



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE  
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL

# “PROGRAMAS DIDACTICOS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL”

**TESINA**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

**INGENIERO CIVIL**

**PRESENTA:**

**JORGE OSWALDO NAVARRO ALVARADO**

**ASESOR:**

**DR. JOSÉ MANUEL JARA GUERRERO**

MORELIA, MICH. JULIO 2010



Introducción .....	1
1. Ambiente del Programa Visual Basic .....	2
1.1 Programación estructurada .....	2
1.2 Programación orientada a objetos .....	2
1.3 Visual Basic.....	3
2. Análisis Estructural de Vigas Simplemente Apoyadas.....	4
2.1 Tipos de cargas .....	5
2.2 Reacciones.....	5
2.3 Momento flexionante .....	6
2.4 Deflexión en la viga .....	6
2.5 Ejemplo .....	6
3. Propiedades Geométricas de Cuerpos Planos.....	18
3.1 Centroide de un área.....	18
3.2 Segundo momento o momento de inercia de un área .....	19
3.3 Teorema de los ejes paralelos o teorema de Steiner.....	21
3.4 Producto de inercia.....	22
3.5 Ejes principales y momentos principales de inercia .....	23
3.6 Ejemplo .....	27
4. Rigidez y Coeficientes de Transporte.....	43
4.1 Ejemplo .....	44
5. Análisis Estructural de un Grupo de Pilas .....	50
5.1 Ejemplo .....	50
6. Conclusiones .....	54
7. Bibliografía.....	55

### Agradecimientos

Este trabajo es la culminación de un gran esfuerzo hecho por varias personas donde el menos importante podría ser el mío más no así el mayor beneficiado.

Es por eso que debo agradecer a todos los profesores que fueron los encargados de guiarme a lo largo de mi formación, desde aquellos que impartieron clases de una manera interina, pasando por los titulares de las materias y terminando con los directivos.

Debo agradecer a mi familia y en una manera muy especial a mi madre que sin su ayuda esto simplemente no hubiese existido ni en mi pensamiento.

A mi asesor Dr. José Manuel Jara por brindarme sus conocimientos y por su disponibilidad para que este trabajo se realizara.

## Introducción

En el estudio de licenciaturas en ingenierías es muy común la resolución de una variedad muy grande de problemas de diversas ramas como mecánica de suelos, pavimentos, topografía, hidráulica, mecánica de materiales, estructuras, química, física, matemáticas, electricidad, etc. Muchos de estos problemas por lo general no tenemos manera de saber si la solución a la que hemos llegado es la correcta o no, es por esto la necesidad de que cada vez se vayan desarrollando más tipos de software didácticos que nos permitan encontrar solución a los problemas planteados.

En este trabajo se han tocado cuatro temas particulares de la mecánica, y se han diseñado cuatro aplicaciones que nos permitirán darle solución a una infinidad de casos para cada uno de estos temas.

El primero de estos es el ANÁLISIS DE VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS, en este tema la aplicación se desarrolló para realizar el análisis de vigas simplemente apoyadas y sometidas a los tipos de cargas más comunes (carga puntual, carga distribuida, carga linealmente variable). La aplicación calcula las reacciones en los apoyos, el momento máximo y su distancia de aplicación, el momento y la deflexión al centro del claro.

La segunda aplicación es enfocada a LAS PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE CUERPOS PLANOS, esta aplicación es una herramienta muy útil para cualquiera que se encuentre relacionado con el área de mecánica, así sean alumnos o profesores. Su utilidad radica en el rápido cálculo de las propiedades geométricas más comunes de cuerpos planos, que realizadas paso a paso nos consumiría una cantidad importante de tiempo. Estas propiedades son área, centroide, segundo momento de área o momento de inercia con respecto al eje centroidal, y los segundos momentos de área principales así como el ángulo de los ejes principales.

La aplicación número tres corresponde al cálculo de los COEFICIENTES DE RIGIDEZ Y DE TRANSPORTE. En el diseño de estructuras para puentes o para aquellas que soportaran los techos en bodegas y naves industriales es común el uso de vigas de sección transversal variable, esto para ahorrarse material que se traduce en un ahorro económico significativo. En este tipo de vigas es necesario conocer los coeficientes de rigidez y de transporte para el cálculo de los elementos mecánicos.

Por último pero no el menos importante se diseñó una aplicación para el ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE UN GRUPO DE PILOTES. Esta es una aplicación que nos permite conocer la carga que se transmite a cada pilote en un grupo de estos sometido a una o varias cargas puntuales.

## 1. Ambiente del Programa Visual Basic

En nuestra época el diseño de aplicaciones se ha ido transformando rápidamente, desde tener una programación secuencial hasta llegar a una programación estructurada.

A partir de la programación estructurada los esfuerzos se han basado en explotar la reutilización del código llevándonos a tener un tipo de programación orientada a objetos. Aunque los estilos de programación van evolucionando no se ha podido desechar los anteriores.

Un estilo de programación es un método que nos permite elaborar de una manera específica las aplicaciones que deseamos, y cada estilo se ha preocupado por optimizar este trabajo.

Algunas características básicas de un buen programa son las siguientes: el programa debe correr y cumplir la función para la que fue diseñado; no debe tener dificultades para casos particulares; contar con una buena documentación del mismo, es decir que el programa contenga referencias sobre lo que se está plasmando en el código y/o en la pantalla de interfaz con el usuario y por último la eficiencia del programa a la hora de comprenderlo. Estas dos últimas son muy importantes a la hora de darle mantenimiento al mismo.

### 1.1 Programación estructurada

Una programación estructurada esta basada en los siguientes dos puntos

1. Diseño del programa de lo general a lo particular: Es decir, encontrar la solución de un problema mediante la descomposición del mismo en problemas más particulares y simples.
2. Teorema de estructura: Los programas son diseñados usando las estructuras básicas en la programación;
  - Secuencial: Realizar acciones deseadas escritas una a continuación de otra.
  - Alternativa: Uso de estructuras de decisión, es decir, se evalúa una expresión y dependiendo del resultado se elige la siguiente acción.
  - Repetitiva: Uso de estructuras que nos permiten realizar una misma acción un número determinado o indeterminado de veces.

### 1.2 Programación orientada a objetos

La Programación orientada a objetos es un estilo de programación que utiliza objetos ligados entre si mediante mensajes para darle solución a los problemas que uno se plantea.

Este estilo de programación tiene cuatro mecanismos básicos de programación, objetos, mensajes, clases y métodos.

Los objetos son la única parte de la que está conformado un programa tradicional. Podríamos definirlos como un conjunto definido de datos y los procedimientos particulares para manejarlos.

La comunicación entre los *objetos* se hace mediante mensajes. Es decir cuando un objeto recibe un mensaje, éste realiza un procedimiento de acuerdo al tipo de mensaje recibido. A este procedimiento se le llama *método*.

Los métodos se asocian a clases de objetos y son los que determinan el comportamiento del objeto con la presencia de un *mensaje*. Durante la ejecución de un método este podrá enviar mensajes a otros objetos para transmitir información.

Cuando nos referimos a las *clases*, nos referimos a un tipo de objetos definidos por el usuario. Es decir un objeto de una determinada clase se crea en el momento en que se declara una variable de dicha clase.

### 1.3 Visual Basic

Es un lenguaje de programación que nos permite la creación de aplicaciones usando la Programación Orientada a Objetos descrita brevemente en los párrafos anteriores.

Así pues dentro del programa de Visual Basic se tienen diversas *clases* predefinidas que nos permitirán la creación de *objetos* que nos ayudarán a resolver problemas de una manera más sencilla y con una interfaz más amigable para el usuario.

Los objetos de Visual Basic contienen *propiedades*, *métodos* y *eventos*. Las propiedades son los datos que describen un objeto, los *eventos* son los hechos probables que pueden ocurrir en un objeto y los *métodos* son la agrupación del código que se ejecuta al ocurrir un evento.

## 2. Análisis Estructural de Vigas Simplemente Apoyadas

Para realizar correctamente un análisis estructural es necesario idealizar los elementos estructurales que se estudiarán, para esto es necesario crear un **modelo** que represente de la manera más precisa las condiciones reales de la estructura. Este modelo debe ser tan simple que permita un cálculo matemático muy sencillo, pero tan complejo que describa con gran exactitud el comportamiento de la estructura.

Es necesario tener en cuenta que los modelos son sólo una aproximación a la realidad y por tanto en estos se llegan a despreciar factores que no son de gran importancia, por ejemplo; un apoyo simple siempre tendrá una ligera fricción en su comportamiento y un apoyo empotrado siempre tendrá una ligera rotación.

La clasificación de las vigas está en función de los tipos de apoyo que estas tienen, por ejemplo una **viga simplemente apoyada** o **viga simple** es aquella que en uno de sus extremos tiene un soporte de pasador y en el otro un soporte de rodillo. Un soporte de pasador es aquel que permite la rotación del elemento mas no así su desplazamiento horizontal o vertical, en cambio el soporte de rodillo permite la rotación y el desplazamiento en algún sentido.

La viga que se muestra a continuación esta sujeta a diversos tipos de cargas. En el extremo A de la viga el **soporte de pasador** impide el movimiento vertical y horizontal mas no así la rotación, por lo tanto se generarán dos reacciones ( $H_A$  y  $R_A$ ); En el extremo B el **soporte de rodillo** solo restringe el desplazamiento vertical, pero queda libre el horizontal y la rotación, por lo tanto solo existirá una reacción ( $R_B$ ). Las reacciones verticales y horizontales pueden tener cualquier sentido, esto dependerá de la dirección, sentido y magnitud de las cargas que se apliquen en las vigas.

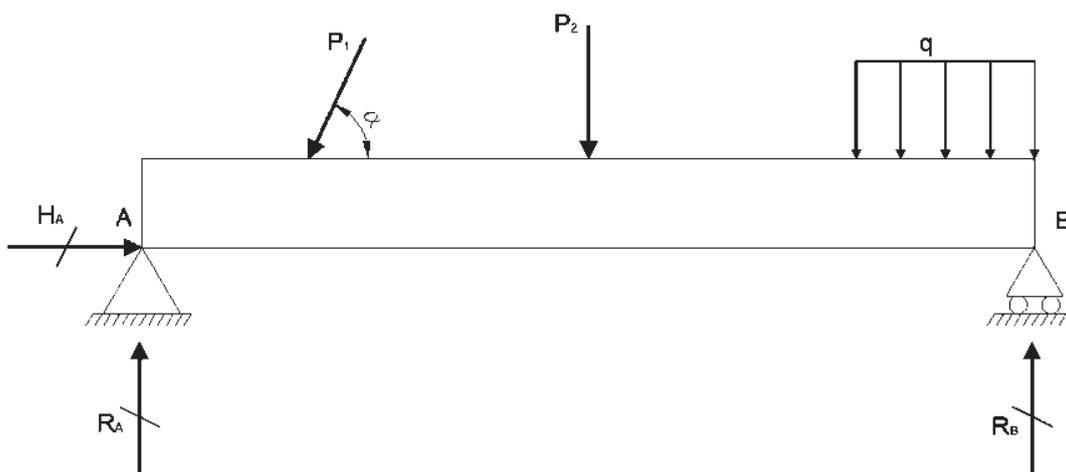


Fig. 2-1 Viga simplemente apoyada con diversos tipos de carga.

## 2.1 Tipos de cargas

Existen diversos tipos de cargas, algunas de las más comunes aplicadas a vigas se presentan en la *figura 2-1*.

Una **carga puntual** puede ser en realidad una fuerza concentrada sobre un área de aplicación muy pequeña sobre la viga. En la *figura 2-1* el ejemplo es la carga  $P_1$  y  $P_2$ . Existen cargas repartidas a lo largo de una distancia sobre el eje de la viga, éstas pueden idealizarse como **cargas distribuidas** o **cargas uniformemente distribuidas**, tales como la carga  $q$  en la *figura 2-1*. Este tipo de cargas se miden por la intensidad de carga sobre unidad de longitud, es decir t/m, Kg/m, etc. Los tipos de cargas que varían su intensidad a lo largo de la distancia de desarrollo de la misma pueden ser idealizadas como una **carga linealmente variable**, tal como la carga aplicada en la viga en cantiliver de la *figura 2-2* que comienza con la carga  $q_1$  y termina en  $q_2$ .

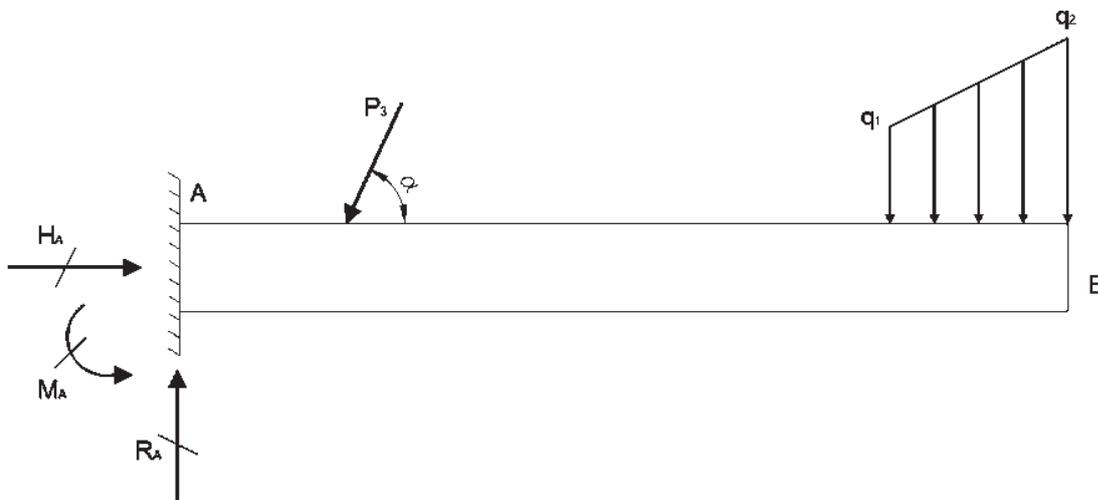


Fig. 2-2 Viga en cantiliver con diversos tipos de carga.

## 2.2 Reacciones

En la mayoría de los casos, el primer paso para el análisis de una viga consiste en el cálculo de sus reacciones. Si la viga está apoyada de una manera estáticamente determinada, sus reacciones podrán obtenerse mediante el uso de diagramas de cuerpo libre y ecuaciones de equilibrio.

A partir del cálculo de reacciones pueden encontrarse las fuerzas cortantes, los momentos flexionantes y las deflexiones en cada punto de la viga.

### 2.3 Momento flexionante

En las vigas cargadas con fuerzas o pares, se presentarán esfuerzos y deformaciones unitarias en el interior de la viga, los cuales para su determinación es necesario primero encontrar las fuerzas internas y los pares internos que actúan sobre las secciones transversales de la viga.

Consideremos una viga en cargada sobre su extremo izquierdo y empotrada en el extremo derecho, ahora cortemos a través de la viga a una distancia  $X$  y aislemos la parte izquierda, esta parte izquierda se convierte ahora en nuestro cuerpo libre el cual permanece en equilibrio debido a la fuerza  $P$  y a los esfuerzos generados por la parte derecha de la viga, los cuales son los actuantes en la sección transversal cortada. Hasta este punto aún no se conoce la distribución de esfuerzos sobre esta sección, solo se sabe que la sumatoria de estos, es tal que nos permita mantener el cuerpo libre en equilibrio.

De la estática sabemos que la resultante de los esfuerzos que actúan sobre la sección transversal pueden reducirse a una **fuerza cortante  $V$**  y a un **momento flexionante  $M$** .

Las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes, son las resultantes de los esfuerzos distribuidos sobre la sección transversal; por tanto, estas cantidades se conocen en forma genérica como **resultantes de esfuerzo**.

En todos los elementos estructurales es necesario conocer las **resultantes de esfuerzo** máximas. En nuestro caso nos enfocaremos a conocer el **momento máximo** a lo largo de la viga, así como su posición.

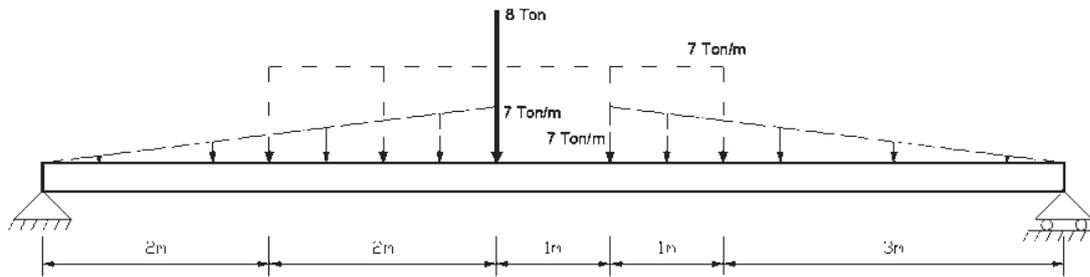
### 2.4 Deflexión en la viga

No podríamos dejar sin mencionar el cálculo de las deflexiones en las vigas, debido a que estas son una parte importante del análisis y diseño estructural; por ejemplo en una viga estáticamente indeterminada es un aspecto esencial para el cálculo de sus reacciones, las deflexiones también son importantes en el análisis dinámico como cuando se investigan las respuestas de edificios a sismos.

A veces, se calculan las deflexiones para comprobar que estén dentro de límites tolerables; por ejemplo, las especificaciones para el diseño de edificios suelen fijar límites superiores a las deflexiones. Las deflexiones grandes en edificios dan mal aspecto (e incluso ponen nerviosos a los ocupantes) y pueden causar agrietamientos en techos y paredes.

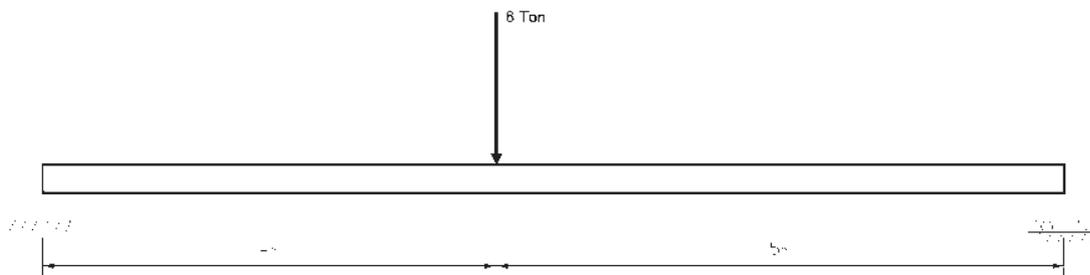
### 2.5 Ejemplo

A continuación se mostrara la solución paso a paso de una viga simplemente apoyada bajo una configuración de cargas que conjuga los cuatro tipos diferentes de cargas que el programa permite usar.



La manera de resolver el problema será mediante el método de superposición.

### Carga Puntual



$$\sum M_A = 0$$

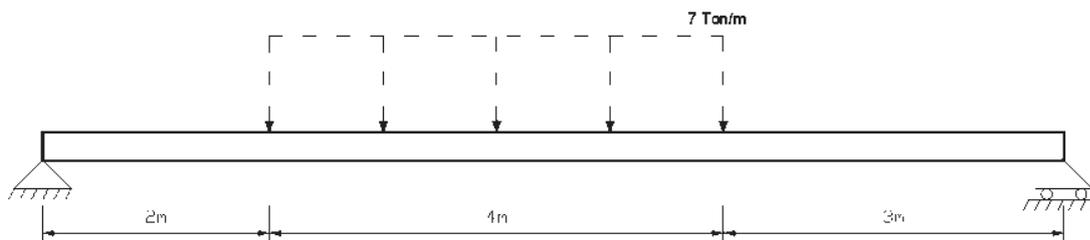
$$8 * (4) - R_B * (9) = 0$$

$$32 = 9R_B$$

$$R_B = \frac{32}{9} \text{ TON}$$

$$R_A = 8 - \frac{32}{9} = \frac{40}{9} \text{ TON}$$

### Carga Distribuida



$$\sum M_A = 0$$

$$(7 * 4) * \left(2 + \frac{1}{2} * 4\right) - R_B * (9) = 0$$

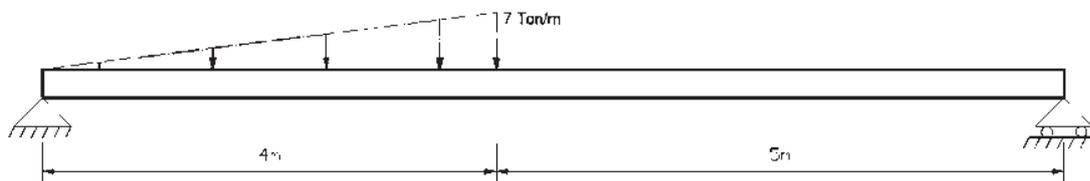
$$28 * (4) - R_B * (9) = 0$$

$$112 = 9R_B$$

$$R_B = \frac{112}{9} TON$$

$$R_A = (7 * 4) - \frac{112}{9} = \frac{140}{9} TON$$

Carga triangular izquierda – derecha



$$\sum M_A = 0$$

$$\left(\frac{7 * 4}{2}\right) * \left(\frac{2}{3} * 4\right) - R_B * (9) = 0$$

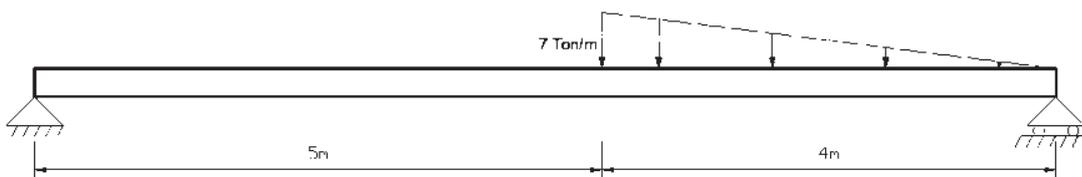
$$14 * \left(\frac{8}{3}\right) - R_B * (9) = 0$$

$$\frac{112}{3} = 9R_B$$

$$R_B = \frac{112}{27} TON$$

$$R_A = \left(\frac{7 * 4}{2}\right) - \frac{112}{27} = \frac{266}{27} TON$$

Carga triangular derecha-izquierda



Como puede observarse la viga con esta carga es muy similar a la anterior, sólo que la carga se aplica en sentido opuesto y comienza por el extremo derecho de la viga. Por lo tanto el valor de las reacciones se intercambian.

$$R_B = \frac{266}{27} TON \qquad R_A = \frac{112}{27} TON$$

Sumando los valores de las reacciones de cada viga se obtiene que:

$$R_B = \left( \frac{32}{9} + \frac{112}{9} + \frac{112}{27} + \frac{266}{27} \right) = 30 TON$$

$$R_A = \left( \frac{40}{9} + \frac{140}{9} + \frac{266}{27} + \frac{112}{27} \right) = 34 TON$$

Por inspección puede saberse que el valor máximo del momento se encuentra entre  $2 \leq x \leq 4$  por lo tanto se procederá a plantear la ecuación de momentos para ese tramo.

$$M_X = 34X - \frac{7}{4} \langle X - 0 \rangle * \frac{\langle X - 0 \rangle}{2} * \frac{1}{3} \langle X - 0 \rangle - \frac{7}{2} * \langle X - 2 \rangle^2$$

$$M_X = 34X - \frac{7}{24} \langle X - 0 \rangle^3 - \frac{7}{2} * \langle X - 2 \rangle^2$$

Aplicando el teorema de máximos y mínimos

$$\frac{d(M_X)}{dx} = \frac{d \left( 34X - \frac{7}{24} \langle X - 0 \rangle^3 - \frac{7}{2} * \langle X - 2 \rangle^2 \right)}{dx} = 0$$

$$34 - 3 * \frac{7}{24} \langle X - 0 \rangle^2 - 2 * \frac{7}{2} * \langle X - 2 \rangle = 0$$

$$34 - \frac{21}{24} \langle X \rangle^2 - 7 * \langle X - 2 \rangle = 0$$

$$34 - \frac{21}{24} X^2 - 7X + 14 = 0$$

$$-\frac{7}{8} X^2 - 7X + 48 = 0$$

Dando solución a la ecuación cuadrática se tiene que:

$$X = \frac{-4 \pm \sqrt{217}}{14/8}$$

$$X_1 = 4.4176 \quad X_2 = -12.4176$$

Puede observarse que ambos valores salen del intervalo de aplicación de la fórmula por lo tanto la solución no es ninguno de estos. Se procederá a tabular los valores del momento en este rango para localizar el valor máximo.

x	M
2	65.66667
2.5	80.44271
3	90.625
3.5	98.61979
<b>4</b>	<b>103.3333</b>

De lo anterior se obtiene que el valor máximo del momento es 103.333Ton en X=4m.

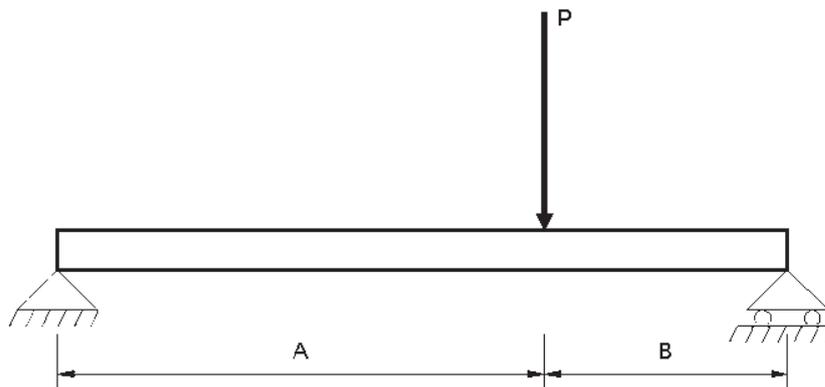
El valor del momento al centro de la viga se obtendrá haciendo suma de momentos hasta ese punto.

$$M_{X=4.5} = 34 * 4.5 - \left(\frac{7 * 4}{2}\right) * \left(\frac{1}{3}(4) + 0.5\right) - (7 * 2.5) * \left(\frac{1}{2} * 2.5\right) - 8 * 0.5$$

$$M_{X=4.5} = \frac{2435}{24} = 101.458_{Ton-m}$$

El cálculo de las deflexiones se hará trabajando cada una de las cargas de manera independiente y encontrando las deflexiones al centro de la viga mediante fórmulas que por lo general se encuentran en la mayoría de los libros de mecánica de materiales y posteriormente haciendo la suma de éstas para encontrar la deflexión total de la viga.

a) Carga puntual



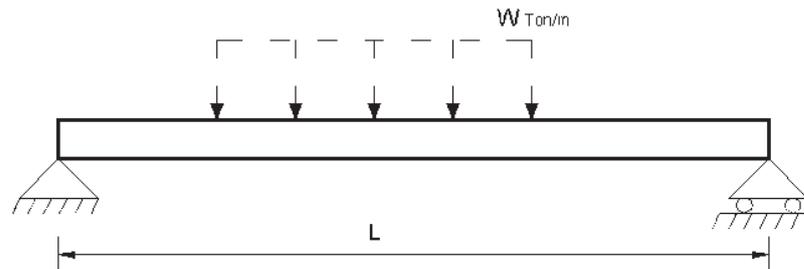
$$v_{Puntual} = -\frac{1}{EI} \left[ \frac{PL^2}{48} (L - A) + \frac{P}{12} (L - A)^3 - \frac{PL^2}{12} (L - A) \right] \quad B \leq A$$

$$v_{Puntual} = -\frac{1}{EI} \left[ \frac{(8)(9)^2}{48} (9 - 5) + \frac{8}{12} (9 - 5)^3 - \frac{(8)(9)^2}{12} (9 - 5) \right] \quad B \leq A$$

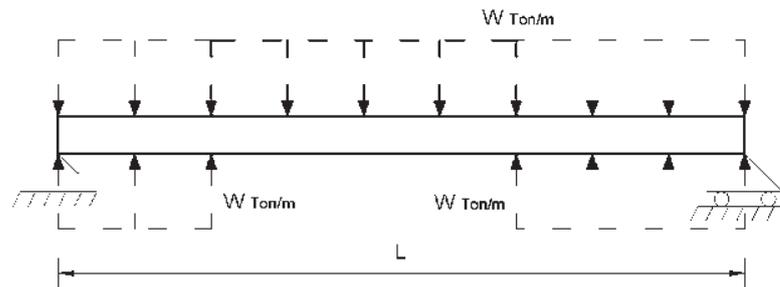
$$v_{Puntual} = -\frac{1}{EI} \left[ \frac{(8)(9)^2}{48} (9-5) + \frac{8}{12} (9-5)^3 - \frac{(8)(9)^2}{12} (9-5) \right] \quad B \leq A$$

$$v_{Puntual} = \frac{358}{3EI}$$

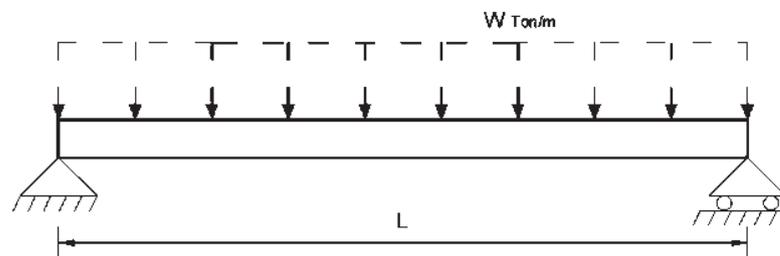
b) Carga distribuida



Esta configuración de viga-carga deberá ser modificada por otra configuración equivalente que arroje el mismo resultado pero que podamos resolverla mediante fórmulas. A continuación se presenta la configuración propuesta.



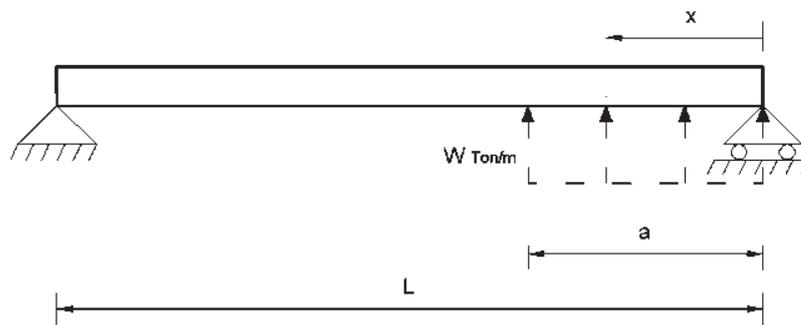
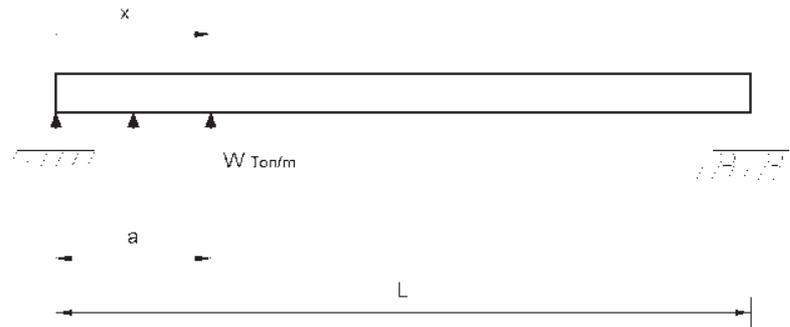
Esta viga se divide en tres vigas independientes y el resultado de las deflexiones se suma o resta dependiendo el caso para obtener la deflexión total de la carga linealmente repartida.



$$v_1 = \frac{5wL^4}{384EI}$$

$$v_1 = \frac{5(7)(9)^4}{384EI}$$

$$v_1 = \frac{76545}{128EI}$$



$$v_{2,3} = \frac{wa^2}{24LEI} (-a^2L + 4L^2x + a^2x - 6Lx^2 + 2x^3) \quad a \leq x \leq L$$

$$v_2 = \frac{(7)(2)^2}{24(9)EI} \left( -(2)^2(9) + 4(9)^2 \left(\frac{9}{2}\right) + (2)^2 \left(\frac{9}{2}\right) - 6(9) \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 2 \left(\frac{9}{2}\right)^3 \right) \quad a \leq x \leq L$$

$$v_3 = \frac{(7)(3)^2}{24(9)EI} \left( -(3)^2(9) + 4(9)^2 \left(\frac{9}{2}\right) + (3)^2 \left(\frac{9}{2}\right) - 6(9) \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 2 \left(\frac{9}{2}\right)^3 \right) \quad a \leq x \leq L$$

$$v_2 = \frac{1645}{24EI}$$

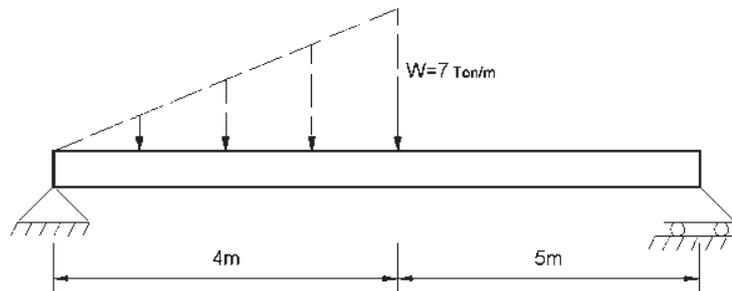
$$v_3 = \frac{4725}{32EI}$$

$$v_{\text{carga distribuida}} = v_1 - (v_2 + v_3)$$

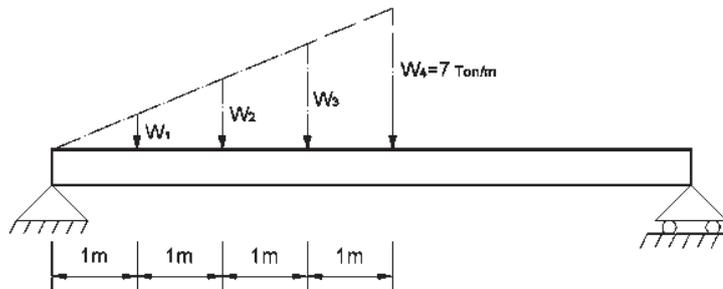
$$v_{\text{carga distribuida}} = \frac{76545}{128EI} - \left( \frac{1645}{24EI} + \frac{4725}{32EI} \right)$$

$$v_{\text{carga distribuida}} = \frac{381.8098958}{EI}$$

c) Carga linealmente variable



El cálculo de la deflexión para este tipo de cargas se hará dividiendo la carga en cuatro cargas, una triangular y tres trapeziales, y tomando cada una de estas cargas como una carga puntual, esto debido a la complejidad de obtener una función que nos describa las deflexiones a lo largo de la viga.



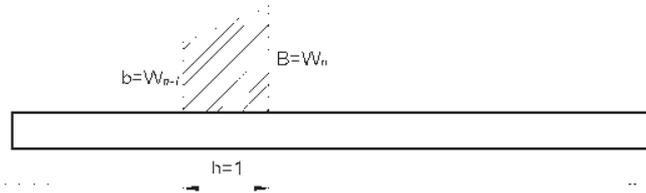
$$w_1 = \frac{7}{4}(1) = \frac{7}{4}$$

$$w_2 = \frac{7}{4}(2) = \frac{7}{2}$$

$$w_3 = \frac{7}{4}(3) = \frac{21}{4}$$

$$w_4 = \frac{7}{4}(4) = 7$$

Cálculo de las cargas concentradas.



$$w_{T_n} = \frac{w_{n-1} + w_n}{2} \Delta x$$

$$w_{T_1} = \frac{0 + \frac{7}{4}}{2} (1) = \frac{7}{8} \text{Ton}$$

$$w_{T_2} = \frac{\frac{7}{4} + \frac{7}{2}}{2} (1) = \frac{21}{8} \text{Ton}$$

$$w_{T_3} = \frac{\frac{7}{2} + \frac{21}{4}}{2} (1) = \frac{35}{8} \text{Ton}$$

$$w_{T_4} = \frac{\frac{21}{4} + 7}{2} (1) = \frac{49}{8} \text{Ton}$$

Las cargas serán aplicadas en el centroide de cada una de ellas para lo cual será necesario conocer la ubicación de éste. La fórmula para el centroide de un trapecio es la siguiente:

$$\bar{x} = \left(\frac{d}{3}\right) \left(\frac{b + 2B}{b + B}\right)$$

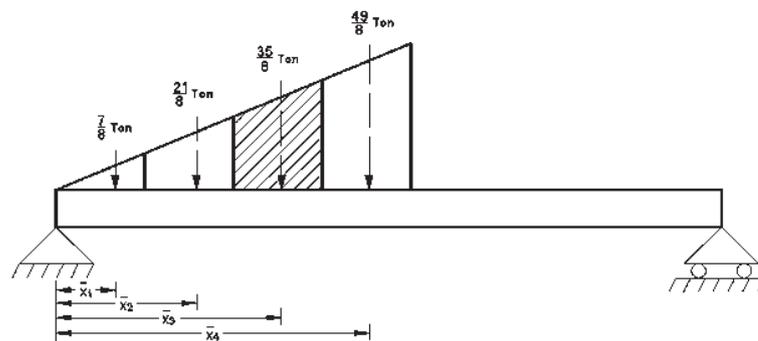
$$\bar{x}_1 = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{0 + 2 * \left(\frac{7}{8}\right)}{0 + \frac{7}{8}}\right) = \frac{2}{3} m$$

$$\bar{x}_2 = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{\frac{7}{8} + 2 * \left(\frac{21}{8}\right)}{\frac{7}{8} + \frac{21}{8}}\right) + 1 = \frac{19}{12} m$$

$$\bar{x}_3 = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{\frac{21}{8} + 2 * \left(\frac{35}{8}\right)}{\frac{21}{8} + \frac{35}{8}}\right) + 2 = \frac{61}{24} m$$

$$\bar{x}_4 = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{\frac{35}{8} + 2 * \left(\frac{49}{8}\right)}{\frac{35}{8} + \frac{49}{8}}\right) + 3 = \frac{127}{36} m$$

A continuación se presenta la viga idealizada con estas cargas.



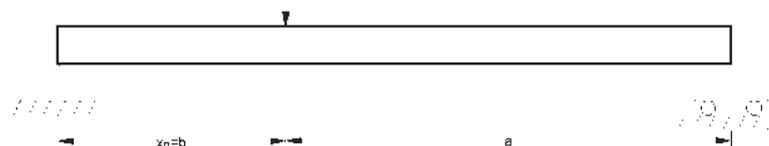
La deflexión total de la viga se obtendrá empleando el método de superposición, y tratando cada viga independientemente.

La deflexión en el centro de la viga puede obtenerse como se mostró anteriormente o mediante la siguiente fórmula.

$$v = \frac{Pb(3L^2 - 4b^2)}{48EI} \quad b \leq a$$

Para poder aplicar esta fórmula en nuestras vigas es necesario llamarle a la longitud mayor y  $b$  a la menor.

$W_{n\tau}$



$$v_1 = \frac{\left(\frac{7}{8}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(3 * 9^2 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)}{48EI} = \frac{2.931520062}{EI}$$

$$v_2 = \frac{\left(\frac{21}{8}\right)\left(\frac{19}{12}\right)\left(3 * 9^2 - 4\left(\frac{19}{12}\right)^2\right)}{48EI} = \frac{20.17272497}{EI}$$

$$v_3 = \frac{\left(\frac{35}{8}\right)\left(\frac{61}{24}\right)\left(3 * 9^2 - 4\left(\frac{61}{24}\right)^2\right)}{48EI} = \frac{50.30772645}{EI}$$

$$v_4 = \frac{\left(\frac{49}{8}\right)\left(\frac{127}{36}\right)\left(3 * 9^2 - 4\left(\frac{127}{36}\right)^2\right)}{48EI} = \frac{86.97936068}{EI}$$

$$v_{\text{carga linealmente variable}} = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$$

$$v_{\text{carga linealmente variable I-D}} = \frac{160.3913322}{EI}$$

Análogamente se hace el mismo procedimiento para la segunda carga triangular, pero por inspección se puede ver que llegaríamos al mismo valor, por lo tanto:

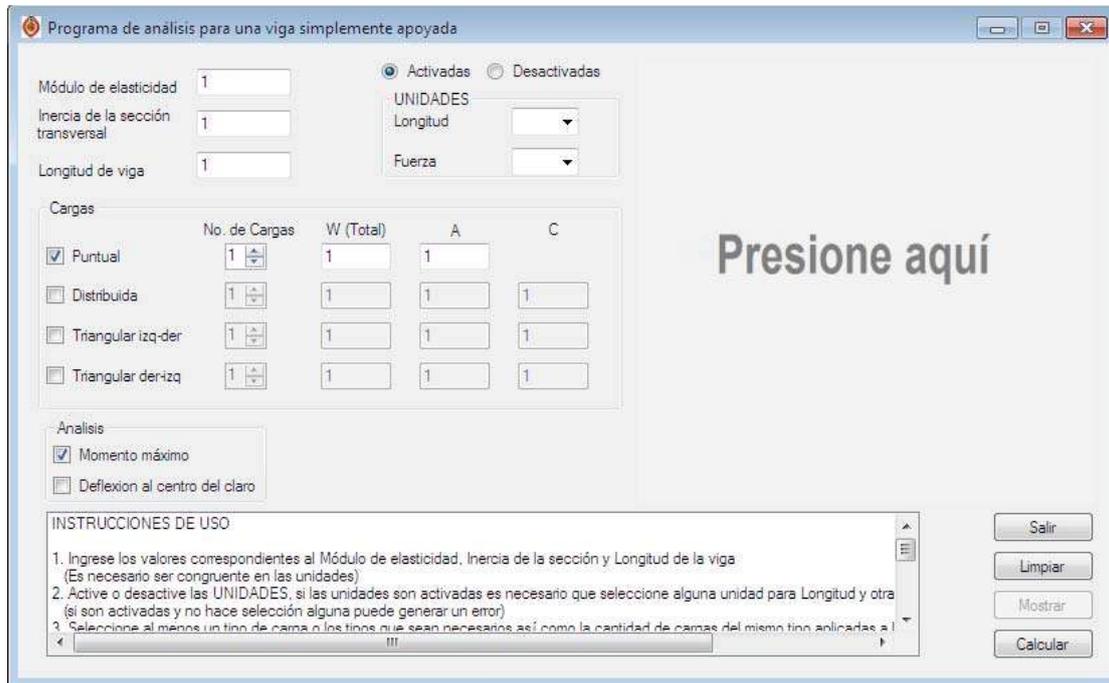
$$v_{\text{carga linealmente variable D-I}} = \frac{160.3913322}{EI}$$

La deflexión total se obtiene de sumar todas las deflexiones anteriores.

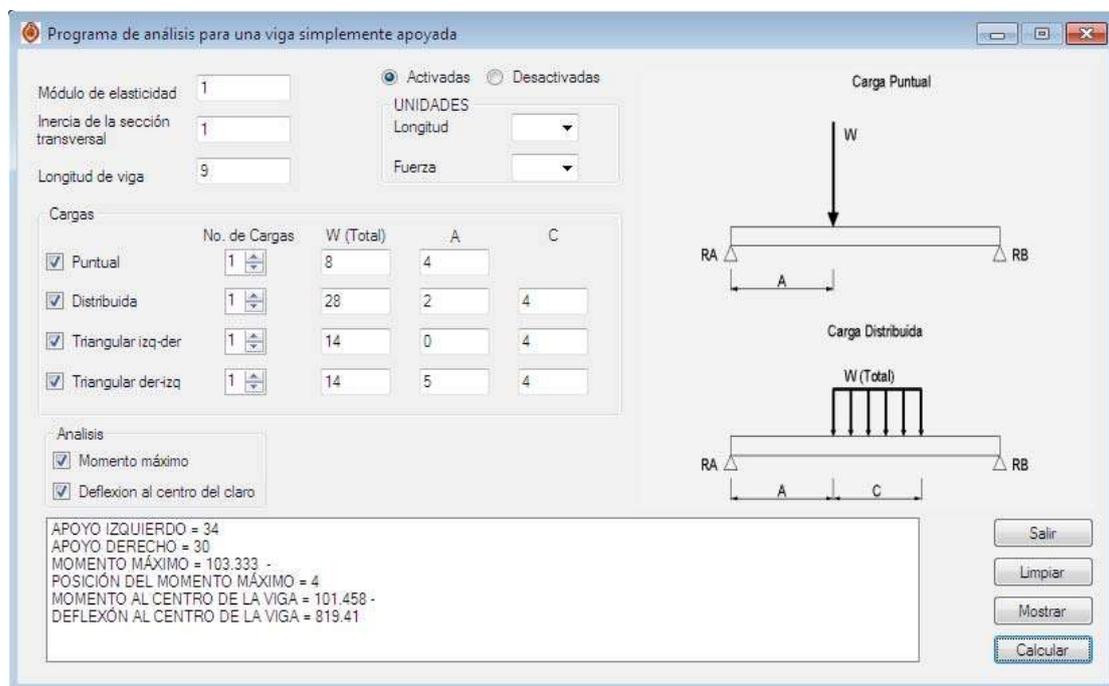
$$v_{\text{total}} = \frac{358}{3EI} + \frac{381.8098958}{EI} + \frac{160.3913322}{EI} + \frac{160.3913322}{EI} = \frac{821.9258}{EI}$$

Ahora se procederá a solucionar el problema mediante el programa de computadora.

A continuación se muestra la pantalla principal, justo como aparece al iniciar el programa, puede observarse que las instrucciones de uso están en la parte inferior.



Será necesario activar las casillas de las cargas que se utilizarán, llenar los valores según las instrucciones y marcar los tipos de análisis.



Puede observarse que el valor de la deflexión varía ligeramente con respecto al calculado anteriormente, esto es debido a que en nuestro cálculo las cargas linealmente variables solo se dividieron en cuatro cargas a diferencia del programa que lo divide en 5000, por lo tanto nos permite una exactitud mucho mayor.

### 3. Propiedades Geométricas de Cuerpos Planos

La fuerza de gravedad de la tierra ejerce una fuerza de atracción sobre un cuerpo rígido, esta fuerza podría representarse por una fuerza **W**. Esta es el resultante de la sumatoria de todas las fuerzas generadas en cada una de las partículas que componen al cuerpo y que debe ser aplicada en el *centro de gravedad del cuerpo*.

#### 3.1 Centroide de un área

Considérese un cuerpo plano con geometría irregular *figura 3-1*. Divida el cuerpo en  $n$  pequeños cada uno representado por coordenadas  $X_n$  y  $Y_n$  y una fuerza  $\Delta W_n$  generada por la fuerza de gravedad. Estas  $\Delta W_n$  son representadas como fuerzas paralelas y la suma de sus magnitudes nos da como resultado el peso del cuerpo.

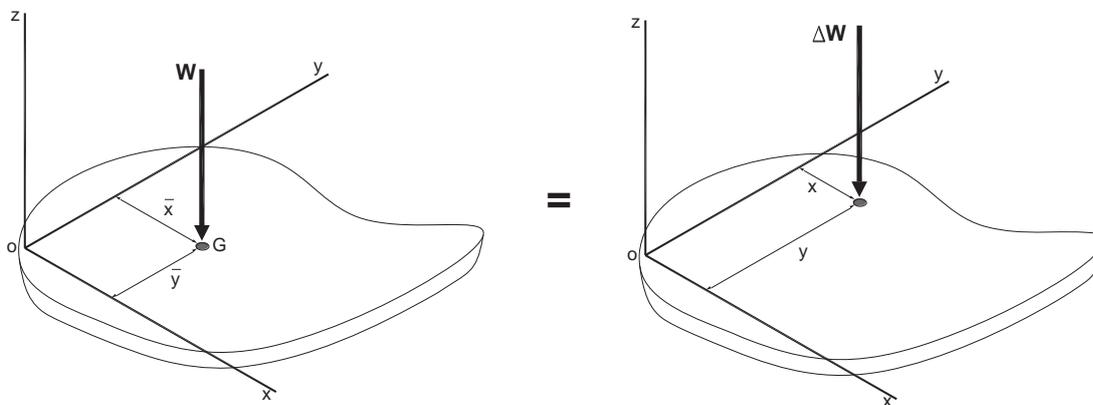


Fig. 3-1 Viga en cantiliver con diversos tipos de carga.

$$W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \dots + \Delta W_n$$

Para la obtención de las coordenadas  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  del punto G, donde es aplicable la resultante **W** debe hacerse suma de momentos con respecto a los ejes  $x$  y  $y$  para cada uno de los elementos del cuerpo y por estática se obtiene que la suma debe ser igual al peso del cuerpo por la coordenada del centroide, es decir:

$$\sum M_y: \quad \bar{x}W = x_1\Delta W_1 + x_2\Delta W_2 + \dots + x_n\Delta W_n$$

$$\sum M_x: \quad \bar{y}W = y_1\Delta W_1 + y_2\Delta W_2 + \dots + y_n\Delta W_n$$

Las ecuaciones anteriores podrían ser expresadas de la siguiente manera

$$\bar{x}W = \int x dW \quad \bar{y}W = \int y dW$$

Las ecuaciones anteriores definen el centro de gravedad G de una placa plana.

Para una placa homogénea bastaría con hacer las siguientes sustituciones:

$$\Delta W = \gamma t \Delta A$$

Donde:  $\Delta W$  = peso específico (peso por unidad de volumen) del material.  
 $t$  = espesor de la placa.  
 $\Delta A$  = área del elemento.

En forma similar se puede expresar la magnitud del peso de toda la placa como:

$$W = \gamma t A$$

Donde  $A$  es el área total de la placa.

Si sustituimos este valor de  $W$  en las ecuaciones de momento y se divide todo entre  $\gamma t$ , se obtiene

$$\sum M_y: \quad \bar{x}A = x_1\Delta A_1 + x_2\Delta A_2 + \dots + x_n\Delta A_n$$

$$\sum M_x: \quad \bar{y}A = y_1\Delta A_1 + y_2\Delta A_2 + \dots + y_n\Delta A_n$$

Las cuales quedarían expresadas en forma de integral de la siguiente manera.

$$\bar{x}A = \int x dA \quad \bar{y}A = \int y dA$$

Estas son las ecuaciones que definen el centro de gravedad de un cuerpo plano con densidad homogénea. Al punto representado por las coordenadas  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  también se conocen como el **centroide (C) del área (A)**. Si el cuerpo plano no fuera homogéneo estas ecuaciones no podrían ser utilizadas para determinar el **centro de gravedad**, sin embargo seguirían describiendo el centroide del área.

### 3.2 Segundo momento o momento de inercia de un área

Una viga con sección transversal uniforme y sometida a dos pares iguales y opuestos aplicados en cada uno de los extremos de la viga, se conoce como una viga en *flexión pura* que con la ayuda de la mecánica de materiales se puede demostrar que las fuerzas internas en cualquier sección de la viga son fuerzas distribuidas cuyas magnitudes  $\Delta F = ky \Delta A$  varían linealmente con la distancia  $Y$  que existen entre el elemento y el eje que pasa a través del centroide de dicha sección. Este eje representado por el eje  $x$  en la *figura 3-2*, es conocido como *eje neutro* de la sección. Las fuerzas que se generan en un lado del *eje neutro* serán fuerzas de compresión y las que se generan en el otro lado serán las de tensión, como es de imaginarse

conforme las fuerzas estén más cerca del *eje neutro* éstas tenderán a cero. La magnitud de la resultante **R** de las fuerzas elementales  $\Delta F$  que actúan sobre toda la sección es

$$R = \int ky \, dA = k \int y \, dA$$

Esta integral es conocida como el **primer momento  $Q_x$**  de la sección con respecto al eje  $x$ ; puede notarse que la sumatoria algebraica de estos elementos  $y * dA$  dará como resultado cero puesto que el centroide de la sección está ubicado en el eje  $x$ . Por consiguiente, el sistema de fuerzas  $\Delta F$  se reduce a un par (momento flector) cuya magnitud debe ser igual a la suma de los momentos  $\Delta M_x = y \Delta F = ky^2$  generados por las fuerzas elementales. Integrando esta ecuación sobre toda la sección se tiene que:

$$M = \int ky^2 \, dA = k \int y^2 \, dA$$

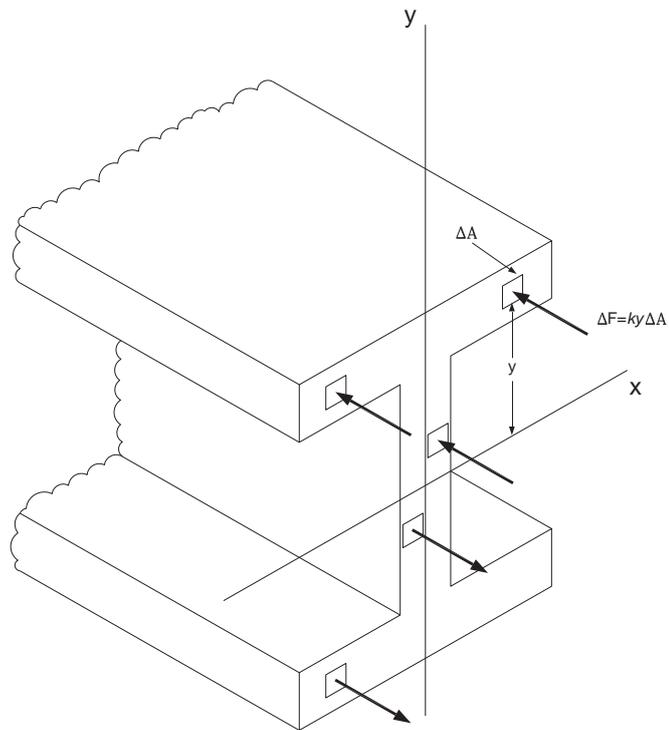


Fig. 3-2 Viga sometida a flexión pura debido a dos pares iguales.

Esta integral es conocida como el **segundo momento o momento de inercia de la sección** de la viga con respecto al eje  $x$  y es representado con  $I_x$ . Como puede observarse este valor siempre será positivo o cero sin importar la ubicación del elemento  $dA$ .

De lo anterior se deduce que para un área plana el momento de inercia queda expresado como:

$$I_x = \int y^2 \, dA \quad I_y = \int x^2 \, dA$$

Estas integrales son conocidas como **los momentos rectangulares de inercia** del área  $A$ .

### 3.3 Teorema de los ejes paralelos o teorema de Steiner

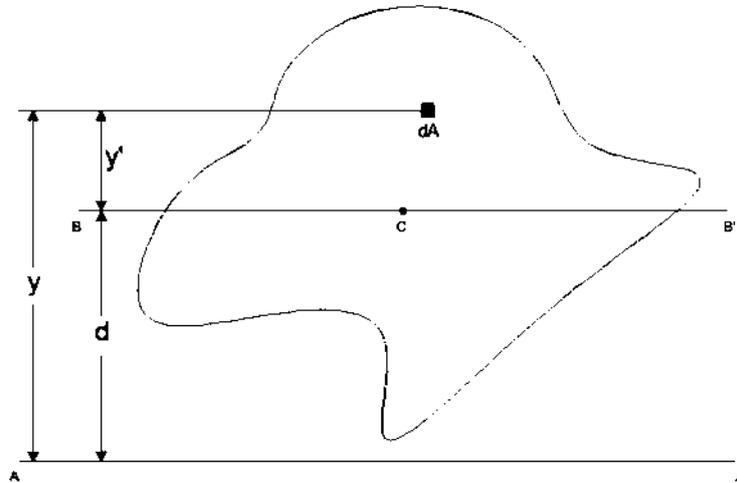


Fig. 3-3 Área de un cuerpo irregular.

El momento de inercia  $I$  de un área  $A$  con respecto a un eje  $AA'$  y representando con  $y$  a la distancia que existe entre un elemento  $dA$  y el eje  $AA'$  tal como se muestra en la *figura 3-3*, es expresado con la siguiente integral.

$$I = \int y^2 dA$$

Se traza un nuevo eje  $BB'$  que cruce al centroide  $C$  del área y paralelo al eje  $AA'$ , el cual llamaremos eje centroidal. A la distancia que hay entre el elemento  $dA$  y el eje  $BB'$  la llamaremos  $y'$ . Ahora bien, podría escribirse  $y=y'+d$  donde  $d$  es la distancia que hay entre los ejes  $AA'$  y  $BB'$ .

Sustituyendo esa igualdad en la integral anterior se obtiene

$$I = \int (y' + d)^2 dA = \int y'^2 dA + 2d \int y' dA + d^2 \int dA$$

Donde la primer integral es el segundo momento de inercia  $\bar{I}$  con respecto al eje centroidal del área, la segunda integral es igual al primer momento del área con respecto al *eje centroidal*  $BB'$  por lo tanto es igual a cero, la tercer integral es igual al área de la figura.

Por lo anteriormente mencionado, el *segundo momento de área* o *momento de inercia* con respecto a cualquier eje  $AA'$  es igual al *momento de inercia del área* con respecto al eje centroidal  $BB'$  más el producto del área por el cuadrado de la distancia que existe entre los ejes  $AA'$  y  $BB'$ , es decir

$$I = \bar{I} + Ad^2$$

Esta fórmula expresa que el momento de inercia  $I$  de un área con respecto a cualquier eje dado  $AA'$  es igual al momento de inercia  $\bar{I}$  del área con respecto a un eje centroidal  $BB'$  que es paralelo a  $AA'$  más el producto del área  $A$  y el cuadrado de la distancia  $d$  entre los dos ejes.

### 3.4 Producto de inercia

El producto de inercia es conocido como la sumatoria del producto entre las coordenadas de un par de puntos por su diferencial de área, es decir:

$$I_{XY} = \int xy \, dA$$

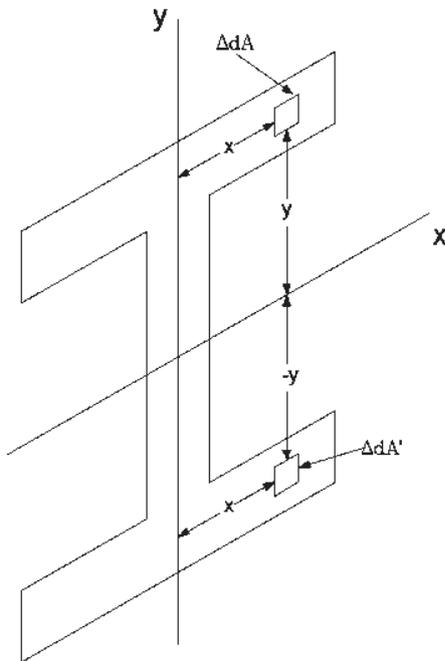


Fig. 3-4 Sección simétrica en ambos ejes.

Como puede observarse el producto de inercia puede ser positivo o negativo o cero si uno o ambos de sus ejes son de simetría. Esto puede verse más claramente si se considera una sección canal mostrada en la *figura 3-4*. Como esta sección es simétrica con respecto al eje  $x$  puede asociarse para cada elemento  $dA$  con coordenadas  $x,y$  un elemento  $dA'$  con coordenadas  $x,-y$ . Así pues al evaluar la integral en sus límites correspondientes, la contribución de este par de elementos se cancela y por tanto  $I_{XY}$  se reduce a cero.

Para los productos de inercia se puede derivar un teorema de ejes paralelos similar al establecido para momentos de inercia. El producto de inercia  $I_{xy}$  de un área  $A$  con respecto a un sistema de coordenadas rectangulares  $y$  y representando con  $x,y$  a las coordenadas que un elemento  $dA$  tiene con respecto a dicho sistema es expresado con la integral anterior. Se traza un nuevo sistema de coordenadas rectangulares que cruce al centroide  $C$  del área, cuyas coordenadas son  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$ , el cual será paralelo al sistema

original y denotando con  $x',y'$  las coordenadas que tiene un elemento  $dA$  con respecto al nuevo sistema.

Ahora bien, podría escribirse  $x = x' + \bar{x}$  y  $y = y' + \bar{y}$  tal como nos muestra la *figura 3-5*.

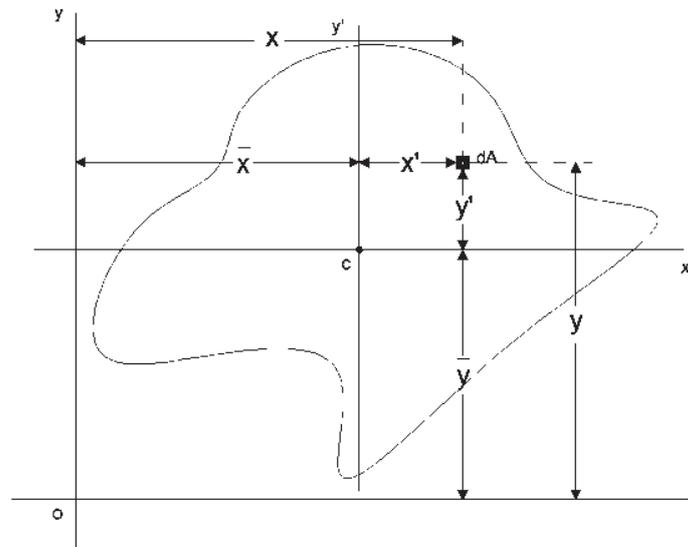


Fig. 3-5 Área de un cuerpo irregular.

Al sustituir las relaciones anteriores en la integral principal de estudio se obtiene la siguiente expresión para el producto de inercia e  $I_{xy}$ :

$$I_{XY} = \int xy \, dA = \int (x' + \bar{x})(y' + \bar{y}) \, dA = \int x'y' \, dA + \bar{y} \int x' \, dA + \bar{x} \int y' \, dA + \bar{x}\bar{y} \int dA$$

Donde la primera integral es el producto de inercia del área con respecto al eje centroidal de la misma, la segunda y tercera integral son el primer momento del área con respecto a los ejes centroidales, por lo tanto estas se reducen a cero, quedando así la tercer integral, la cual es equivalente al área total  $A$ . Por lo tanto se tiene que el producto de inercia de un área con respecto a cualquier sistema coordenado rectangular es igual al producto de inercia con respecto al sistema coordenado rectangular centroidal más el producto de las coordenadas del centroide por su área, es decir

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A$$

### 3.5 Ejes principales y momentos principales de inercia

Considere el área  $A$  y los ejes coordenados  $x$  y  $y$  figura 3-6. Suponiendo que los momentos y el producto de inercia del área  $A$  son conocidos, se desea determinar los momentos y el producto de inercia  $I_{x'}$ ,  $I_{y'}$ , e  $I_{x'y'}$ , de  $A$  con respecto a nuevos ejes  $x'$  y  $y'$  que se obtienen rotando los ejes originales alrededor del origen a través de un ángulo  $\theta$ .

$$I_x = \int y^2 \, dA \quad I_y = \int x^2 \, dA \quad I_{XY} = \int xy \, dA \quad (1)$$

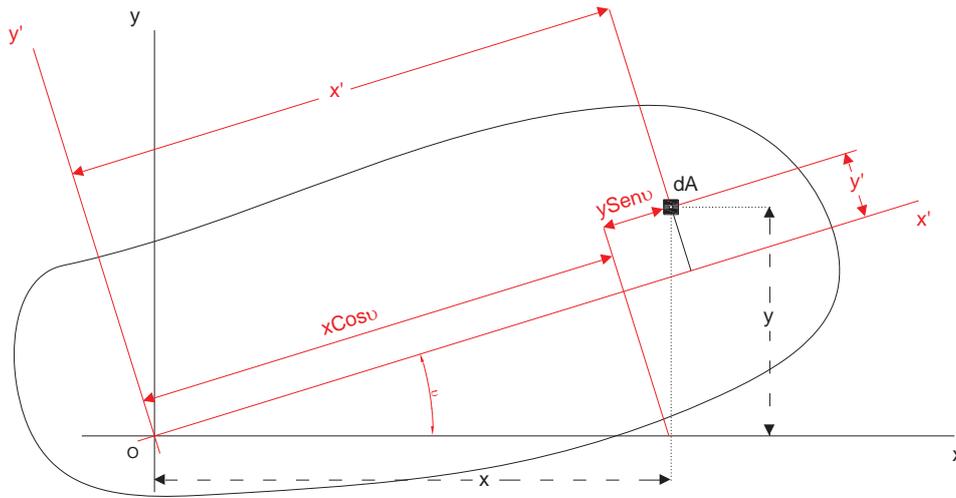


Fig. 3-6 Proyección de coordenadas del sistema de ejes principales sobre un sistema de coordenadas.

Primero se deben señalar las siguientes relaciones entre las coordenadas  $x', y'$  y  $x, y$  de un elemento de área  $dA$ :

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta \quad y' = y \cos \theta - x \sin \theta$$

Sustituyendo  $y'$  en la expresión  $I_x$  para encontrar  $I_{x'}$ , se escribe

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \int (y')^2 dA = \int (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA \\ &= (\cos \theta)^2 \int y^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int xy dA + (\sin \theta)^2 \int x^2 dA \end{aligned}$$

Relacionando con las expresiones en (1), se tiene

$$I_{x'} = I_x (\cos \theta)^2 - 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta + I_y (\sin \theta)^2 \quad (2)$$

Análogamente se deducen las expresiones para  $I_{y'}$  e  $I_{x'y'}$

$$I_{y'} = I_y (\cos \theta)^2 + 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta + I_x (\sin \theta)^2 \quad (3)$$

$$I_{x'y'} = (I_x - I_y) \sin \theta \cos \theta + I_{xy} ((\cos \theta)^2 - (\sin \theta)^2) \quad (4)$$

Usando las relaciones trigonométricas siguientes

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta & \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ (\cos \theta)^2 &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} & (\sin \theta)^2 &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \end{aligned}$$

Las ecuaciones 2, 3 y 4 se expresan de la siguiente manera:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (5)$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (6)$$

$$I_{x'y'} = \frac{(I_x - I_y)}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \quad (7)$$

Sumando la ecuación (5) y la (6), puede observarse que

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y \quad (8)$$

Como puede observarse las ecuaciones (5) y (6) tienen la forma de las ecuaciones paramétricas de un círculo, lo anterior nos indica que al seleccionar un par de ejes rectangulares y graficando un punto M con abscisa  $I_{x'}$  y ordenada  $I_{x'y'}$  para cualquier valor de  $\theta$ , los puntos que se obtengan de la misma manera se localizarán sobre una circunferencia. Para poder establecer esta propiedad es necesario eliminar  $\theta$  de las ecuaciones (5) y (6); lo anterior se lleva a cabo transponiendo el término  $(I_x + I_y)/2$  en la ecuación (5), elevando al cuadrado ambos miembros de las ecuaciones (5) y (6) y sumando las expresiones obtenidas. Así se escribe

$$\left(I_{x'} - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{x'y'}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2 \quad (9)$$

Estableciendo

$$I_{prom} = \frac{I_x + I_y}{2} \quad y \quad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (10)$$

Se escribe la identidad (9) de la siguiente forma:

$$(I_{x'} - I_{prom})^2 + I_{x'y'}^2 = R^2$$

La anterior ecuación es de un círculo de radio R con centro en C y cuyas coordenadas x, y son  $(I_{prom}, 0)$ , respectivamente.

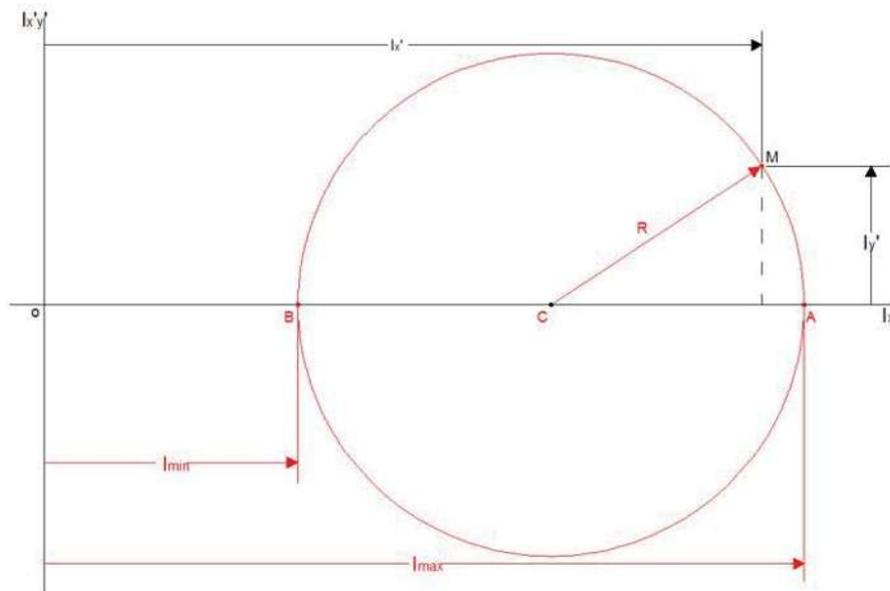


Fig. 3-7 Círculo de coordenadas  $(I_x', I_y')$  con centro en  $(I_{prom}, 0)$  y radio  $R$ .

Los puntos A y B que son la intersección con el eje de las abscisas tienen un especial interés; El máximo valor de inercia  $I_{x'}$  corresponde al punto de intersección A, mientras que el mínimo valor corresponde al punto de intersección en B y ambos valores tienen un valor de cero para el producto de inercia  $I_{x'y'}$ . Así pues los valores  $\theta_m$  del parámetro  $\theta$  correspondientes a ambos puntos A, B se podrán obtener tomando  $I_{x'y'} = 0$  en la ecuación (7), obteniendo

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (11)$$

La ecuación anterior nos arroja dos valores de  $2\theta_m$  que se encuentran separados  $180^\circ$  ó dos valores  $\theta_m$  separados  $90^\circ$ . Uno de estos valores corresponde al punto A en la figura 3-7 y a un eje a través de O en la figura 3-6 con respecto al cual el momento de inercia del área dada es máximo, el otro valor corresponde al punto B y a un eje a través de O con respecto al cual el momento de inercia del área es mínimo. Los dos ejes definidos de esta forma son perpendiculares entre sí, se conocen como los *ejes principales del área con respecto a O* y los valores correspondientes  $I_{max}$  e  $I_{min}$  del momento de inercia se llaman *momentos principales de inercia del área con respecto a O*.

Debido a los dos valores de  $\theta_m$  definidos en la ecuación anterior se obtuvieron con  $I_{x'y'} = 0$  para la ecuación (7) entonces el producto de inercia de un área con respecto a sus ejes principales es igual a cero.

De la figura 3-7 se observa que

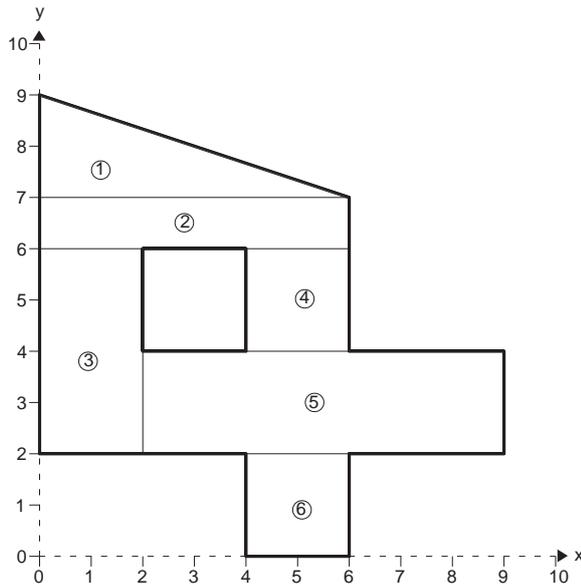
$$I_{m\acute{a}x} = I_{prom} + R \quad I_{m\acute{i}n} = I_{prom} - R \quad (12)$$

Reescribiendo las fórmulas anteriores en una misma mediante la ayuda de lo establecido en las fórmulas (10), se obtiene

$$I_{máx,min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (13)$$

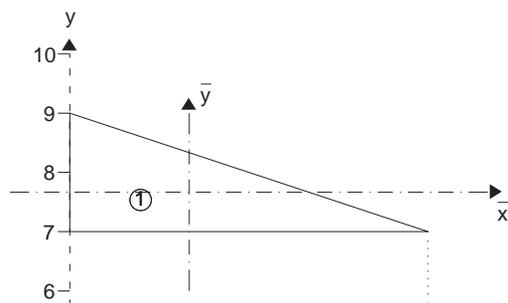
### 3.6 Ejemplo

Calcular las propiedades geométricas anteriormente descritas para la sección hueca irregular mostrada a continuación.



Se procederá a dividir la sección en 6 figuras geométricas elementales y se obtendrá el área y centroide de cada una de ellas referenciándolo con los ejes de coordenadas mostrados en la imagen. Posteriormente se sumarán las áreas y se calculará el centroide de la sección hueca irregular.

1)

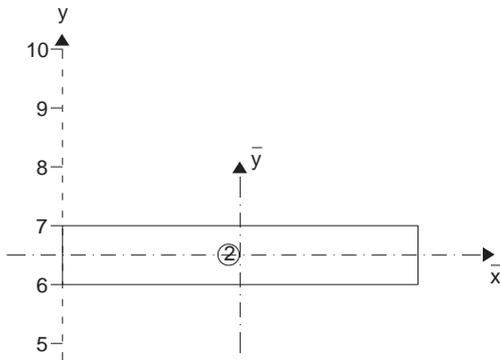


$$A = \frac{(6)(2)}{2} u^2$$

$$\bar{x} = \frac{1}{3}(6) = 2u$$

$$\bar{y} = 7 + \frac{1}{3}(2) = \frac{23}{3}u$$

2)



$$A = (6)(1) = 6u^2$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(6) = 3u$$

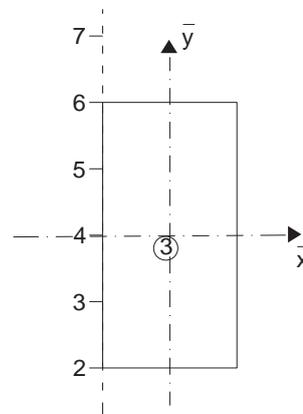
$$\bar{y} = 6 + \frac{1}{2}(1) = \frac{13}{2}u$$

3)

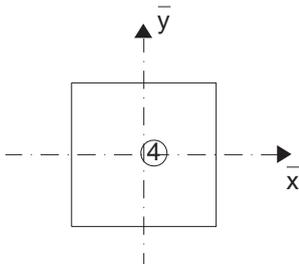
$$A = (2)(4) = 8u^2$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(2) = 1u$$

$$\bar{y} = 2 + \frac{1}{2}(4) = 4u$$



4)



$$A = (2)(2) = 4u^2$$

$$\bar{x} = 4 + \frac{1}{2}(2) = 5u$$

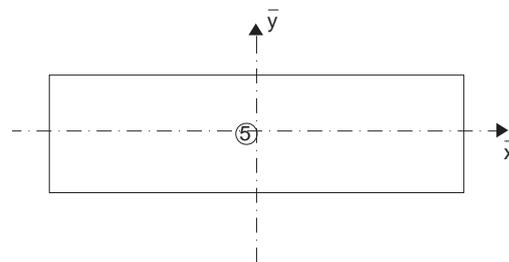
$$\bar{y} = 4 + \frac{1}{2}(2) = 5u$$

5)

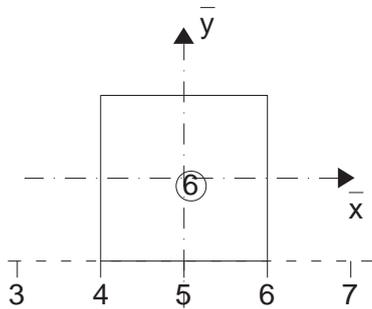
$$A = (7)(2) = 14u^2$$

$$\bar{x} = 2 + \frac{1}{2}(7) = \frac{11}{2}u$$

$$\bar{y} = 2 + \frac{1}{2}(2) = 3u$$



6)



$$A = (2)(2) = 4u^2$$

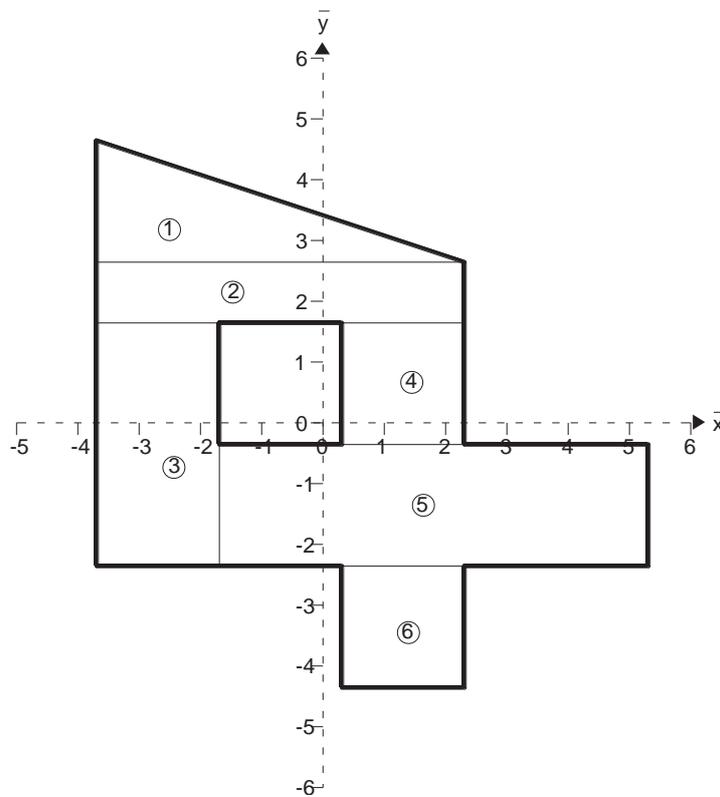
$$\bar{x} = 4 + \frac{1}{2}(2) = 5u$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2}(2) = 1u$$

Área y centroide de la sección hueca irregular

$$\bar{x} = \frac{(6)(2) + (6)(3) + (8)(1) + (4)(5) + (14)\left(\frac{11}{2}\right) + (4)(5)}{42} = \frac{155}{42}u$$

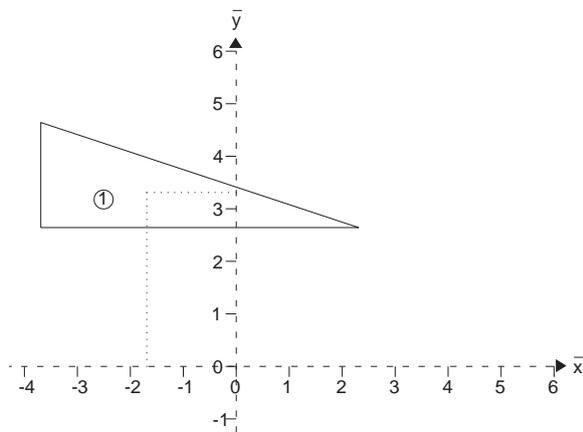
$$\bar{y} = \frac{(6)\left(\frac{23}{3}\right) + (6)\left(\frac{13}{3}\right) + (8)(4) + (4)(5) + (14)(3) + (4)(1)}{42} = \frac{183}{42}u$$



Traslado de las coordenadas al sistema de ejes centroidales

Es necesario ubicar la figura con los nuevos ejes de coordenadas, que se pondrán en el centroide la figura. Lo más importante es ubicar los centroides de las figuras geométricas elementales con las nuevas coordenadas, para esto sólo basta restar las coordenadas del centroide principal a las de los centroides de cada una de las figuras geométricas elementales.

Figura 1



$$\bar{x}_1 = 2 - \frac{155}{42} = -\frac{71}{42}u$$

$$\bar{y}_1 = \frac{23}{3} - \frac{183}{42} = \frac{139}{42}u$$

Figura 2

$$\bar{x}_2 = 3 - \frac{155}{42} = -\frac{29}{42}u$$

$$\bar{y}_2 = \frac{13}{2} - \frac{183}{42} = \frac{15}{7}u$$

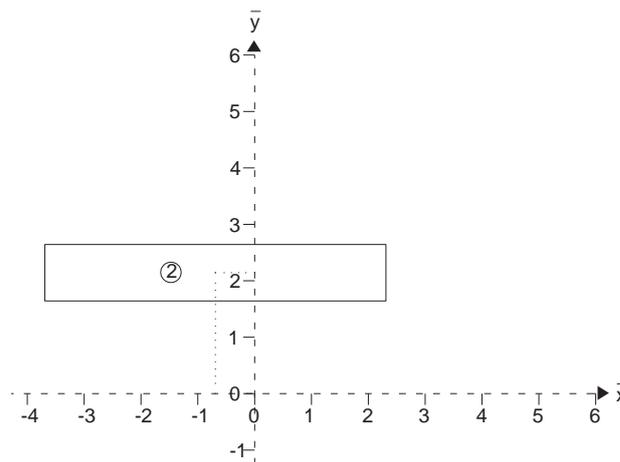
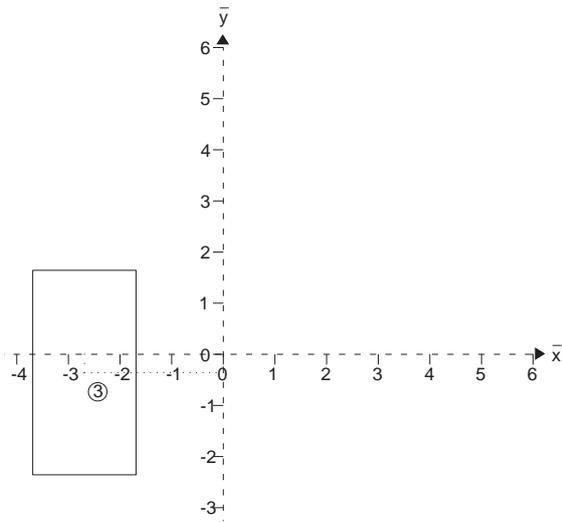


Figura 3



$$\bar{x}_3 = 1 - \frac{155}{42} = -\frac{113}{42}u$$

$$\bar{y}_3 = 4 - \frac{183}{42} = -\frac{5}{14}u$$

Figura 4

$$\bar{x}_4 = 5 - \frac{155}{42} = \frac{55}{42}u$$

$$\bar{y}_4 = 5 - \frac{183}{42} = \frac{9}{14}u$$

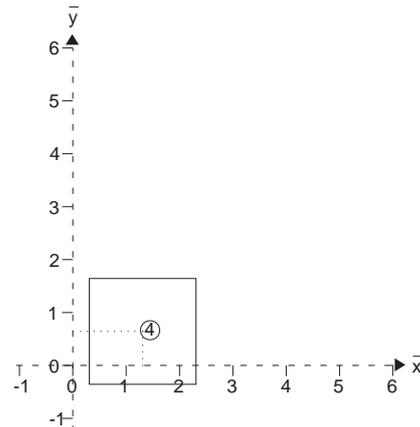
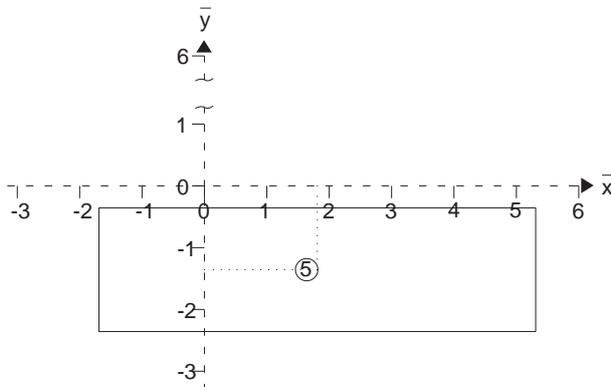


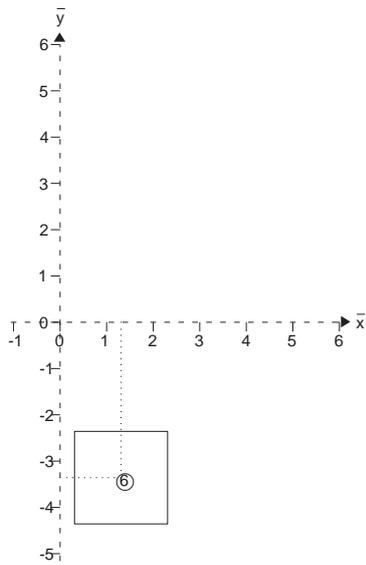
Figura 5



$$\bar{x}_5 = \frac{11}{2} - \frac{155}{42} = \frac{38}{21}u$$

$$\bar{y}_5 = 3 - \frac{183}{42} = -\frac{19}{14}u$$

Figura 6

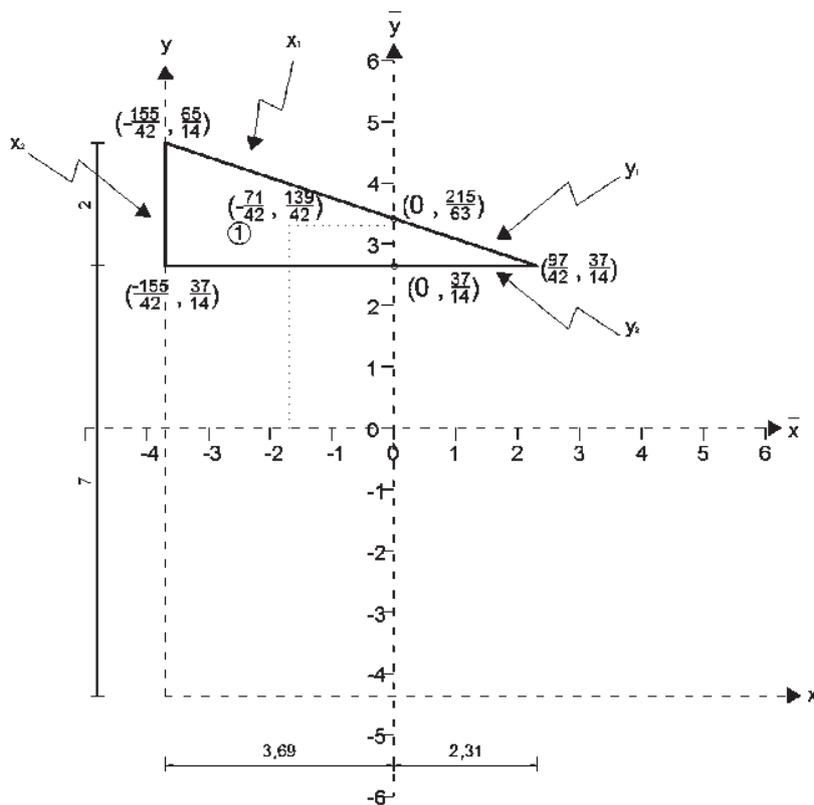


$$\bar{x}_6 = 5 - \frac{155}{42} = \frac{55}{42}u$$

$$\bar{y}_6 = 1 - \frac{183}{42} = -\frac{47}{14}u$$

Cálculo de los momentos de inercia con respecto al eje centroidal de la figura principal

1) Figura 1



Ecuación de las rectas que forman el triángulo de la figura 1. Para facilitar su cálculo se obtendrán los puntos donde las rectas cruzan con el eje d las ordenadas.

Por triángulos semejantes.

$$\frac{b}{h} = \frac{6}{2} = \frac{155}{42} \quad \Delta y = \frac{155}{126}$$

$$\left(y = \frac{65}{14}\right) - \left(\Delta y = \frac{155}{126}\right) = \left(b_1 = \frac{215}{63}\right)$$

$$y = mx + b \quad \text{Ecuación de la recta}$$

$$m_1 = \frac{\frac{37}{14} - \frac{65}{14}}{\frac{97}{42} - \frac{-155}{42}} = -\frac{1}{3}$$

$$m_2 = \frac{\frac{37}{14} - \frac{37}{14}}{\frac{97}{42} - \frac{-155}{42}} = 0$$

$$y_1 = -\frac{1}{3}x + \frac{215}{63}$$

$$x_1 = -3y + \frac{215}{21}$$

*Ecuaciones de la recta 1*

$$y_2 = \frac{37}{14}$$

*Ecuación de la recta 2*

Inercia con respecto al eje X

$$\bar{I}_{x1} = \int y^2 dA$$

$$\bar{I}_{x1} = \int y^2 (x * dy)$$

$$\bar{I}_{x1} = \int_{\frac{37}{14}}^{\frac{65}{14}} y^2 \left(-3y + \frac{215}{21} - \left(-\frac{155}{42}\right)\right) dy$$

$$\bar{I}_{x1} = \int_{\frac{37}{14}}^{\frac{65}{14}} \left(-3y^3 + \frac{195}{14}y^2\right) dy$$

$$\bar{I}_{x1} = -\frac{3}{4}y^4 + \frac{65}{14}y^3 \Big|_{\frac{37}{14}}^{\frac{65}{14}}$$

$$\bar{I}_{x1} = 116.1666038 - 49.11558335 = \frac{6571}{98}u^4$$

Con respecto al eje Y

$$\bar{I}_{y1} = \int x^2 dA$$

$$\bar{I}_{y1} = \int x^2 (y * dx)$$

$$\bar{I}_{y1} = \int_{-\frac{155}{42}}^{\frac{97}{42}} x^2 \left( -\frac{1}{3}x + \frac{215}{63} - \frac{37}{14} \right) dx$$

$$\bar{I}_{y1} = \int_{-\frac{155}{42}}^{\frac{97}{42}} \left( -\frac{1}{3}x^3 + \frac{97}{126}x^2 \right) dx$$

$$\bar{I}_{y1} = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{97}{378}x^3 \Big|_{-\frac{155}{42}}^{\frac{97}{42}}$$

$$\bar{I}_{y1} = 0.7902914341 - (-28.35596707) = \frac{8569}{294} u^4$$

Ahora se obtendrán las mismas inercias mediante el teorema de los ejes paralelos.

$$\bar{I}_{x1} = \bar{I}_{xTriangulo} + A_1 d_1^2$$

Donde:  $\bar{I}_{xTriangulo}$  = Inercia de la figura con respecto al centroide de la misma

$A_1$  = Área de la figura

$d_1$  = diferencia entre el eje centroidal de la sección hueca principal

y el eje centroidal de la figura geométrica elemental

$$\bar{I}_{xTriangulo} = \frac{bh^3}{36}$$

$$\bar{I}_{xTriangulo} = \frac{6 * 2^3}{36} = \frac{4}{3} \quad d_1 = \frac{23}{3} - \frac{183}{42} = \frac{139}{42}$$

$$\bar{I}_{x1} = \frac{4}{3} + (6) \left( \frac{139}{42} \right)^2$$

$$\bar{I}_{x1} = \frac{6571}{98} u^4$$

$$\bar{I}_{y1} = \bar{I}_{yTriangulo} + A_1 d_1'^2$$

$$\bar{I}_{yTriangulo} = \frac{hb^3}{36}$$

$$\bar{I}_{yTriangulo} = \frac{2 * 6^3}{36} = 12 \quad d'_1 = 2 - \frac{155}{42} = -\frac{71}{42}$$

$$\bar{I}_{y1} = 12 + (6) \left( -\frac{71}{42} \right)^2$$

$$\bar{I}_{y1} = \frac{8569}{294} u^4$$

Puede observarse que por ambos métodos se obtiene el mismo resultado así que por facilidad se utilizará el método de los ejes paralelos.

2) Figura 2

$$\bar{I}_{x2} = \bar{I}_{xRectangulo} + A_2 d_2^2$$

$$\bar{I}_{xRectangulo} = \frac{bh^3}{12}$$

$$\bar{I}_{xRectangulo} = \frac{6 * 1^3}{12} = \frac{1}{2} \quad d_2 = \frac{13}{2} - \frac{183}{42} = \frac{15}{7}$$

$$\bar{I}_{x2} = \frac{1}{2} + (6) \left( \frac{15}{7} \right)^2$$

$$\bar{I}_{x2} = \frac{2749}{98} u^4$$

$$\bar{I}_{y2} = \bar{I}_{yRectangulo} + A_2 d_2'^2$$

$$\bar{I}_{yRectangulo} = \frac{hb^3}{12}$$

$$\bar{I}_{yRectangulo} = \frac{1 * 6^3}{12} = 18 \quad d_2' = 3 - \frac{155}{42} = -\frac{29}{42}$$

$$\bar{I}_{y2} = 18 + (6) \left( -\frac{29}{42} \right)^2$$

$$\bar{I}_{y2} = \frac{6133}{294} u^4$$

3) Figura 3

$$\bar{I}_{x3} = \bar{I}_{xRectangulo} + A_3 d_3^2$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{xRectangulo} &= \frac{bh^3}{12} \\ \bar{I}_{xRectangulo} &= \frac{2 * 4^3}{12} = \frac{32}{3} \quad d_3 = 4 - \frac{183}{42} = -\frac{5}{14} \\ \bar{I}_{x3} &= \frac{32}{3} + (8) \left( -\frac{5}{14} \right)^2 \\ \bar{I}_{x3} &= \frac{1718}{147} u^4 \\ \bar{I}_{y3} &= \bar{I}_{yRectangulo} + A_3 d_3'^2 \\ \bar{I}_{yRectangulo} &= \frac{hb^3}{12} \\ \bar{I}_{yRectangulo} &= \frac{4 * 2^3}{12} = \frac{8}{3} \quad d_3' = 1 - \frac{155}{42} = -\frac{113}{42} \\ \bar{I}_{y3} &= \frac{8}{3} + (8) \left( -\frac{113}{42} \right)^2 \\ \bar{I}_{y3} &= \frac{26714}{441} u^4 \end{aligned}$$

4) Figura 4

$$\begin{aligned} \bar{I}_{x4} &= \bar{I}_{xCuadrado} + A_4 d_4^2 \\ \bar{I}_{xCuadrado} &= \frac{bh^3}{12} \\ \bar{I}_{xCuadrado} &= \frac{2 * 2^3}{12} = \frac{4}{3} \quad d_4 = 5 - \frac{183}{42} = \frac{9}{14} \\ \bar{I}_{x4} &= \frac{4}{3} + (4) \left( \frac{9}{14} \right)^2 \\ \bar{I}_{x4} &= \frac{439}{147} u^4 \\ \bar{I}_{y4} &= \bar{I}_{yCuadrado} + A_4 d_4'^2 \\ \bar{I}_{yCuadrado} &= \frac{hb^3}{12} \\ \bar{I}_{yCuadrado} &= \frac{2 * 2^3}{12} = \frac{4}{3} \quad d_4' = 5 - \frac{155}{42} = \frac{55}{42} \\ \bar{I}_{y4} &= \frac{4}{3} + (4) \left( \frac{55}{42} \right)^2 \\ \bar{I}_{y4} &= \frac{3613}{441} u^4 \end{aligned}$$

5) Figura 5

$$\bar{I}_{x5} = \bar{I}_{xRectangulo} + A_5 d_5^2$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{x\text{Rectangulo}} &= \frac{bh^3}{12} \\ \bar{I}_{x\text{Rectangulo}} &= \frac{7 * 2^3}{12} = \frac{14}{3} \quad d_5 = 3 - \frac{183}{42} = -\frac{19}{14} \\ \bar{I}_{x5} &= \frac{14}{3} + (14) \left(-\frac{19}{14}\right)^2 \\ \bar{I}_{x5} &= \frac{1279}{42} u^4 \\ \bar{I}_{y5} &= \bar{I}_{y\text{Rectangulo}} + A_5 d_5'^2 \\ \bar{I}_{y\text{Rectangulo}} &= \frac{hb^3}{12} \\ \bar{I}_{y\text{Rectangulo}} &= \frac{2 * 7^3}{12} = \frac{343}{6} \quad d_5' = \frac{11}{2} - \frac{155}{42} = \frac{38}{21} \\ \bar{I}_{y5} &= \frac{343}{6} + (14) \left(\frac{38}{21}\right)^2 \\ \bar{I}_{y5} &= \frac{12979}{126} u^4 \end{aligned}$$

6) Figura 6

$$\begin{aligned} \bar{I}_{x6} &= \bar{I}_{xCuadrado} + A_6 d_6'^2 \\ \bar{I}_{xCuadrado} &= \frac{bh^3}{12} \\ \bar{I}_{xCuadrado} &= \frac{2 * 2^3}{12} = \frac{4}{3} \quad d_6 = 1 - \frac{183}{42} = -\frac{47}{14} \\ \bar{I}_{x6} &= \frac{4}{3} + (4) \left(-\frac{47}{14}\right)^2 \\ \bar{I}_{x6} &= \frac{6823}{147} u^4 \\ \bar{I}_{y6} &= \bar{I}_{yCuadrado} + A_6 d_6'^2 \\ \bar{I}_{yCuadrado} &= \frac{hb^3}{12} \\ \bar{I}_{yCuadrado} &= \frac{2 * 2^3}{12} = \frac{4}{3} \quad d_6' = 5 - \frac{155}{42} = \frac{55}{42} \\ \bar{I}_{y6} &= \frac{4}{3} + (4) \left(\frac{55}{42}\right)^2 \\ \bar{I}_{y6} &= \frac{3613}{441} u^4 \end{aligned}$$

La inercia total de la sección hueca irregular con respecto a los ejes centroidales es obtenida mediante la suma de las inercias de cada una de las figuras geométricas elementales.

$$\bar{I}_x = \sum_{N=1}^6 \bar{I}_{xN}$$

$$\bar{I}_x = \frac{6571}{98} + \frac{2749}{98} + \frac{1718}{147} + \frac{439}{147} + \frac{1279}{42} + \frac{6823}{147}$$

$$\bar{I}_x = \frac{2613}{14} = 186.6428571m^2$$

$$\bar{I}_y = \frac{8569}{294} + \frac{6133}{294} + \frac{26714}{441} + \frac{3613}{441} + \frac{12979}{126} + \frac{3613}{441}$$

$$\bar{I}_y = \frac{9659}{42} = 229.9761905m^2$$

El producto de inercia de la sección hueca irregular con respecto a los ejes centroidales se obtendrá mediante un procedimiento similar al anterior. Primero se obtendrá el producto de inercia de cada figura geométrica elemental con respecto a los ejes centroidales de la sección hueca irregular y posteriormente se sumarán para encontrar el producto de inercia de la sección hueca irregular.

Para la primera figura geométrica elemental el producto de inercia se obtendrá mediante integración y posteriormente mediante un teorema similar al de ejes paralelos, esto debido a su rapidez.

Producto de inercia del triángulo

$$I_{xy} = \int xy * dA$$

Donde:  $dA =$  Diferencial de área

$x = \bar{x}_{elemento}$  diferencial

$y = \bar{y}_{elemento}$  diferencial

$$I_{xy} = \int \bar{x}_{elemento} \bar{y}_{elemento} * (y)(dx)$$

$$\bar{x}_{elemento} = x \quad \bar{y}_{elemento} = \frac{37}{14} + \frac{1}{2}y$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{97}{116}$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}1} = \int_{-155/42}^{97/42} x \left[ \frac{37}{14} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{3}x + \frac{97}{116} \right) \right] * \left[ -\frac{1}{3}x + \frac{97}{116} \right] dx$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}1} = \int_{-155/42}^{97/42} x \left[ \frac{37}{14} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{3}x + \frac{97}{116} \right) \right] * \left[ -\frac{1}{3}x + \frac{97}{116} \right] dx$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}1} = \int_{-155/42}^{97/42} \left( \frac{1}{18}x^3 - \frac{215}{189}x^2 + 2.330908289x \right) dx$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}1} = \left[ \frac{x^4}{72} - \frac{215}{567}x^3 + 1.165454145x^2 \right]_{-155/42}^{97/42}$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}1} = -\frac{10457}{294}$$

Producto de inercia de un rectángulo

$$I_{xy} = \int \bar{x}_{elemento} \bar{y}_{elemento} * (y)(dx)$$

$$\bar{x}_{elemento} = x \quad \bar{y}_{elemento} = \frac{1}{2}y$$

$$y = \frac{h}{2} - \frac{-h}{2} = h$$

$$I_{\bar{x}'\bar{y}'} = \int_{-b/2}^{b/2} \left[ x \left( \frac{1}{2}h \right) \right] [h * dx]$$

$$I_{\bar{x}'\bar{y}'} = \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} xh^2 dx$$

$$I_{\bar{x}'\bar{y}'} = \frac{1}{4}x^2h^2 \Big|_{-b/2}^{b/2}$$

$$I_{\bar{x}'\bar{y}'} = \frac{1}{4}h^2 \left[ \left( \frac{b}{2} \right)^2 - \left( -\frac{b}{2} \right)^2 \right]$$

$$I_{\bar{x}'\bar{y}'} = \frac{1}{4}h^2 \left[ \overbrace{\left( \frac{b}{2} \right)^2 - \left( -\frac{b}{2} \right)^2}^0 \right]$$

$$I_{\bar{x}'\bar{y}'} = 0$$

Usando un teorema similar al de ejes paralelos

$$I_{\bar{x}\bar{y}2} = \overbrace{I_{\bar{x}'\bar{y}'}}^0 + \bar{x}_2\bar{y}_2A_2$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}2} = \bar{x}_2\bar{y}_2A_2$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}2} = \left( -\frac{29}{42} \right) \left( \frac{15}{7} \right) (6)$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}2} = -\frac{435}{49}$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}6} = \bar{x}_6\bar{y}_6A_6$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}6} = \left( \frac{55}{42} \right) \left( -\frac{47}{14} \right) (4)$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}6} = -\frac{2585}{147}$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}3} = \bar{x}_3\bar{y}_3A_3$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}3} = \left( -\frac{113}{42} \right) \left( -\frac{5}{14} \right) (8)$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}3} = \frac{1130}{147}$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}5} = \bar{x}_5\bar{y}_5A_5$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}5} = \left( \frac{38}{21} \right) \left( -\frac{19}{14} \right) (14)$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}5} = -\frac{722}{21}$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}4} = \bar{x}_4\bar{y}_4A_4$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}4} = \left( \frac{55}{42} \right) \left( \frac{9}{14} \right) (4)$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}4} = \frac{165}{49}$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = \sum_{n=1}^6 I_{\bar{x}\bar{y}n}$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = -85.35714286$$

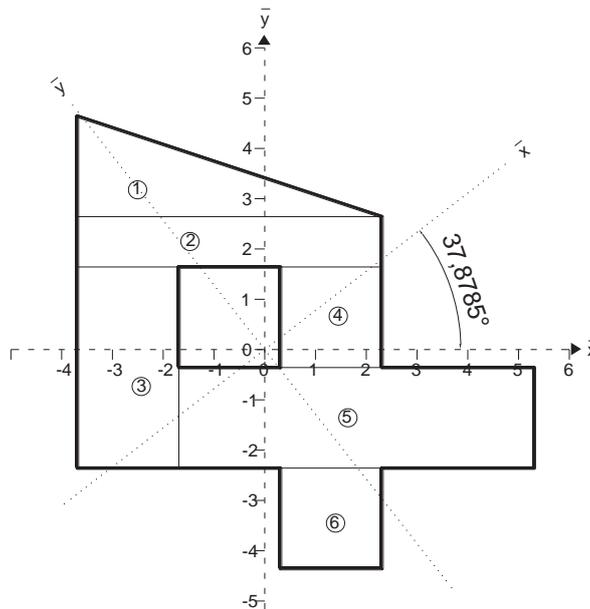
Los momentos principales están dados por las fórmulas

$$I_{max,min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(I_x - I_y)^2}{4} + I_{xy}^2}$$

$$I_{max} = 296.3736271 \quad I_{min} = 120.2454206$$

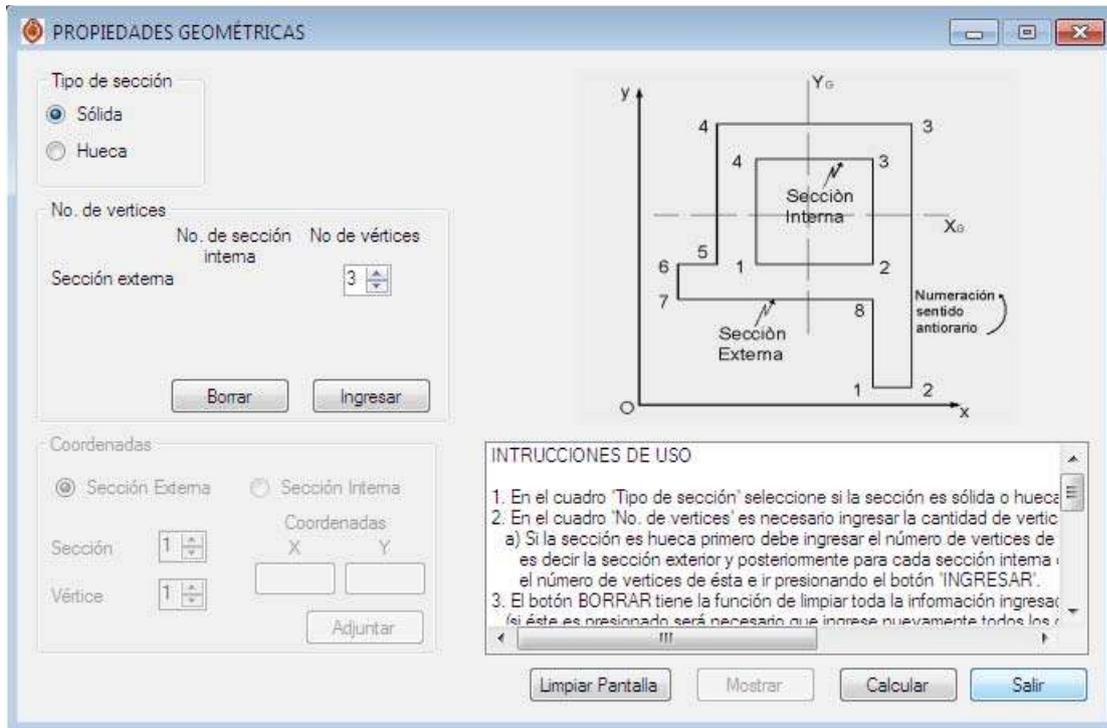
El ángulo de giro de los ejes principales con respecto a los ejes centroidales es:

$$\tan 2\theta_m = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad \theta_m = 37.8785^\circ$$

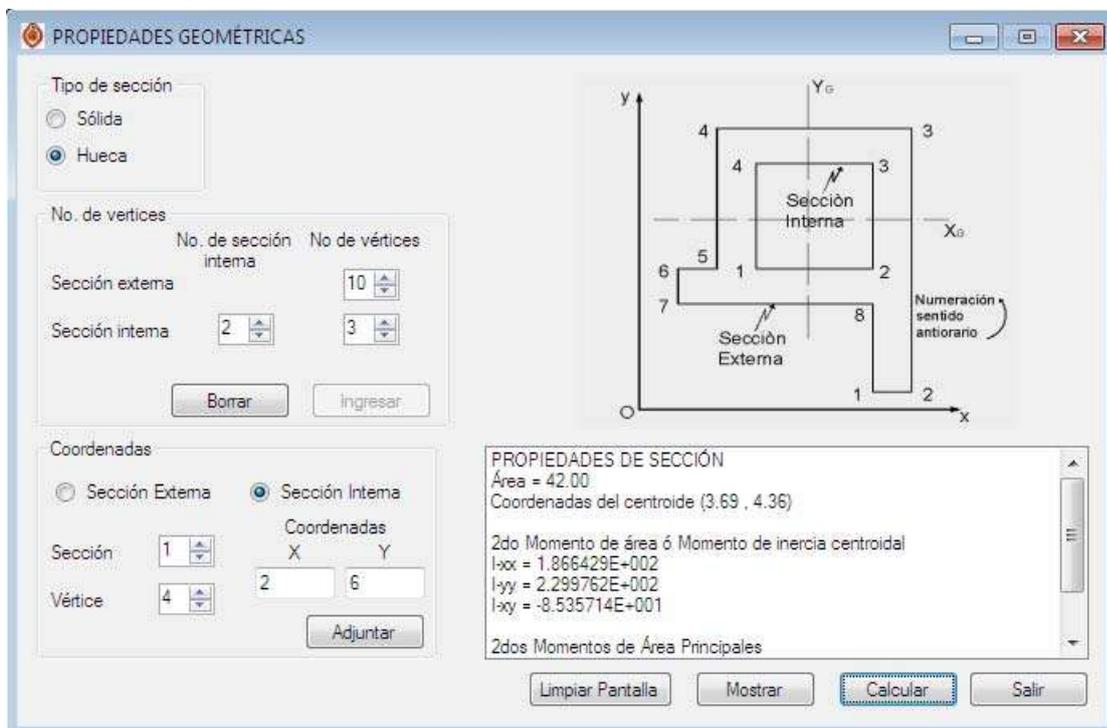


Ahora se procederá a solucionar el mismo problema mediante la ayuda del programa.

La primera imagen que se muestra a continuación es la ventana principal, tal como aparece cuando se inicia la aplicación.



Las instrucciones de se encuentran en la parte inferior de la ventana. Seleccionando el tipo de sección que se va a analizar e ingresando los datos correctamente nos arroja el siguiente resultado.



**PROPIEDADES GEOMÉTRICAS**

Tipo de sección  
 Sólida  
 Hueca

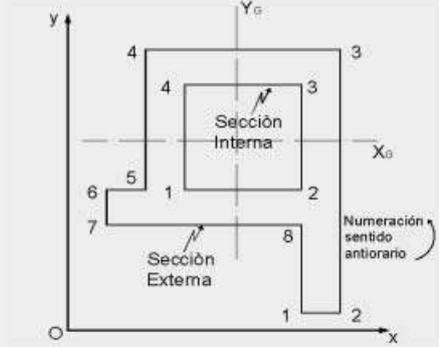
No. de vértices

No. de sección interna	No. de vértices
Sección externa	10
Sección interna	2
Sección interna	3

Coordenadas

Sección Externa  Sección Interna

Sección	Coordenadas	X	Y
1			
Vértice	4	2	6



2do Momento de área ó Momento de inercia centroidal  
 $I_{xx} = 1.866429E+002$   
 $I_{yy} = 2.299762E+002$   
 $I_{xy} = -8.535714E+001$

2dos Momentos de Área Principales  
 $I_{uu} = 2.963736E+002$   
 $I_{vv} = 1.202454E+002$   
Ángulo de ejes principales = 37.88 grados

#### 4. Rigidez y Coeficientes de Transporte

A menudo es común usar vigas con secciones transversales variadas sobre vigas y/o puentes de grandes claros con la finalidad de ahorrar material.

En general el análisis de vigas y marcos compuestos con este tipo de elementos es muy similar a los que se realizan para vigas con sección transversal variable.

La diferencia esencial está en que para este tipo de elementos es necesario calcular los momentos de empotramiento, factores de rigidez y de transporte para cada extremo del elemento. Estos valores dependen de la sección geométrica de las vigas.

En este capítulo desarrollaremos los coeficientes para una viga con sección transversal no prismática mediante el método de la viga conjugada.

La aplicación del método puede ser tediosa y por eso se propone la realización de un programa de cálculo.

A continuación se presentan las definiciones de los coeficientes:

**Factor de rigidez (K):** Magnitud del momento que debe aplicarse al extremo de una viga para que éste gire un ángulo  $\theta=1\text{rad}$ . El momento se aplica en el soporte de pasador de la viga, mientras el otro se supone empotrado tal como se muestra a continuación.

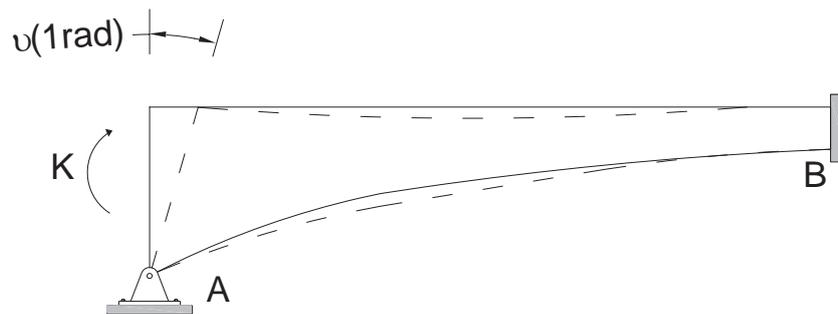


Fig. 4-1 Viga con apoyo simple en A y empotramiento en B sometida a un giro de 1rad en A.

**Factor de transporte (COF):** Fracción numérica (C) del momento que se “transporta” del extremo soportado por pasador al empotramiento, figura 4-2.

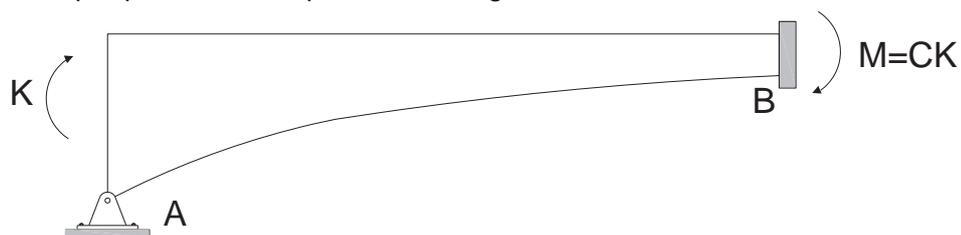
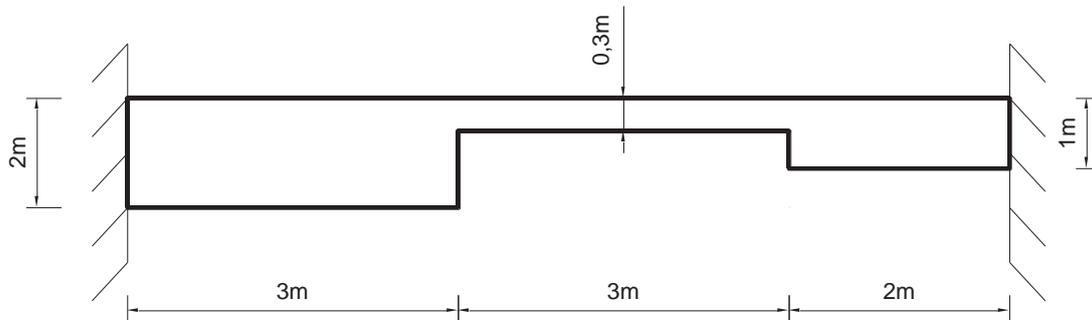


Fig. 4-2 Viga con apoyo simple en A y empotramiento en B sometida a un momento flexionante en A.

#### 4.1 Ejemplo

Calcular los coeficientes de rigidez y de transporte de la siguiente viga de sección variable. La viga tiene un 1m de ancho con un modulo de elasticidad igual a  $2.1 \times 10^{10} \text{Kg/m}^2$ .



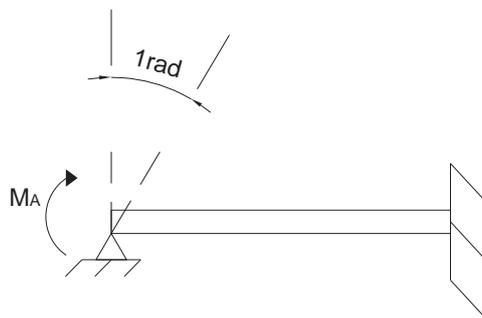
Inercias

$$0 \leq x \leq 3m \quad I_1 = \frac{bh^3}{12} = \frac{1 * 2^3}{12} = \frac{2}{3} m^4$$

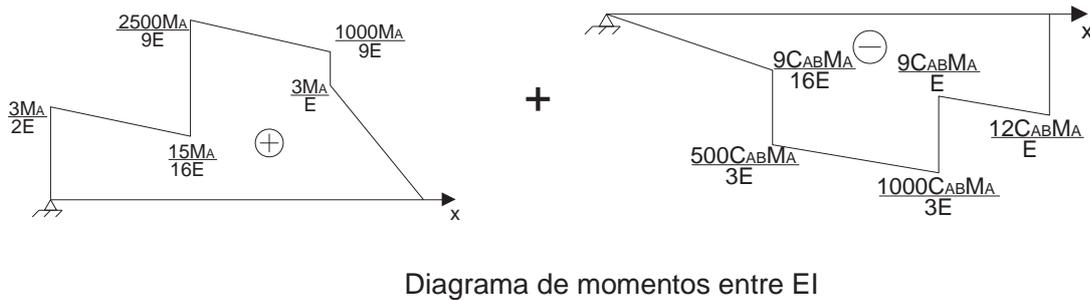
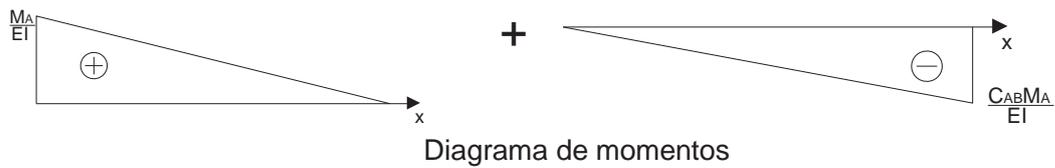
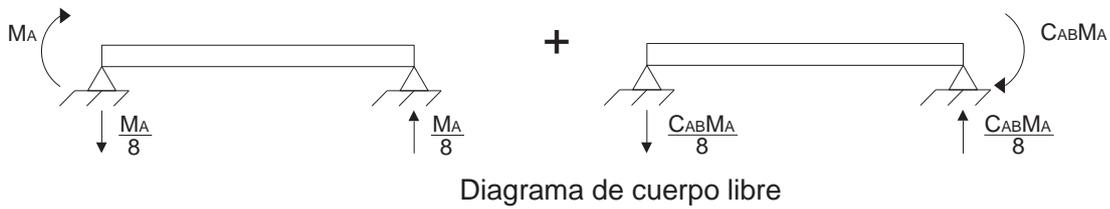
$$3 \leq x \leq 6m \quad I_2 = \frac{bh^3}{12} = \frac{1 * 0.3^3}{12} = \frac{9}{4000} m^4$$

$$6 \leq x \leq 8m \quad I_2 = \frac{bh^3}{12} = \frac{1 * 1^3}{12} = \frac{1}{12} m^4$$

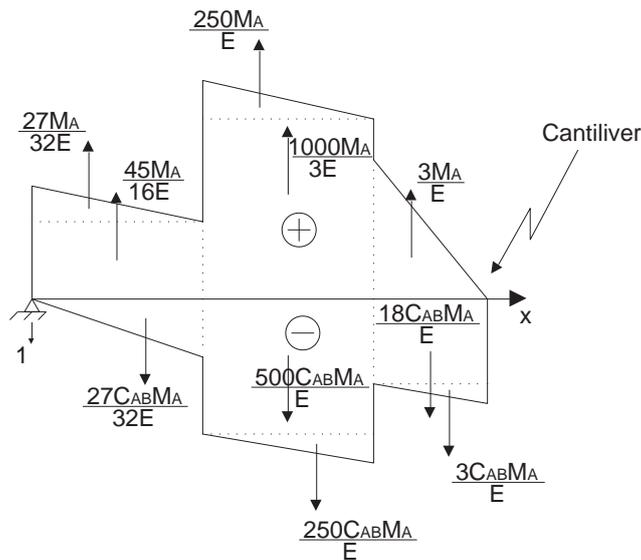
Por definición de coeficiente de rigidez, es necesario que un extremo de la viga quede con apoyo simple y se proporcione un giro unitario, por lo tanto la idealización de la viga:



Para la obtención de los diagramas de momentos se recurrirá al método de superposición, dividiendo la viga en dos vigas simplemente apoyadas y cada una soportando un momento flexionante.



Estos diagramas de momentos se usarán como las cargas sobre la viga conjugada, teniendo en cuenta que el valor de la reacción en el apoyo es igual a la unidad, esto debido al giro unitario generado en el mismo.



$$\sum Fy = -1 + \frac{27M_A}{32E} + \frac{45M_A}{16E} + \frac{250M_A}{E} + \frac{1000M_A}{3E} + \frac{3M_A}{E} - \frac{27C_{AB}M_A}{32E} - \frac{500C_{AB}M_A}{E} - \frac{250C_{AB}M_A}{E} - \frac{18C_{AB}M_A}{E} - \frac{3C_{AB}M_A}{E} = 0$$

$$\sum Fy = -1 + \frac{56639M_A}{96E} - \frac{24699C_{AB}M_A}{32E} = 0 \quad \text{-----1}$$

$$\sum M_A = -\frac{27M_A}{32E}(1) - \frac{45M_A}{16E}\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{250M_A}{E}(4) - \frac{1000M_A}{3E}\left(\frac{9}{2}\right) - \frac{3M_A}{E}\left(6 + \frac{2}{3}\right) + \frac{27C_{AB}M_A}{32E}(2) + \frac{500C_{AB}M_A}{E}\left(\frac{9}{2}\right) + \frac{250C_{AB}M_A}{E}(5) + \frac{18C_{AB}M_A}{E}(7) + \frac{3C_{AB}M_A}{E}\left(6 + \frac{4}{3}\right) = 0$$

$$\sum M_A = -\frac{40401M_A}{16E} + \frac{58395C_{AB}M_A}{16E} = 0$$

Dividiendo la ecuación entre  $\frac{M_A}{E}$

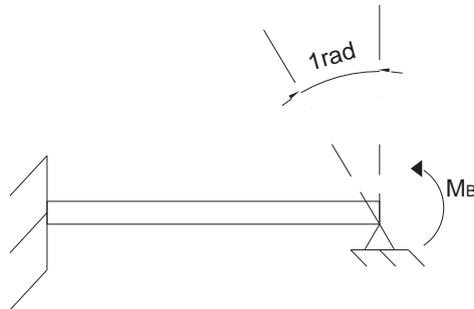
$$\sum M_A = -\frac{40401}{16} + \frac{58395C_{AB}}{16} = 0 \quad \text{-----2}$$

$$-\frac{40401}{16} + \frac{58395C_{AB}}{16} = 0$$

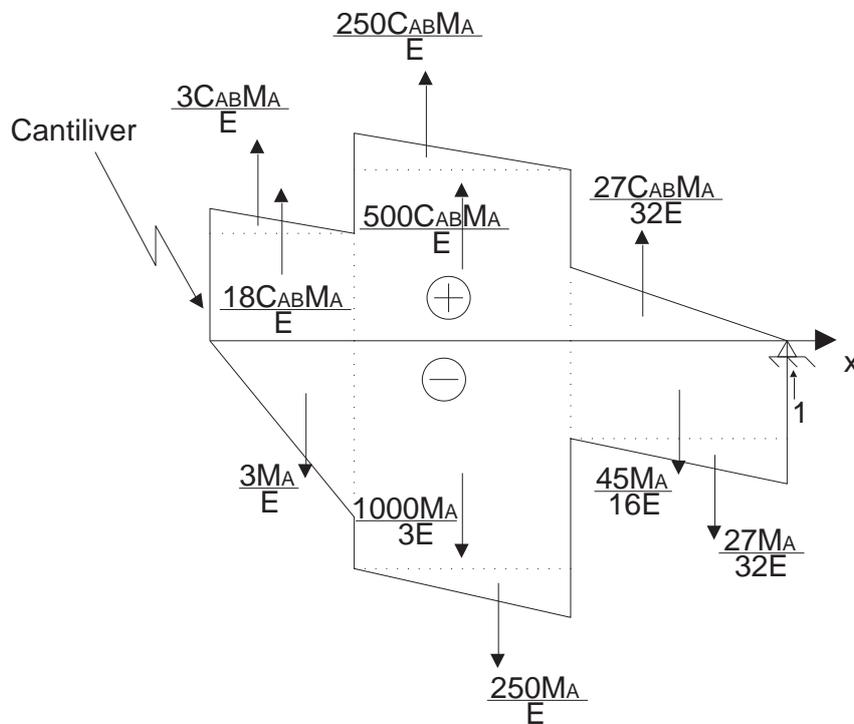
$C_{AB} = 0.691857179$  sustituyendo en la ecuación número 1 y  $E = 2.1 \times 10^{10} \text{ Kg/m}^2$

$$M_A = K_{AB} = 375,107,549.8 \text{ Kg}$$

Análogamente se hace lo mismo para el otro coeficiente



Por lo tanto



$$\sum F_y = 1 + \frac{56639C_{BA}M_B}{96E} - \frac{24699M_B}{32E} = 0 \quad \text{-----} 3$$

$$\sum M_B = \frac{27C_{BA}M_B}{32E} (7) + \frac{45C_{BA}M_B}{16E} \left(\frac{13}{2}\right) + \frac{250C_{BA}M_B}{E} (4) + \frac{1000C_{BA}M_B}{3E} \left(\frac{7}{2}\right) + \frac{3C_{BA}M_B}{E} \left(\frac{4}{3}\right) - \frac{27M_B}{32E} (6) - \frac{500M_B}{E} \left(\frac{7}{2}\right) - \frac{250M_B}{E} (3) - \frac{18M_B}{E} (1) - \frac{3M_B}{E} \left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

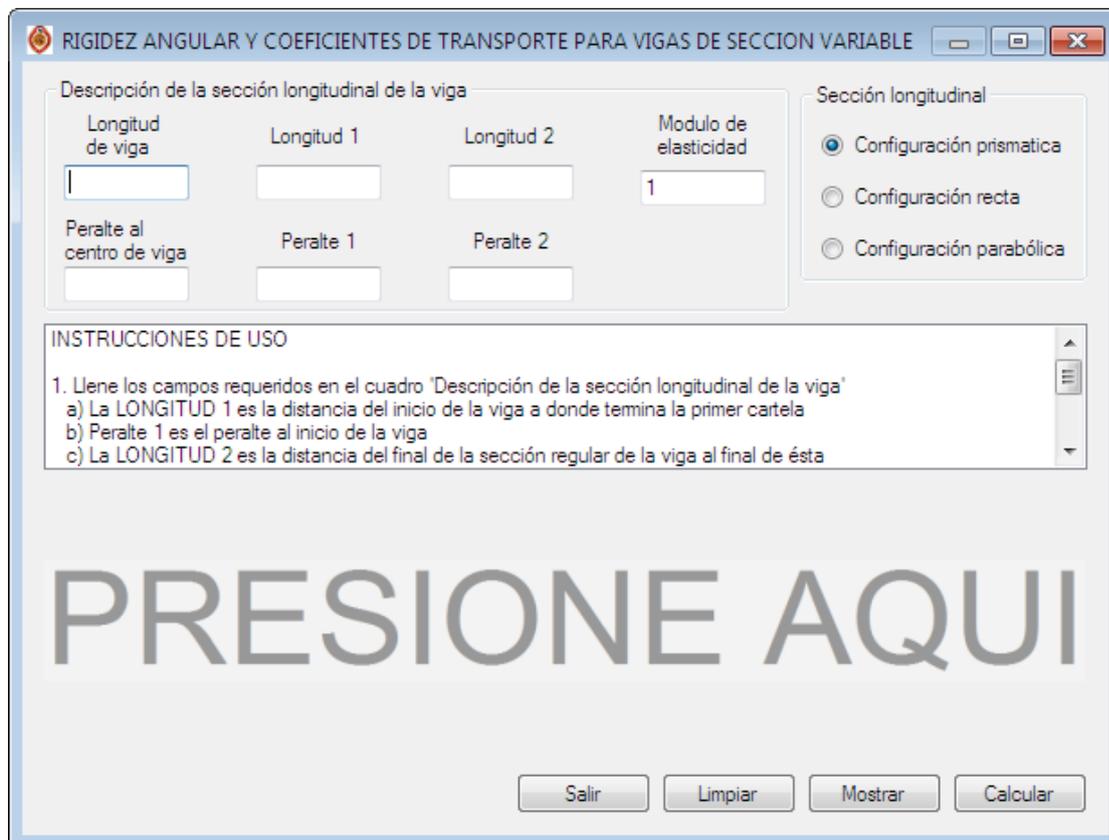
$$\sum M_B = \frac{105353C_{BA}M_B}{48E} - \frac{40239M_B}{16E} = 0 \quad \text{-----} 4$$

$$C_{BA} = 1.145833531 \quad \text{sustituyendo en la ecuación número 3 y } E = 2.1 \times 10^{10} \text{ Kg/m}^2$$

$$M_B = K_{BA} = 219,174,874.1 \text{Kg}$$

Dando solución al problema mediante la aplicación desarrollada.

En esta ventana se muestra la pantalla principal de la aplicación, como en los casos anteriores las instrucciones son mostradas en la pantalla principal pero en esta ocasión se localizan en la parte media de la ventana.



Seleccionando el tipo de sección longitudinal e ingresando los valores correspondientes en las celdas la aplicación nos arroja los siguientes resultados.

**RIGIDEZ ANGULAR Y COEFICIENTES DE TRANSPORTE PARA VIGAS DE SECCIÓN VARIABLE**

Descripción de la sección longitudinal de la viga

Longitud de viga	Longitud 1	Longitud 2	Modulo de elasticidad
8	3	2	21000000000
Peralte al centro de viga	Peralte 1	Peralte 2	
0.3	2	1	

Sección longitudinal

- Configuración prismática
- Configuración recta
- Configuración parabólica

Rigidez angular K-AB = 375115072.00  
 Rigidez angular K-BA = 225586898.41  
 Factor de transporte C-AB = 6.918576E-001  
 Factor de transporte C-BA = 1.150449E+000

Salir Limpiar Mostrar **Calcular**

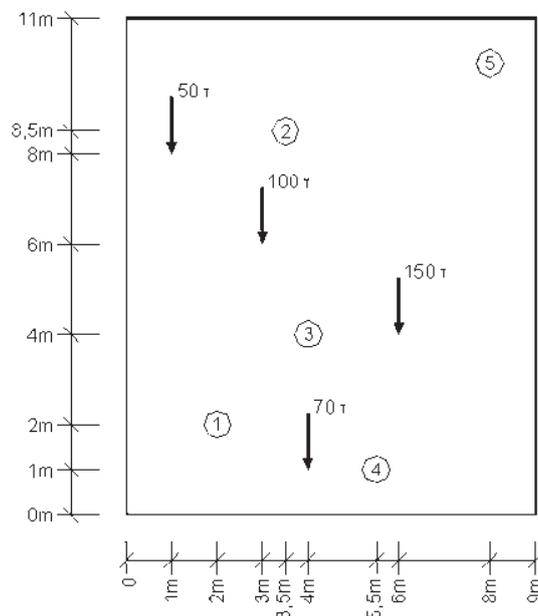
Como puede verse en este ejemplo los valores que arroja el programa son valores muy similares a los obtenidos en el desarrollo analítico del mismo. Los errores que se obtienen van desde  $-8.67 \times 10^{-5} \%$  para el coeficiente de transporte C-AB hasta  $-0.402 \times 10^{-5} \%$  para el coeficiente de transporte C-BA y  $-2.005 \times 10^{-3} \%$  para la rigidez angular K-AB hasta  $-2.93 \%$ . Estos valores tienen una muy buena aproximación por tanto pueden ser usados en el análisis estructural.

## 5. Análisis Estructural de un Grupo de Pilas

Cuando se tienen terrenos de cimentación con poca capacidad de carga, es frecuente utilizar pilotes que penetren hasta estratos resistentes del suelo. Normalmente en la parte superior de los pilotes se encuentra una losa rígida que transfiere la carga de las columnas de la estructura hacia la cimentación. El siguiente programa determina la carga que se produce en cada pilote de una cimentación, con la suposición de que esta se transfiere a través de una losa rígida.

### 5.1 Ejemplo

Obtener la carga vertical que recibe cada pilote en la siguiente placa cargada despreciando el peso de la misma.



$$P_n = \frac{W}{N} + Ay_n + Bx_n$$

$$A = \frac{W(e_x I_y - e_y I_{xy})}{I_x I_y - I_{xy}^2}$$

$$B = \frac{W(e_y I_x - e_x I_{xy})}{I_x I_y - I_{xy}^2}$$

Donde:  $W =$  Carga total sobre la placa.

$N =$  Número de pilotes.

$e_x, e_y =$  Excentricidad de la carga total con respecto al centroide del grupo de pilotes.

$I_x, I_y =$  Segundo momento de área del grupo de pilotes.

$I_{xy} =$  Producto del momento de área del grupo de pilotes.

Para la obtención de los segundos momentos de inercia es necesario obtener primero el centroide del grupo de pilotes, por lo tanto:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$$

Donde:  $x_i, y_i =$  Coordenadas individuales de cada pilote

$n =$  número de pilotes

$\bar{x}, \bar{y} =$  Coordenadas del centroide del grupo de pilas

$$\bar{x} = \frac{2 + 3.5 + 4 + 5.5 + 8}{5} = \frac{23}{5} \qquad \bar{y} = \frac{2 + 8.5 + 4 + 1 + 10}{5} = \frac{51}{10}$$

Segundo momento de inercia para el grupo de pilas.

$$I_x = \sum y_n^2 \qquad I_y = \sum x_n^2 \qquad I_{xy} = \sum x_n y_n$$

Donde:  $x_n = x_i - \bar{x}$

$y_n = y_i - \bar{y}$

$$I_x = \left(2 - \frac{51}{10}\right)^2 + \left(\frac{17}{2} - \frac{51}{10}\right)^2 + \left(4 - \frac{51}{10}\right)^2 + \left(1 - \frac{51}{10}\right)^2 + \left(10 - \frac{51}{10}\right)^2 = \frac{316}{5}$$

$$I_y = \left(2 - \frac{23}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{2} - \frac{23}{5}\right)^2 + \left(4 - \frac{23}{5}\right)^2 + \left(\frac{11}{2} - \frac{23}{5}\right)^2 + \left(8 - \frac{23}{5}\right)^2 = \frac{207}{10}$$

$$I_{xy} = \left(2 - \frac{23}{5}\right)\left(2 - \frac{49}{10}\right) + \left(\frac{7}{2} - \frac{23}{5}\right)\left(\frac{17}{2} - \frac{49}{10}\right) + \left(4 - \frac{23}{5}\right)\left(4 - \frac{49}{10}\right) + \left(\frac{11}{2} - \frac{23}{5}\right)\left(1 - \frac{49}{10}\right) + \left(8 - \frac{23}{5}\right)\left(10 - \frac{49}{10}\right) = \frac{359}{20}$$

La resultante vertical de las cargas es

$$W = \sum w_j$$

$$W = 50 + 100 + 70 + 150 = 370_{Ton}$$

La excentricidad de las cargas con respecto a los ejes centroidales esta dada por:

$$e_x = \frac{\sum w_j y_j}{\sum w_j} - \bar{y} \qquad e_y = \frac{\sum w_j x_j}{\sum w_j} - \bar{x}$$

$$e_x = \frac{(50 * 8) + (100 * 6) + (70 * 1) + (150 * 4)}{370} - \frac{51}{10} = -\frac{217}{370}$$

$$e_y = \frac{(50 * 1) + (100 * 3) + (70 * 4) + (150 * 6)}{370} - \frac{23}{5} = -\frac{86}{185}$$

Cálculo de los coeficientes A y B

$$A = \frac{370 \left[ \left( -\frac{217}{370} \right) \left( \frac{207}{10} \right) - \left( -\frac{86}{185} \right) \left( \frac{359}{20} \right) \right]}{\left( \frac{316}{5} \right) \left( \frac{207}{10} \right) - \left( \frac{359}{20} \right)^2} = -1.424388018$$

$$B = \frac{370 \left[ \left( -\frac{86}{185} \right) \left( \frac{316}{5} \right) - \left( -\frac{217}{370} \right) \left( \frac{359}{20} \right) \right]}{\left( \frac{316}{5} \right) \left( \frac{207}{10} \right) - \left( \frac{359}{20} \right)^2} = -7.074021018$$

Carga vertical sobre cada pila

$$P_1 = \frac{370}{5} + (-1.424388018) \left( 2 - \frac{51}{10} \right) + (-7.074021018) \left( 2 - \frac{23}{5} \right) = 96.81_{Ton}$$

$$P_2 = \frac{370}{5} + (-1.424388018) \left( \frac{17}{2} - \frac{51}{10} \right) + (-7.074021018) \left( \frac{7}{2} - \frac{23}{5} \right) = 76.94_{Ton}$$

$$P_3 = \frac{370}{5} + (-1.424388018) \left( 4 - \frac{51}{10} \right) + (-7.074021018) \left( 4 - \frac{23}{5} \right) = 79.81_{Ton}$$

$$P_4 = \frac{370}{5} + (-1.424388018) \left( 1 - \frac{51}{10} \right) + (-7.074021018) \left( \frac{11}{2} - \frac{23}{5} \right) = 73.47_{Ton}$$

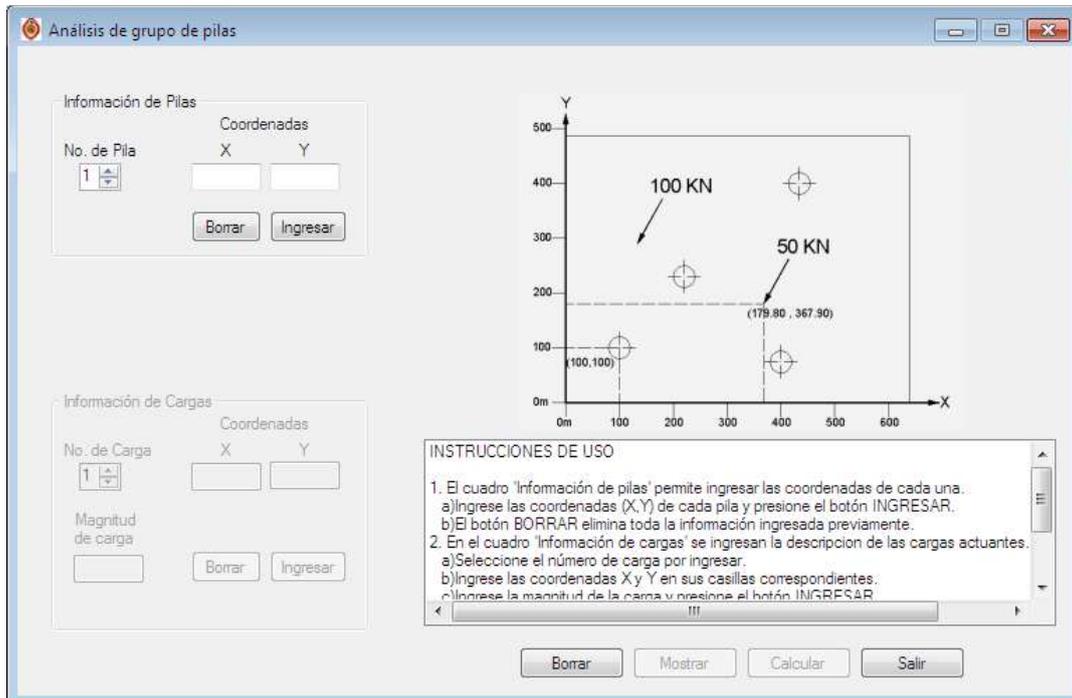
$$P_5 = \frac{370}{5} + (-1.424388018) \left( 10 - \frac{51}{10} \right) + (-7.074021018) \left( 8 - \frac{23}{5} \right) = 42.97_{Ton}$$

Para comprobar que la carga se reparta entre las cinco pilas bastara con que la suma de las cargas recibidas por cada una de estas nos de el valor de  $W = 370_{Ton}$

$$W = 96.81 + 76.94 + 79.81 + 73.47 + 42.97 = 370_{Ton}$$

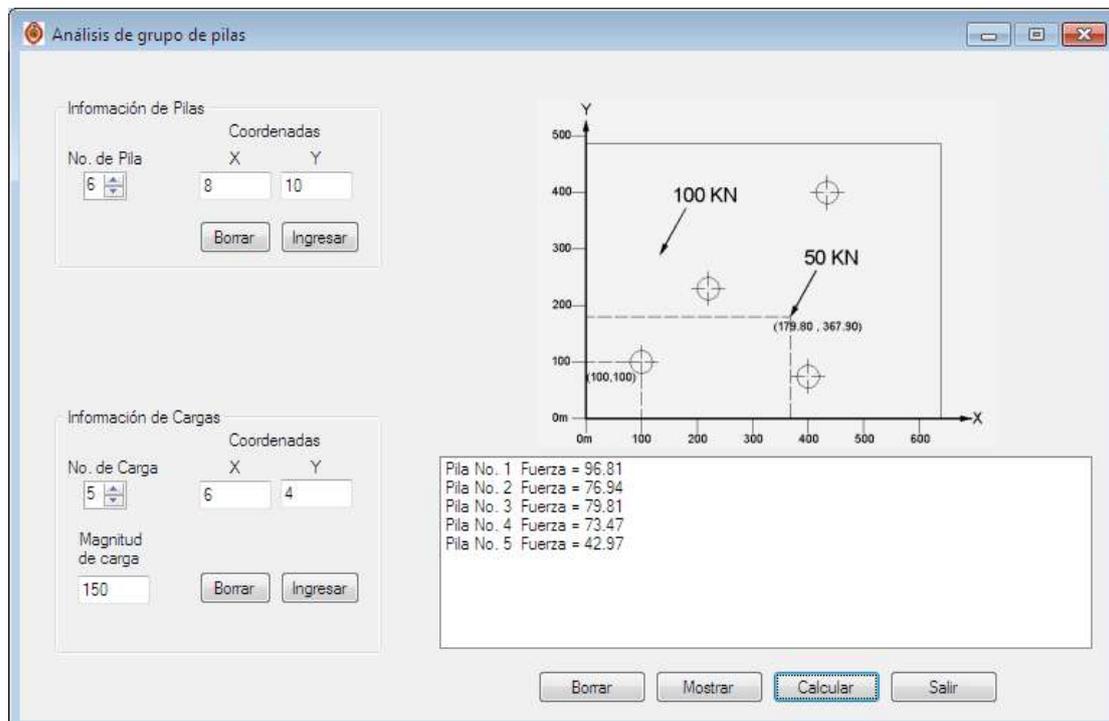
Ahora se mostrarán los resultados obtenidos mediante la ayuda de la aplicación creada.

La pantalla mostrada es tal como inicia la aplicación a la hora de ejecutarla.



La aplicación es muy sencilla, solo basta con ingresar las coordenadas de las pilas o pilotes y posteriormente hacer lo mismo con las cargas que se aplicarán en la placa así como su magnitud.

Los resultados obtenidos mediante la aplicación son:



## 6. Conclusiones

En este trabajo se elaboraron cuatro programas en ambiente Visual Basic con la finalidad de que sirvan como una herramienta auxiliar para el desarrollo de varios temas de la ingeniería estructural. Estos programas pueden ser utilizados por estudiantes y profesores que cursen o impartan materias del Departamento de Estructuras.

Los programas permiten de una manera sencilla y gráfica abordar ciertos temas de los cursos de resistencia de materiales y análisis estructural. Su interface gráfica permite que el usuario utilice los programas sin que requiera conocimientos del área de programación.

Toda la información de entrada y de salida se proporciona en pantalla permitiendo de esta manera obtener de inmediato los resultados de los análisis realizados, haciendo más versátil su utilización.

## 7. Bibliografía

- I. BEER, F.P.; JOHNSTON, E.R.; EISENBERG, E.R. (2005), "MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS" (TRADUCCIÓN), 7MA. EDICIÓN, MC GRAW HILL, MÉXICO D.F.
- II. GERE, J.M. (2006), "MECÁNICA DE MATERIALES" (TRADUCCIÓN), 6TA. EDICIÓN, THOMSON, CIUDAD DE MÉXICO D.F.
- III. MERRITT, F.S.; LOFTIN, M.K.; RICKETTS, J.T. (2008), "MANUAL DEL INGENIERO CIVIL TOMO I" (TRADUCCIÓN), 3RA. EDICIÓN, MC GRAW HILL, MÉXICO D.F.
- IV. CHAPRA, S.C.; CANALE, S.R. (2003), "MÉTODOS NUMÉRICOS PARA INGENIEROS" (TRADUCCIÓN), 4TA. EDICIÓN, MC GRAW HILL, MÉXICO D.F.
- V. FRANK AYRES, JR; ELLIOT MENDELSON (1991), "CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL" (TRADUCCIÓN), 3RA. EDICIÓN, SERIE SCHAUM, MC GRAW HILL, MÉXICO D.F.
- VI. CEBALLOS, F.J. (2005), "VISUAL BASIC 6: CURSO DE PROGRAMACIÓN", 1RA. EDICIÓN, ALFAOMEGA, MÉXICO D.F.
- VII. KASSIMALI, ASLAM (2001), "ANÁLISIS ESTRUCTURAL" (TRADUCCIÓN), 2DA. EDICIÓN, THOMSON LEARNING, MÉXICO D.F.
- VIII. EVJEN, B.; BERES, J.; OTROS (2002), "EL LIBRO DE VISUAL BASIC .NET" (TRADUCCIÓN), ANAYA MULTIMEDIA, MADRID ESPAÑA.