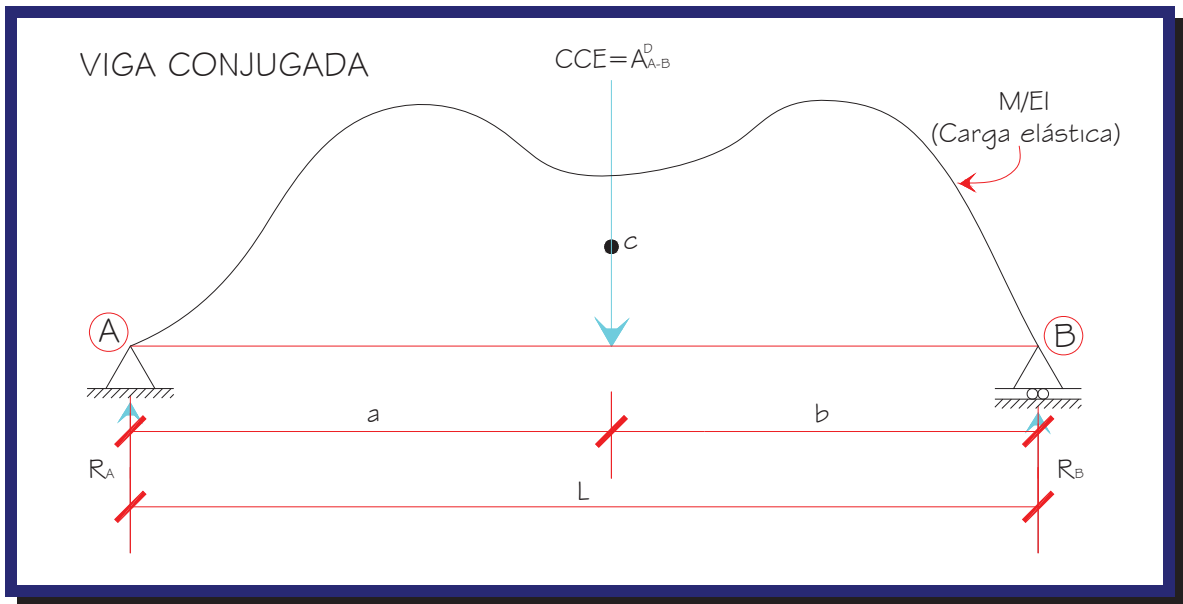


Figura 4.2

$$\sum M_B = 0$$

$$R_A L - A^D_{A-B} b = 0$$

$$R_A = \frac{A^D_{A-B} b}{L}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$-R_B L + A^D_{A-B} a = 0$$

$$R_B = \frac{A^D_{A-B} a}{L}$$

Por simple inspección se nota que las pendientes en los extremos (apoyos), de la viga real son iguales a las reacciones de la viga conjugada.

$$\theta_A = R_A \quad \text{y} \quad \theta_B = R_B$$

En ambos extremos de la viga conjugada la fuerza cortante es igual a la reacción, e igual a la pendiente en la viga real. Por lo anterior se tiene el teorema I:



Teorema I: La pendiente en cualquier sección de una viga cargada, relativa al eje original de la misma, es igual al cortante en la viga conjugada para la sección correspondiente.

CONSIDERE NUEVAMENTE LA VIGA CONJUGADA Y LA VIGA REAL:

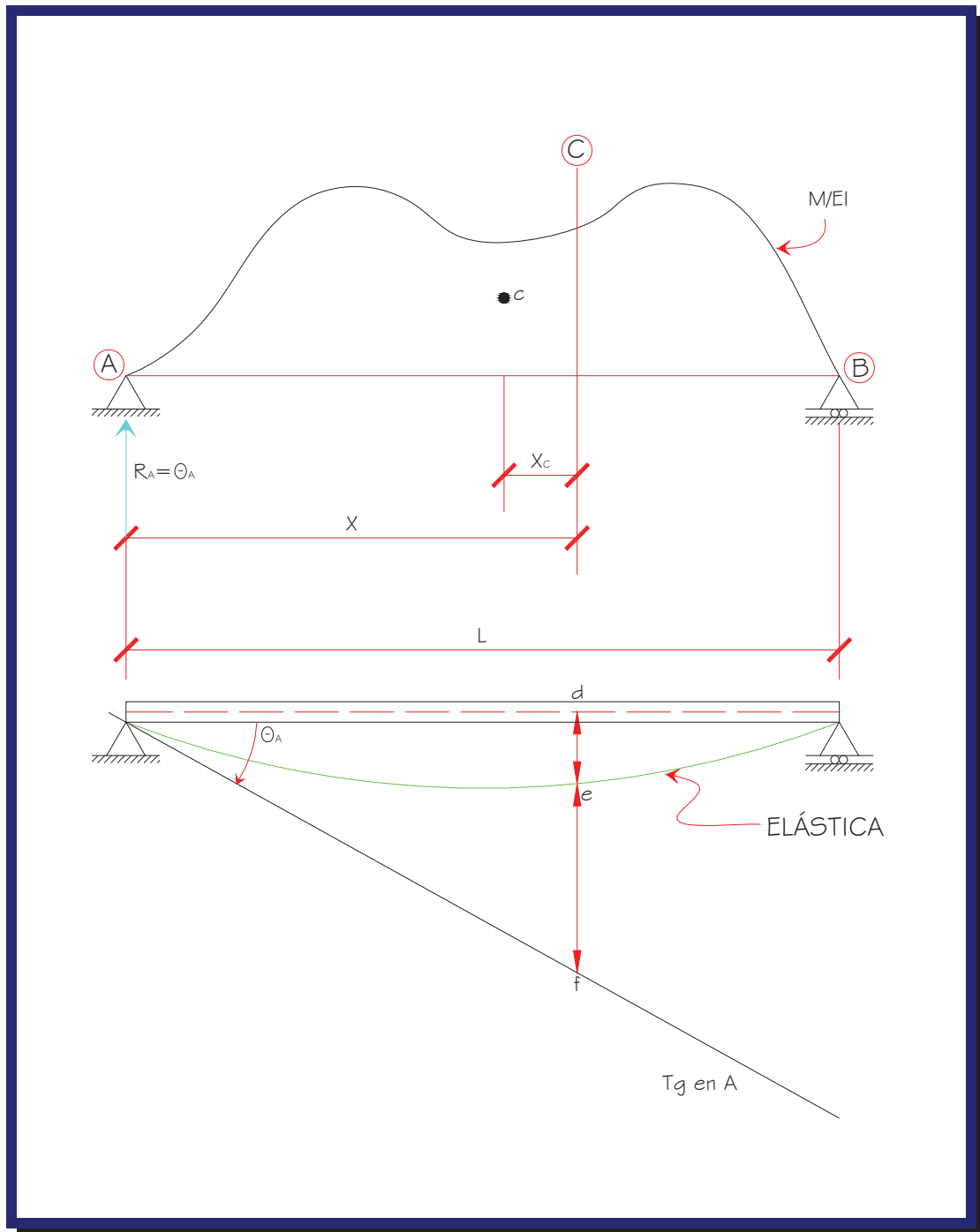


Figura 4.3



De la figura 4.3 se tiene:

$$de = df - ef$$

Pero: $df = x\theta_A$

$$ef = A^D_{A-C} x_C$$

Sustituyendo los valores de df y ef :

$$de = x\theta_A - A^D_{A-C} x_C$$

Como θ_A es la reacción izquierda de la viga conjugada, la expresión anterior para la deflexión "de" de la viga real es el momento interno en "c" de la viga conjugada, por lo que:

Teorema II: La deflexión de una viga cargada con relación a su posición inicial es igual al momento flexionante para la sección correspondiente de la viga conjugada.

Resumiendo:

$$\theta_{REAL} = V_{CONJUGADA}$$

$$f_{REAL} = M_{CONJUGADA}$$

Convención de signos:

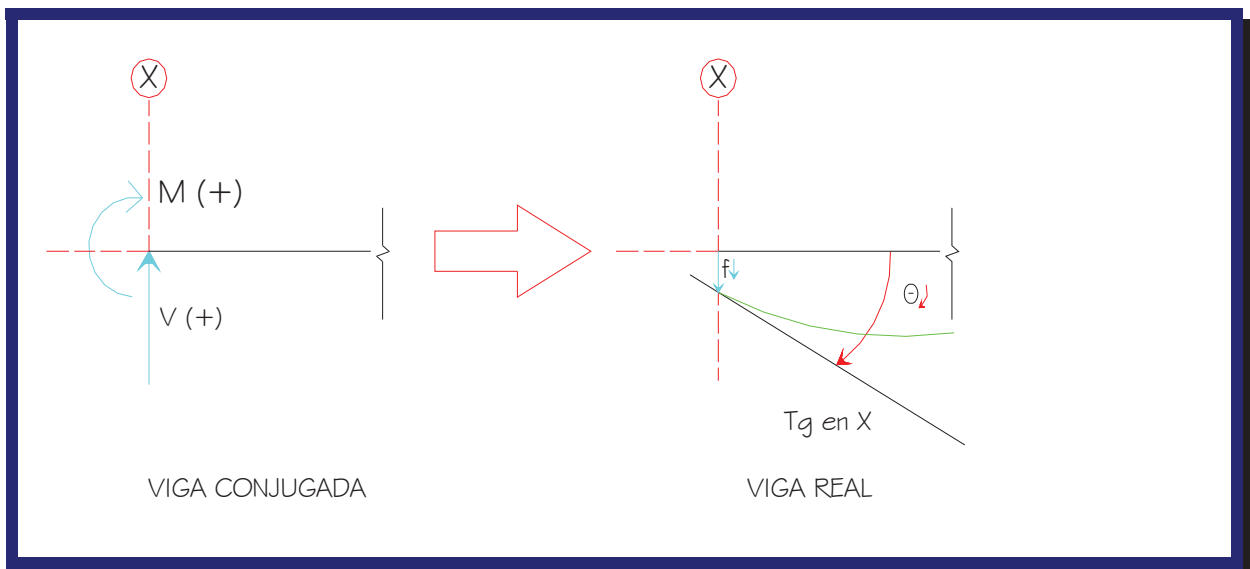


Figura 4.4

**Limitaciones de método:**

El método se desarrolló para las vigas simplemente apoyadas; en esta forma no sirve para resolver vigas en voladizo, con extremos empotrados o vigas continuas.

Para la generalización del método, es necesario emplear vigas conjugadas que tengan los apoyos modificados, de modo que se obtengan las relaciones correctas:

$$\theta_{REAL} = V_{CONJUGADA}$$
$$f_{REAL} = M_{CONJUGADA}$$



Figura 4.5

TRABAJO VIRTUAL CAPÍTULO V



CAPÍTULO V.

TRABAJO VIRTUAL.

El método del Trabajo Virtual ó método de la Carga Unitaria Ficticia permite calcular deflexiones en **armaduras, vigas y marcos**. El método se desarrolla partir de la “Ley de la conservación de la energía”.

Ley de la conservación de la energía:

$$\text{Trabajo hecho por un grupo de cargas externas} = \text{Energía elástica interna almacenada en la estructura}$$

Consideraciones:

- Las fuerzas internas y externas están en equilibrio.
- El límite elástico del material no se excede.
- Los apoyos, en principio, no tienen movimiento.

DEFLEXIONES EN ARMADURAS.

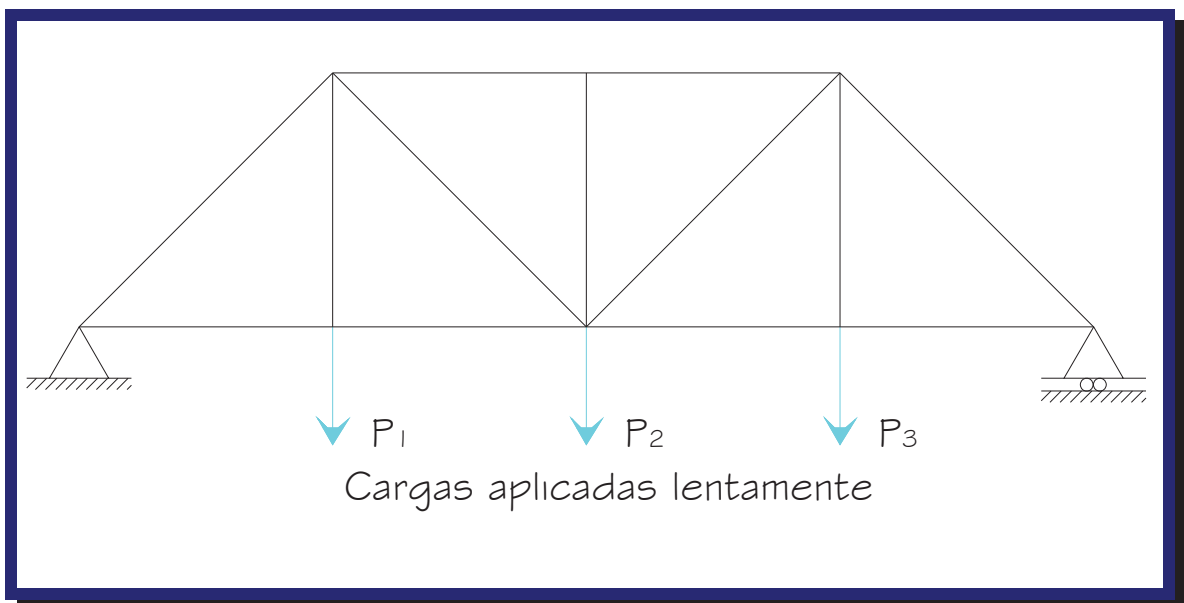


Figura 4.6

- ◆ Las cargas P_1 a P_3 producen fuerzas en la barras.
- ◆ Como consecuencia, cada barra se acorta o se alarga.
- ◆ Estas deformaciones internas causan deflexiones externas y cada una de las cargas se desplaza una pequeña distancia.
- ◆ El principio de conservación de la energía para la armadura:



El trabajo externo efectuado por las cargas P_1 a P_3 , al moverse éstas través de sus respectivos desplazamientos es igual al trabajo interno efectuado por las fuerzas en las barras al desplazarse sobre sus respectivos cambios de longitud.

◆ La deformación total en una barra de una armadura:

$$\Delta L = \frac{FL}{EA}$$

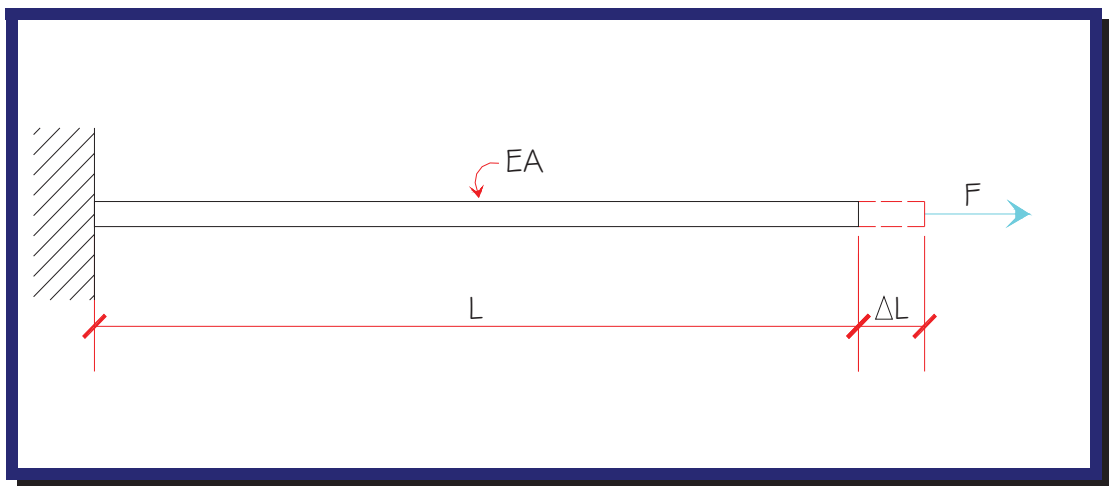


Figura 4.7

◆ Para calcular la deflexión en un nudo de armadura de la figura 4.6:

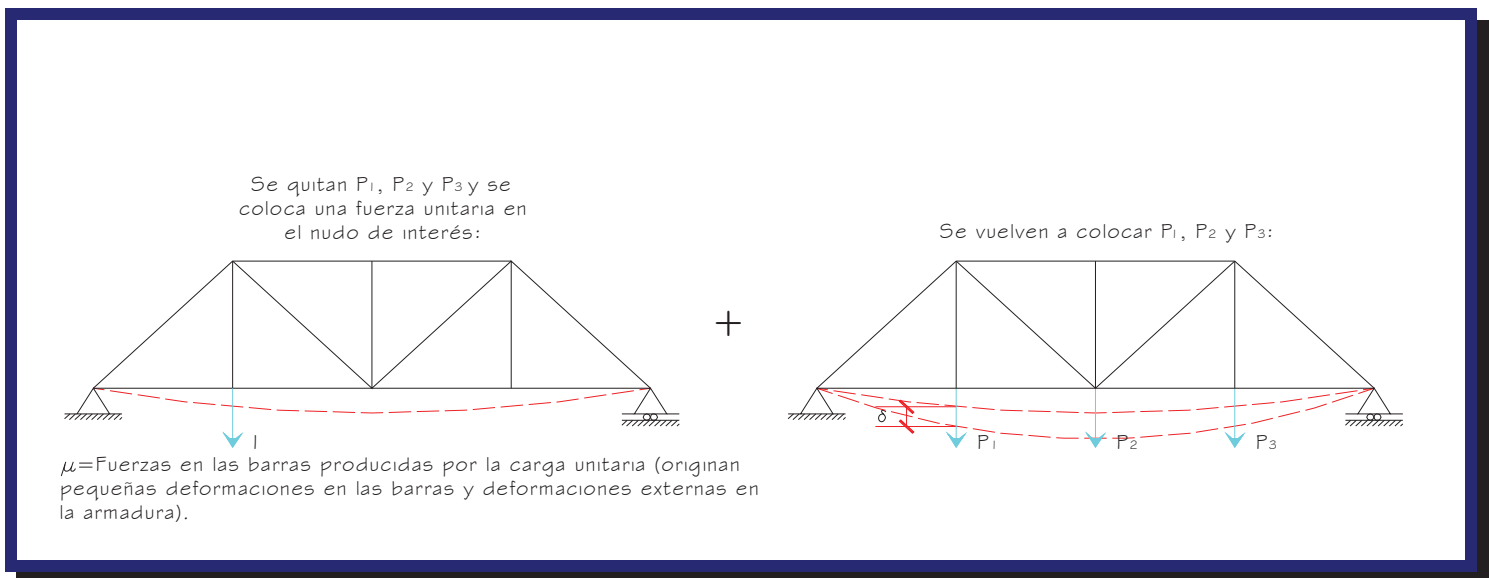


Figura 4.8



- ◆ Cuando las cargas externas regresan a la armadura, la fuerza en cada una de las barras cambia de acuerdo a la fuerza "F" y la deformación de cada barra cambia de acuerdo a FL / EA . La armadura se deflecta y la carga unitaria se traslada una distancia δ .

El trabajo externo que realiza la carga unitaria cuando las cargas externas regresan a la estructura es:

$$W_e = 1 \cdot \delta$$

Internamente, La fuerza μ en cada barra se desplaza una distancia $\Delta L = FL / EA$. El trabajo interno efectuado por todas las fuerzas μ al moverse esta distancia es:

$$W_i = \sum \mu \frac{FL}{EA}$$

Igualando los trabajos externo e interno:

$$\delta = \sum \frac{F\mu L}{EA}$$

DEFLEXIONES EN VIGAS Y MARCOS.

Considere la siguiente viga:

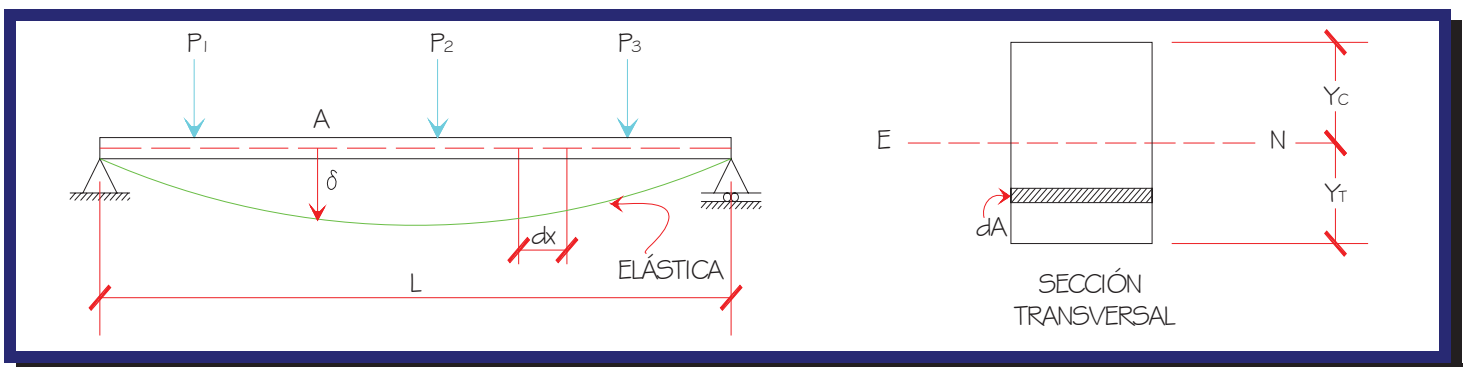


Figura 4.9

- ◆ Las cargas P_1 a P_3 producen fuerzas en las fibras longitudinales de la viga.
- ◆ Como consecuencia, cada fibra se acorta o se alarga.



- ◆ Estas deformaciones internas causan deflexiones externas y cada carga se desplaza una pequeña distancia.
- ◆ El principio de conservación de la energía para la viga:
La suma del trabajo interno efectuado = Trabajo externo
por la fuerza en cada una de las fibras desarrollado por las cargas
- ◆ Para calcular la deflexión en A de la figura 4.9:

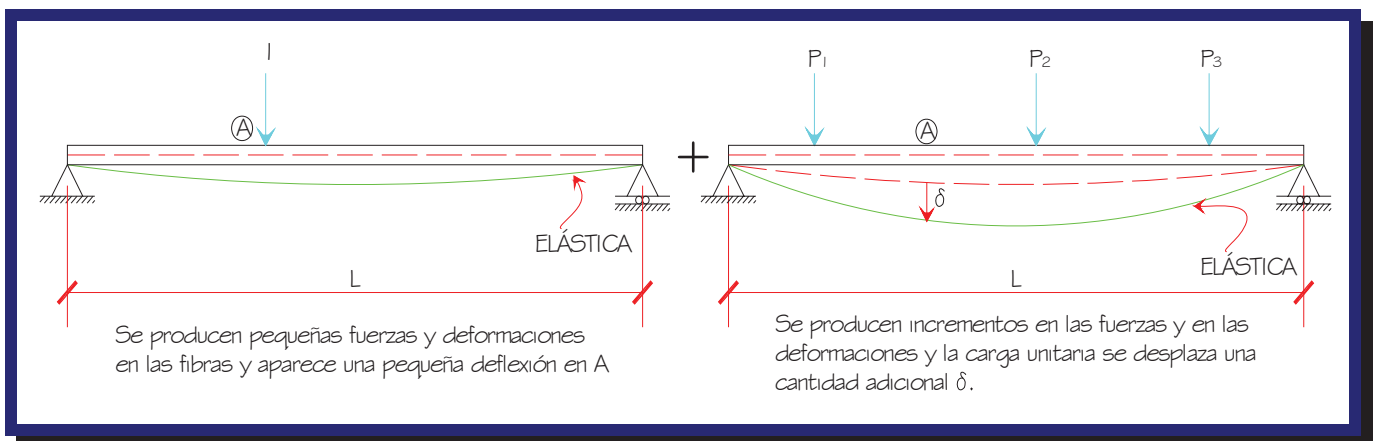


Figura 4.10

Por lo tanto el trabajo interno desarrollado por las fuerzas producidas por la carga unitaria, al desplazarse según las deformaciones adicionales de las fibras, es igual al trabajo externo realizado por la carga unitaria al desplazarse ésta la distancia adicional δ .

- ◆ Esfuerzo en $dA = \frac{m}{I}$ y; "m" es el momento originado por la carga unitaria.
- ◆ Fuerza en $dA = \frac{m}{I}$ y dA

Al área "dA" corresponde una longitud diferencial "dx" que se deforma una cantidad ϵdx cuando las cargas se reintroducen en la viga:

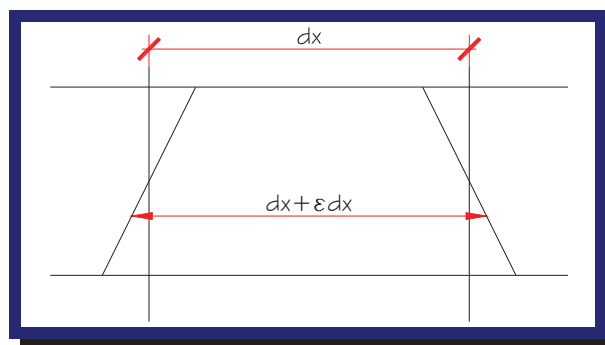


Figura 4.11



- ◆ Esfuerzo debido a las cargas externas $\sigma = \frac{M}{I} y$; “M” es el momento originado por cargas externas.
- ◆ Deformación en “dx” = $\varepsilon dx = \frac{\sigma}{E} dx = \frac{M}{EI} y dx$
- ◆ La fuerza en “dA” debida a la carga unitaria $\left(\frac{m}{I} y dA\right)$ se desplaza según esa deformación, y el trabajo que realiza es:

$$\text{Trabajo en } dA = \left(\frac{m y}{I} dA\right) \left(\frac{M y}{EI} dx\right) = \frac{M m y^2}{EI^2} dA dx$$

- ◆ El trabajo total en toda la sección transversal:

$$\text{Trabajo} = \int_{y_r}^{y_c} \frac{M m y^2}{EI^2} dA dx = \frac{M m}{EI^2} \int_{y_r}^{y_c} y^2 dA dx = \frac{M m}{EI} dx$$

- ◆ El trabajo interno en toda la viga:

$$W_i = \int_0^L \frac{M m}{EI} dx \text{ Trabajo interno producido por la carga virtual}$$

- ◆ El trabajo externo: $W_e = 1 \cdot \delta$

- ◆ Igualando los trabajos externo e interno $W_e = W_i$:

$$\delta = \int_0^L \frac{M m}{EI} dx$$

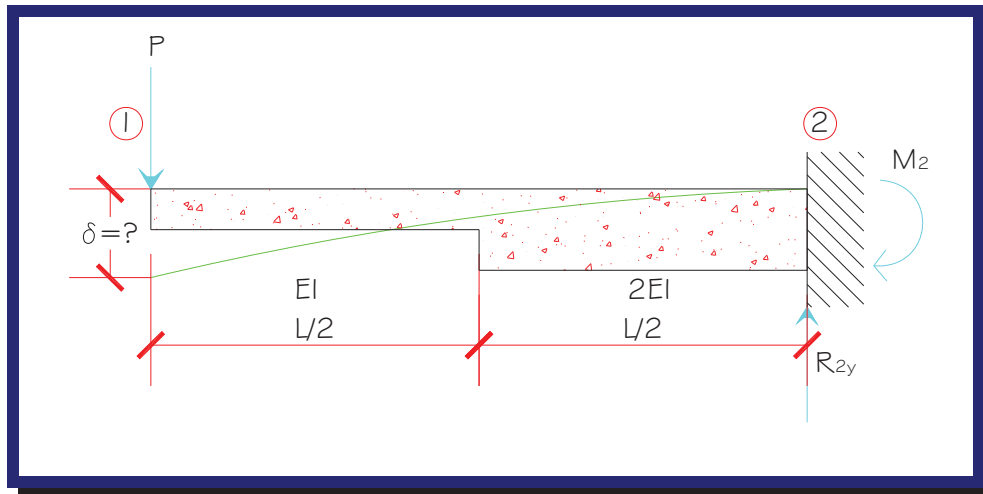
CAPÍTULO VI
PROBLEMAS RESUELTOS
PARA LA APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS



CAPÍTULO VI.

PROBLEMAS RESUELTOS PARA LA APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS.

Problema 1. Usando el método de la doble integración, calcule la deflexión en el extremo de libre de:



Solución:

① Cálculo de reacciones:

$$\sum F_v = 0 \quad \uparrow +$$

$$R_{2y} = P$$

$$\sum M_2 = 0 \quad \curvearrowright +$$

$$M_2 = PL$$

② Ecuación diferencial de la elástica.

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$EIy''(x) = M(x)$$

$$EIy''(x) = -Px$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$2EIy''(x) = M(x)$$

$$EIy''(x) = -\frac{Px}{2}$$

③ Integrando:

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$EIy'(x) = EI\theta(x) = -\frac{Px^2}{2} + C_1$$

$$EIy(x) = -\frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$EIy'(x) = EI\theta(x) = -\frac{Px^2}{4} + C_3$$

$$EIy(x) = -\frac{Px^3}{12} + C_3x + C_4$$



• Determinación de la constantes:

Por apoyo derecho:

$$\theta(L) = 0 \quad y(L) = 0$$

$$EI\theta(L) = -\frac{P}{4}L^2 + C_3 = 0$$

$$EIy(L) = -\frac{P}{12}L^3 + C_3L + C_4 = 0$$

$$\therefore C_3 = \frac{PL^2}{4}$$

$$-\frac{P}{12}L^3 + \left(\frac{PL^2}{4}\right)L + C_4 = 0$$

$$\therefore C_4 = -\frac{PL^3}{6}$$

Por continuidad de pendiente en $x=L/2$:

$$-\frac{P}{2} \frac{L^2}{4} + C_1 = -\frac{P}{4} \frac{L^2}{4} + C_3$$

$$-\frac{PL^2}{8} + C_1 = -\frac{PL^2}{16} + \frac{PL^2}{4}$$

$$\therefore C_1 = \frac{5}{16}PL^2$$

Por continuidad de deflexión en $x=L/2$:

$$-\frac{P}{6} \left(\frac{L}{2}\right)^3 + C_1 \frac{L}{2} + C_2 = -\frac{P}{12} \left(\frac{L}{2}\right)^3 + C_3 \frac{L}{2} + C_4$$

$$-\frac{PL^3}{48} + \left(\frac{5}{16}PL^2\right) \frac{L}{2} + C_2 = -\frac{PL^3}{96} + \left(\frac{PL^2}{4}\right) \frac{L}{2} - \frac{PL^3}{6}$$

$$-\frac{PL^3}{48} + \frac{5PL^3}{32} + C_2 = -\frac{PL^3}{96} + \frac{PL^3}{8} - \frac{PL^3}{6}$$

$$\therefore C_2 = -\frac{3}{16}PL^3$$



Las ecuaciones resultan:

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{Px^2}{2} + \frac{5PL^2}{16} \right]$$

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{Px^3}{6} + \frac{5PL^2x}{16} - \frac{3PL^3}{16} \right]$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{Px^2}{4} + \frac{PL^2}{4} \right]$$

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{Px^3}{12} + \frac{PL^2x}{4} - \frac{PL^3}{6} \right]$$

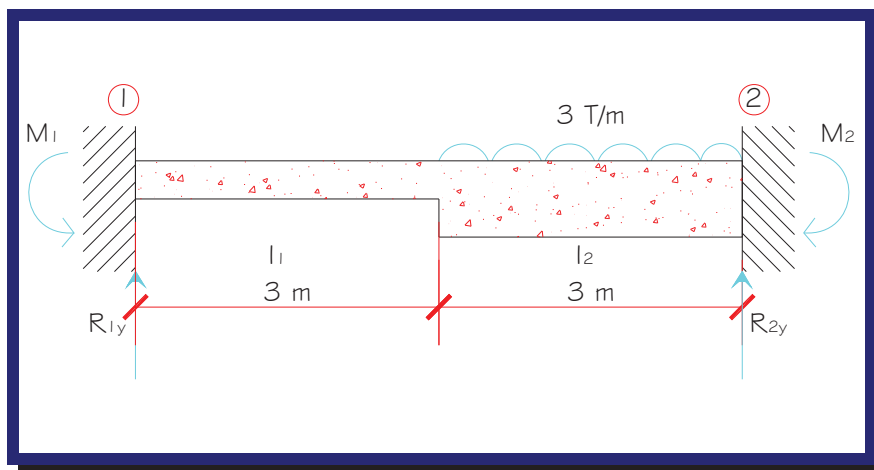
Deflexión en el extremo libre:

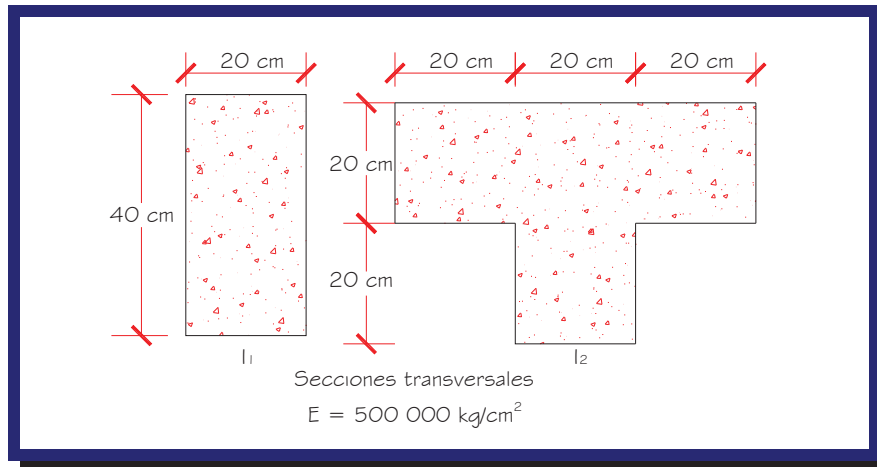
$$y(0) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{P(0)^3}{6} + \frac{5PL^2(0)}{16} - \frac{3PL^3}{16} \right]$$

$$y(0) = -\frac{3PL^3}{16EI}$$

$$y_{EXTR. LIBRE} = -\frac{3PL^3}{16EI}$$

Problema 2. Para la viga mostrada, empleando el método de la viga conjugada calcule las reacciones y trace los diagramas de cortante (V) y de momento (M).





Sección 1:

$$I_1 = \frac{(20)(40)^3}{12} = 106666.667 \text{ cm}^4$$

Sección 2:

$$\bar{y}_2 = \frac{(20)(20)(10) + (20)(60)(30)}{(20)(20) + (20)(60)} = 25 \text{ cm}$$

$$\bar{y}_2 = 25 \text{ cm}$$

$$I_2 = \frac{(60)(40)^3}{12} + (60)(40)(20 - 25)^2 - 2 \left[\frac{20^4}{12} + (20)(20)(10 - 25)^2 \right] = 173333.333 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = 173333.333 \text{ cm}^4$$

$$EI_1 = (500000)(106666.667) = 5.333 \times 10^{10} \text{ kg} - \text{cm}^2$$

$$EI_1 = 5333.333 T - m^2$$

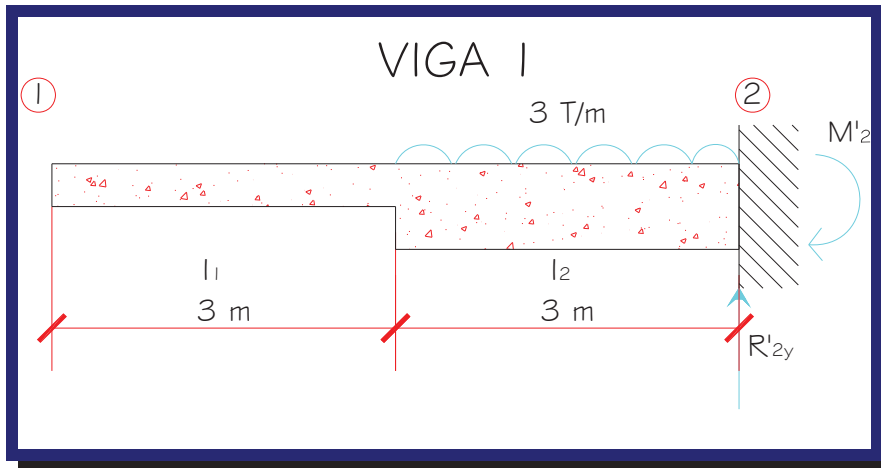
$$EI_2 = (500000)(173333.333) = 8.666 \times 10^{10} \text{ kg} - \text{cm}^2$$

$$EI_2 = 8666.666 T - m^2$$

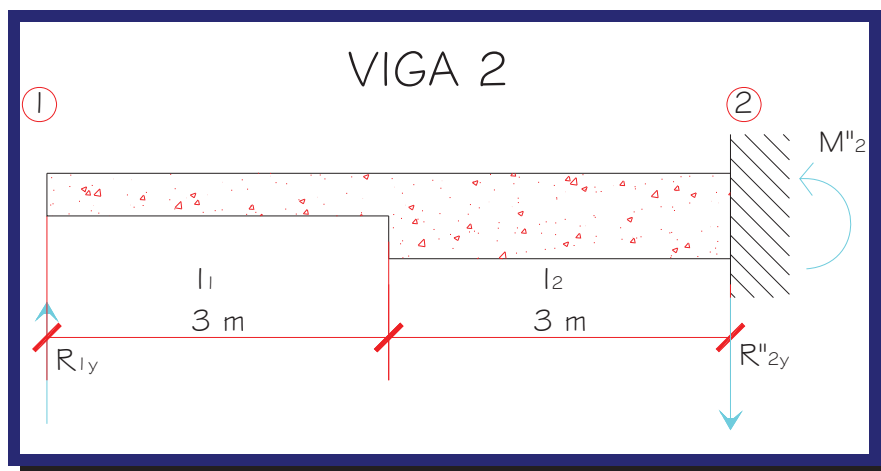


Por superposición:

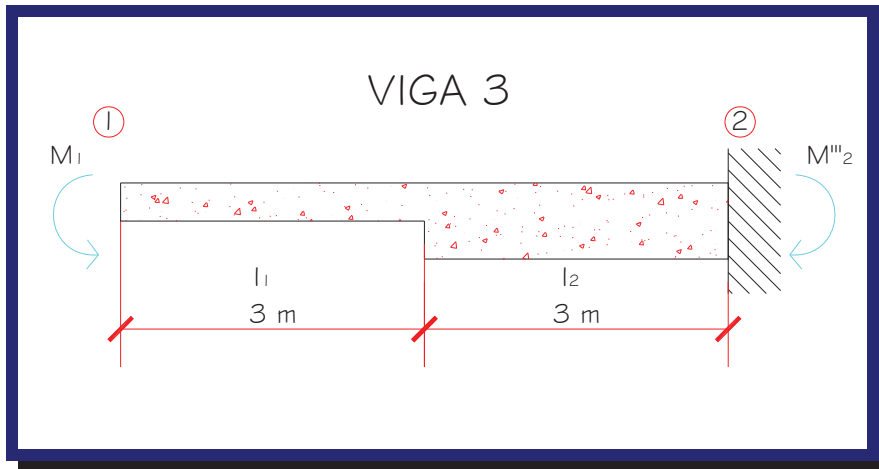
Vigas reales.



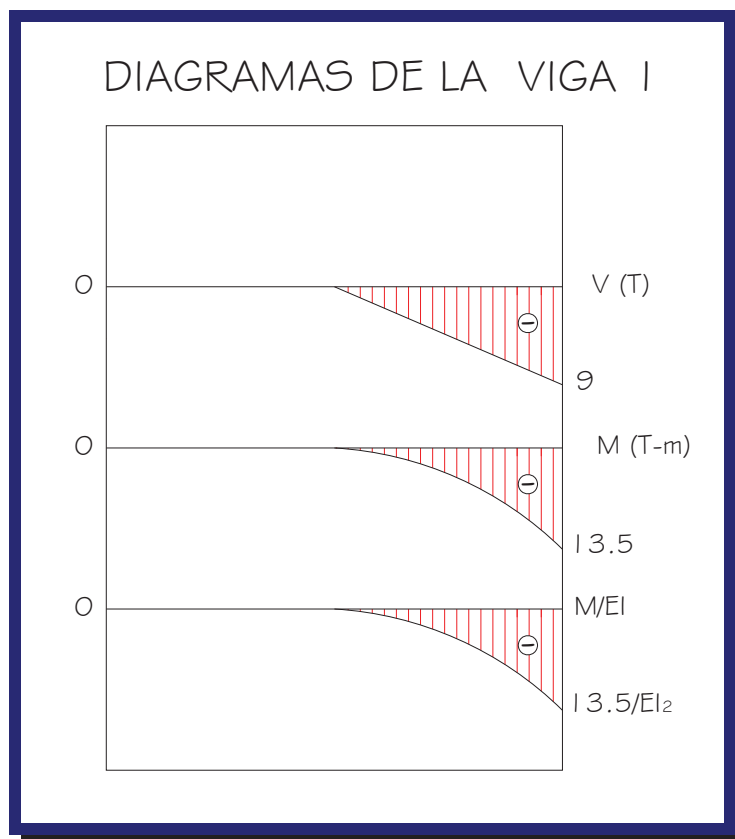
$$\begin{aligned}\sum F_v &= 0 \uparrow + \\ R'_{2y} &= 9 T \\ \sum M_2 &= 0 \curvearrowright + \\ M'_2 &= 13.5 T - m\end{aligned}$$

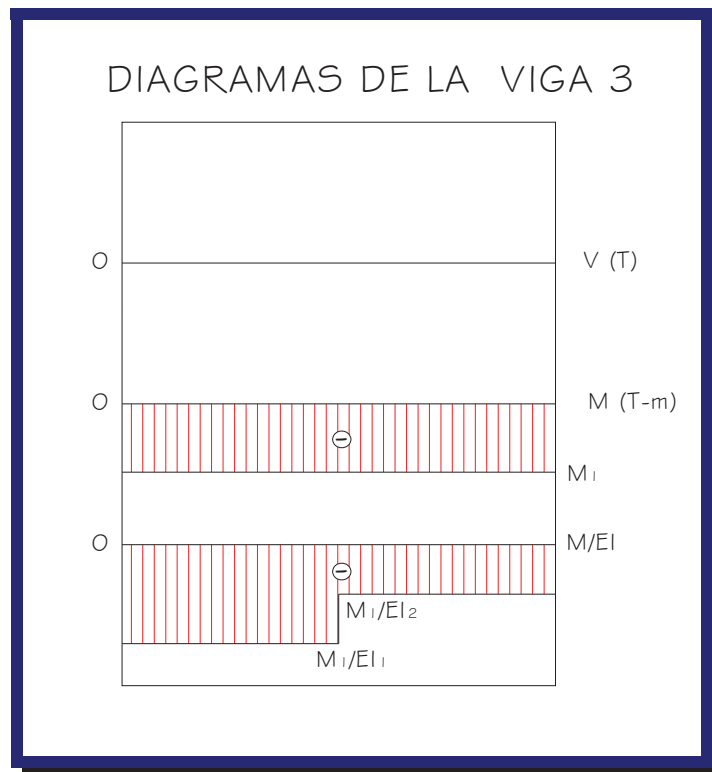
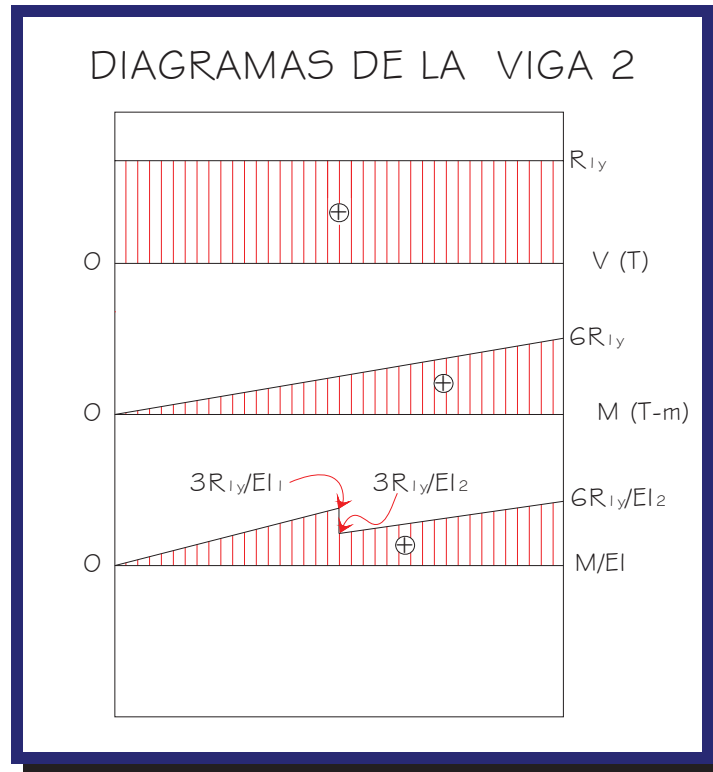


$$\begin{aligned}\sum F_v &= 0 \uparrow + \\ R''_{2y} &= R_{1y} \\ \sum M_2 &= 0 \curvearrowright + \\ M''_2 &= 6R_{1y}\end{aligned}$$



$$\sum M_2 = 0 \quad \curvearrowright$$
$$M_2'' = M_1$$







En la superposición se debe cumplir que:

$$\theta_1 = \theta_1' + \theta_1'' + \theta_1''' = 0 \dots \dots \dots ec.1$$

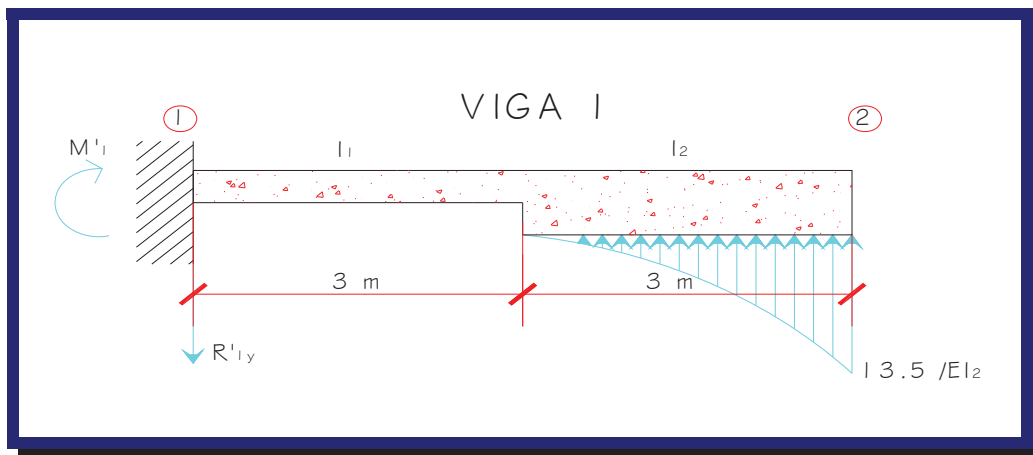
$$y_1 = y_1' + y_1'' + y_1''' = 0 \dots \dots \dots ec.2$$

Los teoremas de la viga conjugada:

$$\theta_{REAL} = V_{CONJUGADA}$$

$$y_{REAL} = M_{CONJUGADA}$$

Vigas conjugadas.



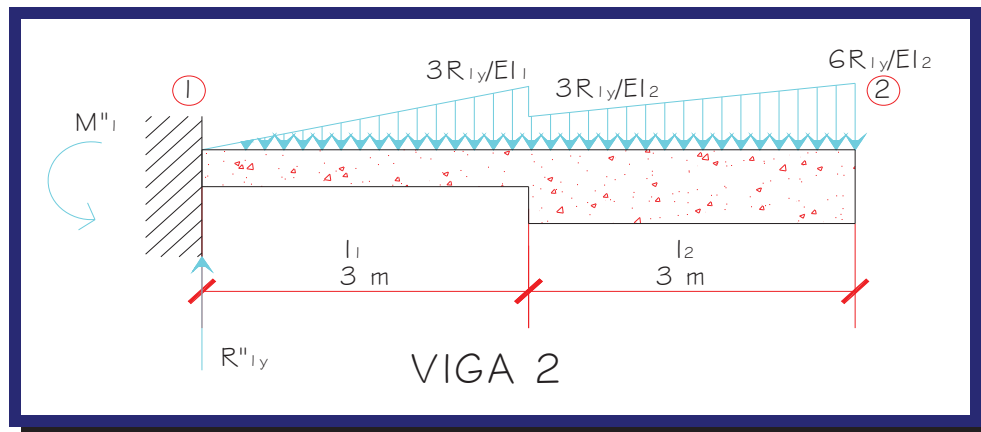
$$\sum F_v = 0 \uparrow +$$

$$R_{1y} = \frac{13.5}{EI_2}$$

$$\sum M_1 = 0 \uparrow +$$

$$M_1' = \frac{13.5}{EI_2} (5.25)$$

$$M_1' = \frac{70.875}{EI_2}$$



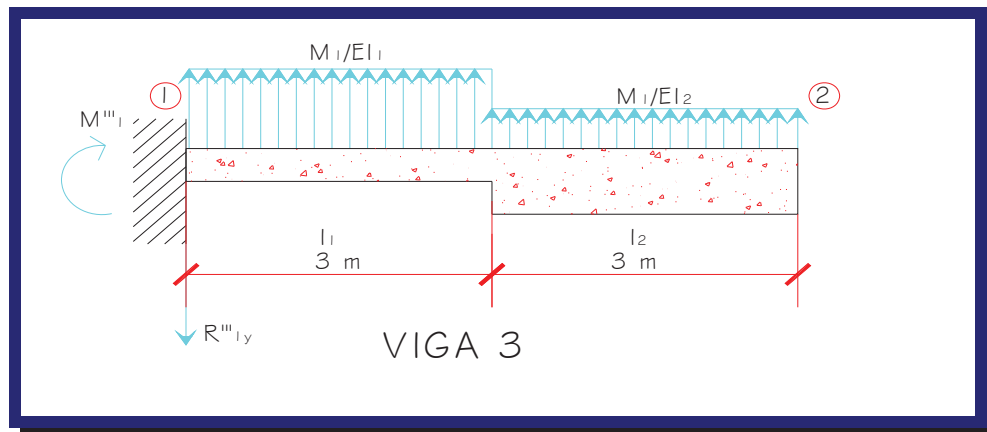
$$\sum F_v = 0 \uparrow +$$

$$R_{1y}'' = \frac{4.5}{EI_1} R_{1y} + \frac{13.5}{EI_2} R_{1y}$$

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow +$$

$$M_1'' = \left(\frac{4.5 R_{1y} (2)}{EI_1} \right) + \left(\frac{13.5 R_{1y} (4.666)}{EI_2} \right)$$

$$M_1'' = \frac{9 R_{1y}}{EI_1} + \frac{63 R_{1y}}{EI_2}$$



$$\sum F_v = 0 \uparrow +$$

$$R_{1y}''' = 3 \left[\frac{M_1}{EI_1} + \frac{M_1}{EI_2} \right]$$

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow +$$

$$M_1''' = 3 \left[\frac{1.5 M_1}{EI_1} + \frac{4.5 M_1}{EI_2} \right]$$



Sustituyendo los valores de EI_1 y EI_2 .
Viga conjugada.

$$R_{1y}^{\cdot} = 1.558 \times 10^{-3}$$

$$M_1^{\cdot} = 8.178 \times 10^{-3}$$

$$R_{1y}^{\cdot\cdot} = 2.401 \times 10^{-3} R_{1y}$$

$$M_1^{\cdot\cdot} = 8.957 \times 10^{-3} R_{1y}$$

$$R_{1y}^{\cdot\cdot\cdot} = 9.087 \times 10^{-4} M_1$$

$$M_1^{\cdot\cdot\cdot} = 2.401 \times 10^{-3} M_1$$

Sustituyendo los valores en las ecuaciones 1 y 2, página 31.

$$\theta_1 = -1.558 \times 10^{-3} + 2.401 \times 10^{-3} R_{1y} - 9.087 \times 10^{-4} M_1 = 0$$

$$y_1 = -8.178 \times 10^{-3} + 8.957 \times 10^{-3} R_{1y} - 2.401 \times 10^{-3} M_1 = 0$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtuvieron los siguientes valores:

$$R_{1y} = 1.554 T$$

$$M_1 = 2.392 T - m$$

$$R_{2y} = R_{2y}^{\cdot} + R_{2y}^{\cdot\cdot}$$

$$R_{2y} = 9 - 1.554 = 7.446 T$$

$$M_2 = M_2^{\cdot} + M_2^{\cdot\cdot} + M_2^{\cdot\cdot\cdot}$$

$$M_2 = 13.5 - 6(1.554) + 2.392 = 6.568 T - m$$

Por lo tanto las reacciones son:

$$R_{1y} = 1.554 T \uparrow$$

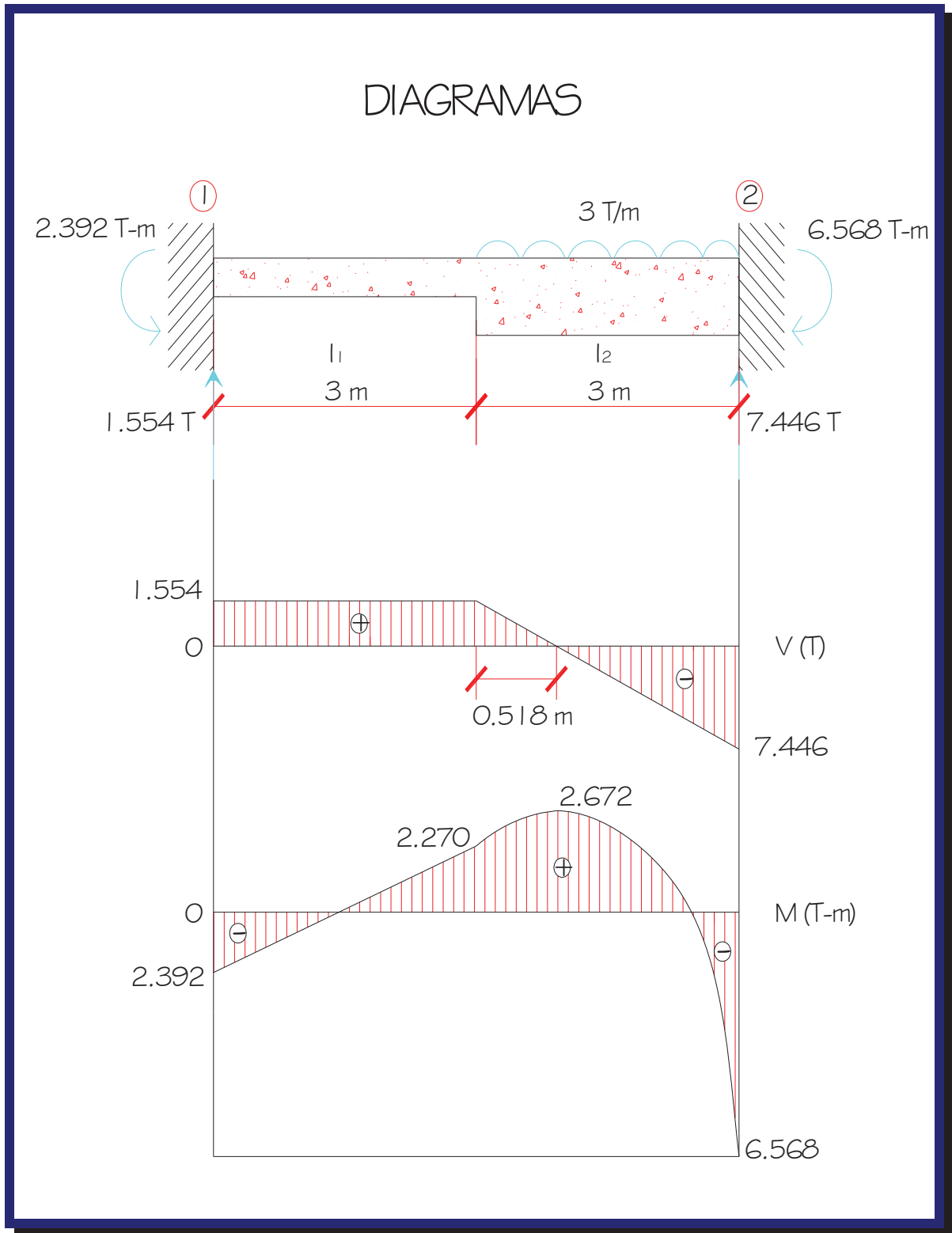
$$M_1 = 2.392 T - m \curvearrowright$$

$$R_{2y} = 7.446 T \uparrow$$

$$M_2 = 6.568 T - m \curvearrowleft$$

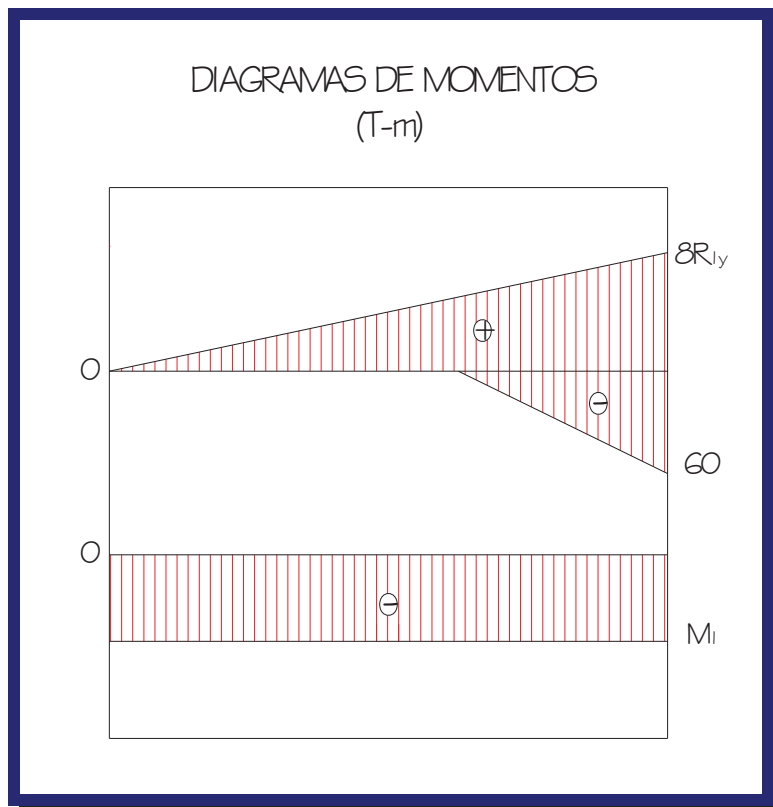
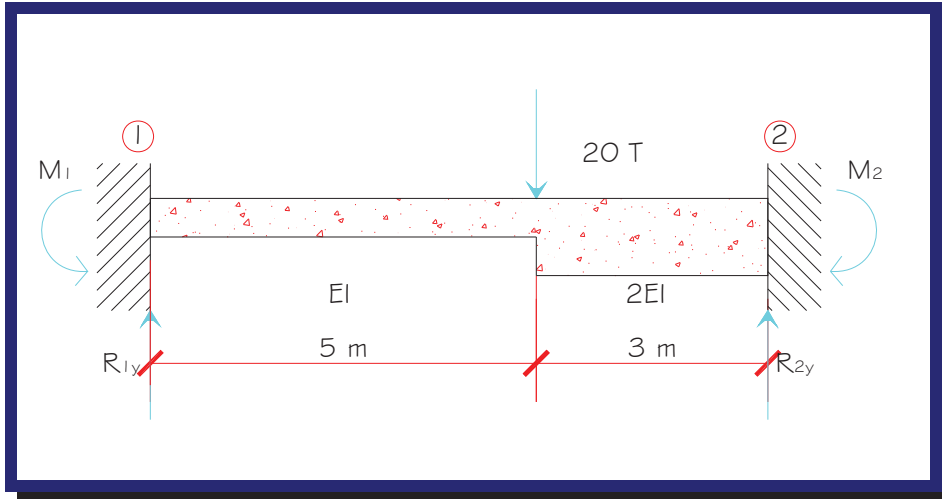


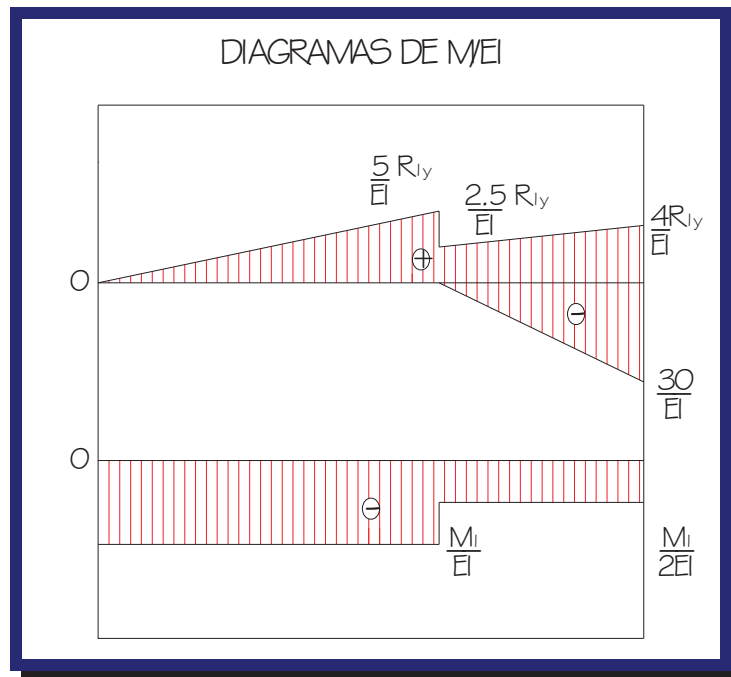
DIAGRAMAS





Problema 3. Empleando los teoremas de Mohr resuelva la viga mostrada y trace los diagramas de cortante (V) y de momento (M).





Los Teoremas de Mohr:

$$\theta_{2/1} = A_{1-2}^D = 0$$

$$IT2 = Q_{1-2}^D = 0$$

$$\theta_{2/1} = A_{1-2}^D = \left(\frac{5R_{1y}}{EI}\right)\left(\frac{5}{2}\right) + \left[\left(\frac{2.5R_{1y}}{EI}\right) + \left(\frac{4R_{1y}}{EI}\right)\right]\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{5M_1}{EI} - \frac{3M_1}{2EI} - \left(\frac{30}{EI}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$12.5R_{1y} + 9.75R_{1y} - 6.5M_1 - 45 = 0$$

$$22.25R_{1y} - 6.5M_1 = 45$$

$$IT2 = Q_{1-2}^D = (12.5R_{1y})(3.333) + (9.75R_{1y})\left[5 + \left(\frac{8R_{1y} + 2.5R_{1y}}{4R_{1y} + 2.5R_{1y}}\right)\right] - (5M_1)(2.5) - (1.5M_1)(6.5) - (45)(5 + 2) = 0$$

$$106.1667R_{1y} - 22.25M_1 - 315 = 0$$

$$106.1667R_{1y} - 22.25M_1 = 315$$

Por lo tanto tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$22.25R_{1y} - 6.5M_1 = 45 \dots\dots\dots \text{Ecuación 1}$$

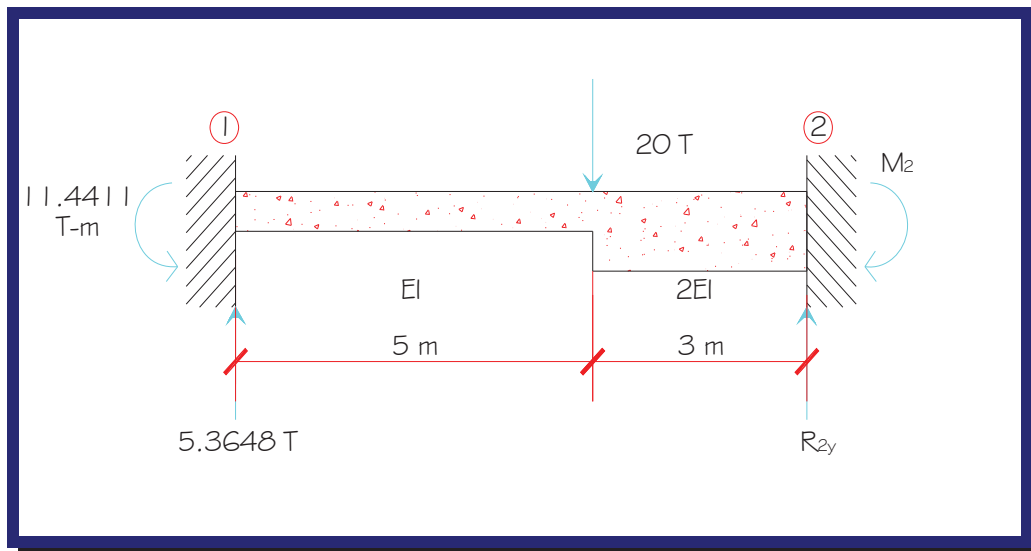
$$106.1667R_{1y} - 22.25M_1 = 315 \dots\dots\dots \text{Ecuación 2}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtuvieron los siguientes valores:



$$R_{1y} = 5.3648 T$$

$$M_1 = 11.4411 T - m$$



$$\sum F_v = 0 \uparrow +$$

$$R_{2y} - 20 + 5.3648 = 0$$

$$R_{2y} = 14.6352 T$$

$$\sum M_1 = 0 \curvearrowright$$

$$-(14.6352)(8) + (20)(5) - 11.4411 + M_2 = 0$$

$$M_2 = 28.5227 T - m$$

Resumiendo, las reacciones son:

$$R_{1y} = 5.3648 T \uparrow$$

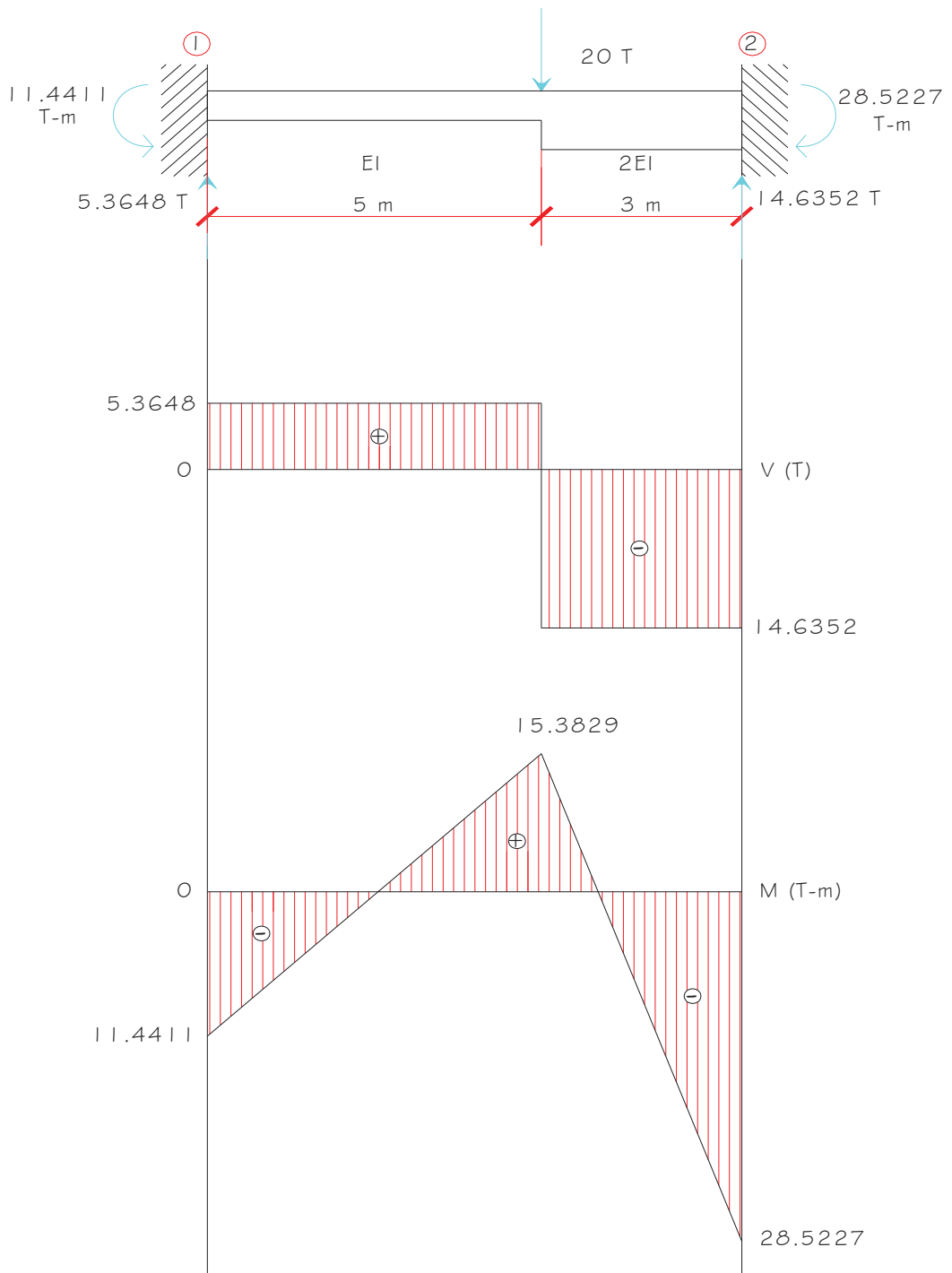
$$M_1 = 11.4411 T - m \curvearrowright$$

$$R_{2y} = 14.6352 T \uparrow$$

$$M_2 = 28.5227 T - m \curvearrowright$$

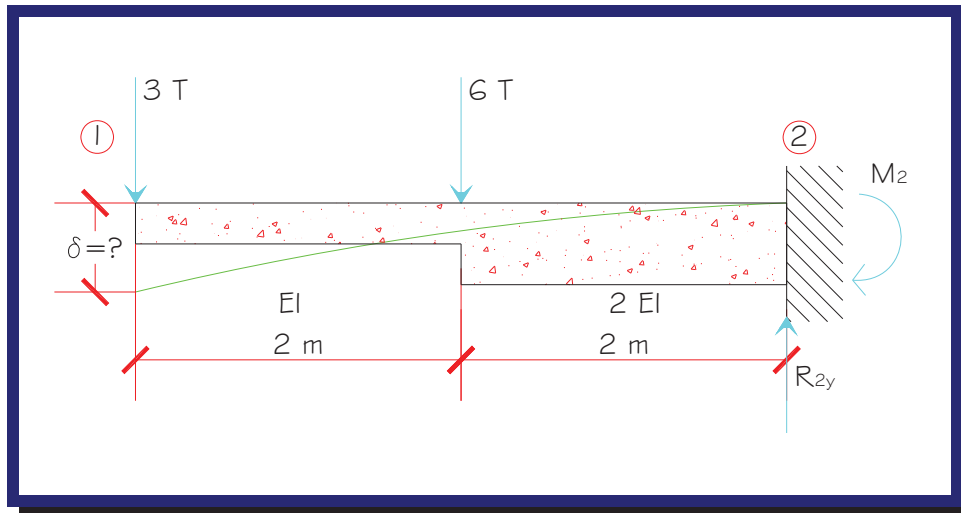


DIAGRAMAS





Problema 4. Aplicando el principio de la carga virtual unitaria. Calcule la deflexión en el extremo libre de:



$$\sum F_v = 0 \uparrow +$$
$$-3 - 6 + R_{2y} = 0$$

$$R_{2y} = 9T$$

$$\sum M_1 = 0 \curvearrowright +$$
$$-(3)(4) - (6)(2) + M_2 = 0$$
$$M_2 = 24T - m$$

Las reacciones son:

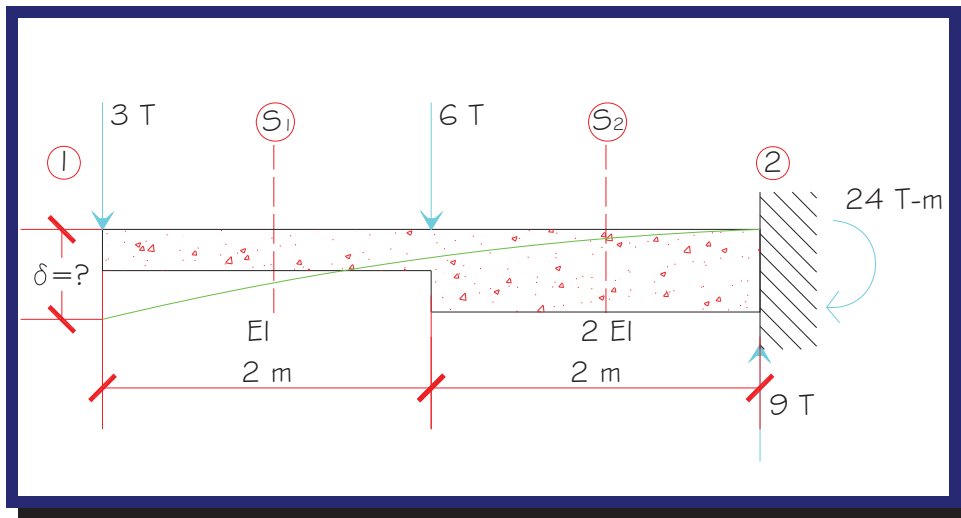
$$R_{2y} = 9T \uparrow$$
$$M_2 = 24T - m \curvearrowright$$

La ecuación que permite calcular la deflexión está dada por:

$$\delta = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx$$



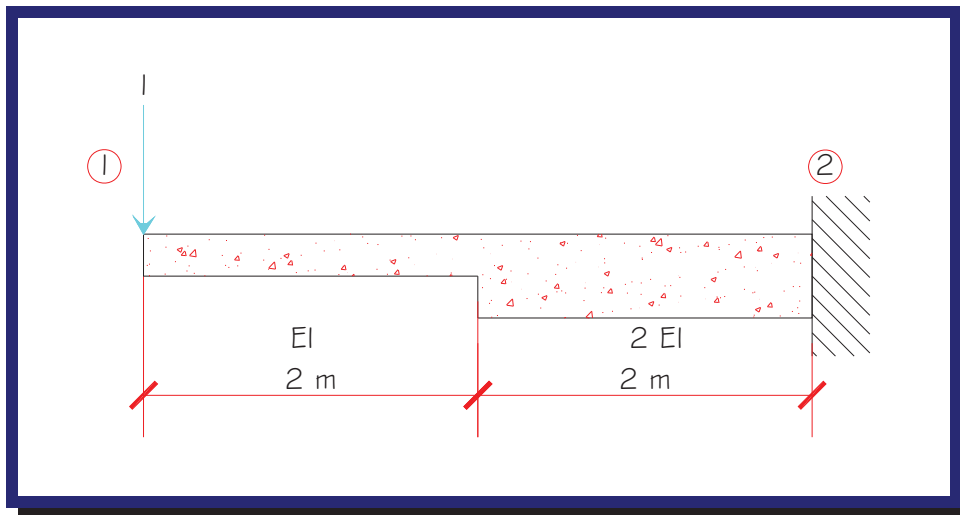
Las ecuaciones de momento flexionante están dadas por:



$$0 \leq x \leq 2$$
$$M(x) = -3x$$

$$2 \leq x \leq 4$$
$$M(x) = -3x - 6(x - 2)$$
$$M(x) = -9x + 12$$

La ecuación de “m” debida a la carga unitaria virtual está dada por:



$$0 \leq x \leq 4$$
$$m = -x$$



$$\delta = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx$$

$$\delta = \int_0^2 \frac{(-3x)(-x)}{EI} dx + \int_2^4 \frac{(-9x+12)(-x)}{2EI} dx$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \int_0^2 3x^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_2^4 (9x^2 - 12x) dx$$

$$\delta = \frac{1}{EI} [x^3]_0^2 + \frac{1}{2EI} [3x^3 - 6x^2]_2^4$$

$$\delta = \frac{1}{EI} [8] + \frac{1}{2EI} [(3(4^3) - 6(4)^2) - (3(2^3) - 6(2)^2)]$$

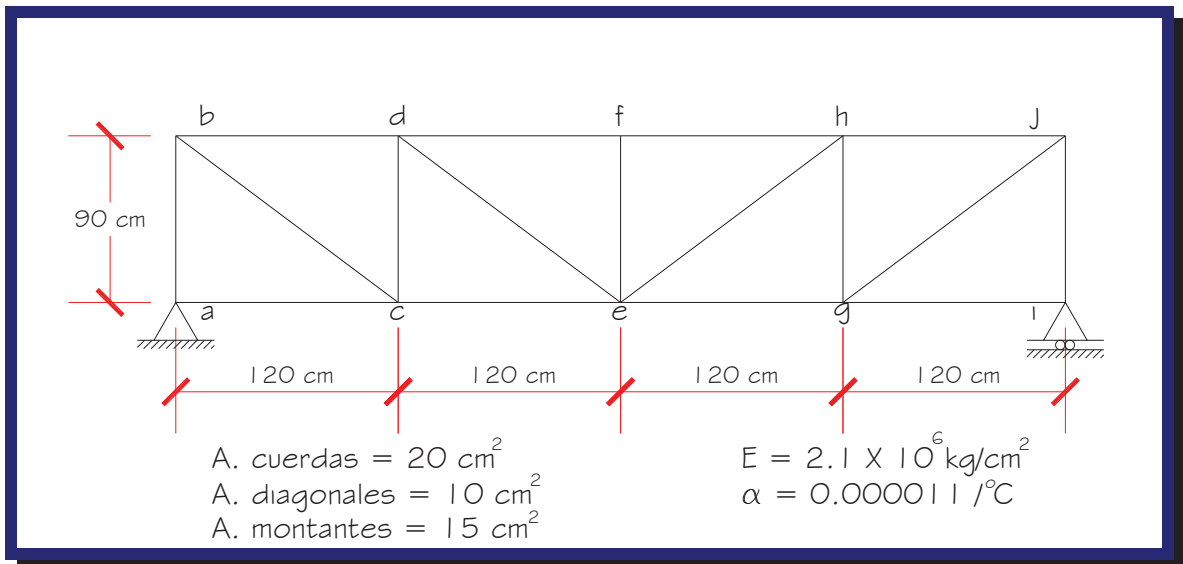
$$\delta = \frac{8}{EI} + \frac{48}{EI}$$

$$\delta = \frac{56}{EI}$$

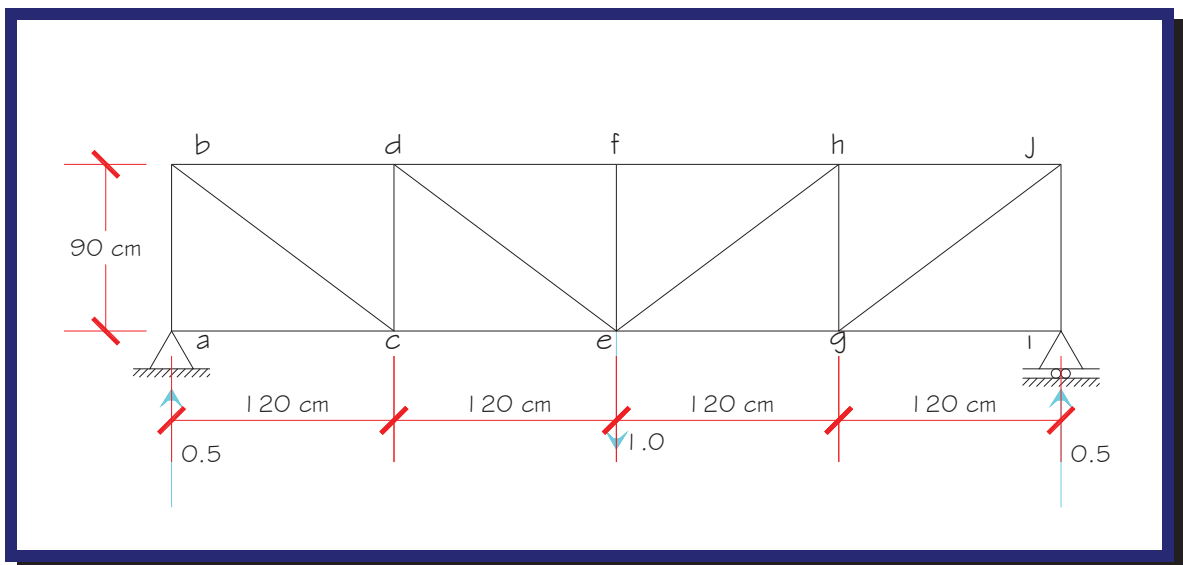
$$\delta_{\text{EXTR. LIBRE}} = \frac{56}{EI}$$

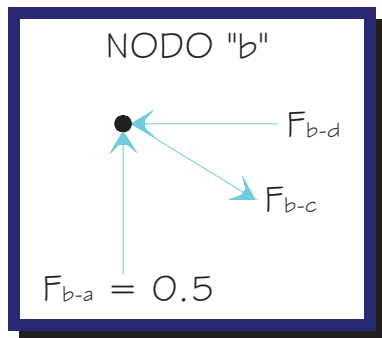


Problema 5. La cuerda superior, las diagonales y los montantes de la armadura mostrada se calientan 30°C por arriba de la temperatura de la cuerda inferior que está protegida del sol. Empleando el método del trabajo virtual (método de la carga ficticia) calcule el desplazamiento vertical del nudo "e".



Carga virtual en la armadura:





$$\sum F_v = 0 \uparrow +$$

$$0.5 - F_{b-c} \left(\frac{90}{150} \right) = 0$$

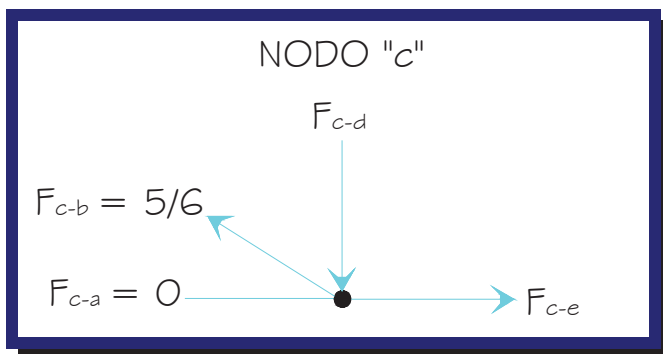
$$F_{b-c} = \frac{5}{6} \quad (T)$$

$$\sum F_h = 0 \rightarrow +$$

$$-F_{b-d} + F_{b-c} \left(\frac{120}{150} \right) = 0$$

$$-F_{b-d} + \left(\frac{5}{6} \right) \left(\frac{120}{150} \right) = 0$$

$$F_{b-d} = \frac{2}{3} \quad (C)$$





$$\sum F_v = 0 \uparrow +$$

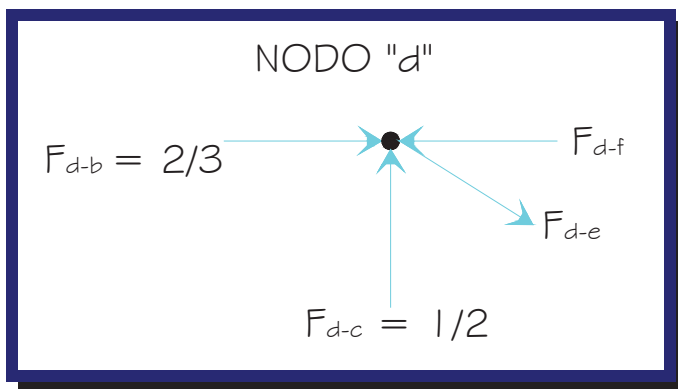
$$\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{90}{150}\right) - F_{c-d} = 0$$

$$F_{c-d} = \frac{1}{2} \quad (C)$$

$$\sum F_h = 0 \rightarrow +$$

$$-\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{120}{150}\right) + F_{c-e} = 0$$

$$F_{c-e} = \frac{2}{3} \quad (T)$$



$$\sum F_v = 0 \uparrow +$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) - F_{d-e}\left(\frac{90}{150}\right) = 0$$

$$F_{d-e} = \frac{5}{6} \quad (T)$$

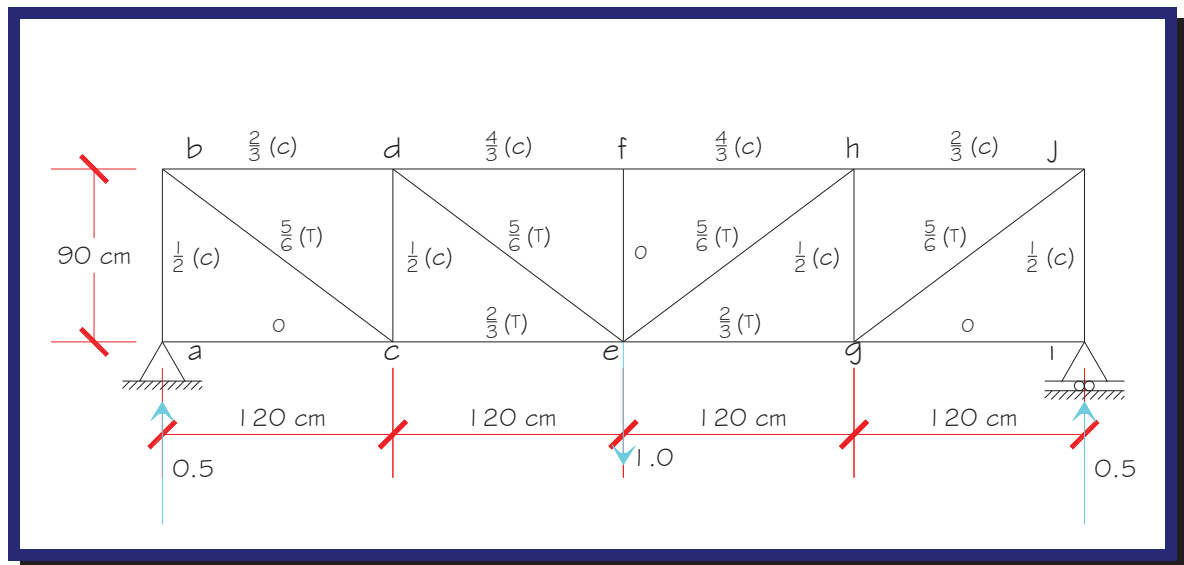
$$\sum F_h = 0 \rightarrow +$$

$$\frac{2}{3} - F_{d-f} + \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{120}{150}\right) = 0$$

$$F_{d-f} = \frac{4}{3} \quad (C)$$



En resumen, las fuerzas en las barras producidas por la carga unitaria son:



La ecuación que permite calcular el desplazamiento de un nudo es:

$$\delta = \sum \frac{\mu FL}{EA} = \sum \mu \Delta L$$

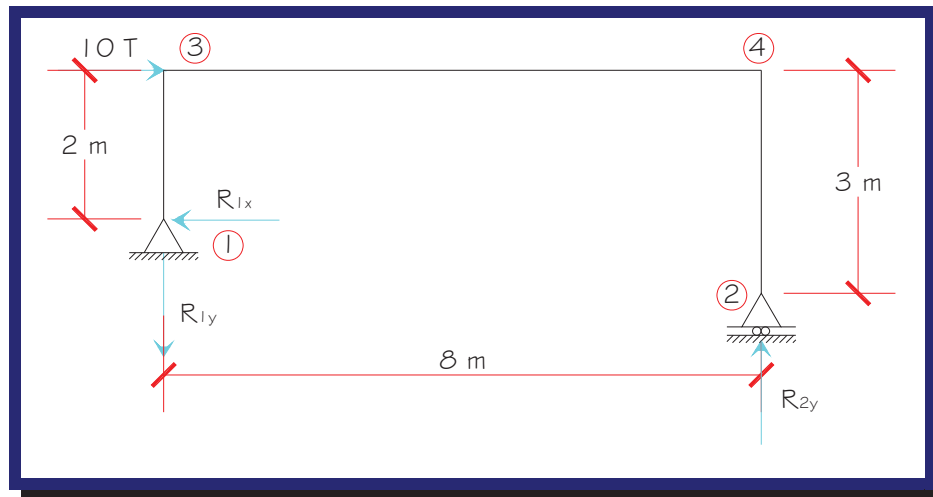
BARRA	LONG. (mm)	ΔL (mm) ($\Delta t L \alpha$)	μ	$\mu \Delta L$ (mm)
a-b	900	0.297	- 1/2	-0.149
b-d	1200	0.396	- 2/3	-0.264
d-c	900	0.297	- 1/2	-0.149
b-c	1500	0.495	5/6	0.413
d-f	1200	0.396	- 1 1/3	-0.528
d-e	1500	0.495	5/6	0.413
f-e	900	0.297	0	0.000
f-h	1200	0.396	- 1 1/3	-0.528
e-h	1500	0.495	5/6	0.413
h-g	900	0.297	- 1/2	-0.149
h-j	1200	0.396	- 2/3	-0.264
g-j	1500	0.495	5/6	0.413
j-i	900	0.297	- 1/2	-0.149
				$\Sigma = -0.528$

$$\delta_e = \sum \mu \Delta L = -0.528 \text{ mm}$$

$\delta_e = 0.528 \text{ mm } \uparrow$



Problema 6. Para el marco mostrado calcule la flecha horizontal del nudo 2, haciendo uso del principio del trabajo virtual. Las secciones transversales de las tres barras son de 10×40 cm y el módulo de elasticidad del material es de $250,000 \text{ kg/cm}^2$.



$$I = \frac{10(40)^3}{12} = 53333.333 \text{ cm}^4$$

$$EI = (250000)(53333.333) = 1.333 \times 10^{10} \text{ kg} - \text{cm}^2$$

$$EI = 1333.333 \text{ T} - \text{m}^2$$

$$\sum Fh = 0 \rightarrow +$$

$$R_{1x} = 10 \text{ T}$$

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow +$$

$$(10)(2) - 8R_{2y} = 0$$

$$R_{2y} = 2.5 \text{ T}$$

$$R_{1y} = 2.5 \text{ T}$$

Resumiendo, las reacciones son:

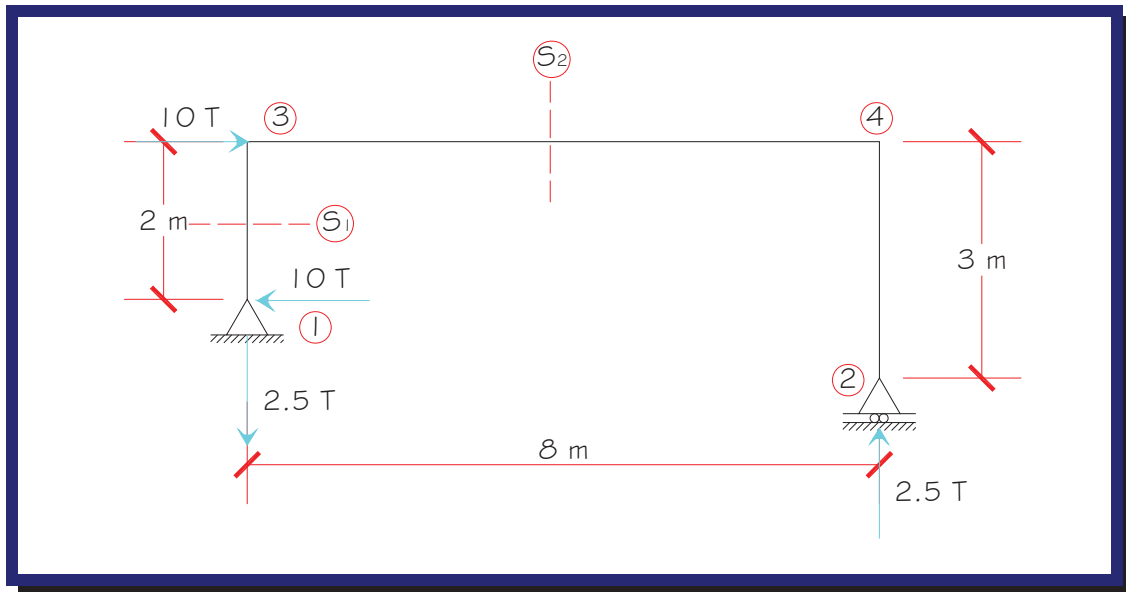
$$R_{1x} = 10 \text{ T} \leftarrow$$

$$R_{1y} = 2.5 \text{ T} \downarrow$$

$$R_{2y} = 2.5 \text{ T} \uparrow$$



Carga Real:

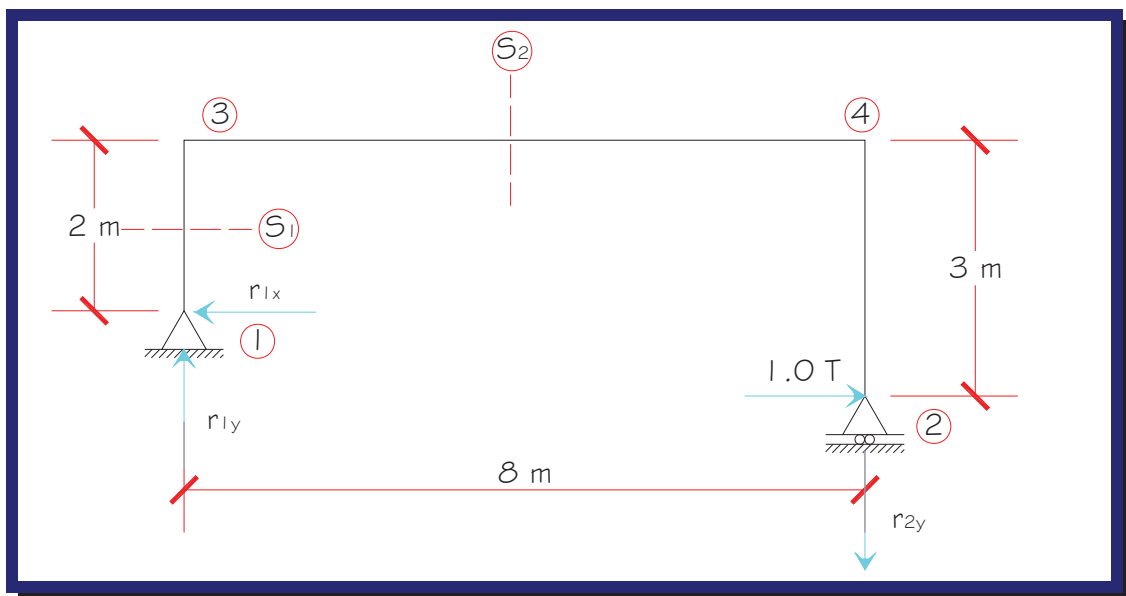


Las ecuaciones de Momento flexionante:

$$0 \leq x \leq 2$$
$$M(x) = 10x$$

$$0 \leq x \leq 8$$
$$M(x) = -2.5x + (10)(2)$$
$$M(x) = -2.5x + 20$$

Carga Virtual:





$$\sum Fh = 0 \rightarrow +$$

$$r_{1x} = 1.0$$

$$\sum M_1 = 0 \quad (+)$$

$$-1 + 8 r_{2y} = 0$$

$$r_{2y} = \frac{1}{8}$$

$$r_{1y} = \frac{1}{8}$$

Resumiendo, las reacciones son:

$$r_{1x} = 1.0 \quad \leftarrow$$

$$r_{1y} = \frac{1}{8} \quad \uparrow$$

$$r_{2y} = \frac{1}{8} \quad \downarrow$$

Las ecuaciones de momento flexionante debidas a la carga virtual:

$$0 \leq x \leq 2$$

$$m(x) = x$$

$$0 \leq x \leq 8$$

$$m(x) = \frac{1}{8}x + 2$$

$$\delta = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx$$

$$\delta_{2x} = \int_0^2 \frac{10x^2}{EI} dx + \int_0^8 \frac{(-2.5x + 20) \left(\frac{x}{8} + 2 \right)}{EI} dx$$

$$\delta_{2x} = \frac{10}{EI} \int_0^2 x^2 dx + \int_0^8 \left(\frac{-0.3125x^2 - 2.5x + 40}{EI} \right) dx$$

$$\delta_{2x} = \frac{10}{EI} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 - \frac{0.1042}{EI} [x^3]_0^8 - \frac{1.25}{EI} [x^2]_0^8 + \frac{40}{EI} [x]_0^8$$

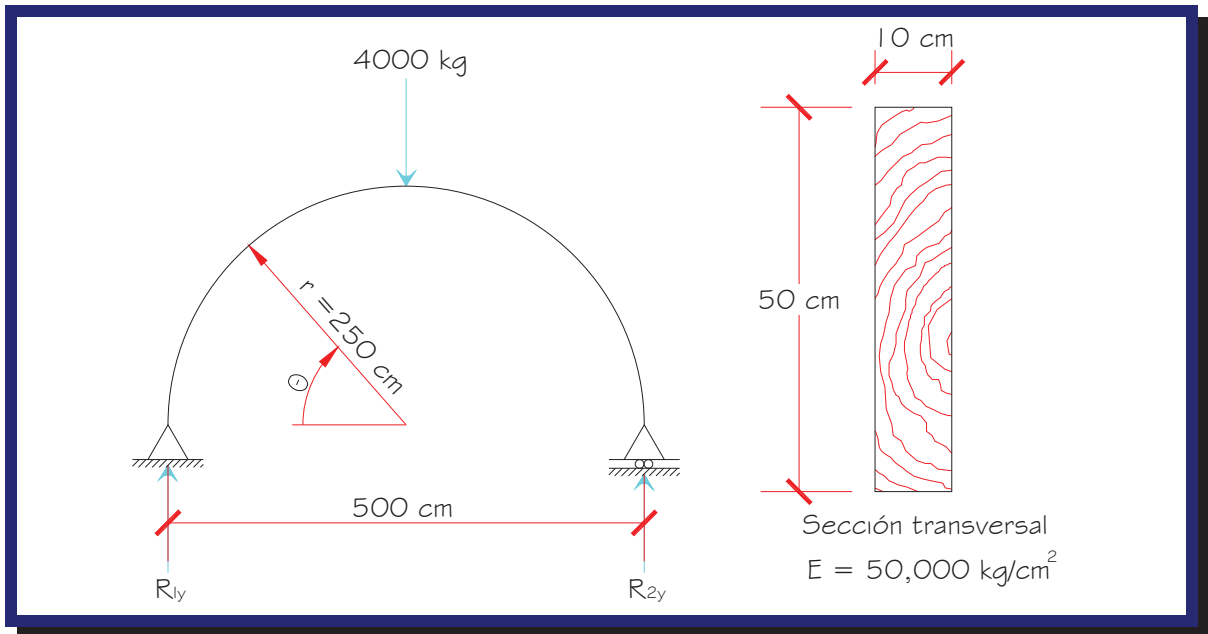
$$\delta_{2x} = \frac{26.667}{EI} - \frac{53.333}{EI} - \frac{80}{EI} + \frac{320}{EI} = \frac{213.333}{EI}$$

$$\delta_{2x} = \frac{213.333}{1333.333} = 0.16 \text{ m}$$

$$\delta_{2x} = 160 \text{ mm}$$

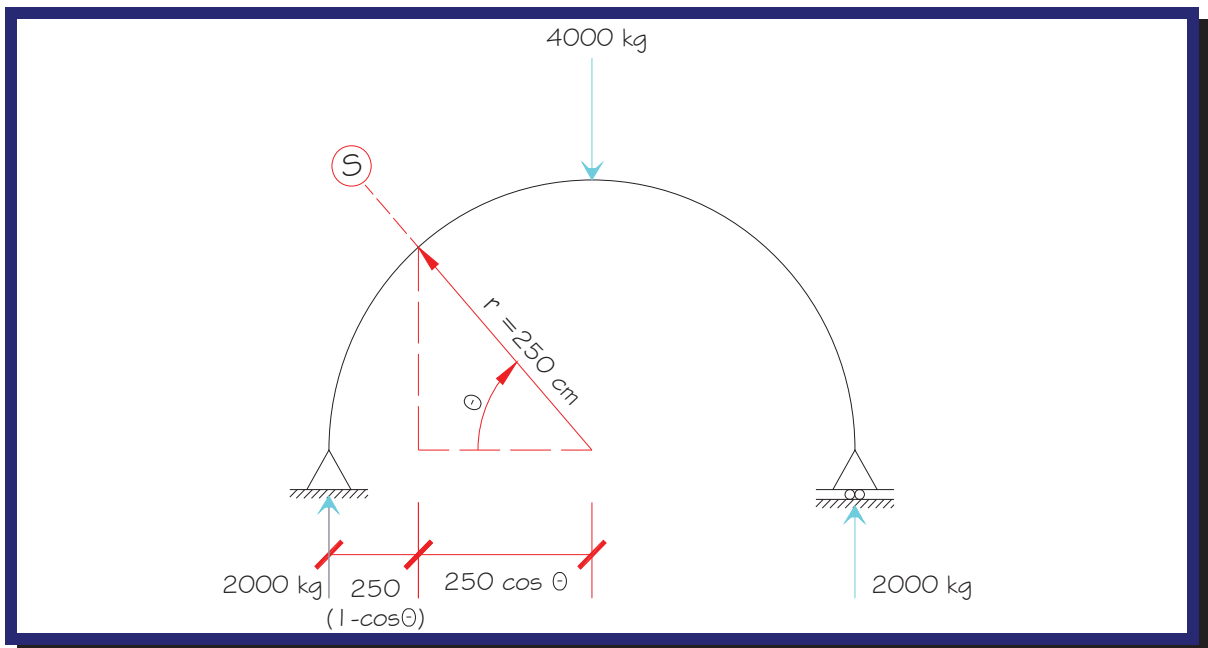


Problema 7. Empleando el método del trabajo virtual y considerando sólo deformaciones por flexión en el plano, calcule la flecha al centro del claro para el arco circular de madera, mostrado en la figura.



$$R_{1y} = \frac{4000}{2} = 2000 \text{ kg}$$

$$R_{2y} = 2000 \text{ kg}$$



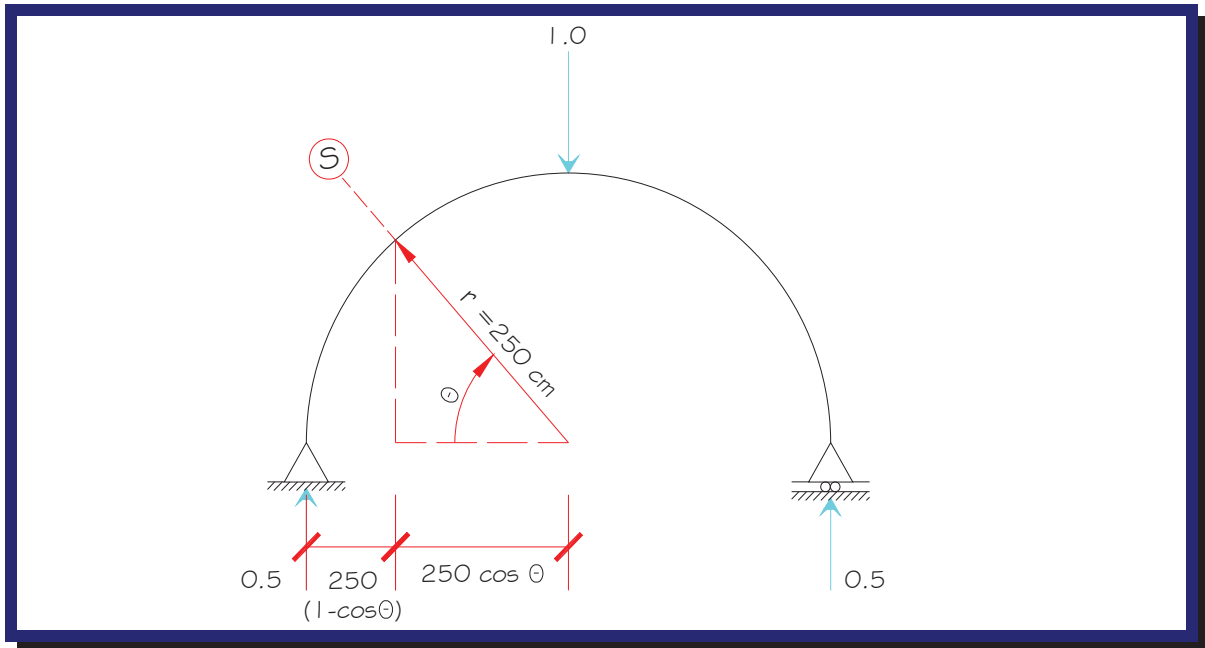


$$0 \leq \theta \leq 90^\circ$$

$$M(\theta) = 2000(250)(1 - \cos \theta)$$

$$M(\theta) = 500000(1 - \cos \theta)$$

Carga Virtual:



$$0 \leq \theta \leq 90^\circ$$

$$m(\theta) = 0.5(250)(1 - \cos \theta)$$

$$m(\theta) = 125(1 - \cos \theta)$$

La flecha se calcula con: $\delta = \int_0^L \frac{Mm}{EI} ds$

Como $ds = r d\theta$:

$$\delta_{cl} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{Mm}{EI} r d\theta$$

$$\delta_{cl} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{(500000(1 - \cos \theta))(125(1 - \cos \theta))}{EI} 250 d\theta$$

$$\delta_{cl} = \frac{3.125 \times 10^{10}}{EI} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \theta)^2 d\theta$$



$$I = \frac{10(50)^3}{12} = 104166.667 \text{ cm}^4$$

$$EI = (50000)(104166.667) = 5208333333.33 \text{ kg} - \text{cm}^2$$

$$\delta_{CL} = \frac{3.125 \times 10^{10}}{5208333333.33} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \theta)^2 d\theta$$

$$\delta_{CL} = 6 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \theta)^2 d\theta$$

$$\delta_{CL} = 6 \int_0^{\pi/2} (1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta$$

$$\delta_{CL} = 6 \left[\int_0^{\pi/2} d\theta - 2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta + \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \right]$$

$$\delta_{CL} = 6 \left[[\theta]_0^{\pi/2} - 2[\text{sen} \theta]_0^{\pi/2} + \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \text{sen} 2\theta \right]_0^{\pi/2} \right]$$

$$\delta_{CL} = 6 \left[\frac{\pi}{2} - 2 + \frac{\pi}{4} \right]$$

$$\delta_{CL} = 2.137 \text{ cm}$$

$$\delta_{CL} = 21.372 \text{ mm}$$

CONCLUSIONS



CONCLUSIONES.

En conclusión, el ingeniero civil debe tener conocimiento de cómo calcular las deformaciones en estructuras ya que es de suma importancia conocer el valor de éstas para no exceder los valores máximos permisibles establecidos en los reglamentos de construcciones, pues de lo contrario podría causar sensación de inseguridad a los ocupantes y además con estos valores permisibles se busca siempre no dañar los elementos que se apoyen sobre la estructura y conociendo el valor de las deformaciones podremos saber si estamos dentro o no de la tolerancia establecida por los reglamentos.

Además de lo anterior, se puede concluir que por medio de los métodos presentados en este trabajo se pueden resolver estructuras que implican cierta complejidad, las cuales con solo las ecuaciones de la estática es imposible resolver (vigas hiperestáticas), ya que con estos métodos se plantean ecuaciones adicionales de deformación necesarias para la solución de las mismas. Además, se lograron resolver vigas con cambio de su sección transversal, una armadura sujeta a cambio de temperatura y un arco.

BIBLIOGRAFÍA



BIBLIOGRAFÍA.

- ✚ *Mecánica de Materiales.*
Gere y Timoshenko.
Internacional Thomson Editores 4ª Edición.

- ✚ *Introducción a la Mecánica de Sólidos.*
Egor P. Popov.
Editorial Limusa.

- ✚ *Apuntes del Curso Propedéutico de la Maestría en Estructuras.*
Profr. Jesús Álvarez Sereno.
Curso 2005-2006.