

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

---



FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

# LA TEORÍA DE FLOQUET EN EL MODELADO Y ANÁLISIS DE CONVERTIDORES DE POTENCIA

TESIS

Que para obtener el título de:

**Maestro en Ciencias en Ingeniería Eléctrica**

Presenta:

**Josué Vargas Castillo**

Director de Tesis:

Dr. J. Jesús Rico Melgoza



Morelia, Michoacán

Septiembre 2022





## LA TEORÍA DE FLOQUET EN EL MODELADO Y ANÁLISIS DE CONVERTIDORES DE POTENCIA

Los Miembros del Jurado de Examen de Grado aprueban la **Tesis de Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica** de **Josué Vargas Castillo**.

Dr. Juan Anzures Marín  
*Presidente del Jurado*

Dr. J. Jesús Rico Melgoza  
*Director de Tesis*

J. Jesús Rico Melgoza

Dr. J. Aurelio Medina Rios  
*Vocal*

Dr. Fernando Ornelas Téllez  
*Vocal*

Dr. Manuel Madrigal Martínez  
*Revisor Externo (ITM)*

Dr. J. Aurelio Medina Rios  
*Jefe de la División de Estudios de Posgrado  
de la Facultad de Ingeniería Eléctrica. UMSNH  
(Por reconocimiento de firmas)*



*Para Mercedes y Benjamín, por supuesto.*



# Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres, Meche y Chamín, por todo el apoyo y la confianza brindada no solo durante estos dos años, sino durante toda la vida. Todo el trabajo aquí contenido se los dedico completamente a ustedes.

Agradezco a mis hermanos: Esaú, por todo el apoyo y consejos que siempre ha tenido para mí; y Benji, porque gracias a sus experiencias he aprendido a ser una mejor persona.

Agradezco también a la División de Estudios de Posgrado de La Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, por las facilidades brindadas durante este tiempo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por apoyar económicamente mis estudios de maestría.

Agradezco de manera especial al Dr. J. Jesús Rico Melgoza, por todo el trabajo que dedicó al desarrollo de este proyecto de tesis y al conocimiento compartido conmigo; además, por permitirme la oportunidad de participar en la creación de un artículo científico.

A los profesores de la Facultad, por todo el conocimiento compartido en los cursos a lo largo de este tiempo, en especial al Dr. Juan Anzurez Marín, que desde antes de ingresar a la maestría me aconsejó y apoyó no solamente en lo académico, sino también en aspectos personales.

Agradezco profundamente a mis compañeros y amigos, porque a pesar de no vernos presencialmente más de la mitad del tiempo que duró la maestría, hicieron todo este proceso más llevadero.

Finalmente, me gustaría agradecer a Nora, por el apoyo incondicional que me brindó, por la motivación en los momentos difíciles y por todo el amor que aporta a mi vida.





# Resumen

En este documento se presenta una metodología de modelado y análisis de convertidores de potencia a través de la herramienta matemática conocida como la teoría de Floquet para sistemas lineales periódicos. El documento argumenta que la teoría de Floquet es tan efectiva y eficiente como las más conocidas aproximaciones que utilizan representaciones invariantes en el tiempo o las técnicas generalizadas de promediación usadas para el análisis de convertidores de potencia en un gran número de artículos técnicos. El trabajo valida el alcance de la teoría en estudios de sistemas de potencia como lo son la respuesta en estado estable, análisis modal, análisis de respuesta a la frecuencia y estabilidad, además de proporcionar un algoritmo para la identificación del sistema. En los casos de estudio de la tesis, es aplicada la teoría de Floquet para desarrollar la caracterización de tres diferentes convertidores, tanto del tipo DC-DC, como del AC-DC; comparándolos con métodos numéricos de resolución provistos por programas computacionales de uso común, en este caso, Wolfram Mathematica. Se puede observar que al ser un método analítico, no se presentan problemas de integración y estabilidad numérica; además, no es necesario aumentar las dimensiones del sistema para obtener resultados, mitigando de manera considerable el costo computacional que requiere.

**Palabras clave:** Teoría de Floquet, Convertidores de Potencia, Sistemas Periódicos, Análisis Armónico, Análisis de Estado Estable, Respuesta a la Frecuencia.



# Abstract

This document presents a methodology for modelling and analyzing power converters through the mathematical tool known as Floquet's theory for periodic linear systems. The thesis argues that Floquet's approach is as effective and efficient as the best-known approaches using time-invariant representations or the generalized averaging techniques used for power converter analysis in many technical articles. The thesis validates the scope of the theory in power system studies such as steady-state response, modal analysis, frequency response analysis and stability, and providing an algorithm for system identification. In the case studies of the thesis, Floquet's theory was applied to develop the characterization of three different converters, both DC-DC and AC-DC types, comparing them with numerical resolution methods provided by commonly used computer programs like Wolfram Mathematica. As it is an analytical method, there are no problems with integration and numerical stability; in addition, it is not necessary to increase the dimensions of the system to obtain results, considerably mitigating the computational cost that it requires.



# Contenido

Dedicatoria . . . . .	III
Agradecimientos . . . . .	V
Resumen . . . . .	VII
Abstract . . . . .	IX
Contenido . . . . .	XI
Lista de Figuras . . . . .	XV
Lista de Tablas . . . . .	XVII
Lista de Símbolos . . . . .	XIX
1. Introducción. . . . .	1
1.1. Planteamiento del Problema. . . . .	1
1.2. Justificación. . . . .	3
1.3. Antecedentes. . . . .	3
1.4. Metodología. . . . .	8
1.5. Hipótesis. . . . .	9
1.6. Objetivos de la Tesis. . . . .	9
1.6.1. Objetivo general . . . . .	9
1.6.2. Objetivos particulares . . . . .	9
1.7. Descripción de Capítulos. . . . .	10
2. Revisión de la Teoría de Floquet. . . . .	13
2.1. Introducción. . . . .	13
2.2. Descripción de los Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo. . . . .	13
2.2.1. Ejemplos de Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo. . . . .	15
2.3. Matriz de Transición de Estado. . . . .	19
2.3.1. Respuesta Homogénea. . . . .	19
2.3.2. Propiedades de la Matriz de Transición de Estado. . . . .	19
2.3.3. Cálculo de la Matriz de Transición de Estado. . . . .	20
2.3.3.1. Aproximación Simbólica de la Matriz de Transición de Estado. . . . .	20
2.3.3.2. Integración Numérica de la Matriz de Transición de Estado. . . . .	21
2.3.4. Respuesta del Sistema ante una Entrada. . . . .	21
2.4. Teoría de Floquet. . . . .	22
2.4.1. Matriz de Monodromía. . . . .	23
2.4.2. Descomposición de Floquet. . . . .	23

2.4.3. Transformación Floquet-Lyapunov. . . . .	26
2.5. Conclusiones. . . . .	28
3. Modelado de Convertidores de Potencia como Sistemas Periódicos. . . . .	29
3.1. Introducción. . . . .	29
3.2. Convertidores de Potencia Conmutados. . . . .	30
3.3. Control de Convertidores de Potencia Conmutados. . . . .	32
3.3.1. Control de Voltaje Retroalimentado. . . . .	33
3.3.2. Control de Corriente Programado. . . . .	36
3.4. Descripción de las Estrategias de Modelado para Convertidores Conmutados. . . . .	38
3.5. Conclusiones. . . . .	41
4. Aplicación de la Teoría de Floquet a Convertidores de Potencia. . . . .	43
4.1. Introducción. . . . .	43
4.2. Respuesta en el Dominio del Tiempo. . . . .	45
4.3. Análisis de Estado Estable. . . . .	48
4.4. Análisis Modal. . . . .	50
4.5. Respuesta a la Frecuencia. . . . .	52
4.6. Identificación del Sistema. . . . .	55
4.7. Conclusiones. . . . .	57
5. Casos de Estudio. . . . .	59
5.1. Introducción. . . . .	59
5.2. Convertidores DC-DC. . . . .	60
5.2.1. Convertidor Boost. . . . .	60
5.2.1.1. Análisis del Estado Estable. . . . .	62
5.2.1.2. Respuesta en el Dominio del Tiempo. . . . .	63
5.2.1.3. Análisis Modal. . . . .	65
5.2.1.4. Respuesta en el Dominio de la Frecuencia. . . . .	65
5.2.1.5. Identificación del Sistema. . . . .	69
5.2.2. Convertidor Buck-Boost. . . . .	71
5.2.2.1. Análisis del Estado Estable. . . . .	72
5.2.2.2. Respuesta en el Dominio del Tiempo. . . . .	74
5.2.2.3. Análisis Modal. . . . .	75
5.2.2.4. Respuesta en el Dominio de la Frecuencia. . . . .	76
5.2.2.5. Identificación del Sistema. . . . .	77
5.3. Convertidor AC-DC. . . . .	80
5.3.1. Análisis de Estado Estable. . . . .	82
5.3.2. Respuesta en el Dominio del Tiempo. . . . .	83
5.3.3. Análisis Modal. . . . .	85
5.3.4. Respuesta en el Dominio de la Frecuencia. . . . .	85
5.3.5. Identificación del Sistema. . . . .	88
5.4. Conclusiones. . . . .	91

---

6. Conclusiones.	93
6.1. Conclusiones Generales. . . . .	93
6.2. Trabajos Futuros. . . . .	95
Referencias	97





# Lista de Figuras

3.1. Ejemplos de convertidores conmutados simples. (a) convertidor buck; (b) convertidor boost; (c) convertidor buck-boost; (d) convertidor Cuk. . . . .	30
3.2. Convertidor buck controlado en el modo voltaje. (a) diagrama del circuito; (b) formas de onda de la señal de control y la señal triangular. . . . .	34
3.3. Convertidor boost controlado en el modo corriente. (a) esquema del circuito; (b) formas de onda de la corriente del inductor y de la corriente de referencia. . . . .	37
3.4. Convertidor buck controlado en lazo abierto. (a) diagrama del circuito; (b) forma de onda de la señal PWM. . . . .	40
5.1. Convertidor DC-DC elevador (boost). . . . .	60
5.2. Señal de pulsos que acciona al interruptor. . . . .	61
5.3. Ciclo de trabajo vs. ganancia del voltaje del convertidor boost. . . . .	63
5.4. Respuesta en el dominio del tiempo del convertidor boost. . . . .	64
5.5. Lugar geométrico de las raíces del convertidor boost. . . . .	66
5.6. Respuesta a la frecuencia de la impedancia de entrada del convertidor boost. . . . .	67
5.7. Función de transferencia de la respuesta al impulso del convertidor boost. . . . .	68
5.8. Identificación de la matriz de transición de estado del convertidor boost. . . . .	70
5.9. Convertidor DC-DC reductor-elevador (buck-boost). . . . .	71
5.10. Ciclo de trabajo vs. ganancia del voltaje del convertidor buck-boost. . . . .	73
5.11. Respuesta en el dominio del tiempo del convertidor buck-boost. . . . .	74
5.12. Lugar geométrico de las raíces del convertidor buck-boost. . . . .	75
5.13. Respuesta a la frecuencia de la impedancia de entrada del convertidor buck-boost. . . . .	77
5.14. Función de transferencia de la respuesta al impulso del convertidor buck-boost. . . . .	78
5.15. Identificación de la matriz de transición de estado del convertidor buck-boost. . . . .	79
5.16. Diagrama del convertidor AC-DC, a) diagrama unifilar y b) diagrama del convertidor. . . . .	80
5.17. Señal de control del convertidor AC-DC. . . . .	82
5.18. Valores de estado estable del convertidor de potencia, a) corriente de la fase $a$ , b) corriente de la fase $b$ , c) corriente de la fase $c$ y d) voltaje de DC. . . . .	83
5.19. Respuesta en el dominio del tiempo del inversor. . . . .	84
5.20. Lugar geométrico de las raíces del inversor. . . . .	86
5.21. Respuesta a la frecuencia de las admitancias propias del inversor. . . . .	87

5.22. Respuesta al impulso del inversor. . . . .	88
5.23. Elementos de la diagonal de la matriz de transición de estado identificada. .	90

# Lista de Tablas

5.1. Parámetros del convertidor boost utilizado en el caso de estudio. . . . .	62
5.2. Parámetros del convertidor buck-boost utilizado en el caso de estudio. . . .	72
5.3. Parámetros del convertidor AC-DC utilizado en el caso de estudio. . . . .	82



# Lista de Símbolos

## Símbolos.

$n$	Orden del sistema.
$t_0$	Tiempo inicial.
$t_f$	Tiempo final.
$\mathbf{x}(t)$	Vector de estados.
$\mathbf{x}_0$	Vector de condiciones iniciales.
$\mathbf{u}(t)$	Vector de entradas.
$\mathbf{y}(t)$	Vector de salidas.
$\mathbf{A}(t)$	Matriz dinámica de coeficientes del sistema.
$\mathbf{B}(t)$	Matriz de coeficientes para las entradas del sistema.
$\mathbf{C}(t)$	Matriz de coeficientes para las salidas del sistema.
$\Phi(t, t_0)$	Matriz de transición de estados.
$\Phi(T)$	Matriz de monodromía.
$T$	Periodo fundamental.
$\mathbf{I}_n$	Matriz identidad de orden $n$ .
$\mathbf{P}(t)$	Matriz periódica de la descomposición de Floquet.
$\mathbf{Q}$	Matriz constante de la descomposición de Floquet.
$\mathbf{z}(t)$	Vector de estados transformados.
$\lambda$	Valor característico.
$f(t)$	Función de excitación.
$x_{cc}$	Solución complementaria.
$x_p$	Solución particular.
$x_{ss}$	Solución del estado estable.
$\omega_0$	Frecuencia angular fundamental.
$h$	Número de armónicos.
$\mathbf{Z}$	Matriz correspondiente a los covariantes de Frobenius de la matriz $\mathbf{Q}$ .
$v_C$	Voltaje del capacitor $C$ .
$i_L$	Corriente del inductor $L$ .
$s(t)$	Función de conmutación.
$d$	Ciclo de trabajo.
$m_a$	Relación de la modulación de amplitud.
$\theta$	Ángulos de disparo.
$\mathbf{H}(j\omega)$	Función de transferencia en el dominio de la frecuencia.
$\mathbf{H}(j\omega, t)$	Función de transferencia periódica.

**Acrónimos.**

AC	Corriente alterna ( <i>alternating current</i> ).
DC	Corriente directa ( <i>direct current</i> ).
LTI	Lineal invariante en el tiempo ( <i>linear time-invariant</i> ).
LTV	Lineal variante en el tiempo ( <i>linear time-variant</i> ).
LTP	Lineal periódico en el tiempo ( <i>linear time-periodic</i> ).
STM	Matriz de transición de estados ( <i>state transition matrix</i> ).
DCM	Modo de conducción discontinuo ( <i>discontinuous-conduction mode</i> ).
CCM	Modo de conducción continuo ( <i>continuous-conduction mode</i> ).
PWM	Modulación por ancho de pulso ( <i>pulse-width modulation</i> ).
EHD	Dominio armónico extendido ( <i>extended harmonic domain</i> ).
TF	Función de transferencia ( <i>transfer function</i> ).
HTF	Función de transferencia armónica ( <i>harmonic transfer function</i> ).
PTF	Función de transferencia periódica ( <i>periodic transfer function</i> ).
VSC	Convertidor de fuente de voltaje ( <i>voltage source converter</i> ).
MAPE	Error porcentual absoluto medio ( <i>mean absolute percentage error</i> ).

# Capítulo 1

## Introducción.

En esta tesis se aborda el problema del modelado y análisis de convertidores de potencia utilizando la teoría de sistemas variantes en el tiempo, a través de la cual se realizan los estudios más comunes que se efectúan a los sistemas de este tipo, tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. Al ser posible modelar los convertidores de potencia como sistemas periódicos, se pueden utilizar herramientas matemáticas que tienen como base la teoría de Floquet para sistemas lineales.

Diferentes enfoques y procedimientos son utilizados en diversos casos de estudio correspondientes a los convertidores de potencia, con la intención de validar su efectividad y constatar la importancia de investigar y desarrollar aún más estas herramientas. En este capítulo se presenta una breve introducción al tema, se realiza una revisión de los trabajos relacionados de manera directa con el contenido de este documento y se dan a conocer los objetivos y motivaciones de la presente tesis.

### 1.1. Planteamiento del Problema.

En la actualidad, los sistemas eléctricos de potencia están cambiando su estructura con la intención de incorporar recursos sustentables como fuentes principales de energía con el objetivo de reducir las emisiones contaminantes y combatir el cambio climático. Sin embargo, alcanzar estos objetivos puede comprometer la operación y planeación de los sis-

temas eléctricos existentes debido al incremento de la penetración de fuentes variables y distribuidas de energía mediante diferentes configuraciones de subsistemas basados en convertidores de potencia, ya que la propia naturaleza de estos dispositivos requiere de métodos diferentes para su planeación, operación y control.

Entonces, al volverse los convertidores de potencia una parte importante de los sistemas eléctricos, interactuando con elementos como los transformadores, líneas de transmisión o generadores AC que caracterizan a los sistemas tradicionales, la aplicación de las herramientas y métodos existentes para brindar soporte a las tareas de estabilizar, planear y operar el sistema se verán limitadas. Además, no necesariamente el desarrollo de herramientas de análisis de los sistemas de potencia clásicos pueden ser extendidos al análisis de convertidores de potencia. Por lo tanto, es clara la necesidad de desarrollar herramientas matemáticas y computacionales que funcionen para el análisis de este tipo de sistemas eléctricos.

Los circuitos de la electrónica de potencia, al ser sistemas no lineales, presentan una variedad de comportamientos complejos, como cambios repentinos en la región de operación, inestabilidad bajo ciertas condiciones, introducción de corrientes armónicas, en ocasiones subarmónicas en el sistema, etc. Debido a lo anterior, los ingenieros están constantemente resolviendo estos problemas durante el desarrollo de productos de electrónica de potencia; y dado que el objetivo de los ingenieros es lograr que los circuitos trabajen en el régimen de operación esperado, la solución usual es buscar la manera de eliminar cualquier comportamiento no deseado; con frecuencia se utiliza algún método rápido y heurístico para ajustar los componentes y parámetros a través de un procedimiento de prueba y error. No obstante, al irse desarrollando cada vez más el campo de la electrónica de potencia, la necesidad de contar con métodos de diseño y análisis con mayor precisión y confiabilidad ha ido aumentando, lo que lleva a los ingenieros a tratar de entender el comportamiento de los sistemas bajo cualquier condición práctica que se presente. Dicho conocimiento, por lo tanto, requiere de una metodología de modelado y análisis más profundo.



Es por todo lo antes mencionado que en esta tesis se plantean enfoques que utilizan como herramienta principal la teoría de Floquet para el modelado y análisis de este tipo de sistemas, poniéndolos a prueba en diferentes casos de estudio con diversos convertidores de potencia.

## **1.2. Justificación.**

En la actualidad existe un especial interés en el diseño y análisis de los convertidores de potencia debido a su creciente uso en los sistemas eléctricos actuales, al ser parte fundamental de centrales con fuentes de energía renovable. Siendo elementos cada vez más utilizados, las técnicas para su modelado y análisis deben desarrollarse de manera que resulte más eficiente y preciso el diseño y control de dichos dispositivos para que su operación dentro de los sistemas actuales sea más confiable.

Por esta razón, en los últimos años ha cobrado relevancia el desarrollo de nuevas metodologías para modelar y analizar a los convertidores de potencia en las que se incluyan los comportamientos complejos que presentan y que muchas veces son despreciados a cambio de simplicidad.

Una herramienta bastante útil para este propósito es la teoría de Floquet, que permite estudiar sistemas lineales periódicos sin necesidad de usar representaciones invariantes en el tiempo para el análisis de los circuitos conmutados que forman a los convertidores de potencia.

## **1.3. Antecedentes.**

A lo largo de la historia se han realizado diferentes publicaciones que forman parte del soporte teórico de los sistemas periódicos y los diversos campos en los que se encuentran, como la electrónica de potencia. Estos trabajos son clave para el desarrollo de las aplicaciones de esta teoría, ya que aún hoy en día siguen vigentes.

Podemos atribuir el primer trabajo publicado sobre los sistemas periódicos al físico inglés Michael Faraday en 1831 [Faraday31], cuando experimentó con membranas vibratorias en contacto con fluidos, donde se observa una variación en algunos de los parámetros del sistema que almacena energía a una frecuencia específica, fenómeno al que se le dio el nombre de “resonancia paramétrica”.

Posteriormente, el físico británico John Strutt repitió los experimentos con el objetivo de medir de manera precisa la frecuencia a la que se presentaba el fenómeno de resonancia, demostrando que los resultados obtenidos por Faraday eran correctos [Strutt83]. Alrededor de esta misma época, Joseph Fourier publicó su trabajo sobre la propagación del calor en los sólidos [Fourier22], donde estableció los primeros resultados de la descomposición de funciones periódicas en una suma infinita de funciones senoidales y cosenoidales más simples, lo cual sería más tarde la base de lo que se conoce como análisis armónico. Esta herramienta es conocida actualmente como la serie de Fourier y es fundamental en distintas áreas del conocimiento, como por ejemplo, el procesamiento de señales, la electrónica, entre otras.

En 1868 se desarrolló el primer trabajo a profundidad del estudio de sistemas periódicos variantes en el tiempo, por un matemático francés de nombre Émile Mathieu [Mathieu68]. En él aborda el problema de los modos de vibración en los lagos que tienen fronteras de forma elíptica y se propone una ecuación en la que los coeficientes son funciones del tiempo. Esta ecuación se puede utilizar para modelar diversos tipos de sistemas con comportamientos similares, por lo que se volvió bastante popular. Un ejemplo de esto es el modelo de un péndulo invertido de pivote vertical, reportado por Armando Neves [Neves05].

En 1883, otro matemático francés llamado Gaston Floquet desarrolló lo que actualmente se conoce como la teoría de Floquet [Floquet83]. Esta teoría es utilizada en diversos campos de la ingeniería, ya que forma la base de muchas de las descripciones actuales de los sistemas lineales periódicos. Los resultados obtenidos por Floquet son el pilar funda-

mental del presente trabajo de tesis y serán desarrollados más ampliamente en los capítulos siguientes.

En 1883, el matemático estadounidense George Hill presentó un trabajo donde se establecen por primera vez los fundamentos matemáticos acerca de la teoría de estabilidad en los sistemas periódicos, convirtiéndose en uno de los trabajos más importantes en el área al ser el primero en el que se publica una solución a un problema real que involucra un sistema periódico [Hill86]. El problema que se aborda en dicho documento se basa en obtener una descripción adecuada del movimiento de la Luna en su órbita al rededor de la Tierra. Para lograrlo, se utilizó una ecuación diferencial con coeficientes periódicos que establecía el efecto de la influencia gravitacional del Sol y de la misma Luna en su movimiento.

Durante el siglo XX también se obtuvieron bastantes resultados en el área de los sistemas periódicos: En 1918 el físico alemán Walter Meissner trabajó en la estabilidad de las barras laterales de las locomotoras de la época [Meissner18], en donde se presentó una ecuación con parámetros variantes en el tiempo (función rectangular), que contaba con la particularidad de tener una solución exacta, por lo que se convirtió en uno de los trabajos más importantes del área. Este resultado posteriormente fue utilizado por otros investigadores para resolver problemáticas en otras áreas. Por ejemplo, Ralph Kronig y George Penney en 1931 publicaron un artículo en el área de la mecánica cuántica, en donde afirmaban haber resuelto la ecuación de Schrodinger a través de una función rectangular de energía potencial, reduciéndose a una ecuación de Meissner, creando así la posibilidad de obtener una solución exacta [Kronig31].

Algunos de los primeros trabajos importantes publicados en el área de los circuitos eléctricos fueron los de Charles Desoer [Desoer59] y Alfred Fettweis [Fettweis59] en 1959, donde calculan el estado estable de circuitos con elementos variantes en el tiempo y con interruptores accionados periódicamente. Por otra parte, Henry D'Angelo en 1970 escribe uno de los primeros libros completamente dedicado al análisis de sistemas variantes en el tiempo [D'Angelo70], en el que presenta un compendio detallado de las bases para el análisis

de estos sistemas. Posteriormente, John Alan Richards publica en el año de 1983 la primera edición de su libro dedicado al análisis de sistemas variantes en el tiempo [Richards12], donde utiliza las herramientas de esta teoría para aplicarlas en casos de estudio sobre ingeniería.

En 1991, H. R. Visser presentó un trabajo de modelado y análisis de circuitos con interruptores periódicos [Visser91], en el que desarrolla un método para el análisis de estado estable y otro para la respuesta transitoria, utilizando modelos promediados y algunas herramientas de la teoría de Floquet. Años después, en 1996, Gerald Heydt también propone un método para el análisis de estado estable periódico en circuitos con interruptores conmutados, utilizando las propiedades de modulación de frecuencia de la transformada de Fourier [Heydt96], además de mostrar una comparación con distintos métodos para diferentes condiciones de periodicidad en los parámetros del sistema.

Así mismo, en el tema de análisis de armónicos en convertidores de potencia también existe gran interés, para lo cual han obtenido resultados importantes. Por ejemplo, L.J. Bohmann en 1989 describió dos métodos para análisis de armónicos: el primero utilizando un modelo a partir de la transformada de Fourier, y el segundo usando el análisis de las variables de estado, dando como resultado las ecuaciones del sistema con coeficientes variantes en el tiempo [Bohmann89]. También, en 1995, B.K. Perkins presentó una metodología para la solución de redes de potencia que contienen elementos no lineales en el dominio del tiempo, mostrando la presencia de armónicos debido a la saturación de transformadores [Perkins95].

En el área de control también se desarrollaron investigaciones importantes, como es el caso de Subhash Sinha que presentó diferentes estudios que se describen a continuación. En 1994, presentó los resultados del uso de la transformación Floquet-Lyapunov para desarrollar controladores, aplicando su metodología a un péndulo invertido triple sujeto a cargas periódicas axiales [Sinha94]. Dos años después, presentó un trabajo en el que detalla el cálculo de la transformada Floquet-Lyapunov, obteniendo la matriz de transición de estado de manera simbólica [Sinha97]. En ese mismo año, Mark Balas utilizó un enfoque similar para diseñar observadores de estado en sistemas de control periódicos, obteniendo

una expresión para la matriz de transición de estado mediante una aproximación numérica [Balas97]. Posteriormente, en 1999, nuevamente Sinha en conjunto con R. Pandiyan, presentaron un artículo en donde muestran el diseño de controladores periódicos para la estabilización del ángulo de las palas en rotores de helicópteros utilizando la teoría de Floquet [Pandiyan99].

En otras áreas del conocimiento también se publicaron trabajos donde se demuestra la importancia de la teoría de Floquet para cualquier sistema periódico. Un claro ejemplo de esto es el área de la aeronáutica, en la que existe una gran cantidad de artículos que abordan el tema. Un ejemplo es Patrizio Colaneri, quien en 2005 publicó un compendio de aspectos teóricos sobre estos sistemas aplicado al control de las vibraciones en los rotores de los helicópteros en condición de vuelo frontal [Colaneri05]. Otra área en la que se ha puesto en práctica la teoría de Floquet es en la biología, donde se utilizó para el estudio de sistemas poblacionales y de modelos depredador-presa, como lo presentó Christopher Klausmeier en su artículo de 2008 [Klausmeier08].

En la última década, se han publicado trabajos interesantes acerca de la aplicación de la teoría de Floquet a los convertidores de potencia. Un artículo importante es el publicado por J. A. Álvarez en 2011, en donde los autores desarrollaron una metodología para el cálculo del estado estable de manera analítica utilizando la herramienta de la descomposición de Floquet [Martín11]. También se desarrollaron técnicas para el análisis de la estabilidad de convertidores DC-DC reportados por Hong Li, para convertidores multietapa en 2017 [Li17], y para sistemas con convertidores en paralelo en 2019 [Li19].

Abordando el tema del análisis en el dominio de la frecuencia de los convertidores modelados como sistemas periódicos, también es posible encontrar diferentes artículos que muestran el interés en el tema. En 2019, Uriel Vargas presentó una caracterización en el dominio de la frecuencia de convertidores conmutados utilizando la teoría de Floquet [Vargas19]. En el 2020, H. Yang desarrolla un modelado y análisis de estabilidad de convertidores AC-DC como sistemas periódicos [Yang20], y en 2021, Jian Sun publicó un trabajo

dividido en dos partes, que muestra la caracterización de convertidores AC-DC como redes de dos puertos a través de modelos de inmitancias [Sun21b, Sun21a].

En esta tesis se sigue la línea de investigación mencionada en los párrafos anteriores, abordando los convertidores de potencia como caso de estudio principal y aplicando la teoría de Floquet a su modelado y análisis con estudios como el cálculo de estado estable, respuestas en el dominio del tiempo y frecuencia, estabilidad, etc. También se lleva a cabo la identificación de parámetros con un algoritmo derivado de las herramientas proporcionadas por la teoría de sistemas lineales periódicos. Al utilizar la teoría de Floquet, se obtienen ecuaciones analíticas con las que se pueden realizar estos estudios sin presentar problemas de integración y estabilidad numérica, y sin la necesidad de aumentar el tamaño del sistema, por lo que se evitan problemas de truncado y se reduce el costo computacional.

## 1.4. Metodología.

La metodología utilizada para el desarrollo de esta tesis se describe a continuación.

Primero se revisa el estado del arte de los métodos a utilizar a lo largo del documento. Se investigan las técnicas que existen para el modelado de sistemas lineales variantes en el tiempo y las diferentes herramientas que se emplean para analizarlos.

Se analiza la estructura matemática de los sistemas lineales variantes en el tiempo, haciendo énfasis en los sistemas de tipo periódico, y se revisan los fundamentos de la teoría de Floquet, así como de los dos principales resultados derivados de ella: la descomposición de Floquet y la transformación Floquet-Lyapunov.

Se estudia el comportamiento complejo de los convertidores de potencia derivado de su estructura física y de los componentes que forman sus circuitos; así como las diferentes técnicas utilizadas comúnmente para controlarlos. También se analizan los diversos modelos matemáticos con los que se pueden representar y se revisa en detalle su modelo

lineal periódico.

Posteriormente, se desarrollan herramientas analíticas para el análisis de los convertidores de potencia para obtener respuestas en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia, análisis de estabilidad y se plantea un algoritmo capaz de identificar la matriz de transición de estado que permite posteriormente identificar los parámetros del convertidor.

Finalmente, se ponen a prueba las técnicas desarrolladas en tres diferentes casos de estudio, dos convertidores DC-DC y un convertidor AC-DC, comparándolas con simulaciones numéricas obtenidas del software Wolfram Mathematica, que utiliza modelos inteligentes para la selección de métodos numéricos para resolver las ecuaciones diferenciales, generalmente el método de Runge-Kutta de 4° y 5° orden.

## **1.5. Hipótesis.**

Es posible realizar, a través de la teoría de Floquet, un modelado y análisis de convertidores de potencia tan eficaz y eficiente como las metodologías basadas en representaciones lineales invariantes en el tiempo utilizadas más comúnmente.

## **1.6. Objetivos de la Tesis.**

### **1.6.1. Objetivo general**

Utilizar la teoría de Floquet como una herramienta para el modelado y análisis de convertidores de potencia y validar su eficacia con diferentes casos de estudio.

### **1.6.2. Objetivos particulares**

- Utilizar la teoría de Floquet para hacer un estudio de estado estable en convertidores de potencia.

- Obtener la respuesta en el dominio del tiempo en convertidores de potencia a través de la descomposición de Floquet.
- Realizar un análisis en el dominio de la frecuencia de distintos convertidores de potencia utilizando la teoría de sistemas periódicos.
- Efectuar un estudio de análisis modal en convertidores de potencia para determinar la estabilidad del sistema.
- Desarrollar un algoritmo para identificar el sistema aplicable a convertidores de potencia.

## 1.7. Descripción de Capítulos.

El contenido de esta tesis se estructura en seis capítulos, los cuales se describen brevemente a continuación.

El Capítulo 2 proporciona una visión general de los fundamentos de sistemas lineales periódicos y detalla los principales resultados de la teoría de Floquet. Primero, se describen los sistemas lineales variantes en el tiempo y se dan algunos ejemplos. Posteriormente, se revisan los detalles de la matriz de transición de estado, se establecen sus propiedades, y se presentan algunos métodos para obtenerla. Finalmente, se discuten los conceptos de Matriz de Monodromía, Descomposición de Floquet y Transformación de Floquet-Lyapunov, todos importantes para el desarrollo de este trabajo.

En el Capítulo 3, se presenta una descripción de las características de los convertidores de potencia y por qué es posible modelarlos como sistemas periódicos. Así mismo, se muestra el comportamiento que tienen los circuitos conmutados y diferentes métodos utilizados para su control. Por último, se mencionan algunas estrategias usadas para el modelado de este tipo de sistemas.



---

En el Capítulo 4, se plantea una metodología para el análisis simbólico de convertidores de potencia basada en la descomposición de Floquet. Se presentan distintos métodos para realizar estudios de estado estable, respuesta en el dominio del tiempo, análisis modal y respuesta en el dominio de la frecuencia. Además, se presenta un algoritmo que permite la identificación del sistema cuando no se conocen los parámetros del modelo a partir del uso de las propiedades de la matriz de transición de estado.

El Capítulo 5 muestra los resultados obtenidos en tres diferentes casos de estudio. Se estudiaron dos convertidores DC-DC (boost y buck-boost), y un convertidor AC-DC (inversor), en los que se comprobaron los procedimientos de cálculo planteados a lo largo de la tesis, comparando con los resultados obtenidos con un método de resolución numérico implementado en la herramienta computacional Wolfram Mathematica.

Por último, en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones generales y se plantean algunos posibles trabajos futuros que se podrían desarrollar para continuar con esta línea de investigación.



## Capítulo 2

# Revisión de la Teoría de Floquet.

### 2.1. Introducción.

En este capítulo se introducen los fundamentos teóricos que sirven como base para la aplicación de las técnicas de análisis que se utilizan en este trabajo. Se presentan de manera formal los conceptos que forman parte de la teoría de Floquet y se establece la terminología que se usará a lo largo del documento.

Así mismo, de manera general se realiza una breve introducción a los sistemas variantes en el tiempo, y se muestran algunos ejemplos de cómo estos sistemas se presentan en el mundo real. Posteriormente, se introduce el concepto de matriz de transición de estado y algunos métodos mediante los cuales se puede obtener. Finalmente, se analizan dos herramientas importantes dentro de la teoría de Floquet que serán ampliamente utilizadas a lo largo de esta tesis: la descomposición de Floquet y la transformación de Floquet-Lyapunov.

### 2.2. Descripción de los Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo.

Existen un tipo de sistemas que han sido estudiados ampliamente y que están bien documentados en la literatura, los cuales pueden ser descritos por modelos causales,

lineales e invariantes en el tiempo, y a partir de los cuales se han desarrollado a través de los años distintos métodos de análisis que se utilizan en la ingeniería y otras disciplinas. Sin embargo, existen sistemas que no necesariamente cumplen con esta característica de ser invariantes en el tiempo. Es por esta razón que en la presente tesis se aborda el análisis de un grupo de sistemas mucho más amplio: el de los sistemas variantes en el tiempo. Los conceptos planteados en este capítulo han tomado como base los resultados expuestos por [D'Angelo70, Mohler91, Rugh96].

Los sistemas lineales variantes en el tiempo se pueden representar en un modelo matemático similar, en muchos aspectos, al de los sistemas invariantes en el tiempo, con la diferencia de que los coeficientes que acompañan a las variables de las ecuaciones son funciones del tiempo. Es decir, la ecuación diferencial que describe en forma generalizada a estos sistemas es la siguiente, en el caso escalar, con una sola señal de entrada  $u(t)$  y una sola de salida  $x(t)$ :

$$\alpha_0(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + \alpha_n(t)x(t) = \beta_0(t) \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + \beta_m(t)u(t) \quad (2.1)$$

donde los coeficientes  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  y  $\beta_0, \dots, \beta_m$  son funciones en el tiempo. El caso multivariable (varias entradas  $u_1(t), \dots, u_m(t)$  y varias salidas  $y_1(t), \dots, y_r(t)$ ) se puede representar a través de un espacio de estado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= a_{11}(t)x_1(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_{11}(t)u_1(t) + \dots + b_{1m}(t)u_m(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_{n1}(t)u_1(t) + \dots + b_{nm}(t)u_m(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  son las variables de estado del sistema;  $a_{11}(t), \dots, a_{nn}(t)$  son los coeficientes del sistema y  $b_{11}(t), \dots, b_{nm}(t)$  son los coeficientes asociados a las entradas. Mientras que las salidas se representan como:

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= c_{11}(t)x_1(t) + \cdots + c_{1n}(t)x_n(t) + d_{11}(t)u_1(t) + \cdots + d_{1m}(t)u_m(t) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$y_r(t) = c_{r1}(t)x_1(t) + \cdots + c_{rn}(t)x_n(t) + d_{r1}(t)u_1(t) + \cdots + d_{rm}(t)u_m(t)$$

donde  $c_{11}(t), \dots, c_{rn}(t)$  son los coeficientes de las salidas y  $d_{11}(t), \dots, d_{rm}(t)$  son los coeficientes asociados a la retroalimentación.

El sistema multivariable descrito por los sistemas de ecuaciones (2.2) y (2.3) puede ser expresado en forma compacta como se muestra a continuación:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \tag{2.4}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \tag{2.5}$$

donde  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$ ,  $\mathbf{C}(t)$  y  $\mathbf{D}(t)$  son matrices de orden  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $r \times n$  y  $r \times m$  respectivamente, cuyos elementos son funciones del tiempo y el vector  $\mathbf{x}(t)$ , de orden  $n \times 1$ , es el vector de estado del sistema. El vector  $\mathbf{u}(t)$ , de orden  $m \times 1$ , representa las entradas del sistema y el vector  $\mathbf{y}(t)$ , de orden  $r \times 1$ , a las salidas.

### 2.2.1. Ejemplos de Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo.

Antes de revisar algunos ejemplos de sistemas lineales variantes en el tiempo, se abordará la discusión de cómo es que estos surgen desde el punto de vista matemático. Normalmente, estos sistemas son el resultado de un proceso de linealización al rededor de una trayectoria solución de un sistema no lineal más general [Mohler91].

Supongamos que un objeto se mueve sobre una trayectoria  $x^*(t)$ , que es una solución particular de la siguiente ecuación dinámica, para la condición inicial  $x(0) = x_0^*$ :

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \tag{2.6}$$

donde el vector de estado  $\mathbf{x}(t)$  es de orden  $n \times 1$ , la entrada de control  $\mathbf{u}(t)$  es de orden  $m \times 1$ , y  $\mathbf{f}(\cdot)$  es diferenciable con respecto a los dos argumentos. Entonces

$$\frac{d\mathbf{x}^*(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \quad (2.7)$$

describe la trayectoria solución  $\mathbf{x}^*(t)$ . Debido a que  $\mathbf{f}(\cdot)$  es diferenciable, sabemos que  $\mathbf{x}^*(t)$  y más generalmente  $\mathbf{x}(t)$  es una solución única para (2.6) y (2.7), que corresponden a los valores iniciales dados  $\mathbf{x}(t_0)$ ,  $\mathbf{x}^*(t_0)$  y las entradas especificadas  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{u}^*(t)$ .

Consideremos ahora un pequeño cambio conforme a la trayectoria solución  $\delta\mathbf{x}(t)$  provocada por un pequeño cambio en la entrada  $\delta\mathbf{u}(t)$ , los cuales se pueden plantear de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t) + \delta\mathbf{x}(t) \quad (2.8)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t) + \delta\mathbf{u}(t) \quad (2.9)$$

Por lo cual, al hacer la resta de (2.7) y (2.6), se obtiene una ecuación general de perturbación:

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \quad (2.10)$$

Siempre y cuando  $\mathbf{f}(\cdot, \cdot)$  sea una función analítica, es posible formular su expansión en una serie de Taylor infinita, como sigue:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))\delta\mathbf{x}(t) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))\delta\mathbf{u}(t) + \mathbf{r}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (2.11)$$

El término  $\mathbf{r}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathbf{r}(\mathbf{x}^*(t) + \delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u}^*(t) + \delta\mathbf{u}(t)) = \mathbf{r}(\delta\mathbf{x}(t), \delta\mathbf{u}(t))$  representa el conjunto de términos de un orden mayor a uno. Si consideramos que  $\delta\mathbf{x}(t)$  y  $\delta\mathbf{u}(t)$  tienden al origen, el término  $\mathbf{r}(\delta\mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{u}(t))$  se acercará a cero más rápidamente que los términos lineales en  $\delta\mathbf{x}(t)$  y  $\delta\mathbf{u}(t)$ . Por lo tanto, en un vecindario suficientemente pequeño de  $\mathbf{x}^*(t)$  y  $\mathbf{u}^*(t)$ , la ecuación de perturbación (2.11) aproxima al sistema no lineal original. Despreciando los términos  $\mathbf{r}(\delta\mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{u}(t))$  se tiene:

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))\delta\mathbf{x}(t) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))\delta\mathbf{u}(t) \quad (2.12)$$

Si  $\mathbf{x}^*(t)$  y  $\mathbf{u}^*(t)$  son vectores apropiados para la trayectoria solución, entonces (2.12) es un sistema lineal variante en el tiempo con la siguiente estructura:

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\delta\mathbf{u}(t) \quad (2.13)$$

donde

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \quad (2.14)$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \quad (2.15)$$

En general, podemos decir que si se lleva a cabo una linealización al rededor de una trayectoria solución de un sistema no lineal, se puede llegar a obtener un sistema lineal variante en el tiempo.

Este tipo de sistemas tiene una amplia presencia en la naturaleza y se han documentado numerosos casos en la literatura, por ejemplo en la mecánica cuántica [Kronig31] o en sistemas ecológicos [Klausmeier08].

Un área particular en el que se encuentran en su mayoría sistemas lineales variantes en el tiempo es la electrónica de potencia, ya que los dispositivos que la componen utilizan funciones de conmutación que provocan que el sistema se comporte con diferentes configuraciones conforme avanza el tiempo. Debido a que estos sistemas son los encargados de transformar la energía eléctrica generada a una forma adecuada para su utilización, son muy utilizados en la ingeniería y son de mucha importancia. Ejemplos de dispositivos de la electrónica de potencia que al ser modelados matemáticamente presentan coeficientes dependientes del tiempo en sus ecuaciones son los convertidores de potencia [De Keyser06, Chen18].

Más recientemente se han encontrado otros ejemplos de sistemas variantes con el tiempo en el desarrollo tan acelerado que ha tenido la industria aeroespacial en los últimos años. En el estudio de la dinámica de aeronaves que cambian sus parámetros de acuerdo a las condiciones del ambiente y con el interés de aplicar mecanismos de control adaptativo

a estas, ha llevado a los investigadores a enfrentarse con el análisis de sistemas lineales variantes con el tiempo [Schulz07, Snyder21].

Las ecuaciones que describen la dinámica de vuelo de las aeronaves contienen coeficientes que dependen explícitamente de la velocidad a la que se desplazan. Durante la época de la aviación subsónica; es decir, cuando las velocidades que alcanzaban las aeronaves todavía no superaban la velocidad del sonido, era común buscar hacer constante la velocidad para de esta forma llegar a que las ecuaciones del sistema presentaran coeficientes constantes. Estos resultados eran posibles debido a las aceleraciones relativamente bajas a las que se podían aspirar con este tipo de aeronaves. Actualmente, las aeronaves modernas alcanzan velocidades y aceleraciones que hacen evidente que los parámetros que dependen de la velocidad cambian a un ritmo considerablemente más rápido [D'Angelo70]. Al ir a tan altas velocidades se produce un mayor consumo de combustible y, como consecuencia, se produce un cambio vertiginoso en la masa, el centro de gravedad y los momentos de inercia de la aeronave. Además, debido a los cambios rápidos de altura, se experimentan cambios en las condiciones climáticas que inducen parámetros variantes en el tiempo. Es por estas razones que si se pretende hacer un análisis y control automático en la aeronáutica moderna, es necesario tomar en cuenta los modelos con coeficientes variantes en el tiempo en las ecuaciones diferenciales que los representan matemáticamente.

También se identificó otro desafío que introduce parámetros variantes en el tiempo en el mismo campo del desarrollo espacial. Esta condición se presenta cuando se analizan las ecuaciones que representan la dinámica de los satélites artificiales al intentar llevarlos a la órbita al rededor de un cuerpo celeste, es decir, al desplazarlos de una órbita a otra [D'Angelo70]. Estas ecuaciones tienen variaciones cíclicas en los términos relacionados con el torque mientras el satélite se desplaza sobre la órbita. Las maniobras de control para llevar a la aeronave al curso correcto ocasionan cambios en el torque y las pequeñas variaciones entre órbitas introducen parámetros que cambian con el tiempo, en este caso particular, las ecuaciones diferenciales que describen al sistema presentan coeficientes periódicos y aperiódicos que deben tomarse en cuenta.



## 2.3. Matriz de Transición de Estado.

La matriz de transición de estado se define como la relación que existe entre las variables de estado de un sistema lineal, sus condiciones iniciales y las entradas [D'Angelo70, Rugh96]. Al conocer esta matriz, se puede encontrar la solución a las ecuaciones diferenciales que describen al sistema. A continuación se presentan las principales propiedades de la matriz de transición de estado y los detalles de como obtenerla.

### 2.3.1. Respuesta Homogénea.

Consideremos ahora la ecuación dinámica de estado del sistema homogéneo; es decir, el caso en el que la entrada es igual a cero ( $\mathbf{u}(t) = 0$ ):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (2.16)$$

La solución de (2.16) es conocida como la respuesta homogénea y se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 \quad (2.17)$$

En donde  $\Phi(t, t_0)$  es conocida como la matriz de transición de estado. La primera columna de  $\Phi(t, t_0)$  es la solución de (2.16) con condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = (1, 0, \dots, 0)^T$ , la segunda columna de  $\Phi(t, t_0)$  es la solución de (2.16) con condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = (0, 1, \dots, 0)^T$  y así sucesivamente hasta llegar a que la condición inicial para obtener la última columna es  $\mathbf{x}(t_0) = (0, 0, \dots, 1)^T$ .

### 2.3.2. Propiedades de la Matriz de Transición de Estado.

Es importante conocer las propiedades de la matriz de transición de estado, ya que a través de ella se pueden conocer muchas características fundamentales de un sistema. Algunas de las propiedades más importantes se listan a continuación:

1.  $\Phi(t, \tau)$  es no singular para todo  $t$  y  $\tau$ .

2.  $\Phi(t, t) = \mathbf{I}_n$ . En este caso  $\mathbf{I}_n$  es una matriz identidad de orden  $n$ . Esta propiedad se deduce al hacer  $t = t_0$  en (2.17).
3.  $\Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0)$ . Esta propiedad nos indica que el producto de dos matrices de transición de estado en diferentes intervalos de tiempo consecutivos, en este caso los intervalos  $[t_0, t_1]$  y  $[t_1, t_2]$ , es igual a la matriz de transición de estado tomando en cuenta el intervalo  $[t_0, t_2]$ .
4.  $\Phi^{-1}(t, \tau) = \Phi(\tau, t)\forall t, \tau$ . La inversa de la matriz de transición de estado es igual a la matriz de transición de estado del mismo sistema en el sentido opuesto.
5.  $\frac{d}{dt}\Phi(t, \tau) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, \tau)$ . Esto se puede establecer al observar que para un sistema como el descrito por (2.16) con condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , su respuesta es  $\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0$ . Al derivar la respuesta homogénea dada por (2.17):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\Phi(t, \tau)}{dt}\mathbf{x}_0 \quad (2.18)$$

y comparándola con (2.16) podemos obtener:

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt}\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 \quad (2.19)$$

### 2.3.3. Cálculo de la Matriz de Transición de Estado.

Existen diferentes métodos con los que se puede calcular la matriz de transición de estado [Moler03], sin embargo, en este trabajo de tesis se presentan dos: la aproximación simbólica a través de la serie de Peano-Baker y la integración numérica que se obtiene utilizando la propiedad número 5 mencionada en la sección anterior.

#### 2.3.3.1. Aproximación Simbólica de la Matriz de Transición de Estado.

Si se considera el sistema descrito por (2.16), es posible obtener una aproximación simbólica de la matriz de transición de estado por la serie generalizada de Peano-Baker de la siguiente manera [Rugh96]:

$$\begin{aligned} \Phi(t, \tau) &= \mathbf{I} + \int_{\tau}^t \mathbf{A}(s_1)ds_1 + \int_{\tau}^t \mathbf{A}(s_1) \int_{\tau}^{s_1} \mathbf{A}(s_2)ds_2ds_1 \\ &+ \int_{\tau}^t \mathbf{A}(s_1) \int_{\tau}^{s_1} \mathbf{A}(s_2) \cdots \int_{\tau}^{s_{i-1}} \mathbf{A}(s_i)ds_i \cdots ds_1 + \cdots \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde  $\mathbf{I}$  es una matriz identidad de orden  $n$ .

Calcular de esta manera la matriz de transición puede resultar complicado cuando se trata de sistemas grandes, debido al alto costo computacional que involucra. Sin embargo, se han desarrollado técnicas que proveen de una mayor eficiencia en ciertos casos, como las aproximaciones utilizando los polinomios de Chesbyshev [Sinha97] o la serie de Magnus [Butcher09].

### 2.3.3.2. Integración Numérica de la Matriz de Transición de Estado.

A lo largo de esta tesis se ha utilizado principalmente la propiedad número 5 de las matrices de transición de estado, mencionada anteriormente, para obtener una representación numérica de la matriz de transición de estado, donde  $\Phi(t, t_0)$  satisface la siguiente ecuación con las condiciones iniciales especificadas:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) &= \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0) \\ \Phi(t_0, t_0) &= \mathbf{I}_n\end{aligned}\tag{2.21}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones dado por (2.21), sujeto a las condiciones iniciales propuestas, se obtiene la matriz de transición de estado del sistema de forma numérica.

### 2.3.4. Respuesta del Sistema ante una Entrada.

Hasta el momento se consideró únicamente la respuesta homogénea de un sistema variante en el tiempo, es decir, que no está sujeto a excitaciones externas. En esta sección se mostrará la respuesta del sistema ante una entrada externa.

Considere el sistema descrito por (2.4), en donde se puede observar la presencia de la matriz  $\mathbf{B}(t)$  y el vector de entradas  $\mathbf{u}(t)$ . Si las condiciones iniciales son iguales a  $\mathbf{x}_0$ , la respuesta de este sistema está dada por:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau\tag{2.22}$$

Se puede observar que el lado derecho de la ecuación está formado por dos partes, la respuesta complementaria u homogénea (primer término) y la respuesta particular o forzada (segundo término). Se puede comprobar que (2.22) es la solución de (2.4) al llevar a cabo el siguiente procedimiento. Derivando (2.22) se obtiene:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d}{dt}\Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \Phi(t, t)\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \int_{t_0}^t \frac{d}{dt}\Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (2.23)$$

sustituyendo (2.21) en (2.23) se tiene que:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(t)\Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (2.24)$$

factorizando  $\mathbf{A}(t)$ :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \left[ \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \right] + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (2.25)$$

de donde podemos observar que la expresión dentro de los corchetes es igual al lado derecho de la ecuación (2.22), por lo tanto, es solución del sistema descrito por (2.4).

Con (2.22) se puede intuir que el aspecto central en el cálculo de la respuesta completa de un sistema se reduce a la obtención de la matriz de transición de estado.

## 2.4. Teoría de Floquet.

Existe un caso especial de los sistemas lineales variantes en el tiempo en el que los coeficientes de las ecuaciones diferenciales evolucionan en el tiempo de manera periódica. Este tipo de sistemas tienen la misma forma descrita por las ecuaciones (2.4) y (2.5), con la particularidad de que sus matrices de coeficientes son funciones del tiempo con las siguientes condiciones de periodicidad:

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t + T), \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{B}(t + T), \quad \mathbf{C}(t) = \mathbf{C}(t + T), \quad \mathbf{D}(t) = \mathbf{D}(t + T) \quad (2.26)$$

donde  $T$  es el periodo fundamental del sistema.

En el año de 1883, el matemático francés Gaston Floquet desarrolló un análisis importante para los sistemas periódicos que, al día de hoy, sigue siendo una de las metodologías de análisis más utilizadas en la literatura para este tipo de sistemas [Floquet83].

Algunos ejemplos de casos en los que se ha utilizado este enfoque en la ingeniería son: los análisis de estabilidad del rotor principal de los helicópteros de vuelo frontal [Wereley90], y los resultados al tratar el fenómeno de pandeo (buckling) en las vigas que están sujetas a cargas periódicas axiales [Timoshenko70]. En las siguientes secciones se presentan los principales resultados de la teoría de Floquet y los conceptos que servirán para desarrollar las herramientas utilizadas en los siguientes capítulos.

### 2.4.1. Matriz de Monodromía.

La matriz de estados tiene un lugar fundamental en el análisis de sistemas periódicos debido a que los principales resultados de la teoría de Floquet están basados en ella. Al evaluarla en cada periodo fundamental del sistema, se obtiene un caso particular de la matriz de transición, como se explica a continuación:

**Definición 2.1.** La matriz de transición de estado dada por  $\Phi(t+T, t)$ , se conoce como la matriz de monodromía en el tiempo  $t$ .

**Definición 2.2.** La matriz constante  $\Phi(t+T, t_0)$ , lleva el nombre de matriz fundamental de monodromía.

Comúnmente se asume que  $t_0 = 0$ , por lo que la matriz de monodromía puede ser escrita también como  $\Phi(T, 0)$ . Conociendo esta definición, podemos analizar a continuación los principales resultados de la teoría de Floquet, como la Descomposición de Floquet y la Transformación Floquet-Lyapunov, las cuales son primordiales para el análisis de sistemas lineales periódicos.

### 2.4.2. Descomposición de Floquet.

La descomposición de Floquet es el nombre que se le da a uno de los principales resultados desarrollados por el matemático francés, a partir de la cual se puede separar la matriz de transición de estado de un sistema lineal periódico en el producto de dos matrices, una de ellas periódica ( $\mathbf{P}(t)$ ) y la otra constante ( $\mathbf{Q}$ ). Para entender la descomposición presentada a continuación, primero es necesario conocer el concepto de matriz fundamental:

**Definición 2.3.** Cualquier solución no singular del sistema homogéneo  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$ , de orden  $n$ , es llamado matriz fundamental:

**Teorema 2.1.** [D'Angelo70] Si  $\Phi(t)$  es una matriz fundamental del sistema  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$ , con  $\mathbf{A}(t)$  periódica y de periodo  $T$ , entonces  $\Phi(t+T)$  también es una matriz fundamental. Para cada  $\Phi(t)$ , existe una matriz periódica no singular  $\mathbf{P}(t)$  de periodo  $T$  y una matriz constante  $\mathbf{Q}$  tal que:

$$\Phi(t) = \mathbf{P}(t)e^{\mathbf{Q}t} \quad (2.27)$$

*Demostración.* Debido a que una matriz fundamental satisface la ecuación  $\dot{\Phi}(t) = \mathbf{A}(t)\Phi(t)$ , es posible llegar a lo siguiente:

$$\dot{\Phi}(t+T) = \mathbf{A}(t+T)\Phi(t+T) \quad (2.28)$$

donde se desprende que:

$$\dot{\Phi}(t+T) = \mathbf{A}(t)\Phi(t+T) \quad (2.29)$$

Por lo tanto,  $\Phi(t+T)$  es también una matriz fundamental porque es la solución de la ecuación diferencial del sistema. Debido a que el producto de una matriz constante  $\mathbf{K}$  por una matriz fundamental del sistema, es también una matriz fundamental (ver el teorema 2.6 en [D'Angelo70]), es posible relacionar  $\Phi(t)$  y  $\Phi(t+T)$  a través de una matriz constante  $\mathbf{C}$ :

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)\mathbf{C} \quad (2.30)$$

para la cual definimos la siguiente relación:

$$\mathbf{C} \equiv e^{\mathbf{Q}T} \quad (2.31)$$

sustituyendo (2.31) en (2.30) se llega a:

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)e^{\mathbf{Q}T} \quad (2.32)$$

Al definir la matriz  $\mathbf{P}(t)$  como sigue:

$$\mathbf{P}(t) \equiv \Phi(t)e^{-\mathbf{Q}t} \quad (2.33)$$

y al sustituir (2.32) en (2.33), se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t+T) &= \mathbf{\Phi}(t)e^{\mathbf{Q}t}e^{-\mathbf{Q}t}e^{-\mathbf{Q}t} \\ &= \mathbf{\Phi}(t)e^{-\mathbf{Q}t}\end{aligned}\quad (2.34)$$

Comparando (2.33) y (2.34) se puede ver que:

$$\mathbf{P}(t+T) = \mathbf{P}(t) \quad (2.35)$$

Con lo anterior se concluye que  $\mathbf{P}(t)$  es una matriz periódica. Al postmultiplicar la ecuación (2.33) por el término  $e^{\mathbf{Q}t}$  llegamos a la ecuación (2.27):

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t)e^{\mathbf{Q}t} &= \mathbf{\Phi}(t)e^{-\mathbf{Q}t}e^{\mathbf{Q}t} \\ \mathbf{P}(t)e^{\mathbf{Q}t} &= \mathbf{\Phi}(t)\end{aligned}\quad (2.36)$$

□

Para obtener la matriz constante  $\mathbf{Q}$ , se debe conocer previamente la matriz  $\mathbf{\Phi}(t)$ , para entonces poder utilizar la siguiente relación multievaluada:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{T} \ln \mathbf{\Phi}(T) \quad (2.37)$$

Para poder evaluar (2.37) es necesario realizar algunas operaciones intermedias, ya que para poder obtener el logaritmo de una matriz, esta debe ser invertible y se debe encontrar una matriz de transformación  $\mathbf{V}$  que contenga en sus columnas a los vectores propios de  $\mathbf{\Phi}(t)$ . De esta manera se obtiene lo siguiente:

$$\bar{\mathbf{\Phi}}(T) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{\Phi}(T)\mathbf{V} \quad (2.38)$$

En donde  $\bar{\mathbf{\Phi}}(T)$  es una matriz diagonal que contiene los valores característicos de la matriz  $\mathbf{\Phi}(T)$ . De esta manera, es posible calcular el logaritmo natural de cada uno de los elementos de la diagonal de  $\bar{\mathbf{\Phi}}(T)$  obteniendo la matriz  $\mathbf{D}$ , lo que nos da como resultado lo siguiente:

$$\ln \mathbf{\Phi}(T) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{V} \quad (2.39)$$

La expresión (2.39) nos permite conocer el logaritmo natural de la matriz de transición de estado evaluada en el periodo fundamental para poder sustituirla en (2.37). Es importante mencionar que tanto la matriz  $\mathbf{P}(t)$  como la matriz  $\mathbf{Q}$  pueden ser complejas y una vez calculada la matriz  $\mathbf{Q}$  es posible obtener la matriz  $\mathbf{P}(t)$  a partir de la ecuación (2.33).

### 2.4.3. Transformación Floquet-Lyapunov.

Aleksandr Lyapunov fue un matemático ruso que trabajó con sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes variantes en el tiempo, y que obtuvo resultados similares a los obtenidos por Floquet en Francia. Es por esta razón que la transformación que se describe en esta sección lleva el nombre de estos dos matemáticos, convirtiéndose en una de las principales herramientas utilizadas en el análisis de sistemas lineales periódicos.

Este resultado, al que llegaron ambos, surgió de la necesidad de obtener una representación equivalente de un sistema periódico con la forma de un sistema invariante en el tiempo, de manera que a este sistema transformado se le pueden aplicar todas las técnicas de análisis y control ampliamente conocidas para este tipo de modelos.

Considere la ecuación homogénea del sistema periódico:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (2.40)$$

Se realiza un cambio a las nuevas coordenadas  $\mathbf{z}(t)$ , definiendo la transformación de Floquet-Lyapunov:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t) \quad (2.41)$$

donde la matriz  $\mathbf{P}(t)$  es de periodo  $T$  y se obtiene a través de la expresión (2.33). De esta manera se puede obtener una nueva representación del sistema original mostrado en (2.40), que tiene la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{z}(t) \quad (2.42)$$

Partiendo de (2.41) y derivando esta expresión con respecto del tiempo se tiene que:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{P}(t)\dot{\mathbf{z}}(t) \quad (2.43)$$

despejando  $\dot{\mathbf{z}}(t)$ :

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{P}^{-1}(t) \left[ \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{z}(t) \right] \quad (2.44)$$

Es posible derivar de la expresión de la descomposición de Floquet  $\Phi(t) = \mathbf{P}(t)e^{\mathbf{Q}t}$ , para obtener:

$$\dot{\Phi}(t) = \dot{\mathbf{P}}(t)e^{\mathbf{Q}t} + \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}e^{\mathbf{Q}t} \quad (2.45)$$



despejando

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \left[ \dot{\mathbf{\Phi}}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}e^{\mathbf{Q}t} \right] e^{-\mathbf{Q}t} \quad (2.46)$$

Sustituyendo la propiedad de la matriz de transición dada por  $\dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t)$  y cancelando los términos semejantes se llega a lo siguiente:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t)e^{-\mathbf{Q}t} - \mathbf{P}(t)\mathbf{Q} \quad (2.47)$$

Por lo tanto, al sustituir (2.47) y (2.40) en (2.44), se obtiene:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{P}^{-1}(t) \left[ \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) - (\mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t)e^{-\mathbf{Q}t} - \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}) \mathbf{z}(t) \right] \quad (2.48)$$

Al reordenar los términos:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{P}^{-1}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{P}^{-1}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t)e^{-\mathbf{Q}t}\mathbf{z}(t) + \mathbf{Q}\mathbf{z}(t) \quad (2.49)$$

Despejando  $\mathbf{z}(t)$  de la transformación Floquet-Lyapunov (2.41) se obtiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}^{-1}(t)\mathbf{x}(t) \quad (2.50)$$

Sustituyendo  $\mathbf{z}(t)$  en (2.49):

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{P}^{-1}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{P}^{-1}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t)e^{-\mathbf{Q}t}\mathbf{P}^{-1}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{Q}\mathbf{z}(t) \quad (2.51)$$

De (2.36) podemos obtener que  $\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = e^{-\mathbf{Q}t}\mathbf{P}^{-1}(t)$  y si se sustituye en (2.51), es fácil notar que los dos primeros términos se cancelan entre sí y, por lo tanto, se llega a la siguiente representación equivalente del sistema original:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{z}(t) \quad (2.52)$$

Ahora, se define la matriz  $\mathbf{L}(t)$ , de periodo  $2T$  y que se obtiene usando la siguiente expresión denominada descomposición real de Floquet:

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{\Phi}(t)e^{-\mathbf{Q}_1 t} \quad (2.53)$$

donde la matriz  $\mathbf{Q}_1$  tiene la propiedad de ser siempre una matriz real y está dada por [Coddington55]:

$$\mathbf{Q}_1 = \frac{1}{2T} \ln \mathbf{\Phi}(2T) \quad (2.54)$$

Al utilizar la matriz  $\mathbf{L}(t)$  en la transformación de Floquet-Lyapunov:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{L}(t)\mathbf{z}(t) \quad (2.55)$$

es posible obtener una representación del sistema original que es invariante con el tiempo y que es completamente real:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{Q}_1\mathbf{z}(t) \quad (2.56)$$

La ecuación (2.53) se obtiene de la descomposición real de Floquet que se representa mediante la siguiente expresión:

$$\Phi(t) = \mathbf{L}(t)e^{\mathbf{Q}_1 t} \quad (2.57)$$

Utilizando estas dos transformaciones es posible simplificar el sistema periódico original a uno invariante, con lo cual, es posible aplicar todas las herramientas desarrolladas para este tipo de modelos.

## 2.5. Conclusiones.

En la naturaleza se encuentran presentes una gran cantidad de sistemas con comportamientos variantes en el tiempo. La gran mayoría de métodos utilizados para el estudio de estos sistemas se basa en el uso de técnicas para representarlos como sistemas invariantes en el tiempo. Sin embargo, es posible estudiar los sistemas variantes con el tiempo sin necesidad de realizar una simplificación de este tipo con técnicas como la teoría de Floquet para sistemas con comportamientos periódicos. Los resultados más importantes de la teoría de Floquet, la descomposición de Floquet y la transformación Floquet-Lyapunov, son fundamentales para el desarrollo de este trabajo de tesis.

## Capítulo 3

# Modelado de Convertidores de Potencia como Sistemas Periódicos.

### 3.1. Introducción.

La operación básica de cualquier circuito de electrónica de potencia involucra alternar entre un conjunto de topologías lineales y no lineales bajo un esquema de control determinado [Undeland95]. Por ejemplo, en los convertidores conmutados simples, como los mostrados en la Figura 3.1, los inductores son conectados y desconectados entre la entrada y la salida a través de un elemento conmutado (nombrado  $S$  en la figura). El modo en el que el inductor es conmutado determina el nivel de voltaje de salida y el comportamiento transitorio. Usualmente, un interruptor semiconductor y un diodo son usados para implementar dicha conmutación. A través del uso de circuitos de control, la duración relativa de los diferentes intervalos de conmutación son ajustados constantemente, y dicha acción de control define el comportamiento transitorio y de estado estable del circuito. De esta manera, tanto la topología del circuito como el método de control utilizado determinan el comportamiento dinámico de los circuitos de electrónica de potencia.

En este capítulo se realiza una descripción de los distintos comportamientos que presentan los convertidores de potencia y las metodologías usadas para su modelado. Se

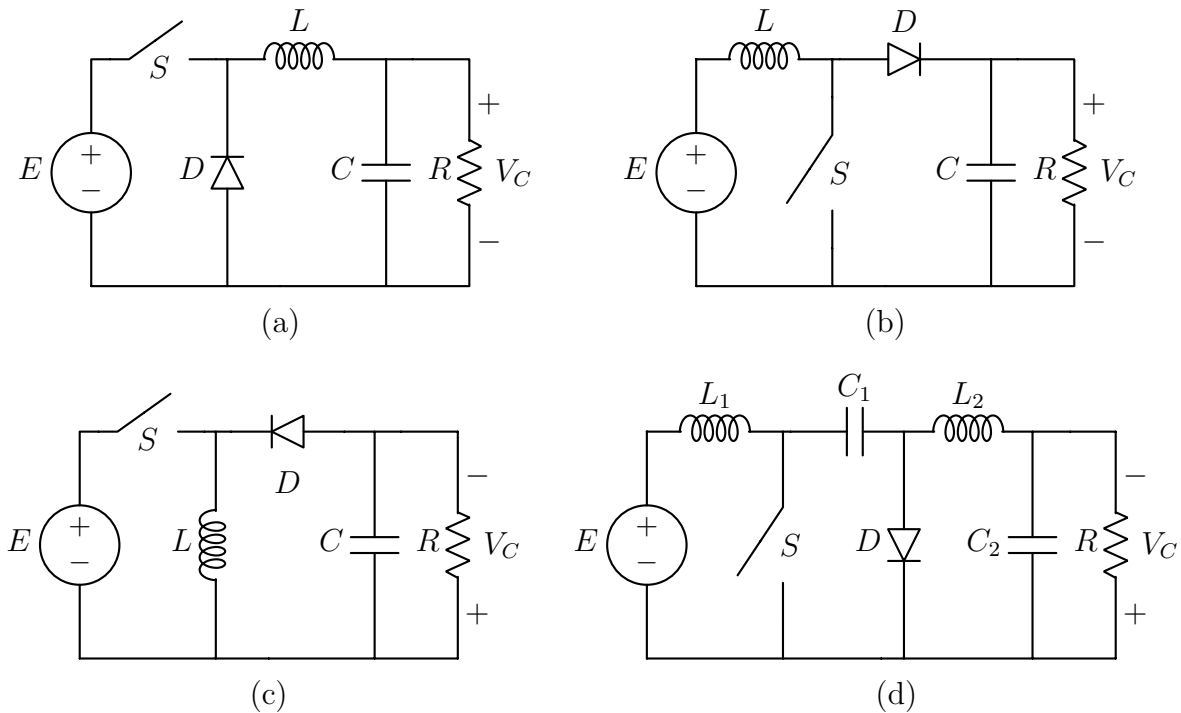


Figura 3.1: Ejemplos de convertidores conmutados simples. (a) convertidor buck; (b) convertidor boost; (c) convertidor buck-boost; (d) convertidor Cuk.

presentan los diferentes métodos de control que es posible utilizar en estos dispositivos y la dinámica que provocan en el sistema, haciendo énfasis en los dos más comunes: el control de voltaje retroalimentado y el control de corriente programado. Finalmente, se desarrolla el modelo lineal periódico de los convertidores de potencia, en el que se utiliza un control de lazo abierto y que será el modelo utilizado en los casos de estudio de este trabajo de tesis.

### 3.2. Convertidores de Potencia Conmutados.

La mayoría de los convertidores de potencia están contruidos con base en los convertidores simples mostrados en la Figura 3.1 [Severns85]. Normalmente, el interruptor y el diodo son activados y desactivados de una manera cíclica y complementaria. El interruptor es directamente controlado por una señal modulada de ancho de pulso que es derivada de un circuito de retroalimentación; mientras que el diodo se activa o desactiva dependiendo de las

condiciones de sus terminales. Cuando el interruptor está cerrado, el diodo está polarizado inversamente y, por lo tanto, está abierto. Bajo estas condiciones, la corriente del inductor aumenta. Cuando el interruptor se abre, el diodo se polariza directamente y forma un corto circuito, lo que provoca que la corriente del inductor disminuya. Este proceso se repite cíclicamente, por lo tanto, el sistema puede ser descrito por un conjunto de ecuaciones de estado, cada una responsable de un estado particular de conmutación. Para el caso descrito anteriormente, tenemos dos ecuaciones de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{B}_1E \quad \text{interruptor cerrado y diodo abierto} \quad (3.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_2\mathbf{x} + \mathbf{B}_2E \quad \text{interruptor abierto y diodo cerrado} \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{x}$  es el vector de estado que usualmente consiste en todos los voltajes de los capacitores y todas las corrientes de los inductores,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son las matrices del sistema y  $E$  es el voltaje de entrada. Además, debido a que la conducción del diodo está determinado por las condiciones de sus propias terminales, existe una posibilidad de que el diodo se abra por si solo cuando el interruptor está abierto. Esto ocurre cuando la corriente del diodo se vuelve cero y no puede invertir su dirección; en la literatura de la electrónica de potencia, a esta condición se le conoce como modo de conducción discontinuo (DCM por sus siglas en inglés). Por el contrario, el modo de conducción continuo (CCM) se presenta cuando el interruptor y el diodo operan de una manera complementaria, es decir, cuando uno está abierto, el otro está cerrado. Claramente, tenemos otra ecuación de estado para la situación en que tanto el interruptor como el diodo están abiertos:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_3\mathbf{x} + \mathbf{B}_3E \quad \text{interruptor cerrado y diodo cerrado} \quad (3.3)$$

En la práctica, la elección entre el modo de conducción continuo y discontinuo en que operará el convertidor es comúnmente una decisión basada en la aplicación en que se implementará. El modo de conducción continuo es más adecuado para aplicaciones de potencia alta debido a que presenta mayor eficiencia, mientras que el modo de conducción discontinuo está limitado a aplicaciones de baja potencia, ya que los picos de corriente presentes producen mayor cantidad de pérdidas cuando la potencia se eleva. Por otro lado, el

diseño del control del modo de conducción discontinuo es más sencillo y generalmente brinda respuestas transitorias más rápidas. Claramente, un gran número de factores determina si el dispositivo operará en el modo de conducción continuo o discontinuo. Por ejemplo, el tamaño de la inductancia determina que tan rápido aumentará y disminuirá la corriente y, por lo tanto, es un factor a tomar en cuenta al escoger el modo de conducción.

### 3.3. Control de Convertidores de Potencia Conmutados.

Ahora examinemos el control de los interruptores de los convertidores; primero, como en todo sistema de control, es necesario una entrada. Para los convertidores conmutados, la elección más habitual es el ciclo de trabajo  $d$ , que es definido como la fracción de un periodo repetido  $T$ , durante el cual el interruptor está cerrado:

$$d = \frac{t_c}{T} \quad (3.4)$$

donde  $t_c$  es el tiempo de duración cuando el interruptor está cerrado. En la práctica, el ciclo de trabajo es controlado continuamente por un circuito de retroalimentación que debe mantener el voltaje de salida a un nivel determinado, incluso aunque existan variaciones en la entrada o en la carga. En estado estable, el voltaje de salida es una función dependiente del ciclo de trabajo y del voltaje de entrada. Para el convertidor buck operando en el modo de conducción continuo, por ejemplo, el balance voltaje-tiempo para el inductor requiere que la siguiente ecuación se satisfaga en el estado estable:

$$(E - V_C)DT = V_C(1 - D)T \rightarrow V_C = DE \quad (3.5)$$

donde las letras mayúsculas representan los valores de estado estable de las variables. Del mismo modo, para los otros convertidores de la Figura 3.1 operando en el modo de conducción continua, tenemos:

$$V_C = \frac{E}{1 - D} \quad \text{convertidor boost} \quad (3.6)$$

$$V_C = \frac{E}{1-D} \quad \text{convertidor buck-boost} \quad (3.7)$$

$$V_C = \frac{E}{1-D} \quad \text{convertidor Cuk} \quad (3.8)$$

Así, podemos ver que al variar el voltaje de entrada y el ciclo de trabajo, el voltaje de salida convergerá en un valor dado por las fórmulas anteriores. Además, en el evento de un transitorio en la carga o en el voltaje de entrada, el voltaje de salida experimentará un transitorio también antes de alcanzar el valor de estado estable de nuevo. Así mismo, en un evento en el que el voltaje de entrada sufra un cambio, el ciclo de trabajo deberá ajustarse de manera que se mantenga el voltaje de salida requerido en el convertidor. Claramente, necesitamos un circuito de control para la regulación del voltaje de salida.

Podemos imaginar que el método de retroalimentación más sencillo compara el voltaje de salida con una referencia y manda una señal de control para ajustar el ciclo de trabajo de manera que el error sea mínimo. También, una retroalimentación completa de estado puede ser considerada. Por ejemplo, en los convertidores buck, boost o buck-boost de segundo orden, tanto el voltaje de entrada como la corriente del inductor pueden ser utilizados para retroalimentar el circuito. En la práctica, dos métodos en particular se convirtieron en el estándar de utilización en la industria para controlar los convertidores conmutados, el control de voltaje retroalimentado y el control de corriente programado, también conocidos como controles en modo voltaje y en modo corriente, respectivamente [Krein98]. El primero utiliza solamente el voltaje de salida en el proceso de retroalimentación y el segundo utiliza tanto el voltaje de salida como la corriente del inductor.

### 3.3.1. Control de Voltaje Retroalimentado.

Un típico convertidor buck controlado en el modo voltaje es mostrado en la Figura 3.2a. La clave de este control está en la presencia de un lazo de retroalimentación que mantiene el seguimiento de la variación en el voltaje de salida y ajusta el ciclo de trabajo de acuerdo a lo requerido. Es decir, en este esquema de control, la diferencia entre el voltaje

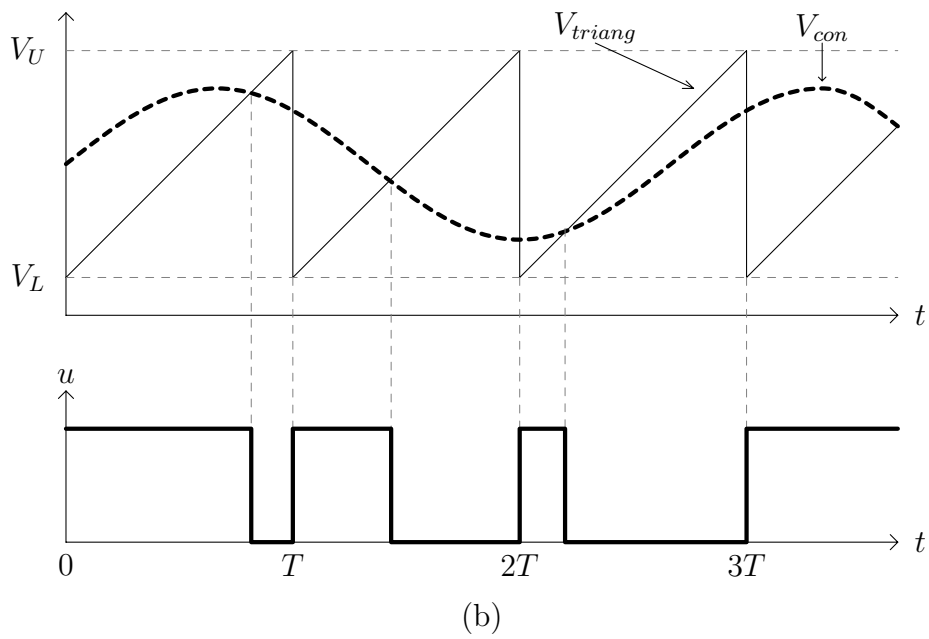
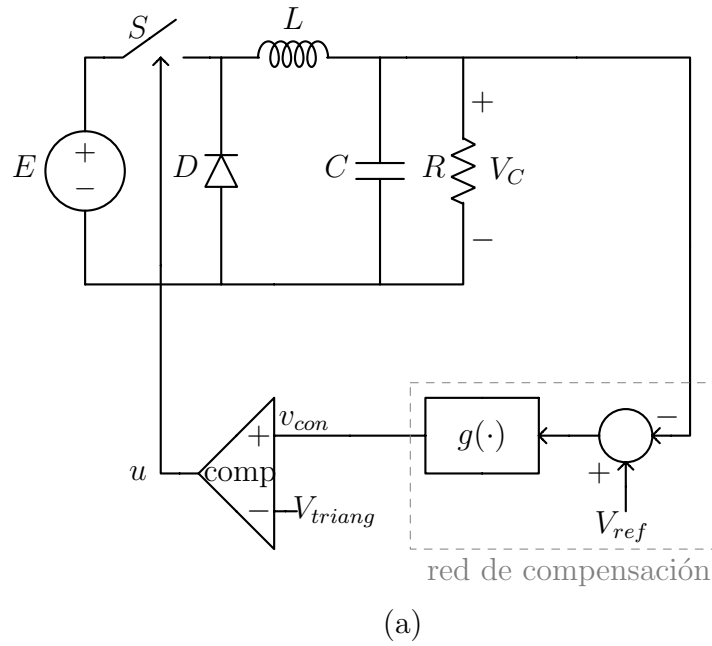


Figura 3.2: Convertidor buck controlado en el modo voltaje. (a) diagrama del circuito; (b) formas de onda de la señal de control y la señal triangular.



de salida  $v_C$  y la señal de referencia  $V_{ref}$ , es procesada por una red de compensación que genera una señal de control  $v_{con}$ , es decir:

$$v_{con}(t) = g(V_{ref} - v_C) \quad (3.9)$$

donde  $g(\cdot)$  es una función determinada por la red de compensación. Esta señal de control indica de manera efectiva cómo se debe variar el ciclo de trabajo para lograr brindar la mejor dinámica transitoria al voltaje de salida. En las implementaciones típicas, esta señal de control es comparada con una señal triangular periódica  $V_{triang}(t)$  para generar una señal modulada de ancho de pulso (PWM) que activa y desactiva los interruptores. La señal triangular normalmente toma la siguiente forma:

$$V_{triang}(t) = V_L + (V_U - V_L) \left( \frac{t}{T} \bmod 1 \right) \quad (3.10)$$

donde  $V_L$  Y  $V_U$  son los valores mínimo y máximo de la señal triangular. La Figura 3.2b muestra la interacción entre el voltaje de control y la señal triangular. Supongamos que la señal de control se mueve en la dirección contraria a la del voltaje de salida, es decir,  $v_{con}$  aumenta cuando el voltaje de salida disminuye y viceversa. Entonces, el voltaje de salida puede ser regulado con la siguiente regla de conmutación:

$$\text{Interruptor} = \begin{cases} \text{cerrado} & \text{si } V_{triang}(t) \leq v_{con}(t) \\ \text{abierto} & \text{si } V_{triang}(t) > v_{con}(t) \end{cases} \quad (3.11)$$

que puede ser fácilmente implementado con un comparador, como se muestra en la Figura 3.2a. Así, el ciclo de trabajo en el  $n$ -ésimo periodo de conmutación  $d_n$ , está dado por:

$$v_{con}((d_n + n)T) = V_{triang}((d_n + n)T) \quad (3.12)$$

Podemos verificar fácilmente en este caso que si se incrementa el valor de la señal de control como resultado de una caída del voltaje de salida, el ciclo de trabajo se incrementará. De esta manera, la acción de retroalimentación regula el voltaje de salida, y la dinámica del lazo cerrado puede ser configurado por la red de compensación.

### 3.3.2. Control de Corriente Programado.

Para el control en modo corriente se utiliza un lazo interno de corriente además del lazo de retroalimentación de voltaje. El objetivo de este lazo interno es forzar a la corriente del inductor para que siga una señal de referencia tomada del lazo de retroalimentación del voltaje de salida, y como resultado, el control en modo corriente muestra una respuesta más rápida. Este tipo de control es aplicado principalmente a los convertidores boost y buck-boost que presentan una respuesta de fase no mínima indeseable [Krein98, Severns85]. Un esquema simplificado se muestra en la Figura 3.3a. La operación del circuito del lazo interno se describe a continuación. Suponga que el interruptor se activa mediante un pulso de reloj. La corriente del inductor comienza a incrementar y tan pronto como alcance el valor de la corriente de referencia  $I_{ref}$ , la salida del comparador sube momentáneamente y apaga el interruptor. La corriente del inductor entonces comienza a descender. El proceso se repite cuando el siguiente pulso del reloj activa de nuevo el interruptor. La Figura 3.3b describe la forma de onda de la corriente del inductor típica. Inspeccionando la forma de onda podemos escribir que el ciclo de trabajo al  $n$ -ésimo periodo de conmutación está dado por:

$$d_n = \frac{I_{ref}((d_n + n)T) - i_L(nT)}{(E/L)T} \quad (3.13)$$

Para alcanzar la regulación de voltaje, se requiere un lazo de voltaje de salida, como se muestra en la Figura 3.3a. Este lazo mide el error en el voltaje de salida y ajusta el valor de  $I_{ref}$  correspondiente. En la práctica, el lazo de corriente interna es mucho más rápido que el lazo de voltaje de salida, y por esta razón cuando estudiamos la dinámica del lazo de corriente interno, asumimos que  $I_{ref}$  es esencialmente constante o varía muy poco.

Teniendo en cuenta la corriente del inductor, el control en modo corriente generalmente tiene un mejor desempeño. En la práctica, sin embargo, la aplicación del control en modo corriente para el convertidor buck no tiene mucha ventaja sobre el control en modo voltaje. Esto es debido a que la información de la corriente del inductor puede ser fácilmente derivada del voltaje de salida en el caso del convertidor buck. Así, con un diseño apropiado

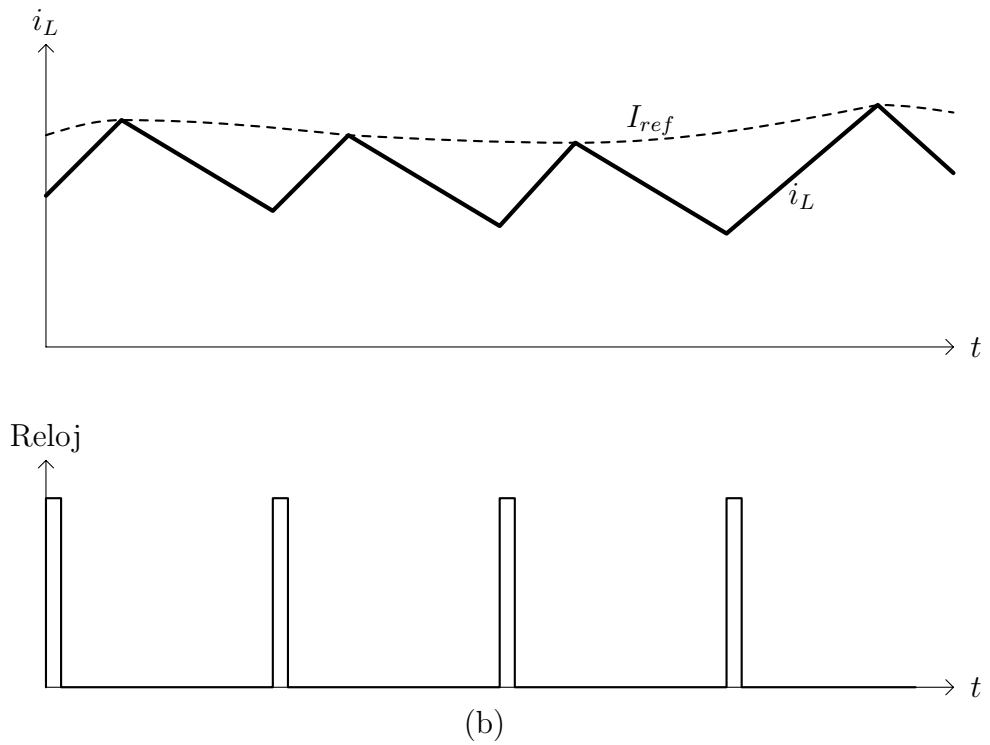
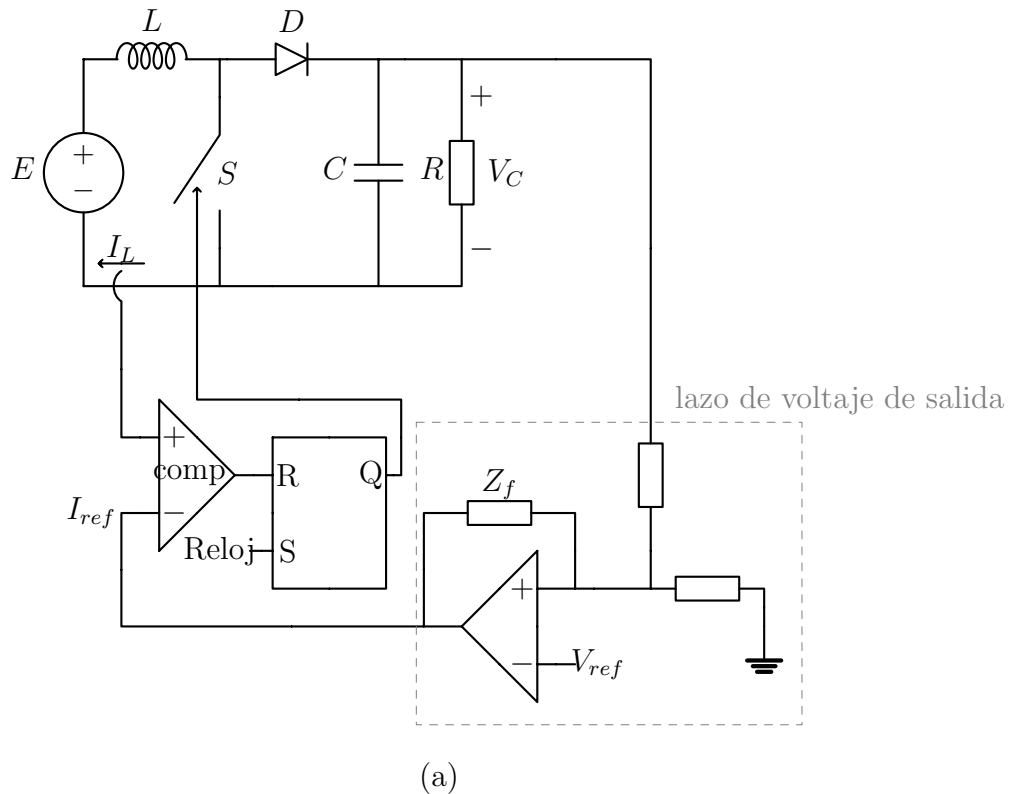


Figura 3.3: Convertidor boost controlado en el modo corriente. (a) esquema del circuito; (b) formas de onda de la corriente del inductor y de la corriente de referencia.

del circuito de compensación, el control en modo voltaje puede alcanzar resultados comparables con el control en modo corriente. Por otro lado, cuando se aplica a los convertidores boost y buck-boost, los beneficios comienzan a ser significativos. Principalmente, ya que la corriente está programada para seguir una corriente de referencia (que a su vez se deriva del voltaje de salida), sus dinámicas de promediación son eliminadas. Por lo tanto, para frecuencias mucho más bajas que la frecuencia de conmutación, la dinámica de la corriente del inductor se vuelve insignificante, haciendo que el diseño del compensador sea mucho más fácil de realizar. Además, con la ausencia de las dinámicas de baja frecuencia de la corriente, el problema de fase no mínima inherente asociado a los convertidores boost y buck-boost se elimina automáticamente. Sin embargo, el control en modo corriente no está completamente exento de problemas de estabilidad, de hecho, se demostró que inestabilidades de alta frecuencia en la forma de subarmónicos y caos son posibles en los convertidores controlados con el modo corriente [Tse03].

### **3.4. Descripción de las Estrategias de Modelado para Convertidores Conmutados.**

Como hemos visto hasta ahora, los convertidores de potencia son esencialmente circuitos conmutados por segmentos. El número de topologías de circuito posibles suele ser fijo y la conmutación se hace de una manera cíclica (aunque no necesariamente periódica debido a la acción de retroalimentación). Esto da como resultado un modo de operación no lineal variante en el tiempo para su análisis y diseño.

Los ingenieros en electrónica de potencia siempre se enfrentan con problemas no lineales y se ven obligados a desarrollar métodos que no se usan normalmente en otras áreas de la teoría de circuitos, por ejemplo, el espacio de estado promediado [Middlebrook76b], el análisis de trayectoria por fase plana [Oruganti85], control basado en Lyapunov [Sanders92], aproximaciones de las series de Volterra [Tymerski91], etc. Teniendo en cuenta esto, para lograr un diseño apropiado de los convertidores de potencia, es necesario seleccionar modelos

simplificados adecuados. En el proceso de derivar modelos, la precisión es frecuentemente intercambiada por la simplicidad por muchas buenas razones prácticas. Debido a que la estabilidad de lazo cerrado y las respuestas transitorias son aspectos de interés en el diseño de sistemas basados en convertidores de potencia prácticos, los modelos que permitan la aplicación directa de los enfoques convencionales de análisis de pequeña señal presentarán grandes ventajas. Por esta razón, mucha investigación en el modelado de circuitos electrónicos de potencia han sido derivados directamente de los modelos linealizados que pueden utilizar el análisis de pequeña señal, siendo la validación limitada el precio a pagar. Otro gran motivo para la utilización de este tipo de modelos es el hecho de que la mayoría de los ingenieros están acostumbrados a utilizar métodos lineales invariantes en el tiempo. El uso de estos modelos para el análisis de convertidores de potencia está ampliamente documentado en la literatura; sin embargo, es importante mencionar que dichos modelos no logran predecir el comportamiento variante en el tiempo de los convertidores.

Dado que nuestro propósito en esta tesis es el análisis de los convertidores de potencia modelados como sistemas periódicos, el comportamiento no lineal derivado de la acción de retroalimentación en el control del convertidor no se tomará en cuenta, es decir, el circuito de control se encontrará en lazo abierto, de manera que los interruptores serán activados y desactivados por señales PWM fijas y periódicas, como se muestra en el ejemplo de la Figura 3.4.

Por esta razón, los coeficientes dependientes del tiempo que presentan las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica de los convertidores electrónicos de potencia que analizaremos, son debidos únicamente a que los interruptores cambian su estado periódicamente entre varias configuraciones. La ecuación que describe este comportamiento de los circuitos se puede representar, de manera compacta, de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{U}(t) \quad (3.14)$$

en donde  $\mathbf{x}(t)$  es el vector de estado del sistema de orden  $n \times 1$  y  $\mathbf{A}(t)$  es una matriz de orden  $n \times n$  que contiene coeficientes periódicos variantes con el tiempo que cumplen con

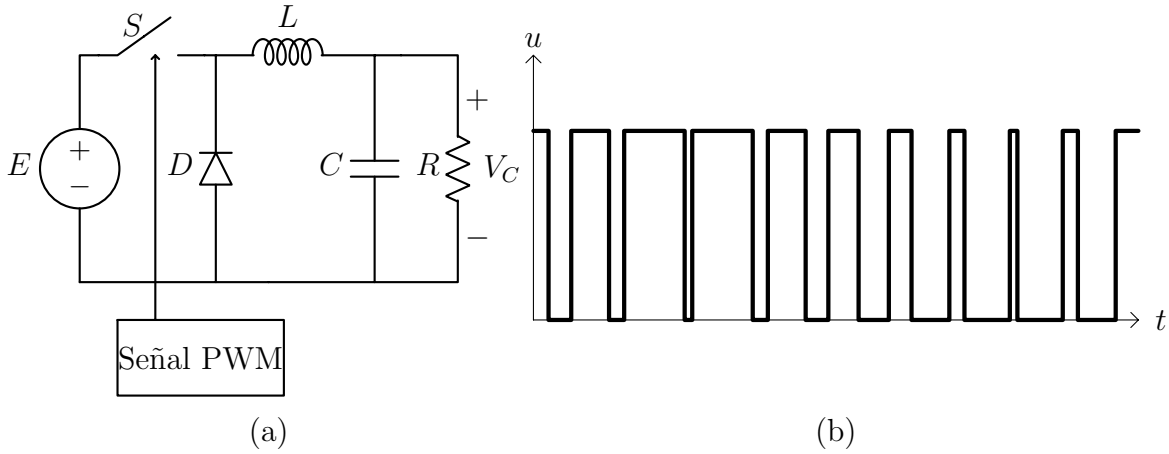


Figura 3.4: Convertidor buck controlado en lazo abierto. (a) diagrama del circuito; (b) forma de onda de la señal PWM.

la siguiente propiedad:

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t + T) \text{ para } kT \leq t \leq (k + 1)T \quad (3.15)$$

donde  $T$  es el periodo fundamental y  $k \in \mathbb{Z}$ . Por otro lado,  $\mathbf{U}(t)$  es un vector de entradas de orden  $n \times 1$  y también presenta un comportamiento periódico. La matriz  $\mathbf{A}(t)$  y el vector de entradas se puede representar de manera generalizada como:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) & \cdots & u_n(t) \end{bmatrix}^T \quad (3.17)$$

De esta manera, el modelo de los convertidores de potencia tiene la misma forma que los sistemas lineales variantes en el tiempo mostrado en el Capítulo 2, por lo que las técnicas presentadas anteriormente pueden ser utilizadas en ellos. En el próximo capítulo se presenta el procedimiento para realizar un análisis detallado de los convertidores de potencia tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia.

### 3.5. Conclusiones.

Los convertidores de potencia son dispositivos que, de manera generalizada, presentan comportamientos no lineales variantes en el tiempo debido a la dinámica que proporcionan los elementos conmutados y las técnicas de control que se les aplican. Sin embargo, a lo largo de la historia se desarrollaron diferentes metodologías que permiten simplificar estos comportamientos complejos en modelos más sencillos de estudiar. Los enfoques más habituales son los que utilizan representaciones lineales invariantes en el tiempo para caracterizar dichos sistemas, intercambiando la precisión de los resultados por simplicidad.

Una alternativa a dichas metodologías invariantes en el tiempo es la de modelar a los convertidores de potencia como sistemas lineales periódicos, de manera que su naturaleza variante en el tiempo no se desprecia. Esto se logra al controlar los interruptores del circuito mediante señales fijas, es decir, un control de lazo abierto, de manera que la no linealidad debida a la retroalimentación no se presenta y es posible utilizar metodologías como la teoría de Floquet para estudiarlos y analizarlos.





## Capítulo 4

# Aplicación de la Teoría de Floquet a Convertidores de Potencia.

### 4.1. Introducción.

En este capítulo se describe la metodología para realizar un análisis de los convertidores de potencia utilizando la descomposición de Floquet como base, obteniendo expresiones con las que se puede obtener el estado estable, la respuesta completa del convertidor en el dominio del tiempo, estabilidad y la respuesta a la frecuencia, además de un método para realizar la identificación del sistema. La metodología descrita en este capítulo posteriormente se pondrá en práctica en tres diferentes casos de estudio: el convertidor reductor (buck), el convertidor elevador (boost) y un convertidor AC-DC (VSC).

El análisis y diseño de convertidores de potencia usualmente se basa en modelos de impedancia desarrollados utilizando técnicas de promediación y linealización. Con este enfoque, los métodos de promediación en [Krein90] y [Sun97] son aplicados primero a modelos de convertidores individuales para eliminar su discontinuidad. El modelo promediado resultante es típicamente no lineal y puede ser linealizado al rededor de un punto de operación para desarrollar modelos lineales de pequeña señal, usualmente expresados en forma de impedancias de entrada y de salida. Posteriormente, la estabilidad del sistema puede

ser determinada al dividir la impedancia entre una fuente y una carga de un subsistema, y aplicar el criterio de estabilidad de Nyquist a la relación entre la impedancia de salida de la fuente y la impedancia de entrada de la carga [Middlebrook76a]. Este análisis del sistema basado en la impedancia primero se desarrolló para el estudio de las interacciones dinámicas de los convertidores dc-dc y sus filtros de entrada [Middlebrook76a], y posteriormente se convirtió en la base para el análisis de estabilidad de sistemas de potencia distribuidos complejos [Sun00]. Los requerimientos de estabilidad de los sistemas basados en impedancias pueden ser también utilizados para definir las especificaciones de impedancia para cargas individuales, de manera que la estabilidad del sistema pueda ser garantizada por diseño [Feng02]. Sin embargo, estas especificaciones son casi siempre muy conservadoras, dando como resultado un incremento en el tamaño y costo del diseño del sistema.

La mayoría de los métodos de promediación pueden ser aplicados a los convertidores con entrada y/o salida de AC que comúnmente se encuentran en los sistemas de potencia. Los modelos promediados resultantes, sin embargo, son no lineales en general y no es posible linealizarlos con métodos convencionales de linealización de pequeña señal, debido a sus trayectorias de operación variantes en el tiempo de forma periódica. Entonces, al no ser posible utilizar técnicas de linealización y utilizar la teoría de control no lineal a este tipo de sistemas complejos no resulta práctico; uno frecuentemente se ve en la necesidad de utilizar simulaciones numéricas para poder entender el comportamiento del sistema y sus interacciones. Sin embargo, la simulación por sí sola no produce la información cualitativa e interna que los métodos analíticos nos pueden brindar. Incluso con el gran poder de cómputo de los equipos actuales, el tiempo de simulación puede ser demasiado grande para sistemas de potencia complejos, particularmente cuando la simulación tiene que ser repetida varias ocasiones con distintos parámetros con el objetivo de cubrir varios escenarios de diseño y desarrollar conclusiones generales. La convergencia numérica también puede llegar a ser un problema mayor, especialmente cuando los modelos son obtenidos por medios diferentes.

Los sistemas de potencia tradicionales lidian con el comportamiento variante en el tiempo utilizando modelos basados en fasores [Kundur07]. Con este enfoque, los voltajes

y corrientes sinusoidales son modelados como fasores que se convierten en variables de DC en estado estable, permitiendo que los modelos puedan ser linealizados con el análisis de pequeña señal. Otro método que es más comúnmente utilizado en la electrónica de potencia es el de transformar el modelo a un marco de referencia rotatorio (dq) en el que las variables trifásicas balanceadas se convierten en variables de DC, igualmente permitiendo el análisis de pequeña señal [Krause13]. La teoría de estabilidad de sistemas basada en la impedancia discutida anteriormente ha sido también generalizada a dichos sistemas en coordenadas dq transformadas [Belkhat97], y han sido utilizados para analizar las interacciones de convertidores PWM trifásicos con sus filtros de entrada [Hiti96, Mao98]. En algunos casos especiales, la no linealidad del circuito de electrónica de potencia puede ser eliminada utilizando técnicas de modelado de orden reducido, de manera que la linealización por pequeña señal puede ser evitada [Sun05]. También, la linealización armónica ha sido desarrollada como un nuevo método sistemático para linealizar sistemas no lineales variantes en el tiempo de forma periódica, y se ha aplicado exitosamente a convertidores de corrección de factor de potencia monofásicos (PFC) [Sun08], así como a rectificadores de diodos no controlados [Bing09].

Sin embargo, una metodología que nos brinde soluciones analíticas a este tipo de análisis nos brindaría mayor información de los sistemas. Es por esto que en este trabajo de tesis utilizaremos los conceptos derivados de la teoría de Floquet mostrada en el Capítulo 2 para realizar los diferentes análisis de los convertidores de potencia, como se describe a continuación.

## 4.2. Respuesta en el Dominio del Tiempo.

Considere el siguiente sistema periódico de orden  $n$ :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (4.1)$$

y por simplicidad considere que el producto de  $\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t)$  y que el tiempo inicial es cero ( $t_0 = 0$ ). La solución general del sistema descrito en (4.1) se puede escribir como:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, 0)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t, \tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau \quad (4.2)$$

De la solución (4.2), usando las propiedades de la matriz de transición presentadas en la sección 2.3.2 y denotando  $\Phi(t, 0) = \Phi(t)$ , podemos descomponer la matriz de transición que aparece dentro de la integral para llegar a lo siguiente:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau \quad (4.3)$$

Ahora, aplicando la descomposición de Floquet:

$$\Phi(t) = \mathbf{P}(t)e^{\mathbf{Q}t} \quad (4.4)$$

$$\Phi^{-1}(t) = e^{-\mathbf{Q}t}\mathbf{P}^{-1}(t) \quad (4.5)$$

y sustituyendo en (4.3), se puede reescribir la solución como:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}(t)e^{\mathbf{Q}t}\mathbf{x}_0 + \mathbf{P}(t)e^{\mathbf{Q}t} \int_0^t e^{-\mathbf{Q}\tau}\mathbf{P}^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau \quad (4.6)$$

El lado derecho de (4.6) se puede separar en dos términos, el primero, es la solución del sistema homogéneo, también conocida como solución complementaria  $\mathbf{x}_c(t)$  o no forzada, sujeta a la condición inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , es decir:

$$\mathbf{x}_c(t) = \mathbf{P}(t)e^{\mathbf{Q}t}\mathbf{x}_0 \quad (4.7)$$

Se puede concluir que esta solución complementaria del sistema será periódica si y solo si  $\mathbf{Q} = 0$ . También podemos ver si  $\mathbf{Q}$  tiene valores propios con parte real negativa, entonces el sistema es asintóticamente estable y la solución complementaria desaparecerá con el tiempo.

El segundo término del lado derecho de (4.6) representa la respuesta forzada de la solución, conocida también como solución particular y será la única que prevalezca al transcurrir el tiempo si el sistema es asintóticamente estable, por esta razón también se conoce como la respuesta de estado estable del sistema:

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{P}(t)e^{\mathbf{Q}t} \int_0^t e^{-\mathbf{Q}\tau}\mathbf{P}^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau \quad (4.8)$$

En este punto, se puede hacer uso de la expansión en series de Fourier para obtener una representación de las matrices  $\mathbf{P}(t)$  y  $\mathbf{P}^{-1}(t)$  a través de las siguientes expresiones:

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{m=-h}^h \bar{\mathbf{P}}_m e^{jm\omega_0 t} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{P}^{-1}(t) = \sum_{k=-h}^h \hat{\mathbf{P}}_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4.10)$$

en donde  $\omega_0$  es la frecuencia angular fundamental  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ ,  $h$  es el número de armónicos considerados en la serie,  $\bar{\mathbf{P}}$  y  $\hat{\mathbf{P}}$  son los coeficientes de la expansión en las series de Fourier de  $\mathbf{P}(t)$  y  $\mathbf{P}^{-1}(t)$ , respectivamente. Al mismo tiempo, se puede hacer uso del teorema de Sylvester descrito en [D'Angelo70] y expresar los términos  $e^{\mathbf{Q}t}$  y  $e^{-\mathbf{Q}t}$  de la siguiente manera:

$$e^{\mathbf{Q}t}(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \mathbf{Z}_{\lambda_i} \quad (4.11)$$

$$e^{-\mathbf{Q}t}(t) = \sum_{i=1}^n e^{-\lambda_i t} \mathbf{Z}_{\lambda_i} \quad (4.12)$$

donde la variable  $\lambda_i$  representa a los valores característicos de la matriz  $\mathbf{Q}$  que proviene de la descomposición de Floquet. La matriz  $\mathbf{Z}_i$  corresponde a los covariantes de Frobenius de  $\mathbf{Q}$  y  $n$  es el orden del sistema.

Considerando un caso más general en el que el vector de entrada  $\mathbf{f}(t)$  es periódico, pero con una frecuencia fundamental diferente  $\omega_i$  a la del sistema en cuestión, se puede también llevar a cabo su expansión en series de Fourier:

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{l=-h}^h \mathbf{F}_l e^{jl\omega_i t} \quad (4.13)$$

y si se sustituye (4.10), (4.12) y (4.13) en (4.8), se obtiene lo siguiente:

$$x_p(t) = \mathbf{P}(t) e^{\mathbf{Q}t} \int_0^t \left( \sum_{i=1}^n e^{-\lambda_i \tau} \mathbf{Z}_{\lambda_i} \right) \left( \sum_{k=-h}^h \hat{\mathbf{P}}_k e^{jk\omega_0 \tau} \right) \left( \sum_{l=-h}^h \mathbf{F}_l e^{jl\omega_i \tau} \right) d\tau \quad (4.14)$$

Agrupando las sumatorias como una sumatoria triple anidada y moviendo la integral dentro de las sumatorias, se obtiene:

$$x_p(t) = \mathbf{P}(t) e^{\mathbf{Q}t} \sum_{i=1}^n \sum_{k=-h}^h \sum_{l=-h}^h \mathbf{Z}_{\lambda_i} \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{F}_l \int_0^t e^{(-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i)\tau} d\tau \quad (4.15)$$

Realizando la integral se obtiene:

$$x_p(t) = \mathbf{P}(t)e^{\mathbf{Q}t} \sum_{i=1}^n \sum_{k=-h}^h \sum_{l=-h}^h \mathbf{Z}_{\lambda_i} \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{F}_l \frac{e^{(-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i)t} - 1}{-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i} \quad (4.16)$$

La expresión (4.16) se puede reescribir como:

$$x_p(t) = \mathbf{P}(t)e^{\mathbf{Q}t} \sum_{i=1}^n \sum_{k=-h}^h \sum_{l=-h}^h \mathbf{Z}_{\lambda_i} \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{F}_l \frac{e^{(-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i)t}}{-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i} - \mathbf{P}(t)e^{\mathbf{Q}t} \mathbf{K} \quad (4.17)$$

donde  $\mathbf{K}$  está definida como:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=-h}^h \sum_{l=-h}^h \frac{\mathbf{Z}_{\lambda_i} \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{F}_l}{-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i} \quad (4.18)$$

En este punto se puede remplazar  $\mathbf{P}(t)$  en su expansión de Fourier mostrada en (4.9) y usando el teorema de Sylvester en  $e^{\mathbf{Q}t}$  de acuerdo con (4.11), la solución queda como:

$$x_p(t) = \left( \sum_{m=-h}^h \bar{\mathbf{P}}_m e^{jm\omega_0 t} \right) \left( \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \mathbf{Z}_{\lambda_i} \right) \sum_{i=1}^n \sum_{k=-h}^h \sum_{l=-h}^h \mathbf{Z}_{\lambda_i} \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{F}_l \frac{e^{(-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i)t}}{-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i} - \mathbf{P}(t)e^{\mathbf{Q}t} \mathbf{K} \quad (4.19)$$

Utilizando la propiedad de las matrices  $\mathbf{Z}_i$  del teorema de Sylvester [D'Angelo70]:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{\lambda_i}^2 &= \mathbf{Z}_{\lambda_i} \\ \mathbf{Z}_{\lambda_i} \mathbf{Z}_{\lambda_j} &= 0, \text{ para } i \neq j \end{aligned} \quad (4.20)$$

Podemos simplificar la expresión de la respuesta particular como:

$$x_p(t) = \sum_{m=-h}^h \sum_{i=1}^n \sum_{k=-h}^h \sum_{l=-h}^h \left( \bar{\mathbf{P}}_m \mathbf{Z}_{\lambda_i} \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{F}_l \frac{e^{j(m\omega_0 + k\omega_0 + l\omega_i)t}}{-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i} \right) - \mathbf{P}(t)e^{\mathbf{Q}t} \mathbf{K} \quad (4.21)$$

### 4.3. Análisis de Estado Estable.

El correcto estudio del estado estable de los sistemas es de mucha importancia para el análisis y diseño de los convertidores de potencia. Los modelos más valiosos para este análisis son aquellos que son capaces de brindar expresiones precisas para las formas de

onda del convertidor, ya que esto permite determinar los límites de corriente y voltaje de los elementos del circuito y, por lo tanto, realizar una correcta selección de ellos, estimar las pérdidas, realizar comparaciones entre diferentes topologías, etc. Sin embargo, por la naturaleza variante en el tiempo propia de estos circuitos con comportamientos complejos en el dominio del tiempo, resulta más práctico utilizar diferentes técnicas de métodos numéricos o por simulación para este tipo de análisis [Trincher014, Daryaei21]. Es aquí donde la teoría de Floquet nos brinda una expresión completamente simbólica para el estado estable que se puede utilizar para obtener las formas de onda de corriente y voltaje de los convertidores de potencia.

Se pueden hacer las siguientes observaciones a partir de (4.21) que describe la solución particular del sistema:

- Si la parte real de todos los valores propios de la matriz  $\mathbf{Q}$  es negativa, entonces el segundo término en (4.21) tiende a cero conforme pasa el tiempo. Por el contrario, si la parte real es positiva, entonces la solución crece sin límite a medida que transcurre el tiempo.
- El estado estable general es aperiódico a menos que  $\omega_0$  y  $\omega_i$  sean múltiplos entre sí.
- Aun cuando la respuesta completa de estado estable se puede evaluar completamente de manera analítica utilizando (4.21), esto depende de la disponibilidad de la matriz de transición de estado  $\Phi(t)$ . En los casos de estudio subsecuentes, esta matriz se calcula a través de la aproximación numérica al resolver el sistema de ecuaciones de (2.21).

Considerando las observaciones anteriores y a partir de la solución particular dada por (4.21), se puede obtener una expresión simbólica para el estado estable, considerando solamente el primer término de la ecuación:

$$x_{ss}(t) = \sum_{m=-h}^h \sum_{i=1}^n \sum_{k=-h}^h \sum_{l=-h}^h \left( \bar{\mathbf{P}}_m \mathbf{Z}_{\lambda_i} \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{F}_l \frac{e^{j(m\omega_0 + k\omega_0 + l\omega_i)t}}{-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i} \right) \quad (4.22)$$

La expresión (4.22) puede ser evaluada en orden arbitrario, o bien, específico con la intención de calcular los coeficientes armónicos de manera independiente; es decir, llevar a cabo las

multiplicaciones matriciales involucradas de tal forma que la suma  $m + k + l$  sea igual al armónico de interés.

#### 4.4. Análisis Modal.

Existen dos enfoques para el análisis de estabilidad armónica. El primer método es el del análisis de los valores característicos basado en el modelo de espacio de estados en el dominio del tiempo [Kundur07], que es comúnmente usado para analizar las oscilaciones electromecánicas en los sistemas de potencia convencionales, donde abundan las máquinas síncronas y de inducción. Las ventajas de este método es la identificación de los modos de oscilación y los factores de participación de los sistemas dinámicos [Wang17]. Sin embargo, debido a la amplia escala de tiempo dinámico de los convertidores, la dinámica electromagnética de las redes debe ser incluida en el modelo de espacio de estado, lo que significa que el orden del sistema aumenta y esto requiere más poder de cómputo [Sun09]. El segundo método es en el dominio de la frecuencia, también conocido como análisis basado en la impedancia. En este método, la dinámica del convertidor es extraída de sus terminales usando funciones de transferencia en el dominio de la frecuencia, que posteriormente se trasladan a impedancias eléctricas, y de esta manera, la estabilidad del sistema puede ser analizado a través de la teoría de circuitos eléctricos [Sun11].

El enfoque basado en la impedancia fue desarrollado primero para analizar la interacción de los convertidores en las redes de potencia de corriente directa [Middlebrook76a] y su mayor ventaja reside en el modelo de “caja-negra” del convertidor, que permite predecir la dinámica del sistema sin conocer previamente los parámetros del sistema. Además, el método basado en la impedancia predice la estabilidad del sistema en las terminales de cada convertidor y, por lo tanto, la contribución de cada convertidor a la estabilidad del sistema puede ser identificada. Este segundo método se analizará más adelante.

El análisis de los valores característicos nos proporciona la información de la dinámica del sistema, por lo que se ha convertido en una práctica común utilizarla pa-



ra el análisis de estabilidad de pequeña señal en los sistemas eléctricos.

Al utilizar la teoría de Floquet en sistemas lineales periódicos, resulta muy sencillo realizar este tipo de análisis para conocer la estabilidad de los sistemas, al analizar los valores característicos de la matriz de monodromía. La matriz de monodromía se puede obtener numéricamente utilizando la propiedad número 5 descrita en la sección 2.3.2. Al realizar el análisis modal de esta manera, el orden del sistema a estudiar no aumenta y, por lo tanto, no se requiere de mayor capacidad de cómputo.

Los pasos para realizar el análisis de estabilidad son los siguientes:

1. Encontrar las condiciones iniciales para el estado estable de las variables de estado.
2. El análisis de estabilidad de pequeña señal puede ser realizado en un punto cercano al estado estable o en trayectorias arbitrarias de señal grande.
3. Realizar un análisis modal en la matriz de monodromía.
4. Localizar los valores característicos de la matriz de monodromía en el disco unitario y utilizar el segundo punto del criterio de estabilidad mostrado en [D'Angelo70]: Un sistema periódico es estable asintóticamente si y solo si:
  - Todos los valores característicos de la matriz  $\mathbf{Q}$  tienen la parte real negativa o
  - Todos los valores característicos de la matriz  $\Phi(T)$  se encuentran dentro del disco unitario.

Estos pasos pueden ser completamente automatizados en un programa computacional como Wolfram Mathematica o Matlab, para obtener diferentes respuestas en el dominio del tiempo para distintas entradas y condiciones iniciales del circuito, y así observar un panorama más amplio del comportamiento del sistema.

## 4.5. Respuesta a la Frecuencia.

Como se describió anteriormente, existe otro enfoque para analizar la estabilidad de los convertidores de potencia basado en la impedancia en el dominio de la frecuencia; este tipo de análisis es estudiado ampliamente por los investigadores. Comúnmente los artículos que hablan sobre este tema hacen referencia a técnicas de promediación, el análisis del dominio armónico extendido (EHD), o el estado estable armónico (HSS). Estos métodos están basados en representaciones de sistemas invariantes en el tiempo y la aplicación de las transformadas de Laplace y de Fourier. En este documento, a estos métodos, les daremos el nombre de funciones de transferencia armónicas (HTF). Sin embargo, nosotros utilizaremos el análisis en el dominio de la frecuencia tomando en cuenta la teoría de Floquet, a través de las funciones de transferencia periódicas (PTF).

A continuación se presentan una breve descripción de ambos enfoques.

1) *Funciones de transferencia armónicas*: El concepto de funciones de transferencia armónicas utiliza las representaciones lineales invariantes en el tiempo de sistemas periódicos que hacen posible obtener un operador de dimensiones infinitas que describe la relación entrada-salida en el dominio de la frecuencia del sistema [Love08], es decir:

$$\mathbf{Y}(j\omega) = \mathbf{H}(j\omega)\mathbf{U}(j\omega) \quad (4.23)$$

donde  $\mathbf{U}(j\omega)$  y  $\mathbf{Y}(j\omega)$  son la transformada de Fourier de la entrada y la salida respectivamente y  $\mathbf{H}(j\omega)$  es la transformada de Fourier de la respuesta al impulso del sistema y puede ser calculada de la siguiente manera:

$$\mathbf{H}(j\omega) = (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (4.24)$$

Debido a que  $\mathbf{A}$  es una matriz no diagonal, existe un acoplamiento entre las frecuencias que no existe en los sistemas lineales invariantes en el tiempo. El hecho de que la función de transferencia armónica sea de dimensiones infinitas implica muchas dificultades numéricas, por lo que, para su cálculo, la matriz de dimensiones infinitas debe ser reempla-

zada por una matriz truncada de dimensiones finitas, lo que puede llevar a algunos errores en el análisis.

2) *Funciones de transferencia periódicas:* El concepto de respuesta al impulso definido para sistemas lineales invariantes en el tiempo puede ser modificado para su aplicación en sistemas lineales periódicos. Para hacer esto, note que la característica fundamental de la respuesta al impulso de un sistema invariante en el tiempo es que la respuesta depende solamente de la diferencia entre el instante de observación  $t$  y el instante  $\theta$  de aplicación del impulso unitario. Este concepto no se aplica en los sistemas lineales variantes en el tiempo en general y, por lo tanto, tampoco en los sistemas periódicos. Afortunadamente, L. Zadeh [Zadeh50] desarrolló, por analogía a los sistemas invariantes en el tiempo, una respuesta al impulso para sistemas variantes en el tiempo que no depende solamente de la diferencia de tiempo de la aplicación del impulso unitario y el tiempo de observación, sino también del tiempo de la aplicación del impulso, que en contraste con  $\mathbf{H}(j\omega)$ , dependerá de  $\omega$  y  $t$ , es decir  $\mathbf{H}(j\omega, t)$ . Además, no solo  $\mathbf{H}(j\omega, t)$  representa una extensión de  $\mathbf{H}(j\omega)$ , también posee las propiedades fundamentales de  $\mathbf{H}(j\omega)$ . Por lo tanto, puede ser utilizada de manera similar para calcular el estado estable o la respuesta transitoria de sistemas periódicos con entradas arbitrarias. También se mostró en [Zadeh50] que con las consideraciones adecuadas, es posible expandir  $\mathbf{H}(j\omega, t)$  como una combinación serie-paralelo de varios sistemas lineales invariantes en el tiempo teniendo ganancias que varían sinusoidalmente. Lo anterior puede traducirse como que el sistema es periódico por sí mismo y se puede expresar como una serie de Fourier de la siguiente manera:

$$\mathbf{H}(j\omega, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{H}}_k(j\omega) e^{-j\frac{2\pi kt}{T_A}} \quad (4.25)$$

donde  $\mathbf{H}_k(j\omega)$  no involucra al tiempo y coincide con las funciones de transferencia tradicionales de los sistemas invariantes con el tiempo. La mezcla de  $t$  y  $\omega$  en cada bloque de la función le permitió a Zadeh introducir el concepto de funciones de transferencia de bi-frecuencia  $\mathbf{\Gamma}(j\omega_1, j\omega_2)$  que es simplemente la transformada de Laplace de  $\mathbf{H}(j\omega, t)$ . Por lo tanto, el problema se reduce a la determinación de  $\mathbf{H}(j\omega, t)$ . Zadeh nos proporciona dos

alternativas en [Zadeh50], una de ellas involucra la resolución de una ecuación diferencial de dos variables [D'Angelo70], que dará como resultado mayor dificultad que el problema original; mientras que la segunda implica el cálculo de la respuesta al impulso primero y el cálculo de  $\mathbf{H}(j\omega, t)$  mediante la transformada de Fourier. Para calcular la respuesta al impulso  $\mathbf{H}(j\omega, t)$  de un sistema periódico, Zadeh nos muestra que puede ser definido como:

$$\mathbf{H}(j\omega, t) = \frac{\text{respuesta del sistema a } e^{j\omega t}}{e^{j\omega t}} \quad (4.26)$$

que coincide con la definición usual de función del sistema de un sistema lineal invariante con el tiempo. En consecuencia, el método para calcular  $\mathbf{H}(j\omega, t)$  propuesto en esta tesis es el de usar (4.21) para encontrar la respuesta al sistema con la entrada  $e^{j\omega t}$  y después dividirlo entre  $e^{j\omega t}$ . Este método es bastante sencillo de realizar.

También existe una alternativa algebraica que considera la descomposición de Floquet. El proceso algebraico sigue las derivaciones sugeridas en [D'Angelo70] y [Richards12]. La manera de obtener soluciones analíticas de sistemas periódicos utiliza la transformación Floquet-Lyapunov para alcanzar la invariancia en el tiempo, como se muestra a continuación.

Tomemos en consideración la entrada  $\mathbf{u}(t)$ . La ecuación en espacio de estado de la salida del sistema transformado está dada por [Yang20]:

$$\Delta \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{Q}\Delta \mathbf{y}(t) + \mathbf{P}^{-1}(t)\mathbf{B}(t)\Delta \mathbf{u}(t) \quad (4.27)$$

donde el producto  $\mathbf{L}(t) \triangleq \mathbf{P}^{-1}(t)\mathbf{B}(t)$  también es periódico y su expansión en series de Fourier es la siguiente:  $\mathbf{L}(t) = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \mathbf{L}_a e^{ja\omega_n t}$ .  $\mathbf{L}_a$  es la matriz de coeficientes de Fourier correspondientes.

Si  $\Delta \mathbf{U}(s)$  y  $\Delta \mathbf{Y}(s)$  representan la transformada de Laplace de  $\Delta \mathbf{u}(t)$  y  $\Delta \mathbf{y}(t)$  respectivamente,  $\Delta \mathbf{U}_a(s) = \Delta \mathbf{U}(s - ja\omega_n)$  y  $\Delta \mathbf{Y}_a(s) = \Delta \mathbf{Y}(s - ja\omega_n)$  representan la transformada de Laplace de las señales moduladas periódicas en el dominio del tiempo,  $e^{ja\omega_n t}\Delta \mathbf{u}(t)$  y  $e^{ja\omega_n t}\Delta \mathbf{y}(t)$ .  $\Delta \mathbf{U}_a(s)$  es la copia de la frecuencia desplazada de  $\Delta \mathbf{U}(s)$ , al

igual que  $\Delta \mathbf{Y}_a(s)$  y  $\Delta \mathbf{Y}(s)$ . Entonces, la transformada de Laplace de (4.27) está dada por:

$$s\Delta \mathbf{Y}(s) = \mathbf{Q}\Delta \mathbf{Y}(s) + \sum_{a=-\infty}^{\infty} \mathbf{L}_a \Delta \mathbf{U}_a(s) \quad (4.28)$$

De (4.28),  $\Delta \mathbf{Y}(s)$  puede ser resuelta de la siguiente manera:

$$\Delta \mathbf{Y}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1} \sum_{a=-\infty}^{\infty} \mathbf{L}_a \Delta \mathbf{U}_a(s) \quad (4.29)$$

Al ser la matriz  $s\mathbf{I} - \mathbf{Q}$  una matriz diagonal finita, su inversa puede ser fácilmente calculada. Considere la transformación  $\Delta x(t) = \mathbf{P}(t)\Delta y(t)$  y la expansión en la serie de Fourier de  $\mathbf{P}(t)$  dada en (4.9), la transformada de Laplace de  $\Delta x(t)$  puede ser calculada de la siguiente manera:

$$\Delta \mathbf{X}(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{P}}_m \Delta \mathbf{Y}_m(s) \quad (4.30)$$

$$\Delta \mathbf{X}(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{a=-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{P}}_{m-a} [(s - j(m-a)\omega_n)\mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1} \mathbf{L}_a \right\} \Delta \mathbf{U}_m(s) \quad (4.31)$$

Por lo tanto, podemos definir:

$$\mathbf{H}_m(s) = \sum_{a=-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{P}}_{m-a} [(s - j(m-a)\omega_n)\mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1} \mathbf{L}_a \quad (4.32)$$

como la función de transferencia de  $\Delta \mathbf{U}_m(s)$  a  $\Delta \mathbf{X}(s)$ . Se puede observar el hecho de que la respuesta a la frecuencia del sistema LTP puede ser descompuesta como la superposición de las respuestas a la frecuencia de los sistemas LTI  $\{\mathbf{H}_m(s), m \in \mathbb{Z}\}$  a las entradas lineales moduladas periódicamente  $\{e^{jm\omega_n t} \Delta \mathbf{u}(t), m \in \mathbb{Z}\}$ . Cuando el sistema es LTI, es decir,  $\mathbf{P}(t)$  y  $\mathbf{L}(t)$  son constantes, la única respuesta a la frecuencia diferente de cero es:

$$\mathbf{H}_0(s) = \mathbf{P}_0 [s\mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1} \mathbf{L}_0 \quad (4.33)$$

que cuantifica la relación entre  $\Delta \mathbf{U}(s)$  y  $\Delta \mathbf{Y}(s)$ , y es consistente con la teoría clásica de los sistemas LTI.

## 4.6. Identificación del Sistema.

Se puede notar que para realizar los análisis presentados anteriormente es necesario que la matriz del sistema  $\mathbf{A}(t)$  sea conocida, lo que no siempre es el caso. Puede ser

que estemos lidiando con un sistema periódico no modelado o con sistemas donde llegar a expresiones como (4.1) sea muy complicado. Es aquí donde se puede realizar alguna técnica de identificación del sistema, que se refieren a la construcción de modelos matemáticos de sistemas dinámicos a partir de información obtenida en observaciones o experimentos. De esta manera, la matriz de monodromía puede ser calculada como se presenta en [Semlyen95], las ventajas de este procedimiento son claras, el análisis de estabilidad puede ser extendido a modelos de sistemas más grandes y detallados. En [Semlyen95] los autores presentaron un algoritmo numérico que integra cualquier sistema  $n$  veces al rededor de una solución periódica, pero con condiciones iniciales perturbadas  $x_i + \epsilon I_j$ , donde  $I_j$  es la columna  $j$  de la matriz identidad  $\mathbf{I}$  y  $\epsilon$  es un número pequeño. La matriz de monodromía resulta de la diferencia entre los dos valores de las variables de estado al final del ciclo dividido por  $\epsilon$ . Una característica importante de este proceso es que calcular la matriz de monodromía debe hacerse con información extraída de algún software de análisis transitorio, así como Electromagnetic Transient Program (EMTP), Simulink o SystemModeler.

Identificar un ciclo completo de la matriz de transición de estado es más desafiante, pero afortunadamente un método ha sido propuesto en [Allen07]. El proceso consiste en un enfoque de tiempo discreto que aprovecha el hecho de que es posible construir una colección de  $N$  sistemas lineales invariantes en el tiempo discretos cuyas respuestas coinciden con las de los sistemas lineales periódicos, cada uno en un único punto  $k\Delta t$  donde  $k$  es un entero  $k = 0, 1, 2, \dots, N$ .

Como se mostró en la sección 2.3.2, una de las propiedades de la matriz de transición de estado es que puede ser expresada como:

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0) \quad (4.34)$$

Por lo tanto, si la matriz  $\mathbf{A}(t)$  es periódica con periodo  $T$ , entonces la matriz de transición de estado para  $t \geq 0$  puede ser construida de la matriz de transición de estado por  $0 \geq t \geq t_k$ , es decir:

$$\Phi(t + kT) = \Phi(t)\Phi(T)^k \quad (4.35)$$

donde  $k = 0, 1, 2, \dots, N$  y  $\Phi(T)$  es la matriz de monodromía discutida anteriormente.

Como consecuencia de (4.35), sucederá que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_i) &= \Phi(t_i)\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(t_i + T) &= \Phi(t_i)\Phi(T)\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(t_i + 2T) &= \Phi(t_i)\Phi(T)^2\mathbf{x}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{x}(t_i + (N - 1)T) &= \Phi(t_i)\Phi(T)^{N-1}\mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

se cumplirá para cada tiempo discreto  $t_i$ , con  $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$  y  $N$  siendo el número de muestras discretas entre  $[0, T]$ . Debido a que  $\Phi_i$  puede ser considerado constante y  $\mathbf{x}_0$  así como  $\mathbf{x}(t_i + kT)$  pueden ser obtenidos de simulaciones en el dominio del tiempo, entonces la matriz de transición puede ser estimada por un algoritmo de mínimos cuadrados. Note que si se requiere, la matriz  $\mathbf{A}(t)$  puede ser calculada de  $\Phi(t)$  mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{A}(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} [\Phi(t)]^{-1} \quad (4.37)$$

donde la derivada de  $\Phi(t)$  puede ser calculada por métodos numéricos o de fuerza bruta.

## 4.7. Conclusiones.

Debido a las características físicas de los convertidores de potencia, es posible utilizar las herramientas de la teoría de sistemas periódicos para su modelado y análisis, como es el caso de la teoría de Floquet. A través de las herramientas matemáticas de la

Descomposición de Floquet y la Transformación Floquet-Lyapunov, se pueden desarrollar ecuaciones analíticas para los distintos estudios que se realizan cuando se hace un análisis detallado de los convertidores de potencia.

En este capítulo se presentaron los procedimientos para obtener ecuaciones analíticas para los estudios de respuesta a en el dominio del tiempo, estado estable y respuesta en el dominio de la frecuencia, así como una metodología para determinar la estabilidad de los sistemas a través del análisis modal que posteriormente se pondrán a prueba con distintos casos de estudio. También se desarrolló un algoritmo que utiliza los conceptos de la teoría de Floquet para realizar una identificación del sistema.



## Capítulo 5

# Casos de Estudio.

### 5.1. Introducción.

En este capítulo se presentan tres diferentes casos de estudio en los que se ponen en práctica los métodos de análisis de convertidores de potencia descritos en el capítulo anterior. Primero se analizan dos convertidores DC-DC, el elevador y el elevador-reductor, y posteriormente se analiza un convertidor AC-DC, un convertidor de fuente de voltaje (VSC).

Los ingenieros e investigadores han estudiado estos convertidores por mucho tiempo y existe una gran cantidad de información acerca de ellos. Sin embargo, en su mayoría los artículos técnicos y libros que hablan de ellos, utilizan enfoques en donde los convertidores son caracterizados como sistemas invariantes en el tiempo, ignorando la naturaleza periódica que presentan al cambiar de estado cada cierto tiempo.

Es por esto, que en las secciones subsecuentes se utiliza la teoría de los sistemas periódicos, a través de la teoría de Floquet, para analizar detalladamente a estos convertidores.

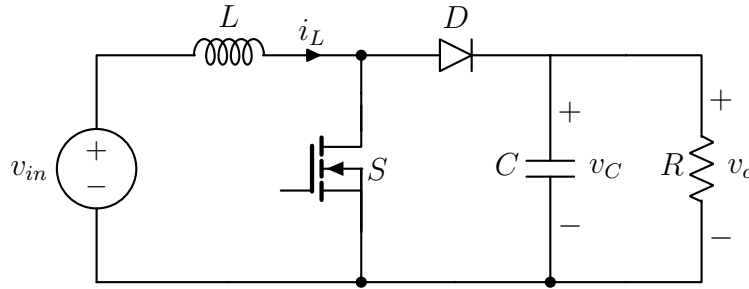


Figura 5.1: Convertidor DC-DC elevador (boost).

## 5.2. Convertidores DC-DC.

Como se vio en el capítulo 3, los convertidores de potencia se pueden modelar matemáticamente como un sistema de ecuaciones no lineales variantes en el tiempo, a partir del cual se pueden realizar diferentes técnicas de linealización para su análisis. En el caso de los dos convertidores DC-DC que analizaremos a continuación, asumiremos que cuentan con un control de lazo abierto, por lo que la no linealidad debida a la retroalimentación no se presenta.

### 5.2.1. Convertidor Boost.

En la Fig. 5.1 se muestra el diagrama del circuito de un convertidor elevador [Ang10]. Como se analizó anteriormente, una de las principales características de este tipo de convertidores es la presencia de dispositivos conmutados que funcionan como interruptores, en este caso, el transistor  $S$ . La función de conmutación para este transistor se muestra en la Figura 5.2 y puede ser definida de la siguiente forma:

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t \leq T_D \\ 0 & \text{para } T_D \leq t \leq T \\ s(t - T) & \text{para todo } t > T \end{cases} \quad (5.1)$$

en donde  $T$  es el periodo de conmutación y  $T_D$  es el tiempo en el que el transistor está cerrado. Las ecuaciones que describen la dinámica de este convertidor se pueden escribir

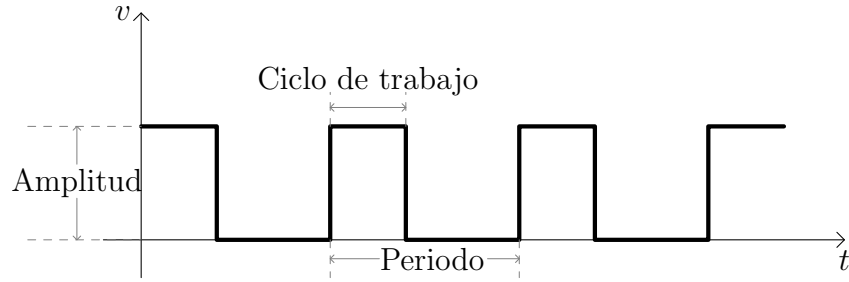


Figura 5.2: Señal de pulsos que acciona al interruptor.

en forma compacta como sigue:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_{ds}(1-s(t))+R_D s(t)}{L} & -\frac{s(t)}{L} \\ \frac{s(t)}{C} & -\frac{1}{C \cdot R} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} \frac{V_{in}-s(t)V_D}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

en donde  $\mathbf{U}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$  y la función de conmutación  $s(t)$  aparece explícitamente como un coeficiente en ambas matrices, por lo que la forma del sistema que describe al convertidor boost coincide con (4.1). El coeficiente  $R_{ds}$  representa la resistencia entre el colector y el emisor del transistor,  $R_D$  se utiliza para definir la resistencia de conducción del diodo y  $V_D$  es la caída de voltaje del diodo en conducción. El vector de estado para este caso es el siguiente:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

en el cual se tienen como elementos la corriente del inductor  $i_L(t)$  y el voltaje del capacitor  $v_C(t)$ . En la Tabla 5.1 se muestran los parámetros del convertidor utilizados en este caso de estudio [Martín11].

Tabla 5.1: Parámetros del convertidor boost utilizado en el caso de estudio.

Parámetro	Valor
Voltaje de entrada ( $v_{in}$ )	16 V
Inductancia ( $L$ )	0.2 mH
Capacitancia ( $C$ )	0.2 mF
Resistencia interna del diodo ( $R_D$ )	0.001 $\Omega$
Caída de voltaje del diodo ( $V_D$ )	0.8 V
Resistencia entre emisor y colector del transistor ( $R_{ds}$ )	0.001 $\Omega$
Resistencia de la carga ( $R$ )	12.5 $\Omega$
Ciclo de trabajo ( $d$ )	0.5
Frecuencia de conmutación ( $f_s$ )	10 kHz

### 5.2.1.1. Análisis del Estado Estable.

Para iniciar el estudio del convertidor realizamos primero un análisis del estado estable, para lo cual es necesario primero conocer la matriz de monodromía del sistema, como se describe en la sección 2.4.1. Con los datos proporcionados en la Tabla 5.1, se obtiene lo siguiente:

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} 0.968631 & -0.244853 \\ 0.240067 & 0.930723 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Con la matriz de monodromía (5.5) es posible calcular los valores de estado estable utilizando la ecuación (4.22), obteniendo lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.03383 \text{ A} \\ 31.1903 \text{ V} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Ahora, si variamos el ciclo de trabajo, podemos obtener una gráfica del comportamiento del estado estable del convertidor bajo diferentes condiciones de control, como se muestra en la Figura 5.3, donde se presenta la ganancia en el voltaje de DC y se puede observar como al aumentar el ciclo de trabajo aumentará también la ganancia de voltaje permaneciendo siempre por encima de 1, mostrando el comportamiento típico de los con-

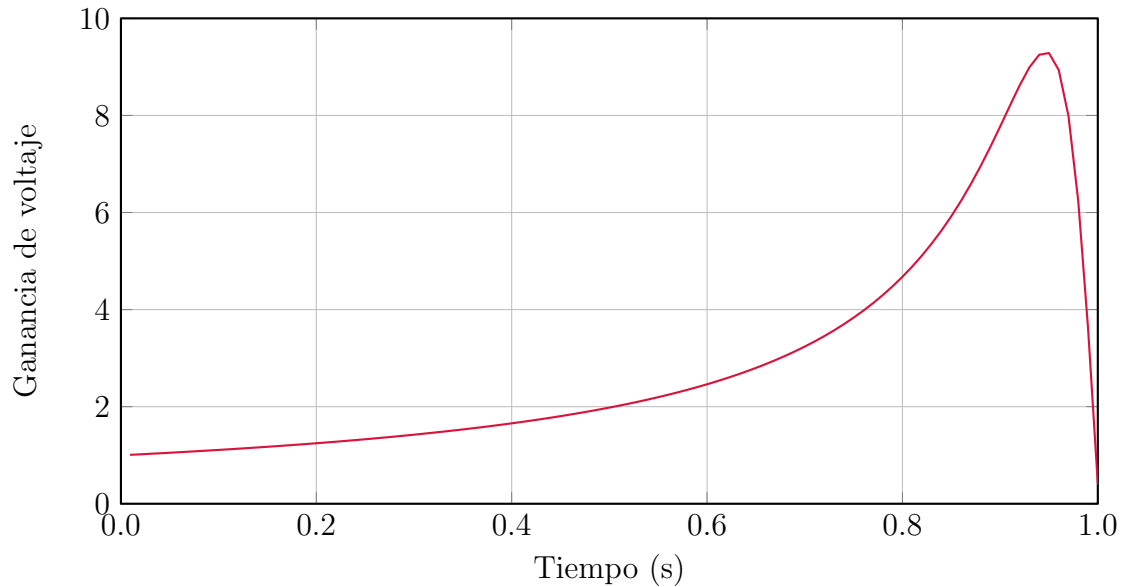


Figura 5.3: Ciclo de trabajo vs. ganancia del voltaje del convertidor boost.

vertidores boost de este tipo [Rim88, Leon-Masich14]. En el caso de un ciclo de trabajo de  $d = 0.5$ , la ganancia en el voltaje equivale a aproximadamente 2, lo que concuerda con lo obtenido en (5.6).

Se puede observar también a partir de la figura, que existirá un punto máximo de la ganancia por tratarse de un convertidor no ideal, es decir, debido a que se considera la resistencia del interruptor  $R_{ds}$ , el convertidor tendrá un límite máximo de elevación de voltaje que dependerá del ciclo de trabajo  $d$  y la resistencia  $R_{ds}$  y que se puede calcular como se muestra en [Rim88, Leon-Masich14].

### 5.2.1.2. Respuesta en el Dominio del Tiempo.

Para el análisis de la respuesta en el dominio del tiempo del convertidor boost realizamos una simulación utilizando la solución numérica que nos brinda el software Wolfram Mathematica, que utiliza un modelo inteligente para la selección del método numérico a utilizar, generalmente el Runge-Kutta de 4° y 5° orden; mientras que la solución analíti-

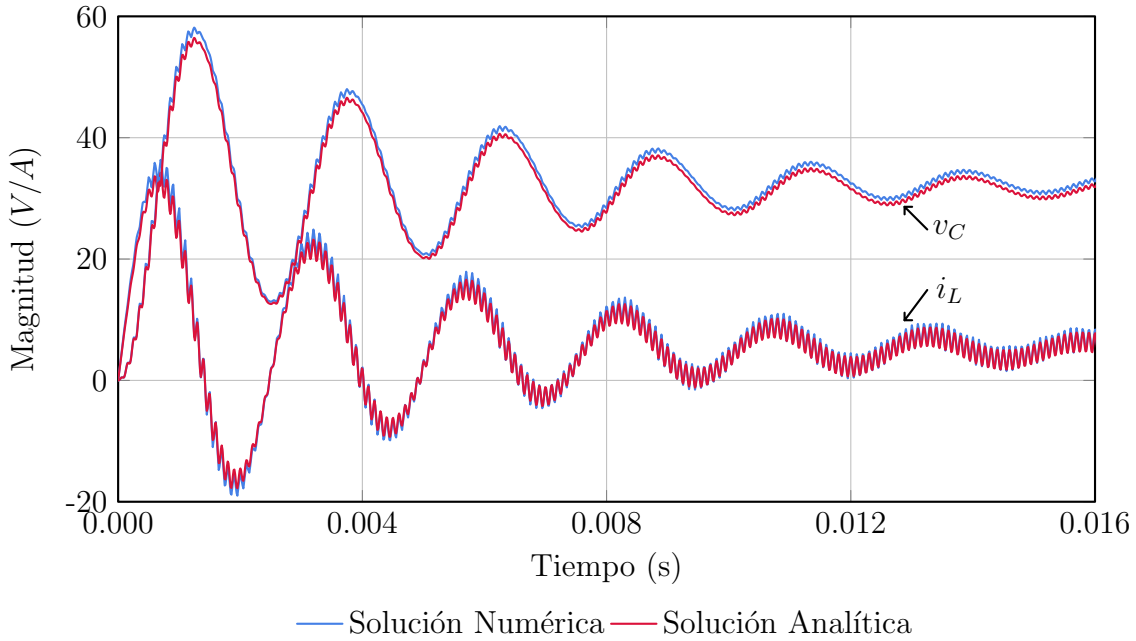


Figura 5.4: Respuesta en el dominio del tiempo del convertidor boost.

ca la realizamos utilizando las herramientas proporcionadas por la teoría de Floquet en el capítulo anterior con la ecuación (4.21).

En la Figura 5.4 se muestra la respuesta del sistema. En azul podemos observar la respuesta numérica, mientras que en rojo observamos la respuesta analítica utilizando la descomposición de Floquet. En este caso en particular, solamente se utilizó un armónico para el cálculo analítico de la forma de onda de la respuesta del sistema. Ambas respuestas dan un resultado muy similar, lo que provoca que la línea azul se perciba poco en la figura e incluso, si realizamos el análisis analítico con un mayor número de armónicos, la diferencia es prácticamente imperceptible. El Error Porcentual Absoluto Medio (MAPE) de la solución analítica con respecto de la solución numérica se puede calcular de la siguiente manera:

$$MAPE = \frac{\sum_{n=1}^N \frac{|f_n - F_n|}{|f_n|}}{N} \times 100 \quad (5.7)$$

donde  $f_n$  representa la solución numérica,  $F_n$  la solución analítica y  $N$  el número

de puntos considerados en la muestra. Para este caso se obtuvo un error del 4.2085 % para la corriente y 2.1432 % para el voltaje.

Se pueden observar algunas cosas de interés en la Figura 5.4. Al energizar el circuito se presentará un transitorio que después de algún tiempo se estabilizará en el valor de estado estable obtenido anteriormente. Dicho transitorio es el resultado de evaluar el segundo término del lado derecho de (4.21) que, por tratarse de un sistema estable asintóticamente, tiende a ser cero con el paso del tiempo, quedando únicamente el primer término que describe el estado estable. También es posible notar un rizado en las formas de onda de las respuestas, debidas a la acción de conmutación de los interruptores y que se ven atenuadas por efecto del capacitor del circuito. Es posible conocer el nivel de distorsión de la respuesta realizando un análisis armónico a la señal.

### 5.2.1.3. Análisis Modal.

En la sección 4.4 pudimos observar que es posible realizar un análisis modal para determinar la estabilidad de los convertidores utilizando la descomposición de Floquet, lo cual resulta muy sencillo realizar este análisis sin utilizar un gran poder de cómputo, únicamente analizando el comportamiento de los valores característicos de la matriz de monodromía.

La Figura 5.5 muestra los cambios en el plano complejo de los valores característicos de la matriz de monodromía  $\Phi(T)$  del convertidor boost mientras el ciclo de trabajo  $d$  del PWM cambia. Los dos colores diferentes muestran la trayectoria de los dos diferentes valores característicos del sistema que, en este caso, se mantiene estable para cada valor de  $d$  al permanecer dentro del círculo unitario, de acuerdo al criterio de estabilidad descrito en la Sección 4.4.

### 5.2.1.4. Respuesta en el Dominio de la Frecuencia.

Otro estudio de interés en la operación de convertidores de potencia es el que determina la respuesta a la frecuencia del sistema, ya que se ha observado que debido a la

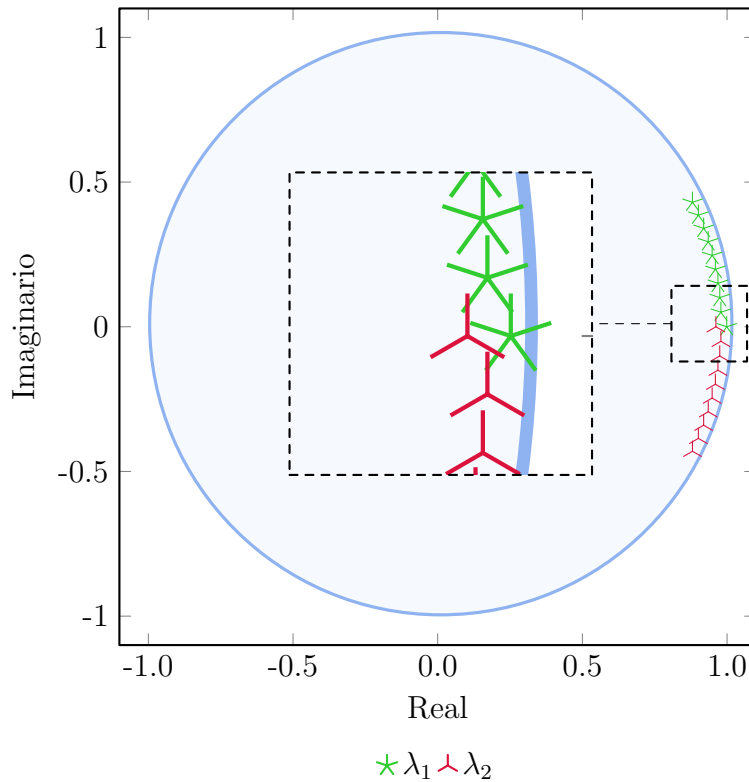


Figura 5.5: Lugar geométrico de las raíces del convertidor boost.

naturaleza conmutada de este tipo de dispositivos, se presentan oscilaciones y resonancias a altas frecuencias asociadas con las corrientes armónicas que se generan.

Como se presentó en la Sección 4.5, la teoría de los sistemas periódicos presenta por lo menos dos alternativas para este análisis, los enfoques que utilizan representaciones invariantes en el tiempo truncadas para prevenir las altas dimensiones derivadas de los sistemas grandes a los que se somete este análisis. Dicho enfoque, también llamado como funciones de transferencia armónicas, es muy aceptado y utilizado en el estudio de convertidores de potencia, mientras que el método de las funciones de transferencia periódicas es menos utilizado para este propósito debido, tal vez, a la complejidad para obtener las respuestas al impulso.



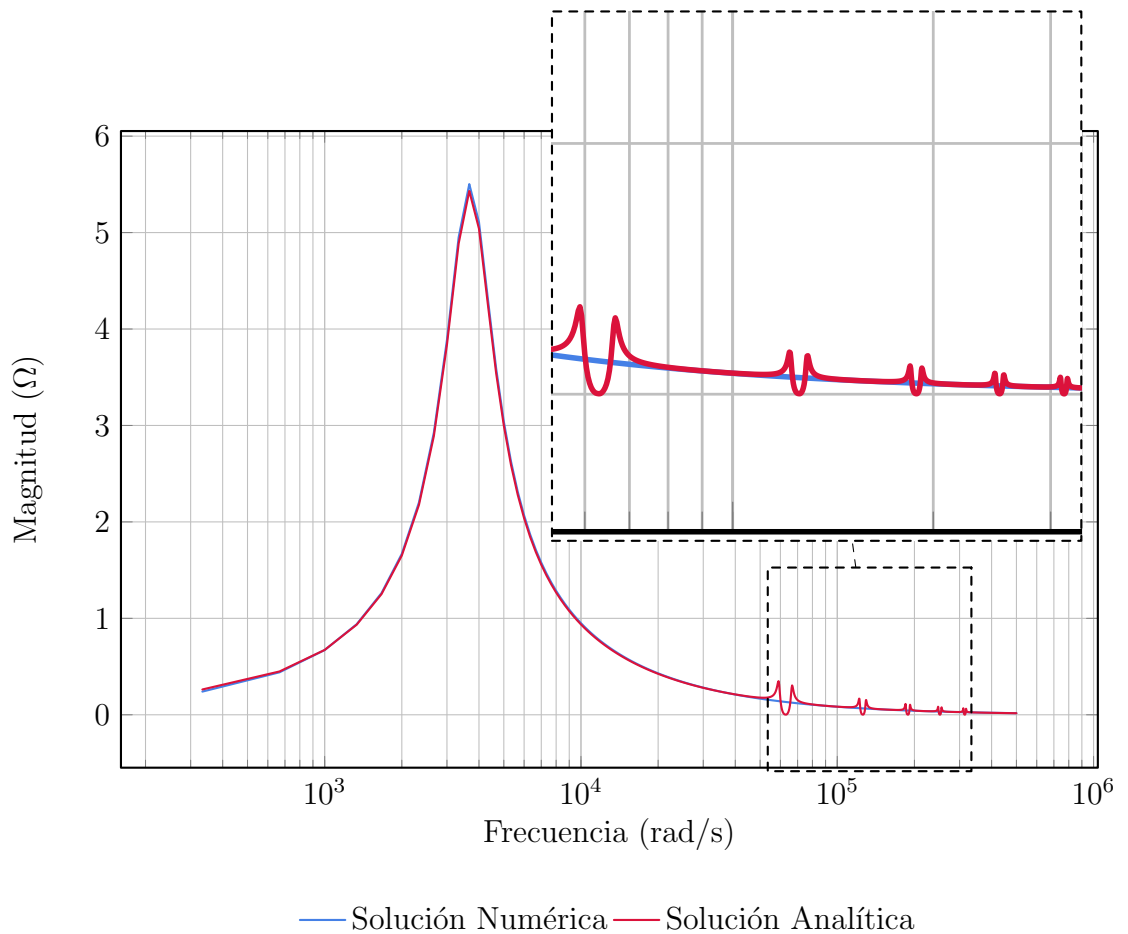


Figura 5.6: Respuesta a la frecuencia de la impedancia de entrada del convertidor boost.

Utilizando el método descrito en la Sección 4.5, un ciclo completo de la matriz de transición de estados es calculado utilizando una integración numérica como se describe en la Sección 2.3.3.2. En la Figura 5.6 se muestra la representación gráfica de la función de transferencia armónica de la impedancia de entrada del convertidor  $\frac{v_{in}}{i_L}$  ante diferentes frecuencias. La línea azul muestra la respuesta donde la influencia de los armónicos es despreciada completamente debido al modelo promediado utilizado por el método de resolución numérico, mientras que la línea roja muestra la respuesta considerando los armónicos debidos a la conmutación de los interruptores, como es posible apreciar de forma analítica desde

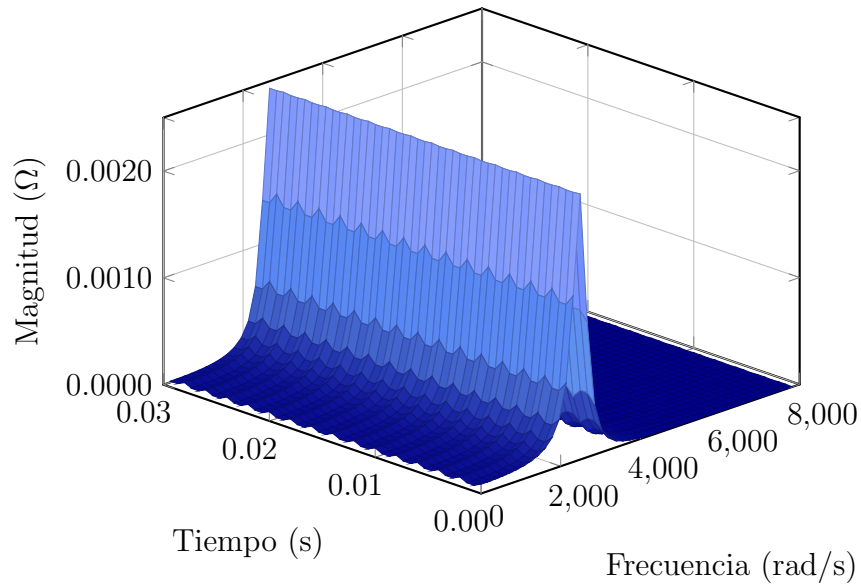


Figura 5.7: Función de transferencia de la respuesta al impulso del convertidor boost.

la ecuación (4.31). La Figura 5.6 fue calculada utilizando 5 armónicos y se puede observar que a frecuencias más altas que la fundamental, al rededor de cada valor de frecuencia armónica, se presentan efectos de resonancia que, aunque son pequeñas en este caso, demuestra que las corrientes armónicas sí tienen una influencia en la respuesta a la frecuencia de los convertidores de potencia.

También se considera el uso de la función de transferencia periódica, haciendo uso de la respuesta al impulso. La Figura 5.7 muestra un elemento de  $\mathbf{H}(j\omega, t)$  donde se puede observar que la admitancia del convertidor boost cambia con el tiempo de forma periódica. Se observa que al incrementar  $j\omega$  la respuesta a la frecuencia se aplana y la magnitud tiende a cero. Claramente, ocurrirán diferentes efectos de resonancia a diferentes tiempos cuando la misma señal sinusoidal sea inyectada en el sistema. Los demás elementos de la matriz  $\mathbf{H}(j\omega, t)$  presentan un comportamiento similar al mostrado en la Figura 5.7.

### 5.2.1.5. Identificación del Sistema.

A continuación se presenta como caracterizar un sistema lineal periódico usando una metodología utilizada con sistemas lineales invariantes en el tiempo para realizar la identificación de parámetros de la matriz de transición de estado del convertidor boost analizado. Se desarrolló un algoritmo que procesa la información de simulaciones en el dominio del tiempo obtenida de programas de análisis transitorio y posteriormente procesar dicha información para usarla en algoritmos lineales invariantes en el tiempo de identificación del sistema.

La Figura 5.8 muestra los elementos de la matriz de transición de estado del caso de estudio; la línea punteada roja fue obtenida numéricamente a través de la propiedad 5 de las matrices de transición descrita en la Sección 2.3.2, mientras que la línea continua azul muestra la trayectoria obtenida mediante el mecanismo de identificación del sistema descrito en la Sección 4.6.

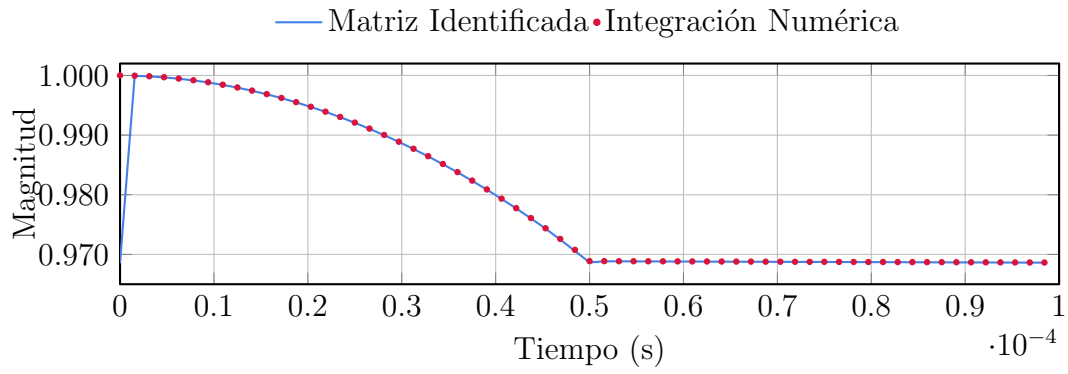
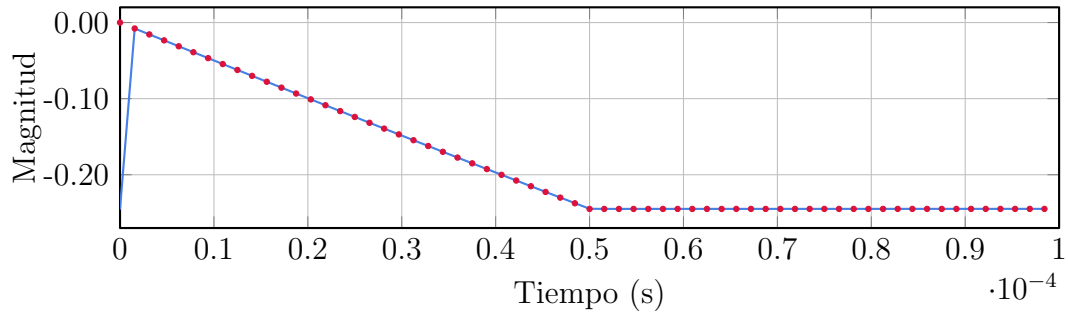
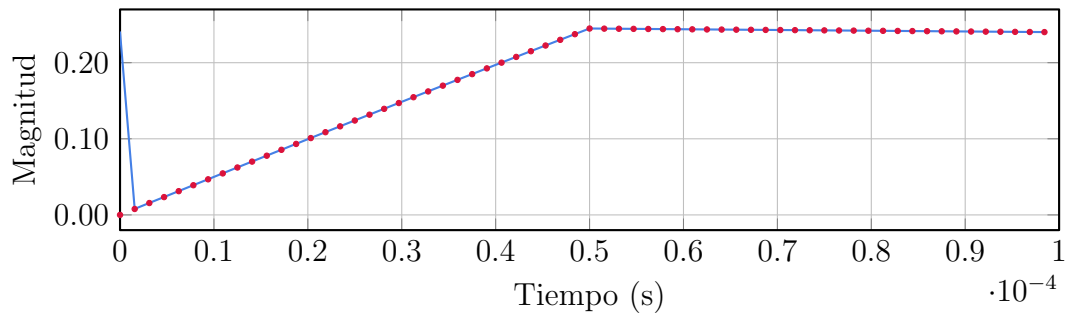
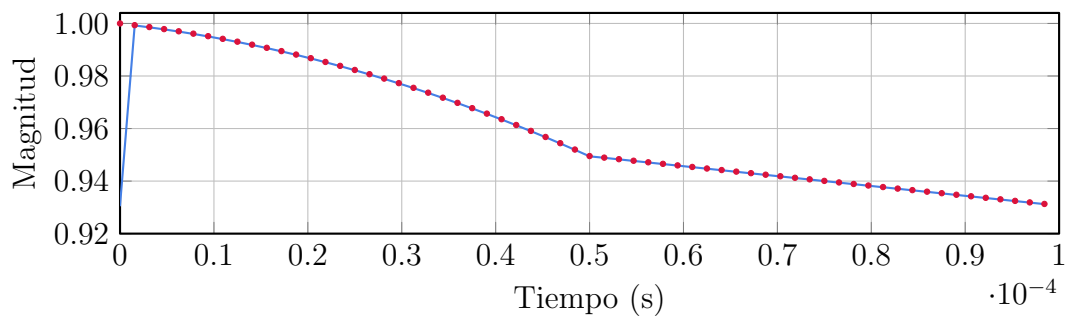
(a) Elemento  $\Phi_{1,1}$ .(b) Elemento  $\Phi_{1,2}$ .(c) Elemento  $\Phi_{2,1}$ .(d) Elemento  $\Phi_{2,2}$ .

Figura 5.8: Identificación de la matriz de transición de estado del convertidor boost.

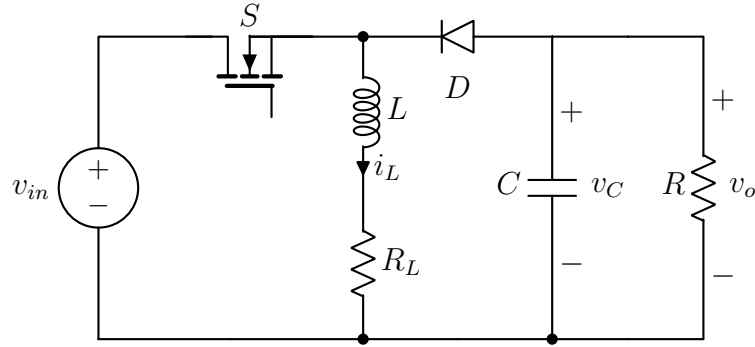


Figura 5.9: Convertidor DC-DC reductor-elevador (buck-boost).

### 5.2.2. Convertidor Buck-Boost.

En la Fig. 5.9 se muestra el diagrama del circuito de un convertidor reductor-elevador. Este tipo de circuito, al igual que en el convertidor boost, cuenta con dispositivos conmutados que funcionan como interruptores, en este caso, el transistor  $S$ . La función de conmutación para este transistor puede ser la misma que se utilizó en el convertidor boost, mostrada en la Figura 5.2 y descrita matemáticamente en (5.1).

Las ecuaciones que describen la dinámica del convertidor buck-boost se pueden escribir en forma compacta como sigue [Rim88]:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L} & -\frac{s(t)}{L} \\ \frac{s(t)}{C} & -\frac{1}{C \cdot R} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} \frac{s(t)}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

en donde la función de conmutación  $s(t)$  aparece explícitamente como un coeficiente en ambas matrices, por lo que la forma del sistema que describe al convertidor boost coincide con (4.1). El coeficiente  $R_L$  representa la resistencia interna del inductor del circuito. El vector de estados para este caso es el siguiente:

Tabla 5.2: Parámetros del convertidor buck-boost utilizado en el caso de estudio.

Parámetro	Valor
Voltaje de entrada ( $v_{in}$ )	24 V
Inductancia ( $L$ )	20 $\mu H$
Resistencia interna del inductor ( $R_L$ )	0.01 $\Omega$
Capacitancia ( $C$ )	80 $\mu F$
Resistencia interna del diodo ( $R_D$ )	0.01 $\Omega$
Caída de voltaje del diodo ( $V_D$ )	0.7 V
Resistencia entre emisor y colector del transistor ( $R_{ds}$ )	0.04 $\Omega$
Resistencia de la carga ( $R$ )	5 $\Omega$
Ciclo de trabajo ( $d$ )	0.4
Frecuencia de conmutación ( $f_s$ )	100 kHz

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

en el cual se tienen como elementos la corriente del inductor  $i_L(t)$  y el voltaje del capacitor  $v_C(t)$ . En la Tabla 5.2 se muestran los parámetros del convertidor utilizados en este caso de estudio [Asadi19].

### 5.2.2.1. Análisis del Estado Estable.

De la misma manera que el caso anterior realizamos primero un análisis del estado estable, utilizando nuevamente lo descrito en la sección 2.4.1 podemos conocer la matriz de monodromía del sistema. Con los datos proporcionados en la Tabla 5.2, se obtiene lo siguiente:

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} 0.978003 & -0.293153 \\ 0.073435 & 0.964322 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Con la matriz de monodromía (5.11) es posible calcular los valores de estado estable utilizando la ecuación (4.22), obteniendo lo siguiente:

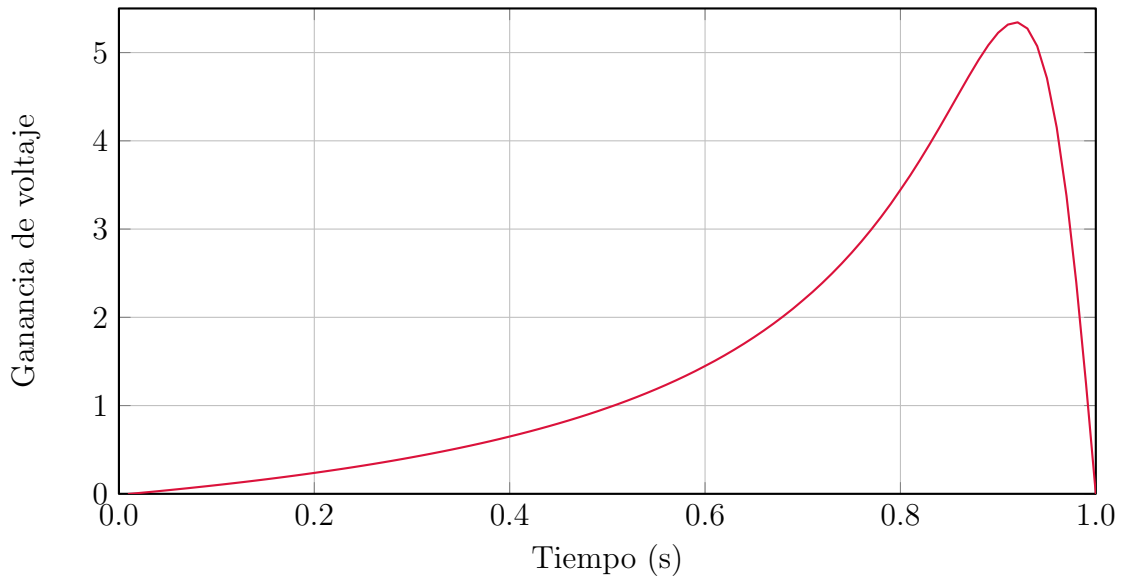


Figura 5.10: Ciclo de trabajo vs. ganancia del voltaje del convertidor buck-boost.

$$\begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.79289 \text{ A} \\ 15.5837 \text{ V} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Ahora, si variamos el ciclo de trabajo, podemos obtener una gráfica del comportamiento del estado estable del convertidor bajo diferentes condiciones de control, como se muestra en la Figura 5.10, donde se presenta la ganancia en el voltaje de DC y se puede observar como al variar el ciclo de trabajo entre 0 y 0.5, la ganancia de voltaje será menor a 1, lo que significa que el convertidor reducirá el voltaje con respecto al voltaje de entrada; mientras que al variar el ciclo de trabajo entre 0.5 y 1, la ganancia será mayor a 1, es decir, que el voltaje de salida será mayor con respecto al voltaje de entrada; dando como resultado un comportamiento típico de los convertidores buck-boost [Rim88]. En el caso de un ciclo de trabajo de  $d = 0.4$ , la ganancia en el voltaje equivale a aproximadamente 0.65, lo que concuerda con lo obtenido en (5.12).

Al tratarse de un convertidor no ideal, la ganancia tendrá un límite debido a la resistencia del interruptor  $R_{ds}$ . El punto máximo de ganancia que se muestra en la Figura

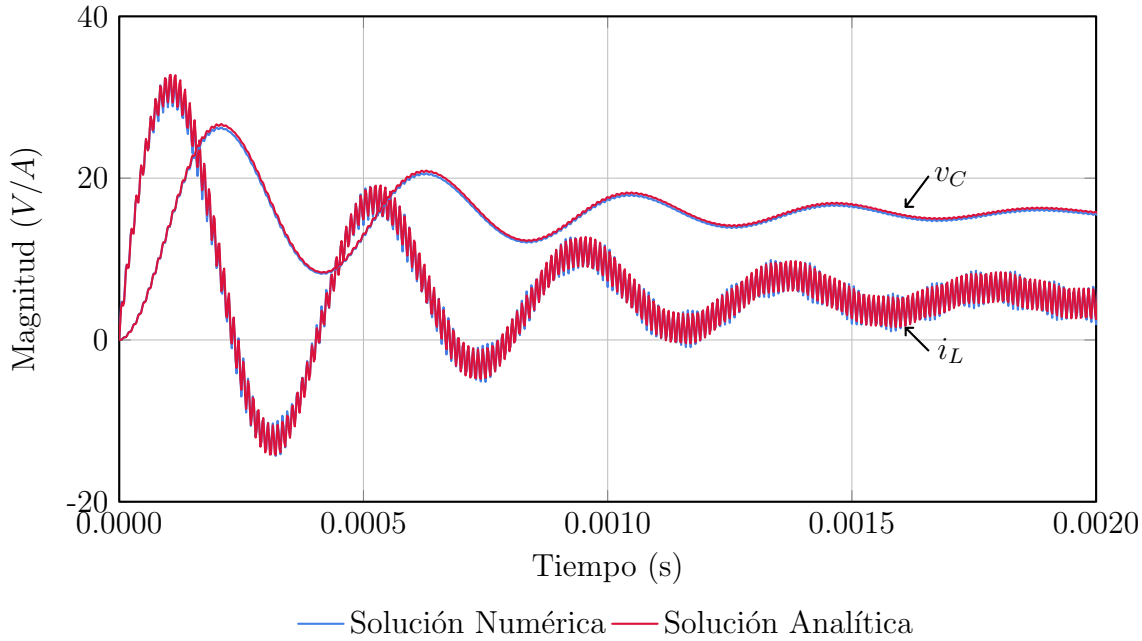


Figura 5.11: Respuesta en el dominio del tiempo del convertidor buck-boost.

5.10 se encontrará con valores altos del ciclo de trabajo  $d$  y es posible conocerlo a través de los cálculos presentados en [Rim88].

#### 5.2.2.2. Respuesta en el Dominio del Tiempo.

Para el análisis de la respuesta en el dominio del tiempo del convertidor buck-boost realizamos una simulación utilizando la solución numérica proporcionada por el programa Wolfram Mathematica, mientras que la solución analítica la realizamos utilizando la ecuación (4.21) obtenida a partir de la descomposición de Floquet.

En la Figura 5.11 podemos observar la respuesta del sistema. En azul se muestra la respuesta numérica, mientras que en rojo observamos la respuesta analítica. Para esta ocasión, se utilizó un número mayor de armónicos para el cálculo analítico, 9 en este caso, de forma que las dos respuestas son prácticamente iguales; para este caso, el MAPE obtenido utilizando (5.7) es de 1.6871 % para la corriente y de 0.1398 % para el voltaje, por



lo que se demuestra que con más armónicos se obtiene una forma de onda más precisa al considerar los efectos de las corrientes armónicas que aparecen debido a la conmutación de los interruptores.

Al tratarse de un sistema asintóticamente estable, el transitorio que se presenta al inicio de la respuesta mostrada en la Figura 5.11 desaparecerá y se estabilizará en el valor de estado estable descrito por (4.21). También se observa el rizado de las señales debido a las componentes armónicas introducidas por los elementos conmutados del circuito.

### 5.2.2.3. Análisis Modal.

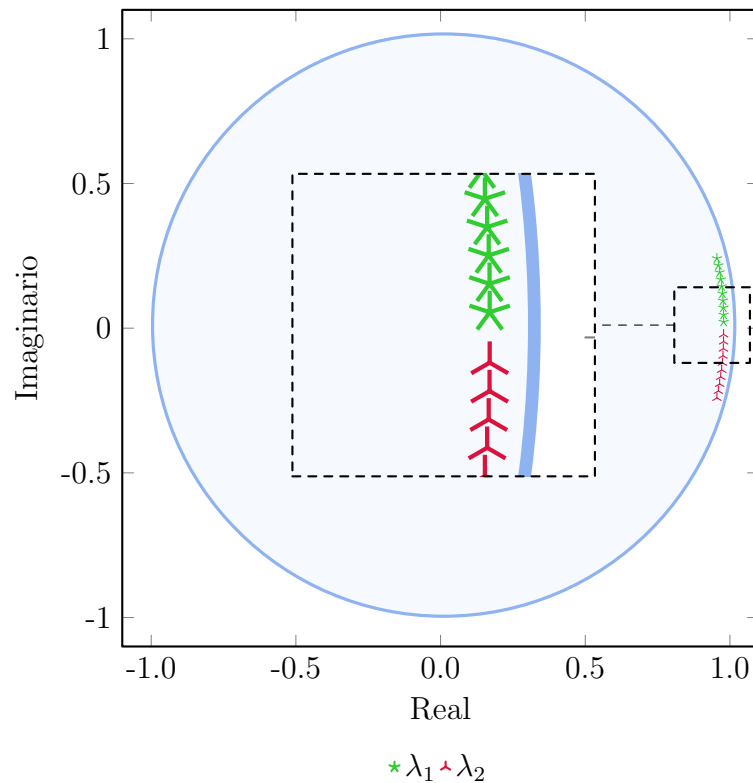


Figura 5.12: Lugar geométrico de las raíces del convertidor buck-boost.

A continuación se realiza un estudio de estabilidad del convertidor buck-boost a

través del análisis modal. A partir de una integración numérica se obtiene la matriz de monodromía y se calculan sus valores característicos para posteriormente ubicarlos dentro del círculo unitario de acuerdo al criterio de estabilidad descrito en la Sección 4.4.

En la Figura 5.12 se muestra los cambios en el plano complejo de los valores característicos de la matriz de monodromía  $\Phi(T)$  del convertidor buck-boost mientras el ciclo de trabajo  $d$  del PWM cambia. Se puede observar que el sistema se mantiene estable para cada valor de  $d$  al permanecer todos los valores característicos, mostrados en un color diferente para cada uno, dentro del círculo unitario.

#### 5.2.2.4. Respuesta en el Dominio de la Frecuencia.

Para continuar con el análisis del convertidor buck-boost se realiza a continuación un estudio de respuesta a la frecuencia. Debido a los elementos conmutados que forman parte del circuito del convertidor, se esperaría que a altas frecuencias existan resonancias debidas a la influencia de los armónicos que aparecen en el sistema.

La Figura 5.13 muestra la representación gráfica de la función de transferencia armónica de la impedancia de entrada del convertidor  $\frac{v_{in}}{i_L}$  ante diferentes frecuencias. La línea azul muestra la respuesta donde la influencia de los armónicos es despreciada completamente debido al modelo promediado utilizado por el método de resolución numérico, mientras que la línea roja muestra la respuesta considerando los armónicos debidos a la conmutación de los interruptores, utilizando el método descrito en la Sección 4.5. La Figura 5.13 fue calculada utilizando 5 armónicos y se puede observar que a frecuencias más altas que la fundamental, al rededor de cada valor de frecuencia armónica, se presentan efectos de resonancia pequeños debidos a la influencia de las corrientes armónicas.

También se realizó un estudio de respuesta al impulso para obtener la función de transferencia periódica. En la Figura 5.14 se muestran un elemento de la matriz  $\mathbf{H}(j\omega, t)$  donde se puede observar el comportamiento periódico en el tiempo de la admitancia del

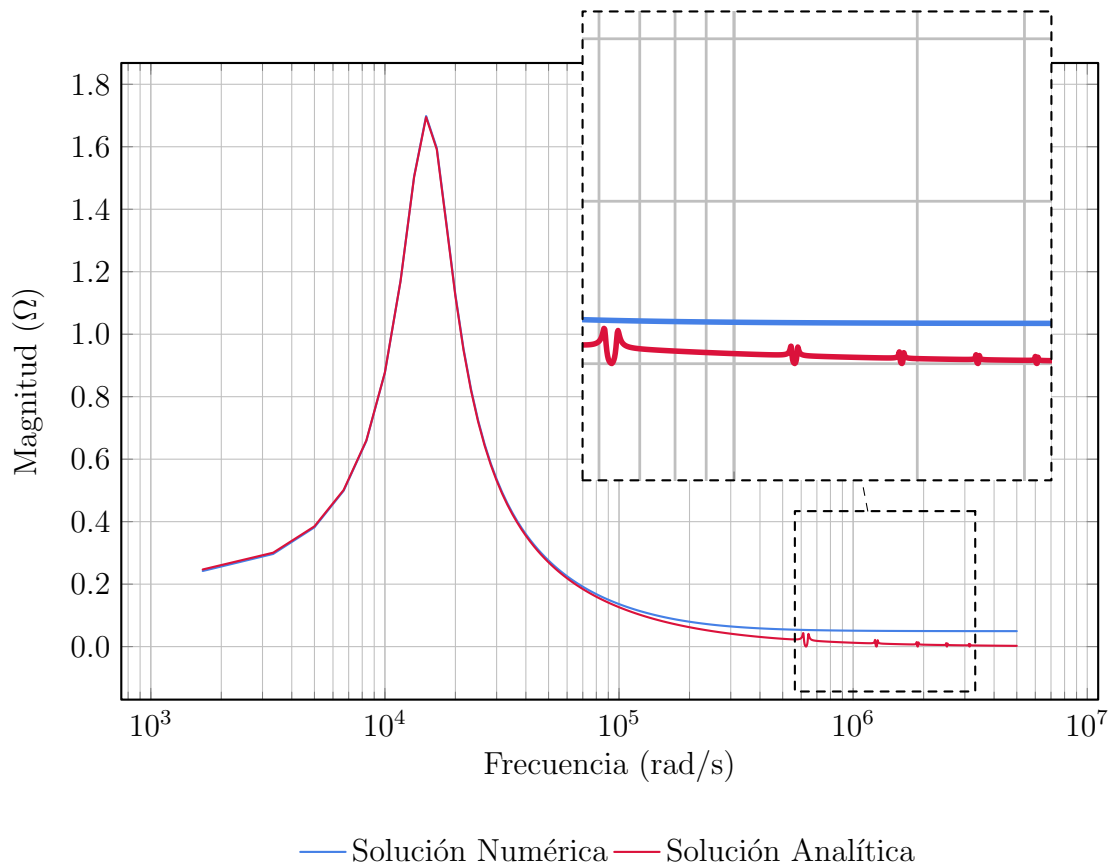


Figura 5.13: Respuesta a la frecuencia de la impedancia de entrada del convertidor buck-boost.

convertidor buck-boost, mientras que al incrementar la frecuencia  $j\omega$ , la superficie se aplana y la magnitud tiende a cero, demostrando que los efectos de resonancia serán distintos a diferentes valores de tiempo, aunque sea la misma señal la que excita el sistema. El resto de elementos de la matriz  $\mathbf{H}(j\omega, t)$  presentan un comportamiento similar al mostrado en la Figura 5.14.

#### 5.2.2.5. Identificación del Sistema.

A continuación se presenta como caracterizar un sistema lineal periódico usando una metodología utilizada con sistemas lineales invariantes en el tiempo para realizar la identificación de parámetros de la matriz de transición de estado del convertidor buck-boost

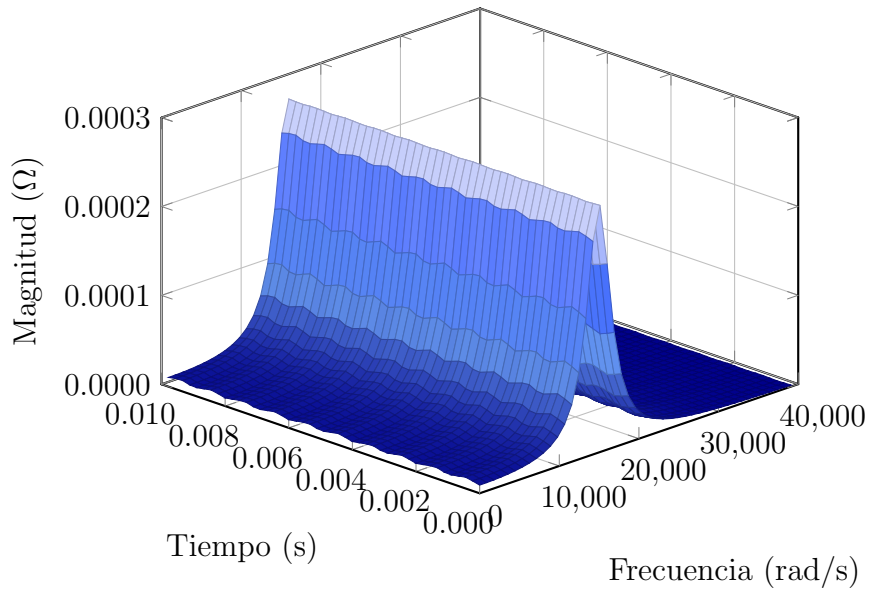


Figura 5.14: Función de transferencia de la respuesta al impulso del convertidor buck-boost.

analizado. Se desarrolló un algoritmo que procesa la información de simulaciones en el dominio del tiempo obtenida de programas de análisis transitorio y posteriormente procesar dicha información para usarla en algoritmos lineales invariantes en el tiempo de identificación del sistema.

La Figura 5.15 muestra los elementos de la matriz de transición de estado del caso de estudio; la línea punteada roja fue obtenida numéricamente a través de la propiedad 5 de las matrices de transición descrita en la sección 2.3.2, mientras que la línea continua azul muestra la trayectoria obtenida mediante el mecanismo de identificación del sistema descrito en la sección 4.6.

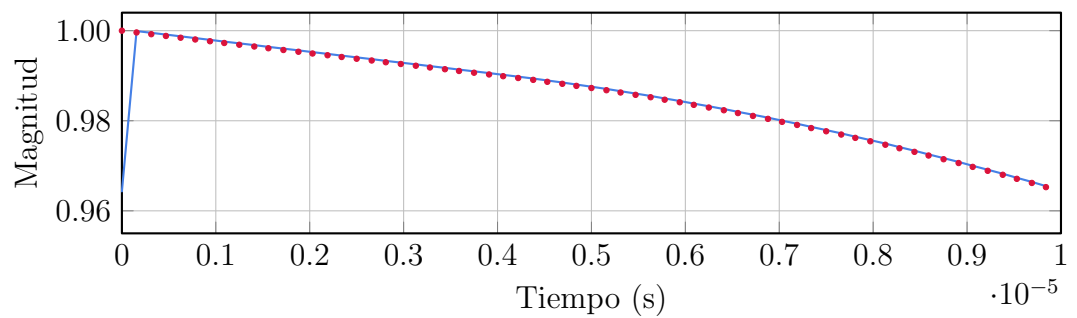
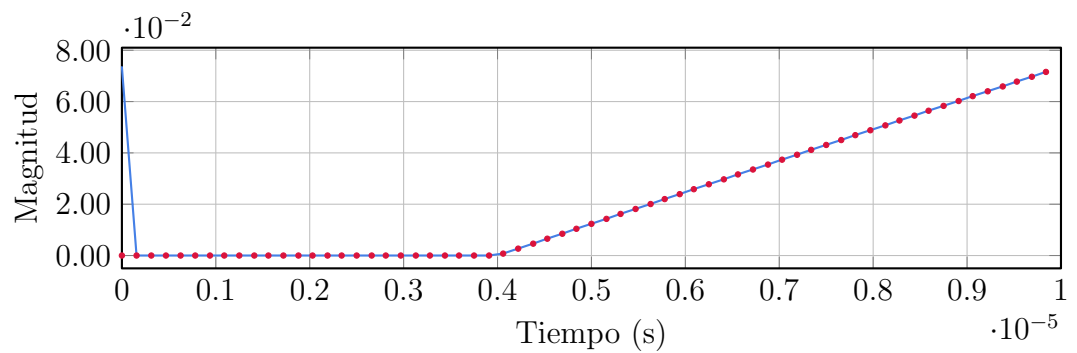
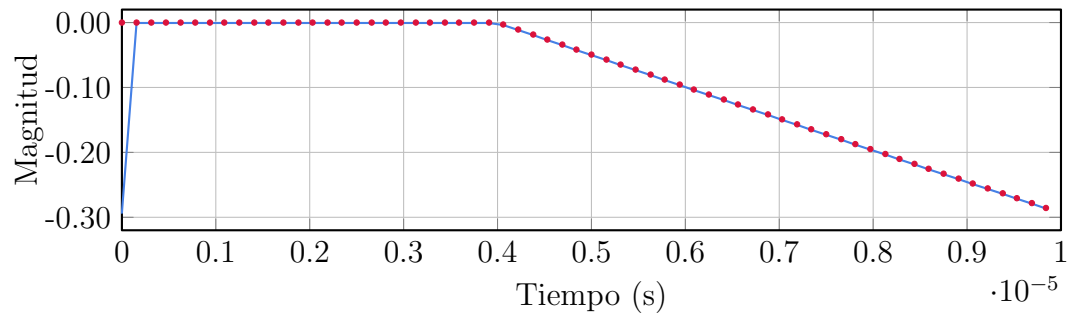
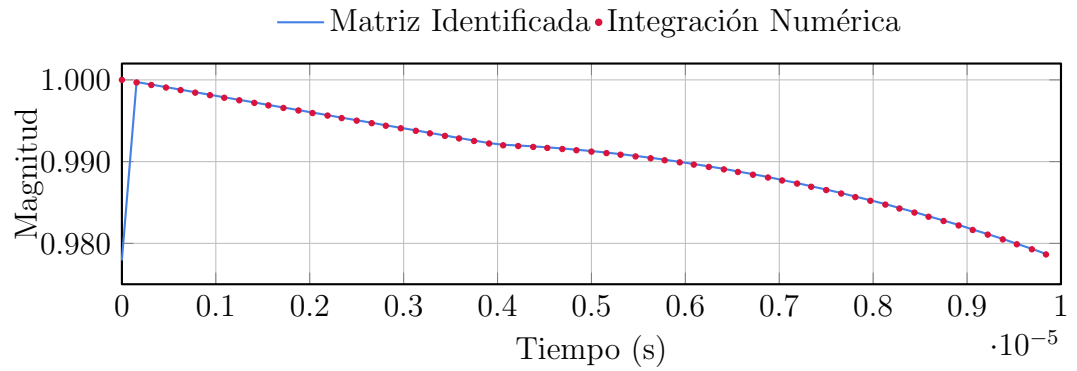


Figura 5.15: Identificación de la matriz de transición de estado del convertidor buck-boost.

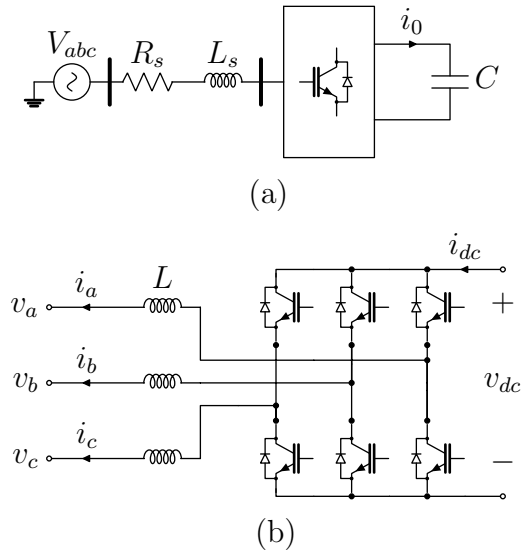


Figura 5.16: Diagrama del convertidor AC-DC, a) diagrama unifilar y b) diagrama del convertidor.

### 5.3. Convertidor AC-DC.

En esta sección se realiza el análisis de un convertidor trifásico AC-DC con un modelo en el que se consideran parámetros de control fijos, es decir, de lazo abierto. Esto nos permite caracterizar al convertidor como un sistema lineal variante en el tiempo de forma periódica con un modelo matemático de la forma (4.1).

Este tipo de convertidores se ha vuelto cada vez más común en los sistemas eléctricos de potencia actuales, debido a su importante participación en la adecuación de la energía generada con fuentes variables al conectarlas al sistema.

En la Figura 5.16 se muestra los diagramas del sistema que se analizará en este caso de estudio, en donde a) muestra el diagrama unifilar, mientras que b) muestra el circuito del convertidor trifásico cuyas ecuaciones dinámicas de forma compacta son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(t) &= \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_s} & 0 & 0 & -\frac{2v_a(t)}{3L_s} + \frac{v_b(t)}{3L_s} + \frac{v_c(t)}{3L_s} \\ 0 & -\frac{R_s}{L_s} & 0 & \frac{v_a(t)}{3L_s} - \frac{2v_b(t)}{3L_s} + \frac{v_c(t)}{3L_s} \\ 0 & 0 & -\frac{R_s}{L_s} & \frac{v_a(t)}{3L_s} + \frac{v_b(t)}{3L_s} - \frac{2v_c(t)}{3L_s} \\ \frac{v_a(t)}{C} & \frac{v_b(t)}{C} & \frac{v_c(t)}{C} & 0 \end{bmatrix}; \\
\mathbf{B}(t) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_{sa}(t) \\ v_{sb}(t) \\ v_{sc}(t) \\ i_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \\ i_c(t) \\ v_{dc}(t) \end{bmatrix} \quad (5.13)
\end{aligned}$$

en donde  $R_s$  y  $L_s$  son la resistencia y la inductancia de la fuente de AC (conexión a la red), respectivamente, y  $C$  es la capacitancia en el lado de DC del sistema. Los coeficientes periódicos  $v_a$ ,  $v_b$  y  $v_c$  son la componente fundamental de la aproximación de la serie de Fourier de la función de conmutación aplicada a la compuerta de los interruptores. Estos componentes fundamentales de la serie de Fourier se pueden expresar como:

$$\begin{aligned}
v_a(t) &= m_a \sin(\omega_0 t + \theta) \\
v_b(t) &= m_a \sin\left(\omega_0 t + \theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\
v_c(t) &= m_a \sin\left(\omega_0 t + \theta + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (5.14)
\end{aligned}$$

donde  $m_a$  y  $\theta$  son la modulación de la amplitud y el ángulo de disparo de la señal de control, respectivamente. En la Figura 5.17 se muestra la forma de onda de la señal de control. El análisis del modelo descrito anteriormente revela que cuenta con una naturaleza bilineal periódica, involucrando bi-productos entre las entradas  $m_a$ ,  $\theta$  y las variables de estado del sistema. Afortunadamente, el modelo se simplifica asumiendo que el análisis es realizado con valores fijos de  $m_a$  y  $\theta$ . Es por esta razón, y porque no hay necesidad de hacer la aproximación de las series de Taylor, que el modelo se vuelve un sistema lineal periódico y la teoría de Floquet se puede utilizar sin ningún problema.

Los parámetros del convertidor se muestran en la Tabla 5.3 [Sun21b].

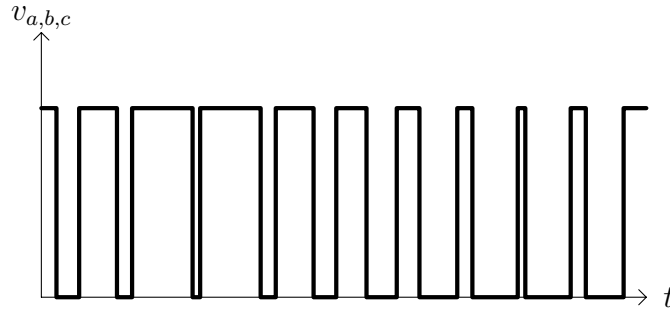


Figura 5.17: Señal de control del convertidor AC-DC.

Tabla 5.3: Parámetros del convertidor AC-DC utilizado en el caso de estudio.

Parámetro	Valor
Inductancia de la fuente ( $L_s$ )	1 mH
Resistencia de la fuente ( $R_s$ )	0.1 $\Omega$
Capacitancia del lado de DC ( $C$ )	750 $\mu\text{F}$
Frecuencia del sistema ( $f$ )	60 Hz
Modulación de la amplitud del PWM ( $m_a$ )	0.6
Modulación de la frecuencia del PWM ( $m_f$ )	15
Ángulo del PWM ( $\theta$ )	0.25 rad

### 5.3.1. Análisis de Estado Estable.

El análisis de estado estable es probablemente el estudio que más se realiza en los sistemas de potencia, ya que el objetivo de los ingenieros es que los sistemas operen siempre en este régimen y siempre están buscando eliminar cualquier alteración a la calidad de la energía que se presente.

Para empezar con el análisis del inversor realizamos primero un análisis del estado estable. Utilizando nuevamente lo descrito en la sección 2.4.1, podemos conocer la matriz de monodromía del sistema. Con los datos proporcionados en la Tabla 5.3, se obtiene lo siguiente:



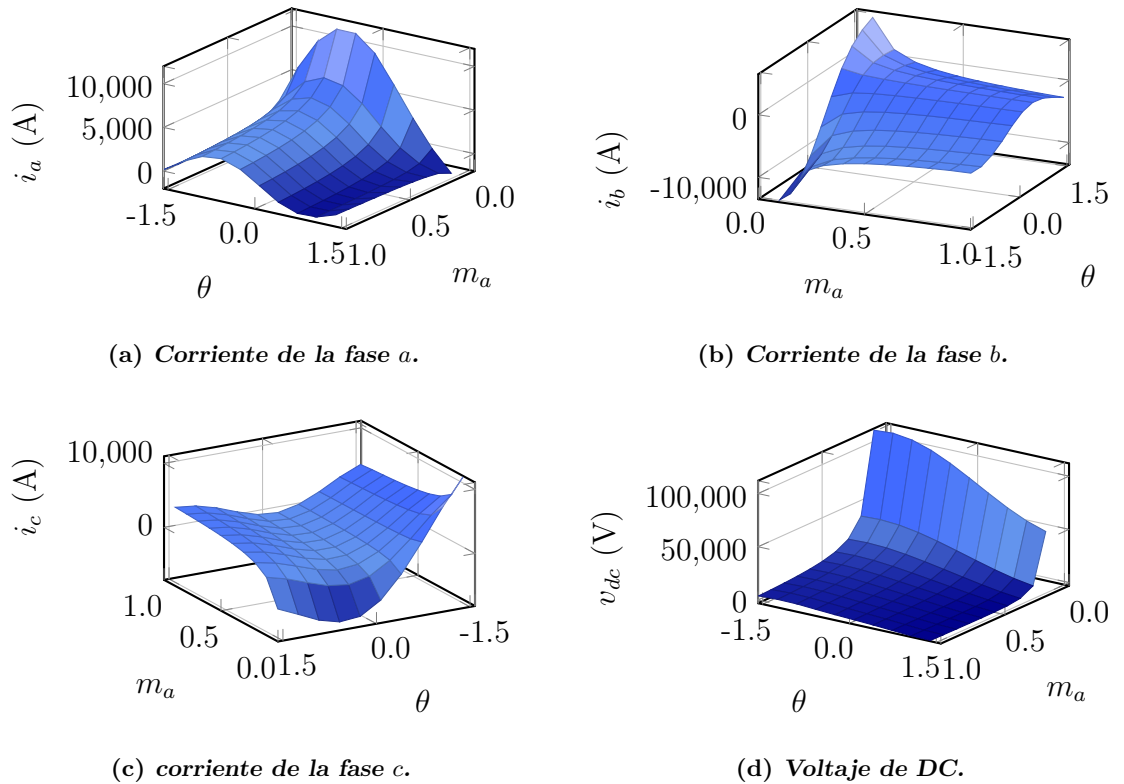


Figura 5.18: Valores de estado estable del convertidor de potencia, a) corriente de la fase a, b) corriente de la fase b, c) corriente de la fase c y d) voltaje de DC.

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} 1.1582 & 1.09216 & 1.03712 & 0.229223 \\ 0.191424 & -0.0360913 & 0.275898 & -0.0420452 \\ -1.16075 & -0.867197 & -1.12414 & -0.187178 \\ 1.71486 & 1.25235 & 1.19357 & -0.0132709 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

En la Figura 5.18 se muestra el comportamiento de estado estable de las variables de estado para diferentes valores de control. La superficie ilustra la relación no lineal que existe entre la entrada y la salida.

### 5.3.2. Respuesta en el Dominio del Tiempo.

Para realizar el análisis de la respuesta en el dominio del tiempo del inversor se comparó la solución analítica brindada por la ecuación (4.21), con la solución numérica que

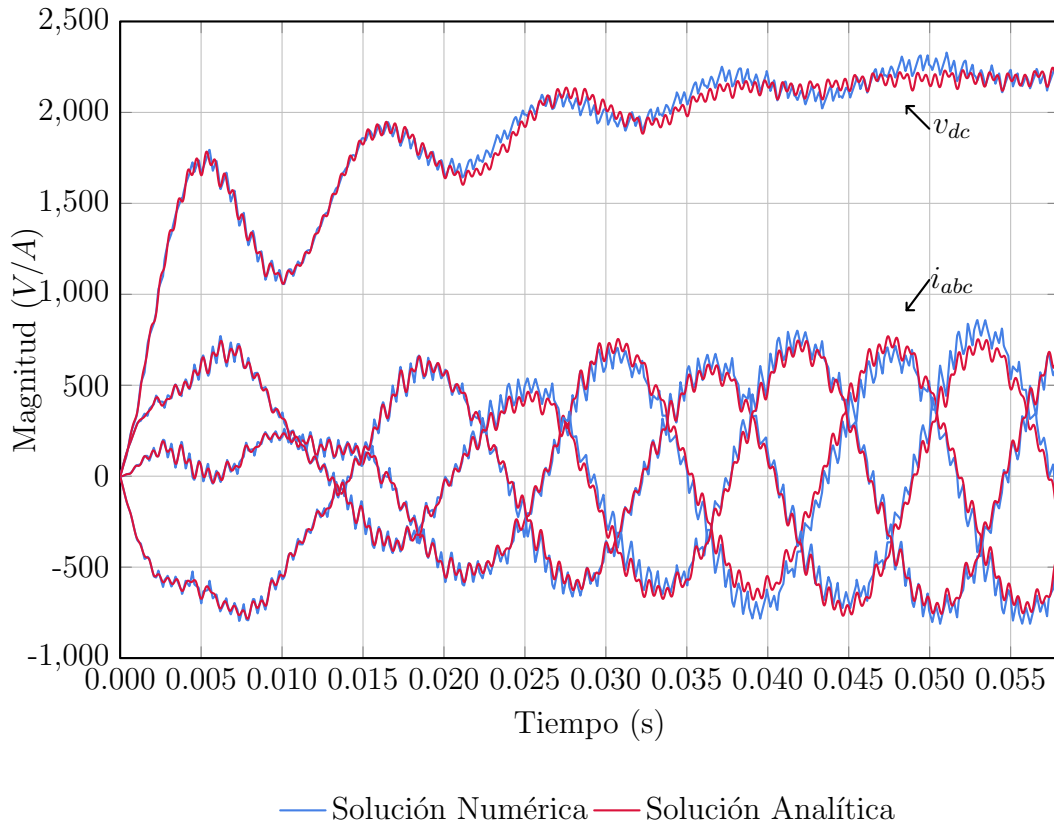


Figura 5.19: Respuesta en el dominio del tiempo del inversor.

proporciona el software Wolfram Mathematica.

La solución numérica utilizando los datos del sistema mostrados en la Tabla 5.3 se muestran en la Figura 5.19 en color azul, mientras que la solución analítica se muestra en color rojo. La solución fue calculada representando la matriz  $\mathbf{P}(t)$  con 30 armónicos. Es interesante notar que la solución puede ser calculada para una banda de espectros dado o considerando solamente componentes seleccionados para mostrar la influencia de los armónicos individuales por separado.

En este caso en particular, el circuito cuenta con más interruptores en comparación

de los convertidores DC-DC analizados anteriormente, por lo que se presenta una mayor distorsión en la forma de onda y es necesario utilizar una mayor cantidad de armónicos en la solución para incrementar la precisión de la respuesta. El error obtenido al evaluar (5.7) con la respuesta del inversor utilizando 30 armónicos es de entre del 7% y 8% para las corrientes y de 1.9266% para el voltaje de DC.

En la Figura 5.19 se puede observar el comportamiento transitorio que se presenta al energizar el sistema, que transcurrido algún tiempo se estabilizará en el valor de estado estable en el operará el sistema. También se puede notar la presencia de componentes armónicas que producen un rizado tanto en las señales de la corriente como en la señal del voltaje de DC.

### 5.3.3. Análisis Modal.

Para conocer si el sistema dinámico que estamos estudiando es estable o no, se realiza un análisis modal a los valores característicos de la matriz de monodromía bajo diferentes condiciones de control. Para este caso en particular, el análisis se efectúa variando la modulación de amplitud  $m_a$  de la señal PWM para conocer la trayectoria en el plano complejo de los distintos valores característicos del sistema.

La Figura 5.20 muestra en cuatro colores diferentes los cambios en el plano complejo de los valores característicos de la matriz de monodromía  $\Phi(t)$  del sistema. Al permanecer todos los valores característicos para cada valor de  $m_a$  dentro del círculo unitario, se puede concluir que el convertidor operará de manera estable bajo cualquier condición de control.

### 5.3.4. Respuesta en el Dominio de la Frecuencia.

Para el estudio de la respuesta a la frecuencia del inversor se utilizarán las metodologías presentadas en la sección 4.5, donde a partir de la teoría de Floquet se desarrollan los conceptos de funciones de transferencia armónicas y funciones de transferencia periódicas.

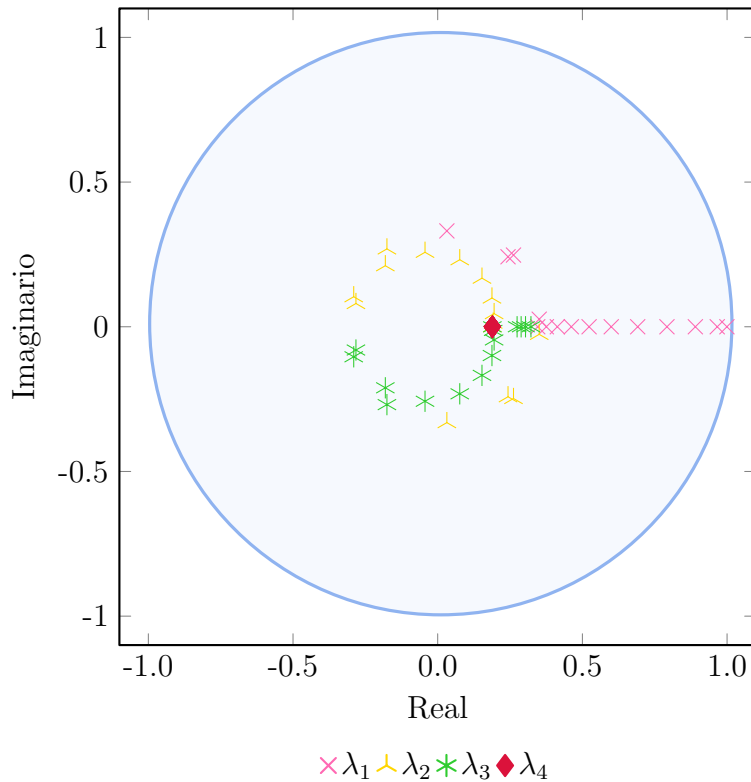
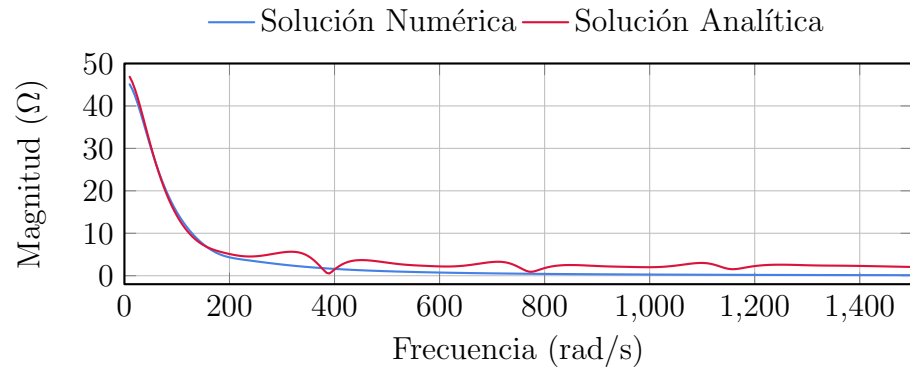


Figura 5.20: Lugar geométrico de las raíces del inversor.

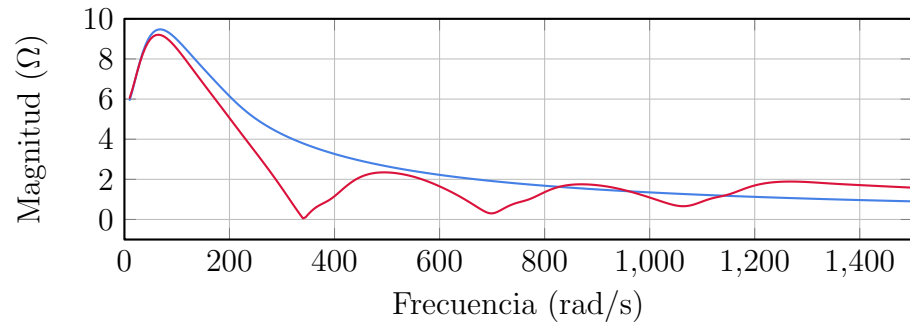
Ambos enfoques presentan resultados interesantes en el comportamiento del convertidor.

En la Figura 5.21 se muestran las funciones de transferencia de las impedancias de salida con magnitud en ohms para las distintas fases  $a$ ,  $b$  y  $c$ . La línea azul muestra la respuesta donde la influencia de los armónicos es despreciada, mientras que la línea roja muestra la respuesta a la frecuencia influenciada por los armónicos causados por la conmutación de los dispositivos electrónicos. La Figura 5.21 fue calculada considerando tres armónicos únicamente; de esta manera, el análisis preciso muestra que los armónicos tienen un efecto en frecuencias por encima de la fundamental.

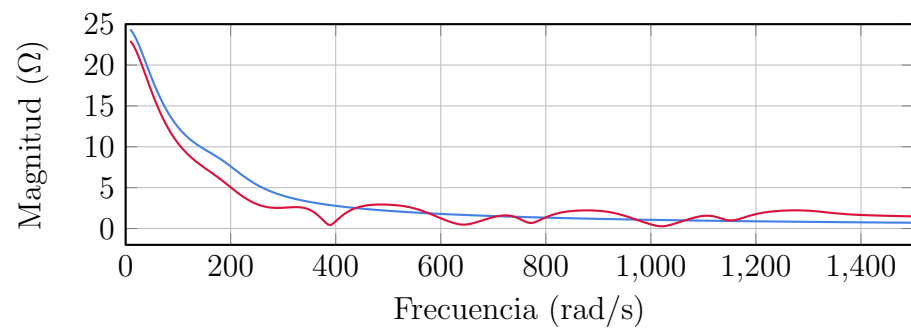
Finalmente, se considera el uso de la respuesta al impulso. Es posible darse cuenta



(a) Fase a.



(b) Fase b.



(c) Fase c.

Figura 5.21: Respuesta a la frecuencia de las admitancias propias del inversor.

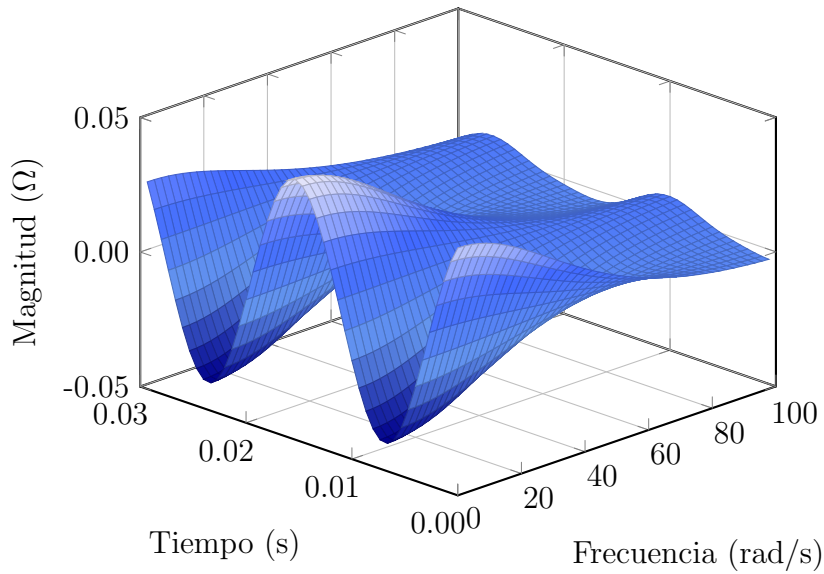


Figura 5.22: Respuesta al impulso del inversor.

desde la Figura 5.22, en la que se muestra un elemento de  $\mathbf{H}(j\omega, t)$ , que la admitancia del convertidor presenta un comportamiento periódico en el tiempo, mientras que al incrementarse la frecuencia  $j\omega$  la superficie tiende a aplanarse y la magnitud tiende a cero, lo que demuestra que aunque se inyecte la misma señal de excitación, ocurrirán distintos efectos de resonancia dependiendo de en que momento del tiempo se encuentre. El resto de los elementos de la matriz  $\mathbf{H}(j\omega, t)$  presentan un comportamiento similar.

### 5.3.5. Identificación del Sistema.

La Figura 5.23 muestra los elementos de la diagonal de la matriz de transición de estado para el inversor; la línea punteada roja se obtuvo a través de la solución numérica mostrada en 2.3.2 mientras que la línea continua azul muestra el mecanismo de identificación del sistema descrito en la Sección 4.6, en el que se utiliza la información procesada a partir de simulaciones y, posteriormente, utilizar la técnica de mínimos cuadrados. Dos modelos del convertidor fueron simulados para obtener las ecuaciones homogéneas (4.35). En una simulación, un caso base que captura un estado estable periódico y otro que simula el

---

sistema, pero con condiciones iniciales perturbadas, es suficiente para que las restricciones de pequeña señal se conserven. Las diferencias de las variables de estado son procesadas como ecuaciones lineales algebraicas como se muestra en la Sección 4.6.

Es importante notar que la precisión con la que se estimó la matriz del sistema se realizó sin un conocimiento previo de la matriz  $\mathbf{A}(t)$ . En casos más complejos, se puede obtener una mejor identificación procesando al mismo tiempo las mediciones de varios experimentos. Esta estrategia fue utilizada en [Melgoza01].

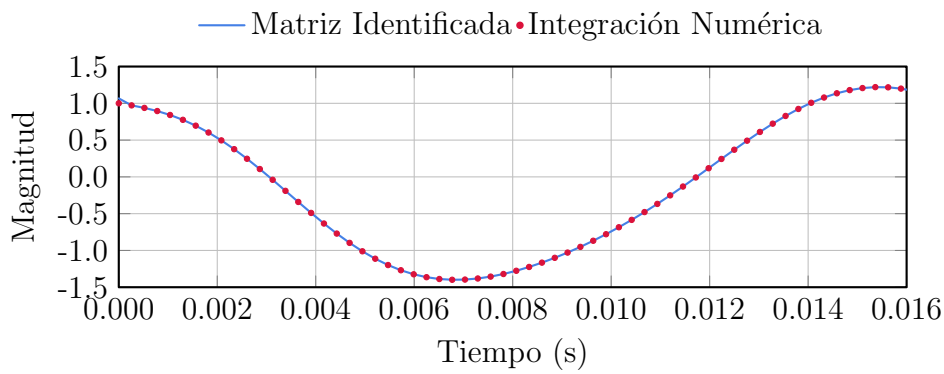
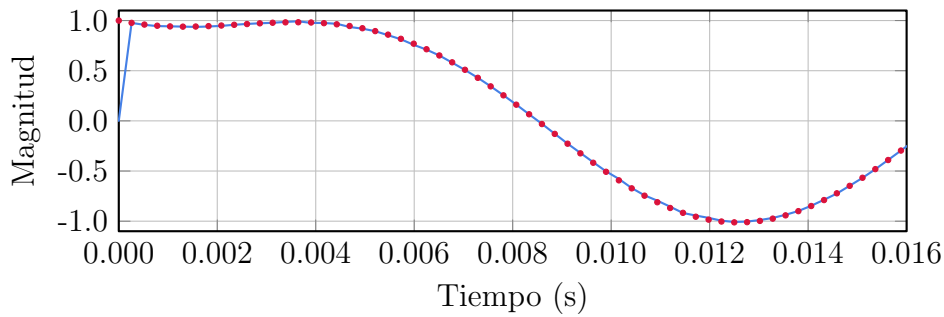
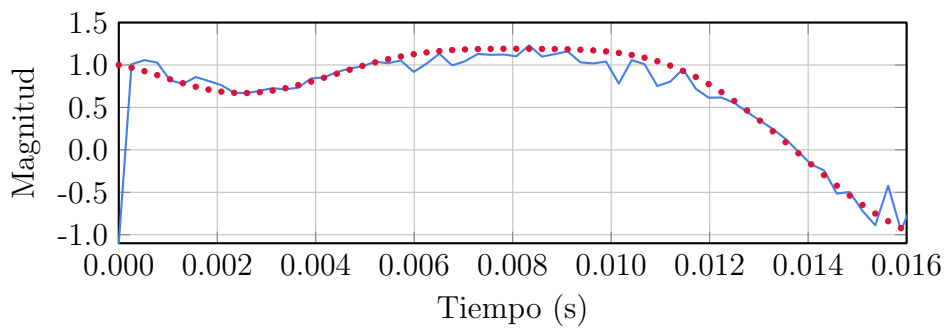
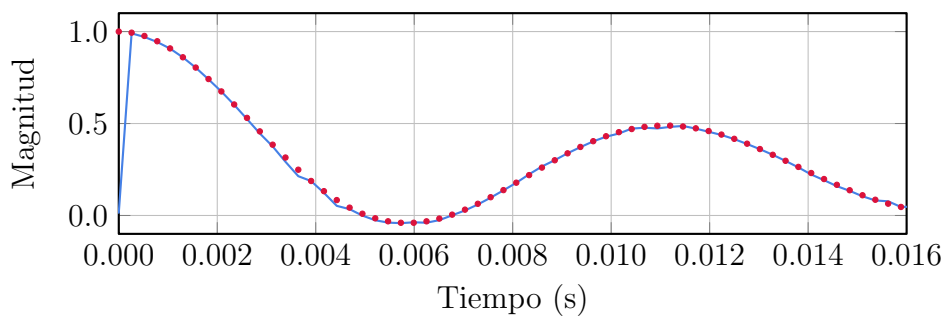
(a) Elemento  $\Phi_{1,1}$ .(b) Elemento  $\Phi_{2,2}$ .(c) Elemento  $\Phi_{3,3}$ .(d) Elemento  $\Phi_{4,4}$ .

Figura 5.23: Elementos de la diagonal de la matriz de transición de estado identificada.



## 5.4. Conclusiones.

En este capítulo se presentaron tres diferentes casos de estudio para poner a prueba la metodología propuesta en este trabajo de tesis. Se aplicaron distintos estudios a convertidores tanto del tipo DC-DC, como del tipo AC-DC, en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia a través de simulaciones por computadora realizadas en el software Wolfram Mathematica.

En el caso del dominio del tiempo, se realizó un estudio con la respuesta completa de los sistemas y otro del estado estable utilizando la descomposición de Floquet, en los que se obtuvieron resultados con bajo porcentaje de error comparados con los métodos numéricos que utilizan representaciones invariantes en el tiempo. Además, se determinó la estabilidad del sistema realizando un análisis modal a los valores característicos de la matriz de transición de estados.

Por otro lado, en el dominio de la frecuencia, se obtuvieron dos tipos de funciones de transferencia, la armónica y la periódica, en las que se pudo observar la influencia de los armónicos debidos a la conmutación de los elementos del circuito.

Finalmente, se puso a prueba un algoritmo que permite la identificación de la matriz de transición en los tres diferentes convertidores cuando no se conoce la matriz de coeficientes del sistema, obteniendo los mismos resultados que se obtienen cuando se determina a través de una integración numérica.



## Capítulo 6

# Conclusiones.

### 6.1. Conclusiones Generales.

En diversos campos de la ingeniería aparecen sistemas que pueden modelarse como sistemas lineales y variantes en el tiempo en forma periódica, como es el caso de la electrónica de potencia, en el que la presencia de dispositivos conmutados es muy común. Esto ha llevado a los ingenieros a desarrollar diversas técnicas para el análisis y modelado de este tipo de sistemas, que generalmente se basan en representaciones de sistemas invariantes en el tiempo, de las cuales se encuentra una gran cantidad de artículos en la literatura; mientras que para el caso de los sistemas variantes en el tiempo, no existe una cantidad equiparable de resultados considerando que es un tema que ha estado presente durante años.

En este trabajo de tesis se realizó la revisión de una de las herramientas más importantes de los sistemas periódicos, la teoría de Floquet, como una alternativa a las metodologías más comúnmente aplicadas a los convertidores de potencia, tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. Los dos pilares centrales alrededor de los que se desarrolla la metodología planteada en este documento, son la Descomposición de Floquet y la Transformación de Floquet-Lyapunov.

Para lograr obtener los resultados mostrados en esta tesis, primeramente se estudió

el modelo de los convertidores de potencia. Al ser dispositivos que cuentan con elementos que cambian de estado cada cierto tiempo, presentan un comportamiento variante en el tiempo de forma periódica. Es por esta razón que es posible utilizar las técnicas derivadas de la teoría de Floquet presentadas a lo largo del documento para analizar y modelar estos dispositivos.

Posteriormente, mediante el uso de la descomposición de Floquet y la transformación de Floquet-Lyapunov, se obtuvieron expresiones que permiten realizar de manera analítica diversos estudios como lo son: estudio de estado estable, respuesta en el dominio del tiempo, respuesta en el dominio de la frecuencia y análisis modal; además de desarrollar un algoritmo que permite la identificación de la matriz de transición de estado sin un conocimiento previo de los parámetros del sistema.

Finalmente, se pusieron a prueba estas técnicas previamente mencionadas en tres distintos casos de estudio, dos convertidores DC-DC y un convertidor AC-DC, en los cuales se demostró que las soluciones analíticas presentadas son perfectamente aplicables para estudios de estado estable, y para las respuestas tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. También se presentaron los resultados de la respuesta al impulso periódica, que comúnmente es olvidada en la literatura, y que es de importancia para el análisis armónico de los sistemas. Además de la posibilidad de obtener una estimación de la matriz de transición de estado de un sistema a partir de mediciones en el dominio del tiempo que permiten, posteriormente, realizar un análisis modal, preciso y de bajo costo computacional.

Los resultados obtenidos en esta tesis permiten argumentar que la metodología propuesta con base en la teoría de Floquet, es efectiva, eficiente y bajo ninguna circunstancia menos adecuada que las técnicas más utilizadas de análisis y modelado de sistemas periódicos. Aunado a esto, su implementación resulta sencilla, sin necesidad de un gran poder de cómputo de los equipos actuales, pudiendo ser aplicada a sistemas con tamaños considerables que anteriormente resultaban complicados de llevar a cabo. Esto debido a que,

al ser un método analítico, no se presentan problemas de integración o estabilidad numérica y sin la necesidad de incrementar las dimensiones del sistema original.

## **6.2. Trabajos Futuros.**

El desarrollo de este trabajo de tesis ha permitido vislumbrar una serie de proyectos que pueden ser realizados en el futuro cercano. A continuación se plantean algunos de ellos:

1. Implementar los métodos de soluciones analíticas presentadas a lo largo de este documento con algún sistema de control de lazo cerrado en los convertidores de potencia.
2. Probar la metodología propuesta con sistemas de convertidores conectados a la red.
3. Experimentar con algún convertidor físico en el laboratorio para validar los resultados mostrados.



# Referencias

- [Allen07] Allen, M. S. Floquet experimental modal analysis for system identification of linear time-periodic systems. *En International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, tomo 4806, págs. 823–833. 2007.
- [Ang10] Ang, S., Oliva, A., Griffiths, G., y Harrison, R. *Power-switching converters*. CRC press, 2010.
- [Asadi19] Asadi, F. y Eguchi, K. *Simulation of Power Electronics Converters Using PLECS®*. Academic Press, 2019.
- [Balas97] Balas, M. J. y Lee, Y. J. Controller design of linear periodic time-varying systems. *En Proceedings of the 1997 American Control Conference (Cat. No. 97CH36041)*, tomo 5, págs. 2667–2671. IEEE, 1997.
- [Belkhat97] Belkhat, M. *Stability criteria for AC power systems with regulated loads*. Purdue University, 1997.
- [Bing09] Bing, Z., Karimi, K. J., y Sun, J. Input impedance modeling and analysis of line-commutated rectifiers. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 24(10):2338–2346, 2009.
- [Bohmann89] Bohmann, L. J. y Lasseter, R. H. Harmonic interactions in thyristor controlled reactor circuits. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 4(3):1919–1926, 1989.

- [Butcher09] Butcher, E. A., Bueler, E., Carlson, T., et al. Magnus' expansion for time-periodic systems: Parameter-dependent approximations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(12):4226–4245, 2009.
- [Chen18] Chen, W.-W. y Chen, J.-F. *Control Techniques for Power Converters with Integrated Circuit*. Springer, 2018.
- [Coddington55] Coddington, E. A. y Levinson, N. *Theory of ordinary differential equations*. Tata McGraw-Hill Education, 1955.
- [Colaneri05] Colaneri, P. Theoretical aspects of continuous-time periodic systems. *Annual Reviews in Control*, 29(2):205–215, 2005.
- [D'Angelo70] D'Angelo, H. *Linear Time-Varying Systems*. Allyn and Bacon, Inc., jan 1970.
- [Daryaei21] Daryaei, M., Khajehoddin, S. A., Mashreghi, J., y Afridi, K. K. A new approach to steady-state modeling, analysis, and design of power converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 36(11):12746–12768, 2021.
- [De Keyser06] De Keyser, R., Bonilla Alarcon, J., y Ionescu, C.-M. A comparative study of several control techniques applied to a boost converter. *En 10th International Conference on Optimization of Electrical and Electronic Equipment (OPTIM 2006)*, págs. 71–78. Transsilvania University Press Brasov, 2006.
- [Desoer59] Desoer, C. Steady-state transmission through a network containing a single time-varying element. *IRE Transactions on Circuit Theory*, 6(3):244–252, 1959.
- [Faraday31] Faraday, M. Xvii. on a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces.



- Philosophical transactions of the Royal Society of London*, (121):299–340, 1831.
- [Feng02] Feng, X., Liu, J., y Lee, F. C. Impedance specifications for stable dc distributed power systems. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 17(2):157–162, 2002.
- [Fettweis59] Fettweis, A. Steady-state analysis of circuits containing a periodically-operated switch. *IRE Transactions on Circuit Theory*, 6(3):252–260, 1959.
- [Floquet83] Floquet, G. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *En Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, tomo 12, págs. 47–88. 1883.
- [Fourier22] Fourier, J. B. J., Darboux, G., et al. *Théorie analytique de la chaleur*, tomo 504. Didot Paris, 1822.
- [Heydt96] Heydt, G. y Jun, J. Rapid calculation of the periodic steady state for electronically switched, time varying power system loads. *IEEE transactions on power delivery*, 11(4):1860–1867, 1996.
- [Hill86] Hill, G. W. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. *Acta mathematica*, 8(1):1–36, 1886.
- [Hiti96] Hiti, S. y Boroyevich, D. Small-signal modeling of three-phase pwm modulators. *En PESC Record. 27th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference*, tomo 1, págs. 550–555. IEEE, 1996.
- [Klausmeier08] Klausmeier, C. A. Floquet theory: a useful tool for understanding nonequilibrium dynamics. *Theoretical Ecology*, 1(3):153–161, 2008.
- [Krause13] Krause, P. C., Wasynczuk, O., Sudhoff, S. D., y Pekarek, S. D. *Analysis of electric machinery and drive systems*, tomo 75. John Wiley & Sons, 2013.

- [Krein90] Krein, P. T., Bentsman, J., Bass, R. M., y Lesieutre, B. L. On the use of averaging for the analysis of power electronic systems. *IEEE Transactions on power electronics*, 5(2):182–190, 1990.
- [Krein98] Krein, P. *Elements of power electronics*. Oxford University Press, United Kingdom, 1998.
- [Kronig31] Kronig, R. d. L. y Penney, W. G. Quantum mechanics of electrons in crystal lattices. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 130(814):499–513, 1931.
- [Kundur07] Kundur, P. *Power system stability*, tomo 10. CRC press New York, NY, USA, 2007.
- [Leon-Masich14] Leon-Masich, A., Valderrama-Blavi, H., Bosque-Moncusí, J. M., Maix-Altes, J., y Martínez-Salamero, L. Sliding-mode-control-based boost converter for high-voltage–low-power applications. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 62(1):229–237, 2014.
- [Li17] Li, H., Guo, Z., Ren, F., Zhang, X., y Zhang, B. A stability analysis method based on floquet theory for multi-stage dc-dc converters system. *En 2017 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*, págs. 3025–3029. IEEE, 2017.
- [Li19] Li, H., Ren, F., Liu, C., Guo, Z., Lü, J., Zhang, B., y Zheng, T. Q. An extended stability analysis method for paralleled dc-dc converters system with considering the periodic disturbance based on floquet theory. *IEEE Access*, 8:9023–9036, 2019.
- [Love08] Love, G. N. y Wood, A. R. Harmonic state space model of power electronics. *En 2008 13th International Conference on Harmonics and Quality of Power*, págs. 1–6. IEEE, 2008.

- [Mao98] Mao, H., Boroyevich, D., y Lee, F. C. Novel reduced-order small-signal model of a three-phase pwm rectifier and its application in control design and system analysis. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 13(3):511–521, 1998.
- [Martín11] Martín, J. A. Á., Melgoza, J. R., y Pasaye, J. J. R. Exact steady state analysis in power converters using floquet decomposition. *En 2011 North American Power Symposium*, págs. 1–7. IEEE, 2011.
- [Mathieu68] Mathieu, É. Mémoire sur le mouvement vibratoire d’une membrane de forme elliptique. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 13:137–203, 1868.
- [Meissner18] Meissner, E. Ueber schüttelerscheinungen in systemen mit periodisch veränderlicher elastizität. *Schweizerische Bauzeitung*, 72(11):95–98, 1918.
- [Melgoza01] Melgoza, J. J. R., Heydt, G. T., Keyhani, A., Agrawal, B. L., y Selin, D. An algebraic approach for identifying operating point dependent parameters of synchronous machines using orthogonal series expansions. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 16(1):92–98, 2001.
- [Middlebrook76a] Middlebrook, R. D. Input filter considerations in design and application of switching regulators. *IAS’76*, 1976.
- [Middlebrook76b] Middlebrook, R. D. y Cuk, S. A general unified approach to modelling switching-converter power stages. *En 1976 IEEE power electronics specialists conference*, págs. 18–34. IEEE, 1976.
- [Mohler91] Mohler, R. R. *Nonlinear systems (vol. 1) dynamics and control*. Prentice-Hall, Inc., 1991.
- [Moler03] Moler, C. y Van Loan, C. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. *SIAM review*, 45(1):3–49, 2003.

- [Neves05] Neves, A. G. Approximating solutions of linear ordinary differential equations with periodic coefficients by exact picard iterates. *Mathematica Journal*, 10(1):90–113, 2005.
- [Oruganti85] Oruganti, R. y Lee, F. C. State-plane analysis of parallel resonant converter. *En 1985 IEEE Power Electronics Specialists Conference*, págs. 56–73. IEEE, 1985.
- [Pandiyani99] Pandiyani, R. y Sinha, S. Periodic flap control of a helicopter blade in forward flight. *Journal of Vibration and Control*, 5(5):761–777, 1999.
- [Perkins95] Perkins, B., Marti, J., y Dommel, H. Nonlinear elements in the emtp: steady-state initialization. *IEEE Transactions on Power Systems*, 10(2):593–601, 1995.
- [Richards12] Richards, J. A. *Analysis of periodically time-varying systems*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Rim88] Rim, C., Joung, G., y Cho, G.-H. A state space modeling of non-ideal dc-dc converters. *En PESC 88 Record 19th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference (1988)*, págs. 943–950. IEEE, 1988.
- [Rugh96] Rugh, W. J. *Linear system theory*. Prentice-Hall, Inc., 1996.
- [Sanders92] Sanders, S. R. y Verghese, G. C. Lyapunov-based control for switched power converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 7(1):17–24, 1992.
- [Schulz07] Schulz, C. S. *Rotorcraft smoothing via linear time periodic methods*. Air Force Institute of Technology, 2007.
- [Semlyen95] Semlyen, A. y Medina, A. Computation of the periodic steady state in systems with nonlinear components using a hybrid time and frequency domain methodology. *IEEE Transactions on Power Systems*, 10(3):1498–1504, 1995.

- [Severns85] Severns, R. P., Bloom, G., y Severns, R. P. *Modern DC-to-DC switch-mode power converter circuits*. Springer, 1985.
- [Sinha94] Sinha, S. y Joseph, P. Control of general dynamic systems with periodically varying parameters via liapunov-floquet transformation. 1994.
- [Sinha97] Sinha, S. C. y Butcher, E. A. Symbolic computation of fundamental solution matrices for linear time-periodic dynamical systems. *Journal of Sound and Vibration*, 206(1):61–85, 1997.
- [Snyder21] Snyder, S., Zhao, P., y Hovakimyan, N. Adaptive control for linear parameter-varying systems with application to a vtol aircraft. *Aerospace Science and Technology*, 112:106621, 2021.
- [Strutt83] Strutt, J. W. y Rayleigh, L. On the crispations of fluid resting upon a vibrating support. *Phil. Mulag*, 16:50–53, 1883.
- [Sun97] Sun, J. y Grotstollen, H. Symbolic analysis methods for averaged modeling of switching power converters. *IEEE transactions on power electronics*, 12(3):537–546, 1997.
- [Sun00] Sun, J. Unified averaged switch models for stability analysis of large distributed power systems. *En APEC 2000. Fifteenth Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (Cat. No. 00CH37058)*, tomo 1, págs. 249–255. IEEE, 2000.
- [Sun05] Sun, J. Input impedance analysis of single-phase pfc converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 20(2):308–314, 2005.
- [Sun08] Sun, J. y Bing, Z. Input impedance modeling of single-phase pfc by the method of harmonic linearization. *En 2008 Twenty-Third Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition*, págs. 1188–1194. IEEE, 2008.
- [Sun09] Sun, J. Small-signal methods for ac distributed power systems—a review. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 24(11):2545–2554, 2009.

- [Sun11] Sun, J. Impedance-based stability criterion for grid-connected inverters. *IEEE transactions on power electronics*, 26(11):3075–3078, 2011.
- [Sun21a] Sun, J. Two-port characterization and transfer immittances of ac-dc converters—part ii: Applications. *IEEE Open Journal of Power Electronics*, 2:483–510, 2021.
- [Sun21b] Sun, J. Two-port characterization and transfer immittances of ac-dc converters—part i: Modeling. *IEEE Open Journal of Power Electronics*, 2:440–462, 2021.
- [Timoshenko70] Timoshenko, S. *Theory of elastic stability 2e*. Tata McGraw-Hill Education, 1970.
- [Trincher014] Trincher0, R., Stievano, I. S., y Canavero, F. G. Steady-state analysis of switching power converters via augmented time-invariant equivalents. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 29(11):5657–5661, 2014.
- [Tse03] Tse, C. K. *Complex behavior of switching power converters*. CRC press, 2003.
- [Tymerski91] Tymerski, R. Volterra series modeling of power conversion systems. *IEEE Transactions on power electronics*, 6(4):712–718, 1991.
- [Undeland95] Undeland, M. N., Robbins, W. P., y Mohan, N. Power electronics. *En Converters, Applications, and Design*. John Wiley & Sons, 1995.
- [Vargas19] Vargas, U., Ramirez, A., y Abdel-Rahman, M. A. Practical frequency-domain characterization of switching converters under pwm via floquet theory. *Electric Power Systems Research*, 175:105849, 2019.
- [Visser91] Visser, H. y Van den Bosch, P. Modelling of periodically switching networks. *En PESC'91 Record 22nd Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference*, págs. 67–73. IEEE, 1991.

- 
- [Wang17] Wang, Y., Wang, X., Chen, Z., y Blaabjerg, F. Small-signal stability analysis of inverter-fed power systems using component connection method. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 9(5):5301–5310, 2017.
- [Wereley90] Wereley, N. M. *Analysis and control of linear periodically time varying systems*. Tesis Doctoral, Massachusetts Institute of Technology, 1990.
- [Yang20] Yang, H., Just, H., Eggers, M., y Dieckerhoff, S. Linear time-periodic theory-based modeling and stability analysis of voltage-source converters. *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics*, 9(3):3517–3529, 2020.
- [Zadeh50] Zadeh, L. A. Frequency analysis of variable networks. *Proceedings of the IRE*, 38(3):291–299, 1950.