



Universidad Nacional Autónoma de
México y Universidad Michoacana
de San Nicolás de Hidalgo



Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UMSNH-UNAM

Maximalidad y linealidad en grupos topológicos

T E S I S

que para obtener el grado de

Maestra en Ciencias Matemáticas

presenta

Lic. Brenda Pamela Pérez Amézcua

Asesor:

Dr. Ulises Ariet Ramos García

Morelia, Michoacán de Ocampo, México

Noviembre 2022

Agradecimientos

Agradezco enormemente el apoyo de mis profesores y amigos por su cariño y labor docente, así como a mi asesor de tesina Ulises Ariet Ramos García por el compromiso que tiene al compartir sus experiencias y conocimientos con los otros.

Dedicatoria

A mis papás, quienes su apoyo incondicional es una bendición.
A Mauri, por compartirme diario su sabiduría, reconocimiento y cariño.

Índice general

Resumen/Abstract	1
Introducción	2
1. Preliminares	3
1.1. Semigrupo de ultrafiltros	3
1.2. Idempotentes en semigrupos compactos	4
1.3. Topologías vía ultrafiltros	5
1.4. Grupos topológicos maximales y lineales	8
2. Un grupo topológico maximal no lineal	11
2.1. Idempotentes y productos finitos	11
2.2. Un resultado combinatorio	13
2.3. Sistemas, ultrafiltros y topologías especiales	20
2.4. Construcción de una topología maximal especial	26

Resumen

Un grupo topológico G es llamado *lineal* si tiene una base local para el 1_G conformada por subgrupos. Un espacio topológico (X, τ) es llamado *maximal* si τ no tiene puntos aislados y es maximal entre las topologías sin puntos aislados. En [4] Protasov mostró que la existencia de un grupo topológico maximal no puede ser establecida en ZFC y en 1975 Malykhin [2], asumiendo Axioma de Martin, construyó un grupo topológico maximal lineal. Hasta 2012 se mantenía abierta una pregunta planteada por Zelenyuk y Protasov: ¿Son todos los grupos topológicos maximales también lineales? La respuesta a esta pregunta es negativa y, asumiendo $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, Zelenyuk en [6] propuso la construcción de una topología maximal no lineal en el grupo booleano $\mathbb{Z}_2^\omega$. Este trabajo tiene como objetivo principal reproducir las técnicas empleadas por Zelenyuk al construir una topología de grupo maximal no lineal.

Abstract

A topological group G is called *linear* if it has a local basis for 1_G made up of subgroups. A topological space (X, τ) is called *maximal* if τ has no isolated points and is maximal among topologies without isolated points. In [4] Protasov showed that the existence of a maximal topological group cannot be established on ZFC and in 1975 Malykhin [2], assuming Martin's Axiom, constructed a linear maximal topological group. Until 2012, a question posed by Zelenyuk and Protasov remained open: Are all maximal topological groups also linear? The answer to this question is negative and, assuming $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, Zelenyuk in [6] proposed the construction of a non-linear maximal topology on the boolean group $\mathbb{Z}_2^\omega$. The main objective of this work is to reproduce the techniques used by Zelenyuk when building a non-linear maximal group topology.

Palabras clave: topología, ultrafiltro, compacidad, idempotente, teoría de Ramsey.

Introducción

Un grupo topológico G es llamado *lineal* si tiene una base local para el 1_G conformada por subgrupos. Un espacio topológico (X, τ) es llamado *maximal* si τ no tiene puntos aislados y es maximal entre las topologías sin puntos aislados, es decir, si $\tau \subsetneq \tau'$, τ' tiene puntos aislados. Muchas caracterizaciones se tienen de los espacios maximales, sin embargo, en [7] encontramos una equivalencia de interés para este trabajo, X es maximal si y sólo si para cada $x \in X$, existe un único ultrafiltro no principal en X que converge a x .

En [4] Protasov mostró que la existencia de un grupo topológico maximal no puede ser establecida en ZFC y en 1975 Malykhin [2], asumiendo Axioma de Martin, construyó un grupo topológico maximal lineal a partir de un ultrafiltro unión sobre $[\omega]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$. Hasta 2012 se mantenía abierta una pregunta planteada por Zelenyuk y Protasov ([3], pregunta 13.26): ¿Son todos los grupos topológicos maximales también lineales?

La respuesta a esta pregunta es negativa y, asumiendo $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, Zelenyuk en [6] propuso la construcción de una topología maximal no lineal en el grupo booleano $\mathbb{Z}_2^\omega$. Este trabajo tiene como objetivo principal reproducir las técnicas empleadas por Zelenyuk al construir una topología de grupo maximal no lineal y resaltar la similitud/potencial que tiene esta técnica en la construcción de topologías de grupo con características buscadas.

En el Capítulo 1 introduciremos al semigrupo de ultrafiltros βS (con S semigrupo discreto), propiedades de los semigrupos compactos (en particular de βS) y dos formas clásicas de inducir topologías de grupo vía ultrafiltros. En el Capítulo 2 describiremos a detalle la técnica empleada por Zelenyuk, la cual, en forma general, está basada en: creación de un teorema tipo Ramsey que encripte las propiedades topológicas buscadas, construcción de un ultrafiltro con propiedades combinatorias asociadas al teorema tipo Ramsey, asumiendo $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ construir una topología maximal no lineal.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Semigrupo de ultrafiltros

Sea $(S, \cdot)$ un semigrupo discreto y sea βS la compactación de Stone-Čech de S . Identificamos a los elementos de βS con los ultrafiltros del semigrupo S ; la base para la topología de βS esta conformada por subconjuntos de la forma $\bar{A} = \{p \in \beta S : A \in p\}$ para A corriendo sobre los subconjuntos de S .

Los elementos de S pueden ser identificados con los ultrafiltros principales de βS y denotamos por $S^* = \beta S \setminus S$ al subconjunto de ultrafiltros libres de S . Dado $p \in S$, p^* es el ultrafiltro principal alrededor de p , es decir, $p^* = \{X \subseteq S : p \in X\}$, en ocasiones abusaremos de la notación usando p y p^* en forma indistinta.

La operación $\cdot$ de semigrupo de S se extiende a una operación de semigrupo en βS de la siguiente forma, dados $p, q \in \beta S$ y $A \subseteq S$, el ultrafiltro $p \cdot q$ esta caracterizado por

$$A \in p \cdot q \Leftrightarrow \{x \in S : \{y : x \cdot y \in A\} \in q\} \in p$$

Observación 1.1. Dados, $p, q \in \beta S$, el ultrafiltro $p \cdot q$ tiene una base conformada por subconjuntos de la forma $\bigcup_{x \in A} xB_x$ donde $A \in p$ y $B_x \in q$ para cada $x \in A$.

La operación $\cdot$ definida en βS es asociativa, además, si definimos para cada $x \in \beta S$, las traslaciones derecha e izquierda respectivamente como

$$\begin{aligned} \rho_x : \beta S &\rightarrow \beta S \\ q &\mapsto \rho_x(q) = q \cdot x \\ \gamma_x : \beta S &\rightarrow \beta S \\ q &\mapsto \gamma_x(q) = x \cdot q \end{aligned}$$

Entonces, ρ_x es continua para todo $x \in \beta S$ y γ_x es continua para todo $x \in S$.

Una topología en un semigrupo que hace a las traslaciones izquierdas continuas se le llama *topología izquierda invariante*, en forma análoga se define una *topología derecha invariante*. Una topología de semigrupo izquierda y derecha invariante se le conoce como *invariante*. En este contexto, βS tiene una topología derecha invariante.

1.2. Idempotentes en semigrupos compactos

Un *semigrupo compacto* $(S, \cdot)$ es un semigrupo no vacío con una topología derecha invariante, compacta y Hausdorff. Un elemento x de un semigrupo $(S, \cdot)$ es *idempotente*, si $x^2 = x$.

Lema 1.2. (Ellis) *Todo semigrupo compacto S contiene un idempotente.*

Demostración. Por lema de Zorn, sea $R \subseteq S$ un subsemigrupo compacto minimal y sea $s \in R$ arbitrario. Entonces Rs es también un subsemigrupo compacto, además, $Rs \subseteq R$, por lo que $Rs = R$. Sea $P = \{x \in R : xs = s\} \subseteq R$, note que $P \neq \emptyset$ pues $s \in Rs$. Veamos que P es un subsemigrupo cerrado, si $\rho_s(x) = xs$ es la traslación derecha de s , entonces $P = \rho_s^{-1}(\{s\})$. Además, si $x, y \in P$, $xs = s$ y $ys = s$, entonces $xys = xs = s$, así $xy \in P$. Por lo tanto $P = R$, así $s^2 = s$. ■

Definición 1.3. Sea S un semigrupo compacto, decimos que $I \subseteq S$ es un *ideal izquierdo* de S si $SI \subseteq I$. En forma análoga, $I \subseteq S$ es *ideal derecho* de S si $IS \subseteq I$. Si I es ideal izquierdo y derecho, diremos que I es un *ideal*.

Observación 1.4. Note que todo ideal izquierdo (ó derecho) I es subsemigrupo, ya que $II \subseteq SI \subseteq I$. Además, si $x \in S$, Ix también es ideal izquierdo (derecho). Finalmente, si I es un ideal izquierdo minimal, I es cerrado ya que, dado $x \in I$, Sx es un ideal izquierdo compacto (en particular cerrado), entonces $Sx \subseteq SI \subseteq I$, por lo que $I = Sx$.

En lo siguiente, denotaremos por $\hat{S}$ al conjunto de idempotentes del semigrupo compacto S . Definimos la siguiente relación en S

$$x \leq y \Leftrightarrow xy = yx = x$$

Note que $\leq$ es transitiva y antisimétrica en S y si $x \in \hat{S}$ entonces $x^2 = x$, es decir, $x \leq x$. Por lo tanto $\leq$ es un orden parcial en $\hat{S}$.

Lema 1.5. *Si y es un idempotente en S e I es un ideal izquierdo cerrado, entonces Iy contiene un idempotente x tal que $x \leq y$.*

Demostración. Como I es ideal izquierdo, también lo es Iy y por lo tanto un subsemigrupo compacto. Por lema de Ellis 1.2, existe un idempotente $w \in Iy$. Sea $v \in I$ tal que $w = vy$ y sea $x = yw = yvy$. Veamos que x cumple las propiedades buscadas, note que

$$x^2 = (yw)(yw) = (yvy)(yw) = y(vy)w = yww = yw = x$$

entonces, x es un idempotente. Además,

$$\begin{aligned} yx &= y(yw) = yw = x \text{ y} \\ xy &= (yvy)y = yvy = x \end{aligned}$$

por lo que $x \leq y$. ■

Lema 1.6. *Un idempotente en S es minimal en $\hat{S}$ si y sólo si pertenece a algún ideal izquierdo minimal.*

Demostración. Sea y un idempotente minimal en $\hat{S}$, sea I un ideal izquierdo minimal arbitrario en S . Por la observación 1.4 I es cerrado, entonces, Iy es ideal izquierdo cerrado minimal y por el lema anterior existe un idempotente $x \in Iy$ tal que $x \leq y$. Como y es minimal en $\hat{S}$, $x = y$ y por lo tanto $y \in Iy$.

Ahora, sea y un idempotente en S que pertenece a un ideal izquierdo minimal $I \subseteq S$. Sea x un idempotente en S tal que $x \leq y$, como $xy = x$ y $xy \in SI$, entonces $x \in I$. Luego, como $Ix \subseteq SI \subseteq I$, entonces $Ix = I$. Sea $z \in I$ tal que $y = zx$, entonces $yx = zx^2 = zx = y$ y como $x \leq y$ entonces $yx = x$. Por lo tanto $y = x$, es decir, y es idempotente minimal. ■

Corolario 1.7. *Todo ideal en S contiene a los elementos minimales de $\hat{S}$.*

Demostración. Sea J un ideal y sea y un idempotente minimal de S . Por el lema anterior, existe un ideal izquierdo minimal I tal que $y \in I$. Note que $JI \subseteq JS \subseteq J$ y $JI \subseteq SI \subseteq I$, por lo que $JI \subseteq I \cap J$, así $\emptyset \neq I \cap J$. Además, $S(I \cap J) \subseteq SI \cap SJ \subseteq I \cap J$, por lo que $I \cap J$ es un ideal izquierdo contenido en I . Entonces $I = I \cap J$, por lo tanto $y \in J$. ■

Para más resultados de semigrupos compactos, se recomienda consultar [5].

1.3. Topologías vía ultrafiltros

En esta sección, introducimos dos formas de inducir topologías de grupo vía ultrafiltros, teoremas 1.9 y 1.13, las cuales se estarán utilizando a lo largo de este trabajo. Otros resultados relacionados con topologías y ultrafiltros pueden ser consultados en [7].

Teorema 1.8. *Sea X un espacio topológico y sea $\{\mathcal{N}_x : x \in X\}$ una colección de filtros en X que satisfacen*

- (i) *Para todo $x \in X$ y $U \in \mathcal{N}_x$, $x \in U$,*
- (ii) *Para todo $x \in X$ y $U \in \mathcal{N}_x$, $\{y \in X : U \in \mathcal{N}_y\} \in \mathcal{N}_x$.*

Entonces, existe una única topología τ en X para la cual para cada $x \in X$, $\mathcal{N}_x$ es el filtro de vecindades de x en τ .

Demostración. Para cada $A \subseteq X$ definimos int de la siguiente forma

$$\text{int}(A) = \{x \in X : A \in \mathcal{N}_x\}$$

Afirmación 1: Veamos que int satisface las siguientes condiciones

- (a) $\text{int}(X) = X$,
- (b) $\text{int}(A) \subseteq A$,
- (c) $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$,
- (d) $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$.

Demostración. Para cada $x \in X$, $X \in \mathcal{N}_x$ por lo cual $x \in \text{int}(X)$, y por lo tanto (a) se satisface. Para (b), si $x \in \text{int}(A)$ entonces $A \in \mathcal{N}_x$ y por (i) $x \in A$.

Para (c), por el inciso (b), $\text{int}(\text{int}(A)) \subseteq \text{int}(A)$. Para la otra contención, sea $x \in \text{int}(A)$, entonces $A \in \mathcal{N}_x$ y por (ii) se tiene que $\text{int}(A) = \{y \in X : A \in \mathcal{N}_y\} \in \mathcal{N}_x$. Como $\text{int}(A) \in \mathcal{N}_x$, $x \in \text{int}(\text{int}(A))$.

Para (d), sea $x \in \text{int}(A \cap B)$, entonces $A \cap B \in \mathcal{N}_x$, como $\mathcal{N}_x$ es filtro, entonces $A, B \in \mathcal{N}_x$ y por lo tanto $x \in \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$, así $\text{int}(A \cap B) \subseteq \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$. Sea $x \in \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$, entonces $A, B \in \mathcal{N}_x$ y por lo tanto $A \cap B \in \mathcal{N}_x$, así $x \in \text{int}(A \cap B)$, por lo que se tiene la otra contención. ■

Por lo tanto, existe una única topología τ en X para la cual int es el operador interior en (X, τ) . Entonces $U \subseteq X$ es vecindad en τ de un punto $x \in X$ si y sólo si $x \in \text{int}(U)$, si y sólo si $U \in \mathcal{N}_x$. Por lo tanto $\mathcal{N}_x$ es el filtro de vecindades de x en τ . ■

Teorema 1.9. Sea $\mathcal{B}$ una base de un filtro en un grupo (G, e) que satisface las siguientes condiciones:

- (1) Para todo $U \in \mathcal{B}$, existe $V \in \mathcal{B}$ talque $VV \subseteq U$,
- (2) Para cada $U \in \mathcal{B}$, $U^{-1} \in \mathcal{B}$,
- (3) Para todo $U \in \mathcal{B}$ y $x \in G$, $xUx^{-1} \in \mathcal{B}$,
- (4) $\bigcap \mathcal{B} = \{e\}$.

Entonces existe una única topología de grupo Hausdorff τ en X para la cual $\mathcal{B}$ es base de vecindades de e .

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base de filtro que cumple las condiciones (1)-(4) sea $\mathcal{F}$ el filtro generado por $\mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{F}$ también cumple las propiedades (1)-(4). Para cada $x \in X$ definimos $x\mathcal{F} = \{xA : A \in \mathcal{F}\}$, note que $x\mathcal{F}$ es un filtro. Consideremos la colección de filtros $\{x\mathcal{F} : x \in X\}$, veamos que dicha colección satisface las propiedades de teorema 1.8.

Para probar la primer condición, sea $x \in G$ y $U \in x\mathcal{F}$ entonces $x^{-1}U \in \mathcal{F}$, por (1) y (2) se tiene que existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $VV^{-1} \subseteq x^{-1}U$, entonces $xVV^{-1} \subseteq U$, como $x \in xVV^{-1}$ se tiene que $x \in U$. Para la segunda condición, sea $x \in G$ y $U \in x\mathcal{F}$, de (1)

se sigue que existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $VV \subseteq x^{-1}U$; para todo $y \in xV$, $yV \subseteq xVV \subseteq U$, entonces

$$xV \subseteq \{y \in G : yV \subseteq U\} \subseteq \{y \in G : U \in y\mathcal{F}\}$$

como $x\mathcal{F}$ es cerrado bajo supraconjuntos, entonces

$$\{y \in G : U \in y\mathcal{F}\} \in x\mathcal{F}$$

Por lo tanto, existe una única topología τ en G para la cual $x\mathcal{F}$ es el filtro de vecindades de x para cada $x \in G$; en particular, las vecindades de e son los elementos de $\mathcal{F}$.

Veamos que τ es una topología de grupo demostrando la continuidad de $h : G \times G \rightarrow G$, $h(a, b) = ab^{-1}$. Sean $a, b \in G$ y $ab^{-1}U$ una vecindad de $g(a, b) = ab^{-1}$, donde $U \in \mathcal{F}$. Veamos que existe $V' \subseteq G \times G$ vecindad de (a, b) tal que $f[V'] \subseteq ab^{-1}U$. Usando las condiciones (1), (2), (3) existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $bVV^{-1}b^{-1} \subseteq U$, entonces si $V' = (aV, bV)$, V' es vecindad de (a, b) y además

$$f[V'] = aV(bV)^{-1} = aVV^{-1}b^{-1} = a(b^{-1}b)VV^{-1}b^{-1} \subseteq ab^{-1}U$$

por lo cual, h es continua. Finalmente, τ es Hausdorff si y sólo si es T_1 , si y sólo si $\{e\} = \bigcap \mathcal{F}$. ■

Lema 1.10. *Sea S un semigrupo con identidad 1 y sea τ una topología en S . Sea $\mathcal{N}$ el filtro de vecindades de 1 en τ , los siguientes son equivalentes*

- (a) *Para todo $a \in S$, $a\mathcal{N}$ es base de vecindades de a ,*
- (b) *Para todo $a \in S$, la traslación izquierda $\gamma_a(x) = ax$ es continua y abierta,*
- (c) *Para todo $a \in S$ y $U \in \tau$, $\{y \in S : ay \in U\}$ y $aU \in \tau$.*

Demostración.

(a) $\Rightarrow$ (b) Sea $a \in S$, veamos que γ_a es continua, sea $b \in S$ y U vecindad de $\gamma_a(b) = ab$. Como $ab\mathcal{N}$ es base de vecindades de ab , existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $abV \subseteq U$, entonces bV es vecindad de b para la cual $\gamma_a(bV) = abV \subseteq U$. Veamos que γ_a es abierta, sea $b \in S$ y U vecindad abierta de b , entonces existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $bV \subseteq U$, luego abV es vecindad de $\gamma_a(b)$ tal que $\gamma_a(b) \in abV = \gamma_a(bV) \subseteq \gamma_a(U)$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Como γ_a es abierta, entonces dado $U \in \tau$, $\gamma_a(U) = aU \in \tau$. Como γ_a es continua entonces $\gamma_a^{-1}(U) = \{y \in S : ay \in U\} \in \tau$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sea V una vecindad abierta de a , luego $\{y \in S : ay \in V\}$ es vecindad abierta de 1, entonces existe $W \in \mathcal{N}$ y $\hat{W}$ abierto en τ tal que $1 \in \hat{W} \subseteq W \subseteq \{y \in S : ay \in V\}$, entonces $a \in a\hat{W} \subseteq aW \subseteq V$. Por hipótesis, $a\hat{W} \in \tau$ y por lo tanto aW es vecindad de a contenida en V tal que $aW \in a\mathcal{N}$. ■

Teorema 1.11. *Sea S un semigrupo con identidad 1 y $\mathcal{N}$ un filtro en S que satisface*

- (1) *Para cada $U \in \mathcal{N}$, $1 \in U$,*
- (2) *Para cada $U \in \mathcal{N}$, $\{x \in S : \{y : xy \in U\} \in \mathcal{N}\} \in \mathcal{N}$.*

Entonces existe una topología izquierda invariante en S tal que para cada $a \in S$, $a\mathcal{N}$ es una base de vecindades para a .

Demostración. Note que para cada $x \in S$, $x\mathcal{N} = \{xA : A \in \mathcal{N}\}$ es base de filtro, entonces, definimos $\mathcal{N}_x$ el filtro que tiene como base a $x\mathcal{N}$. Veamos que la colección de filtros $\{\mathcal{N}_x : x \in S\}$ cumple las condiciones del teorema 1.8. Dado $x \in S$ y $U \in \mathcal{N}_x$ existe $A \in \mathcal{N}$ tal que $xA \subseteq U$, como $1 \in A$ entonces $x \in U$. Además, definimos

$$\begin{aligned} U_0 &= \{y : xy \in U\}, \\ V_0 &= \{z \in S : U_0 \in \mathcal{N}_z\}, \\ V &= xV_0 \end{aligned}$$

Note que $A \subseteq U_0$ por lo cual $U_0 \in \mathcal{N}$, entonces por (2) $V_0 \in \mathcal{N}$ y por lo tanto $V \in \mathcal{N}_x$. Veamos que $V \subseteq \{y \in S : U \in \mathcal{N}_y\}$, en efecto, sea $y \in V$, expresemos $y = xz$ para algún $z \in V_0$, entonces $U_0 \in \mathcal{N}_z$. Sea $B \in \mathcal{N}$ tal que $zB \subseteq U_0$, entonces $yB = xzB \subseteq xU_0$, por lo que $xU_0 \in \mathcal{N}_y$. Note que $xU_0 \subseteq U$, por lo tanto $U \in \mathcal{N}_y$. Concluimos que $\{y \in S : U \in \mathcal{N}_y\} \in \mathcal{N}_x$.

Por lo tanto, por el teorema 1,8 existe una topología τ en S para la cual para cada $x \in S$, $\mathcal{N}_x$ es el filtro de vecindades de x . ■

Observación 1.12. Sea S un semigrupo y $p \in \beta S$, entonces p es un idempotente si y sólo si para todo $A \in p$, $\{x \in S : \{y : xy \in A\} \in p\} \in p$.

Dado un semigrupo S , denotaremos por S^1 al semigrupo con identidad.

Teorema 1.13. *Sea S un semigrupo y p un idempotente en S^* , entonces existe una topología izquierda invariante τ en S^1 para la cual para cada $s \in S^1$, $\{sA \cap \{s\} : A \in p\}$ es una base de vecindades.*

Demostración. Sea $\mathcal{N}$ un filtro en S^1 con base $\{A \cup \{1\} : A \in p\}$. Entonces para cada $U \in \mathcal{N}$, $1 \in U$, expresamos $U = A \cup \{1\}$ para algún $A \in p$. Por la observación anterior, $\{x \in S : \{y : xy \in A\} \in p\} \in p$ entonces $\{x \in S : \{y : xy \in U\} \in \mathcal{N}\} \in \mathcal{N}$. Entonces por el teorema 1.11 existe una topología izquierda invariante en S tal que para cada $s \in S^1$, $s\mathcal{N}$ es base de vecindades para s . ■

1.4. Grupos topológicos maximales y lineales

Definición 1.14. Un espacio (X, τ) es maximal si τ no tiene puntos aislados y es maximal entre las topologías sin puntos aislados, es decir, si $\tau \subsetneq \tau'$, τ' tiene puntos aislados.

Equivalentemente (ver [7]), dado un espacio topológico Hausdorff X sin puntos aislados, las siguientes son equivalentes

- (1) X es maximal,
- (2) Para cada $x \in X$, existe un único ultrafiltro no principal en X que converge a x .

Definición 1.15. Un grupo topológico X es lineal si tiene una base local para el 0 conformada por subgrupos.

A continuación, se enuncian algunos resultados relevantes acerca de grupos topológicos maximales y lineales los cuales servirán para introducir la pregunta principal de este trabajo: ¿Son todos los grupos topológicos maximales también lineales?

- En [4] Protasov mostró que la existencia de un grupo topológico maximal implica la existencia de un grupo topológico irresoluble y ésto último implica la existencia de un ultrafiltro P – punto en $\mathbb{N}$. Es decir, la existencia de grupos topológicos maximales no puede ser establecida en ZFC .
- En 1975 Malykhin [2], asumiendo Axioma de Martin, construyó un grupo topológico maximal lineal, a continuación se presenta un bosquejo de la construcción y se enuncia el teorema de Hindman para uniones finitas, fundamental para el bosquejo.

Sea $FIN = [\omega]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, decimos que $(a_n)_{n < \epsilon_\omega} \subseteq FIN$ es una sucesión bloque si para cada $n \in \mathbb{N}$, $\max(a_n) < \min(a_{n+1})$. El conjunto de *uniones finitas* ó *finite unions* asociado a la sucesión bloque $A = (a_n)_{n < \omega}$ se define como

$$FU(A) = \{\bigcup_{n \in F} a_n : F \in FIN\}$$

Teorema 1.16. (Teorema de Hindman para uniones finitas, Baumgartner [1])

Sea $X_0, \dots, X_k$ una partición de FIN , entonces existe $i \leq k$ y existe D sucesión bloque en FIN tal que $D \subseteq X_i$ y $FU(D) \subseteq X_i$.

Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre FIN es llamado *ultrafiltro unión* si para cada $U \in \mathcal{U}$ existe un sucesión bloque A_U tal que $FU(A_U) \subseteq U$. Asumiendo el Axioma de Martin y con el teorema de Hindman puede ser establecida la existencia de un ultrafiltro unión sobre FIN .

Si definimos $\mathcal{B} = \{FU(A_U) \cup \{\emptyset\} : U \in \mathcal{U}\}$, para $\mathcal{U}$ ultrafiltro unión sobre FIN , entonces $\mathcal{B}$ es una base de filtro que cumple las propiedades del teorema 1.9 para el grupo $[\omega]^{<\omega}$ con la operación Δ (diferencia simétrica) e identidad el conjunto vacío. Por lo tanto, existe una topología de grupo Hausdorff τ para la cual $\mathcal{B}$ es base de vecindades para el 0.

Note que cada elemento $FU(A_U) \cup \{\emptyset\}$ de $\mathcal{B}$ se puede ver como el subgrupo generado por A_U en $[\omega]^{<\omega}$. Por lo tanto τ es una topología de grupo lineal. Además, $\mathcal{U}$ es el único ultrafiltro que converge a 0, por lo tanto τ es lineal.

- Hasta 2012 se mantenía abierta la pregunta antes mencionada y planteada por Zelenyuk y Protasov ([3] , pregunta 13.26): ¿Son todos los grupos topológicos maximales también lineales?

La respuesta a esta pregunta es negativa y, asumiendo $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, Zelenyuk en [6] propuso la construcción de una topología maximal no lineal en el grupo booleano $\mathbb{Z}_2^\omega$. En el siguiente capítulo abordaremos a detalle dicha construcción.

Capítulo 2

Un grupo topológico maximal no lineal

El objetivo de este capítulo es reproducir las técnicas empleadas por Zelenyuk al construir un grupo topológico maximal no lineal. Al igual que en el bosquejo de la construcción de un grupo topológico maximal lineal (sección 1.4), emplearemos un camino similar, con los siguientes pasos

- (1) Consideración de un teorema tipo Ramsey. (Sección 2.2)
- (2) Construcción de un ultrafiltro con propiedades combinatorias asociadas al teorema tipo Ramsey. (Sección 2.3)
- (3) A partir del ultrafiltro construido y asumiendo $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, construiremos una topología maximal no lineal. (Sección 2.4)

Adicionalmente, será necesario estudiar la relación entre los idempotentes del semigrupo derecho invariante βS (donde S es un semigrupo discreto) y los productos finitos (sección 2.1).

A partir de ahora, todas las topologías serán consideradas Hausdorff.

2.1. Idempotentes y productos finitos

Definición 2.1. Dado un semigrupo S y una sucesión $(X_n)_{n < \omega}$ de subconjuntos de S definimos los *productos finitos de $(X_n)_{n < \omega}$* ó *finite products de $(X_n)_{n < \omega}$* como

$$FP((X_n)_{n < \omega}) = \{\prod_{n \in F} x_n : F \subset \omega \text{ finito}, \forall n < \omega (x_n \in X_n)\}$$

Para semigrupos con operación aditiva $+$, utilizaremos la notación de $FS((X_n)_{n < \omega})$, la cual hace referencia a las *sumas finitas de $(X_n)_{n < \omega}$* .

Teorema 2.2. Sea S un semigrupo topológico conmutativo izquierdo con identidad 1. Para todo $n < \omega$, sea D_n una familia de subconjuntos finitos de S con la propiedad de que para cada U vecindad de 1 existe $X \in D_n$ tal que $X \subseteq U \setminus \{1\}$. Entonces, para

toda sucesión $(U_n)_{n < \omega}$ de vecindades de 1, existe una sucesión $(X_n)_{n < \omega}$ tal que:

- (1) Para todo $n < \omega$, $X_n \in D_n$,
- (2) $FP((X_n)_{n < \omega}) \subseteq U_0 \setminus \{1\}$,
- (3) Para todo $n > 0$, $FP((X_i)_{n \leq i < \omega}) \subseteq U_n \setminus \{1\}$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que los conjuntos U_n son abiertos. Por inducción, sea $X_0 \in D_0$ tal que $X_0 \subseteq U_0 \setminus \{1\}$. Para $k > 0$ supongamos que hemos construido una sucesión $(X_n)_{n < k}$ que satisfacen las condiciones (1)-(3) reemplazando ω por k .

Para cada $n < k$, sea $Y_n = FP((X_i)_{n \leq i < k})$ y $A_n = U_n \setminus \{1\}$. Veamos que existe una vecindad V_k de 1 para la cual $Y_n V_k \subseteq A_n$ para todo $n < k$. Por hipótesis, para cada $n < k$, $Y_n \subseteq A_n$ y dado que A_n es abierto, para cada $x \in A_n$ existe una vecindad de 1, V_x tal que $x V_x \subseteq A_n$. Sea $V_n = \bigcap_{x \in Y_n} V_x$, entonces $Y_n V_n \subseteq A_n$. Sea $V_k = \bigcap_{n < k} V_n$, entonces $Y_n V_k \subseteq A_n$ para todo $n < k$.

Como $V_k \cap (\bigcap_{i \leq k} U_i)$ es vecindad del 1, sea $X_k \in D_k$ tal que $X_k \subseteq V_k \cap (\bigcap_{i \leq k} U_i) \setminus \{1\}$. Veamos que $(X_i)_{i \leq k}$ cumple (2) y (3). En efecto

$$\begin{aligned}
 FP((X_i)_{i \leq k}) &\subseteq FP((X_i)_{i < k}) \cup FP((X_i)_{i < k}) X_k \\
 &\subseteq U_0 \setminus \{1\} \cup Y_0 X_k \\
 &\subseteq U_0 \setminus \{1\} \cup Y_0 V_k \\
 &\subseteq U_0 \setminus \{1\} \cup A_0 \\
 &= U_0 \setminus \{1\} \cup U_0 \setminus \{1\} = U_0 \setminus \{1\}
 \end{aligned}$$

Además, para cada $0 < n \leq k$

$$\begin{aligned}
 FP((X_i)_{n \leq i \leq k}) &\subseteq FP((X_i)_{n \leq i < k}) \cup FP((X_i)_{n \leq i < k}) X_k \cup X_k \\
 &\subseteq U_n \setminus \{1\} \cup Y_n X_k \cup U_n \setminus \{1\} \\
 &\subseteq U_n \setminus \{1\} \cup Y_n V_k \\
 &\subseteq U_n \setminus \{1\} \cup A_n \\
 &= U_n \setminus \{1\} \cup U_n \setminus \{1\} = U_n \setminus \{1\}
 \end{aligned}$$

■

Corolario 2.3. Sea S un semigrupo conmutativo y p un idempotente en βS . Para cada $n < \omega$, sea D_n una familia de subconjuntos finitos de S con la propiedad de que para todo $A \in p$ existe $X \in D_n$ tal que $X \subseteq A$. Entonces para toda sucesión $(A_n)_{n < \omega}$ de miembros de p , hay una sucesión $(X_n)_{n < \omega}$ tal que:

- (1) Para todo $n < \omega$, $X_n \in D_n$,
- (2) $FP((X_n)_{n < \omega}) \subseteq A_0$,
- (3) para todo $n > 0$, $FP((X_i)_{n \leq i < \omega}) \subseteq A_n$.

Demostración. Primero, supongamos que $p \in S$, es decir, $p = x^*$ para algún $x \in S$ idempotente. Como $\{x\} \in p$, entonces para todo $n < \omega$ existe $X \in D_n$ tal que $X \subseteq \{x\}$, esto es, $\{x\} \in D_n$. Así, la sucesión constante $(X_n)_{n < \omega} = (\{x\})_{n < \omega}$, satisface las propiedades buscadas, ya que, como x es idempotente, $FP((X_n)_{n < \omega}) = FP((X_i)_{n \leq i < \omega}) = \{x\} \subseteq A_n$.

Si $p \in S^*$, dotamos a S^1 con la topología garantizada por el teorema 1.13, entonces toda vecindad básica U de 1 podemos expresarla como $U = A \cup \{1\}$ para algún $A \in p$. Así $U \setminus \{1\} = A \setminus \{1\} \in p$ y por lo tanto, por hipótesis, para todo $n < \omega$ existe $X \in D_n$ tal que $X \subseteq U \setminus \{1\}$. Entonces, los conjuntos D_n cumplen las hipótesis del teorema anterior, por lo tanto, haciendo $U_n = A_n \cup \{1\}$ para cada $n < \omega$ y aplicando el teorema a la sucesión $(U_n)_{n < \omega}$ obtenemos una sucesión $(X_n)_{n < \omega}$ con las propiedades buscadas. ■

2.2. Un resultado combinatorio

En esta sección, todos los semigrupos se consideran conmutativos y con operación aditiva.

Para cada $m, n, k \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$, definimos $\mathcal{J}_{m,n,k} \subseteq \mathcal{P}(mk)$ como

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{m,n,k} &= \{I \subseteq [0, mk) : I \neq \emptyset \text{ y } |I \cap [ml, m(l+1))| \leq n \text{ para cada } l < k\} \text{ y} \\ \mathcal{J}_{m,n,\omega} &= \{I \subseteq \omega : I \neq \emptyset, |I| < \omega \text{ y } |I \cap [ml, m(l+1))| \leq n \text{ para cada } l < \omega\} \end{aligned}$$

Abreviaremos $\mathcal{J}_{m,n,\omega} = \mathcal{J}$.

Definición 2.4. Dado un semigrupo conmutativo S y $m, n, k \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$, decimos que

(i) $X \subseteq S$ es un (m, n, k) – sistema en S si existe una sucesión $(x_i)_{i < mk}$ tal que $X = \{\sum_{i \in I} x_i : I \in \mathcal{J}_{m,n,k}\}$.

(ii) $X \subseteq S$ es un (m, n, ω) – sistema en S si existe una sucesión $(x_i)_{i < \omega}$ tal que $X = \{\sum_{i \in I} x_i : I \in \mathcal{J}_{m,n,\omega}\}$.

En cualquier caso, expresamos $X = (X, (x_i)_{i < mk})$ ó $X = (X, (x_i)_{i < \omega})$.

Definición 2.5. Decimos que un (m, n, k') – sistema $Y = (Y, (y_j)_{j < mk'})$ es un *sub-sistema* de $X = (X, (x_i)_{i < mk})$ si existe una sucesión disjunta $(I_j)_{j < mk'} \subseteq \mathcal{J}_{m,n,k}$ tal que

- (i) $\bigcup_{j \in J} I_j \in \mathcal{J}_{m,n,k}$ para cada $J \in \mathcal{J}_{m,n,k'}$
- (ii) $y_j = \sum_{i \in I_j} x_i$

Un subsistema $Y = (Y, (y_j)_{j < mk'})$ de $X = (X, (x_i)_{i < mk})$ es *fuerte* si adicionalmente cumple que

(iii) Para todo $l < k'$ existe $r < k$ tal que $I_{ml+s} \cap [mr, m(r+1)) = \{mr + s\}$ para cada $s < m$.

Observación 2.6. En el contexto de la definición anterior, la propiedad (ii) nos asegura que $Y \subseteq X$. En efecto, si $y \in Y$, existe $J \in \mathcal{J}_{m,n,k'}$ tal que $y = \sum_{j \in J} y_j$, además para cada $j \in J$ existe $I_j \in \mathcal{J}_{m,n,k}$ tal que $y_j = \sum_{i \in I_j} x_i$, entonces si $P = \bigcup_{j \in J} I_j$

$$y = \sum_{j \in J} y_j = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} x_i = \sum_{i \in P} x_i$$

Donde $P \in \mathcal{J}_{m,n,k}$ por (ii) y por lo tanto $x \in X = \{\sum_{i \in I} x_i : I \in \mathcal{J}_{m,n,k}\}$.

En forma análoga, se tienen las siguientes definiciones para (m, n, ω) -sistemas.

Definición 2.7. Decimos que un (m, n, ω) -sistema $Y = (Y, (y_j)_{j < \omega})$ es un *subsistema* de $X = (X, (x_i)_{i < \omega})$ si existe una sucesión disjunta $(I_j)_{j < \omega} \subseteq \mathcal{J}$ tal que

- (i) $\bigcup_{j \in J} I_j \in \mathcal{J}$ para cada $J \in \mathcal{J}$,
- (ii) $y_j = \sum_{i \in I_j} x_i$.

Un subsistema $Y = (Y, (y_j)_{j < \omega})$ de $X = (X, (x_i)_{i < \omega})$ es *fuerte* si adicionalmente cumple que

- (iii) Para todo $l < \omega$ existe $r < \omega$ tal que $I_{ml+s} \cap [mr, m(r+1)) = \{mr + s\}$ para cada $s < m$.

El objetivo será demostrar el siguiente teorema tipo Ramsey.

Teorema 2.8. *Todo (m, n, ω) -sistema X , 2-coloreado, tiene un (m, n, ω) -subsistema fuerte monocromático $Y \subseteq X$.*

Antes, se necesitarán algunos resultados previos.

Definición 2.9. Dado S un semigrupo conmutativo y $X = (X, (x_i)_{i < \omega})$ un (m, n, ω) -sistema en S , definimos

- (i) Para cada $l < \omega$, $\mathcal{J}_l = \{I \in \mathcal{J} : \min(I) \geq l\}$,
- (ii) Para cada $l < \omega$, $X_l = \{\sum_{i \in I} x_i : I \in \mathcal{J}_l\} \subseteq X$,
- (iii) $T = \bigcap_{l < \omega} \overline{X_l} = \bigcap_{l < \omega} \{p \in \beta S : X_l \in p\}$.

Note que $X = X_0$.

Observación 2.10. T es cerrado en βS , veamos que también es un subsemigrupo de βS . Sean $p, q \in T$ y sea $l < \omega$, veamos que $p + q \in \overline{X_l}$, es decir, que $X_l \in p + q$.

Dado $y \in X_l$, sea $I \in \mathcal{J}_l$ tal que $y = \sum_{i \in I} x_i$, sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\max(I) < mk$ y sea $l_y = mk$. Note que, como $p \in T$ entonces $X_l \in p$, análogamente, como $q \in T$ entonces $X_{l_y} \in q$ para todo $y \in X_l$, por lo tanto $\bigcup_{y \in X_l} (y + X_{l_y}) \in p + q$. Además, para todo $z \in X_{l_y}$, $y + z \in X_l$ ya que $\max(I) < l_y$, entonces $\bigcup_{y \in X_l} (y + X_{l_y}) \subseteq X_l$. Como $\bigcup_{y \in X_l} (y + X_{l_y}) \in p + q$, entonces $X_l \in p + q$.

Lema 2.11. *Sea p un idempotente en T . Entonces cada miembro de p contiene un (m, n, ω) -subsistema de X .*

Demostración. Sea $A \in p$, supongamos que $A \subseteq X$ (para el caso en el que $A \subsetneq X$, consideramos al conjunto $A \cap X \in p$). Para cada $k < \omega$ definimos

$$D_k = \{\{x\} : x \in X_{mk} \cap A\}$$

Dado $B \in p$ arbitrario, $A \cap B \cap X_{mk} \neq \emptyset$ para todo $k < \omega$ por ser $A \cap B \cap X_{mk}$ elemento de p . Esto es, existe $x \in D_k$ tal que $x \in B$ para todo $k < \omega$, por lo cual, la sucesión $(D_k)_{k < \omega}$ cumple las hipótesis del corolario 2.3. Entonces, para la sucesión constante $(A_k)_{k < \omega} = (A)_{k < \omega}$ existe una sucesión $(\{x_k\})_{k < \omega}$ tal que

- (i) Para todo $k < \omega$, $\{x_k\} \in D_k$,
- (ii) $FS((x_k)_{k < \omega}) \subseteq A$.

Por inducción, construyamos una subsucesión $(y_k)_{k < \omega}$ de $(x_k)_{k < \omega}$, una sucesión disjunta $(I_k)_{k \in \omega}$ de elementos en $\mathcal{I}$ y una sucesión creciente de naturales $(l_k)_{k < \omega}$ tal que

- (i') Para todo $k < \omega$, $y_k = \sum_{i \in I_k} x_i$,
- (ii') Para todo $k < \omega$, l_k cumple que $\max(I_k) < mr \leq l_k$ para algún $r \in \mathbb{N}$,
- (iii') Para todo $k < \omega$, $y_{k+1} \in X_{l_k}$ para todo $k < \omega$.

Sea $y_0 = x_0$, como $y_0 \in A$, existe $I_0 \in \mathcal{I}$ tal que $y_0 = \sum_{i \in I_0} x_i$ y sea $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\max(I_0) < mr \leq l_0$ para algún $r \in \mathbb{N}$. Supongamos tenemos una subsucesión $(y_k)_{k \leq j}$ con las propiedades buscadas, sea $y_{j+1} = x_i \in D_i$ para algún $i \in \mathbb{N}$ tal que $im \geq l_j$ y de tal forma que $(y_k)_{k \leq j+1}$ siga siendo subsucesión de $(x_k)_{k < \omega}$. Entonces $y_{j+1} \in X_{l_j}$, sea $I_{j+1} \in \mathcal{I}_{l_j}$ tal que $y_{j+1} = \sum_{i \in I_{j+1}} x_i$ y sea $l_{j+1} \in \mathbb{N}$ tal que $\max(I_{j+1}) < mr \leq l_{j+1}$ para algún $r \in \mathbb{N}$.

Sea $Y = \{\sum_{i \in I} y_i : I \in \mathcal{I}\}$, entonces $Y = (Y, (y_n)_{n < \omega})$ es un (m, n, ω) -sistema de X , y dado que $FS((y_k)_{k < \omega}) \subseteq FS((x_k)_{k < \omega}) \subseteq A$, entonces $Y \subseteq A$. ■

Observación 2.12. Si $X = (X, (x_i)_{i < \omega})$ es un (m, n, ω) -sistema, entonces para cada $k < \omega$, si $X' = \{\sum_{i \in I} x_i : I \in \mathcal{I}_{m, n, k}\}$, $X' = (X', (x_i)_{i < mk})$ es un (m, n, k) -sistema contenido en X .

Corolario 2.13. Sea p un idempotente en T . Entonces para todo $k < \omega$, cada miembro de p contiene un (m, n, k) -sistema.

Demostración. Se sigue inmediatamente de la observación anterior y del lema 2.11

Teorema 2.14. Sea p un idempotente minimal en T , entonces cada miembro de p contiene un $(m, n, 1)$ -subsistema fuerte de X .

Demostración. Sea $\mathcal{J} = \mathcal{I}_{m, n, 1}$, note que $\mathcal{J} = [m]^{\leq n} \setminus \{\emptyset\}$. A continuación definimos para cada $l < \omega$ los subconjuntos $\mathcal{M}_l, M_l, \mathcal{N}_l$ y N_l .

Sea $\mathcal{M}_l \subseteq \mathcal{J}^{\mathcal{J}}$ el conjunto de funciones $\mu : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ que cumplen

- (i) Para todo $j < m$, $\min(\mu(\{j\})) \geq l$.
- (ii) $\mu(\{j\}) \cap \mu(\{i\}) = \emptyset$ si $i \neq j$, con $i, j < m$,
- (iii) Para todo $J \in \mathcal{J}$, $\mu(J) = \bigcup_{j \in J} \mu(\{j\})$.

Sea $\mathcal{N}_l \subseteq \mathcal{M}_l$ el conjunto de funciones $\mu : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ que adicionalmente cumplen

- (iv) Existe $i < \omega$ tal que $\mu(\{j\}) \cap [mi, m(i+1)) = \{mi+j\}$ para todo $j < m$.

Sea M_l (ó N_l) el conjunto de funciones $\bar{y} = (y_J)_{J \in \mathcal{J}} \in X_l^{\mathcal{J}}$ para las cuales existe $\mu \in \mathcal{M}_l$ (ó $\mathcal{N}_l$) tal que $y_J = \sum_{i \in \mu(J)} x_i$ para cada $J \in \mathcal{J}$.

Afirmación 1: $\bar{y} = (y_J)_{J \in \mathcal{J}} \in M_l$ (ó $\bar{y} \in N_l$) si y sólo si $(\{y_J : J \in \mathcal{J}\}, (y_{\{j\}})_{j < m})$ es un $(m, n, 1)$ -subsistema (fuerte) de X y $y_J = \sum_{j \in J} y_{\{j\}} \in X_l$ para todo $J \in \mathcal{J}$.

Demostración. Sea $\bar{y} = (y_J)_{J \in \mathcal{J}} \in M_l$, entonces existe $\mu \in \mathcal{M}_l$ tal que $y_J = \sum_{i \in \mu(J)} x_i$ para cada $J \in \mathcal{J}$, por (ii) y (iii), $\{\mu(\{j\}) : j \in \mathcal{J}\}$ es una partición de $\mu(J)$, entonces

$$y_J = \sum_{i \in \mu(J)} x_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in \mu(\{j\})} x_i$$

Además, por definición $y_{\{j\}} = \sum_{i \in \mu(\{j\})} x_i$, entonces

$$y_J = \sum_{j \in J} y_{\{j\}}$$

Esto es, los elementos de $\{y_J : J \in \mathcal{J}\}$ se pueden escribir como sumas indizadas sobre un elemento $J \in \mathcal{J}$ de elementos en $(y_{\{j\}})_{j < m}$. Además, $(\mu(\{j\}))_{j < m}$ es una sucesión disjunta para la cual $y_{\{j\}} = \sum_{i \in \mu(\{j\})} x_i$ para todo $j < m$, por lo tanto, $(\{y_J : J \in \mathcal{J}\}, (y_{\{j\}})_{j < m})$ es un $(m, n, 1)$ -subsistema de X . Como $\min(\mu\{j\}) \geq l$ para todo $j < m$, $y_J \in X_l$ para todo $J \in \mathcal{J}$.

Recíprocamente, si $(\{y_J : J \in \mathcal{J}\}, (y_{\{j\}})_{j < m})$ es un $(m, n, 1)$ -subsistema de X y $y_J = \sum_{j \in J} y_{\{j\}} \in X_l$ para todo $J \in \mathcal{J}$, entonces existe una sucesión ajena $(I_j)_{j < m} \subseteq \mathcal{J}_l \subseteq \mathcal{J}$ tal que $y_{\{j\}} = \sum_{i \in I_j} x_i$ para cada $j < m$. Definimos $\mu : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ como $\mu(\{j\}) = I_j$ para cada $j < m$ y $\mu(J) = \bigcup_{j \in J} \mu(\{j\})$. Entonces $\mu \in \mathcal{M}_l$ y cumple que para cada $J \in \mathcal{J}$

$$y_J = \sum_{j \in J} y_{\{j\}} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in \mu(\{j\})} x_i = \sum_{i \in \mu(J)} x_i$$

Por lo que $\bar{y} = (y_J)_{J \in \mathcal{J}} \in M_l$.

Es inmediato de las definiciones que si $\mu \in \mathcal{N}_l$ entonces $(\{y_J : J \in \mathcal{J}\}, (y_{\{j\}})_{j < m})$ es un $(m, n, 1)$ -subsistema fuerte y su recíproco. ■

En lo siguiente, para $A \subseteq \beta S^{\mathcal{J}}$ denotaremos por $\bar{A} = cl_{\beta S^{\mathcal{J}}}(A)$. Definimos $Q \subseteq \beta S^{\mathcal{J}}$ y $R \subseteq Q$ como

$$Q = \bigcap_{l < \omega} \bar{M}_l \text{ y } R = \bigcap_{l < \omega} \bar{N}_l$$

Afirmación 2: Q es un subsemigrupo cerrado de $\beta S^{\mathcal{J}}$ y R un ideal de Q .

Demostración. Por construcción Q es cerrado, veamos que es subsemigrupo de $\beta S^{\mathcal{J}}$. Sean $\bar{y} = (y_J)_{J \in \mathcal{J}}$, $\bar{z} = (z_J)_{J \in \mathcal{J}} \in Q$ y $l < \omega$, veamos que $\bar{y} + \bar{z} \in \overline{M_l}$, es decir, dada W vecindad de $\bar{y} + \bar{z}$ veamos que $W \cap M_l \neq \emptyset$. Como $\beta S^{\mathcal{J}}$ tiene una topología derecho invariante, la traslación derecha $\varphi_{\bar{z}}(\bar{y}) = \bar{y} + \bar{z}$ es continua y por lo tanto, existe U vecindad de $\bar{y}$ tal que $U + \bar{z} \subseteq W$.

Como $\bar{y} \in \overline{M_l}$ entonces existe $\hat{y} = (\hat{y}_J)_{J \in \mathcal{J}} \in U \cap M_l \neq \emptyset$. Como $\hat{y} \in U$, entonces $\hat{y} + \bar{z} \in W$, además la traslación izquierda $\gamma_{\hat{y}}(\bar{z}) = \hat{y} + \bar{z}$ es continua ya que $\hat{y} \in X_l^{\mathcal{J}}$, por lo tanto, existe W' vecindad de $\bar{z}$ tal que $\hat{y} + W' \subseteq W$.

Como $\hat{y} \in M_l$, existe $\mu \in \mathcal{M}_l$ tal que $\hat{y}_J = \sum_{i \in \mu(J)} x_i$ para cada $J \in \mathcal{J}$. Sean $k, l_{\hat{y}} \in \mathbb{N}$ tales que $\max(\mu(J)) < km \leq l_{\hat{y}}$ para todo $J \in \mathcal{J}$ (note que $l \leq l_{\hat{y}}$). Como $\bar{z} \in Q$, en particular $\bar{z} \in \overline{M_{l_{\hat{y}}}}$, entonces existe $\hat{z} = (\hat{z}_J)_{J \in \mathcal{J}} \in W' \cap M_{l_{\hat{y}}}$.

Note que $\hat{y} + \hat{z} \in W$, veamos que $\hat{y} + \hat{z} \in M_l$. Como $\hat{z} \in M_{l_{\hat{y}}}$, sea $\mu' \in \mathcal{M}_{l_{\hat{y}}}$ tal que $\hat{z}_J = \sum_{i \in \mu'(J)} x_i$ para cada $J \in \mathcal{J}$. Definimos μ'' como

$$\begin{aligned} \mu'' : \mathcal{J} &\rightarrow \mathcal{J} \\ J &\mapsto \mu''(J) = \mu(J) \cup \mu'(J) \end{aligned}$$

Note que $\mu'' \in \mathcal{M}_l$, ya que para todo $j, i < m$ distintos y $J \in \mathcal{J}$

- (i) $\min(\mu''(\{j\})) = \min\{\min(\mu(\{j\})), \min(\mu'(\{j\}))\} \geq \min\{l, l_{\hat{y}}\} = l$,
- (ii) $\mu''(\{j\}) \cap \mu''(\{i\}) = \emptyset$ ya que $\mu(\{i\}) \cap \mu'(\{j\}) = \mu'(\{i\}) \cap \mu(\{j\}) = \emptyset$ ya que $\max(\mu(J)) < l_{\hat{y}} \leq \mu'(J)$ para todo $J \in \mathcal{J}$,
- (iii) $\mu''(J) = \mu(J) \cup \mu'(J) = (\bigcup_{j \in J} \mu(\{j\})) \cup (\bigcup_{j \in J} \mu'(\{j\})) = \bigcup_{j \in J} (\mu(\{j\}) \cup \mu'(\{j\})) = \bigcup_{j \in J} \mu''(\{j\})$.

Además, para todo $J \in \mathcal{J}$

$$\hat{y}_J + \hat{z}_J = \sum_{i \in \mu(J)} x_i + \sum_{i \in \mu'(J)} x_i = \sum_{i \in \mu''(J)} x_i$$

Por lo tanto, $\mu'' \in \mathcal{M}_l$ testifica que $\hat{y} + \hat{z} \in M_l$. Por lo tanto $\hat{y} + \hat{z} \in W \cap M_l$. Así, Q es subsemigrupo de $\beta S^{\mathcal{J}}$.

Ahora, veamos que R es ideal en Q , es decir, que $R + Q \subseteq R$ y $Q + R \subseteq R$. Al igual que la construcción anterior, si $\bar{y} \in Q$ y $\bar{z} \in R$ (ó $\bar{y} \in R$ y $\bar{z} \in Q$), $l < \omega$ y W vecindad arbitraria de $\bar{y} + \bar{z}$ podemos encontrar $\hat{y} \in M_l$ (ó $\hat{y} \in N_l$) y $\hat{z} \in N_{l_{\hat{y}}}$ (ó $\hat{z} \in M_{l_{\hat{y}}}$) tales que $\hat{y} + \hat{z} \in W \cap M_l$. Además, las funciones μ y μ' asociadas respectivamente a $\hat{y}$ y $\hat{z}$, cumplen que $\mu \in \mathcal{M}_l$ (ó $\mu \in \mathcal{N}_l$) y $\mu' \in \mathcal{N}_{l_{\hat{y}}}$ (ó $\mu' \in \mathcal{M}_{l_{\hat{y}}}$). Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mu \in \mathcal{M}_l$ y $\mu' \in \mathcal{N}_{l_{\hat{y}}}$, entonces existe $i < \omega$ tal que

$$\mu'(\{j\}) \cap [mi, m(i+1)) = \{mi + j\} \text{ para todo } j < m$$

Entonces, $mi + j \geq l_{\hat{y}}$ para todo $j < m$, en particular $mi \geq l_{\hat{y}}$. Como $\max(\mu\{j\}) < l_{\hat{y}}$

entonces $\mu(\{j\}) \cap [mi, m(i+1)) = \emptyset$ para todo $j < m$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mu''(\{j\}) \cap [mi, m(i+1)) &= (\mu(\{j\}) \cap [mi, m(i+1))) \cup (\mu'(\{j\}) \cap [mi, m(i+1))) \\ &= \mu'(\{j\}) \cap [mi, m(i+1)) \\ &= \{mi + j\}\end{aligned}$$

para todo $j < m$. Así, $\mu'' \in N_l$, entonces $\hat{y} + \hat{z} \in N_l$ y por lo tanto $\bar{y} + \bar{z} \in R$. ■

Definimos el idempotente $\bar{p} = (p_J)_{J \in \mathcal{J}} \in \beta S^{\mathcal{J}}$ como $p_J = p$ para todo $J \in \mathcal{J}$.

Afirmación 3: $\bar{p} \in Q$.

Demostración. Sea U vecindad de $\bar{p}$ y $l < \omega$, veamos que $U \cap M_l \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $U = V^{\mathcal{J}}$ para V vecindad básica de p en βS . Entonces podemos expresar $V = \{q \in \beta S : A \in q\}$ para algún $A \subseteq S$. Como $A, X_l \in p$, $A \cap X_l \in p$ y por el corolario 2.13 existe un $(m, n, 1)$ -subsistema de X , $Y = (Y, (y_j)_{j < m}) \subseteq A \cap X_l$. Para cada $J \in \mathcal{J}$, definimos

$$y_J = \sum_{j \in J} y_j$$

Entonces, $(\{y_J : J \in \mathcal{J}\}, (y_{\{j\}})_{j < m})$ es un $(m, n, 1)$ -subsistema de X tal que $y_J = \sum_{j \in J} y_{\{j\}} \in X_l$ para todo $J \in \mathcal{J}$. Por la afirmación 1, la función $\bar{y} = (y_J)_{J \in \mathcal{J}} \in M_l$. Además, como $y_J \in A$ para todo $J \in \mathcal{J}$, entonces $\bar{y} \in U$. Por lo tanto $U \cap M_l \neq \emptyset$. ■

Afirmación 4: $\bar{p} \in R$.

Demostración. Note que $\bar{p}$ es un idempotente minimal de Q , en efecto, sea $\bar{q} = (q_J)_{J \in \mathcal{J}}$ un idempotente en Q tal que $\bar{q} \leq \bar{p}$, entonces

$$\begin{aligned}\bar{q} \leq \bar{p} &\Rightarrow \bar{q}\bar{p} = \bar{p}\bar{q} = \bar{q} \\ &\Rightarrow (q_J p_J)_{J \in \mathcal{J}} = (p_J q_J)_{J \in \mathcal{J}} = (q_J)_{J \in \mathcal{J}} \\ &\Rightarrow \forall J \in \mathcal{J} (p_J q_J = q_J p_J = q_J) \\ &\Rightarrow \forall J \in \mathcal{J} (q_J \leq p_J = p)\end{aligned}$$

Como p es minimal, entonces $q_J = p$ para cada $J \in \mathcal{J}$. Por lo tanto $\bar{q} = \bar{p}$. Dado que R es ideal del subsemigrupo compacto Q , por el corolario 1.7, R contiene a los elementos minimales de Q , en particular $\bar{p} \in R$. ■

Con las afirmaciones anteriores, veamos que todo elemento de p contiene un $(m, n, 1)$ -subsistema fuerte de X . Sea $A \in p$, consideremos la vecindad básica de p , $V = \{q \in \beta S : A \in q\}$. Luego, $U = V^{\mathcal{J}}$ es vecindad de $\bar{p}$. Dado que $p \in R$, $U \cap N_0 \neq \emptyset$, sea $\bar{y} = (y_J)_{J \in \mathcal{J}} \in U \cap N_0$. Como $\bar{y} \in N_0$ y por la afirmación 1, $(\{y_J : J \in \mathcal{J}\}, (y_{\{j\}})_{j < m})$ es un $(m, n, 1)$ -subsistema fuerte de X donde $y_J = \sum_{j \in J} y_{\{j\}} \in X$ para todo $J \in \mathcal{J}$.

Además, como $\bar{y} \in U$, entonces $y_J^* \in V$, por lo que $A \in y_J^*$, es decir, $y_J \in A$ para todo $J \in \mathcal{J}$. Por lo tanto, $(\{y_J : J \in \mathcal{J}\}, (y_{\{j\}})_{j < m})$ es un $(m, n, 1)$ -subsistema fuerte de X contenido en A . ■

Teorema 2.15. *Sea p un idempotente minimal en T , entonces cada miembro de p contiene un (m, n, ω) -subsistema fuerte de X .*

Demostración. Sea $A \in p$. Para cada $(m, n, 1)$ -subsistema fuerte $Y = (Y, (y_i)_{i < m})$ de X , existe una sucesión disjunta $(I_j)_{j < m} \subseteq \mathcal{J}$ tal que

- (i) $\bigcup_{j \in J} I_j \in \mathcal{J}$ para cada $J \in \mathcal{J}$,
- (ii) $y_j = \sum_{i \in I_j} x_i$ para cada $j < m$,
- (iii) Existe $r < \omega$ tal que $I_j \cap [mr, m(r+1)) = \{mr + j\}$ para todo $j < m$.

Para cada $s < \omega$, sea $D_s = \{Y \subseteq X : Y \text{ es un } (m, n, 1)\text{-subsistema fuerte de } X \text{ contenido en } X_{ms}\}$, note que cada D_s es una colección de subconjuntos finitos de X . Consideremos la sucesión $(D_s)_{s < \omega}$. Si $B \in p$ y $s < \omega$, entonces $B \cap X_{ms} \in p$ y por el teorema anterior, $B \cap X_{ms}$ contiene un $(m, n, 1)$ -subsistema fuerte Y de X , es decir, existe $Y \in D_s$ contenido en B , entonces por el corolario 2.3, para la sucesión constante $(A)_{s < \omega}$ existe una sucesión $(\hat{Y}_s)_{s < \omega}$ tal que:

- (1) Para todo $s < \omega$, $\hat{Y}_s \in D_s$,
- (2) $FS((\hat{Y}_s)_{s < \omega}) \subseteq A$.

Construyamos una subsucesión $(Y_s)_{s \in \omega}$ de $(\hat{Y}_s)_{s \in \omega}$ y una sucesión de naturales $(k_s)_{s \in \omega}$ tales que

- (1') Para todo $s < \omega$, $Y_s = (Y_s, (y_{s,i})_{i < m})$ es un $(m, n, 1)$ -subsistema fuerte de X ,
- (2') Para cada $s < \omega$, $\max(I_j^s) < mk_s$ para todo $j < m$, donde $(I_j^s)_{j < m}$ es la sucesión disjunta asociada al subsistema Y_s . Definimos $l_s = mk_s$,
- (3') Para todo $s < \omega$, $Y_{s+1} \subseteq X_{l_s}$.

Sea $Y_0 = \hat{Y}_0$, sean $l_0, k_0 \in \mathbb{N}$ tales que $\max(I_j^0) < mk_0 = l_0$ para todo $j < m$, donde $(I_j^0)_{j < m}$ es la sucesión disjunta asociada a Y_0 . Luego, supongamos tenemos construidas sucesiones $(Y_r)_{r \leq s}$ y $(k_r)_{r \leq s}$ con las propiedades buscadas, sea $Y_{s+1} = \hat{Y}_i \in D_i$ para algún $i < \omega$ tal que $i > k_s$ y $(Y_r)_{r \leq s+1}$ es subsucesión de $(\hat{Y}_s)_{s < \omega}$. Sea $k_{s+1} \in \mathbb{N}$ tal que $\max(I_j^{s+1}) < mk_{s+1}$ para todo $j < m$, donde $(I_j^{s+1})_{j < m}$ es la sucesión disjunta asociada a Y_{s+1} . Sea $l_{s+1} = mk_{s+1}$.

Note que como $Y_{s+1} \in D_i$, entonces Y_{s+1} es un $(m, n, 1)$ -subsistema fuerte de X contenido en X_{mi} , como $i > k_s$, entonces $mi > mk_s = l_s$ en particular Y_{s+1} esta contenido en X_{l_s} .

Finalmente, sea $Y = FS((Y_s)_{s < \omega})$ y la sucesión $(y_n)_{n < \omega}$ dada por $y_{ms+i} = y_{s,i}$. Entonces $Y = (Y, (y_n)_{n < \omega})$ es un (m, n, ω) -subsistema fuerte de X contenido en A , ya

que $Y \subseteq FS((\hat{Y}_s)_{s < \omega}) \subseteq A$. ■

Ahora, estamos en condiciones de demostrar el teorema 2,8, objetivo de esta sección.

Demostración. (Teorema 2.8) Sea X un (m, n, ω) -sistema 2-coloreado, es decir, con una partición $\{A_0, A_1\}$ asociada. Sea $p \in \beta S$ un idempotente minimal en T y sea $s < 2$ tal que $A_s \in p$. Entonces por el teorema anterior, existe un (m, n, ω) -subsistema fuerte Y de X contenido en A_s , es decir, Y es un (m, n, ω) -subsistema fuerte monocromático contenido en X . ■

Aplicando el principio de compacidad se tiene el siguiente teorema tipo Ramsey.

Corolario 2.16. *Para cada $m, n, k \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que para todo (m, n, l) -sistema X en dos colores, existe un (m, n, k) -subsistema Y fuerte monocromático contenido en X .*

El corolario 2.16 justifica la siguiente definición.

Definición 2.17. Para todo $m \geq 2$, se define la función $f_m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ como:

$$f_m(1) = 1,$$

$f_m(n+1)$ es el menor entero para el cual toda 2-coloración de un $(m, n, f_m(n+1))$ -sistema, existe un $(m, n, f_m(n))$ -subsistema fuerte monocromático.

Observación 2.18. Note que para cada $m \geq 2$, la función f_m es no decreciente.

2.3. Sistemas, ultrafiltros y topologías especiales

Sea $G = \bigoplus_{\omega} \mathbb{Z}_2$. Para cada $x \in G$, sea $\text{supp}(x) = \{n < \omega : x(n) \neq 0\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, e_n denotará el elemento para el cual $\text{supp}(e_n) = \{n\}$. Llamaremos a los términos en $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ elementos canónicos.

Sea

$$E_n = \{e_i : n \leq i < \omega\} \cup \{0\} \text{ y } W_n = FS((E_{ni})_{i=1}^{\infty})$$

Note que $W_n \setminus \{0\}$ consiste de elementos de G de la forma $e_{m_1} + \dots + e_{m_k}$, donde $1 \leq k < \omega$, $1 \leq m_1 < \dots < m_k$ y $e_{m_j} \in E_{nj}$ para todo $1 \leq j \leq k$.

Además, $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión decreciente, ya que si $m \leq n$ entonces, por ser $(E_n)_{n < \omega}$ decreciente, $E_{ni} \subseteq E_{mi}$ para todo $1 \leq i < \omega$ y por lo tanto

$$W_n = FS((E_{ni})_{i=1}^{\infty}) \subseteq FS((E_{mi})_{i=1}^{\infty}) = W_m$$

Observación 2.19. Veamos que existe un topología de grupo Hausdorff en G para la cual $\{W_n : n \in \omega\}$ es base de vecindades para 0. Dado que G es abeliano, basta comprobar las propiedades (1) y (4) del teorema 1,9

Note que para $n < \omega$

$$\begin{aligned} W_{2n} + W_{2n} &= FS((E_{2ni})_{i=1}^{\infty}) + FS((E_{2ni})_{i=1}^{\infty}) \\ &\subseteq FS((E_{n(2i-1)})_{i=1}^{\infty}) + FS((E_{2ni})_{i=1}^{\infty}) \\ &= FS((E_{ni})_{i=1}^{\infty}) = W_n. \end{aligned}$$

Además, si $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n$, x no puede tener una infinidad de 1's por estar contenido en conjuntos de sumas finitas. Así mismo, no puede tener una cantidad finita de 1's pues si así fuera y $m = \max\{k \in \mathbb{N} : e_k \text{ es sumando de } x\}$ entonces $x \notin W_{m+1}$. Por lo tanto, $\bigcap_{i=1}^{\infty} W_n = \{0\}$.

Llamaremos τ_0 a la topología de grupo Hausdorff en G cuya base local de vecindades de 0 es $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Definición 2.20. Sea $X = (X, (x_i)_{i < mk})$ un (m, n, k) -sistema en G , $\mathcal{F}$ un filtro en G y τ una topología invariante en G .

Decimos que $X = (X, (x_i)_{i < mk})$ es *especial* si

- (a) $X \subseteq W_2 \setminus \{0\}$,
- (b) $\text{supp}(x_i) \cap \text{supp}(x_j) = \emptyset$ para todo $i, j < mk$ con $i \neq j$,
- (c) $\sum_{i \in [ml, m(l+1))} x_i \notin W_2$ para todo $l < k$.

Decimos $\mathcal{F}$ es *especial* si

- (i) $\mathcal{F}$ converge a 0 en τ_0 (equivalentemente, $\{W_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$),
- (ii) Para todo $A \in \mathcal{F}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, existen $m > n, k \geq f_m(n)$ y un (m, n, k) -sistema especial $X \subseteq A$.

Decimos que τ es *especial* si el filtro de vecindades de 0 en τ es especial.

Observación 2.21. Toda topología de grupo especial τ , es no lineal. En efecto, si suponemos lo contrario, como τ es especial, por (i) de la definición anterior, W_2 es vecindad del 0 en τ . Como hemos supuesto que τ es lineal, existe un subgrupo $U \subseteq W_2$ que es vecindad del 0. Por (ii) existe un (m, n, k) -sistema especial X , para algunos $m, n, k \in \mathbb{N}$, tal que $X \subseteq U$. Por ser U subgrupo $\langle X \rangle \subseteq U \subseteq W_2$. Lo que contradice (c).

El siguiente resultado lo utilizaremos en el lema 2.23.

Lema 2.22. Para todo $s, m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 2$ existe una sucesión $(x_i)_{i < m} \subseteq W_m$ tal que

- (a) $\min(\text{supp}(x_i)) \geq s$ para todo $i < m$,
- (b) $\text{supp}(x_i) \cap \text{supp}(x_j) = \emptyset$ para cualesquiera $i, j < m$ distintos,
- (c) $\sum_{i < m} x_i \notin W_2$

Demostración. Sea $l \in \mathbb{N}$ tal que $ml \geq s$. Para cada $0 \leq i < m$, definimos

$$x_i = \sum_{j=l}^{2l-1} e_{mj+i}$$

Como $e_{mj+i} \in E_{mj}$ para todo $1 \leq j \leq 2l-1$, $x_i \in FS((E_{mi})_{i=1}^\infty) = W_m$. Además, es claro que se satisface (a) y (b).

Para ver (c), sea $x = \sum_{i < m} x_i$ y por contradicción supongamos que $x \in W_2$. Note que cada x_i es una suma de l elementos canónicos, por lo que x es una suma de ml elementos canónicos, expresemos $x = \sum_{k=1}^{ml} e_{n_k}$ donde $n_1 < n_2 < \dots < n_{ml}$, $n_1 = ml$ y $n_{ml} = 2ml-1$. Además, como $x \in W_2$ entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $e_{n_{ml}} \in E_{2i}$, entonces

$$2i \leq n_{ml} \Rightarrow 2i \leq 2ml-1 \Rightarrow i \leq ml-1$$

Luego, cada elemento e_{n_k} , para $k \in \{1, 2, \dots, ml-1\}$, debe estar en un E_{2h} para algún $h \in \{1, \dots, ml-2\}$, lo cual no es posible ya que ésto sólo se puede hacer si más de un e_{n_k} esta contenido en un mismo E_{2h} . Por lo tanto $x \notin W_2$. ■

Lema 2.23. τ_0 es una topología especial.

Demostración. Como $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ es base local del 0, por la observación 2.12, basta verificar que para todo $r \in \mathbb{N}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un $m \in \mathbb{N}$ con $m > n$ y un (m, n, ω) -sistema contenido en W_r .

Sea $n, r \in \mathbb{N}$ fijos y sea $m = nr$. Primero veamos que $nW_m \subseteq W_r$, en efecto, podemos expresar cada elemento de W_m de la siguiente forma

$$y = \alpha_1 e_m + \alpha_2 e_{2m} + \alpha_3 e_{3m} + \dots = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i e_{im}$$

Donde $\alpha_i \in \{0, 1\}$ y sólo una cantidad finita de coeficientes α_i son distintos de cero. Entonces si $y_1, \dots, y_n \in W_m$, expresamos para cada $j \leq n$

$$y_j = \alpha_1^j e_m + \alpha_2^j e_{2m} + \alpha_3^j e_{3m} + \dots = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i^j e_{im}$$

Entonces, si $\alpha_i^j \neq 0$ para $1 \leq i$ y $j \leq n$, como $(i-1)m + jr \leq im$ entonces

$$\begin{aligned} \alpha_i^j e_{im} &\in E_{im} \\ &\subseteq E_{(i-1)m+jr} \\ &= E_{(i-1)nr+jr} \\ &= E_{((i-1)n+j)r}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum_{j \leq n} y_j \in FS((E_{ri})_{i=1}^\infty) = W_r$.

Ahora, por inducción para cada $l < \omega$ construyamos una sucesión $(x_{ml+i})_{i < m} \subseteq W_m$ tal que

- (i) Si $l > 0$, $\max(\text{supp}(x_{m(l-1)+i})) < \min(\text{supp}(x_{ml+j}))$ para todo $j, i < m$,
- (ii) $\text{supp}(x_{ml+i}) \cap \text{supp}(x_{ml+j}) = \emptyset$ para todo $i, j < m$ distintos,
- (iii) $\sum_{i \in [ml, m(l+1))} x_i = \sum_{i < m} x_{ml+i} \notin W_2$.

Para $l = 0$, sea $(x_i)_{i < m} \subseteq W_m$ una sucesión como en el lema 2.22 para $s = 1$. Supongamos que tenemos construidas sucesiones $(x_{mk+i})_{i < m}$ para todo $k \leq l$ con las propiedades buscadas. Sea $s = \max\{\text{supp}(x_{ml+i}) : i < m\}$, nuevamente, por el lema 2.22, para s , existe una sucesión $(y_i)_{i < m}$ tal que

- (a) $\min(\text{supp}(y_i)) \geq s + 1$ para todo $i < m$,
- (b) $\text{supp}(y_i) \cap \text{supp}(y_j) = \emptyset$ para cualesquiera $i, j < m$ distintos,
- (c) $\sum_{i < m} y_i \notin W_2$

Haciendo $x_{m(l+1)+i} = y_i$ para todo $i < m$, obtenemos la sucesión $(x_{m(l+1)+i})_{i < m}$ con las propiedades buscadas.

Luego, consideremos la sucesión $(x_i)_{i < \omega}$ conformada por las sucesiones parciales $(x_{ml+i})_{i < m}$ para cada $l < \omega$. Sea $X = \{\sum_{i \in I} x_i : I \in \mathcal{J}\}$, entonces $X = (X, (x_i)_{i < \omega})$ es un (m, n, ω) -sistema especial. Además, $X \subseteq W_r$ ya que dado $x \in X$, x es una suma de a lo más n sumandos x_i donde cada $x_i \in W_m$, como anteriormente vimos que $nW_m \subseteq W_r$, entonces $x \in W_r$. ■

Lema 2.24. *Si X es un (m, n, k) -sistema especial y Y es un (m, n, k') -subsistema fuerte de X , entonces Y es especial.*

Demostración. Sea $X = (X, (x_i)_{i < mk})$ un (m, n, k) -sistema especial y $Y = (Y, (y_i)_{i < mk'})$ un (m, n, k') -subsistema fuerte. Sea $(I_J)_{J < mk'} \subseteq \mathcal{J}_{m,n,k}$ una sucesión disjunta tal que

- (i) $\bigcup_{j \in J} I_j \in \mathcal{J}_{m,n,k}$ para cada $J \in \mathcal{J}_{m,n,k'}$,
- (ii) $y_j = \sum_{i \in I_j} x_i$ para todo $j < mk'$,
- (iii) Para todo $l < k'$ existe $r < k$ tal que $I_{ml+s} \cap [mr, m(r+1)) = \{mr + s\}$ para cada $s < m$.

Como $Y \subseteq X$ y X es especial, entonces $Y \subseteq W_2 \setminus \{0\}$. Además, dados $j, j' < mk'$ distintos

$$\begin{aligned} \text{supp}(y_j) &= \bigcup_{i \in I_j} \text{supp}(x_i) \text{ y} \\ \text{supp}(y_{j'}) &= \bigcup_{i \in I_{j'}} \text{supp}(x_i) \end{aligned}$$

como $I_j \cap I_{j'} = \emptyset$ y los soportes de la sucesión $(x_i)_{i < mk}$ son disjuntos, entonces $\text{supp}(y_j) \cap \text{supp}(y_{j'}) = \emptyset$.

Resta ver que $\sum_{i \in [ml, m(l+1))} y_i \notin W_2$ para todo $l < k'$. En efecto, sea $l < k'$ y $r < k$

que testifica (iii), sea $I = \bigcup_{j \in [ml, m(l+1))} I_j = \bigcup_{s < m} I_{ml+s}$, entonces

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \in [ml, m(l+1))} y_j &= \sum_{j \in [ml, m(l+1))} \sum_{i \in I_j} x_j \\
 &= \sum_{i \in I} x_i \\
 &= \sum_{i \in I \setminus [mr, m(r+1))} x_i + \sum_{i \in I \cap [mr, m(r+1))} x_i \\
 &= \sum_{i \in I \setminus [mr, m(r+1))} x_i + \sum_{i \in \bigcup_{s < m} \{mr+s\}} x_i \\
 &= \sum_{i \in I \setminus [mr, m(r+1))} x_i + \sum_{i \in [mr, m(r+1))} x_i
 \end{aligned}$$

Como X es especial, $\sum_{i \in [mr, m(r+1))} x_i \notin W_2$ y por lo tanto, $\sum_{j \in [ml, m(l+1))} y_j \notin W_2$. Por lo tanto Y es subsistema especial. ■

Lema 2.25. *Existe un ultrafiltro especial.*

Demostración. Tomemos un filtro especial $\mathcal{F}_0$ (como el filtro de vecindades de 0 en τ_0), por lema de Zorn podemos extender a $\mathcal{F}_0$ a un filtro especial maximal $\mathcal{F}$.

Veamos que $\mathcal{F}$ es ultrafiltro. Por contradicción, supongamos que existe una partición $\{B_0, B_1\}$ de G para la cual $B_0, B_1 \notin \mathcal{F}$. Entonces, el filtro $\mathcal{U} = \langle \mathcal{F} \cup \{B_0\} \rangle$ no es especial, por lo que existe $A' \in \mathcal{U}$ y $n \in \mathbb{N}$ para el cual no hay (m, n, k) -sistemas especiales con $m > n$ y $k \geq f_m(n)$ contenidos en A' . Además, existe $\hat{A} \in \mathcal{F}$ tal que $B_0 \cap \hat{A} \subseteq A'$. Por lo que tampoco hay (m, n, k) -sistemas especiales con $m > n$ y $k \geq f_m(n)$ contenidos en $B_0 \cap \hat{A}$. En forma análoga, existe $n' \in \mathbb{N}$ y $\hat{\hat{A}} \in \mathcal{F}$ tal que no hay (m, n', k) -sistemas especiales con $m > n'$ y $k \geq f_m(n')$ contenidos en $B_1 \cap \hat{\hat{A}}$.

Entonces, si hacemos $N = \min\{n, n'\}$ y $A = \hat{A} \cap \hat{\hat{A}} \in \mathcal{F}$, entonces no existen (m, N, k) -sistemas especiales con $m > N$ y $k \geq f_m(N)$ contenidos en $A \cap B_0$ ni en $A \cap B_1$.

Como $\mathcal{F}$ es especial, existe un (m, N, k) -sistema especial X con $m > N$ y $k = f_m(N)$ contenido en A . Como $\{B_0 \cap X, B_1 \cap X\}$ es una partición de X , por la definición 2.17 existe un $(m, N, f_m(N-1))$ -subsistema fuerte Y monocromático. Esto es, existe $i < 2$ tal que $Y \subseteq B_i \cap X \subseteq B_i \cap A$, además por el lema 2.24, Y es subsistema especial. Lo que contradice que no hay (m, N, k) -sistemas especiales con $m > N$ y $k \geq f_m(N)$ contenidos en $A \cap B_0$ ni en $A \cap B_1$.

Por lo tanto $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro especial. ■

Lema 2.26. *Sea τ una topología especial e invariante en G , definimos*

$$S = \{p \in G^* : p \text{ es especial y } p \text{ converge a } 0 \text{ en } \tau\}$$

Entonces S es un subsemigrupo cerrado de G^* .

Demostración. Veamos que S es cerrado en G^* . Sea $p \in G^* \setminus S$, supongamos que p no converge a 0 en τ , entonces existe una vecindad V en τ de 0, tal que $V \notin p$. Luego, $G \setminus V \in p$ por lo que $p \in \overline{G \setminus V} \subseteq G^* \setminus S$. Ahora, supongamos que p no es especial, entonces p no converge a 0 en τ_0 (caso análogo a cuando p no converge a 0 en τ) ó existe $A \in p$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que A no contiene ningún (m, n, k) -sistema con $m > n$ y $k \geq f_m(n)$. En este último caso, $p \in \overline{A} \subseteq G^* \setminus S$, ya que todo ultrafiltro que tenga a A no puede ser especial. Entonces $G^* \setminus S$ es abierto y por lo tanto S cerrado en G^* .

Veamos que S es subsemigrupo. Sean $p, q \in S$.

Afirmación 1: $p + q$ converge a 0 en τ_0 .

Demostración. Sea U vecindad abierta de 0 en τ_0 . Para todo $x \in U$ existe V_x vecindad de 0 en τ_0 tal que $xV_x \subseteq U$, entonces $\bigcup_{x \in U} xV_x \subseteq U$. Como $U \in p$ y $V_x \in q$ se sigue que $U \in p + q$. Entonces $p + q$ converge a 0 en τ_0 . ■

En forma análoga a la afirmación 1, tenemos que $p + q$ converge a 0 en τ .

Afirmación 2: Para todo $C \in p + q$ y $n \in \mathbb{N}$ existe un (m, n, k) -sistema con $m > n$ y $k \geq f_m(n)$.

Demostración. Como $C \in p + q$, existen $A \in p$ y $B_x \in q$ para cada $x \in A$ tales que $\bigcup_{x \in A} (x + B_x) \subseteq C$. Como p es especial, $\{W_n : n \in \omega\} \subseteq p$, en particular, $W_4 \in p$, por lo tanto existe un (m, n, k) -sistema especial $X = (X, (x_i)_{i < mk})$ con $m > n$ y $k = f_m(n)$ contenido en $A \cap W_4$. Sea $h = \max\{\text{supp}(x) : x \in X\}$, note que $4 \leq h$. Como $W_h \in q$, existe un (m', n, k') -sistema especial $Y = (Y, (y_i)_{i < m'k'})$ con $m' > n$ y $k' \geq f_{m'}(n)$ contenido en $(\bigcap_{x \in X} B_x) \cap W_h$. Entonces $\max\{\text{supp}(x) : x \in X\} < \min\{\text{supp}(y) : y \in Y\}$.

Sea $\hat{m} = \min\{m, m'\}$ y $\hat{k} = \min\{k, k'\}$. Definimos $\hat{X} = \{\sum_{i \in I} x_i : I \in \mathcal{J}_{\hat{m}, n, \hat{k}}\} \subseteq X$ y $\hat{Y} = \{\sum_{i \in I} y_i : I \in \mathcal{J}_{\hat{m}, n, \hat{k}}\} \subseteq Y$ entonces, $\hat{X} = (\hat{X}, (x_i)_{i < \hat{m}\hat{k}})$ y $\hat{Y} = (\hat{Y}, (y_i)_{i < \hat{m}\hat{k}})$ son $(\hat{m}, n, \hat{k})$ -sistemas tales que $\hat{m} > n$ y $\hat{k} \geq f_{\hat{m}}(n)$. Para cada $i < \hat{m}\hat{k}$, sea $z_i = x_i + y_i$ entonces si $Z = \{\sum_{i \in I} z_i : I \in \mathcal{J}_{\hat{m}, n, \hat{k}}\}$, dado que $\max\{\text{supp}(x) : x \in \hat{X}\} < \min\{\text{supp}(y) : y \in \hat{Y}\}$ entonces $Z = (Z, (z_i)_{i < \hat{m}\hat{k}})$ es un $(\hat{m}, n, \hat{k})$ -sistema.

Veamos que Z es especial. Como $Z \subseteq \hat{X} + \hat{Y} \subseteq X + Y \subseteq W_4 + W_4 \subseteq W_2$ y $0 \notin Z$, entonces $Z \subseteq X_2 \setminus \{0\}$. Es inmediato que $\text{supp}(z_i) \cap \text{supp}(z_j)$ para todo $i, j < \hat{m}\hat{k}$. Si suponemos que existe $l < \hat{k}$ para el cual $\sum_{i \in [\hat{m}l, \hat{m}(l+1))} z_i \in W_2$ entonces $\sum_{i \in [\hat{m}l, \hat{m}(l+1))} x_i \in W_2$ ó $\sum_{i \in [\hat{m}l, \hat{m}(l+1))} y_i \in W_2$, por lo tanto X ó Y no es especial, lo cual es contradictorio. Por lo tanto Z es especial.

Además, $Z \subseteq X + Y \subseteq X + \bigcap_{x \in X} B_x \subseteq \bigcup_{x \in A} (x + B_x) \subseteq C$. ■

Con las afirmaciones 1, 2 hemos visto que $p + q$ es especial y converge a 0 en τ ■

Corolario 2.27. *Para toda topología τ especial e invariante en G existe un ultrafiltro libre, idempotente, especial y que converge a 0 en τ .*

Demostración. Por el lema 2.26, S es un subsemigrupo cerrado de G^* y en particular de βG , entonces es subsemigrupo compacto y por lema de Ellis 1.2, contiene un idempotente. ■

2.4. Construcción de una topología maximal especial

Teorema 2.28. *Sea τ una topología especial primero numerable invariante en G y sea $\{A_0, A_1\}$ una partición de G . Entonces existe $s < 2$ y una topología especial primero numerable τ' en G tal que $\tau \subseteq \tau'$ y $A_s \cup \{0\}$ es vecindad del 0 en τ' .*

Demostración. Por el corolario 2.27 existe un ultrafiltro libre, especial e idempotente que converge a 0 en τ . Sea $s < 2$ tal que $A_s \in p$. Sea $(U_n)_{n=1}^\infty$ una base decreciente de vecindades del 0 en τ . Como p converge a 0 en τ , $\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq p$, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = U_n \cap A_s \in p$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$D_n = \{X \subseteq G : X \text{ es un } (m, n, k)\text{-sistema con } m > n \text{ y } k \geq f_m(n)\}$$

Entonces, cada D_n es una familia de subconjuntos finitos de G y además, para cada $A \in p$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, como p es especial, existe un $X \in D_n$ contenido en A . Aplicando el corolario 2.3 para la sucesión $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq p$, existe una sucesión $(X_n)_{n=1}^\infty$ tal que

- (i) $X_n = (X_n, (x_{n,i})_{i < m_n k_n})$ es un (m_n, n, k_n) -sistema especial para algún $m_n > n$ y $k_n \geq f_{m_n}(n)$,
- (ii) $FS((X_i)_{i=n}^\infty) \subseteq A_n$.

Note que, como cada $X_n \subseteq W_2 \setminus \{0\}$, los elementos de X_n son de soporte finito. Inductivamente, se puede construir un subsucesión $(X_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que adicionalmente cumpla

$$(iii) \max\{\text{supp}(x) : x \in X_{n_j}\} < \min\{\text{supp}(x) : x \in X_{n_{j+1}}\}$$

Abusando de la notación, asumiremos que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cumple (iii). Recordando la notación de la sección 2.2

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{m_n, 1, k_n} &= \{I : \emptyset \neq I \subseteq [0, m_n k_n] \text{ y } |I \cap [m_n l, m_n(l+1))| \leq 1 \text{ para cada } l < k_n\} \text{ y} \\ \mathcal{J}_{m_n, n, k_n} &= \{\emptyset \neq I \subseteq [0, m_n k_n] \text{ y } |I \cap [m_n l, m_n(l+1))| \leq n \text{ para cada } l < k_n\} \end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$Y_n = \{\sum_{i \in I} x_{n,i} : I \in \mathcal{I}_{m_n,1,k_n}\}$$

Entonces, $Y_n = (Y_n, (x_{n,i})_{i < m_n k_n})$ es un $(m_n, 1, k_n)$ -subsistema de X_n .

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$Z_n = (\bigcup_{i=n}^{\infty} Y_i) \cup \{0\} \text{ y } V_n = FS((Z_{ni})_{i=1}^{\infty})$$

Como los elementos de X_j son de soporte finito, también lo son los elementos de Y_j , Z_j y V_j para todo $j \in \mathbb{N}$.

Note que la sucesión $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es base de filtro ya que tiene la p.i.f (por ser decreciente). Veamos que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es base local del 0 para una topología Hausdorff en G , como G es abeliano, basta comprobar las propiedades (1) y (4) del teorema 1,9.

Note que

$$\begin{aligned} V_{2n} + V_{2n} &= FS((Z_{2ni})_{i=1}^{\infty}) + FS((Z_{2ni})_{i=1}^{\infty}) \\ &\subseteq FS((Z_{n(2i-1)})_{i=1}^{\infty}) + FS((Z_{2ni})_{i=1}^{\infty}) \\ &= FS((Z_{ni})_{i=1}^{\infty}) \\ &= V_n \end{aligned}$$

Además, si $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, x es de soporte finito. Supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ el máximo entero tal que $x \in Y_m$, entonces $x \notin V_{m+1}$. Por lo tanto x no está en ningún Y_m , entonces $x = 0$.

Sea τ' topología en G para la cual $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es base local del 0, con las siguientes afirmaciones veremos que τ' es una topología con las propiedades buscadas.

Afirmación 1: Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n(Y_n \cup \{0\}) = X_n \cup \{0\}$.

Demostración. Sean $y_1, y_2, \dots, y_n \in Y_n$ y $y = \sum_{s < n} y_s$, luego, existe una sucesión $(I_s)_{s < n} \subseteq \mathcal{I}_{m_n,1,k_n}$ tal que $y_s = \sum_{i \in I_s} x_{n,i}$ para cada $s < n$. Sea $I = \bigcup_{s < n} I_s$, note que $I \in \mathcal{I}_{m_n,n,k_n}$. Para cada $i \in I$ definimos $P_i = \{I_s : i \in I_s\}$ y $p_i = |P_i|$, así, p_i cuantifica las veces que aparece como sumando en y el término $x_{n,i}$, entonces podemos expresar a y como

$$y = \sum_{s < n} y_s = \sum_{s < n} \sum_{i \in I_s} x_{n,i} = \sum_{i \in I} p_i x_{n,i}$$

Como G es un grupo booleano, para cada $i \in I$, $p_i x_{n,i} = 0$ ó $p_i x_{n,i} = x_{n,i}$, según sea p_i par ó impar. Entonces $y = \sum_{i \in I'} x_{n,i}$ para algún $I' \subseteq I$. Por lo que $y \in X_n \cup \{0\}$.

Para la otra contención, si $x \in X_n$, existe $I \in \mathcal{I}_{m_n,n,k_n}$ tal que $x = \sum_{i \in I} x_{n,i}$. Es fácil ver que I se puede descomponer unión disjunta de subconjuntos $(I_s)_{s < n'} \subseteq \mathcal{I}_{m_n,1,k_n}$ para algún $n' < n$, entonces $x = \sum_{s < n'} \sum_{i \in I_s} x_{n,i} \in n(Y_n \cup \{0\})$. ■

Afirmación 2: Para cada $n \in \mathbb{N}$, $FS((Z_i)_{i=n}^\infty) \subseteq FS((X_i)_{i=1}^\infty) \cup \{0\}$.

Demostración. Note que $FS((Z_i)_{i=n}^\infty)$ es la unión de conjuntos de la forma $j_1 Y_{i_1} + \dots + j_t Y_{i_t}$ donde $t \in \mathbb{N}$, $n \leq i_1 < \dots < i_t$ y cada j_r cuantifica las veces que aparece, en un elemento del conjunto $j_1 Y_{i_1} + \dots + j_t Y_{i_t}$, un sumando en Y_{j_r} .

Veamos que $j_r \leq i_r$ para cada $1 \leq r \leq t$. Sea $y \in j_1 Y_{i_1} + \dots + j_t Y_{i_t}$. Para cada $1 \leq r \leq t$ hay j_r sumandos $\{a_1, \dots, a_{j_r}\}$ en y que pertenecen a Y_{i_r} . Como $y \in FS((Z_i)_{i=n}^\infty)$ para cada $i \in [1, j_r]$ existe k_i tal que $a_i \in Z_{k_i}$, donde $n \leq k_i \leq i_r$, además todos los elementos en $\{k_i : 1 \leq i \leq j_1\}$ son distintos. Por lo que $j_r \leq i_r - n + 1 \leq i_r$.

Entonces, por la afirmación 1 y dado que $j_r \leq i_r$ para cada $1 \leq r \leq n$

$$\begin{aligned} j_1 Y_{i_1} + \dots + j_t Y_{i_t} &\subseteq i_1 Y_{i_1} + \dots + i_t Y_{i_t} \\ &\subseteq (X_{i_1} \cup \{0\}) + \dots + (X_{i_t} \cup \{0\}) \\ &\subseteq FS((X_i)_{i=1}^\infty) \cup \{0\} \end{aligned}$$

■

De la afirmación 2 se sigue que

$$\begin{aligned} V_n = FS((Z_{ni})_{i=1}^\infty) &\subseteq FS((Z_i)_{i=1}^\infty) \\ &\subseteq FS((X_i)_{i=n}^\infty) \cup \{0\} \\ &\subseteq A_n \cup \{0\} \\ &= U_n \cap A_s \cup \{0\} \end{aligned}$$

Es decir, $0 \in V_n \subseteq U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\tau \subseteq \tau'$. Además, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $V_n \subseteq A_s \cup \{0\}$, por lo que $A_s \cup \{0\}$ es vecindad del 0 en τ' .

Finalmente, veamos que τ' es especial. Sea $r \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$, veamos que existe un (m, n, k) -sistema contenido en V_r con $m > n$ y $k \geq f_m(n)$. Sea $l = nr$ y consideremos la sucesión $(x_{l,i})_{i < m_l k_l}$, sea $X = \{\sum_{i \in I} x_{l,i} : I \in \mathcal{I}_{m_l, n, k_l}\}$, entonces $X = (X, (x_{l,i})_{i < m_l k_l})$ es un (m_l, n, k_l) -sistema. Además, $m_l > n$ y $k_l \geq f_{m_l}(n)$ ya que

$$m_l > l \geq n \text{ y } k_l \geq f_{m_l}(l) \geq f_{m_l}(n)$$

Afirmación 3: $nV_l \subseteq V_r$.

Demostración. Similar a la demostración del lema 2.23 podemos expresar cada elemento $y \in V_l$ de la siguiente forma

$$y = \alpha_1 z_l + \alpha_2 z_{2l} + \alpha_3 z_{3l} + \dots = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i z_{il}, \text{ donde cada } z_{il} \in Z_{il}$$

Donde $\alpha_i \in \{0, 1\}$ y sólo una cantidad finita de α_i son distintos de cero. Entonces si $y_1, \dots, y_n \in V_l$, expresamos para cada $j \leq n$

$$y_j = \alpha_1^j z_l + \alpha_2^j z_{2l} + \alpha_3^j z_{3l} + \dots = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i^j z_{il}$$

Si para $i \geq 1$ y $j \leq n$, $\alpha_i^j \neq 0$, note que $\alpha_i^j z_{il} \in Z_{(i-1)l+jr} = Z_{(i-1)nr+jr} = Z_{((i-1)n+j)r}$. Por lo tanto $\sum_{j \leq n} y_j \in V_r$. ■

Entonces, por la afirmación 3

$$X = nY_l \subseteq nV_l \subseteq V_r$$
■

Observación 2.29. Si $(X_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión tal que

- (i) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_n = (X_n, (x_{n,i})_{i < m_n k_n})$ es un (m_n, n, k_n) -sistema especial para algún $m_n > n$ y $k_n \geq f_{m_n}(n)$,
- (ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\max\{\text{supp}(x) : x \in X_n\} < \min\{\text{supp}(x) : x \in X_n\}$.

Y para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\begin{aligned} Y_n &= \{\sum_{i \in I} x_{n,i} : I \in \mathcal{I}_{m_n, 1, k_n}\} \\ Z_n &= (\bigcup_{i=n}^\infty) Y_i \cup \{0\} \\ V_n &= FS((Z_{ni})_{i=1}^\infty) \end{aligned}$$

Entonces, como se demostró en el teorema anterior, existe topología de grupo primero numerable en G para la cual $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es base local del 0 y $V_n \subseteq FS((X_i)_{i=n}^\infty) \cup \{0\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ tiene la propiedad de la intersección finita fuerte (p.i.f.f.) si para cada $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ finito, $\bigcap \mathcal{B}$ es infinito. Un subconjunto $A \subseteq \omega$ es *pseudo-intersección* de $\mathcal{A}$ si para todo $B \in \mathcal{A}$, $A \setminus B$ es finito. El *número de pseudo-intersección* denotado por $\mathfrak{p}$, es el mínimo cardinal de una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ que tiene la p.i.f.f. sin pseudo-intersección infinita. Es sencillo verificar que $\omega_1 \leq \mathfrak{p} \leq \mathfrak{c}$.

Definición 2.30. El carácter de un espacio topológico es el mínimo cardinal κ tal que todo punto del espacio tiene una base local de cardinalidad $\leq \kappa$.

Teorema 2.31. Toda topología especial invariante τ en G de carácter $< \mathfrak{p}$ puede ser refinada a una topología $\tau' \supseteq \tau$ especial primero numerable.

Demostración. Sea τ una topología especial invariante en G con carácter $\kappa < \mathfrak{p}$ y sea $\{\hat{V}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una base de vecindades del 0 en τ . Para cada $\alpha < \kappa$ definimos

$$\mathcal{F}_\alpha = \{X \subseteq G : X \text{ es } (m, n, k)\text{-sistema contenido en } \hat{V}_\alpha\}$$

Note que cada $\mathcal{F}_\alpha$ es numerable, además la familia $\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ tiene la p.i.f.f. ya que si $\alpha, \beta < \kappa$, existe $\gamma < \kappa$ tal que $\hat{V}_\gamma \subseteq \hat{V}_\alpha \cap \hat{V}_\beta$, entonces $\mathcal{F}_\gamma \subseteq \mathcal{F}_\alpha \cap \mathcal{F}_\beta$ y por lo tanto $\mathcal{F}_\alpha \cap \mathcal{F}_\beta$ es infinito.

Como $\kappa < \mathfrak{p}$, entonces existe una pseudo-intersección infinita $\mathcal{F}$ de $\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Sea $(X_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en $\mathcal{F}$ tal que

- (1) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_n = (X_n, (x_{n,i})_{i < m_n k_n})$ es un (m_n, n, k_n) -sistema especial para algún $m_n > n$ y $k_n \geq f_{m_n}(n)$,
 (2) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\max\{\text{supp}(x) : x \in X_n\} < \min\{\text{supp}(x) : x \in X_{n+1}\}$.

Por inducción, para cada $\alpha \leq \kappa$ construiremos una subsucesión $(X_n^\alpha)_{n=1}^\infty$ de $(X_n)_{n=1}^\infty$ tal que

- (i) Para todo $\alpha < \kappa$, $FS((X_n^\alpha)_{n=1}^\infty) \subseteq \hat{V}_\alpha$,
 (ii) Para todo $\alpha \leq \kappa$ y $\gamma < \alpha$, $\{X_n^\alpha : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{X_n^\gamma : n \in \mathbb{N}\}$ es finito, equivalentemente $\{X_n^\alpha : n \in \mathbb{N}\}$ es pseudo-intersección de la familia $\{\{X_n^\gamma : n \in \mathbb{N}\} : \gamma < \alpha\}$.

Note que para toda pseudo-intersección $\mathcal{D}$ de la familia $\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha < \kappa\}$, $D \cap \mathcal{F}_\alpha$ es infinito, es decir, existe $X \in D$ tal que $X \subseteq \hat{V}_\alpha$ para todo $\alpha < \kappa$. Entonces $(D_n)_{n < \omega}$ la sucesión constante $(\mathcal{D})_{n < \omega}$, cumple las hipótesis del teorema 2.2.

Entonces, como $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es pseudo-intersección de $\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha < \kappa\}$, por teorema 2.2 existe una subsucesión $(X_n^0)_{n=1}^\infty$ de $(X_n)_{n=1}^\infty$ tal que $FS((X_n^0)_{n=1}^\infty) \subseteq \hat{V}_0$.

Ahora, supongamos que para $\alpha \leq \kappa$ tenemos construidas subsucesiones $(X_n^\gamma)_{n=1}^\infty$ para cada $\gamma < \alpha$ con las propiedades buscadas. Note que la familia $\{\{X_n^\gamma : n \in \mathbb{N}\} : \gamma < \alpha\}$ tiene la p.i.f.f. ya que dados $\gamma_1, \gamma_2 < \alpha$ con $\gamma_1 < \gamma_2$, por hipótesis de inducción $\{X_n^{\gamma_2} : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{X_n^{\gamma_1} : n \in \mathbb{N}\}$ es finito y por lo tanto $\{X_n^{\gamma_2} : n \in \mathbb{N}\} \cap \{X_n^{\gamma_1} : n \in \mathbb{N}\}$ es infinito. Además, como $\alpha < \mathfrak{p}$ existe una pseudo-intersección infinita $\mathcal{D}_\alpha$ de $\{\{X_n^\gamma : n \in \mathbb{N}\} : \gamma < \alpha\}$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{D}_\alpha \subset \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $\mathcal{D}_\alpha$ es también pseudo-intersección de la familia $\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Luego, por teorema 2,2 existe una sucesión $(X_n^\alpha)_{n=1}^\infty$ en $\mathcal{D}_\alpha$ tal que $FS((X_n^\alpha)_{n=1}^\infty) \subseteq \hat{V}_\alpha$. Note que $\{X_n^\alpha : n \in \mathbb{N}\}$ es pseudo-intersección de la familia $\{\{X_n^\gamma : n \in \mathbb{N}\} : \gamma < \alpha\}$ por lo que se cumple (ii).

Entonces $(X_n^\kappa)_{n=1}^\infty$ es una subsucesión de $(X_n)_{n=1}^\infty$ con la propiedad de que para cada $\alpha < \kappa$ existe $i_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $FS((X_n^\kappa)_{n=i_\alpha}^\infty) \subseteq \hat{V}_\alpha$.

Supongamos que $X_n^\kappa = X_n$, entonces por las observación 2.29, si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\begin{aligned} Y_n &= \{\sum_{i \in I} x_{n,i} : I \in \mathcal{J}_{m_n, 1, k_n}\} \\ Z_n &= (\bigcup_{i=n}^\infty) Y_i \cup \{0\} \\ V_n &= FS((Z_{ni})_{i=1}^\infty) \end{aligned}$$

Existe una topología de grupo primero numerable τ' para la cual $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es base local del 0 y para la cual $V_n \subseteq FS((X_i)_{i=n}^\infty) \cup \{0\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que $\tau \subseteq \tau'$ ya que para todo $\alpha < \kappa$, $0 \in V_{i_\alpha} \subseteq FS((X_n^\kappa)_{n=i_\alpha}^\infty) \subseteq \hat{V}_\alpha$. ■

Teorema 2.32. *Asumiendo $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, existe una topología de grupo maximal especial.*

Demostración. Sea $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ una enumeración de G donde $A_0 = G$. Inductivamente, construiremos una sucesión creciente de topologías especiales, primero numerables $(\tau_\alpha)_{\alpha < \mathfrak{c}}$ tales que para todo $\alpha < \mathfrak{c}$, $A_\alpha \cup \{0\} \in \tau_\alpha$ ó $G \setminus A_\alpha \cup \{0\} \in \tau_\alpha$.

Sea τ_0 la topología primero numerable definida en la observación 2.19, hemos visto en el lema 2.23 que τ_0 es especial. Supongamos tenemos construida una sucesión de topologías $(\tau_\alpha)_{\alpha < \gamma}$, para $\gamma < \mathfrak{c}$, con las propiedades buscadas. Sea τ'_γ la topología que tiene por base $\bigcup_{\alpha < \gamma} \tau_\alpha$ entonces τ'_γ es especial con carácter $\max\{\omega, \gamma\}$. Como $\gamma < \mathfrak{c} = \mathfrak{p}$, el carácter de τ'_γ es menor a $\mathfrak{p}$, luego por el teorema 2.31 existe una topología τ''_γ primero numerable especial tal que $\tau'_\gamma \subseteq \tau''_\gamma$.

Por teorema 2.28 sea τ_γ una topología primero numerable especial tal que $A_\gamma \cup \{0\} \in \tau_\gamma$ ó $G \setminus A_\gamma \cup \{0\} \in \tau_\gamma$.

Sea τ la topología que tiene por base $\bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} \tau_\alpha$. Entonces τ es una topología maximal especial. ■

Corolario 2.33. *Asumiendo $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, existe una topología de grupo maximal no lineal.*

Demostración. Es inmediato del teorema 2.32 y la observación 2.21. ■

Bibliografía

- [1] James E. Baumgartner, *A short proof of Hindman's theorem*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **17** (1974), no. 3, 384–386. 9
- [2] V. I. Malyhin, *Extremally disconnected and nearly extremally disconnected groups*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **220** (1975), 27–30. 1, 2, 9
- [3] V. Mazurov, *Unsolved problems in group theory*, The Kourovka Notebook (1995). 2, 10
- [4] I. Protasov, *Filters and topologies on semigroups*, Mat. Stud. **3** (1994), 15–28. 1, 2, 9
- [5] Stevo Todorćević, *Introduction to Ramsey spaces*, first ed., Annals of Mathematics Studies, vol. 174, Princeton University Press, 2010. 5
- [6] Y. Zelenyuk, *A nonlinear maximal group topology*, Advances in Mathematics **229** (2012), 2416–2426. 1, 2, 10
- [7] Y. G. Zelenyuk, *Extremal ultrafilters and topologies on groups*, Mat. Stud. **14** (2000), no. 2, 121–140. MR 1813995 2, 5, 9