



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO



FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE CONSOLIDACIÓN DE
TERZAGUI APLICADA A EL FENOMENO DE SUBSIDENCIA EN UN SUELO
ARCILLOSO COMPLETAMENTE SATURADO.

TESIS

PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO CIVIL

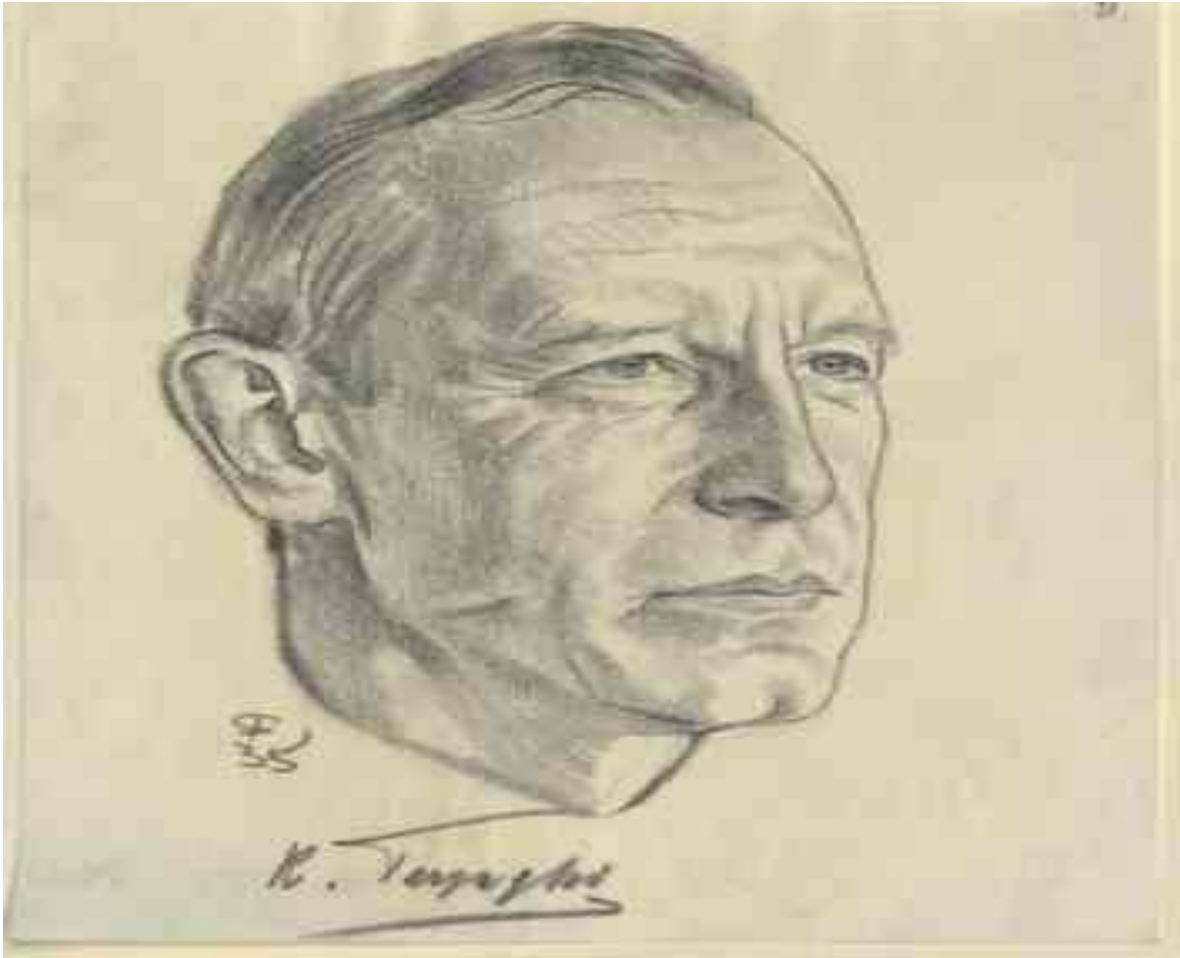
PRESENTA:

EDUARDO REYES NEGRETE

ASESOR:

DR. CARLOS CHAVEZ NEGRETE

MORELIA, MICHOACÁN, FEBRERO DEL 2016



"Desafortunadamente, los suelos son fabricados por la naturaleza y no por el hombre, y los productos de la naturaleza son siempre complejos ... Tan pronto como se pasa del acero y el concreto al suelo, la omnipotencia de la teoría deja de existir. El suelo natural nunca es uniforme. Sus propiedades cambian de punto a punto, mientras que nuestro conocimiento de sus propiedades se limita a los pocos sitios en que las muestras han sido recogidas. En la mecánica de suelos la exactitud de los resultados calculados nunca supera a la de una estimación aproximada, y la función principal de la teoría consiste en que nos enseña qué y cómo observar en el campo."

Dr. Karl Von Terzagui



AGRADECIMIENTOS

A MIS PADRES:

María de Jesús y Alfonso reyes, por haberme dado la oportunidad de estudiar una carrera, por su trabajo y sacrificios en todos estos años de mi vida, por estar en los buenos y malos momentos a lo largo de mi carrera en Ingeniería Civil, gracias a ustedes he logrado llegar hasta aquí, es un privilegio ser su hijo.

A MIS HERMANOS:

Lorena y Alfonso, por toda su humilde comprensión, cariño y sobre todo por apoyarme en todo momento.

A MI ASESOR DE TESIS:

Dr. Carlos Chávez Negrete, por su valiosa aportación de conocimientos avanzados y científicos. Además por darme la confianza y ayuda sin algún interés. Así como también haberme tenido paciencia para lograr la culminación del presente trabajo de tesis con tan alto grado de complejidad.

A MIS AMIGOS Y AMIGAS:

Por brindarme su amistad, compañerismo y conocimiento a lo largo de estos años y transmitirme sus buenos deseos para que yo pueda lograr alcanzar el objetivo en mi vida.

FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL:

Por abrirme sus puertas y darme la oportunidad de ser parte de ella, por darme la oportunidad de estudiar mi carrera. Así como también a todos los profesores que compartieron sus conocimientos para ser un excelente profesionista.

GRACIAS A TODOS



RESUMEN

En este presente trabajo de tesis se aborda el cálculo de las deformaciones y disipación de las presiones intersticiales durante el proceso de consolidación Unidimensional, Bidimensional y Tridimensional en suelos saturados. El modelo matemático para describir la deformación en los suelos saturados se basa en las teorías de Terzagui y Biot. En las cuales sus bases son la teoría de la elasticidad y para la fase del agua, la ley de Darcy y la ley de la conservación de la masa del fluido. Se comienza a tratar los problemas referidos a la consolidación de suelos de manera sencilla, es decir con varias simplificaciones y suposiciones para poder resolver con más facilidad las ecuaciones involucradas, para después llevar más a la realidad el fenómeno de la consolidación de los suelos de manera bidimensional y tridimensional, lo cual involucra que los problemas se hagan más complejos y por lo tanto más difícil de resolver. Para modelar las deformaciones en los suelos debido a un cambio en los esfuerzos a los que están sometidos y aun cambio en sus condiciones se utilizara la Teoría de consolidación de Terzagui. Por otro lado, se tendrán en cuenta programas computacionales para el modelados de los resultados en ambas teorías anteriormente dichas, además se graficaran los resultados para un mejor entendimiento de los problemas referidos a la mecánica de suelos. En el caso unidimensional, ya que es lo más sencillo para después analizar el problema de la consolidación de suelos de forma Bidimensional y Tridimensional. Lo cual involucra cada vez un grado de complejidad mucho mayor en los cálculos. Los modelos matemáticos aquí utilizados se presentan de una manera diferencial y discreta, lo cual nos lleva a un problema de valores de contorno lleva a una solución aproximada de las ecuaciones diferenciales dadas en cada teoría antes mencionada por el Método De Los Elementos Finitos. El desarrollo de la formulación hecha por el Dr. Karl Von Terzagui y la teoría de Maurice Anthony Biot para describir el proceso de la consolidación del suelo en forma Unidimensional, Bidimensional y Tridimensional se explica de manera detallada.

PALABRAS CLAVE: consolidación, presiones, Terzagui, deformaciones, Biot.



ABSTRACT

This thesis deals with the calculation of the deformation and dissipation of the interstitial pressures or neutral during the process of one-dimensional, two dimensional and three dimensional consolidation in saturated soils. The mathematical model to describe the deformation in the saturated soil is based on the theories of Terzagui and Biot, which their bases are the theory of elasticity and to the water phase the law of Darcy and the law of conservation of mass of the fluid. It begins to deal with the problems relating to the consolidation of soil in a simple manner, i.e. with several simplifications and assumptions in order to be able to solve with the equations involved, and then bring more to the reality the phenomenon of the consolidation of the soil two- and three-dimensional, which involves the problems become more complex and therefore more difficult to resolve. To model the deformations in the soil due to a change in the stress to which they are subjected and even change in their conditions will be used the theory of DR. Karl von Terzagui better known as the theory of consolidation of Terzagui. On the other hand will be taken into account for the computational programs modeled on the results of both theories above these, in addition the results were graphed over to a better understanding of the problems in soil mechanics. In the unidimensional case, because that is the easiest analyze the problem of soil consolidation then the two- and three-dimensional form were analyzed. Which involves each time a degree of much greater complexity in the calculations. The mathematical models used here are presented in a manner and discrete differential, which brings us to a problem of boundary conditions whose solution take us to approximate solution of the differential equations given in each theory mentioned above with the method of finite elements. The development of the formulation given by Dr. Karl von Terzagui and the theory of Maurice Anthony Biot to describe the process of consolidation of the soil in the form one-dimensional, two dimensional and three dimensional were explained in a detailed manner.

KEY WORDS: Consolidation, pressures, Terzagui, deformations, Biot.

INDICE

Agradecimientos.....	II
Resumen	III
Abstract	IV

CAPITULO 1: Introducción al fenómeno de consolidación en un suelo

arcilloso completamente saturado.....	1
1.1- Objetivo general.....	1
1.2- El fenómeno de consolidación en un suelo arcilloso.....	1
1.3- Historia del Dr. Karl Von Terzagui.....	4
1.4- Método de los elementos finitos.....	8
1.5- Breve historia del programa WOLFRAM MATHEMATICA 10.0.....	10
1.6- Teoría de la elasticidad.....	11

CAPITULO 2: Sistema trifásico de un suelo saturado.....17

CAPITULO 3: Deducción de la ecuación diferencial de la teoría de Terzagui.....25

3.1- Introducción a la Teoría de Terzagui.....	25
3.2- Formulación matemática de la Teoría de Terzagui.....	27

CAPITULO 4: Deducción de la ecuación diferencial a partir la teoría de Terzagui que describe las deformaciones en un suelo arcilloso completamente saturado en 1D.....39

CAPITULO 5: Modelación de las ecuaciones diferenciales parciales que describen el fenómeno de consolidación en 1 dimensión42



CAPITULO 6: Deducción de la ecuación diferencial de la teoría de Terzagui en 2 dimensiones.....	64
6.1- Introducción a la teoría de Terzagui en 2D.....	64
6.2- Deducción de la ecuación diferencial de Terzagui en 2D.....	66
6.3- Formulación de la ecuación diferencial que describe el fenómeno de consolidación en 2D para el caso 1.....	69
6.4- Formulación de la ecuación diferencial que describe el fenómeno de consolidación en 2D para el caso 2.....	72
6.5- Formulación de la ecuación diferencial que describe el fenómeno de consolidación en 2D para el caso 3.....	75

CAPITULO 7: Deducción de la ecuación diferencial a partir la teoría de Terzagui que describe las deformaciones en un suelo arcilloso completamente saturado en 2D.....	77
7.1- Introducción.....	77
7.2- Formulación matemática de la ecuación diferencial.....	77

CAPITULO 8: Modelación de las ecuaciones diferenciales parciales que describe el fenómeno de consolidación en 2 dimensiones.....	80
8.1- Introducción a los diferentes casos a modelar en 2D	80
8.2- Modelación en Mathematica para el caso número 1.....	82
8.3- Modelación en Mathematica para el caso número 2.....	90
8.4- Modelación en Mathematica para el caso número 3.....	99

CAPITULO 9: Deducción de la ecuación diferencial de la teoría de Terzagui en 3D.....	107
9.1- Introducción a la teoría de Terzagui en 3D.....	107
9.2- Deducción de la ecuación diferencial de Terzagui en 3D.....	108

9.3- Formulación de la ecuación diferencial que describe el fenómeno de consolidación en 3D para el caso 1.....	110
9.4- Formulación de la ecuación diferencial que describe el fenómeno de consolidación en 3D para el caso 2.....	112
9.5- Formulación de la ecuación diferencial que describe el fenómeno de consolidación en 3D para el caso 3.....	115

CAPÍTULO 10: Modelación de las ecuaciones diferenciales que describen el fenómeno de consolidación en 3D.....	117
10.1 - Introducción a los diferentes casos a modelar en 3D.....	117
10.2- Modelación en Mathematica para el caso número 1.....	119
10.3- Modelación en Mathematica para el caso número 2.....	130
10.4- Modelación en Mathematica para el caso número 3.....	133

CAPÍTULO 11: Introducción a la teoría de Maurice Anthony Biot en 3D.....	144
11.1- Introducción a la teoría de Maurice Anthony Biot en 3D.....	144
11.2- Campos de esfuerzos presentes en las ecuaciones diferenciales de Biot en 3D.....	146

CAPITULO 12: Ecuaciones generales de Biot que gobiernan el fenómeno de consolidación de un suelo saturado	155
--	-----

CAPITULO 13: Interpretación física de las constantes de Biot.....	162
--	-----

CAPITULO 14: Breve resumen sobre las ecuaciones diferenciales de Biot....	165
--	-----

Conclusiones.....	167
--------------------------	------------

Bibliografía.....	169
--------------------------	------------

CAPITULO 1: INTRODUCCIÓN AL FENÓMENO DE CONSOLIDACIÓN EN UN SUELO ARCILLOSO COMPLETAMENTE SATURADO.

❖ 1.1- OBJETIVO GENERAL.

El objetivo de este presente trabajo de tesis es analizar y comparar los resultados obtenidos sobre la descripción que ofrece la teoría de la consolidación de un suelo saturado bajo la aplicación de una carga externa, así como su modelación numérica en un programa computacional en base a los resultados obtenidos. Con el fin de demostrar la importancia del estudio de los suelos saturados, ya que desde un punto de vista de un comportamiento mecánico, es uno de los casos más desfavorables que pueda haber ya que en un suelo saturado se presentan las presiones intersticiales o presiones de poro más altas, excesivas deformaciones en el suelo, así como hinchamientos que pueden llegar a ser muy grandes y provocar disminución de la resistencia.

❖ 1.2 EL FENÓMENO DE CONSOLIDACIÓN EN UN SUELO ARCILLOSO.

Es sabido que el estudio del proceso de la consolidación en suelos es de suma importancia en la ingeniería civil, más aun en el caso de los suelos saturados ya que estos son los que más se presentan en la vida real con más ocurrencia en la práctica de la ingeniería civil, los suelos se caracterizan por estar formados por un sistema trifásico, es decir: la Fase solida; compuesta por partículas materiales, la Fase liquida; que es el agua y por último la Fase gaseosa el aire o gas.

El tema sobre la consolidación de suelos fue tratado de manera analítica a partir de la década de los 40' abordándose problemas muy sencillos los cuales estaban fuera de la realidad debido a la suposiciones y simplificaciones para poder resolver los problemas, no fue hasta la década de los 70' que se empezaron a abordar problemas más reales y por lo tanto un grado de complejidad mayor. Con el tiempo gracias a la aparición de los ordenadores se han podido resolver de manera satisfactoria problemas sobre la consolidación de suelos muy complejos que representan un problema real sobre la consolidación de los suelos sujetos a cargas aplicadas externamente.

Es de suma importancia en ingeniería civil conocer las propiedades mecánicas de los suelos para saber si es adecuado la zona en donde se desplantarán los cimientos de la construcción y si no para mejorar el suelo con los métodos más adecuados. Además de que es necesario predecir:

- ◆ El asentamiento total que sufrirá la estructura
- ◆ La velocidad y tiempo a la cual le toma producirse el dicho asentamiento total

El proceso de consolidación se aplica a todos los suelos, pero es de mucha importancia en aquellos suelos en que la permeabilidad es muy baja, de esta manera se aplicaran la teoría de Terzagui para poder describir la consolidación en las masas de suelos cuando estas están sometidos a un incremento de esfuerzos, y poder predecir los asentamientos de manera más real, es decir con una mayor precisión las velocidades y tiempos de asentamientos a largo plazo, aplicando además los principios fundamentales de la mecánica de suelos.

La mecánica de suelos es la rama de la ciencia que estudia las propiedades físicas de las masas de suelos cuando estas son sometidas a varios tipos de fuerzas ya sea de manera en que cada fuerza actúe por si sola en un único momento dado o debido a la combinación de todas estas. La consolidación es un proceso que se produce en los suelos y consiste en la reducción del volumen total del suelo provocado por la aplicación de una carga externa sobre él, o por el drenaje del terreno.

Cuando el suelo se somete a una sobrecarga los esfuerzos totales se incrementan en la misma cuantía y el suelo gana resistencia conforma el exceso de presión de poro disminuya y los esfuerzos efectivos aumenten. Todos los materiales experimentan deformaciones cuando se les sujeta a un cambio en las condiciones de los esfuerzos, las características esfuerzo-deformación de un suelo estarán en función de la forma en que es cargado, del tipo de suelo, de las condiciones anteriores antes del cambio en las condiciones de esfuerzos, de la granulometría de la estructura intergranular del suelo, etc.

De tal manera que la estructura intergranular del suelo sufrirá deformaciones, las cuales no siempre ocurren de manera instantánea ante la aplicación de la carga, sino que ocurre a lo largo del tiempo. Esto quiere decir que cuando un suelo se consolida ante una carga que esté actuando de manera externa sobre él, se generara un incremento de esfuerzos efectivos lo cual implica un aumento de resistencia en el suelo y a la vez provoca una disminución de la relación de vacíos.

En los suelos arcillosos la permeabilidad es muy baja por lo cual el exceso de presión de poro se disipa muy lentamente a través del tiempo y los esfuerzos efectivos aumentan muy lentamente y en consecuencia puede seguir deformándose varios años más, ya después de finalizada la construcción. En los suelos granulares la permeabilidad es muy alta, caso contrario al de los suelos arcillosos, esto implica que el exceso de presión de poro se disipe de una manera muy rápida, teniendo como consecuencia que el asentamiento termine al final de la construcción, en donde los esfuerzos totales son equivalentes a los esfuerzos efectivos, lo cual nos dice que el suelo a ganado resistencia.

❖ 1.3 HISTORIA DEL DR. KARL VON TERZAGUI.



Figura 1.31. Karl Von Terzagui, (Terzagui y la mecánica de suelos).

Karl Von Terzaghi nació en Praga en 1883, hijo de un oficial de caballería austríaca. En 1904 se graduó en la Technische Hochschule (Escuela Técnica Superior o Universidad Técnica) en Graz, Austria, con un título en ingeniería mecánica. Karl Von Terzagui, ingeniero reconocido como el padre de la mecánica de suelos y de la ingeniería geotécnica, desde el comienzo de su carrera dedicó todos sus esfuerzos en la búsqueda de un método racional para poder resolver los diferentes problemas relacionados con la ingeniería de suelos y las cimentaciones. La coronación de sus esfuerzos se dio en el año de 1925 con la publicación del Dr. Karl Terzaghi denominada "Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage" traduciendo: (Principios Fundamentales de Mecánica del Terreno) considerada hoy en día como punto de partida de la mecánica de suelos en todo el mundo.

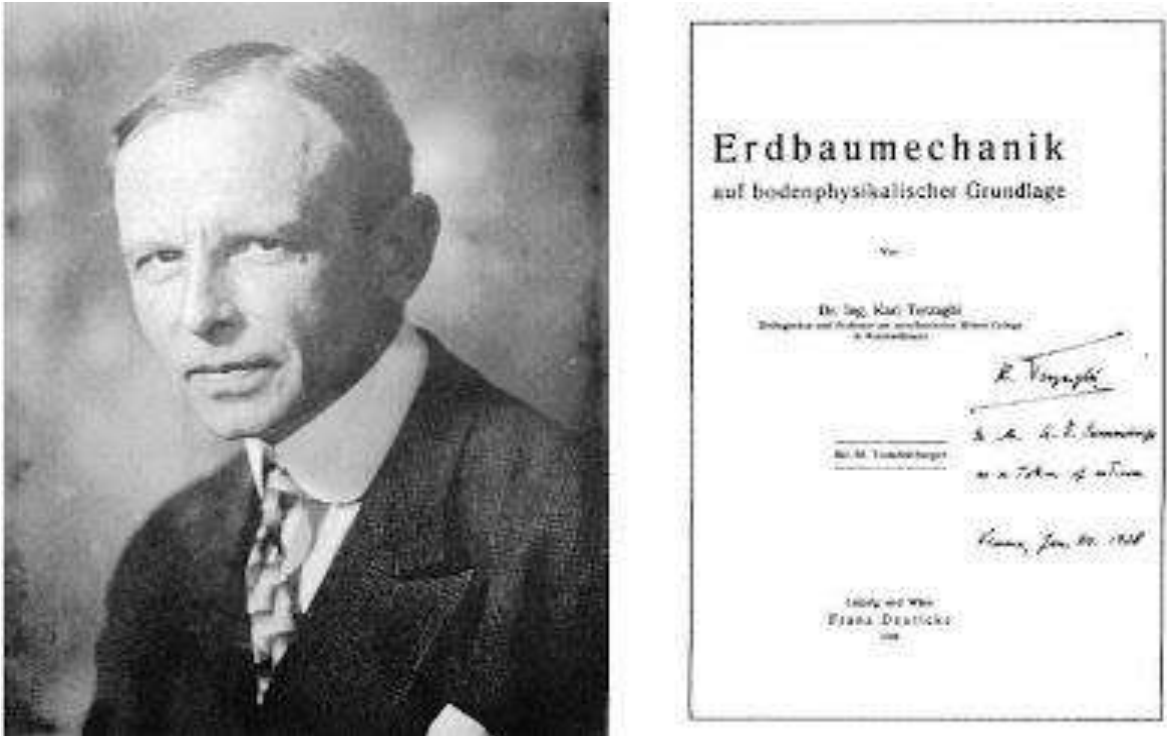


Figura 1.32. Edición autografiada por Karl Von Terzaghi. (Terzagui y la mecánica de suelos).

En el año de 1925 Terzagui propuso la primera teoría para considerar la velocidad de consolidación unidimensional en los suelos saturados arcillosos, es decir cuando se sobrecargan ciertos terrenos poco permeables y totalmente saturados de agua, inicialmente puede observarse una pequeña compresión en el elemento de suelo. Sin embargo al final de un tiempo considerable la subsidencia puede ser considerable, esto es lo que denomino Terzagui como consolidación de los suelos. Terzagui demostró en su laboratorio que la consolidación de un suelo ocurre por la disipación lenta y gradual del agua intersticial contenida en el suelo, el cual se considera que está constituido por una fase solida (partículas del suelo) y una fase liquida (agua).

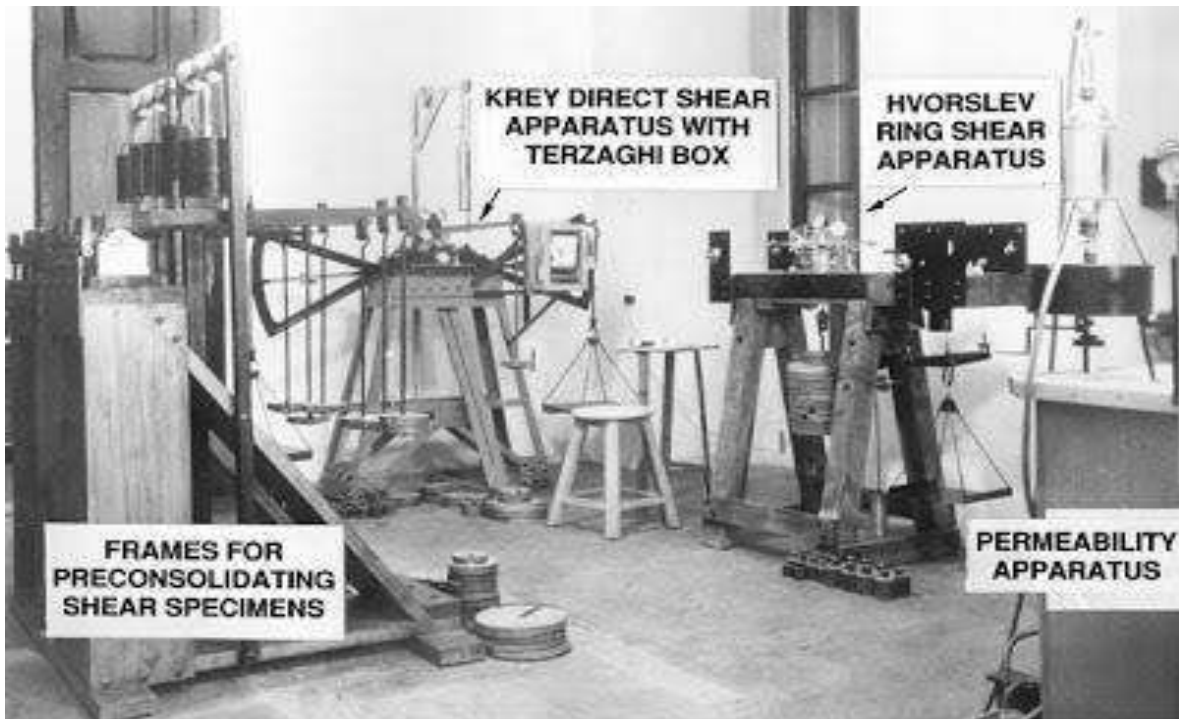


Figura 1.33. Laboratorio del Dr. Karl Von Terzaghi, cortesía de Vienna Technical University, 1935, (Terzagui y la mecánica de suelos).

A partir de estos sencillos experimentos Karl Von Terzaghi concluyó acertadamente que la compresibilidad y la permeabilidad eran factores determinantes en el asentamiento de las arcillas y que estos pueden variar considerablemente, incluso en suelos con idéntico tamaño de grano.

En el año de 1923 Karl Von Terzaghi publicó la ecuación diferencial fundamental para el proceso de consolidación, para la que también estableció su analogía matemática con la transferencia del calor. La ecuación diferencial que gobierna el proceso de consolidación relaciona la derivada espacial de la presión intersticial con la derivada temporal de esta variable a través de un coeficiente de consolidación, el cual depende de las propiedades de ambas fases. A pesar de las simplificaciones que tiene, el modelo explica de forma convincente el fenómeno de consolidación de un suelo saturado arcilloso.

El mecanismo de la consolidación supone que si una carga está actuando de manera externa sobre el suelo, esta será soportada en la fase sólida por los

esfuerzos efectivos y en la fase líquida por el exceso de presión de poro de agua o también conocida como presión intersticial o neutra.

Por efecto de este aumento de la presión aparecerá un escurrimiento transitorio, entonces habrá un aumento progresivo de los esfuerzos efectivos y una disminución progresiva del exceso de presión de poro y por lo tanto hay subsidencia. Terzagui llamó a los esfuerzos efectivos a aquellos que son transmitidos directamente de grano a grano por lo tanto solo tienen efecto en la fase sólida contrariamente al exceso de presión de poro de agua.

Durante la deformación los granos del suelo se desplazan y se deslizan esto implica que el proceso de deformación es gobernado por lo que sucede en los puntos de contacto localizados, en donde los esfuerzos normales y de corte concentrados son transmitidos de grano a grano, sin ser afectados por cambios en el exceso de presión de poro de agua.

❖ 1.4 MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

(J.N. Reddy, 1985). El empleo de métodos de discretizado espacial y temporal además de la aproximación numérica para encontrar soluciones a problemas de ingeniería es conocido desde hace mucho tiempo. Como por ejemplo los egipcios empleaban métodos de discretizado para determinar el volumen de las pirámides que construían. Arquímedes empleaba el mismo método de discretización para calcular el volumen de todo tipo de sólidos o áreas superficiales, así como el matemático de origen chino de nombre Lui Hui empleaba un polígono regular de 3072 lados para de esta manera calcular longitudes de circunferencias con lo que podía calcular de manera aproximada el valor de π . Ya que las limitaciones de la mente humana no pueden captar en su todo en comportamiento de los fenómenos tan complejos que ocurren a diario a nuestro alrededor, por tal motivo se utiliza la discretización del sistema para analizarlo por partes o elementos, para después reconstruir el sistema original y analizarlo a partir de dichos elementos.

El método de los elementos finitos es un método numérico que ha adquirido una gran importancia en la solución de problemas de ingeniería y de la física-matemática, ya que permite resolver casos que hasta hace muy poco tiempo eran imposibles o extremadamente difíciles de resolver por medio de procedimientos matemáticos tradicionales. Esto incluye análisis estructurales, problemas de transferencia de calor, conductividad eléctrica, flujos electromagnéticos, flujo de masas, etc.

El método de los elementos finitos es relativamente nuevo como formulación matemática aunque su estructura básica ya era conocida desde hace mucho tiempo. Para los problemas relacionados con geometrías complicadas, además de las propiedades de los materiales y los diferentes tipos de cargas, en la gran mayoría de casos no es posible obtener soluciones analíticas matemáticas, en donde estas soluciones analíticas son dadas por una expresión matemática que da los valores de las cantidades desconocidas en cualquier punto ubicado en un cuerpo en análisis y en cualquier tiempo si es que así se requiere.

Estas expresiones matemáticas analíticas requieren generalmente la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, las cuales son muy complejas y difícilmente se puede encontrar su solución analítica por lo tanto debemos confiar en los métodos numéricos, como el método de los elementos finitos para obtener soluciones aproximadas y aceptables.

En donde este método numérico da valores aproximados de las incógnitas en números discretizados de puntos (nodos) dispuestos en el medio continuo, es decir este método mencionado anteriormente en vez de resolver el problema en una sola operación se comienza con la formulación matemática para cada elemento finito para después combinarlos y obtener la solución a todo el cuerpo en análisis. De esta forma se consigue pasar de un sistema continuo con infinitos grados de libertad que es representado por una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales, a un sistema con un número finito de grados de libertad cuyo comportamiento se puede modelar con un sistema de ecuaciones diferenciales lineales o no lineales.

De manera matemática el método de los elementos finitos para solucionar el problema realizar una división del dominio (discretización) en subdominios denominados elementos. En el caso unidimensional el dominio se divide en puntos, para el caso bidimensional el dominio se divide en líneas y finalmente para el caso tridimensional el dominio se divide en superficies. De tal manera que el dominio total o espacio total en donde se analizara el sistema se aproxime mediante el conjunto de elementos en el que se subdivide.

Para fines de resolución de las ecuaciones diferenciales parciales que describen el fenómeno de subsidencia y deformaciones provocadas por una carga externa en un estrato de arcilla totalmente saturado y debido a la complejidad de obtener una modelación dado que las ecuaciones diferenciales parciales presentan dominios acoplados se utilizara en el presente trabajo de tesis el programa de simulación numérica denominado WOLFRAM MATHEMATICA 10.0.

❖ 1.5 BREVE HISTORIA DEL PROGRAMA WOLFRAM MATHEMATICA 10.0.

Mathematica es considerado el sistema de computación global más poderoso del mundo, fue creado por el científico y tecnólogo inglés Stephen Wolfram, su desarrollo parte en realidad de la década de los 70s, conocido como SMP. El cual fue lanzado en el año de 1988 al mercado como MATHEMATICA. Marcando el inicio de la computación técnica moderna. En la década de los 60s ya existían paquetes computacionales individuales que podían realizar gráficos específicos, algebraicos y algunos métodos numéricos. El concepto visionario del programa antes mencionado es el de tener la capacidad de manejar todos los diferentes aspectos de la computación técnica de una manera adecuada y unificada, es decir tener la capacidad de resolver problemas ingenieriles, matemáticos y físicos en cualquier disciplina con facilidad. (Wolfram Research, The Mathematica Book).

El avance intelectual clave fue la invención de un nuevo lenguaje simbólico de computación que tuviera la capacidad de manipular un gran número de objetos necesarios para lograr una generalidad requerida en la computación técnica. Hoy en día es utilizado en todas las ciencias físicas, biológicas, sociales, entre otras.

Mathematica es considerado una verdadera hazaña de la ingeniería del software, ya que es un programa de innovación única en el mundo, además de poseer una gran variedad de nuevos algoritmos e importantes innovaciones. Además de que emplea el método de los elementos finitos para la solución aproximada y modelación de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales con una facilidad de programación sorprendente, con la obtención de excelentes gráficos para el mejor entendimiento de la representación física de dichas ecuaciones diferenciales.

Mathematica consta de 2 partes, el Front-End y el Kernel. El Front-End es el editor en donde uno escribe comandos y en donde uno puede ver los resultados, mientras que el Kernel es el cerebro matemático.

❖ 1.6 TEORÍA DE LA ELASTICIDAD.

La teoría de la elasticidad se ha formado como una rama importante de la física matemática en la primera mitad del siglo XIX. Hasta ese entonces los científicos de los siglos XVII y XVIII, Galileo, Mariotte, Hooke, Bernoulli, Euler, Coulomb y otros habían elaborado con bastante detalle la teoría de la flexión de las barras elásticas delgadas. A principios del siglo XIX Lagrange y Sophie Germain dieron una solución al problema de la flexión y de las oscilaciones de las placas elásticas delgadas. Algunas particularidades de los cuerpos elásticos delgados permitieron simplificar considerablemente el planteo y la resolución misma de los problemas de la deformación producida por la acción de las fuerzas exteriores, sin ahondar demasiado en la esencia de los fenómenos que se desarrollan en el material.

El comienzo del siglo XIX fue señalado por grandes progresos del análisis matemático, debidos, en parte, a los numerosos e importantes problemas que se plantearon en la física y que exigieron la aplicación de un complejo aparato matemático y su ulterior desarrollo, lo cual sirvió como punto de partida para la formación de una orientación particular en la física, denominada física matemática. Entre los muchos problemas planteados ante esa joven disciplina, debemos señalar la necesidad de una investigación profunda de las propiedades de los materiales elásticos y de la estructuración de una teoría matemática que permitiera estudiar, lo más exhaustivamente posible, las fuerzas internas que se originan en un cuerpo elástico bajo la acción de las fuerzas exteriores, como, asimismo, la deformación de los cuerpos, es decir, la modificación de su forma.

La genialidad en la creación de los principios de la teoría de la elasticidad corresponde a los matemáticos y mecánicos franceses Cauchy, Navier, y Poisson, que hallaron las ecuaciones diferenciales fundamentales de esa teoría. No podemos dejar de señalar que en su elaboración surgió una gran dificultad de fondo y era que el análisis matemático de aquella época estaba estructurado sobre el concepto del espacio geométrico continuo, en el cual se pueden considerar segmentos infinitamente pequeños y, sobre esta base, introducir los procesos de diferenciación e integración. Sin embargo, la teoría molecular

newtoniana de la estructura de los cuerpos, comúnmente admitida, los presentaba como medios discretos, que constaban de partículas separadas, ligadas entre sí por fuerzas de atracción y repulsión mutua; resultó sumamente difícil fundamentar la aplicabilidad a estos medios del aparato de análisis matemático, vinculado esencialmente con el concepto de funciones continuas, capaces de recibir incrementos tan pequeños como se quiera (es decir infinitamente pequeños), y con la posibilidad de pasar al límite al efectuar su suma, o sea, al integrarlos. (TIMOSHENKO- GOODIER, 1972).

Durante los últimos años la teoría de la elasticidad ha sido aplicada a numerosos problemas ingenieriles proporcionando resultados satisfactorios, todos los materiales presentan deformaciones cuando son sometidos a cargas. Es decir cambian de forma y volumen, cuando un cuerpo no se encuentra deformado, la distribución de las moléculas corresponde a su estado de equilibrio térmico. Por lo tanto todas las partes del cuerpo permanecen en equilibrio mecánico, lo cual quiere decir que si cortamos una porción del cuerpo, la resultante de las fuerzas es igual a cero.

Pero si un cuerpo comienza a deformarse debido a la aplicación de una carga, las moléculas cambian su distribución, y por lo tanto el cuerpo deja de encontrarse en el equilibrio original en el que se encontraba antes de que comenzara la deformación en el cuerpo. Entonces es el momento en donde aparecen fuerzas internas denominados esfuerzos internos que tienden a llevar de nuevo al cuerpo al equilibrio en el que anteriormente se encontraba. Por lo tanto podemos afirmar que si no se presenta deformación en el cuerpo sólido no hay fuerzas internas.

Estas fuerzas internas se deben a las fuerzas moleculares, un hecho importante para la teoría de la elasticidad es que estas fuerzas internas tienen un radio de acción muy corto, debido a que su efecto se extiende solamente a las cercanías de la molécula que la ejerce, mientras que la teoría de la elasticidad es una teoría macroscópica por lo tanto solo considera distancias grandes comparadas con las distancias intermoleculares.

En el sentido estricto la densidad de un cuerpo sólido cambia al deformarse, pero dado que para las pequeñas deformaciones, los términos o cantidades pequeñas de orden superior no tienen importancia a la hora de los resultados totales. Las ecuaciones fundamentales de la teoría de la elasticidad fueron establecidas por Cauchy y Poisson en el año de 1820.

Robert Hooke, Físico inglés, Nació en 1635 y Murió en 1693, fue el físico que introdujo el pensamiento científico sobre la noción de la elasticidad al enunciar su célebre frase:

"ASÍ COMO SE SOLICITA ASÍ SE DEFORMA"

En la realidad hay numerosos fenómenos en los cuales se involucran cuerpos sólidos en los cuales se observa que se presenta un cambio de forma debido a que un sistema de fuerza o una sola fuerza actúa sobre estos cuerpos sólidos. Estas deformaciones pueden ser debido a la presencia de:

- ◆ campos gravitatorios, es decir debido a las fuerzas gravitatorias
- ◆ campos de aceleraciones, es decir debido a las fuerzas inerciales
- ◆ campos electromagnéticos, es decir debido a fuerzas electromagnéticas
- ◆ presión de líquidos
- ◆ desplazamientos impuestos
- ◆ variaciones en la temperatura
- ◆ etc.

En la teoría de la elasticidad existen 15 incógnitas las cuales son las siguientes:

- ◆ 6 incógnitas que describen las deformaciones:

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx} \quad (1.61)$$

- ◆ 6 incógnitas que describen los esfuerzos:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx} \quad (1.62)$$

- ◆ 3 incógnitas que describen los desplazamientos en las 3 dimensiones:

$$u, v, w \quad (1.63)$$

- ◆ Para que se cumpla el equilibrio en el cuerpo sólido, empleamos el teorema de Augustin Louis Cauchy el cual se expresa de la siguiente manera:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (1.64)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

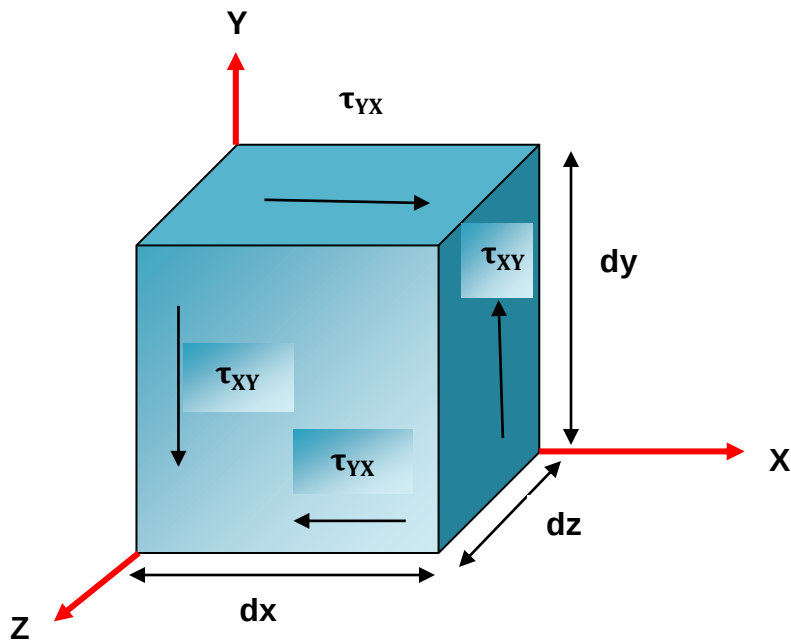


Figura 1.61. Elemento infinitesimal de suelo sometido a esfuerzo cortante puro.

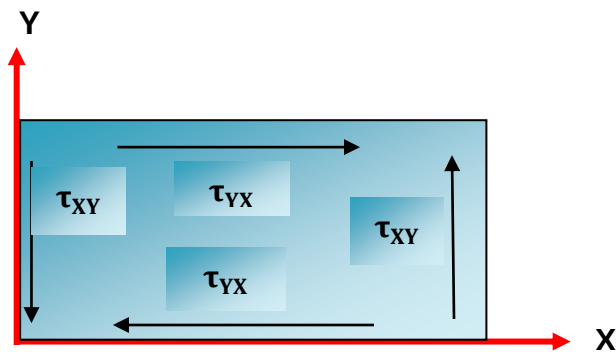


Figura 1.62. Representación del teorema de Cauchy para esfuerzos cortantes.

El cual nos dice que los subíndices de los esfuerzos cortantes son conmutativos, es decir su orden puede intercambiarse y por lo tanto la matriz es simétrica para que se cumpla el equilibrio del cuerpo sólido en análisis. El hecho de que los subíndices sean conmutativos significa que los esfuerzos cortantes sobre planos mutuamente perpendiculares de un elemento infinitesimal son numéricamente iguales.

◆ Ley de Hooke

Esta Ley afirma que la deformación elástica que sufre un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza que produce dicha deformación, siempre y cuando no se sobrepase el límite de elasticidad. Expresándolo de manera matemática:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.65)$$

Donde:

σ : Es la fuerza aplicada sobre el cuerpo sólido.

E : Es la constante de proporcionalidad conocida como módulo de Young.

ε : Es la deformación producida al cuerpo sólido debido a la fuerza actuante.

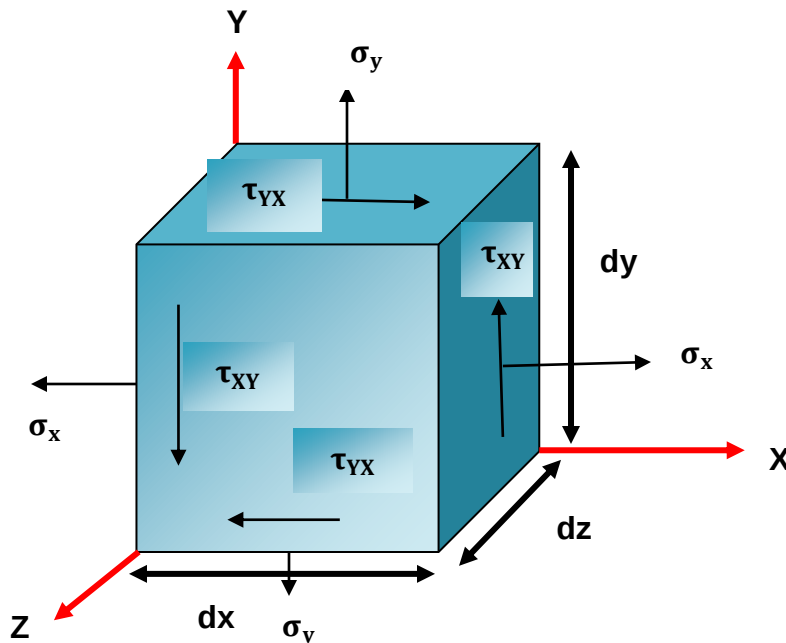


Figura 1.63. Elemento infinitesimal sometido a esfuerzos.

◆ Ley de Hooke Generalizada para un estrato de suelo arcilloso.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

Dónde:

E y ν son las constantes de elasticidad para un suelo arcilloso homogéneo e isotrópico.

E= módulo de Young.

ν = coeficiente de Poisson.

ε = Deformaciones.

σ = Esfuerzos actuando en el estrato arcilloso totalmente saturado.

k = Matriz de las propiedades del estrato de suelo arcilloso.

Expresando la ecuación (1.66) en forma vectorial:

$$\{\varepsilon\} = \{k\} \{\sigma\} \quad (1.67)$$

Despejando de la ecuación (1.67) los esfuerzos:

$$\{\sigma\} = \{k\}^{-1} \{\varepsilon\} \quad (1.68)$$

Por lo tanto podemos expresar la ecuación (1.68) en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \text{Módulo de corte o módulo de elasticidad tangencial.}$$

CAPITULO 2: SISTEMA TRIFÁSICO DE UN SUELO SATURADO.

El libro de Terzaghi-Peck (Mecánica de suelos en la Ingeniería Práctica) define el suelo diciendo que es un conglomerado de partículas unidas por fuerzas cohesivas de poca potencia, y plantea después el interrogante sobre cuáles son las fuerzas cohesivas de poca potencia, llamando fuerzas cohesivas de poca potencia a aquellas que pueden contrarrestarse por una acción mecánica poco intensa, como ser agitación en agua. De manera que el límite de separación entre uno y otro elemento que forman la corteza no es simple.

El suelo es producido por el intemperismo, es decir por el rompimiento y fracturas de los diferentes tipos de rocas existentes en la superficie terrestre debido a procesos tanto físicos como químicos. Un suelo se encuentra formado por tres fases, partículas sólidas, agua y aire.

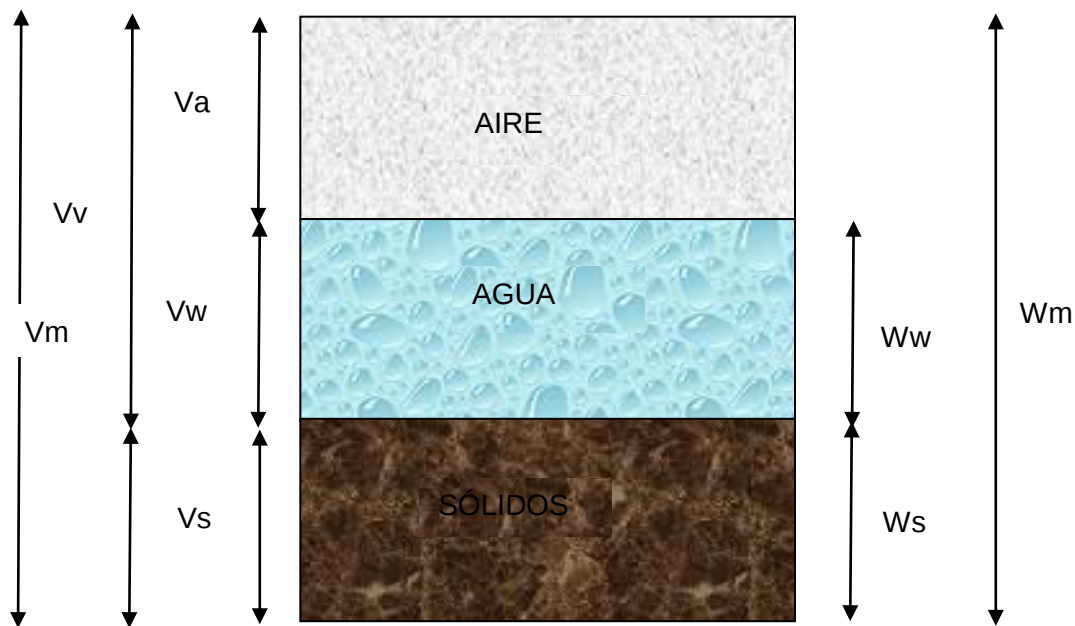


Figura 2.1. Sistema trifásico de un suelo arcilloso totalmente saturado.

De la **Figura 2.1.** (Dr.Carlos Chávez Negrete, UMSNH, Facultad de Ingeniería Civil, 2009). Podemos obtener las siguientes relaciones gravimétricas y volumétricas, las cuales son las siguientes:

◆ Relación de vacíos: $e = \frac{V_v}{V_s}$ (2.1)

◆ Grado de saturación: $S_r = \frac{V_w}{V_v}$ (2.2)

◆ Volumen específico: $v = 1 + e$ (2.3)

◆ Densidad relativa de los sólidos: $S_s = G_s = \frac{W_s}{V_s \gamma_w}$ (2.4)

◆ Contenido de humedad: $w = \frac{W_w}{W_s}$ (2.5)

◆ Peso volumétrico total: $\gamma_w = \frac{W_s + W_w}{V_m}$ (2.6)

◆ Peso volumétrico seco: $\gamma_d = \frac{W_s}{V_m}$ (2.7)

(Dr. Carlos Chávez Negrete. Apuntes de Mecánica de suelos). Las arcillas se definen como partículas muy diminutas del orden de 0.002 milímetros como máximo, por consecuencias son partículas submicroscópicas las cuales pueden ser minerales arcillosos como la caolinita, montmorillonita, gibbsita, entre otros minerales. Una de las propiedades por las que se caracterizan las arcillas y se debe de tener mucho cuidado a la hora de construir en este tipo de suelo es que las arcillas desarrollan plasticidad cuando son mezcladas o entran en contacto con el agua. La clasificación de los suelos finos se basa en la plasticidad, la cual se representa en la **figura 2.2**.

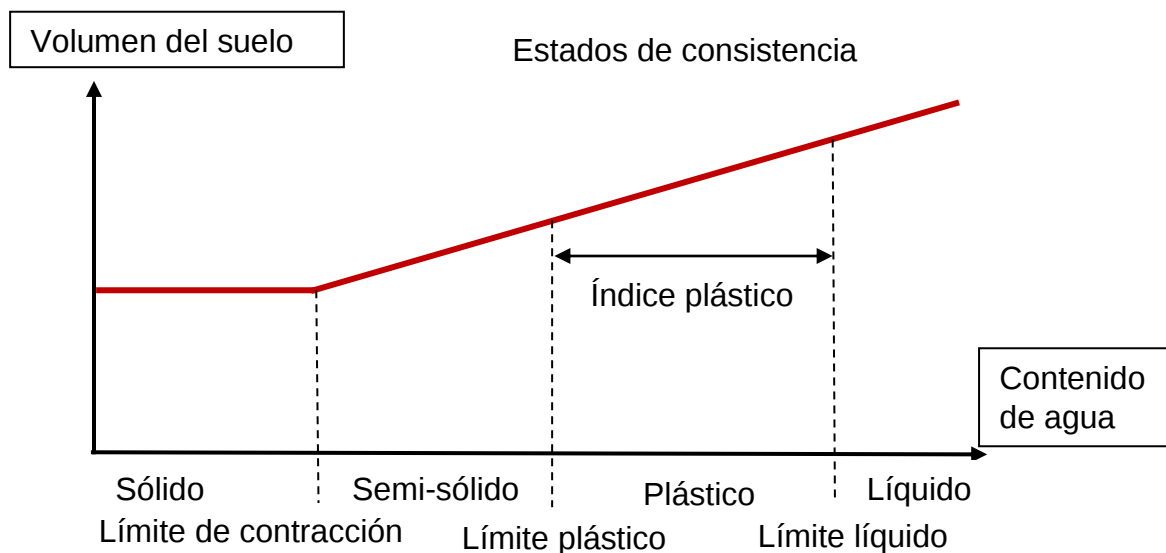


Figura 2.2. Clasificación de los suelos finos basado en su plasticidad.

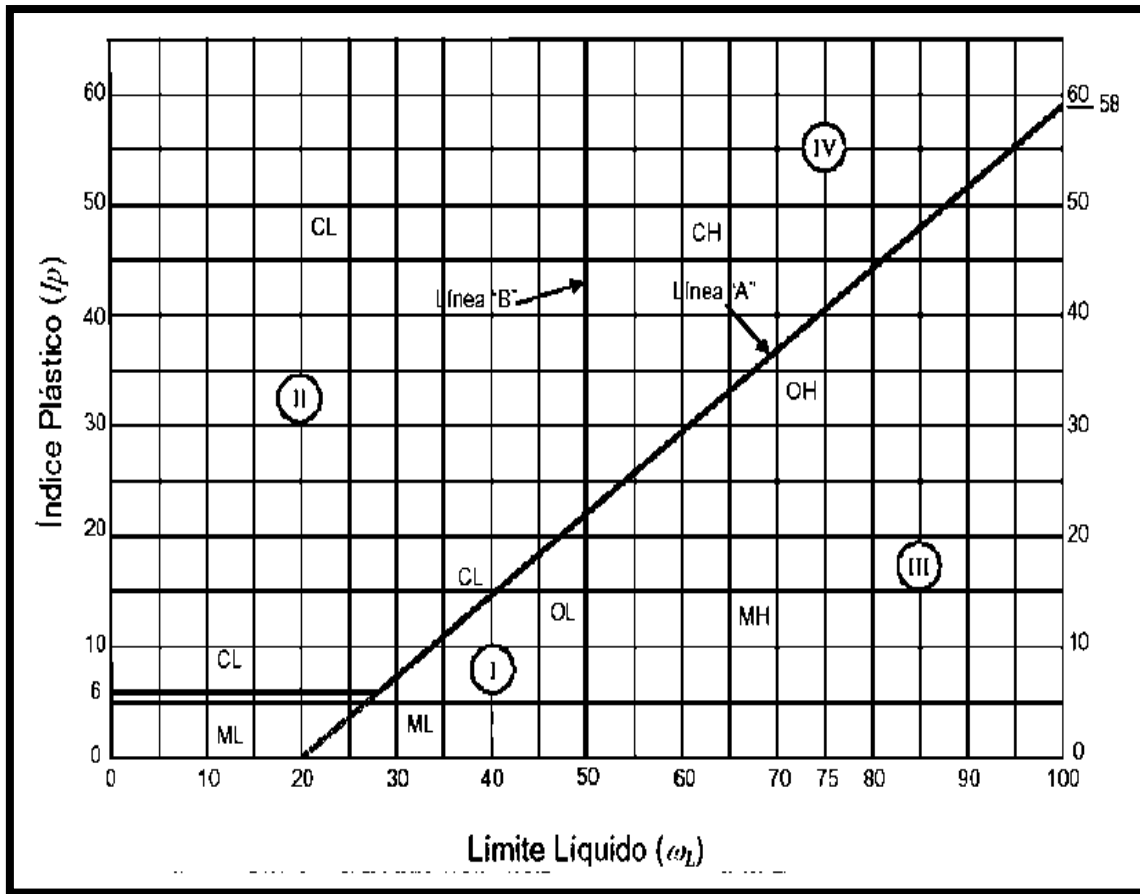


Figura 2.3. Carta de plasticidad.

Los minerales arcillosos los podemos definir como complejos silicatos de aluminio los cuales se encuentran constituidos por una o dos unidades básicas las cuales son las siguientes:

- ◆ Tetraedro de sílice.
- ◆ Octaedro de alúmina.

Comenzamos por definir la primera unidad básica la cual está denominada como Tetraedro de sílice, la cual consiste en 4 átomos de oxígeno los cuales se encuentran rodeando un átomo de sílice, en donde puede ocurrir una combinación de tetraedros de sílice los cuales comparten los átomos de oxígeno en sus respectivas bases de cada tetraedro.

La segunda unidad básica denominada octaedro de alúmina consiste en 6 hidroxilos los cuales rodean un átomo de sílice, si se presenta la combinación de dos o más unidades octaédricas se tendrá como resultado una lámina octaédrica llamada gibbsita. Dado que en el presente trabajo de tesis se analiza un estrato de suelo completamente arcilloso definiremos y representaremos algunos de los principales grupos de arcilla más comunes los cuales son los siguientes:

◆ La caolinita.

La cual consiste en varias capas repetidas de láminas de sílice-gibbsita, en donde cada capa tiene aproximadamente un espesor de 7 Ångström las cuales se mantienen unidas entre sí por enlaces hidrogénicos. Las partículas de caolinita tiene un área superficial por masa unitaria de aproximadamente $15 \frac{m^2}{g}$ en donde al área por masa unitaria también se le conoce como superficie específica.



Figura 2.4. Estructura de la caolinita.

◆ La illita.

Consiste en una lámina de gibbsita intercalada entre 2 láminas de sílice, en ocasiones se le denomina mica arcillosa, sus capas se encuentran enlazadas entre sí por iones de potasio en donde la carga negativa para lograr establecer un balance de iones de potasio proviene de la sustitución de aluminio por silicio en las

láminas tetraédricas. La superficie específica de la illita es de aproximadamente $80 \frac{m^2}{g}$.

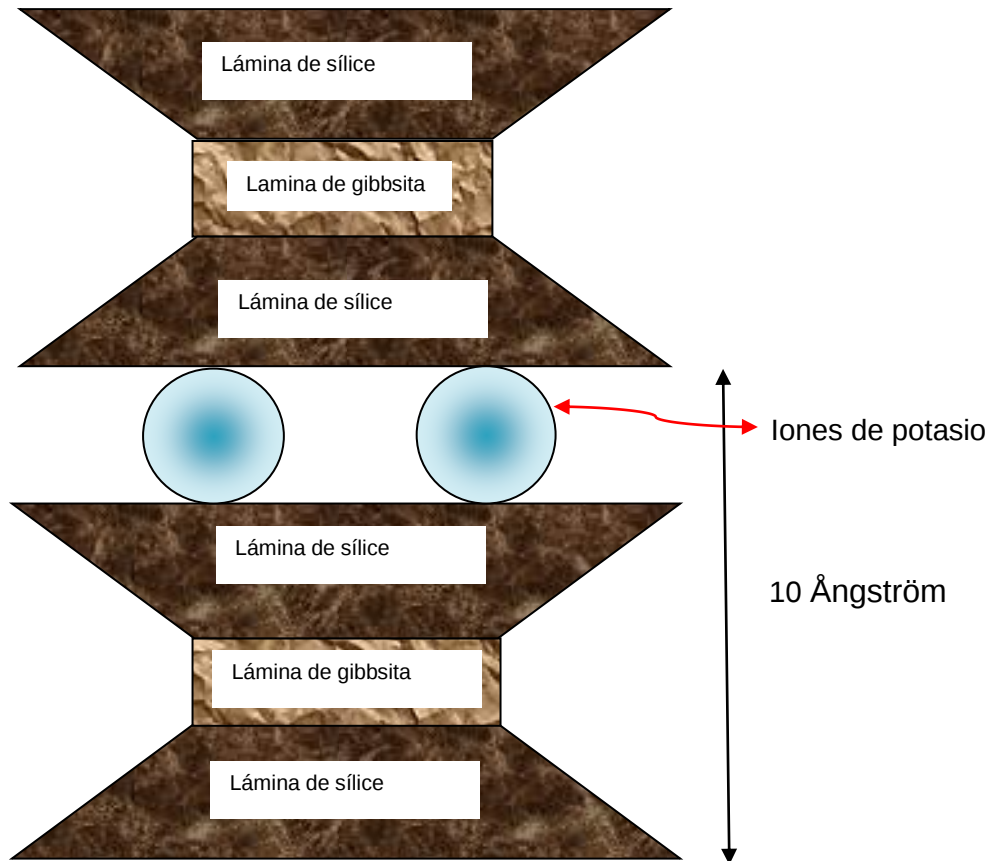


Figura 2.5. Estructura de la illita.

◆ La montmorillonita.

Consiste en una estructura muy similar a la de la illita, pero en este tipo de arcilla se presenta sustitución isomorfa de magnesio y hierro por aluminio en las láminas octaédricas, por lo tanto los iones de potasio no se encuentran presentes como es el caso del tipo de arcilla denominado illita, además de que una enorme cantidad de agua es atraída hacia los espacios entre sus capas, en este tipo de arcilla la superficie específica es de aproximadamente $800 \frac{m^2}{g}$.

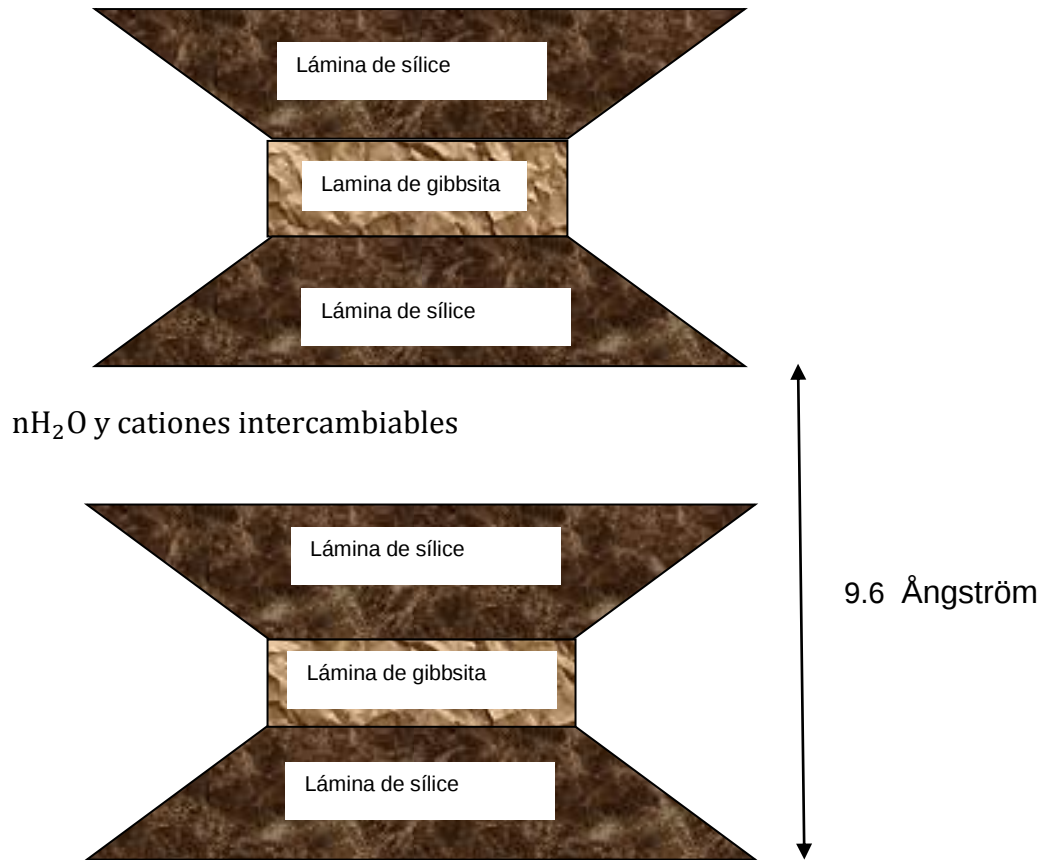


Figura 2.6. Estructura de la montmorillonita.

El fenómeno de la consolidación de un suelo arcilloso totalmente saturado se origina cuando se le aplica una carga externa, en un tiempo inicial el agua absorberá parte de dicha carga, ya que se considera el agua contenida dentro de suelo totalmente saturado como incompresible.

Con el transcurso del tiempo el agua se dispara absorbiendo la carga paulatinamente. La aplicación de la carga sobre el suelo actúa de manera diferente en cada fase del suelo provocando interacciones entre ellas.

La compresión que existe debido a la aplicación de la carga externa sobre cada una de las diferentes fases que forman un suelo, generalmente tiene efectos muy pequeños en la deformación del suelo, las mayores deformaciones se originan por la disminución en la relación de vacíos provocada por la disipación de agua y aire a través de los poros del suelo.

A la eliminación de una parte del contenido total de aire presente en el suelo debido a la aplicación de una carga externa sobre el suelo se le conoce como compactación. La forma de las láminas de las partículas de arcilla hace que las mismas presenten una gran cantidad de cargas eléctricas tanto negativas como positivas. En donde estas cargas eléctricas disminuyen en su cantidad a medida que el diámetro de las partículas de arcilla aumenta y además experimentan un cambio de forma y por lo tanto ocasiona que la superficie expuesta de cada partícula de arcilla disminuya, lo cual implica una menor carga eléctrica.

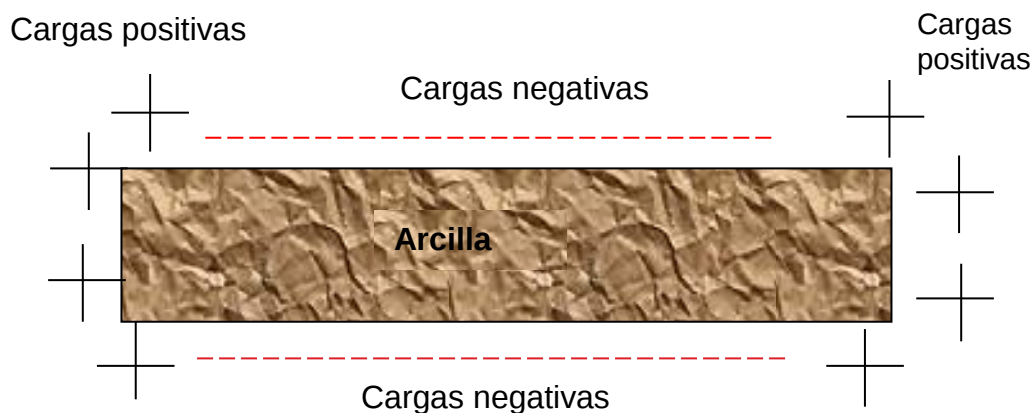


Figura 2.7. Partícula de arcilla con cargas eléctricas.

Por lo tanto el agua adsorbida junto con el agua absorbida por la partícula de arcilla forman lo que se denomina como una doble capa difusa, la cual tiene una concentración de iones y moléculas de agua dipolar.

La cual es muy grande cerca de la lámina pero decrece cuanto más se aleje de la lámina de arcilla hasta una distancia aproximada de 400 angstrom. Lo cual significa que a medida que la partícula de arcilla absorbe agua del exterior esta se aloja en las caras de los cristales y por lo tanto comienza a hidratar a los cationes, lo cual provoca que estos experimenten un incremento de su diámetro y por consecuencia la distancia entre las partículas se incrementa. Lo cual quiere decir que la cantidad de moléculas de agua que ingresen a la lámina de arcilla dependerá de la cantidad de cargas negativas disponibles que contenga cada partícula de arcilla.

La eliminación de parte del contenido total de aire presente en un suelo ocurre casi de manera instantánea, ya que en suelos granulares o poco cohesivos se caracterizan por tener una alta permeabilidad del aire a través de su estructura intergranulares, la disipación de agua en suelos arcillosos debido a efectos por aplicación de la carga externa sobre el suelo suele tener retrasos en el transcurso del tiempo de consolidación debido a la poca o tiende a nula permeabilidad que estos suelos arcillosos poseen.

A este proceso en el que la disipación del agua se retrasa en el tiempo se le conoce como consolidación primaria, por consecuencia si la carga externa aplicada sobre el suelo se mantiene de manera constante en un tiempo infinito el total de contenido de agua se disipara dando lugar a deformaciones del suelo por efectos reológicos del mismo, como puede ser el reacomodo de las partículas del suelo, en donde a este proceso se le conoce como consolidación secundaria, esto es debido a un reajuste plástico en la estructura intergranulares del suelo en donde al final el suelo habrá ganado resistencia.

CAPITULO 3: DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA TEORÍA DE TERZAGUI.

❖ 3.1 INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE TERZAGUI.

Braja, M. D. (2001). La derivación matemática considera las siguientes suposiciones o hipótesis para una mayor simplicidad en la formulación matemática sobre la ecuación diferencial que describe el fenómeno de subsidencia en un suelo totalmente saturado:

- ◆ El sistema arcilla-agua es homogéneo completamente.
- ◆ El suelo está completamente saturado.
- ◆ Las partículas del suelo son incompresibles.
- ◆ Las partículas del agua son incompresibles.
- ◆ La compresión es unidimensional.
- ◆ Drenaje de agua vertical.
- ◆ Es válida la ley de Darcy.
- ◆ las partículas del suelo se pueden reacomodar.
- ◆ La permeabilidad es constante durante todo el proceso de consolidación.
- ◆ Deformaciones solo en dirección vertical.
- ◆ Existe una relación lineal entre el esfuerzo de compresión efectivo y la disminución de volumen del elemento de suelo.

Terzagui(1943) considera un depósito de suelo completamente homogéneo, totalmente saturado, el cual tendrá una longitud lateral infinita y está sometido a una carga uniformemente aplicada en toda su área superficial, el suelo arcilloso está reposando sobre una base de arena y drena de manera libremente en su parte superior (ver **Figura 31**).

La disipación del exceso de presión de poro o presión intersticial en cualquier punto solo se llevara a cabo mediante el flujo de agua intersticial de manera vertical, ya que el gradiente hidráulico está en sentido vertical, esto implica que se producirán deformaciones solo en el sentido vertical, por lo tanto cuando más se disipe el exceso de presión de poro, los esfuerzos efectivos aumentan, ganando resistencia el suelo, ya que el agua no trasmite esfuerzos solo la estructura intergranular del suelo, por lo tanto la consolidación es un problema de flujo de agua no establecido en un medio poroso.

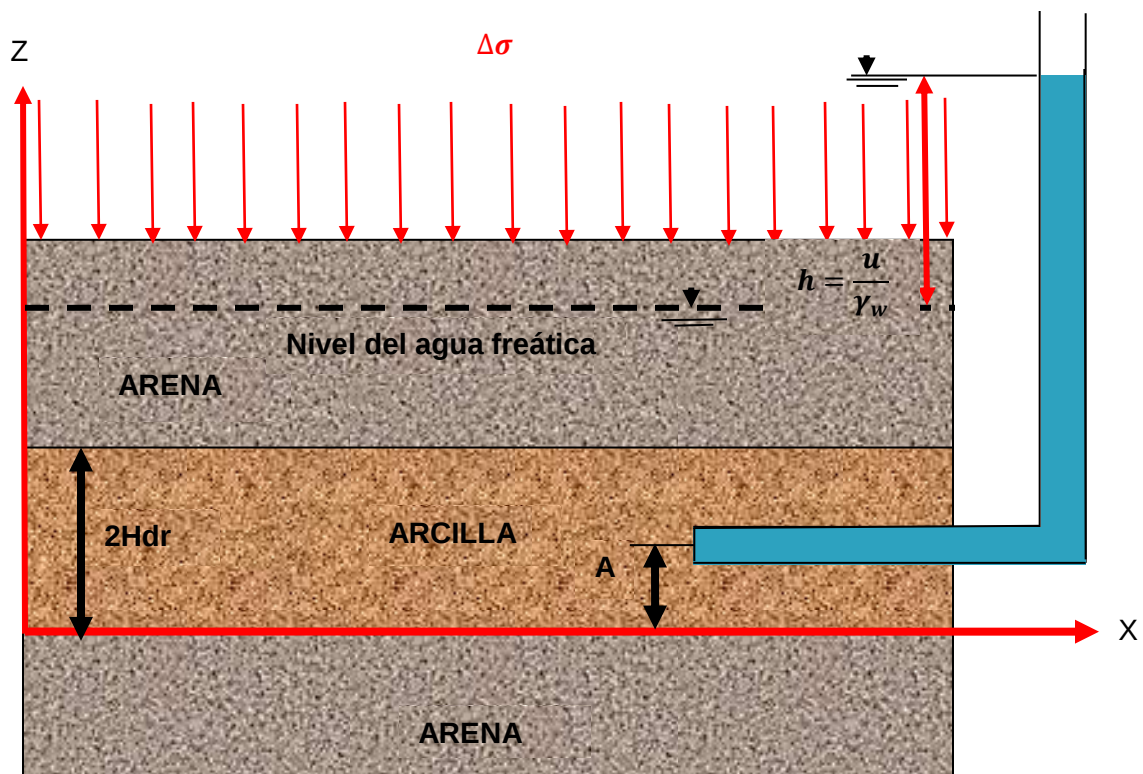


Figura 3.11. Esquema del suelo para la derivación de la ecuación diferencial (Braja, 2001).

❖ 3.2 FORMULACIÓN MATEMÁTICA DE LA TEORÍA DE TERZAGUI.

Braja, M. D. (2001). Formulación matemática de la teoría unidimensional de Terzagui se realizara a partir del principio de continuidad para flujos de agua a través de medios porosos. A partir del principio de continuidad para flujos de agua a través de medios porosos, el cual se basa en el principio de conservación de masa, que en mecánica de los fluidos recibe el nombre de “Ley de continuidad” considérese un volumen de control homogéneo e isotrópico en un medio poroso como el de la **Figura 3.11**

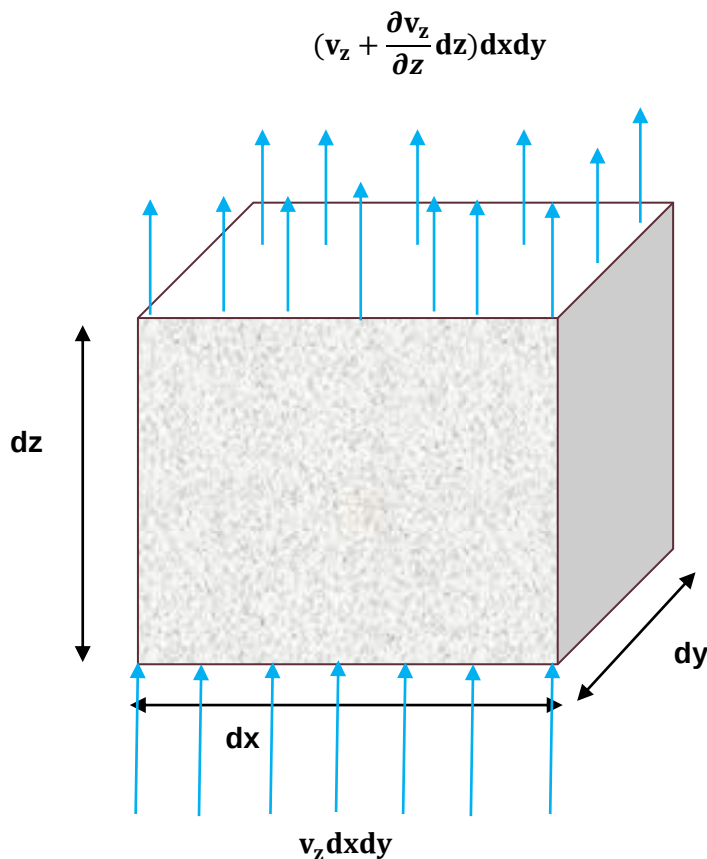


Figura 3.21. Flujo en un medio poroso en dirección vertical.

En los cuales la formulación de la teoría se puede hacer de 2 maneras, en las cuales se llega al mismo resultado, si lo deducimos por series de Taylor se tendrán que eliminar los términos de segundo orden y de orden superior ya que

son no significativos y la otra alternativa es mediante la figura que se muestra anteriormente y aplicando el principio de continuidad de flujos de agua en medios porosos.

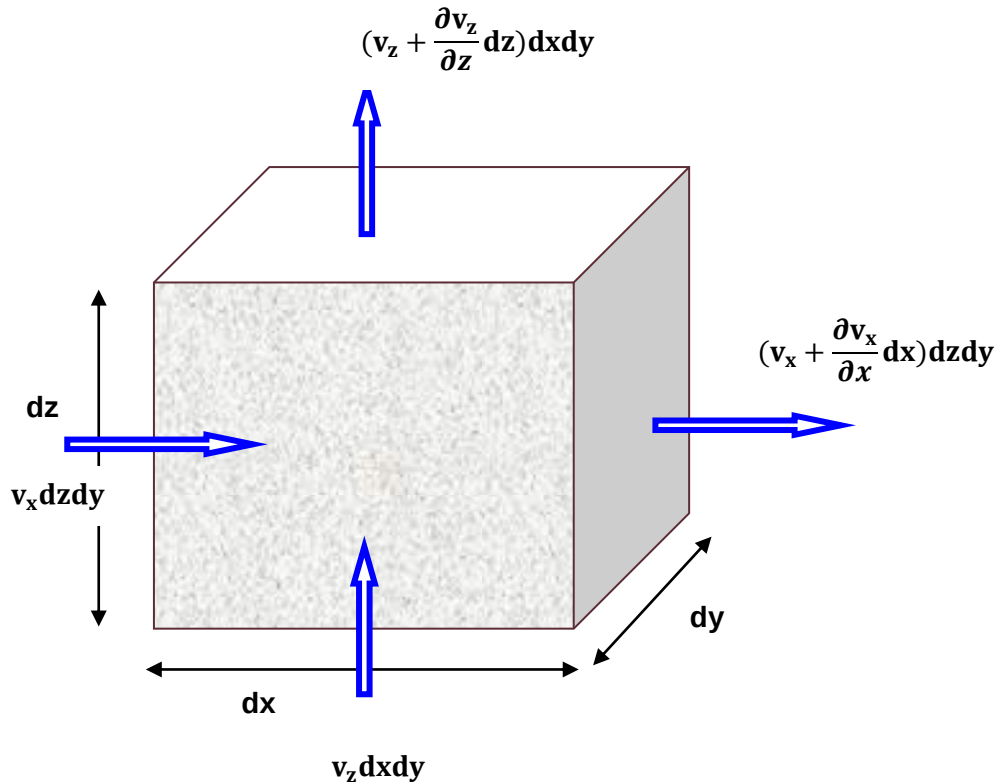


Figura 3.22. Ecuación de continuidad de Pierre-Simon Laplace en 2 dimensiones.

Con el principio de continuidad de Laplace mostrado en la **Figura 3.22**; tenemos que:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Velocidad de salida} & - & \text{velocidad de entrada} & = & \text{velocidad del cambio} \\ \text{Del agua} & & \text{del agua} & & \text{del volumen} \end{array} \quad (3.21)$$

De manera matemática si aplicamos el teorema de Taylor tenemos:

$$v_z + dz = v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} dz^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 v_z}{\partial z^3} dz^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 v_z}{\partial z^4} dz^4 + \dots + ..$$

(3.22)

Pero dado que dz es muy pequeño, se puede suponer que los términos de segundo orden y de orden superior son insignificantes y por lo tanto se tiene:

$$v_z + dz = v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \quad (3.23)$$

Por otro lado, aplicamos el principio de continuidad del volumen y obtenemos la siguiente expresión matemática:

$$\left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right) dxdy - v_z dxdy = \frac{\partial V}{\partial t} \quad (3.24)$$

Simplificando la expresión (3.24) se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} dz dxdy = \frac{\partial V}{\partial t} \quad (3.25)$$

Dónde:

V = volumen total del elemento del suelo completamente saturado

V_z = la dirección del flujo en la correspondiente coordenada z

◆ Aplicando la ley de Darcy la cual nos dice:

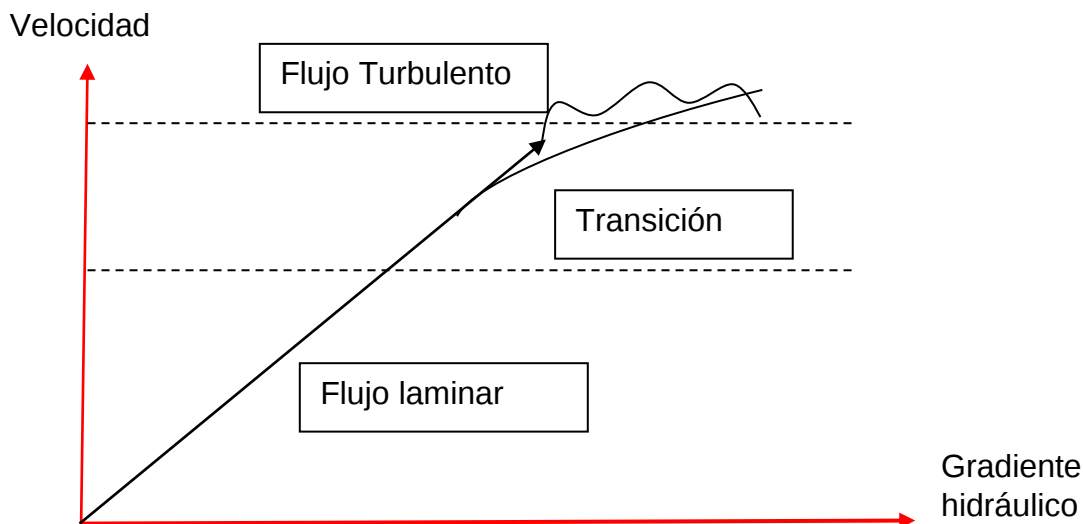


Figura 3.23. Representación de las zonas de comportamiento de un flujo de agua.

Braja, M. D. (2001). La magnitud de la velocidad de un flujo de agua que circula a través de un suelo poroso completamente saturado es directamente proporcional a su gradiente hidráulico.

$$v \propto \frac{dh}{dl} \quad (3.26)$$

Expresándolo de manera matemática se obtiene lo siguiente:

$$v = -K \frac{dh}{dl} \quad (3.27)$$

Donde k se le conoce como conductividad hidráulica, la cual se define como la capacidad que tiene un suelo para que un fluido pueda atravesar a través de él. Entonces para la componente del flujo en la dirección z las ecuaciones de Darcy quedan de la manera siguiente:

$$v_z = -ki = -k \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.28)$$

Donde u es el exceso de presión de poro de agua causada por el incremento del esfuerzo.

$$\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{dx dy dz} \quad (3.29)$$

La expresión matemática anterior nos describe que la razón de cambio en el volumen del elemento del suelo completamente saturado es igual al cambio en el volumen de vacíos, por lo tanto:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial v_v}{\partial t} = \frac{\partial (v_s + e v_s)}{\partial t} = \frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial e}{\partial t} + e \frac{\partial v_s}{\partial t} \quad (3.30)$$

Dónde:

v_s = volumen de sólidos del suelo

v_v = volumen de vacíos

Dado que por hipótesis se considera que el volumen de los sólidos es incompresible se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = 0 \quad (3.31)$$

Y por lo tanto la ecuación (3.30) es igual:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = v_s \frac{\partial e}{\partial t} \quad (3.32)$$

Sabemos que:

$$v_s = \frac{V}{1+e_0} = \frac{dx dy dz}{1+e_0} \quad (3.33)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.33) en la ecuación (3.32) obtenemos:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{dx dy dz}{1+e_0} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (3.34)$$

Definiendo el coeficiente de compresibilidad, que se considera constante para un rango estrecho del incremento en la presión de poro o presión neutra:

$$a_v = \frac{\partial e}{\partial \sigma'} = \frac{-\partial e}{\partial u} \quad (3.35)$$

Despejando a_v de la ecuación (3.35) obtenemos:

$$\partial e = -\partial u * a_v \quad (3.36)$$

Dónde e_0 = relación de vacíos inicial, por lo tanto si combinamos las ecuaciones (3.29), (3.34) y (3.36) tendremos la siguiente expresión:

$$-\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{1+e_0} \frac{-\partial u * a_v}{\partial t} \quad (3.37)$$

Simplificando la ecuación (3.37) obtenemos:

$$\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{a_v}{1+e_0} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.38)$$

Recordando que:

$$m_v = \frac{a_v}{1+e_0} \quad (3.39)$$

Dónde:

m_v Es el coeficiente de compresibilidad volumétrica.

Combinando las ecuaciones **(3.38)** y **(3.39)** obtenemos la siguiente expresión matemática:

$$\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = m_v \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.40)$$

Ordenando la ecuación **(3.40)**

$$\frac{k}{\gamma_w * m_v} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.41)$$

El coeficiente de consolidación se expresa en la siguiente fórmula matemática:

$$c_v = \frac{k}{\gamma_w * m_v} = E * \frac{k}{\gamma_w} \quad (3.42)$$

Simplificando la ecuación **(3.41)**;

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.43)$$

La expresión anterior nos dice que el cambio en la relación de vacíos está dado por un incremento en los esfuerzos efectivos, lo cual implica un decremento en exceso de las presiones de poro de agua. Por lo tanto tenemos la ecuación diferencial de Terzagui que describe el fenómeno de la consolidación de un suelo totalmente saturado en una dimensión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (3.44)$$

Para resolver la ecuación diferencial **(3.44)** Terzagui propuso las siguientes condiciones de frontera:

$$Z=0, U=0$$

$$Z=2H_{dr}, U=0$$

$$T=0, U=U_0$$

Dando como solución aproximada:

$$\frac{u_e}{u_o} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{2}{M} \sin\left[M\left(1 - \frac{z}{H_{dr}}\right)\right] e^{-M^2 T_v} \quad (3.45)$$

Y la solución exacta:

$$u(z, t) = u * e^{-k_z * z} * \sin(2 * c_v * k_z^2 * t - k_z * z) \quad (3.46)$$

Dónde:

H_{dr} : representa la longitud máxima del recorrido del agua.

T_v : es un factor adimensional denominado: factor de tiempo vertical que es igual a la siguiente expresión:

$$T_v = \frac{c_v t}{H_{dr}^2} \quad (3.47)$$

u_e : representa el exceso de presión intersticial en el elemento de suelo

u_o : representa el exceso de presión intersticial inicial en el elemento de suelo

Con $m=1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, \infty$

$$M = \frac{2}{\pi} (2m + 1) \quad (3.48)$$

De manera más simplificada tenemos:

$$U = \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[\frac{2u_o}{M} \sin\left(\frac{Mz}{H_{dr}}\right) \right] e^{-M^2 T_v} \quad (3.49)$$

Dado que el fenómeno de consolidación progresa conforme el exceso de presión de poro de agua disminuye, es decir que se disipa el agua, el grado de consolidación a una distancia z en un tiempo t es igual a la siguiente expresión:

$$U_z = \frac{u_o - u_z}{u_o} = 1 - \frac{u_z}{u_o} \quad (3.50)$$

Dónde:

u_z : representa el exceso de presión de poro de agua en el tiempo t .

Si se combina las ecuaciones **(3.47)** y **(3.48)** se obtiene el grado de consolidación a cualquier profundidad (z). Se define un grado de consolidación vertical de un elemento de suelo con la siguiente expresión matemática:

$$U_v = \frac{e_0 - e}{e_0 - e_f} \quad (3.51)$$

Dónde:

U_v : Grado de consolidación vertical.

e : representa la relación de vacíos en el volumen del elemento de suelo.

e_0 : representa la relación de vacíos inicial en el volumen del elemento del suelo.

e_f : representa la relación de vacíos final en el volumen del elemento del suelo.

Ahora si se considera la existencia de una relación lineal:

$$e - \sigma'_v \quad (3.52)$$

Se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{e_0 - e}{e_0 - e_f} = \frac{\sigma'_v - \sigma'_{v0}}{\sigma'_{vf} - \sigma'_{v0}} \quad (3.53)$$

Simplificando tenemos:

$$U_v = \frac{\sigma'_v - \sigma'_{v0}}{\sigma'_{vf} - \sigma'_{v0}} \quad (3.54)$$

Dónde:

σ'_v : representa el esfuerzo vertical efectivo en dirección vertical en el elemento de suelo

σ'_{v0} : representa el esfuerzo vertical efectivo inicial en dirección vertical en el elemento de suelo

σ'_{vf} : representa el esfuerzo vertical efectivo final en dirección vertical en el elemento de suelo

Braja, M. D. (2001). De manera sencilla el grado de consolidación de un suelo para una profundidad (**z**) y para un tiempo (**t**) se puede definir como una relación entre la consolidación que ya ha tenido en ese lugar y la consolidación total que se ha de producir bajo el incremento de carga que se está aplicando sobre el volumen del suelo. Utilizando el concepto de los esfuerzos efectivos o esfuerzos intergranulares, los cuales fueron introducidos por Terzagui en 1925. Terzagui los definió como los esfuerzos transmitidos directamente de grano a grano de suelo, los esfuerzos efectivos solo tiene efecto en la fase solida del suelo, de manera contraria al exceso de presión de poro de agua o también conocida como presión intersticial ya que no trasmite esfuerzos cortantes. Los esfuerzos aplicados al sistema bifásico solido-liquido se descomponen en los esfuerzos efectivos y las presiones neutras o intersticiales, en un material solamente el cual está sometido a compresión por fuerzas externas. De manera matemática se expresa de la siguiente manera:

$$\sigma = \sigma' + u \quad (3.55)$$

Dónde:

σ : representa el esfuerzo total.

σ' : representa el esfuerzo vertical.

u : representa el exceso de presión de poro o presión intersticial.

Tomando como modelo un elemento de suelo arcilloso completamente saturado y utilizando el concepto de los esfuerzos efectivos de Terzagui, además de representar en la **Figura 3.25**, la permeabilidad de un suelo arcilloso totalmente saturado homogénea en todas las direcciones, lo que implica que el coeficiente de consolidación es el mismo en ambas direcciones.

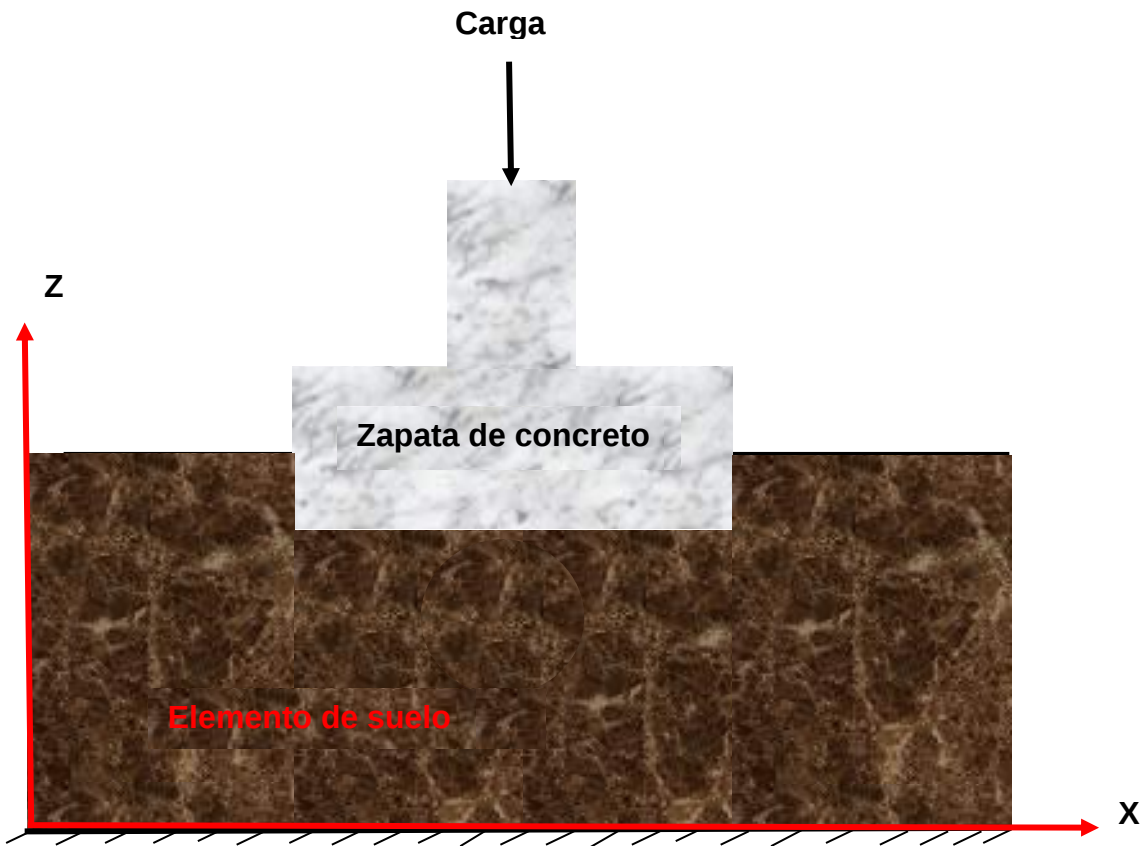


Figura 3.24. Carga externa actuando sobre un elemento de suelo arcilloso completamente saturado.

En la **Figura 3.24**, Se representa una zapata la cual está transmitiendo al elemento de suelo arcilloso totalmente saturado una carga, la cual ocasionara que se generen deformaciones y desplazamientos debido a la disipación del exceso de presión de poro de agua respecto al tiempo.

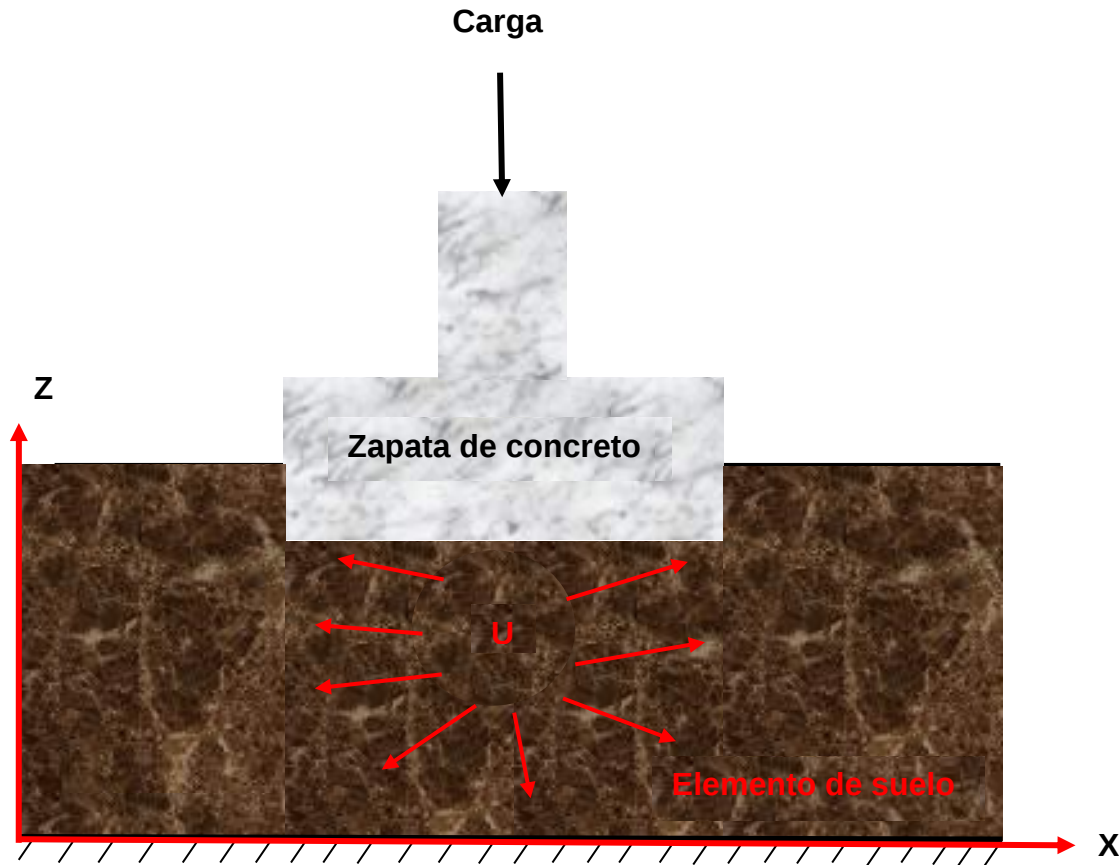


Figura 3.25. Representación de la disipación homogénea del exceso de presión de poro de agua debido a la aplicación de una carga externa actuando sobre el elemento de suelo completamente saturado.

◆ De la **Figura 3.25**, se puede deducir lo siguiente:

Cuando una carga externa actúa sobre el elemento de un suelo completamente saturado para un tiempo ($t=0$) los esfuerzos efectivos serán los que se tenían antes de la aplicación de la carga y todo el esfuerzo debido a la carga externa lo tendrá el exceso de presión de poro total.

Pero para un tiempo ($t=t_1$), los esfuerzos efectivos verticales se incrementarán, el exceso de presión total disminuirá progresivamente aumentando los esfuerzos efectivos y por lo tanto el suelo ganará más resistencia.

Finalmente para un tiempo ($t=\infty$), el agua se habrá disipado totalmente del elemento del suelo, por lo que el exceso de presión total será nulo, lo cual implica que el incremento de los esfuerzos efectivos serán iguales al incremento de esfuerzos totales (carga externa). El grado de consolidación promedio en un elemento de suelo es:

$$U = 1 - \frac{u_z}{u_0} = 1 - \frac{S_t}{S} = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2H_{dr}}\right) \int_0^{2H_{dr}} u_z dz}{u_0} \quad (3.56)$$

Dónde:

U : es el grado promedio de la consolidación

S : Asentamiento ultimo del estrato por consolidación primaria

S_t : Asentamiento del estrato en el tiempo t

Ahora sustituyendo la expresión para la presión de poro de agua en exceso u_z , la cual está dada por la expresión (3.49) y (3.55) se obtiene la siguiente expresión matemática:

$$U = 1 - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{2\mu_0}{M^2} e^{-M^2 T_V} \quad (3.57)$$

El coeficiente de consolidación disminuye cuando el límite líquido del elemento del suelo aumenta por lo tanto el rango de la variación del coeficiente de consolidación es bastante amplio. Además los valores del factor tiempo y sus grados de consolidación promedio correspondientes se pueden aproximar con las siguientes relaciones matemáticas de manera simple:

$$\blacklozenge \text{ Para } U\% \text{ a un } 60\%, T_V = \frac{\pi}{4} \left(\frac{U\%}{100} \right)^2 \quad (3.58)$$

$$\blacklozenge \text{ Para } U\% > 60\%, T_V = 1.781 - 0.933 \log(100 - U\%) \quad (3.59)$$

CAPITULO 4: DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL A PARTIR LA TEORÍA DE TERZAGUI QUE DESCRIBE LAS DEFORMACIONES EN UN SUELO ARCILLOSO COMPLETAMENTE SATURADO EN 1D.

Terzaghi (1943).Partiendo la ecuación fundamental de la mecánica de suelos moderna, la cual utilizaremos para deducir la ecuación diferencial que describirá las deformaciones generadas por la disipación del exceso de presión de poro de agua en una dimensión, deduciremos la ecuación diferencial parcial que describe las deformaciones producidas por la disipación del exceso de presión de poro de agua, las cuales son causadas por la aplicación de cargas externas sobre el estrato de suelo arcilloso completamente saturado.

$$\sigma' = \sigma - u \quad (4.1)$$

Dónde:

σ : Es el esfuerzo normal.

σ' : Es el esfuerzo intergranular o efectivo.

u : Es el exceso de presión de poro de agua.

Derivando la ecuación (4.1) en las direcciones “x” y “z”, respecto al tiempo, ya que el fenómeno de consolidación está en función del tiempo y considerando la Ley de Hooke la cual nos dice que el esfuerzo es igual al producto de la constante de elasticidad (**E**) por las deformaciones (**ε**), lo cual para este caso se supone igual al esfuerzo efectivo, por lo tanto llegamos en términos de esfuerzos y deformaciones en 2 dimensiones a la siguiente ecuación matemática:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \sigma'_z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \sigma'_z}{\partial t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu \\ \nu & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Suponiendo que la variación de los esfuerzos totales son nulos:

$$0 = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu \\ \nu & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Simplificando la ecuación (4.3); obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\nu} & \frac{1}{\nu} \\ \frac{1}{\nu} & \frac{1}{1-\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Dado que las deformaciones generadas por la disipación del exceso de presión de poro de agua, la ecuación (4.4) se simplifica de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)} & \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{\nu} \\ \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{\nu} & \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

La ecuación (4.5) la simplificamos a 1 dimensión:

$$\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} \right) = \frac{1}{E} \left(\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (4.6)$$

La ecuación (4.6) describe las deformaciones en un suelo arcilloso totalmente saturado generadas por la disipación del exceso de presión de poro de agua respecto al tiempo, simplificando la ecuación anteriormente mencionada obtenemos:

$$\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} \right) = W * \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (4.7)$$

Además supondremos que por lógica la suma de las deformaciones ocasionadas por la disipación del exceso de presión de poro de agua en el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado será igual a los desplazamientos (m) que ocurrirán en dicho estrato de suelo arcilloso, por lo cual se representara matemáticamente como una integral de las deformaciones.

$\int \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} dz =$ Desplazamientos causados por las deformaciones debido a la disipación del exceso de presión de poro de agua. **(4.8)**

Las ecuaciones diferenciales **(4.7)** y **(4.8)** se solucionarán junto a la ecuación diferencial **(3.44)** en el programa Wolfram Mathematica.

Dónde:

$W = \frac{1}{E} \left(\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)} \right)$; es una constante implicada en la ecuación diferencial **(4.7)** que describe las deformaciones en 1 dimensión para un suelo arcilloso totalmente saturado respecto al tiempo.

Definiendo el módulo de elasticidad:

$$E = \frac{1}{m_v} \quad \textbf{(4.8)}$$

En las ecuaciones anteriores:

σ' : Es el esfuerzo efectivo.

E : Es el módulo de Young.

m_v : Representa el coeficiente de compresibilidad volumétrica.

e : Representa los vacíos presentes en el estrato arcilloso.

$d\varepsilon$: Representa el incremento en las deformaciones del estrato arcilloso.

ν : Representa el coeficiente de Poisson.

CAPITULO 5: MODELACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES QUE DESCRIBEN EL FENÓMENO DE CONSOLIDACIÓN EN UNA DIMENSIÓN.

Las ecuaciones diferenciales que se modelarán para describir el fenómeno de consolidación en 1 dimensión respecto al tiempo en un estrato de arcilla totalmente saturado son las siguientes:

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.1)$$

$$\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} \right) = W * \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

$\int \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} dz$ = Desplazamientos causados por las deformaciones debido a la disipación del exceso de presión de poro de agua.

Dónde:

$$W = \frac{1}{E} \left(\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)} \right)$$

E: Es el módulo de elasticidad.

ν : Es el coeficiente de Poisson.

El sistema de ecuaciones diferenciales **(5.1)** se solucionara simultáneamente. Para realizar satisfactoriamente la modelación del sistema de ecuaciones diferenciales anteriormente mencionado, se obtuvieron datos del cuaderno técnico número 1, publicado por la UMSNH, Facultad de Ingeniería Civil: "el subsuelo de la ciudad de Morelia". Los cuales son:

PCA-1

$$e_{prom} = 0.875$$

$$a_v = 0.005 \text{ (m}^2\text{/ton)}.$$

$$k = 0.02592 \text{ (m/mes)}.$$

$$mv = 2.6666 \times 10^{-3} \text{ (m}^2\text{/ton)}.$$

$$E = 375.0094 \text{ (ton/m}^2\text{)}.$$

$$\gamma_w = 1 \text{ (ton/m}^3\text{)}.$$

$$C_v = 9.720243 \text{ (m}^2\text{/mes)}.$$

$\nu = 0.35$ (arcillas normalmente consolidadas); coeficiente de Poisson.

$W = 0.0129521 \text{ (m}^2\text{/ton)}$; constante para la EDP que describe las deformaciones.

Se utilizarán los datos anteriores junto con tiempos diferentes para observar de la mejor manera el fenómeno de subsidencia en un suelo arcilloso completamente saturado. Además las modelaciones se realizarán en Wolfram Mathematica.

◆ Para un tiempo igual a 1 mes:

Código en Wolfram Mathematica:

```
Δu = 2;
CV = 9.720243 (*M^2/MES*);
W1 = 0.0016615;
sol = NDSolve[{D[u[t, z], t] == CV * D[u[t, z], z, z], D[ε1[t, z], t] == W1 D[u[t, z], t],
  u[0, z] == Δu, u[t, 0] == 0, u[t, 10] == 0, ε1[0, z] == 0, ε1[t, 0] == 0}, {u, ε1}, {t, 0, 1}, {z, 0, 10}];
Plot3D[u[t, z] /. sol, {t, 0, 1}, {z, 0, 10}, PlotRange -> All]
ContourPlot[u[t, z] /. sol, {t, 0, 1}, {z, 0, 10}, PlotLegends -> All, ColorFunction -> "TemperatureMap",
  ContourLabels -> All]
DensityPlot[u[t, z] /. sol, {t, 0, 1}, {z, 0, 10}, PlotLegends -> All, Mesh -> 10,
  ColorFunction -> "TemperatureMap"]
Plot3D[ε1[t, z] /. sol, {t, 0, 1}, {z, 0, 10}, PlotRange -> All]
ContourPlot[ε1[t, z] /. sol, {t, 0, 1}, {z, 0, 10}, PlotLegends -> All, ColorFunction -> "TemperatureMap",
  ContourLabels -> All]
```

Descripción del código en Mathematica:

El código anterior representa la solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales (5.1). Las cuales representan el fenómeno de consolidación en un suelo arcilloso totalmente saturado cuando es sometido a una determinada carga externa. Para lograr dicha solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales antes mencionado es necesario plantear las condiciones de Dirichlet para representar la región en donde se graficará la solución de dichas ecuaciones diferenciales anteriormente mencionadas.

Dónde:

Δu : Representa el exceso de presión de poro de agua, el cual decrecerá con el transcurso del tiempo.

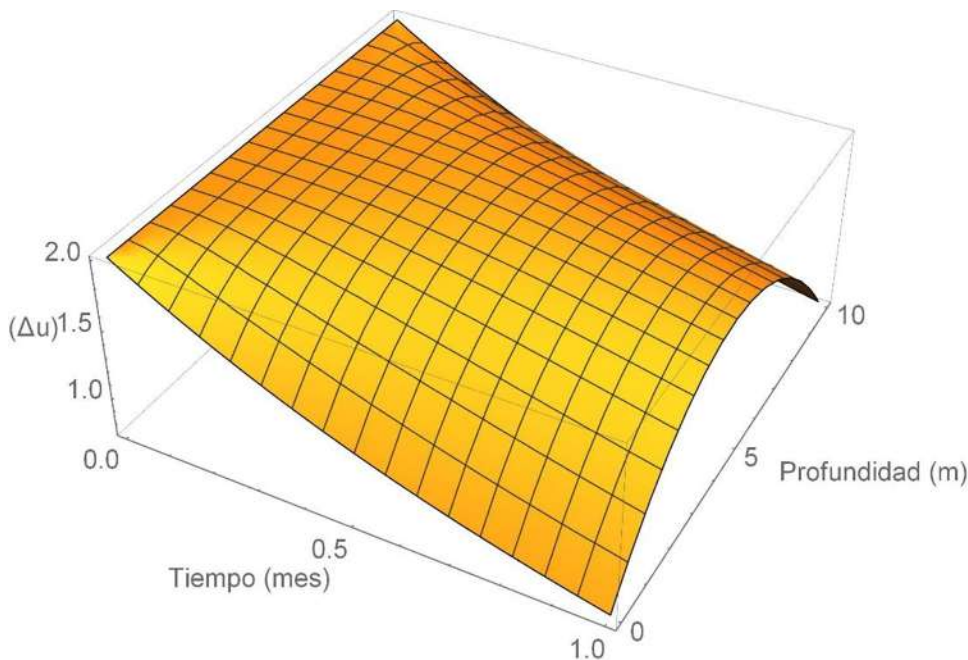
Z: Representa la profundidad en metros de la región rectangular.

t: Representa el tiempo en meses.

ε : Representa las deformaciones en el suelo arcilloso en 1D.

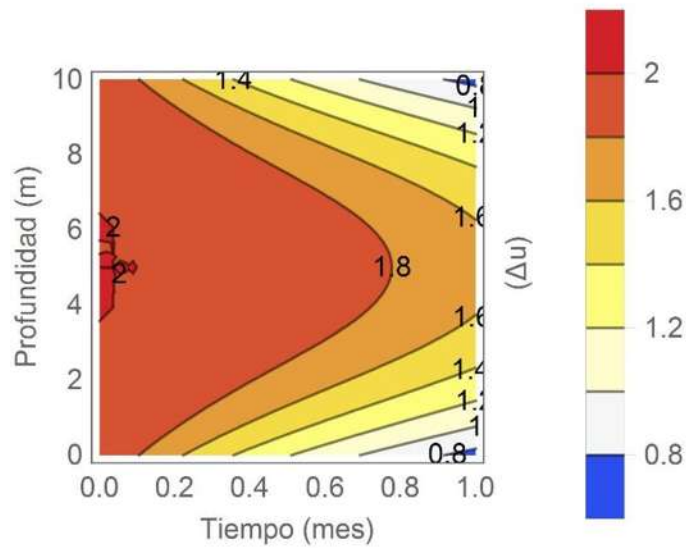
u : Representa el exceso de presión de poro de agua.

C_v : Representa el coeficiente de consolidación.

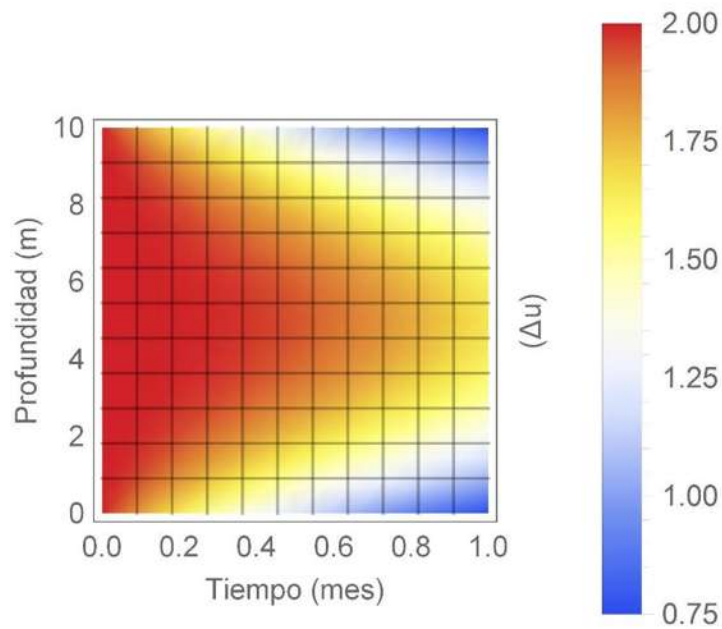


Gráfica 5.11. Disipación del exceso de presión de poro en un suelo arcilloso totalmente saturado para $t = 1$ mes y $z = 10$ metros.

En la **Gráfica 5.11**, se puede observar cómo se disipa el exceso de presión de poro de agua en un estrato de arcilla de un espesor de 10 metros cuando transcurre un mes, dando lugar a que se ocurra una mayor disipación de la presión de poro al final del mes, esto debido a que el fenómeno de consolidación es transitorio, es decir está en función del tiempo.

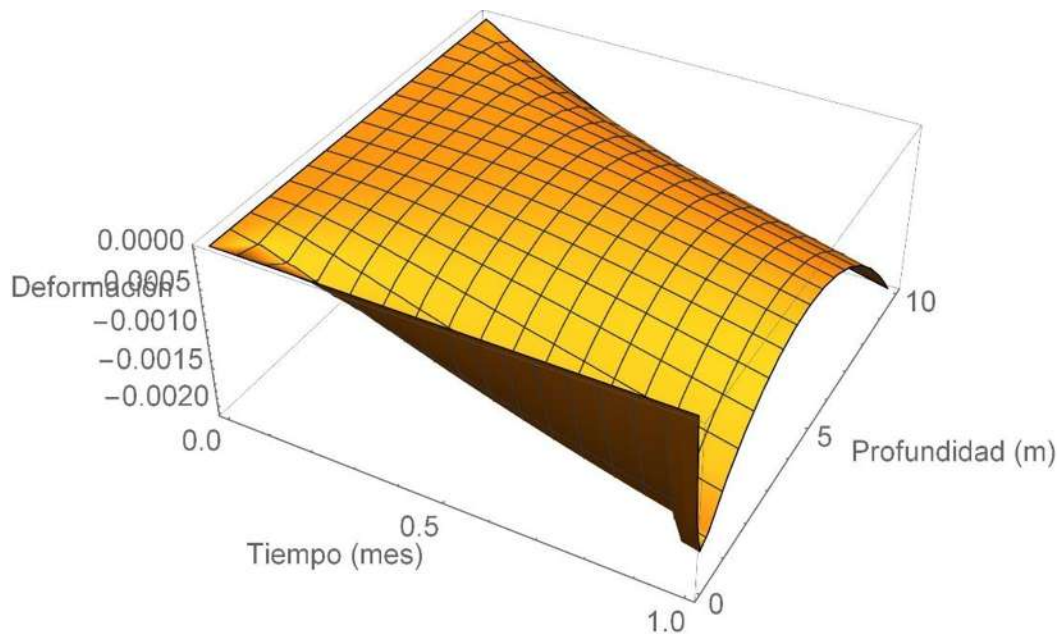


Gráfica 5.12. Disipación del exceso de presión de poro en un suelo arcilloso totalmente saturado para $t = 1$ mes y $z = 10$ metros.



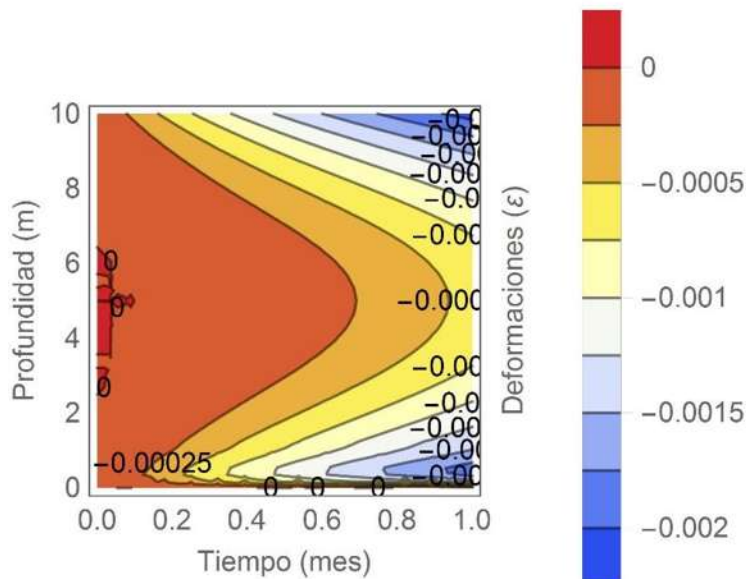
Gráfica 5.13. Disipación del exceso de presión de poro en un suelo arcilloso totalmente saturado para $t = 1$ mes y $z = 10$ metros.

En las **Gráficas 5.12 y 5.13**, se puede observar cómo se disipa el exceso de presión de poro de agua en un estrato de arcilla de un espesor de 10 metros cuando transcurre un mes, dando lugar a que se ocurra una mayor disipación de la presión de poro al final del mes, esto debido a que el fenómeno de consolidación es transitorio, es decir está en función del tiempo. El color rojo representa $\Delta\mu = 2$ que es el valor dado como comienzo para la presión de poro de agua, el color amarillo representa el decremento de la presión de poro de agua respecto al transcurso del tiempo dado y por último el color azul representa el exceso de presión de poro de agua que ha quedado al final del mes, habiendo más presión de poro de agua a una profundidad media del estrato de suelo arcilloso totalmente saturado.



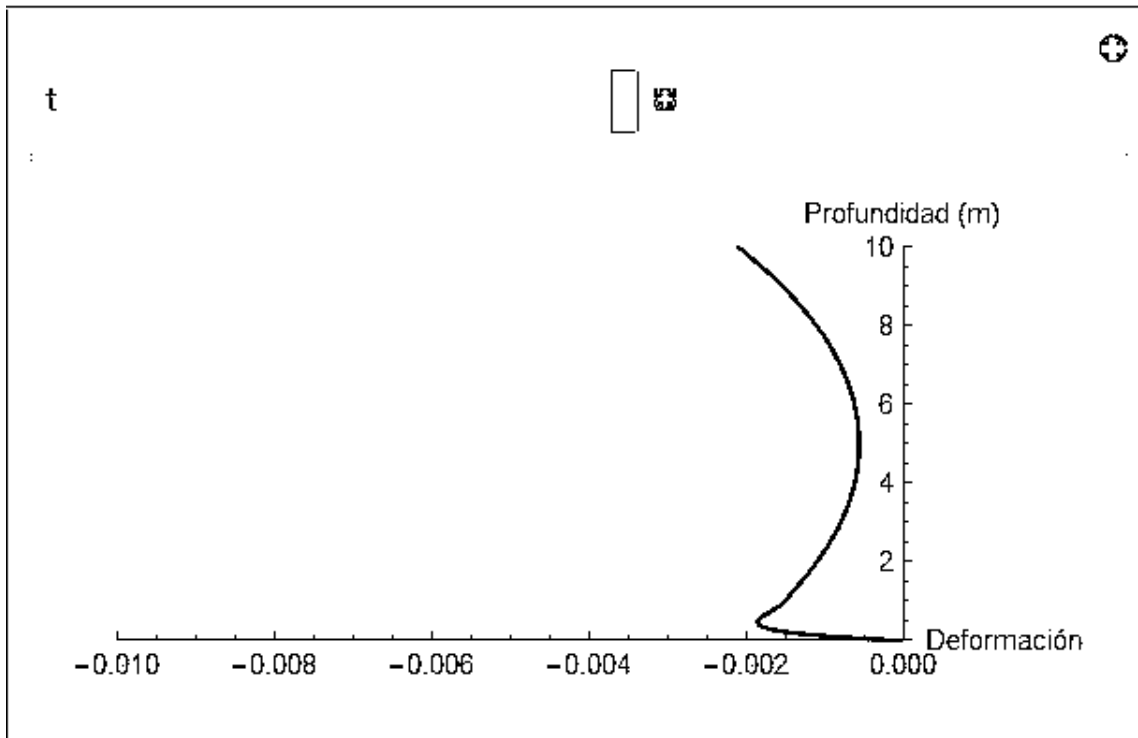
Gráfica 5.14. Deformaciones generadas por la disipación del exceso de presión de poro de agua en un suelo arcilloso totalmente saturado para $t=1$ mes y $z=10$ metros.

En la **Gráfica 5.14**. Se observan las deformaciones generadas en el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado debido a la disipación del exceso de presión de poro de agua en función del tiempo dado, las deformaciones mayores se dan aproximadamente en los 2 metros de profundidad y a los 8 metros de profundidad, dándose menores deformaciones a una profundidad media. Además se puede apreciar que las deformaciones son muy pequeñas al inicio del mes y en algunos puntos a profundidad media llegan a ser nulas.



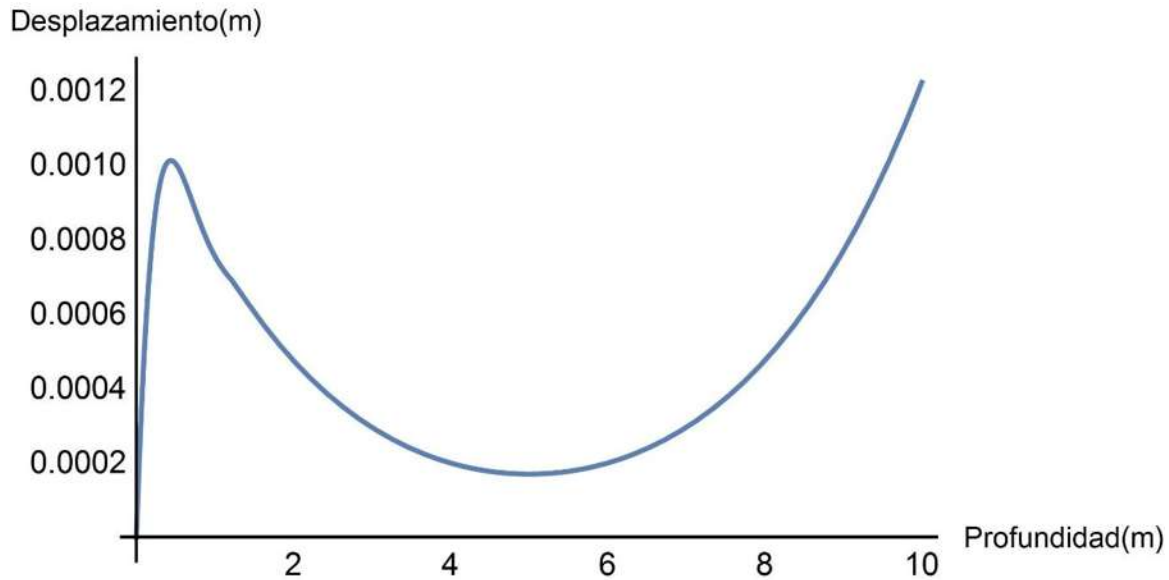
Gráfica 5.15. Deformaciones generadas por la disipación del exceso de presión de poro de agua en un suelo arcilloso totalmente saturado para $t=1$ mes y $z=10$ metros.

En la **Gráfica 5.15**. Se observan las deformaciones generadas en el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado debido a la disipación del exceso de presión de poro de agua en función del tiempo dado, las deformaciones mayores se dan aproximadamente en los 2 metros de profundidad y a los 8 metros de profundidad, dándose menores deformaciones a una profundidad media. El color rojo indica nula deformación, el color amarillo un incremento en las deformaciones y el color azul representa las deformaciones finales o mayores.



Gráfica 5.16. Deformaciones generadas por la disipación del exceso de presión de poro de agua en un suelo arcilloso totalmente saturado para $t = 1$ mes y $z = 10$ metros.

En la **Gráfica 5.16.** Se observa como las deformaciones son mayores aproximadamente en los primeros 2 metros de profundidad decreciendo a medida que se incrementa la profundidad a tal punto que al llegar a una profundidad media en el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado se generan las deformaciones más pequeñas volviéndose a incrementar las deformaciones conforme aumenta la profundidad y el tiempo (1 mes).



Gráfica 5.17. Asentamientos generados debido a la disipación del exceso de presión de poro de agua en un suelo arcilloso totalmente saturado para $t=1$ mes y $z= 10$ metros.

En la **Gráfica 5.17.** Se observa como los desplazamientos son mayores aproximadamente en los primeros 2 metros de profundidad decreciendo a medida que se incrementa la profundidad a tal punto que al llegar a una profundidad media en el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado se generan los desplazamientos más pequeños volviéndose a incrementar los desplazamientos conforme aumenta la profundidad y el tiempo (1 mes). Además se aprecia que el asentamiento mayor generado por la disipación del exceso de presión de poro de agua en el estrato arcilloso totalmente saturado es de aproximadamente de 1 milímetro.

◆ Para un tiempo igual a 3 meses:

Código en Wolfram Mathematica:

```
Δu = 2;
CV = 9.720243 (*M^2/MES*);
W1 = 0.0016615;
sol = NDSolve[{D[u[t, z], t] == CV*D[u[t, z], z, z], D[ε1[t, z], t] == W1 D[u[t, z], t],
  u[0, z] == Δu, u[t, 0] == 0, u[t, 10] == 0, ε1[0, z] == 0, ε1[t, 0] == 0}, {u, ε1}, {t, 0, 3}, {z, 0, 10}];
Plot3D[u[t, z] /. sol, {t, 0, 3}, {z, 0, 10}, PlotRange -> All]
ContourPlot[u[t, z] /. sol, {t, 0, 3}, {z, 0, 10}, PlotLegends -> All, ColorFunction -> "TemperatureMap",
  ContourLabels -> All]
DensityPlot[u[t, z] /. sol, {t, 0, 3}, {z, 0, 10}, PlotLegends -> All, Mesh -> 10,
  ColorFunction -> "TemperatureMap"]
Plot3D[ε1[t, z] /. sol, {t, 0, 3}, {z, 0, 10}, PlotRange -> All]
ContourPlot[ε1[t, z] /. sol, {t, 0, 3}, {z, 0, 10}, PlotLegends -> All, ColorFunction -> "TemperatureMap",
  ContourLabels -> All]
```

Descripción del código en Mathematica:

El código anterior representa la solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales **(5.1)**. Las cuales representan el fenómeno de consolidación en un suelo arcilloso totalmente saturado cuando es sometido a una determinada carga externa. Para lograr dicha solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales antes mencionado es necesario plantear las condiciones de Dirichlet para representar la región en donde se graficará la solución de dichas ecuaciones diferenciales anteriormente mencionadas.

Dónde:

$\Delta\mu$: Representa el exceso de presión de poro de agua, el cual decrecerá con el transcurso del tiempo.

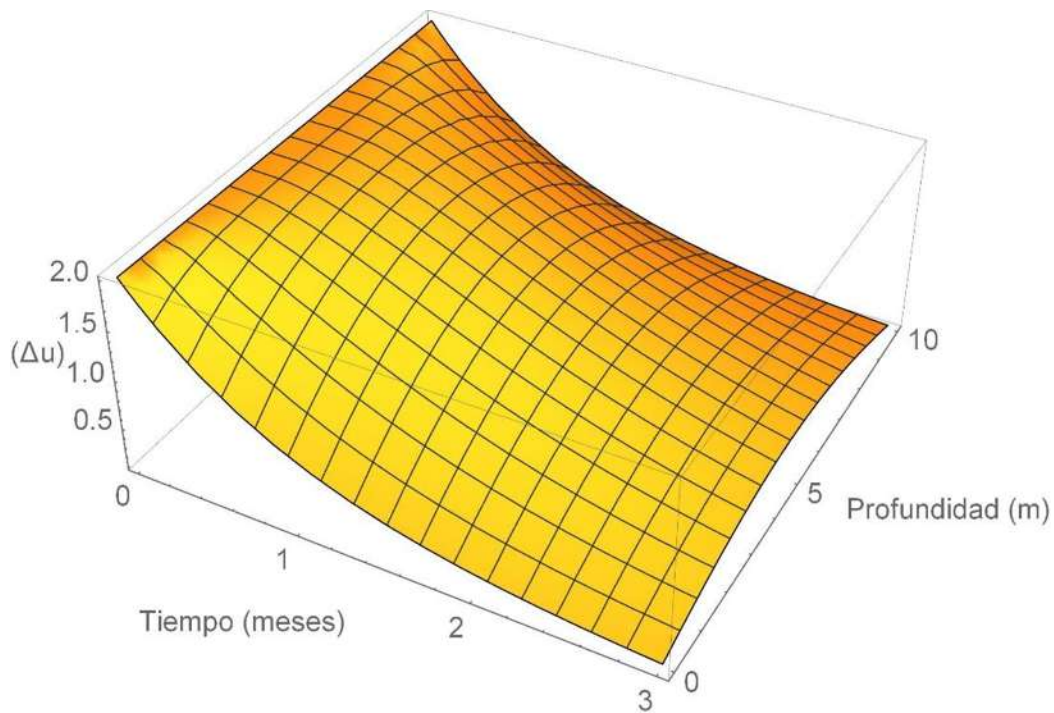
Z: Representa la profundidad en metros de la región rectangular.

t: Representa el tiempo en meses.

ε : Representa las deformaciones en el suelo arcilloso en 1D.

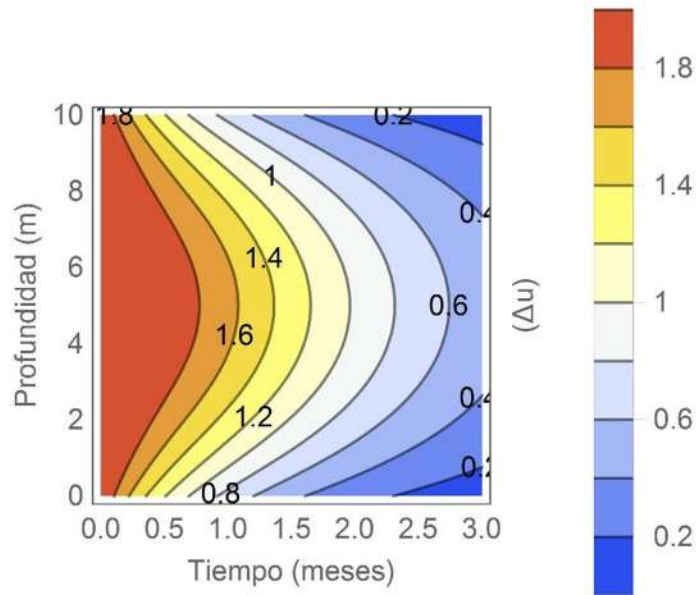
u : Representa el exceso de presión de poro de agua.

Cv: Representa el coeficiente de consolidación.

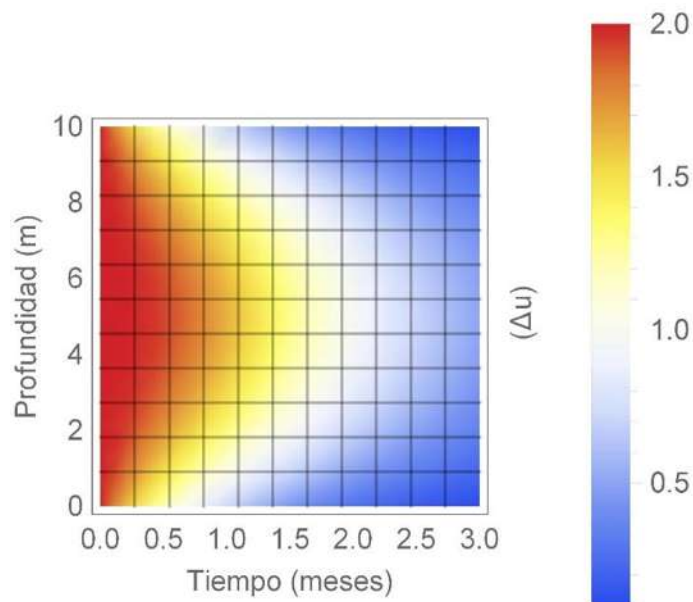


Gráfica 5.18. Disipación del exceso de presión de poro en un suelo arcilloso totalmente saturado para $t = 3$ meses y $z = 10$ metros.

En la **Gráfica 5.18**, se puede observar cómo se disipa el exceso de presión de poro de agua en un estrato de arcilla de un espesor de 10 metros cuando transcurre un tiempo de 3 meses, dando lugar a que ocurra una mayor disipación de la presión de poro de agua al final de los 3 meses, lo cual implica que exista al final del tiempo dado (3 meses) menor presión de poro de agua respecto a la presión de poro de agua en función de un tiempo de 1 mes. Se aprecia que al inicio del tiempo dado la disipación del exceso de presión de poro de agua es muy pequeña en comparación al final del tiempo dado.

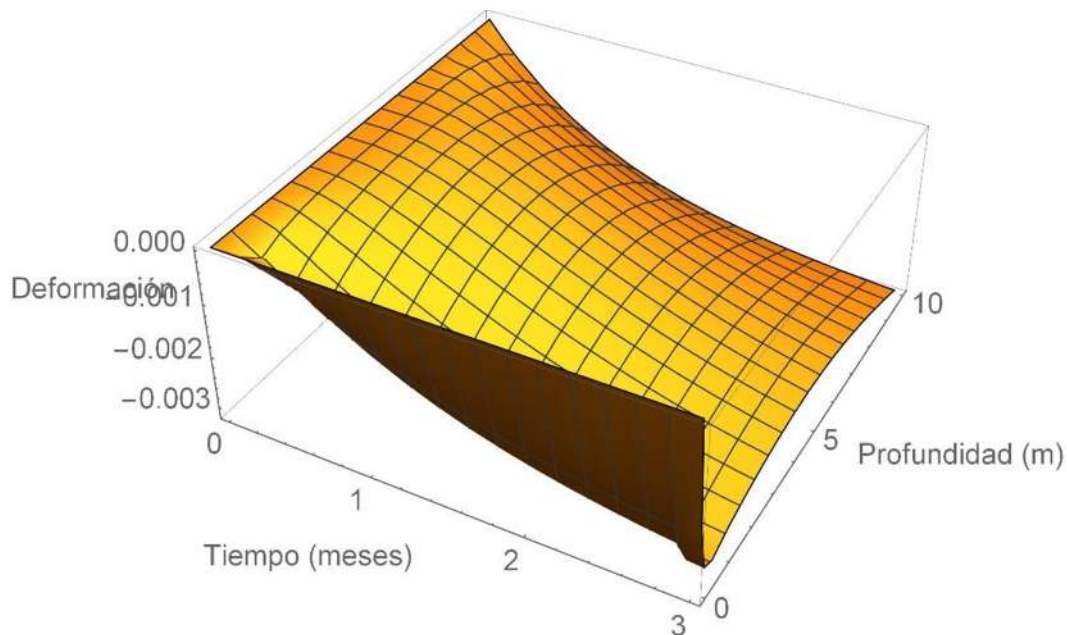


Gráfica 5.19. Disipación del exceso de presión de poro de agua en un suelo arcilloso totalmente saturado para $t = 3$ meses y $z = 10$ metros.



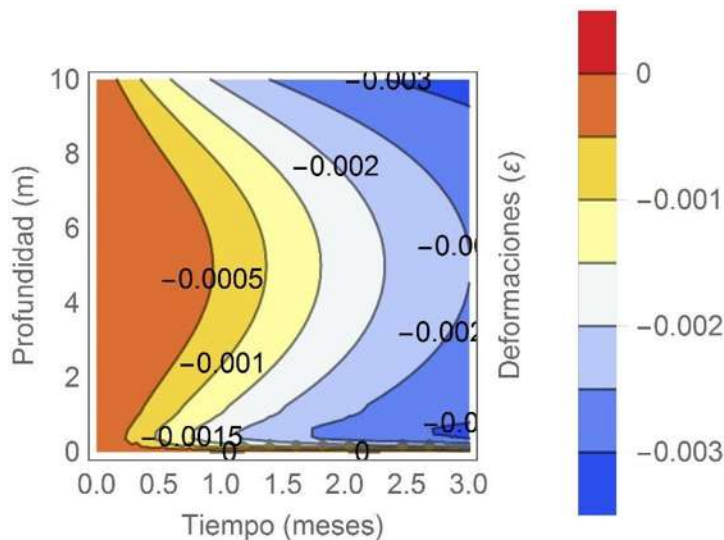
Gráfica 5.20. Disminución del exceso de presión de poro de agua en un suelo arcilloso totalmente saturado para $t = 3$ meses y $z = 10$ metros.

En las **Gráficas 5.19 y 5.20**. Se puede observar cómo se disipa el exceso de presión de poro de agua en un estrato de arcilla de un espesor de 10 metros cuando transcurren 3 meses, dando lugar a que se ocurra una mayor disipación de la presión de poro al final de los 3 meses, esto debido a que el fenómeno de consolidación es transitorio, es decir está en función del tiempo. El color rojo representa $\Delta\mu = 2$ que es el valor dado como comienzo para la presión de poro de agua, el color amarillo representa el decremento de la presión de poro de agua respecto al transcurso del tiempo dado y por último el color azul representa el exceso de presión de poro de agua que ha quedado al final de los 3 meses, habiendo más presión de poro de agua a una profundidad media del estrato de suelo arcilloso totalmente saturado. Lo cual implica que existe una menor presión de poro de agua al final de los 3 meses respecto a la presión de poro de agua para un tiempo de 1 mes.



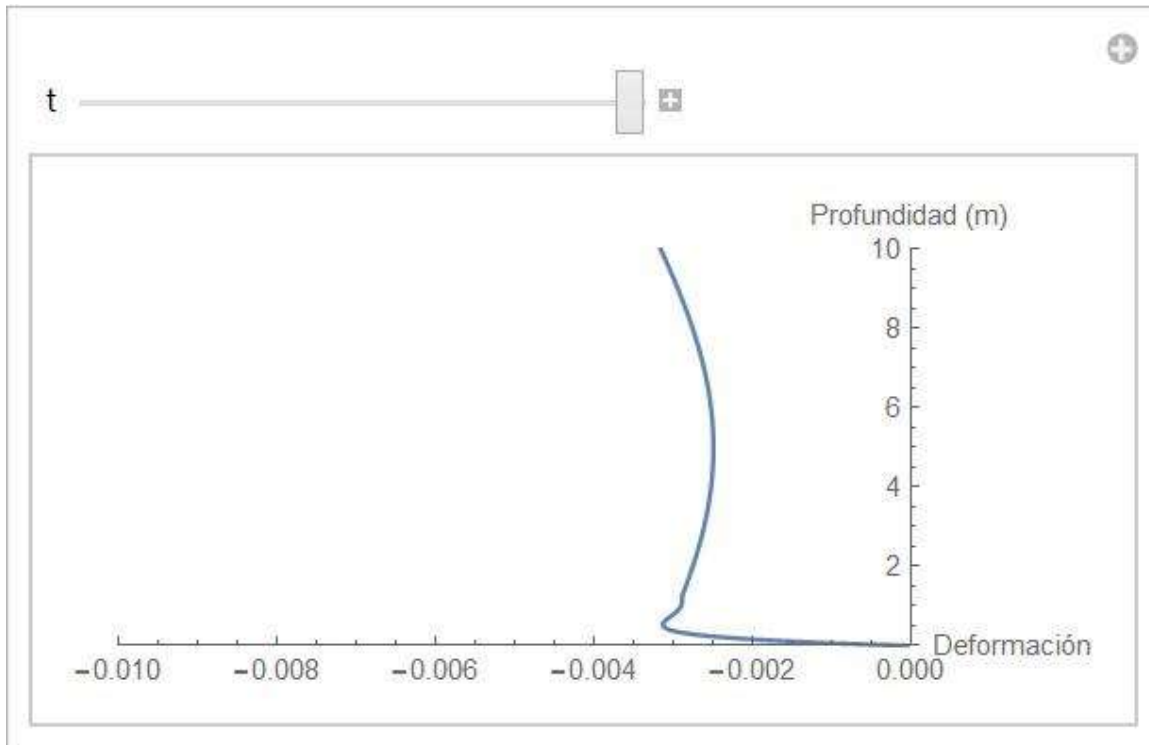
Gráfica 5.21. Deformaciones generadas por la disipación del exceso de presión de poro de agua en un suelo arcilloso totalmente saturado para $t= 3$ meses y $z=10$ metros.

En la **Gráfica 5.21**. Se observan las deformaciones generadas en el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado debido a la disipación del exceso de presión de poro de agua en función del tiempo dado, las deformaciones mayores se dan aproximadamente en los 2 metros de profundidad y a los 8 metros de profundidad, dándose menores deformaciones a una profundidad media. Además se puede apreciar que las deformaciones son muy pequeñas al inicio del tiempo dado (3 meses) y mayores al final del tiempo dado (3 meses), lo cual implica que para un tiempo de 3 meses las deformaciones son mayores en el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado respecto a un tiempo de 1 mes.



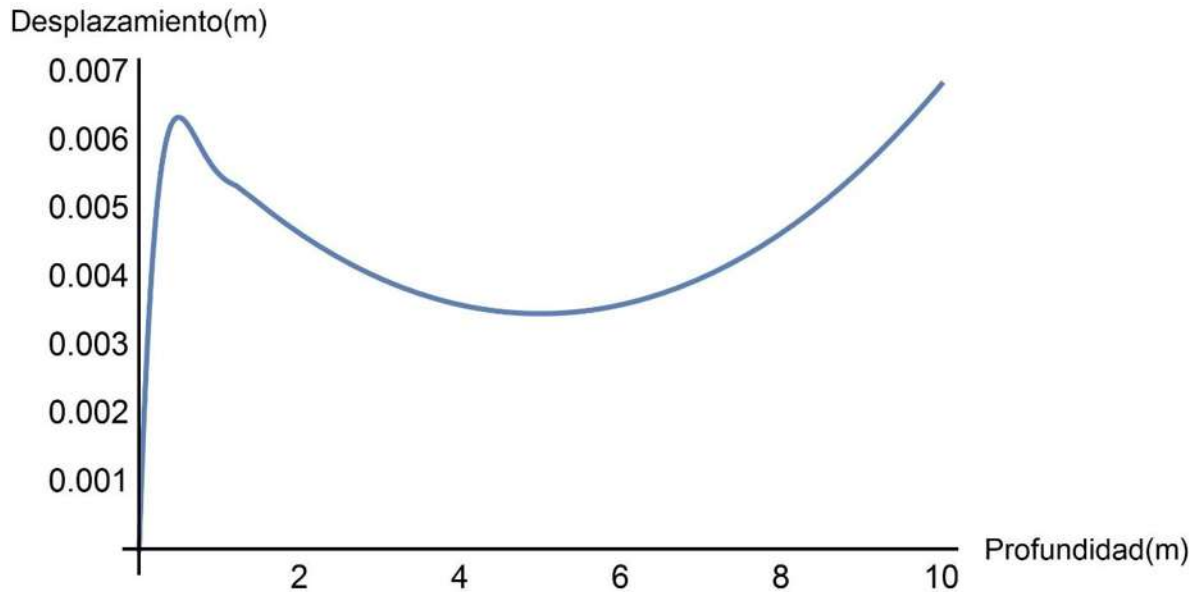
Gráfica 5.22. Deformaciones generadas por la disipación del exceso de presión de poro de agua en un suelo arcilloso totalmente saturado para $t = 3$ meses y $z = 10$ metros.

En la **Gráfica 5.22**. Se observan las deformaciones generadas en el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado debido a la disipación del exceso de presión de poro de agua en función del tiempo dado, las deformaciones mayores se dan aproximadamente en los 2 metros de profundidad y a los 8 metros de profundidad, dándose menores deformaciones a una profundidad media. El color rojo indica nula deformación, el color amarillo un incremento en las deformaciones y el color azul representa las deformaciones finales o mayores.



Gráfica 5.23. Deformaciones generadas por la disipación del exceso de presión de poro de agua en un suelo arcilloso totalmente saturado para $t= 3$ meses y $z=10$ metros.

En la **Gráfica 5.23.** Se observa como las deformaciones son mayores aproximadamente en los primeros 2 metros de profundidad decreciendo a medida que se incrementa la profundidad a tal punto que al llegar a una profundidad media en el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado se generan las deformaciones más pequeñas volviéndose a incrementar las deformaciones conforme aumenta la profundidad y el tiempo (3 meses). Lo cual implica que las deformaciones son mayores para un tiempo de 3 meses respecto a un tiempo de 1 mes, por lo tanto los desplazamientos serán mayores respectivamente.



Gráfica 5.24. Asentamientos generados debido a la disipación del exceso de presión de poro de agua en un suelo arcilloso totalmente saturado para $t=3$ meses y $z= 10$ metros.

En la **Gráfica 5.24.** Se observa como los desplazamientos son mayores aproximadamente en los primeros 2 metros de profundidad decreciendo a medida que se incrementa la profundidad a tal punto que al llegar a una profundidad media en el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado se generan los desplazamientos más pequeños volviéndose a incrementar los desplazamientos conforme aumenta la profundidad y el tiempo (3 meses). Además se aprecia que el asentamiento mayor generado por la disipación del exceso de presión de poro de agua en el estrato arcilloso totalmente saturado es de aproximadamente de 6.5 milímetros.

◆ Para un tiempo igual a 6 meses:

Código en Wolfram Mathematica:

```
Δu = 2;
CV = 9.720243 (*M^2/MES*);
W1 = 0.0016615;
sol = NDSolve[{D[u[t, z], t] == CV*D[u[t, z], z, z], D[ε1[t, z], t] == W1 D[u[t, z], t],
  u[0, z] == Δu, u[t, 0] == 0, u[t, 10] == 0, ε1[0, z] == 0, ε1[t, 0] == 0}, {u, ε1}, {t, 0, 6}, {z, 0, 10}];
Plot3D[u[t, z] /. sol, {t, 0, 6}, {z, 0, 10}, PlotRange -> All]
ContourPlot[u[t, z] /. sol, {t, 0, 6}, {z, 0, 10}, PlotLegends -> All, ColorFunction -> "TemperatureMap",
  ContourLabels -> All]
DensityPlot[u[t, z] /. sol, {t, 0, 6}, {z, 0, 10}, PlotLegends -> All, Mesh -> 10,
  ColorFunction -> "TemperatureMap"]
Plot3D[ε1[t, z] /. sol, {t, 0, 6}, {z, 0, 10}, PlotRange -> All]
ContourPlot[ε1[t, z] /. sol, {t, 0, 6}, {z, 0, 10}, PlotLegends -> All, ColorFunction -> "TemperatureMap",
  ContourLabels -> All]
```

Descripción del código en Mathematica:

El código anterior representa la solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales **(5.1)**. Las cuales representan el fenómeno de consolidación en un suelo arcilloso totalmente saturado cuando es sometido a una determinada carga externa. Para lograr dicha solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales antes mencionado es necesario plantear las condiciones de Dirichlet para representar la región en donde se graficará la solución de dichas ecuaciones diferenciales anteriormente mencionadas.

Dónde:

$\Delta\mu$: Representa el exceso de presión de poro de agua, el cual decrecerá con el transcurso del tiempo.

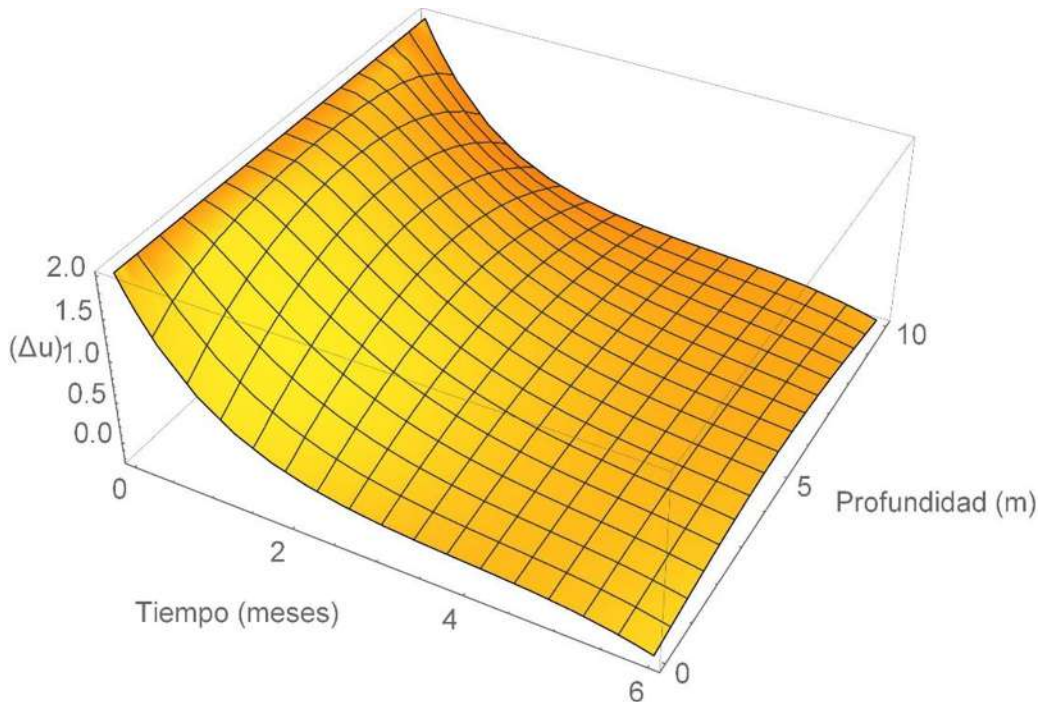
Z: Representa la profundidad en metros de la región rectangular.

t: Representa el tiempo en meses.

ε : Representa las deformaciones en el suelo arcilloso en 1D.

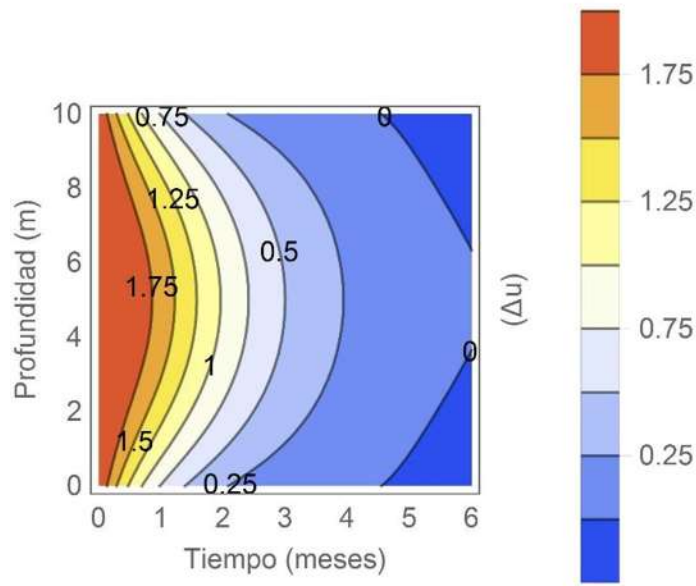
u : Representa el exceso de presión de poro de agua.

Cv: Representa el coeficiente de consolidación.

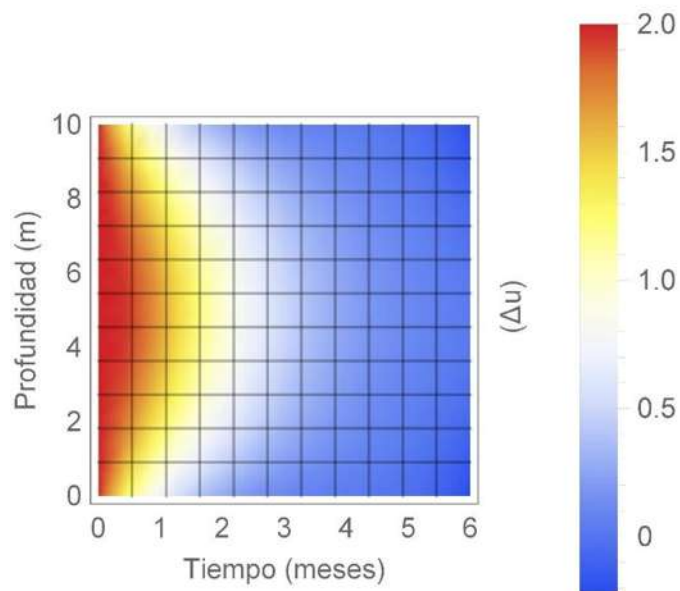


Gráfica 5.25. Disipación del exceso de presión de poro respecto al tiempo en un suelo arcilloso totalmente saturado para $t = 6$ meses y $z=10$ metros.

En la **Gráfica 5.25**, se puede observar cómo se disipa el exceso de presión de poro de agua en un estrato de arcilla de un espesor de 10 metros cuando transcurre un tiempo de 6 meses, dando lugar a que ocurra una mayor disipación de la presión de poro de agua al final de los 6 meses, lo cual implica que exista al final del tiempo dado (6 meses) menor presión de poro de agua respecto a la presión de poro de agua en función de un tiempo de 1 mes y 3 meses. Se aprecia que al inicio del tiempo dado la disipación del exceso de presión de poro de agua es muy pequeña en comparación al final del tiempo dado. Además de que el exceso de presión de poro de agua ha disminuido drásticamente a partir de 2 meses en adelante.

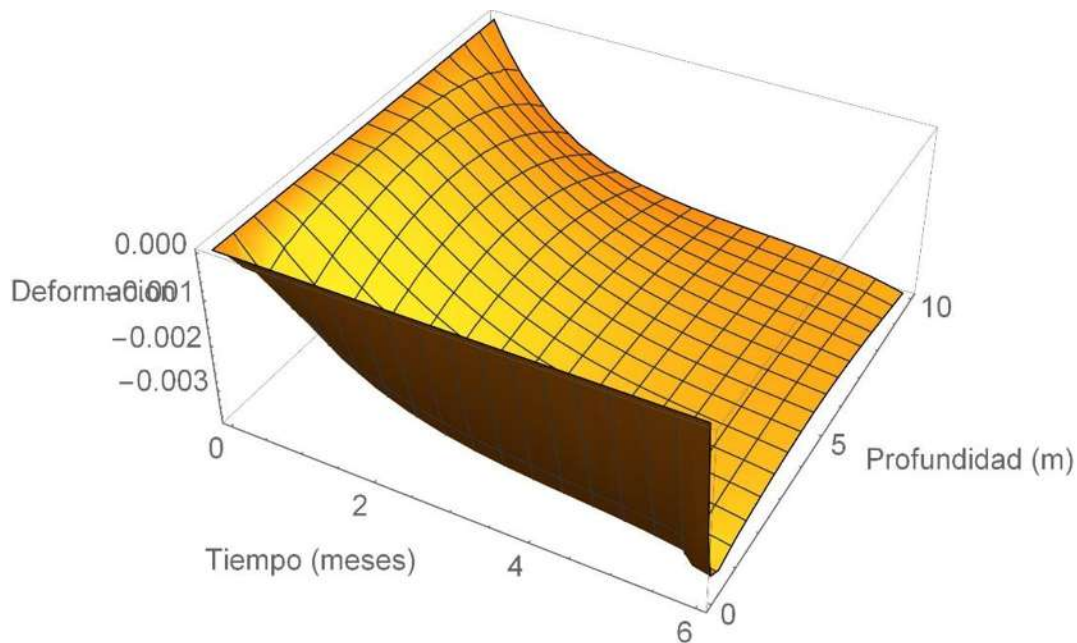


5.26. Disipación del exceso de presión de poro de agua en un suelo arcilloso totalmente saturado para $t = 6$ meses y $z = 10$ metros.



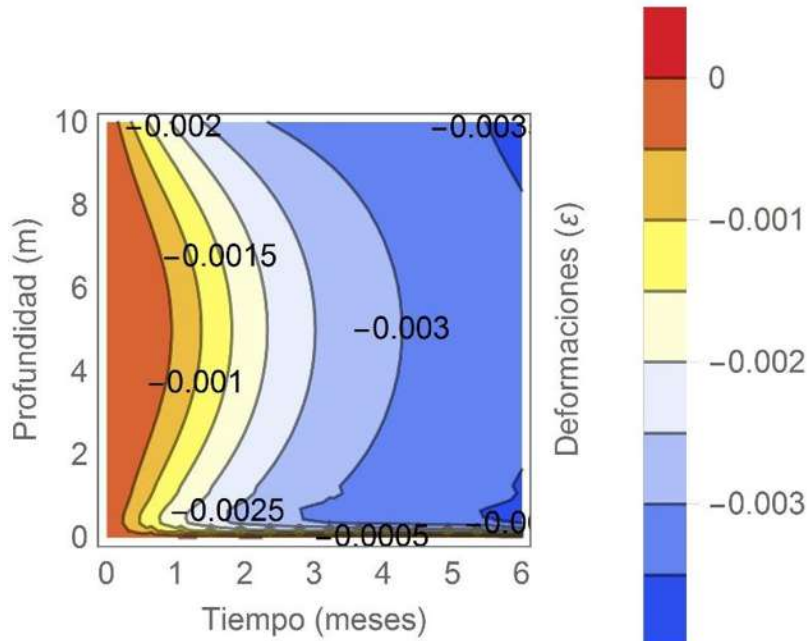
Gráfica 5.27. Disminución del exceso de presión de poro de agua en un suelo arcilloso totalmente saturado para $t = 6$ meses y $z = 10$ metros.

En las **Gráficas 5.26 y 5.27**. Se puede observar cómo se disipa el exceso de presión de poro de agua en un estrato de arcilla de un espesor de 10 metros cuando transcurren 6 meses, dando lugar a que se ocurra una mayor disipación de la presión de poro al final de los 6 meses, esto debido a que el fenómeno de consolidación es transitorio, es decir está en función del tiempo. El color rojo representa $\Delta\mu = 2$, que es el valor dado como comienzo para la presión de poro de agua, el color amarillo representa el decremento de la presión de poro de agua respecto al transcurso del tiempo dado y por último el color azul representa el exceso de presión de poro de agua que ha quedado al final de los 6 meses, llegando a ser nula al final del tiempo dado (6 meses). Se observa como el exceso de presión de poro de agua es mucho mayor en los primeros 1.5 meses y luego comienza a decrecer rápidamente hasta el punto de ser nula al final de los 6 meses. Lo cual es diferente en comparación con los tiempos de 1 mes y 3 meses anteriormente descritos y modelados.



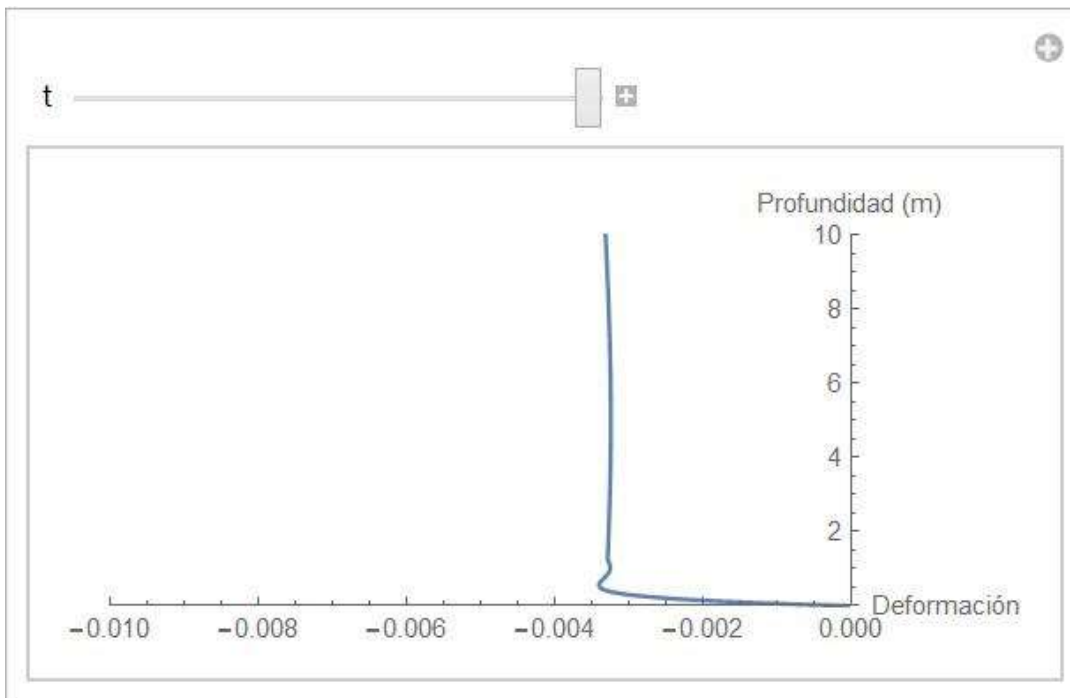
Gráfica 5.28. Deformaciones generadas por la disipación del exceso de presión de poro de agua en un suelo arcilloso totalmente saturado para $t= 6$ meses y $z=10$ metros.

En la **Gráfica 5.28**. Se observan las deformaciones generadas en el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado debido a la disipación del exceso de presión de poro de agua en función del tiempo dado, las deformaciones mayores se dan aproximadamente en los 2 metros de profundidad y a los 8 metros de profundidad, dándose menores deformaciones a una profundidad media. Además se puede apreciar que las deformaciones son muy pequeñas al inicio del tiempo dado (6 meses) y luego se incrementan a lo largo del tiempo dado (6 meses) y la profundidad del estrato arcilloso, lo cual implica que para un tiempo de 6 meses las deformaciones son mayores en el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado respecto a un tiempo de 1 mes y 3 meses.



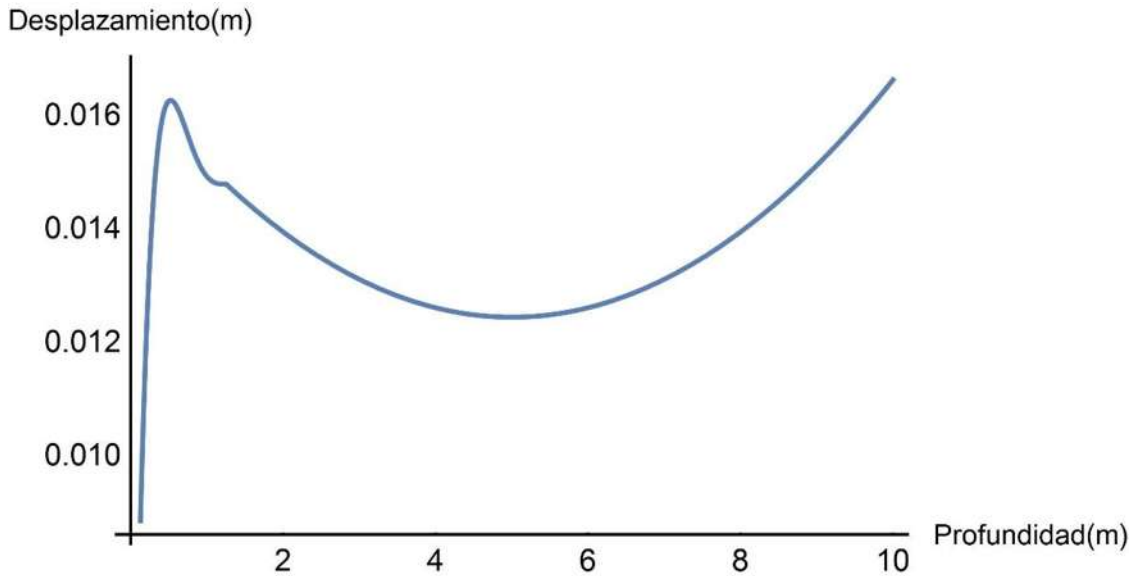
Gráfica 5.29. Deformaciones generadas por la disipación del exceso de presión de poro de agua en un suelo arcilloso totalmente saturado para $t=6$ meses y $z=10$ metros.

En la **Gráfica 5.29**. Se observan las deformaciones generadas en el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado debido a la disipación del exceso de presión de poro de agua en función del tiempo dado, las deformaciones mayores se dan aproximadamente en los 2 metros de profundidad y a los 8 metros de profundidad, dándose menores deformaciones a una profundidad inicial. El color rojo indica nula deformación, el color amarillo un incremento en las deformaciones y el color azul representa las deformaciones finales o mayores presentes en el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado.



Gráfica 5.30. Deformaciones generadas por la disipación del exceso de presión de poro de agua en un suelo arcilloso totalmente saturado para $t= 6$ meses y $z=10$ metros.

En la **Gráfica 5.30**. Se observa como las deformaciones son mayores que en los anteriores casos con tiempos de 1 y 3 meses, además se puede observar que la deformación mayor ocurre a una profundidad inicial (2 metros aproximadamente) y luego decrecen un poco y vuelven a aumentar permaneciendo casi constantes a lo largo de los 8 metros de profundidad restantes.



Gráfica 5.31. Asentamientos generados debido a la disipación del exceso de presión de poro de agua en un suelo arcilloso totalmente saturado para $t = 6$ meses y $z = 10$ metros.

En la **Gráfica 5.31.** Se observa como los desplazamientos son mayores aproximadamente en los primeros 2 metros de profundidad decreciendo a medida que se incrementa la profundidad a tal punto que al llegar a una profundidad media en el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado en el cual se generan los desplazamientos más pequeños volviéndose a incrementar los desplazamientos conforme aumenta la profundidad y el tiempo dado (6 meses). Además se aprecia que el asentamiento mayor generado por la disipación del exceso de presión de poro de agua en el estrato arcilloso totalmente saturado es de aproximadamente de 16 milímetros.

Como se puede apreciar en los 3 diferentes tiempos de modelación del sistema de ecuaciones diferenciales (5.1), las deformaciones se incrementaron ocasionando que los desplazamientos sean mayores, esto debido a la disipación del exceso de presión de poro de agua en el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado.

CAPITULO 6: DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA TEORÍA DE TERZAGUI EN 2 DIMENSIONES.

❖ 6.1 INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE TERZAGUI EN 2D.

(Romolo Di Francesco, Exact Solution of Terzaghi's Consolidation Equation and Extension to Two). En varias regiones a nivel mundial se construyen estructuras en capas de suelo las cuales llegan a ser muy complejas, ya que tienen flujo vertical y horizontal de agua a través de los poros presentes en el suelo. Recordemos que los suelos constituyen un sistema trifásico formado por partículas sólidas, agua y aire, y que estas dos últimas fases se encuentran en proporción variable en los poros del material. Supongamos un caso en el cuál el estrato de suelo arcilloso se encuentre completamente saturado, y en el cuál el agua que se encuentra en sus poros no drena de forma inmediata de tal forma se genera un gradiente en el seno del estrato arcilloso denominado proceso de consolidación, lo cual eleva el grado de complejidad comparando la teoría unidimensional de Terzagui, en la cual solo se considera el movimiento del flujo de agua en dirección vertical.

Como se dio a conocer anteriormente una de las limitaciones que tiene la Teoría de Terzagui Unidimensional es que solo considera el flujo del agua a través del elemento del suelo en una dirección, la vertical, además de considerar las propiedades del material constantes durante todo el proceso de la consolidación del suelo. Sin embargo, se sabe que la presencia de residuos blandos presenta cambios significativos en la relación de vacíos durante los cambios en el estado de esfuerzos en respuesta a la carga que está actuando de manera externa sobre el elemento del suelo y por lo tanto hay un cambio en la permeabilidad. Los modelos unidimensionales son muy exitosos para el modelado del proceso de consolidación en donde el flujo de agua se considera vertical, pero, sin embargo en los casos donde el flujo de agua en sentido horizontal tenga un efecto muy importante en el proceso de consolidación, dichos cálculos deben considerarse con seriedad.

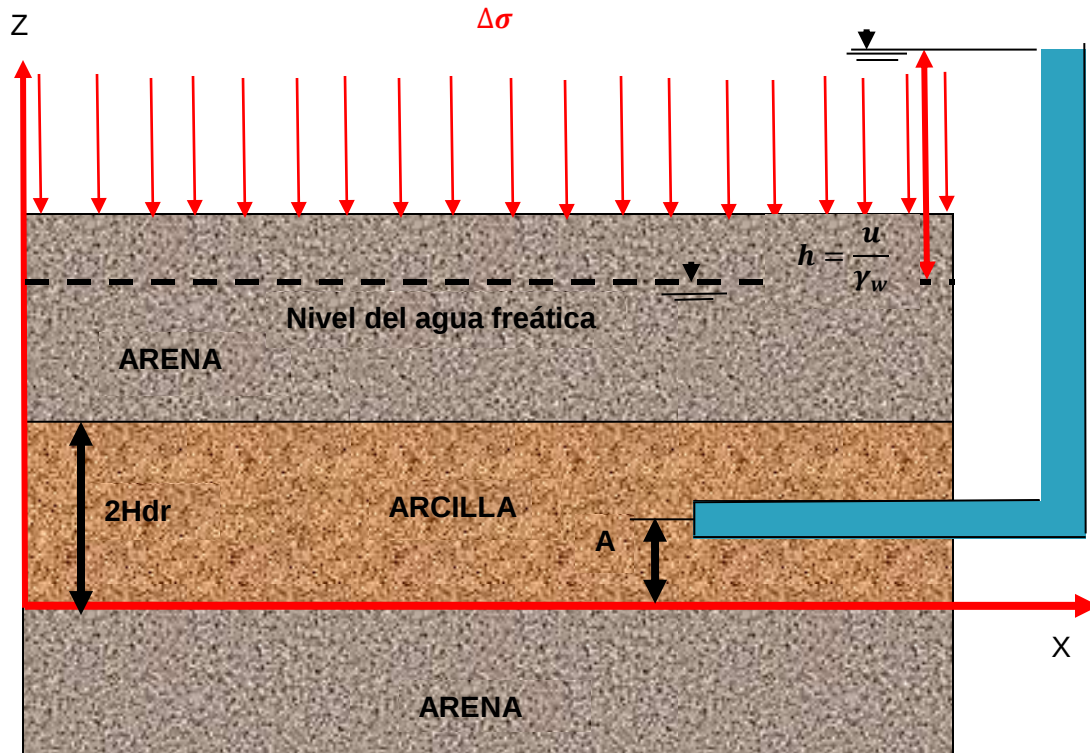


Figura 6.1. Esquema del suelo para la derivación de la ecuación diferencial (Braja, 2001).

En la Figura 6.1. Se representa el sistema trifásico de un suelo, en donde se simula que actúa una carga, la cual está transfiriendo al estrato de suelo arcilloso totalmente saturado por medio de una zapata en la realidad, solo que para este caso se permitirán deformaciones en el lado del eje de las abscisas, es decir, no hay alguna restricción en el elemento de suelo en sus laterales, lo cual conduce a la aparición de los coeficientes de Poisson, ya que el exceso de presión de poro de agua ocurre en las direcciones “x” y “z”

Por lo tanto procederemos a deducir las ecuaciones diferenciales que describen el fenómeno de consolidación de un suelo arcilloso totalmente saturado en 2 dimensiones.

❖ 6.2 DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE TERZAGUI EN 2D.

La derivación matemática considera las siguientes suposiciones para una mayor simplicidad en la formulación matemática sobre la ecuación diferencial que describe el fenómeno de subsidencia en 2 dimensiones en un suelo arcilloso totalmente saturado:

- ◆ El sistema arcilla-agua es homogéneo completamente.
- ◆ El suelo está completamente saturado.
- ◆ Las partículas del suelo son incompresibles.
- ◆ Las partículas del agua son incompresibles.
- ◆ Deformaciones en dirección horizontal y vertical.
- ◆ Drenaje de agua horizontal y vertical.
- ◆ Es válida la ley de Darcy.
- ◆ Las partículas del suelo se pueden reacomodar.
- ◆ Existe una relación lineal entre el esfuerzo de compresión efectivo y la disminución de volumen del elemento de suelo.

Supongamos un caso en el cuál el suelo se encuentre saturado, y en el cuál el agua que se encuentra en sus poros no drena de forma inmediata si se genera un gradiente en el suelo arcilloso completamente saturado.

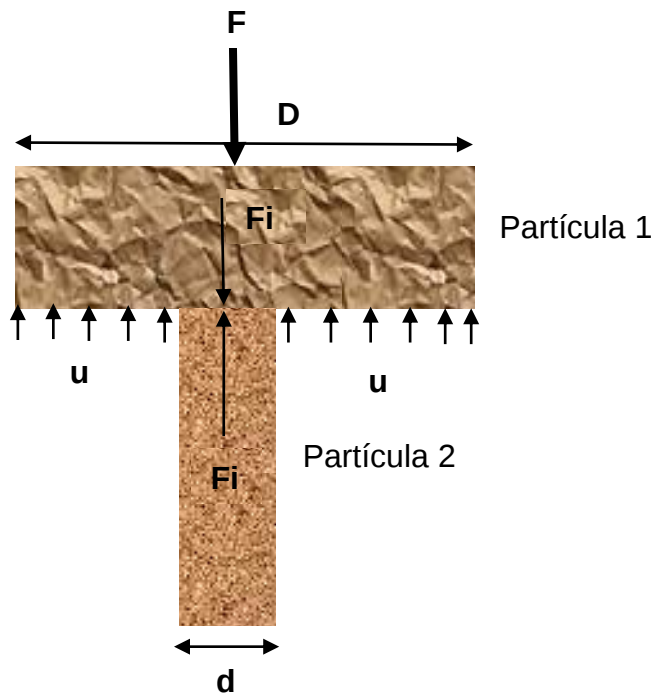


FIGURA 6.2. Representación física de los esfuerzos efectivos generados por el contacto de 2 partículas de arcilla.

Dónde:

F: Es la fuerza que actúa sobre el estrato de suelo arcilloso saturado.

u: Es el exceso de presión de poro de agua.

Fi: Es la fuerza normal intergranulares.

D: Es el área del elemento de suelo.

d: Es el área de contacto entre las partículas 1 y 2.

Por lo tanto podemos escribir la siguiente relación:

$$F = F_i + u(D - d) \quad (6.21)$$

Planteándola en forma de la ley de los esfuerzos efectivos de Terzagui, obtenemos:

$$\sigma = \sigma_i + u(D - d) \quad (6.22)$$

Simplificando la ecuación (6.22); obtenemos:

$$\sigma = \sigma_i + u\left(1 - \frac{d}{D}\right) \quad (6.23)$$

Dado que con los suelos y presiones normalmente considerados en casos prácticos, la razón d/D suele ser muy pequeña, con lo cual y a efectos prácticos, la expresión (6.23) se reduce a:

$$\sigma = \sigma_i + u \quad (6.24)$$

Despejando los esfuerzos efectivos de la ecuación (6.24);

$$\sigma_i = \sigma - u \quad (6.25)$$

Por lo tanto se ha llegado a la ecuación fundamental de la mecánica de suelos moderna, la cual utilizaremos para deducir la ecuación diferencial que describirá el fenómeno de subsidencia en dos dimensiones en un suelo completamente saturado, pero en un suelo tipo isotrópico, es decir las deformaciones horizontales y verticales son iguales, dando lugar a 3 casos a resolver y comparar resultados.

Dónde:

σ : Es el esfuerzo normal.

σ_i : Es el esfuerzo intergranulares o efectivo.

u : Es el exceso de presión de poro de agua.

- ◆ Caso 1: Coeficientes de consolidación iguales en ambas direcciones.
- ◆ Caso 2: Coeficiente de consolidación a partir de la solución exacta de la ecuación diferencial parcial que describe el fenómeno de subsidencia en 2D.
- ◆ Caso 3: Coeficientes de consolidación diferentes en ambas direcciones.

Se deducirá la ecuación diferencial parcial que describa el fenómeno de subsidencia en 2 dimensiones para cada caso, además se deducirá la ecuación diferencial parcial que describa las deformaciones resultado de la disipación del exceso de presión de poro de agua para un estrato arcilloso totalmente saturado.

❖ 6.3 FORMULACIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL QUE DESCRIBE EL FENÓMENO DE CONSOLIDACIÓN EN 2D PARA EL CASO 1.

$$k_h > k_v \quad (6.31)$$

Braja, M. D. (2001). La consolidación de un suelo totalmente saturado debe ser necesariamente dependiente de esta condición, que puede ser extendido también para el caso tridimensional y es más consistente con el comportamiento hidráulico y mecánico real de los suelos. Partiendo de este supuesto, se comienza con la ecuación diferencial parcial en dos dimensiones.

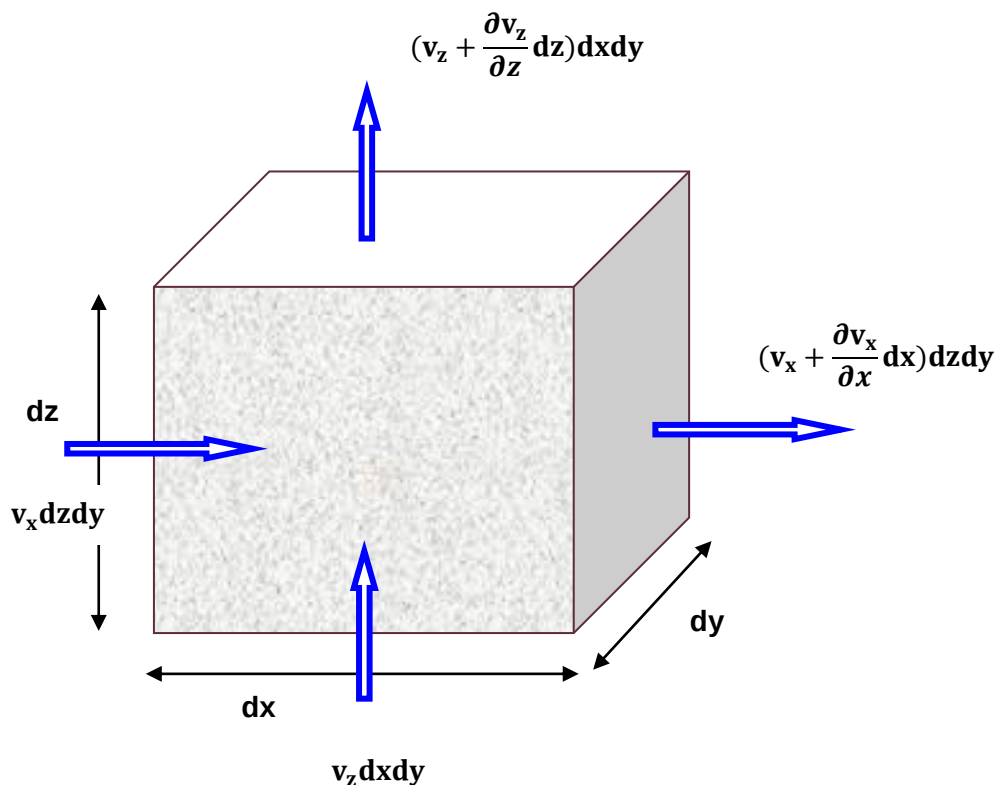


Figura 6.3. Ecuación de continuidad de Pierre-Simon Laplace en 2 dimensiones.

De la **FIGURA 6.3**. Formulamos la ecuación que describe el fenómeno de consolidación en 2 dimensiones:

$$(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx) dz dy - v_x dz dy + (v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz) dx dy - v_z dx dy = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.32)$$

Simplificando la ecuación **(6.32)**; obtenemos:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.33)$$

Aplicando la ley de Darcy la cual nos dice: La magnitud de la velocidad de un flujo de agua que circula a través de un suelo poroso completamente saturado es directamente proporcional a su gradiente hidráulico.

$$v \propto \frac{dh}{dl} \quad (6.34)$$

Expresándolo de manera matemática se obtiene lo siguiente:

$$v = -k \frac{dh}{dl} \quad (6.35)$$

- ◆ Donde k se le conoce como conductividad hidráulica, la cual se define como la capacidad que tiene un suelo para que un fluido pueda atravesar a través de él. (Aparicio Mijares, 1989).

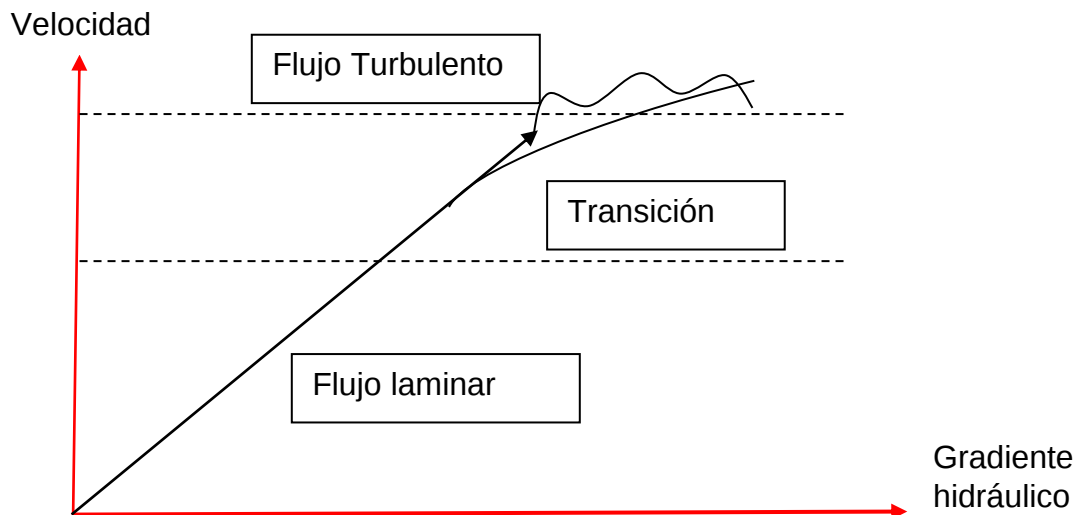


Figura 6.4. Representación de las zonas de comportamiento de un flujo de agua.

Combinando las ecuaciones **(6.33)** y **(6.35)** y siguiendo el mismo procedimiento que se utilizó para la deducción de la ecuación diferencial de Terzagui en una dimensión llegamos a la ecuación diferencial parcial que describe el fenómeno de subsidencia en 2 dimensiones.

$$c_{h_x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.36)$$

Expresando el coeficiente de consolidación en la dirección horizontal:

$$c_{h_x} = \frac{k_x}{\gamma_w m_{h_x}} \quad (6.37)$$

Expresando el coeficiente de consolidación en la dirección vertical:

$$c_v = \frac{k_z}{\gamma_w m_v} \quad (6.38)$$

Dado que para este caso los coeficientes de consolidación son iguales en ambas direcciones, la ecuación diferencial parcial **(6.36)** queda de la siguiente forma:

$$c_v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.39)$$

La ecuación diferencial **(6.39)** describe la disipación del exceso de presión de poro de agua en 2 dimensiones, la cual se combinara con la ecuación diferencial parcial que describe las deformaciones, la cual se deducirá más adelante.

❖ 6.4 FORMULACIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL QUE DESCRIBE EL FENÓMENO DE CONSOLIDACIÓN EN 2D PARA EL CASO 2.

Dado que la ecuación diferencial que describe la disipación del exceso de presión de poro de agua respecto al tiempo ya fue deducida y el caso 2 implica la deducción de una constante que relacione el coeficiente de consolidación en dirección vertical con el coeficiente de consolidación en dirección horizontal a partir de la solución exacta de la ecuación diferencial (6.36); partiremos de la siguiente expresión matemática:

$$c_{hx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.41)$$

(Romolo Di Francesco. Exact Solution of Terzaghi's Consolidation Equation and Extension to Two). Partiendo de la solución exacta de la ecuación diferencial de Terzagui, podemos escribir la siguiente solución:

$$\Delta u(x, z, t) = \Delta u * (e^{-k_{u(x)} * x}) * (e^{-k_{u(z)} * z}) * \cos(\omega * t - k_{u(x)} * x - k_{u(z)} * z) \quad (6.42)$$

Si de la ecuación (6.42) se calcula las derivadas parciales respecto a su variable correspondiente y se sustituye en la ecuación diferencial parcial (6.41); obtenemos:

$$-2 * c_{hx} * k_{u(x)}^2 - 2k_{u(z)}^2 * c_v = -\omega \quad (6.43)$$

Simplificando la ecuación (6.43)

$$c_{hx} * k_{u(x)}^2 + k_{u(z)}^2 * c_v = \frac{\omega}{2} \quad (6.44)$$

Suponiendo las siguientes relaciones de permeabilidad y despejando, obtenemos:

$$\frac{k_{u(x)}}{k_{u(z)}} = m \therefore k_{u(x)} = m * k_{u(z)} \quad (6.45)$$

Dado que los coeficientes de consolidación están en función de las permeabilidades, planteamos la siguiente relación matemática y despejamos convenientemente.

$$\frac{c_{hx}}{c_v} = m \therefore c_{hx} = m * c_v \quad (6.46)$$

Sustituyendo en la ecuación **(6.44)** las ecuaciones **(6.45)** y **(6.46)**; obtenemos:

$$k_u(z) = \sqrt{\frac{\omega}{2 * c_v (m^3 + 1)}} \quad (6.47)$$

Sustituyendo en la ecuación (6.47) la relación: $\omega = (2\pi)/t$ y sustituyéndola en la ecuación (6.45); obtenemos:

$$k_{u(x)} = m * k_u(z) = m * \sqrt{\frac{\omega}{2 * c_v (m^3 + 1)}} \quad (6.48)$$

Planteando la siguiente condición:

$$\blacksquare \quad m=1$$

Y sustituyendo el resultado en el coeficiente de consolidación de la ecuación diferencial parcial de segundo orden (6.41) y expresando en forma vectorial llegamos a la ecuación diferencial parcial que describe la disipación del exceso de presión de poro de agua en 2 dimensiones.

$$\frac{k_{u(x)}}{\gamma_w} E * \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k_{u(z)}}{\gamma_w} E * \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

∴

$$\frac{E}{\gamma_w} * \sqrt{\frac{\pi}{2c_v * t}} * \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{E}{\gamma_w} * \sqrt{\frac{\pi}{2c_v * t}} * \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

∴

$$\frac{E}{\gamma_w} * \sqrt{\frac{\pi}{2c_v * t}} * \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

∴

$$\frac{E}{\gamma_w} * \sqrt{\frac{\pi}{2c_v * t}} * \nabla u^2 = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Si $N = \frac{E}{\gamma_w} * \sqrt{\frac{\pi}{2c_v * t}}$; obtenemos:

$$N * \nabla u^2 = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.49)$$

Dónde:

N: Es la constante deducida a partir de la solución exacta de la ecuación diferencial **(6.41)**.

La ecuación diferencial **(6.49)** describe la disipación del exceso de presión de poro de agua en 2 dimensiones en un estrato de arcilla completamente saturado, la cual se combinara con la ecuación diferencial parcial que describe las deformaciones que más adelante se deducirá.

❖ 6.5 FORMULACIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL QUE DESCRIBE EL FENÓMENO DE CONSOLIDACIÓN EN 2D PARA EL CASO 3.

En este caso los coeficientes de consolidación son diferentes en ambas direcciones, por lo tanto partiremos del principio de continuidad para flujos de agua a través de los suelos:

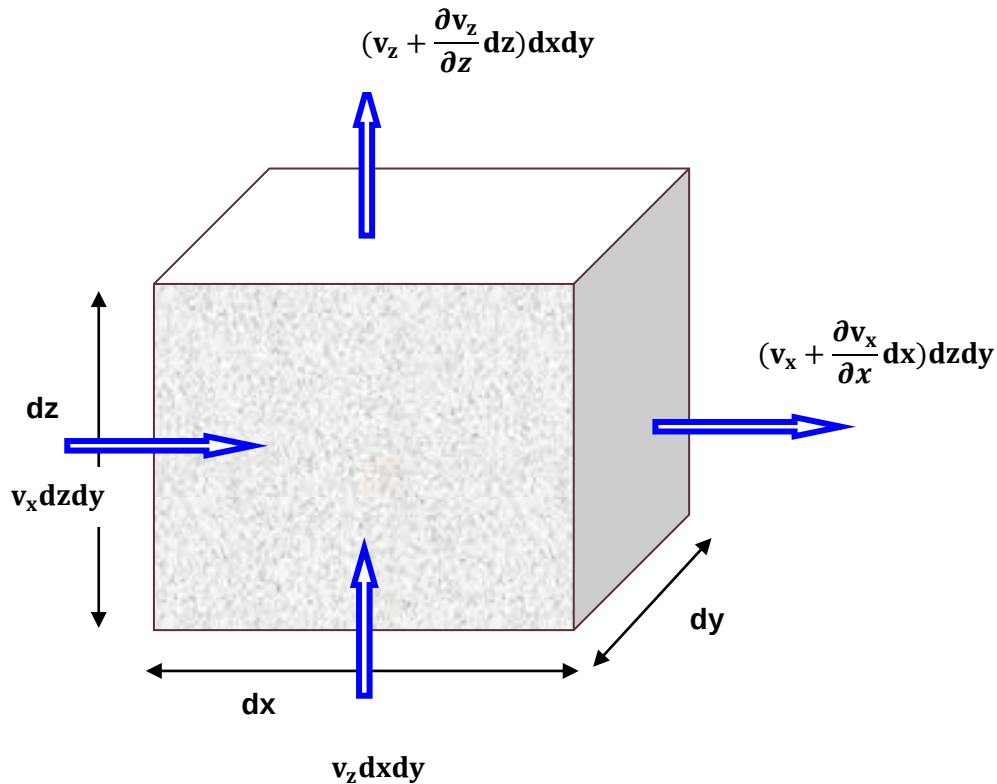


Figura 6.5. Ecuación de continuidad de Pierre-Simon Laplace en 2 dimensiones.

De la **Figura 6.5.** Formulamos la ecuación que describe el fenómeno de subsidencia en 2 dimensiones:

$$(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx) dzdy - v_x dzdy + (v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz) dxdy - v_z dxdy = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.51)$$

Simplificando la ecuación **(6.51)**; obtenemos:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.52)$$

Aplicando la ley de Darcy la cual nos dice: La magnitud de la velocidad de un flujo de agua que circula a través de un suelo poroso completamente saturado es directamente proporcional a su gradiente hidráulico.

$$v \propto \frac{dh}{dl} \quad (6.53)$$

Expresándolo de manera matemática se obtiene lo siguiente:

$$v = -k \frac{dh}{dl} \quad (6.54)$$

Donde k se le conoce como conductividad hidráulica, la cual se define como la capacidad que tiene un suelo para que un fluido pueda atravesar a través de él. Combinando las ecuaciones (6.52) y (6.54) y siguiendo el mismo procedimiento que se utilizó para la deducción de la ecuación diferencial de Terzagui en una dimensión llegamos a la ecuación diferencial parcial que describe el fenómeno de subsidencia en 2 dimensiones.

$$\frac{k_x}{\gamma_w m_{h_x}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k_z}{\gamma_w m_v} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.55)$$

Expresando el coeficiente de consolidación en la dirección horizontal:

$$c_{h_x} = \frac{k_x}{\gamma_w m_{h_x}} \quad (6.56)$$

Expresando el coeficiente de consolidación en la dirección vertical:

$$c_v = \frac{k_z}{\gamma_w m_v} \quad (6.57)$$

Dado que para este caso los coeficientes de consolidación son diferentes en ambas direcciones, la ecuación diferencial parcial (6.55) queda de la siguiente forma:

$$c_{h_x} * \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_v * \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.58)$$

La ecuación diferencial (6.58) describe la disipación del exceso de presión de poro de agua en 2D en función del tiempo para un suelo arcilloso totalmente saturado.

CAPITULO 7: DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL A PARTIR LA TEORÍA DE TERZAGUI QUE DESCRIBE LAS DEFORMACIONES EN UN SUELO ARCILLOSO COMPLETAMENTE SATURADO EN 2D.

❖ 7.1 INTRODUCCIÓN.

(Braja, M. D. 2001). La ecuación fundamental de la mecánica de suelos moderna, la cual utilizaremos para deducir la ecuación diferencial que describirá las deformaciones generadas por la disipación del exceso de presión de poro de agua en dos dimensiones en un suelo completamente saturado, es la siguiente:

$$\sigma_i = \sigma - u \quad (7.1)$$

Dónde:

σ : Es el esfuerzo normal.

σ_i : Es el esfuerzo intergranulares o efectivo.

u : Es el exceso de presión de poro de agua.

❖ 7.2 FORMULACIÓN MATEMÁTICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL.

Extendiendo la ecuación (7.1) a dos dimensiones y utilizando las formulas fundamentales de la teoría de la elasticidad llegamos a la ecuación de equilibrio para esfuerzos efectivos en 2 dimensiones en un suelo arcilloso completamente saturado, planteamos la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \sigma'_z}{\partial t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu \\ \nu & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (7.21)$$

En la ecuación (7.21) dado que los esfuerzos intergranulares en: $t=0$, son nulos, por lo tanto podemos escribir la siguiente relación matemática:

$$\frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu \\ \nu & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} = 0 \quad (7.22)$$

Simplificando la ecuación (7.22)

$$\frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu \\ \nu & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

Despejando las deformaciones de la ecuación (7.23); obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\nu} & \frac{1}{\nu} \\ \frac{1}{\nu} & \frac{1}{1-\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

De la ecuación (7.24) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} * \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E\nu} * \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7.25)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E\nu} * \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} * \frac{\partial u}{\partial t}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales (7.25) describe las deformaciones generadas debido a la disipación del exceso de presión de poro de agua en un suelo arcilloso completamente saturado, se puede observar que el sistema de ecuaciones diferenciales anteriormente mencionado se puede simplificar, de tal manera que se puede expresar en una sola ecuación diferencial.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E\nu} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E\nu} + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} \right) \quad (7.26)$$

En la ecuación (7.26) se observa que las deformaciones en ambas direcciones son iguales, por lo tanto simplificando llegamos a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \left[\frac{(1-\nu)(-1+2\nu)}{E\nu(-1+\nu)} \right] \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7.27)$$

Planteando la siguiente relación:

$$W = \left[\frac{(1-\nu)(-1+2\nu)}{E\nu(-1+\nu)} \right] \quad (7.28)$$

Por lo tanto la ecuación (7.27) queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = W * \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7.29)$$

Dónde:

W: Es una constante de rigidez que presenta el suelo arcilloso.

E: Es el módulo de Young.

ν : Es un coeficiente de Poisson.

La ecuación diferencial (7.29) describe las deformaciones respecto al tiempo generado por la disipación del exceso de presión de poro de agua en 2 dimensiones en el estrato de arcilla completamente saturado, dicha ecuación diferencial se combinara con los diferentes casos en los que se dedujo las diferentes ecuaciones diferenciales que describen la disipación del exceso de presión de poro de agua respecto al tiempo en 2 dimensiones, llegando a un sistema de ecuaciones diferenciales que describen el fenómeno de subsidencia en 2D.

En el siguiente capítulo se modelarán las ecuaciones diferenciales que describen el fenómeno de subsidencia en un suelo arcilloso completamente saturado para los mismos tiempos en los diferentes casos, ya que los tiempos representan de una mejor manera el fenómeno de subsidencia respecto al tiempo. Por lo cual se puede observar con mayor claridad los cambios generados en cada caso anteriormente descrito para la modelación en 2D.

CAPITULO 8: MODELACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES QUE DESCRIBEN EL FENÓMENO DE CONSOLIDACIÓN EN 2 DIMENSIONES.

❖ 8.1 INTRODUCCIÓN A LOS DIFERENTES CASOS A MODELAR EN 3D.

En este capítulo se modelarán los sistemas de ecuaciones diferenciales para los diferentes casos, los cuales son:

◆ **Caso 1:** Coeficientes de consolidación iguales en ambas direcciones.

$$c_v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (8.11)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = W * \frac{\partial u}{\partial t} \quad (8.12)$$

Dónde:

$$W = \left[\frac{(1-\nu)(-1+2\nu)}{Ev(-1+\nu)} \right]$$

W : Es una constante de rigidez que presenta el suelo arcilloso.

◆ **Caso 2:** Coeficiente de consolidación a partir de la solución exacta de la ecuación diferencial parcial que describe el fenómeno de subsidencia en 2D.

$$N * \nabla^2 \mu = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (8.13)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = W * \frac{\partial u}{\partial t} \quad (8.14)$$

Dónde:

$$W = \left[\frac{(1-\nu)(-1+2\nu)}{Ev(-1+\nu)} \right]$$

$$N = \frac{E}{\gamma_w} * \sqrt{\frac{\pi}{2c_v * t}}$$

W : Es una constante de rigidez que presenta el suelo arcilloso.

N: Es la constante deducida a partir de la solución exacta de la ecuación diferencial **(6.41)**.

◆ **Caso 3:** Coeficientes de consolidación diferentes en ambas direcciones.

$$c_{h_x} * \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_v * \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (8.15)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = W * \frac{\partial u}{\partial t} \quad (8.16)$$

Dónde:

$$W = \left[\frac{(1-v)(-1+2v)}{Ev(-1+v)} \right]$$

W : Es una constante de rigidez que presenta el suelo arcilloso.

c_{h_x} : Es el coeficiente de consolidación horizontal.

c_v : Es el coeficiente de consolidación vertical.

Para realizar satisfactoriamente la modelación del sistema de ecuaciones diferenciales para los 3 casos mencionados anteriormente, se obtuvieron datos del cuaderno técnico número 1, publicado por la UMSNH, Facultad de Ingeniería Civil: "el subsuelo de la ciudad de Morelia". Los cuales son:

PCA-1

$$e_{prom} = 0.875$$

$$a_v = 0.005 \text{ (m}^2\text{/ton)}.$$

$$k = 0.02592 \text{ (m/mes)}.$$

$$m_v = 2.6666 \times 10^{-3} \text{ (m}^2\text{/ton)}.$$

$$E = 375.0094 \text{ (ton/m}^2\text{)}.$$

$$\gamma_w = 1 \text{ (ton/m}^3\text{)}.$$

$$C_v = 9.720243 \text{ (m}^2\text{/mes)}.$$

$$Chx = 19.440486 \text{ (m}^2\text{/mes)}.$$

$v = 0.35$ (arcillas normalmente consolidadas); coeficiente de Poisson.

$W = 0.0129521 \text{ (m}^2\text{/ton)}$; constante para la EDP que describe las deformaciones.

Para todos los casos anteriormente mencionados y descritos se utilizarán los datos anteriores junto con tiempos iguales (1 mes y 2 meses) para observar de la mejor manera el fenómeno de consolidación en un suelo arcilloso completamente saturado. Además las modelaciones se realizarán en el Wolfram Mathematica.

❖ 8.2 MODELACIÓN EN MATHEMATICA PARA EL CASO NÚMERO 1.

$$c_v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (8.21)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = W * \frac{\partial u}{\partial t} \quad (8.22)$$

Dónde:

$$W = \left[\frac{(1-v)(-1+2v)}{Ev(-1+v)} \right]$$

W : Es una constante de rigidez que presenta el suelo arcilloso.

Se programaron en conjunto las ecuaciones diferenciales (8.21) y (8.22).

◆ Para un tiempo igual a 1 mes:

Datos:

$$e_{\text{prom}} = 0.875$$

$$a_v = 0.005 \text{ (m}^2\text{/ton)}.$$

$$k = 0.02592 \text{ (m/mes)}.$$

$$m_v = 2.6666 \times 10^{-3} \text{ (m}^2\text{/ton)}.$$

$$E = 375.0094 \text{ (ton/m}^2\text{)}.$$

$$\gamma_w = 1 \text{ (ton/m}^3\text{)}.$$

$C_v = 9.720243 \text{ (m}^2\text{/mes)}.$

$\nu = 0.35$ (arcillas normalmente consolidadas); coeficiente de Poisson.

$W = 0.0129521 \text{ (m}^2\text{/ton)};$ constante para la EDP que describe las deformaciones.

Código en Mathematica:

```
{u1, e1} = NDSolveValue[{cv * D[u1[t, x, z], t] == D[u1[t, x, z], z],
  D[e1[t, x, z], t] == W1 * D[u1[t, x, z], t],
  DirichletCondition[u1[t, x, z] == 2, z == 10 && 5 < x < 15],
  DirichletCondition[e1[t, x, z] == 0, z == 0 && 0 < x < 21],
  DirichletCondition[e1[t, x, z] == 0, 0 < z < 10 && x == 0],
  DirichletCondition[e1[t, x, z] == 0, 0 < z < 10 && x == 21],
  u1[0, x, z] == 0, e1[0, x, z] == 0}, {u1, e1}, {t, 0, 2}, {x, z} ∈
  Rectangle[{0, 0}, {21, 10}];

Figura3 = ContourPlot[u1[2 x, z], {x, z} ∈ Rectangle[{0, 0}, {21, 10}], FrameLabel → {"Profundidad (m)", "Δu"}, {"Longitud (m)", ""},
  PlotLegends → All, ColorFunction → "TemperatureMap", Contours → 12, AspectRatio → Automatic, ContourLabels → All] // Quiet

ContourPlot[e1[1, x, z], {x, z} ∈ Rectangle[{0, 0}, {21, 10}], PlotLegends → All, ColorFunction → "TemperatureMap", Contours → 20,
  AspectRatio → Automatic, ContourLabels → All] // Quiet
```

Descripción del código en Mathematica:

El código anterior representa la solución numérica de las ecuaciones diferenciales **(8.21)** y **(8.22)**, Las cuales representan el fenómeno de consolidación en un suelo arcilloso totalmente saturado cuando es sometido a una determinada carga externa. Para lograr dicha solución numérica de las ecuaciones diferenciales antes mencionadas es necesario plantear las condiciones de Dirichlet para representar la región en donde se graficará la solución de dichas ecuaciones diferenciales anteriormente mencionadas.

Dónde:

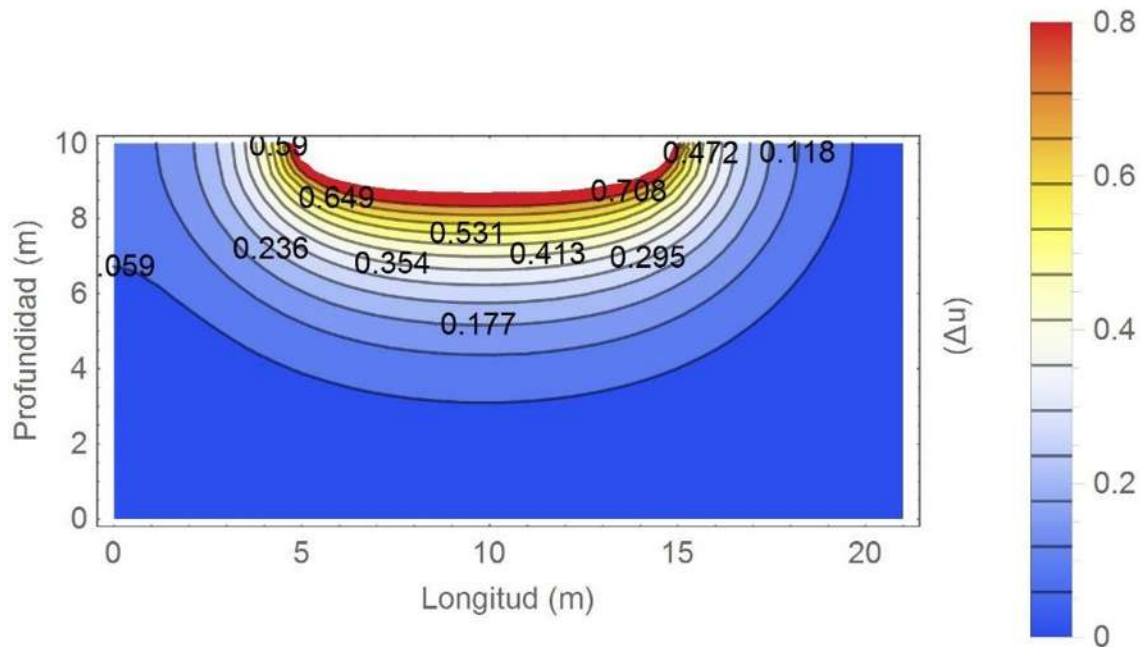
X: Representa la longitud en metros de la región rectangular.

Z: Representa la profundidad en metros de la región rectangular.

t: Representa el tiempo en meses.

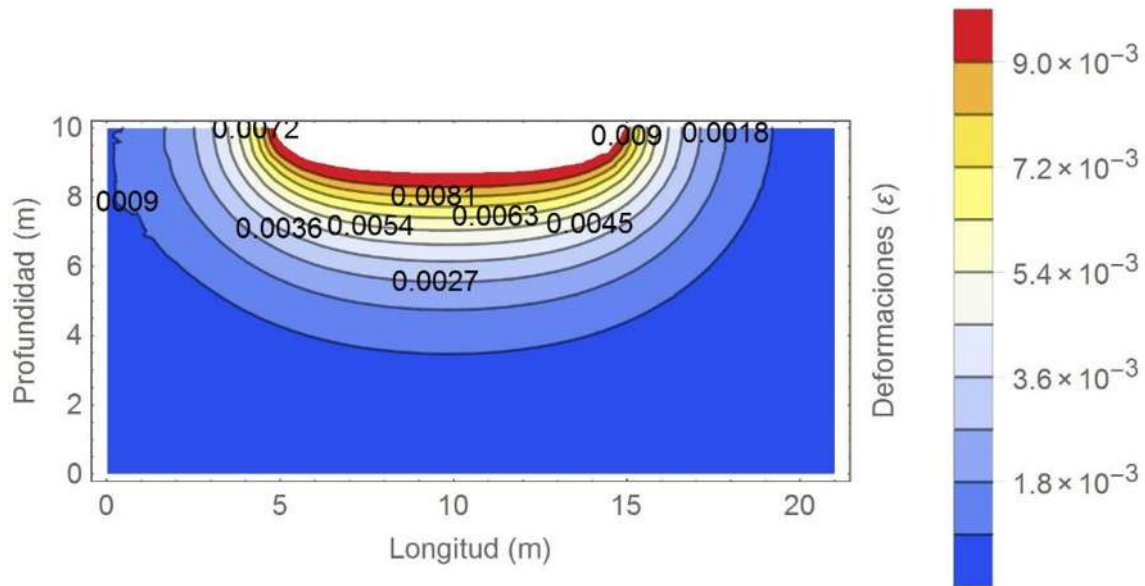
ε : Representa las deformaciones en el suelo arcilloso en 2D.

u : Representa el exceso de presión de poro de agua.



Gráfica 8.21. Disipación del exceso de presión de poro de agua en 2D en un estrato arcilloso completamente saturado para: $t = 1$ mes y $z = 10$ metros.

En la **Gráfica 8.21**. Se observa la disipación del exceso de presión de poro de agua en función de 1 mes, en un estrato de suelo arcilloso totalmente saturado, el color rojo representa la mayor presión de poro de agua, el color amarillo representa el decremento de la presión de poro de agua y finalmente el color azul representa la menor presión de poro de agua a tal grado que a una profundidad aproximada de 8.5 metros es nula, dándose la mayor presión de poro de agua a una profundidad inicial, es decir a los 2 metros aproximadamente.



Gráfica 8.22. Deformaciones generadas por la disipación del exceso de presión de poro de agua en 2D para: $t = 1$ mes y $z = 10$ metros.

En la **Gráfica 8.22.** Se puede apreciar el comportamiento de las deformaciones en función del tiempo y de la disipación del exceso de presión de poro de agua en el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado, el color rojo representa las mayores deformaciones, el color amarillo representa un decremento en las deformaciones y finalmente el color azul representa las deformaciones más pequeñas, por lo cual observamos claramente que las deformaciones mayores se generan a una profundidad inicial (2 metros aproximadamente) y las deformaciones más pequeñas se localizan entre 4 y 6 metros de profundidad, dando lugar a que las deformaciones sean nulas a una profundidad entre 7 y 10 metros y en algunas regiones del contorno (inicio y final de la longitud).

◆ Para un tiempo igual 2 meses:

Datos:

$$e_{\text{prom}} = 0.875$$

$$a_v = 0.005 \text{ (m}^2/\text{ton)}.$$

$$k = 0.02592 \text{ (m/mes)}.$$

$$m_v = 2.6666 \times 10^{-3} \text{ (m}^2/\text{ton)}.$$

$$E = 375.0094 \text{ (ton/m}^2\text{)}.$$

$$\gamma_w = 1 \text{ (ton/m}^3\text{)}.$$

$$C_v = 9.720243 \text{ (m}^2/\text{mes)}.$$

$$\nu = 0.35 \text{ (arcillas normalmente consolidadas); coeficiente de Poisson.}$$

$$W = 0.0129521 \text{ (m}^2/\text{ton)}; \text{ constante para la EDP que describe las deformaciones.}$$

Código en Mathematica:

```
W1 = 0.0129521;
{u1, e1} = NDSolveValue[{(Cv + v^2) u1[t, x, z] == D[u1[t, x, z], t],
  D[e1[t, x, z], t] == W1 * D[u1[t, x, z], t],
  DirichletCondition[u1[t, x, z] == 2, z == 10 && 5 < x < 15],
  DirichletCondition[e1[t, x, z] == 0, z == 0 && 0 < x < 21],
  DirichletCondition[e1[t, x, z] == 0, 0 < z < 10 && x == 0],
  DirichletCondition[e1[t, x, z] == 0, 0 < z < 10 && x == 21],
  u1[0, x, z] == 0, e1[0, x, z] == 0}, {u1, e1}, {t, 0, 2}, {x, z} ∈
  Rectangle[{0, 0}, {21, 10}];

Figura3 =
ContourPlot[u1[2, x, z], {x, z} ∈ Rectangle[{0, 0}, {21, 10}], FrameLabel -> {"Profundidad (m)", "Presión de poro de agua (Δu)"}, {"Longitud (m)", ""}},
  PlotLegends -> All, ColorFunction -> "TemperatureMap", Contours -> 15, AspectRatio -> Automatic, ContourLabels -> All] // Quiet

Figura5 = ContourPlot[e1[2, x, z], {x, z} ∈ Rectangle[{0, 0}, {21, 10}], FrameLabel -> {"Profundidad (m)", "Deformaciones (ε)"}, {"Longitud (m)", ""}},
  PlotLegends -> All, ColorFunction -> "TemperatureMap", Contours -> 10, AspectRatio -> Automatic, ContourLabels -> All] // Quiet
```

Descripción del código en Mathematica:

El código anterior representa la solución numérica de las ecuaciones diferenciales (8.21) y (8.22), Las cuales representan el fenómeno de consolidación en un suelo arcilloso totalmente saturado cuando es sometido a una determinada carga externa. Para lograr dicha solución numérica de las ecuaciones diferenciales antes

mencionadas es necesario plantear las condiciones de Dirichlet para representar la región en donde se graficará la solución de dichas ecuaciones diferenciales anteriormente mencionadas.

Dónde:

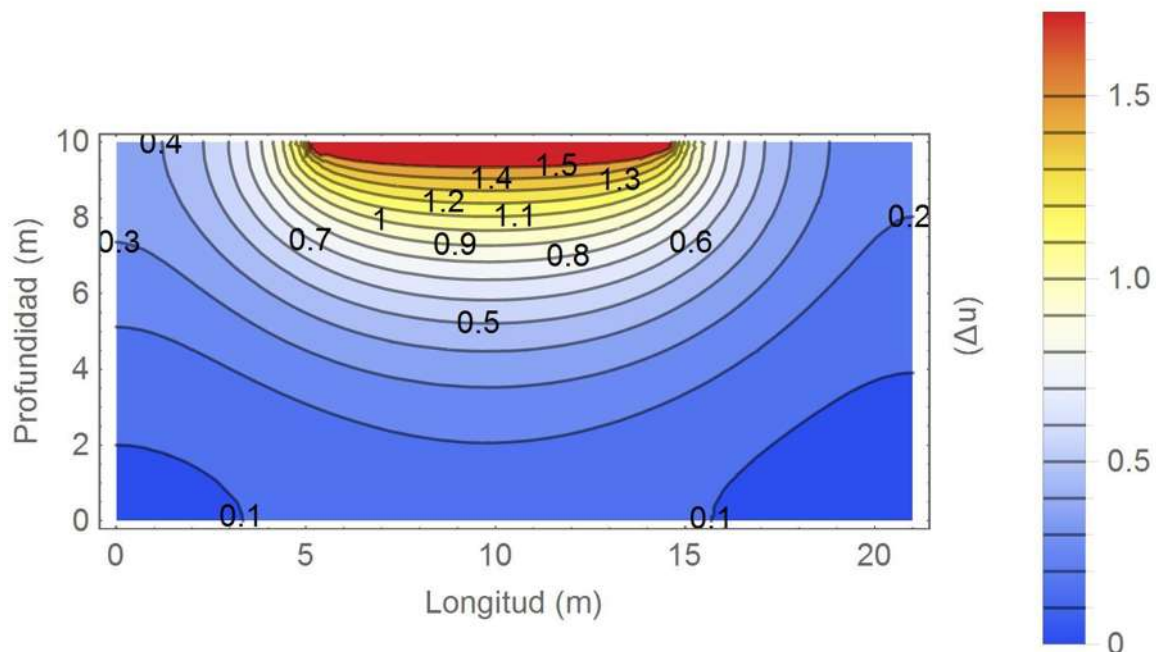
X: Representa la longitud en metros de la región rectangular.

Z: Representa la profundidad en metros de la región rectangular.

t: Representa el tiempo en meses.

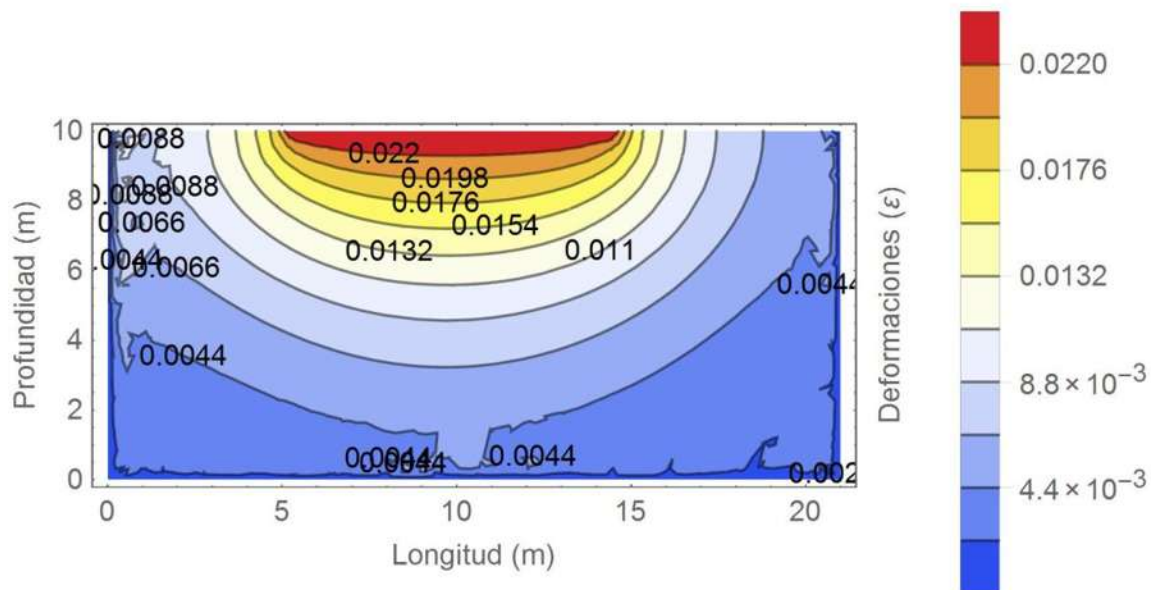
ε : Representa las deformaciones en el suelo arcilloso en 2D.

u : Representa el exceso de presión de poro de agua.



Gráfica 8.23. Disipación del exceso de presión de poro de agua en 2D en un estrato arcilloso completamente saturado para: $t= 2$ meses y $z=10$ metros.

En la **Gráfica 8.23**. Se observa la disipación del exceso de presión de poro de agua en función de 2 meses, en un estrato de suelo arcilloso totalmente saturado, el color rojo representa la mayor presión de poro de agua, el color amarillo representa el decremento de la presión de poro de agua y finalmente el color azul representa la menor presión de poro de agua, dándose la mayor presión de poro de agua a una profundidad inicial, es decir a los 2 metros aproximadamente. Además de puede observar que en comparación con la **Gráfica 8.21**, existe presión de poro de agua a una profundidad de 8.5 metros, además de que se observa una mayor magnitud en el exceso de presión de poro de agua a una profundidad inicial, por lo tanto las mayor presión de poro de agua se da a profundidades iniciales (2 metros aproximadamente) decreciendo a mayor profundidad y al transcurso de tiempo dado (2 meses).



Gráfica 8.24. Deformaciones generadas por la disipación del exceso de presión de poro de agua en 2D para: $t = 2$ meses y $z = 10$ metros.

En la **Gráfica 8.24**. Se puede apreciar el comportamiento de las deformaciones en función del tiempo y de la disipación del exceso de presión de poro de agua en el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado, el color rojo representa las mayores deformaciones, el color amarillo representa un decremento en las deformaciones y finalmente el color azul representa las deformaciones más pequeñas, por lo cual observamos claramente que las deformaciones mayores se generan a una profundidad inicial (2 metros aproximadamente) y las deformaciones más pequeñas comienzan a localizarse entre 4 y 6 metros de profundidad, dando lugar a que las deformaciones sean muy pequeñas a una profundidad entre 7 y 10 metros y en algunas regiones del contorno (inicio y final de la longitud), en comparación con la **Gráfica 8.22** en la cual las deformaciones son nulas.

Se modeló el sistema de ecuaciones diferenciales para el caso número 1, para un tiempo igual a 1 mes y 2 meses, dado que se observa con mayor claridad el decremento del exceso de presión de poro y las deformaciones respecto al tiempo en el estrato de arcilla totalmente saturado, dado que la presión de poro de agua ($\Delta\mu$) tiene un valor de 2.

❖ 8.3 MODELACIÓN EN MATHEMATICA PARA EL CASO NÚMERO 2.

$$N * \nabla^2 \mu = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (8.31)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = W * \frac{\partial u}{\partial t} \quad (8.32)$$

Dónde:

$$W = \left[\frac{(1-v)(-1+2v)}{Ev(-1+v)} \right]$$

$$N = \frac{E}{\gamma_w} * \sqrt{\frac{\pi}{2 * c_v * t}}$$

W : Es una constante de rigidez que presenta el suelo arcilloso.

N : Es la constante deducida a partir de la solución exacta de la ecuación diferencial **(6.41)**

Se programaron en conjunto las ecuaciones diferenciales **(8.31)** y **(8.32)**.

◆ Para un tiempo igual a 1 mes:

Para el tiempo de 1 mes tendremos que calcular la constante N :

$$N = \frac{375.0094}{1} * \sqrt{\frac{\pi}{2 * (9.720243)(1)}} = 150.752155$$

Datos:

$$e_{\text{prom}} = 0.875$$

$$a_v = 0.005 \text{ (m}^2\text{/ton)}.$$

$$E = 375.0094 \text{ (ton/m}^2\text{)}.$$

$$C_v = 9.720243 \text{ (m}^2\text{/mes)}.$$

$$v = 0.35 \text{ (arcillas normalmente consolidadas); coeficiente de Poisson.}$$

$$W = 0.0129521 \text{ (m}^2\text{/ton); constante para la EDP que describe las deformaciones.}$$

Código en Mathematica:

```

N2 = 150.752;
W2 = 0.0129521;

{u2, ε2} = NDSolveValue[{N2 * v[x, z]^2 u2[t, x, z] == D[u2[t, x, z], t],
  D[ε2[t, x, z], t] == W2 * D[u2[t, x, z], t],
  DirichletCondition[u2[t, x, z] == 2, z == 10 && 5 ≤ x ≤ 15],
  DirichletCondition[ε2[t, x, z] == 0, z == 0 && 0 ≤ x ≤ 21],
  DirichletCondition[ε2[t, x, z] == 0, 0 ≤ z ≤ 10 && x == 0],
  DirichletCondition[ε2[t, x, z] == 0, 0 ≤ z ≤ 10 && x == 21],
  u2[0, x, z] == 0, ε2[0, x, z] == 0}, {u2, ε2}, {t, 0, 1}, {x, z} ∈
  Rectangle[{0, 0}, {21, 10}];

ContourPlot[u2[1, x, z], {x, z} ∈ Rectangle[{0, 0}, {21, 10}], PlotLegends → All, ColorFunction → "TemperatureMap", Contours → 20,
  AspectRatio → Automatic, ContourLabels → All] // Quiet

ContourPlot[ε2[1, x, z], {x, z} ∈ Rectangle[{0, 0}, {21, 10}], PlotLegends → All, ColorFunction → "TemperatureMap", Contours → 20,
  AspectRatio → Automatic, ContourLabels → All] // Quiet

```

Descripción del código en Mathematica:

El código anterior representa la solución numérica de las ecuaciones diferenciales **(8.31)** y **(8.32)**, Las cuales representan el fenómeno de consolidación en un suelo arcilloso totalmente saturado cuando es sometido a una determinada carga externa. Para lograr dicha solución numérica de las ecuaciones diferenciales antes mencionadas es necesario plantear las condiciones de Dirichlet para representar la región en donde se graficará la solución de dichas ecuaciones diferenciales anteriormente mencionadas.

Dónde:

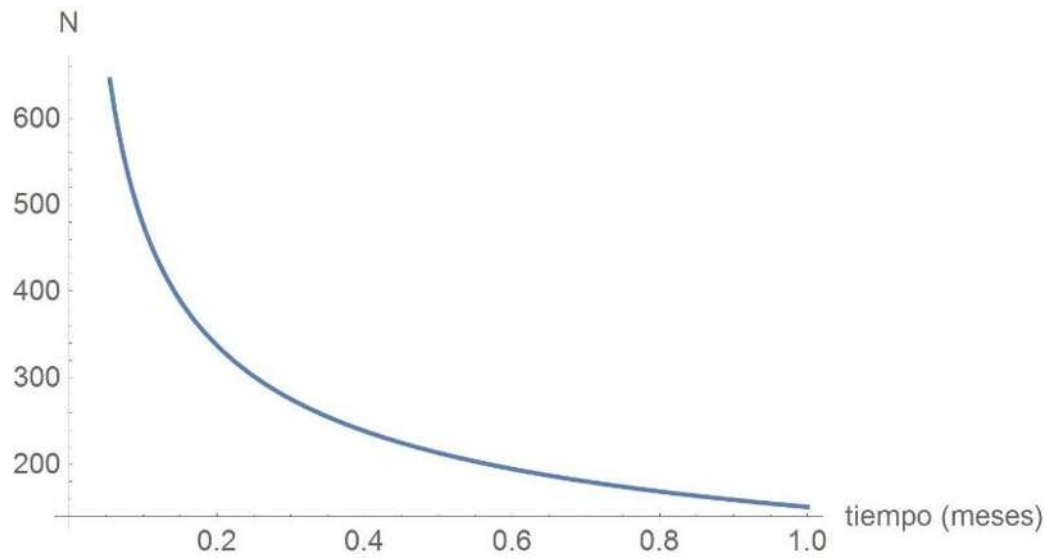
X: Representa la longitud en metros de la región rectangular.

Z: Representa la profundidad en metros de la región rectangular.

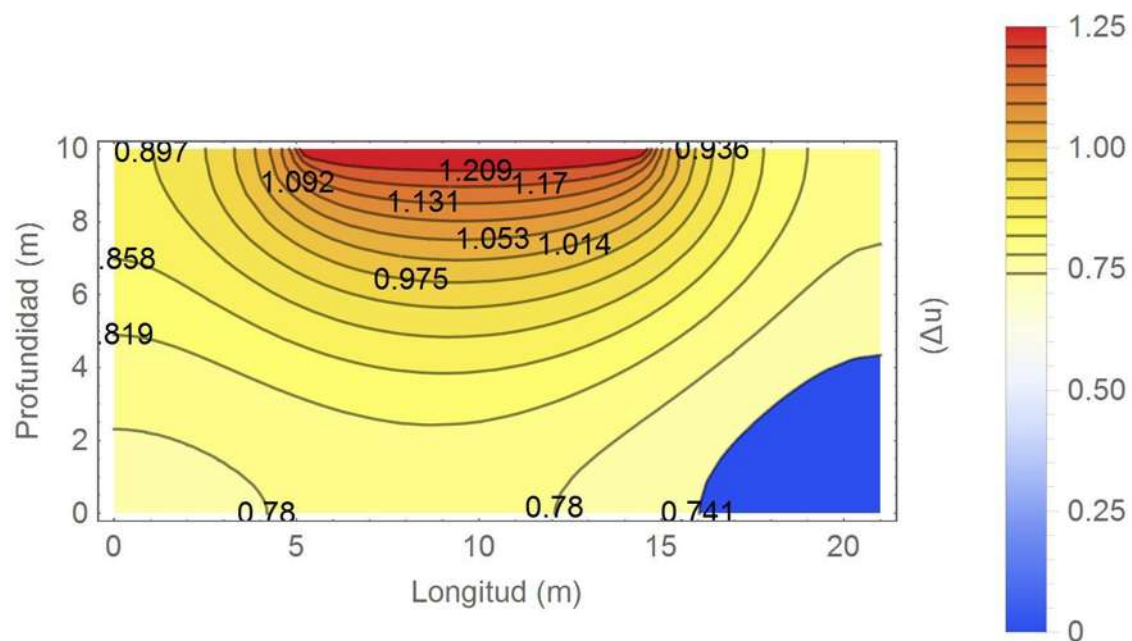
t: Representa el tiempo en meses.

ε : Representa las deformaciones en el suelo arcilloso en 2D.

u : Representa el exceso de presión de poro de agua.

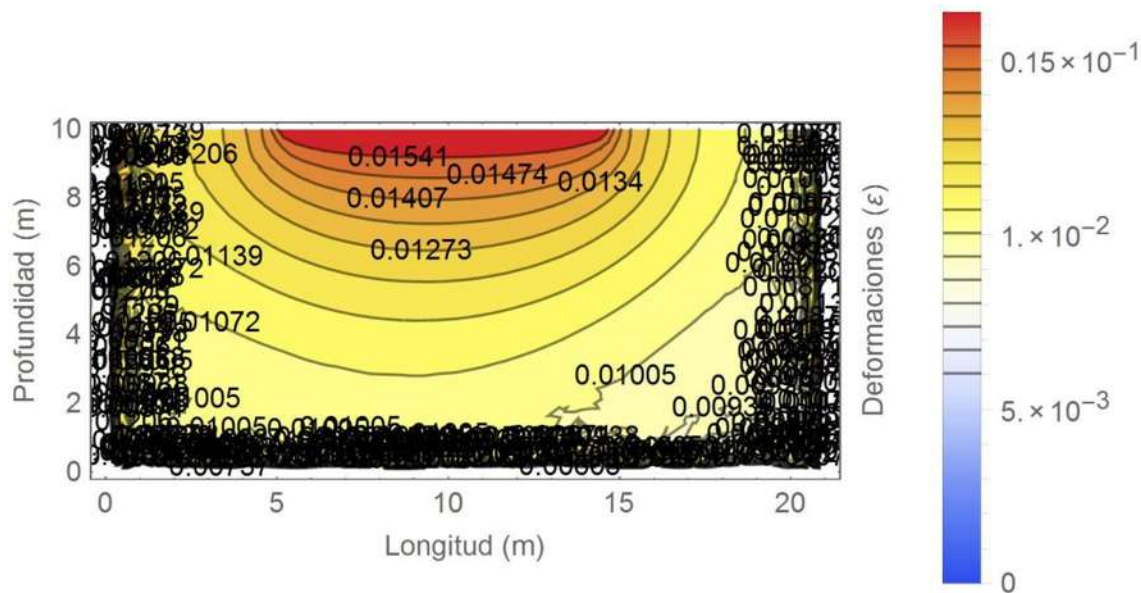


Gráfica 8.31. Comportamiento de la constante "N" en función del tiempo (1 mes).



Gráfica 8.32. Disipación del exceso de presión de poro de agua en 2D en un estrato arcilloso completamente saturado para: $t = 1$ mes y $z = 10$ metros.

En la **Gráfica 8.32**. Se observa la disipación del exceso de presión de poro de agua en función de 1 mes, en un estrato de suelo arcilloso totalmente saturado, el color rojo representa la mayor presión de poro de agua, el color amarillo representa el decremento de la presión de poro de agua y finalmente el color azul representa la menor presión de poro de agua, por lo tanto la mayor presión de poro de agua se encuentra en una profundidad inicial del estrato arcilloso totalmente saturado (2 metros aproximadamente) generándose un decremento conforme aumenta la profundidad llegando a ser nula en lo más profundo y al final de su longitud. Si la comparamos con la **Gráfica 8.22**, se observa claramente que a una profundidad de 7 – 10 metros la presión de poro de agua es nula.



Gráfica 8.33. Deformaciones generadas por la disipación del exceso de presión de poro de agua en 2D para: $t= 1$ mes y $z=10$ metros.

En la **Gráfica 8.33**. Se puede apreciar el comportamiento de las deformaciones en función del tiempo y de la disipación del exceso de presión de poro de agua en el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado, el color rojo representa las mayores deformaciones, el color amarillo representa un decremento en las deformaciones y finalmente el color azul representa las deformaciones más pequeñas, por lo cual observamos claramente que las deformaciones mayores se generan a una profundidad inicial (2 metros aproximadamente), por lo que comienzan a decrecer conforme aumenta la profundidad, en comparación con la **Gráfica 8.22**, las deformaciones son mayores dado a que el tiempo es mayor y por lo tanto el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado sufrirá una mayor deformación.

◆ **Para un tiempo igual 2 meses:**

Para el tiempo de 2 meses tendremos que calcular la constante N:

$$N = \frac{375.0094}{1} * \sqrt{\frac{\pi}{2*(9.720243)(2)}} = 106.5978716.$$

Datos:

$$e_{prom} = 0.875$$

$$a_v = 0.005 \text{ (m}^2\text{/ton)}.$$

$$E = 375.0094 \text{ (ton/m}^2\text{)}.$$

$$C_v = 9.720243 \text{ (m}^2\text{/mes)}.$$

$$v = 0.35 \text{ (arcillas normalmente consolidadas); coeficiente de Poisson.}$$

$$W = 0.0129521 \text{ (m}^2\text{/ton); constante para la EDP que describe las deformaciones.}$$

Código en Mathematica:

```

N1 = 106.5978716;
W1 = 0.0129521;

{u2, e2} = NDSolveValue[{N1 *  $\nabla_{(x,z)}^2$  u2[t, x, z] == D[u2[t, x, z], t],
  D[e2[t, x, z], t] == W1 * D[u2[t, x, z], t],
  DirichletCondition[u2[t, x, z] == 2, z == 10 && 5 ≤ x ≤ 15],
  DirichletCondition[e2[t, x, z] == 0, z == 0 && 0 ≤ x ≤ 21],
  DirichletCondition[e2[t, x, z] == 0, 0 ≤ z ≤ 10 && x == 0],
  DirichletCondition[e2[t, x, z] == 0, 0 ≤ z ≤ 10 && x == 21],
  u2[0, x, z] == 0, e2[0, x, z] == 0}, {u2, e2}, {t, 0, 2}, {x, z} ∈
  Rectangle[{0, 0}, {21, 10}];

Figura7 = ContourPlot[u2[2, x, z], {x, z} ∈ Rectangle[{0, 0}, {21, 10}], FrameLabel → {"Profundidad (m)", "(Δu)"}, {"Longitud (m)", ""},
  PlotLegends → All, ColorFunction → "TemperatureMap", Contours → 15, AspectRatio → Automatic, ContourLabels → All] // Quiet

Figura8 = ContourPlot[e2[2, x, z], {x, z} ∈ Rectangle[{0, 0}, {21, 10}], FrameLabel → {"Profundidad (m)", "Deformaciones (ε)"}, {"Longitud (m)", ""},
  PlotLegends → All, ColorFunction → "TemperatureMap", Contours → 15, AspectRatio → Automatic, ContourLabels → All] // Quiet

```

Descripción del código en Mathematica:

El código anterior representa la solución numérica de las ecuaciones diferenciales **(8.31)** y **(8.32)**, Las cuales representan el fenómeno de consolidación en un suelo arcilloso totalmente saturado cuando es sometido a una determinada carga externa. Para lograr dicha solución numérica de las ecuaciones diferenciales antes mencionadas es necesario plantear las condiciones de Dirichlet para representar la región en donde se graficará la solución de dichas ecuaciones diferenciales anteriormente mencionadas.

Dónde:

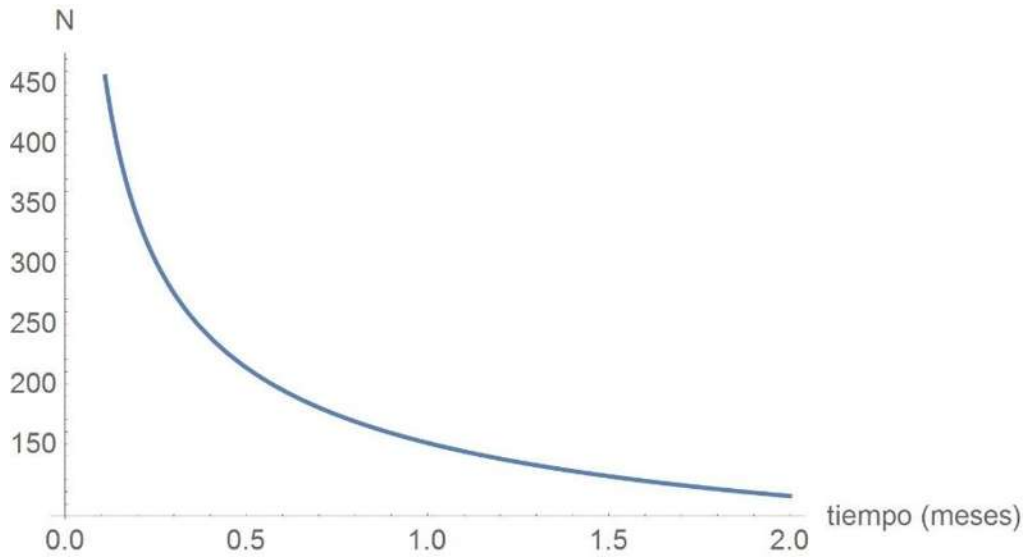
X: Representa la longitud en metros de la región rectangular.

Z: Representa la profundidad en metros de la región rectangular.

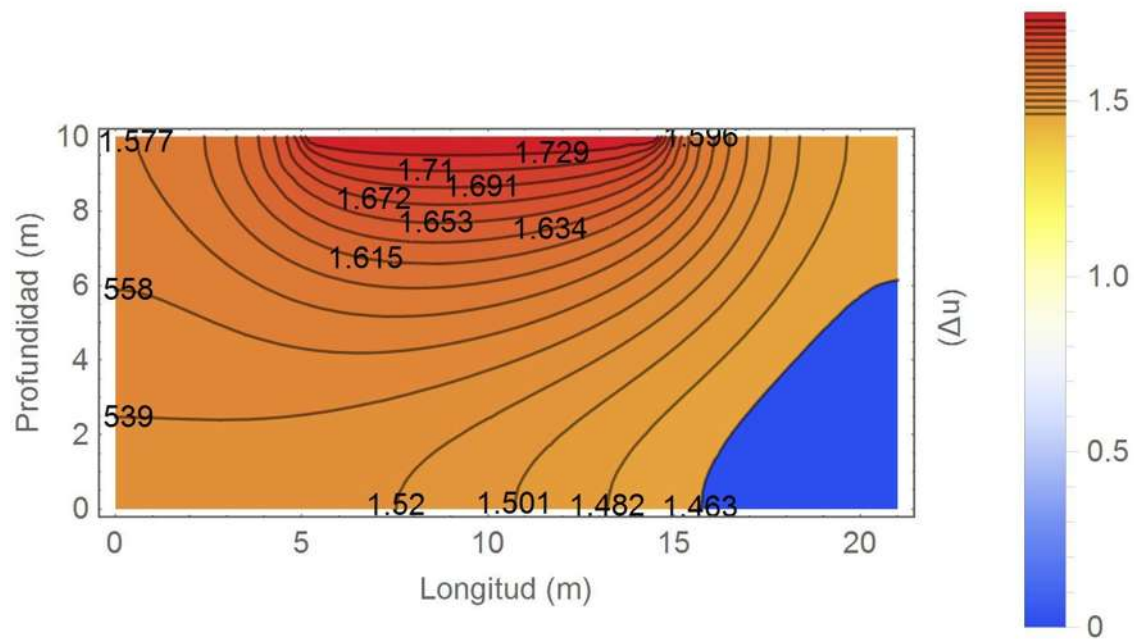
t: Representa el tiempo en meses.

ε : Representa las deformaciones en el suelo arcilloso en 2D.

u : Representa el exceso de presión de poro de agua.

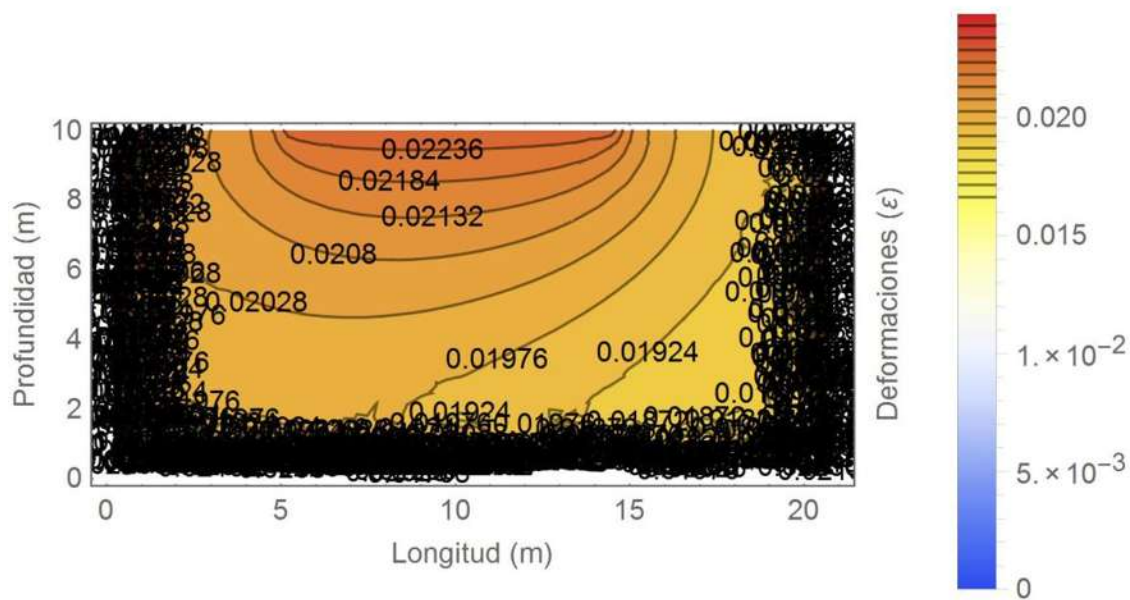


Gráfica 8.34. Comportamiento de la constante "N" en función del tiempo (2 meses).



Gráfica 8.35. Disipación del exceso de presión de poro de agua en 2D en un estrato arcilloso completamente saturado para: $t = 2$ meses y $z = 10$ metros.

En la **Gráfica 8.35**. Se observa la disipación del exceso de presión de poro de agua en función de 1 mes, en un estrato de suelo arcilloso totalmente saturado, el color rojo representa la mayor presión de poro de agua, el color amarillo representa el decremento de la presión de poro de agua y finalmente el color azul representa la menor presión de poro de agua, por lo tanto la mayor presión de poro de agua se encuentra en una profundidad inicial del estrato arcilloso totalmente saturado (2 metros aproximadamente) generándose un decremento conforme aumenta la profundidad llegando a ser nula en lo más profundo y al final de su longitud. Si la comparamos con la **Gráfica 8.32**, observamos que el decremento de la presión de poro se comporta de una manera muy peculiar conforme aumenta la profundidad.



Gráfica 8.36. Deformaciones generadas por la disipación del exceso de presión de poro de agua en 2D para: $t = 2$ meses y $z = 10$ metros.

En la **Gráfica 8.36**. Se puede apreciar el comportamiento de las deformaciones en función del tiempo y de la disipación del exceso de presión de poro de agua en el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado, el color rojo representa las mayores deformaciones, el color amarillo representa un decremento en las deformaciones y finalmente el color azul representa las deformaciones más pequeñas, por lo cual observamos claramente que las deformaciones se comportan de manera casi similar conforme aumenta la profundidad, siendo las menores deformaciones a una profundidad de entre 8 – 10 metros, en comparación con la **Gráfica 8.22**, las deformaciones son mayores dado a que el tiempo es mayor y por lo tanto el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado sufrirá una mayor deformación.

Se modelo el sistema de ecuaciones diferenciales para el caso número 2, para un tiempo igual a 1 mes y 2 meses, dado que se observa con mayor claridad el decremento del exceso de presión de poro y las deformaciones respecto al tiempo en el estrato de arcilla totalmente saturado, dado que la presión de poro de agua ($\Delta\mu$) tiene un valor de 2.

❖ 8.4 MODELACIÓN EN MATHEMATICA PARA EL CASO NÚMERO 3.

$$c_{h_x} * \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_v * \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (8.41)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = W * \frac{\partial u}{\partial t} \quad (8.42)$$

Dónde:

$$W = \left[\frac{(1-\nu)(-1+2\nu)}{Ev(-1+\nu)} \right]$$

W : Es una constante de rigidez que presenta el suelo arcilloso.

c_{h_x} : Representa el coeficiente de consolidación horizontal.

c_v : Representa el coeficiente de consolidación vertical.

Se programaron en conjunto las ecuaciones diferenciales (8.41) y (8.42).

◆ Para un tiempo igual a 1 mes:

Datos:

$E = 375.0094 \text{ (ton/m}^2\text{)}.$

$C_v = 9.720243 \text{ (m}^2\text{/mes)}.$

$Ch_x = 19.440486 \text{ (m}^2\text{/mes)}.$

$\nu = 0.35$ (arcillas normalmente consolidadas); coeficiente de Poisson.

$W = 0.0129521 \text{ (m}^2\text{/ton)}$; constante para la EDP que describe las deformaciones.

Código en Mathematica:

```
W1 = 0.0129521;
{u1, ε1} = NDSolveValue[{19.440486*∂x,xu1[t, x, z] + 9.720243*∂x,zu1[t, x, z] == D[u1[t, x, z], t],
  D[ε1[t, x, z], t] == W1*D[u1[t, x, z], t],
  DirichletCondition[u1[t, x, z] == 2, z == 10 && 5 ≤ x ≤ 15],
  DirichletCondition[ε1[t, x, z] == 0, z == 0 && 0 ≤ x ≤ 21],
  DirichletCondition[ε1[t, x, z] == 0, 0 ≤ z ≤ 10 && x == 0],
  DirichletCondition[ε1[t, x, z] == 0, 0 ≤ z ≤ 10 && x == 21],
  u1[0, x, z] == 0, ε1[0, x, z] == 0}, {u1, ε1}, {t, 0, 1}, {x, z} ∈
  Rectangle[{0, 0}, {21, 10}];
Figura1 = ContourPlot[u1[1, x, z], {x, z} ∈ Rectangle[{0, 0}, {21, 10}], FrameLabel → {"Profundidad (m)", "(Δu)"}, {"Longitud (m)", ""},
  PlotLegends → All, ColorFunction → "TemperatureMap", Contours → 13, AspectRatio → Automatic, ContourLabels → All] // Quiet

Figura2 = ContourPlot[ε1[1, x, z], {x, z} ∈ Rectangle[{0, 0}, {21, 10}], FrameLabel → {"Profundidad (m)", "Deformaciones (ε)"}, {"Longitud (m)", ""},
  PlotLegends → All, ColorFunction → "TemperatureMap", Contours → 13, AspectRatio → Automatic, ContourLabels → All] // Quiet
```

Descripción del código en Mathematica:

El código anterior representa la solución numérica de las ecuaciones diferenciales **(8.41)** y **(8.42)**, Las cuales representan el fenómeno de consolidación en un suelo arcilloso totalmente saturado cuando es sometido a una determinada carga externa. Para lograr dicha solución numérica de las ecuaciones diferenciales antes mencionadas es necesario plantear las condiciones de Dirichlet para representar la región en donde se graficará la solución de dichas ecuaciones diferenciales anteriormente mencionadas.

Dónde:

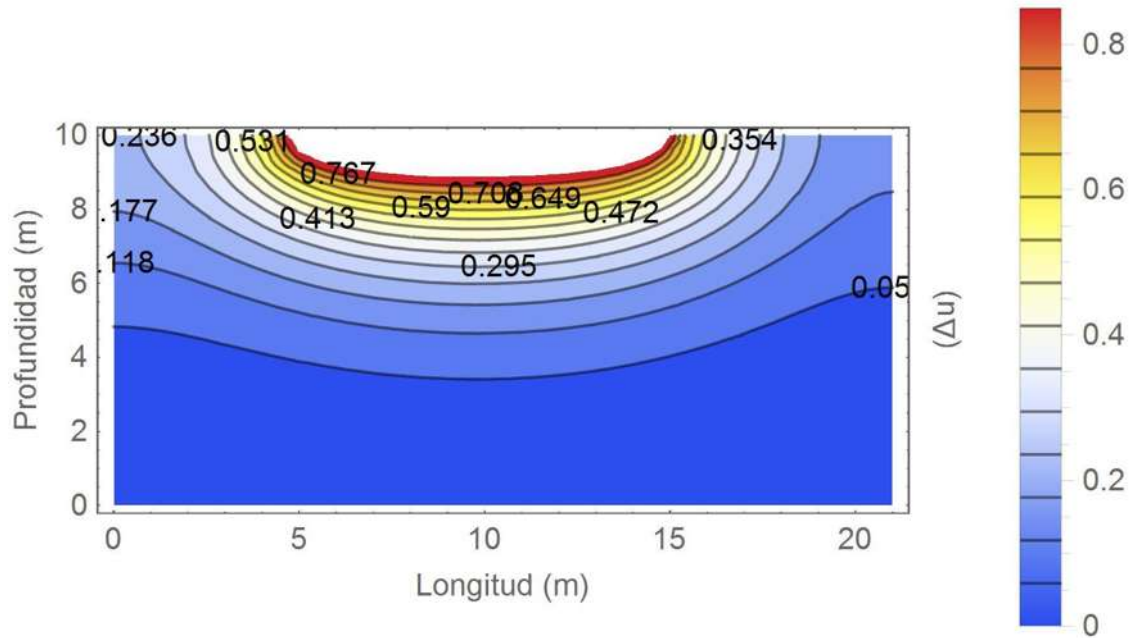
X: Representa la longitud en metros de la región rectangular.

Z: Representa la profundidad en metros de la región rectangular.

t: Representa el tiempo en meses.

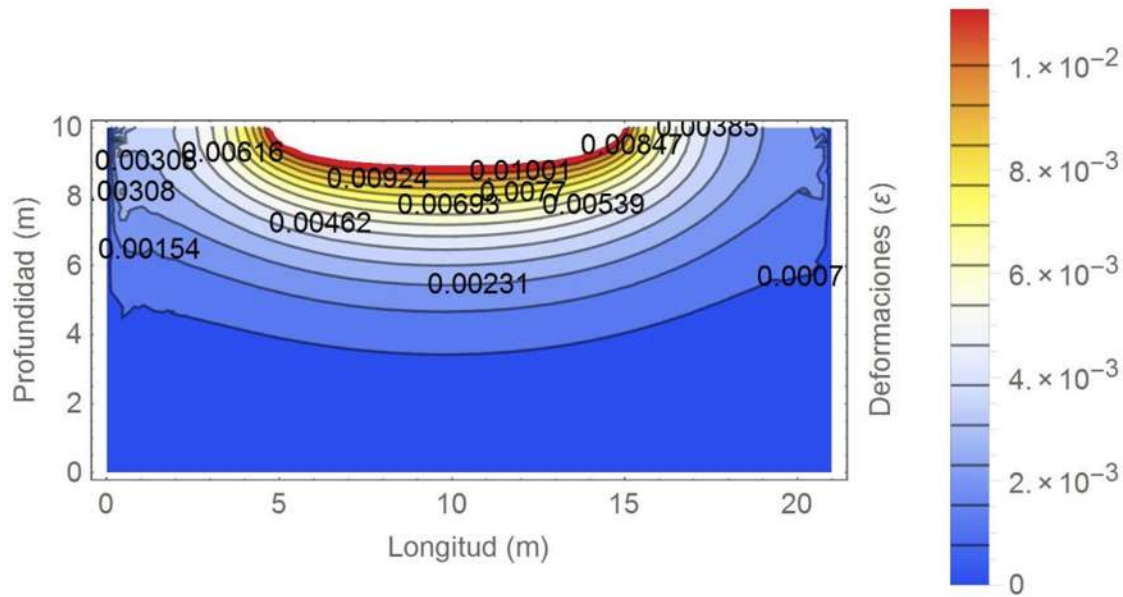
ε : Representa las deformaciones en el suelo arcilloso en 2D.

u: Representa el exceso de presión de poro de agua.



Gráfica 8.41. Disipación del exceso de presión de poro de agua en 2D en un estrato arcilloso completamente saturado para: $t = 1$ mes y $z = 10$ metros.

En la **Gráfica 8.41**. Se observa la disipación del exceso de presión de poro de agua en función de 1 mes, en un estrato de suelo arcilloso totalmente saturado, el color rojo representa la mayor presión de poro de agua, el color amarillo representa el decremento de la presión de poro de agua y finalmente el color azul representa la menor presión de poro de agua, por lo tanto la mayor presión de poro de agua se encuentra en una profundidad inicial del estrato arcilloso totalmente saturado (2 metros aproximadamente) generándose un decremento conforme aumenta la profundidad llegando a ser nula en lo más profundo y al final de su longitud. Si la comparamos con la **Gráfica 8.32**, observamos que la presión de poro de agua es nula a una profundidad aproximada de 6 – 10 metros, además de que los valores de la presión de poro son un poco menores dado que los coeficientes de consolidación son diferentes en ambas direcciones, lo cual afecta la magnitud de la disipación del exceso de presión de poro de agua en el estrato arcilloso totalmente saturado.



Gráfica 8.42. Deformaciones generadas por la disipación del exceso de presión de poro de agua en 2D para: $t = 1$ mes y $z = 10$ metros.

En la **Gráfica 8.42.** Se puede apreciar el comportamiento de las deformaciones en función del tiempo y de la disipación del exceso de presión de poro de agua en el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado, el color rojo representa las mayores deformaciones, el color amarillo representa un decremento en las deformaciones y finalmente el color azul representa las deformaciones más pequeñas, por lo cual observamos claramente que las deformaciones mayores se generan a una profundidad inicial (2 metros aproximadamente), por lo que comienzan a decrecer conforme aumenta la profundidad hasta llegar a ser nulas a 7 – 10 metros de profundidad, en comparación con la **Gráfica 8.36**, las deformaciones son menores dado a que los coeficientes de consolidación son diferentes en ambas direcciones, lo cual afecta la magnitud de la disipación del exceso de presión de poro de agua en el estrato arcilloso totalmente saturado y por lo tanto las deformaciones.

◆ Para un tiempo igual 2 meses:

Datos:

$E = 375.0094 \text{ (ton/m}^2\text{)}.$

$C_v = 9.720243 \text{ (m}^2\text{/mes)}.$

$Ch_x = 19.440486 \text{ (m}^2\text{/mes)}.$

$\nu = 0.35$ (arcillas normalmente consolidadas); coeficiente de Poisson.

$W = 0.0129521 \text{ (m}^2\text{/ton)};$ constante para la EDP que describe las deformaciones.

Código en Mathematica:

```
W1 = 0.0129521;
{u1, ε1} = NDSolveValue[{19.440486*∂x,xu1[t, x, z] + 9.720243*∂z,zu1[t, x, z] == D[u1[t, x, z], t],
  D[ε1[t, x, z], t] == W1*D[u1[t, x, z], t],
  DirichletCondition[u1[t, x, z] == 2, z == 10 && 5 ≤ x ≤ 15],
  DirichletCondition[ε1[t, x, z] == 0, z == 0 && 0 ≤ x ≤ 21],
  DirichletCondition[ε1[t, x, z] == 0, 0 ≤ z ≤ 10 && x == 0],
  DirichletCondition[ε1[t, x, z] == 0, 0 ≤ z ≤ 10 && x == 21],
  u1[0, x, z] == 0, ε1[0, x, z] == 0}, {u1, ε1}, {t, 0, 2}, {x, z} ∈
  Rectangle[{0, 0}, {21, 10}];
Figura1 = ContourPlot[u1[2, x, z], {x, z} ∈ Rectangle[{0, 0}, {21, 10}], FrameLabel → {"Profundidad (m)", "(Δu)"}, {"Longitud (m)", ""},
  PlotLegends → All, ColorFunction → "TemperatureMap", Contours → 13, AspectRatio → Automatic, ContourLabels → All] // Quiet

Figura2 = ContourPlot[ε1[2, x, z], {x, z} ∈ Rectangle[{0, 0}, {21, 10}], FrameLabel → {"Profundidad (m)", "Deformaciones (ε)"}, {"Longitud (m)", ""},
  PlotLegends → All, ColorFunction → "TemperatureMap", Contours → 12, AspectRatio → Automatic, ContourLabels → All] // Quiet
```

Descripción del código en Mathematica:

El código anterior representa la solución numérica de las ecuaciones diferenciales **(8.41)** y **(8.42)**, Las cuales representan el fenómeno de consolidación en un suelo arcilloso totalmente saturado cuando es sometido a una determinada carga externa. Para lograr dicha solución numérica de las ecuaciones diferenciales antes mencionadas es necesario plantear las condiciones de Dirichlet para representar la región en donde se graficará la solución de dichas ecuaciones diferenciales anteriormente mencionadas.

Dónde:

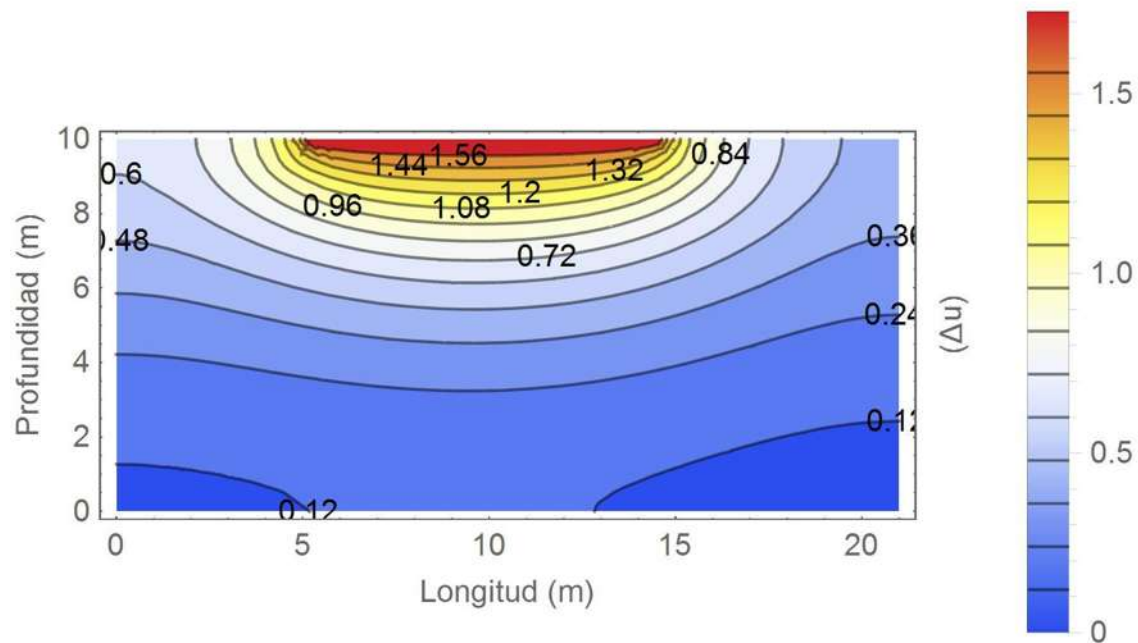
X: Representa la longitud en metros de la región rectangular.

Z: Representa la profundidad en metros de la región rectangular.

t: Representa el tiempo en meses.

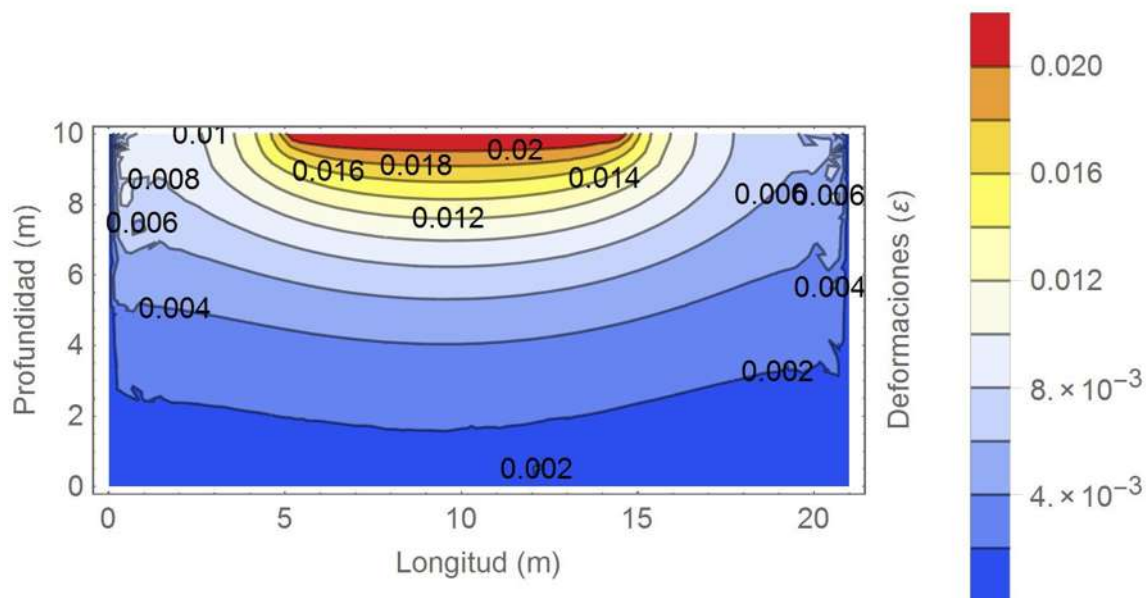
ε : Representa las deformaciones en el suelo arcilloso en 2D.

u : Representa el exceso de presión de poro de agua.



Gráfica 8.43. Disipación del exceso de presión de poro de agua en 2D en un estrato arcilloso completamente saturado para: $t=2$ meses y $z=10$ metros.

En la **Gráfica 8.43**. Se observa la disipación del exceso de presión de poro de agua en función de 1 mes, en un estrato de suelo arcilloso totalmente saturado, el color rojo representa la mayor presión de poro de agua, el color amarillo representa el decremento de la presión de poro de agua y finalmente el color azul representa la menor presión de poro de agua, por lo tanto la mayor presión de poro de agua se encuentra en una profundidad inicial del estrato arcilloso totalmente saturado (2 metros aproximadamente) generándose un decremento conforme aumenta la profundidad. Si la comparamos con la **Gráfica 8.41**, observamos que la presión de poro de agua tiene valores mayores dado que se considera un tiempo de (2 meses).



Gráfica 8.44. Deformaciones generadas por la disipación del exceso de presión de poro de agua en 2D para: $t=2$ meses y $z=10$ metros.

En la **Gráfica 8.44**. Se puede apreciar el comportamiento de las deformaciones en función del tiempo y de la disipación del exceso de presión de poro de agua en el estrato de suelo arcilloso totalmente saturado, el color rojo representa las mayores deformaciones, el color amarillo representa un decremento en las deformaciones y finalmente el color azul representa las deformaciones más pequeñas, por lo cual observamos claramente que las deformaciones mayores se generan a una profundidad inicial (2 metros aproximadamente), por lo que comienzan a decrecer conforme aumenta la profundidad, en comparación con la **Gráfica 8.42**, las deformaciones son un poco mayores en magnitud debido a que hay más tiempo en consideración (2 meses) por lo tanto se incrementara la disipación del exceso de presión de poro de agua lo cual causara en el estrato arcilloso totalmente saturado mayores deformaciones.

En general en cuanto sea mayor tiempo en consideración, un estrato de arcilla totalmente saturado sometido a una carga externa como la que le transfiere una zapata, ocasionara una disipación del exceso de presión de poro de agua, lo cual genera un incremento en las deformaciones y por lo tanto un asentamiento mayor, a excepción de cuando se consideran coeficientes de consolidación diferentes en ambas direcciones, en donde los resultados son un poco diferentes.

Se modelo el sistema de ecuaciones diferenciales para el caso número 3, para un tiempo igual a 1 mes y 2 meses, dado que se observa con mayor claridad el decremento del exceso de presión de poro y las deformaciones respecto al tiempo en el estrato de arcilla totalmente saturado, dado que la presión de poro de agua ($\Delta\mu$) tiene un valor de 2.

CAPITULO 9: DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA TEORÍA DE TERZAGUI EN 3 DIMENSIONES.

❖ 9.1 INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE TERZAGUI EN 3D.

(Romolo Di Francesco. Exact Solution of Terzaghi's Consolidation Equation and Extension to Two/Three-Dimensional Cases). En varias regiones a nivel mundial se construyen estructuras en capas de suelo las cuales llegan a ser muy complejas, ya que tienen flujo vertical y horizontal de agua a través de los poros presentes en el suelo. Recordemos que los suelos constituyen un sistema trifásico formado por partículas sólidas, agua y aire, y que estas dos últimas fases se encuentran en proporción variable en los poros del material. Como se dio a conocer anteriormente una de las limitaciones que tiene la Teoría de Terzagui Unidimensional es que solo considera el flujo del agua a través del elemento del suelo en una dirección, la vertical, además de considerar las propiedades del material constantes durante todo el proceso de la consolidación del suelo.

Sin embargo, se sabe que la presencia de residuos blandos presenta cambios significativos en la relación de vacíos durante los cambios en el estado de esfuerzos en respuesta a la carga que está actuando de manera externa sobre el elemento del suelo y por lo tanto hay un cambio en la permeabilidad. Los modelos unidimensionales son muy exitosos para el modelado del proceso de consolidación en donde el flujo de agua se considera vertical, pero, sin embargo en los casos donde el flujo de agua en sentido horizontal tenga un efecto muy importante en el proceso de consolidación, dichos cálculos deben considerarse con seriedad.

Al igual que en el 3 caso en 2D, modelado anteriormente, se supondrá por simplicidad que el coeficiente de consolidación horizontal en la dirección "x" y "y", es el doble en magnitud al coeficiente de consolidación en la dirección "z", es decir el coeficiente de consolidación vertical es la mitad de la magnitud de cada coeficiente de consolidación horizontal anteriormente descrito. De esta manera cumplimos con la siguiente relación matemática:

$K_h > K_v$.

❖ 9.2 DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE TERZAGUI EN 3D.

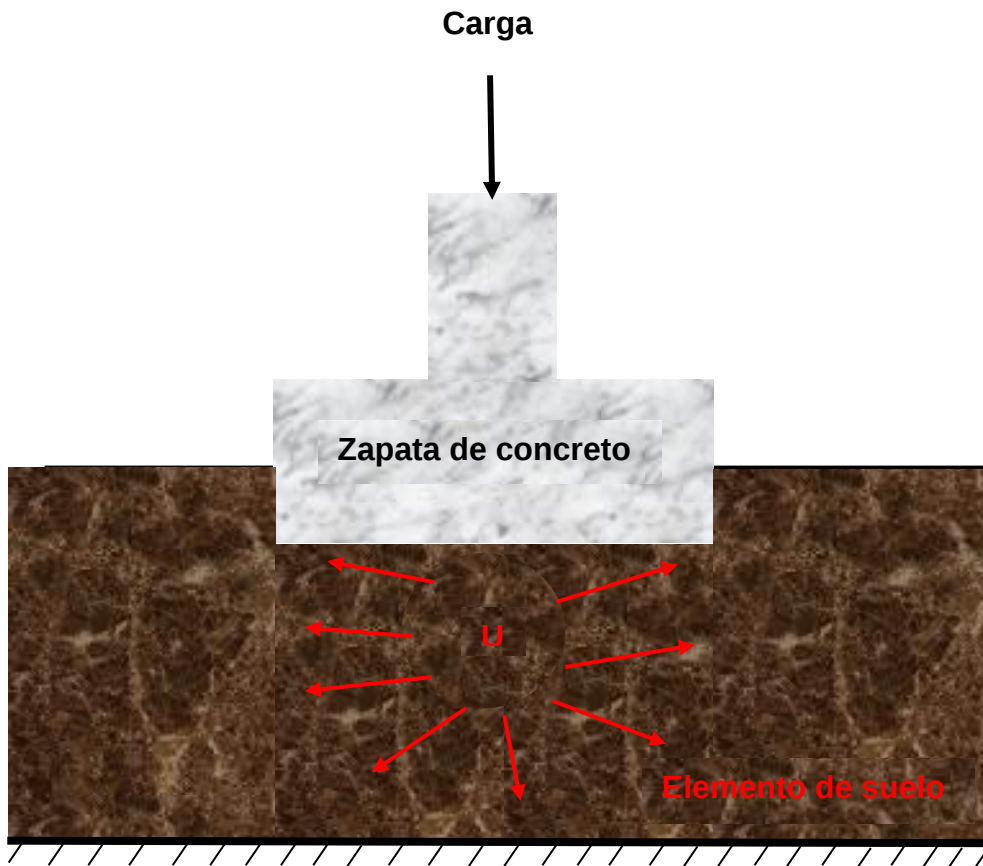


Figura 9.2. Representación de la disipación homogénea del exceso de presión de poro de agua debido a la aplicación de una carga externa actuando sobre el elemento de suelo completamente saturado, el cual se generalizara a 3 dimensiones y a partir de dicha figura se deducirá la ecuación diferencial que describirá dicha disipación homogénea de presión de poro de agua en 3 dimensiones para los diferentes casos que se mencionan más adelante.

La derivación matemática considera las siguientes suposiciones para una mayor simplicidad en la formulación matemática sobre la ecuación diferencial que describe el fenómeno de subsidencia en 3 dimensiones en un suelo arcilloso totalmente saturado:

- ◆ El sistema arcilla-agua es homogéneo completamente.
- ◆ El suelo está completamente saturado.
- ◆ Las partículas del suelo son incompresibles.
- ◆ Las partículas del agua son incompresibles.
- ◆ Las partículas del suelo se pueden reacomodar.
- ◆ Drenaje de agua horizontal y vertical.
- ◆ Es válida la ley de Darcy.
- ◆ Existe una relación lineal entre el esfuerzo de compresión efectivo y la disminución de volumen del elemento de suelo.

La ecuación diferencial parcial que describe la disipación del exceso de presión de poro en 3 dimensiones en un estrato de arcilla totalmente saturado se deducirá para los siguientes casos

- ◆ **Caso 1:** Coeficientes de consolidación iguales en todas las direcciones.
- ◆ **Caso 2:** Coeficiente de consolidación a partir de la solución exacta de la ecuación diferencial parcial que describe el fenómeno de subsidencia en 3D.
- ◆ **Caso 3:** Coeficientes de consolidación diferentes en las tres direcciones.

❖ 9.3 FORMULACIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL QUE DESCRIBE EL FENÓMENO DE CONSOLIDACIÓN EN 3D PARA EL CASO 1.

$$k_h > k_v \quad (9.31)$$

La consolidación de un suelo totalmente saturado debe ser necesariamente dependiente de esta condición, que puede ser extendido para el caso tridimensional y es más consistente con el comportamiento hidráulico y mecánico real de los suelos arcillosos totalmente saturados. Partiendo de este supuesto, se comienza con la ecuación diferencial parcial que describe el fenómeno de subsidencia en 3 dimensiones.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (9.32)$$

Aplicando la ley de Darcy la cual nos dice: La magnitud de la velocidad de un flujo de agua que circula a través de un suelo poroso completamente saturado es directamente proporcional a su gradiente hidráulico.

$$v \propto \frac{dh}{dl} \quad (9.33)$$

Expresándolo de manera matemática se obtiene lo siguiente:

$$v = -K \frac{dh}{dl} \quad (9.34)$$

- ◆ Donde k se le conoce como conductividad hidráulica, la cual se define como la capacidad que tiene un suelo para que un fluido pueda atravesar a través de él.

Combinando las ecuaciones (9.32) y (9.34) y siguiendo el mismo procedimiento que se utilizó para la deducción de la ecuación diferencial de Terzagui en una dimensión llegamos a la ecuación diferencial parcial que describe el fenómeno de subsidencia en 3 dimensiones.

$$c_{h_x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{h_y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (9.35)$$

Expresando el coeficiente de consolidación en la dirección horizontal:

$$c_{h_x} = \frac{k_x}{\gamma_w m_{h_x}} \quad (9.36)$$

Expresando el coeficiente de consolidación en la dirección horizontal:

$$c_{h_y} = \frac{k_y}{\gamma_w m_{h_y}} \quad (9.37)$$

Expresando el coeficiente de consolidación en la dirección vertical:

$$c_v = \frac{k_z}{\gamma_w m_v} \quad (9.38)$$

Dado que para este caso los coeficientes de consolidación son iguales en ambas direcciones, es decir:

$$c_{h_x} = c_{h_y} = c_v$$

La ecuación diferencial parcial **(9.35)** queda de la siguiente forma:

$$c_v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (9.39)$$

La ecuación diferencial **(9.39)** describe la disipación del exceso de presión de poro de agua en 3 dimensiones, con el coeficiente de permeabilidad constante en todas las direcciones para este caso.

❖ 9.4 FORMULACIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL QUE DESCRIBE EL FENÓMENO DE CONSOLIDACIÓN EN 3D PARA EL CASO 2.

(Romolo Di Francesco. Exact Solution of Terzaghi's Consolidation Equation and Extension to Two/Three-Dimensional Cases). Dado que la ecuación diferencial que describe la disipación del exceso de presión de poro de agua respecto al tiempo ya fue deducida y el caso 2 implica la deducción de una constante que relacione el coeficiente de consolidación en dirección vertical con los coeficientes de consolidación en dirección horizontal, por lo tanto partiremos de la ecuación diferencial parcial que describe el fenómeno de subsidencia en 3 dimensiones en un estrato arcilloso completamente saturado.

$$c_{hx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{hy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (9.41)$$

Cuya solución exacta de la ecuación diferencial parcial (9.41) en 3 dimensiones está dada por la siguiente expresión matemática:

$$\Delta u(x, y, z, t) = \Delta u(e^{-k_{u(x)} * x}) * (e^{-k_{u(y)} * y}) * (e^{-k_{u(z)} * z}) * \cos(\omega * t - k_{u(x)} * x - k_{u(y)} * y - k_{u(z)} * z) \quad (9.42)$$

Derivando respecto a la variable t, además de calcular la segunda derivada respecto a las variables x, y, z; sustituyendo la primera derivada respecto a t y las segundas derivadas respecto a las variables x, y, z; en la ecuación (9.41); obtenemos la siguiente expresión matemática:

$$-2 * c_{hx} * k_{u(x)}^2 - 2 * c_{hy} * k_{u(y)}^2 - 2k_{u(z)}^2 * c_v = -\omega \quad (9.43)$$

Simplificando la ecuación (9.43)

$$c_{hx} * k_{u(x)}^2 + c_{hy} * k_{u(y)}^2 + k_{u(z)}^2 * c_v = \frac{\omega}{2} \quad (9.44)$$

Suponiendo las siguientes relaciones de permeabilidad y despejando, obtenemos:

$$\frac{k_{u(y)}}{k_{u(z)}} = m \therefore k_{u(y)} = m * k_{u(z)}$$

$$\frac{k_{u(x)}}{k_{u(z)}} = m \therefore k_{u(x)} = m * k_{u(z)} \quad (9.45)$$

Dado que los coeficientes de consolidación están en función de las permeabilidades, planteamos la siguiente relación matemática y despejamos convenientemente.

$$\frac{c_{hy}}{c_v} = n \therefore c_{hy} = n * c_v$$

$$\frac{c_{hx}}{c_v} = m \therefore c_{hx} = m * c_v \quad (9.46)$$

Sustituyendo en la ecuación (9.44) las ecuaciones (9.45) y (9.46); obtenemos:

$$c_v * k_{u(z)}^2 * (m^3 + n^3 + 1) = \frac{\omega}{2} \quad (9.47)$$

De la ecuación (9.47), despejamos $k_u(z)$; obteniendo:

$$k_u(z) = \sqrt{\frac{\omega}{c_v(m^3+n^3+1)}} \quad (9.48)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (9.45) la relación: $\omega = (2\pi)/t$ y la ecuación (9.48); obtenemos:

$$k_{u(x)} = m * k_u(z) = m * \sqrt{\frac{\pi}{c_v(m^3+n^3+1)}}$$

$$k_{u(y)} = n * k_u(z) = n * \sqrt{\frac{\pi}{c_v(m^3+n^3+1)}}$$

Planteando las siguientes condiciones:

- $m=n=1$
- $k_{u(x)} = k_{u(y)} = k_{u(z)} = \sqrt{\frac{\pi}{3 * c_v * t}}$

Y sustituyendo el resultado anterior en el coeficiente de consolidación de la ecuación diferencial parcial de segundo orden (9.41) y expresando en forma vectorial llegamos a la ecuación diferencial parcial que describe la disipación del exceso de presión de poro de agua en 3 dimensiones.

$$\frac{k_{u(x)}}{\gamma_w} E * \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k_{u(y)}}{\gamma_w} E * \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{k_{u(z)}}{\gamma_w} E * \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

∴

$$\frac{E}{\gamma_w} * \sqrt{\frac{\pi}{3 * c_v * t}} * \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{E}{\gamma_w} * \sqrt{\frac{\pi}{3 * c_v * t}} * \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{E}{\gamma_w} * \sqrt{\frac{\pi}{3 * c_v * t}} * \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

∴

$$\frac{E}{\gamma_w} * \sqrt{\frac{\pi}{3 * c_v * t}} * \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

∴

$$\frac{E}{\gamma_w} * \sqrt{\frac{\pi}{3 * c_v * t}} * \nabla^2 \mu = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Si $N = \frac{E}{\gamma_w} * \sqrt{\frac{\pi}{3 * c_v * t}}$; obtenemos:

$$N * \nabla^2 \mu = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (9.49)$$

Dónde:

N: Es la constante deducida a partir de la solución exacta de la ecuación diferencial **(9.41)**.

La ecuación diferencial **(9.49)**, describe la disipación del exceso de presión de poro de agua en 3 dimensiones en un estrato de arcilla completamente saturado.

❖ 9.5 FORMULACIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL QUE DESCRIBE EL FENÓMENO DE CONSOLIDACIÓN EN 3D PARA EL CASO 3.

En este caso los coeficientes de consolidación son diferentes en ambas direcciones, es decir, los coeficientes de consolidación horizontal son iguales, pero serán la mitad del coeficiente de consolidación vertical, por lo tanto partiremos del principio de continuidad para flujos de agua a través de los suelos en 3 dimensiones, para deducir la ecuación diferencial parcial en 3 dimensiones que describa el fenómeno de subsidencia en un estrato de arcilla totalmente saturado:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (9.51)$$

Aplicando la ley de Darcy la cual nos dice: La magnitud de la velocidad de un flujo de agua que circula a través de un suelo poroso completamente saturado es directamente proporcional a su gradiente hidráulico.

$$v \propto \frac{dh}{dl} \quad (9.52)$$

Expresándolo de manera matemática se obtiene lo siguiente:

$$v = -K \frac{dh}{dl} \quad (9.53)$$

Donde k se le conoce como conductividad hidráulica, la cual se define como la capacidad que tiene un suelo para que un fluido pueda atravesar a través de él.

Combinando las ecuaciones (9.51) y (9.53) y siguiendo el mismo procedimiento que se utilizó para la deducción de la ecuación diferencial de Terzagui en una dimensión llegamos a la ecuación diferencial parcial que describe el fenómeno de subsidencia en 3 dimensiones.

$$\frac{k_x}{\gamma_w m_{h_x}} * \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k_y}{\gamma_w m_{h_y}} * \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{k_z}{\gamma_w m_v} * \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (9.54)$$

Expresando el coeficiente de consolidación en la dirección horizontal (x):

$$c_{h_x} = \frac{k_x}{\gamma_w m_{h_x}} \quad (9.55)$$

Expresando el coeficiente de consolidación en la dirección horizontal (y):

$$c_{hy} = \frac{k_y}{\gamma_w m_{hy}} \quad (9.56)$$

Expresando el coeficiente de consolidación en la dirección vertical:

$$c_v = \frac{k_z}{\gamma_w m_v} \quad (9.57)$$

Simplificando la ecuación (9.54), obtenemos la siguiente expresión matemática:

$$c_{hx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{hy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (9.58)$$

La ecuación diferencial (9.58), describe la disipación del exceso de presión de poro de agua en función del tiempo en 3 dimensiones para un suelo arcilloso totalmente saturado.

Las formulaciones anteriores para los diferentes casos solo se realizarán para los tiempos siguientes: $t=1$ mes y $t=12$ meses, dado que solo se desea representar el comportamiento de las ecuaciones diferenciales respecto al tiempo, es decir, la representación gráfica del fenómeno de subsidencia en un suelo arcilloso totalmente saturado en 3D.

CAPITULO 10: MODELACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES QUE DESCRIBEN EL FENÓMENO DE CONSOLIDACIÓN EN 3D.

❖ 10.1 Introducción a los diferentes casos a modelar en 3D.

En este capítulo se modelarán las ecuaciones diferenciales que describen la disipación del exceso de presión de poro de agua en 3 dimensiones en un suelo arcilloso totalmente saturado, pero solamente para un tiempo de 1 año (12 meses) debido a la complejidad que significa modelar cada ecuación diferencial para los 3 casos siguientes:

◆ Caso número 1:

$$c_v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (10.11)$$

Dónde:

$$c_v = \frac{k_z}{\gamma_w m_v},$$

c_v : Representa el coeficiente de consolidación vertical, el cuál en este caso se supone igual en todas las direcciones.

◆ Caso número 2:

$$N * \nabla^2 \mu = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (10.12)$$

Dónde:

$$N = \sqrt{\frac{\pi}{3 * c_v * t}}$$

N: Es la constante deducida a partir de la solución exacta de la ecuación diferencial parcial (9.41) en 3D.

◆ **Caso número 3:**

$$c_{hx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{hy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (10.13)$$

Dónde:

$c_{hx} = \frac{k_x}{\gamma_w m_{hx}}$; $c_{hy} = \frac{k_y}{\gamma_w m_{hy}}$; Son los coeficientes horizontales de consolidación en las direcciones “x” y “y” respectivamente.

$$c_v = \frac{k_z}{\gamma_w m_v},$$

c_v : Representa el coeficiente de consolidación vertical.

Para realizar satisfactoriamente la modelación del sistema de ecuaciones diferenciales para los 3 casos mencionados anteriormente, se obtuvieron datos del cuaderno técnico número 1, publicado por la UMSNH, Facultad de Ingeniería Civil: "el subsuelo de la ciudad de Morelia". Los cuales son:

PCA-1

$$e_{prom} = 0.875.$$

$$a_v = 0.005 \text{ (m}^2\text{/ton)}.$$

$$k = 0.02592 \text{ (m/mes)}.$$

$$m_v = 2.6666 \times 10^{-3} \text{ (m}^2\text{/ton)}.$$

$$E = 375.0094 \text{ (ton/m}^2\text{)}.$$

$$\gamma_w = 1 \text{ (ton/m}^3\text{)}.$$

$$C_v = 9.720243 \text{ (m}^2\text{/mes)}.$$

$$C_{hx} = 19.440486 \text{ (m}^2\text{/mes)}.$$

$$C_{hy} = 19.440486 \text{ (m}^2\text{/mes)}.$$

Para todos los casos anteriormente mencionados y descritos se utilizarán los datos anteriores junto con tiempos iguales para observar de la mejor manera el fenómeno de subsidencia en un suelo arcilloso completamente saturado. Además las modelaciones se realizarán en Wolfram Mathematica, los coeficientes de consolidación horizontales son el doble en magnitud del coeficiente de consolidación vertical, dado que se supone que la permeabilidad es mayor en la superficie del elemento infinitesimal de suelo, es decir: $K_h > K_v$.

❖ 10.2 MODELACIÓN EN MATHEMATICA PARA EL CASO NÚMERO 1.

$$c_v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (10.21)$$

◆ Para un tiempo igual a 1 mes:

Datos:

$$e_{prom} = 0.875.$$

$$a_v = 0.005 \text{ (m}^2/\text{ton)}.$$

$$k = 0.02592 \text{ (m/mes)}.$$

$$m_v = 2.6666 \times 10^{-3} \text{ (m}^2/\text{ton)}.$$

$$E = 375.0094 \text{ (ton/m}^2\text{)}.$$

$$\gamma_w = 1 \text{ (ton/m}^3\text{)}.$$

$$C_v = 9.720243 \text{ (m}^2/\text{mes)}.$$

Código en Mathematica:

```
sol = NDSolveValue [ { Cv1 * ∇2{x,y,z} u[t, x, y, z] == D[u[t, x, y, z], t] ,
  DirichletCondition [u[t, x, y, z] == 20, 5 ≤ x ≤ 15 && 5 ≤ y ≤ 15 && z == 10] ,
  u[0, x, y, z] == 0} , u, {t, 0, 1} , {x, y, z} ∈
  Cuboid [{0, 0, 0}, {21, 21, 10}] ]

Figural = ContourPlot3D [sol[1, x, y, z] == 2, {x, 0, 21}, {y, 0, 21}, {z, 0, 10},
  AxesLabel → {"Longitud (m)", "Ancho (m)", "Profundidad (m)"}, ColorFunction → Function[{x, y, z}, Hue[w]]]
```

Descripción del código en Mathematica:

El código anterior representa la solución numérica de la ecuación diferencial **(10.21)**, La cual representa el fenómeno de consolidación en un suelo arcilloso totalmente saturado en 3 dimensiones, cuando es sometido a una determinada carga externa la cual para este caso es de 20. Para lograr dicha solución numérica de la ecuación diferencial antes mencionada es necesario plantear las condiciones de Dirichlet para representar la región en donde se graficará la solución de dicha ecuación diferencial anteriormente mencionada.

Dónde:

X: Representa la longitud en metros de la región en 3 dimensiones.

Y: Representa el ancho en metros de la región en 3 dimensiones.

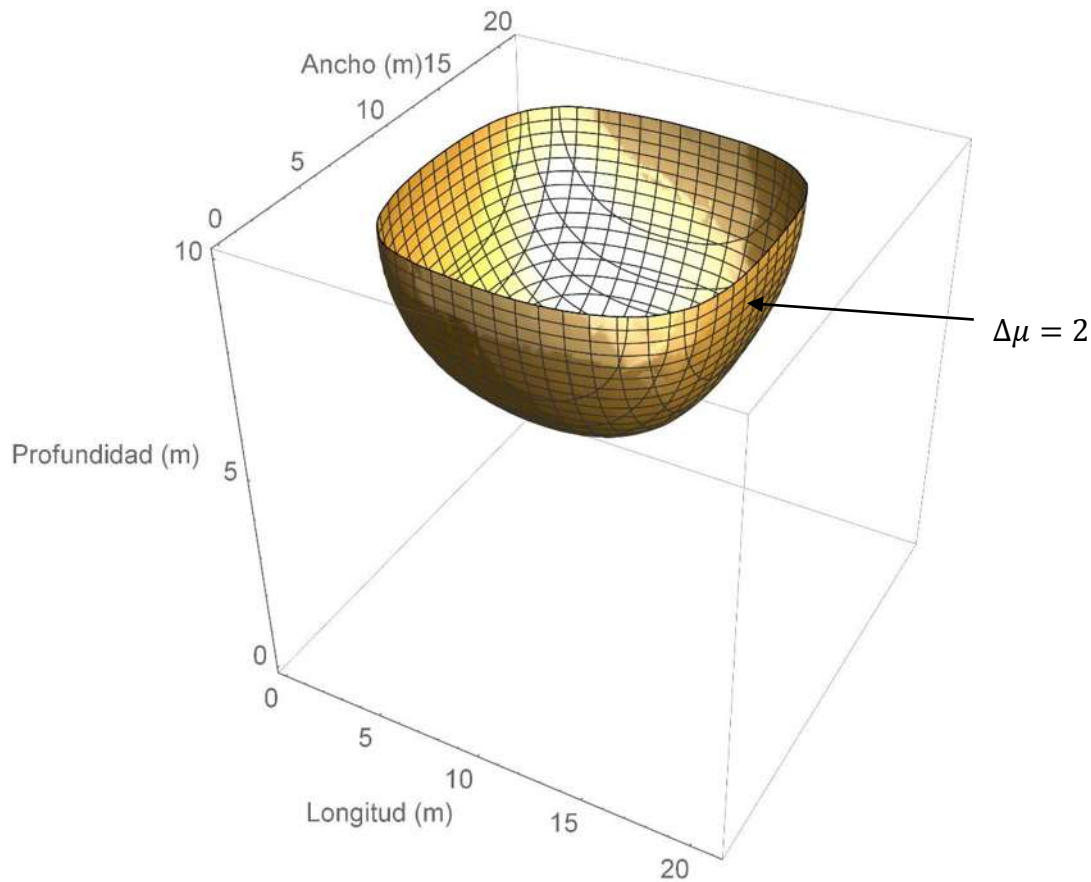
Z: Representa la profundidad de la región en 3 dimensiones.

t: Representa el tiempo en meses.

u : Representa el exceso de presión de poro de agua.

$\Delta\mu = 20$: Valor propuesto para la presión de poro de agua en cualquier tiempo y en todas las direcciones.

Figura1: (del código anterior). Representa la modelación de la presión homogénea de poro de agua pero solamente hasta 2 como máximo.



Gráfica 10.21. Representación homogénea del exceso de presión de poro de agua en 3D para un estrato arcilloso completamente saturado para un $t = 1$ mes y $\Delta\mu = 20$.

En la **Gráfica 10.21**, representa las familias de curvas ortogonales (redes de flujo en 3 dimensiones), mejor conocidas como: líneas de flujo y líneas equipotenciales, en donde una línea de flujo se caracteriza por llevar una molécula de agua de un lado con mayor energía a otro lado con menor energía en un estrato de suelo arcilloso completamente saturado en 3 dimensiones, la línea equipotencial se caracteriza por tener la misma carga potencial en todos sus puntos. En este caso se observa que no actúan en toda la profundidad del estrato arcilloso, se realizó la modelación solo para 1 mes debido a la complejidad de la ecuación diferencial parcial que describe la representación homogénea del exceso de presión de poro de agua en 3 dimensiones para un suelo totalmente saturado.

◆ Para un tiempo igual a 1 mes con diferentes presiones de poro de agua:

Datos:

$$e_{\text{prom}} = 0.875.$$

$$a_v = 0.005 \text{ (m}^2/\text{ton)}.$$

$$k = 0.02592 \text{ (m/mes)}.$$

$$m_v = 2.6666 \times 10^{-3} \text{ (m}^2/\text{ton)}.$$

$$E = 375.0094 \text{ (ton/m}^2\text{)}.$$

$$\gamma_w = 1 \text{ (ton/m}^3\text{)}.$$

$$C_v = 9.720243 \text{ (m}^2/\text{mes)}.$$

Código en Mathematica:

```
sol = NDSolveValue [ { cv *  $\nabla_{\{x,y,z\}}^2$  u[t, x, y, z] == D[u[t, x, y, z], t] ,
  DirichletCondition [u[t, x, y, z] == 20, 5 ≤ x ≤ 15 && 5 ≤ y ≤ 15 && z == 10] ,
  u[0, x, y, z] == 0} , u, {t, 0, 1} , {x, y, z} ∈
  Cuboid [{0, 0, 0}, {21, 21, 10}] ]
```

```
Figura1 = ContourPlot3D [sol[1, x, y, z] == 2, {x, 10, 21}, {y, 0, 21}, {z, 5, 10},
  AxesLabel → {"Longitud (m)", "Ancho (m)", "Profundidad (m)"},
  ColorFunction → Function [{x, y, z}, Hue[y]]]
```

```
Figura20 = ContourPlot3D [sol[1, x, y, z] == 6, {x, 10, 21}, {y, 0, 21}, {z, 5, 10},
  AxesLabel → {"Longitud (m)", "Ancho (m)", "Profundidad (m)"},
  ColorFunction → Function [{x, y, z}, Hue[h]]]
```

```
Figura30 = ContourPlot3D [sol[1, x, y, z] == 10, {x, 10, 21}, {y, 0, 21}, {z, 5, 10},
  AxesLabel → {"Longitud (m)", "Ancho (m)", "Profundidad (m)"},
  ColorFunction → Function [{x, y, z}, Hue[y]]]
```

```
Figura40 = Show [Figura1 , Figura20 , Figura30 ]
```

Descripción del código en Mathematica:

El código anterior representa la solución numérica de la ecuación diferencial **(10.21)**, La cual representa el fenómeno de consolidación en un suelo arcilloso totalmente saturado en 3 dimensiones, cuando es sometido a una determinada carga externa, el cual se realizara con diferentes presiones de poro de agua para observar con claridad las diferencias en las redes de flujo. Para lograr dicha solución numérica de la ecuación diferencial antes mencionada es necesario plantear las condiciones de Dirichlet para representar la región en donde se graficará la solución y además se comparara con diferentes presiones de poro de agua dadas para de tal manera representar la disipación de presión de poro de agua conforme transcurre un tiempo dado, de dicha ecuación diferencial anteriormente mencionada.

Dónde:

X: Representa la longitud en metros de la región en 3 dimensiones.

Y: Representa el ancho en metros de la región en 3 dimensiones.

Z: Representa la profundidad de la región en 3 dimensiones.

t: Representa el tiempo en meses.

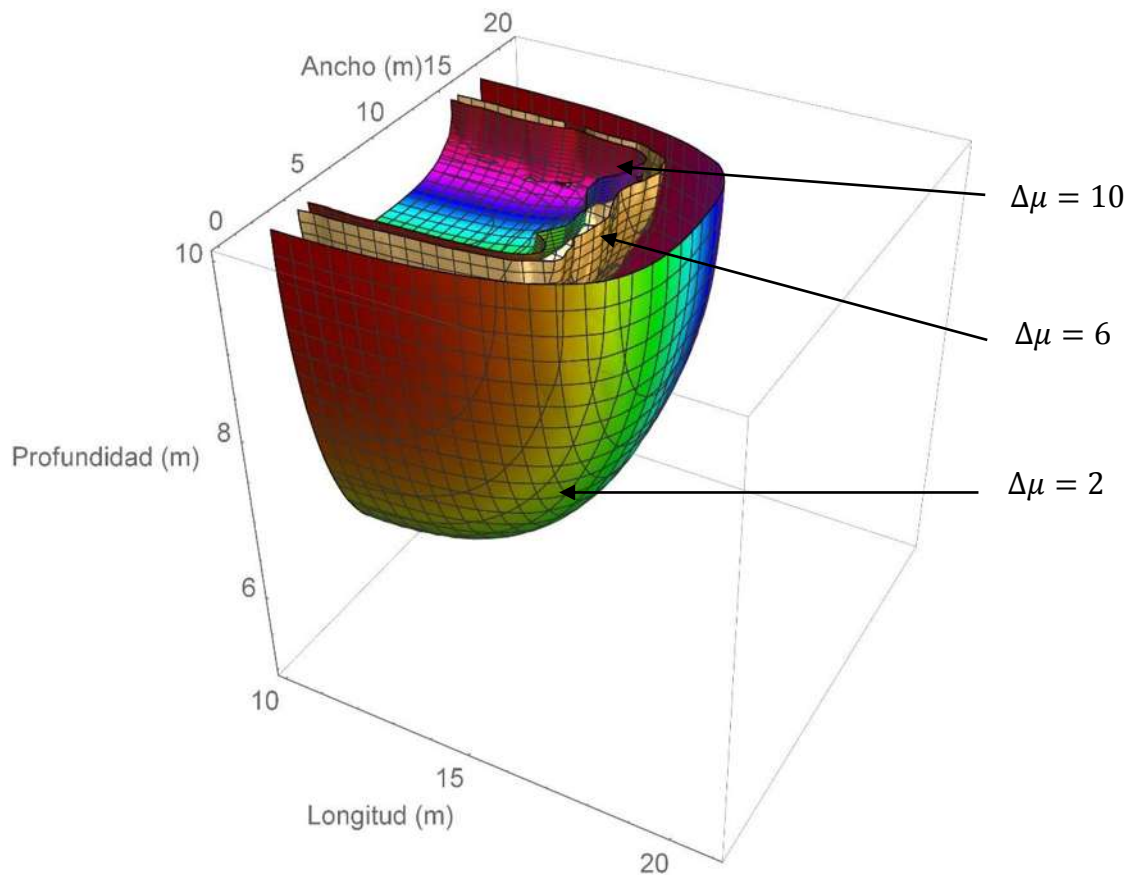
u : Representa el exceso de presión de poro de agua.

$\Delta\mu = 20$: Valor propuesto para la presión de poro de agua en cualquier tiempo y en todas las direcciones.

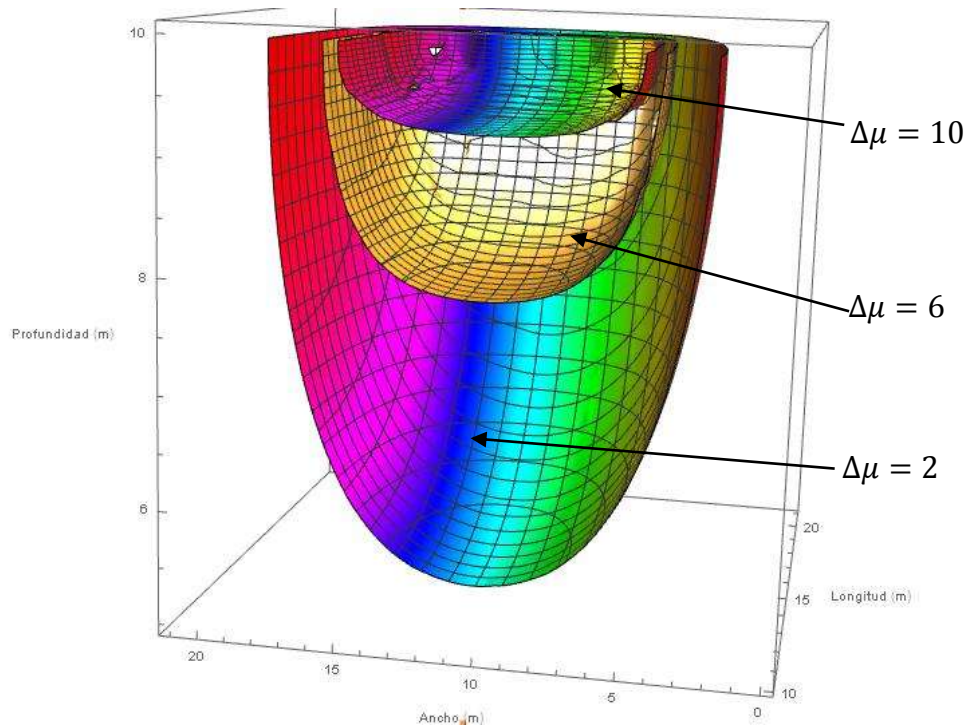
$\Delta\mu = 2$: Valor propuesto para la presión de poro de agua para la Figura 1.

$\Delta\mu = 6$: Valor propuesto para la presión de poro de agua para la Figura 20.

$\Delta\mu = 10$: Valor propuesto para la presión de poro de agua para la Figura 30.



Gráfica 10.22. Representación de la disipación del exceso de presión de poro de agua en 3D para un estrato arcilloso completamente saturado para un $t = 1$ mes y $\Delta\mu = 2$, $\Delta\mu = 6$ y $\Delta\mu = 10$.



Gráfica 10.23. Representación de la disipación del exceso de presión de poro de agua en 3D para un estrato arcilloso completamente saturado para un $t = 1$ mes y $\Delta\mu = 2$, $\Delta\mu = 6$ y $\Delta\mu = 10$.

En resumen a mayor exceso de presión de poro de agua, esta actúa más en la superficie del elemento del suelo arcilloso totalmente saturado, aclarando que $\Delta\mu = 2$, es la presión de poro de agua dada para solucionar la ecuación diferencial correspondiente a este caso.

◆ Para un tiempo igual a 0.5 de mes con diferentes presiones de poro de agua:

Datos:

$$e_{prom} = 0.875.$$

$$a_v = 0.005 \text{ (m}^2/\text{ton)}.$$

$$k = 0.02592 \text{ (m/mes)}.$$

$$m_v = 2.6666 \times 10^{-3} \text{ (m}^2/\text{ton)}.$$

$$E = 375.0094 \text{ (ton/m}^2\text{)}.$$

$$\gamma_w = 1 \text{ (ton/m}^3\text{)}.$$

$$C_v = 9.720243 \text{ (m}^2/\text{mes)}.$$

Código en Mathematica:

```
sol = NDSolveValue [ { cv *  $\nabla_{\{x,y,z\}}^2$  u[t, x, y, z] == D[u[t, x, y, z], t],
  DirichletCondition [u[t, x, y, z] == 20, 5 ≤ x ≤ 15 && 5 ≤ y ≤ 15 && z == 10],
  u[0, x, y, z] == 0}, u, {t, 0, 1}, {x, y, z} ∈
  Cuboid [{0, 0, 0}, {21, 21, 10}]]
```

```
Figura1 = ContourPlot3D [sol[0.5, x, y, z] == 2, {x, 10, 21}, {y, 0, 21}, {z, 5, 10},
  AxesLabel → {"Longitud (m)", "Ancho (m)", "Profundidad (m)"},
  ColorFunction → Function [{x, y, z}, Hue[y]]]
```

```
Figura20 = ContourPlot3D [sol[0.5, x, y, z] == 5, {x, 10, 21}, {y, 0, 21},
  {z, 5, 10}, AxesLabel → {"Longitud (m)", "Ancho (m)", "Profundidad (m)"},
  ColorFunction → Function [{x, y, z}, Hue[h]]]
```

```
Figura30 = ContourPlot3D [sol[0.5, x, y, z] == 7, {x, 10, 21}, {y, 0, 21},
  {z, 5, 10}, AxesLabel → {"Longitud (m)", "Ancho (m)", "Profundidad (m)"},
  ColorFunction → Function [{x, y, z}, Hue[y]]]
```

```
Figura40 = Show [Figura1, Figura20, Figura30]
```

Descripción del código en Mathematica:

El código anterior representa la solución numérica de la ecuación diferencial **(10.21)**, La cual representa el fenómeno de consolidación en un suelo arcilloso totalmente saturado en 3 dimensiones, cuando es sometido a una determinada carga externa, el cual se realizara con diferentes presiones de poro de agua para observar con claridad las diferencias en las redes de flujo. Para lograr dicha solución numérica de la ecuación diferencial antes mencionada es necesario plantear las condiciones de Dirichlet para representar la región en donde se graficará la solución y además se comparara con diferentes presiones de poro de agua dadas para de tal manera representar la disipación de presión de poro de agua conforme transcurre un tiempo dado, de dicha ecuación diferencial anteriormente mencionada.

Dónde:

X: Representa la longitud en metros de la región en 3 dimensiones.

Y: Representa el ancho en metros de la región en 3 dimensiones.

Z: Representa la profundidad de la región en 3 dimensiones.

t: Representa el tiempo en meses.

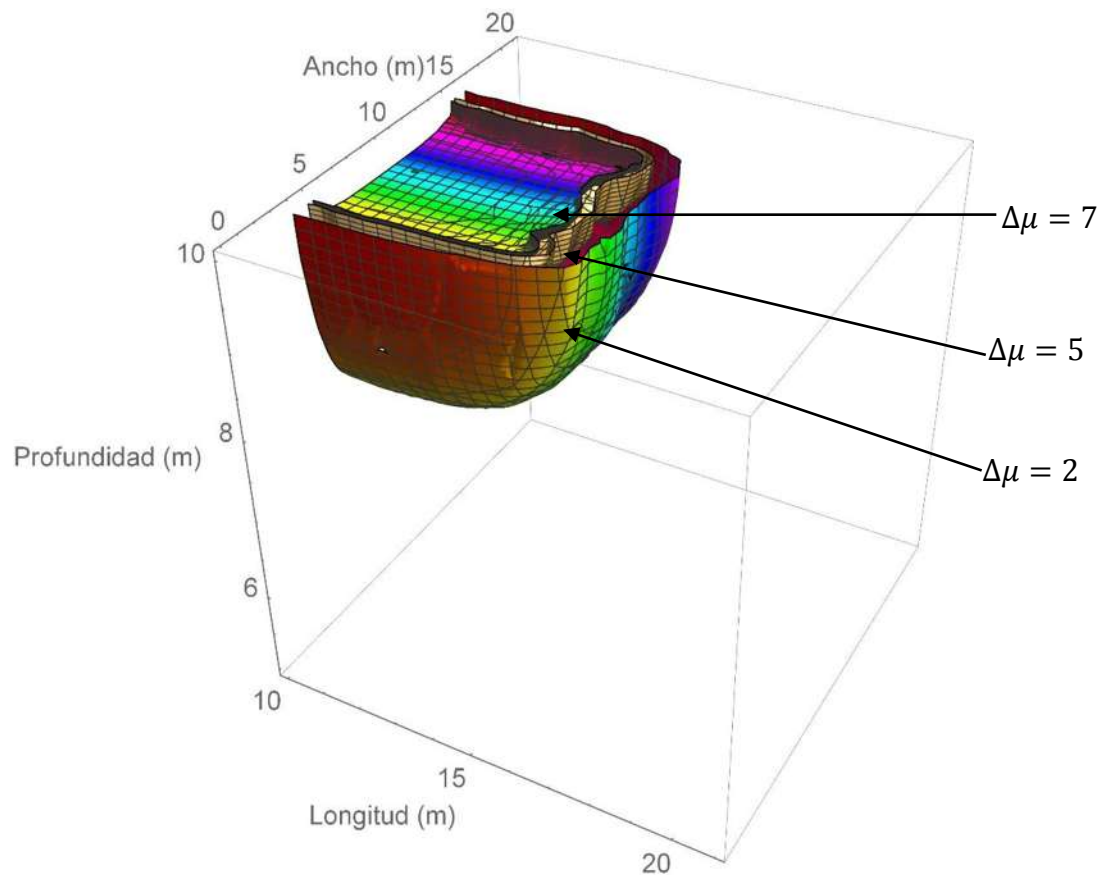
u : Representa el exceso de presión de poro de agua.

$\Delta\mu = 20$: Valor propuesto para la presión de poro de agua en cualquier tiempo y en todas las direcciones.

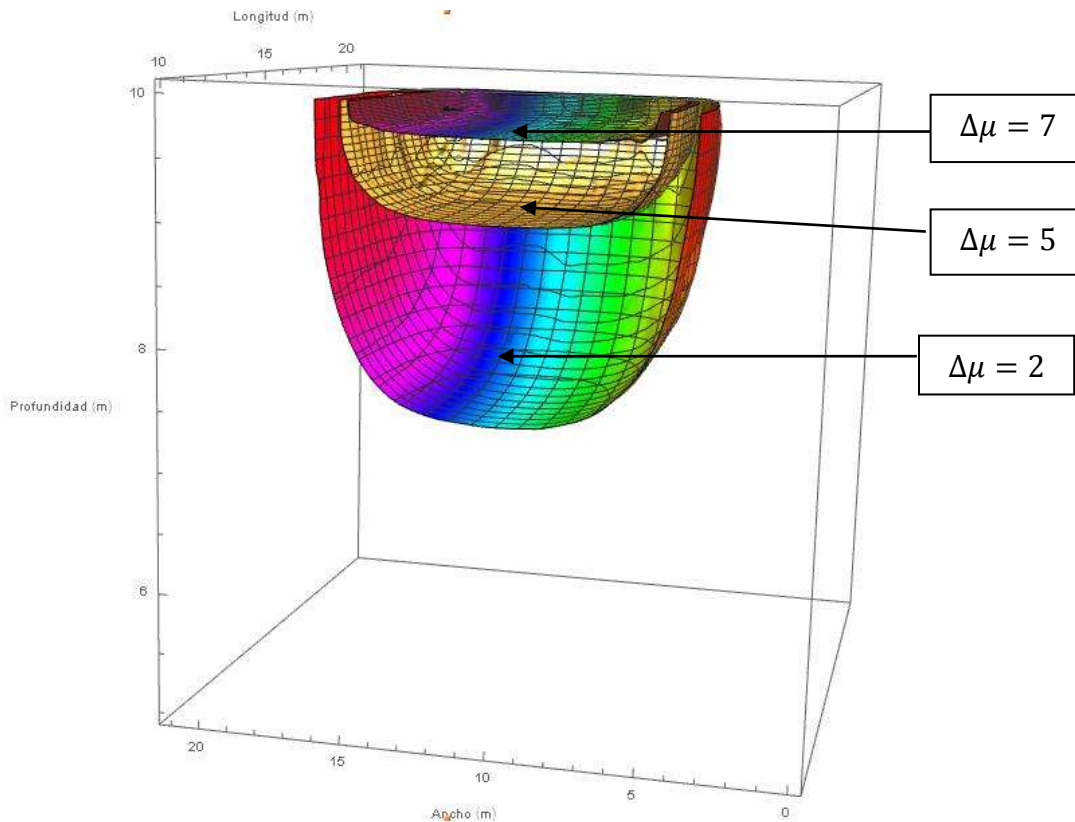
$\Delta\mu = 2$: Valor propuesto para la presión de poro de agua para la Figura 1.

$\Delta\mu = 5$: Valor propuesto para la presión de poro de agua para la Figura 20.

$\Delta\mu = 7$: Valor propuesto para la presión de poro de agua para la Figura 30.



Gráfica 10.24. Representación de la disipación del exceso de presión de poro de agua en 3D para un estrato arcilloso completamente saturado para un $t = 0.5$ de mes y $\Delta\mu = 2$, $\Delta\mu = 5$ y $\Delta\mu = 7$.



Gráfica 10.25. Representación de la disipación del exceso de presión de poro de agua en 3D para un estrato arcilloso completamente saturado para un $t = 0.5$ de mes y $\Delta\mu = 2$, $\Delta\mu = 5$ y $\Delta\mu = 7$.

En resumen a mayor exceso de presión de poro de agua, esta actúa más en la superficie del elemento del suelo arcilloso totalmente saturado, aclarando que $\Delta\mu = 20$, es la presión de poro de agua dada para solucionar la ecuación diferencial correspondiente a este caso.

❖ 10.3 MODELACIÓN EN MATHEMATICA PARA EL CASO NÚMERO 2.

$$N * \nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (10.31)$$

Dónde:

$$N = \sqrt{\frac{\pi}{3 * c_v * t}}$$

N: Es la constante deducida a partir de la solución exacta de la ecuación diferencial parcial (9.41) en 3D.

◆ Para un tiempo igual a 1 mes:

Datos:

$$e_{\text{prom}} = 0.875.$$

$$a_v = 0.005 \text{ (m}^2\text{/ton)}.$$

$$m_v = 2.6666 \times 10^{-3} \text{ (m}^2\text{/ton)}.$$

$$E = 375.0094 \text{ (ton/m}^2\text{)}.$$

$$C_v = 9.720243 \text{ (m}^2\text{/mes)}.$$

$\Delta\mu = 20$: Valor propuesto para la presión de poro de agua.

$$N_1 = 123.089 \text{ (Para } t = 1 \text{ mes)}.$$

Código en Mathematica:

```
sol2 = NDSolveValue [ { N1 * ∇2{x,y,z} u[t, x, y, z] == D[u[t, x, y, z], t] ,
  DirichletCondition [ u[t, x, y, z] == 20, 5 ≤ x ≤ 15 && 5 ≤ y ≤ 15 && z == 10 ] ,
  u[0, x, y, z] == 0 } , u, {t, 0, 1} , {x, y, z} ∈
  Cuboid [{0, 0, 0}, {21, 21, 10}] ]

Figural = ContourPlot3D [ sol[1, x, y, z] == 2, {x, 0, 21}, {y, 0, 21}, {z, 0, 10} ,
  AxesLabel → {"Longitud (m)", "Ancho (m)", "Profundidad (m)"},
  ColorFunction → Function [{x, y, z}, Hue[w]] ]
```

Descripción del código en Mathematica:

El código anterior representa la solución numérica de la ecuación diferencial **(10.31)**, La cual representa el fenómeno de consolidación en un suelo arcilloso totalmente saturado en 3 dimensiones, cuando es sometido a una determinada carga externa. Para lograr dicha solución numérica de la ecuación diferencial antes mencionada es necesario plantear las condiciones de Dirichlet para representar la región en donde se graficará la solución de dicha ecuación diferencial anteriormente mencionada.

Dónde:

X: Representa la longitud en metros de la región en 3 dimensiones.

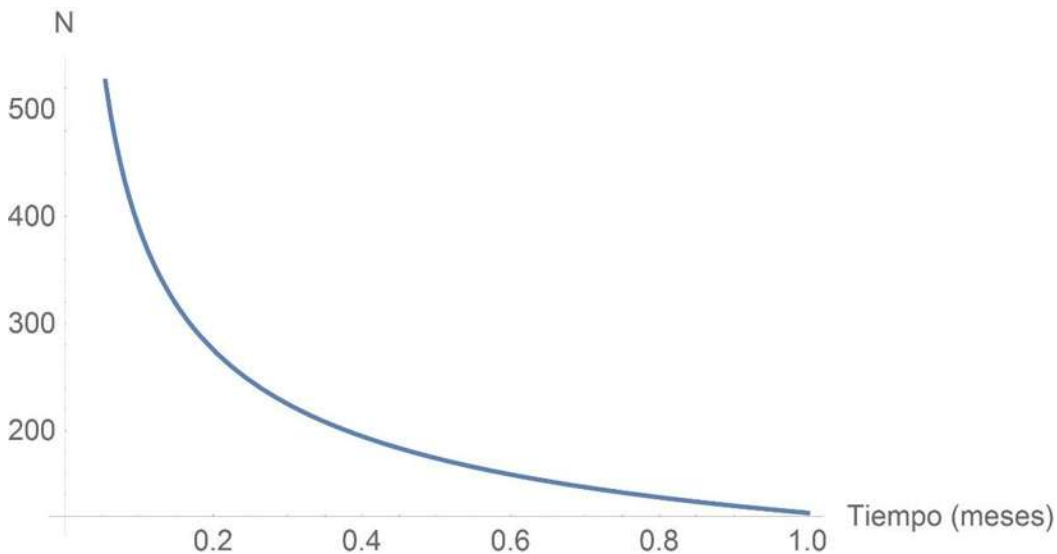
Y: Representa el ancho en metros de la región en 3 dimensiones.

Z: Representa la profundidad de la región en 3 dimensiones.

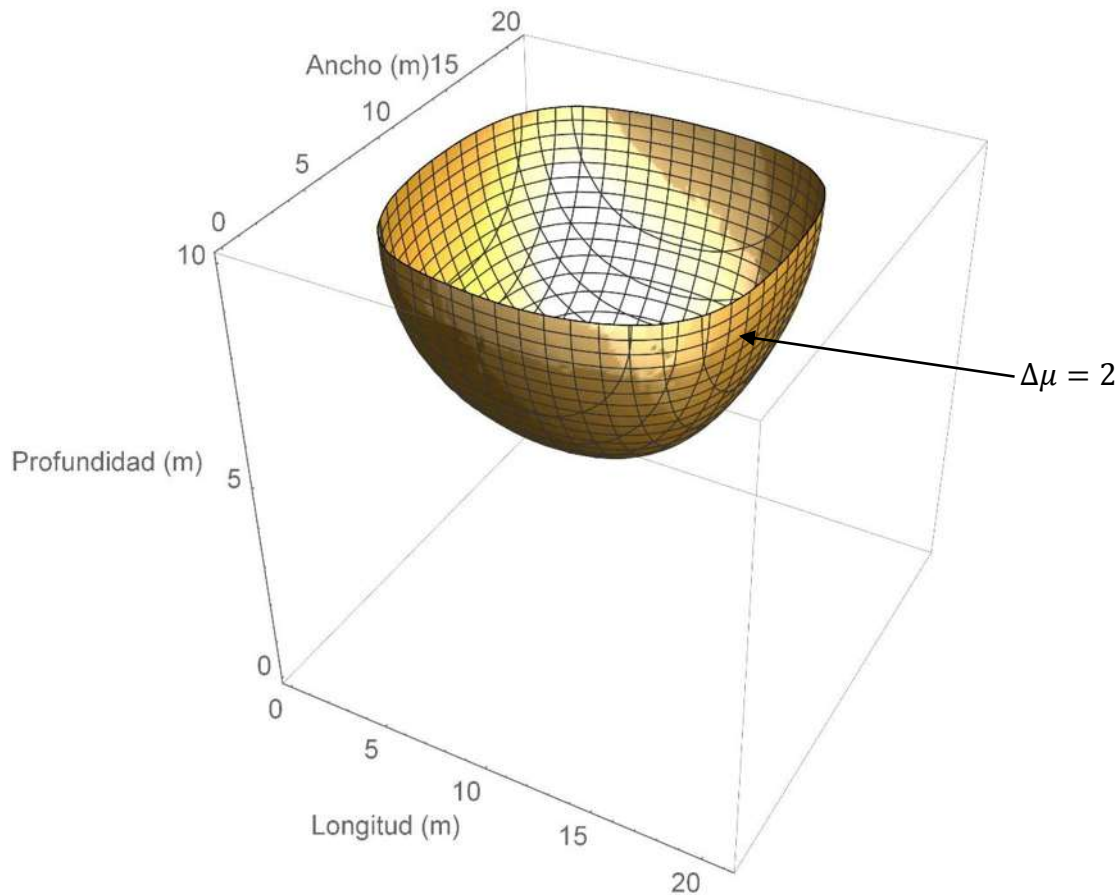
t: Representa el tiempo en meses.

$\Delta\mu = 20$: Valor propuesto para la presión de poro de agua.

u : Representa el exceso de presión de poro de agua.



Gráfica 10.31. Comportamiento de la constante “N” en función del tiempo (1 mes).



Gráfica 10.32. . Representación homogénea del exceso de presión de poro de agua en 3D para un estrato arcilloso completamente saturado para un $t = 1$ mes y $\Delta\mu = 20$.

En la **Gráfica 10.32**, representa las familias de curvas ortogonales (redes de flujo en 3 dimensiones), mejor conocidas como: líneas de flujo y líneas equipotenciales, en donde una línea de flujo se caracteriza por llevar una molécula de agua de un lado con mayor energía a otro lado con menor energía en un estrato de suelo arcilloso completamente saturado en 3 dimensiones, la línea equipotencial se caracteriza por tener la misma carga potencial en todos sus puntos. En este caso se observa que no actúan en toda la profundidad del estrato arcilloso, se realizó la modelación solo para 1 mes debido a la complejidad de la ecuación diferencial parcial que describe la representación homogénea del exceso de presión de poro de agua en 3 dimensiones para un suelo totalmente saturado. Además del cálculo de las constante “N”, la cual afecta a toda la ecuación diferencial parcial.

En este caso solo se modelara para una presión de poro de agua igual a 20, ya que debido a que la constante “N” es muy elevada, no se tiene un programa capaz de modelar la ecuación diferencial **(10.31)** para una presión de poro de agua mayor.

❖ 10.4 MODELACIÓN EN MATHEMATICA PARA EL CASO NÚMERO 3.

$$c_{hx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{hy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (10.41)$$

Dónde:

$$c_{hx} = \frac{k_x}{\gamma_w m_{hx}}; c_{hy} = \frac{k_y}{\gamma_w m_{hy}}; \text{ Son los coeficientes horizontales de consolidación en las direcciones "x" y "y" respectivamente.}$$

$$c_v = \frac{k_z}{\gamma_w m_v},$$

c_v : Representa el coeficiente de consolidación vertical.

◆ Para un tiempo igual a 1 mes:

Datos:

$$mv = 2.6666 \times 10^{-3} \text{ (m}^2\text{/ton)}.$$

$$E = 375.0094 \text{ (ton/m}^2\text{)}.$$

$$Cv = 9.720243 \text{ (m}^2\text{/mes)}.$$

$$Chx = Chy = 2 \cdot Cv = 19.440486 \text{ (m}^2\text{/mes)}.$$

$\Delta\mu = 2$: Valor propuesto para la presión de poro de agua.

u : Representa el exceso de presión de poro de agua.

Código en Mathematica:

```
sol3 =
NDSolveValue [
{19.440486 *  $\partial_{x,x} u[t, x, y, z]$  + 19.440486 *  $\partial_{y,y} u[t, x, y, z]$  + 9.720243 *  $\partial_{z,z} u[t, x, y, z]$  == D[u[t, x, y, z], t],
DirichletCondition [u[t, x, y, z] == 20, 5 ≤ x ≤ 15 && 5 ≤ y ≤ 15 && z == 10],
u[0, x, y, z] == 0}, u, {t, 0, 1}, {x, y, z} ∈
Cuboid [{0, 0, 0}, {21, 21, 10}]]

Figura1 = ContourPlot3D [sol3 [1, x, y, z] == 2, {x, 0, 21}, {y, 0, 21}, {z, 0, 10},
AxesLabel → {"Longitud (m)", "Ancho (m)", "Profundidad (m)"},
ColorFunction → Function [{x, y, z}, Hue[w]]]
```

Descripción del código en Mathematica:

El código anterior representa la solución numérica de la ecuación diferencial **(10.41)**, La cual representa el fenómeno de consolidación en un suelo arcilloso totalmente saturado en 3 dimensiones, cuando es sometido a una determinada carga externa. Para lograr dicha solución numérica de la ecuación diferencial antes mencionada es necesario plantear las condiciones de Dirichlet para representar la región en donde se graficará la solución de dicha ecuación diferencial anteriormente mencionada.

Dónde:

u : Representa el exceso de presión de poro de agua.

$\Delta\mu = 20$: Valor propuesto para la presión de poro de agua en cualquier tiempo y en todas las direcciones.

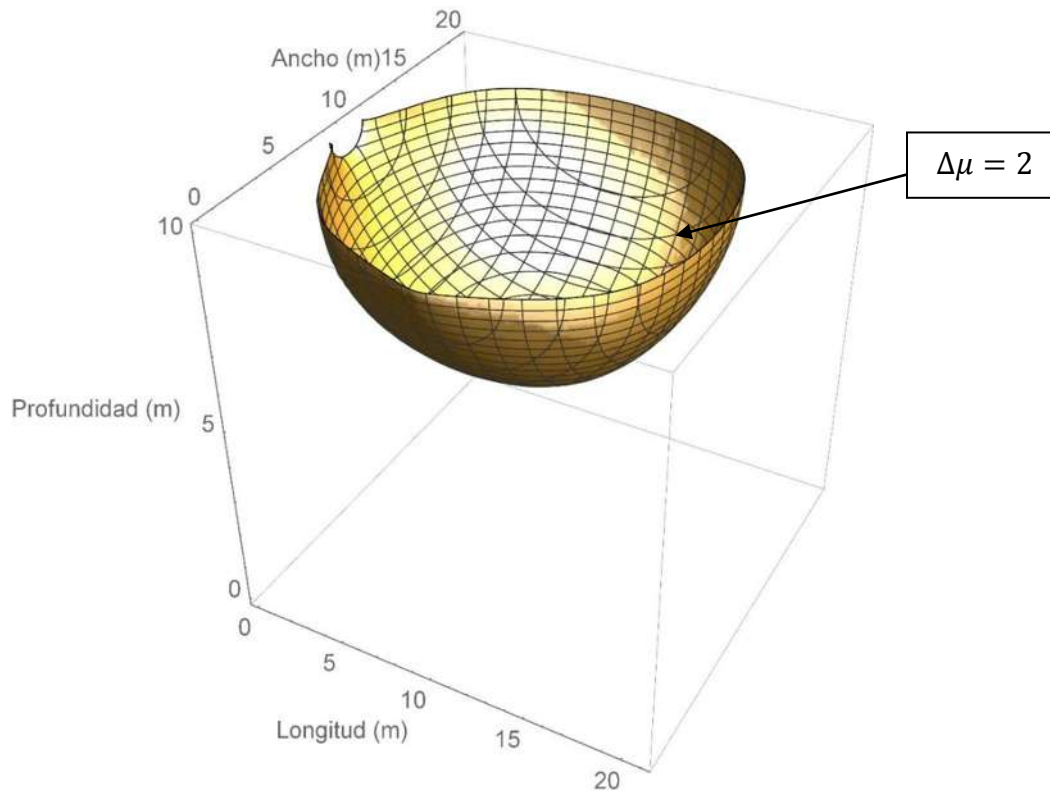
X: Representa la longitud en metros de la región en 3 dimensiones.

Y: Representa el ancho en metros de la región en 3 dimensiones.

Z: Representa la profundidad de la región en 3 dimensiones.

t: Representa el tiempo en meses.

$\Delta\mu = 20$: Valor propuesto para la presión de poro de agua para la Figura 1.



Gráfica 10.41. Representación homogénea del exceso de presión de poro de agua en 3D para un estrato arcilloso completamente saturado para un $t = 1$ mes y $\Delta\mu = 20$.

En la **Gráfica 10.41**, representa las familias de curvas ortogonales (redes de flujo en 3 dimensiones), mejor conocidas como: líneas de flujo y líneas equipotenciales, en donde una línea de flujo se caracteriza por llevar una molécula de agua de un lado con mayor energía a otro lado con menor energía en un estrato de suelo arcilloso completamente saturado en 3 dimensiones, la línea equipotencial se caracteriza por tener la misma carga potencial en todos sus puntos. En este caso se observa que no actúan en toda la profundidad del estrato arcilloso, se realizó la modelación solo para 1 mes debido a la complejidad de la ecuación diferencial parcial que describe la representación homogénea del exceso de presión de poro de agua en 3 dimensiones para un suelo totalmente saturado. Además se consideró que los coeficientes de consolidación horizontales son mayores que el coeficiente de consolidación vertical ($Chx = Chy = 2 \cdot Cv = 19.440486 \text{ (m}^2/\text{mes)}$).

◆ Para un tiempo igual a 1 mes con diferentes presiones de poro de agua:

Datos:

$$mv = 2.6666 \times 10^{-3} \text{ (m}^2\text{/ton)}.$$

$$E = 375.0094 \text{ (ton/m}^2\text{)}.$$

$$Cv = 9.720243 \text{ (m}^2\text{/mes)}.$$

$$Chx = Chy = 2 \cdot Cv = 19.440486 \text{ (m}^2\text{/mes)}.$$

u : Representa el exceso de presión de poro de agua.

$\Delta\mu = 20$: Valor propuesto para la presión de poro de agua en cualquier tiempo y en todas las direcciones.

Código en Mathematica:

```
sol3 =
NDSolveValue [
  {19.440486 *  $\partial_{x,x}u[t, x, y, z]$  + 19.440486 *  $\partial_{y,y}u[t, x, y, z]$  + 9.720243 *  $\partial_{z,z}u[t, x, y, z]$  ==
    D[u[t, x, y, z], t],
  DirichletCondition [u[t, x, y, z] == 20, 5 ≤ x ≤ 15 && 5 ≤ y ≤ 15 && z == 10],
  u[0, x, y, z] == 0}, u, {t, 0, 1}, {x, y, z} ∈
  Cuboid [{0, 0, 0}, {21, 21, 10}]]

Figura15 = ContourPlot3D [sol3 [1, x, y, z] == 2, {x, 10, 21}, {y, 0, 21}, {z, 5, 10},
  AxesLabel → {"Longitud (m)", "Ancho (m)", "Profundidad (m)"},
  ColorFunction → Function [{x, y, z}, Hue[w]]]

Figura25 = ContourPlot3D [sol3 [1, x, y, z] == 6, {x, 10, 21}, {y, 0, 21}, {z, 5, 10},
  AxesLabel → {"Longitud (m)", "Ancho (m)", "Profundidad (m)"},
  ColorFunction → Function [{x, y, z}, Hue[y]]]

Figura35 = ContourPlot3D [sol3 [1, x, y, z] == 10, {x, 10, 21}, {y, 0, 21}, {z, 5, 10},
  AxesLabel → {"Longitud (m)", "Ancho (m)", "Profundidad (m)"},
  ColorFunction → Function [{x, y, z}, Hue[h]]]

Figura45 = Show [Figura15, Figura25, Figura35]
```

Descripción del código en Mathematica:

El código anterior representa la solución numérica de la ecuación diferencial **(10.41)**, La cual representa el fenómeno de consolidación en un suelo arcilloso totalmente saturado en 3 dimensiones, cuando es sometido a una determinada carga externa, el cual se realizara con diferentes presiones de poro de agua para observar con claridad las diferencias en las redes de flujo. Para lograr dicha solución numérica de la ecuación diferencial antes mencionada es necesario plantear las condiciones de Dirichlet para representar la región en donde se graficará la solución y además se comparara con diferentes presiones de poro de agua dadas para de tal manera representar la disipación de presión de poro de agua conforme transcurre un tiempo dado, de dicha ecuación diferencial anteriormente mencionada.

Dónde:

X: Representa la longitud en metros de la región en 3 dimensiones.

Y: Representa el ancho en metros de la región en 3 dimensiones.

Z: Representa la profundidad de la región en 3 dimensiones.

t: Representa el tiempo en meses.

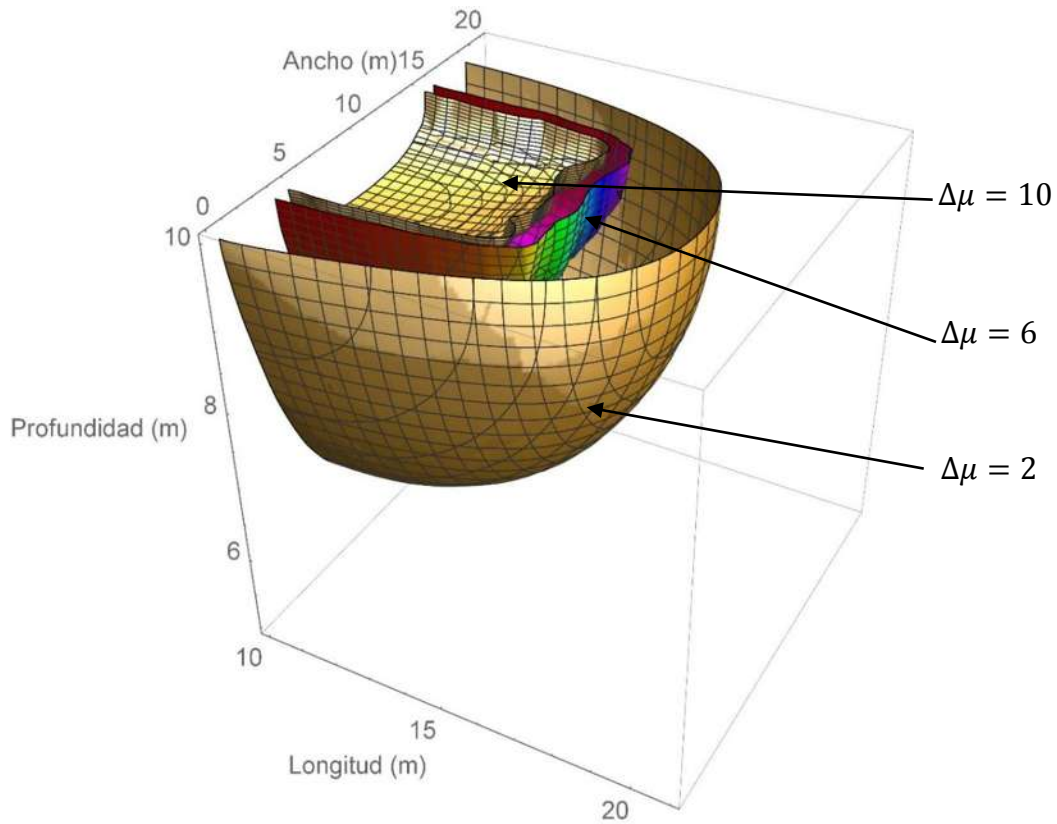
u : Representa el exceso de presión de poro de agua.

$\Delta\mu = 20$: Valor propuesto para la presión de poro de agua en cualquier tiempo y en todas las direcciones.

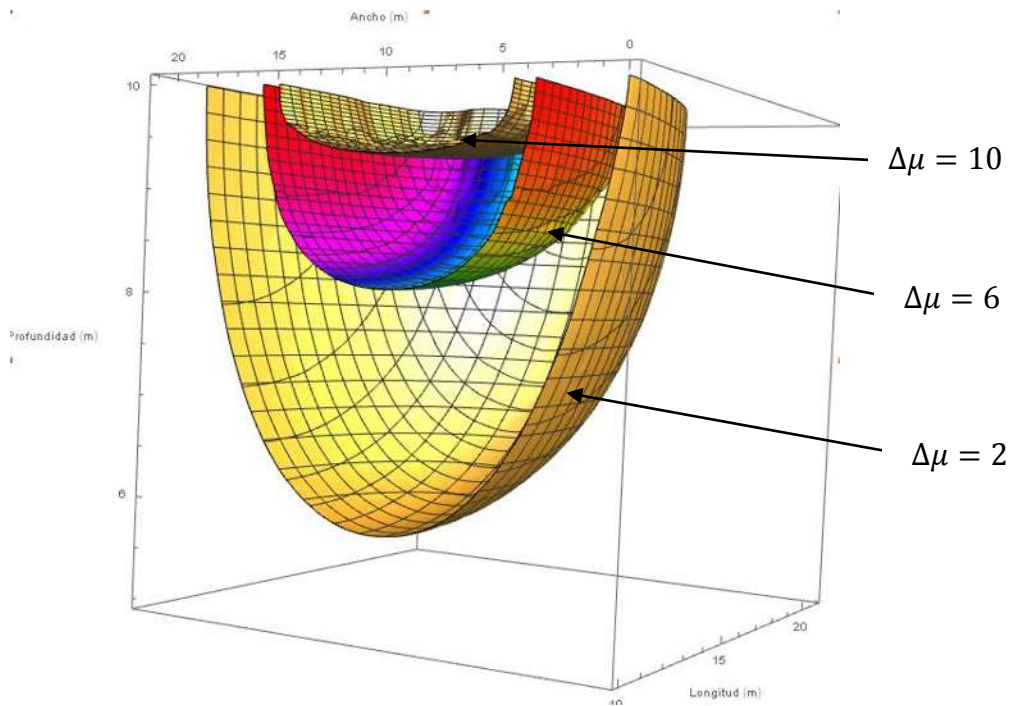
$\Delta\mu = 2$: Valor propuesto para la presión de poro de agua para la Figura 15.

$\Delta\mu = 6$: Valor propuesto para la presión de poro de agua para la Figura 25.

$\Delta\mu = 10$: Valor propuesto para la presión de poro de agua para la Figura 35.



Gráfica 10.42. Representación la disipación del exceso de presión de poro de agua en 3D para un estrato arcilloso completamente saturado para un $t = 1$ mes y $\Delta\mu = 2$, $\Delta\mu = 6$ y $\Delta\mu = 10$.



Gráfica 10.43. Representación la disipación del exceso de presión de poro de agua en 3D para un estrato arcilloso completamente saturado para un $t = 1$ mes y $\Delta\mu = 2$, $\Delta\mu = 6$ y $\Delta\mu = 10$.

◆ Para un tiempo igual a 0.5 de mes con diferentes presiones de poro de agua:

Datos:

$$mv = 2.6666 \times 10^{-3} \text{ (m}^2\text{/ton)}.$$

$$E = 375.0094 \text{ (ton/m}^2\text{)}.$$

$$Cv = 9.720243 \text{ (m}^2\text{/mes)}.$$

$$Chx = Chy = 2 \cdot Cv = 19.440486 \text{ (m}^2\text{/mes)}.$$

u : Representa el exceso de presión de poro de agua.

$\Delta\mu = 20$: Valor propuesto para la presión de poro de agua en cualquier tiempo y en todas las direcciones.

Código en Mathematica:

```
sol3 =
NDSolveValue [
  {19.440486 *  $\partial_{x,x}u[t, x, y, z]$  + 19.440486 *  $\partial_{y,y}u[t, x, y, z]$  + 9.720243 *  $\partial_{z,z}u[t, x, y, z]$  ==
    D[u[t, x, y, z], t],
  DirichletCondition [u[t, x, y, z] == 20, 5 ≤ x ≤ 15 && 5 ≤ y ≤ 15 && z == 10],
  u[0, x, y, z] == 0}, u, {t, 0, 1}, {x, y, z} ∈
  Cuboid [{0, 0, 0}, {21, 21, 10}]]
```

```
Figura15 = ContourPlot3D [sol3 [0.5, x, y, z] == 2, {x, 10, 21}, {y, 0, 21},
  {z, 5, 10}, AxesLabel → {"Longitud (m)", "Ancho (m)", "Profundidad (m)"},
  ColorFunction → Function [{x, y, z}, Hue[w]]]
```

```
Figura25 = ContourPlot3D [sol3 [0.5, x, y, z] == 5, {x, 10, 21}, {y, 0, 21},
  {z, 5, 10}, AxesLabel → {"Longitud (m)", "Ancho (m)", "Profundidad (m)"},
  ColorFunction → Function [{x, y, z}, Hue[y]]]
```

```
Figura35 = ContourPlot3D [sol3 [0.5, x, y, z] == 7, {x, 10, 21}, {y, 0, 21},
  {z, 5, 10}, AxesLabel → {"Longitud (m)", "Ancho (m)", "Profundidad (m)"},
  ColorFunction → Function [{x, y, z}, Hue[h]]]
```

```
Figura45 = Show [Figura15, Figura25, Figura35]
```

Descripción del código en Mathematica:

El código anterior representa la solución numérica de la ecuación diferencial **(10.41)**, La cual representa el fenómeno de consolidación en un suelo arcilloso totalmente saturado en 3 dimensiones, cuando es sometido a una determinada carga externa, el cual se realizara con diferentes presiones de poro de agua para observar con claridad las diferencias en las redes de flujo. Para lograr dicha solución numérica de la ecuación diferencial antes mencionada es necesario plantear las condiciones de Dirichlet para representar la región en donde se graficará la solución de dicha ecuación diferencial anteriormente mencionada.

Dónde:

X: Representa la longitud en metros de la región en 3 dimensiones.

Y: Representa el ancho en metros de la región en 3 dimensiones.

Z: Representa la profundidad de la región en 3 dimensiones.

t: Representa el tiempo en meses.

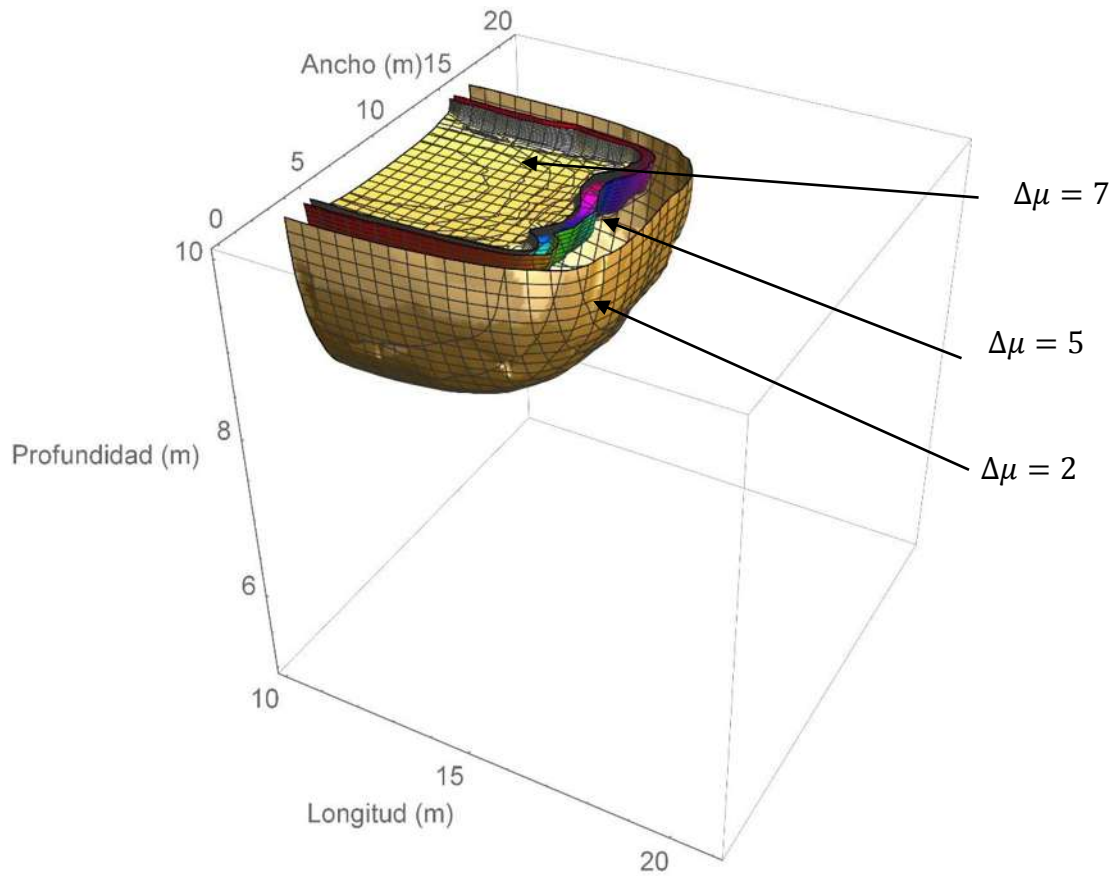
u : Representa el exceso de presión de poro de agua.

$\Delta\mu = 20$: Valor propuesto para la presión de poro de agua en cualquier tiempo y en todas las direcciones.

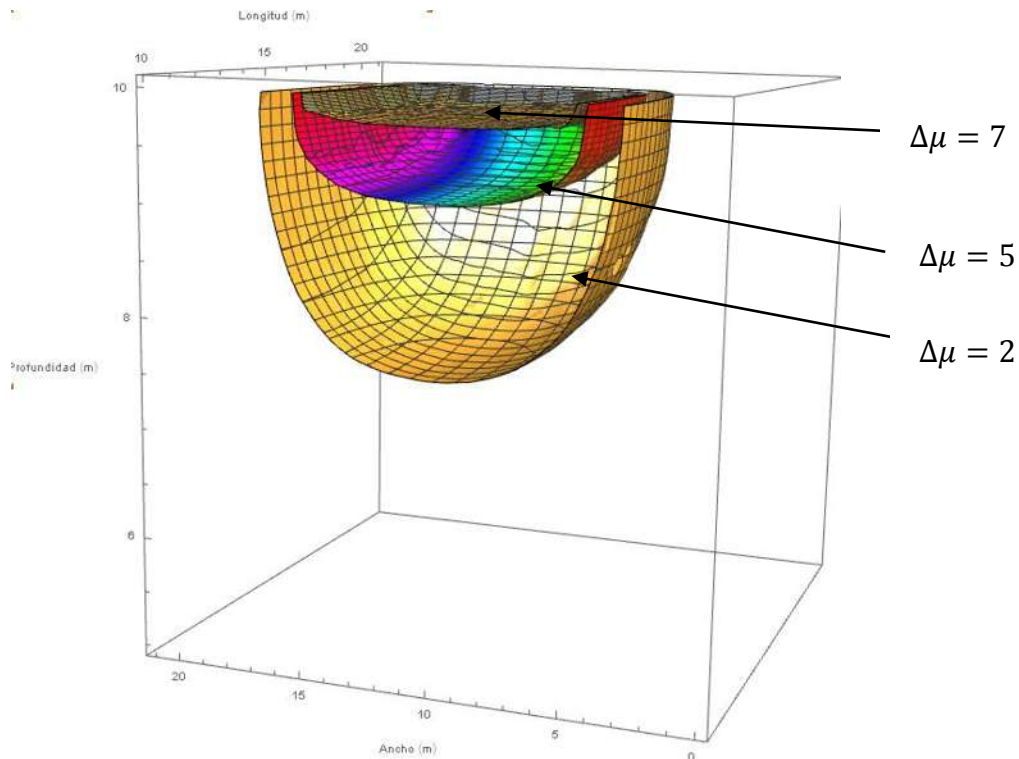
$\Delta\mu = 2$: Valor propuesto para la presión de poro de agua para la Figura 15.

$\Delta\mu = 5$: Valor propuesto para la presión de poro de agua para la Figura 25.

$\Delta\mu = 7$: Valor propuesto para la presión de poro de agua para la Figura 35.



Gráfica 10.44. Representación la disipación del exceso de presión de poro de agua en 3D para un estrato arcilloso completamente saturado para un $t = 0.5$ de mes y $\Delta\mu = 2$, $\Delta\mu = 5$ y $\Delta\mu = 7$.



Gráfica 10.45. Representación la disipación del exceso de presión de poro de agua en 3D para un estrato arcilloso completamente saturado para un $t = 0.5$ de mes y $\Delta\mu = 2$, $\Delta\mu = 5$ y $\Delta\mu = 7$.

En resumen a mayor exceso de presión de poro de agua, esta actúa más en la superficie del elemento del suelo arcilloso totalmente saturado, aclarando que $\Delta\mu = 20$ es la presión de poro de agua dada para solucionar la ecuación diferencial correspondiente a este caso.

CAPITULO 11: INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE MAURICE ANTHONY BIOT (TRIDIMENCIONAL).

❖ 11.1 INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE MAURICE ANTHONY BIOT EN 3D.

BIOT, M. A. (1941). Muchos de los diversos problemas de la geomecánica como pueden ser: la consolidación de suelos, los daños causados por la expansión y contracción de los suelos, etc. se solucionan considerando un acoplamiento de la fase sólida y de la fase líquida en donde el fluido fluye a través de los poros del elemento del suelo. Como pueden ser los suelos arcillosos que son de enorme importancia, ya que la arcilla al estar en contacto con agua desarrolla plasticidad que es una de las propiedades que las definen, a medida que la arcilla absorbe agua del exterior, esta se ubica en las caras de los cristales, hidratando los cationes lo cual implica que estos varíen su diámetro y por consecuencia la distancia que hay entre las partículas cambiara. Por lo tanto la cantidad de moléculas de agua que ingresaran estará en función de la cantidad de cargas eléctricas negativas disponibles que tenga la partícula de arcilla.

Pero desafortunadamente existen problemas donde el sistema bifásico (suelo-agua) es insuficiente para describir el fenómeno de la consolidación de un suelo totalmente saturado, debido a las características diversas que poseen los fluidos, los cuales fluyen a través de los poros del suelo. La teoría de la consolidación de Terzagui si bien ha probado ser de enorme utilidad en la práctica, no tiene en cuenta todos los aspectos del comportamiento de las masas de suelo totalmente saturados cuando estos están sometidos a cargas externas. Debido a las simplificaciones que tiene para poder resolver la ecuación diferencial. Entonces aparece en escena el Físico Belga Maurice Anthony Biot, a lo largo de su vida trabajo en diversos temas relacionados con: el electromagnetismo, la aeronáutica, termodinámica y lo que nos interesa principalmente. Los problemas de la mecánica de un elemento de suelo poroso.

Biot se interesó en la mecánica de los suelos porosos en las décadas de los años 40 publicando un artículo fundamental para la consolidación de suelos, retomando el tema en la década de los años 50, generalizando para cualquier medio poroso con fluido viscoso en sus poros. Biot plantea en el artículo que publicó en el año 1955, de manera teórica, la compatibilidad entre esfuerzos totales y deformaciones que existen durante el proceso de consolidación de un suelo poroso, dando como resultado un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas.

Los sistemas acoplados son aquellos los cuales son aplicables a dominios múltiples y a varias variables independientes las cuales describen varios fenómenos físicos diferentes y por lo tanto se vuelve su solución muy compleja y en muchos casos solo se pueden resolver por aproximaciones numéricas, ya que ningún dominio puede ser resuelto separado de otro y no puede ser eliminado de manera explícita ningún conjunto de variables independientes.

Los sistemas acoplados pueden darse de diversas maneras como pueden ser:

- 1.-por superposición total o parcial de dominios
- 2.-atraves de interfaces

En nuestro caso es un sistema acoplado por superposición total o parcial de dominios. Lo cual hace muy complejo el sistema de ecuaciones diferenciales y por lo tanto es muy difícil la obtención de las soluciones del sistema, para resolverlas es necesaria y muy importante la aplicación del Método de los Elementos Finitos.

❖ 11.2 CAMPOS DE ESFUERZOS PRESENTES EN LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE BIOT EN 3D.

BIOT, M. A. (1941). El asentamiento total del terreno será considerado como la suma de los tres asentamientos diferentes, los cuales son:

$$U_{TOTAL} = U_{DEL\ EDIFICIO} + U_{POR\ BOMBEO} + U_{NATURAL} \quad (11.21)$$

Dónde:

U_{TOTAL} : representa la consolidación total del terreno

$U_{DEL\ EDIFICIO}$: representa la consolidación del terreno debido a la carga del edificio

$U_{POR\ BOMBEO}$: representa la consolidación del terreno debido al bombeo de agua

$U_{NATURAL}$: representa la consolidación del terreno de manera natural

Hipótesis para la teoría de consolidación de Biot:

- ◆ El material es isótropo.
- ◆ Material elástico lineal.
- ◆ Puede contener pequeñas deformaciones.
- ◆ El agua es incompresible.
- ◆ El agua fluye a través de los poros de la estructura intergranulares del suelo de acuerdo a la ley de Darcy.
- ◆ El agua puede contener pequeñas burbujas de aire, lo cual implica que la variación del exceso de presión de poro pueda tener pequeñas deformaciones en la fase fluida.

El hundimiento natural es el desplazamiento debido a la sedimentación geológica de la arcilla, los pesos de cada una de las partículas del suelo causan un desplazamiento en el elemento de suelo, de manera independiente a cualquier acción como cargar o extraer agua por bombeo. Por consecuencia el modelo de estos fenómenos es muy complejo y difícil de solucionar tomando en cuenta todas las consideraciones para poder describir el fenómeno de la consolidación de manera más realista.

La teoría de consolidación de biot puede considerarse como la generalización de la teoría de Terzagui, el cual es el método principal de cálculo de asentamientos en suelos saturados, de cualquier forma es muy difícil obtener la solución analítica y además se presentan dificultades para obtener las soluciones numéricas, ya que es difícil establecer o escoger el modelo que describa el fenómeno de consolidación de un suelo en el cual se pueda reflejar con exactitud la elasticidad, la plasticidad y viscosidad del suelo. Por otro lado es muy difícil realizar con exactitud las medidas de los parámetros del suelo que lo caracterizan.

Considerando la posibilidad de un elemento cubico de suelo consolidándose, siendo sus lados paralelos con los ejes de coordenadas, en donde este elemento cubico de suelo es llevado a ser grande lo suficiente en comparación con el tamaño de los poros de manera que puede ser tratado de manera homogénea y al mismo tiempo lo suficiente pequeño, en comparación con la escala de los fenómenos macroscópicos que estamos interesados en estudiar, por lo que puede ser considerado de manera infinitesimal en el tratamiento matemático. Considere la posibilidad de un pequeño elemento cúbico de la consolidación del suelo, siendo sus lados paralelos con los ejes de coordenadas. Este elemento es llevado a ser grande lo suficiente en comparación con el tamaño de los poros de manera que puede ser tratada como homogénea, y al mismo tiempo lo suficientemente pequeño, en comparación con la escala de los fenómenos macroscópicos en los que estamos interesado, por lo que puede ser considerado como infinitesimal en el tratamiento matemático.

La condición media de esfuerzos en el suelo es entonces representado por las fuerzas distribuidas de manera uniforme en las caras de este elemento cúbico de suelo. Los correspondientes componentes de esfuerzo se denotan por las siguientes expresiones matemáticas:

$$\sigma_x \quad \tau_z \quad \tau_y$$

$$\tau_z \quad \sigma_y \quad \tau_x$$

$$\tau_y \quad \tau_x \quad \sigma_z \quad (11.22)$$

Las expresiones anteriores deben satisfacer un equilibrio bien conocido por las condiciones del campo de esfuerzos.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (11.23)$$

Físicamente se puede pensar que los esfuerzos están compuestas por dos partes las cuales son:

- ◆ Una parte es causada por la presión hidrostática que llena los poros presentes en el suelo de agua.
- ◆ La otra parte es causada por el esfuerzo medio de Skeleton.

En este sentido de los esfuerzos en el suelo se dice que se realizan en parte por el agua y en parte por el componente sólido o también conocida como estructura intergranular. Denotando por las variables u , v y w , los cuales representan los componentes del desplazamiento del suelo considerando los sondeos muy pequeños, por lo tanto los valores de los componentes de la deformación son:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$e_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$e_z = \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\gamma_x = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\gamma_y = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_z = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (11.24)$$

Describiendo de manera completa el fenómeno macroscópico de consolidación se debe tener en cuenta una variable adicional, dada la cantidad de agua presente en los poros del suelo, por lo tanto se denota como θ , el incremento en el volumen de agua por unidad de volumen de suelo y suele llamarse variación en el contenido de agua. El incremento de presión del agua se denota u .

Consideramos un elemento cubico de suelo, en donde el exceso de presión de poro de agua es considerado uniforme en todas direcciones, por condición el tamaño del elemento de suelo debe ser lo suficientemente pequeño o si no es el caso, los cambios deben ocurrir con suficiente lentitud para que las diferencias de presión sean insignificantes, los cambios en el suelo que se produzcan por procesos reversibles deben estar en función de los esfuerzos y presión de agua, es decir en función de las 7 variables siguientes:

$$e_x \quad e_y \quad e_z \quad \gamma_x \quad \gamma_y \quad \gamma_z \quad \theta \quad (11.25)$$

Las cuales deben ser funciones definidas de las variables:

$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z \quad \sigma \quad (11.26)$$

Si se supone que las excavaciones y las variaciones en el contenido de agua sean en pequeñas cantidades, puede suponerse como una aproximación lineal a la relación entre estos dos conjuntos de variables, consideramos estas relaciones funcionales para el caso particular en donde el incremento de presión de poro de agua es nulo, es decir: $\mu = 0$. Por lo tanto las seis componentes de la cepa son entonces funciones solo de las seis componentes de tensión.

$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z \quad (11.27)$$

Suponiendo que el suelo es isotrópico, las expresiones anteriores en función de la ley de Hooke generalizada se obtienen las siguientes ecuaciones para un cuerpo elástico isótropo:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_x)$$

$$\gamma_x = \frac{\tau_x}{G}$$

$$\gamma_y = \frac{\tau_y}{G}$$

$$\gamma_z = \frac{\tau_z}{G} \quad (11.28)$$

Dónde:

E: Es el módulo de Young o modulo elástico.

G : Es el módulo de cizallamiento.

ν : Es el coeficiente de poisson para la estructura intergranular del suelo.

Lo cual involucra que solo se tenga dos distintas constantes debido a la siguiente relación:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (11.29)$$

El módulo G generalmente se define como la tangente a la recta definida por lo puntos b-b', en la curva histerética, los ciclos de recarga y descarga son idealizados como un bucle de histéresis. Para suelos del tipo cohesivos, en donde se presentan por lo general deformaciones muy pequeñas en comparación a las dimensiones del elemento de suelo, la constante **G** se encuentra en función del índice de plasticidad, la historia de consolidación, es decir, la consolidación que ha sufrido respecto al tiempo, el cambio de relación de vacíos.

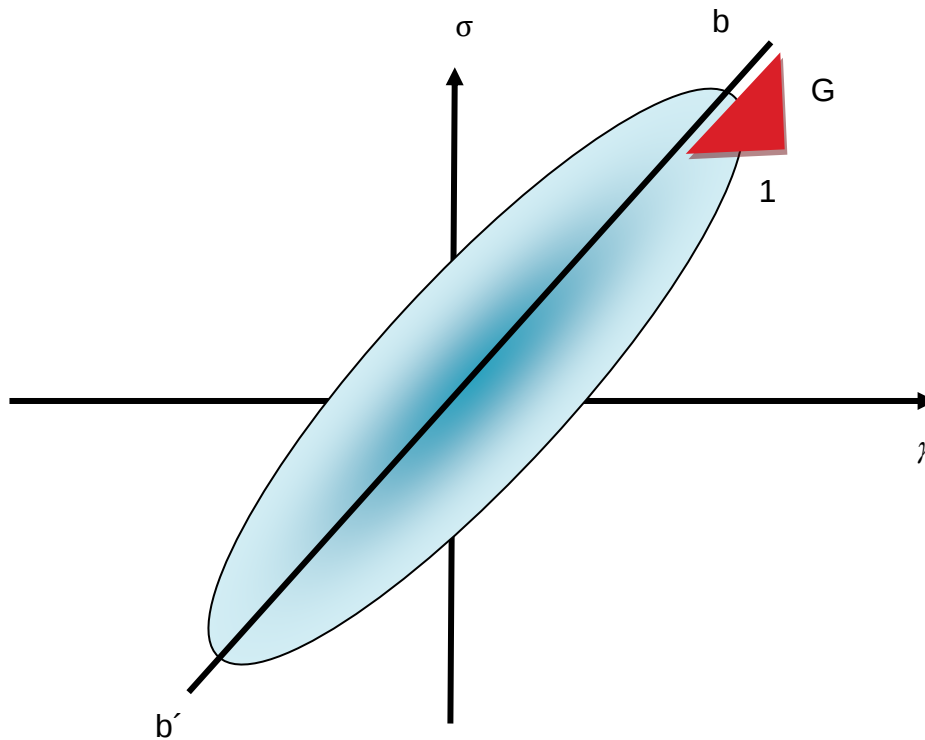


Figura 11.21. Representación gráfica de la constante **G** para una prueba cíclica.

Ahora supongamos que introducimos el efecto que tiene el exceso de presión de poro en la estructura intergranular del suelo, debido a que se asumió que el elemento de suelo es isotrópico no se producirá ningún cizallamiento, lo cual implica que su efecto debe ser el mismo en las tres direcciones en el elemento del suelo. Tomando en cuenta la influencia de las relaciones o expresiones matemáticas anteriores **(11.28)** Y **(11.29)**, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) + \frac{\sigma}{3H}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) + \frac{\sigma}{3H}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_x) + \frac{\sigma}{3H}$$

$$\gamma_x = \frac{\tau_x}{G}$$

$$\gamma_y = \frac{\tau_y}{G}$$

$$\gamma_z = \frac{\tau_z}{G} \quad (11.30)$$

En donde H es una constante física adicional, la expresiones matemáticas anteriores expresan las seis componentes de la deformación del suelo en función de los esfuerzos en el suelo y el exceso de presión de poro de agua que existe en los poros del suelo, ahora consideraremos la dependencia del incremento del contenido del agua θ en estas mismas variables.

La relación más general que existe es:

$$\theta = a_1\sigma_x + a_2\sigma_y + a_3\sigma_z + a_4\tau_x + a_5\tau_y + a_6\tau_z + a_7\sigma \quad (11.31)$$

Debido a la suposición existente en la cual se considera el elemento del suelo arcilloso como isótropo, los esfuerzos cortantes en las coordenadas x , y , z ($\tau_x \tau_y \tau_z$) respectivamente no pueden afectar el contenido de agua, lo cual implica que:

$$a_4 = a_5 = a_6 = 0 \quad (11.32)$$

Lo cual quiere decir que el efecto de las componentes de cizallamiento se desvanece es decir son nulas, además de que en las tres coordenadas x , y , z las propiedades deben de ser equivalentes debido a la suposición de un suelo isótropo, es decir:

$$a_1 = a_2 = a_3 \quad (11.33)$$

Por lo tanto la relación **(11.31)** se puede escribir de la siguiente manera:

$$\theta = \frac{1}{3H_1}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \frac{\sigma}{R} \quad (11.34)$$

En donde H_1 y R son dos constantes físicas, las expresiones matemáticas **(11.30)** y **(11.34)**, contienen cinco distintas constantes físicas, si suponemos la existencia de una energía potencial en el suelo, es decir: $H = H_1$, se demostrara que el número de constantes físicas se reducirá de 5 a 4. Estas suposiciones significan

que si se producen cambios a una velocidad infinitesimalmente lenta, el trabajo realizado para llevar el elemento de suelo a una condición inicial a su estado final del volumen de suelo arcilloso cepa y contenido de agua, es de manera independiente del camino por el cual se llega a alcanzar el estado final y por lo tanto es una función definida de las 6 componentes en la deformación del elemento de suelo y el contenido de agua presente en él. Esta suposición sigue naturalmente la reversibilidad introducida anteriormente, ya que la ausencia de la energía potencial en el elemento de suelo implicaría que una cantidad indefinida de energía potencial se puede extraer fuera del elemento de suelo por carga y descarga a lo largo de un ciclo cerrado. La energía potencial del elemento de suelo por unidad de volumen es:

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z + \sigma \theta) \quad (11.35)$$

Ahora con la prioridad de demostrar matemáticamente que $H = H_1$, consideramos las siguientes condiciones de esfuerzos, tal que:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \sigma_1 \\ \tau_x &= \tau_y = \tau_z = 0 \end{aligned} \quad (11.36)$$

Dado las condiciones **(11.36)**, la energía de potencial es:

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon + \sigma \theta) \quad (11.37)$$

Dónde:

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Por lo tanto las ecuaciones **(11.30)** y **(11.34)**, quedan de la siguiente forma:

$$\varepsilon = \frac{3(1-2\nu)\sigma_1}{E} + \frac{\sigma}{H} \quad (11.38)$$

$$\theta = \frac{\sigma_1}{H_1} + \frac{\sigma}{R} \quad (11.39)$$

En donde la cantidad ε representa un aumento de volumen en el elemento de suelo arcilloso completamente saturado por unidad de volumen inicial, por lo tanto podemos escribir las siguientes expresiones matemáticas:

$$\theta = \frac{1}{3H_1} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \frac{\sigma}{R}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) + \frac{\sigma}{3H}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) + \frac{\sigma}{3H}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_x) + \frac{\sigma}{3H}$$

$$\gamma_x = \frac{\tau_x}{G}$$

$$\gamma_y = \frac{\tau_y}{G}$$

$$\gamma_z = \frac{\tau_z}{G} \tag{11.40}$$

El sistema de ecuaciones **(11.40)** es fundamental ya que describen de manera completa y aproximada las propiedades que rigen el elemento de suelo para los esfuerzos y el contenido de agua para cumplir con las condiciones de equilibrio presentes en el elemento de suelo. Las cuales contienen cuatro constantes físicas distintas que son: G , H , R y ν .

CAPITULO 12: ECUACIONES GENERALES DE BIOT QUE GOBIERNAN EL FENÓMENO DE CONSOLIDACIÓN DE UN SUELO TOTALMENTE SATURADO EN 3D.

BIOT, M. A. (1941). Ahora procedemos a establecer las ecuaciones diferenciales para el fenómeno transitorio de la consolidación, es decir, aquellas ecuaciones que rigen la distribución de esfuerzos, el contenido de agua y la solución como una función del tiempo en un elemento de suelo el cual se encuentra sometido a cargas dadas.

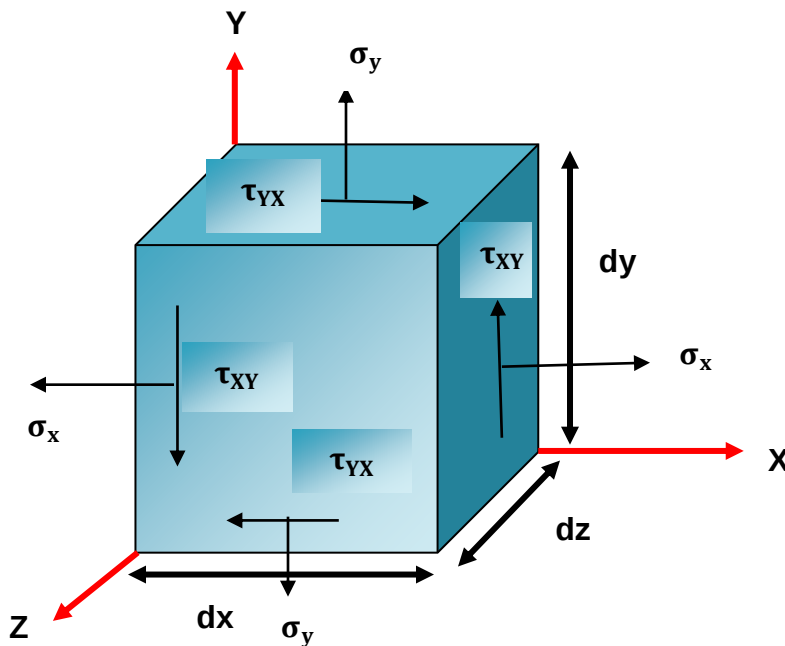


Figura 12.1. Elemento infinitesimal sometido a esfuerzos. (Egor P. Popov, “Mecánica de Sólidos”).

A partir de la **Figura 12.1** podemos escribir las siguientes expresiones matemáticas, para los campos de esfuerzos en las condiciones de equilibrio, se establecen las siguientes relaciones de equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

(12.1)

A partir de las ecuaciones (11.40), obtenemos las siguientes expresiones matemáticas:

$$\sigma_x = 2G \left[\varepsilon_x + \frac{v\varepsilon_x}{1-2v} \right] - \alpha \sigma_1$$

$$\sigma_y = 2G \left[\varepsilon_y + \frac{v\varepsilon_y}{1-2v} \right] - \alpha \sigma_1$$

$$\sigma_z = 2G \left[\varepsilon_z + \frac{v\varepsilon_z}{1-2v} \right] - \alpha \sigma_1$$

$$\tau_x = G\gamma_x$$

$$\tau_y = G\gamma_y$$

$$\tau_z = G\gamma_z$$

$$\alpha = \frac{2(1+v)}{3(1-2v)} \frac{G}{H} \quad (12.2)$$

Resolviendo encontramos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$G\nabla^2 \mu + \frac{G}{1-2v} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} - \frac{2(1+v)}{3(1-2v)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{G}{H} = 0$$

$$G\nabla^2 v + \frac{G}{1-2v} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} - \frac{2(1+v)}{3(1-2v)} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{G}{H} = 0$$

$$G\nabla^2 w + \frac{G}{1-2v} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} - \frac{2(1+v)}{3(1-2v)} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{G}{H} = 0 \quad (12.3)$$

Pero dado que:

$$\alpha = \frac{2(1+v)}{3(1-2v)} \frac{G}{H}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$G\nabla^2 \mu + \frac{G}{1-2v} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} - \alpha \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$$

$$G\nabla^2 v + \frac{G}{1-2v} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} - \alpha \frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0$$

$$G\nabla^2 w + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} - \alpha \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0 \quad (12.4)$$

Dónde:

∇ : Es un operador laplaciano o simplemente laplaciano, el cual es un operador diferencial elíptico de segundo orden, este operador se denomina de tal manera en honor a Pierre-Simón de Laplace que estudio soluciones de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en que aparecía dicho operador. Expresado en coordenadas cartesianas, es igual a la sumas de todas las segundas derivadas parciales no mixtas dependientes d una variable. Corresponde a la ***div(grad ϕ)*** de donde el uso de nabla elevado al cuadrado (∇^2), el cual se define mediante la siguiente relación:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (12.5)$$

Entonces dado el sistema de ecuaciones diferenciales parciales **(12.3)** se puede observar que tenemos un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas u, v, w, σ . con el fin de tener un sistema completo se necesita una ecuación más, por lo tanto introduciremos al sistema de ecuaciones la Ley de Darcy que regula el flujo de agua en un medio poroso. La Ley de Darcy generalizada a tres dimensiones se expresa de la siguiente manera:

$$q = -k\nabla(h(x, y, z)) \quad (12.6)$$

Donde ***k*** se le conoce como conductividad hidráulica, la cual se define como la capacidad del suelo para permitir la circulación del agua a través del elemento de suelo. Este parámetro se define como el coeficiente de conductividad hidráulica y representa el caudal que fluye a través de un área unitaria, bajo un gradiente hidráulico unitario. En donde el valor de este coeficiente depende de la forma, acomodo y distribución granulométrica de las partículas que forman el elemento de suelo, así como también de las propiedades físicas del agua, tales como la densidad y viscosidad dinámica del agua que fluye a través de los poros del

elemento de suelo. La Ley de Darcy generalizada a tres dimensiones se trata de un tensor simétrico diagonalizable a tres direcciones de manera principal. Es decir:

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \quad (12.7)$$

La ecuación (12.7) la diagonalizamos en las tres direcciones principales que nos interesa, obteniendo la siguiente relación:

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{bmatrix} \quad (12.8)$$

Y por lo tanto obtenemos la siguiente ecuación:

$$q = -k\nabla(h(x, y, z)) = -K_x \frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{i} - K_y \frac{\partial h}{\partial y} \mathbf{j} - K_z \frac{\partial h}{\partial z} \mathbf{k} \quad (12.9)$$

El agua en el elemento de suelo se desplazara en la dirección donde haya más permeabilidad y esta a su vez indicara a qué velocidad se mueve el agua en condiciones unitarias del gradiente hidráulico, debido a la suposición de un suelo isótropo, las permeabilidades en las tres direcciones principales son idénticas. La Ley de Darcy es válida en un medio totalmente saturado, homogéneo, isótropo, continuo y cuando las fuerzas inerciales son despreciables. Es decir un número de Reynolds menor a 1.

Consideremos de nuevo un cubo elemental de suelo totalmente saturado y una de sus caras v_x , el volumen de agua fluye por segundo a través de él, en donde la unidad de área a través de la cara del cubo elemental de suelo es perpendicular al eje de las abscisas x.

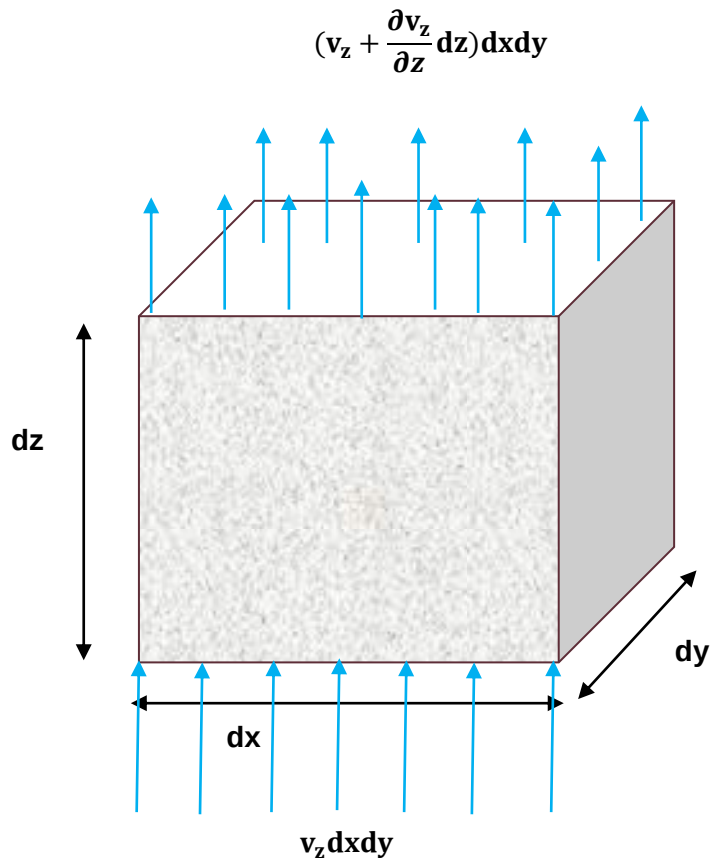


Figura 12.1. Flujo en un medio poroso en dirección vertical.

Ahora es la misma forma en la que definimos v_y y v_z , según la ley de Darcy estas tres componentes de la tasa de flujo de agua a través del elemento cubico de suelo están relacionadas con el exceso de presión de poro de agua generado por el incremento de esfuerzo σ por las siguientes relaciones:

$$v_x = -k_x \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

$$v_y = -k_y \frac{\partial \sigma}{\partial y}$$

$$v_z = -k_z \frac{\partial \sigma}{\partial z} \quad (12.10)$$

En donde la constante física k es un coeficiente denominado como permeabilidad del suelo. Por otra parte si se asume que el agua es incompresible, la tasa de

contenido de agua en el elemento cubico de suelo debe ser igual al volumen de agua que entra por segundo a través de la superficie del elemento cubico de suelo y por lo tanto obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (12.11)$$

Combinando las ecuaciones (12.10) y (12.11), obtenemos:

$$k \nabla^2 \sigma = \alpha \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \frac{1}{Q} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (12.12)$$

Por lo que ahora si tenemos un sistema general de 4 ecuaciones diferenciales satisfechas por 4 incógnitas las cuales son: u, v, w, σ , estas ecuaciones diferenciales se resumen a continuación:

$$G \nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} - \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \frac{G}{H} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$$

$$G \nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} - \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \frac{G}{H} \frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0$$

$$G \nabla^2 w + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} - \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \frac{G}{H} \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$$

$$k \nabla^2 \sigma = \alpha \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \frac{1}{Q} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (12.13)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales (12.13), describe el fenómeno de subsidencia en 3 dimensiones, es decir, describe la disipación del exceso de presión de poro de agua, las deformaciones y desplazamientos que se generan en un elemento de suelo. Dichas ecuaciones diferenciales son conocidas como las ecuaciones de Biot.

Simplificando el sistema de ecuaciones diferenciales parciales (12.13), para de tal manera relacionarlas con la teoría de Terzagui, sabemos que H representa la variación del volumen de elemento de suelo arcilloso totalmente saturado al cambiar el exceso de presión de poro de agua, la constante R describe la variación del contenido de agua al momento de la disipación del exceso de presión de poro de agua, aplicando la teoría sobre la hidráulica de los acuíferos, tenemos

que su inversa es la capacidad de almacenamiento, es decir, Q , pero dado que en las hipótesis, tanto en la teoría de Terzagui como en la de Biot, se considera que no existe compresibilidad del agua, por lo tanto: $\alpha = 1$, para simplificar.

Por lo tanto si $\sigma = u$, el sistema de ecuaciones diferenciales parciales **(12.4)**, lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} G\nabla^2\mu + \frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial x} - \alpha\frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ G\nabla^2\nu + \frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial y} - \alpha\frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ G\nabla^2w + \frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial\varepsilon_z}{\partial z} - \alpha\frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (12.14)$$

Dónde:

u, v, w : Son los desplazamientos generados por la disipación del exceso de presión de poro de agua (u) y las deformaciones (ε). Pero al sistema de ecuaciones diferenciales **(12.14)**, se le tiene que agregar una ecuación diferencial más, para cumplir con el equilibrio, es decir, la ecuación diferencial que describe el fenómeno de subsidencia en el tiempo en un suelo arcilloso completamente saturado, dicha ecuación es la siguiente:

$$k\nabla^2 = \alpha\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial x} + \frac{1}{Q}\frac{\partial u}{\partial t} \quad (12.15)$$

CAPITULO 13: INTERPRETACION FÍSICA DE LAS CONSTANTES DE BIOT EN EL ELEMENTO CUBICO DE SUELO.

BIOT, M. A. (1941). El coeficiente ν mide la relación lateral del abultamiento del volumen de suelo arcilloso totalmente saturado bajo las condiciones de equilibrio final, para poder interpretar las constantes físicas **H** y **R** se considera que la muestra de suelo se encuentra encerrada en una bolsa de delgada goma, lo cual implica que los esfuerzos aplicados en el elemento de suelo son cero. El coeficiente $\frac{1}{H}$, es una medida de la compresibilidad del suelo para un cambio existente en el exceso de presión de poro de agua. Mientras $\frac{1}{R}$ mide el cambio de contenido de agua para un cambio en el exceso de presión de poro de agua.

H, representa la variación del volumen de elemento de suelo arcilloso totalmente saturado al cambiar el exceso de presión de poro de agua, la constante **R** describe la variación del contenido de agua al momento de la disipación del exceso de presión de poro de agua.

Las dos constantes elásticas y las constantes **H** y **R**, son las cuatro constantes físicas distintas que bajo nuestra suposición de definir de manera completa las proporciones físicas de un elemento de suelo isotrópico para cumplir con las condiciones de equilibrio. En realidad hay otras constantes físicas que se han derivado de estas cuatro constantes físicas por ejemplo: **Q**, se define este coeficiente de la siguiente manera:

$$\alpha = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \frac{G}{H} \quad (13.1)$$

Y

$$\theta = \sigma \epsilon + \frac{\sigma}{Q}$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - \frac{\alpha}{H} \quad (13.2)$$

Las ecuaciones **(13.2)**, miden la relación del volumen de agua disipada por un cambio de volumen de suelo, si este último se comprime mientras se permite que

el contenido de agua se disipe, es decir $\alpha = 0$ el coeficiente $\frac{1}{Q}$ se define de la siguiente manera:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - \frac{\alpha}{H} \quad (13.3)$$

La ecuación (13.3), representa una medida de la cantidad de agua que puede ser forzada en el elemento de suelo mientras que el volumen de suelo se mantiene constante, por lo tanto las constantes α y Q serán de importancia para un suelo parcialmente saturado con agua y burbujas de aire, lo cual implica que las constantes físicas α y Q pueden tomar valores los cuales dependen del grado de saturación del elemento de suelo. El análisis de suelo estándar sugiere la derivación de constantes físicas adicionales, consideramos una columna de suelo, la cual se confina lateralmente y se le aplica carga es decir: $p_0 = \sigma_z$, y es totalmente rígida la columna de suelo de tal manera que no puede sufrir alguna deformación o expansión lateral, se deja que el agua escape, al aplicar una carga a través de una losa porosa, cuando todo el exceso de presión de poro de agua se ha disipado de manera total, las deformaciones axiales están dadas por las siguientes ecuaciones, en las que se supone que $\sigma = 0$.

$$\sigma_x = 2G \left[\varepsilon_x + \frac{v\varepsilon_x}{1-2v} \right] - \alpha\sigma_1$$

$$\sigma_y = 2G \left[\varepsilon_y + \frac{v\varepsilon_y}{1-2v} \right] - \alpha\sigma_1$$

$$\sigma_z = 2G \left[\varepsilon_z + \frac{v\varepsilon_z}{1-2v} \right] - \alpha\sigma_1$$

$$\tau_x = G\gamma_x$$

$$\tau_y = G\gamma_y$$

$$\tau_z = G\gamma_z$$

$$\alpha = \frac{2(1+v)}{3(1-2v)} \frac{G}{H} \quad (13.4)$$

Entonces podemos escribir la siguiente relación:

$$e_z = -p_0 a \quad (13.5)$$

Dónde:

$$a = \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \quad (13.6)$$

En donde a la ecuación **(13.6)**, se le conoce como compresibilidad final. Si medimos la deformación axial justo en el momento después de que la carga que estaba actuando sobre la columna de suelo, debemos poner $\theta = 0$, en las relaciones siguientes:

$$\theta = \sigma \epsilon + \frac{\sigma}{Q}$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - \frac{\alpha}{H} \quad (13.7)$$

Por lo que se deduce que el exceso de presión de poro de agua está definido con la siguiente relación:

$$\sigma = -\alpha Q e_z \quad (13.8)$$

Si sustituimos en $\sigma_z = 2G \left[\epsilon_z + \frac{\nu \epsilon}{1-2\nu} \right] - \alpha \sigma_1$ la ecuación **(13.8)**, obtenemos:

$$e_z = -p_0 a_i \quad (13.9)$$

En dónde el coeficiente a_i está definido por la siguiente relación:

$$a_i = \frac{a}{1+\alpha^2 a Q} \quad (13.10)$$

En donde la expresión matemática **(13.10)**, se le conoce como compresibilidad instantánea. Las constantes físicas consideradas anteriormente se refieren a las propiedades del suelo para el estado de equilibrio, lo cual implica que el exceso de presión de poro de agua es uniforme en todas las direcciones en el elemento de suelo. Al estudiar el fenómeno transitorio de consolidación hay que añadir a estas cuatro constantes físicas y el coeficiente de permeabilidad del suelo al sistema de ecuaciones diferenciales **(12.13)**, mejor conocidas como las ecuaciones diferenciales de Biot.

CAPITULO 14: BREVE RESUMEN SOBRE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE BIOT.

BIOT, M. A. (1941). Ahora se resumirán las ecuaciones diferenciales de Biot para el fenómeno transitorio de la consolidación, es decir, aquellas ecuaciones que rigen la distribución de esfuerzos, el contenido de agua y la solución como una función del tiempo en un elemento de suelo el cual se encuentra sometido a cargas dadas.

Dichas ecuaciones diferenciales describen el fenómeno de consolidación en un suelo totalmente saturado en 3 dimensiones, es decir mediante su solución numérica y modelado se observan las deformaciones y desplazamientos generados debido a cargas externas actuando en un volumen de suelo, las cuales provocan una disipación del exceso de presión de poro de agua.

Las ecuaciones diferenciales de Biot son las siguientes:

$$G\nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} - \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$G\nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} - \alpha \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$G\nabla^2 w + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} - \alpha \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (14.1)$$

$$k\nabla^2 u = \alpha \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \frac{1}{Q} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (14.2)$$

Dónde:

u, v, w: Son los desplazamientos generados por la disipación del exceso de presión de poro de agua (**u**) y las deformaciones (**ε**). Pero al sistema de ecuaciones diferenciales **(14.1)**, se le tiene que agregar una ecuación diferencial más, es decir la ecuación **(14.2)**, para cumplir con el equilibrio, es decir, la ecuación diferencial que describe el fenómeno de subsidencia en el tiempo en un suelo arcilloso completamente saturado.

$a = \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}$; Se le conoce como compresibilidad final.

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$; Es el módulo de cizallamiento.

ν : Es el coeficiente de poisson para la estructura intergranular del suelo.

t : Representa el tiempo en el sistema de ecuaciones diferenciales de Biot.

u : Representa la presión de poro de agua en el suelo.

$\frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - \frac{\alpha}{H}$; Representa una medida de la cantidad de agua que puede ser forzada en el elemento de suelo mientras que el volumen de suelo se mantiene constante.

Por lo tanto las constantes α y Q serán de importancia para un suelo parcialmente saturado con agua y burbujas de aire, lo cual implica que las constantes físicas α y Q pueden tomar valores los cuales dependen del grado de saturación del elemento de suelo.

Calculando de manera empírica las constantes de Biot y solucionando el sistema de ecuaciones diferenciales (14.1) y (14.2) de manera numérica y modelándolas se podrá observar las deformaciones y desplazamientos causados por la disipación del exceso de presión de poro de agua en un elemento de suelo.

CONCLUSIONES

Al iniciar la investigación de la presente tesis la finalidad principal era deducir, modelar y comparar resultados obtenidos de las ecuaciones diferenciales de Terzagui para los casos unidimensional, bidimensional y tridimensional, junto con la formulación de la ecuación diferencial que describe las deformaciones generadas en un estrato de arcilla totalmente saturado debido a la disipación del exceso de presión de poro de agua solamente para el caso unidimensional y bidimensional, dado que es de suma importancia en ingeniería civil conocer las propiedades mecánicas de los suelos y el comportamiento de un volumen de suelo cuando está sometido a esfuerzos, los cuales son generados por la transferencia de cargas de las estructuras. Cuando el suelo se somete a una sobrecarga, los esfuerzos totales se incrementan en la misma cuantía y el suelo gana resistencia conforme el exceso de presión de poro disminuya y los esfuerzos efectivos aumenten. Dado que todos los materiales experimentan deformaciones cuando se les sujeta a un cambio en las condiciones de los esfuerzos, las características esfuerzo-deformación de un suelo estarán en función de la forma en que es cargado, del tipo de suelo, de las condiciones anteriores antes del cambio en las condiciones de esfuerzos, de la granulometría de la estructura intergranular del suelo. En los suelos arcillosos la permeabilidad es muy baja por lo cual el exceso de presión de poro se disipa muy lentamente a través del tiempo y los esfuerzos efectivos aumentan muy lentamente y en consecuencia puede seguir deformándose y asentándose varios años más, ya después de finalizada la construcción. En los suelo granulares la permeabilidad es muy alta, caso contrario al de los suelos arcillosos, esto implica que el exceso de presión de poro se disipe de una manera muy rápida, teniendo como consecuencia que el asentamiento termine al final de la construcción, en donde los esfuerzos totales son equivalentes a los esfuerzos efectivos, lo cual nos dice que el suelo a ganado resistencia. El proceso de consolidación se aplica a todos los suelos, pero es de mucha importancia en aquellos suelos en que la permeabilidad es muy baja.

De esta manera se aplica la teoría de Terzagui para poder describir la consolidación en suelo arcilloso cuando está sometido a un incremento de esfuerzos, además se comparan los resultados obtenidos en los diferentes casos. Desafortunadamente la teoría de Terzagui unidimensional tiene limitaciones, aunque los modelos unidimensionales son muy exitosos para el modelado del proceso de consolidación en donde el flujo de agua se considera vertical, pero, sin embargo en los casos donde el flujo de agua en sentido horizontal tenga un efecto muy importante en el proceso de consolidación, dichos cálculos deben considerarse con seriedad.

Por tal motivo se realizó una modelación de la teoría de Terzagui para los casos unidimensional, dimensional y tridimensional para observar y comparar resultados del fenómeno de subsidencia en un suelo arcilloso completamente saturado. Si bien la teoría de consolidación de Terzagui ha probado ser de enorme utilidad en la práctica, no tiene en cuenta todos los aspectos del comportamiento de las masas de suelo totalmente saturados cuando estos están sometidos a cargas externas. Debido a las simplificaciones que tiene para poder resolver la ecuación diferencial. Por tal motivo se hace referencia al sistema de ecuaciones diferenciales de Biot, las cuales describen los desplazamientos generados debido a las deformaciones provocadas por la disipación del exceso de presión de poro de agua en un volumen de suelo totalmente saturado en 3 dimensiones.

BIBLIOGRAFIA

1. Braja, M. D. (2001). "Fundamentos de Ingeniería Geotécnica". International Thomson Editores.
2. BIOT, M. A. (1941.). General Theory of three - dimensional consolidation. J. of Applied Physics, V. 12, pp 155 – 164.
3. Egor P. Popov, "Mecánica de Sólidos". Segunda edición, Ed: Pearson Educación.
4. J.N. Reddy. "An introduction to the finite element method" Mc Graw – Hill Book Company. 1985.
5. Guillermo Arévalo Cervantes, Carlos Chávez Negrete, Manual de Mecánica de Suelos II, Octavo semestre, (2009), UMSNH, Facultad de Ingeniería Civil.
6. Aparicio Mijares, F.J. Fundamentos de hidrología de superficie, Ed. Limusa. México (1989).
7. Dr. Carlos Chávez Negrete. Apuntes de Mecánica de suelos. UMSNH-Facultad de Ingeniería Civil.
8. Wolfram Research. The Mathematica Book.
9. Romolo Di Francesco. Exact Solution of Terzaghi's Consolidation Equation and Extension to Two/Three-Dimensional Cases. (<http://www.scirp.org/journal/am>).
10. José Alfonzo Mier Suárez, Joaquín Mejía Ramírez, Arturo Núñez Gutiérrez. Walter Paniagua Espinoza, Raúl Vicente Orozco, Jesús Alberto Aramburu, Abraham Ellstein, Eulalio Juárez Badillo, Raúl Esquivel. El subsuelo de la Ciudad de Morelia.
11. TIMOSHENKO- GOODIER. Teoría de la Elasticidad, 2º Edición en Español, 1972. URMO. S. A. DE EDICIONES.
12. Terzagui y la mecánica de suelos. Historia de la Geotecnia.
geotecniakelysitaz.blogspot.com/2013/.../historia-de-la-geotecnia.